

Este exemplar corresponde a redação final  
da tese defendida por Eduardo  
Augusto Puntel de Oliveira e aprovada  
pela comissão julgadora em 11. 11. 1991.

Kelsen Valente Serra  
ORIENTADOR

Universidade Estadual De Campinas

Faculdade De Engenharia Mecânica

Departamento De Engenharia De Petróleo

Dissertação Apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Como Requisito Parcial à Obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

## Análise de Testes em Poços Injetores de Água

Autor: Eduardo Augusto Puntel de Oliveira †

Orientador : Kelsen Valente Serra †

43/91

Novembro - 1991

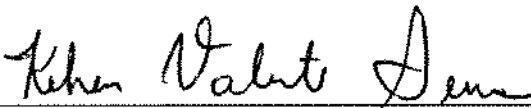


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A dissertação "Análise de Testes em Poços Injetores de Água", elaborada por Eduardo Augusto Puntel de Oliveira e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

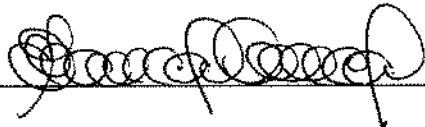
Campinas, 11 de novembro de 1991

Banca Examinadora

  
\_\_\_\_\_

Kelsen Valente Serra, Ph. D.

(Orientador)

  
\_\_\_\_\_

Antonio Cláudio de França Corrêa, Ph. D.

  
\_\_\_\_\_

Álvaro Marcello Marco Peres, Ph. D.

## RESUMO

Soluções analíticas para diversos modelos de injeção de água em reservatórios de óleo são comparadas. Algumas analogias e conclusões interessantes são estabelecidas a partir dessas soluções, por exemplo, a respeito do fator de película medido em um teste de injeção. Um novo modelo semi-analítico para estudo de injeção de água é proposto. Também, um novo método, que dispensa técnicas de ajuste não linear, para estimativa das curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água a partir de dados de testes de injeção é desenvolvido.

## ABSTRACT

Analytical solutions for different water injection models are compared and some interesting analogies and conclusions are established, for instance, concerning the measured skin factor in an injectivity test. A new semi-analytical model for water injection transient studies is proposed. Also, a new and simple method to estimate oil and water relative permeability curves from falloff and injection test data is developed, which makes no use of non-linear regression techniques.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	2
1.2	Limitações . . . . .	4
1.3	Histórico . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Soluções Analíticas</b>	<b>9</b>
2.1	Modelo com Interface Estacionária . . . . .	9
2.1.1	Formulação Matemática . . . . .	10
2.1.2	Solução Analítica . . . . .	11
2.2	Modelo com Frente em Movimento . . . . .	13
2.2.1	Formulação Matemática . . . . .	13
2.2.2	Solução Analítica . . . . .	14
2.3	Modelo com Distribuição de Mobilidade . . . . .	18
2.3.1	Formulação Matemática . . . . .	19
2.3.2	Solução Analítica . . . . .	19
2.4	Comparação Entre Resultados Analíticos . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Soluções Semi-Analíticas</b>	<b>27</b>

3.1	Modelo de Múltiplas Regiões e Poço Finito . . . . .	27
3.1.1	Formulação Matemática . . . . .	28
3.1.2	Solução Semi-Analítica . . . . .	29
3.2	Múltiplas Regiões com Vazão Variável . . . . .	31
3.2.1	Formulação Matemática . . . . .	31
3.2.2	Solução Semi-Analítica . . . . .	32
3.3	Múltiplas Regiões com Poço Infinitesimal . . . . .	33
3.3.1	Formulação Matemática . . . . .	33
3.3.2	Solução Semi-Analítica . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Um Método Para Estimativa das Curvas de Permeabilidade Relativa</b>	<b>37</b>
4.1	Implementação do Algoritmo . . . . .	37
4.1.1	Correlação de Hirasaki . . . . .	37
4.1.2	Posição da Frente de Injeção . . . . .	39
4.1.3	Equação de Buckley e Leverett . . . . .	41
4.2	Parâmetros Utilizados . . . . .	41
4.3	Resultados de Simulações . . . . .	43
4.3.1	Efeito da Discretização . . . . .	43
4.3.2	Efeitos de Estocagem e de Película . . . . .	43
4.3.3	Efeitos de Limite de Reservatório no Poço . . . . .	45
4.3.4	Curvas de Distribuição de Pressão no Reservatório . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Curvas de Distribuição de Mobilidade</b>	<b>74</b>
5.1	Frente Fixa Durante Decaimento de Pressão . . . . .	74

5.2	Resposta de Pressão no Poço: . . . . .	75
5.2.1	Durante o Teste de Injeção . . . . .	75
5.2.2	Durante o Teste de Decaimento de Pressão . . . . .	77
5.3	Determinação da Distribuição de Mobilidade . . . . .	77
5.4	Determinação da Distribuição de Pressão . . . . .	80
5.4.1	Um Novo Método para Determinação da Distribuição de Mobilidade	81
<b>6</b>	<b>Conclusões e Recomendações</b>	<b>87</b>
6.1	Conclusões . . . . .	87
6.2	Recomendações . . . . .	89

Nomenclatura	91
Bibliografia	94
Apêndice A:	
Modelo com Interface Estacionária	97
Apêndice B:	
Modelo com Frente em Movimento	106
Apêndice C:	
Modelo com Distribuição de Mobilidade	112
Apêndice D:	
Modelo com Múltiplas Regiões:	
Poço Finito, Vazão Constante	119
Apêndice E:	
Modelo com Múltiplas Regiões:	
Poço Finito, Vazão Variável	129
Apêndice F:	
Modelo com Múltiplas Regiões:	
Poço Infinitesimal - Vazão Constante	137

# Lista de Tabelas

4.1	Equações de Permeabilidade Relativa - Standing . . . . .	39
4.2	Parâmetros . . . . .	43



# Lista de Figuras

2.1	Reservatório Composto por Duas Regiões - Modelo com Interface Estacionária	10
2.2	Reservatório Composto por Duas Regiões - Modelo com Frente em Movimento	13
2.3	Reservatório Composto por Duas Regiões - Modelo com Distribuição de Mobilidade . . . . .	18
3.1	Reservatório Composto por $N + 1$ Regiões - Modelo com Distribuição de Mobilidade . . . . .	28
4.1	Curvas de Distribuição de Saturação . . . . .	42
4.2	Curvas de Permeabilidade Relativa e Fluxo Fracionário . . . . .	42
4.3	Efeitos da Discretização na Pressão no Poço . . . . .	44
4.4	Efeitos de Estocagem e Fator de Película . . . . .	44
4.5	Poço sem Estocagem e Dano - Efeitos de Limite de Reservatório . . . . .	46
4.6	Efeitos de Limite de Reservatório e Razão de Mobilidade - Res. Selado . .	46
4.7	Efeitos de Limite de Reservatório . . . . .	47
4.8	Efeitos de Limite de Reservatório . . . . .	47
4.9	Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Infinito . . . . .	49
4.10	Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Realimentado . . . . .	49
4.11	Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Selado . . . . .	50

4.12	Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Selado . . . . .	50
4.13	Curvas de Distribuição de Pressão . . . . .	53
4.14	Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão . . . . .	53
4.15	Curvas de Distribuição de Pressão . . . . .	54
4.16	Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão . . . . .	54
4.17	Curvas de Distribuição de Pressão . . . . .	55
4.18	Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão . . . . .	55
4.19	Curvas de Distribuição de Pressão . . . . .	56
4.20	Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão . . . . .	56
4.21	Curvas de Distribuição de Pressão . . . . .	57
4.22	Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão . . . . .	57
4.23	Curvas de Distribuição de Pressão . . . . .	58
4.24	Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão . . . . .	58
4.25	Distribuição da Derivada da Pressão no Reservatório . . . . .	60
4.26	Efeitos de Limite de Reservatório na Distribuição da Derivada da Pressão .	60
4.27	Efeitos da Discretização na Curva de Distribuição de Derivada da Pressão .	61
4.28	Distribuição da Vazão Total no Reservatório . . . . .	61
4.29	Derivada do Fluxo Fracionário na Frente de Injeção . . . . .	63
4.30	Curvas de $f'_{wDf}$ Constante vs $n_w$ X $n_o$ . . . . .	63
4.31	Curvas de Fluxo Fracionário com $f'_{wf}$ Constante . . . . .	64
4.32	Distribuição da Derivada da Pressão no Reservatório - $M = 4$ . . . . .	64
4.33	Pressão no Poço e Derivada - $f'_{wf}$ Constante . . . . .	67
4.34	Pressão no Poço e Derivada - $f'_{wf}$ Constante . . . . .	68

4.35	Curvas de $f'_{wDf}$ e $S_{p\lambda}$ Constantes para $M = 4$ . . . . .	69
4.36	Curvas de $f'_{wDf}$ e $S_{p\lambda}$ Constantes para $M = 3$ . . . . .	70
4.37	Curvas de $f'_{wDf}$ e $S_{p\lambda}$ Constantes para $M = 2$ . . . . .	71
4.38	Curvas de $f'_{wDf}$ e $S_{p\lambda}$ Constantes para $M = 1$ . . . . .	72
4.39	Curvas de $f'_{wDf}$ e $S_{p\lambda}$ Constantes para $M = 1/2$ . . . . .	73
5.1	Curvas de Permeabilidade Relativa . . . . .	76
5.2	Curvas de Distribuição de Saturação . . . . .	76
5.3	Gráfico Log X Log de Fluxo com Derivada MDH para o Período de Injeção	78
5.4	Gráfico de Agarwal com Derivada para o Período de Decaimento de Pressão	78
5.5	Curvas de Distribuição da Mobilidade Total, no Final do Período de Injeção	82
5.6	Curvas de Distribuição da Mobilidade Total Média, no Final do Período de Injeção . . . . .	83
5.7	Curvas de Distribuição da Mobilidade Total . . . . .	84
5.8	Curvas de Distribuição de Pressão Durante o Teste de Decaimento de Pressão	85
5.9	Distribuição de Pressão no Instante do Fechamento para Decaimento de Pressão . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introdução

A injeção de fluidos em reservatórios portadores de hidrocarbonetos tem sido largamente utilizada com o objetivo de obter fatores de recuperação maiores do que aqueles conseguidos através dos mecanismos de produção primária. Particularmente, a injeção de água em reservatórios de óleo tem sido amplamente usada na indústria de petróleo como um importante método de recuperação secundária devido ao seu baixo custo.

A avaliação em poços injetores de água é efetuada segundo, principalmente, dois tipos de testes: de injeção e de decaimento de pressão. Nos testes de injeção, procura-se injetar fluido no reservatório a uma vazão constante medindo-se, simultaneamente, a pressão no fundo do poço. Já nos testes de decaimento de pressão, a medição de pressão é realizada com o poço fechado, geralmente na superfície, e após um período de injeção com vazão constante. Esses dois tipos de testes são equivalentes, respectivamente, aos testes de produção e aos testes de crescimento de pressão em poços produtores, sendo conduzidos, em geral, com o objetivo de obter pressão estática, fator de película e permeabilidade efetiva ao fluido injetado nas vizinhanças do poço.

Devido às diferentes propriedades entre o fluido injetado e o fluido deslocado no reservatório, um gradiente de saturação é estabelecido na região em torno do poço. Na parede do poço, apenas o fluido injetado é móvel; longe do poço, há uma região de

fluido original da formação que ainda não foi atingida pelo fluido injetado. Numa região intermediária, tanto o fluido injetado como o fluido da formação são móveis. Durante testes de injeção, a interface entre essas regiões move-se e a distribuição de saturação na região intermediária modifica-se à medida em que o fluido deslocante é injetado no reservatório. Durante testes de decaimento de pressão, caso a compressibilidade do fluido injetado seja pequena, tanto a interface entre as regiões como a distribuição de saturação no reservatório permanecem praticamente inalteradas [19].

Esses fatos fazem com que testes de injeção e de decaimento de pressão sejam ricos em informações, desde que adequadamente dimensionados. A análise completa dos dados obtidos nesses testes pode fornecer dados valiosos, por exemplo: a posição da frente de avanço do fluido injetado; mobilidades na zona de óleo distante do poço e na zona com saturação de óleo residual próxima ao poço; fatores de película aparentes devido às diferentes mobilidades entre os fluidos deslocado e deslocante, ao avanço da frente no reservatório e à distribuição de mobilidades na região em que ocorre o gradiente de saturação.

As próprias curvas de permeabilidade relativa podem ser estimadas a partir de dados obtidos em testes de injeção ou de decaimento de pressão. Em artigo recentemente publicado acerca das expectativas de futuros desenvolvimentos em testes transitórios, Kamal [20] afirma que:

*“Another area of development is determination of the optimum way to average relative permeability data that may be needed to produce type curves for rigorous interpretation of single and multibank problems.”*

## 1.1 Objetivos

Diversos modelos de injeção de água, de complexidade crescente, são estudados neste trabalho, no Capítulo 2, com a finalidade de estabelecer-se comparações entre seus

resultados analíticos.

O estudo das soluções analíticas inicia-se com o modelo mais simples, de Eggen-schwiller, Satman e Ramey, [11] e [12], no qual o reservatório é representado por duas regiões com diferentes saturações de água e cuja interface permanece estacionária no reservatório durante a injeção de água.

O segundo modelo estudado, proposto por Ramey [4], inclui o efeito de movimento da interface entre duas regiões com saturações de água distintas à medida em que a água é injetada no poço.

Por fim, é analisado o modelo apresentado por Bratvold e Horne [16], que considera os efeitos de deslocamento da frente de injeção e da distribuição de saturação existente atrás da frente de injeção.

Os modelos, formulados originalmente sob nomenclaturas diferentes, são aqui expostos à luz de uma nomenclatura comum, facilitando comparações e analogias que levam a interessantes conclusões a respeito do fator de película aparente medido em um teste de injeção. O forte apelo didático dessas analogias não tinha sido, até o presente momento, aproveitado por trabalhos anteriores.

Ao longo da exposição desses três modelos, são deduzidas algumas aproximações úteis na formulação de novos métodos de análise de testes de injeção e decaimento de pressão propostos neste trabalho. Chega-se também a conclusões a respeito do raio de investigação de um teste de injeção inéditas na bibliografia especializada.

Ainda no Capítulo 2, alguns aspectos da curva de derivada da distribuição de pressão no reservatório são discutidos, mostrando-se que esta curva caracteriza tanto a posição da frente de injeção como a razão de mobilidade.

Nos Capítulos 3 e 4, um modelo com solução semi-analítica, ainda mais complexo que os anteriores e desenvolvido por Nanba e Horne [18], é utilizado para verificar numericamente as aproximações dadas pelos modelos com solução analítica.

Um novo modelo com solução semi-analítica, porém menos complexo, é desen-

volvido neste trabalho, e suas soluções são comparadas numericamente com as do modelo de Nanba e Horne. A principal vantagem deste novo modelo é o tempo de processamento necessário para o cálculo numérico da solução, bastante inferior ao do modelo de Nanba e Horne [18].

Utilizando recursos já desenvolvidos numericamente na bibliografia atual sobre testes de injeção e de decaimento de pressão [19], e uma aproximação para a derivada da distribuição de pressão no interior do reservatório, deduzida neste trabalho, é proposto um novo método para determinação da curva de distribuição da mobilidade total no interior do reservatório a partir de dados de teste de decaimento de pressão.

O objetivo principal deste trabalho é o de obter um método simples, através do qual seja possível determinar as curvas de permeabilidade efetiva (ou relativa) ao óleo e à água, com base em dados de teste. Com essa finalidade, foi desenvolvido um método gráfico que permite a determinação dos valores aproximados dos expoentes de permeabilidade relativa, definidos segundo a correlação de Hirasaki [8], a partir de dados de testes de injeção e/ou de decaimento de pressão.

No estágio atual do trabalho, é possível desenvolver-se um método de ajuste não linear que permita a determinação precisa desses expoentes, considerando as limitações implícitas na formulação matemática do problema.

## 1.2 Limitações

Todos os modelos aqui apresentados têm por base a equação da difusividade hidráulica para fluxo bifásico isotérmico, obtida a partir da combinação da equação da continuidade com a lei de Darcy e após diversas simplificações. Nestas, considera-se:

- fluidos imiscíveis;
- efeitos gravitacionais e capilares desprezíveis;

- fluxo segundo a lei de Darcy;
- compressibilidades dos fluidos pequenas;
- formação homogênea e isotrópica;
- espessura da formação constante;
- gradiente de pressão pequeno no reservatório;
- viscosidade dos fluidos constante.

Após estas simplificações, a equação da continuidade<sup>1</sup>:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) = \frac{\partial(\phi \rho_f S_f)}{\partial t}, \quad (1.1)$$

onde f : fase - óleo ou água,

poderá ser representada pela equação da difusividade:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\lambda_t \vec{\nabla} p) = \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.2)$$

Assim, por exemplo, a condição que exige compressibilidades pequenas e constantes restringe o uso desses modelos aos casos de injeção de líquidos em reservatórios de óleo sub-saturados. Por outro lado, a condição que impõe viscosidades constantes exclui os casos em que soluções de polímeros em água sejam injetadas no reservatório.

O avanço da frente de injeção e a distribuição de saturação atrás da frente são calculados através da equação de Buckley e Leverett [1], enquanto que a solução da distribuição de pressão no reservatório é obtida através da equação da difusividade hidráulica. Dessa forma, os modelos aqui apresentados são incapazes de simular situações posteriores ao início da produção de água injetada.

---

<sup>1</sup>Equações no Sistema Internacional de Unidades.



Outro fator limitante deste estudo é a geometria de fluxo, considerada unidimensional mantendo-se a analiticidade das soluções. Fica impossível, assim, o estudo de pressões médias em malhas de injeção (fluxo bidimensional). Entretanto, são estudados casos de reservatórios limitados com fronteiras radiais mantidas à pressão constante ou vazão nula. A respeito dos métodos convencionais de determinação de pressão média, quando aplicados a problemas de fluxo bifásico, Yeh e Agarwal afirmam em seu artigo [19]:

*“The method to calculate an average reservoir pressure value for a multibank system using the conventional procedure is not fully understood. Moreover, the utility of determining a single average pressure value rather than calculating a pressure profile for well’s drainage area appears questionable.”*

Quanto aos métodos para determinação das curvas de permeabilidade relativa, é preciso ter em mente que eles pressupõem que a formação é homogênea. Caso, em um teste real, ocorra alguma heterogeneidade da formação próxima ao poço, esta terá influência sobre a distribuição de mobilidade total e, portanto, a estimativa dos expoentes das curvas de permeabilidade relativa será afetada.

### 1.3 Histórico

Buckley e Leverett [1] estudaram o deslocamento incompressível de fluidos imiscíveis em meios porosos em 1942. A equação de Buckley e Leverett é largamente utilizada nos modelos discutidos neste trabalho.

Em 1970, Ramey [4] estudou o problema de deslocamento do tipo pistão utilizando uma formulação de reservatório composto e considerando o poço como uma linha infinitesimal.

Usando a solução dada por Ramey [4], Merrill, Kazemi e Jargon [6] propuseram um modelo em diferenças finitas para estudo de testes de decaimento de pressão. Pos-

teriormente, Merrill, Kazemi e Gogarty [7] publicaram correlações para determinação da posição da frente de injeção. Essas correlações, entretanto, foram estabelecidas através da razão entre inclinações em gráficos do tipo MDH ( pressão versus logaritmo do tempo de decaimento de pressão ).

Utilizando simulação numérica em diferenças finitas, Sosa e Raghavan [10] examinaram as influências das curvas de permeabilidade relativa no comportamento de pressão de testes de decaimento de pressão. Após tentar, sem sucesso, empregar as correlações publicadas em [7] no cálculo da posição da frente, Sosa et al. propuseram o uso da equação de Buckley e Leverett com essa finalidade. O método, porém, exige o conhecimento prévio das curvas de permeabilidade relativa.

Um modelo mais simples que o de Ramey [4], porém considerando poço finito, foi proposto por Eggenschwiller, Satman e Ramey [11] e [12] em 1980. A utilização prática desse modelo é bastante limitada pois considera-se que a frente permanece estacionária durante o teste de injeção. Não são considerados os efeitos do movimento da frente de injeção e da distribuição de mobilidades atrás da mesma.

Um algoritmo de regressão não linear empregando a formulação de Eggenschwiller, Satman e Ramey foi publicado em 84 por Barua e Horne [13].

Também baseados no trabalho de Eggenschwiller et al., Ambastha e Ramey [14] e [17] obtiveram as aproximações de longo tempo para o modelo de frente estacionária e propuseram métodos para o dimensionamento de testes de injeção e de decaimento de pressão em 89. É estranho que Ramey não tenha se recordado de seu trabalho anterior [4], o qual era mais completo.

Utilizando a solução de Ramey para testes de injeção [4], Abbazadeh e Kamal [15] publicaram em 87 uma solução semi-analítica para o problema de testes de decaimento de pressão, e sugeriram que a interpretação rigorosa de resultados de testes deveria ser realizada através do uso de curvas tipo. Para que isso seja possível, porém, é necessário o conhecimento prévio das curvas de permeabilidade relativa.

Em 88, Bratvold e Horne [16] resolveram o problema de injeção em reservatórios radiais considerando o poço infinitesimal e o fluxo atrás da frente de injeção governado pela equação de Buckley e Leverett [1], incluindo, na solução analítica, os efeitos de avanço da frente de injeção de água e da distribuição de mobilidade atrás da frente, devido às curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água.

Nanba e Horne [18] elaboraram, em 89, um modelo de múltiplas regiões em movimento no reservatório usando a equação de Buckley e Leverett para o cálculo do avanço das regiões e considerando poço finito. A partir desse modelo, foi proposto um método de ajuste não linear para estimativa das curvas de permeabilidade relativa. Esse método baseia-se na simulação e no ajuste da curva de derivada da pressão, obtida no poço injetor durante testes de decaimento de pressão. Nanba e Horne não mostraram em detalhe suficiente como o método de ajuste automático foi implementado.

Usando resultados de simulação numérica, Yeh e Agarwal [19] apresentaram, em 89, métodos para determinação da distribuição de mobilidade total e de pressão no interior do reservatório a partir de dados obtidos em testes de injeção e de decaimento de pressão e do conceito de raio de investigação. Não foram, entretanto, apresentados subsídios analíticos para fundamentar os métodos propostos.

# Capítulo 2

## Soluções Analíticas

Neste Capítulo, serão descritas as formulações matemáticas de alguns modelos já existentes na bibliografia ([11], [12], [4] e [16]) desenvolvidos para o estudo de injeção de água. Serão também apresentadas algumas aproximações analíticas úteis na comparação desses modelos, pois são de importância fundamental para os métodos de análise propostos neste trabalho.

### 2.1 Modelo com Interface Estacionária

<sup>1</sup> Trata-se de um modelo de reservatório composto por duas regiões que permanecem estacionárias durante a injeção ([11] e [12]). O raio do poço é finito e as propriedades no interior de cada uma das duas regiões são constantes. A situação física a ser modelada é mostrada na figura 2.1.

A importância deste modelo de reservatório é devida à analogia que pode ser feita com outros modelos, nos quais a interface entre regiões é móvel.

---

<sup>1</sup>Modelo apresentado por Eggenchwiller et al. em [11] e [12].

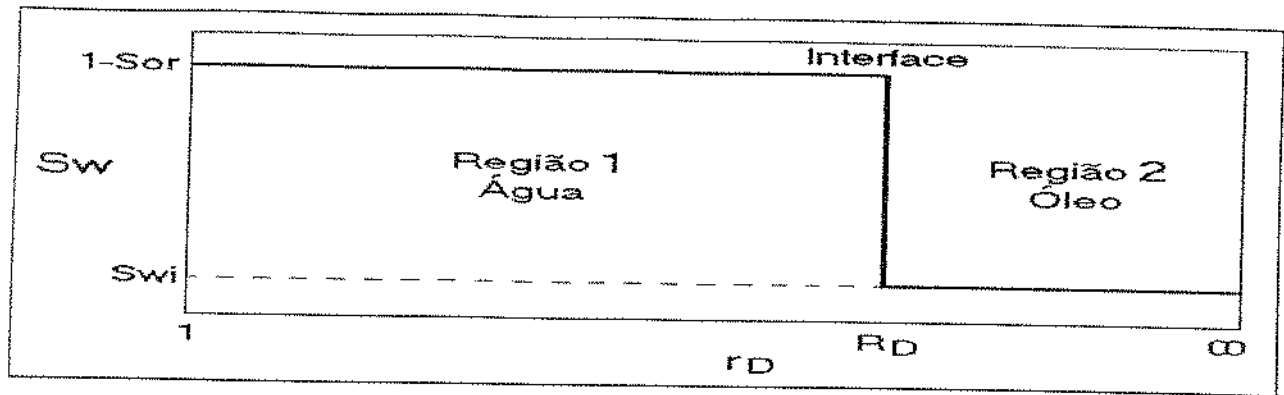


Figura 2.1: Reservatório Composto por Duas Regiões - Modelo com Interface Estacionária

### 2.1.1 Formulação Matemática

<sup>2</sup> O reservatório é representado matematicamente pela equação da difusividade aplicada a cada uma das duas regiões, resultando em um sistema de duas equações diferenciais parciais; e pelas condições de contorno, nas quais impõem-se (ver Apêndice A):

- reservatório inicialmente em equilíbrio;
- estocagem e dano constantes no poço (finito);
- vazão constante na superfície;
- continuidade de pressão na interface entre regiões;
- continuidade de vazão na interface entre regiões;
- reservatório infinito.

Não são considerados, segundo essa abordagem:

- o movimento da interface entre regiões;
- a distribuição de mobilidade atrás da interface.

<sup>2</sup>Formulação matemática e solução analítica são abordadas com maior detalhe no Apêndice A.

## 2.1.2 Solução Analítica

Usando transformada de Laplace, o sistema de equações diferenciais parciais e suas condições auxiliares é transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo Bessel modificada. Ao impor as condições de contorno à solução geral das equações diferenciais ordinárias, chega-se a um sistema de quatro equações lineares que determinam as quatro constantes de integração, no campo de Laplace (ver Apêndice A).

Para obter a resposta do sistema em função do tempo, torna-se necessário um algoritmo de inversão numérica; daí o método de solução ser denominado semi-analítico. Eggenschwiller et al. [11] obtiveram a inversão numérica através do algoritmo de Stehfest [5], porém, Ambastha e Ramey [14] perceberam que a solução de longo tempo para a pressão no poço,  $p_{wD}$ , poderia ser determinada analiticamente através de transformadas de Laplace tabeladas para as aproximações assintóticas das funções de Bessel modificadas. Esta solução (equação (A.49)), deduzida por Ambastha et al. [14], é reproduzida abaixo:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[ M \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma R_D^2} \right) + \ln(R_D^2) \right] + S. \quad (2.1)$$

Na equação (2.1),  $M$  é a razão de mobilidade;  $\eta_{D2}$  é a razão entre as difusividades hidráulicas das duas regiões;  $t_D$  é o tempo adimensional definido em função das propriedades na região com saturação de óleo residual;  $R_D$  é a posição adimensional da interface entre regiões;  $\gamma$ , a constante de Euler e  $S$ , o fator de película na parede do poço<sup>3</sup>.

Note que  $p_{wD}(t_D)$  também pode ser expressa como:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[ M \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma} \right) + 2(1 - M) \ln(R_D) \right] + S. \quad (2.2)$$

Observe em (2.2) que, quando a razão de mobilidades,  $M$ , e a razão entre as difusividades hidráulicas,  $\eta_{D2}$ , são unitárias, temos a solução clássica para reservatórios homogêneos:

---

<sup>3</sup>Variáveis adimensionais definidas no Apêndice A.

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4t_D}{e^\gamma} \right) + S. \quad (2.3)$$

Note também que o termo  $(1 - M) \ln(R_D)$  em (2.2) é semelhante ao fator de película finito de Hawkins [3]:

$$S = \left( \frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \ln \left( \frac{R}{r_w} \right). \quad (2.4)$$

De fato, dimensionalizando (2.2), temos:

$$p_{wf}(t) = p_{im} - \frac{qB\mu_2}{4\pi k_2 h} \left[ \ln \left( \frac{4k_2 t}{e^\gamma \phi \mu_2 c_{t2} r_w^2} \right) + 2 \left( \frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2} - 1 \right) \ln \left( \frac{R}{r_w} \right) + 2S \right]; \quad (2.5)$$

o termo  $(1 - M) \ln(R_D)$  representa, portanto, um fator de película aparente devido à razão de mobilidade entre as duas regiões no interior do reservatório.

Segundo a equação (2.5), após um tempo suficientemente longo de injeção, um gráfico da pressão no poço versus o logaritmo do tempo de injeção apresentará um trecho reto com inclinação proporcional à transmissibilidade na região 2, a mais distante do poço. Essa é a grande limitação para a utilização prática do modelo com interface estacionária. Numa situação mais realista, em que é permitido que a frente de injeção avance no reservatório à medida em que a água é injetada no poço, a inclinação do trecho reto semi-logarítmico caracteriza apenas a região mais próxima do poço. A explicação física para isso é bastante simples: no modelo com interface estacionária, quando o raio de investigação relacionado ao tempo de injeção torna-se muito superior ao raio da interface entre as duas regiões, as propriedades da região mais próxima ao poço deixam de ser importantes no comportamento de pressão observado no poço, passando a prevalecer as propriedades da região mais distante, com saturação de óleo original. Por outro lado, nos modelos que prevêem o movimento da frente, quanto maior o tempo de injeção, maior será a distância entre o poço e a interface entre regiões. Assim, o raio da frente de injeção nunca será desprezível quando comparado ao raio de investigação, e as propriedades da

região 1, saturada por água de injeção, serão sempre importantes no comportamento da pressão observada no poço.

## 2.2 Modelo com Frente em Movimento

<sup>4</sup> Nesse modelo, desenvolvido por Ramey [4], considera-se que o reservatório é composto por duas regiões com propriedades constantes e que o poço é infinitesimal. A interface entre essas duas regiões move-se à medida em que a água é injetada no poço, formando uma frente de injeção. O deslocamento é do tipo pistão, ou seja, a saturação de água atrás da frente de injeção é constante e igual a  $1 - S_{or}$ . A figura 2.2 ilustra a situação física modelada.

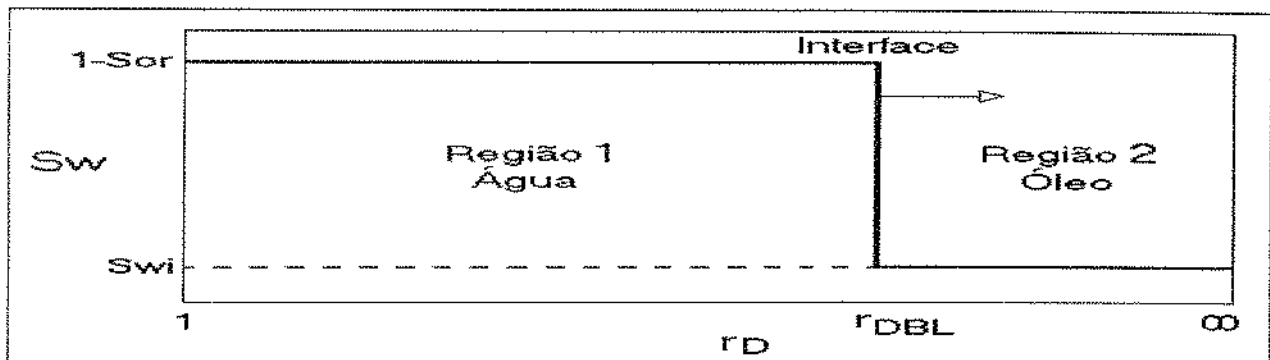


Figura 2.2: Reservatório Composto por Duas Regiões - Modelo com Frente em Movimento

### 2.2.1 Formulação Matemática

<sup>5</sup> As duas regiões do reservatório são representadas por um sistema de duas equações diferenciais parciais. As condições de contorno postas no problema estabelecem (ver Apêndice B):

- reservatório inicialmente em equilíbrio;

<sup>4</sup>Modelo apresentado por Ramey [4].

<sup>5</sup>Formulação matemática e solução analítica são abordadas com detalhe no Apêndice B.



- vazão constante no poço (infinitesimal);
- continuidade de pressão na frente de injeção;
- continuidade de vazão na frente de injeção;
- reservatório infinito.

Não é considerada, nesse modelo, a distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção.

## 2.2.2 Solução Analítica

Ramey [4] usou a transformada de Boltzmann  $y = r_D^2/(4t_D)$  para reduzir o sistema de equações diferenciais parciais com condições de contorno a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias, com quatro condições de contorno. O problema é então resolvido através de redução de ordem, separação de variáveis e integração. As duas “constantes” de integração relacionadas com as condições de contorno na frente de injeção só são realmente constantes se a transformada de Boltzmann na frente de injeção,  $y_{BL}$ , for constante ( ver Apêndice B, equações (B.27) e (B.28)). Observe que, caso o deslocamento considerado seja do tipo pistão, essa condição será satisfeita para vazão de injeção constante, ou seja,

$$\frac{r_{BL}^2}{t} = \frac{|q|}{\pi h \phi (1 - S_{or} - S_{wc})} \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) é a equação de Buckley e Leverett para deslocamento radial do tipo pistão e poço infinitesimal, onde  $r_{BL}$  é a posição da frente no tempo de injeção  $t$ , e o fator  $1/(1 - S_{or} - S_{wc})$  é a derivada do fluxo fracionário na frente de injeção. Note que  $r_{BL}^2/t$  é proporcional a  $y_{BL} = r_{DBL}^2/4t_D$ .

As expressões deduzidas por Ramey [4] para as distribuições de pressão nas regiões 1 e 2 são, respectivamente, (equações (B.31) e (B.32) do Apêndice B),

$$p_{D1}(y) = \frac{1}{2} \left[ E_1(y) + M e^{-y_{BL} \left(1 - \frac{1}{\eta_{D2}}\right)} E_1\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}}\right) - E_1(y_{BL}) \right], \quad 0 < y \leq y_{BL}, \quad (2.7)$$

$$p_{D2}(y) = \frac{M}{2} e^{-y_{BL} \left(1 - \frac{1}{\eta_{D2}}\right)} E_1\left(\frac{y}{\eta_{D2}}\right) \quad y_{BL} \leq y < \infty. \quad (2.8)$$

Ramey [4], porém, não chegou a desenvolver expressões aproximadas para as equações (2.7) e (2.8).

A variável de Boltzmann na frente de injeção assume valores da ordem de  $10^{-3}$  ou menores. De fato, aplicando as definições de raio e tempo adimensionais (Apêndice A) na equação (2.6), vê-se que:

$$y_{BL} = \frac{r_{DBL}^2}{4t_D} = \frac{|q|\hat{c}_{tw}}{4\pi\hat{\lambda}_w h(1 - S_{or} - S_{wc})}, \quad (2.9)$$

ou seja, a variável de Boltzmann na frente de injeção é diretamente proporcional à compressibilidade total na região saturada por água, parâmetro este que assume valores muito pequenos. Note que na região 1,  $y$  é sempre menor ou igual a  $y_{BL}$ . Por outro lado, a razão entre as difusividades hidráulicas,  $\eta_{D2}$ , não deve assumir valores muito maiores que 1, já que, em casos práticos, a compressibilidade total na região com óleo é maior que a da região com água:

$$\eta_{D2} = \frac{\hat{\eta}_o}{\hat{\eta}_w} = \frac{1}{M} \frac{\hat{c}_{tw}}{\hat{c}_{to}}. \quad (2.10)$$

Com base nas observações acima, pode-se aproximar os termos que envolvem exponenciais de  $y_{BL}$  nas equações (2.7) e (2.8) por 1. A aproximação logarítmica da função integral exponencial,  $E_1(x) \approx -\ln(e^\gamma x)$  para  $x$  pequeno (menor que 0.01), também pode ser utilizada em (2.7), porém o mesmo não pode ser feito em (2.8) pois nesse caso  $y$  pode assumir valores muito superiores a  $y_{BL}$ :

$$p_{D1}(y) = \frac{1}{2} \left[ -\ln(e^\gamma y) - M \ln\left(\frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}}\right) + \ln(e^\gamma y_{BL}) \right], \quad (2.11)$$

$$p_{D2}(y) = \frac{M}{2} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right) \quad (2.12)$$

Somando e subtraindo  $\ln(1/\eta_{D2})$  à equação (2.11),

$$p_{D1}(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma r_D^2} \right) + (1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) \right] \quad (2.13)$$

A expressão para pressão no poço é, portanto,

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma} \right) + (1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) \right] \quad (2.14)$$

Segundo a expressão (2.14), deduzida neste trabalho, após um tempo suficientemente longo de injeção, um gráfico da pressão no poço injetor versus o logaritmo do tempo de injeção apresentará um trecho reto cuja inclinação será inversamente proporcional à transmissibilidade da região 1, saturada pela água injetada. Observe que o mesmo não acontece com o modelo com interface estacionária.

Algumas conclusões interessantes podem ser observadas a partir da equação (B.23) do Apêndice B, reproduzida adiante:

$$\frac{dp_{D1}}{dy} = -C_1 \frac{e^{-y}}{y}, \quad (2.15)$$

Substituindo a constante de integração  $C_1$  pelo seu valor,  $1/2$ , determinado na equação (B.25):

$$y \frac{dp_{D1}}{dy} = -\frac{1}{2} e^{-y}; \quad (2.16)$$

como  $y$  é pequeno,  $e^{-y} \approx 1$ , logo:

$$y \frac{dp_{D1}}{dy} \approx -\frac{1}{2}, \quad (2.17)$$

mas, sabendo que  $r_D(\partial p_D / \partial r_D) = 2y(dp_D/dy)$ , então:

$$r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \approx -1. \quad (2.18)$$

Seguindo o mesmo procedimento com a equação (B.24), chega-se a:

$$r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} = -M e^{-\frac{y}{r_{D2}}}. \quad (2.19)$$

A aproximação (2.18) é válida não apenas no poço, mas em toda a região atingida pela água injetada ( $0 \leq r_D \leq r_{DBL}$ ). O primeiro membro da aproximação,  $r_D(\partial p_{D1}/\partial r_D)$ , é a distribuição da vazão adimensional no interior da região 1, constante e igual a  $-1$ , e isso é exatamente o que se esperaria no caso do deslocamento de dois fluidos incompressíveis. O raio de investigação relacionado a qualquer tempo de injeção, nesse caso, será sempre maior que a distância do poço à frente de injeção, pois a vazão em qualquer ponto atrás da frente de injeção é constante e igual à vazão na parede do poço injetor.

A expressão no segundo membro de (2.19) não pode ser simplificada, pois  $y$  pode assumir valores muito grandes. Entretanto, no ponto da região 2 mais próximo do poço, ou seja, em  $y = y_{BL}$ ,

$$r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_{DBL}} \approx -M. \quad (2.20)$$

Comparando as equações (2.18) e (2.20), percebe-se que a derivada logarítmica da distribuição de pressão no reservatório em um determinado instante,  $\partial p_D / \partial \ln(r_D)$ , apresenta uma descontinuidade exatamente na posição da frente de injeção, desde que a razão de mobilidade não seja unitária. Além disso, a amplitude dessa descontinuidade caracteriza a razão de mobilidade do sistema.

Yeh e Agarwal [19] mostraram numericamente que é possível, através de dados de testes de decaimento de pressão, obter a distribuição de pressão no interior do reservatório no instante do fechamento do poço. Assim, basta derivar numericamente a curva de distribuição de pressão para identificar-se a posição da frente de injeção e a razão de

mobilidade caso o deslocamento seja do tipo pistão. Mostraremos mais adiante que a mesma metodologia é válida para casos em que ocorre distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção.

## 2.3 Modelo com Distribuição de Mobilidade

<sup>6</sup> Como nos dois modelos discutidos anteriormente, o reservatório é composto por duas regiões, separadas pela frente de injeção. A região 2, mais distante do poço e com saturação de óleo original, possui propriedades constantes em toda a sua extensão.

Na região 1, próxima ao poço, existe uma distribuição de saturação resultante das curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água [16] (este efeito não foi considerado nos dois modelos discutidos anteriormente, onde a saturação no interior da região 1 é constante). Como a mobilidade total é função da saturação, haverá também uma distribuição de mobilidade no interior da região 1. A frente de injeção avança no interior do reservatório segundo a equação de Buckley e Leverett e as distribuições de saturação e mobilidade modificam-se à medida em que a água é injetada no poço, considerado infinitesimal. Apesar de toda essa complexidade, o modelo desenvolvido por Bratvold e Horne [16] possui solução inteiramente analítica. A figura 2.3 mostra a situação a ser modelada.

