

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Rafael Vischi
Carvalho E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 13/08/2010
Katia Lucchesi Carvalho
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Rafael Vischi Carvalho

Análise Dinâmica de Rolamentos de Esfera

Campinas, 2010.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS**

Rafael Vischi Carvalho

Análise Dinâmica de Rolamentos de Esfera

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Orientador: Kátia Lucchesi Cavalca

Campinas, 2010.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C253a Carvalho, Rafael Vischi
Análise dinâmica de rolamentos de esfera / Rafael
Vischi Carvalho. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rolamentos de esfera. 2. Dinâmica. 3.
Cinemática. 4. Mecânica do contato. I. Cavalca, Katia
Lucchesi. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic analysis of ball bearings

Palavras-chave em Inglês: Ball bearings, Dynamic, Kinematics, Mechanical
contact

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Robson Pederiva, Gilberto Pechoto de Melo

Data da defesa: 13/08/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Análise Dinâmica de Rolamentos
de Esfera**

Autor: Rafael Vischi Carvalho

Orientador: Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica



Prof. Dr. Robson Pederiva

Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica



Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo

Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”- UNESP FEIS

Campinas, 13 de Agosto de 2010.

Dedicatória

Dedico este trabalho à meus familiares, em especial aos meus pais Paulo Roberto e Cleide.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais, pelo amor, carinho e dedicação em todos esses anos e por me ajudar a cumprir mais uma etapa fundamental em minha vida pessoal e profissional.

À minha orientadora, Professora Doutora Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, por me mostrar os caminhos durante os últimos três anos de trabalho juntos e também pela paciência nos momentos difíceis.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

À Schaeffler Brasil Ltda. e ao grupo de Rolamentos de Embreagem por acreditar e incentivar o desenvolvimento desse mestrado e por colaborar no meu desenvolvimento profissional.

*“A mente que se abre a uma nova idéia jamais
voltará ao seu tamanho original.”
Albert Einstein*

Resumo

Rolamentos de esfera são elementos de máquinas de forma simples mas utilizados em aplicações envolvendo altas velocidades, altas temperaturas e diferentes carregamentos. O modelo para o carregamento é fundamental para análise dinâmica do mancal e por esse motivo é necessário definir com precisão o desempenho desses mecanismos usando métodos analíticos. O objetivo deste trabalho é analisar o rolamento de esferas baseando-se, em um primeiro momento, em referências bibliográficas de diversos autores para, em seguida, iniciar o equacionamento e simulação para analisar as influências do momento giroscópico, das velocidades geradas nos diversos componentes do rolamento e do carregamento nas esferas. A partir de um rolamento padrão, aplicou-se uma metodologia de testes por simulação numérica variando os principais fatores críticos de um rolamento do ponto de vista estático, cinemático e dinâmico. Conclui-se que a rotação e o ângulo de contato influem nas forças de atrito que resistem ao momento giroscópico e nas velocidades geradas na zona de contato entre esfera e pistas interna e externa. Em altas rotações, quanto maior os seus valores, maior a influência nos ângulos de precessão e de nutação, causando o efeito de escorregamento. Verificou-se, ainda, o valor do ângulo de nutação no qual a velocidade normal ao contato é nula, isto é, validou-se o efeito de *outer raceway control*. Assim, o modelo apresentou-se consistente com a aproximação para as velocidades e acelerações presentes no elemento rolante, fatores estes fortemente relacionados à condição de lubrificação de mancais de esferas.

Palavras Chave: Rolamentos de esfera, momento giroscópico, velocidade normal ao contato, carregamento na esfera.

Abstract

Ball bearings are simple machine elements but largely used in several applications involving high velocities, high temperatures and different loads. The load model is fundamental for the ball bearing's dynamic and for this reason it is necessary to define with accuracy the mechanisms performance using analytical methods. The objective of this thesis is to analyze the ball bearings using, firstly, the most relevant books and papers from several authors as reference and then initiate the modeling and simulation to analyze the influences from the gyroscopic moment and from the velocities created due to the bearing's components and also to the load. Based on a basic bearing, a numeric simulation's test methodology was applied modifying the main critical factors from the bearing and considering the kinematical, dynamical and statical behaviors. The conclusion is that the rotation and the contact angle have influence at the friction forces that resist to the gyroscopic moment and to the velocities that are created at the contact zones between balls and inner and outer raceways. Under high rotations, as higher its value is, higher is the influence at the precession and nutation angles, causing sliding. It was also verified the nutation angle in which the normal velocity at contact is zero, validating the outer raceway control. The model presented itself very consistent with the approximation for the velocities and accelerations presented at rolling element, factors that are highly related to the lubrication condition from the ball bearings.

Key Words: Ball bearings, gyroscopic moment, normal velocity, ball load.

Lista de Ilustrações

1.1	Componentes de um rolamento de esferas	1
1.2	Vista explodida de um rolamento	2
1.3	Réplica de um mancal de rolamento desenvolvido por Leonardo Da Vinci	3
1.4	Bicicleta de pedal produzida pela Companhia Michaux	4
1.5	Esquema de um rolamento de esferas	6
2.1	Órbita do centro de massa da gaiola.	11
2.2	Esquema de Whirl	12
3.1	Rolamento de esfera de contato angular	15
3.2	Geometria do contato de corpos elásticos	16
3.3	Análise Estática	17
3.4	Deflexão elástica	21
3.5	Distribuição de carregamento em mancais radiais	22
3.6	$J_r(\epsilon) \times \epsilon$	26
3.7	Deflexão devido ao carregamento combinado	27
3.8	$J_r(\epsilon)$, $J_a(\epsilon)$, ϵ VS $Fr.tg/Fa$	30
3.9	Relações cinemáticas nos mancais	32
3.10	Contato da esfera com a pista externa	36
3.11	Sistema de coordenadas do mancal e da esfera	39
3.12	Contato da esfera com a pista interna	41
3.13	Esfera em contato angular sob força centripeta	46
3.14	Sistemas de referência na esfera	47
3.15	Giro do sistema local UVW em V	48
3.16	Giro do sistema local U'Vz' em z'	48
3.17	Giro do sistema local x'y'z' em x'	49
3.18	Cálculo do momento de inércia para esfera	51
3.19	Equilíbrio de forças em elevadas rotações	56

5.1	Carregamento radial - modelo estático – Pd=0	63
5.2	Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – Pd=0	63
5.3	Distribuição de carregamento radial para 2000 rpm – Pd=0	64
5.4	Carregamento radial - modelo estático – Pd=5x10 ⁻⁴ m	64
5.5	Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – Pd=5x10 ⁻⁴ m	65
5.6	Distribuição de carregamento radial a 2000 rpm – Pd=5x10 ⁻⁴ m	65
5.7	Carregamento radial - modelo estático – Pd=-1,2x10 ⁻⁴ m	66
5.8	Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – Pd=-1,2x10 ⁻⁴ m	66
5.9	Distribuição de carregamento radial a 2000 rpm – Pd=-1,2x10 ⁻⁴ m	67
5.10	Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – ni=2000 rpm	68
5.11	Distribuição de carregamento radial a 2000 rpm	69
5.12	Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – ni=50000 rpm	69
5.13	Distribuição de carregamento radial a 50000 rpm	70
5.14	Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – ni=100000 rpm	70
5.15	Distribuição de carregamento radial a 100000 rpm	71
5.16	Análise cinemática – rotação da esfera	73
5.17	Análise cinemática – rotação da gaiola	73
5.18	Análise cinemática – <i>spinning</i> do anel interno	74
5.19	Análise cinemática – <i>spinning</i> do anel externo	74
5.20	Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista externa – x ₀ =0	76
5.21	Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista externa – x ₀ = a ₀	76
5.22	Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista externa – x _i =0	77
5.23	Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista externa – x _i = a _i	77
5.24	Análise dinâmica – aceleração	79

5.25	Análise dinâmica – momento giroscópico	79
5.26	Análise dinâmica – força centrípeta	80
5.27	Análise de sensibilidade – momento giroscópico	82
5.28	Análise de sensibilidade – momento giroscópico – $\alpha=30^\circ$	83
5.29	Análise de sensibilidade – <i>spinning</i> do anel externo	84
5.30	Análise de sensibilidade – <i>spinning</i> do anel externo – $\alpha=30^\circ$	84
5.31	Análise de sensibilidade – <i>spinning</i> do anel interno	85
5.32	Análise de sensibilidade – <i>spinning</i> do anel interno – $\alpha=30^\circ$	85

Lista de Tabelas

3.1	Distribuição de carregamento integral $J_r(\epsilon)$	26
4.1	Dados de entrada para o rolamento FAG 6005	57
4.2	Testes para a análise estática - variação da folga diametral Pd	59
4.3	Testes para a análise estática - variação da velocidade de rotação do anel interno n_i	59
4.4	Testes para a análise cinemática e dinâmica	60
5.1	Resultados da análise cinemática – 500rpm	75
5.2	Resultados da análise cinemática – 2000rpm	75
5.3	Resultados da análise cinemática – 10000rpm	75
5.4	Resultados da análise dinâmica – 500rpm	80
5.5	Resultados da análise dinâmica – 2000rpm	80
5.6	Resultados da análise dinâmica – 10000rpm	81

Lista de Abreviaturas e Siglas

Abreviações

EHD	Lubrificação Elasto-hidrodinâmica
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
ANSI	<i>American National Standards Institute</i>
AFBMA	<i>Anti-Friction Bearing Manufacturers Association</i>
DREB	<i>Dynamics of Rolling Elements Bearings</i>
RAPIDREB	<i>Rapid Dynamics of Rolling Elements Bearings</i>

Subscritos

a	Direção axial
i	Pista interna
n	Equivalente
m	Gaiola
max	Máximo
o	Pista externa
r	Direção radial
R	Esfera
s	<i>Spinning</i>
x	Direção x
y	Direção y
z	Direção z

Siglas

a	Semieixo da elipse	[m]
a_c	Aceleração centrípeta	
b	Semieixo da elipse	[m]

D	Diâmetro da esfera	[m]
d_m	Diâmetro primitivo	[m]
f	Razão de osculação	
F	Força	[N]
H	Quantidade de momento angular	[kg.rad/s]
i	Razão elíptica da área de contato	
I	Momento de inércia	[kg.m ²]
J	Integral de distribuição	
J_e	Função das integrais de elipse	
K	Fator de rigidez	
n	Rotação	[rpm]
m	Massa	[kg]
M	Momento	[Nm]
P_d	Folga diametral	[m]
\vec{r}	Vetor posição	[m]
r	Raio da pista	[m]
R	Raio de curvatura resultante	[m]
r_A	Raio de curvatura do corpo rígido A	[m]
r_B	Raio de curvatura do corpo rígido B	[m]
Q	Carga	[N]
v	Velocidade linear	[m/s]
Z	Número de esferas	
$X-Y-Z$	Eixo de coordenadas do mancal	
$x'-y'-z'$	Eixo de coordenadas da esfera	
$U-V-W$	Eixo de coordenadas auxiliar da esfera	
α	Ângulo de contato	[°]
β	Ângulo de nutação	[°]
β'	Ângulo de nutação	[°]
γ	Relação geométrica	

δ	Deflexão no contato	[m]
δ^*	Deflexão relativa	
ε	Fator de distribuição de carga	
ξ'	Integral da elipse de primeira ordem	
ξ''	Integral da elipse de segunda ordem	
ρ	Densidade de massa	[kg/m ³]
$\sum \rho$	Somatória dos raios de curvatura	[m]
ψ	Ângulo de posição de Azimuth	
ω	Velocidade angular	[rad/s]

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
3 MODELAGEM TEÓRICA.....	14
3.1 Modelo de Contato de Hertz	15
3.2 Análise Estática e Distribuição de Carregamento	19
3.3 Carregamento radial	22
3.4 Carregamento combinado (radial e axial) para mancais de esferas de contato angular ...	27
3.5 Análise Cinemática	30
3.6 Análise cinemática nas regiões de contato	35
3.7 Análise Dinâmica	45
3.7.1 Movimento giroscópico e quantidade de movimento angular	50
3.7.2 Considerações da análise dinâmica	55
4 METODOLOGIA DE ANÁLISE	57
4.1 Descrição da metodologia	58
4.1.1 Análise estática (carregamento radial)	59
4.1.2 Análise cinemática	60
4.1.3 Análise dinâmica	60
4.1.4 Análise de sensibilidade	61
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	62
5.1 Análise estática: distribuição do carregamento radial	62
5.1.1 Folga diametral.....	62
5.1.2 Rotação da pista interna	68
5.2 Análise cinemática	72
5.3 Análise dinâmica	78

5.4 Análise de sensibilidade do ângulo de natação	82
6 CONCLUSÕES	87
Referências	89

1 INTRODUÇÃO

Mancais de rolamento são elementos que demandam alta precisão e alta capacidade de carregamento. Além disso, devem trabalhar com torques de baixa fricção e baixos níveis de vibrações, atendendo aos níveis de emissão de som.

Geralmente, os rolamentos são constituídos de quatro partes: o anel interno, o anel externo, um conjunto de esferas ou elementos rolantes e uma gaiola ou separador. As figuras 1.1 e 1.2 mostram os componentes e a montagem do sistema. Os anéis possuem canais ou pistas que servem como guia para os elementos rolantes, os quais são igualmente espaçados entre si pela gaiola. Para reduzir o atrito entre as esferas, os mancais são, geralmente, lubrificados com óleo ou graxa. Todos os mecanismos previamente mencionados são essenciais para o equacionamento e modelagem do mancal, pois interagem dinamicamente entre si.

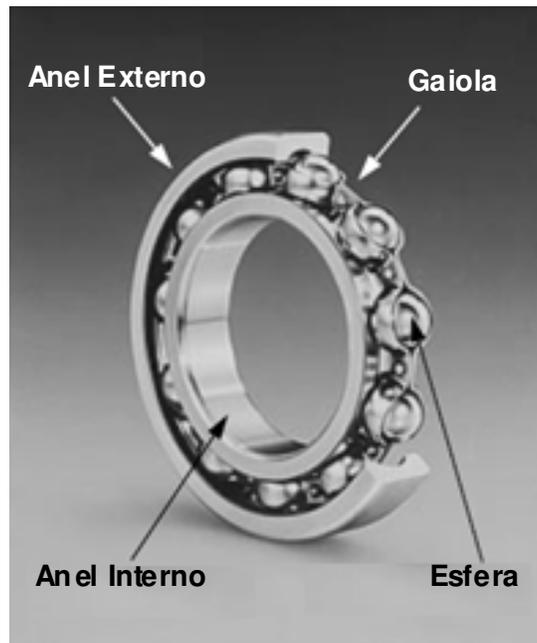


Figura 1.1: Componentes de um rolamento de esferas

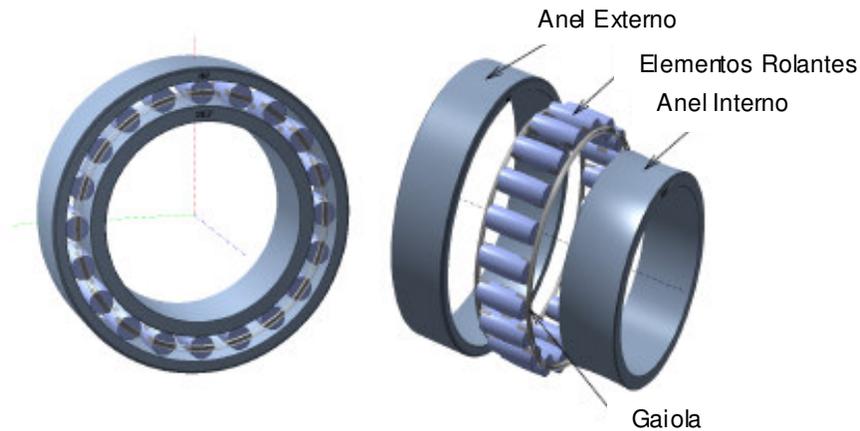


Figura 1.2: Vista explodida de um rolamento

Os mancais de rolamento possuem um papel estrutural, que é responsável por garantir o suporte para o eixo. A estrutura e o eixo têm grande importância na aplicação do mancal, pois este desempenha papel fundamental na transmissão de ruídos e vibração provenientes destas fontes. Tal transferência depende consideravelmente da espessura e do amortecimento dos contatos com lubrificação entre a esfera e os anéis-guia. Geralmente, a espessura de tais contatos está ligada à distribuição do carregamento e às deformações durante a aplicação. Isto implica que o mancal de rolamento deve ser considerado como parte integral do sistema mecânico.

A tecnologia de mancais de rolamento tem evoluído há centenas de anos. Leonardo da Vinci, no século XVI, já desenvolvia e estudava a utilização de um tipo rudimentar de mancal de rolo, usando a madeira e o bronze como principais materiais.

Da Vinci descreveu um mancal que consistia de um eixo cônico pivotado sobre três esferas, livre para rotacionar em uma pista com contato angular. Abaixo, a figura 1.3 mostra a réplica de um dos mecanismos sugeridos por Leonardo.

Com o desenvolvimento de melhores materiais para aplicação, o ferro fundido foi adicionado à lista de materiais para o rolamento. No início do século XVIII, as carruagens já adotavam tal sistema. Em 1760, E. Coulomb construiu os primeiros protótipos de rolamento de esferas na forma atual. Esses protótipos eram produzidos manualmente e customizados para aplicações específicas e estudos.



Figura 1.3: Réplica de um mancal de rolamento desenvolvido por Leonardo Da Vinci

Com o desenvolvimento de melhores materiais para aplicação, o ferro fundido foi adicionado à lista de materiais para o rolamento. No início do século XVIII, as carruagens já adotavam tal sistema. Em 1760, E. Coulomb construiu os primeiros protótipos de rolamento de esferas na forma atual. Esses protótipos eram produzidos manualmente e customizados para aplicações específicas e estudos.

Com o passar do século, o desenvolvimento e aplicação desses mancais foram sendo aperfeiçoados e melhor estudados. Entretanto, sua produção continuava ainda modesta e voltada apenas para uso de carruagens e pequenas aplicações. Na segunda metade do século XIX, porém, com a invenção da bicicleta de pedal, o uso dos rolamentos se difundiu e se fortaleceu, sendo criadas então as primeiras indústrias de mancais.

Ernest Michaux, em 1865, inventou os pedais, que eram ligados à roda dianteira, sendo chamado de velocípede. No ano de 1862, Ernest Michaux começou a fabricar bicicletas e em seu primeiro ano conseguiu fabricar cerca de 100 unidades, sendo considerado o primeiro fabricante oficial de bicicletas. Resultante da idéia de Michaux, em 1875, nasceu a Companhia Michaux, primeira fábrica de bicicletas do mundo. A figura 1.4 apresenta uma das primeiras bicicletas fabricadas. Nesse período, os mancais de rolamento acompanharam o avanço das bicicletas e

também começaram a se desenvolver em grande escala. Por volta de 1920, a grande maioria dos tipos de mancais com elementos rolantes usados atualmente já estavam em produção.



Figura 1.4: Bicicleta de pedal produzida pela Companhia Michaux

Diversas indústrias se destacaram na manufatura desses mancais. Em 1852, a Fischer Bearing Manufacturing Ltd. foi criada por P.M. Fischer na Alemanha. A partir de 1883, passou a produzir e vender mancais de rolamento e, depois de alguns anos, tornou-se a predecessora da Kugelfischer George Schäfer & Co. (FAG). Na Suécia, em 1907, S. Wingquist fundou a Aktiebolaget Svenska Kullagerfabriken, hoje denominada SKF. Nesta mesma época, muitas outras empresas foram fundadas, como a Timken Company, The Torrington Company, entre outras.

Um dos principais desenvolvimentos do mancal de rolamento diz respeito ao material utilizado em sua fabricação. Como já mencionado, os primeiros materiais utilizados eram à base de madeira e bronze. Em um segundo momento, o ferro fundido começou a ser usado como matéria-prima. Este foi substituído, por volta de 1870, pelo aço carbono, que se tornou disponível para manufatura dos mancais. Atualmente, o material mais utilizado para rolamentos é o aço AISI 52100, o qual foi primeiramente especificado para essa utilização em 1920.

Para uma simulação realista de um mancal de rolamento, faz-se necessária a modelagem do problema de lubrificação elasto-hidrodinâmica, pois nestes contatos o filme de óleo existente não

obedece à teoria da lubrificação hidrodinâmica, já que esta não consegue prever um filme de óleo plausível, devido aos grandes esforços e tensões.

A teoria de lubrificação elasto-hidrodinâmica (EHD) estuda a influência da elasticidade dos corpos em contato sobre o filme de óleo existente entre os mesmos. A deformação elástica dos corpos influencia diretamente as condições de lubrificação. Quando deformados, devido à pressão de contato, ocorre uma maior coesão geométrica entre os corpos e intuitivamente conclui-se que parte da espessura do filme deve-se a nova condição de distanciamento entre os corpos. No mancal de esferas, o filme de óleo se forma entre o suposto contato pontual de uma esfera sobre a pista de rolamento, sendo que estes dois corpos possuem raios de curvatura muito diferentes.

A atual situação tecnológica busca aumento de eficiência e uma diminuição da camada de filme lubrificante frente à rugosidade das superfícies. Nestes casos, se pode citar o aumento de cargas, aumento da temperatura de operação e diminuição das margens de segurança sobre peso e tamanho, pela viscosidade dos lubrificantes em operação como fatores fundamentais no projeto.

Para se conhecer melhor o efeito da lubrificação elasto-hidrodinâmica é necessário, primeiramente, conhecer mais profundamente as forças e carregamentos envolvidos no mancal de rolamentos e na esfera. Este trabalho busca entender e simular a cinemática e dinâmica das esferas e a distribuição de carregamento no rolamento.

O estudo e simulação aqui desenvolvidos serão usados posteriormente para uma modelagem mais complexa do mancal e um estudo mais profundo dos contatos e deformações existentes usando EHD.

Dentro deste contexto, o objetivo deste trabalho é analisar o rolamento de esferas sob as teorias cinemáticas e dinâmicas. A partir da literatura clássica sobre rolamentos de esfera e de trabalhos científicos dos principais autores do meio acadêmico e da indústria, uma revisão teórica será feita cobrindo os principais fundamentos da mecânica de um rolamento de esfera, abordando, principalmente, as principais velocidades e acelerações desenvolvidas pela esfera, bem como os diversos tipos de carregamento ao qual a esfera é submetida durante seu trabalho e a distribuição dos mesmos.

Em um segundo momento, a teoria acima mencionada será utilizada para desenvolvimento de um algoritmo que tem como principal objetivo estudar e analisar o carregamento total e suas consequências durante o percurso das esferas no mancal de rolamento.

A figura 1.5, apresenta um mancal de rolamento de esferas em perspectiva, mostrando seus principais componentes.

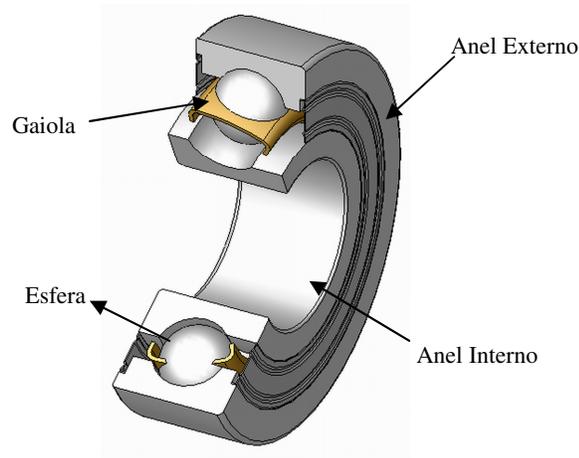


Figura 1.5: Esquema de um rolamento de esferas

Este trabalho divide-se em duas grandes partes. Na primeira fase, concentra-se toda parte teórica envolvida na dinâmica e cinemática de um rolamento de esferas. Na segunda fase, será mostrado o modelo desenvolvido para simulação, os principais testes realizados por simulação numérica e os resultados obtidos.

O primeiro capítulo contextualiza os principais objetivos a serem cumpridos durante a realização deste trabalho. Além disso, explica os principais motivos que levaram ao estudo da dinâmica do rolamento e onde poderão ser usados posteriormente os resultados da simulação. Finalmente, faz uma apresentação do rolamento de esferas, mostrando os principais componentes e sua função, área de aplicação, etc.

O segundo capítulo apresenta os principais autores envolvidos no estudo do rolamento. Aqui, discutem-se os principais avanços na pesquisa da dinâmica dos mesmos baseando-se, principalmente, na literatura clássica, amplamente difundida sobre o tema e, também, mencionando os trabalhos científicos produzidos no meio acadêmico e industrial referentes à simulação, os métodos desenvolvidos para análise e os resultados encontrados.

O terceiro capítulo finaliza a primeira fase do trabalho com o desenvolvimento da teoria necessária para iniciar a modelagem. Aqui é mostrada a cinética, cinemática e dinâmica da esfera e os tipos de carregamento e contatos envolvidos.

O quarto capítulo, sobre desenvolvimento prático, apresenta os dados de entrada para as simulações, uma explicação sobre cada programa e suas restrições (condições iniciais e condições de contorno) e a metodologia de testes de simulação propostos para verificar as variações e efeitos do momento giroscópico, força centrípeta, carregamento radial, velocidades, etc.

Os resultados são apresentados no quinto capítulo, mostrando gráficos, tabelas e demais informações obtidas. Aqui, os resultados serão estudados e analisados para descobrir quais os principais efeitos nos elementos rolantes e quais são os parâmetros críticos no sistema.

Por fim, no sexto capítulo, é apresentada a conclusão desse trabalho, com as principais considerações, seguido pelas referências bibliográficas utilizadas para compor o material existente neste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os estudos mais aprofundados sobre mancais de rolamento começaram a ser desenvolvidos a partir de 1900. Goodman (1912) publicou as expressões, baseadas em dados de fadiga, para o cálculo dos carregamentos de mancais de rolamento de esferas e outros elementos rolantes. O desenvolvimento de métodos para previsão da vida em fadiga nesses elementos foi desenvolvido em mais detalhes por Arvid Palmgren e o Professor G. Lundberg (1947, 1952) que publicaram diversos artigos sobre o tema, o que resultou nas normas ISO (*International Organization for Standardization*), ANSI (*American National Standards Institute*) e AFBMA (*Anti-Friction Bearing Manufacturers Association*) para taxas de carregamento e vida de mancais com elementos rolantes.

Ball and Roller Bearing Engineering (PALMGREN, 1945), apresentou um conhecimento generalizado dos elementos do mancal com elementos rolantes, dando ênfase aos fundamentos principais, como aplicação, tipos comuns de mancais, principais forças envolvidas, relação entre carregamento e vida do mancal, métodos para selecionar rolamentos, design e tipos de falhas.

