

TRABALHO FINAL DE
DISE DEFENDIDA POR Diego Melo King
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 01/02/2005
Alberto Luiz Serpa.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Controle H_2/H_∞ via Desigualdades Matriciais
Lineares para Atenuação de Vibrações em Estruturas
Flexíveis

Autor: **Diego Melo King**
Orientador: **Alberto Luiz Serpa**

01/2005

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Controle H_2/H_∞ via Desigualdades Matriciais
Lineares para Atenuação de Vibrações em Estruturas
Flexíveis

Autor: **Diego Melo King**
Orientador: **Alberto Luiz Serpa**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005
S.P., Brasil

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE	3C
Nº CHAMADA	HUNICATIP
	K581c
V	EX
TOMBO BC/	63484
PROC.	16-P-00086-05
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	05/05/05
Nº CPD	

BIBID - 349126

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

K58c King, Diego Melo
Controle H_2/H_∞ via desigualdades matriciais lineares para atenuação de vibrações em estruturas flexíveis / Diego Melo King. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2. Programação convexa. 3. Controle misto. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Mixed H_2/H_∞ control through linear inequalities for flexible structures vibration reduction

Palavras-chave em Inglês: Feedback control systems, Convex programming, Mixed control

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestrado

Banca examinadora: Alexandre Trofino Neto e Euripedes Guilherme de Oliveira Nóbrega

Data da defesa: 01/02/2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Controle H_2/H_∞ via Desigualdades Matriciais
Lineares para Atenuação de Vibrações em Estruturas
Flexíveis

Autor: **Diego Melo King**

Orientador: **Alberto Luiz Serpa**

Alberto Luiz Serpa.

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP

Alexandre Trofino Neto

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto

Departamento de Automação e Sistemas - CTC - UFSC

Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega

Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP

Campinas, 1º de Fevereiro de 2005.

2005021964

Resumo

King, D. M. *Controle H_2/H_∞ via Desigualdades Matriciais Lineares para Atenuação de Vibrações em Estruturas Flexíveis*. Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, 2004, 147p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho tem como objetivo verificar a ação de uma formulação obtida para o controle misto H_2/H_∞ via realimentação de saída de uma estrutura modelada por elementos finitos. Para isso, também se verificaram as respectivas formulações via realimentação de saída dos controles H_2 e H_∞ isoladamente, para que os resultados obtidos em cada um deles pudessem validar o equacionamento descrito neste trabalho para o controle misto e servissem de parâmetro para balizar os seus resultados esperados.

Os equacionamentos dos controladores seguiram a formulação da programação semi-definida, isto é, minimizam um objetivo linear sujeito a restrições em forma de LMI. Estas LMI representam as condições de estabilidade a que o sistema está sujeito, e as características da interação entre o modelo e a ação do controlador. Uma vez definidas todas estas condições, o problema de minimização, que é convexo, foi implementado para ser resolvido através do *Matlab*. Os resultados obtidos pela formulação para o controle misto também foram comparados com resultados produzidos pelas formulações clássicas do próprio *Matlab*, para que este último também servisse como um aferidor dos resultados da formulação apresentada neste trabalho.

O modelo da estrutura, definida para uma viga engastada em balanço, também foi calculado através do *Matlab*, discretizada nos elementos finitos apropriados. As determinações das matrizes de massa, de rigidez elástica e de amortecimento, esta determinada pelo modelo de amortecimento proporcional, fazem a ligação com as matrizes de estado que representam o sistema na formulação utilizada para os controladores.

Os resultados do controle misto mostram que a formulação convexa do controle via realimentação de saída é viável. Os valores apresentados pelas normas H_2 e H_∞ minimizadas do sistema, e as respostas deste a uma entrada aleatória exógena, exibem a capacidade do controlador misto. Mesmo para um controle não-colocado, as vibrações da estrutura são atenuadas junto com a minimização do sinal de controle, e os picos da resposta em frequência, vistos nas funções de resposta em frequência, são reduzidos.

Palavras-chave: Controle H_2/H_∞ , Controle de Estruturas Flexíveis, LMI, Otimização Convexa.

Abstract

King, D. M. *Mixed H_2/H_∞ Control through Linear Matrix Inequalities for Flexible Structures Vibration Reduction*. Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, 2004, 147p. Dissertação (Master Degree).

This work has the goal to verify the action of a mixed H_2/H_∞ control formulation through output feedback for a structure modelled in finite elements. Therefore, the pure H_2 and H_∞ control formulations through output feedback are also verified to validate the described equations in this work for the mixed control and show a reference to their expected results.

These formulations are based on the semi-definite programming formulation, and consist of minimizing a linear objective subjected to LMI constraints. These LMI represent the system stability conditions and interaction characteristics between the model and the controller. Once all these conditions are settled, the minimization problem, which is convex, was solved through the *Matlab* software. The results obtained for the mixed control formulation were compared to the classical results obtained with the *Matlab*. The purpose is to validate the results of the formulation obtained in this work.

The structure model, defined for a cantilever beam, was also obtained through the *Matlab* using the finite elements technique. The mass, stiffness and damping matrices, this last one obtained by the proportional damping model, make the connections to the state-space matrices representing the system for the controller formulation.

The results obtained for the mixed control show the convex formulation to output feedback may offer good results. The minimized values of H_2 and H_∞ norms and the behaviour of the controlled system for the external random input show the capability of mixed control. Even for a noncollocated control problem the structure vibrations are reduced together with the control signal minimization, and the frequency response peaks, visible in the frequency response graphs, are also reduced.

Keywords: Mixed (H_2/H_∞) Control, Flexible Structures Control, LMI, Convex Optimization.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe e à minha irmã, as mulheres da minha vida, que suportaram meu exclusivismo por 2 anos.

Agradecimentos

Ao meu orientador e mestre, que agiu como um controlador H_∞ no meu ímpeto e como um controlador H_2 no meu conhecimento, tornando este trabalho factível e ótimo!

À Faculdade de Engenharia Mecânica, uma grande instituição sob a égide da Unicamp, que desde 1995 tornou os meus sonhos possíveis.

Aos amigos aqui cultivados, que compartilharam de alguma forma todos estes anos comigo, a partir da graduação. Forte abraço para Dalton Cavalcanti, Eduardo Okabe, Fernando Torsani, Leonardo Lamana, Ricardo Ferrari e Vitor França.

Homenagem especial à todos os meus mestres desde minha infância, os quais foram direta ou indiretamente responsáveis pela minha pela capacitação como profissional, cidadão e ser pensante.

Fica também uma menção de respeito e admiração à todos os autores dos grandes livros que li, pois eles certamente ajudaram-me a escrever melhor.

*And you're rushing headlong, you gotta a new goal,
And you're rushing headlong out of control,
And you think you're so strong,
But there ain't no stopping,
And there's nothing you can do about it (...)*

Queen - Headlong.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Notação e Acrônimos	xii
1 Introdução	1
1.1 Revisão Histórica sobre LMI na Teoria de Controle	2
1.2 Objetivos e Estrutura do Trabalho	6
2 Modelo Matemático da Estrutura	11
2.1 Introdução	11
2.2 Matriz de Rigidez Elástica	12
2.3 Matriz de Massa	14
2.4 Transformação de Coordenadas	15
2.5 Matriz de Amortecimento	16
2.6 Montagem das Matrizes Globais do Modelo	17
2.7 Determinação das Matrizes de Estado do Sistema	18
2.8 Forma Genérica do Sistema de Controle	21
2.9 Função de Transferência via Matrizes de Estado	24
3 Incertezas do Sistema	27
3.1 Introdução	27
3.2 Presença das Incertezas no Sistema	28
4 Desigualdades Matriciais Lineares	33
4.1 Definições	33
4.2 Programação Semi-Definida	34
4.3 Estabilidade dos Sistemas	35

5	Normas das Funções de Transferência	39
5.1	Definições Preliminares	39
5.2	Norma H_2 e Espaço \mathfrak{RH}_2	40
5.2.1	Formulação Convexa do Problema H_2	41
5.3	Norma H_∞ e Espaço \mathfrak{RH}_∞	42
5.3.1	Norma H_∞ e Estabilidade Robusta	44
5.3.2	Formulação Convexa do Problema H_∞	45
5.4	Apresentação do Problema Misto	46
6	Controle via Realimentação de Saída	49
6.1	Definições Preliminares	49
6.2	Controlador Admissível em \mathfrak{RH}_2 e em \mathfrak{RH}_∞	50
6.3	Controle por Norma H_2	52
6.4	Controle por Norma H_∞	57
6.5	Controle Misto H_2/H_∞	59
6.6	Alguns Detalhes da Implementação Computacional	63
7	Resultados	65
7.1	Configuração para o Controle da Viga com 2 EF	65
7.2	Resultados para o Controle H_2 na viga com 2 EF	69
7.3	Resultados para o Controle H_∞ na viga com 2 EF	73
7.3.1	Resultados do Controle H_∞ para o Sistema Incerto	77
7.4	Resultados para o Controle H_2/H_∞ na viga com 2 EF	78
7.5	Configuração para o Controle da Viga com 4 EF	84
7.6	Resultados para o Controle H_2/H_∞ na viga com 4 EF	85
8	Conclusões e Perspectivas Futuras	89
8.1	Revisão e Conclusões	89
8.2	Propostas e Paradigmas para Trabalhos Futuros	91
	Bibliografia	93
	Anexos	99
	Anexo I: Determinação das Matrizes Globais do Sistema Flexível	99
	Anexo II: Índices dos GDL de um EF	101
	Anexo III: Determinação das Matrizes Locais de um EF	102
	Anexo IV: Montagem das Matrizes Globais do Sistema	103

Anexo V: Condições de Contorno para a Solução Elástica	103
Anexo VI: Elimina linhas e colunas das Matrizes nas Restrições	104
Anexo VII: Matrizes de Estado do Sistema nos Problemas H_2 e H_∞	104
Anexo VIII: Implementação do Controle H_2	105
Anexo IX: Implementação do Controle H_∞	108
Anexo X: Matrizes de Estado do Sistema no Problema Misto	112
Anexo XI: Implementação do Controle Misto	113
Anexo XII: Matriz Dinâmica para Viga com 4 EF	117
A Definição de Norma Induzida	119
B Independência entre a FT $K(s)$ e U	121
C Solução dos Problemas H_2 e H_∞ via Matlab	123
C.1 Implementação do Controle H_2 via LMI	123
C.2 Implementação do Controle H_2 via <i>hinfmix</i>	124
C.3 Implementação do Controle H_∞ via LMI	125
C.4 Implementação do Controle H_∞ via <i>hinflmi</i>	125
C.5 Tolerâncias e Precisão das Soluções Encontradas	126
D Solução do Problema H_2/H_∞ via Matlab	129
D.1 Implementação do Controle H_2/H_∞ via <i>hinfmix</i>	129
D.2 Implementação do Controle H_2/H_∞ via LMI	130

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática do controle da viga engastada	7
2.1	Representação do elemento de viga	12
2.2	Disposição dos nós e GDL contíguos de uma estrutura discretizada	17
2.3	Exemplo de sistema massa-mola-amortecedor com 2 GDL	19
2.4	Exemplo de sistema de controle	21
2.5	Sistema equivalente ao apresentado na figura 2.4	23
2.6	Representação simplificada de uma planta controlada	24
3.1	Representação de um sistema real incerto controlado	29
3.2	Representação esquemática do Teorema do Ganho Pequeno	30
5.1	Representação genérica de um sistema para o problema misto	47
7.1	Representação esquemática da viga engastada para controle com 2 EF	65
7.2	FRF dos sistemas sem controle e com controle H_2 para 2 EF	70
7.3	Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e com controle H_2 para 2 EF	71
7.4	Esforço de controle perante os sistemas original e com controle H_2 para 2 EF	72
7.5	Resposta ao impulso dos sistemas sem e com o controle H_2 para 2 EF	72
7.6	FRF da viga original sem controle e com controle H_∞ para 2 EF	73
7.7	Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e com controle H_∞ para 2 EF	75
7.8	Esforço de controle perante os sistemas original e com controle H_∞ para 2 EF	75
7.9	Resposta ao impulso dos sistemas sem e com o controle H_∞ para 2 EF	76
7.10	FRF da viga original sem controle e com controle misto para 2 EF	81
7.11	Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e controlado para 2 EF	82
7.12	Esforço de controle para os sistemas original e com controle H_2/H_∞ para 2 EF	83
7.13	Resposta ao impulso dos sistemas sem e com o controle H_2/H_∞ para 2 EF	83
7.14	Representação esquemática da viga engastada para controle com 4 EF	84
7.15	FRF da viga original sem controle e com controle H_2/H_∞ para 4 EF	86

7.16 Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e com controle H_2/H_∞ para 4 EF	87
7.17 Esforço de controle para os sistemas original e com controle H_2/H_∞ para 4 EF . .	87

Lista de Tabelas

7.1	Resultados das Normas H_2 para 2 EF	70
7.2	Resultados das Normas H_∞ para 2 EF	74
7.3	Valores máximos dos Pólos dos sistemas controlados com e sem as incertezas	78
7.4	Resultados das minimizações no controle misto para 2 EF	81
7.5	Resultados das minimizações no controle misto para 4 EF	88

Notação e Acrônimos

- A, B, C,...** : Representam matrizes.
- a, b, c,...** : Representam vetores.
- A, a, B, b, α, β, \dots** : Representam valores escalares.
- A** : Área da secção transversal da viga.
- b** : Base da secção transversal da viga.
- h** : Altura da secção transversal da viga.
- l** : Comprimento total da viga.
- ρ** : Densidade, ou massa por unidade de volume, da viga.
- E** : Módulo de Elasticidade do material da viga.
- I** : Momento de inércia da área da secção transversal da viga.
- u_i, v_i, θ_i** : Representação dos graus de liberdade dos nós nas coordenadas globais.
- $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\theta}_i$** : Representação dos graus de liberdade dos nós nas coordenadas locais.
- $\bar{\mathbf{K}}^e$** : Matriz de rigidez elástica de um elemento finito nas coordenadas locais.
- \mathbf{K}^e** : Matriz de rigidez elástica de um elemento finito nas coordenadas globais.
- $\bar{\mathbf{M}}^e$** : Matriz de massa consistente de um elemento finito nas coordenadas locais.
- \mathbf{M}^e** : Matriz de massa consistente de um elemento finito nas coordenadas globais.
- $\bar{\mathbf{G}}^e$** : Matriz de amortecimento proporcional de um elemento finito nas coordenadas locais.
- \mathbf{G}^e** : Matriz de amortecimento proporcional de um elemento finito nas coordenadas globais.
- \mathbf{A}^t** : Transposta da matriz **A** pertencente ao conjunto dos números reais.
- \mathbf{A}^{-1}** : Inversa da matriz **A**.
- $\lambda[\mathbf{A}]$** : Autovalores da matriz **A**.
- I** : Matriz identidade de dimensão apropriada.
- 0** : Matriz nula de dimensão apropriada.
- $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$** : Matriz **P** é positivo definida.
- $\mathbf{P} \prec \mathbf{0}$** : Matriz **P** é negativo definida.
- $\mathbf{P} \succcurlyeq \mathbf{0}$** : Matriz **P** é semi-positivo definida.

$\mathbf{P} \preceq \mathbf{0}$: Matriz \mathbf{P} é semi-negativo definida.
$\mathbf{P} := \mathbf{0}$: A matriz \mathbf{P} é definida (ou imposta) como igual a matriz nula.
$\dot{\mathbf{x}}$: Derivada no tempo do vetor \mathbf{x} .
$\Re\{s\}$: Parte real da variável s .
\mathfrak{R}^m	: Espaço vetorial real de dimensão m .
$\mathfrak{R}^{m \times n}$: Espaço das matrizes de dimensão $m \times n$ contendo elementos reais.
$\mathbb{C}^{m \times n}$: Espaço das matrizes de dimensão $m \times n$ contendo elementos complexos.
\mathcal{S}^m	: Espaço das matrizes simétricas de dimensão $m \times m$.
$\mathfrak{R} \times \Im$: Representa o plano real versus imaginário, indicador do lugar das raízes de uma FT.
$\mathbf{a}(s)$: Equivale ao sinal $\mathbf{a}(t)$ descrito no domínio de Laplace.
\mathcal{L}^{-1}	: Transformada Inversa de Laplace.
$\mathbf{H}(s)$: Função de Transferência no domínio de Laplace e na forma matricial.
$\mathbf{H}^*(s)$: Função de Transferência transposta conjugada de $\mathbf{H}(s)$.
$\ \mathbf{H}(s)\ _2$: Norma H_2 da Função de Transferência $\mathbf{H}(s)$.
$\ \mathbf{H}(s)\ _\infty$: Norma H_∞ da Função de Transferência $\mathbf{H}(s)$.
$\text{tr}(\mathbf{A})$: Traço da matriz \mathbf{A} .
$\sigma[\mathbf{H}(s)]$: Valor Singular da Função de Transferência $\mathbf{H}(s)$.
$\bar{\sigma}[\mathbf{H}(s)]$: Máximo Valor Singular da Função de Transferência $\mathbf{H}(s)$.
CTLTI	: <i>Continuous-Time, Linear Time Invariant</i> , i.e., Contínuo, Linear e Invariante no Tempo.
EF	: Elemento(s) Finito(s).
EVP	: <i>EigenValue Problem</i> , i.e., Problema de Autovalor-Autovetor.
FRF	: Função(ões) de Resposta em Frequência.
FT	: Função(ões) de Transferência.
GDL	: Grau(s) de Liberdade.
LMI	: <i>Linear Matrix Inequality(ies)</i> , i.e., Desigualdade(s) Matricial(is) Linear(es).
LQG	: <i>Linear Quadratic Gaussian (Control)</i> , i.e., (Controle) Quadrático-Linear Gaussiano.
MIMO	: <i>Multiple Input, Multiple Output</i> , i.e., Várias entradas e várias saídas.
SDP	: <i>Semi-Definite Programming</i> , i.e., Programação Semi-Definida.
SISO	: <i>Single Input, Single Output</i> , i.e., Uma entrada e uma saída.

Capítulo 1

Introdução

Existem vários problemas da engenharia cujos sistemas formados por elementos que não podem ser considerados corpos rígidos necessitam de algum tipo de controle operacional. O comportamento de tais sistemas pode, por exemplo, ser afetado por fontes externas causadoras de ruídos, vibrações ou deformações. Para que a funcionalidade e a eficiência dos mesmos seja mantida durante a ação destas fontes, é usual o emprego de algum atuador que minimize tais efeitos.

Hoje em dia existem prédios que são projetados para suportar fortes terremotos com o auxílio de tais sistemas. Há também torres para antenas de transmissão, que por serem muito elevadas e perturbadas por ventos, necessitam do controle da posição dos emissores, a fim de manter constante a eficiência do sinal. Além disso, nas estruturas presentes em automação industrial ou na indústria aeroespacial, braços robóticos sofrem solicitações que poderiam alterar a precisão do seu funcionamento. Desta forma, o projeto de controladores robustos a estes distúrbios externos têm se tornado cada vez mais importantes em diversas aplicações práticas.

No exemplo supracitado dos braços robóticos, a precisão de deslocamento e de parada pode ser crucial para o correto funcionamento de todo o maquinário envolvido, ou da qualidade de um produto em processo. As estruturas de máquinas mecatrônicas têm sofrido constantes reduções na sua massa no intuito de permitir movimentos mais rápidos, aumentando a produtividade, sem que haja aumento na potência elétrica de alimentação. Nos componentes da indústria aeroespacial, a redução de massa também está relacionada com a economia, seja reduzindo a necessidade de combustível no veículo lançador, seja permitindo o transporte de uma maior quantidade de peças em uma só viagem [1].

A redução da massa dos componentes provoca uma menor resistência a vibrações e uma

maior susceptibilidade a deslocamentos além do desejado. Para uma mesma força aplicada, uma haste robótica flexível de menor massa sofrerá maiores acelerações, provocando uma redução no tempo disponível de deslocamento, e uma maior propagação de vibrações na estrutura nas situações de arranque e de parada. Neste caso, a precisão de parada pode ficar comprometida, ou até mesmo uma falha em serviço por excesso de vibrações poderia ocorrer. Torna-se vital, então, a existência de um controle robusto para suportar tais condições e salvaguardar a estrutura das suas vibrações.

Para atingir este nível de capacidade atual, os sistemas de controle vêm sendo desenvolvidos há mais de um século. Este desenvolvimento será apresentado a seguir, através de uma breve revisão histórica e bibliográfica sobre o assunto.

1.1 Revisão Histórica sobre LMI na Teoria de Controle

O propósito do controle de um sistema é prover uma resposta desejada a partir do conhecimento do seu funcionamento, seja através da sua resposta no tempo ou nas frequências. As primeiras tentativas de controle eram feitas de forma aberta, isto é, não havia como mudar o comportamento de um sistema após o início do seu movimento no tempo. Como consequência, o controle implicava em séries de tentativas-e-erro até que o resultado desejado fosse atingido. O desenvolvimento industrial provocou o surgimento de sistemas com a realimentação dos seus valores de resposta na entrada. Assim, o sistema poderia estar em pleno curso enquanto ações corretivas eram tomadas para minimizar a diferença entre a entrada e a saída, até a obtenção da resposta requerida [2].

Até o século XIX, os sistemas de controle eram projetados por artesãos ou inventores, em aplicação direta às suas necessidades específicas. Com o desenvolvimento da modelagem matemática dos componentes de um sistema e de suas interconexões, a engenharia passou a fazer parte deste processo. A Teoria Clássica de Controle se desenvolveu então, de forma a sintetizar matematicamente um fenômeno físico controlável. A união entre a engenharia e os modelos matemáticos para os fenômenos físicos impulsionou a capacidade de previsão e o aumento de sofisticação dos projetos de controle. Durante todo o século passado, esta área de pesquisa viu suas fronteiras e sua aplicabilidade crescer de forma exponencial, auxiliada pelos avanços computacionais [3].

Neste avanço, vários problemas complexos relacionados com engenharia de controle passaram a ser representados como problemas de otimização convexa. Estas representações possibilitam a utilização de sistemas de equações e inequações algébricas como forma de impor restrições ou descrever matematicamente as condições do problema físico. Uma das maneiras de fazê-la era atra-

vés do auxílio de computadores utilizando a representação matemática das agora conhecidas LMI (*Desigualdades Matriciais Lineares*). A consequência mais importante deste avanço foi portanto a possibilidade de resolver conjuntos descritos por LMI, que seriam representações das restrições no domínio a que pertence o problema, onde anteriormente havia grandes dificuldades para encontrar soluções analiticamente.

A história do desenvolvimento das LMI começa no final do século XIX, quando o matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov [4] introduziu as condições analíticas para que uma equação diferencial de primeira ordem representasse um sistema dinâmico estável na forma matricial. Esta estabilidade passou então a ser resolvida explicitamente pela desigualdade de Lyapunov, através da solução de um problema de autovalor. Ela foi a primeira LMI escrita matematicamente para a resolução ou análise de um problema específico.

Na década de 40, dois engenheiros russos, A. I. Lur'e e V. N. Postnikov [5], usaram os métodos desenvolvidos por Lyapunov para encontrar soluções de problemas específicos e práticos em engenharia de controle, especialmente na estabilidade de sistemas com não-linearidades. As LMI encontradas eram reduzidas a inequações polinomiais e verificadas manualmente. Obviamente, as aplicações destas soluções eram limitadas a sistemas cujas equações dinâmicas que os descrevem seriam de pequena ordem. Porém, o resultado de todo este esforço entusiasmou Lur'e, por perceber que a teoria de Lyapunov poderia ser aplicada em problemas importantes e difíceis desta área, de tal forma que, em seu livro de 1951 [6], encontra-se na introdução o seguinte:

“Este livro representa a primeira tentativa em demonstrar que as idéias expressadas por Lyapunov há 60 anos, que até recentemente pareciam longe de aplicações práticas, estão prestes a se tornarem o meio real para examinar os problemas da engenharia atual”.¹

O próximo grande avanço nesta área foi no princípio da década de 60 quando um grupo de pesquisadores, entre eles o russo V. A. Yakubovich [7], representou os resultados propostos por Lur'e, de forma reduzida, em critérios gráficos simples. Este método é chamado de Lema da Positividade Real (*Positive-Real Lemma*), e dá uma interpretação no domínio da frequência para um problema descrito com LMI. Estes critérios podem ser aplicados a sistemas de ordem superior, porém é limitado a apenas uma não-linearidade inerente. Do ponto de vista da teoria de controle, esta contribuição possibilitou a visualização de como resolver um problema com LMI, que representaria o controle de um sistema, através de métodos gráficos. Outro trabalho importante

¹Traduzido pelo autor deste trabalho

da época foi o artigo de Bellman e Fan [8], onde são apresentadas teorias associadas aos problemas de autovalor, e problemas com LMI oriundas das equações de Lyapunov.

No final desta mesma década, como consequência da difusão do Lema Positivo-Real, foram desenvolvidas novas idéias como a de passividade; o teorema do ganho pequeno introduzido por Zames [9] e Sandberg [10]; e controle ótimo quadrático. Já em 1971, J. C. Willems observou em seu trabalho [11] que o Lema Positivo-Real, sob certas condições adicionais, também provê um procedimento para solução numérica através das *equações algébricas de Riccati*, que também eram chamadas de *equações da solução de Lur'e*.

Na esteira do desenvolvimento computacional e tecnológico, durante a década de 1980 foram feitos vários avanços na solução de problemas em controle. Foi possível observar que o problema original de Lur'e, quando estendido para múltiplas não-linearidades, poderia ser reduzido a um problema de otimização convexa, envolvendo LMI. Este agora tinha total viabilidade de solução computacional, e foram desenvolvidos algoritmos visando sua solução, confirmando a suspeita anterior de J. C. Willems [11] de que "*seria interessante verificar se as LMI são ou não são factíveis em algoritmos computacionais*".

Os pesquisadores russos E. S. Pyatnitskii e V. I. Skorodinskii [12] esclareceram este ponto completamente com seu trabalho alguns anos mais tarde. Eles aplicaram um algoritmo conhecido e garantido para resolver o problema de Lur'e reduzido supracitado. Obviamente, a idéia de usar computadores para resolver as equações de Lyapunov e as conseqüentes evoluções algébricas matriciais da mesma, não era nova: já aparecia num artigo publicado em 1965 por Schultz, entre outros [13]. Porém a maior capacidade numérica de computação da década de 80 permitiu aos russos uma maior profundidade nesta determinação. Por consequência, foi concluído que os problemas envolvendo as LMI que surgem na teoria de controle dos sistemas podem ser formulados como *problemas de otimização convexa*, factíveis para solução por computadores.

De fato, os precursores Horisberger e Bélanger, em seu artigo [14], já haviam citado que a existência da função quadrática de Lyapunov que prove, simultaneamente, a estabilidade de uma coleção de sistemas lineares, é um problema convexo envolvendo LMI. A estabilidade de um sistema linear pode ser assim provada, como será visto neste trabalho.

O último grande e recente avanço no desenvolvimento de LMI aplicado na teoria de controle se deu no final da década de 1980 com o desenvolvimento de algoritmos de ponto interior. Primeiramente, Kamarkar [15] introduziu em 1984 um novo algoritmo de programação linear em tempo polinomial. Este trabalho impulsionou um enorme avanço na área dos métodos de ponto interior para

programação linear. Depois, em 1988, Nesterov e Nemiroskii aperfeiçoaram-no, apresentando-o num relatório técnico [16] e aplicando-o diretamente em problemas convexos envolvendo LMI. Mais tarde, este relatório foi publicado num livro [17].

Hoje, as LMI têm uma finalidade prática e um uso bastante difundido na comunidade científica, especialmente voltada para a área de engenharia de controle [18]. Nestas aplicações, elas podem representar matematicamente as equações de estabilidade de um sistema cuja FT (*função de transferência*) estaria escrita em função das matrizes de estado. Além disso, diversos problemas de otimização podem ser transformados para a forma convexa com suas restrições transformadas em LMI, facilitando a obtenção das suas soluções do ponto de vista computacional. As principais formas de resolver estes problemas dentro da engenharia de controle foram desenvolvidas na segunda metade do século XX.

A área de engenharia de controle voltada para o controle ótimo atingiu sua maturidade durante a década de 60, com o que se chama hoje de *Linear Quadratic Gaussian Control*, ou controle LQG. Este tipo de controle é um caso especial do controle ótimo H_2 , e seu desenvolvimento está atrelado ao advento da corrida espacial, quando uma grande quantidade de programas de pesquisa e investimentos feitos pelos Estados Unidos e pela ex-União Soviética eram voltados para problemas relacionados com a conquista espacial [19].

Problemas como a manobrabilidade de foguetes tripulados usando o mínimo de combustível podiam ser facilmente formulados e bem definidos como problemas de otimização. Porém, enquanto engenheiros aeroespaciais eram particularmente bem sucedidos na aplicação do controle LQG, outros engenheiros de controle não tinham os mesmos resultados na aplicação para problemas do dia-a-dia numa indústria. Os modelos das plantas industriais eram imprecisos, e a consideração feita pelo LQG de ruído branco nos distúrbios de entrada não eram relevantes ou significativos para estes engenheiros. Como resultado, o controle LQG foi dito não ser robusto o suficiente para uso prático em algumas aplicações industriais [2, 19].

A aplicação da norma H_2 num problema de controle objetiva minimizar todo o ganho que a FT objetivo transfere para a saída. Em outras palavras, o projeto de um controlador no domínio das frequências, usando a norma H_2 para minimizar esta FT, provoca a redução geral das amplitudes de resposta do sistema, dentro da faixa de frequências operacional. Isso pode ser interpretado como um controlador que minimiza a energia total de saída do sistema.

Motivada pelos avanços obtidos pelo controle LQG, na década de 80 houve uma significativa mudança na direção do uso da otimização H_∞ para controle robusto. Este desenvolvimento origi-

nou-se no trabalho de Zames [20], apesar de haver um uso anterior da otimização H_∞ na engenharia, exposto por Helton [21]. Zames argumentou que as propriedades de baixa robustez do controle LQG poderiam ser atribuídas ao critério da integração em termos da norma H_2 , e também criticou a representação dos distúrbios incertos feita por um ruído branco, como sendo algo freqüentemente surrealista [19]. Na medida em que a teoria H_∞ se desenvolveu, as duas técnicas de controle, H_2 e H_∞ , foram vistas como sendo mais proximamente relacionadas do que se pensava originalmente; como pode ser visto, por exemplo, em [22].

A utilização direta da norma H_∞ num problema de controle provoca um resultado diferente do apresentado para o controle através da norma H_2 . Devido às características matemáticas da norma H_∞ , um controlador projetado através dela provocará a redução do maior valor de resposta existente dentro da faixa de freqüências operacional. Isto é, ele provoca a redução do pico da resposta em freqüência da FT objetivo.

Esta FT objetivo é normalmente determinada através de um modelo de ordem reduzida em comparação com a realidade da estrutura. Essa redução estabelece um número de modos e graus de liberdade finitos, quando para a estrutura real eles são infinitos. Um controlador para tal modelo deve ser capaz de suprimir as vibrações causadas pelo fenômeno de *spillover* [23], que equivale à dinâmica não-modelada do sistema. Se este controlador não fosse capaz de atenuar as vibrações causadas pelo *spillover*, então o modelo adotado para a estrutura flexível não seria adequado. Porém, em muitos casos é possível projetar um controlador H_∞ usando LMI e baseado num modelo de ordem reduzida, se comparado ao real [24]. Assim, as vibrações existentes associadas com os modos não-modelados também podem ser controladas, pois podem ser incluídas nas incertezas dinâmicas do sistema.

Como será visto na apresentação dos objetivos do trabalho a seguir, esta capacidade do controle H_∞ foi complementada através do uso do controle H_2 , proporcionando um controle misto (H_2/H_∞) restrito via LMI.

1.2 Objetivos e Estrutura do Trabalho

A representação matemática da estrutura escolhida foi realizada através do método dos elementos finitos. Ele permite uma excelente aproximação das respostas do modelo com as da estrutura real, através da obtenção computacional das matrizes de massa e rigidez que definem a sua equação dinâmica. A partir destas matrizes, é possível definir também uma representação matemática

para o amortecimento da estrutura, construindo um modelo de *amortecimento proporcional*. Este modelo é assim chamado por estabelecer uma matriz de amortecimento através de constantes de proporcionalidade associadas às matrizes de massa e de rigidez da estrutura.

Uma vez obtida a equação dinâmica completa a partir das três matrizes mencionadas, as suas n equações diferenciais, equivalentes aos n graus de liberdade do modelo criado, são separadas. São definidas então as *variáveis de estado* do sistema, aquelas onde o seu conhecimento num tempo t_0 mais a informação do sinal de entrada aplicado subsequente, são suficientes para descrever dinamicamente o estado do sistema em qualquer tempo $t > t_0$ [3]. As matrizes que descrevem as equações diferenciais obtidas pelas variáveis de estado, são as *matrizes de estado*. Elas formam o *modelo de estado* do sistema, que representa matematicamente o seu comportamento físico em função das variáveis de estado definidas.

O modelo da estrutura escolhida para este trabalho é caracterizado por um número finito de graus de liberdade. Assim, à este truncamento estão associadas incertezas dinâmicas, já que o comportamento da estrutura está baseado num número de graus de liberdade finito. Além disto, também existe a incerteza oriunda da aproximação das matrizes determinantes do sistema flexível: massa, rigidez e amortecimento. O objetivo das incertezas dentro da formulação do problema é considerar as diferenças inerentes entre o modelo estabelecido e o sistema real. Porém, como o enfoque do trabalho está voltado à formulação do problema de controle, a determinação dos valores das incertezas não será feita de maneira direta. Somente após definido o comportamento robusto do sistema controlado, será verificada a região de valores aceitáveis para a mesma.

A figura abaixo apresenta a viga considerada para este trabalho, identificando como o controlador atua sobre ela:

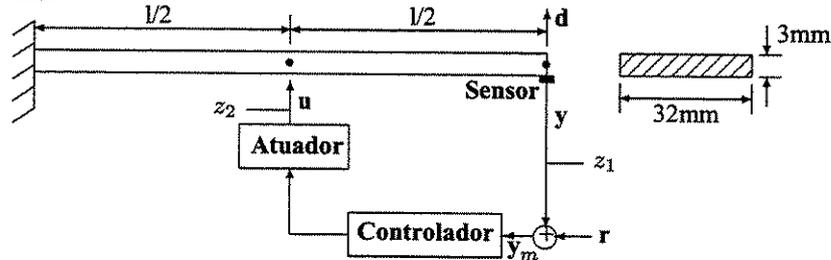


Figura 1.1: Representação esquemática do controle da viga engastada

Desta forma, o controlador recebe como sinal de entrada (y_m) o deslocamento vertical da extremidade da viga (y) sujeito ao ruído de medição (r), e determina uma força de controle u , situada no centro do seu comprimento. Esta viga sofre a ação de um distúrbio aleatório d também vertical e na sua extremidade.

Neste trabalho, o problema de controle para estruturas flexíveis é desenvolvido a fim de estabelecer um controlador adequado usando as normas H_2 e H_∞ simultaneamente, o que se chama de controle misto. Deste modo, espera-se unificar as características de ambos os problemas de controle, para que a solução apresentada pelo controle misto disponha das melhores propriedades de cada uma das normas: H_2 e H_∞ . Logo, deseja-se minimizar a respectiva FT entre o vetor de entradas exógenas (\mathbf{w}) e o vetor de saídas (\mathbf{z}) do sistema.

O conhecimento obtido do comportamento dinâmico desta estrutura, através do seu modelo de estado, permite projetar este controlador misto através da programação convexa com restrições na forma de LMI. A escolha deste tipo de controle aplicado como sendo o objetivo se deve a vários motivos, abaixo relacionados:

- Capacidade de tolerar certas incertezas do sistema, permitindo o desenvolvimento de um controlador robusto mesmo diante das imprecisões existentes na criação do modelo.
- A programação computacional assume a forma canônica da *minimização convexa*, cujas variáveis de decisão do problema, ou variáveis da função objetivo, estão associadas às restrições em forma de LMI.
- A formulação de um controlador, mesmo que sub-ótimo, através de uma minimização convexa com restrições em LMI, possibilita a estabilização do sistema.
- Este tipo de técnica de projeto de controle apresenta uma maior complexidade matemática para se atingir a solução, devido as suas características iterativas. Entretanto, este problema que já foi limitador no passado, está hoje parcialmente superado graças a uma maior facilidade de implementação e aos recursos computacionais disponíveis.
- Ele também possui a vantagem de permitir a inclusão de novas restrições, como por exemplo, regiões para a alocação de pólos.

Resumindo, a escolha do controle H_2/H_∞ está atrelada ao tipo de solução, determinada pelo equilíbrio entre robustez e desempenho; e também à forma de solução requerida, a minimização no domínio das frequências, que pode ser obtida pela programação semi-definida. A garantia de estabilidade do sistema controlado mesmo na presença das incertezas, fica a cargo da minimização da norma H_∞ . Já a redução da norma H_2 responde pela melhoria da performance transiente do sistema [25], ou a redução global da resposta em frequência de um sinal entre o vetor de entradas e o vetor de saídas [26].

O software computacional utilizado para encontrar o controlador e simular as respostas do sistema controlado é o *Matlab*², que já dispõe de uma série de ferramentas conhecidas para programação semi-definida e LMI [27, 28]. Também foi utilizado este software para a modelagem por elementos finitos da estrutura. A utilização da mesma linguagem computacional, tanto para o modelo como para a integração do controlador com a estrutura, possibilitará a obtenção da solução mais facilmente neste trabalho [29].

O trabalho foi organizado da seguinte forma: primeiramente, é determinado o modelo matemático da estrutura. Depois, é apresentado o tratamento dado às incertezas para determinar a região de valores aceitáveis definida pelo teorema do ganho pequeno. São introduzidos então os conceitos das LMI e sua utilização dentro da programação semi-definida convexa, seguido dos conceitos das normas H_2 e H_∞ para sistemas lineares. Com todas estas informações descritas, é apresentada a formulação para os controladores H_2 , H_∞ e misto, e sua implementação no *Matlab*.