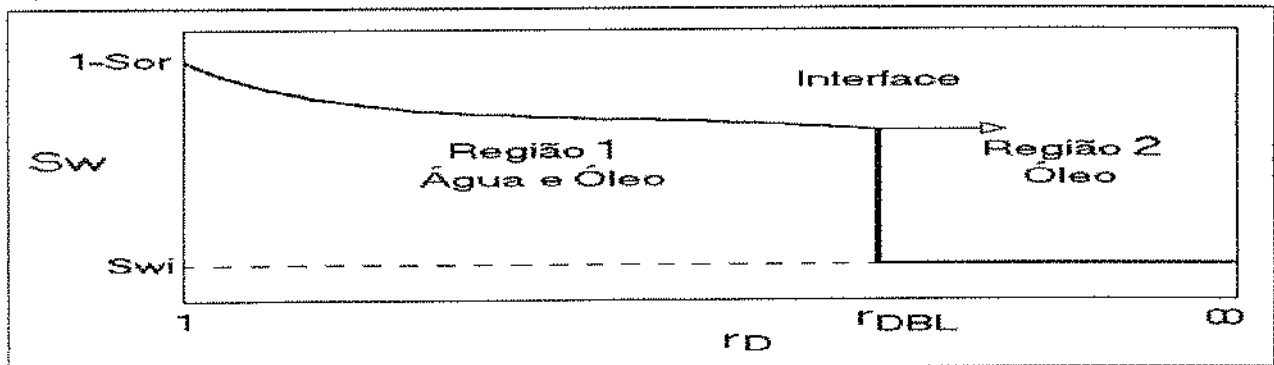


Figura 2.3: Reservatório Composto por Duas Regiões - Modelo com Distribuição de Mobilidade

<sup>6</sup> Modelo apresentado por Bratvold e Horne [16].

### 2.3.1 Formulação Matemática

<sup>7</sup> A equação da difusividade hidráulica que descreve o fluxo na região 1, próxima ao poço, considera as variações de mobilidade e de compressibilidade totais que ocorrem atrás da frente de injeção, devidas às curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água.

A equação da difusividade hidráulica na região 2 e as condições de contorno do problema são semelhantes às do modelo com frente em movimento para deslocamento tipo pistão.

Desta forma, o problema físico é matematicamente representado por um sistema de duas equações diferenciais parciais e suas respectivas condições de contorno ( ver Apêndice C ), as quais impõem, como no item anterior:

- reservatório inicialmente em equilíbrio;
- vazão constante no poço, considerado infinitesimal;
- continuidade de pressão na frente de injeção;
- continuidade de vazão na frente de injeção;
- reservatório infinito.

### 2.3.2 Solução Analítica

Observando o trabalho de Ramey [4], Bratvold e Horne [16] verificaram que, se a distribuição de saturação atrás da frente seguisse a equação de Buckley e Leverett [1], o sistema de equações diferenciais parciais e suas condições auxiliares para as duas regiões poderia ser resolvido através da transformada de Boltzmann, pois nesse caso tem-se:

---

<sup>7</sup>Formulação matemática e solução analítica são abordadas com detalhe no Apêndice C.

$$\frac{r^2}{t} = \frac{|q|}{\pi\phi h} f'_w(S_w). \quad (2.21)$$

A equação (2.21) é válida para todos os pontos do reservatório no interior da região 1. Logo, a transformada de Boltzmann,  $y = r_D^2/4t_D$ , pode ser aplicada às equações diferenciais parciais, reduzindo-as a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias. O problema é resolvido através de separação de variáveis e integração (ver Apêndice C). As duas “constantes” de integração que estão relacionadas às condições de contorno na frente de injeção são funções da variável de Boltzmann na frente,  $y_{BL}$ , logo, serão constantes apenas se  $y_{BL}$  for constante.

A solução do problema de valores de contorno na região 1, próxima ao poço, dada por Bratvold e Horne [16], é (equação C.28 no Apêndice C):

$$p_{D1}(y) = \frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{1}{\lambda_D y} e^{\left(-\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} dy + \frac{M}{2} e^{\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} - \int_0^{y_{BL}} \frac{dy}{\eta_{D1} \lambda_D}\right)} E_1\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}}\right); \quad (2.22)$$

e para a região 2 (C.26),

$$p_{D2}(y) = \frac{M}{2} e^{\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} - \int_0^{y_{BL}} \frac{dy}{\eta_{D1} \lambda_D}\right)} E_1\left(\frac{y}{\eta_{D2}}\right), \quad (2.23)$$

onde  $y$  é a transformada de Boltzmann  $r_D^2/4t_D$  e  $y_{BL}$  é a transformada de Boltzmann avaliada na frente de injeção de água.

Bratvold e Horne [16] verificaram que a constante  $y_{BL}$  é da ordem de  $10^{-2}$  a  $10^{-3}$  e que  $\lambda_D \eta_{D1}$  é sempre maior que um, obtendo a seguinte aproximação, a partir da equação (2.22):

$$p_{D1}(y) = \frac{1}{2} E_1\left(\frac{y}{\eta_{D2}}\right) - \frac{1}{2} E_1\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}}\right) + \frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \left(\frac{1}{\lambda_D} - 1\right) \frac{dy}{y} + \frac{M}{2} E_1\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}}\right). \quad (2.24)$$

Da mesma forma, para a região 2, a equação (2.23) pode ser aproximada como:

$$p_{D2}(y) = \frac{M}{2} E_1\left(\frac{y}{\eta_{D2}}\right), \quad (2.25)$$

que é idêntica à equação (2.12), determinada anteriormente para o caso de deslocamento tipo pistão.

Na passagem de (2.22) para (2.24), a função  $E_1$  aparece de forma artificial, na dedução de Bratvold e Horne. É possível mostrar, a partir de (2.22), que  $p_{wD}$  é proporcional a  $\ln(t_D)$ . Derivando (2.22) em relação a  $y$ :

$$y \frac{\partial p_{D1}}{\partial y} = -\frac{1}{2\lambda_D} e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)}; \quad (2.26)$$

substituindo  $y$ , no primeiro membro, por  $r_D^2/4t_D$ :

$$r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} = -\frac{1}{\lambda_D} e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)}; \quad (2.27)$$

substituindo na equação diferencial parcial (C.5) da região 1:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left\{ \lambda_D \left[ -\frac{1}{\lambda_D} e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} \right] \right\} = \frac{1}{\eta_{D1}} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}; \quad (2.28)$$

usando novamente a transformação  $y = r_D^2/4t_D$  no primeiro membro:

$$\frac{1}{2t_D} \frac{\partial}{\partial y} \left[ -e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} \right] = \frac{1}{\eta_{D1}} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}; \quad (2.29)$$

$$-\frac{1}{2t_D} e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy \right) = \frac{1}{\eta_{D1}} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}; \quad (2.30)$$

$$-\frac{1}{2\lambda_D t_D} e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} = \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}; \quad (2.31)$$

obtéem-se finalmente:

$$t_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \frac{\partial p_{D1}}{\partial \ln(t_D)} = -\frac{1}{2\lambda_D} e^{-\left(\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)}. \quad (2.32)$$

No poço,  $y = 0$  e  $\lambda_D = 1$ , logo:



$$\frac{dp_{wD}}{d \ln(t_D)} = \frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

Note que, na região 1, se  $y$  for considerado pequeno na equação (2.32):

$$\frac{\partial p_{D1}}{\partial \ln(t_D)} \approx \frac{1}{2\lambda_D}. \quad (2.34)$$

Um resultado importante, pela sua simplicidade, e que será utilizado nos métodos de interpretação desenvolvidos neste trabalho, pode ser observado a partir da equação (2.27). Como  $y$  é pequeno:

$$r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \approx -\frac{1}{\lambda_D}. \quad (2.35)$$

A aproximação (2.35) foi testada com dois modelos de múltiplas regiões em movimento no reservatório (discutidos no Capítulo 3), apresentando erros menores que 0.6 % nos casos já simulados neste trabalho.

Isso quer dizer que, após obter a curva de distribuição de pressão no interior do reservatório em um instante qualquer a partir dos dados de um teste de decaimento de pressão [19], uma boa aproximação da distribuição de mobilidade total será conseguida através da derivada numérica dessa curva.

Derivando a expressão (2.25) e substituindo  $y$  por  $r_D^2/4t_D$ , tem-se que:

$$r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} = -M e^{-\frac{y}{\lambda_D^2}}, \quad (2.36)$$

e, considerando que a variável de Boltzmann na frente de injeção,  $y_{BL}$ , assume valores muito menores que 1, chega-se a:

$$r_D \left. \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right|_{r_{DBL}} = -M. \quad (2.37)$$

Mas, segundo a equação (2.35) avaliada na posição da frente de injeção,

$$r_D \left. \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right|_{r_{DBL}} \approx -\frac{1}{\lambda_{DBL}}, \quad (2.38)$$

onde  $\lambda_{DBL}$  é a mobilidade total adimensional na posição da frente de injeção de água.

Comparando as equações (2.37) e (2.38), novamente verifica-se uma descontinuidade na curva de derivada da distribuição de pressão (a menos que  $\lambda_{DBL} = 1/M$ ), caracterizando tanto a posição da frente de injeção como a razão de mobilidade.

Da equação (2.35), vê-se que a vazão total no interior da região 1 é aproximadamente constante e igual à vazão no poço injetor (2.39), fato que foi verificado anteriormente para o caso de deslocamento tipo pistão (equação (2.18)):

$$q_{D1} = \lambda_D r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \approx -1. \quad (2.39)$$

O raio de investigação relacionado a qualquer tempo de injeção será, portanto, sempre maior que a distância do poço à frente de injeção também nos casos em que ocorre distribuição de mobilidade na região atingida pela água.

A solução aproximada dada por Bratvold e Horne [16] para a pressão no poço, obtida a partir da equação (2.24), usando a aproximação logarítmica da função integral exponencial é (equação (C.36)):

$$p_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma} \right) + \frac{1}{2} (1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) + \frac{1}{2} \int_{1-S_{or}}^{S_{wBL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{f_w''}{f_w'} dS_w. \quad (2.40)$$

Na expressão (2.40), Bratvold e Horne usaram substituição de variáveis para obter o termo da integral em relação a  $y$  como uma função da saturação apenas:

$$\frac{1}{2} \int_0^{y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int_{1-S_{or}}^{S_{wBL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{f_w''}{f_w'} dS_w.$$

Na realidade, a expressão no segundo membro é muito mais difícil ser calculada que a do primeiro membro. Uma forma mais simples, e que permite até mesmo uma solução

analítica pelo teorema do valor médio, pode ser obtida usando a transformação de variável  $du = dy/y$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^{y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\ln y}^{\ln y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D(u)} - 1 \right) du. \quad (2.41)$$

A integral acima, quando calculada no poço, pode ser relacionada a um pseudo-efeito de película devido à distribuição de mobilidades atrás da frente de injeção. Note que, embora exista uma singularidade no poço ( $y = 0$ ),  $(1/\lambda_D - 1)$  também é nulo no poço. Usando o teorema do valor médio na integral do segundo membro de (2.41):

$$S_{p\lambda} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \ln \left( \frac{y_{BL}}{y} \right) \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_D} - 1 \right) \right]. \quad (2.42)$$

onde  $\bar{\lambda}_D$  é um valor de mobilidade total entre  $\lambda_D(y_{BL})$  e  $\lambda_D(y = 0)$ .

Um resultado interessante pode ainda ser obtido fazendo a substituição  $y = r_D^2/4t_D$ :

$$S_{p\lambda} = \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_D} - 1 \right) \ln(r_{DBL}). \quad (2.43)$$

A expressão (2.43) é equivalente ao fator de película finito de Hawkins, relacionado a um dano aparente devido à distribuição de mobilidades atrás da frente de injeção.

## 2.4 Comparação Entre Resultados Analíticos

Conclusões interessantes a respeito do fator de película aparente medido em um teste de injeção podem ser tiradas a partir da comparação entre as soluções analíticas para pressão no poço dos três modelos vistos até aqui.

**Duas Regiões com Interface Estacionária - [11]**

A solução de longo tempo dada por este modelo, equação (2.2), inclui apenas o efeito devido às diferentes mobilidades entre as duas regiões do reservatório:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2}M \ln \left( \frac{4\eta_{D2}t_D}{e^\gamma} \right) + \frac{1}{2}(1 - M) \ln(R_D^2). \quad (2.44)$$

#### Duas Regiões com Frente em Movimento - Deslocamento Pistão - [4]

Nesse modelo, além do efeito devido às diferentes mobilidades, a solução de longo tempo da pressão no poço (2.14) inclui também o efeito devido ao avanço da frente de injeção no reservatório:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\eta_{D2}t_D}{e^\gamma} \right) + \frac{1}{2}(1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right). \quad (2.45)$$

#### Duas Regiões com Frente em Movimento e Distribuição de Mobilidade atrás da Frente de Injeção - [16]

Nesse modelo, os efeitos devidos ao movimento da frente, à razão de mobilidade e à distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção influenciam a resposta de longo tempo para a pressão no poço, dada pela equação (2.40):

$$p_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\eta_{D2}t_D}{e^\gamma} \right) + \frac{1}{2}(1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) + \frac{1}{2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{\ln y}^{\ln y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D(u)} - 1 \right) du. \quad (2.46)$$

Comparando-se as respostas de longo tempo para pressão no poço para os três modelos, equações (2.44), (2.45) e (2.46), pode-se fazer as seguintes definições:

fator de película devido à razão de mobilidade entre duas regiões estacionárias,  $S_{pME}$ :

$$S_{pME} = \frac{1}{2}(1 - M) \ln(R_D^2); \quad (2.47)$$

fator de película devido à razão de mobilidade e ao avanço da frente de injeção,  $S_{pM}$ :

$$S_{pM} = \frac{1}{2}(1 - M) \ln \left( \frac{e^{\gamma} y_{BL}}{\eta_{D2}} \right); \quad (2.48)$$

fator de película devido à distribuição de mobilidades atrás da frente de injeção,  $S_{p\lambda}$ :

$$S_{p\lambda} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\ln y}^{\ln y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D(u)} - 1 \right) du. \quad (2.49)$$

O pseudo-efeito de película devido à distribuição de mobilidade no interior do reservatório é sempre positivo.

O pseudo-efeito de película devido à razão de mobilidade e ao avanço da frente pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor da razão de mobilidade. Como  $\ln(e^{\gamma} y_{BL})$  costuma ser negativo, para  $M$  maior que 1 teremos pseudo-dano.

Note que, no caso da frente estacionária, o efeito é inverso; porém, nesse caso, a inclinação em gráfico semi-logarítmico não é 1/2.

# Capítulo 3

## Soluções Semi-Analíticas

São abordados, neste Capítulo, alguns modelos mais complexos cuja solução depende da solução de sistemas de equações lineares e, portanto, não pode ser expressa de forma simples. A perda de analiticidade da solução, nesses casos, é compensada pela representação mais minuciosa do fenômeno físico simulado, como veremos adiante.

### 3.1 Modelo de Múltiplas Regiões e Poço Finito

<sup>1</sup> Nesse modelo [18] supõe-se que o reservatório pode ser representado por  $N + 1$  regiões de propriedades constantes. As interfaces entre essas regiões avançam no reservatório à medida em que o fluido é injetado no poço. A posição de cada uma das interfaces é calculada pela equação de Buckley e Leverett [1], o que desacopla a solução da distribuição de saturação da solução da distribuição de pressão no reservatório. As regiões atrás da frente de injeção são identificadas pelos índices de 1 a  $N$ , a região não atingida pela água injetada, pelo índice  $1 + N$  e o poço é considerado como uma fonte finita.

A figura 3.1 mostra como o reservatório é discretizado.

---

<sup>1</sup>Modelo apresentado por Nanba e Horne [18].

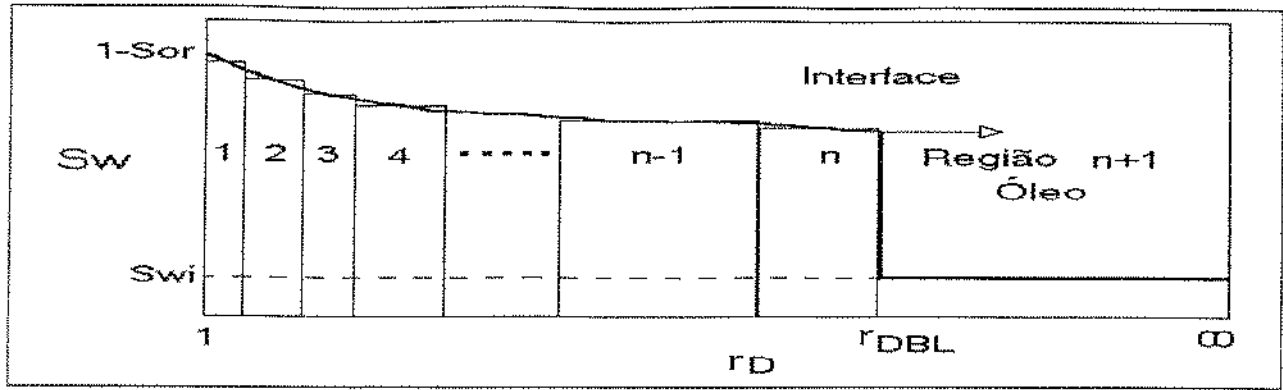


Figura 3.1: Reservatório Composto por  $N + 1$  Regiões - Modelo com Distribuição de Mobilidade

### 3.1.1 Formulação Matemática

<sup>2</sup> A região do reservatório atingida pela água injetada no poço é discretizada em  $N$  regiões, nas quais é válida a equação da difusividade hidráulica para reservatório homogêneo. Uma região adicional é necessária para representar a porção do reservatório não atingida pela água. Dessa forma, o reservatório passa a ser matematicamente representado por um sistema de  $N + 1$  equações diferenciais parciais, com suas  $N + 1$  condições iniciais e  $2N + 2$  condições de contorno, as quais determinam (ver Apêndice D):

- reservatório inicialmente em equilíbrio, em todas as regiões;
- vazão constante no poço, região 1;
- continuidade de pressão nas interfaces das diversas regiões;
- continuidade de vazão nas interfaces entre as diversas regiões;
- reservatório infinito, ou
  - reservatório limitado com manutenção de pressão, ou
  - reservatório limitado com vazão nula no contorno externo
 na região  $N + 1$ .

<sup>2</sup>Formulação matemática e solução semi-analítica são abordadas com maior detalhe no Apêndice D.

### 3.1.2 Solução Semi-Analítica

O reservatório é discretizado de forma que a diferença de saturação entre duas regiões consecutivas seja constante. Para o cálculo das mobilidades totais de cada região, Nanba e Horne propõem que as saturações médias das regiões sejam determinadas a montante do fluxo, de forma semelhante à adotada em simulação numérica para estabilização de algoritmos, ou seja,

$$\bar{S}_{wi} = S_{wi}. \quad (3.1)$$

Esta forma de discretização, porém, traz desvantagens no cálculo da posição das interfaces entre regiões ( $r_{Di}$ ) para cada tempo  $t_D$ , que é efetuado através da equação de Buckley e Leverett. Quando o número de regiões é pequeno, a posição da frente de injeção é incorretamente calculada. Além disso, o algoritmo proposto não é numérico, e sim, semi-analítico; não existem, portanto, problemas de oscilação ou dispersão numérica a resolver. Como contribuição deste trabalho, uma discretização mais eficaz é obtida se as regiões forem divididas de forma a manter a diferença entre a derivada do fluxo fracionário,  $f'_w$ , constante entre duas regiões consecutivas e calculando as permeabilidades médias em cada região segundo o teorema do valor médio:

$$\bar{k}_{rwi} = \frac{f'_{wi+1} - f'_{wi}}{\int_{f'_{wi}}^{f'_{wi+1}} \frac{1}{k_{rw}(f'_w)} df'_w}; \quad \bar{k}_{ro i} = \frac{\int_{f'_{wi}}^{f'_{wi+1}} k_{ro}(f'_w) df'_w}{f'_{wi+1} - f'_{wi}}. \quad (3.2)$$

O sistema de  $N + 1$  equações diferenciais parciais, representando o reservatório, é reduzido a um sistema de  $N + 1$  equações diferenciais ordinárias do tipo Bessel modificada utilizando transformada de Laplace [18]. Suas soluções gerais são dadas no Apêndice D pela equação (D.23), a qual é reproduzida abaixo :

$$\bar{p}_{Di} = K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i-1} + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$





Os coeficientes  $B_{jk}$  são combinações lineares das funções de Bessel modificadas  $K_0$  e  $I_0$ . A passagem do sistema linear (3.4) para o sistema linear (3.5) é mostrada em detalhe no Apêndice D. O sistema é invertido para obter as distribuições de pressão no reservatório em função do tempo utilizando o algoritmo de Stehfest [5].

O algoritmo torna-se lento ao empregar muitas regiões para representar o reservatório atrás da frente de injeção, pois é necessário resolver o sistema (3.5), para cada tempo  $t_D$ , o número de vezes correspondente ao número de termos definidos na série do algoritmo de Stehfest [5].

## 3.2 Múltiplas Regiões com Vazão Variável

<sup>3</sup> O enfoque adotado na formulação desse modelo [18] é essencialmente o mesmo adotado no modelo de múltiplas regiões e vazão constante no poço. Algumas modificações são necessárias para simular os efeitos de variação da vazão de injeção.

### 3.2.1 Formulação Matemática

<sup>4</sup> Para a solução de problemas de injeção com vazão variável, entre os quais o teste de decaimento de pressão é um caso particular, considera-se, segundo este modelo [18], que a vazão entre dois tempos  $t^n$  e  $t^{n+1}$  permanece constante, porém, diferente da vazão no intervalo de tempo anterior. Dessa forma, a condição de contorno interna continua especificando vazão constante no poço, mas a condição inicial deixa de ser homogênea, ou seja, não mais é exigido que o reservatório esteja em equilíbrio no tempo  $t = 0$ . Tempo e pressão adimensionais são modificados de forma que o tempo adimensional seja nulo a cada tempo  $t^n$  no qual ocorra uma variação instantânea de vazão.

O reservatório continua sendo representado por  $N + 1$  equações da difusividade

---

<sup>3</sup>Modelo apresentado por Nanba e Horne [18].

<sup>4</sup>Formulação matemática e solução semi-analítica são abordadas com maior detalhe no Apêndice E.

hidráulica e  $2N + 2$  condições de contorno, mas as condições iniciais passam a ser determinadas pela distribuição de pressão que havia no reservatório no tempo  $t^n$  (ver Apêndice E).

### 3.2.2 Solução Semi-Analítica

Ao aplicar a transformada de Laplace às  $N + 1$  equações diferenciais parciais e suas  $N + 1$  condições iniciais, as  $N + 1$  equações diferenciais ordinárias resultantes são do tipo Bessel modificada, porém, deixam de ser homogêneas. A solução geral do problema de valor de contorno homogêneo associado coincide com a solução geral do modelo para múltiplos bancos com vazão constante, que é a equação (3.3), referente ao modelo anterior.

Uma solução particular para o problema não homogêneo,  $\bar{p}_{Di}^p$ , é encontrada através do método de variação dos parâmetros:

$$\bar{p}_{Di}^p = K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) f_i(r_D) + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) h_i(r_D), \quad (3.6)$$

onde as funções  $f_i(r_D)$  e  $h_i(r_D)$  são dadas por:

$$f_i(r_D) = \frac{1}{\eta_{Di}} \int_{r_{Di}}^{r_D} r_D g(r_D) I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) dr_D, \quad (3.7)$$

$$h_i(r_D) = \frac{1}{\eta_{Di}} \int_{r_D}^{r_{Di+1}} r_D g(r_D) K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) dr_D, \quad (3.8)$$

e  $g(r_D)$  é a distribuição de pressão no instante  $t^n$ .

A solução geral do problema não homogêneo [18] é representada então pela soma da solução geral do problema homogêneo associado, equação (3.3), e da solução particular do problema não homogêneo, (3.6):

$$\begin{aligned} \bar{p}_{Di} = & K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i-1} + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i} \\ & + K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) f_i(r_D) + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) h_i(r_D). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ao aplicar as condições de contorno à solução geral (3.9), chega-se a um sistema de equações lineares com estrutura pentadiagonal, semelhante à equação (3.4). A matriz de coeficientes  $[A_{jk}]$  permanece inalterada, mas o vetor de termos independentes  $[D_j]$  passa a conter combinações lineares da solução particular (3.6) e da sua derivada. Da mesma forma, como no modelo de múltiplas regiões com vazão constante, o sistema pentadiagonal pode ser reduzido a um sistema tridiagonal através de transformações lineares. Essas passagens são mostradas com detalhe no Apêndice E.

O algoritmo de solução numérica é mais lento que o algoritmo para o modelo com vazão constante pois, além da pressão no poço, é necessário calcular as pressões em todas as interfaces entre as  $N + 1$  regiões.

### 3.3 Múltiplas Regiões com Poço Infinitesimal

Neste trabalho, foi desenvolvido um algoritmo semelhante ao de múltiplas regiões com vazão de injeção constante, de Nanba e Horne [18], considerando poço infinitesimal. O novo algoritmo é apresentado com detalhe no Apêndice F e é uma generalização do trabalho de Ramey [4] (que inclui no máximo três regiões) para múltiplas regiões, de forma a verificar-se os efeitos devidos à distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção.

#### 3.3.1 Formulação Matemática

<sup>5</sup> O reservatório é discretizado em  $N + 1$  regiões de propriedades constantes e as equações diferenciais parciais são reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias usando a transformada de Boltzmann.

As condições auxiliares postas no problema estabelecem:

---

<sup>5</sup>Formulação numérica e solução semi-analítica são mostradas com mais detalhe no Apêndice F.

- reservatório inicialmente em equilíbrio;
- vazão constante no poço, considerado infinitesimal;
- pressão contínua nas interfaces entre regiões;
- vazão contínua entre regiões;
- reservatório infinito; ou,
- pressão constante no limite externo do reservatório.

### 3.3.2 Solução Semi-Analítica

A solução geral para o sistema de equações diferenciais ordinárias é dado por (equação F.9 do Apêndice F):

$$p_{Di} = C_{2i-1} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{Di}} \right) + C_{2i}, \quad i = 1, \dots, N + 1 \quad (3.10)$$

Ao aplicar as condições de contorno à solução geral e à sua derivada, verifica-se que as  $N + 1$  constantes de integração ímpares são explícitas. Para a primeira região em particular,  $C_1 = 1/2$ , logo:

$$p_{D1} = \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D1}} \right) + C_2, \quad (3.11)$$

e a pressão no poço é dada por:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{1}{4t_D} \right) + C_2 \quad (3.12)$$

As constantes de integração pares, inclusive  $C_2$ , são determinadas pelo sistema de equações lineares (F.21):



A principal desvantagem deste modelo está na impossibilidade de abordar o problema de injeção com vazão variável da mesma forma como foi feito no Apêndice E para poço finito, pois a transformada de Boltzmann não pode ser aplicada em problemas nos quais a condição inicial não é homogênea.

Soluções de modelos que utilizam formulação de poço infinitesimal são, por natureza, singulares no poço ( $r_D = 0$ ). Esse problema é resolvido tradicionalmente na bibliografia especializada atribuindo-se ao poço as pressões calculadas em  $r_D = 1$ . No caso de injeção de água, esta é efetuada no poço, em  $r_D = 0$ ; portanto, há um intervalo de tempo no qual a frente de injeção ainda não atingiu  $r_D = 1$  e as soluções não são válidas. Esse enfoque, adotado em trabalhos anteriores, traz o inconveniente de fazer com que as soluções dos dois tipos de modelo não sejam exatamente assintóticas [18].

De forma a contornar esse problema, a implementação numérica do nosso modelo supõe a existência de uma distribuição inicial de saturação de água no interior do reservatório no momento da abertura para injeção: em  $t = 0$ , supomos que na região  $0 \leq r_D \leq 1$  a saturação de água é  $S_w = 1 - S_{or}$  e que na região  $r_D \geq 1$ ,  $S_w = S_{wc}$ . Esta é uma vantagem do modelo desenvolvido neste trabalho sobre a solução puramente analítica de Bratvold e Horne [16]. Este artifício não modifica em nada as equações diferenciais. Apenas a equação de Buckley e Leverett [1] para poço finito passa a ser utilizada no cálculo das distâncias do poço às diversas interfaces, e, em virtude disso, torna-se necessário recalcular as “constantes” de integração a cada tempo  $t_D$ .

## Capítulo 4

# Um Método Para Estimativa das Curvas de Permeabilidade Relativa

Neste capítulo, alguns resultados, obtidos com o algoritmo computacional do modelo semi-analítico para vazão constante e poço finito, são mostrados em forma gráfica. Usando o algoritmo semi-analítico, algumas soluções e aproximações obtidas com os modelos analíticos são verificadas numericamente; e, por fim, um método gráfico para estimativa das curvas de permeabilidade relativa é proposto.

### 4.1 Implementação do Algoritmo

#### 4.1.1 Correlação de Hirasaki

As curvas de permeabilidade relativa são geradas através da correlação de Hirasaki [8] :

$$k_{ro} = \hat{k}_{ro} \cdot (1 - S_{wD})^{n_o}, \quad (4.1)$$



$$k_{rw} = \hat{k}_{rw} \cdot (S_{wD})^{n_w}, \quad (4.2)$$

onde  $\hat{k}_{ro}$  é a permeabilidade relativa ao óleo na região não atingida pela água injetada (de índice  $N + 1$  e com saturação de água igual a  $S_{wc}$ );  $\hat{k}_{rw}$  é a permeabilidade relativa à água no poço, onde  $S_w = 1 - S_{or}$ ;  $n_o$  e  $n_w$  são respectivamente os expoentes das curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água, e  $S_{wD}$  é a saturação de água normalizada, definida como:

$$S_{wD} = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}; \quad (4.3)$$

logo, no poço,  $S_{wD} = 1$ , e na região não atingida pela água,  $S_{wD} = 0$ .

Usando a correlação de Hirasaki [8], equações (4.1) e (4.2), na definição da mobilidade total adimensional (dada no Apêndice C, equação (C.4)),  $\lambda_D$ , obtem-se:

$$\lambda_D = (S_{wD})^{n_w} + \frac{1}{M}(1 - S_{wD})^{n_o}. \quad (4.4)$$

O fluxo fracionário de água,  $f_w$ , é dado por:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o}, \quad (4.5)$$

logo, expresso em função da correlação de Hirasaki [8],

$$f_w = \frac{S_{wD}^{n_w}}{\lambda_D}, \quad (4.6)$$

onde:

$$M = \frac{\hat{k}_{rw} \mu_o}{\mu_w \hat{k}_{ro}};$$

$$\frac{dS_{wD}}{dS_w} = \frac{1}{1 - S_{wc} - S_{or}}.$$

Segundo Standing [9], o expoente de permeabilidade relativa à água assume valores de 2.5 a 7, a depender do índice de distribuição de poros. Na tabela (4.1), verifica-se que Standing usou a correlação de Hirasaki [8] para a permeabilidade relativa à água. O mesmo não aconteceu com relação à curva de permeabilidade relativa ao óleo. Infelizmente, não encontramos trabalhos como o de Standing na bibliografia técnica que utilizassem a correlação de Hirasaki [8] para ambas as curvas de permeabilidade relativa.

Meio Poroso	$\lambda$ <sup>1</sup>	$\frac{k_{rw}}{k_{rw}}$	$\frac{k_{ro}}{k_{ro}}$
Muito heterogêneo	0.5	$S_{wD}^7$	$(1 - S_{wD})^2[1 - S_{wD}^5]$
Heterogêneo	2	$S_{wD}^4$	$(1 - S_{wD})^2[1 - S_{wD}^2]$
Pouco Homogêneo	4	$S_{wD}^{2.5}$	$(1 - S_{wD})^2[1 - S_{wD}^{1.5}]$
Homogêneo	$\infty$	$S_{wD}^3$	$(1 - S_{wD})^3$

<sup>1</sup> $\lambda$  : índice de distribuição de poros.

Tabela 4.1: Equações de Permeabilidade Relativa - Standing

#### 4.1.2 Posição da Frente de Injeção

A posição da frente de injeção de água é obtida pelo método de Newton. Procura-se, na curva de fluxo fracionário de água versus a saturação de água adimensional, por um ponto da abscissa  $S_{wDf}$  no qual a derivada do fluxo fracionário de água  $f'(S_{wDf})$  seja tal que:

$$f'(S_{wDf}) = \frac{f(S_{wDf})}{S_{wDf}}; \quad S_{wDf} \neq 0 \quad (4.7)$$

ou ainda,

$$S_{wDf} = \frac{f(S_{wDf})}{f'(S_{wDf})}; \quad f'(S_{wDf}) \neq 0 \quad (4.8)$$

Derivando a expressão do fluxo fracionário (4.6) em relação a  $S_{wD}$ ,

$$f'(S_{wD}) = \frac{n_w \cdot (1 - S_{wD})^{n_o} S_{wD}^{n_w-1} + n_o \cdot (1 - S_{wD})^{n_o-1} S_{wD}^{n_w}}{M \left[ S_{wD}^{n_w} + \frac{1}{M} (1 - S_{wD})^{n_o} \right]^2} \quad (4.9)$$

Note que:

$$f'(S_w) = f'(S_{wD}) \frac{dS_{wD}}{dS_w}$$

Substituindo (4.9) e (4.6) na equação (4.8),

$$(n_w - 1)(1 - S_{wDf})^{n_o} S_{wDf}^{n_w} + n_o (1 - S_{wDf})^{n_o-1} S_{wDf}^{n_w+1} - M S_{wDf}^{2n_w} = 0 \quad (4.10)$$

Como o valor de  $S_{wDf}$  não é conhecido a priori, tentaremos minimizar a função  $F(S_{wDf})$  através do algoritmo de Newton,

$$S_{wDf}^{j+1} = S_{wDf}^j - \frac{F(S_{wDf}^j)}{F'(S_{wDf}^j)}; \quad (4.11)$$

onde  $j$  é o nível de iteração e as funções  $F$  e  $F'$  são:

$$F(S_{wDf}) = (n_w - 1)(1 - S_{wDf})^{n_o} S_{wDf}^{n_w} + n_o (1 - S_{wDf})^{n_o-1} S_{wDf}^{n_w+1} - M S_{wDf}^{2n_w} \quad (4.12)$$

$$F'(S_{wDf}) = \frac{dF(S_{wDf})}{dS_{wDf}} \quad (4.13)$$

O valor inicial de  $S_{wDf}$  que temos utilizado é:

$$S_{wDf}^{(1)} = 0.9999$$

Este algoritmo foi testado para diversos valores de  $n_w$ ,  $n_o$  e  $M$ , apresentando convergência após quatro ou cinco iterações para tolerâncias da ordem de  $10^{-4}$ .

A posição da frente de injeção está relacionada com a saturação de água na frente de injeção através da equação de Buckley e Leverett [1].

### 4.1.3 Equação de Buckley e Leverett

A posição da frente de injeção e das diversas interfaces entre regiões é determinada através da equação de Buckley e Leverett:

$$r^2 - r_w^2 = \frac{|q| t}{\pi \phi h} f_w'(S_w) \quad (4.14)$$

A figura 4.1 mostra curvas de distribuição de saturação obtidas a partir da equação de Buckley e Leverett. Na figura 4.2, são plotadas as curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água, a curva de mobilidade total adimensional e a de fluxo fracionário, versus saturação de água. Também nessa figura, vê-se o segmento da reta tangente à curva de fluxo fracionário, definindo a saturação de água na frente de injeção, a saturação de água média atrás da frente e a derivada do fluxo fracionário na frente [2].

## 4.2 Parâmetros Utilizados

Os casos simulados aqui utilizam os mesmos parâmetros do artigo de Nanba e Horne [18]. A tabela (4.2) relaciona os valores correspondentes, no sistema de unidades de campo SPE.

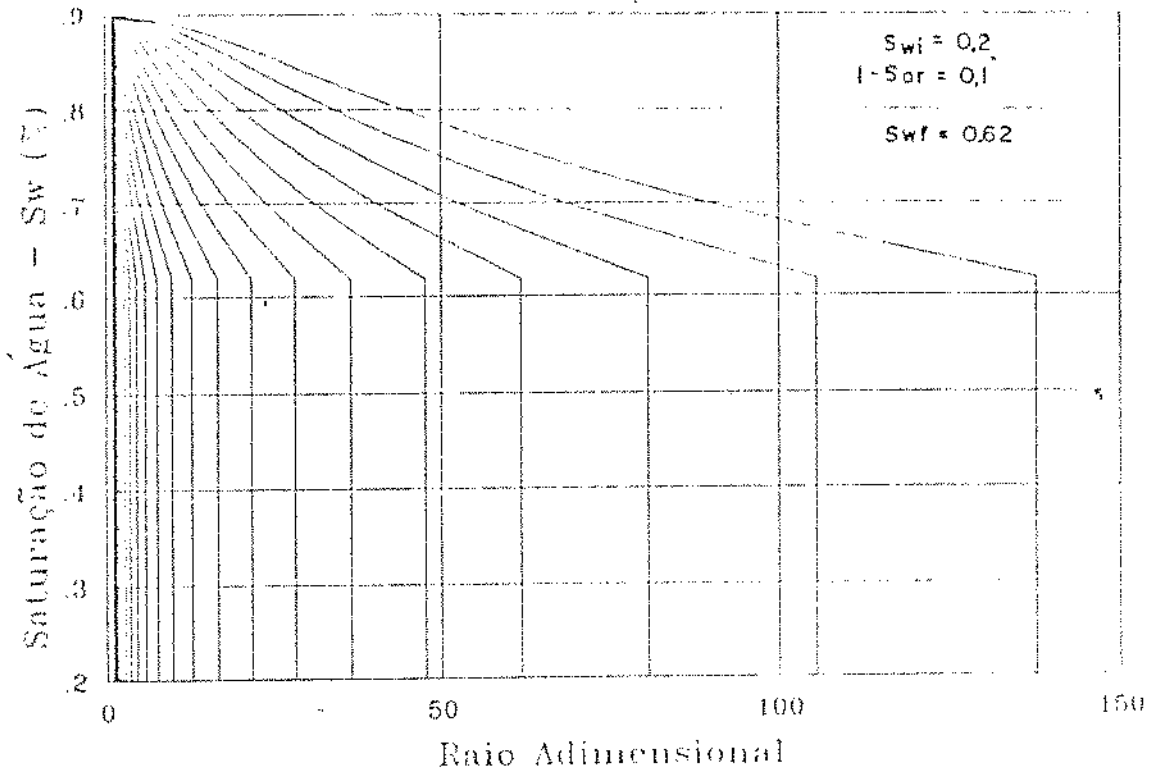


Figura 4.1: Curvas de Distribuição de Saturação

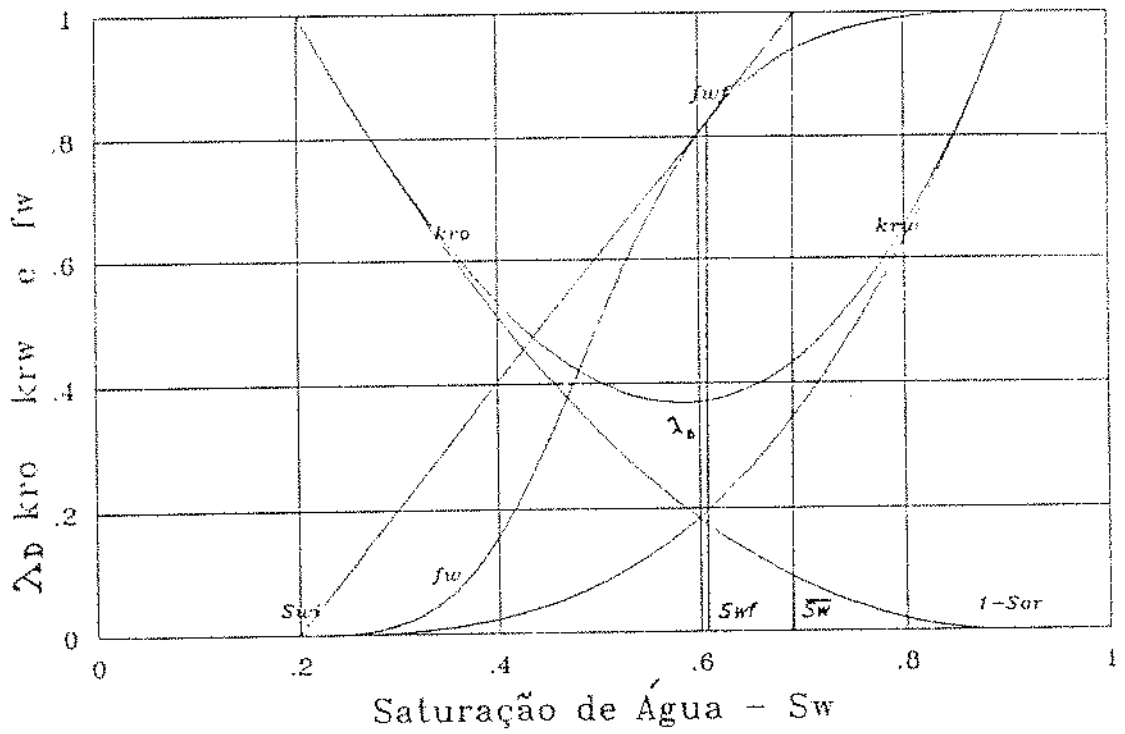


Figura 4.2: Curvas de Permeabilidade Relativa e Fluxo Fracionário

Parâmetros Utilizados								
$k$	20	mD	$\phi$	20	%	$S_{wc}$	20	%
$S_{or}$	10	%	$h$	25	ft	$r_w$	0.25	ft
$\mu_w$	0.25	cp	$\mu_o$	1.00	cp	$c_w$	$10^{-6}$	$psi^{-1}$
$c_o$	$10^{-5}$	$psi^{-1}$	$c_f$	0	$psi^{-1}$	$q$	-250	$bbl/d$
$p_i$	1000	psi	$n_w$ <sup>2</sup>	3		$n_o$ <sup>2</sup>	2	
$\hat{k}_{rw}$	1		$\hat{k}_{ro}$ <sup>3</sup>	1		$M$	4	

<sup>2</sup> $n_w$  e  $n_o$  podem assumir outros valores para gerar diferentes curvas de permeabilidade relativa

<sup>3</sup> $\hat{k}_{ro}$  ou  $\mu_o$  variam de forma a gerar outros valores de razão de mobilidade  $M$

Tabela 4.2: Parâmetros

## 4.3 Resultados de Simulações

### 4.3.1 Efeito da Discretização

O efeito da discretização em múltiplas regiões na pressão medida no poço,  $p_{wf}$ , em função do tempo de injeção é mostrado na figura 4.3. Observa-se que com 20 regiões, o resultado já é satisfatório.

