

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Paulo Ignácio
Fonseca de Almeida E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 04/02/92.


ORIENTADOR

ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO CONVECTIVO
ENTRE PLACAS VERTICAIS

001/92

Autor: Paulo Ignácio Fonseca de Almeida ⁶⁴

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez [†]

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

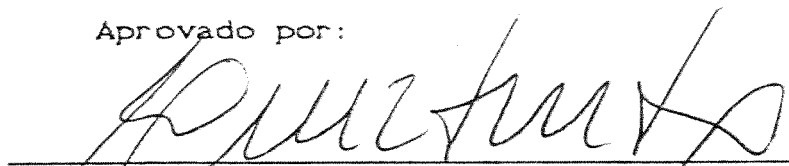
Tese de: Doutorado

Título da Tese: ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO CONVECTIVO ENTRE
PLACAS VERTICAIS.


Autor: Paulo Ignácio Fonseca de Almeida ^{6th}

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez

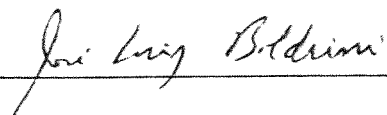
Aprovado por:



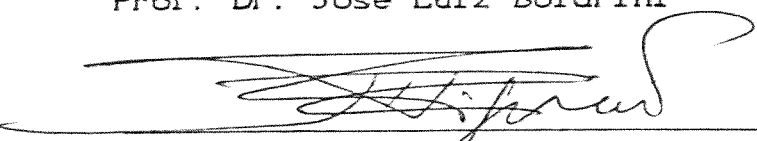
Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez




Prof. Dr. Edson Luiz Zapparolli



Prof. Dr. José Luiz Boldrini



Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo



Prof. Dr. Jorge Isaias Llagostera Beltran

Campinas, 04 de fevereiro de 1992

DEDICATÓRIA

Ao Paulo, meu pai, por ter me ensinado o gosto pela matemática.

À Maria Aparecida, minha mãe, por ter me mostrado o valor do educador e me ensinado a importância da educação.

À Nancy, companheira e amiga nos momentos difíceis desta minha caminhada.

Ao Gustavo e à Camila, de quem esta tese roubou muito de minha atenção e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao prof. Luiz Fernando Milanez, que me acolheu e me orientou nesta caminhada profissional. Além de sua orientação, agradeço sua convivência amigável e sua compreensão.

Agradeço aos colegas, professores Marcelo Moreira Ganzarolli e José Ricardo Figueiredo, que comigo compartilharam muito das discussões que possibilitaram a elaboração desta tese.

Agradeço aos professores Jorge I. Llagostera Beltran e Sérgio Salazar, pelo apoio e companherismo demonstrados nos momentos mais difíceis deste trabalho. Ao prof. Llagostera, particularmente, agradeço a utilização de seu programa gráfico que permitiu traçar as isolíneas do presente estudo.

Agradeço aos colegas do curso de pós-graduação em Engenharia Mecânica da Unicamp, através da professora Maria Aparecida da Silva (Cida) e do professor Celso Augusto Coelho, pela convivência agradável e saudável ao longo do curso.

Agradeço aos colegas do Departamento de Tecnologia Mecânica e do Laboratório de Energia Solar da Universidade Federal da Paraíba, com os quais convivi por longo período e que possibilitaram minha liberação total para elaboração desta tese em seu início.

Agradeço aos colegas do Departamento de Engenharia Química da Universidade Federal de São Carlos por terem me acolhido e por terem possibilitado a conclusão do presente trabalho.

Há uma idade em que se ensina o que se sabe; mas logo chega outra na qual se ensina o que não se sabe: a isso se chama pesquisar. Quem sabe agora se esteja na idade de outra experiência: a de desaprender, de deixar trabalhar a recomposição imprevisível que o esquecimento impõe à sedimentação dos deveres, das culturas, das crenças que se atravessou. Esta experiência creio que tem um nome ilustre e fora de moda, que ousarei empregar aqui sem complexos, na própria encruzilhada de sua etimologia: sapientia. Nenhum poder, um pouco de prudente saber e o máximo de sabor.

Roland Barthes

R E S U M O

O modelamento numérico do escoamento laminar entre placas verticais foi realizado com a solução das equações elípticas que descrevem o problema. Resultados experimentais da convecção forçada foram obtidos na literatura e utilizados para verificar a acuidade do método. Foram simuladas, posteriormente, situações de interesse para o resfriamento de dispositivos eletrônicos.

A convecção mista, induzida pela ação de um ventilador e de fontes térmicas discretas localizadas nas paredes isoladas de um canal, foi estudada e recomendações foram produzidas para o correto posicionamento das fontes.

A convecção natural, produzida por placas verticais isotérmicas, foi estudada numa região confinada. Não foi possível modelar a vazão em massa na cavidade que é induzida pelas placas, assumindo-se a vazão em convecção livre como um limite superior.

As qualidades demonstradas pelo método numérico desenvolvido recomendam a continuidade de desenvolvimento do algoritmo de cálculo, principalmente para lidar com malhas não regulares.

A B S T R A C T

The numerical modeling of the laminar convective flow between vertical plates was carried out in order to obtain the solution of the elliptical equations describing the problem. Experimental results obtained in the literature were used to verify the accuracy of the method. Eventually, study cases were considered for situations of interest in cooling of electronic equipments.

Mixed convection generated by isolated thermal sources located in one of the adiabatic walls of a vertical channel was studied and recommendations addressed considering the relative position of the sources.

Natural convection generated by heated vertical plates, with uniform wall temperature, was studied within an enclosure. It was not possible to model the induced mass flow and the free convection mass flow was assumed as an upper limit.

The features of the model developed recommended further investigation of this algorithm, including consideration of non uniform grids.

NOMENCLATURA ⁽¹⁾

- A coeficiente de influência da equação discretizada
- a coeficiente da equação discretizada, ou
dimensão horizontal da cavidade no capítulo 5
- b termo fonte da equação discretizada, ou
dimensão vertical da cavidade no capítulo 5
- c_p calor específico a pressão constante
- D fluxo difusivo da variável ϕ
- De diâmetro hidráulico
- F fluxo combinado difusivo-convectivo da variável ϕ
- FCC fluxo de calor constante
- g aceleração da gravidade
- Gr número de Grashof

$$\frac{g\beta(T_p - T_o)s^3}{\nu^2}, \quad \text{para TPU}$$

$$\frac{g\beta qs^4}{\nu^2}, \quad \text{para FCC}$$

- h coeficiente local de transferência de calor, ou
altura das placas verticais
- k condutividade térmica
- l altura das fontes térmicas do capítulo 4
- Nu número de Nusselt local, $\frac{h s}{k}$
- Nu_D número de Nusselt local baseado no diâmetro
hidráulico, $\frac{h De}{k}$

(1) As letras maiúsculas foram utilizadas para representar as mesmas variáveis das letras minúsculas adimensionalizadas.

- Nu_M número de Nusselt médio baseado na diferença de temperatura média logarítmica, eq. (3.52)
- Nu_{we} número de Nusselt médio baseado na temperatura de entrada, eq. (3.61), ou baseado na temperatura de parede fria da cavidade, eq. (6.27)
- p pressão
- Pe número de Peclet do escoamento, $\frac{V S}{\alpha}$
- Pe_x número de Peclet da malha na direção x ou y, $\frac{V \Delta x}{\alpha}$ ou $\frac{\rho v \Delta y}{\gamma}$
- Pr número de Prandtl, $\frac{\nu}{\alpha}$
- Q vazão em massa adimensional, eq. (6.21)
- q fluxo de calor
- Gr número de Rayleigh, $Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$
- Re número de Reynolds, $\frac{V S}{\nu}$
- s espaçamento entre as placas verticais
- T temperatura
- T_{pu} temperatura de parede uniforme
- u, v componentes da velocidade
- x, y coordenadas cartesianas

CARACTERES GREGOS

- α difusividade térmica
- β coeficiente de expansão volumétrica
- γ difusividade da variável ϕ
- Δ espaçamento na grade numérica
- ν viscosidade cinemática
- ζ variável vorticidade
- ψ variável função corrente
- θ variável temperatura adimensional
- ϕ variável genérica

SUBSCRITOS

o fluido externo estagnado, ou
entrada

t topo

b base

l lateral

p placa, ou

espessura da parede das placas mais a espessura do
isolante (cap. 5)

x,y direção do escoamento

W,E,S,N identificação dos pontos cardeais

SOBRESCRITOS

* caracterização de adimensionalidade.

INDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 APRESENTAÇÃO	1
1.2 CONVECÇÃO NATURAL	6
1.3 CONVECÇÃO MISTA	9
1.4 O PRESENTE TRABALHO	12
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS	14
2.1 INTRODUÇÃO	14
2.2 FORMULAÇÃO GERAL	15
2.3 BREVE REVISÃO HISTÓRICA	21
2.4 DEFINIÇÕES CONCEITUAIS	24
2.5 O RÁPIDO CRESCIMENTO DO CAMPO NAS DÉCADAS DE 50 E 60	30
2.6 TENDÊNCIAS DA DÉCADA DE 70	35
2.6.1 Formulação das variáveis primitivas	37
2.6.2 Formulação vorticidade-função corrente	39
2.7 AS TENDÊNCIAS ATUAIS	40
2.8 MÉTODOS DE SIMULAÇÃO DO RESFRIAMENTO DE COMPONENTES ELETRÔNICOS	46
2.9 O PRESENTE MÉTODO	47
CAPÍTULO 3 - O MÉTODO NUMÉRICO DESENVOLVIDO E SUA ACUIDADE ...	53
3.1 INTRODUÇÃO	53
3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	54
3.2.1 Equações Primitivas	54
3.2.2 Formulação Vorticidade-Função Corrente	58
3.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUINTES	60
3.4 MÉTODO DE SOLUÇÃO	63

3.5	O CASO LIMITE DA CONVECÇÃO FORÇADA	71
3.6	ACUIDADE DO MÉTODO	73
3.6.1	Resultados para Temperatura de Parede Uniforme ...	73
3.6.2	Resultados para Fluxo de Calor Constante	85
3.7	CONVECÇÃO MISTA	90

CAPÍTULO 4 - CONVECÇÃO MISTA ENTRE PLACAS VERTICAIS COM FONTES

	TÉRMICAS DISCRETAS	98
4.1	INTRODUÇÃO	98
4.2	EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO	100
4.3	MÉTODO DE SOLUÇÃO E ESCOLHA DA MALHA NUMÉRICA	103
4.4	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	105

CAPÍTULO 5 - CONVECÇÃO NATURAL ENTRE PLACAS VERTICAIS CONFINADAS

	CONFINADAS	116
5.1	INTRODUÇÃO	116
5.2	EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO	118
5.3	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	124
5.4	COMENTÁRIOS E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO ..	138

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES

	CONCLUSÕES	140
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	144

	APÊNDICES	165
--	-----------------	-----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO

O estudo do escoamento dos fluidos teve e continua a ter um importante papel na história do desenvolvimento da sociedade humana. O projeto e desenvolvimento dos modernos aviões, dos carros e dos velozes trens produzidos em escala mundial, assim como a extração de petróleo e o resfriamento convectivo de equipamentos eletrônicos, só atingiram o nível atual de eficiência graças ao conhecimento da dinâmica de escoamento dos fluidos.

Foram as equações de Navier-Stokes, assim chamadas em homenagem a Louis Navier e George Stokes, primeiros a formularem o equacionamento do escoamento de fluidos viscosos, que contribuíram decisivamente para a unificação do conhecimento até então desenvolvido, consolidado na área que hoje é chamada de Mecânica dos Fluidos ou Dinâmica dos Fluidos. Até o início do século XX, disciplinas como Hidráulica e Hidrostática tratavam essencialmente do estudo de fluidos ideais, não viscosos, tendo sido a Teoria da Camada Limite de Ludwig Prandtl aquela que contribuiu significativamente para a compreensão do fenômeno físico associado ao escoamento dos fluidos viscosos. Em seu trabalho, "O Movimento de Fluidos de Baixo Atrito", de 1904, Prandtl propôs que "a influência da viscosidade do fluido seria sentida somente na região de altos gradientes da velocidade transversal, primariamente em uma região muito próxima da superfície exposta ao escoamento, enquanto o corpo principal do fluido poderia ser considerado, em boa aproximação, como não

tendo atrito" (ver Eckert,1981).

Com sua proposição Prandtl simplificava as equações de Navier-Stokes e conduzia a um conjunto de equações diferenciais cuja solução, para um bom número de geometrias e regimes de escoamento, vem sendo encontrada analiticamente ou com auxílio de métodos numéricos até os dias atuais.

Muito embora tenha sido fundamental a contribuição de Prandtl para a compreensão do fenômeno, ainda agora tópicos como o descolamento da camada limite, a recirculação dos fluidos e o escoamento em torno de geometrias mais complexas, seja no regime laminar, seja no regime turbulento, só poderão ser explicados com a solução das equações completas de Navier-Stokes.

A grande dificuldade de solução analítica dessas equações estimulou o desenvolvimento de métodos numéricos de solução e o computador digital, criado na década de 40, tornou-se uma ferramenta importante na compreensão do escoamento dos fluidos.

A análise numérica desenvolveu-se aceleradamente a partir da década de 50, acompanhando o rápido desenvolvimento tecnológico dos equipamentos digitais de computação, tornando possível a solução de problemas científicos e problemas de grande complexidade nas mais variadas áreas da engenharia.

A solução numérica do escoamento dos fluidos viscosos tornou-se um desafiante problema para matemáticos, físicos e engenheiros. É reconhecido, pelo volume de trabalhos dedicados ao problema desde então, que uma nova área de pesquisa se constituiu com o desenvolvimento dos métodos computacionais para o escoamento de fluidos, chamada de "Computação da Dinâmica dos Fluidos". (Roache,1972)

As palavras de Ames, ao reconhecer a emergência desse

campo distinto de trabalho, são importantes na compreensão de sua abrangência: "Não se trata simplesmente de análise numérica aplicada, em razão das dificuldades que a teoria matemática tem em tratar com equações diferenciais parciais não lineares. Os métodos da análise numérica são utilizados sempre que possível, mas esta utilização é geralmente restrita a modelos simples e a formas linearizadas das equações. A aplicação a um sistema de equações não lineares de um método particular que seja consistente, estável e convergente para a forma linearizada das equações, geralmente requer justificção física e dados experimentais. Por outro lado a matemática não pode e não deve ser ignorada. A quantidade de considerações matemáticas necessárias para o desenvolvimento de um algoritmo eficiente e acurado para um problema de escoamento de fluido é considerável". (Ames, 1977)

É também de Ames o reconhecimento de que ainda não se estabeleceram métodos numéricos universais para a solução dos escoamentos viscosos, conforme suas palavras: "Neste momento (1976) parecem existir tantos métodos numéricos quantos problemas". Essa constatação continua válida até agora, embora a aceitação e a aplicação ampla de alguns algoritmos signifiquem um avanço na unificação dos conceitos relativos ao campo.

Apesar do progresso da simulação computacional depender então, essencialmente, do desenvolvimento matemático de métodos numéricos eficientes e precisos, não devemos esperar que a simulação venha a substituir a experimentação no processo de aquisição do conhecimento científico aplicado. Antes, a simulação deve servir para orientar e planejar a experiência, contendo-se, assim, o custo da experimentação em si.

Foi com essa visão que, no presente trabalho, nos

dedicamos ao desenvolvimento de um algoritmo numérico de cálculo do escoamento laminar de fluidos incompressíveis, em um canal formado por duas placas verticais, provocado pela convecção natural ou pela convecção mista (forçada + natural), em regime permanente.

Uma classificação das equações governantes do problema conduz a diferentes métodos numéricos de solução. Então, para caracterizar a natureza das equações diferenciais de interesse, será utilizado o critério reproduzido abaixo.

Seja a equação diferencial parcial bidimensional de segunda ordem:

$$a. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c. \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d. \frac{\partial \phi}{\partial x} + e. \frac{\partial \phi}{\partial y} + f. \phi + g = 0 \quad (1.1)$$

onde a, b, c, d, e, f, g podem ser funções das variáveis independentes x, y e da variável dependente ϕ .

Essa equação é denominada:

- a) elíptica quando $(b^2 - 4ac) < 0$
- b) parabólica quando $(b^2 - 4ac) = 0$
- c) hiperbólica quando $(b^2 - 4ac) > 0$

Se, por exemplo, tomarmos a equação de conservação da energia em regime permanente

$$u. \frac{\partial T}{\partial x} + v. \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

podemos notar que: $a = -\alpha$, $b = 0$ e $c = -\alpha$. Portanto $(b^2 - 4ac) < 0$ e a equação é elíptica.

Se adotarmos a aproximação da camada limite, o gradiente normal à superfície é muito superior ao gradiente na direção do escoamento e, por exemplo, o termo $\alpha. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ será omitido. Para esse caso $a = 0$, $(b^2 - 4ac) = 0$, e a equação será parabólica.

A aplicação da formulação elíptica para o escoamento em canais verticais será objeto de estudo do presente trabalho. O desenvolvimento de um algoritmo básico para solução das equações completas de Navier-Stokes, para o caso bidimensional, será então apresentado.

Ao seguirmos essa trajetória para o desenvolvimento do trabalho, estamos certamente caminhando no interior de uma hierarquia dos modelos computacionais. À medida que procuramos desenvolver métodos de solução de equações mais complexas encontramos mais dificuldades em obter soluções para condições de contorno que não sejam as mais simplificadas. No campo da aerodinâmica computacional essa afirmação está bem exemplificada por Jameson (1987), conforme ilustra a Fig. 1.1 :

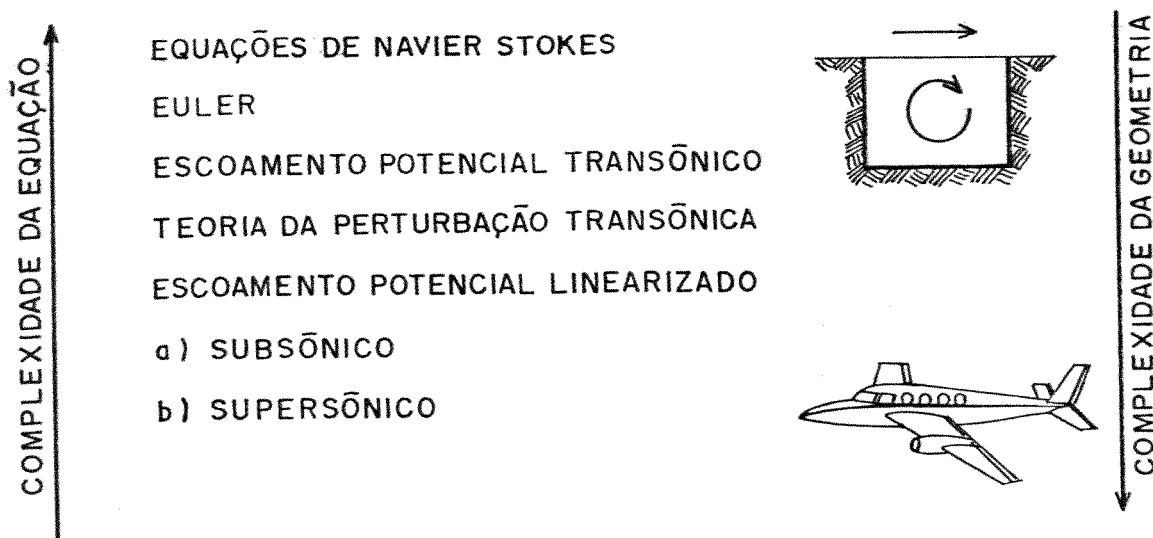


Fig.1.1 Hierarquia dos modelos matemáticos, aplicados a aerodinâmica

Como próximo passo na apresentação do presente trabalho ,faremos uma revisão dos trabalhos publicados para duas classes de problemas: o escoamento devido à convecção natural e o escoamento devido à convecção mista, no interior de canais verticais. Procuraremos ressaltar as formulações adotadas, quando forem apresentadas soluções numéricas.

1.2 CONVECÇÃO NATURAL

O primeiro trabalho publicado sobre a convecção natural entre placas paralelas verticais é devido a Elenbaas (1942). Trata-se de um trabalho fundamental em que o autor, através de resultados experimentais e de uma análise teórica aproximada, estabelece os dois limites de funcionamento do escoamento: o da placa plana, para altos números de Rayleigh (Ra), ou para canais curtos, de um lado, e o escoamento plenamente desenvolvido, do outro . A experiência é feita para placas isotérmicas e o autor caracteriza o produto $Ra.s/h$ (onde s é o espaçamento entre as placas e h é a altura das placas), como o número adimensional de interesse para o problema.

Resultados experimentais são também apresentados por Siegel e Norris (1957) em uma situação em que as placas verticais são limitadas lateralmente por placas isolantes e o espaçamento em relação ao piso é considerado.

Bodoia e Osterle (1962) publicaram a primeira solução numérica do problema e compararam os resultados obtidos com os apresentados por Elenbaas, encontrando boa concordância, a não ser para baixos valores de $(Ra.s/h)$. A solução numérica, através de um método de diferenças finitas ,com técnica de marcha, constituiu um procedimento fundamental que seria adotado com

refinamentos em trabalhos posteriores. A adimensionalização das equações parabólicas utilizadas foi básica para o sucesso do procedimento de cálculo da convecção natural.

Aung et al. (1972) publicaram uma investigação numérica e experimental do escoamento entre placas verticais com aquecimento assimétrico. Foram estudadas as condições de contorno de fluxo de calor uniforme e de temperatura uniforme em cada placa. A investigação experimental foi feita através da interferometria holográfica. No mesmo ano, Aung (1972) obteve a solução em regime permanente para as mesmas condições de contorno e Miyatake e Fujii (1972) publicaram a solução numérica do problema, quando uma das placas era isotérmica e a outra isolada.

Miyatake et al. (1973) apresentaram a solução numérica do problema com fluxo de calor uniforme em uma das placas e a outra isolada.

Uma contribuição importante para o tratamento do problema foi proposta por Aihara (1973) para as condições da pressão do fluido na entrada do canal. Foi considerada a queda de pressão devido à aceleração do fluido sendo usada a equação de Bernoulli para determinar o débito de pressão na entrada do canal. O mesmo procedimento numérico utilizado nos trabalhos anteriores foi aplicado, e a solução encontrada mostrou-se mais próxima da tendência observada por Elenbaas em seus resultados experimentais do que os resultados das primeiras análises numéricas.

Simultaneamente, Quintieri e Mueller (1973) aplicaram a mesma condição para o débito de pressão na entrada do canal em uma solução aproximada das equações governantes e ainda estenderam os resultados para a convecção mista. Dalbert et al. (1981) também encontraram numericamente resultados mais precisos,

com a utilização da condição de pressão proposta por Aihara.

Através dos resultados experimentais e teóricos disponíveis, Churchill (1977) propôs uma equação geral de correlação para a convecção natural entre placas verticais.

Akbari e Borges (1979) estudaram o aquecimento passivo de ambientes através da parede de Trombe, pelo modelamento numérico do escoamento laminar em um canal formado por placas verticais.

Sparrow e Bahrami (1980) estudaram experimentalmente os efeitos do bloqueio lateral das placas verticais, através da técnica de sublimação do naftaleno e Wirtz e Stuzman (1982) apresentaram resultados experimentais para o aquecimento simétrico, com fluxo de calor constante nas paredes, obtidos através da interferometria.

Uma interessante sistematização dos resultados através de fórmulas correlacionais foi apresentada por Bar-Cohen e Rohsenow (1984), visando à otimização do espaçamento entre placas verticais. A configuração estudada é encontrada no resfriamento de equipamentos eletrônicos e são apresentadas fórmulas para otimização analítica de placas isotérmicas ou de fluxo constante, aquecidas simétrica ou assimetricamente. Os resultados são também discutidos por Kraus e Bar-Cohen (1983) em texto sobre a análise térmica de equipamentos eletrônicos.

Mais recentemente, Sparrow e Azevedo (1985) apresentaram resultados experimentais e a solução numérica para a convecção natural em um canal em que uma das placas é isotérmica e a outra se encontra isolada. A experiência foi realizada com água como fluido de trabalho, sendo utilizada uma interessante técnica de visualização do escoamento. Anteriormente Sparrow et al. (1984) haviam observado reversão de fluxo, para certas condições de escoamento, com o mesmo equipamento e procedimento

utilizados no estudo acima mencionado.

Soluções numéricas para a convecção natural em canais, utilizando a formulação elíptica, são encontradas em muito menor quantidade na literatura.

Kettleborough (1972) investigou a condição de entrada, considerando a região abaixo do canal no modelamento do problema. Nakamura et al. (1982) reconsideraram a metodologia utilizada por Kettleborough, reavaliaram os resultados encontrados anteriormente e obtiveram resultados próximos aos decorrentes do modelamento parabólico, quando utilizada a condição de débito de pressão na entrada proposta por Aihara.

Mais recentemente, Ormiston et al. (1985), apresentaram uma solução do escoamento no interior da parede de Trombe (equipamento estrutural para o aquecimento de ambientes), incluindo no modelamento a sala e as seções de entrada e de saída. Seus resultados indicam um efeito de 10% de diminuição no número de Nusselt previsto pelo modelamento parabólico do canal isolado.

Publicações mais recentes de interesse para o resfriamento de componentes eletrônicos serão apresentadas no capítulo 5.

1.3 CONVECÇÃO MISTA

O estudo da convecção mista no interior de canais, para os quais a região de desenvolvimento é importante, é outra classe de problemas que tem despertado um interesse crescente nos últimos anos .

Quintieri e Mueller (1973), no trabalho anteriormente citado, sobre a convecção natural e forçada entre placas verticais, apresentaram resultados limitados para a convecção

mista entre placas isotérmicas com aquecimento simétrico, obtidos através de um método analítico aproximado.

Anteriormente, Ostrach (1954) e Tao (1960) haviam se dedicado ao estudo analítico da convecção mista entre placas verticais para o escoamento plenamente desenvolvido. Estudos numéricos e experimentais para o escoamento na região de entrada de tubos haviam sido publicados por Lawrence e Chato (1966) e por Zeldin e Smith (1972). A solução apresentada no primeiro trabalho é baseada na formulação parabólica e a do segundo trabalho é baseada na formulação elíptica das equações governantes do problema.

Posteriormente, Sparrow e Samie (1982) estudaram numericamente os efeitos de recirculação do escoamento em um tubo cilíndrico com a entrada e a saída parcialmente bloqueadas, com a forma de um cilindro oco, utilizando a formulação elíptica.

Um método particular de solução das equações parabólicas é apresentado por Cebeci et al. (1982) para o escoamento no interior de um duto formado por placas verticais cujas paredes estão acima ou abaixo da temperatura ambiente, provocando um efeito, devido à convecção natural, favorável ou oposto à convecção forçada. O esquema numérico incluiu a adoção de aproximações especiais que possibilitam a solução das equações parabólicas na região após a separação da camada limite, para situações em que a convecção natural se opõe à convecção forçada.

Dalbert (1982) e Penot e Dalbert (1983) apresentaram resultados numéricos para a convecção mista no interior de canais com fluxo de calor constante nas paredes e com aquecimento simétrico ou assimétrico, sendo uma das paredes isolada. Foi estudada a situação em que a convecção forçada é favorável à

convecção natural e a situação em que a convecção forçada se opõe a ela, com o escoamento resultante ascendente ou descendente. A formulação parabólica foi utilizada, e o débito de pressão imposto ao escoamento foi usado para caracterizar a contribuição da convecção forçada. Na situação modelada pelos autores, a vazão em massa que flui pelo canal não é limitada pela potência da bomba ou do ventilador a ele conectado, admitindo-se a entrada adicional de fluido dos arredores, devido ao efeito da convecção natural.

Yao (1983), utilizando-se de um método de perturbação, estudou a região de entrada de um canal vertical, estabeleceu ordens de grandeza para o estabelecimento do regime permanente, no caso de paredes isotérmicas, e previu a possibilidade da não existência de um escoamento do tipo Hagen-Poiseuille para o regime permanente no caso de fluxo de calor constante nas paredes.

Mais recentemente, Aung e Worku (1986) publicaram resultados da análise numérica da convecção mista entre placas paralelas verticais, através da solução das equações parabólicas. O caso de paredes com temperatura constante é estudado com aquecimento simétrico (temperaturas iguais das placas) e assimétrico (temperaturas das placas constantes mas desiguais). Os mesmos autores também publicaram resultados encontrados para o regime permanente, prevendo a existência de escoamento reverso na saída dos canais para os casos de aquecimento assimétrico estudados. Habchi e Acharya (1986) publicaram resultados da solução numérica das equações parabólicas para o caso de aquecimento simétrico, com temperaturas constantes nas placas e para o caso em que uma das placas é isolada.

O modelamento das equações elípticas governantes tem

também recebido atenção crescente em publicações mais recentes. Chow et al. (1984) publicaram um interessante estudo numérico do efeito da condução axial no escoamento de fluidos de baixo número de Peclet, no interior de canais sujeitos à convecção mista. Para estudar esse efeito, introduziram duas seções isoladas anterior e posteriormente ao canal, que fisicamente justificaram as condições de contorno utilizadas na solução do problema.

Habchi e Acharya (1986) apresentaram uma solução numérica para o caso de um canal vertical finito em que uma placa de aquecimento se projeta da parede no interior do canal, bloqueando parcialmente o escoamento. Os autores procuram desse modo simular os efeitos produzidos por uma placa de circuito impresso, dissipando calor no interior de um canal vertical.

Outras publicações de interesse para o resfriamento de componentes eletrônicos, serão apresentadas no capítulo 4.

1.4 O PRESENTE TRABALHO

Como foi ressaltado, nessa revisão dos trabalhos publicados, a formulação elíptica tem recebido um interesse crescente no tratamento do problema de escoamento em canais verticais. Muito desse interesse é justificado pela limitação da formulação parabólica em tratar dos problemas de recirculação e de reversão do escoamento observados experimentalmente e somente previstos (não resolvidos) pelos modelamentos parabólicos. Por essa razão principal, adotaremos o modelamento elíptico no presente trabalho e concentraremos a atenção nas aplicações voltadas para o resfriamento de equipamentos eletrônicos.

No capítulo 2 será feita uma breve revisão dos métodos numéricos, a partir do desenvolvimento histórico do campo até os

atuais métodos iterativos em largo uso. A abordagem dos volumes de controle finitos será utilizada para caracterizar os métodos de diferenças finitas descritos. A acuidade do método, aqui desenvolvido, bem como sua descrição serão comentadas no capítulo 3. No capítulo 4 uma aplicação do método para o resfriamento em convecção mista de placas localizadas nas paredes de um canal vertical será descrita, simulando o resfriamento de placas de circuito com elementos de potência dissipativos de calor e a influência da esteira formada pelas primeiras placas será estudada em relação às posteriores. No capítulo 5 a convecção natural entre placas localizadas em uma região confinada, ou seja, o escoamento entre duas placas verticais aquecidas simetricamente com temperatura de parede constante, localizadas numa cavidade dissipativa de paredes isotérmicas, será estudado, com as limitações do método aqui apresentado sendo discutidas e analisadas. Por fim, no capítulo 6, as conclusões serão apresentadas.

CAPITULO 2

REVISÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo serão revistos os métodos numéricos mais importantes para o presente estudo.

Serão destacados, do conjunto de métodos existentes, os métodos de solução de problemas para escoamentos incompressíveis. O objetivo é procurar localizar o método proposto neste trabalho dentro das tendências atuais de desenvolvimento do campo.

Será feita uma breve revisão histórica dos primórdios do desenvolvimento dos métodos numéricos e, para facilitar a apresentação dos atuais métodos, os conceitos de estabilidade, convergência e acuidade serão discutidos antes de relatá-los.

A partir do rápido crescimento do campo, nas décadas de 50 e 60, serão considerados os métodos voltados para a solução do escoamento com recirculação (problemas essencialmente elípticos).

Procurar-se-á, então, caracterizar as principais tendências de desenvolvimento encontradas nas décadas de 70 e 80.

Finalmente, com a descrição das características principais do método desenvolvido no presente estudo, serão apresentadas as escolhas feitas para o desenvolvimento do atual algoritmo com seus principais méritos e suas mais significativas limitações.

2.2 FORMULAÇÃO GERAL

A equação diferencial que rege os métodos numéricos de interesse para o presente estudo é a equação de transporte convectivo difusivo. Segundo Patankar (1980), esta equação é geralmente escrita na sua forma divergente como:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = S \quad (2.1)$$

Nessa equação, ϕ é uma variável genérica que pode representar a temperatura, os componentes de velocidade u e v ou a vorticidade. Essa equação é obtida a partir das equações de Navier-Stokes ou da conservação da energia, incorporada a equação da continuidade.

No caso geral ρ , γ e S , bem como os componentes de velocidade u e v , são funções das coordenadas espaciais. A densidade ρ , no presente estudo, será admitida constante e o efeito do empuxo térmico será considerado através da aproximação de Boussinesq, como apresentaremos mais adiante. Por enquanto é importante notar que esse efeito será considerado através do termo fonte S da equação (2.1).

As equações de transporte convectivo difusivo, quando derivadas diretamente das equações de Navier-Stokes, podem ser escritas na forma convectiva, assim nomeada por Bozeman e Dalton(1973):

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \rho v \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = S \quad (2.2)$$

A equação (2.1) ou a equação (2.2) são parabólicas no tempo e elípticas no espaço, sendo, portanto, conveniente considerar todas as alternativas de solução dessas equações, mesmo quando só temos interesse no regime permanente, como é o caso do presente estudo.

A forma divergente é também chamada por alguns autores de forma conservativa (Roache, 1972).

Conforme mostrou Figueiredo (1988), a equação (2.1) pode ser expressa de maneira mais compacta em termos de um fluxo conjugado convectivo-difusivo \vec{F} da propriedade relevante genérica ϕ , dado por:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \quad (2.3.1)$$

onde:

$$F_x = \rho u \phi - \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.3.2)$$

$$F_y = \rho v \phi - \gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.3.3)$$

A equação (2.1) fica então reduzida a:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = S \quad (2.4)$$

De acordo com a abordagem de Volume de Controle (Patankar, 1980), a equação (2.4) é duplamente integrada sobre o volume de controle finito da figura (2.1), obtendo-se, para a parcela espacial da equação :

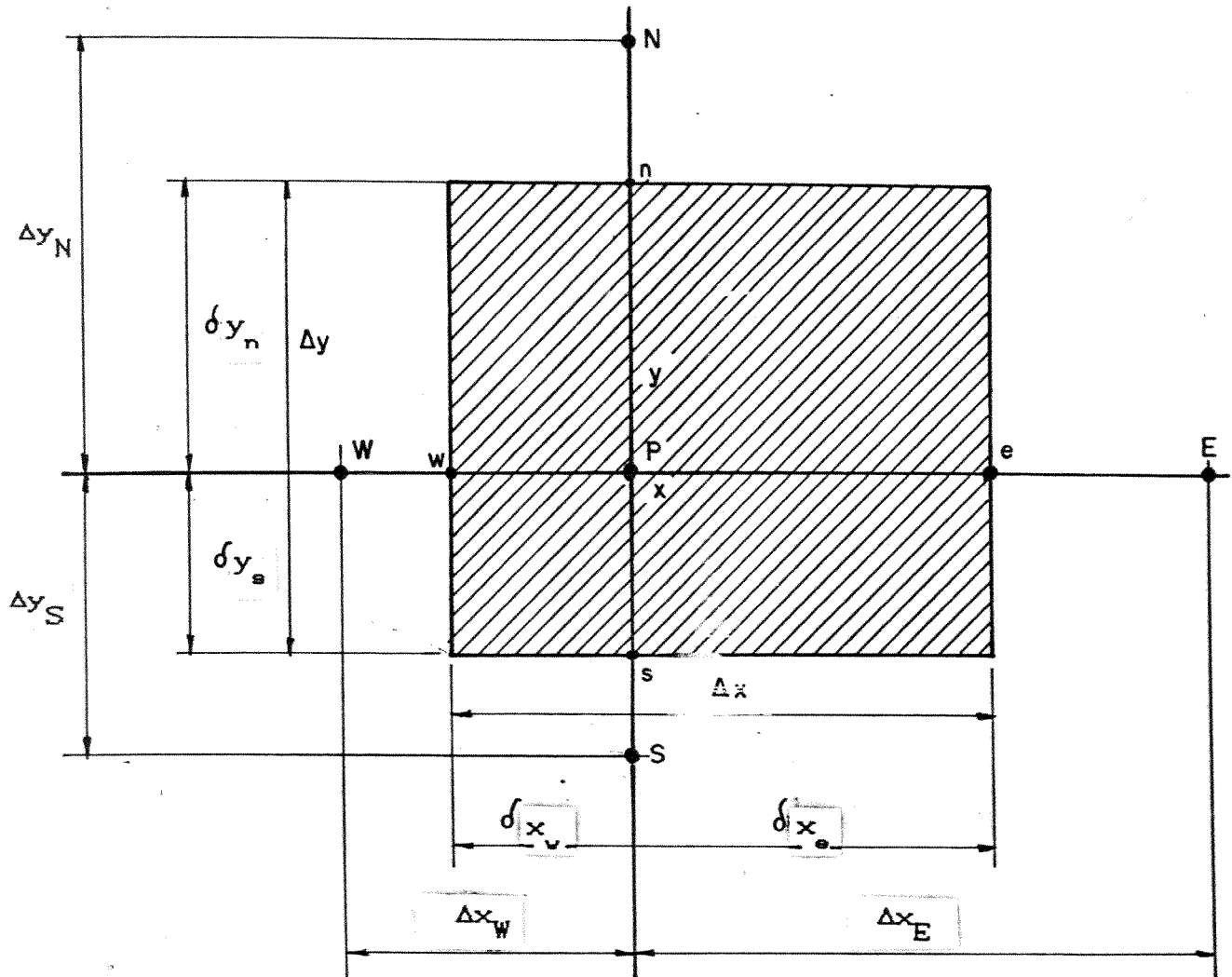


Fig. 2.1 Notação da malha em volumes de controle

$$R_{2D} = (\Delta x \cdot \Delta y)^{-1} \int_{x_v}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} - S \right) dx dy \quad (2.5)$$

O termo $(\Delta x \cdot \Delta y)^{-1}$ é introduzido para tornar a expressão resultante dimensionalmente equivalente à parcela espacial da equação diferencial (2.1). Note que usamos, para representar um nó da malha numérica, uma grade irregular com $\Delta x \neq \Delta y$, buscando a máxima generalização possível. Usando-se o teorema de Green, obtemos:

$$R_{2D} = (\Delta x \cdot \Delta y)^{-1} \left\{ \int_{y_s}^{y_n} F_x(x_e, y) dy - \int_{y_s}^{y_n} F_x(x_v, y) dy + \int_{x_v}^{x_e} F_y(x, y_n) dx - \int_{x_v}^{x_e} F_y(x, y_s) dx - \int_{x_v}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} S dx dy \right\} = 0 \quad (2.6)$$

Para o problema unidimensional, a forma correspondente seria:

$$R_{1D} = \Delta x^{-1} \left\{ F_e - F_v - \int_{x_v}^{x_e} S dx \right\} = 0 \quad (2.7)$$

A aplicação do teorema de Green substitui a computação de termos como $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ou $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, incorporando em $\frac{\partial F}{\partial x}$, por exemplo, por diferenças entre os valores de ϕ ou de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, respectivamente, nos limites leste e oeste da célula numérica da figura (2.1).

Já a equação (2.2) também pode ser integrada em torno do volume de controle relevante, conforme salientado por

Figueiredo (1988) e um análogo do fluxo líquido em cada direção pode ser definido como:

$$F'_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} = \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (2.8.1)$$

$$F'_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} = \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (2.8.2)$$

Dessa forma, as expressões (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7) continuam válidas, pois, para o caso do escoamento incompressível, os termos de derivadas temporais são idênticos.

É importante salientar que, durante a integração das equações (2.8) no volume de controle da figura (2.1), as velocidades u e v são tomadas pelos valores que assumem no nó central da malha (ponto P) e não pelos valores assumidos nas fronteiras (pontos e, w, n, s), como na formulação conservativa. Para essa representação pode-se usar a tradicional grade regular, conforme a figura (2.2).

Feita essa apresentação generalizada das equações que deverão ser resolvidas, serão revistos os métodos numéricos mais importantes para o presente trabalho. A pesquisa bibliográfica foi baseada em alguns textos que oferecem as revisões mais amplas possíveis sobre o tema. Destacamos os livros de Anderson, Tannehill e Pletcher (1984), de Roache (1972) e de Zienkiewicz (1971), no campo da Física e da Engenharia e o texto de Birkhoff (1981), no campo da Matemática Aplicada.

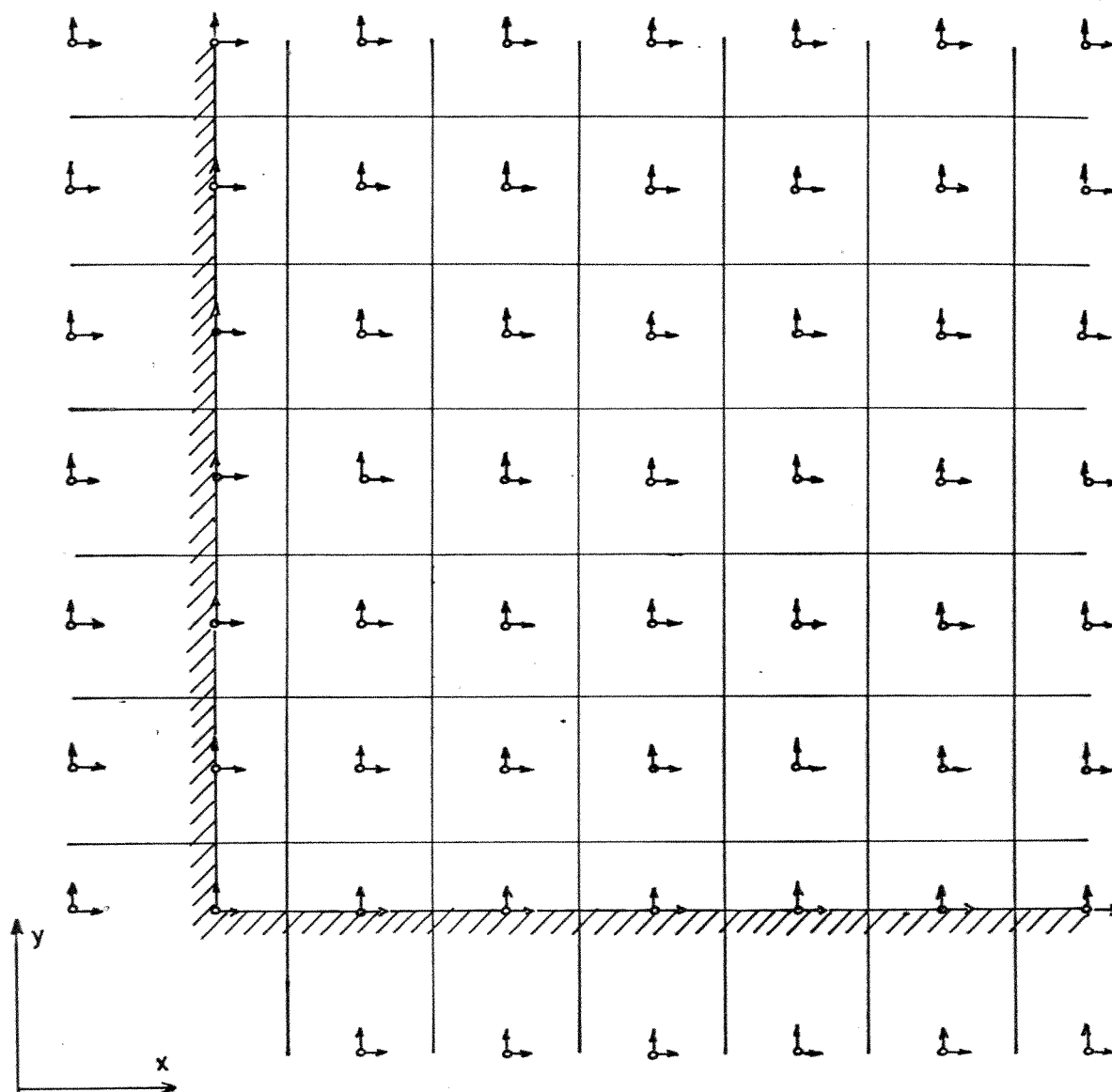


Fig. 2.2 Grade regular não deslocada

Prática A para as condições de contorno

2.3 - BREVE REVISÃO HISTÓRICA

Birkhoff (1981) revela que, por volta de 1930, duas classes de algoritmos numéricos para solução de problemas elípticos já eram conhecidas: os métodos variacionais e os métodos das diferenças finitas, sendo os primeiros os precursores dos métodos dos elementos finitos. Métodos variacionais tinham sido utilizados para computar resultados numéricos por Rayleigh (1870), Ritz (1909) e Galerkin (1915).

Já no campo das diferenças finitas, L.F. Richardson (1910) apresentou à Sociedade Real Inglesa um trabalho que é considerado por Roache (1972) o marco inicial da análise numérica moderna. Ele resolveu iterativamente a equação de Laplace, a equação biarmônica e outras. Seu método de solução, que na moderna terminologia atualmente em uso é chamado de método explícito, ainda hoje é um método de referência. Uma das principais características de seu trabalho foi obter estimativas do erro numérico e apresentar um método acurado de extrapolação das respostas para o limite do refinamento da grade. Segundo suas palavras:

Diferenças Finitas tem, por si só, pouca importância para o estudante da matéria e do éter. Elas são aqui tratadas como aproximações substitutivas aos infinitesimais; a compreensão é sempre que nós iremos tornar as diferenças tão pequenas que os erros devidos às suas dimensões finitas serão menores do que os erros da experiência ou do trabalho prático em si e, assim, poderão ser desprezados.

(ver Churchill et al., 1981)

Até 1940 a grande limitação ao uso dos métodos das diferenças era a lentidão com que eram realizados os cálculos numéricos e conseqüentemente o seu alto custo. Mesmo com o uso das calculadoras elétricas de mesa, disponíveis por volta de 1930, para solução da mais simples equação diferencial linear de primeira ordem, eram necessários de 50 a 100 homens-hora de trabalho exaustivo (Birkhoff, 1981).

A primeira solução numérica de uma equação diferencial parcial para um problema de escoamento viscoso de fluido foi produzida por Thom (1933), que estudou o escoamento em torno de um cilindro (ver Roache, 1972).

Durante o período de 1930-1950 três grandes avanços iriam pavimentar o "grande salto adiante" no campo computacional a partir da década de 50. São estes os três grandes avanços reconhecidos por Birkhoff (1981), em seu trabalho de revisão:

- 1) os primeiros computadores programáveis foram projetados e tornados operacionais;
- 2) a solução de equações elípticas lineares de diferenças de 100 a 500 variáveis por um processo de relaxação manual se tornou uma fina arte, sob a liderança de R.V. Southwell (1940), baseado em analogias mecânicas, tanto para a solução de problemas estruturais, quanto de problemas da dinâmica de fluidos;
- 3) os erros de discretização associados às aproximações de diferenças se tornaram melhor compreendidos (uma exposição desse avanço pode ser encontrada em Kantarovich e Krylov, 1958).

Foi também nessa época que a discretização de problemas do espaço contínuo levou engenheiros, atuando intuitivamente, a criarem uma analogia entre os elementos discretos reais e porções finitas do domínio contínuo (Zienkiewicz, 1971). Por exemplo, no

campo da mecânica dos solos Mc Henry (1943), Hrenikoff (1941) e Newmark (1949) mostraram que poderiam ser obtidas soluções de problemas físicos razoavelmente boas pela substituição de pequenas porções do domínio por um arranjo de simples barras elásticas.

Mais tarde, no mesmo contexto, Argyris (1955) e Turner et al. (1956) mostraram que um método mais direto, mas não menos intuitivo, de substituição de propriedades poderia ser feito muito mais diretamente, considerando que pequenas porções ou "elementos", em um espaço contínuo, comportavam-se de uma maneira simplificada. Foi dessa "analogia direta", segundo o ponto de vista de engenharia, que o termo "elemento finito" nasceu. Clough (1960) parece ter sido o primeiro a usar esse termo, significando um uso direto de uma metodologia aplicável a sistemas discretos (Zienkiewicz, 1971).

É interessante notar, como Birkhoff (1981) reconhece, juntamente com Zienkiewicz (1971), a importância que os trabalhos em engenharia tiveram para o desenvolvimento dos métodos numéricos, principalmente pelo fato do formalismo matemático ter se desenvolvido paralelamente e apenas se reconciliado com o tratamento de engenharia, que avançara nas aplicações durante a década de 60 (Zienkiewicz, 1971).

A base conceitual para o desenvolvimento dos métodos dos elementos finitos é essencialmente diferente da conceituação das diferenças finitas. Infelizmente, o sucesso que o método dos elementos finitos obteve no campo do projeto estrutural em engenharia, com sua habilidade em tratar de fronteiras complexas, não foi totalmente alcançado no campo do escoamento dos fluidos e no tratamento da equação de Navier-Stokes. Apesar do relativo

avanço ocorrido e relatado, entre outros, por Zienkiewicz (1986) e Jaluria e Torrance (1986) para tratar a equação de transporte convectivo difusivo, deve-se reconhecer que os métodos derivados das diferenças finitas produziram melhores resultados e vêm servindo de guia para o desenvolvimento dos métodos dos resíduos ponderados no campo dos elementos finitos. Por essa razão principal, serão considerados daqui em diante somente os métodos desenvolvidos com a metodologia das diferenças finitas.

