

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR MARCELO MOREIRA
GANZAROLLI E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 27, 12, 91


ORIENTADOR

CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADE RETANGULAR
AQUECIDA PELA BASE E SIMETRICAMENTE
RESFRIADA PELOS LADOS

41/91

Autor: Marcelo Moreira Ganzarolli

Orientador: prof. Dr. Luiz Fernando Milanez

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA


Tese de Doutorado

Titulo da Tese: CONVECCÃO NATURAL EM CAVIDADE RETANGULAR
AQUECIDA PELA BASE E SIMETRICAMENTE RESFRIADA PELOS LADOS

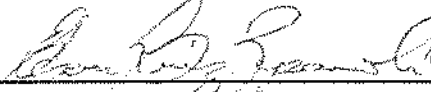
Autor: Marcelo Moreira Ganzarolli

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez


Aprovado por



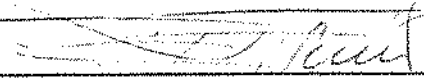
Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez, Presidente



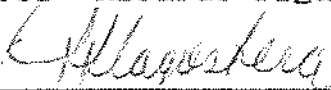
Prof. Dr. Edson Luiz Zaparoli



Prof. Dr. Jurandir Itizo Yanagihara



Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo



Prof. Dr. Jorge Isaias Llagostera Beltrán

Campinas, 27 de Dezembro de 1991.

Para

Guida, Kikyo, Marcela e Marina

Agradecimentos:

ao Prof. Dr. Luiz F. Milanez, que orientou o presente trabalho;

ao Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo, pelo auxílio na parte numérica;

ao Prof. Dr. Jorge Isaias LLagostera Beltrán, pelas sugestões e pelo programa "TOPGAN";

ao Prof. Dr. Carlos Alberto C. Altemani, meu orientador de Mestrado, pelos muitos ensinamentos;

aos colegas e funcionários do departamento, que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho;

a TELEBRAS, que financiou o projeto de análise térmica de equipamentos eletrônicos.

RESUMO

Neste trabalho é estudado o fenômeno de convecção natural em uma cavidade retangular aquecida pela base e simetricamente resfriada pelos lados. O problema é resolvido numericamente através da formulação de função corrente-vorticidade, sendo adotada a discretização devida à Allen. Resultados são obtidos na faixa de $Ra=10^3-10^6$ e os valores do número de Prandtl adotados são 0.7 e 7.0. São consideradas condições de contorno de temperatura e de fluxo de calor constantes especificados na base da cavidade. A razão geométrica da cavidade é variada para $H/L < 1$ e sua influência é analisada. O limite quando o número de Rayleigh tende a zero é também analisado e uma solução em série foi adotada neste caso. Sempre que possível, é feita uma análise de escala visando ao melhor entendimento do fenômeno estudado.

ABSTRACT

Natural convection is studied in a rectangular cavity heated from below and cooled symmetrically from the sides. The problem is solved numerically using a stream function-vorticity formulation. The convective terms of the equations are treated by means of the Allen discretization scheme. The Rayleigh number is varied from 10^3 to 10^6 and values 0.7 and 7.0 of the Prandtl number are considered. Boundary conditions for the heat transfer in the cavity floor are constant heat flux or uniform temperature. The aspect ratio H/L , that is, the height/length ratio of the cavity is varied to $H/L < 1$ and its influence is verified. Low Rayleigh number limit - tending to zero - is also analysed and solution by expanded integral powers of Rayleigh number is adopted for this case. As far as possible, scale analysis is presented.

SUMARIO

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUÇÃO..... | 01 |
| 1.1- A convecção natural em cavidades retangulares.. | 02 |
| 1.2- Apresentação do trabalho desenvolvido..... | 05 |
| 2. FORMULAÇÃO MATEMATICA DO PROBLEMA..... | 08 |
| 2.1- A cavidade e as equações governantes..... | 08 |
| 2.2- A formulação de função corrente-vorticidade.... | 13 |
| 2.3- Definição do número de Nusselt..... | 17 |
| 3. O METODO NUMÉRICO..... | 19 |
| 3.1- O método de função corrente-vorticidade..... | 19 |
| 3.2- Definição da malha e notação..... | 22 |
| 3.3- Equação geral de convecção-difusão e sua discretização..... | 24 |
| 3.4- As condições de contorno..... | 31 |
| 3.5- Resolução do sistema de equações discretizadas. | 35 |
| 3.6- Comparação com resultados da literatura..... | 38 |
| 3.7- Cálculo do número de Nusselt..... | 42 |
| 3.8- Testes de malha..... | 43 |
| 4. A CAVIDADE COM RAZÃO GEOMÉTRICA UNITARIA..... | 48 |
| 4.1- O escoamento e o campo de temperaturas..... | 49 |
| 4.2- Comparação com cavidades sob condições de contorno próximas..... | 62 |

| | |
|---|-----|
| 4.3- Escalas e resultados..... | 68 |
| 5. A CAVIDADE ALONGADA HORIZONTALMENTE..... | 80 |
| 5.1- A malha irregular..... | 80 |
| 5.2- Temperatura constante especificada na base..... | 91 |
| 5.3- Fluxo de calor constante especificado na base.. | 106 |
| 6. O LIMITE PARA VALORES BAIXOS DO NÚMERO DE RAYLEIGH.. | 117 |
| 6.1- Escala para a velocidade e adimensionalização das equações governantes..... | 117 |
| 6.2- Solução das equações governantes para valores baixos do número de Rayleigh..... | 122 |
| 7. CONCLUSÕES | 132 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 135 |
| APÊNDICES..... | 142 |

NOMENCLATURA

Caracteres latinos

| | |
|------------|---|
| a, b | coeficientes da equação discretizada |
| C_1, C_2 | constantes da eq.(5.5) |
| c_p | calor específico |
| D | termo difusivo |
| F | termo convectivo |
| g | aceleração da gravidade |
| Gr | número de Grashof, $g\beta\Delta TH^3/\nu^2$ |
| H | altura da cavidade |
| J | fluxo total da propriedade ϕ |
| k | condutividade térmica |
| l | comprimento de penetração térmica |
| L | comprimento da cavidade |
| m | constante da eq.(5.5) |
| Nu | número de Nusselt, eqs. (2.23) e (2.29) |
| Nu_o | número de Nusselt, eq. (2.25) |
| Nu_x | número de Nusselt, eq. (2.26) |
| n_i | número de pontos da malha na direção x |
| n_j | número de pontos da malha na direção y |
| P | pressão |
| Pe | número de Peclet, vH/α |
| q'' | fluxo de calor especificado na base da cavidade |
| Q | taxa total de calor transferido |
| Ra | número de Rayleigh, $g\beta\Delta TH^3/\nu\alpha$ |
| Re | número de Reynolds, vH/ν |

| | |
|------------|--|
| S | termo fonte na equação geral de convecção - difusão |
| T | temperatura |
| T^* | temperatura adimensional, $(T-T_0)/\Delta T$ ou $(T-T_0)/(q''H/k)$ |
| u, v | componentes da velocidade |
| u^*, v^* | componentes da velocidade adimensional, $(u,v)/(\alpha/H)$ |
| x, y | coordenadas cartesianas |
| x^*, y^* | coordenadas cartesianas adimensionais, $(x,y)/H$ |

Caracteres gregos

| | |
|----------------------|--|
| α | difusividade térmica, $k/\rho c_p$ |
| β | coeficiente de expansão térmica |
| Γ | coeficiente difusivo da grandeza ϕ |
| $\Delta x, \Delta y$ | espaçamento da malha nas direções x e y |
| η | coordenada horizontal no espaço transformado |
| ν | viscosidade cinemática |
| ζ | vorticidade |
| ζ^* | vorticidade adimensional, $\zeta/(\alpha/H^2)$ |
| ρ | densidade |
| ϕ | propriedade específica |
| ψ | função corrente |
| ψ^* | função corrente adimensional, ψ/α |

Subscritos

N,S,E,W identificação dos pontos da malha

i parede aquecida
o parede resfriada
H indicativo da altura H
x direção x
y direção y

INTRODUÇÃO

Dentro da área de conhecimento em transferência de calor, o estudo da convecção natural no interior de espaços confinados constitui-se hoje num tópico obrigatório. Em particular, a análise da convecção natural em cavidades retangulares tem sido objeto de muitas publicações.

O presente trabalho, que também analisa a convecção natural numa cavidade retangular, foi motivado por um estudo mais geral de transferência de calor aplicada ao resfriamento de equipamentos eletrônicos. Em determinada estrutura de empacotamento, tem-se uma coluna de placas de circuitos superpostas, verticalmente espaçadas, ladeadas pelas paredes de uma estrutura metálica (Mecânica Vertical Padrão - MVP) onde estão encaixadas.

A cavidade retangular definida pela placa, pelas paredes laterais e pela blindagem magnética superior que separa as placas, motivou o presente trabalho. A cavidade idealizada é bidimensional, aquecida pela base e simetricamente resfriada pelas laterais, sendo a parede superior isolada termicamente. Esta idealização tem como objetivo detalhar exclusivamente o estudo do fenômeno de convecção natural neste tipo de geometria e condições de contorno. Não se trata, portanto, de tentar simular o caso real que, como foi dito, motivou o presente trabalho. Esta simulação, para ser completa, envolveria obrigatoriamente mecanismos combinados de transferência de calor, notadamente convecção e condução térmica pela placa, blindagens magnéticas e paredes

laterais. Além disso, deveriam também ser consideradas as resistências de contato térmico nos encaixes entre as placas e a estrutura metálica, que nesta estrutura tem importância fundamental na determinação dos caminhos de fuga do calor.

Neste capítulo, são feitas considerações que visam a situar o presente trabalho no contexto do estudo da convecção natural em cavidades retangulares.

Finalmente, é apresentado com mais detalhes o trabalho desenvolvido.

1.1- A convecção natural em cavidades retangulares

A maior parte dos trabalhos sobre convecção natural em cavidades retangulares baseia-se em uma das duas configurações extremas em que este fenômeno ocorre:

(1) fluido submetido a um gradiente vertical instável de temperatura, ou

(2) fluido submetido a um gradiente horizontal de temperatura.

O primeiro caso, também chamado de problema de Bénard devido ao surgimento de células que levam o seu nome, tem sido objeto de inúmeros estudos experimentais e teóricos desde a publicação do trabalho clássico de Lord Rayleigh (1916), onde foram estabelecidas as condições para a estabilidade de uma camada horizontal de fluido aquecida por baixo. Rayleigh mostrou que a estabilidade desta camada de fluido é decidida por um grupo

adimensional, que mais tarde foi chamado "número de Rayleigh". Assim, o movimento convectivo ocorrerá a partir de um certo valor crítico deste grupo adimensional (Chandrasekhar, 1961).

O segundo caso constitui-se em um tópico de interesse relativamente mais recente, e os primeiros trabalhos a respeito começaram a ser publicados a partir da década de 1950. Wilkes (1963) apresentou, em sua tese de doutoramento, a solução numérica pelo método de diferenças finitas do problema da convecção natural numa cavidade retangular com as paredes verticais submetidas a uma diferença de temperatura e com as paredes horizontais adiabáticas. Este problema é uma referência importante para comparação de métodos numéricos.

Configurações intermediárias às duas citadas anteriormente, ou seja, cavidades submetidas simultaneamente a um gradiente horizontal e a um gradiente vertical (instável ou não) de temperatura, têm sido relativamente pouco estudadas. Numa revisão recente sobre convecção natural em cavidades, Ostrach (1988) observou que este tipo de configuração - que também ocorre quando a cavidade é inclinada - constitui uma exceção no conjunto dos trabalhos sobre o assunto. Alguns destes trabalhos, em especial aqueles mais próximos ao problema em estudo, serão comentados a seguir.

Kimura e Bejan (1985) consideram uma cavidade retangular aquecida por uma parede vertical e resfriada pela base, sendo as outras paredes isoladas termicamente. São admitidas condições de contorno de temperatura e de fluxo de calor constantes nas paredes. A geometria da cavidade é variada até o valor da razão entre a altura (H) e o comprimento (L) da cavidade (razão

geométrica) igual a $1/4$. O problema é resolvido numericamente e faz-se uma análise de escala visando ao melhor entendimento do fenômeno. O escoamento, como foi verificado, é formado por uma única célula em todos os casos analisados. O limite para valores muito baixos do número de Rayleigh é também analisado e, neste caso, é implementada uma solução a partir da expansão das variáveis dependentes em séries de potência do número de Rayleigh.

Anderson e Lauriat (1986) estudaram uma cavidade em que a parede vertical é resfriada e a base é aquecida. À exceção de uma parede vertical adiabática, as condições de contorno são as mesmas da cavidade em estudo no presente trabalho. São obtidos resultados numéricos e experimentais que, apesar do gradiente vertical instável de temperatura junto à base da cavidade, confirmam um padrão unicelular de escoamento e a ausência de instabilidades do tipo células de Bénard. Neste caso, o sentido de rotação da célula de escoamento é contrário ao da cavidade analisada por Kimura e Bejan (1985), desde que as paredes adiabáticas sejam mantidas na mesma posição. A análise entretanto, é feita apenas no caso da cavidade com razão geométrica unitária.

Uma cavidade também resfriada por uma única parede vertical, e com uma parte da base aquecida e a outra parte adiabática, é analisada por November e Nansteel (1987). Neste trabalho, limitado às cavidades com valor unitário da razão geométrica, os autores indagam se o padrão unicelular de escoamento persistirá para sempre, independentemente da razão geométrica e do número de Rayleigh. A resposta a esta pergunta será dada no presente trabalho.

Outras configurações intermediárias, embora menos próximas da

cavidade em estudo, também apresentam a imposição simultânea de gradientes horizontais e verticais de temperatura. Ostrach e Raghavan (1979), numa investigação experimental, analisam o efeito da imposição de um gradiente vertical estabilizador de temperatura em uma cavidade submetida a um gradiente horizontal de temperatura. Chen et al. (1987) apresentam resultados numéricos para uma cavidade com razão geométrica unitária, simetricamente aquecida pelos lados e submetida a um gradiente vertical estável de temperatura. Nestes dois casos, as temperaturas são especificadas nas quatro paredes da cavidade.

Os limites geométricos das cavidades retangulares, isto é, cavidades alongadas horizontalmente e verticalmente, são muito pouco estudados quando se consideram configurações diferentes daquelas definidas pelos extremos (1) e (2) apresentados no início deste item.

1.2- Apresentação do trabalho desenvolvido

É analisada uma cavidade retangular aquecida pela base e simetricamente resfriada pelos lados. Esta configuração corresponde ao caso em que um gradiente horizontal e um gradiente vertical instável de temperatura são simultaneamente impostos ao fluido que preenche a cavidade. Condições de contorno de temperatura e de fluxo de calor constantes especificados na base da cavidade são consideradas, enquanto a temperatura é conhecida nas paredes laterais resfriadas. Resultados são obtidos a partir

da solução numérica das equações básicas que governam o fenômeno. Para estas equações, apresentadas no Capítulo 2, foi adotada a simplificação conhecida como aproximação de Boussinesq. Neste capítulo é também apresentada a formulação de função corrente - vorticidade e é definido o número de Nusselt para a cavidade em estudo.

O algoritmo utilizado na obtenção dos resultados numéricos é descrito no Capítulo 3. Os resultados obtidos são comparados com outros conhecidos e tidos como referência para comparação de métodos numéricos. São também realizados testes para determinar o número de pontos a ser utilizado na discretização do domínio de cálculo.

Os resultados para uma cavidade com razão geométrica unitária são discutidos no Capítulo 4. Os valores do número de Rayleigh são variados de 10^3 a 10^6 e o número de Prandtl é considerado como sendo igual a 0.7 e/ou 7.0. Neste capítulo, a cavidade em estudo é comparada com aquela analisada por Kimura e Bejan (1985) e é verificada a influência da presença de uma parede rígida localizada no plano de simetria da cavidade. Parâmetros como o número de Nusselt e o valor máximo da função corrente são relacionados com o número de Rayleigh, sendo também verificada a influência do número de Prandtl. Uma análise de escala é feita visando a melhor entender o fenômeno e consequentemente explicar, muitas vezes de forma aproximada, as correlações obtidas a partir dos resultados numéricos.

No Capítulo 5, é estudada a cavidade alongada horizontalmente até o valor da razão geométrica igual a 1/9. Para esta cavidade, utilizou-se uma malha irregular na direção do alongamento, a qual

é apresentada no início do capítulo. São analisadas as diferenças entre o campo de temperaturas e o escoamento, ilustradas por isotermas e linhas de corrente, nos casos de temperatura e de fluxo de calor constantes especificados ao longo da base da cavidade. É discutida a influência do número de Rayleigh e da razão geométrica da cavidade em parâmetros globais como o número de Nusselt, sendo verificada a validade dos resultados antecipados pela análise de escala vista no capítulo anterior.

O limite para valores muito baixos do número de Rayleigh é visto no Capítulo 6. Neste caso, desenvolve-se uma solução a partir da expansão das incógnitas em séries de potência do número de Rayleigh. A escala para a velocidade neste limite também é verificada.

No capítulo final, a par das conclusões delineadas ao longo do trabalho, são apresentados comentários sobre o estudo realizado, assim como sugestões para futuras investigações.

CAPITULO 2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

A notação utilizada e as equações governantes para a cavidade em estudo serão aqui apresentadas.

Como na maioria dos problemas de convecção natural em escala de laboratório, foi adotada a simplificação conhecida como aproximação de Boussinesq para as equações da continuidade, da variação da quantidade de movimento e da energia.

A formulação de função corrente-vorticidade, que nos casos bidimensionais elimina a pressão das equações da variação da quantidade de movimento, é também apresentada e o conjunto de equações assim obtido é adimensionalizado, juntamente com as condições de contorno.

O número de Nusselt é definido para a cavidade em estudo, nos casos de temperatura especificada e de fluxo de calor especificado na base da cavidade.

2.1- A cavidade e as equações governantes

Considere-se uma cavidade bidimensional de altura H e comprimento horizontal $2L$, totalmente preenchida por um fluido newtoniano como o ar ou a água. Sejam x e y as coordenadas cartesianas, u e v as componentes horizontal e vertical da velocidade, respectivamente, T a temperatura, e g a aceleração local da gravidade. A fig.2-1 mostra a cavidade em estudo e a notação utilizada.

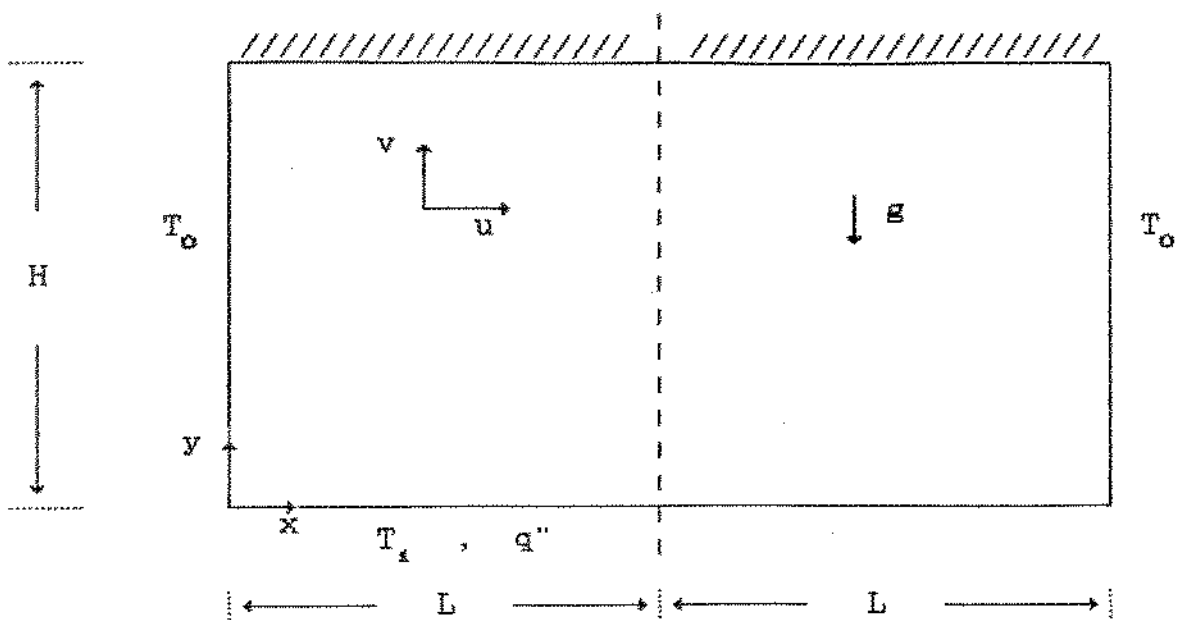


Fig.2-1. A cavidade em estudo e a notação utilizada.

A cavidade é simetricamente resfriada pelas duas paredes laterais, mantidas à temperatura constante T_0 . A condição de contorno na base da cavidade pode ser de dois tipos: temperatura uniforme T_1 especificada ($T_1 > T_0$), ou fluxo de calor constante positivo q'' especificado. A parede superior é isolada termicamente e a linha tracejada que divide a cavidade ao meio representa um plano de simetria. Devido a esta simetria, será considerada em todo trabalho apenas a meia cavidade de altura H e comprimento L , referida daqui para frente simplesmente como 'cavidade'. Sempre que o texto se referir à cavidade $H \times 2L$ será especificado 'cavidade inteira'. A razão entre a altura H e o comprimento L é definida como a 'razão geométrica da cavidade', ou apenas 'razão H/L '. O inverso será chamado 'razão L/H '.

Em convecção natural, as equações governantes devem ser consideradas simultaneamente, pois o campo de velocidades depende da distribuição de temperaturas que, por sua vez, é influenciada pelo campo de velocidades. Para as equações assim acopladas serão admitidas simplificações conhecidas como aproximações de Boussinesq. Estas aproximações consistem basicamente nas seguintes hipóteses (Gray e Giorgini, 1976):

1. o fluido é tratado como incompressível, isto é, a densidade é considerada constante em todos os termos, exceto naquele correspondente à força de campo (atração gravitacional);

2. todas as outras propriedades do fluido são admitidas constantes;

3. a função de dissipação viscosa e o trabalho de compressão são desprezados na equação da energia.

Diferentemente da convecção livre, na convecção natural no interior de espaços confinados não há um fluido ambiente distante não perturbado para ser tomado como referência, necessário para estabelecer o referencial hidrostático na formulação da força de empuxo e para determinar o valor das propriedades admitidas constantes. Nestes casos, adota-se normalmente a temperatura da parede fria T_0 para esta referência (Gebhart et al., 1988).

As equações da continuidade, da variação da quantidade de movimento e da energia, no caso bidimensional e em regime permanente, sujeitas às simplificações anteriormente citadas, são escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v - \frac{\rho}{\rho_0} g \quad (2.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.4)$$

onde ρ_0 é a densidade na temperatura T_0 , $\nu = \mu/\rho_0$ a viscosidade cinemática, e $\alpha = k/\rho_0 c_p$ a difusividade térmica, todos avaliados na temperatura de referência T_0 .

A pressão estática local P do fluido pode ser decomposta em duas componentes (Gebhart, 1973; Gebhart et al., 1988)

$$P = P_m + P_h \quad (2.5)$$

onde P_m é a componente devida ao movimento do fluido e P_h é a pressão hidrostática local no fluido em repouso com densidade ρ_0 de referência. Assim, temos

$$\frac{d P_h}{d y} = - \rho_0 g \quad (2.6)$$

Escrevendo apenas o termo da pressão P e o da força de campo da equação da variação da quantidade de movimento na direção y (eq.2.3),

$$\frac{1}{\rho_0} \left\{ - \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \right\} \quad (2.7)$$

e, usando as equações (2.5) e (2.6), teremos

$$\frac{1}{\rho_0} \left\{ - \frac{\partial P_m}{\partial y} - g (\rho - \rho_0) \right\} \quad (2.8)$$

onde o termo $g(\rho - \rho_0)$ é a força de empuxo. Para pequenos valores da variação relativa da densidade $\Delta\rho/\rho_0$ podemos, na maioria dos problemas em convecção natural (Arpaci e Larsen, 1984), escrever a densidade ρ na força de empuxo como

$$\rho = \rho_0 \left\{ 1 - \beta (T - T_0) \right\} \quad (2.9)$$

onde $\beta = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$ é o coeficiente de expansão térmica, admitido constante. Assim, a eq.(2.3) fica

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_m}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + g \beta (T - T_0) \quad (2.10)$$

que, juntamente com as eq.(2.1), (2.2) e (2.4), constitui o conjunto completo das equações governantes do problema, depois das simplificações decorrentes das aproximações de Boussinesq. A

validade destas aproximações é discutida mais detalhadamente por Gebhart et al. (1988), Tritton (1977) e Gray e Giorgini (1976). Basicamente, uma condição é que a variação relativa da densidade $\Delta\rho/\rho$, produzida pelas diferenças de temperatura, seja pequena. Uma outra condição é que o fenômeno ocorra em escala não muito grande.

Assim, as aproximações de Boussinesq são aplicáveis para a maioria dos problemas estudados em escala laboratorial, desde que para diferenças moderadas de temperatura. Gray e Giorgini (1976), num trabalho extremamente rigoroso, desenvolveram uma metodologia que permite quantificar as regiões de validade das aproximações de Boussinesq, tanto para líquidos quanto para gases. A região de validade é representada graficamente, e os parâmetros de entrada são (1) uma dimensão característica e (2) uma diferença de temperatura, ambos representativos do problema em estudo.

Normalmente, a temperatura de operação e a dimensão característica dos equipamentos eletrônicos em telecomunicação, resfriados por convecção natural, encontram-se dentro ou próximas da faixa de validade das aproximações de Boussinesq para o ar atmosférico.

2.2- A formulação de função corrente - vorticidade

Em problemas bidimensionais, a equação da continuidade (2.1) pode ser sempre satisfeita se introduzimos uma função ψ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.11)$$

Esta função ψ , assim definida, é chamada função corrente pois seu valor é constante ao longo de uma linha de corrente. A diferença entre os valores da função ψ para duas linhas de corrente representa a vazão do fluido que escoar na região delimitada por estas duas linhas.

Outra variável a ser introduzida é a vorticidade ζ que, no caso bidimensional, pode ser definida como

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.12)$$

A vorticidade está relacionada à rotação das partículas do fluido. Seu valor diferente de zero num ponto significa que o elemento infinitesimal de fluido mudou sua orientação neste ponto.

Substituindo os valores de u e v das eq.(2.11) na eq.(2.12) de definição da vorticidade, obtemos a equação de Poisson da função corrente que será escrita logo a seguir.

A pressão é eliminada das equações (2.2) e (2.10) derivando a primeira com respeito a y e a segunda com respeito a x , e depois fazendo a segunda menos a primeira. A equação assim obtida é chamada equação de transporte da vorticidade que, junto com a equação da energia (2.4) e com a equação de Poisson da função corrente, constituem a formulação de função corrente - vorticidade:

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \nabla^2 \zeta + g \beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad (2.15)$$

É conveniente adimensionalizar as equações acima utilizando novas variáveis adimensionais, obtidas dividindo-se as variáveis originais por valores de referência para o comprimento, a velocidade e a temperatura. Definimos então o seguinte grupo de variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{H} & , & & y^* &= \frac{y}{H} \\ u^* &= \frac{u}{(\alpha/H)} & , & & v^* &= \frac{v}{(\alpha/H)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$T^* = \frac{(T - T_0)}{\Delta T} \quad , \text{ ou} \quad T^* = \frac{(T - T_0)}{(q''H/k)}$$

onde $\Delta T = (T_1 - T_0)$, no caso de temperatura especificada na base, e quando o fluxo de calor é especificado substituímos este valor por $(q''H/k)$.

Introduzindo ψ^* e ζ^* a partir das respectivas definições e usando a notação frequentemente adotada para exprimir o Jacobiano de duas funções com respeito a x e a y (Hildebrand, 1948),

chegaremos às equações na forma adimensional

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial(\zeta^*, \psi^*)}{\partial(x^*, y^*)} = \nabla^2 \zeta^* + Ra_H \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial(T^*, \psi^*)}{\partial(x^*, y^*)} = \nabla^2 T^* \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \psi^* = -\zeta^* \quad (2.19)$$

onde Pr e Ra_H são, respectivamente, os números de Prandtl e de Rayleigh baseado na altura H , ou seja

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.20)$$

$$Ra_H = \frac{g \beta H^3 \Delta T}{\nu \alpha} \quad , \quad \text{ou} \quad Ra_H = \frac{g \beta H^4 q''}{\nu \alpha k} \quad (2.21)$$

Escrevendo as condições de contorno do problema, teremos

$$\begin{aligned} x^* = 0 & \rightarrow T^* = 0 \quad ; \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0 \\ x^* = L/H & \rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \quad ; \quad \psi^* = 0 \quad ; \quad \zeta^* = 0 \\ y^* = 0 & \rightarrow \begin{cases} T^* = 1 \\ \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad ; \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \\ y^* = 1 & \rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad ; \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Note que no caso de fluxo de calor especificado, a condição

de contorno da derivada é negativa, pois o sentido do fluxo de calor é para dentro da cavidade.

2.3- Definição do número de Nusselt

O número de Nusselt global da cavidade térmica pode ser definido, no caso de temperatura especificada na base, como

$$Nu = \frac{Q}{k \Delta T} \quad (2.23)$$

onde Q é a taxa total de calor transferido através das paredes da cavidade e $\Delta T = (T_1 - T_0)$. Assim

$$Q = \int_0^H k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dy = - \int_0^L k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (2.24)$$

Substituindo na eq.(2.23) e adimensionalizando, temos

$$Nu_0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) dy^* \quad (2.25)$$

$$Nu_1 = - \int_0^{L/H} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) dx^* \quad (2.26)$$

onde Nu_0 representa o número de Nusselt calculado ao longo do eixo y e Nu_1 , ao longo do eixo x . Em regime permanente, ambos os

valores devem ser iguais, o que será utilizado para verificar o realismo físico dos resultados numéricos.

No caso de fluxo de calor especificado na base da cavidade, o número de Nusselt será definido como

$$\text{Nu} = \frac{Q}{k (\bar{T}_1 - T_0)} \quad (2.27)$$

onde $Q = q''L$ e \bar{T}_1 é a temperatura média na base da cavidade, ou seja

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{L} \int_0^L T(x,0) dx \quad (2.28)$$

Substituindo em (2.27) e na forma adimensional, teremos

$$\text{Nu} = \frac{(L/H)^2}{\int_0^{L/H} T^*(x^*,0) dx^*} \quad (2.29)$$

Neste caso, a taxa total de calor transferido Q na eq.(2.27) também pode ser calculada por integração ao longo do eixo y , servindo para verificar a coerência dos resultados numéricos.

CAPITULO 3

O MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo é descrito o método numérico utilizado para obter as soluções aproximadas do sistema de equações diferenciais acopladas que governam o problema em estudo.

Foi adotado o método da função corrente-vorticidade, que tem sido utilizado na grande maioria dos problemas bidimensionais que envolvem escoamentos no interior de cavidades fechadas, térmicas ou hidrodinâmicas.

Os resultados obtidos com o algoritmo desenvolvido são comparados com outros já bastante conhecidos e tidos como referência na literatura (Burggraf, 1966; Wilkes e Churchill, 1966).

Finalmente, são realizados testes para determinar o número de pontos a ser utilizado na malha que preenche o domínio de cálculo do problema no caso de $H/L=1$.

3.1-0 método de função corrente-vorticidade

As equações governantes assim formuladas no caso bidimensional em regime permanente já foram estabelecidas na forma adimensional, escrita daqui para frente sem o "*" nas variáveis, como

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial(\zeta, \psi)}{\partial(x, y)} = \nabla^2 \zeta + Ra_h \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(T, \psi)}{\partial(x, y)} = \nabla^2 T \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad (3.3)$$

mais as condições de contorno e as equações que definem a relação entre a função corrente e as velocidades.

O processo iterativo para solução do sistema de equações de diferenças finitas obtido a partir da discretização das equações acima, a ser visto neste capítulo, parte diretamente da formulação em regime permanente e está esquematizado na fig.3-1.

Valores iniciais são admitidos para começar o processo iterativo que pode ser resumido nos seguintes passos:

— cálculo da função corrente ψ em todos os pontos da malha a partir da eq.(3.3);

— determinação das velocidades u e v nos pontos interiores e do valor da vorticidade nas paredes ζ_p em função do valor de ψ recém obtido;

— obtenção do campo de temperaturas da eq.(3.2);

— o novo valor da vorticidade ζ é obtido a partir da eq.(3.1) para todos pontos interiores;

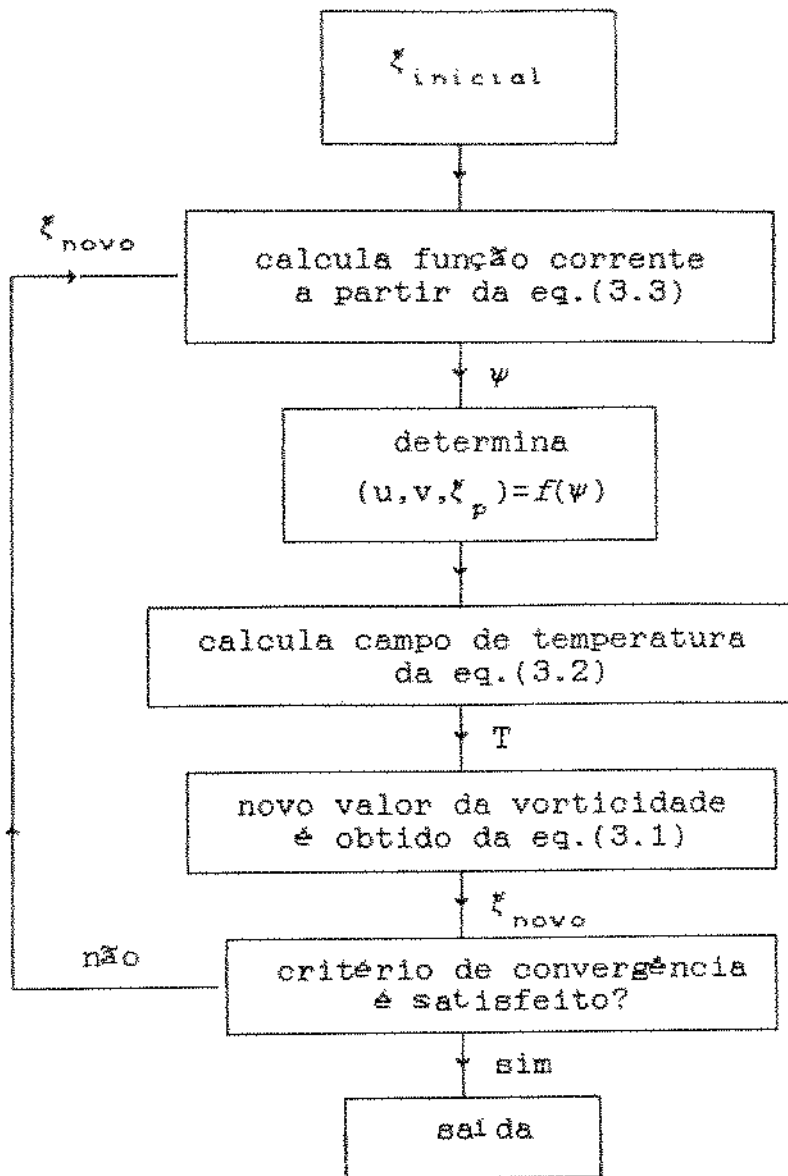


Fig.3-1. Diagrama de blocos simplificado do algoritmo.

—o critério de convergência é aplicado comparando-se os novos valores da vorticidade obtidos no passo anterior com os valores utilizados no primeiro passo. Se o critério não for satisfeito retorna-se ao primeiro passo agora com os novos valores da vorticidade.

Sendo este um sistema de equações acopladas, é importante notar que o sistema de equações de diferenças correspondente a cada equação diferencial não é integralmente resolvido em cada passo do processo iterativo, algumas iterações (varreduras) são feitas até que um novo valor da variável dependente (ψ , T , ou ζ) seja obtido e segue-se para o passo seguinte.

3.2-Definição da malha e notação

Para o caso da cavidade com razão $H/L=1$ foi adotada uma malha regular constituída por n_i linhas verticais e n_j linhas horizontais que ocupa todo o domínio de cálculo incluindo as fronteiras. A fig.3-2 ilustra a malha e a notação utilizada.

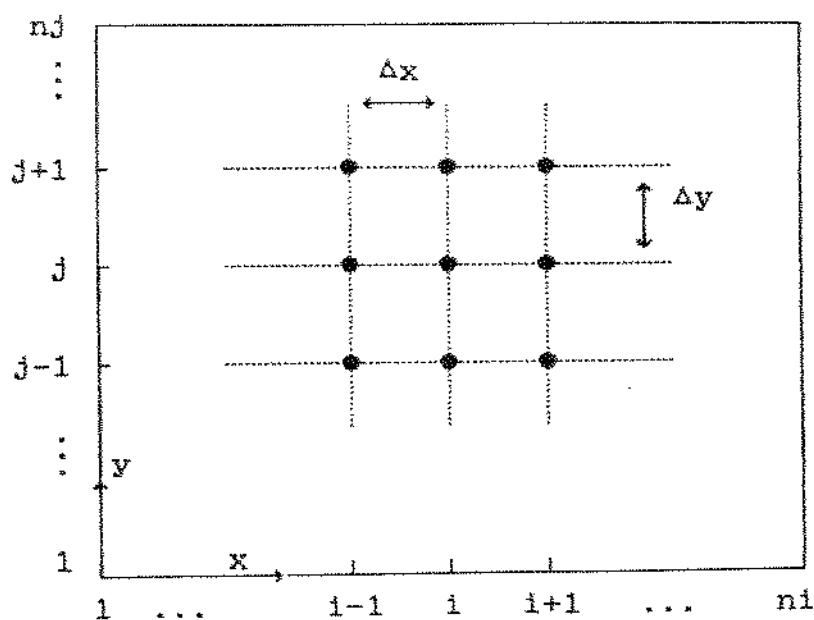


Fig.3-2. Discretização do domínio do problema.

O par ordenado (i,j) indica o ponto (nó) de coordenadas espaciais (x,y) tal que

$$x = (i-1).\Delta x \quad (3.4)$$

$$y = (j-1).\Delta y \quad (3.5)$$

Em todos os casos nos quais foi utilizada malha uniforme adotou-se que $\Delta x = \Delta y$. Dessa forma, para a meia cavidade quadrada ($H/L=1$), temos também que $n_i = n_j$. O domínio de cálculo constitui-se portanto de $n_i \times n_j$ pontos.

Outra notação comumente encontrada adota os pontos cardeais para indicar a posição relativa dos nós em relação a um nó considerado, como ilustra a fig.3-3.

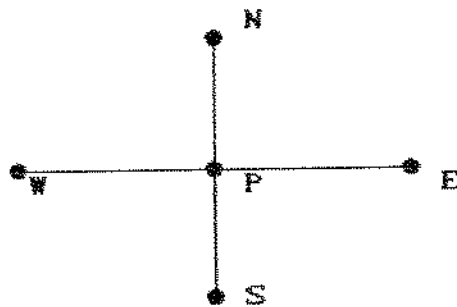


Fig.3-3. Notação cardinal.

Esta notação é muito útil porque grande parte das discretizações, inclusive a que será usada neste trabalho, baseia-se em 5 pontos conforme mostra a figura anterior. Tanto os pares ordenados $(i,j), (i+1,j), \dots$ quanto a notação cardinal serão utilizados como subscrito de uma variável ou coeficiente indicando a que ponto eles se referem.

3.3-Equação geral de convecção-difusão e sua discretização

A formulação diferencial do princípio de conservação para uma propriedade específica ϕ no caso bidimensional permanente pode ser escrita como

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (3.6)$$

onde J_x é o fluxo total da propriedade ϕ na direção x , J_y na direção y e S o termo fonte, ou seja, a taxa de geração de ϕ por unidade de volume.

O fluxo total na direção x , analogamente para y , pode ser expresso como

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.7)$$

onde Γ é um coeficiente de difusão generalizado, $\rho u \phi$ é o fluxo convectivo e $-\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$ é o fluxo difusivo da grandeza ϕ .

Assim, para o coeficiente Γ constante, a equação geral de convecção-difusão na forma convectiva (Bozeman, 1973) fica

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Gamma \nabla^2 \phi + S \quad (3.8)$$

ou mais simplesmente

$$\rho \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} = \Gamma \nabla^2 \phi + S \quad (3.9)$$

A equação acima representa de forma generalizada as equações (3.1), (3.2) e (3.3) desde que a variável dependente, o termo fonte e os coeficientes ρ e Γ sejam convenientemente escolhidos, conforme ilustra a Tabela 1 abaixo.

