UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

THALES FREITAS PEIXOTO

Análise de rotores apoiados em mancais axiais

CAMPINAS
2016

THALES FREITAS PEIXOTO

Análise de rotores apoiados em mancais axiais

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO THALES FREITAS PEIXOTO E ORIENTADO PELA PROFA. DRA. KATIA LUCCHESI CAVALCA DEDINI

_____

CAMPINAS
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

P359a

Peixoto, Thales Freitas, 1990-
Análise de rotores apoiados em mancais axiais / Thales Freitas Peixoto. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores - Dinâmica. 2. Mancais. 3. Automóveis - Motores - Turbocompressores. 4. Carga axial. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca,1963-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of rotors supported by thrust bearings
Palavras-chave em inglês:
Rotors - Dynamic
Bearings
Cars - Motors - Turbochargers
Axial Load
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora:
Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]
Rogério Gonçalves dos Santos
Airton Nabarrete
Data de defesa: 08-07-2016
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INTEGRADOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise de rotores apoiados em mancais axiais

Autor: Thales Freitas Peixoto

Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Rogério Gonçalves dos Santos
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Airton Nabarrete
Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA-E

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno

Campinas, 08 de julho de 2016

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais por todo apoio ao longo desses anos.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais, por todo apoio e amor incondicionais ao longo de todos esses anos.

À professora Kátia, pela orientação prestada e oportunidades oferecidas.

Aos colegas do laboratório e aos amigos, pelo companheirismo e ajuda no trabalho.

À BorgWarner Brasil Ltda., pelo financiamento do projeto, possibilitando a realização desse projeto.

“Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis”

René Descartes

Resumo

O conjunto que forma uma máquina rotativa, composto de um eixo rotativo apoiado em mancais, é denominado de rotor. Uma classe muito específica de rotores consiste nos turbocompressores de alta rotação para aplicação automotiva. Nesses turbocompressores, o eixo, onde estão montados os rotores, está continuamente sujeito a esforços axiais de diferentes magnitudes devido às forças geradas pelo fluxo de gás, que atuam na turbina, e pelo fluxo de ar no compressor. Estes esforços, por sua vez, são suportados por mancais lubrificados axiais, de forma que ocorre deslocamento axial do eixo a cada velocidade de rotação, devido a uma nova posição de equilíbrio do sistema. Portanto, mancais axiais são essenciais para absorver tais esforços e deslocamentos, evitando ao máximo contato direto entre as superfícies sólidas, ou seja, os mancais axiais lubrificados devem ser projetados de forma que o filme de fluido sustente o eixo axialmente, evitando atrito e desgaste prematuros entre as superfícies em movimento relativo dos mancais.

Neste trabalho, são utilizados modelos de mancais axiais segmentados de geometria fixa, os quais serão modelados através de seus coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento. Estes coeficientes resultam da linearização da força hidrodinâmica gerada a partir da distribuição de pressão nos segmentos do mancal, a qual, por sua vez, resulta do movimento relativo entre o mancal e o colar solidário ao eixo. A distribuição de pressão é obtida a partir das equações de Reynolds.

Na sequência, o modelo linearizado do mancal axial hidrodinâmico deve ser introduzido no modelo do eixo através de seus coeficientes dinâmicos equivalentes de rigidez e amortecimento. Uma aproximação simplificada da força axial é proposta para representar sua dependência com a velocidade de rotação do eixo, dependendo da variação de vazão mássica dos gases na turbina na faixa de frequências de operação do rotor. Também são desenvolvidos modelos para forças axiais do tipo impulso e degrau, as quais podem representar condições específicas de testes. A partir das equações de movimento do sistema eixo-mancais, são analisadas as respostas dinâmicas do mesmo quando este é sujeito às excitações externas, sendo estas análises realizadas no domínio do tempo, bem como são estimados também os parâmetros modais do sistema.

Palavras Chave: Rotores – Dinâmica, Mancais, Automóveis – Motores – Turbocompressores, Carga Axial

Abstract

The assembly forming a rotary machine, constituted by a rotating shaft supported by bearings, is called rotor. A very specific class of rotors is the high rotation turbochargers, to automotive application. In these turbochargers, the shaft, where the rotors are mounted, is continually subjected to axial forces of different magnitudes due to the gas flow, working in the turbine, and the air flow in the compressor. These forces are supported by axial lubricated thrust bearings, so there is an axial displacement of the shaft in each rotating speed, because of a new equilibrium position of the system. Therefore, thrust bearings are necessary to absorb these forces and displacements, avoiding direct contact between the solid surfaces, which means that the lubricated thrust bearings must be designed so that the fluid film sustain the shaft axially, avoiding friction and premature wear between the bearing surfaces in relative motion.

In this work, models of segmented thrust bearings of fixed geometry are used, which will be modeled through its dynamic stiffness and damping coefficients. These coefficients can be obtained through the linearization of the hydrodynamic force generated by the pressure distribution in the bearing pads, which results due to the relative movement between the bearing and the collar solidary to the shaft. The pressure distribution is obtained from the Reynolds' equations.

Continuing the work, the linearized model of the hydrodynamic thrust bearing is introduced in the shaft model by its equivalent dynamic stiffness and damping coefficients. A simplified approximation of the axial force is proposed to model its dependence with the speed rotation of the shaft, depending on the variation of mass flow of the gases in the turbine in the operation frequency range of the rotor. Models for the impulse and step excitations of axial forces are also developed, which represent specific conditions of tests. From the bearing-shaft system equations of motion, the dynamic response of the system is obtained and analyzed when it is subjected to external excitations, being the analyzes accomplished in the time domain, as well as the estimation of the modal parameters.

Keywords: Rotors – Dynamic, Bearings, Cars – Motors – Turbochargers, Axial Load

Lista de Ilustrações

Figura 3.1 – Desenho esquemático de um turbocompressor (NICE, 2000) 32
Figura 3.2 – Componentes básicos de um turbocompressor (WIKIMEDIACOMMONS, 2003) 32
Figura 3.3 – Esquema e Diagrama de Velocidades para a turbina radial 44
Figura 3.4 – Mancal axial incorporando segmentos fixos e colar rotativo (Adaptado de VIEIRA, 2014) 46
Figura 3.5 – Gradiente de velocidade do fluido lubrificante, com espessura variável 46
Figura 3.6 – Fluxo mássico através de um volume de controle de seção retangular: (a) plano $\boldsymbol{x-z}$; (b) plano $\boldsymbol{y-z}$; (c) plano $\boldsymbol{x-y}$ 47
Figura 3.7 – Termo de compressibilidade 50
Figura 3.8 – Mecanismo de deformação do segmento 51
Figura 3.9 – Mecanismo de variação da espessura (a) Fluxo de Couette; (b) Fluxo de Poiseuille; (c) Fluxo resultante a+b 52
Figura 3.10 – Mecanismo de Compressão Normal 53
Figura 3.11 – Mecanismo de Compressão de Translação 54
Figura 3.12 – Mecanismo de Expansão Local 54
Figura 3.13 – Vibração longitudinal de uma barra 55
Figura 3.14 – Elemento de comprimento $\boldsymbol{dx}$ da barra 56
Figura 4.1 – Elemento de barra linear 60
Figura 4.2 – Elemento de barra quadrático (nós equidistantes) 61
Figura 4.3 – Elemento de barra quadrático 62
Figura 4.4 – Fator de amortecimento crítico no modelo de amortecimento proporcional 64
Figura 4.5 – Modelo do disco rígido 65
Figura 4.6 – Modelo do mancal axial 66
Figura 4.7 – Sistema de coordenadas para o segmento de mancal 67
Figura 4.8 – Perfis de velocidades nas direções radial e circunferencial (VIEIRA, 2014) 68
Figura 4.9 – Esquema de molas e amortecedores equivalentes para um sistema com dois mancais 78
Figura 4.10 – Sistema massa-mola-amortecedor resultante 78
Figura 4.11 – Esquema do turbocompressor 81
Figura 4.12 – Fluxograma representando resumo do modelo do sistema 94
Figura 5.1 – Esquema do turbocompressor (desenho fora de escala) 96

Figura 5.2 – Malha do MEF com 5 nós 97
Figura 5.3 – Resposta do colar do sistema ao impulso unitário (14.100 rpm) 99
Figura 5.4 – Resposta do colar do sistema ao impulso unitário (20.280 rpm) 99
Figura 5.5 – Resposta ampliada do colar do sistema ao impulso unitário (14.100 rpm) 100
Figura 5.6 – Resposta ampliada do colar do sistema ao impulso unitário (20.280 rpm) 101
Figura 5.7 –Transformada de Fourier da resposta ao impulso: (a) diagrama de amplitude; (b) detalhe do diagrama de amplitude; (c) detalhe do diagrama de fase. 105
Figura 5.8 – Variação da primeira frequência natural com o número de elementos do sistema 107
Figura 5.9 – Variação do fator de amortecimento associado à primeira frequência natural com o número de elementos do sistema 108
Figura 5.10 – Malha do MEF com discretização do mancal 109
Figura 5.11 – Resposta do colar do sistema ao impulso unitário (discretização do mancal axial) 110
Figura 5.12 – Resposta do colar do sistema ao degrau unitário (14.100 rpm) 112
Figura 5.13 – Resposta do colar do sistema ao degrau unitário (20.280 rpm) 113
Figura 5.14 – Entalpia em função da temperatura (Ar atmosférico) 114
Figura 5.15 – Entalpia molar em função da temperatura (CO_2, H_2O vapor e N_2) 115
Figura 5.16 – (a) Rotação do sistema em função da vazão volumétrica dos gases de entrada e (b) Detalhe para faixa de rotação analisada 116
Figura 5.17 – (a) Amplitude da força axial do sistema em função da rotação e (b) Detalhe para faixa de rotação analisada 118
Figura 5.18 – Configuração do turbocompressor 120
Figura 5.19 – Resposta do colar ao degrau de amplitude arbitrária, para três rotações 121
Figura 5.20 – Esquema simplificado do conjunto mancais e colar (sistema massa-mola-amortecedor) 122

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Valores do coeficiente de rigidez e da constante de amortecimento em função da rotação do rotor (VIEIRA, 2014) 98
Tabela 5.2 – Autovalores obtidos para o modelo 1GDL e MEF (5 nós) 102
Tabela 5.3 – Frequências naturais e fatores de amortecimento do sistema 103
Tabela 5.4 – Diferença entre as duas primeiras frequências naturais dos vários modelos, comparadas à equação analítica de vibração de meios contínuos 106
Tabela 5.5 – Diferenças entre as duas primeiras frequências naturais com a discretização do mancal no MEF 111
Tabela 5.6 – Temperatura e espessura mínima do filme de óleo passando pelo mancal axial, para três rotações diferentes (DANIEL, VIEIRA e CAVALCA, 2016) 119
Tabela 5.7 – Coeficientes equivalentes dos mancais axiais 119
Tabela 5.8 – Coeficientes equivalentes globais dos mancais axiais 120
Tabela 5.9 – Coeficientes equivalentes globais dos mancais axiais 122
Tabela 5.10 – Amplitude da força axial em função da rotação 123

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A	–	Área (de uma superfície ou de uma seção transversal)
c	–	Velocidade de propagação da onda numa barra sólida
C	–	Constante de amortecimento viscoso
$c_{2,3}$	–	Velocidade absoluta dos gases na entrada/saída do rotor
c_p	–	Calor específico
$D_{2,3}$	–	Diâmetro de entrada/saída do rotor
E	–	Módulo de Elasticidade, Energia total
e	–	Energia por unidade de massa
F	–	Força aplicada
f	–	Força por unidade de comprimento
g	–	Gravidade
$\vec{H}$	–	Quantidade de movimento angular
h	–	Espessura do filme de óleo
$h(T)$	–	Entalpia
$\bar{h}(T)$	–	Entalpia molar
j	–	Unidade imaginária, $\sqrt{-1}$
k	–	Constante de rigidez elástica, condutividade térmica
k_e	–	Ganho estático do sistema
L, l	–	Comprimento, distância
M	–	Massa molar
$\vec{M}$	–	Momento (torsor, fletor)
m	–	Massa
N	–	Propriedade extensiva de um sistema
P	–	Força axial
p	–	Pressão
$\vec{p}$	–	Quantidade de movimento linear
Q	–	Calor
Q, q	–	Vazão volumétrica ($\dot{\forall}$)
R	–	Força de excitação
$\bar{R}$	–	Constante dos gases ideais
r	–	Força de excitação por unidade de massa
$\vec{r}$	–	Vetor posição
$r_{2,3}$	–	Raio de entrada/saída do rotor
T	–	Temperatura, Torque, Período
t	–	Tempo
t_S	–	Tempo de estabilização
$U_{2,3}$	–	Velocidade tangencial da pá na entrada/saída do rotor
u	–	Deslocamento axial, Energia interna
u, v, w	–	Componentes da velocidade nas direções x, y, z (coordenadas cartesianas)
u, v_r, v_θ	–	Componentes da velocidade nas direções x, r, θ (coordenadas cilíndricas)
$\vec{V}$	–	Velocidade (medida em relação à superfície de controle)
$\vec{v}$	–	Velocidade (medida em relação a um referencial inercial)
$\forall$	–	Volume

W	–	Trabalho, Carga suportada pelo mancal
$w_{2,3}$	–	Velocidade relativa dos gases na entrada/saída do rotor
y_i	–	Fração molar do componente da mistura de gases
z	–	Altura

Letras Gregas

α	–	Coeficiente de amortecimento proporcional à massa
α_2	–	Ângulo de entrada dos gases na turbina
β	–	Coeficiente de amortecimento proporcional à rigidez
β_3	–	Ângulo de saída dos gases na turbina
Δ	–	Variação
$\delta(t)$	–	Função Impulso ou Delta de Dirac
η	–	Propriedade intensiva de um sistema
$\theta(t)$	–	Função Degrau ou Função de Heaviside
λ	–	Autovalor
μ	–	Viscosidade absoluta do fluido
ν	–	Volume específico (volume por unidade de massa)
ξ	–	Fator de amortecimento
ρ	–	Densidade
σ	–	Tensão normal
τ	–	Tensão de cisalhamento
Φ	–	Termo fonte (termo de dissipação viscosa)
Ω	–	Velocidade de rotação, Frequência de excitação
ω	–	Frequência
ω_n	–	Frequência natural

Matrizes

$[A]$	–	Matriz de espaço de estados
$[B]$	–	Matriz com as derivadas das funções de forma
$[C]$	–	Matriz de amortecimento
$[D]$	–	Matriz que relaciona a tensão com a deformação de um elemento
$[I]$	–	Matriz identidade
$[K]$	–	Matriz de rigidez
$[M]$	–	Matriz de massa
$[N]$	–	Matriz com as funções de forma do elemento
$[0]$	–	Matriz de zeros
$[\Phi]$	–	Matriz fundamental

Vetores

$\{\varphi\}$	–	Vetor solução do autoproblema na forma de espaço de estados
$\{b\}$	–	Vetor de excitação do modelo de estados
$\{r\}$	–	Vetor de excitação
$\{x\}$	–	Vetor de posição/deslocamento
$\{\dot{x}\}$	–	Vetor de velocidade
$\{\ddot{x}\}$	–	Vetor de aceleração
$\{x_0\}$	–	Vetor de condições iniciais de deslocamento

$\{\dot{x}_0\}$	–	Vetor de condições iniciais de velocidade
$\{y\}$	–	Vetor de estados
$\{\tilde{y}\}$	–	Autovetor

Sobrescritos

$'$	–	Por unidade de comprimento
$\cdot$	–	Primeira derivada em relação ao tempo, $\partial/\partial t$ (taxa de variação temporal)
$\ddot{}$	–	Segunda derivada em relação ao tempo $\partial^2/\partial t^2$
$'$	–	Primeira derivada em relação à coordenada espacial, $\partial/\partial x$
$''$	–	Segunda derivada em relação à coordenada espacial, $\partial^2/\partial x^2$
$\bar{}$	–	Complexo conjugado

Subscritos

a	–	Relativo à superfície superior do filme de óleo
b	–	Relativo à superfície inferior do filme de óleo
cis	–	Relativo a tensões cisalhantes à superfície
e	–	Relativo a um elemento do sistema
$eixo$	–	Relativo ao eixo
eq	–	Relativo ao coeficiente equivalente
ext	–	Externo ao sistema
G	–	Relativo ao sistema global
h	–	Relativo à solução homogênea do sistema de equações
i	–	Relativo à entrada (inlet)
I	–	Relativo à resposta ao impulso
mis	–	Relativo à mistura de gases
$normal$	–	Relativo a tensões normais à superfície
o	–	Relativo à saída (outlet)
$outros$	–	Relativo a outras fontes que não ao eixo ou tensões normais/cisalhantes
p	–	Relativo à solução particular do sistema de equações
r	–	Relativo à direção r (coordenadas cilíndricas)
s	–	Relativo à resposta ao degrau
SC	–	Relativo à superfície de Controle
sis	–	Relativo ao sistema abordado
VC	–	Relativo ao Volume de Controle
x	–	Relativo à direção x (coordenadas cartesianas)
y	–	Relativo à direção y (coordenadas cartesianas)
θ	–	Relativo à direção θ (coordenadas cilíndricas)
∞	–	Relativo à resposta em regime permanente

Siglas

GDL	–	Grau(s) de Liberdade
MEF	–	Método dos Elementos Finitos

Sumário

1. Introdução 18

2. Revisão Bibliográfica 21

2.1. Turbocompressores 21
2.2. Turbinas 23
2.3. Eixos 24
2.4. Modelagem do eixo pelo Método dos Elementos Finitos 25
2.5. Tribologia e Mancais Axiais 27

3. Conceitos Fundamentais 31

3.1. Turbocompressores 31
3.2. Turbina 33
3.2.1. Teorema de Transporte de Reynolds 33
3.2.2. Forças de Reação na Turbina 42
3.2.3. Turbina Radial 43
3.3. Mancais axiais 45
3.4. Equação de Reynolds 46
3.4.1. Termo de Compressibilidade $[(u_a+u_b)h/2](\partial\rho/\partial x)$ 49
3.4.2. Termo de Deformação do Segmento $(\rho h/2)[\partial(u_a+u_b)/\partial x]$ 50
3.4.3. Termo de Variação da Espessura $[\rho(u_a+u_b)/2](\partial h/\partial x)$ 51
3.4.4. Termo de Compressão Normal $\rho(w_a-w_b)$ 53
3.4.5. Termo de Compressão de Translação $-\rho u_a(\partial h/\partial x)$ 53
3.4.6. Termo de Expansão Local $h(\partial\rho/\partial t)$ 54
3.5. Vibração longitudinal de barras contínuas 55

4. Modelagem Matemática 59

4.1. Modelo do Eixo por Elementos Finitos 60
4.1.1. Elemento linear 60
4.1.2. Elemento quadrático 61
4.1.3. Matriz de amortecimento 63
4.1.4. Elemento de disco rígido 65
4.1.5. Mancais 66

4.2. Solução geral do sistema 70
4.2.1. Modelo de espaço de estados 70
4.2.2. Matriz fundamental e Solução Geral do sistema 71
4.2.3. Autoproblema 73
4.2.4. Resposta ao impulso 74
4.2.5. Resposta ao degrau 76
4.2.6. Modelo por Parâmetros Concentrados 77
4.3. Frequência natural a partir da equação analítica 81
4.4. Amplitude da força excitadora 87
4.5. Síntese do modelo 94

5. Resultados e Discussões 96

5.1. Resposta ao impulso 97
5.2. Resposta ao degrau 111
5.3. Validação experimental preliminar 119

6. Conclusões 124

6.1. Conclusões e comentários 124
6.2. Sugestões para trabalhos futuros 126

7. Bibliografia 128

Anexo A – Matriz Fundamental 135

Anexo B – Solução particular de um sistema de equações 138

Anexo C – Método de Newmark 140

Anexo D – Relação da força axial com a pressão do fluido de trabalho 142

1. Introdução

Um eixo é um membro rotativo, usualmente de seção transversal circular, cuja dimensão transversal é suficientemente menor que seu comprimento, usado para transmitir potência ou movimento. Este componente fornece o eixo de rotação, ou oscilação, de elementos como engrenagens, polias, manivelas, volantes, correias, correntes, camos, entre outros, e controla a geometria de seus movimentos (BUDYNAS e NISBETT, 2011). O carregamento no eixo pode ser uma combinação de flexão (quase sempre flutuante), torção (pode ou não ser flutuante), choque e cisalhamento axial ou transversal (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 2005).

Uma máquina rotativa é um conjunto composto de um eixo rotativo apoiado em mancais, com um ou mais rotores (turbina ou compressor). Uma aplicação específica de rotores consiste nos turbocompressores, também chamados de turbos, para aplicação automotiva. Um turbocompressor é um equipamento adicionado aos motores de combustão interna que permite a elevação da sua potência, ao aproveitar os gases de exaustão do motor para girar uma turbina, que aciona um compressor e este, por sua vez, aumenta a pressão do ar de entrada na câmara de combustão do motor. Esse aumento de pressão melhora o processo de combustão e aumenta a energia liberada na combustão, a cada ciclo do motor, o que, consequentemente, aumenta a potência global do motor.

Portanto, os turbocompressores, possuem, essencialmente, quatro elementos: o eixo rotativo, a turbina, o compressor e os mancais. A turbina é o elemento que aciona todo o conjunto, e o compressor, o elemento que permite aumentar a potência do motor. O eixo é o elemento responsável por transferir a energia da turbina para o compressor e os mancais são os responsáveis por suportar as cargas no eixo. Devido ao efeito de desbalanceamento de massa, inerente a qualquer sistema girante, surgem no eixo deslocamentos radiais, que são suportados por mancais radiais. Ainda, o fluxo dos gases na turbina e no compressor não é constante e isso provoca esforços radiais e axiais de diferentes amplitudes. Os esforços axiais, por sua vez, provocam deslocamentos axiais do eixo, os quais não podem ser suportados por mancais radiais. Para suportar esses deslocamentos, são necessários mancais axiais, que absorvem os esforços e os deslocamentos axiais do eixo. Os mancais axiais lubrificados devem ser projetados de forma a permitir que o filme de fluido entre o mancal axial e o colar do eixo sustente o eixo axialmente, impedindo contato entre essas superfícies, de forma a evitar atrito e desgaste prematuro das mesmas.

Tem-se, por tese, a análise de vibrações axiais do sistema completo do turbocompressor. Assume-se, por hipótese, que o sistema pode ser modelado por elementos finitos, com uma excitação externa dependente da rotação da máquina em regime permanente. O objetivo desse trabalho é, portanto, estudar a vibração axial em sistemas rotativos, particularmente em turbocompressores, utilizando modelos de mancais axiais. Para isso, o eixo é modelado inicialmente através de parâmetros concentrados e, posteriormente, através de um modelo de elementos finitos. Como o interesse concentra-se sobre a vibração axial do eixo, os elementos finitos utilizados serão os de barra. As características dinâmicas do mancal são aproximadas por coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, obtidas a partir de um modelo THD (termohidrodinâmico) desenvolvido por Vieira (2014). Esses coeficientes são obtidos a partir da solução da equação de Reynolds, utilizada para a obtenção da distribuição de pressão no fluido, e da equação da energia, utilizada para a obtenção da distribuição de temperatura do filme de óleo.

Assim, no desenvolvimento deste trabalho, realiza-se uma Revisão Bibliográfica, no Capítulo 2, envolvendo a história dos turbocompressores e de seus principais componentes, responsáveis pela vibração axial do eixo.

Em seguida, de forma a mostrar a origem das forças axiais no turbocompressor e como suportá-las, um estudo sobre a turbina do turbocompressor, o mancal axial e a equação de Reynolds, é apresentado no início do Capítulo 3, que aborda as principais equações governantes dos principais componentes do turbocompressor. O estudo da turbina mostra como surgem as forças axiais no eixo devido a esse elemento. É explicado, também, o funcionamento do mancal axial e é discutida a equação de Reynolds, a equação governante do problema, necessária para o cálculo dos coeficientes equivalentes do mancal. No fim do capítulo, é apresentado também a equação governante da vibração axial do sistema, que, para o caso específico do eixo do turbocompressor, é a vibração de uma barra elástica.

Para resolver a equação de vibração de barra, a modelagem matemática adotada para estudar tal vibração axial é o método dos elementos finitos (MEF), desenvolvido no Capítulo 4. Para a vibração axial do rotor, são utilizados elementos de barra. É explicado como se obtêm as matrizes completas de massa, de rigidez e de amortecimento do rotor. As matrizes de massa e rigidez são obtidas para o elemento de barra linear e quadrático, e é explicado também como os elementos de disco rígido (para modelar o colar, a turbina e o compressor ligados ao eixo) e de mancais axiais são adicionados à matriz global do sistema.

Ao obter as matrizes globais de massa e rigidez, é necessário, então, resolver o sistema de equações diferenciais. Em geral, não é possível obter uma solução analítica desse sistema de equações, de forma que é necessário integrar numericamente esse sistema, para obter sua solução no domínio do tempo. A integração numérica foi feita utilizando-se o integrador numérico de Newmark. Para obtenção dos parâmetros modais do sistema (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração), é necessário obter o modelo de espaço de estados do sistema, a partir das matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento do mesmo. Em seguida, são obtidos os modos do sistema, a partir do problema de autovalor. Logo depois, explica-se o comportamento esperado do sistema para entradas do tipo impulso e degrau. Discute-se, então, o modelo de parâmetros concentrados, de forma a estabelecer alguns conceitos importantes a serem considerados. Neste modelo, toda a massa do conjunto é concentrada num único elemento, ligado a um elemento de mola e um de amortecedor. Os valores dos coeficientes da mola e do amortecedor são os coeficientes equivalentes do mancal axial. Por fim, desenvolve-se o modelo para resolução analítica da equação governante de vibrações axiais de meios contínuos e a modelagem da força axial da turbina dependente da vazão dos gases e da velocidade rotação do eixo.

