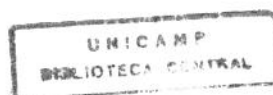


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS  
SOLO-FLUIDO-ESTRUTURA PELO MÉTODO DE  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

por Edson Rodrigues Carvalho  
orientador Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

**Tese Submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas, para Preenchimento dos  
Pré-Requisitos para a Obtenção do Título de Doutor em  
Engenharia Mecânica.**



UNIDADE	BC
N.º FOLHA	
T. UNICAMP	
C253a	
	25726
	433/95
P.º CO	R\$ 11,00
DATA	29/09/95
N.º CPT	

CM-00078639-8

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C254a Carvalho, Edson Rodrigues  
Análise dinâmica de sistemas solo-fluido-estrutura pelo  
metodo de elementos de contorno. / Edson Rodrigues  
Carvalho.--Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Hidrodinamica. 2. Difração. 3. Radiação. 4. Metodo  
de elementos de contorno. 5. Equações integrais. 6.  
Acopamentos. I. Mesquita Neto, Euclides. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de : Doutorado

Título da Tese : ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS SOLO-FLUIDO-ESTRUTURA  
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

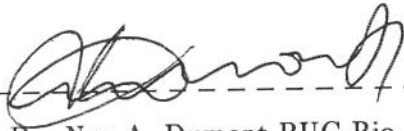
Autor : Edson Rodrigues Carvalho

Orientador : Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

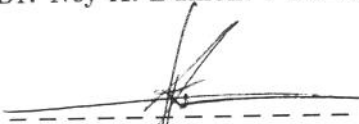
Aprovado por



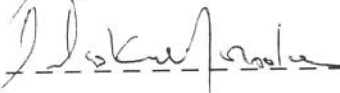
Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente



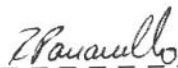
Prof. Dr. Ney A. Dumont PUC-Rio



Prof. Dr. Kazuo Nishimoto POLI-USP



Prof. Dr. Celso Morooka FEM-UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello FEM-UNICAMP

Campinas, 10 de julho de 1995

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS  
SOLO-FLUIDO-ESTRUTURA PELO MÉTODO DE  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

por Edson Rodrigues Carvalho /  
orientador Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

**Tese Submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas, para Preenchimento dos  
Pré-Requisitos para a Obtenção do Título de Doutor em  
Engenharia Mecânica.**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR EDSON RODRIGUES  
CARVALHO E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 10/07/95  
Euclides de Mesquita Neto  
ORIENTADOR

Para minha mãe,  
minha esposa, Fátima  
e  
meu filho, Klausius

# Agradecimentos

1. Ao professor Dr. Euclides de Mesquita Neto, pela orientação segura e eficiente;
2. aos professores do Departamento de Mecânica Computacional, pela experiência e conceitos transmitidos, que contribuíram para a conclusão deste trabalho;
3. aos funcionários do Departamento de Mecânica Computacional, pelo tratamento sempre solícito e pela eficiência no atendimento;
4. aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas do Centro Universitário de Três Lagoas, pela confiança, pelo estímulo e sacrifício feito;
5. aos amigos, Campos, Carlson, Capello, Celso, Daros, Dercir, Edivaldo, Iguti, Leandro, Menoni, Pontes, Rajagopalan e Marques, frequentes nos momentos importantes de lazer;
6. à CAPES e FAPESP, pelo apoio financeiro;
7. à PETROBRAS por dois anos de apoio financeiro.

# Conteúdo

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>i</b>
<b>CONTEÚDO</b>	<b>ii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>vi</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>xii</b>
<b>RESUMO</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução Geral</b>	<b>1</b>
1.1 Métodos Numéricos . . . . .	1
1.2 Sistemas Acoplados . . . . .	2
1.3 Problemas de Interação Fluido-Estrutura . . . . .	4
1.4 Problemas de Interação Solo-Estrutura . . . . .	4
1.5 Método dos Elementos de Contorno-MEC . . . . .	5
1.6 Objetivos do Presente Trabalho . . . . .	7
1.7 Conteúdo do Trabalho . . . . .	8
<b>2 Princípios Básicos da Mecânica dos Fluidos</b>	<b>10</b>
2.1 A Característica dos Fluidos . . . . .	10
2.2 Derivada Material e Local . . . . .	11

2.3	Propriedades Mecânicas dos Fluidos . . . . .	13
2.4	Produto Escalar e Gradiente . . . . .	13
2.5	Equação da Continuidade . . . . .	15
2.6	Quantidade de Movimento Linear . . . . .	16
2.7	Equações de Navier-Stokes . . . . .	17
2.8	Equação de Bernoulli . . . . .	17
2.9	Condições de Contorno . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Teorias de Ondas</b>	<b>22</b>
3.1	Introdução . . . . .	22
3.2	Técnica de Perturbação . . . . .	24
3.3	Teoria Linear . . . . .	26
3.4	Ondas não-Lineares . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Difração de Ondas</b>	<b>33</b>
4.1	Introdução . . . . .	33
4.2	Modelo Matemático . . . . .	34
4.3	Casos que Reduzem o Problema a duas Dimensões . . . . .	37
4.4	Formulação do MEC para a Equação de Helmholtz . . . . .	38
4.5	Implementação Numérica . . . . .	40
4.6	Formulação do MEC para a Equação de Laplace . . . . .	44
4.7	Resultados Numéricos . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Radiação de Ondas</b>	<b>96</b>
5.1	Introdução . . . . .	96
5.2	Transformação de Coordenadas . . . . .	98
5.3	A Condição Cinemática . . . . .	108
5.4	Dinâmica de Corpo Rígido . . . . .	113
5.4.1	Matriz de Massa . . . . .	113



5.4.2	Quantidade de Movimento Linear . . . . .	114
5.4.3	Quantidade de Movimento Angular . . . . .	115
5.4.4	Força e Momento . . . . .	115
5.4.5	Resposta de um Corpo Flutuante em Ondas Regulares . . . . .	118
5.5	Resposta Dinâmica . . . . .	127
5.6	Implicações do teorema de Green . . . . .	128
5.7	Formulação Matemática . . . . .	129
5.8	Formulação de Elementos de Contorno . . . . .	134
5.9	Validação Numérica . . . . .	136
5.9.1	Cilindros Circulares Gêmeos . . . . .	136
5.9.2	Semicilindros Gêmeos . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Elastodinâmica Linear</b>	<b>152</b>
6.1	Introdução . . . . .	152
6.2	Equações Básicas . . . . .	152
6.3	Equação Integral de Contorno . . . . .	154
6.4	Implementação Numérica do MEC . . . . .	156
6.5	Propagação de Ondas Elásticas em um Meio Ilimitado . . . . .	157
6.5.1	Ondas Planas . . . . .	157
6.5.2	Ondas Planas Harmônicas no Tempo . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Acoplamento de Operadores: Interação Dinâmica Solo-Fluido-Estrutura</b>	<b>162</b>
7.1	Definição do Problema . . . . .	162
7.2	Equações que Governam o Problema . . . . .	163
7.2.1	Domínio do Fluido . . . . .	163
7.2.2	Domínios Elásticos . . . . .	165
7.3	Condições para o Acoplamento . . . . .	165
7.4	Implementação do Método Elementos de Contorno . . . . .	166

7.4.1	Domínio do Fluido . . . . .	166
7.4.2	Domínios Elásticos . . . . .	168
7.5	Validação Numérica . . . . .	169
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>179</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>181</b>

# Lista de Figuras

1.1	sistema acoplado;tension leg platform . . . . .	3
1.2	interação entre sistemas;↔ indica acoplamento . . . . .	3
3.1	esboço para o potencial de velocidade . . . . .	23
4.1	esboço do problema . . . . .	35
4.2	discretização do contorno . . . . .	40
4.3	cilindro circular; seção horizontal constante . . . . .	48
4.4	erro da aproximação: 12, 24, 48, 96, 192 elementos constantes . . . . .	51
4.5	convergência da força; N=número de elementos; $\kappa r = 1.$ ; MEC —; sol. ex. .... .	52
4.6	Módulo da força máxima; Sol.Aprox., 48 e.c. — ; sol.ex. (●●●); $\frac{H}{r} = 4$ . . . . .	52
4.7	Fase da força máxima; Sol. Aprox., 48 e.c. — ; sol.ex. ●●●; $\frac{H}{r} = 4$ . . . . .	53
4.8	Coefficiente de inércia; Sol. Aprox., 48 e.c. — ; sol.ex. ●●●; $\frac{H}{r} = 4$ . . . . .	53
4.9	seção quadrada . . . . .	54
4.10	erro relativo; $ C_i - U $ ; $C_i = \frac{A(\kappa a_e)}{\kappa^2 b^2}$ ; $\alpha = 0^0$ . . . . .	57
4.11	módulo da força horizontal; MEC 48e.c. - - - ; ref. [33] — ; $\alpha = 0^0$ . . . . .	57
4.12	módulo da força horizontal; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ; $\alpha = 45^0$ . . . . .	58
4.13	coeficiente de inércia; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ; $\alpha = 0^0$ . . . . .	58
4.14	fase da força horizontal; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ; $\alpha = 0^0$ . . . . .	59
4.15	fase da força horizontal; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ; $\alpha = 45^0$ . . . . .	59
4.16	seção elítica . . . . .	60

4.17	módulo da força horizontal; MEC-48e.c. — ; ref. [32] ●●● ; $\alpha = 30^0$ ; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	61
4.18	módulo da força vertical; MEC-48e.c. — ; ref. [32] ●●● ; $\alpha = 60^0$ ; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	61
4.19	módulo da força horizontal; MEC-48e.c. — ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	62
4.20	módulo da força vertical; MEC-48e.c. — ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	62
4.21	dois cilindros circulares . . . . .	63
4.22	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; ref. [37] ●●● e ...+...+... ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	64
4.23	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; ref. [37] ●●● ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	64
4.24	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	65
4.25	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 5$ . . . . .	65
4.26	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 5$ . . . . .	66
4.27	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{D}{a} = 5$ . . . . .	66
4.28	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 10$ . . . . .	67
4.29	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 10$ . . . . .	67
4.30	cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{D}{a} = 10$ . . . . .	68
4.31	três cilindros circulares . . . . .	69
4.32	cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	70
4.33	cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	70
4.34	cil. teste — ; cil. vizinho 1 — ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	71
4.35	cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 5$ . . . . .	71
4.36	cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 5$ . . . . .	72
4.37	cil. teste — ; cil. vizinho 1 — ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{D}{a} = 5$ . . . . .	72
4.38	cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 10$ . . . . .	73
4.39	cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 10$ . . . . .	73
4.40	cil. teste — ; cil. vizinho 1 — ; cil. vizinho 2 ... ; $\alpha = 90^0$ ; $\frac{D}{a} = 10$ . . . . .	74
4.41	quatro cilindros circulares . . . . .	75
4.42	cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 - - - ; cil. viz. 3 — ; ref. [37] ●●● ; $\alpha = 0^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	75
4.43	cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 - - - ; $\alpha = 45^0$ ; $\frac{D}{a} = 3$ . . . . .	76

4.44 cil. teste — ; cil. viz. 1 — ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 ... ; $\alpha = 90^0; \frac{D}{a} = 3$ . . . . .	76
4.45 cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 - - - ; cil. viz. 3 — ; $\alpha = 0^0; \frac{D}{a} = 5$ . . . . .	77
4.46 cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 - - - ; $\alpha = 45^0; \frac{D}{a} = 5$ . . . . .	77
4.47 cil. teste — ; cil. viz. 1 — ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 ... ; $\alpha = 90^0; \frac{D}{a} = 5$ . . . . .	78
4.48 cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 - - - ; cil. viz. 3 — ; $\alpha = 0^0; \frac{D}{a} = 10$ . . . . .	78
4.49 cilindro semi-submerso . . . . .	79
4.50 módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.05$ . . . . .	81
4.51 módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.05$ . . . . .	81
4.52 módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.5$ . . . . .	82
4.53 módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.5$ . . . . .	82
4.54 módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	83
4.55 módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	83
4.56 módulo da força horizontal; $\frac{H}{a} = 1.05$ — ; $\frac{H}{a} = 1.5$ - - - ; $\frac{H}{a} = 4$ ... . . . . .	84
4.57 módulo da força vertical; $\frac{H}{a} = 1.05$ — ; $\frac{H}{a} = 1.5$ - - - ; $\frac{H}{a} = 4$ ... . . . . .	84
4.58 seção retangular . . . . .	85
4.59 módulo da força horizontal; MEC: — ; ref. [62] ●●●; $\frac{HE}{a} = \frac{2}{3}; \frac{H}{HE} = 6$ . . . . .	86
4.60 módulo da força vertical; MEC: — ; ref. [62] ●●●; $\frac{HE}{a} = \frac{2}{3}; \frac{H}{HE} = 6$ . . . . .	86
4.61 semicilindro no fundo . . . . .	87
4.62 módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.05$ . . . . .	88
4.63 módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.05$ . . . . .	89
4.64 módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.5$ . . . . .	89
4.65 módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 1.5$ . . . . .	90
4.66 módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	90
4.67 módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●; $\frac{H}{a} = 4$ . . . . .	91
4.68 módulo da força horizontal; $\frac{H}{a} = 1.05$ — ; $\frac{H}{a} = 1.5$ - - - ; $\frac{H}{a} = 4$ ... . . . . .	91
4.69 módulo da força vertical; $\frac{H}{a} = 1.05$ — ; $\frac{H}{a} = 1.5$ - - - ; $\frac{H}{a} = 4$ ... . . . . .	92
4.70 seção retangular no fundo . . . . .	93

4.71	módulo da força horizontal; $\frac{HE}{a} = 1$ : — ; $\frac{HE}{a} = 2$ : - - - ; $\frac{HE}{a} = 3$ : ...	93
4.72	módulo da força vertical; $\frac{HE}{a} = 1$ : — ; $\frac{HE}{a} = 2$ : - - - ; $\frac{HE}{a} = 3$ : ...	94
4.73	módulo do momento da força; $\frac{HE}{a} = 1$ : — ; $\frac{HE}{a} = 2$ : - - - ; $\frac{HE}{a} = 3$ : ...	94
5.1	corpo flutuante	97
5.2	sistemas de coordenadas	99
5.3	transformação de coordenadas	100
5.4	$\dot{\xi}_4$	100
5.5	$\dot{\xi}_5$	101
5.6	$\dot{\xi}_6$	102
5.7	roll	105
5.8	pitch	105
5.9	yaw	106
5.10	sistemas de coordenadas para um corpo rígido	113
5.11		119
5.12		121
5.13	corpos flutuantes	129
5.14	cilindros gêmeos	136
5.15	massa adicional e amortecimento; $\mu_{11}$ — ; $\lambda_{11}$ ... ; ref. [58] (●● ou ++)	137
5.16	massa adicional e amortecimento; $\mu_{22}$ — ; $\lambda_{22}$ ...; ref. [58] (●● ou ++)	137
5.17	amplitude das respostas; $\frac{ \xi_1 }{A}$ — ; $\frac{ \xi_2 }{A}$ ...; ref. [58] (●● ou ++)	138
5.18	massa adicional e amortecimento; $\mu_{1111}$ — ; $\lambda_{1111}$ ...; ref. [58] (●● ou ++)	139
5.19	massa adicional e amortecimento; $\mu_{2222}$ — ; $\lambda_{2222}$ ...; ref. [58] (●● ou ++)	139
5.20	resposta no modo sway; upwave — ; downwave - - ; isolado ...; ref. [58] (●● ou ++)	140
5.21	resposta no modo heave; upwave — ; downwave - - ; isolado...; ref. [58] (●● ou ++)	140
5.22	massa adicional; $\mu_{1112}$ — ; $\mu_{1124}$ - - - ; $\mu_{1225}$ ...; $\mu_{1125}$ - - -	141
5.23	amortecimento; $\lambda_{1112}$ — ; $\lambda_{1124}$ - - - ; $\lambda_{1225}$ ...; $\lambda_{1125}$ - - -	141
5.24	coeficientes de massa adicional	141

5.25	massa adicional e amortecimento; $\mu_{1324}$ —; $\mu_{1325}$ - - -; $\lambda_{1324}$ ...; $\lambda_{1325}$ -.-.-	142
5.26	semicilindros gêmeos	142
5.27	massa adicional; $\mu_{22}$ —; ref. [61] (● — ● — ●)	143
5.28	massa adicional; $\mu_{11}$ —; $\mu_{22}$ ...	144
5.29	massa adicional; $\mu_{33}$ —; $\mu_{13}$ ...	144
5.30	amortecimento; $\lambda_{11}$ —; $\lambda_{22}$ ...	144
5.31	amortecimento; $\lambda_{33}$ —; $\lambda_{13}$ ...	145
5.32	resposta no modo heave; $\frac{\xi_2}{A}$ —; ref. [61] (● — ● — ●)	145
5.33	resposta no modo sway; $\frac{\xi_1}{A}$ —; ref. [61] (● — ● — ●)	146
5.34	resposta no modo roll; $\frac{\xi_3}{A}$ —; ref. [61] (● — ● — ●)	146
5.35	massa adicional; $\mu_{22}$ —; ref. [61] - - -	147
5.36	massa adicional; $\mu_{11}$ —; $\mu_{33}$ - - -	148
5.37	massa adicional; $\mu_{12}$ —; $\mu_{45}$ - - -	148
5.38	massa adicional; $\mu_{14}$ —; $\mu_{25}$ - - -; $\mu_{36}$ ...	148
5.39	amortecimento; $\lambda_{11}$ —; $\lambda_{33}$ - - -	149
5.40	amortecimento; $\lambda_{12}$ —; $\lambda_{45}$ - - -	149
5.41	amortecimento; $\lambda_{14}$ —; $\lambda_{25}$ - - -	149
5.42	resposta no modo heave; upwave —; ref. [61] (● — ● — ●)	150
5.43	resposta no modo heave; downwave —; ref. [61] (● — ● — ●)	150
5.44	resposta no modo sway; upwave —; downwave - - -; isolado -.-.	150
5.45	resposta no modo roll; upwave —; downwave - - -; isolado -.-.	151
6.1	sistema de ondas incidente, refletida e refratada	159
7.1	interação solo-fluido-estrutura	163
7.2	módulo da força horizontal; difração —; Acoplamento - -; ...; -.-.-; $\frac{G_e}{G_s} = .0001$ ; $\frac{G_e}{G_s} = .001$ ; $\frac{G_e}{G_s} = 1$ .	170
7.3	módulo da força vertical; difração —; Acoplamento - -; ...; -.-.-; $\frac{G_e}{G_s} = .0001$ ; $\frac{G_e}{G_s} = .001$ ; $\frac{G_e}{G_s} = 1$ .	171

7.4	módulo do momento da força; difração —; Acoplamento - -; ...; -.-.-; $\frac{G_e}{G_s} = .0001$ ; $\frac{G_e}{G_s} = .001$ ; $\frac{G_e}{G_s} = 1$ . . . . .	171
7.5	FRF de uma barra; ref. [65] —; MEC acoplado - -; analítico *; $\rho_e = 1$ ; $G_e = 1$ ; $\mu = .25$ ; $\frac{L}{D} = 15$ . . . . .	173
7.6	parte real da resposta da estrutura, sujeita a uma excitação vertical; $K = 333.33$ —; $K = 3.33$ - - -; $K = .033$ ; ... . . . . .	174
7.7	parte imaginária da resposta da estrutura, sujeita a uma excitação vertical; $K =$ $333.33$ —; $K = .033$ - - -; $K = 3.33$ ; ... . . . . .	175
7.8	partes real e imaginária da resposta da estrutura, sujeita a uma excitação vertical; MEC acoplado — e ... ; ref. [65] - - - e -.-.- . . . . .	175
7.9	parte real do deslocamento do solo na vertical; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - - . . . . .	176
7.10	parte imaginária do deslocamento do solo na vertical; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - - . . . . .	176
7.11	parte real do deslocamento do solo na horizontal; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - - . . . . .	177
7.12	parte imaginária do deslocamento do solo na horizontal; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - - . . . . .	177
7.13	partes real e imaginária da resposta da estrutura; excitação horizontal; MEC aco- plado — e ...; ref. [65] - - - e -.-.- . . . . .	178



## Lista de Tabelas

4.1	erro da aproximação . . . . .	50
4.2	erro da aproximação . . . . .	51
4.3	convergência da força ; $\kappa r = .0001909$ . . . . .	56
4.4	discretização: semi-cilindro na superfície livre . . . . .	80
4.5	discretização: retângulo na superfície livre . . . . .	85
4.6	discretização: semicilindro na superfície de fundo . . . . .	88
4.7	discretização: retângulo na superfície de fundo . . . . .	92
5.1	Matriz de massa M for para semi-cilindros . . . . .	133
5.2	Matriz de restauração para semi-cilindros . . . . .	133
5.3	estrutura das matrizes $\mu$ e $\lambda$ . . . . .	137
5.4	estrutura de $[\mu]$ and $[\lambda]$ para cilindros gêmeos . . . . .	138
5.5	estrutura de $[\mu]$ e $[\lambda]$ para cilindros gêmeos . . . . .	147
7.1	discretização: seção retangular no fundo . . . . .	170
7.2	discretização: barra fixa ao fundo . . . . .	172
7.3	rigidez relativa . . . . .	174

# Resumo

Neste trabalho, a versão direta do Método de elementos de contorno, baseada na solução fundamental dos operadores de Laplace e Cauchy/Navier é utilizada para a modelagem de problemas de interação dinâmica de fluidos com estruturas, bem como da interação de sistemas solo-fluido-estrutura. No âmbito da interação fluido-estrutura trata-se o problema de difração do fluido incidindo sobre estruturas fixas. Determina-se o campo difratado bem como os esforços resultantes sobre as estruturas devido à incidência do fluido. A interação dinâmica entre dois ou mais corpos rígidos através do fluido também é estudada. Difração e radiação provenientes da interação de um ou mais corpos rígidos flutuantes interagindo entre si também são tratados. O trabalho desenvolve, ainda, uma metodologia para tratamento da interação de solos com estruturas flexíveis imersas em fluido. Todos os sistemas, solo, estrutura e fluido são modelados por Elementos de Contorno. As fontes de excitação podem ser ondas no fluido, ondas sísmicas no solo ou forças externas na estrutura. O solo é modelado como um semi-espaço viscoelástico. O fluido é considerado invíscido e incompressível. A análise supõe comportamento linear dos constituintes e comportamento dinâmico estacionário dos sistemas. Para os domínios (visco) elásticos admite-se o estado plano de deformações.

# Abstract

In the present work a direct version of the Boundary Element Method based on the fundamental solutions of the Laplace and Cauchy/Navier operators is formulated and implemented to model dynamic fluid-structure interaction as well as dynamic soil-fluid-structure phenomena. In the scope of fluid-structure interaction the diffraction of the fluid acting over fixed structures is analysed. The diffracted fluid field as well as the result external forces acting on the structures are given. The dynamic interaction of two or more fixed structures through the fluid is also studied. Diffraction and radiation phenomena related to the dynamic interaction of one and more rigid floating structures are treated. The present work also describes a methodology to model the interaction of soils with flexible structures submerged in fluid. All systems, soil, structure and fluid, are modeled by Boundary Elements. The excitation sources may be fluid waves, seismic soil waves or external forces acting on the structure. The soil is modeled as a visco-elastic half-space. The fluid is considered inviscid and incompressible. The analysis assumes linear behaviour of the constituents and steady-state response of the systems. For the (visco) elastic domains, soil and structure, plain strain deformation is adopted.

# Capítulo 1

## Introdução Geral

### 1.1 Métodos Numéricos

Na história do desenvolvimento científico e tecnológico, cientistas, engenheiros, matemáticos e físicos têm utilizado métodos numéricos como uma ferramenta importante nas mais diferentes áreas de pesquisa. Embora, por um longo tempo, os métodos analíticos tenham tido um maior desenvolvimento com resultados excelentes, eles sucumbiram diante de problemas práticos, porque condições de contorno complexas e geometrias irregulares não permitiam soluções analíticas. Mesmo problemas não lineares ou dependentes do tempo, cujas soluções fossem relativamente simples, tornavam-se difíceis de serem resolvidos por uma abordagem analítica. O rápido crescimento da ciência e da tecnologia associado ao grande desenvolvimento nas áreas de hardware e software permite, atualmente, que problemas complexos possam ser resolvidos de maneira precisa e eficiente. A possibilidade de se trabalhar com métodos numéricos, utilizando o computador, fez que os cientistas em geral aperfeiçoassem alguns métodos clássicos, como diferenças finitas, e estabelecessem novos métodos numéricos, como elementos finitos e elementos de contorno. Com isto, as soluções numéricas podem, agora, ser obtidas de forma precisa e eficiente mesmo para aqueles problemas com condições de contorno complexas, com geometrias irregulares, não lineares ou dependentes do tempo. Além disto, uma série de pacotes estão disponíveis no mercado e podem resolver problemas específicos e de interesse da ciência em geral.

## 1.2 Sistemas Acoplados

Muitos sistemas em Engenharia apresentam interações ou acoplamento entre estruturas, fluido e partes do solo. A simulação de cada um destes meios pode ser definido como um sistema. Em muitos casos, é possível supor que efeitos de um sistema sobre outro não ocorrem ao mesmo tempo para todos os propósitos práticos. Exemplo típico desse comportamento são forças hidrodinâmicas sobre grandes plataformas offshore. Neste caso, as forças sobre as estruturas podem ser calculadas assumindo que elas são rígidas, desprezando suas interações com o fluido. Para estruturas flexíveis, os sistemas representando sólido e fluido necessitam ser considerados ao mesmo tempo. Sistemas como estes são acoplados no sentido de que em qualquer tempo o comportamento de um influencia o do outro e vice-versa. Dois métodos de solução podem ser tentados quando se resolvem problemas acoplados:

- i. os problemas podem ser resolvidos juntos, aplicando-se considerações de compatibilidade e equilíbrio para ligar os diferentes sistemas; e
- ii. os problemas podem ser analisados separadamente e, então, condições de compatibilidade e equilíbrio são usadas para ligar os sistemas [1].

O método (i) é geralmente preferido, pois a principal característica de sistemas acoplados é que o processo seja concorrente. O método (ii) tem, entretanto, importantes aplicações, pois existem muitos códigos computacionais que permitem analisar uma parte do sistema completo mas não podem sintetizá-los num único procedimento geral. A classificação de um problema como acoplado ou desacoplado dependerá das características dos diferentes sistemas e de como eles interagem. Em geral, é muito difícil definir o que é um sistema acoplado. Consideremos, por exemplo, a estrutura offshore mostrada na figura 1.1. A estrutura está sujeita a ondas, ventos e correntes e em contato com o solo. Se os meios elásticos (solo - estrutura) são suficientemente rígidos, então, apenas as forças impostas pelo meio fluido serão levadas em conta na análise. Mesmo assim, tal interação ainda é complexa, pois as forças variam, dependendo do comprimento de onda e da dimensão da estrutura. A rigidez relativa entre os meios elásticos é que determinará se o acoplamento solo-estrutura será exigido na análise. O diagrama mostrado na figura 1.2 resume como pode ocorrer a interação solo-fluido-estrutura. Cada um dos sistemas a serem combinados para formar o acoplamento constitui por si só um problema de valor de contorno com uma equação governante mais condições de contorno que dependem das particularidades de cada meio. Em geral, a solução desses problemas de valor de contorno em termos analíticos é quase impossível; em vista disso, o que se tem feito é escrever cada problema

na forma matricial usando um método numérico adequado, tipo Elementos Finitos, Diferenças Finitas ou Elementos de Contorno [1].

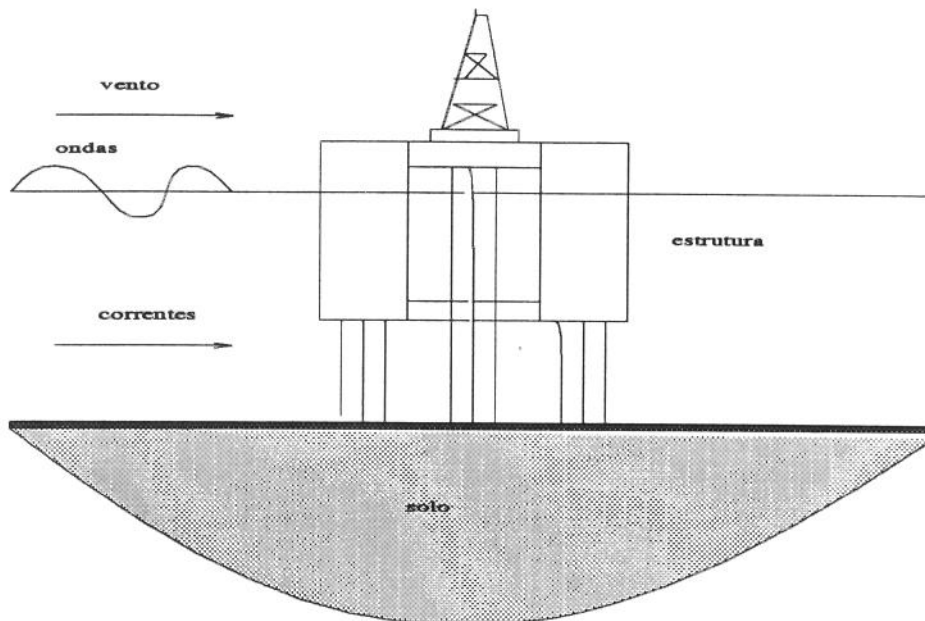


Figura 1.1: sistema acoplado;tension leg platform

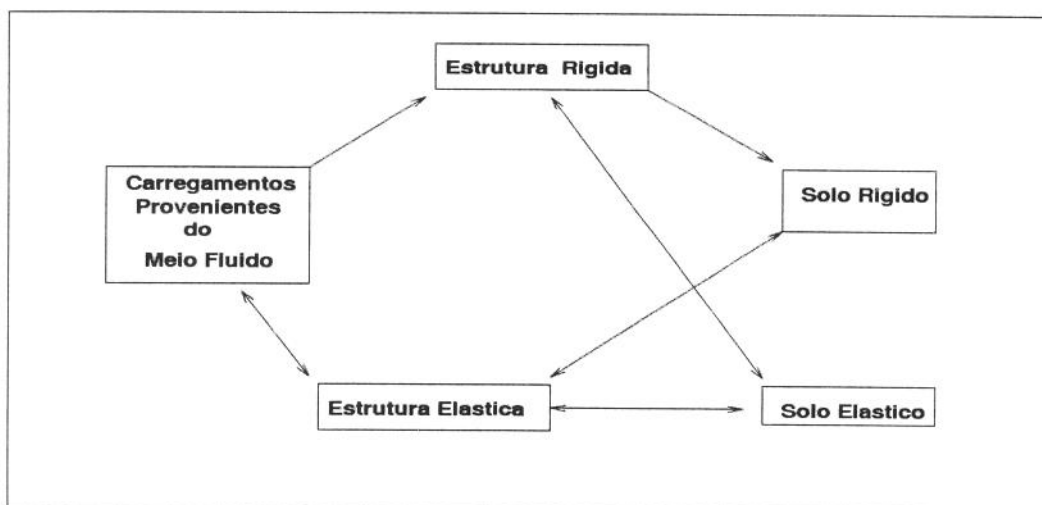


Figura 1.2: interação entre sistemas;↔ indica acoplamento

### 1.3 Problemas de Interação Fluido-Estrutura

Problemas de Interação Fluido-Estrutura podem ser divididos em problemas externos, tais como forças impostas por ondas sobre estruturas offshore, corpos flutuantes, ação do vento sobre edifícios, pontes, plataformas offshore etc. e problemas internos, como fluido contido em um recipiente. É possível, entretanto, que algum sistema não caia em nenhuma destas categorias. Por exemplo, uma barragem pode ser um sistema fechado, se todo o complexo de água for considerado, no entanto é um sistema aberto, se o conjunto de água é suposto estender-se apenas até uma certa distância da barragem com condições de contorno de radiação apropriados. Os problemas externos podem ser analisados dividindo-se o fluido em uma série de elementos e estendendo-se a malha suficientemente longe do corpo. Nenhum método numérico isolado pode trazer todas as vantagens e necessidades que a análise de um problema exige. No caso específico de interação dinâmica fluido-estrutura, além da natureza acoplada, o problema é geralmente definido sobre uma região do fluido de extensão infinita. Aí reside, talvez, a maior limitação dos métodos numéricos do tipo domínio, que têm como seu maior representante o Método dos Elementos Finitos. Estes métodos exigem a modelagem de todo o domínio (o que amplia o esforço computacional) e apresentam dificuldades em lidar com fronteiras distantes da interface em questão. Em contrapartida, o Método dos Elementos de Contorno modela sem dificuldades o comportamento dinâmico de domínios ilimitados, porque é baseado em soluções fundamentais que incorporam automaticamente a condição de radiação no infinito [2, 10].

### 1.4 Problemas de Interação Solo-Estrutura

É importante em muitas situações sermos capazes de prever o comportamento acoplado de grandes estruturas ou estruturas sujeitas a consideráveis carregamentos provenientes do meio ambiente. Estes tipos de problemas acoplados podem ser divididos em duas classes:

i. Sistemas Superfície-Estrutura: são sistemas representados por edifícios, barragens, plataformas offshore etc., que na maioria das vezes estão sujeitos a forças dinâmicas.

ii. Sistemas associando estruturas com túneis, refúgios subterrâneos, galerias etc. A principal dificuldade com estes tipos de problemas de interação é a característica do solo, que invariavelmente apresenta comportamento não linear. Em muitos casos, o solo pode ser convenientemente representado através do método dos elementos finitos. Embora este método permita

representar bem as propriedades do solo, ele tende a modelar de forma imprecisa a condição de radiação no infinito, causando com isto problemas numéricos relacionados com a geração da malha. Dada a importância da condição de radiação em dinâmica de solos, é fundamental considerar em qualquer análise numérica qual método seja capaz de melhor representá-lo. Nesse caso, o método dos elementos de contorno satisfaz essa condição e, em virtude disto, sua utilização para representar o solo tem se tornado um lugar comum [1].

## 1.5 Método dos Elementos de Contorno-MEC

Após a publicação do livro "The Boundary Element Method for Engineers", em 1978 (Brebbia), o MEC desenvolveu-se rapidamente e tem possibilitado que novas aplicações no campo da engenharia sejam estudadas. Esta terminologia está associada com o formalismo do Método dos Elementos Finitos através da utilização comum de diferentes funções de interpolação e variáveis que têm fornecido um meio consistente de combinar os dois métodos [3].

O MEC tem sua fundamentação teórica apoiada em equações integrais de contorno, soluções fundamentais de equações diferenciais e técnicas de resíduos ponderados. Atualmente é um procedimento que se define como uma ferramenta computacional bastante eficiente com aplicações em quase todos os ramos da Engenharia [5].

O método em questão apresenta algumas vantagens com relação aos métodos de domínio. Estas vantagens podem ser resumidas como seguem:

- i. exige apenas a discretização do contorno. Isto implica em que, os graus de liberdade do sistema sejam reduzidos, a geração da malha e a preparação dos dados de entrada sejam consideravelmente simplificados;
- ii. enquanto o Método dos Elementos Finitos apresenta dificuldades para modelar o comportamento dinâmico de domínios ilimitados, como por exemplo, o oceano, que é importante em problemas offshore, o MEC pode descrever com excelente precisão o comportamento dinâmico destes domínios;
- iii. o MEC é mais conveniente para calcular concentração de tensões e gradientes de temperaturas elevadas; e
- iv. o MEC apresenta a possibilidade de se usar elementos descontínuos.



Uma desvantagem do MEC é que a matriz do sistema por ele gerado é 'cheia', o que implica a necessidade de se procurar métodos eficientes para a solução do sistema. Ultimamente, tem-se observado que os seguintes aspectos numéricos têm sido amplamente estudados, como por exemplo, os que seguem [9]:

a. Novas Formulações

Além da formulação básica muitas outras têm sido propostas com intenções especiais. Chuhan e Chongmin [63], apresentaram o Método do Elementos de Contorno Infinito em 1986, para modelar problemas de domínio plano semi-infinito com condições de contorno irregulares. O método é baseado no comportamento assintótico da solução fundamental de Kelvin. Em 1990, eles estenderam a formulação do método para três dimensões. Recentemente, o Método dos Elementos de Contorno Adaptativo tem sido investigado. Este método utiliza a informação atual calculada com o objetivo de orientar o processo computacional [6].

b. Integração Numérica

Como o sistema de equações produzido pelo MEC envolve integrais que apresentam integrandos singulares, o tratamento delas tem sido importante em termos de precisão e eficiência numérica. Existem três tipos de integrais singulares, considerando Elementos de Contorno: integrais com singularidade fraca; integrais quase singulares; integrais com singularidade no sentido do valor principal de Cauchy; e integrais hipersingulares. Muitas técnicas numéricas têm sido propostas no sentido de calcular essas integrais. Dentre elas destacamos: Métodos semi-analíticos, em que é feita uma expansão assintótica da função núcleo, tal que a parte divergente da integral singular possa ser separada somando e subtraindo os correspondentes termos singulares, que são, então, calculados analiticamente; Método do movimento de corpo rígido e transformação degenerada, em que uma transformação de coordenadas degenerada é feita para calcular a integral com singularidade fraca e o movimento de corpo rígido é usado para obter indiretamente a integral com singularidade no sentido do valor principal de Cauchy; Métodos especiais tipo Gaussiano, utilizados para calcular integrais com singularidade fraca. Maiores detalhes e outras técnicas numéricas de integração podem ser encontradas em Huang e Cruse [7].

## 1.6 Objetivos do Presente Trabalho

Como já mencionamos, uma das vantagens do MEC é que ele modela com eficiência um meio ilimitado, pois, a aplicação da solução fundamental permite representar a condição de radiação no infinito. Este fato é bastante funcional principalmente quando se tem que selecionar um método numérico para modelar problemas de interação solo-fluido-estrutura. O acoplamento destes três meios introduz algumas dificuldades na implementação dos mesmos. Isto ocorre devido às características próprias de cada um, bem como, pelos diferentes operadores que os governam.

Na utilização de um determinado método numérico é preciso levar em consideração as vantagens que possam otimizar custo-eficiência. Por exemplo, recentes pesquisas em teoria de difração não linear enfatizam a importância da precisão do método: resultados mostram que soluções de segunda ordem só podem ser obtidas se a análise de primeira ordem for suficientemente precisa [8].

Neste trabalho, nosso objetivo principal é aplicar o MEC para realizar a modelagem de sistemas dinâmicos acoplados, descritos por operadores distintos, tais como os de Laplace e Navier. Ele representa uma síntese de formulação teórica e implementação computacional. Existem, porém, outros objetivos complementares, que são explicitados a seguir:

- a. Apresentar alguns conceitos básicos relacionados com a hidrodinâmica de estruturas offshore e analisar, do ponto de vista da teoria linear, aspectos como difração e radiação de ondas em água;
- b. analisar o desempenho do MEC do ponto de vista de sua eficiência e precisão quando aplicado a problemas de interação solo-fluido-estrutura. Isto é realizado comparando-o com resultados existentes na literatura; e
- c. fornecer subsídios necessários para que em etapas posteriores se possa estabelecer a formulação do MEC para problemas não lineares, bem como, desenvolver metodologias computacionais em duas e três dimensões que possam auxiliar na evolução dos sistemas de engenharia offshore, onde a interação dinâmica das estruturas com o meio que as circunda e sustenta venha ser importante.

## 1.7 Conteúdo do Trabalho

No capítulo 2, apresentamos uma breve revisão da mecânica de fluidos. Relacionamos o tensor de tensão às propriedades cinemáticas do fluido, fazendo uma analogia com a teoria da elasticidade, especificando as relações tensão-deformação. Esta revisão é importante por dois motivos: O primeiro está associado ao fato de que minha formação é preponderantemente matemática, sendo necessária a revisão das equações da hidrodinâmica como pressuposto de um trabalho cientificamente correto; e o segundo está ligado ao fato de que, embora estas equações possam ser facilmente deduzidas e compreendidas, o mesmo não acontece com as equações que descrevem as quatro possíveis condições de contorno presentes no problema de interação fluido-estrutura em domínios ilimitados. Portanto, além de deduzir as equações de Navier-Stokes que governam o problema de interação fluido-estrutura, analisamos também as condições de contorno para um fluido invíscido e irrotacional.

O capítulo 3 está relacionado com a teoria de ondas em água com ênfase na teoria linear. Nele, apresentamos o problema de valor de contorno em três dimensões, governado pela equação de Laplace, sujeito às condições de contorno cinemática e dinâmica na superfície livre, bem como a uma condição de contorno no fundo. De acordo com a teoria linear, deduzimos expressões para o potencial incidente, elevação da superfície livre, componentes da velocidade e aceleração das partículas de água e apresentamos simplificações nestas equações para fornecer limites aceitáveis com os quais podemos definir águas rasas e profundas. Finalmente, com base numa técnica de perturbação, fizemos uma análise breve sobre a importância da teoria de segunda ordem.

No capítulo 4, utilizamos o MEC para resolver problemas de difração de ondas. Descrevemos dois modelos matemáticos envolvendo os operadores de Helmholtz e Laplace, ambos em duas dimensões. Apresentamos, inicialmente, a formulação do MEC para a equação de Helmholtz, que governa o problema em plano horizontal. Tal formulação envolve núcleos contendo funções modificadas de Bessel. Depois, descrevemos a formulação do MEC para a equação de Laplace, que governa o problema em plano vertical. Analisamos para ambas as formulações aspectos numéricos como discretização da equação integral de contorno, funções de interpolação, solução fundamental e integração numérica. Desenvolvemos duas implementações numéricas distintas, associadas aos operadores bidimensionais referidos acima. Em cada uma delas, supomos que o potencial e sua derivada com relação à normal são constantes sobre cada elemento. Calculamos as forças provenientes da difração por uma estrutura fixa, e as comparamos com soluções

analíticas ou aproximadas existentes na literatura.

No capítulo 5, sistematizamos a teoria matemática que trata do movimento de um corpo rígido flutuando livremente ou descrevendo um movimento forçado sob a influência de forças externas. O objetivo é fornecer subsídios para o tratamento do problema de radiação de ondas. Apresentamos a formulação do problema de valor de contorno para  $m$  corpos flutuantes, bem como as equações do movimento para corpos rígidos. Fizemos uma implementação numérica, em duas dimensões, do problema de radiação de ondas, considerando a possibilidade da interação dinâmica entre vários corpos flutuantes. Supomos que os potenciais de radiação são constantes ao longo do contorno. Calculamos os coeficientes hidrodinâmicos e os comparamos com resultados existentes na literatura, para validar a implementação feita.

No capítulo 6, introduzimos a teoria básica e os aspectos numéricos do método dos elementos de contorno em elastodinâmica, com a finalidade de utilizá-los na análise dinâmica do acoplamento solo-fluido-estrutura. Apresentamos as equações básicas, a equação integral de contorno, as soluções fundamentais da elastodinâmica, alguns detalhes da implementação numérica do método e soluções para a propagação de ondas em um meio elástico.

No capítulo 7, utilizamos condições de compatibilidade e equilíbrio para ligar os diferentes sistemas. Cada problema, analisado separadamente, passa a fazer parte, agora, de um único procedimento geral.

## Capítulo 2

# Princípios Básicos da Mecânica dos Fluidos

### 2.1 A Característica dos Fluidos

Intuitivamente é possível fazer distinção entre fluidos e sólidos. Enquanto estes possuem uma forma definida, aqueles não, pois eles sempre assumem a forma do seu recipiente. Em geral, esta distinção está relacionada com o fato de que o espaçamento molecular bem como o domínio do movimento molecular no interior de um fluido é muito maior do que aquele no interior de um sólido. Isto explica a diferença básica entre fluidos e sólidos, normalmente expressa pela afirmação de que fluidos, quando em repouso, não suportam forças tangenciais ou de cisalhamento.

A natureza comporta duas espécies de fluidos: líquidos e gases. A principal diferença entre elas é que um gás ocupará completamente qualquer recipiente, enquanto que um líquido não. A consequência disto é que com o líquido existe usualmente uma superfície livre (interface) entre ele e o gás que o rodeia. Um gás não necessariamente tem uma interface com algum outro material. Além disso, a densidade média dos gases é normalmente bem menor que a dos líquidos. Isto ocorre devido ao maior espaçamento molecular dos gases, ou seja, em um líquido as moléculas estão muito mais próximas umas das outras do que as do gás. Em outras palavras, os gases são muito mais compressíveis que os líquidos. Assim, podemos supor, aproximadamente, que os líquidos são incompressíveis para muitos propósitos. Em um líquido o transporte de energia e da quantidade de movimento linear é uma consequência da interação contínua de forças intermoleculares, enquanto em um gás este mecanismo parece ocorrer devido às colisões moleculares aleatórias [11].

Apesar de apresentarem características diferentes, líquidos e gases, sob muitas circunstâncias, podem ser descritos pelo mesmo modelo matemático. Se considerarmos uma amostra suficientemente grande de moléculas, observamos que existe uma maior percepção do movimento macroscópico em detrimento do movimento molecular individual. Desse modo, verificamos que propriedades relacionadas ao movimento do fluido (pressão, velocidade etc.) variam continuamente com a posição e o tempo e nenhuma descontinuidade existe no interior do fluido. Este conceito de supor que o fluido pode ser interpretado em termos de quantidades de moléculas ao invés de moléculas individuais é chamado de hipótese do contínuo. Uma vez feita a suposição de que o fluido é contínuo com relação às suas propriedades, podemos descrevê-las utilizando funções contínuas e equações diferenciais na análise do processo. Dessa forma, aceitar a hipótese do contínuo significa abrir possibilidades para utilizar uma considerável gama de ferramentas matemáticas tanto na descrição como na solução de problemas envolvendo fluidos [14].

## 2.2 Derivada Material e Local

O movimento de um fluido pode ser descrito de duas formas, dependendo do que se considera como variáveis independentes. Estas formas são as descrições de Euler e Lagrange. Na abordagem Lagrangeana, focalizamos nossa atenção sobre trajetórias de partículas individuais no fluido, isto é, além dos parâmetros  $\mathbf{q}$ ,  $p$  e  $\rho$  que representam, respectivamente, a velocidade, a pressão e a massa, também as coordenadas das partículas de fluido  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são especificadas em termos do tempo  $t$  e algum vetor  $\mathbf{s}$  que identifica uma dada partícula de fluido. Deste modo,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{s}_k, t)$ ,  $p = p(\mathbf{s}_k, t)$ ,  $\rho = \rho(\mathbf{s}_k, t)$  e  $x_i = x_i(\mathbf{s}_k, t)$ . Por hipótese, supomos que as variáveis  $\mathbf{s}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , são coordenadas de uma partícula de fluido para algum tempo  $t$ , ou seja,  $\mathbf{s}_i = x_i(\mathbf{s}_k, t_0)$  [13, 14].

A representação Euleriana considera  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $t$  como variáveis independentes e parâmetros como velocidade  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ , pressão  $p$  e densidade  $\rho$  como variáveis dependentes, isto é,

$$q_1 = s_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$q_2 = s_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$q_3 = s_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$$

Uma desvantagem desta representação é que não se tem informação direta do movimento de uma dada partícula de fluido [13]. Na descrição Lagrangeana, a derivada parcial em relação ao tempo de alguma função representa sua taxa de variação para uma partícula de fluido conhecida. Em particular,  $q_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$  e  $\frac{\partial q_i}{\partial t}$  correspondem, respectivamente, à velocidade e aceleração da partícula. Por outro lado, na descrição Euleriana, a derivada  $\frac{\partial \mathbf{q}(x_k, t)}{\partial t}$  não representa a aceleração da partícula que no tempo  $t$  está na posição  $x_k$ , porque uma outra partícula estaria neste mesmo ponto no tempo  $t + \delta t$ . Isto se deve ao fato de que na representação Euleriana nós fixamos nossa atenção em um ponto no espaço e seguimos a variação temporal de  $\mathbf{q}$ ,  $p$ , etc, para este ponto.

Daremos maior ênfase à representação Euleriana por ser a mais comumente usada no estudo de fluidos [11].

Consideremos que uma certa partícula esteja no ponto  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , no tempo  $t$ . Esta mesma partícula estará no ponto  $x_k + \Delta x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  no tempo  $t + \Delta t$ . Portanto, a  $i$ -ésima componente do vetor aceleração é dada por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_i(x_k + \Delta x_k, t + \Delta t) - q_i(x_k, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial q_i}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Delta t}{\Delta t} \quad (2.1)$$

Sabendo que  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t} = q_k$ , obtemos:

$$a_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + q_k \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) q_i \quad (2.2)$$

Similarmente, podemos encontrar a taxa de variação em relação ao tempo de qualquer outro vetor ou quantidade escalar  $\bar{f}(x_1, x_2, x_3, t)$  ligada a uma dada partícula. Assim, de maneira geral, podemos escrever:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (2.3)$$

em que  $\frac{dx_1}{dt} = q_1$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = q_2$  e  $\frac{dx_3}{dt} = q_3$ . Esta derivada total  $\frac{d\bar{f}}{dt}$  é chamada de derivada material ou convectiva. Ela corresponde a uma taxa de variação local, representada por  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$ , mais uma variação convectiva representada pelos outros três termos da equação [12].

## 2.3 Propriedades Mecânicas dos Fluidos

Há dois tipos de forças que atuam em um fluido: forças de corpo e forças de superfície. As forças de corpo têm grandezas proporcionais ao volume ou à massa do elemento de fluido e são igualmente distribuídas neste elemento. O peso do fluido e a força centrífuga são exemplos de forças de corpo. A primeira é uma força produzida pela ação da gravidade sobre a massa e sempre atua para baixo, enquanto a segunda corresponde à força inercial presente quando um elemento de fluido se move em um caminho curvo. Como a gravidade, ela também atua sobre todo o elemento e é diretamente relacionada à sua massa. As forças de superfície não têm relação com a massa do fluido e atuam sobre a superfície do mesmo. Elas são constituídas de componentes normais e tangenciais à superfície em questão. A componente tangencial da força de superfície por unidade de área é chamada tensão de cisalhamento. As componentes da tensão podem ser descritas, em geral, pelo seguinte tensor de segunda ordem:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Se  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  representa o vetor normal unitário, a componente da tensão sobre um elemento de superfície na  $i$ -ésima direção é dada por:

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j \equiv \tau_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

É possível relacionar o tensor de tensão às propriedades cinemáticas do fluido. Isto pode ser feito em analogia com a teoria da elasticidade, especificando-se as relações tensão-deformação. Desta forma, o tensor de tensão total para um fluido incompressível é dado por:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

Na equação anterior, o primeiro termo do lado direito do sinal de igual representa o tensor de pressão enquanto o segundo termo corresponde ao tensor de tensão viscoso, proporcional ao coeficiente de viscosidade  $\mu$  [15].

## 2.4 Produto Escalar e Gradiente

Utilizando a regra do produto interno e o conceito de vetor gradiente  $\nabla$ , podemos reescrever a equação (2.3) em uma forma mais compacta. Assim, suponhamos que  $\bar{f}$  possa variar



em qualquer direção. Definimos, então, o gradiente de  $\bar{f}$  por:

$$\nabla \bar{f} = \mathbf{i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} = \nabla \bar{f} \quad (2.6)$$

Se considerarmos uma 'pequena' distância  $d\mathbf{r}$ , a variação em  $\bar{f}$  com relação a essa distância pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} d\bar{f} = \nabla \bar{f} \cdot d\mathbf{r} &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} \right) \cdot (\mathbf{i} dx_1 + \mathbf{j} dx_2 + \mathbf{k} dx_3) \\ &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

com  $dx_1 = q_1 dt$ ,  $dx_2 = q_2 dt$  e  $dx_3 = q_3 dt$ . Portanto,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = \mathbf{q}$  e podemos escrever a equação (2.7) na forma:

$$\nabla \bar{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla \bar{f} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{f} \quad (2.8)$$

A equação (2.3) pode ser escrita na forma compacta:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (2.9)$$

Podemos utilizar a equação anterior para obter expressões relacionadas com a velocidade  $\mathbf{q} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  e a aceleração  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ .

(i) Se  $\bar{f} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3, t)$ , então,

$$\mathbf{q} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (2.10)$$

(ii) Se  $\bar{f} = \mathbf{q}(x_1, x_2, x_3, t)$ , então,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Definindo o operador  $\mathbf{q} \cdot \nabla$  por

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \nabla &= (q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{k} \right) \\ &= q_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

temos

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = x_1 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_3} \quad (2.13)$$

Utilizando a expressão anterior é possível demonstrar que [16]:

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = \nabla \left( \frac{\mathbf{q}^2}{2} \right) - \mathbf{q} \times (\nabla \times \mathbf{q}) \quad (2.14)$$

**teorema 1 (Teorema do Transporte)** *Seja  $I(t)$  uma integral de volume da forma*

$$I(t) = \int_{V(t)} \bar{f}(\mathbf{r}, t) dV \quad (2.15)$$

Então,

$$\frac{dI}{dt} = \int_V \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} dV + \int_S \bar{f} \cdot q_n dS \quad (2.16)$$

em que  $\bar{f}$  é uma função escalar, diferenciável, que depende da posição  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  e do tempo  $t$ ,  $V$  é um volume prescrito que também pode variar com o tempo e  $q_n$  denota a velocidade normal da superfície  $S$ .

Se a superfície  $S$  se move com a mesma velocidade normal que o fluido, isto é,  $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_i n_i$ , segue como consequência de (2.16) e do teorema da divergência que [15]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \bar{f} dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{f} q_i)}{\partial x_i} \right] dV \quad (2.17)$$

## 2.5 Equação da Continuidade

Seja  $V(t)$  o volume de um grupo de partículas de fluido e  $\rho$  a densidade do fluido. Se a massa total de fluido neste volume é dada pela integral

$$\int_{V(t)} \rho dV \quad (2.18)$$

então, a conservação da massa exige que esta integral seja constante, isto é,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (2.19)$$

Considerando a equação (2.17) podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho q_i)}{\partial x_i} \right] dV = 0 \quad (2.20)$$

Se esta integral for avaliada para um tempo fixo e se o volume  $V$  for composto de um grupo arbitrário de partículas de fluido, então a equação (2.20) pode ser substituída pela equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho q_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.21)$$

que representa a equação da continuidade. Esta equação pode ser simplificada supondo a hipótese de que o fluido é incompressível. Neste caso, ela admite a forma

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.22)$$

## 2.6 Quantidade de Movimento Linear

A equação do movimento de um fluido pode ser obtida a partir da segunda lei de Newton, que afirma que a taxa de variação em relação ao tempo da quantidade de movimento linear de um volume  $V(t)$  de um grupo de partículas de fluido é igual à força resultante atuando sobre este volume, isto é,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{q} dV = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{F} dV \quad (2.23)$$

em que  $\rho \mathbf{q}$  é a quantidade de movimento linear. A equação anterior pode ser posta numa forma que envolva apenas integrais de volume. De fato, aplicando o teorema da divergência na segunda integral da equação (2.23) e reorganizando os termos, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{q} dV = \int_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}] dV \quad (2.24)$$

Em notação indicial, (2.24) pode ser reescrita:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho q_i dV = \int_V \left[ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right] dV \quad (2.25)$$

Aplicando o teorema do transporte à esta última equação, temos:

$$\int_V \left[ \frac{\partial(\rho q_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho q_i q_j)}{\partial x_j} \right] dV = \int_V \left[ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right] dV \quad (2.26)$$

Supondo que o volume  $V$  é arbitrário o integrando em (2.26) deve anular-se

$$\frac{\partial(\rho q_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho q_i q_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad (2.27)$$

Utilizando a regra da cadeia e a equação da continuidade (2.22), a expressão anterior pode ser escrita como

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + q_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} F_i \quad (2.28)$$

Em termos vetoriais

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é conhecida como equação de Euler [14].

## 2.7 Equações de Navier-Stokes

Derivando o tensor de tensão (2.5) e substituindo-o na equação (2.29), obtemos

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + q_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_i} + F_i \right) \quad (2.30)$$

Como, o fluido é incompressível, o terceiro termo, entre parênteses, da equação anterior, se anula. Assim, ela simplifica para:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + q_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\rho} F_i \quad (2.31)$$

em que  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  é o coeficiente de viscosidade cinemática [15]. A expressão (2.30) representa as equações de Navier-Stokes, que em termos vetoriais assume a forma:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \quad (2.32)$$

O sistema definido por (2.32) mais a equação da continuidade governa o movimento de um fluido viscoso sujeito apenas à restrição de densidade constante.

## 2.8 Equação de Bernoulli

Definimos escoamento potencial como um campo de escoamento onde a velocidade  $\mathbf{q}$  de uma partícula é o gradiente do potencial total de velocidade  $\phi^T$ , isto é:

$$\mathbf{q} = \nabla \phi^T \quad (2.33)$$

Um escoamento é rotacional se cada partícula de fluido descreve uma rotação acrescida de uma translação e deformação pura. Introduzindo um vetor rotação  $\mathbf{W} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{q}$ , então as três componentes deste vetor são dadas por

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_3} - \frac{\partial q_3}{\partial x_1}\right) \\ W_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right) \\ W_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_3}{\partial x_2} - \frac{\partial q_2}{\partial x_3}\right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Se  $W_1 = W_2 = W_3 = 0$  o movimento é chamado irrotacional. A ausência de rotação, entretanto, não implica que o fluido seja invíscido, a não ser na região do escoamento onde  $\mathbf{W} = 0$  [15]. A equação (2.33) nos diz que  $q_1 = \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}$ ,  $q_2 = \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}$  e  $q_3 = \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}$ . A inserção destes valores na equação (2.34) mostra que  $W_1 = W_2 = W_3 = 0$ . Isto significa que a existência de um potencial implica em que o movimento é irrotacional. Equivalentemente, um escoamento irrotacional pode ser descrito por uma função potencial  $\phi^T$ . Vamos supor, por hipótese, que o fluido é incompressível, invíscido, irrotacional e que o escoamento é em estado estacionário. Sob estas condições e considerando  $\mathbf{q} = \nabla \phi^T$  a equação de Navier-Stokes simplifica para:

$$\frac{1}{2}\nabla \left[ \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}\right)^2 \right] + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla e = 0 \quad (2.35)$$

em que a força externa  $\mathbf{F}$  é um potencial, isto é,  $\mathbf{F} = \nabla e$ . Integrando a equação (2.35) com relação às coordenadas espaciais obtemos a equação de Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + p - e = \text{constante} \quad (2.36)$$

A equação (2.36) expressa a conservação da energia para um fluido invíscido [11].

## 2.9 Condições de Contorno

Vamos supor, que o fluido ocupe uma região  $R$  do espaço  $xyz$  limitada por uma superfície livre  $\Gamma_f$  e por um fundo correspondente a uma superfície fixa  $\Gamma_b$  que o separam de algum outro meio. A superfície livre, neste caso, corresponde à interface ar-água. Consideremos ainda o contorno correspondente à superfície molhada de um sólido estacionário  $\Gamma_e$ . Estas superfícies têm a propriedade comum de que se uma partícula está sobre alguma delas, ali

permanece. Esta propriedade é uma consequência da suposição básica em mecânica do contínuo de que o movimento pode ser descrito como uma deformação topológica contínua em  $t$ . Assim, seja  $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$  a equação destas superfícies, em que  $\eta$  é a altura de  $\Gamma_f$  medida a partir de  $z = 0$ . A derivada total  $\frac{dF}{dt}$  é dada por:

$$\frac{dF}{dt} = q_1 \frac{\partial F}{\partial x} + q_2 \frac{\partial F}{\partial y} + q_3 \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = \mathbf{q} \cdot \nabla F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2.37)$$

com  $\nabla F$  normal à superfície considerada. Seja  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário a  $F$  no ponto  $(x, y, z)$ . Então,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F(x, y, z, t)}{|\nabla F(x, y, z, t)|} \quad (2.38)$$

em que

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (2.39)$$

De (2.38) concluímos que

$$\nabla F = \mathbf{n} \cdot |\nabla F| \quad (2.40)$$

Seja  $\mathbf{q} = \nabla \phi^T$ . Substituindo esta expressão na equação (2.37) obtemos,

$$\nabla \phi^T \cdot \nabla F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

Considerando a equação (2.40), temos:

$$\nabla \phi^T \cdot \mathbf{n} \cdot |\nabla F| = -\frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.42)$$

Mas,  $\nabla \phi^T \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}}$ . Assim,

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad (2.43)$$

Logo,

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = q_n \quad (2.44)$$

em que  $q_n$  denota a velocidade normal à superfície de contorno, isto é, a velocidade comum do fluido e da superfície de contorno na direção da normal [17]. A equação (2.41) pode ser colocada na forma:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad z = \eta \quad (2.45)$$

Esta equação é conhecida como condição de contorno cinemática e significa que a velocidade das partículas com relação à normal permanece contínua ao passar através de um contorno físico.