### 4.3.2 Efeitos de Estocagem e de Película

Efeitos de estocagem e película no poço são incluídos (figura 4.4) através do princípio da superposição de Duhamel (ver equação (A.48) no Apêndice A). Nesta figura, o volume injetado adimensional,  $Q_D$ , definido em (D.6), é proporcional ao tempo adimensional  $t_D$  e calculado em função do volume poroso equivalente do poço.

O procedimento descrito acima, porém, não é rigoroso, já que o conjunto de equações diferenciais não é linear devido ao movimento da frente de injeção.

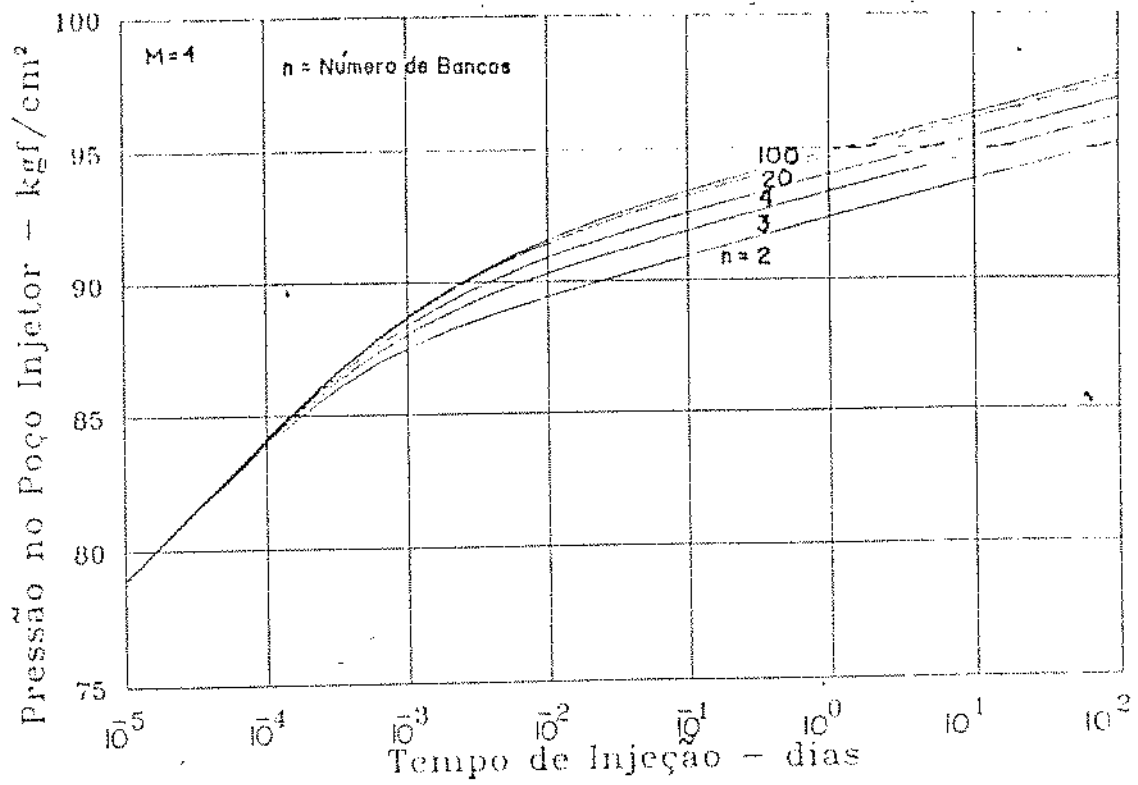


Figura 4.3: Efeitos da Discretização na Pressão no Poço

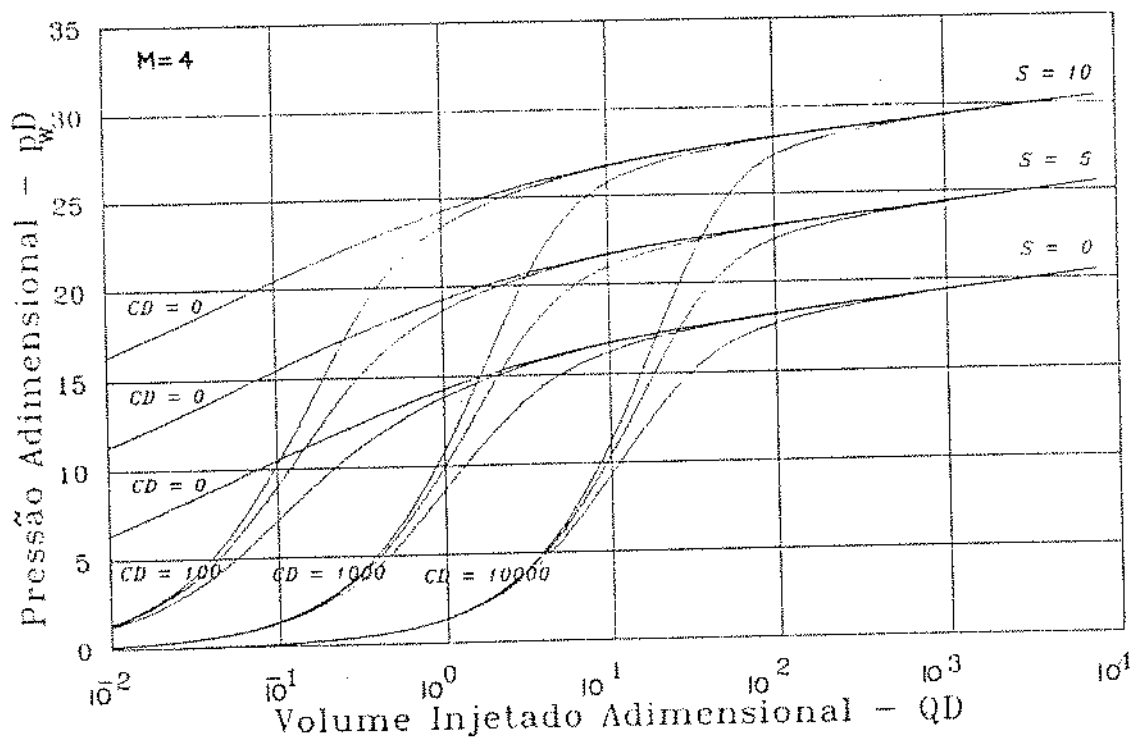


Figura 4.4: Efeitos de Estocagem e Fator de Película

### 4.3.3 Efeitos de Limite de Reservatório no Poço

Os efeitos de longo tempo, observados na parede do poço, para os três tipos de condição de contorno externa ( reservatório selado, com manutenção de pressão e infinito ) podem ser vistos nas figuras 4.5 a 4.12. Na figura 4.5, para uma razão de mobilidade igual a 4,  $n$  é a relação entre o raio externo do reservatório e a máxima distância alcançada pela frente de injeção, no final do teste de injeção. No caso de  $n = 1$ , a frente de injeção alcança o limite do reservatório no tempo de injeção final. Para  $n \leq 4$ , verifica-se que o tempo a partir do qual é válida a aproximação logarítmica ainda não foi atingido no momento em que os efeitos do contorno externo começam a ser observados no poço. Além disso, a pressão no poço é decrescente quando a fronteira externa é mantida a uma pressão constante, o que mostra a ausência de regime permanente.

Quanto maior a razão de mobilidade, maior o fator de película aparente medido em um teste de injeção. Esta é uma conclusão que pode ser verificada na figura 4.6, que compara as respostas de pressão no poço em testes de injeção com diversas razões de mobilidade, para reservatórios infinitos e para reservatórios selados no contorno externo. Na expressão de longo tempo dada por Bratvold e Horne [16], usando as equações (2.40) e (2.43) do Capítulo 2,

$$p_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma} \right) + \frac{1}{2} (1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \ln(r_{DBL}^2). \quad (4.15)$$

Observe que  $e^\gamma y_{BL}/\eta_{D2}$  é, para os valores usuais em projetos de injeção de água, bem menor que 1. Assim, o produto  $(1 - M) \ln(e^\gamma y_{BL}/\eta_{D2})$  é positivo quando  $M > 1$ , o que corresponde, fisicamente, a um efeito de dano aparente no poço.

Nas figuras 4.7 e 4.8 são mostrados os efeitos de limite de reservatório sobre a pressão no poço para razões de mobilidade 1 e 1/2. Com  $M = 1$ , figura 4.7, observa-se algo parecido com regime permanente, porém, como a frente de injeção está em movimento, esse regime só existe próximo ao poço e ao contorno externo do reservatório.



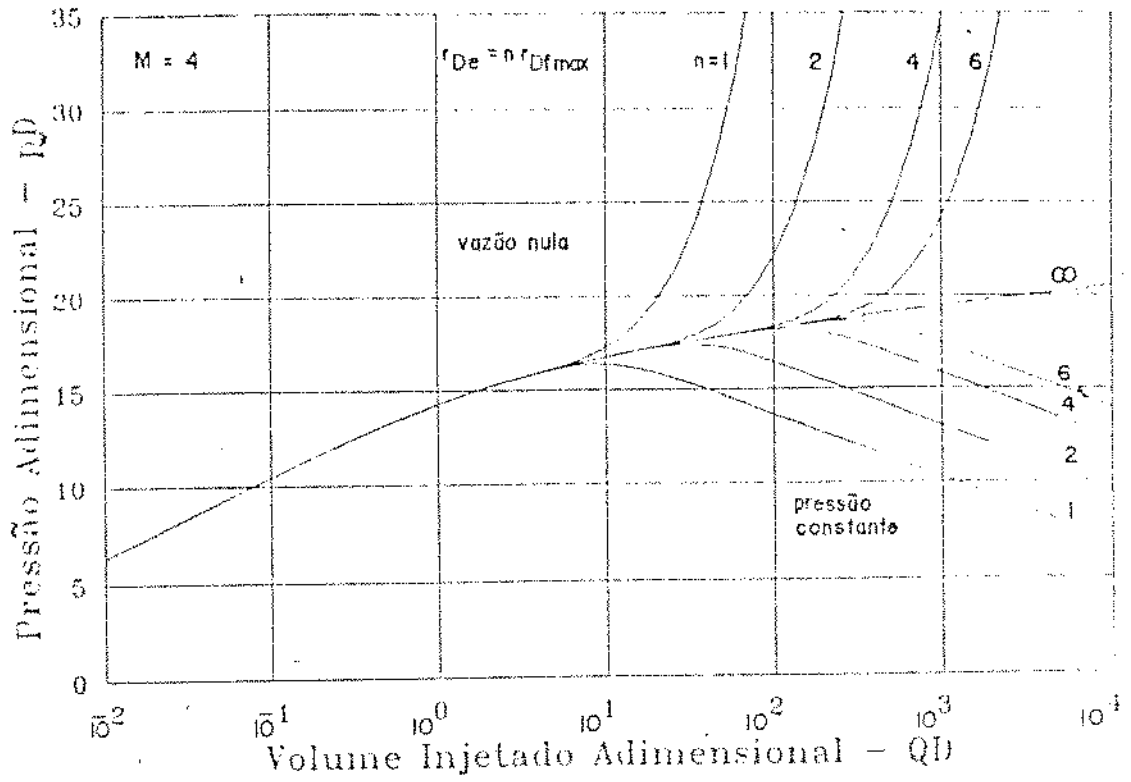


Figura 4.5: Poço sem Estocagem e Dano - Efeitos de Limite de Reservatório

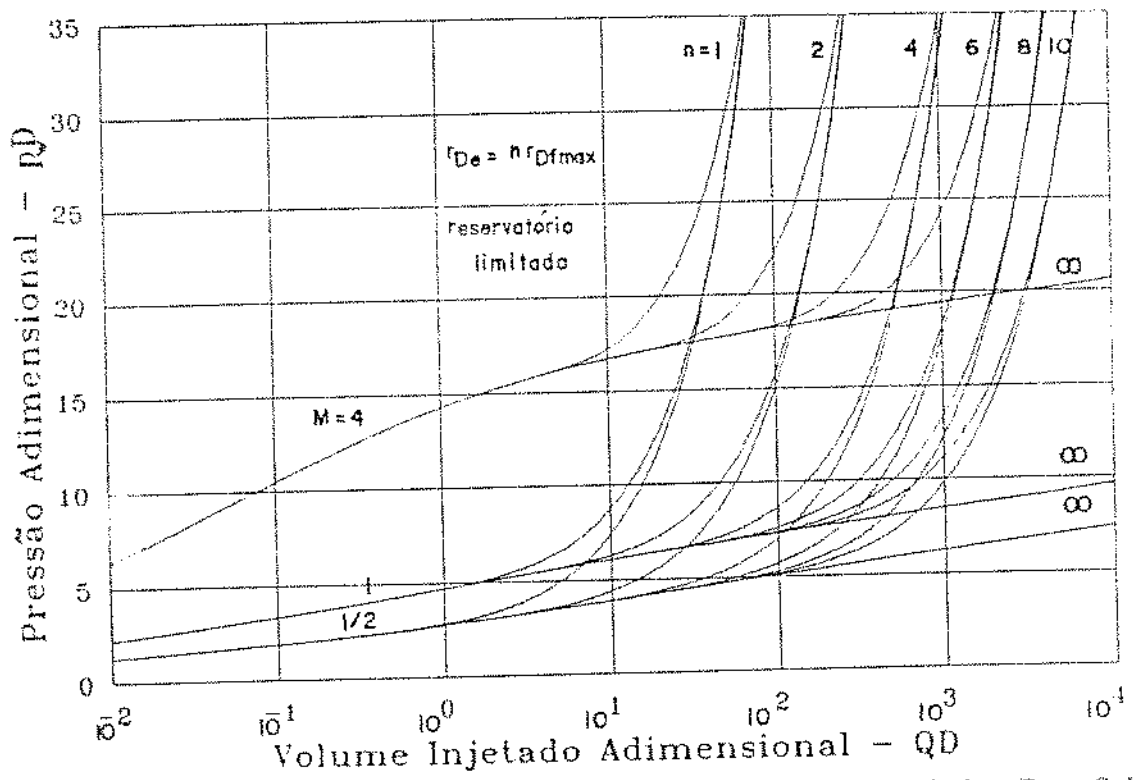


Figura 4.6: Efeitos de Limite de Reservatório e Razão de Mobilidade - Res. Selado

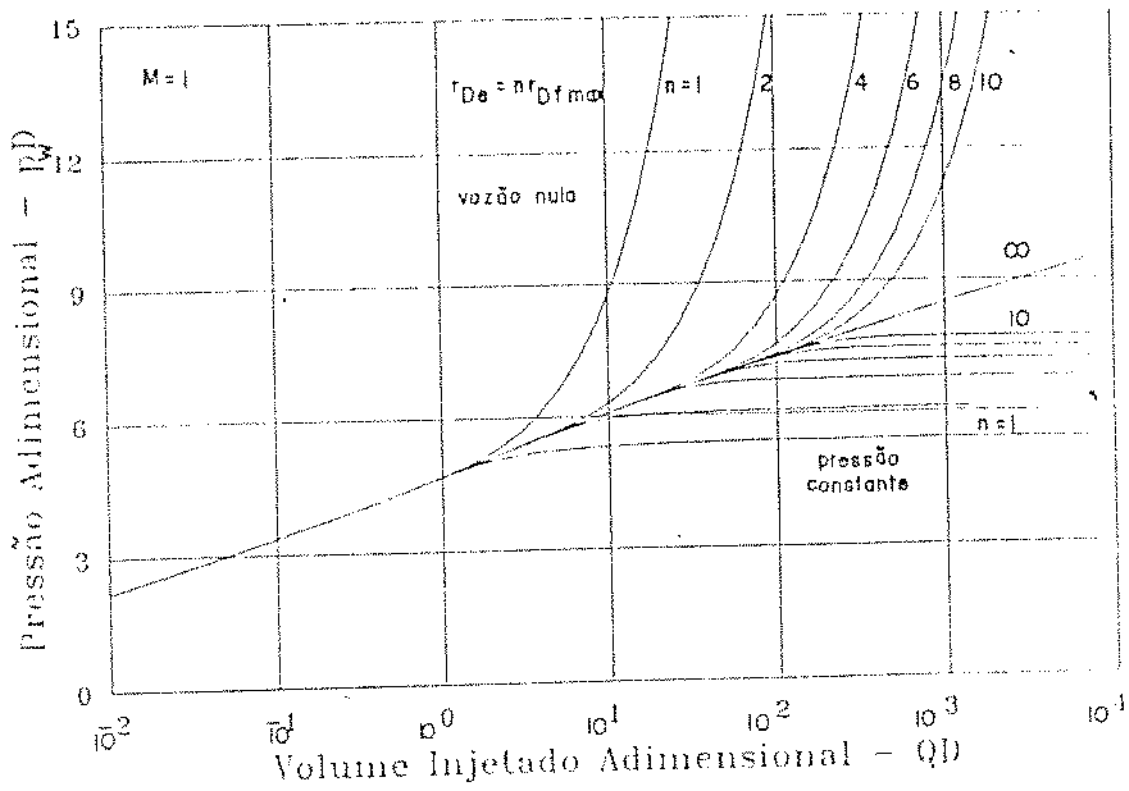


Figura 4.7: Efeitos de Limite de Reservatório

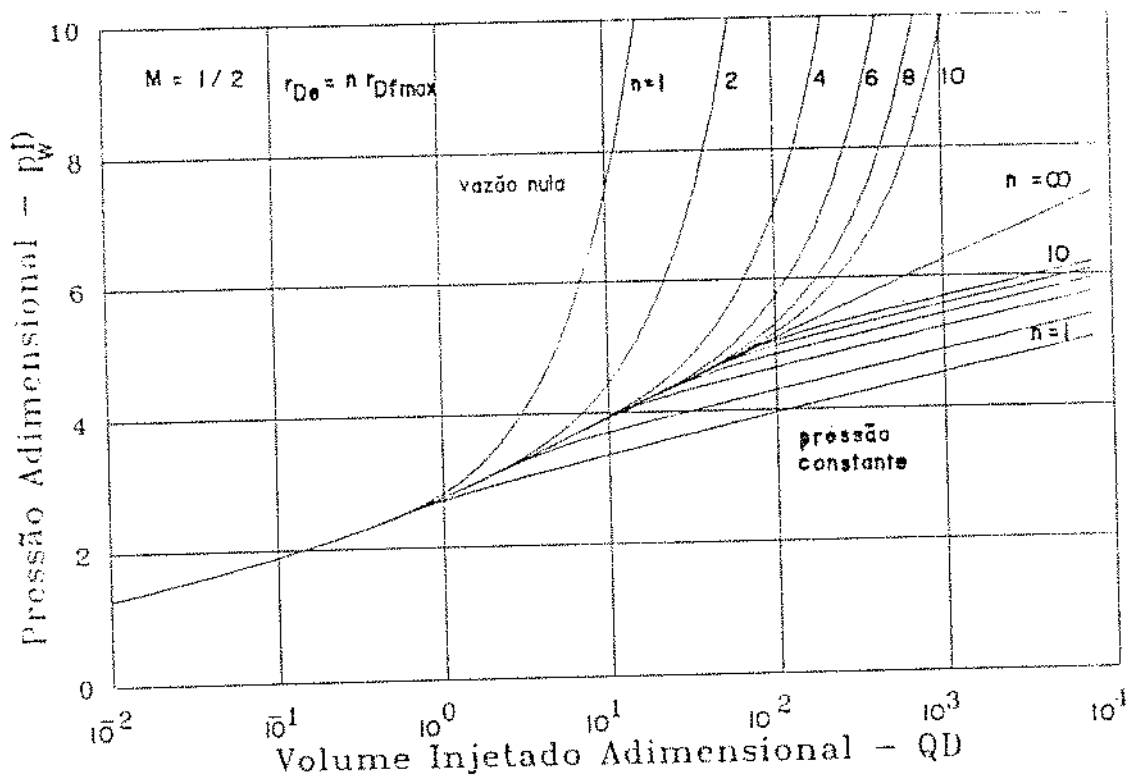


Figura 4.8: Efeitos de Limite de Reservatório

As inclinações de gráficos semi-logarítmicos da pressão no poço versus tempo de injeção para diversas razões de mobilidade são plotadas na figura 4.9 (reservatório infinito). Segundo esse gráfico, quanto maior a razão de mobilidade, mais tempo de injeção será necessário para que seja atingido o trecho em que é válida a aproximação logarítmica.

No nosso algoritmo, os tempos foram discretizados segundo uma progressão geométrica e a pressão no poço foi derivada através de “spline” cúbico natural, sobre uma escala logarítmica do tempo. O algoritmo de derivação no campo de Laplace da pressão no poço recusou-se, apesar de grande insistência, a fornecer resultados plausíveis, enquanto que algoritmos de derivação numérica por diferenças centrais exigiam uma discretização refinada no tempo, aumentando o tempo de processamento.

Uma expressão analítica dada por Bratvold e Horne [16] para a resposta de longo tempo da pressão no poço durante injeção com manutenção de pressão na fronteira externa é verificada, com sucesso, na figura 4.10; para diversas razões de mobilidade e diversos raios externos do reservatório:

$$\frac{dp_{wD}}{d \ln(t_D)} = \frac{1}{2}(1 - M). \quad (4.16)$$

Nas figuras 4.11 e 4.12 entretanto, a aproximação de longo tempo dada por Bratvold e Horner [16] para reservatórios selados não foi observada. Segundo eles, deveríamos obter:

$$r_{eD}^2 \frac{dp_{wD}}{dt_D} = 2M; \quad (4.17)$$

entretanto, o que observa-se é um período intermediário em que:

$$r_{eD}^2 \frac{dp_{wD}}{dt_D} = \frac{1}{2}. \quad (4.18)$$

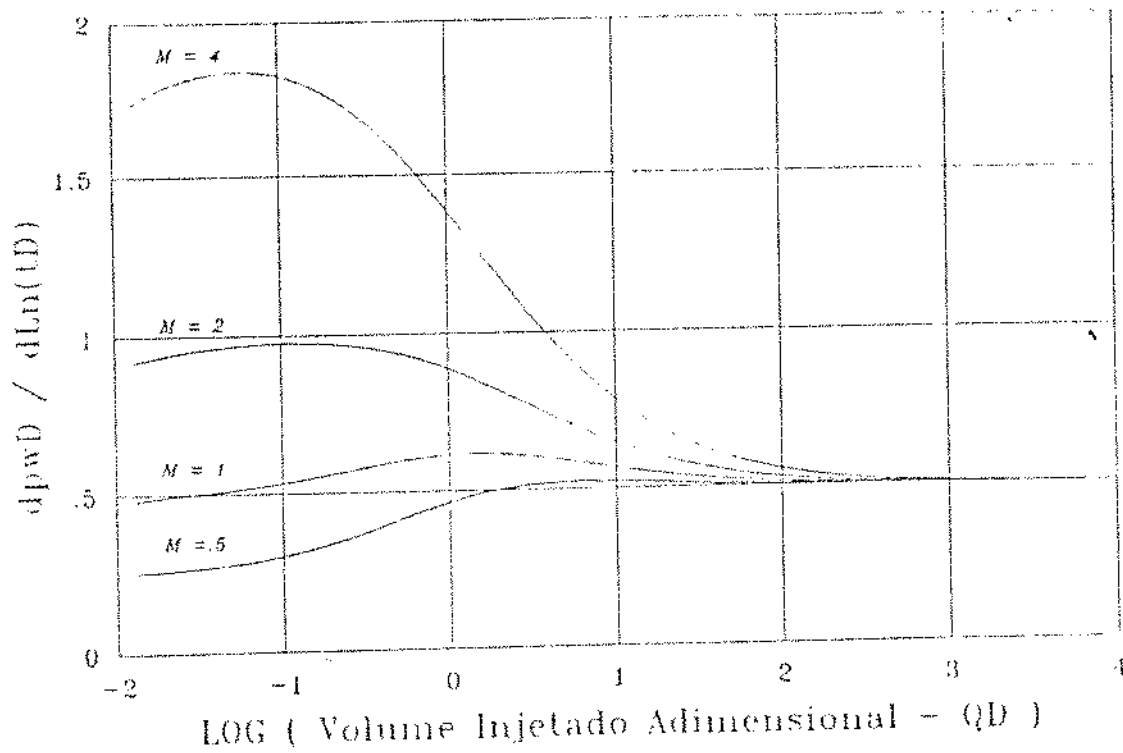


Figura 4.9: Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Infinito

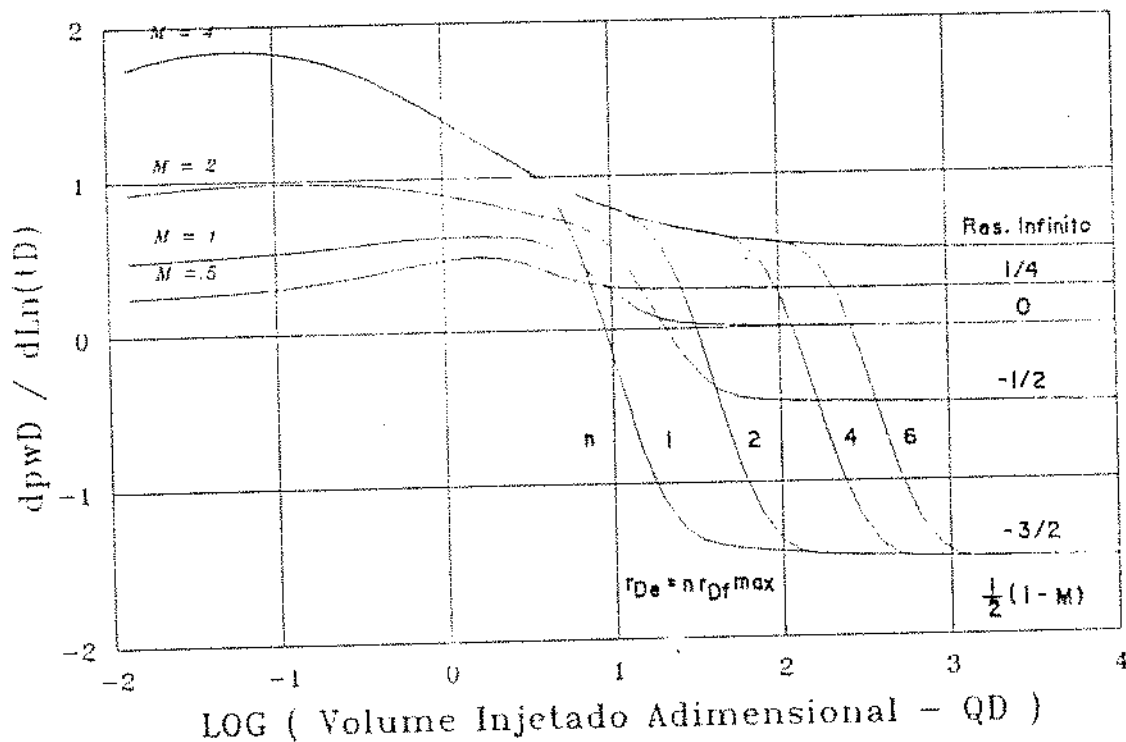


Figura 4.10: Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Realimentado

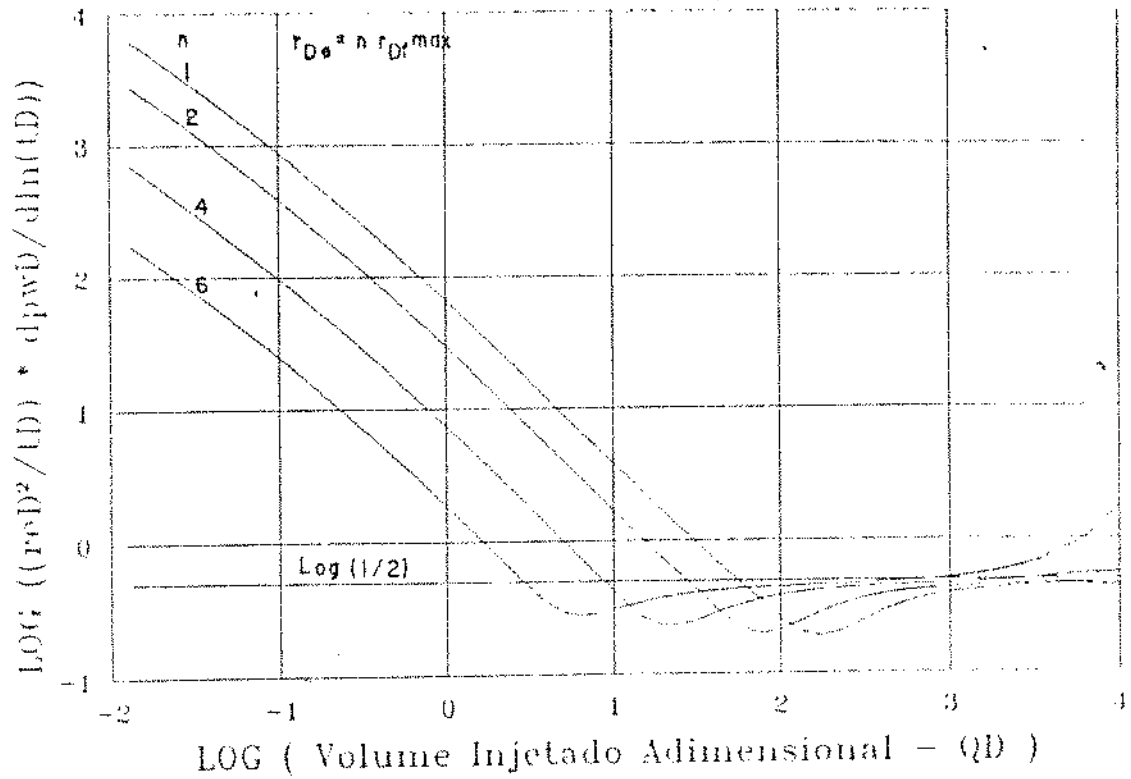


Figura 4.11: Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Selado

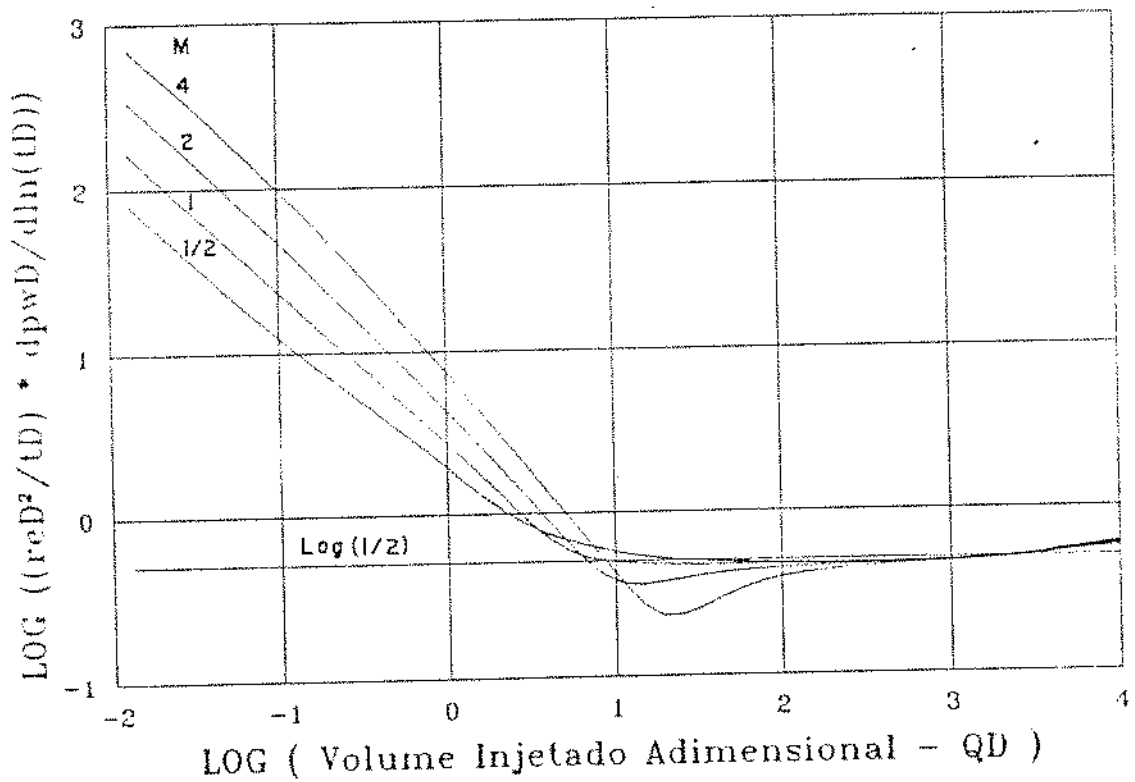


Figura 4.12: Derivada da Pressão no Poço - Reservatório Selado

#### 4.3.4 Curvas de Distribuição de Pressão no Reservatório

As figuras 4.13 a 4.24 mostram, de forma qualitativa, as distribuições de pressão e derivada de pressão no interior do reservatório para diversas razões de mobilidade e diferentes condições de contorno externas. Alguns desses gráficos mostram também a evolução da pressão na frente de injeção e/ou entre a primeira e segunda regiões. São usadas sempre 20 regiões nas simulações e o tempo é discretizado segundo uma progressão geométrica.

Na figura 4.13, para injeção de água em reservatórios infinitos com razão de mobilidade  $M = 4$ , encontram-se plotadas 27 curvas de distribuição de pressão obtidas em diversos tempos de injeção. A primeira curva, mais próxima do eixo das abscissas, refere-se ao tempo de injeção mais curto considerado, e a 27<sup>a</sup>, ao tempo de injeção mais longo. Em qualquer uma das 27 curvas de distribuição de pressão, pode-se verificar que a derivada da distribuição de pressão na parede poço é constante ao longo do tempo, logo a condição de contorno interna é satisfeita. Este fato pode ser constatado com mais clareza na figura 4.14, que mostra as 27 curvas de distribuição da derivada de pressão no interior do reservatório. Nota-se que todas as curvas partem de  $\partial p_D / \partial \ln(r_D)(r_D = 1) = -1$ , o que está plenamente de acordo com a condição de contorno interna do problema.

O raio de investigação de um teste de produção em um reservatório homogêneo infinito pode ser definido como sendo o ponto de interseção da reta tangente, na parede do poço, à curva de distribuição logarítmica da pressão com o eixo de pressão adimensional nula, num gráfico da distribuição de pressão versus o logaritmo do raio. Observe que, se esta mesma definição for aplicada ao casos de injeção de água aqui estudados, o raio de investigação de testes de injeção será sempre superior ao raio da frente de injeção. No gráfico 4.13, a posição da frente de injeção para qualquer uma das curvas de distribuição de pressão pode ser facilmente localizada na interseção com a curva de evolução da pressão na frente de injeção,  $p_D(r_{Df})$ , e é sempre menor que o raio de investigação determinado pela interseção reta tangente à curva de distribuição de pressão no poço com o eixo  $p_D = 0$ .

Na figura 4.13 verifica-se que a derivada da distribuição de pressão imediatamente à frente da frente de injeção é constante. Na figura 4.16, o valor de  $\partial p_D / \partial \ln(r_D)$  na posição da frente de injeção é igual a  $-M$ , para qualquer uma das curvas de distribuição da derivada da pressão no reservatório. Esta é a comprovação numérica da equação (2.37), obtida para o modelo modelo de Bratvold e Horne [16]. Note que as curvas de distribuição de derivada da pressão são contínuas na frente de injeção. Isso acontece em particular para casos em que  $\lambda_{DBL} = 1/M$ . Nos gráficos 4.20, 4.22 e 4.24, pode-se verificar uma descontinuidade na distribuição da derivada de pressão.

Nos gráficos 4.13 a 4.24 nota-se, em geral, que:

- todas as condições de contorno são satisfeitas,
- a razão de mobilidade é caracterizada sempre pelo gráfico de distribuição de derivada da pressão em função do logaritmo do raio,
- a posição da frente também fica caracterizada pela distribuição da derivada da pressão,
- há uma grande semelhança entre as curvas de distribuição da derivada da pressão atrás da frente de injeção para diferentes razões de mobilidade,
- essas curvas são muito pouco afetadas pelas condições de contorno externas, principalmente no caso de manutenção de pressão.