O livro publicado *Rolling Bearing Analysis* (HARRIS, 1991) descreveu minuciosamente um mancal de rolamento, com suas principais aplicações e toda engenharia e desenvolvimento técnico por trás do sistema. No contexto deste trabalho, destacaram-se a partes de carregamento estático e sua distribuição discutida por Harris. No capítulo 4, Harris fez uma análise estática e dinâmica das forças e momentos envolvidos, enquanto que no capítulo 6 desenvolveu a distribuição dos carregamentos e seus diversos tipos.

Harris (2006) publicou o livro *Advanced Concepts of Bearing Technology*. Este volume aprofunda-se na análise dinâmica e cinemática do rolamento, descrevendo em detalhes as equações necessárias para o desenvolvimento teórico. Os capítulos 2, 3, 6 e 7 do livro destacaram-se por tratar, principalmente, do cálculo de rotação da esfera normal ao contato (*spinning*), momento giroscópico, efeito de altas rotações e equações de equilíbrio.

Outro artigo de destaque, *Rolling Element Bearing Dynamics*, (HARRIS, 1973), tratou sobre as relações pertinentes para avaliar o desempenho de um mancal de rolamento em qualquer

aplicação, utilizando técnicas que envolviam elementos cinemáticos, cinéticos, teoria da elasticidade, hidrodinâmica, lubrificação elasto-hidrodinâmica, atrito e transferência de calor.

Changsen (1991), outro autor clássico sobre o tema, estudou em seu livro o modelo dinâmico do mancal de rolamento. Dos capítulos 3 a 5, principalmente, buscou discutir e apresentar a teoria de Hertz para contato, distribuição de carregamento no mancal e a cinemática envolvida.

Em *The dynamics of ball bearings*, Walters (1971) divulgou uma análise geral dos movimentos da esfera e do separador com lubrificação. Nele, as equações de movimento consideram um sistema de quatro graus de liberdade para esfera e seis graus de liberdade para o separador e são integradas numericamente usando um algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.

Anteriormente, *A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearing under Arbitrary Load and Speed Conditions* [JONES, 1960], demonstrou uma análise dos movimentos, porém sem considerar a lubrificação hidrodinâmica e os efeitos do separador, o maior responsável pelo torque.

Dynamics of rolling element bearings part III: Ball bearing analysis & part IV: Ball bearing results (GUPTA, 1979) apresentou uma simulação de uma esfera genérica, gaiola e pista em um rolamento de esfera através de equações diferenciais de movimento e tratou a interação gaiola-esfera e pista-gaiola como hidrodinâmicas. No artigo é explicado que embora a vida em fadiga seja um dos principais parâmetros para o rolamento, seria razoável afirmar que grande parte dos casos de falhas é causada por uma instabilidade dinâmica do movimento da esfera, da gaiola ou de ambos. As análises convencionais se restringem a estudar a distribuição de carga no rolamento e a vida em fadiga resultante, usando equações algébricas não lineares, que podem ser resolvidas através de métodos iterativos. Uma formulação dinâmica, entretanto, consiste de equações diferenciais de movimento que devem ser integradas como função do tempo. Essa diferença torna a representação matemática da esfera mais sofisticada.

Walters (1971) fez a primeira tentativa de simular o comportamento dinâmico da esfera. Entretanto, a esfera foi restrita a percorrer um caminho definido, e a lubrificação foi restrita a um modelo simplificado, não dando maior importância a interação entre esfera e gaiola. Assim, uma simulação mais complexa do modelo de lubrificação e do movimento da esfera torna-se essencial.

Gupta (1979) mostrou esse modelo, enfatizando a esfera, a interação gaiola-esfera e pista-gaiola, perdas e fatores relacionados. Seu equacionamento permitiu não somente seis graus de liberdade, mas tratou qualquer eixo de inércia da esfera, devido a um equacionamento analítico genérico.

Além disso, em *Dynamics of rolling element bearings part III: Ball bearing analysis & part IV: Ball bearing results* (GUPTA, 1979) foi apresentado os resultados das simulações dinâmicas de desempenho de um rolamento de esferas em termos do movimento geral obtido pela integração das equações diferenciais de movimento dos vários elementos do rolamento. Utilizando um programa computacional denominado DREB (*Dynamics of Rolling Elements Bearings*), demonstrou-se que o desalinhamento influencia significativamente as interações gaiola-esfera e pista-gaiola. Os elevados carregamentos axiais e radiais promovem escorregamento que, junto com a lubrificação, impõe acelerações na esfera. Além disso, possuem papéis determinantes na estabilidade do sistema.

Em 1981, foi publicado *On the Traction Behavior of Several Lubricant* (GUPTA, 1981) onde o autor se aprofundou no estudo dos lubrificantes. O comportamento dinâmico é altamente influenciado pelas características dos lubrificantes, especialmente nos casos mancais com rolamentos. Essa influência ocorre porque o escorregamento está diretamente ligado com as forças na interação entre esfera e pista. Tais forças são responsáveis pela aceleração da esfera e são dependentes das características dos lubrificantes.

As forças de inércia resultantes determinam a severidade dos choques entre a esfera e a gaiola e influencia a estabilidade do sistema. As propriedades do lubrificante alteram, não somente os escorregamentos como também determinam a estabilidade da gaiola e, portanto, o desempenho dinâmico do rolamento. O principal objetivo desse artigo foi estudar diversos lubrificantes e determinar suas propriedades e influências no rolamento.

Dynamic of Rolling Elements – Bearings Experimental Validation of the DREB and RAPIDREB Computer Programs (GUPTA, 1985), introduziu o simulador RAPIDREB. Um dos problemas dos modelos dinâmicos é a necessidade intensiva de uso computacional para integrar as equações diferenciais de movimento. Para eliminar esse problema, Gupta introduziu restrições de equilíbrio para eliminar as frequências de vibração muito elevadas. O resultado foi uma nova versão do programa DREB, o RAPIDREB, mais rápida e completa que a antiga.

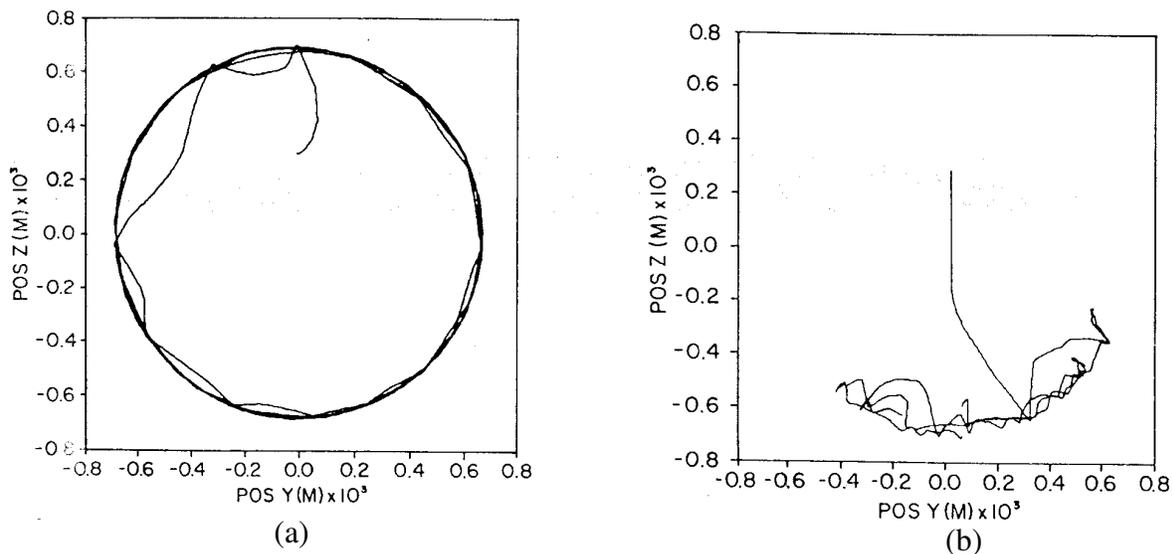


Figura 2.1: Órbita do centro de massa da gaiola (GUPTA, 1985)

Com esse novo programa foi possível mostrar que há uma velocidade crítica do eixo no qual o centro de massa da gaiola entra em uma órbita turbulenta. Em baixas velocidades de rotação, esse fenômeno não ocorre e, acima da velocidade crítica, a órbita é praticamente circular, conforme figura 2.1a. O fenômeno de turbulência é mostrado na figura 2.1b.

Posteriormente, Kingsbury (1994) fez uma pesquisa sobre o movimento do separador, ou gaiola, nos mancais. Durante o regime instável (*Squeal*), foi observado um movimento em alta frequência do separador que se sobrepõe à taxa normal de rotação. Esse movimento, chamado de *Whirl*, é uma translação em círculo de um corpo rígido. Sua direção é oposta à rotação do anel externo, mas na mesma direção de rotação do anel interno. Sua frequência é proporcional à velocidade de rotação da esfera (*ball spin rate*), conforme figura 2.2.

A instabilidade da gaiola é um dos modelos de falha mais problemáticos nos mancais de rolamento, evidenciada por altas variações no torque e vibração excessiva.

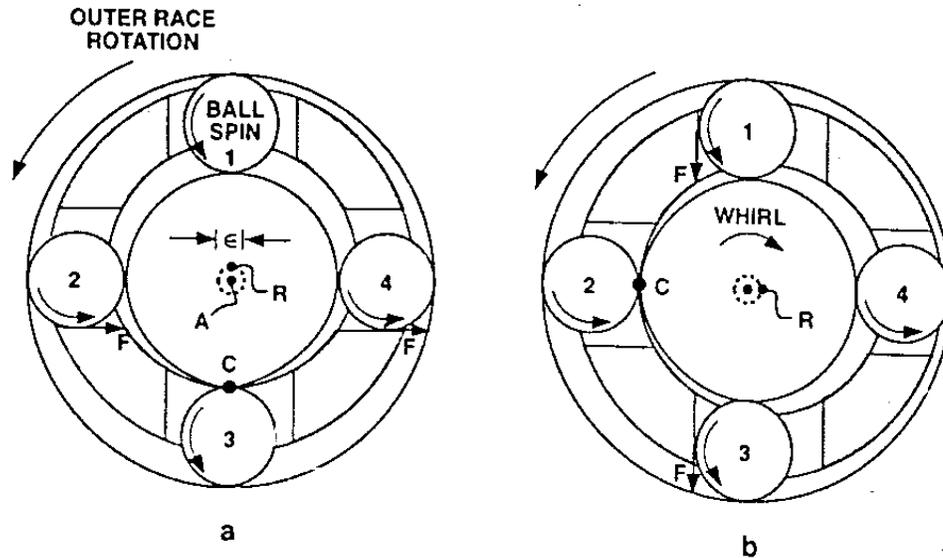


Figura 2.2: Esquema de *Whirl* (KINGSBURY, 1994)

Ball Bearing Dynamic Analysis Using Computer Methods (MEEKS, 1996) tratou de uma análise dinâmica teórica, que modela todos os efeitos significativos de cinemática, estrutura e dinâmica. No modelo proposto podia-se analisar material, deflexões de elementos carregados devido a pré-carregamento, carregamentos axiais e radiais, carregamento devido à força centrípeta e momento giroscópico na esfera.

Para o estudo, foi desenvolvido um sistema de seis graus de liberdade para analisar a gaiola. As equações são escritas usando coordenadas de rotação, o que simplifica as equações e torna o modelo mais eficiente. Para resolver as equações, Meeks utilizou o método de Newton-Raphson modificado. O modelo desenvolvido por Walters (1971), e mais tarde modificado por Gupta (1979), demandava longas iterações computacionais com tempo de processamento computacional muito elevado. Além disso, o modelo de equações era escrito em um referencial inercial fixo o que levava a equações de movimento muito complexas.

Hagiu (1997) desenvolveu uma pesquisa teórica sobre a rigidez e amortecimento de rolamentos de contato angular, sob altas rotações, utilizados em retíficas. Os resultados obtidos destacaram que a dinâmica desse rolamento é governada pela rigidez elástica do contato de Hertz e também pelas características de amortecimento do lubrificante nessa região.

Recentemente, Changqing (2006) apresentou um modelo geral para estudar as propriedades dinâmicas de um rotor suportado por rolamentos de esfera que apresenta folga e também pista ondulada. No modelo, foram incluídos os efeitos de alta rotação e força centrípeta e mostrou-se que a folga, pré-carga e carga são fatores altamente significativos para estabilidade do sistema.

Em *Ball bearing skidding under radial and axial loads* (LIAO, 2002), um rolamento de esfera em alta rotação foi submetido à carregamentos axiais e radiais para investigar os efeitos da força centrípeta. Através da análise dimensional e equilíbrio de forças, diversos parâmetros foram obtidos: forças normais, ângulo de contato na pista externa e deslocamento axial e radial. A análise indicou que a melhor maneira de evitar escorregamento é aumentar a dimensão da área de contato na direção axial.

3 MODELAGEM TEÓRICA

A modelagem teórica deve contemplar os efeitos cinemáticos e dinâmicos que atuam nas esferas do mancal de rolamento, assim como o efeito do carregamento e da velocidade de rotação sobre a distribuição do carregamento nas esferas. Estas análises são fundamentais para estabelecer a condição de operação das esferas, sob o ponto de vista estático, cinemático e dinâmico, os quais exercem influência direta na condição de lubrificação do rolamento. As velocidades relativas, assim como as acelerações impostas às esferas, durante a operação do rolamento são responsáveis pela condição de lubrificação EHD (elasto-hidrodinâmica) com maior interação em relação ao lubrificante, enquanto que a distribuição do carregamento estático nas esferas afeta a condição de contato de Hertz. Ambos os modelos, de lubrificação e de deformação nas esferas, devem ser solucionados simultaneamente na caracterização da condição de lubrificação EHD. Desta forma, uma análise mais completa dos efeitos estáticos, cinemáticos e dinâmicos deste elemento rolante faz-se necessária, de forma a contribuir para uma modelagem mais precisa do processo de lubrificação.

Assim sendo, este capítulo deve abordar os diversos aspectos envolvidos no problema, a partir da teoria clássica de contato de Hertz, para análise da distribuição do carregamento inicial estático aplicado em cada esfera do mancal de rolamento, estendendo-se para a influência da força centrípeta na distribuição do carregamento e, posteriormente, para análise de velocidades e acelerações, as quais podem imprimir um momento giroscópico nas esferas, interferindo em sua condição de operação e carga.

A figura 3.1 apresenta um esquema do rolamento de esfera de contato angular mostrando as regiões de contato entre esfera e anéis interno e externo, bem como as principais cargas aplicadas no rolamento e esfera. Uma carga Q_r é aplicada no anel, sendo decomposta nas regiões de contato em uma carga normal Q e outra tangencial Q_t . A força centrípeta ocorre devido à rotação, que quando muito elevada, desloca os anéis, criando ângulos de contato interno (esfera-pista interna) e externo (esfera-pista externa) diferentes.

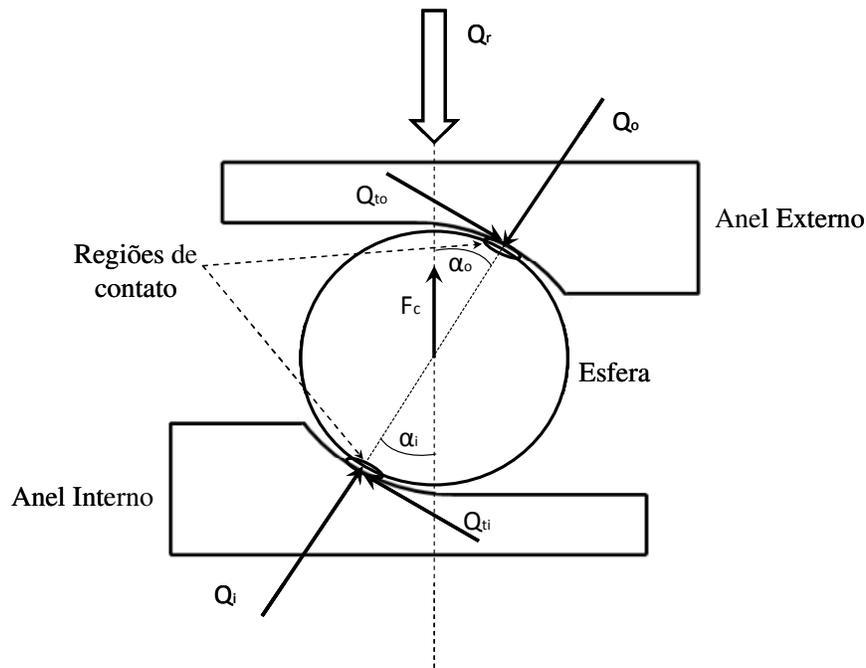


Figura 3.1: Rolamento de esfera de contato angular

3.1 Modelo de Contato de Hertz

Os modelos dinâmicos devem ter como base a pressão de contato gerada na interface dos corpos em contato. De acordo com a teoria de Hertz, esta pressão atua sobre uma área elíptica e possui um perfil de distribuição parabólico. A principal característica de um contato de Hertz é a razão elíptica da área de contato (i), que consiste na relação entre o maior (R_x) e menor (R_y) semieixos da elipse, ou seja, $i = R_x / R_y$.

Para se avaliar a condição de contato entre dois corpos, é necessário estabelecer uma primeira aproximação geométrica entre os mesmos. No caso dos corpos de geometria não conforme, mostrados na figura 3.2a, propõe-se representar o contato através de uma elipse de raios $a = R_x$ e $b = R_y$, aproximando, por consequência, a região de contato a uma superfície plana.

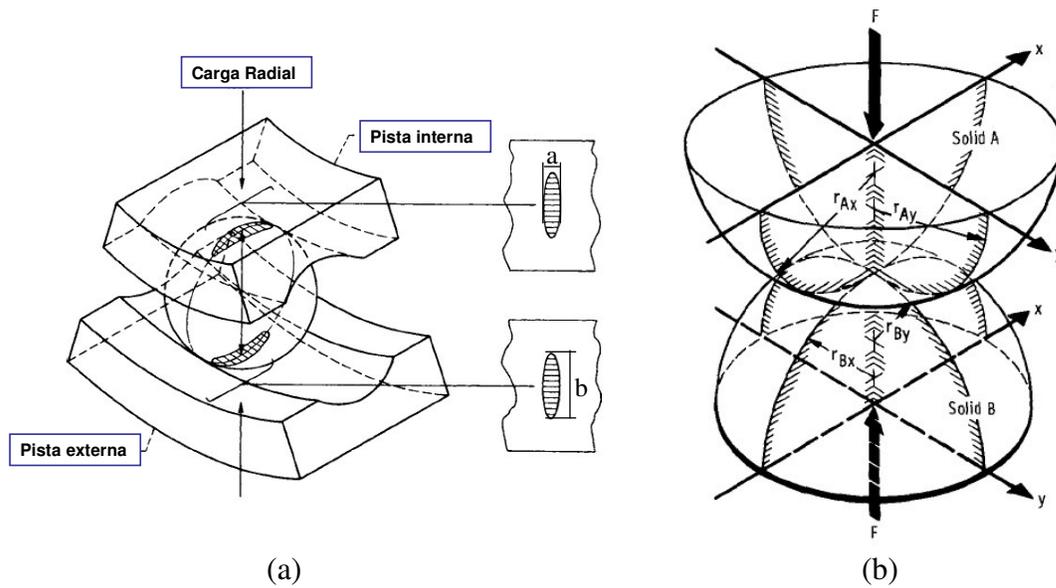


Figura 3.2: Geometria do contato de corpos elásticos (CHANGSEN, 1991)

Desta forma, Changsen (1991) estabeleceu as seguintes relações de forma a determinar a elipse equivalente ao contato, em função dos raios de curvatura de ambos os corpos de geometria não conforme:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{Ax}} + \frac{1}{r_{Bx}} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{Ay}} + \frac{1}{r_{By}} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (3.3)$$

Sendo R o raio de curvatura resultante no contato; R_x e R_y os raios dos semieixos da elipse de contato nas direções x e y, respectivamente; r_{Ax} e r_{Bx} os raios de curvatura dos corpos rígidos A

e B na direção x, respectivamente; r_{Ay} e r_{By} os raios de curvatura dos corpos rígidos A e B na direção y, respectivamente, conforme figura 3.2b.

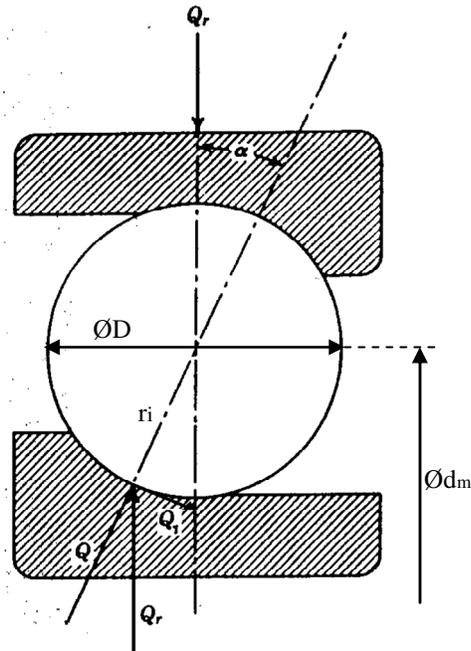


Figura 3.3: Análise Estática

Na figura 3.3, o carregamento radial Q_r é aplicado de forma estática no rolamento. Contudo, devido ao contato angular (α) da esfera com as pistas interna e externa, este carregamento apresenta duas componentes: a componente tangencial à esfera Q_t , e a componente radial à esfera Q , responsável pela deflexão relativa entre a esfera e as pistas.

A partir do diâmetro da esfera (D), do raio da pista interna (r_i), do ângulo de contato da esfera na pista do rolamento (figura 3.3 - ângulo α) e do diâmetro primitivo do mancal de rolamento (d_m), as seguintes relações geométricas podem ser obtidas (HARRIS, 1991):

$$r_{Ax} = \frac{1}{2} * D \quad r_{Ay} = \frac{1}{2} * D \quad (3.4)$$

$$r_{Bx} = \frac{1}{2} * \left(\frac{d_m}{\cos \alpha} - D \right) \quad r_{By} = fi * D$$

$$fi = ri / D$$

$$\sum \rho = \frac{1}{r_{Ax}} + \frac{1}{r_{Ay}} + \frac{1}{r_{Bx}} + \frac{1}{r_{By}} \quad (3.5)$$

Os raios da elipse de contato no corpo A são r_{Ax} e r_{Ay} ; os raios da elipse de contato no corpo B são r_{Bx} e r_{By} ; fi é a razão de osculação, ou seja, a razão de raio de abraçamento da pista sobre a esfera. Todas estas grandezas são relacionadas no cálculo do raio de curvatura equivalente no contato dos corpos A e B, ou ainda, a somatório dos recíprocos destes valores, a ser utilizado no cálculo da rigidez no contato.

De acordo com as relações propostas por Harris (1991), pode-se escrever a razão elíptica da área de contato (i), como função das integrais de elipse, de primeira e segunda ordem, e suas respectivas curvaturas:

$$J_e(i) = \sqrt{\frac{2\xi' - \xi''(1+\Gamma)}{\xi''(1-\Gamma)}} \quad (3.6)$$

Sendo:

$$\xi' = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{i^2} \right) \text{sen}^2 \phi \right]^{-1/2} d\phi \quad \text{a integral de primeira ordem;}$$

$$\xi'' = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{i^2} \right) \text{sen}^2 \phi \right]^{1/2} d\phi \quad \text{a integral de segunda ordem.}$$

Por um processo iterativo simples, faz-se $i_{n+1} = J_e(i_n)$, estabelecendo a convergência do processo. Tal convergência é definida a partir do trabalho de Nonato (2007).

Para o cálculo das deflexões elásticas nos pontos de contato, os quais serão utilizados na análise estática para distribuição do carregamento, aplica-se a equação obtida a partir da geometria do contato (HARRIS, 1991):

$$\delta^* = \frac{2\xi'}{\pi} \left(\frac{\pi}{2i\xi''} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.7)$$

Onde δ^* é a deflexão relativa no contato entre pista e esfera e ξ' e ξ'' são as integrais da elipse estabelecidas na equação (3.6).

3.2 Análise Estática e Distribuição de Carregamento

O rolamento pode suportar um carregamento normal ao longo da linha de contato entre a esfera e a pista. Se uma força radial Q_r é aplicada à esfera, sendo que esta está em contato angular (α) com as pistas interna e externa do rolamento, conforme a figura 3.3, as forças normais e tangenciais suportadas são calculadas como:

$$Q = \frac{Q_r}{\cos \alpha} \text{ e } Q_t = Q \cdot \text{sen} \alpha \quad (3.8)$$

A esfera no mancal de rolamento transmite carregamento externo de um anel para o outro. O carregamento, normalmente composto por forças radiais e axiais, é distribuído entre o número de esferas do mancal de rolamento, de acordo com a posição angular da esfera no mancal (ângulo de Azimuth ψ) e a deformação no contato entre esfera e pista.

O carregamento, associado ao número de ciclos num determinado ponto da pista do rolamento, exerce uma importante influencia na condição de lubrificação e, conseqüentemente, na vida em fadiga e no desempenho do rolamento. A forma como o carregamento externo é

distribuído sobre os elementos rolantes é denominada distribuição de carregamento em mancais de rolamento.

Além da carga externa aplicada, forças centrípetas e momentos giroscópicos dos elementos rolantes podem afetar a distribuição de carregamento nas esferas. Estes são, geralmente, negligenciados em mancais operando em faixas normais de rotação, ou seja, considera-se a distribuição do carregamento nos mancais de forma estática .

Os efeitos das forças centrípetas e do momento giroscópico serão analisados na sequência deste capítulo.

Na maioria das aplicações, o número de elementos rolantes sujeitos ao carregamento é superior a dois, caracterizando um sistema hiperestático. Para analisar a distribuição de carga nas esferas, faz-se, portanto, necessário introduzir as relações carregamento-deflexão para o contato entre uma esfera e as pistas. As deflexões consideradas, neste caso, são dadas pela equação (3.7), e estão diretamente relacionadas às deformações no contato.

Assumindo um mancal de rolamento suportado por estrutura rígida e montado sobre eixo rígido, tem-se a relação carregamento-deflexão para um dado contato pista-esfera:

$$Q = K\delta^{3/2} \quad (3.9)$$

Sendo K o fator de rigidez equivalente e δ a deflexão (ou deformação) no contato.