No Capítulo 5, apresentam-se os resultados obtidos das simulações numéricas. Mostram-se os resultados obtidos a partir dos modelos de parâmetros concentrados e elementos finitos para uma entrada impulsiva. Os resultados do modelo de parâmetros concentrados são importantes, pois podem ser imediatamente comparados aos resultados experimentais. Os resultados obtidos a partir do MEF são comparados tanto ao modelo de parâmetros concentrados, como aos resultados experimentais. O primeiro modelo de elementos finitos é um modelo simples, de quatro elementos lineares ou dois elementos quadráticos, empregado com a finalidade de ilustrar como o método dos elementos finitos é utilizado e, em seguida, analisa-se a influência da malha de elementos finitos na resposta, refinando-se a discretização do eixo, inclusive na posição do mancal axial.

Em seguida, mostram-se os resultados para uma entrada do tipo degrau, além dos resultados obtidos para modelagem da força de excitação axial em função da rotação. Por fim, a resposta ao degrau, a partir do modelo de força axial em função da rotação do eixo, é comparada com os resultados experimentais analisados por Daniel, Vieira e Cavalca (2016) e Vieira (2014).

2. Revisão Bibliográfica

Será apresentado um levantamento bibliográfico geral envolvendo a ciência dos turbocompressores, sendo abordada a história dos próprios turbocompressores e de alguns de seus componentes, como turbinas, eixos (e sua modelagem por meio do Método dos Elementos Finitos) e mancais axiais hidrodinâmicos.

2.1. Turbocompressores

Segundo Siuru (2003), supercompressores são praticamente tão antigos quanto o próprio motor de combustão interna. Rudolf Diesel produziu seu primeiro projeto de supercompressor em 1896, apenas 20 anos após Nickolaus August Otto inventar seu motor de quatro tempos. Em 1901, Sir Dugald Clark descobriu que um motor produz mais energia quando o volume de ar injetado no cilindro é aumentado artificialmente. Por volta da virada do século, Rateau, na França, desenvolveu o compressor centrífugo e, em 1902, Louis Renault patenteou um sistema usando um ventilador centrífugo para soprar ar na entrada do carburador do motor. Em 1905, o suíço Alfred Büchi desenvolveu com sucesso o primeiro turbocompressor moderno movido pelos gases de exaustão do motor.

A tecnologia dos supercompressores avançou rapidamente durante a Primeira Guerra Mundial, de modo a permitir que bombardeiros voassem a altitudes mais elevadas. O supercompressor comprimia o ar rarefeito a elevadas altitudes de forma que os motores conseguissem ar em quantidade suficiente para a combustão adequada.

Supercompressores foram estudados no período entre guerras, primeiro para uso em aviões militares e em seguida para aviões comerciais. Enquanto a maioria dos fabricantes de motores focou em supercompressores movidos a engrenagens ligadas ao virabrequim dos motores, a General Electric desenvolveu com sucesso um turbo supercompressor, ou turbocompressor, aeronáutico, em 1925.

Os supercompressores aeronáuticos avançaram novamente durante a Segunda Guerra Mundial. No começo da década de 1950, o motor de pistão atingiu seu apogeu com o Wright Turbo-Compound, um motor de 18 cilindros capaz de produzir 3.700 hp de potência e permitiu que aviões como o Douglas DC-7 e o Lockheed Super Constellation voassem através de continentes ou do oceano Atlântico sem paradas. A tecnologia de supercompressores e turbocompressores também foi utilizada para melhorar a relação energia/peso e obter a máxima

energia de grandes motores diesel para navios e geração de energia elétrica. Motores diesel com turbocompressores para caminhões foram introduzidos na metade da década de 50.

No período de 1920-1950, turbocompressores também foram usados em carros de corrida, com o mesmo objetivo de aumentar a potência dos motores. No entanto, por volta de 1950-1951, a marca Ferrari, com seus veículos sem turbocompressores, dominou as corridas e o uso de carros turbinados diminuiu, o que foi estimulado também por uma mudança nas regras do Grand Prix em 1952, limitando a superalimentação dos carros a 500 cm³. Turbocompressão apareceria novamente nestes tipos de corridas após cerca de 20 anos. Em 1951, um Cummings Diesel Special turboalimentado surgiu nas 500 Milhas de Indianápolis e, posteriormente, em 1966, Offenhausers turboalimentados também fizeram sua estreia na Indy 500. Em meados da década de 60, turbocompressão era utilizada pelos corredores da USAC (United States Auto Club) e supercompressão e turbocompressão eram também utilizados e aprimorados por corredores dragsters.

A Kaiser Motors foi a primeira empresa automobilística americana a anunciar em 1954/55 um veículo com supercompressão após a guerra, usando um supercompressor McCulloch para aumentar a potência dos seus motores de seis cilindros de 118 hp para 140 hp. Studebaker-Packard também usou supercompressores McCulloch/Packard nos veículos Packards e Studebakers V-8 utilizados em 1957-58, bem como no Studebaker Avanti, em 1963-64. Em 1957, a Ford também utilizou um supercompressor McCulloch/Paxton nos seus V-8, avaliados em 300 hp. Houve ainda uma versão NASCAR desse motor que chegou a 340 hp, para a corrida stock car.

O Oldsmobile Jetfire de 1962-63 foi o primeiro veículo de produção em série a utilizar turbocompressores, aumentando a potência de 155 hp do motor normalmente aspirado para 215 hp, aumentando também a taxa de compressão para 10,25:1. No entanto, combinar turbocompressão com uma alta taxa de compressão foi a ruína do Jetfire, pois causou diversos problemas de detonação. Para evitar isso, o Oldsmobile utilizou um combustível especialmente formulado, uma mistura de água e álcool, que era injetada no motor. Também a Chevrolet chegou a utilizar um turbocompressor TRW para seus Corvairs de 1962-66, com seus motores de seis cilindros resfriados a ar com sucesso.

Na segunda metade da década de 1970, turbocompressão se tornou uma maneira comum de aumentar a potência de motores de combustão interna de pequeno porte, usada de

forma a se obter uma melhor economia de combustível. Porsches, BMWs, Saabs, Buicks, e muitos outros, estavam disponíveis com motores turbinados (SIURU, 2003).

2.2. Turbinas

O elemento motor do turbocompressor é a turbina, movida pelos gases de exaustão. Turbinas são máquinas geradoras de potência e incluem turbinas movidas a água e vento, de longa data, e turbinas movidas a gases e vapores, a partir do século XIX.

De acordo com a revisão histórica de Korpela (2011), a origem das turbomáquinas pode ser traçada a partir do uso de água fluindo como fonte de energia. De fato, rodas d'água utilizadas em rios já eram conhecidas dos gregos. Essa máquina consistia numa séria de remos radiais fixados ao eixo. Como o eixo era vertical, ou inclinado, sua eficiência na extração de energia podia ser melhorada direcionando o fluxo de água contra as pás utilizando calhas. Essa roda d'água podia gerar apenas 0,5 hp, mas, devido à simplicidade de construção, foi utilizada até 1500.

Ao colocar o eixo na horizontal, um melhor projeto é obtido. Nas rodas d'águas subaxiais, datadas de tempos romanos, a água flui através da parte de baixo da roda, sendo pela primeira vez descrita durante o século I a.C. As rodas d'água sobreaxiais surgiram nas regiões montanhosas de Roma durante o século II d.C. A vantagem desse tipo de roda d'água é que, além da energia cinética da água, também pode-se transformar a energia potencial em energia mecânica.

Além da extração de energia da água, os homens também extraíam energia do vento. O primeiro registro que se tem de um moinho de vento data da região da fronteira entre Pérsia e Afeganistão, em 644 d.C. Na Europa, moinhos de vento estavam em uso já no século XII e pesquisas históricas sugerem que os mesmos se originaram de rodas d'água, pois seu eixo era horizontal e os mestres, ao final da Idade Média, já haviam desenvolvido engrenagens capazes de transferir a energia de um eixo horizontal para um vertical.

Outra maneira de mover uma turbina é com a utilização de vapor. Historicamente, a utilização de vapor para produzir rotação de um disco remonta a Heron de Alexandria no ano 100 d.C. Sua invenção, a eolípila, porém, é apenas uma curiosidade, pois não surgiu de uma necessidade histórica, como ocorreu devido ao aumento populacional no início da revolução industrial. A era do vapor iniciou-se, portanto, com o motor a vapor, que marcou o início da

revolução industrial na Grã-Bretanha.

Ao Sir Charles Parsons (1854-1931) é atribuído o desenvolvimento da primeira turbina a vapor, em 1884. Seu projeto usava múltiplas pás de turbina, com aproximadamente 8 cm de diâmetro cada, para diminuir a pressão em estágios e, dessa forma, reduzir as velocidades angulares. A primeira turbina do Parson era capaz de gerar 7,5 kW usando vapor na entrada à pressão de 550 kPa e rotacionando a 17.000 rpm.

Em 1883, o engenheiro suíço Carl Gustav Patrik de Laval (1845-1913) desenvolveu a turbina impulsiva. Para gerar elevadas velocidades a partir do vapor, Laval também inventou o bocal supersônico. A turbina de Laval rotacionava a 26.000 rpm e o maior dos rotores tinha uma velocidade tangencial de 400 m/s. Laval utilizou eixos flexíveis para reduzir os problemas de vibração no maquinário.

Em adição aos esforços da Grã-Bretanha e da Suécia, o Instituto Federal de Tecnologia Suíço (Eidgenössische Technische Hochschule, ETH) se tornou um centro importante de pesquisa no início da fundamentação teórica de turbinas a vapor através dos esforços de Aurel Stodola (1859-1942) e seu livro texto *Steam and Gas Turbines* se tornou a referência padrão no assunto na primeira metade do século passado (KORPELA, 2011).

2.3. Eixos

No ramo da dinâmica de rotores, Rankine, em 1869, observou a existência de velocidades críticas (RANKINE, 1869) e, em 1883, Laval construiu a turbina impulsiva e a colocou num eixo flexível, com uma faixa de operação de até 40.000 rpm, cujo objetivo era a auto-centragem do disco acima da velocidade crítica, fenômeno que ele próprio reconheceu. Em 1895, com os estudos de Dunkerley (1895) e Föppl (1895), descobriu-se que um eixo tem diversas velocidades críticas que podem, em alguns casos, ser coincidentes com as frequências naturais de um eixo não rotativo. A fim de calcular as velocidades críticas, a teoria de Reynolds foi aplicada e o rotor Jeffcott introduzido (FÖPPL, 1895). A solução da equação das velocidades críticas, à época, só era possível para modelos simples de eixos (TUCKMANTEL, 2010).

Em 1919, a ciência da dinâmica dos rotores foi explicada numa forma gráfica (JEFFCOTT, 1919) e, em 1925, foi apresentado um procedimento gráfico para a estimativa das velocidades críticas (STODOLA, 1925), que foi substituído pelo método da matriz de transferência (MYKLESTAD, 1944), com o avanço tecnológico da computação digital

(PROHL, 1945).

Pode-se notar que os rotores têm sido estudados através de diversos métodos matemáticos ao longo do tempo, sendo que uma revisão deles foi apresentada por Eshleman (1972). No entanto, desde 1970, vários pesquisadores da área de dinâmica de rotores têm utilizado o Método dos Elementos Finitos para modelagem e estudo de sistemas rotativos.

2.4. Modelagem do eixo pelo Método dos Elementos Finitos

A discretização de problemas contínuos tem sido abordada de forma diferente por matemáticos e engenheiros. Matemáticos desenvolveram técnicas gerais aplicadas diretamente às equações diferenciais que governam o problema, como aproximações por diferenças finitas, procedimentos com resíduos ponderados ou técnicas aproximadas para determinar a estacionariedade de "funcionais" devidamente definidos. Os engenheiros, por outro lado, frequentemente abordam o problema de forma mais intuitiva, criando uma analogia entre elementos discretos reais e porções finitas de um domínio contínuo. No campo da mecânica dos sólidos, McHenry, Hrenikoff, Newmark e Southwell, na década de 1940, mostraram que soluções suficientemente boas para um problema contínuo elástico podem ser obtidas substituindo pequenas partes do contínuo por um arranjo de barras elásticas simples. Posteriormente, Argyris (1960) e Turner et al. (1956) mostraram que uma substituição mais direta, mas não menos intuitiva, das propriedades podem ser feitas de forma mais eficiente considerando que pequenas partes, ou elementos, de um contínuo comportam-se de maneira simplificada (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000).

Os primeiros trabalhos, na área da dinâmica de rotores, de modelos por elementos finitos, apareceram no início da década de 1970, com um modelo de elemento de um sistema turbo rotor (RUHL, 1970), que incluía as energias de flexão elástica e cinética de translação (RUHL e BOOKER, 1972). No mesmo período, um elemento mais geral foi desenvolvido, ao incluir a inércia de rotação e momentos giroscópicos (THORKILDSEN, 1972). Em 1975, foram publicados resultados de uma análise de elementos finitos de um eixo rotativo (DIANA, MASSA e PIZZIGONI, 1975) e uma formulação geral para um elemento que continha os efeitos de inércia translacional e rotacional, momentos giroscópicos, flexão e amortecimento interno (DIMARAGONAS, 1975), e que, em 1976, incluiu também os efeitos de excentricidade distribuída (GASCH, 1976).

Em 1976, um estudo utilizando um elemento de viga de Rayleigh de eixo rotativo foi

publicado, cujas equações foram desenvolvidas no sistema de referência fixo e no sistema móvel rotacional e que considerava a carga axial, momentos giroscópicos, inércia de translação e rotação, rigidez à flexão e um elemento de disco rígido (NELSON e MCVAUGH, 1976). O modelo de disco rígido foi generalizado, com a inclusão de amortecimento interno viscoso e histerético (ZORZI e NELSON, 1977). Posteriormente, um modelo considerando o torque axial foi apresentado (ZORZI e NELSON, 1980) e, no mesmo ano, foi adicionado ao modelo de viga de Rayleigh a deformação por cisalhamento transversal, desenvolvendo-se o elemento de viga de Timoshenko (NELSON, 1980).

Os equacionamentos acima compartilham a consideração de que a secção transversal do elemento é cilíndrica, o que implica em área e inércia constantes ao longo do comprimento, cujos elementos são representados por oito graus de liberdade (dois de translação e dois de rotação, em cada uma de suas extremidades) e abrangem os efeitos de inércia de rotação, momentos giroscópicos, carga axial, amortecimento interno, cisalhamento transversal e torque.

Rouch e Kao (1979) e Mohiuddin e Khulief (1994) desenvolveram um elemento finito de eixo de forma linear cônica. Mohiuddin e Khulief (1994) integraram as equações de energia potencial e cinética para obter matrizes de rigidez e massa, respectivamente, levando em conta a variação dos momentos de inércia de massa e de área ao longo de seu comprimento. Rouch e Kao (1979) desenvolveram seu trabalho a partir do trabalho de Thomas, Wilson e Wilson (1973), que adicionou duas coordenadas a cada grau de liberdade do elemento para levar em conta a deformação por cisalhamento. O trabalho estendeu essa formulação e incluiu também os efeitos giroscópicos, representando área e inércia como função dos diâmetros, mas sem nenhuma expressão fechada (os resultados foram obtidos a partir de integração numérica). Posteriormente, To (1981) desenvolveu uma forma fechada, para massa e rigidez, para o elemento cônico de Timoshenko, de doze graus de liberdade.

Greenhill, Bickford e Nelson (1985) estenderam a teoria do elemento de viga de Timoshenko com seção cônica linear, com a finalidade de obter expressões fechadas para as matrizes elementares adequadas à programação computacional. Tal elemento incluía os efeitos de inércia translacional e rotacional, momentos giroscópicos, carregamento axial, amortecimento interno e desbalanceamento de massa concentrado. As equações de movimento apresentavam-se tanto no referencial fixo como no rotacional.

Formulações alternativas são dadas por Genta e Gugliotta (1988) e Stephenson, Rouch

e Arora (1989). Genta e Gugliotta (1988) modelaram o elemento cônico de Timoshenko com dois graus de liberdade complexos por nó, cuja vantagem é poder representar rotores com grande conicidade, sem reduzir excessivamente o comprimento do elemento e Stephenson, Rouch e Arora (1989) propuseram que rotores com grandes variações de diâmetros fossem modelados através de elementos sólidos axissimétricos, ao invés de utilizar um elemento de viga.

2.5. Tribologia e Mancais Axiais

Muitos dos avanços na tribologia e tecnologia dos rolamentos evoluíram ao longo dos anos para atender às necessidades de novas máquinas. Com a Revolução Industrial, juntamente com o aumento na velocidade de rotação dos eixos de máquinas para além daquelas dos moinhos de ventos, a utilização de contínua lubrificação hidrodinâmica passou a ser normal. A teoria e o conhecimento técnico seguiram as aplicações em máquinas reais. Em muitos casos, esse conhecimento dos detalhes técnicos desempenhou um papel vital na melhoria contínua de projeto de mancais e lubrificantes (KHONSARI e BOOSER, 2008).

Naquela época, constatou-se que o grande problema encontrado nesse elemento era o atrito, responsável por grandes perdas energéticas e elevados níveis de calor (VIEIRA, 2011). Em 1508, Leonardo da Vinci publicou os conceitos de um coeficiente característico de atrito como a razão entre a força de atrito e a força normal. Em 1699, o físico francês Guillaume Amontons novamente estabeleceu o significado de um coeficiente de atrito, que era independente da área aparente de contato entre as superfícies. Posteriormente, o físico francês C. A. Coulomb, em 1785, distinguiu os coeficientes de atrito entre estático e dinâmico, que era independente da velocidade (KHONSARI e BOOSER, 2008). Em 1950, os mecanismos para redução de atrito através do desgaste de revestimentos macios e camadas de uma superfície molecular e lubrificante foram elucidados (BOWDEN e TABOR, 1950).

Os primeiros estudos de um eixo e um mancal rodando sob lubrificação hidrodinâmica completa foram feitos por F. A. von Pauli, em 1849, e por G. A. Hirn, em 1854 (KHONSARI e BOOSER, 2008). Em 1883, Tower detectou a existência de um filme de óleo através de medidas de pressão no lubrificante (TOWER, 1883), e continuou seus estudos em 1885 (TOWER, 1885), enquanto o russo Petrov, no mesmo ano de 1883, chegou à mesma conclusão de Tower, através de medições de atrito (PETROV, 1883). Esse trabalho foi seguido pela publicação de Reynolds (REYNOLDS, 1886), que derivou a famosa equação de Reynolds para

estabelecer as fundações da teoria de lubrificação hidrodinâmica (SHIZHU e PING, 2012).

A equação de Reynolds explica com sucesso os mecanismos de lubrificação hidrodinâmica, isto é, que um líquido que flui gera pressão dinâmica (SHIZHU e PING, 2012). Reynolds utilizou uma forma reduzida das equações de Navier-Stokes em conjunto com as equações de continuidade para gerar uma equação diferencial de segunda ordem para a pressão no contato dos rolamentos. Tal pressão é capaz de transmitir forças entre superfícies com um atrito muito pequeno, pois as superfícies de contato estão completamente separadas por um filme de fluido. Nessa situação, são as propriedades físicas do lubrificante, notadamente a viscosidade dinâmica, que ditam o comportamento do contato (HAMROCK, 1984).

A equação de Reynolds é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, que já foi resolvida analiticamente no passado. Contudo, muitas aproximações precisam ser feitas para chegar a uma solução analítica, o que gera resultados com desvios. Atualmente, com o avanço da tecnologia computacional, muitos problemas complexos de lubrificação podem ser resolvidos numericamente, com considerável precisão (SHIZHU e PING, 2012).

Em 1904, Sommerfeld publicou uma solução analítica da equação de Reynolds, aplicada a mancais radiais longos, obtida integrando a equação de Reynolds, desconsiderando as perdas de óleo nas extremidades do mancal (SOMMERFELD, 1904). Para mancais curtos, entretanto, essa solução não era adequada e Ocvirk publicou uma solução da equação de Reynolds para mancais radiais curtos (OCVIRK, 1952).

Especificamente para mancais axiais, Hamrock obteve a solução analítica considerando mancais de segmentos cujas dimensões radiais eram muito maiores que suas dimensões circunferenciais, o que significa que os fluxos radiais de fluido lubrificante para fora da interface entre o mancal e a superfície em movimento podem ser desprezados (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

No entanto, a solução analítica não é adequada para qualquer mancal, visto que o fluxo de óleo na direção radial pode ser considerável, devido às dimensões radiais e circunferenciais do mesmo, o que provoca uma variação da pressão ao longo da direção radial (VIEIRA, 2014).

Com o advento dos computadores, soluções numéricas para os mancais começaram a ser estudadas, resolvendo-se numericamente a equação de Reynolds. Pinkus foi o primeiro a obter uma solução numérica para a equação de Reynolds completa, com as condições de

contorna corretas, usando o Método das Diferenças Finitas, em 1956. Pinkus obteve a distribuição de pressão em mancais elípticos (PINKUS, 1956) e trilobados (PINKUS, 1959). Ainda em 1958, Pinkus obteve também a solução da equação de Reynolds para mancais axiais, cuja espessura do filme de óleo variava linearmente em função do comprimento circunferencial (PINKUS e LYNN, 1958).

Outros autores ainda utilizaram outros métodos numéricos para obter uma solução para a equação de Reynolds, tal como o Método dos Volumes Finitos. Patankar (1980) é uma das principais referências sobre o método e o utilizou para a solução de problemas de transferência de calor. Maliska (2004) apresentou uma ampla abordagem computacional dos problemas que envolvem programas computacionais para aplicação em CFD (Computational Fluid Dynamics), baseando seu trabalho no de Patankar.

Segundo Alves (2011), a ideia de Pinkus de aplicar métodos numéricos para resolver numericamente a equação de Reynolds para mancais hidrodinâmicos não ficou limitada à análise HD (hidrodinâmica), sendo expandida para levar em conta outros efeitos nos mancais, além da distribuição de pressão e forças hidrodinâmicas. Assim, começam a ser estudados métodos que levam em consideração efeitos térmicos nos mancais, levando à análise THD (termohidrodinâmica).

Um dos principais trabalhos na análise THD é de Dowson (1962), que deduziu a equação de Reynolds generalizada, para o cálculo da distribuição de pressão, levando em consideração a variação de outras propriedades do fluido, como viscosidade e densidade. Essa equação foi derivada a partir das equações fundamentais com o mínimo de hipóteses restritivas (ALVES, 2011) e seu trabalho serviu como base para futuros trabalhos que tratam de lubrificação THD, pois permite que menos simplificações sejam feitas na análise (VIEIRA, 2014).

Com relação à dinâmica do filme de óleo e integração dos mancais axiais nos sistemas rotativos, Lund (1964) publicou um método para o cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento linearizados de mancais radiais, introduzindo esses coeficientes nas equações matriciais que descrevem o movimento rotativo do sistema, tornando-se a base para o desenvolvimento de trabalhos futuros. Segundo Alves (2011), estes coeficientes tem por objetivo melhorar o cálculo das velocidades críticas de rotores, pois inserem a flexibilidade do filme de óleo no sistema, sendo, entretanto, obtidos empiricamente. Assim, Lund, em 1987, fez

uma revisão de como calcular teoricamente esses coeficientes, aplicando-se pequenas perturbações com relação à posição de equilíbrio do mancal, considerando equações linearizadas (LUND, 1987).

Finalizando, o atual estado da arte, envolvendo mancais axiais, resume-se nos trabalhos mais recentes de Arghir, Alsayed e Nicolas (2002), que utilizaram o Método dos Volumes Finitos para obter a distribuição de pressão em mancais axiais com descontinuidades no filme de óleo, Alqmvist, Glavatskih e Larsson (2000), que compararam os resultados de simulações THD com resultados experimentais de mancais axiais com segmento pivotado e Glavatskih, Fillon e Larsson (2002), que utilizaram a mesma bancada de testes de Alqmvist Glavatskih e Larsson (2000) para comparar os resultados de simulações TEHD (termo-elasto-hidrodinâmico, que leva em consideração, além da variação da temperatura, a deformação dos segmentos) com resultados experimentais. Ainda, Dadouche, Fillon e Bligoud (2000) realizaram experimentos em um mancal axial de geometria fixa de grandes dimensões, analisando a influência de diversos parâmetros, tais como carga axial aplicada, velocidade de rotação e temperatura do óleo de reposição, sobre o campo de pressão e temperatura gerado nos segmentos dos mancais. Mais tarde, Dadouche, Fillon e Dmochowski (2006) utilizaram a mesma bancada experimental para comparar resultados experimentais com resultados simulados. Por fim, pode-se citar também o trabalho de Ahmed, Fillon e Maspeyrot (2010) que se baseia no equacionamento de Dowson para obter uma solução para o problema THD usando a equação de Reynolds generalizada para mancais axiais.

3. Conceitos Fundamentais

3.1. Turbocompressores

Turbocompressores tem aplicação em veículos com motores de combustão interna, além de aplicações em aeronaves que voam a altas altitudes. Atualmente, a turbocompressão é muito comum em veículos movidos a gasolina ou diesel, pois permite aumentar a potência ou a eficiência do motor, sem aumentar excessivamente seu peso. Em 2011, com a publicação do Inovar-Auto pelo Governo Federal, que cobra redução no consumo de combustíveis e maior eficiência energética (OLIVON, 2012), uma estratégia de *downsizing* nos motores dos veículos brasileiros provocou uma substituição de motores V8 por V6 e de V6 por 4 cilindros e, para manter a mesma potência dos motores, os turbocompressores passaram a ser utilizados em veículos da Fiat e Volkswagen (CALMON, 2009). Vieram junto com o Inovar-Auto os motores 1.0 de três cilindros e, em seguida, os motores de três e quatro cilindros turbinados. Nesse grupo, modelos pequenos como o Up!, da Volkswage, o HB20, da Hyundai, e médios, como o Cruze (1.4), da Chevrolet, e o Civic (1.5), da Honda, garantem desempenho dos motores de maiores cilindradas, consumindo menos combustível. O turbo, que antes era utilizado para aumentar a potência dos motores juntamente com o aumento do consumo, é a peça fundamental para que isso ocorra, pois agora permite melhorar a eficiência dos motores e justamente reduzir seu consumo (PONCIANO, 2016).

O princípio básico de funcionamento de um turbocompressor é sua capacidade em aumentar a quantidade de ar que um motor pode admitir, através do aumento da pressão de alimentação do ar que entra no motor, o que provoca um aumento na potência ou eficiência do mesmo (NICE, 2000).

