



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Mecânica

BRUNO PELISSON CHIMETTA

**Soluções assintótica e numérica para o surgimento
de ondas superficiais em escoamentos
gravitacionais de filmes líquidos**

Campinas

2021

BRUNO PELISSON CHIMETTA

**Soluções assintótica e numérica para o surgimento
de ondas superficiais em escoamentos
gravitacionais de filmes líquidos**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Térmica e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELO ALUNO BRUNO PELISSON CHIMETTA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ERICK DE MORAES FRANKLIN.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C44s Chimetta, Bruno Pelisson, 1988-
Soluções assintótica e numérica para o surgimento de ondas superficiais em escoamentos gravitacionais de filmes líquidos / Bruno Pelisson Chimetta. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Erick de Moraes Franklin.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Filmes líquidos. 2. Fluido não-Newtoniano. 3. Ondas de superfície. 4. Expansões assintóticas. 5. Galerkin, Métodos de. 6. Polinômios de Chebyshev. I. Franklin, Erick de Moraes, 1974-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Asymptotic and numerical solutions for the onset of surface waves in gravitational flows of liquid films

Palavras-chave em inglês:

Liquid films

Non-Newtonian fluid

Surface waves

Asymptotic expansions

Galerkin methods

Chebyshev polynomials

Área de concentração: Térmica e Fluídos

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Erick de Moraes Franklin [Orientador]

Marcos Akira D'Ávila

Rafael Gabler Gontijo

Igor Braga de Paula

André von Borries Lopes

Data de defesa: 26-01-2021

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-7940-1760>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3634545392588863>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

TESE DE DOUTORADO

**Soluções assintótica e numérica para o surgimento
de ondas superficiais em escoamentos
gravitacionais de filmes líquidos**

Autor: Bruno Pelisson Chimetta

Orientador: Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese de Doutorado:

Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin

Departamento de Energia/Faculdade de Engenharia Mecânica/Unicamp

Prof. Dr. Rafael Gabler Gontijo

Departamento de Engenharia Mecânica/Faculdade de Tecnologia/UnB

Prof. Dr. Andre von Borries Lopes

Departamento de Engenharia Mecânica/Faculdade de Tecnologia/UnB

Prof. Dr. Marcos Akira D'Ávila

**Departamento de Engenharia de Manufatura e Materiais/Faculdade de Engenharia
Mecânica/Unicamp**

Prof. Dr. Igor Braga de Paula

Departamento de Engenharia Mecânica/Centro Técnico Científico/PUC-Rio

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 26 de Janeiro de 2021

DEDICATÓRIA

A você, que por interesse ou acaso decidiu ler estas páginas, dedico.

*"Tudo tem suas maravilhas, até a
escuridão e o silêncio... e eu
aprendi que, seja qual for o estado
em que eu me encontre, nele
estarei contente".*

Helen Keller

AGRADECIMENTOS

Aos meu pais, por nunca duvidarem, mesmo eu deixando de ler o verso de uma prova.

Ao meu irmão Henrique, por me provar, a cada conversa, que honestidade intelectual ainda existe em nosso tempo.

A minha esposa Camile, por me mostrar que, mesmo em tempos difíceis e incertos, a vida ainda pode ser gentil. $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2y^3$

Ao meu orientador Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin, por toda ajuda e paciência ao longo de todos esses anos de trabalho.

A todos meu colegas da FEM, em especial ao Ednir e Marcos, por toda ajuda e pelas agradáveis conversas nos corredores da faculdade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise do surgimento de instabilidades em escoamentos de filmes líquidos conduzidos pela gravidade sobre um plano inclinado. Essas instabilidades podem evoluir para ondas de superfície, que geralmente surgem nesse tipo de escoamento. A reologia do fluido é dada pelo modelo de Carreau-Yasuda, uma descrição mais geral na classe de fluidos Newtonianos generalizados, que se aplica a diferentes tipos de fluidos. Esse conhecimento é útil na indústria, uma vez que os filmes líquidos ajudam a remover o calor de superfícies sólidas ou reduzir o atrito entre fluidos de alta viscosidade e paredes de tubos, mas geralmente aparecem na natureza como escoamentos de rios, lamas, geleiras e lava, por exemplo. Soluções analíticas e numéricas são apresentadas para o problema do escoamento base e da estabilidade temporal. Para obter o estado base e as condições críticas para o início das instabilidades, dois conjuntos de expansões assintóticas são propostos na abordagem analítica, tornando possível encontrar quatro novas equações que descrevem o escoamento base, a velocidade de fase e a taxa de crescimento de instabilidades. Essas equações surgem como soluções do desenvolvimento assintótico no ambiente de programação Wolfram Mathematica. Esses resultados levam a uma equação para o número crítico de Reynolds, que determina as condições para o início das instabilidades do escoamento. As soluções numéricas foram implementadas no ambiente MATLAB, sendo o problema do estado base resolvido utilizando-se a função interna `bvp4c` do MATLAB. Quanto ao problema de estabilidade temporal, foram utilizadas expansões de polinômios de Chebyshev para discretizações da equação de Orr-Sommerfeld e das condições de contorno, e um método de Galerkin para resolver o problema de autovalor generalizado. Também foi implementado um método de Iteração Inversa, com o objetivo de aumentar a precisão e melhorar o tempo computacional quando várias soluções eram necessárias. Os resultados são comparados com trabalhos anteriores para validação, com uma comparação direta entre os resultados apresentados nas abordagens analítica e numérica.

Palavras-chave: Ondas de superfície, Fluido de Carreau-Yasuda, Solução assintótica, Polinômios de Chebyshev, Método de Galerkin.

ABSTRACT

This work presents an analysis of the onset of instabilities in liquid films driven by gravity over an inclined plane. These instabilities may evolve to surface-waves, that usually appear in film flows. The fluid rheology is given by the Carreau-Yasuda model, a more general description in the class of generalized Newtonian fluid, that applies to different types of fluids. Such knowledge is helpful in industry, once liquid films help to remove the heat from solid surfaces or reduce friction between high viscosity fluids and pipe walls, but often appears in nature as river, mud, glacier and lava flows for example. Analytical and numerical solutions are presented for the base flow and temporal stability problem. In order to obtain the base state and critical conditions for the onset of instabilities, two sets of asymptotic expansions are proposed in the analytical approach, from which it is possible to find four new equations describing the reference flow, phase speed and growth rate of instabilities. These equations were obtained as solutions from the asymptotic development in the Wolfram Mathematica workspace. These results lead to an equation for the critical Reynolds number, which dictates the conditions for the onset of the instabilities in a falling liquid film. The numerical solutions were implemented in the MATLAB environment, where the base state was solved using the MATLAB built-in function `bvp4c`. As for the temporal stability problem it was used Chebyshev polynomials expansions for discretizations of the Orr-Sommerfeld equation and the boundary conditions, and a Galerkin method for solving the generalized eigenvalue problem. It was also implemented an Inverse Iteration method, in order to increase accuracy and improve computational time when several solutions were necessary. Results are compared with previous works for validation, a direct comparison between analytical and numerical approach was made for accuracy test of the asymptotic solutions.

Keywords: Surface waves, Carreau-Yasuda fluid, Asymptotic solution, Chebyshev polynomials, Galerkin method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|-----|
| Figura 3.1 – Esboço do problema físico de um escoamento gravitacional de um filme líquido. | 46 |
| Figura 6.1 – Resultado de \bar{h} em Eq. (4.35) para fluidos <i>shear-thinning</i> (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$ | 124 |
| Figura 6.2 – Resultado de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) em Eq. (4.35) para fluidos <i>shear-thinning</i> (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$ | 125 |
| Figura 6.3 – Resultados para o perfil de velocidades normalizado e a viscosidade para dois fluidos <i>shear-thinning</i> com $L = 0,4$ e $n = 0,02$ | 126 |
| Figura 6.4 – Resultado de \bar{h} em Eq. (4.35) para fluidos <i>shear-thickening</i> (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$ | 126 |
| Figura 6.5 – Resultado de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) em Eq. (4.35) para fluidos <i>shear-thickening</i> (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$ | 127 |
| Figura 6.6 – Resultados para o perfil de velocidades normalizado e a viscosidade para um fluido <i>shear-thickening</i> com $L = 0,4$ e $n = 2$ | 128 |
| Figura 6.7 – Resultado numérico de \bar{h} para fluidos <i>shear-thinning</i> (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$ | 129 |
| Figura 6.8 – Resultado numérico de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) para fluidos <i>shear-thinning</i> (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$ | 129 |
| Figura 6.9 – Resultado numérico para o perfil de velocidades normalizados, e viscosidade, de dois fluidos <i>shear-thinning</i> com $L = 0,4$ e $n = 0,02$ | 130 |
| Figura 6.10–Resultado numérico de \bar{h} para fluidos <i>shear-thickening</i> (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$ | 131 |
| Figura 6.11–Resultado numérico de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) para fluidos <i>shear-thickening</i> (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$ | 131 |
| Figura 6.12–Resultado numérico para o perfil de velocidades normalizados, e viscosidade, de dois fluidos <i>shear-thickening</i> com $L = 0,4$ e $n = 2$ | 132 |
| Figura 6.13–Teste numérico para o a viscosidade de dois fluidos <i>shear-thinning</i> com $L = 0,4$ e $n = 0,02$ | 133 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.14–Teste numérico para o a viscosidade de dois fluidos <i>shear-thickening</i> com $L = 0,4$ e $n = 2$ | 134 |
| Figura 6.15–Espectro dos autovalores para $N = 10, 30, 50, 70$ para um fluido <i>shear-thinning</i> , com parâmetros $a = 1,88, n = 0,02, L = 0,4$ | 137 |
| Figura 6.16–Espectro dos autovalores para $N = 10, 30, 50, 70$ para um fluido <i>shear-thickening</i> , com parâmetros $a = 0,81, n = 2, L = 0,4$ | 138 |
| Figura 6.17–Taxa de crescimento σ para um fluido <i>shear-thinning</i> , com parâmetros $a = 1,88, n = 0,02, L = 0,4, \theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$ | 139 |
| Figura 6.18–Taxa de crescimento σ para um fluido newtoniano, com parâmetros $\theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$ | 139 |
| Figura 6.19–Taxa de crescimento σ para um fluido <i>shear-thickening</i> , com parâmetros $a = 1,88, n = 2, L = 0,4, \theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$ | 140 |
| Figura 6.20–Diagrama de estabilidade neutra em função do número de Reynolds com parâmetros $a = 2, n = 0,5, L = 0,4, We = 0,001$ e $\theta = 25^\circ$. Curvas com valores de σ positivos e negativos representam regiões instáveis e estáveis respectivamente. | 141 |
| Figura 6.21–Comparação das curvas de estabilidade neutra ($\sigma = 0$) entre as soluções assintótica e numérica. Os parâmetros utilizados são $a = 2, n = 0,5, L = 0,4, We = 0,001$ e $\theta = 25^\circ$ | 141 |
| Figura 6.22–Diagrama de estabilidade para os casos <i>shear-thinning</i> , newtoniano e <i>shear-thickening</i> com parâmetros $a = 1,88, L = 0,4, \theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$ | 142 |

LISTA DE TABELAS

- Tabela 6.1 – Resultados numéricos para o autovalor convergido variando o número de polinômios de Chebyshev. Todos os valores foram obtidos com a função interna *eig* com o software MATLAB. Os parâmetros utilizados foram $a = 2$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e $Re = 1$. Resultado assintótico possui valor $c = c_0 + \alpha c_1 = 2.183925792114037 - 0.061487668344900i$ 135
- Tabela 6.2 – Resultados numéricos para o autovalor convergido variando o número de polinômios de Chebyshev. Todos os valores foram obtidos com o método de iteração inversa implementado com o software MATLAB. Os parâmetros utilizados foram $a = 2$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e $Re = 1$. Resultado assintótico possui valor $c = c_0 + \alpha c_1 = 2.183925792114037 - 0.061487668344900i$ 136
- Tabela 6.3 – Resultados numéricos para o autovalor convergido variando o número de polinômios de Chebyshev. Todos os valores foram obtidos com a função interna *eig* com o software MATLAB. Os parâmetros utilizados foram $a = 1$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e $Re = 1$. Resultado assintótico possui valor $c = c_0 + \alpha c_1 = 1.780083823051904 - 0.044532502999804i$ 137

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------|---------------------------------------|
| ρ | Densidade do fluido |
| \vec{v} | Vetor velocidade total |
| t | Tempo |
| θ | Ângulo de inclinação do plano |
| Π | Tensão total |
| g | Gravidade |
| ∂ | Operador derivada parcial |
| ∇ | Operador nabla |
| p | Pressão |
| I | Matriz identidade |
| τ | Tensão extra |
| μ | viscosidade de cisalhamento |
| ϑ | viscosidade aparente |
| κ | curvatura da interface |
| x | Componente espacial |
| y | Componente espacial |
| z | Componente espacial |
| u | Componente de velocidade na direção x |
| v | Componente de velocidade na direção y |
| w | Componente de velocidade na direção z |
| \hat{e} | Versor de direção |

| | |
|----------------|--|
| $\dot{\gamma}$ | Taxa de cisalhamento |
| η | Função viscosidade (modelo Carreau-Yasuda) |
| h | Espessura do filme líquido |
| ξ | Posição da interface |
| η_0 | Limite inferior da função viscosidade (superfície) |
| η_∞ | Limite superior da função viscosidade (parede) |
| n | Parâmetro que define a região de lei-de-potência de η |
| a | Parâmetro que controla a curvatura entre η_0 e a região de lei-de-potência |
| λ | Tempo de relaxação do material |
| h_s | Escala característica do problema (espessura do filme líquido) |
| Q | Vazão |
| Re | Número de Reynolds |
| Fr | Número de Froude |
| U | Perfil de velocidades (estado base) |
| P | Pressão (estado base) |
| \hat{u} | Perturbação para a componente u do campo de velocidades |
| \hat{v} | Perturbação para a componente v do campo de velocidades |
| \hat{p} | Perturbação para a pressão |
| Σ | Somatório |
| $\binom{a}{k}$ | Coeficiente binomial (número de combinações de a elementos tomados k a k) |
| ϵ | Termo viscoso (linearizado) |
| $\hat{\Psi}$ | Função corrente (perturbação) |

| | |
|---------------------------|---|
| $\tilde{\Psi}$ | Amplitude das perturbações |
| e | Função exponencial |
| α | Número de onda adimensional |
| c | Velocidade complexa da onda (também representa o autovalor) |
| H | Representação geral da interface |
| $\tilde{\xi}$ | Amplitude das perturbações na interface |
| $\overrightarrow{\Sigma}$ | Tensor de tensões |
| γ | Tensão superficial |
| R | Raio de curvatura da interface |
| We | Número de Weber |
| D | Notação para derivada parcial |
| σ | Taxa de crescimento |
| T_n | Polinômio de Chebyshev de grau n |
| \prod | Produtório |
| \langle, \rangle | Produto interno |
| Φ | Autovetor |
| F | Coefficiente de Chebyshev |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Introdução | 17 |
| 2 | Revisão bibliográfica | 19 |
| 3 | Formulação do problema | 41 |
| 3.1 | Estado base | 41 |
| 3.2 | Estabilidade temporal | 54 |
| 4 | Soluções assintóticas | 71 |
| 4.1 | Solução do estado base | 71 |
| 4.2 | Solução para ondas longas | 79 |
| 5 | Método numérico | 89 |
| 5.1 | Polinômios de Chebyshev | 89 |
| 5.2 | Método de Galerkin | 93 |
| 5.3 | Formulação do estado base | 95 |
| 5.4 | Formulação do problema de estabilidade | 97 |
| 5.5 | Produtos internos para o método de Galerkin | 105 |
| 5.6 | O problema de autovalor generalizado | 119 |
| 5.7 | Método de iteração inversa | 120 |
| 6 | Análise das soluções | 122 |
| 7 | Conclusão | 143 |
| | Referências | 145 |

Apêndices **155**

APÊNDICE A Código fonte para o solver simbólico (Wolfram Mathematica 11.0.1.0) **156**

| | | |
|-------|--------------------------------------|-----|
| A.0.1 | Código para as soluções assintóticas | 156 |
|-------|--------------------------------------|-----|

APÊNDICE B Código fonte para a solução numérica (MATLAB R2017a) **162**

| | | |
|-------|---|-----|
| B.0.1 | Código para a solução do estado base e transformação para o espaço de Chebyshev | 162 |
|-------|---|-----|

| | | |
|-------|---|-----|
| B.0.2 | Código para a solução da equação de Orr-Sommerfeld (Carreau-Yasuda) | 175 |
|-------|---|-----|

1 INTRODUÇÃO

Escoamentos de filmes líquidos são fenômenos recorrentes em nosso dia-a-dia e estão presentes tanto na natureza quanto na indústria, seja a água escoando pelo para-brisa de um carro em um dia de chuva, ou uma camada de tinta sendo aplicada em uma superfície. Esta classe de escoamentos é principalmente induzida pela ação da gravidade, apresentando baixo número de Reynolds, com a presença de uma superfície líquida. Portanto, escoamentos de filmes líquidos possuem regime laminar em sua maioria porém, a medida que efeitos inerciais acentuam-se o surgimento de instabilidades superficiais torna-se possível. É sobre esta última característica que trataremos neste trabalho, realizando uma análise de estabilidade marginal, buscaremos por condições críticas para o surgimento dos primeiros modos instáveis em um escoamento gravitacional sobre um plano inclinado. O fluido considerado pertence a classe dos fluidos não-Newtonianos generalizados e obedece ao modelo reológico de Carreau-Yasuda. Este trabalho é dividido em sete capítulos incluindo esta introdução. No capítulo 2 o leitor pode encontrar uma breve revisão de alguns dos principais trabalhos dentro dos campos da reologia e da instabilidade hidrodinâmica. No capítulo 3, dividido em duas seções, encontram-se todas as principais equações para a formulação do estado base (não-perturbado) e para a estabilidade temporal (formulação temporal do estado perturbado). O capítulo 4 é dedicado as soluções assintóticas para ambos os estados do fluido. A solução do estado base foi desenvolvida com a manipulação algébrica das equações porém, a solução da estabilidade temporal (solução para ondas longas) envolve equações muito mais complexas e extensas, dessa forma um solver simbólico foi desenvolvido utilizando o software Wolfram Mathematica (versão 11.0.1.0), com o objetivo de facilitar o processo de obtenção destas equações. O código fonte e seus resultados encontram-se no apêndice A deste trabalho. O capítulo 5 começa com uma breve revisão sobre os principais resultados sobre polinômios de Chebyshev, assim como uma breve descrição do método de Galerkin. Em seguida são desenvolvidas todas as discretizações das equações dos estados base e perturbado, com isso torna-se possível prosseguir para a implementação numérica das equações. Para as soluções numéricas foi desenvolvido um solver de duas etapas (estados base e perturbado) utilizando o software MATLAB (versão R2017a). Todos os códigos fontes das funções utilizadas no solver numérico encontram-se no apêndice B. No capítulo 6 são discutidos todos os resultados apresentados ao longo do trabalho e também onde encontramos

os resultados do método numérico, assim como a interpretação física dos resultados obtidos. Fechando o trabalho temos a conclusão presente no capítulo 7, com os comentários finais sobre os resultados obtidos e possíveis extensões para futuros trabalhos.

Este texto foi redigido na tentativa de tratar, da forma mais didática possível, todas as etapas necessárias a fim de se obter os resultados que permitem a realização de uma análise da estabilidade do escoamento de um filme líquido. As principais passagens algébricas foram mantidas assim como algumas demonstrações. Mesmo assim, recomenda-se ao leitor uma investigação mais profunda das referências utilizadas, principalmente as fornecidas no capítulo 5. A escolha de manter tantos desenvolvimentos neste texto é uma tentativa de trazer mais clareza aos assuntos aqui tratados, e talvez fornecer ao leitor um primeiro contato com alguns conceitos que possam futuramente se tornar a base para o estudo de sistemas mais complexos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objeto de estudo deste trabalho, em essência, é a estabilidade do escoamento de um fluido não-Newtoniano. Porém, a junção do estudo da estabilidade hidrodinâmica e da reologia não surgiram de forma simultânea, e muito menos foram incorporados um ao outro rapidamente. Para entendermos esse processo devemos primeiro olhar separadamente a história do desenvolvimento destas áreas, assim como para os motivos que levaram a combinação de ambas.

Podemos dizer de maneira simples, assim como em [Morrison \(2001\)](#), que reologia "... é o estudo do escoamento de fluidos complexos, como polímeros, pastas, suspensões e alimentos ..."; porém, em seu início, a reologia era bem mais difícil de distinguir dentre outras áreas. Talvez possamos dizer que as primeiras ideias estão presentes no estudo dos sólidos rígidos, desta maneira, a origem da mecânica geral deve ser trazida à tona. A abordagem Euclidiana dos sólidos, em que apenas a densidade era relevante e deformações de qualquer natureza eram desconsideradas, foi o princípio desta área do conhecimento, e em muito se misturava com a filosofia. Suas origens talvez datem de Euclides e Arquimedes, mas foi com [Newton \(1687\)](#) que ela tomou a forma que conhecemos atualmente.

No mesmo período de Newton vários estudos foram conduzidos, porém com enfoque no comportamento elástico dos sólidos. Os trabalhos de [Boyle \(1660\)](#) e [Hooke \(2007\)](#) trouxeram um novo entendimento para este campo ao identificarem que a tensão é proporcional à deformação em um dado material. Tal constante de proporcionalidade ficou posteriormente conhecida como módulo elástico (ou módulo de Young) ao ser estudada por [Young \(1807\)](#), mostrando que esta era uma propriedade intrínseca do material. Vinte anos depois [Cauchy \(1827\)](#) estabeleceria as equações fundamentais da elasticidade clássica (pequenas deformações) em seus trabalhos, incluindo também o conhecido tensor de tensões de Cauchy.

No campo dos fluidos invíscidos (fluidos que não apresentam resistência ao escoamento) [Pascal \(1663\)](#) estabeleceu em 1663 o princípio de que, para um líquido em equilíbrio, as variações de pressão transmitem-se igualmente sem perdas para todos os pontos de sua massa, no entanto, o princípio de fluido ideal foi concebido primeiramente por Arquimedes. Podemos ainda dizer que, dentro do campo da hidrodinâmica em que a viscosidade de um fluido é desconsiderada, os trabalhos de [Bernoulli \(1940\)](#) e [Euler \(1755\)](#) estão entre os mais memoráveis

desta época. Bernoulli também estabeleceu em seu trabalho as bases para o que futuramente tornaria-se a teoria cinética dos gases.

Um dos trabalhos mais importantes da história da ciência também foi um dos mais relevantes para a história da hidrodinâmica. Em seu trabalho, Newton definiu a viscosidade (o que ele chamou de resistência de um fluido ideal) como "... a resistência que surge da falta de escorregamento originário do fluido é proporcional à velocidade pela qual as partes do fluido estão sendo separadas umas das outras ..."; estabelecendo os fundamentos para o que viria a ser chamada de classe dos fluidos Newtonianos. Porém, um dos primeiros estudos sobre o efeito da viscosidade de um líquido é devido a [Hagen \(1839\)](#) que, em 1839, realizou uma série de experimentos em tubos estreitos, permitindo formular uma relação entre a queda de pressão e o diâmetro do tubo em condições de escoamento capilar de fluidos homogêneos. No mesmo período, e de maneira independente, [Poiseuille \(1841\)](#) também chegou na relação de Hagen (atualmente à conhecemos como equação de Hagen-Poiseuille ou lei de Poiseuille). É importante ressaltar que ambos os trabalhos foram executados de forma totalmente empírica. Nesse período a mecânica dos fluidos estava sendo estabelecida, principalmente com os trabalhos de [Navier \(1823\)](#) e [Stokes \(1845\)](#) com fluidos reais. A combinação destes trabalho resultou nas chamadas equações de Navier-Stokes, que surgem da aplicação da segunda lei de Newton ao movimento de um fluido, juntamente com a suposição de que a tensão no fluido é a soma de um termo de difusão viscoso (proporcional ao gradiente de velocidade) e um termo de pressão. Com estas equações foi possível prever as distribuições de velocidade e o escoamento entre tubos cilíndricos. Em 1856 [Wiedemann \(1856\)](#) mostrou pela primeira vez boa concordância entre os dados de Hagen-Poiseuille e as previsões das equações de Navier-Stokes (embora ele seja mais conhecido pela sua contribuição com os estudos de torções em hastes ferromagnéticas estabelecendo o "efeito Wiedemann"). Por fim, foi com o trabalho de Maurice Couette que chegamos ao entendimento de que a viscosidade é uma propriedade intrínseca dos materiais. Ao comparar os resultados dos valores de viscosidade em um cilindro concêntrico com o escoamento de um tubo vertical, ele observou que seus valores eram idênticos (ver [Piau et al. \(1994\)](#)).

O século XIX foi um campo fértil para o surgimento da viscoelasticidade linear. Os primeiro estudos de materiais que não exibiam comportamento Newtoniano, e nem Hookeano, foram realizados por [Weber \(1835\)](#) que buscava compreender o comportamento elástico dos fios de seda, tal pesquisa devia-se ao seu interesse por instrumentos eletromagnéticos. Em seus

estudos ele foi capaz de identificar o fenômeno de relaxação de tensão (fenômeno observado quando existe uma queda na tensão em resposta a uma deformação gerada no material), capturando qualitativamente o fenômeno de viscoelasticidade. Embora seja mais conhecido por atuar na área de eletroquímica, o físico alemão, [Kohlrausch \(1863\)](#) também estabeleceu experimentalmente a linearidade do fenômeno de viscoelasticidade com seus estudos sobre vidros. No mesmo período [Maxwell \(1867\)](#) proporcionou uma grandiosa contribuição para o que futuramente seria o campo da reologia. Ao postular sua equação diferencial de primeira ordem (que futuramente seria o modelo que levaria seu nome) Maxwell conseguiu incorporar alguns efeitos elásticos em seu modelo, enquanto este ainda era capaz de prever efeitos viscosos no escoamento. Baseado nos trabalhos de Weber e Kohlrausch, [Boltzmann \(1878\)](#) foi capaz de enunciar o "princípio da superposição". Boltzmann propôs que "o valor de uma função característica de um sistema é igual à soma de todas as alterações induzidas no sistema pelas funções de direção que lhe foram aplicadas ao longo de sua história" enunciado este que possui aplicações em diversas áreas da física e química. Outra grande contribuição é devida a [Thomson \(1888\)](#) e [Wiechert \(1893\)](#) que de forma quase simultânea, e independente, produziram o conceito de "distribuição de tempos de relaxação", ampliando ainda mais a abrangência desse novo conceito.

Entre os anos de 1890 e 1926 uma série de trabalhos foram essenciais para a construção do conceito de fluido Newtoniano generalizado. Essa classe de fluidos é caracterizada pelo fato da tensão de cisalhamento ser uma função da taxa de cisalhamento para um dado tempo, no entanto, não depende do histórico de deformação (sem efeito de memória). É importante também esclarecer que apesar de ser chamada de "Newtoniano" essa classe de fluidos possui comportamento não-Newtoniano (acentuadas características não-lineares). Os primeiros dados experimentais acerca da não-linearidade para esses fluidos foram obtidos por [Schwedoff \(1890\)](#) ao trabalhar com gelatina coloidal. Resultados análogos ao de Schwedoff foram obtidos duas décadas depois com os trabalhos independentes de [Hess \(1910\)](#) e [Hatschek \(1913\)](#) que também foram capazes de identificar que a viscosidade, nesses casos, é uma função da taxa de cisalhamento. Em 1922, para descrever o comportamento do escoamento de tintas, [Bingham \(1922\)](#) introduziu o termo "limite de tensão" (*yield stress*), que indica o limiar entre comportamento elástico e plástico para um dado material. Enquanto que nos anos seguintes os trabalhos de [Ostwald \(1925\)](#) e [Waele \(1923\)](#) iriam dar origem ao que hoje é conhecido como modelo de lei-de-potência. Este modelo é simples porém, consegue capturar de maneira aproximada comportamentos pseudoplásticos e dilatantes (menos comum) de determinados materiais, além

de ser capaz recuperar comportamentos Newtonianos em determinados casos. Um modelo mais complexo de três parâmetros, que também é capaz de capturar tais comportamentos, é devido a [Herschel e Bulkley \(1926\)](#).

Dentro do âmbito da viscoelasticidade uma das grandes contribuições ao tema é devida a [Zaremba \(1903\)](#), que conseguiu estender este conceito do campo linear para o não-linear, ao introduzir derivadas corrotacionais quando o sistema de coordenadas está sob rotação juntamente com o material. Dois anos depois o físico austríaco [Jaumann \(1911\)](#) desenvolveu também um trabalho semelhante ao utilizar um tensor de tensão para materiais sob efeito de rotação. Proposta parecida também foi sugerida por [Hencky \(1929\)](#), embora este seja mais conhecido pela contribuição com a deformação logarítmica, que fornece a medida correta da deformação final quando esta ocorre em uma série de incrementos, levando em consideração a influência do caminho da deformação. No campo experimental [Poynting \(1913\)](#) produziu uma série de estudos envolvendo elasticidade, prevendo efeitos não-lineares ainda em uma época na qual apenas comportamentos lineares estavam estabelecidos. Poynting também descobriu o acoplamento de torção-extensão na elasticidade de deformação finita. Isso agora é conhecido como "efeito Poynting" na torção, e é observado quando um cubo elástico é cisalhado entre duas placas e a tensão é desenvolvida na direção normal às faces cisalhadas, ou quando um cilindro é sujeito a torção e o comprimento axial é alterado.

Os primeiros anos do século XX seriam os anos finais de preparação para o surgimento do campo da reologia. Alguns materiais, e seus comportamentos, foram amplamente discutidos nesse período como: suspensões, polímeros e também efeitos viscosos extensionais. [Einstein \(1906\)](#) foi o primeiro a desenvolver uma equação que descrevia o comportamento da viscosidade efetiva em suspensões diluídas. Na década seguinte [Jeffery \(1922\)](#) estudou o movimento de partículas elipsoidais em um fluido viscoso e definiu o que futuramente seriam as equações de Jeffery. No entanto, o surgimento dos estudos de polímeros nesse período estava mais associado a indústria. Neste mesmo período [Staudinger \(1920\)](#) propôs que borracha e outros polímeros, como amido, celulose e proteínas, seriam como longas cadeias de unidades moleculares de repetição curta, unidas por ligações covalentes. Considerando uma analogia simples, os polímeros seriam como cadeias de cliques de papel, feitos de pequenas partes constituintes ligadas de ponta a ponta. No mesmo ano ele também formulou as estruturas moleculares das piretrinas I e II (um par de compostos naturais derivados de crisântemo), permitindo o desenvolvimento de inseticidas piretróides entre 1960 e 1970. [Carothers \(1929\)](#), inventor do neo-

prene e do nylon, começou a sintetizar poliéster e poliamidas na companhia DuPont na década de 1930 provocando um impulso na produção e pesquisa de polímeros na indústria norte americana. Conhecido por seus trabalhos com plásticos, [Baekeland \(1909\)](#) começou a investigar as reações dos fenóis e formaldeídos. Ele abordou o problema de maneira sistemática, controlando e examinando cuidadosamente os efeitos da temperatura, pressão, tipos e proporções de materiais utilizados. Ao controlar pressão e temperatura aplicadas ao fenol e formaldeído, ele foi capaz de produzir um plástico duro moldável chamado baquelite. No âmbito dos escoamentos elongacionais (marcados pela presença de efeitos viscosos extensionais), suas origens estão associadas aos trabalhos do físico Irlandês [Trouton \(1906\)](#), que realizou medições sobre o alongamento uniaxial do piche. A próxima contribuição significativa foi devida a [Tammann e Jenckel \(1930\)](#), com os estudos sobre escoamento elongacional de filamentos de vidro fundido. Treze anos depois [Merrington \(1943\)](#) apresentaria um trabalho sobre o efeito de "esticamento" em escoamentos capilares de fluidos visco-elásticos. No entanto, [Barus \(1893\)](#) já havia identificado um fenômeno similar porém, atribuiu esse efeito a recuperação de cisalhamento. Certos polímeros podem escoar para dentro de dutos mesmo estes estando acima da superfície do material, devido a alta viscosidade extensional. Este fenômeno é chamado escoamento de [Fanno \(1908\)](#), que foi o primeiro a realizar estudo acerca desse comportamento. Por definição, o "escoamento de Fanno" é um escoamento adiabático, através de um duto de área constante em que o efeito do atrito é considerado. Efeitos de compressibilidade podem ser levados em consideração, no entanto, este modelo também pode ser aplicado a escoamentos incompressíveis.

Todos os trabalhos realizados, até 1929, culminariam para o surgimento do campo da ciência chamado Reologia. No terceiro simpósio de plasticidade de 1929 foi estabelecido um comitê oficial para o desenvolvimento desta nova área, cuja reunião foi realizada em 19 de abril do mesmo ano (ver [Bingham \(1944\)](#) e [Blair \(1949\)](#)). Este comitê estabeleceu as diretrizes da Sociedade de Reologia, no qual o primeiro encontro oficial foi em 19 de dezembro daquele ano, para tratar de definições e estabelecer os padrões de viscosidade absoluta. Após esses eventos, as próximas décadas seriam extremamente frutíferas para a consolidação e desenvolvimento da Reologia, para a ciência e indústria. Muitos trabalhos foram caracterizados pela elaboração e validação de equações constitutivas. Vários modelos foram desenvolvidos, cada um tentando contemplar uma determinada característica para um dado material, outros buscando compreender um comportamento específico de uma dada classe de materiais. Muitos desses desenvolvimentos teóricos buscavam prever o comportamento do escoamento de dife-

rentes materiais, principalmente para aplicações industriais.

Um grande avanço para o entendimento de alguns escoamentos devem-se aos modelos diferenciais. [Oldroyd \(1950\)](#) estabeleceu as bases para o desenvolvimento de modelos matemáticos em reologia, ao propor regras para a construção de equações constitutivas de forma admissível, assim como na utilização de derivadas convectivas. Dois trabalhos notáveis nesse período devem-se as pesquisas de [Rivlin e Ericksen \(1955\)](#), assim como as de [Giesekus \(1962\)](#). Nestes trabalhos a tensão é definida como uma expansão em série de potências, envolvendo potências superiores do tensor taxa de deformação, assim como derivadas de ordem superior. [Truesdell \(1952\)](#) realizou um trabalho cuidadoso de revisão sobre os fundamentos da teoria da elasticidade e dinâmica dos fluidos em sua aplicação. Onze anos depois [White e Metzner \(1963\)](#) propuseram uma variação no modelo convectivo superior de Maxwell, conseguindo assim construir um modelo não-linear que contém efeito de memória, ainda predizendo tensões normais em um escoamento cisalhante (substituindo o parâmetro de viscosidade por uma função de viscosidade); a equação resultante recebeu o nome de modelo de White-Metzner.

É importante mencionar as contribuições de [Green e Rivlin \(1957\)](#), assim como as de [Coleman e Noll \(1961\)](#), no desenvolvimento de modelos integrais. Suas formulações levavam em conta o fato de que a tensão no material, em qualquer ponto e tempo, dependia de todo o histórico de deformação naquele dado local onde a tensão está sendo aplicada. Este tópico foi abordado de maneira cuidadosa e extensiva no trabalho de [Tanner e Walters \(1998\)](#).

No estudo dos polímeros surgiu o conceito de "Polímeros de rede", estes são materiais altamente reticulados, nos quais algumas valências de átomos são satisfeitas por ligações que resultam em uma estrutura tridimensional ([Mohler, 2003](#)). Estes materiais possuem propriedades interessantes para a indústria como: aumento do módulo e da elasticidade, taxas mais baixas de fluência, resistência a solventes, estabilidade a altas temperaturas entre outras. As aplicações de polímeros de rede são das mais variadas. Resinas termo-endurecíveis são amplamente utilizadas em aplicações estruturais. As poliolefinas reticuladas estão presentes em diversos setores como: pneus automotivos, componentes do asfalto e também em roupas e calçados. Os primeiros trabalhos em teoria de redes são devidos a [Green e Tobolsky \(1946\)](#), na tentativa de explicar o processo de relaxação desses polímeros. Em 1956 dois trabalhos foram realizados de forma independente por [Yamamoto \(1956\)](#) e [Lodge \(1956\)](#), que buscavam aplicar a teoria de redes em fluidos com comportamento semelhante aos da borracha. Lodge foi capaz de desenvolver um novo modelo para estes materiais, incorporando o tensor de Finger no

modelo de Maxwell. Este trabalho serviu como influência para muitos trabalhos futuros. [Kaye \(1962\)](#) e [Bernstein et al. \(1963\)](#) continuaram estes estudos e formularam o modelo K-BKZ, de maior complexidade porém, mais geral que seu antecessor. Vale ressaltar que este modelo não produz boas previsões para escoamentos que envolvem escoamento reverso.

Outro desenvolvimento importante foi o surgimento da teoria da Reptação (*reptation theory*). Tomemos como exemplo o movimento de uma cadeia em um sistema polimérico denso, ou seja, com alto grau de restrição. Devido a emaranhados com outras correntes, movimentos laterais de correntes em muitos pontos são extremamente improváveis. No entanto, podemos imaginar que uma dada corrente tenha disponível um tubo no qual possa se mover com certo grau de liberdade. Para se deslocar por grandes distâncias, a corrente deve sair do tubo por meio de movimentos longitudinais. O conceito de tubo introduzido acima tem claramente apenas um significado estatístico e é devido à [Edwards \(1967\)](#). O tubo pode mudar por meio de dois mecanismos. O primeiro é a partir do movimento da própria corrente central, pela qual a corrente deixa partes de seu tubo original e gera novas. O segundo mecanismo é quando o tubo flutua devido aos movimentos das correntes que o formaram. As situações em que a segunda causa de flutuações no tubo é reduzida ao mínimo são as de uma cadeia longa, em um derretimento de cadeias ainda mais longas, e de uma cadeia em gel. Também no caso de uma corrente em seu próprio derretimento, as flutuações do tubo devido aos movimentos das cadeias ao redor podem ser consideradas desprezíveis. Isso é equivalente a um tratamento de campo médio, que não será capaz de descrever certos movimentos coletivos do sistema. A cadeia flutua em torno da cadeia antiga. Dada uma flutuação, pode ocorrer um acúmulo de massa em parte da cadeia, essa massa por sua vez, pode se difundir ao longo da cadeia antiga e finalmente sair do tubo. A corrente cria assim um novo pedaço de tubo e simultaneamente destrói parte do tubo no outro lado. Esse tipo de movimento é chamado de reptação. O físico [Genies \(1971\)](#) propuseram esse conceito na física de polímeros, a fim de explicar a dependência da mobilidade de uma macromolécula e seu comprimento. A reptação é usada como um mecanismo para explicar o fluxo viscoso em um polímero amorfo. Significativo avanço foi conquistado anos depois em uma série de três trabalhos realizados por [Doi e Edwards \(1978a\)](#) ([Doi e Edwards \(1978b\)](#), [Doi e Edwards \(1978c\)](#)), que buscaram expandir, baseados na teoria de reptação, o modelo de tubo para soluções de polímeros concentrados e fundidos.

Seria muito improvável acreditar no progresso da modelagem constitutiva apenas através da pesquisa aleatória de todos os modelos diferenciais possíveis, ou validando equações

empíricas por tentativa e erro. Para seguir através de um caminho que ainda guarda uma variedade ampla de equações, somos forçados a recorrer para técnicas que nos permitam extrair informações da estrutura do fluido, ou seja, devemos buscar modelos moleculares que capturem o comportamento reológico. No caso de polímeros, a abordagem molecular é dada pela construção da imagem estrutural do polímero, em seguida deve-se construir equações que descrevam as tensões macroscópicas, com base no modelo proposto. A vantagem da modelagem molecular é a capacidade de predição, não somente da forma das equações constitutivas, mas também os efeitos, no escoamento, de parâmetros moleculares, como peso e tempo de relaxação. Uma de suas maiores desvantagens é a complexidade das descrições macromoleculares e imprecisões, que ocorrem devido a alguma suposição simplificadora. As primeiras tentativas de caracterização de materiais por meio dessa abordagem são devidas à [Kuhn \(1934\)](#). Após essa produção uma série de trabalhos começaram a mostrar o apelo que tal método possuía, uma vez que se passou a entender que existiam certas vantagens em construir equações materiais que refletissem a estrutura do polímero, e que esse processo facilitava o desenvolvimento de novos materiais. É importante mencionar os trabalhos pioneiros de [Kramers \(1944\)](#), [Rouse \(1953\)](#), [Zimm \(1956\)](#) e [Kirkwood \(1967\)](#), todos focados nessa nova perspectiva de modelagem. Todas estas contribuições culminaram no trabalho de [Bird *et al.* \(1987b\)](#), que buscou compilar os conhecimentos desse campo de maneira detalhada e compreensiva. No âmbito dos trabalhos experimentais, em especial de caracterização reológica de materiais, muitos avanços foram conquistados durante todo o século XX. Serão comentadas a seguir algumas contribuições e em quais áreas elas ocorreram.

Escoamentos cisalhantes estão entre os mais estudados na literatura, porém muitos leitores assumem certas condições de escoamentos sem refletir sobre suas implicações físicas. O caso da condição de não deslizamento na parede é um exemplo disso. A justificativa física, considerando fluidos viscosos, e válida a hipótese do meio contínuo, é de que partículas próximas a uma superfície sólida não transportadas junto com o escoamento, quando a adesão é mais forte que a coesão. A força de atração entre as partículas do fluido e do sólido (forças adesivas) é maior do que aquela existente entre as partículas do fluido (forças coesivas). A existência desse desequilíbrio reduz a velocidade do fluido a zero na superfície sólida. [Stokes \(1845\)](#) foi o primeiro a estabelecer uma hipótese de não-deslizamento em condições de contorno sólidas. Porém, o "problema do deslizamento" foi abordado por alguns autores ao perceberem que o escoamento de determinados materiais apresentava um gradiente de velocidade próximo a pa-

rede [Mooney \(1931\)](#) (ver também [Schofield e Blair \(1937\)](#)). Anos mais tarde [Pearson e Petrie \(1968\)](#) mostraram que o deslizamento próximo a condições de contorno sólidas tem relação com o tamanho molecular do material utilizado. Para este efeito ocorrer a escala de rugosidade da parede sólida deve ser menor que o tamanho das moléculas presentes no escoamento. Muitos processos industriais podem apresentar características favoráveis ao surgimento desse efeito. O processo de extrusão, por exemplo, consiste na fabricação de produtos longos com seções transversais constantes (tubos, chapas e barras), estes são obtidos ao forçar um dado material através de uma matriz com uma abertura. Ao final do século XX [Ramamurthy \(1986\)](#) concluiu que deslizamentos podem ocorrer durante a extrusão de polímeros fundidos. Muitos trabalhos em escoamentos cisalhantes foram impulsionados pelas questões tratadas até aqui, como [Mooney \(1936\)](#) (ver também [Eisenschitz *et al.* \(1929\)](#)) ao obter dados experimentais do comportamento da tensão cisalhante e da taxa de cisalhamento em diferentes materiais. Muitos destes resultados e questionamentos podem ser encontrados em [Bird *et al.* \(1987a\)](#).

Um aspecto de fundamental importância em reologia, e também na dinâmica dos fluidos em geral, é a presença de tensões normais no escoamento. A tensão normal é muito comum em vários problemas físicos, porém na história do desenvolvimento da reologia vale mencionar um caso em específico: o de um bastão em rotação no interior de um recipiente, na presença de um fluido. No caso Newtoniano pode-se observar uma diminuição no nível do fluido na região mais próxima do bastão, devido a ação da força centrífuga. Porém, para alguns polímeros em solução ou fundidos, ocorre um descolamento do material no sentido do centro do recipiente, região adjacente ao bastão, esse efeito continua até o fluido começar gradualmente a subir pela superfície do bastão. O primeiro pesquisador a relacionar esse comportamento com a tensão normal foi [Weissenberg \(1947\)](#). Este fenômeno ficou conhecido como efeito Weissenberg em sua homenagem. Este que inspirou outros trabalhos, como no caso de [Markovitz \(1952\)](#) que estudou escoamentos com presença de torções. Contribuições acerca da segunda diferença de tensão normal foram dadas por [Ginn e Metzner \(1969\)](#). Uma revisão cuidadosa sobre diferenças de tensões normais e também sobre erros devido a "buracos de pressão" em experimentos é apresentada por [Tanner e Walters \(1998\)](#).

Na mecânica do contínuo, a teoria da deformação infinitesimal é dada pela descrição matemática das deformações atuando em corpo sólido, na qual se supõe que os deslocamentos das partículas do material sejam infinitesimalmente menores do que qualquer dimensão relevante do corpo; de modo que sua geometria e as propriedades constitutivas do material (como

rigidez e densidade), em cada ponto do espaço, possam ser assumidas como inalteradas pela deformação. Alguns dos trabalhos pioneiros neste campo são devidos aos estudos de [Philippoff \(1934\)](#) e [Leaderman \(1943\)](#) com soluções poliméricas. Da mesma forma, [Schofield e Blair \(1937\)](#) também contribuíram para os primeiros estudos acerca da tensão de relaxação (o decaimento observado da tensão devido a uma pequena deformação gerada na estrutura do material) no qual o material estudado foi uma amostra de massa de farinha de trigo.

Propriedade interessante, e muito útil na indústria, é a tixotropia (afinamento por cisalhamento dependente do tempo). Alguns géis ou fluidos espessos, sob uma condição estática, irão fluir (tornando-se mais finos e menos viscosos) ao longo do tempo quando agitados, cisalhados, ou tensionados de alguma forma. Estes materiais levam um determinado tempo para retornarem a um estado mais viscoso. Alguns fluidos não-newtonianos demonstram uma mudança na viscosidade dependente do tempo; quanto mais tempo o fluido sofre uma tensão de cisalhamento, menor sua viscosidade. Um fluido tixotrópico leva um tempo finito para atingir a viscosidade de equilíbrio quando introduzida uma mudança acentuada na taxa de cisalhamento. Alguns fluidos tixotrópicos retornam quase instantaneamente ao estado de gel; o exemplo mais conhecido é o do ketchup. A primeira menção de uma propriedade dessa natureza foi dada por [Kühne \(1863\)](#) ao observar o caminho percorrido por um Nematoda através de células musculares sem demonstrar dificuldade: "O movimento parecia liquefazer as estrias, mas elas voltavam ao estado original depois que o Nematoda passava". No entanto, o termo foi formalmente introduzido por [Freundlich e Bircumshaw \(1926\)](#), ao trabalharem com suspensões.

Um grande salto para a indústria, em termos de custo energético, foram os estudos envolvendo redução do arrasto turbulento na presença de fluidos não-Newtonianos, [Toms \(1949\)](#) e [Agoston *et al.* \(1954\)](#) foram os primeiros a estudar este efeito. Ao adicionar uma pequena quantidade de polímero a um solvente newtoniano (resultando em uma solução não-newtoniana), pode-se notar uma redução no atrito entre o fluido e a superfície estacionária. Atualmente os materiais utilizados nesse processo são variados: polímeros, suspensões de partículas sólidas, aditivos biológicos e surfactantes. Esses compostos são feitos de polímeros de alto peso molecular ou sistemas micelares. Essa tecnologia hoje é utilizada com sucesso para reduzir o custo de bombeamento em oleodutos, aumentar a vazão em equipamentos, além de ajudar na irrigação e drenagem.

Outro tópico de grande relevância desenvolvido em meados do anos cinquenta foi o princípio de superposição do tempo-temperatura. Este princípio é utilizado para determinar

propriedades mecânicas dependentes da temperatura de materiais viscoelásticos lineares a partir de propriedades conhecidas, dada uma temperatura de referência. Os módulos elásticos dos polímeros amorfos típicos aumentam com a taxa de carregamento, mas diminuem quando há um incremento na temperatura. As curvas de módulo instantâneo em função do tempo não apresentam alteração em seu comportamento com uma variação na temperatura porém, tendem a descolar-se à esquerda ou direita. Desta forma, pode-se inferir que uma dada curva principal, a uma determinada temperatura, pode ser utilizada como referência para prever outras curvas em diferentes temperaturas aplicando uma transformação. Os primeiros estudos acerca desse assunto são devidos à [Williams *et al.* \(1955\)](#) (ver também [Ferry \(1980\)](#)) que desenvolveram uma equação empírica (equação WLF) para este tipo de predição.

Como mencionado anteriormente, escoamentos extensionais possuem um importante papel em aplicações industriais como: fabricação de fios e fibras, revestimentos, formação de filamentos em tintas, formação de gotas (impressão jato de tinta) e escoamento em meios porosos (reservatórios de óleo). Por definição um escoamento extensional é aquele em que o material utilizado não possui qualquer tipo de rotação em relação à direção do alongamento que está sendo aplicado. Alguns trabalhos que impulsionaram o assunto no campo experimental são devidos à [Merrington \(1943\)](#), [Meissner \(1969\)](#) e [Cogswell \(1969\)](#). Os trabalhos são dos mais variados, desde estudos envolvendo borrachas e polímeros fundidos até comportamentos extensionais em tintas escoando por orifícios.

Como foi possível observar até aqui, o século XX foi de grande expansão no campo da reologia, com contribuições significativas e diversas. Foi nesse período que o estudo da instabilidade em escoamentos de materiais complexos também teve seu advento. No entanto trataremos primeiro um pequeno histórico do desenvolvimento da instabilidade hidrodinâmica, que em muito partilha do mesmo passado da reologia. Em seguida retomaremos para uma breve revisão dos trabalhos dos quais este texto busca discutir. É importante lembrar que o objeto de estudos dos próximos trabalhos aqui citados foram fluidos com características newtonianas, a menos que seja mencionado o contrário.