No caso em que o contorno é a superfície molhada de uma estrutura fixa  $\Gamma_e$ ,  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  e a equação (2.44) admite a forma:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad em \quad \Gamma_e \quad (2.46)$$

Sobre a superfície de fundo  $\Gamma_b$  a uma profundidade  $H(x, y)$ , a equação da superfície torna-se  $z + H(x, y) = 0$  e a equação (2.45) com  $\eta = -H$  pode ser escrita

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial z} = -\frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad em \quad \Gamma_b \quad (2.47)$$

A equação de Bernoulli, com  $e = -\rho g z$ , pode ser posta na forma alternativa:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi^T|^2 + \frac{p}{\rho} + g z = 0 \quad (2.48)$$

Na interface ar-água, tanto  $\eta$  como  $\phi^T$  são desconhecidos e torna-se necessário acrescentar uma condição de contorno dinâmica relativa à forças. Considerando que a pressão atmosférica  $p_a$  acima da superfície livre deve ser igual à pressão abaixo da mesma, a equação (2.48) pode ser reescrita para  $z = \eta$  na forma

$$\frac{1}{2} |\nabla \phi^T|^2 + g \eta + \frac{\partial \phi^T}{\partial t} + \frac{p_a}{\rho} = 0 \quad (2.49)$$

A expressão anterior é a condição de contorno dinâmica que nos assegura que a pressão permanece contínua ao passar através da superfície. As duas condições (2.45) e (2.49) podem ser combinadas em uma em termos de  $\phi^T$ . De fato, calculando a derivada total da equação (2.49), temos

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \right) \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^2 + g \eta + \frac{p_a}{\rho} \right] = 0 \quad (2.50)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_a}{\rho} \right) + \left[ \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}^2 + g \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi^T \cdot \nabla \eta \right) \right] = 0 \quad (2.51)$$

Usando a equação (2.45), temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_a}{\rho} \right) + \left[ \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}^2 + g \frac{\partial \phi^T}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.52)$$

Na hipótese de  $p_a = const$  a equação (2.52) torna-se:

$$\frac{\partial^2 \phi^T}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}^2 + g \frac{\partial \phi^T}{\partial z} = 0 \quad (2.53)$$

Observemos que, além dos termos não-lineares que aparecem na expressão anterior, a posição da superfície livre é também uma incógnita para o problema. Assim, uma teoria analítica para problemas de ondas em água é uma tarefa quase impossível.

Neste capítulo, apresentamos algumas equações básicas da mecânica de fluidos procurando enfatizar aquelas cujas interpretações físicas têm relação com a natureza do movimento de um fluido. Dentre elas, destacamos:

- a. o sistema constituído pelas equações de Navier-Stokes (2.31) e a equação da continuidade (2.22), que governam o movimento de um fluido viscoso, sujeito apenas à restrição de densidade constante;
- b. as equações de Navier-Stokes (2.35) simplificadas pelas hipóteses de que o fluido é incompressível, invíscido e irrotacional;
- c. a equação de Bernoulli (2.36) que expressa a conservação de energia para um fluido invíscido;
- d. as condições de contorno cinemática (2.45) e dinâmica (2.49) sobre uma superfície livre, que expressam, respectivamente, a continuidade da velocidade e da pressão sobre esta superfície.



# Capítulo 3

## Teorias de Ondas

### 3.1 Introdução

Fenômenos como vento, correntes, marés e ondas de gravidade associados com o meio ambiente oceânico influenciam diretamente a resposta de estruturas offshore. De fato, a maior parte da excitação experimentada por tais estruturas é imposta por estes fenômenos através do meio ambiente. Para calcular os efeitos produzidos pela ação de ondas sobre componentes de uma estrutura offshore devemos selecionar uma teoria de onda conveniente. Embora as ondas oceânicas sejam naturalmente aleatórias, muitas teorias descrevem seus perfis como regulares e periódicos; é desta forma que vamos considerá-las neste trabalho. As diferentes teorias de ondas podem ser obtidas por uma técnica de perturbação que consiste em introduzir, nas equações que modelam o problema, um parâmetro  $\epsilon$ . Então, a solução é expandida em uma série de potências e inserida nas equações. Em geral, o parâmetro de perturbação  $\epsilon$  é definido em termos da amplitude da onda como [18]:

$$\epsilon = \kappa A \tag{3.1}$$

em que  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda,  $\lambda$  o comprimento de onda e  $A$  a amplitude da onda. No tratamento de ondas em águas a questão mais comum é encontrar o potencial de velocidade  $\phi^T$  que pertence à região ( $\Omega_f$ ) do fluido. Suponhamos que o fluido seja limitado por uma superfície livre  $\Gamma_f$ , por uma superfície de fundo  $\Gamma_b$  e não tenha limites nas direções  $x$  e  $y$  (figura 3.1).

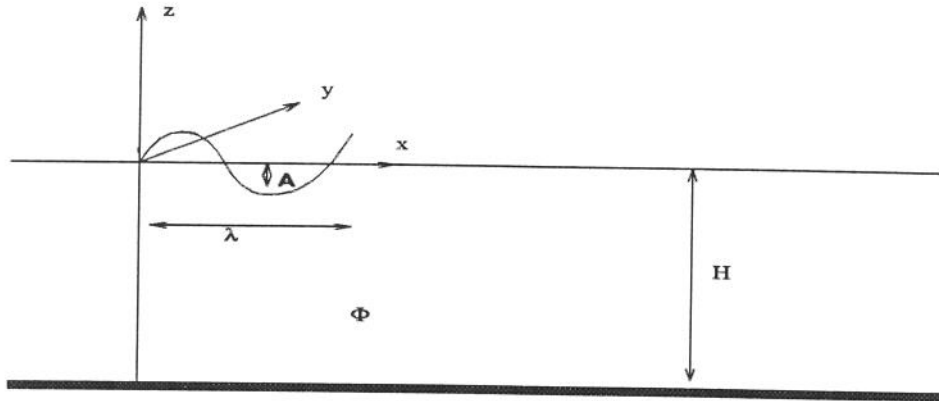


Figura 3.1: esboço para o potencial de velocidade

As seguintes hipóteses são supostas:

- i. água de densidade uniforme e profundidade constante;
- ii. tensões de superfície e viscosidade não são levados em consideração;
- iii. o movimento das ondas é irrotacional.

Sob estas condições, a equação da continuidade (2.22) dá origem à equação diferencial básica do movimento de ondas, isto é:

$$\nabla^2 \phi^T = 0 \quad (3.2)$$

Assim, calcular o potencial de velocidade  $\phi^T$  implica em resolver esta equação, sujeita às seguintes condições de contorno sobre as superfícies livre (2.45 - 2.49) e de fundo (2.47):

- i. condição cinemática na superfície livre ( $z = \eta$ )

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi^T}{\partial z} \quad (3.3)$$

- ii. condição dinâmica na superfície livre ( $z = \eta$ )

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta + \frac{p_a}{\rho} = 0 \quad (3.4)$$

- i. superfície de fundo ( $z = -H$ )

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

A condição de contorno (3.5) supõe que a profundidade  $H(x,z)$  é constante. Fisicamente, ela afirma que a componente vertical da velocidade no fundo é zero.

## 3.2 Técnica de Perturbação

Sejam

$$\phi^T = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \phi_n^T \quad (3.6)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \eta_n \quad (3.7)$$

então, as equações (3.2) e (3.5) podem ser reescritas, respectivamente, nas formas [19]:

$$\epsilon \nabla^2 \phi_1^T + \epsilon^2 \nabla^2 \phi_2^T + \dots = 0 \quad (3.8)$$

$$\epsilon \frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2^T}{\partial z} + \dots = 0 \quad (3.9)$$

Para as condições cinemática e dinâmica vamos usar a estratégia de reescrevê-las por partes, isto é:

i. condição cinemática:

primeira ordem:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

segunda ordem:

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial y} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2^T}{\partial z} \quad (3.11)$$

terceira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_3}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2^T}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \\ + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial y} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2^T}{\partial y} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = \frac{\partial \phi_3^T}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.12)$$

⋮

ii. condição dinâmica:

primeira ordem:

$$\frac{\partial \phi_1^T}{\partial t} + g \eta_1 = 0 \quad (3.13)$$

segunda ordem:

$$\frac{\partial \phi_2^T}{\partial t} + g \eta_2 + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi_1^T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1^T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} \right)^2 \right) = 0 \quad (3.14)$$

terceira ordem:

$$\frac{\partial \phi_3^T}{\partial t} + g \eta_3 + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^T}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial y} \frac{\partial \phi_2^T}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} \frac{\partial \phi_2^T}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

⋮

Adicionando as expressões (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13), (3.14), (3.15), obtemos, respectivamente, as formas em série das condições de contorno cinemática e dinâmica, em que nesta última devemos acrescentar o termo  $\frac{p_a}{\rho}$  para torná-la equivalente à equação (3.4).

### 3.3 Teoria Linear

Esta teoria, desenvolvida originariamente por G.B.Airy (1845) [18], é, talvez, a ferramenta mais simples e útil no tratamento de problemas de ondas em águas. Ela parte da suposição de que a amplitude da onda é pequena comparada ao comprimento de onda, isto é, o parâmetro  $\epsilon$  definido na seção 3.1 é suficientemente pequeno. Tal hipótese permite que os termos de ordem maior ou igual a dois possam ser desprezados de forma que o problema de valor de contorno definido na seção 3.2 seja redefinido como:

$$\nabla^2 \phi_1^T = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.16)$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

i. no fundo

$$\frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -H \quad (3.17)$$

ii. condição cinemática

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} \quad \text{em } z = 0 \quad (3.18)$$

iii. condição dinâmica

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\eta_1 = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (3.19)$$

Observemos que a condição de linearidade ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) implica em que as condições de contorno sobre a superfície livre sejam satisfeitas no nível médio da água, ao invés de na oscilação da superfície livre [18]. É possível obter a altura da superfície livre a partir da condição de contorno dinâmica:

$$\eta_1 = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi_1^T}{\partial t} \right) \quad (3.20)$$

As equações (3.18) e (3.19) podem ser combinadas numa única equação:

$$\frac{\partial^2 \phi_1^T}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

que é satisfeita para  $z = 0$ .

A equação (3.21) é uma equação diferencial parcial elítica cujo domínio é o conjunto limitado pelos planos horizontais  $z = 0$  e  $z = -H$  e com nenhum limite nas direções  $x$  e  $y$ . A solução para  $\phi_1^T$  é, portanto, uma função harmônica de  $x$  e  $y$  da forma [20, 21]:

$$\phi_1^T(x, y) = P(z)e^{i[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]} \quad (3.22)$$

em que  $\omega$  é a frequência,  $\kappa$  o número de onda e  $\theta$  o ângulo de incidência da onda com relação ao eixo- $x$ .

Substituindo (3.22) em (3.16) e dividindo pelo termo exponencial obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - \kappa^2 P = 0 \quad (3.23)$$

Esta equação diferencial tem a solução

$$P = ae^{\kappa z} + be^{-\kappa z} \quad (3.24)$$

Substituindo em (3.22), temos:

$$\phi_1^T(x, y) = (ae^{\kappa z} + be^{-\kappa z})e^{i[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]} \quad (3.25)$$

Derivando (3.25) em relação a  $z$  e aplicando a condição de contorno para  $z = -H$ , obtemos:

$$\frac{\partial \phi_1^T}{\partial z} = (\kappa ae^{-\kappa H} - \kappa be^{\kappa H})e^{i[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]} \quad (3.26)$$

ou

$$\kappa a e^{-\kappa H} - \kappa b e^{\kappa H} = 0 \quad (3.27)$$

Portanto,

$$b = \frac{a}{e^{\kappa H}} e^{-\kappa H} \quad (3.28)$$

Substituindo esta última expressão em (3.26), obtemos

$$\phi_1^T(x, y) = \frac{2a}{e^{\kappa H}} \left( \frac{e^{\kappa(z+H)} + e^{-\kappa(z+H)}}{2} \right) e^{i[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]} \quad (3.29)$$

ou

$$\phi_1^T(x, y) = \frac{2a}{e^{\kappa H}} \cosh(\kappa(z + H)) e^{i[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]} \quad (3.30)$$

em que a constante  $a$  deve ser determinada. Para isto, derivamos (3.30) em relação ao tempo e substituímos o resultado na equação  $\eta_1 = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi_1^T}{\partial t} \right)_{z=0}$ .

$$\eta_1 = \frac{2a\omega}{g e^{\kappa H}} \cosh[\kappa H] e^{i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} e^{-i\omega t} \quad (3.31)$$

Seja  $A = \frac{2a\omega}{g e^{\kappa H}} \cosh[\kappa H]$ . Então,

$$a = \frac{A g e^{\kappa H}}{2\omega \cosh[\kappa H]} = \frac{-i g A e^{\kappa H}}{2\omega \cosh[\kappa H]} \quad (3.32)$$

Substituindo em (3.30), obtemos

$$\phi_1^T = \frac{-i g A \cosh[\kappa(z + H)]}{\omega \cosh[\kappa H]} e^{i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} e^{-i\omega t} \quad (3.33)$$

em que  $A$  pode ser visto como a amplitude da onda. A elevação da superfície assume, então, a forma:

$$\eta_1 = -A e^{i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} e^{-i\omega t} \quad (3.34)$$

Substituindo o valor de  $\phi_1^T$  dado em (3.33) na equação (3.21), obtemos a relação:

$$\omega^2 = g \kappa \tanh[\kappa H] \quad (3.35)$$

Esta equação é conhecida como relação de dispersão e estabelece uma dependência entre o número de onda  $\kappa$  e a frequência  $\omega$ . O potencial de velocidade e a elevação da superfície livre definidos, respectivamente, pelas equações (3.33) e (3.34) podem ser escritos considerando apenas as partes reais dos termos complexos.

$$\phi_1^T = \frac{gA \cosh[\kappa(z + H)]}{\omega \cosh[\kappa H]} \sin[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t] \quad (3.36)$$

$$\eta_1 = -A \cos[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t] \quad (3.37)$$

Certas simplificações em expressões anteriores podem ser feitas dependendo da grandeza relativa entre a profundidade da água e o comprimento de onda. As simplificações são baseadas no comportamento assintótico da função  $\tanh$ . De fato, para um argumento  $x$  suficientemente grande, digamos  $x > \pi$

$$\tanh x \approx 1 \quad (3.38)$$

Para  $x$  suficientemente pequeno, digamos  $x < \frac{\pi}{10}$

$$\tanh x \approx x \quad (3.39)$$

Com base nestas informações os limites aceitáveis para se definir "água rasa" e "água profunda" são dados por [18]:

### 1. Águas Profundas

$$\kappa H > \pi \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} H > \pi \longrightarrow \frac{H}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (3.40)$$

A relação de dispersão simplifica para

$$\omega^2 = g\kappa \quad (3.41)$$

e o comprimento de onda é dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = \frac{2\pi g T^2}{4\pi^2} = \frac{g T^2}{2\pi} \quad (3.42)$$

em que  $T$  é o período da onda.

### 2. Águas Rasas

$$\kappa H < \frac{\pi}{10} \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} H < \frac{\pi}{10} \longrightarrow \frac{H}{\lambda} < \frac{1}{20} \quad (3.43)$$



A relação de dispersão simplifica para

$$\omega^2 = g\kappa^2 H \quad (3.44)$$

e o comprimento de onda assume a forma:

$$\lambda^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa^2} = gHT^2 \longrightarrow \lambda = T\sqrt{gH} \quad (3.45)$$

Considerando que a velocidade de uma onda progressiva é dada por

$$c = \frac{\omega}{\kappa} \quad (3.46)$$

as seguintes relações entre o período, a velocidade e o comprimento de onda podem ser obtidas para águas profundas utilizando as equações (3.41) e (3.42):

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

$$c = \frac{gT}{2\pi} \quad (3.47)$$

Analogamente, utilizando as equações (3.44) e (3.45), obtemos para águas rasas:

$$c = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{\lambda}{\sqrt{gH}} \quad (3.48)$$

As componentes da velocidade das partículas de fluido são obtidas diferenciando a equação (3.36) com relação às direções  $x$  e  $z$ , isto é:

$$q_1 = A \cos \theta \frac{g\kappa}{\omega} F_1 \cos[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]$$

$$q_3 = A \frac{g\kappa}{\omega} F_2 \sin[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t] \quad (3.49)$$

em que

$$F_1 = \frac{\cosh[\kappa(z + H)]}{\cosh[\kappa H]}$$

$$F_2 = \frac{\sinh[\kappa(z + H)]}{\cosh[\kappa H]} \quad (3.50)$$

Da mesma forma as acelerações das partículas são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1}{\partial t} &= A \cos \theta g \kappa F_1 \sin[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t] \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} &= -A g \kappa F_2 \cos[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]\end{aligned}\quad (3.51)$$

A pressão dinâmica é definida em termos do potencial de velocidade por:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi_1^T}{\partial t} - \rho g z \quad (3.52)$$

Assim,

$$p = \rho g A F_1 \cos[\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t] \quad (3.53)$$

### 3.4 Ondas não-Lineares

Existem muitas situações físicas em que a teoria linear não é adequada para descrever precisamente a resposta de estruturas offshore submetidas a forças impostas pelo meio ambiente. Nestes casos, as ondas são não-simétricas sobre a superfície livre, com cristas íngremes e estreitas, de tal modo que a forma senoidal das ondas descritas pela teoria linear não correspondem a esta situação [23]. O meio mais comum de resolver os problemas de interação onda-estrutura não-linear é usar uma análise de perturbação considerando a amplitude da onda como um parâmetro 'pequeno' (seção 3.2). Desta forma, a solução de primeira ordem é a que já descrevemos na seção 3.3, isto é, as condições de contorno sobre a superfície livre e sobre a superfície da estrutura são satisfeitas na posição média destas superfícies. Além disso, a pressão e a velocidade das partículas de fluido sobre a superfície livre são linearizadas. Na teoria de segunda ordem nós mantemos, na expansão, todos os termos que são ou lineares com a amplitude da onda ou proporcionais ao quadrado da amplitude da onda [22]. Este último termo torna a onda assimétrica sobre o nível da água parada e amplia a grandeza da velocidade das partículas do fluido [23]. A solução do problema de segunda ordem fornece forças médias e forças que oscilam com diferença e soma de frequências. Por diferença e soma de frequências queremos dizer a diferença ou a soma de duas frequências usadas para descrever o espectro da onda [22]. As forças médias e as que oscilam com diferença e soma de frequências são de importância em vários contextos que envolvem estruturas offshore. Por exemplo, nos modelos de sistemas atracados, no comportamento de submarinos próximos à superfície livre e na avaliação de respostas em torno das frequências de ressonância de um sistema Tension Leg Platform (TLP) [24]. Nos últimos anos, muito esforço tem sido feito

para a solução do problema de difração de ondas de segunda ordem. Embora, para geometrias simples, o problema de valor de contorno aparente ser de fácil resolução, ele é matematicamente complicado em virtude das dificuldades em se tratar corretamente as condições de contorno de segunda ordem sobre a superfície livre. Além disso, é difícil de expressar matematicamente a condição de radiação não-linear e a solução de segunda ordem deve, ainda, contemplar as interações onda-estrutura que acarretam o espalhamento da onda plana incidente que, por sua vez, provocam interações adicionais onda-onda entre as ondas incidentes e espalhadas [25, 26].

# Capítulo 4

## Difração de Ondas

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é investigar a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para calcular forças impostas por ondas sobre estruturas offshore de forma arbitrária. As validações e aplicações são em duas dimensões e os cálculos executados no domínio da frequência utilizando a teoria linear.

O problema do carregamento hidrodinâmico sobre uma estrutura fixa tem sido objeto de interesse de muitos pesquisadores. Isto se deve ao fato de que a dinâmica destas estruturas é muito importante em relação à produção de óleo e gás em campos offshore. O desenvolvimento da teoria de difração de ondas em água tem sido mostrado por importantes trabalhos. MacCamy e Fuchs, 1954, deduziram uma solução analítica para o cálculo da força horizontal sobre um cilindro circular sujeito as ondas lineares. Goda e Yoshimura [32], desenvolveram um método analítico para calcular forças sobre um cilindro de secção transversal elítica. Mogridge e Jamieson [33], desenvolveram um método teórico aproximado que permite estimar forças impostas por ondas em caixões de forma quadrada. Em 1978, em nota técnica, Rahman [42], apresentou um método analítico aproximado para o cálculo de forças sobre caixões retangulares fixos verticalmente no fundo do mar. São as técnicas numéricas, entretanto, que têm prevalecido para a solução dos problemas de difração. Três grandes classes de métodos numéricos desenvolveram-se extensivamente: Método de Equações Integrais, Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno. No campo da engenharia oceânica, o Método das Equações Integrais, também conhecido como Método da Função de Green ou da Distribuição de Fontes tem sido o

mais adotado (por exemplo, [34, 38, 40, 41, 43, 45, 46, 48, 49]). O procedimento típico deste método é usar uma solução singular conhecida como função de Green que satisfaz a equação que governa o problema e as condições de contorno, exceto aquela sobre a superfície do corpo. Aplicando as condições de contorno sobre a superfície do corpo obtém-se uma equação integral que pode ser resolvida numericamente. Tal procedimento geralmente implicará na obtenção de matrizes complexas e não simétricas envolvendo a função de Green e sua derivada com relação à normal. A maior desvantagem deste método é que ele é suscetível ao fenômeno de frequências irregulares, em que para tais frequências o procedimento numérico se torna mal-condicionado [54].

A segunda classe de métodos numéricos que tem sido aplicado a problemas de difração é o Método dos Elementos Finitos (por exemplo, [44, 47]). A maior dificuldade do método é o modelamento da extensão infinita do fluido. Bettess e Zienkiewicz [44] sugeriram a utilização de elementos infinitos. Uma abordagem mais interessante foi proposta por Zienkiewicz, Bettess e Kelly [48], no sentido de uma formulação acoplada entre o Método dos Elementos Finitos e o da Equação Integral [54].

A terceira classe de métodos numéricos corresponde ao Método dos Elementos de Contorno, utilizado neste trabalho (por exemplo, [35, 36, 37, 39]). Este método, que pode ser classificado na categoria de Métodos de Equação Integral, utiliza a solução fundamental da equação que governa o problema de valor de contorno, ao invés da função de Green. A grande vantagem do método na solução de problemas hidrodinâmicos é que ele satisfaz com facilidade a condição de contorno de radiação na região infinita do fluido. Nas referências citadas que utilizam o MEC, os autores empregam a teoria de onda linear com a suposição adicional de ondas harmônicas. Isto significa que as condições de contorno são linearizadas e aplicadas na superfície livre média do fluido.

## 4.2 Modelo Matemático

Consideremos o domínio  $\Omega$  do fluido descrito na figura 4.1, limitado por um contorno  $\Gamma$  consistindo de uma superfície livre  $\Gamma_f$ , uma superfície de fundo  $\Gamma_b$ , contornos artificiais  $\Gamma_r$  para trancar o domínio do fluido na direção horizontal e a superfície  $\Gamma_e$  de uma estrutura fixa imersa no fluido.

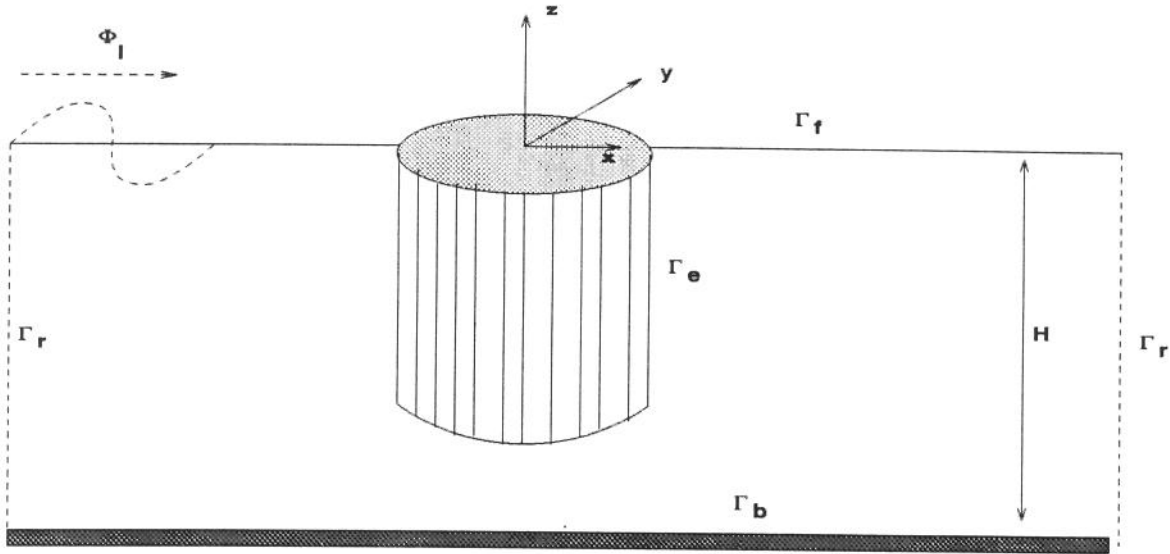


Figura 4.1: esboço do problema

Supomos que o fluido seja incompressível e invíscido e que seu movimento resultante seja irrotacional. O movimento do fluido pode, então, ser descrito por um potencial de velocidade  $\phi^T$ , satisfazendo a equação de Laplace no domínio do fluido [50]:

$$\nabla^2 \phi^T(x, y, z, t) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.1)$$

A presença da estrutura perturbará a onda incidente  $\phi_I$  e o potencial total do fluido pode ser escrito em termos dos potenciais incidente e difratado, isto é:

$$\phi^T = \phi_I + \phi_D \quad (4.2)$$

O potencial incidente no fluido é conhecido e pode ser expresso como

$$\phi_I(x, y, z, t) = \Re[\phi_i(x, y, z)e^{-i\omega t}] \quad (4.3)$$

em que  $\phi_i$  satisfaz a equação de Laplace e corresponde à parte espacial do potencial de velocidade definido pela equação 3.33), isto é:

$$\phi_i = -\frac{igA \cosh[\kappa(z + H)]}{\omega \cosh(\kappa H)} e^{i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (4.4)$$

em que  $\theta$  é o ângulo de incidência da onda com relação ao eixo x, H é a profundidade da água e  $\kappa$  o número de onda definido pela relação de dispersão como:

$$\kappa \tanh(\kappa H) = \frac{\omega^2}{g} \quad (4.5)$$

O comportamento do potencial de difração é o mesmo do potencial incidente e pode ser expresso na forma [50]:

$$\phi_D = \Re[\phi(x, y, z)e^{-i\omega t}] \quad (4.6)$$

em que  $\phi$  satisfaz a equação da continuidade

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad em \quad \Omega \quad (4.7)$$

Condições de contorno sobre todos os contornos são necessárias para esta equação elítica a fim de que o problema seja bem posto. Como a superfície  $\Gamma_e$  da estrutura no fluido é fixa, então a componente de sua velocidade na direção da normal é zero, isto é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad em \quad \Gamma_e \quad (4.8)$$

Sobre a superfície de fundo  $\Gamma_b$  a componente normal da velocidade deve ser igual a zero, isto é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.9)$$

Suficientemente longe da estrutura a onda difratada pode ser aproximada pela condição de radiação de Sommerfeld [51]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - i\kappa \phi = 0 \quad em \quad \Gamma_r \quad (4.10)$$

O contorno  $\Gamma_r$  é vertical e mantido a uma "certa" distância da fonte de perturbação.

Sobre a superfície livre não perturbada a condição de contorno pode ser definida como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad em \quad \Gamma_f \quad (4.11)$$

Observemos que a equação (4.11) corresponde à forma linearizada das condições de contorno cinemática e dinâmica sobre a superfície livre (seção 3.3).

Estes quatro tipos de condições de contorno podem ser representados pela condição de contorno de Robin que prescreve uma relação linear entre o potencial e sua derivada normal no ponto ao longo do contorno, isto é,

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + \beta \phi = \gamma \quad (4.12)$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são funções de posição conhecidas [64].

### 4.3 Casos que Reduzem o Problema a duas Dimensões

Existem vários operadores diferenciais para problemas de ondas em águas. No caso tridimensional, o operador de Laplace é o único que governa o problema. Já em duas dimensões temos três operadores possíveis que dependem da configuração particular do problema [55]. São eles:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa_y^2 = 0, \quad \kappa_y = \kappa \sin \theta \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2 = 0 \quad (4.15)$$

#### a. Problema em Plano Vertical

É o caso onde as superfícies rígidas são suficientemente longas e uniformes na direção  $y$ . Por exemplo, um cilindro longo estacionário paralelo a  $y$ . O potencial de velocidade da onda difratada pode ser decomposto na forma [55]:

$$\phi_D(x, y, z, t) = \Re[\phi(x, z)e^{i\kappa_y y \sin \theta} e^{-i\omega t}] \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) e (4.3) na equação (4.1) obtemos a equação de Helmholtz modificada

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \kappa_y^2 \phi = 0 \quad (4.17)$$

Se a incidência for normal ao eixo  $y$ ,  $k_y = 0$  e a equação anterior reduz-se à equação de Laplace no plano vertical  $(x, z)$  (equação 4.14).



### b. Problema em Plano Horizontal

Se a profundidade da água for constante e as superfícies rígidas são fixas com paredes verticais, o potencial incidente pode ser decomposto na forma:

$$\phi_I = \Re[\phi_i(x, y) \frac{\cosh[\kappa(z + H)]}{\cosh(\kappa H)} e^{-i\omega t}] \quad (4.18)$$

em que  $\phi_i(x, y) = -\frac{igA}{\omega} e^{i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)}$ . Isto se deve ao fato de que sendo a formulação no plano  $(x, y)$ , o potencial de velocidade é independente da profundidade  $z$ . Analogamente, o potencial difratado é dado por:

$$\phi_D = \Re[\phi(x, y) \frac{\cosh[\kappa(z + H)]}{\cosh(\kappa H)} e^{-i\omega t}] \quad (4.19)$$

Portanto, o potencial total assume a forma:

$$\phi^T = \Re[(\phi_i(x, y) + \phi(x, y)) \frac{\cosh[\kappa(z + H)]}{\cosh(\kappa H)} e^{-i\omega t}] \quad (4.20)$$

Substituindo na equação de Laplace, obtemos a equação de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \kappa^2 \phi = 0 \quad (4.21)$$

O problema de valor de contorno é governado por esta equação mais as condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad em \quad \Gamma_e \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - i\kappa \phi = 0 \quad em \quad \Gamma_r \quad (4.23)$$

As outras duas condições de contorno sobre  $\Gamma_f$  e  $\Gamma_b$  já são satisfeitas por  $\phi$  e  $\phi_i$ .

## 4.4 Formulação do MEC para a Equação de Helmholtz

O MEC é baseado em equações integrais que podem ser obtidas através da terceira identidade de Green ou pela técnica de resíduos ponderados cuja vantagem sobre a anterior é sua generalidade. Nesta seção, deduziremos a formulação do MEC utilizando resíduos ponderados. Nosso objetivo é procurar uma solução aproximada  $\psi$  para o problema governado pela equação

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \kappa^2 \phi = 0 \quad (4.24)$$

sujeita às condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_e \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_b \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \iota \kappa \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_r \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_f \quad (4.28)$$

A idéia do método dos resíduos ponderados é minimizar o erro introduzido pela substituição de  $\phi$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$  por uma solução aproximada  $\psi$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi) \psi^* d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

em que  $\psi^*$  é interpretado como uma função arbitrária contínua e com derivadas contínuas até segunda ordem [36].

Utilizando a identidade de Green

$$\int_{\Omega} [f \nabla^2 g - g \nabla^2 f] d\Omega = \int_{\Gamma} [f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}] d\Gamma \quad (4.30)$$

obtemos

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 \psi^* + \kappa^2 \psi^*] \psi d\Omega = \int_{\Gamma} [\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}] d\Gamma \quad (4.31)$$

Para transformar (4.31) em uma equação integral de contorno podemos escolher a função  $\psi^*$  de tal forma que satisfaça a seguinte equação:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \psi^* + \delta_i(p) = 0 \quad (4.32)$$

em que  $\delta_i(p)$  é a distribuição delta de Dirac atuando no ponto  $p(x_p, y_p) \in \Omega$ . Inserindo (4.32) em (4.31), obtemos:

$$\psi(p) = - \int_{\Gamma} [\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}] d\Gamma \quad (4.33)$$

A equação (4.33) é válida para qualquer ponto dentro do domínio  $\Omega$ . No método elementos de contorno queremos aplicar tal equação sobre o contorno, isto é, queremos saber o que ocorre quando  $\psi(p) \in \Gamma$ . A dependência da forma do contorno nos leva à seguinte equação integral:

$$c(p)\psi(p) = - \int_{\Gamma} [\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}] d\Gamma \quad (4.34)$$

em que o coeficiente  $c(p)$  é o valor do ângulo interno correspondente ao ponto  $p$  e a integral é em termos do valor principal de Cauchy. Se o contorno no ponto  $p$  for "suave", então  $c(p) = \pi$  [39].

## 4.5 Implementação Numérica

O esquema de discretização para a implementação numérica é mostrado na figura (4.2).

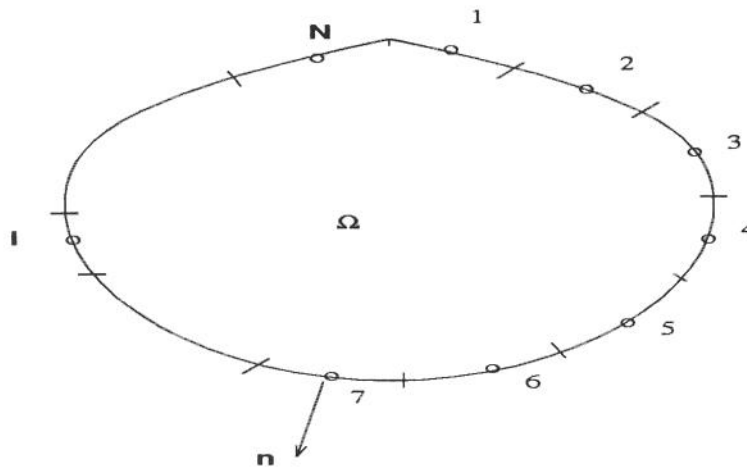


Figura 4.2: discretização do contorno

Para um número total de nós  $N$ ,  $N$  equações algébricas lineares podem ser obtidas em termos das condições de contorno aplicando a equação (4.34) para todo nó  $i$  definido no esquema de discretização. A fim de incluir os quatro tipos de condições de contorno relacionados com a formulação do problema vamos utilizar a equação (4.12) que estabelece uma relação linear entre o potencial e sua derivada normal nos pontos ao longo do contorno. Assim, substituindo esta expressão em (4.34), obtemos:

$$c(p)\psi(p) = \int_{\Gamma} [\psi^* (\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \psi) - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}}] d\Gamma \quad (4.35)$$

O contorno  $\Gamma$  pode ser discretizado em  $N$  elementos sobre os quais a variável  $\psi$  pode ser inter-

polada. Para o elemento  $j$  podemos definir o potencial como:

$$\psi = [\chi]\psi_j^N \quad (4.36)$$

em que  $\chi$  são funções de interpolação. A equação integral de contorno (4.35), torna-se:

$$c_i\psi_i + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{n}} + \frac{\beta_j}{\alpha_j}\psi^* \right] [\chi]d\Gamma_j \right) \psi_j^N = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\gamma_j}{\alpha_j}\psi^*d\Gamma_j \right) \quad (4.37)$$

Aplicando esta equação a todos os pontos  $i$  do contorno, obtemos o sistema de equações:

$$c_i\psi_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij}\psi_j^N = \sum_{j=1}^N G_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.38)$$

em que

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{n}} + \frac{\beta_j}{\alpha_j}\psi^* \right] [\chi]d\Gamma_j \quad (4.39)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi^* \frac{\gamma_j}{\alpha_j}d\Gamma_j \quad (4.40)$$

A equação (4.38) pode ser reescrita na forma:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}\psi_j^N = \sum_{j=1}^N G_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.41)$$

com

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c_i, & i = j \end{cases}$$

Para calcular as integrais (4.39) e (4.40) devemos levar em consideração as funções de interpolação  $\chi$ . Três tipos são usuais na literatura: constantes, lineares e quadráticas. Se as funções interpoladoras são constantes ou lineares em cada elemento, as integrais (4.39) e (4.40) podem ser integradas numericamente quando  $i \neq j$ , utilizando um esquema de integração apropriado. Quando  $i = j$ , a equação integral (4.39) é zero devido à ortogonalidade entre a normal  $\mathbf{n}$  e  $\Gamma_j$ , para cada  $j$ , isto é,  $\frac{\partial\Gamma_j}{\partial\mathbf{n}} = 0$ . A equação integral (4.40) pode ser integrada analiticamente. Se as funções interpoladoras são constantes, então  $\chi = 1$  e o ponto  $p(x_p, y_p)$  é considerado como estando no meio do elemento, fazendo com que o coeficiente  $c_i$  seja igual a  $\pi$ .

As funções de interpolação lineares são definidas por:

$$[\chi] = \left[ \frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2} \right], \quad (-1 < s < 1) \quad (4.42)$$

O coeficiente  $c_i$  que contribui para os termos  $H_{ii}$  da matriz H pode ser calculado considerando o ângulo formado pelos elementos adjacentes  $\Gamma_{j-1}$  e  $\Gamma_j$ .

Se as funções de interpolação são quadráticas existe uma maior complexidade para calcular as integrais (4.39) e (4.40). Esta dificuldade está relacionada com o grau destas funções e com a transformação de coordenadas necessária para ajustar a forma do corpo. Elas são definidas como:

$$[\chi] = \left[ \frac{s(s-1)}{2}, (1-s^2), \frac{s(1+s)}{2} \right] \quad (4.43)$$

Devido à transformação de coordenadas, as equações (4.39) e (4.40) assumem a forma:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\beta_j}{\alpha_j} \psi^* \right] [\chi] |J| ds \quad (4.44)$$

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 \psi^* \frac{\gamma_j}{\alpha_j} [\chi] |J| ds \quad (4.45)$$

em que  $|J|$  é o jacobiano da transformação dado por:

$$|J| = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

com

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial [\chi] x^N}{\partial s} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial [\chi] y^N}{\partial \xi} \quad (4.48)$$

Para  $i \neq j$  as equações (4.44) e (4.45) podem ser integradas numericamente utilizando-se qualquer esquema de integração numérica. O coeficiente  $c_i$  é calculado de forma semelhante a elementos lineares, enquanto que  $H_{ii}$  não é mais zero, pois, em geral  $\frac{\partial \Gamma_j}{\partial \mathbf{n}} \neq 0$ . Para  $i = j$  um esquema especial de integração numérica deve ser introduzido, porque a integração analítica já não é mais possível [39]. Neste trabalho, fizemos uma implementação numérica do problema

em questão utilizando precisão simples, funções de interpolação constantes e as integrais foram calculadas por quadratura Gaussiana com quatro pontos. A função peso  $\psi^*$  corresponde à solução fundamental da equação de Helmholtz. Ela e sua derivada em relação à normal são dadas, respectivamente, por:

$$\psi^* = \frac{i}{4} H_0^1(\kappa \mathbf{r}) \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} = \frac{i k}{4} H_0^1(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.50)$$

Nas expressões acima,  $H_0^1(kr)$  é a função de Hankel de primeira espécie e ordem zero definida como:

$$H_0^1 = J_0(\kappa \mathbf{r}) + i Y_0(\kappa \mathbf{r}) \quad (4.51)$$

em que  $J_0(\kappa \mathbf{r})$  e  $Y_0(\kappa \mathbf{r})$  são as funções de Bessel de primeira espécie e ordem zero. O vetor  $\mathbf{r}$  é a distância do ponto de colocação  $(x_p, y_p)$  pertencente ao elemento  $i$ , até o ponto  $(x, y)$  pertencente ao elemento  $j$ , isto é:

$$\mathbf{r} = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \quad (4.52)$$

Com esta definição das funções  $\psi^*$  e  $\frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}}$  o esquema de integração numérica que utilizamos pode ser escrito na forma:

$$\hat{H}_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{l=1} 4 H_0^1(\kappa \mathbf{r}_l) \left( i \kappa \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right) \frac{\Gamma_j}{2} W_l \quad (4.53)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{l=1} 4 H_0^1(\kappa \mathbf{r}_l) \frac{\gamma_j}{\alpha_j} \frac{\Gamma_j}{2} W_l \quad (4.54)$$

em que  $W_l$  são pesos ligados ao esquema de integração e,

$$\frac{\partial r_l}{\partial \mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\mathbf{d}}{r_l}, & \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ 0, & \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ -\frac{\mathbf{d}}{r_l}, & \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases}$$

Na expressão anterior  $\mathbf{d}$  é o vetor distância com origem no ponto  $i$  e extremidade no elemento  $j$  [35].

Após calcular as integrais  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  em (4.41), obtemos o sistema  $AX = F$  em que  $X$  é o vetor que contém a incógnita  $\psi_j^N$ . A matriz  $A$  deste sistema é não-simétrica e cheia. Isto

exige uma seleção cuidadosa de um método para a solução do sistema. Em nossa implementação utilizamos a decomposição LU que mostrou ser satisfatória. Conhecida a solução do sistema de equações podemos calcular o potencial para qualquer ponto interno utilizando a equação (4.38) com  $c_i = 1$ .

## 4.6 Formulação do MEC para a Equação de Laplace

A equação de Laplace governa o problema em plano vertical quando a direção do campo incidente é paralela ao eixo-x. As seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas para que o problema seja bem posto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_b \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_f \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} = q_n \quad \text{em } \Gamma_e \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \iota \kappa \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_r \quad (4.58)$$

A formulação de elementos de contorno segue os mesmos passos desenvolvidos na seção anterior. Assim, a expressão de resíduos ponderados resultante pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 \psi^*] \psi d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right] d\Gamma \quad (4.59)$$

com  $\psi$  sendo uma aproximação para o potencial difratado  $\phi$  e  $\psi^*$  uma função ponderadora. Considerando que  $\Gamma = \Gamma_b + \Gamma_e + \Gamma_f + \Gamma_r$  podemos reescrever a expressão anterior em termos das diferentes condições de contorno.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla^2 \psi^*] \psi d\Omega &= \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} \psi^* \right] \psi d\Gamma_f \\ &+ \int_{\Gamma_r} \left[ \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} - \iota \kappa \psi^* \right] \psi d\Gamma_r \\ &+ \int_{\Gamma_b + \Gamma_e} \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \psi d\Gamma_{(b+e)} \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_e} \psi^* \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_e \quad (4.60)$$

Esta expressão é o ponto de partida para soluções por elementos de contorno. Necessitamos definir  $\psi^*$  como uma solução fundamental para que o problema se torne unicamente de contorno. A função  $\psi^*$  pode ser associada com a função de Green do espaço completo tal que

$$\nabla^2 \psi^* + \delta(p) = 0 \quad (4.61)$$

A solução desta equação é:

$$\psi^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|r|}\right) \quad (4.62)$$

Substituindo (4.61) na equação (4.60) obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_i = & \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\omega^2}{g} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi d\Gamma_f + \int_{\Gamma_r} \left[ i\kappa \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi d\Gamma_r \\ & - \int_{\Gamma_{(b+e)}} \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \psi d\Gamma_{(b+e)} - \int_{\Gamma_e} \psi^* \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (4.63)$$

A fórmula anterior implica em uma relação integral entre um ponto  $i$  pertencente ao domínio  $\Omega$  e os valores sobre o contorno  $\Gamma$ . Se considerarmos o ponto  $i$  sobre o contorno temos:

$$\begin{aligned} c_i \psi_i = & \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\omega^2}{g} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi d\Gamma_f \\ & + \int_{\Gamma_r} \left[ i\kappa \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi d\Gamma_r \\ & - \int_{\Gamma_{(b+e)}} \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \psi d\Gamma_{(b+e)} \\ & - \int_{\Gamma_e} \psi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (4.64)$$

em que  $c_i$  corresponde ao ângulo interno cujo vértice é o ponto  $p$ . A superfície  $\Gamma$  do domínio pode ser discretizada em  $N$  elementos distribuídos sobre cada uma das superfícies  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_f$ ,  $\Gamma_r$ . Assim, (4.64) torna-se:

$$c_i \psi_i = \sum_{\Gamma_f} \left( \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\omega^2}{g} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{n}} \right] [\chi] d\Gamma_f \right) \psi_f$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{\Gamma_r} \left( \int_{\Gamma_r} [\iota\kappa\psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{n}}][\chi]d\Gamma_r \right) \psi_r \\
& - \sum_{\Gamma_b+\Gamma_e} \left( \int_{\Gamma_b+\Gamma_e} [\frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{n}}][\chi]d\Gamma_{(b+e)} \right) \psi_{(b+e)} \\
& - \sum_{\Gamma_e} \frac{\partial\phi_i}{\partial\mathbf{n}} \int_{\Gamma_e} \psi^* d\Gamma_e
\end{aligned} \tag{4.65}$$

em que  $[\chi]$  são funções de interpolação. Dois tipos de integrais podem ser observadas na equação anterior:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{n}}[\chi]d\Gamma \tag{4.66}$$

e

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi^* d\Gamma \tag{4.67}$$

Elas representam funções influência entre um elemento  $i$  em que a solução fundamental é aplicada e qualquer outro elemento  $j$  sob consideração. Para calcular a integral (4.66) devemos levar em consideração as funções de interpolação  $\chi$ . Se estas são constantes ou lineares, a integral pode ser calculada numericamente, quando  $i \neq j$ , através de um esquema de integração adequado. Quando  $i = j$ , esta integral é zero devido à ortogonalidade entre a normal  $\mathbf{n}$  e  $\Gamma$ . A equação (4.67) pode ser integrada analiticamente para  $i = j$ . Quando  $i \neq j$  o mesmo esquema de integração numérica aplicado a (4.66) pode ser usado. Seja

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c_i, & i = j \end{cases} \tag{4.68}$$

Então podemos escrever (4.65) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_e & H_b & H_r - \iota\kappa G_r & H_f - \frac{\omega^2}{g} G_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_b \\ \psi_f \\ \psi_r \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} G_e \end{bmatrix} \frac{\partial\phi_i}{\partial\mathbf{n}} \tag{4.69}$$

## 4.7 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos diversos exemplos com a finalidade de mostrar a eficiência e precisão do Método dos Elementos de Contorno quando aplicado a problemas de difração

de ondas. Duas discussões distintas são realizadas: a primeira sobre problemas em plano horizontal governados pela equação de Helmholtz; a segunda sobre problemas em plano vertical governados pela equação de Laplace. Tais exemplos situam-se dentro de uma gama de problemas importantes como:

1. Problemas em Plano Horizontal

- a. cilindro circular;
- b. cilindro de seção quadrada;
- c. cilindro de seção elítica;
- d. interação entre cilindros.

2. Problemas em Plano Vertical

- a. estruturas semi-submersas
  - i. seção circular
  - ii. seção quadrada
- b. estruturas no fundo;
  - i. seção circular
  - ii. seção quadrada

A validade do método é confirmada comparando os resultados com soluções exatas, analíticas aproximadas ou mesmo com soluções numéricas existentes na literatura.

1. Problemas em Plano Horizontal

a. Cilindro Circular

Consideremos o caso bidimensional de um cilindro circular vertical como mostra a figura 4.3.

Este problema possui uma solução analítica, deduzida pela primeira vez por Maccamy e Fuchs (1954), em termos da força total que a onda impõe sobre a estrutura. Segundo análise de Brebbia e Walker [52], esta força máxima atuando sobre um cilindro de raio  $r$  é dada por:

$$F_m(\omega) = 4\rho g A \frac{\tanh(\kappa H)}{\kappa} \frac{1}{\kappa |H_1^{(2)'(\kappa r)}|} (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad (4.70)$$

em que,  $H_1^{(2)'}(\kappa r)$  é a derivada da função de Hankel de segunda espécie e ordem um, e,

- A = amplitude da onda;
- $\omega$  = frequência da onda;
- $\kappa$  = número de onda;
- H = profundidade da água;
- $\alpha$  = ângulo de incidência da onda;
- $\rho$  = densidade da água;
- g = aceleração da gravidade .

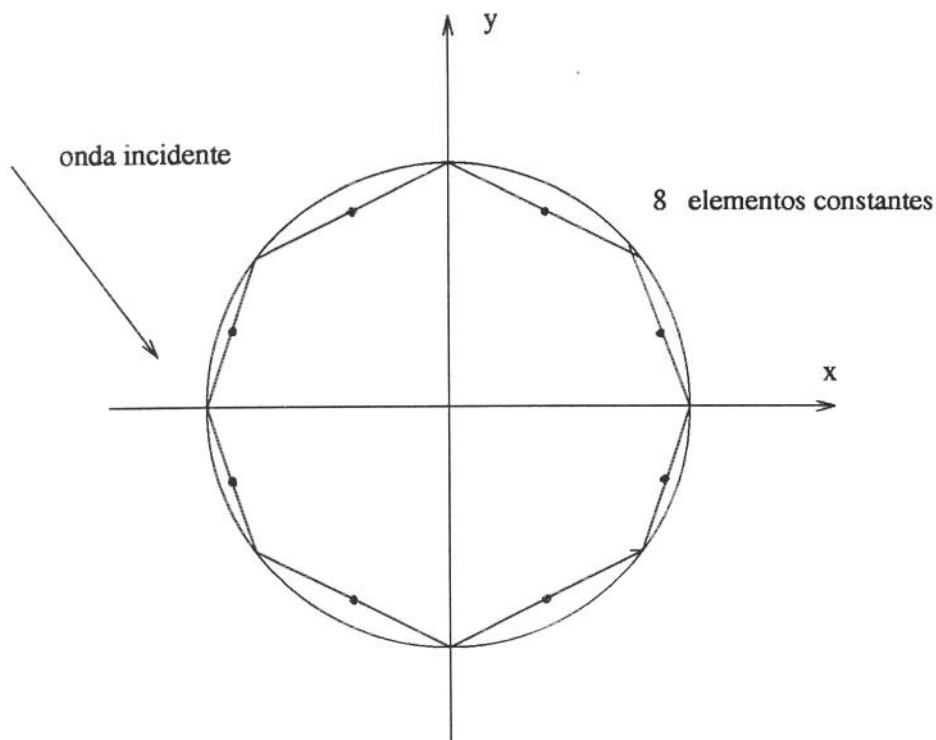


Figura 4.3: cilindro circular; seção horizontal constante

A componente horizontal da força total que atua sobre um cilindro de raio  $r$  pode, ainda, ser escrita como a parte de inércia da equação de Morison [18]

$$F_h = C_m \rho \frac{\pi}{4} D^2 \frac{2\pi^2 A}{T^2 \kappa} \cos(\omega t) \quad (4.71)$$

em que,

- D = diâmetro do cilindro;
- T = período da onda;
- $C_m$  = coeficiente de inércia .

Considerando que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  e que  $\kappa$  e  $\omega$  estão relacionados pela equação de dispersão,

$$\omega^2 = \kappa g \tanh(\kappa H) \quad (4.72)$$

podemos comparar as equações (4.70) e (4.71) para obter o coeficiente de inércia efetivo:

$$C_m = \frac{4 \frac{1}{\kappa |H_1^{(2)'(\kappa r)}|}}{\pi \kappa r^2} \quad (4.73)$$

A solução analítica para a fase da força total é definida por [18]:

$$\gamma = -\tan^{-1}\left(\frac{Y_1'(\kappa r)}{J_1'(\kappa r)}\right) \quad (4.74)$$

em que  $J_1'(\kappa r)$  e  $Y_1'(\kappa r)$  são derivadas das funções de Bessel de primeira espécie e segunda espécie, respectivamente, e ordem 1.

Os resultados numéricos obtidos usando o método dos elementos de Contorno foram comparados com as soluções exatas definidas nas equações (4.70) e (4.73), com a equação (4.70) sendo normalizada por:

$$F_t = \frac{F_m(\omega)}{4\rho g A \frac{\tanh(\kappa H)}{\kappa}} \quad (4.75)$$

Utilizamos funções de interpolação constantes para ter a vantagem de uma implementação mais simples. Isto acarretou a necessidade de um maior refinamento da malha para assegurar uma certa precisão. Considerando a força total que atua sobre o cilindro circular fizemos uma análise da convergência da solução aproximada para a solução exata com o objetivo de escolher uma discretização adequada. Utilizamos 51 números de ondas  $\kappa$  pertencentes ao domínio  $[.000625, 2]$ , discretizamos a seção circular em 12, 24, 48, 96 e 192 elementos constantes e consideramos a relação  $\frac{H}{r} = 4$ , com  $r = 1$ . O erro entre a solução exata  $u$  e a solução aproximada  $U$  para cada discretização foi calculado pela expressão:

$$\|u - U\|_\infty = \max_{\kappa r \in [.000625, 2]} \left| \frac{u(\kappa r) - U(\kappa r)}{u(\kappa r)} \right| \quad (4.76)$$

Na tabela 4.1, a seguir, apresentamos estes erros agrupados com a finalidade de estimar a ordem de convergência  $\beta$  de  $U$  para  $u$ . Para isto, suponhamos que assintoticamente o erro na norma definida em (4.76) seja dado por:

$$E(\Delta w) \approx K(\Delta w)^\beta \quad (4.77)$$

em que  $K$  é uma constante que não depende da partição feita e  $\Delta w$  é a partição do intervalo dado. Reduzindo  $\Delta w$ , em (4.77), à metade, temos:

$$E\left(\frac{\Delta w}{2}\right) \approx K\left(\frac{\Delta w}{2}\right)^\beta \quad (4.78)$$

Dividindo (4.78) por (4.77), obtemos:

$$\frac{E\left(\frac{\Delta w}{2}\right)}{E(\Delta w)} \approx \frac{1}{2^\beta} \quad (4.79)$$

Usando a expressão (4.79) com os erros dados pelas colunas definidas por  $\|u - U\|_\infty$ , obtemos os valores de  $\beta$  registrados na tabela 4.1. Um exame dessa tabela nos mostra que a taxa de convergência  $\beta$  do método é aproximadamente 2.

Tabela 4.1: erro da aproximação

$N_i$	$\ u - U\ _\infty$	$\beta$	$N_i - N_{i+1}$
12	.022777	-	-
24	.0057189	1.993768	.0170581
48	.0014240	2.005788	.0042949
96	.00035313	2.011677	.00107087
192	.000087236	2.017203	.00026589

Para considerar a hipótese de que uma solução exata não seja conhecida fizemos uma análise semelhante à anterior com relação apenas aos resultados numéricos conhecidos. Os erros foram calculados pela expressão:

$$\left| \frac{|U^{i+1}(\kappa r) - U^i(\kappa r)|}{U_{i+1}} \right|_\infty = \max_{\kappa r \in [0.0625, 2]} \left| \frac{U^{i+1}(\kappa r) - U^i(\kappa r)}{U^{i+1}} \right| \quad (4.80)$$

em que,  $U_i$  = solução numérica referente à discretização  $i$ . A tabela 4.2 apresenta o erro relativo máximo considerando duas discretizações consecutivas cujas partições são metade uma da outra. Uma comparação destes valores com os existentes na quarta coluna da tabela 4.1 mostra que eles coincidem até três algarismos significativos. Isto sugere que podemos utilizar a mesma equação (4.79) para obter a ordem de convergência  $\beta$ . A coluna três da tabela 4.2 mostra que  $\beta \approx 2$ .

Tabela 4.2: erro da aproximação

$\Delta N$	$\ U^{i+1} - U^i\ _\infty$	$\beta$
12-24	.017158	-
24-48	.0043042	1.995064
48-96	.0011023	1.965228
96-192	.00027192	2.019262

As figuras (4.4) e (4.5) mostram, respectivamente, os erros relativos e a convergência da força quando o número de elementos cresce, para  $\kappa r = 1$ . Com base nesta análise podemos concluir que 48 elementos constantes fornecem um refinamento da malha suficiente para assegurar uma precisão adequada no sentido definido pela tabela (4.2). Considerando esta escolha do número de elementos a grandeza da força, a fase e o coeficiente de inércia são comparados com as respectivas soluções analíticas e mostrados nas figuras (4.6), (4.7) e (4.8). Como se pode observar a concordância é excelente.

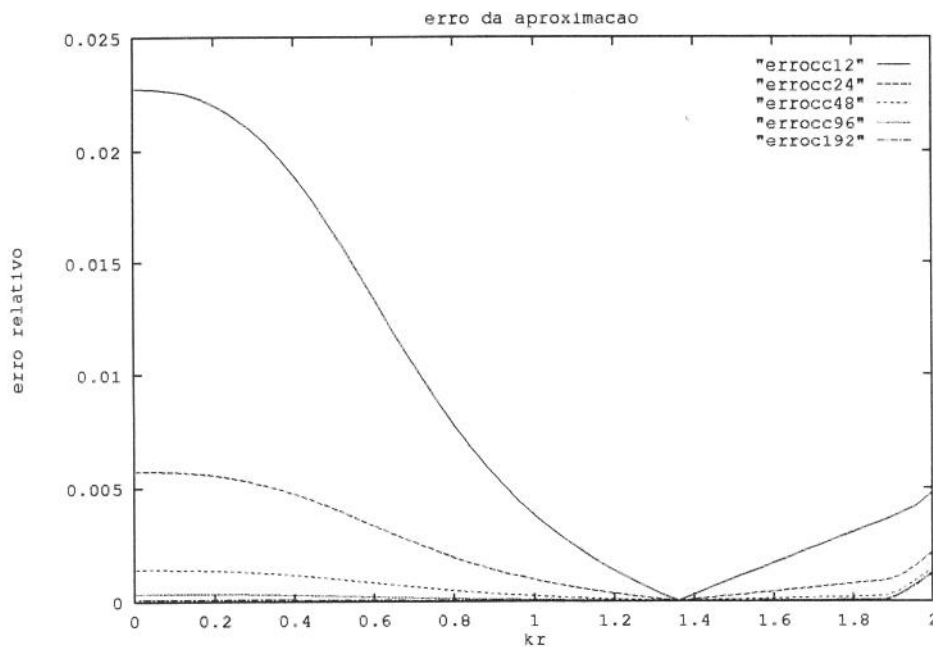


Figura 4.4: erro da aproximação: 12, 24, 48, 96, 192 elementos constantes

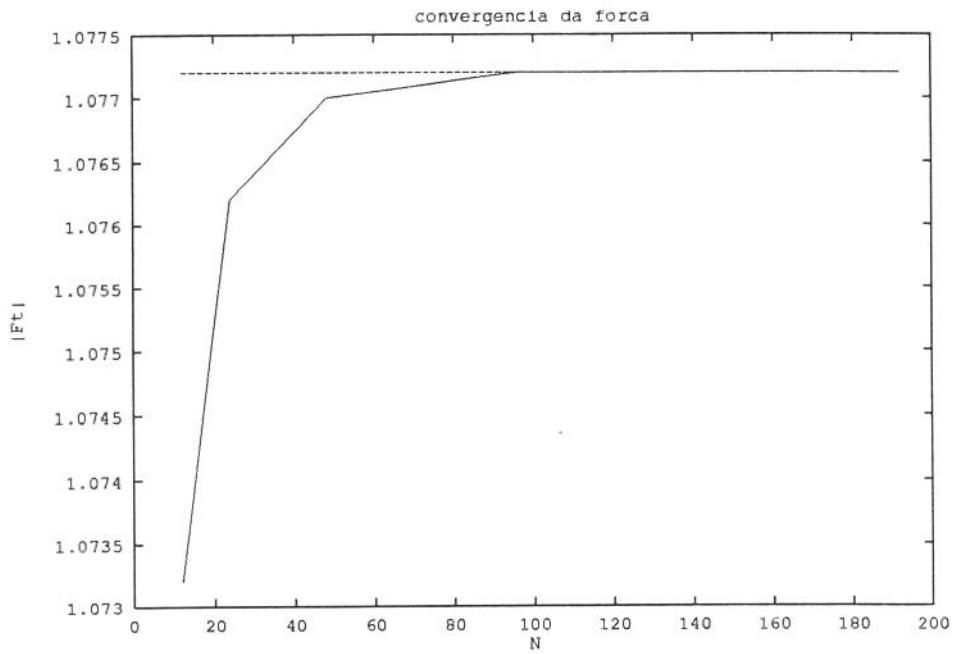


Figura 4.5: convergência da força;  $N$ =número de elementos;  $\kappa r = 1$ ; MEC —; sol. ex. ....