O turbocompressor é fixado ao coletor de escapamento do motor, de forma que o fluxo de gases de escape queimados nos cilindros gira a turbina radial, que, neste caso, funciona como um motor de turbina a gás. A turbina é conectada por um eixo ao compressor, localizado entre o filtro de ar e o coletor de admissão, que pressuriza o ar a ser injetado nos cilindros (NICE, 2000), conforme Figura 3.1. A Figura 3.2 ilustra os principais componentes de um turbocompressor. Pode-se observar o compressor (componente 8), a turbina (componente 2), e os mancais radiais (componentes 4) e axial (componente 5), de fundamental importância para o correto funcionamento do turbocompressor, em níveis aceitáveis de vibração.

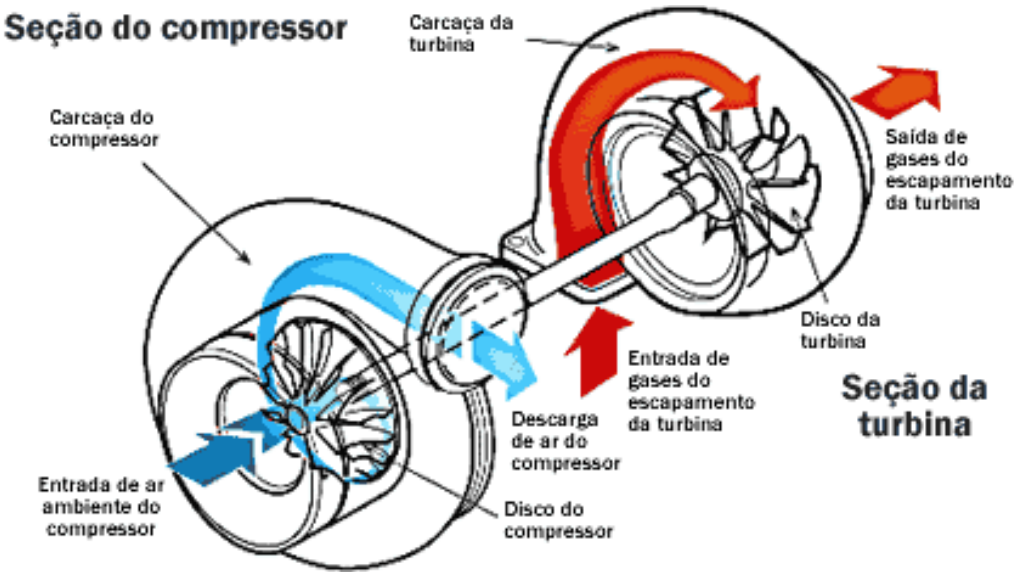


Figura 3.1 – Desenho esquemático de um turbocompressor (NICE, 2000)

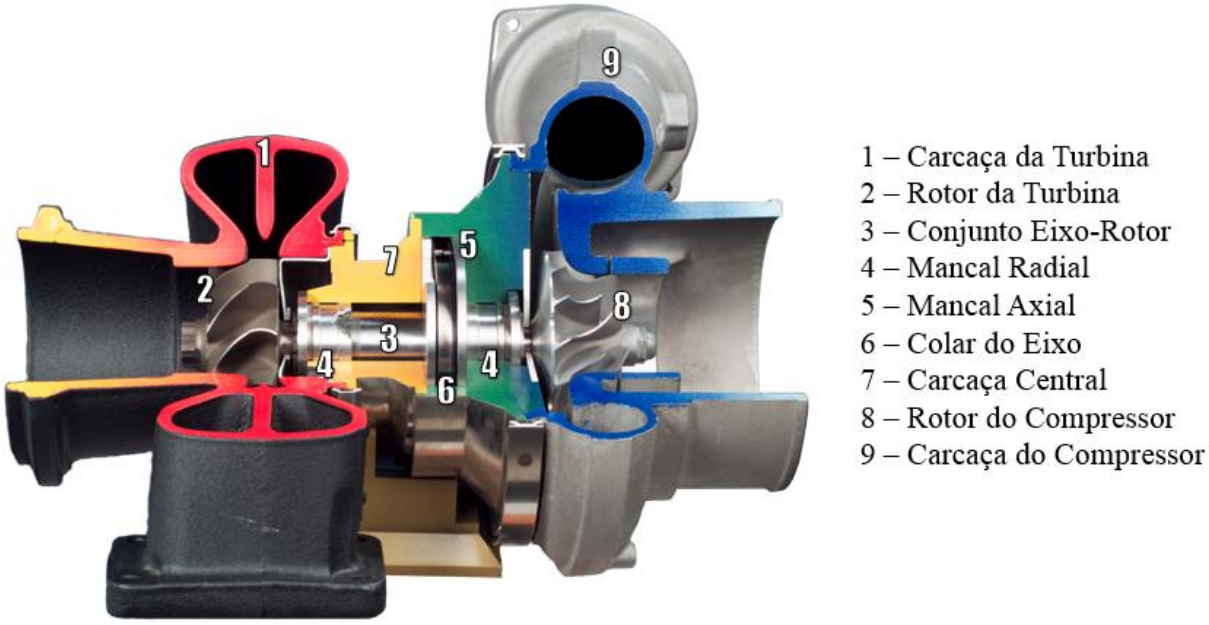


Figura 3.2 – Componentes básicos de um turbocompressor (WIKIMEDIACOMMONS, 2003)

Para suportar velocidades de até 150.000 rpm, o eixo da turbina deve estar cuidadosamente sustentado. A maioria dos rolamentos convencionais explodiria a velocidades como essa, portanto, a maioria dos turbocompressores utiliza mancais hidrodinâmicos. Esse tipo de mancal mantém o eixo em uma fina camada de óleo, que é constantemente bombeado em seu interior. Isso serve a dois propósitos: resfria a árvore e algumas das outras peças do turbocompressor e permite que o eixo gire sem muito atrito (NICE, 2000).

Outro elemento do turbocompressor é o mancal axial, utilizado para suportar os esforços aplicados sobre o eixo no sentido axial, que são variáveis, devido à variabilidade da pressão do gás de escape que sai do motor, dependendo do ciclo em que o motor se encontra (admissão, compressão, combustão e exaustão). Portanto, os mancais axiais lubrificados devem ser projetados de forma que o filme de fluido lubrificante sustente o eixo axialmente contra os eventuais movimentos que ocorrem, principalmente da turbina em direção ao compressor (VIEIRA, 2011).

Assim, como o objetivo do trabalho é estudar a vibração axial em um turbocompressor, será discutido o porquê surgem forças axiais na turbina do turbocompressor e seu equacionamento básico. Além disso, como o mancal axial é o elemento utilizado para suportar esses esforços, será apresentado também seu princípio de funcionamento e equacionamento, de forma a mostrar como este elemento consegue suportar os carregamentos axiais no eixo do turbocompressor.

3.2. Turbina

3.2.1. Teorema de Transporte de Reynolds

O Teorema de Transporte de Reynolds estabelece uma relação geral entre a taxa de variação de qualquer propriedade arbitrária extensiva N de um sistema com as variações dessa propriedade associadas ao volume de controle. É importante, pois reduz a álgebra necessária para obter as formulações de volume de controle de cada uma das equações básicas (equações da conservação de massa, da conservação da quantidade de movimento e da conservação de energia) a uma única equação (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2004):

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{sis} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\, \rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\, \rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.1}$$

É importante observar que essa equação só é válida no instante em que o sistema e o volume de controle coincidem. Ao utilizar a Eq. (3.1), é importante observar que para ir da formulação das leis básicas de um sistema para a formulação de volume de controle, deve-se observar que esta equação relaciona a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva N do sistema às variações das propriedades associadas ao volume de controle no instante em que o sistema e o volume de controle coincidem; isso é verdadeiro já que, ao tomar o limite $\Delta t \to 0$,

na derivação dessa equação (não mostrada aqui), o sistema e o volume de controle ocupam o mesmo volume e têm as mesmas fronteiras. Outro ponto importante que deve ser observado sobre a Eq. (3.1) é que a velocidade $\vec{V}$ é medida em relação à superfície de controle, pois se relaciona ao fluxo mássico através da superfície (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2004).

Antes de utilizar a Eq. (3.1) para desenvolver as equações fundamentais na formulação de volume de controle, é necessário explicar cada um dos termos e símbolos na equação:

Primeiro, $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{sis}$ representa a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva do sistema (massa, energia, quantidade de movimento etc).

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\,\rho\,d\forall$ é a taxa de variação temporal da propriedade arbitrária extensiva N contida no volume de controle (o subscrito VC indica volume de controle), sendo que η é a propriedade intensiva correspondente à N, $\eta = N$ por unidade de massa, $\rho\,d\forall$ é um elemento de massa contido no volume de controle e $\int_{VC}\eta\,\rho\,d\forall$ é a quantidade total da propriedade extensiva N contida no volume de controle.

$\int_{SC}\eta\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é o fluxo de taxa líquida da propriedade extensiva N que atravessa a superfície de controle (o subscrito SC indica superfície de controle). Aqui, $\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é a taxa de fluxo mássico através do elemento de área $d\vec{A}$ por unidade de tempo e $\eta\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é a taxa de fluxo da propriedade extensiva N através da área $d\vec{A}$.

3.2.1.1. Equação da Conservação de Massa

A equação da continuidade é a lei da conservação da massa aplicada a um volume de controle. A lei da conservação da massa para um sistema fechado pode ser escrita como (ELGER et al., 2013):

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{sis} = 0 \tag{3.2}$$

isto é, a massa do sistema permanece constante.

Para obter a equação para o volume de controle, definimos $N = m$ e $\eta = 1$ e substituímos esses parâmetros na equação do teorema de transporte de Reynolds (Eq. (3.1)):

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{sis} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.3}$$

Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.3), chegamos à forma final da equação da conservação da massa para um volume de controle (ELGER, et al., 2013):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{3.4}$$

A Eq. (3.4) também é chamada de equação da continuidade. Nessa equação, o primeiro termo representa a taxa de variação da massa dentro do volume de controle, enquanto que o segundo termo representa o fluxo líquido de massa atravessando as superfícies de controle. Se a massa atravessa as superfícies numa série de entradas e saídas, então a Eq. (3.4) reduz-se à forma simplificada da equação da continuidade (ELGER, et al., 2013):

$$\frac{d\, m_{VC}}{dt} + \sum_{SC} \dot{m}_o - \sum_{SC} \dot{m}_i = 0 \tag{3.5}$$

onde m_{VC} é a massa da quantidade de matéria dentro do volume de controle e os subscritos o e i referem-se à região de saída (*outlet*) e de entrada (*inlet*), respectivamente.

3.2.1.2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear

Seja um sistema de partículas de um fluxo de fluído. A segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{ext} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{3.6}$$

onde o subscrito ext indica externo e $m\vec{v}$ o momento linear (ou *momentum*) de uma partícula do fluído, já que um fluxo de fluido envolve muitas partículas, de forma que a segunda lei de Newton deve ser modificada para que seja aplicada a um sistema de partículas. Note que a massa de uma partícula deve ser constante. Para estender a Eq. (3.6) a múltiplas partículas, aplica-se a segunda lei de Newton a cada partícula e somam-se todas as equações. As forças internas, definidas como as forças entre as partículas do sistema, se cancelam, de forma que

(ELGER, et al., 2013):

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \tag{3.7}$$

onde $m_i \vec{v}_i$ é a quantidade de movimento (ou quantidade de movimento linear, ou momento linear, ou ainda *momentum*) da i-ésima partícula e $\left(\sum \vec{F}\right)_{ext}$ são as forças externas ao sistema. Ainda, considere que:

$$(Quantidade\ total\ de\ momentum\ do\ sistema) = \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \tag{3.8}$$

Combinando as Eqs. (3.7) e (3.8), temos que:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{ext} = \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{sistema\ fechado} \tag{3.9}$$

Assim, tomando a segunda lei de Newton para um sistema de partículas, Eq. (3.9), e aplicando o teorema de transporte de Reynolds, Eq. (3.1), ao lado direito da equação, temos que a propriedade extensiva é o momentum e a propriedade intensiva correspondente é o momentum por unidade de massa, que é simplesmente a velocidade. Dessa forma,

$$\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{sistema\ fechado} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{v}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{v}\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.10}$$

Combinando as Eqs. (3.9) e (3.10), obtém-se a *forma geral* da *equação de conservação de quantidade de movimento linear* (ELGER, et al., 2013):

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{ext} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{v}\,\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{v}\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.11}$$

onde $\left(\sum \vec{F}\right)_{ext}$ é a soma das forças externas agindo na matéria contida no volume de controle, $\vec{v}$ é a velocidade do fluxo relativa a um referencial inercial e $\vec{V}$ é a velocidade do fluxo relativa

à superfície de controle.

A Eq. (3.11) pode ser simplificada. Primeiro, assumindo que as partículas dentro do volume de controle tem a mesma velocidade média $\vec{v} = \vec{v}_{VC}$, o primeiro termo no lado direito da equação pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{v}\,\rho\, d\forall = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\int_{VC}\rho\, d\forall\right) = \frac{d(m_{VC}\vec{v}_{VC})}{dt} \tag{3.12}$$

Em seguida, assumindo que a velocidade é uniformemente distribuída à medida que atravessa a superfície de controle, o último termo na Eq. (3.11) pode ser escrito como:

$$\int_{SC} \vec{v}\,\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} = \vec{v}\int_{SC}\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} = \sum_{SC}\dot{m}_o\vec{v}_o - \sum_{SC}\dot{m}_i\vec{v}_i \tag{3.13}$$

Combinando as Eqs (3.11) a (3.13), obtém-se (ELGER, et al., 2013):

$$\left(\sum\vec{F}\right)_{ext} = \frac{d(m_{VC}\vec{v}_{VC})}{dt} + \sum_{SC}\dot{m}_o\vec{v}_o - \sum_{SC}\dot{m}_i\vec{v}_i \tag{3.14}$$

A Eq. (3.14) é a *forma simplificada* da *equação do momentum*.

3.2.1.3. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento Angular

A segunda lei de Newton pode ser utilizada para obter uma equação para o movimento rotacional de um sistema de partículas:

$$\sum\vec{M} = \frac{d\left(\vec{H}_{sis}\right)}{dt} \tag{3.15}$$

onde $\vec{M}$ é o momento e $\vec{H}_{sis}$ é a quantidade de movimento angular (ou *momentum* angular) total de toda a massa que forma o sistema.

Usando a Eq. (3.15) e o teorema do transporte de Reynolds, Eq. (3.1), temos que a propriedade extensiva N_{sis} é a quantidade de movimento angular $\vec{H}_{sis}$, $N_{sis} = \vec{H}_{sis}$ e a

propriedade intensiva η é o *momentum* angular por unidade de massa. O *momentum* angular de um elemento é $\vec{r} \times m\vec{v}$, de forma que $\eta = \vec{r} \times \vec{v}$. Substituindo N_{sis} e η,

$$\frac{d(\vec{H}_{sis})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{v})\rho \, d\forall + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{v}) \, \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.16}$$

Combinando as Eqs. (3.15) e (3.16), obtém-se a *forma integral da equação da conservação da quantidade de movimento angular* (ou equação do momento da quantidade de movimento) (ELGER, et al., 2013):

$$\sum \vec{M} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{v})\rho \, d\forall + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{v}) \, \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.17}$$

onde $\vec{r}$ é um vetor posição que se estende a partir do centro de referência onde o momento está sendo calculado, $\vec{V}$ é a velocidade do fluxo relativa à superfície de controle e $\vec{v}$, a velocidade do fluxo relativa a um referencial inercial.

Se a massa atravessa uma superfície de controle através de uma série de entradas (*inlet*) e saídas (*outlet*) com propriedades uniformemente distribuídas através de cada seção, então a equação da conservação da quantidade de movimento angular se torna (ELGER, et al., 2013):

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{v})\rho \, d\forall + \sum_{SC} \vec{r}_o \times (\dot{m}_o \vec{v}_o) - \sum_{SC} \vec{r} \times (\dot{m}_i \vec{v}_i) \tag{3.18}$$

3.2.1.4. Equação da Conservação da Energia

A primeira lei da termodinâmica estabelece a conservação da energia de um sistema fechado (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2004):

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{sistema\ fechado} \tag{3.19}$$

Os termos Q e W na equação representam o calor (positivo) que entra no sistema e o trabalho (positivo) que sai do mesmo, e o ponto representa a taxa de variação temporal dessas quantidades. E é a energia total do sistema, dada por:

$$E_{sis} = \int_{\forall} e\, dm = \int_{\forall} e\, \rho d\forall \tag{3.20}$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \tag{3.21}$$

e u é a energia interna, V, a velocidade, g, a gravidade e z, a altura, isto é, os termos u, $V^2/2$ e gz representam, respectivamente, a energia interna, cinética e potencial gravitacional por unidade de massa do sistema.

A equação da primeira lei da termodinâmica na forma de volume de controle, portanto, é obtida observando que a propriedade extensiva é a energia ($N_{sis} = E$) e a propriedade intensiva é $\eta = e$, de forma que, substituindo esses valores na Eq. (3.1),

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{sis} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\, \rho d\forall + \int_{SC} e\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.22}$$

Como o sistema e o volume de controle coincidem no instante inicial,

$$\left(\dot{Q} - \dot{W}\right)_{sis} = \left(\dot{Q} - \dot{W}\right)_{CV} \tag{3.23}$$

então as Eqs. (3.19) e (3.22) fornecem a equação integral em forma de volume de controle para a primeira lei da termodinâmica (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2004):

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\, \rho d\forall + \int_{SC} e\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.24}$$

A Eq. (3.24) pode ser expandida. Primeiro, é importante observar que o termo $\dot{W}$ representa a taxa de trabalho (ou a potência) realizada pelo volume de controle, que pode ser convenientemente subdividida em quatro termos:

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cis} + \dot{W}_{outros} \tag{3.25}$$

Esses quatro termos são:

- Trabalho do eixo $\dot{W}_{eixo}$: é a potência transferida através da superfície de controle pelo eixo, que pode ser positiva (quando produzida por uma turbina a vapor, por exemplo) ou negativa (quando consumida por um compressor de um refrigerador, por exemplo);

- Trabalho feito por tensões normais à superfície $\dot{W}_{normal}$: é o trabalho produzido quando forças normais estão agindo na superfície de controle. Lembrando que trabalho é realizado quando uma força $\vec{F}$ age ao longo de um deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$ ($\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$), a taxa de trabalho produzida por essa força é:

$$\dot{W} = \frac{d\left(\vec{F} \cdot d\vec{s}\right)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \tag{3.26}$$

  Para um elemento de área $d\vec{A}$ na superfície de controle, as forças normal e de cisalhamento podem ser escrita em função das tensões normal e de cisalhamento agindo nesse elemento de área. A força normal é $d\vec{F}_{normal} = \sigma_n d\vec{A}$ e a taxa de trabalho produzida, portanto, é (negativo, pois o trabalho feito sobre o volume de controle tem o sinal contrário ao trabalho realizado pelo volume de controle):

$$\dot{W}_{normal} = -\int_{SC} \sigma_n d\vec{A} \cdot \vec{V} = -\int_{SC} \sigma_n \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.27}$$

- Trabalho feito por tensões de cisalhamento na superfície $\dot{W}_{cis}$: analogamente às tensões normais, a força de cisalhamento num elemento de área é $d\vec{F}_{cis} = \tau d\vec{A}$. A taxa de trabalho produzida por essa superfície de controle é dada por:

$$\int_{SC} \tau \, d\vec{A} \cdot \vec{V} = \int_{SC} \tau \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.28}$$

  E como o trabalho produzido sobre o volume de controle é negativo, a taxa de trabalho saindo do volume de controle devido a tensões de cisalhamento é:

$$\dot{W}_{cis} = -\int_{SC} \tau\, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.29}$$

A integral acima pode ser separada em três termos:

$$\dot{W}_{cis} = -\int_{eixos} \tau\, \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{\substack{superfícies \\ sólidas}} \tau\, \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{\substack{entradas/ \\ saíds}} \tau\, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.30}$$

O primeiro termo da direita já foi considerado no trabalho de eixo $\dot{W}_{eixo}$. Em superfícies sólidas, como é o caso da carcaça da turbina, $\vec{V} = 0$, de forma que o segundo termo é nulo. O último termo pode ser nulo escolhendo uma superfície de controle adequada. Se a superfície de controle atravessar cada entrada/saída do sistema perpendicular ao escoamento, então o produto da tensão de cisalhamento τ pelo diferencial de área $d\vec{A}$ (força de cisalhamento $\vec{F}_{cis}$) é perpendicular à velocidade do fluxo $\vec{V}$, de forma que $\vec{F}_{cis} \cdot \vec{V} = 0$. Assim, para uma superfície de controle perpendicular à $\vec{V}$,

$$\dot{W}_{cis} = 0 \tag{3.31}$$

- Outros trabalhos $\dot{W}_{outros}$: energia proveniente de outras fontes pode ser adicionada ao volume de controle, como energia elétrica ou eletromagnética. Na maioria dos problemas, no entanto, esse termo estará ausente.

Assim, $\dot{W}$ pode ser escrito em função dos termos já avaliados:

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} - \int_{SC} \sigma_n \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{cis} + \dot{W}_{outros} \tag{3.32}$$

Substituindo a expressão (3.32) para o trabalho $\dot{W}$ na Eq. (3.24),

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} + \int_{SC} \sigma_n \vec{V} \cdot d\vec{A} - \dot{W}_{cis} - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\, \rho d\forall + \int_{SC} e\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{3.33}$$

Rearranjando essa equação e negligenciando os termos $\dot{W}_{cis}$ e $\dot{W}_{outros}$, pelos motivos já

explicados,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho d\forall + \int_{SC} e\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} - \int_{SC}\sigma_n\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.34}$$

Como $\rho = 1/v$ (v é o volume específico), então:

$$\int_{SC}\sigma_n\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{SC}\sigma_n v\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.35}$$

de forma que:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho d\forall + \int_{SC}(e - \sigma_n v)\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.36}$$

Ainda, para a maior parte dos casos mais comuns de engenharia, a tensão normal agindo na superfície é o negativo da pressão termodinâmica $\sigma_n \approx -p$. E, usando a Eq. (3.21), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho d\forall + \int_{SC}\left(u + \frac{V^2}{2} + gz - (-p)v\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho d\forall + \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\end{aligned} \tag{3.37}$$

Finalmente, observando que $u + pv$ é a entalpia h, então (ELGER, et al., 2013):

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho d\forall + \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{3.38}$$

Que é a forma integral do princípio da conservação de energia.

3.2.2. Forças de Reação na Turbina

A partir das Eqs. (3.11) ou (3.14), é possível estimar a força axial no eixo do turbocompressor ao traçar um volume de controle ao redor da turbina do mesmo. Observe que, se as velocidades $\vec{v}$ e $\vec{V}$ ou $\vec{v}_{VC}$, $\vec{v}_o$ e $\vec{v}_i$, forem conhecidas ou, pelo menos, a componente

paralela à direção axial do eixo do turbocompressor da velocidade for conhecida, então é possível estimar a força de reação na turbina, que é a força exercida pelo mancal axial no eixo. Como a vazão de ar não é constante na turbina, então se espera obter uma expressão para a velocidade dos gases de escape que passam pela turbina em função do tempo, de forma a obter a reação do mancal axial sobre a turbina, também em função do tempo. Da terceira lei de Newton, o princípio da ação e reação, caso se tenha a expressão para a reação na turbina, então se têm também as forças sobre o mancal axial, de forma que é possível estimar os coeficientes de rigidez e amortecimento do mesmo.

Outra maneira de obter as forças de reação na turbina é seguindo a metodologia proposta por (ZHU e ZHANG, 2003), modelando matematicamente essas forças utilizando funções do tipo impulso e degrau unitário, que serão explicadas posteriormente.

3.2.3. Turbina Radial

As turbinas radiais têm sido usadas extensivamente nos turbocompressores automotivos, devido à elevada quantidade de trabalho que esta pode produzir por estágio, sua facilidade de fabricação e superior robustez. Nessas turbinas, a energia é transferida do fluido ao rotor, ao passar de um raio maior, na entrada, para um raio menor, na saída. Para a produção de trabalho positivo, a velocidade tangencial dos gases na entrada do rotor deve ser maior que a velocidade tangencial dos gases na saída, o que é atingido impondo uma velocidade tangencial muito alta na entrada, utilizando um ou múltiplos bocais na entrada, e não permitindo vórtices na vazão de saída da turbina (DIXON e HALL, 2010).

A Figura 3.3 mostra o esquema típico de uma turbina radial e seus diagramas de velocidade (também chamados de triângulo de velocidades). No ponto 2, as pás do rotor da turbina se estendem radialmente para dentro, com curvatura radial e axial, girando parte do fluxo na direção axial, com o objetivo de remover, se não toda, pelo menos grande parte da velocidade tangencial dos gases na turbina (DIXON e HALL, 2010).