No campo das diferenças finitas os métodos iterativos, derivados da metodologia de relaxação de Southwell (1940), ganharam força com o aparecimento do computador digital nas décadas seguintes.

2.4 DEFINIÇÕES CONCEITUAIS

Antes da apresentação dos principais trabalhos que levaram à solução das equações de transporte convectivo difusivo, serão descritos inicialmente os tipos de erros presentes na representação de equações diferenciais parciais por equações de diferenças.

O erro de truncamento foi descrito por Anderson, Tannehill e Pletcher (1984) através da equação parabólica unidimensional:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Usando a discretização de diferença avançada para a derivada no tempo e a discretização de diferença central para a segunda derivada, a equação diferencial parcial (E.D.P.) pode ser representada pela equação de diferenças finitas (E.D.F.), que

nada mais é do que uma equação algébrica, dada por:

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} = \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} (\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n) \quad (2.10)$$

Incluindo os erros de truncamento (E.T.), associados com as representações de diferenças das derivadas parciais na equação (2.10), pode-se igualá-la à equação (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} - \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} (\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n) \\ \text{E. D. P.} & \qquad \qquad \qquad \text{E. D. F.} \\ &+ \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{n,j} \frac{\Delta t}{2} + \gamma \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Big|_{n,j} \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right] \quad (2.11) \\ & \qquad \qquad \qquad \text{E. T.} \end{aligned}$$

A representação de diferenças fornecida pela equação (2.10) é conhecida como esquema explícito simples. Um esquema explícito é aquele para o qual somente uma incógnita aparece na equação de diferença, de tal forma que essa incógnita pode ser estimada em termos de quantidades já conhecidas no processo de cálculo.

Desde que a equação parabólica (2.9) governa um problema de marcha⁽⁴⁾, para o qual uma distribuição inicial de ϕ deve ser especificada, então a variável ϕ no nível de tempo n pode ser considerada como conhecida. Se o termo de segunda derivada fosse aproximado pelos valores da variável ϕ no nível de tempo $n+1$,

(4) A técnica de marcha é conhecida para soluções de problemas parabólicos, pois a solução "marcha" do campo conhecido para a região que se pretende resolver, na direção principal do escoamento onde não ocorre recirculação.

três incógnitas a mais apareceriam na equação de diferença e o processo seria implícito, indicando que a formulação algébrica iria requerer a solução simultânea de várias equações, envolvendo as incógnitas.

Voltando a atenção para a equação (2.11), pode-se notar que a última expressão do lado direito da equação é identificada como o erro de truncamento para essa representação da equação diferencial. i. é., $E.T. = E.D.P. - E.D.F.$

A ordem do erro de truncamento nesse caso é $O(\Delta t) + O[(\Delta x)^2]$ que é frequentemente representado por $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$

Uma questão importante coloca-se no momento da apresentação. Como saber se a nossa representação adotada é aceitável, e se a técnica de solução de marcha funcionará no sentido de fornecer uma solução da Equação Diferencial Parcial ?

A fim de ser aceitável para o problema de marcha, a representação deve satisfazer às condições de consistência e estabilidade.

A consistência lida com a extensão com a qual as equações de diferenças finitas se aproximam das equações diferenciais parciais. A representação por diferenças finitas (E.D.F.) de uma equação diferencial parcial (E.D.P.) é considerada consistente, se for possível mostrar que a diferença entre a E.D.P. e sua representação de diferenças tende a zero, quando a malha é refinada, i. é., $\lim_{\text{malha} \rightarrow 0} (E.D.P. - E.D.F.) = \lim_{\text{malha} \rightarrow 0} (E.T.) = 0$

A estabilidade numérica é um conceito mais difícil de ser compreendido e generalizado. No seu estrito sentido matemático, só é aplicável a problemas parabólicos com esquema de solução de marcha. Denomina-se esquema numérico estável aquele ao qual não se permite que erros de qualquer fonte (erros de arredondamento,

de truncamento ou de equívocos de programação) cresçam à medida que a computação avança de um passo no processo de marcha para o seguinte. Erros de arredondamento são aqueles produzidos pela representação finita de um número real no computador digital e sua propagação ocorre cada vez que uma operação algébrica é realizada.

Imaginando uma solução numérica da equação diferencial parcial sem erros de arredondamento, obtida num computador ideal, e chamando-a de (D), considerando a solução analítica da equação diferencial (A) e a solução numérica obtida em um computador real (N), então pode-se escrever:

$$E.D. = A-D \quad (\text{Erro de Discretização})$$

$$E.A. = N-D \quad (\text{Erro de Arredondamento})$$

O estudo da estabilidade numérica envolve geralmente a propagação do erro de arredondamento e avanços nesse campo de estudo são devidos a Von Neumann (ver Anderson, Tannehill e Pletcher, 1984), através do uso de métodos de análise em série de Fourier e, mais recentemente, a Richtmyer e Morton (1967), para análise de estabilidade em sistemas de equações matriciais.

Uma restrição condicional de estabilidade, estabelecida entre o passo no tempo (Δt) e o espaçamento da malha numérica (Δx), foi obtida por Courant-Friedrichs e Lewy e discutida relativamente aos conceitos de convergência e estabilidade em importante trabalho, de valor histórico, dos autores em 1928. Trata-se da condição de estabilidade de Courant et al. (condição CFL) que, aplicada à equação (2.9), fornece:

$$\gamma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

O conceito de convergência, no estrito sentido matemático, significa que a solução do sistema de equações de diferenças finitas aproxima-se da solução da equação diferencial parcial, tendo as mesmas condições de contorno e partindo da mesma condição inicial, à medida que a malha numérica é refinada. O teorema de Equivalência de Lax, válido para as equações parabólicas, pode ser formulado deste modo:

Dado um problema de valor inicial bem estabelecido e uma aproximação de diferenças finitas para ele, que satisfaça a condição de consistência, a estabilidade é uma condição necessária e suficiente para a convergência (ver Anderson, Tannehill e Pletcher, 1984).

O teorema de Lax e os conceitos de convergência e de estabilidade são difíceis de ser generalizados para os problemas elípticos de interesse no presente trabalho. De acordo com Anderson, Tannehill e Pletcher (1984):

A "convergência" da solução das equações de diferença para a solução exata de uma equação diferencial parcial pode ser chamada de convergência de truncamento ou de discretização. A solução de problemas de equilíbrio (equações elípticas) nos conduz a um sistema de equações algébricas simultâneas que, em princípio, necessitam ser resolvidas de uma só vez, ao invés de se utilizar um procedimento de marcha. Então, o conceito de estabilidade no estrito senso matemático não é diretamente aplicável. Para atingir a

"convergência de truncamento" para problemas de equilíbrio parece que é somente necessário estabelecer um esquema de solução no qual o erro, ao resolver o sistema de equações algébricas, possa ser controlado, à medida que a malha é refinada. Muitos esquemas são iterativos por natureza e, para estes, nós queremos garantir que o processo convirja. Aqui convergência significa que o processo é repetido até que a magnitude da diferença entre a função no $k+1$ e no k nível de iteração seja tão pequeno quanto quisermos, para cada nó da malha numérica, i.é., $|\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k| < \epsilon$

Esse procedimento é conhecido como convergência da iteração. Parece que (nenhuma prova pode ser citada) a convergência de truncamento será atingida para uma representação consistente de um problema de equilíbrio se puder ser mostrado que o método iterativo de solução converge, mesmo para uma arbitrariamente pequena escolha das dimensões da malha numérica.

Desse modo, a dificuldade - provar matematicamente que uma solução convergida de um processo iterativo é uma boa solução do sistema de equações diferenciais parciais elípticas - nos conduz ao conceito de acuidade .

A acuidade de solução do método numérico é aqui entendida como a aproximação com que o resultado numérico representa os dados experimentais obtidos do fenômeno em estudo, à medida que a grade é refinada.

O conceito de acuidade une o tratamento estritamente matemático, oriundo da análise numérica, com a necessidade de

verificação empírica que os métodos numéricos têm para sua utilização no campo da física e da engenharia.

Serão agora descritos os métodos numéricos existentes para solução da equação de transporte convectivo difusivo, dentro da perspectiva histórica seguida até aqui.

2.5 O RÁPIDO CRESCIMENTO DO CAMPO NAS DÉCADAS DE 50 e 60

Um trabalho importante para o desenvolvimento da área, conforme reconhecem Roache (1972) e Anderson, Tannehill e Pletcher (1984), foi apresentado por Allen e Southwell (1955) para o escoamento viscoso em torno de um cilindro ainda sem a utilização do computador digital, solução essa obtida por computação manual. O trabalho é original em vários aspectos. O principal deles é a utilização de uma forma de discretização da equação de transporte convectivo devida a Allen, conforme reconhecido por Southwell no trabalho citado, hoje chamada de discretização exponencial. Mais tarde, aparentemente desconhecendo esse trabalho, Spalding (1972) e Raithby e Torrance (1974) propuseram fórmulas similares, que são idênticas às dos primeiros autores para malhas uniformes (Anderson, Tannehill e Pletcher, 1984).

Outro aspecto, em que o trabalho de Allen e Southwell (1955) foi pioneiro, está em utilizar uma transformação conforme, para transformar a fronteira circular em uma malha retangular regular, tratando desse modo com malhas fisicamente irregulares e obtendo resultados computacionalmente estáveis para números de Reynolds 1000, o que se encontra acima do limite fisicamente estável (Roache, 1972).

Entretanto, na década de 60, a discretização que se consolidou foi a discretização a montante devida a Courant et al. (1952) e subseqüentemente redefinida por Longley (1960) e por Filler e Ludloff (1961) para escoamentos compressíveis, por Gentry et al. (1966) por quem o método foi chamado de esquema de diferenciamento por célula doadora e por Barakat e Clark (1966) na previsão do escoamento bidimensional laminar.

Com a discretização à montante, muitos dos problemas de estabilidade encontrados com o uso da discretização central, para números de Peclet da malha maiores do que 2, foram solucionados. Ganhava-se, desse modo, com a estabilidade da solução; perdia-se, entretanto, na acuidade dos resultados, a não ser em problemas de escoamento muito particulares.

Começava-se aqui a se delinear um conflito de interesses entre a utilização dos métodos numéricos. A fim de se obterem métodos estáveis e de baixo custo de computação, os pesquisadores da época optaram por utilizar métodos conservativos, com malhas grosseiras e com a adoção da discretização à montante, à custa da perda de acuidade nos resultados. Claramente buscavam-se resultados qualitativamente corretos, mais do que quantitativamente precisos.

Duas correntes de estudo se estabeleceram, ou seja, criaram-se os métodos baseados na formulação vorticidade-função corrente (ξ, ψ) e os métodos baseados na formulação das variáveis primitivas, velocidades e pressão (U, V, P).

A formulação vorticidade-função corrente apresentava a vantagem, para um escoamento bidimensional, de reduzir as equações governantes e satisfazer a equação da continuidade automaticamente ponto a ponto na malha numérica, ao introduzir a

função corrente.

O grupo de pesquisadores do Imperial College de Londres desenvolveu um código numérico em FORTRAN, denominado TEACH (Teaching Elliptic Axi-Symmetrical Characteristics Heuristically) que se encontra muito bem documentado através do trabalho de Gosmann et al. (1969). O programa usava a formulação vorticidade função corrente, com as equações tomadas em sua forma divergente e com a discretização à montante das equações de transporte. O método dos volumes de controle era usado para integrar as equações diferenciais de interesse, e processos iterativos de solução das equações algébricas eram utilizados. A metodologia previa a utilização em diferentes sistemas de coordenadas, e modelos de escoamento turbulentos já eram empregados.

Outro grupo de pesquisadores, que teve papel decisivo no desenvolvimento dos métodos numéricos aplicados à dinâmica de escoamento dos fluidos, foi o grupo de Los Alamos, nos Estados Unidos. Harlow e Welch (1965) apresentaram um método de computação do escoamento viscoso e incompressível de fluidos denominado MAC ("Marker and Cell") que foi aplicado para a formulação das variáveis primitivas (U,V,P) das equações governantes em sua forma divergente. Pela primeira vez era utilizada uma grade numérica alternada, onde a grade escalar é deslocada da grade vetorial das velocidades. A figura (2.3) representa a malha apresentada no trabalho citado, que teria larga aceitação nos trabalhos produzidos posteriormente para a formulação (U,V,P).

Harlow e Amsdem (1968) generalizaram o método anteriormente citado para tratar também com escoamentos compressíveis transientes e deram o nome de ICE ("Implicit Continuous-fluid

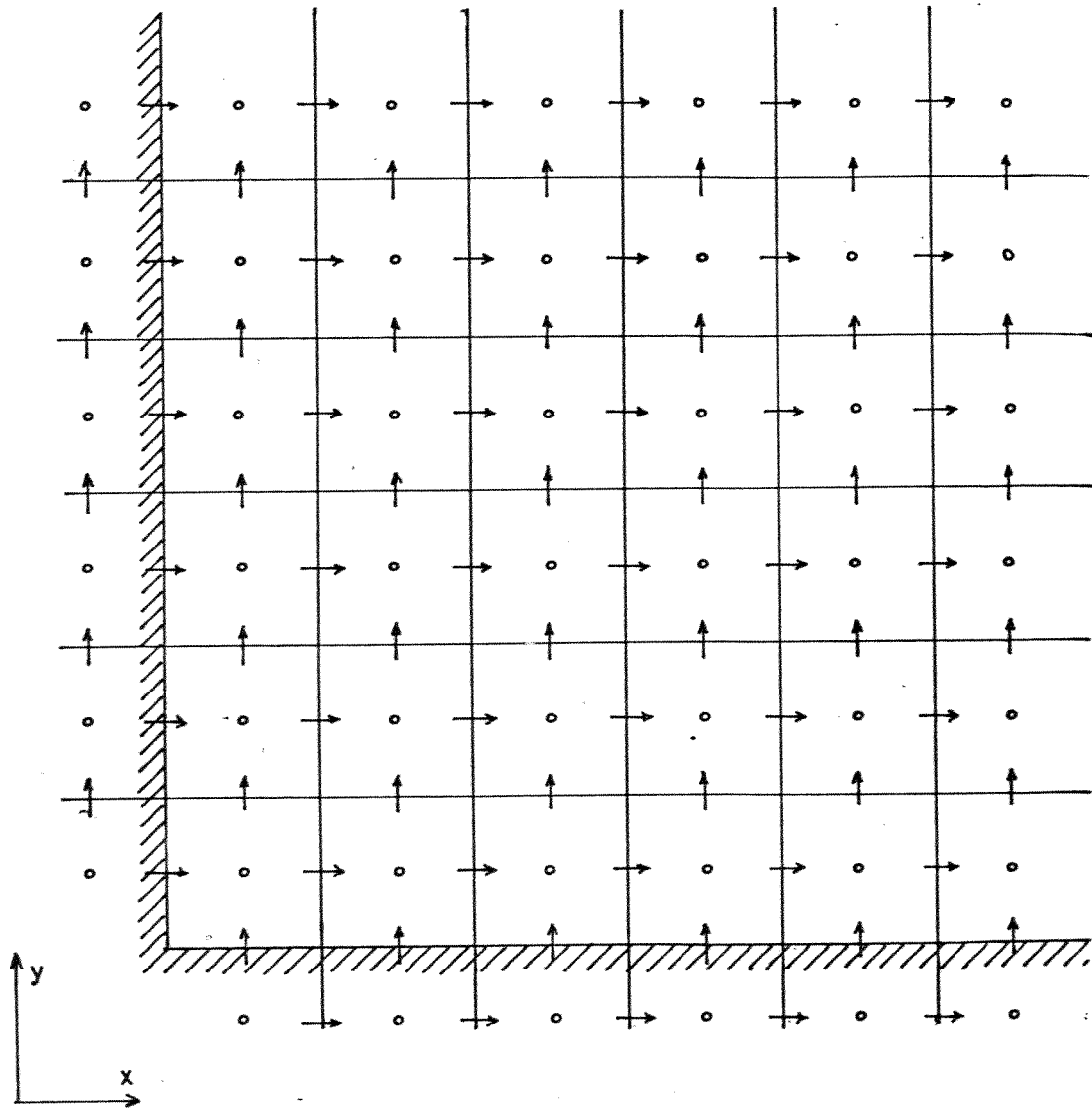


Fig. 2.3 Grade regular deslocada
Prática B para as condições de contorno

Eulerian") ao método generalizado, enquanto Amsdem e Harlow (1968) apresentaram resultados de modelos de turbulência incorporados ao método MAC.

Resta, para descrever o desenvolvimento dos métodos numéricos na época, relacionar os principais métodos de solução das equações de diferenças criados no período.

Para lidar com a solução do sistema de equações algébricas, obtidas da discretização da equação diferencial de transporte convectivo difusivo, em processos iterativos, o método SOR ("Sucessive Over Relaxation") foi desenvolvido por Frankel (1950) e independentemente por Young (1954). O método SOR acelera a solução do sistema de equações algébricas, primeiramente como um refinamento do método de substituição ponto a ponto de Gauss-Seidel. Um coeficiente ótimo de relaxação foi obtido teoricamente por Young em seu trabalho de tese (Birkhoff, 1981).

Outro método de solução bastante utilizado até hoje é o método ADI ("Alternating Direction Implicit") de Peaceman e Rachford (1955) que foi desenvolvido para a equação de transporte com o termo transiente presente. Douglas e Gun (1964) generalizaram o procedimento ADI para diferentes discretizações da equação de transporte convectivo difusivo. O algoritmo de Thomas (1949) é utilizado para resolver as equações implícitas formadas pela aplicação do método ADI. O algoritmo de Thomas, também conhecido como algoritmo TDMA ("TriDiagonal-Matrix Algorithm"), é um procedimento simplificado do método de eliminação de Gauss aplicado a uma matriz tridiagonal (ver Patankar, 1980).

O método de solução linha a linha, desenvolvido pelo grupo do Imperial College, aplica o algoritmo de Thomas iterativamente

linha a linha ao sistema de equações algébricas derivadas da discretização da equação de transporte (no caso bidimensional, nas duas direções alternadamente) com um procedimento de sub-relaxação aplicado à variável ϕ para amortecer os efeitos não lineares do acoplamento entre as equações diferenciais que definem o problema. Cada iteração substitui o avanço no tempo real conseguido pelo método ADI, por exemplo, até a obtenção do resultado de regime permanente, geralmente de interesse (ver Patankar, 1980).

Por fim, Stone (1968) apresentou um método de solução denominado SIM ("Strongly Implicit Method"), formulando as equações algébricas de tal modo a permitir, por decomposição da matriz dos coeficientes, que o sistema seja resolvido de maneira mais implícita que os métodos anteriormente desenvolvidos, a custo de um uso maior de memória.

Todos os métodos de solução aqui apresentados foram desenvolvidos para as assim chamadas células de cinco nós da representação da equação de transporte convectivo. A figura (2.4) representa uma célula de vários nós, com a célula de cinco nós, que será empregada no presente trabalho, como um caso particular.

O leitor que se interessar por uma apresentação mais detalhada dos métodos de solução citados e de outros métodos mais recentes poderá encontrar no texto de Anderson, Tannehill e Pletcher (1984) uma descrição muito precisa.

2.6 TENDÊNCIAS DA DÉCADA DE 70

O rápido desenvolvimento ocorrido nas décadas anteriores no campo, pavimentou o caminho dos pesquisadores da década de 70. As

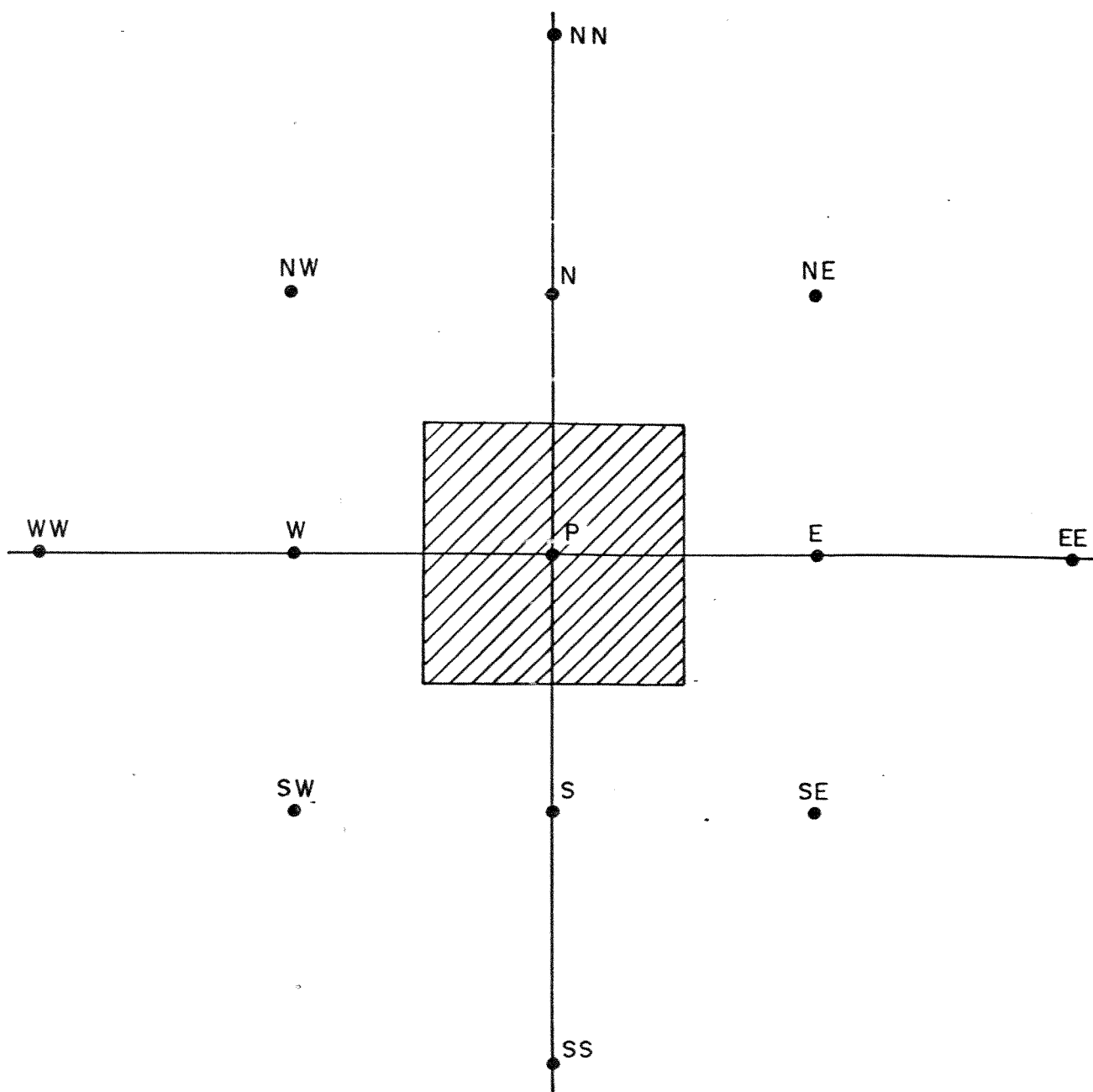


Fig. 2.4 Representação de células com vários pontos

a) A célula de 5 nós emprega o ponto P e os pontos cardiais N, S, W e E; b) a célula de 9 pontos emprega os cinco pontos anteriores e os nós cardiais extremos NN, SS, EE, WW; c) a célula de 13 nós emprega todos os pontos representados na figura.

limitações computacionais existentes em termos de "hardware" impossibilitaram um avanço mais acentuado nas duas décadas seguintes, ampliando-se, entretanto, em muito, os trabalhos computacionais apresentados em congressos, seminários e nas publicações especializadas.

2.6.1 Formulação das variáveis primitivas

Patankar e Spalding (1972), trabalhando no grupo do Imperial College de Londres, apresentaram o método SIMPLE ("Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations") para cálculo das equações de transporte em um escoamento tridimensional no interior de um duto, escoamento para o qual a direção principal era considerada parabólica, ou seja, sem recirculação. As equações que governam o fenômeno são atualmente chamadas de equações de Navier-Stokes "parabolizadas", tendo sido utilizada uma aproximação primeiramente sugerida por Gosman e Spalding (1971) para a formulação de variáveis primitivas. Uma apresentação detalhada do método, com sua versão revisada chamada de SIMPLER (desenvolvida para aumentar a taxa de convergência) pode ser encontrada em Patankar (1980, 1981).

Para o mesmo problema de escoamento tridimensional em dutos, o grupo do Imperial College ainda apresentou outros procedimentos como em Caretto et al. (1971, 1972), mas acabou adotando o procedimento SIMPLE, modificando o código numérico TEACH, com a adoção da formulação de variáveis primitivas (U,V,P) e o uso da malha deslocada. Uma descrição do procedimento, com a incorporação do SIMPLE, pode ser encontrada em Gosman e Pun (1974).

Uma importante alternativa ao SIMPLE foi apresentada por

Briley (1974) também no contexto do escoamento tridimensional no interior de dutos com a utilização das equações de Navier-Stokes parabolizadas. As equações diferenciais são usadas na formulação de variáveis primitivas (U,V,P), utilizando-se da forma convectiva das equações diferenciais (diferentemente do SIMPLE que utiliza forma divergente), o que permite usar uma grade não deslocada que facilita a programação numérica. A maneira de acoplar a equação de pressão com o campo de velocidade é uma das principais diferenças entre os métodos. Mas principalmente é a maneira de tratar as condições de contorno que proporciona as condições de estabelecer um método que pode se tornar mais acurado que o método proposto por Patankar e Spalding, como iremos discutir mais adiante.

O trabalho de Briley foi seguido dos trabalhos de Ghia e co-autores nos anos posteriores (Ghia et al., 1977, 1979, 1981), utilizando as mesmas bases do trabalho pioneiro.

Hirt e Cook (1972), do grupo de pesquisadores de Los Alamos, adotando a formulação das variáveis primitivas, apresentaram um método, hoje conhecido como SOLA, que é uma variação do método MAC, já citado anteriormente. No caso de problemas em regime permanente, é relatado por Hirt (1978) que é possível acelerar a velocidade do processo iterativo, estabelecendo-se critérios menos severos para a convergência de massa do que os adotados por Patankar e Spalding. Sakai (1981) apresentou uma técnica de aceleração da computação numérica para problemas de escoamento em regime permanente, aplicáveis ao método SOLA.

2.6.2 Formulação Vorticidade-Função Corrente

Paralelamente, a formulação vorticidade-função corrente manteve-se em desenvolvimento durante esta década. Um trabalho importante de revisão do estado da arte da época foi apresentado por Roache (1972), como já indicado.

Uma generalização do método para o estudo do movimento do fluido provocado pela convecção natural, em escoamento tridimensional, havia sido proposta por Aziz e Hellums (1967). A definição de um vetor potencial e um vetor vorticidade $(\vec{\xi}, \vec{\psi})$, aumentou o número de equações necessárias para solucionar o problema, em relação à formulação de variáveis primitivas (\vec{V}, P) . No sistema (\vec{V}, P) se requer o armazenamento de três matrizes dimensionais, enquanto no sistema $(\vec{\xi}, \vec{\psi})$ nove matrizes dimensionais devem ser armazenadas, para a solução das equações de conservação da variação da quantidade de movimento do problema (ver Roache, 1972).

A vantagem obtida no caso bidimensional é perdida na generalização para o caso tridimensional. Mas a capacidade dos computadores em solucionar problemas tridimensionais era limitada na época, e mesmo nos dias atuais, é ainda uma limitação séria, o que mantém o interesse na formulação.

Mallison e Vahl Davies (1973) propuseram um método de solução das equações tridimensionais baseados na formulação $(\vec{\xi}, \vec{\psi})$, chamado de método do falso transiente. O método é uma generalização do mecanismo mencionado por Dorodnicyn (1972) e emprega a técnica da compressibilidade artificial desenvolvida por Chorin (1967). Em contraste com essa última técnica, o método usa uma construção puramente artificial no tempo, que, segundo os autores, pode ser aplicada para qualquer conjunto de equações

elípticas, quando a solução do regime permanente é que interessa. A solução de problemas de convecção natural em cavidades é descrita.

Roache (1975), atendo-se a escoamentos bidimensionais, apresentou métodos que eram mais rápidos do que os métodos baseados na evolução temporal da solução numérica. Os métodos iterativos são formulados para solução do regime permanente e não são nem temporalmente dependentes, nem a iteração avança como um falso transiente. As conclusões do trabalho indicam que os métodos produzem resultados melhores que os anteriores, baseados na dependência temporal, mas é realçado que existem dificuldades fundamentais para aplicar os métodos testados ao escoamento compressível.

Aproximações das condições de contorno da vorticidade e a aplicação de sua formulação na acuidade da solução foram estudadas por Gupta e Manohar (1979).

Uma revisão dos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos, com a formulação vorticidade-função corrente, para computar escoamentos com recirculação, foi apresentada por Tuann e Olson (1978). As conclusões indicam que, em alguns casos, os métodos dos elementos finitos se mostram mais acurados e estáveis que os métodos de diferenças finitas. A discretização a montante introduz sérios erros nos métodos em que é adotada na solução do problema da cavidade hidrodinâmica em que são aplicados.

2.7 AS TENDÊNCIAS ATUAIS

O início da década de 80 foi marcada pela disseminação do algoritmo SIMPLE, desenvolvido por Patankar (1980). A formulação

das variáveis primitivas e a malha deslocada foram amplamente utilizadas em um grande número de aplicações, sendo incorporados modelos heurísticos de turbulência desenvolvidos e descritos, por exemplo, por Launder e Spalding (1972).

Porém, a principal característica da década seria a constatação que a discretização à montante deveria ser substituída para possibilitar um aumento na acuidade dos métodos numéricos. Figueiredo(1988) apresentou em sua tese de doutoramento um estudo sobre diferentes discretizações exponenciais que reúnem possibilidades de vir a substituir definitivamente as vantagens das discretizações à montante ou da discretização híbrida proposta por Spalding(1972).

As discretizações exponenciais estão baseadas na solução analítica exata da equação de transporte convectivo difusivo unidimensional. Allen baseou sua proposta na solução da equação de transporte não homogênea, em sua forma convectiva:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - S = 0 \quad (2.13)$$

com condições de contorno:

$$\theta = 0 \quad \text{para} \quad X=0 \quad \text{e} \quad \theta = 1 \quad \text{para} \quad X=1$$

onde:

$$\theta = \frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} \quad \text{e} \quad X = \frac{x}{L}$$

A solução dessa equação, assumindo ρu , γ e S constantes para um volume de controle unitário de dimensão $L=(x_E - x_P)$, é:

$$\theta = \left[1 - \frac{Z}{P_e} \right] \cdot \left[\frac{\exp(P_e \cdot X) - 1}{\exp(P_e) - 1} \right] + \frac{Z \cdot X}{P_e} \quad (2.14)$$

onde:

$$P_e = \frac{\rho u L}{\gamma} \quad \text{é o número de Peclet da malha}$$

e

$$Z = \frac{S L^2}{\gamma (\phi_L - \phi_0)} \quad \text{é um termo fonte local adimensionalizado}$$

Spalding (1972) e Raithby e Torrance (1974) propuseram uma discretização exponencial baseada na solução da equação diferencial de transporte homogênea na sua forma divergente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \phi - \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.15)$$

com as mesmas condições de contorno anteriores, sendo θ e X as variáveis adimensionais definidas anteriormente, temos então a seguinte solução:

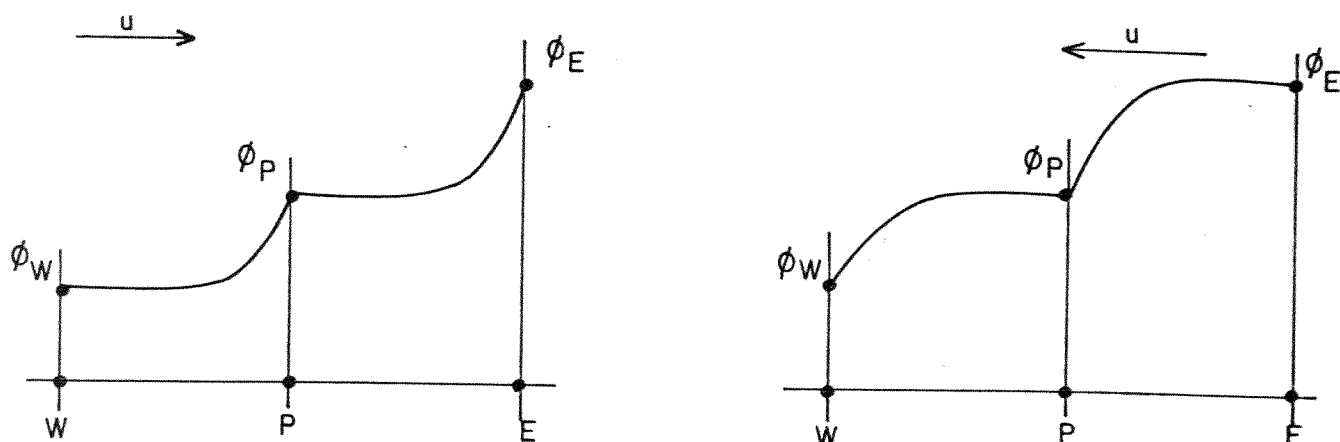
$$\theta = \frac{\exp(P_e \cdot X) - 1}{\exp(P_e) - 1} \quad (2.16)$$

A discretização proposta por Allen, embora derivada a partir de uma equação não homogênea, é idêntica à discretização proposta por Spalding para malhas regulares, conforme mostraram Chow e Tien (1978). Entretanto, a discretização proposta por Spalding não é localmente analítica para malhas irregulares, conforme observado em testes numéricos realizados pelo autor. Figueiredo

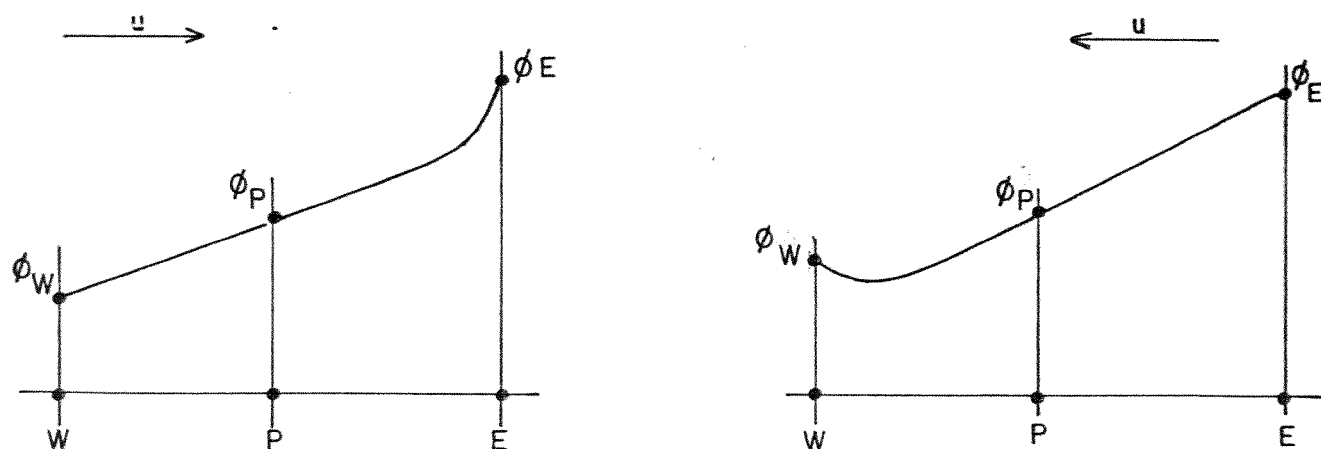
(1988) propôs uma generalização da discretização de Allen para grades irregulares, que ainda não foi suficientemente testada. Importante também notar que devido à assimetria dos perfis de interpolação exponenciais (figura 2.5), mesmo em malhas regulares, as condições de contorno podem introduzir um erro de discretização que não é eliminado com o refinamento da grade. No apêndice A é apresentado um estudo numérico para os tratamentos das condições de contorno, quando se usa uma malha com faces (ou fronteiras) centradas, prática A na notação de Patankar(1980), ou com nós centrados, prática B . Para malhas regulares as configurações de nós centrados ou de faces centradas são equivalentes, embora a prática A de tratar as fronteiras esteja representada como na figura (2.2) e a prática B como na figura (2.3). Contrariamente à recomendação conclusiva de Patankar (1981), optamos pelo uso da prática A para tratar com as condições de contorno no presente trabalho, conforme os resultados apresentados no Apêndice A e de acordo com as recomendações de Figueiredo (1988).

Wong e Raithby (1979) apresentaram um interessante procedimento para aumentar a acuidade dos resultados numéricos com a utilização de um esquema de discretização chamado de LOADS ("Locally Analytic Differencing Scheme"), obtido como uma extensão do esquema devido a Allen, mas formulado para a forma divergente da equação diferencial. O esquema é apresentado somente para grades regulares e o termo fonte recebe um tratamento mais elaborado na discretização.

Chow e Tien (1978) examinaram os esquemas de diferenciamento central, o esquema à montante, o esquema exponencial devido a Spalding e o esquema exponencial devido a Allen, para dois



a) Equação geratriz homogênea



b) Equação geratriz não homogênea

Fig. 2.5 Perfis de interpolação exponencial

problemas testes, e concluíram que, do ponto de vista de convergência e de acuidade, o esquema de Allen produziu os melhores resultados, sendo o esquema de diferenciamento central, provavelmente, o mais acurado se a grade fosse suficientemente refinada, de tal forma a não permitir a divergência do processo iterativo. Esse trabalho indicou a preferência pela formulação das equações diferenciais na forma convectiva, para obtenção de resultados mais acurados.

Trabalhos posteriores de Shih e Ren (1984) e de Birigen e Cook (1988) defenderam o uso de grades numéricas não deslocadas para aumentar a acuidade do método de solução usando as variáveis primitivas (U,V,P), principalmente pelo maior rigor no tratamento das condições de contorno.

Por outro lado, os métodos baseados na formulação vorticidade-função corrente continuaram se desenvolvendo, embora em menor quantidade, conforme relatado por Vahl Davis (1986) em trabalho de revisão. Destacamos que métodos para solução de problemas tridimensionais continuaram a ser apresentados, como em Wong e Reizes (1984), utilizando o campo de vorticidade e o vetor potencial.

Em um trabalho de Cebeci et al. (1981) são comparados os métodos das variáveis primitivas com um método iterativo de solução baseado na formulação vorticidade função corrente e um método baseado na solução da equação biarmônica da função corrente. Soluções de problemas bidimensionais são apresentadas e os autores salientam as dificuldades de implementação das condições de contorno no método das variáveis primitivas, bem como a dificuldade de implementação e análise da formulação, quando a grade deslocada é utilizada. Apesar do maior uso de

memória para o armazenamento das variáveis, os autores defendem a utilização do método de solução da equação biarmônica da função corrente, como base de desenvolvimentos futuros.

No próximo tópico uma rápida descrição do estado da arte no modelamento do resfriamento de dispositivos eletrônicos é apresentada, baseada no trabalho de Moffat e Ortega(1988).

2.8 MÉTODOS DE SIMULAÇÃO DO RESFRIAMENTO DE COMPONENTES ELETRÔNICOS

Foi durante a década de 80, com a crescente miniaturização dos componentes eletrônicos, que problemas de empacotamento desses dispositivos tornaram-se críticos. Esse novo campo de estudo ganhou então impulso. Na área de modelamento numérico essa aplicação passou a receber crescente interesse.

Moffat e Ortega (1988) relataram que os atuais programas numéricos ainda apresentam pouca confiança em sua aplicação geral, porque modelos turbulentos confiáveis ainda não foram desenvolvidos. Sparrow e Chukaev (1980) e Schmidt e Patankar (1986) apresentaram resultados do escoamento laminar, plenamente desenvolvido, em regime permanente para uma matriz de elementos obstruindo regularmente o fluxo. O trabalho de Sparrow e Chukaev considerou os elementos paralelos à direção do escoamento, enquanto Schmidt e Patankar estudaram o escoamento com os elementos localizados transversalmente à direção principal.

Davalath e Bayazitoglu (1985) apresentaram resultados para o problema bidimensional, enquanto Asako e Faghri (1987) abordaram o problema tridimensional. Segundo Moffat e Ortega (1988), os resultados apresentados nesse último trabalho para os números de

Nusselt médio são menores que os obtidos a partir de dados experimentais relatados na literatura.

Métodos que envolvem a solução direta da equação de Navier-Stokes, sem modelos heurísticos da turbulência, estão sendo testados por um grupo de pesquisadores do M.I.T. O trabalho de Ghaddar, Korczak, Mikic e Patera (1986) e alguns outros trabalhos não publicados do grupo são citados por Moffat e Ortega (1988).

2.9 O PRESENTE MÉTODO

A principal motivação para a elaboração do presente código numérico foi desenvolver um método acurado. Buscou-se elaborar um procedimento geral que pudesse vir a ser refinado em implementações futuras, a partir da metodologia básica. Os problemas bidimensionais elípticos para problemas de convecção mista ou natural encontram ainda forte motivação na literatura, conforme relatamos na apresentação do presente trabalho. Pela simplicidade e por adotar um número menor de equações diferenciais, no caso bidimensional, adotamos a formulação vorticidade função corrente, com as equações diferenciais tomadas na sua forma convectiva para desenvolver nosso método numérico.

A arquitetura do programa desenvolvido em FORTRAN é baseada no código numérico TEACH que se encontra bem documentado, como citado anteriormente. Basicamente os campos da função corrente, da vorticidade e da temperatura são calculados em seqüência para cada iteração do processo. Os coeficientes para a obtenção de cada um dos campos são recalculados anteriormente à solução de cada um deles e armazenados em uma única matriz. As equações são solucionadas pelo método de iteração linha a linha, tendo sido

adaptado o algoritmo de Thomas para solução de um campo bidimensional.

A solução clássica do sistema de equações governante é obtida pela evolução das equações transientes até o regime permanente. Existem severas restrições para escolha do intervalo de tempo que permite obter estabilidade e convergência desses métodos, conforme já relatado, resultando em soluções relativamente demoradas e custosas.

No presente trabalho o método de iteração linha a linha é aplicado a um sistema de equações algébricas derivadas das equações diferenciais em regime permanente, com a utilização de um coeficiente de sub-relaxação para o campo da vorticidade, que permite a obtenção mais rápida da solução desejada.

O método numérico desenvolvido usa a discretização exponencial devida a Allen e utiliza somente grades regulares, evitando as dificuldades relatadas para generalização das discretizações exponenciais em grades irregulares.

A utilização de uma célula de cinco nós permite obter uma equação algébrica para o nó P da malha que pode ser expressa na sua forma geral como:

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (2.17)$$

com a_P , a_N , a_S , a_E sendo os coeficientes da variável ϕ nos pontos cardeais da malha.

A derivação das equações discretizadas utilizadas no presente trabalho é devida a Patankar (1982), a partir da equação geratriz homogênea (2.15). Quando aplicadas para a forma convectiva representadas pelas equações (2.8) conduzem aos

seguintes coeficientes:

$$a_E = D_x AC |Pe_x| + \max [-K_x, 0] \quad (2.18)$$

$$a_W = D_x AC |Pe_x| + \max [K_x, 0] \quad (2.19)$$

$$a_N = D_y AC |Pe_y| + \max [-K_y, 0] \quad (2.20)$$

$$a_S = D_y AC |Pe_y| + \max [K_y, 0] \quad (2.21)$$

$$b = S_p \Delta x \Delta y \quad (2.22)$$

Nas expressões acima D é o fluxo difusivo, K o fluxo convectivo e Pe o numero de Peclet da malha, definidos para a grade regular e para a formulação convectiva com γ constante, como:

$$D_x = \frac{\gamma \Delta y}{\Delta x} \quad e \quad D_y = \frac{\gamma \Delta x}{\Delta y} \quad (2.23)$$

$$K_x = (\rho u)_p \Delta y \quad e \quad K_y = (\rho v)_p \Delta x \quad (2.24)$$

$$Pe_x = \frac{(\rho u)_p \Delta x}{\gamma} \quad e \quad Pe_y = \frac{(\rho v)_p \Delta y}{\gamma} \quad (2.25)$$

Nas expressões (2.18) a (2.21) a notação $\max [a,b]$ representa o maior valor entre a e b .

Chow e Tien (1968) mostraram que a formulação aqui apresentada é idêntica à discretização mais geral devida a Allen, somente no caso de grades regulares.

O coeficiente $A|P_0|$, conforme sugerido por Figueiredo (1988), foi implementado por uma série de Taylor truncada. No apêndice B está descrita a forma de implementação em FORTRAN desenvolvida, bem como uma comparação com o esquema de lei de potência adotado por Patankar (1980). Como mostrado no apêndice B, um polinômio de grau 9 representa relativamente bem o esquema exponencial e foi adotado no presente trabalho.

A utilização da forma convectiva das equações diferenciais e o uso de uma grade regular não deslocada permite formular as condições de contorno com erro de truncamento de segunda ordem. Para condição de contorno de primeira espécie (condições de Dirichlet), quando o valor da variável ϕ é especificado na fronteira, a formulação fica trivial.

Quando ϕ_0 é o valor especificado, os coeficientes da equação (2.17) ficam:

$$a_p = 1 \quad (2.26)$$

$$a_N = a_S = a_W = a_E = 0 \quad (2.27)$$

$$b = \phi_0 \quad (2.28)$$

No caso de condições de contorno de segunda espécie (de Neumann), quando o valor da derivada na direção normal à parede é especificada, utiliza-se a técnica do rebatimento, imaginando-se um ponto extra fora do domínio de cálculo, e zera-se o coeficiente relativo a esse ponto através do valor conhecido da derivada. Com a utilização do diferenciamento central em torno do ponto de fronteira, para representar a derivada, formula-se a

condição com erro de truncamento de segunda ordem.

Com essa abordagem adotada, consegue-se um algoritmo consistente, estável e convergente para as aplicações buscadas, como relataremos nos capítulos seguintes. O uso da forma divergente, em outros métodos descritos, através de um procedimento conservativo adotado em cada volume de controle, produz uma relativa indiferença ao refinamento da grade numérica. Por outro lado, a solução aqui adotada, embora localmente não conservativa e portanto dependente do refinamento da grade numérica, também apresenta resultados relativamente independentes de seu refinamento. Isso é conseguido pela adoção de uma restrição integral aplicada à solução das equações governantes, como será relatado no capítulo 3.

O desenvolvimento atual dos modernos computadores digitais, como o super computador 3090 da IBM aqui utilizado, permitiu que os cálculos fossem realizados em grades regulares bastante refinadas. Dois outros computadores mais lentos também foram utilizados nos cálculos obtidos no presente trabalho, o computador VAX pertencente à UNICAMP, no início da computação, e o computador CYBER da UFSCAR, no final do trabalho. Foi verificado que o programa apresenta os mesmos resultados independente da máquina utilizada.

A principal limitação do atual algoritmo está em tratar somente com problemas de escoamento incompressível bidimensional no regime laminar e principalmente utilizar somente grades regulares. Uma alternativa, para tratar com grades não regulares, seria adotar alguma transformação conforme adequada. Porém, para cada caso em estudo determinada transformação seria a mais favorável e, dessa maneira, a generalidade do algoritmo seria

prejudicada. Por essa razão foi assumido utilizar somente a grade regular neste estágio de desenvolvimento do algoritmo.

No desenvolvimento do atual algoritmo modelamos a direção principal do escoamento elípticamente. Para representar zonas de recirculação, uma alternativa a este procedimento aqui adotado é o assim chamado escoamento parcialmente parabolizado. O modelo, primeiramente sugerido por Pratap e Spalding (1976), embora utilize um procedimento de marcha na direção principal do escoamento, mantém o comportamento elíptico do campo de pressão, que é calculado por um procedimento iterativo. Dessa maneira, uma formulação (\vec{V}, P) tridimensional é desenvolvida com a aproximação da camada limite adotada na direção principal do escoamento. Há evidências (Williams, 1977; Kwon e Pletcher, 1979) mostrando que as equações da camada limite podem fornecer aproximações úteis para escoamentos contendo regiões pequenas e confinadas (bolhas) de separação do fluido (Anderson, Tannehill e Pletcher, 1984).

No próximo capítulo uma descrição mais pormenorizada do procedimento de cálculo aqui desenvolvido será apresentada e a acuidade de seus resultados estudada para o caso do escoamento em canais verticais.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO NUMÉRICO DESENVOLVIDO E SUA ACUIDADE

3.1 INTRODUÇÃO

O presente método numérico foi fruto das discussões do autor com colegas do Departamento de Energia da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

Resultados preliminares do teste do algoritmo aplicado à solução da convecção natural em cavidades retangulares, com condições de contorno de Dirichlet, foram apresentados por Figueiredo, Ganzarolli e Almeida (1986). Nesse trabalho a acuidade, a estabilidade e a convergência do método foram comparadas com os trabalhos clássicos de Wilkes (1963), Wilkes e Churchill (1966) e de Wong e Raithby (1979). Os resultados obtidos incentivaram a continuidade do desenvolvimento do presente método.