Podemos traçar o surgimento da estabilidade hidrodinâmica por volta da segunda metade do século XIX. Com os estudos de [Helmholtz \(1868\)](#) e [Thomson \(1871\)](#), ambos dedicados a entender os mecanismos físicos envolvendo o surgimento de instabilidades em escoamentos. Embora os sistemas estudados fossem diferentes (o primeiro era relacionado a vibrações em tubos enquanto o segundo tratava do efeitos dos ventos na superfície da água) os autores

chegaram a uma conclusão parecida. De modo geral, podemos dizer que certas condições nesses sistemas promovem o surgimento dessas ondas, ou seja, existem condições críticas para que tais ondas se formem. Esse aspecto de escoamentos veio a ser estudado com mais cuidado por [Reynolds \(1883\)](#) (ver também [Reynolds \(1894\)](#)). Em seus experimentos, Reynolds foi capaz de mostrar que o escoamento de um líquido dentro de um tubo torna-se instável quando sua velocidade média excede um dado limite, sendo este dependente de alguns parâmetros como, o raio do tubo e propriedades do líquido. Dessa forma começaria a se estabelecer essa nova área dentro da mecânica dos fluidos. Outras grandes contribuições nesse mesmo período são dignas de atenção. Estudos acerca de escoamentos de fluidos ideais foram realizados por [Rayleigh \(1880\)](#). Este trabalho seria retomado por [Taylor \(1950\)](#), que estudaria os efeitos de uma aceleração vertical na interface de um sistema bifásico. Suas observações seriam a origem das chamadas "instabilidades de Rayleigh-Taylor".

Duas das contribuições mais memoráveis no campo da estabilidade hidrodinâmica foram os trabalhos simultâneos de [Orr \(1907\)](#) e [Sommerfeld \(1908\)](#). Ambos estudaram os resultados anteriormente mencionados, porém considerando o efeito da viscosidade em suas equações. Ao utilizarem o conceito de perturbações infinitesimais, juntamente com uma análise de primeira ordem, chegaram ao desenvolvimento de uma equação diferencial de quarta ordem capaz de representar as perturbações do sistema. A principal diferença entre os trabalhos reside na escolha do perfil de velocidades médio; Orr considerou um escoamento plano de Couette, enquanto Sommerfeld utilizou o de Poiseuille para seu desenvolvimento. Suas contribuições simultâneas resultariam na equação de Orr-Sommerfeld.

As primeiras tentativas de solução para este problema surgiram algumas décadas depois com os trabalhos de [Tollmien \(1929\)](#) (ver também [Tollmien \(1935\)](#)) e [Schlichting \(1932\)](#). Por meios de tentativas analíticas de resolução, Tollmien foi capaz de obter os primeiros resultados na forma de autovalores e por fim, produzir um número de Reynolds crítico para um escoamento de Poiseuille. Estes resultados para escoamentos paralelos foram revisitados por Schlichting, que por sua vez promoveu a compreensão do surgimento de ondas formadas sob condições críticas. Seus esforços neste tema resultariam no melhor entendimento das oscilações formadas no interior destes escoamentos que viriam a ser denominadas "ondas de Tollmien-Schlichting".

É importante notar que muitos trabalhos trataram de sistemas bidimensionais e tridimensionais de maneira distinta, buscando entender o surgimento de condições críticas nesses

sistemas, mas não relacionando-os entre si. Foi com o trabalho pioneiro de [Squire \(1933\)](#) que se entendeu melhor as relações de ambos, e como os modos instáveis estavam associados entre si. Squire mostrou, dentro do âmbito de escoamentos paralelos, que para todo modo tridimensional instável existe um modo bidimensional mais instável, ou seja, o número de Reynolds crítico associado ao modo bidimensional é menor que o tridimensional. Dessa forma problemas tridimensionais poderiam ser tratados de forma mais fácil em seus correspondentes bidimensionais, desde que obedecem as condições de validade para tais transformações. Este resultado ficou conhecido como "teorema de Squire". Essas condições de validade só seriam ampliadas, muito posteriormente, com os trabalhos de [Hesla *et al.* \(1986\)](#), que por sua vez expandiram as ideias de Squire para escoamentos estratificados. As condições de contorno podem ser variadas nesse caso, desde placas capazes de possuir uma velocidade associada até escoamentos de superfície livre. Em todos estes casos as fases são, necessariamente, consideradas imiscíveis. É importante mencionar aqui o brilhante trabalho empírico (e teórico) de [Kapitza \(1948\)](#) (ver também [Kapitza \(1949\)](#)) que ocorreu ao final dos anos quarenta. Ele foi o primeiro autor a expor a relevância de escoamentos gravitacionais envolvendo filmes líquidos na presença de uma parede vertical. Kapitza mostrou, pela primeira vez, uma possível relação entre as forças inerciais do escoamento e a tensão superficial, que viria a ser chamada de "número de Kapitza". Suas contribuições trouxeram nova luz ao tema e contribuíram como base para trabalhos que estariam por vir.

Nas décadas seguintes aos trabalhos de Squire, muitos autores buscaram estudar problemas envolvendo o conceito de estabilidade hidrodinâmica. Alguns autores produziram trabalhos notáveis no campo teórico ao abordarem este tópico. [Lin \(1946\)](#) produziu uma análise cuidadosa em um trabalho dividido em três partes, revisando toda a formulação da equação de Orr-Sommerfeld e esclarecendo as escolhas, e dificuldades, envolvidas no processo. Ele também buscou tratar da instabilidade inicial para fluidos viscosos e não-viscosos de maneira abrangente, assim como entender os mecanismos físicos que geravam tais instabilidades. Lin deixou claro em seu trabalho que, para números de Reynolds suficientemente grandes, todos os escoamentos estudados tornavam-se instáveis. Sua produção foi marcada pela busca por generalidade e foi uma importante contribuição para os trabalhos que estariam por vir. Uma década depois [Benjamin \(1957\)](#) reformulou o problema para tratar de um escoamento aberto na presença de uma parede vertical. Estes escoamentos são marcados por um baixo número de Reynolds e sofrem efeitos significativos da tensão superficial. Ao mostrar o número de onda

como uma função do número de Reynolds Benjamin foi capaz de produzir um mapeamento dos modos estáveis e instáveis através de uma curva de estabilidade neutra. Alguns anos depois Yih (1963) expandiu os estudos de Benjamin ao introduzir, no mesmo trabalho, análises de ondas longas e curtas. Yih também abordou a formulação do problema utilizando funções corrente, o que até então não tinha sido utilizado. Fechando um ciclo de contribuições clássicas na área de soluções algébricas podemos mencionar os esforços de Benney (1966). O sistema abordado por Benney foi de um escoamento gravitacional de um filme líquido em um plano inclinado. Ele trouxe uma análise assintótica para a obtenção da velocidade de fase e da taxa de crescimento, assim como correções para ambas quando soluções de mais alta ordem são obtidas.

Com o avanço da computação científica no século XX, principalmente em sua segunda metade, muitos pesquisadores começaram a abordar estes problemas através de métodos numéricos. As maiores vantagens da abordagem numérica são: a precisão dos resultados, normalmente muito superior até ao melhor dos métodos assintóticos, e a simplicidade dos mesmos. Se tomarmos como comparação uma solução assintótica de ondas longas para um problema de filmes líquidos é conhecido que, a solução da ordem da unidade e a de primeira ordem geram respectivamente, a velocidade de fase e a taxa de crescimento das ondas, no entanto, essas expressões são menos acuradas dependendo do valor dos parâmetros utilizados. Para ocorrer um refinamento nessas soluções ordens maiores precisam ser obtidas. A segunda ordem de solução gera uma correção para a velocidade de fase, enquanto a terceira corrige a taxa de crescimento, porém o esforço necessário para obter estas expressões aumenta significativamente a cada ordem. Em uma solução numérica os resultados são facilmente obtidos (após uma cuidadosa implementação do método escolhido) com precisão de máquina e sem expressões complexas envolvidas. Isso não significa um descrédito total quanto às soluções assintóticas, uma vez que tais expressões, quando obtidas, mostram como parâmetros importantes presentes no problema contribuem para a solução final, assim como quais assumem papéis mais, ou menos, significativos no surgimento das instabilidades.

Muitos trabalhos foram produzidos envolvendo soluções numéricas, porém destacaremos os que mais contribuíram para o desenvolvimento e popularização desse campo. Thomas (1953) produziu um trabalho pioneiro ao abordar a solução do problema de Orr-Sommerfeld utilizando um método de diferenças finitas juntamente com um de eliminação Gaussiana, este último para resolver o sistema gerado pelo primeiro. Considerando um escoamento de Poiseuille ele obteve o valor de 5780 para o número de Reynolds crítico. Ainda considerando um

escoamento de Poiseuille três trabalhos tiveram grande impacto nessa área de soluções numéricas. [Dolph e Lewis \(1958\)](#) introduziram a utilização de funções ortogonais para a discretização do problema, obtendo um valor crítico para o número de Reynolds igual à 5800. Embora apresentasse uma pequena discordância com os resultados de Thomas ainda se mostrava um valor bem próximo do que era esperado para esse tipo de escoamento. [Grosch e Salwen \(1968\)](#) também utilizaram um conjunto de funções ortogonais para a discretização do problema. No entanto, inovaram ao implementar um algoritmo QR para a resolução do problema de autovalor. A ideia central do algoritmo QR é escrever a matriz como um produto entre uma matriz ortogonal e uma triangular superior, em seguida multiplicar os fatores na ordem inversa e iterar. Este algoritmo é numericamente estável uma vez que utiliza transformações de similaridade ortogonal. Alguns anos depois [Orszag \(1971\)](#) publicou seu trabalho sobre o tema. Neste artigo Orszag utilizou expansões em série de polinômios de Chebyshev para a discretização e construção do problema de autovalor generalizado. Para a resolução do sistema ele utilizou-se da implementação do algoritmo QR. Com essa combinação de métodos ele obteve o resultado de 5772,22 para o número de Reynolds crítico. A abordagem utilizada por Orszag mostrou-se uma das mais bem sucedidas para a resolução de problemas de estabilidade hidrodinâmica, devido a grande acurácia e baixo custo computacional se comparado com outros métodos.

Alguns trabalhos publicados nesse período tiveram como foco outros padrões de escoamento. [Kurtz e Crandall \(1962\)](#) utilizaram diferenças finitas para a resolução da camada limite de Blasius em um sistema de escoamento vertical sobre uma placa sofrendo transferência de calor. [Osborne \(1967\)](#) também utilizou diferenças finitas para a discretização do problema de Orr-Sommerfeld para a camada limite em um escoamento sobre uma placa plana. No entanto, para resolver a matriz de autovalores ele utilizou o método de Newton. [Clenshaw e Elliott \(1960\)](#) também promoveram um importante trabalho ao abordarem a estabilidade em um jato laminar. Foram utilizados polinômios de Chebyshev para a construção do problema de autovalor, porém a transformação $t = \tanh(y)$ foi requerida para tal implementação, uma vez que ortogonalidades precisavam ser preservadas. Seus resultados se mostraram pouco precisos para baixos valores do número de onda, no entanto ótimos resultados foram obtidos para altos valores do mesmo.

Com todos esses desenvolvimentos brevemente revisitados, tanto da reologia quanto da estabilidade hidrodinâmica, podemos finalmente começar a olhar para o processo de interseção dessas áreas. A partir deste ponto os trabalhos, de alguma forma, se apropriam de conceitos

reológicos e de estabilidade, e muitos desse serviram como base para o desenvolvimento da parte teórica deste texto. Estas duas áreas começaram a ser utilizadas conjuntamente em meados do século XX. O primeiro trabalho que podemos citar é de [Nason \(1945\)](#), que apesar de não tratar necessariamente de estabilidade notou certos comportamentos interessantes. Ele trouxe um estudo realizado em um reômetro do tipo de Bingham, porém modificado. Em seu estudo ele percebeu que, para baixas taxas de cisalhamento, o polímero utilizado saía pelo orifício em um filamento suave. Porém, para números de Reynolds muito acima de 800 e 1000 o filamento tornava-se rugoso e começava a apresentar ondulações. Também foi notado pelo autor que esse comportamento tornava-se acentuado a medida que a pressão no sistema era aumentada. Esse foi um dos primeiros trabalhos experimentais a apresentar um comportamento instável em um sistema envolvendo um fluido de características não-Newtonianas. [Metzner e Reed \(1955\)](#) produziram um trabalho no qual eles estudam uma possível correlação entre as regiões laminar, de transição, e turbulenta de um escoamento. Esta por sua vez, poderia ser utilizada tanto para fluidos newtonianos quanto não-newtonianos. Metzner esclarece que, apesar de muitos trabalhos na época tivessem abordado o assunto, ainda eram necessários mais estudos para as regiões de transição e turbulenta. Alguns anos depois [Tordella \(1958\)](#) estudou as instabilidades que surgiam em escoamentos de polímeros fundidos através de capilaridades. Ele levantou três possíveis causas para o surgimento desse comportamento: Efeitos turbulentos associados ao número de Reynolds, a hipótese de "buckling" e a hipótese de fratura. Segundo os dados obtidos pelo autor, e sua análise sobre as considerações reológicas do material, ele concluiu que tais instabilidades eram devidas a ocorrência de fraturas.

Em 1976 dois trabalhos de revisão sobre problemas envolvendo estabilidade de fluidos não-Newtonianos foram realizados. O primeiro é devido à [Pearson \(1976\)](#) que buscou mostrar de maneira mais qualitativa todos os desenvolvimentos mais significativos, assim como dificuldades, encontrados nesse campo até aquele presente momento. Suas observações envolviam escoamentos confinados, semiconfinados, abertos, leitos fluidizados e instabilidades devido a troca de calor. O segundo é de [Petrie e Denn \(1976\)](#) com um trabalho de revisão experimental (e teórica) sobre instabilidades em processamento de polímeros, focando seus esforços em escoamentos extensionais e cisalhantes. Uma das conclusões mais interessantes é sobre o surgimento de fraturas em extrusões através de uma matriz (assunto relativamente próximo ao de Tordella). Os autores notaram que para alguns casos, efeitos inerciais associados ao número de Reynolds podiam induzir instabilidades no escoamento e provocar fraturas. Caminhando

para o final da década de 80 temos os trabalhos de [Bousfield *et al.* \(1986\)](#) e [Waters e Keeley \(1987\)](#). Bousfield realizou um estudo sobre efeitos da tensão superficial em quebra de filamentos viscoelásticos. Utilizando-se de uma abordagem assintótica ele foi capaz de mostrar que a quebra desses filamentos em gotas tinha caráter não-linear; predizendo também que a taxa de crescimento das deformações era maior para materiais viscoelásticos do que para o caso newtoniano. No entanto, Waters abordou o problema de um escoamento estratificado de dois fluidos de Oldroyd, considerando um perfil de velocidades de Couette. Neste trabalho foi utilizada uma abordagem de estabilidade linear com funções corrente, assim como uma abordagem assintótica (para o número de onda) de ordem zero e um. Com estes resultados foi possível traçar curvas de estabilidade com regiões estáveis e instáveis de várias combinações desse fluidos (casos Newtonianos e não-Newtonianos simultaneamente).

Entrando na década de 90 temos o trabalho de [Khomami \(1990a\)](#), sendo este dividido em duas partes (segunda parte em [Khomami \(1990b\)](#)). Ele aborda o problema da estabilidade interfacial de um escoamento estratificado para dois fluidos de lei de potência. A primeira parte é sobre a análise de estabilidade do escoamento considerando um perfil de velocidades de Poiseuille. É interessante notar que na primeira parte de seu estudo ele segue uma abordagem similar a de Waters: realiza uma análise de estabilidade linear, utiliza soluções assintóticas de ordem zero e um, assim como apresenta diagramas de estabilidade para diferentes configurações de fluidos newtonianos e não-newtonianos. Foi notado que a presença de um fluido com caráter *shear-thinning* na camada menos viscosa desempenha um papel mais dominante na estabilidade da interface, confirmando alguns resultados de Waters. Na segunda parte, foi realizada uma análise numérica via método de elementos finitos. O sistema de dois fluidos imiscíveis foi novamente estudado, no entanto em uma geometria de formação de leitos de co-extrusão com escoamento em um canal direto, ou convergente a jusante. Em suas conclusões ele enfatiza o fato de que, o fluidos de maior viscosidade tendem a empurrar o de menor, assim como o papel estabilizador da tensão superficial, que é acentuado na configuração que possui um canal convergente a jusante. Ainda no mesmo ano [Weinstein \(1990\)](#) publicou seus estudos sobre propagação de ondas em um escoamento gravitacional com fluidos de comportamento *shear-thinning*. De fato o sistema trata de um escoamento multicamada de fluidos de Carreau na presença de um plano inclinado, com a última camada acima em contato com a superfície livre. Em seu estudo ele demonstra que ondas geradas na superfície possuem um comportamento similar as de um sistema Newtoniano, porém ondas interfaciais entre duas camadas adjacen-

tes de fluidos dependem fortemente da viscosidade interfacial local. Uma das características mais interessantes de seu trabalho foi a aplicação de uma expansão assintótica para solucionar o problema do perfil de velocidades. Apesar da solução ser válida apenas para fluidos com fraco comportamento *shear-thinning*, ela foi utilizada como base de comparação para a solução numérica do estado base.

Em 1994 [Ng e Mei \(1994\)](#) publicou um artigo sobre formação de ondas em um plano inclinado. O material estudado em seu sistema foi lama, com comportamento reológico de um fluido de lei de potência. Os autores realizaram uma aproximação de ondas longas e um método integral de Kármán para a construção das equações de momento e continuidade. Em suas conclusões ele estabelece um valor para o índice de lei de potência como um possível critério de separação entre comportamentos estáveis e instáveis. Para $n > 1/\sqrt{2}$ não existe formação de ondas se o escoamento uniforme é estável. No entanto, para valores de $n < 1/\sqrt{2}$ é possível o surgimento de ondas longas com grande amplitude mesmo para um escoamento uniforme. No mesmo ano, [Hwang et al. \(1994\)](#) também estudaram os efeitos de um escoamento em um plano inclinado para um fluido de lei de potência. Um método integral foi utilizado para resolver o problema do estado base, assim como um método de modos normais para o estudo da estabilidade linear do sistema. Seus resultados indicaram que, para um dado valor do índice de lei de potência n , a variação do número de Reynolds e de Weber provocam variações previstas em um escoamento de caráter Newtoniano. No entanto, uma redução no valor de n torna o escoamento mais instável aumentando a velocidade da onda. Um ano depois [Pinarbasi e Liakopoulos \(1995\)](#) apresentaram um trabalho sobre a estabilidade linear da interface entre dois fluidos não-Newtonianos escoando em um canal fechado. Os modelos envolvidos no problema foram os de Carreau-Yasuda e Bingham. Eles utilizaram um método pseudospectral baseado em polinômios de Chebyshev para a discretização do problema, assim como um algoritmo QZ para a solução do problema de autovalor generalizado. Seus resultados mostraram que, para o sistema de dois fluidos Newtonianos, substituir o fluido que está abaixo por um de comportamento viscoplástico gera um efeito estabilizante na interface para comprimentos de onda grandes e intermediários. Outro resultado interessante ocorreu na configuração de dois fluidos de característica *shear-thinning*, onde variações da constante de Yasuda a pode estabilizar ou desestabilizar a interface dependendo do comprimento de onda e da espessura da camada de fluido. Fechando a década de 90 temos o trabalho de [Wilson e Rallison \(1999\)](#) que consideraram o escoamento de um fluido de White-Metzner em um canal fechado. Seus resultados

mostram que para este tipo de fluido, com forte comportamento *shear-thinning*, a instabilidade no canal é puramente elástica e ao menos um modo instável se encontra na camada limite próxima a parede.

Considerando números de Reynolds moderados temos o trabalho de [Dandapat e Mukhopadhyay \(2001\)](#), no qual considerou o escoamento de um filme líquido em um plano inclinado segundo um modelo de lei de potência. Neste trabalho os autores buscaram identificar quais mecanismos eram mais relevantes para o surgimento de ondas na superfície e como elas se comportavam. Com base em diferentes valores de parâmetros eles identificaram três tipos de ondas surgindo na superfície: ondas cinemáticas, inerciais e gravitacionais. Dessa forma foi possível analisar como trocas de energia e dissipações ocorriam. Por exemplo, os autores identificaram que, para baixas vazões, ondas cinemáticas mostravam-se dominantes. No entanto, para altos valores de vazão ondas inerciais dominavam o escoamento.

Alguns anos depois [Rousset et al. \(2007\)](#) estudariam a estabilidade temporal de um fluido de Carreau escoando em um plano inclinado definido por um ângulo β . O modelo de Carreau é adequado para fluidos cuja viscosidade varia sob um incremento da taxa de deformação. Com este modelo, é possível prever uma região de lei de potência e uma relação linear entre taxa de cisalhamento e viscosidade. No entanto, uma das vantagens desse modelo em comparação com a lei de potência é que ele prevê uma viscosidade que ainda permanece finita enquanto a taxa de cisalhamento se aproxima de zero, tornando-o adequado para escoamentos envolvendo superfícies livres. Os autores usaram uma abordagem de estabilidade linear padrão para o problema físico. Dois métodos foram utilizados para resolver a equação de Orr-Sommerfeld e as condições de contorno. O primeiro foi um método assintótico, no qual estudaram a estabilidade analiticamente, expandindo o autovalor e autovetor em relação ao número de onda, este último considerado muito maior que a profundidade do filme líquido. Eles consideraram as soluções até a primeira ordem. Para o caso *shear-thinning* ($n < 1$), o número de Reynolds crítico é menor que no caso Newtoniano, porém permanece proporcional a $\cot \beta$, com uma velocidade da fase maior. O segundo método foi numérico, especificamente um método de colocação espectral, baseado em polinômios de Chebyshev para a discretização, usando pontos de colocação de Gauss-Lobatto. Os autores compararam as soluções assintóticas e numéricas para os casos *shear-thinning* e Newtoniano, encontrando excelente precisão em ambos para a solução numérica. Seu estudo mostrou que o fluido *shear-thinning* é influenciado pela distribuição viscosa, dependendo do ângulo da inclinação.

O trabalho de [Ruyer-Quil C.; Chakraborty e Dandapat \(2012\)](#) apresenta uma tentativa de modelar o escoamento de filmes líquidos utilizando o modelo de lei-de-potência e incluindo termos de difusão viscosa de segunda ordem. Para explicar a difusão viscosa os autores computaram na superfície livre a viscosidade efetiva e sua derivada onde, para uma interface imperturbável, a taxa de deformação tende a zero. Para lidar com a divergência da viscosidade, os autores introduziram um platô Newtoniano para uma pequena taxa de deformação e uma fronteira para a viscosidade efetiva, dividindo o escoamento em uma camada Newtoniana na superfície livre e um volume não-Newtoniano separado por uma interface falsa. Eles utilizaram um modelo de duas equações dentro da teoria de lubrificação. Foi demonstrada boa concordância entre a análise de estabilidade e a simulação numérica direta (DNS) para regimes lineares e não lineares. Eles compararam a equação de Orr-Sommerfeld com e sem tensão superficial, para a taxa de crescimento espacial e as curvas de estabilidade marginal, e para diferentes valores do expoente n presente na equação constitutiva da lei-de-potência. Percebeu-se que a diferença entre os resultados é quase imperceptível para $n = 2$ ou $n = 3$, mas extremamente importante para $n = 1$. O estudo de [Noble e Vila \(2013\)](#) também trata do problema físico de filme líquido. Assumindo um fluido incompressível, que respeite a equação constitutiva de lei-de-potência. Os autores consideraram o caso bidimensional do problema, sob a consideração de que a maioria das instabilidades de superfície livre são essencialmente bidimensionais. Foram deduzidos modelos de lubrificação para estudar a estabilidade dos estados constantes da equação completa do momento de Cauchy, e em seguida derivar um modelo de águas rasas de segunda ordem para o fluido. Para lidar com a divergência da viscosidade aparente na superfície livre, que introduz uma singularidade na formulação de Orr-Sommerfeld e na derivação dos modelos de águas rasas, os autores introduziram uma formulação mais fraca das equações do momento de Cauchy. Esse procedimento possibilitou o desenvolvimento de um problema linear que generaliza as equações de Orr-Sommerfeld para fluidos Newtonianos, mostrando que as expansões não-lineares do campo de velocidade, na escala de águas rasas, propiciam uma expansão natural das autofunções e autovalores das equações de Orr-Sommerfeld generalizadas. No mesmo ano [Millet *et al.* \(2013\)](#) realizaram uma abordagem temporal para um problema de estabilidade linear. O sistema físico é constituído por dois fluidos *shear-thinning*, seguindo o modelo de quatro parâmetros Carreau, escoando em um plano inclinado com a presença de uma superfície livre. Um método de colocação espectral baseado em polinômios de Chebyshev foi utilizado para resolver o problema de estabilidade. Para a discretização das equações, os autores

utilizaram pontos de colocação de Gauss-Lobatto. Eles descobriram que a estratificação da viscosidade tem grande influência na estabilidade do sistema. Quando o fluido no fundo é menos viscoso, a instabilidade da interface é amplificada, pois pode crescer sem a presença de inércia. A instabilidade de ondas longas na interface é geralmente dominante, a menos que o valor da razão de densidade do fluido superior seja próxima de 1, neste caso a instabilidade de ondas curtas na interface pode ter maiores taxas de crescimento e se tornar dominante. Além disso, eles descobriram que a reologia dos fluidos tem grande influência na estabilidade do sistema. Quando a camada inferior possui um fluido menos viscoso, a reologia deste fluido determina completamente a estabilidade do escoamento, e a camada superior quase não tem influência na estabilidade. No entanto, quando o fluido superior é menos viscoso, uma alteração da reologia dessa camada influencia a estabilidade, mas não é única nesse caso. Esse tipo de alteração afetará mais a instabilidade da superfície e a instabilidade interfacial, para ondas curtas, enquanto uma alteração na reologia da camada inferior desestabilizará o sistema para ondas longas. Os autores mencionaram que escolheram o modelo de Carreau em suas análises por capturar com boa precisão as características de um grande número de fluidos.

Neste trabalho, consideramos o caso bidimensional da estabilidade de um escoamento gravitacional de um filme líquido. Para fluidos Newtonianos, podemos considerar do teorema de [Squire \(1933\)](#), mesmo para escoamentos com superfície livre como proposto por [Yih \(1955\)](#), ou escoamentos estratificados como demonstrado por [Hesla *et al.* \(1986\)](#) onde os fluidos envolvidos respeitam a equação constitutiva Newtoniana. No trabalho de [Gupta e Rai \(1968\)](#), foi utilizada uma análise de estabilidade linear padrão para o caso tridimensional de um fluido viscoelástico respeitando o modelo de Rivlin-Ericksen. Uma vez que as condições de contorno do problema não degeneram à medida que o número da onda α tende a zero, é possível resolver o sistema utilizando um procedimento de perturbação padrão, como feito por [Yih \(1963\)](#). Sua análise mostra o resultado de que, sob certas circunstâncias, um fluido de Reiner-Rivlin não respeita o Teorema de Squire. No estudo de [Sahu e Matar \(2010\)](#), é analisada a estabilidade linear tridimensional de um escoamento de dois fluidos imiscíveis. A camada superior contém um fluido Newtoniano e um viscoplástico na inferior, este respeitando um modelo de Herschel-Bulkley. Eles concentram suas análises no intervalo de parâmetros em que o teorema de Squire não é válido. Os autores resolveram o problema de autovalor resultante da combinação da equação de Orr-Sommerfeld e das condições de contorno usando o código-fonte aberto LAPACK utilizando um método de colocação espectral [Canuto *et al.* \(2012\)](#). Nos casos

em que a raiz quadrada da razão de viscosidade é maior que a razão de espessura, o resultado mostrou a presença de instabilidades tridimensionais. E para o modo de cisalhamento, com altos números de Reynolds, os modos bidimensionais são mais instáveis que os tridimensionais. No entanto, no trabalho [Nouar C.; Bottaro e Brancher \(2007\)](#) foi considerada a estabilidade temporal de um fluido *shear-thinning* modelado pela lei de Carreau. A motivação dos autores para este estudo veio da possibilidade de atrasar a transição para a turbulência, através da criação de um contraste de viscosidade no canal. Para resolver o problema, foi utilizado o método de colocação de Chebyshev. O principal resultado dos autores é que as estabilidades bidimensionais parecem dominantes em comparação com as tridimensionais. Porém, eles apontam que não podem fazer uso do teorema de Squire, uma vez que este só é válido para um problema reduzido quando os termos relacionados à perturbação da viscosidade são negligenciados.

O principal objetivo dessa revisão foi deixar para o leitor uma impressão geral dos campos tratados neste trabalho. Tenta-se trazer apenas um breve resumo dos principais estudos e conclusões de problemas clássicos, assim como as obras que mais inspiraram a construção deste texto. Alguns trabalhos não foram inclusos nesta revisão porém, recomenda-se ao leitor as brilhantes obras de [Tanner e Walters \(1998\)](#) e [Drazin e Reid \(2004\)](#) para mais referências sobre esses assuntos, assim como os excelentes artigos de [Doraiswamy \(2002\)](#) e [Darrigol \(2002\)](#), sendo estes dois últimos a maior fonte de inspiração para a ordem cronológica utilizada nesta revisão.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Estado base

Será exposto neste capítulo todas as principais equações, e manipulações algébricas, necessárias para a obtenção do estado base e do problema de estabilidade temporal que virão a ser resolvidos mais adiante. Muitas das escolhas de notações e formatos estão associados ao estilo adotado em [Morrison \(2001\)](#). Algumas suposições e explicações serão apresentadas no decorrer do desenvolvimento do problema. De maneira geral podemos escrever a equação do momento para escoamentos compressíveis na forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla \cdot \vec{\Pi} + \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

onde $\vec{\Pi}$ é o tensor de tensões total, \vec{v} é o campo de velocidades, \vec{g} o vetor gravidade e ρ a densidade. As duas principais contribuições para este termo são: a pressão termodinâmica e as deformações do fluido. Como a pressão termodinâmica é uma força isotrópica, e que atua perpendicularmente em qualquer superfície, podemos expressá-la matematicamente escrevendo a parte de pressão do tensor de tensões, como um tensor proporcional ao tensor identidade na forma $p \vec{I}$. A parte não termodinâmica do tensor de tensões é representada por $\vec{\tau}$ e é chamado de tensor de tensões extra, ou tensor desvio de tensões. Como $\vec{\Pi}$ e $p \vec{I}$ são ambos tensores simétricos o tensor $\vec{\tau}$ também é simétrico e contém as contribuições oriundas das deformações que ocorrem no fluido. Para um fluido em repouso temos que $\vec{\tau}$ torna-se $p \vec{I}$, caracterizando assim a pressão hidrostática. Dessa forma podemos definir os tensores de tensões total e extra como,

$$\vec{\Pi} = p \vec{I} + \vec{\tau} \quad (3.2)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\Pi} - p \vec{I} \quad (3.3)$$

Outra equação que necessitamos para o desenvolvimento do problema é a equação da continuidade, oriunda da lei de conservação da massa. A equação da continuidade para um

fluido compressível é dada por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.4)$$

Para fluidos compressíveis a equação constitutiva Newtoniana para o tensor de tensões extra é dada por,

$$\vec{\tau} = -\mu[\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T] + \left(\frac{2}{3}\mu - \vartheta\right)(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I} \quad (3.5)$$

onde μ é a viscosidade de cisalhamento e ϑ é a viscosidade aparente. A primeira é referente a resistência do fluido ao movimento de deslizamento, enquanto a segunda trata-se de uma contribuição isotrópica à tensão, gerada quando a densidade do fluido se altera sob efeito de uma deformação. Se considerarmos um fluido incompressível, ou seja, um fluido cuja densidade não é uma função do tempo ou do espaço, a Eq. (3.4) torna-se apenas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.6)$$

substituindo a Eq. (3.6) na equação constitutiva Newtoniana, temos o caso incompressível da mesma, dada por,

$$\vec{\tau} = -\mu[\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T]$$

na qual o tensor entre colchetes é chamado tensor taxa de deformação e é definido como,

$$\dot{\vec{\gamma}} = \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \quad (3.7)$$

Com esta última notação podemos escrever a equação constitutiva Newtoniana para fluidos incompressíveis na forma,

$$\vec{\tau} = -\mu \dot{\vec{\gamma}} \quad (3.8)$$

sendo esta última aplicável para todo tipo de escoamento de fluidos com características Newtonianas. Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.1) e utilizando a identidade $\vec{\nabla} \cdot p \vec{I} = \nabla p$, podemos escrever a equação do momento na forma,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{g} \quad (3.9)$$

Para desenvolvermos as equações começaremos a expandir suas componentes espaciais, dessa forma, trabalharemos a Eq. (3.9) termo a termo. A notação utilizada para as componentes de velocidade será $\vec{v} = (u, v, w)$; já para as espaciais teremos $\vec{s} = (x, y, z)$ e os versores utilizados para essas dimensões serão \hat{e}_x , \hat{e}_y e \hat{e}_z . Portanto, partindo da Eq. (3.9) temos as seguintes igualdades,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \hat{e}_x + \frac{\partial v}{\partial t} \hat{e}_y + \frac{\partial w}{\partial t} \hat{e}_z \quad (3.10)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} =$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{e}_y + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \hat{e}_z \quad (3.11)$$

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z \quad (3.12)$$

Assumindo que o problema a ser tratado apresenta apenas um ângulo de inclinação θ , no qual é independente da componente \hat{e}_z podemos escrever,

$$\rho \vec{g} = \rho g \sin \theta \hat{e}_x + \rho g \cos \theta \hat{e}_y + 0 \hat{e}_z \quad (3.13)$$

Nosso próximo termo trata-se do tensor de tensões $\vec{\tau}$ e por isso faremos algumas suposições sobre as características do fluido, assim como apresentaremos algumas escolhas para o mesmo. O fluido do qual este texto busca analisar pertence a um grupo de fluidos chamados de "Newtonianos generalizados". Esta classe de fluidos tem como característica principal o fato de que a viscosidade é uma função da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ (que será devidamente apresentada mais adiante no texto). Portanto, se considerarmos um escoamento incompressível podemos alterar a equação constitutiva Newtoniana para,

$$\vec{\tau} = -\eta(\dot{\gamma}) \vec{\dot{\gamma}} \quad (3.14)$$

obtendo assim uma equação constitutiva para fluidos Newtonianos generalizados incompressíveis. Tomando como base este último resultado assumiremos também que $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função escalar. Utilizando a Eq. (3.7) obtemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = -[\vec{\nabla} \eta(\dot{\gamma}) \cdot \vec{\nabla} \vec{v}] - \eta(\dot{\gamma})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) - [\vec{\nabla} \eta(\dot{\gamma}) \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})^T] - \eta(\dot{\gamma})[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})^T] \quad (3.15)$$

Em relação a Eq. (3.15), realizaremos o mesmo procedimento dado para a Eq. (3.9) abrindo termo a termo nas componentes espaciais. Dessa maneira podemos escrever as igualdades,

$$\begin{aligned}
& -[\vec{\nabla}\eta(\dot{\gamma}) \cdot \vec{\nabla}\vec{v}] = -\left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]\hat{e}_x \\
& -\left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\hat{e}_y - \left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right]\hat{e}_z(3.16)
\end{aligned}$$

$$-\eta(\dot{\gamma})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}) = -\eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\hat{e}_x$$

$$-\eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\hat{e}_y - \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\hat{e}_z(3.17)$$

$$-[\vec{\nabla}\eta(\dot{\gamma}) \cdot (\vec{\nabla}\vec{v})^T] = -\left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right]\hat{e}_x$$

$$-\left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\hat{e}_y - \left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right]\hat{e}_z(3.18)$$

$$-\eta(\dot{\gamma})[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{v})^T] = -\eta(\dot{\gamma})[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})] = 0(3.19)$$

onde esta última identidade pode ser obtida uma vez que a Eq. (3.6) é utilizada. Substituindo as Eqs.(3.16) - (3.19) na Eq. (3.15) temos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} =$$

$$-\left[2\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right]\hat{e}_x$$

$$-\left[\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\eta(\dot{\gamma})}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\hat{e}_y$$

$$-\left[\frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right] \hat{e}_z \quad (3.20)$$

Substituindo Eqs.(3.10) - (3.13) na Eq. (3.20) teremos a equação do movimento nas coordenadas espaciais na forma,

$$\left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin \theta \right] \hat{e}_x \quad (3.21)$$

$$\left[\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g \cos \theta \right] \hat{e}_y \quad (3.22)$$

$$\left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right] \hat{e}_z \quad (3.23)$$

Neste trabalho estamos considerando como sistema físico um filme líquido escoando em um plano inclinado sob o efeito da gravidade, como o apresentado em Fig. (3.1). Nesta figura h representa a espessura do filme líquido, θ o ângulo de inclinação da superfície sólida, \vec{g} o vetor gravidade e $\xi(x, t)$ a posição da interface. Para modelar o comportamento da viscosidade optamos pelo modelo de Carreau-Yasuda. Esta escolha deve-se ao fato que, além de ser um dos mais gerais dentro do grupo de fluidos Newtonianos generalizados, ele também prevê uma taxa de cisalhamento finita na superfície, tornando-o adequado para o sistema que estamos considerando. O modelo de Carreau-Yasuda é dado por,

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) [1 + (\dot{\gamma} \lambda)^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.24)$$

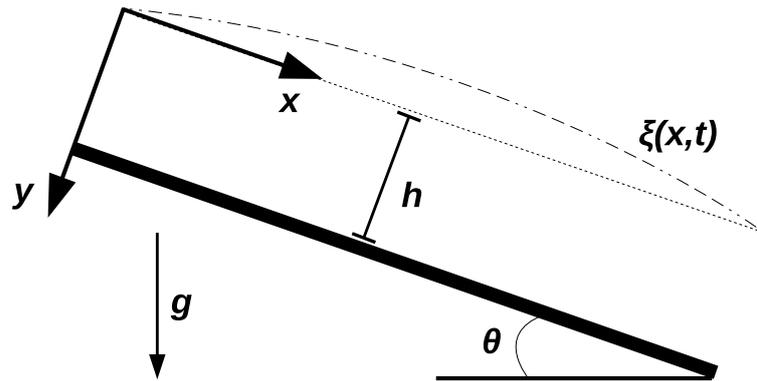


Figura 3.1 – Esboço do problema físico de um escoamento gravitacional de um filme líquido.

onde a prevê a forma da região de transição entre o platô da taxa de cisalhamento zero e a porção decrescente (semelhante à lei de potência) da curvatura da viscosidade versus taxa de cisalhamento. λ determina a taxa de cisalhamento na qual ocorre a transição do platô da taxa de cisalhamento zero para a porção de lei de potência. Ele também descreve a transição entre a região de lei de potência para $\eta = \eta_\infty$. O expoente n governa a inclinação da parte decrescente da curva η . Neste modelo, a viscosidade tende a η_∞ conforme a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ se torna maior. Quando a taxa de cisalhamento fica menor, a viscosidade tende a η_0 . A fim de avaliarmos a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ presente na Eq. (3.24) devemos calcular a segunda invariante do tensor $\dot{\vec{\gamma}}$ dado pelo produto escalar tensorial $\dot{\vec{\gamma}} : \dot{\vec{\gamma}}$. Dessa forma temos,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\gamma}} : \dot{\vec{\gamma}} = 2 \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (3.25) \end{aligned}$$

portanto, considerando a Eq. (3.25), a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{\gamma}}| = \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{\dot{\vec{\gamma}} : \dot{\vec{\gamma}}}{2}} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.26) \end{aligned}$$

Para descrevermos completamente a Eq. (3.23) devemos calcular as derivadas de $\eta(\dot{\gamma})$. Considerando a Eq. (3.24) as derivadas são dadas por,

$$\frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial x} = (\eta_0 - \eta_\infty) a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} \lambda \right) (\dot{\gamma} \lambda)^{a-1} [1 + (\dot{\gamma} \lambda)^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial y} = (\eta_0 - \eta_\infty) a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} \lambda \right) (\dot{\gamma} \lambda)^{a-1} [1 + (\dot{\gamma} \lambda)^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \eta(\dot{\gamma})}{\partial z} = (\eta_0 - \eta_\infty) a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} \lambda \right) (\dot{\gamma} \lambda)^{a-1} [1 + (\dot{\gamma} \lambda)^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.29)$$

porém, para as Eq. (3.26)-Eq. (3.29) precisamos ainda considerar $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x}, \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z}$ na forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} = & \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ & \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} = & \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ & \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \Big] + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \Big\} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} &= \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
& \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right] + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right] + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Podemos agora fazer algumas considerações sobre a adimensionalização das equações até aqui desenvolvidas. Consideraremos primeiro os seguintes grupos adimensionais:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}, \bar{p}, \bar{\eta}) = \left(\frac{x}{h_s}, \frac{y}{h_s}, \frac{z}{h_s}, \frac{uh_s}{Q}, \frac{vh_s}{Q}, \frac{wh_s}{Q}, \frac{tQ}{h_s^2}, \frac{ph_s^2}{\rho Q^2}, \frac{\eta}{\eta_0} \right) \quad (3.33)$$

onde a escala característica é a espessura do filme líquido h_s dada por,

$$h_s = \left[\frac{\eta_0 Q}{\rho g \sin(\theta)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.34)$$

Considerando a Eq. (3.33) a conservação da massa dada pela Eq. (3.6) assume a forma,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.35)$$

onde a linha acima das componentes representa uma componente adimensionalizada. Podemos demonstrar de maneira direta que substituindo Eq. (3.33) na Eq. (3.26) temos a forma adimensional da taxa de cisalhamento dada por,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{Q}{h_s^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ &\dot{\gamma} = \frac{Q}{h_s^2} \bar{\gamma} \Leftrightarrow \bar{\gamma} = \dot{\gamma} \frac{h_s^2}{Q} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aplicando a Eq. (3.33) em Eq. (3.21), Eq. (3.22) e Eq. (3.23) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] + \frac{1}{Fr_x^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] + \frac{1}{Fr_y^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde o adimensional Re representa o número de Reynolds, que é o quociente entres forças inerciais e viscosas, enquanto Fr_x e Fr_y representam o número de Froude para as componentes

x e y , sendo o quociente entre as forças inerciais e gravitacionais (de forma mais geral pode ser representado pela razão entre forças inerciais e o campo externo). Dados por,

$$(Re, Fr_x, Fr_y) = \left(\frac{\rho Q}{\eta_0}, \sqrt{\frac{Q^2}{gh_s^3 \sin(\theta)}}, \sqrt{\frac{Q^2}{gh_s^3 \cos(\theta)}} \right) \quad (3.40)$$

Aplicando Eq. (3.33) na Eq. (3.24) obtemos a equação de Carreau-Yasuda adimensionalizada na forma,

$$\bar{\eta}(\bar{\dot{\gamma}}) = I + (1 - I)[1 + (L\bar{\dot{\gamma}})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.41)$$

onde $I = \frac{\eta_\infty}{\eta_0}$ e $L = \frac{\lambda Q}{h_s^2}$. Notemos que, em Eq. (3.41) se considerarmos $I < 1$ e $n < 1$ temos um fluido *shear-thinning*, enquanto que para $I > 1$ e $n > 1$ temos um fluido *shear-thickening*. Quando $n = 1$ ou $L = 0$ temos $\bar{\eta}$ igual a uma constante, caracterizando assim o fluido como Newtoniano. Para obtermos as equações adimensionais do movimento precisamos também aplicar as adimensionalizações em Eq. (3.27), Eq. (3.28) e Eq. (3.29). Com isso, podemos escrever,

$$\frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\dot{\gamma}})}{\partial \bar{x}} = (1 - I)a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(L \frac{\partial \bar{\dot{\gamma}}}{\partial \bar{x}} \right) (L\bar{\dot{\gamma}})^{a-1} [1 + (L\bar{\dot{\gamma}})^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\dot{\gamma}})}{\partial \bar{y}} = (1 - I)a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(L \frac{\partial \bar{\dot{\gamma}}}{\partial \bar{y}} \right) (L\bar{\dot{\gamma}})^{a-1} [1 + (L\bar{\dot{\gamma}})^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\dot{\gamma}})}{\partial \bar{z}} = (1 - I)a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(L \frac{\partial \bar{\dot{\gamma}}}{\partial \bar{z}} \right) (L\bar{\dot{\gamma}})^{a-1} [1 + (L\bar{\dot{\gamma}})^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.44)$$

Neste trabalho estamos considerando o problema de um escoamento bidimensional, dessa maneira, devemos aplicar algumas considerações para as equações utilizadas até o momento. Consideraremos que $\bar{w} = 0$ e $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0$ onde ϕ é quaisquer propriedades, vetores ou tensores associados ao fluido. Dessa forma a equação da continuidade dada por Eq. (3.35),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.45)$$

As equações da conservação do momento serão baseadas em Eq. (3.37) e Eq. (3.38). Quanto a Eq. (3.39) ao aplicarmos as considerações de um escoamento bidimensional,

nal ela torna-se identicamente nula, portanto será desconsiderada neste caso. Dessa forma, as equações do momento são dadas por,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + \frac{1}{Fr_x^2} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + \frac{1}{Fr_y^2} \quad (3.47)$$

ainda seguindo as mesmas considerações, podemos escrever a taxa de cisalhamento $\bar{\gamma}$ dada em Eq. (3.36) como,

$$\bar{\gamma} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

Quanto ao modelo de Carreau-Yasuda e suas derivadas temos que, Eq. (3.41), Eq. (3.42) e Eq. (3.43) permanecem inalteradas em suas descrições apresentadas até aqui. No entanto, a Eq. (3.44) torna-se igual a zero, uma vez que apresenta derivadas em z . Considerando as Eq. (3.30), Eq. (3.31) e Eq. (3.32) e levando em conta o resultado da Eq. (3.36) as derivadas da taxa de cisalhamento assumem a forma de,

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{x}} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right] + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right\} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{y}} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} + \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right] + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right\} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{z}} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.51)$$

A partir deste ponto assumiremos que o escoamento é paralelo e totalmente desenvolvido, não havendo qualquer presença de perturbações no escoamento. O perfil de velocidade do estado base, dado por \bar{u} , é uma função de \bar{y} apenas. A componente de velocidade \bar{v} é igual a zero e o gradiente de pressão na direção x também é zero, ou seja, deste ponto em diante a formulação é específica para escoamentos externos sem gradiente de pressão. Com base nestas considerações a equação da continuidade Eq. (3.45) é identicamente nula, enquanto as equações do momento Eq. (3.46) e Eq. (3.47) tornam-se,

$$\bar{\eta}(\bar{\gamma}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -1 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{\gamma})}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{u}}{\bar{y}} = \frac{\cot \theta}{Re} \quad (3.53)$$

enquanto a taxa de cisalhamento e suas derivadas dadas em Eq. (3.48), Eq. (3.49) e Eq. (3.50) podem ser escritas como,

$$\bar{\gamma} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.56)$$

Substituindo Eq. (3.54) na Eq. (3.41) obtemos o modelo de Carreau-Yasuda na forma,

$$\bar{\eta}(\bar{\gamma}) = I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.57)$$

no entanto, para as derivadas do modelo de Carreau-Yasuda devemos substituir as Eq. (3.54) e Eq. (3.55) na Eq. (3.42), assim como as Eq. (3.54) e Eq. (3.56) na Eq. (3.43). A Eq. (3.44) torna-se igual a zero devido a derivada na direção z . Dessa forma, obtemos respectivamente,

$$\frac{\partial \bar{\eta}(\dot{\gamma})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}(\dot{\gamma})}{\partial \bar{y}} = (1 - I)a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(L \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \left(L \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}(\dot{\gamma})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.60)$$

Substituindo Eq. (3.58) na Eq. (3.53) temos que,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{\cot \theta}{Re} \quad (3.61)$$

A partir deste ponto consideraremos, apenas para o estado base, que $\bar{u} = \bar{U}$. Também utilizaremos a espessura do filme líquido adimensionalizada como $\bar{h} = h/h_s$. Levando em conta as condições de contorno de não-deslizamento na parede e de cisalhamento nulo na superfície do fluido podemos escrever respectivamente,

$$\bar{U}(\bar{y}) = 0 \text{ em } \bar{y} = \bar{h} \quad (3.62)$$

$$\bar{\eta}(\dot{\gamma}) \frac{d\bar{U}(\bar{y})}{d\bar{y}} = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \quad (3.63)$$

Integrando a Eq. (3.52) e Eq. (3.54) temos,

$$\bar{\eta}(\dot{\gamma}) \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} = -\bar{y} \quad (3.64)$$

$$\bar{p} = \bar{y} \frac{\cot \theta}{Re} \quad (3.65)$$

substituindo a Eq. (3.57) na Eq. (3.64) encontramos,

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} = -\bar{y} \text{ para } \bar{y} \in [0; \bar{h}] \quad (3.66)$$

a última relação necessária para fechar a formulação do estado base é obtida considerando que a vazão adimensional igual a unidade . Dessa maneira podemos escrever a integral,

$$\int_0^{\bar{h}} \bar{U} d\bar{y} = 1 \quad (3.67)$$

Dessa forma as Eq. (3.62), Eq. (3.66) e Eq. (3.67) constituem um problema não-linear para determinar o perfil de velocidades e a espessura do filme líquido. Não existe solução analítica para o caso geral, no entanto, podemos encontrar soluções aproximadas. Neste trabalho iremos propor duas soluções para este problema. A primeira é uma solução assintótica utilizando métodos de perturbação, e a segunda será através da implementação de um método numérico.