Como já foi visto anteriormente, no Capítulo 2, equação (2.35), na região atrás da frente de injeção :

$$\frac{\partial p_{D1}}{\partial \ln(r_D)} = r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \approx -\frac{1}{\lambda_D} \quad (4.19)$$

Dáí, a semelhança entre as curvas. Como a mobilidade total adimensional de cada uma das regiões é determinada pela equação de Buckley e Leverett, as diversas

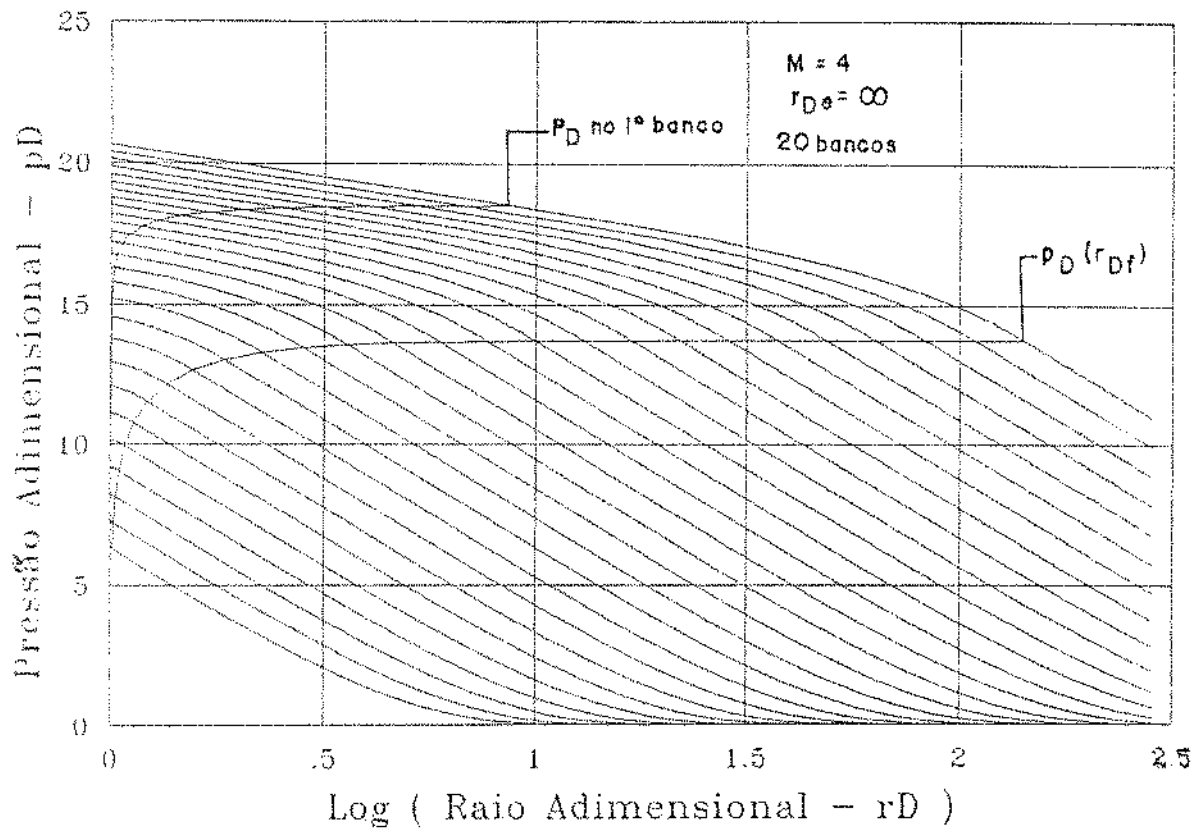


Figura 4.13: Curvas de Distribuição de Pressão

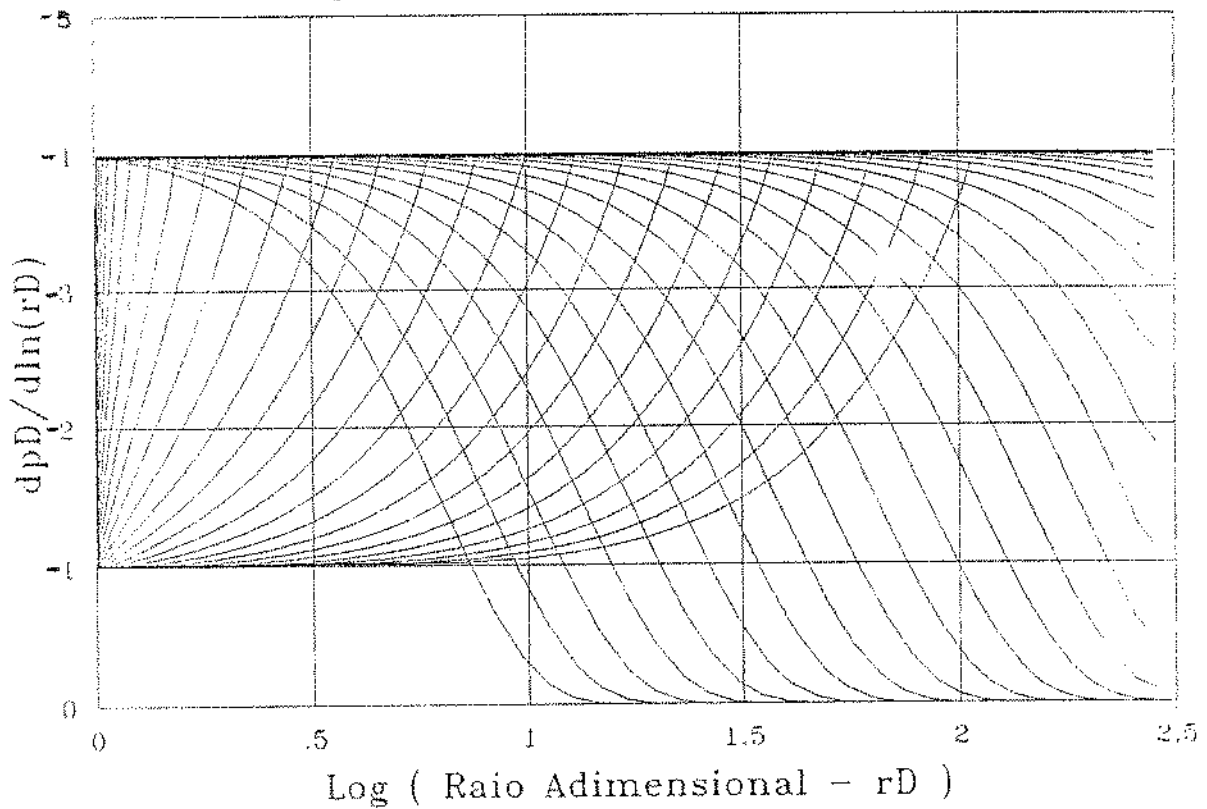


Figura 4.14: Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão



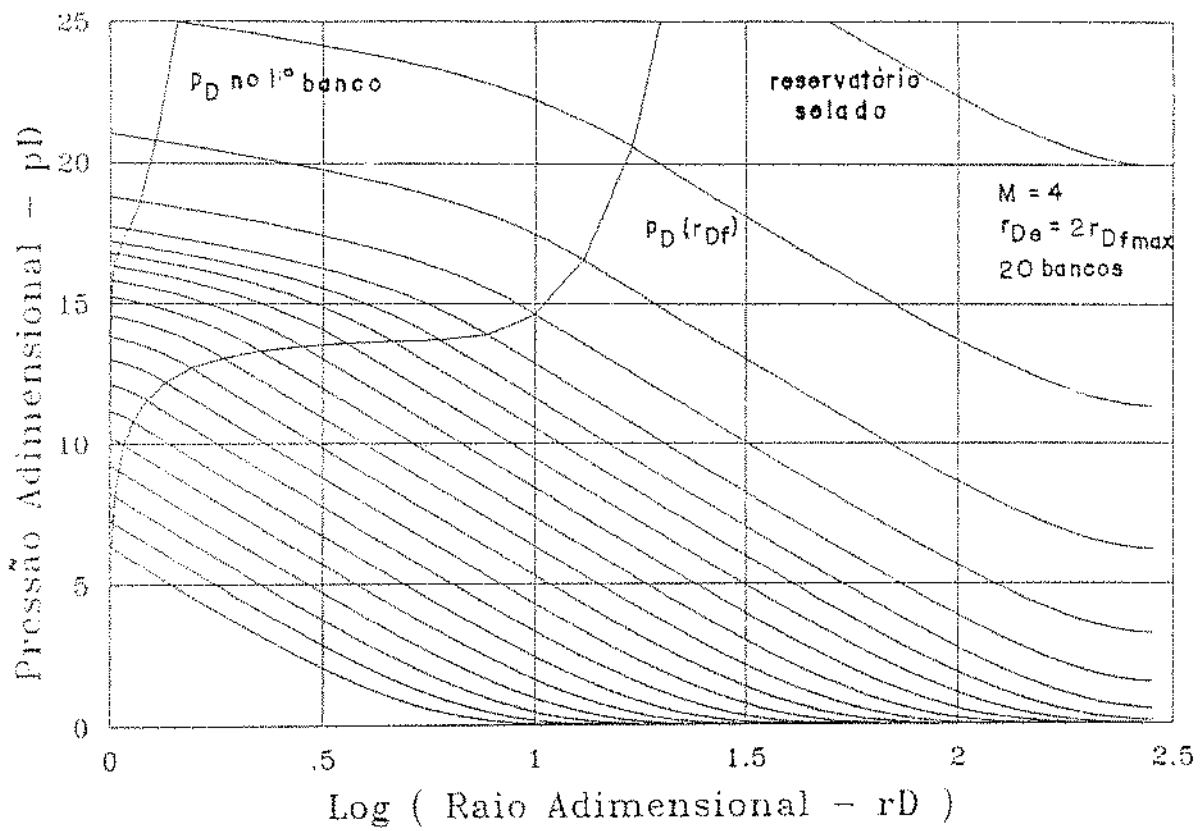


Figura 4.15: Curvas de Distribuição de Pressão

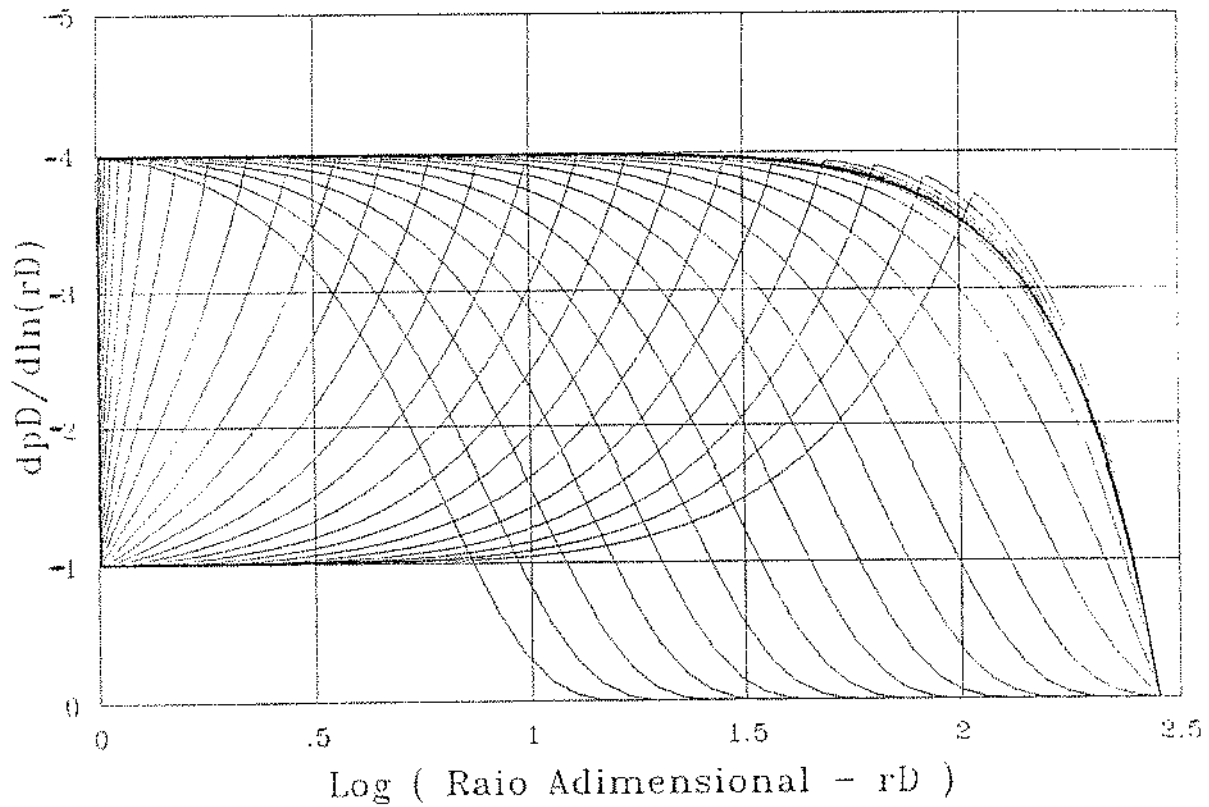


Figura 4.16: Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão

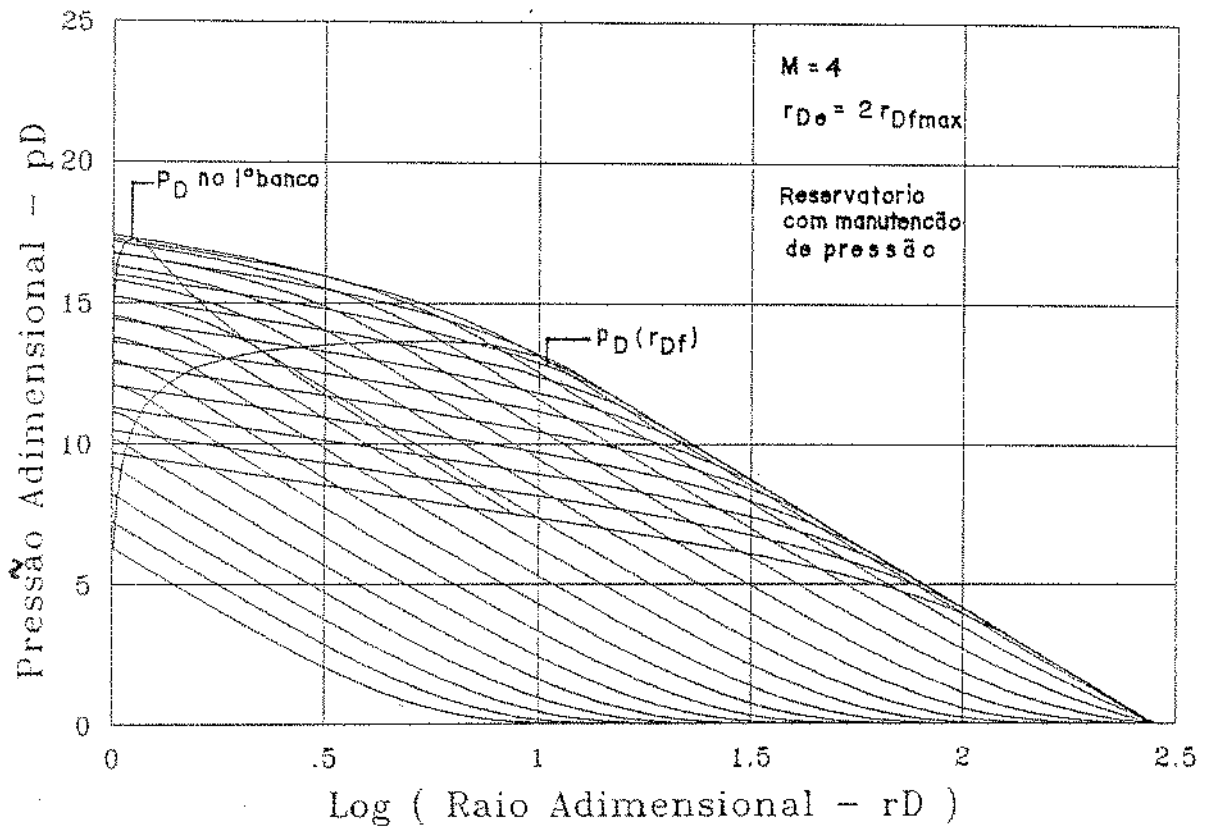


Figura 4.17: Curvas de Distribuição de Pressão

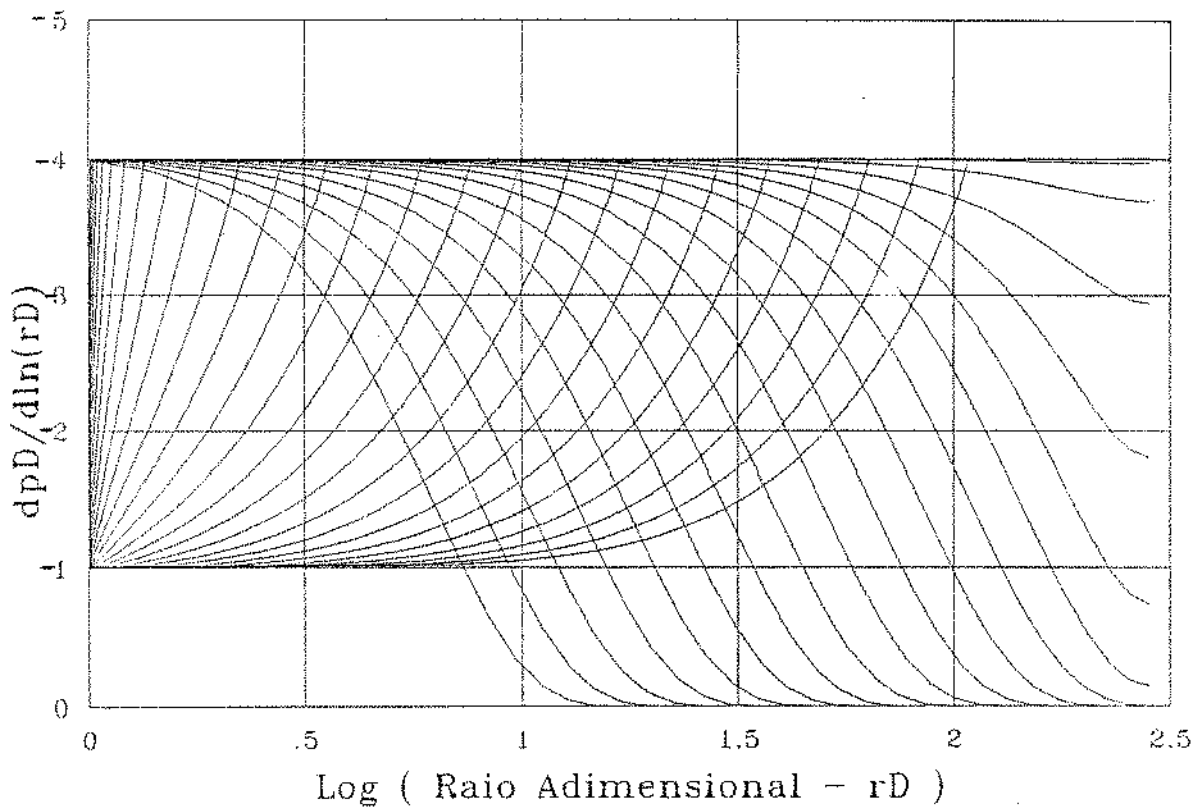


Figura 4.18: Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão

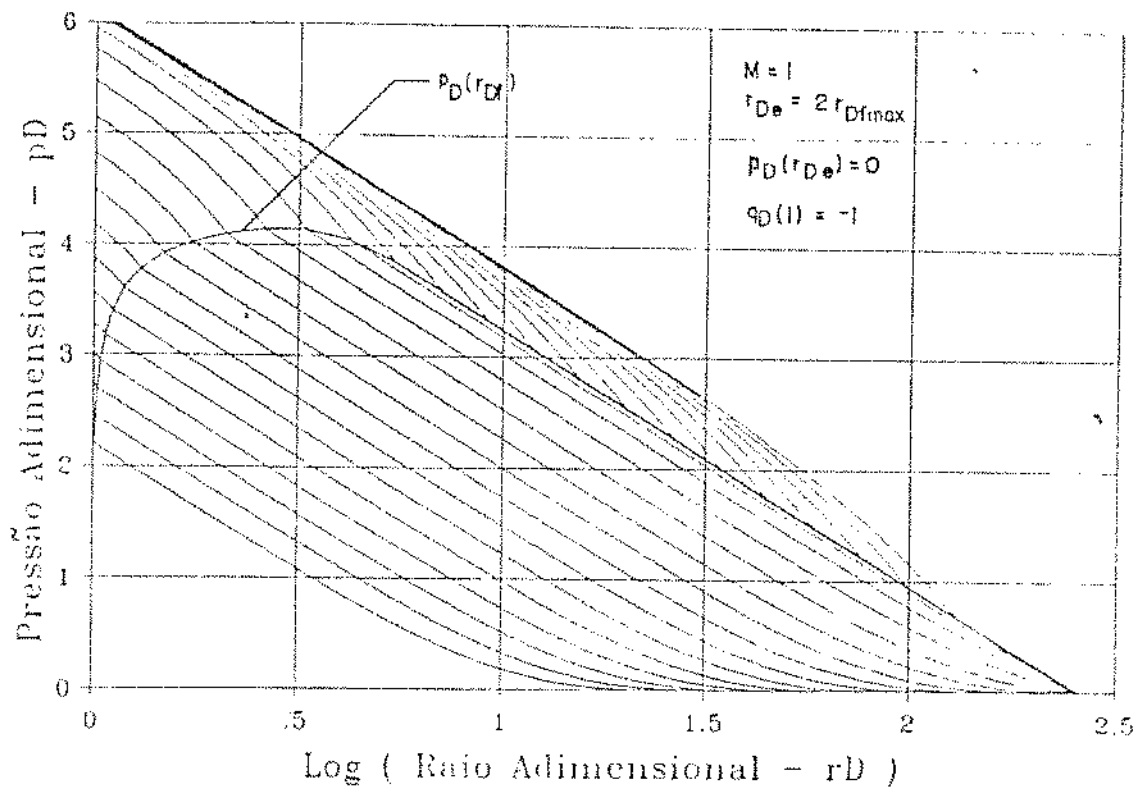


Figura 4.19: Curvas de Distribuição de Pressão

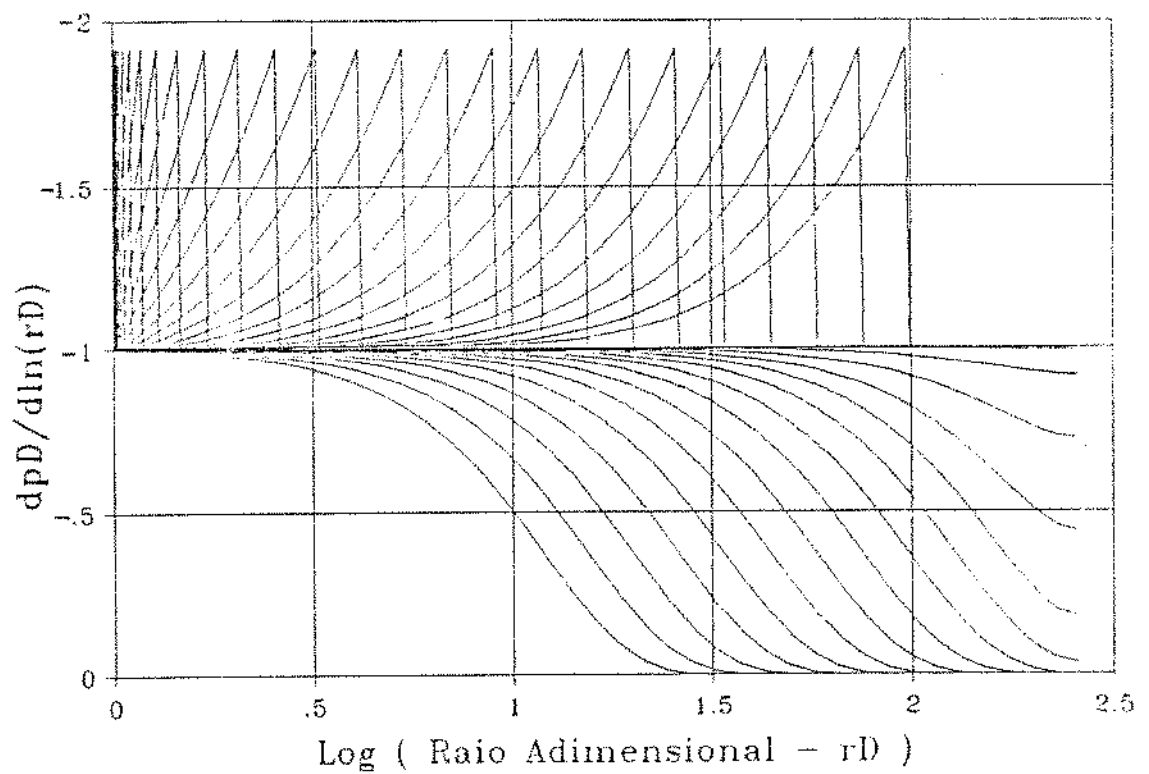


Figura 4.20: Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão

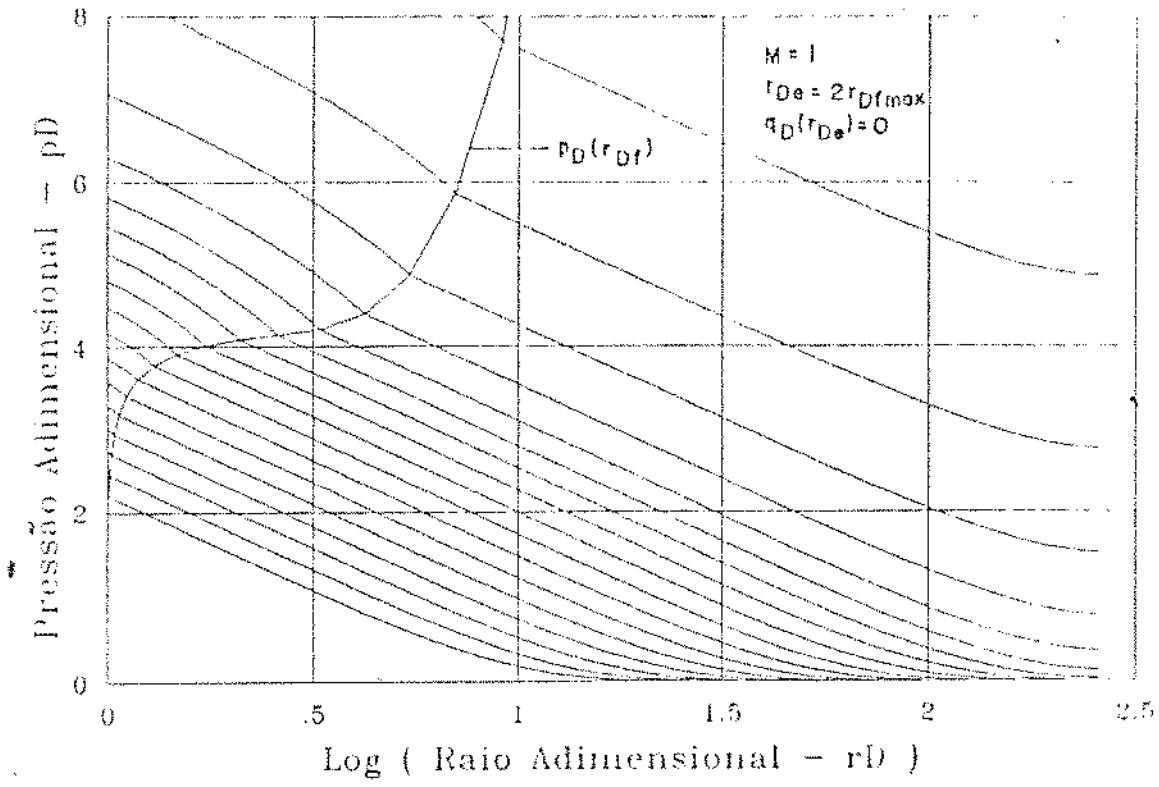


Figura 4.21: Curvas de Distribuição de Pressão

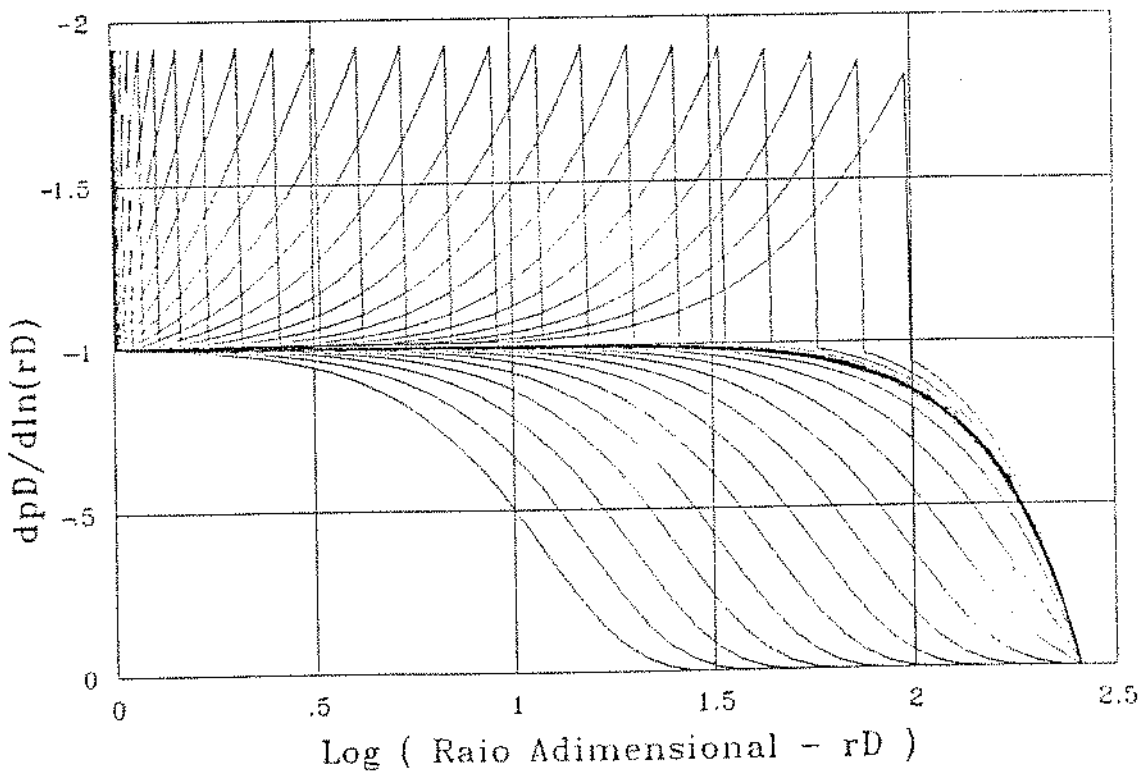


Figura 4.22: Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão

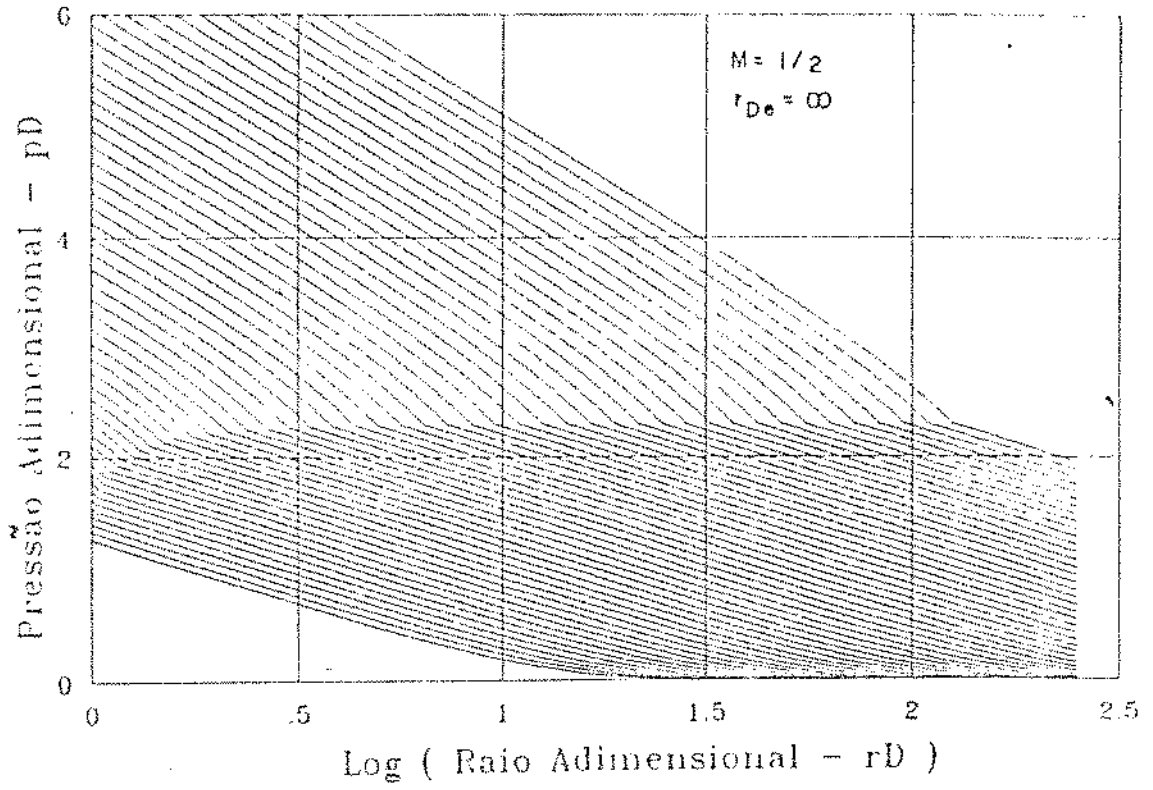


Figura 4.23: Curvas de Distribuição de Pressão

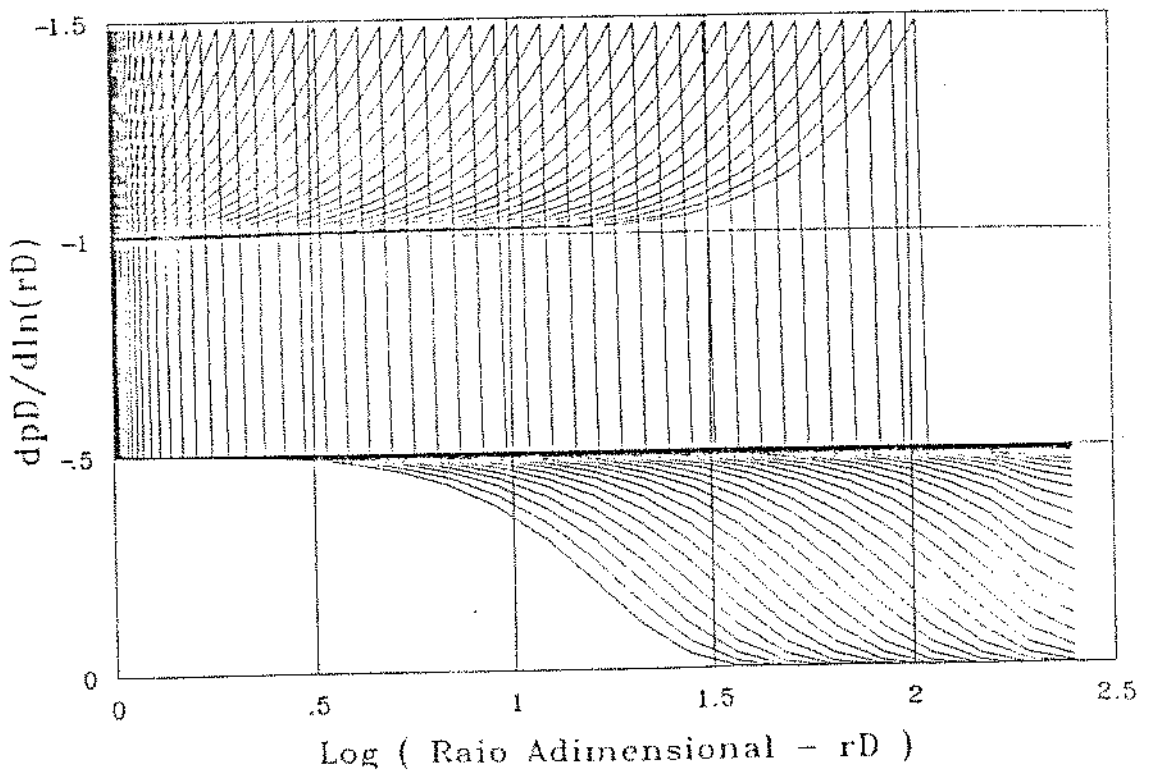


Figura 4.24: Curvas de Distribuição da Derivada da Pressão

curvas de distribuição da derivada da pressão podem ser colapsadas numa mesma curva, se for usada como abscissa a variável  $[(r_D^2 - 1)/4t_D]$ , que é proporcional à derivada do fluxo fracionário. As figuras 4.25 e 4.26 ilustram esse fato. Note que na figura 4.25, a razão de mobilidade fica sempre bem caracterizada pela curva de distribuição da derivada de pressão no reservatório. A figura 4.26 mostra, por sua vez, que a distribuição da derivada da pressão atrás da frente de injeção permanece inalterada mesmo quando os efeitos de limite de reservatório já se fizeram sentir de forma pronunciada na distribuição da derivada da pressão na região de óleo.

A aproximação (4.19) foi verificada numericamente, apresentando erros muito pequenos mesmo para tempos de injeção extremamente pequenos. Na realidade, verifica-se, na figura 4.27, que o erro máximo decresce à medida em que é aumentado o número de regiões.