A aproximação total entre duas pistas sob carregamento, separadas por uma esfera, é a soma das aproximações entre a esfera e cada uma das pistas. Assim, a deflexão elástica total entre duas pistas (δ_n) é a soma da aproximação elástica entre a esfera e a pista interna (δ_i) e a aproximação elástica entre a esfera e a pista externa (δ_o), conforme figura 3.4.

$$\delta_n = \delta_i + \delta_o \quad (3.10)$$

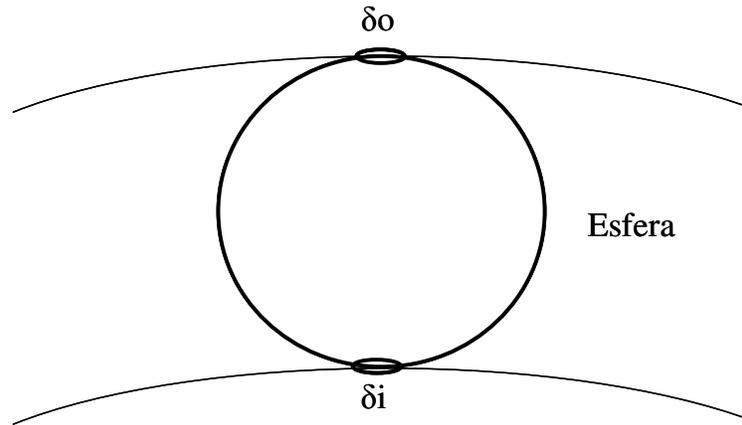


Figura 3.4: Deflexão elástica

Desta forma existe uma rigidez equivalente no contato, devido às deflexões relativas nas pistas interna (δ_i) e externa (δ_o). A rigidez devido à deflexão na pista interna é dada por K_i , e na pista externa por K_o (HARRIS, 1991).

$$K_n = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{K_i}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{K_o}\right)^{1/n}} \right]^n \quad (3.11)$$

Para o contato entre uma esfera de aço e uma pista de aço, pode-se calcular K como:

$$\begin{aligned} K_i &= 2,15 \cdot 10^5 \sum \rho_i (\delta_i^*)^{-3/2} \\ K_o &= 2,15 \cdot 10^5 \sum \rho_o (\delta_o^*)^{-3/2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sendo ρ_i e ρ_o os raios de curvatura das pistas interna e externa, respectivamente.

3.3 Carregamento radial

A figura 3.5 mostra a distribuição de carregamento em mancais radiais. Duas condições de montagem, com e sem folga, são analisadas separadamente. São definidos os parâmetros de contato (ψ) como a posição angular entre a linha de ação do carregamento radial (F_r) e a linha de centro do i -ésimo elemento rolante (ou ângulo de Azimuth); Q_ψ como o carregamento do elemento rolante na posição ψ ; δ_r como deslocamento relativo sobre a linha de carregamento radial entre as duas pistas, e δ_ψ como a deflexão total elástica no ângulo de posição ψ (nota-se que δ_0 é a deflexão total elástica no ângulo de posição $\psi = 0$, ou ainda, $\delta_0 = \delta_{max}$).

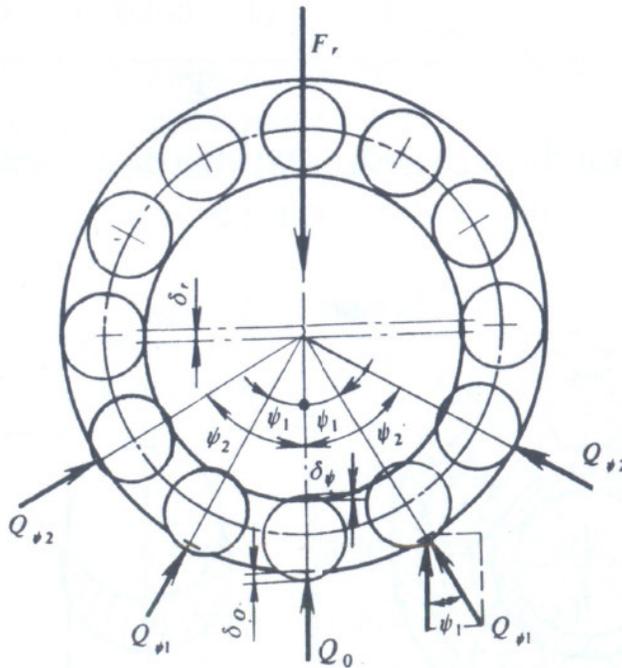


Figura 3.5: Distribuição de carregamento em mancais radiais (CHANGSEN, 1991)

Para o mancal rígido da figura 3.5, sujeito a carregamento radial, a condição de equilíbrio estático na pista interna é dada pela equação (3.13):

$$F_r = Q_0 + 2 \sum Q_\psi \cos \psi \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, sob a harmonização da deformação, a deflexão total elástica (δ_ψ), no ângulo de posição ψ , para folga nula, é dada pela equação (3.14):

$$\delta_\psi = \delta_r \cos \psi = \delta_{\max} \cos \psi \quad (3.14)$$

Sendo δ_{\max} a máxima deflexão em cada pista, interna e externa para $\psi = 0$. Considerando um mancal radial com uma certa folga diametral P_d :

$$\delta_\psi = \delta_r \cos \psi - \frac{P_d}{2} \quad \text{onde} \quad \delta_r = \delta_{\max} + \frac{P_d}{2} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) pode ser escrita em função da máxima deflexão no contato (HARRIS, 1991):

$$\delta_\psi = \left(\delta_{\max} + \frac{P_d}{2} \right) \cos \psi - \frac{P_d}{2} \quad (3.16)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.16):

$$\begin{aligned} \delta_\psi &= \delta_{\max} \left(1 + \frac{P_d}{2\delta_{\max}} \right) \cos \psi - \frac{P_d}{2} & \delta_\psi &= \delta_{\max} \left[\left(1 + \frac{P_d}{2\delta_{\max}} \right) \cos \psi - \left(\frac{P_d}{2\delta_{\max}} + 1 \right) + 1 \right] \\ \delta_\psi &= \delta_{\max} \left[\left(1 + \frac{P_d}{2\delta_{\max}} \right) \cos \psi - \frac{P_d}{2\delta_{\max}} \right] & \delta_\psi &= \delta_{\max} \left[- \left(1 + \frac{P_d}{2\delta_{\max}} \right) (1 - \cos \psi) + 1 \right] \\ \delta_\psi &= \delta_{\max} \left[\left(1 + \frac{P_d}{2\delta_{\max}} \right) \cos \psi - \frac{P_d}{2\delta_{\max}} - 1 + 1 \right] & \delta_\psi &= \delta_{\max} \left[1 - \left(\frac{2\delta_{\max} + P_d}{2\delta_{\max}} \right) (1 - \cos \psi) \right] \end{aligned}$$

Rearranjando os termos:

$$\delta_\psi = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{\frac{2\delta_{\max}}{2\delta_{\max} + P_d}} (1 - \cos \psi) \right] = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{\frac{2(\delta_r - P_d/2)}{2\delta_{\max} + P_d}} (1 - \cos \psi) \right]$$

$$\delta_\psi = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{2 \left[\frac{(\delta_r - P_d/2)}{2\delta_{\max} + P_d} \right]} (1 - \cos \psi) \right] = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{2 \left[\frac{(\delta_r - P_d/2)}{2(\delta_{\max} + P_d/2)} \right]} (1 - \cos \psi) \right]$$

$$\delta_\psi = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{2 \left[\frac{1}{2} \frac{(\delta_r - P_d/2)}{\delta_r} \right]} (1 - \cos \psi) \right] = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{P_d}{2\delta_r} \right) \right]} (1 - \cos \psi) \right]$$

De onde chega-se a expressão final para a deflexão total elástica (δ_ψ), na posição angular ψ , em função da folga diametral:

$$\delta_\psi = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P_d}{2\delta_r} \right) \quad (3.17)$$

Sendo ε o fator de distribuição de carga. Para avaliar a extensão angular do carregamento distribuído nas esferas do mancal de rolamento, deve-se estimar o valor do ângulo de posição ψ_1 , quando a deflexão elástica no contato é nula, de acordo com a equação (3.17):

$$\psi_1 = \cos^{-1} \left(\frac{P_d}{2\delta_r} \right) \quad (3.18)$$

De acordo com a equação (3.9), para um contato genérico, tem-se a carga no elemento rolante para cada posição angular ψ :

$$Q_\psi = Q_{\max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \quad (3.19)$$

Sendo Q_ψ o carregamento na posição angular ψ , e Q_{\max} o carregamento para a máxima deflexão elástica δ_{\max} .

Aplicando-se a equação de equilíbrio estático (3.13), o carregamento radial deve equilibrar-se com a soma das componentes verticais das forças que atuam nas esferas.

$$F_r = Q_{\max} \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm 1} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi \quad (3.20)$$

Na forma integral ($J_r(\varepsilon)$), sendo Z o numero de esferas no rolamento, e substituindo Q_{\max} em função de δ_{\max} , tem-se :

$$F_r = ZK_n \left(\delta_r - \frac{1}{2} P_d \right)^n J_r(\varepsilon)$$

$$J_r(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{+\psi_1} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi d\psi \quad (3.21)$$

Dados os parâmetros geométricos, a folga radial e o carregamento radial, as regiões de contato podem ser determinadas através de método iterativo, assumindo-se um valor de ε e, conseqüentemente, calculando-se a integral de distribuição de carregamento. Uma vez conhecida a carga aplicada, calcula-se δ_r e, novamente, estima-se um novo valor para ε . O processo iterativo continua até atingir um erro infinitesimal, previamente estabelecido. Finalmente, após a

convergência para todas as regiões de contato, é possível encontrar o valor do carregamento para cada esfera.

A tabela 3.1 apresenta o valor da integral radial ($J_r(\epsilon)$) em função do fator de distribuição de carregamento (ϵ). As regiões de contato podem ser determinadas através de método iterativo utilizando os valores da integral radial na tabela 3.1, ou ainda, através do gráfico da figura 3.6.

ϵ	$J_r(\epsilon)$	ϵ	$J_r(\epsilon)$
0	$1/Z$	$0,8$	$0,2559$
$0,1$	$0,1156$	$0,9$	$0,2576$
$0,2$	$0,159$	1	$0,2546$
$0,3$	$1,1892$	$1,25$	$0,2289$
$0,4$	$0,2117$	$1,67$	$0,1871$
$0,5$	$0,2288$	$2,5$	$0,1339$
$0,6$	$0,2416$	5	$0,0711$
$0,7$	$0,2505$	∞	0

Tabela.3.1: Distribuição de carregamento pela integral radial $J_r(\epsilon)$ (HARRIS, 1991)

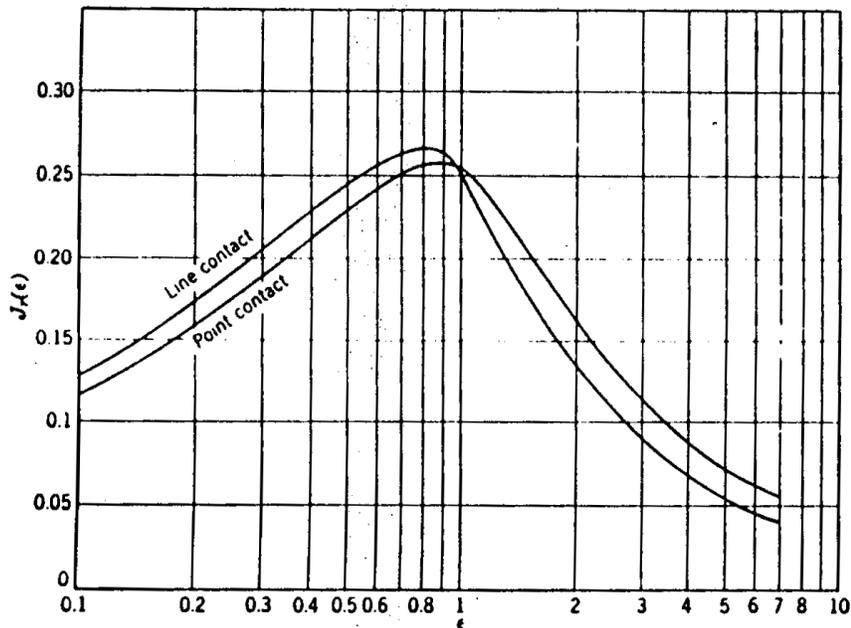


Figura 3.6: $J_r(\epsilon) \times \epsilon$ (HARRIS, 1991)

3.4 Carregamento combinado (radial e axial) para mancais de esferas de contato angular

Mancais de esferas de contato angular (figura 3.3), ou ainda, mancais de elementos rolantes cilíndricos cônicos, podem ser submetidos a carregamentos radial e axial simultaneamente. Para pista de carreira simples, as seguintes considerações devem ser feitas no cálculo:

- o movimento angular relativo das pistas, na direção axial, é negligenciado, ou seja, as pistas interna e externa do mancal permanecem paralelas durante a operação;
- os ângulos de contato de todos os elementos rolantes são os mesmos, e o valor do ângulo de contato real é conhecido.

Desta forma, as pistas interna e externa destes mancais possuem deflexões relativas na direção axial (δ_a) e na direção radial (δ_r), conforme figura 3.7.

A deflexão total das pistas, numa posição angular ψ qualquer da esfera, a partir da máxima deflexão na esfera de carregamento máximo, é dada por:

$$\delta_\psi = \delta_a \operatorname{sen} \alpha + \delta_r \cos \alpha \cos \psi \quad (3.22)$$

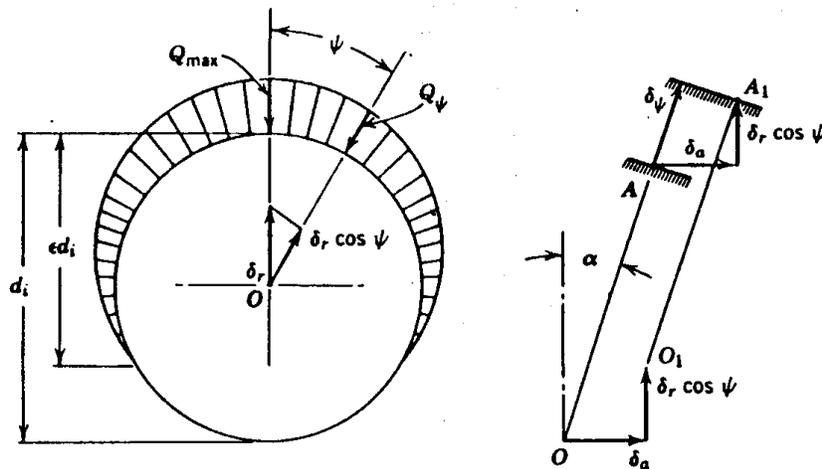


Figura 3.7 Deflexão devido ao carregamento combinado (CHANGSEN, 1991)

A deflexão total no carregamento máximo ($\psi = 0$) do mancal é:

$$\delta_{\max} = \delta_a \operatorname{sen} \alpha + \delta_r \cos \alpha \quad (3.23)$$

Desenvolvendo as expressões (3.22) e (3.23) tem-se:

$$\delta_\psi = \delta_a \operatorname{sen} \alpha + \delta_r \cos \alpha - \delta_r \cos \alpha + \delta_r \cos \alpha \cos \psi$$

$$\delta_\psi = \delta_{\max} - \delta_r \cos \alpha (1 - \cos \psi)$$

$$\delta_\psi = \delta_{\max} \left(1 - \frac{\delta_r \cos \alpha}{\delta_{\max}} (1 - \cos \psi) \right)$$

$$\frac{\delta_r \cos \alpha}{\delta_{\max}} = \frac{\delta_r \cos \alpha}{\delta_a \operatorname{sen} \alpha + \delta_r \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\delta_a \operatorname{sen} \alpha + \delta_r \cos \alpha}{\delta_r \cos \alpha}}$$

$$\frac{\delta_r \cos \alpha}{\delta_{\max}} = \frac{1}{\frac{\delta_a \operatorname{sen} \alpha}{\delta_r \cos \alpha} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{\delta_a \operatorname{tg} \alpha}{\delta_r}} = \frac{1}{2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_a \operatorname{tg} \alpha}{\delta_r} \right) \right]}$$

$$\frac{\delta_r \cos \alpha}{\delta_{\max}} = \frac{1}{2\varepsilon}$$

Desta forma, obtém-se a expressão da deflexão total na posição angular ψ :

$$\delta_\psi = \delta_{\max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_a \operatorname{tg} \alpha}{\delta_r} \right) \quad (3.24)$$

Nota-se que a equação (3.24) é análoga em forma à equação (3.17). Analogamente, para os casos de carregamento mostrados anteriormente (3.19):

$$Q_\psi = Q_{\max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \quad (3.25)$$

Da condição de equilíbrio estático, nas direções radial e axial, tem-se:

$$F_r = \sum_{\psi=-\psi_1}^{\psi=+\psi_1} Q_\psi \cos \alpha \cos \psi \text{ e } F_a = \sum_{\psi=-\psi_1}^{\psi=+\psi_1} Q_\psi \sin \alpha \quad (3.26)$$

Sendo a extensão da região de carregamento dada por:

$$\psi_1 = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta_a \operatorname{tg} \alpha}{\delta_r} \right) \quad (3.27)$$

Introduzindo as integrais de carregamento axial e radial, para o limite de integração dado pela extensão angular ψ_1 :

$$J_a(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{+\psi_1} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi d\psi$$

$$J_r(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{+\psi_1} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi d\psi \quad (3.28)$$

Escrevendo as equações que garantem o equilíbrio estático em função da integrais, tem-se:

$$F_r = ZQ_{\max} J_r(\varepsilon) \cos \alpha \text{ e } F_a = ZQ_{\max} J_a(\varepsilon) \sin \alpha \quad (3.29)$$

Das equações (3.29) tem-se:

$$\frac{F_a}{F_r} = \frac{ZQ_{\max} J_a(\varepsilon) \sin \alpha}{ZQ_{\max} J_r(\varepsilon) \cos \alpha} = \frac{J_a(\varepsilon) \operatorname{tg} \alpha}{J_r(\varepsilon)}$$

$$\frac{F_r \operatorname{tg} \alpha}{F_a} = \frac{J_r(\varepsilon)}{J_a(\varepsilon)} \quad (3.30)$$

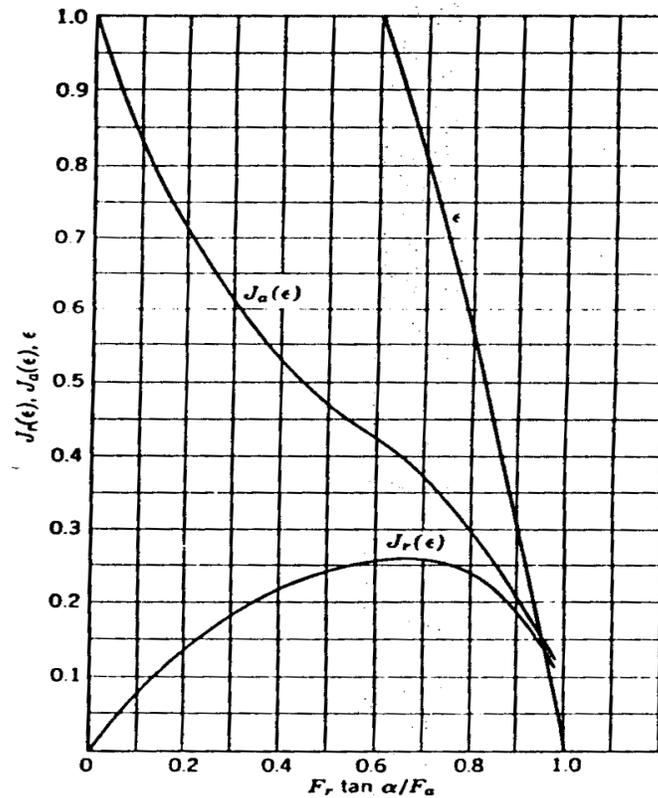


Figura 3.8: $J_r(\varepsilon)$, $J_a(\varepsilon)$, ε VS $F_r \operatorname{tg} \alpha / F_a$ (HARRIS, 1991)

3.5 Análise Cinemática

O cálculo das principais velocidades de rotação de um rolamento é primordial para o estudo da influência da força centrípeta na distribuição do carregamento, assim como na análise do momento giroscópico nas esferas, pois estas velocidades interferem diretamente na dinâmica

e na condição de lubrificação do rolamento. Com esta finalidade, é necessário estabelecer as velocidades lineares e angulares dos elementos rolantes, agregando-se um estudo mais aprofundado da região de contato entre as pistas, interna e externa, do rolamento e o próprio elemento rolante, definindo a velocidade de rotação normal ao contato, ou ainda, o *spinning*.

As relações cinemáticas presentes em um mancal de rolamento, em particular, aquelas associadas ao elemento rolante em si, não possuem caráter trivial. Geralmente, os elementos rolantes giram em torno de seu próprio eixo de rotação e, simultaneamente, descrevem uma órbita ao redor do eixo de rotação do mancal. Além disso, os movimentos de rolamento são acompanhados por um certo grau de escorregamento sobre as pistas do mancal.

Em mancais de esferas, o movimento das mesmas caracteriza-se como um problema tridimensional, ou seja, com seis graus de liberdade. Por exemplo, se o ângulo de contato for diferente de zero, a esfera pode apresentar uma rotação normal à superfície de contato, denominada *spinning*.

As relações cinemáticas gerais, incluindo escorregamento e *spinning* em mancais de esferas, são apresentadas com base nas seguintes considerações:

1. Os elementos que compõem o mancal de rolamento são rígidos, ou seja, efeitos relativos à deformação nos contatos são negligenciados;

2. O movimento dos elementos rolantes nas pistas é considerado rolamento puro, ou seja, as velocidades lineares na superfície da esfera são idênticas àsquelas das pistas interna e externa nos pontos de contato;

3. A influência da folga radial não é considerada;

4. O efeito da lubrificação por filme de óleo não é considerado neste modelo.

A figura 3.9 mostra um mancal de esferas de contato angular.

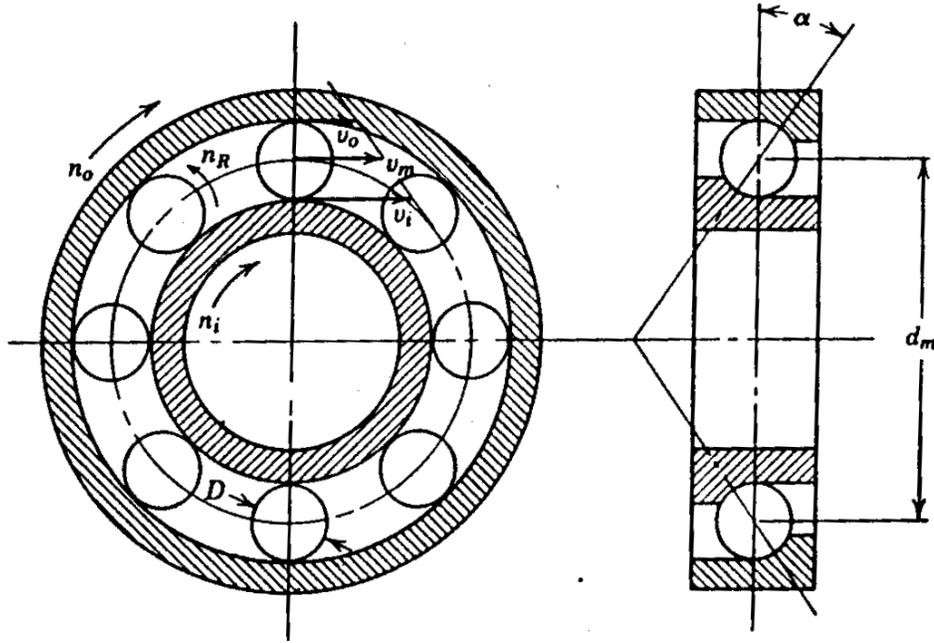


Figura 3.9: Relações cinemáticas nos mancais (HARRIS, 2006)

A velocidade linear pode ser escrita como $v = \omega r$, onde a velocidade angular é expressa em rad/s. Definindo-se ω_i e ω_o como as velocidades angulares das pistas interna e externa, respectivamente; d_m o diâmetro primitivo do rolamento; D o diâmetro da esfera; e α o ângulo de contato do rolamento, as velocidades lineares nos pontos de contato com as pistas interna e externa, v_i e v_o , são:

$$\begin{aligned}
 v_i &= \frac{1}{2} \omega_i (d_m - D \cos \alpha) \\
 v_i &= \frac{1}{2} \omega_i d_m (1 - \gamma) \\
 \gamma &= \frac{D \cos \alpha}{d_m}
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

$$v_o = \frac{1}{2} \omega_o d_m (1 + \gamma)
 \tag{3.32}$$

Considerando a relação entre rotação e velocidade angular, onde a rotação n é dada em rpm (rotações por minuto), e reescrevendo as equações de velocidade linear do anel interno (3.31) e do anel externo (3.32):

$$v_i = \frac{\pi n_i d_m}{60} (1 - \gamma) \quad (3.33)$$

$$v_o = \frac{\pi n_o d_m}{60} (1 + \gamma) \quad (3.34)$$

Conseqüentemente, a velocidade linear no centro dos elementos rolantes é a média das velocidades nos pontos de contato com as pistas interna e externa. Desta forma, considerando que não ocorre o escorregamento nos contatos com a pista, pode-se definir a velocidade da gaiola, v_m , como a velocidade média no centro dos elementos rolantes:

$$v_m = \frac{1}{2} (v_i + v_o) \quad (3.35)$$

$$v_m = \frac{\pi d_m n_m}{60}$$

A rotação da gaiola é dada por n_m :

$$n_m = \frac{1}{2} [n_i (1 - \gamma) + n_o (1 + \gamma)] \quad (3.36)$$

Para o cálculo da rotação e da velocidade angular da esfera, n_R e ω_R , respectivamente, é necessário definir n_{mi} e n_{m0} , ou seja, as velocidades de rotação da gaiola em relação à pista interna e da pista externa em relação à gaiola, respectivamente.