3.2 Estabilidade temporal

Nesta seção utilizaremos uma pequena variação ao representar as equações do momento. Esta mudança em nada afeta os resultados apresentados na Eq. (3.46) na Eq. (3.47) (que são equivalentes aos resultados apresentados abaixo), no entanto, uma pequena contração de notação ajudará a introduzir termos de perturbação nestas equações. A conservação do momento é dada por,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{1}{Fr_x^2} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{1}{Fr_y^2} \quad (3.69)$$

onde as tensões normais são dadas por $\tau_{xx} = 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$ e $\tau_{yy} = 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}$, Enquanto as tensões tangenciais, ou de cisalhamento, são dadas por $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$. Afim de estudarmos a estabilidade temporal do sistema em questão devemos partir novamente das equações fundamentais do problema. Introduzindo perturbações nas equações de conservação da massa e do momento, assim como nas condições de contorno do problema, vamos obter um conjunto de equações que representa o estado perturbado do sistema físico. É importante ressaltar que esta é uma análise linear da estabilidade, para um dado escoamento base, dessa forma produtos de

perturbações serão sempre descartados. As perturbações serão consideradas na seguinte forma,

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) &= \bar{U}(\bar{y}) + \hat{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) &= \hat{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) &= \bar{P}(\bar{y}) + \hat{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\end{aligned}\quad (3.70)$$

substituindo Eq. (3.70) na Eq. (3.45) temos,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}[\bar{U}(\bar{y}) + \hat{u}] + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.71)$$

Considerando a Eq. (3.48) podemos reescreve-la na forma,

$$\bar{\gamma} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right]^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.72)$$

substituindo Eq. (3.70) na Eq. (3.72) encontramos que,

$$\hat{\gamma} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \quad (3.73)$$

aplicando Eq. (3.70) no modelo de Carreau-Yasuda dado por Eq. (3.41) temos,

$$\hat{\eta}(\hat{\gamma}) = I + (1 - I) \left\{ 1 + \left[L \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^a \right\}^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.74)$$

Dessa maneira podemos introduzir Eq. (3.70) e Eq. (3.74) na tensão normal τ_{xx} obtendo assim,

$$\hat{\tau}_{xx} = 2 \left\{ I + (1 - I) \left\{ 1 + \left[L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^a \right] \right\}^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \quad (3.75)$$

para resolvermos a exponenciação $\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^a$ na Eq. (3.75) devemos utilizar o teorema binomial. Assim, podemos mostrar que,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^a &= \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-k} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{a}{k} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-k} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^k + \sum_{k=2}^a \binom{a}{k} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-k} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^k \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}}\right)^a = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}}\right)^a + a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}}\right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}}\right) \quad (3.76)$$

utilizando a Eq. (3.76) na Eq. (3.75) obtemos,

$$\hat{\tau}_{xx} = 2 \left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a + a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \quad (3.77)$$

aplicando o teorema binomial para a expressão $\left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a + a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^{\frac{n-1}{a}}$ presente na Eq. (3.77) temos,

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a + a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^{\frac{n-1}{a}} = \\ & \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}-k} \left[a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^k = \\ & \sum_{k=0}^1 \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}-k} \left[a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^k \\ & + \sum_{k=2}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}-k} \left[a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^k \Leftrightarrow \\ & \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a + a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^{\frac{n-1}{a}} = \\ & \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \left\{ 1 + (n-1) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{-1} \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right\} \quad (3.78) \end{aligned}$$

substituindo Eq. (3.78) na Eq. (3.77) encontramos,

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xx} = 2 \left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \left\{ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + (n-1) \right. \right. \\ \left. \left. \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{-1} \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \right\} \right\} = \end{aligned}$$

$$2 \left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\tau}_{xx} = 2\bar{\eta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \quad (3.79)$$

note-se que na Eq. (3.79) definimos que $\bar{\eta} = I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}}$. Introduzindo a Eq. (3.70) e Eq. (3.74) na tensão normal $\bar{\tau}_{yy}$ obtemos,

$$\hat{\tau}_{yy} = 2 \left\{ I + (1 - I) \left\{ 1 + \left[L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^a \right] \right\}^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \quad (3.80)$$

substituindo a Eq. (3.76) na Eq. (3.80) podemos escrever,

$$\hat{\tau}_{yy} = 2 \left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a + a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \quad (3.81)$$

substituindo a Eq. (3.78) na Eq. (3.81) teremos,

$$\hat{\tau}_{yy} = 2 \left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} + (n - 1) \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{-1} \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \right\} \right\} =$$

$$2 \left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\tau}_{yy} = 2\bar{\eta} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \quad (3.82)$$

Aplicando a Eq. (3.70) e Eq. (3.74) nas tensões de cisalhamento $\bar{\tau}_{xy}$ e $\bar{\tau}_{yx}$ iremos obter,

$$\hat{\tau}_{xy} = \hat{\tau}_{yx} = \left\{ I + (1 - I) \left\{ 1 + \left[L \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^a \right] \right\}^{\frac{n-1}{a}} \right\} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (3.83)$$

utilizando Eq. (3.76) na Eq. (3.83) temos,

$$\hat{\tau}_{xy} = \hat{\tau}_{yx} = \left\{ I + (1-I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a + a L^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{a-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (3.84)$$

substituindo Eq. (3.78) na Eq. (3.84) encontramos que,

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xy} &= \left\{ I + (1-I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \left\{ 1 + (n-1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{-1} \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right\} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) = \right. \\ & I \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + (1-I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}-1} \left\{ \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right] \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right. \\ & \left. + (n-1) \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + (n-1) \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\} \Rightarrow \\ & \left\{ I + (1-I) \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \\ & + \left\{ I + (1-I) \left[1 + n \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right] \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}-1} \right\} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) = \\ & \bar{\tau}_{xy} + \hat{\tau}_{xy} \end{aligned} \quad (3.85)$$

nota-se que o resultado obtido no desenvolvimento da Eq. (3.85) também é válido para $\hat{\tau}_{yx}$. Com estes resultados podemos reescrever as equações do momento. Aplicando Eq. (3.70), Eq. (3.79), Eq. (3.85) em Eq. (3.68) obtemos,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \hat{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{1}{Fr_x^2} \quad (3.86)$$

substituindo Eq. (3.52) em Eq. (3.86) temos que,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \hat{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (3.87)$$

onde, $\hat{\tau}_{xx} = 2\bar{\eta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}}$, $\hat{\tau}_{xy} = \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)$ e $\bar{\epsilon}$ é dado por,

$$\bar{\epsilon} = I + (1 - I) \left[1 + n \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right] \left[1 + \left(L \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a} - 1} \quad (3.88)$$

Agora, substituindo Eq. (3.70), Eq. (3.82) e Eq. (3.85) na Eq. (3.69) podemos escrever,

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{1}{Fr_y^2} \quad (3.89)$$

utilizando a Eq. (3.53) na Eq. (3.89) encontramos que,

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (3.90)$$

onde, $\hat{\tau}_{yy} = 2\bar{\eta} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}}$ e novamente $\hat{\tau}_{xy} = \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)$, assim como $\bar{\epsilon}$ é dado por Eq. (3.88). Para continuarmos o desenvolvimento das equações de conservação do momento tomaremos as derivadas de Eq. (3.87) em relação a \bar{y} e Eq. (3.90) em relação a \bar{x} , obtendo respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{U} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} + \hat{v} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} \right. \\ \left. + 2\bar{\eta} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \bar{y}^3} + \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \bar{y}^2 \partial \bar{x}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + 2\bar{\eta} \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial \bar{x}^3} \right) \right] \quad (3.92)$$

subtraindo Eq. (3.92) de Eq. (3.91) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{U} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \hat{v} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} = \\ \frac{1}{Re} \left\{ 2\bar{\eta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right] + 2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{\epsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right] \} \quad (3.93)$$

Como estamos considerando um sistema bidimensional podemos utilizar funções corrente $\hat{\Psi}$ na forma,

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}} \\ \hat{v} &= -\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \quad (3.94)$$

substituindo Eq. (3.94) na Eq. (3.71) a equação da continuidade é identicamente nula, como demonstrado abaixo,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(-\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = 0 \quad (3.95)$$

aplicando também Eq. (3.94) em Eq. (3.93) iremos encontrar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \bar{U} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{1}{Re} \left\{ 2\bar{\eta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right. \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right] + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) \\ &\left. \left. + 2 \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \bar{\epsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \right\} \quad (3.96) \end{aligned}$$

Uma vez que as derivadas são independentes e o sistema é linear podemos considerar as funções corrente como modos normais adimensionalizados e escrever,

$$\hat{\Psi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{\Psi}(\bar{y}) e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} \quad (3.97)$$

onde $\alpha = kh_s \in \mathbb{R}$, k corresponde ao número de onda, e $c = \omega h_s k^{-1} Q^{-1} \in \mathbb{C}$, ω é a frequência complexa. Da Eq. (3.96) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{U} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^3} \right) - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{1}{Re} \left[4\bar{\eta} \frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + 4 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \right) + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^4} - 2 \frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^4} \right) \right] \quad (3.98) \end{aligned}$$

substituindo Eq. (3.97) em Eq. (3.98) obtemos,

$$\begin{aligned}
[-i\alpha c D^2 \tilde{\Psi} + i\alpha^3 c \tilde{\Psi} + \bar{U}(i\alpha D^2 \tilde{\Psi} - i\alpha^3 \tilde{\Psi}) - D^2 \bar{U} i\alpha \tilde{\Psi}] e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} &= \frac{1}{Re} [-4\bar{\eta}\alpha^2 D^2 \tilde{\Psi} - 4\alpha^2 D\bar{\eta} D\tilde{\Psi} \\
+ D^2 \bar{\epsilon}(D^2 \tilde{\Psi} + \alpha^2 \tilde{\Psi}) + 2D\bar{\epsilon}(D^3 \tilde{\Psi} + \alpha^2 D\tilde{\Psi}) + \bar{\epsilon}(D^4 \tilde{\Psi} + 2\alpha^2 D^2 \tilde{\Psi} + \alpha^4 \tilde{\Psi})] e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} &\Leftrightarrow \\
(D^2 + \alpha^2)[D^2 \bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}(D^2 + \alpha^2)]\tilde{\Psi} - 4\alpha^2 D(\bar{\eta}D\tilde{\Psi}) &= \\
i\alpha Re[(\bar{U} - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2 \bar{U}]\tilde{\Psi} & \quad (3.99)
\end{aligned}$$

onde $D^j = \frac{\partial^j}{\partial \bar{y}^j}$ e $\tilde{\Psi}$ é uma função de \bar{y} como definido na Eq. (3.97). A Eq. (3.99) é a equação de Orr-Sommerfeld para um fluido definido pelo modelo de Carreau-Yasuda. Dessa forma podemos começar a desenvolver as equações de condição de contorno para o problema.

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \\
\bar{v} &= 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h}
\end{aligned} \quad (3.100)$$

utilizando Eq. (3.70), Eq. (3.94), Eq. (3.97) e Eq. (3.100) podemos escrever,

$$\bar{U} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} = 0 \quad (3.101)$$

substituindo Eq. (3.62) na Eq. (3.101) encontramos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\Psi}(\bar{h})}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} &= 0 \Leftrightarrow \\
D\tilde{\Psi}(\bar{y}) &= 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h}
\end{aligned} \quad (3.102)$$

Considerando o mesmo procedimento para \bar{v} em Eq. (3.100) temos,

$$-i\alpha \tilde{\Psi} e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\Psi}(\bar{h}) = 0$$

$$\tilde{\Psi}(\bar{y}) = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \quad (3.103)$$

onde as últimas igualdades em Eq. (3.102) e Eq. (3.103) formam as condições de não deslizamento do problema físico. Agora faremos uma breve descrição matemática da interface do

fluido, para logo em seguida apresentarmos a condição cinemática na superfície livre. Considerando a representação geral da interface como $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0$ temos que,

$$dH(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} = 0 \quad (3.104)$$

porém, uma vez que $\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \hat{e}_x + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \hat{e}_y$ e $d\vec{x} = d\bar{x}\hat{e}_x + d\bar{y}\hat{e}_y$ podemos escrever, $\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \cdot d\vec{x} = \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} d\bar{y}$, portanto podemos escrever Eq. (3.104) como,

$$dH(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \cdot d\vec{x} + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} = 0 \quad (3.105)$$

O vetor normal unitário \vec{n} da superfície é obtido pelo fato de que o diferencial de H é zero. Dado um deslocamento $d\vec{x}$ para um t fixo ao longo da linha de superfície podemos escrever,

$$dH(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \cdot d\vec{x} = 0 \quad (3.106)$$

uma vez que \vec{n} é paralelo a $\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ encontramos,

$$\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \|\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\| \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} = \frac{\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\|\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\|} \quad (3.107)$$

considerando que $d\vec{x} = \vec{w} d\bar{t}$ sendo \vec{w} é o vetor velocidade para um dado ponto na superfície.

Utilizando a identidade da Eq. (3.105) nós encontramos,

$$dH(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \cdot d\vec{x} + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} = \nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \cdot \vec{w} d\bar{t} + \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} \Leftrightarrow$$

$$dH(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) - \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} = \nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \cdot \vec{w} d\bar{t} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} = \|\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\| (\vec{n} \cdot \vec{w}) d\bar{t} \Leftrightarrow$$

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = \frac{-\frac{\partial H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}}}{\|\nabla H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\|} \quad (3.108)$$

Como trata-se de um caso bidimensional podemos reescrever a definição geral da interface dada por $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0$ como,

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{y} - \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (3.109)$$

dessa maneira, considerando Eq. (3.107), Eq. (3.108) e Eq. (3.109) obtemos,

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}} \hat{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}} \hat{e}_y \quad (3.110)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = \frac{\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}} \quad (3.111)$$

onde $\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}$ é a inclinação interfacial. A condição cinemática na interface estabelece que a velocidade interfacial $\vec{u} \cdot \vec{n}$ deve ser igual a velocidade da superfície $\vec{w} \cdot \vec{n}$. Portanto, podemos considerar que,

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{w} \cdot \vec{n} \text{ em } \bar{y} = \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3.112)$$

uma vez que $\vec{u} = \bar{u}\hat{e}_x + \bar{v}\hat{e}_y$ e \vec{n} é definido por Eq. (3.110) teremos que,

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{-\bar{u}\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} + \bar{v}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}} \quad (3.113)$$

dessa forma, tomando Eq. (3.111), Eq. (3.112) e Eq. (3.113) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{w} \cdot \vec{n} &\Leftrightarrow \frac{-\bar{u}\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} + \bar{v}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}} \Leftrightarrow \\ &-\bar{u}\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} + \bar{v} = \frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \quad (3.114)$$

substituindo Eq. (3.70), Eq. (3.94) em Eq. (3.114) temos que,

$$\left(\bar{U} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}}\right) \left(-\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right) - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \quad (3.115)$$

Consideraremos a perturbação, juntamente com o modo normal adimensional, de $\bar{\xi}$ como,

$$\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t}) = \hat{\xi}(\bar{x}, \bar{t}) = \tilde{\xi}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} \quad (3.116)$$

substituindo Eq. (3.97) e Eq. (3.116) em Eq. (3.115), e eliminando produtos de perturbações, encontramos que,

$$\begin{aligned} -\bar{U}\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{t}} &= 0 \Leftrightarrow \\ -i\alpha\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}}\tilde{\xi}e^{2i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} - i\alpha\tilde{\Psi}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} + i\alpha c\tilde{\xi}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} - i\alpha\bar{U}\tilde{\xi}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} &= 0 \Rightarrow \\ (-i\alpha\tilde{\Psi} + i\alpha c\tilde{\xi} - i\alpha\bar{U}\tilde{\xi})e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} &= 0 \Leftrightarrow \\ \tilde{\Psi} - (c - \bar{U})\tilde{\xi} &= 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

onde Eq. (3.117) é a condição cinemática da interface. Dando sequência ao desenvolvimento matemático na superfície do fluido iremos tratar das condições dinâmicas na interface, que são dadas pela continuidade das tensões tangenciais e normais da interface. Primeiro lidaremos com as tensões tangenciais, que são associadas com os efeitos viscosos do fluido. Consideremos um vetor \vec{t} tangente a superfície, dessa forma \vec{t} é perpendicular a \vec{n} , então podemos escrever $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$, para esta relação ser satisfeita devemos ter \vec{t} dado por,

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}}\hat{e}_x + \frac{\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}\right)^2}}\hat{e}_y \quad (3.118)$$

A continuidade da tensão tangencial é dada por,

$$\vec{t} \cdot (\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (3.119)$$

onde $\vec{\Sigma}$ é o tensor de tensões dado por,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Para o problema bidimensional a Eq. (3.120) torna-se,

$$\Sigma = (\tau_{xx} - P)\vec{e}_x\vec{e}_x + \tau_{yx}\vec{e}_y\vec{e}_x + \tau_{xy}\vec{e}_x\vec{e}_y + (\tau_{yy} - P)\vec{e}_y\vec{e}_y \quad (3.121)$$

utilizando Eq. (3.110), Eq. (3.118) e Eq. (3.121) em Eq. (3.119) obtemos,

$$-\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\bar{\tau}_{xx} + \bar{\tau}_{xy} - \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\bar{\tau}_{yx} + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\bar{\tau}_{yy} = 0 \quad (3.122)$$

Aplicando Eq. (3.79), Eq. (3.82) e Eq. (3.85) em Eq. (3.122) e lembrando que $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$ temos,

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\hat{\tau}_{xx} + (\bar{\tau}_{xy} + \hat{\tau}_{xy}) - \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}(\bar{\tau}_{yx} + \hat{\tau}_{yx}) + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\hat{\tau}_{yy} = 0 \Leftrightarrow \\ & -\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}2\bar{\eta}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} + \bar{\epsilon}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{x}}\right) - \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\left[\bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} + \bar{\epsilon}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{x}}\right)\right] + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}2\bar{\eta}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{y}} = 0 \Leftrightarrow \\ & \bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} + \bar{\epsilon}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{x}}\right) - \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} = 0 \end{aligned} \quad (3.123)$$

Aplicando a série de Taylor para $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}}$ podemos representar esta igualdade como uma série de potência de $\bar{\xi}$ no entorno de $\bar{y} = 0$. Dessa forma, utilizando um truncamento de primeira ordem, podemos escrever,

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial\bar{y}}\bar{\xi} + \mathcal{O}(\bar{\xi}^2) \Rightarrow \bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} = \bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}}\right)\bar{\xi} \quad (3.124)$$

dessa forma, utilizando Eq. (3.63) e Eq. (3.64) em Eq. (3.124) temos,

$$\bar{\eta}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} = -\bar{\xi} \quad (3.125)$$

substituindo Eq. (3.125) em Eq. (3.123) obtemos,

$$-\bar{\xi} + \bar{\epsilon}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{x}}\right) + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{x}}\bar{\xi} = 0 \Rightarrow \bar{\epsilon}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{x}}\right) - \bar{\xi} = 0 \quad (3.126)$$

Aplicando Eq. (3.94), Eq. (3.97) e Eq. (3.116) em Eq. (3.126) nós escrevemos,

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) - \bar{\xi} = 0 &\Leftrightarrow \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \bar{\xi} = 0 \Leftrightarrow \\ \bar{\epsilon} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} - i^2 \alpha^2 \tilde{\Psi} e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} \right] - \tilde{\xi} e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} = 0 &\Leftrightarrow \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \alpha^2 \tilde{\Psi} \right) - \tilde{\xi} = 0 \Leftrightarrow \\ \bar{\epsilon} (D^2 + \alpha^2) \tilde{\Psi} - \tilde{\xi} = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 &\quad (3.127) \end{aligned}$$

onde Eq. (3.127) é a continuidade das tensões tangenciais na interface. Podemos simplificar as condições de contorno acoplando a condição cinemática com as condições dinâmicas. Ao realizarmos esse procedimento a condição cinemática torna-se dispensável na resolução do problema. Substituindo Eq. (3.127) em Eq. (3.117) temos que,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} - \bar{\epsilon}(c - \bar{U})(D^2 + \alpha^2)\tilde{\Psi} = 0 \\ [1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c)(D^2 + \alpha^2)]\tilde{\Psi} = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

Antes de considerarmos a continuidade das tensões normais devemos representar a curvatura da interface matematicamente. Para isso, deve-se calcular o divergente de \vec{n} dado pela Eq. (3.110),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ -\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \Leftrightarrow (3.129) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{-\frac{\partial^2 \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Consideremos uma circunferência de raio R dada por, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = R^2$ e $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{y} - \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t}) = C \Rightarrow \bar{y} = C + \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})$. Derivando a equação da circunferência em relação a \bar{x} teremos,

$$2\bar{y} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + 2\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = -\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \Leftrightarrow \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} = -\frac{1}{\bar{y}} + \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = -\frac{1}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^3} \Leftrightarrow \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = -\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}^3} \quad (3.131)$$

notemos que, para $\bar{y} = C + \bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})$ temos $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\partial\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{d\bar{x}} + \frac{\partial\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{d\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\partial\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \frac{\partial^2\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}^2}$ com este ultimo resultado e a Eq. (3.131) podemos escrever,

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \frac{\partial^2\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}^2} = -\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}^3} \quad (3.132)$$

substituindo Eq. (3.132) em Eq. (3.130) obtemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{-\frac{\partial^2\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}^3 \sqrt{\left(\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}^3}\right)^3}} = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = R^2 (R^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R} \quad (3.133)$$

Com o desenvolvimento acima fica provado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}$ para uma interface cilíndrica. Uma vez que a curvatura da interface tratada neste problema não é constante, ela será representada de maneira mais geral pelo símbolo κ . Dessa forma podemos escrever a igualdade anterior como $\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \kappa$. Com este resultado podemos proceder para a formulação da última condição de contorno. A continuidade das tensões normais é dada pela lei de Laplace-Young que, ao desconsiderarmos quaisquer efeitos gerados pelo ar logo acima da interface, pode ser reescrita na forma,

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}) &= \gamma \kappa \Leftrightarrow \\ \frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \tau_{xx}}{1 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2} - \frac{2\frac{\partial\xi}{\partial x} \tau_{xy}}{1 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2} + \frac{\tau_{yy}}{1 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2} - p &= \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \Leftrightarrow \\ -2\tau_{xy} \frac{\partial\xi}{\partial x} + \tau_{yy} - p &= \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \end{aligned} \quad (3.134)$$

onde γ é a tensão superficial e R o raio de curvatura da interface. Procedimento similar, assim como uma figura ilustrando as tensões aplicadas na interface, pode ser encontrados em [Chimetta \(2016\)](#). Substituindo Eq. (3.33) nesta última igualdade temos,

$$-2\bar{\tau}_{xy} \frac{\partial\bar{\xi}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\bar{x}} + \bar{\tau}_{yy} - \bar{p}Re = \frac{1}{We} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \quad (3.135)$$

onde $We = \frac{\eta_0 Q}{\gamma h_s}$ é o número de Weber, que representa o quociente entre forças inerciais e a tensão superficial. Aplicando Eq. (3.82) e Eq. (3.85) em Eq. (3.135) e assumindo a primeira igualdade em Eq. (3.116)

$$\begin{aligned} -2(\bar{\tau}_{xy} + \hat{\tau}_{xy})\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}} + \hat{\tau}_{yy} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= \frac{1}{We}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \Leftrightarrow \\ -2\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}}\bar{\tau}_{xy} + \hat{\tau}_{yy} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= \frac{1}{We}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \end{aligned} \quad (3.136)$$

Consideraremos o produto $\vec{\nabla} \cdot \vec{n}$ já em sua forma adimensionalizada. Dessa maneira, substituindo Eq. (3.130) e Eq. (3.133) em Eq. (3.136) obtemos,

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}}\bar{\eta}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + 2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= \frac{1}{We}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \Leftrightarrow \\ -2\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}}\bar{\eta}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + 2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= \frac{1}{We} \frac{-\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \\ -2\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}}\bar{\eta}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + 2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= -\frac{1}{We} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2} \end{aligned} \quad (3.137)$$

substituindo Eq. (3.125) em Eq. (3.137) temos que,

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \bar{x}}\hat{\xi} + 2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= -\frac{1}{We} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2} \Rightarrow \\ 2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - (\bar{P} + \hat{p})Re &= -\frac{1}{We} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2} \Leftrightarrow \\ 2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - \bar{P}Re - \hat{p}Re + \frac{1}{We} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.138)$$

utilizando Eq. (3.64) e Eq. (3.65) em Eq. (3.138) podemos escrever,

$$2\bar{\eta}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{\eta}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \cot \theta - \hat{p}Re + \frac{1}{We} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (3.139)$$

substituindo Eq. (3.125) em Eq. (3.139) obtemos a equação que descreve continuidade das tensões normais, dada por,

$$\hat{p}Re + \hat{\xi} \cot \theta - 2\bar{\eta} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{1}{We} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \quad (3.140)$$

A partir de Eq. (3.87) podemos escrever,

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} Re = -Re \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \hat{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right) + 2\bar{\eta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \quad (3.141)$$

substituindo Eq. (3.97) em Eq. (3.141) encontraremos,

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} Re = -Re \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{t} \partial \bar{y}} + \bar{U} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right) + 2\bar{\eta} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \right) \quad (3.142)$$

Consideraremos o modo normal da pressão como,

$$\hat{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{p}(\bar{y}) e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} \quad (3.143)$$

juntamente com a Eq. (3.143), aplicaremos Eq. (3.97) em Eq. (3.142) para obtermos,

$$\begin{aligned} i\alpha Re \tilde{p} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} &= -Re \left[-i\alpha c \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} + i\alpha \bar{U} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \tilde{\Psi} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} \right] \\ &+ 2i^2 \alpha^2 \bar{\eta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} + \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} - i^2 \alpha^2 \tilde{\Psi} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} \right] \\ &+ \bar{\epsilon} \left[\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^3} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} - i^2 \alpha^2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} \right] \Rightarrow \\ i\alpha Re \tilde{p} &= i\alpha Re \left[(c - \bar{U}) \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \tilde{\Psi} \right] - 2\alpha^2 \bar{\eta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{y}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} + \alpha^2 \tilde{\Psi} \right] + \bar{\epsilon} \left[\frac{\partial^3 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^3} + \alpha^2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} \right] \quad (3.144) \end{aligned}$$

substituindo Eq. (3.97), Eq. (3.116), Eq. (3.143) e Eq. (3.94) em Eq. (3.140) teremos,

$$Re \tilde{p} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} + \cot \theta \tilde{\xi} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} + 2i\alpha \bar{\eta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} - \frac{1}{We} i^2 \alpha^2 \tilde{\xi} e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})} = 0 \quad (3.145)$$

aplicando um derivada em relação a \bar{x} em Eq. (3.145) podemos escrever,

$$i\alpha Re\tilde{p}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} + i\alpha \cot \theta \tilde{\xi}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} + 2i^2\alpha^2\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} - \frac{1}{We}i^3\alpha^3\tilde{\xi}e^{i\alpha(\bar{x}-c\bar{t})} = 0 \Rightarrow$$

$$i\alpha Re\tilde{p} + i\alpha \cot \theta \tilde{\xi} - 2\alpha^2\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{We}i\alpha^3\tilde{\xi} = 0 \quad (3.146)$$

utilizando Eq. (3.144) em Eq. (3.146) obtemos,

$$i\alpha Re \left[(c - \bar{U}) \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} \tilde{\Psi} \right] - 4\alpha^2\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial\bar{y}} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}^2} + \alpha^2\tilde{\Psi} \right)$$

$$+ \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^3\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}^3} + \alpha^2\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} \right) + i\alpha \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \tilde{\xi} = 0 \quad (3.147)$$

Acoplando Eq. (3.127) em Eq. (3.147) obteremos a última condição de contorno do problema, dada por,

$$i\alpha Re \left[(c - \bar{U}) \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} \tilde{\Psi} \right] - 4\alpha^2\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial\bar{y}} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}^2} + \alpha^2\tilde{\Psi} \right)$$

$$+ \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^3\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}^3} + \alpha^2\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} \right) + i\alpha \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}^2} + \alpha^2\tilde{\Psi} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$i\alpha Re \left[(c - \bar{U}) \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} \tilde{\Psi} \right] - 4\alpha^2\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}}$$

$$+ \left[\bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial\bar{y}} + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \left(\frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\bar{y}^2} + \alpha^2\tilde{\Psi} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$i\alpha Re[(c-\bar{U})D+D\bar{U}]\tilde{\Psi}-4\alpha^2\tilde{\eta}D\tilde{\Psi}+(D^2+\alpha^2)\left[\bar{\epsilon}D+D\bar{\epsilon}+i\alpha\bar{\epsilon}\left(\cot\theta+\frac{\alpha^2}{We}\right)\right]\tilde{\Psi}=0 \text{ em } \bar{y}=0 \quad (3.148)$$

4 SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS

4.1 Solução do estado base

Este capítulo é dedicado as soluções assintóticas do estado base e do problema de estabilidade. Utilizando as equações Eq. (3.62), Eq. (3.66) e Eq. (3.67) podemos escrever o sistema que define a velocidade e a espessura do filme líquido, dado por,

$$\bar{U}(\bar{y}) = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \quad (4.1)$$

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} = -\bar{y} \text{ para } \bar{y} \in [0; \bar{h}] \quad (4.2)$$

$$\int_0^{\bar{h}} \bar{U} d\bar{y} = 1 \quad (4.3)$$

dessa maneira, assumiremos que a solução do sistema constituído por Eq. (4.1), Eq. (4.2) e Eq. (4.3), é dada pela expansão assintótica na forma,

$$\bar{U}(\bar{y}) = \bar{U}_0(\bar{y}) + \bar{U}_1(\bar{y})L^a + \mathcal{O}(L^m > L^a) \text{ com } m > a \quad (4.4)$$

$$\bar{h} = \bar{h}_0 + \bar{h}_1L^a + \mathcal{O}(L^m > L^a) \text{ com } m > a \quad (4.5)$$

Iremos considerar para as expansões acima que L tende a zero ($L \rightarrow 0$), ou seja, as soluções serão aproximadas para baixos valores do tempo de relaxação. Tomando a primeira aproximação com $\mathcal{O}(L^0)$ temos $\bar{U}(\bar{y}) = \bar{U}_0(\bar{y})$ e $\bar{h} = \bar{h}_0$. Substituindo estas aproximações em Eq. (4.1), Eq. (4.2) e Eq. (4.3) nós temos,

$$\bar{U}_0 = 0 \text{ em } \bar{y} = \bar{h}_0 \quad (4.6)$$

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} = -\bar{y} \quad (4.7)$$

$$\int_0^{\bar{h}_0} \bar{U}_0 d\bar{y} = 1 \quad (4.8)$$

para $\mathcal{O}(L^0)$ devemos descartar qualquer ordem maior, ou igual, a $\mathcal{O}(L^a)$. Portanto, Eq. (4.7) torna-se,

$$\begin{aligned} \left\{ I + (1 - I) \left[1 + L^a \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} &= -\bar{y} \Leftrightarrow \\ \left\{ I + (1 - I)(1)^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} &= -\bar{y} \Leftrightarrow \\ \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} = -\bar{y} \Leftrightarrow \int \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} d\bar{y} &= \int (-\bar{y}) d\bar{y} \Leftrightarrow \\ \bar{U}_0 &= -\frac{\bar{y}^2}{2} + K_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

aplicando a condição presente na Eq. (4.6) em Eq. (4.9) temos que,

$$0 = \frac{\bar{h}_0^2}{2} + K_0 \Leftrightarrow K_0 = -\frac{\bar{h}_0^2}{2} \quad (4.10)$$

substituindo Eq. (4.10) em Eq. (4.9) encontramos,

$$\bar{U}_0 = -\frac{\bar{y}^2}{2} + \frac{\bar{h}_0^2}{2} = \frac{1}{2}(\bar{h}_0^2 - \bar{y}^2) \Leftrightarrow \bar{U}_0 = \frac{1}{2}(\bar{h}_0^2 - \bar{y}^2) \quad (4.11)$$

utilizando Eq. (4.11) em Eq. (4.8) podemos encontrar o valor de \bar{h}_0 da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{h}_0} \bar{U}_0 d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \\ \int_0^{\bar{h}_0} \left[\frac{1}{2}(\bar{h}_0^2 - \bar{y}^2) \right] d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{h}_0^3}{2} - \frac{\bar{h}_0^3}{6} = 1 \Leftrightarrow \\ \bar{h}_0 &= \sqrt[3]{3} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Com base nas igualdades presentes em Eq. (4.11) e Eq. (4.12) temos a solução para $\mathcal{O}(L^0)$ dada por,

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 &= \frac{1}{2}(\bar{h}_0^2 - \bar{y}^2) \\ \bar{h}_0 &= \sqrt[3]{3} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Considerando a segunda aproximação $\mathcal{O}(L^a)$ nós temos que $\bar{U}(\bar{y}) = \bar{U}_0(\bar{y}) + \bar{U}_1(\bar{y})L^a$ e $\bar{h} = \bar{h}_0 + \bar{h}_1L^a$. Substituindo estas aproximações em Eq. (4.1), Eq. (4.2) e Eq. (4.3) nós temos,

$$\bar{U}_0 + \bar{U}_1L^a = 0 \text{ em } \bar{y} = \bar{h}_0 + \bar{h}_1L^a \quad (4.14)$$

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^{a+1} \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} L^a \right) = -\bar{y} \quad (4.15)$$

$$\int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1L^a} (\bar{U}_0 + \bar{U}_1L^a) d\bar{y} = 1 \quad (4.16)$$

para $\mathcal{O}(L^a)$ devemos descartar qualquer ordem maior que L^a . Portanto, Eq. (4.15) torna-se,

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^{a+1} \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} L^a \right) = -\bar{y} \Rightarrow$$

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} L^a \right) = -\bar{y} \Leftrightarrow$$

$$I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + IL^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - IL^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \right) \left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} = -\bar{y} \quad (4.17)$$

aplicando o teorema binomial em $\left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}}$ na Eq. (4.17) temos,

$$\left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} (1)^{\frac{n-1}{a}-k} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{ak} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{ak} =$$

$$\binom{\frac{n-1}{a}}{0} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^0 + \binom{\frac{n-1}{a}}{1} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{a \cdot 1} + \sum_{k=2}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{ak} =$$

$$1 + \binom{\frac{n-1}{a}}{1} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a + \sum_{k=2}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{ak} \Rightarrow$$

$$\left[1 + \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} = 1 + \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \quad (4.18)$$

Lembrando que em Eq. (4.18) qualquer termo presente na soma $\sum_{k=2}^{\frac{n-1}{a}} \binom{\frac{n-1}{a}}{k} \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{ak}$ é maior que $\mathcal{O}(L^a)$. Substituindo Eq. (4.18) em Eq. (4.17) podemos escrever,

$$\begin{aligned} I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + IL^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - IL^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \right) \left[1 + \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(L \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right] &= -\bar{y} \\ I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + IL^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - IL^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \\ \left[\left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right) + \left(\frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \right) L^a \right] \left[\left(\frac{n-1}{a} \right) L^a \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \right] &= -\bar{y} \\ \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right) L^a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a \\ + \left(\frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} \right) L^{2a} \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a &= -\bar{y} \end{aligned} \quad (4.19)$$

descartando os termos L^{2a} em Eq. (4.19) obtemos,

$$\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} + L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right) L^a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a = -\bar{y} \quad (4.20)$$

Sabemos por Eq. (4.13) que,

$$\frac{d\bar{U}_0(\bar{y})}{d\bar{y}} = -\bar{y} \quad (4.21)$$

substituindo Eq. (4.21) em Eq. (4.20) encontramos que,

$$\begin{aligned} -\bar{y} + L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} - I \frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right) L^a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^a &= -\bar{y} \Leftrightarrow \\ L^a \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} + (1-I) L^a \left(\frac{n-1}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{a+1} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} = (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{a+1} \quad (4.22)$$

Integrando Eq. (4.22) e aplicando Eq. (4.21) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\bar{U}_1}{d\bar{y}} d\bar{y} &= \int (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) \left(\frac{d\bar{U}_0}{d\bar{y}} \right)^{a+1} d\bar{y} = (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) \int (-\bar{y})^{a+1} d\bar{y} \Leftrightarrow \\ \bar{U}_1(\bar{y}) &= (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) (-1)^{a+1} \int \bar{y}^{a+1} d\bar{y} \Leftrightarrow \\ \bar{U}_1(\bar{y}) &= (-1)^{a+1} (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) \left[\frac{\bar{y}^{a+2}}{a+2} + K_1 \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

da Eq. (4.14) sabemos que em $\bar{y} = \bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a$ temos que $\bar{U}_0 + \bar{U}_1 L^a = 0$. Portanto, utilizando Eq. (4.13), podemos escrever,

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 + \bar{U}_1 L^a = 0 &\Leftrightarrow \bar{U}_1 = -\frac{\bar{U}_0}{L^a} \Leftrightarrow \\ \bar{U}_1 &= -\frac{1}{2L^a} (\bar{h}_0 - \bar{y}^2) \Leftrightarrow \bar{U}_1 = \frac{1}{2L^a} (\bar{y}^2 - \bar{h}_0) \Leftrightarrow \\ \bar{U}_1 &= \frac{1}{2L^a} [(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^2 - \bar{h}_0] = \frac{1}{2L^a} [\bar{h}_0^2 + 2\bar{h}_0\bar{h}_1 L^a + \bar{h}_1^2 L^{2a} - \bar{h}_0] = \bar{h}_0\bar{h}_1 \Leftrightarrow \\ \bar{U}_1 &= \bar{h}_0\bar{h}_1 \text{ em } \bar{y} = \bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a \end{aligned} \quad (4.24)$$

substituindo Eq. (4.24) na Eq. (4.23) obtemos,

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a) &= (-1)^{a+1} (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) \left[\frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}}{a+2} + K_1 \right] \Leftrightarrow \\ \bar{h}_0\bar{h}_1 &= (-1)^{a+1} (1 - I) \left(\frac{1 - n}{a} \right) \left[\frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}}{a+2} + K_1 \right] \Leftrightarrow \\ \frac{\bar{h}_0\bar{h}_1}{(-1)^{a+1} (1 - I) \left(\frac{1-n}{a} \right)} &= \frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}}{a+2} + K_1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{\bar{h}_0 \bar{h}_1}{(-1)^{a+1}(1-I)\left(\frac{1-n}{a}\right)} - \frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}}{a+2} \quad (4.25)$$

substituindo Eq. (4.25) em Eq. (4.23) temos,

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= (-1)^{a+1}(1-I) \left(\frac{1-n}{a} \right) \left[\frac{\bar{y}^{a+2}}{a+2} + \frac{\bar{h}_0 \bar{h}_1}{(-1)^{a+1}(1-I)\left(\frac{1-n}{a}\right)} - \frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}}{a+2} \right] \Leftrightarrow \\ \bar{U}_1 &= (-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} [\bar{y}^{a+2} - (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}] + \bar{h}_0 \bar{h}_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Integrando Eq. (4.16) encontramos que,

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} (\bar{U}_0 + \bar{U}_1 L^a) d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_0 d\bar{y} + \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} = 1 \Leftrightarrow \\ \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \frac{1}{2} (\bar{h}_0 - \bar{y}^2) d\bar{y} + \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} [\bar{h}_0^3 + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a - \frac{1}{3} (\bar{h}_0^3 + 3\bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a + 3\bar{h}_0 \bar{h}_1^2 L^{2a} + \bar{h}_1^3 L^{3a})] + \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3\bar{h}_0^3 - \bar{h}_0^3}{3} \right) + \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{\bar{h}_0^3}{3} + \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} = 1 \Leftrightarrow 1 + \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} &= 1 \Leftrightarrow \\ \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \bar{U}_1 L^a d\bar{y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

substituindo Eq. (4.26) em Eq. (4.27) temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \left\{ (-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} [\bar{y}^{a+2} - (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}] + \bar{h}_0 \bar{h}_1 \right\} L^a d\bar{y} &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^{\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a} \left\{ (-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} L^a [\bar{y}^{a+2} - (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2}] + \bar{h}_0 \bar{h}_1 L^a \right\} d\bar{y} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} L^a \left[\frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+3}}{a+3} - (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+2} (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a) \right] \\ + \bar{h}_0 \bar{h}_1 L^a (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} L^a \left[\frac{(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+3}}{a+3} - (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+3} \right] + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a + \bar{h}_0 \bar{h}_1^2 L^{2a} = 0 \quad (4.28)$$

Aplicando o teorema binomial em Eq. (4.28) para $(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+3}$ podemos escrever,

$$(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+3} = \sum_{k=0}^{a+3} \binom{a+3}{k} (\bar{h}_0)^{a+3-k} (\bar{h}_1 L^a)^k =$$

$$\bar{h}_0^{a+3} + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^a + \sum_{k=2}^{a+3} \binom{a+3}{k} (\bar{h}_0)^{a+3-k} (\bar{h}_1 L^a)^k = \bar{h}_0^{a+3} + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^a \Leftrightarrow$$

$$(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a)^{a+3} = \bar{h}_0^{a+3} + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^a \quad (4.29)$$

utilizando Eq. (4.29) em Eq. (4.28) encontramos,

$$(-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} L^a \left\{ \frac{1}{a+3} [\bar{h}_0^{a+3} + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^a] \right. \\ \left. - [\bar{h}_0^{a+3} + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^a] \right\} + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a + \bar{h}_0 \bar{h}_1^2 L^{2a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} \left\{ \frac{1}{a+3} [\bar{h}_0^{a+3} L^a + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^{2a}] \right. \\ \left. - [\bar{h}_0^{a+3} L^a + (a+3) \bar{h}_0^{a+2} \bar{h}_1 L^{2a}] \right\} + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a + \bar{h}_0 \bar{h}_1^2 L^{2a} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} L^a \left(\frac{\bar{h}_0^{a+3}}{a+3} - \bar{h}_0^{a+3} \right) + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} L^a \left[\frac{-(a+2) \bar{h}_0^{a+3}}{a+3} \right] + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^a \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+3)} \bar{h}_0^{a+3} L^a + \bar{h}_0^2 \bar{h}_1 L^a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{h}_1 = (-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+3)} \bar{h}_0^{a+1} \quad (4.30)$$

Devemos notar que, utilizando Eq. (4.16) com limites de integração de 0 e \bar{h}_0 iremos obter o mesmo resultado de Eq. (4.30). Dessa forma podemos reescrever Eq. (4.24) na forma,

$$\bar{U}_1 = \bar{h}_0 \bar{h}_1 \text{ para } \bar{y} = \bar{h}_0 \quad (4.31)$$

substituindo Eq. (4.31) em Eq. (4.23) teremos,

$$\bar{h}_0 \bar{h}_1 = (-1)^{a+1} (1-I) \left(\frac{1-n}{a} \right) \left[\frac{\bar{h}_0^{a+2}}{a+2} + K_1 \right] \Leftrightarrow$$

$$K_1 = \frac{\bar{h}_0 \bar{h}_1}{(-1)^{a+1} (1-I) \left(\frac{1-n}{a} \right)} - \frac{\bar{h}_0^{a+2}}{a+2} \quad (4.32)$$

utilizando Eq. (4.32) em Eq. (4.23) temos finalmente

$$\bar{U}_1(\bar{y}) = (-1)^{a+1} (1-I) \left(\frac{1-n}{a} \right) \left[\frac{\bar{y}^{a+2}}{a+2} + \frac{\bar{h}_0 \bar{h}_1}{(-1)^{a+1} (1-I) \left(\frac{1-n}{a} \right)} - \frac{\bar{h}_0^{a+2}}{a+2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\bar{U}_1(\bar{y}) = (-1)^a \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} (\bar{h}_0^{a+2} - \bar{y}^{a+2}) + \bar{h}_0 \bar{h}_1 \quad (4.33)$$

Considerando Eq. (4.30) e Eq. (4.33) a solução para $\mathcal{O}(L^a)$ é dada por,

$$\bar{U}_1(\bar{y}) = (-1)^a \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+2)} (\bar{h}_0^{a+2} - \bar{y}^{a+2}) + \bar{h}_0 \bar{h}_1 \quad (4.34)$$

$$\bar{h}_1 = (-1)^{a+1} \frac{(1-I)(1-n)}{a(a+3)} \bar{h}_0^{a+1}$$

Combinando Eq. (4.13) e Eq. (4.34) nas expansões $\bar{U}(\bar{y}) = \bar{U}_0(\bar{y}) + \bar{U}_1(\bar{y})L^a$ e $\bar{h} = \bar{h}_0 + \bar{h}_1 L^a$ temos como solução final o perfil de velocidades e a espessura do filme líquido dados por,

$$\bar{U}(\bar{y}) = \frac{3^{\frac{2}{3}} - \bar{y}^2}{2} + \frac{(-1)^a (1-I)(1-n)}{a(a+2)(a+3)} [3^{\frac{a+2}{3}} - (a+3)\bar{y}^{a+2}] L^a$$

$$\bar{h} = 3^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{(-1)^{a+1} 3^{\frac{a+1}{3}} (1-I)(1-n)}{a(a+3)} \right] L^a \quad (4.35)$$

4.2 Solução para ondas longas

Nesta seção traremos a solução assintótica para o problema de estabilidade dado pela equação de Orr-Sommerfeld. Para começarmos com o processo de solução devemos expandir $\tilde{\Psi}$ e c em séries de potências do número de onda α , obtendo assim,

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} &= \tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ c &= c_0 + \alpha c_1 + \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned}\tag{4.36}$$

Para encontrarmos a solução de ordem $\mathcal{O}(\alpha^0)$ devemos simplificar as equações para todos os termos maiores ou iguais a $\mathcal{O}(\alpha^1)$. Substituindo Eq. (4.36) em Eq. (3.99) temos,

$$\begin{aligned}(D^2 + \alpha^2)[D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}(D^2 + \alpha^2)]\tilde{\Psi}_0 - 4\alpha^2 D(\bar{\eta}D\tilde{\Psi}_0) = \\ i\alpha Re[(\bar{U} - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 \Rightarrow \\ D^2[D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}D^2]\tilde{\Psi}_0 = 0 \Leftrightarrow \\ \bar{\epsilon}D^4\tilde{\Psi}_0 + 2D\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_0 + D^2\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_0 = 0\end{aligned}\tag{4.37}$$

Para as condições de não-deslizamento na parede devemos substituir Eq. (4.36) em Eq. (3.102) e Eq. (3.103) encontramos,

$$D\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h}\tag{4.38}$$

$$\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h}\tag{4.39}$$

Para o acoplamento entre a condição cinemática e a continuidade das tensões tangenciais podemos substituir Eq. (4.36) em Eq. (3.128), dessa forma temos,

$$\begin{aligned}[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)(D^2 + \alpha^2)]\tilde{\Psi}_0 = 0 \Rightarrow \\ \tilde{\Psi}_0 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)D\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = 0\end{aligned}\tag{4.40}$$

no entanto, para o acoplamento entre a condição cinemática e a continuidade das tensões normais, devemos substituir Eq. (4.36) em Eq. (3.148), obtendo assim,

$$\begin{aligned}
& i\alpha Re[(c_0 - \bar{U})D + D\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 - 4\alpha^2\bar{\eta}D\tilde{\Psi}_0 \\
& + (D^2 + \alpha^2) \left[\bar{\epsilon}D + D\bar{\epsilon} + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \tilde{\Psi}_0 = 0 \Rightarrow \\
& \bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_0 + D\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Para continuarmos com a solução precisamos encontrar a expressão de $\bar{\epsilon}$, para isso é necessário calcular a derivada do perfil de velocidade \bar{U} . Tomando a derivada em relação a \bar{y} da $\bar{U}(\bar{y})$ presente na Eq. (4.35) podemos escrever,

$$D\bar{U}(\bar{y}) = -\bar{y} + \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a}\bar{y}^{a+1} \tag{4.42}$$

substituindo Eq. (4.42) em Eq. (3.88) encontramos que,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} = I + (1-I) \left\{ 1 + nL^a \left[-\bar{y} + \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a}\bar{y}^{a+1} \right]^a \right\} \\
\left\{ 1 + L^a \left[-\bar{y} + \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a}\bar{y}^{a+1} \right]^a \right\}^{\frac{n-a-1}{a}}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

aplicando o teorema binomial em Eq. (4.43) temos que,

$$\begin{aligned}
& \left[-\bar{y} + \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a}\bar{y}^{a+1} \right]^a = \\
& \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} (-\bar{y})^{a-k} \left[\frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a}\bar{y}^{a+1} \right]^k = \\
& \sum_{k=0}^1 \binom{a}{k} (-\bar{y})^{a-k} \left[\frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a}\bar{y}^{a+1} \right]^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=2}^a \binom{a}{k} (-\bar{y})^{a-k} \left[\frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a} \bar{y}^{a+1} \right]^k \Rightarrow \\
& \left[-\bar{y} + \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a} \bar{y}^{a+1} \right]^a = \\
& \sum_{k=0}^1 \binom{a}{k} (-\bar{y})^{a-k} \left[\frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a} \bar{y}^{a+1} \right]^k = \\
& (-1)^a \bar{y}^a + a(-1)^{a-1} \bar{y}^{a-1} \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a} \bar{y}^{a+1} = \\
& (-1)^a \bar{y}^a + (-1)^{2a}(1-I)(1-n)L^a \bar{y}^{2a} \Rightarrow \\
& \left[-\bar{y} + \frac{(-1)^{a+1}(1-I)(1-n)L^a}{a} \bar{y}^{a+1} \right]^a = (-1)^a \bar{y}^a + (-1)^{2a}(1-I)(1-n)L^a \bar{y}^{2a} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Dessa forma podemos utilizar Eq. (4.44) em Eq. (4.43) obtendo,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} &= I + (1-I) \{1 + nL^a [(-1)^a \bar{y}^a + (-1)^{2a}(1-I)(1-n)L^a \bar{y}^{2a}]\} \\
& \{1 + L^a [(-1)^a \bar{y}^a + (-1)^{2a}(1-I)(1-n)L^a \bar{y}^{2a}]\}^{\frac{n-a-1}{a}} = \\
\bar{\epsilon} &= I + (1-I) [1 + (-1)^a \bar{y}^a nL^a + (-1)^{2a}(1-I)(1-n)nL^{2a} \bar{y}^{2a}] \\
& [1 + (-1)^a L^a \bar{y}^a + (-1)^{2a}(1-I)(1-n)L^{2a} \bar{y}^{2a}]^{\frac{n-a-1}{a}} = \\
& I + (1-I) [1 + (-1)^a nL^a \bar{y}^a] [1 + (-1)^a L^a \bar{y}^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \Rightarrow \\
\bar{\epsilon} &= I + (1-I) [1 + (-1)^a nL^a \bar{y}^a] [1 + (-1)^a L^a \bar{y}^a]^{\frac{n-a-1}{a}} \quad (4.45)
\end{aligned}$$

aplicando o teorema binomial no fator de ordem $\frac{n-a-1}{a}$ presente em Eq. (4.45) podemos escrever,

$$[1 + (-1)^a L^a \bar{y}^a]^{\frac{n-a-1}{a}} = \sum_{k=0}^{\frac{n-a-1}{a}} \binom{\frac{n-a-1}{a}}{k} (1)^{\frac{n-a-1}{a}-k} [(-1)^a L^a \bar{y}^a]^k =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^1 \binom{n-a-1}{k} (1)^{\frac{n-a-1}{a}-k} [(-1)^a L^a \bar{y}^a]^k + \sum_{k=2}^{\frac{n-a-1}{a}} \binom{n-a-1}{k} (1)^{\frac{n-a-1}{a}-k} [(-1)^a L^a \bar{y}^a]^k \Rightarrow \\
& [1 + (-1)^a L^a \bar{y}^a]^{\frac{n-a-1}{a}} = \sum_{k=0}^1 \binom{n-a-1}{k} (1)^{\frac{n-a-1}{a}-k} [(-1)^a L^a \bar{y}^a]^k \Leftrightarrow \\
& [1 + (-1)^a L^a \bar{y}^a]^{\frac{n-a-1}{a}} = 1 + \frac{(-1)^a (n-a-1) L^a}{a} \bar{y}^a \tag{4.46}
\end{aligned}$$

substituindo Eq. (4.46) em Eq. (4.45) temos,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} &= I + (1-I) \left[1 + (-1)^a n L^a \bar{y}^a \right] \left[1 + \frac{(-1)^a (n-a-1) L^a}{a} \bar{y}^a \right] = \\
I + (1-I) & \left[1 + \frac{(-1)^a (n-a-1) L^a}{a} \bar{y}^a + (-1)^a n L^a \bar{y}^a + \frac{(-1)^{2a} n (n-a-1) L^{2a}}{a} \bar{y}^{2a} \right] \Rightarrow \\
\bar{\epsilon} &= I + (1-I) \left[1 + (-1)^a n L^a \bar{y}^a + \frac{(-1)^a (n-a-1) L^a}{a} \bar{y}^a \right] = \\
I + (1-I) & \left[1 + \frac{(-1)^a (an + n - a - 1) L^a}{a} \bar{y}^a \right] = \\
I + (1-I) & + \frac{(-1)^a (1-I) [(a+1)n - (a+1)] L^a}{a} \bar{y}^a \Leftrightarrow \\
\bar{\epsilon} &= 1 + \frac{(-1)^a (1-I) (n-1) (a+1) L^a}{a} \bar{y}^a \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Aplicando derivadas de primeira e segunda ordem em Eq. (4.47) obtemos, respectivamente,

$$D\bar{\epsilon} = (-1)^a (1-I) (n-1) (a+1) L^a \bar{y}^{a-1} \tag{4.48}$$

$$D^2\bar{\epsilon} = (-1)^a (1-I) (n-1) (a+1) (a-1) L^a \bar{y}^{a-2} \tag{4.49}$$