A vazão total adimensional atrás da frente de injeção é aproximadamente constante e igual a -1 (figura 4.28 e equação (2.35), do Capítulo 2). Isso mostra que o fluxo de fluidos na região invadida pela água é praticamente incompressível.

$$q_D = \lambda_D r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \approx -1$$

Note que, no modelo de Bratvold e Horne [16], se substituirmos  $q_D$  na equação da difusividade para a região 1 (equação (C.5) do Apêndice C), obteremos:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \lambda_D r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} (-1) \implies \frac{1}{\eta_{D1}} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = 0$$

Por outro lado, as curvas de distribuição de pressão atrás da frente de injeção mostram que não há regime incompressível nessa região. Como já foi mostrado anteriormente, no Capítulo 2, equação (2.34):

$$\frac{\partial p_{D1}}{\partial \ln(t_D)} = \frac{1}{2\lambda_D} \implies \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} = \frac{1}{2\lambda_D t_D}$$

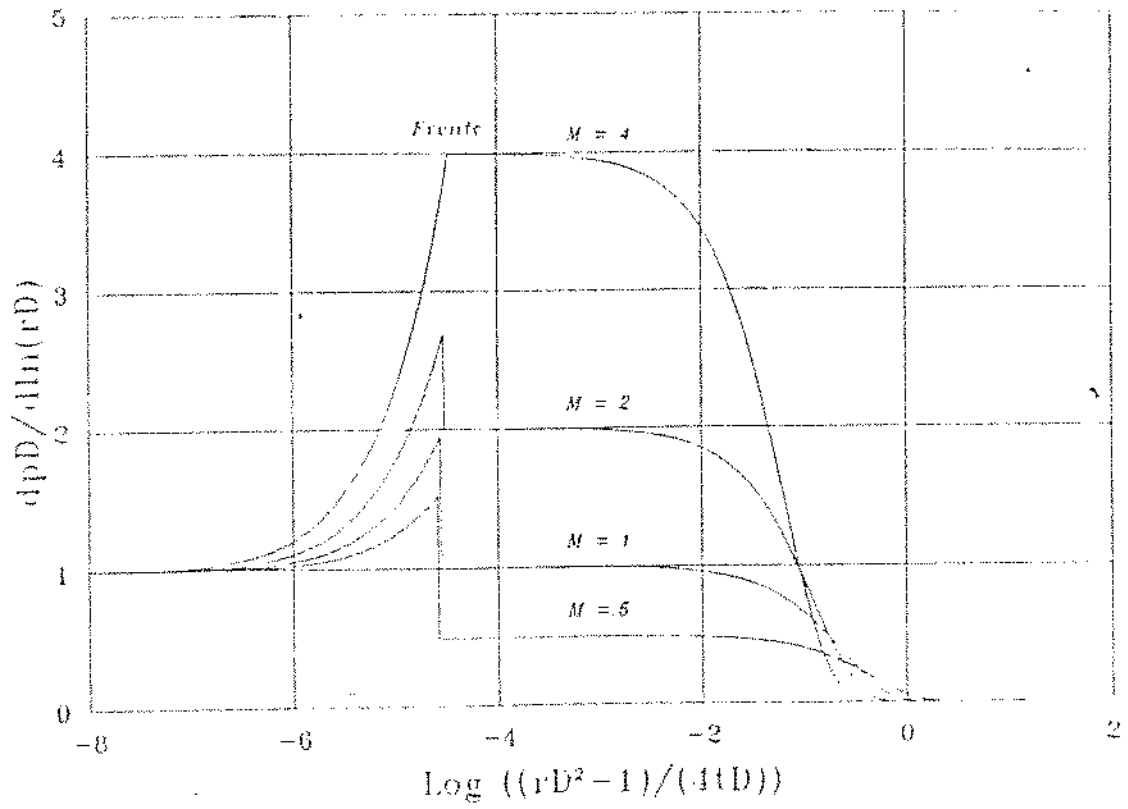


Figura 4.25: Distribuição da Derivada da Pressão no Reservatório

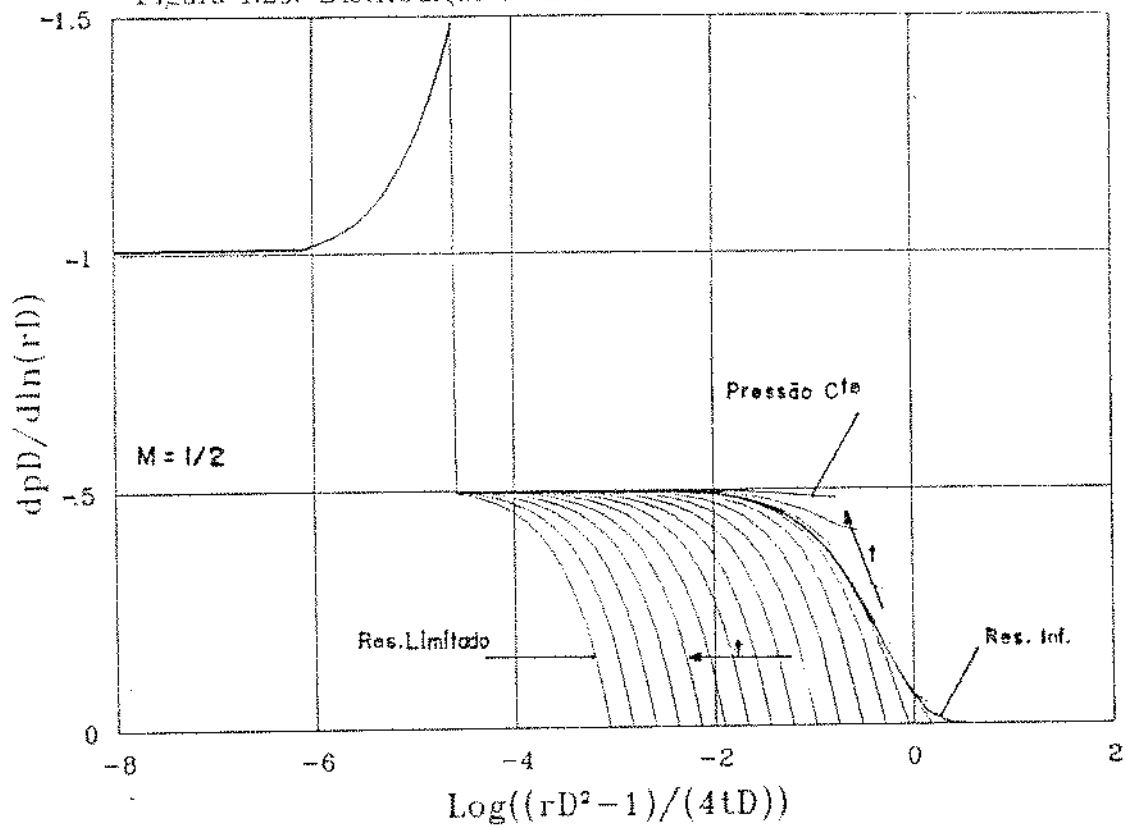


Figura 4.26: Efeitos de Limite de Reservatório na Distribuição da Derivada da Pressão

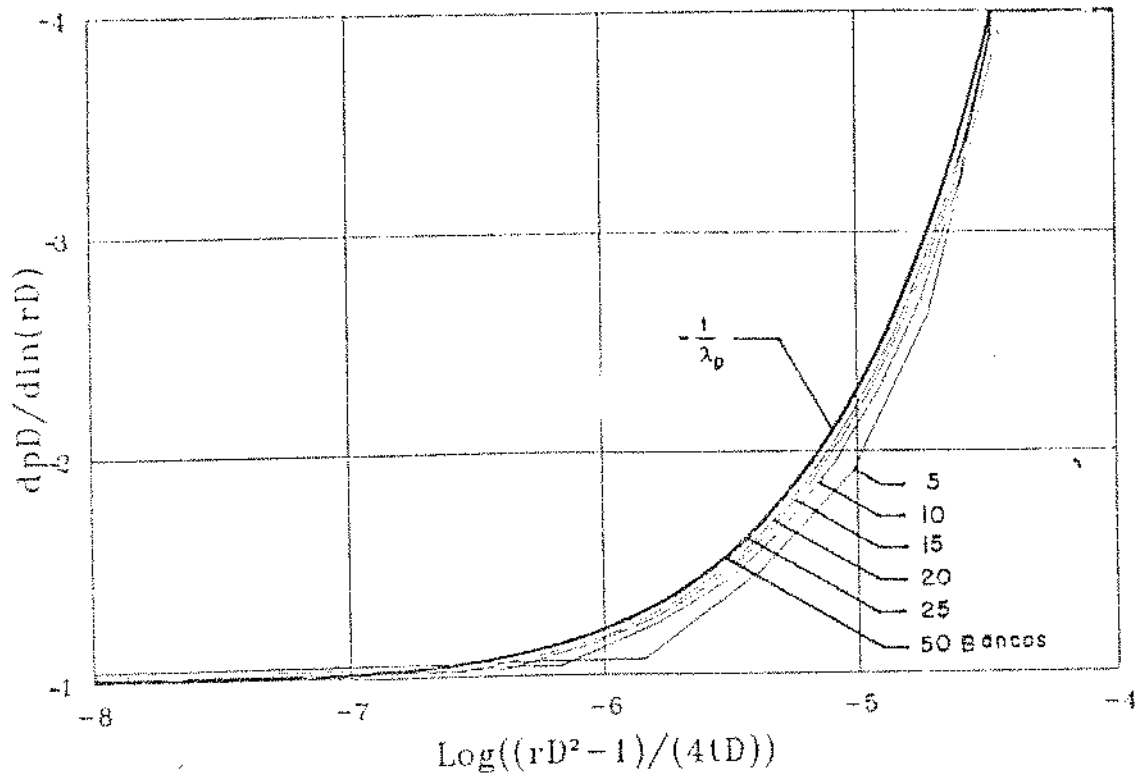


Figura 4.27: Efeitos da Discretização na Curva de Distribuição de Derivada da Pressão

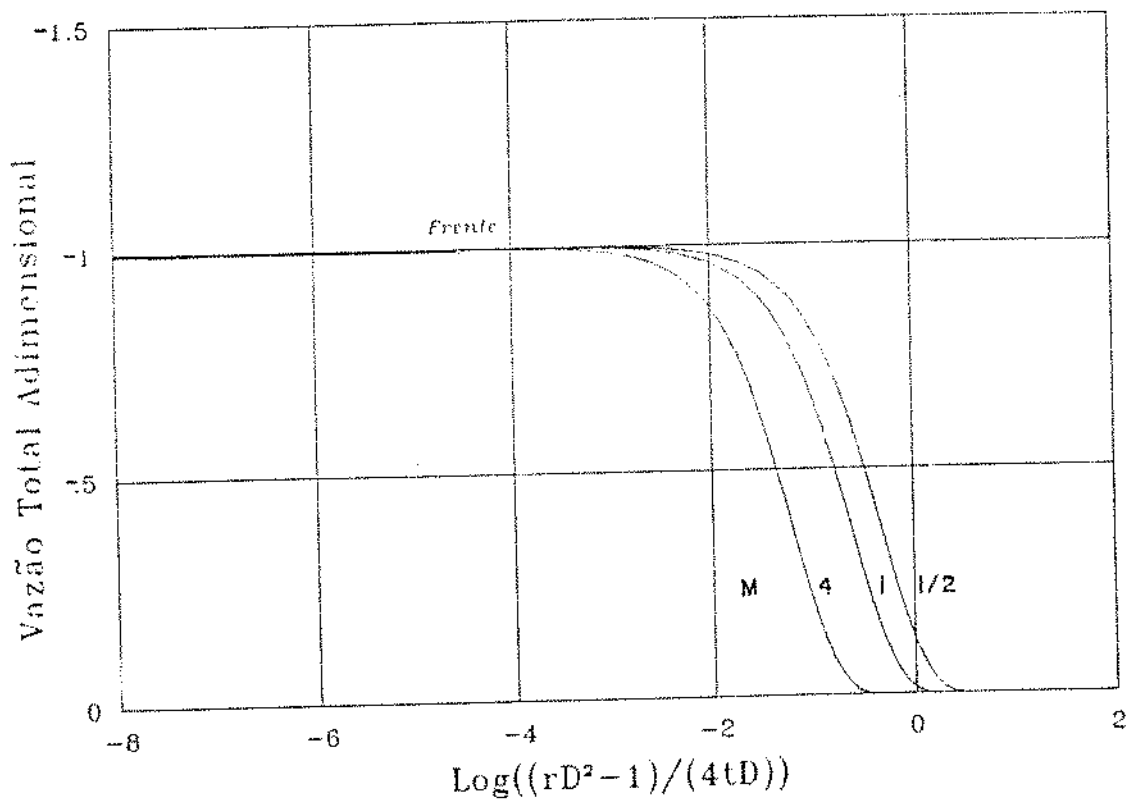


Figura 4.28: Distribuição da Vazão Total no Reservatório



A figura 4.29 mostra a derivada do fluxo fracionário normalizado na frente de injeção,  $f'_{wDf} = (df_w/dS_{wD})_f$ , como uma superfície tridimensional sobre o plano definido pelos expoentes de permeabilidade relativa,  $n_w \times n_o$ , para razão de mobilidade igual a 4. Uma forma mais simples de representar essa função é mostrada na figura 4.30, através de curvas de  $f'_{wDf}$  constante plotadas no plano  $n_w \times n_o$ . É claro que, para cada valor de razão de mobilidades diferente, será necessário um gráfico diferente para representar as curvas de  $f'_{wDf}$  constante.

Conhecendo-se a posição da frente de injeção e o volume de fluido injetado no reservatório, pode-se determinar a saturação de água média atrás da frente e a derivada do fluxo fracionário na frente,  $f'_{wf}$ . Conhecendo  $S_{wc}$  e  $S_{or}$ , por outro lado, determina-se  $f'_{wDf}$ , e portanto, o conjunto de pares de expoentes possíveis,  $n_w$  e  $n_o$ . Vê-se que, para a determinação dos expoentes de permeabilidade, é necessária uma informação adicional.

Para investigar isso, foram determinados, com o uso da figura 4.30, cinco pares de expoentes  $n_w$  e  $n_o$  sobre uma curva de  $f'_{wDf}$  constante e igual a 1,4. As curvas de fluxo fracionário correspondentes são plotadas na figura 4.31, e os resultados das simulações para esses casos, na figura 4.32. Vê-se, nesse gráfico, que a área entre a curva de distribuição da derivada da pressão atrás da frente de injeção e o eixo  $y = -1$  (hachuriada para o caso "A") cresce à medida em que  $n_w$  e  $n_o$  crescem. Essa área é dada por:

$$A = \lim_{r_D \rightarrow 1} \int_{\log\left(\frac{r_D^2 - 1}{4t_D}\right)}^{\log\left(\frac{r_D^2 f^{-1}}{4t_D}\right)} \left( -\frac{\partial p_{D1}}{\partial \ln(r_D)} - 1 \right) du \approx \lim_{r_D \rightarrow 1} \int_{\log\left(\frac{r_D^2 - 1}{4t_D}\right)}^{\log\left(\frac{r_D^2 f^{-1}}{4t_D}\right)} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) du$$

Como  $(r_D^2 - 1)/4t_D$  é proporcional à derivada do fluxo fracionário, a área determinada na figura 4.32 é proporcional ao pseudo-efeito de película devido à distribuição de mobilidades atrás da frente:

$$A = \lim_{f' \rightarrow 0} \int_{\log\left(\frac{1}{2} \xi f'_w\right)}^{\log\left(\frac{1}{2} \xi f'_{wf}\right)} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) du = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\ln y}^{\ln y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) du = 2S_{p\lambda}$$

Portanto, o valor da integral pode ser determinado diretamente a partir do fator de película aparente obtido no teste de injeção. Nas figuras 4.33 e 4.34 foram plotadas

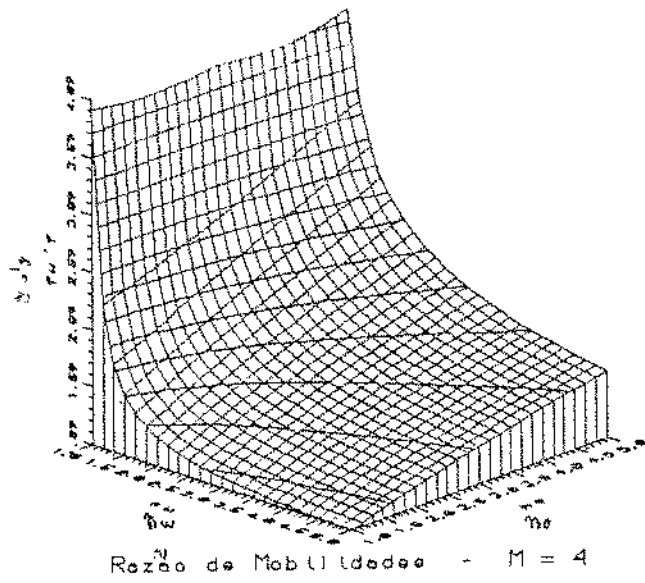


Figura 4.29: Derivada do Fluxo Fracionário na Frente de Injeção

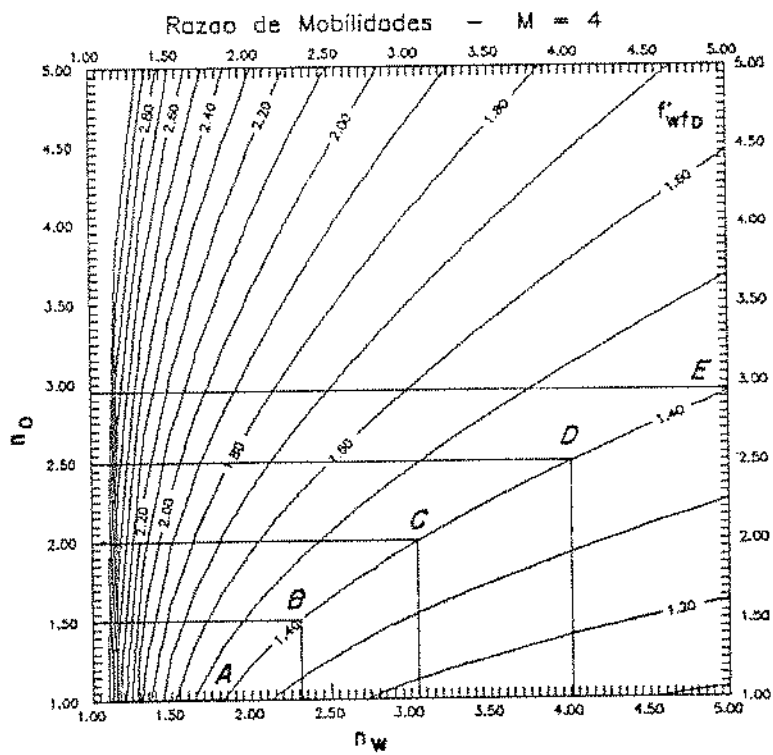


Figura 4.30: Curvas de  $f'_{wDf}$  Constante vs  $n_w \times n_o$

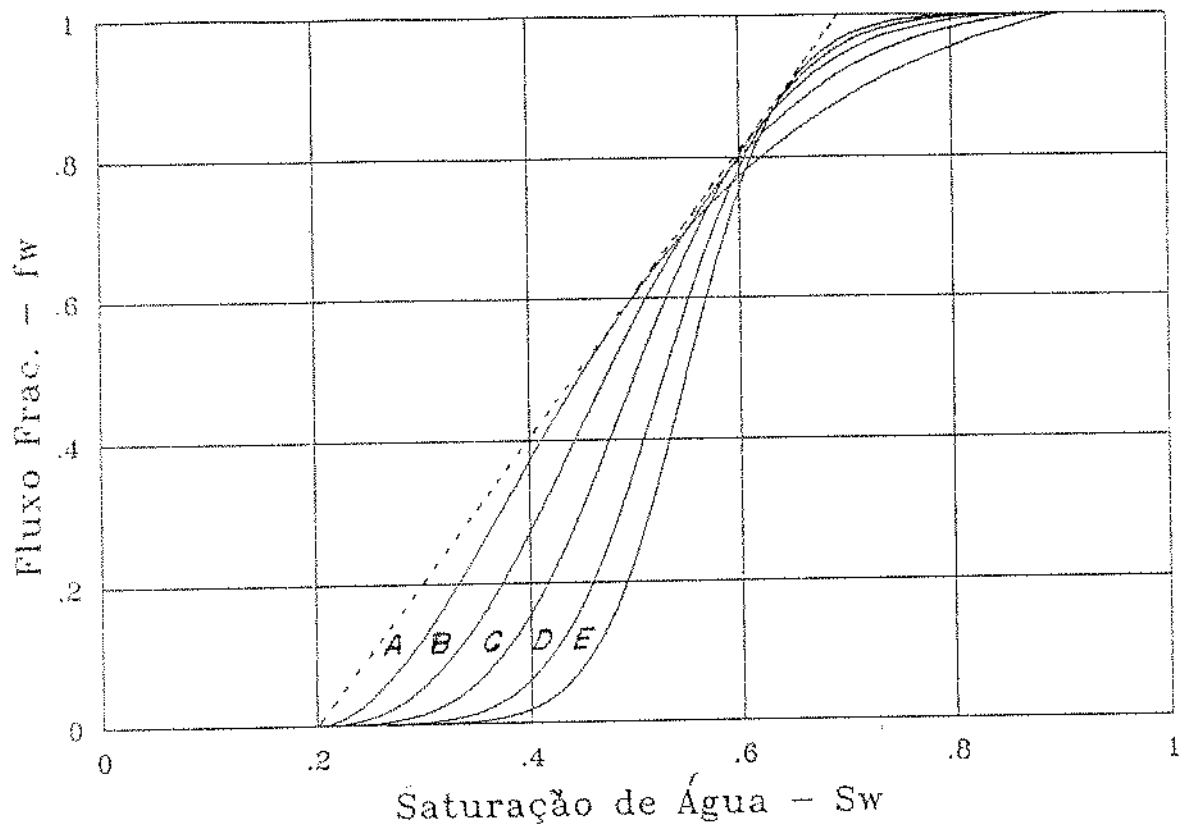


Figura 4.31: Curvas de Fluxo Fracionário com  $f_{wf}'$  Constante

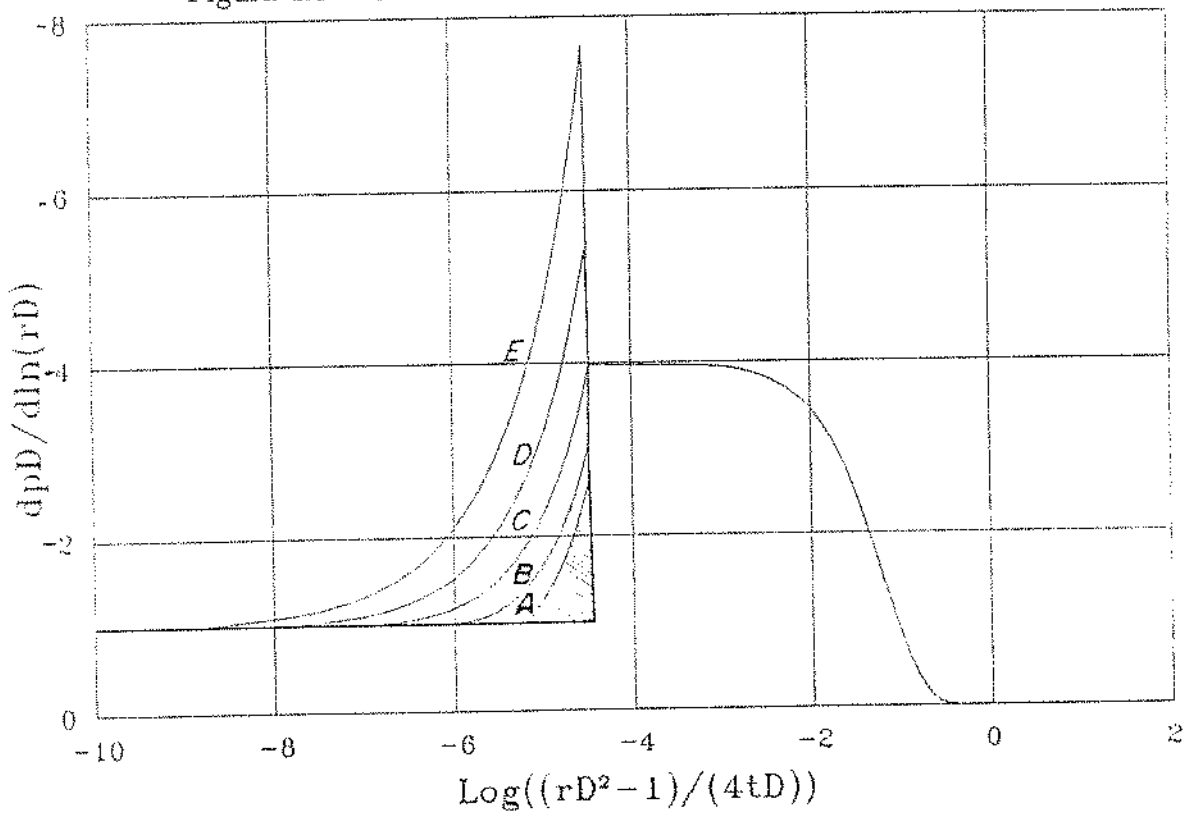


Figura 4.32: Distribui o da Derivada da Pressão no Reservatório -  $M = 4$

as respostas de pressão no poço e derivada para os cinco pares de curvas de permeabilidade relativa considerados. No gráfico semi-log (fig. 4.33), também estão plotadas a resposta para fluxo do tipo pistão, excluindo o efeito de película devido à distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção, e a reta referente à aproximação logarítmica, excluindo o efeito de película devido à razão de mobilidades. No gráfico log-log (fig. 4.34), verifica-se que apenas no caso "E" não foi atingido o trecho reto semi-logarítmico.

Esse método, entretanto, traz algumas desvantagens:

- o tempo de injeção deve ser suficiente para que a aproximação logarítmica seja válida ( figura 4.34 );
- o valor do efeito de película real na parede do poço deve ser conhecido;
- a posição da frente de injeção deve ser conhecida para que se possa calcular o pseudo-efeito de película devido à razão de mobilidades e ao avanço da frente (equação (2.48)):

$$\frac{1}{2}(1 - M) \ln \left( \frac{e^{\gamma} y_{BL}}{\eta_{D2}} \right)$$

- testes de injeção geralmente apresentam instabilidades no registro de pressão devido à variação de vazão.

Tendo o gráfico de distribuição da pressão no interior do reservatório no instante em que o poço é fechado para o teste de decaimento de pressão [19], entretanto, é possível obter a integral diretamente, através de métodos numéricos de derivação e integração.

Para determinação de um único par de expoentes de permeabilidade relativa, o gráfico 4.30 deverá incluir, também, curvas ao longo das quais o fator de película devido à distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção,  $S_{p\lambda}$ , seja constante; como nas figuras 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39; para razões de mobilidade  $M = 4, 3, 2, 1$  e  $1/2$ , respectivamente.

Naturalmente, para que o método caracterizasse bem os expoentes de permeabilidade relativa em qualquer situação, seria necessário que os dois conjuntos de curvas fossem ortogonais. Como se verifica nas figuras 4.35 a 4.39, isso não acontece na região em que  $n_o$  se aproxima de 1. Entretanto, nessa região, o deslocamento é do tipo pistão; as curvas de permeabilidade relativa tem pouca influência no fluxo, que passa a ser determinado apenas pela razão de mobilidade.

Um método para obtenção da distribuição de pressão no reservatório, no instante do fechamento para decaimento de pressão foi desenvolvido numericamente por Yeh e será apresentado mais adiante.

Para uma determinação mais precisa dos expoentes de permeabilidade relativa, é possível também formular um método de ajuste não linear baseado na equação de Buckley e Leverett, que ajuste a curva  $-1/\lambda$  à curva de derivada da pressão atrás da frente de injeção obtida numericamente a partir dos dados de teste de decaimento de pressão. É obvio que não é necessário um simulador semi-analítico complexo para simular  $-1/\lambda$  versus a derivada do fluxo fracionário. Nesse caso, seria apenas necessário remover estocagem e "skin" dos dados obtidos no teste de decaimento de pressão através de deconvolução, ou ignorar os dados que, porventura, estiverem influenciados.

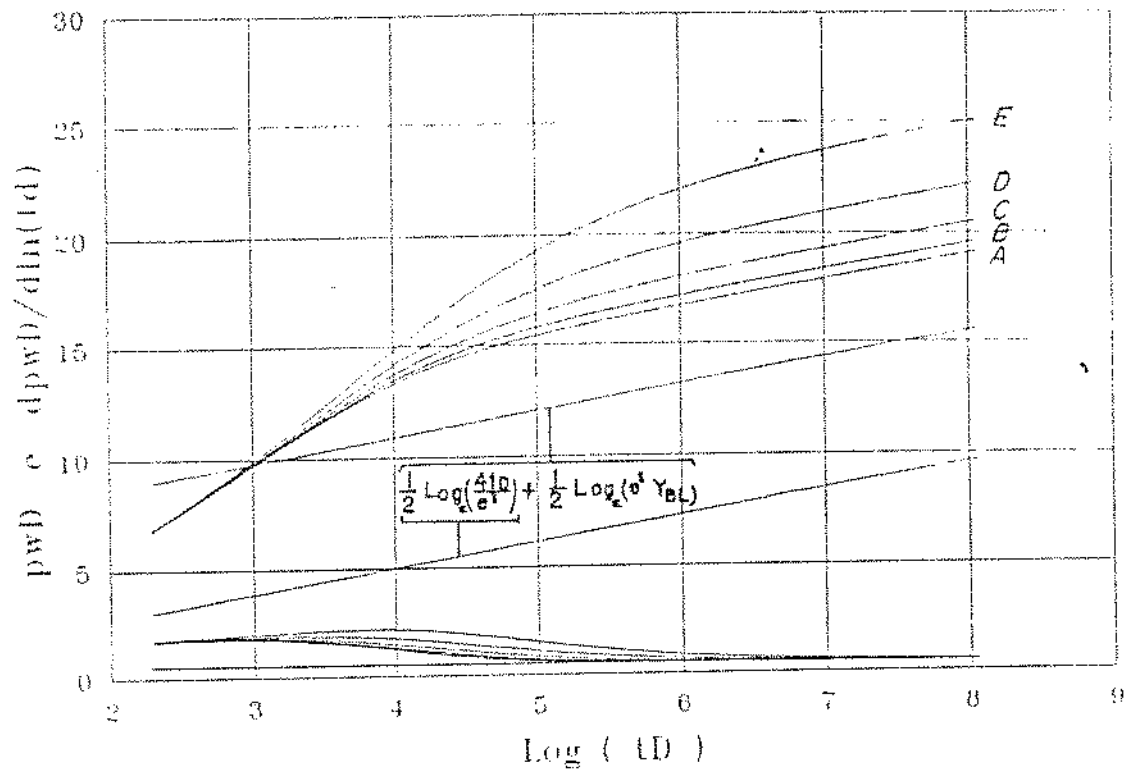


Figura 4.33: Pressão no Poço e Derivada -  $f'_{wf}$  Constante

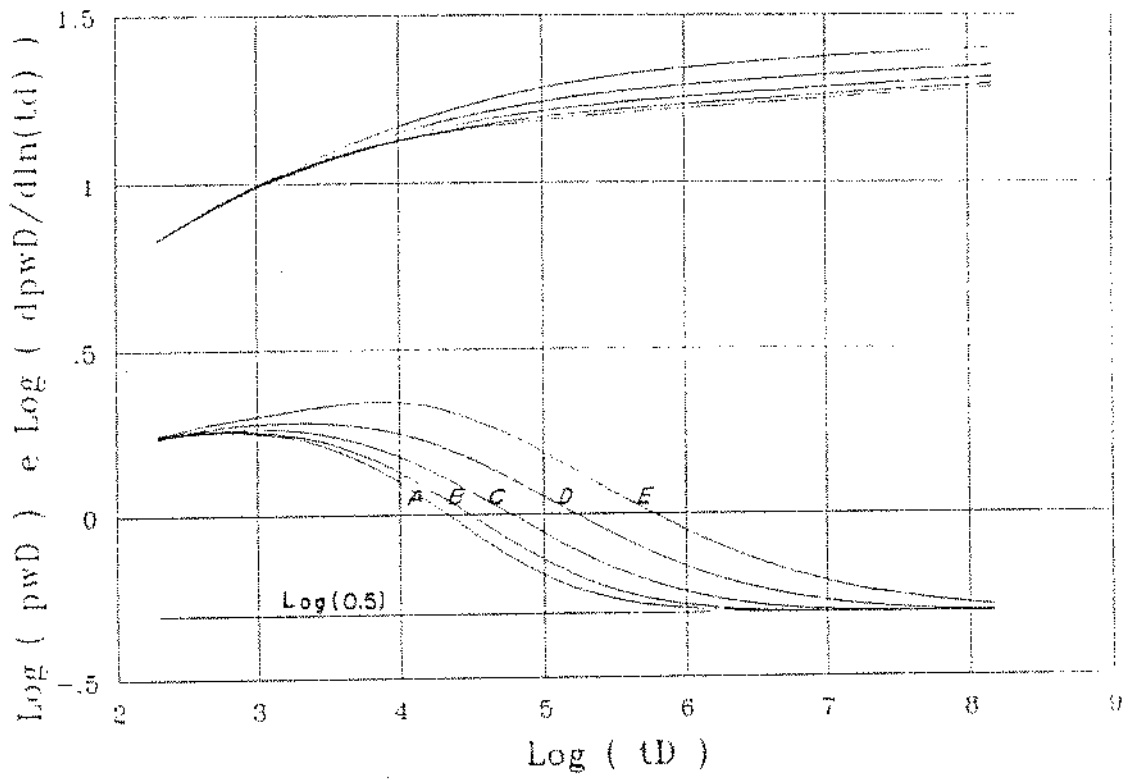


Figura 4.34: Pressão no Poço e Derivada -  $f'_{wf}$  Constante

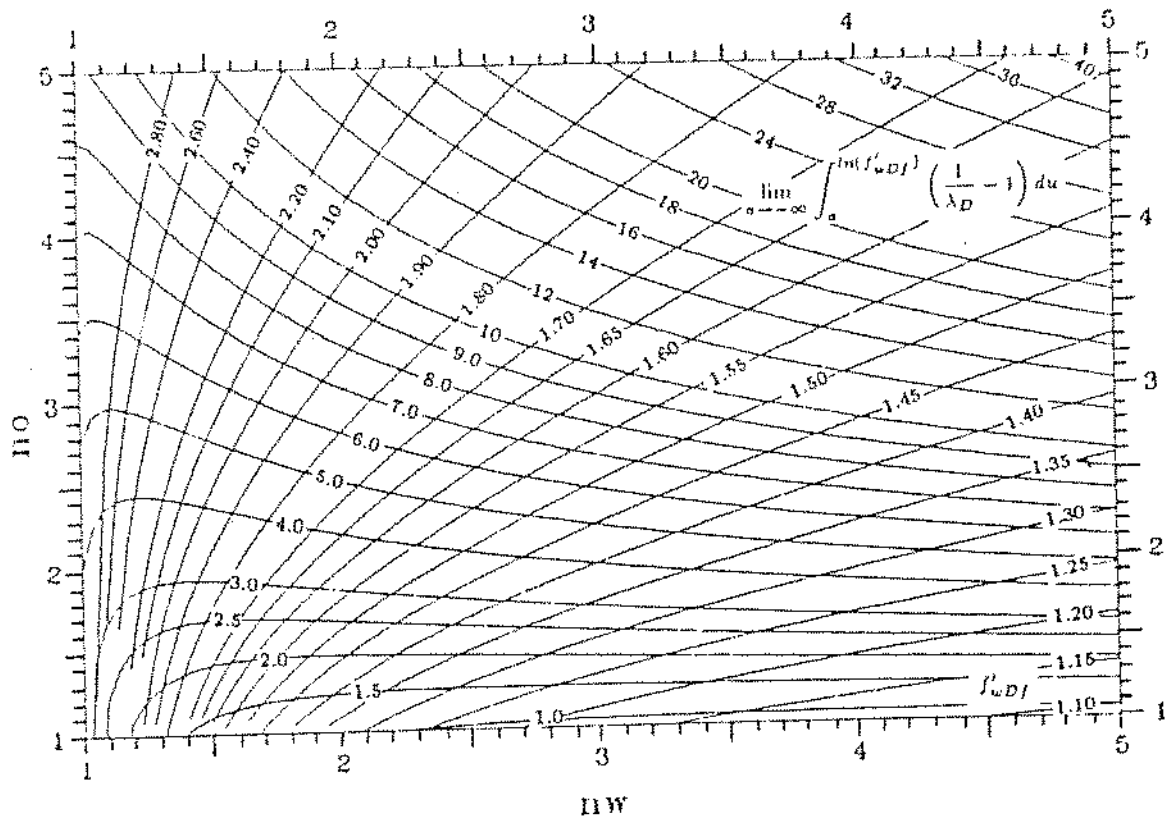


Figura 4.35: Curvas de  $f'_{wDf}$  e  $S_{p\lambda}$  Constantes para  $M = 4$



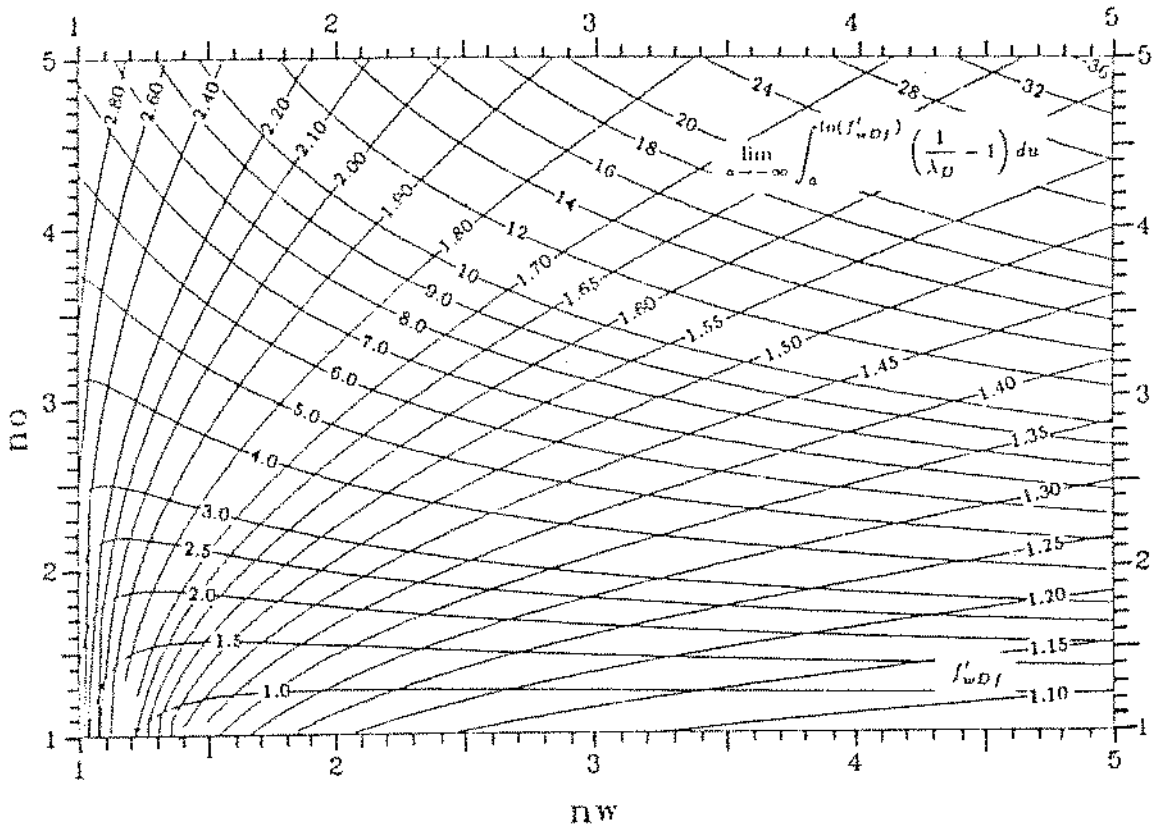


Figura 4.36: Curvas de  $f'_{wDf}$  e  $S_{p\lambda}$  Constantes para  $M = 3$

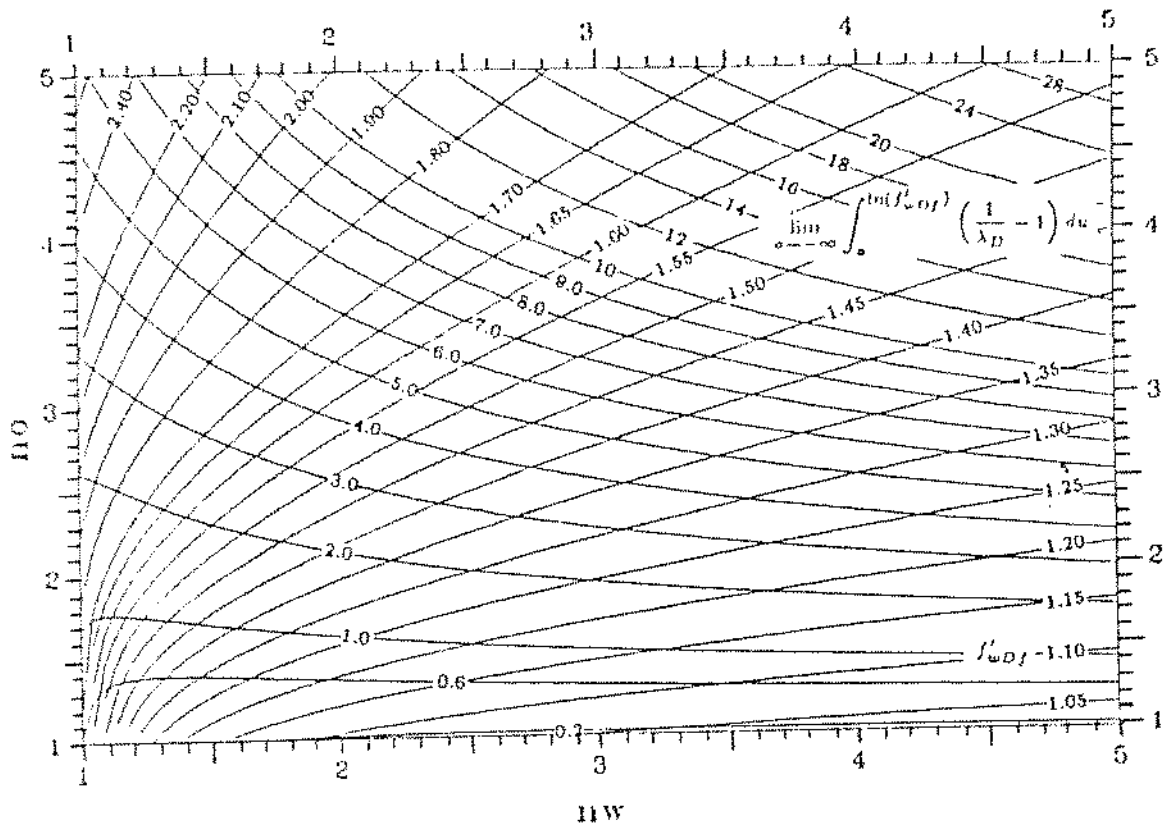


Figura 4.37: Curvas de  $f'_{wDf}$  e  $S_{p\lambda}$  Constantes para  $M = 2$

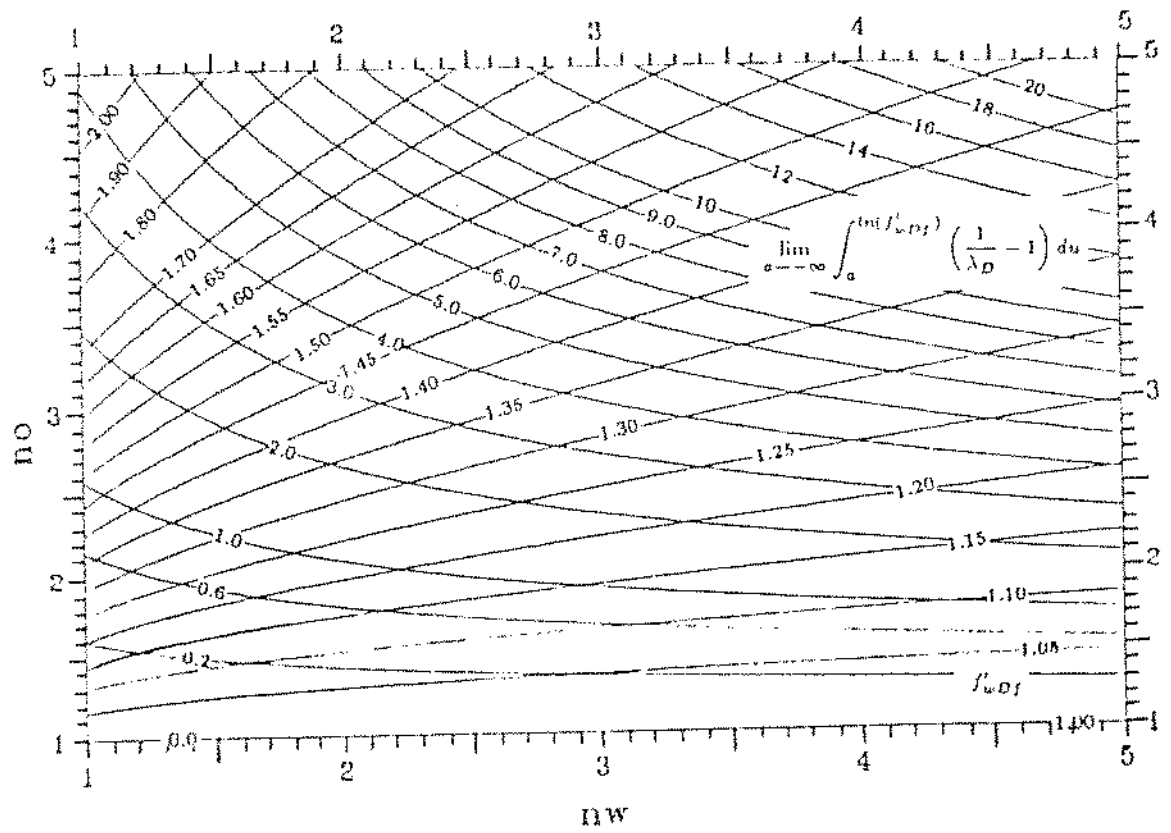


Figura 4.38: Curvas de  $f'_{wDf}$  e  $S_{p\lambda}$  Constantes para  $M = 1$

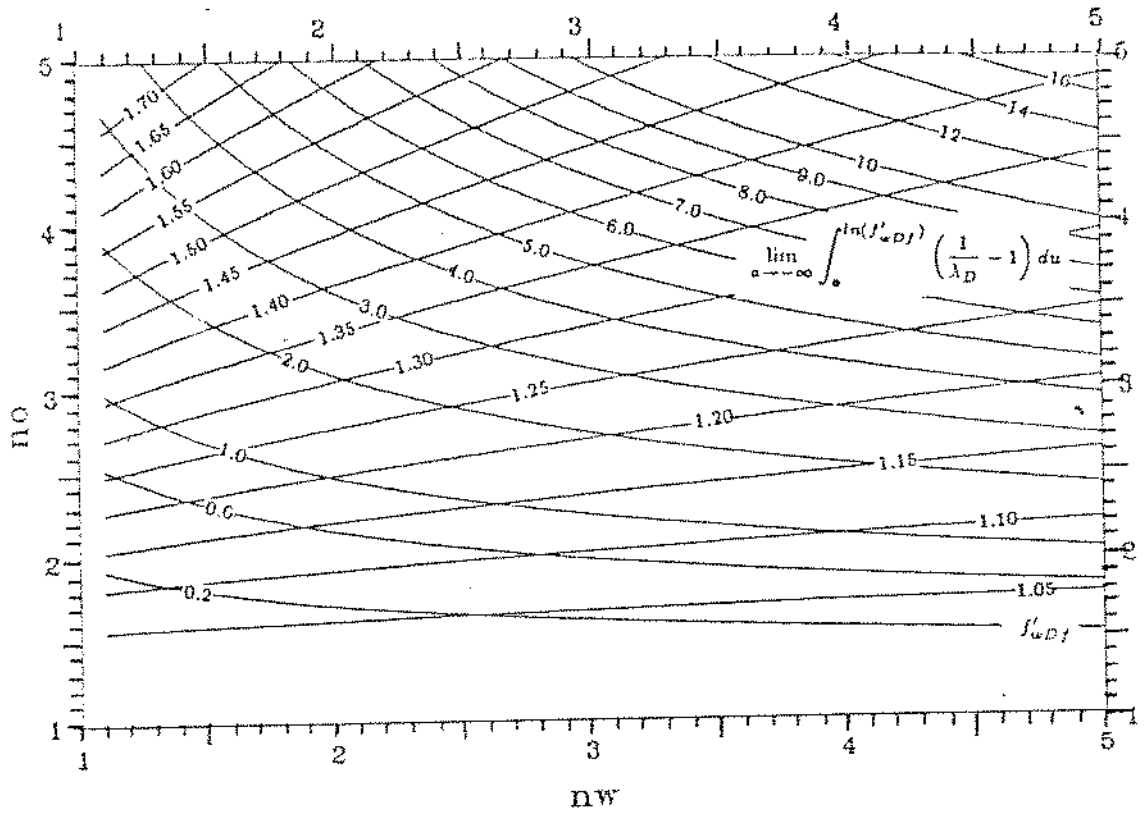


Figura 4.39: Curvas de  $f'_{\omega Df}$  e  $S_{p\lambda}$  Constantes para  $M = 1/2$

# Capítulo 5

## Curvas de Distribuição de Mobilidade

<sup>1</sup> Neste capítulo, é descrito o trabalho de Yeh e Agarwal [19], no qual foram analisados resultados de simulação numérica em diferenças finitas, tendo sido propostos, a partir dessas análises, novos métodos para interpretação de testes de decaimento de pressão.