Tabela 1. Casos da eq. geral (3.9).

| Equação | ϕ | Γ | ρ | S |
|---------|---------|----------|--------|--------------------------------|
| (3.1) | ζ | 1 | 1/Pr | $Ra_H \partial T / \partial x$ |
| (3.2) | T | 1 | 1 | 0 |
| (3.3) | ψ | 1 | — | ζ |

O próximo passo consiste em transformar a equação diferencial parcial (3.8) numa equação de diferenças finitas (e.d.f.). Foi anteriormente definida uma malha com $n_i \times n_j$ pontos discretos abrangendo todo domínio de cálculo do problema. A discretização da equação diferencial consiste em obter uma equação algébrica (ou e.d.f.) para cada ponto da malha que relacione $\phi_{i,j}$ com seus pontos vizinhos a partir da equação diferencial original. Dessa forma chega-se a um sistema com $n_i \times n_j$ equações algébricas que resolvido fornece os valores da variável dependente ϕ nos pontos considerados.

Existem vários esquemas possíveis para a discretização de uma equação diferencial, sendo este um dos tópicos mais concorridos

nas publicações em métodos numéricos.

Torrance (1968) e posteriormente Raithby e Torrance (1973) compararam vários métodos de diferenciamento e desenvolveram formulações flexíveis que facilitam a comparação de diferentes esquemas. Tais esquemas se baseiam em 5 pontos, como na fig.3-3, e a equação de diferenças finitas resultante pode ser escrita de uma forma geral como

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (3.10)$$

onde a_P, a_N, \dots são os coeficientes das incógnitas nos respectivos pontos. Apesar de menos usual, Beier et al.(1983) fazem comparações de vários métodos incluindo um esquema que utiliza 9 pontos nodais.

A discretização adotada neste trabalho deve-se a Allen e foi publicada em 1954 (Allen e Southwell, 1954). Tal esquema é mostrado a seguir.

Reescrevendo a eq.(3.8)

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S \quad (3.11)$$

fazemos

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = A_x \quad (3.12)$$

$$\rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = A_y \quad (3.13)$$

Resolvendo as eq. (3.12) e (3.13) onde A_x e A_y são constantes chegaremos para a direção x (analogamente para y) na solução

$$\phi = \left[\frac{A_x}{\rho u} \right] \cdot x + C_1 + C_2 \cdot \exp\left[\frac{Pe_x \cdot x}{\Delta x} \right] \quad (3.14)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração, $Pe_x = \rho u \Delta x / \Gamma$ é o número de Peclet (generalizado) da malha na direção x e u é a velocidade no ponto P da malha.

Os valores de C_1 , C_2 e A_x são determinados impondo-se que a função ϕ da eq.(3.14) satisfaça

$$\phi = \phi_W, \phi_P, \phi_E \quad \text{em} \quad x = x_W, x_P, x_E$$

Dessa forma chegaremos ao valor de A_x

$$A_x = \left[\frac{\rho u}{\Delta x} \right] \frac{(\phi_P - \phi_W) \cdot \exp(Pe_x) + \phi_P - \phi_E}{\exp(Pe_x) - 1} \quad (3.15)$$

Procedimento análogo é usado para obter o valor de A_y . Substituindo A_x na eq.(3.11), multiplicando ambos lados por $\Delta x \cdot \Delta y$ e rearranjando teremos

$$\frac{F_x \cdot \exp(\text{Pe}_x) \cdot \phi_P + F_x \cdot \phi_P - F_x \cdot \phi_E - F_x \cdot \exp(\text{Pe}_x) \cdot \phi_W}{\exp(\text{Pe}_x) - 1} + \dots =$$

$$= S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (3.16)$$

onde $F_x = \rho u \Delta y$. É comum também definir $D_x = \Gamma \Delta y / \Delta x$, assim

$$\text{Pe}_x = F_x / D_x \quad (3.17)$$

Os coeficientes da eq. (3.10) podem então ser escritos como

$$a_E = \frac{F_x}{\exp(\text{Pe}_x) - 1} \quad (3.18)$$

$$a_W = \frac{F_x \cdot \exp(\text{Pe}_x)}{\exp(\text{Pe}_x) - 1} \quad (3.19)$$

$$a_N = \frac{F_y}{\exp(\text{Pe}_y) - 1} \quad (3.20)$$

$$a_S = \frac{F_y \cdot \exp(\text{Pe}_y)}{\exp(\text{Pe}_y) - 1} \quad (3.21)$$

$$b = S \Delta x \cdot \Delta y \quad (3.22)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (3.23)$$

O procedimento computacional para implementar o cálculo dos coeficientes a_P, a_E, \dots está especificado no Apêndice 1 e deve-se a Patankar (1980). Observe que os coeficientes assim obtidos são sempre positivos qualquer que seja o sinal das velocidades. Este fato é importante para satisfazer o critério de convergência do método iterativo usado na resolução do sistema de equações

algébricas.

Outra característica da discretização devida a Allen é que ela se reduz ao conhecido esquema de diferenciamento central quando as velocidades u e v tendem a zero. De fato, da eq.(3.15)

$$\lim_{u \rightarrow 0} A_x = -\Gamma \left[\frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x^2} \right] \quad (3.24)$$

o que corresponde ao diferenciamento central de $-\Gamma \partial^2 \phi / \partial x^2$. Assim quando u e v tendem a zero a eq.3.8 reduz-se a uma equação de difusão pura (Laplace ou Poisson) e a discretização corresponde ao conhecido esquema de diferenças centrais para a 2ª derivada normalmente utilizado nestes casos. A equação de Poisson da função corrente (3.3) do nosso problema foi tratada desta maneira.

Outro aspecto fundamental da discretização diz respeito ao cálculo das velocidades u e v . Para os pontos interiores adotou-se o esquema de diferenças centrais para a 1ª derivada. Assim

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} + o(\Delta y^2) \quad (3.25)$$

$$v_{i,j} = - \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (3.26)$$

No caso da fronteira direita, que corresponde ao eixo de simetria da cavidade inteira, a velocidade v é obtida por

$$v_{ni,j} = \frac{-3\psi_{ni,j} + 4\psi_{ni-1,j} - \psi_{ni-2,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (3.27)$$

expressão deduzida a partir da expansão em série de Taylor de $\psi_{ni-1,j}$ e $\psi_{ni-2,j}$ em torno de $\psi_{ni,j}$.

Outros esquemas próximos da discretização devida a Allen foram posteriormente introduzidos por outros autores. Spalding (1972), Raithby e Torrance (1973) e Patankar (1980) apresentam o esquema exponencial, que pode ser obtido fazendo-se $A_x=0$ em (3.12) e tomando as velocidades no ponto médio entre dois nós, e assim chegando a uma curva interpolante de ϕ entre os pontos W e P e a uma outra entre os pontos P e E. Note que neste caso o fluxo J_x é constante entre dois nós da malha, pois $\partial J_x / \partial x = 0 (A_x=0)$, enquanto que na discretização de Allen o fluxo J_x varia linearmente entre os pontos W e E e as velocidades referem-se sempre ao nó central (ponto P).

Chow e Tien (1978) compararam os dois esquemas e concluíram pela superioridade do esquema de Allen nos casos teste estudados, tomando o cuidado de não generalizar esta afirmação para qualquer problema.

Um outro esquema também derivado de Allen deve-se a Wong e Raithby (1979) e foi denominado LOADS (Locally Analytic Differencing Scheme). Este esquema foi aplicado por Prakash (1984) a problemas teste e comparado com o esquema exponencial, apresentando bons resultados.

3.4-As condições de contorno

O tratamento dos pontos de fronteira foi feito com base no tipo de condição de contorno em cada caso.

Para condição de contorno de 1ª espécie, quando o valor da variável ϕ é especificado na fronteira, a formulação fica trivial. Seja ϕ_0 o valor especificado, assim os coeficientes da eq.(3.10) ficam

$$a_p = 1 \quad (3.28)$$

$$a_N = a_S = a_W = a_E = 0 \quad (3.29)$$

$$b = \phi_0 \quad (3.30)$$

No caso de condições de contorno de 2ª espécie, quando o valor da derivada na direção normal à parede é especificado, adotou-se o artifício de se imaginar um ponto fictício fora do domínio de cálculo, como está ilustrado na fig.3-4.

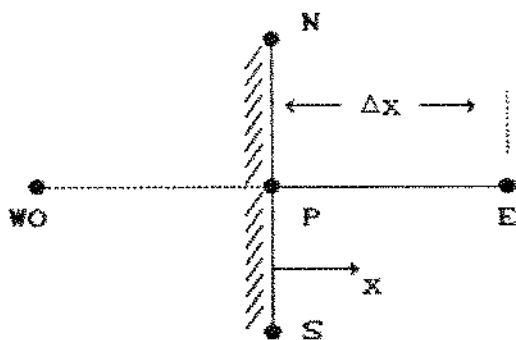


Fig.3-4. Ilustração do ponto fictício.

Seja q_f o valor do fluxo especificado na fronteira, assim

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = q_f \quad (3.31)$$

ou, usando diferenças centrais

$$\frac{\phi_E - \phi_{W0}}{2\Delta x} = q_f \quad (3.32)$$

logo

$$\phi_{W0} = \phi_E - 2\Delta x \cdot q_f \quad (3.33)$$

Calculamos os coeficientes da equação de diferenças finitas para o ponto P da fronteira como se o ponto W0 existisse e depois substituímos ϕ_W por ϕ_{W0} da eq.(3.33) na eq.(3.10), assim

$$a_P \phi_P = (a_E + a_W) \cdot \phi_E + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b - 2\Delta x \cdot a_W \cdot q_f \quad (3.34)$$

ou seja, os novos coeficientes a'_E , a'_W e b' para o ponto de fronteira ficam

$$a'_E = a_E + a_w \quad (3.35)$$

$$a'_w = 0 \quad (3.36)$$

$$b' = b - 2\Delta x \cdot a_w \cdot q_y \quad (3.37)$$

Dessa forma, a equação de diferenças na fronteira fica dependendo da equação diferencial e do tipo de condição de contorno em cada caso. O tratamento para as outras fronteiras é semelhante ao que foi deduzido para a parede $x=0$.

Para a equação da função corrente as condições de contorno são de 1ª espécie e já foram especificadas no Capítulo 2. As condições de derivada conhecida serão utilizadas na determinação da vorticidade na parede.

As condições de contorno da equação da energia (3.2) dependem da fronteira considerada. Nas fronteiras rígidas (paredes superior, inferior e esquerda) as velocidades u e v são nulas e a equação diferencial reduz-se a uma equação de Laplace. Já na fronteira direita, que corresponde ao centro de simetria da cavidade inteira, a velocidade u é nula mas v é diferente de zero. Assim a equação diferencial na fronteira $y=1$ fica

$$-\Gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.38)$$

A formulação de ponto fictício é adotada para exprimir a condição de fluxo nulo ($q_y=0$) na direção x e o tratamento na direção y é o mesmo dos pontos internos.

Na equação de transporte da vorticidade (3.1) as condições de contorno são de 1ª espécie e o valor da vorticidade na fronteira é determinado a partir da eq.(2.12), ou seja

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.39)$$

Assim, usando a definição da função corrente (2.11)

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \zeta_{1,j} = \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3.40)$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad \zeta_{m,j} = 0 \text{ (eixo de simetria)} \quad (3.41)$$

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad \zeta_{1,1} = - \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (3.42)$$

$$y = 1 \quad \rightarrow \quad \zeta_{1,n} = - \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (3.43)$$

Através de expansões em série de Taylor dos valores interiores da função corrente em torno do valor na fronteira e levando-se em conta a condição de não deslizamento nas paredes sólidas, chegaremos para a parede $x=0$, em

$$\zeta_{1,j} = \frac{7 \psi_{1,j} - 8 \psi_{2,j} + \psi_{3,j}}{2 \Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (3.44)$$

cujo resultado será o mesmo para as outras paredes independentemente da orientação. Tal fórmula, que utiliza 2 pontos internos e tem erro de truncamento de ordem Δx^2 , foi primeiro utilizada por Jensen (1959) e depois também por Wilkes e Churchill

(1966). Roache (1972) faz um apanhado bastante completo sobre o cálculo da vorticidade na parede em diversas situações, que é reproduzido resumidamente em Bejan (1984).

Dessa forma, a cada iteração, um novo valor da vorticidade na parede é calculado a partir dos valores mais recentes da função corrente obtidos da eq.(3.3), conforme foi ilustrado no diagrama de blocos da fig.3-1.

3.5-Resolução do sistema de equações discretizadas

A discretização da equação diferencial e a aplicação das condições de contorno permitem determinar os coeficientes a_p, a_N, \dots da eq.(3.10) para todos os pontos da malha. O sistema de equações algébricas (ou e.d.f.) assim obtido deve ser resolvido para se determinar o valor da variável $\phi_{i,j}$ nesses pontos.

No caso em estudo, as eq.(3.1), (3.2) e (3.3) que governam o fenômeno são acopladas, implicando em que os coeficientes das equações algébricas dependem da variável ϕ considerada. Esta não linearidade faz com que a solução final seja obtida depois de um processo iterativo global envolvendo todas as equações governantes. Neste processo o sistema de e.d.f. correspondente a uma equação diferencial é parcialmente resolvido a cada iteração com valores renovados dos coeficientes, obtendo-se um novo campo da variável em questão.

Para resolver este sistema de equações momentaneamente linear em cada passo do processo iterativo global foi adotado o método

iterativo linha-a-linha descrito em Patankar (1980). Este método é uma combinação do método iterativo ponto-a-ponto de Gauss-Seidel com um método direto conhecido como algoritmo de Thomas (ou TDMA, TriDiagonal Matrix Algorithm). Detalhes deste algoritmo estão descritos no Apêndice 2.

O procedimento consiste em resolver uma linha da grade diretamente pelo TDMA utilizando os valores da variável ϕ das linhas vizinhas obtidos na última vez. A linha seguinte é visitada e assim sucessivamente até varrer todo o domínio. A fig.3-5 ajuda a ilustrar com a seta indicando a direção de varredura W-E e a linha cheia mostrando a linha visitada.

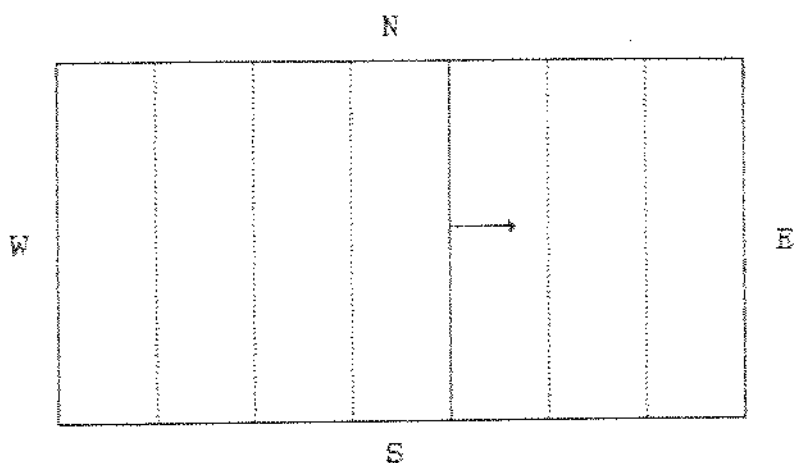


Fig.3-5. Ilustração do método linha-a-linha.

A direção de varredura é alternada de modo a permitir maior rapidez na transferência da informação da fronteira no caso de c.c. de 1^a espécie. Na presença de c.c. de 1^a e 2^a espécies recomenda-se privilegiar a direção que transmite para dentro do domínio o valor conhecido da variável. Foi elaborada uma subrotina (LITER) no programa de cálculo que permite escolher o sentido da varredura para cada caso. Assim, algumas varreduras são executadas

a cada iteração para cada sistema de equações discretizadas.

No caso da equação de Poisson da função corrente as varreduras são feitas nos 4 sentidos possíveis. Para a equação da energia os sentidos S-N e W-E foram escolhidos em função das temperaturas especificadas nas paredes inferior e esquerda. Finalmente, para a equação de transporte da vorticidade os sentidos W-E e E-W foram adotados, privilegiando-se o sentido E-W já que na fronteira leste o valor da vorticidade é previamente conhecido.

O processo iterativo continua até que os valores das variáveis ao fim de cada iteração comecem a se repetir, ou

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} |\phi_{i,j} - \phi_{i,j}^*|}{\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} |\phi_{i,j}|} < \epsilon \quad (3.45)$$

onde $\phi = \zeta, T$ e ϕ^* representa o valor obtido na iteração anterior. O valor típico de ϵ adotado é de 10^{-5} e sua diminuição praticamente não afeta o resultado. Outro valor calculado a cada iteração é o resíduo máximo do sistema de equações discretizadas da vorticidade, definido a partir de (3.10) como

$$R = \max \left| \sum a_{vz} \zeta_{vz} + b - a_p \zeta_p \right| \quad (3.46)$$

onde o subscrito (vz) representa os pontos vizinhos de P. Este valor é determinado a cada iteração e funciona como critério

adicional para finalizar o processo iterativo desde que

$$R < 10^{-9} \cdot R_{\text{inicial}} \quad (3.47)$$

onde R_{inicial} é o resíduo máximo da primeira iteração efetiva. O acompanhamento do resíduo ao longo do processo iterativo é um indicador significativo do bom andamento deste processo, mostrando que os valores obtidos convergem para a solução do sistema de equações discretizadas. Quando o processo não converge, o resíduo passa a oscilar sem decrescer ou aumenta rapidamente.

Um artifício usado para evitar a divergência do processo iterativo é retardar a velocidade de variação das variáveis através da sub-relaxação. Este recurso foi utilizado para amortecer a variação da vorticidade após cada iteração. Assim, o valor recém obtido ξ_{novo} foi substituído por um valor ξ tal que

$$\xi = \xi_{\text{velho}} + \alpha (\xi_{\text{novo}} - \xi_{\text{velho}}) \quad (3.48)$$

onde α é o fator de sub-relaxação ($0 < \alpha < 1$) e ξ_{velho} o valor da vorticidade obtido na iteração anterior. A determinação do fator α é empírica e o valor utilizado foi de 0.7 para quase todos os casos rodados.

3.6-Comparação com resultados da literatura

Para validar o programa computacional desenvolvido foram

feitas algumas comparações com resultados conhecidos da literatura.

O primeiro caso visto foi o problema da cavidade hidrodinâmica com a parede superior móvel, que é um dos problemas clássicos para comparação de métodos numéricos e discretizações. A referência adotada foi um trabalho de Burggraf (1966) comumente tido como ponto de comparação por outros autores (Nallasamy e Prasad, 1974). O resultado escolhido para comparar foi o perfil de velocidade $u(y)$ na linha vertical que passa pelo meio do eixo x da cavidade quadrada. A fig.3-6 mostra os resultados para Reynolds igual a 100 e uma malha com 41×41 pontos ($\Delta x = \Delta y = 0.025$). Na ordenada temos o eixo y e na abscissa a velocidade adimensional $u^* = (u/V)$. A coincidência dos resultados obtidos com aqueles apresentados em Burggraf (1966) é muito grande, como se nota pelo gráfico.

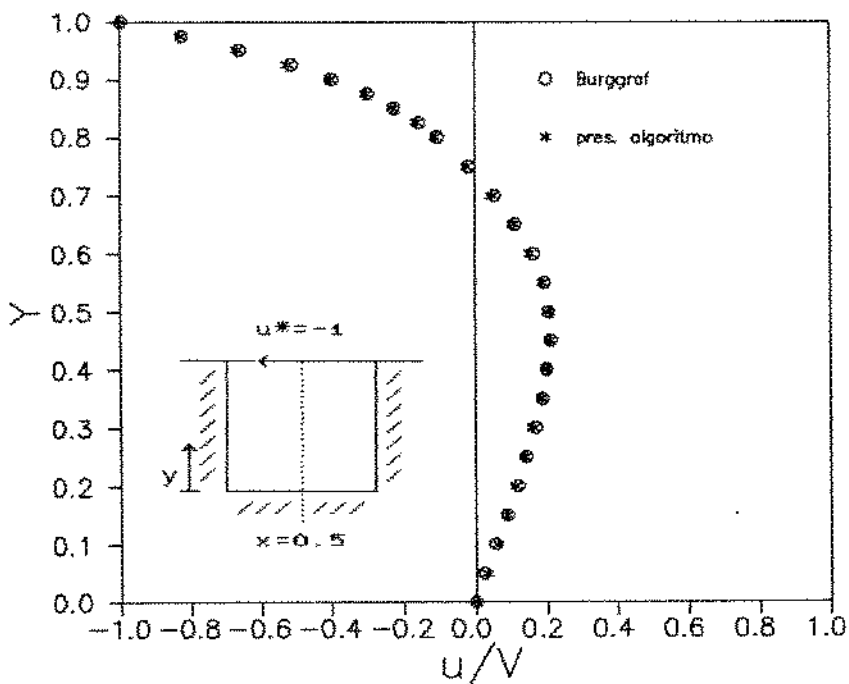


Fig.3-6. Comparação com Burggraf (1966). Valores em $x=0.5$ para Reynolds=100 e $\Delta x = \Delta y = 0.025$.

Outra comparação foi feita com o problema da cavidade térmica estudada por J.O. Wilkes em sua tese de doutorado (Wilkes,1963). Este problema também é considerado como ponto de referência para comparações de métodos e algoritmos numéricos. Consiste numa cavidade quadrada isolada termicamente nas paredes superior e inferior. A parede esquerda é resfriada e a direita aquecida, sendo a temperatura adimensionalizada de forma que $T_{esq.} = -1$ e $T_{dir.} = +1$. A fig.3-7 mostra a temperatura em função da ordenada y no plano médio da cavidade ($x=0.5$) para $Grashof=10^5$, $Prandtl=0.733$ e uma malha 11×11 . A comparação dos resultados também mostra uma grande concordância entre os resultados aqui obtidos e por Wilkes (1966).

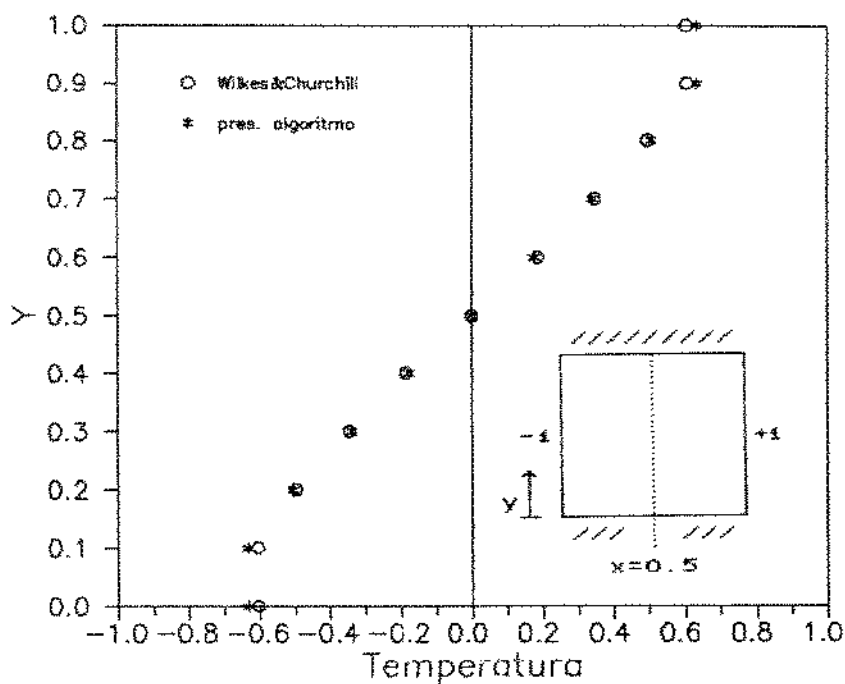


Fig.3-7. Comparação com Wilkes (1963). Temperatura em $x=0.5$ para $Gr=10^5$, $Pr=0.733$, $\Delta x=\Delta y=0.1$ e $H/L=1$.

Finalmente, uma cavidade térmica com condições de contorno próximas daquelas definidas para o presente estudo foi usada para comparação de resultados. Trata-se da cavidade resfriada pela base e aquecida por um lado, tendo as outras duas paredes isoladas, e que foi analisada por Kimura e Bejan (1985). O gráfico da fig.3-8 mostra o valor máximo da função corrente ($\psi_{máx}$) em função do número de pontos da malha numa direção (n_i ou n_j) para $Rayleigh=1.4 \times 10^6$ e $Prandtl=7.0$. A comparação mostra os valores evoluindo para praticamente coincidirem à medida em que a grade vai se refinando.

Todos estes testes visando a reproduzir resultados notoriamente aceitos como referências servem para dar confiança no uso de algoritmos desenvolvidos.

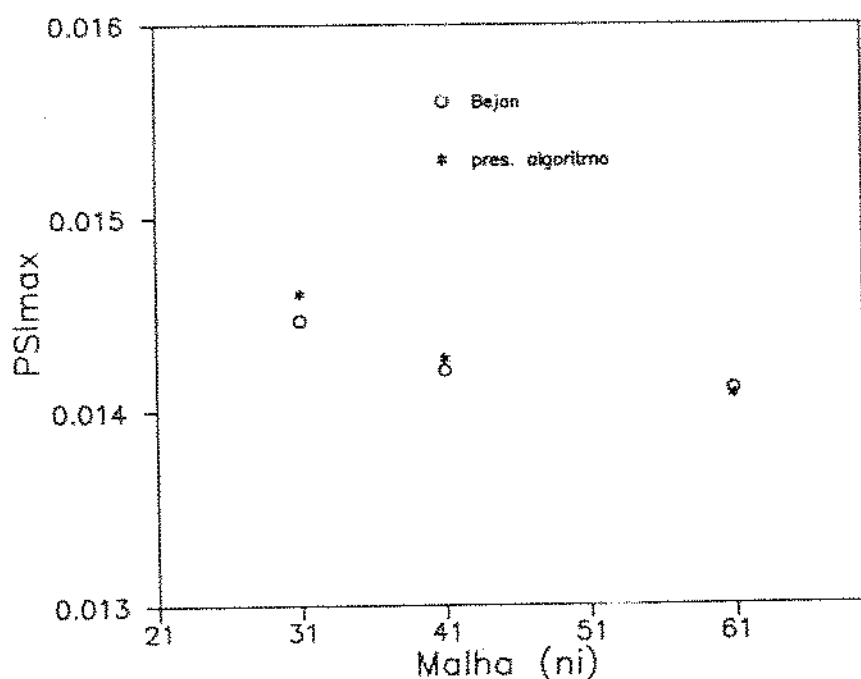


Fig.3-8. Comparação com Kimura e Bejan (1985). Valor de $\psi_{máx}$ para malha uniforme, $Ra=1.4 \times 10^6$ e $Pr=7.0$.

3.7-Cálculo do número de Nusselt

O número de Nusselt global definido no Capítulo 2 pelas equações (2.25), (2.26), e (2.29) foi calculado numericamente a partir do campo de temperaturas obtido no final do processo iterativo. As derivadas da temperatura foram determinadas usando dois pontos interiores (de forma semelhante à $v_{ni,j}$ na eq. 3.27) e as integrais aproximadas pela regra do trapézio.

Um aspecto importante a ser discutido no cálculo do número de Nusselt é o tratamento dado à intersecção das paredes a diferentes temperaturas, ou seja, ao ponto (0,0). Apesar de não influir nos cálculos que determinam o campo de temperaturas no interior da cavidade, alguma consideração precisa ser feita na hora de se determinar o número de Nusselt. O problema é definir qual o fluxo de calor, isto é, qual o valor da derivada no ponto(0,0). Alguns testes foram feitos para analisar a influência deste ponto no Nusselt global. Quatro hipóteses foram investigadas:

— o fluxo no ponto (0,0) foi admitido nulo, ou seja, o ponto foi excluído do cálculo de Nusselt;

— foi adotado o valor médio da temperatura e perfil linear de temperatura do ponto (0,0) até o primeiro nó, na direção x ou y;

— a derivada no ponto foi estimada por extrapolação linear de seus valores nos dois pontos anteriores da grade;

— idem, só que com extrapolação parabólica dos três pontos anteriores.

Os resultados dos cálculos para $Pr=0.7$ e malha 61×61 estão ilustrados na Tabela 2. O número de Nusselt foi estimado na parede

vertical (Nu_0).

Tabela 2. Influência do ponto (0,0) em Nusselt.

| Ponto(0,0) | Nusselt | |
|--------------|-----------|-----------|
| | $Ra=10^4$ | $Ra=10^6$ |
| fluxo=0 | 4.22 | 9.51 |
| $T(0,0)=0.5$ | 4.47 | 9.76 |
| reta | 4.69 | 9.95 |
| parábola | 4.78 | 10.05 |

Nota-se uma variação da ordem de até 10% no valor estimado de Nusselt desde a hipótese de fluxo nulo até a extrapolação parabólica no caso de $Ra=10^4$.

A opção escolhida foi a que adota o valor médio da temperatura nas paredes para o ponto (0,0) e perfil linear até o primeiro nó. Esta opção é fisicamente a mais realista e alguns trabalhos adotam soluções similares. Maliska et al.(1987) admitiram temperatura média na intersecção e perfil linear nos 5 nós adjacentes da malha em cada parede. Kimura e Bejan (1985) também trabalham com temperatura média mas não entram em detalhes do perfil admitido para o cálculo do fluxo no ponto (0,0). De qualquer forma, alguma hipótese deve ser feita em relação a este ponto, pois ignorá-lo significaria usar malhas muito finas para minimizar sua influência na determinação de Nusselt.

3.8-Testes de malha

Visando a determinação do número adequado de pontos para compor a malha uniforme que preenche o domínio de cálculo foram

feitos alguns testes para o problema em estudo. Estes testes envolveram malhas com número variável de pontos e sua influência em Nusselt e no valor máximo da função corrente ($\psi_{máx}$).

A influência no valor de $\psi_{máx}$ está ilustrada na tabela 3 para o caso de temperatura especificada na base.

Tabela 3. Fluxo total de massa $\psi_{máx}$ versus malha.

| malha | $\psi_{máx}$ | | |
|-------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| | Pr=0.7 Ra =10 ⁴ | Pr=0.7 Ra =10 ⁶ | Pr=7.0 Ra =10 ⁶ |
| 41x41 | 6.772 | 31.378 | 43.085 |
| 61x61 | 6.782 | 32.185 | 43.348 |
| 81x81 | 6.782 | 32.658 | 43.536 |

Nota-se que o refinamento da malha de 61x61 pra 81x81 pontos implica numa variação do valor de $\psi_{máx}$ de aproximadamente 1.5% para Rayleigh=10⁶ e Prandtl=0.7, sendo de apenas 0.5% quando Pr=7.0. Para Ra=10⁴, a variação é nula considerando 3 algarismos significativos.

A influência da malha no valor do número de Nusselt está ilustrada nas fig.3-9 a 3-12. Em todos os gráficos, Nusselt foi calculado ao longo do eixo x (Nu-1) e do eixo y (Nu-0). Tais valores correspondem aos definidos pelas eq.(2.25) e (2.26) como Nu_x e Nu_o respectivamente. A fig.3-9, para Ra=10⁴, Pr=0.7 e temperatura especificada na base, mostra que neste caso $Nu=Nu_x=Nu_o$ para qualquer valor do número de pontos da malha. Por outro lado, é também a que apresenta variação mais significativa no número de Nusselt quando a malha passa de 61x61 para 81x81 pontos.

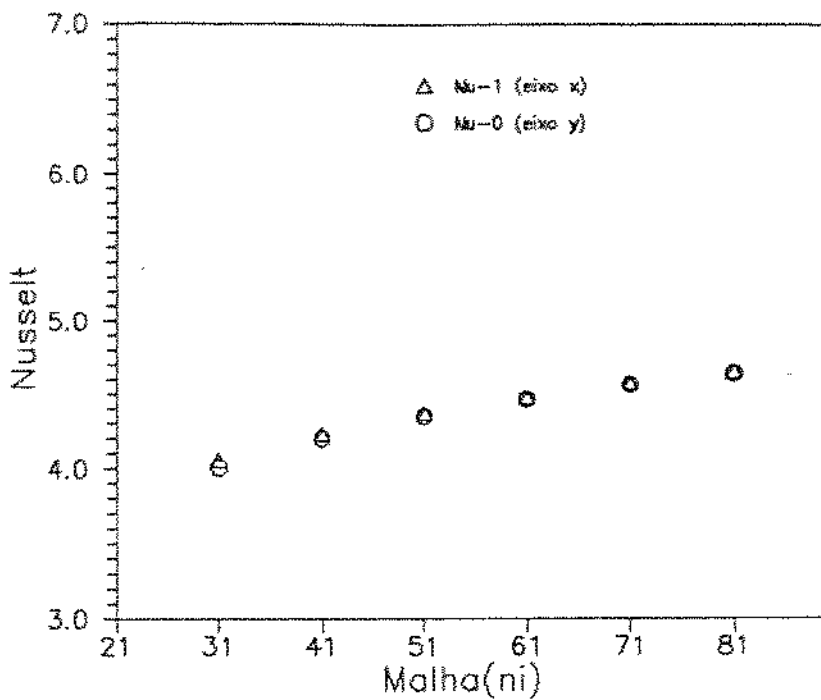


Fig.3-9. Número de Nu versus malha para $Ra=10^4$, $Pr=0.7$ e temperatura especificada na base.

As fig.3-10 e 3-11 ilustram os casos em que $Ra=10^6$ e $Pr=0.7$ e 7.0 respectivamente. Em ambos os exemplos, notar que Nu_x e Nu_y convergem para um único valor quando a malha é refinada. Nestes casos, em especial na fig.3-11, a variação de Nu é insignificante quando a malha é aumentada de 61×61 para 81×81 pontos.

Finalmente na fig.3-12 temos $Ra=10^6$, $Pr=0.7$ e fluxo de calor especificado na base. Neste caso, o número de Nusselt calculado ao longo do eixo y ($Nu-0$) serve como um indicador do realismo físico do resultado, pois Nusselt para fluxo especificado na base, designado no gráfico por " $Nu-q$ ", é determinado pela eq.(2.29). Vê-se que $Nu-0$ tende para o valor de $Nu-q$ quando a malha é refinada e que o valor de $Nu-q$ varia relativamente pouco com este refinamento.

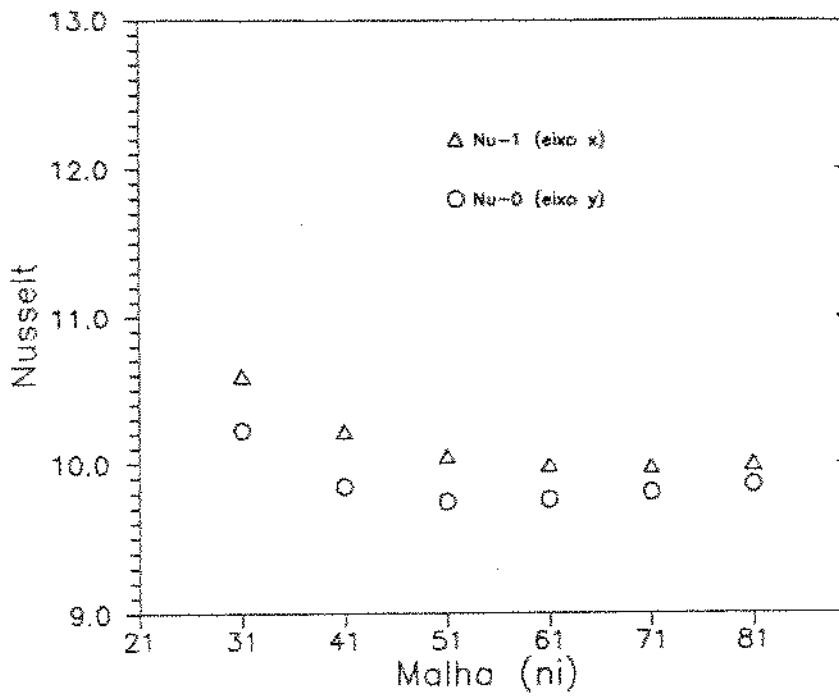


Fig.3-10. Número de Nu versus malha para $Ra=10^6$, $Pr=0.7$ e temperatura especificada na base.

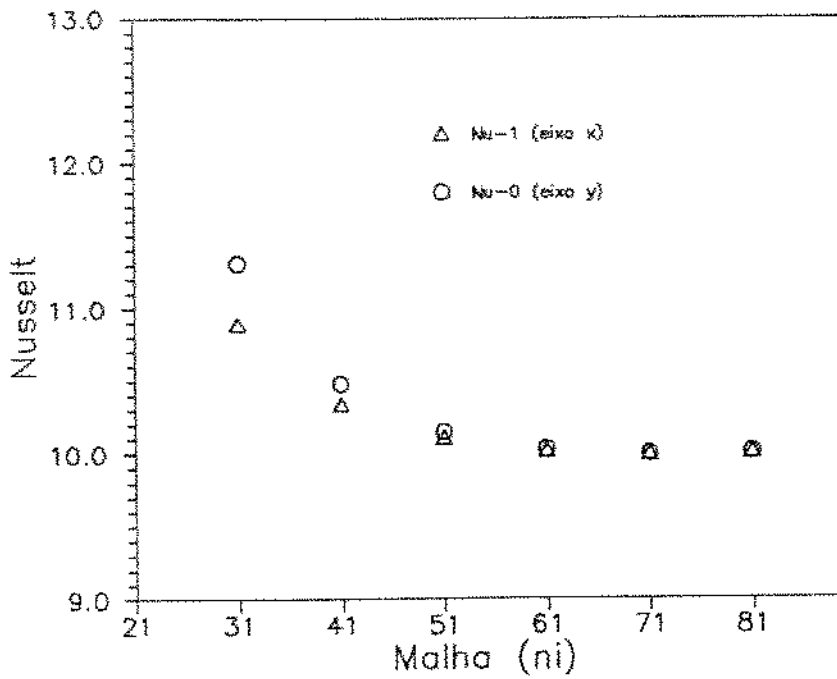


Fig.3-11. Número de Nusselt versus malha para $Ra=10^6$, $Pr=7.0$ e temperatura especificada na base.

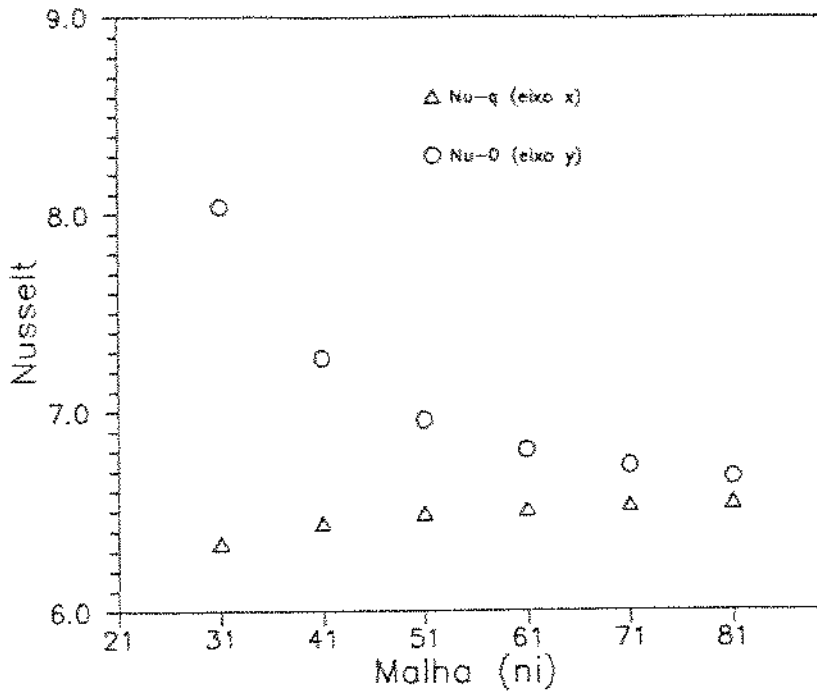


Fig.3-12. Número de Nusselt para $Ra=10^6$, $Pr=0.7$ e fluxo de calor especificado na base.

Com base neste conjunto de testes, optou-se pelo uso de uma malha uniforme com 61×61 pontos para todos os casos em que $H/L=1$. O refinamento da malha para 81×81 pontos significaria um aumento da ordem de duas vezes no tempo de CPU do computador para um ganho relativamente pequeno em termos de resultado numérico.

A CAVIDADE COM RAZÃO GEOMÉTRICA UNITÁRIA

No estudo das cavidades térmicas, a cavidade com razão geométrica $H/L=1$ é normalmente um ponto de partida importante para análise do escoamento e transferência de calor. As referências mais próximas ao problema em estudo tratam principalmente deste caso (Kimura e Bejan, 1985; Anderson e Lauriat, 1986; November e Nansteel, 1987). Neste capítulo esta cavidade é analisada, sendo que a cavidade alongada ($L/H > 1$) será vista no Capítulo 6.

A análise baseia-se nos resultados numéricos obtidos para números de Rayleigh na faixa de 10^8 a 10^9 e números de Prandtl 0.7 e 7.0. São consideradas condições de contorno de primeira e segunda espécies na base da cavidade, sendo mantidas inalteradas as condições de contorno nas outras paredes.

O escoamento e o campo de temperaturas são ilustrados em gráficos mostrando as isotermas e as linhas de função corrente constante, além de perfis de velocidade e temperatura nos planos médios horizontal e vertical da cavidade.