Para solucionarmos o problema consideraremos a adição de uma condição de normalização arbitrária dada por $\tilde{\Psi} = 1$ em $\bar{y} = 0$ para a ordem $\mathcal{O}(\alpha^0)$. Substituindo Eq. (4.47) e

Eq. (4.48) nas condições de contorno dadas por Eq. (4.40) e Eq. (4.41), assim como considerando Eq. (4.37), Eq. (4.38) e Eq. (4.39) podemos escrever o sistema para a primeira solução na forma,

$$\bar{\epsilon}D^4\tilde{\Psi}_0 + 2D\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_0 + D^2\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \quad (4.50)$$

$$D\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ em } \bar{y} = \bar{h} \quad (4.51)$$

$$\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ em } \bar{y} = \bar{h} \quad (4.52)$$

$$D^3\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \quad (4.53)$$

$$\tilde{\Psi}_0 = 1 \text{ em } \bar{y} = 0 \quad (4.54)$$

$$\tilde{\Psi}_0 + (\bar{U} - c_0)D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \quad (4.55)$$

substituindo Eq. (4.47), Eq. (4.48) e Eq. (4.49) em Eq. (4.50) temos,

$$\left[1 + \frac{(-1)^a(1-I)(n-1)(a+1)L^a}{a}\bar{y}^a \right] D^4\tilde{\Psi}_0 + 2(-1)^a(1-I)(n-1)(a+1)L^a\bar{y}^{a-1}D^3\tilde{\Psi}_0 \\ + (-1)^a(1-I)(n-1)(a+1)(a-1)L^a\bar{y}^{a-2}D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \quad (4.56)$$

A partir da Eq. (4.56) utilizamos o software Wolfram Mathematica como ferramenta para encontrar e simplificar as soluções das equações que serão apresentadas. O código fonte utilizado para a solução assintótica encontra-se no apêndice A. Considerando o sistema formado por Eq. (4.51), Eq. (4.52), Eq. (4.53), Eq. (4.54) e Eq. (4.56) obtemos $\tilde{\Psi}_0$ na forma,

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{3^{2/3}a(a+2)(a+3)} \{ a^3(3^{1/3} - y)^2 + a^2(3^{1/3} - y) \{ y[2(-1)^a 3^{a/3}(I-1)L^a(n-1) - 5] \\ + 5 \cdot 3^{1/3} \} + 2a \{ y \{ (-1)^a(I-1)L^a(n-1)[y^{a+1} + 3^{a/3}(2 \cdot 3^{1/3} - 3y)] + 3y - 6 \cdot 3^{1/3} \} \}$$

$$+3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\} - 2(-1)^a(I-1)L^a(n-1)y[3^{\frac{a}{3}}(y+2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}) - 3y^{a+1}] \quad (4.57)$$

para obtermos c_0 precisamos calcular a segunda derivada de Eq. (4.57) dessa forma devemos escrever,

$$D\tilde{\Psi}_0 = \frac{2}{3^{\frac{2}{3}}}\{-3^{\frac{1}{3}} + y + \frac{1}{a(a+2)(a+3)}\{(-1)^a(I-1)(n-1)L^a\{(a+2)(a+3)y^{a+1} \\ + 3^{\frac{a}{3}}\{3^{\frac{1}{3}}[a(a+2) - 2] - 2[a(a+3) + 1]y\}\}\}\} \quad (4.58)$$

$$D^2\tilde{\Psi}_0 = \frac{2}{3^{\frac{2}{3}}}\{1 + \frac{1}{a(a+2)(a+3)}\{(-1)^a(I-1)(n-1)L^a\{(a+1)(a+2)(a+3)y^a \\ - 2 \cdot 3^{\frac{a}{3}}[a(a+3) + 1]\}\}\} \quad (4.59)$$

substituindo Eq. (4.35), Eq. (4.57) e Eq. (4.59) em Eq. (4.55) encontramos a velocidade de fase c_0 dada por,

$$c_0 = 3^{\frac{2}{3}} + \frac{(-1)^a 3^{\frac{a+2}{3}}(a+1)(I-1)(n-1)L^a}{a(a+3)} \quad (4.60)$$

Com estes últimos resultados podemos prosseguir para a solução de ordem $\mathcal{O}(\alpha)$. Para isso devemos simplificar todos termos de ordem superior ou igual a $\mathcal{O}(\alpha^2)$ nas próximas equações. Substituindo Eq. (4.36) em Eq. (3.99) podemos escrever,

$$(D^2 + \alpha^2)[D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}(D^2 + \alpha^2)](\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) - 4\alpha^2 D[\bar{\eta}D(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1)] =$$

$$i\alpha Re\{[\bar{U} - (c_0 + \alpha c_1)](D^2 - \alpha^2) - D^2\bar{U}\}(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) \Leftrightarrow$$

$$(D^2 + \alpha^2)[D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}(D^2 + \alpha^2)](\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) - 4\alpha^2 D[\bar{\eta}D(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1)] =$$

$$iRe\{[\alpha\bar{U} - (\alpha c_0 + \alpha^2 c_1)](D^2 - \alpha^2) - \alpha D^2\bar{U}\}(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) \Rightarrow$$

$$(D^2)[D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}D^2](\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) =$$

$$i\alpha Re[(\bar{U} - c_0)D^2 - D^2\bar{U}](\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& D^2(D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}D^2)\tilde{\Psi}_0 + \alpha D^2(D^2\bar{\epsilon} + 2D\bar{\epsilon}D + \bar{\epsilon}D^2)\tilde{\Psi}_1 = \\
& iRe[(\bar{U} - c_0)D^2 - D^2\bar{U}](\alpha\tilde{\Psi}_0 + \alpha^2\tilde{\Psi}_1) \Rightarrow \\
& \bar{\epsilon}D^4\tilde{\Psi}_0 + 2D\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_0 + D^2\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_0 + \alpha(\bar{\epsilon}D^4\tilde{\Psi}_1 + 2D\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_1 + D^2\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_1) = \\
& i\alpha Re[(\bar{U} - c_0)D^2 - D^2\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 \Leftrightarrow
\end{aligned} \tag{4.61}$$

aplicando Eq. (4.37) em Eq. (4.61) temos,

$$\bar{\epsilon}D^4\tilde{\Psi}_1 + 2D\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_1 + D^2\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_1 = iRe[(\bar{U} - c_0)D^2 - D^2\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 \tag{4.62}$$

Considerando as condições de não-deslizamento na parede devemos substituir novamente Eq. (4.36) em Eq. (3.102) e utilizar os resultados de Eq. (4.38) e Eq. (4.39) e com isso iremos obter,

$$D(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) = 0 \Rightarrow D\tilde{\Psi}_1 = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \tag{4.63}$$

$$\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{\Psi}_1 = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \tag{4.64}$$

Novamente para o acoplamento entre a condição cinemática e a continuidade das tensões tangenciais devemos utilizar Eq. (4.36) em Eq. (3.128) obtendo assim,

$$\begin{aligned}
& \{1 + \bar{\epsilon}[\bar{U} - (c_0 + \alpha c_1)](D^2 + \alpha^2)\}(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) = 0 \Leftrightarrow \\
& [1 + (\bar{\epsilon}\bar{U} - \bar{\epsilon}c_0 + \alpha\bar{\epsilon}c_1)(D^2 + \alpha^2)]\tilde{\Psi}_0 + [1 + (\bar{\epsilon}\bar{U} - \bar{\epsilon}c_0 + \alpha\bar{\epsilon}c_1)(D^2 + \alpha^2)]\alpha\tilde{\Psi}_1 = 0 \Leftrightarrow \\
& [1 + (\bar{\epsilon}\bar{U} - \bar{\epsilon}c_0 + \alpha\bar{\epsilon}c_1)(D^2 + \alpha^2)]\tilde{\Psi}_0 + [\alpha + (\alpha\bar{\epsilon}\bar{U} - \alpha\bar{\epsilon}c_0 + \alpha^2\bar{\epsilon}c_1)(D^2 + \alpha^2)]\alpha\tilde{\Psi}_1 = 0 \Rightarrow \\
& [1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)D^2 - \alpha\bar{\epsilon}c_1D^2]\tilde{\Psi}_0 + \alpha[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)D^2]\tilde{\Psi}_1 = 0 \Leftrightarrow \\
& [1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)D^2]\tilde{\Psi}_0 - \alpha\bar{\epsilon}c_1D^2\tilde{\Psi}_0 = -\alpha[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)D^2]\tilde{\Psi}_1
\end{aligned} \tag{4.65}$$

substituindo o resultado de Eq. (4.40) em Eq. (4.65) e aplicando $\bar{y} = 0$ em $\bar{\epsilon}$ encontramos que,

$$[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c_0)D^2]\tilde{\Psi}_1 - \bar{\epsilon}c_1D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = 0 \quad (4.66)$$

Quanto ao acoplamento entre a condição cinemática e a continuidade das tensões normais, devemos substituir Eq. (4.36) em Eq. (3.148). Também consideraremos que $\frac{\alpha^2}{We} \approx 1$, dessa forma não cancelaremos esse termo quando considerarmos as simplificações de ordem $\mathcal{O}(\alpha)$. Sendo assim podemos escrever,

$$\begin{aligned} & i\alpha Re[(c_0 + \alpha c_1 - \bar{U})D + D\bar{U}](\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) - 4\alpha^2\bar{\eta}D(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) \\ & + (D^2 + \alpha^2) \left[\bar{\epsilon}D + D\bar{\epsilon} + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] (\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) = 0 \Leftrightarrow \\ & i\alpha Re[(c_0 + \alpha c_1 - \bar{U})D + D\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 + i\alpha^2 Re[(c_0 + \alpha c_1 - \bar{U})D + D\bar{U}]\tilde{\Psi}_1 \\ & - 4\alpha^2\bar{\eta}D(\tilde{\Psi}_0 + \alpha\tilde{\Psi}_1) + (D^2 + \alpha^2) \left[\bar{\epsilon}D + D\bar{\epsilon} + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \tilde{\Psi}_0 \\ & + (D^2 + \alpha^2) \left[\alpha\bar{\epsilon}D + \alpha D\bar{\epsilon} + i\alpha^2\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \tilde{\Psi}_1 = 0 \Rightarrow \\ & i\alpha Re[(c_0 - \bar{U})D + D\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 + D^2 \left[\bar{\epsilon}D + D\bar{\epsilon} + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \tilde{\Psi}_0 \\ & + \alpha D^2 [\bar{\epsilon}D + D\bar{\epsilon}] \tilde{\Psi}_1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \alpha\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_1 + \alpha D\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_1 + i\alpha Re[(c_0 - \bar{U})D + D\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 \\ & + \alpha(\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_0 + D\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_0) + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

utilizando o resultado de Eq. (4.41) em Eq. (4.67) podemos escrever,

$$\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_1 + D\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_1 + i \left\{ Re[(c_0 - \bar{U})D + D\bar{U}] + \bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) D^2 \right\} \tilde{\Psi}_0 = 0 \quad (4.68)$$

Para encontrarmos a solução de ordem $\mathcal{O}(\alpha)$ devemos incorporar a condição de normalização $\tilde{\Psi} = 0$ em $\bar{y} = 0$ para o novo sistema, dado pelas Eq. (4.62), Eq. (4.63), Eq. (4.64), Eq. (4.66) e Eq. (4.68). Com isso podemos escrever,

$$\bar{\epsilon}D^4\tilde{\Psi}_1 + 2D\bar{\epsilon}D^3\tilde{\Psi}_1 + D^2\bar{\epsilon}D^2\tilde{\Psi}_1 = iRe[(\bar{U} - c_0)D^2 - D^2\bar{U}]\tilde{\Psi}_0 \quad (4.69)$$

$$D\tilde{\Psi}_1 = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \quad (4.70)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = 0 \text{ para } \bar{y} = \bar{h} \quad (4.71)$$

$$D^3\tilde{\Psi}_1 + i \left\{ Re[(c_0 - \bar{U})D + D\bar{U}] + \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) D^2 \right\} \tilde{\Psi}_0 = 0 \quad (4.72)$$

$$\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = 0 \quad (4.73)$$

$$[1 + (\bar{U} - c_0)D^2]\tilde{\Psi}_1 - c_1D^2\tilde{\Psi}_0 = 0 \text{ para } \bar{y} = 0 \quad (4.74)$$

Considerando o sistema Eq. (4.69), Eq. (4.70), Eq. (4.71), Eq. (4.72) e Eq. (4.73) juntamente com as soluções dadas por Eq. (4.57), Eq. (4.58), Eq. (4.59) e Eq. (4.60) podemos encontrar a solução para ordem $\mathcal{O}(\alpha)$ com o software Wolfram Mathematica. A solução de $\tilde{\Psi}_1$ não foi incorporada ao corpo do texto devido sua extensão, porém pode ser obtida através do solver presente no apêndice A. Utilizando as soluções dadas por Eq. (4.59), Eq. (4.60) e $\tilde{\Psi}_1$ em Eq. (4.74) temos c_1 na forma,

$$c_1 = i \left[\frac{6Re}{5} - \cot(\theta) - \frac{\alpha^2}{We} \right] + i(-1)^a 3^{\frac{a+3}{3}} (I-1)(n-1)L^a \left\{ \frac{-5a(a+5)\alpha^2 + 2[15 + a(6a+37)]ReWe - 5a(a+5)We \cot(\theta)}{5a(a+3)(a+5)We} \right\} \quad (4.75)$$

pela Eq. (4.75) podemos encontrar o número de Reynolds crítico considerando $c_1 = 0$ para $\alpha = 0$ obtendo assim,

$$Re_{cr} = \frac{5 \cot(\theta)}{6} \left\{ 1 + \frac{(-1)^{a+1} 3^{\frac{a}{3}} [15 + a(3a+22)](I-1)(n-1)L^a}{a(a+3)(a+5)} \right\} \quad (4.76)$$

a fim de encontrar a taxa de crescimento das ondas devemos considerar $\sigma = \alpha^2 c_{1i}$. Com isso temos que,

$$\sigma = i \left[\frac{6\alpha^2 Re}{5} - \alpha^2 \cot(\theta) - \frac{\alpha^4}{We} \right] + i(-1)^a 3^{\frac{a+3}{3}} \alpha^2 (I-1)(n-1)L^a$$

$$\left\{ \frac{-5a(a+5)\alpha^2 + 2[15 + a(6a+37)]ReWe - 5a(a+5)We \cot(\theta)}{5a(a+3)(a+5)We} \right\} \quad (4.77)$$

Para encontrarmos a curva de estabilidade neutra devemos considerar a taxa de crescimento igual a zero ($\sigma = 0$), dessa maneira teremos uma expressão para o número de onda crítico α_c dado por,

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{We}(-1)^a 3^{\frac{a+3}{3}} [15 + a(3a+22)](I-1)(n-1)L^a Re}{\sqrt{5a(a+3)(a+5)}\sqrt{6Re - 5 \cot(\theta)}} + \sqrt{\frac{We}{Re} \left[\frac{6}{5} - \frac{\cot(\theta)}{Re} \right]} \quad (4.78)$$

É importante notar que a escolha de $\frac{\alpha^2}{We} \approx 1$ torna possível a obtenção de uma equação que define a taxa de crescimento em função do número de onda, e conseqüentemente uma relação para o número de onda crítico, este capaz de gerar a curva de estabilidade neutra. No entanto, caso decida-se incorporar o termo $\frac{\alpha^2}{We}$ no processo de linearização da Eq. (4.67) encontramos um equação equivalente a Eq. (4.68) na forma,

$$\bar{\epsilon} D^3 \tilde{\Psi}_1 + D \bar{\epsilon} D^2 \tilde{\Psi}_1 + i \{ Re[(c_0 - \bar{U})D + D\bar{U}] + \bar{\epsilon} \cot \theta D^2 \} \tilde{\Psi}_0 = 0 \quad (4.79)$$

a Eq. (4.79) gera o mesmo resultado para Reynolds crítico dado por Eq. (4.76) tomando $c_1 = 0$. Na capítulo 6 iremos analisar o que cada um dessas últimas expressões proporcionam para a análise da instabilidade do escoamento. Ressaltamos que no código utilizado para obter as soluções deste capítulo considerou-se $a > 1$, uma vez que no processo de solução condições de existência como $a = 0$ e $a = 1$ precisam ser respeitadas. No entanto, como notamos em todos os resultados, a única condição de existência presente nas soluções é de $a = 0$ (uma vez que estamos considerando a um número real não-negativo), dessa forma no capítulo 6 estendemos a análise dos resultados assintóticos para $a > 0$.

5 MÉTODO NUMÉRICO

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento dos métodos numéricos necessários para a obtenção das soluções dos problemas do estado base e de instabilidade. Devido ao fato de que utilizaremos polinômios de Chebyshev para a discretização da equação de Orr-Sommerfeld e suas condições de contorno, começaremos este capítulo descrevendo as principais definições e características dessa classe de polinômios para a futura utilização da mesma. Muitos dos resultados e desenvolvimentos aqui descritos podem ser encontrados nas obras de [Fox e Parker \(1968\)](#), [Rivlin \(1974\)](#), [Fletcher \(1984\)](#), [Boyd \(1989\)](#), [Mason e Handscomb \(2002\)](#), [Peyret \(2013\)](#). Recomendamos também ao leitor os trabalhos de [Hossain \(2011\)](#), [Mohammadi \(2013\)](#) e [Abtahi *et al.* \(2016\)](#).

5.1 Polinômios de Chebyshev

Polinômios de Chebyshev T_n de primeira espécie são polinômios em x de grau n , definidos pela relação,

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \text{ onde } x = \cos(\theta) \quad (5.1)$$

onde $x \in [-1, 1]$ e θ possui o intervalo correspondente de $[0, \pi]$, sendo que para $x = -1$ temos $\theta = \pi$ e $x = 1$ para $\theta = 0$. Com base no Teorema de DeMoivre sabemos que $\cos(n\theta)$ é um polinômio de grau n em $\cos(\theta)$, dado pela relação,

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k x \sin^{n-k} x \cos \left[\frac{1}{2}(n-k)\pi \right] \quad (5.2)$$

No entanto, muitas vezes não é eficiente trabalharmos com a forma analítica de $T_n(x)$ porém, podemos encontrar uma relação de recorrência para os polinômios $T_n(x)$ a partir da identidade trigonométrica,

$$\cos(n\theta) + \cos[(n-2)\theta] = 2\cos(\theta)\cos[(n-1)\theta] \quad (5.3)$$

tomando em conjunto Eq. (5.1) temos que,

$$\cos(n\theta) + \cos[(n-2)\theta] = 2\cos(\theta)\cos[(n-1)\theta] \Leftrightarrow$$

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x) \Leftrightarrow$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (5.4)$$

onde Eq. (5.4) é válida para $n = 2, 3, \dots$, considerando as condições iniciais dadas por,

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad (5.5)$$

Dessa maneira a relação de recorrência dada por Eq. (5.4) e suas condições, iniciais presentes em Eq. (5.5), geram todos os polinômios $T_n(x)$ de forma mais eficiente se comparado com sua formulação analítica. A seguir trataremos do produto de polinômios de Chebyshev, operação de extrema importância para a utilização da propriedade de ortogonalidade desta classe de polinômios. Além do produto, mostraremos também como obter relações de recorrência para a derivada e integral desses polinômios. A partir de Eq. (5.1) podemos encontrar o produto de dois polinômios de Chebyshev na forma,

$$\begin{aligned} T_m(x)T_n(x) &= \cos(m\theta)\cos(n\theta) = \\ &= \frac{1}{2}\{\cos[(m+n)\theta] + \cos[|m-n|\theta]\} = \\ &= \frac{1}{2}[T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)] \Leftrightarrow \\ T_m(x)T_n(x) &= \frac{1}{2}[T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)] \quad (5.6) \end{aligned}$$

Através de uma diferenciação direta da forma analítica de $T_n(x)$, dado por Eq. (5.1), torna-se possível encontrar a relação de recorrência para sua derivada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}T_n(x) &= \frac{\frac{d}{d\theta}\cos(n\theta)}{\frac{d}{d\theta}\cos(\theta)} = \frac{-n\operatorname{sen}(n\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta)} = \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{\{\cos[(n-1)\theta] - \cos[(n+1)\theta]\}}{\operatorname{sen}^2(\theta)} = \frac{n}{2} \cdot \frac{\{\cos[(n-1)\theta] - \cos[(n+1)\theta]\}}{1 - \cos^2(\theta)} = \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{[T_{|n-1|}(x) - T_{n+1}(x)]}{1 - x^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{n}{2} \cdot \frac{[T_{|n-1|}(x) - T_{n+1}(x)]}{1-x^2} \quad (5.7)$$

onde Eq. (5.7) é válida para $|x| \neq 1$. Derivadas de ordens superiores podem ser encontradas de forma análoga. Nos extremos do domínio $[-1; 1]$ pode-se utilizar a equação,

$$\left. \frac{d^p}{dx^p} T_n(x) \right|_{x=\pm 1} = (\pm 1)^{n+p} \prod_{m=0}^{p-1} \left[\frac{n^2 - m^2}{2m+1} \right] \text{ para } p \geq 1. \quad (5.8)$$

Para a integral indefinida podemos encontrar a relação de recorrência através do procedimento a seguir,

$$\int T_n(x) dx = - \int \cos(n\theta) \operatorname{sen}(\theta) d\theta = -\frac{1}{2} \int \{ \operatorname{sen}[(n+1)\theta] - \operatorname{sen}[(n-1)\theta] \} d\theta \Leftrightarrow$$

$$\int T_n(x) dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos[(n+1)\theta]}{n+1} - \frac{\cos[(n-1)\theta]}{n-1} \right\} + K$$

onde K representa uma constante de integração arbitrária. Utilizando a definição $x = \cos(\theta)$ temos que $dx = -\operatorname{sen}(\theta)d\theta$. Na equação (5.9) deve-se omitir a segunda parcela dentro das chaves quando $n = 1$, portanto,

$$\int T_n(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{|n-1|}(x)}{n-1} \right], & \text{se } n \neq 1; \\ \frac{1}{4} T_2(x), & \text{se } n = 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Uma vez estabelecidos os conceitos acima podemos enunciar o critério de ortogonalidade entre polinômios de Chebyshev. Considerando o intervalo $[-1; 1]$ juntamente com a função peso $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ pode-se escrever o produto interno entre dois polinômios de Chebyshev na forma,

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (5.10)$$

uma vez que $x = \cos(\theta)$ podemos escrever dx como,

$$x = \cos(\theta) \Rightarrow dx = -\operatorname{sen}(\theta)d\theta = -\sqrt{1-\cos^2(\theta)}d\theta \Rightarrow$$

$$dx = -\sqrt{1-x^2}d\theta \quad (5.11)$$

utilizando Eq. (5.11) em Eq. (5.10) temos,

$$\begin{aligned} \langle T_i, T_j \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi}^0 \frac{-\cos(i\theta)\cos(j\theta)}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} d\theta \Leftrightarrow \\ \langle T_i, T_j \rangle &= \int_0^{\pi} \cos(i\theta)\cos(j\theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.12)$$

tomando $i \neq j$ obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(i\theta)\cos(j\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{\cos[(i+j)\theta] + \cos[(i-j)\theta]\} d\theta = \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}[(i+j)\theta]}{i+j} + \frac{\text{sen}[(i-j)\theta]}{i-j} \right]_0^{\pi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

portanto, podemos concluir que,

$$\langle T_i, T_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j \quad (5.14)$$

Com este resultado podemos dizer que o conjunto dos polinômios $T_i(x)$, com $i = \{0, 1, 2, \dots\}$, formam uma família de polinômios ortogonais dentro do intervalo $[-1, 1]$ com uma função peso associada $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Calculando a norma de um destes polinômios temos,

$$\begin{aligned} \|T_i\|^2 = \langle T_i, T_i \rangle &= \int_0^{\pi} [\cos(i\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 + \cos(2i\theta)] d\theta = \\ \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\text{sen}(2i\theta)}{2i} \right]_0^{\pi} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

no entanto se considerarmos a norma de T_0 temos,

$$\|T_0\|^2 = \langle T_0, T_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \pi \quad (5.16)$$

Por Eq. (5.14), Eq. (5.15) e Eq. (5.16) podemos enunciar o produto interno entre dois polinômios de Chebyshev na forma,

$$\langle T_i, T_j \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } i = j \text{ com } i \neq 0 \text{ e } j \neq 0 \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (5.17)$$

notemos que, apesar da ortogonalidade no intervalo $[-1, 1]$, a família de polinômios $T_n(x)$ não é ortonormal no mesmo, uma vez que $\|T_i\| \neq 1$ para todo i . Para o próximo resultado existe a necessidade de enunciarmos brevemente o conceito de continuidade de Lipschitz; para uma definição formal o leitor pode consultar [Searcóid \(2006\)](#). Uma função arbitrária f é dita contínua no sentido de Lipschitz se existe um número real $K \geq 0$ que, para todo par de pontos no gráfico desta função, o valor absoluto da inclinação da linha não excede o valor K . Dessa maneira podemos estabelecer o próximo enunciado sobre séries de Chebyshev.

Dada uma função f que é contínua no sentido de Lipschitz no intervalo $[-1; 1]$, tal função possui uma única representação como uma série de Chebyshev dada por,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) \quad (5.18)$$

onde esta série é absoluta e uniformemente convergente. Seus coeficientes são dados pela relação abaixo, para $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (5.19)$$

onde para $k = 0$ calculamos a_k na forma,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (5.20)$$

Para uma demonstração completa do teorema acima, o leitor pode recorrer à obra de [Trefethen \(2019\)](#). Para mais resultados sobre esta classe de polinômios recomenda-se as obras de [Fox e Parker \(1968\)](#), [Rivlin \(1974\)](#) e [Mason e Handscomb \(2002\)](#). Com isso temos os princípios fundamentais utilizados na implementação dos polinômios de Chebyshev. Partiremos agora para a descrição do método numérico utilizado para a solução do problema de estabilidade.

5.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin é um caso particular de uma classe de métodos numéricos chamada pesos ponderados. Para ilustrarmos o desenvolvimento desta classe consideremos um problema governado por uma equação diferencial linear e condições de contorno dadas por,

$$L(u) = 0 \quad (5.21)$$

$$S(u) = 0 \quad (5.22)$$

Assumindo que existe uma solução aproximada u_a na forma,

$$u_a(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \phi_j(\vec{x}) \quad (5.23)$$

onde a equação acima é comumente chamada de solução base. Os termos ϕ_j são funções analíticas conhecidas chamadas de funções de base, com coeficientes a_j que serão determinados. Sendo $u_0(\vec{x}, t)$ escolhido para satisfazer as condições de contorno de Eq. (5.22), assim como as condições iniciais quando necessário. A Eq. (5.23) reduz Eq. (5.21) a uma equação diferencial ordinária em t . Caso tenhamos $\phi_j = \phi_j(t)$ e $a_j = a_j(\vec{x})$, então Eq. (5.21) torna-se uma equação diferencial parcial em \vec{x} . Porém, se tivermos $\phi_j = \phi_j(\vec{x}, t)$ o problema é considerado estacionário, dessa maneira os coeficientes a_j são constantes e Eq. (5.21) se reduz a um sistema de equações algébricas, sendo este o caso tratado neste texto. Substituindo a equação Eq. (5.23) em Eq. (5.21) é gerado um resíduo R não-nulo igual a,

$$R(a_0, a_1, \dots, a_N, \vec{x}) = L(u_a) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\phi_j) \quad (5.24)$$

uma vez assumido u_a como uma solução para o problema, desejamos que,

$$R(a_0, a_1, \dots, a_N, \vec{x}) = L(u_a) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\phi_j) = 0 \quad (5.25)$$

com isso podemos escrever,

$$\begin{aligned} \int_D R w_k d\vec{x} &= \int_D \left\{ L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\phi_j) \right\} w_k d\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \\ \int_D R w_k d\vec{x} &= \int_D L(u_0) w_k d\vec{x} + \int_D \left\{ \sum_{j=1}^N a_j L(\phi_j) w_k \right\} d\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \\ \int_D R w_k d\vec{x} &= \int_D L(u_0) w_k d\vec{x} + \sum_{j=1}^N a_j \left\{ \int_D L(\phi_j) w_k d\vec{x} \right\} = 0 \Leftrightarrow \\ \langle R, w_k \rangle &= \langle L(u_0), w_k \rangle + \sum_{j=1}^N a_j \langle L(\phi_j), w_k \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde Eq. (5.26) é satisfeita para qualquer w_k . Portanto, quando consideramos o método de pesos ponderados os coeficientes a_j apresentados em Eq. (5.23) serão determinados ao resolvermos o sistema de equações dado por,

$$\langle R, w_k \rangle = 0 \text{ para } k = 0, 1, \dots, N. \quad (5.27)$$

onde a função w_k é geralmente chamada de função teste. Por Eq. (5.26) podemos expressar Eq. (5.27) na forma,

$$\sum_{j=1}^N a_j \langle L(\phi_j), w_k \rangle = - \langle L(u_0), w_k \rangle \quad (5.28)$$

utilizando os coeficientes a_j obtidos na solução de Eq. (5.28) em Eq. (5.23) teremos a solução aproximada u_a . Como dito anteriormente, o método de Galerkin é um caso particular do método dos pesos ponderados, uma vez que podemos obtê-lo ao escolhermos funções teste pertencentes a mesma família das funções base, ou seja,

$$w_k(\vec{x}) = \phi_k(\vec{x}) \text{ para } k = 0, 1, \dots, N. \quad (5.29)$$

sendo o procedimento deste método o mesmo descrito acima. Para mais resultados sobre este métodos o leitor pode contar com as obras de [Fletcher \(1984\)](#), [Boyd \(1989\)](#), [Kanschat \(2007\)](#) e [Peyret \(2013\)](#). Nas próximas seções trataremos das formulações para o estado base e do problema de estabilidade.

5.3 Formulação do estado base

Para utilizarmos as soluções do estado base introduziremos uma transformação de variáveis. Esta mudança será utilizada com a finalidade de transformarmos o domínio $\bar{y} \in [0; \bar{h}]$ para $\bar{y} \in [-1; 1]$, dessa forma poderemos utilizar as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev neste novo intervalo. Utilizaremos a transformação de variáveis de y para z definida como,

$$\bar{z} = \frac{2\bar{y}}{\bar{h}} - 1 \quad (5.30)$$

onde obtemos a transformação de domínio $\bar{y} \in [0; \bar{h}]$ para $\bar{y} \in [-1; 1]$ sendo $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} = \frac{2}{h}$. Considerando o sistema dado por Eq. (4.1), Eq. (4.2) e Eq. (4.3) podemos reescrevê-lo na forma,

$$\bar{U}(\bar{z}) = 0 \text{ para } \bar{z} = 1 \quad (5.31)$$

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(\frac{2L}{\bar{h}} \frac{d\bar{U}}{d\bar{z}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{2}{\bar{h}} \frac{d\bar{U}}{d\bar{z}} = \frac{-\bar{h}(\bar{z} + 1)}{2} \text{ para } \bar{y} \in [-1; 1] \quad (5.32)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{U} \frac{\bar{h}}{2} d\bar{z} = 1 \quad (5.33)$$

Para resolver o sistema dado por Eq. (5.31), Eq. (5.32) e Eq. (5.33) foi escrito um código no ambiente de programação MATLAB utilizando a função integrada bvp4c. Esta função é a implementação de um código de diferenças finitas que utiliza a formula de Lobatto de três estágios. Para mais detalhes o leitor pode consultar [Kierzenka J.; Shampine \(2001\)](#) e [Shampine et al. \(2000\)](#). O sistema acima corresponde a um problema não-linear com parâmetro indeterminado (\bar{h}) e condição de contorno integral. Para utilizarmos a função bvp4c devemos escrever dentro do código três funções distintas: uma que represente um sistema de equações de primeira ordem, uma para as condições de contorno, e uma para o palpite inicial. Portanto, consideremos $\frac{d\bar{g}}{d\bar{z}} = \bar{U}$; sendo $\frac{d^2\bar{g}}{d\bar{z}^2} = \frac{d\bar{U}}{d\bar{z}}$. Reescrevendo Eq. (5.33) como $\int_{-1}^1 \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}} d\bar{z} = \frac{2}{h} \Rightarrow \bar{g}(1) - \bar{g}(-1) = \frac{2}{h}$, podemos escrever um novo sistema na forma,

$$\frac{d\bar{g}(1)}{d\bar{z}} = 0 \quad (5.34)$$

$$\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(\frac{2L}{\bar{h}} \frac{d^2\bar{g}}{d\bar{z}^2} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\} \frac{2}{\bar{h}} \frac{d^2\bar{g}}{d\bar{z}^2} = \frac{-\bar{h}(\bar{z} + 1)}{2} \text{ para } \bar{y} \in [-1; 1] \quad (5.35)$$

$$\bar{g}(1) - \bar{g}(-1) = \frac{2}{h} \quad (5.36)$$

$$\bar{g}(-1) = 0 \quad (5.37)$$

note-se que Eq. (5.37) é uma condição de contorno arbitrária. Reescrevendo Eq. (5.35) como,

$$\frac{d^2\bar{g}}{d\bar{z}^2} = \frac{\frac{-\bar{h}^2(\bar{z}+1)}{4}}{\left\{ I + (1 - I) \left[1 + \left(\frac{2L}{\bar{h}} \frac{d^2\bar{g}}{d\bar{z}^2} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\}} \quad (5.38)$$

Utilizando uma substituição de variáveis como $y_1 = \bar{g}$ e $y_2 = \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}}$ podemos escrever um novo sistema a partir de Eq. (5.34), Eq. (5.36), Eq. (5.37) e Eq. (5.38) na forma,

$$y_2(1) = 0 \quad (5.39)$$

$$\frac{dy_2}{d\bar{z}} = \frac{\frac{-\bar{h}^2(\bar{z}+1)}{4}}{\left\{ I + (1-I) \left[1 + \left(\frac{2L}{h} \frac{dy_2}{d\bar{z}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right\}} \quad (5.40)$$

$$y_1(1) - y_1(-1) = \frac{2}{h} \quad (5.41)$$

$$y_1(-1) = 0 \quad (5.42)$$

com o sistema compostos por Eq. (5.39), Eq. (5.40), Eq. (5.41) e Eq. (5.42) foi implementado o código *baseflowchebdomain_gradient_version.m*. Este código permite a solução do problema de estado base através da implementação das funções internas *bvpfcn*, *bcbfn* e *guess*. Utilizando *bvp4c* junto com as três últimas funções citadas temos o perfil de velocidades \bar{U} e suas derivadas, assim como o valor da espessura do filme líquido \bar{h} . O código também calcula $\bar{\eta}$ e $\bar{\epsilon}$ e suas derivadas. Todos os resultados são exportados em arquivos.txt juntamente com os valores utilizados de a , n , I e L distribuídos em vetores colunas.

No entanto, resolver o estado base numericamente ainda não se faz suficiente para que os dados sejam utilizados como entrada para o problema de estabilidade. Para isso, precisamos calcular os coeficientes de Chebyshev das soluções do estado base, sendo estas \bar{U} , $\bar{\eta}$, $\bar{\epsilon}$ e suas derivadas. Para isso implementamos o código *baseflow_chebyshev_coeff.m*. Com ele somos capazes de extrair os coeficientes de Chebyshev e obtermos a representação em séries destes polinômios, conceitos apresentados em Eq. (5.18), Eq. (5.19) e Eq. (5.20). Para facilitar este procedimento utilizamos algumas funções do software livre Chebfun (projeto iniciado em 2002 por Lloyd N. Trefethen e Zachary Battles) cujos princípios teóricos e exemplos de implementação podem ser encontrados em [Trefethen \(2019\)](#).

5.4 Formulação do problema de estabilidade

Assim como feito em 5.3 devemos transformar o o intervalo do problema para $[-1; 1]$. Para isso utilizaremos novamente Eq. (5.30) para expressar as derivadas de $\tilde{\Psi}(\bar{z})$ na

forma,

$$\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial y} = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{\bar{h}} \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} = \frac{2}{\bar{h}} Df(\bar{z}) \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\bar{z})}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{\bar{h}} \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \right) = \frac{2}{\bar{h}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{4}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 f(\bar{z})}{\partial z^2} = \frac{4}{\bar{h}^2} D^2 f(\bar{z}) \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f(\bar{z})}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f(\bar{z})}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 f(\bar{z})}{\partial z^2} \right) = \frac{4}{\bar{h}^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 f(\bar{z})}{\partial z^2} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{8}{\bar{h}^3} \frac{\partial^3 f(\bar{z})}{\partial z^3} = \frac{8}{\bar{h}^3} D^3 f(\bar{z}) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f(\bar{z})}{\partial y^4} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 f(\bar{z})}{\partial y^3} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{8}{\bar{h}^3} \frac{\partial^3 f(\bar{z})}{\partial z^3} \right) = \frac{8}{\bar{h}^3} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 f(\bar{z})}{\partial z^3} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{16}{\bar{h}^4} \frac{\partial^4 f(\bar{z})}{\partial z^4} = \frac{16}{\bar{h}^4} D^4 f(\bar{z}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde $D^j = \frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j}$ e f pode ser qualquer uma das funções \bar{U} , $\bar{\eta}$, $\bar{\epsilon}$ e $\tilde{\Psi}$. Portanto, substituindo em Eq. (5.43), Eq. (5.44), Eq. (5.45) e Eq. (5.46) em Eq. (3.99) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \left[\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 \bar{\epsilon} + \frac{8}{\bar{h}^2} D \bar{\epsilon} D + \bar{\epsilon} \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \right] \tilde{\Psi} - \frac{16}{\bar{h}^2} \alpha^2 D (\bar{\eta} D \tilde{\Psi}) = \\ i \alpha Re \left[(\bar{U} - c) \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 - \alpha^2 \right) - \frac{4}{\bar{h}^2} D^2 \bar{U} \right] \tilde{\Psi} \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde Eq. (5.47) é a equação de Orr-Sommerfeld no intervalo $[-1; 1]$. Aplicando as mesmas substituições acima para Eq. (3.57) e Eq. (3.88) temos que,

$$\bar{\eta}(\bar{\gamma}) = I + (1 - I) \left[1 + \left(\frac{2L}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (5.48)$$

$$\bar{\epsilon} = I + (1 - I) \left[1 + n \left(\frac{2L}{h} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^a \right] \left[1 + \left(\frac{2L}{h} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}-1} \quad (5.49)$$

as condições de contorno dadas por Eq. (3.102) e Eq. (3.103), que compõem as condições de não-deslizamento na parede, tornam-se,

$$D\tilde{\Psi} = 0 \text{ para } \bar{z} = 1 \quad (5.50)$$

$$\tilde{\Psi} = 0 \text{ para } \bar{z} = 1 \quad (5.51)$$

da mesma maneira as condições de contorno de superfície (acopladas) dadas por Eq. (3.128) e Eq. (3.148) tornam-se,

$$\left[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c) \left(\frac{4}{h^2} D^2 + \alpha^2 \right) \right] \tilde{\Psi} = 0 \text{ para } \bar{z} = -1 \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} & i\alpha Re \left[\frac{2}{h}(c - \bar{U})D + \frac{2}{h}D\bar{U} \right] \tilde{\Psi} - \frac{8}{h}\alpha^2\bar{\eta}D\tilde{\Psi} \\ & + \left(\frac{4}{h^2}D^2 + \alpha^2 \right) \left[\frac{2}{h}\bar{\epsilon}D + \frac{2}{h}D\bar{\epsilon} + i\alpha\bar{\epsilon} \left(\cot\theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \tilde{\Psi} = 0 \text{ para } \bar{z} = -1 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Podemos reescrever Eq. (5.47) na forma,

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{16}{h^4}\bar{\epsilon}D^4 + \frac{8}{h^2}\alpha^2\bar{\epsilon}D^2 + \alpha^4\bar{\epsilon} \right) + \left(\frac{32}{h^4}D\bar{\epsilon}D^3 + \frac{8}{h^2}\alpha^2D\bar{\epsilon}D \right) + \left(\frac{16}{h^4}D^2\bar{\epsilon}D^2 + \frac{4}{h^2}\alpha^2D^2\bar{\epsilon} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{16}{h^2}\alpha^2D\bar{\eta}D + \frac{16}{h^2}\alpha^2\bar{\eta}D^2 \right) - i\alpha Re \left(\frac{4}{h^2}\bar{U}D^2 - \alpha^2\bar{U} - \frac{4}{h^2}D^2\bar{U} \right) \right] \tilde{\Psi} = -i\alpha c Re \left(\frac{4}{h^2}D^2 - \alpha^2 \right) \tilde{\Psi} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Utilizando a aproximação em série dada por Eq. (5.18) para $\tilde{\Psi}(\bar{z})$ podemos escrever,

$$\tilde{\Psi}(\bar{z}) = \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}), \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.55)$$

substituindo Eq. (5.55) em Eq. (5.54) obtemos,

$$\left[\left(\frac{16}{h^4}\bar{\epsilon}D^4 + \frac{8}{h^2}\alpha^2\bar{\epsilon}D^2 + \alpha^4\bar{\epsilon} \right) + \left(\frac{32}{h^4}D\bar{\epsilon}D^3 + \frac{8}{h^2}\alpha^2D\bar{\epsilon}D \right) + \left(\frac{16}{h^4}D^2\bar{\epsilon}D^2 + \frac{4}{h^2}\alpha^2D^2\bar{\epsilon} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\eta} D + \frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\eta} D^2 \right) - i \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} \bar{U} D^2 - \alpha^2 \bar{U} - \frac{4}{\hbar^2} D^2 \bar{U} \right) \Bigg] \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) = \\
& - i \alpha c \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} D^2 - \alpha^2 \right) \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) \tag{5.56}
\end{aligned}$$

aplicando um produto a direita por $T_j(\bar{z})$ e $\hat{w} = (1 - \bar{z}^2)^{-\frac{1}{2}}$ temos que,

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{16}{\hbar^4} \bar{\epsilon} D^4 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\epsilon} D^2 + \alpha^4 \bar{\epsilon} \right) + \left(\frac{32}{\hbar^4} D \bar{\epsilon} D^3 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\epsilon} D \right) + \left(\frac{16}{\hbar^4} D^2 \bar{\epsilon} D^2 + \frac{4}{\hbar^2} \alpha^2 D^2 \bar{\epsilon} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\eta} D + \frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\eta} D^2 \right) - i \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} \bar{U} D^2 - \alpha^2 \bar{U} - \frac{4}{\hbar^2} D^2 \bar{U} \right) \right] \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} = \\
& - i \alpha c \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} D^2 - \alpha^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \Leftrightarrow \\
& \left(\frac{16}{\hbar^4} \bar{\epsilon} D^4 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\epsilon} D^2 + \alpha^4 \bar{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& + \left(\frac{32}{\hbar^4} D \bar{\epsilon} D^3 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\epsilon} D \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& + \left(\frac{16}{\hbar^4} D^2 \bar{\epsilon} D^2 + \frac{4}{\hbar^2} \alpha^2 D^2 \bar{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& - \left(\frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\eta} D + \frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\eta} D^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& - i \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} \bar{U} D^2 - \alpha^2 \bar{U} - \frac{4}{\hbar^2} D^2 \bar{U} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& = - i \alpha c \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} D^2 - \alpha^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \tag{5.57}
\end{aligned}$$

integrando Eq. (5.57) no intervalo $[-1; 1]$ temos,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{16}{\hbar^4} \bar{\epsilon} D^4 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\epsilon} D^2 + \alpha^4 \bar{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \right. \\
& \left. + \left(\frac{32}{\hbar^4} D \bar{\epsilon} D^3 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\epsilon} D \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{16}{\hbar^4} D^2 \bar{\epsilon} D^2 + \frac{4}{\hbar^2} \alpha^2 D^2 \bar{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& - \left(\frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\eta} D + \frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\eta} D^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \\
& - i\alpha \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} \bar{U} D^2 - \alpha^2 \bar{U} - \frac{4}{\hbar^2} D^2 \bar{U} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \Bigg\} d\bar{z} \\
& = \int_{-1}^1 \left\{ -i\alpha c \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} D^2 - \alpha^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} \right\} d\bar{z} \Leftrightarrow \\
& \int_{-1}^1 \left(\frac{16}{\hbar^4} \bar{\epsilon} D^4 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\epsilon} D^2 + \alpha^4 \bar{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \\
& + \int_{-1}^1 \left(\frac{32}{\hbar^4} D \bar{\epsilon} D^3 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\epsilon} D \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \\
& + \int_{-1}^1 \left(\frac{16}{\hbar^4} D^2 \bar{\epsilon} D^2 + \frac{4}{\hbar^2} \alpha^2 D^2 \bar{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \\
& - \int_{-1}^1 \left(\frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\eta} D + \frac{16}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\eta} D^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \\
& - \int_{-1}^1 i\alpha \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} \bar{U} D^2 - \alpha^2 \bar{U} - \frac{4}{\hbar^2} D^2 \bar{U} \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \\
& = - \int_{-1}^1 i\alpha c \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\hbar^2} D^2 - \alpha^2 \right) \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \Leftrightarrow \\
& \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{16}{\hbar^4} \bar{\epsilon} D^4 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 \bar{\epsilon} D^2 + \alpha^4 \bar{\epsilon} \right) \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \right] \\
& + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{32}{\hbar^4} D \bar{\epsilon} D^3 + \frac{8}{\hbar^2} \alpha^2 D \bar{\epsilon} D \right) \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{16}{h^4} D^2 \bar{\epsilon} D^2 + \frac{4}{h^2} \alpha^2 D^2 \bar{\epsilon} \right) \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \right] \\
& - \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{16}{h^2} \alpha^2 D \bar{\eta} D + \frac{16}{h^2} \alpha^2 \bar{\eta} D^2 \right) \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \right] \\
& - \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 i \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{4}{h^2} \bar{U} D^2 - \alpha^2 \bar{U} - \frac{4}{h^2} D^2 \bar{U} \right) \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \right] \\
& = - \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 i \alpha c \operatorname{Re} \left(\frac{4}{h^2} D^2 - \alpha^2 \right) \Phi_k T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z}) \hat{w} d\bar{z} \right] \Leftrightarrow \\
& \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\int_{-1}^1 \frac{16}{h^4} (\bar{\epsilon} D^4 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} + \int_{-1}^1 \frac{8}{h^2} \alpha^2 (\bar{\epsilon} D^2 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \right. \\
& \quad + \int_{-1}^1 \alpha^4 (\bar{\epsilon} T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} + \int_{-1}^1 \frac{32}{h^4} (D \bar{\epsilon} D^3 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \\
& \quad + \int_{-1}^1 \frac{8}{h^2} \alpha^2 (D \bar{\epsilon} D T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} + \int_{-1}^1 \frac{16}{h^4} (D^2 \bar{\epsilon} D^2 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \\
& \quad + \int_{-1}^1 \frac{4}{h^2} \alpha^2 (D^2 \bar{\epsilon} T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} - \int_{-1}^1 \frac{16}{h^2} \alpha^2 (D \bar{\eta} D T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \\
& \quad - \int_{-1}^1 \frac{16}{h^2} \alpha^2 (\bar{\eta} D^2 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} - \int_{-1}^1 \frac{4}{h^2} i \alpha \operatorname{Re} (\bar{U} D^2 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \\
& \quad \left. + \int_{-1}^1 i \alpha^3 \operatorname{Re} (\bar{U} T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} + \int_{-1}^1 \frac{4}{h^2} i \alpha \operatorname{Re} (D^2 \bar{U} T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \right] \Phi_k \\
& = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[- \int_{-1}^1 \frac{4}{h^2} i \alpha c \operatorname{Re} (D^2 T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} + \int_{-1}^1 i \alpha^3 c \operatorname{Re} (T_k(\bar{z}) T_j(\bar{z})) \hat{w} d\bar{z} \right] \Phi_k \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Podemos definir o produto interno entre duas funções f e g de maneira simples como,

$$\int_{-1}^1 g_j(x) f_k(x) \hat{w} dx = \langle f_k(x); g_j(x) \rangle \quad (5.59)$$

substituindo Eq. (5.59) em Eq. (5.58) iremos obter,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[\frac{16}{h^4} \langle T_j(\bar{z}); \bar{\epsilon} D^4 T_k(\bar{z}) \rangle + \frac{8}{h^2} \alpha^2 \langle T_j(\bar{z}); \bar{\epsilon} D^2 T_k(\bar{z}) \rangle \right. \\
& \quad + \alpha^4 \langle T_j(\bar{z}); \bar{\epsilon} T_k(\bar{z}) \rangle + \frac{32}{h^4} \langle T_j(\bar{z}); D \bar{\epsilon} D^3 T_k(\bar{z}) \rangle \\
& \quad + \frac{8}{h^2} \alpha^2 \langle T_j(\bar{z}); D \bar{\epsilon} D T_k(\bar{z}) \rangle + \frac{16}{h^4} \langle T_j(\bar{z}); D^2 \bar{\epsilon} D^2 T_k(\bar{z}) \rangle \\
& \quad + \frac{4}{h^2} \alpha^2 \langle T_j(\bar{z}); D^2 \bar{\epsilon} T_k(\bar{z}) \rangle - \frac{16}{h^2} \alpha^2 \langle T_j(\bar{z}); D \bar{\eta} D T_k(\bar{z}) \rangle \\
& \quad - \frac{16}{h^2} \alpha^2 \langle T_j(\bar{z}); \bar{\eta} D^2 T_k(\bar{z}) \rangle - \frac{4}{h} i \alpha Re \langle T_j(\bar{z}); \bar{U} D^2 T_k(\bar{z}) \rangle \\
& \quad \left. + i \alpha^3 Re \langle T_j(\bar{z}); \bar{U} T_k(\bar{z}) \rangle + \frac{4}{h^2} i \alpha Re \langle T_j(\bar{z}); D^2 \bar{U} T_k(\bar{z}) \rangle \right] \Phi_k \\
& = c \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left[-\frac{4}{h^2} i \alpha Re \langle T_j(\bar{z}); D^2 T_k(\bar{z}) \rangle + i \alpha^3 Re \langle T_j(\bar{z}); T_k(\bar{z}) \rangle \right] \Phi_k \quad (5.60)
\end{aligned}$$

