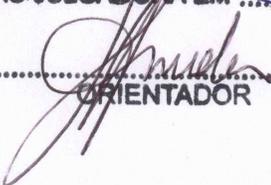


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ..ADRIANO..TODOROVIC.....
..FABRO..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM ..26..1..02..2010..

.....

.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise Estocástica do Comportamento Dinâmico de Estruturas via Métodos Probabilísticos

Autor: Adriano Todorovic Fabro

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise Estocástica do Comportamento Dinâmico de Estruturas via Métodos Probabilísticos

Autor: Adriano Todorovic Fabro
Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão de Pós-Graduação da Facul-
dade de Engenharia Mecânica como re-
quisito para obtenção do título de Mes-
tre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2010
SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F114a Fabro, Adriano Todorovic
Análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas via métodos probabilísticos / Adriano Todorovic Fabro. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: José Roberto de França Arruda.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise Estocástica. 2. Método de entropia máxima. 3. Propagação de ondas. 4. Compressores. I. Arruda, José Roberto de França. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Stochastic analysis of structural dynamic behavior via probabilistic methods

Palavras-chave em Inglês: Stochastic Analysis, Entropy maximization, Wave propagation, Compressors

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Renato Pavanello, Fernando Alves Rochinha

Data da defesa: 26/02/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

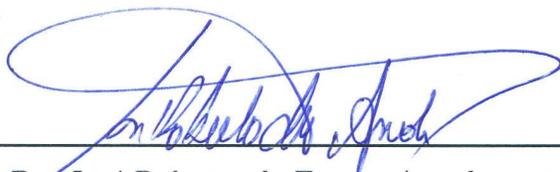
Análise Estocástica do Comportamento Dinâmico de Estruturas via Métodos Probabilísticos

Autor: Adriano Todorovic Fabro

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

A Banca Examinadora composta pelo membros baixo aprovou esta dissertação:

Banca examinadora:



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, presidente
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Fernando Alves Rochinha
COPPE/UFRJ

Campinas, 26 de fevereiro de 2010.

Agradecimentos

Gostaria expressar meus agradecimentos àqueles que ajudaram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

- Ao meu orientador, Prof.^o José Roberto de França Arruda, que me deu a oportunidade de estudar um tema instigante e desafiador;
- À minha companheira, Daniela, por todo o suporte, carinho, e compreensão;
- À minha família, pelo suporte de toda a vida;
- À todos os amigos, pelas horas úteis e inúteis, e que me ajudaram a ser quem eu sou;
- Aos colegas da Tecumseh do Brasil, pelo grande apoio e amizade;
- À Tecumseh do Brasil, pelo apoio financeiro, sem o qual não haveria este trabalho;
- Aos professores da FEM, que de forma direta ou indireta, ajudaram no meu crescimento acadêmico;
- Ao Thiago Ritto, PUC-Rio, pelas discussões sobre Modelagem de Incertezas e ao Prof. Rubens Sampaio, PUC-Rio, pelas oportunidades e apoio concedidos;

Shall I refuse my dinner because I do not fully understand the process of digestion?

Oliver Heaviside

Resumo

FABRO, Adriano Todorovic. *Análise Estocástica do Comportamento Dinâmico de Estruturas via Métodos Probabilísticos*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2009.

Esta dissertação tem como objetivo geral levar à realidade industrial subsídios para a modelagem e análise de sistemas mecânicos lineares com variabilidade, assim como metodologias computacionais para quantificação de incertezas, para fins de aplicação em projeto. Neste sentido, foram realizados estudos sobre técnicas de modelagem e análise estocástica de sistemas mecânicos lineares aplicadas, inicialmente, a algumas estruturas simples, de baixo custo computacional, por meio de simulações em MatLab[®]. Propõe-se uma abordagem probabilística para a modelagem de incertezas baseada no Princípio da Máxima Entropia para a flexibilidade relativa a uma trinca aberta e não propagante em uma barra modelada através do Método do Elemento Espectral (SEM). Também é apresentada uma abordagem para o tratamento de problemas de campo aleatório utilizando o SEM, onde são utilizadas soluções analíticas da decomposição de Karhunen-Loève. Uma formulação para elementos de viga do tipo Euler-Bernoulli é apresentada e um exemplo em que a rigidez à flexão é modelada como um campo aleatório Gaussiano é tratado. Uma abordagem para análise estocástica do comportamento dinâmico de uma tampa de compressor hermético é proposta. Uma aproximação por elementos finitos obtida com o software Ansys[®] foi utilizada para representar o comportamento determinístico de uma tampa de compressor, e duas abordagens de modelagem estocástica são comparadas. Um ensaio experimental foi realizado com tampas nominalmente idênticas, sendo medidas apenas frequências naturais com excitação por impacto, de modo a se poder compará-las com os valores obtidos teoricamente.

Palavras Chave: Modelos Estocásticos, Método de Entropia Máxima, Propagação de ondas, Compressores

Abstract

FABRO, Adriano Todorovic. *Stochastic Analysis of Structural Dynamic Behavior via Probabilistic Methods*. Master thesis. Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas. 2009.

This dissertation has as a general objective to bring to the industrial reality subsidies for modeling and analysis of linear mechanical systems with variability, as well as computational methodologies to the uncertainty quantification, aiming industrial design applications. In that sense, theoretical studies about stochastic modeling and analysis for mechanical linear systems were performed. They were applied, firstly, to simple and computationally low cost structures using Matlab[®]. In that sense, a probabilistic modeling approach based on the Maximum Entropy Principle was proposed to treat the flexibility related to an open and non-propagating crack in a rod modeled using the Spectral Element Method (SEM). An approach for the treatment of random field problems using SEM, which uses analytical solutions of the Karhunen-Loève Decomposition, is also addressed. An Euler-Bernoulli beam formulation was used, and an example where the flexural stiffness is modeled as a Gaussian random field is presented. A finite element approximation obtained with the software Ansys[®] was used to represent the deterministic dynamic behavior of a compressor cap shell, and two stochastic modeling approaches were compared. Experiments were performed using nominally identical cap samples. Natural frequencies were measured using impact excitation in order to compare with the theoretical results.

Key words: Stochastic Model, Entropy maximization, Wave Propagation, Compressors.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
1 Introdução	1
1.1 Objetivo geral e objetivos específicos	3
1.2 Estrutura do Trabalho	4
2 Modelagem Estocástica de uma Barra Trincada Utilizando o Método de Elemento Espectral	6
2.1 Variáveis Aleatórias	6
2.1.1 Princípio da Máxima Entropia (PME)	7
2.2 Modelagem Estocástica de uma Barra Trincada	9
2.2.1 Elemento Espectral de uma barra com e sem trinca	10
2.2.2 Modelagem Probabilística	12
2.3 Conclusões	16
3 Problemas de Campo Aleatório Utilizando o Método de Elemento Espectral	17
3.1 Campo Aleatório	17
3.1.1 Expansão de Karhunen-Loève	18
3.2 Método Duplamente Espectral de Elementos Finitos Estocásticos	22
3.3 Conclusões	29
4 Análise Estocástica do Comportamento Dinâmico da Tampa de um Compressor Hermético	31
4.1 Modelo Determinístico	32
4.2 Ensaio Experimental	32
4.2.1 Materiais	33
4.2.2 Métodos	33
4.2.3 Resultados	34
4.2.4 Conclusões	37
4.3 Modelagem Estocástica	37
4.3.1 Abordagem por fatias	39

4.3.2	Abordagem por Campo Aleatório	39
4.4	Solução Estocástica e Detalhes de Implementação	41
4.5	Resultados Numéricos	44
4.5.1	Resposta Determinística	44
4.5.2	Abordagem por Fatias	44
4.5.3	Abordagem por Campo Aleatório	49
4.6	Conclusões	54
5	Considerações Finais	55
5.1	Sugestões para Continuação do Trabalho	56
5.2	Lista de Publicações	56
A	Métodos de Amostragem	63
A.1	Geração de Variáveis Aleatórias	63
A.1.1	Simulação de Números Aleatórios a partir da Distribuição Uniforme.	63
A.2	Amostragem por Monte Carlo	67
A.3	Amostragem por Hipercubo Latino	68
A.4	<i>Importance Sampling</i>	70
A.5	Exemplo: Área de Círculo de Raio Unitário	71
A.6	Conclusões	74
B	Métodos para Análise de Confiabilidade	76
B.1	Métodos de Confiabilidade de Primeira Ordem	78
B.1.1	<i>FOSM</i> ou <i>MVFOSM</i>	78
B.2	Métodos de Confiabilidade utilizando Amostragem	79
B.2.1	Amostragem por Monte Carlo	79
B.2.2	<i>Importance Sampling</i>	80
B.2.3	Exemplo Numérico	80

Lista de Figuras

1.1	Variabilidades introduzidas no sistema real e no modelo preditivo.	2
1.2	Potência Sonora de compressores herméticos: diferentes modelos de uma mesma família.	3
1.3	Potência Sonora de compressores herméticos: diferentes exemplares de um mesmo modelo de uma mesma família.	4
2.1	Dimensões da barra trincada considerada.	12
2.2	Resposta em Frequência do Sistema Médio em $x = L$	14
2.3	Análise de Convergência para (a) $\delta_{\Theta} = 0.1$, (b) $\delta_{\Theta} = 0.2$ e (c) $\delta_{\Theta} = 0.4$	14
2.4	Resposta em Frequência em $x = L$ do sistema médio (vermelho), média do modelo probabilístico (dashed red) e limite superior e inferior para intervalo de confiança de 97.5 % para $\delta_{\Theta} = 0.1$	15
2.5	Resposta em Frequência em $x = L$ do sistema médio (vermelho), média do modelo probabilístico (dashed red) e limite superior e inferior para intervalo de confiança de 97.5 % para $\delta_{\Theta} = 0.2$	15
2.6	Resposta em Frequência em $x = L$ do sistema médio (vermelho), média do modelo probabilístico (dashed red) e limite superior e inferior para intervalo de confiança de 97.5 % para $\delta_{\Theta} = 0.4$	16
3.1	Autofunções (superior esquerdo), autovalores (superior direito), algumas realizações (canto inferior direito) e o erro de truncamento para um campo aleatório gaussiano, unidimensional, com média zero e $b = 0,5$ e $M = 4$	20
3.2	Algumas autofunções para o caso bidimensional, com média zero e $b = 1,0$	21
3.3	Alguns autovalores para o caso bidimensional, com média zero e $b = 1,0$	21
3.4	Algumas realizações do Campo Aleatório Gaussiano e bidimensional, com média zero e $b = 1,0$	22
3.5	Resposta em Frequência em $x = L$ com parâmetros determinísticos: comparação entre as abordagens SEM e DSSFEM.	28
3.6	Resposta em Frequência em $x = L$: valor nominal, valores médio das amostras Monte Carlo, e limites inferiores e superiores para um intervalo de confiança de 95%.	29
4.1	Aproximação por Elementos Finitos da tampa do compressor analisado	32
4.2	Esboço do Experimento.	34

4.3	Detalhe do sistema de impacto com pêndulo.	35
4.4	Detalhe do posicionamento de uma tampa sobre a espuma.	35
4.5	Visão geral do experimento.	36
4.6	Amplitude, fase e coerência de FRF estimada de uma única tampa para (a) medição feita pelo acelerômetro e (b) medição feita pelo microfone.	38
4.7	Histograma das 100 frequências naturais identificadas para os cinco primeiros modos.	39
4.8	Valores medidos de espessura para uma tampa do modelo analisado.	40
4.9	Tampa dividida em regiões de mesmo comportamento aleatório.	41
4.10	Solução Estocástica por Monte Carlo: Esquema integração Ansys/Matlab.	42
4.11	Primeiro e segundo modo da solução determinística.	45
4.12	Terceiro e quarto modo da solução Determinística.	45
4.13	Quinto e sexto modo da solução determinística.	45
4.14	Sétimo e oitavo modo da solução determinística.	46
4.15	Nono e décimo modo da solução determinística.	46
4.16	Convergência do desvio-padrão das frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por fatias.	47
4.17	Histograma das as frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por fatias.	48
4.18	Intervalo de confiança de 95% para os resultados obtidos - esquerda e centro - e para os resultados experimentais - direita. O marcador em preto (+) indica o valor médio encontrado. Abordagem por fatias.	49
4.19	23 primeiros autovalores obtidos normalizados pelo primeiro autovalor - λ_n/λ_1	50
4.20	1º ao 9º modo obtido pela Decomposição KL, ponderados por seus autovalores. $\phi(\mathbf{x})_n = \lambda_n f_n(\mathbf{x})$	50
4.21	10º ao 18º modo obtido pela Decomposição KL, ponderados por seus autovalores. $\phi(\mathbf{x})_n = \lambda_n f_n(\mathbf{x})$	51
4.22	Algumas realizações do campo aleatório modelando a espessura - $e(x,\theta)$	51
4.23	Convergência do desvio-padrão das frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por Campo Aleatório.	52
4.24	Histograma das as frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por Campo Aleatório.	53
4.25	Intervalo de confiança de 95% para os resultados obtidos - esquerda e centro - e para os resultados experimentais - direita. Abordagem por Campo Aleatório.	53
A.1	Histograma para os 1000 primeiros números gerados pelos algoritmos descritos.	65
A.2	Pares sucessivos ($u_i \times u_{i+1}$) dos 1000 primeiros números gerados pelos algoritmos descritos.	66
A.3	Pares sucessivos ($u_i \times u_{i+1}$) dos 1000 primeiros números gerados por Monte Carlo (esquerda) e Hipercubo Latino (direita), distribuição Uniforme entre 0 e 1.	69

A.4	Pares sucessivos ($u_i \times u_{i+1}$) dos 1000 primeiros números gerados por Monte Carlo (esquerda) e Hipercubo Latino (direita), distribuição normal com média nula e desvio-padrão unitário.	70
A.5	$N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por Monte Carlo. Em vermelho os pontos gerados dentro da região da circunferência, N_e , em azul os gerados fora.	72
A.6	$N = 1000$ primeiros pares amostras geradas por Hipercubo Latino. Em vermelho os pontos gerados dentro da região da círculo, N_e , em azul os gerados fora.	72
A.7	$N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por <i>IS</i> . Em vermelho os pontos gerados dentro da região do círculo, em azul os pontos gerados fora.	74
A.8	Convergência para os estimadores de área obtidos por <i>MC</i> (pontilhado), <i>LH</i> (tracejado) e <i>IS</i> (tracejado-pontilhado). Comparação com resultado analítico (cheio).	75
B.1	Região de Falha: interseção das <i>PDF</i> de demanda, S , e capacidade, R	77
B.2	Diferentes Técnicas de Amostragem para o problema $R \times S$: <i>MCS</i> , <i>LHS</i> , <i>IS</i> e índice β	81
B.3	Convergência do Estimador de Probabilidade de Falha para Diferentes Técnicas de Amostragem para o problema $R \times S$: <i>MCS</i> , <i>LHS</i> , <i>IS</i> e índice β	81

Lista de Tabelas

4.1	Valores de frequência natural encontrado para cada modo.	44
A.1	Estimadores de área calculados usando <i>MC</i> , <i>LH</i> e <i>IS</i>	73

Capítulo 1

Introdução

A fabricação de qualquer produto apresenta variabilidades com respeito ao seu modelo nominal, utilizado para seu projeto. Espera-se que o mesmo funcione de acordo com suas especificações nominais, dentro de certas tolerâncias, que devem ser respeitadas pelos processos de fabricação. Quanto melhor o desempenho esperado de um produto, mais apertadas devem ser estas tolerâncias, porém, deve-se buscar uma solução de compromisso na utilização de processos e materiais mais eficientes, dentro de critérios de projeto, entre desempenho e custo.

No contexto de ruído e vibrações, ainda em fase de projeto, a caracterização dos efeitos destas variabilidades no comportamento dinâmico da estrutura, ou seja, como afetam determinadas bandas ou modos de vibrar, é o primeiro passo para a utilização do conceito de projeto robusto. Basicamente, a variabilidade das peças produzidas, com relação ao projeto nominal, advêm do processo de fabricação e dos materiais utilizados no produto, assim como as considerações de modelagem mecânico-matemáticas introduzem variabilidades no modelo preditivo, Fig. [1.1]. Neste sentido, a modelagem de incertezas deve ser capaz de captar os resultados experimentais obtidos do sistema fabricado.

Em termos de mecânica computacional, a modelagem, propagação e quantificação de incertezas apresenta três passos distintos: (1) a determinação do modelo determinístico, (2) a modelagem de incertezas e (3) a propagação de incertezas. O primeiro passo, constitui-se pelo processo usual de modelagem e na escolha do método de solução deste modelo, geralmente através de aproximação por Método de Elementos Finitos ou Elementos de Contorno, os mais comuns no ambiente industrial, de modo geral. O segundo passo constitui-se da escolha dos parâmetros considerados como incertos e no método de abordagem para sua modelagem, sendo que existem diferentes metodologias e diferentes filosofias para tal. O terceiro passo é a escolha do método adequado de solução estocástica, sendo que o modelo determinístico e o modelo estocástico são determinantes para esta escolha.

Existem três abordagens predominantes para o tratamento matemático de incertezas: análise de intervalos (Dimaragonas, 1995; Qiu and Elishakoff, 2008), teoria possibilísticas baseadas em aritmética nebulosa (*fuzzy*) (De Gersem et al., 2005; Hanss, 2002, 2005; Moens and Vandepitte, 2005; Nunes et al., 2006) e teoria de probabilidade, abordada neste trabalho. Mais recentemente, um outro tipo de abordagem para tratamento não-probabilístico de

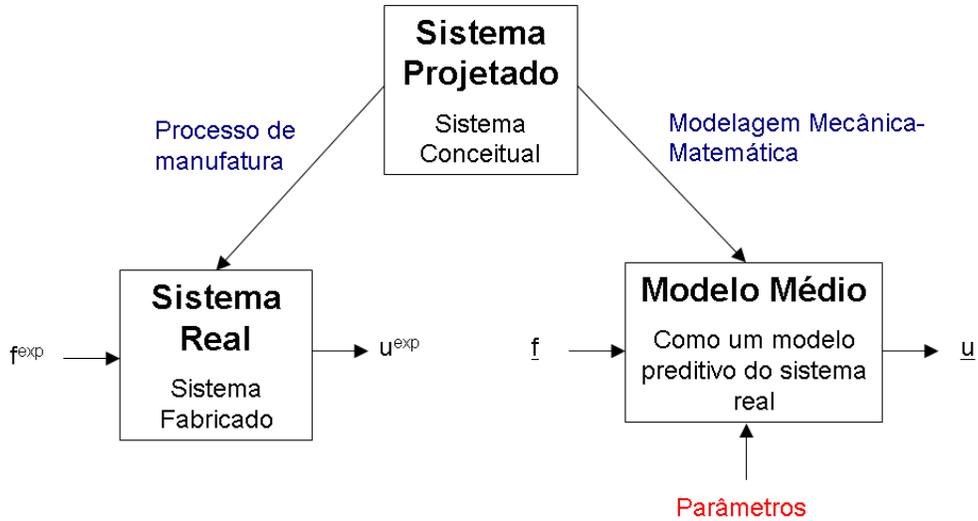


Figura 1.1: Variabilidades introduzidas no sistema real e no modelo preditivo.

sistemas com incertezas severas, chamado de *info-gap*, vem sendo aplicado (Ben-Haim, 1998; Takewakia and Ben-Haim, 2008).

No contexto de métodos baseados em probabilidade, pode-se dividir a o tratamento de incertezas em duas abordagem (Soize, 2000, 2003, 2005a): paramétricas e não-paramétricas. A primeira se refere a variabilidade modeladas através de parâmetros do sistema, tipicamente parâmetros relativos a geometria, condições de contorno e propriedades de materiais. A segunda se refere às incertezas associadas ao modelo mecânico-matemático utilizado para a previsão do comportamento dinâmico da estrutura, sendo que a abordagem paramétrica não consegue capturar incertezas deste tipo (Soize, 2005b). Porém, estruturas muito complexas podem exigir a abordagem paramétrica e não-paramétrica combinadas, *e.g.*, (Capiez-Lernout et al., 2006; Pellissetti et al., 2008).

Erros de modelo podem estar associados a considerações cinemáticas ou dinâmicas. Por exemplo, ao se utilizar a teoria de Euler-Bernoulli na modelagem de uma estrutura do tipo viga ao invés da teoria de elasticidade tridimensional, isto corresponde a uma redução do espaço admissível de soluções para o campo de deslocamentos (Capiez-Lernout et al., 2006). Estas aproximações são comuns devido, principalmente, às abstrações envolvidas na modelagem, à falta de entendimento do fenômeno e/ou a simplificações matemáticas (Schuëller and Pradlwarter, 2009), e incorporam incertezas no comportamento dinâmico estrutural, que são consideravelmente importantes para problemas em médias e altas frequências, *e.g.*, (Adhikari et al., 2009).

No caso de sistemas complexos, pequenas mudanças de configuração, como algum acessório no interior de um veículo automotivo, ou algum dispositivo eletrônico acoplado em um compressor, por exemplo, também podem ter este efeito. A Fig. [1.2] mostra um exemplo de Potência Sonora, em decibéis, medida experimentalmente, para diferentes modelos de compressores herméticos, porém, dentro da mesma família, produzidos pela Tecumseh do Brasil.

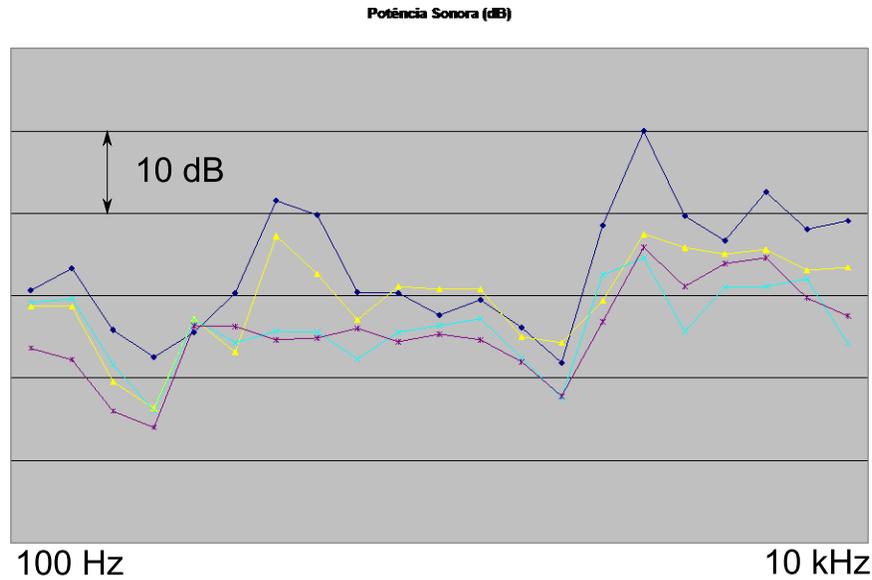


Figura 1.2: Potência Sonora de compressores herméticos: diferentes modelos de uma mesma família.

A abordagem não-paramétrica é adequada para tratar este tipo de problema.

A Fig. [1.3] também mostra a Potência Sonora, em decibéis, medida experimentalmente, para três compressores nominalmente idênticos, fabricado em sequência. Nota-se que, diferentemente do caso de diferentes modelos, a variabilidade se dá, principalmente em algumas bandas do espectro analisado, mas ainda sim, essas diferenças podem ser significativas.

1.1 Objetivo geral e objetivos específicos

Este trabalho tem como objetivo geral levar à realidade industrial subsídios para a modelagem e análise de sistemas mecânicos lineares com variabilidade, assim como metodologias computacionais para quantificação de incertezas, para fins de aplicação em projeto. Para tanto, têm-se os seguintes objetivos específicos:

- Estudos de técnicas de modelagem, análise e quantificação de incertezas de estruturas simples, de baixo custo computacional, por meio de simulações em MatLab®;
- Elaboração de técnica experimental para um grande número de estruturas nominalmente idênticas, realizada em tempo coerente com a realidade industrial, mas ainda de modo a ser obter significância estatística nos resultados, para validação de resultados obtidos computacionalmente;

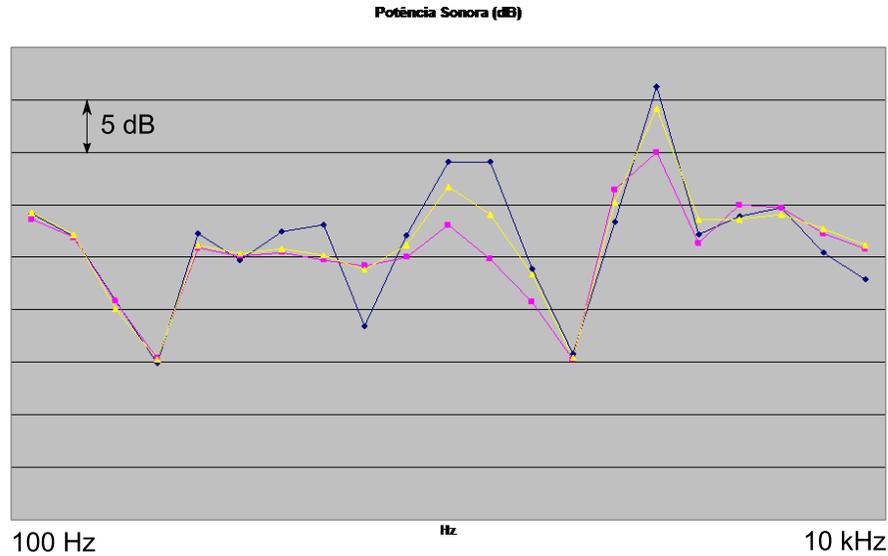


Figura 1.3: Potência Sonora de compressores herméticos: diferentes exemplares de um mesmo modelo de uma mesma família.

- Utilização dos conceitos de modelagem, análise e quantificação de incertezas de estruturas juntamente com *softwares* comerciais de análise dinâmica determinística, disponíveis em ambiente industrial - *e.g.* Ansys[®].

1.2 Estrutura do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta o Princípio da Máxima Entropia e uma abordagem de modelagem probabilística para a flexibilidade relativa a uma trinca em uma barra modelada através do Método do Elemento Espectral (SEM). Um exemplo numérico é apresentado para uma barra engastada, mostrando o intervalo de confiança obtido para o estimador de média da resposta em frequência obtida na extremidade livre.

O Capítulo 3 apresenta uma abordagem para tratamento de problemas de campo aleatório junto com o SEM. Utilizam-se soluções analítica da Expansão de Karhunen-Loève para a discretização do campo aleatório junto com a abordagem analítica, baseada em série de Fourier, do SEM. Uma formulação para elemento de viga do tipo Euler-Bernoulli é apresentada e um exemplo em que a rigidez à flexão é modelada como um campo aleatório é apresentado.

O Capítulo 4 apresenta uma aplicação industrial envolvendo as metodologias de análise e modelagem apresentadas nos capítulos anteriores. Uma abordagem para análise estocástica do comportamento dinâmico de uma tampa de compressor hermético é apresentada. Uma aproximação por elementos finitos, utilizando o software Ansys[®], foi utilizada para repre-

sentar o comportamento determinístico do elemento de compressor e duas abordagens de modelagem estocástica são discutidas. Um ensaio experimental foi realizado com tampas nominalmente idênticas, sendo medidas apenas frequências naturais com excitação por impacto e resposta medida com microfone e acelerômetro. Os resultados experimentais serviram de base para comparar os resultados numéricos.

O Apêndice A apresenta uma revisão sobre algoritmos de geração de números aleatórios e métodos de amostragem conhecidos como métodos Monte Carlo. Neste capítulo, são apresentados e comparados alguns algoritmos de geração de seqüências de números pseudo-aleatórios e quasi-aleatórios. O Método de Monte Carlo também é apresentado como um método de integração. Além do método de Monte Carlo convencional, dois métodos para a redução de seu custo computacional: o Hiper cubo Latino e o *Importance Sampling*, serão apresentados. Estes métodos são de fundamental importância na propagação de incertezas, como métodos de solução estocástica. Como exemplo de aplicação, um estimador para a área de um círculo é calculado com os diferentes métodos de amostragem.

O Apêndice B apresenta dois métodos de análise de confiabilidade: métodos de confiabilidade de primeira ordem e métodos de confiabilidade utilizando amostragem. Os métodos de amostragem utilizados são os abordados no Apêndice A e um exemplo numérico simples, porém para um evento de baixa probabilidade, é apresentado comparando as metodologias.

Capítulo 2

Modelagem Estocástica de uma Barra Trincada Utilizando o Método de Elemento Espectral

No contexto de métodos de probabilidade, geralmente somente informações parciais em forma de momentos estatísticos estão disponíveis, tornando extremamente desejável reconhecer como essas informações parciais podem ser utilizadas. Nesse sentido, a Entropia no contexto da Teoria de Informação (Shannon, 1948) é largamente utilizada através da maximização desse funcional sujeita às restrições impostas pelos momentos estatísticos disponíveis, conhecido como Princípio da Máxima Entropia (Jaynes, 1957a,b; Kapur and Kesavan, 1992). A aplicação deste princípio pode ser utilizada para modelagem de parâmetros, campos ou operadores aleatórios, através da construção das suas respectivas funções de densidade de probabilidade no contexto de sistemas mecânicos lineares (Soize, 2000, 2001a, 2005a,b) e não-lineares (Ritto et al., 2009; Soize, 2001b).