Assim:

$$n_{mi} = n_m - n_i \text{ e } n_{m0} = n_o - n_m \quad (3.37a)$$

$$\begin{aligned}
n_{mi} &= \frac{1}{2} [n_i (1 - \gamma) + n_0 (1 + \gamma)] - n_i \\
n_{mi} &= \frac{1}{2} n_i - n_i + \frac{1}{2} n_0 + \frac{1}{2} \gamma (n_0 - n_i) \\
n_{mi} &= \frac{1}{2} (n_0 - n_i) + \frac{1}{2} \gamma (n_0 - n_i) = \frac{1}{2} (n_0 - n_i) (1 + \gamma)
\end{aligned} \tag{3.37b}$$

$$\begin{aligned}
n_{m0} &= n_0 - \frac{1}{2} [n_i (1 - \gamma) + n_0 (1 + \gamma)] \\
n_{m0} &= n_0 - \frac{1}{2} n_i - \frac{1}{2} n_0 - \frac{1}{2} \gamma (n_0 - n_i) \\
n_{m0} &= \frac{1}{2} (n_0 - n_i) - \frac{1}{2} \gamma (n_0 - n_i) = \frac{1}{2} (n_0 - n_i) (1 - \gamma)
\end{aligned} \tag{3.37c}$$

Para o cálculo das rotações gerais da esfera e da gaiola despreza-se o escorregamento nos contatos com as pistas, assim, a velocidade linear da esfera é idêntica à velocidade linear das pistas nos pontos de contato.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} n_R D &= \frac{1}{2} n_{mi} d_i = \frac{1}{2} n_{m0} d_0 \\
d_i &= d_m - D \cos \alpha \\
d_0 &= d_m + D \cos \alpha \\
\frac{1}{2} \omega_{mi} d_m (1 - \gamma) &= \frac{1}{2} \omega_R D
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Como a rotação é proporcional à velocidade angular, substituindo n_{mi} e n_R , tem-se a rotação da esfera, dada por:

$$\begin{aligned}
n_R D &= n_{mi} d_m (1 - \gamma) \\
n_R &= n_{mi} \frac{d_m}{D} (1 - \gamma) \\
n_R &= \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} (1 - \gamma) (n_0 - n_i) (1 + \gamma)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.6 Análise cinemática nas regiões de contato

Nesta seção será demonstrado o cálculo do *spinning*, ou seja, da velocidade de rotação normal a região de contato entre a esfera e as pistas do rolamento, assim como as velocidades de escorregamento das pistas externa e interna sobre a esfera. A definição dessa região é essencial para o cálculo da dinâmica do rolamento, principalmente por sua relação com o momento giroscópico.

A figura 3.10 extraída de Harris (2006), apresenta a região de contato entre o elemento rolante e a pista externa, tal que a força normal entre a esfera e a pista encontra-se distribuída sobre uma superfície elíptica. Os semieixos da elipse (maior e menor) são representados por a_0 e b_0 , respectivamente. O raio de curvatura da região de pressão deformada (R_0) é definido por Hertz na equação (3.3), sendo aproximado pela relação entre o raio de curvatura da ranhura da pista externa r_0 (raio de osculação) e o diâmetro da esfera.

$$R_0 = \frac{2r_0 D}{2r_0 + D} \quad (3.40)$$

Devido à deformação na superfície elíptica, o raio do centro da esfera até o ponto de contato varia seu comprimento entre os pontos $(-a_0, +a_0)$ do eixo maior da elipse de contato. Devido à simetria da região de contato na direção do menor eixo da elipse, o rolamento puro da esfera na pista ocorre, no máximo, em dois pontos. O raio no ponto de rolamento puro (r_0'), deve ser determinado por métodos de análise de deformação no contato. Na abordagem aqui apresentada, este raio é aproximado como o próprio raio da esfera.

Com o objetivo de analisar a condição cinemática no contato, o movimento relativo será descrito no referencial da esfera, ou seja, assume-se que o centro da esfera é fixo no espaço e que a pista externa gira com velocidade angular ω_b , a qual é perpendicular ao plano de rotação do mancal, ou ainda, colinear com o eixo de rotação do mancal. Desta forma, analisamos a esfera independentemente de seu ângulo de posição ψ (Azimuth).

Portanto, o anel externo apresenta uma velocidade relativa ao centro da esfera, dada por:

$$\omega_0 = \frac{\omega_R D}{D + d_m} \quad (3.41)$$

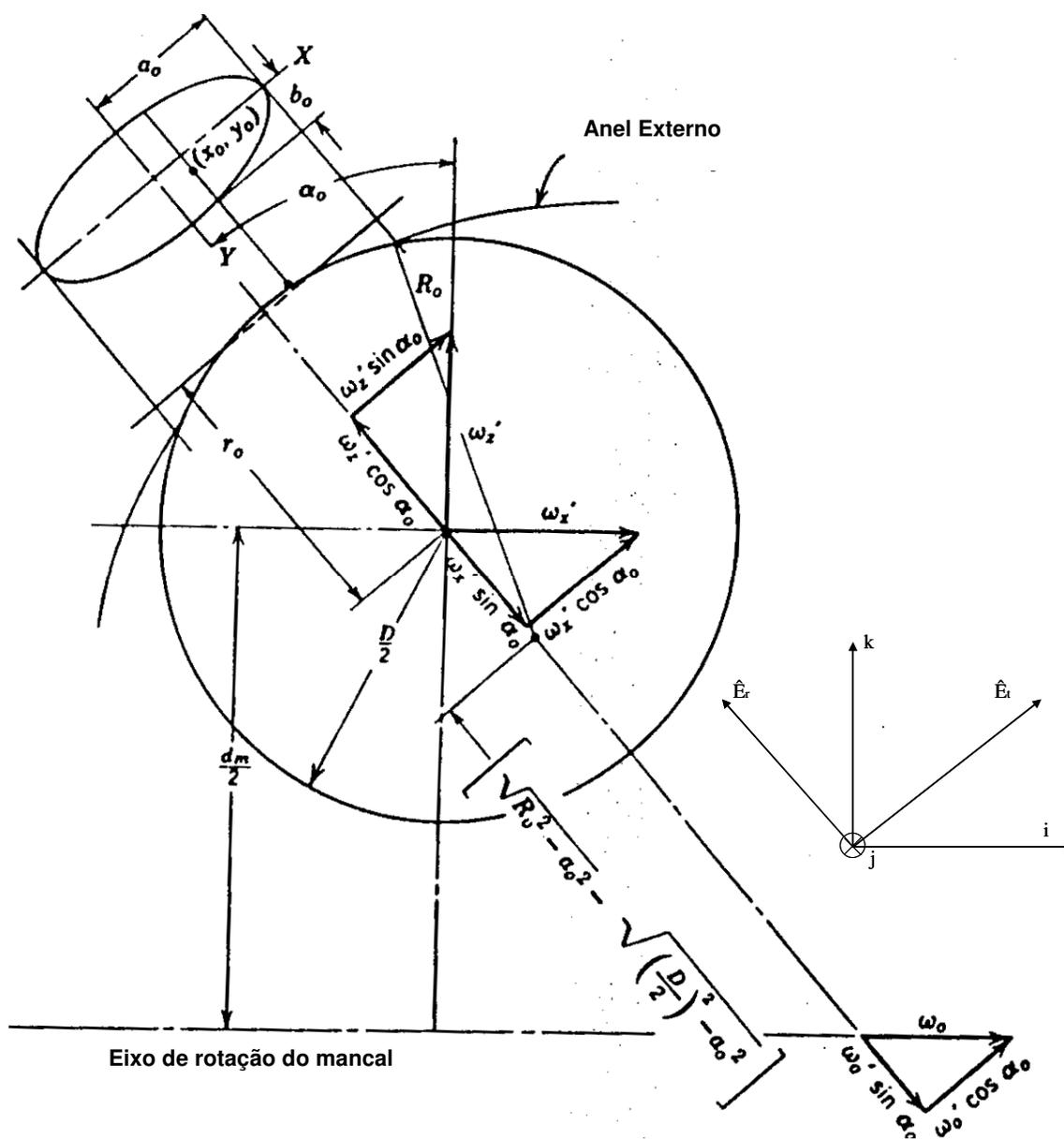


Figura 3.10: Contato da esfera com a pista externa (HARRIS, 2006)

Além disso, a velocidade de rotação da esfera (ω_R) possui componentes ω_x e ω_z no referencial da esfera (figura 3.10).

Considerando, agora, a linha imaginária que une o centro da esfera com o centro da região de contato, perpendicular ao eixo de rotação da esfera, verifica-se que a pista externa possui uma componente $\omega_0 \cos \alpha_0$, projeção do vetor velocidade angular (ω) do mancal na direção do eixo de rotação da esfera que, por sua vez, é paralelo ao eixo maior da elipse de contato.

Para o cálculo da velocidade linear da pista externa (v_{10}) deve-se somar a velocidade da pista no contato, em relação ao centro da esfera, com a velocidade de translação do centro da esfera. A velocidade linear relativa na região de contato é, portanto, obtida através do produto vetorial entre a distância do centro da esfera ao ponto do contato considerado, e a projeção da velocidade angular da pista no referencial da esfera ($\omega_0 \cos \alpha_0$).

Assim, para um ponto (x_0, y_0) , na região de contato, localizado na pista externa, a velocidade linear v_{10} é definida como:

$$v_{10} = \left(-\frac{d_m \omega_0}{2} - \left\{ (R_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\} \omega_0 \cos \alpha_0 \right) j \quad (3.42)$$

onde $-(d_m \omega_0)/2$ é a velocidade de translação da esfera na pista.

Definindo ainda que:

$(R_0^2 - x_0^2)^{1/2}$ é a distancia do ponto x_0 ao centro do raio de curvatura da região de contato.

$\left\{ (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} - \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\}$ é a distância do centro da esfera ao centro do raio de curvatura

da região de contato.

A decomposição dos vetores velocidade angular da esfera, ω_x e ω_z , em função do ângulo de contato (α_0), definem-se os componentes $\omega_x \cos \alpha_0$ e $\omega_z \sin \alpha_0$, também paralelos ao eixo

principal da elipse de contato (figura 3.10). Desta forma, para o ponto (x_0, y_0) , agora localizado na superfície da esfera, define-se a velocidade linear v_{20} , em relação ao centro da esfera:

$$v_{20} = \left(-(\omega_{x'} \cos \alpha_0 + \omega_{z'} \sin \alpha_0) \times \left\{ (R_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\} \right) j \quad (3.43)$$

A velocidade de escorregamento da pista externa sobre a esfera, na direção y da figura 3.10, é determinada pela diferença entre as velocidades encontradas em (3.42) e (3.43), no ponto de contato da superfície entre a pista e a esfera, respectivamente:

$$v_{y0} = v_{10} - v_{20} = \left(-\frac{d_m \omega_0}{2} + (\omega_{x'} \cos \alpha_0 + \omega_{z'} \sin \alpha_0 - \omega_0 \cos \alpha_0) x \right) \left\{ (R_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\} j \quad (3.44)$$

Adicionalmente, a velocidade angular da esfera (ω_R) possui uma componente $\omega_{y'}$, responsável pela velocidade linear de escorregamento da pista sobre a esfera, na direção x da figura 3.10, ou ainda, na direção do maior eixo da elipse de contato (ou direção axial do mancal). Assim, v_{x0} pode ser escrita como:

$$v_{x0} = \left(-\omega_{y'} \left\{ (R_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\} \right) i \quad (3.45)$$

Desta forma, estão definidas as velocidades de escorregamento da pista sobre a esfera, no plano de contato X-Y da figura 3.10.

Na direção normal à região de contato, ambas as componentes ($\omega_{x'}$ e $\omega_{z'}$) da velocidade angular da esfera, assim como a velocidade angular da pista externa ω_0 , apresentam projeções, a

saber, $\omega_x \sin \alpha_0$ e $\omega_z \cos \alpha_0$ para a esfera e $\omega_0 \sin \alpha_0$ para a pista. Tais projeções geram, portanto, uma rotação relativa pista-esfera, normal à região de contato, e denominada *spinning*:

$$\omega_{s_0} = ((\omega_x \sin \alpha_0 - \omega_z \cos \alpha_0) - \omega_0 \sin \alpha_0) \hat{E}r \quad (3.46)$$

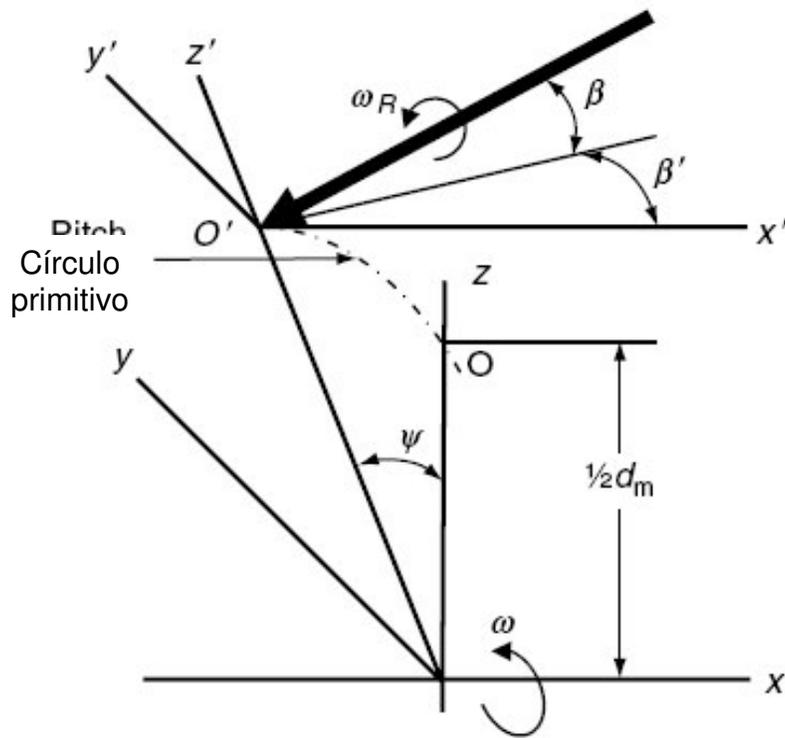


Figura 3.11: Sistema de coordenadas do mancal e da esfera (HARRIS, 2006)

De acordo com a figura 3.11, as projeções da velocidade angular da esfera (ω_R) no sistema de coordenadas $x'y'z'$, com centro fixo ao centro da esfera, são representadas por $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$, de acordo com as definições:

xyz sistema de coordenadas fixo com eixo x coincidente com o eixo de rotação do mancal;

$x'y'z'$ sistema de coordenadas com x' paralelo a x, que gira em torno do eio x;

ψ ângulo de posição da esfera no mancal (Azimuth), ou ainda, ângulo entre os eixos z e z' ;

β ângulo entre o vetor velocidade de rotação da esfera (ω_R) e o plano $x'y'$;

β' ângulo entre a projeção de ω_R no plano $x'y'$ e o eixo x' paralelo a x.

Desta forma, tem-se as componentes de ω_R em $x'y'z'$, as quais devem ser substituídas nas equações (3.44), (3.45) e (3.46):

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= (\omega_R \cos \beta \cos \beta') i \\ \omega_{y'} &= (\omega_R \cos \beta \operatorname{sen} \beta') j \\ \omega_{z'} &= (\omega_R \operatorname{sen} \beta) k\end{aligned}\tag{3.47}$$

As velocidades de escorregamento e *spinning* são, portanto, escritas em função da rotação da esfera:

$$v_{y0} = \left(\begin{array}{l} -\frac{d_m \omega_0}{2} + \left\{ (R_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\} \times \\ \left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_0 + \frac{\omega_R}{\omega_0} \operatorname{sen} \beta \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \right) \omega_0 \end{array} \right) j\tag{3.48}$$

$$v_{x0} = \left(- \left\{ (R_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_0^2 - a_0^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_0^2 \right]^{1/2} \right\} \times \omega_0 \left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \right) \cos \beta \operatorname{sen} \beta' \right) i\tag{3.49}$$

$$\omega_{s0} = \left(\left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \cos \beta \cos \beta' \sin \alpha_0 - \frac{\omega_R}{\omega_0} \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \right) \omega_0 \right) \hat{E}r\tag{3.50}$$

Para o raio de rolamento puro r_0' na esfera, a velocidade de translação da esfera é idêntica àquela da pista externa. Da figura 3.10 tem-se:

$$\left(\frac{d_m}{2\cos\alpha_0} + r_0'\right)\omega_0 \cos\alpha_0 = r_0'(\omega_{x'} \cos\alpha_0 + \omega_{z'} \sin\alpha_0)$$

$$\left(\frac{d_m}{2\cos\alpha_0} + r_0'\right)\omega_0 \cos\alpha_0 = r_0'(\omega_R \cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_0 + \omega_R \sin\beta \sin\alpha_0)$$

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = \frac{\left(\frac{d_m}{2}\right) + r_0' \cos\alpha_0}{r_0'(\cos\beta \cos\beta' \cos\alpha_0 + \sin\beta \sin\alpha_0)}$$
(3.51)

Uma análise semelhante pode ser aplicada para o contato na pista interna, conforme figura 3.12, a qual apresenta a região de contato entre o anel interno e a esfera, onde a superfície elíptica de semieixos a_i e b_i define o contato.

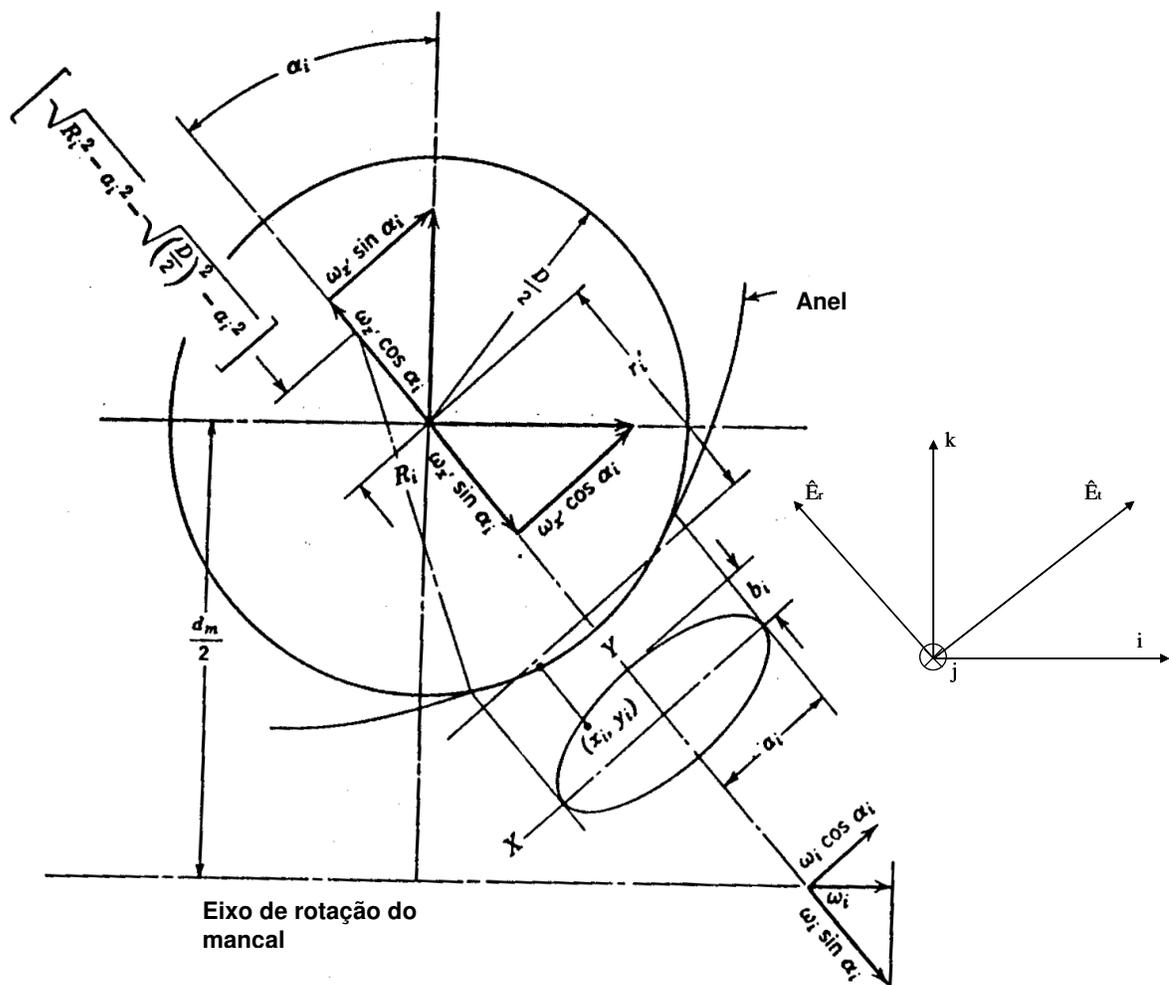


Figura 3.12: Contato da esfera com a pista interna (HARRIS, 2006)

Para essa análise, assume-se que a pista externa está fixa. Desta forma o centro da esfera pode orbitar em torno do centro do referencial fixo no mancal com rotação $-\omega$.

A partir das componentes paralelas ao eixo principal da elipse, define-se a velocidade linear de escorregamento da pista interna sobre a esfera na direção do rolamento:

$$v_{yi} = \left(\begin{array}{c} -\frac{d_m \omega_i}{2} + \left\{ (R_i^2 - x_i^2)^{1/2} - (R_i^2 - a_i^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_i^2 \right]^{1/2} \right\} \times \\ \left(\frac{\omega_R}{\omega_i} \cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_i + \frac{\omega_R}{\omega_i} \sin \beta \sin \alpha_i - \cos \alpha_i \right) \omega_i \end{array} \right) j \quad (3.52)$$

Analogamente, a velocidade de escorregamento da pista interna sobre a esfera, definida no eixo x, pode ser escrita como:

$$v_{xi} = \left(- \left\{ (R_i^2 - x_i^2)^{1/2} - (R_i^2 - a_i^2)^{1/2} + \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - a_i^2 \right]^{1/2} \right\} \omega_i \left(\frac{\omega_R}{\omega_i} \right) \cos \beta \sin \beta' \right) i \quad (3.53)$$

Na direção normal ao contato com a pista interna, o *spinning* é definido como:

$$\omega_{si} = \left(\left(\frac{\omega_R}{\omega_i} \cos \beta \cos \beta' \sin \alpha_i + \frac{\omega_R}{\omega_i} \sin \beta \cos \alpha_i + \sin \alpha_i \right) \omega_i \right) \hat{E}r \quad (3.54)$$

Para um raio de rolamento r_i' , a velocidade de translação da esfera é idêntica a da pista interna. Assim:

$$\frac{\omega_R}{\omega_i} = \frac{\left(\frac{d_m}{2} \right) + r_i' \cos \alpha_i}{r_i' (\cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_i + \sin \beta \sin \alpha_i)} \quad (3.55)$$

Investigando as equações finais (3.48 a 3.55), associadas aos movimentos relativos entre pistas e esfera, observam-se as seguintes grandezas incógnitas: r_0' , r_i' , α_0 , α_i , β , β' .

De uma forma mais completa, uma análise de forças e momentos, atuando sobre cada esfera, faz-se necessária para a determinação de tais incógnitas. Contudo, algumas aproximações são possíveis de forma a simplificar este procedimento. Os raios de rolamento puro da esfera (r_0' e r_i'), em ambas as pistas externa e interna, podem ser aproximados pelo raio da esfera ($D/2$). A consideração de que a velocidade angular da esfera (ω_R) localiza-se no plano $x'z'$, anulando, desta forma, o ângulo β' da figura 3.11, também é uma aproximação possível, e consideravelmente facilitadora, numa primeira análise, de forma a destacar o efeito do ângulo β de nutação da esfera, o qual ocorre na mesma direção do ângulo de contato esfera-pista (α).

Finalmente, aplica-se a hipótese simplificadora, amplamente utilizada na prática, de que a esfera realiza movimento de rolamento puro sobre uma das pistas, sem escorregamento ou *spinning*, sendo esta denominada pista de controle, o que permite avaliar os efeitos na outra pista.

Quando aplicada a pista externa, esta hipótese leva ao princípio estabelecido por Jones (1960), e aplicado ao projeto de mancais de rolamento de esferas, como condição de *outer raceway control*.

Em mancais de rolamento de esferas de contato angular lubrificadas, operando em elevadas velocidades de rotação e carregamentos relativamente baixos, observa-se que a velocidade angular normal no contato entre esfera e pista externa é praticamente inexistente (HARRIS, 2006), aproximando-se da condição de *outer raceway control*.

Também é fato que o contato angular acentua o carregamento axial no mancal, minimizando o efeito *spinning* no contato com a pista externa em relação ao contato com a pista interna.

Desta forma, a condição de *outer raceway control* (JONES, 1960) pode ser considerada de forma limitada apenas aos mancais radiais de esferas lubrificadas. No contato da esfera com a pista interna, ocorrem rolamento e *spinning* simultaneamente. Desta forma, define-se o ângulo β de nutação da esfera, partido das equações (3.50) e (3.51) aqui rerepresentadas por conveniência:

$$\omega_{s_0} = \left(\left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \cos \beta \cos \beta' \sin \alpha_0 - \frac{\omega_R}{\omega_0} \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \right) \omega_0 \right) \hat{E}r \quad (3.50)$$

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = \frac{\left(\frac{d_m}{2} \right) + r_0' \cos \alpha_0}{r_0' (\cos \beta \cos \beta' \cos \alpha_0 + \sin \beta \sin \alpha_0)} \quad (3.51)$$

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = \frac{\frac{1}{2}(d_m + D \cos \alpha_0)}{\frac{1}{2}D(\cos \beta \cos \alpha_0 + \sin \beta \sin \alpha_0)}$$

sendo que $\beta' = 0$ então $\cos \beta' = 1$ e $r_0' = D/2$.