Para as condições de contorno devemos aplicar as substituições diretamente, sem a necessidade de produtos internos uma vez que estamos tratando de valores conhecidos de $\bar{z} \in [-1; 1]$. Portanto podemos escrever as condições de parede dadas por Eq. (5.50) e Eq. (5.51) na forma,

$$\sum_{k=0}^N \Phi_k D T_k(1) = 0 \quad (5.61)$$

$$\sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(1) = 0 \quad (5.62)$$

para a condição de superfície dada por Eq. (5.52) podemos escrever,

$$\left[1 + \bar{\epsilon} (\bar{U} - c) \left(\frac{4}{h^2} D^2 + \alpha^2 \right) \right] \tilde{\Psi}(-1) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c) \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \right] \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) = 0 \Rightarrow \\
& \sum_{k=0}^N \left\{ \left[1 + \bar{\epsilon}(\bar{U} - c) \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \right] \Phi_k T_k(-1) \right\} = 0 \Rightarrow \\
& \sum_{k=0}^N \left\{ \left[1 + \frac{4}{\bar{h}^2} \bar{\epsilon} \bar{U} D^2 + \alpha^2 \bar{\epsilon} \bar{U} \right] \Phi_k T_k(-1) \right\} = c \sum_{k=0}^N \left\{ \left[\frac{4}{\bar{h}^2} \bar{\epsilon} D^2 + \alpha^2 \bar{\epsilon} \right] \Phi_k T_k(-1) \right\} \Rightarrow \\
& \sum_{k=0}^N \left\{ T_k(-1) + \frac{4}{\bar{h}^2} \bar{\epsilon} \bar{U} D^2 T_k(-1) + \alpha^2 \bar{\epsilon} \bar{U} T_k(-1) \right\} \Phi_k = c \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{4}{\bar{h}^2} \bar{\epsilon} D^2 T_k(-1) + \alpha^2 \bar{\epsilon} T_k(-1) \right\} \Phi_k \\
& \tag{5.63}
\end{aligned}$$

Para a última condição de contorno de superfície dada por Eq. (5.53) obtemos,

$$\begin{aligned}
& i\alpha Re \left[\frac{2}{\bar{h}}(c - \bar{U})D + \frac{2}{\bar{h}}D\bar{U} \right] \tilde{\Psi} - \frac{8}{\bar{h}}\alpha^2 \bar{\eta} D \tilde{\Psi} \\
& + \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \left[\frac{2}{\bar{h}} \bar{\epsilon} D + \frac{2}{\bar{h}} D \bar{\epsilon} + i\alpha \bar{\epsilon} \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \tilde{\Psi} = 0 \Rightarrow \\
& \left\{ i\alpha Re \left[\frac{2}{\bar{h}}(c - \bar{U})D + \frac{2}{\bar{h}}D\bar{U} \right] \right\} \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) - \left[\frac{8}{\bar{h}}\alpha^2 \bar{\eta} D \right] \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) \\
& + \left\{ \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \left[\frac{2}{\bar{h}} \bar{\epsilon} D + \frac{2}{\bar{h}} D \bar{\epsilon} + i\alpha \bar{\epsilon} \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right] \right\} \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) = 0 \Rightarrow \\
& \left\{ i\alpha Re \left[\frac{2}{\bar{h}}cD - \frac{2}{\bar{h}}\bar{U}D + \frac{2}{\bar{h}}D\bar{U} \right] \right\} \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) - \left[\frac{8}{\bar{h}}\alpha^2 \bar{\eta} D \right] \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) \\
& + \left[\frac{8}{\bar{h}^3} D \bar{\epsilon} D^2 + \frac{2}{\bar{h}} \alpha^2 D \bar{\epsilon} + \frac{8}{\bar{h}^3} \bar{\epsilon} D^3 + \frac{2}{\bar{h}} \alpha^2 \bar{\epsilon} D \right. \\
& \left. + i\alpha \bar{\epsilon} \left(\cot \theta + \frac{\alpha^2}{We} \right) \left(\frac{4}{\bar{h}^2} D^2 + \alpha^2 \right) \right] \sum_{k=0}^N \Phi_k T_k(-1) = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{2}{h} i \alpha c Re D - \frac{2}{h} i \alpha Re \bar{U} D + \frac{2}{h} i \alpha Re D \bar{U} \right\} \Phi_k T_k(-1) \\
& - \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{8}{h} \alpha^2 \bar{\eta} D \right\} \Phi_k T_k(-1) + \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{8}{h^3} D \bar{\epsilon} D^2 + \frac{2}{h} \alpha^2 D \bar{\epsilon} + \frac{8}{h^3} \bar{\epsilon} D^3 + \frac{2}{h} \alpha^2 \bar{\epsilon} D + \frac{4}{h^2} i \alpha \bar{\epsilon} \cot \theta D^2 \right. \\
& \quad \left. + i \alpha^3 \cot \theta \bar{\epsilon} + \frac{4i \alpha^3}{h^2 We} \bar{\epsilon} D^2 + \frac{i \alpha^5}{We} \bar{\epsilon} \right\} \Phi_k T_k(-1) = 0 \Rightarrow \\
& \sum_{k=0}^N \left\{ -\frac{8}{h} \alpha^2 \bar{\eta} D T_k(-1) + \frac{8}{h^3} D \bar{\epsilon} D^2 T_k(-1) + \frac{2}{h} \alpha^2 D \bar{\epsilon} T_k(-1) + \frac{8}{h^3} \bar{\epsilon} D^3 T_k(-1) + \frac{2}{h} \alpha^2 \bar{\epsilon} D T_k(-1) \right. \\
& \quad \left. + i \left[-\frac{2}{h} \alpha Re \bar{U} D T_k(-1) + \frac{2}{h} \alpha Re D \bar{U} T_k(-1) + \frac{4}{h^2} \alpha \bar{\epsilon} \cot \theta D^2 T_k(-1) + \alpha^3 \cot \theta \bar{\epsilon} T_k(-1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{4 \alpha^3}{h^2 We} \bar{\epsilon} D^2 T_k(-1) + \frac{\alpha^5}{We} \bar{\epsilon} T_k(-1) \right] \right\} \Phi_k = c \sum_{k=0}^N \left\{ -\frac{2}{h} i \alpha Re D T_k(-1) \right\} \Phi_k \quad (5.64)
\end{aligned}$$

é importante observar que \bar{U} , $\bar{\eta}$, $\bar{\epsilon}$ e suas derivadas são funções de \bar{z} portanto em Eq. (5.63) e Eq. (5.64) estas funções também devem ser avaliadas no ponto $z = -1$.

5.5 Produtos internos para o método de Galerkin

Nesta seção construiremos detalhadamente os produtos internos necessários para a implementação do método de Galerkin. Neste produtos estamos considerando a presença de uma função genérica f que multiplica os termos de T_k . Portanto, devemos expressar a função f utilizando uma série de Chebyshev na forma,

$$f(z) = \sum_{m=0}^N F_m T_m(z) \quad (5.65)$$

dessa maneira podemos escrever o produto interno como,

$$\langle T_j; f T_k \rangle = \int_{-1}^1 T_j f T_k w dz \quad (5.66)$$

substituindo Eq. (5.65) em Eq. (5.66) temos,

$$\langle T_j; f T_k \rangle = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N T_j F_m T_m T_k w dz = \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_j T_m T_k w dz \right) \quad (5.67)$$

Considerando a propriedade,

$$T_m T_k = \frac{1}{2}(T_{m+k} + T_{|m-k|}) \quad (5.68)$$

e substituindo Eq. (5.68) em Eq. (5.67) obtemos finalmente,

$$\begin{aligned} \langle T_j; fT_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_j T_{m+k} w dz + \int_{-1}^1 T_j T_{|m-k|} w dz \right) \Rightarrow \\ \langle T_j; fT_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_j; T_{m+k} \rangle + \langle T_j; T_{|m-k|} \rangle) \end{aligned} \quad (5.69)$$

onde $\langle T_j, T_k \rangle$ é dado por,

$$\langle T_j, T_k \rangle = \frac{\pi}{2} c_k \delta_{j,k} = \begin{cases} \pi, & \text{se } j = k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } j = k \text{ com } j \geq 1 \text{ e } k \geq 1 \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (5.70)$$

sendo $\delta_{j,k}$ o delta de Kronecker e c_k (não há relação com o autovalor c presente na equação de Orr-Sommerfeld) dado por,

$$c_k = \begin{cases} 2, & \text{se } k = 0 \\ 1, & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (5.71)$$

para a implementação numérica podemos escrever $\langle T_j; fT_k \rangle$ como,

$$\langle T_i; fT_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_i; T_{m+j} \rangle + \langle T_i; T_{|m-j|} \rangle) \quad (5.72)$$

onde, $\langle T_i; T_{m+j} \rangle$ e $\langle T_i; T_{|m-j|} \rangle$ são resolvidos utilizando Eq. (5.70) diretamente. A expressão dada por Eq. (5.70) é a mais importante dentre todas, uma vez que sempre será utilizada para resolver os produtos internos entre dois polinômios. Esta função é necessária para resolver os produtos internos que apresentam derivada, aparecendo como uma função a ser utilizada dentro destes. Com isso podemos seguir para o produto interno da primeira derivada de T_k dado por,

$$\langle T_j, fDT_k \rangle = \int_{-1}^1 T_j fDT_k w dz \quad (5.73)$$

substituindo Eq. (5.65) em Eq. (5.73) encontramos,

$$\langle T_j; fDT_k \rangle = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N T_j F_m T_m DT_k w dz = \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_j T_m DT_k w dz \right) \quad (5.74)$$

Considerando a propriedade,

$$T_j T_m = \frac{1}{2}(T_{j+m} + T_{|j-m|}) = \frac{1}{2}(T_{m+j} + T_{|m-j|}) \quad (5.75)$$

e substituindo Eq. (5.75) em Eq. (5.74) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \langle T_j; fDT_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_{m+j} DT_k w dz + \int_{-1}^1 T_{|m-j|} DT_k w dz \right) \Rightarrow \\ \langle T_j; fDT_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+j}; DT_k \rangle + \langle T_{|m-j|}; DT_k \rangle) \end{aligned} \quad (5.76)$$

onde, tomando separadamente os termos pares e ímpares, podemos escrever $\langle T_j; DT_k \rangle$ como,

$$\langle T_j; DT_{2k} \rangle = 4k \sum_{n=0}^{k-1} \langle T_j; T_{2n+1} \rangle \quad (5.77)$$

$$\langle T_j; DT_{2k+1} \rangle = 2(2k+1) \sum_{n=1}^k \langle T_j; T_{2n} \rangle + (2k+1) \langle T_j; T_0 \rangle \quad (5.78)$$

Com isso podemos escrever as equações acima em um formato conveniente para a implementação do código numérico. Dessa maneira, $\langle T_j; fDT_k \rangle$ assume a forma de,

$$\langle T_i; fDT_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+i}; DT_j \rangle + \langle T_{|m-i|}; DT_j \rangle) \quad (5.79)$$

Dividiremos a análise da Eq. (5.79) em quatro etapas. Primeiro escreveremos $\langle T_{m+i}; DT_j \rangle$ subdividido em termos pares e ímpares, e na sequencia realizaremos o mesmo procedimento para $\langle T_{|m-i|}; DT_j \rangle$. Considerando primeiramente $\langle T_{m+i}; DT_j \rangle$ temos que, para $j = \text{par}$, teremos $2k = j \Rightarrow k = \frac{j}{2}$. Portanto Eq. (5.77) torna-se,

$$\langle T_{m+i}; DT_j \rangle = 2j \sum_{n=0}^{\frac{j}{2}-1} \langle T_{m+i}; T_{2n+1} \rangle \quad (5.80)$$

tomando $j = \text{ímpar}$, temos que $2k + 1 = j \Rightarrow k = \frac{j-1}{2}$. Portanto, Eq. (5.78) é escrita na forma,

$$\langle T_{m+i}; DT_j \rangle = 2j \sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}} \langle T_{m+i}; T_{2n} \rangle + j \langle T_{m+i}; T_0 \rangle \quad (5.81)$$

Consideraremos agora o desenvolvimento de $\langle T_{|m-i|}; DT_j \rangle$. Para $j = \text{par}$, temos $2k = j \Rightarrow k = \frac{j}{2}$. Com isso Eq. (5.77) assume a forma,

$$\langle T_{|m-i|}; DT_j \rangle = 2j \sum_{n=0}^{\frac{j}{2}-1} \langle T_{|m-i|}; T_{2n+1} \rangle \quad (5.82)$$

para $j = \text{ímpar}$, teremos $2k + 1 = j \Rightarrow k = \frac{j-1}{2}$. Dessa forma, Eq. (5.78) é escrita como,

$$\langle T_{|m-i|}; DT_j \rangle = 2j \sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}} \langle T_{|m-i|}; T_{2n} \rangle + j \langle T_{|m-i|}; T_0 \rangle \quad (5.83)$$

Tomando o produto interno da segunda derivada de T_k podemos escrever,

$$\langle T_j; fD^2T_k \rangle = \int_{-1}^1 T_j fD^2T_k w dz \quad (5.84)$$

substituindo Eq. (5.65) em Eq. (5.84) resulta em,

$$\langle T_j; fD^2T_k \rangle = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N T_j F_m T_m D^2T_k w dz = \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_j T_m D^2T_k w dz \right) \quad (5.85)$$

substituindo Eq. (5.75) em Eq. (5.85) temos,

$$\begin{aligned} \langle T_j; fD^2T_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_{m+j} D^2T_k w dz + \int_{-1}^1 T_{|m-j|} D^2T_k w dz \right) \Rightarrow \\ \langle T_j; fD^2T_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+j}; D^2T_k \rangle + \langle T_{|m-j|}; D^2T_k \rangle) \end{aligned} \quad (5.86)$$

onde $\langle T_j; D^2T_k \rangle$ é dado por,

$$\langle T_j; D^2T_k \rangle = \begin{cases} \frac{\pi}{2} k [k^2 - j^2], & \text{para } (k - j) = 2, 4, 6, \dots, \text{par} \\ 0, & \text{para qualquer outro valor} \end{cases} \quad (5.87)$$

Para a implementação numérica de $\langle T_j; fD^2T_k \rangle$ podemos escrever,

$$\langle T_i; fD^2T_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+i}; D^2T_j \rangle + \langle T_{|m-i|}; D^2T_j \rangle) \quad (5.88)$$

com base em Eq. (5.87) podemos escrever $\langle T_{m+i}; D^2T_j \rangle$ e $\langle T_{|m-i|}; D^2T_j \rangle$ na forma,

$$\langle T_{m+i}; D^2T_j \rangle = \begin{cases} \frac{\pi}{2} j [j^2 - (m+i)^2], & \text{para } [j - (m+i)] = 2, 4, 6, \dots, \text{par} \\ 0, & \text{para qualquer outro valor} \end{cases} \quad (5.89)$$

$$\langle T_{|m-i|}; D^2T_j \rangle = \begin{cases} \frac{\pi}{2} j [j^2 - (|m-i|)^2], & \text{para } (j - |m-i|) = 2, 4, 6, \dots, \text{par} \\ 0, & \text{para qualquer outro valor} \end{cases} \quad (5.90)$$

Portanto, podemos seguir para o produto interno da terceira derivada de T_k escrita como,

$$\langle T_j; fD^3T_k \rangle = \int_{-1}^1 T_j fD^3T_k w dz \quad (5.91)$$

substituindo Eq. (5.65) em Eq. (5.91) obtemos,

$$\langle T_j; fD^3T_k \rangle = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N T_j F_m T_m D^3T_k w dz = \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_j T_m D^3T_k w dz \right) \quad (5.92)$$

substituindo Eq. (5.75) em Eq. (5.92) encontramos,

$$\begin{aligned} \langle T_j; fD^3T_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_{m+j} D^3T_k w dz + \int_{-1}^1 T_{|m-j|} D^3T_k w dz \right) \Rightarrow \\ \langle T_j; fD^3T_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+j}; D^3T_k \rangle + \langle T_{|m-j|}; D^3T_k \rangle) \end{aligned} \quad (5.93)$$

com $\langle T_j; D^3T_k \rangle$ dado por,

$$\langle T_j; D^3T_k \rangle = \sum_{x=0}^{k-2} \frac{1}{c_x} k(k^2 - x^2) (\pi x) \quad (5.94)$$

sendo c_x escrito na forma,

$$c_x = \begin{cases} 2, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x \geq 1 \end{cases} \quad (5.95)$$

onde $k - x = \text{par}$, $k \geq x + 2$, $x - j = \text{ímpar}$, e $x \geq j + 1$. Para a implementação numérica, podemos escrever $\langle T_j; fD^3T_k \rangle$ como,

$$\langle T_i; fD^3T_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+i}; D^3T_j \rangle + \langle T_{|m-i|}; D^3T_j \rangle) \quad (5.96)$$

Para $\langle T_{m+i}; D^3T_j \rangle$ temos que,

$$\langle T_{m+i}; D^3T_j \rangle = \sum_{x=0}^{j-2} \frac{1}{c_x} j(j^2 - x^2)(\pi x) \quad (5.97)$$

onde $j - x = \text{par}$, $j \geq x + 2$, $x - (m + i) = \text{ímpar}$, $x \geq m + i + 1$ e c_x é dado por Eq. (5.95). Agora, para $\langle T_{|m-i|}; D^3T_j \rangle$ iremos encontrar,

$$\langle T_{|m-i|}; D^3T_j \rangle = \sum_{x=0}^{j-2} \frac{1}{c_x} j(j^2 - x^2)(\pi x) \quad (5.98)$$

com $j - x = \text{par}$, $j \geq x + 2$, $x - |m - i| = \text{ímpar}$, $x \geq |m - i| + 1$ e c_x é dado também por Eq. (5.95). Sendo assim, podemos partir para a última discretização dos produtos internos, com a utilização da quarta derivada de T_k na forma,

$$\langle T_j; fD^4T_k \rangle = \int_{-1}^1 T_j fD^4T_k w dz \quad (5.99)$$

substituindo Eq. (5.65) em Eq. (5.99) teremos,

$$\langle T_j; fD^4T_k \rangle = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N T_j F_m T_m D^4T_k w dz = \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_j T_m D^4T_k w dz \right) \quad (5.100)$$

substituindo Eq. (5.75) em Eq. (5.100) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \langle T_j; fD^4T_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m \left(\int_{-1}^1 T_{m+j} D^4T_k w dz + \int_{-1}^1 T_{|m-j|} D^4T_k w dz \right) \Rightarrow \\ \langle T_j; fD^4T_k \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+j}; D^4T_k \rangle + \langle T_{|m-j|}; D^4T_k \rangle) \end{aligned} \quad (5.101)$$

separando $\langle T_j; D^4T_k \rangle$ em termos pares e ímpares podemos reescreve-lo como,

$$\langle T_j; D^4T_{2k} \rangle = \frac{16}{3} k \sum_{r=1}^{k-2} (k^2 - r^2)[(k+1)^2 - r^2][(k-1)^2 - r^2] \langle T_j; T_r \rangle$$

$$+\frac{8}{3}(k-1)^2k^3(k+1) \langle T_j; T_0 \rangle \quad (5.102)$$

$$\langle T_j; D^4T_{2k+1} \rangle = \frac{8}{3}(2k+1) \sum_{r=0}^{k-2} (k^2-r^2)[(k+1)^2-r^2](k+r+2)(k-r-1) \langle T_j; T_{2r+1} \rangle \quad (5.103)$$

Para o código numérico devemos escrever $\langle T_j; fD^4T_k \rangle$ como,

$$\langle T_i; fD^4T_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N F_m (\langle T_{m+i}; D^4T_j \rangle + \langle T_{|m-i|}; D^4T_j \rangle) \quad (5.104)$$

Considerando primeiramente o termo $\langle T_{m+i}; D^4T_j \rangle$ temos que, para $j = \text{par}$ e $2k = j \Rightarrow k = \frac{j}{2}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \langle T_{m+i}; D^4T_j \rangle &= \frac{16j}{3} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{j}{2}-2} \left(\frac{j^2}{4} - r^2 \right) \left[\left(\frac{j}{2} + 1 \right)^2 - r^2 \right] \left[\left(\frac{j}{2} - 1 \right)^2 - r^2 \right] \langle T_{m+i}; T_{2r} \rangle \\ &\quad + \frac{8}{3} \left(\frac{j}{2} - 1 \right)^2 \frac{j^3}{8} \left(\frac{j}{2} + 1 \right)^2 \langle T_{m+i}; T_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.105)$$

porém, para $j = \text{ímpar}$ e $2k + 1 = j \Rightarrow k = \frac{j-1}{2}$ teremos,

$$\begin{aligned} \langle T_{m+i}; D^4T_j \rangle &= \frac{8j}{3} \sum_{r=0}^{\frac{j-1}{2}-2} \left[\left(\frac{j-1}{2} \right)^2 - r^2 \right] \left\{ \left[\left(\frac{j-1}{2} \right) + 1 \right]^2 - r^2 \right\} \\ &\quad \left[\left(\frac{j-1}{2} \right) + r + 2 \right] \left[\left(\frac{j-1}{2} \right) - r - 1 \right] \langle T_{m+i}; T_{2r+1} \rangle \end{aligned} \quad (5.106)$$

Para $\langle T_{|m-i|}; D^4T_j \rangle$ com $j = \text{par}$ e $2k = j \Rightarrow k = \frac{j}{2}$ podemos escrever,

$$\begin{aligned} \langle T_{|m-i|}; D^4T_j \rangle &= \frac{16j}{3} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{j}{2}-2} \left(\frac{j^2}{4} - r^2 \right) \left[\left(\frac{j}{2} + 1 \right)^2 - r^2 \right] \left[\left(\frac{j}{2} - 1 \right)^2 - r^2 \right] \langle T_{|m-i|}; T_{2r} \rangle \\ &\quad + \frac{8}{3} \left(\frac{j}{2} - 1 \right)^2 \frac{j^3}{8} \left(\frac{j}{2} + 1 \right)^2 \langle T_{|m-i|}; T_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.107)$$

com $j = \text{ímpar}$ e $2k + 1 = j \Rightarrow k = \frac{j-1}{2}$ iremos obter,

$$\begin{aligned} \langle T_{|m-i|}; D^4 T_j \rangle = & \frac{8}{3} j \sum_{r=0}^{\frac{j-1}{2}-2} \left[\left(\frac{j-1}{2} \right)^2 - r^2 \right] \left\{ \left[\left(\frac{j-1}{2} \right) + 1 \right]^2 - r^2 \right\} \\ & \left[\left(\frac{j-1}{2} \right) + r + 2 \right] \left[\left(\frac{j-1}{2} \right) - r - 1 \right] \langle T_{|m-i|}; T_{2r+1} \rangle \end{aligned} \quad (5.108)$$

Com este último resultado temos todos os produtos internos prontos para serem implementados numericamente. Agora devemos considerar os polinômios de Chebyshev, e suas derivadas, aplicadas nos pontos $z = -1$ e $z = 1$ para que estes possam ser implementados em Eq. (5.61), Eq. (5.62), Eq. (5.63) e Eq. (5.64). Primeiramente podemos reescrever a definição dos polinômios de Chebyshev dada em Eq. (5.1) como,

$$T_k(z) = \cos(k \cos^{-1} z) \quad (5.109)$$

dessa forma a equação recursiva obtida em Eq. (5.4) pode ser reescrita como,

$$T_{k+1}(z) = 2zT_k(z) - T_{k-1}(z) \quad (5.110)$$

com isso, podemos escrever os cinco primeiros polinômios de Chebyshev na forma,

$$T_0(z) = 1 \quad (5.111)$$

$$T_1(z) = z \quad (5.112)$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1 \quad (5.113)$$

$$T_3(z) = 4z^3 - 3z \quad (5.114)$$

$$T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1 \quad (5.115)$$

$$T_5(z) = 16z^5 - 20z^3 + 5z \quad (5.116)$$

Considerando $z = -1$ para o sistema dado em Eq. (5.111)-Eq. (5.116) iremos obter,

$$T_0(-1) = 1 \quad (5.117)$$

$$T_1(-1) = -1 \quad (5.118)$$

$$T_2(-1) = 1 \quad (5.119)$$

$$T_3(-1) = -1 \quad (5.120)$$

$$T_4(-1) = 1 \quad (5.121)$$

$$T_5(-1) = -1 \quad (5.122)$$

através das equações acima obtemos recursivamente,

$$T_k(-1) = (-1)^k; \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.123)$$

sendo assim, podemos escrever $\tilde{\Psi}(-1)$ como,

$$\tilde{\Psi}(-1) = \sum_{k=0}^N \phi_k T_k(-1) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \phi_k \quad (5.124)$$

Tomando $z = 1$ para Eq. (5.111)-Eq. (5.116) temos,

$$T_0(1) = T_1(1) = T_2(1) = T_3(1) = T_4(1) = T_5(1) = 1 \quad (5.125)$$

portanto por Eq. (5.125) temos que,

$$T_k(1) = (1)^k; \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.126)$$

dessa maneira $\tilde{\Psi}(1)$ é dado por,

$$\tilde{\Psi}(1) = \sum_{k=0}^N \phi_k T_k(1) = \sum_{k=0}^N (1)^k \phi_k \quad (5.127)$$

Para a primeira derivada de $T_k(z)$ os polinômios dados por Eq. (5.111)-Eq. (5.116) tornam-se,

$$DT_0(z) = 0 \quad (5.128)$$

$$DT_1(z) = 1 \quad (5.129)$$

$$DT_2(z) = 4z \quad (5.130)$$

$$DT_3(z) = 12z^2 - 3 \quad (5.131)$$

$$DT_4(z) = 32z^3 - 16z \quad (5.132)$$

$$DT_5(z) = 80z^4 - 60z^2 + 5 \quad (5.133)$$

Considerando $z = -1$ para sistema constituído por Eq. (5.128)-Eq. (5.133) obtemos,

$$DT_0(-1) = 0 \quad (5.134)$$

$$DT_1(-1) = 1 \quad (5.135)$$

$$DT_2(-1) = -4 \quad (5.136)$$

$$DT_3(-1) = 9 \quad (5.137)$$

$$DT_4(-1) = -16 \quad (5.138)$$

$$DT_5(-1) = 25 \quad (5.139)$$

com base em Eq. (5.134)-Eq. (5.139) temos,

$$DT_k(-1) = (-1)^{k+1}k^2; \text{ com } k \in \{\mathbb{Z}|k \geq 0\} \quad (5.140)$$

com isso, podemos escrever $D\tilde{\Psi}(-1)$ como,

$$D\tilde{\Psi}(-1) = \sum_{k=0}^N \phi_k DT_k(-1) = \sum_{k=0}^N (-1)^{k+1}k^2 \phi_k \quad (5.141)$$

Substituindo $z = 1$ para Eq. (5.128)-Eq. (5.133) encontramos,

$$DT_0(1) = 0 \quad (5.142)$$

$$DT_1(1) = 1 \quad (5.143)$$

$$DT_2(1) = 4 \quad (5.144)$$

$$DT_3(1) = 9 \quad (5.145)$$

$$DT_4(1) = 16 \quad (5.146)$$

$$DT_5(1) = 25 \quad (5.147)$$

sendo assim, com base em Eq. (5.142)-Eq. (5.147) teremos,

$$DT_k(1) = k^2; \text{ com } k \in \{\mathbb{Z}|k \geq 0\} \quad (5.148)$$

dessa forma, encontramos $D\tilde{\Psi}(1)$ como,

$$D\tilde{\Psi}(1) = \sum_{k=0}^N \phi_k DT_k(1) = \sum_{k=0}^N k^2 \phi_k \quad (5.149)$$

Tomando a derivada dos polinômios dados em Eq. (5.128)-Eq. (5.133), podemos escrever a segunda derivada de T_k como,

$$D^2T_0(z) = 0 \quad (5.150)$$

$$D^2T_1(z) = 0 \quad (5.151)$$

$$D^2T_2(z) = 4 \quad (5.152)$$

$$D^2T_3(z) = 24z \quad (5.153)$$

$$D^2T_4(z) = 96z^2 - 16 \quad (5.154)$$

$$D^2T_5(z) = 320z^3 - 120z \quad (5.155)$$

Substituindo $z = -1$ em Eq. (5.150)-Eq. (5.155) podemos escrever,

$$D^2T_0(-1) = 0 \quad (5.156)$$

$$D^2T_1(-1) = 0 \quad (5.157)$$

$$D^2T_2(-1) = 4 \quad (5.158)$$

$$D^2T_3(-1) = -24 \quad (5.159)$$

$$D^2T_4(-1) = 80 \quad (5.160)$$

$$D^2T_5(-1) = -200 \quad (5.161)$$

considerando Eq. (5.156)-Eq. (5.161) temos que,

$$D^2T_k(-1) = (-1)^k \frac{k^4 - k^2}{3}; \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.162)$$

sendo assim, $D^2\tilde{\Psi}(-1)$ é dado por,

$$D^2\tilde{\Psi}(-1) = \sum_{k=0}^N \phi_k D^2T_k(-1) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{k^4 - k^2}{3} \phi_k \quad (5.163)$$

Para $z = 1$ temos que Eq. (5.150)-Eq. (5.155) resultam em,

$$D^2T_0(1) = 0 \quad (5.164)$$

$$D^2T_1(1) = 0 \quad (5.165)$$

$$D^2T_2(1) = 4 \quad (5.166)$$

$$D^2T_3(1) = 24 \quad (5.167)$$

$$D^2T_4(1) = 80 \quad (5.168)$$

$$D^2T_5(1) = 200 \quad (5.169)$$

dadas Eq. (5.164)-Eq. (5.169) podemos escrever,

$$D^2T_k(1) = \frac{k^4 - k^2}{3}; \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.170)$$

dessa maneira, $D^2\tilde{\Psi}(1)$ pode ser escrito como,

$$D^2\tilde{\Psi}(1) = \sum_{k=0}^N \phi_k D^2T_k(1) = \sum_{k=0}^N \frac{k^4 - k^2}{3} \phi_k \quad (5.171)$$

Afim de escrevermos a terceira derivada de T_k consideraremos a derivada de Eq. (5.150)-Eq. (5.155) encontrando,

$$D^3T_0(z) = 0 \quad (5.172)$$

$$D^3T_1(z) = 0 \quad (5.173)$$

$$D^3T_2(z) = 0 \quad (5.174)$$

$$D^3T_3(z) = 24 \quad (5.175)$$

$$D^3T_4(z) = 192z \quad (5.176)$$

$$D^3T_5(z) = 960z^2 - 120 \quad (5.177)$$

Tomando $z = -1$ em Eq. (5.172)-Eq. (5.177) obtemos,

$$D^3T_0(-1) = 0 \quad (5.178)$$

$$D^3T_1(-1) = 0 \quad (5.179)$$

$$D^3T_2(-1) = 0 \quad (5.180)$$

$$D^3T_3(-1) = 24 \quad (5.181)$$

$$D^3T_4(-1) = -192 \quad (5.182)$$

$$D^3T_5(-1) = 840 \quad (5.183)$$

com base em Eq. (5.178)-Eq. (5.183) temos,

$$D^3T_k(-1) = \frac{(-1)^{k+3}}{15} k^2(k^2 - 1)(k^2 - 4); \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.184)$$

com isso, $D^3\tilde{\Psi}(-1)$ é escrito na forma,

$$D^3\tilde{\Psi}(-1) = \sum_{k=0}^N \phi_k D^3T_k(-1) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^{k+3}}{15} k^2(k^2 - 1)(k^2 - 4) \phi_k \quad (5.185)$$

Substituindo $z = 1$ em Eq. (5.172)-Eq. (5.177) teremos,

$$D^3T_0(1) = 0 \quad (5.186)$$

$$D^3T_1(1) = 0 \quad (5.187)$$

$$D^3T_2(1) = 0 \quad (5.188)$$

$$D^3T_3(1) = 24 \quad (5.189)$$

$$D^3T_4(1) = 192 \quad (5.190)$$

$$D^3T_5(1) = 840 \quad (5.191)$$

tomando os resultados de Eq. (5.186)-Eq. (5.191) iremos encontrar,

$$D^3T_k(1) = \frac{k^2}{15}(k^2 - 1)(k^2 - 4); \text{ com } k \in \{\mathbb{Z} | k \geq 0\} \quad (5.192)$$

portanto, $D^3\tilde{\Psi}(1)$ é dado por,

$$D^3\tilde{\Psi}(1) = \sum_{k=0}^N \phi_k D^3T_k(1) = \sum_{k=0}^N \frac{k^2}{15}(k^2 - 1)(k^2 - 4)\phi_k \quad (5.193)$$

com a expressão de Eq. (5.193) encontramos o último resultado necessário para a discretização das condições de contorno do problema. É importante notar que alguns produtos internos presentes na equação de Orr-Sommerfeld dada por Eq. (5.60) não acompanham uma função f . Estes produtos internos podem ser implementados diretamente utilizando Eq. (5.70) (sem derivadas envolvidas), Eq. (5.77) e Eq. (5.78) (para produtos com primeira derivada), Eq. (5.87) (para produtos com segunda derivada), Eq. (5.94) (para produtos com terceira derivada) e finalmente, Eq. (5.102) e Eq. (5.103) (para produtos com quarta derivada).

5.6 O problema de autovalor generalizado

Com os resultados obtidos acima podemos ilustrar como será resolvido numericamente o problema. Levando em conta os produtos internos dos polinômios de Chebyshev, e as funções a eles incorporadas, podemos construir matrizes de ordem $N \times N$ para cada um desses produtos. Portanto, a equação de Orr-Sommerfeld discretizada em Eq. (5.60) representa um problema de autovalor generalizado na forma,

$$[\mathbf{A}]_{N \times N} \vec{a} = c[\mathbf{B}]_{N \times N} \vec{a} \quad (5.194)$$

onde N representa o número de polinômios de Chebyshev utilizados no processo de discretização, com a matriz A e B podendo conter partes reais e complexas. Porém ainda existe a necessidade de incorporarmos as condições de contorno. Após aplicada a discretização de $\tilde{\Psi}(z)$ para os pontos $z = -1$ e $z = 1$ temos que Eq. (5.61) a Eq. (5.64) podem ser escritas como vetores linha na forma,

$$[\mathbf{A}]_{1 \times N} \vec{a} = c[\mathbf{B}]_{1 \times N} \vec{a} \quad (5.195)$$

As condições de contorno dadas na forma descrita em Eq. (5.195) devem ser substituídas nas últimas quatro linhas das matrizes A e B em Eq. (5.194), com isso teremos o sistema completo e pronto para ser resolvido. As discretizações e o método numérico foram implementados no software MATLAB. Para encontrarmos a solução do problema de autovalor generalizado descrito por Eq. (5.194) utilizamos a função interna *eig* presentes neste software. Esta função utiliza como método de solução padrão um algoritmo QZ, fornecendo o espectro dos autovalores. Portanto, podemos analisar o espectro gerado para vários valores de N , a fim de encontrarmos o autovalor que converge para a solução do problema. Porém rastrear esse valor mostra-se muitas vezes complicado, pois ele varia sua posição no vetor solução da função *eig*, tornando difícil a produção de dados sequenciais. Para contornarmos este problema mostraremos abaixo o método de iteração inversa.

5.7 Método de iteração inversa

Para finalizarmos este capítulo consideraremos a parte final do processo de obtenção dos resultados com o algoritmo para a implementação do método de iteração inversa. A aplicação deste método, além de refinar a precisão do autovalor obtido, torna a obtenção do mesmo mais rápida para processamentos envolvendo variação de algum parâmetro, uma vez que ele não necessita da solução do problema de autovalor generalizado a cada iteração. Este método é apresentado no algoritmo (1) abaixo.

Este método resolve o problema de rastreamento do resultado dentro do vetor solução da função *eig*, permitindo encontrarmos o autovalor convergido, e seu autovetor correspondente, quando uma aproximação inicial é fornecida. Como solução inicial selecionamos o resultado obtido pela função *eig*. Com isso, o método retorna rapidamente apenas o resultado de interesse e não todo o espectro de autovalores. Este resultado é utilizado como aproximação no próximo passo do processamento para algum incremento dos parâmetros de interesse, tornando

Algoritmo 1: Método de iteração inversa

```

1 início
2    $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  - Matrizes presentes no problema de autovalor generalizado
3    $\sigma_0$  - aproximação inicial para o autovalor
4    $\mathbf{z}_0$  - aproximação inicial para o autovetor
5    $p_0 = 0$   $\epsilon$  - parâmetro teste
6 fim
7 enquanto  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  faça
8   1) Resolva  $(\mathbf{A} - \sigma_0 \mathbf{B}) \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{B} \mathbf{z}_k$ ;
9   2) Calcule  $p_{k+1} = \langle \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{z}_k \rangle^{-1}$ ;
10  3) se  $|p_{k+1} - p_k| > \epsilon$  então
11     normalizar  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{w}_{k+1} / \|\mathbf{w}_{k+1}\|_2$ ;
12     volte para o passo 1;
13  senão
14     calcule o autovalor  $\sigma = \sigma_0 + p_{k+1}$ ;
15     calcule o autovetor normalizado  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{w}_{k+1} / \|\mathbf{w}_{k+1}\|_2$ ;
16     PARE
17  fim
18 fim

```

dispensável a obtenção de todo o espectro de autovalores e mantendo a rápida convergência. Utilizamos como referência o algoritmo apresentado no trabalho de [Hossain \(2011\)](#) presente no apêndice D.2.

6 ANÁLISE DAS SOLUÇÕES

Neste capítulo discutiremos os resultados obtidos para os estados base e perturbado, tanto do ponto de vista analítico quanto numérico. Primeiramente iremos abordar a solução do escoamento base para ambos os métodos.

Soluções numéricas para o escoamento base envolvendo o modelo de Carreau-Yasuda não necessitam de intrincados métodos numéricos e podem ser obtidas com certa facilidade, porém soluções algébricas mostram-se como um desafio bem maior. A primeira solução analítica (no sentido assintótico) para este modelo foi obtida com o trabalho de [Chimetta e Franklin \(2020\)](#), que também é apresentada na seção 4.1 deste texto. É importante notar que os resultados obtidos em Eq. (4.35) são generalizações dos encontrados por [Weinstein \(1990\)](#). Isso é decorrência do fato de que o modelo reológico de Carreau-Yasuda, utilizado neste trabalho, é uma generalização do modelo de Carreau abordado por Weinstein. A presença do expoente a torna alguns processos de solução um pouco mais complexos, como por exemplo a utilização recorrente do teorema binomial no processo de solução para obtermos Eq. (4.35). A validação matemática deste último resultado é direta e pode ser obtida ao comparar-se com os resultados encontrados no apêndice do trabalho de [Weinstein \(1990\)](#). Podemos notar que as soluções obtidas em Eq. (4.12) e Eq. (4.13) para a ordem $\mathcal{O}(L^0)$ são equivalentes ao caso newtoniano do mesmo escoamento, a menos de uma normalização para a espessura do filme, um caso similar é o apresentado em [Chimetta et al. \(2018\)](#) para o desenvolvimento do estado base, este último sendo analítico. No entanto quando olhamos para as solução de ordem $\mathcal{O}(L^a)$, dada por Eq. (4.34) podemos notar a inclusão de fatores não-Newtonianos no escoamento. Tratando apenas do ponto de vista matemático, é importante notar que estas duas soluções possuem condições de existência para $a = 0$, $a = -2$ e $a = -3$. Combinando as soluções de ordem $\mathcal{O}(L^0)$ e $\mathcal{O}(L^a)$ obtemos a solução assintótica dada por Eq. (4.35). Destacamos aqui que os resultados apresentados através da solução assintótica foram obtidos juntamente com a utilização da função interna *real* do MATLAB, uma vez que variações no parâmetro a podem vir a apresentar resultados complexos. Dessa maneira focamos nossas análises apenas na parte real das soluções, uma vez que não obtivemos nenhum resultado físico relevante de suas partes complexas. Outra escolha que destacaremos foi a de considerarmos o parâmetro I como zero em todos os processamento. Esta escolha se deve pelo fato de que a viscosidade para o cisalha-

mento infinito η_∞ não se mostra relevante para a grande maioria dos casos ((Macosko, 1994) e (Bird *et al.*, 1987a)), uma vez que está mais associada a escoamentos inviscidos (Kudenatti *et al.*, 2020). Dessa forma, o que determina se uma classe de fluidos apresentam comportamento shear-thinning ou *shear-thickening* para este modelo será a condição de quando escolhermos $n < 1$ ou $n > 1$ respectivamente.

Primeiramente faremos nossa análise com base apenas nos resultados obtidos pela solução assintótica, para depois compararmos com os encontrados via implementação numérica. A superfície dada na Fig. (6.1) apresenta a espessura do filme líquido \bar{h} obtida através de Eq. (4.35) em função dos parâmetros $0 < a \leq 10$, $0 < n \leq 1$ e $L = 0,4$, caracterizando o fluido como *shear-thinning*. Pontos de interesse foram destacados para melhor compreensão do comportamento dos fluidos a medida que os parâmetros variam. Podemos notar que a espessura é máxima para $(n; a) = (0,02; 0,81)$ e mínima para $(n; a) = (0,02; 1,88)$, ou seja, a faixa próxima à $a = 2$, caracterizada pelo modelo de Carreau de quatro parâmetros, é a que apresenta a menor espessura dentre todas as outras para o mesmo valor de n . De modo geral, podemos notar que a espessura varia monotonicamente com n e não-monotonicamente com a . À medida que n tende a zero o fluido apresenta características não-Newtonianas mais acentuadas, porém o que define se haverá um aumento, ou uma diminuição, no valor da espessura é o parâmetro a . Como mencionado na seção 3.1 podemos notar que o fluido começa a apresentar comportamento Newtoniano quando n tende a 1, sendo necessariamente Newtoniano para $n = 1$. Porém mostra-se interessante o fato de que, a medida que o valor de a aumenta o fluido tende cada vez mais a apresentar um comportamento Newtoniano, independentemente do valor de n . Se levarmos em conta uma ordem de aproximação de 10^{-4} podemos considerar o fluido no ponto $(n; a) = (0,02; 10)$ como Newtoniano, uma vez que $\bar{h} = 1,4422$, sendo este o mesmo valor da espessura para qualquer ponto na linha de $n = 1$. Este resultado newtoniano também é obtido por Rousset *et al.* (2007). Todos os comportamento até aqui descritos para esse conjunto de parâmetros podem ser também observados na Fig. (6.2). Esta figura mostra a solução de Eq. (4.35) para $\vec{U}(0)$ (velocidade superficial) com os mesmos valores de parâmetros destacados anteriormente. Como é de se esperar os mesmos pontos em ambas as figuras irão apresentar um comportamento inverso. Tomando $(n; a) = (0,02; 0,81)$ temos a menor velocidade registrada de toda a superfície, o que condiz com o fato deste ponto apresentar o maior valor de \bar{h} , enquanto que, para $(n; a) = (0,02; 1,88)$ registra-se a maior velocidade para o menor valor de \bar{h} . Dessa forma podemos interpretar que, conforme o filme líquido é mais espesso sua velocidade

na superfície tende a ser menor, em contra partida, filmes líquidos de menor espessura possuem maior velocidade superficial. Também é importante destacar que valores próximos de $a = 1$ apresentam fortes características não-Newtonianas se comparados com os demais.

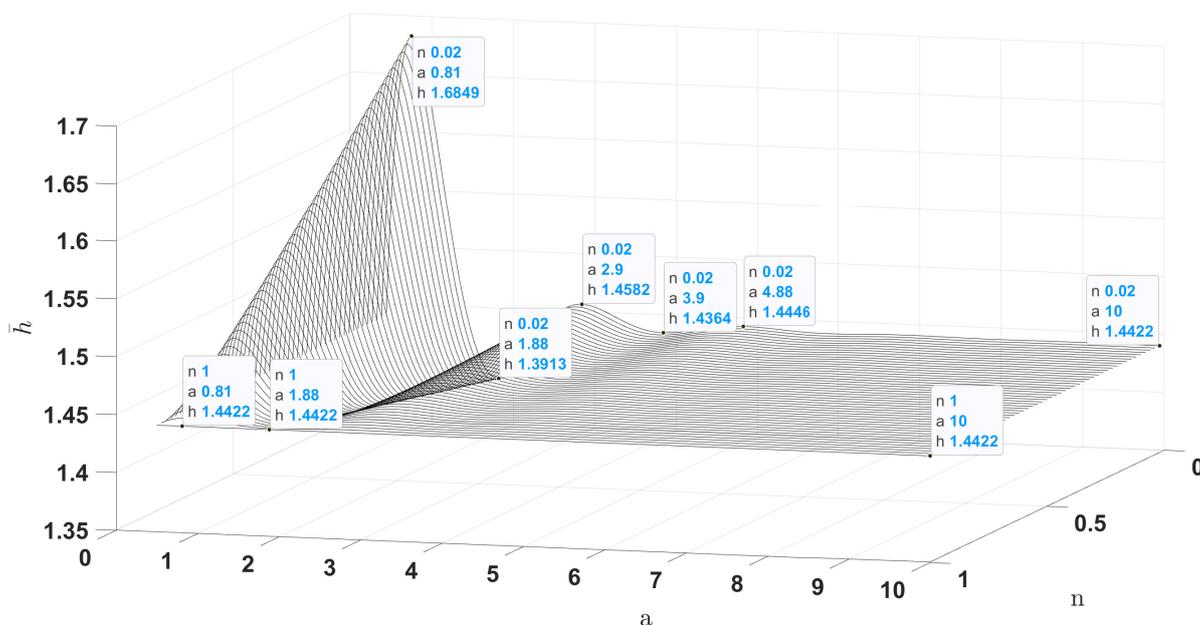


Figura 6.1 – Resultado de \bar{h} em Eq. (4.35) para fluidos *shear-thinning* (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$.