Finalmente, têm-se os resultados da aplicação dos controladores, enfocando principalmente no resultado do controle misto e sua factibilidade, comparando-o diretamente com o resultado obtido por um controlador H_2/H_∞ definido pelos comandos do próprio *Matlab*. Depois, é feita a conclusão do trabalho, apresentando as perspectivas, dificuldades e potenciais dos controladores vistos.

²*Matlab* é marca registrada da *Mathworks Inc.*

Capítulo 2

Modelo Matemático da Estrutura

2.1 Introdução

As estruturas mecânicas são consideradas flexíveis quando os efeitos das ações sobre ela transcendem uma mera análise para corpos rígidos. Nestes casos, sua elasticidade e deformações não podem ser desprezadas, devendo ter uma adequada modelagem estrutural para que a descrição física destes efeitos seja completa. O tratamento matemático para este problema será realizado neste trabalho através da discretização em elementos finitos para uma viga considerada em duas dimensões. Assume-se portanto, que não há ação de forças ou quaisquer distúrbios na dimensão de profundidade da viga, e o material constituinte da mesma é isotrópico.

O método dos elementos finitos permite encontrar uma solução para o comportamento dinâmico de uma estrutura complexa, através da divisão do problema original em vários sub-domínios, chamados de *elementos finitos* (EF). Sua grande vantagem reside justamente na redução da complexidade da estrutura, a partir da qual a obtenção de um resultado analítico direto seria muito difícil. A união entre os elementos representa toda a estrutura, e os seus pontos em comum são os *nós*. Os elementos de viga formadores do modelo deste trabalho apresentam dois nós cada um, sendo que cada nó possui três *graus de liberdade* (GDL): deslocamento axial (u) e transversal (v), e rotação (θ), conforme Figura 2.1 a seguir. A utilização em termos de notação da variável u como deslocamento axial de um GDL, ao invés do esforço de controle apresentado pela Figura 1.2, estará restrita apenas a este capítulo.

Na Figura 2.1 tem-se que l_e é o comprimento do elemento finito, e α é o ângulo existente entre o sistema de coordenadas local (\bar{x}, \bar{y}) , ou do elemento, e o global (x, y) , ou da estrutura.

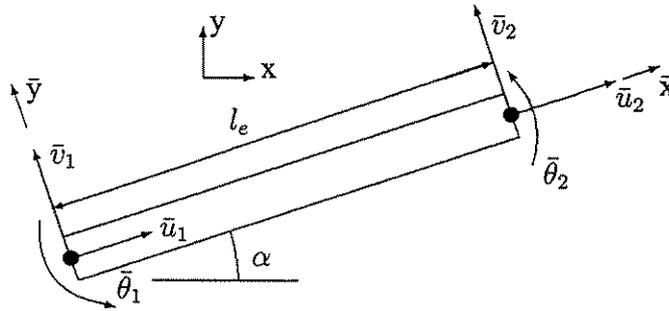


Figura 2.1: Representação do elemento de viga

A abordagem de determinação das matrizes de massa e rigidez, apresentadas na seqüência, usa o método da energia potencial total do sistema baseado nos deslocamentos nodais.

2.2 Matriz de Rigidez Elástica

O processo de cálculo desta matriz é iniciado com a determinação das *funções de forma* que ajustariam, por interpolação, a distribuição interna do campo de deslocamentos existente no elemento. Este campo, para o caso bidimensional em estudo, é gerado pelos efeitos de tração somados com a flexão da viga.

Assim, adotou-se uma interpolação polinomial cujas funções de forma são chamadas de *Hermitianas*. Elas servem para aproximar os deslocamentos de flexão do elemento da viga a partir dos GDL de deslocamento vertical, \bar{v}_1 e \bar{v}_2 , e de rotação nos nós, $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$. Os valores de $\bar{\theta}$ são na verdade iguais a $\partial\bar{v}/\partial\bar{x}$. Com isso, a equação de interpolação para o deslocamento vertical $\bar{v}(x)$, sendo x a posição ao longo do comprimento do elemento, constitui-se num polinômio que deve ser contínuo até a ordem $n - 1$, onde $n = 4$ é o número de GDL envolvidos. Aplicando as condições de contorno e resolvendo o sistema de quatro equações e quatro incógnitas, obtém-se as funções de forma dos deslocamentos de flexão [30].

Para os GDL de deslocamento axial \bar{u}_1 e \bar{u}_2 , foi considerada uma interpolação linear tal qual é feita no tratamento de treliças.

Através da definição do *Teorema de Clayperon* [31], o cálculo da energia de deformação, U , para vigas modeladas bidimensionalmente e consideradas linearmente elásticas é feito da seguinte forma:

Dado $\sigma_x = E\epsilon_x$, então:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_x^t \sigma_x dV = \frac{E}{2} \int_0^l \int_A \epsilon_x^2 dA dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{EA}{2} \int_0^l \epsilon_x^2 dx \quad (2.1)$$

A deformação total é obtida pela soma das parcelas de tração e de flexão sofridas pela viga, já que esta foi modelada apenas nas duas dimensões do plano representado na Figura 2.1. A parcela de tração, definida para o caso linear, é dada por [32]:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (2.2)$$

A parcela de deformação axial devido à flexão, ocasionada pelo momento fletor resultante na viga, é definida através das relações entre as equações da elasticidade plana [33]. Seja a equação da flecha:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.3)$$

Seja também a tensão axial devido ao momento fletor dada abaixo:

$$\sigma_x = -M(x) \frac{I}{\bar{y}} \quad (2.4)$$

Substituindo o momento de (2.4) na equação (2.3), e comparando com a definição da tensão axial apresentada em (2.1), conclui-se que:

$$\sigma_x = E \left(-\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \cdot \bar{y} \right) \quad \therefore \quad \epsilon_x = -\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \cdot \bar{y}^2 \quad (2.5)$$

Logo, o valor da deformação a ser substituído na equação (2.1) é dado por:

$$\epsilon_x^2 = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \cdot \bar{y} \right\}^2 \quad (2.6)$$

Desmembrando os componentes de ϵ_x^2 , obtém-se:

$$\epsilon_x^2 = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 \cdot \bar{y}^2 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \cdot \bar{y} \quad (2.7)$$

Donde \bar{y} tem origem na linha neutra no cálculo do momento fletor sobre a viga. Isto resulta na anulação do termo que o multiplica quando substituído em (2.1), pois:

$$\int_A \bar{y} dA = 0$$

Então, substituindo os termos restantes de (2.7) dentro da equação (2.1), e resolvendo as integrações diretamente em dx para as funções de forma obtidas para as derivadas de \bar{v} e de \bar{u} , chega-se à seguinte expressão para a energia de deformação de um elemento finito:

$$\bar{U}_e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{a}}^t \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{a}} \quad (2.8)$$

O vetor $\bar{\mathbf{a}}$ representa os GDL do elemento nas coordenadas locais:

$$\bar{\mathbf{a}} = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2]^t$$

A determinação da matriz de rigidez elástica de cada elemento é feita através da integração dos termos de (2.7), após substituí-los em (2.1), o que resulta em:

$$\frac{E}{2} \int_0^l \int_A \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 \cdot \bar{y}^2 \right] dA dx \quad (2.9)$$

Considerando que o momento de inércia I é dado por:

$$I := \int_0^A \bar{y}^2 dA \quad (2.10)$$

Então, o resultado da matriz de rigidez elástica $\bar{\mathbf{K}}^e$ será o seguinte [34]:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2 & 0 & 0 & -Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6Il & 0 & -12I & 6Il \\ 0 & 6Il & 4Il^2 & 0 & -6Il & 2Il^2 \\ -Al^2 & 0 & 0 & Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6Il & 0 & 12I & -6Il \\ 0 & 6Il & 2Il^2 & 0 & -6Il & 4Il^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A implementação computacional em *Matlab* que montou esta matriz está apresentada no **Anexo III**.

2.3 Matriz de Massa

A obtenção da matriz de massa de cada elemento é feita de forma análoga. São usadas as mesmas funções de interpolação: lineares para os graus de liberdade em \bar{u} , e Hermitianas no cálculo da deflexão da viga envolvendo \bar{v} e $\bar{\theta}$.

O *Princípio de D'Alembert* afirma que as equações de movimento de um corpo são obtidas a partir da sua condição de equilíbrio quando as forças de inércia são levadas em consideração. As

forças de inércia de translação e rotação podem ser consideradas como forças de corpo [31]. Desta forma, num problema dinâmico, são as forças de corpo que estão associadas com sua inércia, ou massa.

Através do método da energia potencial total e usando o princípio de D'Alembert, a inércia do elemento finito que define sua matriz de massa é obtida através do cálculo do trabalho exercido pelas forças de corpo. Conseqüentemente, chega-se à seguinte expressão [31]:

$$W = \int_V \mathbf{u}^t \mathbf{f} dV = \int_V \mathbf{a}^t \mathbf{N}^t \mathbf{f} dV = \int_V \mathbf{a}^t \mathbf{N}^t \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}} dV \quad (2.12)$$

O vetor \mathbf{u} é o campo de deslocamentos no elemento; o vetor \mathbf{f} são as forças aplicadas nos respectivos GDL do elemento; e a matriz \mathbf{N} são as funções de forma adequadamente posicionadas de acordo com a representação de seus GDL pelo vetor \mathbf{a} . A substituição do vetor de forças foi feita mantendo os valores de massa por unidade de volume dentro da integração, levando ao surgimento do vetor de aceleração nodal $\ddot{\mathbf{a}}$.

Partindo de (2.12), tem-se que:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{a}} = \int_V \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \cdot \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{f} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}$$

E assim chega-se à seguinte equação para a matriz de massa do elemento de viga:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV = \rho A \int_0^l \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx \quad (2.13)$$

Resolvendo a integração acima diretamente em dx para as mesmas funções de forma usadas no cálculo da matriz de rigidez, chega-se a matriz de massa *consistente* do elemento de viga [34]:

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A implementação no *Matlab* desta matriz também está dada no **Anexo III**.

2.4 Transformação de Coordenadas

Conforme visto na Figura 2.1, existe um ângulo α entre os eixos das coordenadas locais e os eixos (x,y) das coordenadas globais. Para que possa ser encontrada a solução do problema nas coordenadas globais, faz-se necessária uma transformação de coordenadas, descrita a seguir [30]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \implies \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{T}\mathbf{a} \quad (2.15)$$

Aplicando esta transformação diretamente na equação (2.8), chega-se a:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \mathbf{T}^t \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T} \mathbf{a} \quad (2.16)$$

Conclui-se desta forma que as matrizes de massa e rigidez dos elementos são escritas no sistema global realizando uma transformação de coordenadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \mathbf{T}^t \bar{\mathbf{M}}^e \mathbf{T} \\ \mathbf{K}^e &= \mathbf{T}^t \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dentro do **Anexo III**, já citado anteriormente, duas das três variáveis de saída finais são as matrizes \mathbf{K}^e e \mathbf{M}^e , depois desta transformação de coordenadas. A terceira é a matriz de amortecimento, descrita a seguir.

2.5 Matriz de Amortecimento

Após a obtenção das matrizes globais de massa e rigidez elástica de um elemento, pode ser estimada uma matriz de amortecimento proporcional à estas características do sistema. Esta abordagem é muito usada nas estruturas simples, e sua principal vantagem consiste na manutenção dos modos de vibração do modelo não-amortecido na sua versão amortecida determinada por este método [35].

Também chamado de amortecimento de *Rayleigh*, o método consiste em definir a matriz de amortecimento de cada elemento \mathbf{G}^e , a partir de valores, por exemplo, experimentalmente determinados e proporcionais às matrizes globais calculadas nas fórmulas de (2.17), que depois serão montadas conforme apresentado adiante em (2.19).

$$\mathbf{G}^e = \kappa \mathbf{K}^e + \eta \mathbf{M}^e \quad (2.18)$$

Já que este trabalho não tem como objetivo determinar os coeficientes de proporcionalidade κ e η experimentalmente, para fins de simplificação preferiu-se adotar valores que gerassem um

determinado fator de amortecimento (ζ) máximo para cada modo apresentado pelo modelo [35]. Considerou-se que o maior valor de ζ deveria ser da ordem de 10^{-1} para todos os modos presentes no modelo calculado.

Estimando valores iniciais para κ e η , e prosseguindo através de um pequeno processo de tentativa e erro, foram adotados $\kappa = 1 \cdot 10^{-5}$ e $\eta = 1 \cdot 10^{-2}$. Com estes números, obtêm-se o fator de amortecimento próximo do valor proposto acima para as discretizações realizadas na viga deste trabalho.

O cálculo de \mathbf{G} é feito dentro da rotina já apresentada do Anexo III, após a obtenção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} , usando os valores de κ e η acima.

2.6 Montagem das Matrizes Globais do Modelo

Uma vez obtidas as matrizes de massa e rigidez de cada elemento, é possível gerar as respectivas matrizes globais da estrutura modelada através do procedimento de montagem, usualmente conhecido como *assembly* na área de elementos finitos.

Para a Figura a seguir, representando uma viga discretizada em dois elementos finitos como exemplo, cada uma das matrizes será descrita em função dos GDL dos seus respectivos nós:

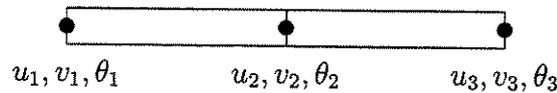


Figura 2.2: Disposição dos nós e GDL contíguos de uma estrutura discretizada

Esquematizando as respectivas matrizes individuais de cada elemento, denotadas por (\odot) e $(+)$ a seguir e já transformadas para as coordenadas globais, podem-se identificar as influências de cada elemento finito na matriz que representará a estrutura inteira:

$$\begin{matrix}
 & u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \\
 \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \end{matrix} \right) & \mathbf{e} & \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \end{matrix} \right)
 \end{matrix}$$

A matriz global do sistema seria então montada conforme apresentado a seguir, sendo que a união dos elementos em comum (\oplus) é a soma algébrica entre seus respectivos componentes, e os espaços vazios são nulos. Esta configuração seria análoga para a montagem de n EF de uma viga, cuja matriz global assumiria então a forma bloco diagonal.

$$\begin{matrix}
 & u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \\
 u_1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & & \\
 v_1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & & \\
 \theta_1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & & \\
 u_2 & \circ & \circ & \circ & \oplus & \oplus & \oplus & + & + & + \\
 v_2 & \circ & \circ & \circ & \oplus & \oplus & \oplus & + & + & + \\
 \theta_2 & \circ & \circ & \circ & \oplus & \oplus & \oplus & + & + & + \\
 u_3 & & & & + & + & + & + & + & + \\
 v_3 & & & & + & + & + & + & + & + \\
 \theta_3 & & & & + & + & + & + & + & +
 \end{matrix} \quad (2.19)$$

Montadas as matrizes globais, a última etapa consiste na aplicação das condições de contorno do problema. Na determinação das matrizes globais **M**, **K** e **G**, faz-se necessário eliminar as linhas e colunas associadas aos GDL do engaste, para que ela tenha a ordem final igual ao real número de graus de liberdade incógnitos. No exemplo dado em (2.19), supondo que o primeiro nó esteja bloqueado no engaste, é necessário eliminar as três primeiras linhas e as três primeiras colunas da matriz.

A geração das matrizes do sistema flexível modelado em elementos finitos é feita neste trabalho por rotinas e funções implementadas no Matlab, baseadas nos programas apresentados pela referência [30]. A rotina principal geradora das matrizes está descrita no **Anexo I**; as sub-rotinas que participam deste processo estão destacadas em negrito, e são listadas do **Anexo II** ao **Anexo VI**. Com estas informações, parte-se para a determinação das matrizes de estado, essenciais para a adequação do projeto do controlador ao sistema modelado.

2.7 Determinação das Matrizes de Estado do Sistema

Para que a determinação das matrizes de estado do problema estudado neste trabalho possa ser compreendida integralmente, partiu-se de um sistema mais simples como exemplo, composto por massa-mola-amortecedor com dois GDL. Ilustrado na Figura 2.3 a seguir, o sistema está exposto a uma força externa distinta em cada uma das massas.

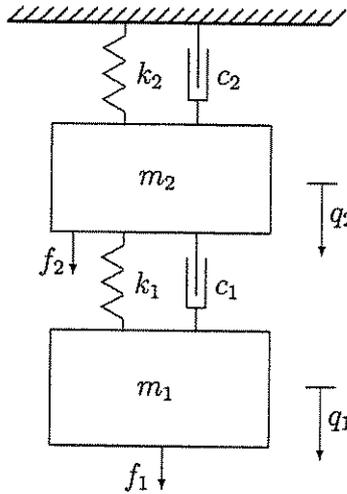


Figura 2.3: Exemplo de sistema massa-mola-amortecedor com 2 GDL

As variáveis *linearmente independentes* do sistema, q_1 e q_2 , são chamadas de *Coordenadas Generalizadas* [36], e são escolhidas para representar os n GDL de um sistema; que neste caso são os deslocamentos verticais das massas m_1 e m_2 respectivamente. As equações do movimento para este sistema são equações diferenciais em termos das variáveis q_n , obtidas aplicando as Leis de Newton. Uma descrição detalhada deste procedimento pode ser encontrada nas referências [36, 37]. Obtém-se deste modo as equações:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + c_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_1(q_1 - q_2) &= f_1 \\ m_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2 + k_2 q_2 + c_1(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + k_1(q_2 - q_1) &= f_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Construindo a partir das igualdades acima uma equação matricial equivalente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2.21)$$

Para descrever o sistema da Figura 2.3 usando as *variáveis de estado* foi realizada uma transformação de variáveis partindo das coordenadas generalizadas, de modo a se obter o *vetor de estado*, \mathbf{x} . As transformações e as conseqüentes equações do sistema são:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x_1 \\ q_2 &= x_2 \\ \dot{q}_1 &= x_3 = \dot{x}_1 \\ \dot{q}_2 &= x_4 = \dot{x}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \dot{x}_3 + c_1 x_3 - c_1 x_4 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = f_1 \\ m_2 \dot{x}_4 + (c_1 + c_2) x_4 + (k_1 + k_2) x_2 - c_1 x_3 - k_1 x_1 = f_2 \end{cases} \quad (2.22)$$

Agrupando as equações (2.22) acima na forma matricial sempre em função da respectiva variável de estado, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{(c_1+c_2)}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_1}{m_1} \\ \frac{f_2}{m_2} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Considerando q_1 e q_2 como as saídas desejadas, escreve-se a igualdade a seguir:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \mathbf{0} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

A equação (2.23) pode ser escrita finalmente sob a ótica das *matrizes de estado*, assumindo a forma dada abaixo [3, 38]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bf} \quad (2.25)$$

Já a equação (2.24) compõe as outras matrizes de estado, formando a equação de saída do sistema dada por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Df} \quad (2.26)$$

Deste modo, as equações (2.25) e (2.26) formam a representação do espaço de estados (*state-space realization*).

Nota-se que a matriz \mathbf{A} , chamada de *Matriz de Estado* [3], descreve todo o comportamento natural do sistema linear equivalente representado, e pode ser desmembrada em quatro sub-matrizes de ordem 2×2 . Sua estrutura permite concluir que seu cálculo pode ser generalizado para quaisquer sistemas dinâmicos com n GDL que puderem ser reduzidos sob a forma de variáveis de estado, seguindo o equacionamento de (2.22) e (2.23). Desta forma, comparando as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da equação (2.23) com as definições intrínsecas de (2.21), tem-se [37]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Conseqüentemente, a determinação de \mathbf{A} e \mathbf{B} depende apenas da determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura considerada. Uma vez que estas matrizes já estão definidas através das rotinas apresentadas anteriormente, é possível calcular computacionalmente a equação (2.27) dentro de rotinas que também determinam as demais matrizes de estado.

Já a matriz C associa diretamente as coordenadas generalizadas com os estados existentes na saída do sistema. Deste modo, ela é determinada diretamente pelo usuário, através das condições operacionais desejadas para o controle.

2.8 Forma Genérica do Sistema de Controle

Um sistema genérico pode ser apresentado da seguinte forma [39, 40], sendo que as FT da planta $G(s)$ e do controlador $K(s)$ abaixo nada têm em comum, em termos de notação, com as matrizes de amortecimento G e rigidez K expostas pelas equações (2.21) e (2.27):

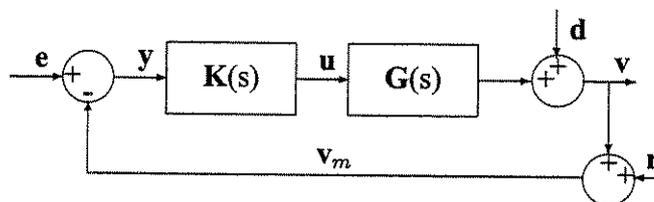


Figura 2.4: Exemplo de sistema de controle

As demais variáveis deste sistema representam o seguinte:

- o vetor w representa as entradas exógenas ao sistema; e é composto por três variáveis, a seguir descritas: d , r e e ;
- o sinal d é um distúrbio aleatório;
- o sinal r representa o ruído de medição;
- o sinal e é a referência de entrada a ser acompanhada pelo sistema;
- v é a saída real do sistema, de difícil obtenção prática devido aos ruídos que se somam;
- v_m é a saída do sistema realmente medida;
- y é o vetor contendo o sinal de entrada do controlador; e
- u é o vetor de controle.

Usando a definição de que o desempenho de um sistema pode ser medido através da diferença, ou erro, entre a saída real e a entrada de referência, tem-se [2]:

$$z := v - e \quad (2.28)$$

As relações apresentadas pela Figura 2.4 são:

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{r} + \mathbf{v} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{e} - \mathbf{v}_m \quad (2.32)$$

Define-se o vetor \mathbf{w} como [19]:

$$\mathbf{w} := \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Então, substituindo a equação (2.30) em (2.29) e esta em (2.32), obtém-se uma nova configuração para \mathbf{y} onde é possível substituir a definição de \mathbf{w} acima, resultando finalmente em:

$$\mathbf{y} = \mathbf{e} - \mathbf{r} - \mathbf{v} = -\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 \quad (2.34)$$

Substituindo (2.30) em (2.28), seguido da comparação com (2.33), tem-se:

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \quad (2.35)$$

Organizando (2.34) e (2.35) na forma matricial, resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

A equação para \mathbf{y} acima, após substituição da equação (2.31), resulta em:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K}\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} \quad (2.37)$$

Analogamente para \mathbf{z} , substituindo também o resultado acima de \mathbf{y} , obtém-se:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z} = [\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}] \mathbf{w} \quad (2.38)$$

A parcela entre colchetes é chamada de *Transformação Linear Fracional* [2, 19, 41], identificada como $\mathbf{G}_{zw}(s)$, e representa a FT de malha fechada entre o sinal de desempenho (\mathbf{z}) e as entradas exógenas (\mathbf{w}).

Reorganizando o sistema da Figura 2.4, pode ser obtido o seguinte diagrama de blocos genérico [19]:

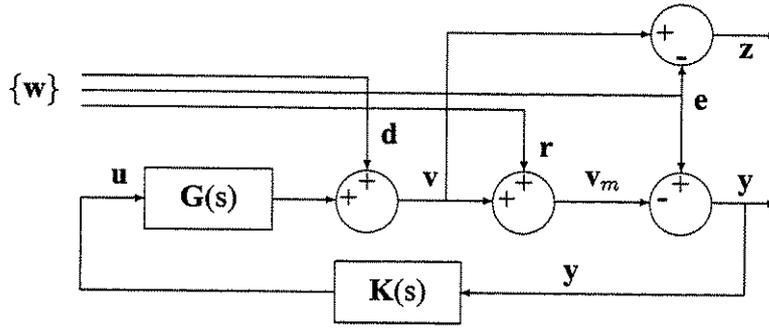


Figura 2.5: Sistema equivalente ao apresentado na figura 2.4

Usando as relações (2.29) à (2.32), tem-se que:

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{GK}y + \mathbf{d} \rightarrow v = \mathbf{GK}(e - v_m) + \mathbf{d} \rightarrow \\ \rightarrow v &= \mathbf{GK}e - \mathbf{GK}r - \mathbf{GK}v + \mathbf{d} \rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{GK})v = \mathbf{GK}(e - r) + \mathbf{d} \end{aligned}$$

O sinal real de saída será, então, dado por [19]:

$$\begin{aligned} v &= (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{d} + (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{GK}(e - r) \rightarrow v = \mathbf{S}\mathbf{d} + \mathbf{T}(e - r) \\ \therefore \mathbf{S} &:= (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}, \mathbf{T} := (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{GK} \rightarrow \mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.39)$$

As grandezas \mathbf{S} e \mathbf{T} são chamadas, respectivamente, de *função de transferência de sensibilidade* e *função de transferência complementar*. Vale ressaltar que aqui também a FT \mathbf{T} não está correlacionada em termos de notação com a matriz de transformação de coordenadas, apresentada na equação (2.15). Nota-se claramente que a determinação do controlador afetará diretamente os valores destas funções e que elas se complementam. Desta forma, não é possível atender simultaneamente ao bom acompanhamento da entrada e seguido do bloqueio dos ruídos em \mathbf{r} , com a redução da influência dos distúrbios \mathbf{d} na saída. Como normalmente os ruídos se encontram na alta frequência e os distúrbios na baixa, o problema de determinação do controlador é um problema de *otimização no domínio das frequências* [19]; onde se deseja performance mesmo nas baixas frequências, equilibrado com bom acompanhamento do sinal e nas altas frequências.

Como toda esta formulação é genérica, a presença destas três entradas não precisa necessariamente existir para que um controlador seja eficaz diante de um sistema perturbado. A forma com que a FT objetivo foi obtida indica que um controlador adequado pode ser capaz de estabilizá-la no domínio das frequências, para quaisquer situações de entradas externas. Assim, a minimização adequada da FT vista na equação (2.38), feita no domínio das frequências, possibilita uma boa *performance* ao sistema mesmo com a presença de distúrbios e/ou ruídos estocásticos.

2.9 Função de Transferência via Matrizes de Estado

Após a determinação da matriz \mathbf{A} e do sistema de controle visto na Figura 2.5, o próximo passo é identificar as demais matrizes de estado necessárias para montar uma FT que descreva completamente o sistema. Dada a configuração genérica da planta controlada na Figura 2.6 a seguir, as equações que a descrevem podem ser escritas em função das suas matrizes de estado, usando como referência as equações (2.25) e (2.26); obtendo-se [2]:

$$\mathbf{P}(s) \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.40)$$

A Figura 2.5 pode ser simplificada para a representação abaixo:

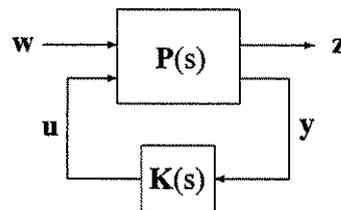


Figura 2.6: Representação simplificada de uma planta controlada

Deste modo, com \mathbf{A} conhecida, a determinação das demais matrizes de estado apresentadas em (2.40) dependerá da forma com que o controlador se integra com o sistema, que é definido pelo objetivo de projeto. Este objetivo será atingido somente com a correta associação dos elementos das matrizes com as variáveis do sistema. Em outras palavras, deve-se conhecer a dinâmica do sistema, o propósito do controlador e as interações existentes entre ambos.

Por definição, a matriz de estado \mathbf{B}_1 indica qual(is) estado(s) são afetados pelos distúrbios externos; e a matriz \mathbf{B}_2 contém elementos que definem em qual(is) estado(s) do sistema o controlador está atuando. As matrizes \mathbf{C}_1 , \mathbf{D}_{11} e \mathbf{D}_{12} montam o sinal de saída \mathbf{z} que deve ser controlado, seguindo o equacionamento dado em (2.38). A matriz \mathbf{C}_1 indica qual(is) componente(s) do vetor de estado estão na saída; a matriz \mathbf{D}_{11} mostra qual(is) distúrbios externos afetam esta saída; e a matriz \mathbf{D}_{12} mostra se há ou não influência direta do sinal de controle em \mathbf{z} .

Para determinar a FT entre as entradas \mathbf{w} e as saídas \mathbf{z} , é aplicada a transformada de Laplace nas equações (2.40), obtendo-se [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{B}_1\mathbf{W}(s) + \mathbf{B}_2\mathbf{U}(s)] \\ \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{C}_1\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{W}(s) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

Substituindo a equação de $\mathbf{X}(s)$ em $\mathbf{Z}(s)$, obtém-se:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}] \mathbf{W}(s) + [\mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{22}] \mathbf{U}(s)$$

Para a condição inicial nula ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$), a FT de malha aberta entre $\mathbf{Z}(s)$ e $\mathbf{W}(s)$, é dada em função das matrizes de estado por:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11} \quad (2.41)$$

Esta FT pode ser representada na forma compacta, como [22]:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} \end{array} \right] \quad (2.42)$$

A planta $\mathbf{P}(s)$ pode representar um sistema MIMO de n GDL, com m entradas e q saídas, traduzidas na FT $\mathbf{T}_{zw}(s)$ acima descrita. Daí, tem-se que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ e $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{q \times 2n}$, implicando em $\mathbf{D}_{11} \in \mathbb{R}^{q \times m}$, para manter a compatibilidade da matriz (2.42) acima. Tal representação matricial de uma FT, chamada de *notação compacta*, será útil mais adiante nas determinações das suas normas, que são calculadas matricialmente.

Portanto, a equação (2.40) na forma matricial resultaria em [42]:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Na prática, raramente os sinais exógenos de \mathbf{w} são conhecidos integralmente. Em função deste desconhecimento, para os olhos de um espectador externo, um sistema qualquer pode ser considerado *não-determinístico*, pois uma única entrada pode promover saídas diferentes em momentos diferentes no tempo [39]. Para fins de simplificação, o sistema deste trabalho é contínuo, linear e invariante no tempo (CTLTI) [3].

Entretanto, as incertezas oriundas da deficiência na modelagem do sistema, onde na prática as não-linearidades e a variação de parâmetros estão presentes, afetam toda a previsibilidade da sua resposta. A maneira com que as incertezas do sistema estudado foram tratadas neste trabalho é o próximo tópico abordado.

Capítulo 3

Incertezas do Sistema

3.1 Introdução

É possível considerar três principais tipos de incertezas associadas aos problemas envolvendo controle de estruturas flexíveis: incertezas dinâmicas, paramétricas e concentradas [19].

As *incertezas dinâmicas* decorrem da dinâmica da estrutura modelada. A discretização em elementos finitos, por exemplo, provoca uma redução da mesma, já que o número real de GDL de uma estrutura contínua é infinito. Limitando o número de GDL, está se inserindo um erro natural da modelagem dinâmica. Este erro pode causar o fenômeno de *spillover* [23]. Dessa forma, a resposta do sistema depende do número de elementos em que a estrutura é fragmentada, sem que seja possível determinar exatamente o erro existente no processo. Logo, o controlador deve ser testado para diversos graus de discretização, para fins de comparação e determinação da confiabilidade dos resultados do mesmo perante ao sistema real e à faixa de frequência de operação de interesse.

As *incertezas paramétricas* se aplicam quando a estrutura do modelo é conhecida, mas alguns de seus parâmetros não o são [19]. Elas podem representar as variações destes parâmetros em função das variáveis do ambiente ou das condições operacionais não uniformes, tais como distúrbios estocásticos e variações não previstas de carga. Elas são presentes porquê os modelos são feitos seguindo hipóteses simplificadoras, como as abstrações físicas de continuidade e isotropia dos materiais, criando diferenças com a estrutura real existente. Neste trabalho, a consideração de que o sistema é um CTLTI faz parte destas abstrações, e desta forma, as matrizes de rigidez \mathbf{K} e de amortecimento \mathbf{G} poderiam sofrer variação sob operação. O projeto do controlador deve levar em consideração tais abstrações.

Na matriz de amortecimento, a incerteza pode estar associada com a imprecisão das determinações dos coeficientes de proporcionalidade vistos na equação (2.18), quando se adota o modelo de amortecimento proporcional. Os coeficientes κ e η poderiam ser obtidos experimentalmente quando é possível realizar medições na estrutura em estudo. Porém, a proposta deste trabalho é teórica, e partiu do princípio de que um projeto inicial numa estrutura não conhecida normalmente implica que estas constantes sejam estimadas de forma a gerar uma matriz \mathbf{G} conveniente. Já a matriz de rigidez elástica foi calculada desprezando os termos não-lineares. Fica evidente, assim, que as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{G} não são representações exatas do comportamento do sistema, fazendo-se necessário parametrizar a incerteza internamente.

Nota-se que as características da estrutura deste trabalho são tais que as mesmas incertezas podem ser consideradas tanto paramétricas como dinâmicas. Isso significa que sua melhor representação será feita através da *incerteza concentrada*, que responde pela combinação das outras duas [19]. Esta foi a representação adotada para o trabalho, e está apresentada a seguir. Tendo estes cuidados com a modelagem da estrutura flexível, pode ser projetado um controlador que suporte tais incertezas e traga confiabilidade aos resultados obtidos.

3.2 Presença das Incertezas no Sistema

O modelo matemático representativo da presença da incerteza concentrada pode ser obtido de várias formas. Entre os mais comuns estão os modelos via incerteza *aditiva*, *multiplicativa de saída* ou *multiplicativa de entrada* [19]. Estas incertezas são formuladas de modo que todo o sistema seja composto por uma FT e um controlador totalmente conhecidos, enquanto as suas influências são todas consideradas como externas ao sistema controlado. Assim é possível estabelecer uma matriz de incertezas Δ que concentra os valores incertos do mesmo, enquanto uma FT nominal, sem nenhuma incerteza, pode ser facilmente obtida através dos procedimentos apresentados no capítulo anterior.

Quando as matrizes constituintes do modelo de estado são conhecidas por variar entre faixas determinadas, a incerteza existente no sistema é modelada de forma *estruturada*. Entretanto, se há imprecisões no modelo, seja devido à alguns fenômenos físicos (histerese, não-linearidades, etc.), ou seja devido ao desconhecimento da dinâmica do sistema real modelado, então a incerteza será *não-estruturada* [41]. Este modelo é mais adequado quando não se pode na prática descrever a incerteza em detalhes, bastando que seja especificada uma função limitante para ela [23, 26].

Já que o objetivo deste trabalho não é identificar as incertezas do sistema, então o modelo da incerteza não-estruturada será utilizado por ser o mais adequado. Mais adiante no texto será apresentada a função limitante adotada para a mesma.

O diagrama seguinte mostra uma representação típica de um sistema incerto e controlado, composto por uma FT nominal $\mathbf{H}(s)$, um controlador $\mathbf{K}(s)$ e as incertezas representadas por Δ :

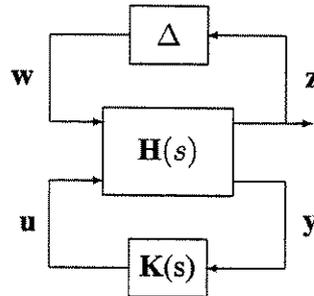


Figura 3.1: Representação de um sistema real incerto controlado

É possível reorganizar as equações dinâmicas que descrevem o comportamento do sistema para incluir as incertezas presentes em Δ . O modo de formular o modelo com tal objetivo leva o nome de *incerteza linear fracional* [43]. Para as condições estabelecidas neste trabalho, apenas a matriz dinâmica sofre influência das incertezas, apesar de ser possível estabelecer um equacionamento para todas as matrizes de estado do sistema, conforme pode ser visto nos artigos [44, 45].

Dado o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{w} = \Delta\mathbf{z} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) em (3.3) e reorganizando em função de \mathbf{w} , obtém-se [43]:

$$\mathbf{w} - \Delta\mathbf{D}_{11}\mathbf{w} = \Delta\mathbf{C}_1\mathbf{x} \rightarrow$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \Delta\mathbf{D}_{11})^{-1}\Delta\mathbf{C}_1\mathbf{x} \quad (3.4)$$

Substituindo por sua vez (3.4) em (3.1) e reorganizando as variáveis em evidência:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}_1(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{D}_{11})^{-1}\Delta\mathbf{C}_1]\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (3.5)$$

Definindo a nova matriz de estado afetada pelas incertezas a partir da equação acima, tem-se:

$$\mathbf{A}_\Delta := \mathbf{A} + \mathbf{B}_1(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{D}_{11})^{-1}\Delta\mathbf{C}_1 \quad (3.6)$$

A presença das incertezas no sistema exige que este seja estável de forma robusta, a fim de que o controle seja capaz de tolerar as imprecisões de modelagem, representadas por Δ . Este conceito é introduzido pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1 (Ganho Pequeno) [2] *Sejam conhecidas uma função de transferência nominal G_n e sua incerteza Δ . Tomando-se M como a planta que representa a FT G_n controlada por K e vista pela incerteza Δ , então a FT real G_r será robustamente estável se:*

$$|\Delta| \cdot |M| < 1 \rightarrow |\Delta| < \frac{1}{|M|} \quad (3.7)$$

Pela Figura 3.2 a seguir, define-se a planta M através da lei de controle como sendo o sistema visto pela incerteza Δ . Para identificar os sinais de entrada e saída desta planta, nela estão localizados os respectivos vetores i e o :

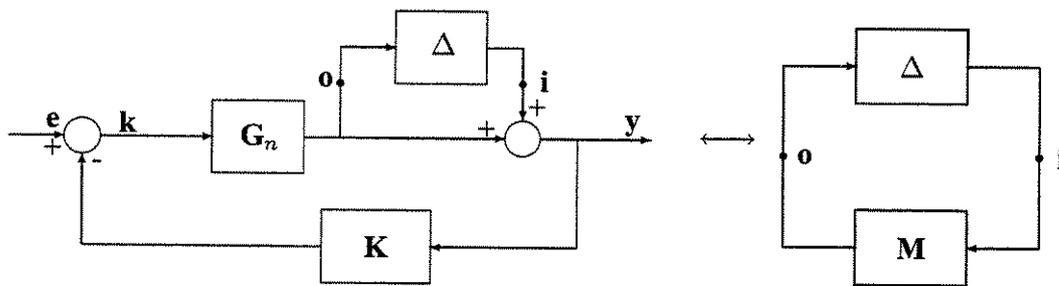


Figura 3.2: Representação esquemática do Teorema do Ganho Pequeno

A formulação de M é feita neste caso baseada na modelagem da incerteza multiplicativa de saída [19, 23], já que Δ localiza-se após a saída de G_n . A FT real, obtida através desta modelagem incluindo as incertezas na FT nominal, será então dada pela seguinte equação [41]:

$$G_r(s) = G_n(s) \cdot (I + \Delta) \quad (3.8)$$

Através da Figura 3.2, tem-se as seguintes relações:

$$o = G_n \cdot k \quad (3.9)$$

$$k = e - K \cdot (i + o) \quad (3.10)$$

$$o = M \cdot i \quad (3.11)$$

A entrada e pode ser considerada nula sem que haja perda de generalidade, uma vez que a prova deste teorema independe dos seus valores, desde que estes não sejam ilimitados. Substituindo

(3.10) em (3.9), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= -\mathbf{G}_n \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{o}) \rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{o} = -\mathbf{G}_n \cdot \mathbf{K} \mathbf{i} \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{o} = -(\mathbf{I} + \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{i} \end{aligned}$$

Comparando-se o resultado acima com a relação de (3.11), resulta em:

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{I} + \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}_n \mathbf{K} \quad (3.12)$$

Aplicando o teorema do ganho pequeno neste resultado, substituindo (3.12) na equação (3.7), implicará em:

$$|\Delta| < \frac{1}{|\mathbf{M}|} = \frac{1}{|(\mathbf{I} + \mathbf{G}_n \mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}_n \mathbf{K}|} = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \rightarrow |\Delta| < \frac{1}{|\mathbf{T}|} \quad (3.13)$$

A grandeza \mathbf{T} foi definida na equação (2.39).