A aplicação desse algoritmo para simulação da convecção natural em cavidades aquecidas por baixo e simetricamente resfriadas pelos lados foi apresentada por Ganzarolli e Milanez (1989).

A verificação da validade do algoritmo e de sua aplicabilidade segue a trajetória de outros trabalhos na área. Testes com a cavidade hidrodinâmica e com a cavidade térmica foram apresentados recentemente por Ganzarolli (1991).

No presente trabalho, o algoritmo básico foi expandido para tratar de condições de contorno de Neumann, em problemas de escoamento provocados pela convecção mista ou pela convecção

natural em canais verticais. O código numérico desenvolvido para a presente aplicação é chamado de UNICAM (UNICO CAMpo), pois não é adotada nenhuma abordagem heurística na solução das equações de definição do problema.

No presente capítulo, a formulação do problema em estudo será apresentada, e uma descrição do método numérico será feita.

Os resultados experimentais disponíveis na literatura para o problema da convecção mista com paredes aquecidas, à temperatura constante ou com o fluxo de calor constante, serão utilizados para testar a acuidade do método para essa classe de problemas.

No próximo tópico, a formulação do problema será apresentada em termos das variáveis primitivas (U, V, P) e, em seguida, a formulação vorticidade-função corrente será deduzida.

3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.2.1 Equações primitivas

As equações fundamentais que caracterizam o escoamento incompressível bidimensional de um fluido Newtoniano e a transferência de calor no seu interior são as equações da conservação da massa (equação da continuidade), da conservação da variação da quantidade de movimento nas duas direções (equações de Navier-Stokes) e a equação da conservação da energia (primeira lei da termodinâmica).

Para o regime permanente, e considerando propriedades constantes, podemos representá-las, num escoamento bidimensional, por:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Equações da conservação da variação da quantidade de movimento

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + X \quad (3.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Y \quad (3.3)$$

onde X e Y são as forças de campo por unidade de volume, na direção x e na direção y, respectivamente.

Equação da conservação da energia

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

Para a equação de energia foram desprezados o efeito do aquecimento interno, devido à dissipação viscosa, e o trabalho devido à compressibilidade do fluido.

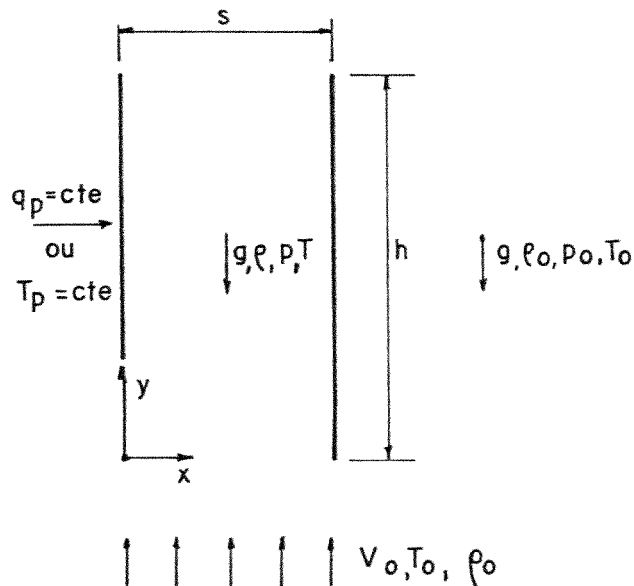


Figura 3.1- Esquema do canal vertical

Considerando o escoamento em um canal, formado por duas placas verticais, conforme a figura 3.1, no qual a força de empuxo por unidade de volume devida à gravidade é a força de campo predominante, as equações de Navier-Stokes ficam:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (3.6)$$

Adotando-se o débito de pressão (a pressão interna menos a pressão estática do fluido no exterior) como a variável de interesse ($p^* = p - p_0$), as equações de Navier-Stokes ficam:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g(\rho - \rho_0) \quad (3.8)$$

As relações abaixo foram usadas para essa dedução:

$$p_0 = -\rho_0 g y, \quad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 g \quad \text{e} \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.9)$$

O termo da força de empuxo $g(\rho - \rho_0)$ representa a força motriz do escoamento, em convecção natural, produzida pelo campo de densidades $\rho(x,y)$ gerado pelo campo de temperaturas $T(x,y)$. A equação (3.7) pode ser acoplada à equação (3.4) através da equação de estado do fluido.

Se o fluido se comporta como um gás ideal, $p = \rho RT$.

Admitindo-se, como hipótese, que a densidade do fluido seja

uma função somente da temperatura e independente da pressão:

$$\rho = f(T), \quad \rho = p_0 / RT \quad \text{e} \quad \rho_0 = p_0 / RT_0 \quad (3.10)$$

e então, pode-se escrever:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} - \frac{d\rho}{\rho} = \int_{T_0}^T - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT \quad (3.11)$$

Por definição, o coeficiente de expansão volumétrica à pressão constante vale:

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.12)$$

logo, substituindo-se (3.12) em (3.11) e para β constante, temos:

$$\ln \frac{\rho_0}{\rho} = \beta (T - T_0) \quad (3.13)$$

ou ainda:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = e^{\beta(T - T_0)} \quad (3.14)$$

Expandindo-se em série de potências, temos:

$$e^{\beta(T - T_0)} = 1 + \beta (T - T_0) + \frac{1}{2!} [\beta (T - T_0)]^2 + \dots \quad (3.15)$$

A aproximação de Boussinesq pode então ser apresentada, considerando-se baixos valores de $(T - T_0)$, tomando-se somente o termo de primeira ordem da expansão.

Logo:

$$\frac{\rho_0}{\rho} \cong 1 + \beta(T - T_0) \quad (3.16)$$

e

$$\rho - \rho_0 \cong -\rho\beta(T - T_0) \quad (3.17)$$

Substituindo na equação (3.8) o termo de empuxo, pelo resultado da aproximação acima, temos:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_0) \quad (3.18)$$

Portanto, o sistema de equações primitivas, na forma da aproximação de Boussinesq, fica constituído pelas equações 3.1, 3.7, 3.18 e 3.4.

3.2.2. Formulação Vorticidade-Função Corrente

Se definirmos a função corrente ψ , tal que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.19)$$

e a vorticidade ξ , através da expressão:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.20)$$

podemos concluir que:

a) a equação da continuidade é imediatamente satisfeita pela própria definição de ψ .

b) se derivarmos as equações de Navier-Stokes convenientemente, e subtrairmos uma da outra, podemos eliminar explicitamente o termo

de pressão, obtendo uma única equação de transporte para a vorticidade:

$$\rho \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = \rho g \beta \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x} \quad (3.21)$$

c) substituindo-se as velocidades, na definição da vorticidade, obtemos a equação de definição da função corrente, i. é,

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\xi \quad (3.22)$$

conhecida como equação de Poisson da função corrente.

d) a equação da conservação de energia fica, então, em regime permanente:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.23)$$

Trata-se, portanto, de uma equação de transporte que completa o conjunto de equações que define a formulação vorticidade-função corrente.

Em resumo:

Equações de definição

$$\text{Função corrente} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\text{Vorticidade} \quad \xi = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.20)$$

Sistema de equações constituintes

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - \nu \nabla^2 \xi = g\beta \frac{\partial(T-T_0)}{\partial x} \quad (3.24)$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (3.25)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha \nabla^2 T = 0 \quad (3.26)$$

3.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUINTES

Vamos adotar as seguintes definições para as variáveis adimensionalizadas:

$$X = \frac{x}{s} \quad e \quad Y = \frac{y}{s} \quad (3.27)$$

$$U = \frac{us}{\nu} \quad e \quad V = \frac{vs}{\nu} \quad (3.28)$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{\nu} \quad e \quad \xi^* = \frac{\xi s^2}{\nu} \quad (3.29)$$

onde s é o espaçamento entre as placas do canal (Fig. 3.1)

Obtemos, então, as seguintes equações adimensionalizadas:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2} = -\xi^* \quad (3.30)$$

$$U \frac{\partial \xi^*}{\partial X} + V \frac{\partial \xi^*}{\partial Y} - \left(\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial Y^2} \right) = Gr. \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (3.31)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (3.32)$$

com: $U = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \quad e \quad V = -\frac{\partial \psi^*}{\partial X} \quad (3.33)$

$$e \quad \xi^* = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (3.34)$$

e onde, para temperatura de parede uniforme (TPU):

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_P - T_0} \quad e \quad Gr = \frac{g\beta(T_P - T_0)s^3}{\nu^2} \quad (3.35)$$

e para fluxo de calor constante nas paredes (FCC):

$$\theta = \frac{k(T - T_0)}{q s} \quad e \quad Gr = \frac{g\beta qs^4}{k\nu^2} \quad (3.36)$$

Como o problema é espacialmente elíptico os valores de ψ^* , ξ^* e θ devem ser especificados em todo o contorno. Para a entrada do canal são adotados perfis uniformes de velocidade e de temperatura e na saída admite-se que os perfis de velocidade e de temperatura estejam plenamente desenvolvidos, com a altura do canal adequadamente escolhida.

No presente capítulo será abordado o problema de placas aquecidas simetricamente e portanto as condições de contorno nas variáveis adimensionalizadas, são:

na entrada ($Y=0, 0 < X < 1$)

$$\psi^* = \text{Re } X, \quad \xi^* = 0 \quad e \quad T = T_0 \rightarrow \theta = 0 \quad (3.37)$$

onde $\text{Re} = \int_0^1 V_0 \cdot dX$ é a velocidade de mistura adimensional, na entrada do canal.

na saída ($Y = \frac{h}{s}$, $0 < X < 1$)

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \xi^*}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (3.38)$$

Na parede esquerda ($X=0$, $Y \geq 0$)

$$\text{TPU} \quad \psi^* = 0 \quad \xi^* = -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} \quad T = T_P \rightarrow \theta = 1 \quad (3.39)$$

$$\text{FCC} \quad \psi^* = 0 \quad \xi^* = -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = -1 \quad (3.40)$$

Na parede direita ($X=1$, $Y \geq 0$)

$$\text{TPU} \quad \psi^* = \text{Re} \quad \xi^* = -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} \quad T = T_P \rightarrow \theta = 1 \quad (3.41)$$

$$\text{FCC} \quad \psi^* = \text{Re} \quad \xi^* = -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 1 \quad (3.42)$$

O valor da vorticidade nas paredes sólidas é calculado usando-se a aproximação de segunda ordem, devida a Jensen (1959) e apresentada por Roache (1972).

As condições de contorno (3.38) são consequência de $U=0$ e $\frac{\partial V}{\partial Y} = 0$ para um escoamento plenamente desenvolvido. Como a velocidade transversal adimensionalizada U não é conhecida na região externa ao canal, é necessário avaliar $\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$ por meio de uma aproximação de diferenças de segunda ordem unidirecional.

A figura (3.2) representa o escoamento num canal vertical com as condições de contorno adotadas nas variáveis adimensionalizadas.

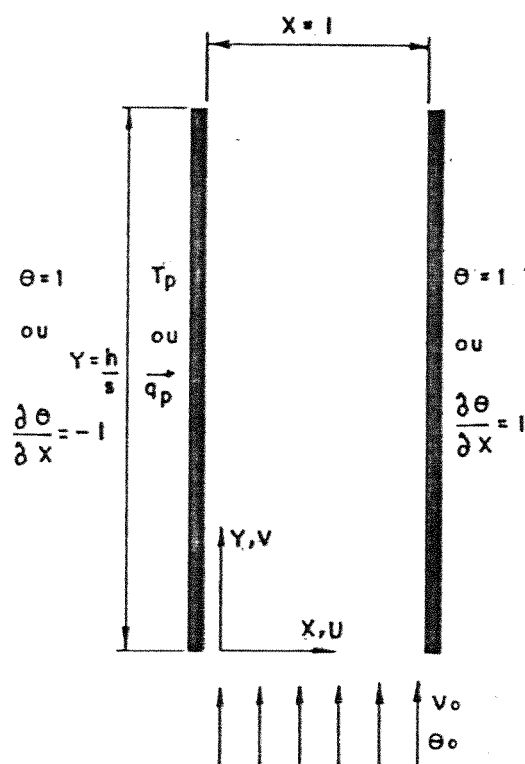


Figura 3.2- Canal vertical com condições de contorno adimensionais

3.4 MÉTODO DE SOLUÇÃO

O esquema numérico desenvolvido adota a discretização central para a função corrente na equação de Poisson e a discretização exponencial, devida a Allen, nas equações de transporte convectivas.

O método de solução das equações discretizadas adotado foi o método implícito de iteração linha a linha, em direções alternadas com um coeficiente de relaxação variável.

A figura 3.3 apresenta o diagrama de fluxo do método desenvolvido. A seqüência do processo iterativo será agora descrita.

A partir de um campo arbitrado de vorticidade, a equação de definição da função corrente é resolvida e os campos de velocidade (U e V) e a vorticidade nas paredes do canal (ξ_B) são

encontradas. A equação da energia é resolvida e os coeficientes da equação discretizada da vorticidade calculados, fornecendo o resíduo da vorticidade. O resíduo encontrado e a relação RM - tal

$$\text{que RM} = \frac{\sum_i^{n_i} \sum_j^{n_j} |\phi_{i,j}^{k-1} - \phi_{i,j}^k|}{\sum_i^{n_i} \sum_j^{n_j} |\phi_{i,j}^{k-1}|} \quad \text{e } \phi \text{ representa as}$$

variáveis ξ e T , sendo k o número de iterações - são utilizados como um duplo teste para a convergência do processo iterativo. Se pelo menos um dos valores diminuir, o novo campo de vorticidade é encontrado, resolvendo-se a equação de transporte da vorticidade com um fator de sub-relaxação, que no início do processo é tomado igual a um, e os passos anteriores são repetidos. Se ambos os valores aumentarem, o fator de sub-relaxação é diminuído, multiplicando-se por uma fração do anterior e os cálculos são refeitos, sendo o campo de vorticidade recalculado para esse fator de sub-relaxação menor, e novamente o procedimento anterior é repetido. Finalmente, sempre que o teste de convergência for positivo, o fator de sub-relaxação é aumentado, dividindo-se pela mesma fração anteriormente usada. Há, desse modo, um ajuste automático do coeficiente de sub-relaxação, que tende a ser o maior possível, obtendo-se maior rapidez no processo de convergência e otimizando o processo.

Dois critérios foram utilizados para garantir a convergência do processo iterativo: o resíduo da vorticidade menor do que uma fração do resíduo máximo atingido no processo iterativo, i.é, $\text{RES}\xi < 10^{-5} \cdot \text{RESMAX}$ e a média relativa da variação de ϕ , entre iterações subseqüentes (RMD), inferior a uma tolerância aceitável, i.é, $\text{RM} < 10^{-5}$.

A solução da equação de Poisson bidimensional para ψ com um termo fonte $F(X,Y)$, em que F representa os valores negativos da

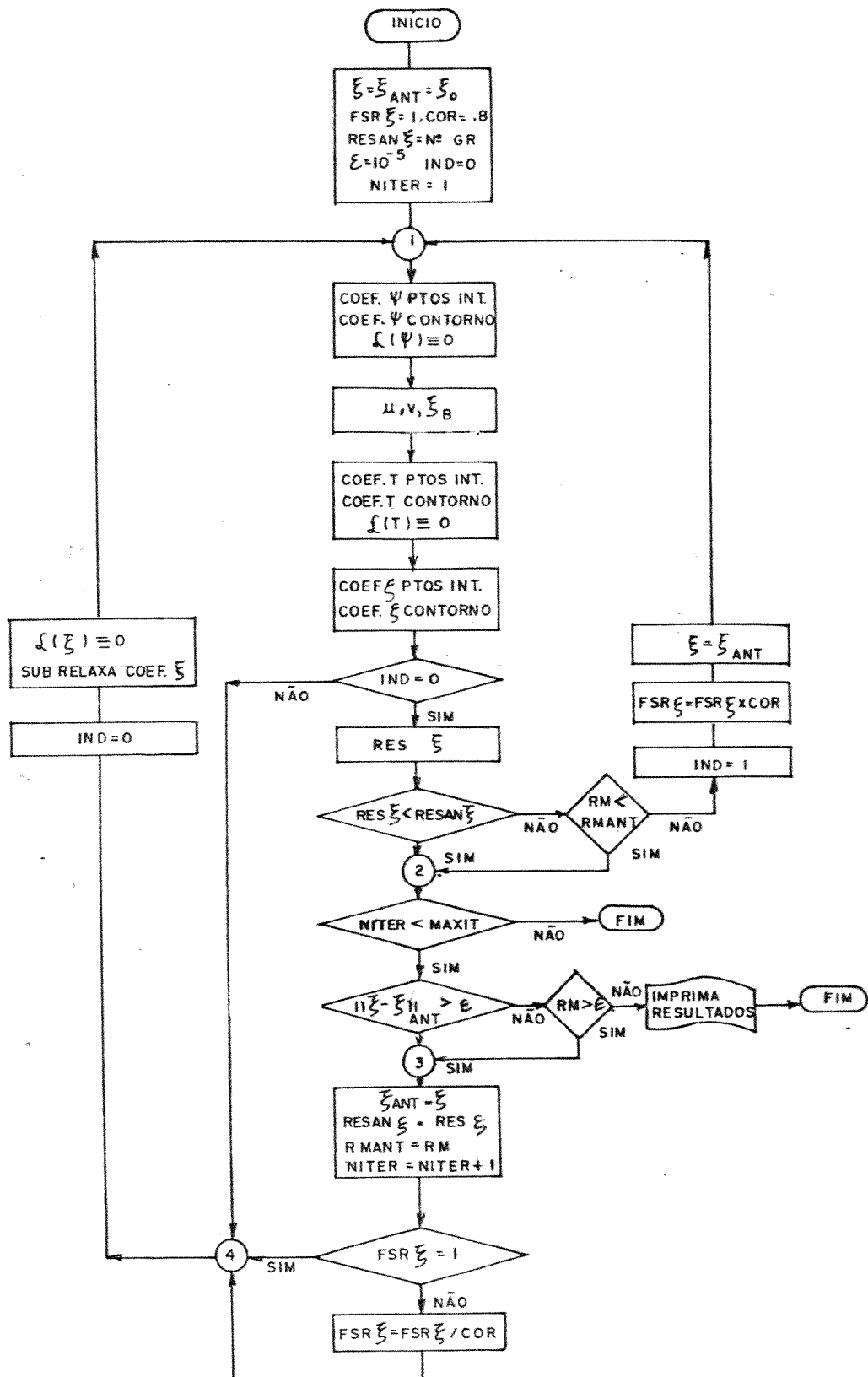


Fig. 3.3 Fluxograma do algoritmo

vorticidade nos pontos da malha, e com condições de contorno de derivadas normais (condições de contorno de Neumann), exige a satisfação da seguinte condição integral, consequência do primeiro teorema de Green:

$$\int_A F(X, Y) \, dA = \int_C \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \, dl \quad (3.43)$$

na qual A é a área limitada por C , o contorno do domínio de solução; n é a normal a C e l , a distância ao longo de C .

A implementação das condições de contorno de Neumann, por causa dos erros de truncamento, geralmente não conduz à satisfação desta restrição integral. Para a correção dessa inconsistência, a equação de Poisson foi resolvida com o termo fonte modificado por um pequeno termo de correção. A quantidade E , definida por :

$$E = \int_A F(X, Y) \, dA - \int_C \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \, dl \quad (3.44)$$

foi numericamente computada, e a equação de Poisson resolvida com a introdução da correção (E/A):

$$\nabla^2 \psi^* = F(X, Y) - \frac{E}{A} \quad (3.45)$$

Esse procedimento foi proposto por Briley (1974) para solução da equação de Poisson da pressão em um escoamento viscoso em dutos, com a formulação por variáveis primitivas (\vec{V} , P). No presente trabalho, pela primeira vez na literatura, o mesmo procedimento é aplicado para a formulação vorticidade-função corrente, com as integrais de linha e de área necessárias para o

cálculo de E , sendo avaliadas numericamente com o uso da regra de Simpson. O erro de truncamento das fórmulas integrais é menor por duas ordens de grandeza em relação ao erro de truncamento da discretização central usada no cálculo de ψ^* .

O estabelecimento das condições de entrada e de saída do fluido no canal, que representem com precisão as condições do escoamento real, são determinantes para a avaliação da acuidade do método desenvolvido. Problemas elípticos são chamados de "problemas de juri" (Ames, 1977), pois as condições impostas no contorno influenciam fortemente a solução no interior do domínio de cálculo do problema. Se o juri não for bem escolhido, a sentença poderá não ser a mais justa.

Problemas de interesse para o resfriamento de dispositivos eletrônicos no interior de canais são, geralmente, problemas de escoamento em desenvolvimento, tanto do perfil hidrodinâmico, quanto do perfil de temperatura. Os trabalhos pioneiros de Graetz (1885) e de Nusselt (1910) sobre o escoamento laminar forçado, determinando o perfil de entrada da temperatura em tubos aquecidos isotermicamente, quando o perfil de velocidade se encontra plenamente desenvolvido, definiram o que hoje é conhecido como o problema de Graetz de entrada. Os autores mostraram que a região de entrada da tubulação provoca um aumento no coeficiente de transferência de calor por convecção em relação ao valor constante que é atingido, quando o escoamento se encontra plenamente desenvolvido.

Schlichting (1960), analisando o comprimento da região de entrada do escoamento forçado entre placas paralelas, estimou que a localização onde as camadas limites se encontram, e o escoamento se torna plenamente desenvolvido, é dada aproximadamente pela relação:

$$Y_e = \frac{y_e}{s} \cong 0,04 Re \quad (3.46)$$

A expressão acima mostra que o comprimento de entrada é diretamente proporcional ao número de Reynolds escolhido.

No caso em estudo, adotando o ar ambiente (22°C) como o fluido de interesse (Pr=0,72), tanto o perfil de temperatura se encontra em desenvolvimento, quanto o perfil de velocidades, sendo ambos influenciados pelo empuxo térmico. Devido à limitação do uso da grade numérica uniforme no presente trabalho, para fixar a condição de escoamento plenamente desenvolvida na saída do canal, foi-se obrigado a adotar um baixo número de Reynolds, Re=50 e escolher um canal estreito com a razão de forma geométrica alta, h/s=30. Um perfil uniforme de velocidade, na entrada do canal, foi adotado e verificou-se que os resultados não se alteraram significativamente, quando admitido um perfil parabólico.

As condições do perfil de temperatura na entrada do canal serão redefinidas mais adiante, a partir dos resultados encontrados.

Com o campo de temperaturas $\theta(X, Y)$, a temperatura de mistura é determinada por:

$$\theta_M(Y) = \frac{\int_0^1 v \theta \, dX}{\int_0^1 v \, dX} \quad (3.47)$$

O número de Nusselt local é definido como:

$$\text{Nu}(Y) = \frac{h_y s}{k} \quad (1) \quad (3.48)$$

O número de Nusselt local, baseado no diâmetro hidráulico (De), igual a duas vezes o espaçamento entre as placas, é um parâmetro muito utilizado na literatura e é definido, para efeito comparativo, como:

$$\text{Nu}_D(Y) = \frac{h_y \text{De}}{k} \quad (3.49)$$

em que $\text{De} = 2s$ e para $dq_y = h_y dA (T - T_o)$.

Para o caso de temperatura de parede uniforme (TPU), o número de Nusselt local como definido por (3.48) e quando o fluxo de calor local é calculado baseado na diferença de temperatura ($T_p - T_o$), vale:

$$\text{Nu}(Y) = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0} \quad (3.50)$$

Adotou-se uma aproximação de terceira ordem, como em Wilkes (1963), para o cálculo numérico da derivada de temperatura:

$$\text{Nu}(Y) \equiv \text{Nu}_{1,j} = - \left[\frac{-11 \theta_{1,j} + 18 \theta_{2,j} - 9 \theta_{3,j} + 2 \theta_{4,j}}{6 \Delta X} \right] + O(\Delta X^3)$$

(1)

Quando o espaçamento entre as placas, s , é usado como o comprimento característico para as placas planas, os resultados concordam aproximadamente com aqueles para tubos circulares, segundo Mercer et al., 1967.

em que o índice $i=1$ é usado para representar um ponto da parede esquerda do canal e ainda $1 < j < n_j$, onde (n_j-1) é o número de celas da grade numérica na direção Y.

O número de Nusselt médio baseado na temperatura de entrada do fluido é definido como:

$$\text{Nu}_{\text{Mo}}(Y) = \frac{1}{Y} \int_0^Y \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (3.51)$$

Também encontra-se definido na literatura, o número de Nusselt médio, baseado na diferença média logarítmica de temperaturas, e é aqui reproduzido para efeito comparativo:

$$\text{Nu}_M(Y) = \frac{1}{Y} \frac{\int_0^Y \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY}{\Delta \theta} \quad (3.52)$$

para a qual:

$$\Delta \theta = \frac{(\theta_P - \theta_O) - (\theta_P - \theta_M)}{\ln[(\theta_P - \theta_O) / (\theta_P - \theta_M)]} \quad (3.53)$$

No caso de fluxo de calor constante nas paredes (FCC), o número de Nusselt local é o parâmetro de interesse pois é utilizado para determinar a distribuição da temperatura na parede ao longo do canal.

O número de Nusselt local pode ser expresso como:

$$\text{Nu}(Y) = 1 / [\theta_P(Y) - \theta_M(Y)] \quad (3.54)$$

pois $\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} = -1$ em toda a parede lateral esquerda.

No presente estudo, as integrais utilizadas nas expressões dos números de Nusselt médios foram calculadas numericamente pela regra de Simpson.

3.5 O CASO LIMITE DA CONVECÇÃO FORÇADA

Para testar a acuidade do método, resultados da convecção forçada entre placas paralelas foram obtidos, fazendo-se $Gr \rightarrow 0$ e serão agora comparados com resultados apresentados na literatura. A escolha desse caso teste é importante porque encontram-se na literatura resultados teóricos e experimentais que nos auxiliam na validação do método numérico desenvolvido.

O estudo do caso de temperaturas constantes nas paredes foi abordado por vários pesquisadores. Sparrow (1955) empregou o método de Karman-Pohlhausen para encontrar o campo de temperaturas, utilizando-se das equações aproximadas de conservação da variação da quantidade de movimento, baseadas na aplicação da equação de Bernoulli para o centro do escoamento. Stephan (1959) apresentou uma solução aproximada por série de potência e encontrou uma correlação numérica de fácil aplicação. Agrawal (1960), também através de uma solução aproximada por série de potências, considerou os efeitos de condução de calor na entrada do canal.

Hwang e Fan (1964) modelaram o problema para os casos de temperatura constante na parede e de fluxo de calor uniforme. Os resultados do modelamento parabólico utilizado coincidem relativamente bem com a correlação teórica obtida por Stephan, para o caso estudado de temperatura constante na parede.

Wang e Longwell (1964) utilizaram o modelamento elíptico para o estudo do problema com a discretização exponencial e a transformação de variáveis proposta por Allen e Southwell (1955). A equação da energia não foi tratada no estudo e, portanto, o campo de temperaturas não foi resolvido.

Schmidt e Zeldin (1970) modelaram a região de entrada de dutos, considerando a condução de calor axial no modelamento.

Adotaram um perfil de velocidades plenamente desenvolvido e estudaram o efeito do número de Peclet do escoamento no estabelecimento dos perfis de temperatura de entrada.

Mais recentemente, Bhatti e Savery (1977, 1978) desenvolveram uma solução semi-analítica para a região de entrada, primeiramente para fluxo de calor uniforme na parede e posteriormente para temperatura de parede constante.

Lage e Souza Mendes (1987) apresentaram resultados para o escoamento forçado, utilizando-se do modelamento elíptico pela implementação do programa SIMPLE, adotando um procedimento alternativo para estabelecer os campos de velocidade, de pressão e de temperatura na entrada do canal. Os resultados encontrados para TPU mostraram considerável discrepância entre os valores do número de Nusselt e os encontrados pelos demais trabalhos utilizados para comparação, na região imediatamente após a borda de ataque do canal, enquanto um valor bastante preciso foi encontrado na região de escoamento plenamente desenvolvido.

Dados experimentais foram obtidos por Mercer, Pearce e Hitchcock (1967), por meio da interferometria, para ambas as placas aquecidas isotermicamente, ou para o caso em que uma das placas se encontrava isolada termicamente. Para o primeiro caso, foram levantados dados para duas diferentes velocidades de escoamento, correspondendo a $Re=341$ ou $Re=737$. Foram obtidos resultados para os números de Nusselt local e médio.

Lombardi e Sparrow (1974), utilizando a técnica de sublimação do naftaleno, levantaram dados para o número de Schmidt local para a região de entrada do canal. Valendo-se da analogia entre a transferência de massa convectiva e a transferência de calor, os números de Nusselt locais foram estimados a partir dos resultados de Lombardi por Bhatti e

Savery (1978).

A tabela 3.1 apresenta os resultados experimentais obtidos pelos autores, utilizando-se a normalização adotada no presente trabalho, em função da posição de entrada no canal (Y).

3.6 ACUIDADE DO MÉTODO

Foram obtidos resultados para dois valores do espaçamento da malha numérica, ou seja, uma malha formada por 20 x 600 pontos, com $\Delta X = \Delta Y = 0,05$, e uma malha mais fina formada por 40 x 1200 pontos, com $\Delta X = \Delta Y = 0,025$. O refinamento da malha foi uniforme em todo o domínio, sem que se adotasse um refinamento localizado na entrada do canal, pelas razões expostas no capítulo 2 do presente trabalho.

3.6.1 Resultados para Temperatura de Parede Uniforme (TPU)

A figura 3.4 apresenta as isotérmicas e as linhas de corrente do escoamento na primeira metade do canal, i.é, somente os pontos na região mais próximos à entrada são representados e ainda o eixo X é representado com um fator de escala igual a 2, para maior clareza.

Inicialmente os resultados obtidos para o número de Nusselt médio são comparados com os do modelo parabólico obtidos por Hwang e Fan (1964). Os citados autores encontram resultados muito próximos aos obtidos por Stephan (1959), que estabeleceu a seguinte correlação:

$$Nu_M(Y') = 3,775 + \frac{0,012 (Pr/Y')^{1,14}}{[1 + 0,0358[(Pr^{0,81})/(Y')^{0,64}]]} \quad (3.55)$$

onde $Y' = (Y/4) \cdot Re$

(1) $Y^* = \frac{x}{s}$	(2) Re_s^*	(3) $Y_M^* = \frac{Y^*}{Re_s^*}$	(4) $\frac{Y_M^*}{Pr}$	(5) $Y_B^* = \frac{4Y^*}{Re_s^*}$	(6) Y	(7) Nu_{M0}	(8) Nu_M
2	737	0,027137	0,003876	0,01085	0,1957	14,1	14,5
4	737	0,005427	0,007753	0,02171	0,2714	10,3	10,7
2	341	0,005865	0,008379	0,02946	0,2933	9,3	9,7
6	737	0,008141	0,011630	0,03256	0,4071	7,2	7,5
8	737	0,010855	0,015506	0,04342	0,5427	6,6	7,0
4	341	0,011730	0,016757	0,04692	0,5865	6,4	6,8
6	341	0,017595	0,025136	0,07038	0,8798	5,6	6,0
8	341	0,02946	0,033515	0,09384	1,1730	4,9	5,3

- (1) $Y^* \equiv$ valores de Mercer et al. (1967)
(2) $Re_s^* \equiv$ números de Reynolds, baseados no espaçamento s , usados por Mercer et al. (1967)
(3) $Y_M^* \equiv$ variável adimensionalizada usada por Mercer et al. (1967)
(4) $Y_M^*/Pr \equiv$ abscissa da fig. 7 de Mercer et al. (1967)
(5) $Y_B^* \equiv$ variável adimensionalizada usada por Bhatti e Savery (1978)
(6) $Y = Re_s \cdot Y_M^*$ com $Re_s = 50$ usado nesse trabalho
(7) $Nu_{M0} \equiv$ ordenada da fig. 7 de Mercer et al. (1967)
(8) $Nu_M \equiv$ valor obtido da expressão φ de Mercer et al. (1967)
(9) $Nu_e \equiv$ Nusselt local medido por Mercer et al. (1967)
(10) $Nu_p \equiv$ Nusselt local previsto a partir dos dados experimentais de Lombardi e Sparrow (1974) por Bhatti e Savery (1978)

(6) Y	(9) Nu_e	(10) Nu_p
0,1957	6,46	6,696
0,2714	4,97	5,014
0,2933	4,50	4,856
0,4071	4,18	4,266
0,5427	3,74	3,786
0,5865	3,49	3,686
0,8798	3,03	3,176
1,1730	2,70	2,872

Tabela 3.1 Dados experimentais para a convecção forçada

A figura 3.5 apresenta os resultados comparativos entre o presente modelo e a correlação de Stephan.

Uma diferença da ordem de 18% é observada na entrada do canal e de 2% para o valor assintótico. No caso da malha mais fina, o valor obtido no presente trabalho para o valor assintótico, i. é, $Nu_D = 7,54$, é coincidente com o valor encontrado através de uma solução analítica para o escoamento plenamente

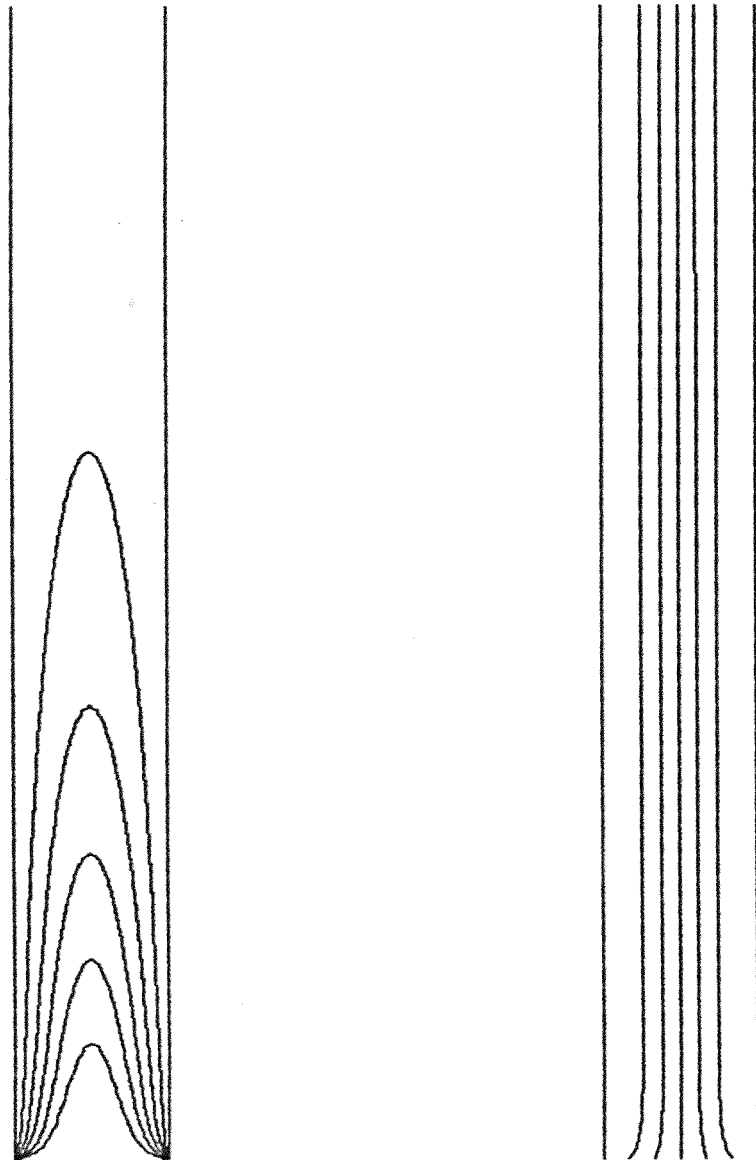


Fig. 3.4 Isotérmicas e linhas de corrente para
Temperatura de Parede Uniforme.

desenvolvido.

Os resultados também indicam que, se a comparação fosse restrita ao modelamento parabólico, os resultados da malha mais grossa poderiam ser os adotados. Entretanto, quando comparados com os resultados experimentais devidos a Mercer et al.(1967) pela figura 3.6, nota-se que o refinamento utilizado na malha mais fina é relativamente mais preciso. No entanto há uma considerável discordância entre os modelamentos parabólico e elíptico, conforme a figura indica. Aparentemente o modelamento elíptico representa melhor os pontos mais próximos à entrada e o modelamento parabólico os demais pontos, com os dois modelos coincidindo para o escoamento plenamente desenvolvido. Há também uma forte dependência da grade escolhida, o que contraria o esperado.

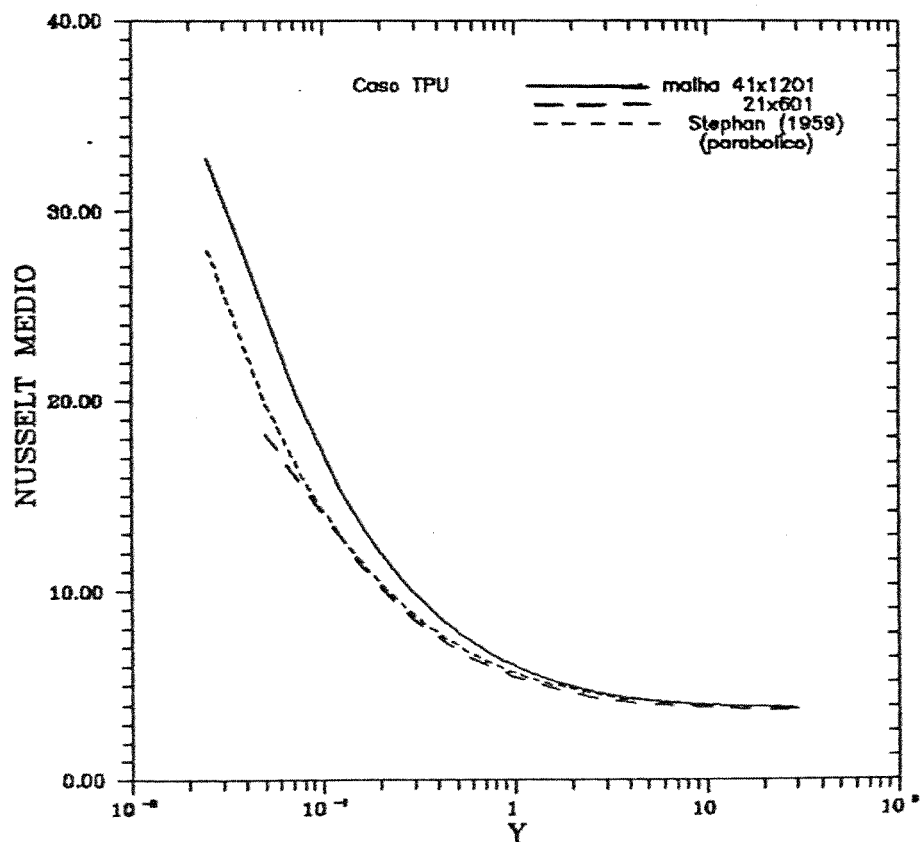


Fig. 3.5 Número de Nusselt Médio para o caso TPU

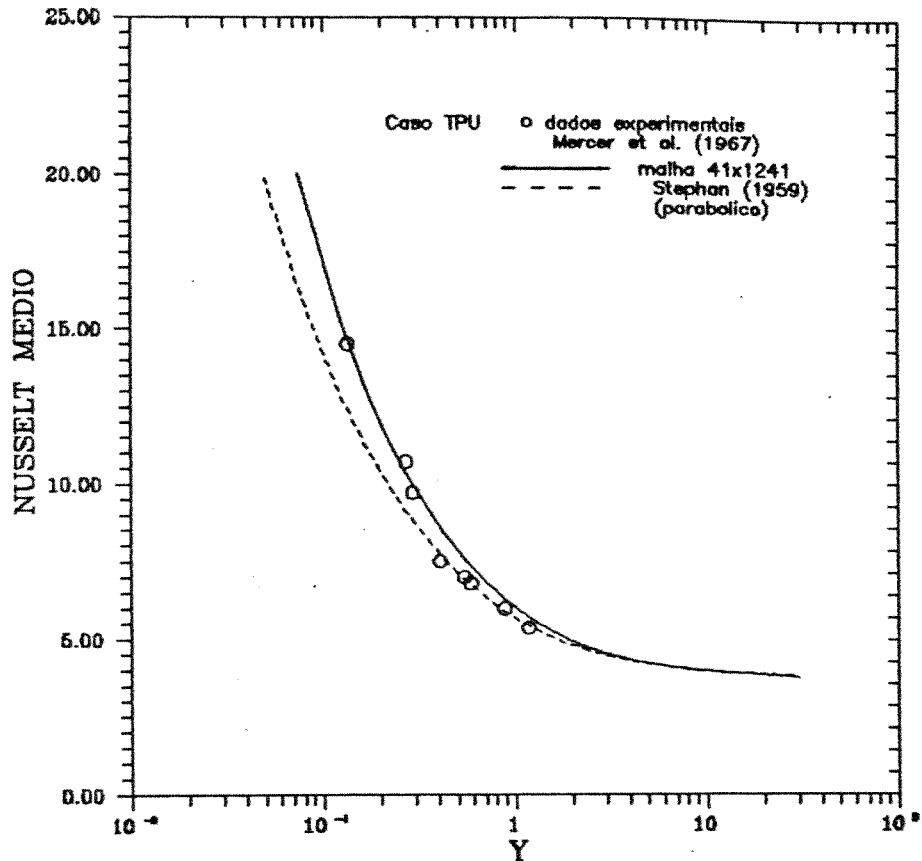


Fig. 3.6 Comparação entre os modelos elíptico e parabólico

Com essa incoerência observada, foi levantada a maioria dos modelos apresentados anteriormente na literatura, e a figura 3.7 foi construída a partir dos trabalhos citados. Há, como se pode notar, um considerável espalhamento dos resultados produzidos pelas diferentes abordagens adotadas para representar o fenômeno. Entretanto, o modelamento elíptico, por representar a mais completa abordagem teórica do fenômeno, deveria fornecer os melhores resultados. Qual seria, então, a falha na abordagem?

Na figura 3.8, os valores do número de Nusselt local obtidos experimentalmente por Mercer et al. (1967) e os previstos a partir da experiência de Lombardi e Sparrow (1974) são apresentados e, como se vê, a curva obtida do modelamento elíptico mais refinado ajusta muito bem os pontos experimentais, a não ser os pontos mais próximos à entrada.

No modelamento adotado, a condução de calor axial no fluido

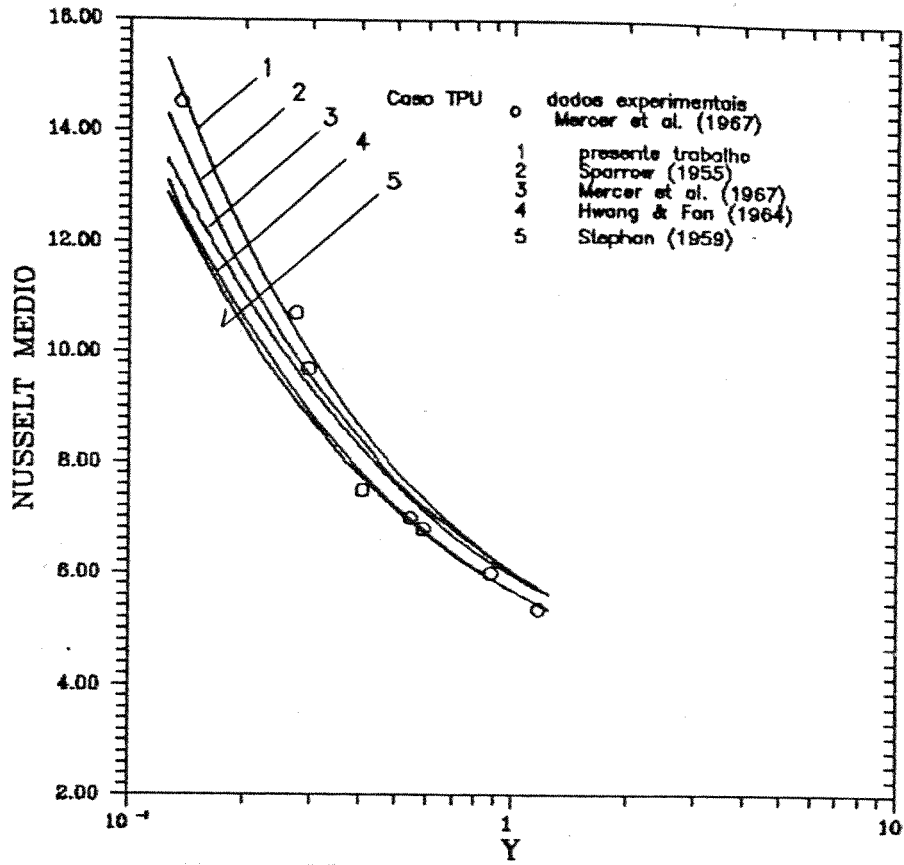


Fig 3.7 Comparação entre vários modelos teóricos

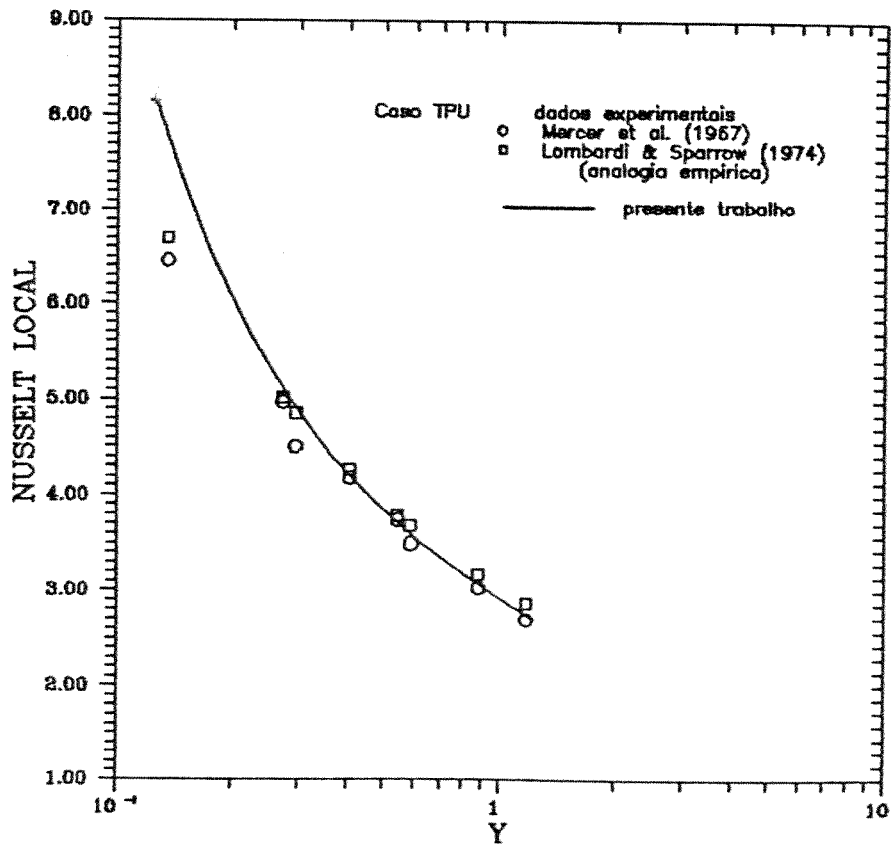


Fig. 3.8 Número de Nusselt local comparado aos dados experimentais para o caso TPU

é considerada, mas a imposição da condição de contorno adotada até aqui mascara o efeito na região anterior à entrada do fluido no canal.