Comparações são feitas com uma cavidade sob condições de contorno próximas (Kimura e Bejan, 1985), de modo a ajudar a compreender o mecanismo físico da convecção natural no interior de cavidades fechadas aquecidas e resfriadas por paredes adjacentes. Também é verificada a influência da presença de uma parede rígida na face lateral direita da cavidade, isto é, no centro de simetria da cavidade inteira.

Finalmente, resultados globais como número de Nusselt e valor

máximo da função corrente são relacionados com o número de Rayleigh, sendo também analisada a influência do número de Prandtl. As correlações entre os resultados numéricos obtidos são comparadas com aquelas deduzidas a partir da hipótese de ocorrência de uma camada limite junto à parede vertical resfriada, permitindo um melhor entendimento do fenômeno e determinando uma escala para a velocidade e para o número de Nusselt.

4.1-O escoamento e o campo de temperaturas

A convecção natural é usualmente classificada em duas grandes categorias: externa ou interna. A convecção externa ocorre em espaços abertos, caracterizada pela presença de fronteiras sólidas interagindo com um reservatório de fluido em repouso à temperatura constante. A ocorrência de camadas limite junto às fronteiras sólidas não afeta o fluido em repouso fora da região da camada limite. Já no caso da convecção interna, que ocorre no interior de espaços confinados, a região central do escoamento está envolvida pela própria camada limite (Ostrach,1972). Esta região é afetada pela presença da camada limite e por outro lado também influi na camada limite. Esta interação entre camada limite e região central é inerente a todos problemas de convecção natural em espaços confinados, constituindo-se num problema fundamental que permanece sem uma solução geral. Existem situações em que mais de um padrão de escoamento surge na região central. Assim, subregiões de escoamento, tais como células secundárias, podem ocorrer nesta região (Ostrach,1988). Isto será observado em alguns casos do problema em estudo.

Outro aspecto importante a ser notado refere-se ao modo como o escoamento é gerado em convecção natural. Duas configurações básicas, que podem ocorrer conjuntamente, resumem as condições que acarretam o movimento convectivo:

— o gradiente de temperatura é normal ao vetor gravidade. Neste caso, o escoamento sempre ocorre, já que o campo de velocidades nulo não pode ser solução das equações diferenciais governantes ($\partial T / \partial x \neq 0$);

— o gradiente de temperatura é paralelo e tem o mesmo sentido do vetor gravidade. O movimento ocorre contra o efeito retardante da viscosidade a partir de um valor crítico da diferença de temperatura.

A fig.4-1 ilustra as duas configurações descritas. Note-se que no segundo caso o movimento ocorre devido a uma situação de

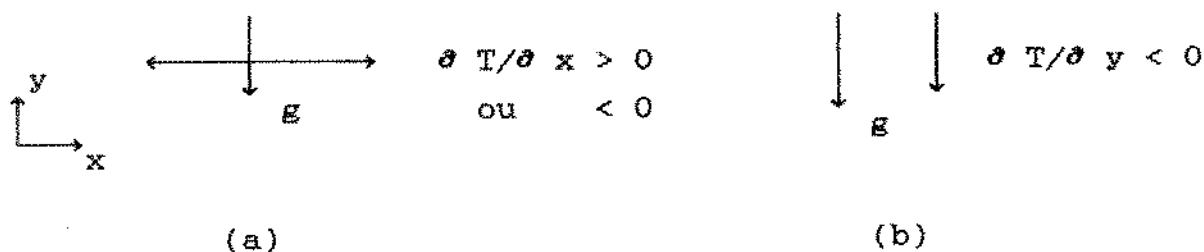


Fig.4-1.(a) Gradiente horizontal; (b) instabilidade térmica

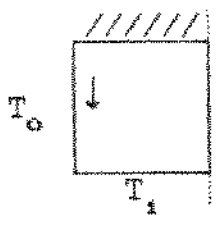
equilíbrio instável e não pela ausência de equilíbrio possível, já que o fluido em repouso pode ser uma solução das equações governantes (Tritton,1977). Dessa forma, o fluido mais pesado tende a descer e o fluido mais leve a subir. Esta estratificação ou gradiente instável de temperatura é chamada instabilidade térmica.

No problema em estudo, os dois modos ocorrem conjuntamente, pois a cavidade é aquecida pela base e resfriada pelos lados. Resultados numéricos obtidos para esta configuração serão apresentados e discutidos a seguir. Os gráficos e a discussão referem-se sempre à meia cavidade, já que o plano médio da cavidade inteira trata-se de um plano de simetria.

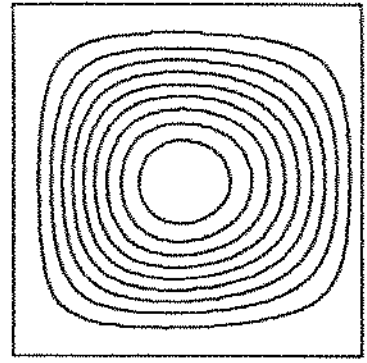
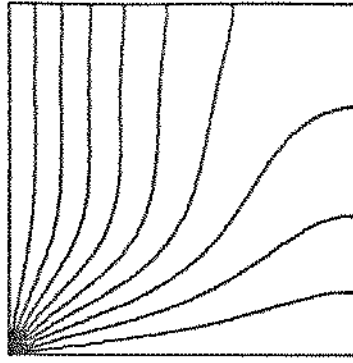
As fig.4-2 a 4-5 ilustram as isotermas e a função corrente nos casos estudados com razão geométrica $H/L = 1$. São traçadas 9 curvas de nível que dividem o intervalo $\Delta\phi = \phi_{\max} - \phi_{\min}$ em 10 partes iguais a partir do valor mínimo ϕ_{\min} até o valor máximo ϕ_{\max} . Assim, a primeira linha a partir de ϕ_{\min} corresponde ao valor $\phi_1 = \phi_{\min} + 0.1 \Delta\phi$, a segunda a $\phi_2 = \phi_{\min} + 0.2 \Delta\phi$, e assim sucessivamente até a última $\phi_9 = \phi_{\min} + 0.9 \Delta\phi$.

Os casos em que a temperatura é especificada na base estão mostrados nas fig. 4-2 e 4-3 para os valores de Prandtl 0.7 e 7.0 respectivamente. Nas fig 4-4 e 4-5 o fluxo de calor é especificado na base para os mesmos valores de Prandtl referidos anteriormente. Os números de Rayleigh correspondentes a cada exemplo estão anotados junto às figuras. Seu valor na última figura em cada caso corresponde ao valor máximo para o qual foi obtida convergência com o programa computacional desenvolvido.

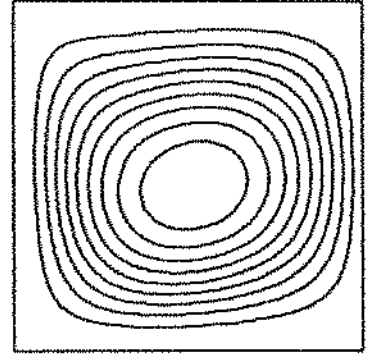
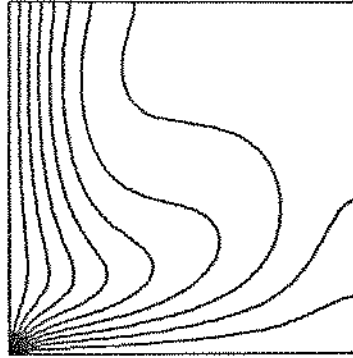
Inicialmente, quando $Ra=10^3$ (fig.4-2a), as isotermas afastam-se pouco da distribuição diagonalmente simétrica de temperaturas correspondente ao limite de condução pura. Com o aumento do número de Rayleigh e conseqüente incremento da circulação no interior da cavidade, o fluido mais quente tende a preencher todo o quadrante superior direito da cavidade, comprimindo as isotermas junto à parede vertical resfriada e junto



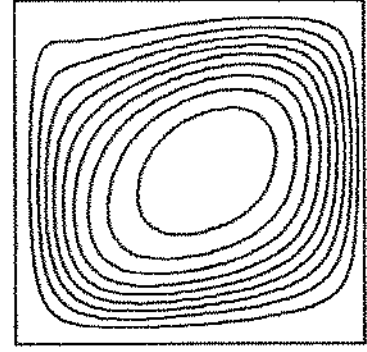
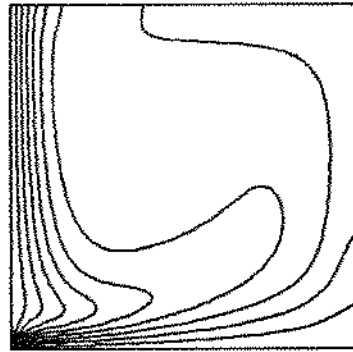
a) $Ra=10^3$



b) $Ra=10^4$



c) $Ra=10^5$



d) $Ra=10^6$

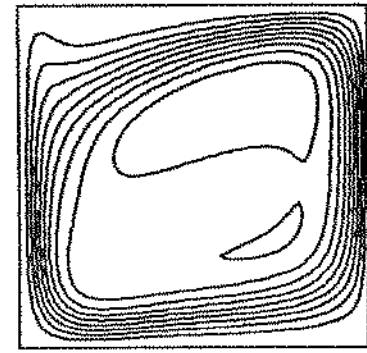
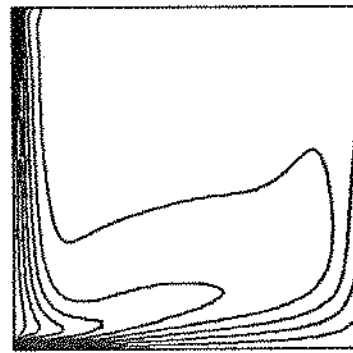
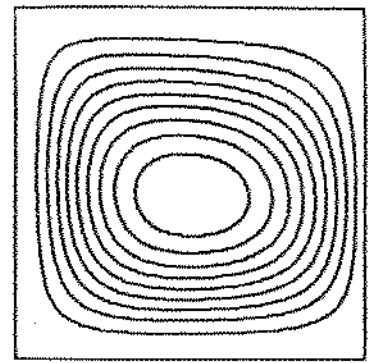
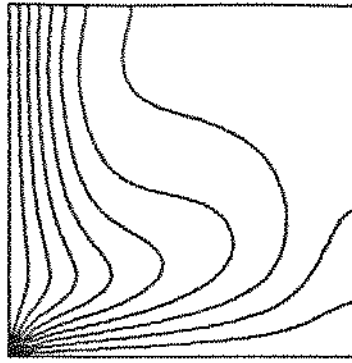
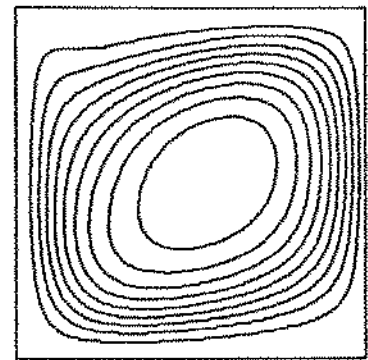
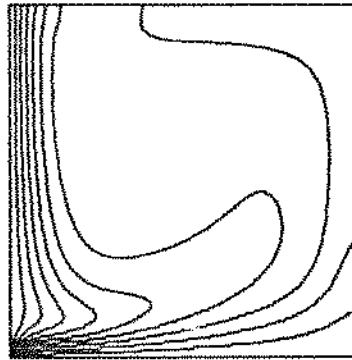


Fig.4-2. Isothermas e linhas de corrente para $Pr=0.7$ e temperatura especificada na base.

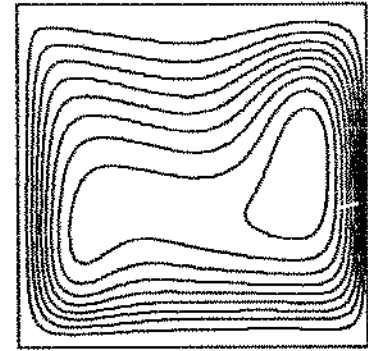
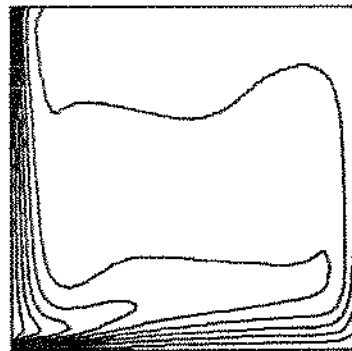
a) $Ra=10^4$



b) $Ra=10^5$



c) $Ra=10^6$



d) $Ra=10^7$

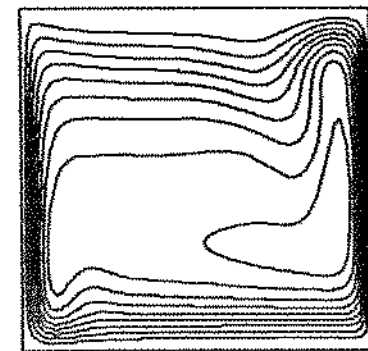
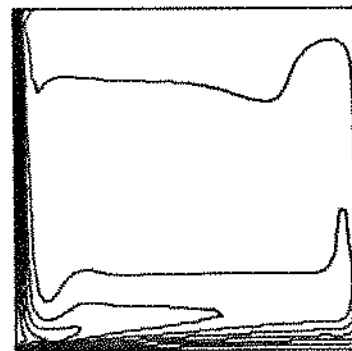
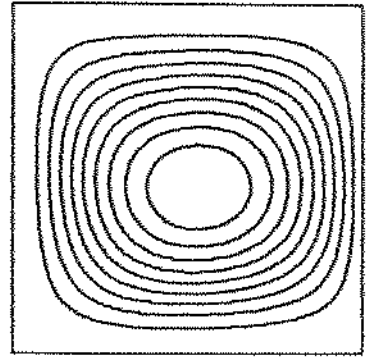
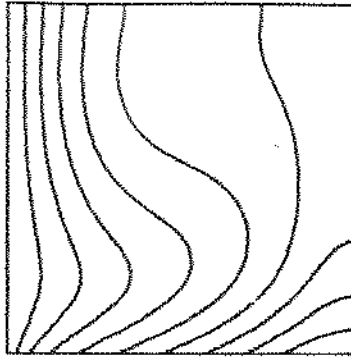
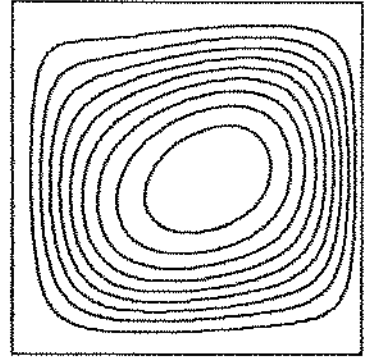
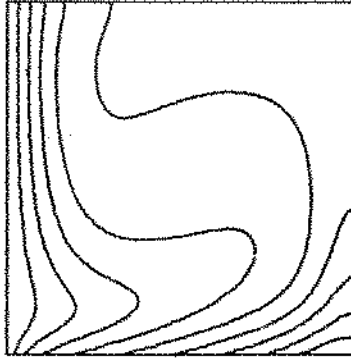


Fig.4-3. Isothermas e linhas de corrente para $Pr=7.0$ e temperatura especificada na base.

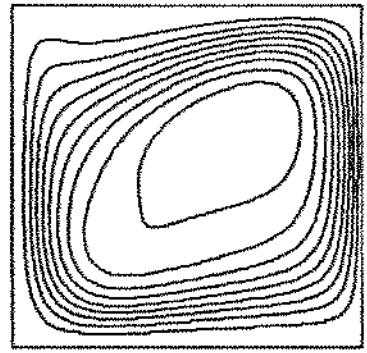
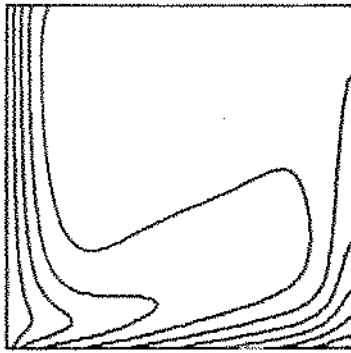
a) $Ra=10^4$



b) $Ra=10^5$



c) $Ra=10^6$



d) $Ra=10^7$

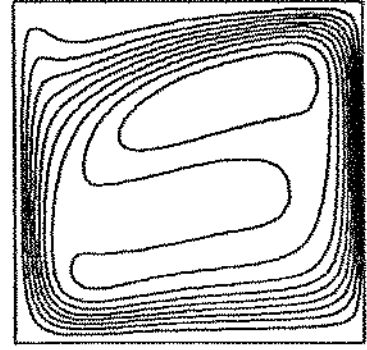
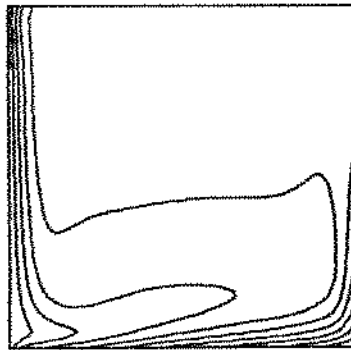
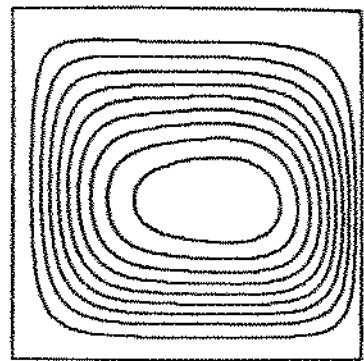
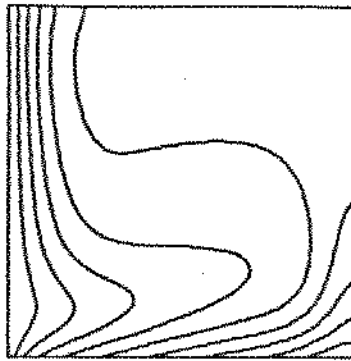
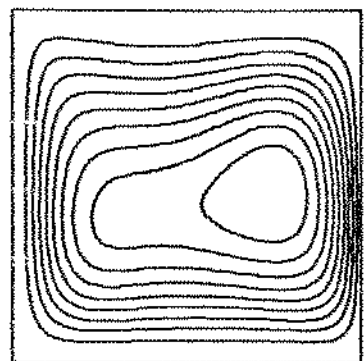
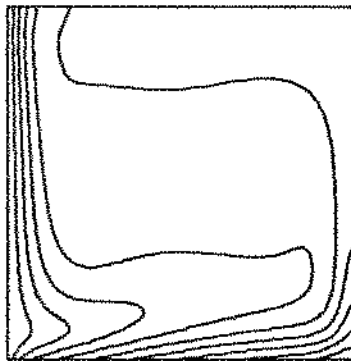


Fig.4-4. Isotermas e linhas de corrente para $Pr=0.7$ e fluxo de calor especificado na base.

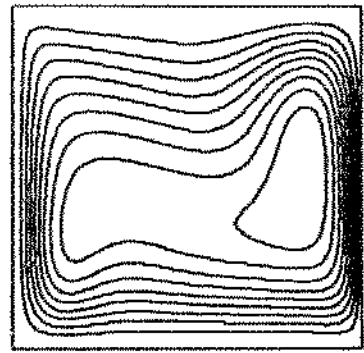
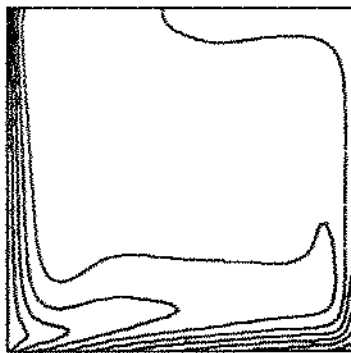
a) $Ra=10^5$



b) $Ra=10^6$



c) $Ra=10^7$



d) $Ra=10^8$

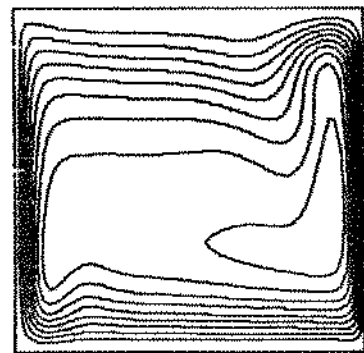
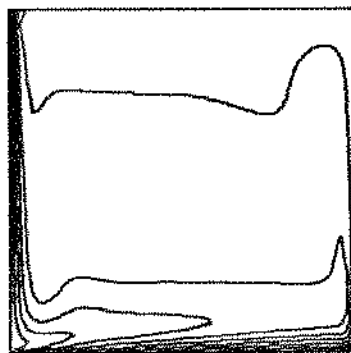
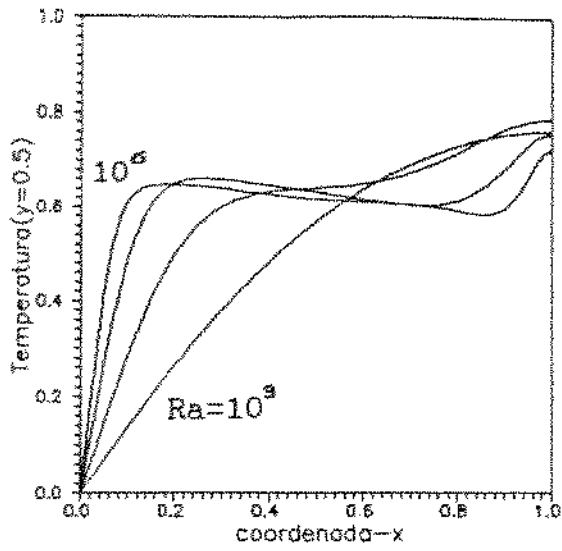


Fig.4-5. Isothermas e linhas de corrente para $Pr=7.0$ e fluxo de calor especificado na base.

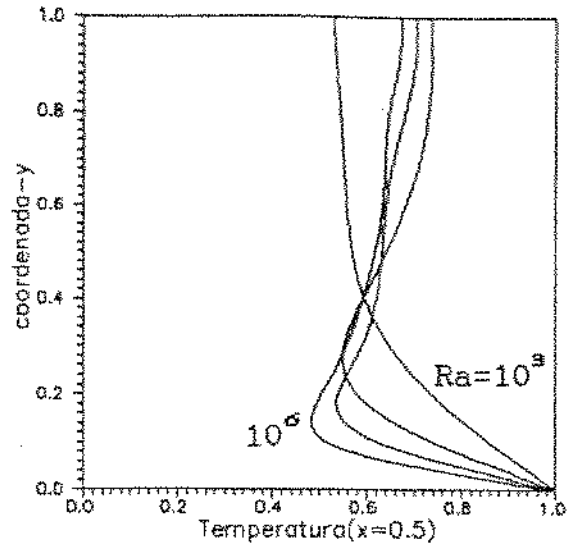
À base aquecida. Esta camada horizontal de fluido aquecido se mantém colada à base da cavidade apesar do gradiente térmico instável. As fig.4-6 e 4-7, respectivamente, mostram os perfis de temperatura nos planos médios da cavidade para temperatura e fluxo especificados na base. Com o aumento do número de Rayleigh, a temperatura tende a se uniformizar na região superior direita da cavidade, e os perfis vão ficando coincidentes, deixando os maiores gradientes localizados junto às paredes resfriada e aquecida. É oportuno lembrar que na escolha da temperatura de referência para exprimir a força de empuxo foi adotada a temperatura da parede fria, os perfis das figuras 4-6 e 4-7 são proporcionais à distribuição desta força nos planos médios da cavidade. A tendência dos perfis na fig.4-7 de ficarem coincidentes à medida que o número de Rayleigh cresce mostra a conveniência do uso do fluxo especificado q'' para adimensionalizar a temperatura no caso da condição de contorno de 2ª espécie.

A presença de fortes gradientes junto às paredes resfriada e aquecida, juntamente com a relativa uniformidade da temperatura fora destas regiões, sugere o desenvolvimento de camadas limite térmicas junto a estas paredes, como também foi notado por November e Nansteel(1987) e por Anderson e Lauriat(1986) em condições de contorno próximas e para números de Rayleigh maiores do que 10^5 .

No que diz respeito ao escoamento no interior da cavidade, este constitui-se, em todos os casos verificados, de uma única célula girando no sentido trigonométrico. Este padrão persiste independentemente do número de Rayleigh e da razão geométrica da cavidade, como será verificado posteriormente no Capítulo 6.

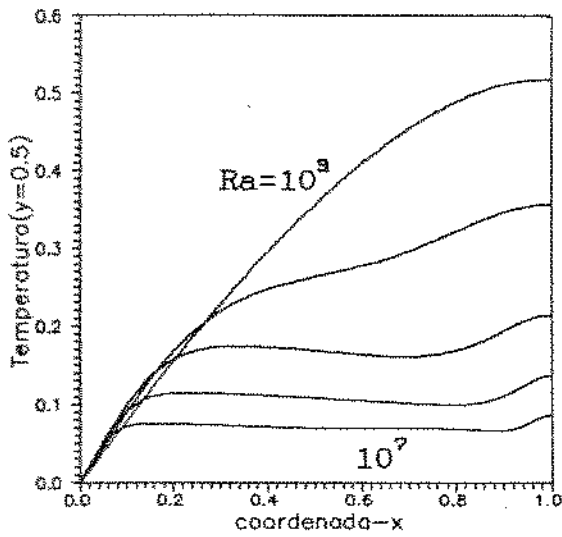


(a)

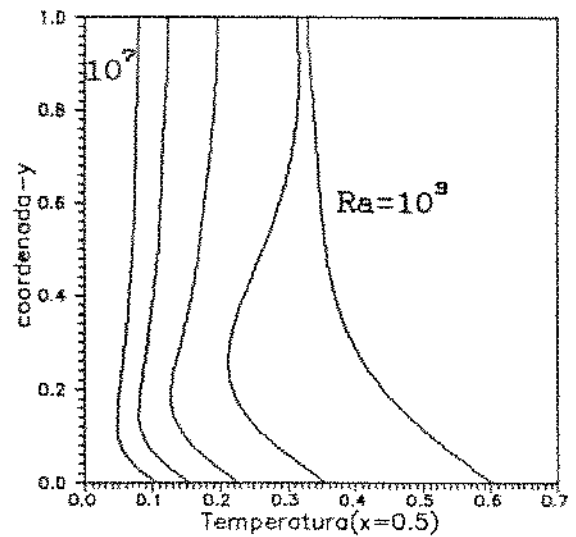


(b)

Fig. 4-6. Perfis de temperatura para $Pr=0.7$ e temperatura especificada na base. Planos (a) $y=0.5$; (b) $x=0.5$.



(a)



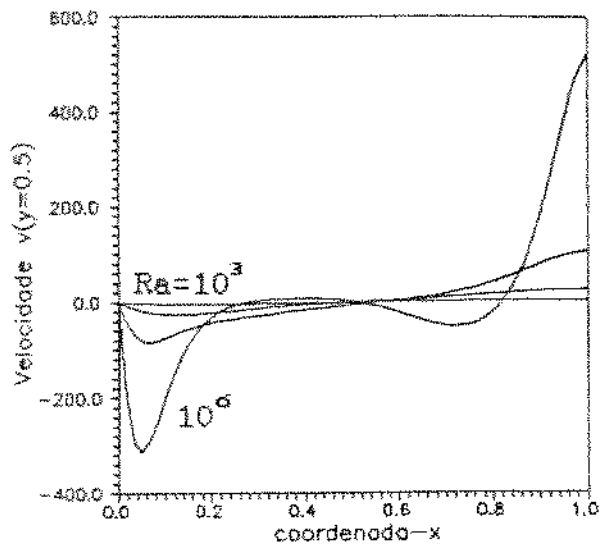
(b)

Fig. 4-7. Perfis de temperatura para $Pr=0.7$ e fluxo especificado na base. Planos (a) $y=0.5$; (b) $x=0.5$.

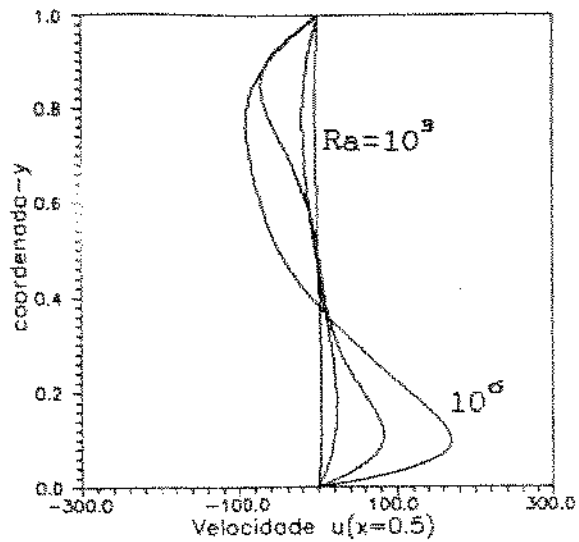
Quando $Pr=0.7$, o escoamento na região central é mais complexo e percebe-se o surgimento de uma pequena célula secundária quando o número de Rayleigh é igual a 10^6 (fig.4-2d). A mesma tendência pode ser notada pela forma das linhas da função corrente na fig.4-4d para o caso de fluxo especificado na base. Este fenômeno foi também observado por Chen et al.(1987) quando a circulação aumentava numa cavidade aquecida pelos lados e resfriada pelas paredes superior e inferior. Sendo a região central da cavidade uma região de baixa velocidade, circulações secundárias podem ocorrer em outros casos, apesar de não aparecerem nas figuras devido à sua pequena intensidade.

As curvas de nível da função corrente nas fig.4-2 a 4-5 mostram que para número de Rayleigh até 10^5 a circulação é distribuída de maneira relativamente uniforme em torno do centro geométrico da cavidade. Com o crescimento do número de Rayleigh a partir deste valor, o fluxo se concentra principalmente junto à parede resfriada e ao plano de simetria da cavidade inteira, como se vê pela compressão das linhas de função corrente constante nestas regiões. Este efeito é mais pronunciado para $Pr=7.0$ do que para $Pr=0.7$. Neste caso ($Pr=0.7$), a região central de baixa velocidade é mais extensa e o escoamento de alta velocidade está melhor distribuído na periferia da cavidade.

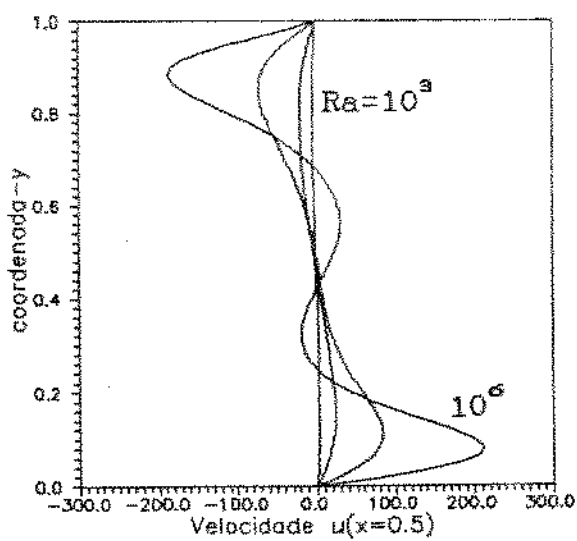
Os perfis das velocidades v e u nos planos médios $y=0.5$ e $x=0.5$ estão ilustrados nos gráficos da fig.4-8 para $Pr=7.0$ e temperatura especificada na base. Nota-se o aumento da velocidade v junto aos lados verticais da cavidade e seu valor próximo de zero na região central (fig.4-8a). As diferenças entre os padrões de escoamento na região central para $Pr=0.7-7.0$ podem ser vistas



(a)



(b)



(c)

Fig. 4-8. Perfis de velocidade no caso de temperatura especificada na base. (a) Plano $y=0.5$ e $Pr=7.0$; (b) plano $x=0.5$ e $Pr=7.0$ e (c) plano $x=0.5$ e $Pr=0.7$.

pela comparação das fig.4-8b e 4-8c, onde se notam os refluxos provocados pela circulação associada à formação da célula secundária no caso de $Pr=0.7$.

O escoamento no interior da cavidade, quando o número de Rayleigh aumenta, pode ser qualitativamente representado pela ilustração abaixo (fig.4-9).

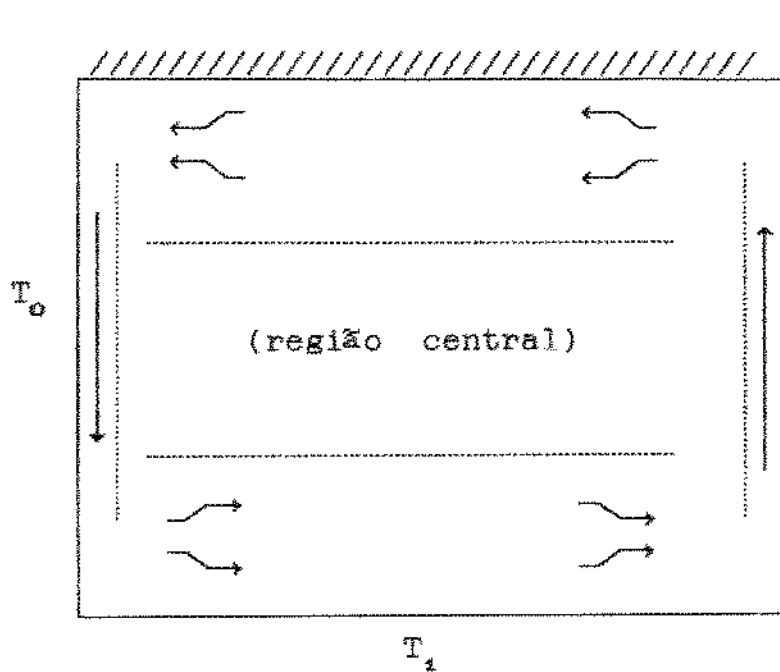


Fig.4-9. Representação qualitativa do escoamento no interior da cavidade quando $Ra \geq 10^6$.

O fluxo descendente do fluido resfriado é desacelerado após mudar de direção no canto inferior esquerdo e começar a percorrer a base aquecida da cavidade. A desaceleração é mais suave no caso de $Pr=0.7$ e mais abrupta para um fluido comparativamente mais

viscoso ($Pr=7.0$), como pode ser visto nas fig.4-2 a 4-5. Apesar da estratificação instável de temperatura, o fluxo se mantém junto à base aquecida até encontrar o plano de simetria da cavidade inteira. Neste percurso, o fluido se aquece e é acelerado à medida em que integra o jato ascendente no plano de simetria, para mudar de direção quando encontra a parede superior da cavidade. O fluxo aquecido é então desacelerado nesta região enquanto se aproxima da parede resfriada. Esta desaceleração é bem mais intensa para $Pr=7.0$, como se vê pelo espaçamento das linhas de corrente na parte superior da cavidade. Nesta região, a pressão devido ao movimento (P_m) induzida pelo empuxo e pelo jato ascendente é maior, o que ajuda a manter estável o escoamento da camada mais quente junto à base aquecida da cavidade. De fato, se considerarmos o escoamento aproximadamente paralelo na direção x ($v \cong 0$), exceto junto aos lados verticais da cavidade, da eq.(2.10) teremos

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_m}{\partial y} \cong g \beta (T - T_o) > 0 \quad (4.1)$$

Este equilíbrio se mantém até o fluido se aproximar da parede fria e então ser acelerado para baixo. Nesta região de baixa temperatura, o empuxo é mínimo e o excedente de pressão gerado na parte superior é responsável pela aceleração do fluido, já que a temperatura T_o foi adotada como referência na formulação da força de empuxo. Observando as linhas de corrente para $Pr=0.7-7.0$ na região próxima à parede fria vê-se que, no caso do fluido comparativamente menos viscoso ($Pr=0.7$), o jato descendente

arrasta para baixo a parte final da camada horizontal de alta velocidade que escoou junto ao teto da cavidade. Quando $Pr=7.0$ toda esta camada é arrastada para baixo, espaçando as linhas de corrente nesta região, como já foi comentado anteriormente. A maior espessura da camada limite hidrodinâmica junto à parede, neste caso em que $Pr>1$, é uma explicação para este comportamento.

De um modo geral, como se viu pelas curvas de nível e pelos perfis apresentados, no caso de razão geométrica $H/L=1$, a mudança da condição de contorno na base da cavidade praticamente não afeta a forma geral da distribuição de temperatura e do escoamento na cavidade.

4.2-Comparação com cavidades sob condições de contorno próximas

Duas situações próximas à cavidade em estudo foram analisadas. Em primeiro lugar foi considerada a presença de uma parede rígida no lugar do plano de simetria da cavidade inteira, o que corresponde à cavidade estudada por Anderson e Lauriat(1986) e marginalmente por November e Nansteel(1987). Em segundo lugar, foi feita uma comparação com a cavidade aquecida por um lado e resfriada pela base, estudada por Kimura e Bejan(1985).

No primeiro caso, observou-se que a presença da parede rígida tem pouca influência no número de Nusselt, apesar de reduzir um pouco a intensidade da circulação no interior da cavidade. Os valores de Nu e ψ_{max} estão mostrados na Tabela 1, que compara a cavidade com parede e a cavidade sem parede (ou com plano de simetria), para $Pr=0.7$ e temperatura especificada na base.

Tabela 1. Comparação das cavidades com e sem parede.

| Ra | c/parede | | s/parede | |
|--------|----------|--------------|----------|--------------|
| | Nu | ψ_{max} | Nu | ψ_{max} |
| 10^3 | 3.43 | 0.94 | 3.45 | 1.09 |
| 10^4 | 4.43 | 6.38 | 4.48 | 6.78 |
| 10^5 | 6.30 | 18.40 | 6.34 | 19.16 |
| 10^6 | 9.81 | 30.37 | 9.87 | 32.18 |

Com exceção do perfil de velocidades junto à parede rígida, o campo de temperaturas e o escoamento como um todo são pouco afetados pela presença da parede, como ilustram os perfis de velocidade e temperatura da fig.4-10. A comparação destes perfis com aqueles das fig.4-8a e 4-5a mostra que as diferenças de fato se restringem à região junto à parede rígida, onde a velocidade v é nula devida à condição de não deslizamento.

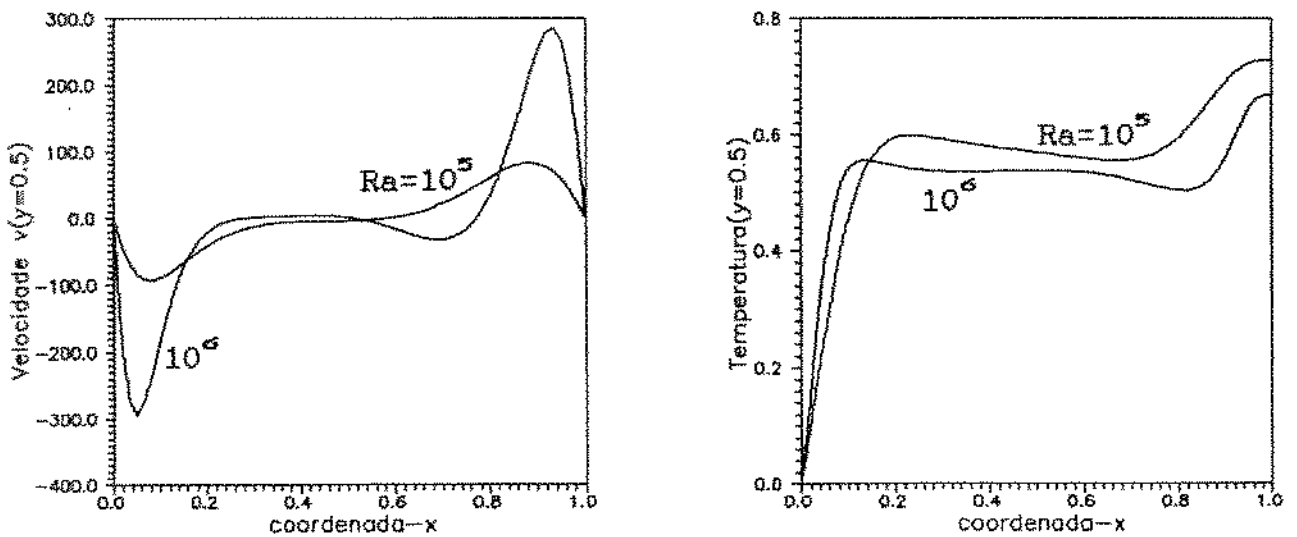


Fig. 4-10. Perfis de velocidade e temperatura no plano $y=0.5$ para a cavidade com parede e $Pr=7.0$.

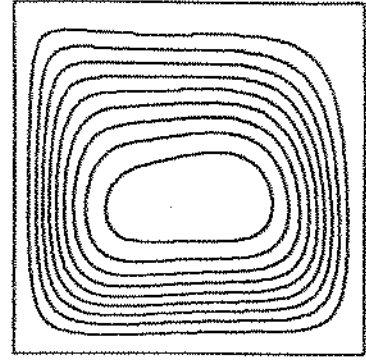
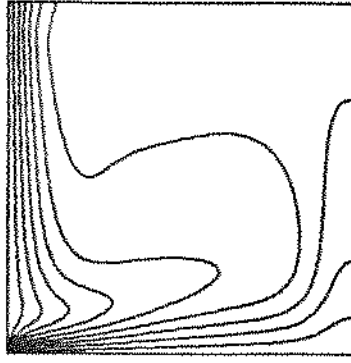
No segundo caso, foi feita uma análise comparativa entre a cavidade em estudo, considerada com uma parede rígida no lugar do plano de simetria para melhor comparação, e uma cavidade resfriada pela base e aquecida por um dos lados. Estas duas cavidades, que serão chamadas de cavidade 0-1 e cavidade 1-0 respectivamente, estão ilustradas na fig.4-11.