A relação (3.8) identifica as incertezas que não foram modeladas pela planta nominal mas fazem parte do sistema real. Evidentemente, para um determinado valor de Δ a planta real $\mathbf{G}_r(s)$ se tornará instável. Para determinar este valor, é necessário definir a margem de estabilidade multiplicativa (*Multiplicative Stability Margin, MSM*) [2], dada em função da variável M_r , ambas apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} M_r &:= \sup_w |\mathbf{T}(jw)| \\ MSM &:= 1/M_r \end{aligned}$$

A variável M_r representa o máximo ganho que a função de transferência complementar, \mathbf{T} , proporciona ao sistema na faixa de frequências operacional. Desta forma, MSM é a menor incerteza capaz de desestabilizar o sistema, haja visto a definição de Δ na conclusão de (3.13). Em outras palavras, esta definição quer dizer que as incertezas de valor maior que o encontrado em MSM podem desestabilizar o sistema, e este é o menor valor em que isso acontece. Valores menores que MSM mantêm o sistema estável.

Verifica-se com isso que o Teorema do Ganho Pequeno permite na prática, estabelecer um limite superior associado a \mathbf{T} , tratada no domínio das frequências, para o qual a incerteza do sistema não o desestabilizará. Assim está estabelecido o conceito de *estabilidade robusta*, que significa justamente identificar o máximo de incertezas que uma planta nominal pode absorver sem desestabilizar-se. Portanto, um sistema é dito *robustamente estável* quando, uma vez garantida a estabilidade da FT nominal, também se garante estabilidade de malha fechada para a FT real [2], conforme dado no teorema 3.1.

Quando esta situação se verifica na presença de um controlador formulado com as incertezas, tem-se o *controle robusto* deste sistema. Este conceito pôde ser visualizado diretamente na equação (3.8), onde a planta real é obtida pela incerteza multiplicativa na saída da planta nominal e controlada por K . Ele será adaptado para a notação utilizada nas definições dos controladores apresentados no capítulo 5.

Com as determinações das matrizes de estado do sistema e da formulação das incertezas, parte-se agora para a definição das LMI, essenciais para o estabelecimento dos conceitos de convergência e estabilidade, bases para um projeto de controle segundo o ponto de vista deste trabalho.

Capítulo 4

Desigualdades Matriciais Lineares

4.1 Definições

Para o entendimento das Desigualdades Matriciais Lineares propriamente ditas, é necessário citar antes algumas definições preliminares. Estes conceitos são apenas brevemente introduzidos neste trabalho, para que a nomenclatura utilizada adiante fique clara e padronizada.

Um *espaço vetorial real* é aquele que contém vetores cujos elementos são números reais. Quando este espaço possui uma norma, é dito que ele é *normalizado*. Caso um espaço vetorial normalizado seja finito em suas dimensões, então ele é denominado de *espaço completo*.

Um conjunto é chamado de *convexo* se e somente se, para qualquer par de pontos pertencente a ele, o segmento de reta que os une também pertença inteiramente ao conjunto. Uma função é dita *convexa* se todos os elementos do seu domínio pertencem a um conjunto convexo e satisfazem a seguinte relação [43, 46]:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2); \forall x_1, x_2 \in \Omega; \alpha \in [0, 1].$$

Logo, $\Omega \subseteq \Gamma$, onde Γ é um conjunto convexo. Uma função que seja exatamente o oposto da definição de convexidade dada acima é chamada de *côncava*.

Seja a função matricial $F(\mathbf{x})$ definida num espaço vetorial real e completo, e pertencente ao conjunto das matrizes simétricas S^m . Seja F_i , $i = 1, 2, \dots, m$ um conjunto de funções matriciais do tipo **afim**, isto é, funções simultaneamente convexas e côncavas [46]. A função $F(\mathbf{x})$ é chamada

de *Desigualdade Matricial Linear*, doravante LMI, se for escrita da seguinte forma genérica:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i \cdot x_i \succcurlyeq \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Onde o sinal comparativo de desigualdade (\succcurlyeq) significa dizer que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é uma LMI *semi-positivo definida*, e conseqüentemente todos os autovalores da matriz resultante são positivos ou nulos. Caso a comparação fosse feita com o sinal (\succ), então os autovalores de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ seriam estritamente positivos. Os demais sinais e suas nomenclaturas estão apresentados na notação adotada para o trabalho.

A equação (4.1) é a *forma canônica* [18] de uma LMI, que representa por definição um conjunto convexo. Este conjunto é um *semi-espço vetorial* [46] contido no espaço vetorial onde $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ foi definida. O exemplo abaixo mostra como uma LMI pode ser escrita na forma canônica:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_3 = \mathbf{F}_1 x_1 + \mathbf{F}_2 x_2 + \mathbf{F}_3 x_3 \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i x_i \succcurlyeq \mathbf{0}; \mathbf{x} \in \Re \end{aligned} \quad (4.2)$$

Analogamente, pode-se definir um *conjunto poliedral* [46] através da intersecção de n semi-espços vetoriais descritos em n LMI. Caso seja mais conveniente, também é possível fazê-lo através de uma única LMI na forma de uma matriz bloco diagonal [18]. Assim, é possível representar restrições para que uma determinada variável apresente o valor da sua solução contido exclusivamente neste conjunto. Esta forma matemática de usar as LMI serve aos problemas da engenharia de controle, assim como a uma série de outros problemas de origem matemática, conforme apresentado a seguir.

4.2 Programação Semi-Definida

A forma canônica de programação semi-definida, também chamada de *problema de autovalor* (EVP), representa um problema de *Minimização Convexa* de uma função em \mathbf{x} . Seu objetivo é minimizar o autovalor máximo de uma matriz que depende, de *forma afim* [46], de uma variável sujeita à restrição LMI. A convexidade do problema é proporcionada por esta restrição, que por definição, estabelece o semi-espço vetorial convexo onde a solução do problema deve ocorrer

matematicamente [18]. Este EVP também aparece na forma equivalente da minimização de uma função linear sujeita a LMI, sendo denominada de *Programação Semi-Definida* (SDP); dada por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^m \\ & \text{sujeito a: } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Há casos em que um EVP pode estar apresentado de outra forma, cabendo o uso de algumas propriedades matriciais a fim de adequá-lo para a forma canônica apresentada. O *Complemento de Schur* é uma delas, pois permite realizar uma série de transformações em álgebra matricial, no intuito de converter desigualdades não-lineares em LMI.

O Complemento de Schur estabelece as seguintes relações [18, 47]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y}^t \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \iff \begin{cases} \mathbf{Z} \succ \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{X} \succ \mathbf{Y}^t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} \succ \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{Z} \succ \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y}^t \end{cases} \quad (4.4)$$

A equação (4.4) mostra que certas desigualdades matriciais não-lineares podem assumir a forma de LMI e vice-versa. Além disso, caso seja conveniente, podem ser feitas mudanças de ordem numa LMI, usando como base a equação (4.4), conforme apresentado neste exemplo [48]:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{B}^t \mathbf{P} & -\gamma^2 \mathbf{R} & \mathbf{D}^t \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{R}^{-1} \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \iff \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{R} \mathbf{C} & \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^t \mathbf{R} \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^t \mathbf{P} + \mathbf{D}^t \mathbf{R} \mathbf{C} & -\gamma^2 \mathbf{R} + \mathbf{D}^t \mathbf{R} \mathbf{D} \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \quad (4.5)$$

É com base nesta formulação que o controlador misto será projetado sobre a FT objetivo. O tipo de controlador escolhido para este trabalho utiliza a minimização das respostas em frequência do sistema dentro de um conjunto convexo, o que faz da forma canônica apresentada em (4.3) a ideal para sua resolução. Para que este controlador seja corretamente implementado, é necessário antes compreender quando um sistema CTLTI pode ser considerado estável.

4.3 Estabilidade dos Sistemas

A estabilidade de um sistema CTLTI pode ser definida de várias formas. Seguindo as definições das LMI, uma destas formas foi desenvolvida por Lyapunov há mais de um século [4]. Outra forma, de grande utilidade para este trabalho, inclui as incertezas associadas ao modelo, conforme apresentado pelo teorema 3.1 da seção 3.2. Uma terceira maneira consiste em determinar a estabilidade graficamente, através do lugar das raízes do sistema no plano $\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}$.

Teorema 4.1 (Estabilidade de Lyapunov) *A estabilidade de acordo com Lyapunov afirma que um dado sistema CTLTI em sua forma homogênea [3], $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, é estável no tempo se e somente se existir uma matriz \mathbf{P} simétrica, tal que satisfaça:*

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec \mathbf{0}; \quad \mathbf{P} \succ \mathbf{0} \quad (4.6)$$

A solução desta inequação, chamada de *desigualdade de Lyapunov*, permite a determinação do nível de energia contido no sistema, através da *função quadrática de Lyapunov* [38]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{P}\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$$

Teorema 4.2 *Se o sistema homogêneo é estável, então existe uma matriz \mathbf{Q} , simétrica e positivo-definida, tal que $\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$.*

Prova:

$$\begin{aligned} \text{Dado } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ então: } \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^t\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^t\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^t\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t(\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} \prec \mathbf{0} \end{aligned}$$

Para o sistema homogêneo e usando a definição de (4.6), tem-se $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{0}$, que também pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^t\mathbf{Q}\mathbf{x} \prec \mathbf{0}; \quad \mathbf{Q}^t = \mathbf{Q} \succ \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.7)$$

Como a matriz \mathbf{P} , solução da equação (4.6), representa o nível de energia de um sistema para condições iniciais não-nulas, o teorema 4.2 prova que este sistema é dissipativo, por promover o decréscimo da energia total no tempo [26, 36], quando $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$.

A matriz \mathbf{Q} pode indicar o caso limite de igualdade onde o sistema é *assintoticamente estável*, segundo Lyapunov, já que foi provado que um sistema é dissipativo em condições iniciais não-nulas e estável se respeitar a desigualdade de Lyapunov. Esta afirmação provoca a dedução da *Equação de Lyapunov* da estabilidade:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Outro método para se definir a estabilidade assintótica é o seguinte: a FT definida pelas matrizes de estado em (2.41), será considerada assintoticamente estável se:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \longrightarrow \Re\{s\} < 0 \quad (4.9)$$

Isso significa dizer que $T_{zw}(s)$ é *não-analítica* em $\Re\{s\} < 0$. Ou seja, todos os *pontos singulares* da FT em questão estão contidos neste domínio. Os únicos pontos singulares que uma FT racional têm são os seus pólos; desta forma, a equação (4.9) indica que todos os pólos da FT estão do lado esquerdo do plano $\Re \times \Im$ [26], ou todos os autovalores de A terão parte real negativa.

Apresentados os conceitos básicos sobre LMI e critérios de estabilidade, serão definidas a seguir as normas para as FT no domínio das frequências; de onde serão formulados os problemas de minimização convexa.

Capítulo 5

Normas das Funções de Transferência

5.1 Definições Preliminares

É sabido que o objetivo de controle neste trabalho é minimizar a função de transferência, no domínio das frequências, entre o sinal de saída ou desempenho z e os sinais de entrada w . Para que isto seja possível é preciso estabelecer de alguma forma o *tamanho* desta FT que representa o sistema linear através das matrizes de estado. Uma *norma* definida no espectro das frequências pode calcular uma dimensão específica da mesma, e o objetivo então passaria a ser determinado através da minimização desta norma. Para o controle de sistemas, existem dois métodos bastante utilizados na obtenção do tamanho de uma função de transferência, abaixo relacionados.

- Método 1: aplicar um sinal conhecido na entrada e medir a amplitude da resposta do sistema na saída, avaliando a sua *performance*. Este procedimento visa medir a **norma** H_2 da FT, e o controle baseado nesta norma busca uma redução geral da amplitude de resposta medida em toda a faixa de frequências [43].
- Método 2: impor à FT entradas em toda a faixa de frequências, medir a amplitude de resposta de todas as saídas geradas e então selecionar o maior valor como sendo a **norma** H_∞ deste sistema. Esta medição avaliará a *robustez* do sistema, e o controle baseado nesta norma promoverá a redução do pico da amplitude de resposta em frequência [43].

Durante a realização de tais otimizações é essencial que a FT objetivo permaneça estável, tal como descrito no capítulo anterior. A nomenclatura definida para estas normas segue esta necessidade, onde a letra H representa o *Espaço de Hardy* [41], que define o conjunto de todas as funções de transferência *próprias* e assintoticamente estáveis conforme definido em (4.9).

Para a FT objetivo dada em (2.41), a condição entre ser ou não ser *estritamente própria* está associada com o seu valor limite quando a variável de Laplace s tender ao infinito, ou seja:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{D}_{11} \quad (5.1)$$

O resultado deste limite dá o termo independente \mathbf{D}_{11} . Se ele for nulo, então:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 \quad (5.2)$$

Neste caso $\mathbf{T}_{zw}(s)$ é estritamente própria. Se $\mathbf{D}_{11} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{T}_{zw}(s)$ é própria, pois o valor do limite em (5.1) também será não-nulo [49].

Para a determinação da norma H_2 , o sub-índice 2 presente nesta representação indica que seu cálculo é feito pela norma matricial *base 2*, ou *Euclidiana*. Ela representa neste caso o somatório de todas as contribuições na saída do sistema devido às perturbações em todas as entradas, e em todas as frequências [23].

No caso da norma H_∞ , o sub-índice ∞ indica que o cálculo se dará pelo valor equivalente ao pico da magnitude da resposta em frequência [19]. Entretanto, esta afirmação é mais adequada para os sistemas SISO. Para facilitar esta determinação nos sistemas MIMO, que é o caso em estudo, faz-se necessária a definição do *valor singular* de uma FT.

Seja $\mathbf{H}(s)$ uma função genérica descrita no espaço de estados com m entradas e n saídas representando um sistema dinâmico. Para uma determinada frequência w , a função $\mathbf{H}(jw) \in C^{m \times n}$ é uma matriz constante representando o ganho do sistema naquela frequência [19]. A forma matricial de uma FT já foi apresentada na equação (2.36). Desta forma, os valores singulares de $\mathbf{H}(jw)$ são dados por:

$$\sigma_i[\mathbf{H}(jw)] := \sqrt{\lambda_i[\mathbf{H}^*(jw)\mathbf{H}(jw)]} \quad \therefore i = 1, \dots, k; k = \min\{m, n\} \quad (5.3)$$

A seguir são apresentadas em maiores detalhes as duas normas, bem como as condições necessárias para a resolução do problema de controle estudado.

5.2 Norma H_2 e Espaço $\mathfrak{R}H_2$

Seja a função de transferência $\mathbf{T}_{zw}(s)$ dada na equação (2.41); a sua norma H_2 é definida por [26]:

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_2 := \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{T}_{zw}^*(jw)\mathbf{T}_{zw}(jw)] dw \right]^{1/2} \quad (5.4)$$

Para que o valor da norma H_2 exista, a função $\mathbf{T}_{zw}(s)$ deve pertencer ao espaço \mathcal{RH}_2 , que é um sub-espço de Hardy. Assim, além de ser racional e analítica em $\Re\{s\} \geq 0$, ela deve ser estritamente própria [50], conforme dado em (5.2). Os teoremas a seguir efetuarão uma reformulação matemática desta norma, adaptando-a para as matrizes de estado já definidas.

Teorema 5.1 (Parseval) *Seja $\mathbf{H}(t)$ a transformada inversa de Laplace de uma função de transferência estritamente própria representada por $\mathbf{H}(s)$. É possível provar que [2, 26]:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{H}^*(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)] d\omega = \int_0^{\infty} \text{tr}[\mathbf{H}^t(t)\mathbf{H}(t)] dt \quad (5.5)$$

Usando a representação das matrizes de estado, a transformada inversa de Laplace de $\mathbf{H}(s)$ é dada por:

$$\mathbf{H}(s) := \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathbf{H}(t) := \mathbf{C}e^{(\mathbf{A}t)}\mathbf{B} \quad (5.6)$$

Conseqüentemente, usando as definições de (5.5) e (5.6), pode-se escrever a norma H_2 de $\mathbf{T}_{zw}(s)$ de outra forma:

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_2^2 := \int_0^{\infty} \text{tr}(\mathbf{B}_1^t e^{(\mathbf{A}t)} \mathbf{C}_1^t \mathbf{C}_1 e^{(\mathbf{A}t)} \mathbf{B}_1) dt \quad (5.7)$$

Teorema 5.2 (Plancherel) *Seja $\mathbf{H}(s)$ uma função estritamente própria, cuja condição de estabilidade é determinada pela equação de Lyapunov dada em (4.8). A matriz \mathbf{P} , solução desta equação, é chamada de **Grammiano de Observabilidade** [2], definida por:*

$$\mathbf{P} := \int_0^{\infty} e^{(\mathbf{A}t)} \mathbf{Q} e^{(\mathbf{A}t)} dt, \quad \mathbf{Q} := \mathbf{C}_1^t \mathbf{C}_1 \quad (5.8)$$

Desta forma, substituindo (5.8) em (5.7), chega-se à expressão:

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_2^2 := \text{tr}(\mathbf{B}_1^t \mathbf{P} \mathbf{B}_1) \quad (5.9)$$

5.2.1 Formulação Convexa do Problema H_2

Uma vez que a matriz \mathbf{P} foi definida no teorema 5.2 através da condição de estabilidade de Lyapunov, a igualdade dada em (5.9) deve incluir a equação de Lyapunov (4.8) como restrição a fim de assegurar a estabilidade do sistema. É sabido que ela pode expressar o caso limite de igualdade para o qual o sistema será estável. Assim, transformá-la em uma LMI negativo-definida fará com

que o sistema tenha uma maior garantia de estabilidade. Substituindo \mathbf{Q} dado em (5.8) na equação (4.8) assim modificada, tem-se uma restrição para a minimização de (5.9):

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}_1^t \mathbf{C}_1 \prec \mathbf{0} \quad (5.10)$$

Finalmente, o problema H_2 descrito na forma convexa definida por (4.3) na variável \mathbf{P} , e aplicando o complemento de Schur na restrição (5.10), será dado por [47]:

$$\min_{\text{s.a. estabilidade}} \|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_2^2 \rightarrow \begin{cases} \min \text{tr}(\mathbf{B}_1^t \mathbf{P} \mathbf{B}_1) \\ \text{sujeito a: } \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{C}_1^t \\ \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \mathbf{P} \succ \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.11)$$

Mais adiante serão apresentadas as formas de otimização usando esta norma, onde a realimentação da planta através do controlador \mathbf{K} , ilustrado na Figura 2.6, pode ser feita de muitas maneiras. A depender desta configuração, o projeto do controlador será executado de formas diferentes.

5.3 Norma H_∞ e Espaço $\mathfrak{R}H_\infty$

Para que seja obtida a norma H_∞ de uma função, é necessário que ela pertença ao espaço $\mathfrak{R}H_\infty$. Ele é constituído pelas FT racionais, analíticas no conjunto $\Re(s) \geq 0$ e próprias [50]. Ou seja, a estabilidade assintótica também é essencial para que a função tenha sua norma H_∞ calculada, mas ela não precisa ter necessariamente o termo independente nulo, conforme apresentado após a definição dada em (5.1).

Para que seja possível descrever o problema de controle baseado na norma H_∞ por minimização convexa, para um sistema representado por uma FT pertencente ao espaço $\mathfrak{R}H_\infty$, é dado o teorema abaixo. A notação das variáveis nele definidas deve ser considerada como exclusiva para uso do teorema, sem relação com quaisquer outras já definidas anteriormente.

Teorema 5.3 *Seja uma FT $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \in \mathfrak{R}H_\infty$, com a matriz da equação homogênea \mathbf{A} assintoticamente estável; e seja a matriz **Hamiltoniana** $\mathbf{Z}(\gamma)$, sem autovalores no eixo imaginário dada abaixo [19]:*

$$\mathbf{Z}(\gamma) := \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^t \\ -\mathbf{C}^t(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t)\mathbf{C} & -(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t\mathbf{C})^t \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n} \quad (5.12)$$

sendo $\mathbf{R} := \gamma\mathbf{I} - \mathbf{D}^t\mathbf{D} > \mathbf{0} \Rightarrow \bar{\sigma}(\mathbf{D}) < \sqrt{\gamma}$

Então as seguintes sentenças são válidas e equivalentes [23, 51, 52, 53]:

1. $\|\mathbf{H}(s)\|_{\infty}^2 < \gamma$
2. Existe uma solução \mathbf{P} , simétrica e semi-positivo definida, estabilizadora da equação algébrica de Riccati associada com a matriz $\mathbf{Z}(\gamma)$:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t\mathbf{C})^t\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t\mathbf{C}) + \mathbf{C}^t(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t)\mathbf{C} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^t\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

3. (Bounded-Real Lemma) Para um sistema linear descrito pela FT $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$, a LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^t\mathbf{C} & \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}^t\mathbf{D} \\ \mathbf{B}^t\mathbf{P} + \mathbf{D}^t\mathbf{C} & \mathbf{D}^t\mathbf{D} - \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \preceq \mathbf{0}, \quad (5.14)$$

será factível se e somente se:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_{\infty}^2 < \gamma$$

Aplicando o complemento de Schur na LMI (5.14), resultará em:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^t\mathbf{C} + (\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}^t\mathbf{D})(\gamma\mathbf{I} - \mathbf{D}^t\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{B}^t\mathbf{P} + \mathbf{D}^t\mathbf{C}) \preceq \mathbf{0}$$

Usando a definição de \mathbf{R} vista em (5.12) e desmembrando os produtos em parênteses:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^t\mathbf{C} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t\mathbf{C} + \mathbf{C}^t\mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^t\mathbf{P} + \mathbf{C}^t\mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^t\mathbf{C} \preceq \mathbf{0}$$

Esta inequação matricial permite, portanto, a condição de igualdade à matriz nula. Reagrupando-a convenientemente e considerando apenas a condição limite de igualdade, obtém-se exatamente a equação algébrica de Riccati dada em (5.13). Conseqüentemente, a factibilidade de (5.14) através da sentença 1, verifica a sentença 2 no limite de estabilidade. Maiores detalhes e provas algébricas destas sentenças podem ser encontradas nas referências citadas no enunciado do teorema.

Com as afirmações do teorema 5.3, é possível descrever um problema de otimização pela norma H_{∞} , já que a FT objetivo preenche todos os requisitos necessários para pertencer ao espaço \mathfrak{RH}_{∞} : as matrizes de estado que a compõem são reais, tornando a FT racional; ela é estável, tornando-a analítica em $\Re(s) \geq 0$; e também é própria pois $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$. Conforme visto anteriormente, a norma H_{∞} é dada pelo pico do diagrama de valores singulares de uma FT, isto é [53]:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_{\infty} := \sup_w \bar{\sigma}[\mathbf{H}(jw)] \quad (5.15)$$

Logo, a norma H_{∞} significa num sistema MIMO o maior valor no diagrama de valores singulares da sua FT. Otimizar a função $\mathbf{T}_{zw}(s)$ no espaço \mathfrak{RH}_{∞} significa minimizar a sua norma H_{∞} ,

que por sua vez representa minimizar o escalar γ , limitador deste valor, conforme sentença 1. O resultado fará com que o gráfico de valores singulares de $\mathbf{T}_{zw}(s)$ no domínio das frequências tenha a sua amplitude máxima de resposta reduzida ao mínimo possível.

Para construir a forma convexa do problema H_∞ utilizada para definir o controlador neste trabalho, será necessário introduzir os conceitos de estabilidade robusta aplicado aos sistemas MIMO.

5.3.1 Norma H_∞ e Estabilidade Robusta

Conforme definido anteriormente, a estabilidade robusta de um sistema é garantida quando um controlador que estabiliza a sua planta nominal também garante a estabilidade para a planta real. Para esta definição ser aplicada ao sistema em estudo, são dadas as definições a seguir.

Como a norma H_∞ é uma norma induzida, de acordo com o apresentado no Apêndice A em (A.1), ela respeita a seguinte propriedade, aqui apresentada para \mathbf{A} e \mathbf{B} quaisquer:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{B}\|_\infty \quad (5.16)$$

A norma H_∞ de um sistema real com sua incerteza concentrada modelada de forma multiplicativa, representada pela Figura 3.2, pode ser apresentada através da propriedade (5.16), uma vez que esta permite o tratamento de Δ no domínio das frequências [19]. Usando o teorema 3.1 da seção 3.2, e a mesma nomenclatura para as variáveis lá apresentada, obtém-se [1]:

$$\|\mathbf{M} \cdot \Delta\|_\infty \leq \|\mathbf{M}\|_\infty \cdot \|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad (5.17)$$

A matriz \mathbf{M} representa a FT nominal controlada por $\mathbf{K}(s)$, vista pela incerteza Δ , de acordo com a Figura 3.2. Assim, do teorema 5.3, pode-se escrever:

$$\|\mathbf{M}\|_\infty^2 < \gamma$$

e de (5.17) tem-se que:

$$\|\Delta\|_\infty^2 \leq \frac{1}{\gamma} \quad (5.18)$$

Isto significa que, uma vez encontrado o valor γ que minimiza a norma H_∞ de uma FT, existe um valor máximo de incertezas admissíveis tal que o sistema mantenha-se estável, representado pelo inverso de γ . Este valor máximo para sistemas MIMO é dado aqui em função dos valores

singulares [2]. Comparando as definições de (5.15) com (5.18), observa-se que máximo valor singular de $\mathbf{T}(j\omega)$ relaciona-se com a variável γ , obtendo-se enfim:

$$\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] = \frac{1}{\bar{\sigma}[\mathbf{T}(j\omega)]} < \gamma^{-1/2}$$

Esta relação indica que o máximo valor singular das incertezas no domínio das frequências equivale ao inverso do máximo valor singular da FT complementar, $\mathbf{T}(j\omega)$. Estas incertezas determinam a faixa de estabilidade robusta do sistema, através do teorema do ganho pequeno dado em 3.1. Em outras palavras, o teorema 3.1 garante a estabilidade do sistema, mas a recíproca não é verdadeira. Pode haver um sistema estável que não respeite as fronteiras impostas pelo teorema do ganho pequeno, o que será visto mais adiante.

5.3.2 Formulação Convexa do Problema H_∞

Conforme apresentado na equação (5.18), as incertezas não-estruturadas do sistema receberam um valor limitante, dado pela norma H_∞ da mesma. Pelo conceito de estabilidade robusta introduzido anteriormente, ao se minimizar a norma H_∞ de uma FT, estará se promovendo uma maior capacidade do sistema representado por esta FT de absorver tais incertezas. É exatamente isto que a variável escalar γ representa. Dada pela sentença 1 do teorema 5.3, ela serve de limitante para a norma H_∞ da FT objetivo. Assim, ao ser minimizada, possibilita uma maior capacidade de absorção de incertezas por parte do sistema modelado.

Usando as definições do *Bounded-Real Lemma*, introduzido na sentença 3 do teorema 5.3, tem-se que a LMI (5.14) é factível dentro do contexto de estabilidade robusta de uma FT, quando limitada pela norma H_∞ através do valor de γ . Assim, esta LMI servirá de restrição para o problema H_∞ na forma convexa almejada.

Conclui-se que o problema H_∞ que minimiza a FT objetivo de (2.41), respeitando as condições de estabilidade robusta, pode ser colocado na forma convexa apresentada em (4.3). Aplicando o complemento de Schur na LMI (5.14), restrição deste problema, obtém-se [43, 48]:

$$\min_{\substack{\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty^2 \\ \text{s.a. estabilidade}}} \rightarrow \begin{cases} \min \gamma \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^t \\ \mathbf{B}_1^t \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^t \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \\ \mathbf{P} > \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.19)$$

As formas de otimização usando a norma H_∞ também dependem do tipo de realimentação da planta através do controlador K . Antes deste esclarecimento, será apresentado a seguir o problema que reúne as duas formulações de otimização da FT objetivo até aqui estudadas.

5.4 Apresentação do Problema Misto

Os problemas de controle em normas H_2 e H_∞ apresentados anteriormente, foram estudados teoricamente e experimentalmente por diversos autores [22, 26, 50]. Neste trabalho eles são descritos com o propósito de servirem ao objetivo de atenuar as vibrações de uma viga engastada.

O problema de controle em H_∞ pode manter uma boa performance robusta, ou seja, garantir estabilidade mesmo para uma planta nominal onde as incertezas não foram descritas diretamente, desde que estas não superem o limite obtido pelo controlador. Por outro lado, este tipo de projeto preocupa-se principalmente com a robustez no domínio da frequência, e geralmente não garante um bom comportamento transiente para o sistema em malha fechada. Já o controle H_2 dá um resultado de performance muito mais adequado para os comportamentos transientes [25].

Desta forma, pode-se observar que estes dois modos de solução para um problema de controle podem não ser compatíveis diretamente, pois apresentam objetivos conflitantes. O ponto chave é que a minimização das normas H_2 e H_∞ não pode ser feito de forma independente no controle misto, pois elas dependem do mesmo controlador a ser determinado. De fato, quando a restrição γ para o problema de minimização em H_2/H_∞ tende ao infinito, o controle misto se aproxima do controlador ótimo em \mathcal{RH}_2 [26]. Isto significa que, num nível $\gamma < \infty$ existe um custo de performance a ser pago pelo controle misto.

Logo, combinar os objetivos de controle de H_2 com H_∞ em um único controlador dinâmico é considerado um passo a favor da evolução na teoria de controle robusto [25]. O principal objetivo nos problemas de controle misto é agrupar as principais características destas duas formulações para projetar um sistema de controle cuja medida de *performance robusta* [51] seja a mais adequada.

Este projeto torna-se efetivo quando se otimiza a performance do sistema, garantindo simultaneamente a sua robustez perante às incertezas. Isto significa dizer que o problema restrito de controle misto ótimo consiste em encontrar um controlador que minimiza a norma H_2 da FT objetivo, sujeita a uma restrição que é a norma H_∞ de outra FT, associada com o sinal influenciado pelas incertezas [54]. Sua representação usual em diagrama de blocos, considerando a possibilidade da

presença das incertezas, é a seguinte [47]:

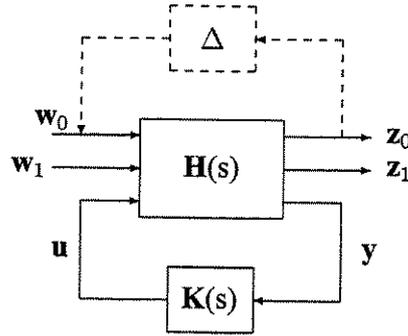


Figura 5.1: Representação genérica de um sistema para o problema misto

Escrevendo este problema matematicamente, tem-se [26]:

$$\min_K \{ \|H_{z_1 w_1}(s)\|_2^2 : \|H_{z_0 w_0}(s)\|_\infty^2 \leq \gamma; \gamma > 0 \} \quad (5.20)$$

O controlador K que resolve este sistema impõe à sua malha fechada a melhor performance contra todas as perturbações externas, medidas pela FT entre w_1 e z_1 , sujeita a condição de estabilidade robusta da planta. Esta estabilidade é garantida para as incertezas eventualmente existentes do modelo, expressas por $w_0 = \Delta z_0$, tais que, pelo teorema 3.1 e equação (5.18), respeitem a seguinte desigualdade [54]: $\|\Delta\|_\infty^2 \leq \gamma^{-1}$.

Este problema poderia ser resolvido adicionando um objetivo de controle - ou restrição - em H_2 para um projeto de controle conhecido em H_∞ [25, 26]. Mas este procedimento, chamado de *controle misto inverso*, é mais difícil e pouco prático. Um dos motivos está no fato da função objetivo pertencer, neste caso, ao espaço $\mathfrak{R}H_\infty$; enquanto que no caso a ser tratado neste trabalho ela pertencerá ao espaço $\mathfrak{R}H_2$, mais restrito que o anterior pelas definições já vistas de ambos.

A solução de (5.20) será obtida através da união entre as formulações convexas de (5.11) com (5.19), mas aplicadas em FT diferentes, conforme supracitado. Ela será apresentada após a explicação dos métodos de realimentação para os controles H_2 e H_∞ a seguir, que permitirão a descrição das formulações convexas finais do sistema de controle misto.

Capítulo 6

Controle via Realimentação de Saída

6.1 Definições Preliminares

Existem dois métodos principais para o controle de sistemas dinâmicos, através da realimentação de um sinal \mathbf{u} , visto nas figuras 2.4 e 2.5, que podem ser tratados por otimização convexa pelas normas H_2 e H_∞ . Denominados de *Realimentação de Estado* e *Realimentação de Saída*, estes métodos determinam como o sinal de controle é construído para a obtenção do objetivo de projeto: a minimização da resposta em frequência da FT $\mathbf{H}_{z_1 w_1}(s)$, definida em (5.20). As diferenças de formulação e implementação entre estes métodos são muito grandes, e os resultados que seriam obtidos na minimização das normas da FT objetivo podem ser bastante distintos.

O método da realimentação de estado considera que os valores das variáveis de estado, descritas pelo vetor \mathbf{x} em (2.40), alimentam diretamente o controlador. Isso implicará que ele atuará diretamente nas variáveis do sistema modelado, possibilitando uma maior redução da resposta em frequência da FT entre a saída e a entrada. O problema deste método está na sua pouca praticidade. Obter as variáveis de estado para um sistema complexo, com muitos graus de liberdade, é muito dispendioso, além da possibilidade de não haver condições de medir estas variáveis [23].

Apesar desta dificuldade não se fazer presente no sistema escolhido como exemplo para este trabalho, optou-se por usar o método da realimentação de saída, pois este é mais prático e pode ser estendido para sistemas mais complexos. O método usa as variáveis disponibilizadas pela própria resposta do sistema para controlar a planta modelada. Este método tem a desvantagem de ser mais complexo para implementar e resolver computacionalmente, pois as matrizes de estado do controlador também entram nas restrições em LMI do problema [25], conforme será visto adiante. Na realimentação de estado, apenas as matrizes de estado da FT objetivo e o ganho do controlador

estão nas restrições.

A estrutura do controlador misto com realimentação de saída, descrito na forma convexa apresentada na equação (4.3), será apresentada a seguir. Antes, serão impostas as condições admissíveis e as respectivas formulações para o controle H_2 e H_∞ .

6.2 Controlador Admissível em \mathcal{RH}_2 e em \mathcal{RH}_∞

Um controlador admissível para uma determinada planta é aquele que estabiliza internamente esta planta [54]. Estabilidade interna significa dizer que todos os estados do sistema em malha fechada vão a zero a partir de quaisquer condições iniciais caso o vetor de entradas w seja nulo [55]. Este controlador está representado pela Figura 2.6, e pode ser descrito pelas seguintes equações [26]:

$$\mathbf{K}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{y} \end{cases} \quad (6.1)$$

A conexão de realimentação entre $\mathbf{H}(s)$ e $\mathbf{K}(s)$ permite determinar qual deve ser a capacidade de estabilização que o controlador deve ter para ser admissível ao sistema. A fim de determinar estas condições de operação, é feita a substituição do termo y de (2.40) na equação de \mathbf{u} em (6.1), pondo depois os termos de \mathbf{u} , que é o sinal de controle, em evidência:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{v} + \mathbf{D}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) &\rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} (\mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Para que o sinal de controle exista, a equação resultante de \mathbf{u} exposta acima tem que ser resolvida. Assim, fica claro que o controlador é bem definido, em ambos os espaços \mathcal{RH}_2 e \mathcal{RH}_∞ , se e somente se ele for tal que [26]:

$$\det[\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22}] \neq 0 \quad (6.3)$$

Agora, uma vez que a FT objetivo deve ser estritamente própria por pertencer ao espaço \mathcal{RH}_2 , então o termo independente das matrizes de estado deve ser nulo. Observando a equação (2.41), que descreve a FT objetivo, este termo independente equivale à matriz \mathbf{D}_{11} . Porém, é preciso manipular o sistema de equações para obtê-lo em função das matrizes da planta e do controlador. Substitui-se o resultado de \mathbf{u} obtido em (6.2) na equação de \mathbf{z} em (2.40), e organizando os termos comuns às variáveis \mathbf{x} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , obtém-se:

$$\begin{aligned}
z &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} (\mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \rightarrow \\
\rightarrow z &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2] \mathbf{x} + [\mathbf{D}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{C}_c] \dot{\mathbf{x}}_c + \\
&\quad + [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}] \mathbf{w}
\end{aligned}$$

A equação de z em (2.40) apresenta o termo independente, \mathbf{D}_{11} , multiplicado por \mathbf{w} . Desta forma, na equação acima o termo independente também equivale ao termo que multiplica \mathbf{w} . Para que o controlador seja admissível no espaço \mathcal{RH}_2 , é preciso que a FT objetivo seja estritamente própria, conforme definição dada em (5.1) e (5.2). Logo, tem-se que [26]:

$$[\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}] = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

Uma das formas de obter esta igualdade é fazer a matriz \mathbf{D}_{11} ser nula, para simplificar, e conseqüentemente *pelo menos uma* das matrizes \mathbf{D}_{12} , \mathbf{D}_{21} ou \mathbf{D}_c também deve ser nula. Esta definição virá com a estrutura estabelecida para o controlador na realimentação de saída. Vale ressaltar que para o controlador ser admissível no espaço \mathcal{RH}_∞ , esta condição não é necessária, uma vez que a FT objetivo neste caso é própria.