Ainda considerando $n = 0,02$, os pontos de maior e menor espessura, $a = 0,81$ e $a = 1,88$ respectivamente, podemos construir o perfil de velocidades, normalizado pela velocidade superficial, e a viscosidade apresentados na Fig. (6.3). O gráfico à esquerda mostra a comparação do perfil de velocidades para três casos distintos. Nota-se aqui que para $a = 1,88$ a curva do perfil de velocidades encontra-se acima da curva Newtoniana. Olhando para os dados da viscosidade deste mesmo fluido percebemos que suas características, menor espessura do filme líquido e maior velocidade superficial, decorrem do comportamento da função viscosidade para o mesmo, que apresenta-se totalmente abaixo da curva Newtoniana. Portanto o escoamento do filme líquido nestas condições apresentará maior velocidade média e menor espessura de modo geral. Outro comportamento interessante decorre do fato de que a função viscosidade apresenta valores cada vez menores a medida que aproxima-se da superfície sólida, porém a condição de não-deslizamento na parede mantém-se preservada. Considerando o fluido com $a = 0,81$ nota-se o comportamento inverso. Ele apresenta menor velocidade média, assim como um possível erro por volta de $\bar{h}/\bar{h}_0 = 0,7$, que resulta em uma violação

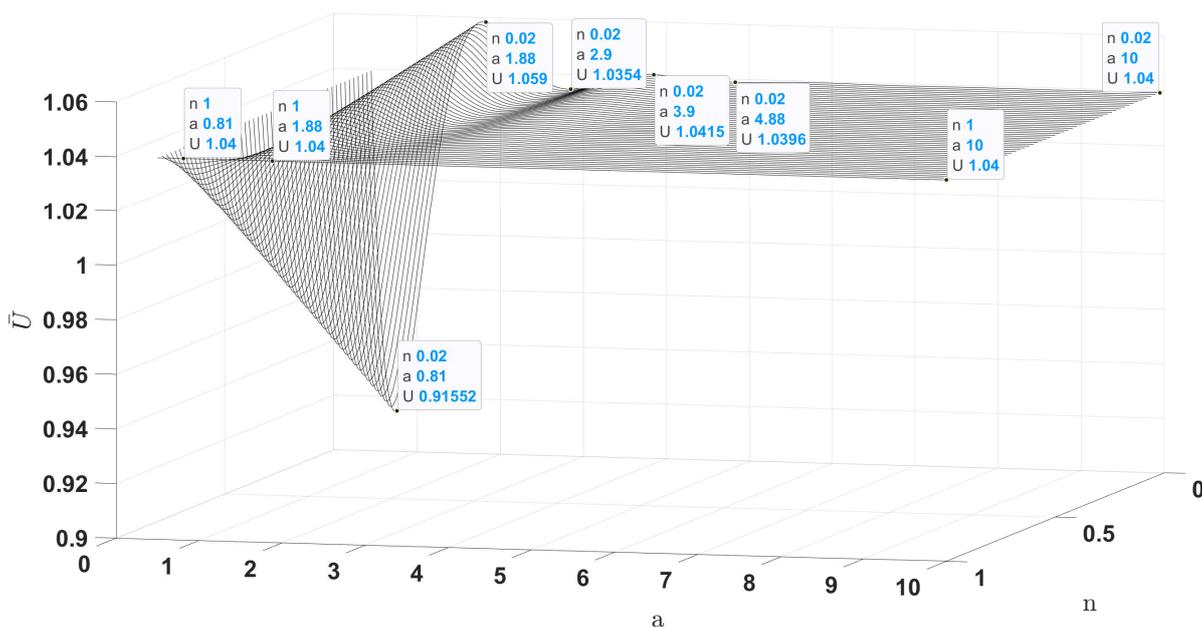


Figura 6.2 – Resultado de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) em Eq. (4.35) para fluidos *shear-thinning* (faixa de $n < 1$) com $L = 0, 4$.

da condição de não-deslizamento em $\bar{h}/\bar{h}_0 = 1$. A provável causa desse comportamento é a forte presença de termos complexos que foram suprimidos ao calcularmos essa curva, uma vez que precisamos utilizar a de maneira contínua no domínio, gerando assim erros de aproximação ao calcularmos a velocidade do escoamento próximo da parede. Quanto à viscosidade, os resultados encontram-se totalmente acima da curva Newtoniana, porém com comportamento e taxas de crescimento claramente diferentes do caso anterior. Notemos que a taxa de decaimento de $\bar{\eta}$ para $a = 1,88$ é basicamente constante a partir de $\bar{h}/\bar{h}_0 = 0,5$, tal comportamento não ocorre para $a = 0,81$. Podemos observar para este último caso que um ponto de máximo ocorre próximo à $\bar{h}/\bar{h}_0 = 0,7$.

Considerando um caso *shear-thickening* com $0 < a \leq 10$, $1 \leq n \leq 2$ e $L = 0, 4$, podemos notar uma inversão completa nos comportamentos das superfícies de \bar{h} e \bar{U} apresentadas em Fig. (6.4) e Fig. (6.5) respectivamente. Considerando os mesmos pontos anteriores, podemos perceber que a região no entorno do ponto $(n; a) = (0,02; 0,81)$ apresenta a menor espessura e maior velocidade para esta classe de fluidos, enquanto $(n; a) = (0,02; 1,88)$ possui espessura máxima e velocidade mínima. As variações monotônicas em n e não-monotônicas em a são preservadas, assim como a tendência ao comportamento Newtoniano conforme a assume valores cada vez maiores.

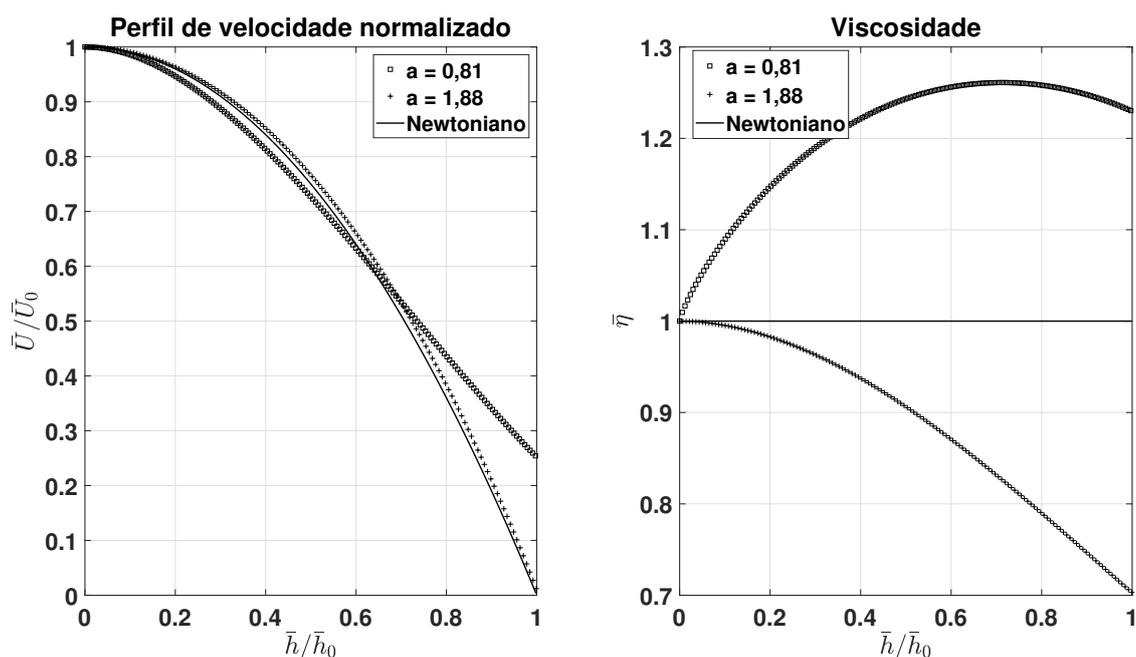


Figura 6.3 – Resultados para o perfil de velocidades normalizado e a viscosidade para dois fluidos *shear-thinning* com $L = 0,4$ e $n = 0,02$.

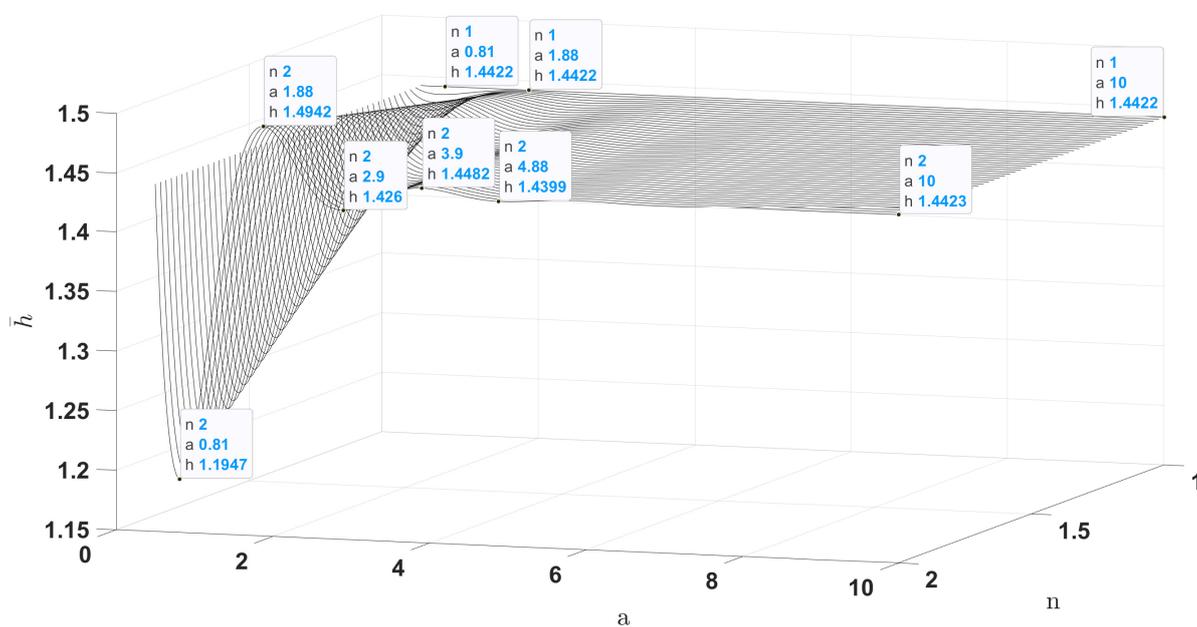


Figura 6.4 – Resultado de \bar{h} em Eq. (4.35) para fluidos *shear-thickening* (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$.

Como podemos observar em Fig. (6.6) também ocorre uma inversão de comportamentos no perfil de velocidades para os dois fluidos destacados, $a = 0,81$ e $a = 1,88$, com

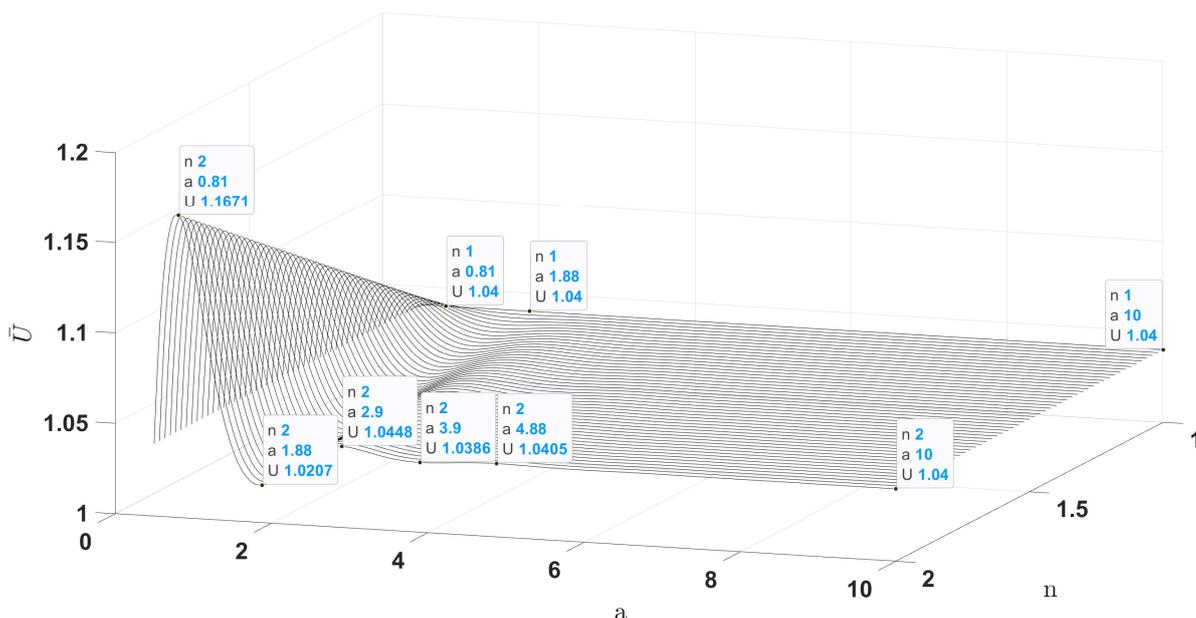


Figura 6.5 – Resultado de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) em Eq. (4.35) para fluidos *shear-thickening* (faixa de $n > 1$) com $L = 0, 4$.

$n = 2$. Porém a combinação dos parâmetros a e n gera resultados melhores neste conjunto de dados. Notemos que, o perfil de velocidades do fluido de maior velocidade média, agora $a = 0, 81$, não cruza o resultado Newtoniano, o mesmo vale para $a = 1, 88$. Porém, ainda apresenta um erro próximo à parede, uma vez que este fluido apresenta um resultado de $\bar{U} > 0$ para $\bar{h}/\bar{h}_0 = 1$. As curvas das funções densidade também não apresentam nenhum ponto de máximo, ou mínimo, e suas taxas de crescimento, para $a = 1, 88$, e decrescimento, para $a = 0, 81$, sofrem pouca variação. Vale notar que esta taxa é quase constante a partir de $\bar{h}/\bar{h}_0 = 0, 1$ para $a = 0, 81$. Ambos os resultados reforçam a hipótese de que determinadas combinações dos expoentes a e n podem gerar erros de aproximação para resultados próximos da parede, principalmente para valores na vizinhança de $a = 1$.

Até aqui podemos perceber que para valores próximos de $a = 2, 4, \dots$ os fluidos apresentam comportamento *shear-thinning* (para $n < 1$) e *shear thickening* (para $n > 1$) como esperado. No entanto, para valores de $a = 1, 3, 5, \dots$ esses fluidos encontram-se com comportamento invertido, com uma acentuada diferença para $a \approx 1$. Somente com a abordagem numérica para o estado base, apresentada na seção 5.3, podemos gerar os resultados necessários para finalmente estabelecer um critério de confiabilidade para a solução assintótica em relação as variações do parâmetro a . Para a solução numérica apresentada a seguir utilizamos o domí-

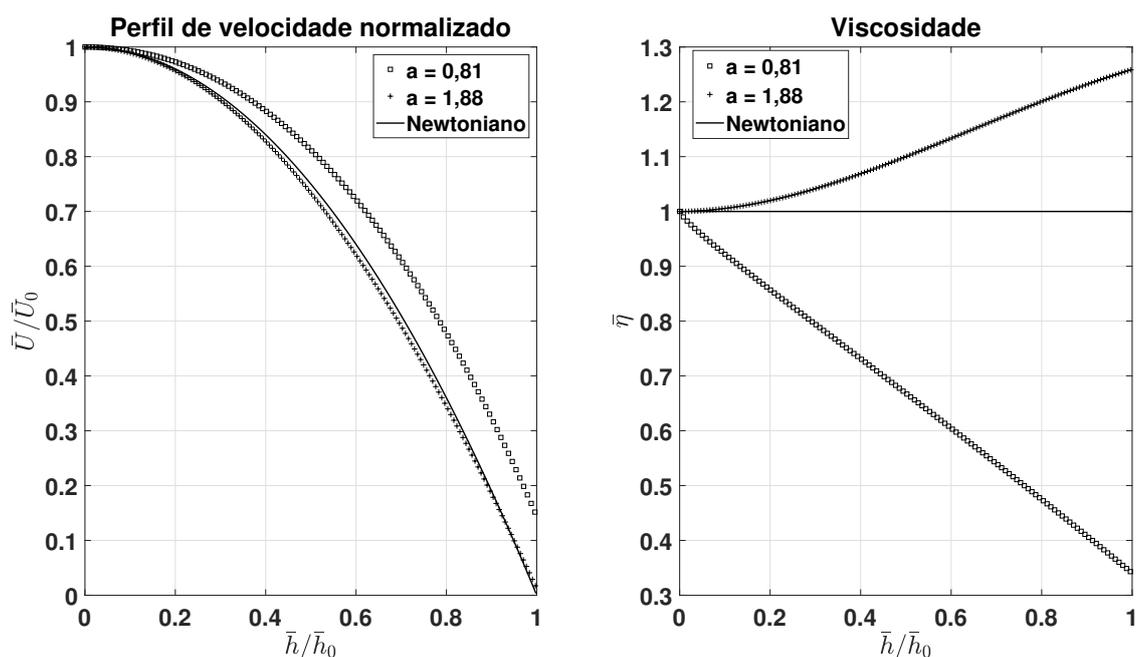


Figura 6.6 – Resultados para o perfil de velocidades normalizado e a viscosidade para um fluido *shear-thickening* com $L = 0,4$ e $n = 2$.

nio físico, $\bar{y} \in [0; \bar{h}]$, uma vez que as soluções para essa análise não serão transferidas para o espaço de Chebyshev. Para fluidos *shear-thinning* ($n < 1$) obtivemos como solução numérica os dados apresentados em Fig. (6.7) e Fig. (6.8), que representam a espessura do filme líquido \bar{h} e a velocidade superficial $\bar{U}(0)$ respectivamente. É evidente a diferença destes resultados se comparados com os apresentados em Fig. (6.1) e Fig. (6.2). O resultado numérico mostra um comportamento monotônico para ambos os parâmetros a e n , no qual a medida que a ou n tendem a zero os efeitos não-newtonianos (*shear-thinning*) acentuam-se, com clara diminuição na espessura do filme líquido. De forma equivalente, podemos observar o aumento da velocidade superficial $\bar{U}(0)$ na Fig. (6.8) para a e n tendendo à zero, com ambos os parâmetros novamente apresentando comportamento monotônico.

Na Fig. (6.9) temos os resultados numéricos para dois fluidos *shear-thinning*, $a = 0,81$ e $a = 1,88$ com $n = 0,02$. No gráfico à esquerda vemos que ambos os perfis de velocidade encontram-se abaixo da curva newtoniana, porém com $a = 0,81$ mais afastado desta. Podemos notar também que ambas as viscosidades diminuem conforme ocorre um aumento do cisalhamento, sendo a curva $a = 0,81$ muito mais acentuada, uma vez que possui um comportamento não-newtoniano mais forte, reafirmando assim o resultado do perfil de velocidades. Comparando esses dois resultados com os da Fig. (6.3) fica evidente a limitação do

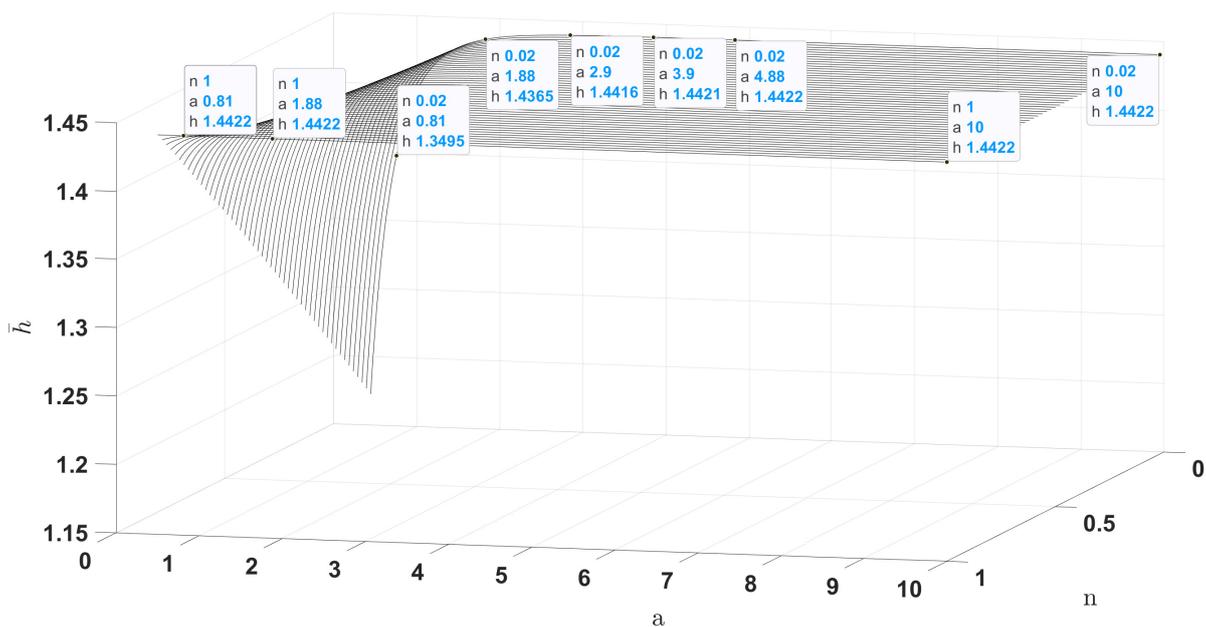


Figura 6.7 – Resultado numérico de \bar{h} para fluidos *shear-thinning* (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$.

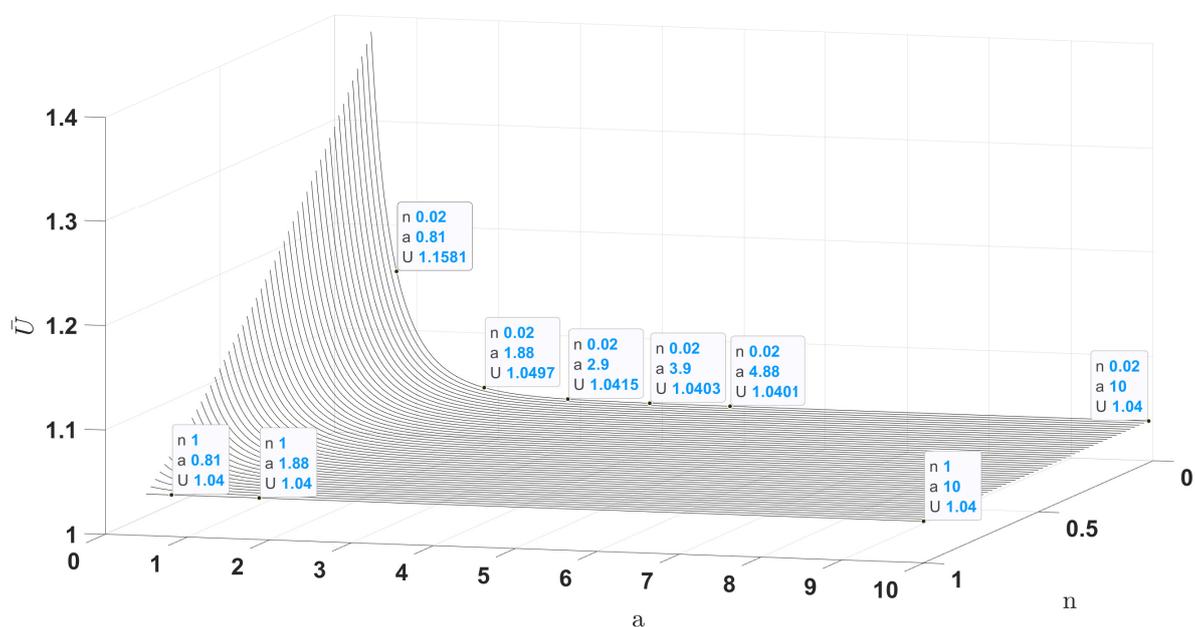


Figura 6.8 – Resultado numérico de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) para fluidos *shear-thinning* (faixa de $n < 1$) com $L = 0,4$.

método assintótico ao tentar analisar fluidos com forte comportamento não-newtoniano.

Considerando a faixa de fluidos *shear-thickening* ($n > 1$), o resultado numérico

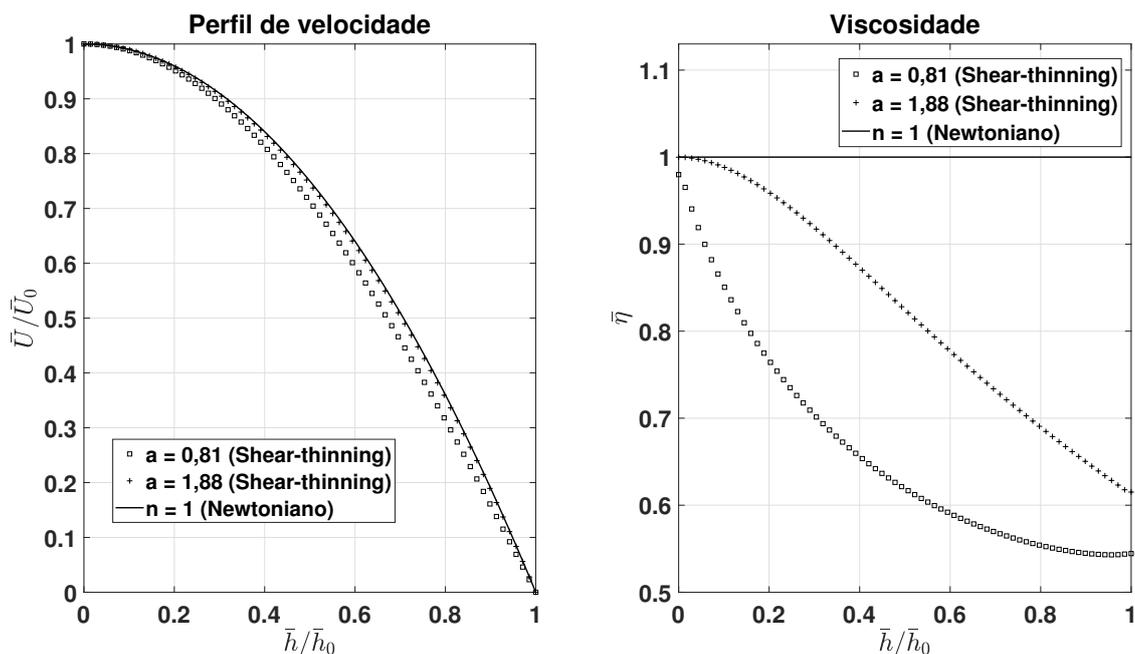


Figura 6.9 – Resultado numérico para o perfil de velocidades normalizados, e viscosidade, de dois fluidos *shear-thinning* com $L = 0,4$ e $n = 0,02$.

para a espessura do filme líquido e velocidade superficial é encontrado em Fig. (6.10) e Fig. (6.11). Novamente ambos os comportamentos dos parâmetros a e n apresentam-se monotônicos. Como esperado, as características invertem-se em relação a Fig. (6.7) e Fig. (6.8). A medida que a tende à zero e n para dois, os fluidos apresentam comportamento *shear-thickening* mais acentuado, resultando em maiores espessuras e menores velocidades superficiais. Ao compararmos o resultados numéricos (Fig. (6.10) e Fig. (6.11)) e assintóticos (Fig. (6.4) e Fig. (6.5)) podemos ver novamente grande discrepância entre as soluções, principalmente para baixos valores de a .

Com Fig. (6.12) temos os resultados numéricos para dois fluidos *shear-thickening*, $a = 0,81$ e $a = 1,88$ com $n = 2$. Como é esperado, os perfis de velocidade agora encontram-se acima da curva newtoniana, com $a = 0,81$ mais afastado desta. Ambas as funções viscosidade aumentam seus valores a medida que o cisalhamento é mais forte, com curvas totalmente acima do resultado newtoniano. Note-se que $a = 0,81$ possui forte comportamento *shear-thickening* próximo a parede, como esperado. Ao compararmos este resultado com os apresentados em Fig. (6.6) observamos novamente como a solução assintótica é incapaz de capturar o comportamento real para a faixa de valores próximos à $a = 1$.

Sendo assim, concluímos que o parâmetro a desempenha um papel fundamental no

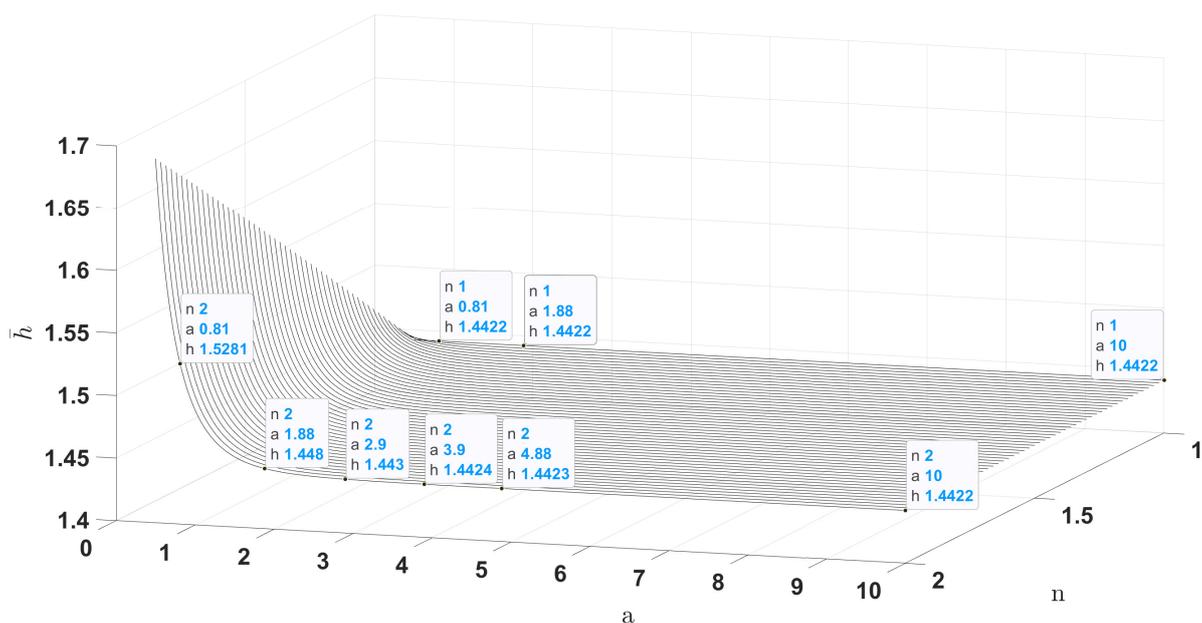


Figura 6.10 – Resultado numérico de \bar{h} para fluidos *shear-thickening* (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$.

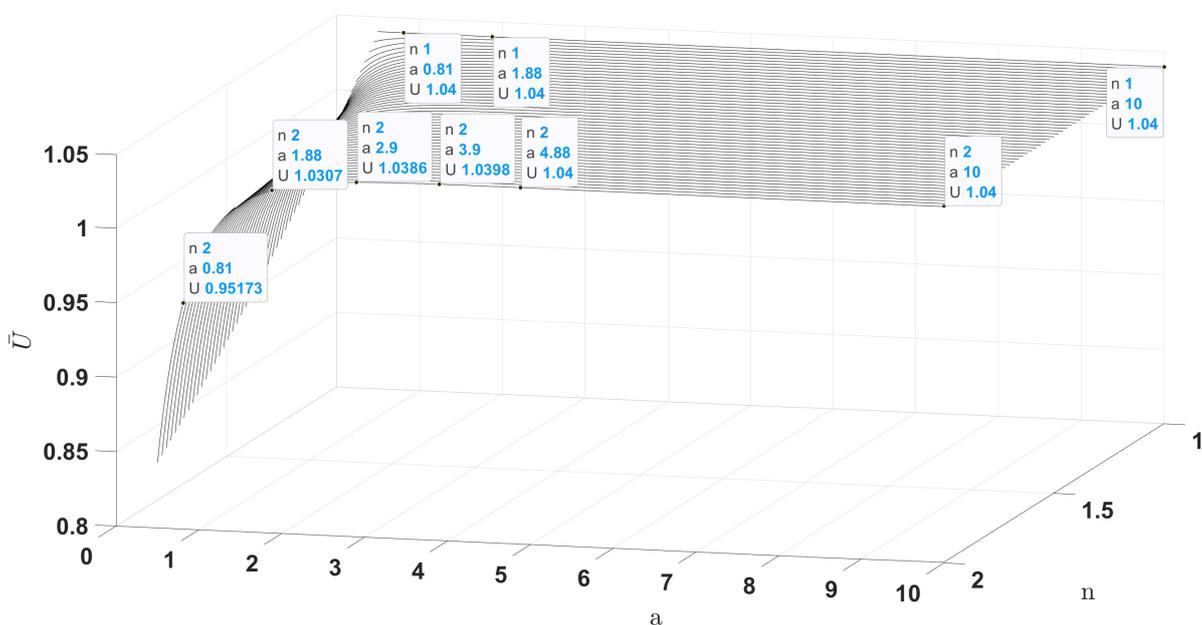


Figura 6.11 – Resultado numérico de $\bar{U}(0)$ (velocidade superficial) para fluidos *shear-thickening* (faixa de $n > 1$) com $L = 0,4$.

comportamento não-newtoniano para o modelo de Carreau-Yasuda. A medida que seu valor aproxima-se de zero são registrados comportamento *shear-thinning* ($n < 1$) e *shear-thickening*

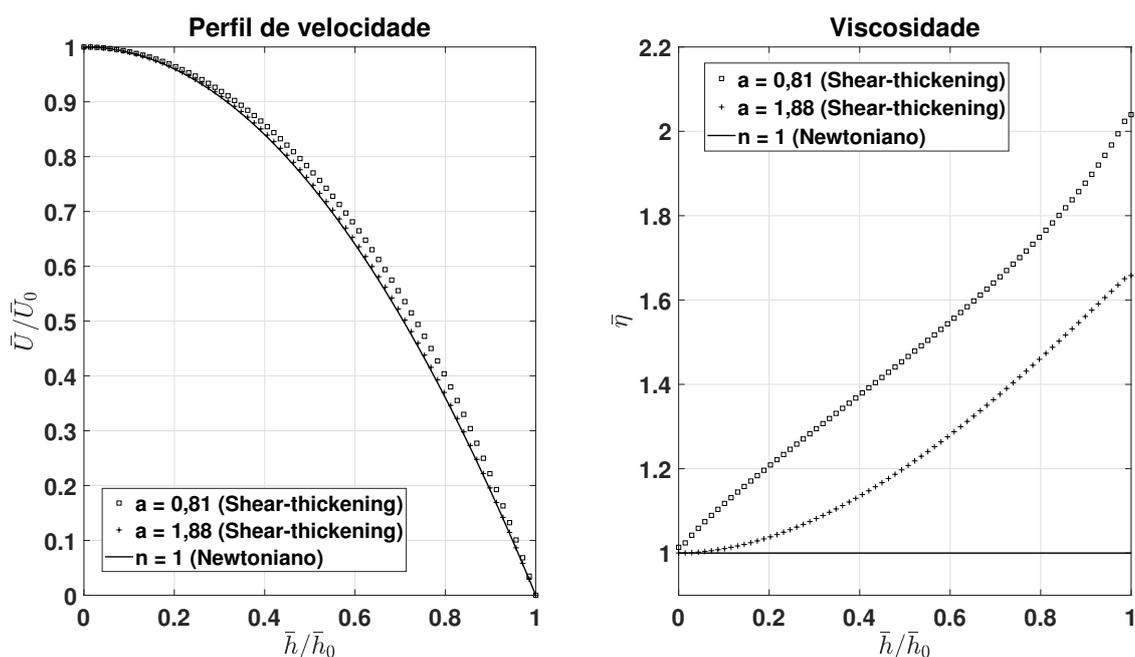


Figura 6.12 – Resultado numérico para o perfil de velocidades normalizados, e viscosidade, de dois fluidos *shear-thickening* com $L = 0,4$ e $n = 2$.

($n > 1$) cada vez mais acentuados, para n tendendo a zero ou dois respectivamente. Porém ao aumentarmos o valor deste parâmetro começamos a recuperar o comportamento newtoniano, sendo que para valores próximos de $a = 5$ podemos dizer que os fluidos possuem comportamentos newtonianos de modo geral. A solução assintótica mostra coerente apenas para valores próximos de $a = 2, 4$ e $a > 5$. Uma vez que o expoente a gera muitos erros de aproximação para os demais valores, sendo que para $a \approx 1$ a natureza dos fluidos fica completamente invertida em relação ao que é fisicamente esperado. Dessa forma reforçamos o critério apresentado na seção 4.1, sendo a solução assintótica viável apenas para L tendendo a zero ($L \rightarrow 0$). Para valores próximos de $a = 1$ tal consideração se faz insuficiente a menos que $L \approx 0$, o que degeneraria qualquer comportamento não-newtoniano. Antes de tratarmos dos resultados sobre a estabilidade de um fluido de Carreau-Yasuda devemos ressaltar o cuidado necessário com as derivadas de \bar{U} para as soluções numéricas apresentadas na discussão acima.

Ao produzirmos os resultados numéricos listados acima, notamos que para valores próximos de $a = 1, 3$, apenas a viscosidade dos fluidos apresentava um comportamento invertido do esperado para sua faixa de n . Uma investigação mais detalhada no código numérico mostrou que esse erro deve-se aos valores de DU . Todas as entradas do vetor $D\bar{U}$ são negativas e devemos utilizá-lo em Eq. (3.57) e Eq. (3.88), na presença de uma potência de a . Ao

aplicarmos uma potência de a para esse vetor, com a sendo um número ímpar ou em sua vizinhança, é gerado erro numérico, alterando o resultado esperado para aquela faixa de valores. Podemos ver claramente isto acontecendo em Fig. (6.13) e Fig. (6.14). Para contornarmos esse problema utilizamos a função interna abs presente no MATLAB. Dessa maneira calculamos o valor absoluto de cada entrada do vetor $D\bar{U}$ para utilizá-lo nas funções $\bar{\eta}$ e $\bar{\epsilon}$. Apresentamos nestes dois gráficos, os efeitos de $D\bar{U}$ e $abs(D\bar{U})$ para dois casos *shear-thinning* com $n = 0,02$, Fig. (6.13), e para outros dois casos *shear-thickening* com $n = 2$, Fig. (6.14). Podemos notar que para ambos os casos com $a = 0,81$ o erro apresentado ao utilizarmos o vetor $D\bar{U}$ é muito acentuado e altera drasticamente o que deveria ser esperado, representado por $abs(D\bar{U})$. Para $a = 1,88$ vemos uma grande concordância nos resultados, uma vez que nesta faixa estamos nos aproximando de um valor par para o expoente a . Com base neste comportamento, foi tomada a medida de utilizar apenas o vetor $abs(D\bar{U})$ em todos os resultados numéricos, evitando erros de aproximação para o estado base.

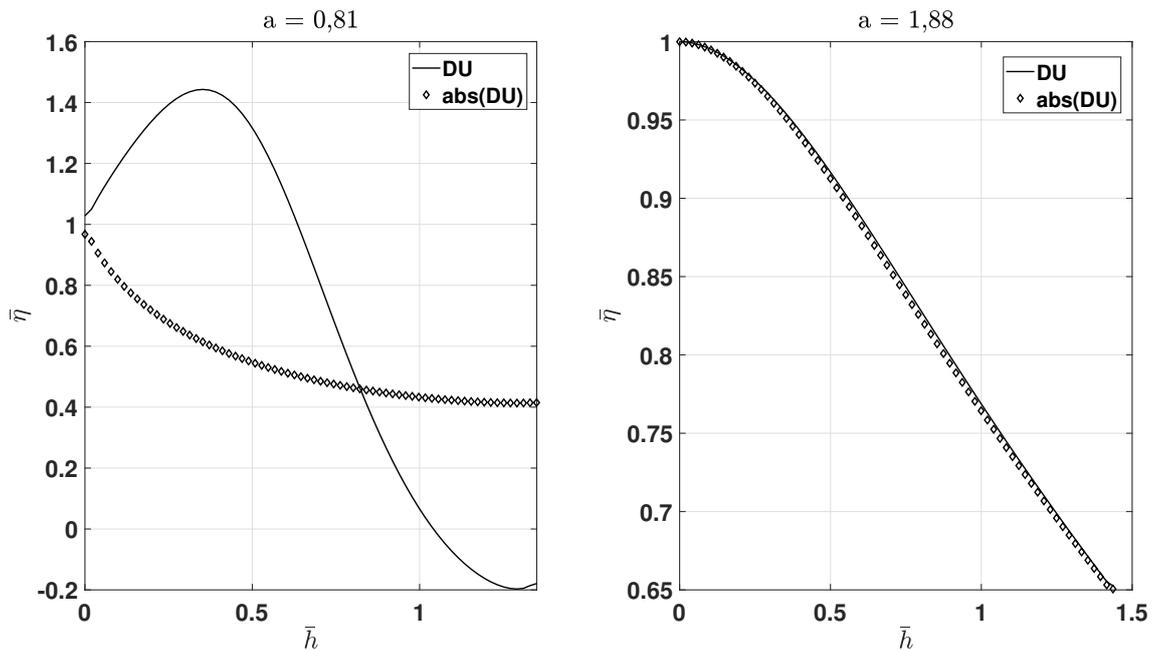


Figura 6.13 – Teste numérico para o a viscosidade de dois fluidos *shear-thinning* com $L = 0,4$ e $n = 0.02$.

Com os resultados acima podemos prosseguir para a discussão do problema de estabilidade. Como foi mostrado na seção 5.4, resolveremos as equações de Orr-Sommerfeld e suas condições de contorno no espaço de Chebyshev. Para obtermos estas soluções utilizamos a abordagem descrita na seção 5.6, juntamente com um método de iteração inversa abordado

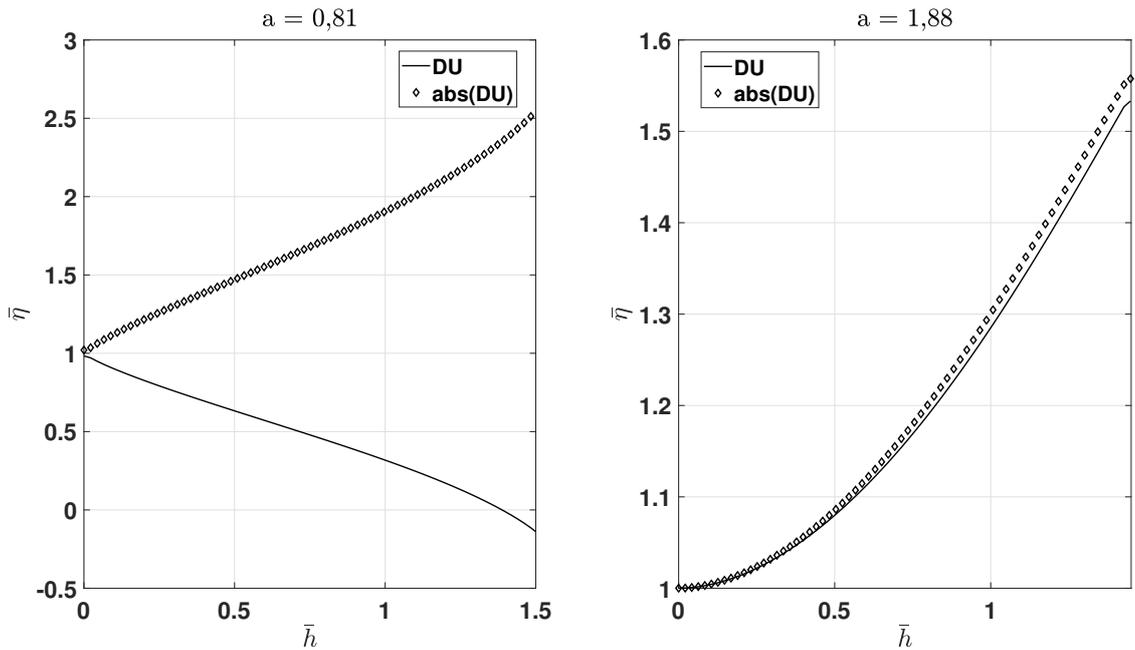


Figura 6.14 – Teste numérico para o a viscosidade de dois fluidos *shear-thickening* com $L = 0,4$ e $n = 2$.

na seção 5.7. O interesse em encontrarmos essas soluções reside no fato de estarmos buscando as condições críticas do escoamento, através de uma análise de estabilidade marginal. Dessa maneira, procuramos por condições que irão proporcionar o surgimento de uma deflexão na superfície, que eventualmente evoluirá para uma onda. Afim de encontrarmos tais condições devemos olhar para os autovalores onde $c_i = 0$, os quais representam uma perturbação neutra. Para $c_i < 0$ temos perturbações amortecidas e com $c_i > 0$ perturbações amplificadas, representando escoamentos estáveis e instáveis respectivamente. É importante ressaltar que a confiabilidade do comportamento de $c_i > 0$ é prejudicada pelo fato de estarmos lidando com uma análise linear, uma vez que escoamentos perturbados apresentam muitas vezes fortes efeitos não-lineares. Começaremos no entanto discutindo um pouco acerca dos métodos utilizados para obtenção dos resultados. Considerando a combinação de Eq. (4.60) e Eq. (4.75) com Eq. (4.36) temos o resultado assintótico $c = c_0 + \alpha c_1$ porém, seu equivalente numérico é na forma $c = c_r + c_i$ uma vez que α já se encontra incorporado a solução do autovalor. É importante mencionar que as equações apresentadas em Eq. (4.60) e Eq. (4.75) são generalizações das expressões obtidas por [Rousset et al. \(2007\)](#), verifica-se igualdade diretamente quando $a = 2$. Nas tabelas 6.1 e 6.2 temos os resultados de um mesmo processamento para um fluido *shear-thinning* com parâmetros $a = 2$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e

$Re = 1$. A tabela 6.1 apresenta os valores obtidos com a função interna *eig* do MATLAB, enquanto que tabela 6.2 traz os resultados obtidos com o método de iteração inversa, ambos os resultados encontram-se em função do número de polinômios N . Podemos notar que a precisão do método de Galerkin é muito satisfatória mesmo para baixos valores de N sendo que, para a taxa de crescimento c_i obtemos convergência, para a ordem de 10^{-3} , com apenas oito polinômios ($N = 8$). Ao compararmos estas duas tabelas percebemos que para $N = 90$ a função *eig* apresentou um pequeno erro numérico, porém isso não é observado para o método de iteração inversa, que se mostra menos suscetível a instabilidade numérica, além de possuir menor custo computacional. Para esse sistema a solução assintótica tem como resultado $c = c_0 + \alpha c_1 = 2.183925792114037 - 0.061487668344900i$, caracterizando um escoamento estável ($c_i < 0$). Podemos notar que a solução numérica e assintótica estão próximas, sendo que esta última mostra-se aceitável até a ordem de 10^{-2} . Devemos notar que as condições de comparação são quase ideais, uma vez que estamos considerando parâmetros com aspecto não-newtoniano moderado e $a = 2$. Para a tabela 6.3 consideramos $a = 1$ e mantivemos os demais parâmetros iguais, com isso nota-se que a solução numérica se mantém estável e coerente, desta vez não apresentando oscilação numérica. No entanto a solução assintótica tem como resultado $c = c_0 + \alpha c_1 = 1.780083823051904 - 0.044532502999804i$, mostrando-se longe do resultado esperado e incapaz de capturar os aspectos físicos do problema.

| N | c_r | c_i |
|-----|-------------------|---------------------|
| 5 | 2.150878159062661 | - 0.063199893451491 |
| 8 | 2.206370303540105 | - 0.064492170608591 |
| 10 | 2.206992892593944 | - 0.064764772353437 |
| 15 | 2.203487233822588 | - 0.064808201854938 |
| 20 | 2.201295170647084 | - 0.064812510590682 |
| 30 | 2.198767988367764 | - 0.064804526018478 |
| 40 | 2.197440006963681 | - 0.064797630148181 |
| 60 | 2.196076953288475 | - 0.064791696407136 |
| 70 | 2.195711459469904 | - 0.064771679236665 |
| 80 | 2.195340150189963 | - 0.064771889004474 |
| 90 | 2.194650456946679 | - 0.065154828948032 |
| 100 | 2.195038550046627 | - 0.064603514800168 |

Tabela 6.1 – Resultados numéricos para o autovalor convergido variando o número de polinômios de Chebyshev. Todos os valores foram obtidos com a função interna *eig* com o software MATLAB. Os parâmetros utilizados foram $a = 2$, $n = 0, 5$, $L = 0, 4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e $Re = 1$. Resultado assintótico possui valor $c = c_0 + \alpha c_1 = 2.183925792114037 - 0.061487668344900i$.

| N | c_r | c_i |
|-----|-------------------|---------------------|
| 5 | 2.150878159062660 | - 0.063199893451492 |
| 8 | 2.206370303540135 | - 0.064492170608210 |
| 10 | 2.206992892594566 | - 0.064764772351857 |
| 15 | 2.203487233821170 | - 0.064808201862439 |
| 20 | 2.201295170592749 | - 0.064812510648945 |
| 30 | 2.198767987142409 | - 0.064804536805275 |
| 40 | 2.197441318113467 | - 0.064799531093343 |
| 60 | 2.196077761779442 | - 0.064794139115120 |
| 70 | 2.195693066916004 | - 0.064792855701625 |
| 80 | 2.195385018398672 | - 0.064791253239264 |
| 90 | 2.195158587871620 | - 0.064790426475288 |
| 100 | 2.194973035102523 | - 0.064789743191225 |

Tabela 6.2 – Resultados numéricos para o autovalor convergido variando o número de polinômios de Chebyshev. Todos os valores foram obtidos com o método de iteração inversa implementado com o software MATLAB. Os parâmetros utilizados foram $a = 2$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e $Re = 1$. Resultado assintótico possui valor $c = c_0 + \alpha c_1 = 2.183925792114037 - 0.061487668344900i$.

Os resultados obtidos nas tabelas descritas no último parágrafo são pontuais e indicam apenas os autovalores convergidos, ou seja, aqueles que representam o comportamento físico do escoamento indicado. Em Fig. (6.15) e Fig. (6.16) são apresentados os espectros de autovalores obtidos através da Eq. (5.195) para fluidos com comportamento *shear-thinning* e um *shear-thickening* respectivamente. Os parâmetros a e n foram escolhidos a fim de observarmos o padrão dos autovalores para dois sistemas relativamente distantes em seus comportamentos físicos. Consideramos quatro processamentos para ambos os casos, com valores de $N = 10, 30, 50$ e 70 . Podemos notar comportamento semelhante para os dois escoamentos com evidente convergência, dentro do espectro, para a velocidade de fase c_r a partir de $N = 50$. Estes resultados são consistentes com o espectro de autovalores encontrado para um escoamento gravitacional de um fluido newtoniano com presença de uma superfície livre como em [Chimetta \(2016\)](#).