2.1 Variáveis Aleatórias

Classicamente, todas as observações de um fenômeno aleatório formam o espaço amostral do mesmo, denotado por Θ . Um evento é definido como um subconjunto de Θ contendo saídas $\theta \in \Theta$. A teoria associa uma probabilidade de ocorrência a esses subconjuntos, através de uma medida de probabilidade P . A coleção dos possíveis eventos, com probabilidade bem definida, é chamada de σ -álgebra associada com Θ , denotada por F . Dessa maneira, o espaço de probabilidade é construído através da tripla (Θ, F, P) (Papoulis, 1991).

Uma variável aleatória X é uma aplicação $X : (\Theta, F, P) \mapsto \mathbb{R}$. Para variáveis aleatórias contínuas, a função densidade de probabilidade (*PDF*) e a função densidade cumulativa (*CDF*) são denotadas por $f_X(x)$ e $F_X(x)$, respectivamente. Um vetor aleatório é uma coleção de variáveis aleatórias (Papoulis, 1991). O n -ésimo momento estatístico de uma variável aleatória é definido por:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx, \quad (2.1)$$

onde $\mathbb{E}[\cdot]$ é chamado de esperança matemática. A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por:

$$Cov[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]. \quad (2.2)$$

2.1.1 Princípio da Máxima Entropia (PME)

Incerteza e informação estão tão fortemente associadas que a informação proporcionada por um experimento, por exemplo, é igual à quantidade de incerteza removida (Karmeshu, 2003). O conceito de entropia como medida de informação foi primeiramente proposto por Shannon (1948) e posteriormente o princípio da máxima entropia foi explicitamente enunciado por Jaynes (1957a).

Tais conceitos permitiram o desenvolvimento de uma abordagem quantitativa para associar medidas de probabilidade com informações disponíveis sobre o evento aleatório, evitando qualquer tipo de especulação. A medida de entropia proposta por Shannon é, para o caso de variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade contínuas, definida por:

$$S(X) = - \int_{\mathcal{C}} f(x) \log f(x) dx, \quad (2.3)$$

onde \mathcal{C} é o conjunto suporte onde é definida a função de densidade de probabilidade, $f(x)$, associada à sua medida de entropia, $S(x)$. Esta medida, sujeita a um conjunto de restrições lineares, geralmente momentos estatísticos disponíveis ou quaisquer outro tipo de informação sobre o evento aleatório, é maximizada utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange (Kapur and Kesavan, 1992). Estas restrições podem ser escritas como:

$$f(x) \geq 0 \quad (2.4)$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(x) dx = 1 \quad (2.5)$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(x) r_i(x) dx = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

Com estas restrições impõe-se que a probabilidade de qualquer evento ocorrer seja sempre maior ou igual a zero, que a probabilidade de todos os eventos ocorrerem seja 1 e que, caso exista algum momento estatístico, como média ou desvio padrão disponível, ele contribui para diminuir a incerteza associada à variável aleatória. Segundo Kapur and Kesavan (1992), a maioria das distribuições de probabilidade que aparecem na literatura podem ser encontradas pelo PME quando um ou mais dos seguintes momentos, chamados *momentos caracterizadores*, são descritos: $\mathbb{E}\{x\}$, $\mathbb{E}\{|x|\}$, $\mathbb{E}\{\ln(1 - x)\}$, $\mathbb{E}\{(\ln x)^2\}$, $\mathbb{E}\{x^2\}$, $\mathbb{E}\{\ln x\}$, $\mathbb{E}\{\ln(1 + x)\}$ ou $\mathbb{E}\{\ln(1 + x^2)\}$. A utilização de alguma dessas formas específicas pode ser utilizada de acordo com alguma interpretação física do evento (*e.g.* Seção 2.2.2).

O problema de maximizar a entropia, então é escrito como um problema de encontrar a distribuição de probabilidade que maximiza a entropia do evento dada as restrições apresentadas, ou seja:

$$f = \arg \max_{f \in \mathcal{C}} S(f). \quad (2.7)$$

As distribuições encontradas possuem a forma:

$$f(x) = \exp \left(\lambda_0 - 1 + \sum_{i=0}^m \lambda_i r_i(x) \right), \quad x \in \mathcal{C}. \quad (2.8)$$

Esta mesma metodologia pode ser estendida e aplicada à Campos Aleatórios (Cap. [3] (Soize, 2006) ou matrizes e operadores diferenciais (Adhikari, 2008; Soize, 2000, 2003, 2005a,b).

Exemplos de Aplicação do Princípio de Máxima Entropia.

Encontra-se disponível na literatura (*e.g.* em (Kapoor and Kesavan, 1992)) as distribuições de máxima entropia para um grande número de casos relevantes em engenharia, como por exemplo:

1. $\mathcal{C} = [a, b]$

- Sem informação disponível: $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \frac{1}{b-a}$;
- $\mathbb{E}(X) = m$: $f(x) = x e^{-kx}$

$$c \int_a^b e^{-kx} dx = 1; \quad c \int_a^b x e^{-kx} dx = m;$$

2. $\mathcal{C} =]0, +\infty[$

- $\mathbb{E}(X) = m$ e $\mathbb{E} \{ \ln(X) \} = |\text{cte}| < +\infty$:

$$f(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) x^{a_0-1} \frac{\exp(x/b_0)}{b_0^{a_0} \Gamma(a_0)},$$

onde $a_0 = 1/\delta^2$ and $b_0 = m\delta^2$ e $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

3. $\mathcal{C} =]-\infty, +\infty[$

- $\mathbb{E}(X) = m$ e $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right].$$

Argumento sobre um simples problema com incerteza em Mecânica.

Seja o problema linear, estático, com 1 grau de liberdade:

$$\underline{k} \underline{x} = \underline{f}, \quad (2.9)$$

onde \underline{k} , \underline{x} e \underline{f} são valores nominais para rigidez, deslocamento e força, respectivamente. Seja algum modelo de distribuição e probabilidade para a rigidez e considerando que essa incerteza se propaga para o deslocamento e a força como determinística, temos:

$$KX = \underline{f}. \quad (2.10)$$

Para qualquer análise em engenharia, é comum querer calcular a média do deslocamento. Neste caso, temos:

$$m_X = \mathbb{E}\{K^{-1}\underline{f}\} = \mathbb{E}\{K^{-1}\}\underline{f}. \quad (2.11)$$

Note que $\mathbb{E}\{K^{-1}\}$ não pode ser calculado apenas com o conhecimento do primeiro, $\mathbb{E}\{K\}$, ou segundo momento estatístico, $\mathbb{E}\{K^2\}$. Além do mais, é fisicamente razoável que o deslocamento tenha variância finita, ou seja:

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \mathbb{E}\{K^{-2}\}\underline{f}^2 \leq \infty. \quad (2.12)$$

Para isso, é necessário que $\mathbb{E}\{K^{-2}\} \leq \infty$. Sabendo que a rigidez é um valor sempre positivo, definimos um conjunto suporte $\mathcal{C} =]0, +\infty[$ e conhecendo seu valor nominal, \underline{k} temos três restrições para um problema de máxima entropia (Soize, 2004):

1. $\mathcal{C} =]0, +\infty[$;
2. $\mathbb{E}\{K\} = \underline{k}$;
3. $\mathbb{E}\{K^{-2}\} \leq \infty$.

Dentre as distribuições de máxima entropia com média definida e $\mathcal{C} =]0, +\infty[$ (Kapur and Kesavan, 1992), temos a lei Gama disponível, mas que não atende diretamente à restrição $\mathbb{E}\{K^{-2}\} \leq \infty$. Porém, se a restrição $\mathbb{E}\{\log(K)\} = q$ com $|q| < +\infty$ e $0 \leq \delta < 1/\sqrt{2}$ for obedecida, pode-se mostrar que $\mathbb{E}\{K^{-2}\} < +\infty$. Dessa maneira, garante-se que $\mathbb{E}\{X^2\} \leq \infty$ o que faz com que a lei Gama seja a distribuição mais apropriada, segundo o PME, para modelagem de rigidez aleatória.

2.2 Modelagem Estocástica de uma Barra Trincada

O Princípio da Máxima Entropia foi proposto como uma abordagem para modelagem de incertezas relacionadas a flexibilidade de uma trinca em uma barra, no contexto de propagação de ondas (Fabro et al., 2009), utilizando-se o Método do Elemento Espectral (SEM) (Doyle, 1997; Gopalakrishnan et al., 2008). O uso deste princípio assegura que as realizações dessa variável aleatória sejam compatível com a física do problema.

2.2.1 Elemento Espectral de uma barra com e sem trinca

Existem diferentes maneiras de se estabelecer uma relação de rigidez dinâmica. A abordagem por SEM o faz via função de forma dinâmica, ou seja, no domínio da frequência, utilizando a os deslocamentos exatos, dentro da formulação, como função de interpolação entre os nós do elemento. A formulação baseada em SEM é baseada em dois tipos de elementos: dois nós (*two-noded*) e semi-infinito (*throw-off*). Este último é utilizado quando o elemento se estende ao infinito.

Elemento de Barra de dois nós sem trinca.

Esta formulação usa a teoria de barra mais simples, que pressupõe somente deslocamento axial e uniforme pela secção transversal, descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(x,t). \quad (2.13)$$

onde $u(x,t)$ é o campo de deslocamentos A é a área da secção transversal, ρ é a densidade de massa, E é o módulo de Young e $q(x,t)$ é uma força aplicada externamente, por unidade de comprimento, e é adotada por Doyle (1997). A relação entre a força axial e o campo de deslocamentos é dada por:

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Neste sentido, análise espectral pode ser aplicada com uma solução da forma:

$$\hat{u}(x, f) = A_1 e^{-ikx} + A_2 e^{ikx}, \quad (2.15)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, A_1 e A_2 são amplitudes de onda propagando para frente e para trás em cada frequência, respectivamente, e k é o número de onda, dado neste caso por $k = 2\pi f \sqrt{\rho/E}$ com f sendo a frequência em Hz. Um elemento espectral de comprimento L pode ser definido e, utilizando-se os deslocamentos nodais como condições de contorno, a seguinte matriz dinâmica, simétrica e complexa pode ser obtida:

$$[K] = \frac{iEAk}{1 - z^2} \begin{bmatrix} 1 + z^2 & -2z \\ -2z & 1 + z^2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

onde $z = e^{-ikL}$.

Também estão disponíveis formulações com elementos de mais alta ordem (Krawczuk et al., 2006a,b). Utiliza-se esta matriz diretamente para montar uma matriz de rigidez global, através do método direto (Craig, 1981), por exemplo. A resposta estrutural pode ser encontrada resolvendo-se, para cada frequência, um sistema linear de equações do tipo:

$$\hat{\mathbf{F}} = [K_G] \hat{\mathbf{U}}, \quad (2.17)$$

onde $\hat{\mathbf{F}}$ é o vetor de amplitudes nodais complexas das forças, $\hat{\mathbf{U}}$ é o vetor das amplitudes nodais complexas dos deslocamentos e $[K_G]$ é a matriz de rigidez dinâmica global. O amortecimento estrutural pode ser incluído, aplicando um fator de perda inteiro η , através de um modo de Young complexo $E(1 + i\eta)$.

Elemento de Barra de dois nós com trinca.

Um elemento espectral de barra com uma trinca aberta e não propagante foi proposto por Palacz and Krawczuk (2002). O comprimento do elemento é L e sua área da secção transversal é dada por A . A trinca, localizada em L_1 , é substituída por uma mola, cuja flexibilidade θ é calculada através do Teorema de Castigliano e as leis da mecânica da fratura.

Assume-se uma solução da forma da Eq.[2.15] para o lado esquerdo e direito da trinca, utilizando-se um sistema de coordenadas locais:

$$\hat{u}_1(x, f) = A_3 e^{-ikx} + A_4 e^{ik(L_1-x)}, \quad \text{for } x \in (0, L_1) \quad (2.18)$$

$$\hat{u}_2(x, f) = A_5 e^{-ik(x+L_1)} + A_6 e^{ik[L-(L_1+x)]}, \quad \text{for } x \in (0, L - L_1) \quad (2.19)$$

Na localização da trinca ($x = L_1$ para $\hat{u}_1(x, f)$ e $x = 0$ para $\hat{u}_2(x, f)$) assume-se que existe uma flexibilidade localizada, na forma $cF = u_1 - u_2$, onde c é a flexibilidade. Substituído F da Eq. [2.14], e definindo $\theta = cEA$, temos:

$$\hat{u}_2(x, f) - \hat{u}_1(x, f) = \theta \frac{\partial \hat{u}_1(x, f)}{\partial x}. \quad (2.20)$$

Assume-se, também, continuidade do campo de deformações, ou seja:

$$\frac{\partial \hat{u}_1(x, f)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}_2(x, f)}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Um elemento de comprimento L pode ser definido e, utilizando-se os deslocamentos como condições de contorno a seguinte matriz de rigidez dinâmica, não-simétrica e complexa pode ser obtida (Krawczuk et al., 2006a,b; Ostachowicz, 2008; Palacz and Krawczuk, 2002):

$$[K_c] = iEAk \begin{bmatrix} [D]_{11}^{-1} - [D]_{21}^{-1} z_1 & [D]_{14}^{-1} - [D]_{24}^{-1} z_1 \\ -[D]_{31}^{-1} z + [D]_{41}^{-1} & -[D]_{34}^{-1} z + [D]_{44}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde $z_1 = e^{-ikL_1}$ e $[D]_{ij}^{-1}$ denotam o elemento ij da inversa da matriz $[D]$:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & 0 & 0 \\ (ik\theta - 1)z_1 & (-1 - ik\theta) & z_1 & z z_1^{-1} \\ -ikz_1 & ik & ikz_1 & -ikz z_1^{-1} \\ 0 & 0 & z & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Pode-se mostrar que a forma da flexibilidade relativa a trinca é expressa como (Krawczuk et al., 2006a,b; Ostachowicz, 2008; Palacz and Krawczuk, 2002):

$$\theta = 2\pi h \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} g^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}. \quad (2.24)$$

$\bar{a} = a/h$ é a taxa entre a profundidade da trinca a e a altura da secção transversal h , e g é uma função de ajuste definida por:

$$g\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\tan(\pi\alpha/2h)}{\pi\alpha/2h}} \times \frac{0.752 + 2.02(\alpha/h) + 0.37(1 - \sin(\pi\alpha/2h))^3}{\cos(\pi\alpha/2h)}. \quad (2.25)$$

Modelagem da barra engastada.

A montagem da matriz de rigidez dinâmica global é feita através do mesmo abordagem de Elementos Finitos. Utilizando-se Eq. [2.16] e aplicando-se as restrições de engaste, temos:

$$K_G = [K]_{22} = \frac{iEAk}{1 - z^2}(1 + z^2), \quad (2.26)$$

onde $[K]_{22}$ é o elemento da segunda linha e segunda coluna de $[K]$. Com o mesmo procedimento, utilizando o elemento espectral de barra, (Eq. [2.22]), e aplicando as condições de engaste, temos:

$$K_{Gc} = [K_c]_{22} = iEAk(-[D]_{34}^{-1}z + [D]_{44}^{-1}). \quad (2.27)$$

A Figura [2.1] esboça a barra trincada engastada e a secção transversal na localização da trinca.

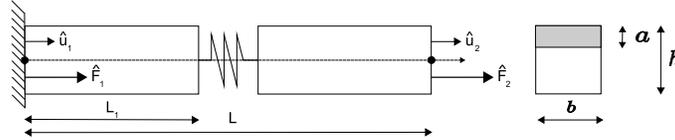


Figura 2.1: Dimensões da barra trincada considerada.

2.2.2 Modelagem Probabilística

Para esta análise, considera-se que a localização da trinca é conhecida, porém sua severidade não. Desta maneira, considera-se o valor da flexibilidade da trinca θ , que é uma medida da severidade do dano, como incerta. É a única incerteza levada em consideração nesta análise. Note que θ depende da altura da secção transversal e da profundidade da trinca a (Eq. [2.24]). Mas, ao invés de se construir um modelo probabilístico para h e a , constroem-se diretamente para a variável de interesse, θ . Esta abordagem permite a construção de um modelo probabilístico mais geral que poderá descrever melhor problemas práticos.

Para construir a função de densidade de probabilidade da variável relacionada à flexibilidade da trinca, Θ , o Princípio da Máxima Entropia é aplicado (Jaynes, 1957a,b; Shannon, 1948). O problema de otimização é dado por:

$$f_{\Theta} = \arg \max_{f \in \mathcal{C}} S(f), \quad (2.28)$$

onde \mathcal{C} é o espaço admissível para a informação disponível da variável aleatória (*e.g.* espaço suporte e seus momentos conhecidos), f_{Θ} é a função densidade de probabilidade para a variável aleatória Θ . A medida de entropia é dada por:

$$S(f_{\Theta}) = - \int_0^{+\infty} f_{\Theta}(\theta) \ln(f_{\Theta}(\theta)) d\theta. \quad (2.29)$$

A primeira informação disponível é o valor médio da variável aleatória Θ . Isto é devido ao fato de que o modelo nominal é satisfatório para descrever o fenômeno:

$$\mathbb{E}\{\Theta\} = \underline{\theta}, \quad (2.30)$$

onde $\underline{\theta}$ é calculado utilizando-se os valores nominais dos parâmetros na Eq. [2.24]. Note que, usando esta informação, assume-se que a profundidade média da trinca é conhecida. A segunda informação disponível é que o valor da flexibilidade é sempre um valor estritamente positivo, *i. e.*,

$$\Theta \in]0, +\infty[. \quad (2.31)$$

A terceira informação disponível é:

$$\mathbb{E}\{\ln(\Theta)\} = |\text{cte}| < +\infty. \quad (2.32)$$

Isto é porque a probabilidade para valores de Θ próximos de zero é pequena, caso contrário poderiam existir valores da rigidez localizada tendendo para o infinito, o que não é fisicamente razoável. Com essas condições, a função densidade de probabilidade para Θ é a função Gama (Kapur and Kesavan, 1992) dada por:

$$f_{\Theta}(\theta) = \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(\theta) \theta^{a_0-1} \frac{\exp(-\theta/b_0)}{b_0^{a_0} \Gamma(a_0)}, \quad (2.33)$$

onde $\mathbb{1}_B(\theta)$ é uma função indicatriz, que é igual a 1 para $\theta \in B$ e 0 caso contrário, e $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ é a função Gama, definida para $z > 0$. Os parâmetros da distribuição são dados por $a_0 = 1/\delta_{\Theta}^2$ e $b_0 = \underline{\theta} \delta_{\Theta}^2$.

Convergência da Solução Estocástica.

Seja $\hat{\mathbf{U}}(\xi, f)$ a resposta em frequência do sistema estocástico calculada para uma realização ξ , gerada pelo método Monte Carlo (Rubinstein and Kroese, 2008). A análise da convergência média quadrática com respeito a realizações independentes da variável aleatória $\hat{\mathbf{U}}$, denotada por $\hat{\mathbf{U}}_j(\xi, f)$ é realizada estudando-se a função $n_S \mapsto \text{conv}(n_S)$ definida por:

$$\text{conv}(n_S) = \frac{1}{n_S} \sum_{j=1}^{n_S} \int_B \|\hat{\mathbf{U}}_j(\xi, f)\|^2 df \quad (2.34)$$

onde n_S é o número de simulações Monte Carlo e B é a banda de frequência analisada. A resposta em frequência é encontrada validando-se a Eq. [2.17] para cada frequência f_k usando-se a matriz de rigidez dinâmica da barra trincada engastada, Eq. [2.27].

Resultados Numéricos.

Para as simulações numéricas, considerou-se uma barra engastada, como mostrada na Fig. [2.1] em que $L = 4$ m, $L_1 = 2.4$ m, $b = 0.02$ m, $h = 0.02$ m, $E = 210$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m³, $\eta = 0.001$ e a trinca com profundidade média $\bar{a} = 0.15$ da altura da secção transversal. A Eq. [2.24] é usada para calcular a flexibilidade adimensional localizada. A Fig. [2.2] mostra a função resposta em frequência determinística do sistema utilizando os valores nominais, em $x = L$, e detalhes em duas diferentes bandas de frequência. Note que a diferença entre comportamento da barra trincada e não trincada é ligeiramente diferente somente em altas frequências.

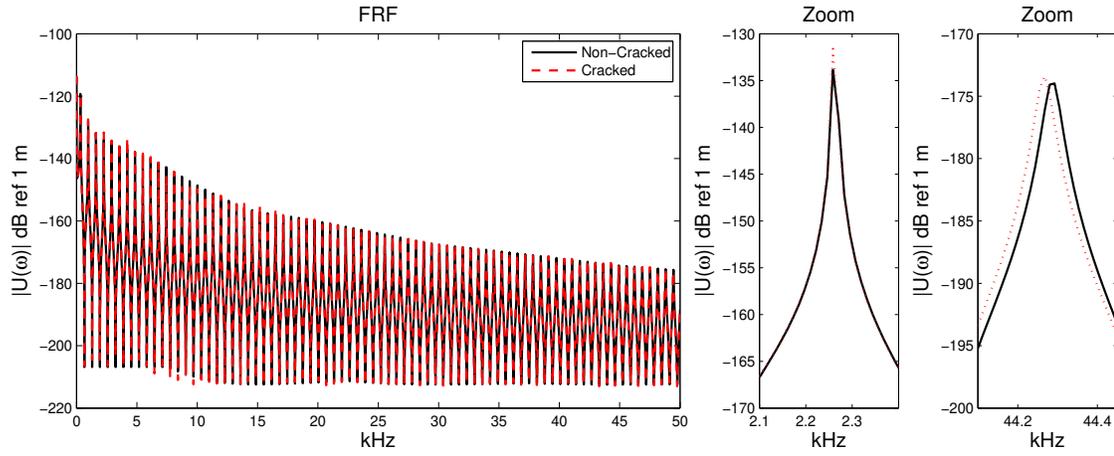


Figura 2.2: Resposta em Frequência do Sistema Médio em $x = L$.

A análise estocástica, Eq. [2.34], foi efetuada para $\delta_{\Theta} = 0.1$, $\delta_{\Theta} = 0.2$ e $\delta_{\Theta} = 0.4$. As Fig. [2.3(a)], [2.3(b)] e Fig. [2.3(c)] mostram a convergência da solução estocástica para cada um dos parâmetros de dispersão, δ_{Θ} . Alcançou-se uma convergência razoável com 600 realizações Monte Carlo.

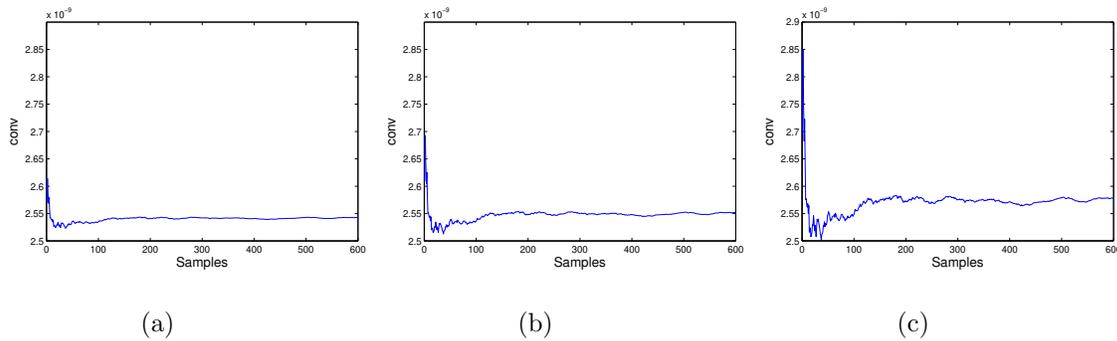


Figura 2.3: Análise de Convergência para (a) $\delta_{\Theta} = 0.1$, (b) $\delta_{\Theta} = 0.2$ e (c) $\delta_{\Theta} = 0.4$

As Figuras [2.4], [2.5] e [2.6] mostram a resposta em frequência em $x = L$ para o sistema

médio, média do modelo probabilístico e limites superiores e inferiores para um intervalo de confiança de 97.5 %, para cada um dos parâmetros de dispersão, δ_{Θ} .

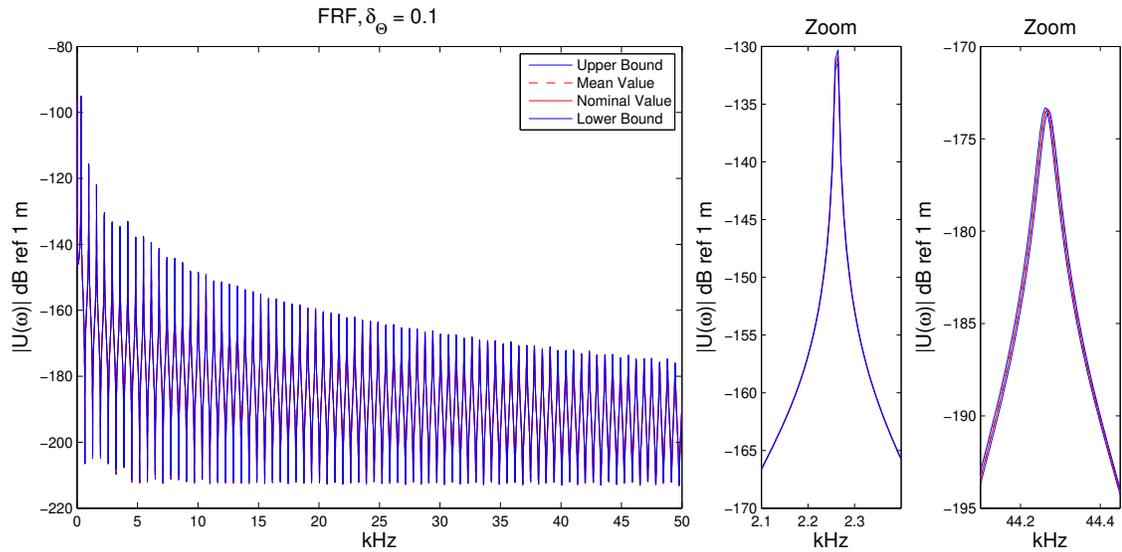


Figura 2.4: Resposta em Frequência em $x = L$ do sistema médio (vermelho), média do modelo probabilístico (dashed red) e limite superior e inferior para intervalo de confiança de 97.5 % para $\delta_{\Theta} = 0.1$.

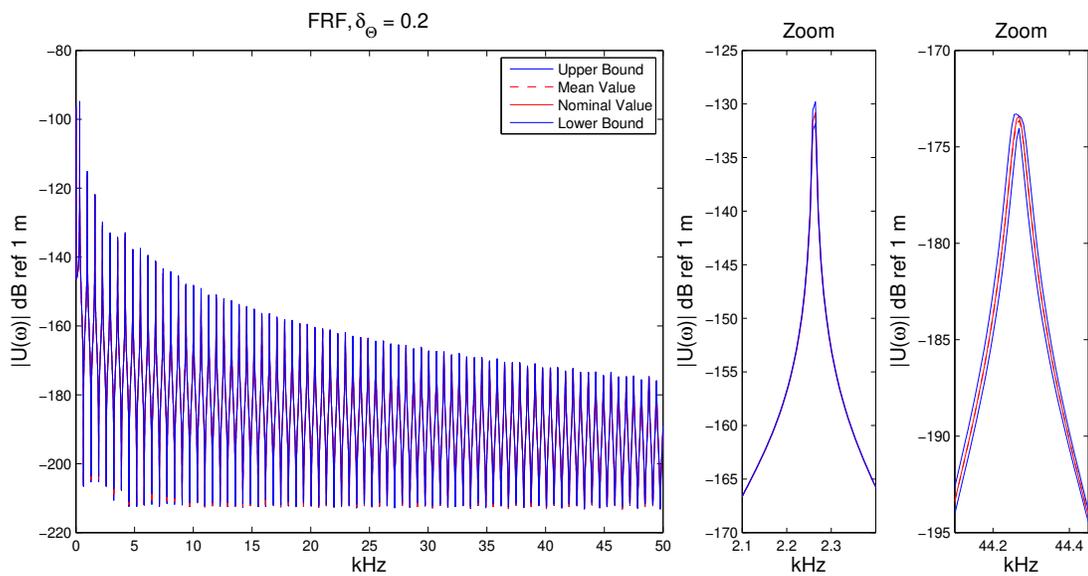


Figura 2.5: Resposta em Frequência em $x = L$ do sistema médio (vermelho), média do modelo probabilístico (dashed red) e limite superior e inferior para intervalo de confiança de 97.5 % para $\delta_{\Theta} = 0.2$.