O efeito do número de Peclet do escoamento no estabelecimento do perfil de temperatura do fluido, para o caso de temperatura de parede uniforme, havia sido estudado entre outros por Agrawal (1960) e por Schmidt e Zeldin (1970). Mais

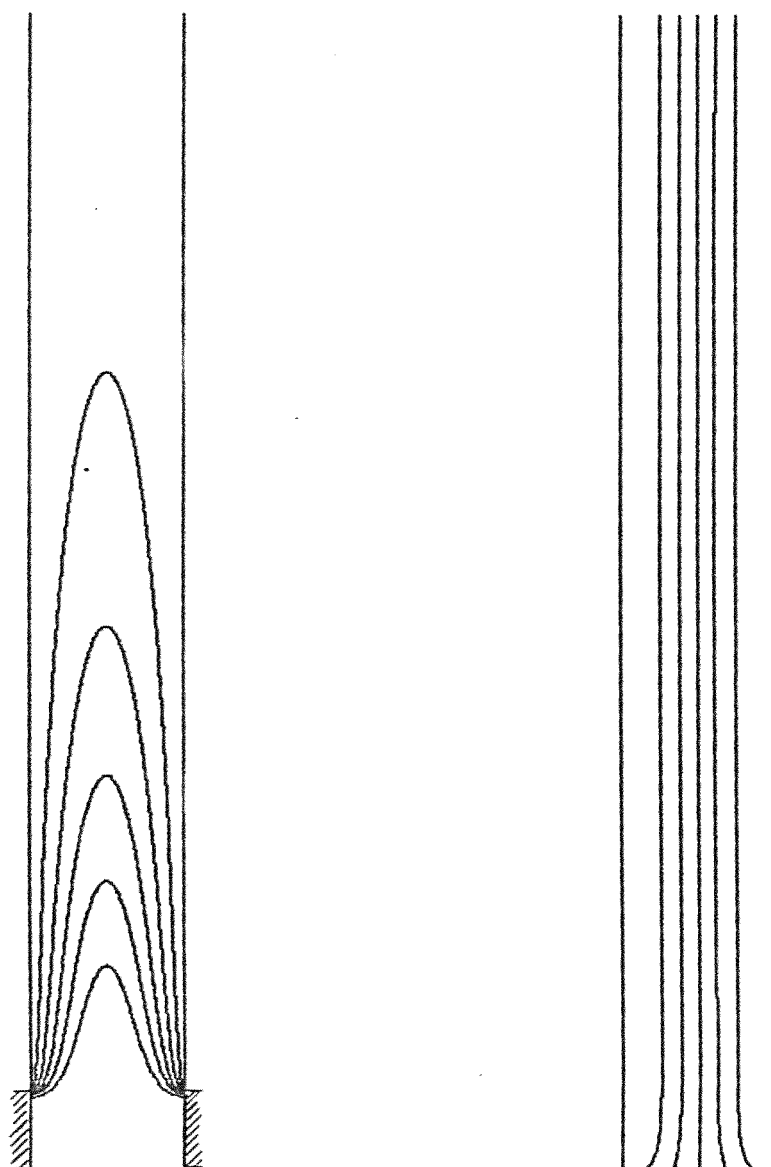


Fig. 3.9 Isotérmicas e linhas de corrente para o caso TPU com seção inicial isolada.

recentemente Chow et al. (1984) apresentaram um interessante trabalho sobre a convecção mista em canais com fontes de calor discretas localizadas em uma das paredes. O modelamento elíptico foi utilizado e duas regiões isoladas termicamente na entrada e na saída do canal foram adicionadas ao modelamento. Os autores mostram que para $Pe < 50$ a condução axial é significativa para o fenômeno. Para o atual problema, o número de Peclet do escoamento adotado é $Pe = 36$ e, portanto, a condução de calor axial deve ser significativa.

A figura 3.9 apresenta as isotérmicas e as linhas de corrente do escoamento, quando uma região isolada termicamente, de comprimento igual ao espaçamento das placas, é adotada na entrada do canal. Como se nota na figura, o fluido é aquecido por condução axial antes de entrar no canal vertical.

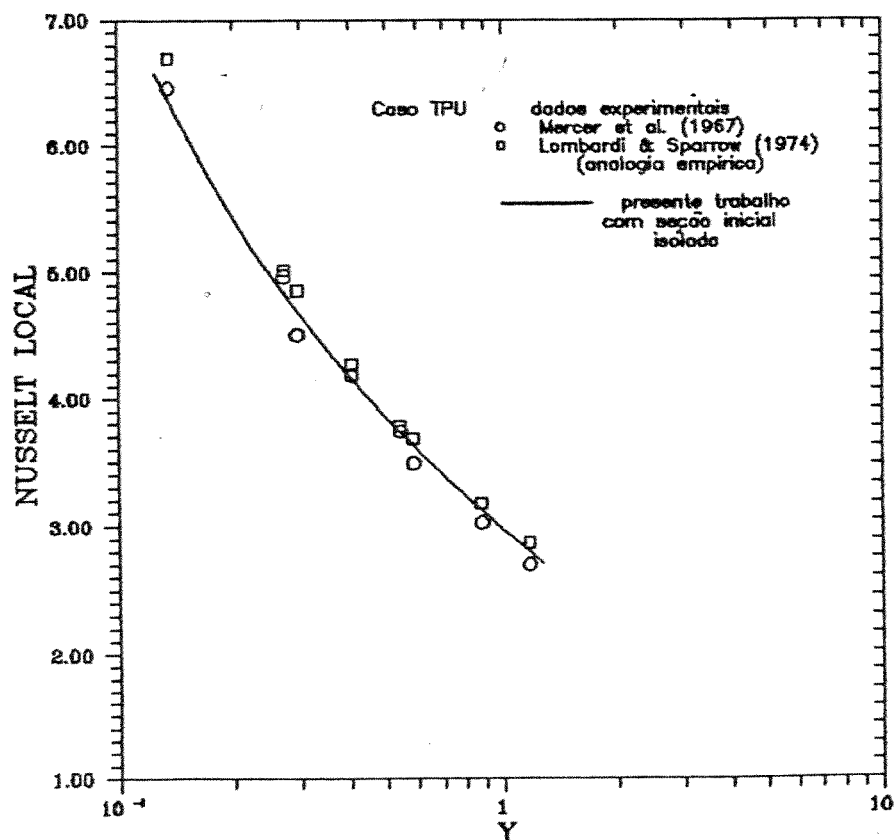


Fig. 3.10 Número de Nusselt local para o caso TPU com seção inicial isolada

A figura 3.10 apresenta os resultados do número de Nusselt local, com esta nova condição de contorno adotada no modelamento, mostrando a adequação do modelo elíptico e a importância da escolha adequada das condições de contorno na entrada.

O número de Nusselt médio deve ser redefinido para essa nova circunstância. A figura 3.11 representa o balanço de energia para o escoamento, quando a condução axial é considerada.

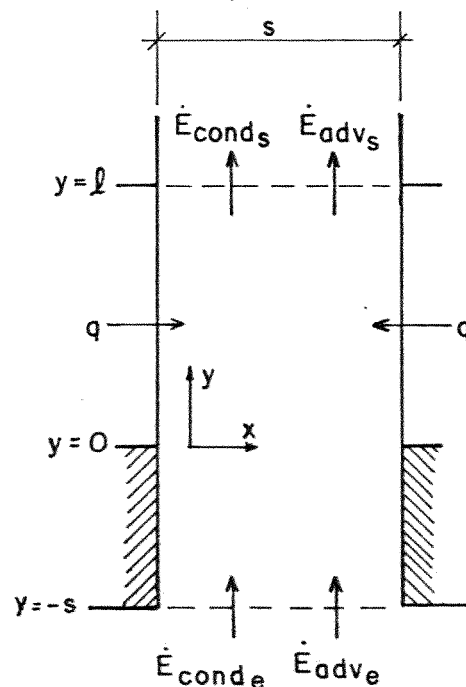


Figura 3.11 Balanço de Energia em Regime Permanente

Em regime permanente temos:

$$2q_{o,y} + \dot{E}_{cond_e} - \dot{E}_{cond_s} + \dot{E}_{adv_s} - \dot{E}_{adv_e} = 0 \quad (3.56)$$

$$2q_{o,y} = \left[k \int_0^s \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_{y=-s} - \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_{y=l} \right) (1u) dx + \int_0^s \rho c_p v (s - 1u) (T_{M_s} - T_{M_e}) \right] \quad (3.57)$$

Supondo que a região isolada seja suficiente para que não haja perda de calor por condução na entrada, i.é, $\dot{E}_{cond_e} = 0$,

tem-se:

$$2(l-1u) h_{M_0} (T_P - T_0) = \int_0^s \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=l} \right) dx + \int_0^s \rho c_p (v-1u) dx (T_{M_s} - T_{M_e}) \quad (3.58)$$

Adimensionalizando-se, tem-se:

$$Nu_{M_0}(Y) = \frac{1}{2Y} \int_0^1 \left(-\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=Y_{max}} dX + \frac{Pe}{2} (\theta_{M_Y} - \theta_0) \quad (3.59)$$

A figura 3.12 apresenta os resultados obtidos para o número de Nusselt médio baseado na temperatura de entrada, quando comparado com os dados experimentais de Mercer et al. (1967). A curva obtida se ajusta com muito mais uniformidade aos pontos experimentais, conforme pode ser observado na figura. O desvio dos pontos experimentais em relação à curva teórica é, no máximo, de $\pm 5-6\%$, o que é perfeitamente compatível com o erro produzido pela instrumentação utilizada nas experiências.

Uma análise da influência da grade numérica será agora realizada para essa nova condição de contorno adotada.

A figura 3.13 apresenta os números de Nusselt local obtidos para três diferentes malhas numéricas; uma malha com (21x621) pontos, para a qual $\Delta X = \Delta Y = 0,05$, que será tratada como a malha a; uma outra com (31x931) pontos para a qual $\Delta X = \Delta Y = 0,0333$, tratada como a malha b, e uma terceira com (41x1241) pontos para a qual $\Delta X = \Delta Y = 0,025$, tratada como a malha c. Como pode ser observado na figura, há uma pequena diferença entre os resultados, principalmente nas proximidades da entrada do canal, com as malhas b e c produzindo Nu diferentes em cerca de 3% somente para Y menores do que aproximadamente 0,1. O resultado confirma a pequena dependência ao refinamento da grade, nas proximidades da

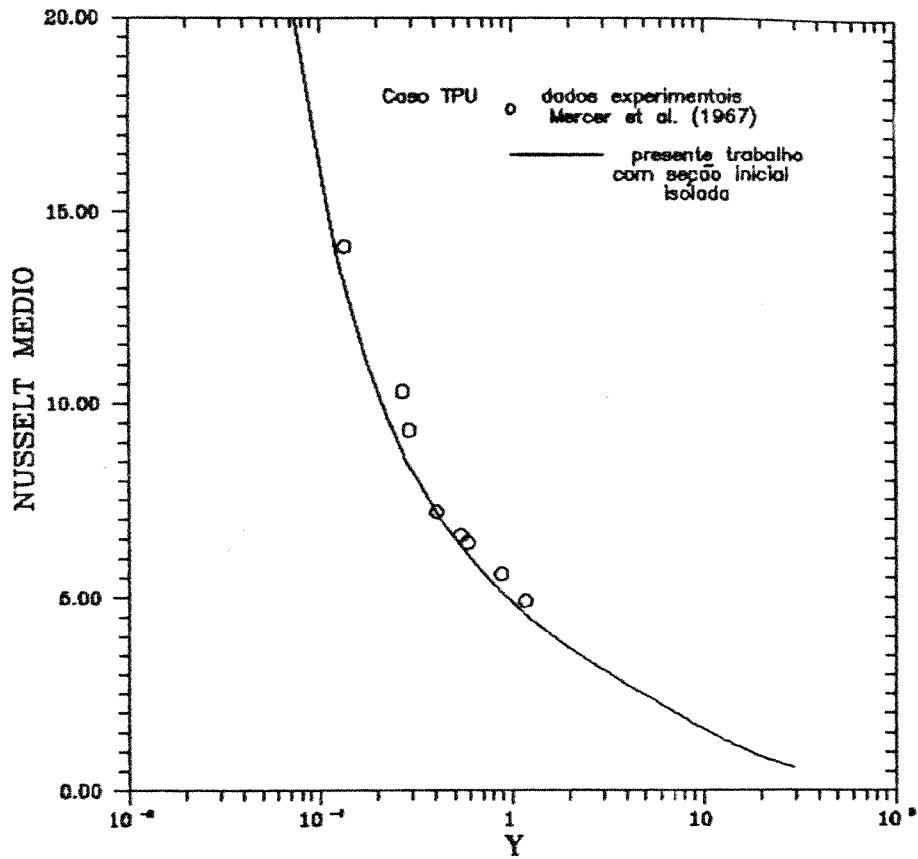


Fig. 3.12 Número de Nusselt médio baseado na temperatura de entrada com seção inicial isolada

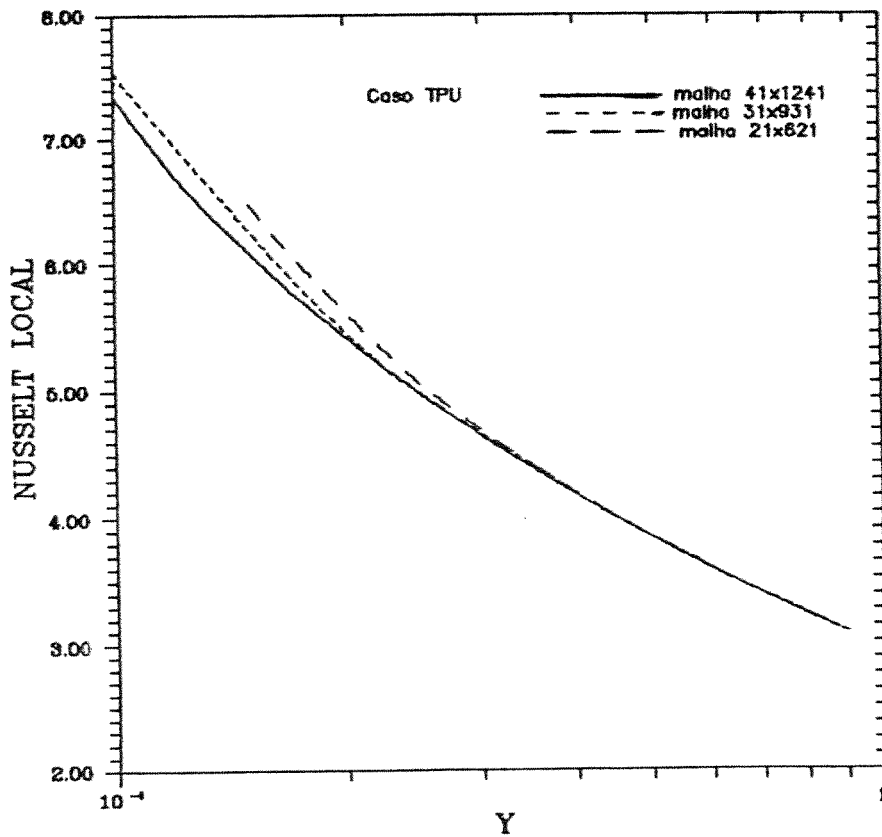


Fig. 3.13 Número de Nusselt local para diferentes grades numéricas. Caso TPU com seção inicial isolada.

entrada do canal, para o cálculo dos valores locais.

Já quando se observam os resultados obtidos para o número de Nusselt médio, através das figuras 3.14 e 3.15, nota-se a quase independência dos resultados ao refinamento da grade. A restrição integral imposta pela relação (3.45) produz um balanço global que torna os resultados do número de Nusselt médio independente do refinamento da grade e permite que se obtenham resultados acurados sem que se utilize um tempo excessivo de computação, adotando-se a malha a, com $\Delta X = \Delta Y = 0,05$.

O conjunto de resultados apresentados mostra que o algoritmo desenvolvido é bastante acurado para representar o fenômeno estudado e que cuidados especiais devem ser adotados para simular a entrada do escoamento no caso (TPU). Cabe também ressaltar que, pela limitação do algoritmo atual em trabalhar somente com grades

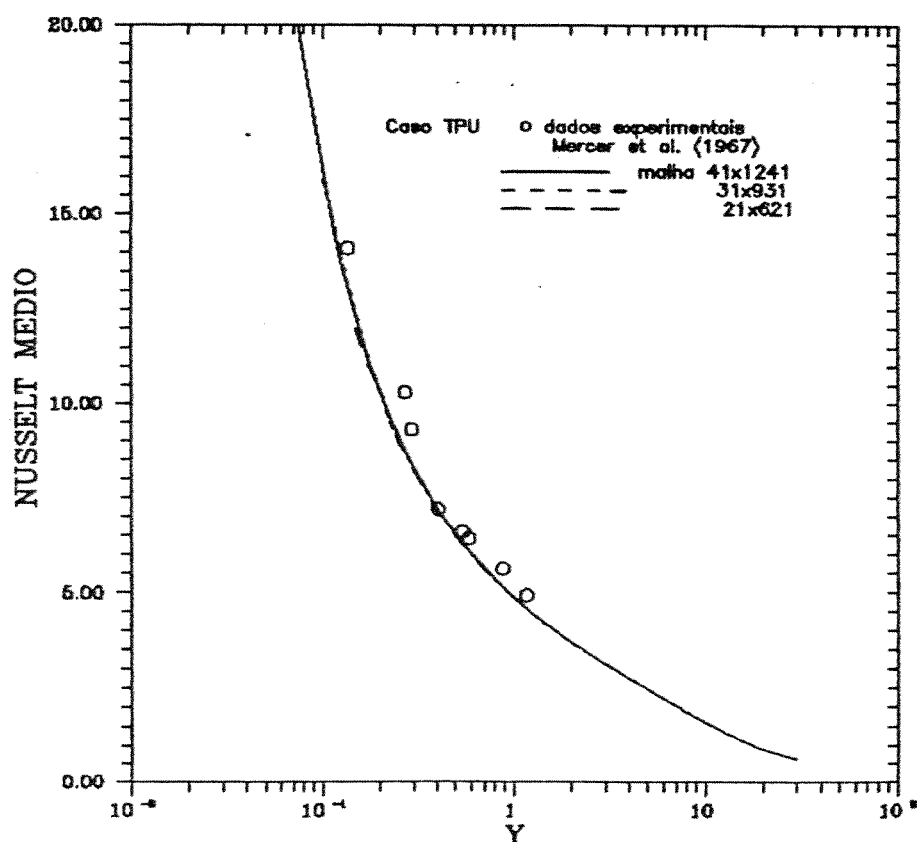


Fig. 3.14 Número de Nusselt médio, influência da malha numérica

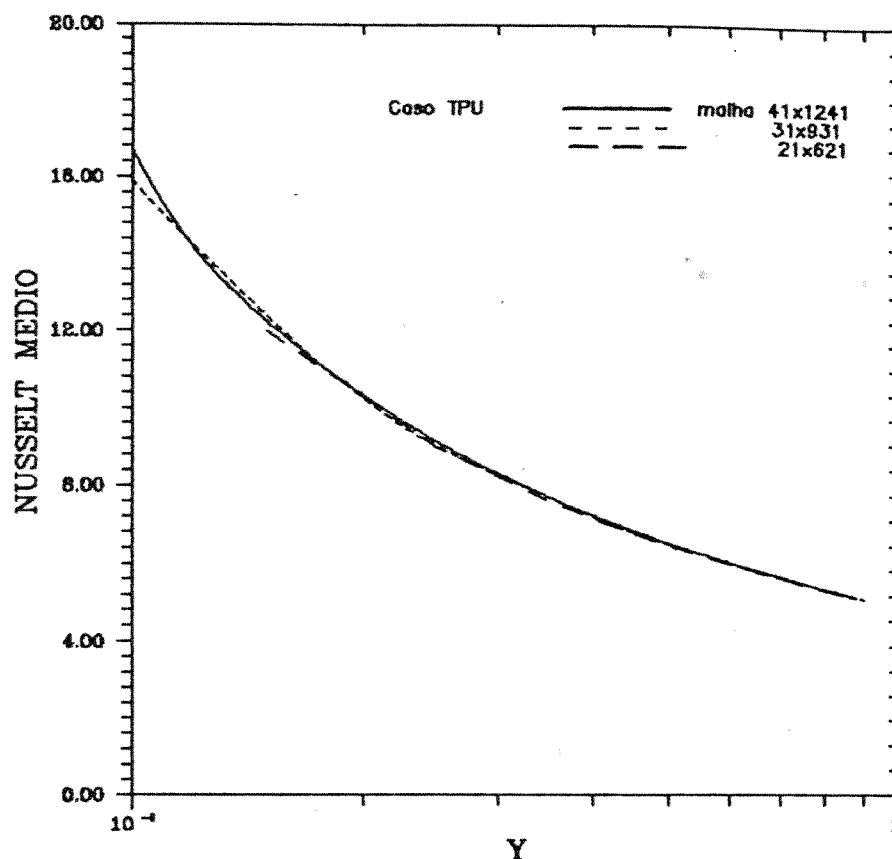


Fig. 3.15 Número de Nusselt médio, influência da grade numérica. (ampliação)

regulares, um refinamento restrito à entrada do canal foi impraticável.

3.6.2 Resultados para Fluxo de Calor Constante (FCC)

O caso de fluxo de calor uniforme nas paredes é de bastante interesse para a simulação do resfriamento convectivo de dispositivos eletrônicos. A condição de contorno imposta permite que se avaliem os níveis de temperatura atingidos por placas que dissipam determinados níveis de potência elétrica, por efeito Joule, e que são resfriadas pelo escoamento convectivo do ar. Dessa maneira, é possível avaliar a adequação do escoamento para evitar que os dispositivos atinjam as temperaturas críticas das junções eletrônicas dos equipamentos.

A figura 3.16 apresenta as isotérmicas e as linhas de corrente do escoamento forçado estudado. A figura 3.17 e a tabela

3.2 mostram os valores do número de Nusselt local encontrados pelo modelamento elíptico e os resultados obtidos pelo modelamento parabólico devido à Hwang e Fan (1964).

Como podemos observar, os resultados são bem mais próximos do que os obtidos para o caso TPU, diferindo cerca de 10% na borda de ataque do canal e praticamente coincidindo no escoamento plenamente desenvolvido. A influência da condução de calor axial

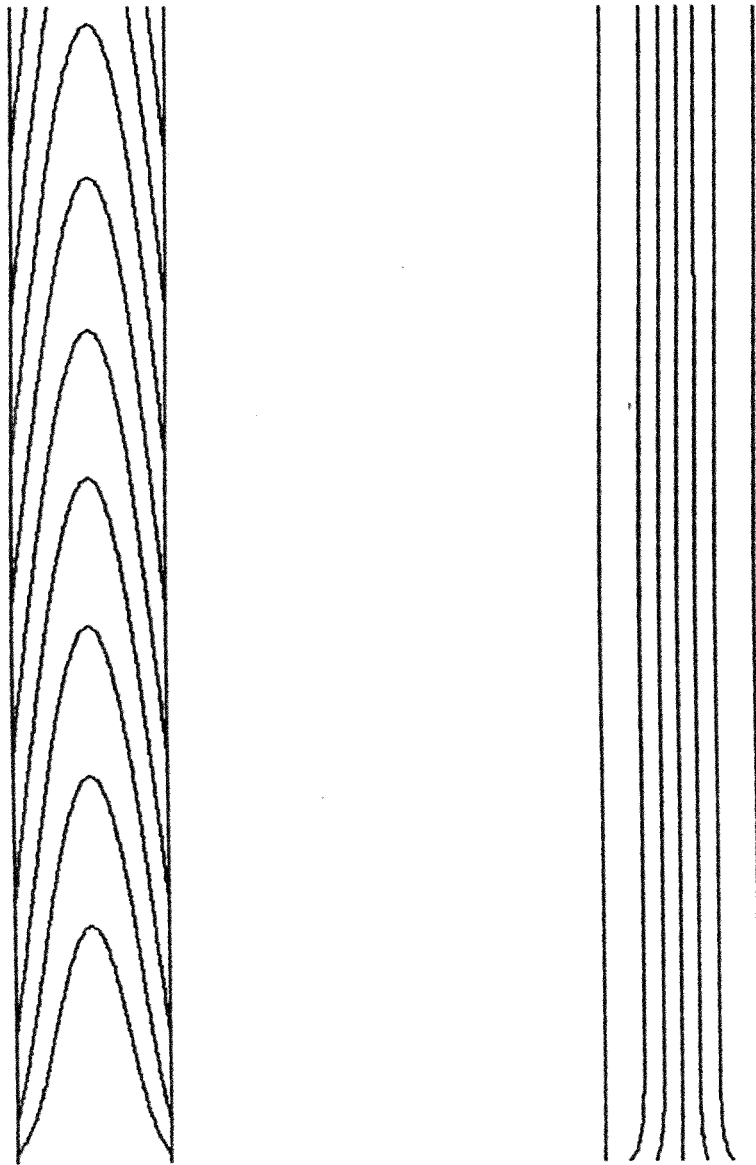


Fig. 3.16 Isotérmicas e linhas de corrente para o caso FCC

Y	CASO TPU		CASO FCC	
	θ_M	θ_P	θ_M	θ_P
-0,50	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,45	0,000	0,001	0,000	0,000
-0,40	0,000	0,002	0,000	0,000
-0,35	0,000	0,003	0,000	0,000
-0,30	0,000	0,007	0,000	0,001
-0,25	0,001	0,014	0,000	0,001
-0,20	0,002	0,029	0,000	0,002
-0,15	0,005	0,061	0,000	0,005
-0,10	0,010	0,128	0,001	0,010
-0,05	0,020	0,276	0,002	0,021
0,00	0,037	1,000	0,003	0,048
0,05	0,057	1,000	0,006	0,095
0,10	0,074	1,000	0,008	0,120

Tabela 3.2 Dados comparativos entre as temperaturas para o caso TPU e para o caso FCC anterior à entrada.

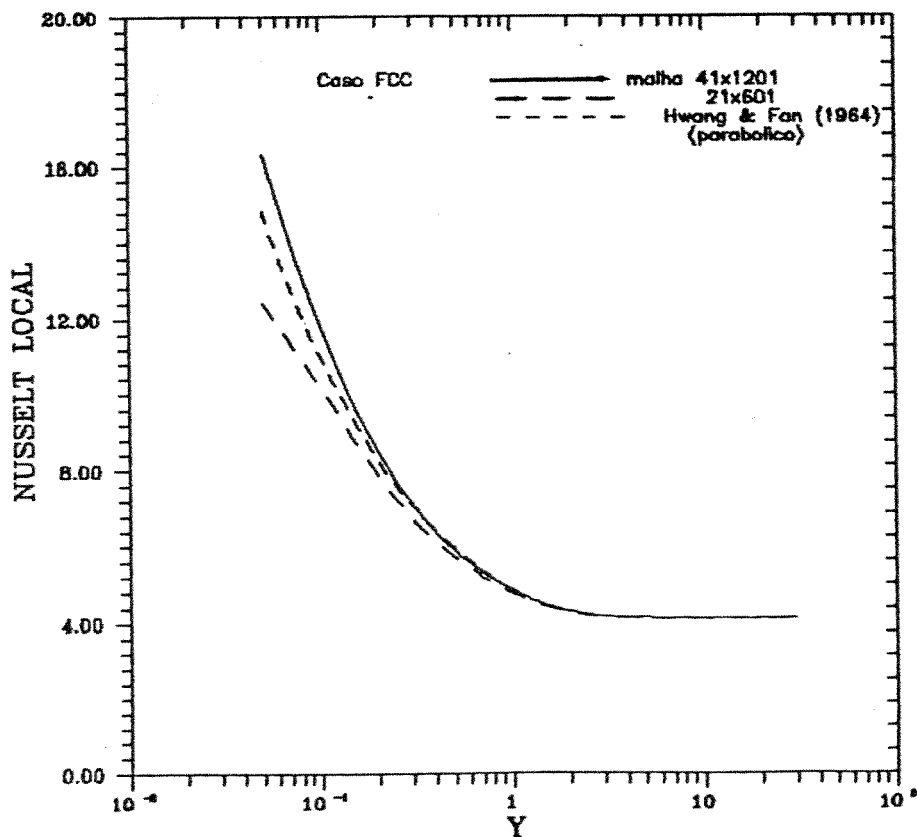


Fig. 3.17 Numero de Nusselt local para o caso FCC

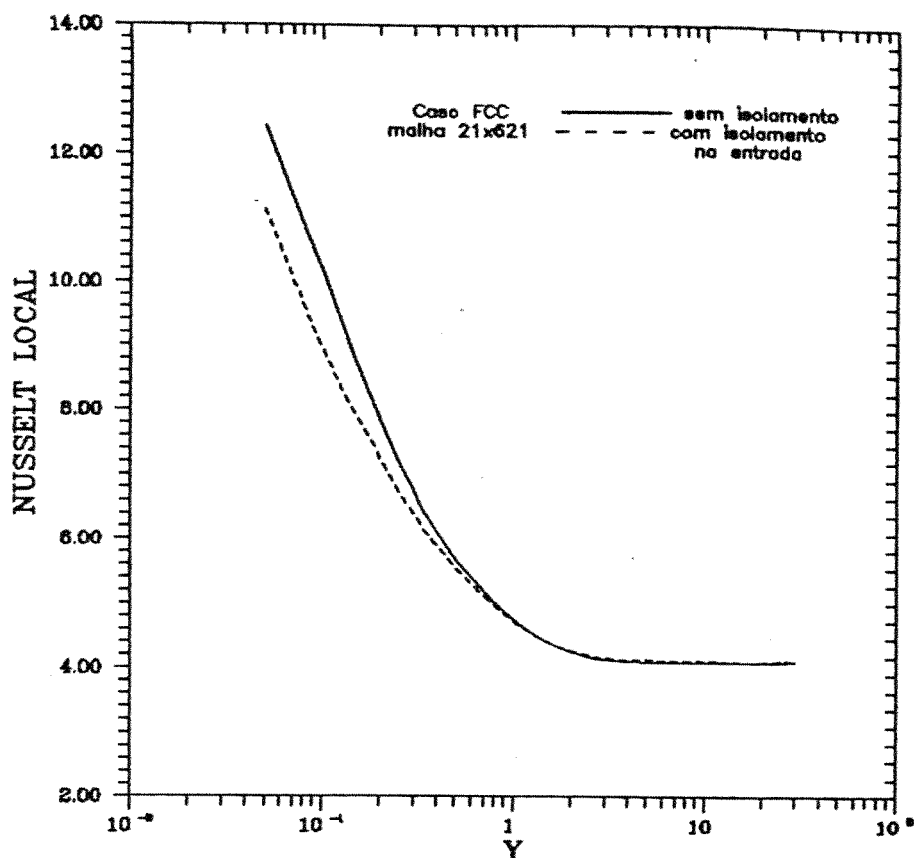


Fig. 3.18 Número de Nusselt local comparado com e sem seção inicial isolada, caso FCC.

na entrada do canal, nesse caso, é menor quando comparada com o caso TPU, como podemos notar pelos dados da tabela 3.2. Os dados dessa tabela foram obtidos pela simulação de um escoamento com a parte inicial do canal isolada, para os dois casos estudados. A falta de dados experimentais disponíveis na literatura para esse último caso impossibilitou uma validação experimental.

Entretanto, ao analisarem-se os resultados apresentados na figura 3.18, para o número de Nusselt local, obtido com a seção inicial isolada, observa-se que na região de entrada do canal os resultados diferem em cerca de 10% dos obtidos, quando não se adota a região isolada na entrada e se utiliza a grade a, com $\Delta X = \Delta Y = 0,05$.

Os resultados obtidos para o número de Nusselt, utilizando-se a condição de contorno que mascara a condução de calor axial no fluido, não provoca, entretanto, um erro

significativo nas distribuições de temperaturas de parede e de mistura ao longo do canal, conforme pode ser visto na figura 3.19. Como foi observado, para o caso de FCC o principal objetivo é encontrar a variação da temperatura da parede ao longo do canal que permita estimar as temperaturas críticas das placas. Portanto, se estaria superestimando o valor dessa temperatura próxima à saída do canal em apenas 1% ao não se adotar a condição de contorno fisicamente mais adequada.

A figura 3.20 indica que, para o caso FCC, quando se emprega a seção inicial isolada, o valor local do número de Nusselt é independente do refinamento da grade. Aqui, em razão da variação lenta das temperaturas de parede e de mistura, quando comparadas ao caso TPU, observa-se uma completa independência do valor do Nusselt local em relação ao refinamento da grade numérica.

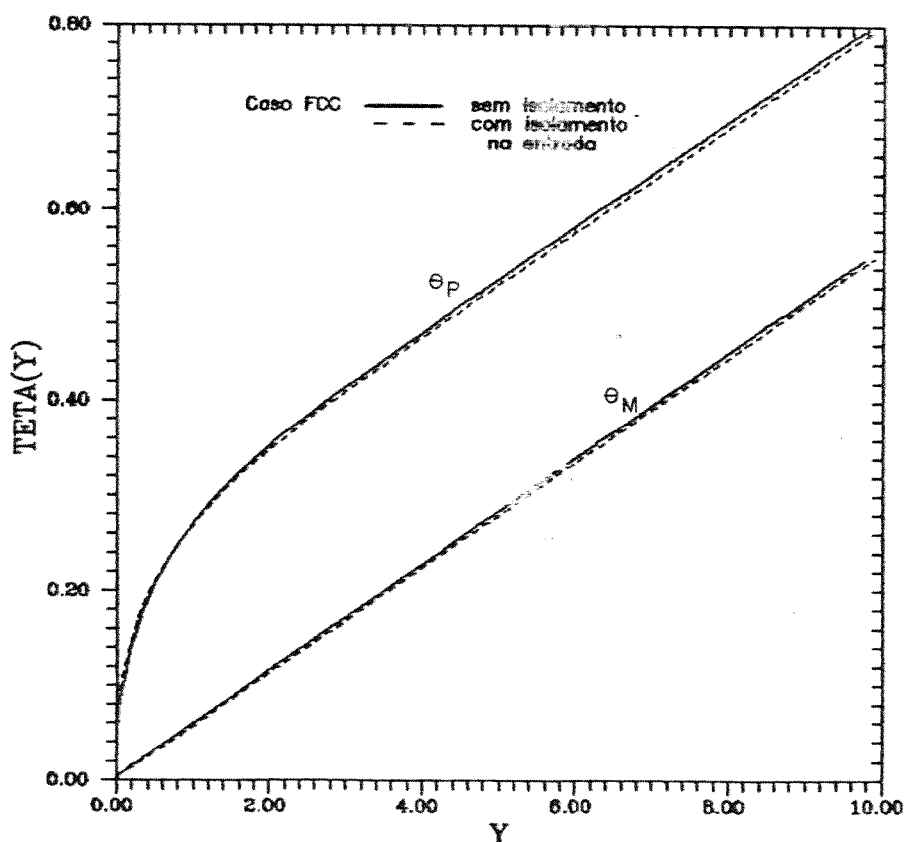


Fig. 3.19 Temperaturas de mistura e de parede.

Caso FCC, com ou sem seção inicial isolada.

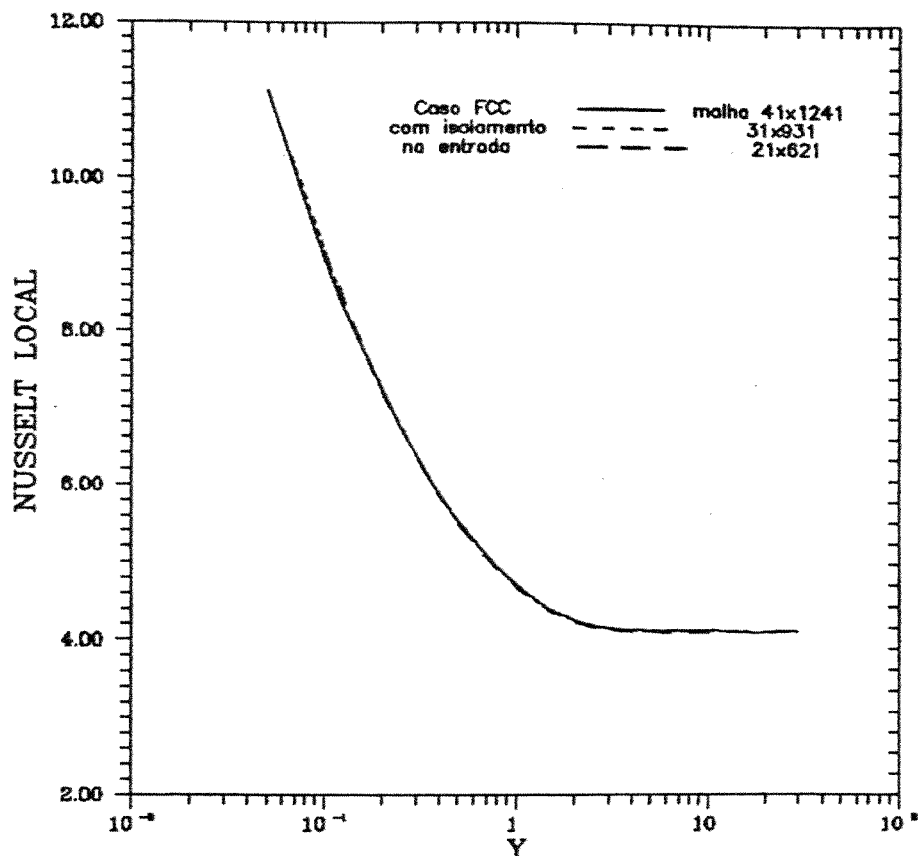


Fig. 3.20 Número de Nusselt local, caso FCC com seção inicial isolada; variação com a grade numérica

No próximo tópico será estudado o caso da convecção mista e, novamente por falta de dados experimentais, os resultados obtidos serão comparados com os do modelo parabólico. Entretanto pode-se concluir, a partir dos resultados obtidos até aqui, que o modelamento elíptico apresenta resultados distintos dos obtidos pelo modelamento parabólico para o caso em que a condução de calor axial é significativa e que o método numérico aqui desenvolvido simula com precisão os casos para os quais as condições de contorno possam ser estabelecidas a priori e sejam fisicamente aceitáveis.

3.7 A CONVECÇÃO MISTA

Foram obtidos resultados para o escoamento do ar ($Pr=0,72$), com $Re=50$ e $Gr/Re=100$ e 500 para o caso TPU e $Gr/Re=50$ e 500 para o caso FCC.

A figura 3.21 apresenta os valores da velocidade no centro do canal em função da posição vertical, para o caso TPU, comparados com os valores obtidos por Aung e Worku (1986a). A mesma tendência observada no modelamento parabólico, com a existência de um ponto de mínimo nas curvas para Gr/Re maiores do que 100, foi obtida. A ação da força de empuxo, aumentando a vazão em massa perto da parede e com a vazão em massa total fixada, justifica a existência dessa depressão nas curvas.

Nas figuras 3.22, velocidades na entrada do canal são apresentadas para três diferentes posições verticais bastante próximas do início do canal, tendo como parâmetro a relação Gr/Re . Para cada uma das posições apresentadas nota-se o aumento da velocidade próxima à parede, à medida que Gr/Re aumenta e o

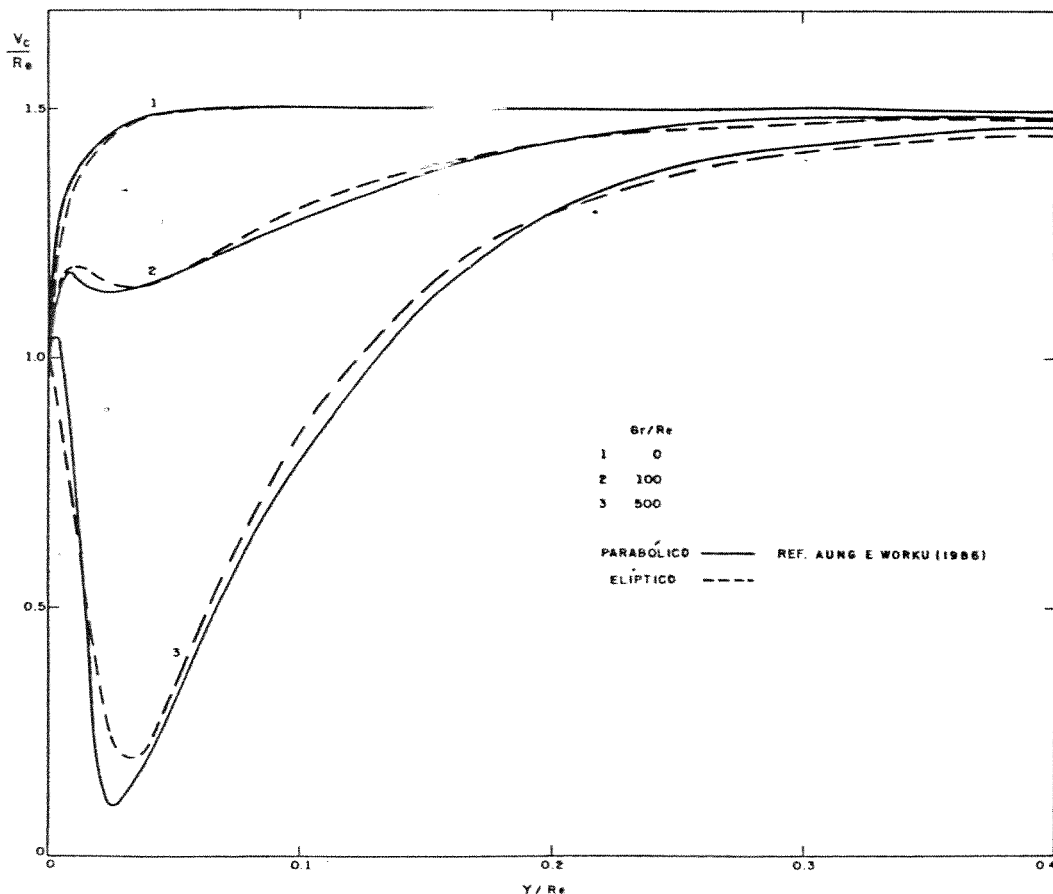


Fig. 3.21 Velocidades no centro do canal para convecção mista, modelo elíptico e modelo parabólico. Caso TPU

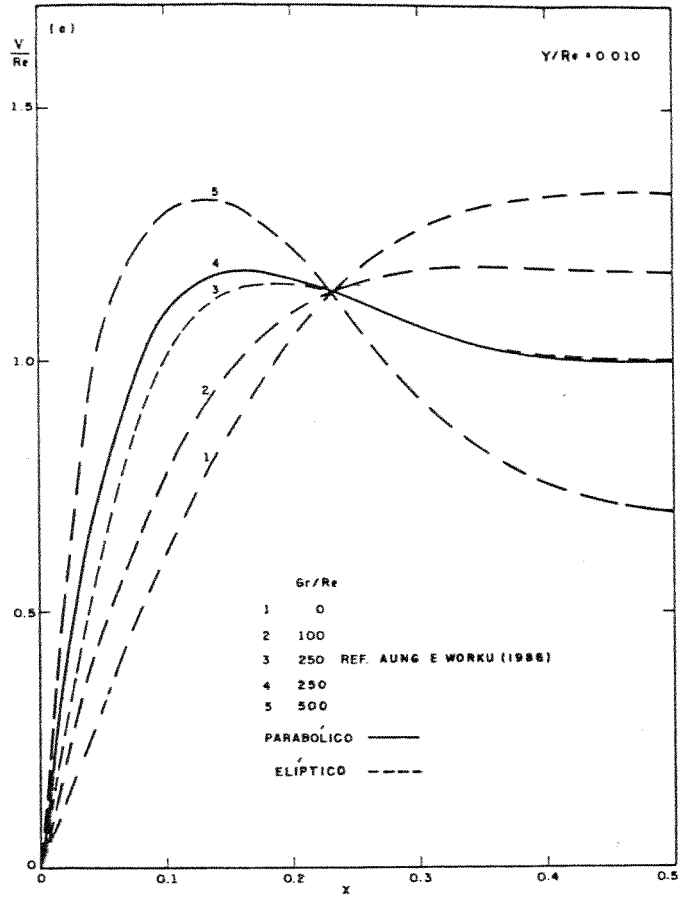


Fig. 3.22a Velocidades na entrada do canal.

Caso TPU, $Y/Re=0,010$

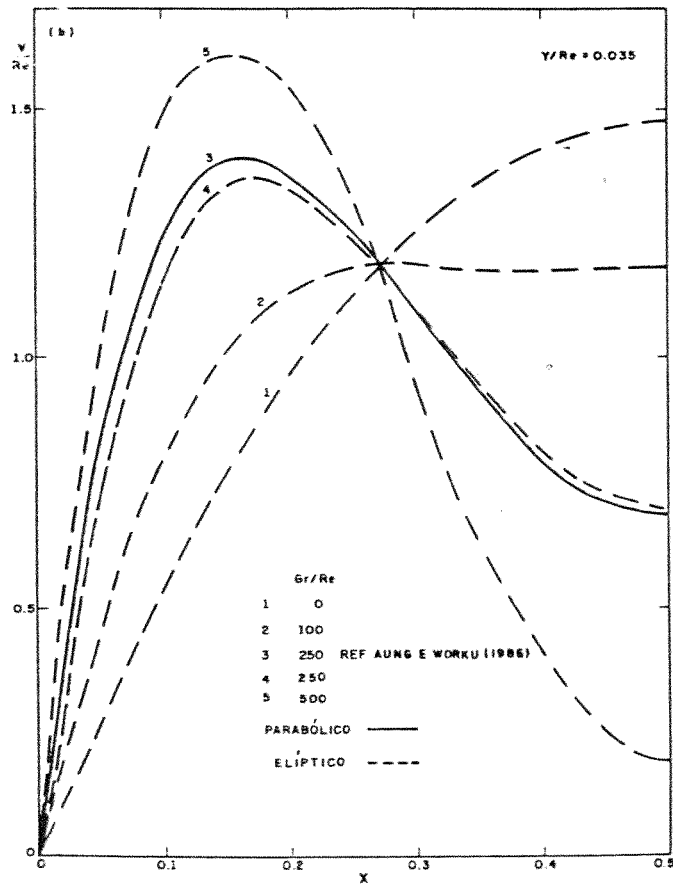


Fig 3.22b Velocidade na entrada do canal.

Caso TPU, $Y/Re=0,035$

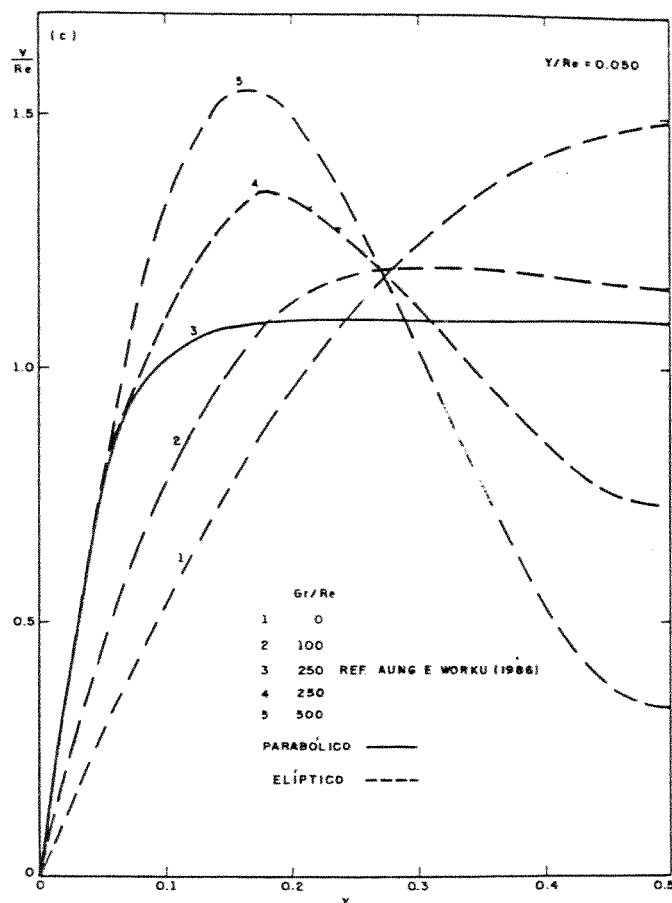


Fig. 3.22c Velocidade na entrada do canal.

Caso TPU, $Y/Re=0,050$

estabelecimento de uma concavidade no centro do canal. Observa-se pelas figuras que os modelos concordam bem nas posições mais próximas à entrada do canal, diferindo somente na posição em que o escoamento atinge o regime plenamente desenvolvido (fig. 3.22c).