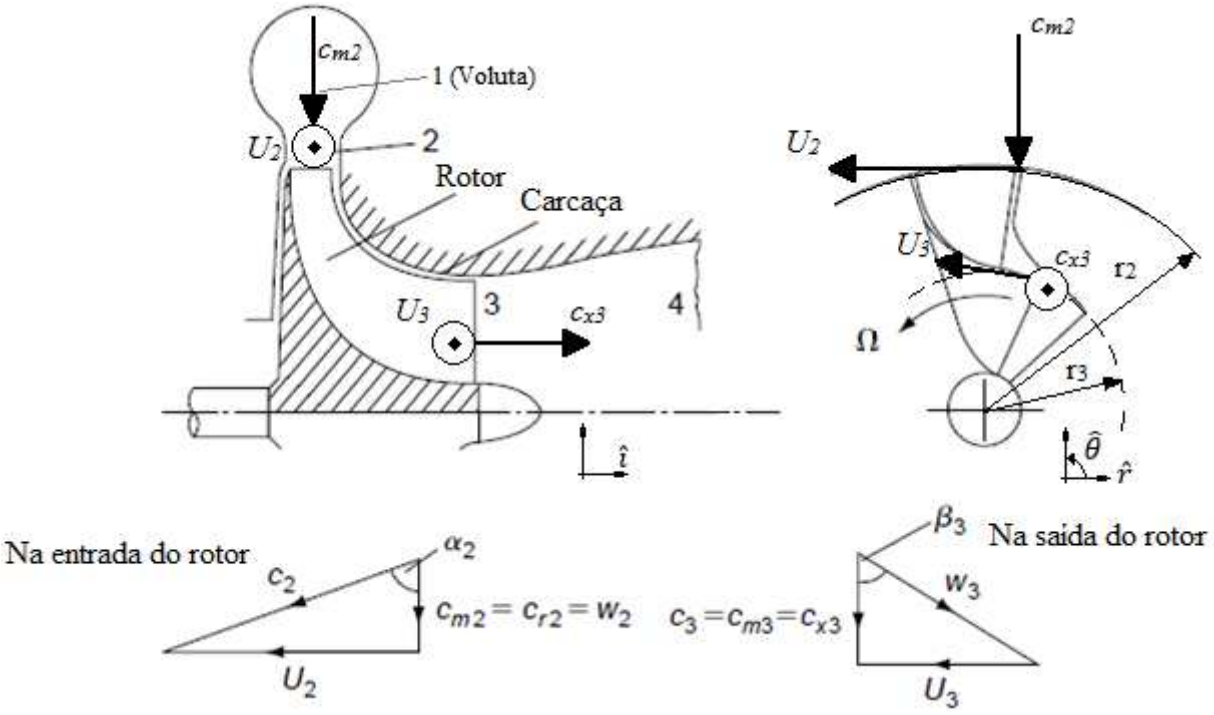


Figura 3.3 – Esquema e Diagrama de Velocidades para a turbina radial

Na Figura 3.3, os triângulos de velocidade são desenhados de forma que a velocidade de entrada relativa, w_2, é radial para dentro e o fluxo absoluto na saída do rotor, c_3, é axial. Essa configuração do triângulo de velocidades é chamada de condição de *design nominal* (DIXON e HALL, 2010).

Para o problema de encontrar as forças de reação na turbina, queremos estimar a velocidade axial de saída da mesma, ou seja, queremos encontrar a velocidade $c_{x3} = c_3$ dos gases de saída. Para estimar essa velocidade, são necessários alguns parâmetros da turbina, como os ângulos de entrada e saída α_2 e β_3, a área de entrada do fluxo dos gases, além de estabelecer a relação geométrica entre os raios de entrada e saída da turbina. A velocidade das pás é simplesmente:

$$U_{2,3} = \Omega r_{2,3} \tag{3.39}$$

A velocidade de entrada dos gases é obtida em função da vazão volumétrica Q de entrada e da área A de entrada da turbina:

$$w_2 = c_{r2} = \frac{Q}{A_2} \tag{3.40}$$

Assim, a velocidade de saída axial desejada é:

$$c_3 = \frac{U_3}{\tan \beta_3} \tag{3.41}$$

Uma vez conhecida a relação geométrica dos diâmetros na entrada e na saída $D_2/D_3 = U_2/U_3$, a expressão para c_3 pode ser avaliada e, portanto, a velocidade axial desejada, calculada.

É importante notar que a variação da velocidade de entrada dos gases, w_2, é o que provoca a vibração axial do eixo. Ainda, nas equações (3.39) a (3.41), admitiu-se que o ar está entrando a uma velocidade w_2 e que o rotor gira a uma rotação Ω. Dessa forma, pretende-se obter as funções $w_2 = w_2(\Omega)$ e $w_3 = w_3(\Omega)$. No entanto, na realidade, as pás da turbina são impelidas pelos gases, ou seja, $\Omega = \Omega(w_2)$, de forma que é importante lembrar que é a velocidade de rotação Ω que depende da velocidade de entrada dos gases.

3.3. Mancais axiais

Quando as cargas axiais no eixo são elevadas, mancais axiais hidrodinâmicos podem ser utilizados (Figura 3.4). O funcionamento de um mancal com lubrificação hidrodinâmica é baseado no aumento de pressão. A geometria do mancal e o movimento relativo entre este e o colar do eixo em movimento aumentam as pressões no fluido lubrificante, presente entre o mancal e o colar, dando a este a capacidade de suportar as cargas aplicadas (VIEIRA, 2011).

Devido ao movimento relativo entre as superfícies, há um gradiente de velocidade no fluido lubrificante entre as superfícies. Se a espessura do fluido varia (e isso ocorre, pois em cada segmento, $a > b$, definindo uma cunha, conforme Figura 3.4), o gradiente de velocidade varia ao longo do segmento (Figura 3.5), gerando uma zona de pressão no fluido lubrificante, para manter a conservação da quantidade de movimento. Essa pressão é responsável pela capacidade de carga axial do mancal (VIEIRA, 2011).

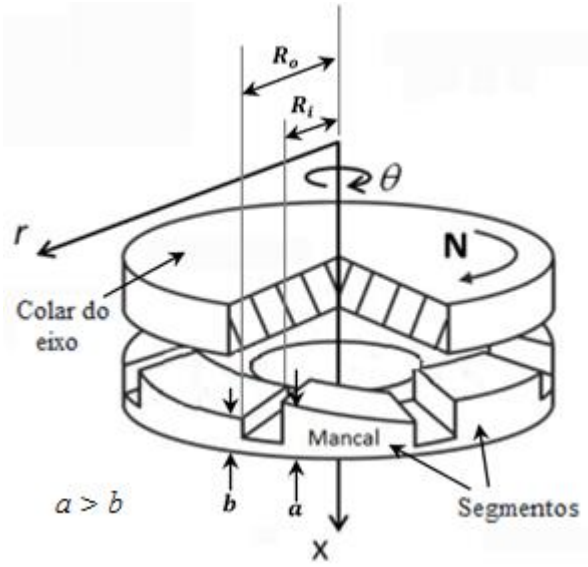


Figura 3.4 – Mancal axial incorporando segmentos fixos e colar rotativo (Adaptado de VIEIRA, 2014)

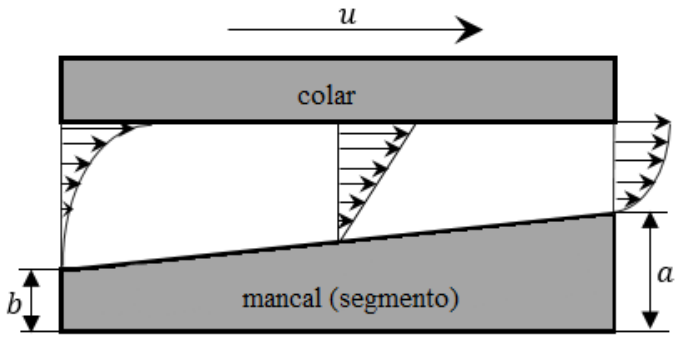


Figura 3.5 – Gradiente de velocidade do fluido lubrificante, com espessura variável

3.4. Equação de Reynolds

A equação diferencial que governa a distribuição de pressão no filme de fluido lubrificante é conhecida como Equação de Reynolds. Para obter tal equação, considere um volume de controle fixo no espaço e estendido através da película de fluido lubrificante, conforme a Figura 3.6. Considere ainda que a vazão mássica escoa através da seção retangular de lados Δx e Δy, fixando o sistema de coordenadas e estendendo o filme de lubrificante através das superfícies do mancal e do colar, conforme a Figura 3.6 (a) e (b). Note que uma superfície é representada pelo plano $z = 0$ (Figura 3.6(a)), enquanto as demais, por uma superfície curva de forma que a espessura do filme em qualquer instante de tempo é função apenas de x e y.

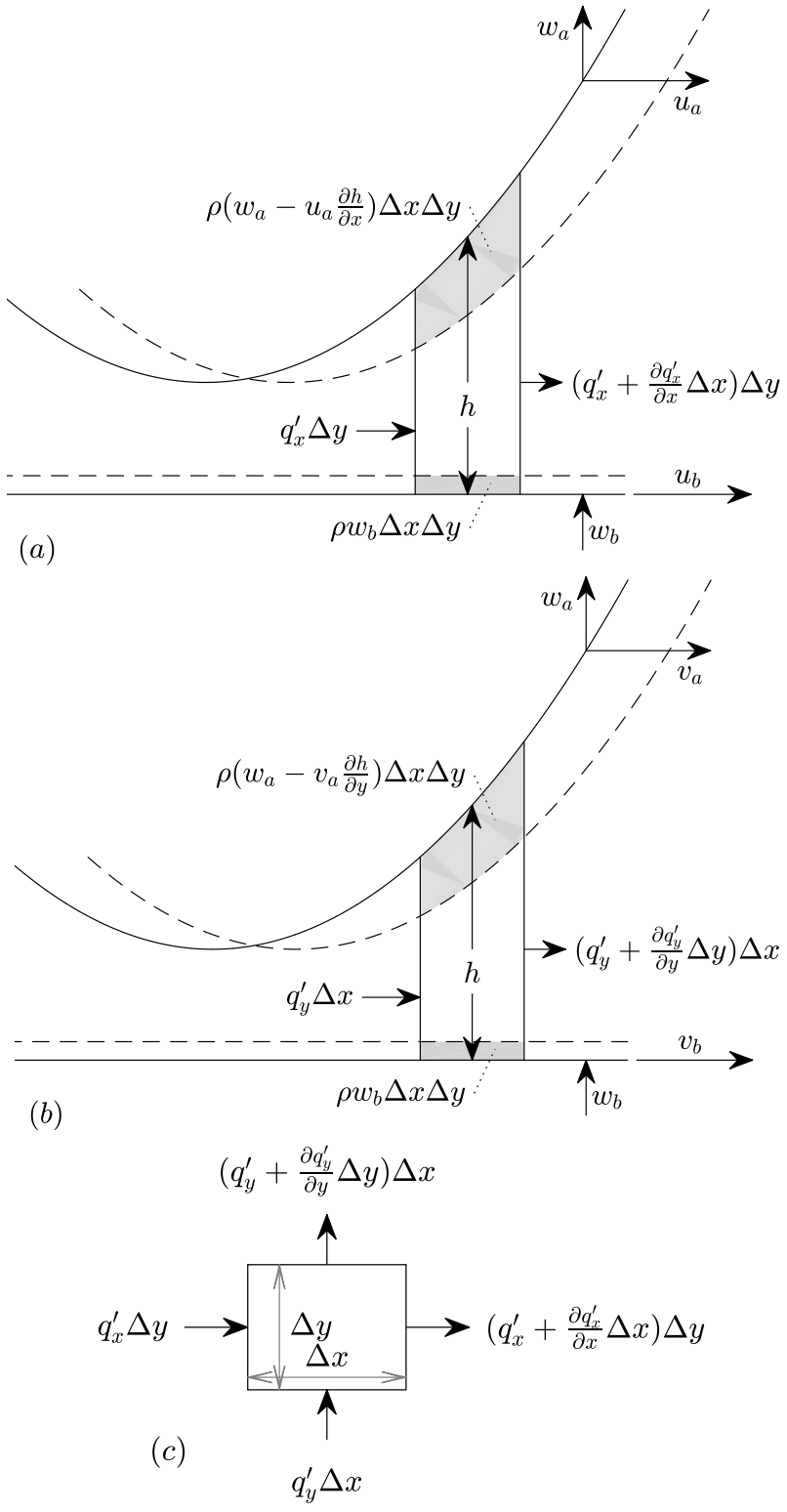


Figura 3.6 – Fluxo mássico através de um volume de controle de seção retangular: (a) plano $x - z$; (b) plano $y - z$; (c) plano $x - y$

A massa total de lubrificante no volume de controle em qualquer instante de tempo é $\rho h\Delta x\Delta y$. A taxa de variação mássica no volume de controle aparece devido à diferença entre a vazão mássica entrando no volume de controle e a vazão mássica saindo do mesmo, e é

$-(\partial \rho q'_x/\partial x)\Delta x \Delta y$ na direção x e $-\left(\partial \rho q'_y/\partial y\right)\Delta x \Delta y$ na direção y. Nessas expressões, q'_i é a vazão volumétrica por unidade de profundidade na direção i, e são dadas por (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994):

$$q'_x = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_a + u_b}{2}h \tag{3.42}$$

$$q'_y = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_a + v_b}{2}h \tag{3.43}$$

Os subscritos a e b referem-se às superfícies superior e inferior, respectivamente. Assim, u_a, v_a e w_a são as componentes da velocidade da superfície superior, nas direções x, y e z, respectivamente, e u_b, v_b e w_b, são as componentes de velocidade da superfície inferior, nas mesmas direções. O princípio de conservação de massa estabelece que a taxa com a qual a massa é acumulada no volume de controle, $(\partial(\rho h)/\partial t)\Delta x \Delta y$, deve ser igual às diferenças entre as taxas nas quais a massa entra e sai do mesmo em cada direção x e y. Portanto (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994):

$$-\frac{\partial \rho q'_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho q'_y}{\partial y} = \frac{\partial \rho h}{\partial t} \tag{3.44}$$

mas, da regra da cadeia,

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = \rho\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.45}$$

e, como o termo $\partial h/\partial t$ representa a taxa de variação da espessura do fluido, pode ser escrito em função das componentes de velocidade das superfícies superior e inferior (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994):

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = \rho\left(w_a - w_b - u_a\frac{\partial h}{\partial x} - v_a\frac{\partial h}{\partial y}\right) + h\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.46}$$

Usando as Eqs. (3.42), (3.43) e (3.46), a Eq. (3.44) pode ser escrita como (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h(u_a+u_b)}{2}\right)+ \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho h(v_a+v_b)}{2}\right)+\rho(w_a-w_b)-\rho u_a\frac{\partial h}{\partial x}-\rho v_a\frac{\partial h}{\partial y}+h\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{3.47}$$

A Eq. (3.47) é a Equação de Reynolds. Nessa expressão, os primeiros dois termos são os termos de Poiseuille e descrevem a taxa de vazão líquida do fluxo devido aos gradientes de pressão dentro da área lubrificada (cujo sentido do escoamento é para fora da região entre as superfícies com movimento relativo); o terceiro e quarto termos são os termos de Couette e descrevem a taxa de fluxo de fluido que se movimenta na mesma direção do movimento da placa (tanto na área de entrada quanto na de saída) devido à velocidade relativa entre as superfícies. O quinto, o sexto e o sétimo termos descrevem a taxa líquida de vazão devido ao movimento de compressão (aproximação das superfícies em z) e o último termo descreve a taxa de fluxo líquida devido à expansão local (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994). Os fluxos podem ser considerados, sem perda de generalidade, eliminando os termos de fluxo lateral $(\partial/\partial y)$ da Eq. (3.47):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{Poiseuille}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h(u_a+u_b)}{2}\right)}_{Couette}+\underbrace{\rho\left(w_a-w_b-u_a\frac{\partial h}{\partial x}\right)}_{Compressão}+\underbrace{h\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\substack{Expansão\\ local}} \tag{3.48}$$

Os termos de Couette podem levar a três efeitos distintos:

$$\begin{array}{rc} Termo\ de\ compressibilidade & \dfrac{h(u_a+u_b)}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} \\ Termo\ de\ deformação\ do\ segmento & \dfrac{\rho h}{2}\dfrac{\partial (u_a+u_b)}{\partial x} \\ Termo\ de\ variação\ da\ espessura\ (cunha) & \dfrac{\rho(u_a+u_b)}{2}\dfrac{\partial h}{\partial x} \end{array} \tag{3.49}$$

O significado de cada termo da Equação de Reynolds será discutido em detalhes.

3.4.1. Termo de Compressibilidade *[(u_a+u_b)h/2](∂ρ/∂x)*

A ação do termo de compressibilidade correlaciona-se com a taxa na qual a densidade do fluido varia na direção do deslizamento, como mostrado na Figura 3.7. Se a densidade do

fluido diminui no sentido de deslizamento, o escoamento de Couette flui na direção dos perfis de velocidade da Figura 3.7. Para manter a continuidade do fluxo de massa, essa discrepância deve ser eliminada gerando um fluxo de Poiseuille, de forma a manter o equilíbrio (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

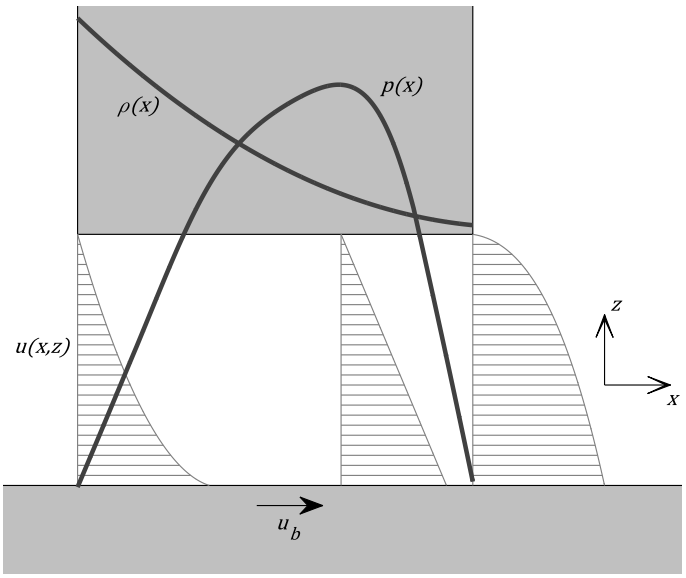


Figura 3.7 – Termo de compressibilidade

É importante notar na Figura 3.7 que a densidade deve diminuir na direção do deslizamento se pressões positivas são geradas. Esse efeito pode aparecer aumentando-se a temperatura do fluido quando este passa pelo mancal. Este mecanismo não é relevante na maioria dos mancais e normalmente aparece em mancais axiais de superfícies paralelas, onde os principais mecanismos de geração de pressão estão ausentes (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

3.4.2. Termo de Deformação do Segmento $(\rho h/2)[\partial(u_a+u_b)/\partial x]$

A ação da deformação considera a taxa na qual a velocidade da superfície muda ao longo da direção do deslizamento. Esse efeito é produzido se as superfícies sólidas são elásticas e as superfícies alongam-se (deformam-se) ao longo do mancal. Para gerar pressões positivas, as velocidades da superfície devem diminuir na direção do deslizamento, de acordo com a Figura 3.8. Essa ação não é encontrada em mancais convencionais (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

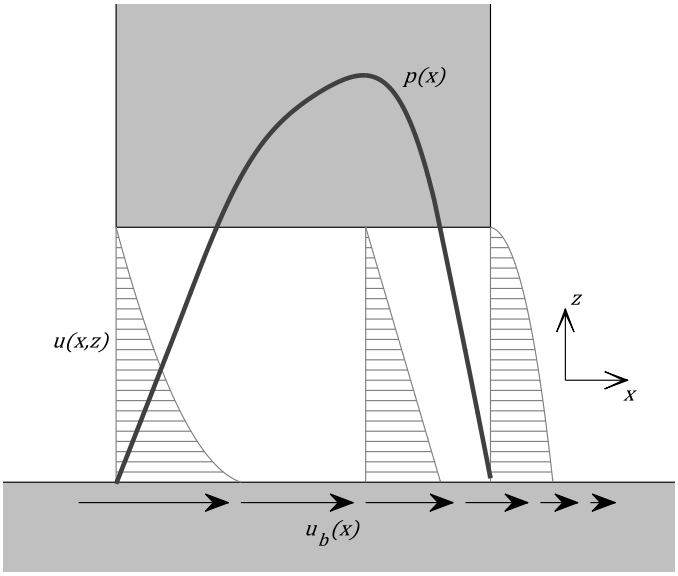


Figura 3.8 – Mecanismo de deformação do segmento

3.4.3. Termo de Variação da Espessura $[\rho(u_a+u_b)/2](\partial h/\partial x)$

A ação da variação da espessura (formação da cunha) é extremamente importante e é a mais conhecida para geração de pressão. Essa ação é ilustrada para um plano deslizante e um segmento de mancal estacionário na Figura 3.9. Em cada uma das seções consideradas, a taxa de fluxo de volume de Couette é proporcional à área do triângulo de altura h e base u. Uma vez que h varia ao longo do segmento do mancal, há uma taxa de fluxo de Couette diferente em cada seção e, para manter a continuidade do fluxo, um contra fluxo de Poiseuille deve aparecer (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

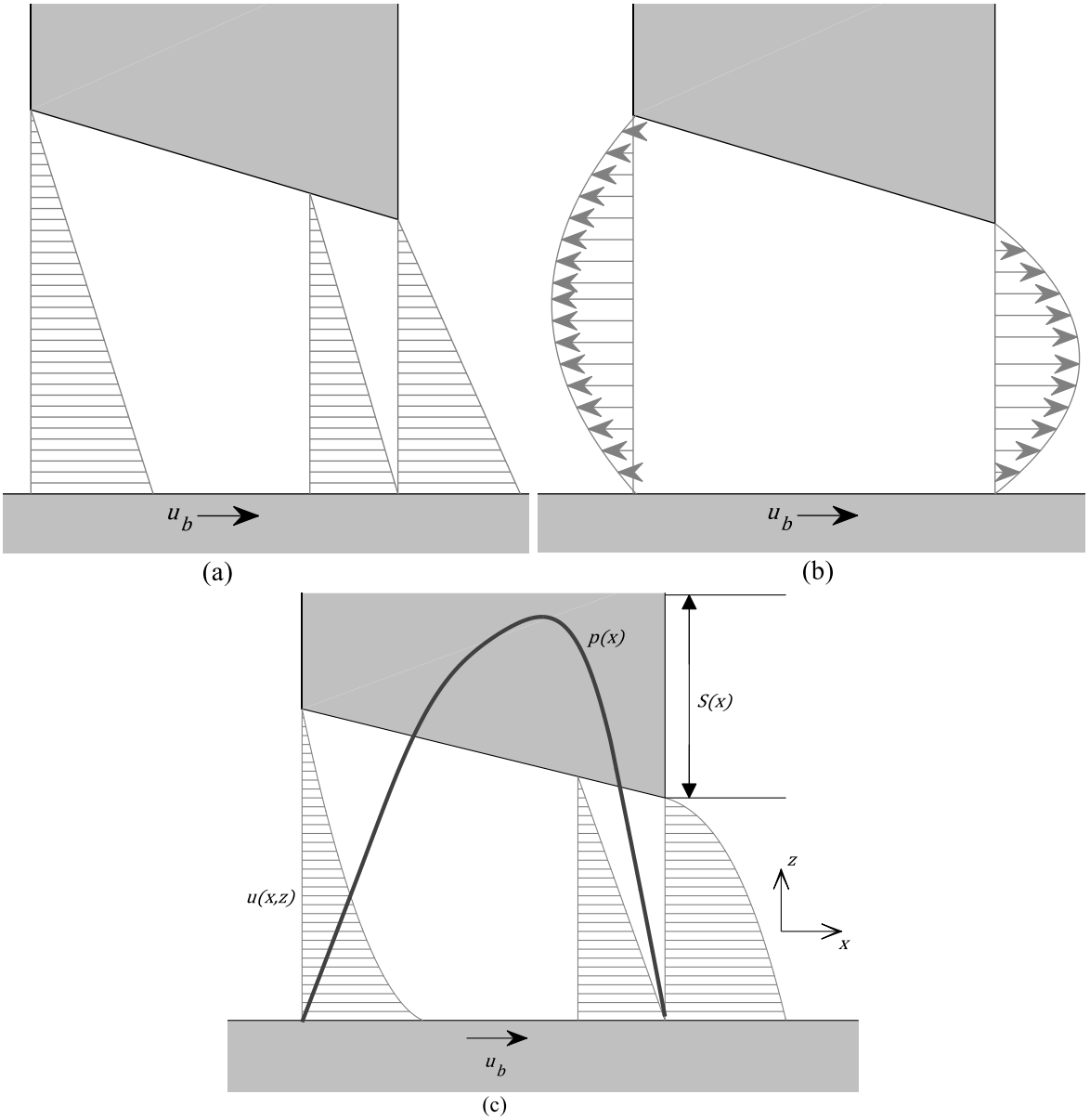


Figura 3.9 – Mecanismo de variação da espessura
(a) Fluxo de Couette; (b) Fluxo de Poiseuille; (c) Fluxo resultante a+b

A pressão gerada devido ao não paralelismo das superfícies é responsável pela capacidade de carga do mancal. Conforme se observa na Figura 3.9, a curva que representa o gradiente de velocidades é côncava próxima à região de entrada e convexa, próxima à região de saída. Apesar das curvas não possuírem o mesmo formato, todos os diagramas de velocidade têm a mesma área, de forma a se conservar a massa do fluxo escoante. Para que ocorra conservação da quantidade de movimento, existe uma zona de geração de pressão no fluido lubrificante, que, como citado anteriormente, é o que faz o mancal ser capaz de suportar o carregamento (VIEIRA, 2011).