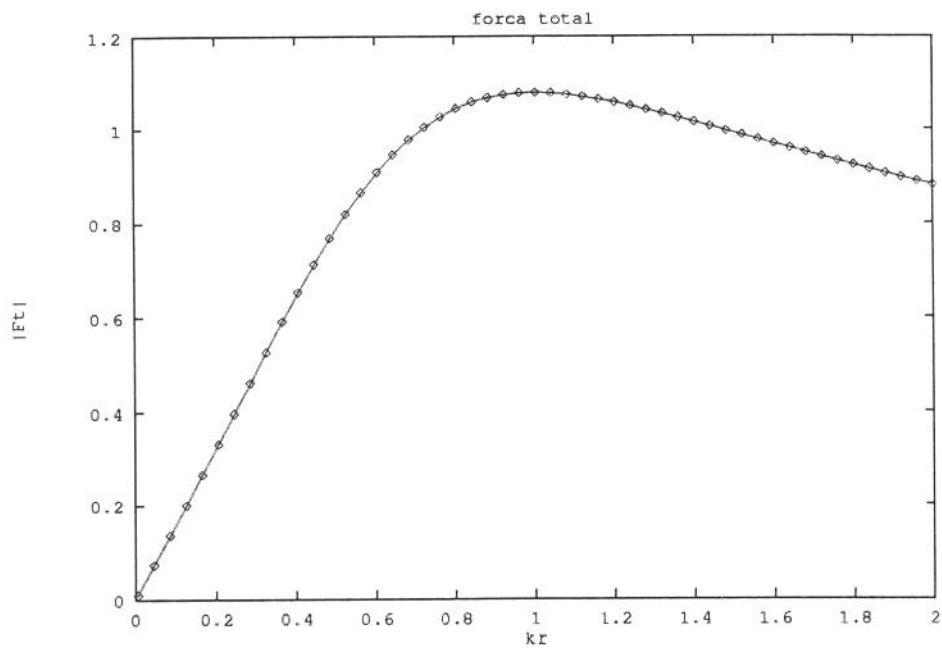


Figura 4.6: Módulo da força máxima; Sol.Aprox., 48 e.c. — ; sol.ex. (•••);  $\frac{H}{r} = 4$

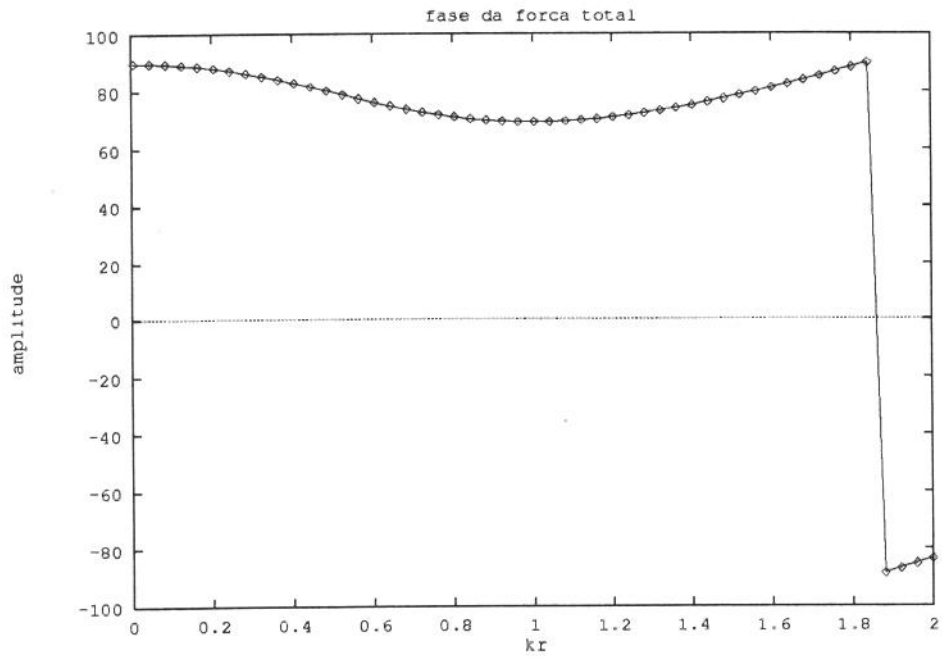


Figura 4.7: Fase da força máxima; Sol. Aprox., 48 e.c. — ; sol.ex. ●●●;  $\frac{H}{r} = 4$

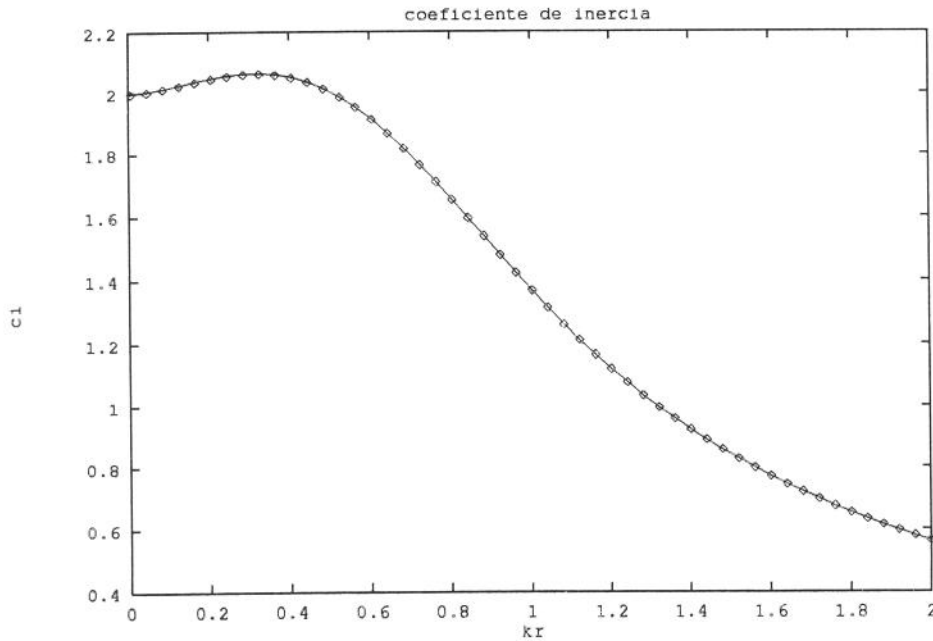


Figura 4.8: Coeficiente de inércia; Sol. Aprox., 48 e.c. — ; sol.ex. ●●●;  $\frac{H}{r} = 4$



### b. Seção Quadrada

O caso de uma seção quadrada, representada na figura 4.9 a seguir, foi estudado por Mogridge e Jamieson [33]. Eles realizaram experimentos sobre caixas quadradas e mediram as forças exercidas por ondas sobre estas estruturas.

Em acréscimo ao trabalho experimental apresentaram um método teórico aproximado com fundamento na hipótese de que as forças das ondas sobre a estrutura de seção quadrada acontecem de maneira similar àquelas sobre um cilindro circular, isto é, se a dimensão do cilindro de seção quadrada é pequena relativo ao comprimento de onda, então tal cilindro não deforma a onda incidente e a força que ela impõe sobre a estrutura consiste da soma das forças de inércia e viscosas. Entretanto, se a dimensão da estrutura é grande comparada ao comprimento de onda incidente, existe reflexão e difração desta onda e com isso, as forças de arrasto são desprezíveis em comparação com as forças de inércia.

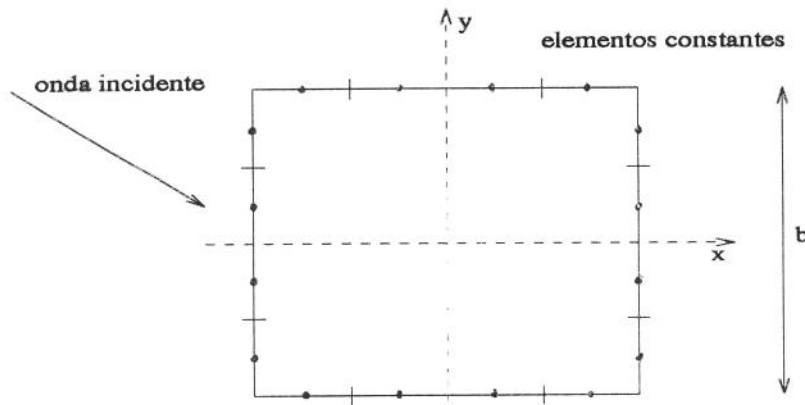


Figura 4.9: seção quadrada

A força máxima que a onda incidente impõe sobre um cilindro de seção quadrada é, segundo este método, definida por:

$$F_{\max} = C_{m.s}^* \frac{\rho \pi b^2 A \lambda}{T^2} \quad (4.81)$$

com,

- $\rho$  = densidade de massa;
- $b$  = comprimento do lado do quadrado;
- $A$  = altura da onda incidente;
- $\lambda$  = comprimento da onda incidente;
- $T$  = período da onda ;

$C_{m.s}^*$  é um coeficiente de massa modificado, definido por:

$$C_{m.s}^* = \frac{\lambda^2}{\pi^2 b^2} A(\kappa a_e) \quad (4.82)$$

com

$$A(\kappa a_e) = \sqrt{[J_1'(\kappa a_e)]^2 + [Y_1'(\kappa a_e)]^2}$$

sendo,

- $\kappa$  = número de onda;
- $a_e$  =  $\frac{b}{\pi}$ , raio do cilindro circular equivalente;
- $J_1'(ka_e)$  = derivada da função de Bessel de primeira espécie e ordem 1;
- $Y_1'(ka_e)$  = derivada da função de Bessel de segunda espécie e ordem 1 .

Esta forma padrão é de importância no design de estruturas costeiras e certos tipos de reservatórios de óleo [37]. A comparação entre os resultados obtidos por elementos de contorno e o valores teóricos preditos pelas equações (4.81) e (4.82) é feita normalizando-as por:

$$C_i = \frac{C_{m.s}^*}{4} = \frac{A(\kappa a_e)}{\kappa^2 b^2} \quad (4.83)$$

$$F_h = \frac{F_{max}}{\rho g A \frac{b}{\kappa}} \quad (4.84)$$

Utilizamos 27 números de ondas  $\kappa$  pertencentes ao domínio [.0001909, 1.] e consideramos que  $\frac{H}{2b} = \frac{10}{3}$ , com  $b = 6$ . Os resultados foram plotados contra  $\kappa r$ , em que  $r = \frac{2b}{\pi}$ . A figura (4.10) apresenta o comportamento do erro relativo entre a solução teórica, predita pela equação (4.83), e a solução aproximada U, dada por elementos de contorno, para um ângulo de incidência  $\alpha = 0^0$ . Os erros foram calculados para 24, 48 e 96 elementos constantes com a finalidade de

mostrar a convergência. Pode-se observar que a distribuição do erro não é uniforme no intervalo considerado. Isto indica uma razoável discordância entre o método numérico em questão e a aproximação teórica proposta por Mogridge e Jamieson [33]. Nas figuras (4.11), (4.12) e (4.13) comparamos, respectivamente, a força horizontal e o coeficiente de inércia modificado, calculados por elementos de contorno, com as soluções teóricas (4.83) e (4.84), utilizando 48 elementos constantes e considerando os ângulos de incidência  $\alpha = 0^\circ$  e  $\alpha = 45^\circ$ . Observamos que o ângulo de ataque não altera demasiadamente a força sobre a estrutura quadrada e que, quando  $\kappa r \rightarrow 0$ , o coeficiente de inércia  $C_{ms}^*$  tende para o coeficiente de inércia exato que é de 2.19 [34]. A tabela 4.3 mostra esta convergência para o ângulo de incidência  $\alpha = 0$ .

Tabela 4.3: convergência da força ;  $\kappa r = .0001909$

N	$C_{ms}$
12	2.2332
24	2.2157
48	2.2076
96	2.2000
196	2.1965

As figuras (4.14) e (4.15) mostram os resultados para a fase da força horizontal, comparada com os da referência [33]. Para  $\alpha = 45^\circ$ , não é possível reproduzir a fase pela abordagem do cilindro circular equivalente. Como se pode observar pelas figuras (4.10)-(4.15), os resultados, obtidos pelo método de elementos de contorno utilizando elementos constantes e pelas aproximações teóricas (4.81) e (4.82), não são comparáveis entre si de forma razoável.

Considerando que o método de elementos de contorno mostrou excelente comportamento para o caso do cilindro circular, somos impelidos a concluir que o método teórico aproximado proposto por Mogridge e Jamieson não é satisfatório.

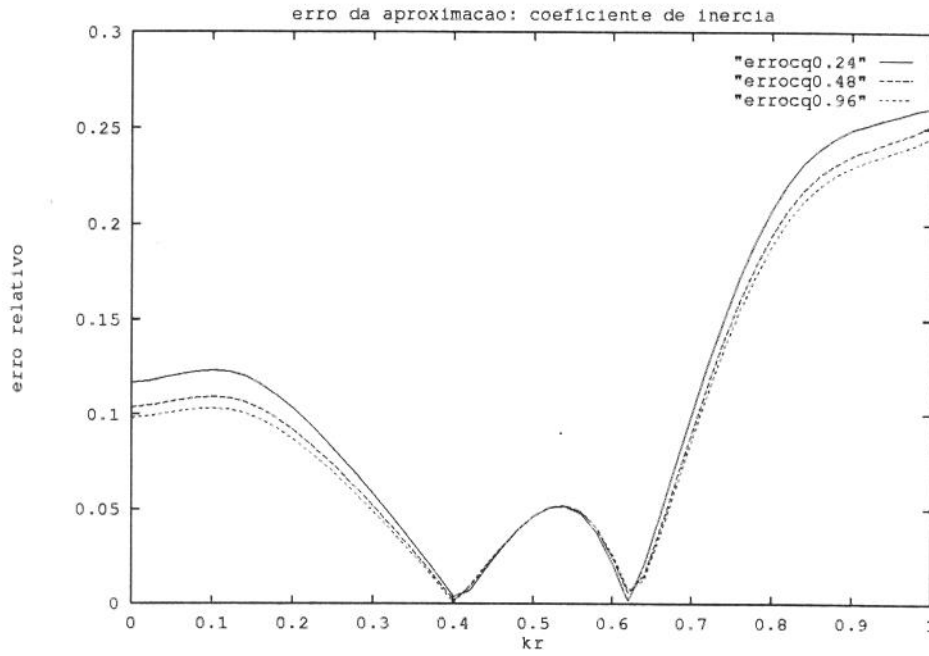


Figura 4.10: erro relativo;  $|C_i - U|$ ;  $C_i = \frac{A(\kappa a_e)}{\kappa^2 b^2}$ ;  $\alpha = 0^0$

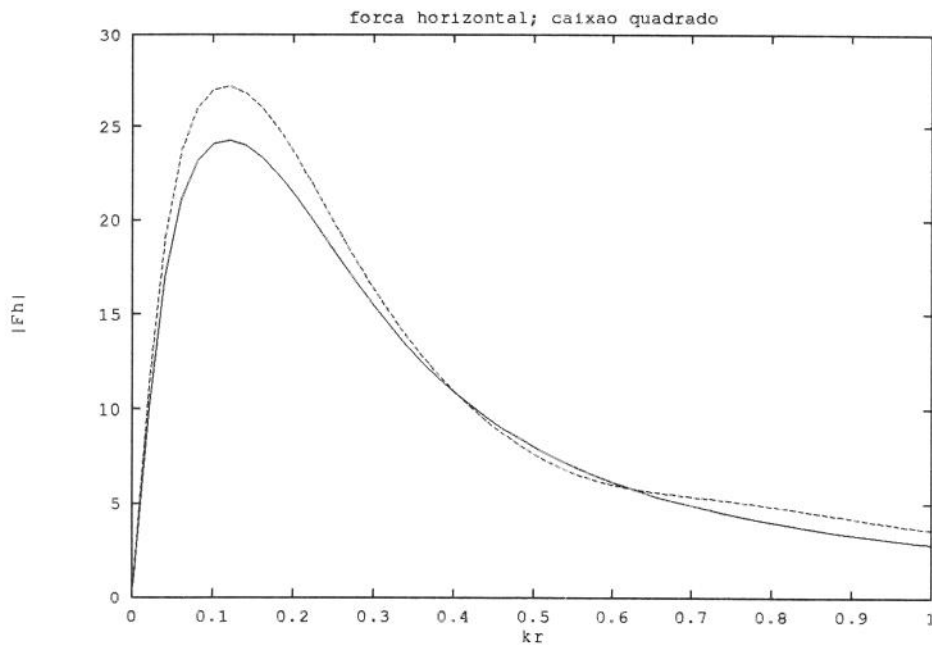


Figura 4.11: módulo da força horizontal; MEC 48e.c. - - - ; ref. [33] — ;  $\alpha = 0^0$

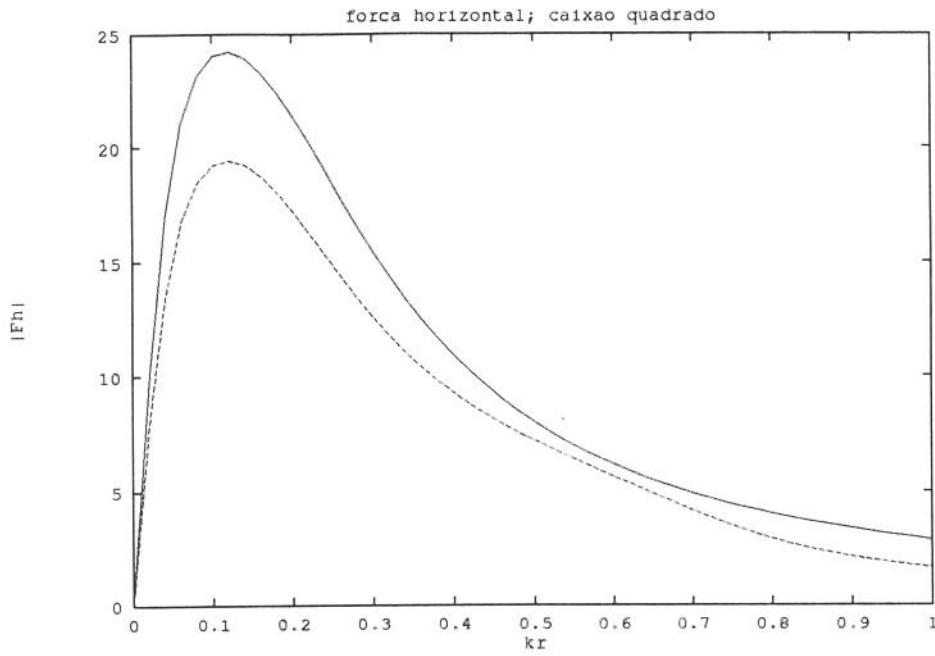


Figura 4.12: módulo da força horizontal; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ;  $\alpha = 45^\circ$

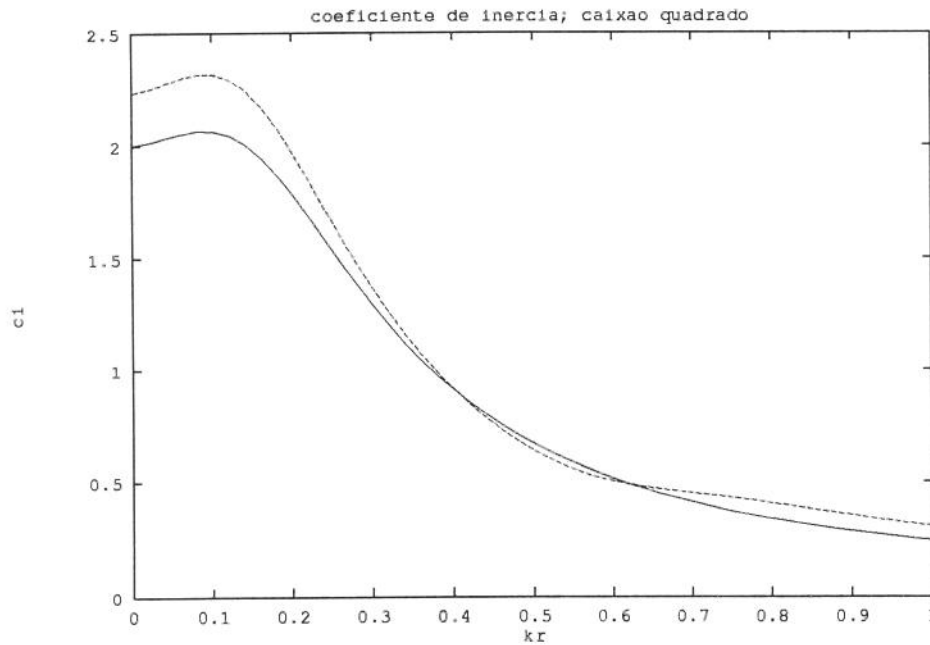


Figura 4.13: coeficiente de inércia; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ;  $\alpha = 0^\circ$

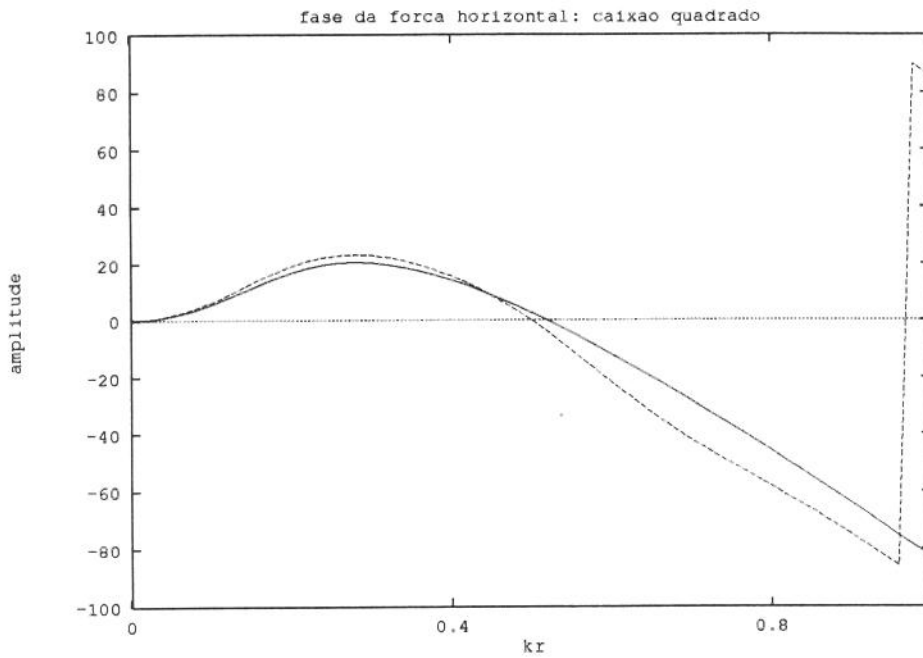


Figura 4.14: fase da força horizontal; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ;  $\alpha = 0^0$

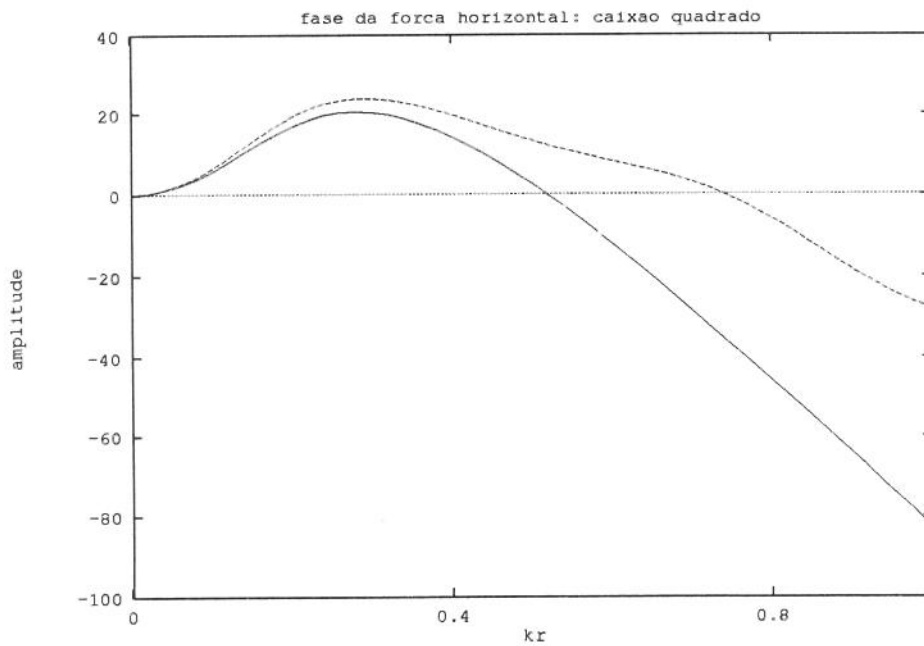


Figura 4.15: fase da força horizontal; MEC- 48e.c. - - - ; ref. [33] — ;  $\alpha = 45^0$

### c. Cilindro Elítico

O cilindro de seção elítica representado na figura (4.16) a seguir, foi estudado por Goda e Yoshimura [32] utilizando um método analítico.

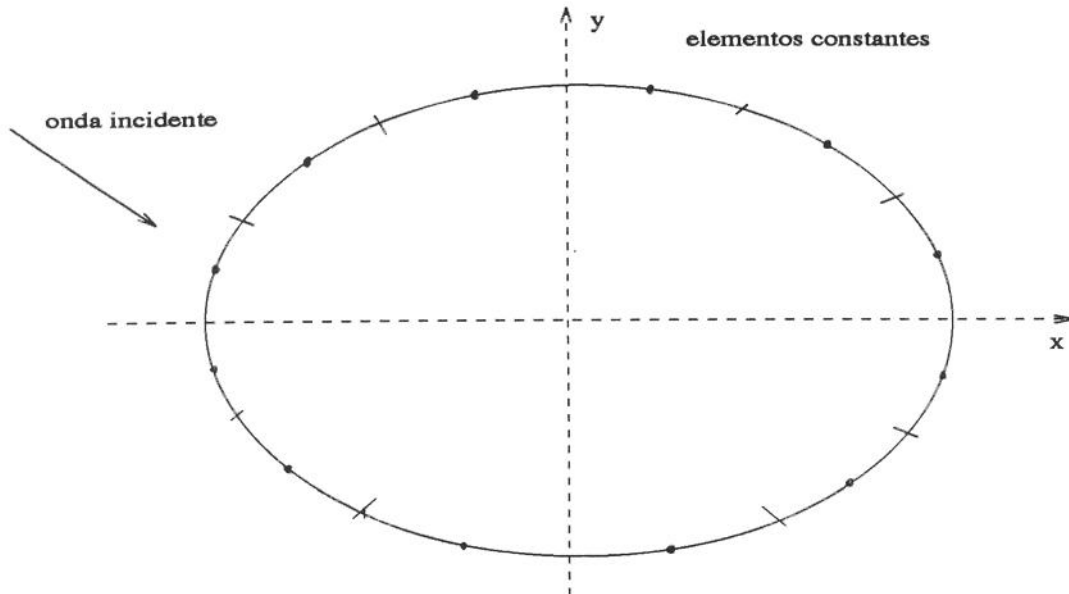


Figura 4.16: seção elítica

Discretizamos o contorno em 48 elementos constantes e calculamos a força na direção horizontal para  $\alpha = 30^\circ$ , na direção vertical para  $\alpha = 60^\circ$  e em ambas as direções para  $\alpha = 0^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$ .

Segundo Au e Brebbia [39], resultados melhores podem ser obtidos para o mesmo número de elementos se discretizações mais finas forem feitas próximas ao maior eixo da elipse, devido ao fato de que mudanças mais rápidas na inclinação ocorrem nas proximidades daquela posição. Os resultados obtidos para  $a = 10$  e  $b = 1.5$  em que 'a' e 'b' são, respectivamente, os eixos maior e menor da elipse, podem ser vistos nas figuras (4.17 - 4.20). Uma comparação é feita com a solução de Goda e Yoshimura [32], para  $\alpha = 30^\circ$  e  $\alpha = 60^\circ$ .

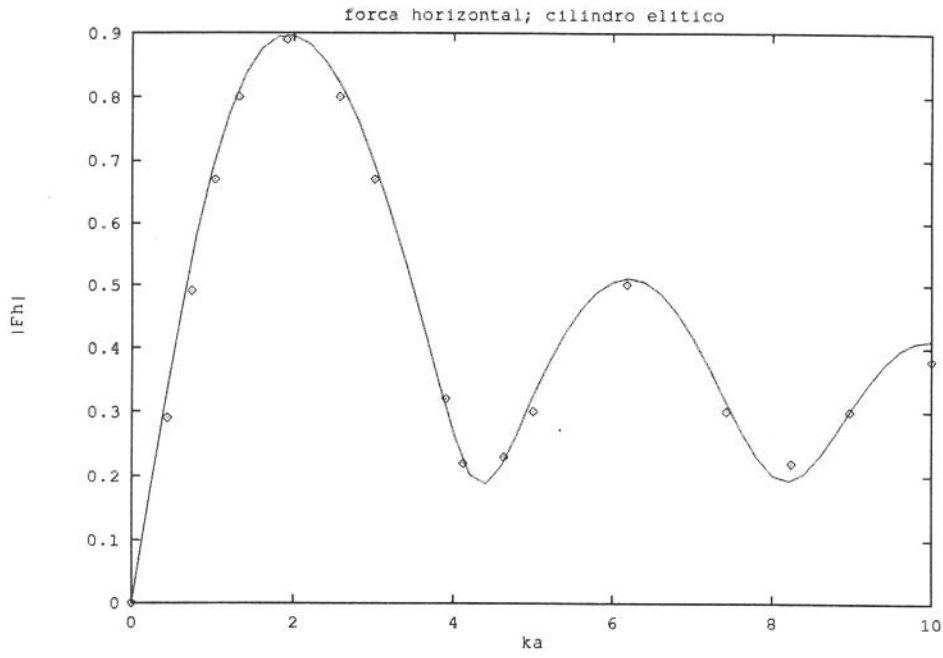


Figura 4.17: módulo da força horizontal; MEC-48e.c. — ; ref. [32] ●●● ;  $\alpha = 30^0$ ;  $\frac{H}{a} = 4$

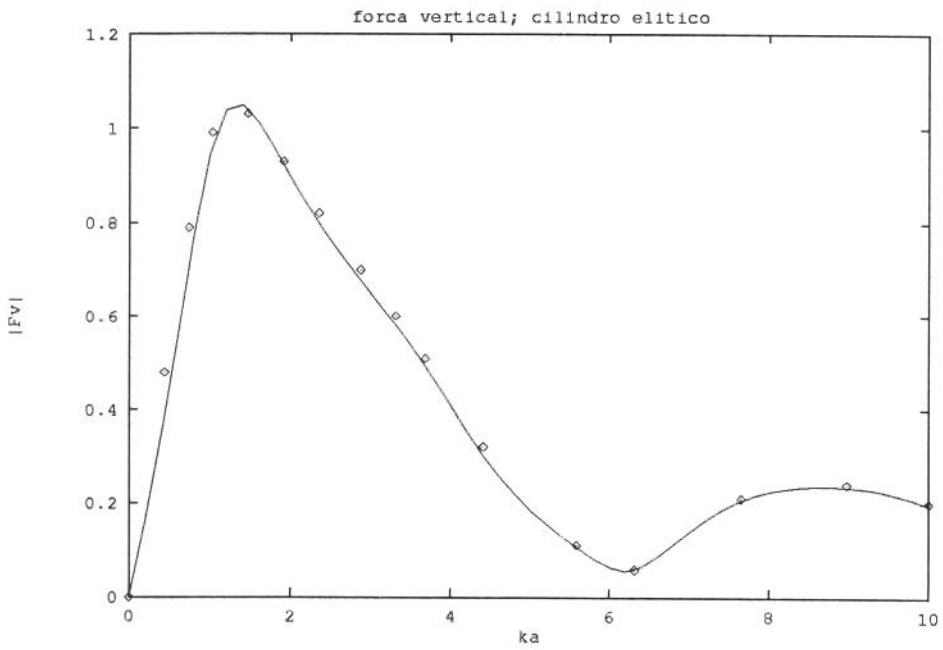


Figura 4.18: módulo da força vertical; MEC-48e.c. — ; ref. [32] ●●● ;  $\alpha = 60^0$ ;  $\frac{H}{a} = 4$



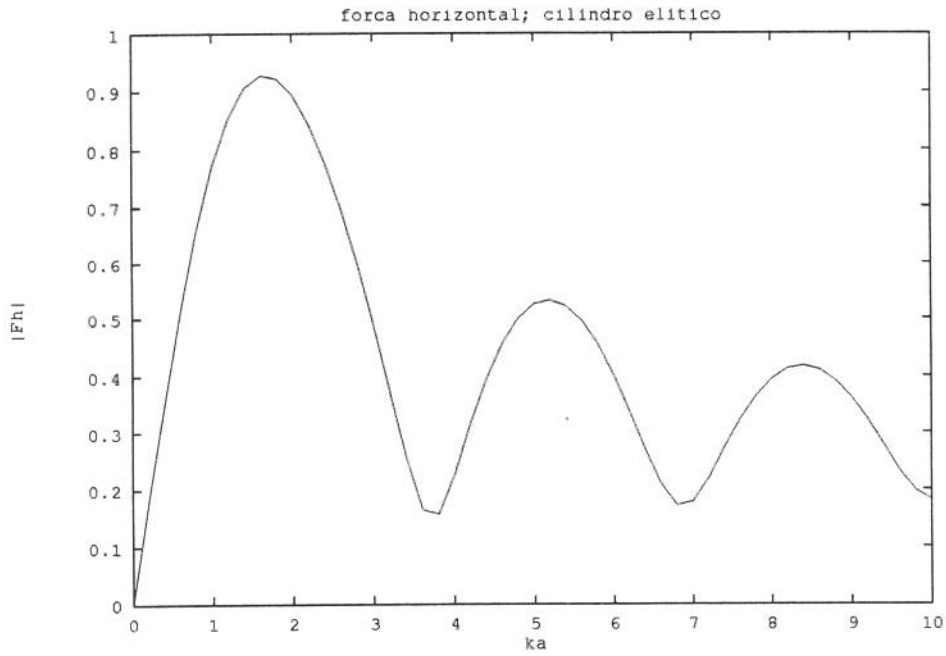


Figura 4.19: módulo da força horizontal; MEC-48e.c. — ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{H}{a} = 4$

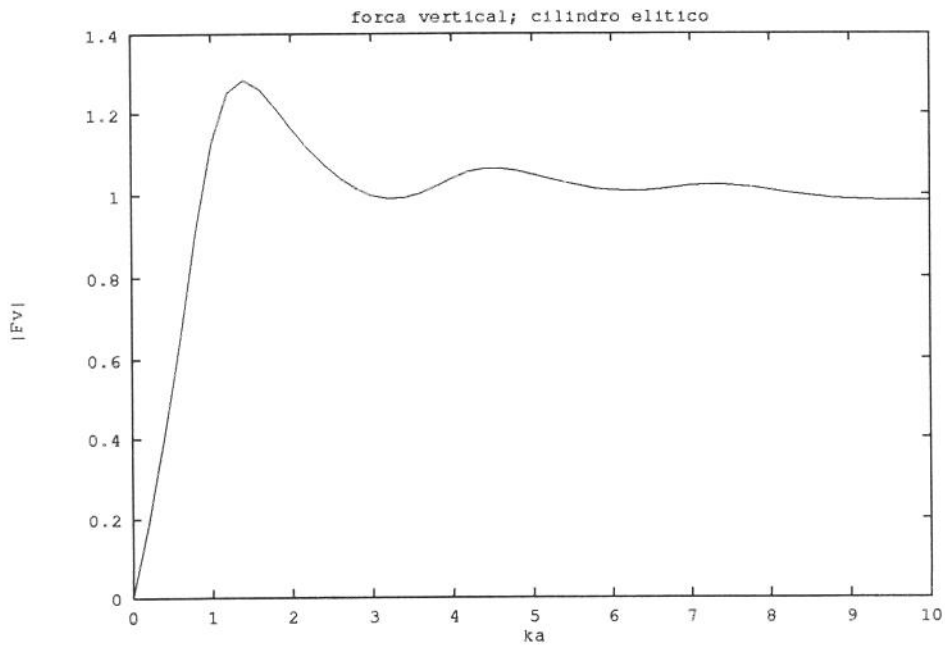


Figura 4.20: módulo da força vertical; MEC-48e.c. — ;  $\alpha = 90^0$ ;  $\frac{H}{a} = 4$

#### d. Interação entre Cilindros Circulares

As interações hidrodinâmicas entre os vários membros de estruturas oceânicas complexas sujeitas à ação de ondas são de considerável importância prática. No caso de uma tension-leg platform (TLP), que contém várias colunas verticais de diâmetros relativamente grandes, espera-se que a influência de colunas vizinhas sujeitas ao campo total de ondas possa provocar carregamentos hidrodinâmicos sobre colunas individuais, diferentes do que cada uma delas experimentaria se estivesse sozinha. Nesta seção, estudamos a interação entre dois, três e quatro cilindros circulares de igual raio, considerando a taxa  $R$  da força sobre o cilindro teste para aquela sobre o cilindro isolado. Utilizamos 24 elementos constantes para cada cilindro, tomando como ângulos de ataque,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$ . Diferentes distâncias entre os centros dos cilindros são consideradas para averiguar até que ponto a interação entre os mesmos pode ser levada em consideração. Os resultados mostrados nas figuras (4.22), (4.23) e (4.42) foram comparados com os obtidos por Masseti e Wrobell [37]. Como se pode observar a concordância é excelente.

##### i. Dois Cilindros Circulares

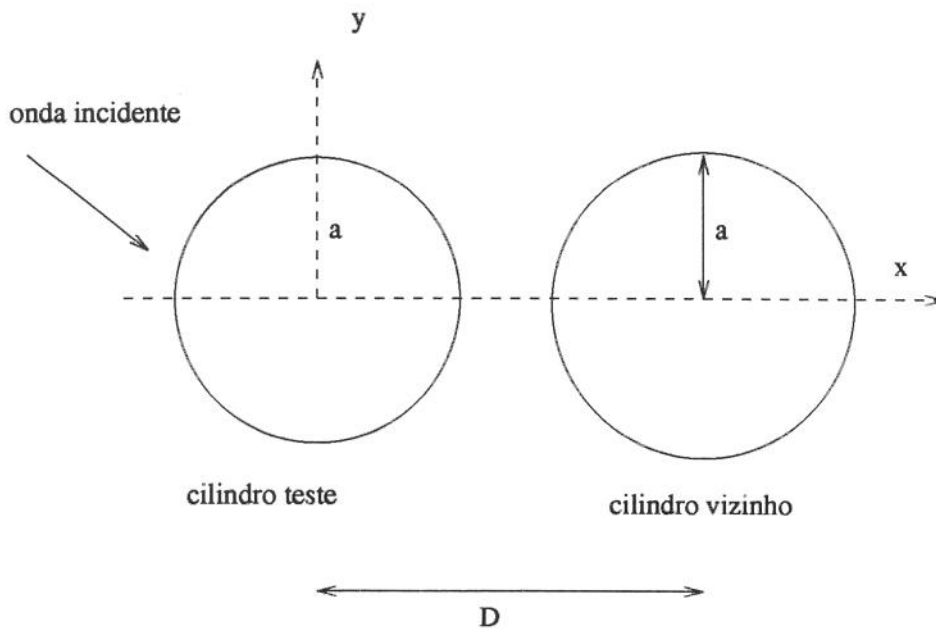


Figura 4.21: dois cilindros circulares

As seguintes relações são consideradas:  $\frac{H}{a} = 10$ ;  $\frac{D}{a} = 3$ ;  $\frac{D}{a} = 5$  e  $\frac{D}{a} = 10$ .

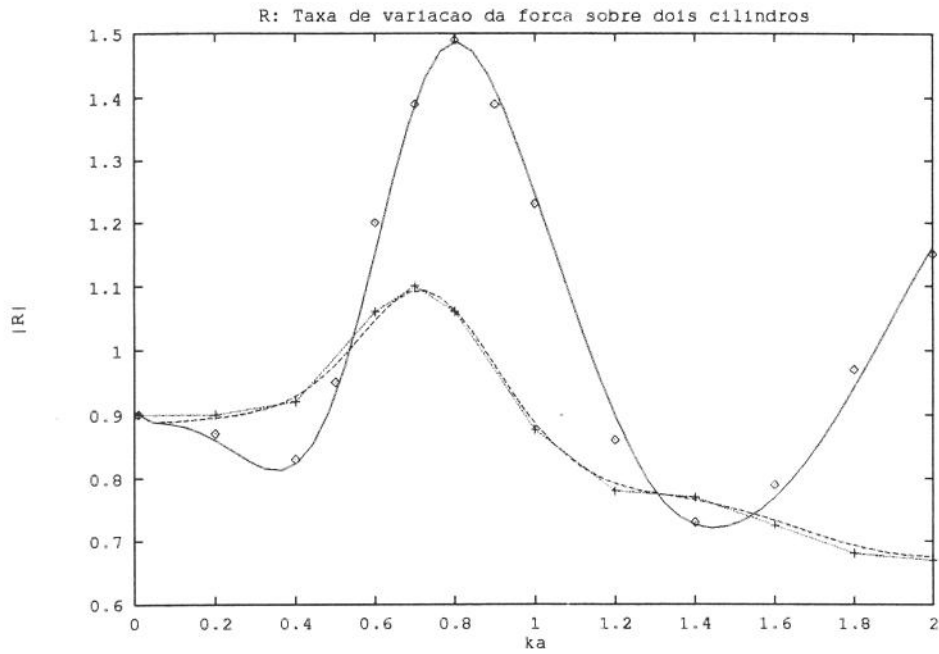


Figura 4.22: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; ref. [37] ●●● e ...+...+... ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

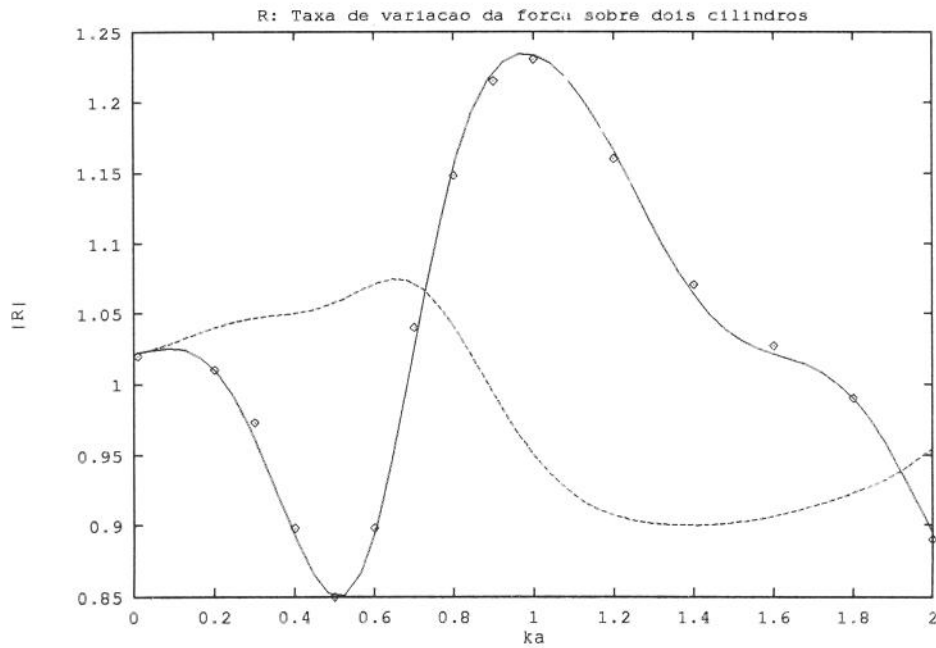


Figura 4.23: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ; ref. [37] ●●● ;  $\alpha = 45^0$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

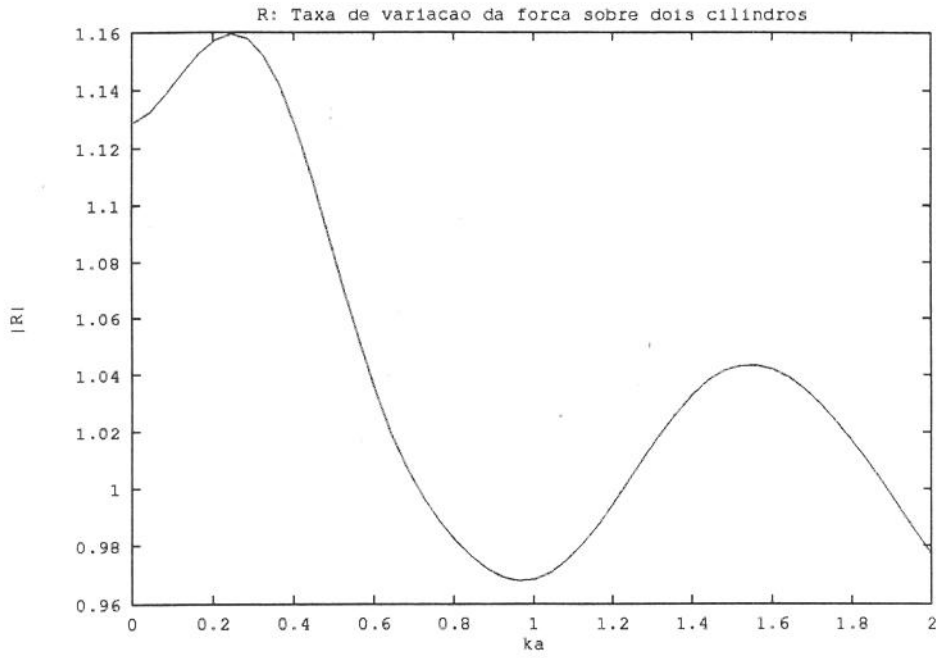


Figura 4.24: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

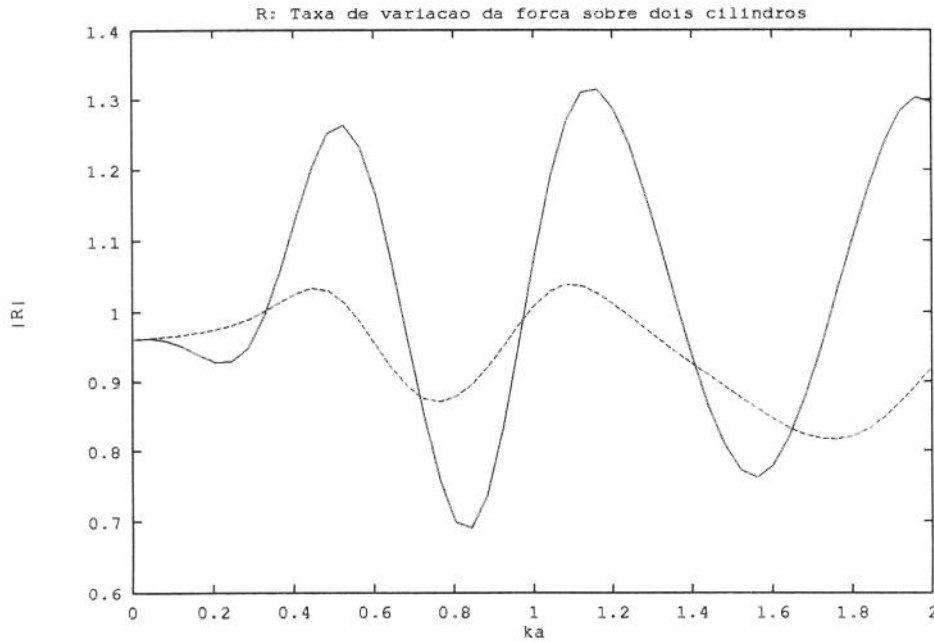


Figura 4.25: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

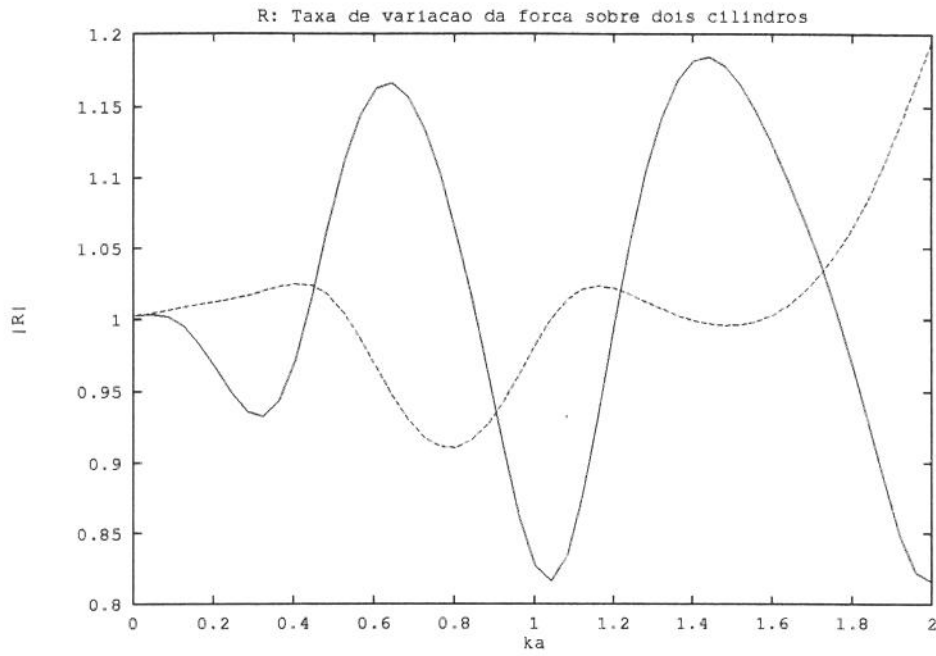


Figura 4.26: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 45^{\circ}$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

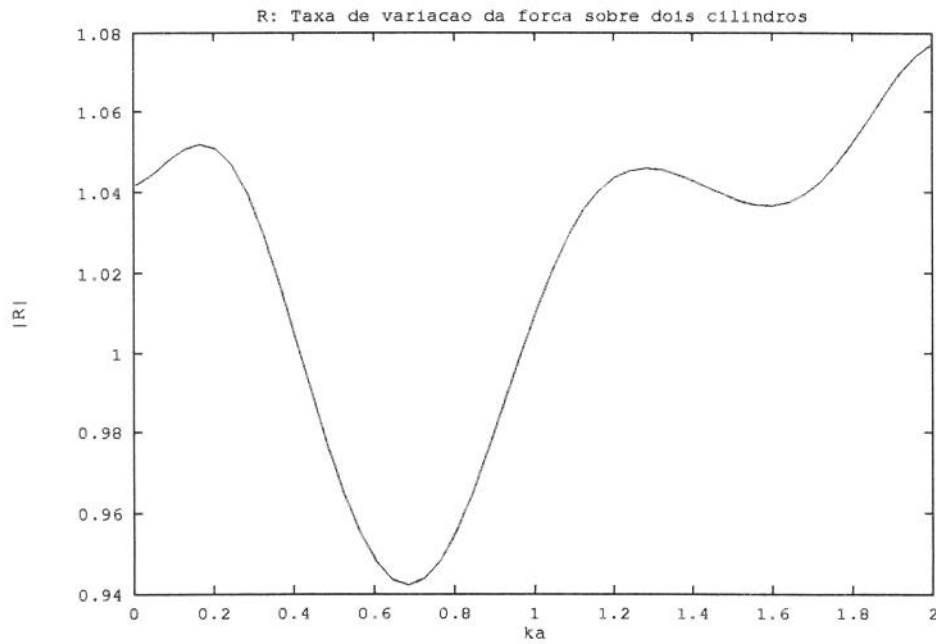


Figura 4.27: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 90^{\circ}$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

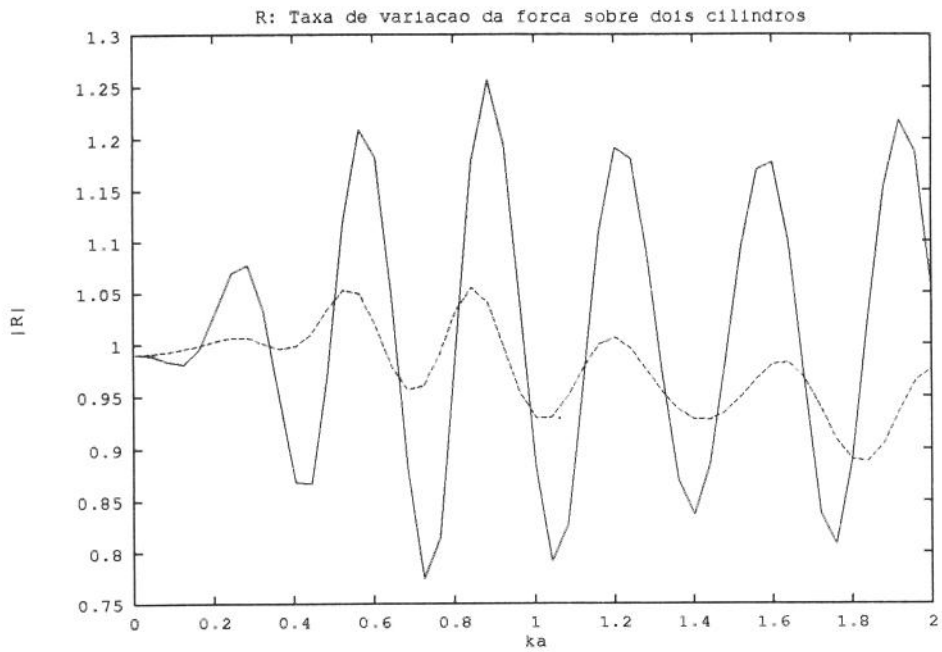


Figura 4.28: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 10$

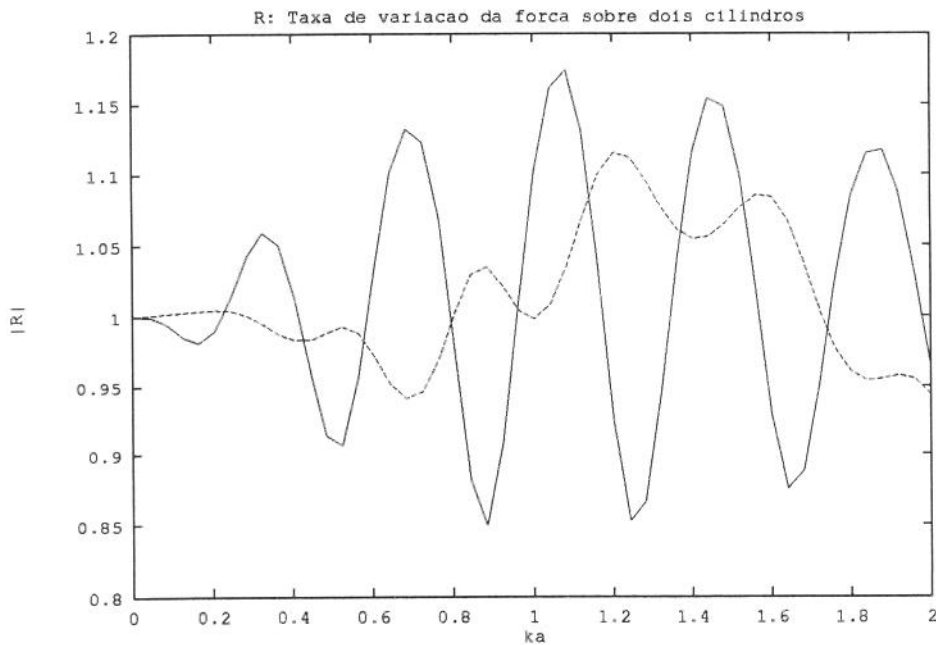


Figura 4.29: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 45^0$ ;  $\frac{D}{a} = 10$

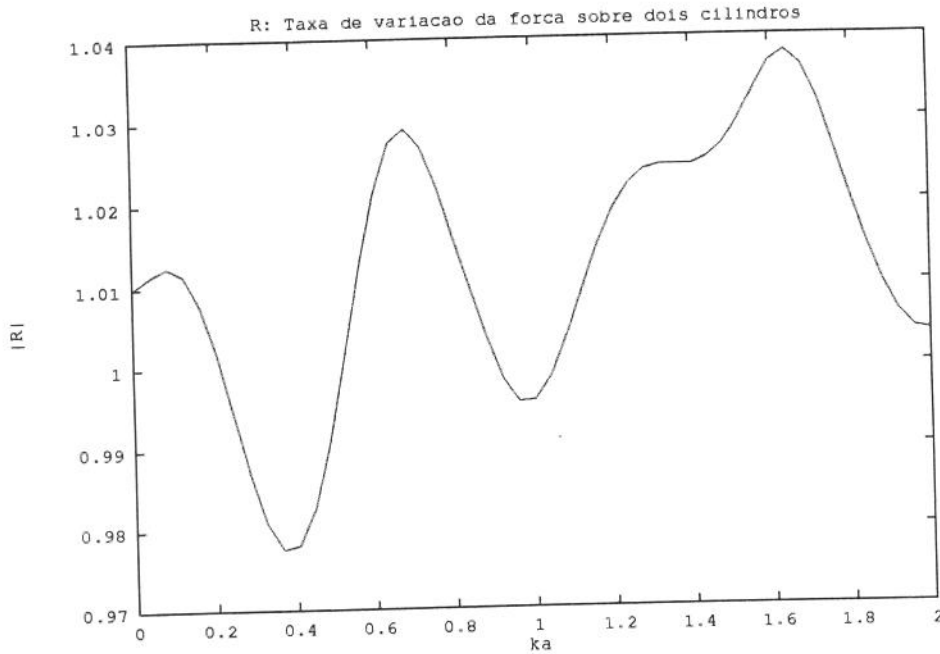


Figura 4.30: cil. teste — ; cil. vizinho - - - ;  $\alpha = 90^0$ ;  $\frac{D}{a} = 10$

A partir das figuras observamos os seguintes efeitos da interação hidrodinâmica:

- a. Dependem fortemente da frequência da onda. De fato, as interações não são significativas para baixas frequências;
- b. a força sobre o cilindro teste é mais significativa para  $\alpha = 0^0$ , isto é, quando o cilindro vizinho está diretamente atrás dele;
- c. para  $\alpha = 90^0$  as forças que incidem sobre os dois cilindros são iguais;
- d. quando a distância entre os cilindros aumenta, a força total sobre cada um deles diminui e tende a oscilar em torno da reta  $y = 1$ . Isto é esperado, visto que para grandes distâncias cada cilindro comporta-se como um cilindro isolado.
- e. A taxa R não tende a 1, quando  $\kappa a$  tende a zero, exceto em alguns casos (figuras 4.26 e 4.29).

ii. Três cilindros circulares

Os efeitos da interação entre três cilindros circulares igualmente espaçados (fig. 4.31) podem ser vistos nas figuras (4.32 - 4.40).

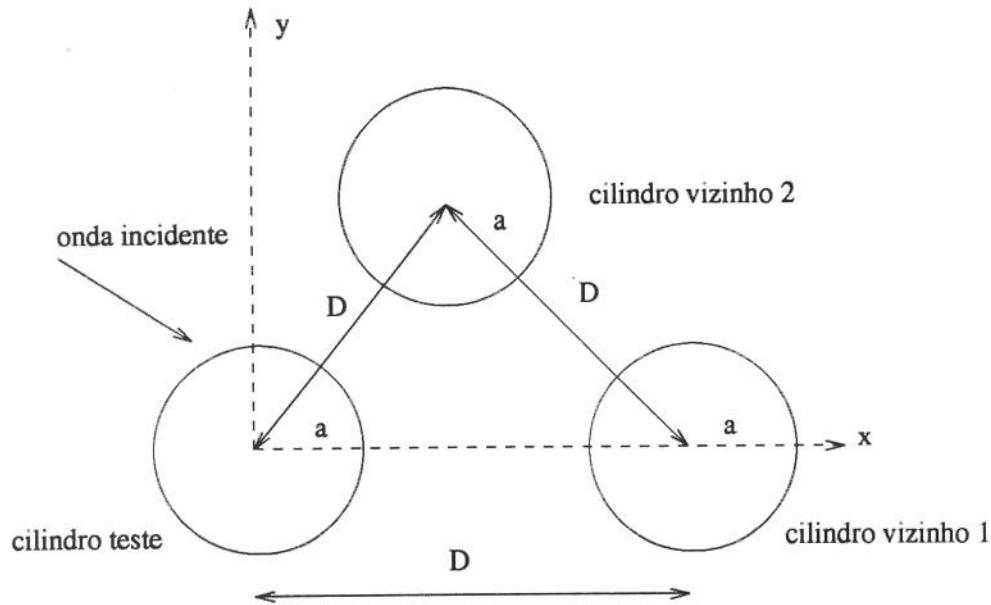


Figura 4.31: três cilindros circulares

Como antes, fizemos uma análise para diferentes espaçamentos bem como diferentes ângulos de incidência. Os resultados numéricos estão de acordo com os existentes na literatura e com o que prediz a teoria de difração com respeito à tendência da força quando a distância e os ângulos de incidência são alterados. Observamos que:

a. A influência dos cilindros vizinhos sobre o cilindro teste tende a crescer até  $\alpha = 45^{\circ}$  para depois decrescer até  $\alpha = 90^{\circ}$ ;

b. a força sobre o cilindro vizinho 1 tende a decrescer até  $\alpha = 45^{\circ}$  para depois crescer novamente até  $\alpha = 90^{\circ}$ . Neste caso, a força é a mesma para os ângulos de incidência  $\alpha = 0^{\circ}$  e  $\alpha = 90^{\circ}$ ; No caso do cilindro vizinho 2 a força tende a crescer até  $\alpha = 45^{\circ}$  apresentando depois um ligeiro declínio até  $\alpha = 90^{\circ}$ ;

c. para diferentes distâncias entre os centros dos cilindros, a razão entre a força sobre cada cilindro na presença dos outros e a força sobre o cilindro isolado apresenta o mesmo comportamento para diferentes ângulos de incidência: em cada caso esta razão oscila em torno da reta  $y = 1$  à medida que  $D$  aumenta.