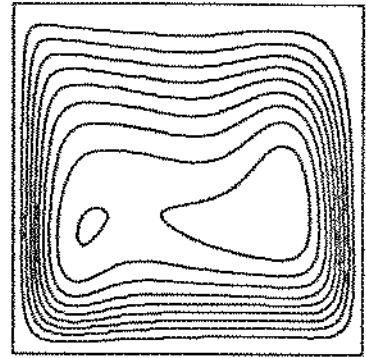
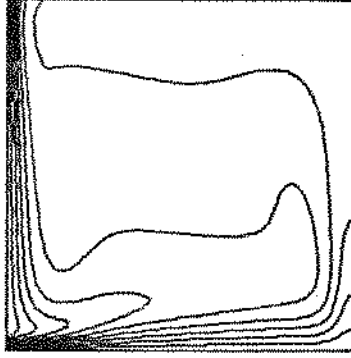
Fig.4-11.(a) Cavidade 0-1; (b) cavidade 1-0.

A cavidade 1-0 foi estudada por Kimura e Bejan (1985) e a fig.4-12 mostra as curvas de nível da função corrente e da temperatura, no caso de $Pr=7.0$ e $Ra=10^5-10^6$, para as duas cavidades. Na cavidade 1-0, o fluido é acelerado e aquecido junto ao canto inferior esquerdo para depois desacelerar enquanto penetra na região superior da cavidade. Esta região fica totalmente preenchida pelo fluido quente aprisionado pelas paredes adiabáticas adjacentes. Com o aumento de Rayleigh, as isotermas se comprimem para baixo e o fluido aquecido desce lentamente até encontrar a base resfriada da cavidade (fig.4-12b). Os gráficos da fig.4-13 ilustram estas observações, mostrando os perfis da velocidade v e da temperatura no plano $y=0.5$. Estes perfis são totalmente distintos daqueles mostrados na fig.4-10 correspondentes à cavidade 0-1. Neste caso, como já foi comentado,

$Ra = 10^5$

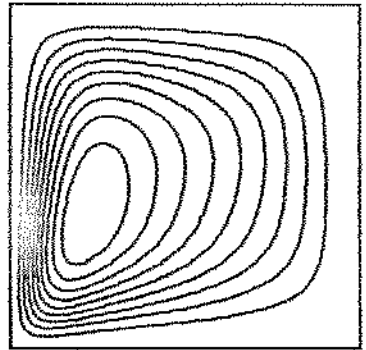
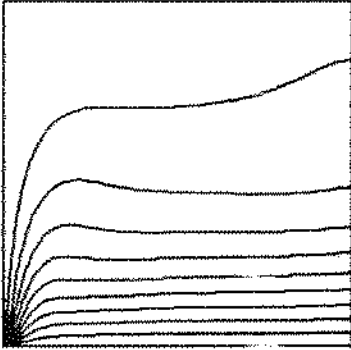


$Ra = 10^6$

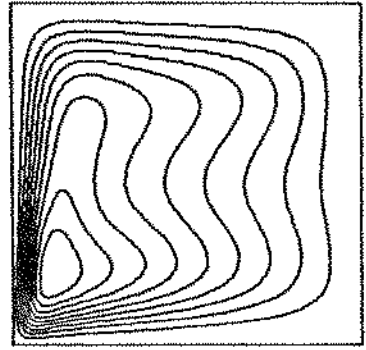
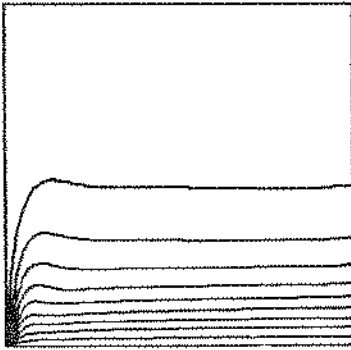


a) Cavidade 0-1.

$Ra = 10^5$



$Ra = 10^6$



b) Cavidade 1-0.

Fig.4-12. Comparação de isothermas e linhas de corrente entre as cavidades 0-1 e 1-0.

o movimento convectivo é gerado pela combinação de um gradiente horizontal e de uma estratificação instável de temperatura. Diferentemente, na cavidade 1-0 temos o gradiente horizontal imposto pela parede aquecida e uma estratificação estável de temperatura a partir da base resfriada, como bem ilustram as isotermas da fig. 4-12b. O escoamento fica mais localizado na região da parede aquecida, que é onde age com maior intensidade a força de empuxo que acarreta o movimento. Na região central, o empuxo age contra o movimento descendente, ao contrário da cavidade 0-1 onde o empuxo é máximo nesta região e oferece mínima resistência ao fluido descendente junto à parede resfriada, criando duas regiões de máxima velocidade. Como consequência temos que a intensidade da circulação no interior da cavidade 1-0 é menor e o número de Nusselt evolui mais suavemente com o aumento

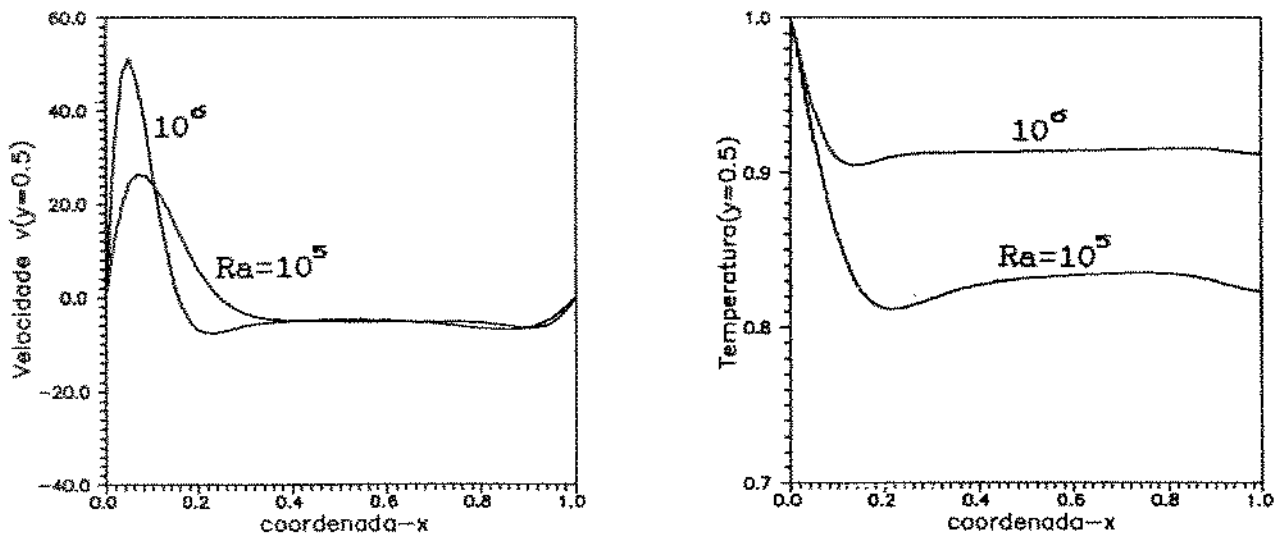


Fig. 4-13. Perfis de velocidade e temperatura no plano $y=0.5$ para a cavidade 1-0 ($Pr=7.0$).

de Rayleigh, em comparação com a cavidade 0-1. Esta diminuição do fluxo no interior da cavidade foi observada por Ostrach e Raghavan(1979), quando da imposição de um gradiente vertical estabilizador de temperatura à clássica cavidade aquecida por um lado e resfriada pelo outro. A fig.4-14 ilustra o descrito. Observa-se também que para Rayleigh mais baixo ($Ra=10^3$) as cavidades 0-1 e 1-0 tendem a coincidir, já que ambas se aproximam do limite diagonalmente simétrico de condução pura. Para a cavidade 0-1 que, como foi visto, é praticamente idêntica à cavidade em estudo, o escoamento é distribuído de maneira mais uniforme em toda extensão da cavidade quando comparado à cavidade 1-0, que tende a concentrar o fluxo junto à parede vertical aquecida.

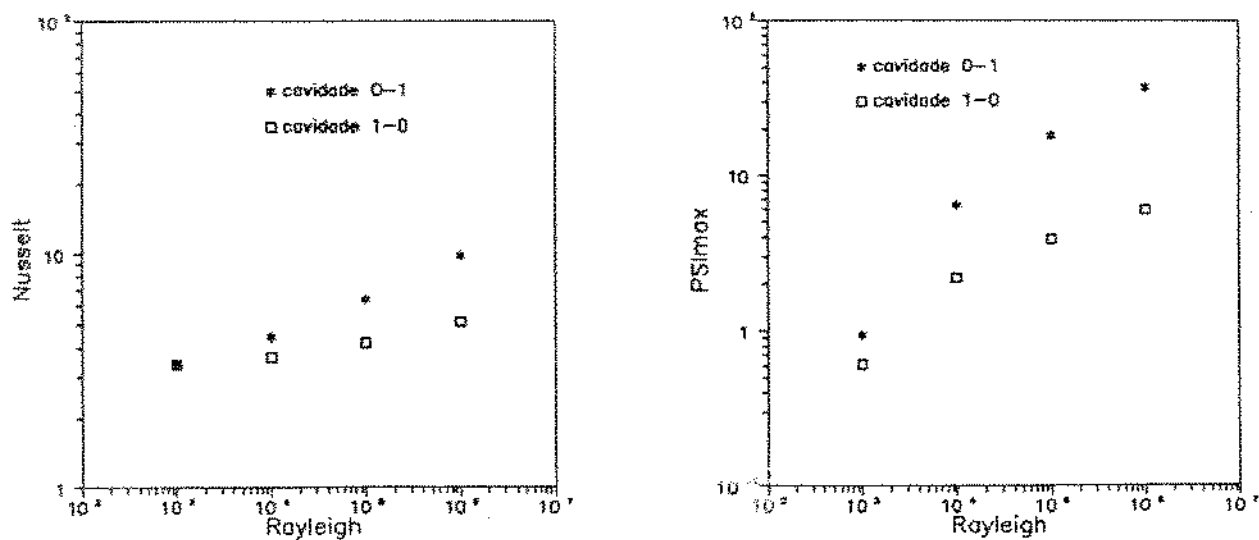


Fig. 4-14. Número de Nusselt e Ψ_{max} versus Rayleigh para as cavidades 0-1 e 1-0.

4.3-Escalas e resultados

Uma análise similar àquela que é usualmente feita para a camada limite de convecção natural numa parede vertical imersa num reservatório de fluido em repouso (Bejan,1984) será aplicada à cavidade em estudo. Cronologicamente falando, a viabilidade desta análise foi verificada a partir dos resultados numéricos obtidos.

Seja δ_T a espessura da camada limite térmica junto à parede vertical resfriada da cavidade, como mostra a fig.4-15.

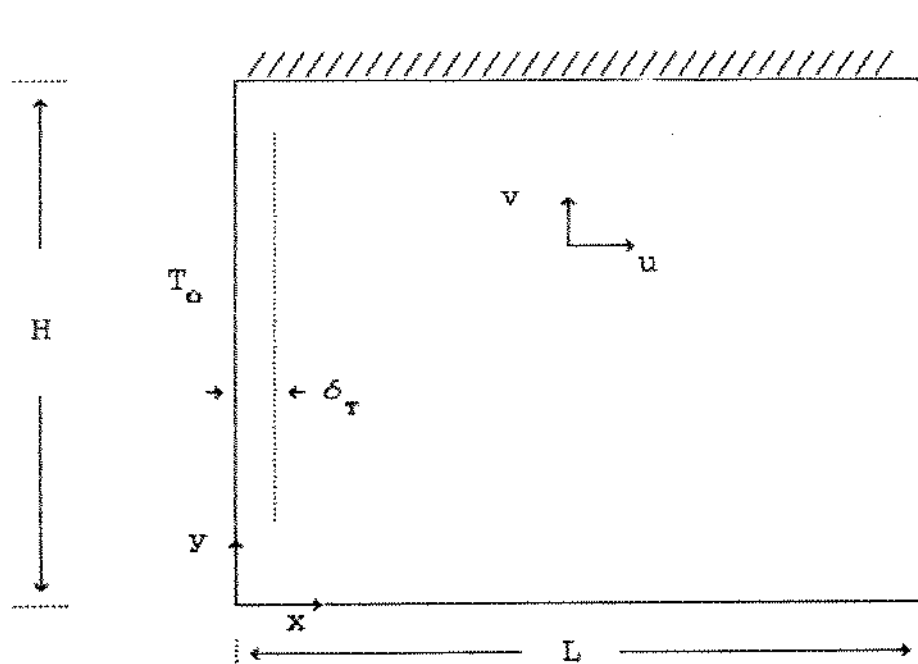


Fig.4-15. Ilustração da espessura da camada limite térmica.

Considerando que as variações significativas de temperatura ocorrem na região $\delta_T \times H$ e que a espessura δ_T da camada limite

térmica é muito pequena quando comparada às dimensões da cavidade, teremos

$$\delta_T \ll H \leq L \quad (4.2)$$

$$x \simeq \delta_T \quad (4.3)$$

$$y \simeq H \quad (4.4)$$

onde o símbolo " \simeq " significa "da ordem de". Aplicando as escalas acima à equação da energia (2.4) e lembrando que na região da camada limite a condução horizontal deve ser da mesma ordem da convecção vertical, temos que

$$v \frac{\Delta T}{H} \simeq \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \quad (4.5)$$

onde ΔT é da ordem de grandeza da diferença de temperatura na região da camada limite. No caso de temperatura especificada na base, ΔT é da mesma ordem da diferença entre as temperaturas especificadas nas paredes aquecida e resfriada.

Substituindo o valor de v tirado da eq.(4.5) na equação da variação da quantidade de movimento (2.10), aplicando as escalas e fazendo o termo do atrito viscoso de ordem unitária, chegaremos em

$$\frac{1}{Pr} \quad , \quad 1 \quad \simeq \quad \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot \delta_T^4}{\nu \alpha H} \quad (4.6)$$

(inércia) (atrito) (empuxo)

Neste caso trata-se de escolher se o empuxo será balanceado pela inércia ou pelo atrito, já que o empuxo será sempre um dos termos dominantes em convecção natural. Note que na região da camada limite, de acordo com a temperatura de referência adotada, a aceleração para baixo se deve a um gradiente de pressão vertical da ordem de $g\beta\Delta T$ (eq.4.1), que corresponde ao termo do empuxo na eq.(4.6). Para números de Prandtl grandes ou mesmo de ordem unitária ($Pr \geq 1$), como nos casos do ar, água e óleos em geral, o balanço se dá entre o empuxo e o atrito (Gill,1966; Patterson e Imberger,1980; Bejan,1984).

Dessa forma, resolvendo a eq.(4.6) para δ_T , obtemos

$$\delta_T \simeq H \cdot Ra_H^{-1/4} \quad (4.7)$$

e, substituindo na eq.(4.5)

$$v \simeq \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/2} \quad (4.8)$$

onde $Ra_H = g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot H^3 / \nu \alpha$.

Para determinar o valor máximo da função corrente ψ_{max} , ou seja, a intensidade da circulação total do fluido no interior da cavidade, temos que

$$\psi_{max} \simeq v \cdot \delta \quad (4.9)$$

onde δ é a espessura da camada limite hidrodinâmica junto à parede resfriada. O balanço entre inércia e atrito nesta região, admitindo-se que $\delta > \delta_T$ no caso de $Pr \geq 1$, fornece a relação

$$\delta \approx \delta_T \cdot Pr^{1/2} \quad (4.10)$$

coerentemente com a hipótese admitida. Substituindo (4.10) em (4.9), teremos

$$\psi \approx \alpha Pr^{1/2} Ra_H^{1/4} \quad (4.11)$$

O número de Nusselt, como foi definido na eq.(2.23), é dado por

$$Nu = \frac{Q}{k (T_1 - T_0)} \quad (4.12)$$

onde Q é a taxa total de calor transferido pela parede vertical da cavidade que, em termos de ordem de grandeza, é escrita como

$$Q \approx k H \frac{\Delta T}{\delta_T} \quad (4.13)$$

Substituindo este valor na eq.(4.12) e sabendo que $\Delta T \approx (T_1 - T_0)$, teremos para o número de Nusselt a relação

$$Nu \approx \frac{H}{\delta_T} \approx Ra_H^{1/4} \quad (4.14)$$

Quando o fluxo de calor é especificado na base da cavidade, deve-se estabelecer qual a ordem de grandeza da diferença de temperatura ΔT na camada limite neste caso (Bejan, 1987; Kimura e Bejan, 1984). Desde que a taxa total de calor a ser transferida é conhecida, o balanço entre o calor fornecido ao longo da base da cavidade (de comprimento L) e o calor perdido pela parede vertical (de altura H) é dado por

$$q'' \cdot L \approx k H \frac{\Delta T}{\delta_T} \quad (4.15)$$

logo

$$\Delta T \approx \frac{q'' \cdot \delta_T}{k} \left(\frac{L}{H} \right) \quad (4.16)$$

Substituindo o valor de ΔT recém determinado na eq.(4.7)

$$\delta_T \approx H \left(\frac{L}{H} \right)^{-1/5} Ra_H^{-1/5} \quad (4.17)$$

onde $Ra_H = g\beta q'' H^4 / \nu \alpha k$ é agora o número de Rayleigh baseado no fluxo de calor. Podemos, a partir da eq.(4.17), determinar as

escalas para v , ψ_{\max} e Nu , no caso de fluxo de calor conhecido, substituindo δ_T nas respectivas equações anteriormente vistas, chegando então a

$$v \approx \frac{\alpha}{H} \left(\frac{L}{H}\right)^{2/5} Ra_H^{2/5} \quad (4.18)$$

$$\psi_{\max} \approx \alpha \left(\frac{L}{H}\right)^{1/5} Pr^{1/2} Ra_H^{1/5} \quad (4.19)$$

$$Nu \approx \left(\frac{L}{H}\right)^{1/5} Ra_H^{1/5} \quad (4.20)$$

Observando a condição (4.2) em conjunto com as eq.(4.7) e (4.17), deduzimos que os critérios para o regime de camada limite são expressos, para o caso de temperatura conhecida na base, por

$$Ra_H^{1/4} \gg 1 \quad (4.21)$$

$$\left(\frac{H}{L}\right) \ll Ra_H^{1/4} \quad (4.22)$$

Quando o fluxo de calor é especificado na base, os critérios ficam

$$\left(\frac{L}{H}\right)^{1/5} Ra_H^{1/5} \gg 1 \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{H}{L}\right) \ll Ra_H^{1/5} \quad (4.24)$$

O significado dos sinais "«" e "»" deve ser visto com cuidado em cada caso, sendo em princípio interpretados de um ponto de vista

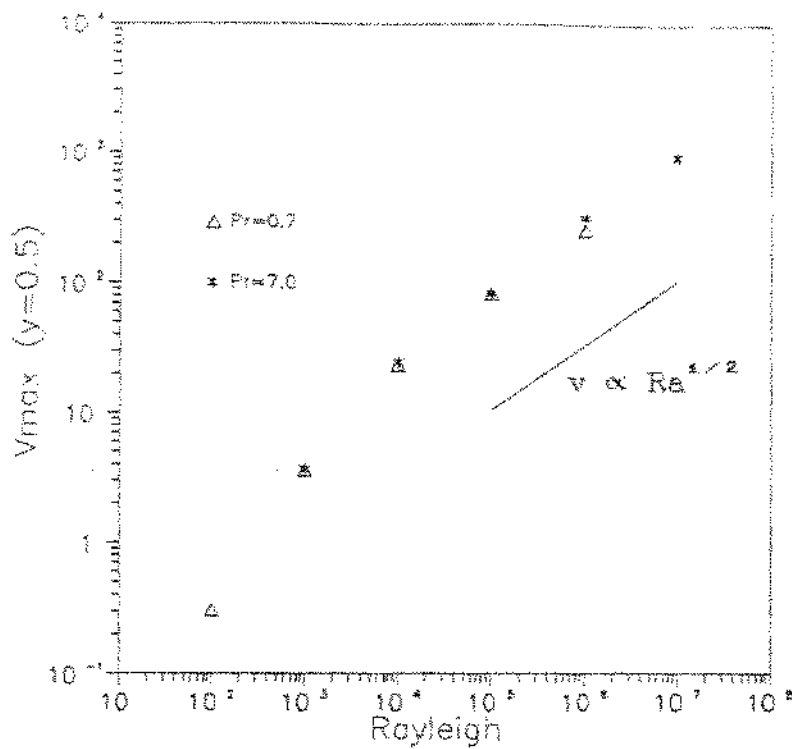
mais qualitativo do que quantitativo, indicando que o número de Rayleigh deve ser elevado e que a razão geométrica H/L não deve ser grande (cavidade alongada verticalmente).

Para verificar a validade das escalas deduzidas para a cavidade em estudo, foram traçados gráficos que juntamente com os resultados numéricos obtidos ilustram a lei de potência correspondente à escala de cada caso.

A fig.4-16 mostra em gráficos a velocidade v_{max} junto à parede resfriada no plano $y=0.5$. O primeiro gráfico (fig.4-16a) refere-se à condição de contorno em que a temperatura é especificada na base da cavidade; e o segundo (fig.4-16b), ao caso de fluxo especificado. Os valores para $Pr=0.7-7.0$ estão ilustrados por símbolos diferentes nas figuras. Estas observações referentes às condições de contorno e número de Prandtl são válidas para todos os gráficos apresentados neste item.

Percebe-se que os valores obtidos numericamente tendem a seguir a mesma lei de potência prevista na análise de escala para números de Rayleigh mais elevados, neste caso para $Ra_H \geq 10^5$. A mesma tendência pode ser notada nos gráficos da fig.4-17, que mostram o valor de ψ_{max} versus o número de Rayleigh. Vê-se nestes gráficos que a influência do número de Prandtl é mais pronunciada para $Ra_H \geq 10^6$, embora seja bem menor do que o previsto pelas eq.(4.11) e (4.19). Finalmente, os valores do número de Nusselt em função do número de Rayleigh são apresentados nos gráficos da fig.4-18. Quando a temperatura é especificada na base, a lei de potência $Nu \propto Ra_H^{1/4}$ é observada de forma mais precisa apenas quando $Ra_H \geq 10^5$. Por outro lado, no caso de fluxo de calor conhecido, a relação $Nu \propto Ra_H^{1/5}$ é obedecida em praticamente todo o

(a) Temperatura especificada.



(b) Fluxo especificado.

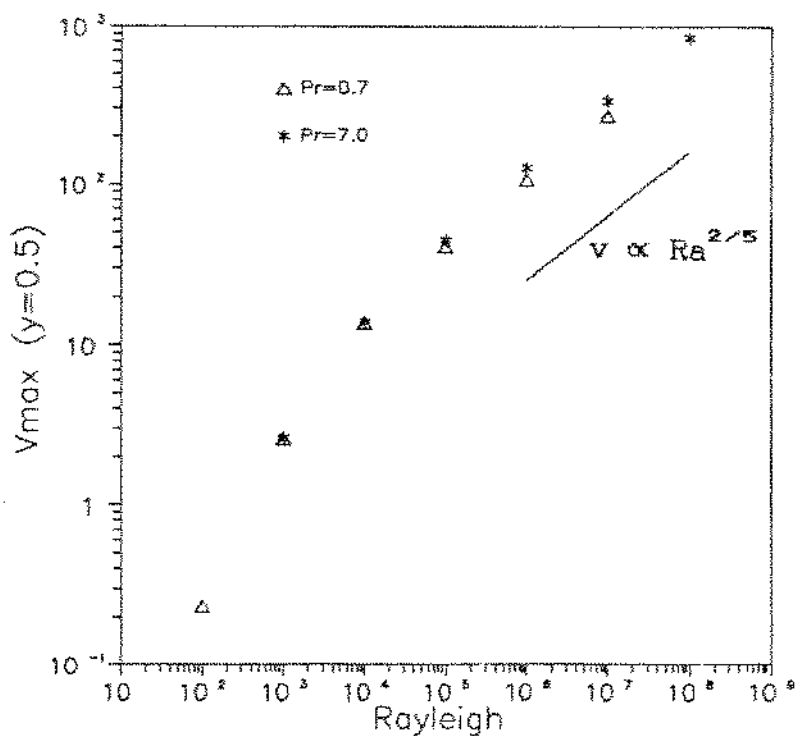
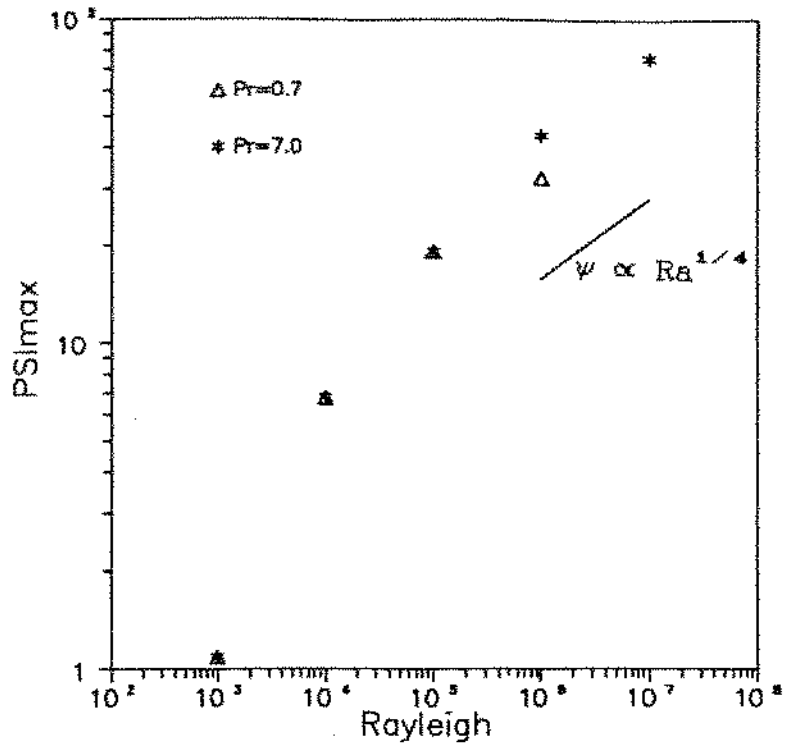


Fig. 4-16. Velocidade máxima junto à parede resfriada, na posição $y=0.5$, versus número de Rayleigh.

(a) Temperatura especificada.



(b) Fluxo especificado.

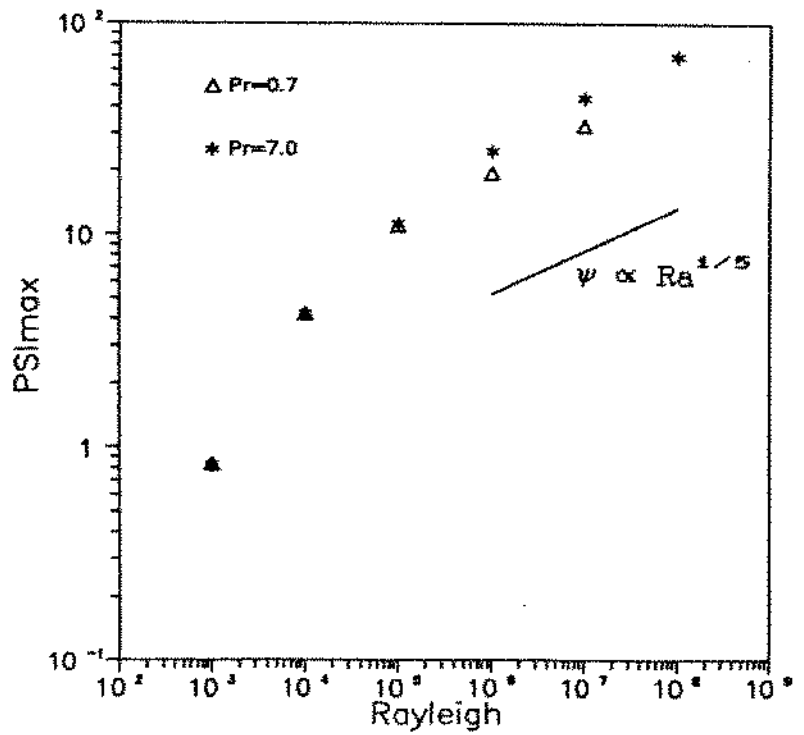
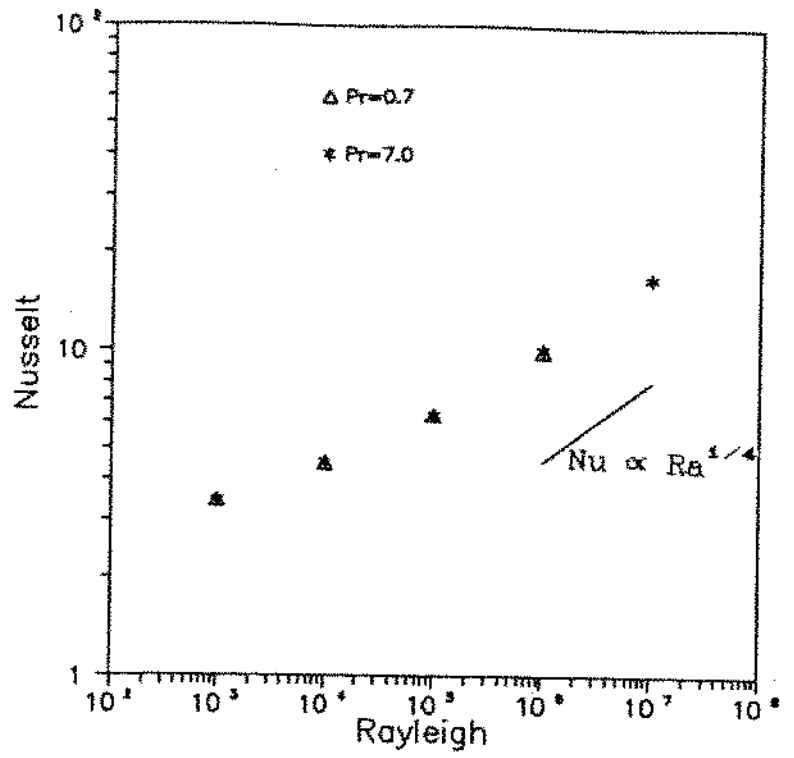


Fig. 4-17. Valor máximo da função corrente ψ_{max} versus o número de Rayleigh.

(a) Temperatura especificada.



(b) Fluxo especificado.

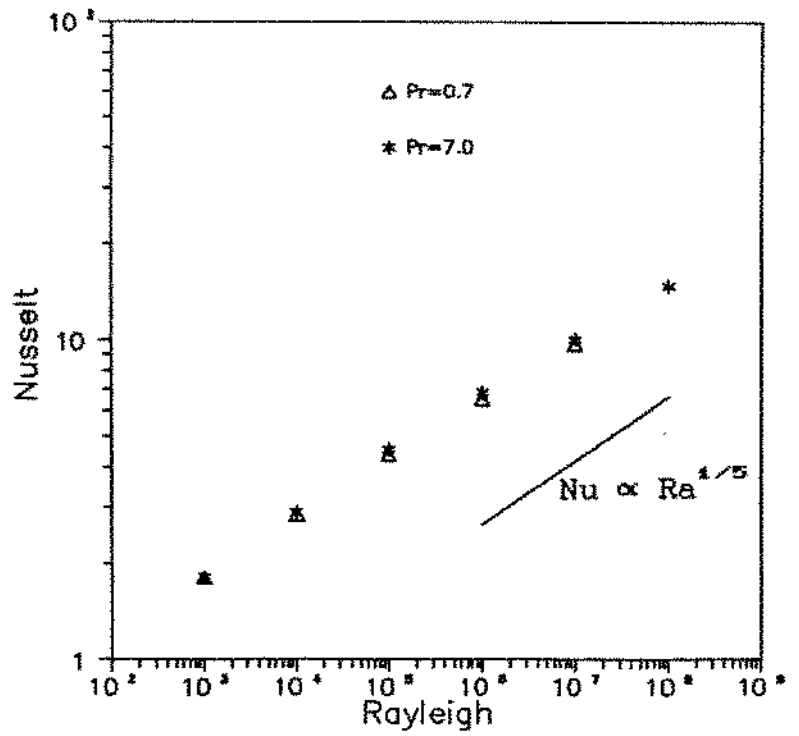


Fig. 4-18. O número de Nusselt versus número de Rayleigh.

intervalo $10^3 < Ra_H < 10^6$.

Todos os gráficos apresentados neste capítulo referem-se a cavidades com razão geométrica $H/L=1$. Os casos em que $H/L < 1$ serão vistos no Capítulo 6, assim como a verificação das escalas aqui apresentadas. Note-se que a razão geométrica surgiu nas escalas apenas no caso de fluxo de calor especificado. Para temperatura conhecida na base, a influência da razão H/L será verificada posteriormente.

A aplicação de escalas e deduções semelhantes àquelas utilizadas para convecção natural externa em paredes verticais à cavidade em estudo deve ser vista com atenção. A Tabela 2 mostra uma comparação entre o número de Nusselt calculado para o presente problema, quando a temperatura é conhecida na base e $Pr=0.7$, e o Nusselt global para uma parede vertical isotérmica num reservatório de fluido em repouso, obtido da solução por similaridade das equações da camada limite (Schlichting, 1968).

Tabela 2. Comparação entre valores de Nusselt.

| Ra_H | Nusselt global | |
|--------|----------------|-----------------|
| | cavidade | parede vertical |
| 10^3 | 3.45 | 2.90 |
| 10^4 | 4.47 | 5.16 |
| 10^5 | 6.34 | 9.18 |
| 10^6 | 9.87 | 16.32 |

Muito embora da mesma ordem de grandeza e seguindo leis de potência similares em algumas faixas de valores de Rayleigh, a diferença entre os resultados é muito grande, chegando o Nusselt

da parede a ser quase o dobro quando $Ra_H = 10^6$. A comparação mostra o perigo de se utilizar resultados de problemas "similares" (Ostrach, 1988), ou de se dividir um problema numa combinação de casos mais simples independentes. De fato, resultados dispares também foram obtidos quando comparou-se o Nusselt da cavidade com o Nusselt global para uma placa plana isotérmica, de comprimento L igual à base da cavidade, paralela a uma corrente livre com velocidade uniforme igual à u_{max} no plano $x=0.5$ da cavidade.

A CAVIDADE ALONGADA HORIZONTALMENTE

A cavidade alongada horizontalmente, isto é, a cavidade com razão geométrica $H/L < 1$, é analisada a seguir para os casos de temperatura e fluxo de calor especificados na base. Por conveniência, será adotada a razão L/H ao invés da razão H/L .

Para este tipo de cavidade é adotada uma malha irregular na direção x , refinada nos extremos da cavidade, e são realizados testes para determinar a forma desta malha.

Os resultados numéricos são obtidos, na maior parte dos casos, para valores do número de Rayleigh na faixa de 10^3 a 10^6 e valor do número de Prandtl igual a 0.7. A razão L/H corresponde aos valores de $L/H=2; 3; 5; 7; e 9$.

Isotermas e linhas de corrente ilustram as diferenças que ocorrem quando são comparadas cavidades submetidas às condições de contorno de temperatura e de fluxo de calor especificados na base.

É discutida a influência, prevista pela análise de escala no Capítulo 4, da razão L/H no número de Nusselt, no valor máximo da função corrente e na velocidade junto à parede resfriada, bem como a influência do número de Rayleigh nestes parâmetros.

5.1- A malha irregular

O uso de uma malha com igual espaçamento nas direções x e y ($\Delta x = \Delta y$) em cavidades alongadas, dependendo da razão geométrica,

aumenta consideravelmente a necessidade de pontos para a malha na direção do alongamento. Nestes casos, ao contrário da cavidade com razão geométrica unitária, é mais comum a utilização de malhas irregulares para preencher o domínio de cálculo. Estas malhas são mais refinadas em determinadas regiões e mais espaçadas em outras, buscando priorizar as regiões onde ocorrem mudanças mais significativas nas variáveis do problema.

A malha irregular pode ser definida diretamente através da variável independente na direção escolhida. As equações governantes são discretizadas considerando-se os diferentes espaçamentos à esquerda e à direita de cada ponto, na direção considerada.

Outra alternativa consiste em transformar as variáveis independentes de forma que, no sistema de coordenadas transformado, o novo domínio seja preenchido por uma malha uniforme igualmente espaçada nas duas direções. Esta segunda alternativa é descrita de forma geral em Anderson et al. (1984). Newell e Schmidt (1970) adotaram-na no estudo de uma cavidade retangular alongada verticalmente e tendo as paredes verticais submetidas a uma diferença de temperatura. Cormack et al. (1974a) analisaram uma cavidade nas mesmas condições de contorno, porém alongada horizontalmente, adotando um procedimento semelhante.

No presente estudo é feita uma transformação de coordenadas somente na direção x (direção do alongamento), mantendo na direção y a mesma malha uniforme usada na cavidade com razão $L/H=1$.

Podemos definir genericamente a transformação de coordenadas conforme segue

$$\eta = \eta(x) \quad (5.1)$$

onde η é a nova variável independente no plano transformado. Esquemáticamente, o procedimento pode ser ilustrado como na fig.5-1.

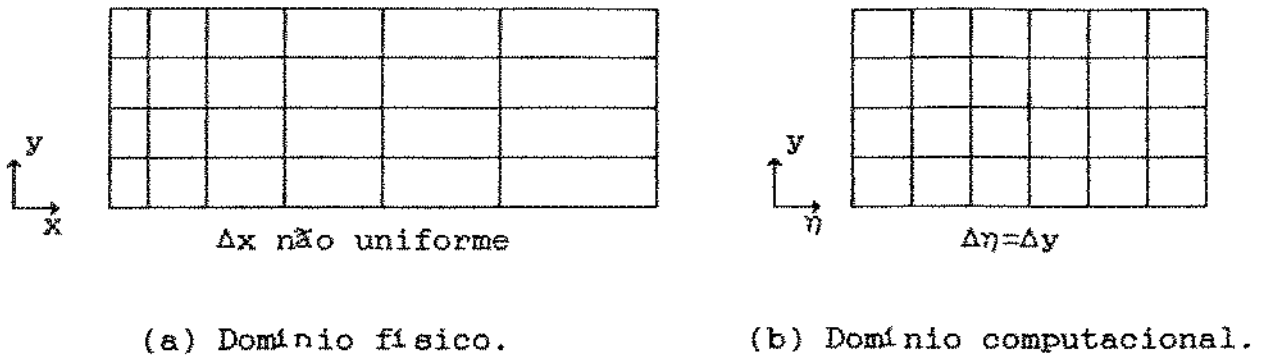


Fig.5-1. Ilustração do procedimento adotado.

Assim, à malha irregular no domínio físico corresponde uma malha regular no domínio computacional. As equações governantes do problema são modificadas quando introduzimos a transformação de variável, sendo as derivadas na direção x agora escritas como

$$\frac{\partial}{\partial x} = \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5.3)$$

onde η_x e η_{xx} representam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de η com respeito a x . A equação geral de convecção - difusão (3.11) fica

$$\begin{aligned} & (\eta_x \rho u - \eta_{xx} \Gamma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \eta_x^2 \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \\ & \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S \end{aligned} \quad (5.4)$$

A discretização é feita de forma semelhante ao descrito anteriormente no Capítulo 3, considerando-se agora os novos coeficientes, introduzidos pela mudança na variável independente, em todos os termos de equações onde existem derivadas com respeito a x .

Foi utilizada a função seno hiperbólico para a transformação genericamente definida pela eq.(5.1). Esta função permite o refinamento diferenciado da malha em regiões previamente escolhidas da cavidade, sendo também facilmente derivável. Seja portanto a transformação

$$\eta = \frac{C_1 \sinh m(x - C_2)}{\sinh mC_2} + C_1 \quad (5.5)$$

onde C_1 , C_2 e m são constantes. A função $\eta(x)$ deve ser tal que

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \eta(0) = 0 \tag{5.6}$$

$$x = L/H \quad \rightarrow \quad \eta(L/H) = \Delta\eta (n_i - 1)$$

onde n_i é o número de pontos da malha na direção η e $\Delta\eta$ é o espaçamento entre dois pontos nesta direção. O comprimento $\eta(L/H)$ da base da cavidade no plano transformado é calculado considerando que $\Delta\eta = \Delta y$, de forma a manter a malha igualmente espaçada nas direções η e y no plano transformado (domínio computacional). Assim

$$\eta(L/H) = \frac{n_i - 1}{n_j - 1} \tag{5.7}$$

pois $\Delta y = 1/(n_j - 1)$.