3.4.4. Termo de Compressão Normal $\rho(w_a - w_b)$

A ação de compressão normal provê um efeito de amortecimento importante quando as superfícies tendem a ser pressionadas em aproximação relativa. Pressões positivas serão geradas quando a espessura do filme está diminuindo. Os termos de formação de cunha e compressão normal são os dois principais meios de geração de pressão em mancais hidrodinâmicos. Na ausência de deslizamento, este efeito de compressão surge diretamente da diferença das velocidades normais ($w_a - w_b$), como ilustrado na Figura 3.10. Claramente, pressões positivas serão geradas se a espessura do filme estiver diminuindo ($w_b > w_a$) (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

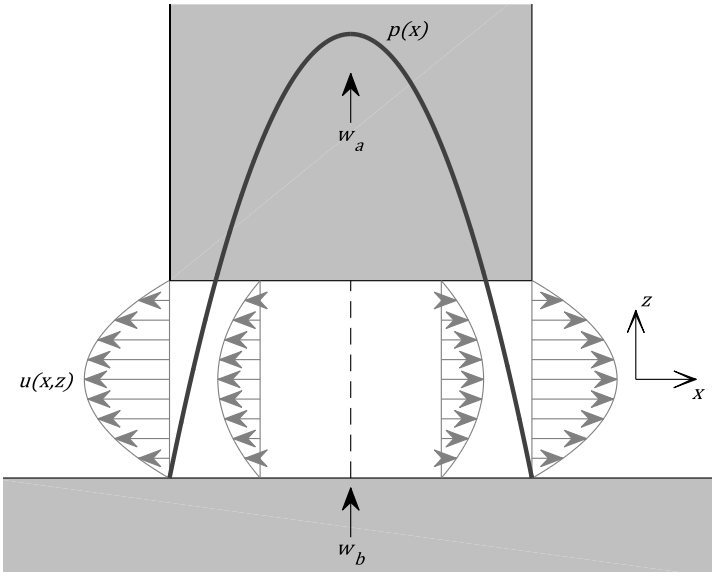


Figura 3.10 – Mecanismo de Compressão Normal

3.4.5. Termo de Compressão de Translação $-\rho u_a(\partial h/\partial x)$

A ação de compressão de translação resulta da translação das superfícies inclinadas. A espessura do filme local pode ser comprimida pelo deslizamento da superfície inclinada do mancal, como mostrado na Figura 3.11. A taxa com a qual a espessura do filme está diminuindo é mostrada na figura. Nota-se que, nesse caso, o perfil de pressão está se movendo através do espaço coberto pelo sistema de coordenadas fixas e a pressão em qualquer ponto fixo é função do tempo (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

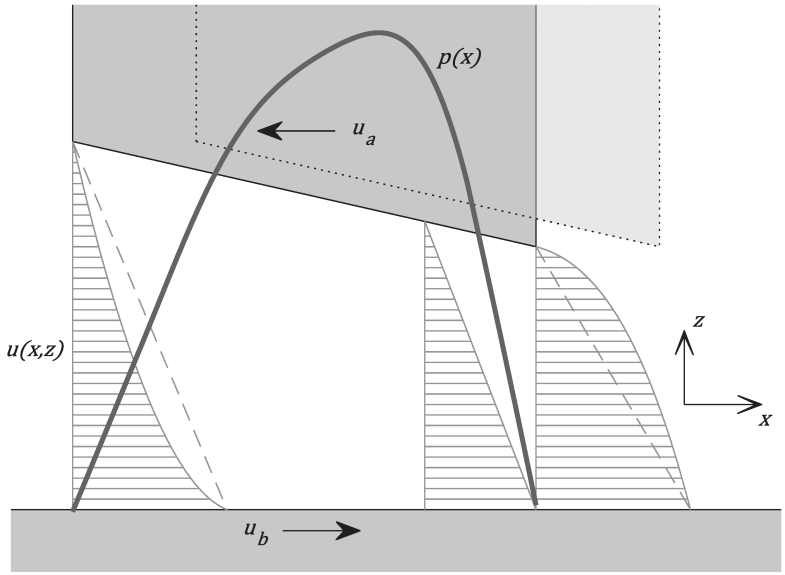


Figura 3.11 – Mecanismo de Compressão de Translação

3.4.6. Termo de Expansão Local h(∂ρ/∂t)

O termo de expansão local aparece devido à taxa de variação no tempo da densidade. O mecanismo de geração de pressão pode ser visualizado considerando a expansão térmica do fluido lubrificante contido entre as superfícies estacionárias do mancal, como mostrado na Figura 3.12.

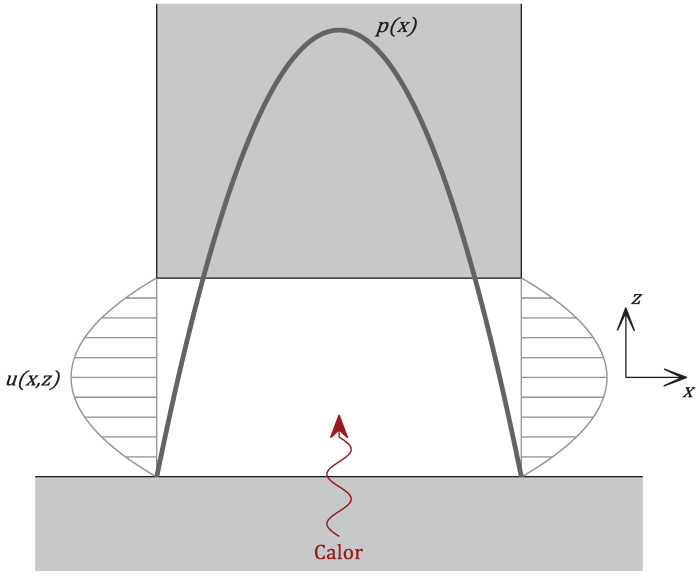


Figura 3.12 – Mecanismo de Expansão Local

Se calor é fornecido ao fluido, este irá se expandir e o excesso do volume terá que ser expulso do espaço entre as superfícies do mancal. Na ausência de velocidades das superfícies, o excesso de fluido deve ser expulso por um fluxo de pressão (Poiseuille). Dessa forma, pressão

é gerada no lubrificante e, para uma capacidade de carga positiva do mancal, $\partial\rho/\partial t$ deve ser negativo, ou seja, o volume de uma dada massa deve aumentar. Expansão local, normalmente um mecanismo de geração de pressão transiente, geralmente não é expressivo na análise de mancais (HAMROCK, SCHMID e JACOBSON, 1994).

3.5. Vibração longitudinal de barras contínuas

O eixo do turbocompressor está sujeito a esforços axiais que são suportados por mancais axiais. Para estudar a vibração axial nesse eixo, observa-se que o eixo pode ser entendido como uma barra linear elástica e estuda-se, portanto, a vibração longitudinal ao longo de seu comprimento.

Assim, seja uma barra elástica de comprimento l, com uma área da seção transversal variável $A(x)$, como mostrado na Figura 3.13. As forças agindo na seção transversal de um elemento de comprimento dx da barra são P e $P + dP$, conforme Figura 3.14, sendo que (RAO, 2007):

$$P = \sigma A = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.50}$$

onde σ é a tensão normal, E, o módulo de elasticidade, u é o deslocamento axial e $\partial u/\partial x$ é a deformação (específica) axial.

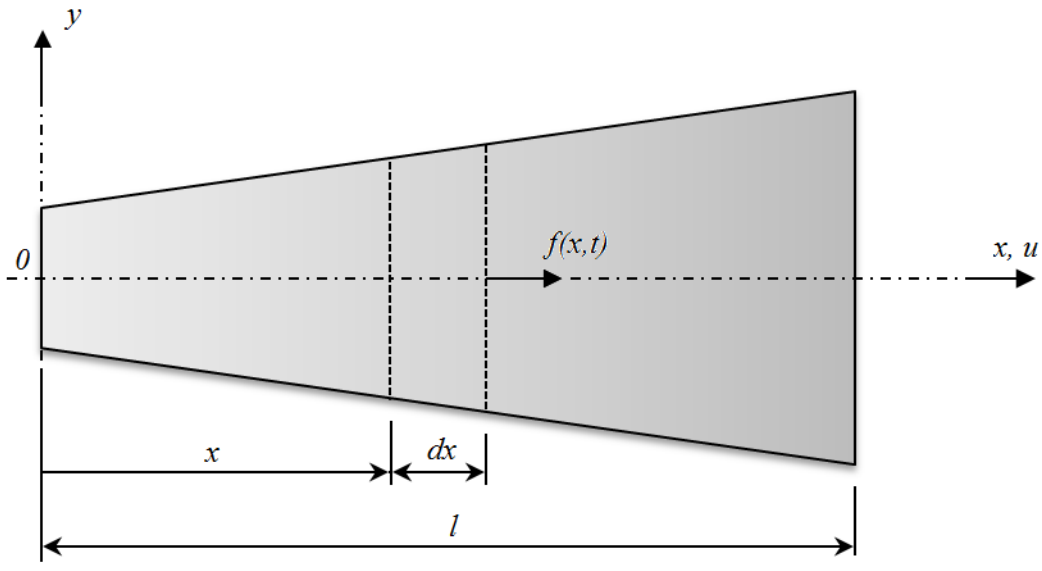


Figura 3.13 – Vibração longitudinal de uma barra

Se $f(x,t)$ for a força por unidade de comprimento agindo na barra, então as forças resultantes agindo na barra na direção x são:

$$(P + dP) - P + fdx = dP + fdx \tag{3.51}$$

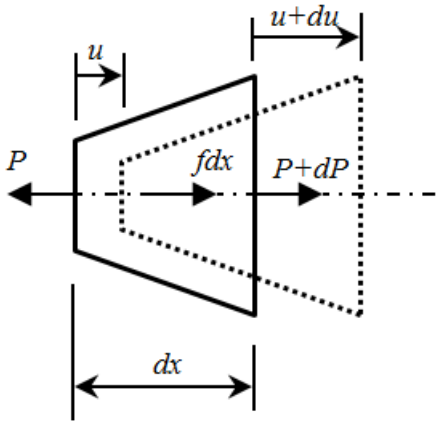


Figura 3.14 – Elemento de comprimento dx da barra

Da segunda lei de Newton, portanto, tendo em conta que dx é infinitesimal, permitindo a aproximação de área constante neste intervalo, tem-se:

$$\underbrace{\rho A dx}_{massa} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{aceleração} = \underbrace{dP + fdx}_{força} \tag{3.52}$$

em que ρ é a densidade mássica da barra. Usando a relação $dP = (\partial P/\partial x)dx$ e a Eq. (3.50), a equação de movimento para a vibração longitudinal de uma barra não uniforme é (MEIROVITCH, 1986):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.53}$$

e, para uma barra uniforme, a equação se reduz a:

$$EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.54}$$

A equação governante para vibração livre do sistema é obtida impondo-se $f(x,t) = 0$, ou seja:

$$EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.55}$$

Definindo o parâmetro $c = \sqrt{E/\rho}$, podemos reescrever a Eq. (3.55) como:

$$c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.56}$$

A solução da Eq. (3.56) pode ser obtida pelo método de separação de variáveis e da transformada de Laplace. O método de separação de variáveis admite que a solução de (3.56) é do tipo:

$$u(x,t) = U(x)T(t) \tag{3.57}$$

onde U e T dependem somente de x e t, respectivamente. Substituindo essa expressão em (3.56), obtém-se:

$$\frac{c^2}{U(x)}\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \tag{3.58}$$

Ainda, pode-se supor que $T(t)$ é do tipo exponencial complexa (harmônica),

$$T(t) = e^{j(\omega t+\phi)} \tag{3.59}$$

Derivando e substituindo $T(t)$ em (3.58), obtém-se

$$\frac{c^2}{U(x)}\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\omega^2 \rightarrow c^2\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\omega^2 U(x) \tag{3.60}$$

que pode ser resolvido pelo método da transformada de Laplace, observando as propriedades da mesma (KREYSZIG, 2011, p. 249-251).

A Eq. (3.55) pode ser expandida a fim de considerar termos de massa, rigidez e amortecimento concentrados em um ponto ao longo da barra. Se uma massa m estiver conectada a barra a uma distância l_m da extremidade, uma mola de rigidez k estiver conectada a uma distância l_k da extremidade ou um amortecedor viscoso c estiver conectado a uma distância l_c da extremidade, $0 \leq l_m, l_k, l_c \leq l$, então esses parâmetros concentrados podem ser modelados utilizando a função delta de Dirac como (BALACHANDRAN e MAGRAB, 2011):

$$m\delta(x - l_m)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad k\delta(x - l_k)u(x,t), \quad c\delta(x - l_c)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{3.61}$$

Esses termos são somados à Eq. (3.55), reescrita como:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\rho A + m\delta(x - l_m)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\delta(x - l_k)u - c\delta(x - l_c)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{3.62}$$

O método para resolver a Eq. (3.62) segue o mesmo procedimento definido anteriormente. Admite-se que $u(x,t) = U(x)e^{j(\omega t + \phi)}$ e, após a substituição de $u(x,t)$ na equação, utiliza-se a transformada de Laplace para resolver a equação resultante.

4. Modelagem Matemática

Um sistema mecânico, em geral, pode ser modelado matematicamente como um sistema de múltiplos graus de liberdade, pois a modelagem de sistemas vibratórios com apenas um grau de liberdade não fornece resultados precisos de sistemas mais complexos (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985). A descrição matemática de sistema de múltiplos graus de liberdade fornece uma representação matricial das equações correspondentes, que podem ser convenientemente analisadas com um computador, devido ao avanço computacional que se têm observado nos últimos tempos.

O número de graus de liberdade de um sistema é igual ao número mínimo de coordenadas independentes necessárias para a completa descrição do comportamento do sistema vibratório ao longo do tempo. Tal sistema é normalmente dado como um modelo idealizado (modelo matemático), que contém as características essenciais do problema real. Se o modelo é descrito com apenas um grau de liberdade, então diz-se que é um sistema de 1GDL, e, caso contrário, como um sistema de múltiplos GDL (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985). Para um sistema 1GDL, a equação de movimento do sistema pode ser escrita simplesmente como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = R(t) \tag{4.1}$$

ou, na forma padrão ($\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\xi = c/2m\omega_n$ e $r(t) = R(t)/m$) como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = r(t) \tag{4.2}$$

Se vários graus de liberdade forem necessários para a descrição adequada da modelagem da vibração do sistema, então várias técnicas podem ser utilizadas para se obter o modelo matricial do sistema, dentre as quais se destaca o modelo por elementos finitos, que fornece um sistema de equações diferenciais de segunda ordem para o vetor posição:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{r(t)\} \tag{4.3}$$

onde $[M]$ é a matriz de inércia do sistema e está associada com a energia cinética do sistema e, portanto, com as forças inerciais, $[C]$ é a matriz de amortecimento, associada com a energia dissipativa do sistema e com as forças dissipativas e $[K]$, a matriz de rigidez, associada com a

energia potencial do sistema e com as forças elásticas conservativas. $\{x(t)\}$ é o vetor de graus de liberdade e o ponto indica a derivada no tempo do vetor e $\{r(t)\}$ é o vetor de excitação do sistema.

4.1. Modelo do Eixo por Elementos Finitos

Para se obter as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ dadas na Eq. (4.3), o método dos elementos finitos pode ser utilizado. Este método consiste em aproximar as equações do sistema contínuo por um conjunto de equações discretas para os graus de liberdade nos nós do sistema, distribuídos numa malha. As matrizes globais são obtidas após a montagem das matrizes elementares, dadas para cada elemento discreto do sistema. A matriz elementar de massa é dada por (COOK, et al., 2002):

$$[M_e] = \int_{\forall} \rho [N]^T [N] d\forall \tag{4.4}$$

enquanto que a matriz elementar de rigidez é dada por (COOK, et al., 2002):

$$[K_e] = \int_{\forall} [B]^T [D][B] d\forall \tag{4.5}$$

Nestas expressões, a matriz $[N] = [N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_n]$ é a matriz com as funções de forma (ou funções de interpolação), utilizadas para modelar o elemento e $[B] = [\partial][N]$ é matriz das derivadas das funções de forma.

4.1.1. Elemento linear

Para uma barra linear elástica, homogênea e isotrópica, o elemento utilizado é mostrado na Figura 4.1.

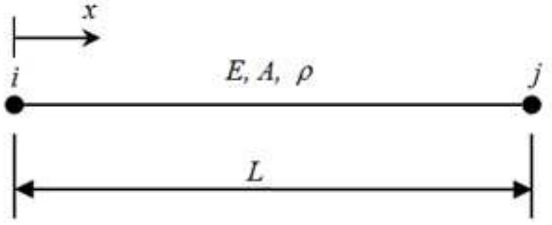


Figura 4.1 – Elemento de barra linear

Esse elemento tem uma seção transversal constante de área A, módulo de elasticidade E e densidade ρ e os nós i e j estão separados por uma distância L. A matriz com as funções de forma desse elemento é dada por:

$$[N] = [N(x)] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

A matriz $[B]$, nesse caso, é simplesmente $[B] = d[N(x)]/dx$ e o elemento de volume é $d\forall = Adx$. Para o problema de tração axial unidimensional, a matriz $[D]$ da Eq. (4.5) é simplesmente o módulo de elasticidade do material, $[D] = E$. Assim, substituindo esses valores nas integrais (4.4) e (4.5), obtém-se as matrizes elementares de massa:

$$[M_E] = \int_0^L \rho[N]^T[N]Adx = \frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

e rigidez do elemento:

$$[K_E] = \int_0^L [B]^T E[B]Adx = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

4.1.2. Elemento quadrático

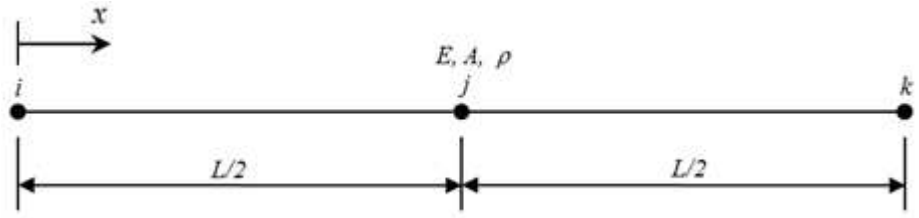


Figura 4.2 – Elemento de barra quadrático (nós equidistantes)

Uma segunda aproximação para os elementos de barra é utilizar funções de forma quadrática. Neste caso, o elemento tem três nós, sequencialmente numerados, i, j e k, separados a uma distância $L/2$ entre si. O elemento tem seção transversal constante, com área A, módulo de elasticidade E e densidade ρ. As funções de forma utilizadas são:

$$[N(x)] = \left[\left(2\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{L}\right) + 1\right) \quad \left(-4\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{L}\right)\right) \quad \left(2\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)\right)\right] \tag{4.9}$$

A matriz elementar de massa, portanto, é dada por:

$$[M_E] = \frac{\rho AL}{30}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

e a matriz elementar de rigidez é dada por:

$$[K_E] = \frac{EA}{3L}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

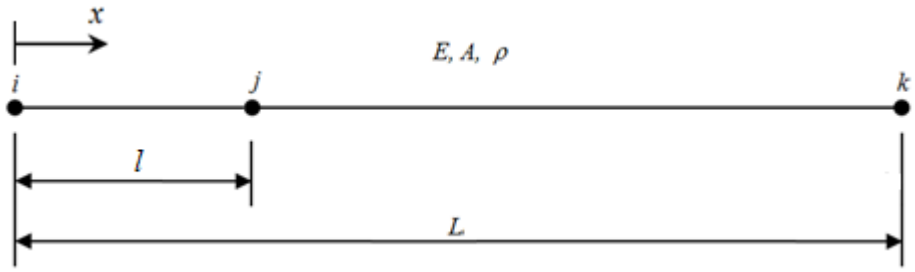


Figura 4.3 – Elemento de barra quadrático

Se usarmos um elemento cujo nó j não se encontra na distância média entre os nós i e k, então o elemento tem as seguintes funções de forma:

$$[N(x)] = \left[\left(\frac{1}{Ll}x^2 - \frac{L+l}{Ll}x + 1\right) \quad \left(\frac{1}{l(l-L)}x^2 - \frac{L}{l(l-L)}x\right) \quad \left(\frac{1}{L(L-l)}x^2 - \frac{l}{L(L-l)}x\right)\right] \tag{4.12}$$

A matriz elementar de massa é:

$$[M_E] = \frac{\rho A L^3}{l^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{l}{L}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{l}{L} + \frac{1}{30} & \frac{2L-5l}{60(l-L)} & \frac{1}{6}\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \frac{l}{20(l-L)} \\ & \frac{L^2}{30(L-l)^2} & \frac{l}{60}\frac{3L-5l}{(L-l)^2} \\ sim. & & l^2\left(\frac{5l-4L}{30L(l-L)^2} + \frac{1}{3L^2}\right) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

e a matriz de rigidez é:

$$[K_E] = \frac{EA}{3L}\begin{bmatrix} \left(\frac{L}{l}\right)^2 + 3 & \frac{L^3}{l^2(l-L)} & \frac{L^2}{l(L-l)} - 3 \\ & \frac{L^4}{l^2(l-L)^2} & -\frac{L^3}{l(L-l)^2} \\ sim. & & \frac{L^2}{(L-l)^2} + 3 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

É importante notar que as matrizes dadas nas Eqs. (4.13) e (4.14) fornecem as matrizes (4.10) e (4.11) ao substituir $l = L/2$.

4.1.3. Matriz de amortecimento

Para materiais metálicos, o amortecimento estrutural é normalmente pequeno, de forma que, independente da sua verdadeira forma de ação, seu efeito de dissipação de energia é suficientemente bem modelado admitindo que seja equivalente a um amortecimento viscoso, isto é, a força de amortecimento é proporcional à velocidade ($[C]\{\dot{x}\}$). Um modelo para obter a matriz de amortecimento, conhecido como amortecimento de Rayleigh, é o modelo de amortecimento proporcional (COOK, et al., 2002).

Esse modelo define a matriz global de amortecimento $[C_G]$ como uma combinação linear das matrizes globais de massa e rigidez (COOK, et al., 2002):

$$[C_G] = \alpha[M_G] + \beta[K_G] \tag{4.15}$$

Essa equação faz com que o amortecimento seja dependente da frequência, conforme mostra a Figura 4.4. Para um sistema 1GDL, o amortecimento proporcional é simplesmente $c = \alpha m + \beta k$, que fornece o seguinte valor para o amortecimento crítico:

$$\frac{1}{m}(\alpha m + \beta k) = 2\xi\omega \rightarrow \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega} + \beta\omega\right) \tag{4.16}$$

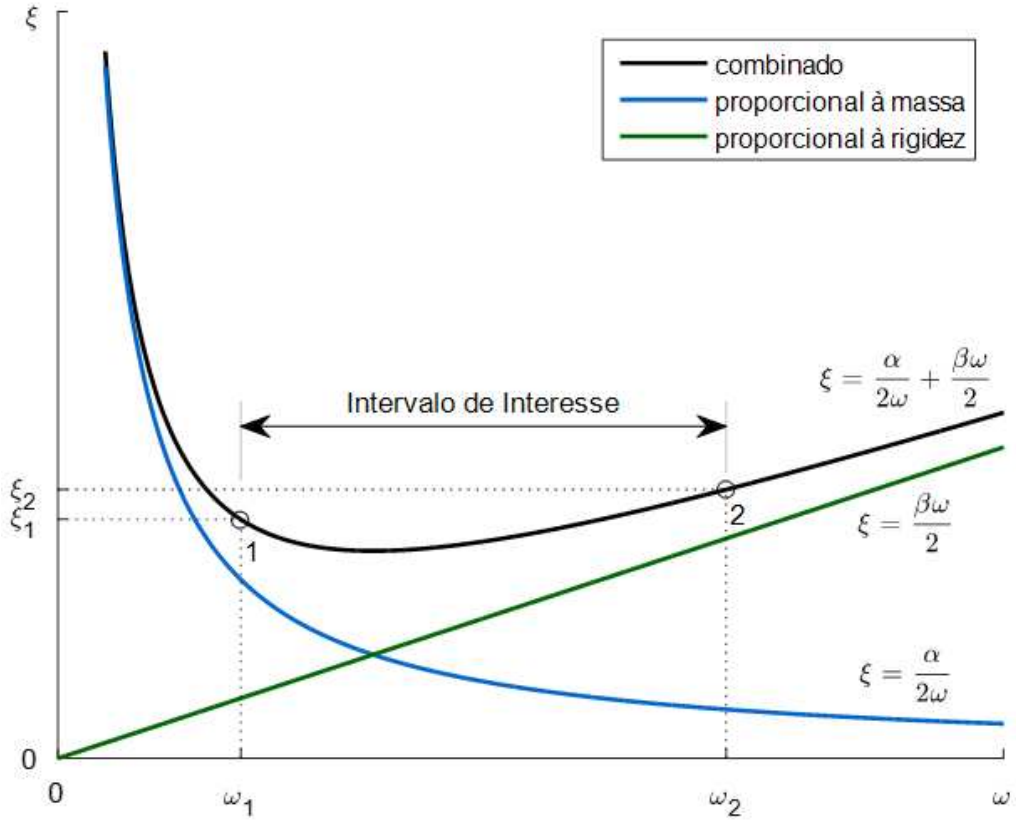


Figura 4.4 – Fator de amortecimento crítico no modelo de amortecimento proporcional

Selecionando um espectro desejado de trabalho, identificado como o intervalo de interesse na Figura 4.4, e escolhendo os valores desejados de ξ nos pontos 1 e 2, obtém-se, da Eq. (4.16) (COOK, et al., 2002):

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$
$$\beta = \frac{2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \tag{4.17}$$

O termo $\alpha[M_G]$ na Eq. (4.15) amortece os modos de baixa frequência mais fortemente, enquanto que o termo $\beta[K_G]$ amortece os modos de alta frequência. O amortecimento proporcional pode ser entendido como uma imersão da estrutura em um fluido não físico, cuja viscosidade tende ao infinito, para movimentos de corpo rígido da estrutura ($\omega = 0$). Para modos de alta frequência, a viscosidade age de forma a amortecer o movimento relativo dos

graus de liberdade, aumentando seu efeito com o aumento da frequência. Portanto, o termo $\beta[K_G]$ pode ser utilizado para amortecer vibrações de alta frequência não físicas (ruído), de respostas simuladas (COOK, et al., 2002).

4.1.4. Elemento de disco rígido

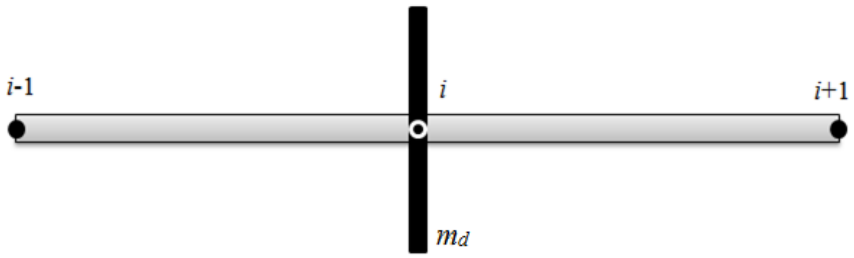


Figura 4.5 – Modelo do disco rígido

Um disco rígido é um elemento cujas dimensões da área da seção transversal são significativamente maiores que seu comprimento, o qual, neste caso, passa a ser sua espessura, conforme mostrado na Figura 4.5. Ao invés de modelar como um eixo, obtendo a distribuição da massa ao longo de seu comprimento, é suficiente colocar todo o disco num único nó e somar, na matriz de massa global, na posição referente ao nó onde se encontra o disco rígido, sua massa:

$$[M_d] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & m_d & \cdots & 0 \\ & & \downarrow & \ddots & \vdots \\ & & i & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \qquad (4.18)$$

Como o disco apresenta dimensão axial muito pequena, comparada ao seu diâmetro, os efeitos de elasticidade, inerentes ao elemento de eixo, não ocorrem no elemento de disco, sendo muito maior sua contribuição ao modelo em termos de massa e inércia.