Como visto ao final da seção 4.2 a Eq. (4.77) representa a taxa de crescimento em função do número de onda α . Com este resultado podemos traçar a taxa de crescimento para diferentes valores do número de Reynolds. Estes resultados encontram-se em Fig. (6.17), Fig. (6.18) e Fig. (6.19) para os casos *shear-thinning*, newtoniano e *shear-thickening* respectivamente. Ao variarmos o número de Reynolds podemos identificar para quais valores da taxa de

| N | c_r | c_i |
|-----|-------------------|---------------------|
| 7 | 2.368962379950071 | - 0.072130442869673 |
| 10 | 2.320390488280350 | - 0.072833780138316 |
| 15 | 2.260562417428151 | - 0.072412672536993 |
| 20 | 2.228345856315183 | - 0.072184745527753 |
| 30 | 2.195930197972547 | - 0.071929300165888 |
| 40 | 2.179982065539510 | - 0.071786538042291 |
| 60 | 2.164329287705833 | - 0.071634426950263 |
| 70 | 2.159976263042181 | - 0.071643404256213 |
| 80 | 2.156640142192151 | - 0.071549899337387 |
| 90 | 2.154096644323192 | - 0.071545868587693 |
| 100 | 2.151652740815308 | - 0.071859604005805 |

Tabela 6.3 – Resultados numéricos para o autovalor convergido variando o número de polinômios de Chebyshev. Todos os valores foram obtidos com a função interna *eig* com o software MATLAB. Os parâmetros utilizados foram $a = 1$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $\theta = 1^\circ$, $We = 0,001$, $\alpha = 0,001$ e $Re = 1$. Resultado assintótico possui valor $c = c_0 + \alpha c_1 = 1.780083823051904 - 0.044532502999804i$.

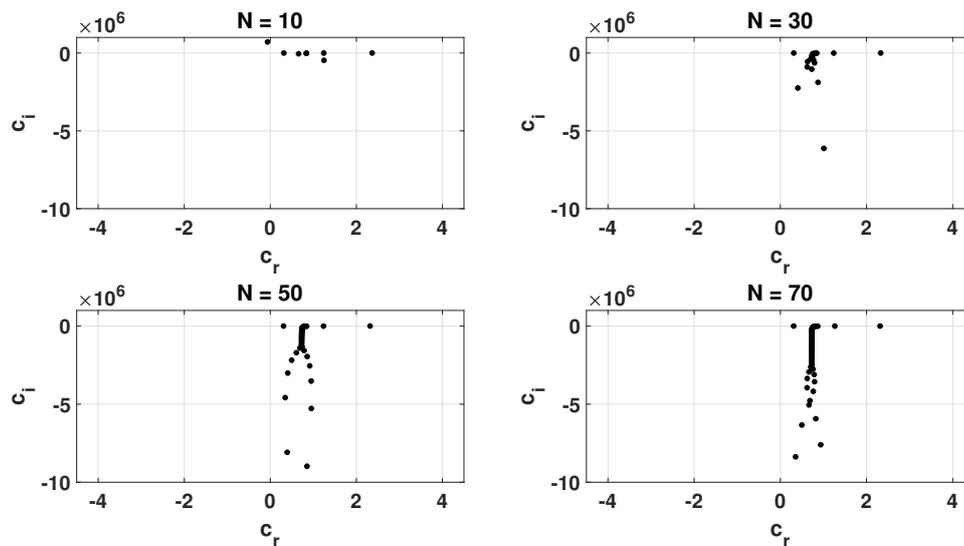


Figura 6.15 – Espectro dos autovalores para $N = 10, 30, 50, 70$ para um fluido *shear-thinning*, com parâmetros $a = 1,88$, $n = 0,02$, $L = 0,4$.

crescimento estão no limite de $\sigma = 0$, ou apresentam resultados um pouco maiores que zero, e com isso estabelecer um valor crítico para o surgimento de modos perturbados. Os resultados numéricos indicam que $3 < Re_c < 4$ para o caso *shear-thinning*, $5 < Re_c < 6$ para o newtoniano e $7 < Re_c < 8$ para *shear-thickening*. Como primeiro comportamento evidente nota-se que o resultado assintótico é superestimado em todas as comparações. O intervalo $0 \leq \alpha \leq 0,02$

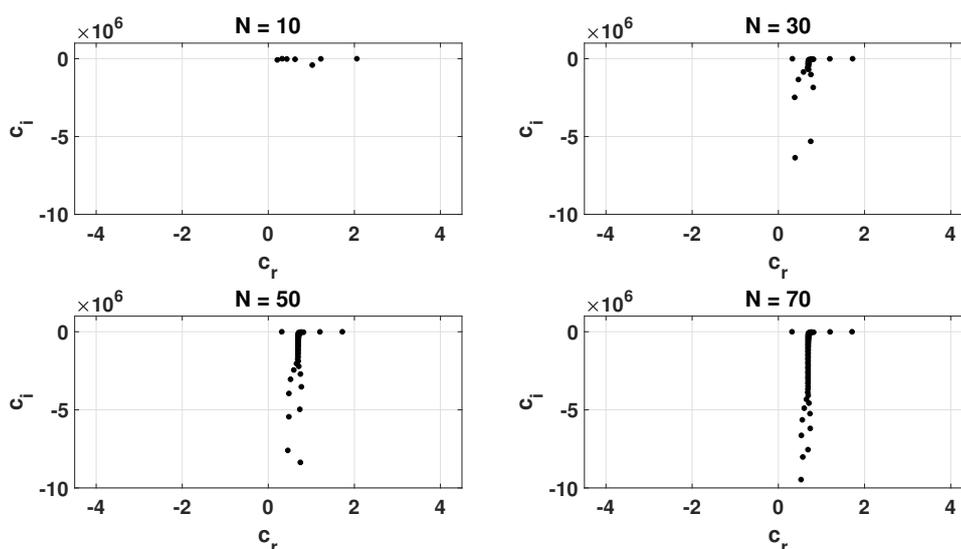


Figura 6.16 – Espectro dos autovalores para $N = 10, 30, 50, 70$ para um fluido *shear-thickening*, com parâmetros $a = 0,81, n = 2, L = 0,4$.

é o que apresenta resultados próximos aos obtidos numericamente apenas para valores abaixo do número de Reynolds crítico. A medida que aumentamos este adimensional o distanciamento dos resultados acentua-se, até mesmo para valores menores do que $\alpha = 0,02$, tornando inviável qualquer análise através da solução assintótica. Quanto aos valores críticos para o número de Reynolds é imediato identificar que o fluido *shear-thinning* apresenta o menor valor entre todos os casos, com *shear-thickening* sendo o maior, e possuindo um comportamento intermediário o sistema newtoniano ($Re_{shear-thinning} < Re_{newtoniano} < Re_{shear-thickening}$). O caso *shear-thinning*, por apresentar maior velocidade média devido a baixa viscosidade, é mais suscetível ao surgimento de perturbações, por isso apresenta o menor número de Reynolds crítico. Já o sistema composto pelo fluido *shear-thickening* é mais estável, uma vez que sua viscosidade apresenta valores acima da faixa newtoniana e consequentemente possuirá menor velocidade média e maior valor de Reynolds para a condição crítica, enquanto o sistema newtoniano apresenta-se como um caso intermediário. Esses resultados concordam com o comportamento físico esperado desses escoamentos, uma vez que perturbações são atenuadas devido aos efeitos combinados da viscosidade e tensão superficial.

A análise da taxa de crescimento σ é útil e indica como será o comportamento do número de onda para um dado valor de Reynolds. No entanto, a análise das condições críticas é inviável, uma vez que requer processamentos sucessivos com variações pequenas para α e Re . Para produzir resultados sobre a estabilidade do sistema opta-se por um diagrama de

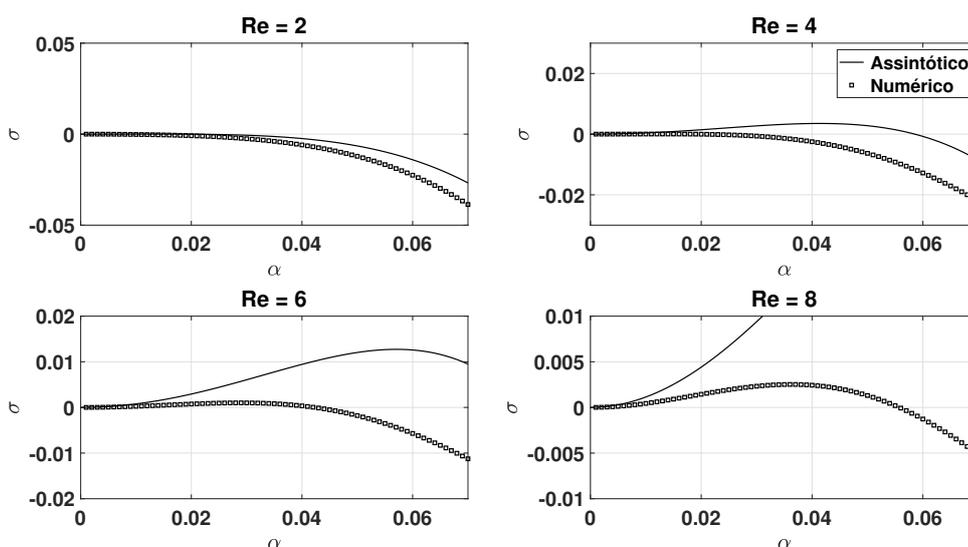


Figura 6.17 – Taxa de crescimento σ para um fluido *shear-thinning*, com parâmetros $a = 1,88$, $n = 0,02$, $L = 0,4$, $\theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$.

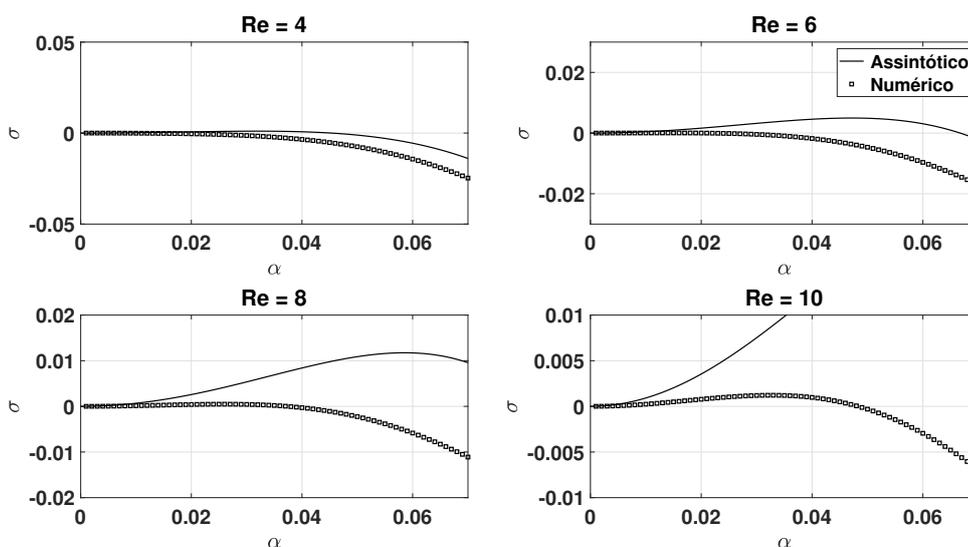


Figura 6.18 – Taxa de crescimento σ para um fluido newtoniano, com parâmetros $\theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$.

estabilidade neutra. Nesse diagrama obtemos todos os valores de σ em curvas de nível, em função dos números de onda e Reynolds. Na Fig. (6.20) temos um diagrama de estabilidade para um fluido *shear-thinning* com parâmetros $a = 2$ (modelo clássico de Carreau), $n = 0,5$, $L = 0,4$, $We = 0,001$ e $\theta = 25^\circ$. Como podemos observar a faixa para $\sigma = 0$ representa a curva de estabilidade neutra, que separa as bandas estáveis ($\sigma < 0$) e instáveis ($\sigma > 0$). O

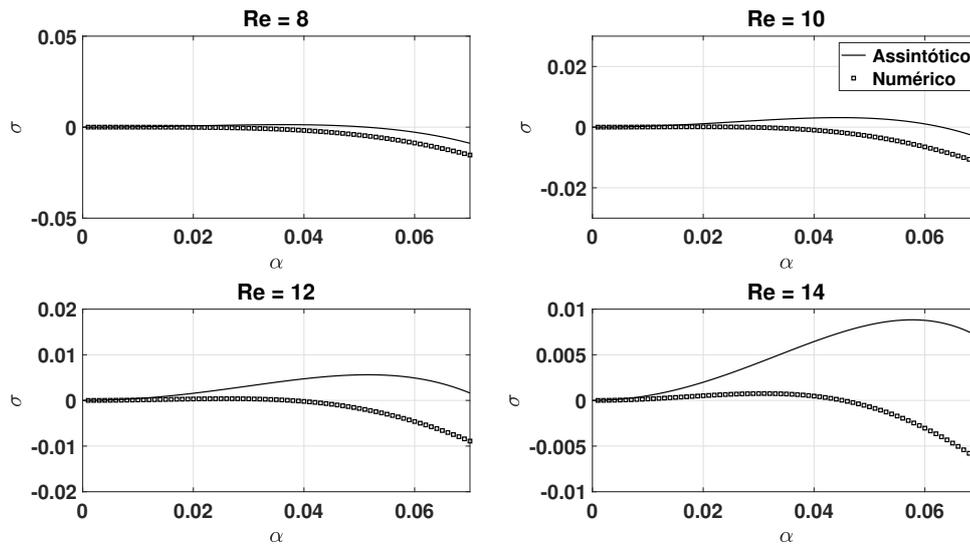


Figura 6.19 – Taxa de crescimento σ para um fluido *shear-thickening*, com parâmetros $a = 1,88$, $n = 2$, $L = 0,4$, $\theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$.

número de Reynolds crítico é dado pelo ponto onde ocorre o descolamento da curva do eixo $\alpha = 0$, para este escoamento em questão o valor crítico de Reynolds é dado por $Re_c = 3,28$. A banda estável (à esquerda) é dada por valores de σ menores que zero, enquanto a banda instável (à direita) apresenta valores para σ maiores do que zero. Os resultados de σ para a faixa instável do diagrama possui menor confiabilidade, uma vez que trata-se de uma faixa onde efeitos não-lineares são relevantes e podem ser amplificados.

Para a comparação entre os resultados assintótico e numérico temos Fig. (6.21). As condições deste escoamento são as mesmos considerados no primeiro diagrama apresentado. Para a curva neutra assintótica temos $Re_c = 1,78$ com uma banda instável mais larga, indicando um escoamento mais instável do que o observado pela solução numérica. A descontinuidade apresentada próxima à $Re = 1,78$ é devida ao termo $\sqrt{6Re - 5\cot(\theta)}$, presente em Eq. (4.78), sendo uma limitação da ordem de aproximação da solução. Um meio para suavizar, ou até mesmo corrigir este comportamento, é obtido com soluções de ordem superiores como $\mathcal{O}(\alpha^2)$ e $\mathcal{O}(\alpha^3)$. A discrepância entre ambos os resultados é esperada, uma vez que a solução assintótica requer simplificações de ordem $\mathcal{O}(\alpha^2)$ e também de ordens superiores à $\mathcal{O}(L^a)$, necessárias para o estado base. No entanto a solução assintótica ainda consegue capturar o comportamento geral curva $\sigma = 0$. O formato da curva neutra é devido ao termo α^4 em Eq. (4.77). Ao considerarmos $\sigma = 0$ em Eq. (4.77) reduzimos o problema a uma equação quadrática em α , definindo assim a comportamento da curva neutra em Eq. (4.78).

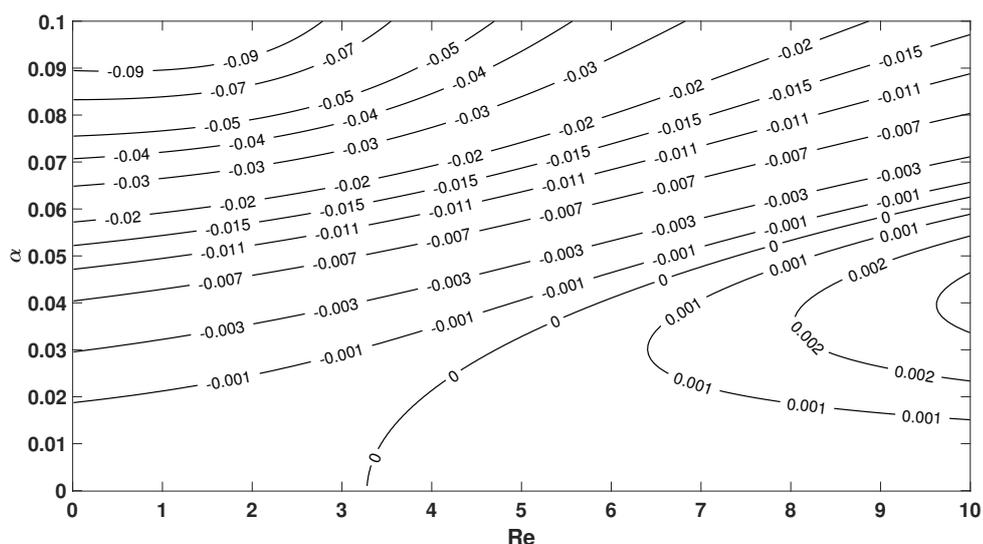


Figura 6.20 – Diagrama de estabilidade neutra em função do número de Reynolds com parâmetros $a = 2$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $We = 0,001$ e $\theta = 25^\circ$. Curvas com valores de σ positivos e negativos representam regiões instáveis e estáveis respectivamente.

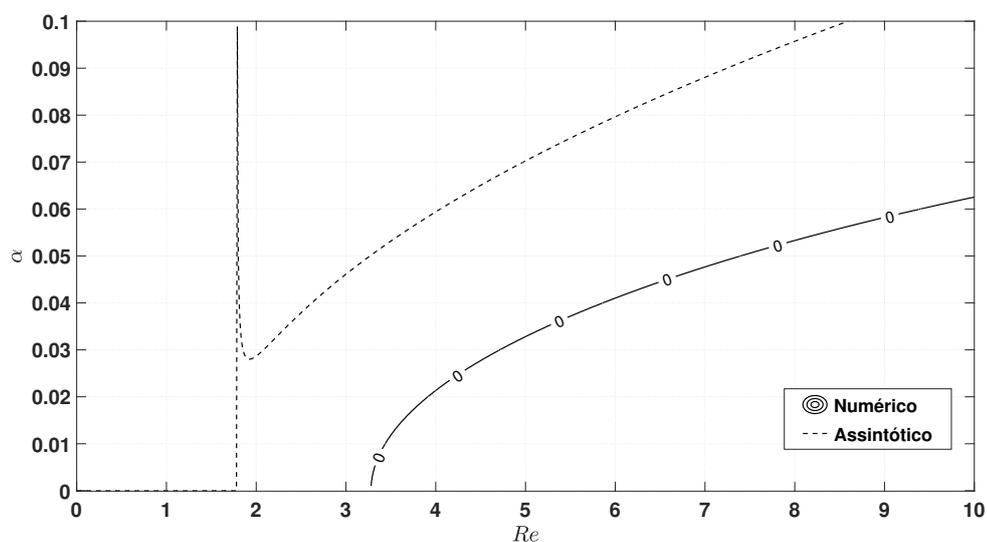


Figura 6.21 – Comparação das curvas de estabilidade neutra ($\sigma = 0$) entre as soluções assintótica e numérica. Os parâmetros utilizados são $a = 2$, $n = 0,5$, $L = 0,4$, $We = 0,001$ e $\theta = 25^\circ$

O diagrama de estabilidade dado em Fig. (6.22) mostra o comportamento da curva de estabilidade marginal para os casos *shear-thinning*, newtoniano e *shear-thickening*. Como podemos notar a faixa para o valor crítico de Reynolds é condizente com os resultados observados em Fig. (6.17), Fig. (6.18) e Fig. (6.19). As curvas de estabilidade neutra ocorrem em

$Re_c = 3,52$, $Re_c = 5,20$ e $Re_c = 7,76$ para os casos *shear-thinning*, newtoniano e *shear-thickening* respectivamente. Esse resultado é consistente com todos os outros dados discutidos na solução do estado base. A ação da viscosidade torna-se um fator decisivo ao compararmos estes três resultados em um mesmo diagrama de estabilidade. Como esperado, a curva mais instável, e com menor número de Reynolds crítico, é dada pelo fluido *shear-thinning* (à esquerda), enquanto o caso *shear-thickening* apresenta o maior número de Reynolds crítico e a menor banda instável (à direita). O caso newtoniano possui um comportamento intermediário entre os demais. A abrangências das bandas estáveis e instáveis, assim como a posição do número de Reynolds crítico podem variar com uma série de fatores. Caso alteremos apenas o ângulo de inclinação da superfície sólida a posição do número de Reynolds crítico será deslocado para direita (menor valor para θ) ou para a esquerda (maior valor de θ), no entanto a ordem dos sistemas será preservada. Caso aumente-se o valor de a as curvas dos casos *shear-thinning* e *shear-thickening* irão se aproximar da curva intermediária newtoniana, em contrapartida um afastamento é esperado para valores mais baixos de a , onde efeitos não-newtonianos são amplificados. A aproximação para o caso newtoniano também pode ocorrer com $n \rightarrow 1$ ou $L \rightarrow 0$.

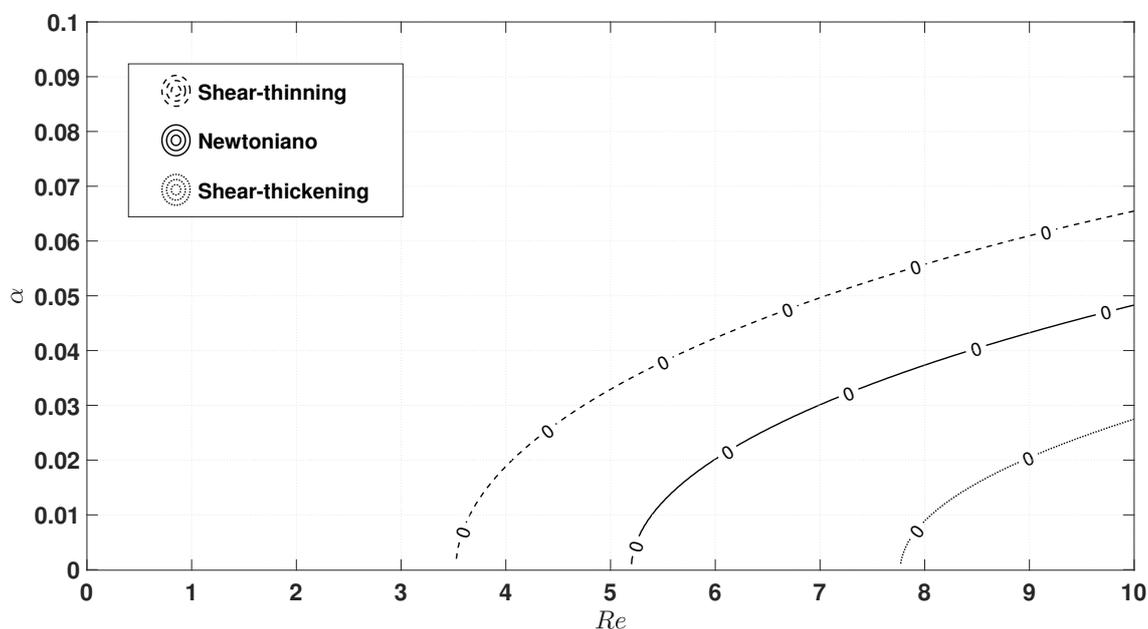


Figura 6.22 – Diagrama de estabilidade para os casos *shear-thinning*, newtoniano e *shear-thickening* com parâmetros $a = 1,88$, $L = 0,4$, $\theta = 20^\circ$ e $We = 0,001$.

7 CONCLUSÃO

Neste texto buscou-se mostrar de maneira detalhada o desenvolvimento matemático do escoamento gravitacional de um filme líquido em um plano inclinado segundo o modelo de Carreau-Yasuda. O objeto de estudo deste texto foram as soluções do estado base e do problema de estabilidade deste tipo de escoamento. Para encontrarmos o perfil de velocidades e a espessura do filme líquido foram utilizados dois métodos, um assintótico e outro numérico. O primeiro consistiu em expandirmos as possíveis soluções em séries do tempo de relaxação adimensional L , enquanto o segundo utilizamos de uma implementação direta da função interna `bvp4c` do software MATLAB. Ao encontrarmos os resultados desejados para o estado base passamos para a obtenção das soluções do problema de estabilidade. Novamente utilizou-se uma abordagem assintótica, porém dessa vez foram realizadas expansões em série de potências para o número de onda α . Quanto a solução numérica, foi implementada uma discretização utilizando polinômios de Chebyshev, juntamente com os métodos de Galerkin, para a construção do problema de autovalor generalizado, e de iteração inversa, para otimizar a obtenção do autovalor físico dentro do espectro gerado pela função *eig*.

Considerando o estado base, nota-se com base comparativa em resultados newtonianos que, fluidos *shear-thinning* apresentam maior velocidade média e menor espessura, enquanto fluidos *shear-thickening* possuem menor velocidade e uma maior espessura. Este comportamento é condizente com os resultados da viscosidade para cada um dos casos, enquanto fluidos *shear-thinning* apresentam uma diminuição no valor de suas viscosidades, fluidos *shear-thickening* possuem um incremento nestes valores. Nota-se que esta variação é acentuada com uma diminuição no valor do parâmetro a . A medida que diminui-se seu valor, as características não-newtonianas de ambas as classe de fluidos acentuam-se. Em contrapartida, um aumento no valor de a provoca uma tendência ao comportamento newtoniano, onde para valores acima de $a = 5$ obtemos basicamente um escoamento de características newtonianas. Para valores de $n \rightarrow 1$ e $L \rightarrow 0$ comportamentos newtonianos também são previstos pelo modelo. O comportamento monotônico de n para a solução assintótica é esperado, e a medida que n afasta-se de 1 as características não-newtonianas também acentuam-se, tanto para fluidos *shear-thinning* como *shear-thickening*. No entanto ao comparar as soluções assintótica e numérica notou-se grande divergência com o comportamento do parâmetro a . Para as aproximações assintóticas a possui

comportamento não-monotônico cada vez mais acentuado a medida que seu valor aproxima-se de 0. Esse fenômeno não é apresentado pelas soluções numéricas. O motivo dessa discrepância encontra-se na viscosidade em regiões de a com valor próximo a um natural ímpar, sendo este efeito ainda mais acentuado para $a \approx 1$. Notou-se uma inversão no comportamento da viscosidade; onde deveria ocorrer uma acentuação do efeito *shear-thinning* o fluido apresentava um comportamento *shear-thickening* e vice-versa. Este erro nos valores da viscosidade para o caso assintótico são um limitação da solução uma vez que esse efeito de inversão aparece em ambas as soluções do estado base (\bar{U} e \bar{h}). No entanto, para a solução numérica esse efeito do expoente a sobre $D\bar{U}$ é facilmente evitado ao utilizar-se o valor absoluto do vetor $D\bar{U}$ para a função viscosidade.

O problema de estabilidade temporal apresentou soluções numéricas coerentes com as obtidas no comportamento físico do estado base. Ao avaliarmos três possíveis casos para o mesmo valor de a , nota-se com clareza que o fluido *shear-thinning* é o mais suscetível ao surgimento de instabilidades superficiais, seguido dos sistemas newtoniano e *shear-thickening*, este último o mais estável dos três. O comportamento da curva de estabilidade neutra é o mesmo em todas as situações estudadas uma vez que é determinada pelo termo $\frac{\alpha^2}{We}$ na condição de contorno dinâmica da interface. Como esperado, a comparação com a solução assintótica apresenta grande discrepância, isso ocorre principalmente devido ao erro associado a viscosidade e as sucessivas simplificações necessárias uma vez que, além da aproximação em série para o número de onda α também é necessária manter simplificações para o tempo de relaxação adimensional L , presente no estado base. A curva de estabilidade neutra assintótica também apresentou uma descontinuidade próxima ao valo crítico do número de Reynolds, esse efeito é devido ao termo $\sqrt{6Re - 5 \cot(\theta)}$ presente em Eq.(4.78).

Ressaltamos que, para o problema de estabilidade, os resultados assintóticos e numéricos apresentam boa concordância para baixos valores de θ e Re , assim como para efeitos não-newtonianos moderados, controlados pelo parâmetros a , n e L , como os observados nos resultados em Tab.(6.1) e Tab.(6.2). Quando muda-se o valor de a como feito nos processamentos apresentados em Tab.(6.3) podemos notar um grande distanciamento do resultado assintótico para o esperado pela solução numérica. É importante mencionar que ainda existe espaço para futuras análises sobre diferentes combinações de parâmetros, especialmente para valores onde $a \approx 1$, para os casos *shear-thinning* e *shear-thickening*.

REFERÊNCIAS

- Abtahi, A.; Hossain, M. Z.; Floryan, J. M. Spectrally accurate algorithm for analysis of convection in corrugated conduits. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 72, n. 10, p. 2636–2659, 2016.
- Agoston, G. A.; Harte, W. H.; Hottel, H. C.; Klemm, W. A.; Mysels, K.; Pomeroy, H.; Thompson, J. Flow of gasoline thickened by napalm. **Industrial & Engineering Chemistry**, v. 46, n. 5, p. 1017–1019, 1954.
- Baekeland, L. H. The synthesis, constitution, and uses of Bakelite. **Industrial & Engineering Chemistry**, v. 1, n. 3, p. 149–161, 1909.
- Barus, C. Isothermals, Isopiestic and isometrics relative to Viscosity. **American Journal of Science**, v. 45, n. 266, p. 87, 1893.
- Benjamin, T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 2, n. 06, p. 554–573, 1957.
- Benney, D. Long waves on liquid films. **Journal of Mathematics and Physics**, v. 45, n. 2, p. 150–155, 1966.
- Bernoulli, D. *Hydrodynamica* (1738). **Argentorati (Strassburg), Germany: Johann Reinhold Dulsecker**, 1940.
- Bernstein, B.; Kearsley, E. A.; Zapas, L. J. A study of stress relaxation with finite strain. **Transactions of the Society of Rheology**, v. 7, n. 1, p. 391–410, 1963.
- Bingham, E. C. **Fluidity and plasticity**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1922. v. 2.
- Bingham, E. C. **The History of the Society of Rheology from (1924-1944)**. [S.l.: s.n.], 1944.
- Bird, R. B.; Armstrong, R. C.; Hassager, O. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics. 1987.
- Bird, R. B.; Curtiss, C. F.; Armstrong, R. C.; Hassager, O. **Dynamics of Polymeric Liquids, Volume 2: Kinetic Theory**. [S.l.]: Wiley, 1987.
- Blair, G. W. S. **A survey of general and applied rheology**. [S.l.]: Sir Isaac Pitman & Sons, 1949.
- Boltzmann, L. Zur theorie der elastischen nachwirkung. **Annalen der Physik**, v. 241, n. 11, p. 430–432, 1878.
- Bousfield, D. W.; Keunings, R.; Marrucci, G.; Denn, M. M. Nonlinear analysis of the surface tension driven breakup of viscoelastic filaments. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 21, n. 1, p. 79–97, 1986.
- Boyd, J. **Chebyshev & Fourier Spectral Methods**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1989. (Lecture Notes in Engineering). ISBN 9783540514879.

Boyle, R. **New Experiments Physico-Mechanical, Touching the Spring of the Air, and Its Effects**. [S.l.]: H. Hall, 1660. ISBN 9780598412362.

Canuto, C.; Hussaini, M. Y.; Quarteroni, A.; Thomas Jr, A. *et al.* **Spectral methods in fluid dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

Carothers, W. H. Studies on polymerization and ring formation. I. An introduction to the general theory of condensation polymers. **Journal of the American Chemical Society**, v. 51, n. 8, p. 2548–2559, 1929.

Cauchy, A. L. De la pression ou tension dans un corps solide. **Ex. de math**, v. 2, p. 42–56, 1827.

Chimetta, B. P. **Soluções assintótica e numérica da equação de Orr-Sommerfeld para ondas de superfície em um plano inclinado**. Dissertação (Mestrado) — University of Campinas, 2016.

Chimetta, B. P.; Franklin, E. An analytical comprehensive solution for the superficial waves appearing in gravity-driven flows of liquid films. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v. 71, n. 4, p. 1–9, 2020.

Chimetta, B. P.; Hossain, M. Z.; Franklin, E. Numerical solution for Kapitza waves on a thin liquid film. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 40, n. 8, p. 375, 2018.

Clenshaw, C. W.; Elliott, D. A numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation in the case of a laminar jet. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 13, n. 3, p. 300–313, 1960.

Cogswell, F. N. Tensile deformations in molten polymers. **Rheologica Acta**, v. 8, n. 2, p. 187–194, 1969.

Coleman, B. D.; Noll, W. Foundations of linear viscoelasticity. **Reviews of modern physics**, v. 33, n. 2, p. 239, 1961.

Dandapat, B. S.; Mukhopadhyay, A. Waves on a film of power-law fluid flowing down an inclined plane at moderate Reynolds number. **Fluid dynamics research**, v. 29, n. 3, p. 199, 2001.

Darrigol, O. Stability and instability in nineteenth-century fluid mechanics. **Revue d'histoire des mathématiques**, v. 8, n. 1, p. 5–65, 2002.

Doi, M.; Edwards, S. F. Dynamics of concentrated polymer systems. Part 1.— Brownian motion in the equilibrium state. **Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2: Molecular and Chemical Physics**, v. 74, p. 1789–1801, 1978.

Doi, M.; Edwards, S. F. Dynamics of concentrated polymer systems. Part 2.— Molecular motion under flow. **Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2: Molecular and Chemical Physics**, v. 74, p. 1802–1817, 1978.

Doi, M.; Edwards, S. F. Dynamics of concentrated polymer systems. Part 3.— The constitutive equation. **Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2: Molecular and Chemical Physics**, v. 74, p. 1818–1832, 1978.

- Dolph, C. L.; Lewis, D. C. On the application of infinite systems of ordinary differential equations to perturbations of plane Poiseuille flow. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 16, p. 97–110, 1958.
- Doraiswamy, D. The origins of rheology: a short historical excursion. **Rheology Bulletin**, v. 71, n. 1, p. 1–9, 2002.
- Drazin, P. G.; Reid, W. H. **Hydrodynamic stability**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- Edwards, S. F. The statistical mechanics of polymerized material. **Proceedings of the Physical Society**, v. 92, n. 1, p. 9, 1967.
- Einstein, A. A new determination of molecular dimensions. **Annalen der Physik**, v. 19, p. 289–306, 1906.
- Eisenschitz, R.; Rabinowitsch, B.; Weissenberg, K. Mitteil Deutsch. **Materialsprüfungsamt, Sonderheft**, v. 9, n. 91, p. 91–94, 1929.
- Euler, L. Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli. **Mémoires de l'académie des sciences de Berlin**, p. 196–222, 1755.
- Fanno, G. G. Contributo allo studio dei corpi filanti. **Archivio di Fisiologia**, v. 5, p. 365–70, 1908.
- Ferry, J. D. **Viscoelastic properties of polymers**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1980.
- Fletcher, C. **Computational Galerkin Methods**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1984. (Computational Physics Series). ISBN 9783540126331.
- Fox, L.; Parker, I. **Chebyshev polynomials in numerical analysis**. [S.l.]: Oxford U.P., 1968. (Oxford mathematical handbooks).
- Freundlich, H.; Bircumshaw, L. L. Ueber das thixotrope verhalten von aluminiumhydroxydgelten. **Kolloid-Zeitschrift**, v. 40, n. 1, p. 19–22, 1926.
- Gennes, P. G. de. Reptation of a polymer chain in the presence of fixed obstacles. **The journal of chemical physics**, v. 55, n. 2, p. 572–579, 1971.
- Giesekus, H. Die rheologische Zustandsgleichung elasto-viskoser Flüssigkeiten—insbesondere von Weissenberg-Flüssigkeiten—für allgemeine und stationäre Fließvorgänge. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 42, n. 1-2, p. 32–61, 1962.
- Ginn, R. F.; Metzner, A. B. Measurement of stresses developed in steady laminar shearing flows of viscoelastic media. **Transactions of the Society of Rheology**, v. 13, n. 4, p. 429–453, 1969.
- Green, A. E.; Rivlin, R. S. The mechanics of non-linear materials with memory. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 1, n. 1, p. 1–21, 1957.
- Green, M. S.; Tobolsky, A. V. A new approach to the theory of relaxing polymeric media. **The Journal of Chemical Physics**, v. 14, n. 2, p. 80–92, 1946.
- Grosch, C. E.; Salwen, H. The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 34, n. 01, p. 177–205, 1968.

Gupta, A. S.; Rai, L. Note on the stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 33, n. 1, p. 87–91, 1968.

Hagen, G. H. L. Movement of water in a narrow cylindrical tub: Leipzig. **Annalen Physik und Chemie**, v. 46, p. 423–442, 1839.

Hatschek, E. Die Viskosität der Emulsoid-sole und ihre Abhängigkeit von der Schergeschwindigkeit. **Kolloid-Zeitschrift**, v. 13, n. 2, p. 88–96, 1913.

Helmholtz, H. V. **über discontinuirliche Flüssigkeits-Bewegungen**. [S.l.: s.n.], 1868.

Hencky, H. Das Superpositionsgesetz eines endlich deformierten relaxationsfähigen elastischen Kontinuums und seine Bedeutung für eine exakte ableitung der Gleichungen für die zähe Flüssigkeit in der Eulerschen Form. **Annalen der Physik**, v. 394, n. 6, p. 617–630, 1929.

Herschel, W. H.; Bulkley, R. Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen. **Kolloid-Zeitschrift**, v. 39, n. 4, p. 291–300, 1926.

Hesla, T. I.; Pranckh, F. R.; Preziosi, L. Squire's theorem for two stratified fluids. **Physics of Fluids (1958-1988)**, v. 29, n. 9, p. 2808–2811, 1986.

Hess, W. R. Reibungswiderstand des Blutes und Poiseuillesches gesetz. **Zeitschrift für klinische Medizin**, v. 71, p. 421, 1910.

Hooke, R. De Potentia Restitutiva, or of spring (1678). **Explaining the Power of Springing Bodies (London: J. Martyn)**, 2007.

Hossain, M. Z. **Convection Due to Spatially Distributed Heating**. Tese (Doutorado) — The University of Western Ontario, 2011.

Hwang, C. C.; Chen, J. L.; Wang, J. S.; Lin, J. S. Linear stability of power law liquid film flows down an inclined plane. **Journal of physics D: Applied Physics**, v. 27, n. 11, p. 2297, 1994.

Jaumann, G. Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig (1905). **Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien**, v. 110, p. 120, 1911.

Jeffery, G. B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. **Proceedings of the Royal Society of London**, A102, n. 715, p. 161–179, 1922.

Kanschat, G. **Discontinuous Galerkin Methods for Viscous Incompressible Flow**. [S.l.]: Teubner Research, 2007. (Advances in Numerical Mathematics). ISBN 9783835040014.

Kapitza, P. L. Wave flow of thin layers of a viscous liquid. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 18, n. 1, p. 3–28, 1948.

Kapitza, P. L. Wave flow of thin layers of a viscous fluid. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 19, p. 105, 1949.

Kaye, A. Non-Newtonian flow in incompressible fluids. **College of Aeronautics Note 134 & 149**, 1962.

Khomami, B. Interfacial stability and deformation of two stratified power law fluids in plane Poiseuille flow part i. stability analysis. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 36, p. 289–303, 1990.

- Khomami, B. Interfacial stability and deformation of two stratified power law fluids in plane Poiseuille flow part ii. interface deformation. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 37, n. 1, p. 19–36, 1990.
- Kierzenka J.; Shampine, L. F. A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 27, n. 3, p. 299–316, 2001.
- Kirkwood, J. G. **Macromolecules**. [S.l.]: Gordon and Breach, New York, 1967.
- Kohlrausch, F. W. Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion. **Annalen der Physik**, v. 195, n. 7, p. 337–368, 1863.
- Kramers, H. A. Het gedrag van macromoleculen in een stroomende vloeistof. **Physica**, v. 11, n. 1, p. 1–19, 1944.
- Kudenatti, R. B.; Sandhya, L.; Bujurke, N. M. Numerical solution of shear-thinning and shear-thickening boundary-layer flow for Carreau fluid over a moving wedge. **Engineering with Computers**, p. 1–16, 2020.
- Kuhn, W. Über die gestalt fadenförmiger molekule in lösungen. **Kolloid-Zeitschrift**, v. 68, n. 1, p. 2–15, 1934.
- Kühne, W. Die Muskelspindeln. **Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin**, v. 28, n. 5-6, p. 528–538, 1863.
- Kurtz, E. F.; Crandall, S. H. Computer-aided analysis of hydrodynamic stability. **Journal of mathematics and physics**, v. 41, p. 264–279, 1962.
- Leaderman, H. Creep and creep recovery in plasticized polyvinyl chloride. **Industrial & Engineering Chemistry**, v. 35, n. 3, p. 374–378, 1943.
- Lin, C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 3, n. 4, 1946.
- Lodge, A. S. A network theory of flow birefringence and stress in concentrated polymer solutions. **Transactions of the Faraday Society**, v. 52, p. 120–130, 1956.
- Macosko, C. W. **Rheology Principles, Measurements and Applications**. [S.l.]: VCH Publishes, 1994.
- Markovitz, H. A property of Bessel functions and its application to the theory of two rheometers. **Journal of Applied Physics**, v. 23, n. 10, p. 1070–1077, 1952.
- Mason, J.; Handscomb, D. **Chebyshev Polynomials**. [S.l.]: CRC Press, 2002. ISBN 9781420036114.
- Maxwell, J. C. On the dynamical theory of gases. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, n. 157, p. 49–88, 1867.
- Meissner, J. Rheometer zur Untersuchung der deformationsmechanischen Eigenschaften von Kunststoff-Schmelzen unter definierter Zugbeanspruchung. **Rheologica Acta**, v. 8, n. 1, p. 78–88, 1969.
- Merrington, A. C. Flow of visco-elastic materials in capillaries. **Nature**, v. 152, n. 3866, p. 663–663, 1943.

- Metzner, A. B.; Reed, J. C. Flow of non-Newtonian fluids—correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions. **Aiche journal**, v. 1, n. 4, p. 434–440, 1955.
- Millet, S.; Botton, V.; Hadid, H. B.; Henry, D.; Rousset, F. Stability of two-layer shear-thinning film flows. **Physical Review E**, v. 88, n. 4, p. 043004, 2013.
- Mohammadi, A. **Flows in grooved channels**. Tese (Doutorado), 2013.
- Mohler, R. **Encyclopedia of physical science and technology**. [S.l.]: Academic Press, New York, third edition edition, 2003.
- Mooney, M. Explicit formulas for slip and fluidity. **Journal of Rheology**, v. 2, n. 2, p. 210–222, 1931.
- Mooney, M. The rheology of raw rubber. **Physics**, v. 7, n. 11, p. 413–420, 1936.
- Morrison, F. A. **Understanding Rheology**. [S.l.]: Oxford University Press, 2001.
- Nason, H. K. A high temperature, high pressure rheometer for plastics. **Journal of Applied Physics**, v. 16, n. 6, p. 338–343, 1945.
- Navier, C. L. M. H. On the laws of movement of fluids. **Mem. de l'Acad. roy. des Sciences de l'inst. de France**, v. 6, p. 389–440, 1823.
- Newton, I. S. **Philosophiae naturalis principia mathematica**. [S.l.]: G. Brookman, 1687. v. 1.
- Ng, C. O.; Mei, C. C. Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 263, p. 151–184, 1994.
- Noble, P.; Vila, J.-P. Thin power-law film flow down an inclined plane: consistent shallow-water models and stability under large-scale perturbations. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 735, p. 29–60, 2013.
- Nouar C.; Bottaro, A.; Brancher, J. P. Delaying transition to turbulence in channel flow: revisiting the stability of shear-thinning fluids. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 592, p. 177–194, 2007.
- Oldroyd, J. G. On the formulation of rheological equations of state. **Proceedings of the Royal Society of London**, A200, n. 1063, p. 523–541, 1950.
- Orr, W. M. The stability or instability of steady motions of a liquid, Part ii: A viscous liquid. **Proceedings of the Royal Irish Academy, Section A**, v. 27, p. 69–138, 1907.
- Orszag, S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 50, n. 04, p. 689–703, 1971.
- Osborne, M. R. Numerical methods for hydrodynamic stability problems. **Journal on Applied Mathematics**, v. 15, n. 3, p. 539–557, 1967.
- Ostwald, W. About the rate function of the viscosity of dispersed systems. **Kolloid-Zeitschrift**, v. 36, p. 99–117, 1925.
- Pascal, B. **Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air**. [S.l.]: Paris, 1663.

Pearson, J. R. A. Instability in non-Newtonian flow. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 8, n. 1, p. 163–181, 1976.

Pearson, J. R. A.; Petrie, C. J. S. Polymer systems: deformation and flow. In: Macmillan London. **Proceedings of the Annual Conference of the British Society of Rheology**. [S.l.], 1968. p. 163.

Petrie, C. J. S.; Denn, M. M. Instabilities in polymer processing. **AIChE Journal**, v. 22, n. 2, p. 209–236, 1976.

Peyret, R. **Spectral methods for incompressible viscous flow**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 148.

Philippoff, W. Dynamische Untersuchungen an kolloidalen Systemen I, Grundlagen und Methode zur Untersuchung der mechanischen Eigenschaften von Lösungen hochmolekularer organischer Verbindungen. **Physik Zeitschr**, v. 35, p. 884–900, 1934.

Piau, J. M.; Bremond; M.; Couette, J. M.; Piau, M. Maurice Couette, one of the founders of rheology. **Rheologica acta**, v. 33, n. 5, p. 357–368, 1994.

Pinarbasi, A.; Liakopoulos, A. Stability of two-layer Poiseuille flow of Carreau-Yasuda and Bingham-like fluids. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 57, n. 2-3, p. 227–241, 1995.

Poiseuille, J. L. M. Experimental researches on the movement of liquids in tubes of small diameter. **Comptes Rendus**, v. 11, p. 1041, 1841.

Poynting, J. H. The changes in length and volume of an Indian-rubber cord when twisted. **India-Rubber Journal**, 1913.

Ramamurthy, A. V. Wall slip in viscous fluids and influence of materials of construction. **Journal of Rheology**, v. 30, n. 2, p. 337–357, 1986.

Rayleigh, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 11, p. 57–70, 1880.

Reynolds, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Proceedings of the royal society of London**, v. 35, n. 224-226, p. 84–99, 1883.

Reynolds, O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 56, n. 336-339, p. 40–45, 1894.

Rivlin, R. S.; Ericksen, J. L. Stress relaxation for isotropic materials. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 350–362, 1955.

Rivlin, T. **The Chebyshev Polynomials**. [S.l.]: Wiley, 1974. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471724704.

Rouse, P. E. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. **The Journal of Chemical Physics**, v. 21, n. 7, p. 1272–1280, 1953.

Rousset, F.; Millet, S.; Botton, V.; Hadid, H. B. Temporal stability of Carreau fluid flow down an incline. **Journal of fluids engineering**, v. 129, n. 7, p. 913–920, 2007.

Ruyer-Quil C.; Chakraborty, S.; Dandapat, B. S. Wavy regime of a power-law film flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 692, p. 220–256, 2012.

Sahu, K. C.; Matar, O. K. Three-dimensional linear instability in pressure-driven two-layer channel flow of a Newtonian and a Herschel-Bulkley fluid. **Physics of Fluids**, v. 22, n. 11, p. 112103, 2010.

Schlichting, H. Über die stabilität der Couetteströmung. **Annalen der Physik**, v. 406, n. 8, p. 905–936, 1932.

Schofield, R. K.; Blair, G. W. S. The relationship between viscosity, elasticity and plastic strength of a soft material as illustrated by some mechanical properties of flour dough IV—The separate contributions of gluten and starch. **Proceedings of the Royal Society of London**, A160, n. 900, p. 87–94, 1937.

Schwedoff, T. H. Recherches expérimentales sur la cohésion des liquides. **Journal de Physique Théorique et Appliquée**, v. 9, n. 1, p. 34–46, 1890.

Searcóid, M. **Metric spaces**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

Shampine, L. F.; Kierzenka, J.; Reichelt, M. W. *et al.* Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c. **Tutorial notes**, v. 2000, p. 1–27, 2000.

Sommerfeld, A. Ein beitrage zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten fluessigkeitsbewegungen. In: **Proceedings of the 4th International Congress of Mathematicians III, Rome, Italy**. [S.l.: s.n.], 1908. p. 116–124.

Squire, H. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, p. 621–628, 1933.

Staudinger, H. Über polymerisation. **Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft**, v. 53, n. 6, p. 1073–1085, 1920.

Stokes, G. G. Effect of Viscosity on Sound Absorption. **Trans. Cambridge Phil. Soc**, p. 287, 1845.

Tammann, G.; Jenckel, E. Über die Dehnungsgeschwindigkeit von Glasfäden beim Erhitzen. **Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie**, v. 191, n. 1, p. 122–127, 1930.

Tanner, R. I.; Walters, K. **Rheology: an historical perspective**. [S.l.]: Elsevier, 1998.

Taylor, G. I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. In: The Royal Society. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. [S.l.], 1950. v. 201, n. 1065, p. 192–196.

Thomas, L. H. The stability of plane Poiseuille flow. **Physical Review**, v. 91, n. 4, p. 780, 1953.

Thomson, J. J. **Applications of dynamics to physics and chemistry**. [S.l.]: Macmillan, 1888.