### 5.1 Frente Fixa Durante Decaimento de Pressão

A figura 5.1 mostra as curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água utilizadas nas simulações numéricas efetuadas por Yeh e Agarwal [19]. Também nessa figura, a curva de mobilidade total é mostrada.

A simulação estudada por Yeh e Agarwal [19] consiste em um período de injeção de água com vazão constante, durante 100 dias, seguido por um período de decaimento de pressão com vazão nula, durante 100 horas. A fronteira externa do reservatório é mantida à pressão constante. Não foram considerados efeitos gravitacionais ou capilares

---

<sup>1</sup>Todos os gráficos neste capítulo foram extraídos do artigo de Yeh e Agarwal [19]

na simulação.

As distribuições de saturação no reservatório para diversos tempos de injeção são mostradas na figura 5.2. A mesma figura mostra que a distribuição de saturação não alterou-se após as 100 horas de teste de decaimento de pressão. Caso o fluido injetado fosse mais compressível, esperar-se-ia um avanço mais significativo da frente de injeção durante o período de decaimento de pressão em razão da descompressão desse fluido.

## 5.2 Resposta de Pressão no Poço:

### 5.2.1 Durante o Teste de Injeção

A figura 5.3 é um gráfico do logaritmo da diferença de pressão,  $p_{inj} - p_{in}$ , versus logaritmo do tempo. Também é mostrada a curva de derivada, definida na equação (5.1), abaixo, e correspondente à inclinação de um gráfico de MDH, para o teste de injeção simulado. Nesta figura, observa-se que antes de ser obtida uma reta semi-logarítmica, há um período em que a mobilidade, inversamente proporcional à derivada da pressão, varia. Nesse período, ainda não foi formada uma região com saturação  $(1 - S_{or})$  próxima ao poço.

$$\Delta p' = \frac{d\Delta p}{d \ln(\Delta t)} \quad (5.1)$$

No período em que a derivada da pressão é constante, a inclinação semi-logarítmica é proporcional à mobilidade na região saturada com água, onde  $S_w = (1 - S_{or})$  (ver figura 5.2). Nesse trecho, a mobilidade total na região próxima ao poço, com  $S_w = 1 - S_{or}$ , pode ser estimada pela equação (5.2), abaixo. Note que as propriedades da região com  $S_w = S_{wc}$  não podem ser determinadas a partir de um teste de injeção, pois à medida em que mais fluido é injetado no poço, mais essa região distancia-se em relação ao poço.

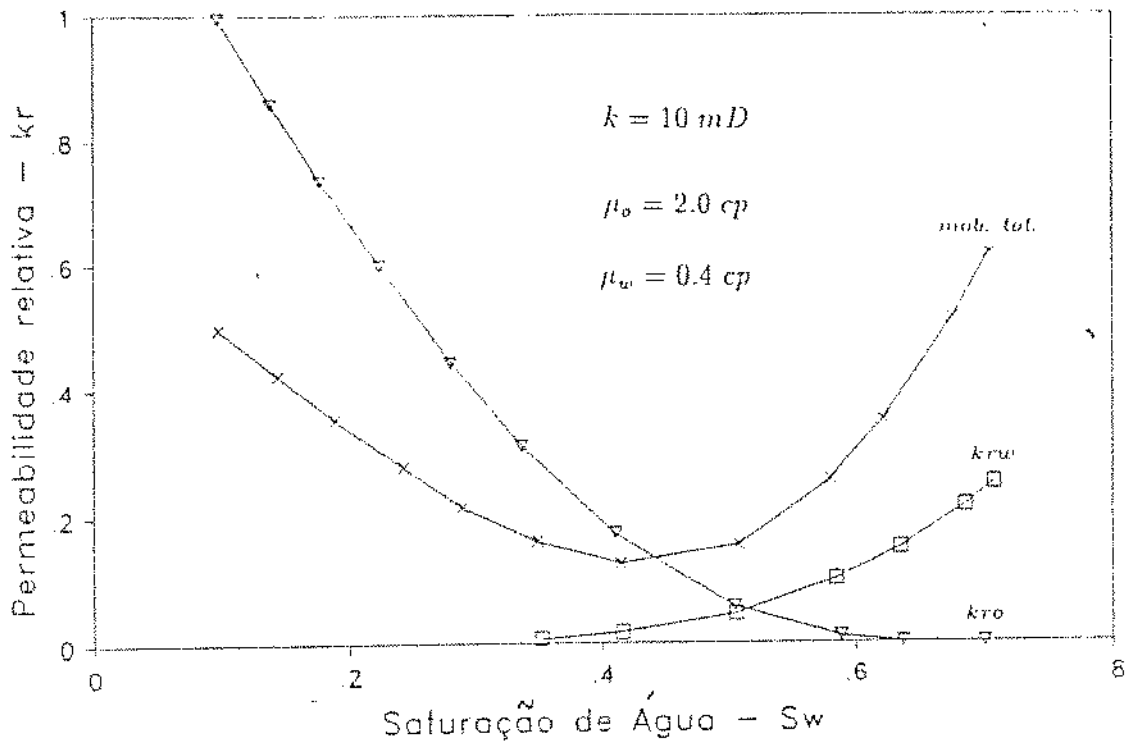


Figura 5.1: Curvas de Permeabilidade Relativa

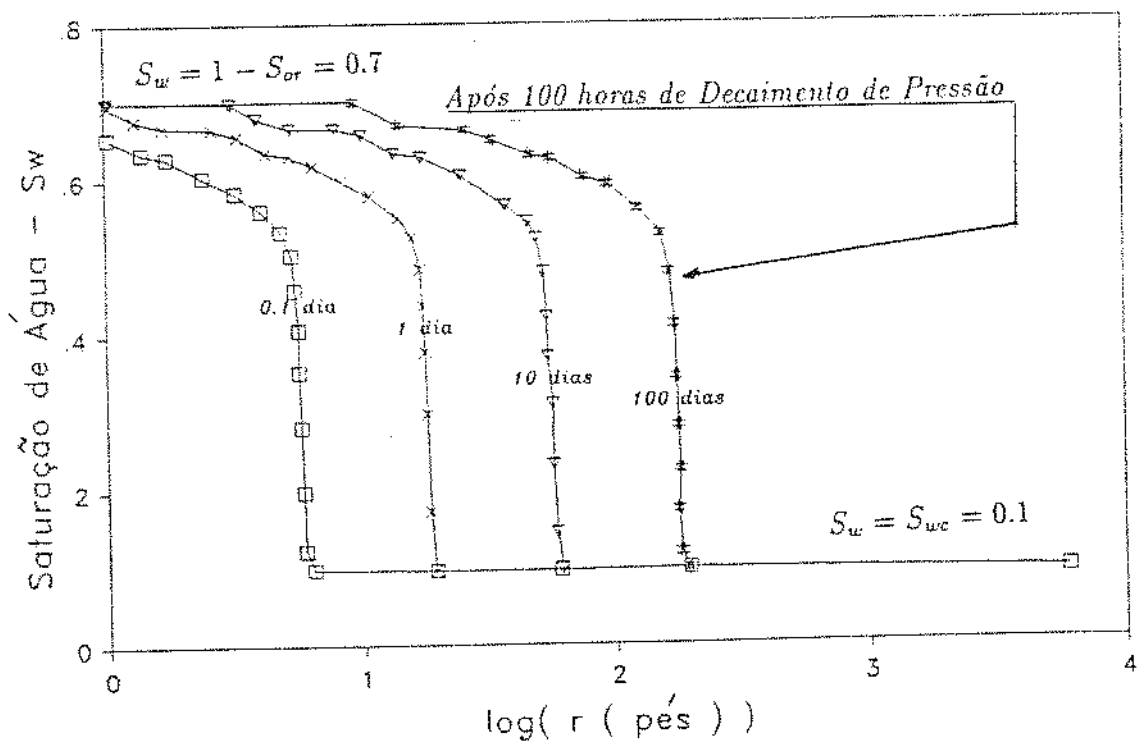


Figura 5.2: Curvas de Distribuição de Saturaçãõ

$$\lambda_i = \frac{q}{4\pi h \Delta p'} \quad (5.2)$$

Note também que  $\Delta p'$  é a inclinação de um gráfico MDH com abscissa em logaritmo natural. Caso seja usado um gráfico com logaritmo decimal, como na figura 5.3, torna-se necessário multiplicar o segundo membro de (5.2) por  $\ln(10) = 2.303$ .

Ainda na figura 5.3, o desvio na curva da derivada da pressão após 300 horas de injeção é devido aos efeitos do contorno externo do reservatório, mantido à pressão constante.

### 5.2.2 Durante o Teste de Decaimento de Pressão

No período de decaimento de pressão, figura 5.4, ocorrem dois trechos em que a derivada é constante. Para tempos curtos, a derivada é proporcional à mobilidade na região próxima ao poço, com saturação de óleo residual. Para tempos longos, a derivada é proporcional à mobilidade na região com saturação de água irreduzível. Entre os dois trechos de inclinação constante, há um período em que ocorrem variações na derivada devidas à distribuição de mobilidade existente no interior do reservatório, dentro do raio de investigação do teste.

Os métodos propostos por Yeh e Agarwal [19] utilizam a resposta de pressão no poço durante um período de decaimento de pressão (precedido por um período de injeção com vazão constante) para gerar dados de distribuição de mobilidade total e de pressão no instante do fechamento do poço. Para isso, usam o conceito de raio de investigação como uma forma de associar distâncias às pressões e inclinações semi-logarítmicas observadas no poço como função do tempo.

## 5.3 Determinação da Distribuição de Mobilidade



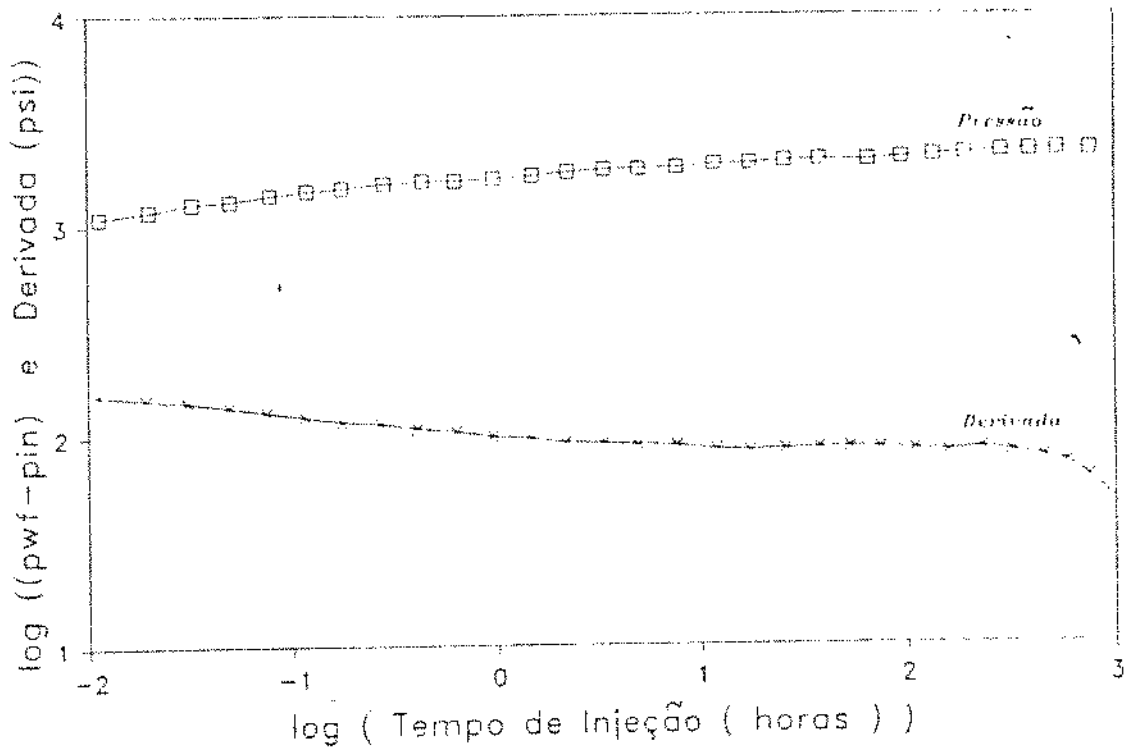


Figura 5.3: Gráfico Log X Log de Fluxo com Derivada MDH para o Período de Injeção

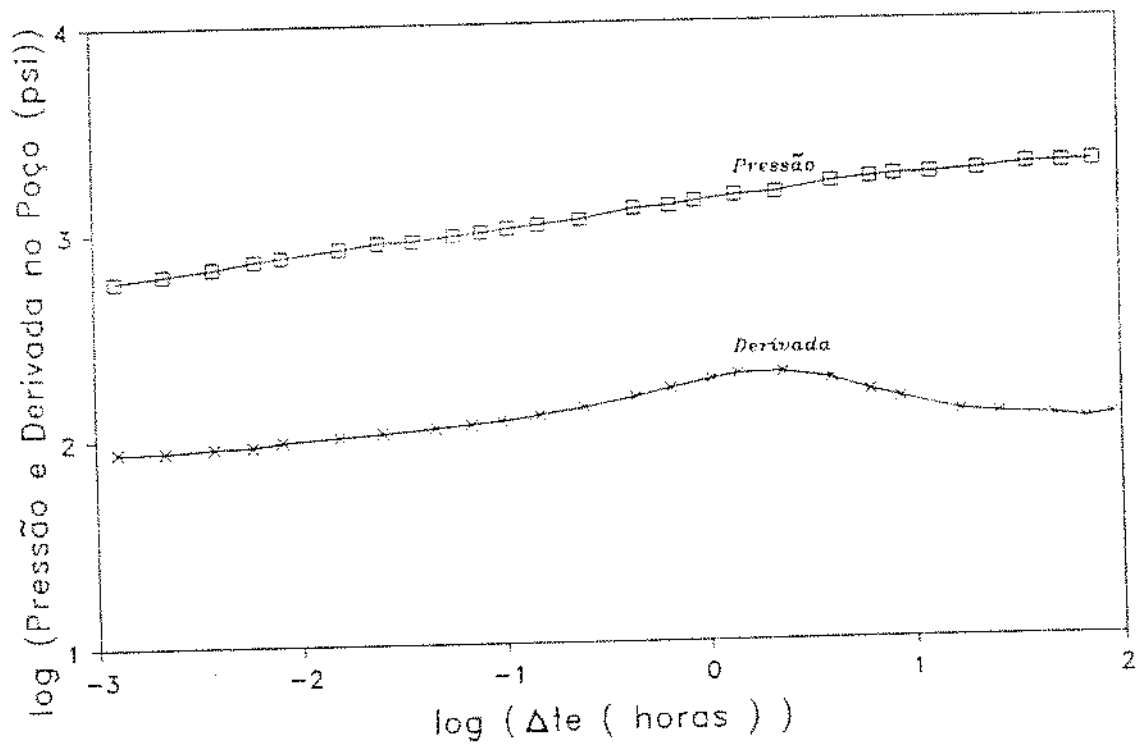


Figura 5.4: Gráfico de Agarwal com Derivada para o Período de Decaimento de Pressão

A figura 5.5 representa curvas de distribuição de mobilidade total no reservatório determinadas através de dois processos diferentes. Os pontos marcados com o símbolo  $\square$  foram obtidos a partir de dados do simulador. Já os pontos assinalados com  $\times$  foram determinados através do conceito de raio de investigação, de Aronofsky e Jenkins, equação (5.3), da equação (5.2), e do fato de que a distribuição de saturação não se altera durante o decaimento de pressão (figura 5.2). Dessa forma, a derivada da pressão no poço durante o teste de decaimento de pressão é relacionada com a mobilidade total no interior do reservatório, fornecendo uma estimativa da distribuição de mobilidade total no instante do fechamento do poço.

$$r = 0.024 \sqrt{\frac{\lambda_t \Delta t_e}{\phi c_t}} \quad (5.3)$$

Na equação (5.3), as unidades são as de campo adotadas pelo SPE; e  $\Delta t_e$  é o tempo equivalente (Agarwal) de fechamento:

$$\Delta t_e = \frac{t_{inj} \Delta t}{t_{inj} + \Delta t}, \quad (5.4)$$

onde  $t_{inj}$  é o tempo total de injeção, antes do fechamento para o teste de decaimento de pressão e  $\Delta t$  é o tempo de decaimento de pressão, medido a partir do instante em que o poço foi fechado.

Na figura 5.5 vê-se que as duas curvas são semelhantes, porém não são idênticas entre si. Yeh e Agarwal presumiram então que a mobilidade total obtida através da pressão medida no poço representa, na realidade, uma média volumétrica da mobilidade total:

$$\bar{\lambda}_t = \frac{1}{V} \int_V \lambda_t dV \quad (5.5)$$

A figura 5.6 mostra os dados  $\square$  de distribuição de mobilidade média obtidos através do simulador e da equação (5.5), comparados com os dados  $\times$  obtidos a partir da derivada da pressão no poço. O ajuste entre as duas curvas é bem melhor que o obtido

na figura 5.5, principalmente na região atrás da frente de injeção.

Corrigindo os dados  $\times$  obtidos com a pressão medida no poço através da relação (5.6), foi plotado o gráfico 5.7.

$$\lambda_t = \frac{r}{2} \frac{d\bar{\lambda}_t}{dr} + \bar{\lambda}_t \quad (5.6)$$

O uso da equação (5.6), no entanto, implica em derivar dados obtidos através da derivada da pressão. Para dados de um teste real, que já apresentam, geralmente, ruídos na primeira derivada, essa correção pode ser inviável.

Note que, em qualquer um dos gráficos de distribuição de mobilidade total no reservatório, é possível fazermos estimativas muito precisas do raio da região de água com saturação  $S_w = (1 - S_{or})$  e da distância do poço à frente de injeção.

## 5.4 Determinação da Distribuição de Pressão

Yeh e Agarwal [19] mostram, com as figuras 5.8 e 5.9, que é possível obter a distribuição de pressão no reservatório no instante do fechamento a partir dos dados de decaimento de pressão. Na figura 5.9, obtida totalmente a partir de dados do simulador numérico, são mostradas diversas curvas de distribuição de pressão no reservatório em vários tempos durante o teste de decaimento de pressão. Na figura 5.9, Yeh e Agarwal usaram as equações (5.2) e (5.3) para relacionar a pressão registrada no poço em um determinado instante do teste de decaimento de pressão com uma posição  $r$  no interior do reservatório, obtendo uma boa estimativa da distribuição de pressão no instante do fechamento para decaimento de pressão. Nessa figura, os pontos  $\times$  foram obtidos com dados de pressão no poço, enquanto que os pontos  $\square$  são resultados da simulação numérica.

### 5.4.1 Um Novo Método para Determinação da Distribuição de Mobilidade

No trabalho de Yeh e Agarwal, o método de determinação da distribuição de pressão no reservatório é proposto com o objetivo de fornecer a pressão média na área de investigação de um teste de decaimento de pressão. Entretanto, nosso trabalho mostrou que a derivada da distribuição de pressão nos dá uma boa aproximação da distribuição de mobilidade total no reservatório.

Com a curva de distribuição de pressão, podemos obter a distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção através de derivação numérica. Observe que apenas a primeira derivada está envolvida nesse método, portanto os resultados serão bem mais estáveis que aqueles dados pelo método proposto por Yeh e Agarwal. Com a curva de distribuição de mobilidade, pode-se estimar o pseudo-efeito de película  $S_{p\lambda}$ , e portanto, pode-se também estimar indiretamente as curvas de permeabilidade relativa, como foi visto no capítulo anterior.

Para o uso desse método de interpretação, é necessário que os efeitos de estocagem sejam removidos dos dados de teste através de deconvolução. Caso o coeficiente de estocagem seja constante, é possível fazer isso utilizando algoritmos numéricos, sem o conhecimento da vazão de fundo.

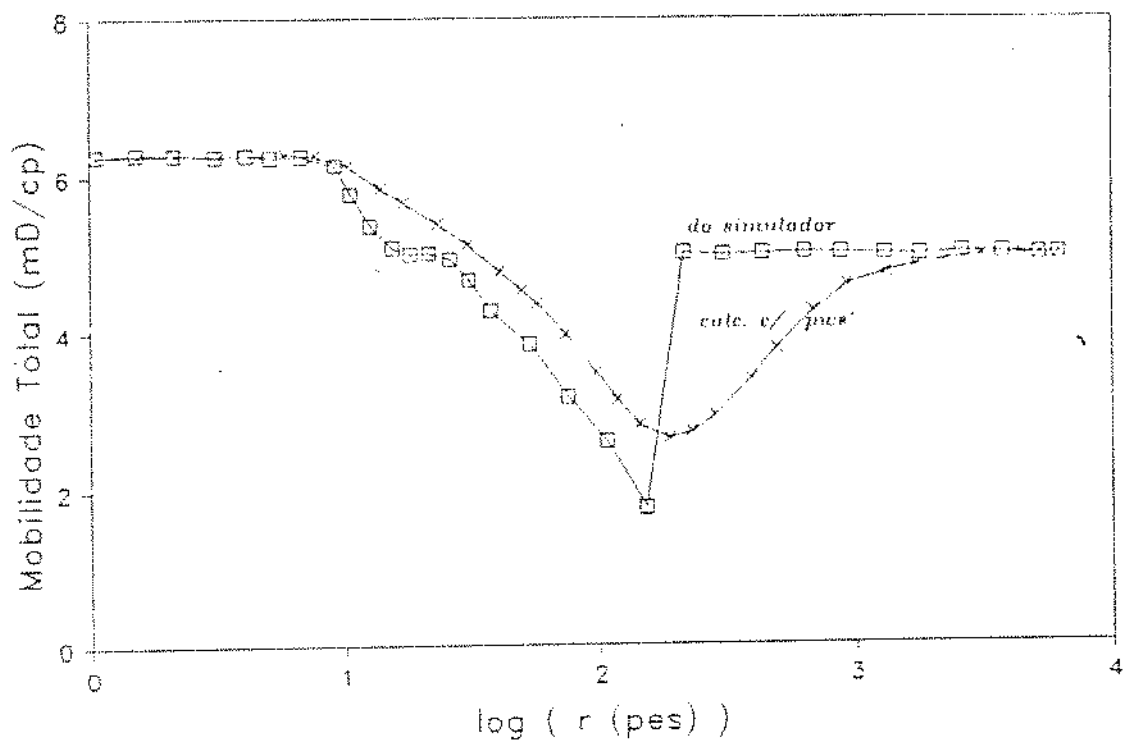


Figura 5.5: Curvas de Distribuição da Mobilidade Total, no Final do Período de Injeção

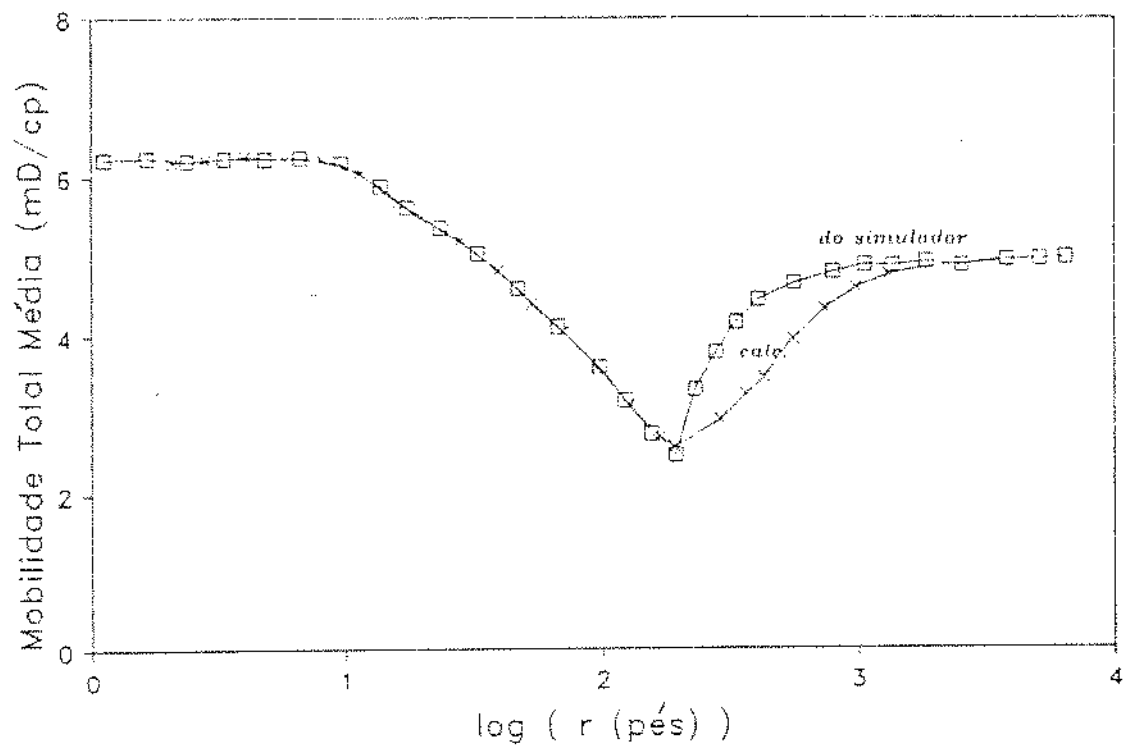


Figura 5.6: Curvas de Distribuição da Mobilidade Total Média, no Final do Período de Injeção

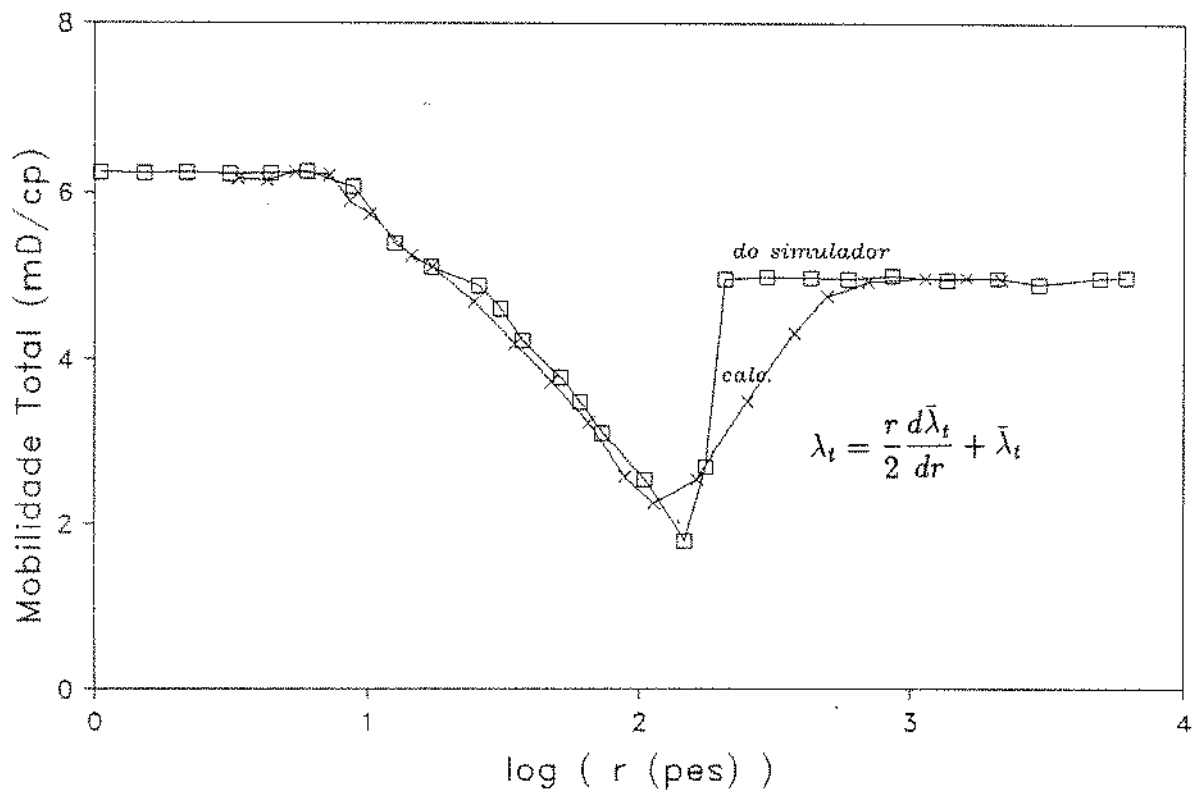


Figura 5.7: Curvas de Distribuição da Mobilidade Total

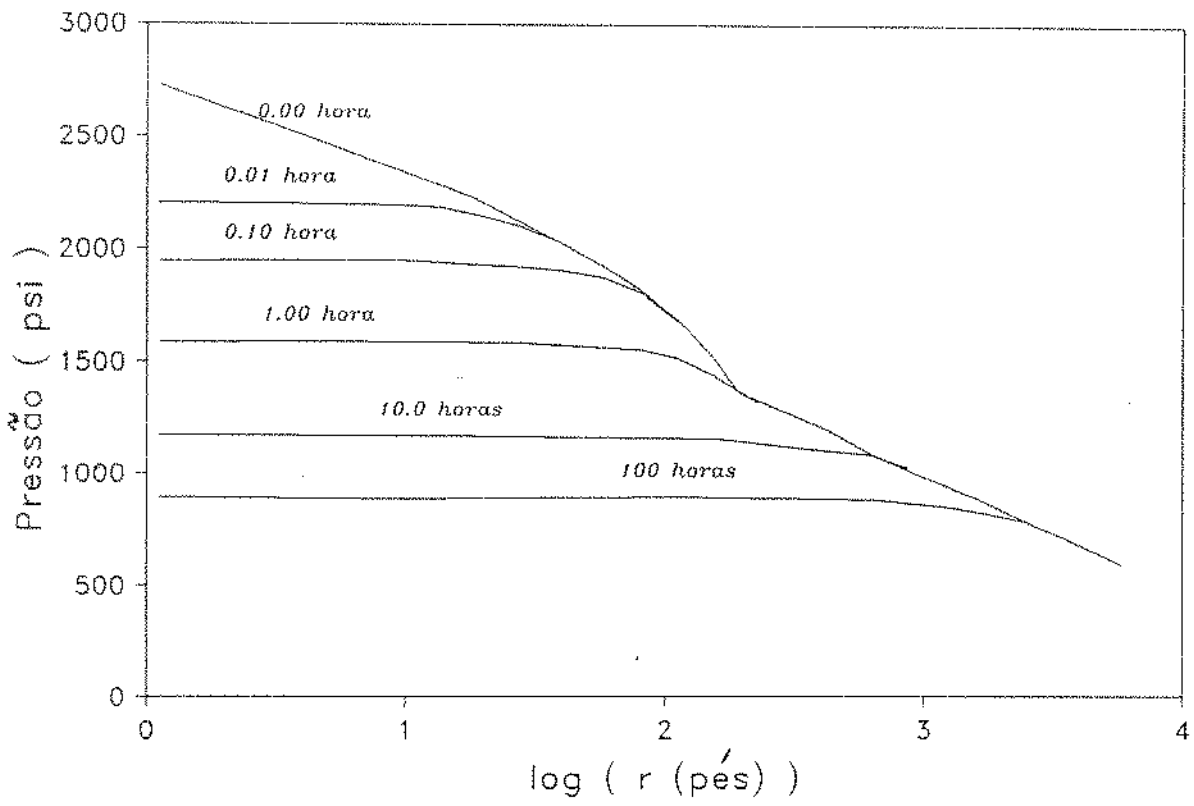


Figura 5.8: Curvas de Distribuição de Pressão Durante o Teste de Decaimento de Pressão



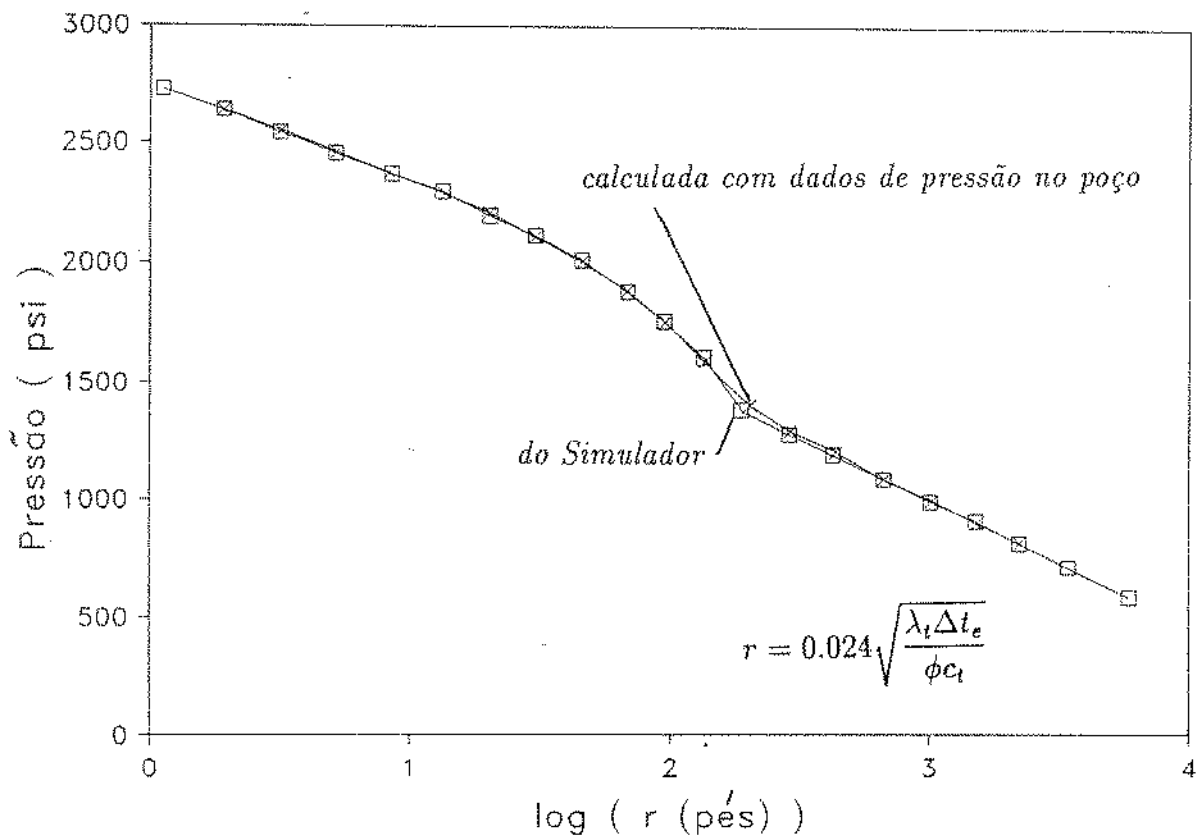


Figura 5.9: Distribuição de Pressão no Instante do Fechamento para Decaimento de Pressão

# Capítulo 6

## Conclusões e Recomendações

### 6.1 Conclusões

As conclusões obtidas através deste trabalho estão condicionadas às observações feitas na seção 1.2 do Capítulo 1, que trata das limitações impostas na formulação matemática dos diversos modelos aqui estudados. Também, as condições auxiliares dos modelos, em particular, de Bratvold e Horne [16] e de Nanba e Horne [18], devem ser verificadas para que essas conclusões sejam válidas. Em especial, as condições de vazão constante no poço injetor e de reservatório inicialmente em equilíbrio são importantes nesse sentido.

As seguintes conclusões são pertinentes:

- A vazão total no interior de toda a região do reservatório atingida pela água injetada é aproximadamente constante e igual à vazão de injeção medida na parede do poço injetor.
- O raio de investigação de um teste de injeção, associado a qualquer tempo de injeção, é sempre maior que a distância do poço à frente de injeção de água.
- A derivada logarítmica da distribuição de pressão no interior do reservatório em um

dados tempo de injeção caracteriza a razão de mobilidade  $M$  e a posição da frente de injeção em relação ao poço injetor.