Desde que os valores das constantes C_1 e C_2 sejam convenientemente escolhidos, podemos refinar a malha (1) nos extremos $x=0$ e $x=L/H$ da cavidade ou (2) apenas na região próxima à parede resfriada ($x=0$). A malha correspondente ao primeiro caso será chamada de malha (1-0-1) e a correspondente ao segundo, de malha (1-0). A Tabela 1 mostra os valores das constantes C_1 e C_2 em cada caso.

Tabela 1. Parâmetros C_1 e C_2 .

| constante | (1-0-1) | (1-0) |
|-----------|-------------------------|-------------|
| C_1 | $\frac{1}{2} \eta(L/H)$ | $\eta(L/H)$ |
| C_2 | $\frac{1}{2} L/H$ | L/H |

A fig.5-2 ilustra a função $\eta(x)$ para as malhas (1-0-1) e (1-0) no caso de $L/H=4$ e 121×61 pontos ($n_i \times n_j$).

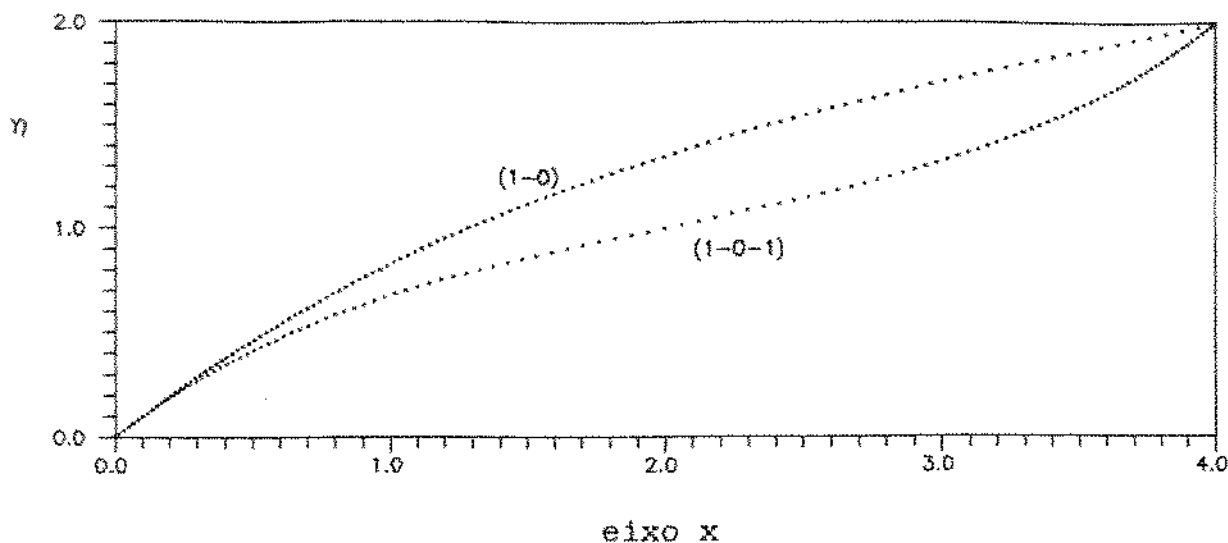


Fig. 5-2. Malhas (1-0-1) e (1-0) para $L/H=4$ e 121×61 pontos.

Os pontos do gráfico são igualmente espaçados na direção η e suas coordenadas no eixo x correspondem à malha real do domínio físico. Adotou-se o valor de $m=1/2$ na malha (1-0) e o de $m=1$ na malha (1-0-1), de forma que os intervalos Δx (em $x=0$) das malhas reais fossem próximos em ambos os casos.

Foram realizados testes para determinar o número de pontos da malha e também o tipo de refinamento a ser adotado. As Tabelas 2, 3 e 4 mostram alguns destes testes. O valor do número de Prandtl foi fixado em $Pr=0.7$. O número de pontos na direção y foi mantido em 61 pontos ($\Delta y=1/60$), como na malha usada para a cavidade com razão $L/H=1$. Os parâmetros usados para comparação foram o número de Nusselt, o valor máximo da função corrente e a velocidade máxima v_{\max} junto à parede resfriada (plano $y=0.5$). Para ter o mesmo padrão de comparação, o número de Nusselt foi calculado ao

longo do eixo x em todos os casos comparados.

Nas tabelas, os resultados da primeira coluna correspondem a uma malha uniforme, igualmente espaçada nas direções x e y ($\Delta x = \Delta y$), e estes resultados serão adotados como ponto de referência para comparação dos parâmetros. A priori, isto não significa que estes sejam os melhores resultados, mas na ausência de uma solução exata para as equações governantes, certamente são um ponto de referência confiável.

Tabela 2. Testes com a malha irregular para $L/H=4$ e $Ra=10^5$.

| parâmetro | malha | | | |
|--------------|--------------------|-------------------|------------------|--------------------------|
| | uniforme 241x61 | (1-0-1) 121x61 | (1-0-1) 61x61 | (1-0), $m=1/2$ 121x61 |
| Nu | 8.03 | 8.04 | 8.10 | 9.34 |
| ψ_{max} | 16.50 | 16.51 | 16.58 | 17.95 |
| v_{max} | 86.89 | 87.05 | 84.85 | 111.24 |

A Tabela 2 compara basicamente as malhas (1-0-1) e (1-0) ilustradas na fig.5-2, para $L/H=4$ e temperatura especificada na base. Os resultados correspondem, respectivamente, à segunda e à quarta colunas da tabela. Para estas malhas, o espaçamento na região de $x=0$ é praticamente o mesmo e seu valor é muito próximo de $\Delta y=1/60$. Note que a malha (1-0-1) da segunda coluna, mesmo com a metade dos pontos da malha uniforme na direção x (primeira coluna), fornece resultados praticamente idênticos. O mesmo não acontece com os resultados da malha (1-0) na quarta coluna, notando-se neste caso uma significativa diferença entre estes resultados e aqueles listados na primeira coluna. Em particular, o

número de Nusselt apresenta uma diferença da ordem de 16%. Este resultado é ainda mais contrastante quando observamos a malha (1-0-1) da terceira coluna, que mesmo com 1/4 dos pontos da malha uniforme na direção x, apresenta resultados bastante próximos aos desta malha. Em função destas comparações, adotou-se no presente trabalho uma malha do tipo (1-0-1) em todos os casos analisados. O valor do parâmetro m também foi fixado em m=1. Esta malha privilegia, de um lado, a região junto à parede resfriada onde ocorrem os maiores gradientes de velocidade e temperatura; e do outro lado, ela privilegia a região do centro de simetria da cavidade inteira, onde o escoamento muda de direção e onde também ocorrem, especialmente para números de Rayleigh elevados, altos gradientes de velocidade.

Tabela 3. Testes para $L/H=7$, $Ra=10^6$ e temperatura especificada.

| parâmetro | malha | | | |
|--------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| | uniforme 421x61 | (1-0-1)* 241x61 | (1-0-1) 121x61 | uniforme 121x61 |
| Nu | 14.88 | 14.76 | 14.91 | 18.05 |
| ψ_{max} | 39.81 | 39.41 | 39.59 | 44.35 |
| v_{max} | 290.56 | 297.74 | 290.69 | 224.42 |
| tempo | 11.6 | 4.7 | 1.6 | 1.0 |

(*) malha adotada

Testes no caso de $L/H=7$, $Ra=10^6$ e temperatura especificada na base são mostrados na Tabela 3. Na segunda coluna, o número de pontos na direção x (n_x) é pouco mais da metade do número de pontos da malha uniforme nesta direção (primeira coluna), e na terceira coluna, é pouco mais da quarta parte. Percebe-se que a

variação dos resultados, nestas três primeiras colunas, é muito pequena e que a malha não uniforme com 121x61 pontos (terceira coluna) fornece resultados praticamente idênticos aos da malha uniforme com 421x61 pontos. Esta proximidade se explica porque neste caso, o intervalo Δx da malha não uniforme em $x=0$ é tal que $\Delta x \approx \Delta y$, sendo portanto aproximadamente igual ao da malha uniforme da primeira coluna. Na malha da segunda coluna, com 241x61 pontos, o intervalo Δx na posição $x=0$ é da ordem de $\Delta x \approx 0.5\Delta y$, sendo que $\Delta x \approx \Delta y$ nas proximidades da posição $x=0.7$. A quarta coluna mostra resultados para uma malha uniforme com 121x61 pontos. A comparação destes resultados com aqueles da terceira coluna, que corresponde à malha não uniforme com igual número de pontos, mostra a vantagem do uso de malhas irregulares nestes casos. A última linha da Tabela 3 ilustra o tempo relativo despendido no computador (tempo de CPU) para cada caso, tomando-se como unidade de referência o tempo gasto com a malha uniforme da quarta coluna. Nota-se que a redução do número de pontos da malha diminui significativamente o tempo computacional, principalmente se tomamos como referência a malha uniforme da primeira coluna.

Tabela 4. Testes para $L/H=7$, $Ra=10^5$ e fluxo especificado.

| parâmetro | malha | | | |
|--------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| | uniforme 421x61 | (1-0-1) 241x61* | (1-0-1) 121x61 | uniforme 121x61 |
| Nu | 7.49 | 7.43 | 7.44 | 7.85 |
| ψ_{max} | 16.57 | 16.56 | 16.51 | 16.61 |
| v_{max} | 87.62 | 89.46 | 87.49 | 74.48 |

(*) malha adotada

A Tabela 4 ilustra os testes para $L/H=7$, $Ra=10^5$ e fluxo de calor especificado na base. As malhas testadas são as mesmas da Tabela 3 e as observações sobre os resultados são semelhantes. Neste caso, a malha regular da quarta coluna apresentou resultados comparativamente melhores que no caso anterior. Em compensação, o número de Nusselt calculado ao longo do eixo y, para esta malha, apresentou uma diferença de cerca de 22% em relação ao valor mostrado na tabela.

A escolha da malha a ser utilizada em cada caso baseou-se nos testes realizados, levando-se em consideração (1) os bons recursos computacionais disponíveis e (2) a necessidade de se generalizar as conclusões para os casos não testados, em especial para o caso de $L/H=9$. A malha adotada em cada caso está ilustrada na Tabela 5. São mostrados os valores do número de pontos (n_i) na direção x, já que na direção y a malha é a mesma em todos os casos (uniforme com 61 pontos). Na segunda linha, é ilustrada a razão entre o número de pontos adotado (n_i) e o número de pontos da malha uniforme de referência ($n_{i_{ref}}$). Partiu-se da razão $n_i/n_{i_{ref}}=1/2$ para o caso

Tabela 5. Malhas adotadas.

| L/H = | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 |
|---------------------------|---------------|---------------|----------------|-------|-------|
| n_i | 271 | 241 | 211 | 181* | 121* |
| $\frac{n_i}{n_{i_{ref}}}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 |
| $\eta(L/H)$ | 4.5 | 4.0 | 3.5 | (3.0) | (2.0) |

(*) malha uniforme

mais extremo ($L/H=9$) e, a partir deste valor, esta razão foi aumentada até o valor unitário, correspondente às malhas uniformes que foram utilizadas nos casos de $L/H=2$ e 3 . A escolha da razão $n_i/n_{i_{ref}}=1/2$ para o caso de $L/H=9$ baseou-se nos testes realizados, os quais comprovaram ser esta razão mais do que suficiente para se obter resultados confiáveis. De fato, malhas menos refinadas poderiam ter sido adotadas, especialmente nos casos de $L/H=5$ e $L/H=7$.

A fig.5-3 ilustra a malha utilizada no caso de $L/H=7$. A proporção entre os eixos corresponde ao caso real (1:3.5), considerando-se apenas a metade da extensão horizontal da cavidade (1/4 da cavidade inteira). Assim, a distância entre o penúltimo ponto antes do canto nordeste e a linha horizontal superior do gráfico corresponde ao intervalo Δy da malha real. Neste caso, a relação entre o maior intervalo Δx (posição $x=3.5$) e Δy é igual a 8.2.

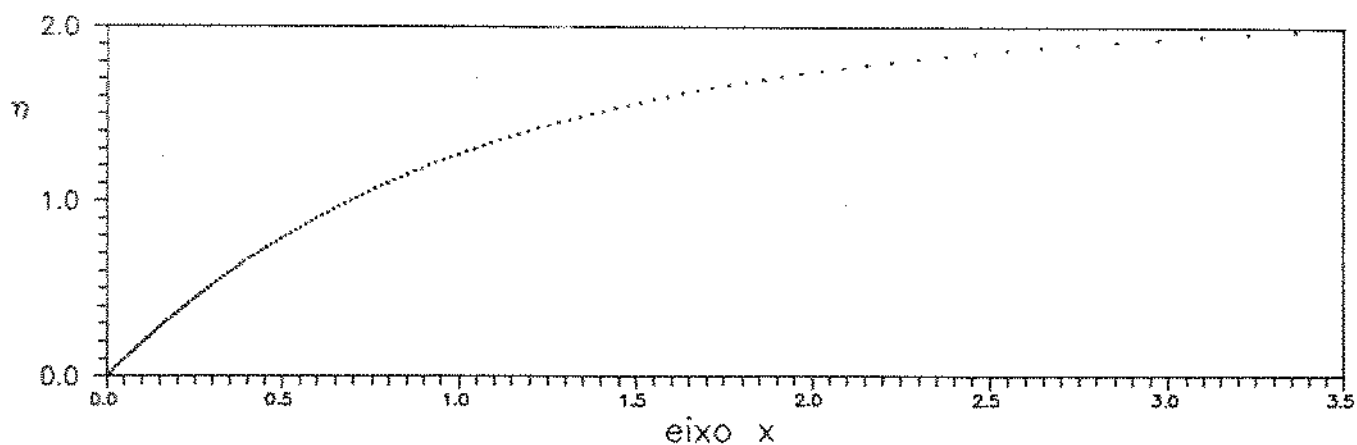


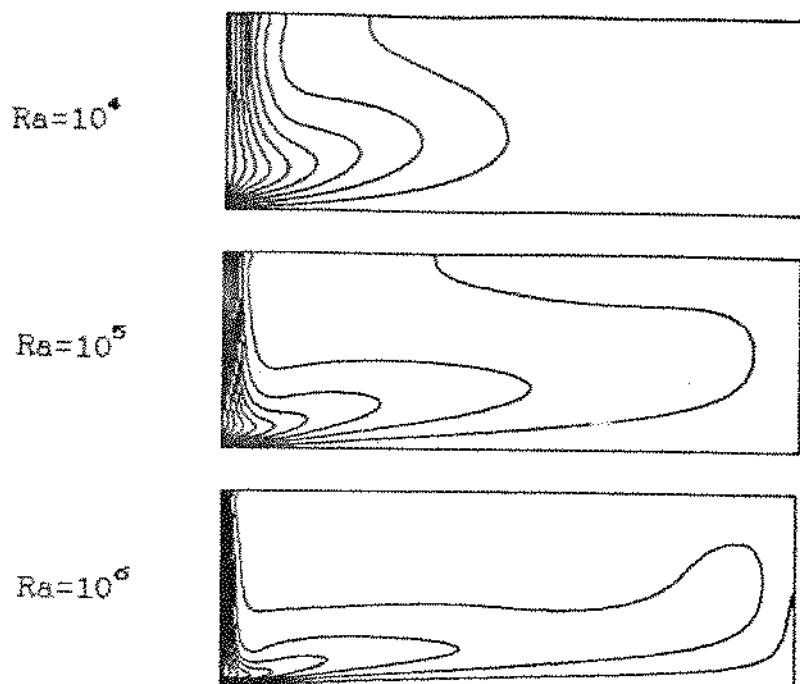
Fig.5-3. Ilustração da malha não uniforme para $L/H=7$ e 241 pontos na direção x .

Esta relação é maior para o caso de $L/H=9$, chegando a 19.6 na posição $x=4.5$. Foi realizado um teste com $m=1/2$ e igual número de pontos neste caso, que não apresentou variações significativas nos resultados. Quando $L/H=5$, a mesma relação é igual a 3.4 para a malha com 211×61 pontos adotada. Uma estratégia diferente, e provavelmente melhor, teria sido definir uma proporção ótima para os intervalos Δx e Δy na malha real e determinar os parâmetros n e m em função desta proporção.

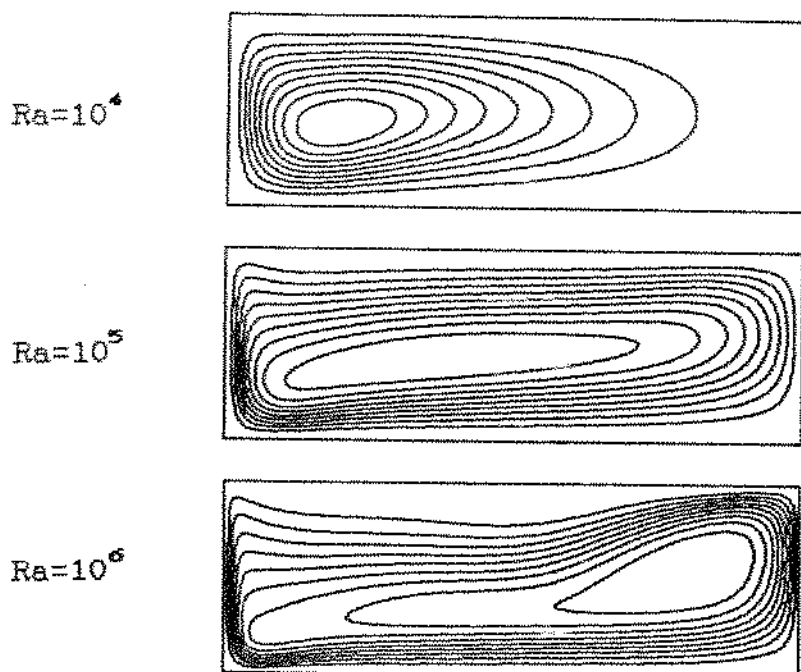
5.2- Temperatura constante especificada na base

Neste item será analisada a cavidade com razão $L/H > 1$ e temperatura constante especificada na base. São considerados os valores da razão $L/H=2; 3; 5; 7; e 9$, sendo o número de Prandtl igual a 0.7 em todos os resultados apresentados. Não são apresentados resultados para $Pr=7.0$, pois sua influência, assim como no caso da razão $L/H=1$, mostrou-se pequena em parâmetros fundamentais como o número de Nusselt e o valor máximo da função corrente.

As figuras 5-4 a 5-7 mostram, respectivamente, as isotermas e as linhas de corrente para $L/H=3; 5; 7; e 9$, sendo que em cada caso foi considerado $Ra=10^4; 10^5; e 10^6$. Primeiramente, nota-se que o escoamento no interior da cavidade, em todos os casos apresentados, é constituído por uma única célula girando no sentido trigonométrico. A diferença, em relação à cavidade com razão $L/H=1$, é que esta célula nem sempre ocupa a cavidade em toda

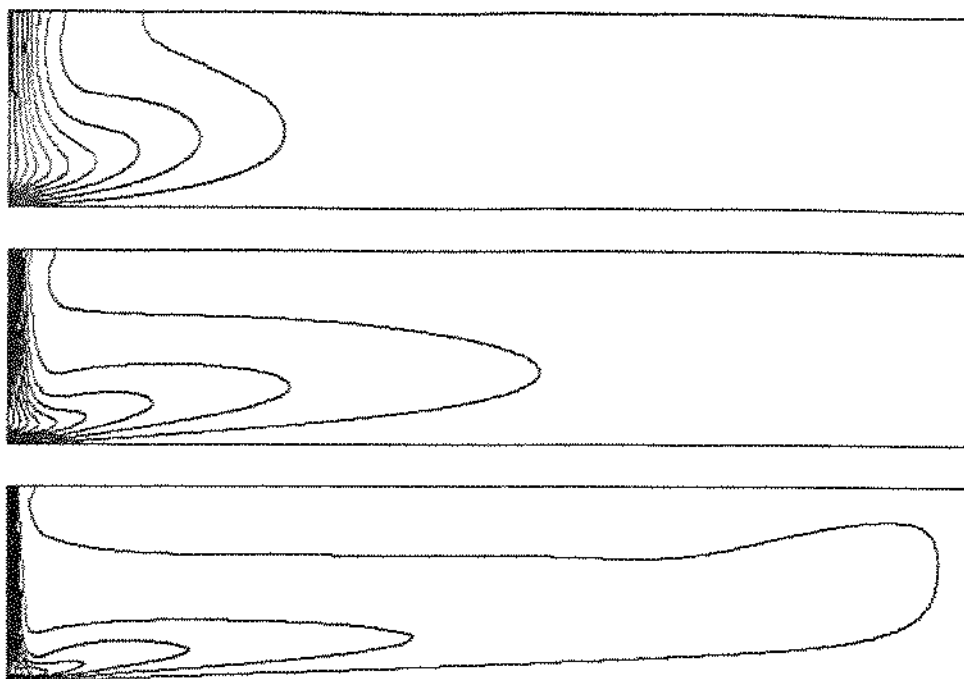


(a) Isotermas para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

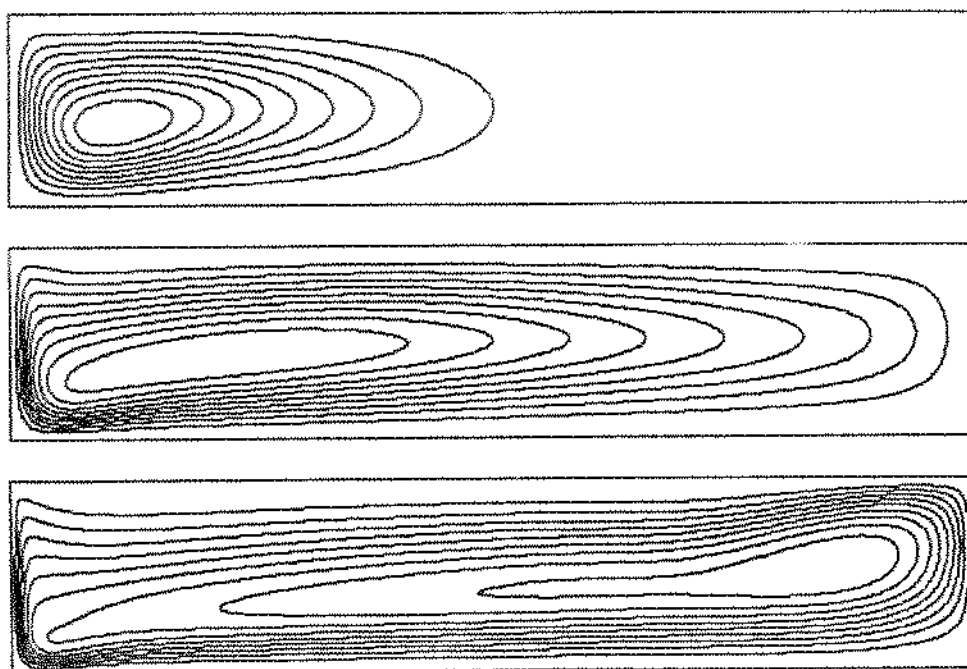


(b) Linhas de corrente para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

Fig.5-4. Isotermas e linhas de corrente para $L/H=3$ e temperatura especificada na base

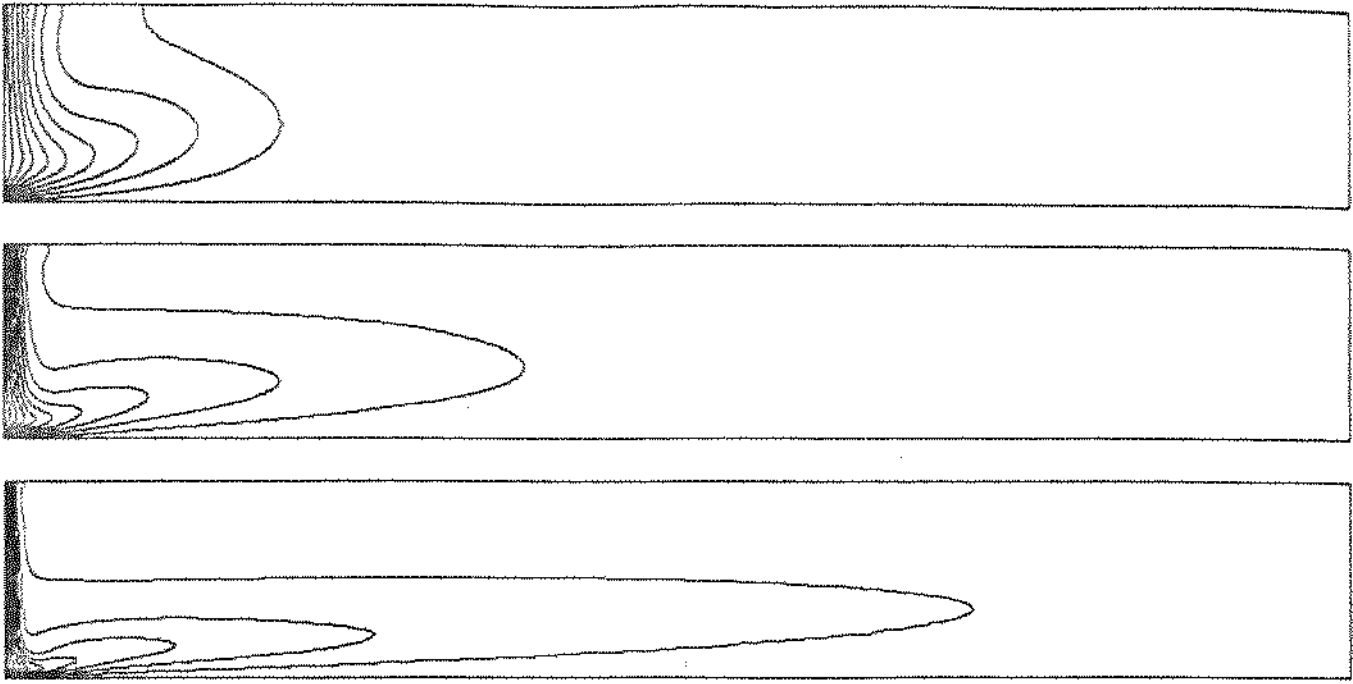


(a) Isotermas para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

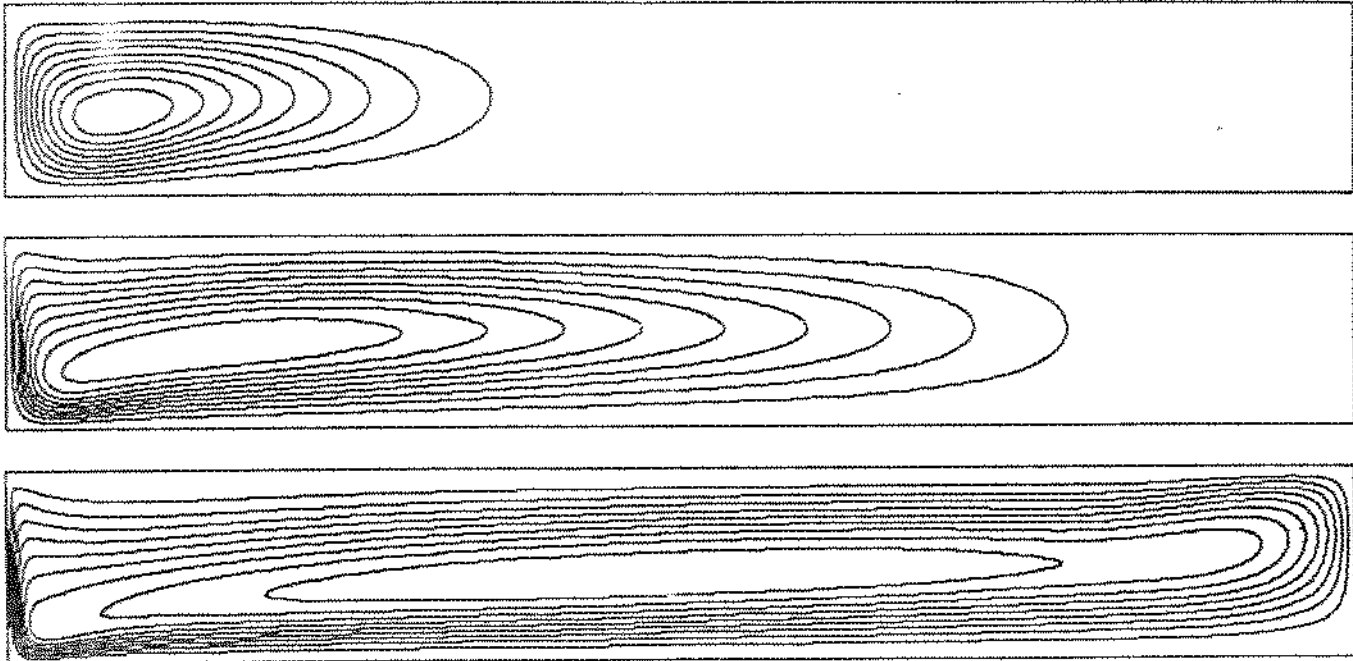


(b) Linhas de corrente para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

Fig.5-5. Isotermas e linhas de corrente para $L/H=5$ e temperatura especificada na base

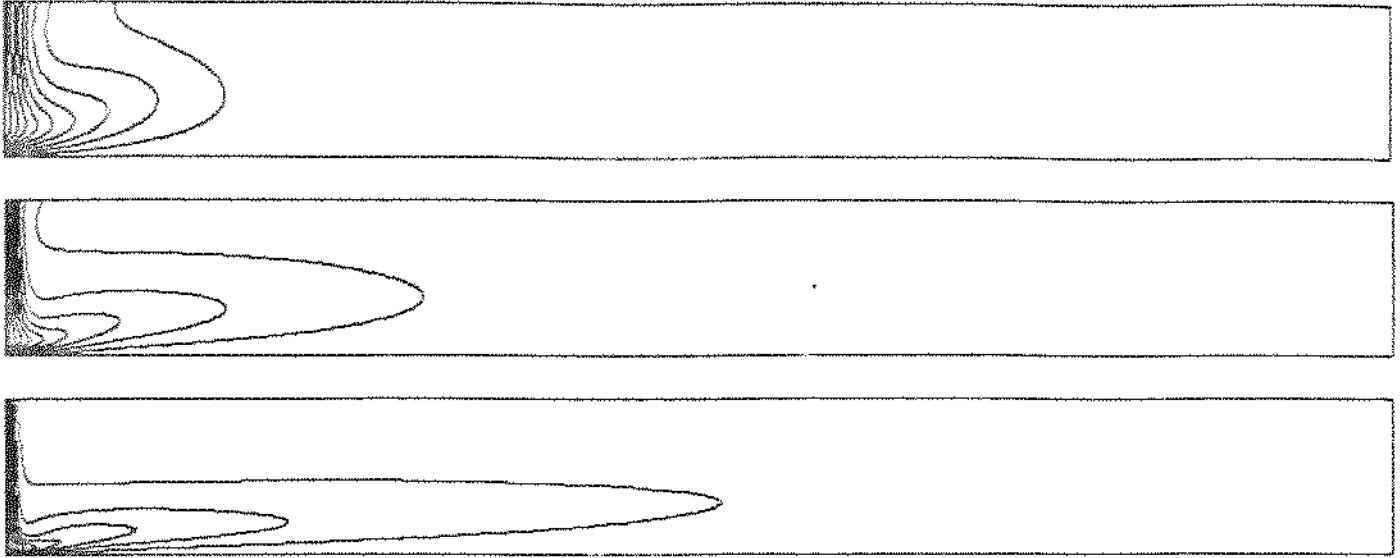


(a) Isothermas para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

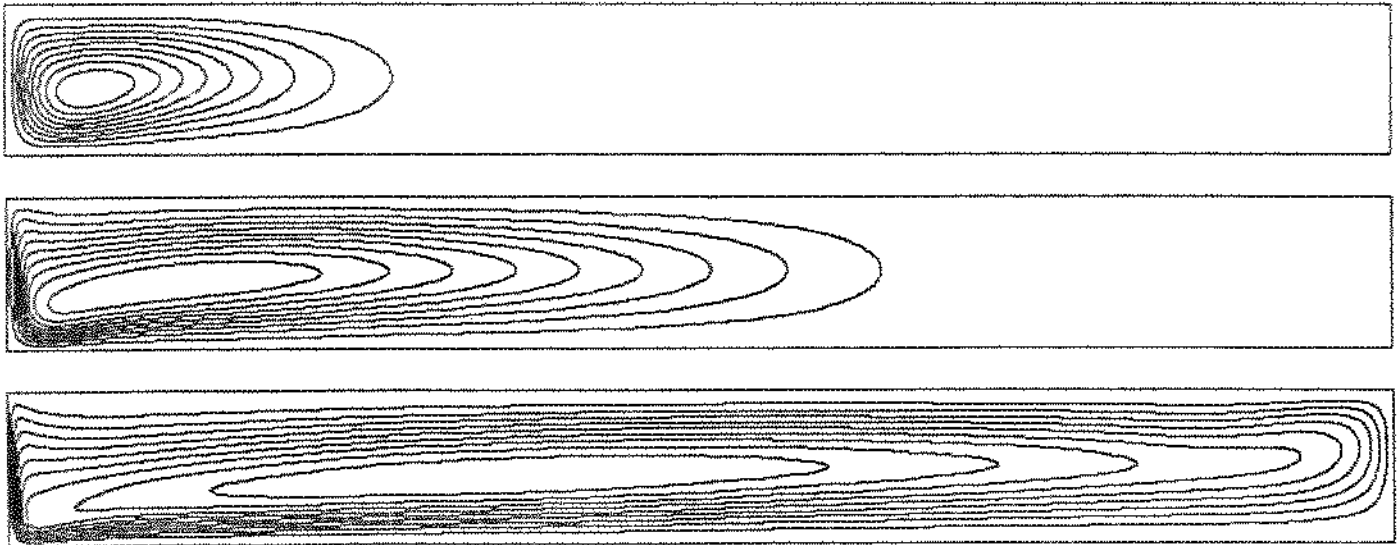


(b) Linhas de corrente para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

Fig.5-6. Isothermas e linhas de corrente para $L/H=7$ e temperatura especificada na base.



(a) Isothermas para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .



(b) Linhas de corrente para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

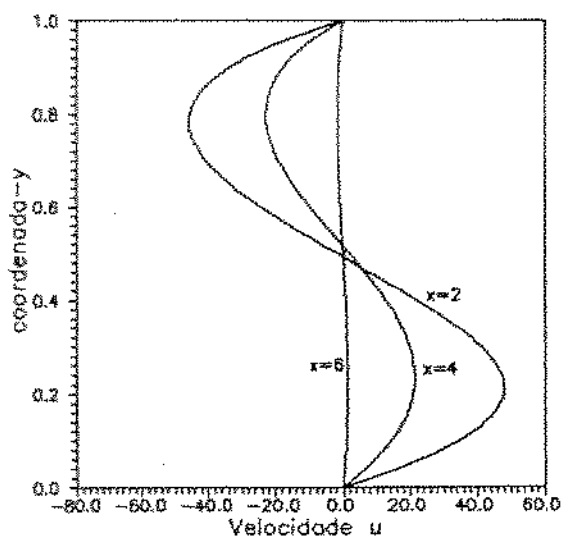
Fig. 5-7. Isothermas e linhas de corrente para $L/H=9$ e temperatura especificada na base.

a sua extensão. Isto se verifica especialmente para números de Rayleigh menores e razões L/H maiores, como se vê nos casos de L/H=7-9 e $Ra=10^4-10^5$. O surgimento de pequenas recirculações nestes casos será discutido posteriormente. Com o crescimento do número de Rayleigh, o escoamento tende a preencher toda a cavidade, como se observa pelo deslocamento do centro da célula (local onde $\psi = \psi_{max}$) no sentido do plano de simetria da cavidade inteira (plano $x=L/H$). Este deslocamento é relativamente maior quando $Ra=10^6$ e para L/H=3-5, como se vê pela compressão das linhas de corrente junto ao plano $x=L/H$. Já nos casos de L/H=5-7 e mesmo número de Rayleigh, a circulação é distribuída de maneira relativamente uniforme em torno do centro geométrico da cavidade. Observando as isotermas nestes casos (fig. 5-6 e 5-7), percebe-se que estas não atingem o lado direito da cavidade nem mesmo quando $Ra=10^6$. Na fig.5-5, correspondente a L/H=5, a última isoterma só atinge o plano de simetria da cavidade para $Ra=10^6$. Nesta cavidade, quando $Ra=10^4-10^5$, as isotermas são praticamente idênticas àquelas das cavidades com razões L/H=7-9 e números de Rayleigh correspondentes. O mesmo ocorre com as isotermas nestas cavidades (L/H=7-9) quando $Ra=10^6$. Na cavidade menos alongada (L/H=3), a última isoterma "penetra" no plano $x=L/H$ quando $Ra=10^6$, enquanto que as isotermas para $Ra=10^4$ são idênticas àquelas das outras cavidades neste mesmo número de Rayleigh. No caso de $Ra=10^5$ já se nota uma pequena deformação na extremidade da última isoterma quando a comparamos com as isotermas correspondentes nas outras cavidades.

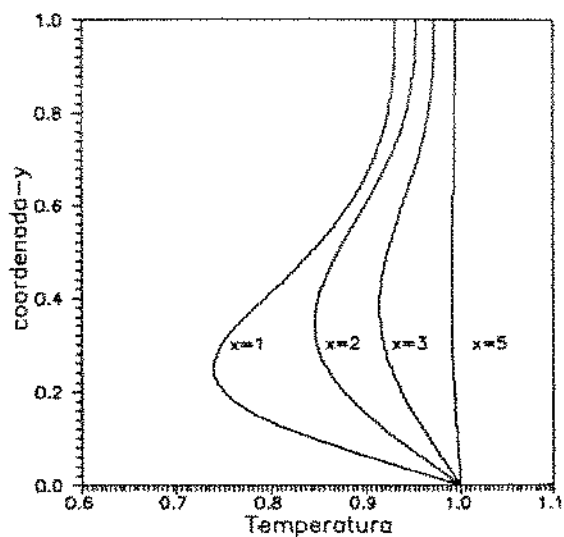
A partir destas observações pode-se definir um comprimento l, que será chamado "comprimento de penetração térmica",

representando a distância, a partir de $x=0$, que é afetada pela presença da parede resfriada. Poulikakos (1985), analisando uma cavidade aquecida e resfriada em uma única parede vertical, adota um conceito semelhante quando estuda a cavidade alongada horizontalmente e verticalmente. Bejan e Kimura (1981) também usam a idéia de comprimento de penetração quando analisam uma cavidade horizontal aquecida, aberta em uma das laterais a qual se comunica com um reservatório de fluido em temperatura inferior.

O preenchimento incompleto da cavidade pelo escoamento e a região isotérmica não afetada pela parede fria podem ser ilustrados pelos gráficos da fig.5-8. Os perfis da velocidade u e de temperatura são traçados, em vários planos verticais, ao longo de uma cavidade com $L/H=7$ e para $Ra=10^5$. Na fig.5-8a nota-se como a velocidade vai diminuindo até o fluido permanecer praticamente



(a)



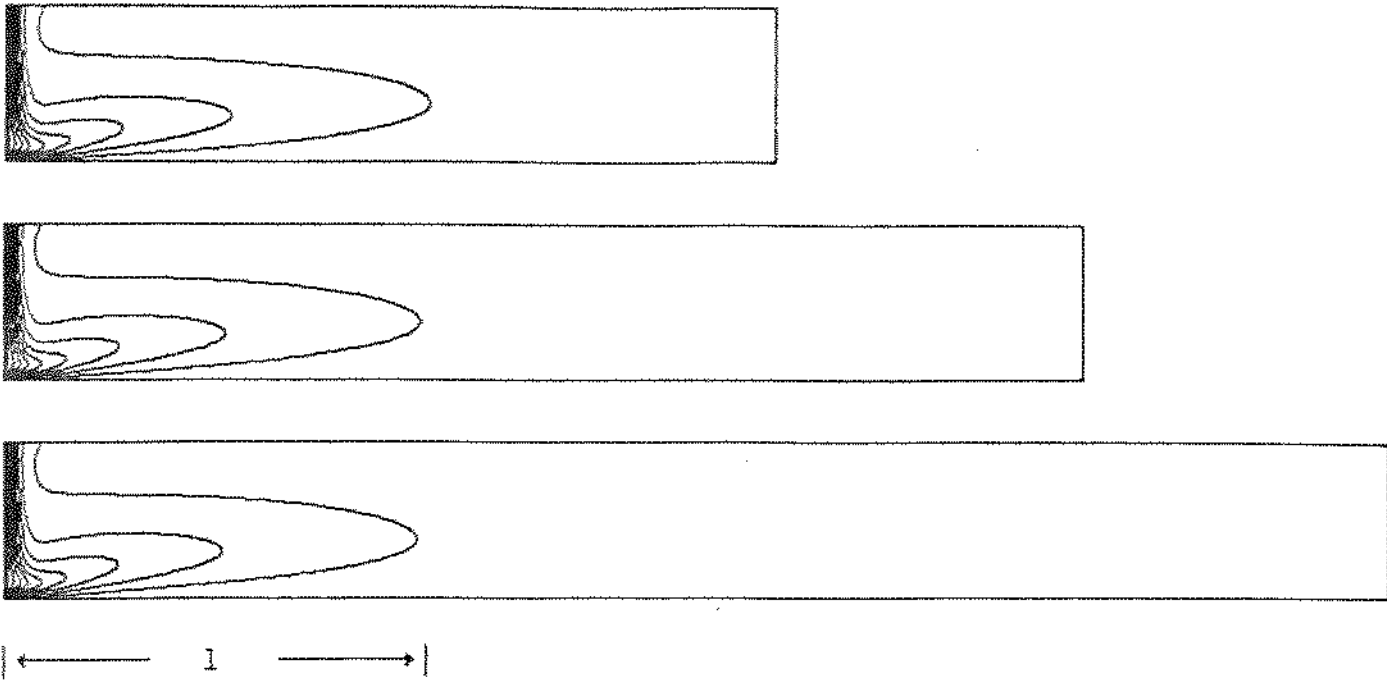
(b)

Fig. 5-8. Perfis para $L/H=7$ e $Ra=10^5$. (a) Velocidade u nos planos $x=2$; 4; e 6. (b) Temperatura nos planos $x=1$; 2; 3; e 5.