4.1.5. Mancais

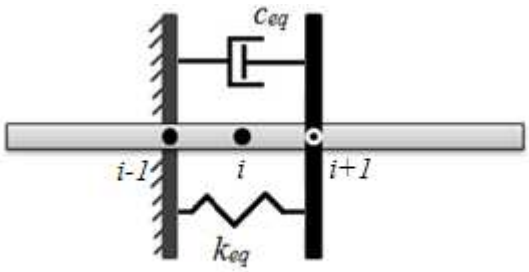


Figura 4.6 – Modelo do mancal axial

Os mancais são modelados através de seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, conforme ilustra a Figura 4.6. Nessa figura, o nó $i-1$ representa a posição do mancal axial, o nó $i+1$, a posição do colar do eixo e o nó i, a região por onde escoa o filme de óleo entre o mancal e o colar. Para obter os coeficientes equivalentes do mancal, é necessário seguir a metodologia proposta por Vieira (2014), resumida a seguir. Tal metodologia matemática segue uma lógica, cujo objetivo final é obter as distribuições de pressão e temperatura do filme de óleo, a capacidade de carga do mancal e, finalmente, os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do filme (VIEIRA, 2014).

Para se obter a distribuição de pressão, é necessário utilizar a Equação de Reynolds (Eq. (3.47)). Contudo, admite-se que a pressão não varia na direção da espessura de fluido, devido à dimensão reduzida dessa espessura comparada às outras dimensões do mancal, de forma que tal distribuição de pressão é calculada sobre o plano do mancal, de forma bidimensional. Ainda, utilizam-se coordenadas polares para descrever a equação, conforme mostrado na Figura 4.7, de forma que a Equação de Reynolds pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(h^3 r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=6v_{\theta b}\mu\frac{\partial h}{\partial\theta}+12\mu r\frac{\partial h}{\partial t} \tag{4.19}$$

onde r e θ são as coordenadas polares e $v_{\theta b}$ é a velocidade linear do colar do eixo

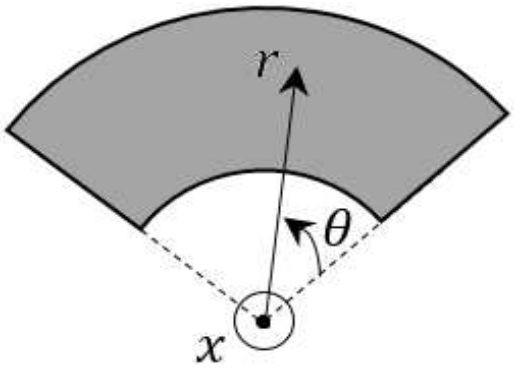


Figura 4.7 – Sistema de coordenadas para o segmento de mancal

Para se calcular a distribuição de pressão no mancal considera-se que este está em sua posição de equilíbrio, o que implica que a espessura do fluido mantém-se constante, isto é, $\partial h/\partial t = 0$. Ainda, é importante observar que a Eq. (4.19) não considera a possibilidade de variação da viscosidade ao longo do filme de óleo, de forma que é necessário utilizar a Equação de Reynolds generalizada (VIEIRA, 2014):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_2\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_2\frac{\partial p}{\partial r}\right)=\Omega r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \tag{4.20}$$

em que Ω é a velocidade de rotação do colar do eixo (isto é, $v_{\theta b}=\Omega r$) e as funções F_0, F_1 e F_2 são obtidas através das seguintes integrais, cujos limites se estendem ao longo da espessura de fluido h, ou seja, do colar do eixo até o mancal:

$$F_0=\int_0^h\frac{1}{\mu}dx \quad F_1=\int_0^h\frac{x}{\mu}dx \quad F_2=\int_0^h\frac{x}{\mu}\left(x-\frac{F_1}{F_0}\right)dx \tag{4.21}$$

Juntamente com o cálculo da distribuição de pressão, deve ser feito o cálculo da distribuição de temperatura no filme de óleo, pois esta é necessária para se determinar a viscosidade do fluido, o que influencia diretamente o cálculo da pressão. Esta influência aparece no cálculo das integrais F_0, F_1 e F_2, que estimam uma média da viscosidade ao longo do filme de óleo para o futuro cálculo da pressão.

Para se obter a distribuição da temperatura do fluido é utilizada a Equação da Energia, que considera as trocas de calor tanto por condução quanto por convecção, além da geração de calor causada pela dissipação viscosa devido ao cisalhamento do fluido. A Equação da Energia,

diferentemente da Equação de Reynolds, leva em consideração a variação da temperatura com a espessura do filme de óleo, de forma que é necessária sua resolução de forma tridimensional. Esta equação, escrita para o caso específico de mancais axiais, em coordenadas cilíndricas, é dada por:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \mu \Phi \quad (4.22)$$

onde o termo Φ é o termo fonte, ou termo de dissipação viscosa, dado por:

$$\Phi = \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right)^2 \quad (4.23)$$

Nestas expressões, T é a temperatura, ρ, a massa específica do fluido, k, sua condutividade térmica e c_p, o calor específico, considerados constantes. Ainda, u, v_r e v_θ são, respectivamente, as velocidades nas direções axial x, radial r e circunferencial θ, conforme ilustra a Figura 4.8.

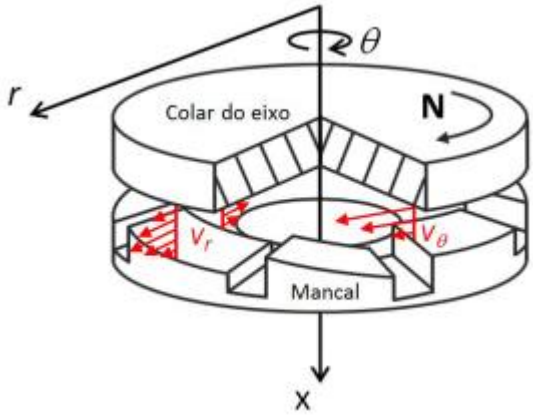


Figura 4.8 – Perfis de velocidades nas direções radial e circunferencial (VIEIRA, 2014)

Obtidos as distribuições de pressão e temperatura do filme de óleo (que pode ser feito resolvendo as equações (4.20) e (4.22) através, por exemplo, do Método dos Volumes Finitos), é possível calcular a carga axial suportada pela pressão gerada do fluido. Este cálculo é feito integrando-se a pressão ao longo do filme de óleo sobre a área do mancal, que, em coordenadas polares, é simplesmente:

$$W = \int_r \int_\theta p \, r d\theta dr \tag{4.24}$$

Por fim, os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do mancal axial são calculados a partir da carga suportada pelo mesmo, aplicando-se pequenas perturbações com relação à posição de equilíbrio do mancal, considerando-se equações linearizadas simples. A posição de equilíbrio do mancal é a espessura de fluido com que o mancal é capaz de suportar uma dada carga externa aplicada a dada rotação do eixo.

O cálculo do coeficiente direto de rigidez K_{xx} é feito aplicando-se uma pequena variação na espessura de fluido do mancal h e observando-se a variação na carga axial gerada por esta perturbação, recalculando a equação de Reynolds com o novo valor da espessura:

$$K_{xx} = K_{eq} = \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial h} \cong -\frac{\Delta W}{\Delta h} \tag{4.25}$$

O cálculo do coeficiente direto de amortecimento C_{xx} depende de uma perturbação no termo de variação da espessura de fluido em função do tempo $\dot{h}$, o que equivale a:

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} \neq 0 \tag{4.26}$$

Este termo representa a velocidade de variação da espessura de fluido e deve ser considerado na Equação de Reynolds generalizada (Eq. (4.20)), mostrada novamente abaixo, mas considerando-se a variação da espessura do filme de fluido com o tempo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_2 \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r F_2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) = \Omega r \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{F_1}{F_0}\right) + r\frac{\partial h}{\partial t} \tag{4.27}$$

Assim, aplicando-se uma pequena perturbação na velocidade de variação da espessura do fluido $\dot{h}$, observa-se a variação na carga suportada pelo mancal W, o que permite obter o coeficiente de amortecimento:

$$C_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial W}{\partial \dot{h}} \cong -\frac{\Delta W}{\Delta \dot{h}} \tag{4.28}$$

Após obter estes coeficientes, pode-se introduzi-los no modelo de elementos finitos do sistema rotativo. Ao discretizar o eixo, deve-se posicionar um nó sobre o mancal axial, um segundo sobre o colar e um terceiro entre os mesmos. Assim, o terceiro nó situa-se fisicamente na região por onde escoa o óleo, responsável pela capacidade de suportar a carga do mancal. Portanto, obtidos os coeficientes equivalentes do mancal, esses coeficientes são somados nas matrizes de rigidez e amortecimento na posição referente ao terceiro nó, isto é, entre os mancais e o colar:

$$[K_m] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & k_{eq} & \cdots & 0 \\ & & \downarrow & \ddots & \vdots \\ & & i & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \quad [C_m] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & c_{eq} & \cdots & 0 \\ & & \downarrow & \ddots & \vdots \\ & & i & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \tag{4.29}$$

4.2. Solução geral do sistema

A resposta do sistema pode ser obtida integrando-se numericamente o sistema de equações (4.3). Neste trabalho, para integração numérica do sistema de equações, foi utilizado o método de Newmark (BATHE, 1996, p. 780-782), cujo algoritmo encontra-se no Anexo C. No entanto, muitos dos resultados esperados podem ser estudados a partir do modelo de estados do sistema, cuja vantagem reside no fato de que vários resultados da teoria geral de sistemas lineares podem ser aplicados, obtidos a partir da teoria de controle de sistemas (OGATA, 2010).

4.2.1. Modelo de espaço de estados

O sistema de equações representado pela Eq. (4.3) é representado novamente abaixo adicionado das condições iniciais:

$$\begin{gathered} [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{r(t)\} \\ \{x(0)\} = \{x_0\}, \quad \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\} \end{gathered} \tag{4.30}$$

Esse sistema de f equações pode ser reescrito na forma de espaço de estados definindo o vetor de estados:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

Pode-se observar que o vetor de estados $\{y(t)\}$ de ordem n tem o dobro da dimensão do vetor posição $\{x(t)\}$, isto é, $n = 2f$, e suas componentes são chamadas de variáveis de estado.

Definindo essas variáveis de estados, é possível reescrever a Eq. (4.30), adicionada da equação trivial $\{\dot{y}(t)\} = \{\dot{y}(t)\}$, na forma da equação de estados (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\begin{gathered} \{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} + \{b(t)\} \\ \{y(0)\} = \{y_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{Bmatrix} \end{gathered} \tag{4.32}$$

Nesta equação, a matriz $[A]$ é dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

e o vetor de excitação $\{b(t)\}$ é dado por:

$$\{b(t)\} = \begin{Bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}\{r(t)\} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

Essa representação do sistema de equações (4.3) apresenta algumas vantagens, pois as equações de estado podem ser estudadas utilizando-se de resultados da teoria de sistemas lineares. Ainda, a equação de estados é compatível com e facilmente resolvida por programas computacionais. Sua óbvia desvantagem é o dobro da ordem do sistema (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985).

4.2.2. Matriz fundamental e Solução Geral do sistema

Dado o sistema de equações diferenciais lineares homogêneo de ordem n:

$$\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} \tag{4.35}$$

sempre existe um sistema fundamental de n vetores solução linearmente independentes $\{\varphi_i(t)\} = \{\varphi_i\}$, $i = 1(1)n$, que coincidem para o instante $t = 0$ com os n vetores unitários $\hat{e}_i$ (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{\varphi_i(0)\} = \hat{e}_i, \quad i = 1(1)n \tag{4.36}$$

e que satisfazem a Eq. (4.35):

$$\{\dot{\varphi}_i\} = [A]\{\varphi_i\}, \quad i = 1(1)n \tag{4.37}$$

Esse conjunto solução de vetores formam as colunas da matriz quadrada $n \times n$:

$$[\Phi(t)] = [\Phi] = [\varphi_1|\varphi_2|\dots|\varphi_n] \tag{4.38}$$

que é chamada de matriz fundamental. A matriz fundamental possui algumas propriedades características (Anexo A). Segue das Eqs. (4.37) e (4.38) que a equação diferencial descrita por (4.35) também é satisfeita pela própria matriz $[\Phi]$ (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\left[\dot{\Phi}\right] = [A][\Phi], \quad [\Phi(0)] = [I] \tag{4.39}$$

A matriz fundamental pode ser utilizada para se obter a resposta do sistema representado pela Eq. (4.32). A solução geral $\{y(t)\}$ desse sistema de equações é obtida somando-se à solução homogênea $\{y_h(t)\}$ uma solução particular qualquer $\{y_p(t)\}$, isto é, $\{y(t)\} = \{y_h(t)\} + \{y_p(t)\}$. A solução do sistema de equações diferenciais homogêneo (Eq. (4.35)), com condições iniciais $\{y(0)\} = \{y_0\}$ é obtida como uma combinação linear das soluções fundamentais $\{\varphi(t)\}$ (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{y_h(t)\} = \sum_{i=1}^{n} \{\varphi_i(t)\} y_i(0) \tag{4.40}$$

que pode ser reescrita em notação matricial utilizando-se a matriz fundamental:

$$\{y_h(t)\} = [\Phi(t)]\{y_0\} \tag{4.41}$$

A solução geral do sistema não-homogêneo (Eq. (4.32)), portanto, é:

$$\{y(t)\} = [\Phi(t)]\{y_0\} + \{y_p(t)\} \tag{4.42}$$

A solução particular pode ser obtida através do método de variação das constantes (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{y_p(t)\} = [\Phi(t)] \int_0^t [\Phi(-\tau)]\{b(\tau)\}d\tau = \int_0^t [\Phi(t-\tau)]\{b(\tau)\}d\tau \tag{4.43}$$

cuja prova encontra-se no Anexo B.

4.2.3. Autoproblema

O autoproblema caracteriza o comportamento de um sistema dinâmico (4.35) através de soluções com a propriedade de que o vetor de estados $\{y(t)\}$ e sua derivada $\{\dot{y}(t)\}$ têm a mesma direção no espaço de estados

$$\{\dot{y}(t)\} = \lambda\{y(t)\} \tag{4.44}$$

Se tal solução particular existe, então deve satisfazer não apenas a Eq. (4.35) como também a condição (4.44). Isso implica que as trajetórias, mantendo uma direção constante no espaço de estados, devem satisfazer:

$$\{y(t)\} = \{\tilde{y}\}e^{\lambda t} \tag{4.45}$$

Substituindo a Eq. (4.45) na Eq. (4.35), obtém-se o sistema de equações homogêneo:

$$\lambda\{\tilde{y}\}e^{\lambda t} = [A]\{\tilde{y}\}e^{\lambda t} \rightarrow ([A] - \lambda[I])\{\tilde{y}\} = \{0\} \tag{4.46}$$

que é chamado de autoproblema associado à matriz $[A]$. Existem vetores soluções não triviais

desse problema somente se $([A] - \lambda[I])$ é singular, ou seja,

$$\det([A] - \lambda[I]) = p(\lambda) = 0 \tag{4.47}$$

que é a expressão para o polinômio característico $p(\lambda)$ de grau n, cujas raízes λ são aos autovalores do problema. As soluções não triviais $\{\tilde{y}\}$ associadas aos autovalores λ são os autovetores do problema (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985).

Um ponto importante a ser observado é que, como a matriz $[A]$ não é simétrica, então espera-se que os autovalores desta matriz sejam complexos. Além disso, as $n/2$ primeiras entradas em cada autovetor são associadas aos estados de deslocamento $\{x(t)\}$, enquanto que as demais $n/2$ entradas estão associadas aos estados de velocidade $\{\dot{x}(t)\}$. Da Eq. (4.44), vemos que $\{\dot{x}(t)\} = \lambda\{x(t)\}$, de forma que se espera que a segunda metade do autovetor $\{\tilde{y}\}$, associado ao autovalor λ, seja λ vezes a primeira metade deste autovetor (BALACHANDRAN e MAGRAB, 2011).

Outro ponto importante a ser frisado é que é comum utilizar a expressão *modos de um sistema* para os autovetores determinados a partir do autoproblema associado à forma de espaço de estados (Eq. (4.32)) das equações governantes (4.30). Ainda, cada autovalor tem a seguinte estrutura especial:

$$\lambda_i = -\omega_{ni}\xi_i \pm j\omega_{ni}\sqrt{1 - \xi_i^2} \tag{4.48}$$

ou seja, é possível calcular os parâmetros modais frequência natural (ω_n) e fator de amortecimento (ξ) do modo i a partir dos autovalores λ_i.

4.2.4. Resposta ao impulso

Forças impulsivas podem ser representadas pela função delta de Dirac, definida como (KREYSZIG, 2011):

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$$
$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1 \tag{4.49}$$

Uma propriedade importante da função delta de Dirac é que, para uma função contínua $f(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \tag{4.50}$$

Dessa forma, substituindo essa função na Eq. (4.32), teremos (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{b(t)\} = \{B_I\}\delta(t-t_I) \tag{4.51}$$

onde $\{B_I\}$ é um vetor constante $n \times 1$ e t_I é o instante em que o impulso é aplicado. Assim, a equação de estados de um sistema dinâmico com uma excitação impulsiva é:

$$\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} + \{B_I\}\delta(t-t_I), \quad \{y(0)\} = \{y_0\} \tag{4.52}$$

A solução geral é obtida a partir de (4.42) e é a resposta ao impulso do sistema:

$$\{y_I(t)\} = [\Phi(\mathrm{t})]\{y_0\} + \int_0^t [\Phi(t-\tau)]\{B_I\}\delta(\tau-t_I)d\tau \tag{4.53}$$

Isto é, $\{y_I(t)\}$ é a solução que corresponde a uma entrada impulsiva. Para avaliar a integral (4.53), utilizamos as propriedades da função delta de Dirac (4.49) e (4.50). Portanto, a resposta ao impulso é (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{y_I(t)\} = \begin{cases} [\Phi(t)]\{y_0\} & 0 \leq t < t_I \\ [\Phi(t)](\{y_0\} + [\Phi(-t_I)]\{B_I\}) & t \geq t_I \end{cases} \tag{4.54}$$

Isso significa que uma entrada impulsiva provoca uma mudança do tipo degrau nas variáveis de estado no instante do impulso. A estrutura das matrizes de estado e dos vetores de

excitação para sistemas mecânicos vibratórios, Seção 4.2.1, implica que, para o instante imediatamente após a aplicação do impulso:

$$\begin{Bmatrix} y_I(t_I) \\ \dot{y}_I(t_I) \end{Bmatrix} = [\Phi(t_I)] \begin{Bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [M]^{-1}\{r_I\} \end{Bmatrix} \tag{4.55}$$

Isto é, a aplicação de uma força impulsiva provoca uma mudança nas condições de velocidade $\{\dot{y}\}$ (r_I é a amplitude do impulso). Se o sistema tem condições iniciais nulas, isto é, $\{y_0\} = \{0\}$, então resolver o sistema de equações a uma entrada impulsiva é o mesmo que resolver o sistema de equações homogêneo associado, com uma condição inicial de velocidade, $\{\dot{y}_0\} = [M]^{-1}\{r_I\}$, onde $\{r_I\}$ é um vetor de zeros com a amplitude R_I do impulso no grau de liberdade correspondente ao qual o impulso é aplicado (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985).

$$\{r_I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_I \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow GDL\ em\ que\ o\ impulso\ \acute{e}\ aplicado \tag{4.56}$$

4.2.5. Resposta ao degrau

Uma excitação degrau pode ser representada pela função degrau (ou função de Heaviside), definida como:

$$\theta(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \tag{4.57}$$

Assim, equação de estados de um sistema excitado por um degrau é:

$$\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} + \{B_S\}\theta(t - t_s), \quad \{y(0)\} = \{y_0\} \tag{4.58}$$

Portanto, a resposta ao degrau $\{y_s(t)\}$ é, da Eq. (4.42), dada por:

$$\{y_s(t)\} = [\Phi(\mathrm{t})]\{y_0\} + \int_0^t [\Phi(t-\tau)]\{B_S\}\theta(\tau - t_s)d\tau \tag{4.59}$$

Aplicando a definição do degrau (4.57) e avaliando a integral na equação acima, chega-se à resposta ao degrau (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{y_s(t)\} = \begin{cases} [\Phi(t)]\{y_0\} & 0 \leq t < t_s \\ [\Phi(t)]\{y_0\} + ([I] - [\Phi(t - t_s)])\{y_\infty\} & t \geq t_s \end{cases} \tag{4.60}$$

sendo

$$\{y_\infty\} = -[A]^{-1}\{B_s\} \tag{4.61}$$

Ou seja, a ação de uma força excitadora do tipo degrau provoca uma mudança na posição de equilíbrio do sistema no instante em que o degrau é aplicado. Para sistemas com uma matriz regular $[A]$, $\det([A]) \neq 0$, o movimento do sistema é a vibração natural ao redor da nova posição de equilíbrio (4.61) (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985).

4.2.6. Modelo por Parâmetros Concentrados

O sistema rotativo também pode ser modelado através de um sistema massa-mola-amortecedor de 1GDL, seguindo a abordagem inicialmente proposta por Vieira (2014). Nesse modelo, considera-se que há apenas o movimento relativo entre o colar e o mancal axial e que este ocorre na direção axial, aumentando ou diminuindo a espessura do fluido lubrificante, de acordo com a Figura 4.9. Nessa figura, é possível observar que o mancal é representado como engastado (não possui movimento em nenhuma direção) e o colar do eixo pode se movimentar na direção axial (somente), a qual, por simplicidade, será definida como a direção da coordenada x. As forças externas ΔF são as forças que o mancal axial deve ser capaz de suportar para manter o sistema funcionando corretamente e, no caso do turbocompressor, são devidas aos gases de escape provenientes do motor.

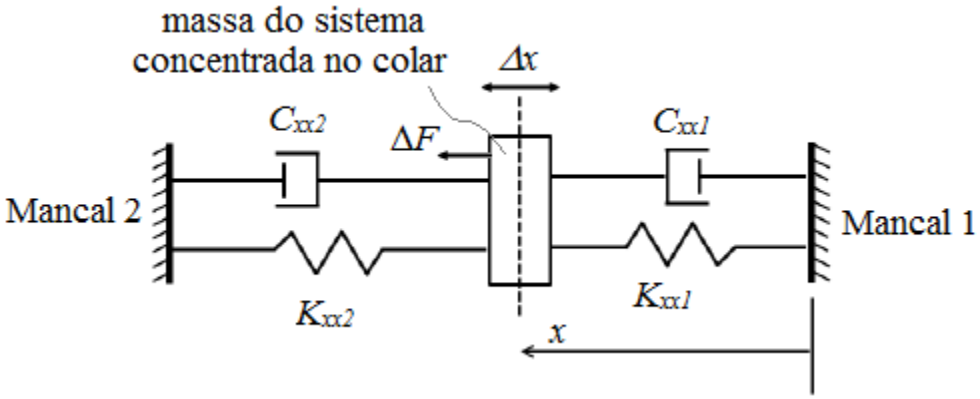


Figura 4.9 – Esquema de molas e amortecedores equivalentes para um sistema com dois mancais

Nesse modelo de parâmetros concentrados, a massa é considerada como sendo o conjunto composto pelo eixo em rotação, colar do eixo, turbina e compressor e a mola e o amortecedor substituem o filme de óleo presente entre os mancais e o colar (VIEIRA, 2014). Como as molas K_{xx1} e K_{xx2} e os amortecedores C_{xx1} e C_{xx2} estão em paralelo entre si (sofrem, em módulo, a mesma deformação), então o sistema da Figura 4.9 pode ser substituído pelo da Figura 4.10. Neste sistema, os coeficientes equivalentes K_{xx} e C_{xx} podem ser obtidos através da soma dos coeficientes de cada mancal da Figura 4.9:

$$\begin{aligned} K_{xx} &= K_{xx1} + K_{xx2} \\ C_{xx} &= C_{xx1} + C_{xx2} \end{aligned} \tag{4.62}$$

A equação dinâmica que rege este problema simplificado é a equação de um sistema 1GDL, Eq. (4.1), com os coeficientes de massa, amortecimento e rigidez mostrados na Figura 4.10, ou através da Eq. (4.2), escrita na forma padrão, com $\omega_n = \sqrt{K_{xx}/M}$ e $\xi = C_{xx}/2M\omega_n$.

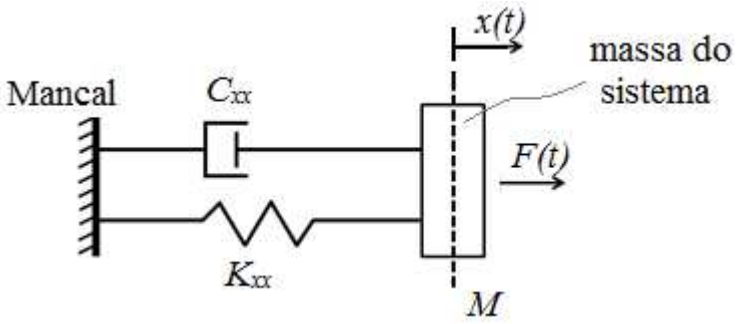


Figura 4.10 – Sistema massa-mola-amortecedor resultante

Para este sistema 1GDL, as respostas ao impulso e ao degrau podem ser obtidas de forma analítica e dependem do valor de ξ. Se $\xi^2 < 1$, diz-se que o sistema é subamortecido,

enquanto que, para $\xi^2 > 1$, se diz que o sistema é superamortecido.

A resposta ao impulso unitário ($F(t) = \delta(t)$) de um sistema 1GDL subamortecido com condições iniciais nulas é:

$$x_I(t) = \frac{1}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t \tag{4.63}$$

Enquanto que a resposta ao impulso de um sistema 1GDL superamortecido é:

$$x_I(t) = \frac{1}{m\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} e^{-\xi\omega_n t} \sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_n t \tag{4.64}$$

A resposta ao degrau unitário ($F(t) = \theta(t)$) de um sistema 1GDL subamortecido com condições iniciais nulas é:

$$x_S(t) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right)\right) \tag{4.65}$$

Enquanto que a resposta ao degrau de um sistema 1GDL superamortecido é:

$$x_S(t) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cosh\sqrt{\xi^2-1}\omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_n t\right)\right) \tag{4.66}$$

A resposta ao degrau será considerada de acordo com a metodologia proposta por Zhu e Zhang (2003), que modelaram matematicamente a força excitadora como um degrau de amplitude arbitrária.