Por último, para que $\mathbf{H}(s)$ seja estável, deve-se garantir que $\mathbf{K}(s)$ a estabilizará internamente. Isso significa dizer que a matriz dinâmica resultante do sistema em malha fechada deve possuir autovalores cuja parte real seja estritamente negativa. Agrupando as variáveis de estado da FT $\mathbf{H}(s)$, dadas pelas equações de (2.40), e do controlador $\mathbf{K}(s)$, dadas por (6.1), tem-se:

$$\bar{\mathbf{x}} := \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Substituindo a equação resultante de (6.2) na equação de $\dot{\mathbf{x}}$ vista em (2.40), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}$$

Para se obter a equação de $\dot{\mathbf{x}}_c$ vista em (6.1) para a malha fechada, realizam-se duas operações: substitui-se a equação resultante de (6.2) na equação de \mathbf{y} vista em (2.40), seguido da substituição deste resultado na equação de $\dot{\mathbf{x}}$, resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c [\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} (\mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w})]$$

Em seguida, reorganiza-se as duas equações anteriores para se obter a configuração abaixo:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_k \cdot \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{w}$$

Com isso, a matriz dinâmica resultante para a malha fechada, cujos autovalores devem ter parte real negativa para que o controle seja admissível nos espaços \mathfrak{RH}_2 e \mathfrak{RH}_∞ , será dada por [26]:

$$\mathbf{A}_k := \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2(\mathbf{I} - \mathbf{D}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2(\mathbf{I} - \mathbf{D}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c[\mathbf{I} + \mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\mathbf{D}_c]\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\mathbf{C}_c \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$\therefore \Re(\lambda_i[\mathbf{A}_k]) < 0 \forall i$

Uma vez determinada as condições de operação do controlador, já podem ser descritos os problemas de minimização convexa em cada uma das normas estudadas via realimentação de saída.

6.3 Controle por Norma H_2

Para fins de simplificação na definição deste controlador, adotou-se que as matrizes \mathbf{D}_{11} , \mathbf{D}_{22} e \mathbf{D}_c são nulas, respeitando as condições (6.3), (6.4) e (6.6) para um sistema controlado pertencer ao espaço \mathfrak{RH}_2 . Assim, construindo as equações da planta e do controlador dinâmico baseados na descrição matricial feita em (2.43), obtém-se:

$$\mathbf{P}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{K}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{0} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{cases}$$

As formulações apresentadas neste trabalho, para todos os problemas a seguir, são conhecidas e descritas apenas para controladores que possuam ordem completa. A determinação de controladores de ordem reduzida implicaria na utilização de uma formulação diferente, que não está no escopo deste trabalho. Um controlador de ordem completa é aquele cuja dimensão do vetor de estados da planta \mathbf{x} é igual a dimensão do vetor de estados do controlador, \mathbf{x}_c [47]. Agrupando estas variáveis em um só vetor de estado, tem-se a equação (6.5).

O equacionamento do problema de controle por realimentação de saída consiste em determinar o sistema (6.7) em malha fechada e determinar as matrizes do controlador. Para isso, efetuam-se operações análogas às utilizadas na obtenção da matriz \mathbf{A}_k do controlador admissível, dada em (6.6). Primeiro, substitui-se a equação do sinal de controle \mathbf{u} dentro das equações das variáveis \mathbf{x} e \mathbf{z} , e depois substitui-se a equação de \mathbf{y} dentro da equação de \mathbf{x}_c . Assim é obtida a FT $\mathbf{G}_{zw}(s)$ para controle em malha fechada, objetivo do problema, apresentada a seguir:

$$\mathbf{G}_{zw}(s) \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{cases}$$

Unindo estas equações com a definição de (6.5), é possível escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{zw}(s) &\leftrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{G}_{zw}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Desta forma, são obtidas as seguintes matrizes de estado [48]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}^t \quad (6.9)$$

Nota-se claramente que a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ é exatamente a mesma que seria obtida a partir de (6.6), caso fossem lá substituídas as matrizes consideradas nulas para esta formulação: \mathbf{D}_{22} e \mathbf{D}_c . Está evidente que esta matriz respeita a condição determinada naquela equação para o controlador ser admissível.

Observe que (6.8) é uma função estritamente própria, característica dos espaços $\Re H_2$. Conseqüentemente, usando a mesma álgebra que formou o problema H_2 convexo apresentado em (5.11), chega-se à seguinte configuração para o sistema controlado [47]:

$$\min \|\mathbf{G}_{zw}(s)\|_2^2 \quad \text{s.a. estabilidade} \rightarrow \begin{cases} \min \text{tr}(\tilde{\mathbf{B}}^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}) \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^t \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \quad \tilde{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.10)$$

Para encontrar a solução deste problema, vinculada à existência de uma matriz $\tilde{\mathbf{P}}$, simétrica e positivo-definida como visto no teorema 5.2, é necessário realizar algumas *transformações congruentes* convenientes ao espaço $\Re H_2$ [47]. Elas são necessárias para que o problema (6.10) acima possa ser escrito na forma de SDP. Primeiramente, será introduzida esta propriedade no seguinte teorema [18]:

Teorema 6.1 (Congruência) *Dada uma matriz \mathbf{X} , simétrica e positivo-definida, a sua transformação congruente feita por uma matriz \mathbf{T} não-singular, também será positivo-definida e dada por:*

$$\mathbf{T}^t \mathbf{X} \mathbf{T} \succ \mathbf{0}$$

Caso \mathbf{X} seja simétrica e negativo-definida, então a transformação terá a seguinte forma:

$$\mathbf{T}^t \mathbf{X} \mathbf{T} \prec \mathbf{0}$$

As transformações que serão realizadas para a obtenção do problema convexo, estarão em função de duas matrizes simétricas e invertíveis \mathbf{X} e \mathbf{Y} , associadas com a solução de Lyapunov $\tilde{\mathbf{P}}$ de acordo com as definições a seguir [47, 56]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^t \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}; \quad \tilde{\mathbf{P}}^{-1} := \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^t \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{T}} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Deste modo, o problema de controle H_2 consiste em encontrar um conjunto de matrizes factíveis \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{F} , \mathbf{M} e \mathbf{L} , tais que minimizem a norma H_2 da FT de malha fechada do sistema, $\mathbf{G}_{zw}(s)$. Elas irão compor as matrizes de estado da FT do controlador do sistema, com o auxílio de transformações convenientes que serão apresentadas para moldar as restrições em LMI na forma convexa.

Sendo \mathbf{U} e \mathbf{V} inversíveis, as seguintes igualdades são obtidas a partir da identidade gerada pela multiplicação de $\tilde{\mathbf{P}}$ com $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ [56, 57]:

$$\begin{cases} \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{U}^t\mathbf{V} = \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{V} = (\mathbf{U}^t)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}) \\ \mathbf{X}\mathbf{V}^t + \mathbf{U}^t\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{0} \longrightarrow \hat{\mathbf{Y}} = (\mathbf{U}^t)^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^t\mathbf{X}^t - \mathbf{X})\mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{U}\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{V} = \mathbf{0} \longrightarrow \hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{U}(\mathbf{Y}^{-1} - \mathbf{X})^{-1}\mathbf{U}^t \\ \mathbf{U}\mathbf{V}^t + \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{I} \end{cases} \quad (6.12)$$

Assim, as matrizes $\tilde{\mathbf{P}}$ e $\tilde{\mathbf{T}}$ podem ser escritas somente em função de \mathbf{X} e \mathbf{Y} . A partir daí, foram construídas transformações matriciais convenientes, usando $\tilde{\mathbf{P}}$ e $\tilde{\mathbf{T}}$ sobre as matrizes de estado dadas em (6.9). Isto modificará as restrições de (6.10) para que seja obtido o problema H_2 em função das matrizes de estado dadas em (6.7). Deste modo, tem-se que a transformação para $\tilde{\mathbf{P}}$ é [47, 56, 57]:

$$\tilde{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{T}}^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} \succ \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (6.13)$$

A transformação utilizada para $\tilde{\mathbf{C}}$, necessária para a obtenção da matriz de estado do controlador \mathbf{C}_c , é dada a seguir [47, 57]:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}) & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathbf{F} := \mathbf{C}_c\mathbf{V} \quad (6.14)$$

Abaixo é apresentada a transformação utilizada para $\tilde{\mathbf{B}}$, necessária para a obtenção da matriz de estado do controlador \mathbf{B}_c [47, 57]:

$$\tilde{\mathbf{B}}^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^t & (\mathbf{B}_1^t \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^t \mathbf{L}^t) \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathbf{L} := \mathbf{U}^t \mathbf{B}_c \quad (6.15)$$

Finalmente, a transformação abaixo apresentada envolve $\tilde{\mathbf{A}}$, necessária para a obtenção da matriz de estado do controlador \mathbf{A}_c [47, 57]:

$$\tilde{\mathbf{T}}^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} \\ \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad \therefore \mathbf{M} := \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}^t \mathbf{A}_c \mathbf{V} \quad (6.16)$$

Para que o problema H_2 passe para a forma convexa desejada, as transformações matriciais convenientes devem ser aplicadas às suas duas restrições e também ao seu argumento, vistos em (6.10). Estas transformações usarão as definições descritas acima para que o problema se apresente em função das matrizes de estado apresentadas em (6.7), e das matrizes \mathbf{X} e \mathbf{Y} apresentadas como componentes da solução de Lyapunov em (6.13), que é uma das restrições do problema final descrito adiante.

O argumento original do problema, $\tilde{\mathbf{B}}^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}$, será redefinido com este propósito. Ele será comparado por uma desigualdade com uma matriz \mathbf{Z} de forma tal que, quando esta for minimizada no lugar do argumento original, este também seja mínimo. Apresentando esta desigualdade e aplicando nela o complemento de Schur, obtém-se:

$$\mathbf{Z} \succ \tilde{\mathbf{B}}^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \tilde{\mathbf{B}}^t \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (6.17)$$

Efetuando uma transformação congruente, pré e pós-multiplicando a matriz resultante acima respectivamente por [18, 56]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^t \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

É obtida a primeira restrição:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^t & \mathbf{B}_1^t \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^t \mathbf{L}^t \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (6.18)$$

Executando a mesma seqüência para a primeira restrição em (6.10), mas fazendo a pré e a pós-multiplicação respectivamente por [18, 56]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Obtém-se a segunda restrição:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{YA}^t + \mathbf{F}^t\mathbf{B}_2^t & \mathbf{A} + \mathbf{M}^t & \mathbf{YC}_1^t + \mathbf{F}^t\mathbf{D}_{12}^t \\ \mathbf{A}^t + \mathbf{M} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{A}^t\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^t\mathbf{L} & \mathbf{C}_1^t \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (6.19)$$

Portanto, o problema H_2 na sua forma convexa final para a realimentação de saída, aplicado em $\mathbf{G}_{zw}(s)$, é dado por [47, 57]:

$$\min \|\mathbf{G}_{zw}(s)\|_2^2 \quad \text{s.a. estabilidade} \rightarrow \begin{cases} \min \text{tr}(\mathbf{Z}) \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^t & \mathbf{B}_1^t\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^t\mathbf{L}^t \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \\ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{A} + \mathbf{M}^t & \mathbf{YC}_1^t + \mathbf{F}^t\mathbf{D}_{12}^t \\ \mathbf{A}^t + \mathbf{M} & \mathbf{N}_2 & \mathbf{C}_1^t \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.20)$$

onde $\mathbf{N}_1 := \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{YA}^t + \mathbf{F}^t\mathbf{B}_2^t$; $\mathbf{N}_2 := \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{A}^t\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^t\mathbf{L}$

O resultado se apresentará nas matrizes \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{M} , \mathbf{F} e \mathbf{L} ; construtoras das matrizes do controlador, \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c , conforme apresentado em (6.16), (6.15) e (6.14) respectivamente. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= (\mathbf{U}^t)^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{XAY} - \mathbf{XB}_2\mathbf{F} - \mathbf{LC}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{B}_c &= (\mathbf{U}^t)^{-1}\mathbf{L} \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{FV}^{-1} \end{aligned} \quad (6.21)$$

A matriz \mathbf{V} é obtida pela matriz arbitrária \mathbf{U} através da primeira equação apresentada em (6.12). Esta arbitrariedade de \mathbf{U} não influenciará no resultado do controlador obtido, uma característica oriunda das transformações matriciais utilizadas. No **Apêndice B** é provada esta sentença, apresentando a FT final do controlador na equação (B.2).

Concluindo, a formulação de (6.20) trará a melhor *performance* da saída medida em \mathbf{z} com relação aos sinais de entrada \mathbf{w} . Ela será obtida pela minimização da norma H_2 dentro das restrições que condicionam a estabilidade de $\mathbf{G}_{zw}(s)$ e garantem a existência de um controlador admissível para tal feito.

6.4 Controle por Norma H_∞

A formulação deste problema de controle segue a mesma lógica utilizada para a norma H_2 . A diferença reside no fato de $\mathbf{G}_{zw}(s)$ não precisar ser estritamente própria, tornando a condição (6.4) desnecessária e permitindo uma maior generalização para as variáveis do sistema. Aqui, a única matriz a ser considerada nula será a matriz do controlador \mathbf{D}_c , para que a condição de existência do controlador no espaço $\mathfrak{R}H_\infty$, dada em (6.3) seja satisfeita.

Dada a planta e o controlador dinâmico abaixo:

$$\mathbf{P}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{K}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{0} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{cases}$$

A função de malha fechada para o controle H_∞ via realimentação de saída pode ser escrita da mesma forma com que foi obtida para o controle H_2 , substituindo a equação de \mathbf{u} dentro das equações das variáveis \mathbf{x} e \mathbf{z} , e também a equação de \mathbf{y} dentro da equação de \mathbf{x}_c , resultando em:

$$\mathbf{G}_{zw}(s) \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{22}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{cases}$$

Unindo as equações resultantes com o agrupamento dado em (6.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{zw}(s) &\leftrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{w} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{G}_{zw}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

As matrizes de estado em malha fechada desta FT são dadas por [58]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{22}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}^t; \quad \tilde{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}_{11}] \quad (6.23)$$

Aqui, assim como em (6.9), a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ poderia ser obtida diretamente de (6.6), fazendo esta formulação também ser coerente com a condição de existência lá descrita para um controlador estabilizador do sistema.

O próximo passo é usar estas definições no problema H_∞ já demonstrado e apresentado em

(5.19), obtendo a seguinte formulação:

$$\min \|\mathbf{G}_{zw}(s)\|_{\infty}^2 \quad \text{s.a. estabilidade} \rightarrow \begin{cases} \min \gamma \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^t \\ \tilde{\mathbf{B}}^t\tilde{\mathbf{P}} & -\gamma\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^t \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \tilde{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.24)$$

A seguir será efetuada a transformação congruente que seja conveniente para transformar a primeira restrição numa LMI que contenha as matrizes de estado dadas em (6.22). Note que a segunda restrição é idêntica à última do problema H_2 , com a transformação já apresentada em (6.13).

Resta, portanto, a transformação da primeira restrição do problema. Ela é dada pela pré e pós-multiplicação, respectivamente, por [18]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Esta operação resulta na matriz abaixo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{\mathbf{T}}^t(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{T}}^t\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{T}}^t\tilde{\mathbf{C}}^t & \\ \hline \tilde{\mathbf{B}}^t\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^t & \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mathbf{I} & \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \quad (6.25)$$

Efetuando o desmembramento do primeiro termo desta matriz, nota-se que existe a mesma transformação definida em (6.16), porém a diferença entre as matrizes $\tilde{\mathbf{A}}$ de (6.9) e (6.23) resultará numa configuração distinta daquela lá apresentada, para a resolução do problema na norma H_2 . A transformação terá a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{T}}^t\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} \\ \mathbf{M} + \mathbf{L}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Com os valores de \mathbf{F} , \mathbf{L} e \mathbf{M} sendo os mesmos impostos em (6.14), (6.15) e (6.16), respectivamente.

O primeiro termo da restrição do problema, escrito em (6.25), é o somatório da matriz de (6.26) e sua simétrica. Os demais termos sofrem as mesmas transformações congruentes já apresentadas na norma H_2 . Desta forma chega-se à seguinte inequação matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{\mathbf{T}}^t\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}^t\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^t + \mathbf{F}^t\mathbf{D}_{12}^t \\ \mathbf{C}_1^t \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^t & \mathbf{B}_1^t\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^t\mathbf{L}^t \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^t & \\ & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} & \end{array} \right] \prec \mathbf{0}$$

Finalmente, o problema H_∞ via realimentação de saída, incluindo as restrições com as matrizes de estado pode ser escrito por:

$$\min \|\mathbf{G}_{zw}\|_\infty^2 \quad \text{s.a. estab.} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \gamma \\ \text{sujeito a:} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^t + \mathbf{F}^t\mathbf{D}_{12}^t \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1^t \\ \hline \mathbf{B}_1^t & \mathbf{B}_1^t\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^t\mathbf{L}^t & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^t \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{array} \right] > \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Com as matrizes \mathbf{S}_i definidas abaixo, somente para facilitar a escrita do equacionamento:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &:= \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^t + \mathbf{F}^t\mathbf{B}_2^t; \\ \mathbf{S}_2 &:= \mathbf{A} + \mathbf{M}^t + \mathbf{F}^t\mathbf{D}_{22}^t\mathbf{L}^t; \\ \mathbf{S}_3 &:= \mathbf{S}_2^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{M} + \mathbf{L}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}; \\ \mathbf{S}_4 &:= \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^t\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^t\mathbf{L}^t \end{aligned} \quad (6.28)$$

Nota-se que este problema possui dois termos não-lineares, \mathbf{S}_2 e \mathbf{S}_3 , pois neles há o produto entre duas variáveis a serem calculadas na minimização: \mathbf{F} e \mathbf{L} . Com isso, a restrição onde estas variáveis estão presentes se torna não-linear, invalidando-a como uma LMI. Para que se possa efetuar a minimização no escopo do trabalho, fez-se necessário impor $\mathbf{D}_{22} := \mathbf{0}$, tornando a restrição em questão uma LMI e o problema dado em (6.27) um problema de minimização convexa. Como estas formulações servirão na montagem do problema misto, descrito mais adiante, a matriz \mathbf{D}_{22} também deve ser considerada nula para este problema.

Analogamente ao problema H_2 , as incógnitas também são as matrizes simétricas \mathbf{X} e \mathbf{Y} . Elas serão obtidas juntamente com o cálculo de \mathbf{V} em (6.12) a partir de um \mathbf{U} arbitrário; e com o cálculo de \mathbf{L} , \mathbf{F} e \mathbf{M} , relacionadas em (6.21) com as matrizes de estado do controlador. Maiores detalhes da implementação computacional utilizada para encontrar a solução através do *Matlab*, para os problemas H_2 e H_∞ , são apresentados no **Apêndice C**.

6.5 Controle Misto H_2/H_∞

Em virtude da maior dificuldade para o cálculo computacional existente na formulação para realimentação de saída, podem ser obtidos controladores mistos sub-ótimos projetados para serem muito próximos dos ótimos no intuito de minorar o esforço computacional. Este tipo de projeto simplifica as restrições deste problema, que são mais numerosas que nos controles H_2 e H_∞ , como

será apresentado nesta seção. A solução obtida através da programação semi-definida convexa, combina as restrições de ambos os controladores anteriormente apresentados.

A partir do esquema apresentado na Figura 5.1, uma representação algébrica genérica do sistema, incluindo um controlador dinâmico, é dada por:

$$\mathbf{H}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} & \mathbf{D}_{02} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{20} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z}_0 = \mathbf{C}_0\mathbf{x} + \mathbf{D}_{00}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{01}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{02}\mathbf{u} \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{10}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{20}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\mathbf{K}(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y} \end{cases}$$

A FT de malha fechada, que engloba o sistema e o controlador, pertencerá ao espaço \mathfrak{RH}_2 . Isso se deve ao fato de que o problema, definido em (5.20), é dado pela minimização da norma H_2 da FT $\mathbf{H}_{z_1\mathbf{w}_1}(s)$, restrita pela norma H_∞ da FT $\mathbf{H}_{z_0\mathbf{w}_0}(s)$. Além disso, para respeitar as condições do controlador admissível dadas em (6.3), (6.4) e (6.6), as matrizes \mathbf{D}_{11} , \mathbf{D}_{10} e \mathbf{D}_c devem ser nulas.

Usando a mesma definição do vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ vista em (6.5), fecha-se a malha do sistema para que sejam obtidas as duas FT apresentadas na formulação do problema visto em (5.20). Substituindo a equação do sinal de controle \mathbf{u} nas equações de $\dot{\mathbf{x}}$ e de \mathbf{y} da FT $\mathbf{H}(s)$, e substituindo o resultado desta última na equação de $\dot{\mathbf{x}}_c$ do controlador, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{20}\mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{22}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{cases}$$

Agrupando na forma matricial:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{22}\mathbf{C}_c \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{20} \end{bmatrix} \mathbf{w}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{w}_1$$

Reescrevendo as equações de \mathbf{z}_0 e \mathbf{z}_1 , obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 = \mathbf{C}_0\mathbf{x} + \mathbf{D}_{02}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_{00}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{01}\mathbf{w}_1 &\Rightarrow \mathbf{z}_0 = [\mathbf{C}_0 \quad \mathbf{D}_{02}\mathbf{C}_c]\tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{D}_{00}]\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{01}\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c &\Rightarrow \mathbf{z}_1 = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c]\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Redefinindo as matrizes destacadas entre colchetes acima, tem-se:

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{22}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{20} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_0 := [\mathbf{C}_0 \quad \mathbf{D}_{02}\mathbf{C}_c], \quad \tilde{\mathbf{C}}_1 := [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c] \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{D}}_0 := \mathbf{D}_{00}.$$

A partir das matrizes acima, são construídas as FT de malha fechada de onde será estruturado o problema de controle misto:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}_0\mathbf{w}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_0 &= \tilde{\mathbf{C}}_0\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}_0\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{01}\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_1 &= \tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{z}_0\mathbf{w}_0}(s) &= \tilde{\mathbf{C}}_0(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{D}}_0 \\ \mathbf{H}_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s) &= \tilde{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{B}}_1 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nota-se que $\mathbf{H}_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s)$ relaciona-se com o sinal de performance, sendo tratada no espaço $\mathfrak{R}H_2$, e por isso é estritamente própria. Enquanto que $\mathbf{H}_{\mathbf{z}_0\mathbf{w}_0}(s)$ associa-se com a robustez, pertence ao espaço $\mathfrak{R}H_\infty$, e portanto é própria. A formulação do problema geral misto para um sistema com realimentação de saída, será dada pela união das restrições de ambos os problemas, vistos em (6.10) e (6.24), ou seja:

$$\min \|\mathbf{H}_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s)\|_2^2 \quad \text{s.a. } \|\mathbf{H}_{\mathbf{z}_0\mathbf{w}_0}(s)\|_\infty^2 < \gamma \quad \text{s.a. estabilidade} \rightarrow \begin{cases} \min \text{tr}(\tilde{\mathbf{B}}_1^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}_1) \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}_1^t \\ \tilde{\mathbf{C}}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \tilde{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0}; \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{B}}_0 & \tilde{\mathbf{C}}_0^t \\ \tilde{\mathbf{B}}_0^t \tilde{\mathbf{W}} & -\gamma \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}_0^t \\ \tilde{\mathbf{C}}_0 & \tilde{\mathbf{D}}_0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}; \tilde{\mathbf{W}} \succ \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.31)$$

A necessidade por duas matrizes determinantes da condição de estabilidade por Lyapunov, $\tilde{\mathbf{P}}$ e $\tilde{\mathbf{W}}$, reside no fato das formulações terem sido obtidas independentemente. Da forma que foi exposto, este problema possui duas condições de estabilidade distintas, sendo que a matriz $\tilde{\mathbf{W}}$ está desvinculada dele. Por conseqüência, sua solução numérica com estas restrições em LMI se torna difícil. Portanto, uma alternativa viável consiste em impor uma restrição adicional [59], que é a de uma matriz de Lyapunov comum: $\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{P}}$. Em função desta imposição, estabelece-se um controlador misto sub-ótimo.

Para as matrizes $\tilde{\mathbf{B}}_1$ e $\tilde{\mathbf{C}}_1$ serão usadas as mesmas transformações de (6.15) e (6.14) respectivamente; já que estas são matrizes associadas com $\mathbf{H}_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}(s)$, a ser minimizada pela norma H_2 . Da mesma forma, a matriz de Lyapunov $\tilde{\mathbf{P}}$ tem sua transformação definida em (6.13). Entretanto, a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ é igual à dada no problema H_∞ , e sua transformação foi determinada em (6.26). Falta apenas determinar as transformações para $\tilde{\mathbf{B}}_0$ e $\tilde{\mathbf{C}}_0$, definidas de forma semelhante às já apresentadas:

$$\tilde{\mathbf{C}}_0 \tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{02} \mathbf{F} \quad \mathbf{C}_0] , \text{ sendo } \mathbf{F} := \mathbf{C}_c \mathbf{V} \quad (6.32)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_0^t \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{B}_0^t \quad \mathbf{B}_0^t \mathbf{X} + \mathbf{D}_{20}^t \mathbf{L}^t] , \text{ sendo } \mathbf{L} := \mathbf{U}^t \mathbf{B}_c \quad (6.33)$$

Nota-se que as definições de \mathbf{F} e \mathbf{L} são exatamente as mesmas já praticadas para as transformações de $\tilde{\mathbf{B}}_1$ e $\tilde{\mathbf{C}}_1$. A partir de agora, todos os passos algébricos já foram direta ou indiretamente

desenvolvidos nas determinações das restrições convexas em LMI para H_2 e H_∞ .

Partindo de (6.31) já com a matriz de Lyapunov unificada para as restrições, modifica-se o argumento do problema gerando uma nova restrição, que será idêntica a (6.17), obtendo-se:

$$\min \|\mathbf{H}_{z_1 w_1}(s)\|_2^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \text{tr}(\mathbf{Z}) \\ \text{sujeito a:} \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z} & \tilde{\mathbf{B}}^t \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{P}} \end{array} \right] \prec \mathbf{0}; \\ \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}_1^t \\ \tilde{\mathbf{C}}_1 & -\mathbf{I} \end{array} \right] \prec \mathbf{0}; \\ \left[\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{A}}^t \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}_0 & \tilde{\mathbf{C}}_0^t \\ \tilde{\mathbf{B}}_0^t \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}_0^t \\ \tilde{\mathbf{C}}_0 & \tilde{\mathbf{D}}_0 & -\mathbf{I} \end{array} \right] \prec \mathbf{0}; \tilde{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \end{array} \right. \rightarrow$$

É possível efetuar a mesma transformação congruente que levou à primeira restrição do problema H_2 , a equação (6.18). A mesma transformação também é efetuada para a segunda restrição acima, e seu resultado será análogo à segunda restrição do problema H_2 , dada em (6.19). A terceira e a quarta restrição do problema misto são idênticas às restrições do problema H_∞ , dadas em (6.27). Transformando-as da mesma forma apresentada anteriormente, através de (6.26) e de (6.13) respectivamente, serão obtidas as duas últimas restrições do problema misto escritas em função das matrizes de estado do sistema.

Logo, a forma final para o problema de otimização misto será:

$$\min \|\mathbf{H}_{z_1 w_1}(s)\|_2^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \text{tr}(\mathbf{Z}) \\ \text{sujeito a:} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^t & \mathbf{B}_1^t \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^t \mathbf{L}^t \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{X}^t \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^t + \mathbf{F}^t \mathbf{D}_{12}^t \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 & \mathbf{C}_1^t \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y}^t + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 & \mathbf{X}^t \mathbf{B}_0 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{20} \\ \mathbf{B}_0^t & \mathbf{B}_0^t \mathbf{X} + \mathbf{D}_{20}^t \mathbf{L}^t & -\gamma \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_0 \mathbf{Y}^t + \mathbf{D}_{02} \mathbf{F} & \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_{00} \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{Y} \mathbf{C}_0^t + \mathbf{F}^t \mathbf{D}_{02}^t \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{C}_0^t \\ & & \mathbf{D}_{00}^t \\ & & -\mathbf{I} \end{array} \right] \prec \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.34)$$

As matrizes \mathbf{S}_i são as mesmas definidas no problema H_∞ em (6.28). Vale lembrar que aqui também a matriz \mathbf{D}_{22} foi considerada nula, para linearizar as restrições acima onde ela se faz presente,

tornando assim o problema na forma convexa. Os detalhes da implementação computacional feita no *Matlab* para resolver este problema são dados no **Apêndice D**.

6.6 Alguns Detalhes da Implementação Computacional

Estes três problemas apresentados podem ser resolvidos através de uma implementação computacional no *Matlab*. Este *software* apresenta muitas formas de fazê-lo, e algumas delas foram utilizadas neste trabalho, buscando comparar os resultados obtidos.

A primeira delas é a minimização direta, usando as formulações finais apresentadas em (6.20) para o controle H_2 , (6.27) para o H_∞ e (6.34) para o misto. Para isto ser feito, é usado o comando *mincx*, que minimiza iterativamente um objetivo linear sujeito à restrições em LMI dadas nas respectivas formulações. As características de tolerância e precisão que a solução por este comando pode apresentar depende de uma série de valores de entrada, impostos pelo usuário. Estas definições são dadas no **Apêndice C.5** para os controles H_2 e H_∞ , e no **Apêndice D.1** para o misto. Maiores detalhes da implementação computacional são apresentados no **Apêndice C.1** para o controle H_2 , no **Apêndice C.3** para o controle H_∞ , e no **Apêndice D.2** para o misto.

A outra forma é através do comando *hinfmix*, que estabelece um controlador para realimentação de saída de acordo com as necessidades requeridas do usuário, introduzidas através das variáveis de entrada. Ele permite otimizar um projeto de várias formas: minimização apenas de *uma das normas*; minimizar *uma norma tornando a outra parte das restrições*; ou ainda minimizar *ambas as normas simultaneamente de forma sub-ótima*. Este comando pode portanto estabelecer qualquer um dos três tipos de controle estudados.

A formulação usada pela função *hinfmix* para qualquer um dos casos é escrita da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (\alpha \|\mathbf{H}_{z_0 w_0}(s)\|_\infty^2 + \beta \|\mathbf{H}_{z_1 w_1}(s)\|_2^2) \\ \text{sujeito a:} \\ \|\mathbf{H}_{z_0 w_0}(s)\|_\infty < \varphi ; \\ \|\mathbf{H}_{z_1 w_1}(s)\|_2 < \nu \end{array} \right. \quad (6.35)$$

Considera-se que $\mathbf{H}_{z_0 w_0}(s)$ e $\mathbf{H}_{z_1 w_1}(s)$ denotam as FT entre os sinais de entrada \mathbf{w}_i e as suas respectivas saídas \mathbf{z}_i , medidas de robustez e desempenho, conforme visto na Figura 5.1 e na equação (5.20). As variáveis escalares α e β definem exatamente qual será a proporção destas FT a serem minimizadas, onde $\alpha + \beta = 1$. As variáveis escalares φ e ν determinam valores máximos que as normas das FT podem assumir na minimização, sendo portanto as restrições do problema.

A formulação de (6.35) foi utilizada para comparar os resultados obtidos pela formulação de (6.20) para o controle H_2 . Para isso, foram eliminadas as suas duas restrições e fez-se $\beta = 1$. No **Apêndice C.2** é explicado em maiores detalhes como a implementação de (6.35) foi feita para servir de comparação ao problema H_2 dado em (6.20).

Além disso, uma vez que o principal objetivo deste trabalho é verificar a factibilidade da formulação obtida em LMI para o problema misto, optou-se por também comparar os resultados de (6.35) com a formulação de (6.34). Nota-se que estas formulações são significativamente diferentes entre si. Mesmo assim, é possível estabelecer uma otimização através de (6.35), similar ao problema (6.34), assumindo determinados valores para as variáveis escalares. Estas definições também são dadas no **Apêndice D.1**.

Para comparar os resultados obtidos pela formulação de (6.27) para o controle H_∞ , optou-se por utilizar o comando *hinflmi* do *Matlab*. Este comando resolve sistemas CTLTI também baseado em SDP, ou seja, usa LMI como restrições. A forma com que o comando *hinflmi* foi usado para servir corretamente ao propósito de certificar os resultados obtidos via *mincx* é apresentada em detalhes no **Apêndice C.4**.

As características do sistema a ser controlado, bem como os resultados dos controladores estudados para este sistema serão apresentados a seguir.

Capítulo 7

Resultados

7.1 Configuração para o Controle da Viga com 2 EF

A viga a ser controlada, ilustrada a seguir, foi configurada de modo a exemplificar casos comuns em controle de estruturas. Ela está engastada em uma de suas extremidades e livre na outra, onde há um distúrbio externo atuando, indicado por \mathbf{d} . Conforme apresentado na Figura 2.2, cada nó dos elementos finitos (EF) dispõe de três GDL. As características físicas da viga, essenciais para o cálculo das suas matrizes de massa, rigidez e amortecimento, assim como as posições de saída e ação de controle, estão dadas na figura abaixo.

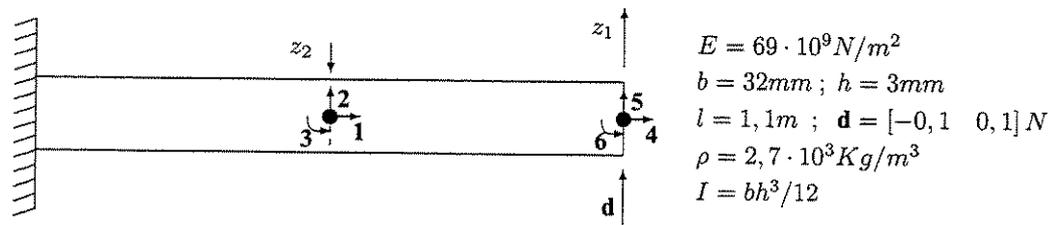


Figura 7.1: Representação esquemática da viga engastada para controle com 2 EF

O problema proposto para controle levou em consideração uma fonte de excitação externa para ser atenuada, vista na apresentação do trabalho na Figura 1.2. É um distúrbio externo aleatório (\mathbf{d}), aplicado na extremidade da estrutura, provocando sua vibração. Os controladores devem ser capazes de atenuar a vibração da viga perante esta entrada. Entretanto, o vetor de entradas \mathbf{w} , apresentado em (2.33), deve representar matematicamente as duas entradas exógenas, \mathbf{d} e \mathbf{r} , pois estas estarão presentes na formulação das matrizes de estado do sistema.

Vale ressaltar que o distúrbio aleatório \mathbf{d} foi gerado automaticamente e armazenado num arquivo a ser carregado nos algoritmos dos três problemas resolvidos a seguir. Ele foi construído por uma função de geração de valores randômicos entre -1 e 1, dados por uma distribuição normal. O resultado foi então multiplicado por $0,1/N$ para gerar um distúrbio com amplitude 0, 1, conforme visto na Figura 7.1, e promover uma vibração visível na viga. Com isso, objetiva-se comparar a resposta dos diversos sistemas controlados à mesma força externa.

Existem inúmeras maneiras de se controlar a viga ilustrada, uma vez que fica a critério do projetista selecionar qual GDL será diretamente controlado e qual servirá de saída para suprir o sistema de controle com a informação da vibração do sistema. Na prática, um GDL controlado é aquele onde está um *atuador* e um GDL de saída é aquele onde está um *sensor*. Dependendo das características dos sensores, pode-se projetar um controle baseado na saída de deslocamento ou de velocidade dos GDL. Isto pode ser identificado através do vetor de estados do sistema, onde para a estrutura da Figura 7.1, ele deve conter as posições e velocidades dos três GDL de cada nó, assumindo a seguinte forma [37]:

$$\mathbf{x} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ \dot{u}_1 \ \dot{v}_1 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{u}_2 \ \dot{v}_2 \ \dot{\theta}_2]^t \quad (7.1)$$

Esta determinação é feita através da escolha da matriz de estado \mathbf{C} , componente da equação da saída \mathbf{y} , dada em (2.26). Logo, a matriz \mathbf{C} do sistema original representa em qual GDL está atrelada a medição da saída do sistema. Optou-se por medir o GDL de deslocamento vertical da extremidade da viga, pois é neste GDL que acontecem as maiores vibrações e deflexões da mesma, além de ser este o GDL aonde estaria aplicado o distúrbio a ser atenuado. O algoritmo das opções de discretização da viga e a determinação dos GDL de saída e de controle, estão dentro do programa apresentado no **Anexo I**. No caso da viga discretizada em 2 EF, define-se a seguinte matriz \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

A matriz dinâmica \mathbf{A} , definida pela equação (2.27), já foi dita possuir ordem $2n \times 2n$, na construção da FT objetivo na forma compacta, exposta em (2.42). Assim, para a viga com 2 EF, tem-se um total de 6 GDL, resultando que \mathbf{A} terá tamanho 12×12 . Esta ordem é devido ao formato do vetor de estado, mostrado em (7.1). Calculada para a viga com as propriedades dadas na Figura 7.1, esta matriz \mathbf{A} está dada abaixo:

$$\mathbf{A} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ -362062 & 0 & 0 & 217237 & 0 & 0 & -3.6206 & 0 & 0 & 0 & 2.1724 & 0 \\ 0 & -25.314 & -6.198 & 0 & 25.603 & -8.3991 & 0 & -0.00026 & -0.00006 & 0 & 0.00026 & -0.00008 \\ 0 & -293.51 & -186.91 & 0 & 472.35 & -140.04 & 0 & -0.00294 & -0.00188 & 0 & 0.00472 & -0.0014 \\ 434474 & 0 & 0 & -362062 & 0 & 0 & 4.3447 & 0 & 0 & -3.6206 & 0 & 0 \\ 0 & -81.583 & -20.291 & 0 & 91.564 & -34.021 & 0 & -0.00082 & -0.0002 & 0 & 0.00091 & -0.00034 \\ 0 & -1425.5 & -423.7 & 0 & 1661.1 & -582.84 & 0 & -0.01426 & -0.00424 & 0 & 0.01661 & -0.00584 \end{bmatrix}$$

Já a matriz \mathbf{B} indica as entradas no sistema não controlado, ou original, e foi apresentada na equação (2.27). Entretanto, como haverá a inclusão de um distúrbio a ser controlado é preciso que a representação de estados do sistema original também receba a sua influência. Caso contrário a comparação dos comportamentos dos sistemas sem e com controle seriam diferentes, sendo o primeiro sem ação do distúrbio \mathbf{d} e o segundo com ele. Para que o parâmetro de comparação seja o mesmo e se possa verificar exclusivamente a ação do controlador sobre o sistema, é feita a identificação do GDL onde \mathbf{d} age no sistema.