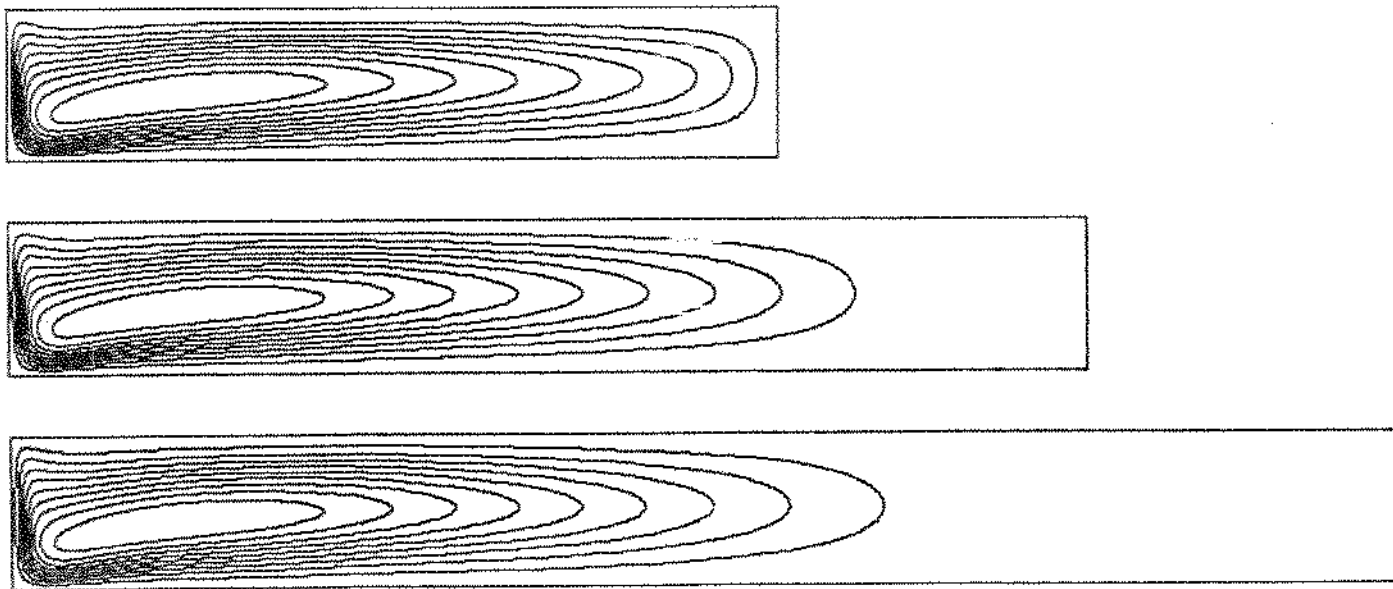
em repouso, na região próxima ao plano de simetria da cavidade inteira. Os perfis verticais de temperatura (fig.5-8b) evoluem, ao longo do comprimento, no sentido de uma cavidade isotérmica nas regiões mais distantes da parede resfriada. Do ponto de vista da transferência total de calor através da cavidade, estas regiões são "termicamente inativas", pois o gradiente vertical de temperatura é praticamente nulo, como se vê no perfil de temperatura para $x=5$ na fig.5-8b. A cavidade retangular em estudo é fundamentalmente diferente da cavidade (também com razão $L/H > 1$) em que as paredes verticais opostas é que estão submetidas a uma diferença de temperatura. Nesta cavidade, analisada por Cormack et al. (1974b) e depois por Bejan e Tien (1978), o escoamento e o campo de temperaturas se distribuem por toda a extensão da cavidade, independentemente do número de Rayleigh.

O comprimento de penetração térmica l , definido anteriormente de forma qualitativa, será medido quantitativamente como a distância entre a parede resfriada ($x=0$) e o ponto mais afastado da última isoterma ($T_p = T_o + 0.9\Delta T$). Esta consideração é válida quando a última isoterma não está deformada pela proximidade com o centro de simetria da cavidade inteira.

O objetivo desta medida quantitativa, um tanto arbitrária, é muito mais no sentido de quantificar uma análise que é essencialmente qualitativa do que vice-versa. A penetração térmica l assim medida está ilustrada na fig.5-9a, para $Ra=10^5$ e $L/H=5; 7;$ e 9 . Nestes casos, nota-se claramente como o desenho das isotermas não é mais afetado pelo comprimento da cavidade. O mesmo acontece



(a) Isotermas e comprimento de penetração l .



(b) Linhas de corrente correspondentes.

Fig.5-9. Ilustração do comprimento de penetração térmica l para $Ra=10^5$ e $L/H=5; 7; e 9$.

com as linhas de corrente (fig.5-9b), apesar de uma pequena deformação destas, no extremo da cavidade, quando $L/H=5$.

A independência do comprimento l em relação à razão L/H sugere que este seja função apenas do número de Rayleigh. Uma relação entre o comprimento l e o número de Rayleigh pode ser deduzida através de uma análise de escala. Suponhamos que praticamente toda transferência de calor da base aquecida para o fluido ocorra na região do comprimento de penetração térmica ($0 < x < 1$). Esta hipótese é coerente com o conceito de comprimento de penetração, pois a partir de $x > 1$ a cavidade é isotérmica à temperatura da base. O balanço de energia entre o calor perdido pelo fluido na parede vertical e o calor fornecido ao fluido no comprimento l , implica em

$$k H \frac{\Delta T}{\delta_T} \approx k l \frac{\Delta T}{H} \quad (5.8)$$

onde δ_T é a espessura da camada limite junto à parede vertical e H é a dimensão vertical da cavidade. Usando a eq.(4.7) para δ_T , temos

$$l \approx H Ra_H^{1/4} \quad (5.9)$$

A lei de potência expressa nesta relação pode ser verificada através do gráfico da fig.5-10, onde $Ra \geq 10^4$ e $L/H=5; 7; \text{ e } 9$. Independentemente da razão L/H , os pontos são todos praticamente coincidentes para um mesmo número de Rayleigh, como foi anteriormente ilustrado na fig.5-9 para $Ra=10^5$. O valor de l quando $L/H=3$ e $Ra=10^4$ não foi colocado no gráfico por ser

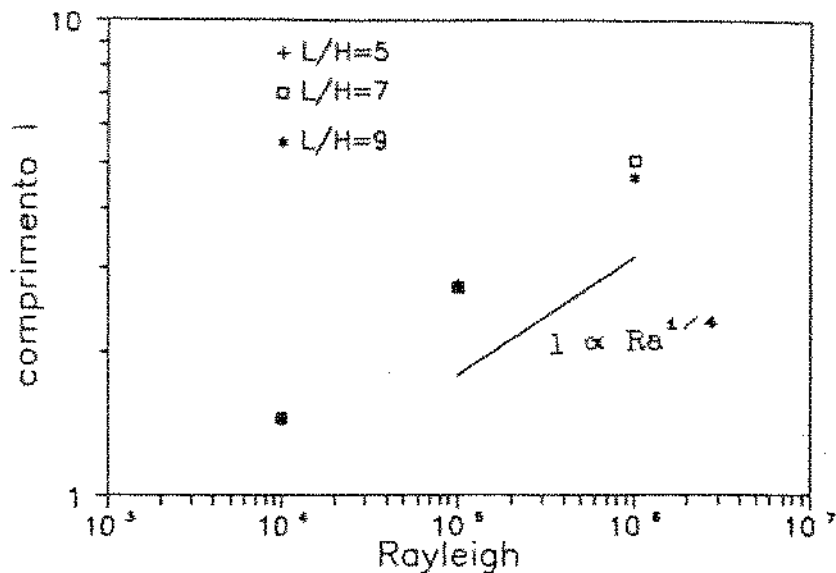


Fig.5-10. Comprimento de penetração térmica versus número de Rayleigh.

coincidente com os outros. Quando $Ra=10^3$, as isothermas estão menos deformadas em relação ao limite diagonalmente simétrico de condução pura, e o gradiente de temperatura junto à parede vertical resfriada é relativamente suave. Não se configura portanto, nesta situação, uma estrutura de camada limite térmica junto à parede vertical e o comprimento de penetração l não segue a lei expressa em (5.9).

A influência da razão geométrica da cavidade em parâmetros globais como o valor máximo da função corrente e o número de Nusselt, está ilustrada nos gráficos das figuras 5-11 e 5-12.

O efeito da razão L/H sobre a circulação no interior da cavidade (fig.5-11) não segue uma tendência uniforme para todos os

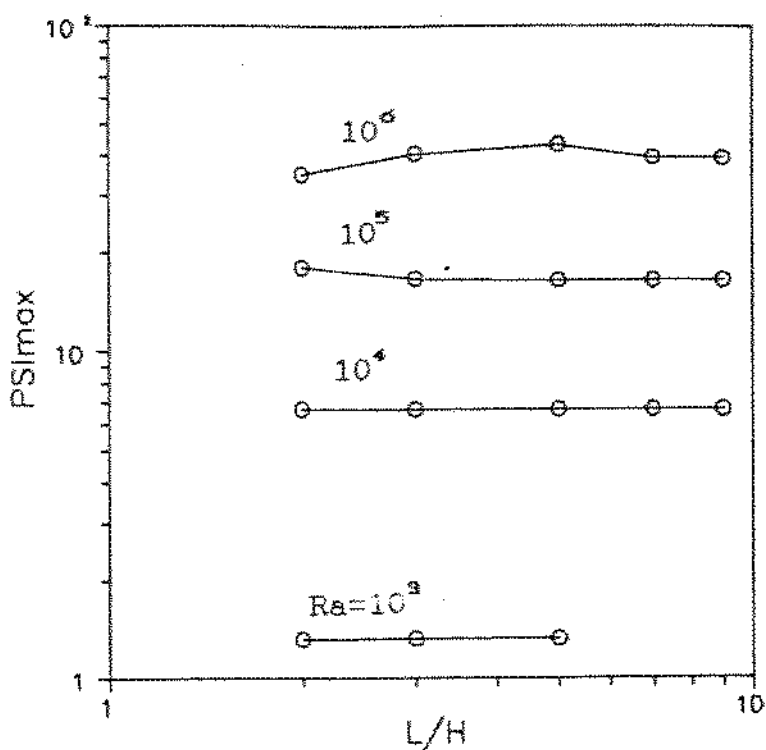
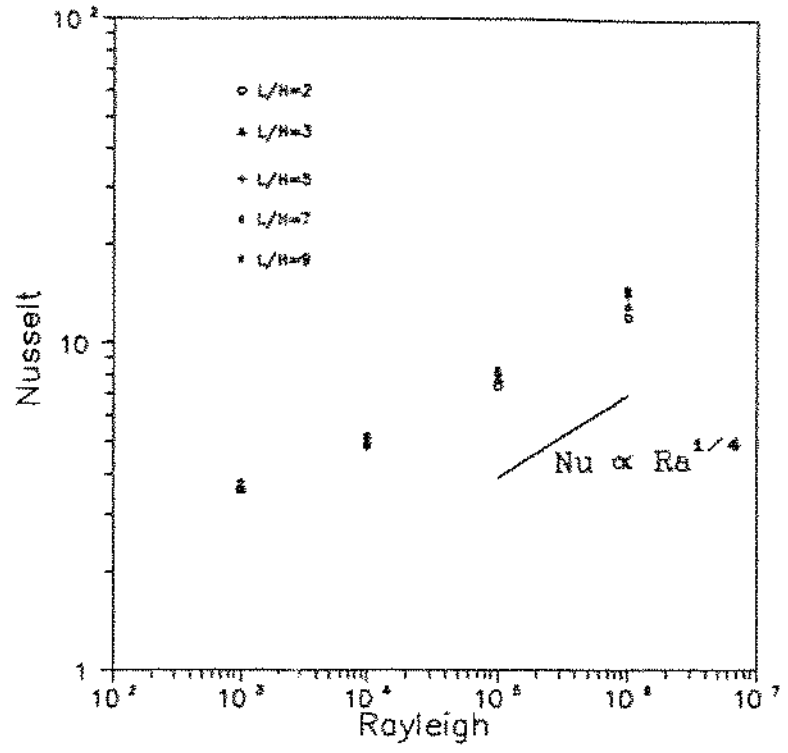


Fig.5-11. Valor máximo da função corrente ψ_{\max} versus a razão L/H .

casos. De forma geral, o que se observa é uma tendência à estabilização do escoamento a partir de um determinado valor da razão L/H . Quando $Ra=10^3-10^4$, o escoamento é menos intenso e nem sempre preenche toda extensão da cavidade, permanecendo a célula de fluxo relativamente indiferente ao crescimento da razão L/H ($Ra=10^4$ nas fig.5-4 a 5-7). Ao contrário, para valores do número de Rayleigh mais elevados, o escoamento é mais intenso e exige um valor maior da razão L/H para que a intensidade da circulação não seja mais afetada.

A fig 5-12a mostra o número de Nusselt versus o número de Rayleigh nos casos de $L/H=2; 3; 5; 7; e 9$. Nota-se que a

(a) $Nu \times Ra$



(b) $Nu \times L/H$

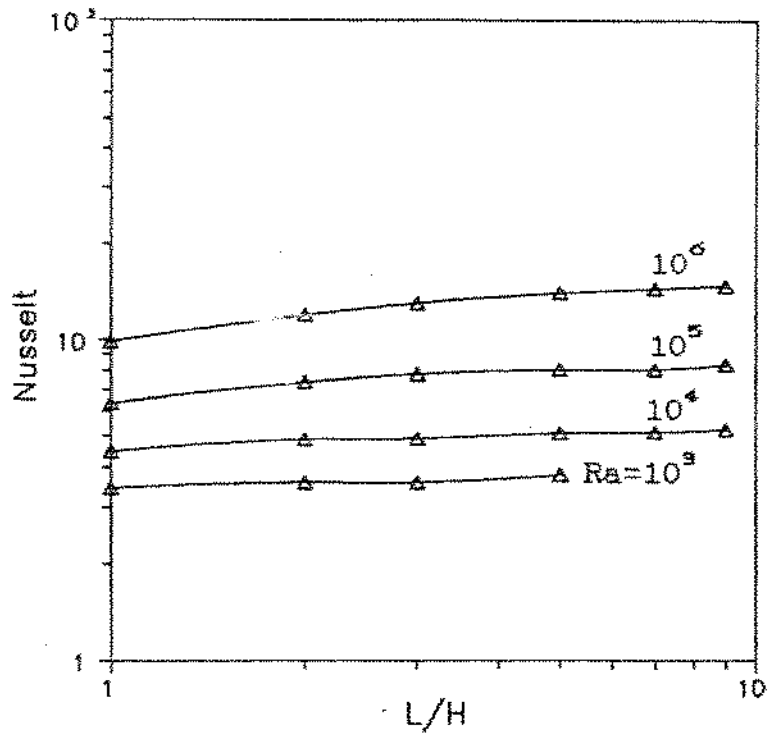


Fig. 5-12. Variação do número de Nusselt com o número de Rayleigh e com a razão L/H.

influência da razão L/H em Nusselt vai crescendo com o aumento do número de Rayleigh. Esta influência está melhor ilustrada na fig.5-12b, que apresenta o número de Nusselt versus a razão L/H para $Ra=10^3-10^6$. Observando a curva quando $Ra=10^6$, percebe-se que o crescimento de Nusselt é maior no início e tende a estacionar a partir de $L/H \geq 5$. As isothermas nas fig. 5-4 a 5-7 ajudam a explicar este comportamento. Quando $L/H \leq 5$, a cavidade é termicamente ativa em todo o seu comprimento L , como mostram as isothermas para $L/H=3-5$ e $Ra=10^6$ nas fig. 5-4 e 5-5. O alongamento da cavidade, a partir de $L/H=1$ até $L/H=5$, faz com que o jato horizontal de fluido resfriado percorra um comprimento maior junto à base aquecida, aumentando a quantidade total de calor transferida para o fluido. Nos casos de $L/H=7-9$ a penetração térmica é incompleta e a região mais distante da parede resfriada é termicamente inativa, não contribuindo para o aumento do número de Nusselt. Como o comprimento de penetração l é uma função apenas do número de Rayleigh, o alongamento horizontal da cavidade não afeta mais a distribuição de temperaturas (fig.5-9), permanecendo o número de Nusselt praticamente inalterado quando $L/H=7-9$.

A diminuição do número de Rayleigh diminui também o comprimento de penetração l (5.9), minimizando a influência do crescimento da razão L/H na taxa total de calor transferido através da cavidade. Assim, a variação do número de Nusselt é menor, como se observa pelas curvas para $Ra=10^3-10^4$ na fig.5-21b.

Outro aspecto a ser notado é que, quando $L/H=7-9$, o valor do número de Nusselt para a cavidade se aproxima do valor do Nusselt global para uma parede vertical isotérmica num reservatório de fluido em repouso, cujos valores estão na segunda coluna da Tabela

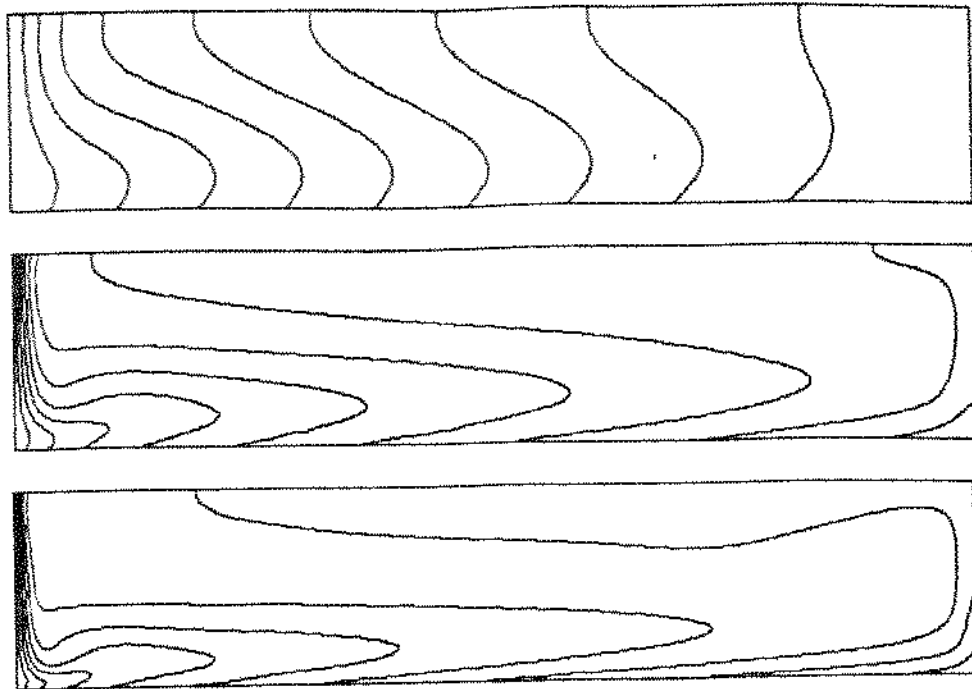
2, Capítulo 4. A região termicamente inativa, presente nas cavidades mais alongadas horizontalmente, age aproximadamente como se fosse o reservatório isotérmico de fluido em repouso, simulando realmente o ciclo imaginário do fluido no caso de uma parede vertical imersa num reservatório infinito de fluido.

Finalmente, um aspecto a ser comentado é a persistência do padrão unicelular de escoamento, independentemente da razão L/H e do número de Rayleigh. November e Nansteel (1987), que analisaram uma cavidade em condições de contorno próximas e com $L/H=1$, indagam se este padrão persistirá para sempre. A resposta é positiva, pois o gradiente vertical instável que existe junto à base da cavidade, causado pelo jato resfriado que desce da parede vertical e encontra a base quente, não acarreta (de imediato) o descolamento da camada de fluido mais quente da base da cavidade; e esta camada se mantém junto à base em consequência do gradiente de pressão causado pelo próprio fluido aquecido que ocupa a parte superior da cavidade e que retorna para encontrar novamente a parede resfriada. É fato que para $L/H=9$ e $Ra=10^4-10^5$, foram observadas pequenas recirculações próximas ao plano de simetria da cavidade inteira. Estas recirculações não aparecem na fig.5-7 porque sua intensidade é muito pequena, sendo da ordem de 1% e 2.5% do valor de ψ_{max} , para $Ra=10^4$ e 10^5 , respectivamente. Mas é importante notar que estas recirculações ocorrem numa região praticamente isotérmica, justamente nos casos de Rayleigh mais baixos e razão L/H mais elevada, sendo portanto causadas pelo arrasto viscoso produzido pelo escoamento periférico da célula principal. Não se constituem, portanto, em movimento convectivo devido a um gradiente vertical instável de temperatura.

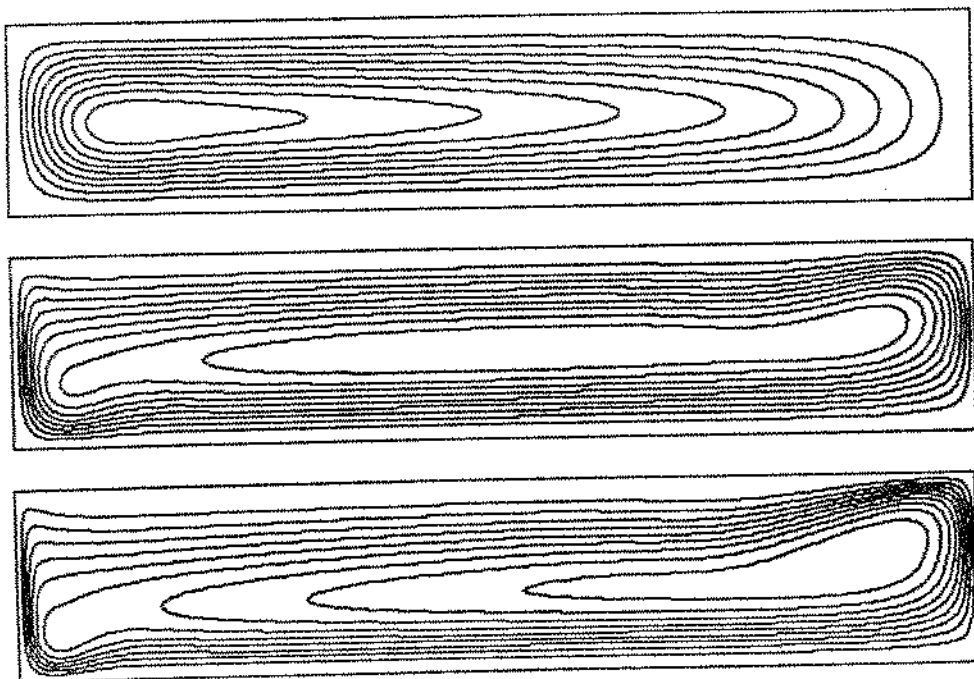
5.3- Fluxo de calor constante especificado na base

O escoamento e o campo de temperaturas, no caso de fluxo de calor constante especificado na base da cavidade, diferem em muitos aspectos do caso em que a temperatura é conhecida na base da cavidade. A imposição de um fluxo conhecido q'' , ao longo de toda a base, obriga a cavidade a ser termicamente ativa ao longo de toda sua extensão horizontal. As curvas de nível das fig. 5-13 e 5-15 ilustram o caso em estudo. Foram traçadas as curvas para $Ra=10^3$; 10^5 ; e 10^6 nos casos de $L/H=5$ e 7 (fig. 5-13 e 5-14, respectivamente); e para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 quando $L/H=9$ (fig.5-15). O escoamento é constituído, como no caso de temperatura especificada na base, por uma única célula girando no sentido trigonométrico. Neste caso, embora de forma assintótica, a célula ocupa a cavidade em toda sua extensão. Comparando-se, por exemplo, as linhas de corrente para $L/H=7$ da fig.5-14 com aquelas da fig.5-6, percebe-se como o escoamento preenche toda a cavidade no caso de fluxo de calor especificado na base. Nota-se que, em todos os casos, o centro da célula desloca-se da esquerda para a direita, passando pela região central da cavidade, quando o número de Rayleigh evolui do menor ao maior valor indicado. Esta tendência também foi notada no item anterior, mas de forma menos acentuada, como se viu nos casos de $L/H=7$ e 9 (fig. 5-6 e 5-7).

Observando as isothermas, percebe-se em todos os casos o gradiente de temperatura monotonicamente crescente no sentido do eixo x . Este gradiente é distribuído de maneira mais uniforme ao

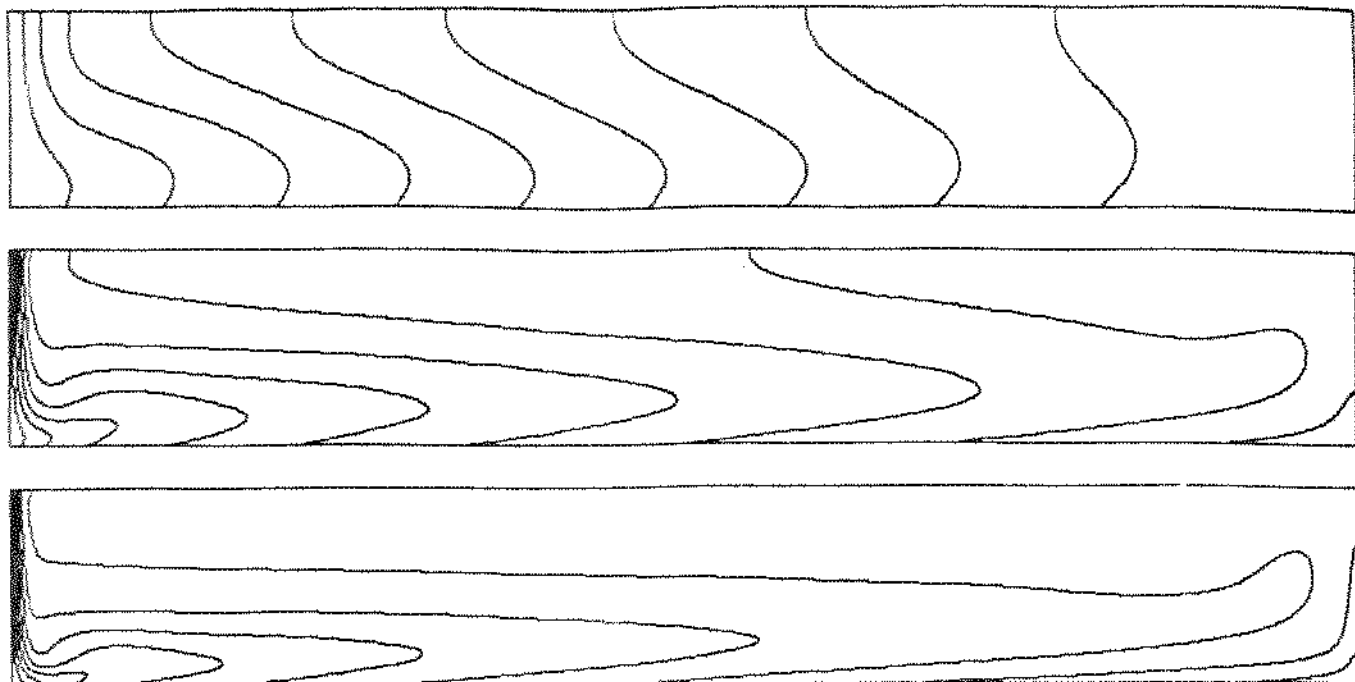


(a) Isotermas para $Ra=10^3$; 10^5 ; e 10^6 .

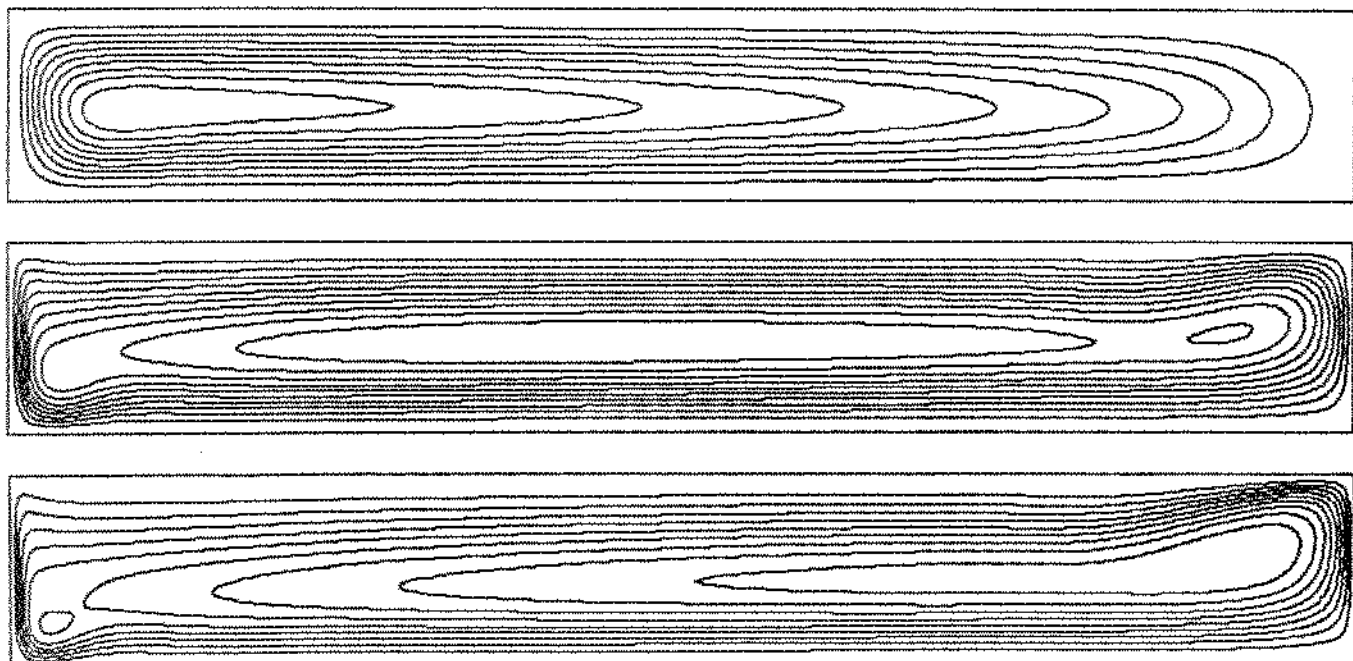


(b) Linhas de corrente para $Ra=10^3$; 10^5 ; e 10^6 .

Fig. 5-13. Isotermas e linhas de corrente para $L/H=5$ e fluxo de calor especificado na base.

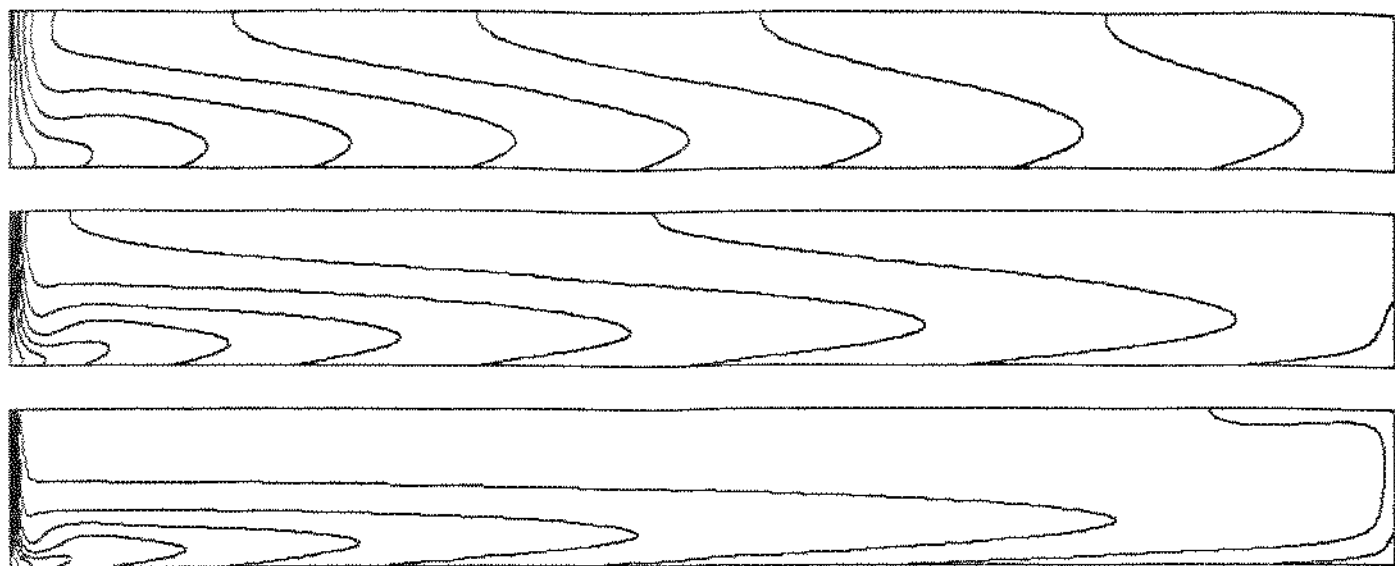


(a) Isothermas para $Ra=10^3$; 10^5 ; e 10^6 .

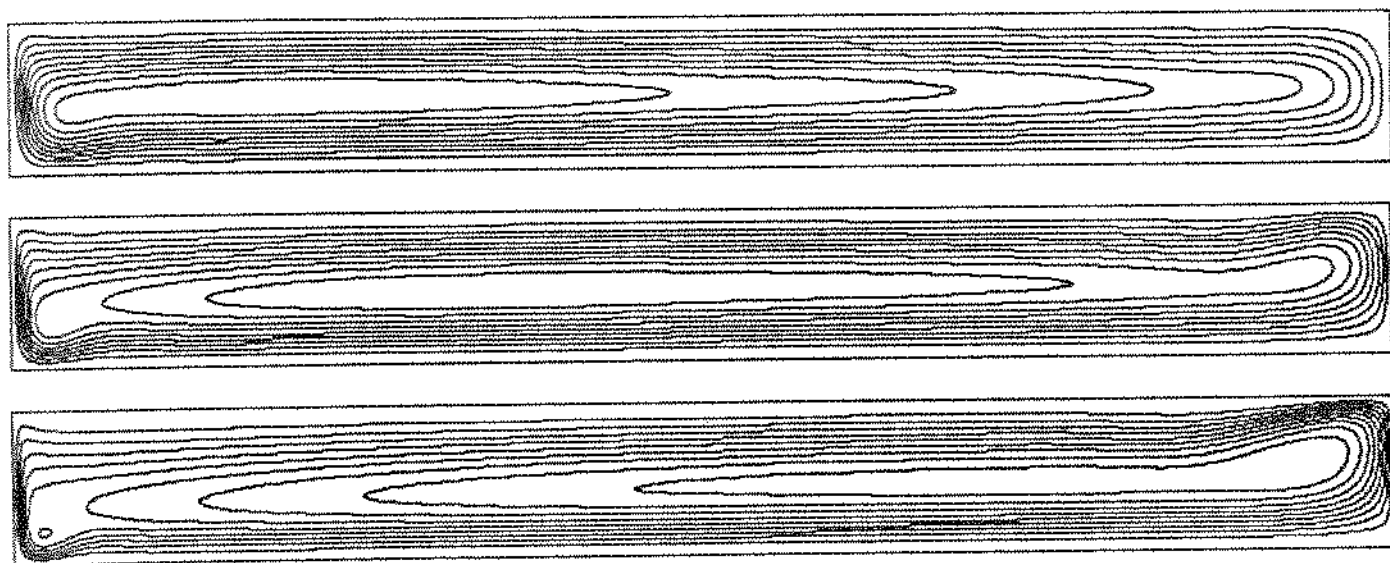


(b) Linhas de corrente para $Ra=10^3$; 10^5 ; e 10^6 .

Fig.5-14. Isothermas e linhas de corrente para $L/H=7$ e fluxo de calor especificado na base.



(a) Isotermas para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .



(b) Linhas de corrente para $Ra=10^4$; 10^5 ; e 10^6 .

Fig.5-15. Isotermas e linhas de corrente para $L/H=9$ e fluxo de calor especificado na base.

longo da cavidade no caso de $Ra=10^3-10^4$, embora seja sempre mais intenso junto à parede resfriada, pois é nesta parede que todo calor fornecido ao longo da base é transferido para fora da cavidade. O crescimento de Rayleigh e o conseqüente aumento da circulação faz com que o fluido aquecido, que retorna depois de ter mudado de direção no centro de simetria, preencha a parte superior da cavidade intensificando o gradiente de temperatura junto à parede resfriada, como se nota pela compressão das isotermas nesta região. A pressão devida ao movimento, induzida na região superior pelo empuxo e pelo jato ascendente, comprime o fluido que escoou na parte inferior da cavidade. Este efeito contribui para a estabilidade do escoamento da camada de fluido imediatamente acima da base aquecida, onde, como já foi comentado, o gradiente vertical de temperatura é instável. As fig. 5-13 a 5-15 ilustram os comentários anteriores quando $Ra=10^6$.

Quando a temperatura é conhecida na base, a cavidade tende a ser isotérmica nas regiões mais distantes da parede resfriada, sendo esta distância uma função do número de Rayleigh. No caso de fluxo especificado, não existem regiões isotérmicas e a temperatura é sempre crescente. Isto explica a tendência do escoamento a ocupar a cavidade em toda sua extensão, pois $\partial T/\partial x$ é diferente de zero ao longo de toda a cavidade (exceto em $x=L/H$) e o campo de velocidades nulo não é uma solução possível para as equações governantes. Como se comentou anteriormente, o gradiente de temperatura é mais intenso junto à parede resfriada, diminuindo no sentido do eixo x até anular-se no plano de simetria da cavidade inteira. Dessa forma, é possível que para cavidades muito alongadas (razão $L/H \gg 1$), mesmo para números de Rayleigh mais

elevados, a solução nas regiões mais distantes se aproxime do limite de condução pura, devido às baixas velocidades causadas por gradientes de temperatura comparativamente menores.

A análise de escala, apresentada no capítulo anterior, forneceu relações para a velocidade v_{max} , para o valor máximo da função corrente ψ_{max} e para o número de Nusselt no caso de fluxo de calor especificado na base da cavidade. Reproduz-se abaixo as relações expressas em (4.18), (4.19) e (4.20). Ou seja,

$$v_{max} \approx \frac{\alpha}{H} \left(\frac{L}{H}\right)^{2/5} Ra_H^{2/5} \quad (5.10)$$

$$\psi_{max} \approx \alpha \left(\frac{L}{H}\right)^{1/5} Pr^{1/2} Ra_H^{1/5} \quad (5.11)$$

$$Nu \approx \left(\frac{L}{H}\right)^{1/5} Ra_H^{1/5} \quad (5.12)$$

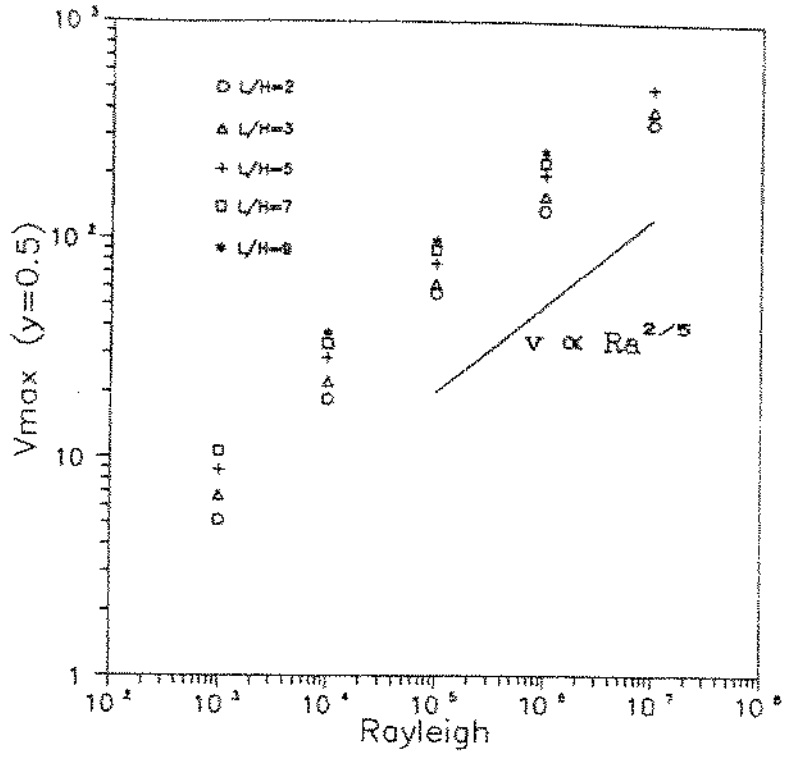
Estas relações, deduzidas a partir da hipótese de ocorrência de uma camada limite térmica junto à parede vertical resfriada, são válidas para razão L/H e número de Rayleigh elevados, segundo a indicação dos critérios (4.23) e (4.24).