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = \frac{d_m \left(1 + \frac{D}{d_m} \cos \alpha_0 \right)}{D(\cos(\alpha_0 - \beta))} = \frac{\left(1 + \frac{D}{d_m} \cos \alpha_0 \right)}{\frac{D}{d_m}(\cos(\alpha_0 - \beta))}$$

Aplicando a condição de *outer raceway control*, tem-se $\omega_{s_0} = 0$, e portanto:

$$\omega_{s_0} = \left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \cos \beta \sin \alpha_0 - \frac{\omega_R}{\omega_0} \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \right) \omega_0$$

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \cos \beta \sin \alpha_0 - \frac{\omega_R}{\omega_0} \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \right) = 0$$

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = \frac{\sin \alpha_0}{(\cos \beta \sin \alpha_0 - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_0)} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin(\alpha_0 - \beta)}$$

Igualando as expressões para ω_R/ω_0 :

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = \frac{\left(1 + \frac{D}{d_m} \cos \alpha_0\right)}{\frac{D}{d_m} (\cos(\alpha_0 - \beta))} = \frac{\text{sen} \alpha_0}{\text{sen}(\alpha_0 - \beta)}$$

$$\text{sen}(\alpha_0 - \beta) + \frac{D}{d_m} \cos \alpha_0 \text{sen}(\alpha_0 - \beta) = \frac{D}{d_m} \text{sen} \alpha_0 \cos(\alpha_0 - \beta)$$

$$\text{sen}(\alpha_0 - \beta) = \frac{D}{d_m} [\text{sen} \alpha_0 \cos(\alpha_0 - \beta) - \cos \alpha_0 \text{sen}(\alpha_0 - \beta)]$$

$$\text{sen} \alpha_0 \cos \beta - \text{sen} \beta \cos \alpha_0 = \frac{D}{d_m} \text{sen}(\alpha_0 - (\alpha_0 - \beta)) = \frac{D}{d_m} \text{sen} \beta$$

$$\frac{D}{d_m} \text{sen} \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha_0 = \text{sen} \alpha_0 \cos \beta$$

$$\left(\frac{D}{d_m} + \cos \alpha_0\right) \text{sen} \beta = \text{sen} \alpha_0 \cos \beta$$

$$\text{tg} \beta = \frac{d_m \text{sen} \alpha_0}{D + d_m \cos \alpha_0} \quad (3.56)$$

A expressão (3.56) permite estimar o ângulo de nutação β em função dos parâmetros de projeto do rolamento (diâmetro da esfera, diâmetro primitivo e ângulo de contato esfera-pista) para a condição de *outer raceway control*.

No capítulo 4 verifica-se a condição da expressão (3.56) para um mancal comercial de rolamento de esferas de contato angular, variando-se o valor de β na expressão (3.50) de α_0 .

3.7 Análise Dinâmica

O carregamento dinâmico (ou inercial) entre os elementos rolantes e as pistas ocorre devido ao movimento orbital da esfera em relação ao eixo de rotação do mancal, além das velocidades de

rotação em torno de seus eixos próprios. Em baixas rotações, o carregamento dinâmico é muito inferior àquele causado pelo carregamento na esferas devido à carga externa aplicada ao mancal.

Entretanto, para elevadas velocidades de rotação, o carregamento dinâmico, composto por forças centrípetas e momentos giroscópicos, pode alterar a distribuição de carregamento nos elementos rolantes. Forças centrípetas causam reações no contato da esfera com a pista externa, aumentando o carregamento e, conseqüentemente, causando maiores deformações neste contato. Desta forma, para mancais de rolamento de contato angular, estes efeitos podem ser expressivos a ponto de provocar ângulos de contato diferentes entre a esfera e as pistas interna e externa, ou seja, o ângulo de contato com a pista interna aumenta, enquanto que com a pista externa, este ângulo de contato diminui (figura 3.13). Desta forma, o ângulo de nutação β , apresentado na expressão (3.56), surge como conseqüência dos efeitos dinâmicos, na mesma direção do ângulo de contato α , gerando o momento giroscópico na esfera de contato angular.

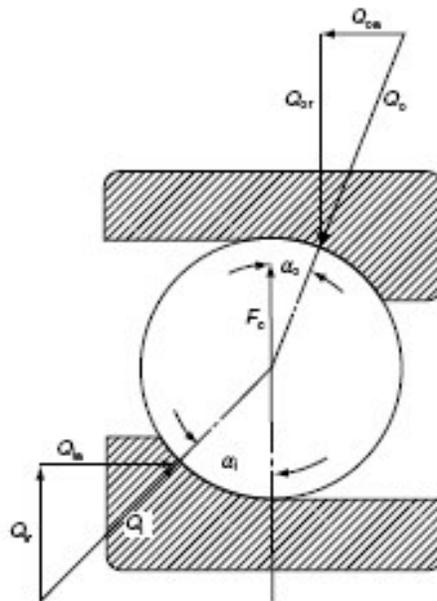


Figura 3.13: Esfera em contato angular sob força centrípeta (HARRIS, 2006)

O desenvolvimento das equações é baseado no movimento de um rolamento de esferas de contato angular, pois é a forma mais geral de um mancal desse gênero (HARRIS, 1991). A figura

3.14 ilustra a posição instantânea da esfera operando em elevada velocidade rotacional ω_R . A velocidade orbital do centro da esfera em relação ao eixo de rotação do mancal é ω_m .

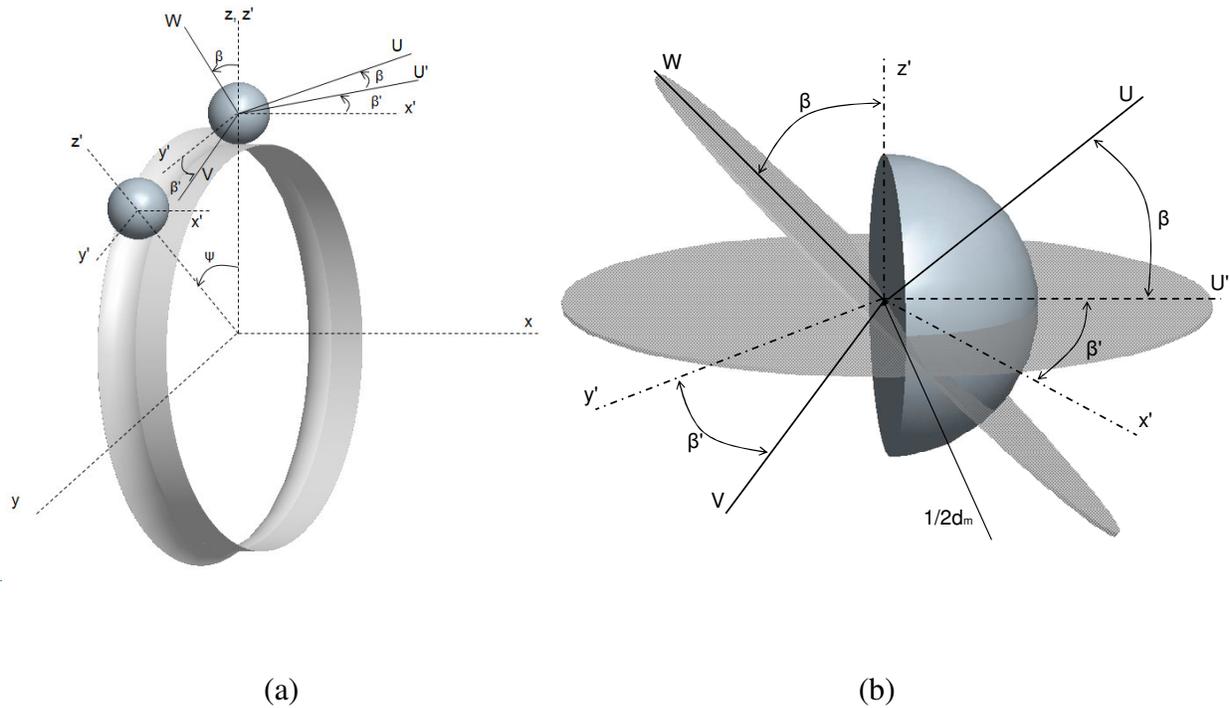


Fig.3.14: Sistemas de referência na esfera

São feitas rotações a partir do sistema $x'y'z'$, sendo uma rotação em z' e outra em V , definindo assim as componentes β e β' do ângulo de nutação. Além disto, tem-se a rotação própria da esfera em U e aprecessão dada pela rotação (órbita da esfera) em torno do eixo x de rotação do mancal. As relações entre os sistemas de coordenadas auxiliares e o sistema inercial são dadas a seguir.

Na figura 3.15 tem-se a projeção, através do ângulo β' , do sistema $(U'Vz')$ no sistema auxiliar $x'y'z'$ cujo centro coincide com o centro da esfera. As novas coordenadas são:

$$\begin{aligned} x' &= U' \cos \beta' - V \sin \beta' \\ y' &= U' \sin \beta' + V \cos \beta' \end{aligned} \tag{3.58}$$

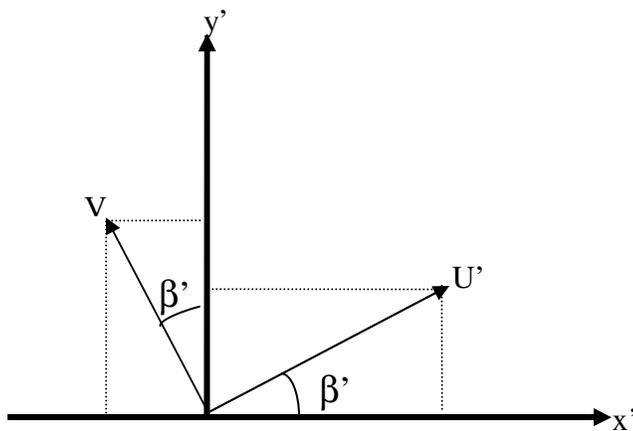


Figura 3.15: Giro do sistema local $U'Vz'$ em z'

Na figura 3.16 tem-se a projeção, através do ângulo β , do sistema local da esfera (UVW) no sistema auxiliar $U'Vz'$.

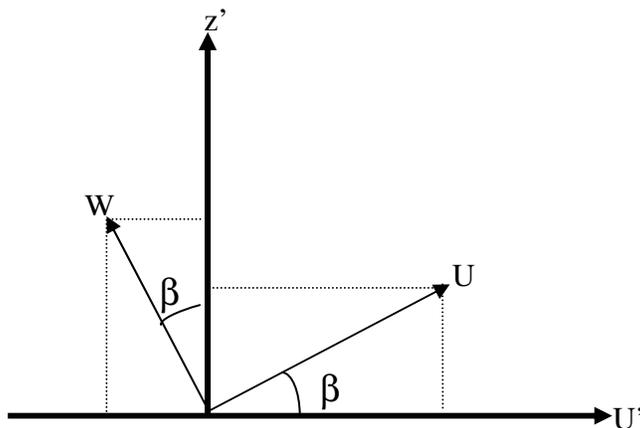


Figura 3.16: Giro do sistema local UVW em V

Desta forma, tem-se as coordenadas em $U' V z'$:

$$\begin{aligned}
 U' &= U \cos \beta - W \sin \beta \\
 z' &= U \sin \beta + W \cos \beta
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

Na figura 3.17 tem-se a rotação ψ do sistema $(x'y'z')$ em torno do eixo x (precessão).

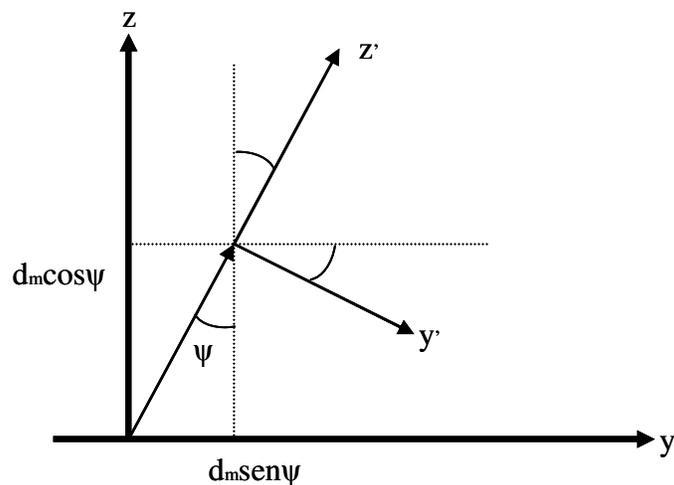


Figura 3.17: Giro do sistema local $x'y'z'$ em x'

Finalmente, tem-se as coordenadas no referencial do mancal:

$$x = x' \tag{3.59}$$

$$y = \frac{d_m}{2} \text{sen}\psi + y' \cos\psi + z' \text{sen}\psi$$

$$z = \frac{d_m}{2} \cos\psi - y' \text{sen}\psi + z' \cos\psi$$

As relações (3.57) e (3.58) devem ser substituídas em (3.59):

$$x = (U \cos\beta - W \text{sen}\beta) \cos\beta' - V \text{sen}\beta'$$

$$y = \frac{d_m}{2} \text{sen}\psi + ((U \cos\beta - W \text{sen}\beta) \text{sen}\beta' + V \cos\beta') \cos\psi + (U \text{sen}\beta + W \cos\beta) \text{sen}\psi$$

$$z = \frac{d_m}{2} \cos\psi - ((U \cos\beta - W \text{sen}\beta) \text{sen}\beta' + V \cos\beta') \text{sen}\psi + (U \text{sen}\beta + W \cos\beta) \cos\psi \tag{3.60}$$

Desta forma, para uma esfera com velocidade angular ω_R , coincidente com o eixo U do sistema auxiliar UVW, tem-se que $U = \omega_R$, $V = 0$ e $W = 0$, o que leva as equações (3.60), para uma posição instantânea da esfera em $\psi = 0$ e, portanto, no sistema $x'y'z'$:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_R \cos \beta \cos \beta' \\ \omega_y &= \omega_R \cos \beta \sin \beta' \\ \omega_z &= \omega_R \sin \beta\end{aligned}\tag{3.61}$$

3.7.1 Movimento giroscópico e quantidade de movimento angular

A equação de forças para um sistema de massas é a generalização da segunda lei de Newton para o movimento de uma partícula. Entretanto, a equação de momentos para o movimento tridimensional é mais complexa, uma vez que a variação da quantidade de movimento angular possui algumas componentes adicionais que não estão presentes no movimento plano.

Considerando um corpo rígido qualquer, girando em relação a um ponto O fixo no mesmo, tanto o corpo quanto o sistema de referencia a este solidário, possuem a mesma velocidade angular, cuja quantidade de momento angular do corpo, de acordo com a 2ª lei de Newton (MERIAM, 2004), é dada pela integral do triplo produto vetorial da velocidade angular pelo vetor posição, em relação a massa diferencial do corpo rígido:

$$\vec{H} = \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm\tag{3.62}$$

O vetor posição \vec{r} é dado pela expressão $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Desta forma, desenvolvendo a expressão para quantidade de movimento angular, verifica-se que as componentes de $\vec{\omega}$, no sistema de referência solidário ao corpo, não variam e, portanto, multiplicam as integrais. A expansão do produto vetorial triplo fornece:

$$\begin{aligned}
 H_x &= (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)i \\
 H_y &= (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)j \\
 H_z &= (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)k
 \end{aligned}
 \tag{3.63}$$

Sendo que H_x , H_y e H_z são componentes de \vec{H} , expressão geral para quantidade de movimento angular, em relação a um ponto fixo O de um corpo rígido, girando com uma velocidade angular instantânea $\vec{\omega}$.

A sequência de momentos e produtos de inércia presentes na equação (3.63) é denominada matriz de inércia.

$$\begin{bmatrix}
 I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\
 -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\
 -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}
 \end{bmatrix}
 \tag{3.64}$$

Se os termos de momentos e produtos de inércia forem analisados para todas as orientações possíveis de eixos com relação ao corpo rígido, numa determinada origem, pode-se encontrar uma orientação dos eixos x-y-z para a qual os termos de produtos de inércia são nulos e a matriz torna-se diagonal. Este é o caso do elemento rolante de esfera quando analisado em relação ao seu centro de rotação que, neste caso, é o próprio centro geométrico da esfera.

Toma-se uma fatia circular da esfera de raio y e espessura dx como o elemento de volume, conforme a figura 3.18.

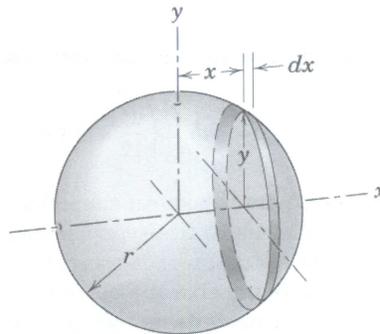


Figura 3.18: Cálculo do momento de inércia para esfera (MERIAM, 2004)

O momento de inércia do anel elementar dx em torno do eixo x é:

$$\begin{aligned}
 dI_{xx} &= \frac{1}{2}(dm)y^2 = \frac{1}{2}(\pi\rho y^2 dx)y^2 = \frac{\pi\rho}{2}(r^2 - x^2)^2 dx \\
 I_{xx} &= \frac{\pi\rho}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2)^2 dx \\
 I_{xx} &= \frac{1}{60} \pi\rho D^5
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Analogamente, para as direções y e z , tem-se $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Assim, a matriz de inércia é definida como:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} \pi\rho D^5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{60} \pi\rho D^5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \pi\rho D^5 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Substituindo a matriz de inércia (3.66) a as velocidades angulares (3.61) na expressão para quantidade de movimento angular (3.63), tem-se:

$$\begin{aligned}
 H_x &= \left(\frac{1}{60} \pi\rho D^5 \omega_R \cos \beta \cos \beta' \right) \\
 H_y &= \left(\frac{1}{60} \pi\rho D^5 \omega_R \cos \beta \sin \beta' \right) \\
 H_z &= \left(\frac{1}{60} \pi\rho D^5 \omega_R \sin \beta \right)
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

As derivadas das componentes da quantidade de movimento angular são nulas, pois a velocidade angular da esfera é constante:

$$\dot{H}_x = \dot{H}_y = \dot{H}_z = 0 \quad (3.68)$$

As equações gerais de momento em função da quantidade de movimento angular são dadas por:

$$\sum M = \dot{H} \quad (3.69)$$

Na dedução do princípio de momentos, a derivada de \vec{H} é calculada em relação a um sistema de coordenadas absolutas. Quando \vec{H} é expressa em função de componentes em relação a um sistema de coordenadas em movimento, com velocidade angular ω_m , a relação de momentos torna-se:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= \left(\dot{H}_x - \omega_{mz} H_y + \omega_{my} H_z \right) i \\ \sum M_y &= \left(\dot{H}_y - \omega_{mx} H_z + \omega_{mz} H_x \right) j \\ \sum M_z &= \left(\dot{H}_z - \omega_{my} H_x + \omega_{mx} H_y \right) k \end{aligned} \quad (3.70)$$

A equação (3.70) é a forma mais geral da equação de momentos em relação a um ponto fixo O. As componentes da velocidade angular de rotação dos eixos de referência são dadas por ω_{mx} , ω_{my} e ω_{mz} , e as componentes H são aquelas definidas anteriormente, onde ω_R é a velocidade angular da esfera.

Considerando a posição instantânea da esfera, e sua velocidade angular constante, as derivadas no tempo das componentes da quantidade de movimento angular são nulas. Desta forma, restam os produtos vetoriais entre as componentes da velocidade angular do sistema de referência cujo centro é fixo ao centro da esfera e as componentes da quantidade de movimento

angular. O centro geométrico da esfera, por sua vez, gira em torno do eixo x com velocidade angular da gaiola $\omega_{mx} = \omega_m$ (rotação de precessão), sendo $\omega_{my} = \omega_{mz} = 0$.

Finalmente, as componentes do momento giroscópico são:

$$\begin{aligned}
 M_x &= 0 \\
 M_y &= -\frac{1}{60} \pi \rho D^5 \omega_R \omega_m \sin \beta \\
 M_z &= \frac{1}{60} \pi \rho D^5 \omega_R \omega_m \cos \beta \sin \beta'
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Desprezando a componente β' tem-se:

$$\begin{aligned}
 M_x &= M_z = 0 \\
 M_y &= -\frac{1}{60} \pi \rho D^5 \omega_R \omega_m \sin \beta
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Para o cálculo da força centrípeta que atua na esfera do rolamento, considera-se a velocidade angular com que a esfera orbita em torno do eixo de rotação do mancal. A força centrípeta é dada pela relação entre a massa da esfera m e a aceleração centrípeta a_c :

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{3} \pi D^3 \\
 a_c &= \frac{d_m \omega_m^2}{2} \\
 F_z &= \frac{1}{12} \rho \pi D^3 d_m \omega_m^2
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

3.7.2 Considerações da análise dinâmica

O momento giroscópico ocorre, principalmente, devido às velocidades angulares da esfera em diferentes eixos de rotação, ou seja, a rotação própria da esfera no sistema auxiliar local, assim como o ângulo de nutação β em torno do eixo y' , e finalmente, a velocidade angular de precessão ao redor do eixo de rotação do mancal (ω_m). Desta forma, para baixas rotações de operação, o momento giroscópico é muito pequeno, quando comparado às forças e momentos causados pelo carregamento externo aplicado ao mancal. Pode-se assumir que o movimento devido ao momento giroscópico é praticamente nulo, sem perdas significativas para os cálculos do mancal de rolamento de esferas. A precessão torna-se desprezível, e apenas a nutação continua agindo sobre rolamentos com contato angular, o que resulta em um momento resultante de magnitude muito baixa.

Entretanto, em operações que demandam elevadas rotações, o momento giroscópico e a força centrípeta podem assumir valores significativos, uma vez que os ângulos de contato na pista interna tendem a aumentar, enquanto aqueles na pista externa, tendem a diminuir, o que resulta em diferentes pressões e tensões nas pistas interna e externas. Se a esfera tem uma rotação suficientemente elevada, assume-se que o momento giroscópico é resistido apenas pelas forças de fricção do contato esfera-pista externa, o que gera um desequilíbrio de forças, variação na inclinação da esfera e um aumento no momento giroscópico.

A figura 3.19 apresenta o esquema das principais forças e momentos agindo no rolamento.

Sob altas rotações, os ângulos de contato da pista externa e interna são diferentes devido aos deslocamentos do centro da esfera e do centro de curvatura da pista interna. Com isso, é necessário que o rolamento encontre uma nova posição de equilíbrio entre forças horizontais e verticais.

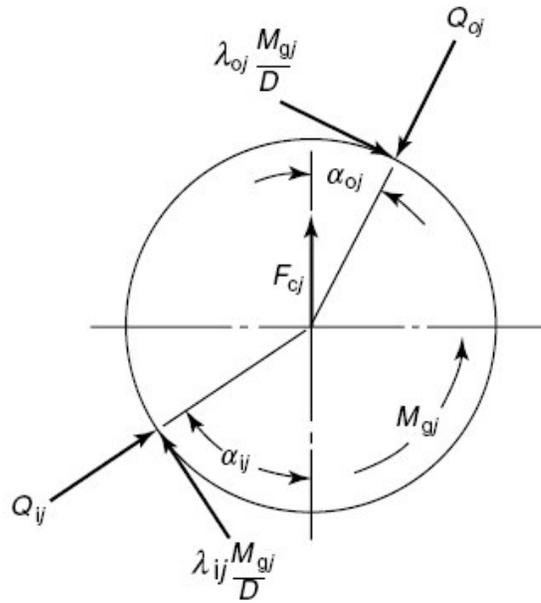


Figura 3.19: Equilíbrio de forças em elevadas rotações (HARRIS, 2006)

$$\begin{aligned}
 Q_i \sin \alpha_i - Q_o \sin \alpha_o - \frac{M_y}{D} (\lambda_i \cos \alpha_i - \lambda_o \cos \alpha_o) &= 0 \\
 Q_i \cos \alpha_i - Q_o \cos \alpha_o - \frac{M_y}{D} (\lambda_i \sin \alpha_i - \lambda_o \sin \alpha_o) + F_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.74}$$

O equilíbrio do sistema depende do momento giroscópico e da força centrípeta. Quando o rolamento está sob altas rotações, essas duas componentes tornam-se mais expressivas, pois dependem das velocidades angulares da esfera. Além disso, o momento depende também do ângulo β , definido pela condição de *outer raceway control*.

4 METODOLOGIA DE ANÁLISE

Com a finalidade de validação e aplicação da teoria desenvolvida no capítulo 3, uma série de testes de simulação numérica, passíveis de comparação com dados disponíveis na literatura, foi elaborada de forma a estabelecer uma metodologia de análise dinâmica para esferas em mancais de elementos rolantes.

Com este objetivo, foram desenvolvidos algoritmos de simulação para estudar e analisar o rolamento de esferas do ponto de vista estático, cinemático e dinâmico. Os dados de entrada, utilizados nas simulações, baseiam-se em dados de rolamentos comerciais, em particular, o rolamento FAG 6005, conforme tabela 4.1.

Rotação do anel externo	n_o	0 rpm
Rotação do anel interno	n_i	2000 rpm
Diâmetro externo	d_o	0,04235 m
Diâmetro interno	d_i	0,02965 m
Diâmetro da esfera	D	0,00635 m
Densidade de massa da esfera	ρ	7,810 kg/m ³
Raio interno do anel externo	r_o	0,003302 m
Raio externo do anel interno	r_i	0,003302 m
Número de esferas do mancal	Z	10
Força de pré carregamento devido à folga radial	F_r	1500 N

Tabela 4.1: Dados de entrada para o rolamento FAG 6005

Para efeito de análise e referência de comparação, os raios adimensionais das elipses de contato das pistas interna e externa, de acordo com a figura 3.1, foram assumidos de acordo com

Nonato (2007): $a_i = 1,03 \times 10^{-3}$ e $b_i = 1,15 \times 10^{-3}$ para pista interna e $a_o = 1,03 \times 10^{-3}$ e $b_o = 1,39 \times 10^{-3}$ para pista externa.

Para melhor clareza e abordagem mais completa do problema, a simulação foi dividida em três fases distintas: análise estática (carregamento radial), análise cinemática e análise dinâmica.

A análise estática consiste no cálculo dos carregamentos radiais nas esferas. Primeiramente, é feito um estudo dos deslocamentos e deformações que ocorrem no sistema. Em seguida, calcula-se o carregamento estático em todas as esferas e, finalmente, analisa-se o efeito da velocidade de rotação do anel interno na força centrípeta que atua em cada esfera.

A análise cinemática verifica as velocidades resultantes na esfera e na gaiola, além do *spinning* gerado nos pontos de contato.

A análise dinâmica avalia as acelerações, forças e momentos gerados no rolamento. A análise da força centrípeta e o do momento giroscópico e seus efeitos serão verificados e discutidos, assim como a sensibilidade paramétrica em relação à geometria do rolamento.

4.1 Descrição da metodologia

Para cada análise será proposta uma sequência de simulações para verificar as principais variáveis críticas do sistema de rolamento de esferas. As características do rolamento FAG 6005 serão usadas como base para as demais variações, considerando carregamento completamente radial, isto é, ângulo de contato igual a 0° e, posteriormente, carregamento por contato angular (radial e axial) para diferentes ângulos de contato.

Os resultados a seguir mostram as respostas para o rolamento base e os principais efeitos causados pela variação de parâmetros de projeto, montagem condições de operação.

4.1.1 Análise estática (carregamento radial)

A análise de carregamento radial no rolamento de esfera foi considerada em termos da distribuição de carga nas esferas, e tem como respostas:

- 1) O carregamento estático, apresentado vetorialmente, para cada esfera do rolamento;
- 2) O comportamento do carregamento em função do ângulo de posição da esfera (ângulo de Azimuth);
- 3) A distribuição do carregamento para uma esfera em rotação no sistema, devido à força centrípeta.