Zhu e Zhang (2003) resolveram a equação de movimento (4.1) (tomando a variável x medida a partir da espessura inicial de óleo) analiticamente, utilizando a Integral de Duhamel, o que exige o conhecimento da resposta ao impulso do sistema, e integrando numericamente a

equação, modelando a força excitadora como um degrau de amplitude arbitrária. O trabalho de Zhu e Zhang consistiu em resolver o problema através de modelos lineares e não-lineares do mancal axial, a fim de observar as diferenças entre os modelos. Os pesquisadores observaram que, para elevados valores da espessura inicial de óleo ou da amplitude do degrau (o incremento da força axial externa), a análise linear não é adequada. Dessa forma, ao calcular a resposta do sistema, foram determinados os limites máximos de forças e deslocamentos do sistema, de forma a tornar razoável a análise linear do problema.

4.2.6.1. Parâmetros da resposta do sistema

Para uma entrada degrau unitário no sistema, com condições iniciais nulas, são definidos os parâmetros ganho estático e o tempo de estabilização.

a. Ganho estático

O ganho estático k_e do sistema é simplesmente o valor da resposta para a qual o sistema tende em regime permanente, isto é (OGATA, 2010):

$$k_e = \lim_{t \to \infty} x(t) \tag{4.67}$$

Para a resposta ao degrau unitário, $k_e = 1/k$, que é facilmente verificado tomando-se o limite das expressões (4.65) e (4.66).

b. Tempo de estabilização

O tempo de estabilização t_s é o tempo requerido para que a resposta do sistema atinja e permaneça dentro de uma margem ao redor do valor final, especificada em função de uma porcentagem do valor final (usualmente, ±2% ou ±5% do valor final). O tempo de estabilização está relacionado à maior constante de tempo do sistema e indica o tempo em que o regime transitório leva para desaparecer (OGATA, 2010). Não existem expressões analíticas simples para o tempo de estabilização, no entanto, pode-se utilizar a expressão aproximada (a 5%, para um sistema subamortecido):

$$t_s \approx \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{6m}{c} \tag{4.68}$$

4.3. Frequência natural a partir da equação analítica

Modelar o sistema através do método por elementos finitos ou por um modelo de parâmetros concentrados fornece expressões simples para a estimativa da frequência natural do sistema, que pode ser uma expressão fechada, analítica, para o caso do sistema 1GDL, ou então, obtida a partir de autovalores, para sistemas de múltiplos GDL. No entanto, essa frequência também pode ser estimada a partir da equação de vibrações de meios contínuos.

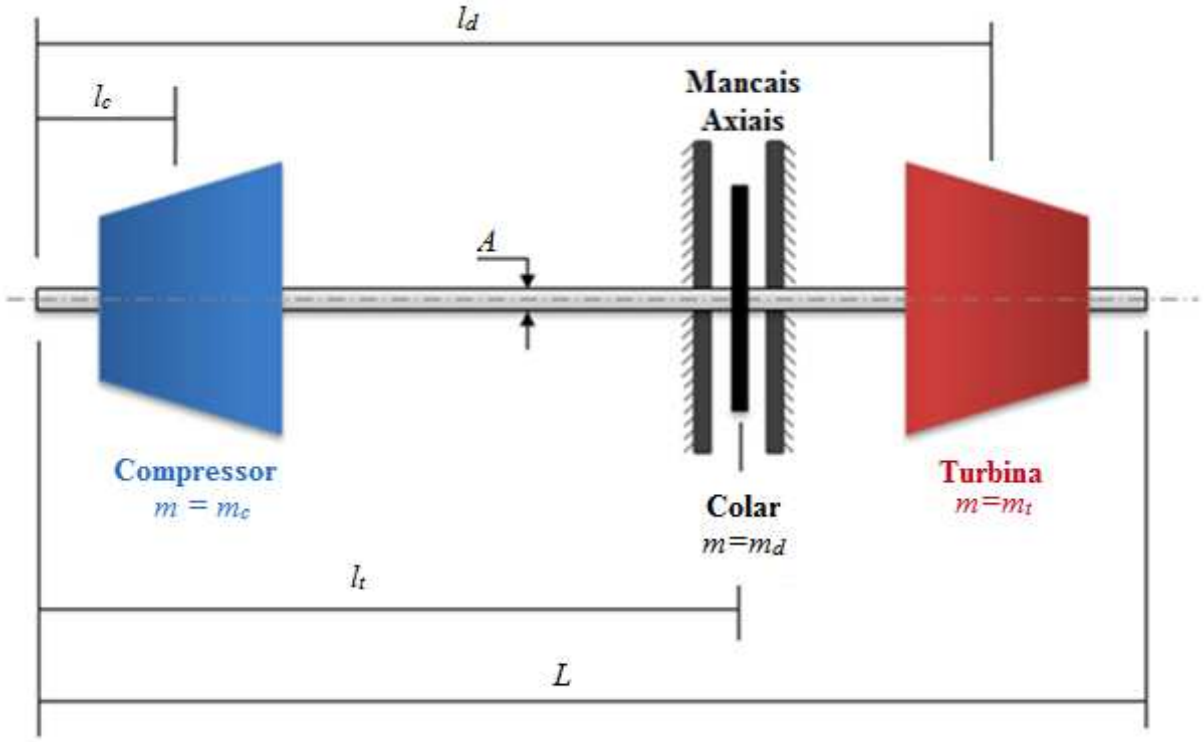


Figura 4.11 – Esquema do turbocompressor

Da Eq. (3.62), podemos obter a equação de vibração de meios contínuos do sistema estudado. Assim, seja o sistema da Figura 4.11, formado por um eixo rotativo de comprimento L, área da seção transversal A e densidade ρ, com um compressor e uma turbina de massas m_c e m_t, respectivamente, localizados a uma distância da extremidade esquerda l_c e l_t. Esse sistema também possui um mancal axial, composto de um colar (disco rígido), fixo ao eixo, de massa m_d, e de u ma mola K_{xx} e um amortecedor C_{xx} equivalentes, que substituem o efeito de sustentação do eixo do filme de óleo, localizado a uma distância l_d. Substituindo esses termos na Eq. (3.62), temos a equação de vibração do meio contínuo estudado:

(4.69)

$$EAu'' - [\rho A + m_c\,\delta(x - l_c) + m_t\,\delta(x - l_t) + m_d\,\delta(x - l_d)]\ddot{u}$$

$$-K_{xx}\delta(x-l_d)u - C_{xx}\delta(x-l_d)\dot{u} = 0$$

em que as aspas significam a derivada em função da variável espacial ($u' = \partial u/\partial x$) e o ponto indica derivada temporal ($\dot{u} = \partial u/\partial t$). Admitindo uma solução do tipo separação de variáveis, $u(x,t) = U(x)e^{j(\omega t+\phi)}$, derivando e substituindo em (4.69), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&EAU''(x)e^{j(\omega t+\phi)} \\
&-[\rho A + m_c\delta(x-l_c) + m_d\delta(x-l_d) + m_t\delta(x-l_t)]\left(-U(x)\omega^2 e^{j(\omega t+\phi)}\right) \\
&-K_{xx}\delta(x-l_d)U(x)e^{j(\omega t+\phi)} - C_{xx}\delta(x-l_d)U(x)j\omega e^{j(\omega t+\phi)} = 0
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

que, cancelando o termo comum $e^{j(\omega t+\phi)}$ e fazendo as multiplicações necessárias, chega-se a:

$$
\begin{aligned}
&EAU''(x) + \rho A\omega^2 U(x) + m_c\omega^2\delta(x-l_c)U(x) \\
&+m_d\omega^2\delta(x-l_d)U(x) + m_t\omega^2\delta(x-l_t)U(x) \\
&-K_{xx}\delta(x-l_d)U(x) - C_{xx}j\omega\delta(x-l_d)U(x) = 0
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

Aplicando a transformada de Laplace,

$$
\begin{aligned}
&EA\mathcal{L}\{U''(x)\} + \rho A\omega^2\mathcal{L}\{U(x)\} + m_c\omega^2\mathcal{L}\{\delta(x-l_c)U(x)\} \\
&+m_d\omega^2\mathcal{L}\{\delta(x-l_d)U(x)\} + m_t\omega^2\mathcal{L}\{\delta(x-l_t)U(x)\} \\
&-K_{xx}\mathcal{L}\{\delta(x-l_d)U(x)\} - C_{xx}j\omega\mathcal{L}\{\delta(x-l_d)U(x)\} = 0
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

e observando que $\mathcal{L}\{U(x)\} = U(s)$, $\mathcal{L}\{U'(x)\} = sU(s) - u(0)$, $\mathcal{L}\{U''(x)\} = s^2U(s) - sU(0) - U'(0)$ e $\mathcal{L}\{\delta(x-x_0)U(x)\} = \theta(x_0)e^{-x_0 s}U(x_0) = e^{-x_0 s}U(x_0)$, se $x_0 > 0$, então:

$$
\begin{aligned}
&EA\left(s^2U(s) - sU(0) - U'(0)\right) + \rho A\omega^2 U(s) \\
&+m_c\omega^2 e^{-l_c s}U(l_c) + m_d\omega^2 e^{-l_d s}U(l_d) + m_t\omega^2 e^{-l_t s}U(l_t) \\
&-K_{xx}e^{-l_d s}U(l_d) - C_{xx}j\omega e^{-l_d s}U(l_d) = 0
\end{aligned} \tag{4.73}
$$

Reescrevendo (4.73) para $U(s)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
U(s) = &\frac{s}{s^2 + \frac{\rho}{E}\omega^2}U(0) + \frac{1}{s^2 + \frac{\rho}{E}\omega^2}U'(0) - \frac{m_c\omega^2}{EA}\frac{e^{-l_c s}}{s^2 + \frac{\rho}{E}\omega^2}U(l_c) \\
&+\left(-\frac{m_d\omega^2}{EA} + \frac{K_{xx}}{EA} + \frac{C_{xx}j\omega}{EA}\right)\frac{e^{-l_d s}}{s^2 + \frac{\rho}{E}\omega^2}U(l_d) \\
&-\frac{m_t\omega^2}{EA}\frac{e^{-l_t s}}{s^2 + \frac{\rho}{E}\omega^2}U(l_t)
\end{aligned} \tag{4.74}
$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos $U(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$. Observando as seguintes transformadas inversas:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{\rho}{E}\omega^2}\right\}=\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\frac{\rho}{E}\omega^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega}\sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right) \tag{4.75}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x_0 s}}{s^2+\frac{\rho}{E}\omega^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega}\sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega(x-x_0)\right)\theta(x-x_0)$$

Em que a última é obtida aplicando-se a propriedade de translação $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-x_0 s}G(s)\}=g(x-x_0)\theta(x-x_0)$ para uma função genérica $g(x)$, em que $\mathcal{L}\{g(x)\}=G(s)$, temos que ($c=\sqrt{\rho/E}$):

$$\begin{aligned}U(x)=\;&U(0)\cos(c\omega x)+\frac{U'(0)}{c\omega}\sin(c\omega x)\\&-\frac{m_c\omega}{EAc}\sin\big(c\omega(x-l_c)\big)\,\theta(x-l_c)U(l_c)\\&-\left(\frac{m_d\omega}{EAc}-\frac{K_{xx}}{EAc\omega}-\frac{C_{xx}j}{EAc}\right)\sin\big(c\omega(x-l_d)\big)\,\theta(x-l_d)U(l_d)\\&-\frac{m_t\omega}{EAc}\sin\big(c\omega(x-l_t)\big)\,\theta(x-l_t)U(l_t)\end{aligned} \tag{4.76}$$

Podemos definir três funções auxiliares e reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned}U(x)=\;&U(0)\cos c\omega x+\frac{U'(0)}{c\omega}\sin c\omega x\\&-f_1(x,\omega)U(l_c)-f_2(x,\omega)U(l_d)-f_3(x,\omega)U(l_t)\end{aligned} \tag{4.77}$$

onde

$$\begin{aligned}f_1(x,\omega)&=\frac{m_c\omega}{EAc}\sin\big(c\omega(x-l_c)\big)\,\theta(x-l_c)\\f_2(x,\omega)&=\left(\frac{m_d\omega}{EAc}-\frac{K_{xx}}{EAc\omega}-\frac{C_{xx}j}{EAc}\right)\sin\big(c\omega(x-l_d)\big)\,\theta(x-l_d)\\f_3(x,\omega)&=\frac{m_t\omega}{EAc}\sin\big(c\omega(x-l_t)\big)\,\theta(x-l_t)\end{aligned} \tag{4.78}$$

Aplicando condições de contorno, como a barra está livre em ambas as extremidades,

$$\left.\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \rightarrow U'(0) = 0 \tag{4.79}$$

$$\left.\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \rightarrow U'(L) = 0 \tag{4.80}$$

então, de (4.77) e (4.79),

$$U(x) = U(0)\cos c\omega x - f_1(x,\omega)U(l_c) - f_2(x,\omega)U(l_d) - f_3(x,\omega)U(l_t) \tag{4.81}$$

Para determinar $U(0)$, usamos $U'(L) = 0$, derivando (4.81),

$$U'(x) = -c\omega U(0)\sin c\omega x - f_1'(x,\omega)U(l_c) - f_2'(x,\omega)U(l_d) - f_3'(x,\omega)U(l_t) \tag{4.82}$$

onde:

$$\begin{aligned}
f_1'(x,\omega) &= \frac{m_c\omega}{EAc}\begin{bmatrix}\sin\big(c\omega(x-l_c)\big)\,\delta(x-l_c) + \\ c\omega\cos\big(c\omega(x-l_c)\big)\,\theta(x-l_c)\end{bmatrix} \\
f_2'(x,\omega) &= \left(\frac{m_d\omega}{EAc} - \frac{K_{xx}}{EAc\omega} - \frac{C_{xx}j}{EAc}\right)\begin{bmatrix}\sin\big(c\omega(x-l_d)\big)\,\delta(x-l_d) + \\ c\omega\cos\big(c\omega(x-l_d)\big)\,\theta(x-l_d)\end{bmatrix} \\
f_3'(x,\omega) &= \frac{m_t\omega}{EAc}\begin{bmatrix}\sin\big(c\omega(x-l_t)\big)\,\delta(x-l_t) + \\ c\omega\cos\big(c\omega(x-l_t)\big)\,\theta(x-l_t)\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

em que foi usada a regra do produto nos termos $\sin\big(c\omega(x-l)\big)\,\theta(x-l)$, observando que $d\theta(x)/dx = \theta'(x) = \delta(x)$.

Substituindo $U'(L) = 0$ e resolvendo para $U(0)$,

$$\begin{aligned}
U(0) = &-\frac{m_c\omega}{EAc}\frac{\cos\big(c\omega(L-l_c)\big)}{\sin(c\omega L)}U(l_c) \\
&-\frac{1}{EAc}\left(m_d\omega - \frac{K_{xx}}{\omega} - jC_{xx}\right)\frac{\cos\big(c\omega(L-l_d)\big)}{\sin(c\omega L)}U(l_d) \\
&-\frac{m_t\omega}{EAc}\frac{\cos\big(c\omega(L-l_t)\big)}{\sin(c\omega L)}U(l_t)
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Substituindo $U(0)$ (Eq. (4.84)) em $U(x)$ (Eq. (4.81)) e agrupando os termos comuns,

$$U(x) = g_1(x,\omega)U(l_c) + g_2(x,\omega)U(l_d) + g_3(x,\omega)U(l_t) \tag{4.85}$$

em que:

$$\begin{aligned} g_1(x,\omega) &= -\frac{m_c\omega}{EAc}\frac{\cos\big(c\omega(L-l_c)\big)}{\sin(c\omega L)}\cos(c\omega x) - f_1(x,\omega) \\ g_2(x,\omega) &= -\frac{1}{EAc}\left(m_d\omega - \frac{K_{xx}}{\omega} - jC_{xx}\right)\frac{\cos\big(c\omega(L-l_d)\big)}{\sin(c\omega L)}\cos(c\omega x) - f_2(x,\omega) \\ g_3(x,\omega) &= -\frac{m_t\omega}{EAc}\frac{\cos\big(c\omega(L-l_t)\big)}{\sin(c\omega L)}\cos(c\omega x) - f_3(x,\omega) \end{aligned} \tag{4.86}$$

Para obter a equação da frequência, deve-se observar que a Eq. (4.85) deve ser válida em $x = l_c$, $x = l_d$ e $x = l_t$, isto é:

$$\begin{aligned} U(l_c) &= g_1(l_c,\omega)U(l_c) + g_2(l_c,\omega)U(l_d) + g_3(l_c,\omega)U(l_t) \\ U(l_d) &= g_1(l_d,\omega)U(l_c) + g_2(l_d,\omega)U(l_d) + g_3(l_d,\omega)U(l_t) \\ U(l_t) &= g_1(l_t,\omega)U(l_c) + g_2(l_t,\omega)U(l_d) + g_3(l_t,\omega)U(l_t) \end{aligned} \tag{4.87}$$

O conjunto de equações acima forma um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1-g_1(l_c,\omega) & -g_2(l_c,\omega) & -g_3(l_c,\omega) \\ -g_1(l_d,\omega) & 1-g_2(l_d,\omega) & -g_3(l_d,\omega) \\ -g_1(l_t,\omega) & -g_2(l_t,\omega) & 1-g_3(l_t,\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(l_c) \\ U(l_d) \\ U(l_t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.88}$$

A equação da frequência é obtida impondo que os determinantes dos coeficientes da Eq. (4.88) seja igual a zero (pois buscam-se as soluções não triviais do problema):

$$\det\begin{bmatrix} 1-g_1(l_c,\omega) & -g_2(l_c,\omega) & -g_3(l_c,\omega) \\ -g_1(l_d,\omega) & 1-g_2(l_d,\omega) & -g_3(l_d,\omega) \\ -g_1(l_t,\omega) & -g_2(l_t,\omega) & 1-g_3(l_t,\omega) \end{bmatrix} = G(\omega) = 0 \tag{4.89}$$

As raízes de $G(\omega)$ são as frequências naturais do sistema. Essas raízes podem ser encontradas numericamente para a Eq. (4.89).

4.4. Amplitude da força excitadora

Na Seção 3.2, discutiu-se o Teorema de Transporte de Reynolds, equação da qual é possível obter a equação da continuidade, a equação integral da conservação da quantidade de movimento linear, da quantidade de movimento angular e da energia. A partir dessas equações, é possível obter um modelo simplificado das forças de reação na turbina, em conjunto com o triângulo de velocidades mostrado na Figura 3.3.

Primeiramente, supondo que a turbina gire com uma velocidade angular Ω constante e que o fluxo de gases passando pela turbina também é constante, então, da equação da continuidade, Eq. (3.5), temos que o fluxo mássico passando pela turbina é constante:

$$\underbrace{\frac{d\, m_{VC}}{dt}}_{=0} + \underbrace{\sum_{SC} \dot{m}_o}_{=\dot{m}_o} - \underbrace{\sum_{SC} \dot{m}_i}_{=\dot{m}_i} = 0 \tag{4.90}$$

Na equação acima, o primeiro termo é nulo, pois o sistema está em regime permanente. O segundo e o terceiro termo reduzem-se a um único, pois o sistema tem uma entrada e uma saída. Rearranjando, portanto,

$$\dot{m}_o = \dot{m}_i = \dot{m} = \rho Q \tag{4.91}$$

Logo, o fluxo mássico através da turbina é constante e pode ser obtido diretamente do fluxo volumétrico de entrada, onde ρ é a densidade do fluido, dependente da pressão e temperatura dos gases de entrada. Admitindo o modelo de gases ideais, a densidade dos gases pode ser obtida a partir da equação dos gases ideais

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{p}{(\bar{R}/M_{mis})T} \tag{4.92}$$

onde v é o volume específico, p, a pressão, $\bar{R}$, a constante dos gases ideais (8,3144621 J/mol.K), M_{mis}, a massa molar da mistura de gases, e T, a temperatura.

Da equação da conservação da quantidade de movimento linear, Eq. (3.14), a força de reação axial agindo na turbina, que é igual em módulo, mas em sentido contrário, à força agindo

no eixo, é:

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{eixo} = \frac{d(m_{VC}\vec{v}_{VC})}{dt} + \sum_{SC} \dot{m}_o \vec{v}_o - \sum_{SC} \dot{m}_i \vec{v}_i$$
$$-F_{eixo,x} = \dot{m}_o v_{ox} = \dot{m} c_{x3} \tag{4.93}$$

O termo $d(m\vec{v})/dt$ é nulo pois, por hipótese, a turbina está em regime permanente. Ainda, não há fluxo axial na entrada da turbina, então $v_{ix} = 0$, c_{x3} é o fluxo axial de gases na saída do rotor, mostrado na Figura 3.3, e $\dot{m}$ e o fluxo mássico constante passando pela turbina.

Dos triângulos de velocidades representados esquematicamente na Figura 3.3, temos que U_2 e U_3 são as velocidades periféricas das pás na entrada e na saída da turbina, isto é, r_2 e r_3 são os raios das pás da turbina, respectivamente, na entrada e na saída, e os ângulos de entrada e saída são α_2 e β_3.

A velocidade axial c_{x3} pode ser obtida a partir de relações geométricas do triângulo de velocidades mostrado na Figura 3.3, de forma que a força axial é:

$$-F_x = \dot{m} c_{x3} = \dot{m} \frac{U_3}{\tan \beta_3} = \rho Q \frac{\Omega r_3}{\tan \beta_3} \tag{4.94}$$

Para obter a força axial, é necessário calcular a velocidade angular Ω (em função da vazão de entrada Q), que pode ser obtida de duas maneiras diferentes. A primeira, mais simples, utiliza o triângulo de velocidades e é obtida a partir das relações geométricas no triângulo de velocidades da entrada:

$$\begin{aligned} U_2 &= w_2 \tan \alpha_2 \\ \Omega r_2 &= \frac{Q}{A_2} \tan \alpha_2 \\ \Omega &= \frac{\tan \alpha_2}{A_2 r_2} Q \end{aligned} \tag{4.95}$$

onde Q/A_2 é o valor da velocidade média de entrada w_2, sendo Q a vazão volumétrica de entrada e A_2, a área de entrada. Substituindo Q na Eq. (4.94), obtém-se uma expressão para a força axial em função da rotação:

$$-F_x = \frac{\rho A_2 r_2 r_3}{\tan\alpha_2 \tan\beta_3}\Omega^2 \tag{4.96}$$

Outra maneira de calcular a rotação é obtê-la em função do trabalho produzido pela turbina, utilizando as equações do torque (equação da conservação da quantidade de movimento angular) e do trabalho (equação da conservação da energia). A equação da conservação da quantidade de movimento angular fornece a seguinte equação vetorial:

$$\begin{aligned}\sum\vec{M} &= \frac{d}{dt}\int_{VC}(\vec{r}\times\vec{v})\rho d\forall + \sum_{SC}\vec{r}_o\times(\dot{m}_o\vec{v}_o) - \sum_{SC}\vec{r}\times(\dot{m}_i\vec{v}_i)\\ \sum\vec{M} &= \sum_{SC}\vec{r}_o\times(\dot{m}_o\vec{v}_o) - \sum_{SC}\vec{r}\times(\dot{m}_i\vec{v}_i) = \vec{r}_o\times(\dot{m}_o\vec{v}_o) - \vec{r}\times(\dot{m}_i\vec{v}_i)\\ &= \dot{m}(r_3 w_3\cos(90°-\beta_3) - r_2 c_2\cos(90°-\alpha_2))\hat{\imath}\\ &\quad + \dot{m}(r_3 w_3\sin(90°-\beta_3))\hat{r}\end{aligned} \tag{4.97}$$

Dessa equação, pode-se observar que, pelo sistema estar em regime permanente, a taxa de variação temporal é nula. Ainda, há somente uma entrada e uma saída, então os somatórios se resumem a um único termo. Novamente, $\dot{m}$ é o fluxo mássico constante, o mesmo obtido anteriormente. Pode-se ainda observar que os momentos externos agindo na turbina são o torque T do eixo, na direção axial x, $\hat{\imath}$, e um momento fletor M na direção radial r, $\hat{r}$. Essa equação pode ser dividida nas suas componentes $\hat{\imath}$ e $\hat{r}$.

$$\begin{aligned}T &= \dot{m}(r_3 w_3\cos(90°-\beta_3) - r_2 c_2\cos(90°-\alpha_2))\\ M &= \dot{m}(r_3 w_3\sin(90°-\beta_3))\end{aligned} \tag{4.98}$$

Como o interesse do trabalho está apenas na vibração axial do eixo, iremos trabalhar apenas com a equação do torque, mas é importante observar que o momento fletor M que aparece nessa equação influencia a vibração radial do sistema. Essa vibração radial é suportada pelos mancais radiais.