Assim, para \mathbf{d} adotado na extremidade da viga com sentido para cima, tem-se que a matriz \mathbf{B}' deste modelo será dada pela multiplicação da matriz \mathbf{B} definida em (2.27) pelo vetor localizador \mathbf{s} [37], neste caso definido como:

$$\mathbf{s} := [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^t$$

pois o distúrbio está situado no 5º GDL.

O resultado deste produto dá a seguinte matriz:

$$\mathbf{B}' := \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = 10^3 \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.0089 \ 0.1336 \ 0 \ 0.0960 \ 1.1123]^t \quad (7.2)$$

Já que a FT do sistema original é estritamente própria, então, de acordo com a definição dada em (5.1), a matriz \mathbf{D} é nula.

Uma vez definidas as matrizes de estado para o sistema original, parte-se para a definição dos valores das demais matrizes, permitindo a identificação da FT dada na equação (2.40). Tem-se como referência que as entradas foram estabelecidas através do vetor \mathbf{w} , dado em (2.33). Portanto, deduz-se que a matriz \mathbf{B}_1 possui duas colunas, associadas com as entradas externas representadas por \mathbf{d} e \mathbf{r} . A primeira coluna de \mathbf{B}_1 é determinada pela matriz \mathbf{B}' , pois esta representa uma entrada no 5º GDL da viga. Entretanto, considerou-se que não há ruídos na entrada, e com isso a segunda coluna de \mathbf{B}_1 é inteiramente nula. Assim:

$$\mathbf{B}_1 = [\mathbf{B}' \ \mathbf{0}] \quad (7.3)$$

A matriz \mathbf{B}_2 associa-se com o vetor de controle \mathbf{u} , conforme visto em (2.40). Como este vetor também equivale à uma força aplicada, mas desta vez no GDL de deslocamento vertical do centro da viga, então \mathbf{B}_2 será dada por:

$$\mathbf{B}_2 := \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \quad (7.4)$$

sendo \mathbf{c} o vetor localizador do GDL de controle, que é o 2º:

$$\mathbf{c} := [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$$

Assim, os valores encontrados para a matriz \mathbf{B}_2 foram:

$$\mathbf{B}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 12.4567 \ 48.2331 \ 0 \ 8.8812 \ 198.5944]^t$$

Como foi apresentado na Figura 1.2, os problemas de controle neste trabalho foram estabelecidos para minimizar simultaneamente as vibrações vistas no GDL vertical da extremidade da viga, representados através da variável z_1 , com o sinal de controle indicado por z_2 . Deste modo nota-se que os problemas estudados podem ser considerados como controle não-colocado [24], pois o GDL controlado através de u é diferente do que apresenta a saída z_1 do sistema.

Conforme indicado no texto da seção 2.9, a matriz \mathbf{C}_1 indica qual(is) GDL está(ão) na saída medida do sistema, que no caso já apresentado restringe-se apenas à saída z_1 . Entretanto, como o vetor de saídas objetivo é composto por dois elementos, a matriz \mathbf{C}_1 deve portanto possuir duas linhas, sendo a segunda associada com o sinal z_2 . Usando a definição do sistema linear dada pela equação (2.40), e sabendo-se que $\mathbf{u} = z_2$; então tem-se que:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (7.5)$$

Deste modo, a segunda linha de \mathbf{C}_1 deve ser nula, e a definição do sinal z_2 é feita pela matriz \mathbf{D}_{12} acima apresentada entre colchetes. Ela indica se o sinal de controle está ou não está presente diretamente no vetor de saídas \mathbf{z} , que é a medida de desempenho que se deseja minimizar.

Porém, a saída z_1 deve conter o mesmo GDL da saída do sistema original, descrito pela matriz \mathbf{C} , para fins de comparação direta dos comportamentos de antes e depois da aplicação do controle. Reunindo estas informações, isto resulta em:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

A matriz \mathbf{C}_2 indica o GDL medido pelo sensor, gerando a saída y que alimenta o controlador, como se pode ver em (2.40) e nas figuras 1.2 e 2.6. Com isso, obtém-se:

$$\mathbf{C}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (7.7)$$

Para o controle H_2 ser admissível sobre a FT $\mathbf{G}_{zw}(s)$, é sabido que as matrizes \mathbf{D}_{11} e \mathbf{D}_{22} devem ser nulas. No caso do controle H_∞ , a matriz \mathbf{D}_{22} deve ser nula devido à necessidade apresentada pela definição das variáveis dadas em (6.28), pois a LMI que as contém só pode ser válida com $\mathbf{D}_{22} = 0$. Já a matriz \mathbf{D}_{11} , devido à estrutura física do sistema apresentado, indica que nem os distúrbios aleatórios e nem os ruídos de medição poderiam influenciar diretamente as saídas medidas. Conseqüentemente, para o controle H_∞ também tem-se que:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{D}_{21} é composta por dois elementos que se associam, respectivamente, com o distúrbio externo \mathbf{d} e com o ruído de medição \mathbf{r} ; componentes do vetor \mathbf{w} . Sabe-se que o distúrbio aleatório não afeta diretamente o sinal \mathbf{y}_m que entra no controlador. Assim, resta apenas a influência dos ruídos de medição na saída, conforme a representação vista na Figura 1.2. Isto resulta, para ambos os controles H_2 e H_∞ , em $\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Esta consideração é normalmente feita para respeitar os critérios de rank desta matriz, vistos nas referências [2, 55], e para garantir um controlador próprio no caso H_∞ .

Para finalizar, as matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{C}_0 , presentes exclusivamente no controle misto, serão dadas no respectivo tópico subseqüente com suas escolhas justificadas, juntamente com os resultados do controlador H_2/H_∞ . Devido à possibilidade da presença de mais uma entrada (\mathbf{w}_0) e mais uma saída (\mathbf{z}_0) na representação de estados do sistema, todas as matrizes \mathbf{D} presentes na estrutura dada em (6.29) terão seus valores redefinidos para o controle misto.

7.2 Resultados para o Controle H_2 na viga com 2 EF

Com as matrizes de estado todas definidas, foi executada a rotina do *Matlab* dada no Anexo VIII, para a viga com 2 EF. Foram então obtidas as soluções de minimização dos problemas de controle H_2 , apresentados em (6.20) e (6.35), cujos gráficos comparativos da sua FRF (*Função de Resposta em Freqüência*) com a do sistema original estão na Figura 7.2 a seguir.

Através deste gráfico observa-se que as duas formas de resolução exerceram praticamente o mesmo efeito na redução da amplitude de resposta do sistema original (tracejado). A solução da SDP de (6.20) via *mincx* pode ser considerada como adequada, haja visto que ela e a solução de (6.35) via *hinfmix* ficaram indistinguíveis. Salienta-se que neste gráfico aparecem apenas os quatro primeiros modos, pois os dois GDL associados com os movimentos axiais não foram excitados diretamente e apresentaram amplitudes pequenas demais para serem consideradas.

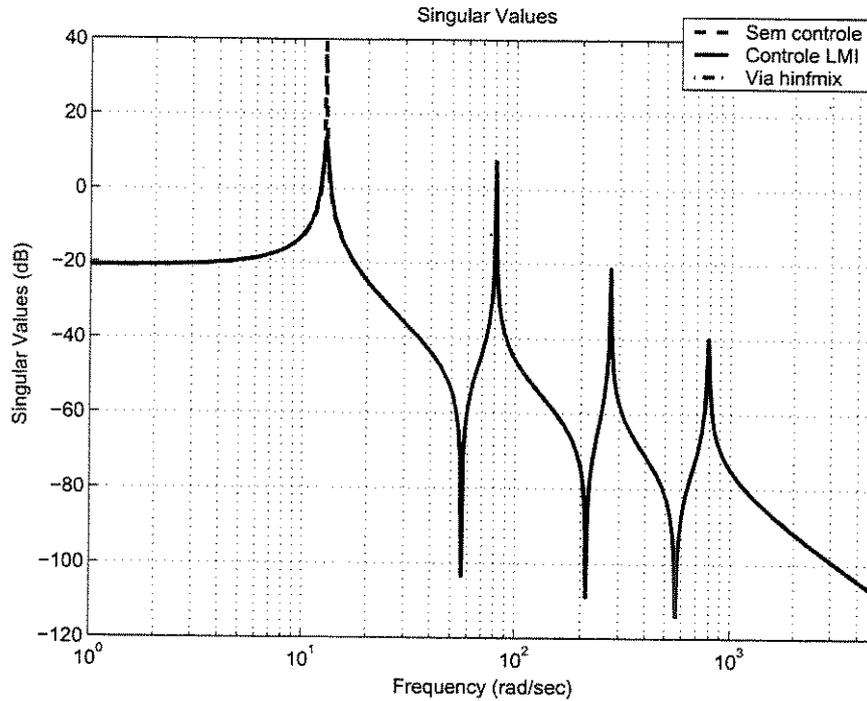


Figura 7.2: FRF dos sistemas sem controle e com controle H_2 para 2 EF

Os resultados da norma H_2 em ambos os casos estão dados na tabela 7.1 abaixo. Em primeiro é apresentado o resultado do sistema original, seguido do controlado obtido pela minimização via *mincx*, e por último o valor obtido pela minimização através do comando *hinfmix* sobre a FT de malha fechada.

Sistema	Valor da Norma H_2
$\ \mathbf{H}(s)\ _2$ (não controlado)	7,2594
$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _2$ (via <i>mincx</i>)	$\sqrt{\text{tr}(\mathbf{Z})} = \sqrt{9,0714} = 3,0119$
$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _2$ (via <i>hinfmix</i>)	3,0045

Tabela 7.1: Resultados das Normas H_2 para 2 EF

Verifica-se a proximidade entre os valores obtidos pelas duas minimizações, como era esperado. A seguir é dado o gráfico que compara as amplitudes de vibração da viga com e sem o controle H_2 , perante ao sinal aleatório \mathbf{d} , aplicado no 5° GDL.

Observa-se uma pequena redução nas vibrações em virtude da aplicação do controle obtido por ambas as minimizações. Os dois controladores, tanto via comando *mincx*, como via comando *hinfmix*, apresentam respostas que se superpõem. Este tipo de sinal de distúrbio excita várias frequências num intervalo de tempo bem curto, caracterizando-se por uma entrada transiente si-

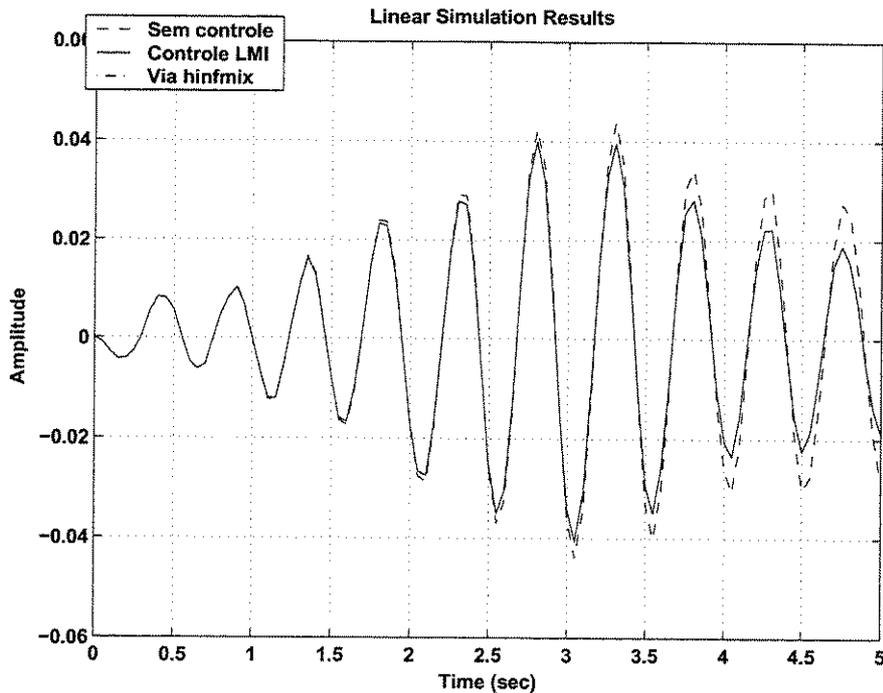


Figura 7.3: Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e com controle H_2 para 2 EF

milar ao ruído branco. A pequena atenuação neste caso se deve a uma maior redução do sinal de controle (\mathbf{u}), que também é objetivo do controlador, determinado pela variável z_2 . O controlador visa, portanto, reduzir as vibrações da extremidade da viga através do mínimo esforço de controle possível. Com uma menor força agindo no controle da viga, as amplitudes de vibração não foram reduzidas com uma maior intensidade.

Para corroborar o que foi dito, na Figura 7.4 a seguir são apresentados os esforços de controle. Este gráfico apresenta a amplitude destes esforços, comparando novamente as ações dos controladores obtidos via *mincx* e via *hinfmix*. Observa-se mais uma vez a superposição entre os resultados de \mathbf{u} nos dois controladores, e a óbvia ausência de sinal de controle quando o sistema não está submetido à tal condição.

Assim, verifica-se que a formulação vista na equação (6.20) para o controle H_2 , utilizada para o modelo da viga adotado, foi adequada e capaz, já que os resultados praticamente coincidiram com os determinados através do comando dado pelo próprio *Matlab*. No gráfico da Figura 7.5 em seqüência, verifica-se esta capacidade através da resposta do sistema perante à excitação tipo impulso, aplicada no mesmo GDL onde estava o distúrbio \mathbf{d} , cuja atenuação ocorre após 15 segundos. Após estes gráficos, estão apresentados os resultados para o controle H_∞ .

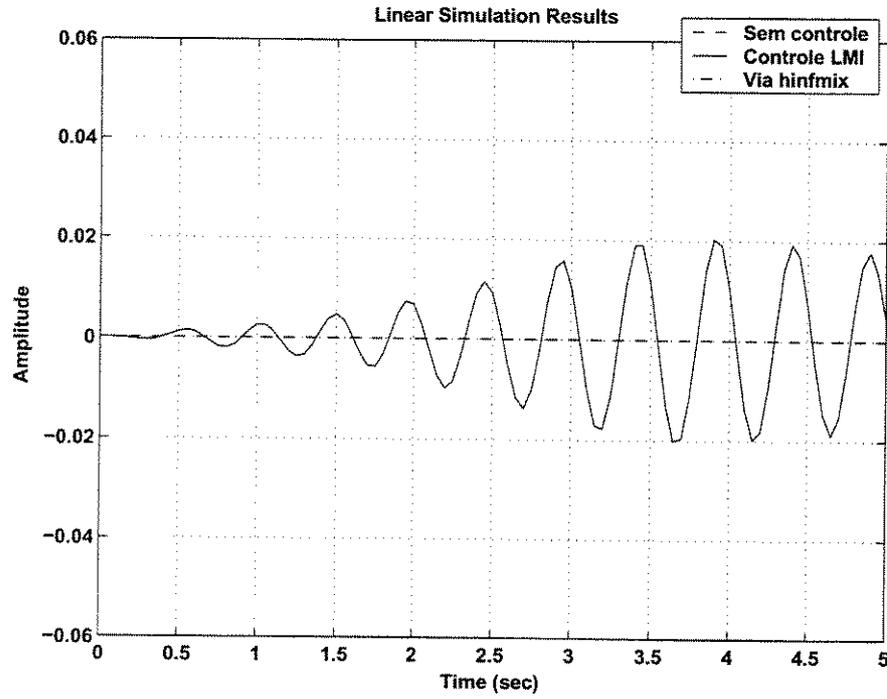


Figura 7.4: Esforço de controle perante os sistemas original e com controle H_2 para 2 EF

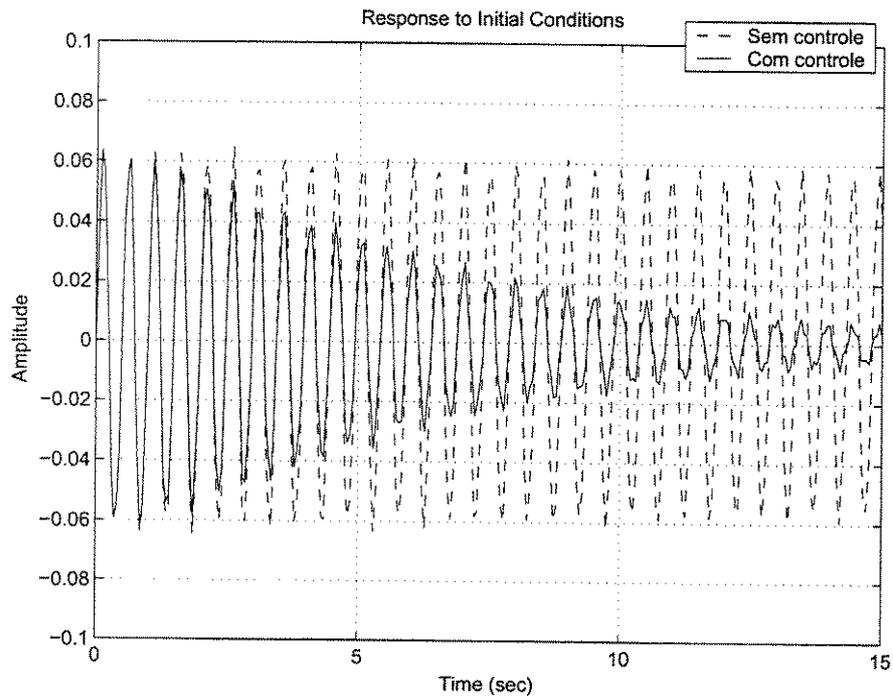


Figura 7.5: Resposta ao impulso dos sistemas sem e com o controle H_2 para 2 EF

7.3 Resultados para o Controle H_∞ na viga com 2 EF

Os resultados para este controlador foram obtidos também através de dois comandos distintos do *Matlab*. Além do uso do *mincx*, para executar a resolução da SDP descrita pela formulação de (6.27), foi feita a resolução do problema de otimização definido em (6.27) através do comando *hinflmi*, apresentado no capítulo anterior, que também faz uso de LMI nas restrições do problema.

Conforme visto na equação (6.22), há a necessidade de zerar somente a matriz D_c a fim de tornar o controlador H_∞ admissível. Executando o programa implementado no *Matlab* para estas matrizes, apresentado no Anexo IX, é obtida a FRF dada na Figura 7.6 a seguir. Nela verifica-se a redução do maior pico de resposta do sistema controlado versus o sem controle (linha tracejada).

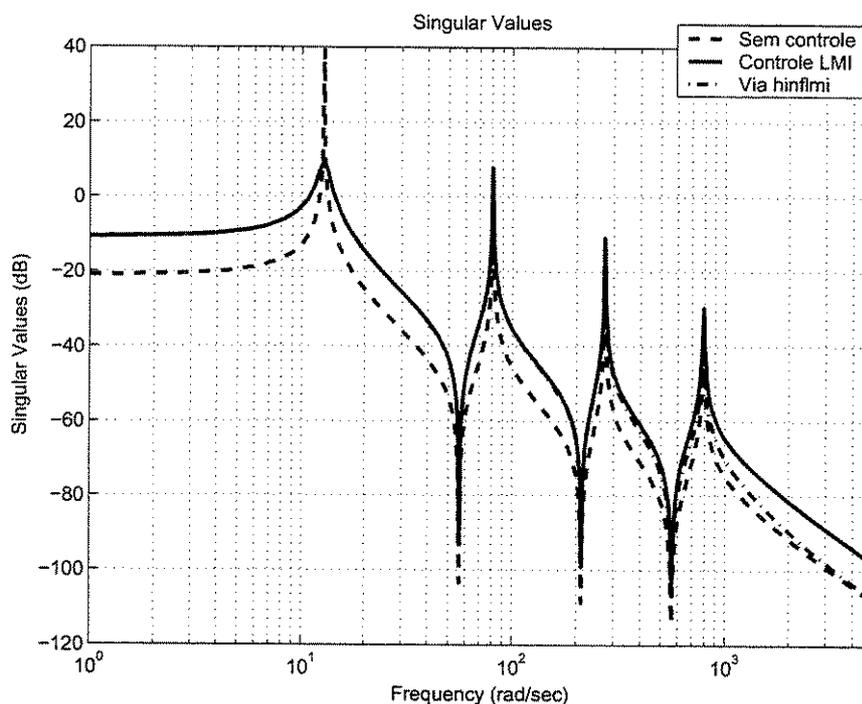


Figura 7.6: FRF da viga original sem controle e com controle H_∞ para 2 EF

Verifica-se de forma imediata que a FRF do controle executado pelo comando *mincx*, está novamente indistinguível em relação ao obtido via *hinflmi*. Observa-se também, numa comparação entre esta figura com a Figura 7.2, a piora na resposta controlada via H_∞ para as frequências mais elevadas em relação ao controle H_2 . O principal objetivo do controlador H_∞ é minimizar o maior pico da FRF. Entretanto, para a estrutura proposta por este trabalho, houve um custo a ser pago na resposta das maiores frequências do sistema controlado.

Uma vez que os valores da norma H_∞ representam diretamente os valores de pico apresentados na Figura 7.6, é preciso identificar estes valores. A fórmula abaixo transforma o valor da norma calculada pelo *Matlab*, dada por H_∞ , para dB [27]:

$$H_{\infty dB} := 20 \log_{10} H_\infty$$

Os valores transformados para decibéis podem ser visualizados diretamente nos picos dos gráficos das FRF. O resultado das normas H_∞ calculadas e transformadas em dB dados abaixo são visíveis no gráfico da Figura 7.6.

Sistema	Valor da Norma H_∞	Valor em dB
$\ \mathbf{H}(s)\ _\infty$ (não controlado)	94,9364	39,5487 dB
$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _\infty$ (via <i>mincx</i>)	$\sqrt{\gamma} = \sqrt{9,5611} = 3,0921$	9,8051 dB
$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _\infty$ (via <i>hinflmi</i>)	3,0941	9,8106 dB

Tabela 7.2: Resultados das Normas H_∞ para 2 EF

Verifica-se a grande proximidade entre os valores obtidos através de *mincx* e de *hinflmi*, o que era esperado. Também pode ser verificado que os dois últimos valores em decibéis na tabela 7.2, correspondem ao maior valor da FRF dos sistemas controlados, vistos na Figura 7.6. Igualmente, vê-se o primeiro valor em dB na mesma tabela sendo compatível com o maior valor da FRF do sistema original daquela mesma figura.

Nas figuras 7.7 e 7.8 adiante, são apresentados os resultados da atenuação do controle H_∞ para o distúrbio aleatório \mathbf{d} e os sinais de esforço de controle \mathbf{u} , para os controles via *mincx* e *hinflmi*.

Comparando-se o gráfico das respostas do controle H_∞ , dado na Figura 7.7, com as respostas do controlador H_2 , verificado na Figura 7.3, nota-se uma melhor atenuação das vibrações da extremidade da viga efetuada pelo controle H_∞ . Entretanto, observa-se que esta melhor atenuação na extremidade da viga foi obtida a custo de um maior esforço de controle, se forem comparadas as amplitudes existentes nos gráficos das figuras 7.8 e 7.4.

Logo, pode-se deduzir que o controle H_2 , para o modelo descrito neste trabalho, foi mais eficiente na redução dos esforços de ação de controle (z_2), enquanto o controle H_∞ priorizou a atenuação da vibração da extremidade da viga (z_1). Está assim configurada a característica de contraste que estes controles estabeleceram para o sistema proposto neste trabalho. A determinação de um controlador misto (H_2/H_∞), a ser apresentado mais adiante, buscará mesclar estes potenciais num só controlador.

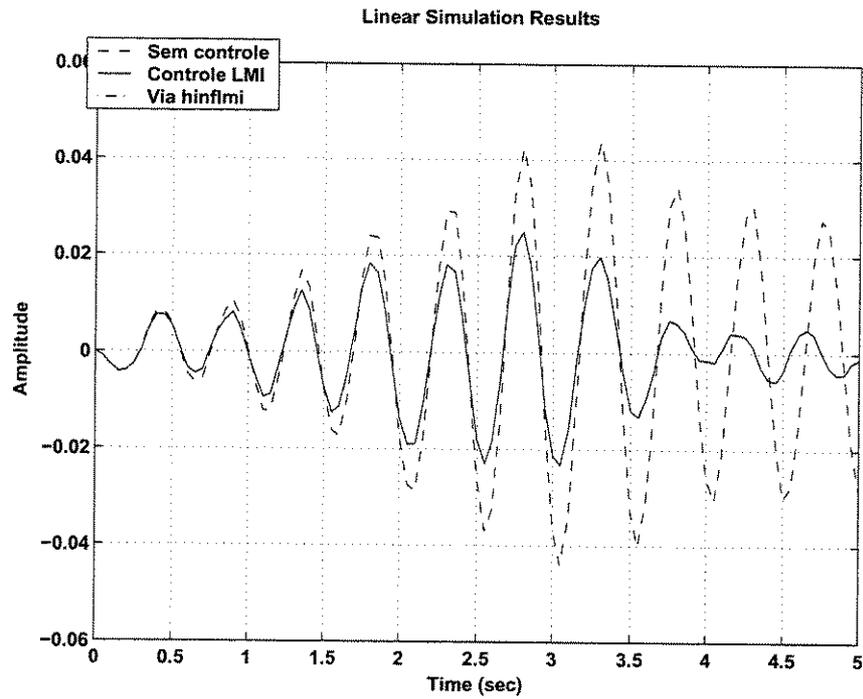


Figura 7.7: Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e com controle H_∞ para 2 EF

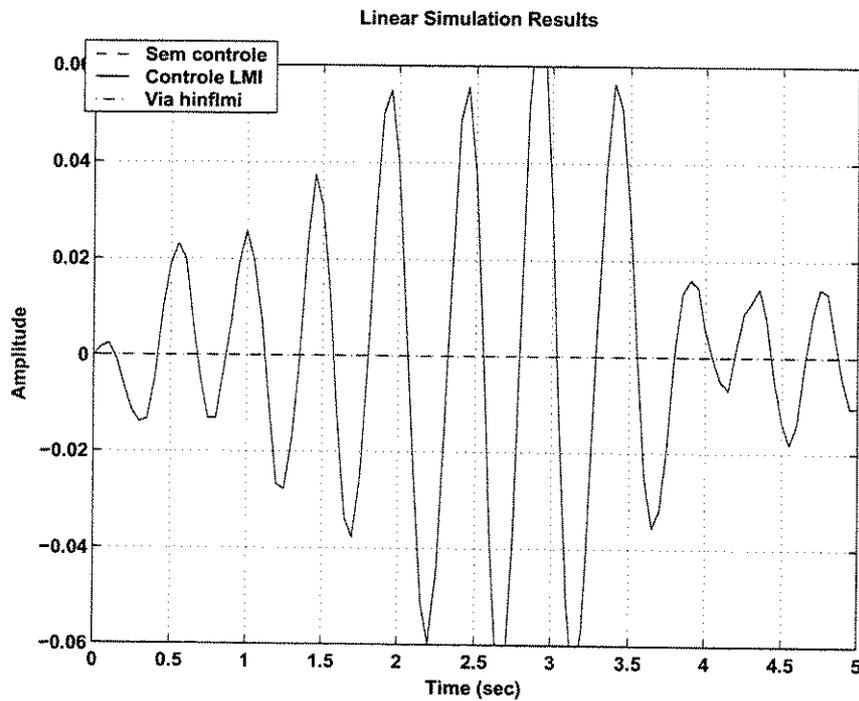


Figura 7.8: Esforço de controle perante os sistemas original e com controle H_∞ para 2 EF

Verificando-se através dos gráficos na Figura 7.7 que as respostas dos dois controladores

H_∞ propostos ficaram quase iguais, conclui-se que a minimização via *mincx* para o problema H_∞ também garante resultados de acordo com o esperado. O comando *hinflmi*, referência para os resultados, é próprio para resolução de controle H_∞ baseado em restrições LMI [27]. Com isso, pode-se considerar que a formulação apresentada no texto é adequada para a resolução de problemas deste tipo, e igualmente capaz à formulação utilizada pelo *Matlab* através do comando *hinflmi*.

Outra forma de verificar esta capacidade também foi feita, analisando a resposta ao impulso dos sistemas original e controlado, dado abaixo. Nota-se que a atenuação se deu com menos de 2 segundos, sendo muito mais rápida que no caso do controle H_2 .

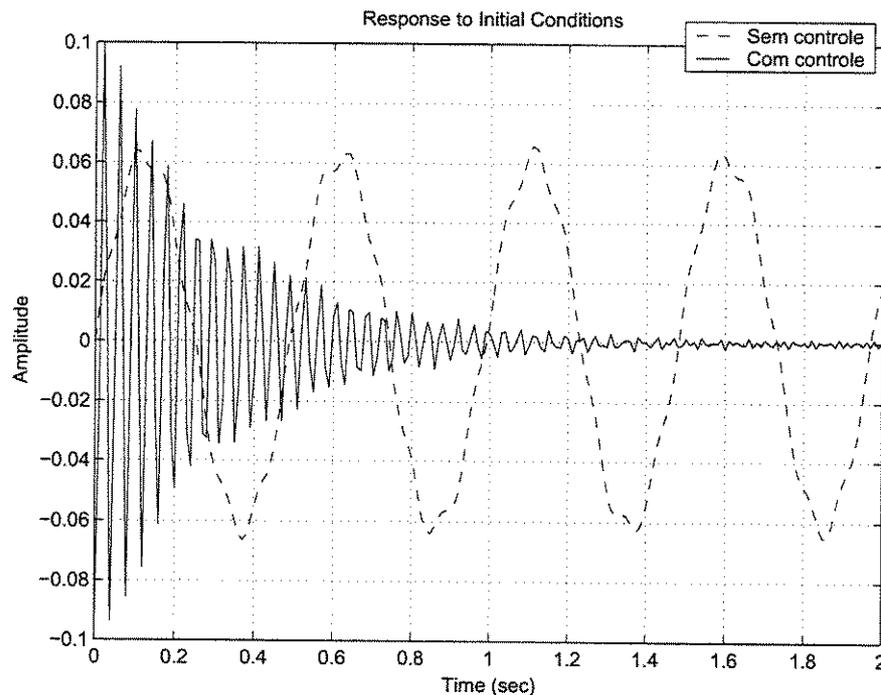


Figura 7.9: Resposta ao impulso dos sistemas sem e com o controle H_∞ para 2 EF

Antes de apresentar os resultados do controle misto, no próximo item será apresentado o resultado simulado de um sistema exposto às incertezas máximas admitidas para a viga. Usando as definições apresentadas no capítulo 3 do texto, e os resultados até aqui apresentados para o controle H_∞ , foram obtidas novas FT representando um sistema incerto, a fim de verificar a validade da formulação perante o teorema do ganho pequeno, dado em (3.1).

7.3.1 Resultados do Controle H_∞ para o Sistema Incerto

A avaliação da ação das incertezas, corroborando com o que já fora dito, foi realizada de maneira indireta. Isto quer dizer que após a ação do controle H_∞ foi determinado um máximo valor de Δ para o qual o sistema deveria permanecer estável, respeitando a equação obtida do conceito de estabilidade robusta, apresentada em (5.18) [60].

Obtido este valor, calculou-se a nova matriz dinâmica do sistema incerto. Com isso, pôde-se calcular uma nova FT, controlada em malha fechada pelo mesmo controlador obtido pela resolução do problema convexo apresentado em (6.27). Estes cálculos foram implementados no *Matlab*, e estão listados também no **Anexo IX**.

Como a matriz \mathbf{D}_{11} foi considerada nula na formulação do problema H_∞ aplicado à viga deste trabalho, então a matriz dinâmica incerta foi calculada pela seguinte equação, oriunda da simplificação de (3.6):

$$\mathbf{A}_\Delta := \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{C}_1 \quad (7.8)$$

Pode-se dizer que a presença das incertezas na matriz do sistema original \mathbf{A} , afetará o comportamento do sistema de acordo com a existência de valores não-nulos no produto $\mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{C}_1$. Em outras palavras, as posições onde as matrizes \mathbf{B}_1 e \mathbf{C}_1 não possuem zeros irão determinar em que região de \mathbf{A} as incertezas se farão presentes. Conforme já fora dito anteriormente, não é o objetivo deste trabalho identificar com precisão como as incertezas se localizam no modelo. Assim, a matriz \mathbf{A}_Δ foi simplesmente calculada conforme os valores definidos para \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 e Δ , que foi considerado um escalar.

Após o cálculo da matriz \mathbf{A}_Δ , é fechada a malha com o mesmo controlador obtido como solução para o sistema sem as incertezas. Desta forma, obtém-se o sistema incerto e controlado, que deve ser estável devido ao teorema 3.1 (ganho pequeno).

Aplicando-se a equação (5.18) no valor calculado para γ apresentado na tabela 7.2, tem-se o valor de Δ máximo, apresentado a seguir. Foi este valor escalar que foi substituído no cálculo de \mathbf{A}_Δ na equação (7.8) para a determinação do sistema incerto:

$$\|\Delta\|_\infty = 0,3234 \quad (7.9)$$

Para fins de verificação do teorema do ganho pequeno, foram identificados os pólos mais próximos do eixo imaginário no plano $\Re \times \Im$ do sistema contendo as incertezas, para os valores

extremos de Δ . Além destes, foram identificados valores de Δ para os quais os sistema estaria *marginalmente estável*, ou seja, próximo de se tornar instável. Eles estão apresentados na tabela abaixo, e como parâmetro de referência tem-se que a máxima parte real de um pólo do sistema controlado via *mincx* sem as incertezas resultou em -12,11.

Valor de Δ	Parte real máxima dos Pólos
$\Delta = 0,3234$	-12,0927
$\Delta = -0,3234$	-12,1267
$\Delta = 10$	-0,01185
$\Delta = -0,5$	-0,0031

Tabela 7.3: Valores máximos dos Pólos dos sistemas controlados com e sem as incertezas

Conclui-se portanto, que a presença das incertezas dentro do limite estabelecido pelo teorema 3.1 praticamente não afetou a estabilidade do sistema. Isto valida a formulação utilizada para o controle H_∞ , bem como o modelo adotado de incertezas. Assim, ambos foram confirmados como sendo adequados para o modelo estudado neste trabalho. Vale ressaltar que o teorema do ganho pequeno não prevê uma margem de estabilidade tão ampla como a relatada na tabela 7.3. Isto significa dizer que a estabilidade do sistema, para valores de Δ maiores que $1/\gamma$, não é garantido pelo teorema do ganho pequeno, conforme apresentado na seção 5.3.1. A formulação do teorema do ganho pequeno é, portanto, conservadora para este sistema (CTLTI), pois permitiria a presença de incertezas que fossem variantes no tempo.

Finalizadas as verificações para as formulações apresentadas no texto, dos controladores H_2 e H_∞ , parte-se para a apresentação da solução do problema misto. A unificação destes dois controladores, objetivo final deste trabalho, permitirá mostrar que as características de competição existentes entre os efeitos da minimização das duas normas sobre o sistema [26] podem ser benéficos às suas respostas dinâmicas, através da potencialidade de cada controle.

7.4 Resultados para o Controle H_2/H_∞ na viga com 2 EF

A apresentação do sistema de controle, feita pela equação (6.29), trouxe uma configuração bastante diferente das utilizadas para os controles H_2 e H_∞ , que eram similares. Agora existem dois sinais de saída distintos e bem definidos, \mathbf{z}_0 e \mathbf{z}_1 . Estas variáveis são observadas na Figura 5.1, que define o diagrama de blocos para o sistema controlado simultaneamente pelas normas H_2 e H_∞ .

A primeira saída pode estar associada com a presença das incertezas descritas por Δ . Con-

forme explicado anteriormente, a presença de Δ serviu para corroborar a formulação apresentada pelo teorema 3.7 do ganho pequeno perante o controle H_∞ . Agora no problema misto, a condição de estabilidade robusta é imposta através da entrada w_0 . Restringir a FT entre w_0 e z_0 significa ampliar a capacidade da planta de suportar as incertezas. Como fora dado na equação (5.20), o argumento principal do problema misto é a minimização da FT entre w_1 e z_1 , sujeito à esta restrição de robustez. Isto quer dizer que se deseja minimizar $H_{z_1 w_1}$, mantendo a FT $H_{z_0 w_0}$ robusta perante às suas incertezas dadas por Δ . Neste caso, será o vetor de desempenho (z_1) que irá conter dois elementos: a vibração vertical da extremidade da viga e o sinal de controle, dados na Figura 1.2.