Os gráficos da fig. 5-16 ilustram, respectivamente, a velocidade v_{max} (plano $y=0.5$) junto à parede resfriada versus (a) o número de Rayleigh e (b) a razão L/H . Nota-se que a partir de $Ra=10^4$, a concordância com as leis de potência para Rayleigh e para L/H expressas na relação (5.10) é muito grande.

No caso do valor máximo da função corrente ψ_{\max} , o gráfico da fig.5-17a mostra que sua variação coincide com a lei expressa em (5.11) quando $Ra=10^6-10^7$, o que está de acordo com o critério de validade da análise de escala para o número de Rayleigh. A variação com L/H , como se nota na fig.5-17b, é coerente com o que foi antecipado pela análise de escala e os resultados seguem uma tendência geral uniforme. Em particular, os resultados para $L/H \geq 5$ e $Ra > 10^4$ seguem de forma bastante razoável a lei de potência expressa em (5.11).

A influência do número de Rayleigh e da razão L/H no número de Nusselt é mostrada nas fig.5-18a e 5-18b. A lei $Nu \propto Ra^{1/5}$ é observada com boa exatidão para $Ra \geq 10^5$, independentemente da razão L/H , como se vê na fig.5-18a. A variação do número de Nusselt com a razão L/H merece algumas considerações adicionais. Nota-se que o número de Nusselt, neste caso, passa a diminuir com o aumento de L/H quando $Ra=10^3$; enquanto que para $Ra > 10^4$, o número de Nusselt aumenta com a razão L/H . No caso de $Ra=10^4$, praticamente não há variação. Este comportamento pode ser entendido analisando-se a variação do número de Nusselt num caso limite, quando Rayleigh tende a zero. A transferência de calor, neste caso, aproxima-se do limite de condução pura, ilustrado na fig.5-18b a título de referência. Como foi visto anteriormente, as isotermas ocupam a cavidade de maneira relativamente uniforme quando o número de Rayleigh é mais baixo. Isto permite tomar o comprimento L como dimensão característica da região onde ocorrem as variações de temperatura ao longo do eixo x . Assim, o fluxo total de calor através da cavidade pode ser escrito como

(a) $v_{\max} \times Ra$



(b) $v_{\max} \times L/H$

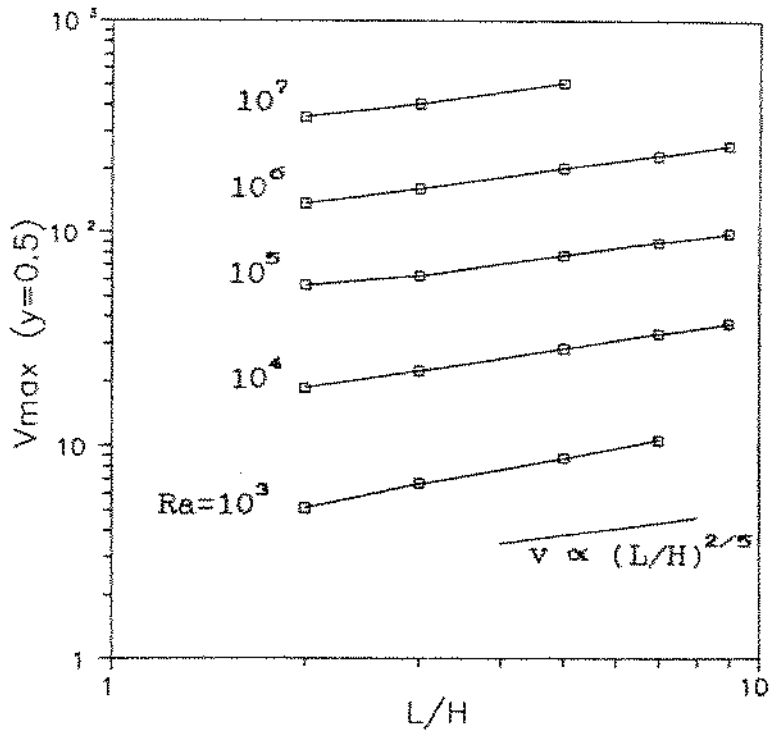


Fig. 5-16. Variação da velocidade v_{\max} com o número de Rayleigh e com a razão L/H .

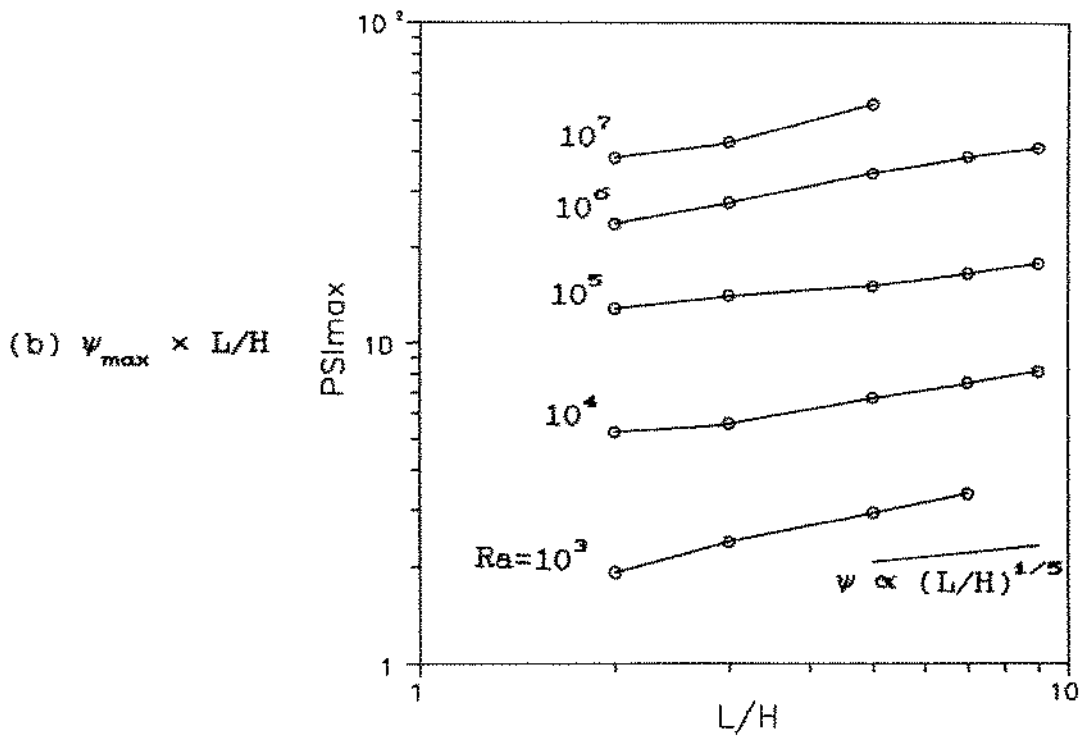
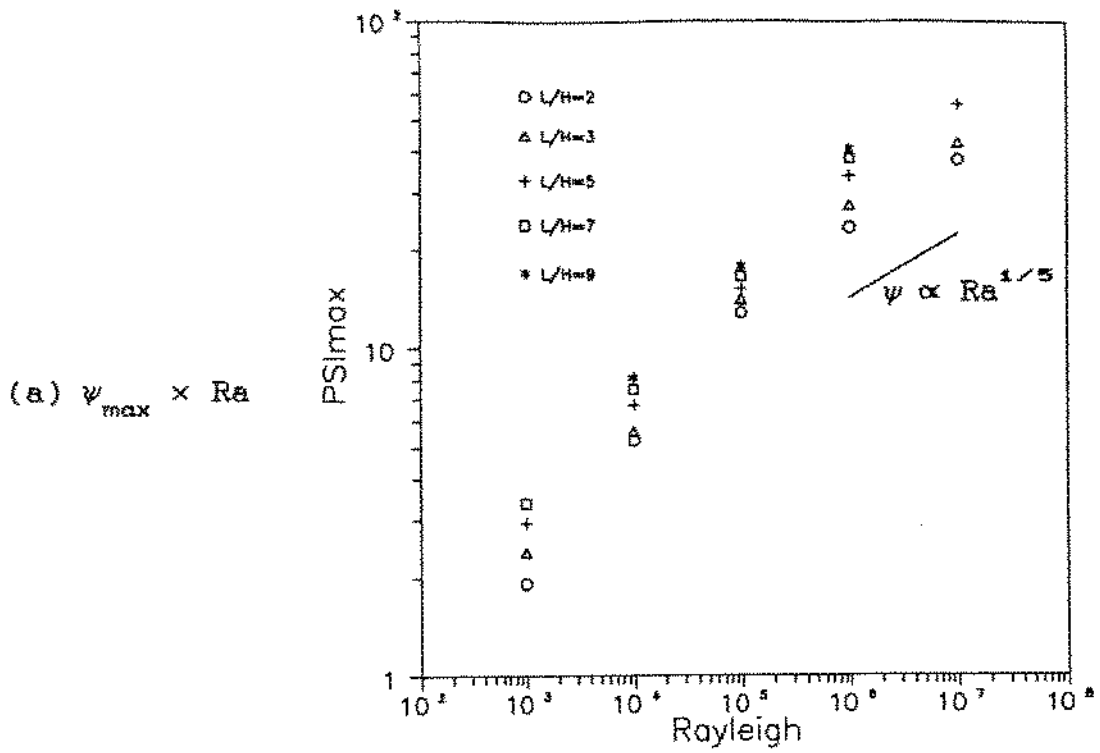
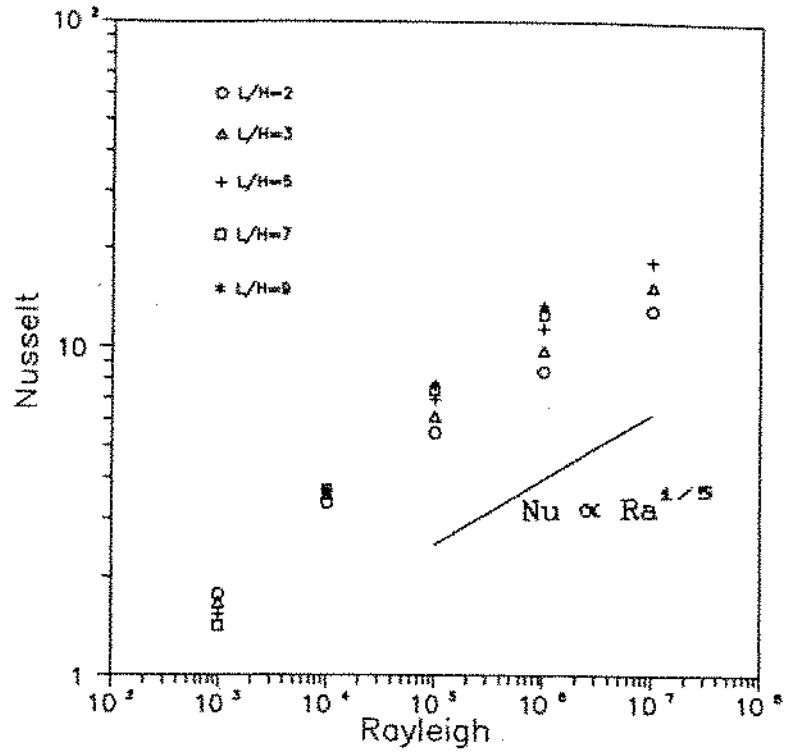


Fig. 5-17. Variação do valor máximo da função corrente com o número de Rayleigh e com a razão L/H.

(a) $Nu \times Ra$



(b) $Nu \times L/H$

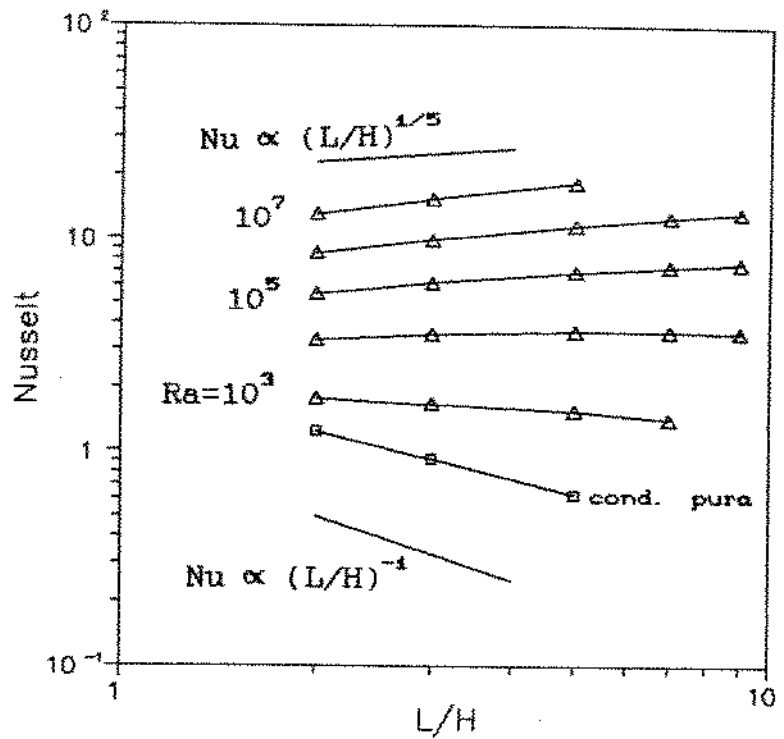


Fig. 5-18. Variação do número de Nusselt com o número de Rayleigh e com a razão L/H.

$$Q \approx K H \left(\frac{\Delta T}{L} \right) \quad (5.13)$$

o que implica, usando a definição de Nusselt, em

$$Nu \approx \left(\frac{L}{H} \right)^{-1} \quad (5.14)$$

Note como o número de Nusselt calculado no caso de condução pura (fig.5-18b) varia de forma bastante próxima ao previsto na relação (5.14). Assim, a variação do número de Nusselt com a razão L/H evolui gradativamente entre os limites definidos pelas leis de potência expressas em (5.12) e (5.14). Rigorosamente falando, a lei $Nu \propto (L/H)^{1/5}$ verifica-se mais exatamente apenas para $Ra=10^5$, servindo os limites indicados na fig.5-18b mais como referência para entender o comportamento do número de Nusselt quando a cavidade é alongada horizontalmente no caso de fluxo de calor especificado na base.

Ao contrário do item anterior, não foram observadas pequenas recirculações quando a cavidade é alongada. Como foi visto, neste caso o escoamento ocupa toda extensão da cavidade, não existindo regiões isotérmicas como no caso de temperatura especificada na base. Por outro lado, a ocorrência de células girando no sentido dos ponteiros do relógio é impedida pelo gradiente monotonicamente crescente de temperatura, no sentido do eixo x, que age sempre no sentido de girar o fluido contra os ponteiros do relógio.

O LIMITE PARA VALORES BAIXOS DO NUMERO DE RAYLEIGH

A análise do problema em estudo no limite inferior dos valores do número de Rayleigh será apresentada neste capítulo.

A escala para a velocidade é verificada neste limite, e as equações governantes são adimensionalizadas, levando-se em conta esta escala.

É desenvolvida uma metodologia de solução para o problema em estudo, aplicável no limite em questão, a partir da expansão das incógnitas em séries de potência do número de Rayleigh. Neste caso, a expansão em série foi considerada apenas para a cavidade com razão geométrica unitária ($H/L=1$).

6.1 Escala para a velocidade e adimensionalização das equações governantes

Como já foi comentado no Capítulo 4, no caso de gradientes horizontais de temperatura, o movimento convectivo sempre ocorre, independentemente de quão pequeno seja o valor do número de Rayleigh. Isto ocorre porque o campo de velocidades nulo não é uma solução possível para as equações governantes quando $\partial T/\partial x \neq 0$.

No limite quando $Ra_H \rightarrow 0$, não existem regiões onde se concentram altos gradientes de temperatura, não se configurando, portanto, estruturas do tipo camada limite. Realmente, os valores

baixos para o número de Rayleigh situam-se no extremo oposto do estabelecido nos critérios de validade para as relações de camada limite (4.21 e 4.23).

As isotermas e linhas de corrente para valores baixos do número de Rayleigh (em especial $Ra=10^3$), vistas nos Capítulos 4 e 5, mostram como a temperatura e as velocidades se distribuem de maneira suave pela cavidade. Nestes casos, as próprias dimensões da cavidade podem ser tomadas como grandezas características nas direções x e y ($x \approx L$ e $y \approx H$). Quando a temperatura é especificada na base e o valor do número de Rayleigh é baixo, o escoamento e o campo de temperaturas ocupam apenas a região próxima à parede resfriada e, nestes casos, pode-se dizer que $x \approx H$ para as cavidades com razão $L/H > 1$. Quando o fluxo é especificado na base, toda a cavidade é ocupada pelas isotermas e linhas de corrente, e assim $x \approx L$. Mesmo nestes casos, quando o valor do número de Rayleigh é baixo, o centro da célula de escoamento localiza-se próximo à parede resfriada. De qualquer maneira, como da equação da continuidade (2.1) conclui-se que $(u/L) \approx (v/H)$ e como $H < L$, pode-se tomar a altura H como dimensão característica da cavidade para determinar a escala da velocidade v no limite quando $Ra_H \rightarrow 0$.

Em convecção natural, a força de empuxo é a causa do movimento e, portanto, nenhuma outra força pode ser de ordem superior a ela. Trata-se então de verificar se esta força será balanceada pelo atrito ou pela inércia. Escolhendo o balanço entre o atrito e o empuxo na equação da variação da quantidade de movimento (2.10), temos

$$\nu \frac{v}{H^2} \simeq g \beta \Delta T \quad (6.1)$$

e, portanto

$$v \simeq \left(\frac{\alpha}{H}\right) Ra_H \quad (6.2)$$

A coerência na escolha do atrito para balancear o empuxo pode ser verificada pela razão entre os termos relativos à inércia e ao atrito na eq.(2.10):

$$\frac{(\text{inércia})}{(\text{atrito})} \simeq \frac{v^2/H}{\nu v/H^2} \simeq \frac{v H}{\nu} \quad (6.3)$$

onde vH/ν é o número de Reynolds (Re). Substituindo o valor de v pelo obtido em (6.2), vem

$$Re \simeq \frac{Ra_H}{Pr} \quad (6.4)$$

e como os valores do número de Prandtl considerados são tais que $Pr \approx 1$ ou $Pr > 1$, o termo da inércia é pequeno comparado ao do atrito, coerentemente com o esperado. A razão Ra/Pr é o número de Grashof (Gr).

O mecanismo dominante de transferência de calor, no limite quando $Ra_H \rightarrow 0$, pode ser verificado pela razão entre o termo da convecção e o da condução na equação da energia (2.4):

$$\frac{(\text{convecção})}{(\text{condução})} \simeq \frac{v \Delta T/H}{\alpha \Delta T/H^2} \simeq \frac{v H}{\alpha} \quad (6.5)$$

onde vH/α é o número de Peclet (Pe). Substituindo o valor de v ,

fica

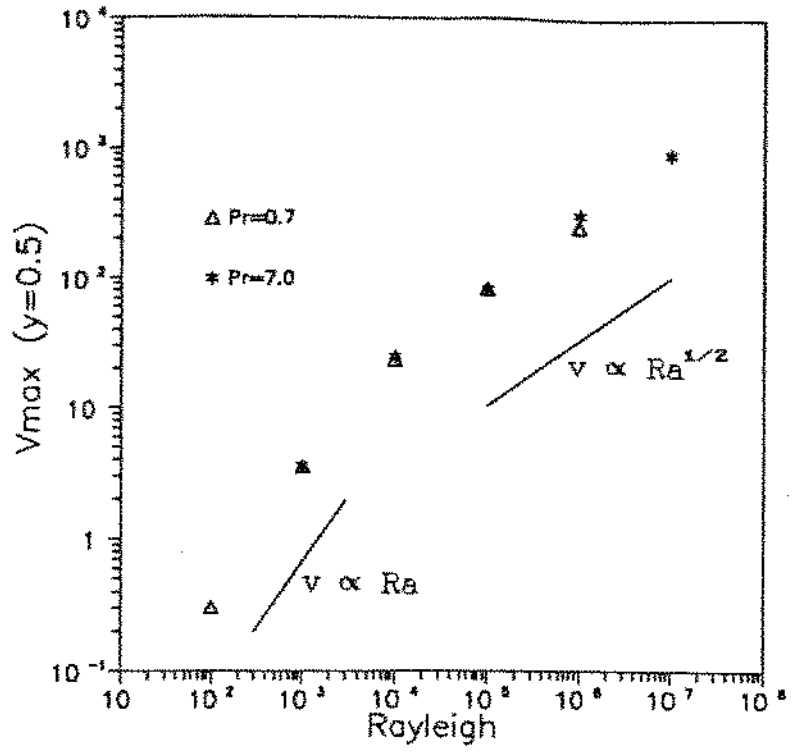
$$Pe \approx Ra_H \quad (6.6)$$

No limite para valores baixos do número de Rayleigh, isto significa que a transferência de calor é, como já era esperado, dominada pela condução pura. Realmente, como se viu nos capítulos anteriores, as isotermas evoluem no sentido do limite de condução pura quando o valor do número de Rayleigh diminui.

A lei de potência $v \propto Ra_H$ prevista em (6.2) pode ser verificada no gráfico da fig.6-1. Nesta figura, os gráficos vistos no Capítulo 4 (fig.4-16) para a velocidade v_{max} (plano $y=0.5$) junto à parede resfriada são reproduzidos acrescentando-se a ilustração da lei de potência supracitada. A escolha desta velocidade como representativa do escoamento no limite quando $Ra_H \rightarrow 0$ é conveniente porque, neste limite, o centro da célula de escoamento se localiza próximo à parede resfriada mesmo nos casos de razão $L/H > 1$. Nota-se que, tanto no caso de temperatura (fig.6-1a) quanto no de fluxo de calor (fig.6-1b) especificados na base da cavidade, a variação da velocidade v_{max} com o número de Rayleigh, quando $Ra=10^2-10^3$, segue a lei de potência expressa em (6.2).

Torrance e Rockett (1969), estudando uma cavidade cilíndrica vertical com uma fonte de calor localizada no centro da base, verificaram esta lei de potência para a velocidade no caso de valores baixos do número de Graashof.

(a) Temperatura
especificada.



(b) Fluxo
especificado.

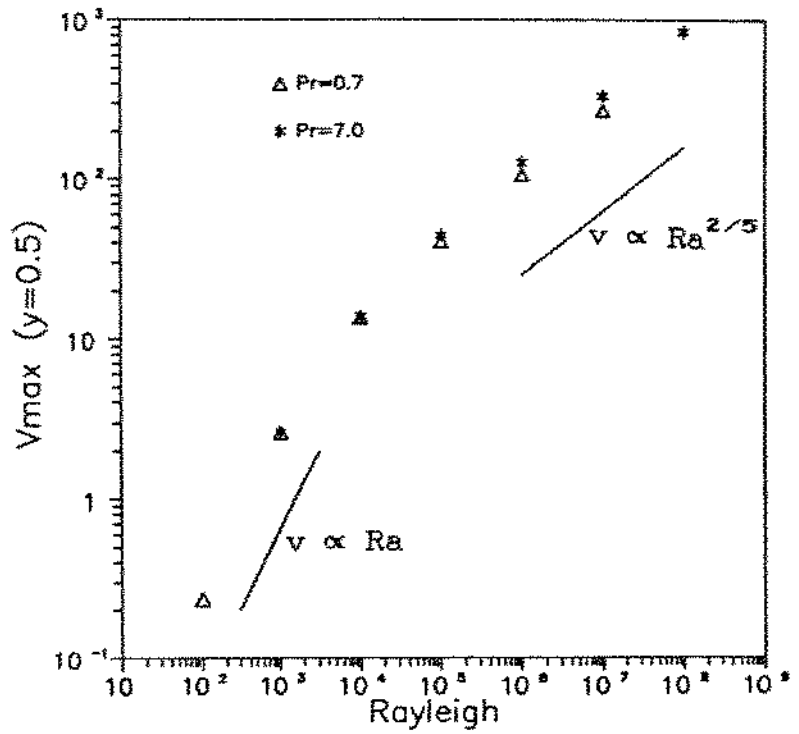


Fig.6-1. Velocidade v_{\max} (plano $y=0.5$) versus o número de Rayleigh para cavidade com razão $H/L=1$.

6.2- Solução das equações governantes para valores baixos do número de Rayleigh

A partir da escala para a velocidade vista no item anterior, podemos adimensionalizar as equações governantes, introduzindo as novas variáveis adimensionais

$$u^* = \frac{u}{\left(\frac{\alpha}{H}\right) Ra_H}, \quad v^* = \frac{v}{\left(\frac{\alpha}{H}\right) Ra_H} \quad (6.7)$$

e mantendo x , y e a temperatura adimensionalizadas da mesma forma que anteriormente (2.16). Escrevendo as equações governantes, sem o "*", temos

$$\frac{Ra_H}{Pr} \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \nabla^2 \xi + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.8)$$

$$Ra_H \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \nabla^2 T \quad (6.9)$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (6.10)$$

As condições de contorno são aquelas já estabelecidas para a cavidade em estudo. Uma metodologia para a solução das equações governantes, no caso de valores baixos do número de Rayleigh, será vista a seguir.

Como o movimento convectivo ocorre para qualquer valor do

número de Rayleigh, no caso de gradientes horizontais de temperatura, Batchelor (1954) sugeriu que — no limite quando $Ra_H \rightarrow 0$ — as incógnitas seriam uma função fraca do número de Rayleigh e poderiam ser expandidas em séries de potência deste número. Admite-se então que a incógnita ϕ pode ser escrita como

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 Ra_H + \phi_2 Ra_H^2 + \dots \quad (6.11)$$

onde $\phi = \xi; T; \text{ e } \psi$. Substituindo esta série nas eq. (6.8), (6.9) e (6.10), e igualando os coeficientes da mesma potência em Rayleigh, chegaremos a um sistema de equações para cada potência, os quais formarão o conjunto:

— potência (Ra_H^0)

$$0 = \nabla^2 \xi_0 + \frac{\partial T_0}{\partial x} \quad (6.12)$$

$$0 = \nabla^2 T_0 \quad (6.13)$$

$$\nabla^2 \psi_0 = -\xi_0 \quad (6.14)$$

— potência (Ra_H^4)

$$0 = \nabla^2 \zeta_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial(\zeta_0, \psi_0)}{\partial(x,y)} \quad (6.15)$$

$$0 = \nabla^2 T_1 - \frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(x,y)} \quad (6.16)$$

$$\nabla^2 \psi_1 = -\zeta_1 \quad (6.17)$$

⋮

As condições de contorno do conjunto de sistemas de equações, no caso de temperatura especificada na base e para valores de $i=0$; 1 ; 2 ;, são

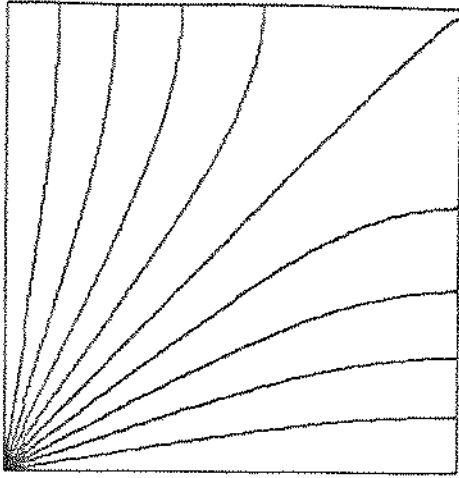
$$\begin{aligned} x = 0 & \rightarrow T_i = 0 \quad ; \quad \psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0 \\ x = 1 & \rightarrow \frac{\partial T_i}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \psi_i = 0 \quad ; \quad \zeta_i = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$y = 0 \rightarrow T_i \begin{cases} = 1, & i = 0 \\ = 0, & i \geq 1 \end{cases} \quad ; \quad \psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0$$

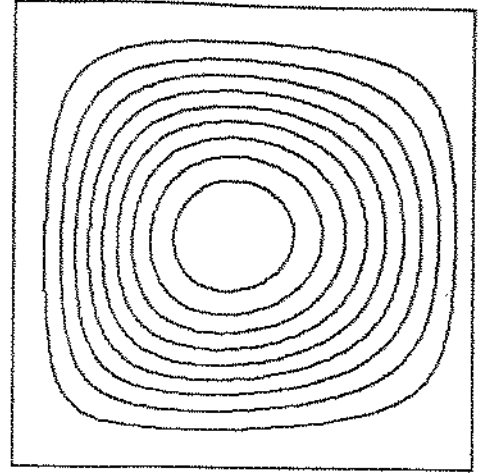
$$y = 1 \rightarrow \frac{\partial T_i}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0$$

O algoritmo desenvolvido anteriormente para a cavidade com razão $H/L=1$, depois de feitas as modificações necessárias, foi utilizado para resolver numericamente os sistemas de equações. Foi mantida a malha regular com 61×61 pontos e foram resolvidos os sistemas de equações até a potência (Ra_H^2) .

As curvas de nível relativas às distribuições de T_0 e ψ_0 e de T_1 e ψ_1 estão ilustradas, respectivamente, nas fig.6-2 e 6-3. As isotermas T_0 correspondem à distribuição diagonalmente simétrica de temperaturas no caso de condução pura e o escoamento (ψ_0) constitui-se de uma única célula girando no sentido trigonométrico. Note como as linhas de corrente se distribuem quase uniformemente em torno de centro geométrico da cavidade. Na fig.6-3a, os valores da temperatura na distribuição T_1 são negativos no quadrante inferior esquerdo e crescentes (positivos) no sentido do canto superior direito. Esta distribuição surge em consequência do sinal do termo fonte (6.16) — proveniente da solução para a potência (Ra_H^0) — nos diferentes quadrantes da cavidade e é coerente com o movimento convectivo do fluido na cavidade. De fato, o fluido resfriado desce da parede vertical e encontra a base aquecida, diminuindo a temperatura no quadrante inferior esquerdo da cavidade. Este fluido se aquece à medida que avança no sentido do plano de simetria da cavidade e depois muda de direção, ocupando a parte superior e elevando a temperatura nesta região. As perturbações, introduzidas pelo termo $T_1 Ra_H$ (da série 6.11) na distribuição T_0 para condução pura, agem justamente no sentido de diminuir a temperatura na região que recebe o fluido recém resfriado e de aumentá-la na região superior da cavidade. O escoamento (ψ_1) é também constituído por uma única célula girando

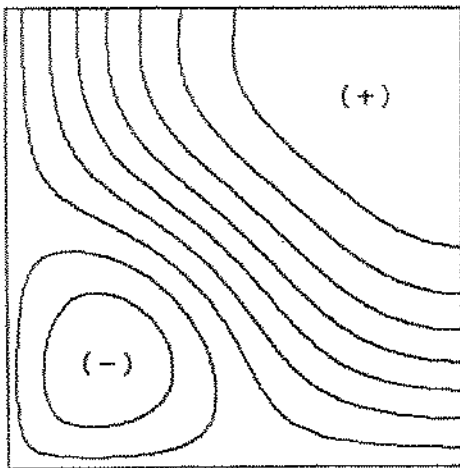


(a) T_0

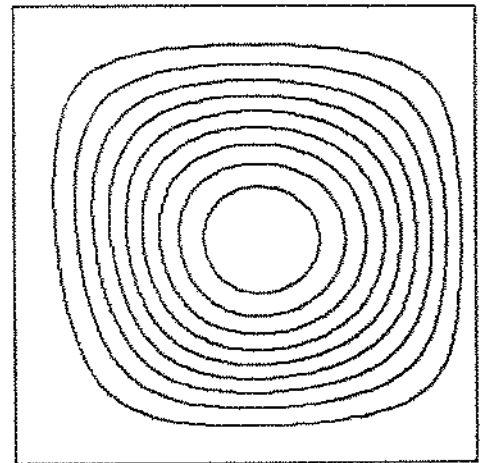


(b) ψ_0

Fig. 6-2. Isothermas e linhas de corrente correspondentes às distribuições de T_0 e ψ_0 .



(a) T_1



(b) ψ_1

Fig.6-3. Isothermas e linhas de corrente correspondentes às distribuições de T_1 e ψ_1 .

no sentido trigonométrico, mas sua intensidade é da ordem de 10^4 vezes menor do que a do escoamento no caso anterior (ψ_0).

A validade da metodologia desenvolvida deve ser verificada. Em outras palavras, deve-se determinar o quão longe do valor nulo está o número de Rayleigh quando se escreve "limite $Ra_H \rightarrow 0$ ". A investigação numérica deste limite de validade está ilustrada nos resultados apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3.

Tabela 1 . Valores de T_i e ψ_i ($i=0; 1; e 2$).

| parâmetro | (Ra_H^0) | (Ra_H^1) | (Ra_H^2) |
|-------------------------------|------------|------------------------|------------------------|
| T_i | 0.635 | 0.133×10^{-3} | 0.023×10^{-6} |
| $\psi_i \times 10^3$ (max) | 0.864 | 0.274×10^{-3} | 0.031×10^{-6} |

A Tabela 1 mostra a temperatura T_i na posição $(x=1, y=0.5)$ e o valor máximo da função corrente ψ_i obtidos a partir da solução numérica dos sistemas de equações para as potências (Ra_H^0) , (Ra_H^1) e (Ra_H^2) . Considerando-se $Ra=10^4$, a simples inspeção da ordem de grandeza dos termos T_i na tabela mostra que a série não converge, pois a temperatura aumenta cada vez mais à medida que adicionamos os termos $T_i Ra_H^i$ da série, ultrapassando o valor especificado nas condições de contorno. De fato, da somatória dos produtos de T_i , T_2 e T_3 pelas potências correspondentes de Ra_H , obtem-se para a temperatura o valor de $T \cong 4.2$ na posição indicada. Em função deste resultado, investigaremos os casos de $Ra=10^2-10^3$.

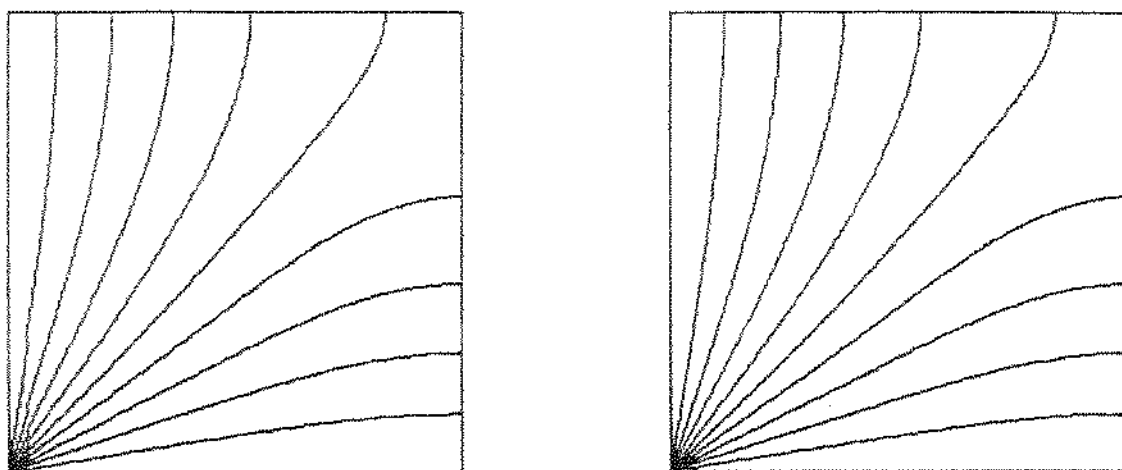
Tabela 2. Comparação dos parâmetros T e ψ .

| parâmetro | Ra=10 ² | | | Ra=10 ³ | | |
|--------------------|--------------------|---------|-------|--------------------|---------|-------|
| | (0+1) | (0+1+2) | ref. | (0+1) | (0+1+2) | ref. |
| T | 0.648 | 0.649 | 0.649 | 0.768 | 0.791 | 0.762 |
| $\psi \times 10^3$ | 0.891 | 0.892 | 0.891 | 1.138 | 1.169 | 1.089 |

A Tabela 2 mostra os valores finais dos parâmetros T e ψ calculados a partir de T_1 e ψ_1 indicados na Tabela 1. A soma do primeiro e do segundo termos da série é indicada por (0+1); e a do primeiro, segundo e terceiro, por (0+1+2). A terceira e a sexta colunas mostram os valores dos parâmetros, respectivamente para Ra=10² e 10³, obtidos da solução numérica plena (Capítulo 4), e que servirão de referência para determinar o limite de validade das expansões em séries de potência do número de Rayleigh. As três primeiras colunas mostram que, para Ra=10², a soma dos dois primeiros termos da série é suficiente para reproduzir o valor da terceira coluna. A perturbação introduzida pelo terceiro termo é insignificante e pode-se dizer que a série converge. Quando Ra=10³, a ordem de grandeza do terceiro termo da série não é desprezível, e o valor do parâmetro ultrapassa de forma mais evidente o valor de referência. A soma dos dois primeiros termos, apesar de fornecer resultados próximos à referência, não é representativa da série como um todo.

Destes resultados, conclui-se que o valor Ra=10³ está no limite de validade da solução em série de potências do número de Rayleigh. Utilizando este mesmo tipo de solução em cavidades sob

condições de contorno diferentes, Batchelor (1954) e November e Nansteel (1987) chegaram a este mesmo valor limite do número de Rayleigh para validade das expansões em série. A fig. 6-4 compara as isothermas calculadas pela solução numérica plena para $Ra=10^2$ com aquelas determinadas pela soma dos dois primeiros termos da série, ilustrando a aplicabilidade da solução em série para valores do número de Rayleigh desta ordem. Esta figura também mostra como as isothermas se afastam pouco da distribuição diagonalmente simétrica de condução pura.



(a) T

(b) $T=T_0 + T_1 Ra$

Fig. 6-4. Comparação de isothermas para $Ra=10^2$. (a) Solução numérica plena. (b) Solução em série.

A partir dos resultados numéricos, verificou-se também que a contribuição das distribuições de temperaturas T_1 e T_2 para a transferência de calor através da cavidade é muito pequena, sendo

esta determinada pela solução para a potência (Ra_H^0), isto é, pela distribuição T_0 para condução pura.

Tabela 3. Número de Nusselt.

| condição de contorno | (Ra_H^0) | $Ra=10^2$ | $Ra=10^3$ |
|----------------------|--------------|-----------|-----------|
| temperatura | 3.37 | 3.37 | 3.45 |
| fluxo | 1.70 | 1.72 | 1.81 |

A Tabela 3 compara os valores do número de Nusselt, para temperatura e fluxo de calor especificados na base da cavidade, nos casos de condução pura (Ra_H^0), $Ra=10^2$ e $Ra=10^3$. O número de Nusselt para $Ra=10^2$ é idêntico ao do caso de condução pura e quando $Ra=10^3$ é um pouco maior.

É interessante notar que o valor $Ra=10^3$ é da ordem de grandeza do valor crítico do número de Rayleigh, só acima do qual ocorrerá movimento convectivo, numa cavidade submetida a um gradiente vertical instável de temperatura; abaixo deste valor crítico não há movimento convectivo, e a transferência de calor se dá por condução. No caso em estudo, o movimento convectivo sempre ocorrerá para qualquer valor do número de Rayleigh, só que para $Ra < 10^3$, a transferência de calor — como no caso anterior — é determinada pela solução para condução pura.

Os resultados deste item quantificam, de forma mais precisa, a análise de escala apresentada no item anterior, que antecipava o predomínio da condução pura na transferência de calor quando $Ra_H \rightarrow 0$.

A solução em série de potências do número de Rayleigh foi

também aplicada a uma cavidade com razão $H/L=1$ e fluxo de calor especificado na base, levando a conclusões semelhantes às que foram delineadas neste item para o caso de temperatura especificada na base.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

No presente trabalho, o fenômeno da convecção natural no interior de uma cavidade retangular — aquecida pela base e simetricamente resfriada pelos lados — foi simulado numericamente para uma faixa de valores dos parâmetros significativos do problema, em especial o número de Rayleigh e a razão geométrica H/L .

As principais conclusões, quanto ao método numérico utilizado e quanto aos resultados das simulações, serão delineadas neste capítulo.

Primeiramente, no que se refere ao método numérico, a formulação de função corrente - vorticidade mostrou-se bastante útil na resolução deste tipo de problema, possibilitando soluções numéricas numa grande faixa de valores dos parâmetros fundamentais do fenômeno. Há que se reconhecer, entretanto, que em função das próprias características do escoamento no problema estudado, o conhecimento mais detalhado da distribuição de pressões no interior da cavidade poderia acrescentar mais elementos para análise.