- Thomson, W. Influence of wind and capillary on waves in water supposed frictionless. **Math, and Phys. Papers**, v. 4, p. 76–85, 1871.
- Tollmien, W. Über die Entstehung der Turbulenz. 1. Mitteilung. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1929, p. 21–44, 1929.
- Tollmien, W. **Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen**. [S.l.]: Vandenhoeck & Ruprecht, 1935.
- Toms, B. A. Proceedings of the 1st International Congress on Rheology. **Vol. II, North Holland, Amsterdam**, p. 135, 1949.
- Tordella, J. P. An instability in the flow of molten polymers. **Rheologica Acta**, v. 1, n. 2-3, p. 216–221, 1958.
- Trefethen, L. N. **Approximation theory and approximation practice**. [S.l.]: Siam, 2019. v. 164.
- Trouton, F. T. On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity. **Proceedings of the Royal Society of London**, A77, n. 519, p. 426–440, 1906.
- Truesdell, C. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 1, p. 125–300, 1952.
- Waele, A. **Viscometry and plastometry**. [S.l.]: Oil and Colour Chemists' Association, 1923.
- Waters, N. D.; Keeley, A. M. The stability of two stratified non-newtonian liquids in Couette flow. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 24, n. 2, p. 161–181, 1987.
- Weber, W. Über die elastizität der seidenfäden. **Annalen Physik und Chemie**, v. 234, p. 247–257, 1835.
- Weinstein, S. J. Wave propagation in the flow of shear-thinning fluids down an incline. **AIChE journal**, v. 36, n. 12, p. 1873–1889, 1990.
- Weissenberg, K. Non-Newtonian effects in some general elasticoviscous liquids. **Nature**, v. 159, p. 311–318, 1947.
- White, J. L.; Metzner, A. B. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. **Journal of Applied Polymer Science**, v. 7, n. 5, p. 1867–1889, 1963.
- Wiechert, E. Gesetze der elastischen Nachwirkung für constante Temperatur. **Annalen der Physik**, v. 286, n. 11, p. 546–570, 1893.
- Wiedemann, G. Ueber die bewegung der flüssigkeiten im kreise der geschlossenen galvanischen säule und ihre beziehungen zur elektrolyse. **Annalen der Physik**, v. 175, n. 10, p. 177–233, 1856.
- Williams, M. L.; Landel, R. F.; Ferry, J. D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. **Journal of the American Chemical society**, v. 77, n. 14, p. 3701–3707, 1955.
- Wilson, H. J.; Rallison, J. M. Instability of channel flow of a shear-thinning White-Metzner fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 87, n. 1, p. 75–96, 1999.

Yamamoto, M. The visco-elastic properties of network structure I. General formalism. **Journal of the physical society of Japan**, v. 11, n. 4, p. 413–421, 1956.

Yih, C.-S. Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 12, n. 4, p. 434–435, 1955.

Yih, C. S. Stability of liquid flow down an inclined plane. **Physics of Fluids (1958-1988)**, v. 6, n. 3, p. 321–334, 1963.

Young, T. **A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts: in two volumes**. [S.l.]: Johnson, 1807. v. 2.

Zaremba, S. Correlation of dynamic and steady flow viscosities. **Bulletin International de l'Academie des Sciences de Cracovie**, v. 594, 1903.

Zimm, B. H. Dynamics of polymer molecules in dilute solution: viscoelasticity, flow birefringence and dielectric loss. **The journal of chemical physics**, v. 24, n. 2, p. 269–278, 1956.

Apêndices

APÊNDICE A – CÓDIGO FONTE PARA O SOLVER SIMBÓLICO (WOLFRAM MATHEMATICA 11.0.1.0)

A.0.1 Código para as soluções assintóticas

O código fonte abaixo produz as soluções assintóticas para o estado base (perfil de velocidade e espessura do filme líquido), assim como para o problema de estabilidade.

```
(*----- ASYMPTOTIC SOLVER -----

ClearAll

(*----- Assumptions (Considering a>1) -----

$Assumptions =
Element[alpha, Reals] && Element[i, Reals] && Element[n, Reals]
&& Element[L1, Reals] && Element[y, Reals] && Element[Rey, Reals]
&& Element[We, Reals] && Element[a, Reals] && a > 1

(*----- Film thickness -----

h0 = (3^(1/3));
h1 = (((-1)^(a + 1))*(1 - i)*(1 - n)*(3^((a + 1)/3)))
/(a*(a + 3));
h = h0 + h1*(L1);

(*----- Velocity Profile -----

u = (1/2)*(3^(2/3) -
y^2) + (((-1)^a)*(1 - i)*(1 -
n)*(L1)*(3^((a + 2)/3) - (a + 3)*(y^(a + 2))))/(a*(a +
2)*(a + 3));
```

```

Du = Simplify[D[u, y]];
D2u = Simplify[D[Du, y]];
U[y_] = (1/2)*(3^(2/3) -
y^2) + (((-1)^a) *(1 - i)*(1 -
n)*(L1)*(3^((a + 2)/3) - (a + 3)*(y^(a + 2))))/(a*(a +
2)*(a + 3));
DU[y_] = Simplify[D[U[y], y]];
D2U[y_] = Simplify[D[DU[y], y]];

(*- Differential equation for the zeroth order approximation -

epsilon = 1 + ((((-1)^a)*(1 - i)*(n - 1)*(a + 1))/a)*(L1)*(y^a);
Depsilon = D[epsilon, y];
D2epsilon = D[Depsilon, y];
diffeq = epsilon*f''''[y] + 2*Depsilon*f'''[y] + D2epsilon*f''[y]

(*----- Solving the zeroth order approximation -----

fSol = Simplify[DSolve[{diffeq == 0}, f[y], y]]

(*- Declaring the solution and derivatives as a functions of y -

f[y_] = Simplify[Normal[Series[f[y] /. fSol[[1]], {L1, 0, 1}]]];
Df[y_] = Simplify[Normal[Series[D[f[y], y], {L1, 0, 1}]]];
D2f[y_] = Simplify[Normal[Series[D[Df[y], y], {L1, 0, 1}]]];
D3f[y_] = Simplify[Normal[Series[D[D2f[y], y], {L1, 0, 1}]]];

(*- Solving the system in order to find the integration constants
C[1], C[2], C[3] and C[4] (together with the boundary conditions) -

SystSol =
Solve[{f[y] == FSOL, f[0] == 1 , f[h] == 0, Df[h] == 0,

```

```

D3f[0] == 0 }, {FSOL, C[1], C[2], C[3], C[4]}}];
fSolution = SystSol[[1, 1]];
fSolution = Simplify[FSOL /. fSolution];
f0 = FullSimplify[Normal[Series[fSolution, {L1, 0, 1}]]];
Df0 = FullSimplify[Normal[Series[D[f0, y], {L1, 0, 1}]]];
D2f0 = FullSimplify[Normal[Series[D[Df0, y], {L1, 0, 1}]]];
F0[y_] = f0;
DF0[y_] = Df0;
D2F0[y_] = D2f0;

(*----- Finding c0 -----

c0 = FullSimplify[
Chop[Normal[Series[(F0[0] + (U[0]*D2F0[0]))/D2F0[0],
{L1, 0, 1}]]]]

(*- Differential equation for the first order approximation -

Diffeq = epsilon*g''''[y] + 2*Depsilon*g'''[y] + D2epsilon*g''[y];
express = ((u - c0)*D2f0 - (f0*D2u));
express = Chop[FullSimplify[Normal[Series[express, {L1, 0, 1}]]]];

(*----- Solving the first order approximation -----

gSol = Simplify[DSolve[{Diffeq - I*Rey*express == 0 }, g[y], y]]

(*- Declaring the solution and derivatives as a functions of y -

G[y_] = FullSimplify[Normal[Series[g[y] /. gSol[[1]],
{L1, 0, 1}]]];
DG[y_] = FullSimplify[Normal[Series[D[G[y], y], {L1, 0, 1}]]];
D2G[y_] = FullSimplify[Normal[Series[D[DG[y], y], {L1, 0, 1}]]];

```

```

D3G[y_] = Simplify[Normal[Series[D[D2G[y], y], {L1, 0, 1}]]];

(*- Declaring the last boundary condition of the system -

bc4 = I*(Rey*((c0 - U[0])*DF0[0] +
F0[0]*DU[0]) + (Cot[BETA] + ((alpha^2))/We))*D2F0[0]);
bc4 = FullSimplify[Chop[Normal[Series[bc4, {L1, 0, 1}]]]]

(*- Solving the system in order to find the integration constants
C[1], C[2], C[3] and C[4] (together with the boundary conditions) -

SystSol1 =
Simplify[Solve[{G[y] == GSOL, G[0] == 0 , G[h] == 0, DG[h] == 0,
D3G[0] == -bc4  }, {GSOL, C[1], C[2], C[3], C[4]}]];
gsolution = SystSol1[[1, 1]];
gsolution = Simplify[GSOL /. gsolution];
g1 = FullSimplify[Cancel[Normal[Series[gsolution, {L1, 0, 1}]]]];
Dg1 = FullSimplify[Cancel[Normal[Series[D[g1, y], {L1, 0, 1}]]]];
D2g1 = FullSimplify[Cancel[Normal[Series[D[Dg1, y], {L1, 0, 1}]]]];
G1[y_] = g1;
DG1[y_] = Dg1;
D2G1[y_] = D2g1;

(*----- Finding c1 -----

c1 = (G1[0] + (U[0] - c0)*D2G1[0])/D2F0[0];
c1 = FullSimplify[Cancel[Normal[Series[c1, {L1, 0, 1}]]]]

(* ----- In order to collect the image of c1 it is
necessary to calculate c1/I -----

c1alphacrit = c1/I

```

(* ----- Sigma growth rate -----

```
sigma = (alpha^2)*c1alphacrit;
sigma = FullSimplify[sigma]
```

(* ----- Critical Reynolds number -----

```
ReyCrit = Solve[c1 == 0, {Rey}];
Reycritical = ReyCrit[[1, 1]];
Reycritical = Simplify[Rey /. Reycritical];
Reycritical = FullSimplify[Normal[Series[ Reycritical,
{L1, 0, 1}]]]
```

(*- Critical wave number (alpha) positive and negative solutions -

```
alphaCrit = Solve[c1alphacrit == 0, {alpha}];
alphacritical1 = alphaCrit[[1, 1]];
alphacritical1 = Simplify[alpha /. alphacritical1];
alphacritical1 =
FullSimplify[Normal[Series[alphacritical1, {L1, 0, 1}]]]
alphacritical2 = alphaCrit[[2, 1]];
alphacritical2 = Simplify[alpha /. alphacritical2];
alphacritical2 =
FullSimplify[Normal[Series[alphacritical2, {L1, 0, 1}]]]
```

(* ----- Replacing L1 for L^a -----

```
L1 = L^a;
```

(* ----- Final solution for L^a -----

h

u

c0

c1

sigma

Reycritical

alphacritical1

alphacritical2

APÊNDICE B – CÓDIGO FONTE PARA A SOLUÇÃO NUMÉRICA (MATLAB R2017A)

B.0.1 Código para a solução do estado base e transformação para o espaço de Chebyshev

Nesta seção encontram-se todos os códigos fontes necessários para a solução do estado base (perfil de velocidades e espessura do filme líquido), além das transformações de cada resultado para o espaço de Chebyshev. É também necessária a utilização conjunta do software livre Chebfun ([Trefethen, 2019](#)).

Código base para estabelecer os parâmetros do fluido e chamar as demais funções.

```
%----- Base flow main code -----
%All base flow data necessary for the stability problem.

clc; clear all; close all; %Clear all the data

%Basic parameters and inputs:

%starting point of the domain (baseflow_chebyshev_coeff.m input)
x_min = -1;
%ending point of the domain (baseflow_chebyshev_coeff.m input)
x_max = 1;
%Spacing between mesh points (baseflowdatachebdomain.m input)
x_step = 70;
%initial guess for the film thickness
h = 1;
%Carreau-yasuda parameter
a = 0.81;
%governs the inclination of the rapidly decreasing portion of eta
n = 0.02;
%ratio between the largest and smallest viscosities
```

```

I = 0;
%dimensionless relaxation time
L = 0.4;

%Generates all base flow data
baseflowdatachebdomain_gradient_version(x_step,h,a,n,I,L)

%Chebshev transformation of all base
%flow data (Input for the stability problem)
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'u_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'du_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'d2u_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'d3u_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'eta_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'deta_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'d2eta_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'epsilon_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'depsilon_data.txt')
baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,'d2epsilon_data.txt')

```

Código que produz a solução do estado base para o intervalo $z \in [-1;1]$.

```

% ----- Code for the Velocity profile and film thickness -----
% ----- Carreau-Yasuda liquid film -----
%Code that produces the data for the velocity profile U.
%The order of data is:
%x_step (the spacing between the points), h(initial guess
%for the film thickness solution);
%a,n,I,L(dimensionless Carreau-Yasuda parameters)

function[] = baseflowdatachebdomain_gradient_version(x_step,
h,a,n,I,L)

```

```

%Non-dimensional parameters vector
p = [h a n I L];
p = p'; %Transpose of p

%Create/Open the file u_data.txt
fileID = fopen('u_data.txt','wt');

%y = linspace(x1,x2,n) generates n points.
%The spacing between the points is (x2-x1)/(n-1).
xmesh = linspace(-1,1,x_step); %Physical interval [-1,1]

%Initial guess of solution, specified as a structure. Use bvpinit
%to create solinit. Unlike initial value problems, a boundary
%value problem can have no solution, a finite number of
%solutions, or infinitely many solutions.
%solinit = bvpinit(___,parameters) specifies a vector of initial
%guesses for parameters with unknown values in the boundary
%value problem. You can use this syntax with either of the
%previous input argument combinations.
solinit = bvpinit(xmesh,@guess,h);

% ----- Solve equation -----
%sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit) integrates a system of
%differential equations of the form  $y = f(x,y)$  specified
%by odefun, subject to the boundary conditions described
%by bcfun and the initial solution guess solinit. Use
%the bvpinit function to create the initial guess
%solinit, which also defines the points at which the boundary
%conditions in bcfun are enforced. bvp4c is a finite
%difference code that implements the three-stage Lobatto
%IIIA formula. This is a collocation formula and the
%collocation polynomial provides a C1-continuous solution

```

```

%that is fourth-order accurate uniformly in the interval
%of integration. Mesh selection and error control are
%based on the residual of the continuous solution.
options = [];
sol = bvp4c(@bvpfcn,@bcfcn,solinit,options,a,n,I,L);

soly = sol.y(2,:); %sol.y has two solutions
soly = soly'; %Transpose of soly
U = soly; %Base flow solution U

%sz = size(A) returns a row vector whose elements are the
%lengths of the corresponding dimensions of A. For example, if
%A is a 3-by-4 matrix, then size(A) returns the vector [3 4].
%If A is a table or timetable, then size(A) returns a
%two-element row vector consisting of the number of
%rows and the number of table variables.
[m0,n0] = size(U);
%Mesh dimensions for the derivative_step
[m_mesh,n_mesh] = size(xmesh);

solh = sol.parameters; %Film thickness solution

%figure
%plot(xmesh,U,'-o'); %plot test

for i=1:1:m0
%Saving data inside the file called "u_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\U
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
%12.4e \n',a,n,I,L,solh,U(i,1));
end

```

```

fclose(fileID); %Close the file u_data.txt

%----- Numerical differentiation of the data U -----

%Y = gradient(F,h) returns the one-dimensional numerical
%gradient of vector F. The output FX corresponds to dF/dx, which
%are the differences in the x (horizontal) direction. Uses h
%as a uniform spacing between points in each direction.

%spacing for the derivatives
derivative_step = xmesh(1,n_mesh)-xmesh(1,n_mesh-1);
%First derivative of U (n-1 elements compared to U)
DU = gradient(U(:,1),derivative_step);
%----- Important -----
%In order to avoid numerical erro for eta and epsilon it is
%necessary to consider DU = abs(DU).
%Y = abs(X) returns the absolute value of each element in
%array X. If X is complex, abs(X) returns the complex magnitude.
DU = abs(DU);
%-----
%second derivative of U
D2U = gradient(DU(:,1),derivative_step);
%third derivative of U
D3U = gradient(D2U(:,1),derivative_step);

% ----- Numerical data for DU -----
[m1,n1] = size(DU);
%Create/Open the file du_data.txt
fileID = fopen('du_data.txt','wt');

for i=1:1:m1

```

```

%Saving data inside the file called "du_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\DU
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
    %12.4e \n',a,n,I,L,solh,DU(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file du_data.txt

% ----- Numerical data for D2U -----
[m2,n2] = size(D2U);
%Create/Open the file d2u_data.txt
fileID = fopen('d2u_data.txt','wt');

for i=1:1:m2
%Saving data inside the file called "d2u_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\D2U
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
    %12.4e \n',a,n,I,L,solh,D2U(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file d2u_data.txt

% ----- Numerical data for D3U -----
[m3,n3] = size(D3U);
%Create/Open the file d3u_data.txt
fileID = fopen('d3u_data.txt','wt');

for i=1:1:m3
%Saving data inside the file called "d3u_data.txt"
%Data sequence:

```

```

%a\\n\\I\\L\\solh\\D3U
fprintf(fileID,'%12.4e  %12.4e  %12.4e  %12.4e  %12.4e
    %12.4e \n',a,n,I,L,solh,D3U(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file d3u_data.txt

% ----- eta and numerical differentiation of eta -----
%Numerical solution of viscosity eta
eta = I + (1 - I).*(1 + ((2.*L)./solh).*(DU(:,1))).^a)
    .^((n - 1)./a);
%First derivative of eta (n-1 elements compared to eta)
Deta = gradient(eta(:,1),derivative_step);
%Second derivative of eta (n-2 elements compared to eta)
D2eta = gradient(Deta(:,1),derivative_step);

% ----- Numerical data for eta -----
[m4,n4] = size(eta);
%Create/Open the file eta_data.txt
fileID = fopen('eta_data.txt','wt');

for i=1:1:m4
%Saving data inside the file called "eta_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\eta
fprintf(fileID,'%12.4e  %12.4e  %12.4e  %12.4e  %12.4e
    %12.4e \n',a,n,I,L,solh,eta(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file eta_data.txt

% ----- Numerical data for Deta -----

```

```

[m5,n5] = size(Deta);
%Create/Open the file Deta_data.txt
fileID = fopen('deta_data.txt','wt');

for i=1:1:m5
%Saving data inside the file called "Deta_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\Deta
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
%12.4e \n',a,n,I,L,solh,Deta(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file Deta_data.txt

% ----- Numerical data for D2eta -----
[m6,n6] = size(D2eta);
%Create/Open the file D2eta_data.txt
fileID = fopen('d2eta_data.txt','wt');

for i=1:1:m6
%Saving data inside the file called "D2eta_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\D2eta
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
%12.4e \n',a,n,I,L,solh,D2eta(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file D2eta_data.txt

% ---- epsilon and numerical differentiation of epsilon ----
%Numerical solution for epsilon
epsilon = I + (1 - I).*(1 + n.*((2.*L)./solh).*DU(:,1)).^(a)

```

```

.*(1 + ((2.*L)./solh).*DU(:,1)).^(a)).^((n - a - 1)./a);
%First derivative of epsilon (n-1 elements compared to epsilon)
Depsilon = gradient(epsilon(:,1),derivative_step);
%Second derivative of epsilon (n-2 elements compared to epsilon)
D2epsilon = gradient(Depsilon(:,1),derivative_step);

% ----- Numerical data for epsilon -----
[m7,n7] = size(epsilon);
%Create/Open the file epsilon_data.txt
fileID = fopen('epsilon_data.txt','wt');

for i=1:1:m7
%Saving data inside the file called "epsilon_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\epsilon
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
%12.4e \n',a,n,I,L,solh,epsilon(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file epsilon_data.txt

% ----- Numerical data for Depsilon -----
[m8,n8] = size(Depsilon);
%Create/Open the file Depsilon_data.txt
fileID = fopen('depsilon_data.txt','wt');

for i=1:1:m8
%Saving data inside the file called "Depsilon_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\Depsilon
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
%12.4e \n',a,n,I,L,solh,Depsilon(i,1));

```

```

end

fclose(fileID); %Close the file D2epsilon_data.txt

% ----- Numerical data for D2epsilon -----
[m9,n9] = size(D2epsilon);
%Create/Open the file D2epsilon_data.txt
fileID = fopen('d2epsilon_data.txt','wt');

for i=1:1:m9
%Saving data inside the file called "D2epsilon_data.txt"
%Data sequence:
%a\\n\\I\\L\\solh\\D2epsilon
fprintf(fileID,'%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
%12.4e \n',a,n,I,L,solh,D2epsilon(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file D2epsilon_data.txt

end

% ----- Code equation for base flow -----
function dydx = bvpfcn(x,y,h,a,n,I,L)

dydx = [y(2)
(-(x+1).*(h.^2)./4)./(I+(1-I).*(1+((2.*L./h).*y(2)).^a)
.^(n-1)./a)];
end

% ----- Code boundary conditions -----
%(a,n,I,L) are necessary to avoid "Too
many input arguments" ERROR

```

```

function res = bcfcn(ya,yb,h,a,n,I,L)
res = [yb(2)
ya(1)
yb(1)-ya(1)-(2/h)];
end

% ----- Create initial guess -----
function g = guess(x)
g = [sin(x)
cos(x)];
end

```

Código para expansões em séries de Chebyshev (transformação das soluções para o espaço de Chebyshev utilizando a função chebfun).

```

%- Base flow Chebyshev approximation (Carreau-Yasuda problem) -
%In order to dlmread accept the file name as an input it is
%necessary to type ' at the beginning and the end of the
% complete file name (even the extension) as an
%exemple: 'u_data.txt'

function[] = baseflow_chebyshev_coeff(x_min,x_max,filename)

%----- Vector data for G -----
G_aux = dlmread(filename); %Auxiliary vector for data
G = G_aux(:,6); %Column vector of the raw data
[m0,n0] = size(G); %Dimensions of the data vector
y0 = linspace(x_min,x_max,m0); %Domain
y0 = y0'; %Transpose of the domain

%Constructs a chebfun object representing the function G
%on the interval [-1,1]
g = chebfun(G);

```

```

format long

%Chebyshev polynomial coefficients
disp('Cheb coeffs of G:')
phi0 = chebpoly(g)'; phi0 = phi0(end:-1:1)

%size control of the matrix F
[m,n] = size(phi0);
N = m-1;

%Auxiliary function F_aux for the Chebyshev polynomials of
%the first kind T_n where F_aux{k} = T_k
j = 1;
for k=0:1:N
%poly(chebpoly(N)) is the Chebyshev polynomial of the
%first kind T_n
F_aux{j} = poly(chebpoly(k));
%size of each cell from F_aux
[p,q] = size(F_aux{j});
%horizontal concatenation in order to build the vectors
F_aux{j} = horzcat(zeros(1,m-q),F_aux{j});
%loop step
j = j+1;
end

%Matrix of the Chebyshev polynomials of the first kind T_n,
%where F(k,:) = T_k
F = vertcat(F_aux{:});

%Matrix of the product between the Chebyshev coefficients
%and polynomials, where f(k,:) = phi_k*T_k
[p,q] = size(F);

```

```

f = zeros(p,q);
for j=1:1:m
f(j,:) = phi0(j,n)*F(j,:);
end

%Sum of the Chebyshev coefficients as per definition
%f(x) = a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)
%+ a_3 T_3(x) + ... + a_N T_N(x)

%Sum of the Chebyshev coefficients
f_G = sum(f(:, :));
%Polynomial evaluation at the interval y
f_G_at_y = polyval(f_G,y0);

%newStr = strrep(str,old,new) replaces all occurrences of
%old in str with new.
filename_new = strrep(filename, '.', '_cheb_coeff. ');
fileID = fopen(filename_new, 'wt'); %Create/Open the file

for i=1:1:m0
%Saving data inside the file
%Data sequence:
%phi0(coefficients)\\y0(domain)\\g\\f_G_at_y
fprintf(fileID, '%12.4e %12.4e %12.4e %12.4e
\n', phi0(i,1), y0(i,1), g(i,1), f_G_at_y(i,1));
end

fclose(fileID); %Close the file

end

```

B.0.2 Código para a solução da equação de Orr-Sommerfeld (Carreau-Yasuda)

Abaixo estão listados todas as funções necessárias para a resolução do problema de estabilidade. Para os casos em que a função é uma implementação direta de uma equação apresentaremos a referência logo acima do código.

Eq.(5.17) (função base para todos os demais produtos internos)

```
%Inner Product of two Chebyshev Polynomials for MF functions
```

```
function [T] = IP_F(i, j)
```

```
T = 0;
```

```
if i == 0 && j == 0
```

```
T = pi;
```

```
else if i == j && i ~= 0 && j ~= 0
```

```
T = pi/2;
```

```
else if i ~= j
```

```
T = 0;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

Chama diretamente a função acima para produzir um produto interno entre dois polinômios de Chebyshev Eq.(5.70)

```
%Matrix for the Inner Product of two Chebyshev Polynomials
```

```
function [D] = MO_F(N)
```

```
D = zeros(N-1);
```

```
%Matrix calculation
```

```

for i=0:N-1
for j=0:N-1
[T] = IP_F(i, j);
D(i+1, j+1) = T;
end
end
end

```

Eq.(5.72)

%Matrix for the function F with the
%inner product (Chebyshev Polynomials)

```
function [D] = MF0(filename)
```

```

F_aux = dlmread(filename); %Auxiliary vector for data
F = F_aux(:,1); %Column vector of the CHEbyshev coefficients
[N,M] = size(F); %Dimensions of the data vector
D = zeros(N-1);

```

%Matrix calculation

```

for i=0:N-1
for j=0:N-1
S = 0;
for m = 0:N-1 %F has N elements so k must end in N-1
[T1] = IP_F(i, (m+j));
[T2] = IP_F(i, abs(m-j));
P = F(m+1).*(T1 + T2);
S = S + P;
end
D(i+1, j+1) = (1/2).*S;
end
end
end

```

Eq.(5.77) e Eq.(5.78)

%Matrix for the first derivative (Chebyshev Polynomials)

```
function [D] = M1_F(N)
```

```
D = zeros(N-1);
```

```
%Matrix calculation
```

```
for i=0:N-1
```

```
for j=0:N-1
```

```
if rem(j,2) == 0 %even numbers for the column
```

```
T1 = 0;
```

```
for n = 0:j/2-1
```

```
[T1_aux] = IP_F(i, (2*n)+1);
```

```
T1 = T1 + T1_aux;
```

```
end
```

```
T1 = 2*j*(T1);
```

```
D(i+1,j+1) = T1;
```

```
else if rem(j,2) == 1 %odd numbers for the column
```

```
T1 = 0;
```

```
for n = 1:(j-1)/2
```

```
[T1_aux] = IP_F(i, 2*n);
```

```
T1 = T1 + T1_aux;
```

```
end
```

```
T1 = 2*(j)*(T1) + (j)*IP_F(i, 0);
```

```
D(i+1,j+1) = T1;
```

```
end
```

Eq.(5.79)

```

%Matrix for the function F with the
%first derivative (Chebyshev Polynomials)

function [D] = MF1(filename)

F_aux = dlmread(filename); %Auxiliary vector for data
F = F_aux(:,1); %Column vector of the CHEbyshev coefficients
[N,M] = size(F); %Dimensions of the data vector
D = zeros(N-1);

%Matrix calculation
for i=0:N-1
for j=0:N-1
if rem(j,2) == 0 %even numbers for the column
S = 0;
for m = 0:N-1 %F has N elements so k must end in N-1
T1 = 0;
T2 = 0;
for n = 0:j/2-1
[T1_aux] = IP_F(m+i, (2*n)+1);
[T2_aux] = IP_F(abs(m-i), (2*n)+1);
T1 = T1 + T1_aux;
T2 = T2 + T2_aux;
end
T1 = 2*j*(T1);
T2 = 2*j*(T2);
P = F(m+1)*(T1 + T2);
S = S + P;
end
D(i+1,j+1) = (1/2).*S;
else if rem(j,2) == 1 %odd numbers for the column

```

```

S = 0;
for m = 0:N-1 %F has N elements so k must end in N-1
T1 = 0;
T2 = 0;
for n = 1:(j-1)/2
[T1_aux] = IP_F(m+i,2*n);
[T2_aux] = IP_F(abs(m-i),2*n);
T1 = T1 + T1_aux;
T2 = T2 + T2_aux;
end
T1 = 2*(j)*(T1) + (j)*IP_F(m+i,0);
T2 = 2*(j)*(T2) + (j)*IP_F(abs(m-i),0);
P = F(m+1).*(T1 + T2);
S = S + P;
end
D(i+1,j+1) = (1/2).*S;
end
end
end
end
end
end

```

Eq.(5.87)

%Matrix for the second derivative (Chebyshev Polynomials)

```
function [D] = M2_F(N)
```

```
D = zeros(N-1);
```

```
%Matrix calculation
```

```
for i=0:(N-1)
```

```
for j=0:(N-1)
```

```

if j >= 2 %Entries of the third column up to the last column
T1 = 0;
if rem(j-i,2) == 0 && j-i >0
T1 = (pi/2)*j*((j)^2 - ((i)^2));
end
D(i+1,j+1) = T1;
end
end
end
end
end

```

Eq.(5.88)

```

%Matrix for the function F with the
%second derivative (Chebyshev Polynomials)

function [D] = MF2(filename)

F_aux = dlmread(filename); %Auxiliary vector for data
F = F_aux(:,1); %Column vector of the CHEbyshev coefficients
[N,M] = size(F); %Dimensions of the data vector
D = zeros(N-1);

%Matrix calculation
for i=0:(N-1)
for j=0:(N-1)
if j >= 2 %Entries of the third column up to the last column
S = 0;
for m = 0:N-1 %F has N elements so k must end in N-1
T1 = 0;
T2 = 0;
if rem(j-(m+i),2) == 0 && j-(m+i) >0
T1 = (pi/2)*j*((j)^2 - ((m+i)^2));

```

```

end
if rem(j-abs(m-i),2) == 0 && j-(abs(m-i)) >0
T2 = (pi/2)*j*((j)^2 - (abs(m-i))^2);
end
P = (F(m+1))*(T1 + T2);
S = S + P;
end
D(i+1,j+1) = (1/2)*S;
end
end
end
end

```

Eq.(5.94)

%Matrix for the third derivative (Chebyshev Polynomials)

```

function [D] = M3_F(N)

D = zeros(N-1);

for i=0:N-1
for j=0:N-1
T1 = 0;
for k = 0:(j-2)
if rem(j - k,2) == 0 && (j - k) >= 2 && rem(k - i,2) == 1
&& (k - i) >= 1
c = k;
if c == 0
T1_aux = (1/2)*j*((j^2)-(k^2))*(pi*k);
T1 = T1 + T1_aux;
end

```

```

if c >= 1
T1_aux = (1/1)*j*((j^2)-(k^2))*(pi*k);
T1 = T1 + T1_aux;
end
end
end
D(i+1,j+1) = T1;
end
end
end

```

Eq.(5.96)

```

%Matrix for the function F with the
%third derivative (Chebyshev Polynomials)

function [D] = MF3(filename)

F_aux = dlmread(filename); %Auxiliary vector for data
F = F_aux(:,1); %Column vector of the CHEbyshev coefficients
[N,M] = size(F); %Dimensions of the data vector
D = zeros(N-1);

for i=0:N-1
for j=0:N-1

S = 0;
for m = 0:N-1 %F has N elements so k must end in N-1

T1 = 0;
T2 = 0;
for k = 0:(j-2)
if rem(j - k,2) == 0 && (j - k) >= 2 && rem(k - (m+i),2) == 1

```

```

&& (k - (m+i)) >= 1
c = k;
if c == 0
T1_aux = (1/2)*j*((j^2)-(k^2))*(pi*k);
T1 = T1 + T1_aux;
end

if c >= 1
T1_aux = (1/1)*j*((j^2)-(k^2))*(pi*k);
T1 = T1 + T1_aux;
end

end

if rem(j - k,2) == 0 && (j - k) >= 2
&& rem(k - abs(m-i),2) == 1
&& (k - abs(m-i)) >= 1
c = k;
if c == 0
T2_aux = (1/2)*j*((j^2)-(k^2))*(pi*k);
T2 = T2 + T2_aux;
end

if c >= 1
T2_aux = (1/1)*j*((j^2)-(k^2))*(pi*k);
T2 = T2 + T2_aux;
end

end

end

P = (F(m+1))*(T1 + T2);
S = S + P;

end

```

```

D(i+1,j+1) = (1/2)*S;
end
end
end

```

Eq.(5.102) e Eq.(5.103)

%Matrix for the fourth derivative (Chebyshev Polynomials)

```

function [D] = M4_F(N)

D = zeros(N-1);

for i=0:(N-1)
for j=0:(N-1)
if rem(j,2) == 0 %even numbers for the column
T1 = 0;
for r = 1:(j/2) - 2
[T1_IP_F] = IP_F(i,2*r);
T1_aux = (((j^2)/4)-(r^2))*(((j/2)+1)^2 - (r^2))*(((j/2)-1)^2
- (r^2))*T1_IP_F;
T1 = T1 + T1_aux;
end
[T1_IP_F] = IP_F(i,0);
P1 = ((16/3)*((j/2)*T1)) + ((8/3)*(((j/2) - 1)^2)*((j^3)/8)
*(((j/2) + 1)^2)*T1_IP_F);
D(i+1,j+1) = P1;
end
if rem(j,2) == 1 %odd numbers for the column
T1 = 0;
for r = 0:((j-1)/2)-2
[T1_IP_F] = IP_F(i,(2*r)+1);
T1_aux = (((j-1)/2)^2 - (r^2))*((((j-1)/2)+1)^2)

```

```

- (r^2))*(((j-1)/2)+r+2)*(((j-1)/2)-r-1)*T1_IP_F;
T1 = T1 + T1_aux;
end
P1 = (8/3)*(j)*T1;
D(i+1,j+1) = P1;
end
end
end

```

Eq.(5.104)

%Matrix for the fourth derivative (Chebyshev Polynomials)

```
function [D] = MF4(filename)
```

```

F_aux = dlmread(filename); %Auxiliary vector for data
F = F_aux(:,1); %Column vector of the Chebyshev coefficients
[N,M] = size(F); %Dimensions of the data vector
D = zeros(N-1);

for i=0:(N-1)
for j=0:(N-1)
if rem(j,2) == 0 %even numbers for the column
S = 0;
for m = 0:N-1
T1 = 0;
T2 = 0;
for r = 1:(j/2) - 2
[T1_IP_F] = IP_F(m+i,2*r);
[T2_IP_F] = IP_F(abs(m-i),2*r);
T1_aux = (((j^2)/4)-(r^2))*(((j/2)+1)^2 - (r^2))*(((j/2)-1)^2
- (r^2))*T1_IP_F;
T2_aux = (((j^2)/4)-(r^2))*(((j/2)+1)^2 - (r^2))*(((j/2)-1)^2

```

```

- (r^2)*T2_IP_F;
T1 = T1 + T1_aux;
T2 = T2 + T2_aux;
end
[T1_IP_F] = IP_F(m+i,0);
[T2_IP_F] = IP_F(abs(m-i),0);
P1 = ((16/3)*((j/2)*T1)) + ((8/3)*(((j/2) - 1)^2)*((j^3)/8)
*(((j/2) + 1)^2)*T1_IP_F);
P2 = ((16/3)*((j/2)*T2)) + ((8/3)*(((j/2) - 1)^2)*((j^3)/8)
*(((j/2) + 1)^2)*T2_IP_F);
P = F(m+1)*(P1 + P2);
S = S + P;
end
D(i+1,j+1) = (1/2).*S;
end
if rem(j,2) == 1 %odd numbers for the column
S = 0;
for m = 0:N-1
T1 = 0;
T2 = 0;
for r = 0:((j-1)/2)-2
[T1_IP_F] = IP_F(m+i,(2*r)+1);
[T2_IP_F] = IP_F(abs(m-i),(2*r)+1);
T1_aux = (((j-1)/2)^2 - (r^2))*((((j-1)/2)+1)^2)
- (r^2))*(((j-1)/2)+r+2)*(((j-1)/2)-r-1)*T1_IP_F;
T2_aux = (((j-1)/2)^2 - (r^2))*((((j-1)/2)+1)^2)
- (r^2))*(((j-1)/2)+r+2)*(((j-1)/2)-r-1)*T2_IP_F;
T1 = T1 + T1_aux;
T2 = T2 + T2_aux;
end
P1 = (8/3)*(j)*T1;
P2 = (8/3)*(j)*T2;

```

```

P = F(m+1) * (P1 + P2);
S = S + P;
end
D(i+1, j+1) = (1/2) .* S;
end
end
end

```

Para as condições de contorno temos os códigos listados abaixo.

Eq.(5.123)

```

%Boundary condition (for z = -1)

function [D] = BC0_F(N)

D = (0:1:N-1);

for k = 0:1:N-1
D(k+1) = (-1) ^ (k);
end

```

Eq.(5.126)

```

%Boundary condition (for z = 1)

function [D] = BC1_F(N)

D = (0:1:N-1);

for k = 0:1:N-1
D(k+1) = 1;
end

```

Eq.(5.140)

%Boundary condition first derivative (for z = -1)

```
function [D] = BC2_F(N)
```

```
D = (0:1:N-1);
```

```
for k = 0:1:N-1
```

```
D(k+1) = ((-1)^(k+1))*((k)^2);
```

```
end
```

Eq.(5.148)

%Boundary condition first derivative (for z = 1)

```
function [D] = BC3_F(N)
```

```
D = (0:1:N-1);
```

```
for k = 0:1:N-1
```

```
D(k+1) = ((k)^2);
```

```
end
```

Eq.(5.162)

%Boundary condition second derivative (for z = -1)

```
function [D] = BC4_F(N)
```

```
D = (0:1:N-1);
```

```
for k = 0:1:N-1
```

```
D(k+1) = ((-1)^(k))*(((k)^4)-((k)^2))/3);
```

```
end
```

Eq.(5.170)

%Boundary condition second derivative (for z = 1)

```
function [D] = BC5_F(N)
```

```
D = (0:1:N-1);
```

```
for k = 0:1:N-1
```

```
D(k+1) = (((k)^4)-((k)^2))/3); % K-1 the index stars
```

```
%from 1 on Matlab
```

```
end
```

Eq.(5.184)

%Boundary condition third derivative (for z = -1)

```
function [D] = BC6_F(N)
```

```
D = (0:1:N-1);
```

```
for k = 0:1:N-1
```

```
D(k+1) = ((-1)^(k+3))*(((k)^2)*((k)^2) - 1)*((k)^2) - 4)/15);
```

```
end
```

Eq.(5.192)

%Boundary condition third derivative (for z = 1)

```
function [D] = BC7_F(N)
```

```
D = (0:1:N-1);
```

```
for k = 0:1:N-1
```

```
D(k+1) = (((k)^2)*((k)^2) - 1)*((k)^2) - 4)/15);
```

```
end
```

Abaixo encontra-se o código para a construção do problema de autovalor generalizado dado por Eq.(5.194).

```
%Function which compute the the Orr-Sommerfeld equation with the
%boundary conditions and solve the eigenvalue problem and
%gives a column vector with the eigenvalues and the
%matrix of all eigenvectors.
```

```
%Generalized Eigenvalue Problem
```

```
function [E,F] = GEP_F(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T)
```

```
%Data files
```

```
filename1 = E; %u_data_cheb_coeff.txt
filename2 = F; %du_data_cheb_coeff.txt
filename3 = G; %d2u_data_cheb_coeff.txt
filename4 = H; %eta_data_cheb_coeff.txt
filename5 = I; %deta_data_cheb_coeff.txt
filename6 = J; %epsilon_data_cheb_coeff.txt
filename7 = K; %depsilon_data_cheb_coeff.txt
filename8 = L; %d2epsilon_data_cheb_coeff.txt
filename9 = M; %u_data.txt
filename10 = N; %du_data.txt
filename11 = O; %d2u_data.txt
filename12 = P; %eta_data.txt
filename13 = Q; %deta_data.txt
filename14 = R; %epsilon_data.txt
filename15 = S; %depsilon_data.txt
filename16 = T; %d2epsilon_data.txt
```

```
%Vectors for the boundary conditions
```

```
u_aux = dlmread(filename9); %Auxiliary vector for data
u = u_aux(:,6); %Column vector of the raw data
```

```
du_aux = dlmread(filename10); %Auxiliary vector for data
du = du_aux(:,6); %Column vector of the raw data

d2u_aux = dlmread(filename11); %Auxiliary vector for data
d2u = d2u_aux(:,6); %Column vector of the raw data

eta_aux = dlmread(filename12); %Auxiliary vector for data
eta = eta_aux(:,6); %Column vector of the raw data

deta_aux = dlmread(filename13); %Auxiliary vector for data
deta = deta_aux(:,6); %Column vector of the raw data

epsilon_aux = dlmread(filename14); %Auxiliary vector for data
epsilon = epsilon_aux(:,6); %Column vector of the raw data

depsilon_aux = dlmread(filename15); %Auxiliary vector for data
depsilon = depsilon_aux(:,6); %Column vector of the raw data

d2epsilon_aux = dlmread(filename16); %Auxiliary vector for data
d2epsilon = d2epsilon_aux(:,6); %Column vector of the raw data

%Parameters
alpha = A; %Characteristic wave number
angle = B;
Re = C; %Reynolds Number
We = D; %Weber Number
h = u_aux(1,5); %film thickness solution

%size control of the eigenvalue problem
size_aux = dlmread(filename1); %Auxiliary vector for data
S = size_aux(:,2); %Column vector of the raw data
[m,n] = size(S); %Dimensions of the data vector
```

```

N = m; %Number of points

%The Orr-Sommerfeld equation (N+1xN+1 matrix)
A = (16/(h^4))*MF4(filename6)
+ ((8*(alpha^2))/(h^2))*MF2(filename6)
+ (alpha^4)*MF0(filename6)
+ (32/(h^4))*MF3(filename7)
+ (8/(h^2))*(alpha^2)*MF1(filename7)
+ (16/(h^4))*MF2(filename8)
+ ((4*(alpha^2))/(h^2))*MF0(filename8)
- ((16*(alpha^2))/(h^2))*MF1(filename5)
- ((16*(alpha^2))/(h^2))*MF2(filename4)
- ((4*1i*alpha*Re)/(h^2))*MF2(filename1)
+ (1i*(alpha^3)*Re)*MF0(filename1)
+ ((4*1i*alpha*Re)/(h^2))*MF0(filename3);
B = (-4*1i*alpha*Re)/(h^2))*M2_F(N)
+ (1i*(alpha^3)*Re)*M0_F(N);

%Boundary condition at the wall (z = 1)
%Row N-3 of A --- Line N-3 inside of B is equal 0
C = BC1_F(N);
%Row N-2 of A --- Line N-2 inside of B is equal 0
D = (2/h)*BC3_F(N);

%Boundary condition at the interface (z = -1)*epsilon(1,1)
E = BC0_F(N) + (4/(h^2))*epsilon(1,1)*u(1,1)*BC4_F(N)
+ (alpha^2)*epsilon(1,1)*u(1,1)*BC0_F(N); %Row N-1 of A
E_1 = (4/(h^2))*epsilon(1,1)*BC4_F(N)
+ (alpha^2)*epsilon(1,1)*BC0_F(N); %Row N-1 of B
F = ((-8)/(h))*(alpha^2)*eta(1,1)*BC2_F(N)
+ (8/(h^3))*depsilon(1,1)*BC4_F(N)

```

```

+ ((2*(alpha^2))/h)*depsilon(1,1)*BC0_F(N)
+ (8/(h^3))*epsilon(1,1)*BC6_F(N)
+ ((2*(alpha^2))/(h))*epsilon(1,1)*BC2_F(N)
+ 1i*((( -2)*(alpha)*Re)/h)*u(1,1)*BC2_F(N)
+ (((2)*(alpha)*Re)/h)*du(1,1)*BC0_F(N)
+ (((4)*(alpha)*cot(angle))/(h^2))*epsilon(1,1)*BC4_F(N)
+ (alpha^3)*cot(angle)*epsilon(1,1)*BC0_F(N)
+ ((4)*(alpha^3)/((h^2)*We))*epsilon(1,1)*BC4_F(N)
+ ((alpha^5)/(We))*epsilon(1,1)*BC0_F(N) ); %Row N of A
F_1 = ((-2*1i*(alpha)*Re)/h)*BC2_F(N); %Row N of B

%-----Eigenvalue Problem-----

%Applying the Boundary Conditions
A(N-3,:) = C(1,:);
A(N-2,:) = D(1,:);
A(N-1,:) = E(1,:);
A(N,:) = F(1,:);
B(N-3,:) = 0;
B(N-2,:) = 0;
B(N-1,:) = E_1(1,:);
B(N,:) = F_1(1,:);

%Eigenvalue problem
E = A; %Left matrix
F = B; %Right Matrix

end

```

Função para resolver o problema de autovalor generalizado.

```

%Function which solver the eigenvalue problem generated by the
%Orr-Sommerfeld equation and the boundary condition. The program

```

```
%generates the spectrum of the eigenvalues (which contains
%the physical eigenvalue) and the physical eigenvector.
```

```
%Generalized Eigenvalue Problem (N+1)
function [eigenvalue,eigenvector] = SolveGEP_F(A,B)

%Solving the eigenvalue problem
[eigenvector,eigenvalue] = eig(A,B);
eigenvalue = diag(eigenvalue);

%Sort spectrum by imag part
%Sort the eigenvalue and the eigenvector
eigenvalue = imag(eigenvalue); [eigenvalue,nn] = sort(-eigenvalue);
%Set the correct eigenvalue
eigenvalue = eigenvalue(nn);
%Set the correspond eigenvector of the eigenvalue
eigenvector = eigenvector(:,nn);
end
```

Implementação do método de iteração inversa.

```
%Function to implement the Inverse Iteration Method
%to track the eigenvalues and the eigenvectors

function [sigma_new,efun_new] = IIM_F(C,D,E,F)

%Initial parameters
A = C; %Left matrix of the eigenvalue problem
B = D; %Right matrix of the eigenvalue problem
sigma_old = E; %Initial approximation of an eigenvalue
z_0 = F; %Initial approximation of an eigenvector
p_0 = 0; %Start parameter
epsilon = 10^(-10); %Test parameter
```

```

efun_old = z_0; %Set Inital approximaton of the eigenvector
pk = p_0; %Set the start parameter

%Stay in the loop until converge
while(1); %Infinite Loop

%Linear System
ML = A - (sigma_old*B); %Left matrix of the linear system
MR = B*efun_old; %Right matrix of the linear system
efun_new = ML\MR; %Solve the linear system

zk = conj(efun_old);
wk = efun_new;
pk1 = 1/(sum(wk.*zk));

if abs(pk1 - pk) > epsilon; %Convergence Test
pk = pk1; %Set a new parameter for the convergence test
wkc = conj(wk);
%Normalization of the eigenvector
efun_new = wk./sqrt(sum(wk.*wkc));
efun_old = efun_new;
else
%Final result for the eigenvalue
sigma_new = sigma_old + pk1;
wkc = conj(wk);
%Final result for the eigenvector
wk_norm = wk./sqrt(sum(wk.*wkc));
efun_new = wk_norm;
break %Stop the loop
end
end

```

Código principal do problema de estabilidade.

```

%Main Code for the Orr-Sommerfeld equation with
%the boundary conditions

clc; clear all; close all; %Clear all the data

filename1 = 'u_data_cheb_coeff.txt';
filename2 = 'du_data_cheb_coeff.txt';
filename3 = 'd2u_data_cheb_coeff.txt';
filename4 = 'eta_data_cheb_coeff.txt';
filename5 = 'deta_data_cheb_coeff.txt';
filename6 = 'epsilon_data_cheb_coeff.txt';
filename7 = 'depsilon_data_cheb_coeff.txt';
filename8 = 'd2epsilon_data_cheb_coeff.txt';
filename9 = 'u_data.txt';
filename10 = 'du_data.txt';
filename11 = 'd2u_data.txt';
filename12 = 'eta_data.txt';
filename13 = 'deta_data.txt';
filename14 = 'epsilon_data.txt';
filename15 = 'depsilon_data.txt';
filename16 = 'd2epsilon_data.txt';

%Vectors for the boundary conditions
u_aux = dlmread(filename9); %Auxiliary vector for data
u = u_aux(:,6); %Column vector of the raw data

h = u_aux(1,5); %film thickness solution
a = u_aux(1,1); %Carreau parameter
I = u_aux(1,3); %Ratio between the viscosity limit values
n = u_aux(1,2); %Power-law exponent
L = u_aux(1,4); %Dimensionless relaxation time

```

```

alpha = 0.001; %characteristic wave number
angle = 10; %angle in degrees
angle = (angle*pi)/180; %conversion to rad
Re = 3; %% %Reynolds number
We = 0.001; %Weber number

%Generalized Eigenvalue Problem (N+1)
%A is the left matrix of the eigenvalue problem
%B is the right matrix of the eigenvalue problem
[A,B] = GEP_F(alpha,angle,Re,We,filename1,filename2,
filename3,filename4,filename5,filename6,filename7,filename8,
filename9,filename10,filename11,filename12,filename13,
filename14,filename15,filename16); %Call function GEP

%Solve the Generalized Eigenvalue Problem
%eigval is the spectrum of all eigenvalues
%eigvec is the matrix which the columns corresponds
%to each eigenvalue of the spectrum
[eigval,eigvec] = SolveGEP_F(A,B); %Call the SolveGEP function

%----- Eigenvalue Spectrum -----
eigenv = eig(A,B);
plot(eigenv, '.', 'markersize', 10)
grid on, axis([-4.5 4.5 -1*(10^7) 1*(10^6)]), axis square
drawnow

%----- Analytical and Numerical Solutions -----
analit_solution_c0 = 3^(2/3) + (((-1)^a)*(3^((a+2)/3))*(a+1)
*(I-1)*(n-1)*(L^a))/(a*(a+3));
analit_solution_c1 = ((1i*(6*Re - 5*cot(angle)))/5
+ ((1i)*((-1)^a)*(3^((a+3)/3))*(I-1)*(n-1)*(L^a)*(2*(15+a*((6*a)
+ 37))*Re - ((5*a)*(a+5)*cot(angle))))/(5*a*(a+3)*(a+5)))*alpha;

```

```

analit_solution_sol = analit_solution_c0 + analit_solution_c1
numeric_solution_sol = eigval(4,1)

```

```

%Inverse Iteration Method

```

```

%eigvec(:,i) is the initial approximation of an eigenvector

```

```

%a will be the final eigenvalue

```

```

%b will be the final eigenvector

```

```

%----- IMPORTANT -----

```

```

%Every time that the physical condition change the position

```

```

%of the physical eigenvalue may change, so it's necessary to

```

```

%check every time for the correct eigenvalue and the

```

```

%corresponding eigenvector. The row position of the eigenvalue

```

```

% is equal to the column position of the eigenvector

```

```

%----- IMPORTANT -----

```

```

%Initial approximation of the eigenvalue2

```

```

appr_eigval = eigval(4,1);

```

```

%Initial approximation of the eigenvector2

```

```

appr_eigvec = eigvec(:,4);

```

```

%Call the IIM function

```

```

[a,b] = IIM_F(A,B,appr_eigval,appr_eigvec);

```