Por esta definição, a equação diferencial que define os estados do sistema no tempo apresenta uma entrada em w_0 , à qual está associada uma matriz B_0 . Esta matriz pode indicar onde estaria a ação das incertezas nos estados do sistema, caso houvessem, afetando o seu comportamento. Usando um tratamento análogo ao feito na determinação das matrizes de estado nos controles H_2 e H_∞ , adotou-se que $B_0 := B'$. Isto corresponde a uma influência semelhante aos distúrbios externos nos estados, executada pelo vetor w_0 .

A forma como esta influência poderia agir na saída z_0 do sistema é identificada através da matriz C_0 . Ela indica quais GDL estão presentes na saída z_0 e poderiam sofrer diretamente a ação da entrada w_0 associada com Δ . Novamente, seguindo o mesmo raciocínio usado nos controles H_2 e H_∞ , considerou-se que a saída z_0 tem as mesmas características da saída z_1 , exceto pelo fato de não haver uma segunda linha associada ao ruído de medição. Deste modo, tem-se:

$$C_0 := C_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

A determinação das matrizes de estado D presentes na representação dada em (6.29), usou as mesmas informações apresentadas para os dois controladores já resolvidos separadamente. Sabe-se que a formulação do problema misto é obtida através de uma fusão das formulações entre os controles H_2 e H_∞ . Deste modo, foram consideradas as mesmas condições impostas nestes dois controles para a descrição dos valores destas matrizes no controle H_2/H_∞ .

Assim, tem-se que as matrizes D_{11} e D_{22} são nulas e idênticas em ordem às apresentadas para os controles H_2 e H_∞ . O motivo é exatamente o mesmo apresentado naquele caso: a primeira é nula devido às condições de admissibilidade do controle misto, e a segunda é nula devido a condição de validade da LMI que contém os termos dados em (6.28).

A matriz D_{02} relaciona o sinal de controle com a saída z_0 . Como o controlador não atua no mesmo GDL onde esta saída se faz presente, então $D_{02} := 0$.

A matriz \mathbf{D}_{01} responde pela ligação direta entre as entradas externas, dados pelo vetor \mathbf{w}_1 , com a saída \mathbf{z}_0 . Da mesma forma como fora determinado nos controles anteriores, esta ligação não existe em virtude das características físicas do sistema. Portanto, como a matriz \mathbf{B}_1 foi definida com tendo duas colunas vistas na equação (7.3), então $\mathbf{D}_{01} := [0 \ 0]$.

As matrizes \mathbf{D}_{00} e \mathbf{D}_{20} associam a entrada \mathbf{w}_0 , com os sinais de saída \mathbf{z}_0 e de entrada no controlador \mathbf{y} , respectivamente. Já que as incertezas do sistema atuariam diretamente em algum dos sinais de \mathbf{z}_0 ou de \mathbf{y} , então definem-se $\mathbf{D}_{00} := 0$ e $\mathbf{D}_{20} := 0$. Por sua vez, a matriz \mathbf{D}_{10} já fora determinada como nula na seção 6.5 para que o controle misto do sistema seja admissível. Logo, define-se aqui também $\mathbf{D}_{10} := [0 \ 0]^t$.

A matriz \mathbf{D}_{12} é definida de forma análoga aos controladores anteriores, já que existe o objetivo de se minimizar o esforço de controle \mathbf{u} através da saída definida por z_2 na Figura 1.2. Ou seja, considera-se $\mathbf{D}_{12} := [0 \ 1]^t$.

Para concluir, a matriz \mathbf{D}_{21} também é definida de modo análogo ao que já fora determinado anteriormente. Ela possui elemento não-nulo apenas na posição equivalente ao ruído de medição que está presente na saída de controle e constitui o vetor \mathbf{y} , resultando em $\mathbf{D}_{21} := [0 \ 1]$. A implementação no *Matlab* de todas as matrizes de estado para o controle misto é dada no **Anexo X**.

Com todas as matrizes de estado definidas, a solução do controle misto foi obtida para as formulações de (6.35) e (6.34), usando os comandos *hinfmix* e *mincx* do *Matlab*, respectivamente. Esta implementação é apresentada no **Anexo XI**. Para isto, foram utilizados certos critérios de tolerância e de parada, apresentados no **Apêndice D**, para que estas duas formulações pudessem ser resolvidas de forma análoga. Além destes critérios, é necessário identificar um valor de entrada para a restrição dada à norma H_∞ , identificado como γ na formulação vista em (6.34) e como φ nos parâmetros do comando *hinfmix*.

Foram feitas algumas tentativas para valores de $\gamma = \varphi$, anotando os valores da norma H_2 obtidas pelas sucessivas minimizações de ambas as formulações para controle. Com os resultados obtidos, pôde-se identificar que para um valor aproximado de $\gamma = \varphi = 8,5$, as soluções das duas minimizações seriam praticamente iguais. A partir disso, foram obtidos os gráficos da FRF para ambas as soluções encontradas, que estão dados juntamente com o gráfico do sistema original (linha tracejada) na Figura 7.10 a seguir.

Nele observa-se outra vez a superposição entre a FRF encontrada na minimização via *mincx* com a FRF do controle via *hinfmix*. Nota-se que o controle misto reduziu de um modo geral a FRF nas frequências mais altas, comparando estes gráficos com os resultados do controle H_∞ , dados da

Figura 7.6. Isto acontece por influência da norma H_2 no problema misto.

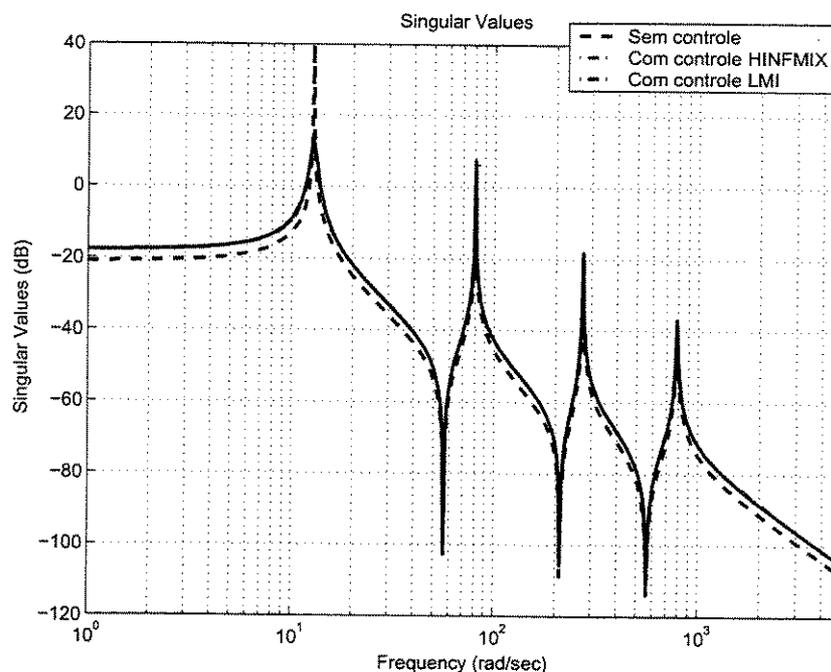


Figura 7.10: FRF da viga original sem controle e com controle misto para 2 EF

Nota-se que o controle misto apresenta um certo custo na sua performance perante ao controle H_2 puro, assim como também há uma piora no valor de pico quando comparado diretamente com o controle H_∞ puro. Isto pode ser observado na tabela 7.4 a seguir, comparando-a com as tabelas 7.1 e 7.2 dadas anteriormente. Vale ressaltar que os valores das normas H_2 e H_∞ para o sistema não controlado são exatamente os mesmos já apresentados nos resultados destes respectivos controladores, pois o sistema original é o mesmo. Os valores da norma H_2 calculados pelas minimizações de *mincx* e *hinfmix* ficaram bastante próximos:

Minimização via:	$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _2$	$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _\infty$ (pico do gráfico)
<i>mincx</i>	$\sqrt{\text{tr}(\mathbf{Z})} = \sqrt{9,0714} = 3,0119$	12,9dB
<i>hinfmix</i>	3,0045	14,5dB

Tabela 7.4: Resultados das minimizações no controle misto para 2 EF

Estes dados apresentados acima reforçam o que é visto no gráfico da Figura 7.10. A minimização via *mincx* encontra resultados compatíveis aos encontrados pela aplicação do comando *hinfmix*. O mesmo pode ser visto para as respostas ao distúrbio aleatório vistos na Figura 7.11 a

seguir. Observa-se que há uma diferença entre os gráficos muito sutil, apesar da quase sobreposição vista nos gráficos das FRF na Figura 7.10.

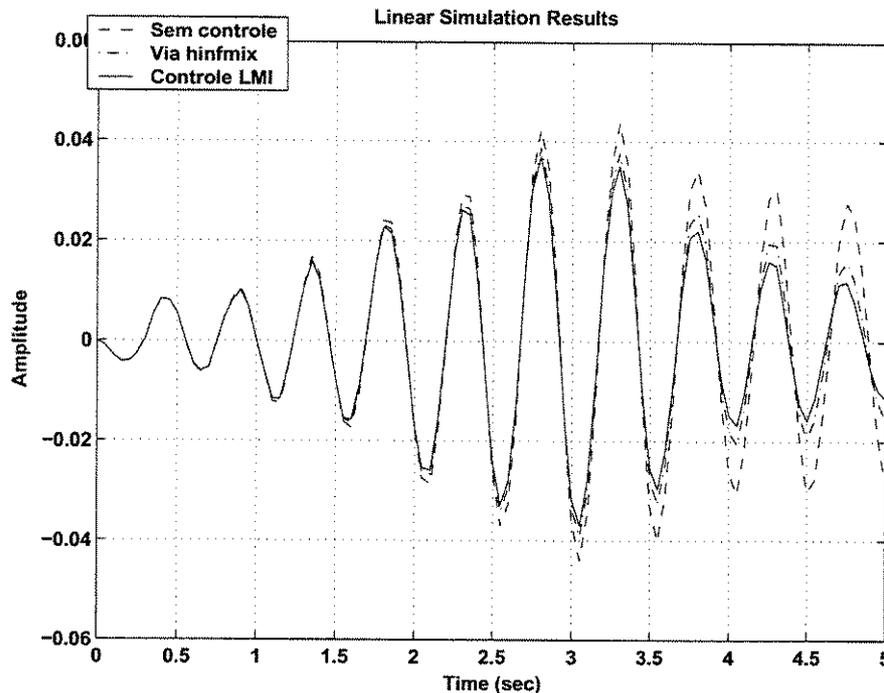


Figura 7.11: Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e controlado para 2 EF

O mesmo pode ser dito para a solução dos sinais de controle, ou seja, os resultados da ação dos controladores obtidos sobre a FT do sistema original. As duas formas de resolução propostas atingiram uma ação de atenuação muito semelhante, como pode ser visto na Figura 7.12 a seguir.

Para encerrar a análise do controle H_2/H_∞ , é dado na Figura 7.13 na seqüência, a resposta dos sistemas original e controlado ao impulso. Note que o tempo de estabilização foi um pouco maior do que 10 segundos.

Um detalhe importante é a constatação de que os gráficos das figuras 7.11, 7.12 e 7.13, apresentam resultados que podem ser considerados intermediários aos apresentados pelos resultados dos controles H_2 e H_∞ . Para isto, basta compará-los com os gráficos dados nas figuras 7.3, 7.4, 7.5, 7.7, 7.8 e 7.9.

Deste modo, já é possível visualizar a capacidade que o controle H_2/H_∞ possui, ao unificar as propriedades destas normas no projeto de controle. Para certificar esta capacidade de forma mais clara, foi feita uma simulação para a viga discretizada em 4 EF, cuja determinação das matrizes de

estado para tal modelo é feita a seguir, após os gráficos.

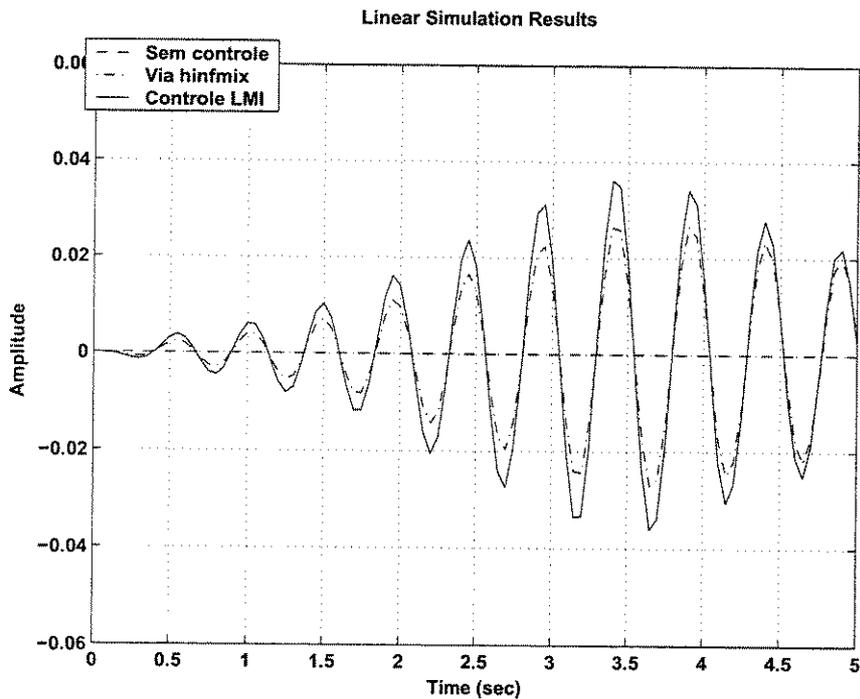


Figura 7.12: Esforço de controle para os sistemas original e com controle H_2/H_∞ para 2 EF

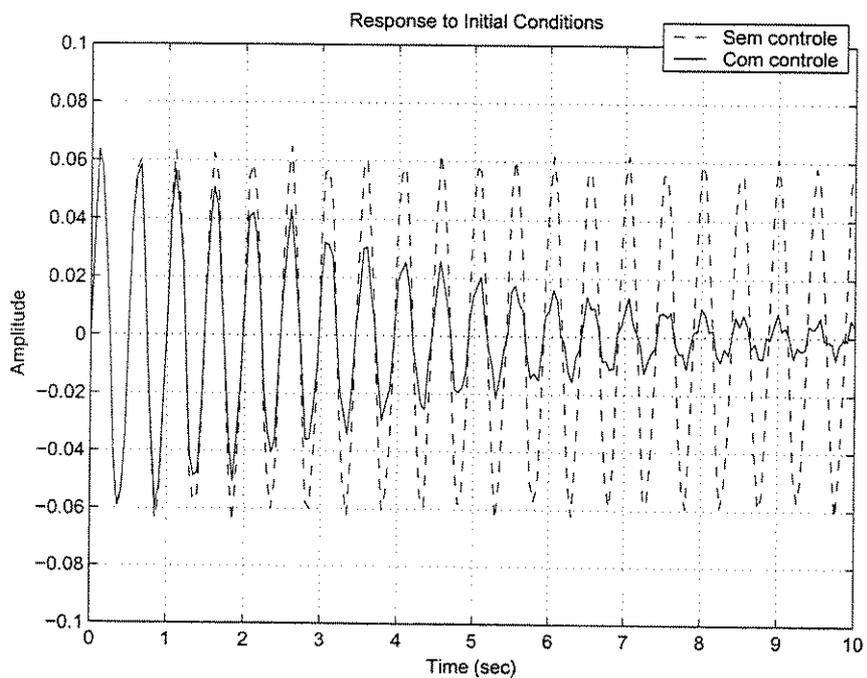


Figura 7.13: Resposta ao impulso dos sistemas sem e com o controle H_2/H_∞ para 2 EF

A matriz C_2 assume a forma dada abaixo, cuja justificativa é a mesma apresentada para o modelo com 2 EF:

$$C_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Finalmente, considerou-se que $B_0 := B'$ e $C_0 := C_2$. Logo, elas possuem a mesma forma dada no caso da viga com 2 EF.

As demais matrizes D do modelo com 4 EF não sofrem alterações em relação às que já foram apresentadas na seção de resultados anterior. A seguir são apresentados os resultados dos controladores mistos via *mincx* e *hinfmix* para este modelo aqui apresentado.

7.6 Resultados para o Controle H_2/H_∞ na viga com 4 EF

O mesmo tipo de análise feita nos resultados para a viga com 2 EF foi realizada no sistema discretizado em 4 EF. Foram considerados os mesmos valores das restrições das normas H_∞ nas formulações feitas para o caso com 2 EF, ou seja, $\gamma = \varphi = 8, 5$.

Entretanto, uma diferença a ser ressaltada na forma de resolução deste sistema se deu através do equacionamento para a formulação de (6.34), resolvida pelo comando *mincx*. Como este método exige uma solução computacionalmente mais difícil de ser obtida para o modelo com 4 EF, optou-se por utilizar o controlador obtido na solução do problema dado em (6.34) para a viga com 2 EF, e aplicá-lo no sistema linear descrito para a viga com 4 EF. Deste modo, a solução seria obtida de forma imediata, e ainda se poderia verificar a capacidade de um controlador misto de ordem reduzida em relação ao modelo do sistema.

Assim, para o valor supracitado das restrições da norma H_∞ , o gráfico da FRF foi obtido e é dado na Figura 7.15 adiante. Nela estão os gráficos para os controladores encontrados pelas formulações de (6.34) e (6.35) versus o sistema original.

Observa-se que apesar do controlador do problema em SDP ter sido determinado pela solução dada à estrutura com 2 EF, a sua FRF ficou praticamente idêntica à determinada pela solução traçada via *hinfmix*, obtida por (6.35). Esta última usou o controlador determinado pela solução ao próprio modelo com 4 EF, isto é, um controlador com a mesma ordem da planta.

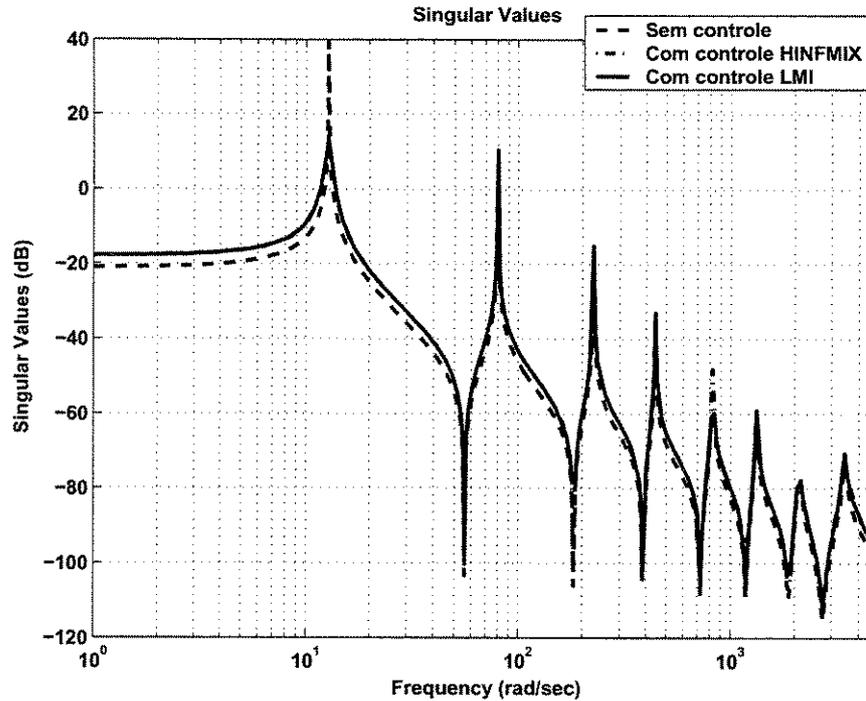


Figura 7.15: FRF da viga original sem controle e com controle H_2/H_∞ para 4 EF

Na Figura 7.16 adiante são apresentados os gráficos de resposta ao sinal aleatório para os dois tipos de controle. Nele se pode ver que as soluções quase não diferem das apresentadas pela Figura 7.11, mantendo a melhor atenuação das vibrações da extremidade da viga através do controle determinado pela formulação (6.34), via *mincx*, apesar do controlador ser de ordem reduzida. O controle misto obtém uma boa atenuação às vibrações provocadas pelo sinal aleatório \mathbf{d} , com comportamentos intermediários aos resultados obtidos para os sistemas controlados via H_2 e H_∞ separadamente.

Já os gráficos da Figura 7.17 contêm resultados da minimização dos sinais de esforço de controle \mathbf{u} para os dois controladores já descritos. Uma comparação entre estes gráficos e os apresentados para a viga com 2 EF, dado pela Figura 7.12, apenas reforça o que já fora lá comentado.

O esforço de controle foi considerado como uma condição limitadora para uma ação de controle mais intensa sobre z_1 . Considerou-se que um esforço de controle *ilimitado* poderia ser prejudicial à integridade estrutural da viga, pois este poderia alcançar valores bastante elevados a fim de estabelecer uma atenuação mais veloz das vibrações da viga. Além disso, esta condição pode provocar a saturação do atuador numa aplicação real, ou seja, sua capacidade de atuação seria ultrapassada.

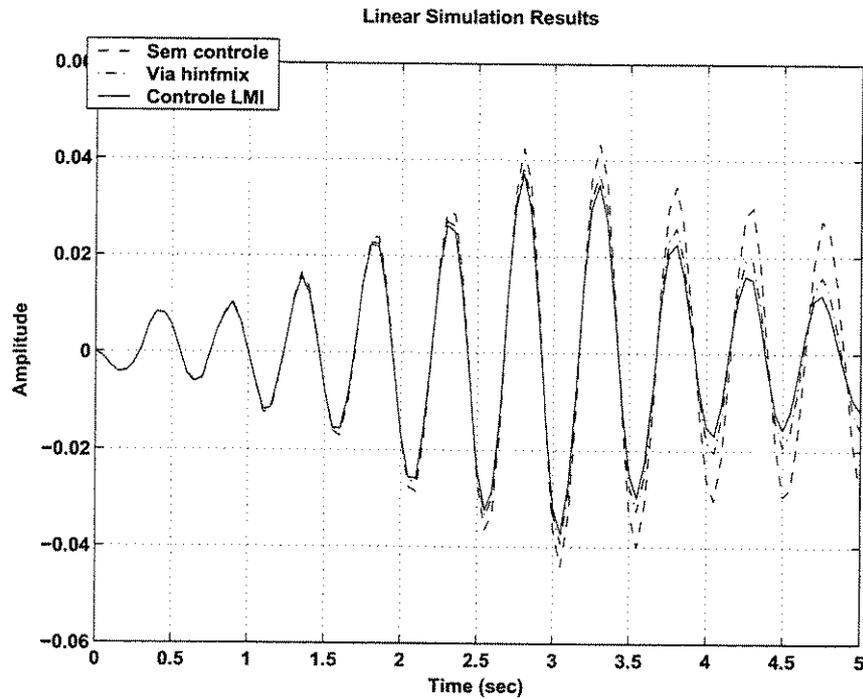


Figura 7.16: Respostas ao sinal aleatório dos sistemas original e com controle H_2/H_∞ para 4 EF

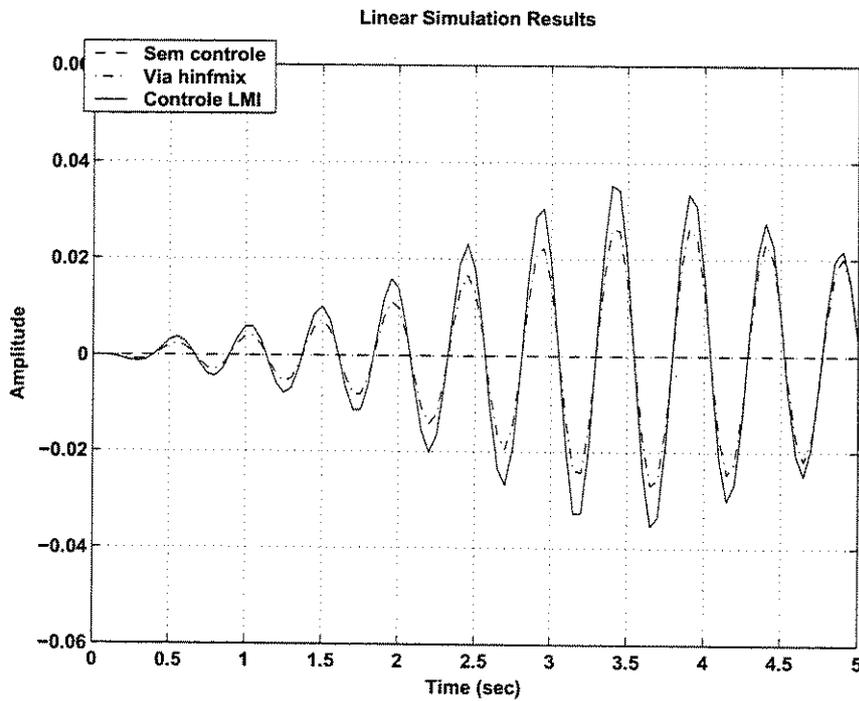


Figura 7.17: Esforço de controle para os sistemas original e com controle H_2/H_∞ para 4 EF

Para ilustrar as diferenças vistas entre os resultados dos dois controladores nos três últimos

gráficos, a tabela abaixo apresenta os resultados da norma H_2 obtidos pelas minimizações via (6.34) e (6.35), bem como as normas H_∞ vistas nos picos dos gráficos das FRF apresentados na Figura 7.15. Eles são acompanhados pelos valores das duas normas do sistema sem controle, para o modelo com 4 EF.

Resultados do:	$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _2$	$\ \mathbf{G}_{zw}(s)\ _\infty$ (pico do gráfico)
Controle via <i>mincx</i>	não calculado	13, 0dB
Controle via <i>hinfmix</i>	3, 0013	14, 5dB
Sistema original	7, 2500	38, 5dB

Tabela 7.5: Resultados das minimizações no controle misto para 4 EF

Verifica-se, como era esperado, que há pouca diferença entre os valores obtidos pela minimização via *hinfmix* para 2 EF, mostrados na tabela 7.4, e para 4 EF mostrado acima. Observa-se, também na tabela acima, que não foi calculado um valor de solução do problema de controle via *mincx* para o modelo com 4 EF através da minimização. Isto aconteceu porque houve apenas o fechamento de malha do sistema discretizado em 4 EF com o controlador obtido pela solução do sistema com 2 EF, sem a execução do problema de minimização.

Um dos elos para o uso do controle H_2/H_∞ reside, portanto, na escolha de $\gamma = \varphi$, que é um dado de entrada desassociado das equações do problema. A seguir estão apresentadas as conclusões deste trabalho e as propostas para trabalhos futuros na mesma área, que podem usar outras potencialidades não exploradas aqui; numa eventual aplicação das formulações e algoritmos aqui apresentados em sistemas mais complexos.

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas Futuras

8.1 Revisão e Conclusões

Este trabalho mostrou nos seus resultados a capacidade dos controladores baseados na estrutura de programação semi-definida com restrições convexas. As estruturas destas restrições eram construídas pelas desigualdades matriciais lineares, capazes de linearizar, na forma de matrizes, inequações não-lineares. Os problemas de controle eram baseados nas normas H_2 e H_∞ e nas suas condições de admissibilidade e estabilidade para o sistema envolvido. Reunindo as informações dinâmicas do sistema em matrizes de estado, montaram-se as LMI que agrupavam as informações de estabilidade do sistema com a existência do argumento de minimização através de uma das normas.

Estes controladores mostraram ter a sua eficiência na redução das vibrações do modelo proposto amarradas com a minimização do esforço de controle \mathbf{u} . Desta forma, um controlador que não pode atuar com forças “ilimitadas”, não possui uma capacidade igualmente “ilimitada” na atenuação de vibrações da estrutura. A necessidade de se limitar \mathbf{u} , fazendo-o presente na equação da saída a ser minimizada \mathbf{z} , se deu em função de uma necessidade física. Um controlador que atuasse com um esforço físico sem limitações poderia atingir forças cujos valores comprometeriam a integridade da estrutura, seja diretamente ou através de fadiga mecânica causada pelo esforço cíclico sucessivo imposto à ela.

É evidente que um controlador, atuando com o sinal \mathbf{u} irrestrito, poderia atingir resultados melhores na atenuação da vibração da extremidade da viga, mas esta constatação não fez parte do escopo deste trabalho. Vale ressaltar também que o custo de um atuador cuja carga máxima aplicada atingisse valores elevados pode ser bem maior do que um atuador pequeno e limitado.

Apesar disso, pode-se verificar nas formulações apresentadas que o controle H_2/H_∞ possui flexibilidade suficiente nos equacionamentos, permitindo a adaptação para a aplicação em problemas mais complexos. Como o foco do trabalho não era a modelagem dinâmica de uma estrutura complexa, mas sim a compreensão e obtenção da formulação do controle misto para a realimentação de saída, optou-se por uma simplificação na modelagem por elementos finitos, e na escolha de uma estrutura também bastante simples, porém ilustrativa.

O trabalho também verificou o conceito de estabilidade robusta, aplicado ao controle H_∞ , perante às incertezas do sistema. Esta constatação permitiu verificar que a formulação obtida para este controlador garante a estabilidade robusta do sistema controlado para quaisquer entradas finitas. Evidentemente que uma melhor representação das incertezas dentro do modelo, permitiria a obtenção de resultados mais expressivos nas comparações feitas entre os sistemas controlados com e sem incertezas. Este assunto pode ser tratado independentemente, tamanha a vastidão das possibilidades de interação entre o modelo incerto e o seu projeto de controle. Nos trabalhos das referências [45, 55, 60] podem ser obtidas algumas noções a respeito deste assunto.

O gráfico da FRF do controle implementado diretamente pelo comando *hinfmix* do *Matlab*, mostrou-se muito semelhante ao respectivo gráfico obtido pela minimização implementada a partir da formulação via LMI. Isso significa que a formulação apresentada no trabalho para o controle misto, via realimentação de saída, é viável para a resolução de problemas que estejam descritos na forma de SDP. O mesmo pode se dizer quanto aos problemas de controle H_2 e H_∞ , que de certa forma geraram a formulação do problema misto.

As respostas dos sistemas controlados ao impulso, por quaisquer dos controles H_2 , H_∞ ou misto, demonstram também a capacidade das formulações feitas em LMI para estes controladores. É importante salientar que mesmo diante de um esforço externo restrito no tempo (impulso), a formulação mantém o objetivo de controlar a viga limitando o sinal do esforço de controle. Certamente, poderiam ser obtidas atenuações ainda mais drásticas caso este sinal fosse “ilimitado”, conforme citado anteriormente.

Evidentemente que, para a estrutura considerada neste trabalho, não há como traçar um paralelo direto relacionando as capacidades dos controladores e tempos gastos computacionalmente perante problemas mais complexos. As questões relativas às dificuldades que esta formulação pode encontrar na resolução de problemas mais usuais, estão apresentadas no tópico a seguir.

Após a apresentação da bibliografia utilizada são listados os programas feitos no *Matlab* nos **Anexos**. A apresentação das listagens dos programas tem como propósito expor maiores detalhes

sobre a forma com que os cálculos foram efetuados, permitindo a reprodutibilidade dos resultados aqui presentes, bem como um eventual avanço nos mesmos para aplicações futuras.

8.2 Propostas e Paradigmas para Trabalhos Futuros

A realização de trabalhos futuros com modelagens dinâmicas mais completas, incluindo uma maior precisão na determinação da influência das incertezas é uma possibilidade. Como fora dito ao longo desta dissertação, tal determinação não estava entre os objetivos do trabalho. O tratamento através de incertezas paramétricas, por exemplo, possibilita a identificação dos parâmetros do sistema que estão sujeitos à variações não previstas na modelagem, dando à variável Δ uma característica que permite associar o modelo dinâmico com os parâmetros incertos.

Além disso, pode-se também tratar a otimização de um sistema, através do seu controle, agregada com a otimização da própria estrutura a ser controlada. Os trabalhos [61, 62, 63] dão uma idéia de como fazê-lo para projetos de controladores envolvendo LMI. Esta possibilidade tem um potencial ainda maior do que “apenas” projetar um controle robusto, porque leva em conta otimizar a própria estrutura onde o controle será aplicado para tornar todo o sistema ainda mais eficiente. Este potencial pode ser constatado ao se verificar a grande influência que o próprio modelo exerce sobre a solução de controle. Variando certos parâmetros físicos da estrutura, o comportamento do sistema controlado pode ser bastante diferente.

Em virtude dos resultados obtidos, existe a possibilidade de se efetuar um tratamento de ponderação sobre os sinais z_1 e z_2 . Através de alterações nos valores adotados para as matrizes \mathbf{C}_1 e \mathbf{D}_{12} por exemplo, dadas na equação (7.5), pode-se modificar as características do controlador de modo a promover uma maior atenuação na vibração da viga (z_1), atentando para os valores máximos do esforço de controle (z_2). Com isso, espera-se atingir resultados que possuam maior significado prático, uma vez que estes podem ser modelados em função da capacidade do atuador.

Outra grande possibilidade futura é a aplicação direta à robótica. Grande parte destes resultados podem ser reproduzidos com alguma precisão em laboratórios devidamente equipados. Experimentos que visem estabelecer o controle para servo-mecanismos ou estruturas robotizadas podem ser desenvolvidos, no intuito de pôr em prática um controlador H_2 , H_∞ ou misto, formulado para a estrutura em experimentação. Outras áreas do conhecimento, como a instrumentação aplicada e a aquisição de dados, devem ser exploradas para executar a interface entre a formulação matemática e a atuação física do controlador.

O grande problema da formulação de controle aqui apresentada está no tempo de resolução para modelos mais detalhados. Quanto maior o número de elementos finitos, maior é a ordem do sistema. Ao se utilizar um controlador de ordem completa, as ordens das LMI de restrição podem passar de 50×50 , o que ainda é demasiado pequeno para modelos de estruturas usuais. De qualquer forma, esta ordem já provoca um grande aumento no tempo gasto computacionalmente para a resolução através do comando *mincx* do *Matlab*. O aumento em si acontece por causa da maior dificuldade computacional de se encontrar factibilidade para um conjunto de restrições impostas ao sistema, com ordens da magnitude apresentada.

Uma melhoria no tempo computacional para a resolução de SDP poderia ser obtida através da melhoria no algoritmo computacional ou nos recursos de *software* e *hardware*. Assim, caso haja um aumento significativo de complexidade e da ordem do sistema de controle, não ocorreria um aumento exponencial de dificuldade e custo computacional para a obtenção da solução.

Uma outra forma de usar melhor os recursos computacionais é investir num projeto de controle de ordem reduzida, que faria a ordem das LMI das restrições serem menores. Isto tornaria viável o controle de estruturas com um maior número de GDL, aproximando os modelos com os sistemas reais.

Como exemplo, o uso de um controlador de ordem reduzida, descrito pela solução do modelo com 2 EF, na resolução via *mincx* para a viga com 4 EF, não afetou negativamente os resultados apresentados neste trabalho. Porém, em sistemas mais usuais, torna-se necessário um conhecimento mais aprofundado das capacidades do controlador perante um número muito grande de GDL. Contudo, reafirma-se que para a busca do objetivo deste trabalho, as condições utilizadas foram bastante satisfatórias.

Concluindo, os resultados apresentados pelo trabalho podem ser estendidos para outras aplicações ou projetos experimentais; ou ainda, obtidos para modelagens mais complexas e mais completas, no que diz respeito ao modelo dinâmico e às incertezas; desde que seja observada a restrição de capacidade computacional disponível e tempo de cálculo perante à ordem do sistema.

Esta dissertação foi totalmente escrita através da programação \LaTeX , usando os editores de texto *TeXnicCenter Beta 6.01* e *WinEdt 5* para *Windows*¹, e o pacote de recursos *MikTeX 2.4.1461*. Todas as figuras apresentadas no texto, exceção feita aos gráficos originados no *Matlab*, foram obtidas em código \LaTeX através do editor de figuras *jPicEdt for Latex 1.3.2*. O auxílio das referências [64, 65, 66], foram fundamentais para este trabalho.

¹Windows é marca registrada da Microsoft Corporation.

Referências Bibliográficas

- [1] Moreira, F. J. *Um Controlador H_∞ de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibração Estrutural*. Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, 1998, 208p. Tese (Doutorado).
- [2] Shahian, B., Hassul, M. *Control System Design using Matlab*. Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- [3] Kuo, B. C. *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [4] Lyapunov, A. M. *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, London, 1992. Original em Russo, 1892.
- [5] Lur'e, A., Postnikov, V. On the Theory of Stability of Control Systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol.8, n.3, 1944.
- [6] Lur'e, A. *Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control*. H. M. Stationery Off., London, 1957. Original em Russo, 1951.
- [7] Yakubovich, V. A. The Solution of Certain Matrix Inequalities in Automatic Control Theory. *Soviet Math. Dokl.*, vol.3, p.620-623, 1961.
- [8] Bellman, R., Fan, K. On System of Linear Inequalities in Hermitian Matrix Variables. *Proceeding of Symposia in Pure Mathematics*, American Mathematical Society, 1963, vol.7, pp.1-11.
- [9] Zames, G. On the input-output Stability of Time-varying Nonlinear Feedback Systems - Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity and Positivity. *IEEE Transactions of Automatic Control*, vol. 11, pp.228-238, April 1966.
- [10] Sandberg, I. W. A Frequency-domain Condition for the Stability of Feedback Systems Containing a Single Time-varying Nonlinear Element. *Bell Systems Technologic Journal*, vol.43, no.3, pp.1601-1608, 1964.