A figura 3.23 apresenta a variação axial da temperatura de mistura, indicando uma pequena diferença entre os resultados obtidos com o modelamento elíptico e com o modelamento parabólico. Nota-se que essa diferença ocorre próximo à entrada do canal e se mantém até valores altos de Y/Re . Com o aumento de Gr/Re , o resultado da aproximação elíptica acompanha qualitativamente o obtido pelo modelo parabólico. Aqui não está considerado o efeito da condução axial na entrada do canal

A figura 3.24 apresenta os números de Nusselt médios obtidos

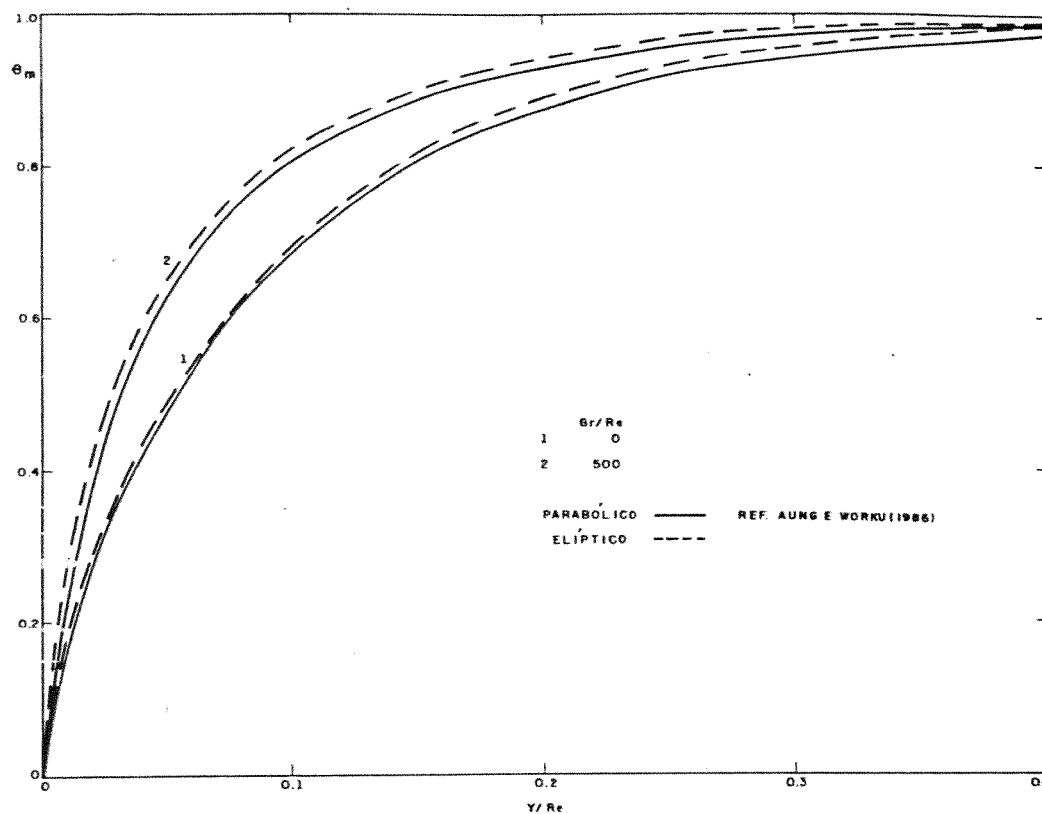


Fig. 3.23 Variação axial da temperatura de mistura,

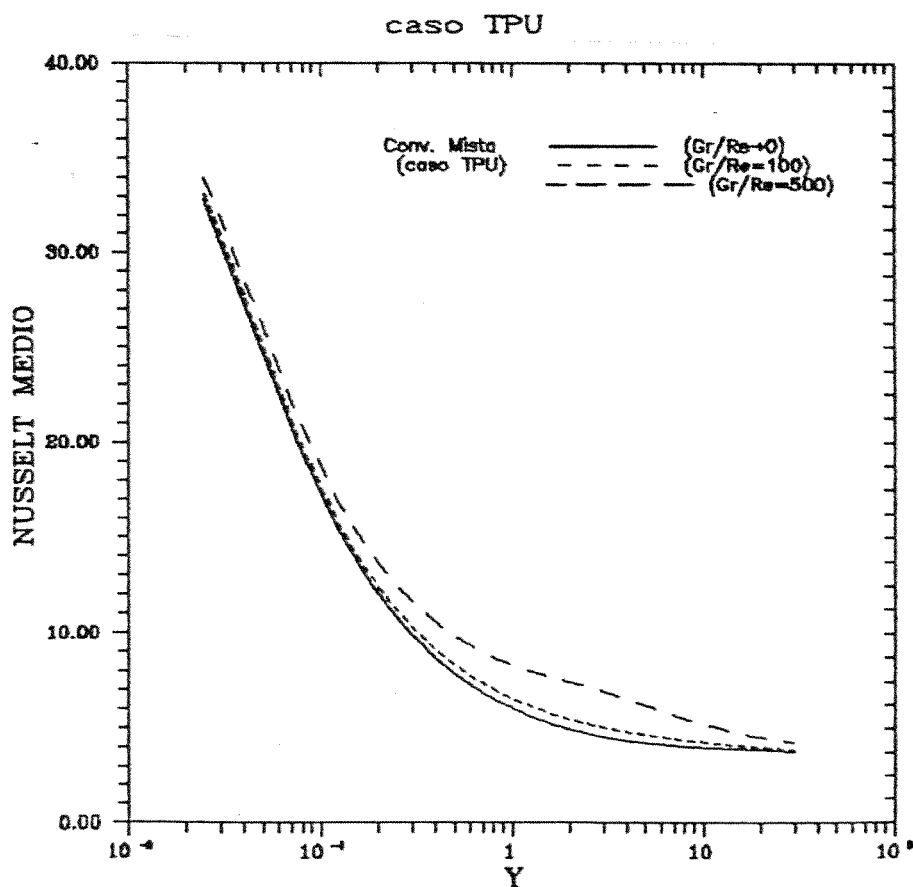


Fig. 3.24 Número de Nusselt médio para a convecção mista, caso TPU

para os casos estudados. A figura indica o aumento do número de Nusselt na entrada do canal devido à presença da força de empuxo para $Gr/Re=100$ e 500 , em relação à convecção forçada ($Gr/Re \rightarrow 0$). Para $Gr/Re=500$ a concavidade obtida na curva parece sugerir que a condição de contorno utilizada na saída não é muito adequada nesse caso.

A figura 3.25 mostra as temperaturas de parede e de mistura para o caso FCC, quando $Gr/Re \rightarrow 0$ e quando $Gr/Re=500$. Observou-se que o efeito da convecção natural não foi significativo para $Gr/Re=50$, com os resultados coincidindo com os da convecção forçada.

Na figura 3.26, na qual temos os números de Nusselt local para o caso FCC, pode-se observar o aumento do valor assintótico do número de Nusselt devido ao efeito da convecção natural, para

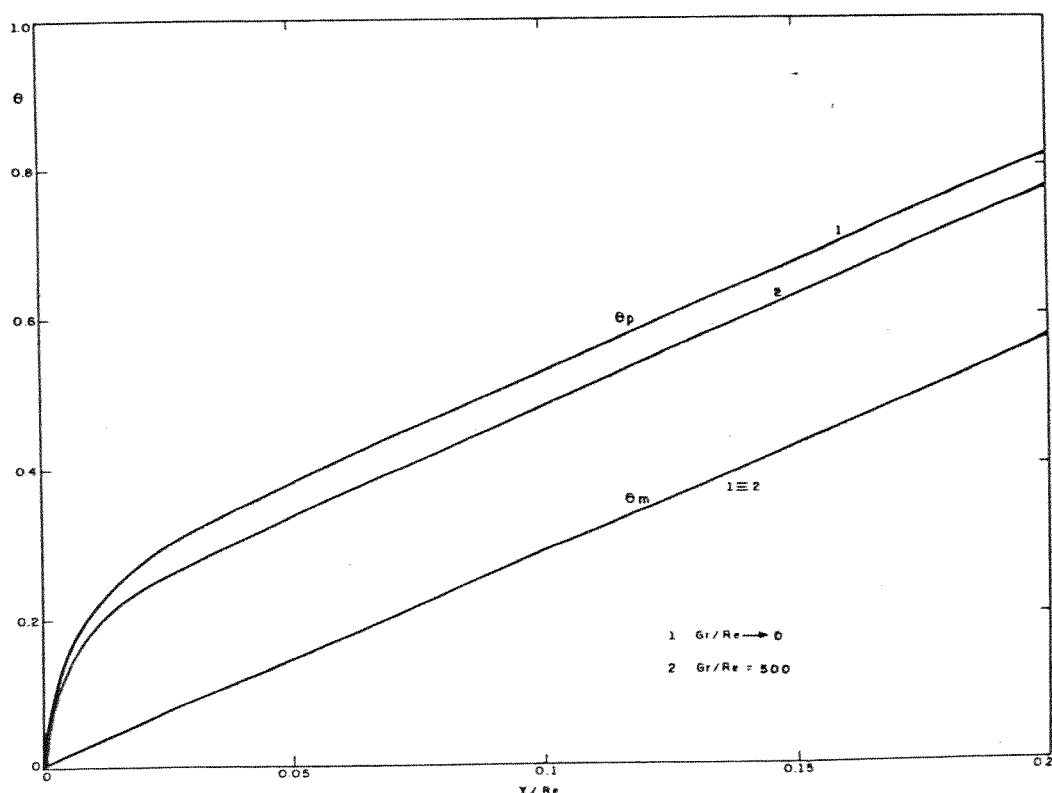


Fig. 3.25 Temperatura de mistura e de parede.

Caso FCC

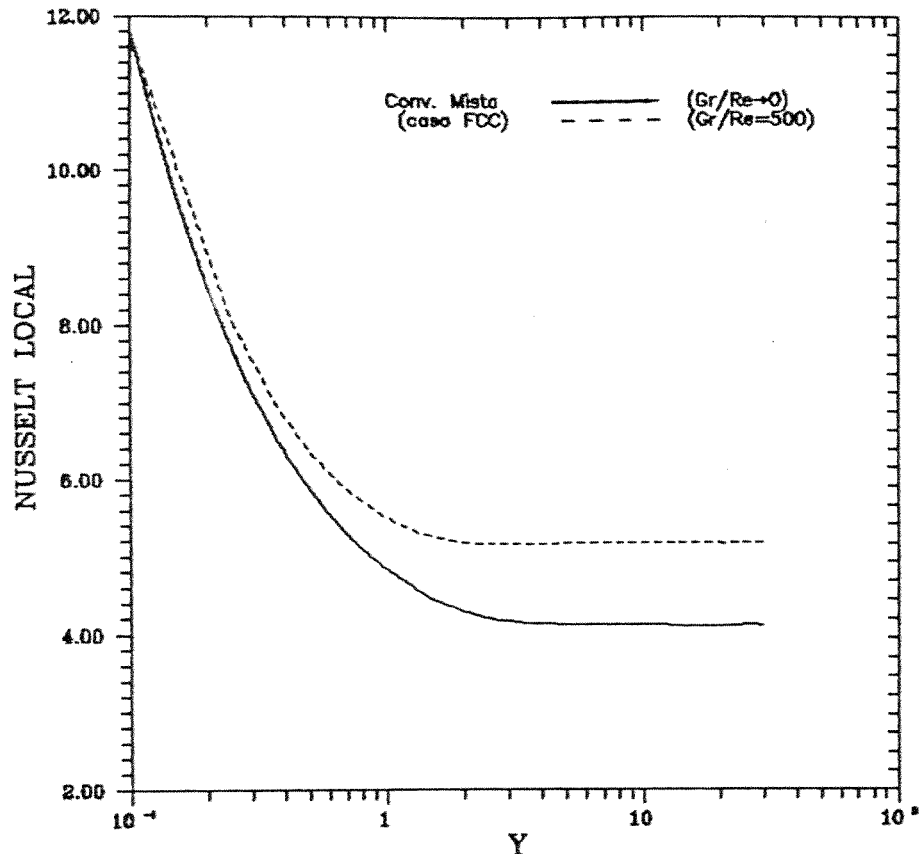


Fig. 3.26 Número de Nusselt local para convecção mista. Caso FCC.

$Gr/Re=500$ em relação à convecção forçada. Já na figura 3.25 pode-se notar que esse efeito produz uma temperatura de parede menor, embora a temperatura de mistura seja a mesma.

A figura 3.27 representa as isotérmicas e as linhas de corrente para $Gr/Re=100$, no caso TPU e para $Gr/Re=500$ no caso FCC. Como se pode observar na figura, o efeito adicional da convecção natural traz as linhas de corrente para mais próximo das paredes do canal, com o fluido ficando mais "quente" nas proximidades das paredes.

No próximo capítulo, uma aplicação do algoritmo, visando ao estudo do resfriamento de dispositivos eletrônicos, será apresentada.

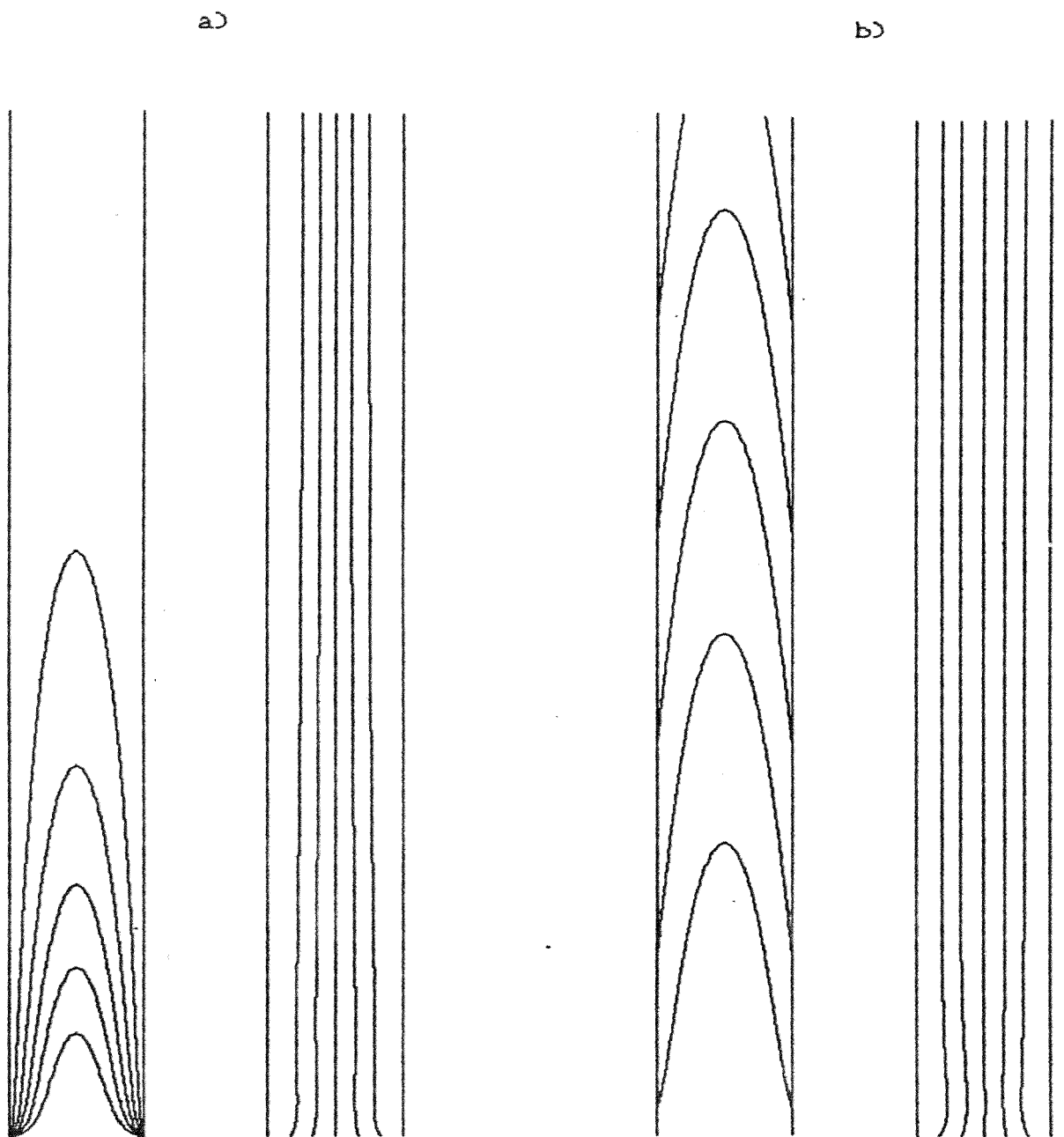


Fig. 3.27 Isotérmicas e linhas de corrente.

a) caso TPU, $Gr/Re=100$; b) caso FCC, $Gr/Re=500$

CAPÍTULO 4

CONVECÇÃO MISTA ENTRE PLACAS VERTICAIS COM FONTES TÉRMICAS DISCRETAS

4.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo serão aplicadas ao modelo numérico novas condições de contorno fisicamente adequadas para simular a convecção mista em canais verticais, em uma nova classe de problemas de importância envolvendo fontes térmicas discretas.

Como foi visto na revisão apresentada anteriormente, o modelamento do fenômeno de dissipação térmica de componentes eletrônicos é um campo de estudo bastante recente. A tendência de miniaturização dos circuitos eletrônicos, com o conseqüente aumento de sua concentração, produz como efeito indesejado o aumento da geração de calor por unidade de volume e a decorrente dificuldade em sua remoção. Nessa classe de problemas, o canal formado por placas planas verticais representa uma geometria fundamental para a avaliação do empacotamento adequado de dispositivos eletrônicos. Prever, com precisão, os níveis de dissipação de energia dos componentes é importante para a determinação dos níveis seguros das temperaturas de junção desses componentes. Para a remoção efetiva da energia dissipada, a localização relativa dos componentes deve ser baseada em suas características de transferência de calor, particularmente quando o efeito de convecção natural é significativo e os componentes estão posicionados na esteira de outras fontes.

Para a placa plana vertical, Sparrow e Faghri (1980)

resolveram numericamente as equações da camada limite para o problema da convecção natural em ar, originado por duas fontes isotérmicas alinhadas verticalmente. Jaluria (1982) simulou numericamente a convecção natural entre fontes térmicas discretas, dissipando calor uniformemente para o ar ambiente.

Posteriormente Jaluria (1984), utilizando as equações completas (elípticas), apresentou resultados para a convecção natural entre fontes térmicas discretas, com uma parede termicamente isolada na base do escoamento. É também devido a Jaluria (1986) o estudo numérico da convecção mista ao redor de fontes discretas localizadas em uma placa plana vertical.

Resultados experimentais também têm sido publicados para algumas situações de interesse. Milanez e Bergles (1986) obtiveram resultados para o escoamento devido à convecção natural gerado por duas estreitas resistências de fita ou por dois pequenos cilindros localizados horizontalmente - adjacentes ou deslocados da superfície - em uma placa plana vertical. Os estudos foram realizados com o ar e com a água como meios de resfriamento. Tewari et al. (1987) realizaram um estudo experimental sobre a interação de duas fontes de calor localizadas em uma placa plana adiabática. Os autores investigaram a convecção natural e a convecção mista para a orientação horizontal e somente a convecção natural foi estudada para a superfície vertical.

A convecção natural em canais verticais tem também recebido considerável atenção. Oosthuizen (1984) estudou numericamente a convecção natural em um canal parcialmente aquecido através de um método de elementos finitos, utilizando um procedimento de marcha.

Yan e Lin (1987) resolveram numericamente as equações

parabólicas da camada limite para o escoamento em torno de fontes discretas localizadas em um canal vertical.

Em muitas situações de interesse um ventilador é necessário para melhorar a dissipação de calor. Nesse caso, como resultado de uma configuração adicional de fluxo, os níveis de temperatura nas placas são menores que os atingidos, quando somente atua a convecção natural, e o estudo da convecção mista é necessário para um modelamento do fenômeno.

Tomimura e Fujji (1987) analisaram a convecção mista laminar entre placas paralelas, com uma das placas isolada e a outra contendo sete fontes de calor igualmente espaçadas e dissipando o mesmo fluxo de calor.

Resultados obtidos com o presente método foram apresentados por Almeida e Milanez (1990) para o caso de fontes de calor discretas localizadas em uma das placas de um canal isolado e dissipando diferentes fluxos uniformes de calor com a separação variada entre as fontes.

Após a descrição do problema proposto, os resultados obtidos pelo presente algoritmo serão apresentados.

4.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO

O escoamento considerado é representado pela figura 4.1, juntamente com o sistema de coordenadas utilizado.

A formulação vorticidade-função corrente é adotada e as equações 3.30, 3.31 e 3.32 são utilizadas para modelar o escoamento, sendo aqui reproduzidas:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2} = - \xi^* \quad (4.1)$$

$$U \frac{\partial \zeta^*}{\partial X} + V \frac{\partial \zeta^*}{\partial Y} - \left(\frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial Y^2} \right) = Gr. \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (4.2)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Para o caso aqui estudado $l=s$ e as variáveis adimensionais são definidas como:

$$X = \frac{x}{s} \quad e \quad Y = \frac{y}{s} \quad (4.4)$$

$$U = \frac{Us}{\nu} \quad e \quad V = \frac{Vs}{\nu} \quad (4.5)$$

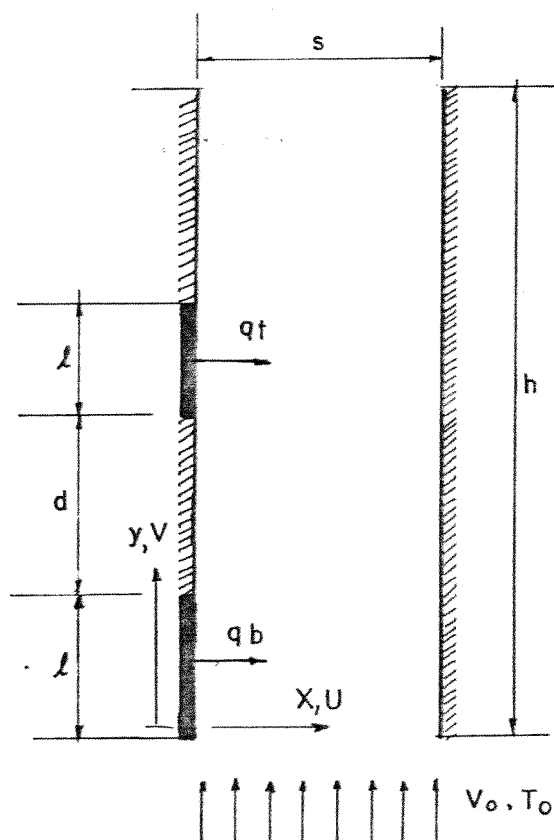


Figura 4.1 - Configuração do escoamento e sistema de coordenadas

$$\psi^* = \frac{\psi}{s} \quad \text{e} \quad \xi^* = \frac{\xi s^2}{\nu} \quad (4.6)$$

$$\theta = \frac{k(T-T_o)}{q_b l} \quad \text{e} \quad Gr = \frac{g\beta q_b l^4}{k \nu^2} \quad (4.7)$$

Na entrada são adotados perfis uniformes de velocidade e de temperatura. A escolha é justificada pelo pequeno efeito produzido pela condução de calor axial, na entrada do canal, conforme apresentado no capítulo 3 para o caso de fluxo de calor constante nas paredes (FCC). Essa hipótese será melhor discutida a partir dos resultados obtidos.

Para a saída do canal, a seção isolada aí existente provoca uma uniformização da temperatura do fluido e permite que a velocidade, em desenvolvimento em torno das fontes de calor, atinja o escoamento plenamente desenvolvido no final do canal.

Feitas essas considerações, as condições de contorno adotadas são:

Na entrada ($0 < X < 1, Y=0$)

$$\psi^* = \text{Re } X, \quad \xi^* = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (4.8)$$

Na saída ($0 < X < 1, Y=h/s$)

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial \xi^*}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (4.9)$$

Na parede esquerda ($X=0, Y \geq 0$)

$$\psi^* = 0 \quad \xi^* = - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial X} &= -1 & \text{para} & & 0 \leq Y \leq 1 \\
 \frac{\partial \theta}{\partial X} &= -\frac{q_t}{q_b} & \text{para} & & 1 + \frac{d}{l} \leq Y \leq 2 + \frac{d}{l} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial X} &= 0 & \text{para} & & 1 < Y < 1 + \frac{d}{l} \quad \text{e} \quad Y > 2 + \frac{d}{l}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Na parede direita ($X=1, Y \geq 0$)

$$\psi^* = \text{Re} \quad \xi^* = -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0
 \tag{4.11}$$

4.3 MÉTODO DE SOLUÇÃO E ESCOLHA DA MALHA NUMÉRICA

Para a placa plana com fontes térmicas localizadas, Jaluria (1986) concluiu que as hipóteses da camada limite são válidas para números de Reynolds maiores do que 100 e a utilização das equações elípticas é necessária para obtenção de resultados quando $Re < 100$. Chow et al. (1984) mostraram que a condução axial no interior de um canal deve ser considerada quando $Pe < 50$. No presente estudo o número de Reynolds adotado é igual a 50 e o número de Peclet é igual a 36, sendo, portanto, necessária a aplicação da formulação elíptica.

A malha numérica utilizada, no presente capítulo, foi uma malha uniforme com $\Delta X = \Delta Y = 0,05$. Ficou-se restrito à utilização dessa malha, por ser viável a obtenção de resultados qualitativamente corretos, como será mostrado, em tempos computacionais da ordem de minutos de CPU. Poderiam ter sido obtidos resultados mais acurados se fosse utilizado um escoamento com um número de Peclet maior, juntamente com o emprego de malhas uniformes mais finas, à custa de uma maior utilização do tempo de máquina computacional disponível. Entretanto, optou-se por seguir essa investigação numérica

restrita ao uso da malha uniforme mais grossa, inclusive para ressaltar a importância do desenvolvimento de uma discretização adequada para o tratamento acurado de malhas numéricas não uniformes. Essa opção, na opinião do autor, representa uma escolha mais racional para o desenvolvimento do presente algoritmo e para a continuidade do trabalho de investigação da potencialidade do método aqui adotado para tratar de situações de interesse no resfriamento de dispositivos eletrônicos. Claramente fica caracterizada uma questão para desenvolvimento em investigações futuras.

O procedimento de solução adotado foi o mesmo utilizado anteriormente e descrito no capítulo 3 do presente trabalho. A listagem do programa desenvolvido é apresentada no apêndice C, para a presente aplicação.

Com o campo de temperatura $\theta(X,Y)$ obtido e com a temperatura de mistura $\theta_M(Y)$, calculada pela expressão (3.46), os valores do número de Nusselt local, para a fonte térmica inferior (fonte baixa) e para a fonte térmica superior (fonte de topo), são calculados através das expressões:

$$Nu_b(Y) = \frac{h_b l}{k} = 1 / [\theta_p(Y) - \theta_M(Y)] \quad (4.12)$$

$$Nu_t(Y) = \frac{h_t l}{k} = (q_t/q_b) / [\theta_p(Y) - \theta_M(Y)] \quad (4.13)$$

Os valores dos números de Nusselt médio são calculados a partir dos valores locais pela expressão:

$$(Nu)_{t \text{ ou } b} = \frac{\int Nu_{t \text{ ou } b} dY}{\int dY}$$

Os limites da integral acima são as bordas de ataque e de saída das fontes térmicas.

4.4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Resultados foram obtidos para Gr/Re igual a 50, quando a convecção forçada é predominante no escoamento e para Gr/Re igual a 750, quando a convecção natural é determinante. Para a obtenção dos resultados uma relação $h/s=12$ foi utilizada.

As figuras 4.2 e 4.3 apresentam a distribuição da velocidade axial em duas posições diferentes do canal, correspondendo às bordas de saída das placas. Os casos apresentados representam as velocidades obtidas para $q_b/q_t=1$ e $d/l=4$, quando Gr/Re é igual a 50 e 750, respectivamente. Para $Gr/Re=50$, quando a convecção forçada é predominante no escoamento, as curvas são aproximadamente parabólicas, conforme a figura 4.2. A figura 4.3 mostra que para $Gr/Re=750$, com as forças de empuxo térmico significativas, as curvas exibem um comportamento diferente, com o máximo de velocidade migrando na direção da placa onde as fontes térmicas estão localizadas.

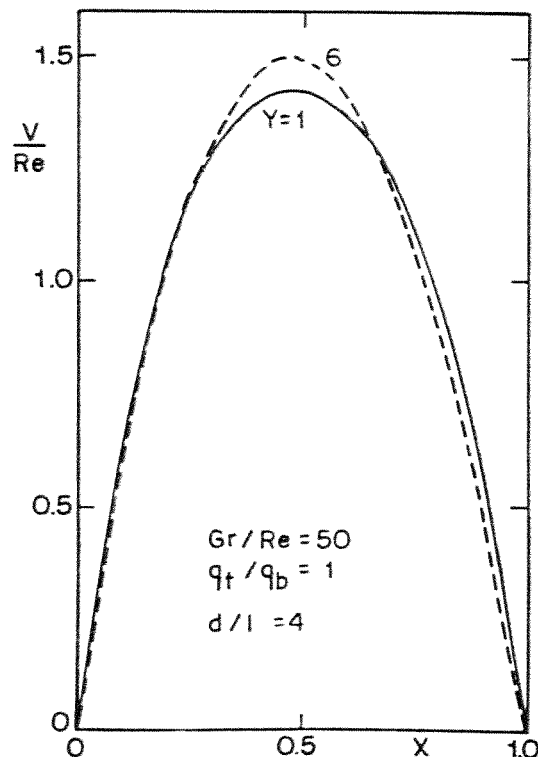


Fig. 4.2 Velocidade nas bordas de saída para $Gr/Re=50$

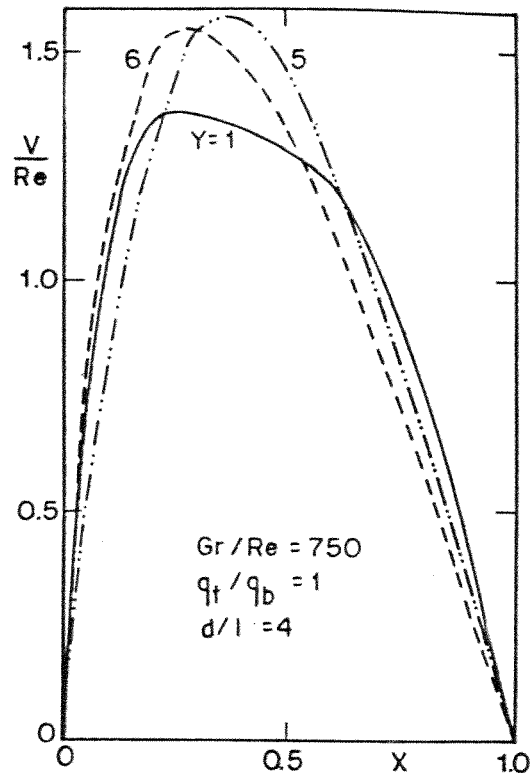


Fig. 4.3 Velocidades nas bordas de saída para $Gr/Re=750$

A variação da temperatura da superfície que contém as fontes, na direção do escoamento é apresentada nas figuras 4.4 e 4.5 para $Gr/Re=50$ e $Gr/Re=750$, respectivamente. Pode ser observado que a temperatura atinge um valor máximo em uma posição próxima à borda de saída dos elementos aquecidos. Esse resultado é significativamente diferente do obtido, se a aproximação de camada limite fosse adotada, pois com essa hipótese o máximo de temperatura é sempre atingido exatamente na borda de saída das fontes. Essa é uma indicação da limitação da formulação parabólica para representar acuradamente o fenômeno. Também cabe ressaltar que a hipótese de adotar um perfil uniforme de temperatura na entrada do canal não altera significativamente os resultados aqui descritos, já que as maiores temperaturas - as de maior risco para os componentes eletrônicos - ocorrem próximas às bordas de saída dos elementos dissipadores e não na entrada do escoamento. Testes numéricos realizados para o caso FCC no capítulo 3, confirmam esta afirmação.

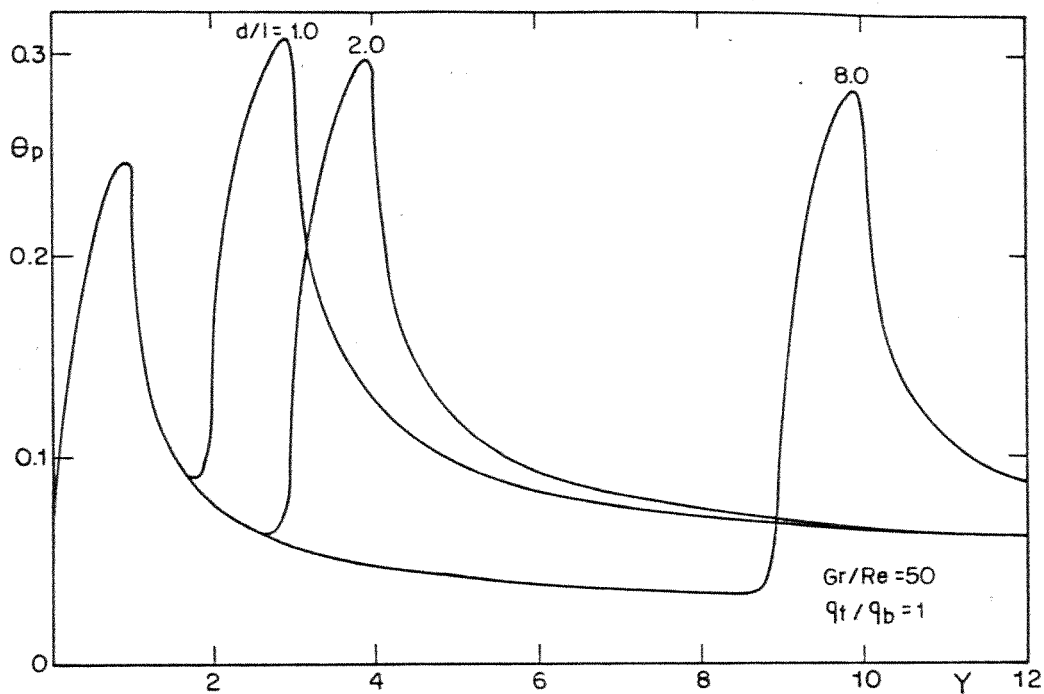


Fig. 4.4 Variação da temperatura de parede quando $Gr/Re=50$
e $q_f/q_b=1$

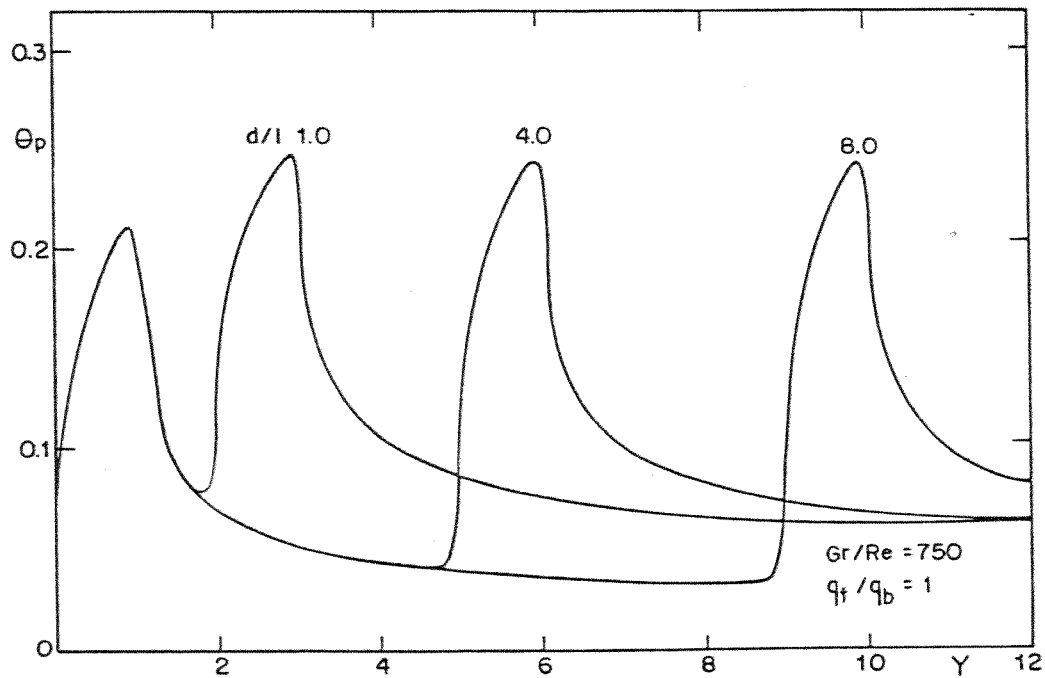


Fig. 4.5 Variação da temperatura de parede para $Gr/Re=750$
e $q_f/q_b=1$

Uma inspeção das figuras 4.4 e 4.5 revela que para $Gr/Re=50$ as temperaturas das superfícies atingem valores mais altos que os observados para $Gr/Re=750$, situação em que as forças de empuxo são relevantes. A figura 4.4 apresenta temperaturas de superfície maiores, quando a distância entre os elementos dissipadores é reduzida para o caso em que $Gr/Re=50$; esse efeito é menos sentido quando $Gr/Re=750$, como mostrado na figura 4.5.

Na figura 4.6 as distribuições dos valores dos números de Nusselt locais, como definidos pelas equações (4.12) e (4.13), e para $Gr/Re = 50$, são apresentadas para diferentes distâncias entre os elementos dissipadores. Para efeito comparativo é apresentada a curva obtida, quando uma das placas é uniformemente aquecida ao longo de toda sua superfície por convecção forçada, com o mesmo fluxo de calor dissipado pelas fontes térmicas. As características da camada limite térmica e a condução de calor nas placas dissipadoras aumentam o número de Nusselt local nas bordas de saída das placas. A figura também mostra que, se o resultado da convecção forçada em um canal, com uma das placas uniformemente aquecida e a outra isolada, fosse usado para avaliar o número de Nusselt local de fontes discretas, o resultado seria subestimado para a fonte superior em todos os casos estudados, menos para posições próximas da borda de saída da placa, quando $d/l=1$. Os níveis estimados de temperatura dos componentes seriam, então, maiores que os realmente obtidos.

Nessa figura, ao se compararem os resultados para a fonte inferior, é de se notar a pequena diferença entre os valores de Nusselt obtidos em relação aos da placa uniformemente aquecida. Era de se esperar que as curvas coincidissem, a não ser nas imediações da borda de saída. A diferença é atribuída ao uso de uma malha mais grosseira, no presente capítulo, o que não conduz

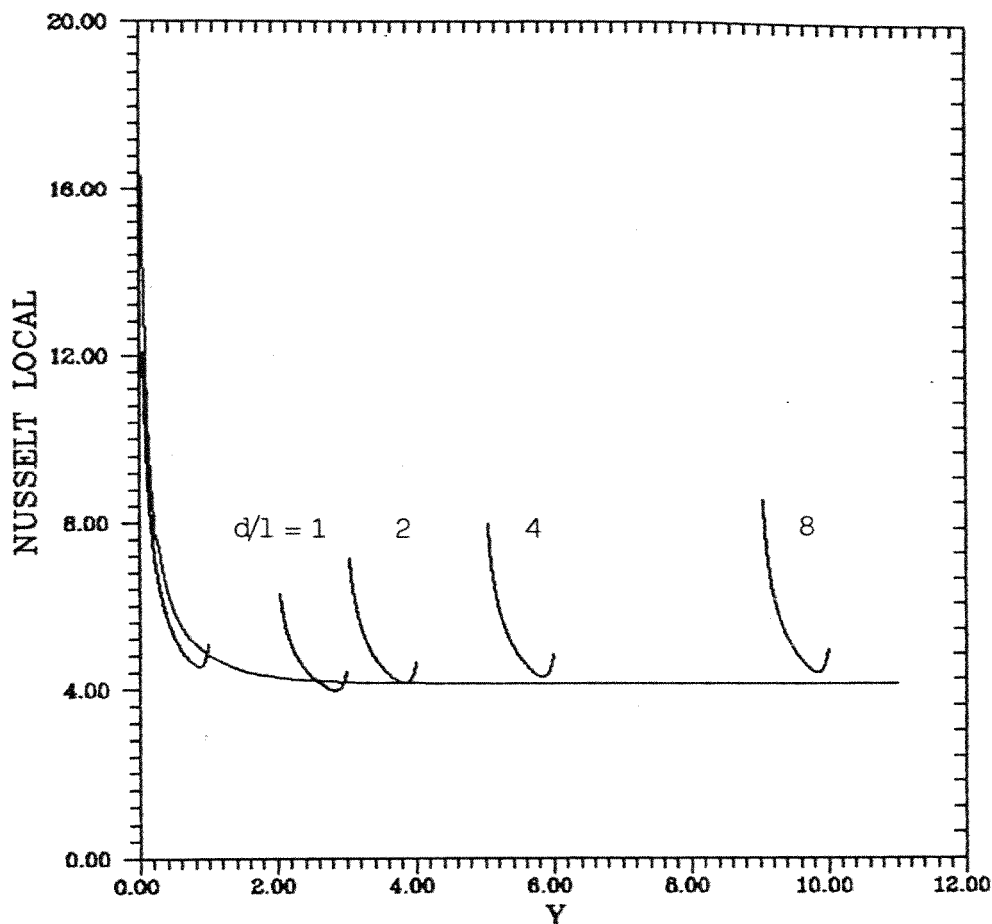


Figura 4.6 - Distribuição do número de Nusselt local

a erro significativo, como mostrado.

O coeficiente de transferência de calor para a fonte localizada no topo é afetado pela presença da fonte localizada mais abaixo. As velocidades induzidas pela fonte inferior tendem a aumentar a transferência de calor da fonte superior; entretanto esse efeito é prejudicado pelo pré aquecimento do fluido. O efeito resultante no coeficiente de transferência de calor é mostrado nas figuras 4.7 e 4.8, para a qual a razão entre o número de Nusselt médio para a placa de topo $(Nu)_t$ em relação àquele para a placa baixa $(Nu)_b$ é apresentada contra a distância entre os dissipadores, com a razão q_t/q_b como parâmetro. Na tabela 4.1 são apresentados os valores dos números de Nusselt médios obtidos para as várias situações estudadas.

Pelos resultados apresentados na tabela 4.1 e como se

Gr/Re	q_t/q_b	d/l	$(Nu)_b$	$(Nu)_t$
50	2.0	1	6,284	5,512
		2	6,284	5,345
		4	6,283	5,512
		8	6,285	5,614
	1.0	1	6,284	4,618
		2	6,284	4,955
		4	6,284	5,280
		8	6,286	5,498
	0.5	1	6,284	3,893
		2	6,284	4,401
		4	6,284	4,961
		8	6,286	5,386
750	2.0	1	6,972	6,860
		2	6,970	7,038
		4	6,970	7,035
		8	6,975	6,964
	1.0	1	6,977	5,889
		2	6,976	6,225
		4	6,976	6,372
		8	6,980	6,388
	0.5	1	6,979	4,814
		2	6,978	5,351
		4	6,978	5,751
		8	6,982	5,954

Tabela 4.1 - Números de Nusselt médios obtidos.

observa nas figuras 4.7 e 4.8, as fontes que dissipam mais energia devem ser posicionadas acima das fontes que dissipam menos energia. Para $Gr/Re=750$ a presença do aquecedor de baixo é mais eficiente para aumentar a transferência de calor da fonte a jusante do que para a situação em que a convecção forçada domina

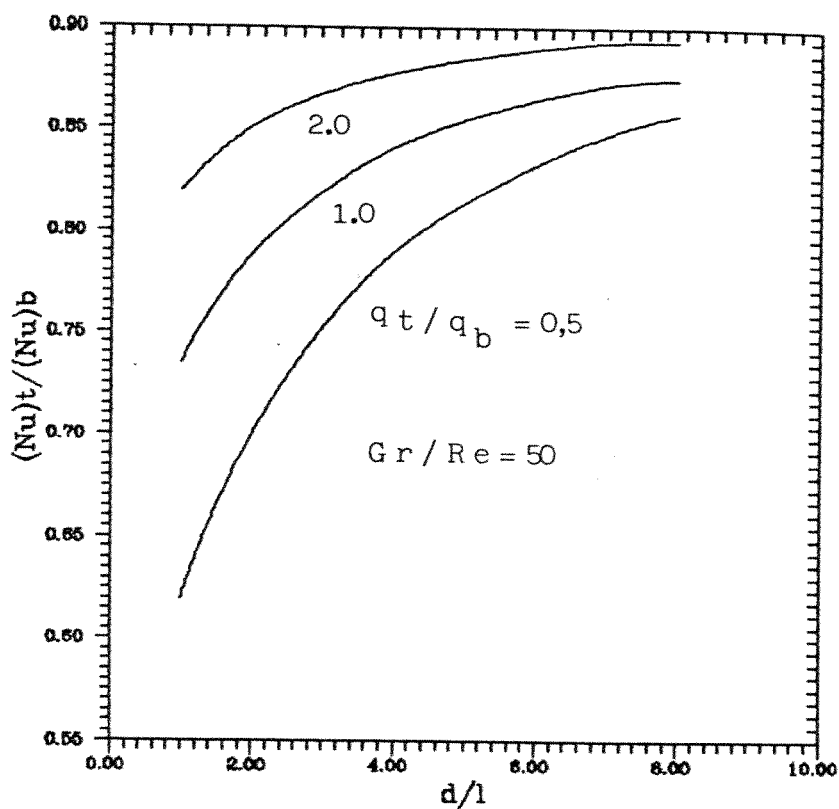


Fig. 4.7 Relação entre os números de Nusselt superior e inferior para $Gr/Re=50$

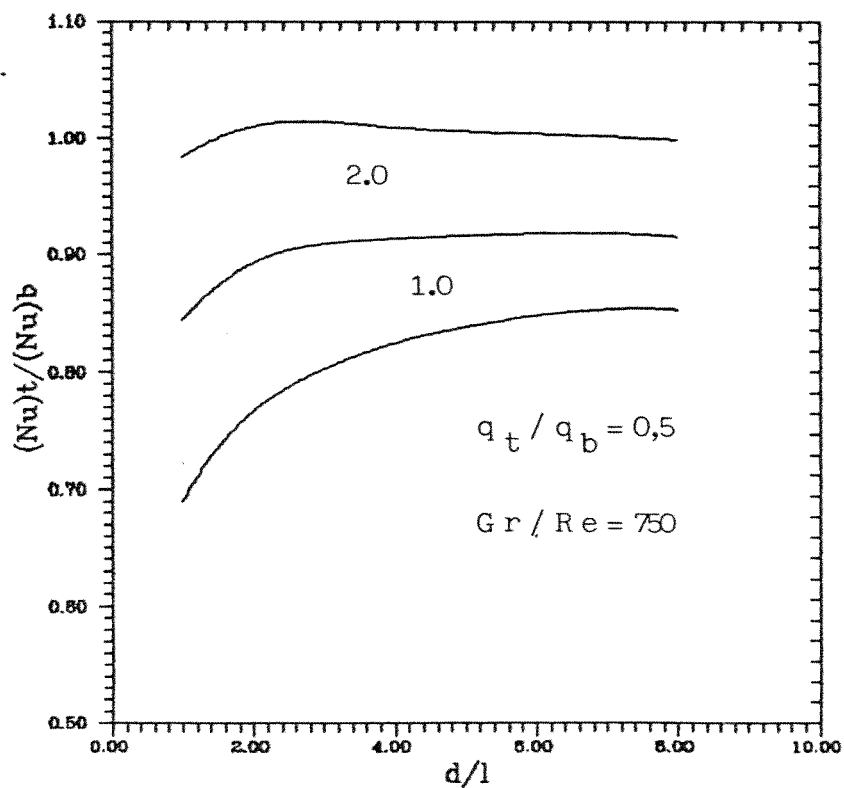


Fig. 4.8 Relação entre os números de Nusselt superior e inferior para $Gr/Re=750$

o escoamento, $Gr/Re=50$. Quando a convecção forçada é o mecanismo dominante de transferência de calor, a presença da fonte térmica superior não produz efeitos no perfil de velocidade da esteira que deixa a fonte dissipadora de baixo. Já quando a convecção natural é significativa a fonte superior pode acelerar e atrair para próximo de si a esteira formada na saída da fonte térmica inferior, produzindo o efeito adicional que pode melhorar a transferência de calor nos casos em que se esteja empregando um ventilador que não possa ser redimensionado. Além disso, como se observa na tabela 4.1, há um leve aumento no número de Nusselt para a placa inferior no caso em que a convecção natural é significativa, $Gr/Re=750$. A utilização apropriada da força de empuxo na configuração de escoamento convectivo favorável, para a convecção mista, pode aumentar a transferência de calor relativamente à situação da convecção forçada pura, como mostrado.

As figuras 4.9 e 4.10 são uma representação qualitativa das isotérmicas obtidas para algumas das configurações aqui estudadas. Para facilitar a apresentação, a dimensão X foi multiplicada por um fator de escala igual a 1,5.

Do conjunto de resultados obtidos observa-se concordância qualitativa em todos os pontos aqui analisados com os resultados experimentais obtidos por Milanez e Bergles (1986) para o escoamento em torno de uma placa plana vertical. A não existência de dados experimentais para o canal vertical não permite uma avaliação quantitativa dos presentes resultados. Por outro lado, fica claro que resultados numéricos mais abrangentes podem ser obtidos com o refinamento localizado da malha numérica e deve ser objeto de investigações futuras, a partir do desenvolvimento do presente algoritmo.