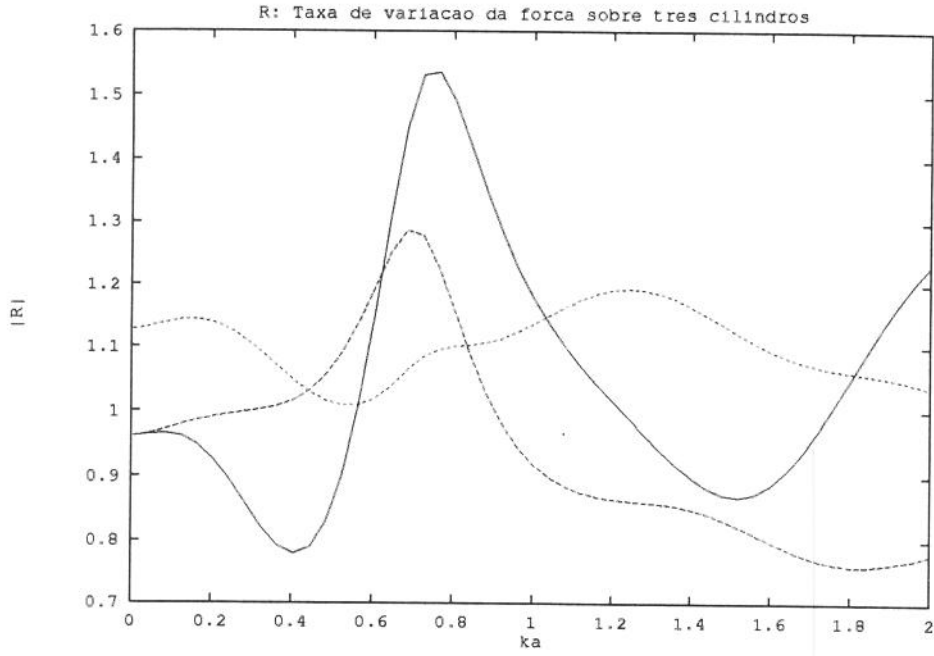


Figura 4.32: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

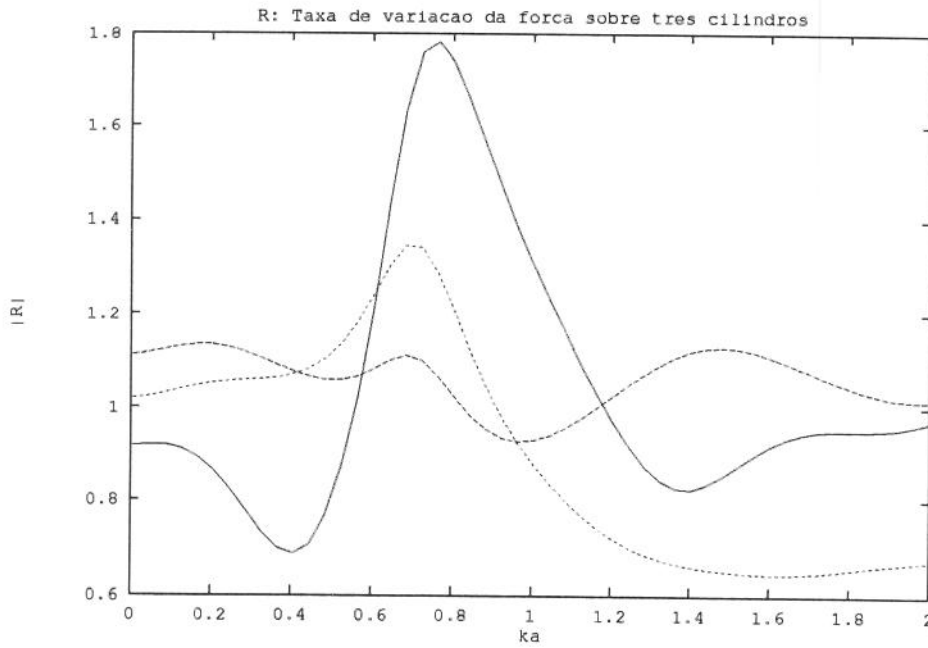


Figura 4.33: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 45^0$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

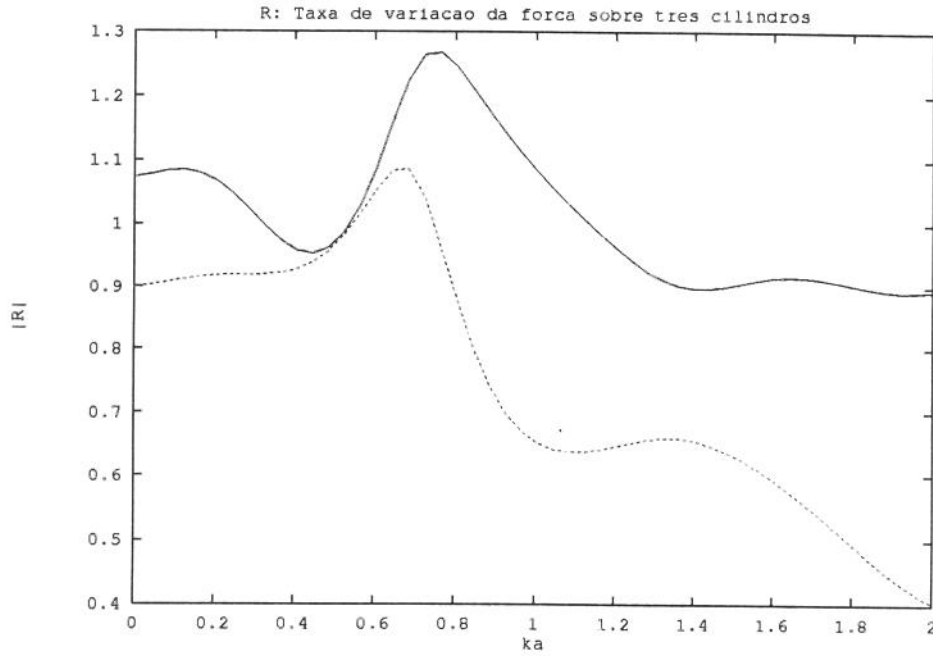


Figura 4.34: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 90^0$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

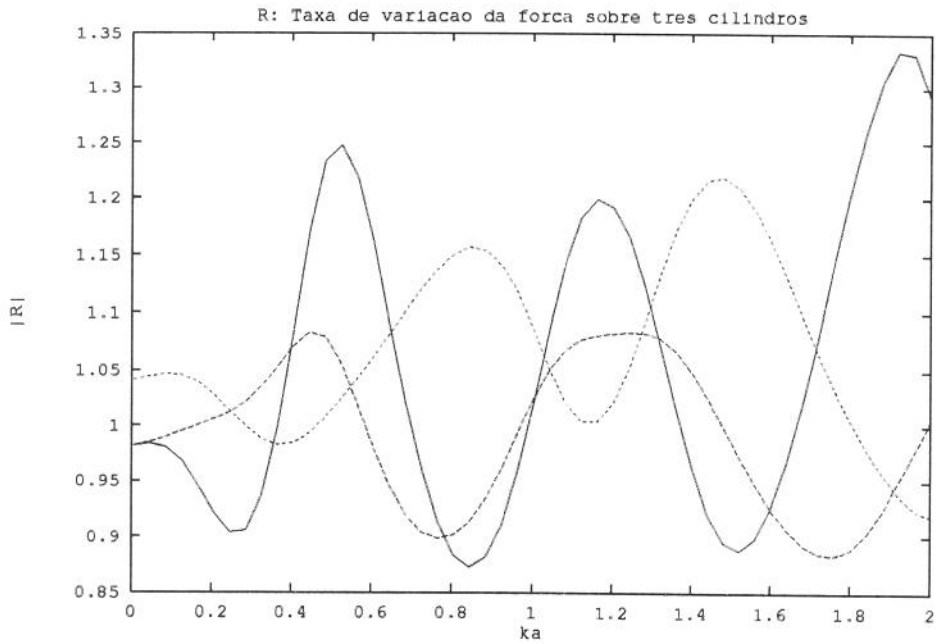


Figura 4.35: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

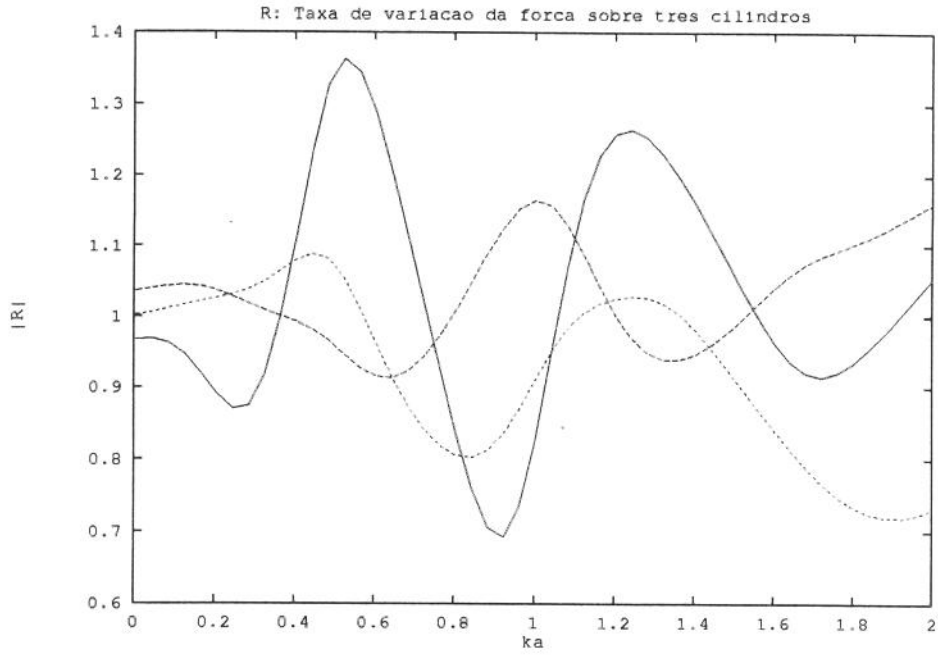


Figura 4.36: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 45^{\circ}$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

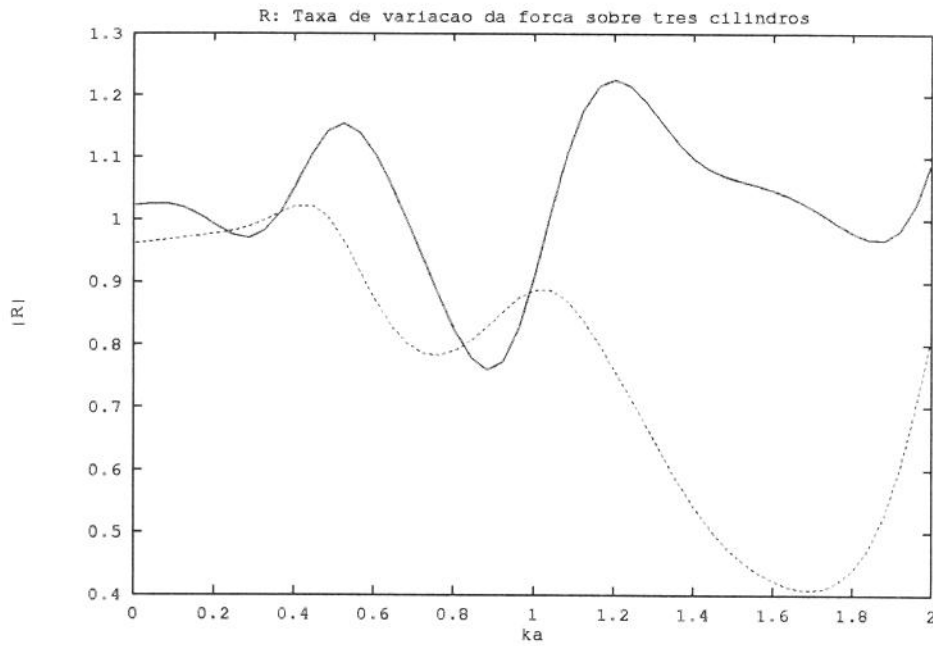


Figura 4.37: cil. teste — ; cil. vizinho 1 — ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 90^{\circ}$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

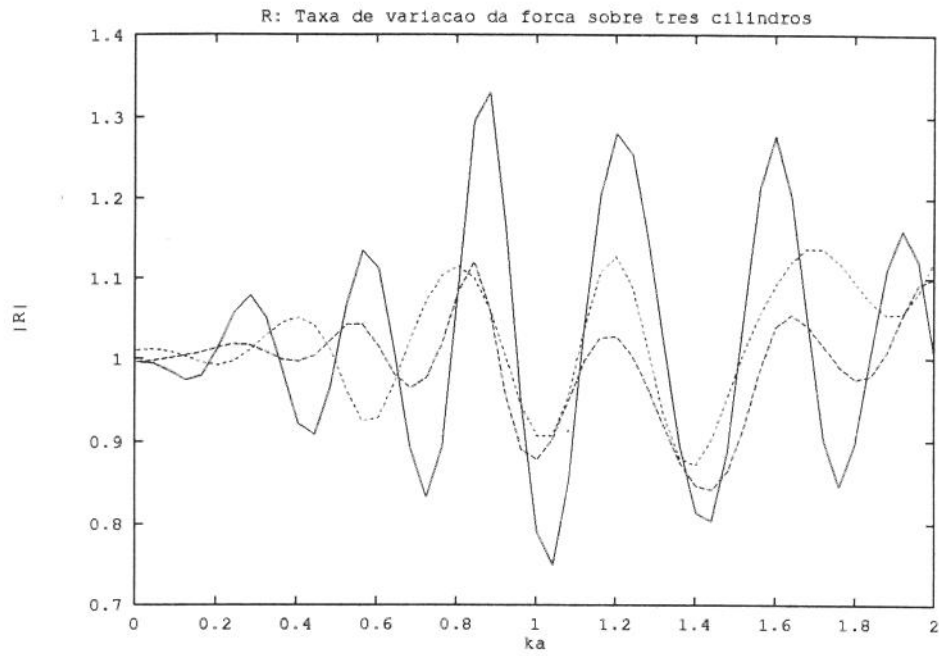


Figura 4.38: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 10$

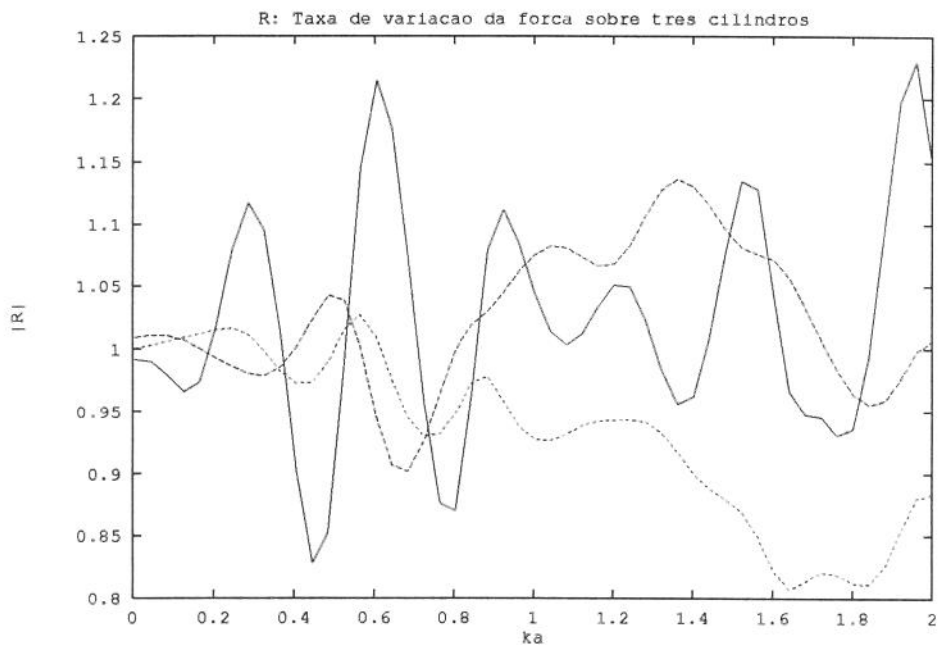


Figura 4.39: cil. teste — ; cil. vizinho 1 - - - ; cil. vizinho 2 ... ;  $\alpha = 45^0$ ;  $\frac{D}{a} = 10$

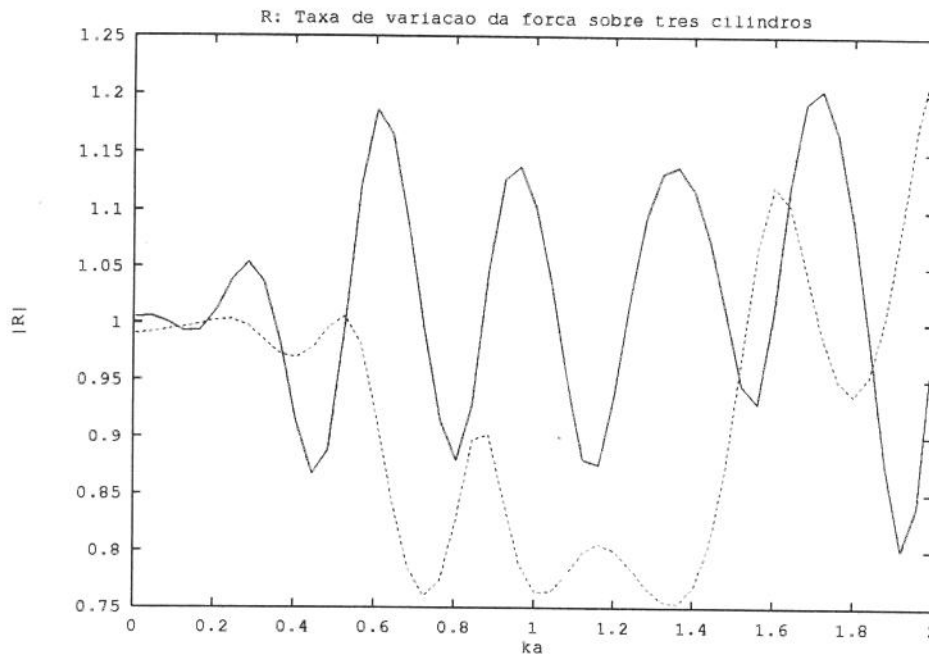


Figura 4.40: cil. teste — ; cil. vizinho 1 — ; cil. vizinho 2 ...  $\alpha = 90^0; \frac{D}{a} = 10$

### iii. Quatro cilindros circulares

Uma configuração de quatro cilindros pode representar uma TLP flutuante ou uma grande plataforma de quatro colunas (figura 4.41).

Efeitos da interferência sobre cada cilindro devido à presença de outros, são mostrados nas figuras (4.42 - 4.48).

Na figura (4.42), com  $\alpha = 0^0$ , vemos que as forças sobre o cilindro teste ( $F_1$ ) e o cilindro vizinho 3 ( $F_4$ ) são iguais e de intensidade maior que aquelas que agem sobre os vizinhos 1 ( $F_2$ ) e 2 ( $F_3$ ), que por sua vez também são iguais. Isto é esperado devido à disposição dos quatro cilindros.

A figura (4.46), com  $\alpha = 45^0$ , mostra que as forças sobre os cilindros vizinhos 1 e 3 são idênticas e com menores oscilações em regiões próximas às extremidades do intervalo de frequência.

Para  $\alpha = 90^0$  o comportamento das forças é o mesmo que para  $\alpha = 0^0$ , exceto pelo fato de que neste caso  $F_1 = F_2$  e  $F_3 = F_4$ , com intensidade maior para o par  $F_1$ - $F_2$ .

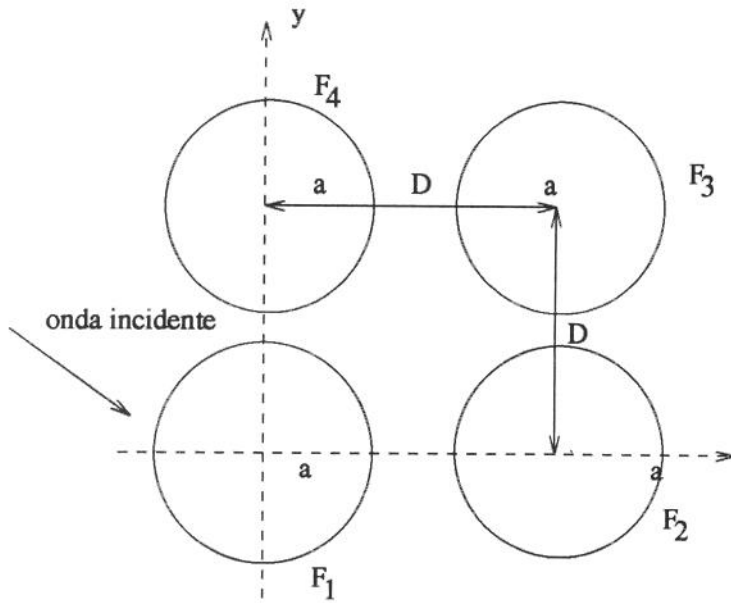


Figura 4.41: quatro cilindros circulares

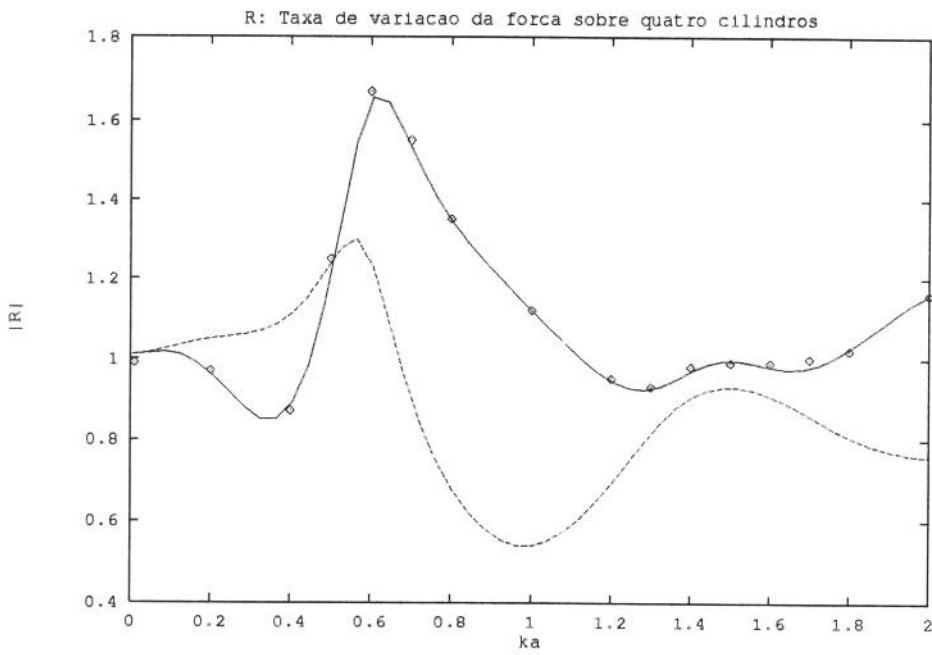


Figura 4.42: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 - · - · ; cil. viz. 3 —●— ; ref. [37] ●●●;  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

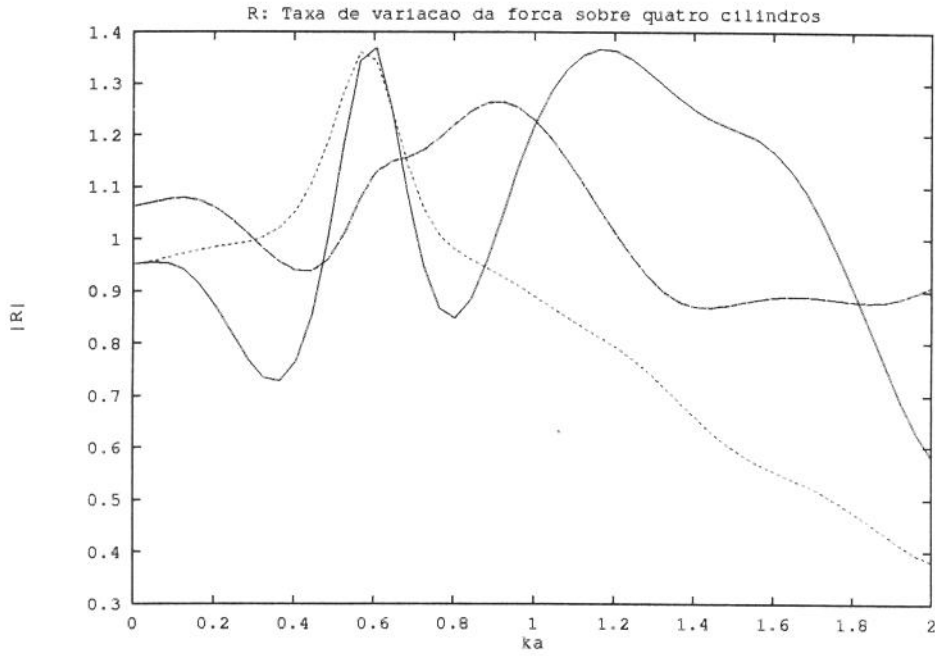


Figura 4.43: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 - - - ;  $\alpha = 45^{\circ}$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

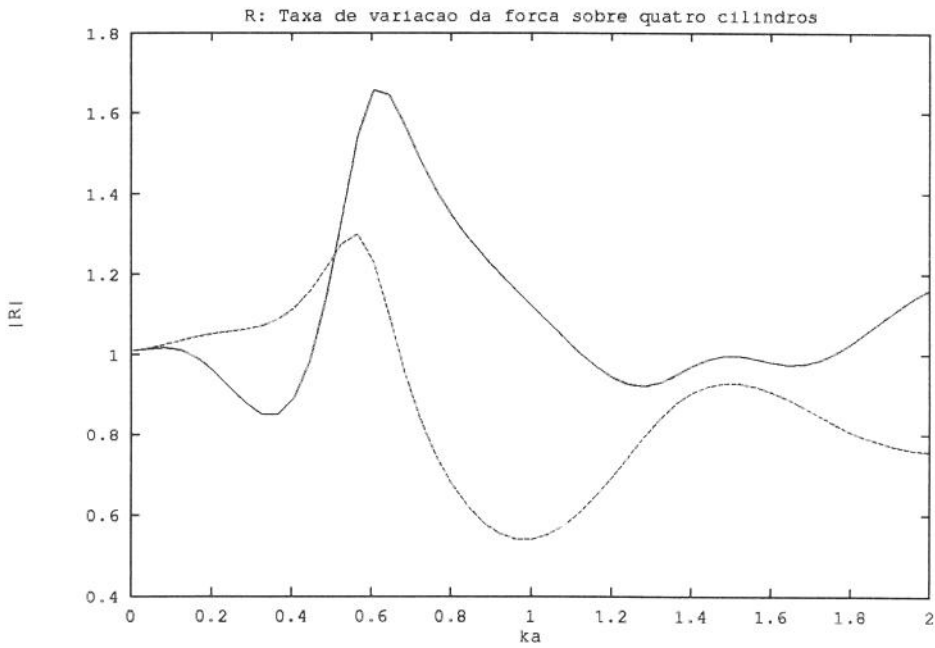


Figura 4.44: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 ... ;  $\alpha = 90^{\circ}$ ;  $\frac{D}{a} = 3$

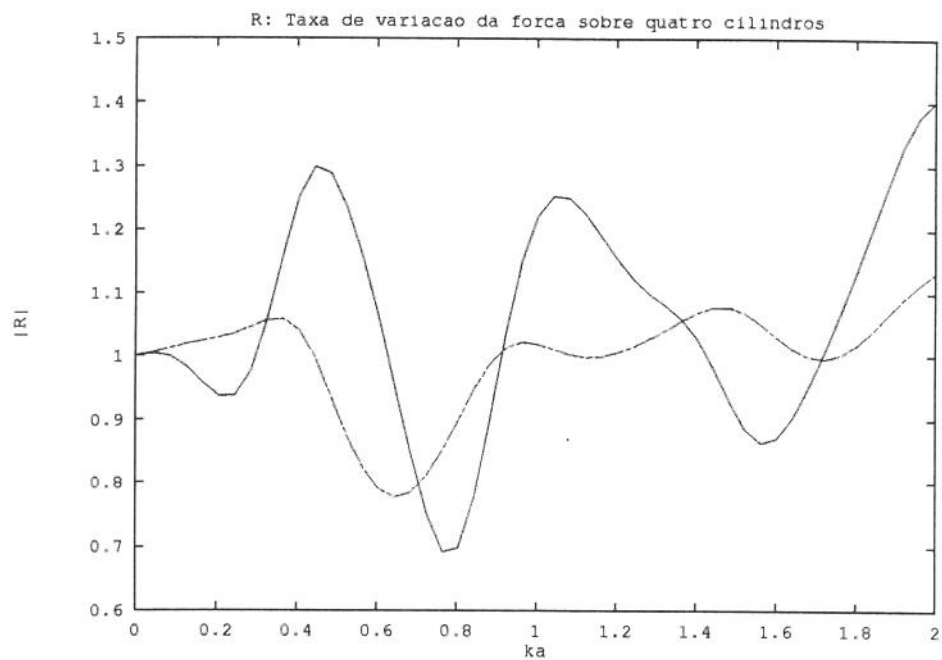


Figura 4.45: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 - - - ; cil. viz. 3 — ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

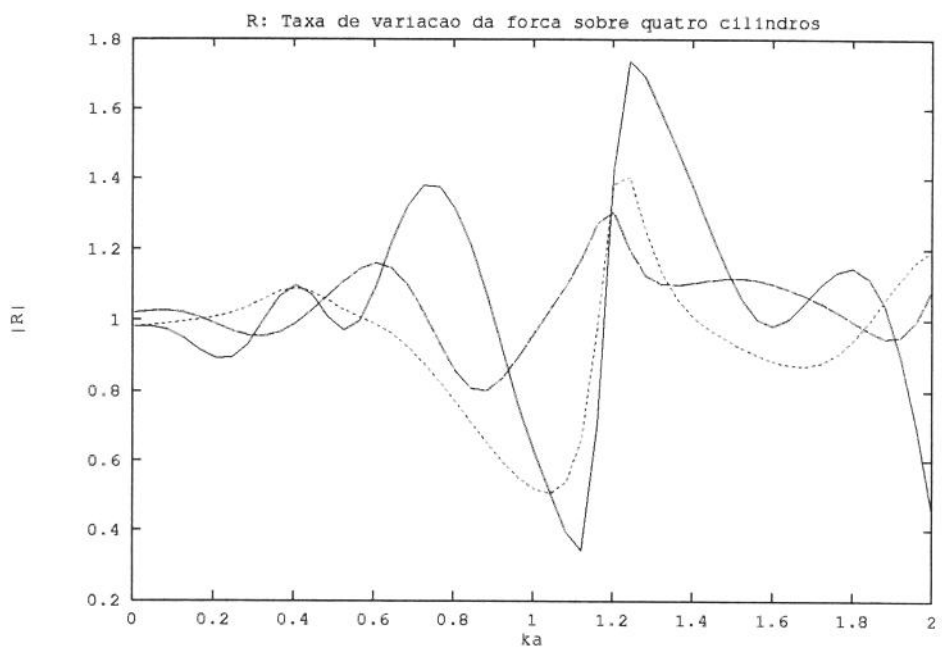


Figura 4.46: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 - - - ;  $\alpha = 45^0$ ;  $\frac{D}{a} = 5$



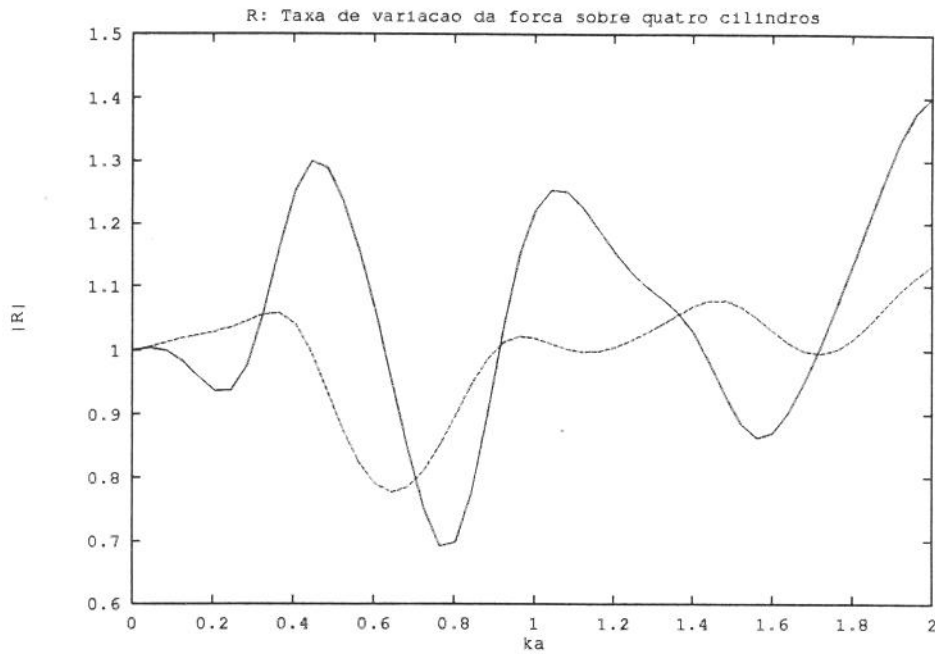


Figura 4.47: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 ... ; cil. viz. 3 ... ;  $\alpha = 90^0$ ;  $\frac{D}{a} = 5$

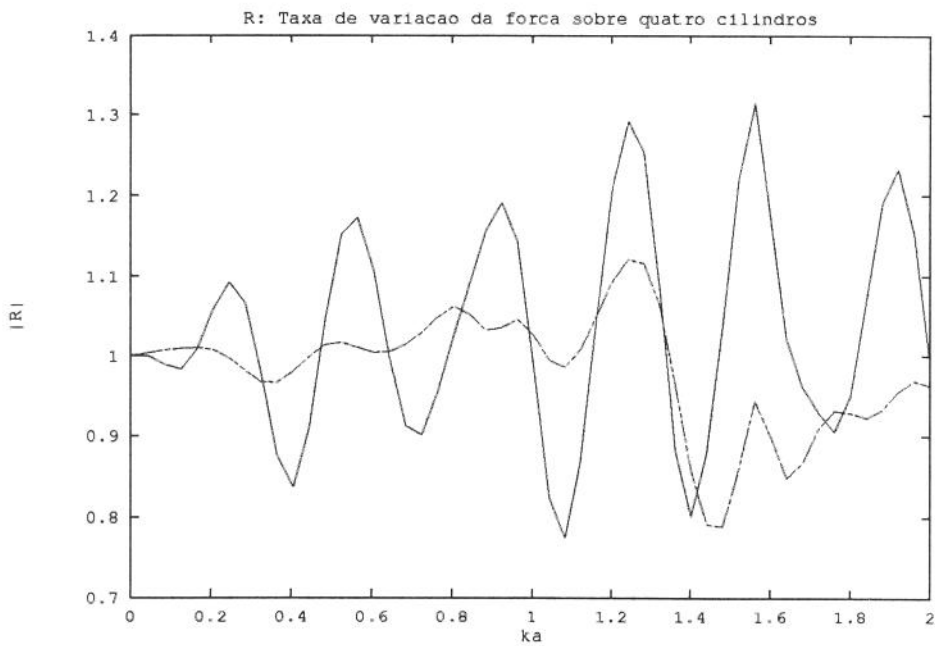


Figura 4.48: cil. teste — ; cil. viz. 1 - - - ; cil. viz. 2 - - - ; cil. viz. 3 - - - ;  $\alpha = 0^0$ ;  $\frac{D}{a} = 10$

## 2. Problema em Plano Vertical

Neste item do nosso trabalho, novamente focalizamos nossa atenção sobre possíveis comparações dos resultados numéricos presentes com outros existentes na literatura visando validar a formulação e resultados numéricos do problema de interação onda-estrutura submersa. A implementação computacional, em duas dimensões, que desenvolvemos é capaz de abranger três diferentes configurações, envolvendo três formas de estruturas: semicircular, retangular e circular. O programa gera automaticamente as coordenadas dos nós dos elementos ao longo do contorno do domínio desde que detalhes da configuração sejam fornecidos. Tais detalhes incluem a dimensão característica da estrutura, profundidade da água, profundidade de submergência e o número de elementos.

### a. Estruturas Semi-Submersas

#### i. Seção Circular

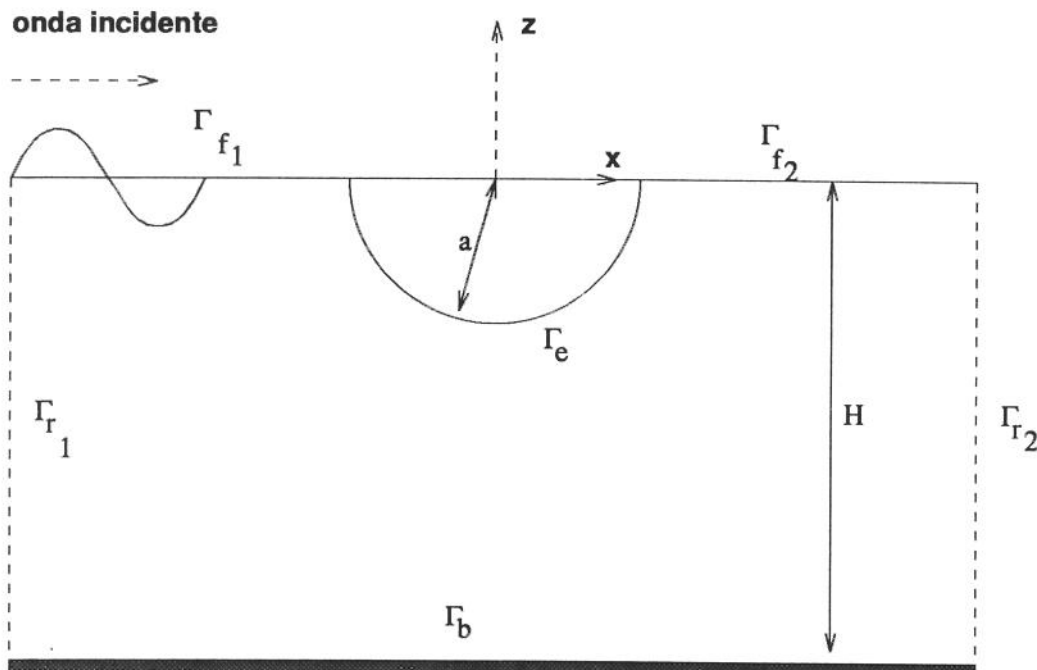


Figura 4.49: cilindro semi-submerso

Este problema foi estudado por Chakrabarti [18] e Naftger-Chakrabarti [38] que utilizaram em sua formulação uma função de Green desenvolvida por John [53]. Tal formulação sofre do problema de frequências irregulares, que os referidos autores corrigiram, aproximando a solução, na vizinhança destas frequências, utilizando interpolação.

Trabalhamos com 51 frequências  $\kappa a \in [.01, 10]$  e consideramos diferentes profundidades  $H$  para observar a influência do fundo sobre as forças que atuam no semicilindro.

Comparamos nossos resultados com os da referência [38]. Como se pode observar nas figuras (4.50)-(4.55) existe uma excelente concordância entre os dois métodos numéricos.

As figuras (4.56) e (4.57) resumem como a presença do fundo interfere no escoamento. Discretizamos os contornos  $\Gamma_{f_1}$ ,  $\Gamma_{r_1}$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_{r_2}$ ,  $\Gamma_{f_2}$  e  $\Gamma_e$  em  $N$  elementos constantes, conforme mostra a tabela (4.4) a seguir.

Tabela 4.4: discretização: semi-cilindro na superfície livre

Contorno	$\Gamma_{f_1}$	$\Gamma_{r_1}$	$\Gamma_b$	$\Gamma_{r_2}$	$\Gamma_{f_2}$	$\Gamma_e$	$\frac{H}{a}$
N	25	20	60	20	25	16	4
N	25	8	60	8	25	16	1.5
N	25	5	60	5	25	16	1.05

Os contornos fictícios de radiação foram fixados a uma distância  $d = 6a$  e as forças sobre o semi-cilindro foram normalizadas, respectivamente, por:

$$F_h = \frac{F_x}{\rho g A a} \quad (4.85)$$

e

$$F_v = \frac{F_y}{\rho g A a} \quad (4.86)$$

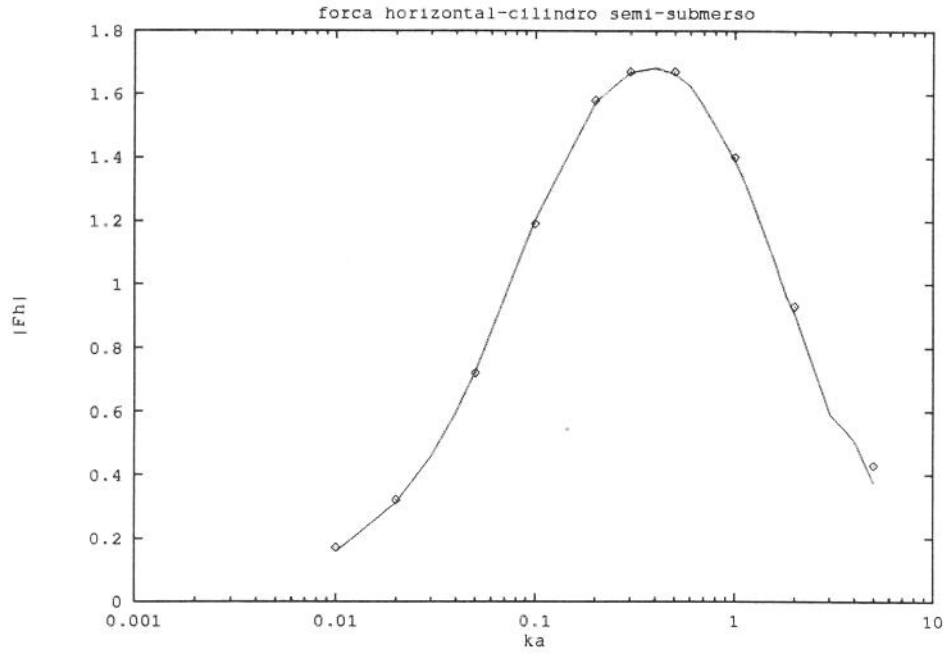


Figura 4.50: módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.05$

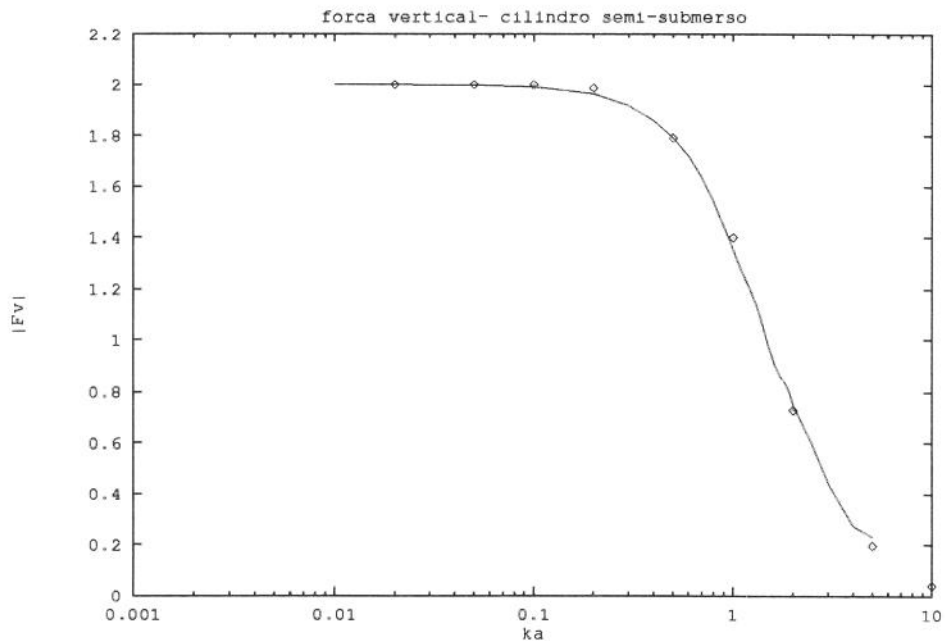


Figura 4.51: módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.05$

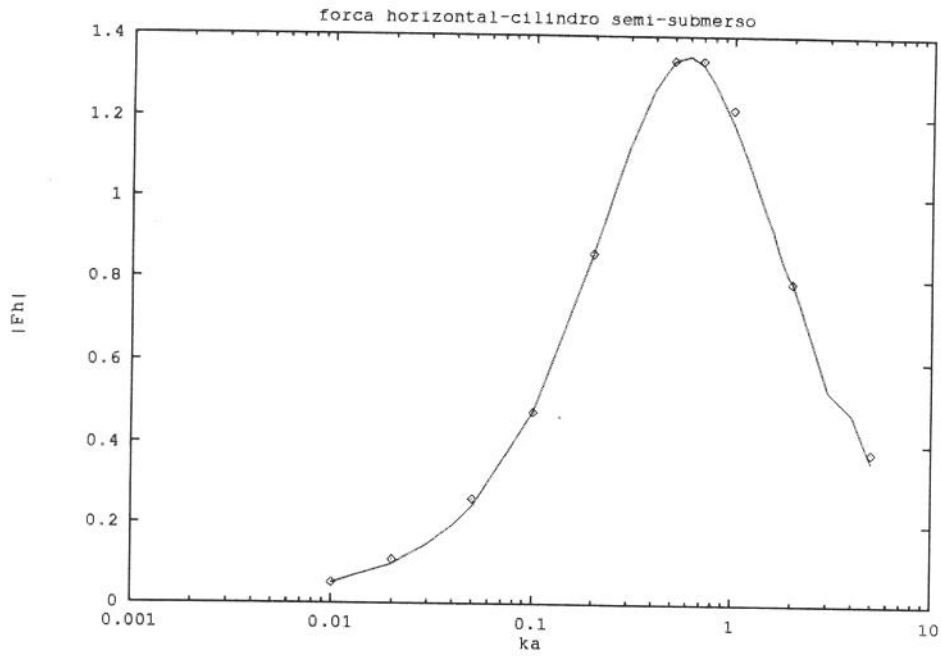


Figura 4.52: módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.5$

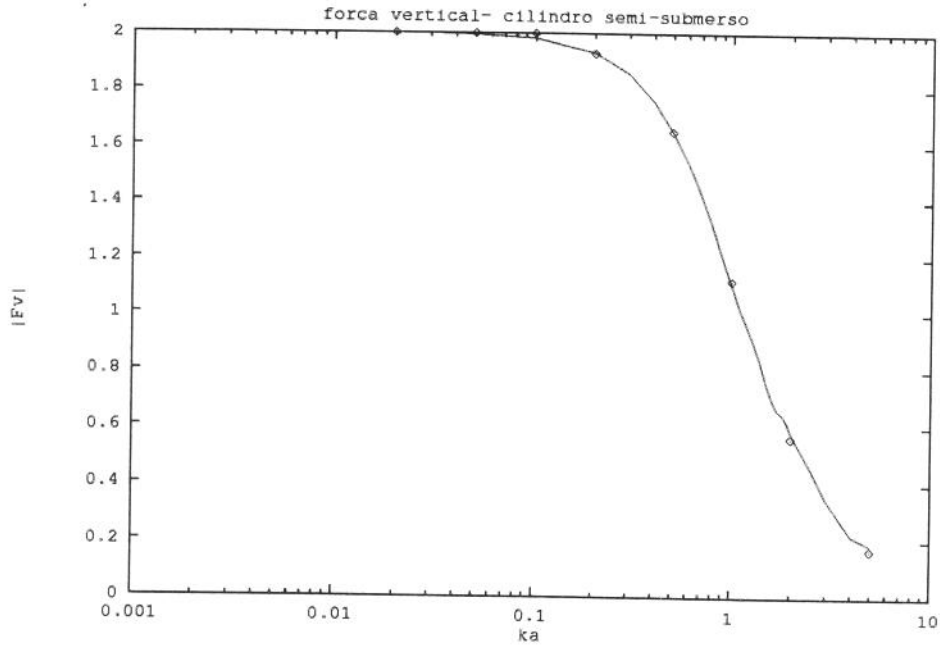


Figura 4.53: módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.5$

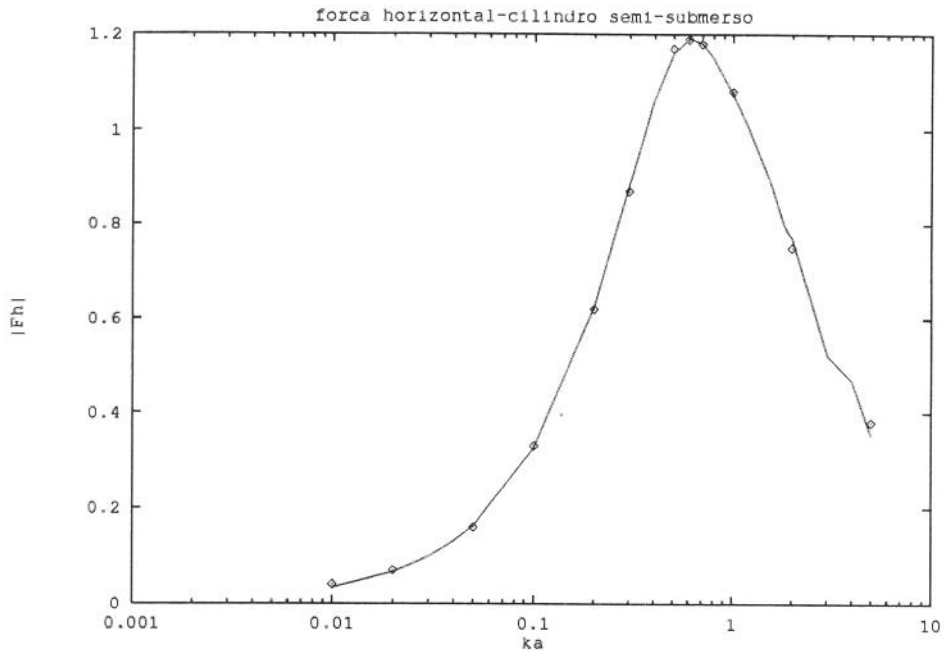


Figura 4.54: módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 4$

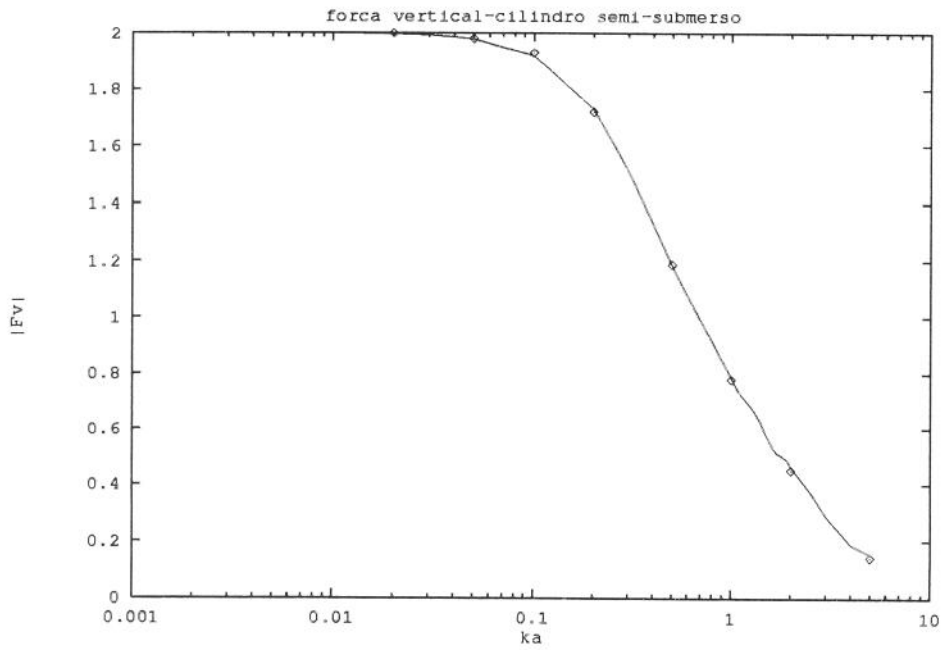


Figura 4.55: módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 4$

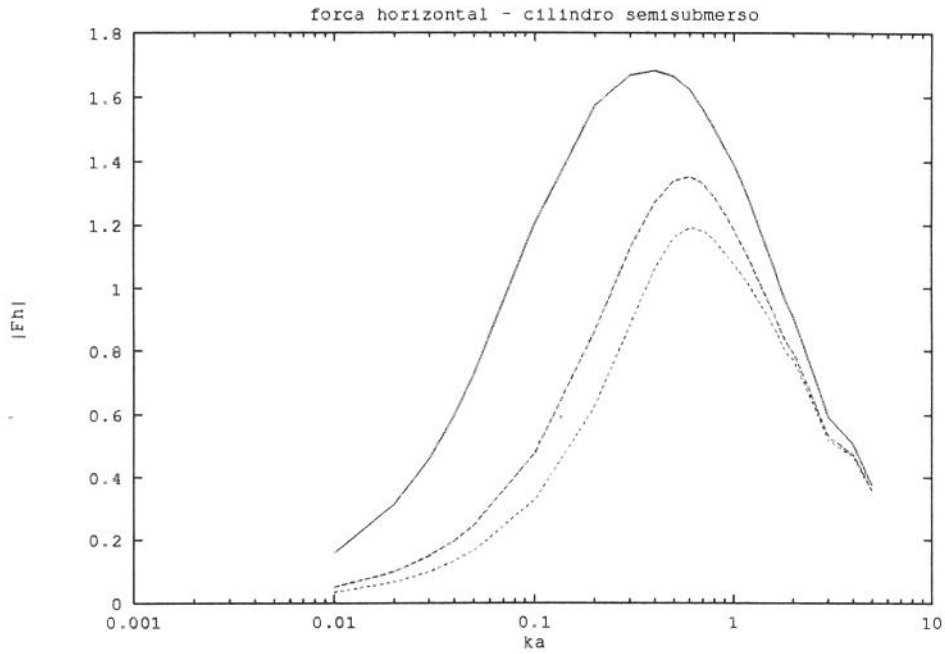


Figura 4.56: módulo da força horizontal;  $\frac{H}{a} = 1.05$  — ;  $\frac{H}{a} = 1.5$  - - - ;  $\frac{H}{a} = 4$  ...

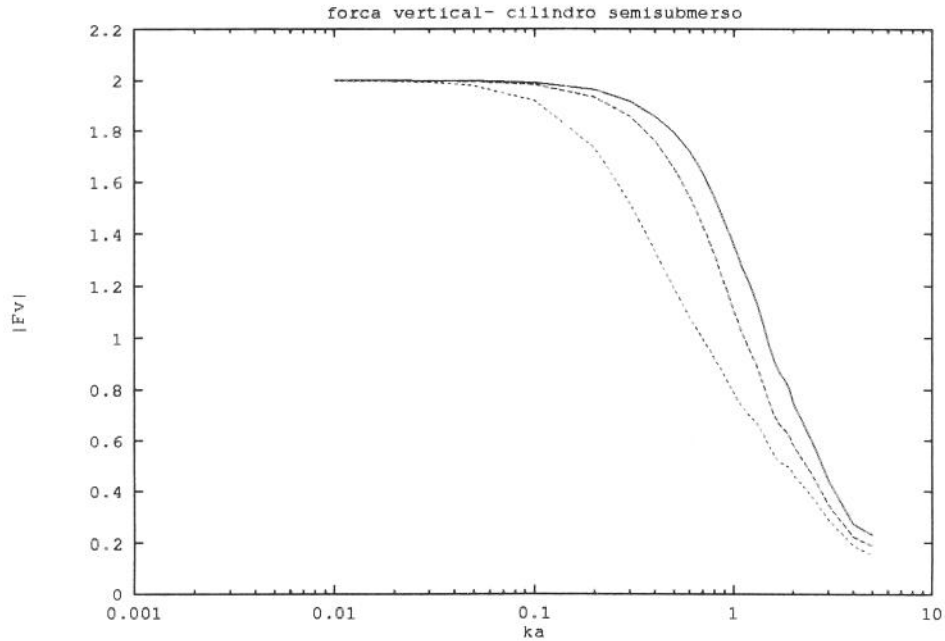


Figura 4.57: módulo da força vertical;  $\frac{H}{a} = 1.05$  — ;  $\frac{H}{a} = 1.5$  - - - ;  $\frac{H}{a} = 4$  ...

## ii. Seção Retangular

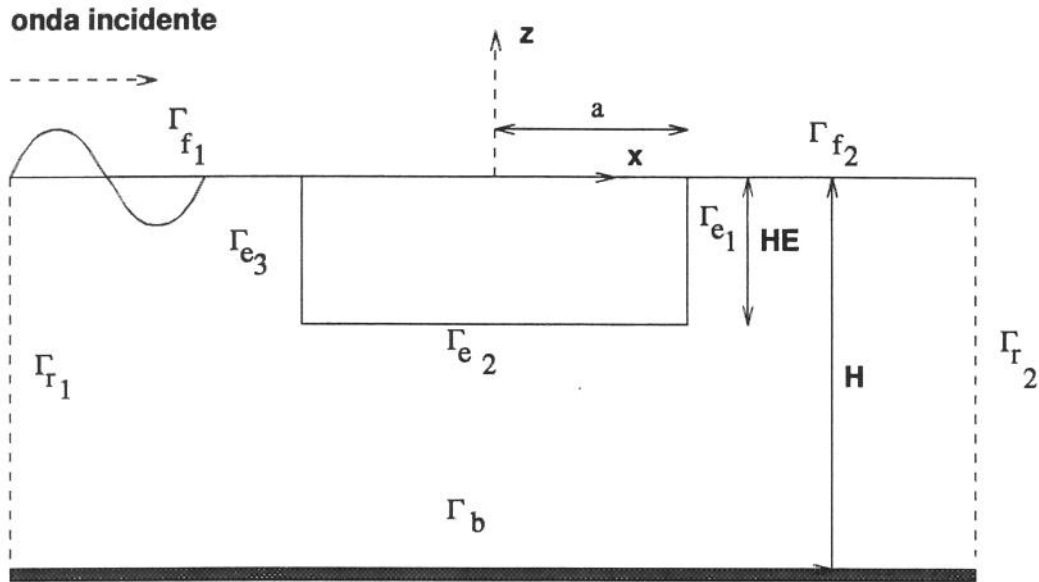


Figura 4.58: seção retangular

As figuras (4.59) e (4.60) mostram, respectivamente, as forças horizontal e vertical, calculadas por elementos de contorno e comparadas com os resultados numéricos obtidos por Taylor e Zietsman [62].

Trabalhamos com 30 frequências pertencentes ao intervalo  $[.01, 4.]$ . As seguintes relações foram consideradas para que a comparação pudesse ser efetivada:

$$\frac{H}{HE} = 6, \quad \frac{HE}{a} = \frac{2}{3},$$

Cada um dos contornos  $\Gamma_{f1}$ ,  $\Gamma_{f2}$ ,  $\Gamma_{e1}$ ,  $\Gamma_{e2}$ ,  $\Gamma_{e3}$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_{r1}$  e  $\Gamma_{r2}$  foi discretizado em  $N$  elementos constantes, conforme mostra a tabela (4.5) a seguir.