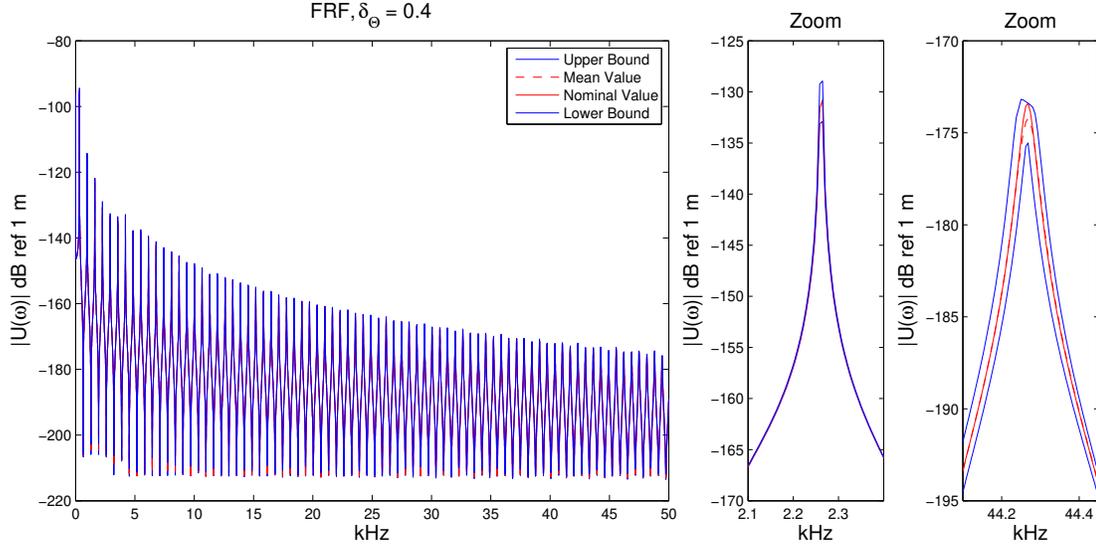


Figura 2.6: Resposta em Frequência em $x = L$ do sistema médio (vermelho), média do modelo probabilístico (dashed red) e limite superior e inferior para intervalo de confiança de 97.5 % para $\delta_{\Theta} = 0.4$.

2.3 Conclusões

Neste capítulo, uma abordagem de modelagem de flexibilidade relacionada a uma trinca em uma barra foi apresentada (Fabro et al., 2009). Um método baseado em propagação de ondas, SEM, foi utilizado para modelar o comportamento dinâmico determinístico e o Teorema de Castigliano e a teoria da Mecânica da Fratura foi utilizada para associar uma profundidade de trinca a uma flexibilidade localizada. As incertezas do problema foram modeladas através da teoria de probabilidade junto com o Princípio da Máxima Entropia, que permite o uso somente de informações disponíveis para construir uma distribuição de probabilidade compatível com a física do problema

A flexibilidade modelada pode ser considerada incerta devido às incertezas associadas à seus parâmetros, e também devido à incerteza associada ao seu próprio modelo determinístico. Neste sentido, parâmetro de dispersão, δ_{Θ} , pode ser interpretado como uma modelagem melhor (para pequenos valores de δ_{Θ}) ou pior (para valores maiores de δ_{Θ}).

A amostragem por Monte Carlo foi utilizada como solução do problema estocástico. Apesar de ser uma metodologia com custo computacional alto, a abordagem utilizada para o modelo determinístico (SEM), reduziu de sobremaneira os custos computacionais associados. Uma matriz complexa 2×2 é capaz de representar o problema, com a vantagem de se utilizar a solução analítica da equação diferencial associada.

Capítulo 3

Problemas de Campo Aleatório Utilizando o Método de Elemento Espectral

3.1 Campo Aleatório

A modelagem de estruturas com incertezas, muitas vezes envolve a representação de propriedades aleatórias com variação temporal ou espacial, que podem representadas através de Processos Estocásticos ou Campos Aleatórios. Tipicamente, representa-se propriedades de elasticidade, coeficiente de Poisson, densidade de massa, imperfeições geométricas, carregamentos por ondas, ventos ou terremotos, etc. Pode-se caracterizar estes campos através de procedimentos experimentais (*e.g.* (Adhikari and Friswell, 2010; Chen et al., 2006)), ou através considerações de modelagem, *e.g.* Princípio da Máxima Entropia (ver secção [2]).

Dado um evento θ , em um espaço de probabilístico definido pela tripla (Ω, B, P) , um campo aleatório $H(\mathbf{x}, \theta)$ pode ser definido como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro contínuo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$, sendo que $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^d$ descreve a geometria do sistema. Note que para cada \mathbf{x} , $H(\mathbf{x}, \theta)$ é uma variável aleatória e para cada θ , $H(\mathbf{x}, \theta)$ é uma realização do campo aleatório.

Pode-se separar os campos aleatórios em duas categorias principais, baseando-se em sua distribuição de probabilidade: Gaussianos e não-Gaussianos. Uma revisão detalhada sobre técnicas de simulação de campos aleatórios Gaussianos e não-Gaussianos é apresentada por Stefanou (2009) e Keese (2003).

Um campo aleatório é dito Gaussiano, se qualquer vetor $\{H(\mathbf{x}_1), \dots, H(\mathbf{x}_n)\}$ for Gaussiano, e é completamente definido por sua média $H_0(\mathbf{x})$, variância $\sigma^2(\mathbf{x})$ e função de autocorrelação $C_H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. O campo é dito homogêneo se sua média e variância são constantes ao longo de sua geometria \mathbf{R} e a função de autocorrelação depende somente da diferença $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, ou seja $C_H = C_H(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Além do mais, a função de autocorrelação tem um parâmetro característico, chamado *comprimento de correlação* (Keese, 2003; Papoulis, 1991).

A discretização de um campo aleatório é uma aproximação de $H(\mathbf{x}, \theta)$ por um $\hat{H}(\mathbf{x}, \theta)$ definido através de um conjunto finito de variáveis aleatórias. A discretização é necessária

para o tratamento computacional. Pode-se dividir os métodos de discretização em três grupos (Schuëller, 1997; Sudret and der Kiureghian, 2000):

- *Discretização pontual*: Métodos que associam um variável aleatória a cada ponto dado pela discretização da geometria $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}$.
- *Discretização por média*: as variáveis aleatórias são integrais ponderadas sobre um certo domínio \mathbf{R}_e .
- *Métodos por expansão em séries*: o campo é representado através de um expansão em série, em cada termo contém um parcela envolvendo variáveis aleatórias e outra envolvendo funções determinísticas sobre o domínio geométrico. A aproximação é devida à serie truncada.

Vamos tratar mais especificamente de um tipo de método por expansão em série: Expansão de Karhunen-Loève.

3.1.1 Expansão de Karhunen-Loève

Para um campo aleatório $H(\mathbf{x}, \theta)$ com uma função de covariância finita, simétrica e positiva definida $C_H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, definida sobre um domínio \mathbf{D} , existe um decomposição espectral em um serie do tipo Fourier generalizada como (Ghanem and Spanos, 1991):

$$H(\mathbf{x}, \theta) = H_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j(\theta) f_j(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde $\xi_j(\theta)$ são variável aleatórias não correlacionadas, λ_j e $f_j(\mathbf{x}, \theta)$ são, respectivamente, autovalores e autofunções solução da equação integral de Fredholm do segundo tipo:

$$\int_{\mathbf{D}} C_H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_j(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 = \lambda_j f_j(\mathbf{x}_2). \quad (3.2)$$

Os autovalores e autofunções pode ser ordenados em ordem decrescente de modo que a Eq. [3.1] seja truncada em M termos, sendo que pode-se aproximar a função de autocorrelação pela seguinte decomposição espectral:

$$\hat{C}_H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{j=1}^M \lambda_j f_j(\mathbf{x}_1) f_j(\mathbf{x}_2). \quad (3.3)$$

Para uma função de autocorrelação unidimensional do tipo:

$$C(x_1, x_2) = e^{-|x_1 - x_2|/b}, \quad (3.4)$$

onde b é seu comprimento de correlação, existe uma solução analítica sobre o intervalo $-a \leq x \leq a$. A expansão Karhunen-Loève pode ser escrita como (Ghanem and Spanos, 1991):

$$H(x, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\xi_j(\theta) \sqrt{\lambda_j} f_j(x) + \xi_j^*(\theta) \sqrt{\lambda_j^*} f_j^*(x) \right], \quad (3.5)$$

onde, definindo-se $c = 1/b$, os correspondentes autovalores e autovetores, para os termos j pares, são dados por

$$\lambda_j = \frac{2c}{\omega_j^2 + c^2}; \quad f_j(x) = \frac{\sin(\omega_j x)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_j a)}{2\omega_j}}}, \quad (3.6)$$

onde ω_j são obtidos através da solução da equação transcendental $\tan(\omega a) = -\omega/c$, e para os termos j ímpares, são dados por

$$\lambda_j^* = \frac{2c}{\omega_j^{*2} + c^2}; \quad f_j(x) = \frac{\cos(\omega_j^* x)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_j^* a)}{2\omega_j^*}}}, \quad (3.7)$$

onde ω_j são obtidos através da solução da equação transcendental $\tan(\omega^* a) = c/\omega^*$.

A Fig. [3.1] mostra um exemplo de autofunções, autovalores, algumas realizações e o erro de aproximação $|\hat{C}_H(x_1, x_2) - C_H(x_1, x_2)|$, para um campo aleatório gaussiano, unidimensional e $b = 0,5$ e $M = 4$. Todos autovalores foram normalizados pelo primeiro, ou seja, λ_n/λ_1 .

Para o caso da Eq. [3.2] não possuir solução analítica, pode-se resolver o problema de autovalor/autovetor associado com um procedimento do tipo Galerkin (Ghanem and Spanos, 1991; Huang et al., 2001). Cada autofunção é aproximada por uma combinação linear de N funções de base $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)$:

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^N d_{ik} \phi_k(x), \quad (3.8)$$

onde d_{ik} são coeficientes constantes para a i -ésima autofunção. Substituindo a Eq. [3.8] na Eq. [3.2] torna-se o problema em um conjunto de equações algébricas do tipo $CD = \Lambda BD$, onde:

$$C_{ij} = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} C_H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_i(\mathbf{x}_1) \phi_j(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (3.9)$$

$$B_{ij} = \int_{\mathbf{R}} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

$$D_{ij} = d_{ij}, \quad (3.11)$$

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i. \quad (3.12)$$

Escolhendo-se a base de funções como polinômios por partes, as colunas da matriz D tornam-se os autovalores calculados nos respectivos pontos nodais da malha induzida, e o ij -ésimo elemento da matriz C torna-se a correlação ponderada entre os nós i e j (Ghanem and Spanos, 1991).

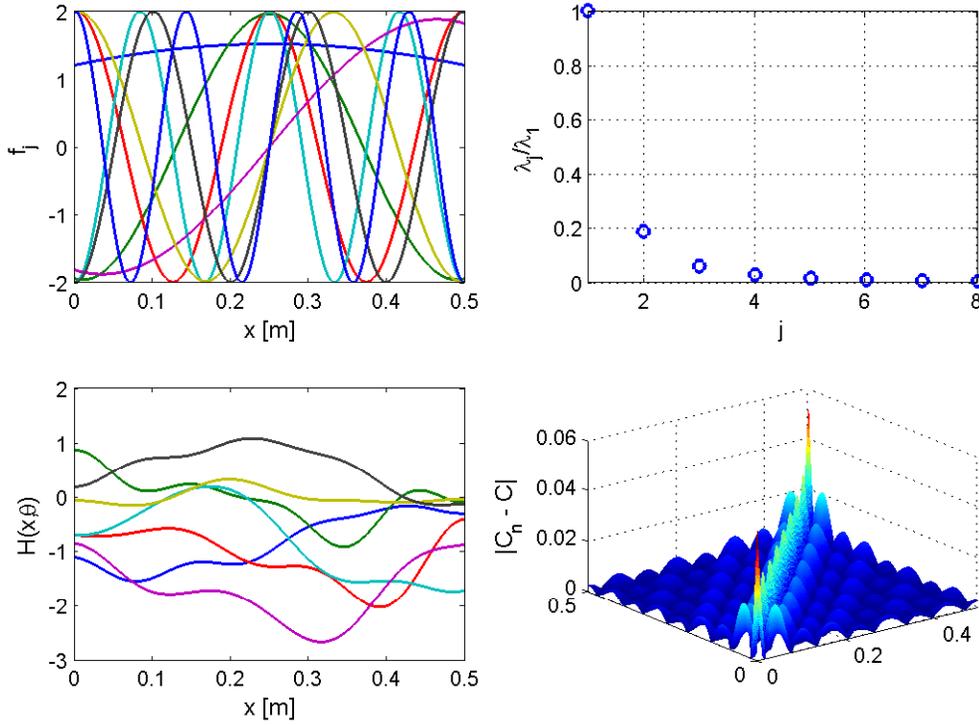


Figura 3.1: Autofunções (superior esquerdo), autovalores (superior direito), algumas realizações (canto inferior direito) e o erro de truncamento para um campo aleatório gaussiano, unidimensional, com média zero e $b = 0,5$ e $M = 4$.

Por exemplo, para um caso bidimensional, sobre um domínio $D = [0, 1] \times [0, 1.2]$, e para uma função de autocorrelação definida por:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{-\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2/b}, \quad (3.13)$$

a Fig. [3.2] mostra as autofunções e a Fig [3.3] mostra os autovalores obtidos numericamente, para $b = 1,0$ com 20 termos da expansão KL. Todos autovalores foram normalizados pelo primeiro, ou seja, λ_n/λ_1 .

Huang et al. (2001) realizou um estudo analisando a convergência para alguns tipos de função de autocorrelação com relação ao comprimento de correlação, ao tipo de função utilizada para modelar a autocorrelação do campo e também comparou a convergência através de soluções numéricas e analíticas da Eq. [3.2]. Ele mostrou que modelos de correlação mais suaves têm uma convergência mais rápida, assim como aqueles com maior comprimento de correlação. Mostrou também que quando a solução analítica está disponível, a convergência também é mais rápida comparando-se com simulações feitas a partir de soluções numéricas

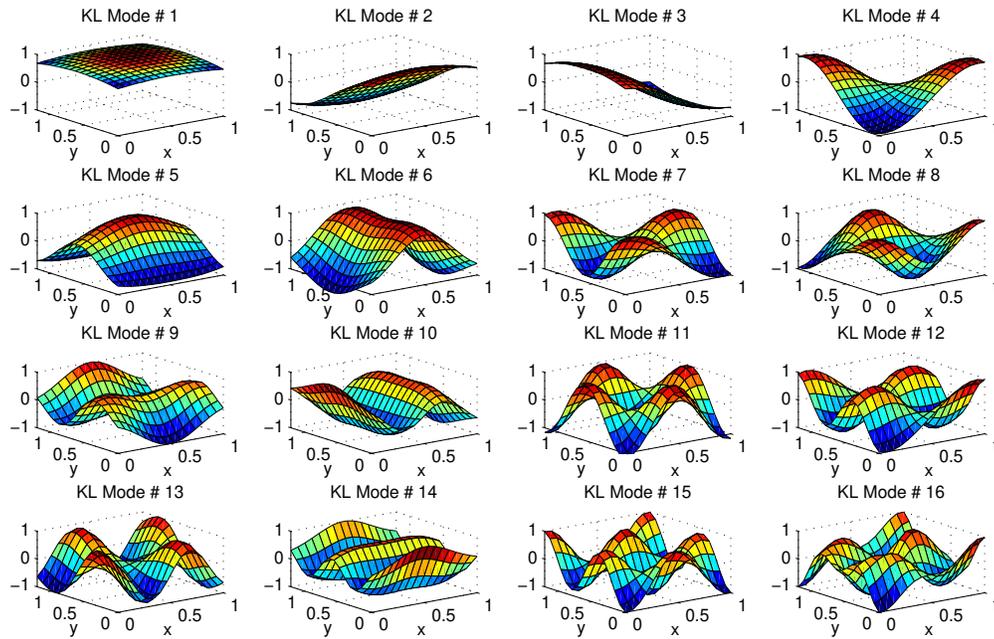


Figura 3.2: Algumas autofunções para o caso bidimensional, com média zero e $b = 1,0$.

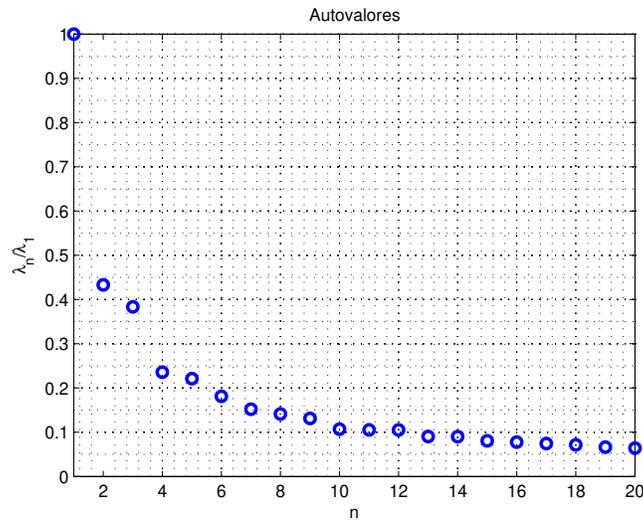


Figura 3.3: Alguns autovalores para o caso bidimensional, com média zero e $b = 1,0$.

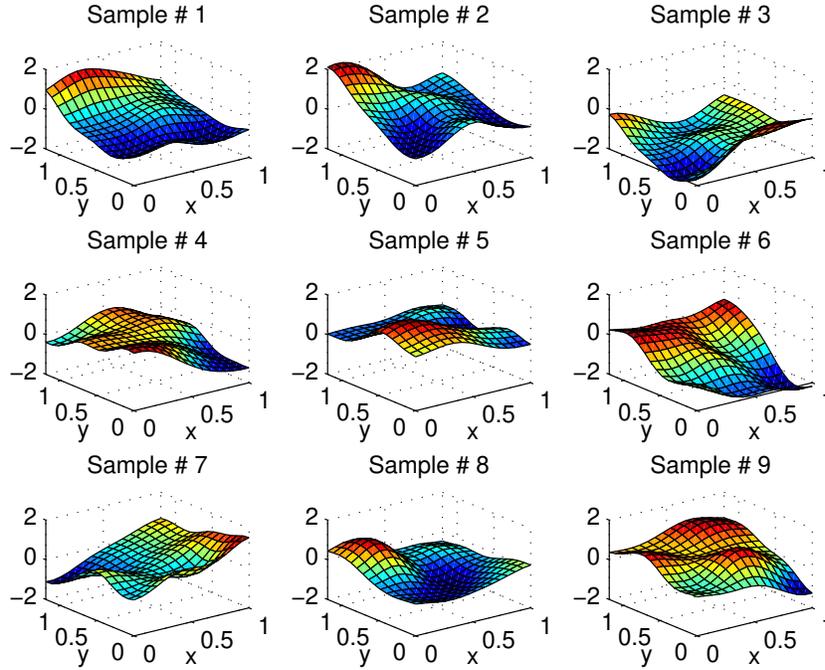


Figura 3.4: Algumas realizações do Campo Aleatório Gaussiano e bidimensional, com média zero e $b = 1,0$.

3.2 Método Duplamente Espectral de Elementos Finitos Estocásticos

Problemas com características aleatórias espacialmente distribuídas, ou campos aleatório, têm sido tratados através do Método Espectral de Elementos Finitos Estocásticos (SSFEM) há duas décadas (Ghanem, 1999; Ghanem and Spanos, 1991). O modelo físico envolve um operador diferencial com coeficientes exibindo flutuações aleatórias com respeito a uma ou mais variáveis, que pode ser representadas matematicamente por:

$$[\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Pi}(\mathbf{x},\theta)] = f(\mathbf{x},\theta) \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ é um operador diferencial determinístico e $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x},\theta)$ é um operador diferencial cujos coeficientes são processos estocásticos com média nula e θ é relacionado a um evento aleatório, definido pela tripla (Ω, B, P) , onde Ω é o espaço amostral, B é a sigma álgebra σ -álgebra e P é a medida de probabilidade (Papoulis, 1991). Para um abordagem computacional, é possível substituir o campo aleatório por uma expansão do tipo Karhunen-Loève.

Recentemente, uma abordagem unificada para o Método de Elemento Espectral (SEM) (Doyle, 1997) e SSFEM, chamada Método Duplamente Espectral de Elementos Finitos Estocásticos (DSSFEM), foi proposta por Adhikari and Roy Mahapatra (2009), reunindo a decom-

posição espectral relativa ao campo dinâmico de deslocamentos e a decomposição espectral de campos aleatórios. Como os efeitos de incertezas vão ficando cada vez mais significativos em altas frequências, DSSFEM propõe-se como uma ferramenta para análise de propagação de incertezas em guias de ondas, uma vez que, num contexto de elementos finitos, requer-se uma malha muito fina para representar corretamente seu comportamento dinâmico em altas frequências.

Derivação Geral para as Matrizes de Elementos Duplamente Espectrais.

Um sistema dinâmico linear amortecido com parâmetros distribuídos pode ser descrito por uma equação diferencial parcial linear do tipo (Adhikari and Roy Mahapatra, 2009):

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + L_1 \frac{\partial U(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + L_2 U(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{D}, t \in [0, T] \quad (3.15)$$

com condições iniciais e de contorno lineares da forma

$$M_{1j} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0; \quad M_{2j} u(\mathbf{x}, t) = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma, t = t_0, j = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

onde Γ é a superfície de contorno, $\rho(\mathbf{x}, \theta)$ é a distribuição aleatória de densidade de massa do sistema, $p(\mathbf{x}, t)$ é uma função de forçamento distribuída e variante no tempo, L_1 é o operador de amortecimento espacial, aleatório e auto-adjunto, L_2 é o operador de rigidez espacial, aleatório e auto-adjunto e M_{1j} e M_{2j} são operadores lineares definidos na superfície de contorno Γ . Os operadores de amortecimento, rigidez e densidade de massa envolvem processos aleatórios.

Aplicando-se análise espectral na Eq. [3.15], pode-se derivar funções de forma dinâmicas dentro de um elemento para interpolação entre os nós como

$$u_e(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{u}}_e(\omega), \quad (3.17)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}_e(\omega) \in \mathbb{C}^n$ é o vetor de deslocamento e $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{C}^n$ é o vetor em frequência da função de forma com n graus de liberdade. Suponha que $s_j(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, m$, com m a ordem da equação diferencial, sejam funções de base que satisfazem exatamente a Eq. [3.15]. Então, $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega)$ pode ser expresso como

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{\Gamma}(\omega) \mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega), \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega) = \{s_j(\mathbf{x}, \omega)\}^T, \forall j \in \mathbb{C}^m$ e a matriz complexa $\mathbf{\Gamma}(\omega) \in \mathbb{C}^{nm}$ depende das condições de contorno.

A forma fraca da abordagem de elementos finitos pode ser utilizada para se obter as matrizes de rigidez, massa e amortecimento utilizando-se as funções de forma em frequência, Eq. (3.18), como a seguir:

$$\mathbf{K}_e(\omega, \theta) = \int_{\mathbf{D}_e} k_s(\mathbf{x}, \theta) \mathcal{L}_2\{\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega)\} \mathcal{L}_2\{\mathbf{N}^T(\mathbf{x}, \omega)\} d\mathbf{x}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{M}_e(\omega, \theta) = \int_{\mathbf{D}_e} \rho(\mathbf{x}, \theta) \mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{N}^T(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{C}_e(\omega, \theta) = \int_{\mathbf{D}_e} c(\mathbf{x}, \theta) \mathcal{L}_1\{\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega)\} \mathcal{L}_1\{\mathbf{N}^T(\mathbf{x}, \omega)\} d\mathbf{x}, \quad (3.21)$$

onde \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são operadores de dissipação de energia e energia de deformação respectivamente, $k_s(\mathbf{x}, \omega)$, $\rho(\mathbf{x}, \theta)$ e $c(\mathbf{x}, \theta)$ são campos aleatórios relacionados às distribuições aleatórias de rigidez, densidade de massa e amortecimento respectivamente. A Expansão Karhunen-Loève pode ser utilizada para representar estes campos aleatórios em uma série espectral, como:

$$\mathbf{K}_e(\omega, \theta) = \mathbf{K}_{0e}(\omega) + \sum_{j=1}^{M_K} \xi_{\mathbf{K}_j}(\theta) \mathbf{K}_{je}(\omega), \quad (3.22)$$

$$\mathbf{M}_e(\omega, \theta) = \mathbf{M}_{0e}(\omega) + \sum_{j=1}^{M_M} \xi_{\mathbf{M}_j}(\theta) \mathbf{M}_{je}(\omega), \quad (3.23)$$

$$\mathbf{C}_e(\omega, \theta) = \mathbf{C}_{0e}(\omega) + \sum_{j=1}^{M_C} \xi_{\mathbf{C}_j}(\theta) \mathbf{C}_{je}(\omega), \quad (3.24)$$

sendo que, por exemplo, a matriz de rigidez pode ser obtida como:

$$\mathbf{K}_{0e}(\omega) = \int_{\mathbf{D}_e} k_0(\mathbf{x}) \mathcal{L}_2\{\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega)\} \mathcal{L}_2\{\mathbf{N}^T(\mathbf{x}, \omega)\} d\mathbf{x}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{K}_{je}(\omega) = \sqrt{\lambda_{\mathbf{K}_j}} \int_{\mathbf{D}_e} f_{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}) \mathcal{L}_2\{\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega)\} \mathcal{L}_2\{\mathbf{N}^T(\mathbf{x}, \omega)\} d\mathbf{x}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, M_K. \quad (3.26)$$

Equivalentemente, pode-se substituir a função de forma $\mathbf{N}(\mathbf{r}, \omega)$ como na Eq. [3.18] na Eq. [3.25] e Eq. [3.26], e, então, pode-se reescrevê-las como:

$$\mathbf{K}_{0e}(\omega) = \mathbf{\Gamma}(\omega) \widetilde{\mathbf{K}}_{0e}(\omega) \mathbf{\Gamma}^T(\omega), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K}_{je}(\omega) = \sqrt{\lambda_{\mathbf{K}_j}} \mathbf{\Gamma}(\omega) \widetilde{\mathbf{K}}_{je}(\omega) \mathbf{\Gamma}^T(\omega), \quad (3.28)$$

onde

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{0e}(\omega) = \int_{\mathbf{D}_e} k_0(\mathbf{x}) \mathcal{L}_2\{\mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)\} \mathcal{L}_2\{\mathbf{s}^T(\mathbf{x}, \omega)\} d\mathbf{x}, \quad (3.29)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{je}(\omega) = \sqrt{\lambda_{\mathbf{K}_j}} \int_{\mathbf{D}_e} f_{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}) \mathcal{L}_2\{\mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)\} \mathcal{L}_2\{\mathbf{s}^T(\mathbf{x}, \omega)\} d\mathbf{x}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, M_K \quad (3.30)$$

Uma vez de posse destas matrizes de rigidez, massa e amortecimento, a metodologia padrão de elementos finitos pode ser aplicada para se obter a matriz de rigidez dinâmica global.

DSSFEM para vigas Euler-Bernoulli.

A metodologia do DSSFEM é aplicada de modo a se obter elementos duplamente espectrais para vigas do tipo Euler-Bernoulli (Fabro and Arruda, 2009). Considere:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - q(x,t), \quad (3.31)$$

e que a rigidez flexural é um campo aleatório da forma:

$$EI(x,\theta) = E_0 I_0 [1 + \varepsilon_{EI} H_{EI}(x,\theta)], \quad (3.32)$$

onde assume-se que $H_{EI}(x,\theta)$ seja um campo aleatório Gaussiano com média nula e função de correlação do tipo da Eq. [3.4], $E_0 I_0$ é a rigidez flexural do modelo base em questão e ε_{EI} é um parâmetro para quantificar a quantidade de incerteza no campo aleatório da rigidez flexural.

Pode-se mostrar que a função de forma em frequência para vigas do tipo Euler-Bernoulli é do tipo (Doyle, 1997):

$$\mathbf{N}(x,\omega) = \begin{bmatrix} (r_1 \hat{h}_1 + r_2 \hat{h}_2)/\Delta \\ (r_1 \hat{h}_3 + r_2 \hat{h}_2)/\Delta \\ (r_1 \hat{h}_2 + r_2 \hat{h}_1)/\Delta \\ -(r_1 \hat{h}_4 + r_2 \hat{h}_3)/\Delta \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= r_2^2 - r_1^2, \\ r_1 &= i(k_1 - k_2)(1 - e^{-ik_1 L - ik_2 L}), \\ r_2 &= i(k_1 + k_2)(e^{-ik_1 L} - e^{-ik_2 L}), \\ \hat{h}_1 &= ik_2(e^{-ik_1 x} - e^{-ik_2 L - ik_1(L-x)}) - ik_1(e^{-ik_2 x} - e^{-ik_1 L - ik_2(L-x)}), \\ \hat{h}_2 &= -ik_2 e^{-ik_2 L - ik_1 x} - e^{-ik_1(L-x)} + ik_1(-e^{-ik_2(L-x)} + e^{-ik_1 L - ik_2 x}), \\ \hat{h}_3 &= (e^{-ik_1 x} + e^{-ik_2 L - ik_1(L-x)}) - (e^{-ik_2 x} + e^{-ik_1 L - ik_2(L-x)}), \\ \hat{h}_4 &= (e^{-ik_2 L - ik_1 x} + e^{-ik_1(L-x)}) - (e^{-ik_2(L-x)} + e^{-ik_1 L - ik_2 x}), \end{aligned} \quad (3.34)$$

e $k_1 = \pm k$, $k_2 = \pm ik$ e k é dado por:

$$k^4 = \frac{\rho A \omega^2 - i\eta A \omega}{EI}. \quad (3.35)$$

Após alguma manipulação algébrica, pode-se reescrever a função de forma como na Eq.