- [11] Willems, J. C. Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation. *IEEE Transactions of Automatic Control*, vol.19 (5), pp.621-634, 1971.
- [12] Pyatnitskii, E. S., Skorodinskii, V. I. A Criterion of Absolute Stability of Nonlinear Sampled-Data Control Systems in the Form of Numerical Procedures. *Automatic and Remote Control*, vol.47, no.9, pp.1190-1198, 1986.
- [13] Schultz, D. G., et al. The Generation of Lyapunov Functions. *Advances in Control Systems*, vol.2, pp.1-64, 1965.
- [14] Horisberger, H., Bélanger, P. Regulators for Linear, Time Invariant Plants with Uncertain Parameters. *IEEE Transactions of Automatic Control*. vol.21, pp.705-708, 1976.
- [15] Kamarkar, N. A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, vol.4, no.4, pp.373-395, 1983.
- [16] Nesterov, Y., Nemiroskii, A. A General Approach to Polynomial-time Algorithms Design for Convex Programming. Technical Report, *Center of Economy & Mathematics Institute*, USSR Academy of Sciences, Moscow, 1988.
- [17] Nesterov, Y., Nemiroskii, A. Interior-point Polynomial Methods in Convex Programming. *SIAM - Studies in Applied Mathematics*, vol.13, Philadelphia, 1994.
- [18] Boyd, S., et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *SIAM - Studies in Applied Mathematics*, vol.15, Philadelphia, 1994.
- [19] Skogestad, S., Postlethwaite, I. *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 1996.
- [20] Zames, G. Feedback and Optimal Sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverse. *IEEE Transactions of Automatic Control*, vol.26, pp.301-320, 1981.
- [21] Helton, J. Operator Theory and Broadband Matching, *In Proceedings of the 11th Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing*, 1976.
- [22] Doyle, J., et al. Space-State Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.34, no.8, pp.831-847, 1989.
- [23] Souza, C. C. *Controle Ótimo de Sistemas Flexíveis via Realimentação de Saída*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, 1994, 122p. Tese (Doutorado).

- [24] Fujimoto, T. Vibration Control of a Cantilever Beam Using a H_∞ Controller for Noncollocated Systems. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics - Intelligent Systems for the 21st Century*. Vancouver, 1995.
- [25] Nonami, K., Sivrioglu, S. Active Vibration Control Using LMI-Based Mixed H_2/H_∞ State and Output Feedback Control with Nonlinearity. *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, 1996.
- [26] Colaneri, P., Geromel, J., Locatelli, A. *Control Theory and Design: an RH_2 and RH_∞ Viewpoint*. Academic Press, Inc., San Diego, 1997.
- [27] Gahinet, P., et al. *LMI Control Toolbox for use with Matlab*. The Mathworks Inc., 1998.
- [28] Chiang, R., Safonov, M. *Robust Control Toolbox User's Guide*. The Mathworks Inc., 1998.
- [29] Haralambous, M., Negvesky, D. Finite Element Analysis and Active Vibration Control of a Cantilever Beam. *Proceedings of Southeastcon*, IEEE Conference, 1998.
- [30] Kwon, Y., Bang, H. *The Finite Element Method Using Matlab*. CRC Press, 1997.
- [31] Przemieniecki, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Publications Inc., 1968.
- [32] Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method*, 3.ed. McGraw Hill, London, 1977.
- [33] Reedy, J. N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [34] Weaver, W. Jr., Timoshenko, S. P., Young, D. H. *Vibration Problems in Engineering*, 5.ed. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [35] Ewins, D. J. *Modal Testing: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, Somerset, 1984.
- [36] Ogata, K. *State-Space Analysis of Control Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1967.
- [37] Meirovitch, L. *Dynamics and Control of Structures*. John Wiley & Sons, 1990.
- [38] Dorf, R. C. *Time-Domain Analysis and Design of Control Systems*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts, 1965.
- [39] Doyle, J., Francis, B. A., Tannenbaum, A. R. *Feedback Control Theory*. MacMillan Publishing Company, New York, 1992.
- [40] Cruz, J. J. *Controle Robusto Multivariável*. Edusp, São Paulo, 1996.

- [41] Maciejowski, J. M. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Workingham, 1989.
- [42] Öztürk, L., Orbak, A. Y., Eskinat, E. *Velocity Feedback Dynamic Vibration Controller Synthesis: LMI Approach*. Proc. of IEEE Conf. on Control Applications, v.1, pp.522-525, 06/2003.
- [43] Oliveira, M. C. *Notas de Aula do Curso "IA360 - Tópicos em Controle I"*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, 2002.
- [44] Xie, L. Output Feedback H_∞ Control of Systems with Parameter Uncertainty. *International Journal of Control*, vol.63, no.4, pp.741-750, 1996.
- [45] Xie, L., Souza, C. E. Robust H_∞ Control for Linear Time-Invariant Systems with Norm-Bounded Uncertainty in the Input Matrix. *Systems & Control Letters*, vol.14, no.5, pp.389-396, 1990.
- [46] Bazaraa, M., Shetty, C., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, 2nd edition, New York, 1993.
- [47] Geromel, J. *Notas de Aula do Curso "IA604 - Otimização em normas H_2 e H_∞ "*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, 2002.
- [48] Oliveira, M. C. *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, 1999, 152p. Tese (Doutorado).
- [49] Fairman, F. W., *Linear Control Theory, The Space-State Approach*. John Wiley & Sons, 1998.
- [50] Francis, B. A. *A Course in H_∞ Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 88. Springer-Verlag, Berlim, 1987.
- [51] Zhou, K., et al. Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, no.8, pp.1564-1574, 1994.
- [52] Zhou, K., Khargonekar, P. P. An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization. *Systems & Control Letters*, vol.11, no.2, pp.85-91, 1988.
- [53] Tan, K., Grigoriadis, K. Stabilization and H_∞ Control of Continuous-Time Symmetric Systems. *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*. Orlando, 12/2001, pp.3453-3458.
- [54] Khargonekar, P., Rotea, M. Mixed H_2/H_∞ Control: A Convex Optimization Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.36, no.7, pp.824-837, 1991.

- [55] Doyle, J., et al. Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, no.8, pp.1575-1586, 1994.
- [56] Masubuchi, I. Ohara, A., Suda, N. LMI-Based Output Feedback Controller Design - Using a Convex Parametrization of Full-Order Controllers. *Proceedings of American Control Conference*. Seattle, June 1995, pp.3473-3477.
- [57] Scherer, C., Gahinet, P., Chilali, M. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.42, no.7, pp.896-911, 1997.
- [58] Xie, L., Fu, M., Souza, C. H_∞ Control and Quadratic Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty via Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.37, no.8, pp.1253-1256, 1992.
- [59] Sivrioglu, S., Nonami, K. Active Vibration Control by Means of LMI-Based Mixed H_2/H_∞ State Feedback Control. *JSME International Journal (C)*, vol.40, no.2, pp.239-244, 1997.
- [60] Sarracini Jr., F. *Controle de Estruturas Flexíveis do ponto de vista H_∞ : Solução por Riccati e LMI*. Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP. Relatório Final de Iniciação Científica - Fapesp, 2003.
- [61] Lu, J., Skelton, R. Integrating Structure and Control Design to Achieve Mixed H_2/H_∞ Performance. *International Journal of Control*, vol.73, no.16, pp.1449-1462, 2000.
- [62] Camino, J., Oliveira, M. C., Skelton, R. "Convexifying" Linear Matrix Inequalities Methods for Integrating Structure and Control Design. *Journal of Structural Engineering*, vol.129, no.7, pp.978-988, 2003.
- [63] Zhu, Y., et al. Simultaneous Optimization of Structure and Control for Vibration Suppression. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol.121, pp.237-243, April 1999.
- [64] Michel, G., Mittelbach, F., Samarin, A. *The Latex Companion*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1994.
- [65] Oetiker, T., et al. *The Not-So-Short Introduction to Latex 2ε*. Disponível em <http://www.ctan.org>. Acesso em 20/novembro/2003.
- [66] Massago, S. *Curso de L^AT_EX via exemplos*. Disponível em <http://www2.dm.ufscar.br/~sadao/curso/latex/>. Acesso em 12/dezembro/2003.

Anexos

Anexo I: Determinação das Matrizes Globais do Sistema Flexível

```
function [M,G,K,gdlc,gdls] = sistflex(nel)

%function [M,G,K,gdlc,gdls] = sistflex(nel)
% FUNÇÃO DEFINIDORA DA ESTRUTURA FLEXIVEL PARA CONTROLE
% k = Matriz de rigidez do elemento
% kk / K = Matriz de rigidez do sistema
% m = Matriz de massa do elemento
% mm / M = Matriz de massa do sistema
% d = Matriz de amortecimento do elemento
% dd / G = Matriz de amortecimento do sistema
% index = Vetor com os GDL associados a cada elemento
% gcoord = Matriz de coordenadas globais
% disp = Vetor de posicao nodal
% stress = Vetor de tensoes de cada elemento
% nodes = Matriz de conectividade nodal
% bcdof = Vetor com os GDL associados as cond. contorno
% bcval = Valores das cond. de contorno apresentadas no vetor 'bcdof'
%-----
help sistflex.m
%Dados da viga (material alumínio):
E=69E9;           %Modulo de elasticidade das barras, em N/m2
base=0.032;
altura=0.003;
area=base*altura;   %Area da seccao transversal das barras, em m3
l=1.1;           %Comprimento da viga, em m (letra "L"minuscua)
In=base*altura3/12; %Momento de inercia da secao transversal da viga (letra "i"maiuscula seguida de n)
rho=2.7E3;       %Massa especifica (massa por volume) da viga em Kg/m3

%Elementos e GDL:
nel=input('Defina o numero de elementos na viga: 2, 4 ou 6 ? ');
%Condicional para definir a Matriz de conectividade e as Coordenadas iniciais x(1) e y(2) dos nos
if nel ==2
    nos=[1 2;2 3];
    gcoord(1,1)=0; gcoord(1,2)=0;
    gcoord(2,1)=1/2; gcoord(2,2)=0;
    gcoord(3,1)=1; gcoord(3,2)=0;
    gdlc=5;           %Definição do GDL desejado como sinal de saída (Desl. da extremidade da viga)
    gdls=2;          %Definição do GDL desejado como sinal de controle (Desl. do centro da viga)
elseif nel==4
    nos=[1 2;2 3;3 4;4 5];
```

```

gcoord(1,1)=0; gcoord(1,2)=0;
gcoord(2,1)=1/4; gcoord(2,2)=0;
gcoord(3,1)=1/2; gcoord(3,2)=0;
gcoord(4,1)=3*1/4; gcoord(4,2)=0;
gcoord(5,1)=1; gcoord(5,2)=0;
gdls=11; %Definição do GDL desejado como sinal de saída (Desl. da extremidade da viga)
gdlc=5; %Definição do GDL desejado como sinal de controle (Desl. do centro da viga)
elseif nel==6
nos=[1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7];
gcoord(1,1)=0; gcoord(1,2)=0;
gcoord(2,1)=1/6; gcoord(2,2)=0;
gcoord(3,1)=1/3; gcoord(3,2)=0;
gcoord(4,1)=1/2; gcoord(4,2)=0;
gcoord(5,1)=2*1/3; gcoord(5,2)=0;
gcoord(6,1)=5*1/6; gcoord(6,2)=0;
gcoord(7,1)=1; gcoord(7,2)=0;
gdls=17; %Definição do GDL desejado como sinal de saída (Desl. da extremidade da viga)
gdlc=8; %Definição do GDL desejado como sinal de controle (Desl. do centro da viga)
else
fprintf('Numero de elementos da viga somente 2, 4 ou 6. Abortar!')
break
end
nnel=2; %Nós por elemento
ndof=3; %GDL por nó
nnode=(nnel-1)*nel+1; %Num. de nos do sistema
sdof=nnode*ndof; %Num. total de GDL do sistema

%Restricoes e condições de contorno (viga engastada):
bcdof(1)=1; %Primeiro GDL (horizontal nó 1) e restrito
bcval(1)=0; %E o seu valor = zero
bcdof(2)=2; %Segundo GDL (vertical nó 1) e restrito
bcval(2)=0; %E o seu valor = zero
bcdof(3)=3; %Terceiro GDL (rotação nó 1) e restrito
bcval(3)=0; %E o seu valor = zero

%Inicializacao das matrizes e vetores do sistema:
ff=zeros(sdof,1);
ff(sdof-1)=0.1; %Forca aplicada no ULTIMO nó, direção vertical para cima em Newtons
kk=zeros(sdof,sdof);
mm=zeros(sdof,sdof);
dd=zeros(sdof,sdof);
index=zeros(nnel*ndof,1);

%Montagem das matrizes do sistema flexível:
for iel=1:nel
nd=nos(iel,:);
index=elgdl(nd,nnel,ndof); %Rotina para extração dos GDL do sistema para o elemento
x1=gcoord(nd(1),1);
y1=gcoord(nd(1),2);
x2=gcoord(nd(2),1);
y2=gcoord(nd(2),2); %Coodenadas dos nos de 'iel'
leng(iel)=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %Comprimento do elemento
if (x2-x1)==0 %Calculo do angulo entre os eixos local e global em radianos
if y2>y1

```

```

        beta(iel)=pi/2;
    else
        beta(iel)=-pi/2;
    end
else
    beta(iel)=atan((y2-y1)/(x2-x1));    %Angulo entre eixos local e global
end
%Obtém as matrizes de rigidez (Ko), massa (consistente) e amortecimento (proporcional) dos elementos
[k m d]=eltrel(E,In,leng(iel),area,rho,beta(iel),1);
kk=montagl(kk,k,index);    %Monta na matriz do sistema global usando a [Ko] assim obtida
mm=montagl(mm,m,index);    %Monta na matriz do sistema global usando a [M] assim obtida
dd=montagl(dd,d,index);    %Monta na matriz do sistema global usando a [D] assim obtida
end

%Solução Elastica:
[kk1,ff1]=aplicacc(kk,ff,bcdof,bcval); %Aplica as cond. de contorno
disp=inv(kk1)*ff1;    %Solucao dos deslocamentos nodais
fprintf('SOLUÇÃO ELASTICA INICIAL:')
num=1:1:sdof;
fprintf('Nos x Deslocamento(mm):')
disp1=[num' 1e3*disp]

%Eliminador das linhas e colunas das matrizes globais relacionadas aos GDL nulos
K=eliminalg(kk,bcdof);
M=eliminalg(mm,bcdof);
G=eliminalg(dd,bcdof);

```

Anexo II: Índices dos GDL de um EF

```

function [index]=elgdl(nd,nnel,ndof)

%function [index]=elgdl(nd,nnel,ndof)
%Objetivo:
%Calcular os gdl do sistema que estao associados com cada elemento
%Descricao das variaveis:
%index - Vetor dos gdl do sistema associado com o elemento "iel"
%iel - Numero do elemento cujo gdl do sistema sera determinado
%nnel - Numero de nos por elemento
%ndof - Numero de gdl por no
%-----

edof = nnel*ndof
k=0;
for i=1:nnel
    start = (nd(i)-1)*ndof;
    for j=1:ndof
        k=k+1;
        index(k)=start+j;
    end
end
end

```

Anexo III: Determinação das Matrizes Locais de um EF

```

function [k,m,d]=eltrel(el,xi,leng,area,rho,beta)

%function [k,m,d]=eltrel(el,xi,leng,area,rho,beta)
%Obteção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento para elemento de viga 2D
%GDL nodais por elemento: u1 v1 t1 u2 v2 t2
%
%Variaveis:
    %k - matriz de rigidez do elemento (6x6)
    %m - matriz de massa do elemento (6x6)
    %d - matriz de amortecimento proporcional do elemento (6x6)
    %el - modulo de elasticidade
    %xi - momento de inércia da área da secção transversal
    %leng - comprimento do elemento
    %area - area da secção transversal do elemento
    %rho - densidade (massa por unidade de volume)
    %beta - ângulo entre os eixos local e global
    % * positivo se o eixo local girou no sentido anti-horário partindo do eixo global
%-----

% Matriz de rigidez no eixo global (k)
a=el*area/leng;
p=el*xi/leng3;
kl=[a      0      0      -a      0      0;
    0     12*p     6*leng*p     0     -12*p     6*leng*p;
    0     6*leng*p     4*leng2*p     0     -6*leng*p     2*leng2*p;
   -a      0      0      a      0      0;
    0     -12*p     -6*leng*p     0     12*p     -6*leng*p;
    0     6*leng*p     2*leng2*p     0     -6*leng*p     4*leng2*p];
c=cos(beta); s=sin(beta);
r=[c s 0 0 0 0;
   -s c 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 c s 0;
    0 0 0 -s c 0;
    0 0 0 0 0 1]; %Rotation (coordinate transformation) matrix
k=r'*kl*r;

%Matriz de Massa (m)
ma=rho*area*leng/6;
mm=rho*area*leng/420;
ml=[2*ma 0      0      ma 0      0;
    0   156*mm  22*leng*mm  0   54*mm  -13*leng*mm;
    0   22*leng*mm  4*leng2*mm  0   13*leng*mm  -3*leng2*mm;
    ma  0      0      2*ma 0      0;
    0   54*mm  13*leng*mm  0   156*mm  -22*leng*mm;
    0  -13*leng*mm  -3*leng2*mm  0   -22*leng*mm  4*leng2*mm];
m=r'*ml*r;

%Matriz de amortecimento proporcional no sistema global (d)
neta=1e-2;
kappa=1e-5;
d=neta*m+kappa*k;

```

Anexo IV: Montagem das Matrizes Globais do Sistema

```
function [kk] = montagl(kk,k,index)

%function [kk]=montagl(kk,k,index)
% Objetivo:
% Realizar a montagem ("assembly") das matrizes dos elementos nas matrizes do sistema
% Descrição das variáveis:
% kk - matriz do sistema
% k - matriz do elemento
% index - Vetor dos g.d.l. associados com o respectivo elemento
%-----

edof = length(index);
for i=1:edof
    ii=index(i);
    for j=1:edof
        jj=index(j);
        kk(ii,jj)=kk(ii,jj)+k(i,j);
    end
end
end
```

Anexo V: Condições de Contorno para a Solução Elástica

```
function [kk,ff] = aplicacc(kk,ff,bcdof,bcval)

%function [kk,ff] = aplicacc(kk,ff,bcdof,bcval)
%Funcao que aplica as restricoes a equacao matricial [kk]*x=ff
%
%Variáveis:
% kk - Matriz do sistema na entrada (antes de aplicar as restricoes)
% ff - Vetor do sistema na entrada (antes de aplicar as restricoes)
% bcdof - Vetor contendo GDLs restritos
% bcval - Vetor contendo valores restritos
% Por exemplo: temos restricoes no GDL 2 e no 10
% e seus valores de restricao sao 1.0 e 2.5 respectivamente
% Entao: bcdof=[2 10]; bcval=[1.0 2.5];
%-----

n=length(bcdof);
sdof=size(kk,1);
for i=1:n
    c=bcdof(i);
    for j=1:sdof
        kk(c,j)=0;
    end
    kk(c,c)=1;
    ff(c)=bcval(i);
end
end
```

Anexo VI: Elimina linhas e colunas das Matrizes nas Restrições

```
function [K] = eliminale(k,bcdof)

%function [K] = eliminale(k,bcdof)
%Função que aplica as restrições das condições de contorno na matriz
%[k], através da eliminação das suas respectivas linhas e colunas
%
%Variáveis:
% kk - Matriz do sistema na entrada (antes de aplicar as restrições)
% bcdof - Vetor contendo GDLs restritos
%-----

d=1:length(k);
u=setdiff(d,bcdof);
n=length(u);
ordem=size(k,1)*size(k,2);
if sqrt(ordem)==length(k)
    for i=1:n
        for j=1:n
            K(i,j)=k(u(i),u(j));
        end
    end
else
    for i=1:n
        K(i,1)=k(u(i));
    end
end
end
```

Anexo VII: Matrizes de Estado do Sistema nos Problemas H_2 e H_∞

```
function [A,B,B1,B2,C,C1,C2,D,D11,D12,D21,D22] = estadoh2hi(M,G,K,gdlc,gdls)

%function [A,B,B1,B2,C,C1,C2,D,D11,D12,D21,D22] = estadoh2hi(M,G,K,gdlc,gdls)
%Definição do modelo de estado do sistema mecânico para controle via norma  $H_2$  e para a realização linear das
% equações de estado via notação compacta
%-----

%Matrizes de estado do sistema:
[lin,col]=size(M); %Determina o número de GDL do sistema modelado (lin)
F1=zeros(lin,1);
F2=F1;
F1(gdls)=1;
F2(gdlc)=1;
A=[zeros(lin) eye(lin);-inv(M)*K -inv(M)*G]; %Matriz quadrada: tamanho = 2xGDL livres
B=[zeros(lin,col);inv(M)]*F1; %Vetor coluna com 2xGDL livres em número de linhas
C=zeros(2,2*lin); %Matriz de 2 linhas e com 2xGDL livres em número de colunas
```

```

C(1,gdls)=1;      %Definição do GDL que se deseja controlar (atenuação real da viga)
D=0;             %FT original é estritamente própria

%Definição do Sistema Linear para controle:
B1=B;           %Vetor da força externa, no equacionamento (distúrbio)
B1(:,2)=0;      %Nulo por não haver influência do ruído de medição (vetor r) na entrada do sistema (w)
B2=zeros(lin,col);inv(M)]*F2;      %Vetor B2 equivale ao GDL onde esta presente a medição para controle
C1=C;           %Refere-se ao GDL presente na saída da performance (z)
C2=C(1,:);      %Refere-se ao GDL afetado pela força perturbadora, medido através de (y)
D11=[0 0;0 0]; %Não ha influência direta de (w) nas saídas (z); NULO para o controlador ser admissível
D12=[0;1];      %Sinal de controle contém apenas a saída do controlador
D21=[0 1];      %O sinal que é enviado para o controlador (feedback) recebe influências de (r)
D22=[0];        %Sinal de controle ausente na saída para o controlador; NULO para o controlador ser admissível

```

Anexo VIII: Implementação do Controle H_2

```

%PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE VIBRAÇÃO (distúrbios aleatórios) VIA NORMA H-2
%PARA UMA VIGA ENGASTADA 2D COM MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE BARRA
%SOLUÇÃO ATRAVÉS DE LMI VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA
%-----

```

```

limpa
help RSh2viga.m
%Obtendo as informações do sistema flexível:
nel=input('Defina o numero de elementos na viga: 2, 4 ou 6 ? ');
[M,G,K,gdlc,gdls]=sistflex(nel);
s=length(M); %auxiliar

%Modelo de Estados e Notação compacta do sistema CTLTI:
[A,B,B1,B2,C,C1,C2,D,D11,D12,D21,D22]=estadoh2hi(M,G,K,gdlc,gdls);
P=ltisys(A,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);

%Diagrama do Valor singular do sistema não-controlado
figure(1)
sys=ss(A,B,C,D);
sigma(sys,'g-'),grid on
axis([1 5e3 -120 40]);
fprintf('\nAutovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema original:');
damp(sys)
[Ao,Bo,Co]=OBALREAL(A,B,C); %Gera a realização de estado balanceada do sistema CTLTI
sysbal=ss(Ao,Bo,Co,D);
fprintf('Norma H2 do sistema não controlado:\n')
H2mfnc=normh2(sysbal),pause

%Definição do ótimo pela descrição do controlador do sistema em LMI:
s2=length(A); %Ordem equivalente a 2 vezes o numero de GDL livres do sistema
colb=size(B1,2); %Auxiliar para definição do numero de colunas de B1, que vale o tamanho de Z
setlmis([])
Z=lmivar(1,[colb 1]); %Var. matricial quadrada, simétrica e bloco-diagonal, do tamanho de 'colb', completa
X=lmivar(1,[s2 1]); %Variavel matricial quadrada, simétrica e bloco-diagonal, do tamanho de A, completa
Y=lmivar(1,[s2 1]); %idem X
L=lmivar(2,[s2 1]); %Var. matricial retangular genérica completa, do tamanho de B

```

```

F=lmivar(2,[1 s2]);      %Var. matricial retangular genérica completa, do tamanho de C
N=lmivar(2,[s2 s2]);    %Var. matricial retangular genérica completa, (quadrada não-simétrica) do tamanho de A
I1=eye(1);              %Matriz identidade de ordem 1, contida nas LMI

%Primeira LMI, positivo-definida:
lmiterm([-1 1 1 Z],1,1);      %Pos(1,1) = Z
lmiterm([-1 2 1 0],B1);      %Pos(2,1) = B1
lmiterm([-1 2 2 Y],1,1);     %Pos(2,2) = Y
lmiterm([-1 3 1 -X],1,B1);   %Pos(3,1) = X'*B1
lmiterm([-1 3 1 L],1,D21);   %Pos(3,1) = L*D21
lmiterm([-1 3 2 0],I1);     %Pos(3,2) = I1
lmiterm([-1 3 3 X],1,1);     %Pos(3,3) = X

%Segunda LMI, negativo-definida:
lmiterm([2 1 1 Y],A,1,'s');  %Pos(1,1) = A*Y+Y*A' (Pois Y=Y')
lmiterm([2 1 1 F],B2,1,'s'); %Pos(1,1) = B2*F+F'*B2'
lmiterm([2 2 1 N],1,1);     %Pos(2,1) = N
lmiterm([2 2 1 0],A');      %Pos(2,1) = A'
lmiterm([2 2 2 X],1,A,'s');  %Pos(2,2) = X*A+A'*X (Pois X=X')
lmiterm([2 2 2 L],1,C2,'s'); %Pos(2,2) = L*C2+C2'*L'
lmiterm([2 3 1 Y],C1,1);     %Pos(3,1) = C1*Y (Pois Y=Y')
lmiterm([2 3 1 F],D12,1);   %Pos(3,1) = D12*F
lmiterm([2 3 2 0],C1);     %Pos(3,2) = C1
lmiterm([2 3 3 0],-I1);     %Pos(3,3) = -I1

%Terceira LMI, positivo-definida:
lmiterm([-3 1 1 Y],1,1);     %Pos(1,1) = Y
lmiterm([-3 2 1 0],I1);     %Pos(2,1) = I1
lmiterm([-3 2 2 X],1,1);     %Pos(2,2) = X
RS=getlmis;

%Solução do sistema:
nvd=decnbr(RS); %Número das variáveis de decisão
c=zeros(nvd,1); %Vetor com o mesmo tamanho de nvd
decx1=diag(decinfo(RS,Z)); %Quer se minimizar o Traço da Matriz Z: diagonal das variáveis contidas em Z
for k=1:length(decx1) %Associa-se os valores das variáveis da diagonal de Z com a var. de minimização (c)
    c(decx1(k))=1;
end
opt=zeros(1,5);
opt(1)=1e-5;
[cotim,xotim]=mincx(RS,c,opt); %Encontra os valores ótimos de c e x (variável de decisão)
Xotim=dec2mat(RS,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RS,xotim,Y);
Lotim=dec2mat(RS,xotim,L);
Fotim=dec2mat(RS,xotim,F);
Notim=dec2mat(RS,xotim,N);
fprintf('Valor ótimo do Traço de Z:\n')
Trz=cotim
fprintf('Valor Norma H2 obtida pela minimização:\n')
H2min=sqrt(Trz)

%Definição do modelo de estados do Controlador:
U=eye(s2); %Variável U arbitrária: identidade de ordem 's2'!
V=inv(U'*(U-Xotim*Yotim));
%Matrizes de estado do Controlador Misto
Ac=inv(U'*(Notim-Xotim*A*Yotim-Xotim*B2*Fotim-Lotim*C2*Yotim))*inv(V);

```

```

Bc=inv(U')*Lotim;
Cc=Fotim*inv(V);
Dc=0;          %Assim admitida para a existência do controlador admissivel

%Definição do controlador H2, seguido da malha fechada do sistema:
Krs=ltisys(Ac,Bc,Cc,Dc);
consysrsLMI=slft(P,Krs);
[Ag,Bg,Cg,Dg]=ltiss(consysrsLMI);
[Ago,Bgo,Cgo]=OBALREAL(Ag,Bg,Cg);
consysrsLMIb=ss(Ago,Bgo,Cgo,Dg);
fprintf('Norma H2 do sistema em malha fechada:\n')
H2mflMI=normh2(consysrsLMIb)

%SVD controlado LMI
figure(1),hold on
sigma(consysrsLMIb(:,1),'b-');
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Com controle LMI')
axis([1 5e3 -120 40]);
grid on;pause

%Controle via "hinfmix":
r=[2 1 1];
alfa=0;       %Define a proporção dos controles no misto: o valor (1-alfa) sera a proporção do H2.
obj=[0 0 alfa 1-alfa] %Dois primeiros valores sao nulos para o controle ser apenas H2.
[g,H2ot,Kmix] = hinfmix(P,r,obj,[],0);
fprintf('Valor otimo da norma H2 por "Hinfmix":\n')
H2ot
consysmix=slft(P,Kmix);
[Ak,Bk,Ck,Dk]=ltiss(Kmix);
[Am,Bm,Cm,Dm]=ltiss(consysmix);
[Amb,Bmb,Cmb]=OBALREAL(Am,Bm,Cm);
consysmixb=ss(Amb,Bmb,Cmb,Dm);
fprintf('Norma H2 do sistema controlado em malha fechada:\n')
H2mix=normh2(consysmixb)
%Diagrama do Valor singular do sistema controlado HINFMIX
figure(1),hold on,
sigma(consysmixb(:,1),'r-');
axis([1 5e3 -120 40]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI','r-', 'Via hinfmix'), grid on,
fprintf('Autovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema controlado:');
damp(consysmixb),pause

%Respostas dos sistemas original e controlado a um sinal aleatório com distribuição NORMAL (pré-gravado):
load -ascii sinal.mat
N=norm(sinal,inf);
sinal=sinal/N;
sinal=0.1*sinal;
t=0:0.05:5;
sysaux=ss(Ag,Bg(:,1),Cg(1,:),Dg(1));
figure(2)
lsim(sys(1),'g-',sinal,t);hold on
lsim(sysaux,'b-',sinal,t);
lsim(consysmixb(1,1),'r-',sinal,t); grid on
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI','r-', 'Via hinfmix');

```

```

axis([0 max(t) -0.06 0.06]), pause
sysaux2=ss(Ag,Bg(:,1),Cg(2,:),Dg(2));
figure(3)
lsim(sys(2),'g-',sinal,t),hold on
lsim(sysaux2,'b-',sinal,t);
lsim(consysmixb(2,1),'r-',sinal,t)
axis([0 max(t) -0.06 0.06]), grid on
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI','r-', 'Via hinfmix'), pause,

%Resposta dos sistemas original e controlado a uma dada condição inicial na posição da extremidade da viga:
xiorig=zeros(size(C2)); xicont=[xiorig xiorig];
xiorig(s2-1)=1;           %condição inicial para o sistema não-controlado
xicont(s2-1)=1;          %condição inicial para o sistema controlado
ts=0:0.05:15;
figure(4)
initial(sys(1),'g-',xiorig,ts), hold on,
initial(sysaux,'b-',xicont,ts), grid on,
axis([0 max(ts) -0.1 0.1]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Com controle')

```

Anexo IX: Implementação do Controle H_∞

```

%PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE VIBRAÇÃO (distúrbios aleatórios) EM NORMA H-infinito
%PARA UMA VIGA ENGASTADA 2D COM MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE BARRA
%SOLUÇÃO ATRAVÉS DE LMI via REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA
%-----

```

```

limpa
help RShiviga.m
%Obtendo as informações do sistema flexível:
nel=input('Defina o número de elementos na viga: 2, 4 ou 6 ? ');
[M,G,K,gdlc,gdls]=sistflex(nel);
s=length(M); %auxiliar

%Modelo de Estados e Notação compacta do sistema CTLTI:
[A,B,B1,B2,C,C1,C2,D,D11,D12,D21,D22]= estadoh2hi(M,G,K,gdlc,gdls);
P=ltisys(A,[B1 B2][C1;C2][D11 D12;D21 D22]);

%Diagrama do Valor singular do sistema
figure(1)
sys=ss(A,B,C,D);
sigma(sys,'g-'), grid on
axis([1 5e3 -120 40]);
fprintf('Autovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema original:');
damp(sys)
[Ao,Bo,Co]=OBALREAL(A,B,C); %Gera a realização de estado balanceada do sistema CTLTI
sysbal=ss(Ao,Bo,Co,D);
fprintf('Norma H-inf. do sistema não controlado e seu valor em dB:\n')
Hinfmfnorm=normhinf(sysbal)
HinfmfdBnc=20*log10(Hinfmfnorm)
defcon=input('Deseja carregar o controlador para 2 EF (1=sim)? ');
s2=length(A);%auxiliar

```

```

if defcon==1
    load conthi2ef.mat Krs
else

%Definição do sistema LMI:
setlmis([])
mi=lmivar(1,[1 1]); %Variável escalar em forma de matriz 1x1
X=lmivar(1,[s2 1]); %Variável matricial quadrada, simétrica e bloco-diagonal, do tamanho de A, completa
Y=lmivar(1,[s2 1]); %idem X
L=lmivar(2,[s2 1]); %Var. matricial retangular genérica completa, do tamanho de B
F=lmivar(2,[1 s2]); %Var. matricial retangular genérica completa, do tamanho de C
N=lmivar(2,[s2 s2]); %Var. matricial retangular (quadrada não-simétrica) genérica, do tamanho de A, completa
I1=eye(1);
%Primeira LMI, negativo-definida:
lmiterm([1 1 1 Y],A,1,'s'); %Pos(1,1) = A*Y+Y*A'
lmiterm([1 1 1 F],B2,1,'s'); %Pos(1,1) = B2*F+F*B2'
lmiterm([1 2 1 N],1,1); %Pos(2,1) = N
lmiterm([1 2 1 0],A'); %Pos(2,1) = A'
lmiterm([1 2 2 X],1,A,'s'); %Pos(2,2) = X*A+A'*X
lmiterm([1 2 2 L],1,C2,'s'); %Pos(2,2) = L*C2+C2'*L'
lmiterm([1 3 1 Y],C1,1); %Pos(3,1) = C1*Y (Pois Y=Y')
lmiterm([1 3 1 F],D12,1); %Pos(3,1) = D12*F
lmiterm([1 3 2 0],C1); %Pos(3,2) = C1
lmiterm([1 3 3 0],-I1); %Pos(3,3) = -I1
lmiterm([1 4 1 0],B1'); %Pos(4,1) = B1'
lmiterm([1 4 2 X],B1',1); %Pos(4,2) = B1'*X
lmiterm([1 4 2 -L],D21',1); %Pos(4,2) = D21'*L'
lmiterm([1 4 4 mi],-mi,I1); %Pos(4,4) = -mi^2*I1
lmiterm([1 4 4 mi],2,D11); %Pos(4,4) = 2*mi*D11
lmiterm([1 4 4 0],-D11'*D11); %Pos(4,4) = -D11'*D11
%Segunda LMI, positivo-definida:
lmiterm([-2 1 1 Y],1,1); %Pos(1,1) = Y
lmiterm([-2 2 1 0],I1); %Pos(2,1) = I1
lmiterm([-2 2 2 X],1,1); %Pos(2,2) = X
RS=getlmis;

%Solução do sistema:
nvd=decnbr(RS); %Número das variáveis de decisão
c=zeros(nvd,1); %Vetor com o mesmo tamanho de nvd
c(1)=1; %Primeiro valor nao-nulo: minimização de mi (gamma), a primeira variavel da LMI.
opt=zeros(1,5);
opt(1)=1e-5
[cotim,xotim]=mincx(RS,c,opt); %Encontra os valores otimos de c e x (var. de decisão)
Xotim=dec2mat(RS,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RS,xotim,Y);
Lotim=dec2mat(RS,xotim,L);
Fotim=dec2mat(RS,xotim,F);
Notim=dec2mat(RS,xotim,N);
fprintf('Valor ótimo de gamma:\n')
gamma=cotim
fprintf('Valor Norma H-inf obtida pela minimização, seguido do valor em dB:\n')
Hinfmin=sqrt(gamma)
HinfmindB=20*log10(Hinfmin)

```

```

%Definição do modelo de estados do Controlador:
U=eye(s2); %Variavel U arbitrária!
V=inv(U)*(U-Xotim*Yotim);
%Matrizes do Controlador H-infinito
Ac=inv(U)*(Notim-Xotim*A*Yotim-Xotim*B2*Fotim-Lotim*C2*Yotim)*inv(V);
Bc=inv(U)*Lotim;
Cc=Fotim*inv(V);
Dc=0; %Assim admitida para a existência do controlador admissível

%Definição do controlador H-inf.:
Krs=ltisys(Ac,Bc,Cc,Dc);
save conthi2ef.mat Krs;
end %Fim da determinacao do controlador
consysrs=sft(P,Krs);
[Ag,Bg,Cg,Dg]=ltiss(consysrs);
[Ago,Bgo,Cgo]=OBALREAL(Ag,Bg,Cg);
consysrsb=ss(Ago,Bgo,Cgo,Dg);
consysrsunb=ss(Ag,Bg,Cg,Dg);
fprintf('Norma H-inf. do sistema controlado, seguido pelo valor em dB:\n')
Hinfcon=normhinf(consysrsb)
HinfcondB=20*log10(Hinfcon)

%Diagrama do Valor singular do sistema controlado
figure(1),hold on
sigma(consysrsb(:,1),'b-')
axis([1 5e3 -120 40]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI')
fprintf('Autovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequencias naturais dos modos do sistema controlado por hinfmi:');
damp(consysrsb)
r=[1;1];

%Controle via "hinfmi":
fprintf('SERA INICIADO O CONTROLE VIA COMANDO "HINFLMI":\n'),pause
[goptlmi,Klmi] = hinfmi(P,r);
fprintf('Valor Norma H-inf obtida via hinfmi, seguido do valor em dB:\n')
Hinfmi=goptlmi
HinfmidB=20*log10(Hinfmi)
consyslmi=sft(P,Klmi);
[Al,Bl,Cl,DI]=ltiss(consyslmi);
[Alo,Blo,Clo]=OBALREAL(Al,Bl,Cl);
consyslmib=ss(Alo,Blo,Clo,DI);
fprintf('Norma H-inf. calculada do sistema controlado via "hinfmi", seguido pelo valor em dB:\n')
Hinfmic=normhinf(consyslmib)
HinfmidB=20*log10(Hinfmic)
%Diagrama do Valor singular do sistema controlado
figure(1), hold on,
sigma(consyslmib(:,1),'r-'), grid on
axis([1 5e3 -120 40]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI','r-', 'Via hinfmi')
fprintf('Autovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema controlado por hinfmi:');
damp(consyslmib),pause

%Respostas dos sistemas original e controlado a um sinal aleatório com distribuição NORMAL (pré-gravado):
load -ascii sinal.mat