Tabela 4.5: discretização: retângulo na superfície livre

Contorno	$\Gamma_{f1}$	$\Gamma_{r1}$	$\Gamma_b$	$\Gamma_{r2}$	$\Gamma_{f2}$	$\Gamma_{e1}$	$\Gamma_{e2}$	$\Gamma_{e3}$
$N$	30	30	15	15	30	10	30	10



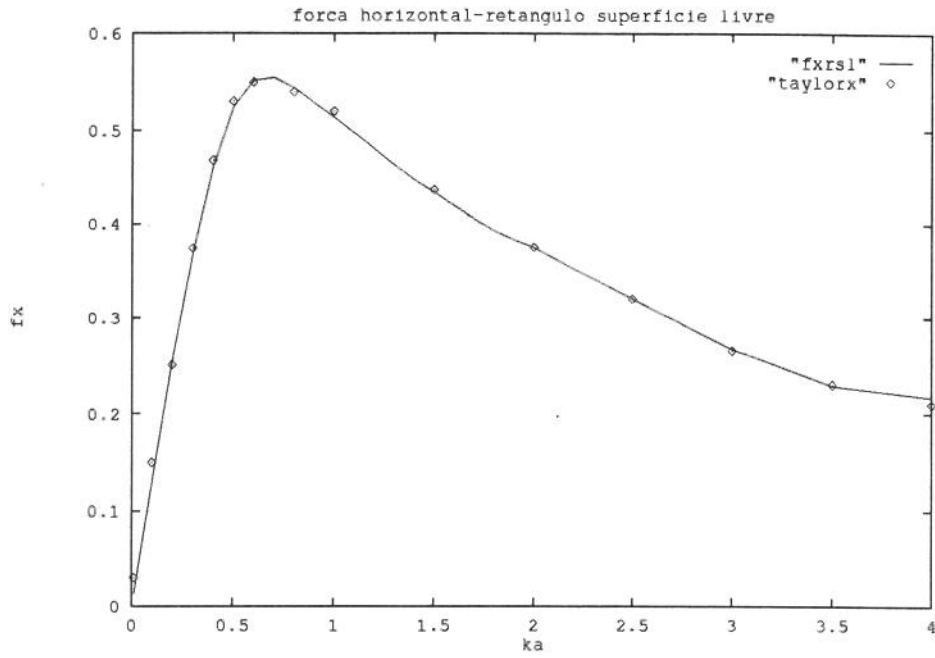


Figura 4.59: módulo da força horizontal; MEC: — ; ref. [62] ●●●;  $\frac{HE}{a} = \frac{2}{3}$ ;  $\frac{H}{HE} = 6$

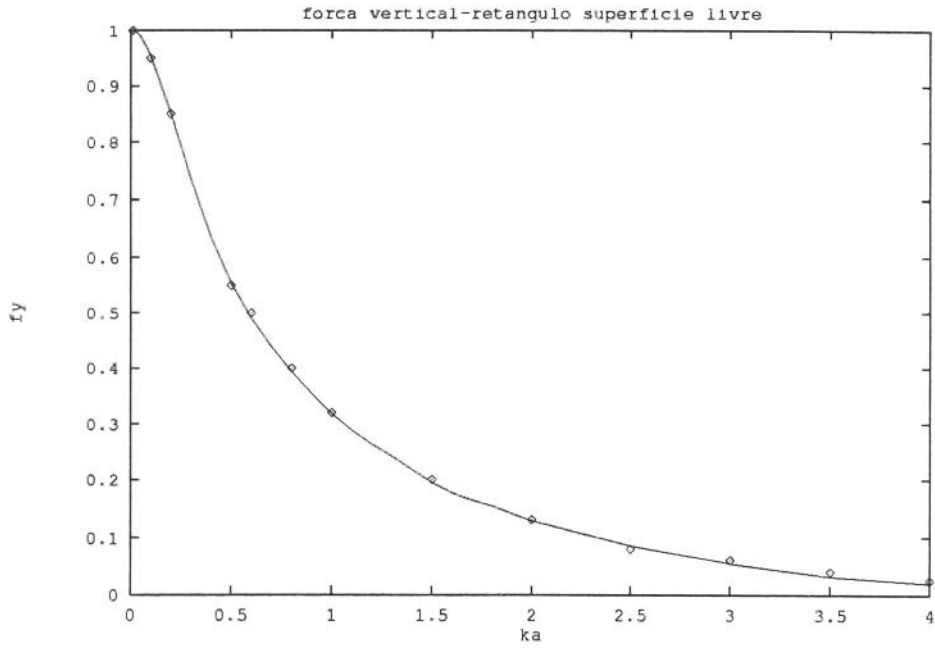


Figura 4.60: módulo da força vertical; MEC: — ; ref. [62] ●●●;  $\frac{HE}{a} = \frac{2}{3}$ ;  $\frac{H}{HE} = 6$

## b. Estruturas no Fundo

## i. Seção Circular

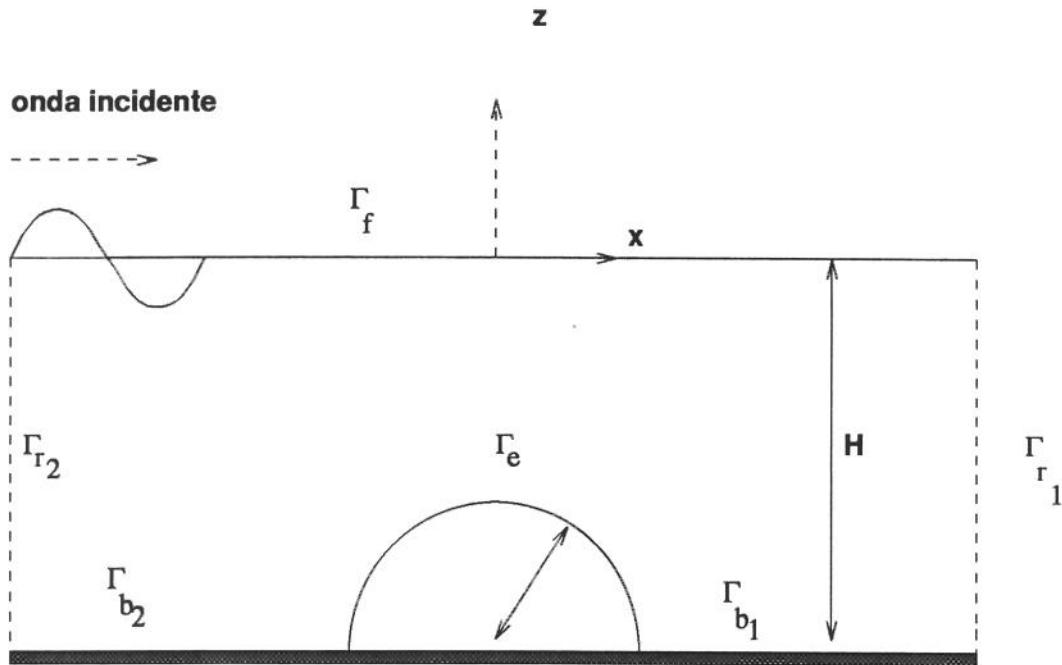


Figura 4.61: semicilindro no fundo

Este problema tem uma solução assintótica deduzida por Naftzger e Chakrabarti [38] para  $\frac{H}{a} \rightarrow \infty$ . As forças normalizadas são dadas por:

$$F_h = \frac{\pi \kappa a}{\cosh(\kappa H)} \quad e \quad F_v = \frac{2C_1(\kappa a)}{\cosh(\kappa H)} \quad (4.87)$$

em que

$$C_1(\kappa a) = \cos(\kappa a) + \frac{\sin(\kappa a)}{\kappa a} + \kappa r S_i(\kappa a) - 1 \quad (4.88)$$

e  $S_i(\kappa a)$  é a integral

$$S_i(\kappa a) = \int_0^{\kappa a} \left( \frac{\sin \chi}{\chi} \right) d\chi \quad (4.89)$$

Trabalhamos com 51 frequências  $\kappa a \in [.01, 10]$  e consideramos diferentes relações entre a profundidade  $H$  e o raio do semicilindro (fig. 4.61).

Cada um dos contornos  $\Gamma_f, \Gamma_{r_1}, \Gamma_{b_1}, \Gamma_e, \Gamma_{b_2}$  e  $\Gamma_{r_2}$  foi discretizado em  $N$  elementos constantes, conforme mostra a tabela (4.6) a seguir.

Os resultados são comparados com os da referência [38] nas figuras (4.62 - 4.67) para valores de  $\frac{H}{a}$  correspondentes a 1.05, 1.5 e 4. Um menor valor de  $\frac{H}{a}$  resulta em um grande bloqueio de energia da onda, o que implica em forças maiores sobre a estrutura.

As figuras (4.68) e (4.69) resumem como a presença do fundo interfere no escoamento.

Tabela 4.6: discretização: semicilindro na superfície de fundo

Contorno	$\Gamma_f$	$\Gamma_{r_1}$	$\Gamma_{b_1}$	$\Gamma_e$	$\Gamma_{b_2}$	$\Gamma_{r_2}$	$\frac{H}{a}$
N	60	20	25	16	25	20	4
N	60	8	25	16	25	8	1.5
N	60	5	25	16	25	5	1.05

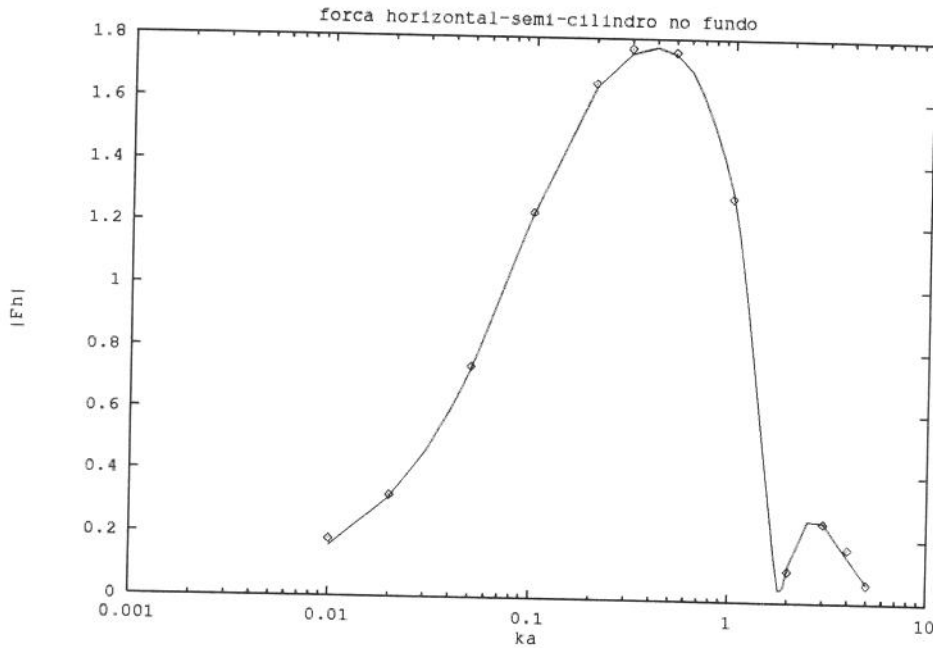


Figura 4.62: módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.05$

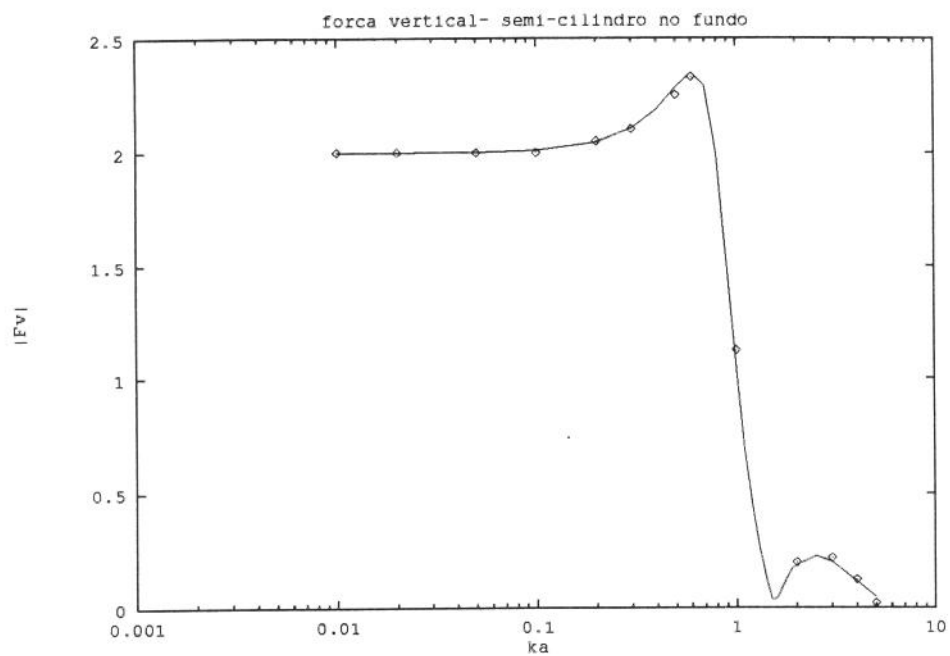


Figura 4.63: módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.05$

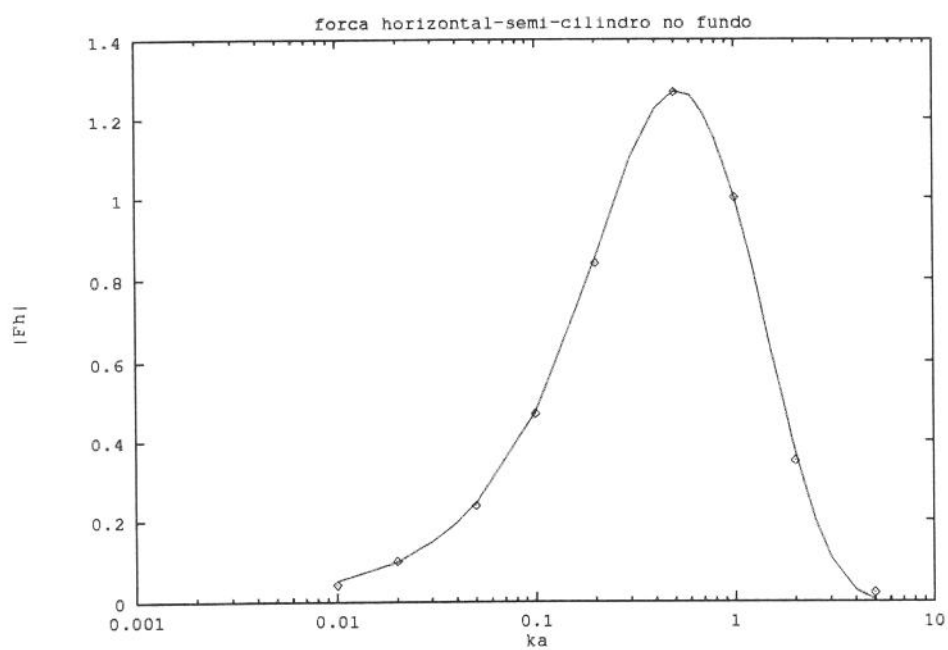


Figura 4.64: módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.5$

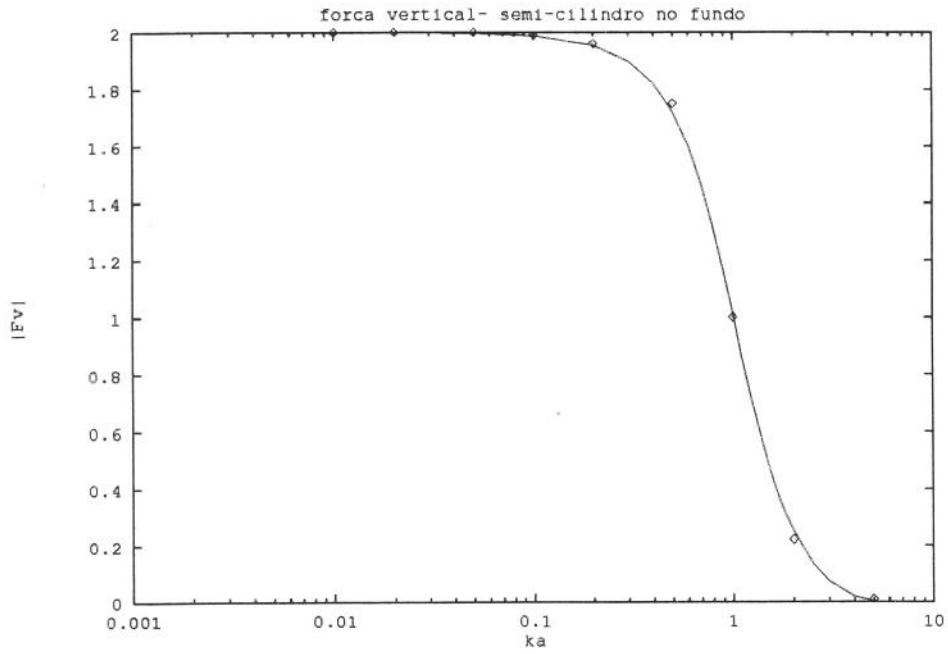


Figura 4.65: módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 1.5$

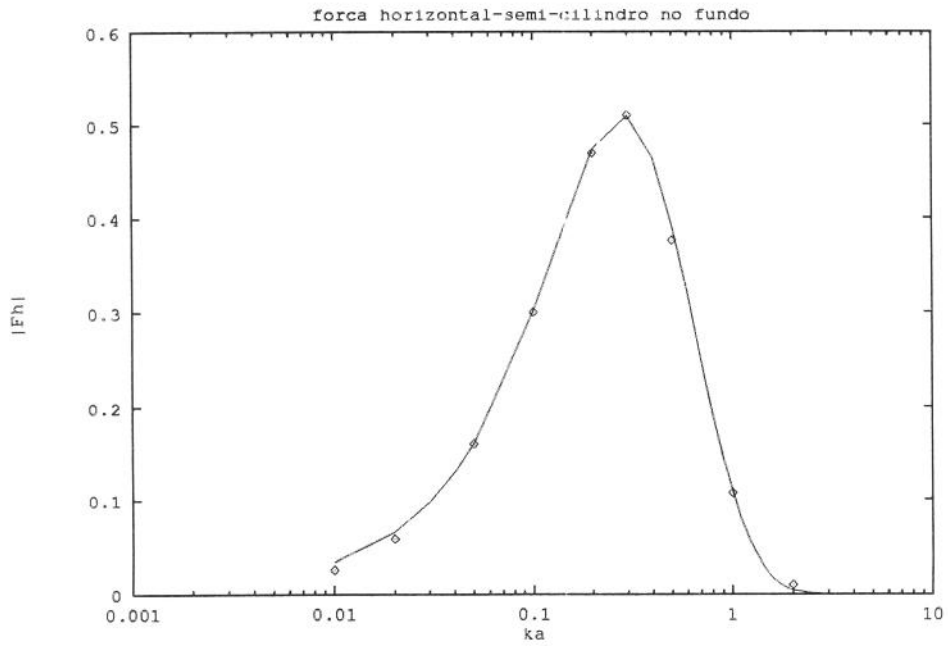


Figura 4.66: módulo da força horizontal; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 4$

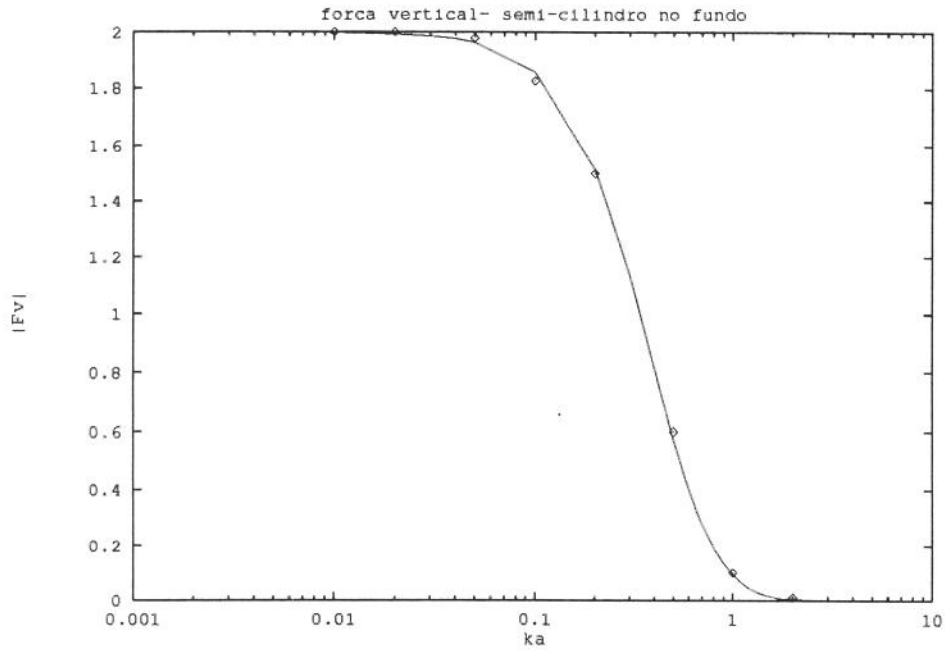


Figura 4.67: módulo da força vertical; Sol. Aprox. MEC: — ; ref. [38] ●●●;  $\frac{H}{a} = 4$

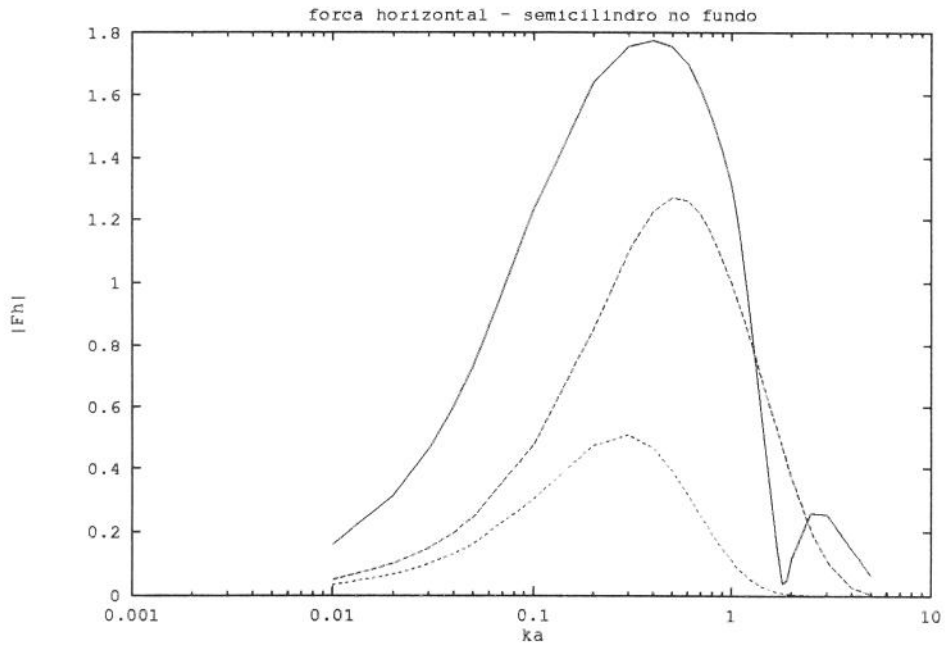


Figura 4.68: módulo da força horizontal;  $\frac{H}{a} = 1.05$  — ;  $\frac{H}{a} = 1.5$  - - - ;  $\frac{H}{a} = 4$  ...

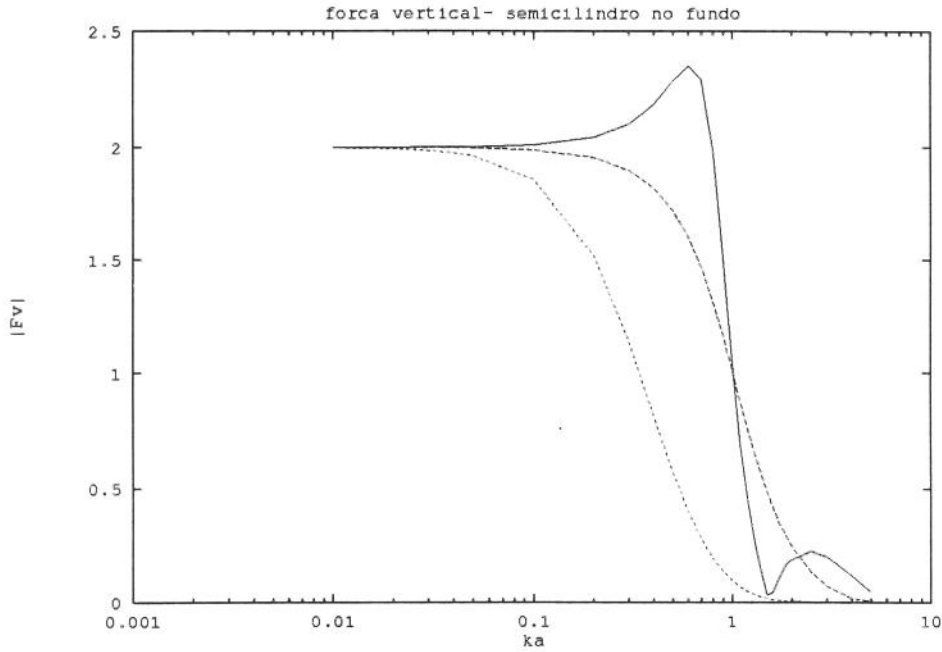


Figura 4.69: módulo da força vertical;  $\frac{H}{a} = 1.05$  — ;  $\frac{H}{a} = 1.5$  - - - ;  $\frac{H}{a} = 4$  ...

## ii. Seção Retangular

Fixamos  $H$ , utilizamos 30 frequências  $\kappa a \in [0.01, 2.]$  e consideramos os seguintes casos:  $\frac{HE}{a} = 1$ ,  $\frac{HE}{a} = 2$ ,  $\frac{HE}{a} = 3$ . Cada um dos contornos  $\Gamma_{b_1}$ ,  $\Gamma_{r_1}$ ,  $\Gamma_f$ ,  $\Gamma_{r_2}$ ,  $\Gamma_{b_2}$ ,  $\Gamma_{e_1}$ ,  $\Gamma_{e_2}$  e  $\Gamma_{e_3}$  foi discretizado em  $N$  elementos constantes, conforme mostra a tabela (4.7) a seguir.

Observamos que um menor valor de  $\frac{H}{HE}$  resulta num maior bloqueio de energia da onda implicando em forças maiores sobre a estrutura.

As figuras 4.71, 4.72 e 4.73 mostram, respectivamente, as forças horizontal, vertical e o momento para diferentes relações entre  $HE$  e  $a$ .

Tabela 4.7: discretização: retângulo na superfície de fundo

Contorno	$\Gamma_{b_1}$	$\Gamma_{r_1}$	$\Gamma_f$	$\Gamma_{r_2}$	$\Gamma_{b_2}$	$\Gamma_{e_1}$	$\Gamma_{e_2}$	$\Gamma_{e_3}$	$\frac{HE}{a}$
N	25	20	60	20	20	5	10	5	1
N	25	20	60	8	20	10	10	10	2
N	25	20	60	5	20	15	10	15	3

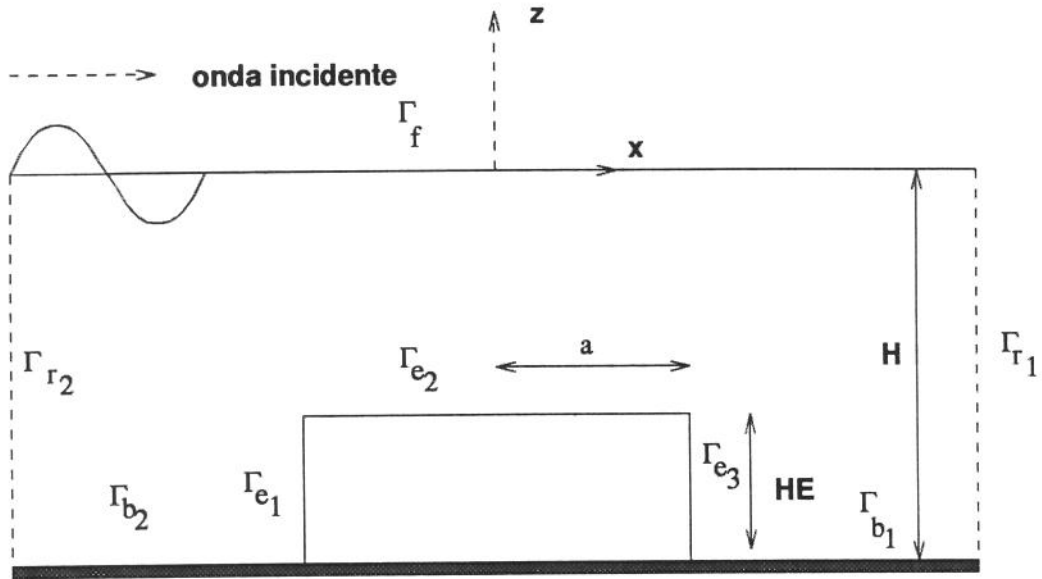


Figura 4.70: seção retangular no fundo

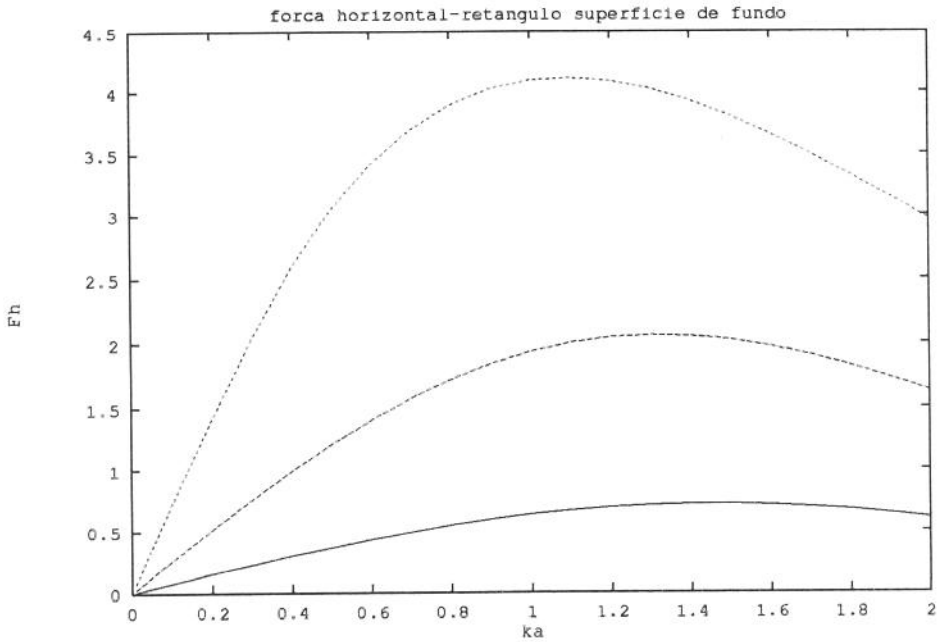


Figura 4.71: módulo da força horizontal;  $\frac{HE}{a} = 1$ : — ;  $\frac{HE}{a} = 2$ : - - - ;  $\frac{HE}{a} = 3$ : ...



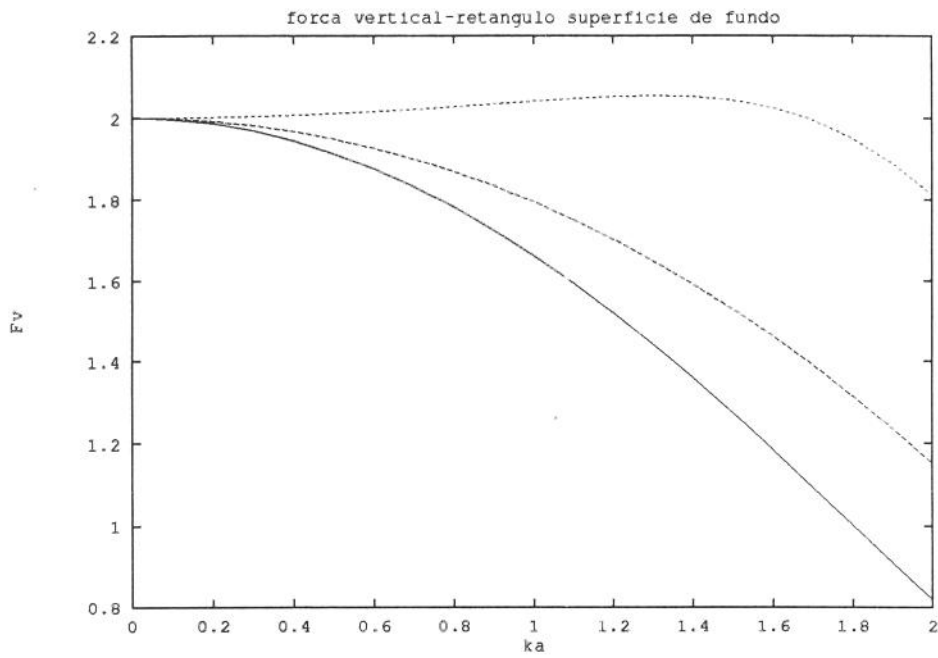


Figura 4.72: módulo da força vertical;  $\frac{HE}{a} = 1$ : — ;  $\frac{HE}{a} = 2$ : - - - ;  $\frac{HE}{a} = 3$ : ...

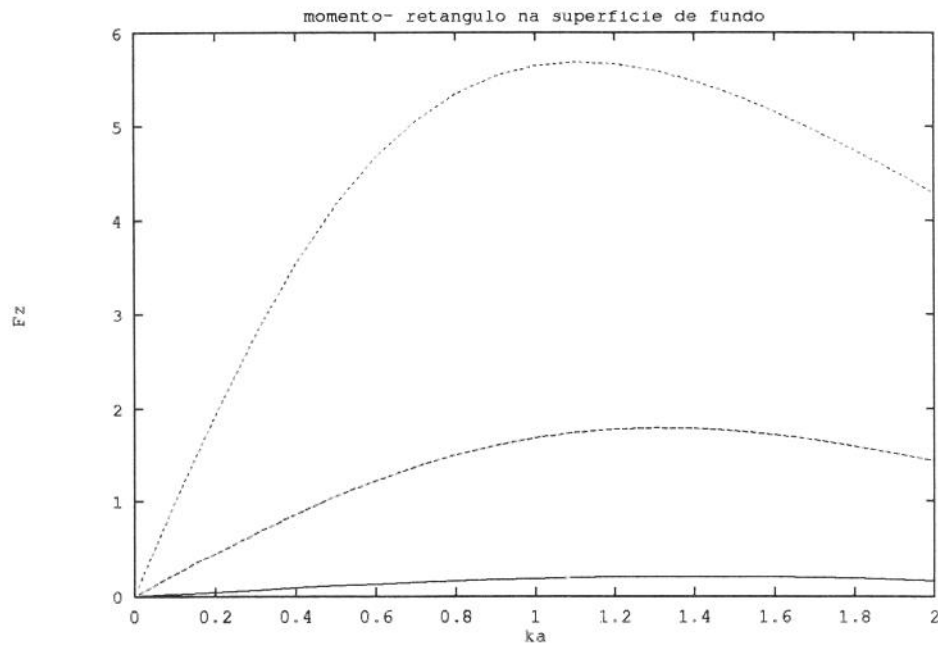


Figura 4.73: módulo do momento da força;  $\frac{HE}{a} = 1$ : — ;  $\frac{HE}{a} = 2$ : - - - ;  $\frac{HE}{a} = 3$ : ...

Neste capítulo, o MEC foi utilizado para resolver problemas de difração de ondas por grandes estruturas. Dois modelos matemáticos envolvendo os operadores de Helmholtz e Laplace foram descritos e a formulação do método para ambos os operadores foi feita, com base na técnica dos resíduos ponderados. Aspectos numéricos como discretização da equação integral de contorno, funções de interpolação, solução fundamental e integração numérica foram analisados. Duas implementações numéricas distintas, associadas aos operadores bidimensionais de Laplace e Helmholtz, foram desenvolvidas. Em cada uma delas, foi suposto que o potencial e sua derivada com relação à normal eram constantes sobre cada elemento. As forças, provenientes da difração por uma estrutura fixa, foram calculadas e comparadas com soluções analíticas ou aproximadas existentes na literatura.

# Capítulo 5

## Radiação de Ondas

### 5.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo sistematizar a teoria matemática que trata do movimento de um corpo rígido flutuando livremente ou descrevendo um movimento forçado sob a influência de forças externas. O fluido é incompressível, tem um movimento irrotacional e as forças de flutuação devidas à pressão exercida pelo fluido sobre o corpo são levadas em consideração.

As equações do movimento para um sistema deste tipo são bem conhecidas. O estado do fluido é completamente descrito por uma função escalar  $\phi^T(x, y, z, t)$ , o potencial de velocidade, que como uma função das coordenadas espaciais satisfaz a equação de Laplace. Na posição de repouso vamos admitir que o fluido ocupe uma região  $R$  do espaço  $xyz$  limitada pela superfície de fundo  $\Gamma_b$  definida por  $y = -H$ , a superfície imersa  $\Gamma_e$  do corpo e uma parte  $\Gamma_f$  do plano  $xy$  que corresponde à superfície livre (figura 5.1). A ausência de camadas de contorno e tensão de superfície implica a condição que sobre cada uma destas superfícies a velocidade normal das partículas e a pressão serão contínuas através das mesmas. Sobre  $\Gamma_f$  a pressão é suposta constante e igual à pressão atmosférica. Sobre  $\Gamma_e$  a condição cinemática de que a velocidade normal é contínua permite-nos expressar a derivada normal de  $\phi^T$  em termos da velocidade angular do corpo rígido e da velocidade do seu centro de gravidade. A condição dinâmica sobre  $\Gamma_e$  de que a pressão é contínua pode ser expressa considerando que o corpo move-se sob a influência da gravidade, da pressão do fluido e de outras forças externas prescritas. Sob estas condições nenhum escoamento de energia ocorre na superfície de fundo ou na superfície livre. A

energia é ganha ou perdida pelo sistema apenas através de ondas que chegam ou partem para o infinito, ou, no caso de corpos flutuando não livremente, através de forças externas agindo sobre ele [56].

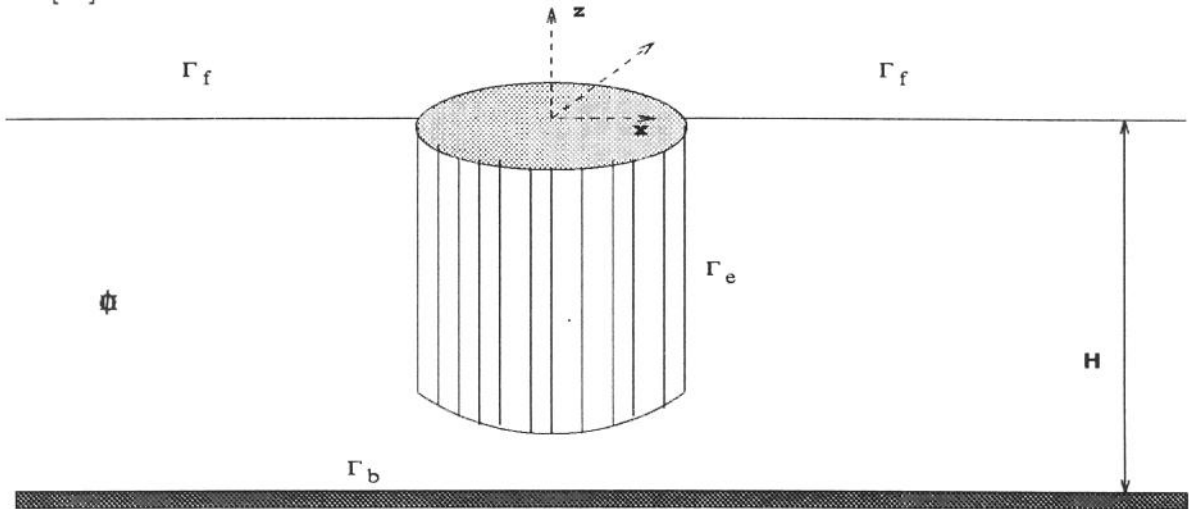


Figura 5.1: corpo flutuante

Obter a solução das equações que governam um problema geral deste tipo não é uma tarefa fácil. As dificuldades que surgem são provenientes do fato de que  $\phi^T$  é uma solução da equação de Laplace determinada por condições de contorno não lineares sobre contornos variáveis. A necessidade de encontrar uma solução nos leva a impor algumas simplificações. A primeira delas consiste na linearização do problema o que implica na restrição a movimentos infinitesimais. Neste caso, as condições de contorno tornam-se lineares para a função potencial  $\phi^T$  sobre contornos fixos, os quais passam a constituir os contornos correspondentes à posição de equilíbrio ou repouso. Esta condição de linearidade pode ser obtida por um esquema de expansão formal (seção 3.3). Os termos de menor ordem correspondem à ausência de movimento (equilíbrio). Neste caso, a superfície permanecerá no plano horizontal  $xy$  do sistema de coordenadas, enquanto que a superfície imersa  $\Gamma_e$ , no caso de um corpo flutuando livremente, coincidirá com  $\Gamma_e$  na posição de equilíbrio do corpo. Isto é caracterizado pelo fato de que a pressão hidrostática do fluido atuando sobre  $\Gamma_e$  equilibra a ação da gravidade sobre o corpo. Os termos que correspondem à ordem seguinte permanecem nas equações linearizadas ao se truncar o esquema de expansão. Desta forma é possível obter a condição clássica,

$$\frac{\partial^2 \phi^T}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^T}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

a partir da combinação das relações cinemática e dinâmica satisfeitas na superfície livre  $z = 0$ .

Sobre a superfície imersa  $\Gamma_e$  a condição cinemática que expressa a continuidade da velocidade normal é dada por [56],

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}} = \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} + \dot{\Theta} \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \times \mathbf{n}] \quad (5.2)$$

em que  $\dot{\mathbf{X}}$  é a velocidade do centro de gravidade do corpo,  $\mathbf{n}$  é a normal unitária em  $\Gamma_e$ ,  $\dot{\Theta}$  é a velocidade angular do corpo,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{r}_G = (0, 0, z_G)$ . A relação (5.2) expressa a derivada normal de  $\phi^T$  sobre  $\Gamma_e$  como uma combinação linear das componentes da velocidade do corpo com coeficientes que são dados por  $\Gamma_e$  e que são independentes de  $t$ . Se o movimento do corpo não for prescrito é necessário lançar mão também das condições dinâmicas sobre ele. Para um corpo rígido flutuando livremente elas consistem em seis equações diferenciais do movimento, as quais expressam que a aceleração do corpo é devida à aceleração da gravidade e da pressão do fluido atuando sobre  $\Gamma_e$ . Na teoria linearizada estas equações dinâmicas tornam-se seis equações diferenciais lineares de segunda ordem com incógnitas  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , coeficientes constantes e uma parte não homogênea envolvendo integrais da função  $\frac{\partial \phi^T}{\partial t}$  sobre  $\Gamma_e$ . As equações e condições de contorno obtidas para a teoria linearizada são ainda muito complicadas para se obter uma solução mesmo que numérica. Deste modo, será necessário introduzir outra simplificação referente ao comportamento da solução. Admitiremos, assim, que o movimento será periódico no tempo.

## 5.2 Transformação de Coordenadas

Seja  $Oxyz$  um sistema de coordenadas fixo no fluido com  $Oz$  opondo-se à direção da gravidade e  $Oxy$  na superfície livre não perturbada. Seja  $O'x'y'z'$  um sistema de coordenadas fixo no corpo com a origem  $O'$  sobre o centro de rotação do mesmo (não necessariamente o centro de gravidade). No instante inicial o sistema  $O'x'y'z'$  é paralelo ao sistema  $Oxyz$  (figura 5.2).

Neste instante as coordenadas de  $O'$  em relação ao sistema inercial são dadas pelo vetor

$$\mathbf{r}_T^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) \quad (5.3)$$

À medida que o corpo flutuante se move a partir da posição de repouso o sistema  $O'x'y'z'$  varia de posição.

Seja  $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_T^0 + \epsilon \mathbf{r}_T^1 + \epsilon^2 \mathbf{r}_T^2 + \dots$  as coordenadas móveis de  $O'$  no sistema inercial, em que  $\mathbf{r}_T^0$  corresponde à posição de repouso de  $O'$  independente de  $t$ .

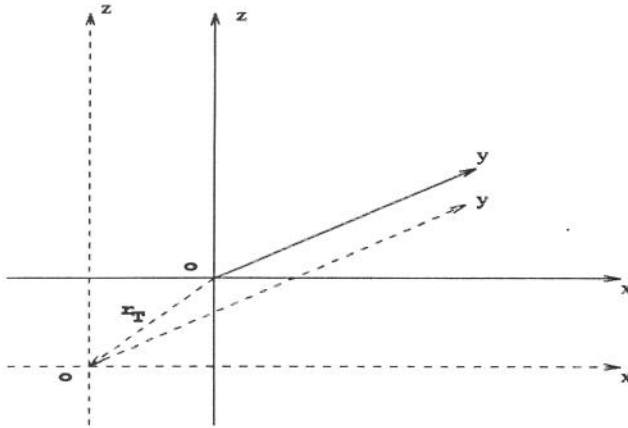


Figura 5.2: sistemas de coordenadas

Suponhamos que o vetor posição de um ponto no espaço, nos dois sistemas de coordenadas, seja denotado, respectivamente, por [57]:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{r}' = (x', y', z') \quad (5.5)$$

Estes vetores podem ser relacionados por uma transformação linear da forma

$$\mathbf{r}' = M(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_T + M^t \mathbf{r}' \quad (5.7)$$

em que  $M$  é uma matriz ortogonal e  $M^t$  sua inversa (figura 5.3).

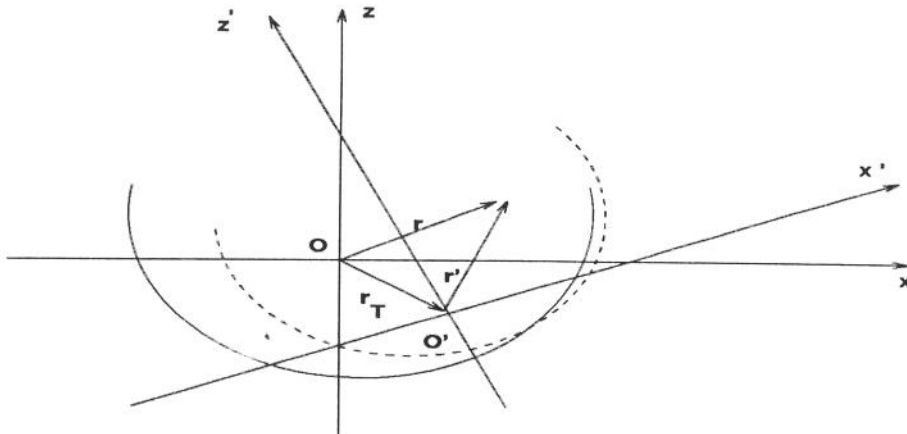


Figura 5.3: transformação de coordenadas

Vamos obter inicialmente a matriz  $M$  para o problema de primeira ordem. Neste caso é conveniente expressar as rotações aproximadamente em termos de um vetor. Sejam  $\xi_4$ ,  $\xi_5$  e  $\xi_6$  os ângulos "roll", "pitch" e "yaw", respectivamente, segundo os quais o corpo é girado em torno do centro de rotação  $O'$ .

A princípio, desprezamos o movimento translacional e consideramos apenas as rotações.

i. Rotação em torno de  $x$  ( $\dot{\xi}_4$ )

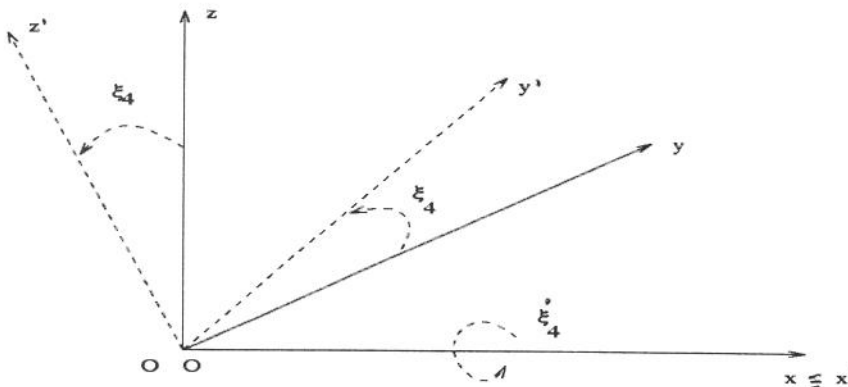


Figura 5.4:  $\dot{\xi}_4$

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \xi_4 + z \sin \xi_4$$

$$z' = -y \sin \xi_4 + z \cos \xi_4 \quad (5.8)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_4 & \sin \xi_4 \\ 0 & -\sin \xi_4 & \cos \xi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ou

$$x' = R_1 \cdot x \quad (5.9)$$

ii. Rotação em torno de  $y$  ( $\xi_5$ )

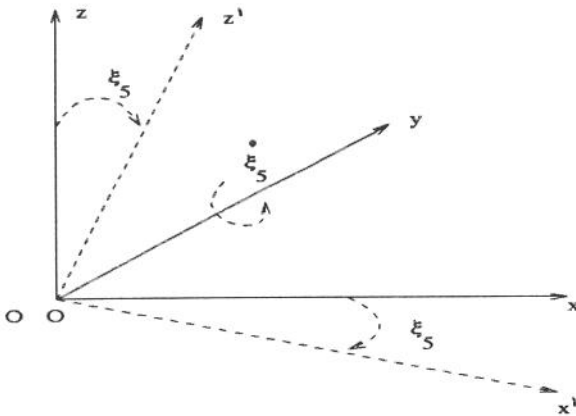


Figura 5.5:  $\xi_5$

$$x' = x \cos \xi_5 - z \sin \xi_5$$

$$y' = y$$

$$z' = x \sin \xi_5 + z \cos \xi_5 \quad (5.10)$$

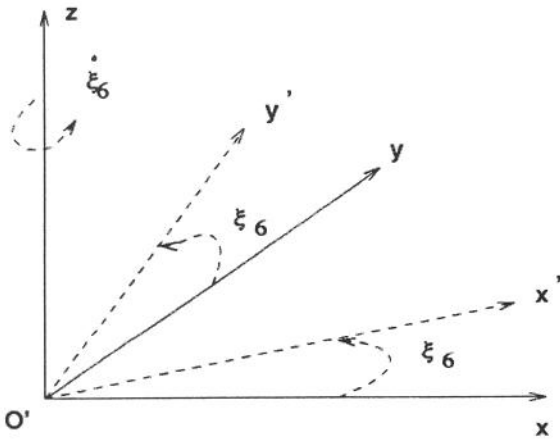


ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_5 & 0 & -\sin \xi_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi_5 & 0 & \cos \xi_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ou

$$x' = R_2 \cdot x \quad (5.11)$$

iii. Rotação em torno de  $z$  ( $\xi_6$ )Figura 5.6:  $\xi_6$ 

$$x' = x \cos \xi_6 + y \sin \xi_6$$

$$y' = -x \sin \xi_6 + y \cos \xi_6$$

$$z' = z \quad (5.12)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_6 & \sin \xi_6 & 0 \\ -\sin \xi_6 & \cos \xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ou

$$x' = R_3 \cdot x \quad (5.13)$$

A orientação final sobre os três eixos é dada pelo produto R das matrizes  $R_3$ ,  $R_2$ ,  $R_1$  nesta ordem, ou seja,

$$R = \begin{bmatrix} c\xi_6 c\xi_5 & s\xi_6 c\xi_6 + c\xi_6 s\xi_5 s\xi_4 & s\xi_6 s\xi_4 - c\xi_6 s\xi_5 c\xi_6 \\ -s\xi_6 c\xi_5 & c\xi_6 c\xi_4 - s\xi_6 s\xi_5 s\xi_4 & c\xi_6 s\xi_4 + s\xi_6 s\xi_5 c\xi_6 \\ s\xi_5 & -c\xi_5 s\xi_4 & c\xi_5 c\xi_4 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

em que c corresponde ao cosseno e s ao seno. Expandindo os senos e cossenos dos ângulos  $\xi_4$ ,  $\xi_5$ ,  $\xi_6$  em séries de potências em  $\epsilon$  e retendo apenas os termos de ordem  $\epsilon$ , temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon\xi_6^1 & -\epsilon\xi_5^1 \\ -\epsilon\xi_6^1 & 1 & \epsilon\xi_4^1 \\ \epsilon\xi_5^1 & -\epsilon\xi_4^1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

As equações (5.6) e (5.7) assumem a forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon\xi_6^1 & -\epsilon\xi_5^1 \\ -\epsilon\xi_6^1 & 1 & \epsilon\xi_4^1 \\ \epsilon\xi_5^1 & \epsilon\xi_4^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \xi_1^0 - \epsilon\xi_1^1 \\ y - \xi_2^0 - \epsilon\xi_2^1 \\ z - \xi_3^0 - \epsilon\xi_3^1 \end{bmatrix} + o(\epsilon^2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^0 + \epsilon\xi_1^1 \\ \xi_2^0 + \epsilon\xi_2^1 \\ \xi_3^0 + \epsilon\xi_3^1 \end{bmatrix} + M^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + o(\epsilon^2)$$

Retendo apenas os termos lineares em  $\epsilon$  podemos reescrever cada sistema de equações anterior na seguinte forma:

$$\begin{aligned} x' &= x - \xi_1^0 - \epsilon[\xi_1^1 + \xi_5^1(z - \xi_3^0) - \xi_6^1(y - \xi_2^0)] \\ y' &= y - \xi_2^0 - \epsilon[\xi_2^1 - \xi_4^1(z - \xi_3^0) + \xi_6^1(x - \xi_1^0)] \\ z' &= z - \xi_3^0 - \epsilon[\xi_3^1 + \xi_4^1(y - \xi_2^0) - \xi_5^1(x - \xi_1^0)] \end{aligned} \quad (5.16)$$

ou, na forma vetorial

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_T^0 - \epsilon[\mathbf{r}_T^1 + \Theta^1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_T^0)] \quad (5.17)$$

em que  $\Theta^1 = (\xi_4^1, \xi_5^1, \xi_6^1)$ ,  $\mathbf{r}_T^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$  e  $\mathbf{r}_T^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1)$ . Da mesma forma temos:

$$\begin{aligned}x &= x' + \xi_1^0 + \epsilon[\xi_1^1 + \xi_5^1 z' - \xi_6^1 y'] \\y &= y' + \xi_2^0 + \epsilon[\xi_2^1 - \xi_4^1 z' + \xi_6^1 x'] \\z &= z' + \xi_3^0 + \epsilon[\xi_3^1 + \xi_4^1 y' - \xi_5^1 x']\end{aligned}\tag{5.18}$$

ou, na forma vetorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_T^0 + \epsilon[\mathbf{r}_T^1 + \Theta^1 \times \mathbf{r}']\tag{5.19}$$

As equações (5.17) e (5.19) que representam a transformação em termos de operações vetoriais são válidas apenas no problema linearizado. Nelas, o vetor  $\mathbf{r}_T^0$  representa a posição de repouso do centro de rotação do corpo e é independente de  $t$ .

No problema de segunda ordem devemos usar ângulos de Euler para especificar a orientação instantânea do corpo. Assim, a expressão resultante para  $M$  depende da ordem na qual as três rotações são tomadas. Esta ordem é, naturalmente, arbitrária, uma vez que qualquer deslocamento de um corpo rígido pode ser descrito como a soma de uma translação e uma rotação isolada sobre algum eixo. Entretanto, um tal eixo está constantemente variando com o tempo e assim, devemos escolher um método sistemático de descrever a cinemática do corpo. Optaremos pela sequência "roll", "pitch" e "yaw" que, em geral, não corresponde aos ângulos de Euler descritos em livros textos, mas que se presta aos nossos propósitos [57].

Suponhamos que, por um momento, as origens  $O$  e  $O'$  coincidam. Seja  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  um novo sistema de coordenadas que é idêntico ao sistema  $Oxyz$ , exceto para uma rotação positiva  $\xi_4$  sobre o eixo  $x$ . Assim, a transformação de  $x$  para  $\bar{x}$  é dada por (figura 5.7)

$$\bar{x} = M_1 x\tag{5.20}$$

em que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_4 & \sin \xi_4 \\ 0 & -\sin \xi_4 & \cos \xi_4 \end{bmatrix}$$

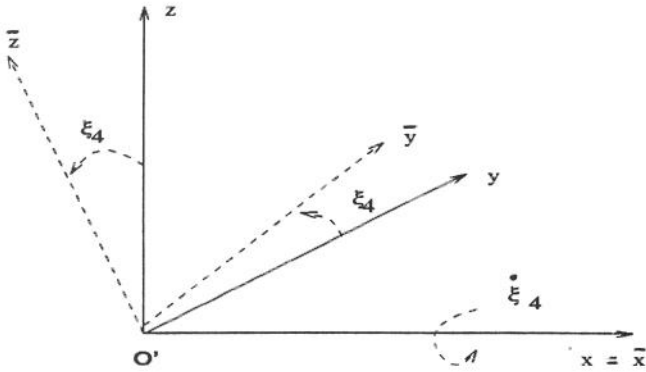


Figura 5.7: roll

Fazendo uma segunda rotação de um ângulo  $\xi_5$  sobre o eixo  $\bar{y}$ , obtemos a transformação (figura 5.8)

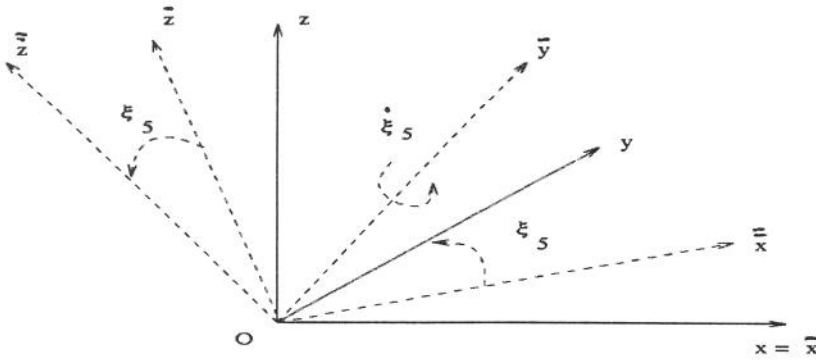


Figura 5.8: pitch

$$\bar{\bar{x}} = M_2 \bar{x} \quad (5.21)$$

em que

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos \xi_5 & 0 & -\sin \xi_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi_5 & 0 & \cos \xi_5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, uma terceira rotação de um ângulo  $\xi_6$  sobre o eixo  $\bar{\bar{z}}$  faz com que os eixos coincidam com o sistema  $O'x'y'z'$  (figura 5.9).

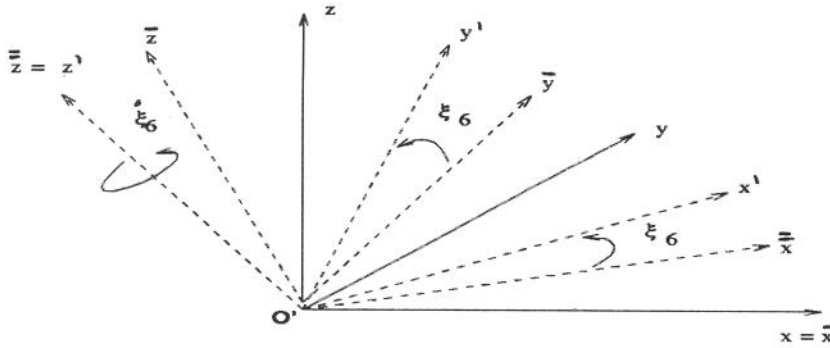


Figura 5.9: yaw

Assim,

$$\bar{x} = M_3 \bar{x} \quad (5.22)$$

em que

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos \xi_6 & \sin \xi_6 & 0 \\ -\sin \xi_6 & \cos \xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação completa é obtida pela multiplicação das matrizes  $M_3$ ,  $M_2$  e  $M_1$  nessa ordem, isto é,  $M = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$ . Assim,

$$M = \begin{bmatrix} c\xi_5 c\xi_6 & c\xi_4 s\xi_6 + s\xi_4 s\xi_5 c\xi_6 & s\xi_4 s\xi_6 - c\xi_4 s\xi_5 c\xi_6 \\ -c\xi_5 s\xi_6 & c\xi_4 c\xi_6 - s\xi_4 s\xi_5 s\xi_6 & s\xi_4 c\xi_6 + c\xi_4 s\xi_5 s\xi_6 \\ s\xi_5 & -s\xi_4 c\xi_5 & c\xi_4 c\xi_5 \end{bmatrix}$$

em que  $c$  corresponde ao cosseno e  $s$  ao seno.