- Esta curva é pouco sensível às condições de contorno externas no caso de reservatórios limitados com manutenção da pressão externa.
- A mesma curva de derivada logarítmica da distribuição de pressão no interior do reservatório fornece uma aproximação muito boa da distribuição de mobilidade total no interior da região atingida pela água injetada.
- O fator de película aparente devido à distribuição de mobilidade total atrás da frente de injeção, medido em um teste de injeção suficientemente longo, é proporcional à área (do poço à frente de injeção) sob a curva definida por:

$$-\frac{\partial p_{D1}}{\partial \ln(r_D)} - 1;$$

onde  $\partial p_{D1}/\partial \ln(r_D)$  é a curva de derivada da distribuição de pressão no interior da região atingida pela água.

- Foi desenvolvido um método gráfico, relacionando a razão de mobilidade  $M$  a derivada do fluxo fracionário normalizado na frente de injeção,  $f'(S_{wDf})$ , e o fator de película aparente devido à distribuição de mobilidade atrás da frente,  $S_{p\lambda}$ , com os expoentes de permeabilidade relativa ao óleo e à água,  $n_o$  e  $n_w$ , da correlação de Hirazaki.
- Este método gráfico determina indiretamente as curvas de permeabilidade relativa, tanto a partir de dados de testes de injeção como a partir de dados de testes de decaimento de pressão, desde que:

– para testes de injeção, sejam conhecidos:

- \* a pressão inicial,  $p_i$ , e a razão de mobilidade,  $M$ ;
- \* o fator de película aparente total medido no poço, obtido após um tempo suficientemente longo para que seja atingido o trecho reto semi-logarítmico;

- \* a posição da frente de injeção no reservatório, de forma a possibilitar o cálculo do fator de película devido ao avanço da frente de injeção e à razão de mobilidade do sistema;
  - \* o fator de película real na parede do poço, para possibilitar o cálculo do fator de película devido à distribuição de mobilidade;
- para testes de decaimento de pressão, a curva de derivada da distribuição de pressão no reservatório, obtida através do método de Yeh e Agarwal:
- \* apresente-se livre de efeitos de estocagem e dano, ou que esses efeitos possam ser removidos dos dados de decaimento de pressão através de deconvolução,
  - \* investigue toda a região atingida pela água injetada, de forma a possibilitar a identificação tanto da posição da frente de injeção como da razão de mobilidade.
- Foi desenvolvido neste trabalho, um novo modelo, em múltiplos bancos e considerando poço infinitesimal, para estudo de injeção de água com vazão constante. O algoritmo numérico deste modelo apresenta tempos de processamento significativamente inferiores ao do modelo de Nanba e Horne [18] para poço finito, fornecendo praticamente os mesmos resultados.

## 6.2 Recomendações

O aspecto teórico deste trabalho pode ser enriquecido através do desenvolvimento dos detalhes técnicos necessários à aplicação em campo dos resultados aqui obtidos. Entre as diversas possibilidades, destacam-se as seguintes:

- Aplicação dos métodos aqui desenvolvidos a testes de injeção e de decaimento de pressão efetuados em campos de petróleo nos quais as curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água sejam conhecidas.

- Elaboração de procedimentos de dimensionamento e análise de testes em poços injetores de água.
- Estudo de modelos desenvolvidos para fluxo linear, visando estabelecer métodos de determinação das curvas de permeabilidade relativa em laboratório, através de testes de transiente de pressão
- Estudo de injeção de solução aquosa de polímeros em reservatórios de óleo.

Em particular, os métodos desenvolvidos serão utilizados na interpretação de testes de decaimento de pressão do campo de Canto do Amaro ( RPNS ) e as curvas de permeabilidade relativa obtidas serão comparadas com curvas características do campo, determinadas através de experimentos com testemunhos, em trabalhos futuros na RPNS.

O problema de mudança de estocagem durante testes de decaimento de pressão em poços depletados pode ser solucionado colocando-se o interior da coluna de teste em contato com a pressão atmosférica a partir do instante em que a pressão na cabeça tornar-se nula. Com este procedimento, as vazões de injeção no fundo durante o decaimento de pressão podem ser calculadas pela queda de pressão registrada, conhecendo-se a densidade do fluido injetado e a capacidade interna da coluna de teste. Algoritmos de deconvolução podem, então, ser utilizados para remover os efeitos de estocagem dos dados de pressão registrados. O uso de registradores eletrônicos, recentemente adquiridos pela PETROBRÁS pode melhorar a qualidade dos registros de pressão, tornando possível a aplicação dos métodos de deconvolução a dados de campo. Pretende-se desenvolver, na RPNS, um projeto visando desenvolver estes aspectos.

Visando possíveis experimentos em laboratório, foi desenvolvido um modelo semi-analítico de injeção em meios porosos lineares. Este modelo, entretanto, não foi convenientemente testado.

## Nomenclatura

$C_D$	=	coeficiente de estocagem adimensional
$c$	=	compressibilidade
$c_t$	=	compressibilidade total
$\hat{c}_{to}$	=	compressibilidade total em $S_{wc}$
$\hat{c}_{tw}$	=	compressibilidade total em $1 - S_{or}$
$E_1$	=	função integral exponencial $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau$
$f_w$	=	fluxo fracionário de água $f_w = \lambda_w / (\lambda_w + \lambda_o)$
$f_w^t$	=	derivada do fluxo fracionário em relação à $S_w$
$f_{wD}^t$	=	derivada do fluxo fracionário em relação à $S_{wD}$
$h$	=	espessura da formação
$I_\nu$	=	função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem $\nu$
$K_\nu$	=	função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem $\nu$
$k$	=	permeabilidade absoluta
$k_{ro}$	=	permeabilidade relativa ao óleo
$k_{rw}$	=	permeabilidade relativa à água
$\hat{k}_{ro}$	=	permeabilidade relativa ao óleo em $S_{wc}$
$\hat{k}_{rw}$	=	permeabilidade relativa à água em $1 - S_{or}$
$M$	=	razão de mobilidade, $\hat{\lambda}_w / \hat{\lambda}_o$
$N$	=	número de regiões atrás da frente de injeção
$n_o$	=	expoente da curva de perm. rel. ao óleo
$n_w$	=	expoente da curva de perm. rel. à água

$p$	=	pressão
$p_D$	=	pressão adimensional, $2\pi\lambda_w h(p_{in} - p)/q$
$\bar{p}_D$	=	transformada de Laplace da pressão adimensional
$p_{in}$	=	pressão inicial
$p_{wD}$	=	pressão adimensional no poço
$Q_D$	=	volume de água injetado adimensional
$q$	=	vazão de produção
$q_D$	=	vazão adimensional de produção
$q_{wD}$	=	vazão adimensional de produção no poço
$\bar{q}_{wD}$	=	transformada de Laplace da vazão adimensional no poço
$r$	=	raio
$R$	=	raio (fixo) da interface entre regiões estacionárias
$R_D$	=	raio adimensional (fixo) da interface entre regiões estacionárias
$r_D$	=	raio adimensional, $r/r_w$
$r_{Df}$	=	raio adimensional da frente de injeção
$r_f$	=	raio da frente de injeção
$r_w$	=	raio do poço
$S$	=	fator de película
$s$	=	variável relacionada à trans. de Laplace
$S_{or}$	=	saturação de óleo residual
$S_w$	=	saturação de água
$S_{wc}$	=	saturação de água irreduzível, ou conata
$S_{wD}$	=	saturação de água normalizada
$S_{pME}$	=	pseudo-fator de película devido à $M$ ; frente estac.
$S_{pM}$	=	pseudo-fator de película devido à $M$ ; frente móvel
$S_{p\lambda}$	=	pseudo-fator de película devido à distr. de mobilidade
$t$	=	tempo

$t_D$	=	tempo adimensional, $\hat{\eta}_w t / r_w^2$
$y$	=	transformada de Boltzmann $y = r_D^2 / 4t_D$
$\eta$	=	difusividade hidráulica, $k / \phi \mu c_t$
$\eta_D$	=	difusividade hidráulica adimensional, $\eta / \hat{\eta}_w$
$\bar{\eta}$	=	difusividade hidráulica média, na região invadida
$\hat{\eta}_o$	=	difusividade hidráulica em $S_{wc}$
$\hat{\eta}_w$	=	difusividade hidráulica em $1 - S_{or}$
$\lambda$	=	mobilidade total, $k / \mu$
$\lambda_D$	=	mobilidade total adimensional, $\lambda / \hat{\lambda}_w$
$\hat{\lambda}_o$	=	mobilidade total em $S_{wc}$
$\hat{\lambda}_w$	=	mobilidade total em $1 - S_{or}$
$\mu$	=	viscosidade
$\phi$	=	porosidade

## Subscritos

$D$	=	adimensional
$f$	=	frente de injeção
$BL$	=	frente de injeção
$i$	=	índice da região
$o$	=	óleo
$r$	=	rocha
$t$	=	total
$w$	=	água
1	=	região 1, próxima ao poço
2	=	região 2, com $S_w = S_{wc}$



# Bibliografia

- [1] Buckley, S. E. e Leverett, M. C.: "*Mechanism of Fluid Displacement in Sands*", Trans., AIME, vol. 146, 107-116 (1942).
- [2] Welge, Henry J.: "*A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive*", Trans., AIME, vol. 195, 91-98 (1952).
- [3] Hawkins, M. F., Jr.: "*A Note on the Skin Effect*", Trans., AIME, vol. 207, 356-357 (1956).
- [4] H. J. Ramey, Jr.: "*Approximate Solutions For Unsteady Liquid Flow in Composite Reservoirs*", Journal of Canadian Petroleum Technology, 32-37 - JAN/MAR (1970).
- [5] Stehfest "*Numerical Inversion of Laplace Transforms*", ACM - Algorithm 368 - pag. 47/49 - JAN (1970)
- [6] Merrill, L. S.; Kazemi, H. B. e Jargon, J. R.: "*Problems in Interpretation of Pressure Fall-Off Tests in Reservoirs With and Without Fluid Banks*", JPT, 1147-1156, SET (1972).
- [7] Merrill, L. S.; Kazemi, H.; e Gogarty, W. B.: "*Pressure Falloff Analysis in Reservoirs With Fluid Banks*", JPT, 809-818, JUL (1974).
- [8] Hirasaki, G. J.: "*Sensitivity Coefficients for History Matching Oil Displacement Processes*", SPE 4283, Third Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, Dallas, TX, JAN (1973), publicado em FEV (1975).

- [9] Standing, M. B.: *Notes on Relative Permeability Relationships*, School of Earth Sciences, Stanford University, Stanford, CA, (1975).
- [10] Sosa, A. e Raghavan, R.: *The Effect of Relative Permeability and Mobility Ratio on Pressure Fall-Off Behavior*, SPE 9398, 55<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., Dallas, TX, 21 a 24 SET (1980).
- [11] Eggenschwiller, M.; Satman, A.; Ramey, H. J., Jr. e Cinco-Ley, H.: *Interpretation of Injection Well Pressure Transient Data in Thermal Oil Recovery*, SPE 8908, 50<sup>th</sup> Annual California Regional Meeting, L.A., CA, 9 a 11 ABR (1980).
- [12] Eggenschwiller, M.; Satman, A.; Ramey, H. J., Jr. e Tang, W. K.: *An Analytical Study of Transient Flow in Systems With Radial Discontinuities*, SPE 9399, 55<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., Dallas, TX, 21 a 24 SET (1980).
- [13] Barua, J. e Horne, R. N.: *Computerized Analysis of Thermal Recovery Well Test Data*, SPE 12745, California Regional Meeting, Long Beach, CA, 11 a 13 ABR (1984).
- [14] Ambastha, A. K. e Ramey, H. R., Jr.: *Thermal Recovery Well Test Design and Interpretation*, SPE 16746, 62<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., Dallas, TX, 27 a 30 SET (1987).
- [15] Abbaszadeh, M. e Kamal, M. M.: *Pressure Transient Testing of Water Injection Wells*, SPE 16744, 62<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., Dallas, TX, 27 a 30 SET (1987).
- [16] Bratvold, R. B. e Horne, R. N.: *Analysis of Pressure Falloff Tests Following Cold Water Injection*, SPE 18111, 63<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., Houston, TX, 2 a 5 OUT (1988).
- [17] Ambastha, A. K. e Ramey, H. R., Jr.: *Injection Time Effects on Pressure Falloff Responses From Composite Reservoirs*, SPE 18804, SPE California Regional Meeting, Bakersfield, California, 5 a 7 ABR (1989).

- [18] Nanba, T. e Horne, R. N.: *"Estimation of Water and Oil Relative Permeabilities From Pressure Transient Analysis of Water Injection Well Data"*, SPE 19829, 64<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., San Antonio, TX, 8 a 11 OUT (1989).
- [19] Yeh, N. S. e Agarwal, R. G.: *"Pressure Transient Analysis of Injection Wells in Reservoirs With Multiple Fluid Banks"*, SPE 19775, 64<sup>th</sup> Annual Fall Tech. Conf. and Exhib., San Antonio, TX, 8 a 11 OUT (1989).
- [20] Kamal, M. M. *"Expected Developments in Transient Testing"*, JPT, 898-903, 995-997, AGO (1991)

# Apêndice A

## Modelo com Interface Estacionária

### Formulação Matemática

<sup>1</sup> O reservatório é representado como sendo composto por duas regiões de propriedades constantes e cuja interface não se movimenta durante a injeção de água. A região mais próxima do poço, identificada com o subscrito 1 e invadida pela água injetada, apresenta saturação de óleo residual em toda sua extensão. A região não atingida pela água é identificada pelo subscrito 2 e possui saturação de óleo original ([11] e [12]).

### Variáveis Adimensionais

A pressão adimensional na região invadida pela água,  $p_{D1}$ , é definida por<sup>2</sup>:

$$p_{D1} = \frac{2\pi\hat{\lambda}_w h}{q}(p_{in} - p_1), \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\lambda}_w = k \frac{k_{rw}(1 - S_{or})}{\mu_w}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $q$  é a vazão de produção (numericamente negativa),  $h$  é a espessura porosa,  $p_{in}$  é a pressão inicial do reservatório,  $p_1$  é a pressão na região invadida e  $\hat{\lambda}_w$  representa a mobilidade total na região com saturação de óleo residual. Nesse modelo e no modelo que considera deslocamento tipo pistão com a frente em movimento,  $\hat{\lambda}_w$  é a mobilidade total na região atingida pela água injetada no reservatório. Nos modelos que levam em conta a distribuição de mobilidade atrás da frente,  $\hat{\lambda}_w$  é a mobilidade total na parede do poço, em  $r_D = 1$ .

A pressão adimensional no poço,  $p_{wD}$ , é dada por:

---

<sup>1</sup>Modelo apresentado por Eggeschwiler et al. [11] e [12]

<sup>2</sup>Equações no sistema métrico internacional

$$p_{wD} = \frac{2\pi\hat{\lambda}_w h}{q}(p_{in} - p_w), \quad (\text{A.3})$$

onde  $p_w$  representa a pressão no poço.

A pressão adimensional na região não invadida pela água,  $p_{D2}$ , é:

$$p_{D2} = \frac{2\pi\hat{\lambda}_w h}{q}(p_{in} - p_2), \quad (\text{A.4})$$

onde  $p_2$  é a pressão na região não invadida.

O tempo adimensional é definido segundo as propriedades da região 1:

$$t_D = \frac{\hat{\lambda}_w t}{\phi\hat{c}_{tw}r_w^2}, \quad (\text{A.5})$$

onde  $t$  é o tempo de injeção,  $\phi$ , a porosidade,  $\hat{c}_{tw}$ , a compressibilidade total na região com saturação de óleo residual, e  $r_w$ , o raio do poço.

O coeficiente de estocagem adimensional é definido como:

$$C_D = \frac{C}{2\pi\phi\hat{c}_{tw}hr_w^2}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $C$  é o coeficiente de estocagem no poço.

Definindo a difusividade hidráulica adimensional como sendo:

$$\eta_D = \frac{\eta}{\hat{\eta}_w}; \quad (\text{A.7})$$

onde  $\eta$  é a difusividade hidráulica em um ponto qualquer do reservatório e  $\hat{\eta}_w$ , na região com saturação de óleo residual, teremos:

$$\eta_{D2} = \frac{\hat{\eta}_o}{\hat{\eta}_w}; \quad (\text{A.8})$$

$\hat{\eta}_o$  é a difusividade hidráulica na região com saturação de óleo original. Note que  $\eta_{D1} = 1$ .

Por fim, a razão de mobilidade  $M$ , o raio adimensional,  $r_D$ , e a posição adimensional da interface entre as duas regiões,  $R_D$ , são dados por:

$$M = \frac{\hat{\lambda}_w}{\lambda_o}, \quad (\text{A.9})$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (\text{A.10})$$

$$R_D = \frac{R}{r_w}, \quad (\text{A.11})$$

onde  $R$  é a posição da interface, considerada fixa nesse modelo.

### Equação da Difusividade e Condições de Contorno

Na região 1, com saturação de óleo residual, a equação da difusividade é dada por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}, \quad 1 < r_D < R_D \quad (\text{A.12})$$

e na região 2, que não foi atingida pelo fluido de injeção,

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{D2}} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}, \quad R_D < r_D < \infty \quad (\text{A.13})$$

Supondo o reservatório inicialmente em equilíbrio em ambas as regiões, as condições iniciais são expressas por:

$$p_{D1}(r_D, 0) = 0, \quad 1 < r_D < R_D \quad (\text{A.14})$$

$$p_{D2}(r_D, 0) = 0, \quad R_D < r_D < \infty \quad (\text{A.15})$$

A equação que representa estocagem no poço e vazão na superfície constantes é:

$$C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = 1, \quad (\text{A.16})$$

e considerando o fator de película constante na parede do poço, tem-se:

$$p_{wD} = p_{D1} - S \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D} \Big|_{r_D=1}. \quad (\text{A.17})$$

Para que a analiticidade do modelo seja mantida, consideraremos inicialmente que estocagem e dano sejam nulos, incluindo mais tarde esses efeitos na resposta do sistema através do princípio de Duhamel. Desta forma, as equações (A.16) e (A.17) se reduzem a:

$$\frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1. \quad (\text{A.18})$$

Na interface entre as duas regiões, deverá existir continuidade de pressão e de vazão, ou seja,

$$p_{D1}(R_D, t_D) = p_{D2}(R_D, t_D); \quad t_D > 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \Big|_{R_D} = M \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \Big|_{R_D}; \quad t_D > 0 \quad (\text{A.20})$$

Considerando reservatório infinito, a condição de contorno externa é:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D2}(r_D, t_D) = 0 \quad (\text{A.21})$$

## Solução Analítica

Aplicando transformada de Laplace às equações diferenciais (A.12) e (A.13) e utilizando, respectivamente, as transformações de variáveis  $u = \sqrt{sr_D}$  e  $w = \sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}} r_D$ , nas quais  $s$  é a variável associada à transformada de Laplace, obtém-se:

$$u^2 \frac{d^2 \bar{p}_{D1}}{du^2} + u \frac{d\bar{p}_{D1}}{du} - u^2 \bar{p}_{D1} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$w^2 \frac{d^2 \bar{p}_{D2}}{dw^2} + w \frac{d\bar{p}_{D2}}{dw} - w^2 \bar{p}_{D2} = 0, \quad (\text{A.23})$$

onde  $\bar{p}_{D1}$  e  $\bar{p}_{D2}$  são as transformadas de Laplace da pressão adimensional nas regiões 1 e 2.

As equações (A.22) e (A.23) são equações de Bessel modificadas de ordem 0, cujas soluções gerais são dadas por:

$$\bar{p}_{D1} = C_1 I_0(\sqrt{s}r_D) + C_2 K_0(\sqrt{s}r_D) \quad (\text{A.24})$$

$$\bar{p}_{D2} = C_4 I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}r_D\right) + C_3 K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}r_D\right) \quad (\text{A.25})$$

onde  $I_0$  e  $K_0$  são funções de Bessel modificadas, e  $C_1$  a  $C_4$  são as constantes de integração do problema de valor de contorno.

Derivando as equações (A.24) e (A.25) em relação a  $r_D$ ,

$$\bar{p}'_{D1} = C_1 \sqrt{s} I_1(\sqrt{s}r_D) - C_2 \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}r_D), \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{p}'_{D2} = C_4 \sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}} I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}r_D\right) - C_3 \sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}} K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}r_D\right). \quad (\text{A.27})$$

A transformada de Laplace da condição de contorno externa, equação (A.21), é dada por:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{D2} = 0. \quad (\text{A.28})$$

As transformadas de Laplace das condições de contorno interna e na interface, equações (A.18), (A.19) e (A.20), são, respectivamente:



$$\left. \frac{d\bar{p}_{D1}}{dr_D} \right|_{r_D=1} = -\frac{1}{s} \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{p}_{D1}(R_D, s) = \bar{p}_{D2}(R_D, s) \quad (\text{A.30})$$

$$\left. \frac{d\bar{p}_{D2}}{dr_D} \right|_{r_D=R_D} = M \left. \frac{d\bar{p}_{D1}}{dr_D} \right|_{r_D=R_D} \quad (\text{A.31})$$

Ao aplicar as condições de contorno (A.28) a (A.31) às equações (A.24) a (A.27), chega-se a um sistema de três equações lineares a três incógnitas. Observe que a condição de contorno externa impõe que  $C_4$  seja nula, eliminando uma quarta equação, que tornar-se-ia necessária caso fosse utilizado outro tipo de condição de contorno externa.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{s}I_1(\sqrt{s}) & -\sqrt{s}K_1(\sqrt{s}) & 0 \\ I_0(\sqrt{s}R_D) & K_0(\sqrt{s}R_D) & -K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}R_D\right) \\ M\sqrt{s}I_1(\sqrt{s}R_D) & -M\sqrt{s}K_1(\sqrt{s}R_D) & \sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\eta_{D2}}}R_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Resolvendo-se o sistema (A.32) para  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , obtem-se a solução no campo de Laplace para  $\bar{p}_{D1}$  e  $\bar{p}_{D2}$ . Porém, para obter a resposta do sistema em função do tempo no espaço real, é necessário um algoritmo de inversão numérica. A solução de longo tempo, entretanto, pode ser obtida analiticamente, utilizando as aproximações assintóticas das funções de Bessel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_0(x) = 1, \quad (\text{A.33})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_0(x) = -\ln\left(\frac{e^\gamma x}{2}\right), \quad (\text{A.34})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_1(x) = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_1(x) = \frac{1}{x}, \quad (\text{A.36})$$

onde  $\gamma = 0.57721 \dots$  é a constante de Euler.

Aplicando as aproximações assintóticas (A.33) a (A.36) ao sistema de equações lineares (A.32), obtém-se, para longos tempos ( ou  $s$  pequeno ):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\ln\left(\frac{e^\gamma \sqrt{s} R_D}{2}\right) & \ln\left(\frac{e^\gamma \sqrt{s/\eta_{D2}} R_D}{2}\right) \\ 0 & -\frac{M}{R_D} & \frac{1}{R_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Para obter a resposta de pressão no poço, basta resolver o sistema (A.37) para as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{1}{s} \left[ \ln\left(\frac{e^\gamma \sqrt{s} R_D}{2}\right) - M \ln\left(\frac{e^\gamma \sqrt{s/\eta_{D2}} R_D}{2}\right) \right], \quad (\text{A.38})$$

$$C_2 = \frac{1}{s}. \quad (\text{A.39})$$

Substituindo (A.38) e (A.39) na solução geral para a pressão na região 1, equação (A.24), tem-se, para  $s$  pequeno:

$$\bar{p}_{D1}(1, s) = \bar{p}_{uD} = \frac{1}{2s} \ln(R_D^2) - \frac{M}{2s} [\gamma + \ln(s)] - \frac{M}{2s} \ln\left(\frac{e^\gamma R_D^2}{4\eta_{D2}}\right) \quad (\text{A.40})$$

Invertendo (A.40), Ambastha e Ramey [14] e [17] obtiveram a seguinte expressão de longo tempo para a pressão no poço:

$$p_{uD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[ M \ln\left(\frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma R_D^2}\right) + \ln(R_D^2) \right] \quad (\text{A.41})$$

## Estocagem e Fator de Película

Os efeitos da estocagem e do fator de película no poço podem ser inseridos na resposta do sistema através do princípio de Duhamel ( integral de convolução ):

$$p_{wD}(t_D) = \int_0^{t_D} q_{wD}(t_D) \frac{\partial p_D(t_D - \tau)}{\partial(t_D - \tau)} \Big|_{r_D=1} d\tau, \quad (\text{A.42})$$

onde  $p_{wD}$  e  $q_{wD}$  são respectivamente, pressão e vazão no poço influenciadas por estocagem e dano, e  $p_D(r_D = 1)$  é a resposta de um poço com dano, produzindo com vazão constante. Observe que  $p_{D1}(r_D = 1)$  é a resposta de um poço sem estocagem e dano.

Da equação (A.16), que modela um poço com estocagem constante produzindo com vazão constante na superfície,

$$q_{wD}(t_D) = - \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = 1 - C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D}. \quad (\text{A.43})$$

Da equação (A.17), que modela um poço produzindo com fator de película constante, e da condição de contorno interna para poço sem estocagem e dano,

$$p_D(r_D = 1) = p_{D1}(r_D = 1) - S \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = p_{D1}(r_D = 1) + S \quad (\text{A.44})$$

As transformadas de Laplace das equações (A.42), (A.43) e (A.44) são:

$$\bar{p}_{wD} = \bar{q}_{wD} s \bar{p}_D(r_D = 1), \quad (\text{A.45})$$

$$\bar{q}_{wD} = 1 - C_D s \bar{p}_{wD}, \quad (\text{A.46})$$

$$\bar{p}_D(r_D = 1) = \bar{p}_{D1}(r_D = 1) + \frac{S}{s}. \quad (\text{A.47})$$

Substituindo (A.46) e (A.47) em (A.45),

$$\bar{p}_{wD} = \frac{s\bar{p}_{D1}(r_D = 1) + S}{s[1 + sC_D(s\bar{p}_{D1}(r_D = 1) + S)]} \quad (\text{A.48})$$

A relação acima é utilizada para incluir efeitos de estocagem e fator de película nos modelos semi-analíticos, apresentados mais adiante. Note que  $s$  e  $S$  são símbolos diferentes:  $s$  é a variável introduzida pela transformada de Laplace e  $S$  é o fator de película no poço, uma constante.

Para longos tempos, o efeito de estocagem é desprezível. O efeito de película pode ser introduzido na expressão de longo tempo<sup>3</sup> para pressão no poço, eq. (A.41), através da equação (A.44):

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[ M \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma R_D^2} \right) + \ln(R_D^2) \right] + S \quad (\text{A.49})$$

---

<sup>3</sup>Solução de longo tempo deduzida por Ambastha e Ramey [14]

## Apêndice B

### Modelo com Frente em Movimento

#### Formulação Matemática

<sup>4</sup> Esse modelo [4] considera que o reservatório é composto por duas regiões com propriedades constantes, e que o poço é infinitesimal. Ao contrário do modelo discutido no Apêndice A, o movimento da interface entre as duas regiões é considerado. O deslocamento é do tipo pistão, ou seja, a saturação de água atrás da frente de injeção é constante e igual a  $1 - S_{or}$ .

Da mesma forma como no Apêndice A, os subscritos 1 e 2 referem-se, respectivamente, às regiões atingida e não atingida pela água injetada.

#### Variáveis Adimensionais

As variáveis adimensionais definidas no Apêndice A, com exceção da posição da frente de injeção, são as mesmas adotadas nesse modelo. Na abordagem original feita por Ramey [4], não foram utilizadas variáveis adimensionais.

A posição adimensional da interface entre as duas regiões será definida como  $r_{DBL}$ , pois o cálculo da distância do poço à frente de injeção ( $r_{BL}$ ) é feito, conforme será visto mais adiante, através da equação de Buckley e Leverett para deslocamento tipo pistão.

$$r_{DBL} = \frac{r_{BL}}{r_w} \quad (\text{B.1})$$

#### Equações Diferenciais e Condições de Contorno

As equações da difusividade hidráulica para as regiões 1 e 2 são dadas respectivamente pelas equações (B.2) e (B.3).

---

<sup>4</sup>Modelo apresentado por Ramey [4]

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}, \quad 0 \leq r_D \leq r_{DBL} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{D2}} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}, \quad r_{DBL} \leq r_D < \infty \quad (\text{B.3})$$

As equações (B.4) e (B.5) descrevem as condições iniciais nas duas regiões, determinando que o reservatório encontrava-se em equilíbrio antes do início da injeção.

$$p_{D1}(r_D, 0) = 0, \quad 0 \leq r_D \leq r_{DBL} \quad (\text{B.4})$$

$$p_{D2}(r_D, 0) = 0, \quad r_{DBL} \leq r_D < \infty \quad (\text{B.5})$$

A condição de contorno interna é fixada em  $r_D = 0$ , ou seja, fonte infinitesimal. Não serão considerados os efeitos de estocagem e dano no poço, para simplificar a solução analítica.

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} = -1 \quad (\text{B.6})$$

Na interface entre as duas regiões, as condições que estabelecem continuidade de pressão e de vazão são as seguintes:

$$p_{D1}(r_{DBL}, t_D) = p_{D2}(r_{DBL}, t_D); \quad t_D > 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\left. \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right|_{r_{DBL}} = M \left. \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right|_{r_{DBL}}; \quad t_D > 0. \quad (\text{B.8})$$

Para reservatório infinito, tem-se, como condição de contorno externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D2}(r_D, t_D) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Note que, nas equações acima, as únicas diferenças existentes em relação ao modelo com frente estacionária são aquelas relacionadas às posições do poço e da interface entre as duas regiões.

### Solução Analítica

Como o modelo considera que o poço é infinitesimal e as condições iniciais são nulas, o sistema de equações diferenciais parciais pode ser reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias através de uma transformada “self-similar”, que no caso radial, é a transformada de Boltzmann. Aplicando a transformada de Boltzmann

$$y = r_D^2/4t_D \quad (\text{B.10})$$

às equações (B.2) e (B.3), obtem-se, respectivamente,

$$y \frac{d^2 p_{D1}}{dy^2} + (1 + y) \frac{dp_{D1}}{dy} = 0; \quad 0 < y < y_{BL}, \quad (\text{B.11})$$

$$y \frac{d^2 p_{D2}}{dy^2} + \left(1 + \frac{y}{\eta_{D2}}\right) \frac{dp_{D1}}{dy} = 0; \quad y_{BL} < y < \infty, \quad (\text{B.12})$$

onde  $y_{BL}$  é a variável de Boltzmann calculada na posição da frente de injeção  $r_{DBL}$ :

$$y_{BL} = \frac{r_{DBL}^2}{4t_D}. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a variável de Boltzmann nas condições de contorno, equações (B.6), (B.7), (B.8) e (B.9), obtem-se, respectivamente:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \frac{dp_{D1}}{dy} = -\frac{1}{2}, \quad (\text{B.14})$$

$$p_{D1}(y_{BL}) = p_{D2}(y_{BL}), \quad (\text{B.15})$$

$$\left. \frac{dp_{D2}}{dy} \right|_{y=y_{BL}} = M \left. \frac{dp_{D1}}{dy} \right|_{y=y_{BL}} \quad (\text{B.16})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_{D2}(y) = 0. \quad (\text{B.17})$$

A solução geral das equações diferenciais ordinárias (B.11) e (B.12) é obtida por redução de ordem e integração:

$$p_{D1} = C_1 \int \frac{e^{-y}}{y} dy, \quad (\text{B.18})$$

$$p_{D2} = C_3 \int \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y} dy. \quad (\text{B.19})$$

Nas equações (B.18) e (B.19), as integrais indefinidas podem ser substituídas pela função integral exponencial, bastando para isso, incluir mais duas constantes de integração:

$$p_{D1} = C_1 E_1(y) + C_2 \quad (\text{B.20})$$

$$p_{D2} = C_3 E_1\left(\frac{y}{\eta_{D2}}\right) + C_4 \quad (\text{B.21})$$

onde:

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \quad (\text{B.22})$$

Derivando as expressões (B.20) e (B.21) em relação à variável de Boltzmann, tem-se:

$$\frac{dp_{D1}}{dy} = -C_1 \frac{e^{-y}}{y}, \quad (\text{B.23})$$



$$\frac{dp_{D2}}{dy} = -C_3 \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y}. \quad (\text{B.24})$$

Aplicando a condição de contorno interna (B.14) à equação (B.23),

$$C_1 = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.25})$$

A condição de contorno externa, equação (B.17), quando aplicada à equação (B.21), leva a:

$$C_4 = 0. \quad (\text{B.26})$$

Da condição de contorno relacionada à continuidade de vazão na interface entre as duas regiões (B.16), e das equações (B.23), (B.24) e (B.25):

$$C_3 = \frac{M}{2} e^{-y_{BL} \left(1 - \frac{1}{\eta_{D2}}\right)}. \quad (\text{B.27})$$

Da condição de contorno que expressa a continuidade de pressão na interface (B.15), e das equações (B.20), (B.21), (B.25), (B.26) e (B.27):

$$C_2 = \frac{M}{2} e^{-y_{BL} \left(1 - \frac{1}{\eta_{D2}}\right)} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) - \frac{1}{2} E_1(y_{BL}). \quad (\text{B.28})$$

Ramey [4] observou que a “constante” de integração  $C_3$ , na equação (B.27), só será realmente constante se a variável de Boltzmann calculada na frente de injeção,  $y_{BL}$ , for constante. O mesmo acontece com a “constante” de integração  $C_2$ , determinada em (B.28). Essas duas “constantes” estão relacionadas com as condições de contorno na interface entre as regiões invadida e não invadida pela água injetada no reservatório. Da definição da variável de Boltzmann na frente de injeção, equação (B.13), nota-se que  $y_{BL}$  será constante sempre que  $r_{BL}^2/t$  for constante. Para o caso de deslocamento de fluidos incompressíveis em meios porosos radiais com vazão de injeção constante, um balanço volumétrico fornece:

$$r_{BL}^2 = \frac{|q| t}{\pi h \phi (1 - S_{or} - S_{wc})} \quad (\text{B.29})$$

Note que a expressão (B.29) é um caso particular da equação de Buckley e Leverett (B.30), no qual o deslocamento é do tipo pistão, ou seja, a derivada do fluxo fracionário na frente de injeção,  $f'_w(S_{wf})$ , é igual a  $1/(1 - S_{or} - S_{wc})$ .

$$\frac{r_{BL}^2}{t} = \frac{|q|}{\pi h \phi} f'_w(S_{wf}) \quad (\text{B.30})$$

Note também que, em (B.30),  $r_{BL}^2/t$  é constante.

As expressões para distribuição de pressão nas regiões 1 e 2 podem ser obtidas substituindo as constantes de integração determinadas pelas equações (B.25) a (B.28) nas equações (B.20) e (B.21) respectivamente [4].

$$p_{D1}(y) = \frac{1}{2} \left[ E_1(y) + M e^{-y_{BL} \left(1 - \frac{1}{\eta_{D2}}\right)} E_1\left(\frac{y_{BL}}{\eta_{D2}}\right) - E_1(y_{BL}) \right] \quad (\text{B.31})$$

$$p_{D2}(y) = \frac{M}{2} e^{-y_{BL} \left(1 - \frac{1}{\eta_{D2}}\right)} E_1\left(\frac{y}{\eta_{D2}}\right) \quad (\text{B.32})$$

## Apêndice C

### Modelo com Distribuição de Mobilidade

#### Formulação Matemática

<sup>5</sup> Nesse modelo, [16], considera-se que o poço é infinitesimal, a frente encontra-se em movimento e existe uma distribuição de saturação atrás da frente, na região 1, que modifica-se de acordo com a equação de Buckley e Leverett à medida em que o fluido é injetado no reservatório. Na região 2, não atingida pela água injetada, as propriedades do reservatório são constantes.

#### Variáveis Adimensionais

As pressões adimensionais nas regiões 1, 2 e no poço,  $p_{D1}$ ,  $p_{D2}$  e  $p_{wD}$ , são definidas no Apêndice A pelas equações (A.1), (A.4) e (A.3). Note que  $\hat{\lambda}_w$ , definida em (A.2), é a mobilidade total no poço, onde a saturação de água é igual a  $(1 - S_{or})$ .

O tempo adimensional,  $t_D$ , a razão de mobilidade,  $M$ , o raio adimensional,  $r_D$ , e a posição adimensional da frente de injeção,  $r_{DBL}$  são definidos pelas equações (A.5), (A.9), (A.10) e (B.1), respectivamente.

Para levar em consideração a variação da compressibilidade total na região 1, onde a saturação de água não é constante, a razão entre as difusividades hidráulicas adimensionais das duas regiões será definida como:

$$\eta_{Di} = \frac{\hat{\lambda}_i \hat{c}_{iw}}{\hat{\lambda}_w c_t} \quad \text{onde} \quad \hat{\lambda}_i = \begin{cases} \hat{\lambda}_w & \text{se } i = 1 \\ \hat{\lambda}_o & \text{se } i = 2 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

então,

$$\eta_{D1} = \frac{\hat{c}_{iw}}{c_t}, \quad (\text{C.2})$$

---

<sup>5</sup>Modelo apresentado por Bratvold e Horne [16].

$$\eta_{D2} = \frac{\hat{\lambda}_o \hat{c}_{iw}}{\hat{\lambda}_w \hat{c}_{io}} \quad (\text{C.3})$$

A mobilidade total adimensional é definida como:

$$\lambda_D = \frac{\lambda_o + \lambda_w}{\hat{\lambda}_w} \quad (\text{C.4})$$

Observe que tanto  $\eta_{D1}$  como  $\lambda_D$  são funções da saturação de água, que por sua vez, é função da posição (na região 1) e do tempo de injeção.

### Equação da Difusividade e Condições de Contorno

Na região 1, entre o poço e a frente de injeção, a pressão adimensional é dada por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \lambda_D r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{D1}} \frac{\partial p_{D1}}{\partial t_D}; \quad 0 < r_D < r_{DBL}; \quad (\text{C.5})$$

e na região 2, não atingida pela água de injeção,

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{D2}} \frac{\partial p_{D2}}{\partial t_D}; \quad r_{DBL} < r_D < \infty. \quad (\text{C.6})$$

As condições iniciais nas duas regiões, a condição de contorno interna, a condição de contorno que determina continuidade de pressão entre as duas regiões e a condição de contorno externa para reservatório infinito são definidas da mesma forma como no Apêndice B, pelas equações (B.4), (B.5), (B.6), (B.7) e (B.9), que são reproduzidas abaixo:

$$p_{D1}(r_D, 0) = 0, \quad 0 < r_D < r_{DBL}, \quad (\text{C.7})$$

$$p_{D2}(r_D, 0) = 0, \quad r_{DBL} < r_D < \infty, \quad (\text{C.8})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} = -1, \quad (\text{C.9})$$

$$p_{D1}(r_{DBL}, t_D) = p_{D2}(r_{DBL}, t_D), \quad (\text{C.10})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D2}(r_D, t_D) = 0. \quad (\text{C.11})$$

Observe que o poço continua sendo considerado como uma linha fonte infinitesimal (equação (C.9)).

A condição de contorno que determina a existência de continuidade de vazão na interface entre as regiões 1 e 2 passa a ser definida como:

$$\lambda_D \left. \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right|_{r_{DBL}} = \frac{1}{M} \left. \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right|_{r_{DBL}}. \quad (\text{C.12})$$

## Solução Analítica

O problema posto em equações diferenciais parciais acima pode ser reduzido a um problema em equações diferenciais ordinárias através da transformada de Boltzmann, definida anteriormente na equação (B.10). As equações (C.5) e (C.6) passam a ser, respectivamente,

$$\frac{d}{dy} \left( \lambda_D y \frac{dp_{D1}}{dy} \right) + \frac{y}{\eta_{D1}} \frac{dp_{D1}}{dy} = 0; \quad 0 < y < y_{BL}, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{d}{dy} \left( y \frac{dp_{D2}}{dy} \right) + \frac{y}{\eta_{D2}} \frac{dp_{D2}}{dy} = 0; \quad y_{BL} < y < \infty. \quad (\text{C.14})$$

Substituindo a variável de Boltzmann  $y$  nas condições de contorno (C.9), (C.10), (C.12) e (C.11), obtém-se, respectivamente,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( y \frac{dp_{D1}}{dy} \right) = -\frac{1}{2}, \quad (\text{C.15})$$

$$p_{D1}(y_{BL}) = p_{D2}(y_{BL}), \quad (\text{C.16})$$

$$\lambda_D \frac{dp_{D1}}{dy} \Big|_{y=y_{BL}} = \frac{1}{M} \frac{dp_{D2}}{dy} \Big|_{y=y_{BL}}, \quad (\text{C.17})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_{D2} = 0. \quad (\text{C.18})$$

Desenvolvendo a equação (C.13), chega-se a:

$$\frac{dp_{D1}}{dy} = \frac{C_1}{\lambda_D y} e^{\left(-\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)}, \quad (\text{C.19})$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração, que pode ser determinada usando a condição de contorno interna (C.15),

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( y \frac{dp_{D1}}{dy} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{C_1}{\lambda_D} e^{\left(-\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} \right]; \quad (\text{C.20})$$

observe que no poço,  $\lambda_D(y=0) = 1$  e que a integral no segundo membro de (C.20) tende a zero quando  $y$  tende a zero, logo,  $C_1 = -1/2$  e, portanto, integrando a equação (C.19):

$$p_{D1} = -\frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{1}{\lambda_D y} e^{\left(-\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy\right)} dy + C_2, \quad (\text{C.21})$$

onde  $C_2$  é outra constante de integração.