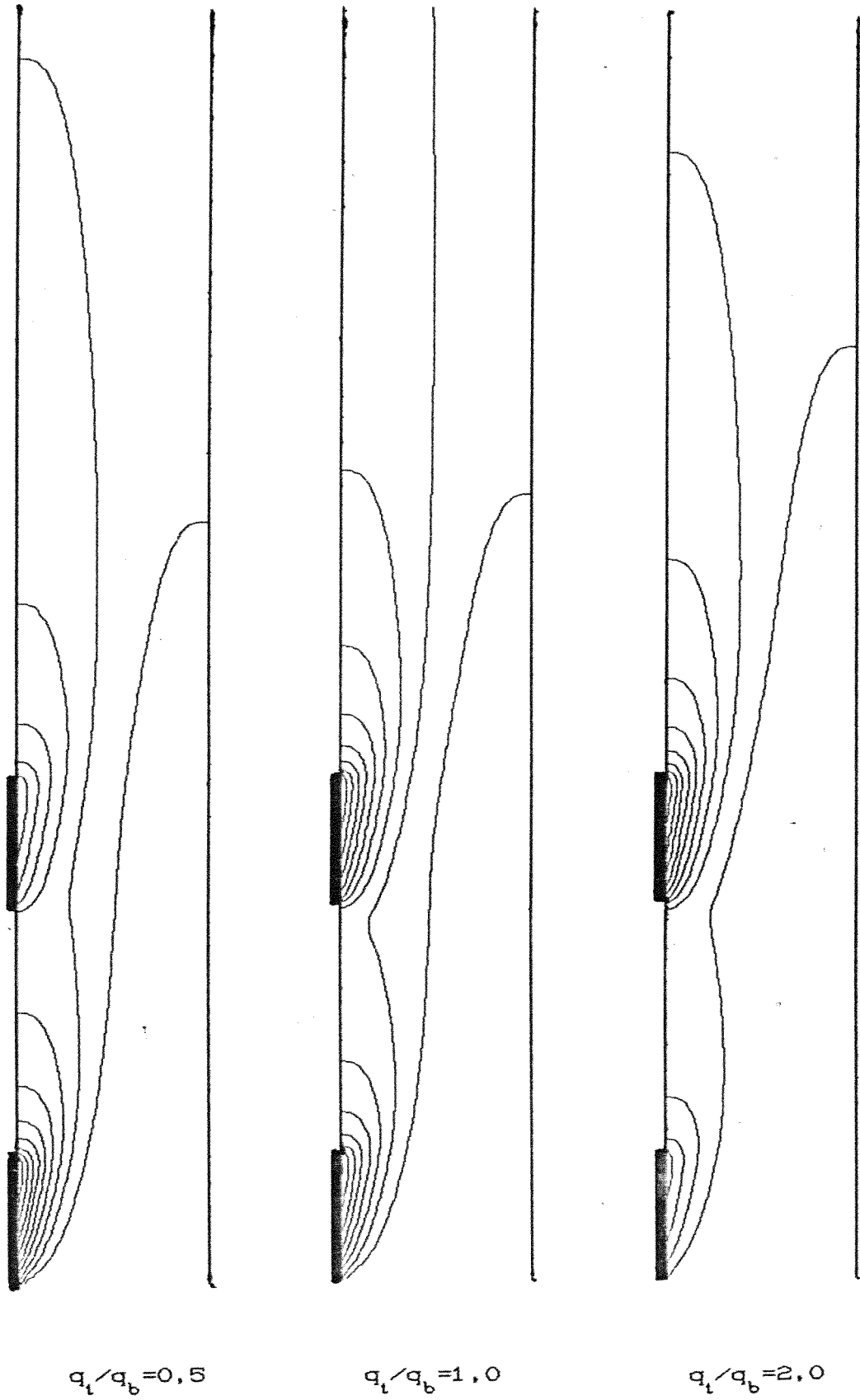


Fig. 4.9 Isotérmicas para $Gr/Re=50$ e $d/l=2$

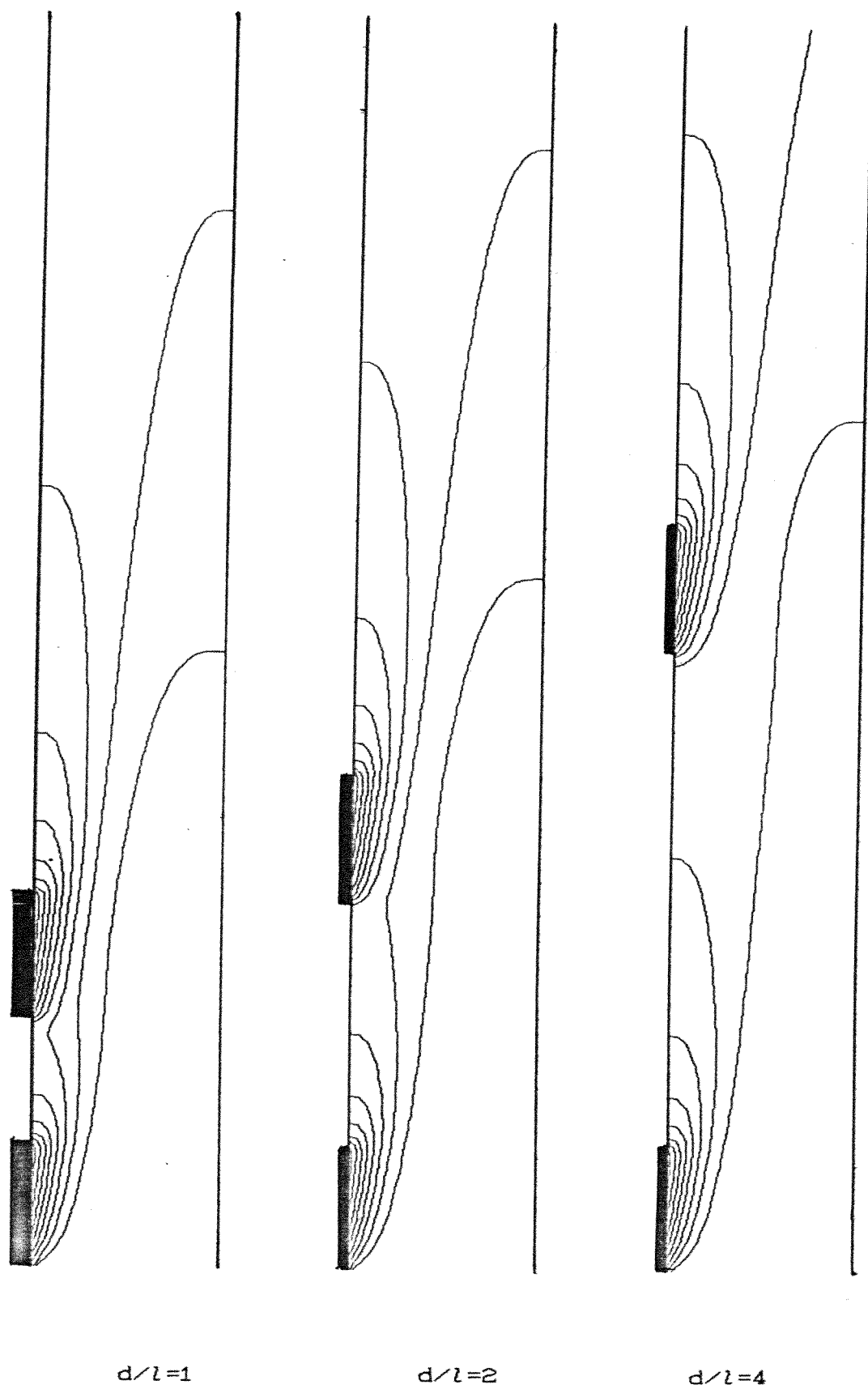


Fig. 4.10 Isotérmicas para $Gr/Re=750$ e $q_l/q_b=1$

No próximo capítulo a aplicação do algoritmo será testada para o estudo da convecção natural em canais verticais, em aplicações de interesse para o empacotamento de circuitos eletrônicos.

CAPITULO 5

CONVECÇÃO NATURAL ENTRE PLACAS VERTICAIS CONFINADAS

5.1 INTRODUÇÃO

Na sequência de investigação da aplicação do presente algoritmo, a convecção natural entre placas verticais, localizadas no interior de uma cavidade dissipativa, será abordada.

O tratamento do fenômeno da convecção natural pode ser dividido em duas classes: a dos problemas de escoamentos externos e a dos escoamentos internos (Gebhart et al., 1988). Os escoamentos externos ocorrem em espaços abertos, onde as fontes dissipadoras interagem com um grande ambiente em repouso e à temperatura constante. A existência das camadas limite junto às paredes sólidas das fontes térmicas não afeta o fluido em repouso longe da região de influência da camada limite e o escoamento pode ser bem representado pelo modelamento parabólico. Resultados do modelamento elíptico, apresentados na literatura, confirmam a precisão dos resultados obtidos pelo modelamento parabólico para os casos estudados. Por outro lado para os escoamentos internos, que ocorrem em espaços confinados, a camada de fluido na região central do escoamento é afetada pela presença das camadas-limite nas paredes e também nelas influi. Essa interação constitui um problema fundamental dos escoamentos confinados, que permanece sem um tratamento geral.

Os resultados de Kettleborough (1972) para o escoamento externo, considerando a região de entrada abaixo de um canal de paredes isotérmicas, foram revistas por Nakamura et al. (1982) e

os autores obtiveram boa concordância com os obtidos por Aihara (1973), através de um modelamento parabólico, com um débito de pressão imposto na entrada do escoamento.

Chang e Lin (1989) consideraram a região de entrada e a de saída no modelamento elíptico do mesmo problema, apresentaram perfis de temperatura e de velocidade para o regime transitório, obtendo resultados concordantes com os de Aihara (1973) para o regime permanente.

No estudo do empacotamento de dispositivos eletrônicos, geralmente o escoamento não pode ser tratado como um escoamento externo, já que as restrições impostas pelo empacotamento impedem o escoamento livre do ar.

Uma estrutura de empacotamento de circuitos impressos, bastante utilizada na indústria de telecomunicações, consiste em uma armação (rack), onde as placas são encaixadas verticalmente para facilitar o escoamento ascendente do ar de resfriamento. As divisórias horizontal superior e inferior da armação, localizadas nas proximidades das bordas de saída e de ataque das placas, respectivamente, restringem o livre escoamento do ar induzido pela convecção natural, dificultando o resfriamento.

O'Meara e Poulikakos (1987) observaram experimentalmente que o espaçamento da divisória horizontal superior, em relação à borda de saída das placas verticais, é um parâmetro determinante para o projeto térmico dos sistemas que utilizam essa mecânica de empacotamento.

O modelamento numérico dessa classe de problemas é bastante complexo pela dificuldade de se estabelecerem condições de contorno fisicamente aceitáveis para os problemas de interesse.

Ramanathan e Kumar (1988) e Ramanathan et al. (1988) apresentaram resultados de uma simulação numérica da convecção

natural entre placas verticais, dissipando um fluxo de calor constante, localizadas no interior de uma cavidade de paredes resfriadas, mantida a temperatura baixa e constante.

No presente capítulo, o escoamento provocado por duas placas verticais aquecidas simétrica e isotermicamente, localizadas numa cavidade resfriada, é abordado. O estudo apresenta resultados preliminares que buscam esclarecer a aplicação do método para tratar essa classe de problemas.

5.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A figura 5.1 apresenta a geometria estudada e o sistema de coordenadas empregado.

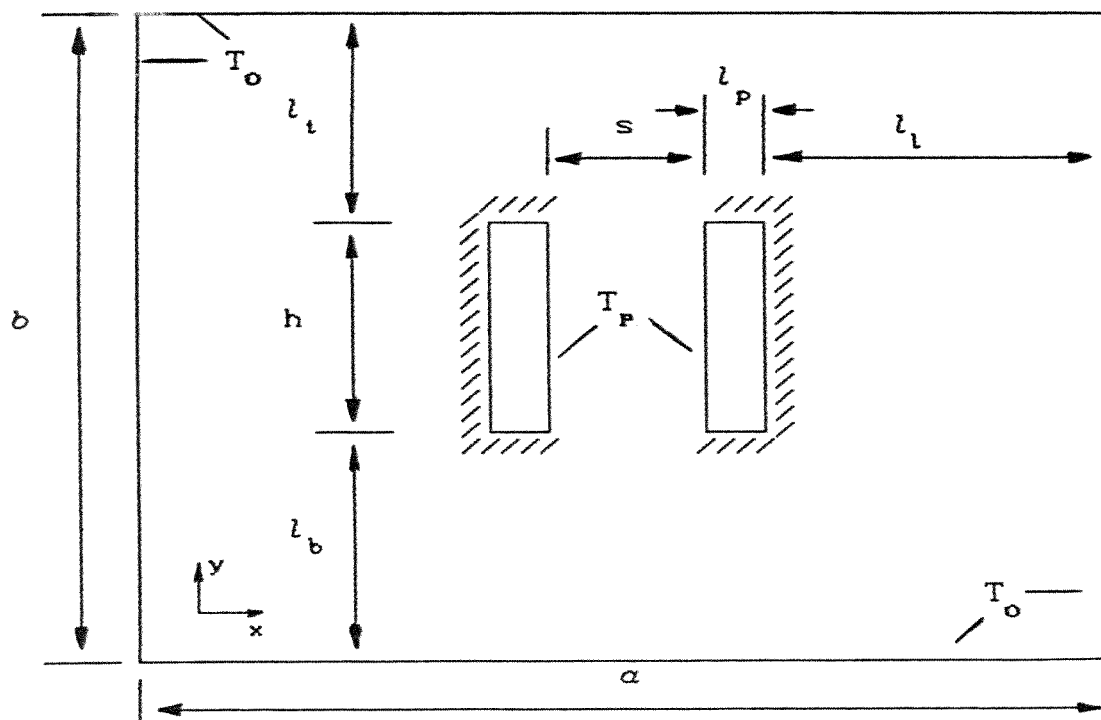


Fig 5.1 Canal confinado no interior de uma cavidade.

A mesma formulação foi adotada com as equações (3.30), (3.31) e (3.32), utilizadas para modelar o escoamento. Porém, diferentemente dos problemas abordados até aqui, para a convecção natural no interior de espaços confinados não há um fluido ambiente não perturbado em relação ao qual se estabelece a força de empuxo no interior do canal. Para os casos em que o escoamento ocorre em toda a cavidade, adota-se normalmente a temperatura da parede fria T_o , como referência para a força de empuxo local (Gebhart et al., 1988).

As variáveis adimensionais são as mesmas adotadas anteriormente, definidas pelas equações (3.27), (3.28), e (3.35) com:

$$\theta = \frac{T - T_o}{T_p - T_o} \quad \text{e} \quad Gr = \frac{g\beta (T_p - T_o) s^3}{\nu^2} \quad (5.1)$$

sendo T_o a temperatura das paredes da cavidade.

Para um canal simetricamente localizado em relação às paredes laterais da cavidade, as seguintes relações geométricas são definidas:

$$LH = h/s \quad \text{razão de forma do canal} \quad (5.2)$$

$$LT = l_t/s \quad \text{distância adimensional da saída do canal ao teto} \quad (5.3)$$

$$LB = l_b/s \quad \text{distância adimensional do solo à entrada do canal} \quad (5.4)$$

$$LL = l_l/s \quad \text{distância adimensional da parede do canal à lateral da cavidade} \quad (5.5)$$

$$LP = l_p/s \quad \text{espessura adimensional das paredes do canal mais o isolamento} \quad (5.6)$$

$$A = a/s \quad \text{dimensão horizontal adimensionalizada da cavidade} \quad (5.7)$$

$$B = b/s \quad \text{dimensão vertical adimensionalizada da cavidade} \quad (5.8)$$

As condições de contorno adotadas são:
para a cavidade,

na parede lateral esquerda ($X=0, 0 < Y < B$)

$$\psi^* = 0, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}, \quad \theta = 0 \quad (5.9)$$

na parede superior ($0 < X < A, Y=B$)

$$\psi^* = 0, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2}, \quad \theta = 0 \quad (5.10)$$

na parede lateral direita ($X=A, 0 < Y < B$)

$$\psi^* = 0, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}, \quad \theta = 0 \quad (5.11)$$

na parede inferior ($0 < X < A, Y=0$)

$$\psi^* = 0, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2}, \quad \theta = 0 \quad (5.12)$$

e para o canal,

na parede lateral esquerda ($X=LL, LB < Y < LB+LH$)

$$\psi^* = \psi_1^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (5.13)$$

na parede superior esquerda ($LL < X < LL+LP, Y=LB+LH$)

$$\psi^* = \psi_1^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (5.14)$$

na parede interna esquerda ($X=LL+LP$, $LB < Y < LB+LH$)

$$\psi^* = \psi_1^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}, \quad \theta = 1 \quad (5.15)$$

na parede inferior esquerda ($LL < X < LL+LP$, $Y=LB$)

$$\psi^* = \psi_1^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (5.16)$$

na parede lateral direita ($X=LL+2LP+1$, $LB < Y < LB+LH$)

$$\psi^* = \psi_2^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (5.17)$$

na parede superior direita ($LL+LP+1 < X < LL+2LP+1$, $Y=LB+LH$)

$$\psi^* = \psi_2^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (5.18)$$

na parede interna direita ($X=LL+LP+1$, $LS < Y < LS+LH$)

$$\psi^* = \psi_2^*, \quad \xi^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial X^2}, \quad \theta = 1 \quad (5.19)$$

na parede inferior direita ($LL+LP+1 < X < LL+2LP+1$, $Y=LS$)

$$\psi_1^* = \psi_2^*, \quad \zeta^* = \frac{-\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (5.20)$$

Uma dificuldade adicional surge para se estabelecerem os valores da função corrente nas paredes do canal.

Uma relação existente entre os valores de ψ_1^* e ψ_2^* , pela própria definição da função corrente, é:

$$\psi_1^* - \psi_2^* = \int_{X_1}^{X_2} V \, dX = Q \quad (5.21)$$

com $X_1 = LL+LP$ e $X_2 = LL+LP+1$ e onde Q é a vazão em massa adimensional que é induzida pela convecção natural através do canal. Por outro lado, pela simetria do problema $\psi_2^* = -\psi_1^*$, e, portanto:

$$\psi_1^* = Q/2 \quad \text{e} \quad \psi_2^* = -Q/2 \quad (5.22)$$

Então, o valor da função corrente no centro do canal é igual a zero, valor adotado nas paredes da cavidade, e metade do fluxo de massa que flui pelo canal do lado esquerdo gira no sentido anti-horário ao sair do canal, enquanto a outra metade gira em sentido contrário pelo outro lado da cavidade.

Uma condição adicional, decorrente do fato das velocidades U e V serem zero nas paredes do canal, é que $\frac{\partial \psi^*}{\partial n} = 0$, além de ψ^* ser constante ao longo delas, com n representando a direção normal à parede considerada.

Várias tentativas de implementar essa dupla condição de contorno foram tentadas sem sucesso, optando-se, então, por adotar uma condição que estabelece um limite superior para a

vazão em massa entre as placas verticais. Certamente o escoamento em massa no interior do canal, na situação estudada, será no máximo igual ao escoamento induzido pela convecção livre (externa) para um dado valor do número de Grashof (Gr) adotado.

A relação a seguir é devida a Chang e Lin (1989) e foi utilizada para estimar a vazão em massa máxima, passando pelo canal.

$$\log (2Q) = 1,05 + 0,480 \log \left(\frac{Gr Pr}{8} \right) - 0,0140 \left[\log \left(\frac{Gr Pr}{8} \right) \right]^2 \quad (5.23)$$

válida para LH=5

Com o valor de Q estabelecido por (5.23), os valores de ψ_1^* e ψ_2^* eram adotados, e a solução do sistema de equações discretizadas encontrada.

Além dessa forte restrição encontrada com a metodologia aqui empregada, outra dificuldade típica da formulação adotada foi estabelecer o valor da vorticidade nos cantos da placa aquecida. Como citado anteriormente, a vorticidade na parede é calculada pela segunda derivada da função corrente em relação à direção normal à parede. A aproximação de segunda ordem adotada emprega pontos do domínio de cálculo naquela direção.

Quando se deseja estimar o valor da vorticidade em um canto, conforme representado pela figura 5.2, a derivada segunda pode ser aproximada por pontos do domínio provenientes de uma direção ou de outra.

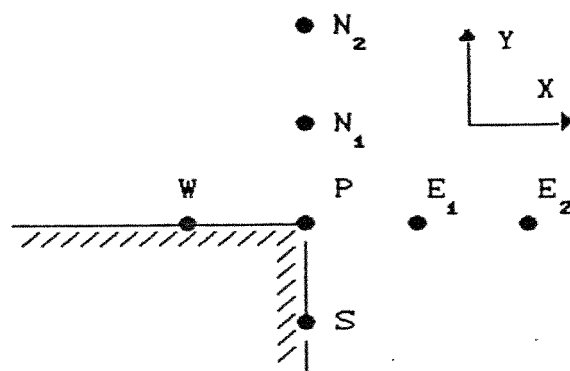


Fig. 5.2 Canto da placa no domínio de cálculo.

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial n^2} = f_1 (\psi_P^*, \psi_{E_1}^*, \psi_{E_2}^*) \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial n^2} = f_2 (\psi_P^*, \psi_{N_1}^*, \psi_{N_2}^*) \quad (5.25)$$

Geralmente esses valores não são iguais e várias opções podem ser adotadas para estimar o valor da vorticidade no ponto P durante o processo iterativo de solução. Roache (1972) apresentou seis diferentes formas de tratar essa questão e, de acordo com sua recomendação, o valor da vorticidade no ponto P foi encontrado, empregando-se alternadamente as expressões (5.24) ou (5.25), dependendo da direção implícita em que as variáveis eram calculadas pelo procedimento de solução linha a linha adotado. A equação (5.24) era empregada sempre que X era a direção implícita de cálculo, enquanto a expressão (5.25) foi empregada toda a vez que Y era a direção implícita.

5.3 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O mesmo procedimento já apresentado foi utilizado na solução

das equações discretizadas e uma malha com $\Delta X = \Delta Y = 0,05$ foi utilizada em todo domínio de cálculo. Um valor maior para tolerância, que estabelece o final do processo iterativo, foi adotado, assumindo-se $RM < 10^{-4}$ para os casos estudados, enquanto um único fator de relaxação da vorticidade, igual a 0,7, foi empregado em todos os casos abordados.

Devido aos altos tempos de computação envolvidos, somente quatro casos foram tratados. Foi adotado um canal com uma relação de forma geométrica $LH=5$ localizado no interior de uma cavidade de dimensões $A=10$ e $B=9$ ou 15 . A distância lateral das paredes do canal adotada foi $LL=4$ e a espessura considerada das paredes do canal, formada pela placa dissipadora e o isolamento, foi $LP=0,5$. Para avaliar o efeito conjunto do afastamento das placas em relação às paredes horizontais da cavidade, as distâncias ao teto e ao solo foram variadas conjuntamente fazendo-se $LT=LB=2$ e $LT=LB=5$.

Dois valores do número de Grashof foram estudados: $Gr=10^3$ ou $Gr=10^4$.

O número de Nusselt local é definido conforme a equação (3.48) e calculado segundo a expressão (3.50) para a parede interna do canal aquecido:

$$Nu(Y) = - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=LL+LP} \quad \text{para } LB < Y < LB+LH \quad (5.26)$$

O número de Nusselt médio, baseado na temperatura T_0 das paredes resfriadas da cavidade, é definido pela equação (3.51), com os limites de integração definidos pela altura das placas dissipativas:

$$Nu_{MO} = \frac{1}{LH} \int_{Y_1}^{Y_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \Big|_{X=LL+LP} dY \quad (5.27)$$

A tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos para a situação de confinamento aqui estudada em relação às correlações experimentais obtidas para a convecção livre. Nota-se que a transferência de calor num espaço confinado é cerca de 5% inferior em relação ao escoamento livre, quando $Gr=10^3$, sendo aproximadamente independente da distância que separa ao teto e ao solo, a partir de $LT=LB=2$. Apesar dos poucos resultados obtidos, a distância adimensional $LT=LB=2$ parece estar acima ou coincidir

Gr	Ra*	Nu _{MO} (a)		Nu _{MO} (b)	Nu _{MO} (c)	(a-b)/b x 100%		(a-c)/c x 100%	
		LT=2	LT=5			LT=2	LT=5	LT=2	LT=5
		10^3	144	1,82	1,89	1,90	1,93	-4,2	-3,7
10^4	1440	2,59	2,77	3,66	3,69	-5,7	-5,2	-30,6	-29,7

(a) resultados da presente análise

(b) resultados para a conv. livre devido a Elenbaas (1942).

(c) resultados para a conv. livre devido a Bar-Cohen et al. (1984).

Tabela 5.1 Nusselt médios para o escoamento confinado em relação à convecção livre.

com o limite inferior para o qual o escoamento não é influenciado pela presença do teto ou do solo, quando $Gr=10^3$.

Já para $Gr=10^4$, a presença do teto e do solo influenciam consideravelmente o escoamento. Para $LT=LB=5$ a transferência de

calor é maior, quando comparada com o caso para o qual $LT=LB=2$. Em relação à convecção livre, notamos que a transferência de calor é cerca de 31% inferior, quando o espaçamento adimensional é igual a 2e cerca de 24% inferior, quando o espaçamento adimensional é aumentado para 5, nas situações estudadas.

A tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos para a situação de confinamento, quando comparada à situação em que a convecção natural livre é abordada para $Gr=10^4$, através de correlações experimentais e de resultados numéricos de outros autores.

AUTOR	Q	Nu _{MO}	LT/LB
Presente Trabalho	110,9 adotado	2,77	5
		2,52	2
Chang e Lin (1989)	110,9	3,69	
Nakamura et al. (1982)	96,0	3,75	
Kettleborough (1972)	146,4	4,76	
Aihara (1973)	100,0	3,60	
Elenbaas (1942)		3,66	
Bar-Cohen et al. (1984)		3,63	

$$Ra^* = Gr Pr s/h$$

$$Nu_{MO} = \frac{1}{24} Ra^* \left[1 - e^{-\frac{95}{Ra^*}} \right]^{3/4}$$

(corr. devida a Elenbaas)

$$Nu_{MO} = \left[\frac{576}{(Ra^*)^2} + \frac{2.873}{(Ra^*)^{1/2}} \right]^{-1/2}$$

(corr. devida a Bar-Cohen)

Tabela 5.2 Dados comparativos para $Gr=10^4$, convecção livre versus convecção confinada.

Como podemos observar, os resultados do modelamento parabólico devido a Aihara (1973) são bastante próximos dos obtidos experimentalmente através das correlações empíricas

apresentadas e dos obtidos pelo modelamento elíptico de Nakamura et al. (1982) e de Chang e Lin (1989). Os resultados do trabalho pioneiro de Kettleborough (1972) destoam dos demais pela imprecisão na determinação do valor da função corrente nas paredes do canal, com a conseqüente superestimação do valor da vazão adimensional Q induzida no canal. Os resultados obtidos no presente trabalho indicam valores inferiores ao da convecção livre, sendo melhor a transferência de calor, quando as distâncias ao teto e ao solo são aumentadas de 2 para 5 para o caso em que $Gr=10^4$, como já observado anteriormente.

Vale ainda ressaltar que os valores de Nusselt médio aqui apresentados devem ser lidos como limites máximos toleráveis, já que a vazão que passa pelo canal foi arbitrada em seu limite superior (o do escoamento livre) e não encontrada pelo modelamento.

A figura 5.3 apresenta os perfis de velocidade obtidos no interior do canal nas proximidades de sua entrada e de sua saída, para o caso de $Gr=10^4$ e de $LT=LB=5$. Quando comparados com os resultados de Nakamura et al. (1982) e de Kettleborough (1972), através da figura 5.4, nota-se que as curvas apresentam o mesmo comportamento qualitativo em relação aos resultados de Nakamura et al., divergindo sensivelmente dos de Kettleborough. A proximidade do valor de Q adotado no presente trabalho em relação ao estimado por Nakamura et al., parece indicar a proximidade quantitativa dos resultados e explicar a divergência em relação aos resultados de Kettleborough.

A figura 5.5 mostra a distribuição de temperatura no interior do canal obtidas no presente trabalho para o caso de $Gr=10^4$ e de $LT=LB=5$, apresentadas juntamente com as de Nakamura et al. e as de Kettleborough, para a convecção livre. O gráfico

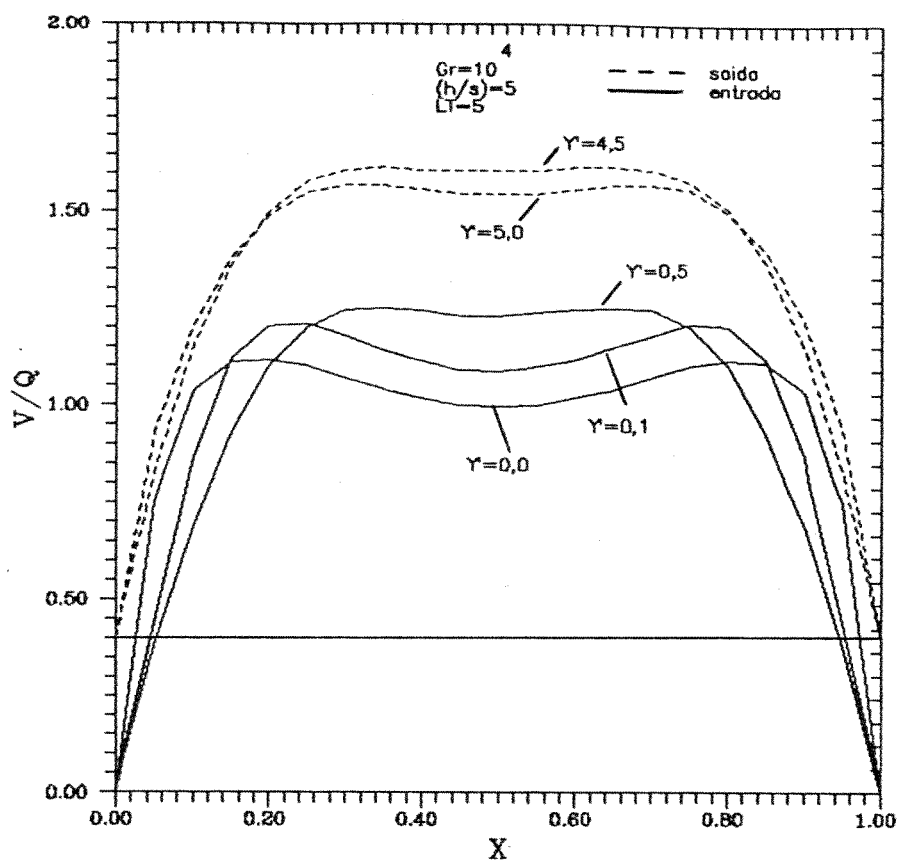


Fig. 5.3 Velocidades na entrada e na saída do canal

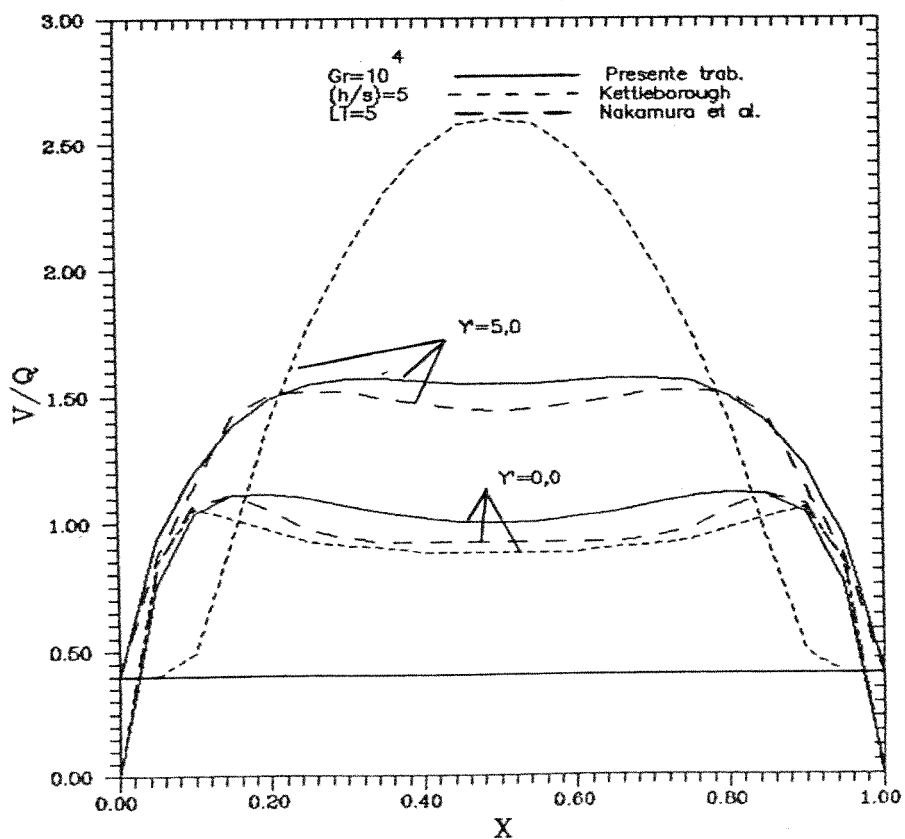


Fig. 5.4 Velocidades para o escoamento confinado comparadas com o escoamento livre

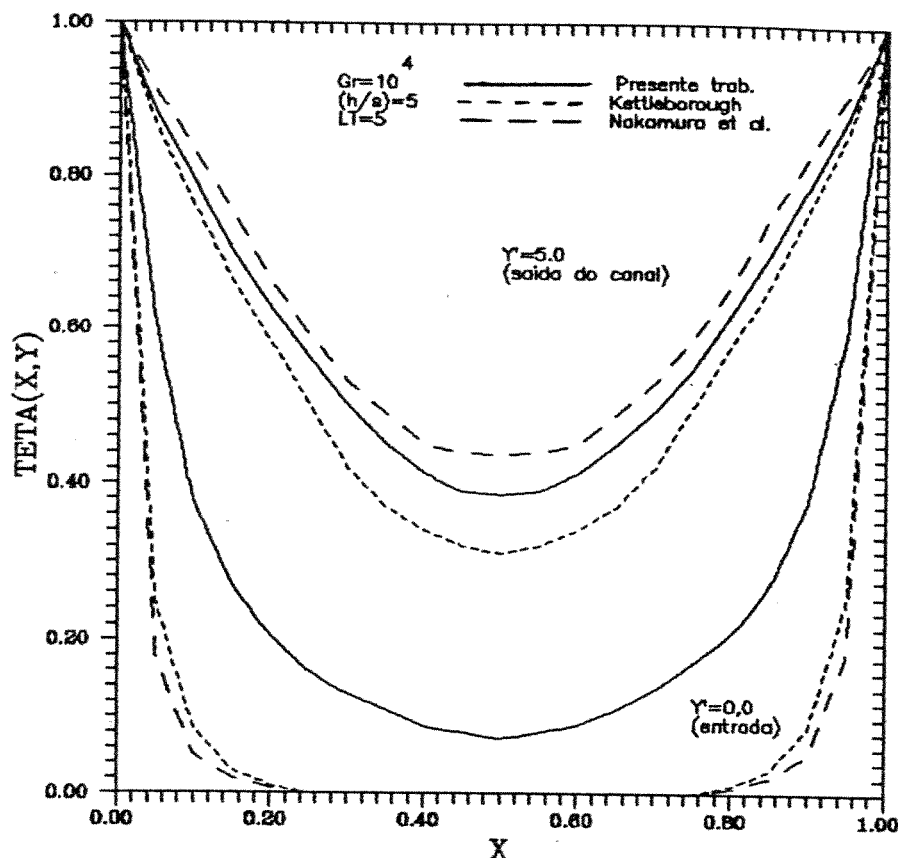


Fig. 5.5 Temperaturas para o escoamento confinado comparadas com o escoamento livre.

ressalta a diferença da temperatura na entrada do canal no caso confinado em relação à convecção livre. O fluido no presente estudo entra no canal bastante aquecido, o que dificulta a transferência de calor em relação à obtida no escoamento livre e explica os baixos valores de Nu_{Mo} obtidos no presente estudo.

A figura 5.6 apresenta os perfis de temperatura na entrada e na saída do canal, quando as distâncias ao teto e ao solo são variadas, para o caso $Gr=10^3$ e a figura 5.7 apresenta os mesmos perfis para o caso em que $Gr=10^4$. Como se pode notar pelas figuras, as distâncias LT e LB pouco influenciam os resultados para o primeiro caso, tendo, entretanto, influência para a situação em que $Gr=10^4$, quando o fluido entra no canal mais aquecido, se as distâncias ao teto e ao solo são menores.

Os resultados concordam qualitativamente com a tendência

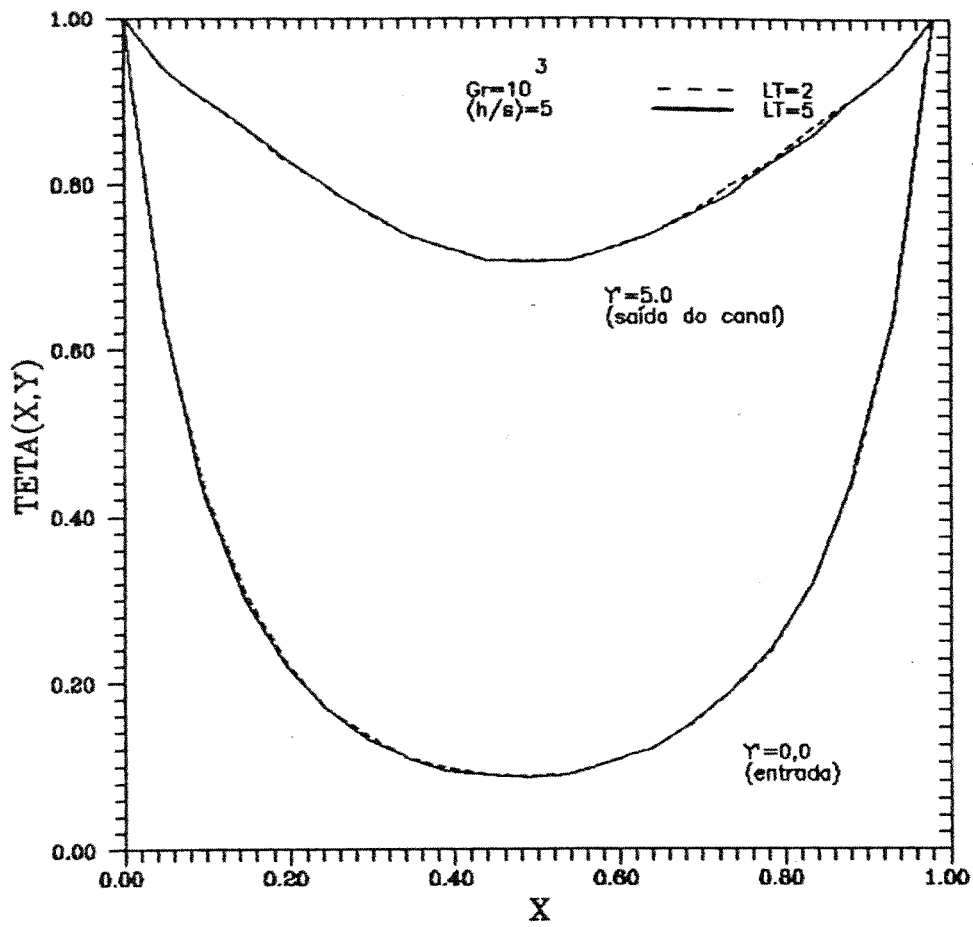


Fig. 5.6 Temperatura na entrada e na saída do canal quando $LT=LB=2$ ou 5 e $Gr=10^3$

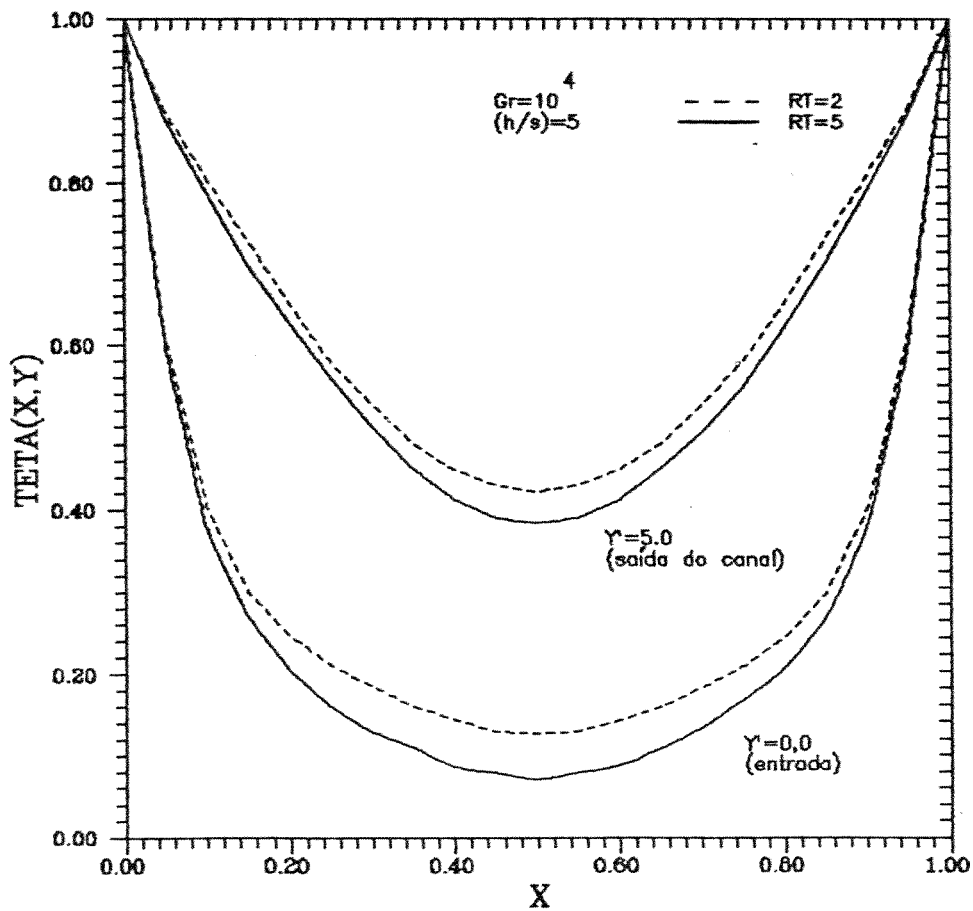


Fig. 5.7 Temperaturas na entrada e na saída do canal quando $LT=LB=2$ ou 5 e $Gr=10^4$

observada experimentalmente por O'Meara e Poulikakos (1987), quanto à dependência ao distanciamento do teto, necessitando, entretanto, de um estudo mais amplo para serem obtidas conclusões mais abrangentes sobre os efeitos isolados das distâncias LB e LT.

Na figura 5.8 são apresentados os valores do número de Nusselt local obtidos para o caso em que $Gr=10^4$, quando comparados com os resultados de Nakamura et al. (1982). As influências das temperaturas na entrada do canal confinado, determinam a tendência observada e explicam o melhor desempenho térmico obtido, quando o distanciamento do teto e do solo é maior. Na figura podemos notar também, o quanto o confinamento do

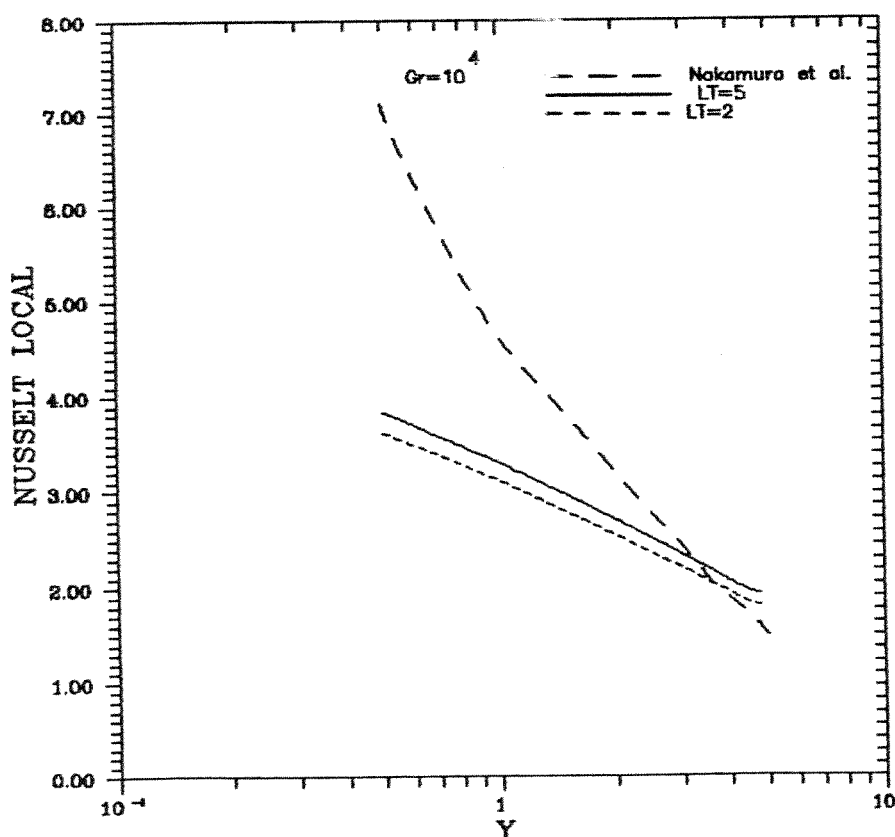


Fig. 5.8 Número de Nusselt local para o escoamento confinado comparado com o escoamento livre

ar de resfriamento diminui a transferência de calor, principalmente na entrada do canal, em relação à convecção livre.

Nas figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 são apresentadas as isotérmicas e as linhas de corrente obtidas para os casos estudados. O estudo gráfico, representado pelo conjunto dessas figuras, mostra que o efeito do aquecimento do fluido na entrada do canal é significativo somente para o caso em que $Gr=10^4$. Quando comparadas as situações em que $LT=LB=5$ e $LT=LB=2$, para o caso de $Gr=10^4$, vemos que os níveis de temperatura na entrada são menores no primeiro caso em relação ao segundo. Já no caso de $Gr=10^3$ as isotérmicas na entrada do canal apresentam o mesmo padrão para os casos estudados.

Devido ao confinamento do escoamento, células de recirculação do fluido, no lado externo do canal, são típicas da geometria empregada em todos os casos estudados, como pode ser visto através das linhas de corrente apresentadas. O esperado é que essas células diminuam ou desapareçam, à medida que as dimensões da cavidade aumentem em relação às do canal, como no escoamento provocado pelo aquecimento de placas verticais no interior de uma ampla sala (caso da parede de Trombe utilizada no aquecimento passivo de ambientes). Por outro lado, mesmo para uma envoltória de dimensões relativamente pequenas, como no caso do empacotamento de dispositivos eletrônicos, se a cavidade envolvente tiver tomadas e saídas para o ar ambiente de resfriamento, o escoamento será somente parcialmente confinado e muito provavelmente essas células tenderão a diminuir e a desaparecer à medida que o projeto térmico da envoltória seja bem sucedido.