Expandindo os senos e cossenos dos ângulos  $\xi_4$ ,  $\xi_5$  e  $\xi_6$  e retendo os termos até segunda ordem,  $M$  pode ser aproximada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2}[(\xi_6^1)^2 + (\xi_5^1)^2] & \epsilon\xi_6^1 + \epsilon^2(\xi_6^2 + \xi_4^1\xi_5^1) & -(\epsilon\xi_5^1 + \epsilon^2\xi_5^2) + \epsilon^2\xi_4^1\xi_6^1 \\ -(\epsilon\xi_6^1 + \epsilon^2\xi_6^2) & 1 - \frac{\epsilon^2}{2}[(\xi_4^1)^2 + (\xi_6^1)^2] & \epsilon\xi_4^1 + \epsilon^2\xi_4^2 + \epsilon^2\xi_5^1\xi_6^1 \\ \epsilon\xi_5^1 + \epsilon^2\xi_5^2 & -(\epsilon\xi_4^1 + \epsilon^2\xi_4^2) & 1 - \frac{\epsilon^2}{2}[(\xi_4^1)^2 + (\xi_5^1)^2] \end{bmatrix}$$

em que

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \xi_j^i, \quad j = 4, 5, 6 \quad (5.23)$$

$$\cos(\xi_j) = 1 - \frac{(\xi_j)^2}{2} \quad (5.24)$$

$$\sin(\xi_j) = \xi_j \quad (5.25)$$

Observemos que em M se mantivermos apenas os termos lineares em  $\epsilon$ , a matriz se reduz a (5.15). Substituindo M em (5.6), temos:

$$\begin{aligned} x' &= A1 - \epsilon P1 - \epsilon^2(\xi_1^2 + \xi_2^1 \xi_6^1 - \xi_3^1 \xi_5^1 + Q1) + o(\epsilon^n) \\ y' &= B1 - \epsilon P2 - \epsilon^2(\xi_2^2 + \xi_3^1 \xi_4^1 - \xi_1^1 \xi_6^1 + Q2) + o(\epsilon^n) \\ z' &= C1 - \epsilon P3 - \epsilon^2(\xi_3^2 + \xi_1^1 \xi_5^1 - \xi_2^1 \xi_4^1 + Q3) + o(\epsilon^n), \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (5.26)$$

em que

$$A1 = x - \xi_1^0$$

$$B1 = y - \xi_2^0$$

$$C1 = z - \xi_3^0$$

$$P1 = \xi_1^1 - \xi_6^1 B1 + \xi_5^1 C1$$

$$Q1 = \frac{1}{2} A^2 A1 - (\xi_4^1 \xi_5^1 + \xi_6^2) B1 - (\xi_4^1 \xi_6^1 - \xi_5^2) C1$$

$$P2 = \xi_2^1 + \xi_6^1 A1 - \xi_4^1 C1$$

$$Q2 = \xi_6^2 A1 + \frac{1}{2} B^2 B1 - (\xi_5^1 \xi_6^1 + \xi_4^2) C1$$

$$P3 = \xi_3^1 + \xi_5^1 A1 - \xi_4^1 B1$$

$$Q3 = -\xi_5^2 A1 + \xi_4^2 B1 + \frac{1}{2} C^2 C1$$

$$A^2 = (\xi_6^1)^2 + (\xi_5^1)^2$$

$$B^2 = (\xi_4^1)^2 + (\xi_6^1)^2$$

$$C^2 = (\xi_4^1)^2 + (\xi_5^1)^2$$

Na forma vetorial (5.26) pode ser escrito:

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_T^0) - \epsilon[\mathbf{r}_T^1 + \boldsymbol{\theta}^1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_T^0)] - \epsilon^2[\mathbf{r}_T^2 + \mathbf{r}_T^1 \times \boldsymbol{\theta}^1 + G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T^0)] + o(\epsilon^n), \quad n \geq 3$$

com,

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A^2 & -(\xi_4^1\xi_5^1 + \xi_6^2) & -(\xi_4^1\xi_6^1 - \xi_5^2) \\ \xi_6^2 & \cdot & \frac{1}{2}B^2 & -(\xi_5^1\xi_6^1 + \xi_4^2) \\ -\xi_5^2 & & \xi_4^2 & \frac{1}{2}C^2 \end{bmatrix}$$

A transformação inversa dada pela equação (5.7) é obtida utilizando-se a transposta de  $M$ . Na forma vetorial obtemos:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}_T^0) + \epsilon[\mathbf{r}_T^1 + \boldsymbol{\theta}^1 \times \mathbf{r}'] + \epsilon^2[\mathbf{r}_T^2 + L\mathbf{r}'] + o(\epsilon^n), \quad n \geq 3 \quad (5.27)$$

em que,

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}A^2 & -\xi_6^2 & \xi_5^2 \\ (\xi_4^1\xi_5^1 + \xi_6^2) & -\frac{1}{2}B^2 & -\xi_4^2 \\ (\xi_4^1\xi_6^1 - \xi_5^2) & \xi_5^1\xi_6^1 + \xi_4^2 & -\frac{1}{2}C^2 \end{bmatrix}$$

### 5.3 A Condição Cinemática

Suponhamos que a superfície do corpo seja descrita, em relação ao sistema inercial  $Oxyz$ , pela equação:

$$z = \eta(x, y, t) \quad (5.28)$$

Sabemos que a continuidade da velocidade normal exige que:

$$\phi_x^T \eta_x + \phi_y^T \eta_y + \eta_t = \phi_z^T, \quad z = \eta(x, y, t) \quad (5.29)$$

Expandindo  $\eta$  na equação (5.28) em potências de  $\epsilon$ , temos:

$$z = \eta^0(x, y) + \epsilon\eta^1(x, y, t) + \epsilon^2\eta^2(x, y, t) + o(\epsilon^n), \quad n \geq 3 \quad (5.30)$$

em que  $\eta^0(x, y)$  corresponde à posição de repouso de  $\Gamma_e$ , que chamaremos  $\Gamma_e^0$ . Como, por hipótese, o movimento do corpo é pequeno, qualquer função avaliada em  $\Gamma_e$  pode ser expandida

em uma série de Taylor sobre  $\Gamma_\epsilon^0$ , ou seja, em torno de  $z = \eta^0(x, y)$  [56]. Vamos, então, reescrever a expressão (5.29) em termos de potências de  $\epsilon$  até a ordem de  $\epsilon^2$  e desenvolvê-la em série de Taylor em torno de  $z = \eta^0(x, y)$ . Seja  $F = \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 = 0$ , com

$$f_1 = (\phi_x^T)^1 \eta_x^0 + (\phi_y^T)^1 \eta_y^0 + \eta_t^1 - (\phi_z^T)^1 \quad (5.31)$$

e

$$f_2 = (\phi_x^T)^1 \eta_x^1 + (\phi_x^T)^2 \eta_x^0 + (\phi_y^T)^1 \eta_y^1 + (\phi_y^T)^2 \eta_y^0 + \eta_t^2 - (\phi_z^T)^2 \quad (5.32)$$

Então,

$$F_{z=\eta^0} = F + (z - \eta^0)[\epsilon f_{11} + \epsilon f_{22}] = 0 \quad (5.33)$$

com

$$f_{11} = (\phi_{xz}^T)^1 \eta_x^0 + (\phi_{yz}^T)^1 \eta_y^0 - (\phi_{zz}^T)^1 \quad (5.34)$$

$$f_{22} = (\phi_{xz}^T)^1 \eta_x^1 + (\phi_{xz}^T)^2 \eta_x^0 + (\phi_{yz}^T)^1 \eta_y^1 + (\phi_{yz}^T)^2 \eta_y^0 - (\phi_{zz}^T)^2 \quad (5.35)$$

Mas,  $z = \eta(x, y, t) = \eta^0 + \epsilon \eta^1 + \epsilon^2 \eta^2 + \dots$  Portanto,

$$F_{z=\eta^0} = \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^2 \eta^1 f_{11} = \epsilon f_1 + \epsilon^2 (f_2 + \eta^1 f_{11}) = 0 \quad (5.36)$$

A fim de obtermos uma expressão que envolva termos até segunda ordem para a condição cinemática temos que encontrar  $\eta^1$  e  $\eta^2$ . Na posição de repouso,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Portanto,

$$z' = \eta^0(x', y') \quad (5.37)$$

Em (5.26), sejam:

$$H = -\epsilon P1 - \epsilon^2 [\xi_1^2 + \xi_2^1 \xi_6^1 - \xi_3^1 \xi_5^1 + Q1]$$

$$J = -\epsilon P2 - \epsilon^2 [\xi_2^2 + \xi_3^1 \xi_4^1 - \xi_1^1 \xi_6^1 + Q2]$$

$$K = -\epsilon P3 - \epsilon^2 [\xi_3^2 + \xi_1^1 \xi_5^1 - \xi_2^1 \xi_4^1 + Q3]$$

Com esta notação substituímos (5.26) em (5.37) para obter

$$z - \xi_3^0 + K = \eta^0[(x - \xi_1^0) + H, (y - \xi_2^0) + J] \quad (5.38)$$



Expandindo o lado direito de (5.38) em uma série de Taylor em torno de  $\eta^0(x, y)$ , isto é, da posição de repouso do corpo, obtemos:

$$\eta^0[(x - \xi_1^0) + H, (y - \xi_2^0) + J] = R1 + \frac{1}{2}R2 + \dots \quad (5.39)$$

com

$$R1 = \eta^0 + H\eta_x^0 + J\eta_y^0$$

$$R2 = H^2\eta_{xx}^0 + 2HJ\eta_{xy}^0 + J^2\eta_{yy}^0$$

Retendo os termos até  $\epsilon^2$ , temos:

$$\eta^0[(x - \xi_1^0) + H, (y - \xi_2^0) + J] = R1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 P1^2 \eta_{xx}^0 + \epsilon^2 [P1P2\eta_{xy}^0 + \frac{1}{2}P2^2\eta_{yy}^0] \quad (5.40)$$

Substituindo nesta última expressão os valores de H e J implícitos em R1 e combinando os termos semelhantes em  $\epsilon$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \eta^0[(x - \xi_1^0) + H, (y - \xi_2^0) + J] = & \eta^0 - \epsilon [P1\eta_x^0 + P2\eta_y^0] - \epsilon^2 [T1\eta_x^0 + T2\eta_y^0 - \\ & \frac{1}{2}P1^2\eta_{xx}^0 - P1P2\eta_{xy}^0 - \frac{1}{2}P2^2\eta_{yy}^0] \end{aligned} \quad (5.41)$$

em que,

$$T1 = \xi_1^2 + \xi_2^1 \xi_6^1 - \xi_3^1 \xi_5^1 + Q1$$

$$T2 = \xi_2^2 + \xi_3^1 \xi_4^1 - \xi_1^1 \xi_6^1 + Q2$$

Comparando (5.30), (5.38) e (5.41) com termos até  $o(\epsilon^2)$ , temos:

$$\begin{aligned} \epsilon\eta^1 + \epsilon^2\eta^2 = & \xi_3^0 - K - \epsilon [P1\eta_x^0 + P2\eta_y^0] \\ & - \epsilon^2 [T1\eta_x^0 + T2\eta_y^0 - \frac{1}{2}P1^2\eta_{xx}^0 - P1P2\eta_{xy}^0 - \frac{1}{2}P2^2\eta_{yy}^0] \end{aligned} \quad (5.42)$$

A equação (5.36) pode reescrita como:

$$\begin{aligned} \epsilon\eta_t^1 + \epsilon^2\eta_t^2 = & -\epsilon((\phi_x^T)^1\eta_x^0 + (\phi_y^T)^1\eta_y^0 - (\phi_z^T)^1) - \epsilon^2 [((\phi_x^T)^1\eta_x^1 + (\phi_x^T)^2\eta_x^0 + (\phi_y^T)^1\eta_y^1 + (\phi_y^T)^2\eta_y^0 - (\phi_z^T)^2) \\ & + \eta^1((\phi_{xz}^T)^1\eta_x^0 + (\phi_{yz}^T)^1\eta_y^0 - (\phi_{zz}^T)^1)] \end{aligned} \quad (5.43)$$

Derivando (5.42) em relação a t, temos:

$$\begin{aligned} \epsilon\eta_t^1 + \epsilon^2\eta_t^2 &= -K_t - \epsilon[P1_t\eta_x^0 + P2_t\eta_y^0] - \epsilon^2[T1_t\eta_x^0 + T2_t\eta_y^0 - \frac{1}{2}(P1^2)_t\eta_{xx}^0 \\ &\quad - (P1P2)_t\eta_{xy}^0 - \frac{1}{2}(P2^2)_t\eta_{yy}^0] \end{aligned} \quad (5.44)$$

em que,

$$K_t = -\epsilon[\xi_{3t}^1 - \xi_{5t}^1A1 + \xi_{4t}^1B1] - \epsilon^2[\xi_{3t}^2 + (\xi_1^1\xi_5^1)_t - (\xi_2^1\xi_4^1)_t - \xi_{5t}^2A1 + \xi_{4t}^2B1 + \frac{1}{2}(C^2)_tC1]$$

$$P1_t = \xi_{1t}^1 - \xi_{6t}^1B1 + \xi_{5t}^1C1$$

$$P2_t = \xi_{2t}^1 - \xi_{6t}^1A1 + \xi_{4t}^1C1$$

$$T1_t = \xi_{1t}^2 + (\xi_2^1\xi_6^1)_t - (\xi_3^1\xi_5^1)_t + Q1_t$$

$$T2_t = \xi_{2t}^2 + (\xi_3^1\xi_4^1)_t - (\xi_1^1\xi_6^1)_t + Q2_t$$

Comparando as equações (5.43) e (5.44) obtemos finalmente a condição cinemática até segunda ordem:

$$-\epsilon U0 - \epsilon^2[U1 + \eta^1U2] = \epsilon U3 - [U4\eta_x^0 + U5\eta_y^0] + \epsilon^2[U6 - U7\eta_x^0 - U8\eta_y^0 + U9] \quad (5.45)$$

em que,

$$U0 = (\phi_x^T)^1\eta_x^0 + (\phi_y^T)^1\eta_y^0 - (\phi_z^T)^1$$

$$U1 = (\phi_x^T)^1\eta_x^1 + (\phi_x^T)^2\eta_x^0 + (\phi_y^T)^1\eta_y^1 + (\phi_y^T)^2\eta_y^0 - (\phi_z^T)^2$$

$$U2 = (\phi_{xz}^T)^1\eta_x^0 + (\phi_{yz}^T)^1\eta_y^0 - (\phi_{zz}^T)^1$$

$$U3 = \xi_{3t}^1 - \xi_{5t}^1A1 + \xi_{4t}^1B1$$

$$U4 = \xi_{1t}^1 - \xi_{6t}^1B1 + \xi_{5t}^1C1$$

$$\begin{aligned}
U5 &= \xi_{2t}^1 + \xi_{6t}^1 A1 - \xi_{4t}^1 C1 \\
U6 &= \xi_{3t}^2 + (\xi_1^1 \xi_5^1)_t - (\xi_2^1 \xi_4^1)_t - \xi_{5t}^2 A1 + \xi_{4t}^2 B1 + \frac{1}{2}(C^2)_t C1 \\
U7 &= \xi_{1t}^2 + (\xi_2^1 \xi_6^1)_t - (\xi_3^1 \xi_5^1)_t + Q1_t \\
U8 &= \xi_{2t}^2 + (\xi_3^1 \xi_4^1)_t - (\xi_1^1 \xi_6^1)_t + Q2_t \\
U9 &= \frac{1}{2}(P1^2)_t \eta_{xx}^0 + (P1P2)_t \eta_{xy}^0 + \frac{1}{2}(P2^2)_t \eta_{yy}^0
\end{aligned}$$

Na condição cinemática (5.45) vamos considerar apenas os efeitos de primeira ordem. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
-(\phi_x^T)^1 \eta_x^0 - (\phi_y^T)^1 \eta_y^0 + (\phi_z^T)^1 &= \xi_{3t}^1 - \xi_{5t}^1 A1 + \xi_{4t}^1 B1 - \eta_x^0 [\xi_{1t}^1 - \xi_{6t}^1 B1 + \xi_{5t}^1 C1] \\
&+ \eta_y^0 [\xi_{2t}^1 + \xi_{6t}^1 A1 - \xi_{4t}^1 C1]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

A equação (5.46) pode ser reescrita de uma forma mais compacta. Seja  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal à superfície  $\eta$  e apontando para dentro do corpo, dado por:

$$\mathbf{n} = (-\eta_x^0, -\eta_y^0, 1)(1 + (\eta_x^0)^2 + (\eta_y^0)^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.47}$$

Portanto, (5.46) se transforma em:

$$\frac{\partial(\phi^T)^1}{\partial \mathbf{n}} = \xi_t^1 \cdot \mathbf{n} + \theta_t^1 \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T^0) \times \mathbf{n}] \tag{5.48}$$

Uma forma mais útil de escrever a equação (5.48) é introduzindo os conceitos de vetor deslocamento generalizado e vetor normal generalizado [19]. Sejam,

$$\xi_k^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \xi_5^1, \xi_6^1) = (\mathbf{r}_T^1, \Theta^1)$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$$

em que,

$$n_4 = n_3(y - \xi_2^0) - n_2(z - \xi_3^0) \tag{5.49}$$

$$n_5 = n_1(z - \xi_3^0) - n_3(x - \xi_1^0) \tag{5.50}$$

$$n_6 = n_2(x - \xi_1^0) - n_1(y - \xi_2^0) \tag{5.51}$$

o vetor deslocamento e o vetor normal generalizado, respectivamente. Com esta notação a equação (5.48) torna-se:

$$\frac{\partial(\phi^T)^1}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{k=1}^6 (\xi_k^1)_t \cdot \mathbf{n}_k \tag{5.52}$$

## 5.4 Dinâmica de Corpo Rígido

Por definição um corpo rígido possui apenas seis graus de liberdade. Isto vem do fato de que a distância entre quaisquer pares de partículas em um corpo rígido é suposta constante. O conceito de corpo rígido é mais uma idealização matemática do que uma realidade física. Apesar disso, nos casos onde as deformações do corpo são insignificantes comparadas ao movimento do corpo como um todo, o conceito é válido.

### 5.4.1 Matriz de Massa

Consideremos um corpo rígido de massa total  $m$ . Sejam  $Oxyz$  um sistema inercial e  $O'x'y'z'$  um conjunto de eixos preso ao corpo. Estamos supondo que o corpo é composto de um grande número de partículas de massa  $m_i$ , em que a distância entre quaisquer duas partículas é constante (figura 5.10).

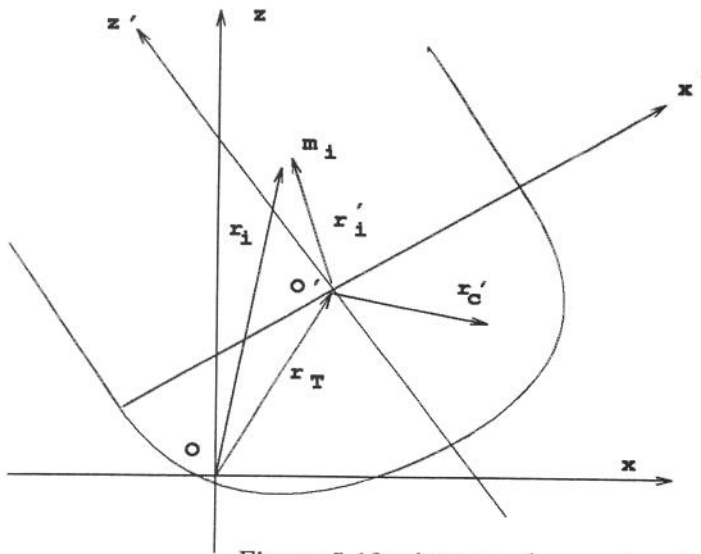


Figura 5.10: sistemas de coordenadas para um corpo rígido

Na figura 10,

$$\mathbf{r}_T = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1) \quad (5.53)$$

$$\mathbf{r}_i' = (x_i', y_i', z_i') \quad (5.54)$$

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad (5.55)$$

$$\mathbf{r}'_c = (x'_c, y'_c, z'_c) \quad (5.56)$$

Seja  $\mathbf{r}'_c$  definido por:

$$\mathbf{r}'_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' dm \quad (5.57)$$

Se  $O'$  coincide com o centro de massa, então,  $\mathbf{r}'_c = 0$  e, portanto,

$$\int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' dm = 0 \quad (5.58)$$

### 5.4.2 Quantidade de Movimento Linear

A quantidade de movimento linear do corpo rígido é dada por:

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}'_i) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_T \int_{\text{corpo}} dm + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' dm \\ &= m(\dot{\mathbf{r}}_T + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_c) \end{aligned} \quad (5.59)$$

em que utilizamos a relação:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_T + \mathbf{r}'_i + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_i \quad (5.60)$$

com  $\boldsymbol{\theta} = (\xi_4^1, \xi_5^1, \xi_6^1)$ . Observemos que  $\mathbf{r}'_i$  não varia, com respeito ao tempo, em relação ao sistema  $O'x'y'z'$ . Na equação (5.59)  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  é o vetor velocidade angular de  $O'x'y'z'$  em relação a  $Oxyz$ ; a quantidade entre parênteses é a velocidade do centro de massa C. Portanto, p pode ser escrito:

$$p = m\dot{\mathbf{r}}'_c \quad (5.61)$$

Se a origem  $O'$  coincide com o centro de massa C, a velocidade  $\dot{\mathbf{r}}'_c$  não envolve a velocidade angular  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  porque  $\mathbf{r}'_c = 0$ . Assim,

$$p = m\dot{\mathbf{r}}_T \quad (5.62)$$

### 5.4.3 Quantidade de Movimento Angular

O momento angular de um corpo rígido em relação à origem  $O'$  é definido por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{O'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\
 &= \int_{\text{corpo}} (\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}) dm \\
 &= \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' \times (\dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}') dm \\
 &= -\dot{\mathbf{r}}_T \times \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' dm + \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' \times (\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}') dm
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

Da álgebra vetorial sabemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' \times (\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}') &= \dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{r}') \\
 &= -\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}}
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Assim, temos:

$$\mathbf{L}_{O'} = -\dot{\mathbf{r}}_T \times \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}' dm + \int_{\text{corpo}} [-\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}}] dm \tag{5.65}$$

### 5.4.4 Força e Momento

A força  $\mathbf{F}$  e o momento  $\mathbf{M}$  que atuam no corpo são iguais às taxas de variação em relação ao tempo das quantidades de movimento linear e angular, respectivamente. Vamos, então, derivar as relações (5.61) e (5.65) em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} &= \frac{d}{dt} [m(\dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}'_c)] \\
 &= m\ddot{\mathbf{r}}_T + m\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \dot{\mathbf{r}}'_c + m\ddot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}'_c
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

Como  $\mathbf{r}'_c$  é constante em relação a  $O'$ , então,  $\dot{\mathbf{r}}'_c = 0$ . Assim, temos que

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}}_T + m\ddot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}'_c \tag{5.67}$$

Em termos matriciais (5.67) pode ser escrita:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1^1 \\ \ddot{\xi}_2^1 \\ \ddot{\xi}_3^1 \end{pmatrix} - MM' \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_4^1 \\ \ddot{\xi}_5^1 \\ \ddot{\xi}_6^1 \end{pmatrix}$$

em que,

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

e

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & -z'_c & y'_c \\ z'_c & 0 & -x'_c \\ -y'_c & x'_c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \dot{L}_{O'} = -\frac{d}{dt}[\dot{\mathbf{r}}_T \times m\mathbf{r}'_c] + \frac{d}{dt} \int_{\text{corpo}} [-\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}}] dm \quad (5.68)$$

ou

$$\mathbf{M} = -[\dot{\mathbf{r}}_T \times m\dot{\mathbf{r}}'_c + \ddot{\mathbf{r}}_T \times m\mathbf{r}'_c] - \int_{\text{corpo}} [\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \times \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{r}}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \dot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}}] dm \quad (5.69)$$

Como  $\mathbf{r}'_c$  é constante em relação a  $O'$ , então,  $\dot{\mathbf{r}}'_c = 0$ . Assim,

$$\mathbf{M} = -\ddot{\mathbf{r}}_T \times m\mathbf{r}'_c - \int_{\text{corpo}} [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\theta}}] dm$$

Mas,  $\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{r}' = 0$ . Portanto,

$$\mathbf{M} = -\ddot{\mathbf{r}}_T \times m\mathbf{r}'_c - \int_{\text{corpo}} [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \ddot{\boldsymbol{\theta}}] dm \quad (5.70)$$

Na forma matricial os termos que aparecem no lado direito da equação (5.70) podem ser escritos como:

$$-\ddot{\mathbf{r}}_T \times m\mathbf{r}'_c = m\mathbf{r}'_c \times \ddot{\mathbf{r}}_T = MM' \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1^1 \\ \ddot{\xi}_2^1 \\ \ddot{\xi}_3^1 \end{pmatrix}$$

ou,

$$-\ddot{\mathbf{r}}_T \times m\mathbf{r}'_c = \begin{bmatrix} 0 & -mz'_c & my'_c \\ mz'_c & 0 & -mx'_c \\ -my'_c & mx'_c & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1^1 \\ \ddot{\xi}_2^1 \\ \ddot{\xi}_3^1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \ddot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_4^1 \\ \ddot{\xi}_5^1 \\ \ddot{\xi}_6^1 \end{pmatrix}$$

ou,

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \times \ddot{\theta} = \begin{bmatrix} -((z')^2 + (y')^2) & x'y' & x'z' \\ x'y' & -((z')^2 + (x')^2) & y'z' \\ x'z' & y'z' & -((y')^2 + (x')^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_4^1 \\ \ddot{\xi}_5^1 \\ \ddot{\xi}_6^1 \end{pmatrix}$$

portanto,

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = MP1 \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1^1 \\ \ddot{\xi}_2^1 \\ \ddot{\xi}_3^1 \end{pmatrix} + MP2 \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_4^1 \\ \ddot{\xi}_5^1 \\ \ddot{\xi}_6^1 \end{pmatrix}$$

em que,

$$MP1 = \begin{bmatrix} 0 & -mz'_c & my'_c \\ mz'_c & 0 & -mx'_c \\ -my'_c & mx'_c & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$MP2 = \begin{bmatrix} -((z')^2 + (y')^2) & x'y' & x'z' \\ x'y' & -((z')^2 + (x')^2) & y'z' \\ x'z' & y'z' & -((y')^2 + (x')^2) \end{bmatrix}$$

Finalmente, resumindo os dois sistemas de equações envolvendo forças e momentos num só sistema, temos:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = FM \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1^1 \\ \ddot{\xi}_2^1 \\ \ddot{\xi}_3^1 \\ \ddot{\xi}_4^1 \\ \ddot{\xi}_5^1 \\ \ddot{\xi}_6^1 \end{pmatrix}$$

em que,

$$FM = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz'_c & -my'_c \\ 0 & m & 0 & -mz'_c & 0 & mx'_c \\ 0 & 0 & m & my'_c & -mx'_c & 0 \\ 0 & -mz'_c & my'_c & I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ mz'_c & 0 & -mx'_c & -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -my'_c & mx'_c & 0 & -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$



e

$$I_{11} = \int_{\text{corpo}} [(z')^2 + (y')^2] dm$$

$$I_{22} = \int_{\text{corpo}} [(z')^2 + (x')^2] dm$$

$$I_{33} = \int_{\text{corpo}} [(y')^2 + (x')^2] dm$$

$$I_{12} = \int_{\text{corpo}} x' y' dm$$

$$I_{13} = \int_{\text{corpo}} x' z' dm$$

$$I_{23} = \int_{\text{corpo}} y' z' dm$$

#### 5.4.5 Resposta de um Corpo Flutuante em Ondas Regulares

No que segue, vamos supor que as ondas incidentes sobre o corpo são ondas progressivas planas de pequena amplitude com dependência senoidal no tempo.

Embora os resultados a serem obtidos sobre corpos em ondas regulares tenham interesse físico, seus valores práticos podem ser questionados em virtude da natureza altamente irregular destas ondas no oceano. Felizmente é possível relacionar estas duas situações (regular e irregular) pela descrição de ondas irregulares como uma superposição linear de componentes senoidais [23].

Vamos supor, ainda, que as ondas progressivas planas têm amplitude  $A$ , direção  $\theta$  e incidem sobre o corpo que se move em resposta a estas ondas com seis graus de liberdade, como ilustrado na figura 5.11.

Definimos os três movimentos de translação paralelos a  $(x, y, z) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  como "surge", "Heave" e "sway", respectivamente, e os três movimentos de rotação sobre os mesmos eixos como "roll", "pitch" e "yaw", respectivamente. As correspondentes velocidades  $V_j(t)$  serão senoidais no tempo com a mesma frequência que a das ondas incidentes, isto é,

$$\mathbf{V}_j(t) = \Re(-i\omega \xi_j e^{-i\omega t}), \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.71)$$

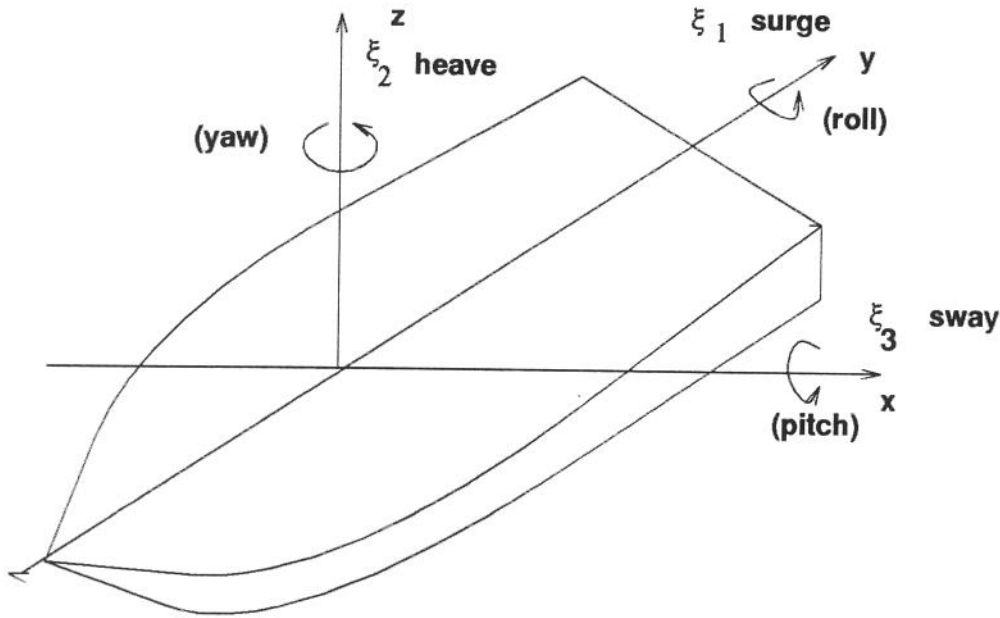


Figura 5.11:

Como a onda incidente é suficientemente pequena em amplitude e o corpo supostamente estável, os movimentos resultantes são proporcionalmente pequenos. Assim, o potencial de velocidade  $\phi^T$  pode ser escrito na forma:

$$\phi^T(x, y, z, t) = \Re\left[\sum_{\alpha=1}^6 \xi_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x, y, z) + \frac{gA}{\omega} \varphi_s(x, y, z)\right] e^{-i\omega t} \quad (5.72)$$

em que,

$$\varphi_s = \phi_i + \phi \quad (5.73)$$

com  $\phi_i$  e  $\phi$  sendo os potenciais de incidência e difração, respectivamente.  $\varphi_{\alpha}$  representa os potenciais de radiação devidos ao movimento do corpo. A forma geral do movimento oscilatório envolvendo força e momento que atuam sobre o corpo é dada pela substituição da equação (5.72) na equação de Bernoulli linearizada, isto é,

$$P = -\rho\left[\frac{\partial \phi^T}{\partial t} + gz\right] \quad (5.74)$$

em que,

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial t} = \Re\left[-i\omega\left[\sum_{\alpha=1}^6 \xi_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x, y, z) + \frac{gA}{\omega} \varphi_s(x, y, z)\right] e^{-i\omega t}\right] \quad (5.75)$$

A força  $\mathbf{F}$  e o momento  $\mathbf{M}$  podem ser determinados integrando a pressão do fluido sobre a superfície molhada  $S_w$ :

$$\mathbf{F} = \int_{S_w} P \mathbf{n} dS \quad (5.76)$$

$$\mathbf{M} = \int_{S_w} P(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad (5.77)$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} &= -\rho g \int_{S_w} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} z dS \\ &+ \rho \Re \sum_{\alpha=1}^6 i\omega \xi_{\alpha} e^{-i\omega t} \int_{S_w} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} \varphi_{\alpha} dS \\ &+ \rho \Re (i g A e^{-i\omega t} \int_{S_w} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} \varphi_{\alpha} dS \end{aligned} \quad (5.78)$$

As três integrais que aparecem na expressão anterior representam contribuições diferentes para a força e o momento que atuam sobre o corpo. A primeira corresponde à componente hidrostática; a segunda integral fornece o coeficiente de massa adicional e amortecimento e a última integral corresponde à força de excitação ou momento que é proporcional à amplitude da onda incidente. Vamos analisar cada uma destas contribuições separadamente.

## Hidrostática

A coordenada  $z$  está fixa no espaço enquanto que a superfície molhada  $S_w$  oscila com o corpo. Para um corpo flutuante o contorno superior de  $S_w$  é a superfície livre  $z = \eta(x, y, t)$  (figura 5.12).

Supondo que os movimentos do corpo  $\xi_{\alpha}$  são pequenos e desprezando quantidades de segunda ordem podemos expressar a transformação entre estes sistemas de coordenadas como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_T + \mathbf{r}_R \times \mathbf{r}' \quad (5.79)$$

em que,  $\mathbf{r}_T = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1)$  e  $\mathbf{r}_R = (\xi_4^1, \xi_5^1, \xi_6^1)$  são vetores formados, respectivamente, pela translação e rotação do corpo,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ . Como o centro de rotação se move com o corpo é conveniente reescrever a equação do momento (5.77) na forma [15]:

$$\mathbf{M}' = -\rho g \int_{S_w} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{n}] z dS \quad (5.80)$$

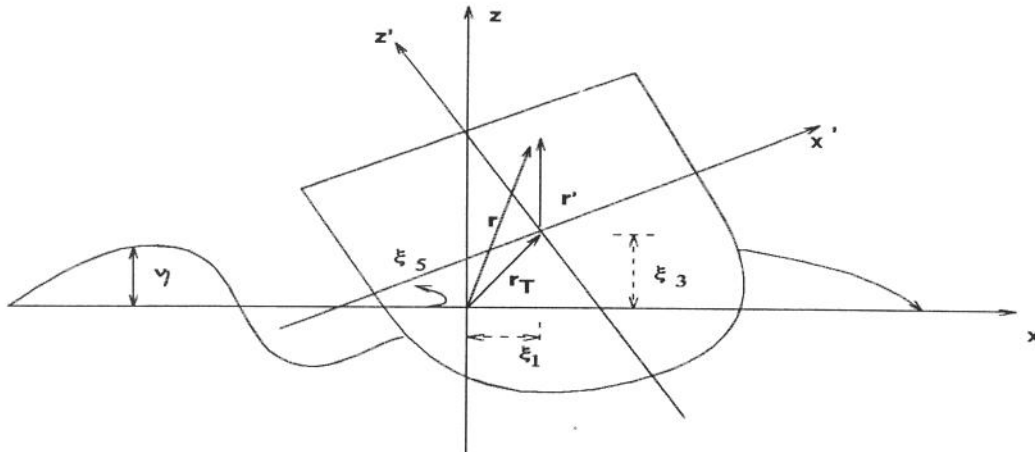


Figura 5.12:

Como estamos considerando pequenos movimentos vamos redefinir a superfície de integração  $S_w$  como sendo a superfície instantânea do corpo  $S_w^0$  na posição de equilíbrio abaixo do plano da água parada  $z = 0$ . Para avaliar as integrais de superfície podemos considerar  $S_w^0$  como uma superfície fechada pela inclusão da porção do plano  $z = 0$ , em que o integrando é zero. O volume  $V(t)$  dentro desta superfície fechada é o volume deslocado instantâneo do corpo abaixo do plano  $z = 0$ . Aplicando o teorema de Gauss a

$$\mathbf{F} = -\rho g \int_{S_w^0} n z dS \quad (5.81)$$

obtemos:

$$\mathbf{F} = \rho g \int_V (\nabla \cdot z) dV = k \rho g \int_V dV \quad (5.82)$$

em que  $\nabla \cdot z$  é o divergente de  $z$ . Para o momento  $\mathbf{M}'$  temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= -\rho g \int_V [\nabla \times z(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T)] dV \\ &= \rho g \int [-j(x - \xi_1) + i(y - \xi_2)] dV \end{aligned} \quad (5.83)$$

Na equação (5.82)  $\mathbf{F}$  é a força de flutuação (buoyancy) que é proporcional ao volume deslocado  $V(t)$ , enquanto que em (5.83) o momento  $\mathbf{M}'$  representa o produto vetorial desta força com o vetor posição do centro de flutuação. As integrais de volume podem ser avaliadas em termos do sistema de coordenadas fixo no corpo. Para isto, decompomos o volume em volume estático  $V_0$  abaixo do plano  $z' = 0$  e em uma camada fina limitada pelos planos  $z = 0$  e  $z' = 0$ . Assim, a partir de (5.82) e (5.83) obtemos:

$$\mathbf{F} = k \rho g [V_0 + \int_{S_0} (z' - z) dx' dy'] \quad (5.84)$$

Mas,  $z' - z = -\xi_3 - \xi_4 y' + \xi_5 x'$ . Portanto,

$$\mathbf{F} = k\rho g[V_0 - \int_{S_0} (\xi_3 + \xi_4 y' - \xi_5 x') dx' dy'] \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \rho g \int_{V_0} [-j(x' + \xi_5 z' - \xi_6 y') + i(y' + \xi_6 x' - \xi_4 z')] dV \\ &+ \rho g \int_{S_0} (-\xi_3 - \xi_4 y' + \xi_5 x') [-j(x' + \xi_5 z' - \xi_6 y') + i(y' + \xi_6 x' - \xi_4 z')] dx' dy' \end{aligned}$$

Desprezando os produtos  $\xi_\alpha \xi_\beta$  na última integral da expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \rho g \int_{V_0} [-j(x' + \xi_5 z' - \xi_6 y') + i(y' + \xi_6 x' - \xi_4 z')] dV \\ &- \rho g \int_{S_0} (\xi_3 + \xi_4 y' - \xi_5 x')(jx' - iy') dx' dy' \end{aligned} \quad (5.86)$$

Nestas expressões,  $V_0$  e  $S_0$  são, respectivamente, o volume deslocado e o plano da água na condição estática. As equações (5.85) e (5.86) podem ser reescritas na forma:

$$k\rho g[V_0 - \xi_3 I - \xi_4 I_2 + \xi_5 I_1] \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= i\rho g[V_0(y'_B + \xi_6 x'_B - \xi_4 z'_B) - \xi_3 I_2 - \xi_4 I_{22} + \xi_5 I_{12}] \\ &- j\rho g[V_0(x'_B + \xi_5 z'_B - \xi_6 y'_B) - \xi_3 I_1 - \xi_4 I_{22} + \xi_5 I_{11}] \end{aligned} \quad (5.88)$$

em que  $V_0$  é o volume deslocado;  $I$  é a área do plano da água;

$$\mathbf{r}'_B = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{r}' dV, \quad \mathbf{r}'_B = (x'_B, y'_B, z'_B) \quad (5.89)$$

é o centro de flutuabilidade;  $I_j, I_{ij}, i, j = 1, 2$  são os momentos no plano da água definidos por:

$$I_j = \int_{S_0} x'_j dS, \quad j = 1, 2, \quad x'_1 = x' \text{ e } x'_2 = y' \quad (5.90)$$

$$I_{ij} = \int_{S_0} x'_i x'_j dS, \quad i, j = 1, 2 \quad (5.91)$$

Observemos que:

1. As integrais (5.89 - 5.91) são definidas em termos da condição estática do corpo;

2. as componentes horizontais da força hidrostática e a componente vertical do momento são nulas;
3. se o corpo estiver totalmente submerso, a área do plano da água I e os momentos (5.90 - 5.91) se anulam;
4. na terminologia da engenharia naval, o vetor  $(\frac{I_x}{I}, \frac{I_y}{I}, 0)$  representa o centro de flutuação que é o ponto de rotação para um corpo flutuando livremente e sujeito a um momento horizontal;
5. as integrais (5.90) se anulam se a origem do sistema fixo no corpo coincidir com este centro de flutuação.

A força estática resultante é obtida somando-se à força hidrostática e ao momento as componentes correspondentes ao peso do corpo. A força associada com o peso do corpo é  $(0, 0, -mg)$ , em que  $m$  é a massa do corpo. O momento correspondente é dado pelo produto vetorial  $mg \times (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_T)$ , isto é,

$$(-mg(y_G - \xi_2), mg(x_G - \xi_1), 0) \quad (5.92)$$

ou

$$(-mg(y'_G + \xi_6 x'_G - \xi_4 z'_G), mg(x'_G + \xi_5 z'_G - \xi_6 y'_G), 0) \quad (5.93)$$

em que  $\mathbf{r}_G = (x_G, y_G, z_G)$  representa o centro de gravidade do corpo. Assim, a força estática resultante  $\mathbf{F}_R$  e o momento  $\mathbf{M}'_R$  são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= -mgk + k\rho g[V_0 - \xi_3 I - \xi_4 I_2 + \xi_5 I_1] \\ &= (\rho V_0 - m)gk - \rho g[\xi_3 I + \xi_4 I_2 - \xi_5 I_1]k \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_R &= [V_1 + V_2 \xi_6 + V_3 \xi_4 - \rho g I_2 \xi_3 + \rho g I_{12} \xi_5]i \\ &\quad + [V_4 + V_5 \xi_5 - V_6 \xi_6 + \rho g I_1 \xi_3 + \rho g I_{12} \xi_4]j \end{aligned} \quad (5.95)$$

em que,

$$V_1 = g[-my'_G + \rho V_0 y'_B] \quad (5.96)$$

$$V_2 = g[-mx'_G + \rho V_0 x'_B] \quad (5.97)$$

$$V_3 = g[mz'_G - \rho V_0 z'_B - \rho g I_{22}] \quad (5.98)$$

$$V_4 = g[mx'_G - \rho V_0 x'_B] \quad (5.99)$$

$$V_5 = g[mz'_G - \rho V_0 z'_B - \rho g I_{11}] \quad (5.100)$$

$$V_6 = g[my'_G - \rho V_0 y'_B] \quad (5.101)$$

As equações (5.94-5.95) podem ser resumidas na equação:

$$F_i = (\rho V_0 - m)g\delta_{i3} + V_1\delta_{i4} + V_4\delta_{i5} - \sum_{j=1}^6 K_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.102)$$

com

$$\delta_{ij} = 1, \quad \text{se } i = j, i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\delta_{ij} = 0, \quad \text{se } i \neq j$$

e  $K_{ij}$  é a matriz de restauração hidrostática:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g I & \rho g I_2 & -\rho g I_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g I_2 & -V_3 & -\rho g I_2 & V_4 \\ 0 & 0 & -\rho g I_1 & -\rho g I_{12} & -V_5 & V_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acordo com o princípio de Arquimedes, o equilíbrio da força vertical exige que a massa de um corpo flutuando livremente seja igual à massa deslocada, isto é,

$$m = \rho V_0 \quad (5.103)$$

Assim, para o equilíbrio dos momentos na equação (5.102) é necessário que o centro de gravidade e o centro de flutuabilidade permaneçam na mesma linha vertical, ou seja,

$$x'_B = x'_G y'_B = y'_G \quad (5.104)$$

Nestas circunstâncias os termos  $K_{46}$  e  $K_{56}$  na matriz de restauração se anulam.

### Massa Adicional e Amortecimento

Os coeficientes de massa adicional e amortecimento são fornecidos pela segunda integral da equação (5.78), isto é,

$$F_{\alpha}^R = \Re \left[ \sum_{\beta=1}^6 \xi_{\beta} f_{\beta\alpha} e^{-i\omega t} \right] \quad (5.105)$$

com

$$f_{\beta\alpha} = i\rho\omega \int_{S_w} \varphi_{\beta} \mathbf{n}_{\alpha} dS \quad (5.106)$$

e  $\mathbf{n}_{\alpha}$  o vetor normal generalizado. A componente  $f_{\beta\alpha}$  representa a reação hidrodinâmica na direção  $\alpha$  devido ao modo normal  $\beta$ . A força restauradora é dada por:

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^R &= \Re \sum_{\beta} i\rho\omega \xi_{\beta} \left[ \int_{S_w} \Re(\varphi_{\beta}) \mathbf{n}_{\alpha} dS \right] e^{-i\omega t} \\ &\quad + \Re \sum_{\beta} i\rho\omega \xi_{\beta} \left[ i \int_{S_w} \Im(\varphi_{\beta}) \mathbf{n}_{\alpha} dS \right] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (5.107)$$

ou

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^R &= \sum_{\beta} -\rho [\Re(-i\omega \xi_{\beta} e^{-i\omega t})] \int_{S_w} \Re(\varphi_{\beta}) \mathbf{n}_{\alpha} dS \\ &\quad - \sum_{\beta} \rho\omega [\Re(\xi_{\beta} e^{-i\omega t})] \int_{S_w} \Im(\varphi_{\beta}) \mathbf{n}_{\alpha} dS \end{aligned} \quad (5.108)$$

ou

$$F_{\alpha}^R = - \sum_{\beta} (\dot{X}_{\beta} [\lambda_{\beta\alpha}] - \sum_{\beta} \ddot{X}_{\beta} [\mu_{\beta\alpha}]) \quad (5.109)$$

em que,

$$\dot{X}_{\beta} = \Re[\xi_{\beta} e^{-i\omega t}]$$

$$\ddot{X}_{\beta} = \Re[-i\omega \xi_{\beta} e^{-i\omega t}]$$

$$\mu_{\beta\alpha} = \rho \int_{S_w} \Re(\varphi_{\beta} \mathbf{n}_{\alpha}) dS \quad (5.110)$$



$$\lambda_{\beta\alpha} = \rho\omega \int_{S_w} \Im(\varphi_\beta \mathbf{n}_\alpha) dS \quad (5.111)$$

Observemos que, na expressão (5.109),  $\lambda_{\beta\alpha}$  é proporcional à velocidade do corpo, enquanto que  $\mu_{\beta\alpha}$  é proporcional à aceleração do corpo e corresponde à inércia hidrodinâmica. Estas matrizes são conhecidas, respectivamente, por matriz de amortecimento e matriz de massa adicional.

### Força de Excitação

O último termo da equação (5.78) fornece a força de excitação que é proporcional à amplitude da onda incidente, isto é,

$$F_\alpha^e = \Re[Ae^{-i\omega t} f_\alpha^e], \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.112)$$

com

$$f_\alpha^e = i\rho g \int_{S_w} \varphi_\alpha \mathbf{n}_\alpha dS \quad (5.113)$$

A componente  $f_\alpha^e$  representa a amplitude complexa da força de excitação, na direção  $\alpha$ , para uma onda incidente de amplitude unitária. A equação (5.113) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_\alpha^e &= i\rho g \int_{S_w} (\phi_i + \phi) \mathbf{n}_\alpha dS \\ &= i\rho g \left[ \int_{S_w} \phi_i \mathbf{n}_\alpha dS + \int_{S_w} \phi \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{n}} dS \right] \\ &= i\rho g \left[ \int_{S_w} \phi_i \mathbf{n}_\alpha dS + \int_{S_w} \varphi_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dS \right] \\ &= i\rho g \left[ \int_{S_w} \phi_i \mathbf{n}_\alpha dS - \int_{S_w} \varphi_\alpha \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} dS \right] \end{aligned} \quad (5.114)$$

A forma final da equação anterior foi obtida pela utilização da condição de contorno  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}$ . Esta forma, que corresponde ao teorema de Haskind-Hanaoka, estabelece a relação entre a  $\alpha$ -ésima componente generalizada da força de excitação sobre um corpo fixo (difração) e o potencial de radiação do  $\alpha$ -ésimo modo normal do mesmo corpo. Em outras palavras, a força de excitação pode ser expressa numa forma independente do potencial de difração.

## 5.5 Resposta Dinâmica

A resposta dinâmica de um corpo flutuando livremente em ondas com sua amplitude variando senoidalmente no tempo e ao longo do corpo pode ser calculada pela equação:

$$[M] \ddot{\mathbf{X}} + [K] \mathbf{X} = \mathbf{F}_\alpha^R + \mathbf{F}_\alpha^e \quad (5.115)$$

em que,  $[M]$  é a matriz de massa,  $[K]$  a matriz de restauração hidrostática,  $\mathbf{F}_\alpha^R$  a força restauradora e  $\mathbf{F}_\alpha^e$  a força de excitação. Substituindo na equação (5.115) as expressões (5.109) e (5.114), obtemos:

$$\begin{aligned} [M]\ddot{\mathbf{X}} + [K]\mathbf{X} &= \Re[\imath\rho g(I_1 - I_2)Ae^{-\imath\omega t} \\ &+ \sum_{\beta=1}^6 (-\ddot{\mathbf{X}}_\beta)\mu_{\beta\alpha} + \sum_{\beta=1}^6 (-\dot{\mathbf{X}}_\beta)\lambda_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (5.116)$$

em que,

$$I_1 = \int_{S_w} \phi_i \mathbf{n}_\alpha dS \quad (5.117)$$

$$I_2 = \int_{S_w} \varphi_\alpha \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (5.118)$$

Mas,  $\mathbf{X}_\beta = \Re[\frac{-\xi_\beta}{\imath\omega} e^{-\imath\omega t}]$ . Seja  $\bar{\xi}_\beta = \frac{-\xi_\beta}{\imath\omega}$ . Então,

$$\mathbf{X}_\beta = \Re[\bar{\xi}_\beta e^{-\imath\omega t}] \quad (5.119)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_\beta = -\Re[\imath\omega \bar{\xi}_\beta e^{-\imath\omega t}] \quad (5.120)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_\beta = \Re[\omega^2 \bar{\xi}_\beta e^{-\imath\omega t}] \quad (5.121)$$

Substituindo estas expressões na equação (5.115) e após algumas simplificações, temos:

$$-\omega^2([M] + [\mu]) + [K] - \imath\omega[\lambda]\bar{\xi}_\beta = \imath\rho g A[I_1 - I_2] \quad (5.122)$$

em que,

$$[\mu] = \sum_{\beta=1}^6 \mu_{\beta\alpha}, \quad [\lambda] = \sum_{\beta=1}^6 \lambda_{\beta\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.123)$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4, \bar{\xi}_5, \bar{\xi}_6 \end{pmatrix}^T$$

## 5.6 Implicações do teorema de Green

Seja  $S$  uma superfície fechada limitando um volume  $V$  de fluido e  $\mathbf{n}$  a normal exterior  $V$ . A segunda identidade de Green pode ser escrita na forma:

$$\int_V [\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi] dV = \int_S [\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}] dS \quad (5.124)$$

Vamos supor que a superfície  $S$  seja construída de tal forma que inclua a superfície livre  $S_F$ , a superfície de fundo  $S_B$ , as superfícies dos corpos  $S_{A_j}$  e um cilindro circular vertical  $S_x$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$  (raio arbitrariamente grande). Suponhamos, ainda, que na segunda identidade de Green,  $\Phi$  e  $\Psi$  sejam funções potenciais harmônicas, isto é,  $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0$  e que satisfaçam as condições de contorno sobre  $S_B$  e  $S_F$ , respectivamente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = g \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Então, temos:

$$\int_S [\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}] dS = \int_{S_{A_j} + S_x} [\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}] dS = 0$$

Portanto,

$$\int_{S_{A_j}} [\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}] dS = - \int_{S_x} [\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}] dS$$

Esta última equação é básica para as relações que seguem.

1. Suponhamos que  $\Phi$  e  $\Psi$  são dois potenciais de radiação. Então, a integral sobre  $S_x$  se anula em virtude da condição de contorno de radiação. Assim,

$$\int_{S_{A_j}} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{S_{A_j}} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS$$

2. Se  $\Phi$  é um potencial de radiação e  $\Psi$  é um potencial de difração, então,

$$\int_{S_{A_j}} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{S_{A_j}} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} dS = - \int_{S_{A_j}} \Phi \frac{\partial \Phi^I}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (5.125)$$

## 5.7 Formulação Matemática

Consideremos a difração e a radiação de ondas monocromáticas lineares causadas por um ou mais corpos flutuantes bidimensionais com seção transversal  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  excitados por ondas "beam" (figura 5.13).

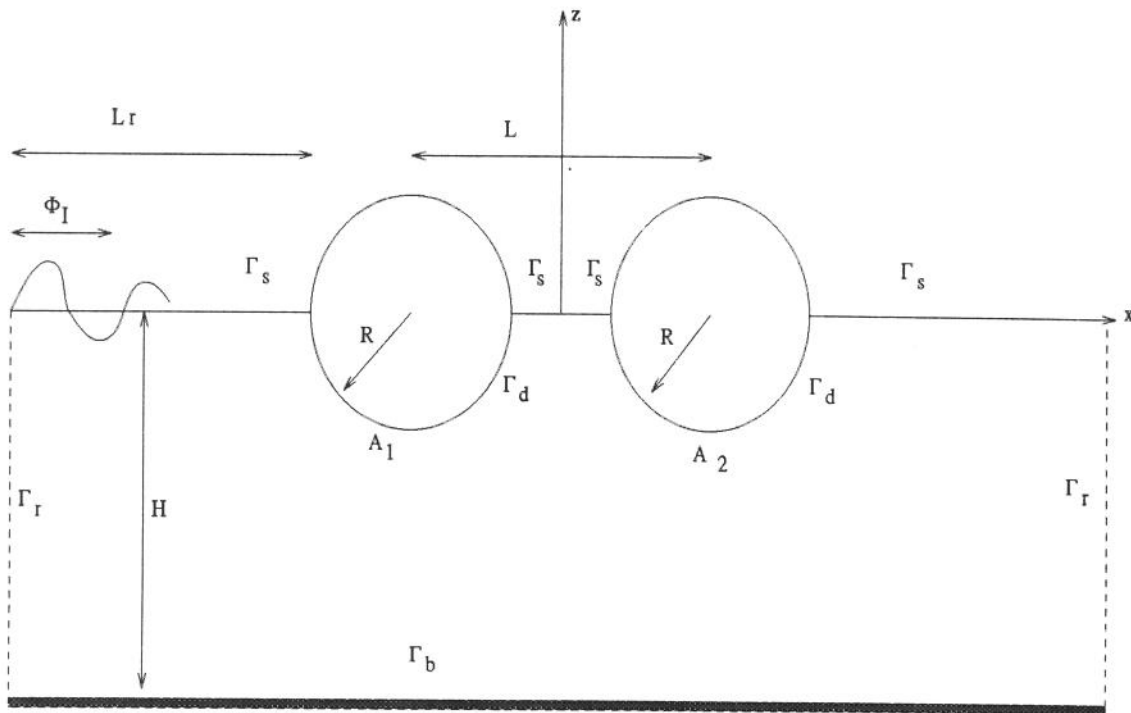


Figura 5.13: corpos flutuantes

Vamos supor que o fluido seja invíscido, incompressível e irrotacional e que as amplitudes do movimento são pequenas e harmônicas no tempo de tal modo que a teoria linear se aplique. Consideremos, ainda, que a onda incidente tem amplitude  $A$  e uma frequência angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e que os modos "heave", "sway" e "roll" representem os três possíveis graus de liberdade de cada corpo. A suposição de pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio permite que os problemas de difração e radiação de ondas possam ser tratados separadamente e então superpostos [58]. Assim, o potencial complexo do campo de escoamento pode ser obtido pela superposição dos potenciais incidente  $\phi_0(x, z)$ , difratado  $\phi_{jA}(x, z)$  e radiados  $\phi_{jk}(\xi_{jk}, \psi_{jk})$

[15].

$$\phi^T(x, z)e^{-i\omega t} = \Re[\phi_0 + \phi_{j4} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 \phi_{jk}(x, z)]e^{-i\omega t} \quad (5.126)$$

O potencial incidente  $\phi_0$  satisfaz o operador de Laplace e é dado por (equação 3.33):

$$\phi_0 = \frac{-igA \cosh[\kappa(z + H)]}{\omega \cosh[\kappa H]} e^{i\kappa x} \quad (5.127)$$

em que,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $H$  a profundidade da água e  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda, com o comprimento de onda representado por  $\lambda$ . O número de onda deve satisfazer a relação de dispersão:

$$\omega^2 = \kappa g \tanh[\kappa h] \quad (5.128)$$

O potencial de difração  $\phi_{j4}$  do  $j$ -ésimo corpo na ausência dos outros representa o campo de espalhamento da onda quando todos os corpos estão fixos. O potencial de radiação

$$\phi_{jk}(x, z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 \xi_{jk}(x, z) \psi_{jk}(x, z) \quad (5.129)$$

representa a oscilação forçada do  $j$ -ésimo corpo na  $k$ -ésima direção com os outros corpos mantidos fixos.  $\xi_{jk}$  é a amplitude complexa da velocidade do  $j$ -ésimo corpo na  $k$ -ésima direção. Cada um dos potenciais complexos deve satisfazer a equação de Laplace no domínio do fluido,

$$\nabla^2 \phi_{jk} = 0 \quad , j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, 4 \quad (5.130)$$

e as seguintes condições de contorno:

(i) na superfície livre ( $\Gamma_f$ ):

$$\frac{\partial \phi_{jk}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} \phi_{jk} = 0 \quad , j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, 4 \quad (5.131)$$

(ii) superfície de fundo ( $\Gamma_b$ )

$$\frac{\partial \phi_{jk}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad , j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, 4 \quad (5.132)$$

(iii) nas superfícies dos corpos ( $\Gamma_e$ )

$$\frac{\partial \phi_{j4}}{\partial \mathbf{n}_{A_j}} = \frac{-\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}_j} \quad (5.133)$$

$$\frac{\partial \phi_{jk}}{\partial \mathbf{n}_{A_j}} = \mathbf{n}_{jk} \quad \text{sobre } A_j \quad (5.134)$$

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \mathbf{n}_{A_i}} = 0 \quad \text{sobre } A_i, \quad i \neq j \quad (5.135)$$

(iv) condição de radiação no contorno ( $\Gamma_r$ )

$$\frac{\partial \phi_{jk}}{\partial \mathbf{n}} - i\kappa \phi_{jk} = 0 \quad , j = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, 4 \quad (5.136)$$

A normal unitária sobre estas superfícies é dada por  $\mathbf{n}$ .  $\mathbf{n}_{jk}$  representa a  $k$ -ésima componente ( $k = 1, 2, 3$ ) da normal unitária no  $j$ -ésimo corpo ( $j = 1, \dots, n$ ). A normal generalizada  $\mathbf{n}_{j3}$  relaciona as coordenadas do centro de rotação ( $x_{jc}, z_{jc}$ ) do  $j$ -ésimo corpo é por meio da expressão (Mei,1983):

$$\mathbf{n}_{j3} = (z - z_{jc})\mathbf{n}_{j1} - (x - x_{jc})\mathbf{n}_{j2} \quad (5.137)$$

### Forças Hidrodinâmicas e Coeficientes

A pressão hidrodinâmica agindo sobre o corpo pode ser relacionada ao potencial total  $\phi^T$  pela equação linearizada de Bernoulli

$$p(x, z, t) = \rho \omega \phi^T e^{-i\omega t} \quad (5.138)$$

Desprezando forças de atracamento, as forças de excitação  $\mathbf{F}_{jk}$  agindo sobre os corpos podem se obtidas integrando a pressão hidrodinâmica sobre suas superfícies molhadas ( $\Gamma_{e_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ). Combinando as equações (5.126) and (5.138) as forças resultantes  $\mathbf{F}_{jk}$  são dadas por

$$\mathbf{F}_{jk} = \text{Re}[\mathbf{f}_{jk} + \mathbf{F}_{jklm}]e^{-i\omega t}, \quad (5.139)$$

$$\mathbf{f}_{jk} = \rho g A \int_{\Gamma_j} (\phi_0 + \phi_{j4}) \mathbf{n}_{jk} d\Gamma \quad (5.140)$$

$$\mathbf{F}_{jklm} = \rho \omega \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \xi_{lm} \int_{\Gamma_j} \psi_{lm} \mathbf{n}_{jk} d\Gamma \quad (5.141)$$

Em (5.141)  $\mathbf{F}_{jklm}$  é a força sobre o  $j$ -ésimo corpo na  $k$ -ésima direção devido a um deslocamento unitário do  $l$ -ésimo corpo na  $m$ -ésima direção. A integral (5.140) fornecerá a parte da força de excitação que está relacionada aos campos incidentes e difratados e que são proporcionais à amplitude  $A$  da onda incidente. Aplicando o teorema de Haskind-Hanaoka [19], que estabelece uma relação entre a  $k$ -ésima componente da força de excitação generalizada sobre um corpo fixo (difração) e o potencial de radiação do  $k$ -ésimo modo do deslocamento do mesmo corpo, a equação (5.140) pode ser reescrita:

$$\mathbf{f}_{jk} = \rho g A \left[ \int_{\Gamma_j} \phi_0 \mathbf{n}_{jk} d\Gamma - \int_{\Gamma_{e_1} + \dots + \Gamma_{e_n}} \psi_{jk} \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}_j} d\Gamma \right] \quad (5.142)$$

As integrais em (5.141) fornecerão, respectivamente, os coeficientes de massa adicional e amortecimento:

$$\mu_{jklm} = \rho \int_{\Gamma_j} \Re[\psi_{lm}] \mathbf{n}_{jk} d\Gamma \quad (5.143)$$

$$\lambda_{jklm} = \rho \omega \int_{\Gamma_j} \Im[\psi_{lm}] \mathbf{n}_{jk} d\Gamma \quad (5.144)$$

### Equações do Movimento para Corpos Rígidos

As equações do movimento para corpos flutuantes podem ser escritas [59]:

$$\sum_{m=1}^3 [D_{jkjm} \Xi_{jm} + E_{jklm} \Xi_{lk}] = f_{jk}, \quad (5.145)$$

$$D_{jkjm} = -\omega^2 (M + \mu_{jkjm}) - i\omega \lambda_{jkjm} + K \quad (5.146)$$

$$E_{jklm} = -\omega^2 \mu_{jklm} - i\omega \lambda_{jklm} \quad (5.147)$$

$$\Xi_{lk} = [\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \dots, \xi_{n1}, \xi_{n2}, \xi_{n3}]^T \quad (5.148)$$

Na equação (5.148)  $\xi_{lk}$  representa a amplitude do deslocamento do  $k$ -ésimo ( $k = 1, 2, 3$ ) grau de liberdade do  $l$ -ésimo corpo ( $l = 1, \dots, n$ ). A força de excitação sobre o  $j$ -ésimo

corpo ( $j = 1, \dots, n$ ) na  $k$ -ésima direção ( $k = 1, 2, 3$ ) é dada por  $\mathbf{f}_{jk}$ .  $M$ ,  $\mu_{jklm}$ ,  $\lambda_{jklm}$  são, respectivamente, a matriz de massa, a matriz de massa adicional e a matriz de amortecimento do  $j$ -ésimo corpo, para o  $k$ -ésimo grau de liberdade correspondente a um deslocamento unitário do  $l$ -ésimo corpo na  $m$ -ésima direção.  $K$  representa a matriz de restauração [19]. Para o caso particular de dois corpos ( $n=2$ ) e supondo que os centros de rotação dos semicilindros ( $x_{jc}, z_{jc}$ ) (usados para descrever a cinemática dos corpos) coincidem com seus centros de gravidade ( $x_{ig}, z_{ig}$ ), as matrizes de massa  $M$  e de restauração  $K$  são dadas, respectivamente, pelas tabelas (5.1) e (5.2):

Tabela 5.1: Matriz de massa  $M$  for para semi-cilindros

$M_1$	0	0	0	0	0
0	$M_1$	0	0	0	0
0	0	$J_1$	0	0	0
0	0	0	$M_2$	0	0
0	0	0	0	$M_2$	0
0	0	0	0	0	$J_2$

Tabela 5.2: Matriz de restauração para semi-cilindros

0	0	0	0	0	0
0	$K_1$	0	0	0	0
0	0	$(RM)_1$	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$K_2$	0
0	0	0	0	0	$(RM)_2$

Na tabela 5.1  $M_k$  e  $J_k$  ( $k = 1, 2$ ) são, respectivamente, a massa dos corpos e o momento polar de inércia relação ao centro de gravidade e dados por:

$$M_k = \rho \frac{\pi R_k^2}{2} \quad (5.149)$$

$$J_k = \frac{\pi R_k^4}{4} - d^2 \frac{\pi R_k^2}{2} \quad (5.150)$$

O parâmetro  $d$  é a distância do centro de gravidade até a superfície livre. Na tabela 5.2  $K_i = \rho g S_i$  ( $i = 1, 2$ ), em que  $S_i$  é a área do plano da linha da água. O momento restaurador



é dado por [60]:

$$(RM)_i = \rho g V_i \left[ \frac{I_i}{V_i} + z_{ib} - z_{ig} \right], i = 1, 2, \quad (5.151)$$

em que  $V_i$  é o volume de água deslocado pelo corpo,  $I_i$  é o segundo momento de área sobre o eixo longitudinal no plano da linha da água e  $z_{ib}$  são as coordenadas do centro de flutuação.