Para estudar a distribuição e suas principais causas, propõe-se duas simulações distintas. Primeiramente, estuda-se o efeito da variação da folga diametral (P_d) na distribuição do carregamento. Em uma segunda etapa, varia-se a rotação do anel interno, influenciando o efeito das força centrípeta na distribuição de carga das esferas. As tabelas 4.2 e 4.3 apresentam os dados para as simulações a serem realizadas:

Variável	Teste 1	Teste 2	Teste 3
P_d [m]	0	$5 * 10^{-4}$	$-1,2 * 10^{-4}$

Tabela 4.2: Testes para a análise estática - variação da folga diametral P_d

Variável	Teste 2	Teste 3	Teste 4
n_i [rpm]	2000	50000	100000

Tabela.4.3: Testes para a análise estática - variação da velocidade de rotação do anel interno n_i

4.1.2 Análise cinemática

A análise cinemática consiste na simulação das velocidades resultantes na esfera e na gaiola, além de calcular o *spinning* devido às componentes de velocidade de rotação normais à área de contato e as velocidades de escorregamento nas pistas interna e externa.

Para estas análises, uma sequência de simulações, variando a rotação de entrada do anel interno e os ângulos de contato, deve ser realizada. Para uma análise dos efeitos, serão feitas simulações, variando a rotação da pista interna de 500 rpm a 10.000 rpm e, para cada velocidade de rotação, serão analisados diferentes ângulos de contato, variando de 0° a 30°.

A tabela 4.4 resume os principais testes de simulação realizados.

rotação	Teste 1	Teste 2	Teste 3
n_i [rpm]	α [°]	α [°]	α [°]
500 rpm	0°	15°	30°
2000 rpm	0°	15°	30°
10000 rpm	0°	15°	30°

Tabela.4.4: Testes para a análise cinemática e dinâmica

4.1.3 Análise dinâmica

A análise dinâmica consiste no cálculo das acelerações impostas ao rolamento de esferas, assim como das forças e momentos aplicados. O momento giroscópico também é abordado para os rolamentos de esferas com contato angular.

Para uma análise dos efeitos destas variáveis, serão realizadas simulações, variando a rotação da pista interna de 500 rpm a 10.000 rpm e, para cada velocidade, serão feitos testes com diferentes ângulos de contato variando de 0° a 30°, conforme tabela 4.4.

4.1.4 Análise de sensibilidade

Para estudar a influência do ângulo de nutação β no momento giroscópico, uma sequência de simulações é necessária, variando-se os ângulos de contato e o próprio ângulo de nutação, considerando ainda, uma operação sob alta rotação, isto é, cerca de 10000 rpm. Serão analisados, tanto para análise cinemática quanto para análise dinâmica, a variação das velocidades de *spinning* do anel interno e externo e o momento giroscópico resultante. Para uma análise dos efeitos sobre essas respostas, os ângulos de contato e de nutação serão variados entre 0° e 45°. O objetivo é verificar a consideração sobre o efeito de *outer raceway control*, conforme mencionado por Harris (2006).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da metodologia descrita no capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos nas simulações numéricas na forma: análise estática para distribuição do carregamento radial, análise cinemática e análise dinâmica.

5.1 Análise estática: distribuição do carregamento radial

A análise da distribuição do carregamento radial foi abordada de duas formas: uma considerando apenas a variação da folga diametral; e a segunda, estudando os efeitos do aumento da velocidade de rotação da pista interna na distribuição do carregamento, devido à força centrípeta. As figuras 5.1 a 5.9 mostram a distribuição do carregamento devido à variação da folga diametral (P_d), enquanto que as figuras 5.10 a 5.15 destacam a influência da força centrípeta na distribuição do carregamento a velocidades de rotação constantes.

5.1.1 Folga diametral

Os resultados aqui apresentados correspondem aos testes de simulação da tabela 4.2.

a) $P_d = 0$

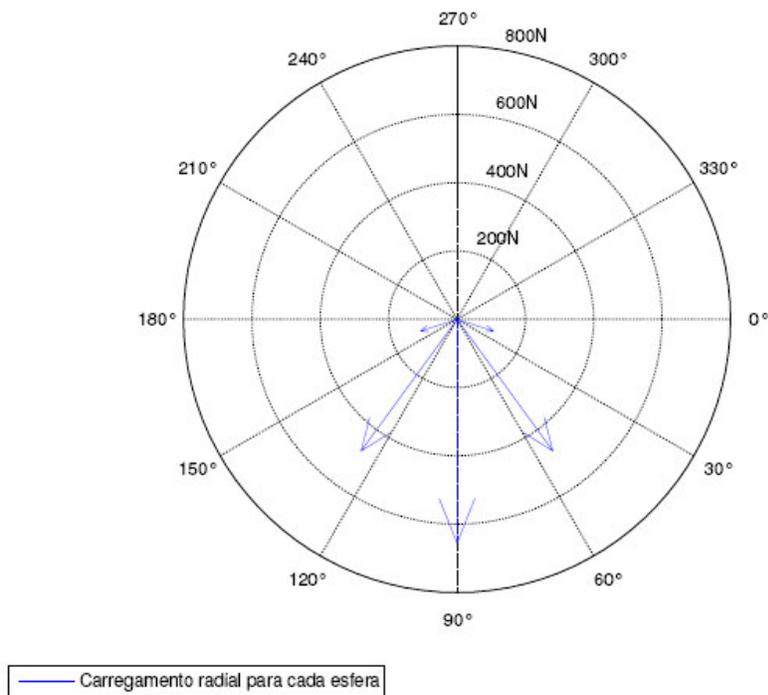


Figura 5.1: Carregamento radial - modelo estático – $P_d = 0$

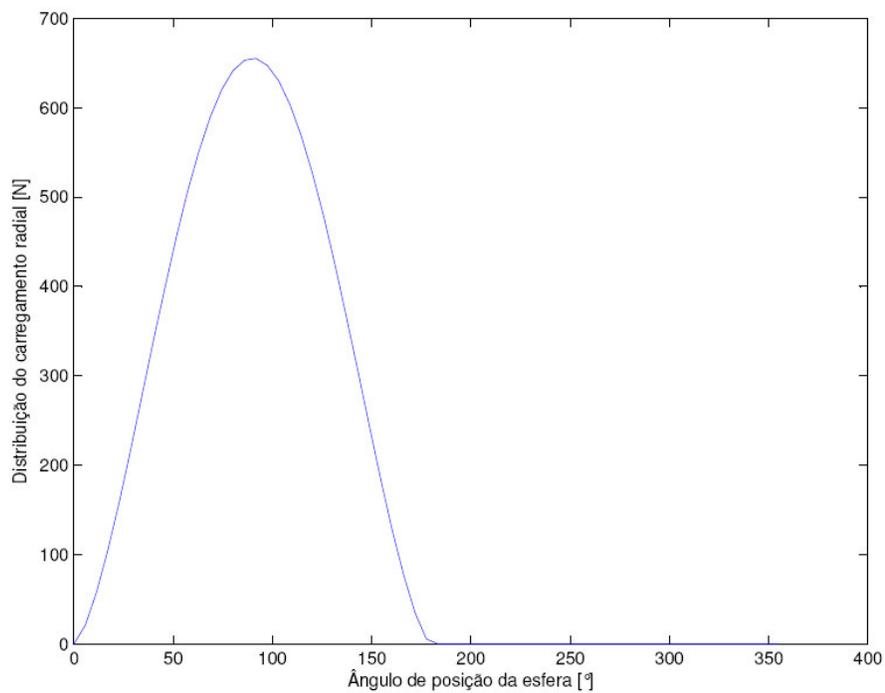


Fig.5.2: Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – $P_d = 0$

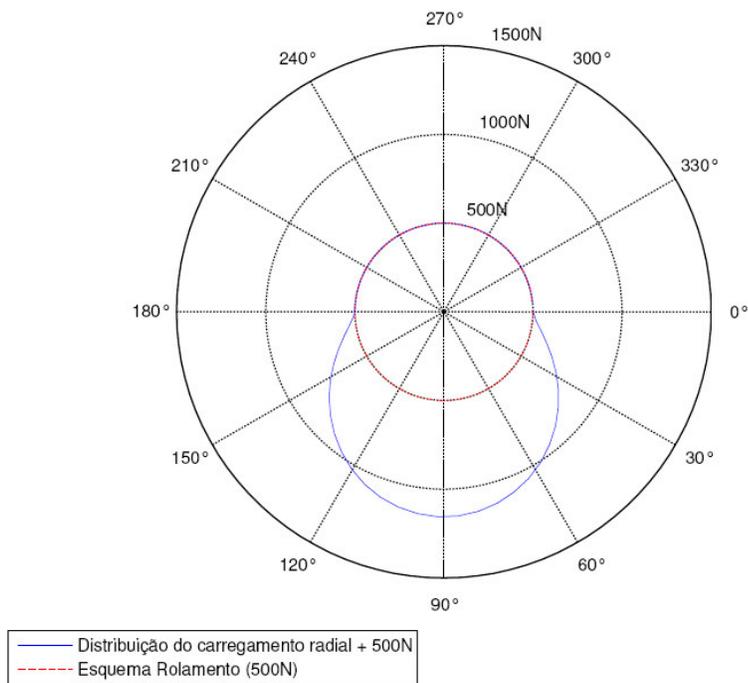


Figura 5.3: Distribuição de carregamento radial para 2000 rpm – $P_d = 0$

b) $P_d = 5 \times 10^{-4}$ m

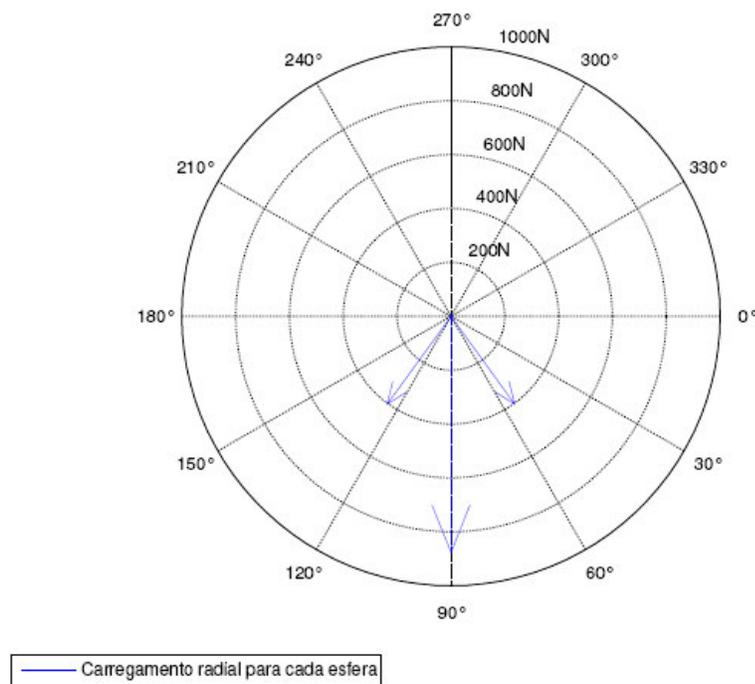


Figura 5.4: Carregamento radial - Modelo estático – $P_d = 5 \times 10^{-4}$ m

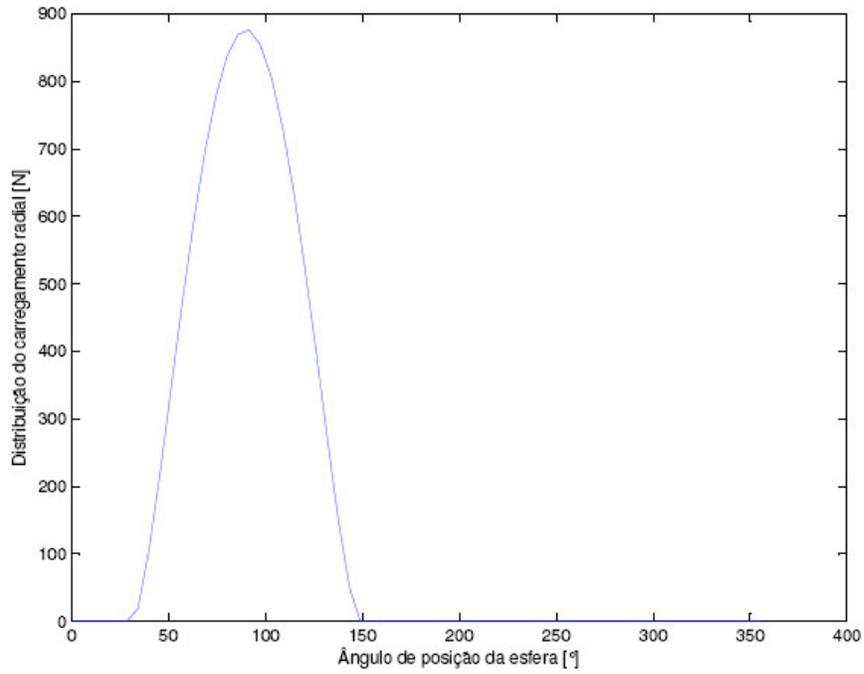


Figura 5.5: Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – $P_d = 5 \times 10^{-4}$ m

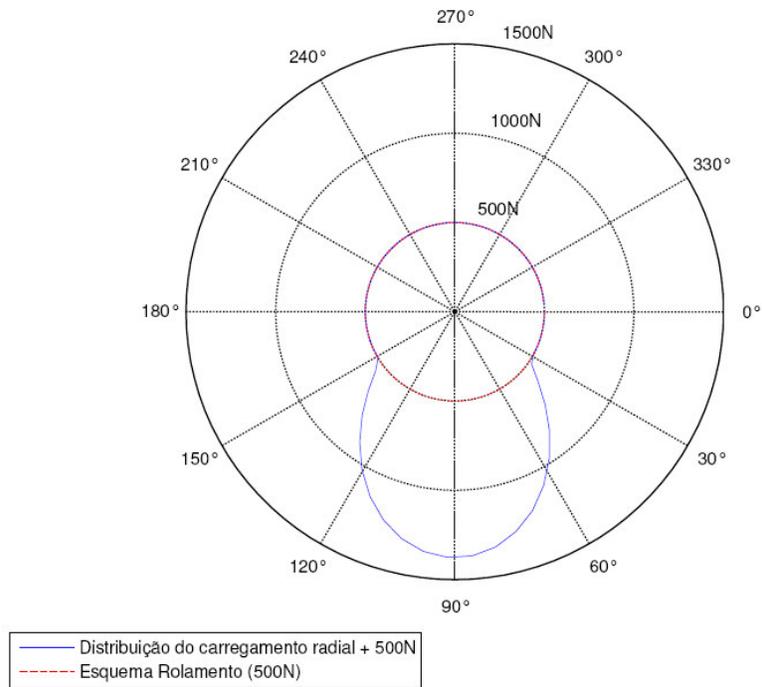


Figura 5.6: Distribuição de carregamento radial a 2000 rpm – $P_d = 5 \times 10^{-4}$ m

c) $P_d = -1,2 \times 10^{-4} \text{ m}$

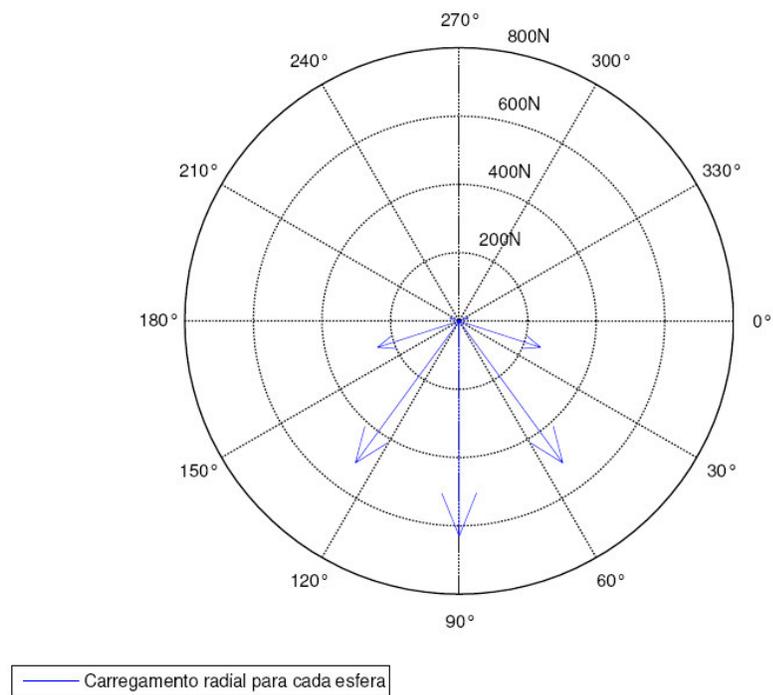


Fig.5.7: Carregamento radial - modelo estático – $P_d = -1,2 \times 10^{-4} \text{ m}$

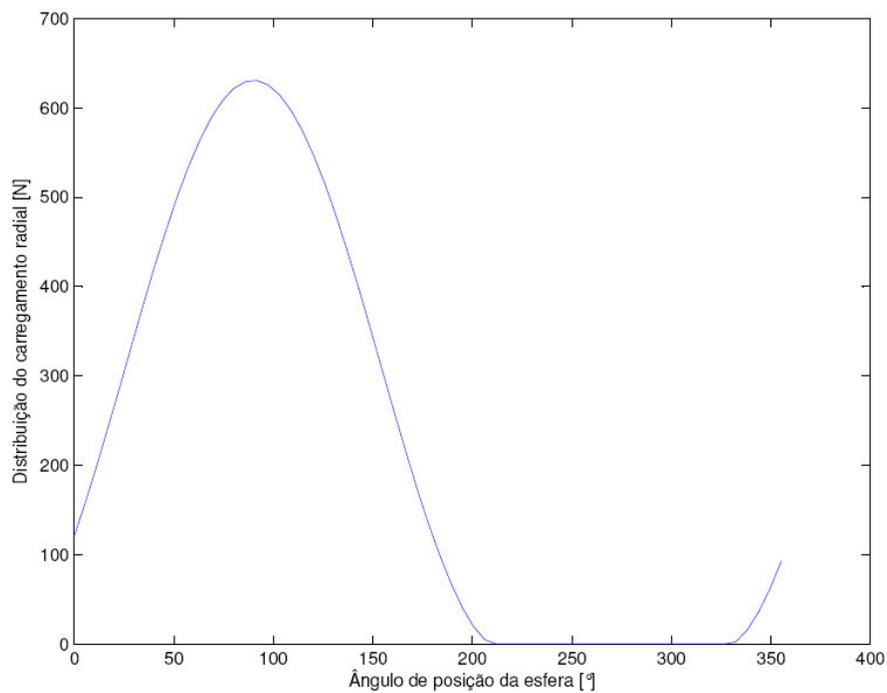


Figura 5.8: Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – $P_d = -1,2 \times 10^{-4} \text{ m}$

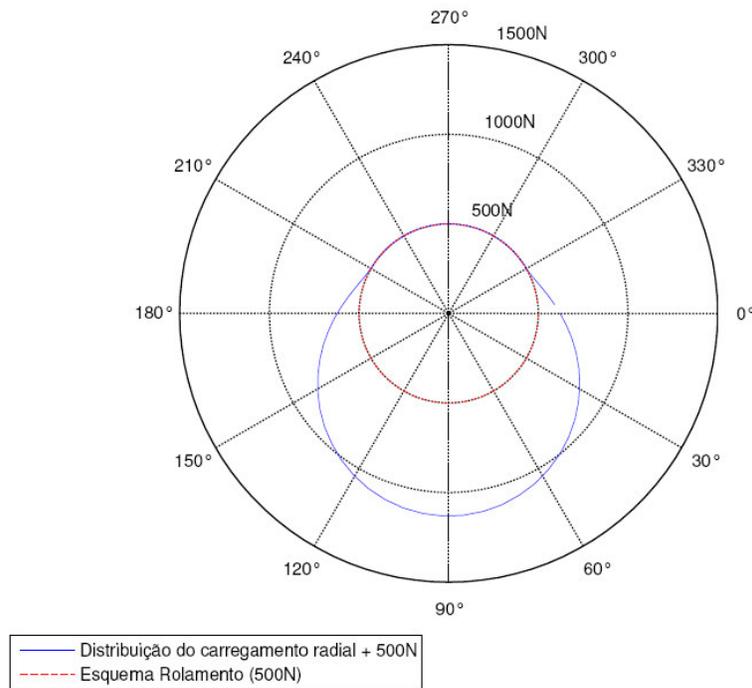


Figura 5.9: Distribuição de carregamento radial a 2000 rpm – $P_d = -1,2 \times 10^{-4}$ m

Para cada folga diametral estudada foram feitas três formas de análise: a primeira apresenta como o carregamento estático é distribuído para cada esfera do rolamento (figuras 5.1, 5.4 e 5.7); a segunda, como o carregamento varia de acordo com o ângulo de posição da esfera (figuras 5.2, 5.5 e 5.8); a terceira mostra a distribuição do carregamento radial de uma esfera quando o rolamento está em rotação constante (figuras 5.3, 5.6 e 5.9).

Para $P_d=0$, apenas as esferas localizadas de 0° a 180° apresentam carregamento. Como tem-se 10 esferas, apenas as cinco inferiores apresentam um vetor carregamento, sendo que a esfera que está em 270° possui o carregamento mais elevado (figuras 5.1 a 5.3). Conforme a folga positiva aumenta, ou inversamente, monta-se um rolamento com interferência, um menor ou maior número de esferas, respectivamente, estarão sujeitas ao carregamento.

No caso de folga positiva (5×10^{-4} m), conforme figuras 5.4 a 5.6, o carregamento total concentra-se na porção inferior do rolamento, ou seja, em um intervalo do ângulo de Azimuth sempre contido na faixa de 0° a 180° . No caso analisado, apenas três esferas encontram-se carregadas na posição angular de 210° a 330° , quando em rotação constante (figura 5.4). No repouso, as esferas carregadas encontram-se aproximadamente em 232° , 270° e 308° , o que pode

caracterizar uma situação crítica de sobrecarga em fadiga superficial, típica de mancais de elementos rolantes.

No caso de montagem com interferência ($-1,2 \times 10^{-4}$ m), apresentado nas figuras 5.7 a 5.9, tem-se uma distribuição mais uniforme do carregamento nas esferas, que tende a englobar a volta completa do mancal. Contudo, visto que a interferência também pode afetar a vida em fadiga do rolamento, existe uma situação de compromisso entre o grau de interferência na montagem e o carregamento total aplicado no mancal.