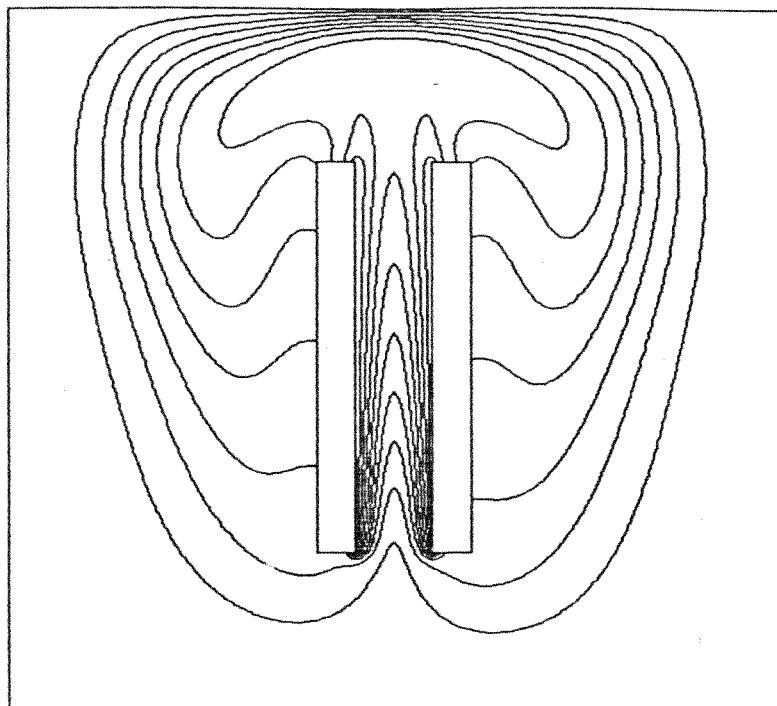


Fig. 5.9a Isotérmicas $Gr=10^3$, $LT=LB=2$

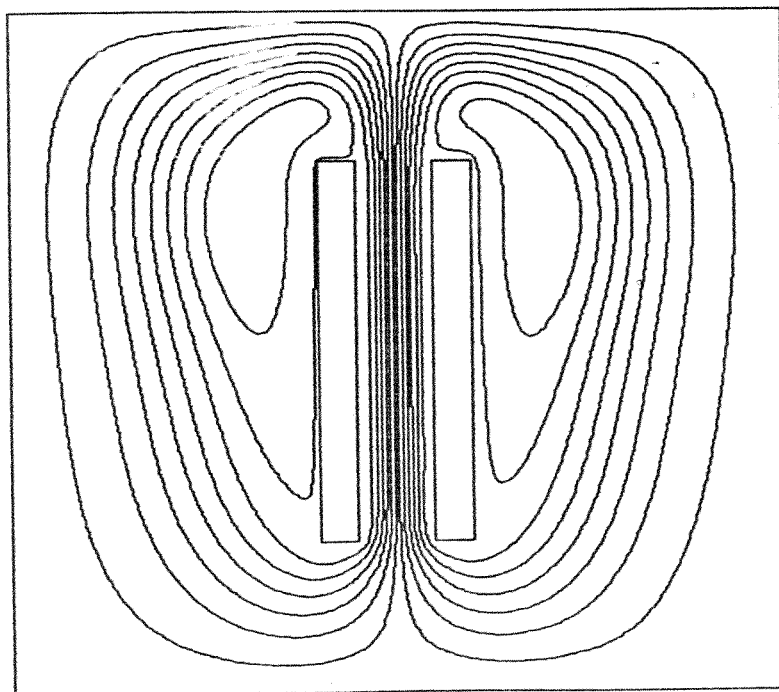


Fig. 5.9b Linhas de corrente, $Gr=10^3$, $LT=LB=2$

Fig. 5.10a
Isotérmicas
 $Gr=10^3$
 $LT=LB=5$

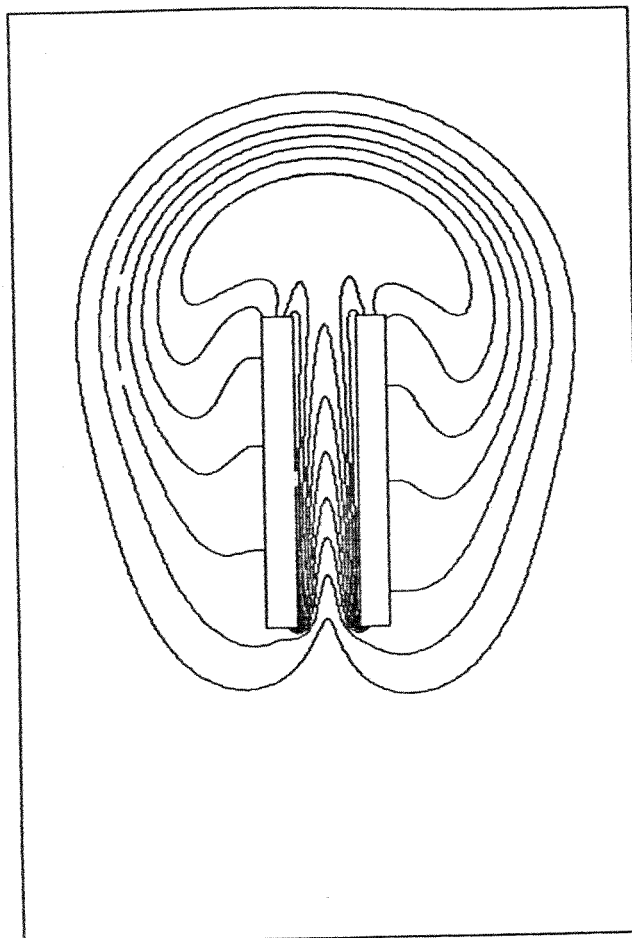
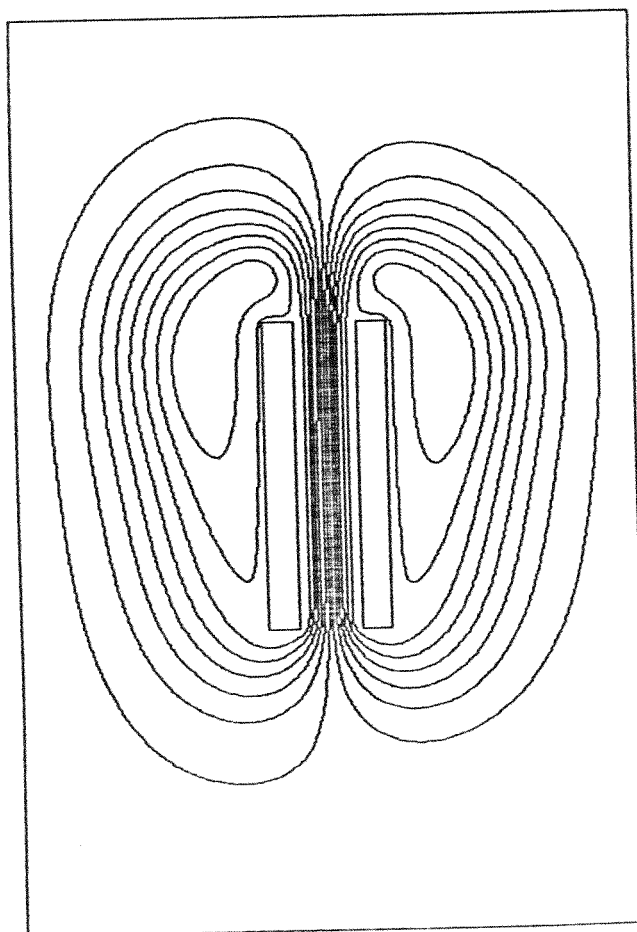


Fig. 5.10b
Linhas de Corrente
 $Gr=10^3$
 $LT=LB=5$



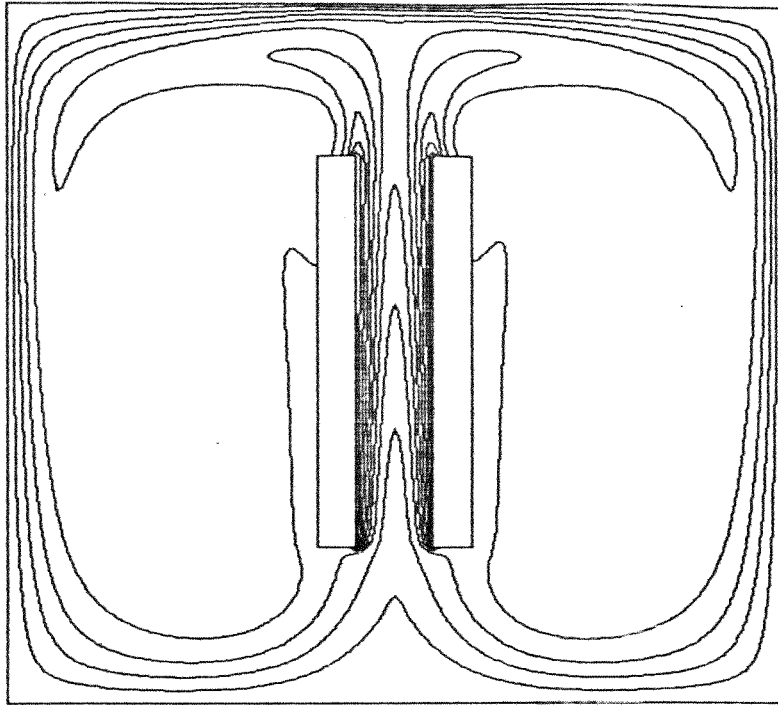


Fig. 5.11a Isotérmicas, $Gr=10^4$, $LT=LB=2$

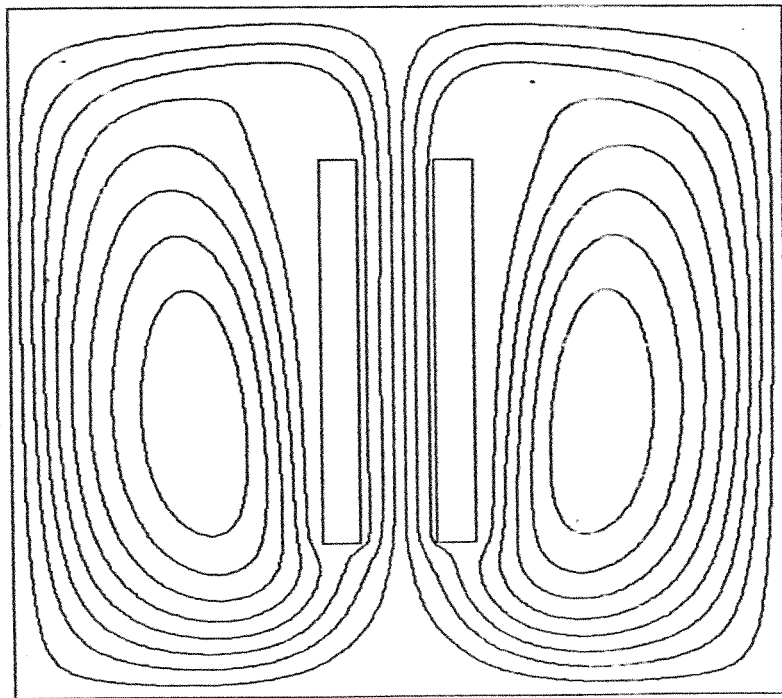


Fig. 5.11b Linhas de corrente, $Gr=10^4$, $LT=LB=2$

Fig. 5.12a
Isotérmicas
 $Gr=10^4$
 $LT=LB=5$

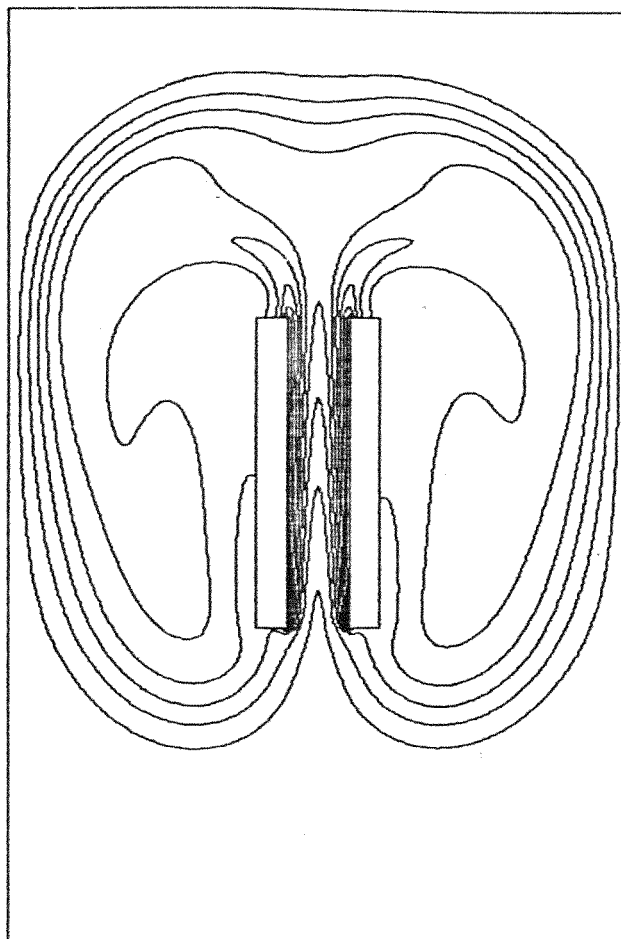
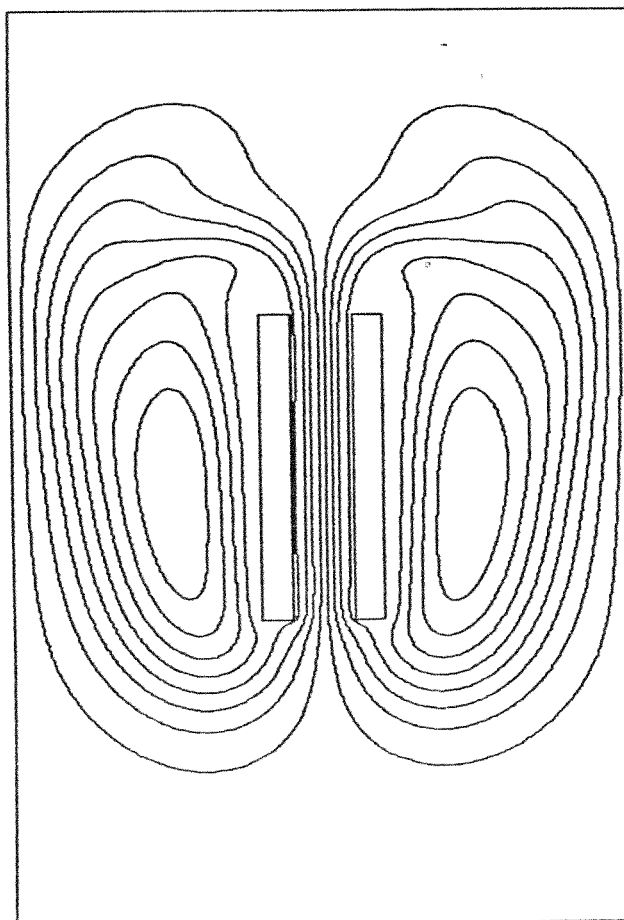


Fig. 5.12b
Linhas de corrente
 $Gr=10^4$
 $LT=LB=5$



5.4 COMENTÁRIOS E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO

Esses resultados preliminares apresentados são importantes para caracterizar várias questões que devem ser adequadamente respondidas para modelar convenientemente o fenômeno da convecção natural em canais localizados em regiões confinadas, como as encontradas no empacotamento de dispositivos eletrônicos.

A primeira delas diz respeito a como encontrar a vazão adequada que o aquecimento das placas induz na região confinada durante o regime permanente. Uma alternativa que deve ser testada, usando a mesma formulação, é considerar o regime transitório e analisar o avanço dos campos de temperatura e de velocidades, bem como o avanço, no tempo, da vazão que passa pelo canal, formulando uma equação que forneça a condição de contorno transitória da função corrente nas paredes do canal.

Outra alternativa possível, e que vem sendo muito empregada no tratamento de problemas correlatos, é utilizar uma formulação de variáveis primitivas. Mesmo para essa alternativa, provavelmente o modelamento do regime transitório seja inevitável.

Em segundo lugar, a necessidade do emprego de grades não regulares, para tratar dessa classe de problemas, ressalta da limitação dos resultados aqui encontrados com a malha regular. Ao se observarem as figuras 5.9 a 5.12, notamos algumas assimetrias nos resultados apresentados, como é bastante claro na figura 5.10b, onde são apresentadas as linhas de corrente para o caso em que $Gr=10^3$ e $LT=LB=5$. Um tratamento com malhas não uniformes, convenientemente localizadas, deve solucionar essas imperfeições aqui encontradas. Técnicas como a da geração de grades adaptativas são, portanto, de interesse para continuidade de

desenvolvimento do atual algoritmo e devem ser temas para futuros trabalhos.

Como ficou mostrado na apresentação deste capítulo, os resultados aqui encontrados são muito mais indicações para continuidade da investigação do que resultados conclusivos a respeito do importante problema da convecção natural no empacotamento de dispositivos eletrônicos, e foram apresentados como subsídios para futuras investigações.

CAPITULO 6

CONCLUSÕES

O presente trabalho é uma contribuição ao estudo de uma importante geometria de interesse para o projeto térmico do empacotamento de dispositivos eletrônicos. O modelamento numérico do escoamento convectivo laminar entre placas verticais foi realizado e testado em situações de importância básica para o problema do resfriamento desses componentes.

O estudo é também uma contribuição para o desenvolvimento de um algoritmo generalizado de tratamento de problemas de escoamento convectivo em canais.

Essa dupla característica do trabalho, ao tratar de questões fundamentais de um método numérico em desenvolvimento e das aplicações do método a problemas de interesse, permite que sejam apresentadas duas classes de comentários a respeito do trabalho realizado, isto é, conclusões e recomendações quanto ao método em si e quanto aos seus resultados.

Em primeiro lugar, é importante ressaltar que desenvolver um método numérico iterativo de solução das equações diferenciais elípticas de definição do problema é uma opção clássica dos trabalhos em Engenharia. A metodologia dos volumes de controle finitos permite tratar o problema de simulação matemática através de uma abordagem física menos abstrata que o puro formalismo matemático.

Por outro lado, ao se optar pela concepção clássica das diferenças finitas e ao se adotar a chamada forma convectiva das equações de transporte, foi possível formularem-se as condições de contorno de Neumann com erro de truncamento de segunda ordem,

e, ao aplicar uma restrição integral à equação de Poisson da função corrente, produzir a estabilidade e a convergência obtidas nas aplicações relacionadas à convecção mista, apresentadas nos capítulos 3 e 4. Nesses casos, a aplicação do teorema de Green ao domínio de cálculo, produziu resultados para o número de Nusselt relativamente independentes do refinamento da grade numérica, quando condições de contorno, fisicamente mais adequadas, foram adotadas na entrada do canal formado pelas placas verticais.

Os resultados produzidos pelo presente método, quando comparados com resultados experimentais do problema clássico da convecção forçada entre placas verticais, mostraram uma acuidade da mesma ordem de grandeza dos dados experimentais.

No estudo da convecção mista entre placas discretas, localizadas no interior de um canal de paredes isoladas, obtiveram-se informações importantes para a localização relativa de fontes térmicas, quando a existência de um ventilador é necessária para garantir o escoamento. Quando não se pode aumentar a potência do ventilador, substituindo-o, o posicionamento correto das fontes térmicas, com o efeito da convecção natural, induzida pelas fontes, pode aumentar a transferência de calor. No Brasil, onde os sistemas localizados de ventilação não apresentam suficiente confiança, a maioria dos equipamentos eletrônicos deve ser projetada para que seu resfriamento seja feito preponderantemente pela convecção natural. Esclarecimentos sobre o posicionamento das fontes dissipadoras, como a recomendação de localizar as fontes de maior intensidade acima das demais, como verificado para a convecção mista entre fontes discretas são fundamentais para o projeto térmico correto de sistemas de empacotamento de dispositivos eletrônicos.

Também o modelamento elíptico aqui adotado permitiu tratar

de situações em que o gradiente longitudinal de temperatura seja importante, como encontrado na região próxima das bordas de saída das placas dissipadoras onde a aproximação de camada limite é inadequada.

A limitação dos casos tratados, nos estudos realizados, é devida às limitações da metodologia aqui aplicada, em dois níveis. Num primeiro plano, a restrição ao uso de malhas uniformes na atual formulação do algoritmo não permite que fenômenos, como a convecção natural livre (externa), sejam abordados e limitam, em muito, as faixas dos números adimensionais relevantes e das relações geométricas que podem ser testadas para os casos estudados. Em segundo lugar, deve ser ressaltada a dificuldade da própria metodologia (ao empregar as equações elípticas) em abordar os escoamentos produzidos pela convecção natural no interior de uma estrutura que envolva as placas dissipadoras.

No problema estudado no capítulo 5, não foi possível modelar a vazão induzida pelas placas aquecidas, em razão da dificuldade de implementar a dupla condição de contorno da função corrente nas placas.

Seria, então, a formulação de variáveis primitivas mais adequada para tratar o problema? A resposta a essa pergunta não se tem a pretensão de fornecê-la aqui, embora se suponha que dificuldades semelhantes às aqui encontradas terão que ser superadas para o estabelecimento das condições de contorno da equação de Poisson da pressão, na formulação UVP.

Mais sério, entretanto, são as questões colocadas, quando se analisa uma situação mais próxima da encontrada na prática, em que exista na cavidade envolvente uma entrada e uma saída de ar ambiente. Quais seriam as condições de contorno adequadas? Qual a vazão induzida no interior da cavidade?

É interessante notar que o problema acima mencionado não se trata nem de um escoamento puramente interno, nem é um escoamento externo, conforme a classificação comumente empregada para a convecção natural.

Essas considerações conduzem a uma constatação. O esforço de pesquisa deve continuar, e alternativas ao modelamento elíptico devem ser buscadas. Como para o estudo da turbulência, novas abordagens para tratar a convecção natural devem ser criadas paralelamente ao necessário desenvolvimento dos atuais métodos.

Entre os métodos existentes e utilizados em Engenharia, este aqui desenvolvido reúne qualidades básicas fundamentais para os aprimoramentos necessários, particularmente na implementação de um mecanismo de geração de grades numéricas não uniformes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGRAWAL, H. C. (1960), "Heat Transfer in Laminar Flow Between Parallel Plates at Small Péclet Numbers", Appl. Sci. Res., vol. 9, pp. 177-189
- AIHARA, T. (1973), "Effects of Inlet Boundary-Conditions on Numerical Solutions of Free Convection Between Vertical Parallel Plates", Report of the Institute of High Speed Mechanics, vol. 28, 258, pp. 1-27.
- AKBARI, H. & T. R. BORGES (1979), "Free Convective Laminar Flow Within the Trombe Wall Channel", Solar Energy, vol. 22, pp. 165-174.
- ALLEN, D. N. de G. & R. V. SOUTHWELL (1955), "Relaxation Methods Applied to Determine the Motion, in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder", Quart. Journ. Mech. and Applied Math., vol. 8, Pt. 2, pp. 129-145.
- ALMEIDA, P. I. F. de & L. F. MILANEZ (1990), "Laminar Mixed Convection Between Vertical Plates with Isolated Thermal Sources", In: Heat Transfer in Electronic and Microelectronic Equipment, Ed. A. E. Bergles, Hemisphere Publishing Corporation, N. Y., pp. 155-168
- AMES, W. F. (1977), Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, N. Y.
- AMSDEN, A. A. & F. H. HARLOW (1968), "Transport of Turbulence in Numerical Fluid Dynamics", J. Comp. Physics 3, pp. 94-110.

- ANDERSON, D.A., J.C. TANNEHILL & R.H. PLETCHER (1984) *Computacional Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC.
- ARGYRIS, J.H. (1960), *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth (reeditado de Aircraft Eng., 1954-55).
- ASAKO, Y. & M. FAGHRI (1987), "Three Dimensional Heat Transfer and Fluid Flow Analysis of Arrays of Rectangular Blocks Encountered in Eletronic Equipment", ASME, Paper 87 - HT 73.
- AUNG, W. (1972), "Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically", *Int. J Heat. Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1577-1580.
- AUNG, W. & G. WORKU (1986,a), "Developing Flow and Flow Reversal in a Vertical Channel with Asymmetric Wall Temperatures", *J. Heat Transfer, Trans. ASME*, vol.108, pp. 299-304.
- AUNG, W. & G. WORKU (1986,b), "Theory of Fully Developed, Combined Convection Including Flow Reversal", *J. Heat Tranfer, Trans. ASME*, vol. 108, pp. 485-488.
- AUNG, W., L.S. FLETCHER & V. SERNAS (1972), "Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates with Asymmetric Heating", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 2293-2308.
- AZIZ, K. & J.D. HELLUMS (1967), "Numerical Solution of the Three Dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection", *Physics of Fluids*, vol. 10, pp. 314-324.

- BARAKAT, H.Z. & J.A. CLARK (1966), "Analytical and Experimental Study of Transient Laminar Natural Convection Flows in Partially Filled Containers", Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf., Chicago, vol.II, p. 152.
- BAR-COHEN, A. & W.M. ROHSENOW (1984), "Thermally Optimum Spacing of Vertical, Natural Convection Cooled, Parallel Plates", J. Heat Transfer, Trans. of ASME, vol. 106, pp. 116-123.
- BHATTI, M.S. & C.W. SAVERY (1977), "Heat Transfer in the Entrance Region of a Straight Channel: Laminar Flow with Uniform Wall Heat Flux", J. Heat Trans., Trans. ASME, vol. 99, pp. 142-144
- BHATTI, M.S. & C.W. SAVERY (1978), "Heat Transfer in the Entrance Region of a Straight Channel: Laminar Flow with Uniform Wall Temperature", J. Heat Trans., ASME, vol. 100, pp. 539-542
- BIRINGEN, S. & C. COOK (1988), "On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations using Nonstaggered Grids", Numerical Heat Transfer, vol. 13, pp. 241-252.
- BIRKHOFF, G. (1981), "Solving Elliptic Problems: 1930-1980", pp.17-38, In: Elliptic Problem Solvers, Ed. Martin H. Schultz, Academic Press, New York.
- BODOIA, J.R. & J.F. OSTERLE (1962), "The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 84, pp. 40-44.
- BOZEMAN, J.D. & C. DALTON (1973), "Numerical Study of Viscous Flow in Cavity", J. Comp. Phys., vol. 12, pp.

348-363.

- BRILEY, W.R. (1974), "Numerical Methods for Predicting Three-dimensional Steady Viscous Flow in Ducts", J. Comp. Phys., vol. 14, pp. 8-28.
- CARETTO, L.S., A.D. GOSMAN, S.V. PATANKAR & D.B. SPALDING (1972), "Two Calculation Procedure for Steady, Three-dimensional Flows with Recirculation" Proc. Third Int. Conf. Num. Methods Fluid Mech., Lecture Notes in Physics, vol. 19, Springer-Verlag, N.Y., pp. 60-68.
- CARETO, L.S., R.M. CURR & D.B. SPALDING (1972), "Two Numerical Methods for Three-Dimensional Boudary Layers", Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol.1, pp. 39-57.
- CEBECI, T., A.A. KHATTAB & R. LAMONT (1982), "Combined Natural and Forced Convection in Vertical Ducts", Proc. Seventh Int. Heat Transfer Conf., Munich, F.R. Germany, vol. 1, pp. 419-424.
- CEBECI, T., R.S. HIRSH, H.B. KELLER & P.G. WILLIAMS (1981), "Studies of Numerical Methods for the Plane Navier-Stokes Equations", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 27, pp. 13-44.
- CHANG, T.S. & T.F. LIN (1989), "Transient Buoyancy-Induced Flow Through a Heated, Vertical Channel of Finite Height", Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 16, pp. 15-35.
- CHORIN, A.J. (1967), "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", J. Comp. Phys., vol.2, pp. 12-26.

- CHOW, L.C. & C.L. TIEN (1978), "An Examination of Four Differencing Schemes for Some Elliptic-Type Convection Equations", Numerical Heat Transfer, vol. 1, pp.87-100
- CHOW, L.C., S.R. HUSAIN & A. CAMPO (1984), "Effects of Free Convection and Axial Conduction on Forced-Convection Heat Transfer Inside a Vertical Channel at Low Peclet Numbers", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 106, pp. 297-303.
- CHURCHILL, S.W. (1977), A Comprehensive Correlating Equation for Buoyancy-Induced Flow in Channels", Letters in Heat Mass Transfer, vol. 4, pp. 193-199.
- CHURCHILL, S.W., P. CHAO & H. OZOE (1981), "Extrapolation of Finite-Difference Calculations of Laminar Natural Convection in Enclosures to Zero Grid Size", Numerical Heat Transfer, vol. 4, pp. 39-51.
- CLOUGH, R.W. (1960), "The Finite Element in Plane Stress Analysis", Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa.
- COURANT, R., E. ISAACSON & M. REES (1952), "On the Solution of Non-Linear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences", Comm. Pure Appl. Math., vol. 5, p.243.
- COURANT, R., K.O. FRIEDRICHS & H. LEWY (1928), "Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik", Mathematische Annalen, vol. 100, pp. 32-74 (Traduzido para o inglês como: On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics, IBM J. Res. Dev., vol. 11, pp. 215-234, 1967).

- DALBERT, A.M. (1982), "Natural, Mixed and Forced Convection in a Vertical Channel with Asymmetric Uniform Heating", Proc. Seventh Int. Heat Transfer Conf., Munich, F.R. Germany, vol. 1, pp. 431-434.
- DALBERT, A.M., F.PENOT & J.L. PEUBE (1981), "Convection Naturelle Laminaire dans un Canal Vertical Chauffe a Flux Constant", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, pp. 1463-1473.
- DAVALATH, J. & Y. BAYAZITOGU (1987), "Forced Convection Cooling Across Rectangular Blocks", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 109, pp. 321-328.
- DORODNICYN, A.A. (1972), "Review of Methods for Solving the Navier-Stokes Equations". Proc. Third Int. Conf. Num. Methods Fluid Mech., Lectures Notes in Physics, vol. 1, Springer-Verlag, N.Y., pp. 1-11.
- DOUGLAS JR., J. & J.E. GUNN (1964), "A General Formulation of Alternating Directions Methods - Part 1. Parabolic and Hyperbolic Problems", Numerische Mathematik, vol. 6, pp. 428-453.
- ECKERT, E.R.G. (1981), "Pioneering Contributions to Our Knowledge of Convective Heat Transfer", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 103, pp. 409-414.
- ELENBAAS, W. (1942), "Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection", Phisica, vol. 9, n^o 1, pp. 1-28.
- FIGUEIREDO, J.R. (1988), Generalização e Aproximação do Esquema Discretizante de Allen para Equações de Transporte em Fluido - Tese de Doutorado - FEC, UNICAMP, Campinas, SP.

- FIGUEIREDO, J.R., M.M. GANZAROLLI e P.I.F. de ALMEIDA (1986)
"Convecção Natural em Cavidade Retangular-Solução Numérica", Anais do II Congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria, Vol.1, pp.62-73, SP.
- FILLER, L. & H.F. LUDLOFF (1961), "Stability Analysis and Integration of the Viscous Equations of Motion", Math. of Computation, vol. 15, pp. 261-274.
- FRANKEL, S.P. (1950), "Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations", Math. Tables and Others Aids to Computation, vol. 4, pp. 65-75
- GALERKIN, B.G. (1915), "Series Solutions of Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates" (Russo), Vestn. Inzh. Tech., 19, pp. 897-908.
- GANZAROLLI, M.M. (1991), Convecção Natural em Cavidade Retangular Aquecida pela Base e Simetricamente Resfriada pelos Lados - Tese de Doutorado - FEC, UNICAMP, Campinas, SP.
- GANZAROLLI, M.M. & L.F. MILANEZ (1989), "Natural Convection in Enclosures Heated From Below and Symmetrically Cooled From the Sides", ASME HTD 121 ,Numerical Simulation of Convection in Electronic Equipment Cooling, pp. 39-43.
- GEBHART, B., Y. JALURIA, R.L. MAHAJAN & B. SAMMAKIA (1988), Buoyancy-Induced Flows and Transport, Hemisphere Publishing Corporation, NY
- GENTRY, R.A., R.E. MARTIN & B.J. DALY (1966), "An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow

- Problems", J. Comp. Phys., vol. 1, pp. 87-118.
- GHADDAR, N.K., K.Z. KORCZAK, B. MIKIC & A.T. PATERA (1986), "Numerical Investigation of Incompressible Flow in Grooved Channels: Stability and Self-Sustained Oscillations", J. Fluid Mech., vol. 163, p.99
- GHIA, K.N. & J.S. SOKHEY (1977), "Laminar Incompressible Viscous Flow in Curved Ducts of Regular Cross-Section", J. Fluids Eng., vol. 99, pp. 640-648.
- GHIA, K.N., W.L. HANKEY JR. & J.K. HODGE (1977), "Study of Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variable Using Implicit Numerical Technique", AIAA Paper 77-648, Albuquerque, New Mexico.
- GHIA, K.N., W.L. HANKEY JR. & J.K. HODGE (1979). "Use of Primitive Variables in the Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, vol. 17, pp. 288-301.
- GHIA, U., K.N. GHIA & C.J. STRUDERUS (1977), "Three-dimensional Laminar Incompressible Flow in Straight Polar Ducts", Comp. Fluids, vol. 5, pp. 205-218
- GHIA, U., K.N. GHIA, S.G. RUBIN & P.K. KHOSLA (1981), "Study of Incompressible Flow Separation Using Primitive Variables", Comp. Fluids, vol. 9, pp. 123-142.
- GOSMAN, A.D. & D.B. SPALDING (1971), "The Prediction of Confined Three-dimensional Boundary Layers", In: Salford Symposium on Internal Flows, Paper 19, Inst. Mech. Engrs., London

- GOSMAN, A.D. & W.M. PUN (1974), Lectures Notes for a Course Entitled "Calculations of Recirculating Flows", 2nd edition, Imperial College of Science and Technology, Mechanical Engineering Department, London
- GOSMAN, A.D., W.M. PUN, A.K. RUNCHAL, D.B. SPALDING, M. WOLFSTEIN (1969), Heat and Mass Transfer in Recirculating Flow. Academic Press, London e N. York.
- GRAETZ, L. (1883) "Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten", Ann. d. Physik, vol. 18, pp. 79-94
- GUPTA, M.M. & R.P. MONOHAR (1979), "Boundary Approximations and Accuracy in Viscous Flow Computations", J. Comp. Psys., vol. 31, pp. 265-288.
- HABCHI, S. & S. ACHARYA (1986), "Laminar Mixed Convection in a Symmetrically or Asymmetrically Heated Vertical Channel ", Numerical Heat Transfer, Vol. 9, pp. 605-618.
- HABCHI, S. & S. ACHARYA (1986), "Laminar Mixed Convection in a Partially Blocked Vertical Channel", in Proceedings of the AIAA/ASME 4 th Thermophysics and Heat Transfer Conference, HTD-vol. 57, pp. 189-197.
- HARLOW, F.H. & A.A. AMSDEN (1968), "Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow", J. Comp. Physics, vol.3, pp. 80-93.
- HARLOW, F.H. & J.E. WELCH (1965), "Numerical Calculations of Fluid with Free Surface", Phys. Fluids, vol. 8, pp. 2182-2189.
- HIRT, C.W. & J.L. COOK (1972), "Calculating Three-Dimensional Flows Around Structures and over

- Rough Terrain", J. Comp. Phys., vol. 10, p. 324-340.
- HIRT, C.W. (1978), Los Alamos Report LA UR 78-2813.
- HREMKOFF, A. (1941), "Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method", J. Appl. Mech., A8, pp. 169-175.
- HWANG, C.L. & T.L. FAN (1964), "Finite Difference Analysis of Forced Convection Heat Transfer in Entrance Region of Flat Rectangular Duct", Appl. Sci. Res., sec. A, vol. 13, pp. 401-422.
- JALURIA, Y. & K.E. TORRANCE (1986), Computational Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, Washington D.C.
- JALURIA, Y. (1982), "Buoyancy-Induced Flow Due to Isolated Thermal Sources on Vertical Surface", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 104, pp. 223-227.
- JALURIA, Y. (1984), "Interaction of Natural Convection Wakes Arising from Thermal Sources on a Vertical Surface", Fundamentals of Natural Convection/Electronic Cooling, ASME HTD-vol. 32, pp. 67-76.
- JALURIA, Y. (1986), "Mixed Convection Flow Over Localized Multiple Thermal Sources on a Surface", Phys. Fluids, vol. 29, pp. 934-940.
- JAMESON, A. (1987), "Successes and Challenges in Computational Aerodynamics" AIAA Paper 87-1184-CP 8th Comp. Fluid Dyn. Conf., Honolulu, Hawaii.
- KANTAROVISH, L.V. & V.I. KRYLOV (1958), Approximate Methods of Higher Analysis, Interscience (Primeira edição Russa, 1936).

- KETTLEBOROUGH, C.F. (1972), "Transient Laminar Free Convection Between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 883-896.
- KRAUS, A.D. & A. BAR-COHEN (1983), *Thermal Analysis and Control of Electronic Equipment*, Hemisphere & McGraw-Hill, New York.
- KWON, O.K. & R.H. PLETCHER (1979), "Prediction of Incompressible Separated Boundary Layers Including Viscous-Inviscid Interaction", *J. Fluids Eng.*, vol 101, pp. 466-472.
- LAGE, J.L. & P.R.de SOUZA MENDES (1987), "Laminar Forced Convection Between Parallel Flat Plates", *Anais do 1^o Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Massa*, Campinas, SP.
- LAUNDER, B.E. & D.B. SPALDING (1972), *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London.
- LAWRENCE, W.T. & J.C.CHATO (1966), "Heat-Transfer Effects on the Developing Laminar Flow Inside Vertical Tubes", *J. Heat Transfer*, *Trans. ASME, Series C*, vol. 88, pp. 214-222.
- LOMBARDI, G. & E.M. SPARROW (1974), "Measurements of Local Transfer Coefficients for Developing Laminar Flow in Flat Rectangular Ducts", *Int. J. Heat Mass Trans.*, vol. 17, pp. 1135-1140.
- LONGLEY, H.J. (1960), "Methods of Differencing in Eulerian Hydrodynamics", *LASL Rept. LAMS-2379*, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, New Mexico.

- MALLISON, G.D. & G. de VAHL DAVIS (1973), "The Method of the False Transient for the Solution of Coupled Elliptic Equations", J. Comp. Phys. 12, pp. 435-461.
- MCHENRY, D. (1943), "A Lattice Analogy for the Solution of plane stress problems", J. Inst. Civ. Eng., 21, pp. 59-82.
- MERCER, W.E., W.M. PEARCE & J.E. HITCHCOCK (1967), "Laminar Forced Convection in the Entrance Region Between Parallel Flat Plates", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 89, pp. 251-257.
- MILANEZ, L.F. & A.E. BERGLES (1986), "Studies on Natural Convection Heat Transfer from Thermal Sources on a Vertical Surface", Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., San Francisco, vol. 3, pp. 1347-1352.
- MIYATAKE, O. & T. FUJII (1972), "Free Convective Heat Transfer Between Vertical Parallel Plates - One Plate Isothermally Heated and the other Thermally Insulated", Heat Transfer-Japanese Research, vol. 3, pp. 30-38.
- MIYATAKE, O., T. FUJII & H. TANAKA (1973), "Natural Convective Heat Transfer Between Vertical Parallel Plates-One Plate with a Uniform Heat Flux and the other Thermally Insulated", Heat Transfer-Japanese Research, vol. 4, pp. 25-33.
- MOFFAT, R.J. & A. ORTEGA (1988), Direct Air-Cooling of Electronic Components - In: Advances in Thermal Modeling of Electronic Components and Systems, Eds. A. Bar-Cohen & A.D. Kraus Hemisphere Publishing Corporation,

Washington D.C.

- NAKAMURA, H., Y. ASAKO & T. NAITOU (1982), "Heat Transfer by Free Convection Between two Parallel Flat Plates", Numerical Heat Transfer, vol. 5, pp. 95-106.
- NEWMARK, N.M. (1949), "Numerical Methods of Analysis in Bars Plates and Elastic Bodies". In: Numerical Methods in Analysis in Engineering (ed. L.E. Grinter), Macmillan, London.
- NICKELL, T.W., R.D. ULRICH & B.W. WEBB (1987), "Combined Natural Convection and Radiation Heat Transfer from Parallel Plates with Discrete Heat Sources", ASME Paper 87-WA/EEP-1.
- NUSSELT, W. (1910), "Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge", Z. Ver. Deut. Ing., vol.54, pp. 1154-1158
- O'MEARA, T. & D. POULIKAKOS (1987), "Experiments on the Cooling by Natural Convection of an Array of Vertical Heated Plates With Constant Heat Flux", Int. J. Heat Fluid Flow, Vol. 8, pp. 313-319
- OOSTHUIZEN, P.H. (1984), "A Numerical Study of Laminar Free Convective Flow Through a Vertical Open Partially Heated Plane Duct", Fundamentals of Natural Convection/Electronic Equipment Cooling, ASME HTD, vol. 32, pp. 41-47.
- ORMISTON, S.J., G.D. RAITHEY & K.G.T. HOLLANDS (1985), "Numerical Predictions of Natural Convection in a Trombe Wall System", ASME Paper 85-HT-36.

- OSTRACH, S. (1954), "Combined Natural and Forced Convection Heat Transfer of Fluids with and without Heat Sources in Channels with Linearly Varying Wall Temperature", NACA TN 3141.
- PATANKAR, S.V. & D.B. SPALDING (1972), "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flow", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp. 1787-1806.
- PATANKAR, S.V. (1981), "A Calculation Procedure for Two-dimensional Elliptic Situations", Numerical Heat Transfer, vol. 4, pp. 409-425.
- PATANKAR, S.V. (1980), Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, Washington D.C.
- PEACEMAN, D.W. & H.H. RACHFORD JR. (1955), "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 3, pp. 28-41.
- PENOT, F. & A.M. DALBERT (1983), "Convection Naturelle Mixte et Forcee dans un Thermosiphon Vertical Chauffe a Flux Constant", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, pp. 1639-1647.
- PRATAP, V.S. & D.B. SPALDING (1976), "Fluid Flow and Heat Transfer in Three-Dimensional Duct Flows", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, pp. 1183-1188.
- QUINTIERE, J. & W.K. MUELLER (1973), "An Analysis of Laminar Free and Forced Convection Between Finite Vertical Parallel Plates", J. Heat Transfer, Trans. ASME,

- vol. 95, pp. 53-59.
- RAITHBY, G.D. & K.E. TORRANCE (1974), "Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Comput. Fluids*, vol. 2, pp. 191-206.
- RAMANATHAN, S. & R. KUMAR (1988), "Correlations for Natural Convection Between Heated Vertical Plates", *Natural and Mixed Convection in Electronic Equipment Cooling*, ASME HTD-vol. 100, pp. 1-12.
- RAMANATHAN, S., R. KUMAR & T. WANG (1988), "Natural Convection from Heated Plates in Large Enclosures", ASME National Heat Transfer Conference, Houston, HTD-vol. 96, pp. 155-163.
- RAYLEIGH, LORD (J.W. STRUTT) (1870), "On the Theory of Resonance", *Trans. Roy. Soc. (London)*, A161, pp. 77-118.
- RICHARDSON, L.F. (1910), "The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems", *Trans. Roy. Soc. (London)*, A210, pp. 307-357.
- RICHTMYER, R.D. & K.W. MORTON (1967), *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2d ed., Interscience Publishers, Wiley, New York.
- RITZ, W. (1909), "Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der Mathematischen Physik", *J. Reine Angew. Math.*, 135, pp. 1-161.
- ROACHE, P.J. (1972), *Computational Fluid Dynamics - Hermosa Publisher Albuquerque N.M.*

- ROACHE, P.J. (1975), "The LAD, NOS and Split NOS Methods for the Steady-State Navier-Stokes Equations". *Computers and Fluids*, vol. 3, pp. 179-195.
- SAKAI, K. (1981), "An Accelerated Computing Technique for Steady Fluid Flows", *J. Comp. Phys.*, vol. 40, pp. 509-516.
- SCHLICHTING, H. (1960), *Boundary Layer Theory*, Mc Graw Hill, NY
- SCHMIDT, F.W. & B. ZELDIN (1970), "Laminar Heat Transfer in the Entrance Region of Ducts", *Appl. Sci. Res.*, vol. 23, pp. 73-94.
- SCHMIDT, R.C. & S.V. PATANKAR (1986), "A Numerical Study of Laminar Forced Convection Across Heated Rectangular Blocks in Two-dimensional Ducts", ASME Paper 86-WA/HT-88.
- SHIH, T.M. & A.L. REN (1984), "Primitive - Variable Formulations Using Nonstaggered Grids". *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, pp. 413-428.
- SIEGEL, R. & R.H. NORRIS (1957), "Tests of Free Convection in a Partially Enclosed Space Between two Heated Vertical Plates", *Trans. ASME*, pp. 663-673.
- SMITH, G.D. (1978), *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Clarendon Press, Oxford.
- SOUTHWELL, R.V. (1946), *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Clarendon Press, London.
- SPALDING, D.B. (1972), "A Novel Finite - Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both

- First and Second Derivatives", Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 4, pp. 551-559.
- SPARROW, E.M. & A. CHUKAEV (1980), "Forced-Convection Heat Transfer in a Duct having Span Wise Periodic Rectangular Protuberances", Numerical Heat Transfer, vol. 3, pp. 149-167.
- SPARROW, E.M. & F. SAMIE (1982), "Interaction Between a Stream which Passes Through an Enclosure and Natural Convection within the Enclosure", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 25, pp. 1489-1502.
- SPARROW, E.M. & L.F.A. AZEVEDO (1985), "Vertical-Channel Natural Convection Spanning Between the Fully-Developed Limit and the Single-Plate Boundary-Layer Limit", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 28, pp. 1847-1857.
- SPARROW, E.M. & M. FAGHRI (1980), "Natural Convection Heat Transfer from the Upper Plate of a Colinear, Separated Pair of Vertical Plates", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 102, pp. 623-629.
- SPARROW, E.M. & P.A. BAHRAMI (1980), "Experiments on Natural Convection from Vertical Parallel Plates with Either Open or Closed Edges", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 102, pp. 221-227.
- SPARROW, E.M., G.M. CHRYSLER & L.F. AZEVEDO (1984), "Observed Flow Reversals and Measured-Predicted Nusselt Numbers for Natural Convection in a One-Sided Heated Vertical Channel", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 106, pp. 325-332.

- STEPHAN, K. (1959), "Wärmeübergang und Druckabfall bei nicht ausgebildeter Laminarströmung in Rohren und in ebenen Spalten", Chemie-Ingr-Tech., vol. 31, pp. 773-778.
- STONE, H.L. (1968), "Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Equations", SIAM J. Num. Anal., vol. 5, pp. 530-558.
- TAO, L.N. (1960), "On Combined Free and Forced Convection Channels", J. of Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 82, pp. 233-238.
- TEWARI, S.S., Y. JALURIA & S. GOEL (1987), "Natural and Mixed Convection Transport from Finite Size Heat Sources on a Flat Plate in Cooling of Electronic Equipment", Temperature/Fluid Measurements in Electronic Equipment, ASME HTD, vol. 89, pp. 1-9.
- THOMAZ, L.H. (1949), "Elliptic Problems in Linear Difference Equations over a Network", Watson Sci. Comp. Lab. Rept., Columbia University, New York.
- THOM, A. (1933), "The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds", Proceedings of the Royal Society of London, A 141, pp. 651-666.
- TOMIMURA, T. & M. FUJII (1987) "Laminar Mixed Convection Heat Transfer Between Parallel Plates with Localized Heat Sources". In Proceedings of the International Symposium on Cooling Technology for Electronic Equipment, Honolulu, Hawaii, pp. 701-715.
- TUANN, S. & M.D. OLSON (1978), "Review of Computing Methods for Recirculating Flows". J. Comp. Phys., vol. 29, pp. 1-19.

- TURNER, B.L. & R.D. FLACK (1980), "The Experimental Measurement of Natural Convective Heat Transfer in Rectangular Enclosures with Concentrated Energy Sources", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 102, pp. 236-241.
- TURNER, M.J., R.W. CLOUGH, H.C. MARTIN & L.J. TOPP (1956), "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aero. Sci., vol. 23, pp. 805-823.
- VAHL DAVIS, G. de (1986), "Finite Difference Methods for Natural and Mixed Convection in Enclosures". In: Proceedings of the Eight Int. Heat Transfer Conf., San Francisco, California, vol. 1, pp. 101-109.
- WANG, Y.L. & P.A. LONGWELL (1964), "Laminar Flow in the Inlet Section of Parallel Plates", AIChE Journal, vol. 10, 3, pp. 323-329.
- WILLIAMS, J.C. (1977), "Incompressible Boundary Layer Separation", Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 9, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, pp. 113-144.
- WIRTZ, R.A. & R.J. STUTZMAN (1982), "Experiments on Free Convection Between Vertical Plates with Symmetric Heating", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 104, pp. 501-507.
- WONG, A.K. & J.A. REIZES (1984), "An Effective Vorticity-Vector Potential Formulation for the Numerical Solution of Three-Dimensional Duct Flow Problem", J. Comp. Phys., vol. 55, pp. 98-114.

- YAN, W.M. & T.F. LIN (1987), "Natural Convection Heat Transfer in Vertical Open Channel Flows with Discrete Heating", Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 14, pp. 187-200.
- WILKES, J.O. (1963) The Finite Difference Computation of Natural Convection in an Enclosed Cavity, Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI.
- WILKES, J.O. & CHURCHILL, S.W. (1966), "The Finite-difference Computation of Natural Convection in a Rectangular Enclosure", A.I.Ch.E. Journal, vol. 12, pp. 161-166.
- WONG, H.H. & G.D. RAITHEY (1979), "Improved Finite-Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors", Numerical Heat Transfer, vol. 2, pp. 139-163.
- YAO, L.S. (1983), "Free and Forced Convection in the Entry Region of a Heated Vertical Channel", Int. J. Heat Mass Transfer, vo. 26, pp. 65-72.
- YOUNG, D. (1954), "Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 76, pp. 92-111.
- ZELDIN, B. & F.W. SCHMIDT (1972), "Developing Flow with Combined Forced-Free Convection in an Isothermal Vertical Tube", J. Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 94, pp. 211-223".
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1971), The Finite Element Method. McGraw-Hill Book Company (UK) - London.

ZIENKIEWICZ, O.C. (1986), "Update to the Finite Element Method from Intuition to Generality", Applied Mechanics Update, pp. 135-142.

ZIENKIEWICZ, O.C., K. MORGAN (1983), Finite Elements and Approximation. John Wiley & Sons, New York.

APÉNDICE A

TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

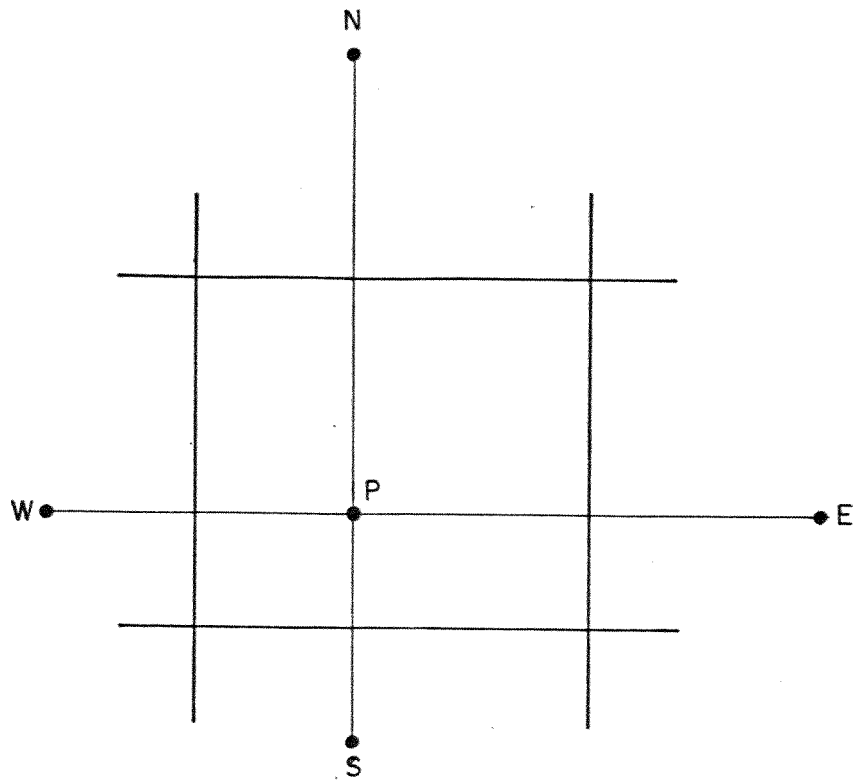
Duas práticas são utilizadas para tratar as grades irregulares na formulação de volumes de controle finitos. A malha numérica pode ser formada com as fronteiras dos volumes de controle centradas (prática A) ou com os nós cardeais localizados nos centros das células numéricas (prática B). Uma representação dessas duas práticas para uma geometria bidimensional é apresentada na figura A.1 para uma célula de cinco nós.