[3.18], de modo que os elementos $\Gamma_{ij}(\omega)$ da matriz $\Gamma(\omega)$ sejam:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}(\omega) &= r_1 i k_2 - r_2 i k_2 e^{-i k_2 L}, \\
\Gamma_{12}(\omega) &= -r_1 i k_2 e^{-i k_2 + k_1 L} + r_2 i k_2 e^{-i k_1 L}, \\
\Gamma_{13}(\omega) &= -r_1 i k_1 + r_2 i k_1 e^{-i k_1 L}, \\
\Gamma_{14}(\omega) &= r_1 i k_1 e^{-i(k_1 + k_2)L} - r_2 i k_1 e^{-i k_2 L}, \\
\Gamma_{21}(\omega) &= r_1 + r_2 e^{-i k_2 L}, \\
\Gamma_{22}(\omega) &= r_1 e^{-i(k_2 + k_1)L} + r_2 e^{-i k_1 L}, \\
\Gamma_{23}(\omega) &= -r_1 - r_2 e^{-i k_1 L}, \\
\Gamma_{24}(\omega) &= -r_1 e^{-i(k_1 + k_2)L} - r_2 e^{-i k_2 L}, \\
\Gamma_{31}(\omega) &= -r_1 i k_2 e^{-i k_2 L} + r_2 i k_2, \\
\Gamma_{32}(\omega) &= r_1 i k_2 e^{-i k_2 L} - r_2 i k_2 e^{-i(k_1 + k_2)L}, \\
\Gamma_{33}(\omega) &= r_1 i k_1 e^{-i k_1 L} - r_2 i k_1, \\
\Gamma_{34}(\omega) &= -r_1 i k_1 e^{-i k_2 L} + r_2 i k_1 e^{-i(k_1 + k_2)L}, \\
\Gamma_{41}(\omega) &= -r_1 e^{-i k_2 L} - r_2, \\
\Gamma_{42}(\omega) &= -r_1 e^{-i k_1 L} - r_2 e^{-i(k_1 + k_2)L}, \\
\Gamma_{43}(\omega) &= r_1 e^{-i k_1 L} + r_2, \\
\Gamma_{44}(\omega) &= r_1 e^{-i k_2 L} + r_2 e^{-i(k_1 + k_2)L},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

e

$$\mathbf{s}(x, \omega) = \begin{Bmatrix} e^{-i k_1 x} \\ e^{i k_1 x} \\ e^{-i k_2 x} \\ e^{i k_2 x} \end{Bmatrix}. \tag{3.37}$$

Para vibrações flexurais, o operador de rigidez é $\mathcal{L}_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Substituindo Eq. [3.37] na Eq. [3.29] e Eq. [3.30], e assumindo constante $E_0 I_0$, obtém-se a seguinte matriz simétrica e complexa:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{K}}_{0e}(\omega) &= E_0 I_0 \int_0^L \frac{\partial^2 \mathbf{s}(x, \omega)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}^T(x, \omega)}{\partial x^2} dx \\
&= \frac{E_0 I_0 k^3}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-i k L} \sin(kL) & 2kL & (1+i)(1-z_2) & (1+i)(1-z_1^{-1}) \\ & -i(-1+e^{2ikL}) & (1-i)(1-z_1) & -(1+i)(1-z_2^{-1}) \\ & & -1+e^{2kL} & 2kL \\ sym & & & 1-e^{-2kL} \end{bmatrix}, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{(1+i)kL}, \\
z_2 &= e^{(1-i)kL}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Então, a matriz de rigidez determinística é obtida substituindo-se Eq. [3.38] e Eq. [3.36] na Eq. [3.27]. A matriz simétrica $\widetilde{\mathbf{M}}_{0e}(\omega)$ é obtida através do mesmo procedimento, como a

seguir:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}}_{0e}(\omega) &= \rho A \int_0^L \mathbf{s}(x,\omega) \mathbf{s}^T(x,\omega) dx \\ &= \frac{\rho A}{2k} \begin{bmatrix} -i + ie^{-2ikL} & 2kL & -(1+i)(1-z_1) & (1-i)(1-z_1^{-1}) \\ & -i(-1 + e^{2ikL}) & -(1-i)(1-z_1) & (1+i)(1-z_2^{-1}) \\ & & -1 + e^{2kL} & 2kL \\ \text{sym} & & & 1 - e^{-2kL} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{(1+i)kL}, \\ z_2 &= e^{(1-i)kL}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

e a matriz de massa determinística pode ser expressa como $\mathbf{M}_{0e}(\omega) = \mathbf{\Gamma}(\omega) \widetilde{\mathbf{M}}_{0e}(\omega) \mathbf{\Gamma}^T(\omega)$, do mesmo modo que na Eq. [3.27].

Dessa maneira, para se obter a matriz de rigidez como na Eq. (3.22), tem-se:

$$\mathbf{K}_e(\omega, \theta) = \mathbf{K}_{0e}(\omega) + \Delta \mathbf{K}_e(\omega, \theta). \quad (3.42)$$

De acordo com a Eq. (3.28), temos:

$$\Delta \mathbf{K}_e(\omega, \theta) = \mathbf{\Gamma}(\omega) \widetilde{\Delta \mathbf{K}}_e(\omega, \theta) \mathbf{\Gamma}^T(\omega), \quad (3.43)$$

e finalmente $\widetilde{\Delta \mathbf{K}}_e(\omega, \theta)$ pode ser reescrita através da Expansão Karhunen-Loève como

$$\widetilde{\Delta \mathbf{K}}_e(\omega, \theta) = \sum_{j=1}^{M_K} \left[\xi_{K_j}(\theta) \sqrt{\lambda_{K_j}} \widetilde{\mathbf{K}}_{je}(\omega) + \xi_{K_j}^*(\theta) \sqrt{\lambda_{K_j}^*} \widetilde{\mathbf{K}}_{je}^*(\omega) \right] \quad (3.44)$$

onde λ_{K_j} and $\lambda_{K_j}^*$ são autovalores relacionado ao campo aleatório $H_{EI}(x, \theta)$, Eq. [3.32]. As matrizes $\widetilde{\mathbf{K}}_{je}(\omega)$ e $\widetilde{\mathbf{K}}_{je}^*(\omega)$ são obtidas como na Eq. [3.30]. Note que foram obtidos termos ímpares (Eq. [3.7]) e pares (Eq. [3.6]) da Expansão KL. Desta maneira, para os termos pares (Eq. [3.6]), temos:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{je}(\omega) = \frac{\varepsilon_{EI} E_0 I_0}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_j a)}{2\omega_j}}} \int_0^L \sin[\omega_j(x-a)] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{s}(x, \omega)}{\partial x^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{s}(x, \omega)}{\partial x^2} \right\}^T dx. \quad (3.45)$$

E para o termos ímpares (Eq. [3.7]), temos:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{je}^*(\omega) = \frac{\varepsilon_{EI} E_0 I_0}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_j^* a)}{2\omega_j^*}}} \int_0^L \cos[\omega_j(x-a)] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{s}(x, \omega)}{\partial x^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{s}(x, \omega)}{\partial x^2} \right\}^T dx. \quad (3.46)$$

com $a = L/2$. Note que as autofunções foram definidas dentro do intervalo $-a \leq x \leq a$, o que faz necessária uma transformação de coordenadas para $0 \leq x \leq L$. A matriz de rigidez dinâmica, $\mathbf{K}_{De}(\omega, \theta)$, pode ser montada com o procedimento padrão de elementos finitos.

Considerando-se a matriz de massa determinística e incluindo o amortecimento através de uma parte complexa no módulo de Young ($E(1 + i\eta)$), relacionada ao comportamento constitutivo viscoelástico, somente no termo determinístico da matriz de rigidez, temos:

$$\mathbf{K}_{De}(\omega, \theta) = (\mathbf{K}_e(\omega, \theta) - \omega^2 \mathbf{M}_e(\omega)) \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{K}_e(\omega, \theta)$ vem da Eq. [3.42].

Maiores cuidados com respeito ao condicionamento das matrizes derivadas por esta metodologia são necessário. Sugere-se que a implementação do código computacional seja feito diretamente através dos elementos matriciais $K_{Deij}(\omega, \theta)$ da Eq. [3.47], que podem ser encontrados através de algum software de manipulação simbólica (*e.g.* (Wolfram Research, Inc., 2007)).

Resultados Numéricos

Para ilustrar a aplicabilidade desta metodologia, uma viga engastada, com rigidez flexural aleatória espacialmente distribuída foi simulada, e sua resposta em frequência na extremidade livre foi obtida. A viga tem comprimento $L_0 = 1$ m, com seção transversal retangular com base $b_0 = 0.05$ m e altura $h_0 = 0.05$ m, densidade de massa $\rho_0 = 7860$ kg/m³, módulo de Young $E_0 = 200$ GPa e $\eta = 0.01$ como parâmetros determinísticos.

A Fig. [3.5] compara a resposta em frequência do deslocamento transversal na extremidade livre da viga engastada para a abordagem SEM e DSSFEM, utilizando a matriz de rigidez dinâmica obtida em Eq. [3.47], mas somente com os termos determinísticos, ou seja, Eq. [3.42] resume-se à $\mathbf{K}_e(\omega) = \mathbf{K}_{0e}(\omega)$.

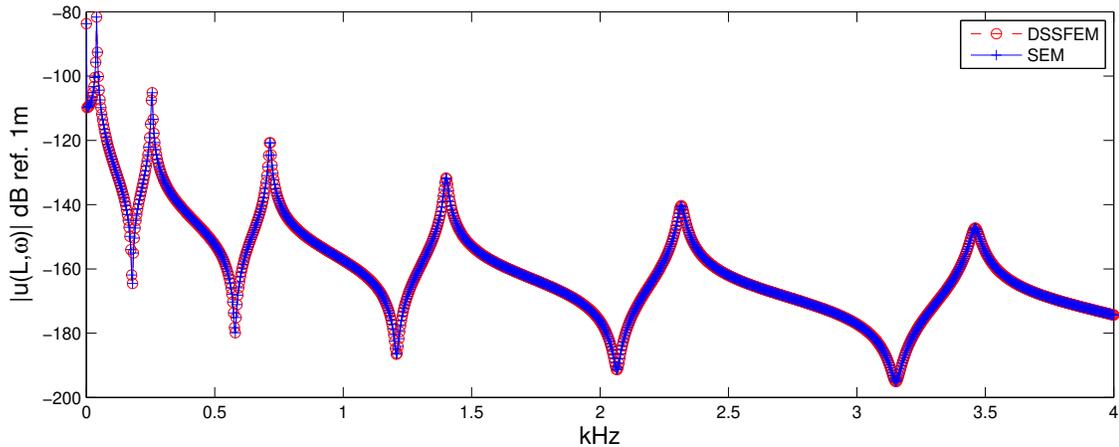


Figura 3.5: Resposta em Frequência em $x = L$ com parâmetros determinísticos: comparação entre as abordagens SEM e DSSFEM.

A Eq. [3.32] foi usada para especificar o campo aleatório sendo que escolheu-se arbitrariamente que $\varepsilon_{EI} = 1$. A Eq. [3.4] foi utilizada como função de autocorrelação com

comprimento de correlação $b = 0.25$. A análise estocástica foi feita com $M_K = 6$ e 800 simulações Monte Carlo. A Fig. [3.6] mostra os limites superiores e inferiores para um intervalo de confiança de 95%, a resposta média do modelo estocástico e a resposta obtida pelo modelo nominal, determinístico.

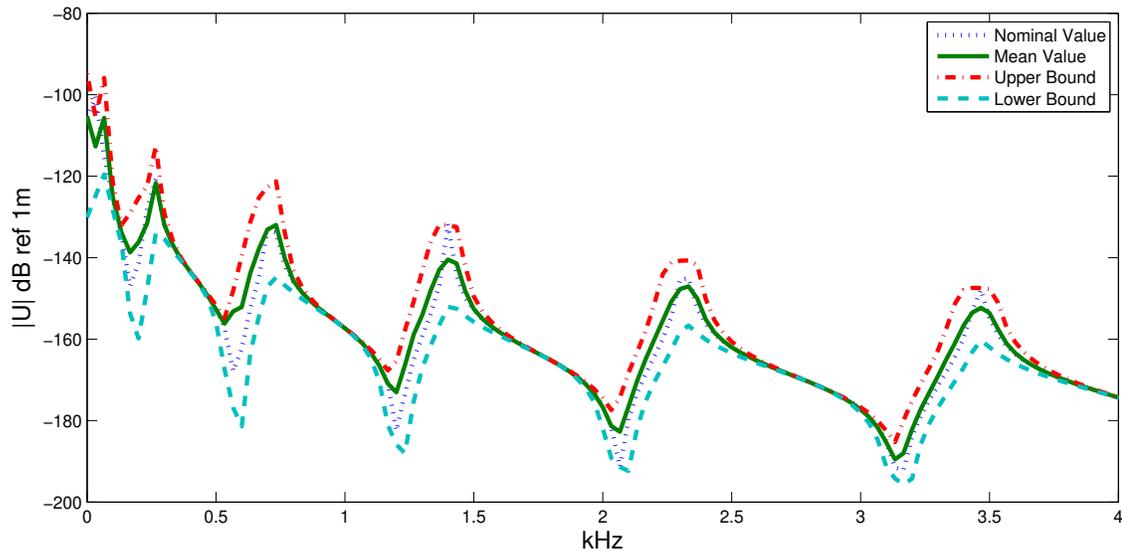


Figura 3.6: Resposta em Frequência em $x = L$: valor nominal, valores médio das amostras Monte Carlo, e limites inferiores e superiores para um intervalo de confiança de 95%.

3.3 Conclusões

Este capítulo apresentou uma abordagem para tratamento de problemas de campo aleatório utilizando o Método do Elemento Espectral, com uma aplicação em vibração flexural de vigas (Fabro and Arruda, 2009). Esta abordagem reúne a decomposição espectral do campo de deslocamentos, baseado em transformação de Fourier, e a decomposição espectral do campo aleatório, através de Decomposição de Karhunen-Loève. Um exemplo numérico ilustrou a aplicação para uma viga engastada, supondo a rigidez flexural como um campo aleatório.

Outros parâmetros, como por exemplo densidade de massa, coeficiente de poisson ou coeficiente de amortecimento, também poderiam ser modelados através de campos aleatório e incluídos nesta metodologias, além de outros tipos de funções para modelar a autocorrelação do campo, desde que exista uma solução analítica para a Eq. [3.2], o que é uma limitação do método.

As matrizes derivadas por esta metologia, para o caso apresentado, são mal condicionadas, o que constitui uma fonte de erros para a solução. No caso apresentado, um software de manipulação simbólica foi utilizado para derivar as expressões analíticas finais dos elementos

da matriz de rigidez, o que minimizou o problema. Neste sentido, futuras investigações devem ser realizadas de modo a contornar este problema.

Capítulo 4

Análise Estocástica do Comportamento Dinâmico da Tampa de um Compressor Hermético

A fabricação de qualquer produto apresenta variabilidades com respeito ao seu modelo nominal, utilizado para seu projeto. Espera-se que o mesmo funcione de acordo com suas especificações nominais, dentro de certas tolerâncias, que devem ser respeitadas pelos processos de fabricação. Quanto maior o desempenho esperado de um produto, mais apertadas devem ser estas tolerâncias, porém, deve-se buscar uma solução de compromisso na utilização de processos e materiais mais eficientes, dentro de critérios de projeto, entre desempenho e custo.

No contexto de ruído e vibrações, ainda em fase de projeto, a caracterização dos efeitos destas variabilidades no comportamento dinâmico da estrutura, ou seja, como afetam determinadas bandas ou modos de vibrar, é o primeiro passo para a utilização do conceito de projeto robusto.

Basicamente, as variabilidades das peças produzidas, com relação ao projeto nominal, advêm do processo de fabricação e dos materiais utilizados no produto, e espera-se poder caracterizá-las com o estudo dos componentes que já estão em fabricação. Para viabilizar a realização de experimentos com grande quantidade de amostras (peças), deve-se priorizar a menor perturbação possível no processo produtivo. Dessa maneira, os ensaios devem ser, na medida do possível, não destrutivos e relativamente rápidos para que as peças possam ser devolvidas no mesmo estágio em que estavam na produção, evitando perdas.

Neste capítulo apresenta-se uma descrição do modelo nominal, determinístico, utilizado assim como duas abordagens para modelagem estocástica - um por fatias concêntricas e outro por campo aleatório. Para tanto, mostra-se alguns detalhes de implementação. Apresenta-se também o experimento realizado para quantificação de variabilidade nas primeiras frequências naturais de 100 peças nominalmente idênticas.

4.1 Modelo Determinístico

Para o modelo determinístico da tampa do compressor analisado foi utilizada uma aproximação por Elementos Finitos, disponibilizado pela empresa, através do software Ansys®. Ela utiliza elementos de casca do tipo SHELL63, com tração, compressão e flexão e seis graus de liberdade por nó. A Fig. [4.1] mostra uma imagem da malha utilizada.

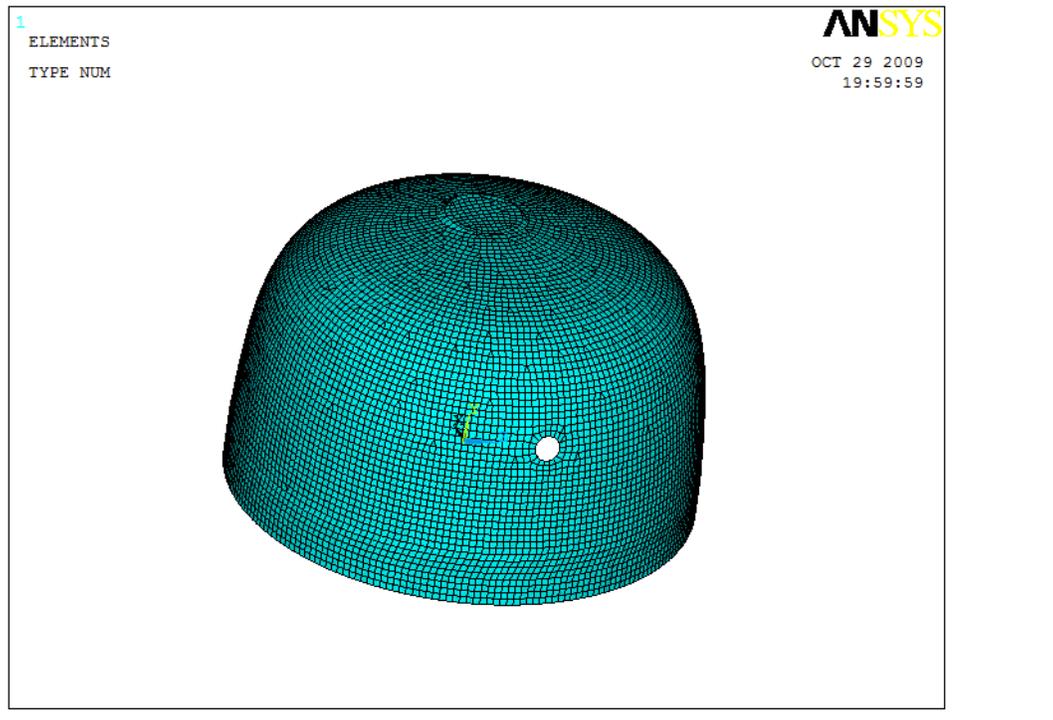


Figura 4.1: Aproximação por Elementos Finitos da tampa do compressor analisado

4.2 Ensaio Experimental

Resultados experimentais para a caracterização de incertezas são raros na literatura devido as suas dificuldades intrínsecas, como, por exemplo, o grande número de amostras nominalmente idênticas, recursos e esforços envolvidos nos experimentos e a própria natureza repetitiva do procedimento experimental, que deve assegurar que as diferentes amostras são submetidas às mesmas condições experimentais, de modo a se diminuir a variabilidade experimental (Adhikari et al., 2009).

Neste trabalho, foi proposto um experimento que tem como objetivo a caracterização das primeiras frequências naturais de todas as amostras medidas, criando uma população para posterior estudo estatístico, de modo a se poder comparar os resultados obtidos com

modelos estocásticos teóricos, propostos para o modelo de Elementos Finitos do componente em análise.

4.2.1 Materiais

Foram utilizados os seguinte materiais para o procedimento experimental:

- Célula de Carga PCB 208C03;
- Acelerômetro PCB SN72902;
- Condicionador PCB 482A20;
- Microfone B&K 2822;
- Condicionador B&K 2669;
- Placa de Aquisição NI SCXI 1000;
- 100 tampas de compressor hermético nominalmente idênticas.

4.2.2 Métodos

Seleção de Amostras.

As amostras devem ser escolhidas de modo que a população - conjunto de todas as peças analisadas - contenha, de maneira uniforme, elementos fabricados sob todas as condições de variabilidade inerentes ao processo de estampagem e ao material utilizado (aço). Como exemplo, pode-se citar a variação de propriedades de material, como densidade e módulo de elasticidade, ao longo da bobina de aço, variações devidas ao processo de estampagem, ao desgaste de ferramentas e às condições de transporte do componente entre os estágios de fabricação. Foi escolhido um determinado modelo, devido à sua disponibilidade na linha de produção no período de realização dos testes.

Uma abordagem interessante para a seleção seria acompanhar todo o período de fabricação da peça e recolher amostras em intervalos de tempo constantes, acompanhando continuamente a evolução do processo. Esta condição pode-se tornar inviável, dependendo do tamanho das amostras ou da previsibilidade do período de fabricação do componente em análise.

Como as peças do modelo escolhido já haviam sido fabricadas, elas estavam disponíveis em racks, em estoque, aguardando para o próximo estágio da fabricação. Desta maneira, elas já estavam aleatorizadas, uma vez que, após o processo de estampagem, as tampas são lançadas dentro uma caçamba, na qual ficam misturadas, de onde são retiradas, sendo dispostas em racks. Assim, as tampas foram escolhidas de maneira uniforme ao longo das prateleiras das racks. Foram retiradas 100 tampas, respeitando a disponibilidade de peças e garantindo a significância estatística da população analisada.

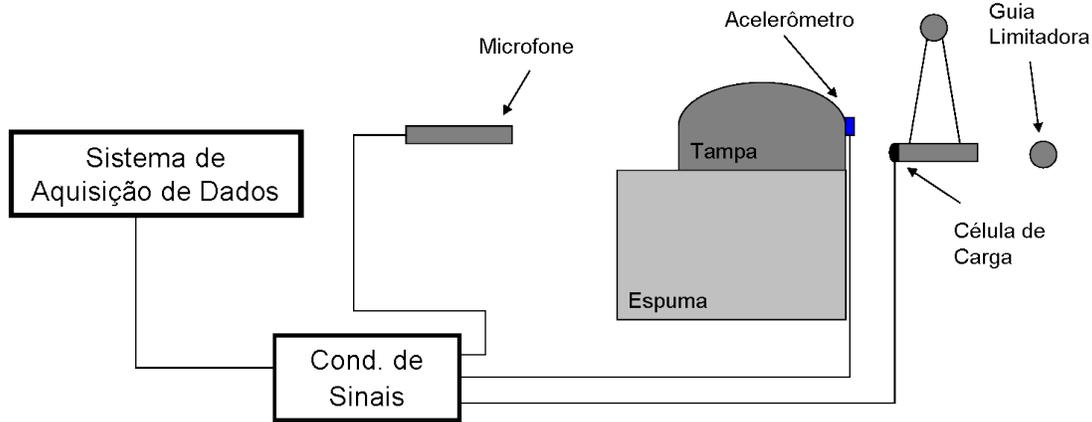


Figura 4.2: Esboço do Experimento.

Setup Experimental.

O comportamento vibroacústico de cada componente foi caracterizado através de ensaio de martelo de impacto com tampas assentadas sobre espuma, de modo a simular condições de contorno sem restrições, na banda de interesse. O experimento foi configurado de modo a permitir fácil reprodutibilidade, uma vez que seria utilizado um grande número de amostras.

A Figura [4.2] mostra um esboço do experimento. O martelo de impacto foi adaptado por um sistema de pêndulo, junto com uma guia limitadora, a fim de se reproduzir um impacto semelhante em todos os consecutivos ensaios. Para cada batida, o pêndulo é solto a partir da guia, choca-se com a tampa e é recolhido para novo impacto. Este sistema também evita problemas com repique do martelo.

A Figura [4.3] mostra uma imagem do sistema de impacto com pêndulo. O ponto de impacto foi escolhido com o auxílio prévio de uma análise modal, utilizada também para verificar se a espuma não interferiria na banda de interesse.

Para garantir que todas as tampas fossem marteladas no mesmo lugar, a espuma foi marcada com uma fita, Fig. [4.4], para delimitar o local de colocação da tampa. O furo na tampa foi utilizado como guia para o impacto. O acelerômetro foi fixado sempre na mesma posição. Neste sentido, o uso do microfone mostrou-se vantajoso, pois a mudança de peça não requer que a posição do microfone seja alterada. A Fig. [4.5] mostra uma visão geral do experimento com o microfone, tampa, espuma, condicionador de sinais e sistema de aquisição de dados.

4.2.3 Resultados

Os resultados foram analisados através do estimador H_v de FRF . Este estimador permite minimizar os erros na entrada e na saída e pode incorporar o conhecimento que se tenha a priori do ruído presente, sendo que, neste caso, foi considerado modelo aditivo de ruído na entrada e na saída do sistema, com ponderação de 50% (Bendat and Piersol, 2000). Para

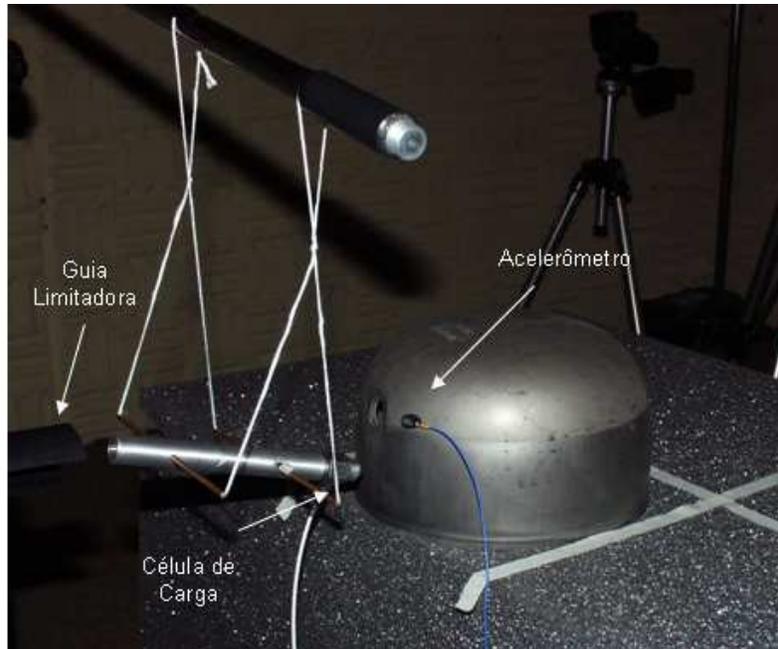


Figura 4.3: Detalhe do sistema de impacto com pêndulo.



Figura 4.4: Detalhe do posicionamento de uma tampa sobre a espuma.



Figura 4.5: Visão geral do experimento.

estimação das Densidades Espectrais de Potência (*PSD*) foi utilizado o método clássico conhecido por periodograma. Foram realizados vinte ensaios em cada tampa para minimizar o erro estatístico da estimação, com frequência de amostragem de 32.768 Hz, superior ao requerido pelo teorema da amostragem, a fim de minimizar o erro de polarização (*bias error*), e foi utilizada uma janela exponencial para a entrada e a saída, uma vez que se trata de um método de impacto.

Estimação de Parâmetros Modais: Método de Prony.

Para estimação dos parâmetros modais de interesse foi utilizado o Método de Prony. Apesar de não usar o modelo de série de Fourier, este método também utiliza uma base de funções em exponenciais complexas, e seu método consiste, basicamente, em ajustar seus coeficientes por mínimos quadrados, dada uma certa ordem. A priori, esta ordem escolhida é arbitrária, porém, pode-se construir um mapa das raízes, ou pólos. Verifica-se aqueles pólos que persistem em detrimento dos que mudam, de acordo com a ordem escolhida do modelo, que são, na verdade, artefatos numéricos (chamados geralmente de raízes computacionais), e assim determina-se as raízes reais do sistema. Uma *FRF* pode ser colocada na forma de pólos e resíduos:

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r t} \Leftrightarrow H(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A_r}{i\omega - s_r} \quad (4.1)$$

onde \Leftrightarrow representa a transformada de Fourier, N a ordem escolhida, A_r o resíduo e $s_r = \zeta_n \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$ o pólo. Ou seja, estimando-se o pólo, pode-se determinar a frequência natural de cada modo, ω_n , e seu amortecimento, ζ_n . Pode-se mostrar que é necessário que haja pelo menos duas vezes mais pontos que a ordem do modelo a ser estimado.