5.1.2 Rotação da pista interna

a) $n_i = 2000$ rpm

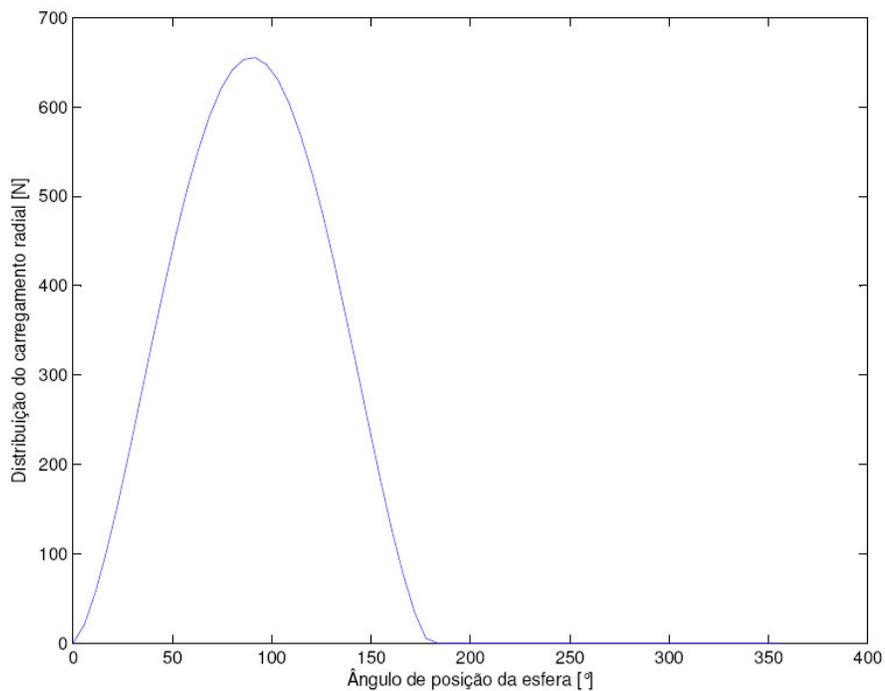


Figura 5.10: Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – $n_i = 2000$ rpm

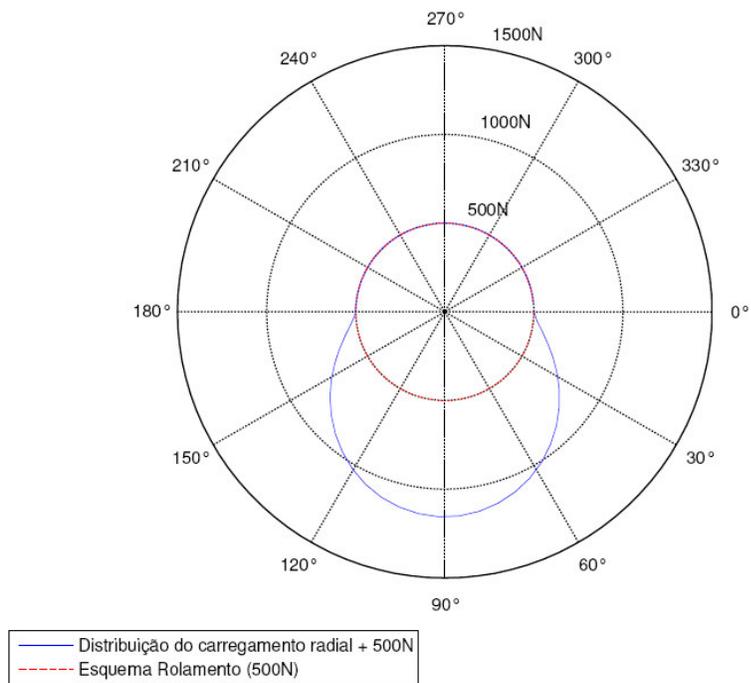


Figura 5.11: Distribuição de carregamento radial a 2000 rpm

b) $n_i = 50000$ rpm

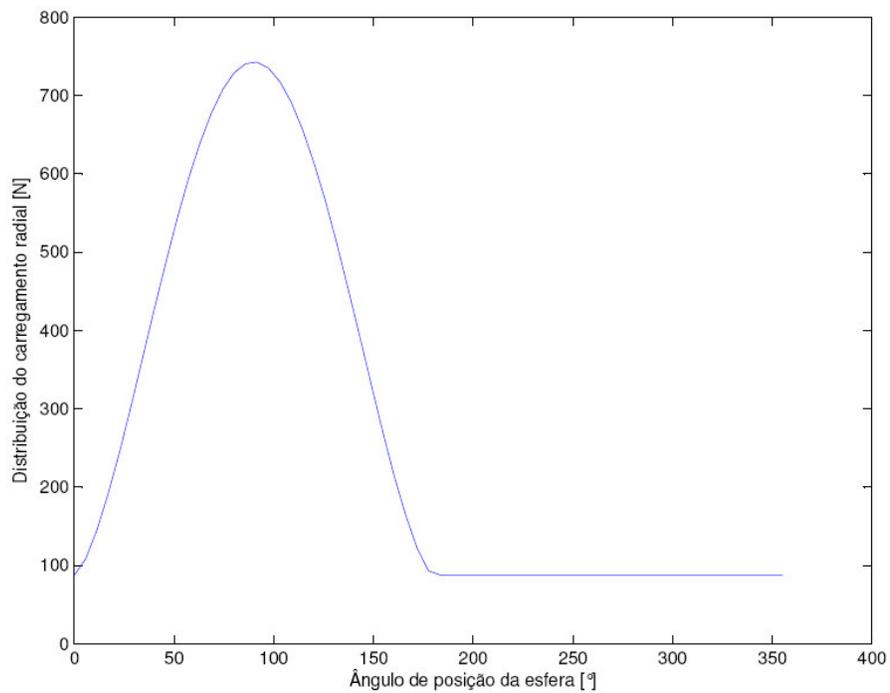


Figura 5.12: Distribuição de carregamento radial vs ângulo de posição da esfera – $n_i = 50000$ rpm

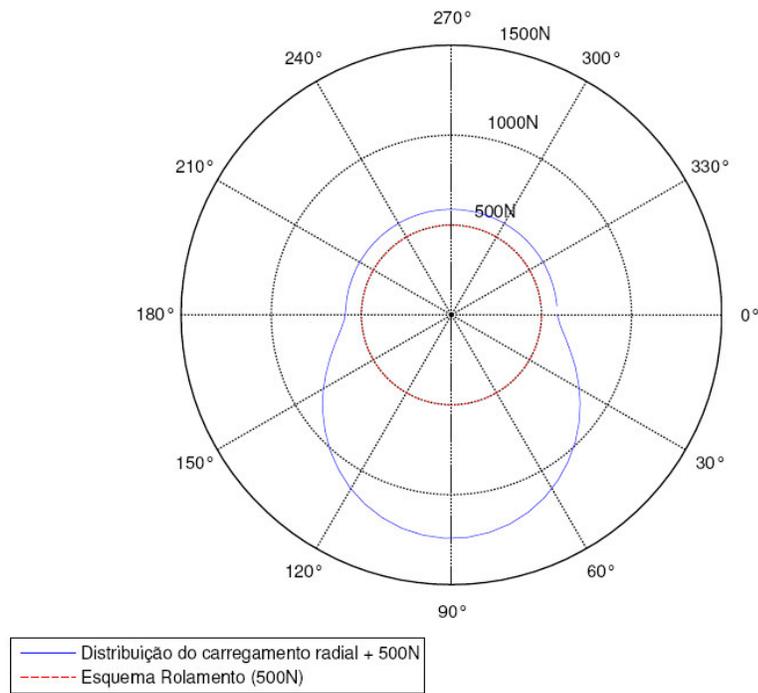


Figura 5.13: Distribuição de carregamento radial a 50000 rpm

c) $n_i = 100000$ rpm

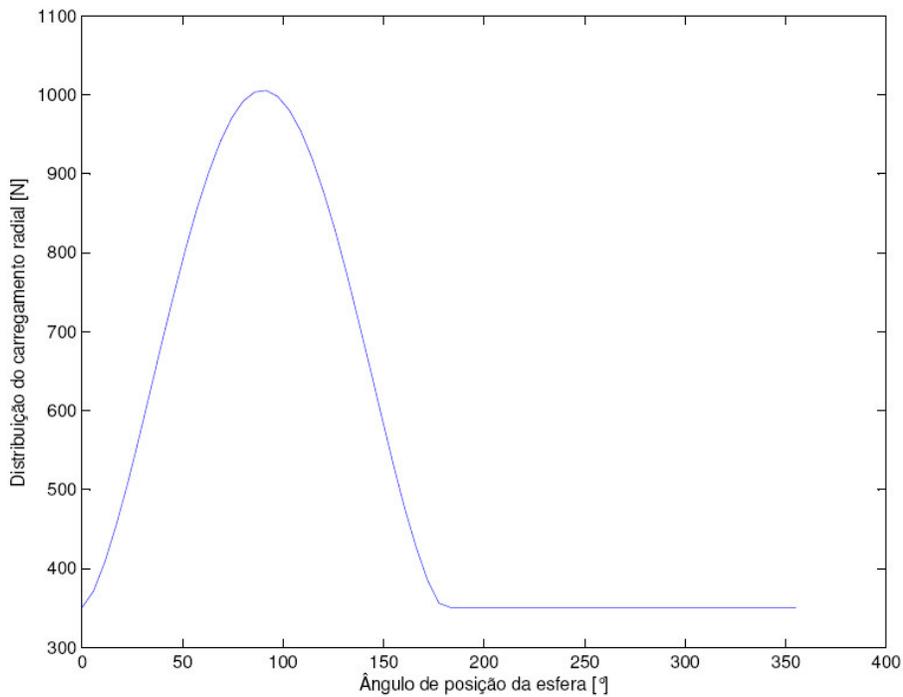


Figura 5.14: Distribuição de carregamento radial vs. Ângulo de posição da esfera – $n_i = 100000$ rpm

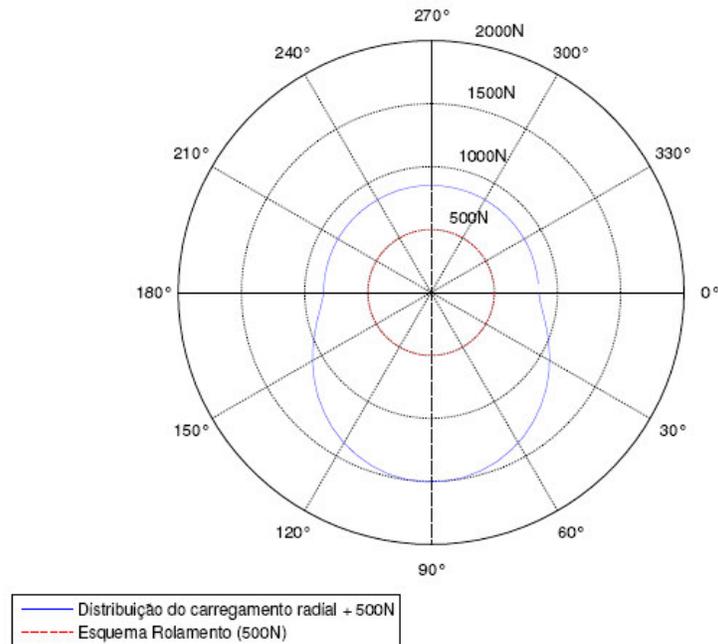


Figura 5.15: Distribuição de carregamento radial a 100000 rpm

Considerando o efeito da velocidade da pista interna, o carregamento passa a ser distribuído por todo rolamento, isto é, para qualquer ângulo de posição de uma esfera, durante sua rotação, um vetor carregamento será aplicado à mesma, devido ao aumento da força centrípeta, que depende da velocidade de rotação da pista interna. Como esta atua uniformemente pelo mancal de rolamento, há um deslocamento da curva de carregamento por ângulo de posição da esfera.

Contudo, vale destacar que esta componente centrípeta terá influência significativa na distribuição do carregamento nas esferas em duas situações específicas: velocidades de rotação muito elevadas (figuras 5.12 a 5.15) ou ainda para mancais de esferas de grandes dimensões, onde a massa das esferas é significativa para este efeito.

5.2 Análise cinemática

Os resultados da análise cinemática, mostrados nas figuras 5.16 a 5.19 e tabelas 5.1 a 5.3, mostram os efeitos da variação da velocidade da pista interna e do ângulo de contato sobre o rolamento de esferas, considerando, principalmente, as velocidades da gaiola (n_m) e da esfera (n_r), assim como o *spinning* provocado nas regiões de contato com as pistas externa (ω_{so}) e interna (ω_{si}), além das velocidades de escorregamento nas pistas externa (v_{oy}) e interna (v_{iy}) de acordo com as equações 3.36, 3.39, 3.51, 3.55, 3.48 e 3.52 respectivamente.

As rotações das esferas e da gaiola praticamente não sofrem efeitos significativos com a mudança do ângulo de contato α (figuras 5.16 a 5.17). A variação é inferior a 1%, considerando o ângulo de contato entre 0° e 30° , valores estes comuns na prática. Para a velocidade normal o contao (*spinning*), entretanto, o ângulo de contato apresenta uma influência expressiva. A velocidade normal no contato interno aumenta cerca de duas vezes em uma faixa de 15° a 30° para o ângulo de contato, enquanto que a velocidade normal no contato externo aumenta cerca de uma vez e meia (figuras 5.18 a 5.19).

Considerando o efeito da pista interna, as variações das velocidades de rotação da esfera e da gaiola são diretamente proporcionais à variação de rotação da pista interna. As velocidades normais aos pontos de contato também são proporcionais a velocidade de rotação do anel interno.

Uma importante consideração que foi observada é a diferença das velocidades normais ao contato interno e externo, que geram o *spinning*. A velocidade interna é sempre superior à externa.

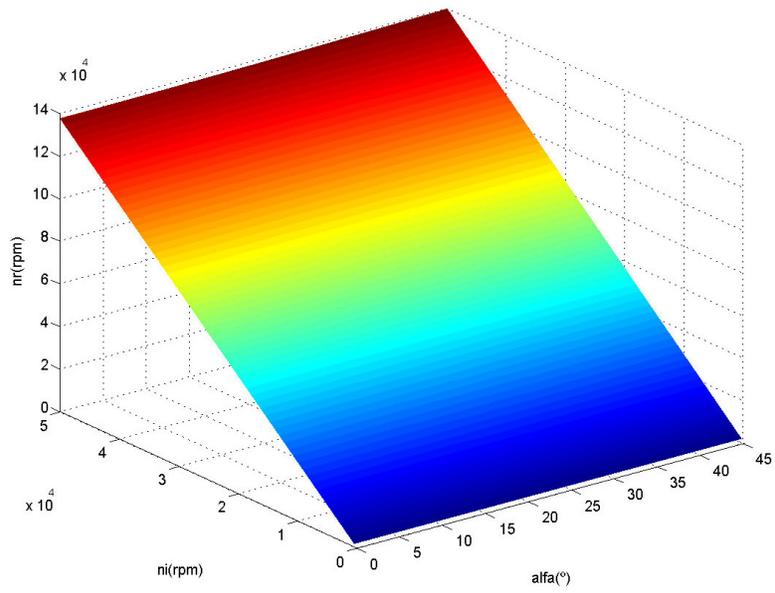


Figura 5.16: Análise cinemática – rotação da esfera

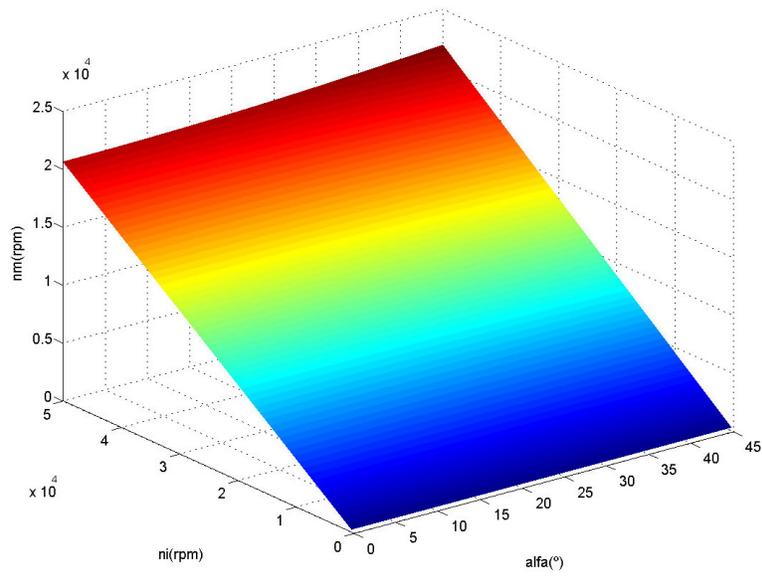


Figura 5.17: Análise cinemática – rotação da gaiola

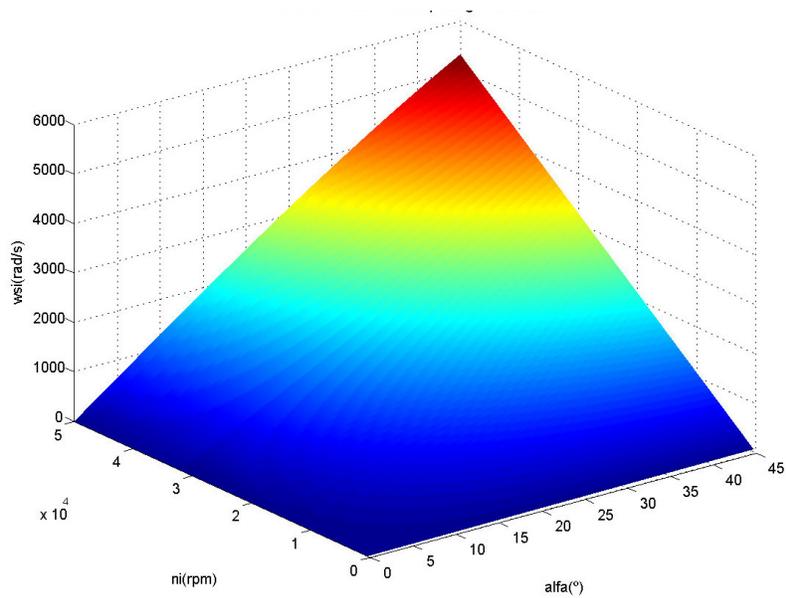


Figura 5.18: Análise cinemática – Velocidade normal ao contato no anel interno

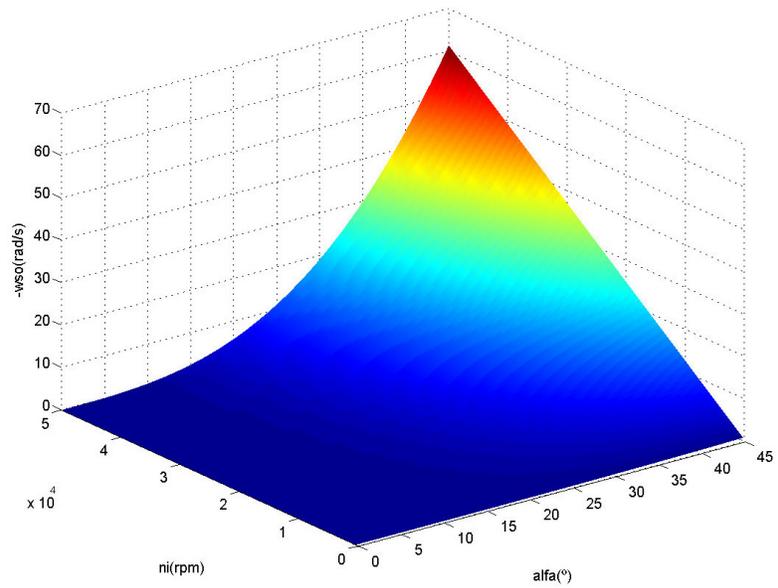


Figura 5.19: Análise cinemática – Velocidade normal ao contato do anel externo

α [°]	0°	15°	30°
n_M [rpm]	2.0590e+002	2.07403e+002	2.1181e+002
ω_M [rad / s]	21.5620	21.7194	22.1807
n_R [rpm]	-1.3732e+003	-1.3761e+003	-1.3842e+003
ω_R [rad / s]	-1.4380e+002	-1.4411e+002	-1.4495e+002
ω_{s0} [rad / s]	0	-2.4457e-002	-1.9047e-001
ω_{sI} [rad / s]	0	19.1688	37.2680

Tabela 5.1: Resultados da análise cinemática – 500rpm

α [°]	0°	15°	30°
n_M [rpm]	8.2361e+002	8.2962e+002	8.4724e+002
ω_M [rad / s]	86.2483	86.8777	88.7230
n_R [rpm]	-5.4929e+003	-5.5047e+003	-5.5369e+003
ω_R [rad / s]	-5.7521e+002	-5.76454e+002	-5.7983e+002
ω_{s0} [rad / s]	0	-9.7795e-002	-7.6188e-001
ω_{sI} [rad / s]	0	76.6755	1.4895e+002

Tabela 5.2: Resultados da análise cinemática – 2000rpm

α [°]	0°	15°	30°
n_M [rpm]	4.1180e+003	4.1481e+003	4.2362e+003
ω_M [rad / s]	4.3124e+002	4.34380e+002	4.4361e+002
n_R [rpm]	-2.7464e+004	-2.7523e+004	-2.76845e+004
ω_R [rad / s]	-2.8760e+003	-2.8822e+003	-2.89915e+003
ω_{s0} [rad / s]	0	-4.8897e-001	-3.8
ω_{sI} [rad / s]	0	3.8337e+002	7.4476e+002

Tabela.5.3: Resultados da análise cinemática – 10000rpm

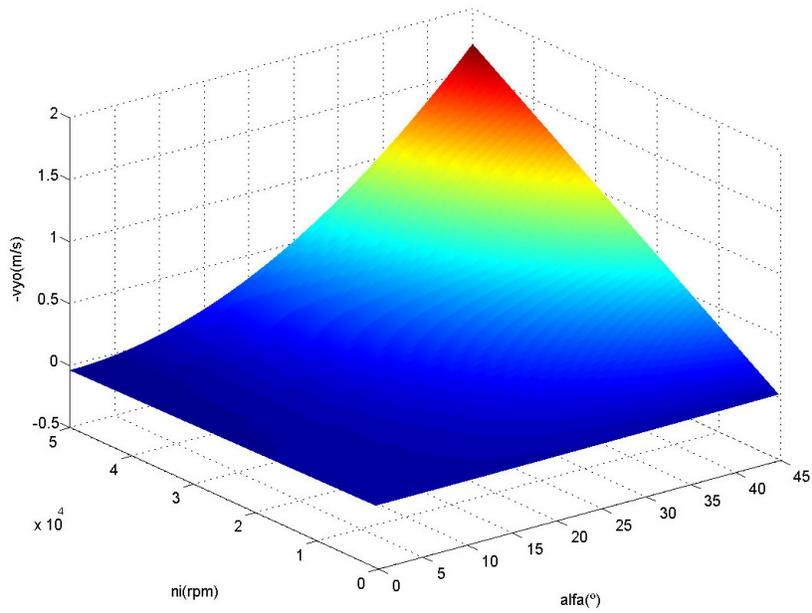


Figura 5.20: Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista externa – $x_0 = 0$

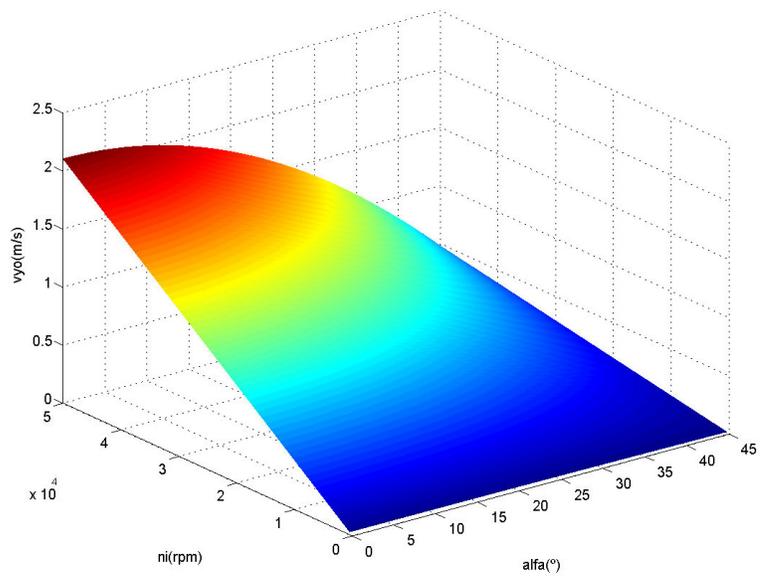


Figura 5.21: Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista externa – $x_0 = a_0$

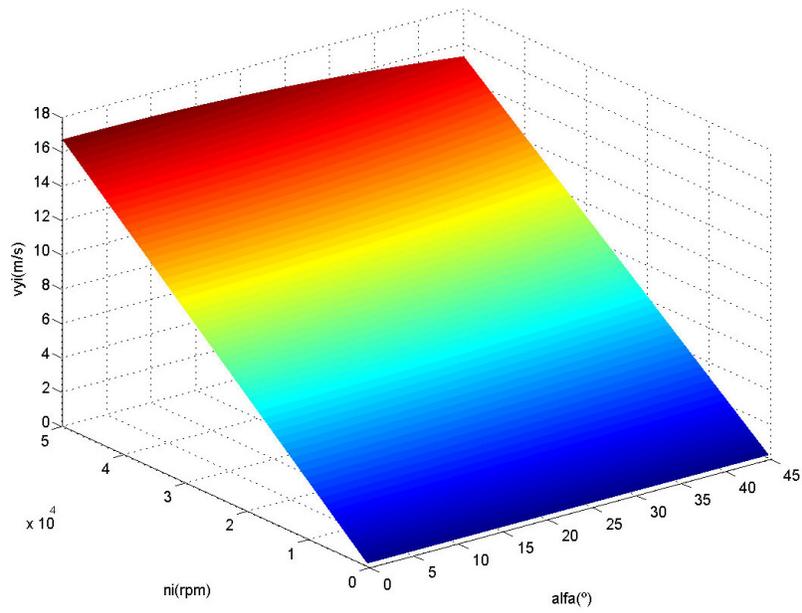


Figura 5.22: Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista interna – $x_i = 0$

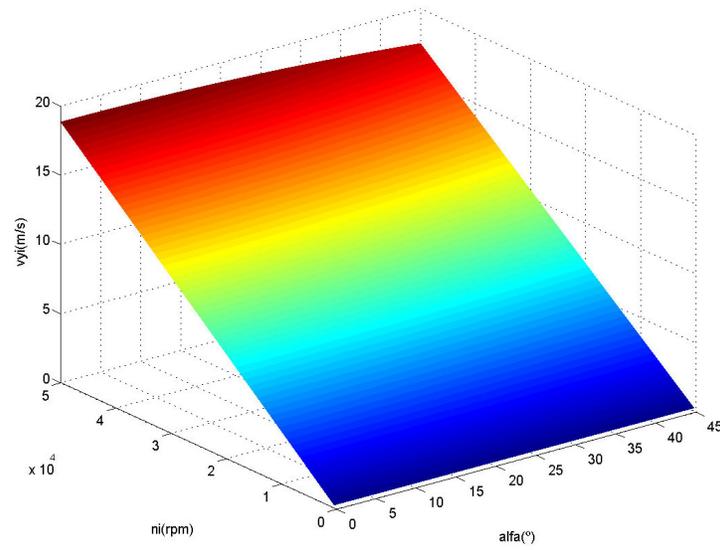


Figura.5.23: Análise cinemática – velocidade de escorregamento na pista interna – $x_i = a_i$

As figuras 5.20 e 5.21 mostram a velocidade de escorregamento no sentido do rolamento em y , nos pontos de contato $x_o=0$ (ponto central da elipse de contato) e $x_o=ao$ (extremidade da elipse de contato). Para efeito de análise, considerando rotações da pista interna da ordem de 50.000 rpm, a velocidade na superfície da esfera é de 44,45 m/s. Neste caso extremo, a velocidade de escorregamento da pista externa é da ordem de 1,75 m/s no centro do contato, e de 2,1 m/s na extremidade do contato. Considerando-se uma velocidade de rotação da pista interna de 10.000 rpm, valor este normalmente encontrado da prática, o escorregamento é praticamente inexistente, validando o modelo proposto de *outer raceway control*.

Nestas mesmas condições, para 50.000 rpm a velocidade de escorregamento na pista interna é de 16,5 m/s no centro do contato e de 18 m/s na extremidade da elipse, sendo ainda que, para rotações normais de 10.000 rpm, ainda são encontradas velocidades de escorregamento não nulas de aproximadamente 2 m/s no ponto central e de 4 m/s na extremidade da elipse de contato.

Desta forma, verifica-se que a velocidade de escorregamento na pista interna para aplicações práticas chega a 7% da velocidade linear na superfície da esfera.

5.3 Análise dinâmica

Os resultados da análise dinâmica, nas figuras 5.24 a 5.26 e nas tabelas 5.4 a 5.6, mostram os efeitos da variação da velocidade da pista interna e do ângulo de contato sobre o rolamento de esferas, considerando a aceleração, o momento giroscópico e a força centrípeta aplicados ao rolamento.