A utilização de malhas irregulares, no caso das cavidades alongadas horizontalmente, mostrou-se uma poderosa ferramenta na obtenção de resultados confiáveis sem o dispêndio de muito tempo no computador. O uso destas malhas merece investigações mais detalhadas, buscando principalmente novas estratégias para geração da malha mais adequada para cada caso, inclusive em um mesmo

problema com valores diferentes dos parâmetros.

A solução obtida a partir da expansão das incógnitas em séries de potências do número de Rayleigh mostrou-se útil, considerados apenas os dois primeiros termos da série, para números de Rayleigh até 10^3 .

Quanto aos resultados obtidos, foi observada a pequena influência do número de Prandtl na transferência de calor e na intensidade da circulação no interior da cavidade, sendo estes parâmetros funções do número de Rayleigh e da razão geométrica.

No caso da cavidade com razão geométrica unitária, a mudança da condição de contorno na base da cavidade, de um modo geral, praticamente não afeta o escoamento nem o desenho das isotermas no interior da cavidade. Quando a cavidade é alongada horizontalmente, diferenças fundamentais ocorrem quando é a temperatura ou é o fluxo de calor que é especificado na base da cavidade. No caso de temperatura especificada, a cavidade não é termicamente ativa em toda sua extensão, e o escoamento nem sempre ocupa toda a cavidade. Quando o fluxo de calor é especificado, as isotermas e as linhas de corrente preenchem toda cavidade, mesmo para valores baixos do número de Rayleigh.

A comparação com cavidades sob condições próximas, em particular com aquela analisada por Kimura e Bejan (1985), mostrou como a imposição de um gradiente vertical estável de temperatura diminui a intensidade do escoamento e acarreta uma evolução mais lenta do número de Nusselt com o número de Rayleigh. Neste tipo de comparação, verificou-se também que a presença de uma parede rígida no lugar do plano de simetria da cavidade inteira afeta muito pouco os resultados.

A análise do problema no limite quando $Ra_H \rightarrow 0$ mostrou o predomínio das soluções para condução pura neste limite, apesar do movimento convectivo que sempre ocorre, para qualquer valor do número de Rayleigh, no caso do problema estudado.

O padrão de escoamento constituiu-se, em todos os casos analisados, de uma única célula girando no sentido trigonométrico, exceção feita às pequenas recirculações devidas ao arrasto viscoso. A persistência deste padrão se explica, em última instância, pelas próprias condições de contorno impostas à cavidade, que obrigam a ocorrência da transferência de calor da base para a parede lateral da cavidade.

A aplicação ao problema em estudo das escalas deduzidas para convecção natural numa parede vertical isotérmica, interagindo com um reservatório de fluido em repouso, é uma das principais conclusões deste trabalho. Na cavidade estudada, a base aquecida impõe um gradiente instável de temperatura que não diminui a intensidade do escoamento, possibilitando ao fluido a execução de um ciclo que se aproxima ao que ocorre em uma parede vertical resfriada interagindo com um reservatório de fluido aquecido em repouso.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Allen, D. N. de G. e Southwell, R. V. (1955) Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder, *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, vol. 8, pt. 2, p. 129-145.

Anderson, R. e Lauriat, G. (1986) The horizontal natural convection boundary layer regime in a closed cavity, *Proc. of The Eighth Internacional Heat Transfer Conference*, vol. 4, p. 1453-1458, San Francisco, California.

Anderson, D. A., Tannehill, J. C. e Fletcher, R. H. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, N. Y..

Arpaci, S. V. e Larsen, P. S. (1984) *Convection Heat Transfer*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J..

Batchelor, G. K. (1954) Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures, *Q. Appl. Math.*, vol. 12, no. 3, p. 209-233.

Beier, R. A., Ris, J. e Baum, H. R. (1983) Accuracy of finite-difference methods in recirculating flows, *Numerical Heat Transfer*, vol. 6, p. 283-302.

Bejan, A. (1984) *Convection Heat Transfer*, John Wiley & Sons, N. Y..

Bejan, A. (1987) Stressing the "free" in free convection research: the basic scales of heat and mass transfer in fluids and fluid-saturated porous media, *Proc. of the 1987 ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference*, vol. 2, p. 195-202, Honolulu, Hawaii.

Bejan, A. e Kimura, S. (1981) Penetration of free convection into a lateral cavity, *J. Fluid Mech.*, vol. 103, p. 465-478.

Bejan, A. e Tien, C. L. (1978) Laminar natural convection heat transfer in a horizontal cavity with different end temperatures, *J. Heat Transfer*, vol. 100, p. 641-647.

Bozeman, J. D. (1973) Numerical study of viscous flow in a cavity, *Journal of Computational Physics*, vol. 12, p. 348-363.

Burggraf, O. R. (1966) Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.*, vol. 24, pt. 1, p. 113-151.

Chandrasekhar, S. (1961), *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford.

Chen, K. S., Ho, J. R. e Humphrey, J. A. C. (1987) Steady, two-dimensional, natural convection in rectangular enclosures with differently heated walls, *J. Heat Transfer*, vol. 109, p. 400-406.

Chow, L. C. e Tien, C. L. (1978) An examination of four differencing schemes for some elliptic-type convection equations, *Numerical Heat Transfer*, vol. 1, p. 87-100.

Cormack, D. E., Leal, L. G. e Seinfeld, J. H. (1974a) Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 2. Numerical solutions, *J. Fluid Mech.*, vol. 65, pt. 2, p. 231-246.

Cormack, D. E., Leal, L. G. e Imberger, J. (1974b) Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory, *J. Fluid Mech.*, vol. 65, pt. 2, p. 209-229.

Gebhart, B. (1973) Natural convection flows and stability, *Adv. Heat Transfer*, vol. 9, p. 273-348.

Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. e Sammakia, B. (1988) *Buoyancy-Induced Flows and Transport*, Hemisphere Publishing Corporation, N. Y..

Gill, A. E. (1966) The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.*, vol. 26, pt. 3, p. 515-536.

Gray, D. D. e Giorgini, A. (1976) The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 19, p. 545-551.

Hildebrand, F. B. (1948) *Advanced Calculus for Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J..

Kimura, S. e Bejan, A. (1984) The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side, *J. Heat Transfer*, vol. 106, p. 98-103.

Kimura, S. e Bejan, A. (1985) Natural convection in a differentially heated corner region, *Physics Fluids*, vol. 28, no. 10, p. 2980-2989.

Lord Rayleigh (1916) On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.*, s. 6, vol. 32, no. 192, p. 529-546.

Maliska, C. R., Polina, S. e Silva, A. F. C. (1987) Natural convection in triangular enclosures, *Anais do I Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Massa*, p. 456-467, Campinas, Brazil.

Nallasamy, M. e Prasad, K. K. (1974) Numerical studies on quasilinear and linear elliptic equations, *Journal of Computational Physics*, vol. 15, p. 429-448.

Newell, M. E. e Schmidt, F. W. (1970) Heat transfer by laminar natural convection within rectangular enclosures, J. Heat Transfer, February 1970, p.159-168.

November, M. e Nansteel, M. W. (1987) Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, no. 11, p. 2433-2440.

Ostrach, S. (1972) Natural convection in enclosures, Adv. Heat Transfer, vol. 8, p. 161-227.

Ostrach, S. (1988) Natural convection in enclosures, J. Heat Transfer, vol. 110, p. 1175-1190.

Ostrach, S. e Raghavan, C. (1979) Effect of stabilizing thermal gradients on natural convection in rectangular enclosures, J. Heat Transfer, vol. 101, p. 238-243.

Patankar, S. V. (1980) Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, N. Y..

Patterson, J. e Imberger, J. (1980) Unsteady natural convection in a rectangular cavity, J. Fluid Mech., vol. 100, pt. 1, p. 65-86.

Poulikakos, D. (1985) Natural convection in a confined fluid-filled space driven by a single vertical wall with warm and cold regions, J. Heat Transfer, vol. 107, p. 867-876

Prakash, C. (1984) Application of the locally analytic differencing scheme to some test problems for the convection-diffusion equation, *Numerical Heat Transfer*, vol.7, p. 165-182.

Raithby, G. D. e Torrance, K. E. (1974) Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow, *Computers and Fluids*, vol. 2, p. 191-206.

Roache, P. J. (1972) *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, N. M..

Schlichting, H. (1968) *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, N. Y..

Torrance, K. E. (1968) Comparison of finite-difference computations of natural convection, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 72B, no. 4, p. 281-301.

Torrance, K. E. e Rockett, J. A. (1969) Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below — creeping flow to the onset of laminar instability, *J. Fluid Mech.*, vol. 36, pt. 1, p. 33-54.

Tritton, D. J. (1977) *Physical Fluid Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, N. Y..

Wilkes, J. O. (1963) The Finite Difference Computation of Natural Convection in an Enclosed Rectangular Cavity, Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Wilkes, J. O. e Churchill, S. W. (1966) The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure, A.I.Ch.E. Journal, vol. 12, no. 1, p. 161-166.

Wong, H. H. e Raithby, G. D. (1979) Improved finite-difference methods based on a critical evaluation of the approximation errors, Numerical Heat Transfer, vol. 2, p. 139-163.

APENDICE 1

CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DISCRETIZADA

O cálculo dos coeficientes a_E , a_W ,..... das equações (3.18) a (3.21) foi implementado no computador da forma descrita a seguir. Esta formulação deve-se a Patankar (1980) e pode ser escrita como

$$a_E = D_x A (|Pe_x|) + \max [-F_x, 0] \quad (1)$$

$$a_W = D_x A (|Pe_x|) + \max [F_x, 0] \quad (2)$$

$$a_N = D_y A (|Pe_y|) + \max [-F_y, 0] \quad (3)$$

$$a_S = D_y A (|Pe_y|) + \max [F_y, 0] \quad (4)$$

onde $\max [a,b]$ é o valor máximo do par (a,b) e a função $A (|Pe|)$ depende da discretização adotada. Esta formulação generalizada dos coeficientes a_E , a_W ,..... é conveniente porque permite analisar várias discretizações, alterando no programa apenas a expressão para o cálculo da função $A (|Pe|)$.

No caso da discretização devida a Allen esta função é escrita como

$$A (|Pe|) = \frac{|Pe|}{\exp (|Pe|) - 1} \quad (5)$$

Esta expressão pode ser determinada a partir da expansão em série de Taylor da função $\exp(x)$, ficando então

$$A(|Pe|) = \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|Pe|^m}{(m+1)!}} \quad (6)$$

onde $m=0, 1, 2, \dots$. Podemos reescrever (6) como

$$A(|Pe|)^{-1} = 1 + \frac{|Pe|}{2} \left\{ 1 + \dots \frac{|Pe|}{(m-1)} \left[1 + \frac{|Pe|}{m} \left[1 + \frac{|Pe|}{(m+1)} \right] \right] \dots \right\} \quad (7)$$

Esta forma é conveniente para implementação no computador e foi adotada no programa desenvolvido. Notando o k -ésimo termo do produto no lado direito da expressão (7) por T_k , temos

$$T_k = 1 + \frac{|Pe|}{k+1} T_{k+1} \quad (8)$$

Fazendo

$$k = m, m-1, m-2, \dots, 1$$

e

$$T_{m+1} = 1$$

temos:

$$\begin{aligned} T_m &= 1 + \frac{|Pe|}{m+1} \\ T_{m-1} &= 1 + \frac{|Pe|}{m} T_m \\ T_{m-2} &= 1 + \frac{|Pe|}{m-1} T_{m-1} \\ &\vdots \\ T_1 &= 1 + \frac{|Pe|}{2} T_2 \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$A (|Pe|) = \frac{1}{T} \quad (9)$$

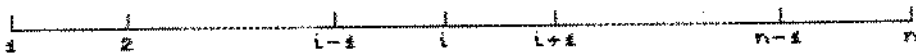
No programa desenvolvido o valor utilizado para m foi de m=8. Foi realizado um teste com o valor de m=20 e os resultados mantiveram-se inalterados. Provavelmente um valor menor de m, aproveitando apenas alguns termos de (7), poderia ter sido adotado.

APENDICE 2

O ALGORITMO DE THOMAS

No método iterativo linha-a-linha, quando considera-se a linha visitada da grade, o sistema de equações fica semelhante ao caso unidimensional. Nestes casos, o método de eliminação Gaussiana pode ser reduzido a um algoritmo simples, conhecido por algoritmo de Thomas. Como na matriz dos coeficientes do sistema de equações os termos não nulos se alinham nas três diagonais centrais, este algoritmo é também chamado de TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm).

Seja uma linha da grade, ilustrada como



e, seja ϕ_i a variável dependente associada ao ponto i da linha. A equação de diferenças, que relaciona ϕ_i com seus pontos vizinhos, pode ser representada por

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \tag{1}$$

onde, nas fronteiras

$$\begin{aligned} i = 1 & \rightarrow c_i = 0 \\ i = n & \rightarrow b_n = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Usando a equação de diferenças (1) escreve-se $\phi_i = f(\phi_{i-1})$ e, para $i \geq 2$ substitui-se sucessivamente a expressão de ϕ_{i-1} , calculada no ponto anterior, na equação de ϕ_i , de forma que

$$\phi_i = f(\phi_{i+1}) \quad (3)$$

obtendo, desta maneira, o valor numérico de ϕ_n no ponto n. Com o valor de ϕ_n determina-se ϕ_{n-1} , que por sua vez permite calcular ϕ_{n-2} e assim sucessivamente até ϕ_1 .

Escrevendo então a função da equação (3) como

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (4)$$

pode-se determinar os coeficientes P_i e Q_i substituindo a expressão de ϕ_{i-1} , ou seja

$$\phi_{i-1} = P_{i-1} \phi_i + Q_{i-1} \quad (5)$$

na equação (1), o que fornece as relações de recorrência

$$P_i = \frac{b_i}{(a_i - c_i P_{i-1})} \quad e, \quad (6)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{(a_i - c_i P_{i-1})} \quad (7)$$

Para iniciar o processo de cálculo parte-se de $i=1$ ($c_1=0$), o que implica em

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{e} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (8)$$

Depois, calcula-se sucessivamente os coeficientes P_i e Q_i até chegar ao ponto n ($b_n=0$), onde

$$P_n = 0 \quad (9)$$

Da equação (4) temos

$$\phi_n = Q_n \quad (10)$$

e faz-se agora o caminho de volta, determinando os valores de ϕ_{n-1} , ϕ_{n-2} ,, ϕ_2 e ϕ_1 .

Este método foi implementado no computador numa subrotina chamada LITER, que permite escolher a direção e o sentido da varredura, dependendo das condições de contorno em cada caso.

APENDICE 3

LISTAGEM DO PROGRAMA

Para efeito de registro de memória, é listado abaixo o programa em linguagem FORTRAN que foi utilizado na obtenção dos resultados numéricos. Este programa refere-se ao caso mais geral de malha não uniforme e foi rodado no computador IBM 3090.

```

C*****
C   ****CONVECCAO NATURAL NUMA CAVIDADE ****
C   ****          RETANGULAR          ****
C*****
C-----PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*4 (A,D,G,P,R,S,T,U,V)
      DIMENSION X(303),Y(63),VORANT(303,63),TEMANT(303,63)
      DIMENSION DETEMX(303),DETEMY(303)
      COMMON
1/COM1/N1,NJ,NPPSI,NSP,
2   DELX,DELY,
3   U(303,63),V(303,63),VDR(303,63),PSI(303,63),TEM(303,63),
4   DENSIT,DIFUSI,GRASHO,PRANDT,
5   XR(303),XXR(303),XXXR(303),DELXR(303)
      COMMON
1/COM2/AP(303,303),AN(303,303),AS(303,303),AE(303,303),
2   AW(303,303),SU(303,303)
C
C
C-----PARAMETROS E INDICES DE CONTROLE-----
      NNDN=20
      NSP=9
      NITER=1
      IT=303
      JT=63
      NPTEM=3
      NPPSI=3
      NPVDR=4
      FSUVDR=0.6
      FRAC=1.0E-01
      EPS=1.0E-04
      MAXIT=5000
      INDPRI=10000
C-----PARAMETROS DO GRAFICO
      IC=1
      RVH=2.
      NPH=100

```

```

C-----DEFINICAO DA MALHA
      RLPH=5.
      NI=211
      NJ=61
      DIMY=1.0
      DELY=DIMY/FLOAT(NJ-1)
      DELX=DELY
      DIMX=DELY*FLOAT(NI-1)
      HPL=DIMY/DIMX
      IMON=2
      JMDN=(NJ+1)/2
      DO 50 I=1,NI
50    X(I)=FLOAT(I-1)*DELY
      DO 70 J=1,NJ
70    Y(J)=FLOAT(J-1)*DELY
C-----TRANSFORMACAO DE COORDENADAS
      CX=RLPH*0.5
      CY=DIMX*0.5
      FM=1.0
      DO 71 I=1,NI
      ARG=((X(I)-CY)*SINH(FM*CX))/CY
      ARG1=ARG+(ARG**2+1.)**0.5
      XR(I)=(ALOG(ARG1))/FM+CX
      YXR(I)=FM*CY*COSH(FM*(XR(I)-CX))/SINH(FM*CX)
      YXXR(I)=CY*(FM**2)*SINH(FM*(XR(I)-CX))/SINH(FM*CX)
71    CONTINUE
      DO 72 I=1,NI-1
      DELXR(I)=XR(I+1)-XR(I)
72    CONTINUE
C-----PROPRIEDADES DO FLUIDO E PARAMETROS ADIMENSIONAIS
      PRANDT=7.0
      RAYLEI=1000000.
      GRASHO=RAYLEI/PRANDT
      WRITE(37,401)
      WRITE(37,402)PRANDT,RLPH,NI,NJ,RAYLEI
C
C-----VALORES INICIAIS
      DO 100 I=1,NI
      DO 100 J=1,NJ
      PSI(I,J)=1.0
      VOR(I,J)=1.0
      VORANT(I,J)=1.0
      TEM(I,J)=0.5
100   CONTINUE
      WRITE(37,635)IMON,JMDN
C
C-----LOOP DE ITERACAO-----
C
C-----CALCULO DE PSI-----
200   DENSIT=0.
      DIFUSI=1.
      CALL CALPSI
C-----

```



```

C-----CALCULO DAS VELOCIDADES NOS PONTOS INTERNOS
DO 210 I=2,(NI-1)
DO 210 J=2,(NJ-1)
U(I,J)=(PSI(I,J+1)-PSI(I,J-1))/(2.0*DELY)
V(I,J)=(PSI(I-1,J)-PSI(I+1,J))/(2.0*DELX)**XXR(I)
210 CONTINUE
C-----CONDICOES DE CONTORNO
DO 230 J=1,NJ
C-----FRONTEIRA DESTE
U(1,J)=0.0
V(1,J)=0.0
VDR(1,J)=((PSI(3,J)-8*PSI(2,J))/(2*DELX**2))**XXR(I)**2-
1 XXR(I)*((4*PSI(2,J)-PSI(3,J))/(2*DELX))
C-----FRONTEIRA LESTE
U(NI,J)=0.0
V(NI,J)=-((PSI(NI-2,J)-4*PSI(NI-1,J))/(2*DELX))**XXR(I)
VDR(NI,J)=0.
230 CONTINUE
DO 240 I=1,NI
C-----FRONTEIRA SUL
U(I,1)=0.0
V(I,1)=0.0
VDR(I,1)=(PSI(I,3)-8*PSI(I,2))/(2*DELY**2)
C-----FRONTEIRA NORTE
U(I,NJ)=0.
V(I,NJ)=0.0
VDR(I,NJ)=(PSI(I,NJ-2)-8*PSI(I,NJ-1))/(2*DELY**2)
240 CONTINUE
C-----DETERMINACAO DO CAMPO DE TEMPERATURAS-----
DENSIT=1.
DIFUSI=1.
CALL COEF(0)
C-----
DO 301 N=1,NPTEN
CALL LITER(1,NI,NJ,TEM)
CALL LITER(2,NI,NJ,TEM)
301 CONTINUE
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE VDR-----
DENSIT=1./PRANDT
DIFUSI=1.
CALL COEF(1)
C-----
RESVDR=0.0
DO 300 I=1,NI
DO 300 J=1,NJ
RESOR=AN(I,J)*VDR(I,J+1)+AS(I,J)*VDR(I,J-1)+AE(I,J)*VDR(I+1,J)+
1 AM(I,J)*VDR(I-1,J)-AP(I,J)*VDR(I,J)+SU(I,J)
RESOR=SQRT(RESOR*RESOR)
IF(RESOR.GE.RESVDR)RESVDR=RESOR
300 CONTINUE

```

```

C-----SAIDA INTERMEDIARIA
      IF(NITER.NE.1.AND.MOD(NITER,NMON).NE.0)GO TO 485
      WRITE(37,640)NITER,RESVOR,FSUVOR,U(IMON,JMON),V(IMON,JMON),
      1VOR(IMON,JMON),PSI(IMON,JMON),TEN(IMON,JMON)
485   IF(NITER.EQ.1)RESPER=RESVOR*FRAC
      IF(NITER.GE.MAXIT) GO TO 551
C-----CONDICOES DE SAIDA
      IF(RESVOR.GT.RESPER)GO TO 470
      KA=0
      GO TO 552
551   KA=1
552   SMDTEM=0.
      SMTM=0.
      SMDVOR=0.0
      SMVOR=0.0
      DO 450 I=1,NI
      DO 450 J=1,NJ
      SMDTEM=SMDTEM+ABS(TEN(I,J)-TEMANT(I,J))
      SMTM=SMTM+ABS(TEM(I,J))
      SMDVOR=SMDVOR+ABS(VOR(I,J)-VORANT(I,J))
      SMVOR=SMVOR+ABS(VOR(I,J))
450   CONTINUE
      RMDTEM=SMDTEM/SMTM
      RMD=SMDVOR/SMVOR
      IF(KA.EQ.1)GO TO 550
      IF(RMG.LE.EPS.AND.RMDTEM.LE.EPS)GO TO 550
470   DO 480 I=1,NI
      DO 480 J=1,NJ
      TEMANT(I,J)=TEM(I,J)
      VORANT(I,J)=VOR(I,J)
480   CONTINUE
      NITER=NITER+1
C-----SUBRELAXACAO DOS COEFICIENTES DE VOR
      DO 510 I=2,(NI-1)
      DO 510 J=2,(NJ-1)
      AP(I,J)=AP(I,J)/FSUVOR
      SU(I,J)=SU(I,J)+(1.-FSUVOR)*AP(I,J)*VOR(I,J)
510   CONTINUE
C-----SOLUCAO DAS EQUACOES DE DIFERENCAS PARA VOR
      DO 540 N=1,NPVOR
      CALL LITER(4,NI,NJ,VOR)
      CALL LITER(2,NI,NJ,VOR)
      CALL LITER(4,NI,NJ,VOR)
540   CONTINUE
      GO TO 200
550   WRITE(37,404)RMD,RMDTEM,RESPER
C-----NUMERO DE NUSSELT
      DO 254 I=2,NI
254   DETEMY(I)={(-3*TEM(I,1)+4*TEM(I,2)-TEM(I,3))/(2*DELY)}
      DETEMY(1)={-(0.5/DELY)}
      AREA=0.

```

```

DO 250 I=1,NI-1
250 AREA=AREA+(DELXR(I)/2)*(DETEMY(I)+DETEMY(I+1))
ANUTX=-AREA
DO 255 J=2,NJ
255 DETEMX(J)=[(-3*TEM(1,J)+4*TEM(2,J)-TEM(3,J))/(2*DELX)]*XR(I)
DETEMX(1)=0.5/DELXR(1)
AREA=0.
DO 241 J=1,NJ-1
241 AREA=AREA+(DELY/2)*(DETEMX(J)+DETEMX(J+1))
ANUTY=AREA
C-----DETERMINACAO DE PSI(MAX) E PSI(MIN)
PSIMAX=PSI(1,1)
PSIMIN=PSI(1,1)
DO 260 I=1,NI
DO 260 J=1,NJ
IF(PSIMAX-PSI(I,J).GE.0.)GO TO 10
PSIMAX=PSI(I,J)
XMAX=XR(I)
YMAX=Y(J)
10 IF(PSIMIN-PSI(I,J).LE.0.)GO TO 260
PSIMIN=PSI(I,J)
XMIN=XR(I)
YMIN=Y(J)
260 CONTINUE
C-----DETERMINACAO DE V(MAX E MIN) E U(MAX E MIN)
LX=(NI+1)/2
UMAX=U(LX,1)
UMIN=U(LX,1)
DO 263 J=1,NJ
IF(UMAX-U(LX,J).GE.0.)GO TO 262
UMAX=U(LX,J)
262 IF(UMIN-U(LX,J).LE.0.)GO TO 263
UMIN=U(LX,J)
263 CONTINUE
C-----VMAX E VMIN
LY=(NJ+1)/2
VMAX=V(1,LY)
VMIN=V(1,LY)
DO 264 I=1,NI
IF(VMAX-V(I,LY).GE.0.)GO TO 265
VMAX=V(I,LY)
265 IF(VMIN-V(I,LY).LE.0.)GO TO 264
VMIN=V(I,LY)
264 CONTINUE
C-----VELOCIDADE MAXIMA NO CENTRO: VCMAX
VCMAX=V(NI,1)
DO 266 J=1,NJ
IF(VCMAX-V(NI,J).GE.0.)GO TO 266
VCMAX=V(NI,J)
266 CONTINUE
WRITE(37,403)ANUTX,ANUTY,PSIMAX,XMAX,YMAX,PSIMIN,XMIN,YMIN,
1 UMAX,UMIN,VMAX,VMIN,VCMAX

```

```

C-----ESTIMATIVA DA ORDEM DOS TERMOS
      TERM1=0.
      TERM2=0.
      TERM3=0.
      DO 267 I=2,NI-1
        DO 267 J=2,NJ-1
          TERM1=TERM1+DENSIT*(ABS(U(I,J))*(VOR(I+1,J)-VOR(I-1,J)))/
1      (2*DELX)+ABS(V(I,J))*(VOR(I,J+1)-VOR(I,J-1)))/(2*DELY)
          TERM2=TERM2+DIFUSI*(ABS(VOR(I+1,J)-2*VOR(I,J)+VOR(I-1,J)))/
1      DELX**2+ABS(VOR(I,J-1)-2*VOR(I,J)+VOR(I,J+1))/DELY**2)
          TERM3=TERM3+RAYLEI*ABS((TEM(I+1,J)-TEM(I-1,J))/(2*DELX))
267    CONTINUE
      NTOTAL=(NI-2)*(NJ-2)
      TERM1=TERM1/NTOTAL
      TERM2=TERM2/NTOTAL
      TERM3=TERM3/NTOTAL
      WRITE(37,406)TERM1,TERM2,TERM3

C-----
      DO 268 I=1,NI
        DETEMY(I)=-DETEMY(I)
268    CONTINUE
C
C-----ABERTURA DE ARQUIVOS
      DO 572 I=1,NI
        MY=(NJ+1)/2
        WRITE(11,*)XR(I),V(I,MY)
        WRITE(14,*)XR(I),TEM(I,MY)
        WRITE(15,*)XR(I),DETEMY(I)
        WRITE(31,*)XR(I),X(I)
572    CONTINUE
      DO 573 J=1,NJ
C-----DET. DOS MXS -----
      DO 575 I=1,NI-1
        IF(1.0.LE.XR(I+1).AND.1.0.GE.XR(I))MX1=I
        IF(2.0.LE.XR(I+1).AND.2.0.GE.XR(I))MX2=I
        IF(3.0.LE.XR(I+1).AND.3.0.GE.XR(I))MX3=I
        IF(4.0.LE.XR(I+1).AND.4.0.GE.XR(I))MX4=I
C      IF(6.0.LE.XR(I+1).AND.6.0.GE.XR(I))MX6=I
C      IF(8.0.LE.XR(I+1).AND.8.0.GE.XR(I))MX8=I
575    CONTINUE
C      MX=(NI+1)/2
        WRITE(12,*)Y(J),U(MX1,J)
        WRITE(19,*)Y(J),U(MX2,J)
        WRITE(20,*)Y(J),U(MX3,J)
        WRITE(21,*)Y(J),U(MX4,J)
C      WRITE(22,*)Y(J),U(MX6,J)
C      WRITE(23,*)Y(J),U(MX8,J)
        WRITE(13,*)Y(J),TEM(MX1,J)
        WRITE(25,*)Y(J),TEM(MX2,J)
        WRITE(26,*)Y(J),TEM(MX3,J)
        WRITE(27,*)Y(J),TEM(MX4,J)

```

```

D      WRITE(28,*)Y(J),TEM(MX6,J)
C      WRITE(29,*)Y(J),TEM(MX8,J)
      WRITE(30,*)Y(J),TEM(NI,J)
      WRITE(16,*)Y(J),DETEMX(J)
573   CONTINUE
      WRITE(17,*)(XR(I),I=1,N1)
      WRITE(17,*)(Y(J),J=1,NJ)
      WRITE(17,*)((TEM(I,J),J=1,NJ),I=1,NI)
      WRITE(18,*)(XR(I),I=1,N1)
      WRITE(18,*)(Y(J),J=1,NJ)
      WRITE(18,*)((PSI(I,J),J=1,NJ),I=1,NI)
C
C-----INSTRUÇÕES DE FORMATAÇÃO
635   FORMAT(1H,'NO. DA RESIDUO      FATOR DE ',7X,'VALORES
      1 DAS VARIÁVEIS NO PTD (' ,12,' ,',12,')' / 2X,'ITER',6X,'
      2VDR',7X,'RELAXAÇÃO',11X,'U',11X,'V',10X,'VDR',7X,'PSI',10X,'TEM
      3')
640   FORMAT(1H ,1X,I4,2X,1PE12.3,1PE12.2,5X,1P,5E12.4)
401   FORMAT(15X,'*** CAVIDADE AQUECIDA PELA BASE-TEMPERATURA ***',/
      C/)
402   FORMAT(5X,'PRANDT=',F6.3,5X,'L/H=',F4.1,5X,'MALHA: ',
      2I3,' X ',12,/,5X,'RAYLEIGH=',1PE7.1,/)
C
403   FORMAT(////,10X,'NUSSELT(TX)=' ,F7.4,10X,'NUSSELT(TY)=' ,F7.4,/,
      110X,'PSIMAX=' ,E16.8,2X,' (' ,F7.4,' ,',F7.4,')' ,10X,'PSIMIN=' ,
      2E16.8,2X,' (' ,F7.4,' ,',F7.4,')' ,/,10X,'UMAX=' ,E16.8,6X,'UMIN=' ,
      3E16.8,/,10X,'VMAX=' ,E16.8,6X,'VMIN=' ,E16.8,/,10X,'VCMAX=' ,
      4E16.8,/)
406   FORMAT(///,10X,'TERM1=' ,E12.5,9X,'TERM2=' ,E12.5,5X,'TERM3=' ,
      1 E12.5,/)
404   FORMAT(//,10X,'RMD=' ,1PE7.1,5X,'RMDTEM=' ,1PE7.1,5X,'RESPER=' ,
      21PE7.1)
C
C
      END
C*****
SUBROUTINE CALPSI
C*****
      IMPLICIT REAL*4 (A,B,D,G,P,S,T,U,V)
      DIMENSION BE(0:20),BW(0:20),BS(0:20),BN(0:20)
      COMMON
      1/COM1/NI,NJ,NPPSI,NBP,
      2 DELX,DELY,
      3 U(303,63),V(303,63),VDR(303,63),PSI(303,63),TEM(303,63),
      4 DENSIT,DIFUS1,GRASHD,PRANDT,
      5 XR(303),XXR(303),XXXR(303),DELYR(303)
      COMMON
      1/COM2/AP(303,303),AN(303,303),AS(303,303),AE(303,303),
      2 AW(303,303),SU(303,303)

```

```

C
C-----MONTAGEM DOS COEFICIENTES DE PSI
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NOS PONTOS INTERNOS
      DO 100 I=2, NI
      DO 100 J=2, NJ
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE CONVECCAO
      FN=DENSIT*(V(I,J))*DELX
      FS=DENSIT*(V(I,J))*DELY
      FE=(XXR(I))*DENSIT*U(I,J)-DIFUSI*XXR(I))*DELY
      FW=(XXR(I))*DENSIT*U(I,J)-DIFUSI*XXR(I))*DELY
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE DIFUSAO
      DN=DIFUSI*DELX/DELY
      DS=DIFUSI*DELX/DELY
      DE=DIFUSI*XXR(I)**2*DELY/DELY
      DW=DIFUSI*XXR(I)**2*DELY/DELY
C-----CALCULO DOS NUMEROS DE PECLET
      PN=FN/DN
      PS=FS/DS
      PE=FE/DE
      PW=FW/DW
C-----CALCULO DA FUNCAO A(/P/)
      NG=NSP-1
      BN(NG)=1.0
      BS(NG)=1.0
      BE(NG)=1.0
      BW(NG)=1.0
      DO 200 K=NG,1,-1
      BN(K-1)=BN(K)*ABS(PN)/FLOAT(K+1)+1.0
      BS(K-1)=BS(K)*ABS(PS)/FLOAT(K+1)+1.0
      BE(K-1)=BE(K)*ABS(PE)/FLOAT(K+1)+1.0
      BW(K-1)=BW(K)*ABS(PW)/FLOAT(K+1)+1.0
200  CONTINUE
      APN=1.0/BN(0)
      APS=1.0/BS(0)
      APE=1.0/BE(0)
      APW=1.0/BW(0)
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NOS PONTOS INTERNOS
      AN(I,J)=DN*APN+AMAX1(-FN,0.)
      AS(I,J)=DS*APS+AMAX1(-FS,0.)
      AE(I,J)=DE*APE+AMAX1(-FE,0.)
      AW(I,J)=DW*APW+AMAX1(-FW,0.)
      SU(I,J)=VDR(I,J)*DELX*DELY
      AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)
100  CONTINUE
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NO CONTORNO
      DO 201 J=1,NJ
C-----FRONTEIRA DESTA
      AN(1,J)=0.0
      AS(1,J)=0.0
      AE(1,J)=0.0
      AW(1,J)=0.0
      SU(1,J)=0.0
      AP(1,J)=1.0

```

```

C-----FRONTEIRA LESTE
      AN(NI,J)=0.0
      AS(NI,J)=0.0
      AE(NI,J)=0.0
      AW(NI,J)=0.0
      SU(NI,J)=0.0
      AP(NI,J)=1.0
201  CONTINUE
      DO 300 I=1,NI
C-----FRONTEIRA SUL
      AN(I,1)=0.0
      AS(I,1)=0.0
      AE(I,1)=0.0
      AW(I,1)=0.0
      SU(I,1)=0.0
      AP(I,1)=1.0
C-----FRONTEIRA NORTE
      AN(I,NJ)=0.0
      AS(I,NJ)=0.0
      AE(I,NJ)=0.0
      AW(I,NJ)=0.0
      SU(I,NJ)=0.0
      AP(I,NJ)=1.0
300  CONTINUE
C-----SOLUCAO DAS EQUACOES DE DIFERENCAS PARA PSI
      DO 350 N=1,NPPSI
      CALL LITER(1,NI,NJ,PSI)
      CALL LITER(2,NI,NJ,PSI)
      CALL LITER(3,NI,NJ,PSI)
      CALL LITER(4,NI,NJ,PSI)
350  CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE CDEF(IEQ)
C*****
      IMPLICIT REAL*4 (A,B,D,G,P,S,T,U,V)
      DIMENSION BE(0:20),BW(0:20),BS(0:20),BN(0:20)
      COMMON
      1/COM1/NI,NJ,NPPSI,NBP,
      2   DELX,DELY,
      3   U(303,63),V(303,63),VDR(303,63),PSI(303,63),TEM(303,63),
      4   DENSIT,DIFUSI,GRASHO,PRANDT,
      5   XR(303),XXR(303),XXXR(303),DELXR(303)
      COMMON
      1/COM2/AP(303,303),AN(303,303),AS(303,303),AE(303,303),
      2   AW(303,303),SU(303,303)
C
C-----IEQ=0 => EQ. DA ENERGIA
C-----IEQ=1 => EQ. DA VORTICIDADE
C-----MONTAGEM DOS COEFICIENTES DA EQ. DE TRANSPORTE
      DO 100 I=2, NI
      DO 100 J=2, NJ

```

```

C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE CONVECCAO
FN=DENSIT*(V(I,J))*DELX
FS=DENSIT*(V(I,J))*DELY
FE=(XXR(I)*DENSIT*U(I,J)-DIFUSI*XXR(I))*DELY
FW=(XXR(I)*DENSIT*U(I,J)-DIFUSI*XXR(I))*DELY
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES DE DIFUSAO
DN=DIFUSI*DELX/DELY
DS=DIFUSI*DELY/DELX
DE=DIFUSI*XXR(I)**2*DELY/DELX
DW=DIFUSI*XXR(I)**2*DELY/DELX
C-----CALCULO DOS NUMEROS DE PECLET
PN=FN/DN
PS=FS/DS
PE=FE/DE
PW=FW/DW
C-----CALCULO DA FUNCAO A(/P/)
NG=NGP-1
BN(NG)=1.0
BS(NG)=1.0
BE(NG)=1.0
BW(NG)=1.0
DO 200 K=NG,1,-1
BN(K-1)=BN(K)*ABS(PN)/FLOAT(K+1)+1.0
BS(K-1)=BS(K)*ABS(PS)/FLOAT(K+1)+1.0
BE(K-1)=BE(K)*ABS(PE)/FLOAT(K+1)+1.0
BW(K-1)=BW(K)*ABS(PW)/FLOAT(K+1)+1.0
200 CONTINUE
APN=1.0/BN(0)
APS=1.0/BS(0)
APE=1.0/BE(0)
APW=1.0/BW(0)
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NOS PONTOS INTERNOS
AN(I,J)=DN*APN+AMAX1(-FN,0.)
AS(I,J)=DS*APS+AMAX1(-FS,0.)
AE(I,J)=DE*APE+AMAX1(-FE,0.)
AW(I,J)=DW*APW+AMAX1(-FW,0.)
SU(I,J)=(IEQ*GRASHO*PRANDB*(TEM(I+1,J)-TEM(I-1,J))*DELY/2.)
1 *XXR(I)
AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)
100 CONTINUE
C-----CALCULO DOS COEFICIENTES NA FRONTEIRA
DO 250 J=1,NJ
C-----FRONTEIRA OESTE
AN(1,J)=0.0
AS(1,J)=0.0
AE(1,J)=0.0
AW(1,J)=0.0
SU(1,J)=VOR(1,J)*IEQ+(1-IEQ)*(0.)
AP(1,J)=1.0
C-----FRONTEIRA LESTE
AN(NI,J)=(1-IEQ)*AN(NI,J)

```



```

      GO TO(10,12,11,13),LDV
10  JST=1
      JFIN=NJ
      LAPJ=1
      GO TO 14
11  JST=NJ
      JFIN=1
      LAPJ=-1
14  IFIN=NJ
      KF=1
      GO TO 150
12  JST=1
      JFIN=NJ
      LAPJ=1
      GO TO 16
13  JST=NJ
      JFIN=1
      LAPJ=-1
16  IFIN=NJ
      KF=0
150 DO 300 J=JST,JFIN,LAPJ
      JMAX=MAX0(JST,JFIN)
      DO 310 I=1,IFIN
      A(I)=KF*AP(I,J)+(1-KF)*AP(J,I)
      B(I)=KF*AE(I,J)+(1-KF)*AN(J,I)
      C(I)=KF*AW(I,J)+(1-KF)*AS(J,I)
      IF(J.EQ.1)D(I)=KF*(AN(I,J)*PHI(I,J+1)+SU(I,J))+(1-KF)*(AE
2(J,I)*PHI(J+1,I)+SU(J,I))
      IF(J.EQ.JMAX)D(I)=KF*(AS(I,J)*PHI(I,J-1)+SU(I,J))+(1-KF)
2*(AW(J,I)*PHI(J-1,I)+SU(J,I))
      IF(J.NE.1.OR.J.NE.JMAX)D(I)=KF*(AN(I,J)*PHI(I,J+1)+AS(I,
2J)*PHI(I,J-1)+SU(I,J))+(1-KF)*(AE(J,I)*PHI(J+1,I)+AW(J
2,I)*PHI(J-1,I)+SU(J,I))
      IF(1.GT.1)GO TO 350
      P(I)=B(I)/A(I)
      Q(I)=D(I)/A(I)
      GO TO 310
350 P(I)=(B(I)/(A(I)-C(I)*P(I-1)))
      Q(I)=(D(I)+C(I)*Q(I-1))/(A(I)-C(I)*P(I-1))
310 CONTINUE
      IF(KF.EQ.0)GO TO 36
      PHI(IFIN,J)=Q(IFIN)
      DO 37 I=IFIN-1,1,-1
37  PHI(I,J)=P(I)*PHI(I+1,J)+Q(I)
      GO TO 300
36  PHI(J,IFIN)=Q(IFIN)
      DO 38 I=IFIN-1,1,-1
38  PHI(J,I)=P(I)*PHI(J,I+1)+Q(I)
300 CONTINUE
      RETURN
      END

```