Análise e Discussão dos resultados.

Primeiramente foram aplicados os métodos de estimação de FRF obtidas através do acelerômetro e do microfone. A Figura [4.6] mostra os resultados obtidos de amplitude e fase de FRF e função de coerência ordinária, para uma das tampas, utilizando o estimador H_v .

Para cada tampa, é importante observar o comportamento da coerência ordinária, pois é através dela que se pode definir a banda de frequências útil para a análise. Neste caso, para se considerar uma boa estimação, ela deve estar o mais próximo possível da unidade, ao menos em regiões de ressonância.

Nota-se, através da coerência, que a FRF obtida através do microfone tem melhores resultados do que com o acelerômetro, permitindo analisar os dados na banda de até 6 kHz. Esta mesma limitação foi encontrada em todas as medidas, e por isso decidiu-se utilizar somente as FRF obtidas com o microfone sendo que, por isso, definiu-se a banda de análise - 0 Hz a 6 kHz. O conteúdo espectral obtido com o martelo foi também até aproximadamente 6 kHz, o que explica a perda de qualidade na coerência em faixas superiores de frequência.

O Método de Prony foi aplicado para as 100 FRF s estimadas e as frequências naturais referentes aos 5 primeiros modos da estruturas foram obtidas. A Fig. [4.7] mostra um histograma dos resultados para cada modo, todos com comportamento bimodal. Os escaninhos de todos os histogramas fora da tendência central mostrada pelas demais peças são relativos às mesmas cinco tampas. Este fenômeno exige um pouco mais de investigação para esclarecer se sua origem é realmente devido ao processo de fabricação, ou devido a não-conformidades no transporte a armazenamento das peças.

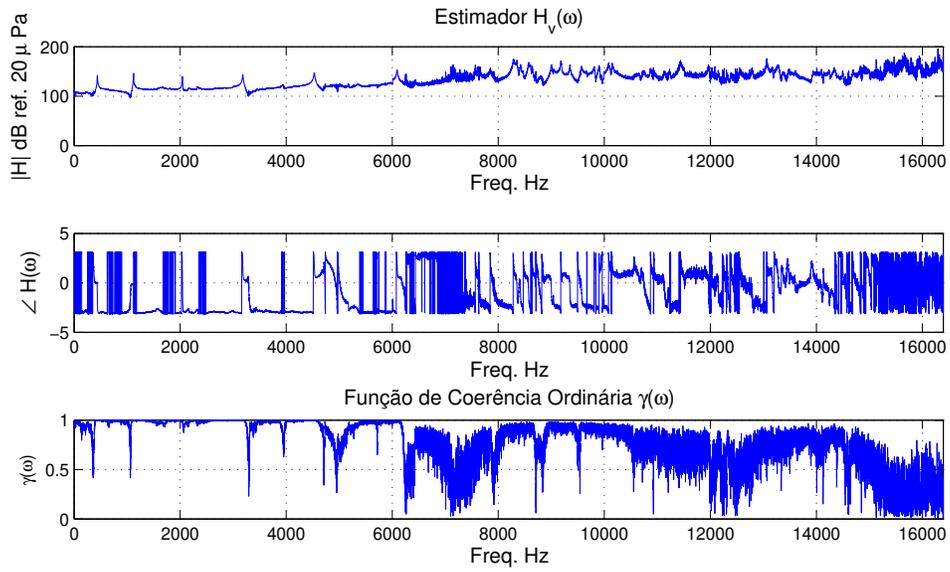
4.2.4 Conclusões

A metodologia utilizada para o ensaio mostrou-se eficiente para a caracterização de um grande número de amostras e será ponto de partida para futuros ensaios de mesma natureza, dentro do ambiente industrial. Estabeleceram-se subsídios e mostraram-se a viabilidade para planejamento de futuros experimentos e seleção de amostras, modo de transporte a partir da linha de produção, cuidados necessários para manuseio e tratamentos necessários para evitar oxidação da peças.

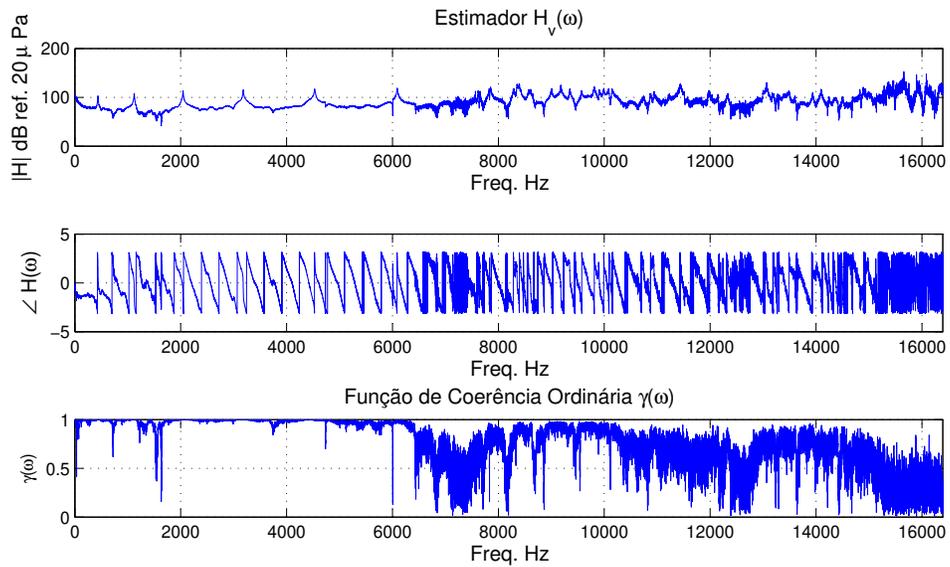
A utilização do microfone para a metodologia experimental se sobressaiu ao acelerômetro, permitindo aumentar consideravelmente a banda de frequências em análise.

4.3 Modelagem Estocástica

A modelagem estocástica foi realizada com duas abordagens. Na primeira são escolhidas faixas concêntricas da tampa nas quais a espessura é considerada constante. Na segunda é



(a)



(b)

Figura 4.6: Amplitude, fase e coerência de FRF estimada de uma única tampa para (a) medição feita pelo acelerômetro e (b) mediação feita pelo microfone.

assumido que a distribuição de espessuras ao longo da tampa se comporta como um campo aleatório e a decomposição de Karhunen-Loève (KL) é utilizada para a sua representação.

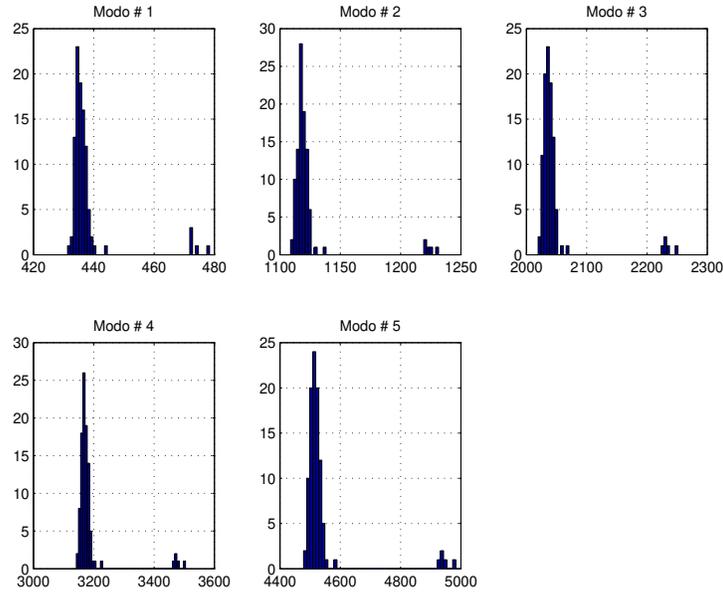


Figura 4.7: Histograma das 100 frequências naturais identificadas para os cinco primeiros modos.

Nas duas abordagens trata-se o módulo de elasticidade como uma variável aleatória de distribuição Gama, de acordo com o Princípio da Máxima Entropia - PME (seção [2]). Os demais parâmetros - densidade e coeficiente de Poisson - são assumidos determinísticos.

4.3.1 Abordagem por fatias

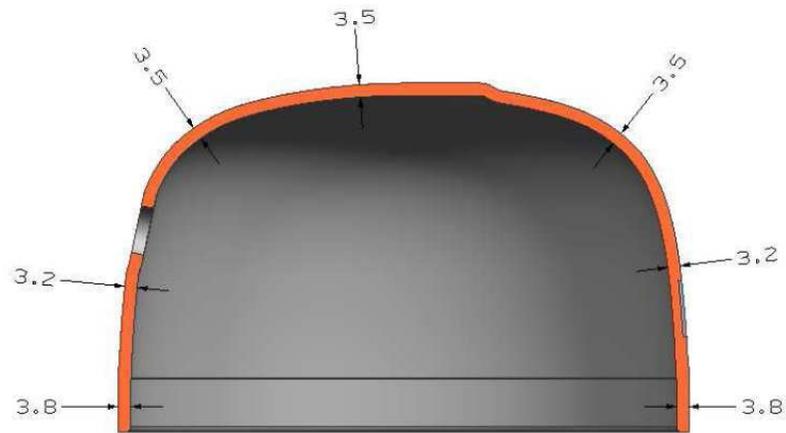
Este modelo tem por base características conhecidas do processo de fabricação o que impõe regiões concêntricas de espessura semelhante. A Fig. [4.8] mostra valores medidos de espessura para uma tampa do modelo analisado.

A Fig. [4.9] mostra as fatias utilizadas para modelar as regiões de mesmo comportamento aleatório. Em cada fatia, a espessura é modelada como uma variável aleatória independente, com distribuição uniforme. Isto porque o processo de fabricação garante uma certa tolerância dimensional, impondo máximos e mínimos para a espessura. Como essa é a única informação disponível para a modelagem da espessura, a distribuição uniforme é a adequada, de acordo com o PME (Cap. [2]). Foram utilizadas treze fatias, sendo então numeradas de 1 a 13, a partir da parte inferior até o cume.

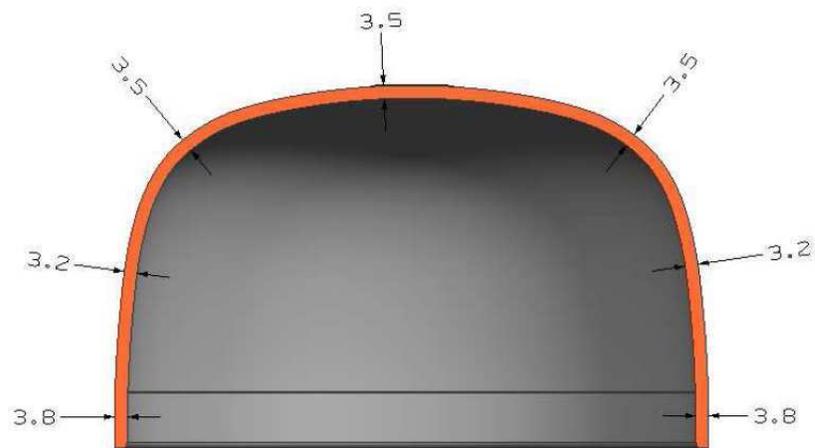
4.3.2 Abordagem por Campo Aleatório

Nesta abordagem, assume-se que a distribuição de espessuras ao longo da tampa se comporta como um campo aleatório Gaussiano, com uma função de autocorrelação exponencial dada

DISPERSÃO DA ESPESSURA – TAMPA DA CARÇAATP



CORTE LONGITUDINAL (DIREÇÃO DO FURO DE DESCARGA)



CORTE DIAGONAL (ROTACIONADO A 45° DO FURO DE DESCARGA)

Figura 4.8: Valores medidos de espessura para uma tampa do modelo analisado.

por:

$$C_H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 / b}. \quad (4.2)$$

Um campo Gaussiano é representado através da Expansão KL (Eq. [3.1]), e truncado

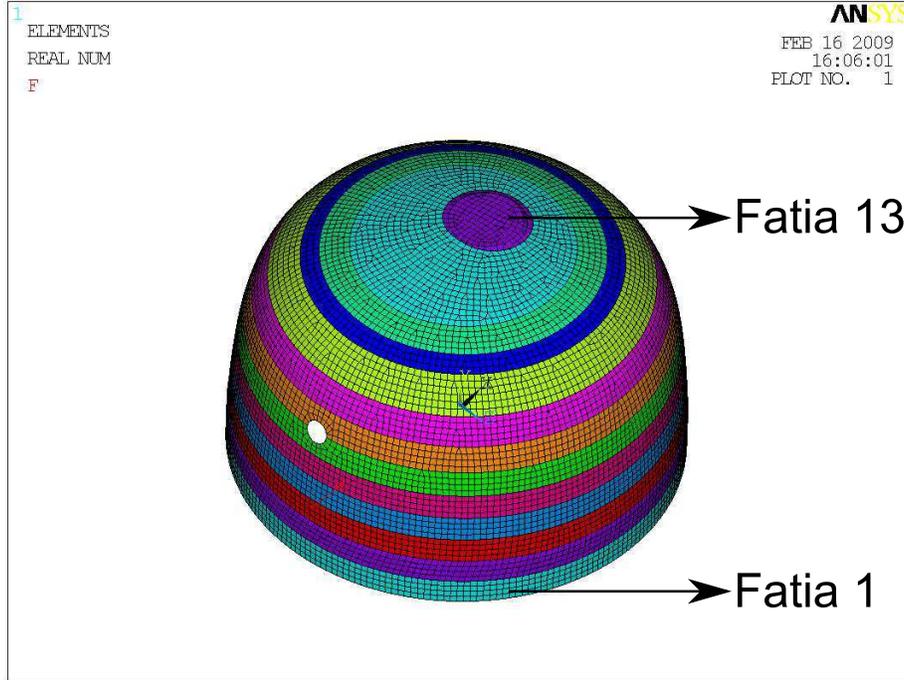


Figura 4.9: Tampa dividida em regiões de mesmo comportamento aleatório.

com M termos. Este valor foi escolhido de acordo com os autovalores, tal que o M -ésimo termo seja maior que 10% do valor do primeiro autovalor, ou seja, $\lambda_n/\lambda_1 > 0,1$. Assume-se o campo aleatório de espessuras da forma

$$e(x,\theta) = e_0[1 + \varepsilon_e H_e(x,\theta)], \quad (4.3)$$

onde $H_e(x,\theta)$ é um campo aleatório Gaussiano com média nula e função de correlação do tipo da Eq. [4.2], e_0 é espessura nominal e ε_e é um parâmetro para quantificar a quantidade de incerteza no campo aleatório da rigidez flexural.

4.4 Solução Estocástica e Detalhes de Implementação

Para ambas as abordagens, a amostragem por Monte Carlo foi escolhida para a solução estocástica. Desta maneira, a solução determinística, feita por *software* comercial (Ansys[®]), de código fechado, será utilizada como uma caixa-preta. Ou seja, os parâmetros de entrada do modelo determinístico serão gerados de acordo com a modelagem estocástica, em código Matlab[®], dispara-se *software* comercial e guarda-se os resultados, para cada iteração. O processo termina para um certo número de iterações, de acordo com algum critério de parada. A Fig. [4.10] mostra um esquema da ilustrando esse processo.

Desta maneira, na primeira abordagem de modelagem estocástica, para cada fatia, é necessário um conjunto de 13 variáveis aleatórias independentes para cada realização da

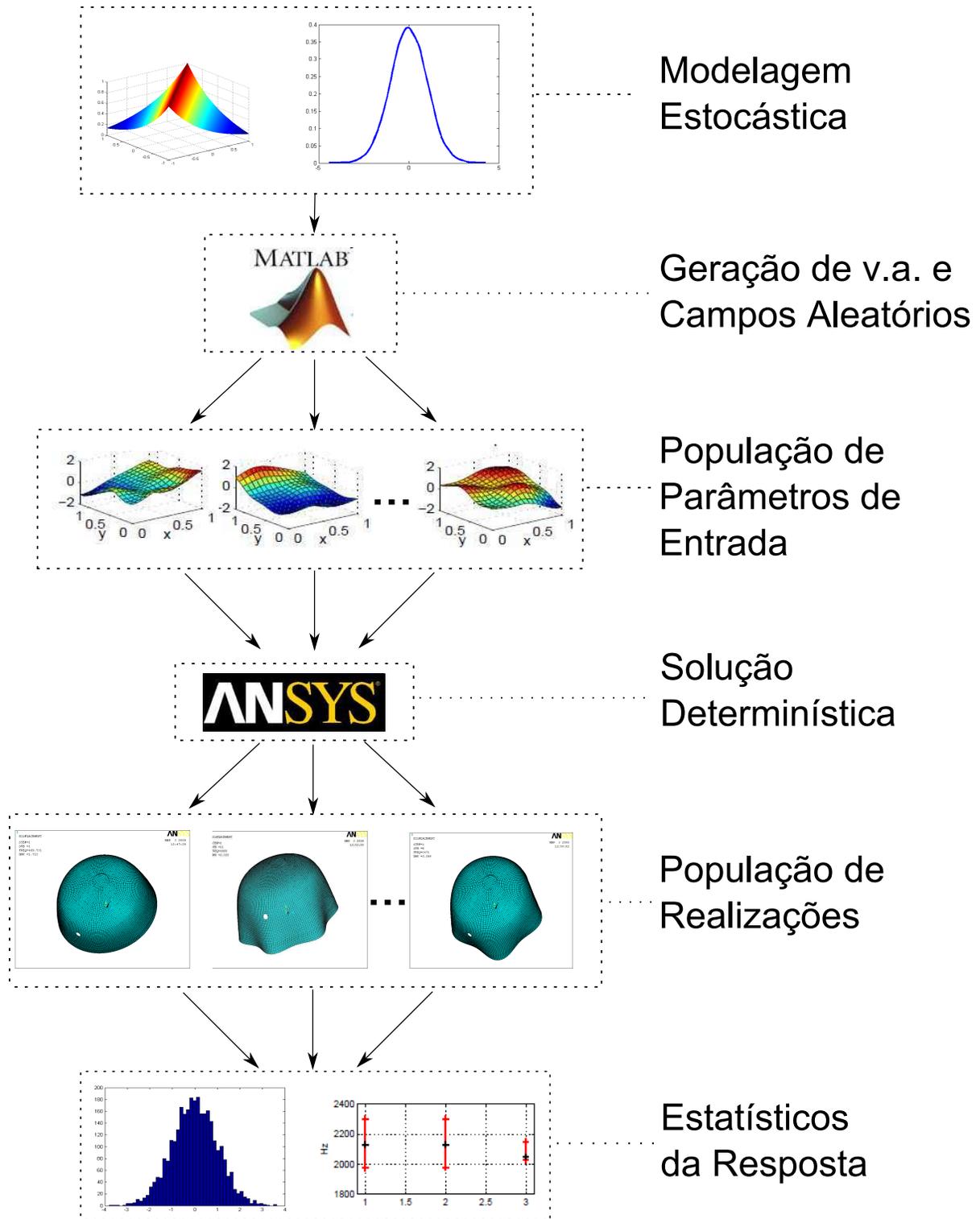


Figura 4.10: Solução Estocástica por Monte Carlo: Esquema integração Ansys/Matlab.

distribuição de espessuras. Para cada realização do modelo determinístico, os valores das espessuras são os mesmos e constantes dentro de cada região definida pelas fatias, alterando-se somente na iteração Monte Carlo seguinte. O pedaço de código a seguir, mostra uma possível implementação. Os valores de espessura, módulo de elasticidade, densidade de massa e coeficiente de poisson são lidos a partir de um arquivo - *tabela_dados.txt* - e associados a cada uma das regiões definidas pelas fatias.

```

/PREP7
/input,'tabela_dados',txt,,0

CMSEL,S,FAIXA_1
R,1,espe1,0,0,0,0,0,
MP,EX,1,Em
MP,PRXY,1,poison
MP,DENS,1,rhom

CMSEL,S,FAIXA_2
R,2,espe2,0,0,0,0,0,
MP,EX,2,Em
MP,PRXY,2,poison
MP,DENS,2,rhom

```

Na segunda abordagem, por Campo Aleatório, a malha de elementos finitos foi também utilizada para discretização geométrica do Campo Aleatório. Esta abordagem simplificou a implementação. Desta maneira, o valor de espessura é constante dentro de cada elemento, para cada realização. O pedaço de código a seguir mostra uma possível implementação: os valores das espessuras gerados pela realização do campo aleatório são lidos a partir um arquivo - *CA_espessura.dat* - e associados a cada elemento.

```

/PREP7
CMSEL, ALL
*get,ECOUNT_,elem,,count

*DIM,ESP,ARRAY,ECOUNT_,,,,,,
*VREAD,ESP(1),CA_espessura,dat
(E16.9)

/input,'tabela_dados',txt,,0

*set,NEXTEL_,0

*do,ICOUNT_,1,ECOUNT_,1
  NEXTEL_=elnex(NEXTEL_)
  R,ICOUNT_,ESP(ICOUNT_),0,0,0,0,0,

```

```

MP,EX,ICOUNT_,Em
MP,PRXY,ICOUNT_,poison
MP,DENS,ICOUNT_,rhom
*enddo

```

Tanto o arquivo *tabela_dados.txt* quanto *CA_espessura.dat* contém a realização das variáveis aleatórias coerentes com a iteração da amostragem Monte Carlo.

Para o cálculo da matriz de autocorrelação espacial, de acordo com a Eq. [4.2], é necessário conhecer as coordenadas geométricas dos centróides de cada elemento. Elas podem ser obtidas diretamente do Ansys ou calculadas através da matriz de nós - NLIST - e da matriz de conectividade - ELIST.

4.5 Resultados Numéricos

4.5.1 Resposta Determinística

Antes de iniciar a análises estocástica, é importante conhecer os resultados para o modelo puramente determinístico. Para esta análise, utilizou-se $E = 250$ GPa, $\rho = 7900$ kg/m³, $\mu = 0.33$ e a espessura uniforme por toda a tampa com $e = 3,45$ mm. Na banda até 5 kHz foram encontrados 10 modos, sendo que todos apresentam modos simétricos. Isto explica porque experimentalmente só foram encontrados 5 modos. A tabela [4.1] resume os valores de frequência encontrado para todos os modos. As Figuras [4.11] a [4.15] mostram as formas modais encontradas.

	Freq. Natural [Hz]
1º Modo	442,6
2º Modo	442,7
3º Modo	1146,3
4º Modo	1146,7
5º Modo	2096,6
6º Modo	2097,0
7º Modo	3284,9
8º Modo	3285,2
9º Modo	4705,2
10º Modo	4705,4

Tabela 4.1: Valores de frequência natural encontrado para cada modo.

4.5.2 Abordagem por Fatias

Nesta abordagem, utilizou-se $\rho = 7900$ kg/m³ e $\mu = 0.33$ para os parâmetros determinísticos. Para o módulo de elasticidade utilizou-se a distribuição Gama com $\underline{E} = 250$ GPa e $\delta_E = 0.1$,

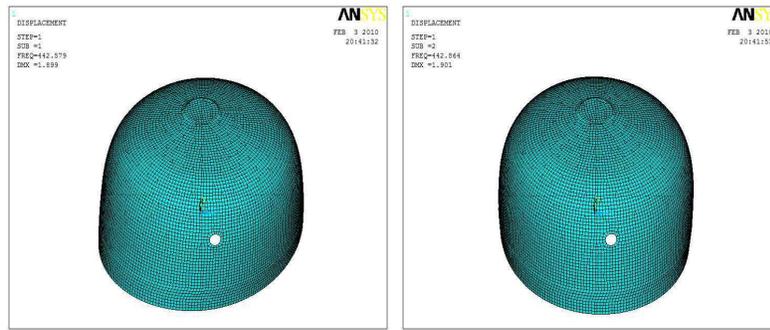


Figura 4.11: Primeiro e segundo modo da solução determinística.

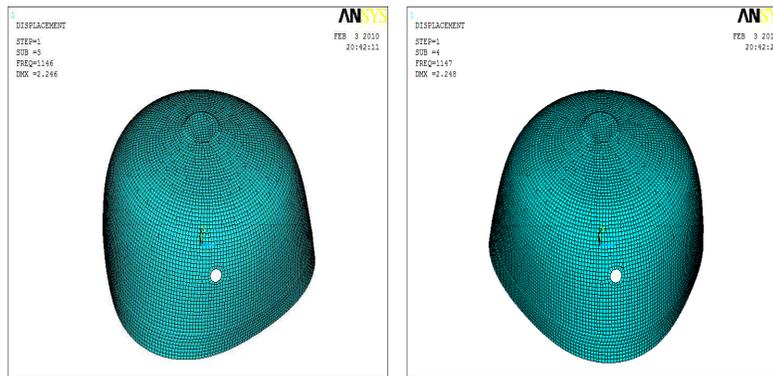


Figura 4.12: Terceiro e quarto modo da solução Determinística.

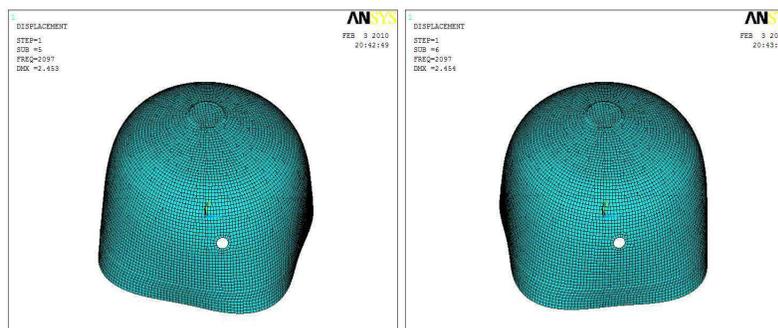


Figura 4.13: Quinto e sexto modo da solução determinística.

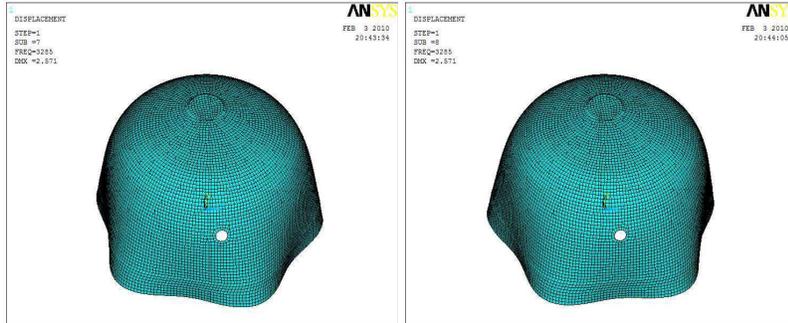


Figura 4.14: Sétimo e oitavo modo da solução determinística.

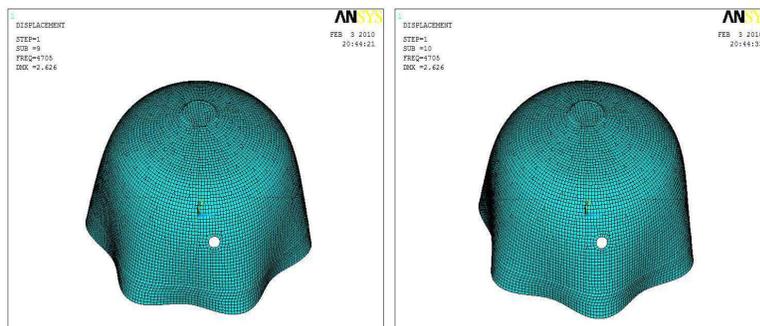


Figura 4.15: Nono e décimo modo da solução determinística.

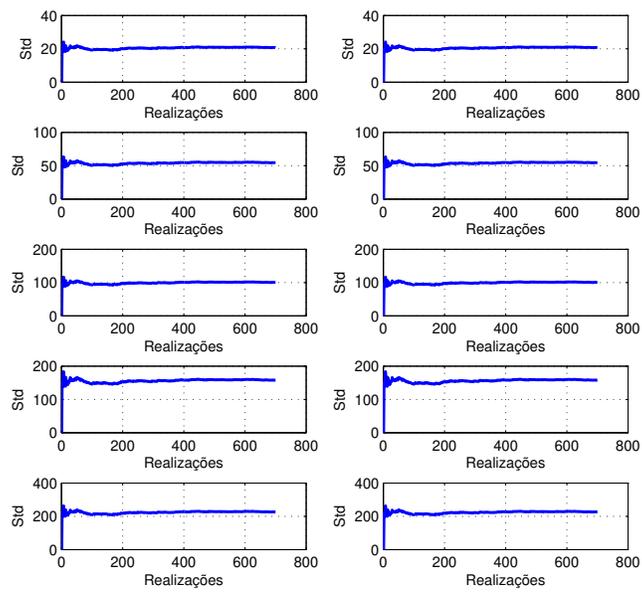


Figura 4.16: Convergência do desvio-padrão das frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por fatias.

de acordo com a Eq. [2.33]. As treze fatias foram divididas em três grupos com mesmo valor médio para a espessura. As fatias de 1 a 3 com espessura média de 3.65 mm, as fatias de 4 a 9 com 3.25 mm e as fatias de 10 a 13 com 3.45 mm. Todas com distribuição uniforme com valores máximos e mínimos a 10% do valor médio. A Fig. [4.16] mostra convergência do desvio-padrão para cada frequência natural obtida. Note que há uma convergência razoável para 700 realizações.