```

```

N=norm(sinal,inf);
sinal=sinal/N;
sinal=0.1*sinal;
t=0:0.05:5;
figure(2)
lsim(sys(1),'g-',sinal,t); hold on,
lsim(consysrsunb(1,1),'b-',sinal,t)
lsim(consyslmib(1,1),'r-',sinal,t)
axis([0 max(t) -0.06 0.06]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI','r-', 'Via hinflmi'); grid on
title('Sinal medido y=z1'),pause

figure(3)
lsim(sys(2),'g-',sinal,t), hold on
lsim(consysrsunb(2,1),'b-',sinal,t)
lsim(consyslmib(2,1),'r-',sinal,t), grid on,
axis([0 max(t) -0.06 0.06]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Controle LMI','r-', 'Via hinflmi'),2)
title('Sinal do atuador u=z2'),pause

%Resposta dos sistemas original e controlado a uma dada condição inicial na posição da extremidade da viga:
xiorig=zeros(size(C2));
z=length(ssdata(consysrsb))-length(C2);
xicont=[xiorig zeros(1,z)];
xiorig(s2-1)=1;%condição inicial para o sistema não-controlado
xicont(s2-1)=0;%condição inicial para o sistema controlado
ts=0:0.01:2;
figure(4)
initial(sys(1),'g-',xiorig,ts), hold on,
initial(consysrsb(1,1),'b-',xicont,ts), grid on,
axis([0 max(ts) -0.1 0.1]);
legend('g-', 'Sem controle','b-', 'Com controle')

%Análise do controle e da robustez pela incerteza:
fprintf('SERA INICIADA A ANALISE DO SISTEMA INCERTO:\n'),pause
fprintf('Maximo valor da incerteza concentrada admitida pelo controlador para a estabilidade:\n')
delta=1/Hinfmin
Ad=A+B1*inv(eye(2)-delta*D11)*delta*C1;
Pd=Itisys(Ad,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);
consysinc=sift(Pd,Krs);
[Adel,Bdel,Cdel,Ddel]=Itiss(consysinc);
[Ado,Bdo,Cdo]=OBALREAL(Adel,Bdel,Cdel);
sysinc=ss(Ado,Bdo,Cdo,Ddel);
fprintf('Autovalores de [A] do sistema incerto:\n');
polos=pole(sysinc)
if sum(real(polos)>=0)==0
    fprintf('Norma H-inf. do sistema incerto controlado, seguido pelo valor em dB:\n')
    Hinfnc=normhinf(sysinc)
    HinfncdB=20*log10(Hinfnc)
    fprintf('Valores das incertezas estão dentro do limite de robustez do sistema. Sistema ESTÁVEL.\n')
else
    fprintf('Sistema possui pólos com parte real positiva. INSTABILIDADE!\n')
end
end
%Diagrama de Valor singular do sistema incerto:

```

```

figure(4),hold on
sigma(consysrsb(:,1),'b-');
sigma(sysinc(:,1),'r-');
axis([1 5e3 -120 40]);
legend('b-' , 'Original controlado' , 'r-' , 'Incerto controlado') , grid on, pause
%Respostas do sistema normal e incerto ao sinal aleatório:
[Aie,Bie,Cie]=OBALREAL(Adel,Bdel,Cdel(1,:));
sysince=ss(Aie,Bie,Cie,Ddel(1));
figure(5)
lsim(consysrsb(1,1),'b-' ,sinal,t); hold on
lsim(sysince(1,1),'r-' ,sinal,t) , grid on,
axis([0 max(t) -0.06 0.06]);
legend('b-' , 'Original controlado' , 'r-' , 'Incerto controlado')

```

Anexo X: Matrizes de Estado do Sistema no Problema Misto

```

function [A,B,B0,B1,B2,C,C0,C1,C2,D,D00,D01,D02,D10,D11,D12,D20,D21,D22] = estado(M,G,K,gdlc,gdls)

%function [A,B,B0,B1,B2,C,C0,C1,C2,D,D00,D01,D02,D10,D11,D12,D20,D21,D22] = estado(M,G,K,gdlc,gdls)
%Definição do modelo de estado do sistema mecânico para controle misto e para a realização linear das
% equações de estado via notação compacta
%-----

%Matrizes de estado do sistema:
[lin,col]=size(M); %Determina o numero de GDL livres (irrestritos) do sistema modelado (lin)
F1=zeros(lin,1);
F2=F1;
F1(gdls)=1;
F2(gdlc)=1;
A=[zeros(lin) eye(lin);-inv(M)*K -inv(M)*G]; %Matriz quadrada: tamanho = 2xGDL livres
B=[zeros(lin,col);inv(M)]*F1; %Vetor coluna com 2xGDL livres em número de linhas
C=zeros(2,2*lin); %Matriz de 2 linhas e com 2xGDL livres em número de colunas
C(gdls)=1; %Definição do GDL que se deseja controlar
D=0; %FT original é estritamente própria

%Definição do Sistema Linear para controle:
B0=B; %Indica que as incertezas do sistema afetam os mesmos GDL afetados pelas forças
B1=B; %Vetor da força externa, no equacionamento é um distúrbio
B1(:,2)=0; %Nulo por não haver influência do ruído de medição (vetor r) na resposta do sistema
B2=[zeros(lin,col);inv(M)]*F2; %Vetor B2 equivale ao GDL onde esta presente a medição para controle
C0=C(1,:); %Refere-se ao GDL que influi na saída de robustez (z0)
C1=C; %Refere-se ao GDL que influi na saída de performance (z1)
C2=C0; %Refere-se ao GDL afetado pela força perturbadora, o qual será controlado
D00=[0]; %Incertezas não influenciam na saída de robustez (ADOTADO) – Essencial para HINFMIX
D01=[0 0]; %Não há influência direta das entradas exógenas (w1) na saída z0 (ADOTADO) – HINFMIX
D02=[0]; %Sinal de controle não está presente na saída de robustez (ADOTADO)
D10=[0 0]; %NULO para o controlador ser admissível
D11=[0 0 0 0]; %NULO para o controlador ser admissível
D12=[0 1]; %Sinal de controle contem apenas a saída do controlador
D20=[0]; %Incertezas não influenciam na saída para o controlador (ADOTADO)
D21=[0 1]; %O sinal que é enviado para o controlador (feedback) recebe influências do ruído externo
D22=[0]; %Sinal de controle ausente na saída para o controlador: NULO para LMI ser válida

```

Anexo XI: Implementação do Controle Misto

```
%PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE VIBRAÇÃO (distúrbios aleatórios) EM NORMA MISTA (H2/H-infinito)
%PARA UMA VIGA ENGASTADA 2D COM MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE BARRA
%SOLUÇÃO ATRAVÉS DO COMANDO 'HINF MIX' E DA MINIMIZAÇÃO VIA RESTRIÇÕES EM LMI
% POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA.
%-----
```

```
limpa
help RSmixviga.m
%Obtendo as informações do sistema flexível:
nel=input('Defina o número de elementos na viga: 2, 4 ou 6 ? ');
[M,G,K,gdlc,gdls]=sistflex(nel);
s=length(M);          %Ordem equivalente ao número de GDL livres do sistema

%Modelo de Estados e Notação compacta do sistema CTLTI:
[A,B,B0,B1,B2,C,C0,C1,C2,D,D00,D01,D02,D10,D11,D12,D20,D21,D22]=estado(M,G,K,gdlc,gdls);
P=ltisys(A,[B0 B1 B2],[C0;C1;C2],[D00 D01 D02;D10 D11 D12;D20 D21 D22]);

%Diagrama do Valor singular do sistema não-controlado
figure(1)
sys=ss(A,B,C,D);
sigma(sys,'g-'),grid on
axis([1 5e3 -120 40]);
fprintf('\nAutovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema original:');
damp(sys)
[Ao,Bo,Co]=OBALREAL(A,B,C);    %Gera a realização de estado balanceada do sistema CTLTI
sysbal=ss(Ao,Bo,Co,D);
fprintf('Norma H-inf. do sistema não controlado e seu valor em dB:\n')
Hinmfmc=normhinf(sysbal)
HinmfmdBnc=20*log10(Hinmfmc)
fprintf('Norma H2 do sistema não controlado:\n')
H2mfnc=normh2(sysbal),pause

%Ótimo pelo comando HINF MIX
r=[2 1 1];          %Comprimento dos vetores z2, y e u no equacionamento
alfa=0;            %Define a proporção dos controles no misto: o valor (1-alfa) sera a proporção do H2
maxg=8.5;
obj=[maxg 0 alfa 1-alfa];          %Dois primeiros valores são o limite máximo de gamma e Tr(z).
[gammaot,H2ot,Kot]=hinfmix(P,r,obj,[],0);
fprintf('Valores ótimos de gamma e da norma H2 por Hinfmix.m:\n')
gammaot
H2ot
consysmix=sft(P,Kot);
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl]=ltiss(consysmix);
[Aclb,Bclb,Cclb]=OBALREAL(Acl,Bcl,Ccl);          %Continuous order balanced realization
consysmixb=ss(Aclb,Bclb,Cclb,Dcl);
fprintf('Norma H-inf. do sistema controlado em malha fechada e seu valor em dB:\n')
Hinmf=normhinf(consysmixb)
HinmfdB=20*log10(Hinmf)
fprintf('Norma H2 do sistema controlado em malha fechada:\n')
```

```

H2mf=normh2(consysmixb)

%Diagrama do Valor singular do sistema controlado HINFMIX
figure(1),hold on
sigma(consysmixb(:,1),'r-');
axis([1 5e3 -120 40]);
legend(' Sem controle',' Com controle HINFMIX'), grid on
[AclD,BclD,CclD]=OBALREAL(Acl,Bcl(:,1),Ccl(1,:));
consysmixd=ss(AclD,BclD,CclD,Dcl(1));
fprintf('Autovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema controlado:');
damp(consysmixd)
defcon=input('Deseja carregar o controlador para 2 EF (1=sim)? ');
s2=length(A);      %Ordem equivalente a 2 vezes o numero de GDL livres do sistema
if defcon==1
    load contmix2ef.mat Krs
else

%-----
%Definição do ótimo pela descrição do controlador do sistema em LMI:
mi=maxg;          %Determinação da entrada da restrição da norma H-infinito
colb=size(B1,2); %Auxiliar para definição do numero de colunas de B1, que vale o tamanho de Z
setlmis([])
Z=lmivar(1,[colb 1]); %Var. matricial quadrada, simetrica e bloco-diagonal, do tamanho das colunas de B1, completa
X=lmivar(1,[s2 1]); %Variavel matricial quadrada, simetrica e bloco-diagonal, do tamanho de A, completa
Y=lmivar(1,[s2 1]); %idem X
L=lmivar(2,[s2 1]); %Var. matricial retangular generica completa, do tamanho de B
F=lmivar(2,[1 s2]) %Var. matricial retangular generica completa, do tamanho de C
N=lmivar(2,[s2 s2]); %Var. matricial retangular generica completa, (quadrada nao-simetrica) do tamanho de A.
I1=eye(1);          %Matrizes identidade de ordem adequada para cada LMI

%Primeira LMI, positivo-definida:
lmiterm([-1 1 1 Z],1,1); %Pos(1,1) = Z
lmiterm([-1 2 1 0],B1); %Pos(2,1) = B1
lmiterm([-1 2 2 Y],1,1); %Pos(2,2) = Y
lmiterm([-1 3 1 -X],1,B1); %Pos(3,1) = X'*B1
lmiterm([-1 3 1 L],1,D21); %Pos(3,1) = L*D21
lmiterm([-1 3 2 0],I1); %Pos(3,2) = I1
lmiterm([-1 3 3 X],1,1); %Pos(3,3) = X

%Segunda LMI, negativo-definida:
lmiterm([2 1 1 Y],A,1,'s'); %Pos(1,1) = A*Y+Y*A' (Pois Y=Y')
lmiterm([2 1 1 F],B2,1,'s'); %Pos(1,1) = B2*F+F'*B2'
lmiterm([2 2 1 N],1,1); %Pos(2,1) = N
lmiterm([2 2 1 0],A'); %Pos(2,1) = A'
%lmiterm([2 2 1 L],1,F); %Pos(2,1) = L*D22*F -> sendo D22=[0] definido em estado.m
lmiterm([2 2 2 X],1,A,'s'); %Pos(2,2) = X*A+A'*X (Pois X=X')
lmiterm([2 2 2 L],1,C2,'s'); %Pos(2,2) = L*C2+C2'*L'
lmiterm([2 3 1 Y],C1,1); %Pos(3,1) = C1*Y (Pois Y=Y')
lmiterm([2 3 1 F],D12,1); %Pos(3,1) = D12*F
lmiterm([2 3 2 0],C1); %Pos(3,2) = C1
lmiterm([2 3 3 0],-I1); %Pos(3,3) = -I1

%Terceira LMI, negativo-definida:
lmiterm([3 1 1 Y],A,1,'s'); %Pos(1,1) = A*Y+Y*A'
lmiterm([3 1 1 F],B2,1,'s'); %Pos(1,1) = B2*F+F'*B2'
lmiterm([3 2 1 N],1,1); %Pos(2,1) = N

```

```

lmiterm([3 2 1 0],A'); %Pos(2,1) = A'
%lmiterm([2 2 1 L],1,F); %Pos(2,1)=L*D22*F -> com D22=0 definido em estado.m
lmiterm([3 2 2 X],1,A,'s'); %Pos(2,2) = X*A+A'*X
lmiterm([3 2 2 L],1,C2,'s'); %Pos(2,2) = L*C2+C2'*L'
lmiterm([3 3 1 0],B0'); %Pos(3,1) = B0'
lmiterm([3 3 2 X],B0',1); %Pos(3,2) = B0'*X
lmiterm([3 3 2 -L],D20',1); %Pos(3,2) = D20'*L'
lmiterm([3 3 3 0],-mi); %Pos(3,3) = -mi
lmiterm([3 4 1 Y],C0,1); %Pos(4,1) = C0*Y
lmiterm([3 4 1 F],D02,1); %Pos(4,1) = D02*F
lmiterm([3 4 2 0],C0); %Pos(4,2) = C0
lmiterm([3 4 3 0],D00); %Pos(4,3) = D00
lmiterm([3 4 4 0],-I1); %Pos(4,4) = -I1
%Quarta LMI, positivo-definida:
lmiterm([-4 1 1 Y],1,1); %Pos(1,1) = Y
lmiterm([-4 2 1 0],I1); %Pos(2,1) = I1
lmiterm([-4 2 2 X],1,1); %Pos(2,2) = X
RS=getlmis;

%Solução do sistema:
nvd=decnbr(RS); %Número das variáveis de decisão
c=zeros(nvd,1); %Vetor com o mesmo tamanho de nvd
decx1=diag(decinfo(RS,Z)); %Quer se minimizar o Traço da Matriz Z: diagonal das variáveis de decisão
for k=1:length(decx1)
    c(decx1(k))=1; %Associa-se os valores das variáveis da diagonal de Z com a var. de minimização (c)
end %Fim da determinação do controlador
opt=zeros(1,5);
opt(1)=1e-5;
opt(2)=150;
opt(3)=1e12
[cotim,xotim]=mincx(RS,c,opt); %Encontra os valores ótimos de c e x (variável de decisão)
Xotim=dec2mat(RS,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RS,xotim,Y);
Lotim=dec2mat(RS,xotim,L);
Fotim=dec2mat(RS,xotim,F);
Notim=dec2mat(RS,xotim,N);
fprintf('Valor ótimo do Traço de Z e da Norma H2 via LMI:\n')
Trz=cotim
H2otLMI=sqrt(Trz)

%Definição do modelo de estados do Controlador:
U=eye(s2); %Variável U arbitrária: identidade de ordem 's2'
V=inv(U)*(U-Xotim*Yotim);
%Matrizes de estado do Controlador Misto
Ac=inv(U)*(Notim-Xotim*A*Yotim-Xotim*B2*Fotim-Lotim*C2*Yotim)*inv(V);
Bc=inv(U)*Lotim;
Cc=Fotim*inv(V);
Dc=0; %Assim admitida para a existência do controlador admissível

%Definição do controlador Misto, seguido da malha fechada do sistema:
Krs=ltisys(Ac,Bc,Cc,Dc);
save contmix2ef.mat Krs;
end
consysrsLMI=slft(P,Krs);

```

```

[Ag,Bg,Cg,Dg]=ltiss(consysrsLMI);
[Agb,Bgb,Cgb]=OBALREAL(Ag,Bg,Cg);
consysrsLMIb=ss(Agb,Bgb,Cgb,Dg);
fprintf('Norma H-inf. do sistema em malha fechada e seu valor em dB:\n')
HinfmflMI=normhinf(consysrsLMIb)
HinfmfdBLMI=20*log10(HinfmflMI)
fprintf('Norma H2 do sistema em malha fechada:\n')
H2mflMI=normh2(consysrsLMIb)
[Agd,Bgd,Cgd]=OBALREAL(Ag,Bg,Cg);
consysrsLMId=ss(Agd,Bgd,Cgd,Dg);
fprintf('Autovalores de [A]; fatores de amortecimento e frequências naturais dos modos do sistema controlado:');
damp(consysrsLMId)

%SVD controlado LMI
figure(1),hold on
sigma(consysrsLMIb(:),'b-');
axis([1 5e3 -120 40]);grid on;pause
legend('g-',' Sem controle','r-',' Com controle HINFMIX','b-',' Com controle LMI')

%Respostas dos sistemas original e controlado ao sinal aleatorio com distribuição NORMAL (pre-gravado):
load -ascii sinal.mat
N=norm(sinal,inf);
sinal=sinal/N;
sinal=0.1*sinal;
t=0:0.05:5;
figure(2)
lsim(sys(1),'g-',sinal,t); hold on,
lsim(consysmixd(2,2),'r-',sinal,t);
sysaux=ss(Ag,Bg(:,2),Cg(2,:),Dg(2,2));
lsim(sysaux,'b-',sinal,t);
axis([0 max(t)-0.06 0.06]); grid on;
legend('g-',' Sem controle','r-',' Via hinfmix','b-',' Controle LMI',2),
title('Sinal medido y=z1'),pause
figure(3)
lsim(sys(2),'g-',sinal,t); hold on,
lsim(consysmixb(3,2),'r-',sinal,t);
sysaux2=ss(Ag,Bg(:,2),Cg(3,:),Dg(3,2));
lsim(sysaux2,'b-',sinal,t);
axis([0 max(t)-0.06 0.06]); grid on;
legend('g-',' Sem controle','r-',' Via hinfmix','b-',' Controle LMI',2),
title('Sinal do atuador u=z2'), pause

%Resposta dos sistemas original e controlado a uma dada condição inicial na posição da extremidade da viga:
xiorig=zeros(size(C2));
z=length(ssdata(consysrsLMId))-length(C2);
xicont=[xiorig zeros(1,z)];
xiorig(s2-1)=1; %condição inicial para o sistema não-controlado
xicont(s2-1)=1; %condição inicial para o sistema controlado
ts=0:0.05:10;
figure(4)
initial(sys(1),'g-',xiorig,ts), hold on,
initial(sysaux,'b-',xicont,ts), grid on,
axis([0 max(ts)-0.05 0.05]);
legend('g-',' Sem controle','b-',' Com controle')

```


Apêndice A

Definição de Norma Induzida

Para um dado sistema genérico onde $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{w}$, a matriz de transferência \mathbf{A} pode ser interpretada como a amplificadora do sinal \mathbf{w} ou o seu ganho com relação à saída \mathbf{z} . O valor máximo deste ganho para todas as entradas w_i possíveis é dado pela *norma induzida* [19] de \mathbf{A} , definida por:

$$\|\mathbf{A}\|_{ip} := \max_{\mathbf{w} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{w}\|_p}{\|\mathbf{w}\|_p} \quad \therefore \quad \|\mathbf{w}\|_p = \sqrt[p]{\sum |w_i|^p}$$

onde $\|\mathbf{w}\|_p = (\sum_i |w_i|^p)^{1/p}$ define a norma- p do vetor \mathbf{w} . Em outras palavras, está se buscando a direção do vetor \mathbf{w} onde a taxa $\|\mathbf{z}\|_p / \|\mathbf{w}\|_p$ seja máxima.

Entre os tipos p da norma induzida, tem-se que o tipo 2 é definido por:

$$\|\mathbf{A}\|_{i2} := \bar{\sigma}(\mathbf{A}) = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})} \quad (\text{A.1})$$

Verifica-se assim que a norma-2 induzida equivale ao valor singular de uma FT, apresentado em (5.3).

Apêndice B

Independência entre a FT $\mathbf{K}(s)$ e \mathbf{U}

Seja a FT estritamente própria do controlador, dada abaixo conforme as suas condições de admissibilidade para as normas H_2 e H_∞ , expostas em (6.3), (6.4) e (6.6):

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c$$

Sejam as igualdades admitidas para as matrizes do controlador na solução pela realimentação de saída, apresentada para ambos os controles na equação (6.21):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= (\mathbf{U}^t)^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{XAY} - \mathbf{XB}_2\mathbf{F} - \mathbf{LC}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{B}_c &= (\mathbf{U}^t)^{-1}\mathbf{L} \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{FV}^{-1}\end{aligned}$$

Efetuada a substituição destes resultados diretamente na FT, tem-se:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{FV}^{-1} \{s\mathbf{I} - [(\mathbf{U}^t)^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{XAY} - \mathbf{XB}_2\mathbf{F} - \mathbf{LC}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}]\}^{-1} (\mathbf{U}^t)^{-1}\mathbf{L} \quad (\text{B.1})$$

Simplificando a representação de uma matriz inversa e transposta simultaneamente, conforme apresentado para a matriz \mathbf{U} abaixo:

$$(\mathbf{U}^t)^{-1} = \mathbf{U}^{-t}$$

A equação (B.1), após a execução dos produtos dentro dos colchetes, ficará na seguinte forma:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{FV}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-t}\mathbf{MV}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{XAYV}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{XB}_2\mathbf{FV}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{LC}_2\mathbf{YV}^{-1})^{-1}\mathbf{U}^{-t}\mathbf{L}$$

Considere a seguinte propriedade matricial quanto à inversão do produto de matrizes, apresentada a seguir de forma genérica:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{ABC})^{-1} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\end{aligned}$$

A FT do controlador, ao se substituir adequadamente suas matrizes de modo a usufruir da propriedade apresentada, ficará da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(s) = (\mathbf{V}\mathbf{F}^{-1})^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-t}\mathbf{M}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{L}\mathbf{C}_2\mathbf{Y}\mathbf{V}^{-1})^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^t)^{-1}$$

Executando os produtos para todos os termos e simplificando onde há a multiplicação de uma matriz pela sua inversa, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(s) &= [\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^t(s\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-t}\mathbf{M}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{U}^{-t}\mathbf{L}\mathbf{C}_2\mathbf{Y}\mathbf{V}^{-1})\mathbf{V}\mathbf{F}^{-1}]^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{H}_c(s) = (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^t s\mathbf{I}\mathbf{V}\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{Y}\mathbf{F}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Dada a relação apresentada em (6.12) para a transformação de variáveis via realimentação de saída em ambos os controles, H_2 e H_∞ , tem-se que:

$$\mathbf{U}^t\mathbf{V} = \mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}$$

Assim, usando esta igualdade para substituir o primeiro termo de $\mathbf{H}_c(s)$ encontrado acima, e sabendo-se que o produto das matrizes por $s\mathbf{I}$ neste termo não é alterado com a mudança de ordem, obtém-se a forma final da FT do controlador:

$$\mathbf{K}(s) = [s\mathbf{I}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y})\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{Y}\mathbf{F}^{-1}]^{-1}$$

Simplificando:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{L}[s(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}) - \mathbf{M} + \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2\mathbf{Y}]^{-1}\mathbf{F} \quad (\text{B.2})$$

Pode-se observar claramente que esta FT não possui termos com \mathbf{U} . Assim, fica provado que ela é independente da arbitrariedade imposta nesta matriz para a solução encontrada nos controladores.

Apêndice C

Solução dos Problemas H_2 e H_∞ via Matlab

A solução dos problemas apresentados no capítulo 6 na forma convexa com restrições em LMI foi executada através de implementação no *Matlab*. Considerou-se necessário corroborar a formulação encontrada para ambos os problemas obtendo-se resultados numéricos.

Agora será introduzida a forma de resolução dos problemas H_2 e H_∞ respectivamente, através das ferramentas disponíveis no *LMI Toolbox* do *Matlab* [27].

C.1 Implementação do Controle H_2 via LMI

O problema H_2 programado no *Matlab*, usando os comandos disponíveis nas referências [27, 28], utilizou as LMI obtidas em (6.20) para as restrições do problema na forma convexa. De acordo com o apresentado na seção 7.3, a FT do controlador e solução do problema, $\mathbf{H}_c(s)$, é determinada pelas matrizes \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c , descritas em (6.21). O algoritmo, apresentado no **Anexo VIII**, tem como objetivo final obter estas matrizes. A seguir será dada sua descrição passo a passo.

- São chamadas as funções de montagem do sistema, apresentadas no **Anexo I**, e de determinação das matrizes de estado, dada no **Anexo VII**. Estas rotinas irão aplicar o método dos elementos finitos para a determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Em seguida serão determinadas as respectivas matrizes de estado do sistema modelado, dadas por \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , introduzidas na seção 3.1.
- Na seqüência, são definidas as demais matrizes de estado para o problema H_2 , que estão contidas na equação (6.7), respondendo pela FT objetivo, $\mathbf{T}_{zw}(s)$. Esta etapa se deu de forma

a satisfazer o propósito do controlador perante a FT objetivo, conforme citado no texto da seção 3.3. Lá estão apresentadas as matrizes \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{D}_{11} e \mathbf{D}_{12} , e seus valores adotados no problema H_2 estão apresentados no capítulo 7.

- Obtidas as informações completas do sistema, parte-se para a resolução do problema. Para isso, faz-se o uso do comando *mincx* do *Matlab*, que minimiza iterativamente um objetivo linear sujeito à restrições em LMI. Logo, ele resolve um problema SDP convexo, conforme apresentado em (4.3). A execução deste comando permite a obtenção das variáveis matriciais componentes da solução, e que fazem parte das LMI.
- As matrizes resultantes da minimização permitem, junto com a matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} mostradas em (6.12), calcular o controlador do sistema. Adotou-se que \mathbf{U} vale a matriz identidade de ordem adequada para simplificação dos cálculos, já que sua arbitrariedade não influenciará no resultado, conforme provado pelo **Apêndice A**.
- Obtido o controlador, monta-se a FT controlada em malha fechada através do comando *slft*, que é o objetivo final do problema. Dela serão calculados os novos valores da norma H_2 , os diagramas de valores singulares e os gráficos de resposta às excitações externas. Estes dados também estão apresentados no capítulo 7, com os resultados.

C.2 Implementação do Controle H_2 via *hinfmix*

Foi efetuada a resolução do mesmo sistema obtido através do comando *hinfmix* direcionado para o controle H_2 . Para isso, as variáveis apresentadas no equacionamento de (6.35) precisavam ter seus valores considerados da forma correta para a obtenção deste controlador [27].

Consideraram-se $\beta = 1$, $\varphi = 0$ e $\nu = 0$. Com as variáveis φ e ν nulas, o comando *hinfmix* automaticamente eliminou as duas restrições opcionais que poderiam ser lançadas pelo usuário. Com β unitário, o argumento do problema constitui-se apenas da minimização da norma H_2 , assumindo assim a forma desejada. A determinação do sistema controlado é descrita abaixo:

- Com a solução do controlador obtido via *hinfmix*, é obtida a malha fechada do sistema através do comando *slft*.
- Esta FT pode agora ser trabalhada de modo a gerar os gráficos apropriados para comparação aos resultados oriundos de *mincx*.

C.3 Implementação do Controle H_∞ via LMI

As rotinas criadas para o problema H_∞ seguiram a mesma lógica que as rotinas apresentadas acima, para o problema H_2 . Um algoritmo foi programado no *Matlab* para calcular o resultado do problema apresentado em (6.27). Este algoritmo está listado no **Anexo IX**, com suas principais passagens apresentadas passo a passo a seguir.

- São obtidas as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema modelado em elementos finitos. Depois, destas matrizes são obtidas as matrizes de estado do sistema, cuja implementação está listada no **Anexo VII**. Os dados adotados para as matrizes de estado que integram o controle H_∞ com o sistema estão apresentados na seção 7.3.
- Assim como no controle H_2 , o método de cálculo para a solução foi o mesmo, utilizando o comando *mincx*. A FT do controlador também foi determinada pelas matrizes \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c , descritas em (6.21), adotando $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ para simplificação da resolução do problema H_∞ .
- Para finalizar, é montada pelo comando *sfft* a FT controlada em malha fechada a partir da qual são obtidos o novo valor da norma H_∞ , os diagramas de valores singulares e gráficos de resposta às excitações externas. Todos eles são apresentados no capítulo 7.

C.4 Implementação do Controle H_∞ via *hinflmi*

A forma de obtenção da solução de controle através deste comando é bastante simples e direta, como pode ser visto a seguir.

- Aplicando o comando *hinflmi*, é obtida a solução do controlador para o mesmo sistema de onde se obteve a solução via *mincx*.
- Com este controlador, é obtida a FT de malha fechada do sistema através do comando *sfft*.
- Esta FT pode agora ser trabalhada de modo a gerar os gráficos apropriados para comparação aos resultados oriundos de *mincx*.

Com isso, estão dados os parâmetros de como foram confirmadas, através dos resultados apresentados no capítulo 7, as factibilidades dos controles H_2 e H_∞ com restrições na forma de LMI. A seguir, discorre-se sobre os valores de tolerância e precisão adotados nos algoritmos de solução.

C.5 Tolerâncias e Precisão das Soluções Encontradas

A obtenção das soluções para os controles H_2 e H_∞ através do *Matlab*, usando as formulações convexas apresentadas foi feita pelo comando *mincx*. Ele minimiza um objetivo linear na forma do produto entre dois vetores, sujeito a restrições na forma de LMI, tal como descrito abaixo.

$$\begin{aligned} & \min(\mathbf{c}^t \mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a: } \mathbf{L}(\mathbf{x}) < \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

O vetor \mathbf{x} possui o total das variáveis contidas no problema de otimização, mas a função objetivo pode ser formada por apenas algum(ns) de seus elementos. No caso da minimização pela norma H_2 , a função objetivo é o menor traço da matriz \mathbf{Z} . A obtenção deste valor dentro da formulação em LMI efetuada no *Matlab*, é feita pelo comando *decinfo*, que extrai as posições equivalentes ao vetor \mathbf{x} componentes da diagonal de \mathbf{Z} . Estes valores irão definir quais as posições de \mathbf{c} serão consideradas unitárias, e desta forma todos os outros serão nulos. Assim, as variáveis objetivo de minimização são resumidas às posições equivalentes desejadas de \mathbf{x} .

O comando *mincx* do *Matlab* possui também ajustes de precisão e de parada que podem ser modificados de acordo com o desejo do usuário. Um destes ajustes é feito no *raio de factibilidade* (R) da solução, que é definido de forma que a solução \mathbf{x} seja tal que:

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 < R^2$$

Isto quer dizer que a norma euclidiana do vetor \mathbf{x} que contém a solução não deve exceder R . Quanto maior for o raio de factibilidade, maiores são as chances de se encontrar uma solução para o problema restrito, pois esta não estaria sujeita à uma restrição adicional de factibilidade. O uso de um valor de R menor é válido apenas para os casos em que se deseja restringir o tamanho de \mathbf{x} , que não é o caso neste trabalho.

Quando a solução é atingida, o *Matlab* notifica se houve o uso desta restrição através da informação dada pelo número percentual *f-radius saturation*. Ele diz o quanto a norma de \mathbf{x} aproximou-se de R , e caso este valor esteja próximo de 100% significa que a restrição pelo tamanho de \mathbf{x} assumiu a finalização da solução do problema. Para que isto não acontecesse em nenhum dos problemas apresentados acima, adotou-se $R = 10^9$ para ambos os problemas H_2 e H_∞ .

Outro ajuste efetuado no *mincx* foi o número máximo de iterações a se realizar. Optou-se por trabalhar até 100 passos nos dois controles, H_2 e H_∞ . Com este número de iterações, garantia-se

a solução dos problemas somente após o término da convergência, evitando algum truncamento prejudicial à precisão da resposta obtida pelo processo de minimização. Em ambos os casos, a convergência ocorreu com menos de 100 passos.

Com relação aos critérios matemáticos de parada, o *mincx* trabalha até atingir uma precisão absoluta ou relativa. A precisão absoluta é gerenciada pelo próprio *Matlab*, indicando qual valor foi atingido em cada caso de minimização. O processo iterativo pode parar devido à precisão relativa quando houver um decréscimo menor que 10^{-5} entre valores do objetivo $\mathbf{c}^t \mathbf{x}$, em iterações vizinhas ou dentro dos últimos $L = 10$ passos. Estas condições de precisão são comuns para ambos os controles, H_2 e H_∞ .

A seguir é apresentada a implementação do controle misto pelo *Matlab*.

Apêndice D

Solução do Problema H_2/H_∞ via Matlab

Para executar este tipo de controle, optou-se por usar o comando *hinfmix*, disponível no *LMI Toolbox* [27] do *Matlab*, além da formulação via LMI apresentada na equação (6.34). A minimização através do comando *hinfmix*, dada em (6.35), foi estabelecida de modo a criar um problema que se aproximasse de (6.34).

O objetivo final do uso desta ferramenta não é comparar diretamente os resultados de ambos com o objetivo de identificar qual seria a melhor formulação. Mas sim mostrar que a formulação via LMI descrita no texto resolve o problema dentro de valores esperados e encontrados pelo algoritmo disponível no software, caso as restrições estabelecidas nas suas entradas fossem adequadas para este fim. Uma vez que o algoritmo disponível no software possa ser descrito como eficiente, a proximidade dos resultados entre ambos os métodos serviria para corroborar a formulação de (6.34). A seguir estão apresentados detalhes da implementação do problema misto destas duas maneiras supracitadas.

D.1 Implementação do Controle H_2/H_∞ via *hinfmix*

A utilização do comando *hinfmix* para o controle misto exigiu que as variáveis apresentadas no equacionamento de (6.35) recebessem valores apropriados para este propósito.

Para os dois modelos da viga, com 2 EF e com 4 EF, adotou-se $\beta = 1$, $\varphi = 8,5$ e $\nu = 0$. Tornando a variável ν nula, o comando *hinfmix* automaticamente elimina a restrição onde ela está envolvida, e com β unitário, o argumento do problema constitui-se apenas da minimização da norma H_2 . Assim, o problema assume a forma desejada, equivalente à equação (5.20), onde há

apenas uma restrição envolvendo a norma H_∞ .

Entre os dados de entrada para que o comando *hinfmix* execute a minimização, está o valor máximo da norma do ganho estático do controlador, que equivale à matriz \mathbf{D}_c . Como é sabido, através das condições de admissibilidade para o controle misto, esta matriz é nula. Além disto, o valor da precisão relativa de parada para o mínimo segue o mesmo critério adotado nos demais controladores, dado no **Apêndice C.5**.

Também há a possibilidade entre os dados de entrada de *hinfmix*, de se determinar a região onde os pólos do sistema estariam alocados após o controle. Como esta restrição não faz parte do problema apresentado pela LMI de (6.34), então a entrada é um vetor vazio, ilustrando que os pólos podem estar em qualquer lugar do semi-plano esquerdo do plano $\Re \times \Im$.

Obtido o controlador para as condições consideradas, é fechada a malha do sistema e são feitos os diagramas de valores singulares e gráficos de resposta às excitações externas. Os resultados da minimização através de (6.35) estão dados no capítulo 7, com os resultados.

D.2 Implementação do Controle H_2/H_∞ via LMI

O algoritmo criado para executar o controle misto através da equação (6.34) está apresentado no **Anexo XI**. A lógica de programação seguiu a mesma já apresentada tanto para o controle H_2 como para o controle H_∞ , e seus principais passos são dados a seguir.

- Depois de obtidas as matrizes do sistema flexível pelo método dos elementos finitos, descrito no **Anexo I**, são determinadas as matrizes de estado para o problema misto, listadas no **Anexo X**. A determinação de seus valores no problema misto foi apresentada no capítulo 7.
- Depois são implementadas as LMI, restrições do problema (6.34), de onde são obtidas as matrizes da solução através do comando *mincx*. Também é adotada a matriz $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, para simplificação do cálculo de resolução.
- Finalmente, fecha-se a malha do sistema através do comando *sfft* e é obtida a FT controlada, objetivo final do problema, de onde são extraídos os diagramas de valores singulares e gráficos de resposta às excitações externas. Estes estão apresentados no capítulo dos resultados.

A restrição imposta pela norma H_∞ no problema misto foi adotada de forma semelhante ao tratamento feito para o *hinfmix*. O valor da variável escalar γ foi considerado como igual a

8,5 para a modelo com 2 EF. O controlador obtido pela solução deste problema foi utilizado como controlador de ordem reduzida no modelo com 4 EF. Assim, a influência das restrições do problema H_∞ se fariam valer também no caso tratado pela formulação de (6.34), e os resultados poderiam ser avaliados juntamente com os obtidos pelo *hinfmix*.

Para finalizar, o limite de passos iterativos admitidos para o controle misto via *mincx* foi de 150, em virtude de uma maior dificuldade de se encontrar a solução definitiva com menos que 100 passos. Também foi alterado o valor para o raio de factibilidade, $R = 10^{12}$. Já a precisão relativa de parada foi a mesma apresentada anteriormente nos controles H_2 e H_∞ , valendo 10^{-5} .