## 5.8 Formulação de Elementos de Contorno

O problema da interação hidrodinâmica consiste em resolver a equação (5.130) sob as condições de contorno prescritas (5.131 - 5.136). A formulação do BEM exige a transformação da equação diferencial (5.130) em uma equação integral. Utilizamos a técnica dos resíduos ponderados para minimizar, em um sentido integral, o erro produzido pela substituição da solução exata de (5.130) pela solução aproximada  $U_{jk}$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 U_{jk}) U^* d\Omega = 0, \quad j = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, 4 \quad (5.152)$$

em que  $U^*$  é uma função peso e  $\Omega$  é o domínio limitado por  $\Gamma = \Gamma_b + \Gamma_f + \Gamma_e + \Gamma_r$ .

A integral de domínio pode ser transformada em uma integral de contorno com a ajuda da segunda identidade de Green e das condições de contorno (5.131 - 5.136):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 U^*) U d\Omega &= \int_{\Gamma_b + \Gamma_e} U \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_e} [U^* V_j] d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} U^* \right] U d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_r} \left[ \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} - i\kappa U^* \right] U d\Gamma \end{aligned} \quad (5.153)$$

Em (5.153)  $V_j = \frac{-\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}_j}$  para o problema de difração e  $V_j = \mathbf{n}_{jk}$  para o problema de radiação. Esta equação integral é o ponto inicial para a formulação do BEM [31]. Considerando

a função peso  $U^*$  como sendo a solução fundamental da equação de Laplace em duas dimensões, a equação (5.153) pode ser transformada na equação integral de contorno:

$$\begin{aligned}
 c(p)U(p) &= - \int_{\Gamma_b + \Gamma_e} U \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_e} [U^* V_j] d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} U^* \right] U d\Gamma \\
 &\quad - \int_{\Gamma_r} \left[ \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} - \nu \kappa U^* \right] U d\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.154}$$

As integrais de contorno podem agora ser discretizadas em elementos (constantes, lineares, quadráticos). Na definição que segue estamos supondo que a geometria do contorno e as variáveis são constantes:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} U^* d\Gamma \tag{5.155}$$

Com esta definição a equação integral de contorno na forma discretizada pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}(U_{lm}) = \sum_{j=1}^N G_{ij} V_m, \quad l = 1, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, 4 \tag{5.156}$$

Aplicando a equação (5.154) em cada elemento obtemos o seguinte sistema de equações algébricas:

$$HU = G \tag{5.157}$$

A equação (5.157) pode ser resolvida para determinar uma solução aproximada para os potenciais de velocidade dados por (5.130).

## 5.9 Validação Numérica

### 5.9.1 Cilindros Circulares Gêmeos

As seguintes relações foram consideradas na análise que segue:

$$\frac{H}{R} = 10$$

$$L_e = \frac{R}{5} \text{ em } \Gamma_s \cup \Gamma_r$$

$$L_e \approx \frac{R}{15} \text{ em } \Gamma_d$$

$$L_e = \frac{R}{2.5} \text{ em } \Gamma_b$$

$$L_r = 5R \tag{5.158}$$

com  $L_e$  sendo o comprimento de cada subelemento.

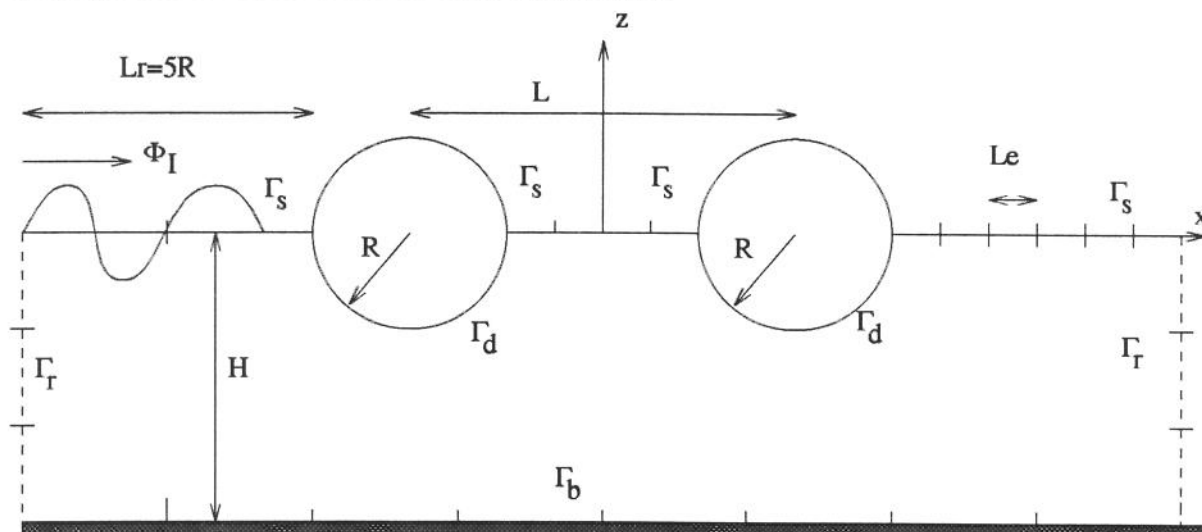


Figura 5.14: cilindros gêmeos

#### Cilindro Circular Isolado

Para validar o método comparamos o coeficiente de massa adicional e amortecimento, bem como a resposta de um cilindro circular com os resultados obtidos por Leonard, Huang e Hudspeth

[58]. A estrutura das matrizes de massa adicional  $[\mu]$  e amortecimento  $[\lambda]$  podem ser vistas na tabela 5.3. Nela, cada linha representa o vetor deslocamento nos modos "sway", "heave" e "roll", nesta ordem. Os coeficientes de massa adicional e amortecimento foram normalizados, respectivamente, por  $\mu_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{RA_s}$  e  $\lambda_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{R\omega A_s}$  e são mostrados nas figuras (5.15) e (5.16).

Tabela 5.3: estrutura das matrizes  $\mu$  e  $\lambda$

A	0	0
0	B	0
0	0	0

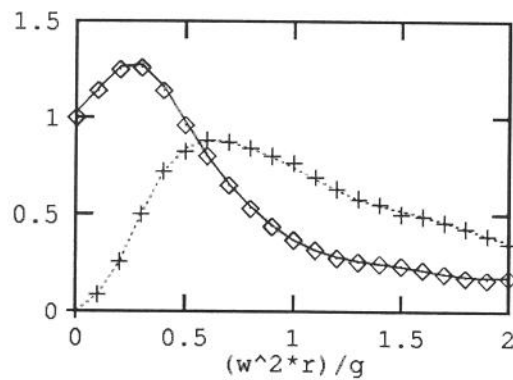


Figura 5.15: massa adicional e amortecimento;  $\mu_{11}$  —;  $\lambda_{11}$  ...; ref. [58] (●● ou ++)

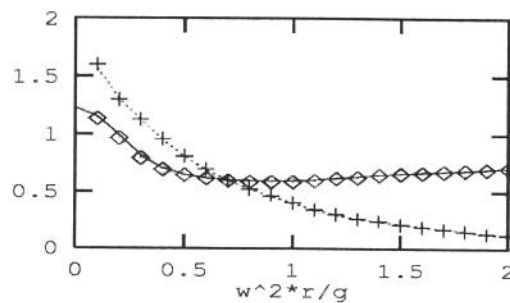


Figura 5.16: massa adicional e amortecimento;  $\mu_{22}$  —;  $\lambda_{22}$  ...; ref. [58] (●● ou ++)

As amplitudes das respostas "sway" e "heave" são mostradas na figura (5.17). A concordância com Leonard, Huang e Hudspeth [58] é excelente.

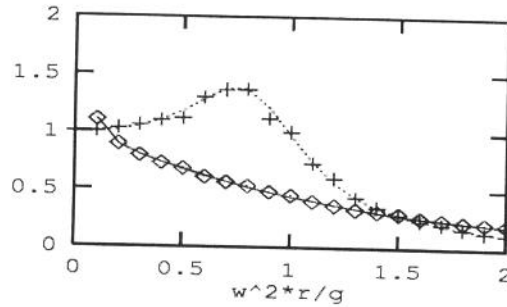


Figura 5.17: amplitude das respostas;  $\frac{|\xi_1|}{A}$  — ;  $\frac{|\xi_2|}{A}$  ...; ref. [58] (•• ou ++)

### Dois Cilindros Gêmeos

A estrutura de  $[\mu]$  e  $[\lambda]$  para dois cilindros semi-submersos de mesmo raio pode ser vista na tabela 5.4. A distância entre os centros dos cilindros é  $d_{12} = 3R$ . Os coeficientes de massa adicional (AM) e amortecimento (DC) para os modos "sway"  $A_2$  e "heave"  $B_2$  são mostrados nas figuras (5.18) e (5.19). As amplitudes das respostas sway e heave dos cilindros "upwave" e "downwave" são vistas nas figuras (5.20) e (5.21).

Tabela 5.4: estrutura de  $[\mu]$  and  $[\lambda]$  para cilindros gêmeos

$A_2$	C	0	D	F	0
C	$B_2$	0	F	E	0
0	0	0	G	H	0
D	-F	0	$A_2$	-C	0
-F	E	0	-C	$B_2$	0
G	-H	0	0	0	0

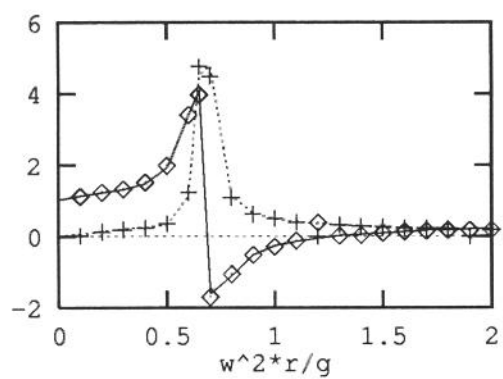


Figura 5.18: massa adicional e amortecimento;  $\mu_{1111}$  — ;  $\lambda_{1111}$  ...; ref. [58] (●● ou ++)

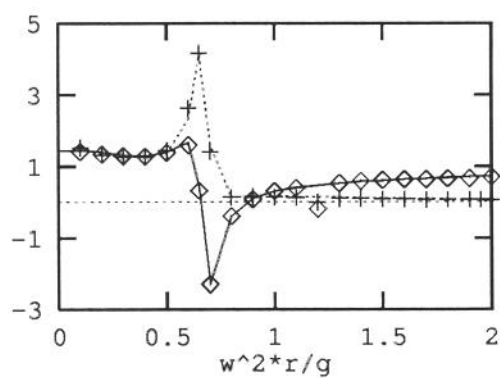


Figura 5.19: massa adicional e amortecimento;  $\mu_{2222}$  — ;  $\lambda_{2222}$  ...; ref. [58] (●● ou ++)

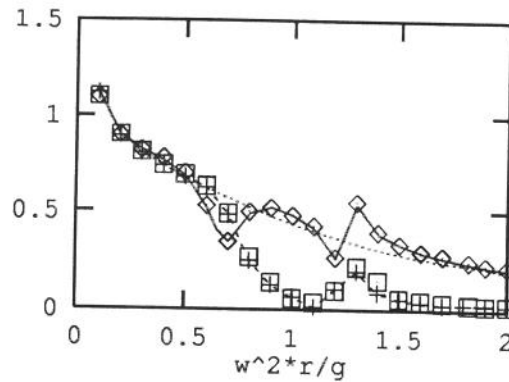


Figura 5.20: resposta no modo sway; upwave — ;downwave - -; isolado ...; ref. [58] (•• ou ++)

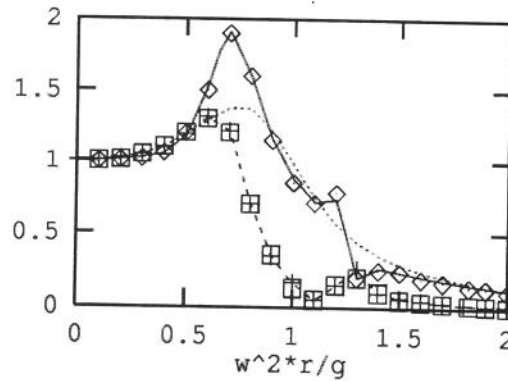


Figura 5.21: resposta no modo heave; upwave — ;downwave - -; isolado...; ref. [58] (•• ou ++)

Podemos observar que o cilindro "downwave" apresenta uma amplitude menor na presença do cilindro "upwave", quando comparada à resposta do cilindro isolado. O preço pago por este efeito de proteção é que a amplitude do cilindro "upwave" pode aumentar consideravelmente para certos comprimentos de ondas, quando comparado ao cilindro isolado. As comparações com Leonard, Huang e Hudspeth [58], como se pode observar, são excelentes. As figuras (5.22) e (5.23) mostram, respectivamente, AM e DC dos elementos C, D, E e F da tabela 5.4, enquanto que a figura (5.24) mostra AM e DC dos elementos G e H da mesma tabela. Estes coeficientes foram normalizados como:

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{RA_s 2R}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{R\omega A_s 2R}$$

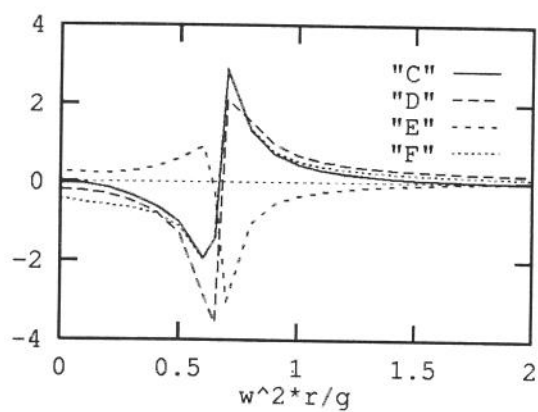


Figura 5.22: massa adicional;  $\mu_{1112}$  —;  $\mu_{1124}$  - - -;  $\mu_{1225}$  ...;  $\mu_{1125}$  -.-.

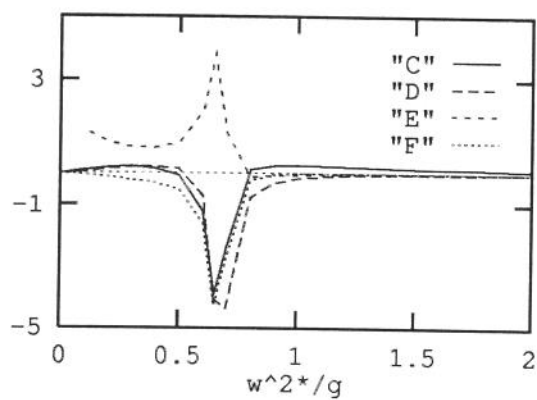


Figura 5.23: amortecimento;  $\lambda_{1112}$  —;  $\lambda_{1124}$  - - -;  $\lambda_{1225}$  ...;  $\lambda_{1125}$  -.-.

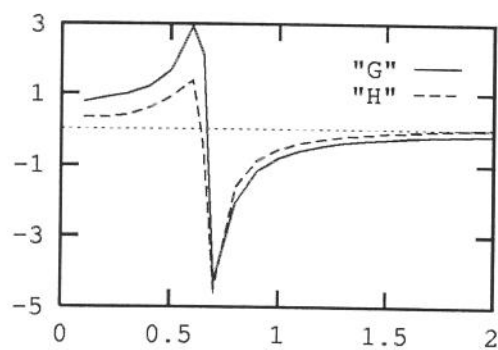


Figura 5.24: coeficientes de massa adicional



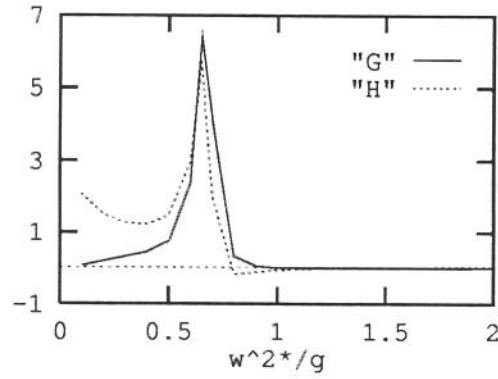


Figura 5.25: massa adicional e amortecimento;  $\mu_{1324}$  —;  $\mu_{1325}$  - - -;  $\lambda_{1324}$  ...;  $\lambda_{1325}$  -.-.-

## 5.9.2 Semicilindros Gêmeos

### Discretização

Seja  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  o comprimento dos contornos  $\Gamma_s$ ,  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_d$ , respectivamente (figura 5.26).

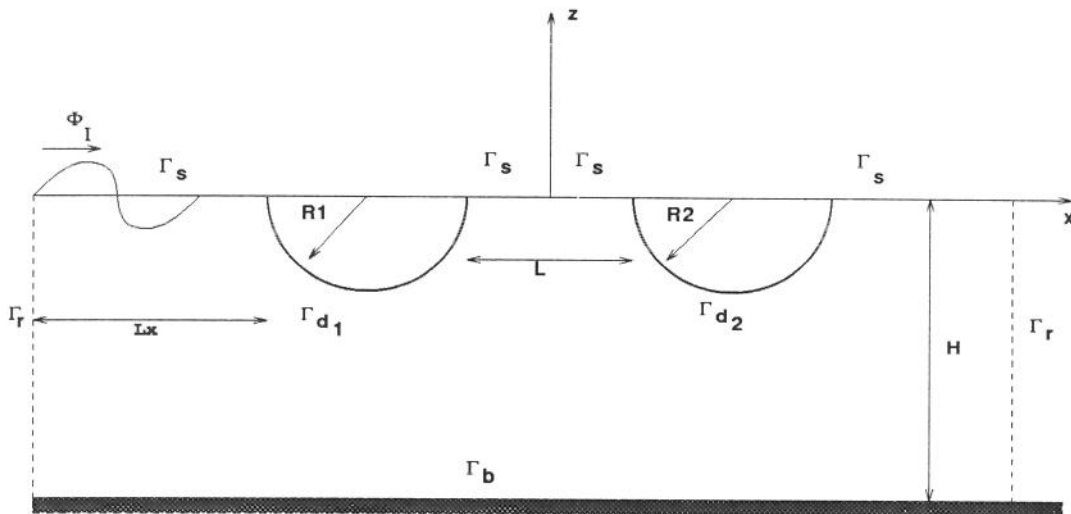


Figura 5.26: semicilindros gêmeos

Se  $N_j$  representa o número de elementos para cada  $L_j$ , então, a densidade da malha para estes contornos é dada por:

$$\Delta_j = \frac{L_j}{N_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 4$$

No que segue assumimos que:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 \approx .2$$

$$\Delta_4 \approx .1$$

### Cilindro Circular Isolado

Para validar o método os coeficientes de massa adicional, amortecimento e a resposta de um semicilindro circular submerso foram comparadas com os resultados obtidos por Chen and Mahrenholtz [61], que utilizaram o método integral de contorno baseado na função de Green. A figura 5.27 mostra o coeficiente de massa adicional  $\mu_{22}$  para o caso  $\frac{H}{R} = 2$ . Os resultados são bons, exceto para as chamadas "frequências irregulares" que são típicas da abordagem pela função de Green. As figuras (5.28) e (5.29) apresentam os elementos não nulos da matriz de massa adicional  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$ ,  $\mu_{33}$  e  $\mu_{13}$  para  $\frac{H}{R} = 4$ . As figuras (5.30) e (5.31) os coeficientes de amortecimento  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$  e  $\lambda_{13}$ . Observemos que  $\mu_{13}$  e  $\lambda_{13}$  mostram um forte acoplamento entre os graus de liberdade sway e roll.

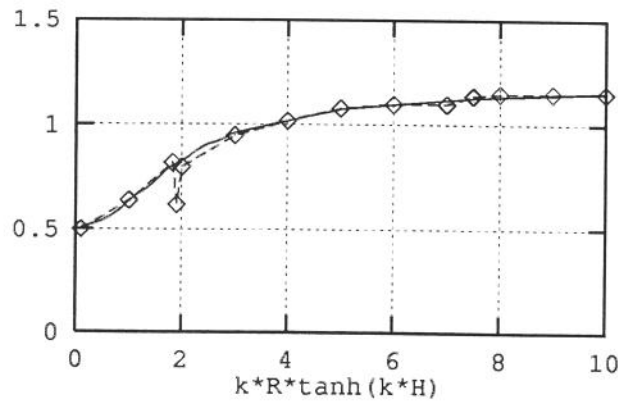


Figura 5.27: massa adicional;  $\mu_{22}$  —; ref. [61] (• - • - •)

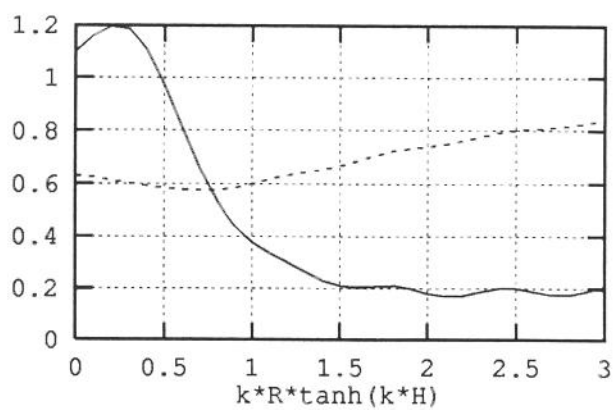


Figura 5.28: massa adicional;  $\mu_{11}$  —;  $\mu_{22}$  ...

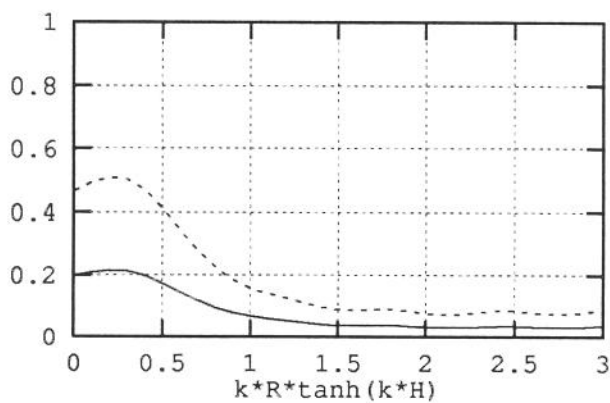


Figura 5.29: massa adicional;  $\mu_{33}$  —;  $\mu_{13}$  ...

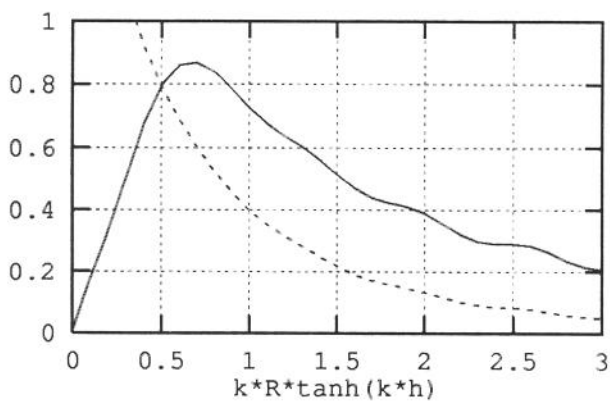


Figura 5.30: amortecimento;  $\lambda_{11}$  —;  $\lambda_{22}$  ...

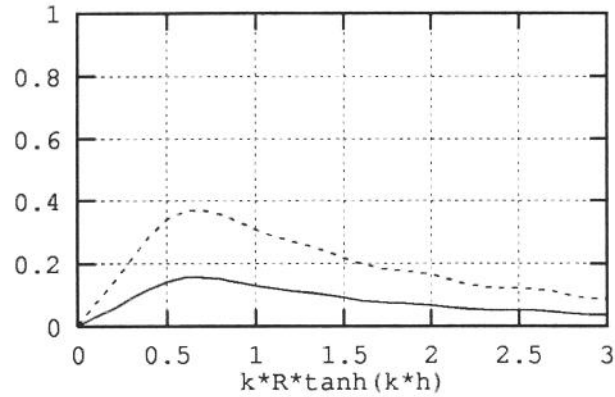


Figura 5.31: amortecimento;  $\lambda_{33}$  —;  $\lambda_{13}$  ...

As figuras (5.32), (5.33) e (5.34) apresentam a amplitude do deslocamento para os modos sway, heave e roll ( $\frac{H}{R} = 4$ ). Para os modos acoplados sway e roll (figuras 5.33 e 5.34) a concordância com Chen e Mahrenholtz [61] é excelente. Da mesma forma, para o modo heave (figura 5.32) a concordância é excelente, exceto para as frequências irregulares.

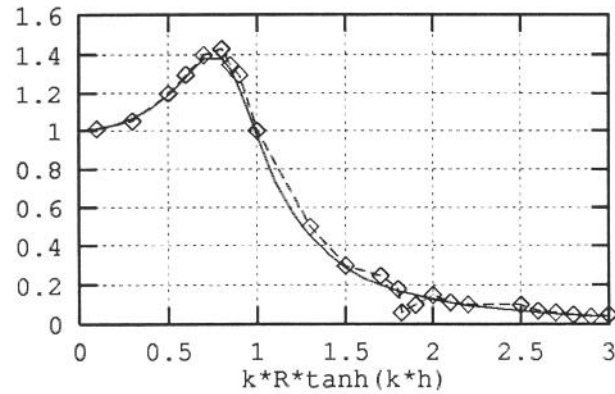


Figura 5.32: resposta no modo heave;  $\frac{\xi_2}{A}$  —; ref. [61] (• - • - •)

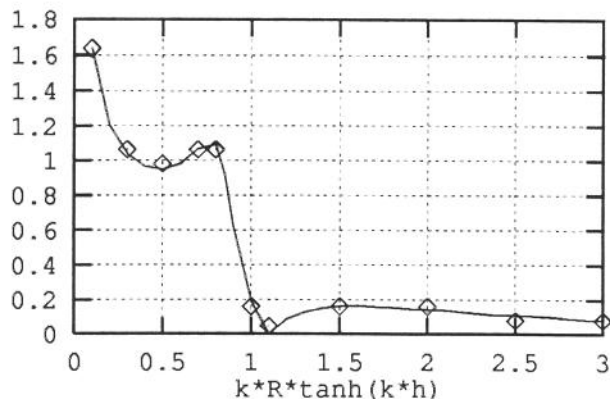


Figura 5.33: resposta no modo sway;  $\frac{\xi_1}{A}$  —; ref. [61] (• - • - •)

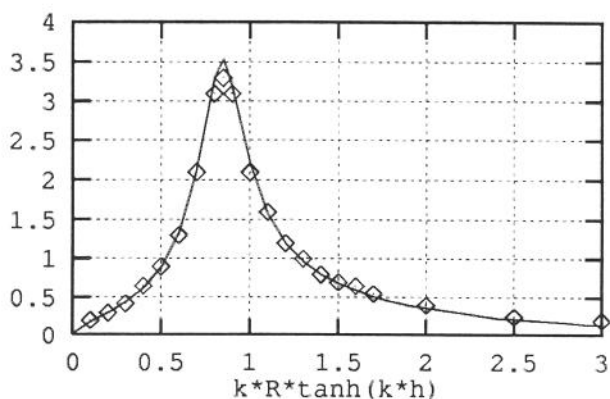


Figura 5.34: resposta no modo roll;  $\frac{\xi_3}{A}$  —; ref. [61] (• - • - •)

### Dois Semicilindros Gêmeos

A tabela 5.5 apresenta a estrutura das matrizes de massa adicional  $[\mu]$  e amortecimento  $[\lambda]$  para dois semicilindros gêmeos. A figura (5.35) compara resultados obtidos para  $\mu_{22}$  ( $\frac{H}{R} = 4$  e  $\frac{R}{L} = 1.16$ ) com os apresentados por Chen e Mahrenholtz [61]. Existe uma boa concordância, exceto para frequências irregulares. As figuras (5.36 - 5.41) apresentam, respectivamente, os coeficientes  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{33}$ ,  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{45}$ ,  $\mu_{14}$ ,  $\mu_{25}$ ,  $\mu_{36}$ ,  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{33}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{45}$ ,  $\lambda_{14}$  and  $\lambda_{25}$ . Observamos que os elementos fora da diagonal possuem a mesma ordem de grandeza que os da diagonal, o que mostra um forte acoplamento entre os graus de liberdade do sistema. As amplitudes das respostas no modo "heave" dos cilindros "upwave" e "leeside" são mostradas, respectivamente, nas figuras (5.42) e (5.43). Da mesma forma, as figuras (5.44) e (5.45) mostram

as amplitudes das respostas nos modos "sway" e "roll" dos cilindros "upwave" e "leeside", respectivamente, comparados à resposta do cilindro isolado. Observamos que o cilindro "leeside" apresenta uma menor amplitude na presença do outro quando comparado ao cilindro isolado. Este efeito de proteção pode provocar um aumento significativo na amplitude do cilindro "upwave", para alguns comprimentos de onda, comparado ao cilindro isolado.

Tabela 5.5: estrutura de  $[\mu]$  e  $[\lambda]$  para cilindros gêmeos

A	B	C	D	E	F
B	G	H	-E	I	J
C	H	K	F	-J	L
D	-E	F	A	-B	C
E	I	-J	-B	G	-H
F	J	L	C	-H	K

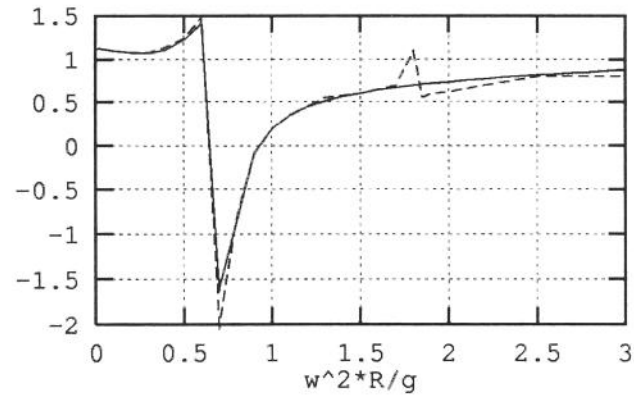


Figura 5.35: massa adicional;  $\mu_{22}$  —; ref. [61] - - -

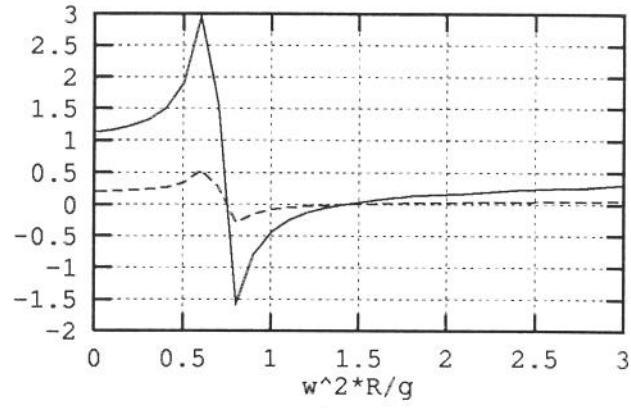


Figura 5.36: massa adicional;  $\mu_{11}$  —;  $\mu_{33}$  - - -

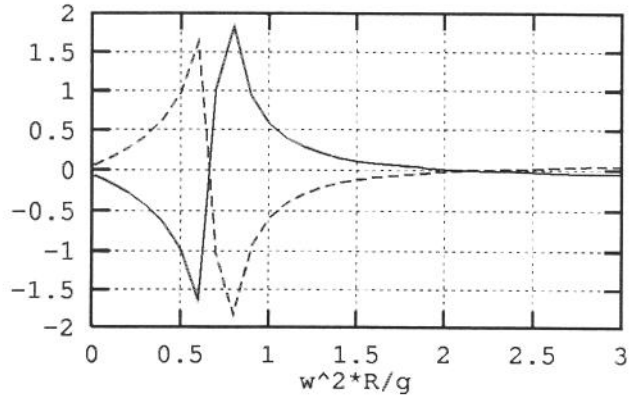


Figura 5.37: massa adicional;  $\mu_{12}$  —;  $\mu_{45}$  - - -

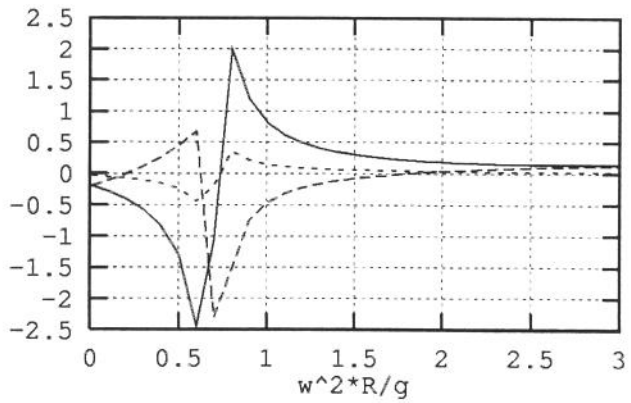


Figura 5.38: massa adicional;  $\mu_{14}$  —;  $\mu_{25}$  - - -;  $\mu_{36}$  ...

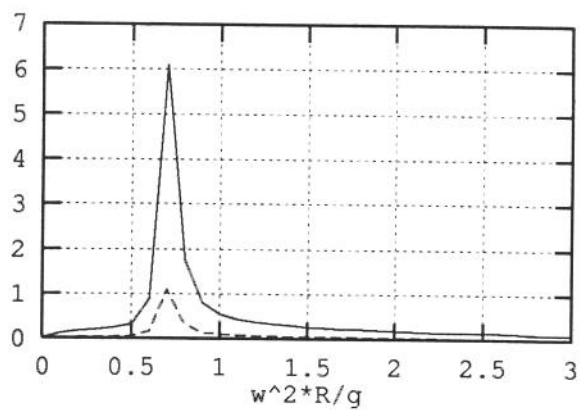


Figura 5.39: amortecimento;  $\lambda_{11}$  —;  $\lambda_{33}$  - - -

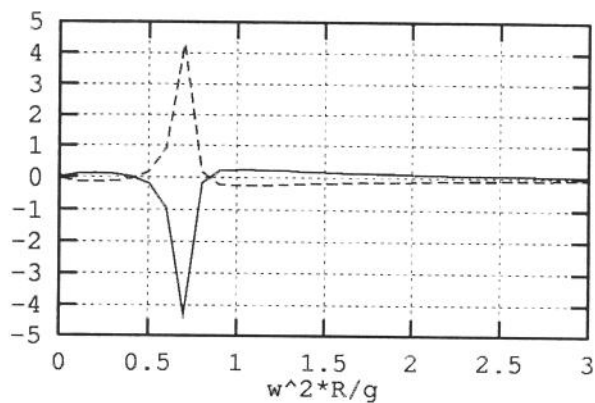


Figura 5.40: amortecimento;  $\lambda_{12}$  —;  $\lambda_{45}$  - - -

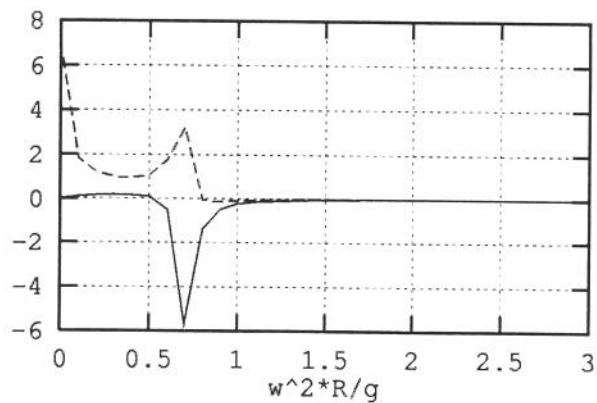


Figura 5.41: amortecimento;  $\lambda_{14}$  —;  $\lambda_{25}$  - - -



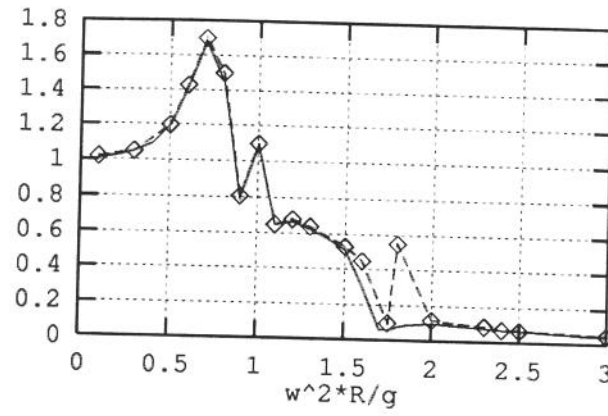


Figura 5.42: resposta no modo heave; upwave —; ref. [61] (• - • - •)

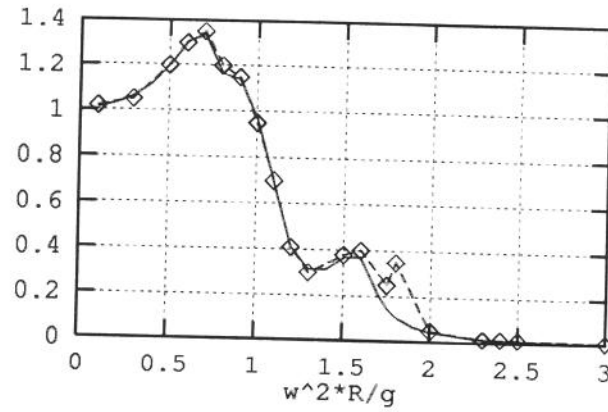


Figura 5.43: resposta no modo heave; downwave —; ref. [61] (• - • - •)

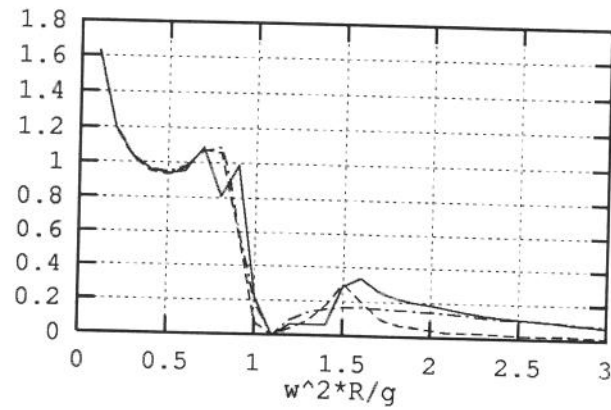


Figura 5.44: resposta no modo sway; upwave —; downwave - - -; isolado · · ·.

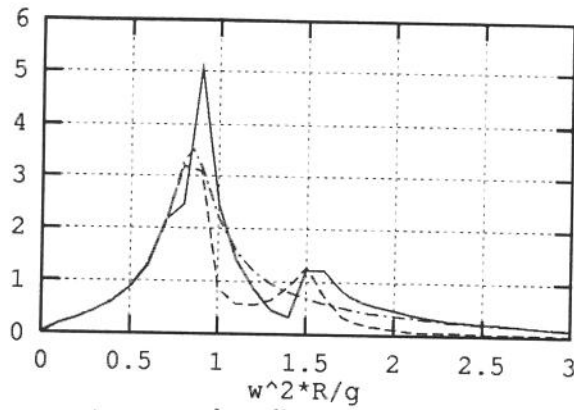


Figura 5.45: resposta no modo roll; upwave —; downwave - - -; isolado -.-.

Neste capítulo, sistematizamos a teoria matemática que trata do movimento de um corpo rígido flutuando livremente ou descrevendo um movimento forçado sob a influência de forças externas. O objetivo é fornecer subsídios para o tratamento do problema de radiação de ondas. Apresentamos a formulação do problema de valor de contorno para  $m$  corpos flutuantes, bem como as equações do movimento para corpos rígidos. Fizemos uma implementação numérica, em duas dimensões, do problema de radiação de ondas, considerando a possibilidade da interação dinâmica entre vários corpos flutuantes. Supomos que os potenciais de radiação são constantes ao longo do contorno. Calculamos os coeficientes hidrodinâmicos e os comparamos com resultados existentes na literatura para validar a implementação feita.

# Capítulo 6

## Elastodinâmica Linear

### 6.1 Introdução

Neste capítulo, introduzimos a teoria básica e os aspectos numéricos do método dos elementos de contorno em elastodinâmica, que serão utilizados posteriormente na análise dinâmica do acoplamento solo-fluido-estrutura. Apresentamos as equações básicas, a equação integral de contorno, as soluções fundamentais da elastodinâmica e alguns detalhes da implementação numérica do método. Finalmente, fornecemos algumas soluções para a propagação de ondas em um meio elástico.

### 6.2 Equações Básicas

As equações básicas da elastodinâmica linear são [2]:

a. equações do movimento:

$$\sigma_{ij,i} + \rho \mathbf{b}_j = \rho \ddot{\mathbf{u}}_j \quad (6.1)$$

b. relações cinemáticas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \quad (6.2)$$

c. relações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (6.3)$$

em que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  representa o vetor deslocamento no ponto  $(x_1, x_2, x_3)$  e no tempo  $t$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são, respectivamente, os tensores de tensão e deformação,  $\mathbf{b}_j$  é a força de corpo por unidade de massa,  $\rho$  é a densidade, enquanto que  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé. Um índice repetido em um termo indica uma soma com relação a este índice, a vírgula indica diferenciação com respeito às variáveis espaciais e cada ponto sobre  $\mathbf{u}_j$  significa derivada com relação ao tempo.

Combinando as equações (a.)-(c.), obtemos as equações de Navier-Cauchy que governam um meio elástico, isotrópico e homogêneo, de volume  $\Omega$  e superfície  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ,

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u}_{i,ij} + \mu\mathbf{u}_{j,ii} + \rho\mathbf{b}_j = \rho\ddot{\mathbf{u}}_j \quad (6.4)$$

Definindo as velocidades de propagação das ondas de pressão (dilatação) e ondas de cisalhamento (rotacional) no meio elástico como:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (6.5)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6.6)$$

podemos reescrever a equação (6.4) como:

$$(c_1^2 - c_2^2)\mathbf{u}_{i,ij} + c_2^2\mathbf{u}_{j,ii} + \rho\mathbf{b}_j = \rho\ddot{\mathbf{u}}_j \quad (6.7)$$

Para que tenhamos um problema bem posto, as equações (6.4) ou (6.7) devem ser acompanhadas por condições iniciais e de contorno apropriadas [27]:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \quad (6.8)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{x}), \quad t = t_0 \in \Omega \quad (6.9)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0 \in \Gamma_1 \quad (6.10)$$

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}\mathbf{n}_j = \bar{\mathbf{T}}_i(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0 \in \Gamma_2 \quad (6.11)$$

em que  $\mathbf{t}_i$  são as forças de superfícies,  $\mathbf{n}_j(\mathbf{x})$  é o vetor normal unitário e  $\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{T}}_i$  são, respectivamente, valores conhecidos dos deslocamentos e das forças de superfície.

As equações de Navier-Cauchy podem ser simplificadas se admitirmos as hipóteses adicionais de que não existem forças de corpo e que o vetor deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  é harmônico no tempo com frequência angular  $\omega$ , isto é,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Re[\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] \quad (6.12)$$

Neste estado elastodinâmico estacionário, as equações (6.4) e (6.7) assumem a forma [28, 67]:

$$(\lambda + \mu)\tilde{\mathbf{u}}_{i,ij} + \mu\tilde{\mathbf{u}}_{j,ii} + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}_j = 0 \quad (6.13)$$

$$(c_1^2 - c_2^2)\tilde{\mathbf{u}}_{i,ij} + c_2^2\tilde{\mathbf{u}}_{j,ii} + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}_j = 0 \quad (6.14)$$

em que a parte real  $\Re$  e o fator  $e^{-i\omega t}$  foram desprezados por simplicidade.

### 6.3 Equação Integral de Contorno

A formulação elementos de contorno requer que a equação diferencial (6.13) ou (6.14) seja transformada em uma equação integral. Isto pode ser feito utilizando a técnica dos resíduos ponderados. Como os deslocamentos e a função ponderadora são harmônicos, e não existem forças de corpo, a equação integral é idêntica à do caso estático [31], isto é:

$$c_{ki}^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{kl}^* \tilde{\mathbf{u}}_k d\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}_{kl}^* \mathbf{t}_k d\Gamma \quad (6.15)$$

em que todos os deslocamentos e forças de superfície são dependentes da frequência.

A solução fundamental da equação (6.13) corresponde a um carregamento pontual que varia com o tempo, ou seja,

$$(\lambda + \mu)\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k},\mathbf{k}l}^* + \mu\tilde{\mathbf{u}}_{1,\mathbf{k}\mathbf{k}}^* + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}_1^* + \Delta_l(\omega) = 0 \quad (6.16)$$

Esta solução tem a forma geral [31]:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}l}^* = \frac{1}{\alpha\pi\rho c_2^2}[G1\delta_{kl} - G2\mathbf{r}_{,k}\mathbf{r}_{,l}] \quad (6.17)$$

As forças de superfície são dadas pela relação:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{kl}^* = & \frac{1}{\alpha\pi}\left[\left(\frac{d\psi}{d\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathbf{r}}\chi\right)\left(\delta_{kl}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{n}} + \mathbf{r}_{,k}\mathbf{n}_l\right) - \frac{2}{\mathbf{r}}G2(\mathbf{n}_k\mathbf{r}_{,l} - 2\mathbf{r}_{,k}\mathbf{r}_{,l}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{n}})\right. \\ & \left. - 2\frac{dG2}{d\mathbf{r}}\mathbf{r}_{,k}\mathbf{r}_{,l}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{n}} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2\right)\left(\frac{dG1}{d\mathbf{r}} - \frac{dG2}{d\mathbf{r}} - \frac{\alpha}{2\mathbf{r}}G2\right)\mathbf{r}_{,l}\mathbf{n}_k\right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nas equações (6.17) e (6.18) as funções G1 e G2 são definidas por:

a. Problema Tridimensional ( $\alpha = 4$ )

$$\begin{aligned} G1 = & \left(1 - \frac{c_2^2}{\omega^2\mathbf{r}^2} + \frac{c_2}{i\omega\mathbf{r}}\right)\frac{\exp\left(\frac{-i\omega\mathbf{r}}{c_2}\right)}{\mathbf{r}} \\ & - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\left(-\frac{c_1^2}{\omega^2\mathbf{r}^2} + \frac{c_1}{i\omega\mathbf{r}}\right)\frac{\exp\left(\frac{-i\omega\mathbf{r}}{c_1}\right)}{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} G2 = & \left(1 + \frac{3c_2^2}{\omega^2\mathbf{r}^2} + \frac{3c_2}{i\omega\mathbf{r}}\right)\frac{\exp\left(\frac{-i\omega\mathbf{r}}{c_2}\right)}{\mathbf{r}} \\ & - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\left(-\frac{3c_1^2}{\omega^2\mathbf{r}^2} + \frac{3c_1}{i\omega\mathbf{r}} + 1\right)\frac{\exp\left(\frac{-i\omega\mathbf{r}}{c_1}\right)}{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

b. Problema Bidimensional ( $\alpha = 2$ ):

$$G1 = K_0\left(\frac{i\omega\mathbf{r}}{c_2}\right) + \frac{c_2}{i\omega\mathbf{r}}\left[K_1\left(\frac{i\omega\mathbf{r}}{c_2} - \frac{c_2}{c_1}K_1\left(\frac{i\omega\mathbf{r}}{c_1}\right)\right)\right] \quad (6.21)$$

$$G2 = K_2\left(\frac{i\omega r}{c_2} - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2\left(\frac{i\omega r}{c_1}\right)\right) \quad (6.22)$$

em que  $K_0$ ,  $K_1$  e  $K_2$  são as funções modificadas de Bessel de segunda espécie e ordens 0, 1 e 2, respectivamente.

## 6.4 Implementação Numérica do MEC

Vamos dividir o contorno  $\Gamma$  em  $N$  elementos e supor que as forças de superfície  $t$  e os deslocamentos  $\tilde{u}$  dentro de cada elemento variem de acordo com certas funções de interpolação. Deste modo,  $\tilde{u}$  e  $t$  podem se expressos como [5]:

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_i^M \chi_i(\xi) u_i \quad (6.23)$$

$$t(\xi) = \sum_i^M \chi_i(\xi) t_i \quad (6.24)$$

em que  $\xi$  é a coordenada local,  $M$  é o número de nós em cada elemento,  $\chi$  são funções de interpolação,  $u_i$  e  $t_i$  são os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente. Para simplificar a notação vamos reescrever a equação (6.15) na forma:

$$c^i \tilde{u}^i + \int_{\Gamma} t^* \tilde{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{u}^* t d\Gamma \quad (6.25)$$

Substituindo (6.23) e (6.24) nesta expressão, obtemos:

$$c^i \tilde{u}^i + \sum_j^N \left( \int_{\Gamma_j} t^* \chi d\Gamma \right) U^j = \sum_j^N \left( \int_{\Gamma_j} \tilde{u}^* \chi d\Gamma \right) T^j \quad (6.26)$$

em que  $U^j$  é o vetor deslocamento nodal e  $T^j$  o vetor nodal correspondente às forças de superfície. Supondo que temos um total de  $L$  nós no contorno e aplicando a equação (6.26) a cada um deles

obtemos um total de  $2L$  equações. Transformando as coordenadas locais em coordenadas globais, as  $2L$  equações podem ser reunidas em um sistema matricial da forma [5, 9]:

$$HU = GT \quad (6.27)$$

em que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{T}$  são vetores que correspondem a deslocamento e forças de superfície, respectivamente,  $H$  e  $G$  são matrizes cujos coeficientes são as integrais das soluções fundamentais e das funções de interpolação sobre os elementos do contorno.

## 6.5 Propagação de Ondas Elásticas em um Meio Ilimitado

### 6.5.1 Ondas Planas

Uma onda plana é definida como aquela cuja frente de onda é uma superfície plana perpendicular à direção de propagação da onda [17]. Seja  $\mathbf{u}$  uma onda de deslocamento plana propagando-se com velocidade  $c$  na direção definida pelo vetor de propagação unitário  $\mathbf{p}$ . Então,  $\mathbf{u}$  pode ser representado por [29]:

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)\mathbf{d} \quad (6.28)$$

em que  $\mathbf{d}$  é um vetor unitário que define a direção do movimento,  $\mathbf{x}$  denota o vetor posição,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = \text{constante}$  descreve um plano normal ao vetor unitário  $\mathbf{p}$  e  $f$  é uma função arbitrária. Substituindo esta expressão na equação (6.13), obtemos:

$$[\mu\mathbf{d} + (\lambda + \mu)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d})\mathbf{p} - \rho c^2\mathbf{d}]\ddot{f}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct) = 0 \quad (6.29)$$

ou

$$(\mu - \rho c^2)\mathbf{d} + (\lambda + \mu)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d})\mathbf{p} = 0 \quad (6.30)$$

Para que esta equação seja satisfeita, existem duas possibilidades relacionadas com os vetores unitários  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{d}$  [30]:

- i.  $\mathbf{d} = \pm\mathbf{p}$
- ii.  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$

A condição i. implica em que  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{p} = \pm 1$  e portanto, a equação (6.30) fornece:

$$c = c_L = \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.31)$$



Neste caso, o movimento é paralelo à direção de propagação e a onda é chamada de onda longitudinal.

A condição ii. acarreta

$$c = c_T = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.32)$$

com o movimento normal à direção de propagação; uma tal onda é chamada de onda transversal.

### 6.5.2 Ondas Planas Harmônicas no Tempo

Uma onda de deslocamento plana harmônica propagando-se com velocidade  $c$  na direção definida pelo vetor de propagação unitário  $\mathbf{p}$  é representada pela expressão [29]:

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} \exp[i\kappa(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)] \quad (6.33)$$

Nesta equação,  $A$  é a amplitude da onda, que pode assumir valores reais ou complexos, mas é independente de  $\mathbf{x}$  e de  $t$ ,  $\kappa = \frac{\omega}{c}$  é o número de onda e  $\omega$  é a frequência circular. A equação (6.33) é um caso especial da equação (6.28). Isto implica que temos dois tipos de ondas planas harmônicas, isto é, longitudinais e transversais, propagando-se com velocidades  $c_L$  e  $c_T$ , respectivamente. Considerando movimentos planos, um sistema de ondas incidente, refletida e refratada deve satisfazer quatro condições de continuidade com relação a tensões e deslocamentos na interface de dois semi-espacos [29]. É esperado que duas ondas refletidas e duas refratadas ocorram para cada onda incidente. A figura (6.1) a seguir, mostra os vetores unitários de propagação do sistema de ondas incidente, refletida e refratada nos meios S e R, bem como as propriedades materiais de cada meio.

Vamos representar as ondas incidentes, refletidas e refratadas por [29]:

$$\mathbf{u}^{(n)} = A_n \mathbf{d}^{(n)} \exp(i\mathbf{q}_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (6.34)$$

em que  $n = 0$  corresponde à onda incidente,  $n = 1, 2$  ondas refletidas e  $n = 3, 4$  ondas refratadas.

O termo  $\mathbf{q}_n$  é dado por:

$$\mathbf{q}_n = \kappa_n(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(n)} - ct) \quad (6.35)$$

com

$$\mathbf{p}^{(0)} = \sin(\theta_0)\mathbf{i}_1 + \cos(\theta_0)\mathbf{i}_2 \quad (6.36)$$

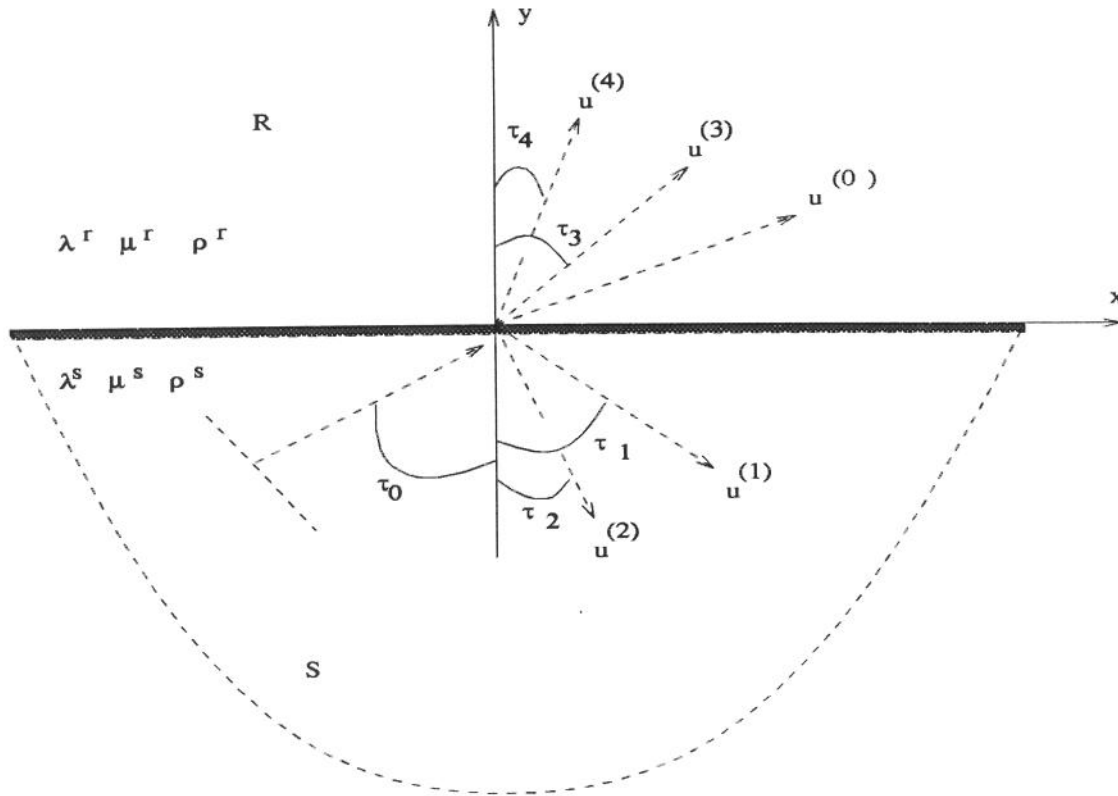


Figura 6.1: sistema de ondas incidente, refletida e refratada

Considerando que temos dois tipos de ondas planas harmônicas, podemos escrever [29, 2]:

a. Ondas Incidentes Longitudinais:

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)}, \quad c_0 = c_L^S \quad (6.37)$$

b. Ondas Incidentes Transversais:

$$\mathbf{d}^{(0)} \cdot \mathbf{p}^{(0)} = 0, \quad c_0 = c_T^S \quad (6.38)$$

existem dois tipos: onda incidente polarizada verticalmente (onda SV), em que o movimento da partícula pertence ao plano de incidência, isto é,

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}^{(0)}, \quad c_0 = c_T^S \quad (6.39)$$

e onda incidente polarizada horizontalmente (onda SH), em que o movimento da partícula é perpendicular ao plano de incidência, isto é,

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{i}_3, \quad c_0 = c_T^S \quad (6.40)$$

Em um semi-espço, o campo total, que consiste das ondas incidentes e refletidas, deve satisfazer às condições de contorno correspondentes a uma superfície horizontal livre de tensões. Consideremos, então, três casos:

i. Reflexão de Ondas P:

No plano  $x_2 = 0$ , temos:

$$\begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \exp[i\kappa_0(x_1 \sin(\theta_0) - c_1 t)] \quad (6.41)$$

Reflexão sobre a superfície horizontal gera, respectivamente, uma onda P refletida, bem como uma onda SV de cisalhamento polarizada verticalmente, isto é,

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \sin(\theta_1) \\ -A_1 \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \exp[i\kappa_1(x_1 \sin(\theta_1) - c_1 t)] \quad (6.42)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \exp[i\kappa_2(x_1 \sin(\theta_2) - c_2 t)] \quad (6.43)$$

ii. Reflexão de Ondas SV:

Ondas de cisalhamento polarizadas verticalmente e incidentes no plano  $x_2 = 0$ , são da forma:

$$\begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0 \cos(\theta_0) \\ A_0 \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \exp[i\kappa_0(x_1 \sin(\theta_0) - c_2 t)] \quad (6.44)$$

iii. Reflexão de Ondas SH:

Ondas de Cisalhamento polarizadas horizontalmente possuem componentes do deslocamento, apenas na direção  $x_3$ . Uma onda incidente propagando-se no semi-espaço  $x_2 < 0$  é dada por:

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp[i\kappa_0(x_1 \sin(\theta_0) + x_2 \cos(\theta_0) - c_2 t)] \quad (6.45)$$

No plano  $x_2 = 0$  ela tem a forma:

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp[i\kappa_0(x_1 \sin(\theta_0) - c_2 t)] \quad (6.46)$$

A onda SH refletida é representada por:

$$u_3^{(2)} = A_2 \exp[i\kappa_2(x_1 \sin(\theta_2) - x_2 \cos(\theta_2) - c_2 t)] \quad (6.47)$$

Para que as tensões na superfície se anulem,  $\kappa_2 = \kappa_0$ ,  $\theta_2 = \theta_0$  e  $A_2 = A_0$ . Assim, a onda refletida SH está em fase com a onda incidente SH.