A Fig. [4.17] mostra o histograma das frequências naturais obtidas em 700 realizações e a Fig. [4.18] mostra o intervalo de confiança 95% e a média dos resultados obtidos e compara-os com os resultados experimentais.

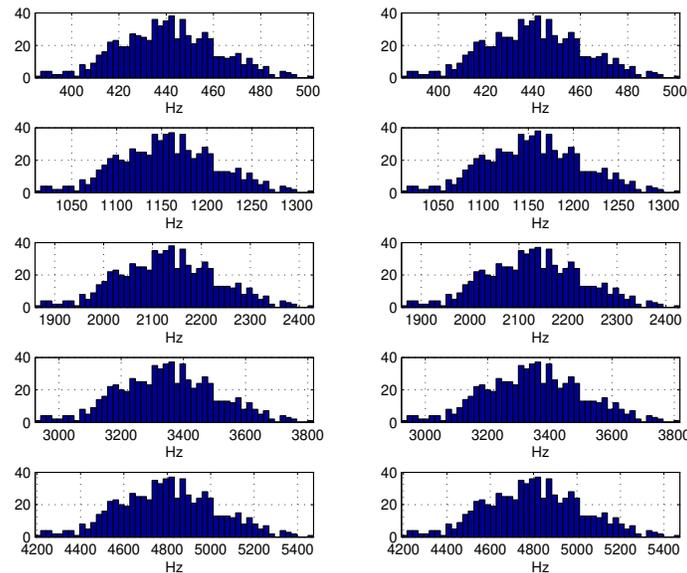


Figura 4.17: Histograma das as frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por fatias.

Note que o intervalo de confiança para os resultados experimentais (coluna da direita) não foi simétrico com relação à média. Isto se deve ao fato da distribuição dos resultados ser bimodal - Fig. [4.7]. Porém, os resultados numéricos não apresentaram este mesmo comportamento e sugerem, ainda, que a variabilidade escolhida para os parâmetros de entrada está superestimada. De posse destes resultados experimentais, a estimação da distribuição de probabilidade dos parâmetros de entrada poderia ser realizada (Eykhoff, 1974; Pintelon and Schoukens, 2001).

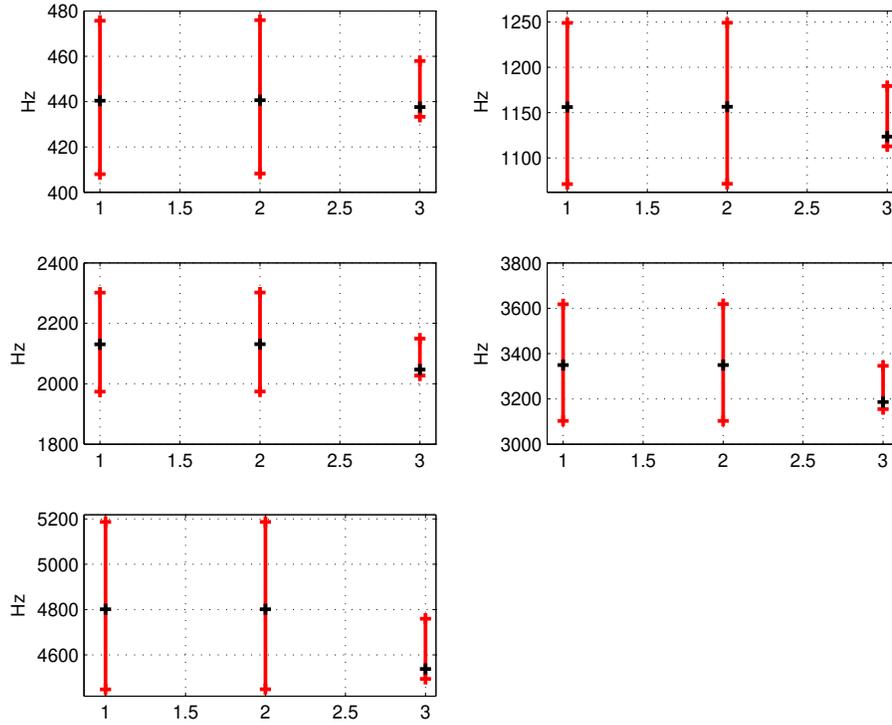


Figura 4.18: Intervalo de confiança de 95% para os resultados obtidos - esquerda e centro - e para os resultados experimentais - direita. O marcador em preto (+) indica o valor médio encontrado. Abordagem por fatias.

4.5.3 Abordagem por Campo Aleatório

Nesta abordagem, as utilizou-se $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 0.33$ para os parâmetros determinísticos. Para o módulo de elasticidade utilizou-se a distribuição Gama com $\underline{E} = 255 \text{ GPa}$ e $\delta_E = 0.05$, de acordo com a Eq. [2.33]. Para o campo aleatório, Eq. [4.3], utilizou-se $e_0 = 3,45 \text{ mm}$ e $\varepsilon_e = 0.1$. A função de autocorrelação utilizada é dada pela Eq. [4.2] e o comprimento de correlação utilizado foi $b = 0.1$.

A Fig. [4.19] mostra os 23 primeiros autovalores obtidos, normalizados pelo primeiro autovalor. Note que para estes autovalores $\lambda_n/\lambda_1 > 0,1$, então a série foi truncada em $M = 23$.

A Fig. [4.20] e a Fig. [4.21] mostram os 18 primeiros modos obtidos pela decomposição KL, ponderados por seus respectivos autovalores, onde $\phi(\mathbf{x})_n = \lambda_n f_n(\mathbf{x})$ - Eq. [3.1]. As cores indicam a espessura na geometria da peça.

A Fig. [4.22] mostra algumas realizações do campo aleatório modelando a espessura, $e(x,\theta)$, Eq. [4.3]. As cores indicam a espessura na geometria da peça.

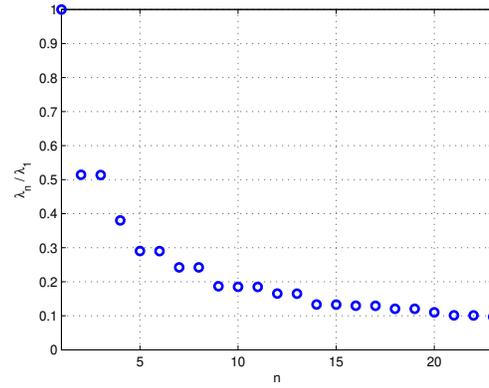


Figura 4.19: 23 primeiros autovalores obtidos normalizados pelo primeiro autovalor - λ_n/λ_1 .

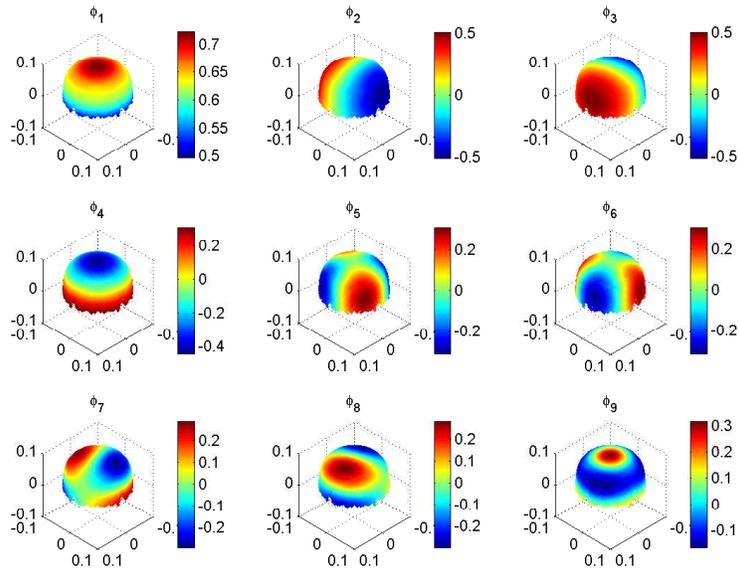


Figura 4.20: 1º ao 9º modo obtido pela Decomposição KL, ponderados por seus autovalores.
 $\phi(\mathbf{x})_n = \lambda_n f_n(\mathbf{x})$

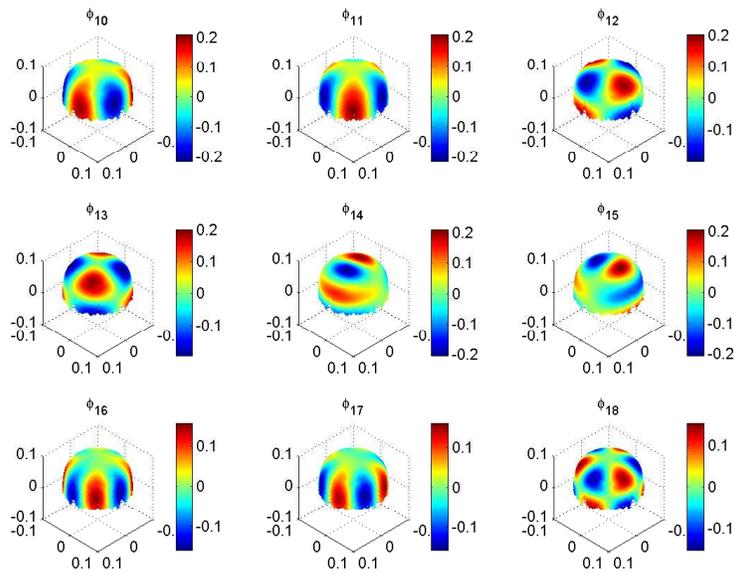


Figura 4.21: 10^o ao 18^o modo obtido pela Decomposição KL, ponderados por seus autovalores. $\phi(\mathbf{x})_n = \lambda_n f_n(\mathbf{x})$

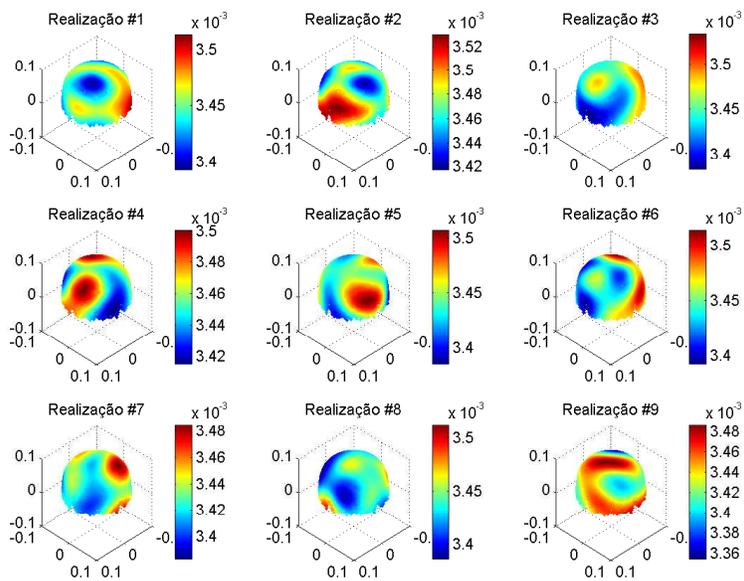


Figura 4.22: Algumas realizações do campo aleatório modelando a espessura - $e(x, \theta)$.

A Fig. [4.23] mostra convergência do desvio-padrão para cada frequência natural obtida. Note que há uma convergência razoável para 700 realizações.

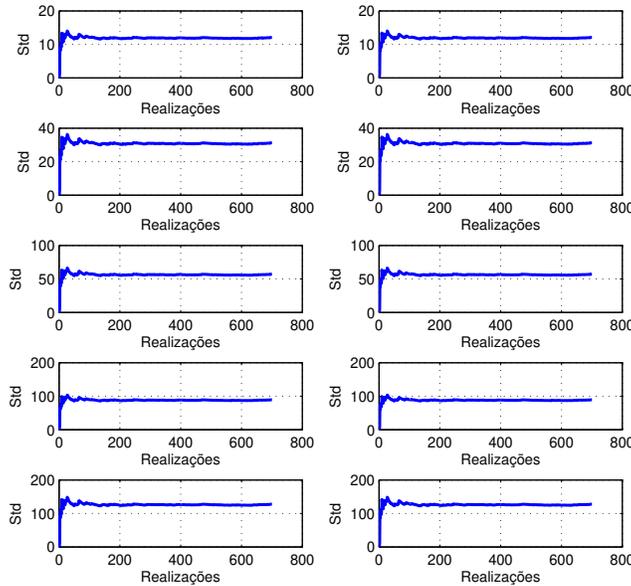


Figura 4.23: Convergência do desvio-padrão das frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por Campo Aleatório.

A Fig. [4.24] mostra o histograma das as frequências naturais obtidas em 700 realizações e a Fig. [4.25] mostra o intervalo de confiança 95% para os resultados obtidos e compara-os com os resultados experimentais.

Note que os intervalos de confiança por essa abordagem foram menores do que na abordagem por fatias. Isto pode ser explicado pelo fato de o coeficiente de variação do modelo de probabilidade para o módulo de elasticidade foi menor neste caso - $\delta_E = 0.05$. Porém, esta abordagem também não conseguiu reproduzir o comportamento bimodal observado nos resultados experimentais. Aqui, outros modelos para a função de covariância poderiam ser utilizados para o campo aleatório, assim como outros valores para o comprimento de correlação - b , Eq. [4.2] - poderiam ser escolhidos. De posse destes resultados experimentais, a estimação da distribuição de probabilidade dos parâmetros de entrada pode ser realizada, melhorando os resultados (Eykhoff, 1974; Pintelon and Schoukens, 2001). Outras distribuições de probabilidade, não-Gaussianas, também poderiam ser escolhidas para a modelagem do campo aleatório, exigindo, porém, outra metodologia de discretização (Keese, 2003).

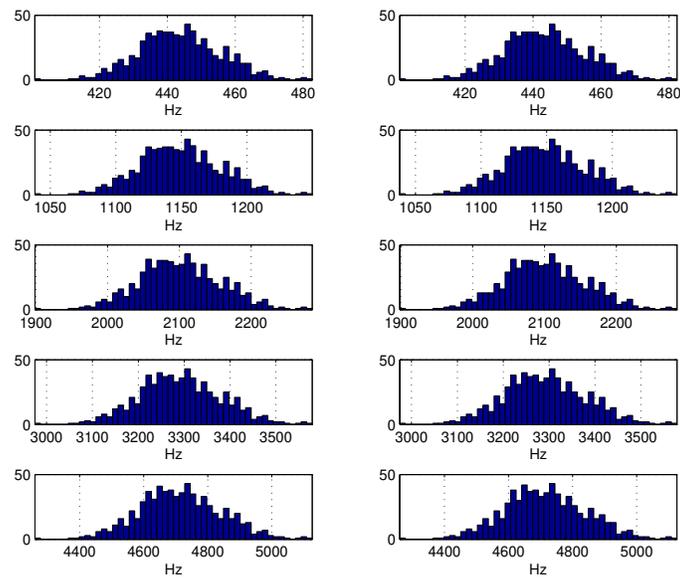


Figura 4.24: Histograma das as frequências naturais. 700 realizações Monte Carlo. Abordagem por Campo Aleatório.

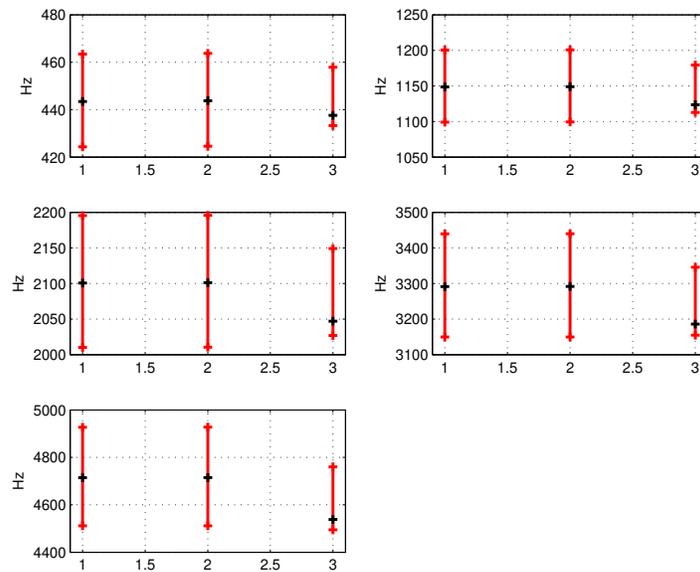


Figura 4.25: Intervalo de confiança de 95% para os resultados obtidos - esquerda e centro - e para os resultados experimentais - direita. Abordagem por Campo Aleatório.

4.6 Conclusões

Neste capítulo apresentou-se uma descrição do modelo nominal de Elementos Finitos utilizado para representar a tampa em análise assim como as duas abordagens de modelagem estocásticas: um por fatias concêntricas e outro por campo aleatório. Foram apresentados detalhes de implementação relativos à abordagem não-intrusiva para a utilização de código de Elementos Finitos em Ansys[®].

Mostrou-se uma descrição do experimento realizado. O experimento foi proposto de modo que fosse de fácil reprodutibilidade, uma vez que fora aplicado a 100 amostras nominalmente idênticas, e que seu tempo de duração não fosse longo. Foram utilizados martelo de impacto e medição por microfone para identificação dos parâmetros modais.

Os resultados experimentais mostram um comportamento bimodal da distribuição de frequências naturais para cada modo, o que não foi observado nos experimentos numéricos. Isto sugere a necessidade de futuras investigações para determinar a origem deste comportamento e como este influi no comportamento vibroacústico do produto final. Isto aponta para a necessidade de metodologias de validação e verificação juntamente com as metodologias de modelagem estocástica.

Capítulo 5

Considerações Finais

Este trabalho apresentou subsídios para a modelagem e análise de sistemas mecânicos lineares com variabilidade, assim como metodologias computacionais para quantificação de incertezas, para fins de aplicação em projeto.

O Capítulo 2 apresentou uma aplicação do Princípio da Máxima Entropia - PME - para a flexibilidade relativa a uma trinca em uma barra modelada através do Método do Elemento Espectral (SEM). Um exemplo numérico é apresentado para uma barra engastada, mostrando o intervalo de confiança obtido para o estimador de média da resposta em frequência obtida na extremidade livre. O conceito de entropia como medida de informação permitiu o desenvolvimento de uma abordagem quantitativa para associar medidas de probabilidade com informações disponíveis sobre o evento aleatório, evitando qualquer tipo de especulação, muitas vezes sem qualquer significado físico.

No Capítulo 3, foi apresentada uma abordagem para tratamento de problemas de campo aleatório junto com o SEM, através de soluções analíticas da Expansão de Karhunen-Loève. Esta abordagem reúne a decomposição espectral do campo de deslocamentos, baseado em transformação de Fourier, e a decomposição espectral do campo aleatório, através de Decomposição de Karhunen-Loève. Foi apresentada uma aplicação em vibração flexural de vigas, porém a metodologia também pode ser estendida, por exemplo, para densidade de massa, coeficiente de poisson ou coeficiente de amortecimento.

O Capítulo 4 apresenta uma aplicação industrial envolvendo as metodologias de análise e modelagem apresentadas nos capítulos anteriores. Foi apresentado um experimento para um grande número de estruturas nominalmente idênticas, como a finalidade de caracterizar as primeiras frequências naturais de todas as amostras medidas, realizada em tempo coerente com a realidade industrial, mas ainda de modo a ser obter significância estatística nos resultados.

Foram também apresentadas duas abordagens para modelagem estocástica de um elemento de compressor: a tampa. A primeira, baseada em fatias concêntricas de mesmo comportamento aleatório e a segunda baseada em campos aleatórios. Como modelo determinístico, foi utilizado o modelo disponível utilizando Ansys®. Alguns detalhes de implementação foram explicitados e os resultados obtidos numericamente comparados com os obtidos experimentalmente.

O Apêndice A apresenta uma breve revisão sobre algoritmos de geração de números aleatórios e métodos de amostragem - Monte Carlo - assim como algumas metodologias para melhoria de seu desempenho - o Hipercubo Latino e o *Importance Sampling*. Também foi apresentada sua utilização para o cálculo da probabilidade de falha em estruturas, Apêndice B. Esta constitui uma das principais aplicações em engenharia da modelagem e quantificação de incertezas, de modo a preencher demandas cada vez mais exigentes da sociedade por produtos mais eficientes, o que representa economia no consumo de energia, com o mínimo de material, o que representa diminuição no consumo de recursos naturais, e também mais baratos, o que pode significar inclusão social.

5.1 Sugestões para Continuação do Trabalho

Esta dissertação apresenta algumas possibilidades de trabalhos futuros. O modelo de incertezas, baseado no PME, para a flexibilidade relativa a uma trinca e uma barra carece de uma validação experimental, através de técnicas de identificação de distribuição de probabilidade de parâmetros. Esta abordagem também ainda pode ser aplicada para teoria de barras de ordem mais elevada, assim como diferentes tipos de estruturas trincadas, com elementos espectrais disponíveis, como vigas, placas e cascas.

A abordagem para tratamento de problemas de campo aleatório junto com o SEM ainda está no começo de seu desenvolvimento teórico e, assim, ainda precisa de muitos desenvolvimentos, como por exemplo, o problema de mal condicionamento das matrizes. O problema foi abordado para um tipo de função de autocorrelação, porém existem outros que também possuem solução analítica disponível na literatura. A metodologia ainda pode ser aplicada para os diferentes tipos de elementos espectrais disponíveis e também necessita de validação experimental.

A metodologia apresentada para a aplicação industrial foi somente um primeiro passo para a sua utilização como ferramenta de projeto. O passo seguinte seria a aplicação destes conceitos em estruturas mais complexas. Deste modo, faz-se necessário eleger os parâmetros relevantes para a análise estocástica, por exemplo, por meio de análise de sensibilidade. A determinação de modelo estocásticos adequados, através de identificação da distribuição de parâmetros também é grande relevância. Neste sentido o PME é de grande importância, ainda em fase de projeto, quando não se tem alguma informação *a priori* sobre os parâmetros que são modelados.

Também são necessárias implementação computacionais mais eficientes, principalmente junto com os códigos comerciais utilizados para as soluções determinísticas, uma vez o custo computacional é extremamente relevante neste caso, e pode significar a viabilidade ou não de uma análise estatística.

5.2 Lista de Publicações

Durante o desenvolvimento desta dissertação os seguintes artigos foram submetido periódicos internacionais:

Fabro, A.T., Ritto, T. G., Sampaio, R., Arruda, J. R. F.. *Stochastic analysis of a cracked rod modeled via the Spectral Element method*, submetido a *Mechanics Research Communications*, 2010.

Batista, F.B., **Fabro, A.T.**, Arruda, J.R.F, Albuquerque, E.L. *1D Smoothing Technique Associating Regressive Discrete Fourier Series and Empirical Mode Decomposition*, submetido a *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010.

Também os seguinte trabalhos foram publicas em congressos:

Fabro, A.T., Ritto, T.G., Sampaio, R., Arruda, J.R.F., *Stochastic Model of a Cracked Rod*, In Proceedings of 11st Pan-American Congress of Applied Mechanics, (Foz do Iguaçu, Brazil), 2010.

Vieira, S. C., **Fabro, A.T.**, Arruda, J. R. F., *Experimental Detection Of Plate Cracks Using Operational Modes Obtained With Full Field Laser Doppler Vibrometer Measurements*. In Proceedings of 20th International Congress Of Mechanical Engineering - COBEM, (Gramado, Brazil), 2009.

Fabro, A.T., Ritto, T., Sampaio, R., Arruda, J. R. F., *Modeling Uncertainties In A Cracked Rod Modeled With The Spectral Element Method*. Proceedings of 20th International Congress Of Mechanical Engineering - COBEM, (Gramado, Brazil), 2009.

Fabro, A.T., Arruda, J. R. F., *Random Field Problems Using The Spectral Element Method*. In Proceedings of 30th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, (Armação dos Búzios, Brazil), 2009.

Fabro, A.T., Ritto, T.G., Sampaio, R., Arruda, J.R.F., *Reliability analysis of a cracked rod modeled with the spectral element method*". Proc. of 2nd International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics - USD, (Sheffield, UK), pp 108-115, 2009.

Fabro, A.T., Arruda, J. R. F., *Application Of The Spectral Stochastic Finite Element Method To Beam Structures With Parametric Uncertainties* (in Portuguese. Proceeding of 5th National Congress of Mechanical Engineering - CONEM, (Salvador,Brazil), 2008.

Referências Bibliográficas

- Adhikari, S., 2008. Wishart random matrices in probabilistic structural mechanics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 134, 1029–1044.
- Adhikari, S., Friswell, M., Lonkar, K., a, A. S., 2009. Experimental case studies for uncertainty quantification in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics* 24, 473–492.
- Adhikari, S., Friswell, M. I., 2010. Distributed parameter model updating using the Karhunen-Loève expansion. *Mechanical Systems and Signal Processing* 24 (2), 326–339.
- Adhikari, S., Roy Mahapatra, D., May 2009. Doubly spectral stochastic finite element method (DSSFEM) for random field problems. In: *IISc Centenary International Conference and Exhibition on Aerospace Engineering*. Bangalore, India., pp. 811–818.
- Barthelmann, V., Novak, E., Ritter, K., 2000. High dimensional polynomial interpolation on sparse grids. *Advances in Computational Mathematics* 12 (4), 273–288.
- Ben-Haim, Y., 1998. Usability of mathematical model in mechanical decision processes. *Mechanical Systems and Signal Processing* 12, 121–134.
- Bendat, J., Piersol, A. G., 2000. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, 3rd Edition. John Wiley & Sons.
- Borri, A., Speranzini, E., 1997. Structural reliability analysis using a standard deterministic finite. *Structural Safety* 19 (4), 361–382.
- Bowman, R. L., 1994. Evaluating pseudo-random number generators. *Computers & Graphics* 19 (2), 315–324.
- Box, G. E. P., Draper, N. R., 1987. *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Calfisch, R., 1998. Monte carlo and quasi-monte carlo methods. *Acta Numerica*, 1–49.
- Capiez-Lernout, E., Pellissetti, M., Pradlwarter, H., Schueller, G., Soize, C., 2006. Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems. *Journal of Sound and Vibration* 295, 923–938.
- Chen, C., Duhamel, D., Soize, C., 2006. Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics: Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration* 294 (1-2), 64–81.
- Craig, R. R., 1981. *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*. John Wiley, New York.
- Curtiss, J., 1954. Monte carlo methods for the iteration of linear operators. *Journal of Mathematical Physics* 32 (4), 209–232.
- Curtiss, J., 1956. A theoretical comparison of the efficiencies of two classical methods and

- a monte carlo method for computing one component of the solution of a set of linear algebraic equations. In: Proc. Symposium on Monte Carlo Methods. John Wiley and Sons, pp. 191–233.
- De Gerssem, H., Desmet, D. M. W., Vandepitte, D., 2005. A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 2 - numerical case studies. *Journal of Sound and Vibration* 288 (3), 463–486.
- Dimaragonas, A. D., 1995. Interval analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration* 184 (4), 739–749.
- Doyle, J. F., 1997. *Wave Propagation in Structures*. Springer, New York.
- Dutang, C., June 2008. A note on random numbers. <http://cran.r-project.org/web/packages/randtoolbox/vignettes/randtoolbox.pdf>.
- Elishakoff, I., 2003. Notes on philosophy of the monte carlo method. *International Applied Mechanics* 39 (7), 753–762.
- Evans, M., Hasting, N., Peacock, B., 2000. *Statistical Distributions*, 3rd Edition. Probability and Statistics. John Wiley & Sons.
- Eykhoff, P., 1974. *System Identification*. John Wiley & Sons.
- Fabro, A. T., Arruda, J. R. F., 2009. Random field problems using the spectral element method. In: *Proceedings of CILAMCE 2009*.
- Fabro, A. T., Ritto, T. G., Sampaio, R., Arruda, J. R. F., 2009. Modeling uncertainties in a cracked rod modeled with the spectral element method. In: *Proceedings of COBEM 2009*.
- Fishman, G. S., 1996. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, New York.
- Forsythe, G., Leibler, R., 1950. Matrix inversion by a monte carlo method. *MTAC* 4, 127–129.
- Ganapathysubramanian, B., Zabarar, N., 2007. Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems. *J. Comput. Phys.* 225 (1), 652–685.
- Gentle, J. E., 2003. *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Statistics and Computing. Springer-Verlag, New York.
- Ghanem, R., 1999. Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 168 (1-4), 19–34.
- Ghanem, R., Spanos, P., 1991. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Dover Publications.
- Gopalakrishnan, S., Chakraborty, A., Mahapatra, D. R., 2008. *Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures*. Springer, London.
- Haldar, A., Mahadevan, S., 2000. *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, USA.
- Hanss, M., 2002. The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 130 (3), 277–289.
- Hanss, M., 2005. *Applied Fuzzy Arithmetic*. Springer, Berlin.
- Helton, J., Davis, F., 2003. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System Safety* 81, 23–69.
- Huang, B., Du, X., 2007. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order saddle-point approximation. *Reliability Engineering & System Safety* 93 (2), 325–336.