Resolvendo a equação (C.14) por separação de variáveis e integração, chega-se

a:

$$\frac{dp_{D2}}{dy} = C_3 \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y} \quad (\text{C.22})$$

$$p_{D2} = -C_3 \int_y^{\infty} \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y} dy + C_4, \quad (\text{C.23})$$

onde a constante de integração  $C_4$  é nula devido à condição de contorno externa (C.18), logo:

$$p_{D2} = -C_3 \int_y^\infty \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y} dy = -C_3 E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right) \quad (\text{C.24})$$

onde  $E_1$  é a função integral exponencial. As constantes de integração  $C_2$  e  $C_3$  são determinadas usando as condições de contorno na interface entre as duas regiões. Substituindo as equações (C.19) e (C.22) na equação (C.17), obtém-se:

$$C_3 = -\frac{M}{2} e^{\left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} - \int_0^{y_{BL}} \frac{dy}{\eta_{D1} \lambda_D} \right)}; \quad (\text{C.25})$$

substituindo a equação (C.25) na equação (C.24), a expressão para a distribuição de pressão na região 2 é:

$$p_{D2} = \frac{M}{2} e^{\left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} - \int_0^{y_{BL}} \frac{dy}{\eta_{D1} \lambda_D} \right)} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right). \quad (\text{C.26})$$

Substituindo as equações (C.26) e (C.21) na equação (C.16),

$$C_2 = \frac{M}{2} e^{\left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} - \int_0^{y_{BL}} \frac{dy}{\eta_{D1} \lambda_D} \right)} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right); \quad (\text{C.27})$$

substituindo o resultado (C.27) na equação (C.21), obtém-se a expressão para distribuição de pressão na região 1:

$$p_{D1} = -\frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{1}{\lambda_D y} e^{\left( -\int_0^y \frac{1}{\lambda_D \eta_{D1}} dy \right)} dy + \frac{M}{2} e^{\left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} - \int_0^{y_{BL}} \frac{dy}{\eta_{D1} \lambda_D} \right)} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right). \quad (\text{C.28})$$

De acordo com as equações (C.25) e (C.27), as constantes de integração relacionadas com as condições de contorno na frente de injeção são constantes apenas se a variável de Boltzmann na frente de injeção,  $y_{BL}$ , for constante. Já foi mostrado, no Apêndice B, que a equação de Buckley e Leverett satisfaz essa condição.

A transformada de Boltzmann será válida também para todos os pontos do reservatório atrás da frente de injeção se o deslocamento dos fluidos na região 1 seguir a equação de Buckley e Leverett, pois nesse caso,

$$\frac{r^2}{t} = \frac{|q|}{\pi h \phi} f'_w(S_w), \quad (\text{C.29})$$

onde o segundo membro, proporcional a  $y$ , é constante se  $r^2/t$  for constante.

Bratvold e Horne [16] verificaram que  $y_{BL}$  é da ordem de  $10^{-2}$  ou  $10^{-3}$  e que  $\lambda_D \eta_{D1} > 1$  em casos práticos de injeção de água em reservatórios de óleo. Como  $y \leq y_{BL}$  na região 1, os termos exponenciais em (C.28) podem ser simplificados:

$$p_{D1} \approx -\frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{1}{\lambda_D y} dy + \frac{M}{2} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right); \quad (\text{C.30})$$

a expressão para a distribuição de pressão na região 2 (C.26) também pode ser simplificada:

$$p_{D2} \approx \frac{M}{2} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right). \quad (\text{C.31})$$

De forma a obter a resposta de pressão na região 1 em função da integral exponencial, Bratvold e Horne somaram e subtraíram à equação (C.30) a integral:

$$\frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y} dy;$$

expressando a parcela somada é expressa como:

$$\frac{1}{2} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right) - \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right)$$

enquanto que na parcela subtraída, considera-se:

$$\frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{D2}}}}{y} dy \approx \frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{y_{BL}}{y} \right)$$

A distribuição de pressão na região 1 pode então ser representada por:



$$p_{D1} = \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right) - \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) - \frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{dy}{y} + \frac{M}{2} E_1 \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) \quad (C.32)$$

Para  $y/\eta_{D2}$  pequeno, (C.32) pode ainda ser aproximada por:

$$p_{D1} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) - \frac{1}{2} \int_y^{y_{BL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{dy}{y} - \frac{M}{2} \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) \quad (C.33)$$

A integral na equação (C.33) é função da distribuição de saturação na região 1, e pode ser expressa em termos das derivadas do fluxo fracionário  $f'_w$  e  $f''_w$ , pois

$$y = \frac{r_D^2}{4t_D} = \frac{\phi c_{tw} r^2}{4\hat{\lambda}_w t} = \frac{1}{2} \xi f'_w \quad (C.34)$$

$$\text{onde } \xi = \frac{q c_{tw}}{2\pi \hat{\lambda}_w h};$$

substituindo (C.34) na equação (C.33):

$$p_{D1} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{y}{\eta_{D2}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) - \frac{1}{2} \int_{S_w(r_D, t_D)}^{S_{wBL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{f''_w}{f'_w} dS_w - \frac{M}{2} \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right), \quad (C.35)$$

onde  $S_{wBL}$  é a saturação de água na frente de injeção. A expressão para pressão no poço é obtida substituindo  $y(r_D=1) = 1/4t_D$  na equação (C.35):

$$p_{wD} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\eta_{D2} t_D}{e^\gamma} \right) + \frac{1}{2} (1 - M) \ln \left( \frac{e^\gamma y_{BL}}{\eta_{D2}} \right) + \frac{1}{2} \int_{1-S_{or}}^{S_{wBL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{f''_w}{f'_w} dS_w \quad (C.36)$$

Na equação (C.36), a integral em relação à saturação de água é um efeito de película aparente devido à distribuição de saturação atrás da frente de injeção:

$$S_{pS_w} = \frac{1}{2} \int_{1-S_{or}}^{S_{wBL}} \left( \frac{1}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{f''_w}{f'_w} dS_w. \quad (C.37)$$

## Apêndice D

### Modelo com Múltiplas Regiões: Poço Finito - Vazão Constante

#### Formulação Matemática

<sup>6</sup> A região atrás da frente de injeção é discretizada, nesse modelo [18], em  $N$  regiões no interior das quais as propriedades do reservatório são consideradas constantes, de forma a caracterizar adequadamente os efeitos provocados pelas curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água. O efeito de avanço da frente de injeção é obtido simplesmente desacoplando, através da equação de Buckley e Leverett, a solução da distribuição de mobilidade nas regiões atingidas pela água da solução da distribuição de pressão nessas regiões.

#### Variáveis Adimensionais

A pressão adimensional na  $i$ -ésima região é definida como:

$$p_{Di} = \frac{2\pi \hat{\lambda}_w (p_{in} - p_i)}{q}, \quad (D.1)$$

onde  $\hat{\lambda}_w$  é a mobilidade total no poço, definida em (A.2);  $p_i$  é a pressão na  $i$ -ésima região;  $p_{in}$  é a pressão inicial do reservatório e  $q$  é a vazão de produção.

A razão de mobilidade,  $M$ , e o raio adimensional,  $r_D$ , são definidos da mesma forma como em (A.9) e (A.10).

O tempo adimensional é definido como:

$$t_D = \frac{\hat{\eta}_w t}{r_w^2}, \quad (D.2)$$

onde  $\hat{\eta}_w$  é a difusividade hidráulica no poço.

---

<sup>6</sup>Modelo apresentado por Nanba e Horne [18].

A mobilidade total adimensional na  $i$ -ézima região é:

$$\lambda_{Di} = \frac{k \left[ \frac{k_{ro}(\bar{S}_{wi})}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(\bar{S}_{wi})}{\mu_w} \right]}{\hat{\lambda}_w}, \quad (D.3)$$

onde  $\bar{S}_{wi}$  é a saturação de água média na  $i$ -ézima região,  $k$  é a permeabilidade absoluta e  $k_{ro}$  e  $k_{rw}$  são as permeabilidades relativas ao óleo e à água, expressas em (D.3) como funções da saturação de água.

A difusividade hidráulica adimensional na  $i$ -ézima região é dada por:

$$\eta_{Di} = \frac{\eta_i}{\hat{\eta}_w} = \lambda_{Di} \frac{\hat{c}_{tw}}{c_{ti}}, \quad (D.4)$$

onde  $\eta_i$  é a difusividade hidráulica e  $c_{ti}$ , a compressibilidade total na  $i$ -ézima região.

O raio adimensional externo da  $i$ -ézima região atrás da frente de injeção é calculado pela equação de Buckley e Leverett para poço finito:

$$r_{Di+1}^2 = 1 + Q_D f'_w(S_{wi}); \quad i = 1, \dots, N, \quad (D.5)$$

onde  $f'_w$  é a derivada do fluxo fracionário, que é uma função da saturação de água  $S_{wi}$  do  $i$ -ézimo banco, e  $Q_D$  é o volume de água injetado adimensional, definido por:

$$Q_D = \frac{|q|t}{\pi r_w^2 \phi h}. \quad (D.6)$$

O raio adimensional do reservatório é definido como  $r_{eD}$ , coincide com o raio externo da região de índice  $N + 1$ , e não pode ser calculado pela equação (D.5).

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_w} = r_{DN+2} \quad (D.7)$$

As soluções para reservatório limitado são válidas apenas para casos em que o raio da frente de injeção é menor que o raio externo do reservatório, ou seja, não pode ocorrer "break-through" durante a injeção.

## Equação da Difusividade e Condições de Contorno

O reservatório é representado matematicamente por  $N+1$  equações diferenciais parciais, incluindo a região não atingida pela água:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{Di}} \frac{\partial p_{Di}}{\partial t_D}; \quad i = 1, \dots, N+1; \quad (\text{D.8})$$

$$r_{Di} < r_D < r_{Di+1}$$

A condição de contorno interna determina vazão constante no poço; considerado como uma fonte finita, e é dada por:

$$r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1. \quad (\text{D.9})$$

São necessárias  $2N$  condições de contorno nas interfaces entre as regiões para manter continuidade de vazão e de pressão nas mesmas:

$$\lambda_{Di} \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_{Di+1}} = \lambda_{Di+1} \frac{\partial p_{Di+1}}{\partial r_D} \Big|_{r_{Di+1}}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (\text{D.10})$$

$$p_{Di}(r_{Di+1}, t_D) = p_{Di+1}(r_{Di+1}, t_D), \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{D.11})$$

São utilizados os três tipos de condição de contorno externa mais comuns:

- reservatório infinito:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{DN+1} = 0, \quad (\text{D.12})$$

- reservatório limitado com manutenção de pressão:

$$p_{DN+1}(r_{eD}, t_D) = 0, \quad (\text{D.13})$$

- reservatório selado:

$$r_{eD} \left. \frac{\partial p_{DN+1}}{\partial r_D} \right|_{r_D=r_{eD}} = 0. \quad (\text{D.14})$$

Por fim, a condição que estabelece que o reservatório está em equilíbrio imediatamente antes do início da injeção é representada por  $N + 1$  equações:

$$p_{Di}(r_D, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (\text{D.15})$$

## Solução Semi-Analítica

Usando transformada de Laplace em (D.8) e (D.15), o sistema de  $N + 1$  equações diferenciais parciais e suas  $N + 1$  condições iniciais correspondentes são reduzidos a  $N + 1$  equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Di}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Di}}{dr_D} - \frac{s}{\eta_{Di}} \bar{p}_{Di} = 0, \quad i = 1, \dots, N + 1, \quad (\text{D.16})$$

$$r_{Di} < r_D < r_{Di+1}.$$

onde  $\bar{p}_{Di}$  é a transformada de Laplace da pressão adimensional na  $i$ -ésima região e  $s$  é a variável associada à transformada de Laplace.

Aplicando transformada de Laplace à condição de contorno interna, (D.9), às condições de contorno nas interfaces, (D.10) e (D.11) e aos diversos tipos de condição de contorno externa, (D.12), (D.13) e (D.14); tem-se, respectivamente,

- para a condição de contorno interna,

$$r_D \left. \frac{d\bar{p}_{D1}}{dr_D} \right|_{r_D=1} = -\frac{1}{s}; \quad (\text{D.17})$$

- para condição de vazão contínua nas interfaces,

$$\lambda_{D_i} \frac{d\bar{p}_{D_i}}{r_{D_i}} \Big|_{r_{D_{i+1}}} = \lambda_{D_{i+1}} \frac{d\bar{p}_{D_{i+1}}}{dr_D} \Big|_{r_{D_{i+1}}}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (\text{D.18})$$

- para continuidade de pressão entre regiões,

$$\bar{p}_{D_i}(r_{D_{i+1}}, s) = \bar{p}_{D_{i+1}}(r_{D_{i+1}}, s), \quad i = 1, \dots, N; \quad (\text{D.19})$$

- para reservatório infinito,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{D_{N+1}} = 0; \quad (\text{D.20})$$

- para reservatório limitado com manutenção de pressão no contorno externo,

$$\bar{p}_{D_{N+1}}(r_{eD}, s) = 0; \quad (\text{D.21})$$

- e para reservatório limitado selado,

$$r_{eD} \frac{d\bar{p}_{D_{N+1}}}{dr_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0. \quad (\text{D.22})$$

Usando a mudança de variável  $w = \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} r_D$  na equação (D.16),

$$w^2 \frac{d^2 \bar{p}_{D_i}}{dw^2} + w \frac{d\bar{p}_{D_i}}{dw} - w^2 \bar{p}_{D_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (\text{D.23})$$

A equação (D.23) é do tipo Bessel modificada e sua solução geral é dada por:

$$\bar{p}_{D_i} = K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i-1} + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i}, \quad (\text{D.24})$$

onde  $K_0$  e  $I_0$  são funções de Bessel modificadas de ordem zero, e  $C_{2i-1}$  e  $C_{2i}$  são as constantes de integração do problema de valor de contorno. Como cada equação diferencial gera duas constantes de integração, teremos um total de  $2N + 2$  constantes de integração a determinar. Derivando a equação (D.24) em relação a  $r_D$ ,

$$\bar{p}'_{Di} = -\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i-1} + \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i}. \quad (\text{D.25})$$

As equações (D.24) e (D.25) e as condições de contorno (D.17) a (D.22) estabelecem relações lineares implícitas entre as diversas constantes de integração, formando-se um sistema de equações lineares do tipo:

$$[A]_{2N+2 \times 2N+2} [C]_{2N+2} = [D]_{2N+2}; \quad (\text{D.26})$$

os coeficientes  $A_{jk}$  do sistema linear e seus termos independentes  $D_j$  são determinados adiante.

Usando na condição de contorno interna (D.17), a equação (D.25), para  $i = 1$ :

$$-\sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} \right) C_1 + \sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} \right) C_2 = -\frac{1}{s}; \quad (\text{D.27})$$

as seguintes definições, relacionadas à notação matricial do sistema linear (D.26), serão feitas:

$$A_{11} = -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} \right), \quad (\text{D.28})$$

$$A_{12} = \sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D1}}} \right), \quad (\text{D.29})$$

$$D_1 = -\frac{1}{s}. \quad (\text{D.30})$$

Substituindo na condição de contorno para pressão contínua nas interfaces, (D.19), a solução geral, (D.24),

$$\begin{aligned} & K_0 \left( r_{Di+1} \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i-1} + I_0 \left( r_{Di+1} \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}} \right) C_{2i} - \\ & - K_0 \left( r_{Di+1} \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}} \right) C_{2i+1} - I_0 \left( r_{Di+1} \sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}} \right) C_{2i+2} = 0; \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

as seguintes definições serão feitas para  $i = 1, \dots, N$ :

$$A_{2i,2i-1} = K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right), \quad (\text{D.32})$$

$$A_{2i,2i} = I_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right), \quad (\text{D.33})$$

$$A_{2i,2i+1} = -K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right), \quad (\text{D.34})$$

$$A_{2i,2i+2} = -I_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right), \quad (\text{D.35})$$

$$D_{2i} = 0, \quad (\text{D.36})$$

Substituindo na condição de contorno (D.18) a equação (D.25),

$$\begin{aligned} & -\lambda_{D_i} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i-1} + \lambda_{D_i} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i} + \\ & \lambda_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} K_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) C_{2i+1} - \lambda_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} I_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) C_{2i+2} = 0; \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

as seguintes definições serão feitas para  $i = 1, \dots, N$ :

$$A_{2i+1,2i-1} = -\lambda_{D_i} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right), \quad (\text{D.38})$$

$$A_{2i+1,2i} = \lambda_{D_i} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right), \quad (\text{D.39})$$

$$A_{2i+1,2i+1} = \lambda_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} K_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right), \quad (\text{D.40})$$

$$A_{2i+1,2i+2} = -\lambda_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} I_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right), \quad (\text{D.41})$$

$$D_{2i+1} = 0. \quad (\text{D.42})$$

Para o caso de reservatório infinito, substituindo a equação (D.20) na solução geral, equação (D.24) com índice  $i = N + 1$  correspondente à região não atingida pela água injetada,

$$C_{2N+2} = 0; \quad (\text{D.43})$$



nesse caso, o sistema linear é composto por  $2N + 1$  equações, já que a constante de integração  $C_{2N+2}$  foi obtida explicitamente. Entretanto, para usarmos o mesmo algoritmo com outros tipos de condição de contorno externa,

$$A_{2N+2,2N+1} = 0, \quad (\text{D.44})$$

$$A_{2N+2,2N+2} = 1, \quad (\text{D.45})$$

$$D_{2N+2} = 0. \quad (\text{D.46})$$

Para reservatório limitado com manutenção de pressão na fronteira externa, substituindo a equação (D.21) em (D.24),

$$K_0 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) C_{2N+1} + I_0 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) C_{2N+2} = 0; \quad (\text{D.47})$$

$$A_{2N+2,2N+1} = K_0 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right), \quad (\text{D.48})$$

$$A_{2N+2,2N+2} = I_0 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right), \quad (\text{D.49})$$

$$D_{2N+2} = 0. \quad (\text{D.50})$$

No caso de reservatório limitado com vazão nula na fronteira externa, substituindo (D.22) em (D.25),

$$-K_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) C_{2N+1} + I_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) C_{2N+2} = 0; \quad (\text{D.51})$$

$$A_{2N+2,2N+1} = -K_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right), \quad (\text{D.52})$$

$$A_{2N+2,2N+2} = I_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right), \quad (\text{D.53})$$

$$D_{2N+2} = 0. \quad (\text{D.54})$$

A matriz  $[A_{jk}]_{2N+2 \times 2N+2}$  de coeficientes do sistema de equações lineares possui estrutura pentadiagonal, ou tridiagonal por blocos  $2 \times 2$ :

$$\left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} A_{2n+1,2n+1} & A_{2n+1,2n+2} \\ A_{2n+2,2n+1} & A_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{23} & A_{24} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{45} & A_{46} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{53} & A_{54} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ \vdots \\ C_{2n+1} \\ C_{2n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D.55)$$

Bratvold e Horne [16] utilizaram o esquema tridiagonal por blocos  $2 \times 2$  para resolver o problema de testes de decaimento de pressão. Nanba e Horne [18], ao que tudo indica, resolveram o sistema na forma pentadiagonal. É possível, entretanto, simplificar o sistema (D.55) usando combinações lineares entre duas linhas consecutivas, à exceção das primeira e última linhas:

$$B_{2i,2i-1} = A_{2i+1,2i+2}A_{2i,2i+2} - A_{2i,2i+2}A_{2i+1,2i-1}, \quad (D.56)$$

$$B_{2i,2i} = A_{2i+1,2i+2}A_{2i,2i} - A_{2i,2i+2}A_{2i+1,2i}, \quad (D.57)$$

$$B_{2i,2i+1} = A_{2i+1,2i+2}A_{2i,2i+1} - A_{2i,2i+2}A_{2i+1,2i+1}, \quad (D.58)$$

$$B_{2i+1,2i} = A_{2i,2i-1}A_{2i+1,2i} - A_{2i+1,2i-1}A_{2i,2i}, \quad (D.59)$$

$$B_{2i+1,2i+1} = A_{2i,2i-1}A_{2i+1,2i+1} - A_{2i+1,2i-1}A_{2i,2i+1}, \quad (D.60)$$

$$B_{2i+1,2i+2} = A_{2i,2i-1}A_{2i+1,2i+2} - A_{2i+1,2i-1}A_{2i,2i+2}, \quad (D.61)$$



## Apêndice E

### Modelo com Múltiplas Regiões: Poço Finito - Vazão Variável

#### Formulação Matemática

<sup>7</sup> A abordagem adotada na representação matemática do reservatório é basicamente a mesma utilizada no modelo discutido no Apêndice D. Algumas modificações nas definições de variáveis adimensionais e no método de solução das equações da difusividade hidráulica são necessárias, pois as condições iniciais do problema deixam de ser homogêneas [18].

#### Variáveis Adimensionais

Pressão e tempo adimensionais são definidos como:

$$p_D = -\frac{2\pi\hat{\lambda}_w h(p^{n+1} - p^n)}{\hat{q}}, \quad (\text{E.1})$$

$$t_D = \frac{\hat{\eta}_w(t^{n+1} - t^n)}{r_w^2}, \quad (\text{E.2})$$

$t^{n+1} > t^n.$

onde  $p^n$  e  $p^{n+1}$  são respectivamente, as pressões nos tempos  $t^n$  e  $t^{n+1}$ ; e  $\hat{q}$  é uma vazão de referência. Supõe-se que a vazão de injeção permanece constante durante o intervalo entre os tempos  $t^n$  e  $t^{n+1}$ .

As demais variáveis adimensionais são definidas como no Apêndice D.

#### Equação da Difusividade e Condições de Contorno

Continuam válidas as equações da difusividade hidráulica e as condições de contorno nas interfaces e externas definidas no Apêndice D.

---

<sup>7</sup>Modelo apresentado por Nanba e Horne [18].

A condição inicial passa a ser dada por:

$$p_D(r_D, 0) = g(r_D), \quad (\text{E.3})$$

onde  $g(r_D)$  é a distribuição de pressão no reservatório, no tempo  $t^n$ .

A condição de contorno interna é definida como:

$$\left. \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = -\frac{q^{n+1}}{\hat{q}}, \quad (\text{E.4})$$

onde  $q^{n+1}$  é a vazão de injeção (constante) durante o intervalo de tempo entre os instantes  $t^n$  e  $t^{n+1}$ .

### Solução Semi-Analítica

Aplicando transformada de Laplace à equação diferencial parcial (D.8) e usando a condição inicial (E.3), obtém-se:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left( r_D \frac{d\tilde{p}_{Di}}{dr_D} \right) = \frac{1}{\eta_{Di}} [s\tilde{p}_{Di} - g(r_D)]; \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (\text{E.5})$$

Desenvolvendo a equação (E.5), chega-se a:

$$\frac{d^2 \tilde{p}_{Di}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\tilde{p}_{Di}}{dr_D} - \frac{s}{\eta_{Di}} \tilde{p}_{Di} = -\frac{g(r_D)}{\eta_{Di}}, \quad i = 1, \dots, N + 1; \quad (\text{E.6})$$

que é uma equação diferencial ordinária do tipo Bessel modificada, não homogênea. A equação homogênea associada é dada pela equação (D.23), e sua solução geral é a equação (D.24).

Aplicando transformada de Laplace à nova condição de contorno interna, equação (E.4), obtém-se:

$$\left. \frac{d\tilde{p}_{D1}}{dr_D} \right|_{r_D=1} = -\frac{1}{s} \frac{q^{n+1}}{\hat{q}}. \quad (\text{E.7})$$

As transformadas de Laplace das demais condições de contorno são as mesmas citadas no Apêndice D, equações (D.18) a (D.22).

As duas soluções particulares e linearmente independentes da equação diferencial ordinária homogênea associada à equação (E.6) são:

$$\bar{p}_{D_i}^{1h} = K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right), \quad (\text{E.8})$$

$$\bar{p}_{D_i}^{2h} = I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right). \quad (\text{E.9})$$

Usando a técnica de variação de parâmetros, é possível encontrar uma solução particular para a equação não homogênea do tipo:

$$\tilde{p}_{D_i}^p = f_i(r_D) \bar{p}_{D_i}^{1h} + h_i(r_D) \bar{p}_{D_i}^{2h}, \quad (\text{E.10})$$

onde as funções  $f_i(r_D)$  e  $h_i(r_D)$  são dadas por:

$$f_i(r_D) = \int_{r_{D_1}^*}^{r_D} \frac{g(r_D)}{\eta_{D_i}} \bar{p}_{D_i}^{2h}(r_D) \frac{1}{W} dr_D, \quad (\text{E.11})$$

$$h_i(r_D) = - \int_{r_{D_2}^*}^{r_D} \frac{g(r_D)}{\eta_{D_i}} \bar{p}_{D_i}^{1h}(r_D) \frac{1}{W} dr_D, \quad (\text{E.12})$$

$r_{D_1}^*$  e  $r_{D_2}^*$  são limites de integração arbitrários e  $W$  é o Wronskiano das soluções particulares da equação homogênea associada, dado por:

$$W(r_D)(\bar{p}_{D_i}^{1h}(r_D), \bar{p}_{D_i}^{2h}(r_D)) = \begin{vmatrix} K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) & I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) \\ -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) & \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) \end{vmatrix}. \quad (\text{E.13})$$

Calculando o determinante em (E.13):

$$W(r_D)(\bar{p}_{D_i}^{1h}(r_D), \bar{p}_{D_i}^{2h}(r_D)) = \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \left[ K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) + K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) \right], \quad (\text{E.14})$$

mas, sabendo que, para um  $\nu$  qualquer:

$$W(z)(K_\nu(z), I_\nu(z)) = K_\nu(z)I_{\nu+1}(z) + K_{\nu+1}(z)I_\nu(z) = \frac{1}{z}; \quad (\text{E.15})$$

o Wronskiano (E.14) pode ser simplificado para:

$$W(r_D)(\bar{p}_{D_i}^{1h}(r_D), \bar{p}_{D_i}^{2h}(r_D)) = \frac{1}{r_D}. \quad (\text{E.16})$$

Logo, utilizando limites de integração coincidentes com as interfaces entre regiões, as funções  $f_i(r_D)$  e  $h_i(r_D)$  são dadas por:

$$f_i(r_D) = \frac{1}{\eta_{D_i}} \int_{r_{D_i}}^{r_D} r_D g(r_D) I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) dr_D, \quad (\text{E.17})$$

$$h_i(r_D) = \frac{1}{\eta_{D_i}} \int_{r_D}^{r_{D_i+1}} r_D g(r_D) K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) dr_D. \quad (\text{E.18})$$

A solução geral do problema não homogêneo pode ser expressa como a soma da solução geral da equação homogênea associada (D.24) e da solução particular determinada nas equações (E.10), (E.17) e (E.18):

$$\begin{aligned} \bar{p}_{D_i} = & K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i-1} + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i} + \\ & + K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i(r_D) + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) h_i(r_D). \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Derivando a equação (E.19) em relação a  $r_D$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_{D_i}}{dr_D} = & -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i-1} + \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i} \\ & -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i(r_D) + K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i'(r_D) \\ & +\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) h_i(r_D) + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) h_i'(r_D), \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

como:

$$K_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i'(r_D) + I_0 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) h_i'(r_D) = 0,$$

a equação (E.20) fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_{D_i}}{dr_D} = & -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i-1} + \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i} \\ & -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} K_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i(r_D) + \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} I_1 \left( r_D \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) h_i(r_D). \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Aplicando a condição de contorno interna (E.7) à equação (E.21) para a região de índice  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} \right) C_1 + \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} \right) C_2 = \\ & \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} \right) f_1(1) + \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} \right) h_1(1) - \frac{1}{s} \frac{q^{n+1}}{\hat{q}}. \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Comparando as equações (D.27) e (E.22), verifica-se que os coeficientes  $A_{11}$  (da constante de integração  $C_1$ ) e  $A_{12}$  (da constante de integração  $C_2$ ) no primeiro termo de ambas as equações não foram modificados. Como  $f_1(1) = 0$ , o termo independente  $D_1$  é:

$$D_1 = \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_1}}} \right) h_1(1) - \frac{1}{s} \frac{q^{n+1}}{\hat{q}}. \quad (\text{E.23})$$

Com a condição de continuidade de pressão nas interfaces, equação (D.19), e a solução geral do problema não homogêneo, (E.19), obtém-se:

$$\begin{aligned} & K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i-1} + I_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) C_{2i} - \\ & -K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) C_{2i+1} - I_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) C_{2i+2} = \\ & = -K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i(r_{D_{i+1}}) + I_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) h_{i+1}(r_{D_{i+1}}); \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

logo, comparando as equações (D.31) e (E.24), chega-se à conclusão que apenas o termo independente  $D_{2i}$  foi alterado:

$$D_{2i} = -K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_i}}} \right) f_i(r_{D_{i+1}}) + I_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) h_{i+1}(r_{D_{i+1}}). \quad (\text{E.25})$$



Aplicando a condição de continuidade de vazão nas interfaces entre regiões, equação (D.18), à equação (E.20),

$$\begin{aligned}
& -\lambda_{Di}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}K_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}\right)C_{2i-1} + \lambda_{Di}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}I_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}\right)C_{2i} + \\
& \lambda_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}K_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}\right)C_{2i+1} - \lambda_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}I_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}\right)C_{2i+2} = \\
& = \lambda_{Di}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}K_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}\right)f_i(r_{Di+1}) + \lambda_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}I_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}\right)h_{i+1}(r_{Di+1});
\end{aligned} \tag{E.26}$$

novamente, comparando as equações (D.37) e (E.26), chega-se à conclusão que apenas o termo independente  $D_{2i+1}$  foi alterado:

$$\begin{aligned}
D_{2i+1} & = \lambda_{Di}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}K_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di}}}\right)f_i(r_{Di+1}) + \\
& + \lambda_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}I_1\left(r_{Di+1}\sqrt{\frac{s}{\eta_{Di+1}}}\right)h_{i+1}(r_{Di+1}).
\end{aligned} \tag{E.27}$$

Para o caso de reservatório infinito, aplicando a condição de contorno externa (D.20) à solução geral do problema não homogêneo (E.19) para a região mais externa, de índice  $i = N + 1$ ,

$$C_{2N+2} = 0, \tag{E.28}$$

$$D_{2N+2} = 0. \tag{E.29}$$

Para reservatório limitado com manutenção da pressão externa, equação (D.21):

$$\begin{aligned}
& K_0\left(r_{eD}\sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}}\right)C_{2N+1} + I_0\left(r_{eD}\sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}}\right)C_{2N+2} = \\
& = -K_0\left(r_{eD}\sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}}\right)f_{N+1}(r_{eD}) - I_0\left(r_{eD}\sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}}\right)h_{N+1}(r_{eD});
\end{aligned} \tag{E.30}$$

$$D_{2N+2} = -K_0\left(r_{eD}\sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}}\right)f_{N+1}(r_{eD}) - I_0\left(r_{eD}\sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}}\right)h_{N+1}(r_{eD}). \tag{E.31}$$

Para reservatório limitado com vazão nula na fronteira externa, aplicando a equação (D.22) na derivada da solução geral, equação (E.21):

$$\begin{aligned} & -K_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) C_{2N+1} + I_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) C_{2N+2} = \\ & = K_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) f_{N+1}(r_{eD}) - I_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) h_{N+1}(r_{eD}); \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

$$D_{2N+2} = K_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) f_{N+1}(r_{eD}) - I_1 \left( r_{eD} \sqrt{\frac{s}{\eta_{DN+1}}} \right) h_{N+1}(r_{eD}). \quad (\text{E.33})$$

Dessa forma, o sistema linear que determina as constantes de integração é semelhante ao sistema linear citado no Apêndice D, eq. (D.55). Mantidos os elementos da matriz de coeficientes  $A_{jk}$ , os elementos do vetor de termos independentes passam a ser definidos pelas equações (E.23), (E.25), (E.27) e (E.29) (ou (E.31) ou (E.33), a depender do tipo de condição de contorno externa) para o caso de vazão variável.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{23} & A_{24} \\ A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \\ A_{53} & A_{54} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{45} & A_{46} \\ A_{55} & A_{56} \\ A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} A_{2n+1,2n+1} & A_{2n+1,2n+2} \\ A_{2n+2,2n+1} & A_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ \vdots \\ C_{2n+1} \\ C_{2n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ \vdots \\ D_{2N+1} \\ D_{2N+2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.34})$$

Ao aplicar transformações lineares para simplificar o sistema (E.34), reduzindo-o a um sistema de equações lineares com matriz de coeficientes  $[ B_{jk} ]$  tridiagonal, o vetor de termos independentes  $[ D'_j ]$  correspondente terá seus elementos definidos por:

$$D'_1 = D_1, \quad (\text{E.35})$$

$$D'_{2i} = -\lambda_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} I_1 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) D_{2i} + K_0 \left( r_{D_{i+1}} \sqrt{\frac{s}{\eta_{D_{i+1}}}} \right) D_{2i+1}, \quad (\text{E.36})$$



## Apêndice F

### Modelo com Múltiplas Regiões: Poço Infinitesimal - Vazão Constante

#### Formulação Matemática

Esse modelo é uma generalização do modelo de Ramey [4] para deslocamento tipo pistão, apresentado no Apêndice B, na qual os efeitos da distribuição de mobilidade atrás da frente de injeção são simulados através da discretização da porção do reservatório atingida pela água em  $N$  regiões de propriedades constantes.

As variáveis adimensionais utilizadas nessa formulação são as mesmas do apêndice D.

#### Equação da Difusividade e Condições de Contorno

O reservatório é representado matematicamente por  $N+1$  equações diferenciais parciais, incluindo a região não atingida pela água, da mesma forma como no Apêndice D:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{Di}} \frac{\partial p_{Di}}{\partial t_D}; \quad i = 1, \dots, N+1; \quad (\text{F.1})$$

$$r_{Di} < r_D < r_{Di+1}.$$

A condição de contorno interna, considerando o poço como uma fonte infinitesimal, é dada por:

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} = -1. \quad (\text{F.2})$$

As condições de contorno nas interfaces entre as regiões necessárias para manter continuidade de vazão e de pressão nas mesmas são:

$$\lambda_{D_i} \frac{\partial p_{D_i}}{\partial r_D} \Big|_{r_{D_{i+1}}} = \lambda_{D_{i+1}} \frac{\partial p_{D_{i+1}}}{\partial r_D} \Big|_{r_{D_{i+1}}}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (\text{F.3})$$

$$p_{D_i}(r_{D_{i+1}}, t_D) = p_{D_{i+1}}(r_{D_{i+1}}, t_D), \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{F.4})$$

São utilizados dois tipos de condição de contorno externa:

- reservatório infinito:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D_{N+1}} = 0, \quad (\text{F.5})$$

- reservatório limitado com manutenção de pressão:

$$p_{D_{N+1}}(r_{eD}, t_D) = 0. \quad (\text{F.6})$$

A condição inicial que estabelece reservatório em equilíbrio imediatamente antes do início da injeção é representada por  $N + 1$  equações:

$$p_{D_i}(r_D, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (\text{F.7})$$

## Solução Semi-Analítica

Aplicando a transformada de Boltzmann  $y = r_D^2/4t_D$  à equação diferencial parcial (F.1) chega-se a:

$$y \frac{d^2 p_{D_i}}{dy^2} + \left(1 + \frac{y}{\eta_{D_i}}\right) \frac{dp_{D_i}}{dy} = 0; \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{F.8})$$

$$y_{D_i} < y < y_{D_{i+1}}$$

A equação (F.8) pode ser resolvida por separação de variáveis e integração, e sua solução geral é dada por:

$$p_{Di} = C_{2i-1} E_1 \left( \frac{y}{\eta_{Di}} \right) + C_{2i}, \quad i = 1, \dots, N+1 \quad (\text{F.9})$$

onde  $E_1$  é a função integral exponencial. Derivando a equação (F.9),

$$p'_{Di} = -C_{2i-1} \frac{e^{-\frac{y}{\eta_{Di}}}}{y} \quad (\text{F.10})$$

onde  $p'_{Di}$  é a derivada de  $p_{Di}$  em relação a  $y$ .

Aplicando a transformada de Boltzmann às condições de contorno, tem-se: para a condição de contorno interna,

$$\lim_{y \rightarrow 0} y p'_{D1} = -\frac{1}{2}; \quad (\text{F.11})$$

para as condições de contorno nas interfaces,

$$p_{Di}(y = y_{i+i}) = p_{Di+1}(y = y_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{F.12})$$

$$\lambda_{Di} p'_{Di}|_{y=y_{i+i}} = \lambda_{Di+1} p'_{Di+1}|_{y=y_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (\text{F.13})$$

e, para os dois tipos de condição de contorno externa considerados, obtêm-se:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_{DN+1} = 0 \quad (\text{F.14})$$

para reservatório infinito, e:

$$p_{DN+1}|_{y=y_e} = 0 \quad (\text{F.15})$$

para reservatório com manutenção de pressão no limite externo, onde  $y_e$  é a variável de Boltzmann calculada no raio adimensional externo do reservatório.

Aplicando a condição de contorno interna, (F.11), à derivada da solução geral (F.10),



$$A_{i,i} = 1, \quad i = 1, \dots, N + 1, \quad (\text{F.22})$$

$$A_{i,i+1} = -1, \quad i = 1, \dots, N + 1; \quad (\text{F.23})$$

e os termos independentes  $D_{2i}$ ,

$$D_{2i} = -E_1 \left( \frac{y_{i+1}}{\eta_{D_i}} \right) C_{2i-1} + E_1 \left( \frac{y_{i+1}}{\eta_{D_{i+1}}} \right) C_{2i+1}, \quad (\text{F.24})$$

$$i = 1, \dots, N.$$

e, a depender da condição de contorno externa,

$$D_{2N+2} = 0 \quad (\text{F.25})$$

para reservatório infinito, e

$$D_{2N+2} = -E_1 \left( \frac{y_e}{\eta_{D_{i+1}}} \right) C_{2N+1}, \quad (\text{F.26})$$

para reservatório limitado com manutenção de pressão na fronteira externa.

A estrutura triangular da matriz de coeficientes do sistema de equações lineares (F.21) facilita a sua solução numérica. Após determinar as constantes de integração ímpares  $C_{2i+1}$  usando (F.18), basta um algoritmo de substituição regressiva para determinar as constantes de integração pares,  $C_{2N}$ .

Outra característica interessante é a de que, como as posições das interfaces entre regiões,  $y_i$ , são calculadas através da equação de Buckley e Leverett, todas as constantes de integração só precisam ser calculadas em um único tempo  $t_D$  caso a condição de contorno externa seja a de reservatório infinito. No caso de reservatório limitado,  $D_{2N+2}$  deverá ser recalculado a cada tempo  $t_D$  pois,

$$y_e = \frac{r_e^2 D}{4t_D} \quad (\text{F.27})$$



como  $r_{eD}$  é constante,  $y_e$  variará a cada tempo  $t_D$ . Com isso, torna-se necessário recalcular as constantes de integração pares.

Apesar de ser uma solução semi-analítica, na expressão para pressão no poço, usando a solução geral (F.9) para  $i = 1$  e  $y = 1/4t_D$ ,

$$p_{wD} = \frac{1}{2}E_1\left(\frac{1}{4t_D}\right) + C_2 \quad (\text{F.28})$$

a não analiticidade fica por conta da determinação da constante de integração  $C_2$ , implícita na solução do sistema (F.21) e relacionada a efeitos de película aparentes devido à razão de mobilidades, movimento da frente de injeção e distribuição de mobilidade atrás da frente.