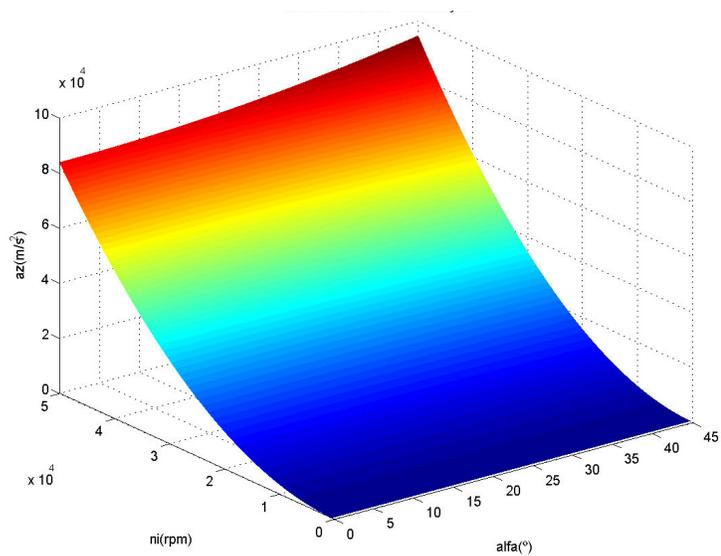


Figura 5.24: Análise dinâmica – aceleração

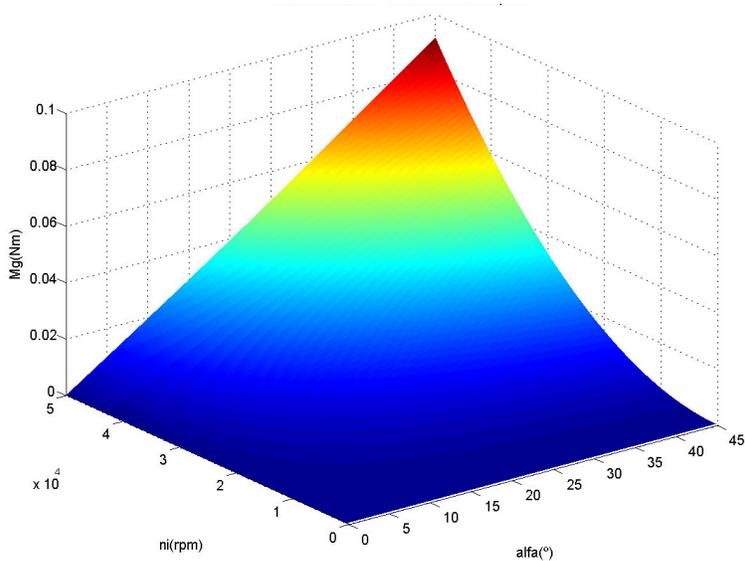


Figura 5.25: Análise dinâmica – momento giroscópico

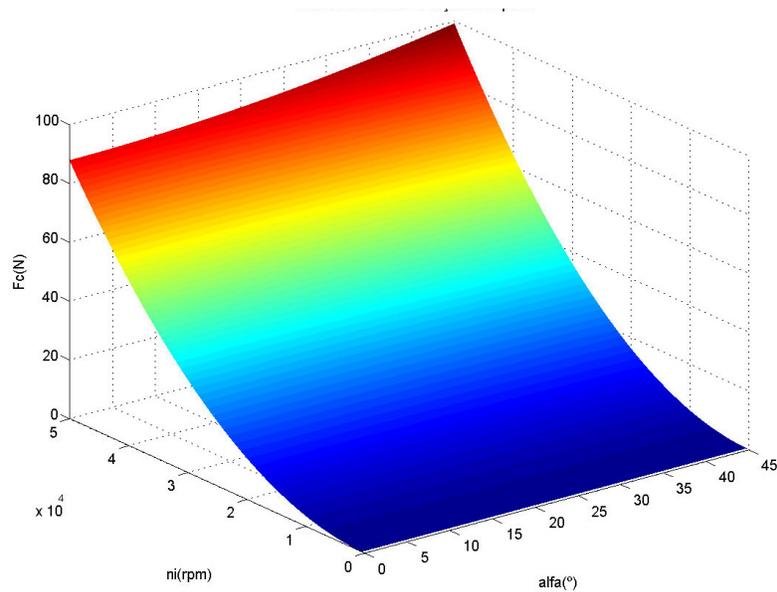


Figura 5.26: Análise dinâmica – força centrípeta

α [°]	0°	15°	45°
\ddot{z} [m / s ²]	-8.3686	-8.4912	-8.8557
M_z [N.m]	1.1409e-006	1.1230e-006	1.0621e-006
F_c [N]	0.0087	0.0088	0.0092
M_G [N.m]	0	-2.9348e-006	-5.9808e-006

Tabela 5.4: Resultados da análise dinâmica – 500rpm

α [°]	0°	15°	45°
\ddot{z} [m / s ²]	-1.3389e+002	-1.3585e+002	-1.41697e+002
M_z [N.m]	1.8255e-005	1.7968e-005	1.6993e-005
F_c [N]	0.1401	0.1422	0.1483
M_G [N.m]	0	-4.6957e-005	-9.5693e-005

Tabela 5.5: Resultados da análise dinâmica – 2000rpm

α [°]	0°	15°	45°
\ddot{z} [m / s ²]	-3.3474e+003	-3.3964e+003	-3.5423e+003
M_z [N.m]	4.5638e-004	4.4920e-004	4.24845e-004
F_c [N]	3.5049	3.5563	3.7089
M_G [N.m]	0	-1.1739e-003	-2.3923 e-003

Tabela 5.6: Resultados da análise dinâmica – 10000rpm

Observa-se que a aceleração (figura 5.24) e a força centrípeta (figura 5.26) sofrem pouca variação quando da variação do ângulo de contato das esferas. Para uma faixa de 0° para 15°, a aceleração e a força centrípeta aumentam cerca de 1,5%, enquanto de 15° a 45°, ocorre um aumento de cerca de 6%.

A influência mais significativa do ângulo de contato diz respeito ao momento giroscópico. Para $\alpha = 0^\circ$, o momento giroscópico é nulo e, conforme o contato angular da esfera aumenta, este cresce rapidamente. De 15° para 45°, pode-se observar que o momento giroscópico praticamente dobra de magnitude.

Considerando também o efeito da velocidade da pista interna, as variações da aceleração e da força centrípeta correspondem ao quadrado da variação da velocidade de rotação e, portanto, para um aumento de 100 vezes na rotação da pista interna, aceleração e força centrípeta aumentam 10000 vezes.

O momento giroscópico também sofre influência semelhante. Para baixas velocidades de rotação da pista interna, sua ordem de grandeza é praticamente desprezível para efeitos de cálculo. Entretanto, conforme os resultados obtidos, quanto maior a velocidade de rotação e o ângulo de contato, este momento pode tornar-se crítico para o sistema, em função do ângulo de nutação gerado pela diferença no carregamento entre as pistas interna e externa.

5.4 Análise de sensibilidade do ângulo de natação

Os resultados da análise de sensibilidade em relação ao ângulo de natação β são mostrados nas figuras 5.27 a 5.32 e apresentam o efeito da variação do ângulo de natação no momento giroscópico e na velocidade normal ao contato entre esfera e pista.

Na figura 5.27 analisa-se o efeito no momento giroscópico, variando-se tanto o ângulo de contato α , como ângulo de natação β de 0° até 45° , mantendo a rotação em 10.000 rpm. A superfície em três dimensões apresenta uma variação suave em α , pois uma variação de 45° neste contato angular altera aproximadamente 5×10^{-4} N.m no momento. Entretanto, conforme se aumenta o ângulo de natação β , observa-se que o momento giroscópico aumenta de forma aproximadamente linear. A figura 5.28 apresenta este comportamento para um ângulo de contato típico de 30° . Se o ângulo de natação for de 15° para 30° , o aumento é de cerca de 85% no momento giroscópico.

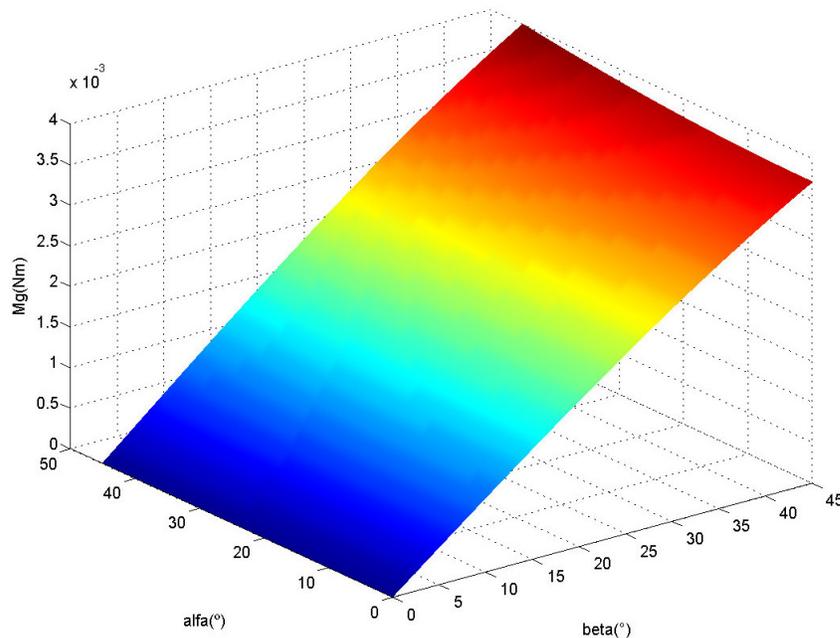


Figura 5.27: Análise de sensibilidade – momento giroscópico

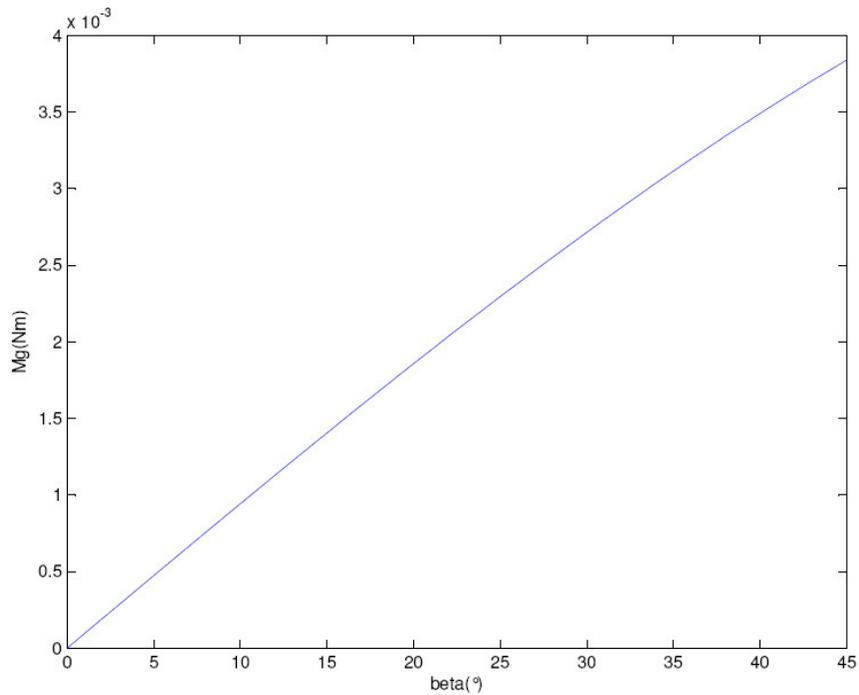


Figura 5.28: Análise de sensibilidade – momento giroscópico – $\alpha=30^\circ$

As figuras 5.29 a 5.32 mostram os efeitos da variação de α e β , entre 0° e 45° , nas velocidades normais (*spinning*) nas regiões de contato da pista interna e externa. Para a pista externa, observam-se comportamentos diferentes do *spinning* com a variação de ambos os ângulos. Quanto maior o ângulo de contato maior o módulo de ω_{so} em rotação retrógrada. Entretanto, quanto maior o ângulo de nutação β , maior o módulo de ω_{so} em rotação direta, formando a superfície da figura 5.29. Pode-se constatar, ainda, que existe um ângulo β no qual a velocidade de *spinning* é nula, isto é, atinge o efeito de *outer raceway control* proposto por Harris [6], onde ocorre rolamento puro na região de contato do anel externo. Para um ângulo α de 30° , ω_{so} é nulo para um β igual há $25,625^\circ$, de acordo com a figura 5.30.

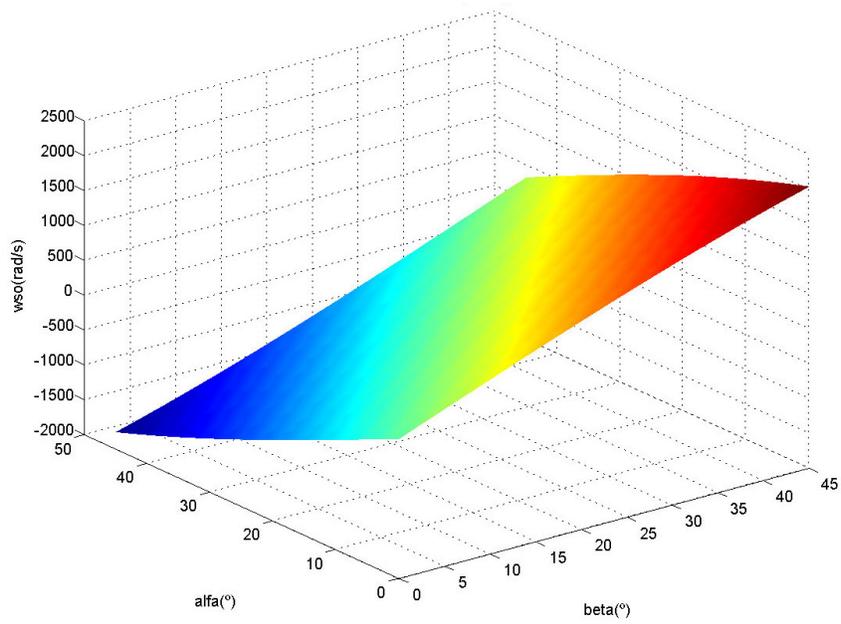


Figura 5.29: Análise de sensibilidade – velocidade normal ao contato no anel externo

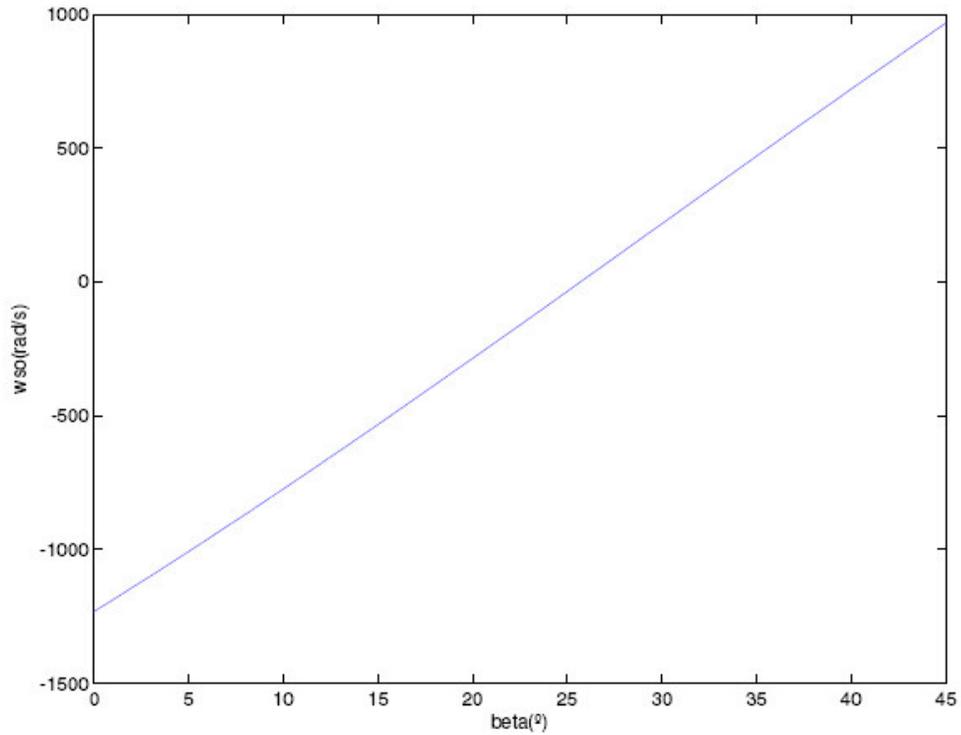


Figura 5.30: Análise de sensibilidade – velocidade normal ao contato no anel externo – $\alpha=30^\circ$

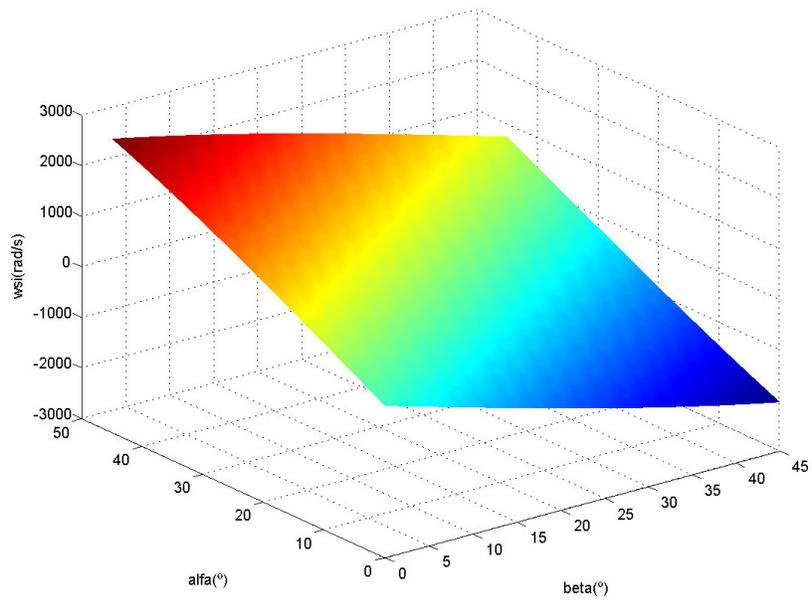


Figura.5.31: Análise de sensibilidade – velocidade normal ao contato no anel interno

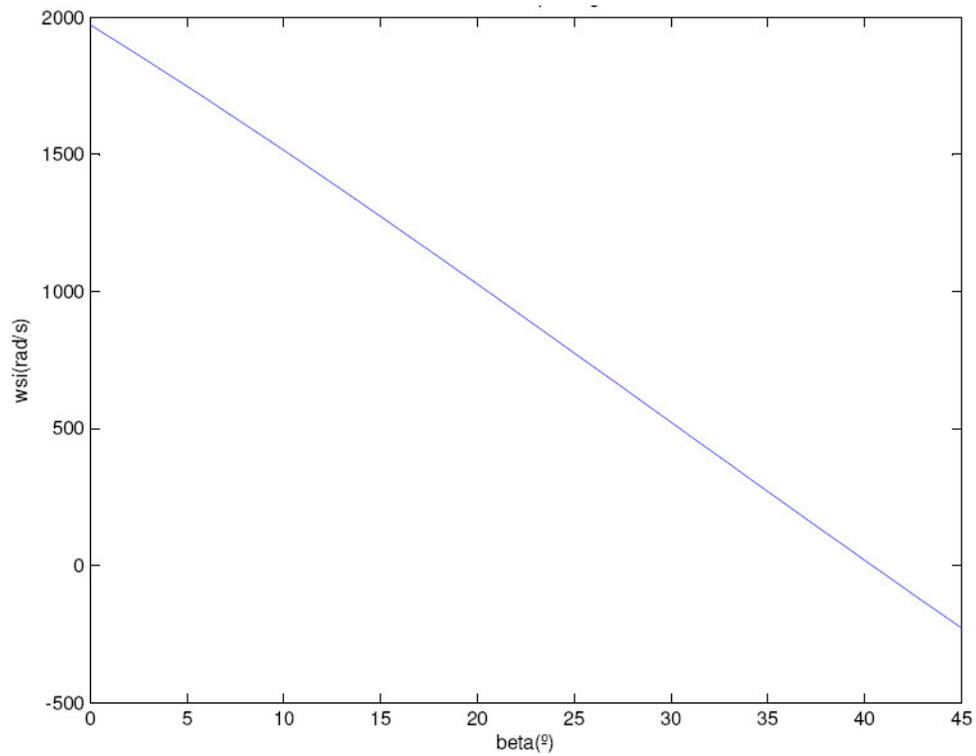


Figura.5.32: Análise de sensibilidade – velocidade normal ao contato no anel interno – $\alpha=30^\circ$

Para a pista interna, observa-se comportamento inverso do *spinning*, ou seja, quanto maior o ângulo de contato, maior ω_{so} em rotação direta, e quanto maior o ângulo de nutação β , ω_{so} aumenta em rotação retrógrada (figura 5.31). Verifica-se, também, que existe um ponto onde ω_{si} é nulo, porém, o valor de β é próximo a 40° , o que é um valor relativamente elevado para o ângulo de nutação (figura 5.32).

6 CONCLUSÕES

O principal objetivo desta pesquisa foi analisar o rolamento de esferas utilizando teorias clássicas de cinemática e dinâmica.

Foram desenvolvidos modelos para analisar as influências do momento giroscópico, das velocidades geradas nos diversos componentes do rolamento e do carregamento nas esferas. A partir de um rolamento padrão, aplicou-se uma metodologia de testes variando os principais fatores críticos de um rolamento do ponto de vista estático, cinemático e dinâmico.

A análise dinâmica demonstrou a variação da força centrípeta provocada pela rotação do anel interno e os efeitos da mesma no ângulo de contato da esfera no momento giroscópico. O ângulo de contato influencia o momento giroscópico, pois tem maiores efeitos no sentido axial. A rotação influi nas forças de atrito que resistem ao momento giroscópico e, quanto maior seu valor, maior sua influência nos ângulos de precessão e de nutação, causando, eventualmente, o efeito de escorregamento. Para baixas velocidades de rotação, entretanto, é possível desconsiderar seus efeitos, pois seu valor é muito baixo. Porém, quando se opera em altas rotações, como no caso de aplicações em turbinas, seus valores não mais podem ser desprezados.

A análise cinemática procede com estudo análogo, considerando a rotação da pista interna e os ângulos de contato, porém analisando sua influência nas velocidades da esfera, da gaiola e de *spinning*. A rotação do anel interno é diretamente proporcional às velocidades da esfera e da gaiola. O ângulo de contato causa grandes efeitos nas velocidades geradas na zona de contato entre esfera e pistas interna e externa, provocando escorregamento mais acentuado (da ordem de até 7% da velocidade linear na superfície da esfera) no contato com a pista interna. A análise cinemática no contato permite validar o modelo do *outer raceway control*.

Uma conclusão importante dos resultados obtidos nesta análise é a diferença das velocidades normais ao contato da pista interna e externa, que caracterizam o *spinning*. Observou-se que a velocidade interna é sempre maior que a externa, qualquer que seja o caso analisado. Essa diferença influi diretamente nas forças de atrito que, para um rolamento

completamente radial, se anulam. Para rotações elevadas e contato angular nas esferas, provoca-se desequilíbrio na resultante das forças de atrito e surge o momento giroscópico.

A análise de sensibilidade em relação ao ângulo de nutação mostra os efeitos da sua variação no momento giroscópico e nas velocidades de contato entre esfera e pista. O momento giroscópico aumenta, conforme o ângulo β aumenta, em uma curva aproximadamente linear.

O *spinning* na pista externa apresenta comportamento diferente com a variação dos ângulos de contato e de nutação. Quanto maior o ângulo de contato maior o módulo de ω_{so} em rotação retrógrada. Entretanto, quanto maior o ângulo de nutação, maior o módulo de ω_{so} em rotação direta. Verificou-se, ainda, o valor do ângulo de nutação no qual a velocidade de spinning é nula, isto é, atinge-se o efeito de *outer raceway control*. Este resultado valida o modelo de cálculo de acordo com os resultados previamente obtidos na literatura.

O modelo permite avaliar parâmetros de projeto e montagem em relação à distribuição de carga nas esferas, o que influencia diretamente a vida em fadiga do rolamento.

Finalmente, o modelo apresenta-se consistente com a aproximação para as velocidades e acelerações presentes no elemento rolante, fatores estes fortemente relacionados à condição de lubrificação de mancais de esferas.

Referências

CHANGQING, Bai. Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness. **Journal of Sound and Vibration**. Vol. 294, pg. 23–48. 2006.

CHANGSEN, W., **Analysis of Rolling Element Bearings**. Londres: Mechanical Engineering Publications LTD., 1991. 411p.

GOODMAN, J., Roller and Ball Bearings. **Proceedings of the Institute of Civil Engineering**, Vol. 189 pg. 82–166. 1912.

GUPTA, P. K.. Dynamics of rolling element bearings part III: Ball bearing analysis & part IV: Ball bearing results. **ASME Journal of Lubrication Technology**, Vol.101, pg.311-326. 1979.

GUPTA, P. K., FLAMAND L., BERTHE, D., GODET, M. On the Traction Behavior of Several Lubricants. **Journal of Lubrication Technology**. Vol. 103, pg. 55-64. 1981.

GUPTA, P. K., DILL, J. and BANDOW, H. E., Dynamics of Rolling Element Bearings: Experimental Validation of the DREB and RAPIDREB Computer Programs. **ASME Journal of Tribology**. Vol. 107, pg. 132–137. 1985.

HAGIU, G.D., Dynamic characteristics of high speed angular contact ball bearings. **Wear**. Vol. 211. pg. 22-29. 1997.

HARRIS, T.A., **Rolling Bearing Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1991. 1011p.

HARRIS, T.A.; KOTZALAS, M.N., **Advanced Concepts of Bearing Technology**. 5ª edição, Florida-USA: CRC Press, 2006. 342p

HARRIS, T.A., MINDEL, M.H. Rolling Element Bearing Dynamics, **Wear**. Vol. 23. pg 311-337. 1973.

JONES, A.B., A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearing under Arbitrary Load and Speed Conditions, **Journal of Basic Engineering, Trans. ASME**, Vol.82. 1960.

KINGSBURY, E. P., Motions of an Unstable Retainer in an Instrument Ball Bearing, **ASME Journal of Tribology**. Vol. 116, pg. 202–208. 1994.

LIAO, Neng Tung. Ball bearing skidding under radial and axial loads. **Mechanism and Machine Theory**. Vol. 37, pg. 91-13. 2002.

LUNDBERG, G. and PALMGREN, A., Dynamic Capacity of Rolling Bearings, **Acta Polytechnica Mechanical Engineering Series**, Vol. 1, No. 3. 1947.

LUNDBERG, G. and PALMGREN, A., Dynamic Capacity of Rolling Bearings, **Acta Polytechnica Mechanical Engineering Series**, Vol. 2, No. 4. 1952.

NONATO, F. **Avaliação do Problema de Lubrificação Elastohidrodinâmica EHD para Mancal de Elemento Rolante Tipo Esferas**. 2007 Dissertação (Trabalho de Graduação) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MEEKS, C. R. and TRAN, L. Ball bearing dynamic analysis using computer methods-part I: Analysis. **ASME Journal of Tribology**, Vol.118, pg.52-58. 1996.

MERIAM, J.L; KRAIGE, L.G., **Mecânica Dinâmica**. 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2004. 648p.

PALMGREN, A., **Ball and Roller Bearing Engineering**. Philadelphia: PA, 1945. 270p

WALTERS, C.T., The dynamics of ball bearings, **ASME Journal of Lubrication Technology**,
93, pg 1–10. 1971