Quando essas práticas são usadas em uma geometria unidimensional, o domínio de cálculo do problema é subdividido em segmentos de retas (volumes de controle unidimensionais) com as condições de contorno sendo tratadas diferentemente, num caso ou no outro. Na prática A, os nós extremos da grade numérica localizam-se sobre as fronteiras do domínio, enquanto na prática B são as faces das células extremas que se encontram sobre as fronteiras. A figura A.2 é uma representação desses dois modos de geração da grade numérica, podendo-se notar a maneira diferenciada de tratar as condições de contorno.

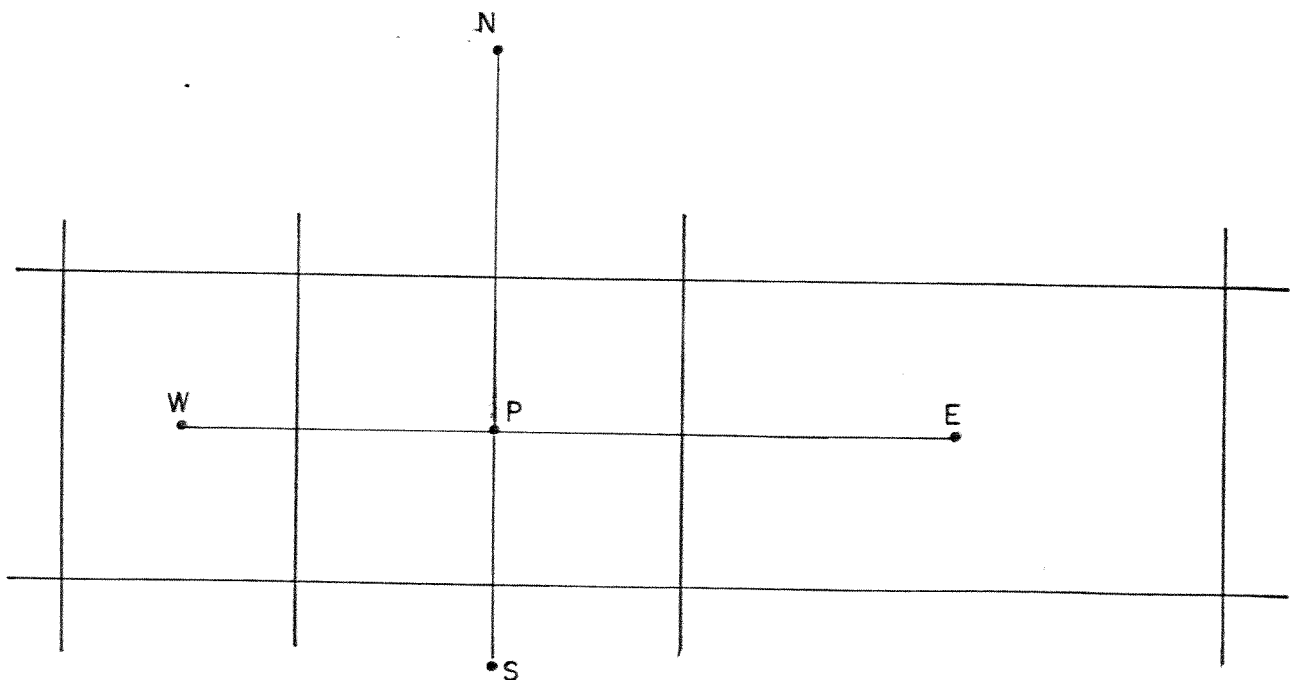
Um exercício numérico foi realizado gerando-se duas grades numéricas regulares através dessas duas técnicas de geração. A equação de transporte unidimensional:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - S = 0$$

com ρu , γ e S constantes, foi solucionada nas duas grades numéricas construídas, utilizando-se a discretização exponencial para formular o sistema de equações algébricas, através do



a) Fronteiras ou faces centradas (prática A)



b) Nós centrados (prática B)

Fig. A.1 Geração de grades irregulares,
geometria bidimensional

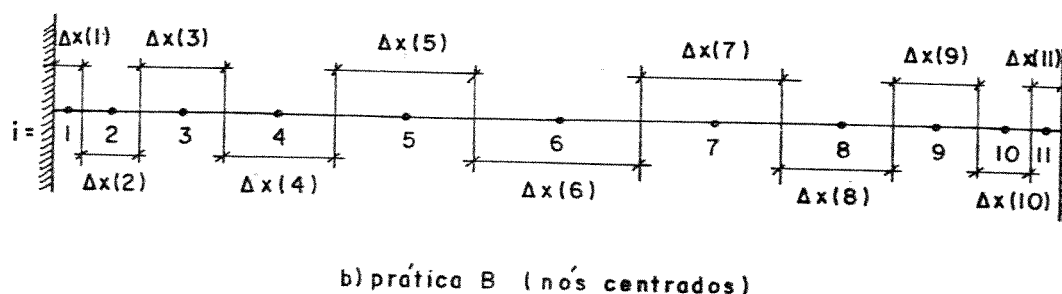
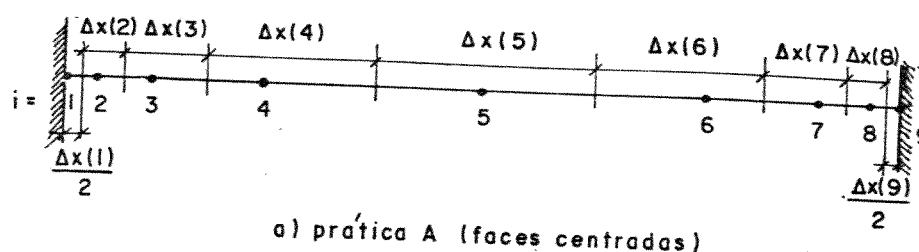


Fig. A.2 Tratamento das condições de contorno,
geometria unidimensional

algoritmo de Thomas.

Essa equação tem solução analítica exata, quando são conhecidos os valores da variável ϕ nas fronteiras do domínio (condições de contorno de Dirichlet) e a figura A.3 representa a solução dessa equação para vários valores de $Pe = \frac{\rho u L}{\gamma}$ e

$$Z = \frac{SL^2}{\gamma(\phi_L - \phi_0)}$$

Na determinação dos coeficientes da equação discretizada nesse estudo, a função exponencial exata foi utilizada sem nenhuma aproximação. A solução numérica foi obtida nos casos para os quais $Pe = -10, 1, 10$ e $Z = -10, 0, 10$.

Quando as soluções numéricas são comparadas com a solução

analítica, observa-se que a prática A produz resultados idênticos aos da solução analítica para todos os valores de P_e e Z , enquanto a prática B produz resultados coincidentes com a solução analítica somente quando $Z = 0$, isto é, quando o termo fonte $S = 0$ ou quando γ tende a infinito.

A utilização da prática B, para gerar a grade regular, introduz, então, um erro residual que não é eliminado com o refinamento da grade, para as condições de contorno de Dirichlet empregadas.

Desse ponto de vista a prática A é recomendada e foi utilizada no presente trabalho.

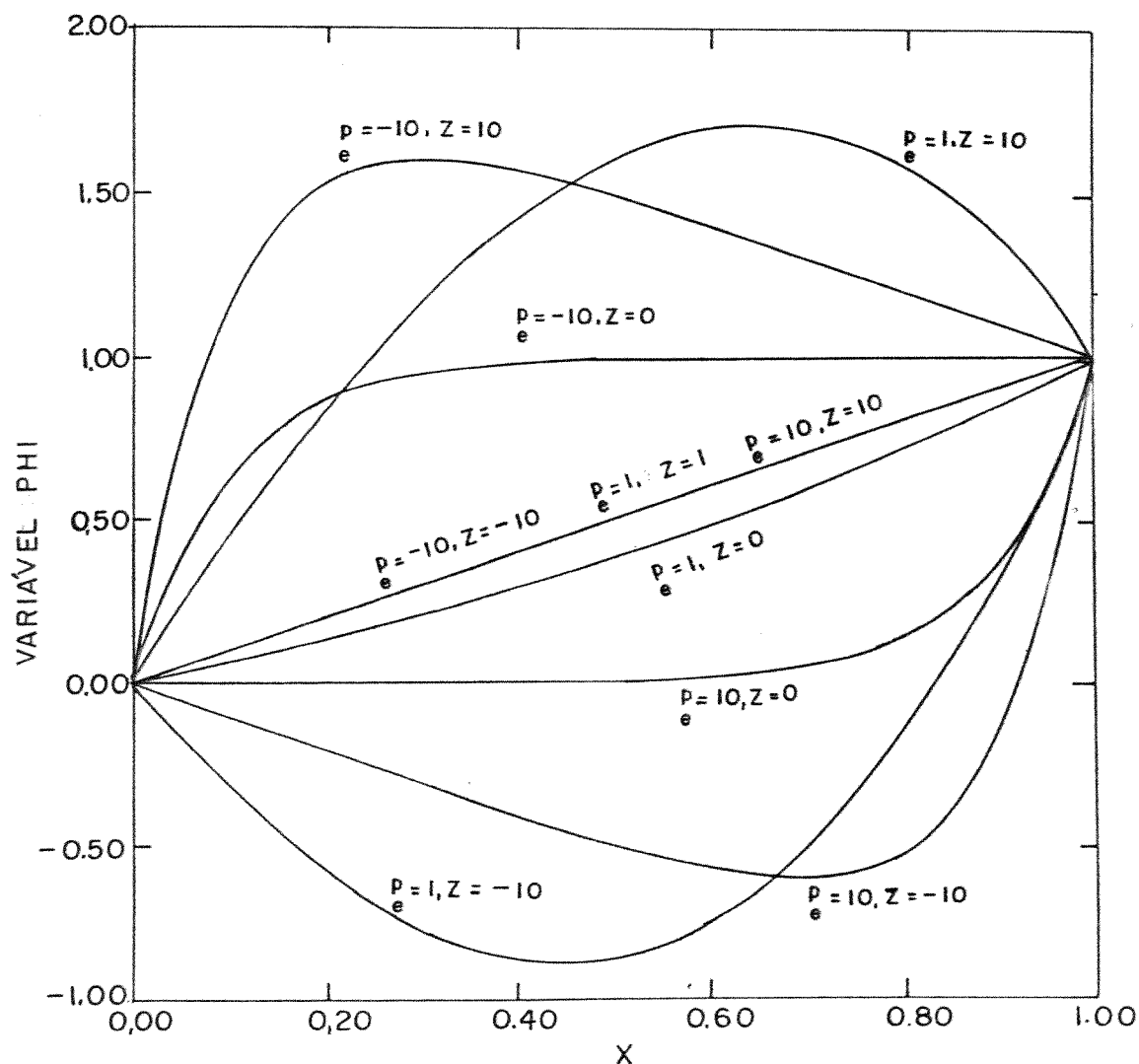


Fig. A3 Solução analítica.

APÊNDICE B

CÁLCULO DA FUNÇÃO $AC |P_e|$ PARA A EQUAÇÃO DISCRETIZADA

O coeficiente $AC |P_e|$ é definido na formulação desenvolvida por Patankar (1980) para os distintos esquemas de discretização propostos.

Para a discretização exponencial $AC |P_e|$ é dado pela expressão:

$$AC |P_e| = \frac{|P_e|}{e^{|P_e|} - 1}$$

Se expandirmos a função exponencial em série de Taylor, conforme sugerido por Figueiredo (1988), obtemos:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{logo: } AC |P_e| = \frac{|P_e|}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_e|^n}{n!}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_e|^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|P_e|^m}{(m+1)!}}$$

onde $m=n-1$, com n o grau do polinômio.

Então:

$$\begin{aligned} [AC |P_e|]^{-1} &= \frac{|P_e|^m}{(m+1)!} + \frac{|P_e|^{m-1}}{m!} + \dots + \frac{|P_e|}{2!} + 1 \\ &= \left[\left\{ \left[\left(\frac{|P_e|}{m+1} + 1 \right) \left(\frac{|P_e|}{m} + 1 \right) \left(\frac{|P_e|}{m-1} + 1 \right) \right] \left(\frac{|P_e|}{m-2} + \dots + 1 \right) \right\} \frac{|P_e|}{2} + 1 \right] \end{aligned}$$

Essa expressão pode ser facilmente implementada em computador. Na linguagem FORTRAN tem-se a seguinte seqüência de passos, fornecido o grau do polinômio de truncamento da série (N):

```

M = N-1
BCM + 1) = 1
DO 1 K = M, 1, -1
1 B(K) = ((P/(K+1)) * B(K+1)) + 1
ACP) = 1./B(1)

```

Como mostrado na tabela abaixo, quando comparado com a exponencial exata, um polinômio de grau 9 representa melhor a discretização exponencial em relação ao esquema de lei de potência, recomendado por Patankar (1980).

P _e	Lei de Pot.	Exponencial exata	Exponencial serie	
			n=8	n=9
0	1	1	1	1
0.5	0.7738	0.7707	0.7707	0.7707
1	0.5905	0.5820	0.58197	0.5819
2	0.3277	0.3190	0.31912	0.31905
3	0.1681	0.1572	0.15781	0.15737
4	0.07776	0.07469	0.07628	0.07525
5	0.03125	0.03392	0.03641	0.03504
10	0	0.00045	0.00136	0.00099
20	0	4.1 E-8	1,9 E-5	8.25 E-6

APÊNDICE C

LISTAGEM DO PROGRAMA EM FORTRAN

CASO: TROCA DE CALOR ENTRE PLACAS DISCRETAS.

```

C*****
C
C  ALGORITMO UNICAM "CAMPO UNICO" - SOLUCAO DAS EQUACOES ELIPTICAS
C    DE NAVIER STOKES E DA ENERGIA ( CASO BIDIMENSIONAL )
C      FORMULACAO VORTICIDADE-FUNCAO CORRENTE
C      FLUXO DE CALOR CONSTANTE-VERSAO 3
C
C*****
C
C      CONVECCAO NATURAL NUM  CANAL RETANGULAR
C
C              H/S=12   D/L=8
C
C      INTERACAO ENTRE PLACAS AQUECIDAS - FINAL DO CANAL ISOLADO
C
C*****
C
C-----PROGRAMA PRINCIPAL
      DIMENSION QSIANT(21,241),XNUL(241),A(21),BC(21),C(21),DC(21),EC(21)
      DIMENSION TV(21,241),SIPC(241),SII(241),SSIPC(241),SSII(241),
      1TEMB(241),XNUTBC(241),XNUM(241),SJPC(241),SJI(241)
      COMMON
      1/COM1/NI,NJ,JI,NPPSI,NPPRE,NGP,X(21),Y(241),
      1      DELX,DELY,PREC(21,241),DQSIDY(21,1),
      3      UK(21,241),VK(21,241),QSI(21,241),PSI(21,241),TEM(21,241),
      4      DENSIT,VISCOS,DIFUSI,GRASHO,REYNOL
      COMMON
      1/COM2/AP(21,241),ANC(21,241),ASC(21,241),AEC(21,241),AWC(21,241),
      2      SUC(21,241),SPC(21,241)
C
C
C-----PARAMETROS E INDICES DE CONTROLE-----
C
C-----PARAMETROS DE CONTROLE
      IREF=0
      NSUB=0
      GRAND=1.0E30
      NITER=1
      NPTEM=3
      NPPSI=3
      NQSI=3
      NPPRE=10

```

```

FSRQSI=1.0
FSRMIN=0.1
RESANQ=GRAND
RMQ=GRAND
RMQANT=RMQ
DELTA=1.0
COR1=0.8
COR2=1.0
EPS=1.0E-05
IND=0
MAXIT=400
INDPRI=1000
RESPER=.005
C-----CONSTRUCAO DA MALHA
  NI=21
  NJ=241
  JI=242
  DIMX=1.0
  DIMY=12.0
C-----DISTRIBUICAO DA GRADE NA DIRECAO X
  DELX=DIMX/FLOAT(NI-1)
  DO 50 I=1,NI
    50 X(I)=FLOAT(I-1)*DELX
C-----DISTRIBUICAO DA GRADE NA DIRECAO Y
  DELY=DIMY/FLOAT(NJ-1)
  DO 70 J=1,NJ
    70 Y(J)=FLOAT(J-1)*DELY
C-----PARAMETRO DE DEFINICAO DA RELACAO ENTRE O FLUXO DE CALOR
C     NA PLACA SUPERIOR E O FLUXO DE CALOR NA PLACA INFERIOR
C     RQ REPRESENTA A RELACAO QT/QB
  RQ=1.0
C-----PARAMETROS DE DEFINICAO DO TAMANHO DAS PLACAS
C     NS REPRESENTA A RELACAO D/L
  NS=8
  N1=NI+1
  N2=(NS+1)*(NI-1)
  N3=(NS+2)*(NI-1)+2
  N4=NJ-1
C-----PROPRIEDADES DO FLUIDO E PARAMETROS ADIMENSIONAIS
  DENSIT=1.0
  VISCOS=1.0
  PRANDT=.72

```

```

GRASHO=2500.
DIFUSI =1. /PRANDT
REYNOL=50.
GRE=GRASHO/REYNOL
C-----CABECALHO
WRITE(40,650)
WRITE(40,655) GRASHO, NI, NJ, REYNOL, PRANDT
WRITE(40,*) ' GR/RE=', GRE, ' QT/QB=', RQ, ' D/L=', NS
C-----GRAU DO POLINOMIO APROXIMACAO DA FUNCAO EXPONENCIAL
NGP=9
C
C
C-----OPERACOES INICIAIS-----
C
C-----ATRIBUI VALORES INICIAIS
IFC(REF.EQ.2) GO TO 110
DO 100 I=1, NI
DO 100 J=1, NJ
PSI(I, J)=1.0
QSI(I, J)=1.0
PRECI, J)=0.5
TEMCI, J)=0.0
QSIANT(I, J)=1.0
100 CONTINUE
GO TO 200
110 IFI=(NI+1)/2
IFP=(NI-1)/2
DO 125 J=1, NJ
DO 115 I=1, IFI
AC(I)=PSI(I, J)
BC(I)=QSI(I, J)
CC(I)=PRECI, J)
DC(I)=TEMCI, J)
EC(I)=QSIANT(I, J)
115 CONTINUE
DO 120 I=1, IFI
II=2*I-1
PSI(II, J)=AC(I)
QSI(II, J)=BC(I)
PRECI, J)=CC(I)
TEMCI, J)=DC(I)
QSIANT(II, J)=EC(I)

```

```

120 CONTINUE
  DO 125 I=1,IFP
    IP=2*I
    PSIC(IP,J)=(AC(I)+AC(I+1))/2.
    QSIC(IP,J)=(BC(I)+BC(I+1))/2.
    PREC(IP,J)=(CC(I)+CC(I+1))/2.
    TEMC(IP,J)=(DC(I)+DC(I+1))/2.
    QSIANTC(IP,J)=(EC(I)+EC(I+1))/2.
125 CONTINUE
C
C
C-----LOOP DE ITERACAO-----
C
C
C-----CALCULO DE PSI-----
  200 CALL CALCPS
C-----
C-----CALCULO DAS VELOCIDADES NOS PONTOS INTERNOS
  DO 210 I=2,NI-1
    DO 210 J=2,NJ-1
      UCI,J)=(PSIC(I,J+1)-PSIC(I,J-1))/(2.0*DELY)
      VCI,J)=(PSIC(I-1,J)-PSIC(I+1,J))/(2.0*DELX)
210 CONTINUE
C-----CONDICOES DE CONTORNO
  DO 230 J=1,NJ
C-----FRONTEIRA OESTE
    UC1,J)=0.0
    VC1,J)=0.0
    QSI(1,J)=(PSIC(3,J)-8.*PSIC(2,J))/(2.*DELX**2)
C-----FRONTEIRA LESTE
    PSIC(NI,J)=-REYNOL
    UCNI,J)=0.0
    VCNI,J)=0.0
    QSI(NI,J)=(PSIC(NI-2,J)-8.*PSIC(NI-1,J)+7.*PSIC(NI,J))/(2.*DELX**2)
230 CONTINUE
  DO 240 I=1,NI
C-----FRONTEIRA SUL
    UCI,1)=0.0
    VCI,1)=REYNOL
    IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.NI)VCI,1)=0.0
    QSI(I,1)=0.0
C-----FRONTEIRA NORTE

```

```

UCI,NJ)=0.0
IF(I.NE.1.AND.I.NE.NI) VCI,NJ)=(PSI(I-1,NJ)-PSI(I+1,NJ))/(2.*DELX
IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.NI) VCI,NJ)=0.0
C   DQSIDY(I,1)=(10.*PSI(I,NJ)-15.*PSI(I,NJ-1)+6.*PSI(I,NJ-2)-PSI(I,N
C   1J-3))/(DELY**3)
C   DQSIDY(I,1)=(9.*PSI(I,NJ)-12*PSI(I,NJ-1)+3.*PSI(I,NJ-2))/(2.*DELY
C   1**3)
      DQSIDY(I,1)=(-5.*UCI,NJ-1)+4.*UCI,NJ-2+UCI,NJ-3)/(DELY**2)
240 CONTINUE
C-----CALCULO DO CAMPO DE TEMPERATURAS-----
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE TEM-----
      CALL COEF(0)
C-----
      DO 250 N=1,NPTEM
      CALL BISOLV(0,1,NI,NJ,TEM)
      CALL BISOLV(1,1,NI,NJ,TEM)
250 CONTINUE
C-----
C
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE QSI-----
      CALL COEF(1)
C-----
      IF(IND.EQ.1) GO TO 500
      RESQSI=0.0
      DO 300 I=1,NI
      DO 300 J=1,NJ
      RESOR=ANCI,J)*QSI(I,J+1)+ASCI,J)*QSI(I,J-1)+AECI,J)*QSI(I+1,J)+
1      AWC,I,J)*QSI(I-1,J)-APCI,J)*QSI(I,J)+SUCI,J)
      RESQSI=RESQSI+RESOR*RESOR
300 CONTINUE
      RESQSI=SQRT(RESQSI/FLOAT(NI*NJ))
      IF(RESQSI.LT.RESANQ) GO TO 350
      IFCRMQ.LT.RMQANT)GO TO 350
      IFCFSRQSI.LE.FSRMIN)GO TO 590
      FSRQSI=FSRQSI*COR1
      DELTA=DELTA*COR2
      DO 320 I=1,NI
      DO 320 J=1,NJ
      QSI(I,J)=QSIANT(I,J)
320 CONTINUE
      IND=1
      GO TO 200

```



```

350 WRITE(*,*) 'INTERACAO=' ,NITER, 'RESIDUO=' ,RESQSI
      IFC(NITER.EQ.2)RESPER=RESQSI*EPS
      RESMAX=RESQSI
      IFC(NITER.GE.MAXIT) GO TO 560
C-----CONDICOES DE SAIDA
      IFC(RMQ.GE.EPS)GO TO 470
      IFC(RESMAX.LE.RESPER) GO TO 550
470 DO 480 I=1,NI
      DO 480 J=1,NJ
      QSIANT(I,J)=QSI(I,J)
480 CONTINUE
      RESANQ=RESQSI
      NITER=NITER+1
485 IFC(FSRQSI.EQ.1.0) GO TO 505
      NSUB=NSUB+1
      IFC(MOD(NSUB,5).EQ.0)FSRQSI=FSRQSI/COR1
505 IFC(Delta.EQ.1.0) GO TO 500
      DELTA=DELTA/COR2
500 IND=0
C-----SUBRELAXACAO DOS COEFICIENTES DE QSI
      NF1=NI-1
      NF2=NJ-1
      DO 510 I=2,NF1
      DO 510 J=2,NF2
      APCI,J)=APCI,J)/FSRQSI
      SUCI,J)=SUCI,J)+(1.-FSRQSI)*APCI,J)*QSI(I,J)
510 CONTINUE
C-----SOLUCAO DAS EQUACOES DE DIFERENCAS PARA QSI
      DO 540 N=1,NPQSI
      CALL BISOLV(0,1,NI,NJ,QSI)
      CALL BISOLV(1,1,NI,NJ,QSI)
540 CONTINUE
      RMQANT=RMQ
      SMDQSI=0.0
      SMQSI=0.0
      DO 545 I=1,NI
      DO 545 J=1,NJ
      SMDQSI=SMDQSI+ABS(QSI(I,J)-QSIANT(I,J))
      SMQSI=SMQSI+ABS(QSI(I,J))
545 CONTINUE
      RMQ=SMDQSI/SMQSI
      GO TO 200

```

```

C
C
C-----FINAL DO LOOP DE ITERACOES-----
C
C
C-----CALCULO DA TEMPERATURA DE MISTURA
550 DO 552 I=1,NI
      DO 552 J=1,NJ
          TV(I,J)=TEM(I,J)*V(I,J)
552 CONTINUE
      NIP=(CNI-1)/2
      NII=(CNI-3)/2
      DO 558 J=1,NJ
          SIP(J)=0.0
          SII(J)=0.0
          SSIP(J)=0.0
          SSI(J)=0.0
          DO 554 I=1,NIP
              IP=2*I
              SIP(J)=TV(IP,J)+SIP(J)
              SSIP(J)=V(IP,J)+SSIP(J)
554 CONTINUE
          DO 556 I=1,NII
              II=2*I+1
              SII(J)=TV(II,J)+SII(J)
              SSI(J)=V(II,J)+SSI(J)
556 CONTINUE
          TEMBJ)=(TV(1,J)+TV(CNI,J)+4.*SIP(J)+2.*SII(J))/(V(1,J)+V(CNI,J)+
          14.*SSIP(J)+2.*SSI(J))
558 CONTINUE
      WRITE(40,600)
      WRITE(40,610)
      GO TO 570
560 WRITE(40,600)
      WRITE(40,620)
C-----CALCULO DOS NUMEROS DE NUSSELT MEDIO E LOCAL
570 DO 578 J=1,NJ
      IF(J.GE.N1.AND.J.LE.N2)GO TO 575
      IF(J.GE.N3.AND.J.LE.NJ)GO TO 575
      IF(J.GT.N2.AND.J.LT.N3)GO TO 576
      XNULC(J)=1./TEM(1,J)
      XNUTB(J)=1./(TEM(1,J)-TEMBJ))

```

```

      GO TO 578
575 XNULC(J)=0.0
      XNUTBC(J)=0.0
      GO TO 578
576 XNULC(J)=RQ/TEM(1,J)
      XNUTBC(J)=RQ/(TEM(1,J)-TEMBC(J))
578 CONTINUE
      AREA=0.0
      NST=1
      NFIM=N1-3
      DO 580 J=NST,NFIM,2
      AREA=AREA+DELY/3.*(XNUTBC(J)+4.*XNUTBC(J+1)+XNUTBC(J+2))
580 CONTINUE
      XNUB=AREA
      AREA=0.0
      NST=N2+1
      NFIM=N3-3
      DO 584 J=NST,NFIM,2
      AREA=AREA+DELY/3.*(XNUTBC(J)+4.*XNUTBC(J+1)+XNUTBC(J+2))
584 CONTINUE
      XNUT=AREA
      RNU=XNUT/XNUB
      WRITE(40,*)'NUT=',XNUT,'NUB=',XNUB,'RAZAO NUT/NUB=',RNU
      WRITE(40,657)GRASHO,NI,NJ
      WRITE(40,658)
      WRITE(40,659) (Y(J),TEMBC(J),XNULC(J),XNUTBC(J),TEM(1,J),
1J=1,NJ)
C      WRITE(4,*)(PSI(I,J),J=1,NJ),I=1,NI)
C      WRITE(5,*)(TEM(I,J),J=1,NJ),I=1,NI)
      GO TO 660
590 WRITE(40,625)
C-----INSTRUcoes DE FORMATAcao
600 FORMAT(1H0,23(2HX),12X,'SAIDA FINAL',12X,24(2HXO)////)
610 FORMAT(1H0,36X,'CALCULOS TERMINADOS, LIMITE DE CONVERGENCIA SATIS
1EITO'////)
620 FORMAT(1H0,36X,'CALCULOS TERMINADOS, EXCESSO DE ITERACOES'////)
625 FORMAT(1H0,15X,'CALCULOS TERMINADOS,FATOR DE RELAXACAO
1MINIMO PERMITIDO ')
635 FORMAT(1H,'NO. DA RESIDUO FATOR DE ',7X,'VALORES DAS VAR
1AVEIS NO PTO (',I3,',',I3,')'/2X,'ITER',6X,'QSI',7X,'RELAXACAO',1
2X,'U',9X,'V',7X,'QSI',7X,'PSI',7X,'TEM')
650 FORMAT(15X,'*** ESCOAMENTO NUM CANAL H/S=12 ***',//)

```

```
655 FORMAT(5X,'GRASHOF=',F10.1,5X,' MALHA ',I3,' X ',I3,5X,'REYNOLD='
1F6.1,5X,'PRANDTL=',F6.3,/\)
```

```
657 FORMAT(5X,'GRASHOF=',F10.1,5X,' MALHA ',I3,' X ',I3,5X,'NUSELT='
1F6.3,/\)
```

```
658 FORMAT(5X,' Y ',5X,'TEMP. MISTURA',5X,'NUSELT LOCAL',5X,'NUSS
1LT TB',5X,'TEMP. PAREDE')
```

```
659 FORMAT(1H ,5X,F5.2,8X,F8.3,8X,F8.3,9X,F8.3,7X,F8.3)
```

```
660 CONTINUE
```

```
END
```

```
C*****
SUBROUTINE CALCPS
```

```
C*****
```

```
  DIMENSION DPSIDX(2,601),DPSIDY(21,2),S(21,241),FI(21)
```

```
  COMMON
```

```
  1/COM1/NI,NJ,JI,NPPSI,NPPRE,NGP,X(21),Y(241),
```

```
  2    DELX,DELY,PRE(21,241),DQSIDY(21,1),
```

```
  3    UC(21,241),V(21,241),QSI(21,241),PSI(21,241),TEM(21,241),
```

```
  4    DENSIT,VISCOS,DIFUSI,GRASHO,REYNOL
```

```
  COMMON
```

```
  1/COM2/AP(21,241),ANC(21,241),ASC(21,241),AEC(21,241),AWC(21,241),
```

```
  2    SUC(21,241),SP(21,241)
```

```
C-----MONTAGEM DOS COEFICIENTES DE PSI
```

```
  DO 100 I=2,NI-1
```

```
  DO 100 J=2,NJ-1
```

```
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DOS PONTOS INTERNOS
```

```
  ANCI,J)=DELX/DELY
```

```
  ASCI,J)=DELX/DELY
```

```
  AECI,J)=DELY/DELX
```

```
  AWCI,J)=DELY/DELX
```

```
C-----CALCULO DO TERMO FONTE
```

```
  SPCI,J)=0.0
```

```
  SUCI,J)=QSI(I,J)*DELX*DELY
```

```
  APCI,J)=ANCI,J)+ASCI,J)+AECI,J)+AWCI,J)-SPCI,J)*DELX
```

```
  1*DELY
```

```
  100 CONTINUE
```

```
C-----CALCULO DA CORRECAO INTEGRAL DEVIDA AO TEOREMA DE GREEN
```

```
  DO 110 I=2,NI-1
```

```
  DO 110 J=2,NJ-1
```

```
  S(I,J)=-SUCI,J)/(DELX*DELY)
```

```
  110 CONTINUE
```

```
C-----CALCULO DO TERMO FONTE E DAS DERIVADAS NA FRONTEIRA
```

```
  DO 120 J=1,NJ
```

```

C-----FRONTEIRA OESTE
      SC(1,J)=-QSI(1,J)
      DPSIDX(1,J)=(-3.*PSI(1,J)+4.*PSI(2,J)-PSI(3,J))/(2.*DELX)
C-----FRONTEIRA LESTE
      SC(NI,J)=-QSI(NI,J)
      DPSIDX(2,J)=-(-3.*PSI(NI,J)+4.*PSI(NI-1,J)-PSI(NI-2,J))/(2.*DELX)
120 CONTINUE
      DO 130 I=1,NI
C-----FRONTEIRA SUL
      SC(I,1)=-QSI(I,1)
      DPSIDY(I,1)=(-3.*PSI(I,1)+4.*PSI(I,2)-PSI(I,3))/(2.*DELY)
C-----FRONTEIRA NORTE
      SC(I,NJ)=-QSI(I,NJ)
      DPSIDY(I,2)=-(-3.*PSI(I,NJ)+4.*PSI(I,NJ-1)-PSI(I,NJ-2))/(2.*DELY)
130 CONTINUE
C-----CALCULO DA INTEGRAL DE LINHA
      NIP=(NI-1)/2
      NII=(NI-3)/2
      NJP=(NJ-1)/2
      NJI=(NJ-3)/2
      SDPIP=0.0
      SDPII=0.0
      DO 134 J=1,2
      DO 132 I=1,NIP
      IP=2*I
      SDPIP=DPSIDY(IP,J)+SDPIP
132 CONTINUE
      DO 134 I=1,NII
      II=2*I+1
      SDPII=DPSIDY(II,J)+SDPII
134 CONTINUE
      SDPJP=0.0
      SDPJI=0.0
      DO 138 I=1,2
      DO 136 J=1,NJP
      JP=2*J
      SDPJP=DPSIDX(I,JP)+SDPJP
136 CONTINUE
      DO 138 J=1,NII
      JI=2*J+1
      SDPJI=DPSIDX(I,JI)+SDPJI
138 CONTINUE

```

```

SL=(DELX/3.)*C(DPSIDY(1,1)+DPSIDY(1,2)+4.*SDPIP+2.*SDPII+DPSIDY(NI
11)+DPSIDY(NI,2))
SL=SL+(DELY/3.)*C(DPSIDX(1,1)+DPSIDX(2,1)+4.*SDPJP+2.*SDPJI+DPSIDX
11,NJ)+DPSIDX(2,NJ))
C-----CALCULO DA INTEGRAL DE AREA
DO 160 I=1,NI
SSP=0.0
NJF=(NI-1)/2
DO 140 J=1,NJF
JP=2*J
SSP=SCI,JP)+SSP
140 CONTINUE
SSI=0.0
NJF=(NJ-3)/2
DO 150 J=1,NJF
JI=2*J+1
SSI=SCI,JI)+SSI
150 CONTINUE
FI(I)=SCI,1)+4.*SSP+2.*SSI+SCI,NJ)
160 CONTINUE
SAP=0.0
NIF=(NI-1)/2
DO 170 I=1,NIF
IP=2*I
SAP=FI(IP)+SAP
170 CONTINUE
SAI=0.0
NIF=(NI-3)/2
DO 180 I=1,NIF
II=2*I+1
SAI=FI(II)+SAI
180 CONTINUE
SA=(DELX*DELY)*(FI(1)+4.*SAP+2.*SAI+FI(NI))/9.
C-----CALCULO DA CORRECAO
E=(SA-SL)/(FLOAT(NI-1)*DELX*FLOAT(NJ-1)*DELY)
SE=E*DELX*DELY
WRITE(*,*)'SE=',SE
DO 190 I=2,NI-1
DO 190 J=2,NJ-1
SUCI,J)=SUCI,J)+SE
190 CONTINUE
C-----FINAL DO CALCULO DA CORRECAO

```

```

C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NO CONTORNO
      DO 200 J=1,NJ
C-----FRONTEIRA OESTE
      ANC1,J)=0.0
      ASC1,J)=0.0
      AEC1,J)=0.0
      AWC1,J)=0.0
      SPC1,J)=0.0
      SUC1,J)=0.0
      APC1,J)=1.0
C-----FRONTEIRA LESTE
      ANCNI,J)=0.0
      ASCNI,J)=0.0
      AECNI,J)=0.0
      AWCNI,J)=0.0
      SPCNI,J)=0.0
      SUCNI,J)=-REYNOL
      APCNI,J)=1.0
      200 CONTINUE
      DO 300 I=2,NI-1
C-----FRONTEIRA SUL
      ANCI,1)=0.0
      ASCI,1)=0.0
      AECI,1)=0.0
      AWC1,1)=0.0
      SPCI,1)=0.0
      SUCI,1)=-REYNOL*XCI)
      APCI,1)=1.0
C-----FRONTEIRA NORTE
      ANCI,NJ)=0.0
      ASCI,NJ)=2.*DELX/DELY
      AECI,NJ)=DELY/DELX
      AWC1,NJ)=DELY/DELX
      SPCI,NJ)=0.0
      SUCI,NJ)=QSI CI,NJ)*DELX*DELY
      APCI,NJ)=ASCI,NJ)+AECI,NJ)+AWCI,NJ)
      300 CONTINUE
C-----SOLUCAO DAS EQUACOES DE DIFERENCAS PARA PSI
      DO 350 N=1,NPPSI
      CALL BISOLVCO,1,NI,NJ,PSI)
      CALL BISOLVC1,1,NI,NJ,PSI)
      350 CONTINUE

```

RETURN

END

C*****

SUBROUTINE COEFCIEQ

C*****

DIMENSION BEC(0:20),BWC(0:20),BSC(0:20),BNC(0:20)

COMMON

1/COM1/NI,NJ,JI,NPPSI,NPPRE,NGP,X(21),Y(241),

2 DELX,DELY,PREC(21,241),DQSIDY(21,1),

3 UC(21,241),V(21,241),QSI(21,241),PSI(21,241),TEM(21,241),

4 DENSIT,VISCOS,DIFFUSI,GRASHO,REYNOL

COMMON

1/COM2/APC(21,241),ANC(21,241),ASC(21,241),AEC(21,241),AWC(21,241),

2 SUC(21,241),SPC(21,241)

C

C-----IEQ=0 => EQ. DA ENERGIA-----

C-----IEQ=1 => EQ. DA VORTICIDADE-----

C

DIF=(1-IEQ)*DIFFUSI+IEQ*VISCOS

C-----MONTAGEM DOS COEFICIENTES DA EQUACAO DE TRANSPORTE

DO 100 I=2,NI-1

DO 100 J=2,NJ

C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE CONVECCAO

FN=DENSIT*VCI,J)*DELX

FS=DENSIT*VCI,J)*DELY

FE=DENSIT*UCI,J)*DELX

FW=DENSIT*UCI,J)*DELY

C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE DIFUSAO

DN=DIF*DELX/DELY

DS=DIF*DELX/DELY

DE=DIF*DELY/DELX

DW=DIF*DELY/DELX

C-----CALCULO DOS NUMEROS DE PECLET

PN=FN/DN

PS=FS/DS

PE=FE/DE

PW=FW/DW

C-----CALCULO DA FUNCAO AC/P

NG=NGP-1

BNC(NG)=1.0

BSC(NG)=1.0

BEC(NG)=1.0


```

BWCNG)=1.0
DO 200 KK=1,NG
K=NG-KK+1
K1=K-1
BNCK1)=BNCK)*ABSCPND)/FLOAT(K+1)+1.0
BSCK1)=BSC(K)*ABSCPSD)/FLOAT(K+1)+1.0
BECK1)=BECK)*ABSCPED)/FLOAT(K+1)+1.0
BWC1)=BWC(K)*ABSCPWD)/FLOAT(K+1)+1.0
200 CONTINUE
APN=1.0/BNCO)
APS=1.0/BSO)
APE=1.0/BEKO)
APW=1.0/BWCO)
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DOS PONTOS INTERNOS E DA FRONTEIRA NORTE
ANCI,J)=DN*APN+AMAX1(-FN,0.)
ASCI,J)=DS*APS+AMAX1(-FS,0.)
AECI,J)=DE*APE+AMAX1(-FE,0.)
AWCI,J)=DW*APW+AMAX1(-FW,0.)
SUCI,J)=FLOAT(IEQ)*GRASHO*(TEMCI+1,J)-TEMCI-1,J))*DELY/2.
SPCI,J)=0.0
APCI,J)=ANCI,J)+ASCI,J)+AECI,J)+AWCI,J)-SPCI,J)*DELX
1*DELY
100 CONTINUE
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NA FRONTEIRA
DO 250 J=2,NJ-1
C-----FRONTEIRA OESTE
ANC1,J)=FLOAT(1-IEQ)*DELX/DELY
ASC1,J)=FLOAT(1-IEQ)*DELX/DELY
AEC1,J)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELY/DELX
AWC1,J)=0.0
SPC1,J)=0.0
SUC1,J)=FLOAT(IEQ)*QSI(1,J)+FLOAT(1-IEQ)*(2.*DELY)
APC1,J)=FLOAT(IEQ)+FLOAT(1-IEQ)*(AEC1,J)+AWC1,J)+ANC1,J)+ASC1,J)
C-----FRONTEIRA LESTE
ANCNI,J)=FLOAT(1-IEQ)*DELX/DELY
ASCNI,J)=FLOAT(1-IEQ)*DELX/DELY
AECNI,J)=0.0
AWCNI,J)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELY/DELX
SUCNI,J)=FLOAT(IEQ)*QSI(NI,J)+FLOAT(1-IEQ)*(2.*DELY)
APCNI,J)=FLOAT(IEQ)+FLOAT(1-IEQ)*(AECNI,J)+AWCNI,J)+ANCNI,J)+
1ASCNI,J)
250 CONTINUE

```

```

C-----CONDICAO DE ISOLAMENTO
  NS=8
  N1=NI+1
  N2=(NS+1)*(NI-1)
  N3=(NS+2)*(NI-1)+2
  N4=NJ-1
C-----FRONTEIRA OESTE
  DO 260 J=N1,N2
    SUC(1,J)=FLOAT(IEQ)*QSI(1,J)
  260 CONTINUE
C-----RELACAO QT/QB (RQ)
  RQ=1.0
  DO 265 J=N2+1,N3-1
    SUC(1,J)=FLOAT(IEQ)*QSI(1,J)+FLOAT(1-IEQ)*(RQ*2.*DELY)
  265 CONTINUE
  DO 270 J=N3,N4
    SUC(1,J)=FLOAT(IEQ)*QSI(1,J)
  270 CONTINUE
C-----FRONTEIRA LESTE
  DO 280 J=2,N4
    SUC(NI,J)=FLOAT(IEQ)*QSI(NI,J)
  280 CONTINUE
C-----CANTO SUPERIOR ESQUERDO
  ANC(1,NJ)=0.0
  ASC(1,NJ)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELX/DELY
  AEC(1,NJ)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELY/DELX
  AWC(1,NJ)=0.0
  SUC(1,NJ)=FLOAT(IEQ)*QSI(1,NJ)
  APC(1,NJ)=FLOAT(IEQ)+FLOAT(1-IEQ)*(AEC(1,NJ)+ASC(1,NJ))
C-----CANTO SUPERIOR DIREITO
  ANC(NI,NJ)=0.0
  ASC(NI,NJ)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELX/DELY
  AEC(NI,NJ)=0.0
  AWC(NI,NJ)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELY/DELX
  SUC(NI,NJ)=FLOAT(IEQ)*QSI(NI,NJ)
  APC(NI,NJ)=FLOAT(IEQ)+FLOAT(1-IEQ)*(AWC(NI,NJ)+ASC(NI,NJ))
C-----CANTO INFERIOR ESQUERDO - PTO NAO ISOLADO
  ASC(1,1)=0.0
  ANC(1,1)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELX/DELY
  AWC(1,1)=0.0
  AEC(1,1)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELY/DELX
  SUC(1,1)=FLOAT(IEQ)*QSI(1,1)+FLOAT(1-IEQ)*(2.*DELY)

```

```

APC(1,1)=FLOAT(IEQ)+FLOAT(1-IEQ)*(AEC(1,1)+ANC(1,1))
C-----CANTO INFERIOR DIREITO
ASCNI,1)=0.0
ANCNI,1)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELX/DELY
AWCNI,1)=FLOAT(1-IEQ)*2.*DELY/DELX
AECNI,1)=0.0
SUCNI,1)=FLOAT(IEQ)*QSI(CNI,1)
APCNI,1)=FLOAT(IEQ)+FLOAT(1-IEQ)*(AWCNI,1)+ANCNI,1))
DO 300 I=2,NI-1
C-----FRONTEIRA SUL
ANCI,1)=0.0
ASCI,1)=0.0
AECI,1)=0.0
AWCI,1)=0.0
SPCI,1)=0.0
SUCI,1)=FLOAT(IEQ)*QSI(CI,1)+(1-IEQ)*0.
APCI,1)=1.0
C-----FRONTEIRA NORTE
IF(VCI,NJ).LE.0.0)GO TO 310
SUCI,NJ)=FLOAT(IEQ)*(SUCI,J)+DOSIDY(CI,1)*ANCI,NJ)*2.*DELY)
ASCI,NJ)=ANCI,NJ)+ASCI,NJ)
ANCI,NJ)=0.0
AECI,NJ)=AECI,NJ)
AWCI,NJ)=AWCI,NJ)
SPCI,NJ)=0.0
APCI,NJ)=APCI,NJ)
GO TO 300
310 SUCI,NJ)=FLOAT(IEQ)*SUCI,J)+FLOAT(1-IEQ)*0.
ASCI,NJ)=FLOAT(IEQ)*(ANCI,NJ)+ASCI,NJ))
ANCI,NJ)=0.0
AECI,NJ)=FLOAT(IEQ)*AECI,NJ)
AWCI,NJ)=FLOAT(IEQ)*AWCI,NJ)
APCI,NJ)=FLOAT(IEQ)*APCI,NJ)+(1-IEQ)*1.
300 CONTINUE
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE BISOLVCKF,LAP,NI,NJ,PHI)
C*****
DIMENSION PHI(21,241),A(241),B(241),C(241),D(241),P(241),Q(241)
COMMON
1/COM2/AP(21,241),AN(21,241),AS(21,241),AE(21,241),AW(21,241),

```

```

      2      SUC(21,241),SP(21,241)
C-----DEFINICAO DA VARREDURA
C      IFCLAP.NE.1) GO TO 10
      IST=1
      JST=1
      IFIM=NI
      JFIM=NJ
      10 IFCLAP.NE.-1)GO TO 20
      IST=NI
      JST=NJ
      IFIM=1
      JFIM=1
C-----DEFINICAO DA DIRECAO IMPLICITA
      20 IFCKF.NE.0) GO TO 350
C*****CALCULO DE PHI PARA KF=0, Y DIRECAO IMPLICITA*****
C-----INICIO DO PASSO W-E
      DO 100 I=IST,IFIM,LAP
C-----INICIO DA ITERACAO N-S
      DO 200 J=1,NJ
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DO TDMA
      ACJ)=APCI,J)
      BCJ)=ANCI,J)
      CCJ)=ASCI,J)
      IFCI.EQ.1) DCJ)=AECI,J)*PHI(I+1,J)+SUCI,J)
      IFCI.EQ.NI) DCJ)=AWCI,J)*PHI(I-1,J)+SUCI,J)
      IFCI.NE.1.AND.I.NE.NI) DCJ)=AECI,J)*PHI(I+1,J)+AWCI,J)*
      1PHI(I-1,J)+SUCI,J)
      IF(I.EQ.1) GO TO 150
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DA FORMULA DE RECORRENCIA
      TERM=1./(ACJ)-CCJ)*PCJ-1)
      PCJ)=BCJ)*TERM
      QCJ)=(DCJ)+CCJ)*QCJ-1)*TERM
      GO TO 200
      150 PC1)=BC1)/AC1)
      QC1)=DC1)/AC1)
      200 CONTINUE
C-----OBTENCAO DOS NOVOS VALORES DE PHI
      PHI(I,NJ)=QC(NJ)
      NS=NJ-1
      DO 300 JJ=1,NS
      J=NS-JJ+1
      300 PHI(I,J)=PCJ)*PHI(I,J+1)+QCJ)

```

```

100 CONTINUE
350 IF(KF.NE.1) GO TO 650
C*****CALCULO DE PHI PARA KF=1,X DIRECAO IMPLICITA*****
C-----INICIO DO PASSO S-N
      DO 400 J=JST,JFIM,LAP
C-----INICIO DA ITERACAO W-E
      DO 500 I=1,NI
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DO TDMA
      A(I)=APCI,J)
      B(I)=AECI,J)
      C(I)=AWCI,J)
      IF(J.EQ.1) DC(I)=ANCI,J)*PHI(I,J+1)+SUCI,J)
      IF(J.EQ.NJ) DC(I)=ASCI,J)*PHI(I,J-1)+SUCI,J)
      IF(J.NE.1.AND.J.NE.NJ) DC(I)=ANCI,J)*PHI(I,J+1)+ASCI,J)*
1PHI(I,J-1)+SUCI,J)
      IF(I.EQ.1) GO TO 450
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DA FORMULA DE RECORRENCIA
      TERM=1./(A(I)-C(I)*P(I-1))
      P(I)=B(I)*TERM
      Q(I)=(D(I)+C(I)*Q(I-1))*TERM
      GO TO 500
450 P(I)=B(I)/A(I)
      Q(I)=D(I)/A(I)
500 CONTINUE
C-----OBTENCAO DOS NOVOS VALORES DE PHI
      PHI(NI,J)=Q(NI)
      NS=NI-1
      DO 600 II=1,NS
      I=NS-II+1
600 PHI(I,J)=P(I)*PHI(I+1,J)+Q(I)
400 CONTINUE
650 RETURN
      END

```