Rayleigh (1885) previu a possibilidade de ondas se deslocando ao longo da superfície livre de um semi-espaço elástico, e que decaem exponencialmente com a profundidade [2]. Estas ondas são da forma:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ -\frac{b_1}{i\kappa} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-b_1 x_2) + \begin{pmatrix} A_2 \\ \frac{i\kappa}{b_2} A_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-b_2 x_2) \right] \exp[i\kappa(x_1 - c_R t)] \quad (6.48)$$

em que

$$b_1 = \kappa \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.49)$$

e

$$b_2 = \kappa \left(1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.50)$$

e  $c_R$  é a velocidade da onda de Rayleigh.

# Capítulo 7

## Acoplamento de Operadores: Interação Dinâmica Solo-Fluido-Estrutura

### 7.1 Definição do Problema

Consideremos o problema bidimensional correspondente à interação solo-fluido-estrutura representado na figura 7.1.

O domínio  $\Omega_f$  corresponde ao fluido de profundidade  $H$ , que, por hipótese, supomos incompressível, invíscido e irrotacional. Supomos, ainda, que as ondas são harmônicas e lineares, de tal modo que a teoria de Airy possa ser aplicada [19].

O domínio  $\Omega_s$  pode eventualmente ser considerado rígido ou representar o semi-espaço elástico. O domínio  $\Omega_e$  corresponde a uma estrutura em contato com o solo que, da mesma forma, pode ser considerada como um corpo rígido ou elástico.

As ondas incidentes  $\phi_I$  no domínio do fluido  $\Omega_f$ , bem como as ondas elásticas  $u^{(0)}$  no domínio do solo  $\Omega_s$ , vêm do infinito, enquanto que  $\mathbf{F}$  corresponde a uma força aplicada externamente na superfície da estrutura ou do solo, conforme se observa na figura 7.1.

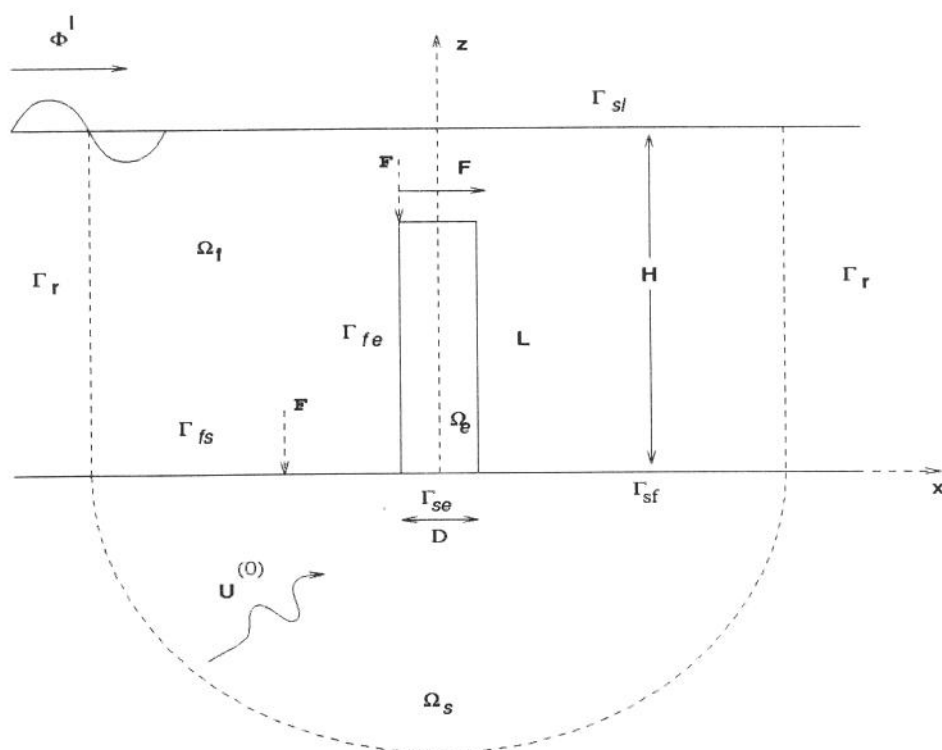


Figura 7.1: interação solo-fluido-estrutura

## 7.2 Equações que Governam o Problema

### 7.2.1 Domínio do Fluido

Seja  $\phi^T(x, z, t) = \phi_I(x, z, t) + \phi^{dr}(x, z, t)$  o potencial total de velocidade do fluido com  $\phi_I(x, z, t)$  sendo o potencial incidente e  $\phi^{dr}(x, z, t)$  representando o campo de espalhamento da onda devido à presença da estrutura  $\Gamma_e$ .  $\phi^{dr}$  pode corresponder a um campo difratado (estrutura rígida fixa) ou a um campo radiado (estrutura elástica fixa excitada por  $\mathbf{F}$ ). Sob estas considerações e as hipóteses da seção anterior o comportamento do fluido é governado pelo operador de Laplace

$$\nabla^2 \phi^T(x, z, t) = 0 \quad (7.1)$$

sujeito às seguintes condições de contorno sobre a superfície livre ( $\Gamma_{sl}$ ) e contorno de radiação ( $\Gamma_r$ ), respectivamente:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}_f} - \frac{\omega^2}{g} \phi^T = 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \mathbf{n}_f} - i\kappa \phi^T = 0 \quad (7.3)$$

Nas expressões anteriores  $\mathbf{n}_f$  é a normal unitária dirigida para fora do domínio do fluido,  $g$  é a aceleração devida à gravidade,  $\omega$  a frequência angular,  $\kappa$  o número de onda e  $\iota = \sqrt{-1}$ . O número de onda  $\kappa$  e a frequência angular  $\omega$  estão relacionados pela equação de dispersão (equação 3.35)

$$\omega^2 = \kappa g \tanh[\kappa H] \quad (7.4)$$

Considerando a hipótese de que os potenciais de velocidade são harmônicos no tempo com frequência angular  $\omega$ , isto é:

$$\phi^T(x, z, t) = \Re[\phi(x, z)e^{-i\omega t}] \quad (7.5)$$

$$\phi_I(x, z, t) = \Re[\phi_i(x, z)e^{-i\omega t}] \quad (7.6)$$

$$\phi^{dr}(x, z, t) = \Re[\phi^{dr}(x, z)e^{-i\omega t}], \quad (7.7)$$

o problema de valor de contorno definido em (7.1 - 7.3) pode ser reescrito em termos do potencial de espalhamento  $\phi^{dr}(x, z)$  na forma:

$$\nabla^2 \phi^{dr}(x, z) = 0 \quad (7.8)$$

sujeito às seguintes condições:

$$\frac{\partial \phi^{dr}}{\partial \mathbf{n}_f} - \frac{\omega^2}{g} \phi^{dr} = 0 \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial \phi^{dr}}{\partial \mathbf{n}_f} - i\kappa \phi^{dr} = 0 \quad (7.10)$$

## 7.2.2 Domínios Elásticos

Sob as hipóteses de que o meio é homogêneo, isotrópico e seu comportamento pode ser analisado usando a teoria linear da elasticidade podemos expressar a equação que governa o meio elástico, na ausência de forças de corpo, por (cap. 6, seção 6.2):

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u}_{i,ij} + \mu\mathbf{u}_{j,ii} = \rho\ddot{\mathbf{u}}_j \quad (7.11)$$

em que  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento,  $\ddot{\mathbf{u}}$  o vetor aceleração,  $\rho$  a densidade de massa,  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé que contem os coeficientes de amortecimento interno ou material do meio [67].

Admitindo a hipótese adicional de que o vetor deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$  é harmônico no tempo com frequência angular  $w$ , isto é,

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \Re[\mathbf{u}(x, z)e^{-i\omega t}] \quad (7.12)$$

então, a equação (7.9) assume a forma

$$(\lambda + \mu)\tilde{\mathbf{u}}_{i,ij} + \mu\tilde{\mathbf{u}}_{j,ii} + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}_j = 0 \quad (7.13)$$

## 7.3 Condições para o Acoplamento

Para acoplar os três domínios é necessário que as condições de de compatibilidade cinemática e equilíbrio de força sejam prescritas nas interfaces dos mesmos. Estas condições são, respectivamente:

– Interface fluido - solo ( $\Gamma_{fs}$ )

$$\frac{\partial\phi^{dr}}{\partial\mathbf{n}_f} = i\omega\mathbf{n}_s\mathbf{u}_s \quad (7.14)$$

$$i\rho_f\mathbf{n}_f\omega\phi^{dr} + \mathbf{t}_s^{ext} = \mathbf{t}_s \quad (7.15)$$



– Interface fluido - estrutura ( $\Gamma_{fe}$ )

$$\frac{\partial \phi^{dr}}{\partial \mathbf{n}_f} + i\omega \mathbf{n}_e \mathbf{u}_e - \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}_f} = 0 \quad (7.16)$$

$$i\rho_f \mathbf{n}_f \omega \phi^{dr} + \mathbf{t}_e^{ext} = \mathbf{t}_e \quad (7.17)$$

– Interface solo - estrutura ( $\Gamma_{se}$ )

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_e \quad (7.18)$$

$$\mathbf{t}_s + \mathbf{t}_e + \mathbf{t}_s^{ext} = 0 \quad (7.19)$$

Nas equações (7.14 - 7.19)  $\mathbf{u}_s$ ,  $\mathbf{t}_s$  e  $\mathbf{u}_e$ ,  $\mathbf{t}_e$  são os vetores deslocamento e forças de superfície do solo e da estrutura, respectivamente. Da mesma forma,  $\mathbf{n}_s$  e  $\mathbf{n}_e$  são as normais unitárias dirigidas para fora do solo e da estrutura. A densidade do fluido é denotada por  $\rho_f$ ,  $\mathbf{t}_e^{ext}$  e  $\mathbf{t}_s^{ext}$  representam, respectivamente, o carregamento externo sobre as superfícies da estrutura e do solo e  $\phi_i$  é o potencial incidente com amplitude  $A$ , cuja expressão é conhecida e dada por (equação 3.33):

$$\phi_i = \frac{-igA \cosh[\kappa(z+H)]}{\omega \cosh[\kappa H]} e^{i\kappa x} \quad (7.20)$$

## 7.4 Implementação do Método Elementos de Contorno

### 7.4.1 Domínio do Fluido

A formulação do MEC para a equação de Laplace já foi feita no capítulo 4. Considerando, entretanto, as características do problema atual vamos retomá-la adaptando-a à situação presente. Assim, queremos minimizar, no sentido integral, o erro produzido pela substituição da solução exata de 7.1 pela solução aproximada  $\Psi$ , isto é:

$$\int_{\Omega_f} (\nabla^2 \Psi) \Psi^* d\Omega = 0 \quad (7.21)$$

em que  $\Psi^*$  é uma função ponderadora e  $\Omega_f$  é o domínio limitado por  $\Gamma_f = \Gamma_{fs} + \Gamma_{fe} + \Gamma_r + \Gamma_s$  (figura 7.1). A integral de domínio (7.21) pode ser transformada em uma integral de contorno utilizando a segunda identidade de Green:

$$\int_{\Omega_f} (\nabla^2 \Psi) \Psi^* d\Omega = \int_{\Gamma_f} \left[ \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] d\Gamma \quad (7.22)$$

Esta equação integral é o ponto de partida para a formulação elementos de contorno. Tomando a função ponderadora como sendo a solução fundamental da equação de Laplace em duas dimensões, a equação (7.22) pode ser escrita apenas como uma equação integral de contorno

$$c(p)\Psi(p) = \int_{\Gamma_f} \left[ \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \phi_i \quad (7.23)$$

em que, sem perda de generalidade, estamos incluindo na formulação a onda incidente  $\phi^I$ . O contorno pode, agora, ser discretizado em elementos de tal forma que o potencial em cada elemento 'e' pode ser escrito como

$$\Psi = [\chi] \Psi_e^n \quad (7.24)$$

em que  $[\chi]$  é uma função de interpolação. Na implementação que fizemos utilizamos funções de interpolação constantes, isto é,  $[\chi] = 1$ . Assim, a equação integral (7.23) pode ser escrita:

$$c_i \Psi_i + \sum_e \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} d\Gamma \Psi_e^n = \sum_e \int_{\Gamma_e} \Psi^* d\Gamma q_e^n + \phi_i \quad (7.25)$$

em que  $q_e^n = \frac{\partial \Psi_e^n}{\partial n}$ . Considerando as condições de contorno nas interfaces  $\Gamma_r$  e  $\Gamma_s$  e todos os nós do contorno, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} H_{fs}^f & H_{fe}^f & (H_r^f - \nu \kappa H_r^f) & (H_s^f - \frac{\omega^2}{g} H_s^f) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{fs} \\ \Psi_{fe} \\ \Psi_r \\ \Psi_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{fs}^f & G_{fe}^f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{fs} \\ q_{fe} \end{pmatrix} + \phi_i \quad (7.26)$$

A equação (7.26) corresponde a um sistema linear em que as variáveis estão associadas apenas ao domínio do fluido. Posteriormente, este sistema será incorporado na parte superior do sistema global, após a aplicação das condições de compatibilidade e equilíbrio.

## 7.4.2 Domínios Elásticos

A formulação de elementos de contorno requer que a equação diferencial (7.13) seja transformada em uma equação integral. Como foi relatado no capítulo 6, seção 6.3, utilizando a técnica dos resíduos ponderados é possível minimizar os erros envolvidos na aproximação numérica, no sentido integral, isto é,

$$\int_{\Omega} [\mu \Delta^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \mathbf{u} + \omega^2 \rho \mathbf{u}] \mathbf{u}^* d\Gamma = 0 \quad (7.27)$$

em que  $\mathbf{u}^*$  é uma função ponderadora associada com deslocamentos.

Considerando que  $\mathbf{u}^*$  é a solução fundamental em estado estacionário de (7.27), esta equação pode ser posta na forma:

$$c(p)\mathbf{u}(p) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}^* \mathbf{u} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{T} d\Gamma, \quad (7.28)$$

em que todos os deslocamentos e forças de superfície são dependentes da frequência  $\omega$  e  $\Gamma$  significa a superfície do semi-espaco elástico ou da estrutura.

No caso do semi-espaco elástico a equação (7.28) pode ser reescrita para incluir a onda plana incidente  $\mathbf{u}^{(0)}$ .

$$c_s(p)\mathbf{u}_s(p) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}_s^* \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \int_{\Gamma} \mathbf{u}_s^* \mathbf{T}_s d\Gamma \quad (7.29)$$

Se o contorno for "suave"  $c(p)\mathbf{u}(p) = \frac{1}{2}\mathbf{u}$  e a equação (7.28) pode ser discretizada e posta na forma matricial:

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{t} = 0 \quad (7.30)$$

Reescrevendo (7.30) para os domínios  $\Omega_s$  e  $\Omega_e$ , respectivamente, obtemos:

$$\begin{bmatrix} H_{fs}^s & H_{se}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{fs}^s \\ \mathbf{u}_{se}^s \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{fs}^s & G_{se}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{fs}^s \\ \mathbf{t}_{se}^s \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(0)} + \begin{bmatrix} G_{fs}^s & G_{se}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{fs}^{ext} \\ \mathbf{t}_{se}^{ext} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

$$\begin{bmatrix} H_{se}^e & H_{fe}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{se}^e \\ \mathbf{u}_{fe}^e \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{se}^e & G_{fe}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{se}^e \\ \mathbf{t}_{fe}^e \end{pmatrix} = [G_{fe}^e](\mathbf{t}_e^{ext}) \quad (7.32)$$

O sistema global de equações integrais de contorno que resolve o problema de interação fluido-estrutura é obtido combinando os três sistemas de equações lineares, (7.26), (7.31) e (7.32),

referentes a cada domínio, mais as condições de contorno associadas com o acoplamento. A forma final deste sistema é:

$$\begin{bmatrix} H_{fs}^f & H_{fe}^f & HG_r^f & HG_s^f & -G_{fs}^f & 0 & 0 & -G_{fe}^f \\ -G_{fs}^s & 0 & 0 & 0 & H_{fs}^s & H_{se}^s & G_{se}^s & 0 \\ 0 & -G_{fe}^e & 0 & 0 & 0 & H_{se}^e & -G_{se}^e & H_{fe}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{fs} \\ \Psi_{fe} \\ \Psi_r \\ \Psi_s \\ \mathbf{u}_{fs}^s \\ \mathbf{u}_{se}^s \\ \mathbf{t}_{se}^e \\ \mathbf{u}_{fe}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_i \\ \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{t}^{ext} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

Como havíamos mencionado no capítulo 1., seção 1.2, cada um dos sistemas (fluido-solo-estrutura) que combinamos para formar o acoplamento, constitui por si só um problema de valor de contorno com uma equação governante mais as condições de contorno que dependem das particularidades de cada meio.

A equação (7.33) estabelece a ligação entre os três meios de tal forma que os problemas de valores de contorno possam ser resolvidos juntos.

## 7.5 Validação Numérica

Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que a implementação computacional em duas dimensões e no domínio da frequência, que fizemos, envolvendo o acoplamento dos meios solo-fluido-estrutura, é coerente com a metodologia utilizada e é capaz de reproduzir as implementações isoladas do MEC para os referidos meios. A implementação numérica seguiu os mesmos passos descritos nos capítulos 4 e 6, para cada sistema isolado. Utilizamos funções de interpolação constante para representar as variáveis e a geometria de cada contorno. A estratégia usada para validar a presente metodologia e implementação é descrita nos itens 1. - 3., a seguir.

### 1. Redução do Acoplamento ao Problema de Interação fluido-estrutura

No capítulo 4, seção 4.7.2d, apresentamos resultados numéricos para as forças horizontais, verticais e momentos de uma estrutura de forma retangular fixa na superfície de fundo.

Para reproduzir os mesmos resultados daquela seção, admitimos que o solo e a estrutura são rígidas ( $G_s \rightarrow \infty$  e  $G_e \rightarrow \infty$ ) e a excitação do sistema é devida a uma onda  $\phi_i$ , incidente no fluido.

Trabalhamos com 30 frequências no intervalo  $[.01, 2.]$ , discretizamos o contorno segundo a tabela 7.1 (ver figura 4.72), a seguir, e variamos a rigidez relativa entre o solo e a estrutura para verificar se o sistema acoplado reproduziria o problema de difração de ondas.

As figuras (7.2) - (7.4) mostram que os resultados obtidos pelo esquema do acoplamento reproduzem exatamente aqueles do problema de difração de ondas.

Tabela 7.1: discretização: seção retangular no fundo

Contorno	$\Gamma_{b_1}$	$\Gamma_{r_1}$	$\Gamma_f$	$\Gamma_{r_2}$	$\Gamma_{b_2}$	$\Gamma_{e_1}$	$\Gamma_{e_2}$	$\Gamma_{e_2}$	$\frac{HE}{a}$
N	25	20	60	20	25	5	10	5	1

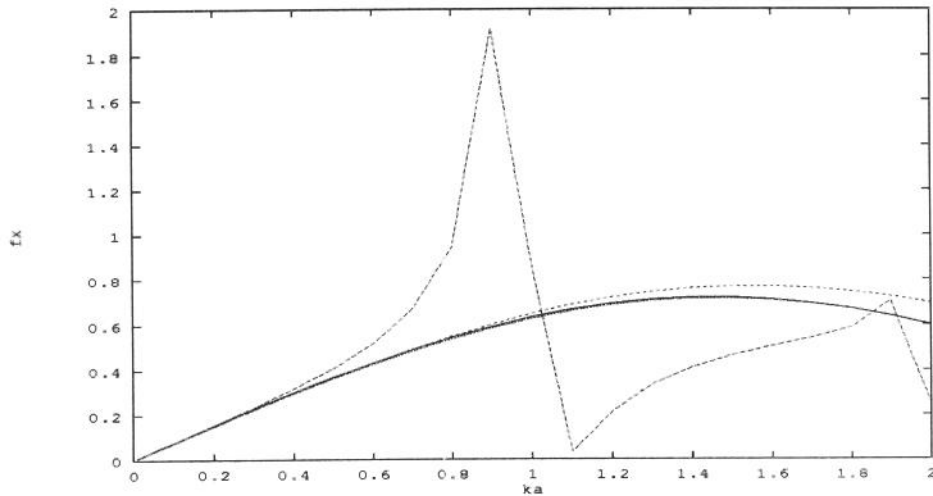


Figura 7.2: módulo da força horizontal; difração —; Acoplamento - -; ...; -.-.;  $\frac{G_e}{G_s} = .0001$ ;  $\frac{G_e}{G_s} = .001$ ;  $\frac{G_e}{G_s} = 1$ .

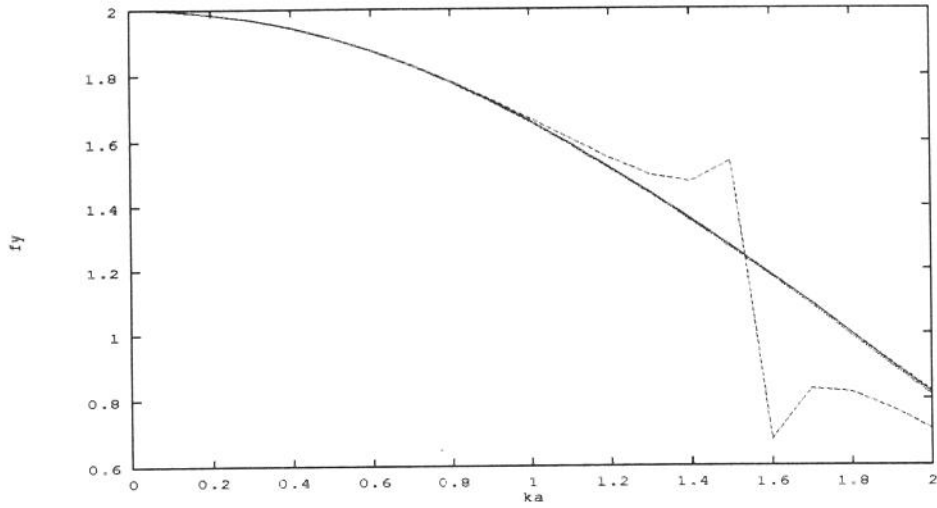


Figura 7.3: módulo da força vertical; difração —; Acoplamento - -; ...; -.-.;  $\frac{G_e}{G_s} = .0001$ ;  $\frac{G_e}{G_s} = .001$ ;  $\frac{G_e}{G_s} = 1$ .

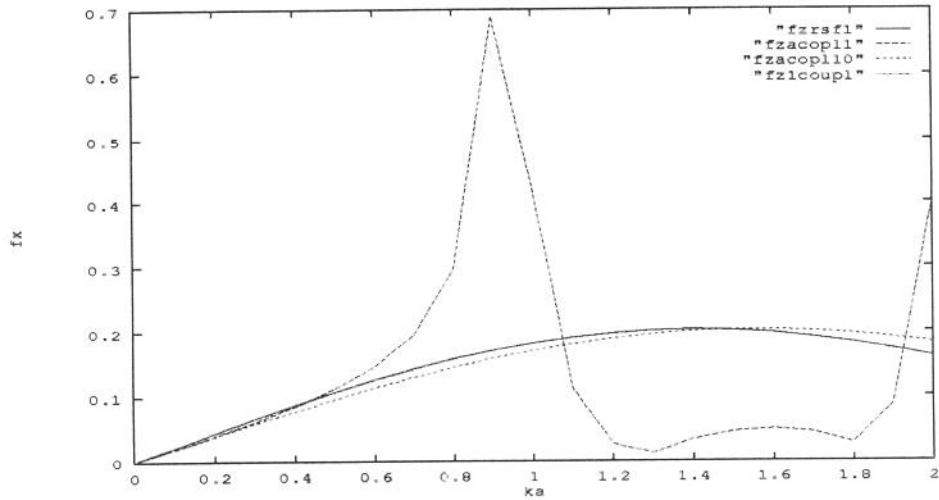


Figura 7.4: módulo do momento da força; difração —; Acoplamento - -; ...; -.-.;  $\frac{G_e}{G_s} = .0001$ ;  $\frac{G_e}{G_s} = .001$ ;  $\frac{G_e}{G_s} = 1$ .

## 2. Interação solo (rígido) - estrutura

Supondo a ausência do fluido ( $\rho_f \rightarrow 0$ ) e o solo rígido, a estrutura  $\Omega_e$  pode representar ou uma barra ou uma viga em balanço, conforme a excitação externa atuar nas direções vertical ou horizontal, respectivamente. Para simular estas situações discretizamos os

contornos dos domínios conforme a tabela 7.2, a seguir.

A função de resposta em frequência (FRF) para a barra, obtida pelo esquema acoplado, pode ser vista na figura (7.5). Nela, a comparação é feita com o resultado de Dominguez [65], que modelou o domínio fechado utilizando o MEC.

Os valores analíticos das duas primeiras autofrequências são plotados na mesma figura para efeito de comparação. A grandeza  $u$  da FRF é normalizada pelo valor estático  $u_s$  ( $\omega \rightarrow 0$ ). O gráfico mostra que os resultados obtidos pelo MEC acoplado reproduzem exatamente os de Dominguez [65] e captam elementos essenciais como a amplitude e as frequências de ressonância.

Não apresentamos a FRF para a viga porque observamos que a solução numérica não representa uma boa aproximação para a solução analítica. Isto pode ser explicado pelo fato de que elementos constantes não reproduzem com fidelidade os problemas de flexão [65].

Tabela 7.2: discretização: barra fixa ao fundo

Contorno	$\Gamma_{fs}$	$\Gamma_{fe}$	$\Gamma_r$	$\Gamma_{sl}$	$\Gamma_{sf}$	$\Gamma_{se}$	$\Gamma_{es}$	$\Gamma_{ef}$
N	10	15	20	10	3	3	15	5

### 3. Interação solo - estrutura

Nosso propósito é obter a resposta dinâmica de uma fundação de superfície sujeita à ação direta de uma força externa. Para tornar isto possível é necessário impor certas condições à estrutura (figura 7.1) a fim de que a mesma possa simular uma fundação. Seja  $T_r = \frac{G_e}{G_s}$  a relação entre os módulos de elasticidade transversal da fundação ( $G_e$ ) e do solo ( $G_s$ ). Então,

$$T_r = \frac{G_e}{G_s} = \frac{2G_e(HE)^3}{(1-\mu_e)} \frac{1}{G_s R^3} \frac{R^3(1-\mu_e)}{2(HE)^3} \quad (7.34)$$

ou

$$K = \frac{T_r}{\frac{R^3(1-\mu_e)}{2(HE)^3}} = \frac{2G_e(HE)^3}{(1-\mu_e)} \frac{1}{G_s R^3} \quad (7.35)$$

Definindo  $K$  como sendo a rigidez relativa entre a fundação e o solo, temos [68]:

$$K = D_e \cdot D_s \quad (7.36)$$

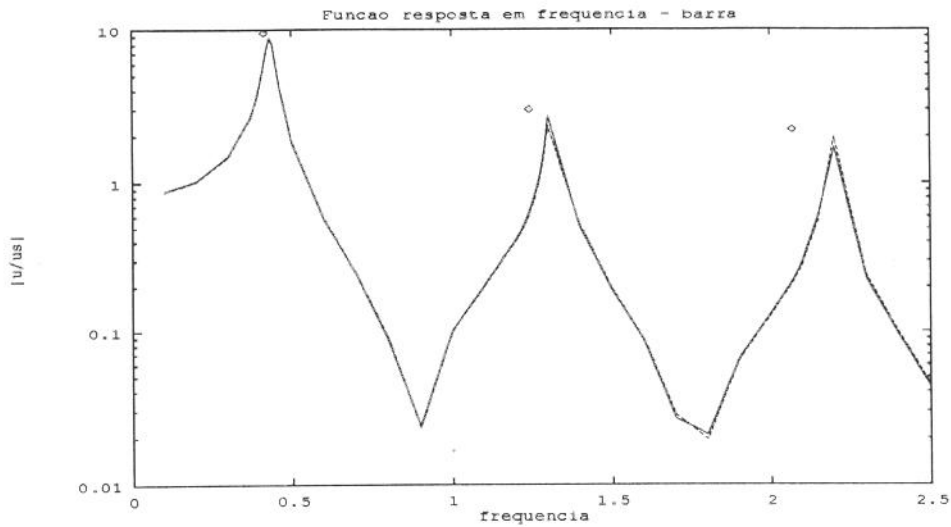


Figura 7.5: FRF de uma barra; ref. [65] —; MEC acoplado - -; analítico \*;  $\rho_e = 1.$ ;  $G_e = 1.$ ;  $\mu = .25$ ;  $\frac{L}{D} = 15$

com  $D_e$  e  $D_s$  sendo, respectivamente, a rigidez flexural da fundação e do solo, dadas por:

$$D_e = \frac{2G_e(HE)^3}{1 - \mu_e} \quad (7.37)$$

$$D_s = \frac{1}{G_s R^3} \quad (7.38)$$

em que  $HE$  é a altura da fundação,  $R$  o seu semi-lado e  $\mu_e$  e  $\mu_s$  são os coeficientes de Poisson.

Estes parâmetros são condições que servirão para caracterizar o comportamento dinâmico do sistema fundação - solo, quando sujeito a carregamentos aplicados externamente.

A tabela 7.3 a seguir, mostra diferentes valores da rigidez relativa para uma relação  $\frac{HE}{R}$  fixa. Estes números serão utilizados para mostrar as diferentes respostas da fundação quando sujeita à ação de uma força externa unitária.

As figuras (7.6) e (7.7) mostram, respectivamente, a evolução das partes real e imaginária da resposta da fundação na direção vertical, quando excitada por uma força vertical unitária. Observemos que os deslocamentos avaliados no centro da estrutura crescem quase monotonicamente com o aumento da frequência. Além disso, para uma dada frequência eles dependem da rigidez relativa. Para estas simulações utilizamos os seguintes valores:



- a. coeficiente de Poisson -  $\mu_e = \mu_s = .4$ ;
- b. semi-lado da estrutura -  $R = 1.$ ;
- c. amortecimento material -  $\beta = .05$ ;
- d. densidade do solo -  $\rho_s = 1.$ ;
- e. densidade da estrutura -  $\rho_e = .0001$ ;
- f. densidade do fluido -  $\rho_f = .0001$ .

Tabela 7.3: rigidez relativa

$G_s$	$G_e$	$HE$	$R$	$D_e$	$D_s$	$K$
1.	.01	1.	1.	.033	1.	.033
1.	1.	1.	1.	3.33	1.	3.33
1.	100.	1.	1.	333.33	1.	333.33

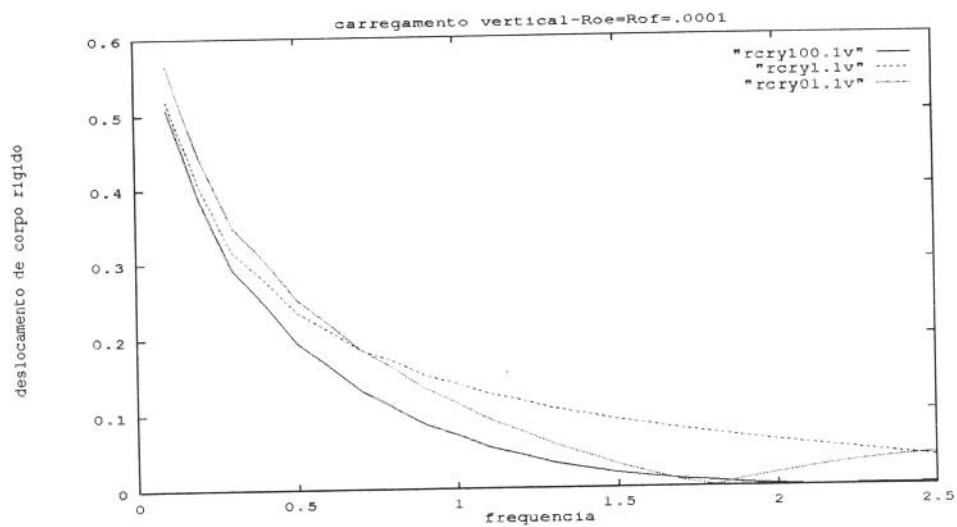


Figura 7.6: parte real da resposta da estrutura, sujeita a uma excitação vertical;  $K = 333.33$  —;  $K = 3.33$  - - -;  $K = .033$ ; ...

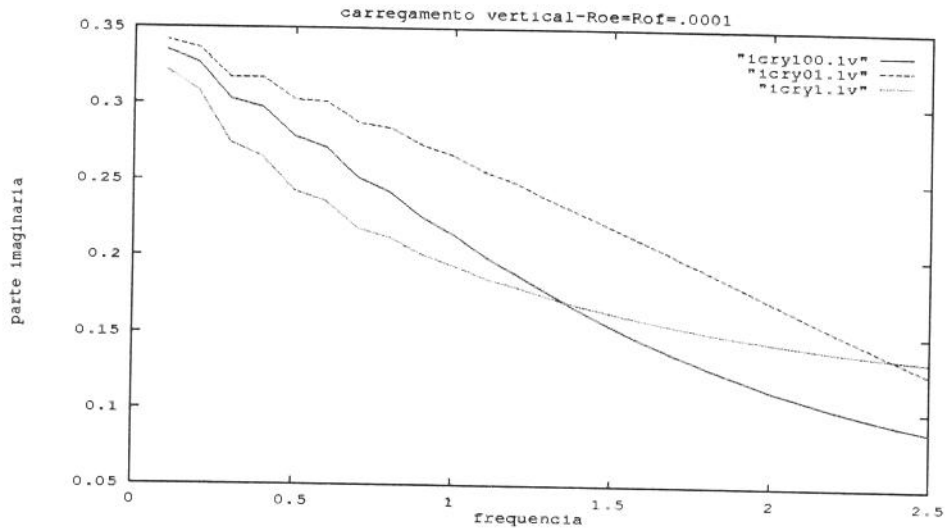


Figura 7.7: parte imaginária da resposta da estrutura, sujeita a uma excitação vertical;  $K = 333.33$  —;  $K = .033$  - - -;  $K = 3.33$ ; ...

A amplitude vertical da resposta da fundação, avaliada no centro da mesma, sujeita a um carregamento vertical, é plotada contra a frequência e pode ser vista na figura (7.8). Nesta figura, a parte real e a parte imaginária da amplitude são comparadas com os resultados de Dominguez [65].

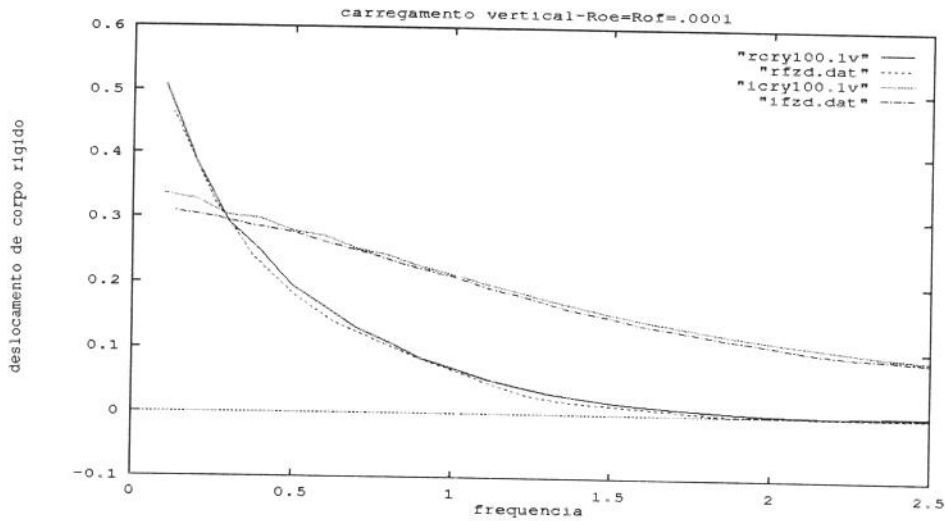


Figura 7.8: partes real e imaginária da resposta da estrutura, sujeita a uma excitação vertical; MEC acoplado — e ... ; ref. [65] - - - e -.-.

As figuras (7.9 - 7.12) apresentam o comportamento do solo nas direções horizontal e vertical, bem como o deslocamento de corpo rígido da interface solo-estrutura, devido a um carregamento unitário no solo. Os resultados são comparados com os de Romanini [66], que utilizou um método semi-analítico.

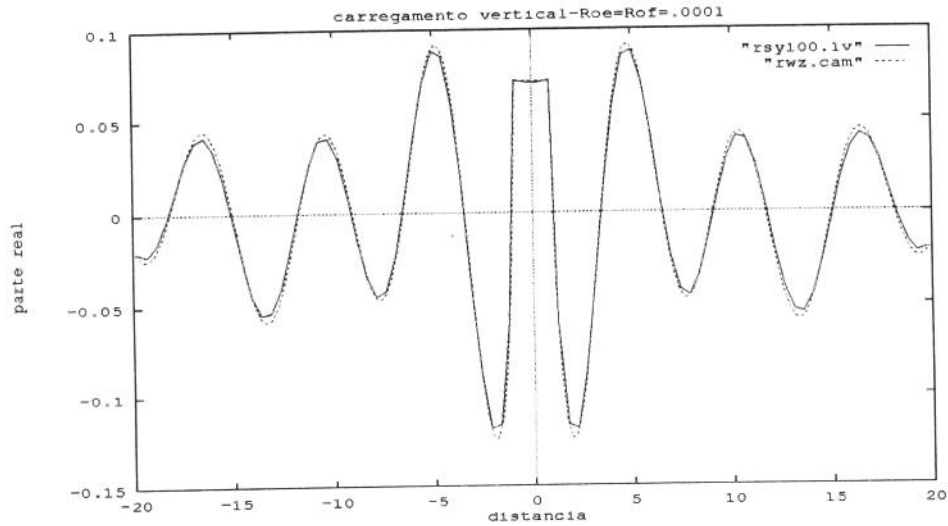


Figura 7.9: parte real do deslocamento do solo na vertical; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - -

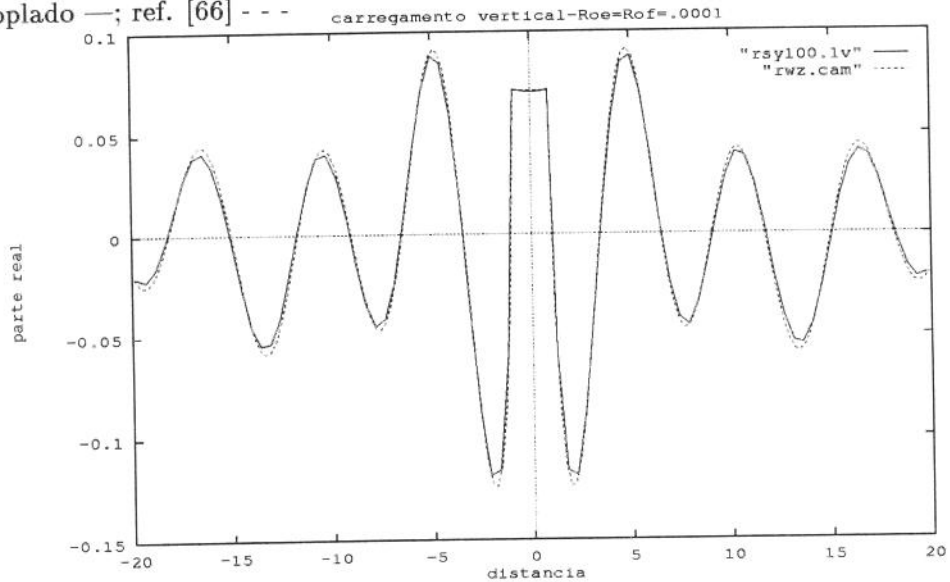


Figura 7.10: parte imaginária do deslocamento do solo na vertical; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - -

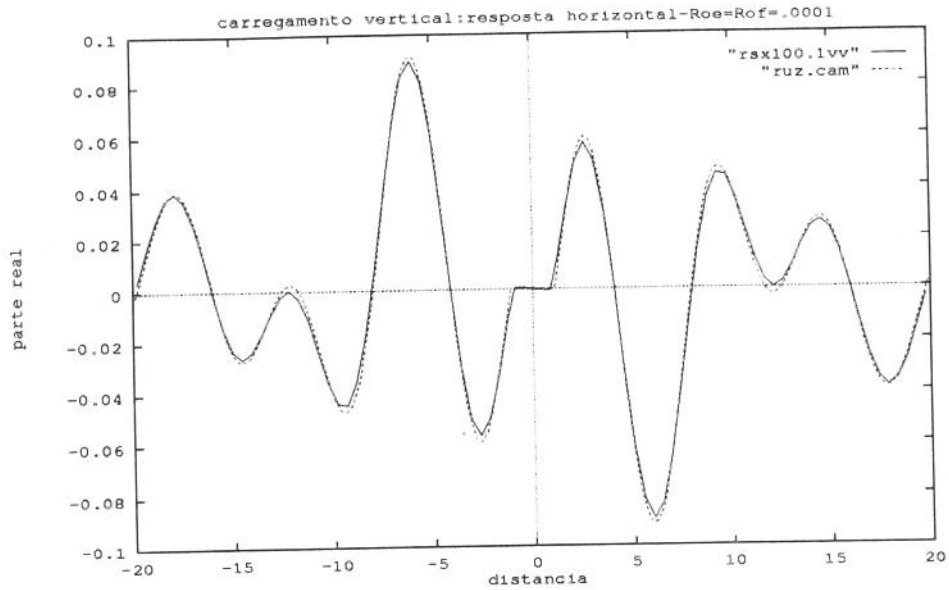


Figura 7.11: parte real do deslocamento do solo na horizontal; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - -

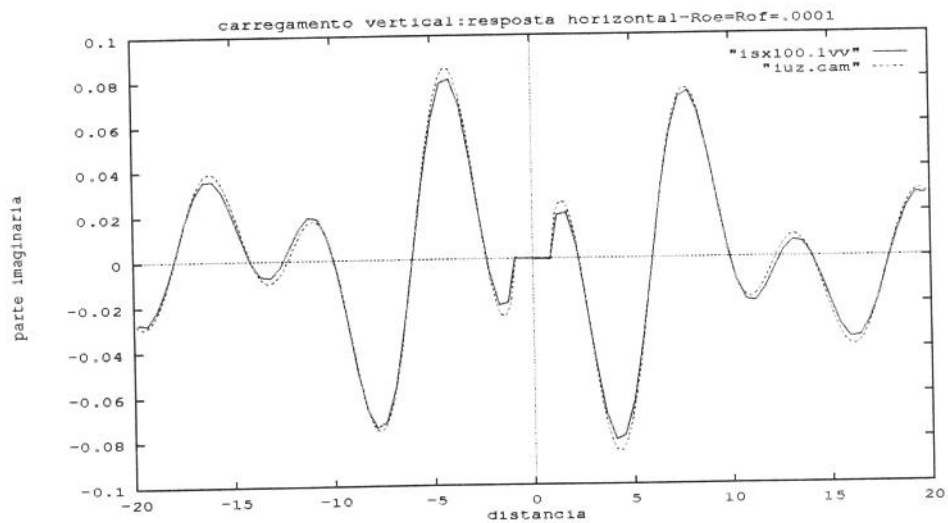


Figura 7.12: parte imaginária do deslocamento do solo na horizontal; excitação vertical; frequência=1.; MEC acoplado —; ref. [66] - - -

Na figura (7.13), a interface solo-estrutura é excitada por um carregamento unitário na direção horizontal e a resposta é plotada contra a frequência. Como se pode observar, os resultados comparam bem com os de Dominguez [65].

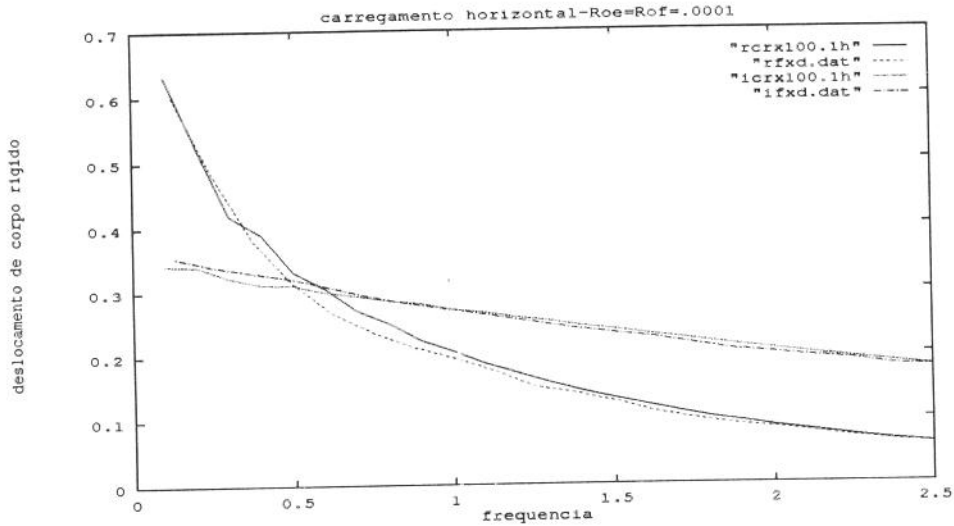


Figura 7.13: partes real e imaginária da resposta da estrutura; excitação horizontal; MEC acoplado — e ...; ref. [65] - - - e -.-.-

Neste capítulo, definimos o problema bidimensional correspondente à interação solo-fluido-estrutura e apresentamos o problema de valor de contorno associado a cada um destes sistemas. Utilizando as condições de compatibilidade cinemática e equilíbrio, estabelecemos uma ligação entre os diferentes sistemas, concretizada através de um sistema linear, cuja estrutura, engloba os três meios acima referidos, permitindo analisá-los como um único procedimento geral.

# Capítulo 8

## Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi aplicar o Método de Elementos de Contorno para modelar sistemas dinâmicos acoplados, descritos por operadores distintos. Para atingir tal objetivo, trabalhamos inicialmente com o problema da interação de ondas de superfície lineares com estruturas rígidas, em regime estacionário. Fizemos uma revisão das principais equações ligadas à hidrodinâmica e apresentamos as deduções matemáticas das equações diferenciais que governam o problema de valor de contorno para um fluido limitado por uma superfície livre e uma superfície de fundo. Após particularizar as equações da hidrodinâmica para descrever o problema da interação de ondas de superfície lineares com estruturas rígidas, realizamos a implementação numérica deste problema, transformando as equações diferenciais em equações integrais, pela técnica dos resíduos ponderados, e discretizando estas últimas segundo o procedimento padrão do Método dos Elementos de Contorno. Os resultados obtidos se restringiram ao cálculo de forças, coeficientes e respostas hidrodinâmicas associadas a dois aspectos importantes na área de estruturas offshore: a teoria da difração e da radiação de ondas. As validações numéricas se concretizaram através da comparação com soluções analíticas e soluções aproximadas existentes na literatura. Depois disto, fizemos breve revisão do problema de interação solo-estrutura. Apresentamos as equações básicas da elastodinâmica linear, a formulação elementos de contorno utilizando a técnica dos resíduos ponderados, a discretização da equação integral de contorno e uma análise de ondas elásticas em meios ilimitados. Finalmente, estabelecemos uma relação entre os três sistemas (solo-fluido-estrutura) ligando-os através de condições de contorno de compatibilidade e equilíbrio. Fizemos uma implementação computacional, em duas dimensões, do problema acoplado (operadores: Laplace e Navier) e validamos alguns aspectos deste acoplamento com soluções analíticas ou numéricas existentes na literatura. Os

resultados numéricos mostraram que o acoplamento foi bem sucedido. Cabe salientar, que isto se deve ao fato de que o Método dos Elementos de Contorno é talvez, no momento, o esquema numérico mais adequado para reproduzir o comportamento dinâmico de meios contínuos e ilimitados. A modelagem concomitante dos três sistemas dinâmicos não é uma prática usual na literatura, devido à grande complexidade envolvida na interação dos mesmos. O que se faz, normalmente, é desprezar os efeitos da interferência de um deles. A metodologia que empregamos no capítulo 7, é baseada nos trabalhos de Kawakami e Kitahara [28]. Embora, a teoria e o método de análise que utilizamos não sejam novos, entendemos que a experiência ganha no desenvolvimento das implementações computacionais, estas inéditas, bem como na compreensão das aplicações práticas, é de interesse a toda a comunidade acadêmica e pode, do ponto de vista metodológico, contribuir para o desenvolvimento das mesmas. Finalizando, cabe analisar os pontos principais, deste trabalho, que merecem um maior esforço de pesquisa no futuro. São eles:

- a. estender as implementações computacionais dos problemas de difração e radiação de ondas para o caso tridimensional;
- b. aperfeiçoar alguns aspectos da implementação do método dos elementos de contorno, como, por exemplo, técnicas de integração numérica para núcleos singulares de ordem  $\frac{1}{r}$  e  $\frac{1}{r^2}$ , funções de interpolação de ordem superior e métodos de solução de sistemas lineares;
- c. estabelecer a formulação do MEC para problemas de difração/radiação de ondas não lineares e construir códigos computacionais eficientes em duas e três dimensões;
- d. explorar o potencial da implementação bidimensional do problema acoplado, fazendo outras validações e incluindo nas análises aspectos como radiação de ondas pelo deslocamento de uma estrutura flexível, ondas incidentes no meio elástico, estruturas engastadas no solo e corpo flutuante acoplado;
- e. avançar para a análise dos efeitos não lineares de superfície dos fluidos e interface fluido-estrutura;
- f. formular o problema transiente.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] Brebbia, C., *Finite Element Handbook*. Part 3, chapter 5, 1988
- [2] Manolis, G. D., Beskos, D. E., *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. 1988
- [3] Rudolphi, T. J., *An Implementation of The Boundary Element Method for Zoned Media with Stress Discontinuities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, 1-15 (1983)
- [4] Coleman, C. J., *A Boundary Element Approach to Some Nonlinear Equations from Fluid Mechanics*. Computational Mechanics, (1990) 6, 197-202
- [5] Zhao, Z., *Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization Using the Boundary Element Method*. Lecture Notes in Engineering, 1991
- [6] Dehao, Yu, *Some Mathematical Aspects of Adaptive Boundary Elements*. Theory and Applications of Boundary Element Methods, 1990
- [7] Huang, Q., Cruse, T. A., *Some Notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, 2643-2659 (1993)
- [8] Taylor, R. E., Chau, F. P. , *Wave Diffraction - Some Developments in Linear and non Linear Theory*. 1991, OMAE - vol. I-A
- [9] Tang, W. , *Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM*. Lecture Notes in Engineering, 1992
- [10] Beer, G. , Meek, J. L. , *'Infinite Domain'Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 17, 43-52 (1981)
- [11] Brekhovskikh, L. and Goncharov, V., *Mechanics of Continua and Wave Dynamics*. Vol.1, 1985



- [12] Paterson, A.R., *A First Course in Fluid Dynamics*. 1989
- [13] Fletcher, C.A., *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2*. 1988
- [14] Willians, J. , Elder, S. A., *Fluid Physics for Oceanographers and Physicists*. Maxwell MacMillan International Editions, 1989
- [15] Newman, J. N. , *Marine Hidrodynamics*. Cambridge, Massachusetts and London, England, 1977
- [16] Fox, R. W., Mc Donald, A. T., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, 1978
- [17] Davis, J. L., *Wave Propagation in Solids and Fluids*, 1988.
- [18] Chakarabarti, S. K., *Hidrodynamics of Offshore Structures*. Computational Mechanics Publications, 1987
- [19] Mei, C. C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. A Willey-Interscience Publication, 1983
- [20] Wehausen, J. V., Laitone, E. V., *Surface Waves*. Encyclopedia of Physics, vol. IX, 1960
- [21] Lamb, H., *Hidrodynamics*. Dover, New York, 1932
- [22] Faltinsen, O. M., *Sea Loads On Ships and Offshore Structures*. Cambridge University Press, 1990
- [23] Chakrabarti, S. K., *Nonlinear Methods in Offshore Engineering*. Elsevier, 1990
- [24] Kim, C. H., Liu, Y. H., Zhao, C. T., *Time Domain Simulation of Nonlinear Response of a Coupled TLP System in Random Seas*. International Offshore and Polar Engineering Conference, 1994
- [25] Yang, C., Ertekin, R. C., *Numerical Simulation of Nonlinear Wave Diffraction By a Vertical Cylinder*. 1991, OMAE - vol. I-A
- [26] Kriebel, D. L., *Nonlinear Wave Interaction with a Vertical Circular Cylinder. Part I: Diffraction Theory*. Ocean Engng. vol. 17, 4, pp. 345-377, 1990
- [27] Spyrakos, C. C., Antes, H., *Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics: A Comparative Study*. Computers and Structures, vol. 24, 4, pp. 529-535, 1986
- [28] Kawakami, T., Kitahara, M., *Analysis of Interaction Problems for Soil-Structure- Fluid Systems by BIE Methods*. Boundary Elements IX, vol.2: Stress Analysis Applications, 1987

- [29] Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, 1984
- [30] Segel, L. A., *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Dover Publications, New York, 1987
- [31] Brebbia, C. A., Dominguez, J., *Boundary Elements An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, 1989
- [32] Goda, Y. and Yoshimura, T., *Wave Force on a Vessel Tied at Offshore Dolphins*. Chap.96, Proc.13th, Coastal Eng. Conference.
- [33] Mogridge, G. R., Jamieson, W. W., *Wave Forces on Square Caissons*. 15th Coastal Eng. Conference, 1976.
- [34] Isaacson, M. de St. Q., Asce, M., *Vertical Cylinders of Arbitrary Section in Waves*. Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division, 1978.
- [35] Rahman, M., Satish, M. G., Xiang, Y., *Wave Diffraction Due to Large Offshore Structures: A Boundary Element Analysis*. Ocean Engng, vol. 19, n.3, pp. 271-287, 1992
- [36] Rahman, M., Chen, M., *Boundary Element Method for Diffraction of Oblique Waves by an Infinite Cylinder*. Engineering Analysis with Boundary Elements 11, 1993, pp. 17-24
- [37] Masetti, I. Q., Wrobel, L. C., *A Study of the Interaction Between Cylinders in Waves Using Boundary Elements*, Offshore Structures Engineering, vol. 5, 1984
- [38] Naftzger, R. A., Chakrabarti, S. K., *Scattering of Waves by Two-Dimensional Circular Obstacles in Finite Water Depths*. Journal of Ship Research, vol.23, n.1, March 1979, pp. 32-42
- [39] Au, M. C., Brebbia, C. A., *Computation of Wave Forces on Three Dimensional Offshore Structures*. Boundary Elements Methods in Engineering, 1982.
- [40] Subbiah, K., Shankar, N. J., Cheong, H. F., *Waves Forces on a Large Horizontal Cylinder Near a Plane Boundary* Ocean Engng. vol.20, 1, pp.77-95, 1993
- [41] Liu, P. L-F., Abbaspour, M., *An Integral Equation Method for the Diffraction of Oblique Waves by an Infinite Cylinder*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, 1497-1504, 1982
- [42] Rahman, M., *Approximate Wave Force Analysis on Rectangular Caissons*. Ocean Engng., vol. 14, 1, pp. 71-78, 1987

- [43] Hogben, N., Standing, R. G., *Wave Loads on Large Bodies*. The Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, 1974
- [44] Bettess, P., Zienkiewicz, O. C., *Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.11, 1271-1290, 1977
- [45] Harms, V. W., Asce, M., *Diffraction of Water Waves by Isolated Structures*. Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division, 1979
- [46] Black, J., *Wave Forces on Vertical Axisymmetric Bodies*. J. Fluid Mech., vol. 67, part 2, pp.369-376, 1975
- [47] Imai, K., Riho, Y., Matsumoto, T., Takahashi, T., Bando, K., *Wave Force Analysis by the Finite Element Method*. OMAE, Tokio, vol. I, 1986
- [48] Zienkiewicz, O. C., Bettess, P., Kelly, D. W., *The Finite Element Method for Determining Fluid Loadings on Rigid Structures. Two and Three Dimensional Formulations*. Numerical Methods in Offshore Engineering, chapter 4, 1977
- [49] Korsmeyer, F. T., Lee, C. H., Sclavounos, P. D., *The Analysis of Wave Effects on Tension Leg Platforms*. International Conference On Offshore Mechanics and Arctic.
- [50] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., *Wave Propagation Problems*. Boundary Element Techniques, chapter 10.
- [51] Mei, C. C., *Numerical Methods in Water Wave Diffraction and Radiation*. Ann. Rev. Fluid Mech., 1978
- [52] Brebbia, C. A., Walker, S., *The Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths, London, 1980
- [53] John, F., *On the Motion of Floating Bodies II*. Comm. Pure Appl. Math. 3, 45-101, 1950
- [54] Matsui, T., Kato, K., Shirai, T., *A Hybrid Boundary Element Method for Ocean Wave Diffraction and Radiation Problems*.
- [55] Liu, P. L-F., Liggett, J. A., *Applications of Boundary Element Methods to Problems of Water Waves*. Developments in Boundary Element Methods-2, Edited by P. K. Banerjee and R. P. Shaw, 1982
- [56] John, F., *On the Motion of Floating Bodies I*. Comm. Pure Appl. Math. 3, 13-57, 1949

- [57] Ogilvie, T. F., *Second Order Hydrodynamic Effects on Ocean Platforms*. International Workshop on Ship and Platform Motions, Berkley, 1983
- [58] Leonard, J. W., Huang, M.-C., Hudspeth, R. T., *Hydrodynamic Interference Between Floating Cylinders in Oblique Seas*. Applied Ocean Research, 1983, vol. 5, n. 3
- [59] Carvalho, E. R., Mesquita, E., *Numerical Evaluation of Hydrodynamic Forces Between Floating Bodies Using the Boundary Element Method*. XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - Brasília - Brasil, 1993
- [60] Carvalho, E. R., Mesquita, E., *Numerical Evaluation of Hydrodynamic Forces and Stationary Response of Floating Bodies Using the Boundary Element Method*. Proceedings of the Fourth International Offshore and Polar Engineering Conference, Osaka, Japan, 1994
- [61] Chen, S., Mahrenholtz, O., *Boundary Integral Analysis of the Oscillations of Twin Cylinders in Regular Waves*. OMAE, Vol. I-A, 1992
- [62] Taylor, R. E., Zietsman, J., *A Comparison of Localized Finite Element Formulations for Two-Dimensional Wave Diffraction and Radiation Problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vo. 17, 1355-1384 (1981)
- [63] Chuhan, Z., Chongmin, S., Guanglun, W., Feng, J., *Stress Analysis of Monolithic Gravity Dams by 3D Infinite Boundary Elements*. Theory and Applications of Boundary Element Method, Tsinghua University Press and Springer-Verlag, 1990
- [64] Wrobel, L. C., *Potential Problems*. Topics in Boundary Element Research, vol.3: Computational Aspects, 1987, Edited by C. A. Brebbia
- [65] Dominguez, J., *Boundary Elements in Dynamics* Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1993
- [66] Romanini, E., *Síntese de Funções de Influência e Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-Estrutura Através de Equações Integrais de Contorno*. Tese de Doutorado, FEM/UNICAMP, 1995
- [67] Pontes, B. R., *Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais com o Solo: uma Comparação entre um Método Semi-analítico e o Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação de Mestrado, FEM/UNICAMP, 1992
- [68] Spyrakos, C. C., Beskos, D. E., *Dynamic Response of Flexible Strip-Foundations by Boundary and Finite Elements*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1986, vol. 5