- Huang, S., Mahadevan, S., Rebba, R., 2007. Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems. *Probabilistic Engineering Mechanics* 22, 194–205.
- Huang, S. P., Quek, S. T., Phoon, K. K., 2001. Convergence study of the truncated Karhunen-Loève expansion for simulation of stochastic processes. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 52, 1029–1043.
- Jaynes, E., 1957a. Information theory and statistical mechanics. *The Physical Review* 106 (4), 1620–630.
- Jaynes, E., 1957b. Information theory and statistical mechanics II. *The Physical Review* 108, 171–190.
- Kapur, J. N., Kesavan, H. K., 1992. *Entropy Optimization Principles with Applications*. Academic Press, Inc., USA.
- Karmeshu (Ed.), 2003. *Entropy Measures, Maximum Entropy Principle and Emerging Applications*. Vol. 114 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag.
- Keese, A., October 2003. A review of recent developments in the numerical solution of stochastic partial differential equations (stochastic finite elements). Tech. Rep. Informatikbericht Nr.: 2003-06, Technical University Braunschweig.
- Keese, A., Matthies, H. G., May 2003. Numerical methods and smolyak quadrature for nonlinear stochastic partial differential equations. Tech. Rep. Informatikbericht Nr.: 2003-05, Technical University Braunschweig.
- Krawczuk, M., Grabowska, J., Palacz, M., 2006a. Longitudinal wave propagation. part I - comparison of rod theories. *Journal of Sound and Vibration* 295, 461–478.
- Krawczuk, M., Grabowska, J., Palacz, M., 2006b. Longitudinal wave propagation. part II - analysis of crack influence. *Journal of Sound and Vibration* 295, 479–490.
- Matsumoto, M., November 2009. <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/MT/emt.html>.
- Matsumoto, M., Nishimura, T., 1998. Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8 (1), 3–30.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A., Teller, M., Teller, A., 1953. Equations of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics* 21 (6), 1087–1092.
- Moens, D., Vandepitte, D., 2005. A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 1 - procedure. *Journal of Sound and Vibration* 288 (3), 431–462.
- Myers, R. H., Montgomery, D. C., 2002. *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Niederreiter, H., 1978. Quasi-monte carlo methods and pseudo-random numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society* 84 (6), 957–1041.
- Nobile, F., Tempone, R., Webster, C. G., 2008. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46 (5), 2309–2345.
- Nunes, R. F., Klimke, A., Arruda, J. R. F., 2006. On estimating frequency response function envelopes using the spectral element method and fuzzy sets. *Journal of Sound and Vibration*

- 291 (3-4), 986–1003.
- Olsson, A., Sandberg, G., 2002. Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis. *Journal of Engineering Mechanics* 128 (1), 121–125.
- Olsson, A., Sandberg, G., Dahlblom, O., 2003. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety* 25, 47–68.
- Ostachowicz, W. M., 2008. Damage detection of structures using spectral finite element method. *Computers & Structures* 86, 454–462.
- Palacz, M., Krawczuk, M., 2002. Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method. *Computers & Structures* 80, 1809–1816.
- Papoulis, A., 1991. *Probability, Random Variability and Stochastic Processes*, 3rd Edition. McGraw-Hill.
- Pellisetti, M., Capiez-Lernout, E., Pradlwarter, H., Soize, C., Schuëller, G., 2008. Reliability analysis of a satellite structure with a parametric and a non-parametric probabilistic model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198, 344–357.
- Pintelon, R., Schoukens, J., 2001. *System Identification: A Frequency Domain Approach*. IEEE Press, New York.
- Qiu, Z., Elishakoff, D. Y. I., 2008. Probabilistic interval reliability of structural systems. *International Journal of Solids and Structures* 45, 2850–2860.
- Rackwitz, R., 1991. Reliability analysis - a review and some perspectives. *Structural Safety* 23, 297–331.
- Ritto, T., Soize, C., Sampaio, R., 2009. Non-linear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit-rock interaction. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 44, 865 – 876.
- Ross, S. M., 2006. *Simulation*. Elsevier, USA.
- Rubinstein, R. Y., Kroese, D. P., 2008. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, USA.
- Schuëller, G., 2007. On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis. *Computers & Structures* 85, 235–243.
- Schuëller, G., Pradlwarter, H., 2009. Uncertain linear systems in dynamics: Retrospective and recent developments by stochastic approaches. *Engineering Structures* 31, 2507–2517.
- Schuëller, G. I., 1997. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics* 12 (4), 197–321.
- Schuëller, G. I., 2001. Computational stochastic mechanics - recent advances. *Computers & Structures* 79, 2225–2234.
- Shannon, C. E., 1948. A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.* 27, 379–423 and 623–659.
- Sobol, I., 1998. On quasi-monte carlo integrations. *Mathematics and Computers in Simulation* 47, 103–112.
- Soize, C., 2000. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics* 15, 277–294.
- Soize, C., 2001a. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America* 109(5), 1979–1996.
- Soize, C., 2001b. Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncer-

- tainties. *Uncertainties in Engineering Mechanics* 1 (1), 1–38.
- Soize, C., 2003. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration* 263, 893–916.
- Soize, C., 2004. Probabilités et Modélisation des Incertitudes - Eléments de base et concepts fondamentaux. Université Paris-Est, Marne-la-Vallée.
- Soize, C., 2005a. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration* 288 (3), 623–652.
- Soize, C., 2005b. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (12-16), 1333–1366.
- Soize, C., 2006. Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 26–64.
- Stefanou, G., 2009. The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198, 1031–1051.
- Sudret, B., October 2007. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. Tech. Rep. HDR 239, Université Blaise Pascal - Clermont II.
- Sudret, B., der Kiureghian, A., November 2000. Stochastic finite element methods and reliability: A state-of-the-art report. Technical Report, University of California, Berkeley (UCB/SEMM-2000/08).
- Takewakia, I., Ben-Haim, Y., 2008. Info-gap robust design with load and model uncertainties. *Journal of Sound and Vibration* 288 (3), 551–570.
- The MathWorks, Inc., 2007. Matlab, 7th Edition. The MathWorks, Inc., USA.
- van den Bos, A., 2007. Parameter Estimation for Scientists and Engineers. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Wasow, W., 1952. A note on the inversion of matrices by random walks. *MTAC* 6 (38), 78–81.
- Wolfram Research, Inc., 2007. Mathematica, 6th Edition. Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, USA.
- Zong, Z., 2006. Information-Theoretic Methods for Estimating Complicated Probability Distributions. *Mathematics in Science and Engineering*. Elsevier, Amsterdam.

Apêndice A

Métodos de Amostragem

A.1 Geração de Variáveis Aleatórias

Os primeiros dispositivos para geração de números aleatórios eram baseados em fenômenos físicos como ruído de diodos ou contadores Geiger, anexados aos computadores. Estes métodos ficaram obsoletos por muitas razões, tais como o fato de serem relativamente lentos ou gerarem sequências que não podem ser reproduzidas (Rubinstein and Kroese, 2008). Além do mais, para serem úteis, sua distribuição de probabilidade deve ser conhecida e os números gerados devem ser independentes e identicamente distribuídos (*iid*).

Como os computadores são essencialmente determinísticos, foram desenvolvidos algoritmos capazes de gerar sequências de números que apresentam propriedades estatísticas de acordo com uma dada distribuição. Tais sequências podem ser do tipo pseudo-aleatórias e quasi-aleatórias Calfish (1998); Dutang (2008); Niederreiter (1978); Sobol (1998). Enquanto algoritmos de geração de sequências pseudo-aleatórias tentam imitar propriedades de sequências verdadeiramente aleatórias, as sequências de números quasi-aleatórios buscam proporcionar melhora na uniformidade da sequência gerada e, assim, a convergência de fórmulas de quadraturas. Ou seja, os números quasi-aleatórios não são verdadeiramente aleatórios.

A.1.1 Simulação de Números Aleatórios a partir da Distribuição Uniforme.

Os métodos mais comuns para geração de sequências de números pseudo-aleatórios são conhecidos como geradores lineares congruenciais (Gentle, 2003; Rubinstein and Kroese, 2008). Tais métodos usam aritmética modular e geram números com distribuição uniforme, entre 0 e 1. Dois números são ditos equivalentes ou congruentes módulo m se:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Essa operação também pode ser escrita como:

$$a = b - \text{floor}(b/m)m,$$

onde a função “*floor(.)*” retorna o maior inteiro menor ou igual ao seu argumento.

Duas características importantes em um gerador de números aleatórios são sua *semente* e seu *período*. Como os geradores congruenciais são algoritmos recursivos, eles precisam de um ponto inicial, que é basicamente dado pela semente. O período é o maior número de elementos gerados sem repetição pelo algoritmo, o que acontece devido à aritmética modular.

Os algoritmos de geração de sequências quase-aleatórias buscam melhorar a uniformidade na geração de números, através do conceito de Discrepância (Dutang, 2008; Gentle, 2003; Niederreiter, 1978). Dependendo da abordagem dada pelos algoritmos, eles podem ser conhecidos como quase-aleatórios, ou arranjo de bons pontos (“*Good lattice points*”) (Dutang, 2008; Niederreiter, 1978).

Temos como exemplo os seguintes algoritmos, em Matlab (The MathWorks, Inc., 2007), para geração de números aleatórios com distribuição uniforme:

- Algoritmo 1 (Irracionais):

```
k = seed1;
seed = sqrt(k);
aux = 0;
x = zeros(1,nu);
for j=1:nu;
    aux = aux + seed;
    x(j) = (aux) - floor(aux);
end
```

- Algoritmo 2 (Van der Corput):

```
for i = 1:nu
    u(i) = vdc(i,seed1);
end

function u = vdc(nal,iaa)
m = 0;
x = 0;
ib = 1;

while(m < nal)
    ii = floor((nal - m)/ib);  %(inteiro)
    ir = mod(ii, iaa);
    m = m + ir*ib;
    ib = iaa*ib;
    x = x + ir/ib;  %real
end;
```

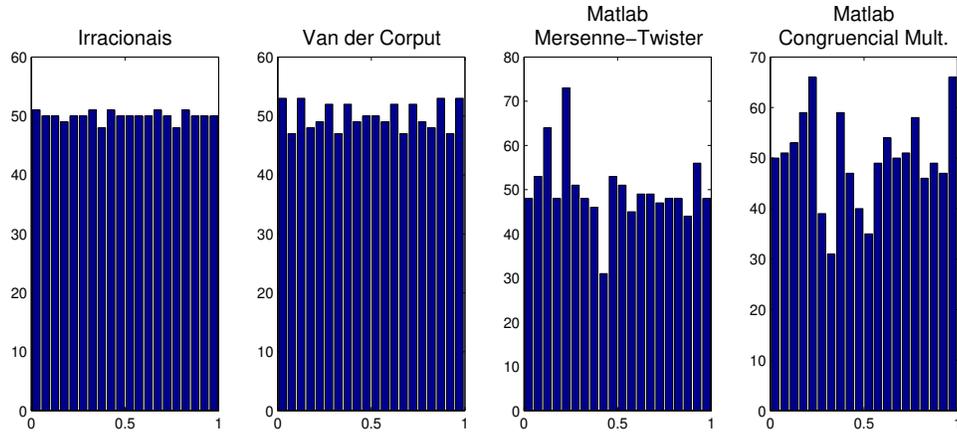


Figura A.1: Histograma para os 1000 primeiros números gerados pelos algoritmos descritos.

```
u = x;
end
```

- Algoritmo 3 (Congruencial Multiplicativo). Disponível como função no Matlab:

```
rand('seed',seed1);
umat2 = rand(1,nu);
```

- Algoritmo 4 (Mersenne-Twister). Disponível como função no Matlab:

```
rand('twister',seed1);
umat1 = rand(1,nu);
```

O algoritmo conhecido como Mersenne-Twister foi inicialmente proposto por Matsumoto e Nishimura em (Matsumoto and Nishimura, 1998) e é do tipo congruencial matricial linear. Os autores mantêm um link com códigos em *C* e atualizações do algoritmo disponível em (Matsumoto, 2009). As Fig. [A.1] e Fig. [A.2] mostram, respectivamente, os histogramas e gráficos de pares sucessivos para os 1000 primeiros números gerados por cada um dos 4 algoritmos, usando a mesma semente, `seed1 = 13`. Existem diversas maneiras de se verificar a qualidade do números gerados pelo gerador de números aleatórios, analisando sua uniformidade e período, por exemplo, através da autocorrelação ou transformada discreta de Fourier. Em (Gentle, 2003), podem-se encontrar técnicas para avaliação da qualidade dos geradores de números aleatórios. Em (Bowman, 1994), o autor apresenta algumas destas técnicas para geradores de números pseudo-aleatórios, utilizando o ambiente Mathematica (Wolfram Research, Inc., 2007)

Com um gerador de números aleatórios para distribuição uniforme, a geração de sequências com outra distribuição de probabilidade é geralmente feita aplicando-se uma transformação às variáveis uniformes (Fishman, 1996; Gentle, 2003; Rubinstein and Kroese, 2008).

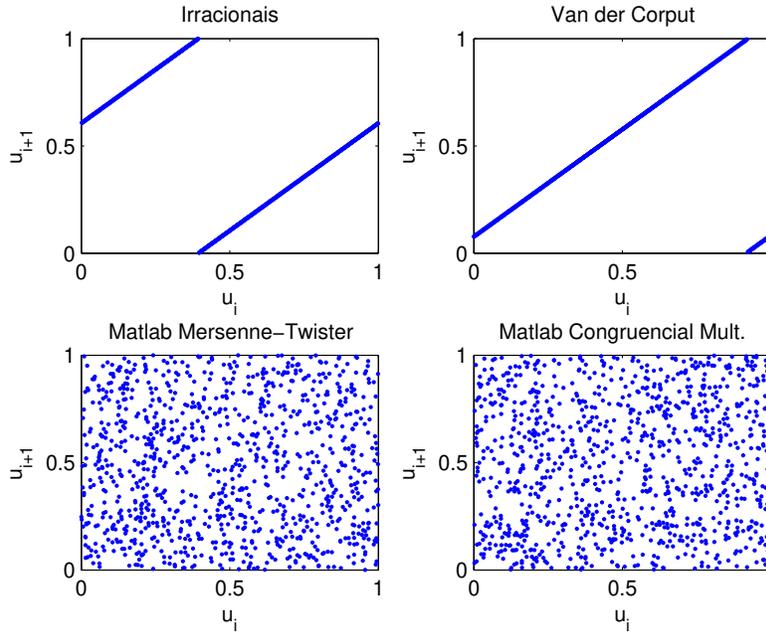


Figura A.2: Pares sucessivos $(u_i \times u_{i+1})$ dos 1000 primeiros números gerados pelos algoritmos descritos.

Existem também algoritmos específicos para geração com distribuições específicas, contínuas ou discretas, disponíveis para as principais distribuições de probabilidade. A escolha do algoritmo, depende, dentre outros fatores, principalmente da eficiência computacional requerida.

Dentre os métodos de transformação a partir de variáveis de distribuição uniforme, o método da inversa da função densidade cumulativa (*CDF*) é o mais simples. Entretanto, ele não é tão comumente usado pois se faz necessário que a *CDF* da distribuição alvo tenha uma forma fechada e seja inversível (Gentle, 2003). Dada uma variável com distribuição entre 0 e 1, $U(0,1)$, e seja X uma variável aleatória contínua, com F_X uma *CDF* contínua e inversível, temos a seguinte relação (Fishman, 1996; Gentle, 2003; Rubinstein and Kroese, 2008):

$$X = F_x^{-1}(U). \quad (\text{A.1})$$

Usando o Matlab, esta expressão pode ser escrita como:

```
x = icdf('norm',u,0,1);
```

Neste exemplo, a distribuição alvo é a distribuição normal com média nula e desvio-padrão unitário. Muitos manuais de estatística estão disponíveis com fórmulas e características das principais distribuições de probabilidade, como por exemplo (Evans et al., 2000).

A.2 Amostragem por Monte Carlo

Simulações por métodos de amostragem (ou método Monte Carlo) são experimentos com números aleatórios com a finalidade de validar expressões matemáticas. A fundamentação para o método Monte Carlo foi primeiramente publicada por Metropolis et al. (1953). Uma discussão sobre os vários aspectos filosóficos sobre o método Monte Carlo pode ser encontrada em (Elishakoff, 2003). Algumas aplicações são do tipo puramente determinístico, sem aleatoriedade inerente, como solução de sistemas de equações lineares com matrizes grandes e esparsas e validação de integrais em domínios de grande dimensão (Curtiss, 1954, 1956; Fishman, 1996; Forsythe and Leibler, 1950; Gentle, 2003; Wasow, 1952). Um simples exemplo é o cálculo de volume em um espaço euclidiano multi-dimensional, em que a forma da região do contorno do volume não permite solução analítica da integração.

Assim como a prática de experimentos exige certos cuidados, uma simulação por Monte Carlo também exige padrões, como (Gentle, 2003):

- Controle: relacionado a questões de fidelidade de um processo não aleatório a um processo aleatório como, por exemplo, testes do gerador de números aleatórios;
- Reprodutibilidade: o gerador de números aleatórios utilizado deve permitir reprodutibilidade estrita, isto é, deve permitir que a mesma sequência de simulações seja reproduzível.
- Eficiência: quando o custo computacional de cada simulação é relativamente alto, eficiência torna-se um fator crítico. Nesse sentido, algumas técnicas como Hipercubo Latino (Seção A.3) ou *Importance Sampling* (Seção A.4), conhecidas como técnicas de redução de variância (Fishman, 1996; Gentle, 2003; Ross, 2006; Rubinstein and Kroese, 2008), são importantes ferramentas.

Na sua forma mais simples, o método Monte Carlo é a estimação de uma integral definida do tipo (Fishman, 1996; Gentle, 2003; Ross, 2006; Rubinstein and Kroese, 2008):

$$\theta = \int_D f(x)dx. \tag{A.2}$$

Supondo que seja possível escrever que $f(x) = g(x)p(x)$, a integral da Eq. [A.2] pode ser reescrita como:

$$\theta = \int_D g(x)p(x)dx, \tag{A.3}$$

onde $p(x)$ é a função densidade de probabilidade, *PDF*. Identificando uma variável aleatória Y a função $g(x)$ é tal que o valor esperado de $g(Y)$ é θ , ou seja:

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_D g(y)p(y)dy \tag{A.4}$$

$$= \int_D f(y)dy \tag{A.5}$$

$$= \theta. \tag{A.6}$$

Supondo que seja possível a geração de N variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada por $p(x)$, um estimador não polarizado para θ é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(y_i). \quad (\text{A.7})$$

O uso da função de distribuição de probabilidade como uma função ponderadora também permite aplicar o método Monte Carlo para integrais impróprias Gentle (2003). Esta estimativa tem *erros de amostragem* associados, como um experimento qualquer. E como em qualquer problema de estimação estatística, este estimador deve vir acompanhado da variância amostral. Dessa maneira, sob certas considerações, é possível estimar um intervalo de confiança, mesmo sem conhecimento da PDF de $\hat{\theta}$. A abordagem usual é aproximá-lo ao intervalo de confiança de uma distribuição normal, aproveitando-se do teorema limite central. Porém, técnicas de estimação mais sofisticadas também estão disponíveis na literatura (van den Bos, 2007; Zong, 2006).

A.3 Amostragem por Hipercubo Latino

Amostragem por Hipercubo Latino (*LHS*) proporciona uma maneira de melhorar a convergência da amostragem aleatória, somente melhorando as escolhas na geração de números aleatórios. O intervalo em que cada variável aleatória está definida é dividido em intervalos disjuntos e um valor é selecionado aleatoriamente em cada um destes intervalos (Helton and Davis, 2003; Olsson and Sandberg, 2002; Olsson et al., 2003). O *LHS* é mais fácil de implementar que o *Importance Sampling (IS)*, pois, como será mencionado, não é necessário especificar alguma função ponderadora ou encontrar a localização da superfície de falha. Além disso, *LHS* e *IS* podem ser utilizados conjuntamente. A implementação original, que é a forma mais simples de amostragem para o LHS para fins de simulação, pode ser obtida como a seguir. A i -ésima realização do vetor de variáveis aleatórias X é escrito como:

$$X_i = F_X^{-1}(S_{ij}^T), \quad (\text{A.8})$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$ (N o número de amostras), $j = 1, 2, \dots, K$ (K o número de variáveis aleatórias), e F_X função distribuição cumulativa desejada. A matriz \mathbf{S} é definida por:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N}(\mathbf{P} - \mathbf{R}), \quad (\text{A.9})$$

onde \mathbf{P} é uma matriz $N \times K$, em que K colunas são de permutações aleatórias e \mathbf{R} é uma matriz $N \times K$ composta por números aleatórios uniformes independentes, entre 0 e 1. Em (Helton and Davis, 2003), pode-se encontrar uma apresentação formal do método assim como uma discussão sobre suas limitações e em Olsson et al. (2003) um esquema simples de implementação para redução do efeito de correlação espúria, intrínseco ao método.

O exemplo a seguir, implementado em Matlab, gera N variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1, por amostragem por Hipercubo Latino, e as armazena em uLH:

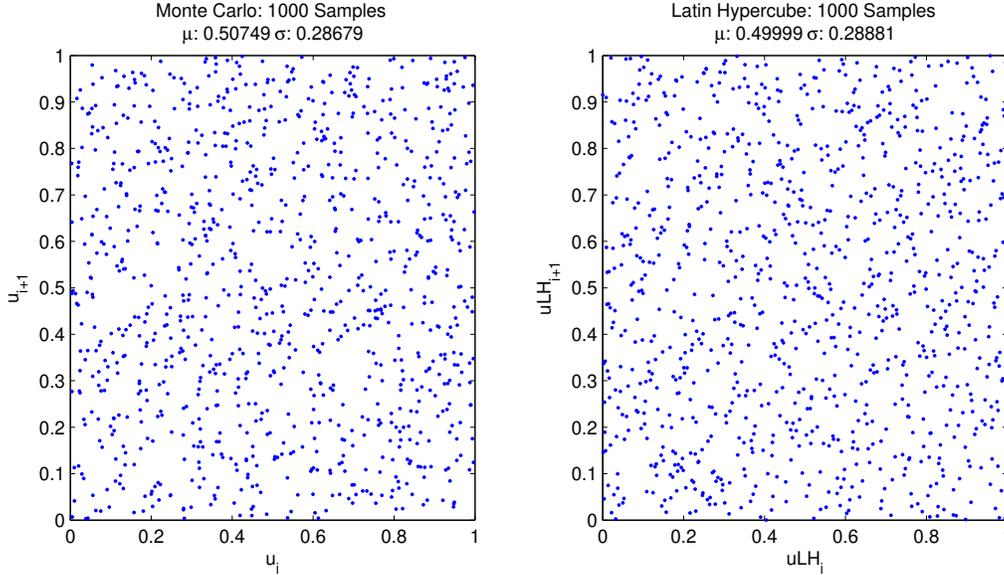


Figura A.3: Pares sucessivos ($u_i \times u_{i+1}$) dos 1000 primeiros números gerados por Monte Carlo (esquerda) e Hipercubo Latino (direita), distribuição Uniforme entre 0 e 1.

```

rand('twister', 11);
u = rand(1,N);
P = randperm(N);
uLH =(P-u)/N;

```

A Fig. [A.3] mostra um gráfico de pares sucessivos gerado por esse algoritmo, para a amostragem Monte Carlo e Hipercubo Latino. Para as duas amostras foram calculados os estimadores de média, μ , e de desvio-padrão, σ . Os valores teóricos para a distribuição uniforme são $\mu = 1/2$ e $\sigma = 1/(2\sqrt{3}) \approx 0.2887$ (Evans et al., 2000). Os valores estimados por Monte Carlo foram $\mu = 0,5075$ e $\sigma = 0,2868$ e por Hipercubo Latino foram $\mu = 0,5000$ e $\sigma = 0,2888$. Nota-se uma melhora significativa nas estimativas.

Pode-se aplicar, por exemplo, a transformação da Eq. [A.8], para uma distribuição gaussiana com média nula e desvio-padrão unitário. Usando o Matlab, pode-se escrever:

```

un = icdf('norm',u,0,1);
unLH = icdf('norm',uLH,0,1);

```

A Fig. [A.4] mostra um gráfico de pares sucessivos gerado por esse algoritmo, para a amostragem Monte Carlo e Hipercubo Latino. Para as duas amostras também foram calculados os estimadores de média, μ , e de desvio-padrão, σ . Os valores estimados por Monte Carlo foram $\mu = -0,0431$ e $\sigma = 0,9435$ e por Hipercubo Latino foram $\mu = -7 \times 10^{-5}$ e $\sigma = 1,0004$. Nota-se uma melhora significativa nas estimativas.

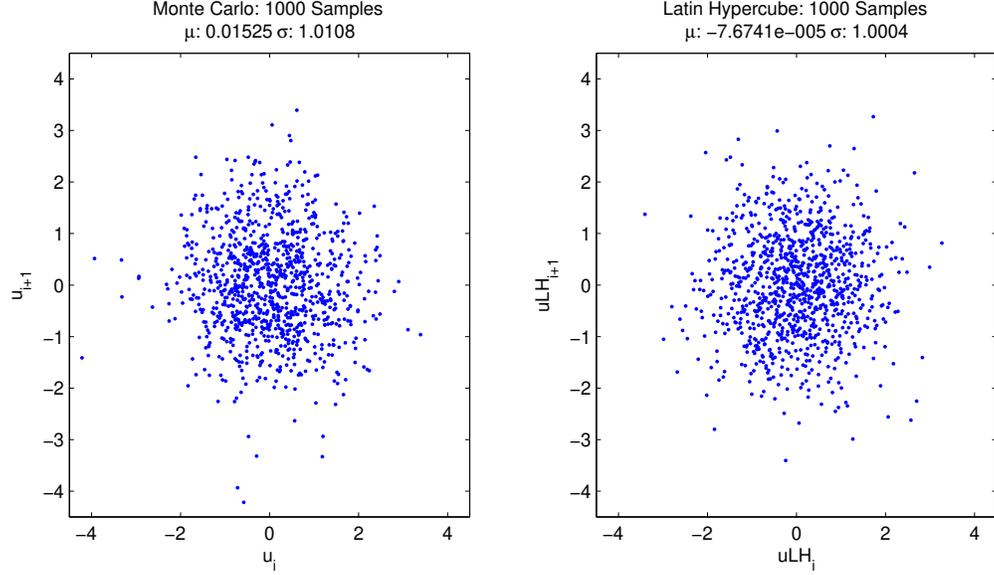


Figura A.4: Pares sucessivos $(u_i \times u_{i+1})$ dos 1000 primeiros números gerados por Monte Carlo (esquerda) e Hipercubo Latino (direita), distribuição normal com média nula e desvio-padrão unitário.

A.4 Importance Sampling

Importance Sampling (IS), conhecida como técnica fundamental de redução de variância, envolve a escolha de uma distribuição que favoreça amostras mais importantes, melhorando, então, a convergência de Monte Carlo (Fishman, 1996; Gentle, 2003; Rubinstein and Kroese, 2008). Pode-se demonstrar que para problemas de grandes dimensões estocásticas, *IS* não é adequado, pois normalmente há degeneração com o estimador ou taxa de verossimilhança, porém em (Rubinstein and Kroese, 2008), os autores apresentam uma abordagem para prevenir essa degeneração. Pode-se reescrever a Eq. [A.2] como sendo:

$$\theta = \int_D f(x) dx \quad (\text{A.10})$$

$$= \int_D \frac{f(x)}{h(x)} h(x) dx \quad (\text{A.11})$$

$$= \int_D g(x) \frac{f(x)}{h(x)} h(x) dx, \quad (\text{A.12})$$

para um certa classe de funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ (Rubinstein and Kroese, 2008), e onde $h(x)$ é uma *PDF*. Desta forma, o estimador da Eq. [A.7] pode ser reescrito na forma:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(y_i) W(y_i), \quad (\text{A.13})$$

onde $W(y_i) = \frac{f(y_i)}{h(y_i)}$ determina as ponderações do *IS* e é conhecido como *taxa de verossimilhança*. A maior dificuldade do método *IS* é encontrar uma *PDF* $h(x)$ ótima. Uma

escolha ruim pode aumentar o custo computacional da estimação, comparando-se com amostragem por *MC*, ou, até mesmo, polarizar o resultado. Note que quando $f(x) = h(x)$, então $W(x) = 1$, reduzindo-se ao método *MC*.

A.5 Exemplo: Área de Círculo de Raio Unitário

Como exemplo, vamos tratar do cálculo de área de círculo de raio unitário. Define-se o conjunto $C = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$. Pode-se calcular essa área analiticamente, através da Eq. [A.2]:

$$A_c = \int_C dA = \int_{y=-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \pi \approx 3,1416. \quad (\text{A.14})$$

A Equação [A.14] pode ser reescrita:

$$A_c = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_C(x,y) dx dy, \quad (\text{A.15})$$

onde $\mathbb{1}_C(x,y)$ é uma função indicatriz, que é igual a 1 caso $(x,y) \in C$ ou zero, caso contrário. Definindo-se um par de variáveis aleatórias, X e Y , com distribuição uniforme sobre uma região de área A_r , podemos reescrever a Eq. [A.15] da forma:

$$A_c = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_C(x,y) A_r \frac{1}{A_r} dx dy \quad (\text{A.16})$$

$$= A_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_C(x,y) f_{XY}(x,y) dx dy, \quad (\text{A.17})$$

onde $f_{XY}(x,y)$ é uma *PDF*. Desta forma, pode-se identificar na Eq. [A.3] o análogo bidimensional de $g(x)$, $p(x)$ e D . Assim podemos definir o seguinte estimador de área:

$$\hat{A}_c = A_r \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_C(x_i, y_i) = A_r \frac{N_i}{N}, \quad (\text{A.18})$$

onde N é o número de pares de variáveis aleatórias X e Y , e N_i é o número de pares que estavam dentro do círculo. Ou seja, o estimador de área resume-se a um problema de contagem, de modo que a área do círculo é proporcional à relação entre o número de pontos sorteados dentro e fora do círculo. Pode-se abordar o problema escolhendo-se arbitrariamente a região de área A_r como sendo $R = (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$, o centro do círculo de raio unitário na origem, $(x_c, y_c) = (0,0)$.

A Fig. [A.5] mostra os $N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por Monte Carlo, usando a função `rand` do Matlab, com o algoritmo Mersenne-Twister e semente igual a zero. Em vermelho os pontos gerados dentro da região do círculo, N_e , em azul os pontos gerados fora.

A Fig. [A.6] mostra os $N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por Hipercubo Latino, a partir das amostras Monte Carlo anteriormente utilizadas. Em vermelho os pontos gerados dentro da região do círculo, N_e , em azul os pontos gerados fora.

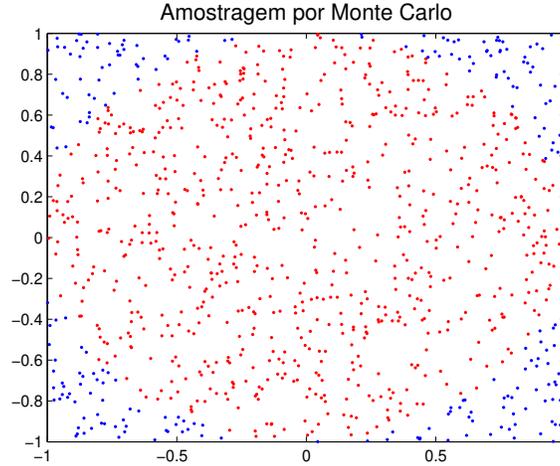


Figura A.5: $N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por Monte Carlo. Em vermelho os pontos gerados dentro da região da circunferência, N_e , em azul os gerados fora.

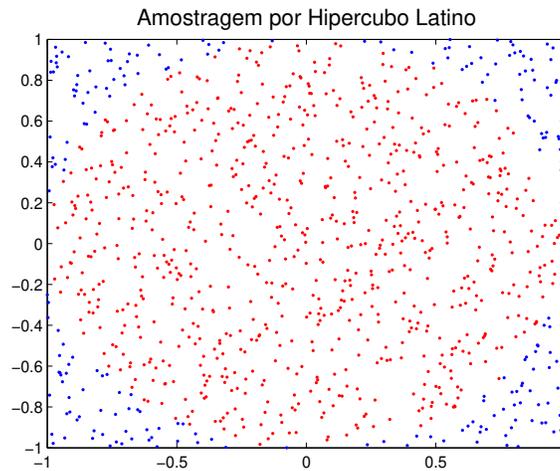


Figura A.6: $N = 1000$ primeiros pares amostras geradas por Hipercubo Latino. Em vermelho os pontos gerados dentro da região da círculo, N_e , em azul os gerados fora.

Ao invés de utilizarmos variáveis aleatórias com distribuição uniforme sobre uma região de área A_r , vamos escolher um caso mais geral de modo que:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/w(x,y) \\ \text{qualquer} \end{cases}, \quad (\text{A.19})$$

onde $w(x,y)$ é uma função ponderadora bi-dimensional. Assim a área da Eq. [A.17] fica

sendo:

$$A_c = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_C(x,y) w(x,y) \frac{1}{w(x,y)} dx dy \quad (\text{A.20})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_C(x,y) w(x,y) f_{XY}(x,y) dx dy. \quad (\text{A.21})$$

Desse modo, temos um estimador do *IS* para a área da circunferência:

$$\hat{A}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_C(x_i, y_i) w(x_i, y_i). \quad (\text{A.22})$$

Tal estimador, Eq. [A.22], como no caso *MC*, Eq. [A.18], também representa um problema de contagem, só que cada ponto tem um peso diferente no somatório, dependendo da região onde está localizado. Isso pode ser utilizado para privilegiar regiões de interesse dentro do espaço amostral, de modo a melhorar a eficiência computacional. Neste exemplo é fácil enxergar que podemos privilegiar a própria região do círculo, em detrimento de qualquer outra no \mathbb{R}^2 . Podemos, por exemplo, escolher arbitrariamente as variáveis aleatórias X e Y como independentes, e com *PDF*, respectivamente, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ gaussianas de média nula e desvio-padrão igual a 0.5. Ou seja, vamos privilegiar a amostragem centrada na origem e com um espalhamento relativamente modesto, devido ao desvio-padrão. Desse modo, temos que a função ponderadora fica sendo:

$$w(x,y) = \frac{1}{f_{XY}(x,y)} = \frac{1}{f_X(x)f_Y(y)}. \quad (\text{A.23})$$

A Fig. [A.7] mostra os $N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por *IS*. Em vermelho os pontos gerados dentro da região do círculo, em azul os pontos gerados fora.

A Fig. [A.8] mostra a convergência dos estimadores da área do círculo para amostragem *MC* e *LH*, Eq. [A.18], e *IS*, Eq. [A.22], para os $N = 1000$ primeiros pares de amostras e compara com o resultado analítico. A Tab. [A.5] sumariza os resultados para os estimadores \hat{A}_c .

	Analítico	MC	LH	IS
\hat{A}_c	$\pi \approx 3,1415$	3,0760	3,1280	3,1273

Tabela A.1: Estimadores de área calculados usando *MC*, *LH* e *IS*.

Note que com $N = 1000$ amostras ainda não foram obtidos bons resultados para os valores da área, mas percebe-se que na Fig. [A.8], a convergência para o *LH* e *IS*, utilizando a *PDF* gaussiana como função ponderadora, convergiram mais rapidamente para o resultado analítico. Outras regiões e *PDF* com diferentes parâmetros poderiam ainda ser escolhidos usando vários outros argumentos, com melhores ou piores resultados.

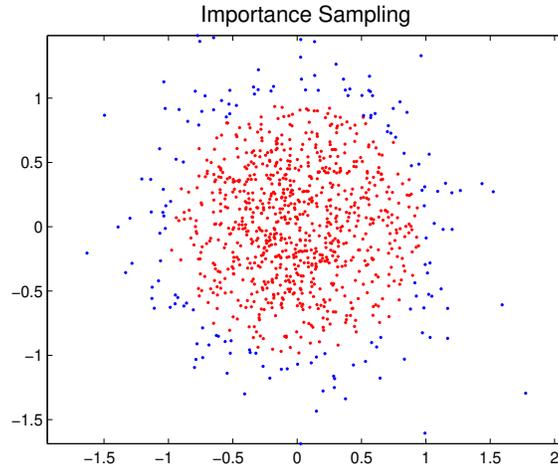


Figura A.7: $N = 1000$ primeiros pares de amostras geradas por *IS*. Em vermelho os pontos gerados dentro da região do círculo, em azul os pontos gerados fora.

A.6 Conclusões

Métodos de amostragem, como MC, oferecem uma alternativa simples para a solução estocástica de sistemas complexos, uma vez que a metodologia permanece praticamente a mesma, independentemente do problema a ser resolvido. Porém, isto é alcançado por meio de alto custo computacional, principalmente para problemas ditos com baixa dimensão estocástica, ou seja, com relativamente poucas variáveis aleatórias envolvidas (Sudret, 2007; Sudret and der Kiureghian, 2000). Porém, amostragem por MC oferece a facilidade de paralelização dos cálculos, uma vez que cada realização é independente uma das outras. Schuëller (1997) apresenta uma revisão de estudos comparativos de implementações paralelas do método MC, em termos de dinâmica de estruturas.

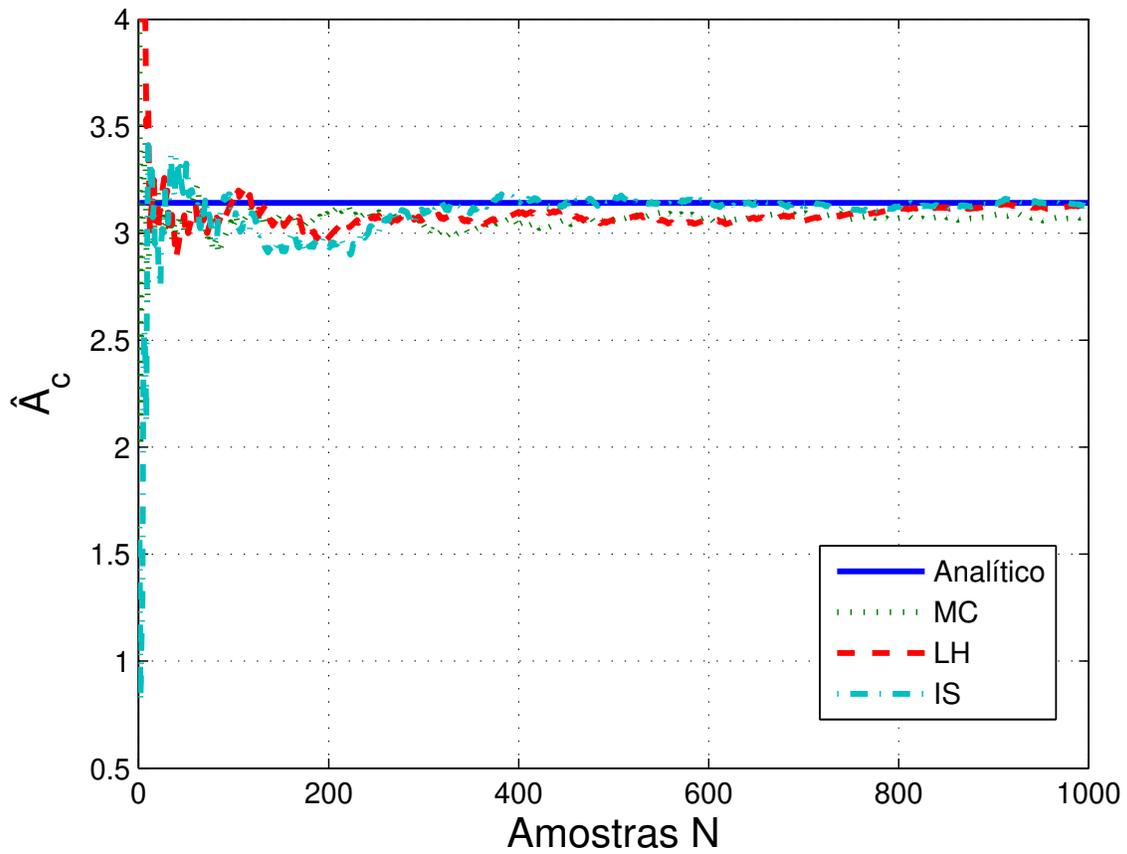


Figura A.8: Convergência para os estimadores de área obtidos por *MC* (pontilhado), *LH* (tracejado) e *IS* (tracejado-pontilhado). Comparação com resultado analítico (cheio).

Apêndice B

Métodos para Análise de Confiabilidade

Métodos de confiabilidade visam validar alguma probabilidade de falha, *i.e.*, a probabilidade com que a resposta de um sistema não satisfaça um dado critério de desempenho. Em (Schuëller, 2007) uma metodologia de tratamento de incertezas em estruturas mecânicas é apresentado, em (Schuëller, 2001) alguns desenvolvimentos em mecânica estocástica computacional são revisados e analisados.

A relação funcional entre um critério de desempenho e as variáveis aleatórias podem ser expressos através de uma função de desempenho, definida como (Haldar and Mahadevan, 2000):

$$Z = g(\mathbf{X}), \tag{B.1}$$

onde \mathbf{X} é um vetor aleatório composto pelas variáveis aleatórias do problema. A superfície de falha, ou estado limite, é definido por $Z = 0$, sendo que a falha ocorre quando $Z < 0$. A probabilidade de falha é dada por (Haldar and Mahadevan, 2000; Rackwitz, 1991; Sudret and der Kiureghian, 2000):

$$PF(\mathbf{X}) = \int_{g < 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{B.2}$$

em que $f_{\mathbf{X}}$ é a função de probabilidade conjunta (*JPDF*) das variáveis aleatórias \mathbf{X} , e o domínio de integração é definido pelo conjunto $g < 0 = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) < 0\}$. Validar a integração na Eq. [B.2] é equivalente a calcular a probabilidade de falha do sistema em análise. Em geral, a *JPDF* é quase impossível de se obter e mesmo sendo conhecida, tal integração quase nunca é facilmente realizável (Haldar and Mahadevan, 2000).

Pode-se simplificar a abordagem ao caso de duas variáveis aleatórias, uma relativa à demanda do sistema, S , e outra relativa à capacidade do mesmo, R , ou ainda, para o caso de estruturas, o par carregamento/resistência. Ambas, sendo de natureza aleatória, apresentam uma tendência central, e, respectivamente, e uma dispersão, caracterizadas pelos seus respectivos estatísticos (Haldar and Mahadevan, 2000). Técnicas de projeto buscam sempre fazer com que a capacidade do sistema seja maior que a demanda requerida, porém,

sabendo-se que ambas são variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade inerente, apresentam uma dispersão em torno da média, o que pode criar uma situação em que a demanda do sistema é maior que a sua capacidade, levando a uma situação de falha.

A Fig. [B] mostra a região de intersecção das respectivas funções de densidade de probabilidade que quantifica a probabilidade do sistema vir a falhar, ou seja, da demanda ser maior que capacidade do sistema de suportá-la. É usual a utilização de fatores de segurança, que, como uma abordagem conservativa, levam a resistência nominal, ou capacidade, R_N a alguns desvios-padrão abaixo da média, e o carregamento nominal, ou demanda, S_N , alguns desvios-padrão acima da média.

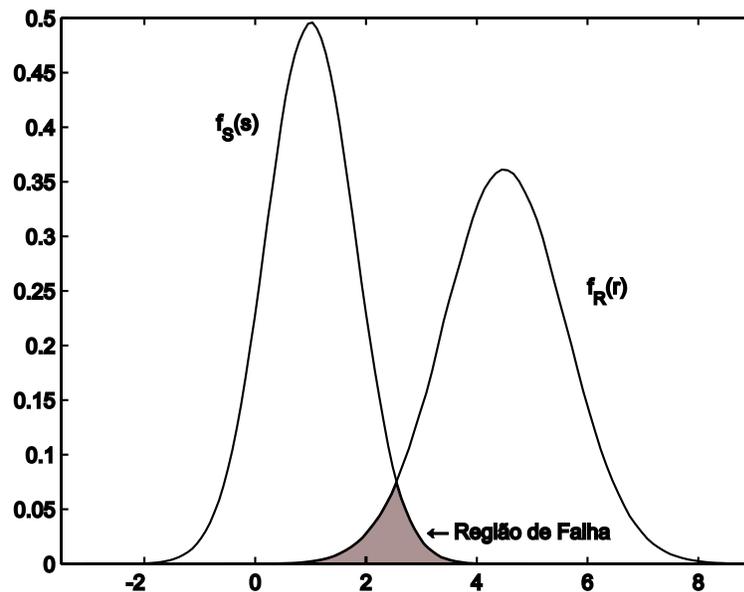


Figura B.1: Região de Falha: intersecção das *PDF* de demanda, S , e capacidade, R .

A intenção dessa abordagem usual é minimizar qualitativamente a área de intersecção das duas curvas, que depende, basicamente, de três fatores: a posição relativa entre as curvas, dada pela sua tendência central, ou a média, μ_S e μ_R ; a dispersão das duas curvas, caracterizada pelos desvios-padrão, σ_S e σ_R ; e a forma das curvas, representadas pela suas funções densidade de probabilidade f_S e f_R . Dessa maneira, o objetivo de projeto seguro em abordagem determinística pode ser visto com uma seleção de variáveis de projeto de tal maneira a diminuir tanto quanto possível a sobreposição das duas curvas. Abordagens convencionais realizam essa tarefa através do deslocamento das curvas com o uso de fatores de segurança. Uma abordagem mais racional deve levar em conta os três fatores de intersecção das curvas, selecionando-se as variáveis de projeto que têm um risco aceitável (Haldar and Mahadevan, 2000).

B.1 Métodos de Confiabilidade de Primeira Ordem

B.1.1 FOSM ou MVFOSM

O método *FOSM* também é referenciado como *Mean Value First-Order Second-Moment Method (MVFOSM)*, sendo utilizado em análises de confiabilidade e projeto robusto (Huang and Du, 2007). Comparados com métodos de amostragem, como simulação por Monte Carlo, os métodos MPP (*Most Probable Point*) têm grande vantagem no que concerne o custo computacional, com uma precisão satisfatória (Haldar and Mahadevan, 2000). Eles aproximam a função de custo, através de série de Taylor, no MPP (Haldar and Mahadevan, 2000; Huang and Du, 2007). Para uma primeira abordagem utilizando as variáveis de carga e resistência, S e R , respectivamente, pode-se definir uma função de desempenho como sendo:

$$Z = R - S \quad (\text{B.3})$$

Sendo R e S variáveis aleatórias normais e estatisticamente independentes, temos que Z também é normal e estatisticamente independente com distribuição $N(\mu_R - \mu_S, \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2})$ (Papoulis, 1991). Dessa maneira, a probabilidade de falha é dada por $p_f = P[Z < 0]$, ou ainda:

$$P_f = \Phi\left(\frac{0 - (\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \quad (\text{B.4})$$

onde Φ é a função de distribuição cumulativa (*CDF*) da variável normal padrão. A probabilidade de falha depende da taxa do valor médio de Z com relação ao desvio-padrão, conhecido como índice de segurança ou de confiabilidade β :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{B.5})$$

Esse método funciona bem com funções de desempenho relativamente simples, o que não é útil para a maioria dos casos, porém dá uma idéia do nível de risco ou confiabilidade do projeto. Esse método foi utilizado nos primórdios dos projetos baseados em confiabilidade. Esse método falha, principalmente, em não considerar informações sobre a distribuição de probabilidade das variáveis envolvidas, em linearizar a função de desempenho g em torno dos valores médios das variáveis aleatórias envolvidas, no caso da função de desempenho g ser não-linear, erros significativos podem ser introduzidos ao se desprezar termos ordem maior. Ele ainda falha ao produzir índices de segurança β diferentes para formulações diferentes da função de desempenho g para o mesmo problema. O método de Hasofer-Lind (*AFOSM*) tenta superar esse problema, basicamente transformando as coordenadas do problema para um espaço de variáveis aleatórias normais padrão e tratando no índice de desempenho neste espaço.

O método conhecido como *FORM* (Haldar and Mahadevan, 2000; Huang and Du, 2007; Rackwitz, 1991; Sudret and der Kiureghian, 2000), permite ainda tratar de problemas

com outras distribuições de probabilidade e momentos estatísticos de mais alta ordem, assim como variáveis aleatórias correlacionadas. Porém, para problemas complexos, o método não garante que (Sudret, 2007):

- o algoritmo utilizado pelo FORM irá convergir para o MPP;
- caso convirja, não há garantias de que este ponto é único;
- qua a aproximação linear da Eq. [B.4], ou aproximações de mais alta ordem, sejam suficientemente precisas.

B.2 Métodos de Confiabilidade utilizando Amostragem

Em casos práticos da engenharia, a função de desempenho geralmente só é acessível através de algum procedimento numérico tal como elementos finitos ou elementos de contorno. Dessa maneira, métodos como o FORM (Haldar and Mahadevan, 2000; Huang and Du, 2007; Rackwitz, 1991; Sudret and der Kiureghian, 2000) têm sua aplicabilidade um pouco limitada, uma vez que necessitam de derivadas da função de desempenho.

Neste sentido, métodos de amostragem são imediatamente aplicáveis a qualquer código comercial previamente utilizado para o modelo determinístico, e permite o uso de técnicas estatísticas bem conhecidas e estabelecidas para análise dos resultados. Porém, apresenta a desvantagem de seu alto custo computacional, o que pode inviabilizar o uso dessa abordagem para alguns casos. Algumas técnicas tentam melhorar o custo de convergência de soluções baseadas puramente em amostragem (ver seção A). Outras metodologias como a utilização de superfícies de resposta ou planejamento fatorial (Box and Draper, 1987; Myers and Montgomery, 2002) e métodos de colocação em grid esparsa (Barthelmann et al., 2000; Ganapathysubramanian and Zabararas, 2007; Keese and Matthies, 2003; Nobile et al., 2008) também estão disponíveis na literatura (Borri and Speranzini, 1997; Huang et al., 2007)

B.2.1 Amostragem por Monte Carlo

O método de Monte Carlo, ou Amostragem por Monte Carlo (*MCS*), é uma metodologia não-intrusiva e bem estabelecida para o cálculo de probabilidade de falha, que é calculada a partir da soma de todas as realizações para o qual a falha ocorre entre N eventos realizados (Olsson et al., 2003) , como se segue:

$$\hat{PF} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{g < 0}(\mathbf{X}_i), \quad (\text{B.6})$$

Onde $\mathbb{1}_{g < 0}$ é um indicador que é igual a 1, quando o elemento pertence ao conjunto $g < 0$, e 0, caso contrário. \hat{PF} é um estimador não enviesado de PF , Eq. [B.2] e \mathbf{X}_i é a i -ésima realização do sistema em análise. A Eq. [B.6] significa que a probabilidade de falha pode ser estimada como a taxa entre numero de realizações que falham e o total de realizações. Pelo teorema central do limite, \hat{PF} , tem aproximadamente uma distribuição

normal $N(PF, N^{-1}var(PF))$, para N grande o suficiente, de modo que $var(PF)$ possa ser estimada via um estimador de variância não enviesado, $S^2 = (1/(N - 1)) \sum_{i=1}^N (PF_i - \hat{PF})^2$, com o qual o intervalo de confiança (Rubinstein and Kroese, 2008) possa ser estimado. A desvantagem do amostragem direta por Monte Carlo é que, quando uma PF é pequena, torna-se necessário um grande número de realizações. Por exemplo, se $PF = 10^{-3}$, são necessárias 1,000 realizações para uma falha acontecer.

A amostragem por Hipercubo Latino (ver Seção A.3) pode ser utilizada para melhorar a convergência do *MCS*.

B.2.2 Importance Sampling

A Probabilidade de Falha pode ser também estimada através da abordagem de *Importance Sampling* (ver Seção A.4). O estimador é do tipo utilizado para *MCS*, porém ponderando cada realização de acordo com a função ponderadora, W , Eq. [A.13] como a seguir (Olsson et al., 2003):

$$\hat{PF} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{1}_{g(\mathbf{x}) < 0} W_{\mathbf{x}}) . \quad (\text{B.7})$$

A amostragem por Hipercubo Latino (ver Seção A.3) também pode ser utilizada em conjunto com *IS* para melhorar a convergência do estimador de probabilidade de fr.

B.2.3 Exemplo Numérico

Vamos tratar do problema de resistência/solicitação ($R \times S$). Supondo R uma variável aleatória com distribuição gaussiana, com $\mu_R = 18$ e $\sigma_R = 1.5$ e S também gaussiana, com $\mu_S = 10$ e $\sigma_S = 1.25$. A falha acontece quando a resistência é menor que a solicitação, ou seja: $R < S$.

A Fig. [B.2] mostra um exemplo de comparando os diferentes tipos de amostragem: *MCS*, *LHS* e *IS* e uma implementação do *IS* com a amostragem melhorada por *LHS* (Olsson et al., 2003). A técnica de Hipercubo Latino foi também utilizada em conjunto com *IS*. Neste caso, a função ponderadora foi arbitrariamente escolhida como sendo uma gaussiana (bidimensional) com $\mu = (12, 0; 12, 0)$ e $\sigma = (1, 5; 1, 5)$. Note que *IS* desloca o centro da amostragem, de acordo com função ponderadora utilizada.

A Fig. [B.3] mostra uma comparação entre a convergência para o estimador de Probabilidade de Falha, \hat{PF} , para as diferentes técnicas de amostragem. Neste caso, como as duas variáveis envolvidas são gaussianas, então o resultado obtido pelo índice β , Eq. [B.5] é exato, $PF = \Phi^{-1}(-\beta) = 2,1 \times 10^{-5}$ e mostrado na figura para efeito de comparação. Enquanto as abordagens utilizando *IS* claramente convergência para menos de 4×10^4 amostras, as abordagens utilizando *MCS* e *LHS* ainda não convergiram em 10×10^4 amostras. Note que os picos nas curvas do *MCS* e *LHS* são relativos às falhas ocorridas nas simulações.

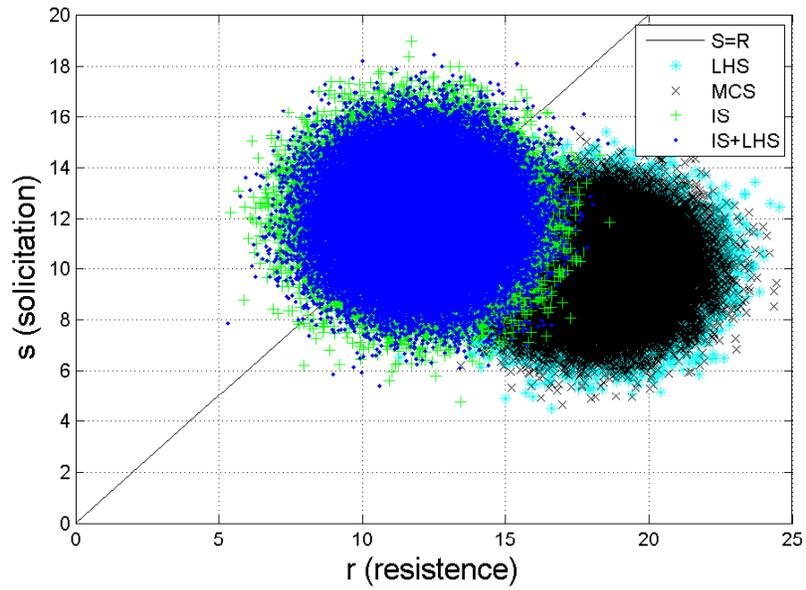


Figura B.2: Diferentes Técnicas de Amostragem para o problema $R \times S$: MCS , LHS , IS e índice β .

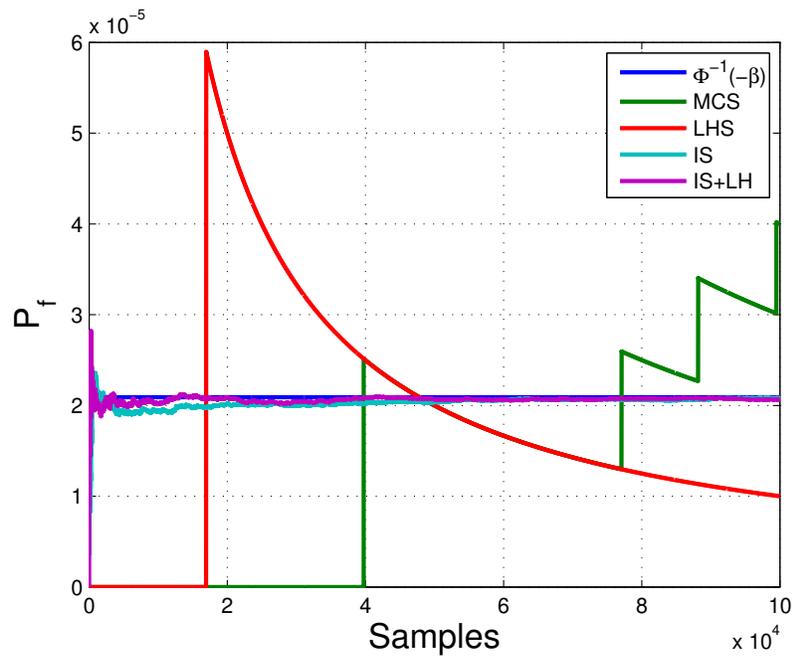


Figura B.3: Convergência do Estimador de Probabilidade de Falha para Diferentes Técnicas de Amostragem para o problema $R \times S$: MCS , LHS , IS e índice β .