Na expressão (4.98), podemos escrever w_3 em função de w_2, como:

$$w_3 = \frac{w_3}{w_2}w_2 = \frac{w_3}{w_2}\frac{Q}{A_2} \tag{4.99}$$

onde w_3/w_2 é a razão de velocidades relativas, parâmetro geométrico do sistema, dado como:

$$\frac{w_3}{w_2} = \frac{r_3}{r_2}\frac{\tan\alpha_2}{\sin\beta_3} \tag{4.100}$$

e a velocidade absoluta de entrada, c_2, é dada por

$$\begin{aligned} c_2^2 &= U_2^2 + w_2^2 \\ c_2 &= \sqrt{U_2^2 + w_2^2} \\ &= \sqrt{(\Omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{A}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.101}$$

o que fornece a seguinte expressão para o torque:

$$T = \dot{m}\left(r_3\frac{w_3}{w_2}\frac{Q}{A_2}\cos(90° - \beta_3) - r_2\sqrt{(\Omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{A}\right)^2}\cos(90° - \alpha_2)\right) \tag{4.102}$$

Por fim, da equação da conservação de energia, Eq. (3.38), temos que

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho d\forall + \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.103}$$

Em geral, o termo de troca de calor numa turbina é muito pequeno face ao trabalho produzido por ela, isto é, $\dot{Q} \ll \dot{W}_{eixo}$, podendo, então, ser desprezado. Ainda, como a turbina está em regime permanente (por hipótese), então a taxa de variação temporal da energia é nula. Além disso, a diferença de altura entre entrada e saída é muito pequena, de forma que $g\Delta z \approx 0$. Admitindo ainda propriedades constantes na entrada e na saída da turbina e utilizando os valores de velocidade dos triângulos de velocidade da Figura 3.3, a Eq. (4.103) reduz-se a

$$
\begin{aligned}
-\dot{W}_{eixo} = -T\Omega &= \dot{m}\left(h_3 - h_2 + \frac{V_3^2 - V_2^2}{2}\right) \\
T\Omega &= \dot{m}\left(h_2 - h_3 + \frac{V_2^2 - V_3^2}{2}\right) \\
&= \dot{m}\left(\Delta h + \frac{c_2^2 - w_3^2}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.104}
$$

onde $h = h(T)$ é a entalpia do fluido, função da temperatura dos gases de entrada e saída (modelados como gases ideais), e o interesse está no cálculo da variação da entalpia da entrada da turbina até a saída, $\Delta h = h_2 - h_3$, e V_2 e V_3 são as velocidades c_2 e w_3 da Figura 3.3. Substituindo ainda as velocidades c_2 e w_3, Eqs. (4.101) e (4.99), respectivamente, obtém-se:

$$
T\Omega = \dot{m}\left(\Delta h + \frac{(\Omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{w_3}{w_2}\frac{Q}{A_2}\right)^2}{2}\right)
\tag{4.105}
$$

Substituindo a expressão para o torque, Eq. (4.102), na expressão para a potência do eixo, (4.105), e rearranjando, obtém-se uma expressão para a velocidade angular Ω:

$$
\begin{aligned}
f(\Omega) = 2\Omega r_3 \frac{w_3}{w_2}\frac{Q}{A_2}\sin\beta_3 - 2\Omega r_2\sqrt{(\Omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2}\sin\alpha_2 \\
-2\Delta h - (\Omega r_2)^2 - \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2\left(1 - \left(\frac{w_3}{w_2}\right)^2\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

As raízes dessa equação fornecem os valores de Ω em função da vazão de entrada Q, levando em conta o trabalho Δh produzido pela turbina. Uma grande dificuldade neste cálculo está em estimar com precisão o termo de variação de entalpia Δh.

Esse parâmetro pode ser estimado utilizando um modelo de gás ideal para os gases de combustão passando pela turbina (MORAN, et al., 2014)

$$
\Delta h = \sum_{i=1}^{j} y_i\left(\frac{\bar{h}_i(T_3) - \bar{h}_i(T_2)}{M_{mis}}\right)
\tag{4.107}
$$

onde j é o número de componentes da mistura de gases, y_i é a fração molar de cada gás, $\bar{h}_i$ é a entalpia molar de cada gás à temperatura especifica (para gases ideais, a entalpia é função principalmente da temperatura e varia pouco com a pressão) e M_{mis} é a massa molar da mistura de gases.

Os gases de combustão passando pela turbina podem ser admitidos como uma mistura de CO_2, H_2O (vapor) e N_2, em frações molares y_{CO_2}, y_{H_2O} e y_{N_2}. A massa molar M_{mis} é facilmente obtida a partir das massas molares dos gases e da fração molar dos mesmos, através da média ponderada

$$M_{mis} = \frac{\sum_{i=1}^{j} y_i M_i}{\sum_{i=1}^{j} y_i} \tag{4.108}$$

e as entalpias de cada substância podem ser obtidas a partir da Tabela A-23 de Moran et al. (2014, p. 965-968). Essa tabela fornece os valores das entalpias em função da temperatura, o que permite obter um polinômio interpolador de forma a obter uma expressão simples para o cálculo de $h = h(T)$ para cada substância. Observe também que a massa molar obtida da Eq. (4.108) é a mesma utilizada para o cálculo da densidade da mistura dos gases, Eq. (4.92).

Pode-se também, por simplicidade, aproximar as propriedades dos gases através de um padrão ar frio, isto é, aproximar as propriedades dos gases para as propriedades do ar atmosférico. Para o ar atmosférico, a massa molar é 28,964 kg/kmol e a diferença de entalpias Δh é simplesmente $\dot{m}\big(h_{Air}(T_2) - h_{Air}(T_1)\big)$, sendo que $h_{Air} = h_{Air}(T)$ é o valor da entalpia do ar atmosférico em função da temperatura, que pode ser obtido a partir da Tabela A-22 de Moran et al. (2014, p. 963-964).

O método acima, portanto, permite elaborar o seguinte algoritmo para o cálculo da força axial:

A. Cálculos preliminares

1. Obter os parâmetros geométricos da turbina A_2 (área de entrada), r_2 (raio de entrada), r_3 (raio de saída), α_2 (ângulo de entrada) e β_3 (ângulo de saída).

2. Definir a razão de velocidades w_2/w_3:

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{r_3}{r_2}\frac{\tan\alpha_2}{\sin\beta_3}$$

B. Para cada vazão Q

1. Obter os parâmetros operacionais da turbina, T_2 (temperatura dos gases de entrada), p_2 (pressão dos gases de entrada) e T_3 (temperatura dos gases de saída).

2. Obter as frações molares y_i dos gases de entrada.

3. Calcular a massa molar M_{mis} da mistura de gases:

$$M_{mis} = \frac{\sum_{i=1}^{j} y_i M_i}{\sum_{i=1}^{j} y_i}$$

4. Calcular a densidade dos gases na entrada da turbina:

$$\rho = \frac{p_2}{(\bar{R}/M_{mis})T_2}$$

5. Calcular a diferença de entalpia entre a entrada e a saída:

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{j} y_i \left(\frac{\bar{h}_i(T_3) - \bar{h}_i(T_2)}{M_{mis}} \right)$$

6. Calcular a rotação em função da vazão volumétrica (obter as raízes da equação):

$$f(\Omega) = 2\Omega r_3 \frac{w_3}{w_2}\frac{Q}{A_2}\sin\beta_3 - 2\Omega r_2 \sqrt{(\Omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2}\sin\alpha_2$$
$$-2\Delta h - (\Omega r_2)^2 - \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{w_3}{w_2}\right)^2\right) = 0$$

7. Calcular a força axial:

$$F_x = -\rho Q \frac{r_3}{\tan\beta_3}\Omega$$

É importante observar que os parâmetros geométricos são parâmetros de projeto da turbina, constantes, enquanto que os parâmetros operacionais podem variar com a rotação. A vazão pode ser estimada a partir da dinâmica do mecanismo biela-manivela (pistão do motor)

e do volume da camisa do motor. A temperatura de entrada, T_2 pode ser estimadas a partir da equação de combustão da mistura combustível+ar no motor, o que fornece também a composição molar dos gases de combustão (y_i, M_i e h_i). A pressão de entrada p_2 e a temperatura de saída T_3 são estimadas baseados em cálculos empíricos.

4.5. Síntese do modelo

O modelo matemático envolve a abordagem do sistema mecânico através da discretização de suas equações pelo método dos elementos finitos e uma estimativa da amplitude das forças externas ao sistema. O fluxograma apresentado na Figura 4.12 resume as principais etapas do algoritmo.

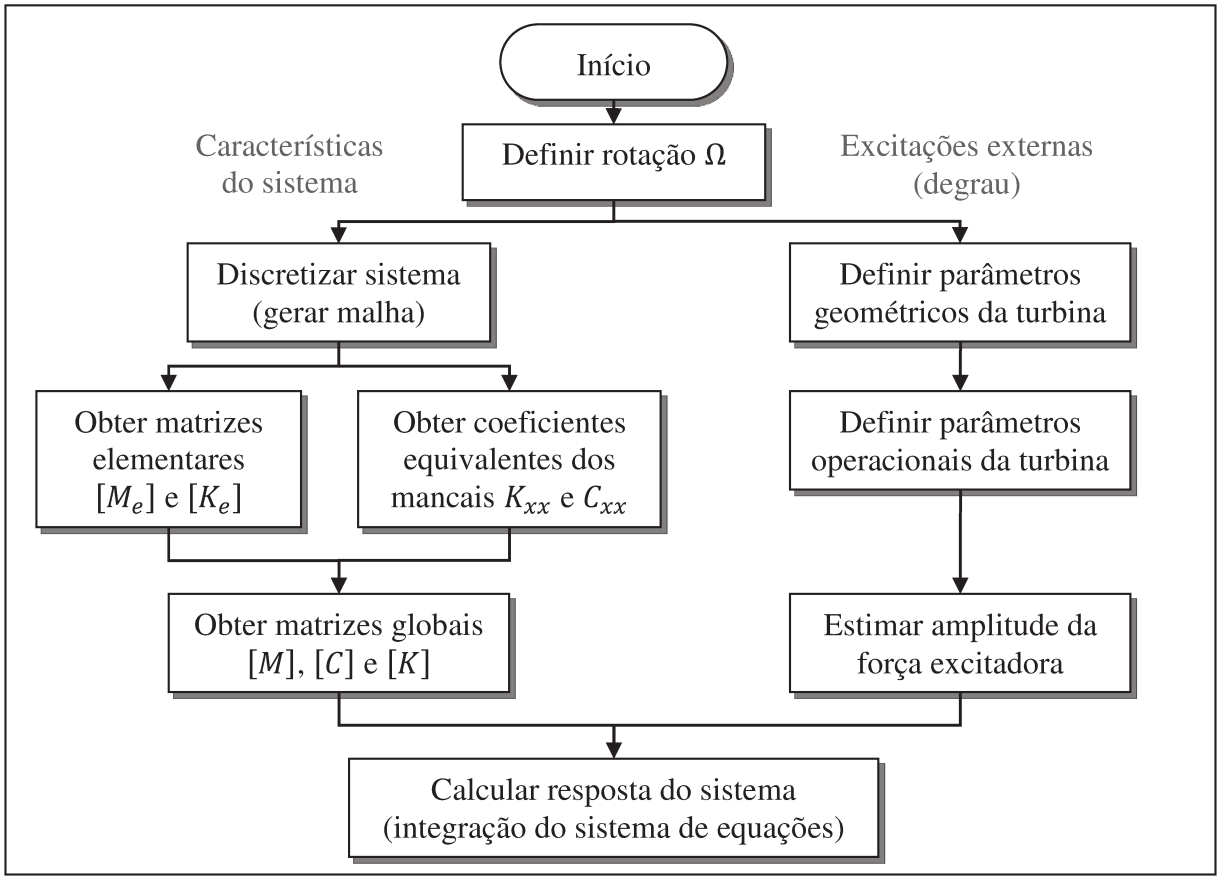


Figura 4.12 – Fluxograma representando resumo do modelo do sistema

Resumidamente, portanto, o método se resume a, dado o turbocompressor e definida a rotação de interesse para a qual se deseja calcular sua resposta, gerar uma malha que discretiza o sistema e, pelo método dos elementos finitos, obter as matrizes elementares de massa e rigidez do eixo. Em seguida faz-se a montagem dessas matrizes, de forma a obter as matrizes globais de massa e rigidez. Calcula-se a matriz de amortecimento proporcional do eixo e, em seguida,

adicionam-se nas matrizes globais os efeitos de inércia dos elementos de disco na estrutura, na matriz de massa, e os coeficientes dos mancais axiais, nas matrizes de rigidez e amortecimento. Com isso, obtêm-se as características dinâmicas do sistema. Independentemente, calcula-se a excitação externa na estrutura. Para uma excitação do tipo degrau, estima-se a amplitude do degrau conforme metodologia proposta na Seção 4.4. Com as características do sistema e as excitações externas, é possível integrar o sistema de equações (4.3) para obter a resposta do deslocamento nos graus de liberdade da estrutura em função do tempo.

5. Resultados e Discussões

O sistema a ser considerado está ilustrado na Figura 4.11 e é repetido na Figura 5.1, com as dimensões utilizadas nas simulações. Este sistema consiste num modelo simplificado de um turbocompressor. São considerados, neste sistema, o eixo (o qual será modelado através de elementos finitos), os mancais axiais e o colar (responsáveis pelo amortecimento do sistema) e a turbina e o compressor, como massas concentradas. A massa total do conjunto é de 165 g. Foi considerada uma massa da turbina e do compressor de 20 g e uma espessura do colar de 1,5 mm. Assume-se que o eixo e o colar são feitos de aço (com módulo de elasticidade 210 GPa e densidade $7{,}8\times10^{-6}$ kg/mm^3) e o comprimento do eixo é de aproximadamente 103,1 mm, com diâmetro externo de 17 mm e interno 10 mm.

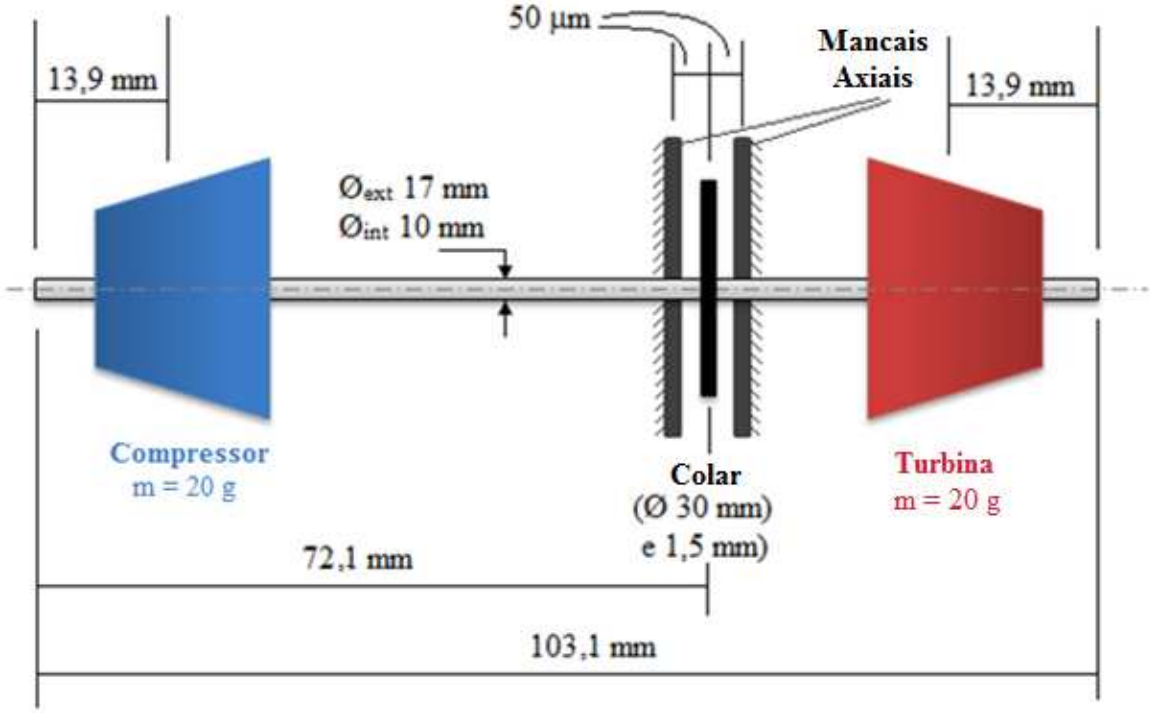


Figura 5.1 – Esquema do turbocompressor (desenho fora de escala)

As medidas apresentadas no esquema da Figura 5.1 são representativas e próximas às dimensões do turbocompressor ensaiado.

É importante observar que a região entre os mancais axiais e o colar do eixo é por onde circula o óleo lubrificante, responsável pelo amortecimento do sistema. Os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do mancal podem ser estimados, conforme Vieira (2014). Com isso, o sistema pode ser estudado e as respostas ao impulso e ao degrau obtidas. Além disso, será analisado também o modelo para estimar a amplitude do degrau através do

fluxo de gases na turbina. É importante comentar que todos os cálculos foram desenvolvidos e implementados em Fortran, com exceção do cálculo para os coeficientes equivalentes do mancal axial, que foram implementados por Vieira (2014), em sua tese de doutorado. Os gráficos foram plotados utilizando-se o MATLAB®.

5.1. Resposta ao impulso

A resposta ao impulso de um sistema fornece informações muito importantes das características do sistema no domínio do tempo. A resposta ao impulso permite observar o (possível) caráter oscilatório do sistema (se o sistema for sub ou superamortecido) e o gráfico da resposta permite observar de forma mais qualitativa parâmetros como a frequência natural, o fator de amortecimento e a relação de movimento entre os graus de liberdade do sistema. A resposta ao impulso permite ainda observar se o sistema é estável ou não e mostra o modo predominante da resposta. Por fim, é possível obter, a partir da resposta ao impulso, a resposta a qualquer excitação, através do método de variação das constantes (Seção 4.2.2) ou, para sistemas 1GDL, através da Integral de Duhamel (análogo ao método de variação das constantes).

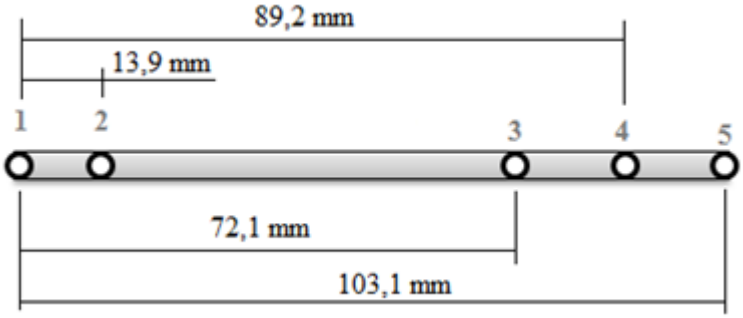


Figura 5.2 – Malha do MEF com 5 nós

Dessa maneira, seja a malha de elementos finitos dada de acordo com a Figura 5.2. Essa malha discretiza o sistema da Figura 5.1. Nos nós 2 e 4 estão localizados os rotores do sistema (o compressor e a turbina, respectivamente) e no nó 3 está localizado o mancal axial do sistema (o conjunto formado pelo colar e os dois mancais). Considera-se ainda que o sistema é excitado no nó 4, onde encontra-se a turbina (a excitação do sistema é devido aos gases passando pela turbina, de forma que a entrada do sistema é no nó onde a mesma se encontra). Esse sistema pode ser modelado através do MEF, com elementos lineares (ligados aos nós 1-2, 2-3, 3-4 e 4-5) ou quadráticos (ligados aos nós 1-2-3 e 3-4-5). Ainda, a fim de observar o efeito de amortecimento do mancal, será admitido que a matriz de amortecimento tem apenas o termo

referente ao coeficiente do mancal ($\alpha = \beta = 0$ na Eq. (4.15), da matriz de amortecimento proporcional). O compressor, a turbina e o colar do eixo são modelados como discos rígidos e o mancal é representado através de seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento.

É importante notar que os coeficientes equivalentes de rigidez K_{xx} e amortecimento C_{xx} do mancal dependem da velocidade de rotação do sistema e foram estimados por Vieira (2014), de acordo com a metodologia discutida na Seção 4.1.5. Esses coeficientes foram calculados para duas rotações diferentes e são dados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores do coeficiente de rigidez e da constante de amortecimento em função da rotação do rotor (VIEIRA, 2014)

N (rpm)	K_{xx} (N/m)	C_{xx} (N.s/m)
14.100	4,572E+06	4,264E+03
20.280	7,030E+06	4,339E+03

Por fim, deve ser observado que será plotado nos gráficos, junto com a resposta do colar do MEF, uma curva chamada de *Analítica*. Essa resposta analítica é a resposta de um sistema de 1GDL, modelado de acordo com a seção 4.2.6. Nesse modelo, toda a massa do sistema é concentrada no colar do eixo e os coeficientes de rigidez e amortecimento K_{xx} e C_{xx} são os coeficientes equivalentes do mancal. O sistema é excitado com a força $F(t)$ convenientemente escolhida ($\delta(t)$, para a resposta ao impulso unitário e $\theta(t)$, para a resposta ao degrau unitário). A resposta analítica permite observar a diferença entre o modelo mais simples de 1GDL com o MEF.

Assim, para uma entrada impulsiva unitária no nó 4, a resposta do colar do sistema é dada na Figura 5.3, para a rotação de 14.100 rpm, e na Figura 5.4, para 20.280 rpm, utilizando elementos lineares e quadráticos. É importante notar que todas respostas temporais foram obtidas integrando-se numericamente o sistema de equações diferencias resultantes, utilizando o Método de Newmark, discutido no Anexo C, com os parâmetros $\delta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$.

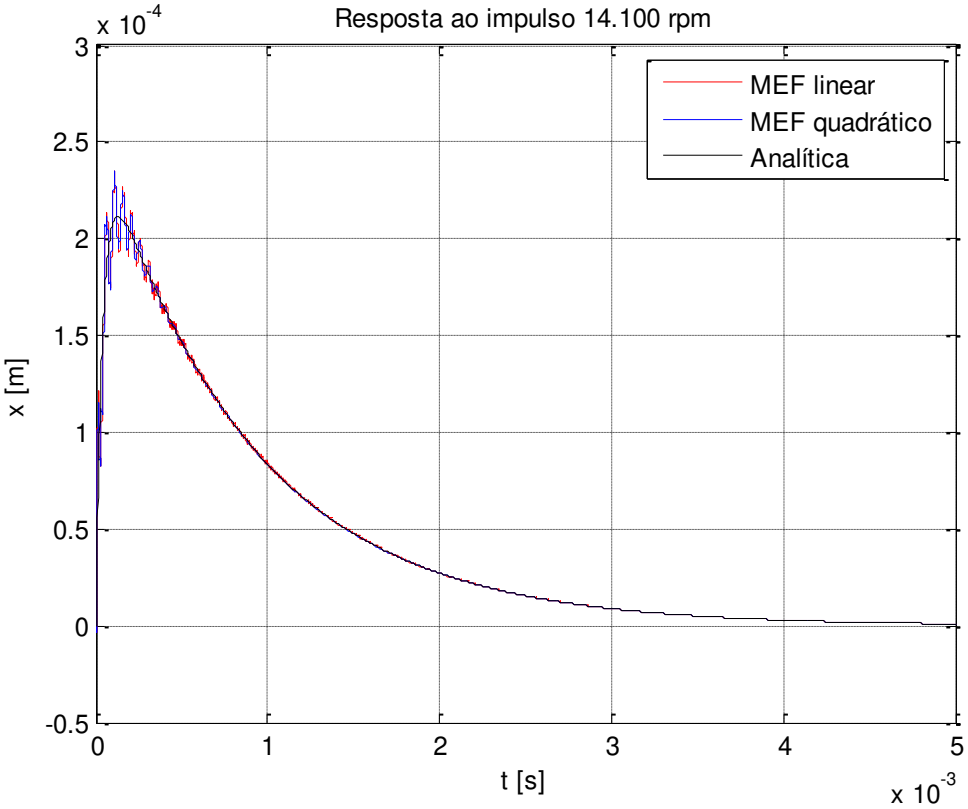


Figura 5.3 – Resposta do colar do sistema ao impulso unitário (14.100 rpm)

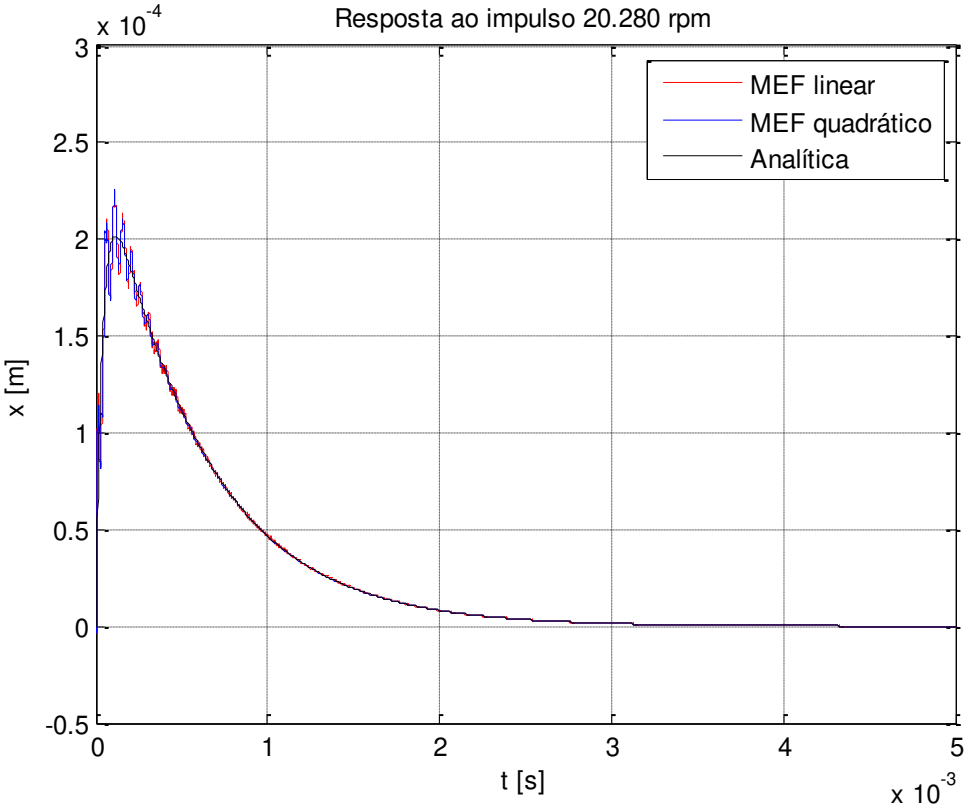


Figura 5.4 – Resposta do colar do sistema ao impulso unitário (20.280 rpm)

Pode-se observar que não há vibração excessiva após a aplicação do impulso, o que demonstra a capacidade de carga do mancal axial em suportar o carregamento e dissipar sua energia rapidamente. No entanto, pode-se observar da resposta do MEF uma pequena oscilação, que não está presente na resposta analítica do sistema 1GDL. Essa oscilação é devido aos modos de alta frequência do sistema, que serão discutidos mais adiante. Também observa-se pouca diferença entre as respostas utilizando elementos lineares e quadráticos. Na Figura 5.5, para 14.100 rpm, e na Figura 5.6, para 20.280 rpm, a resposta transiente do sistema está ampliada, sendo possível notar a diferença entre os dois tipos de elemento, linear e quadrático.

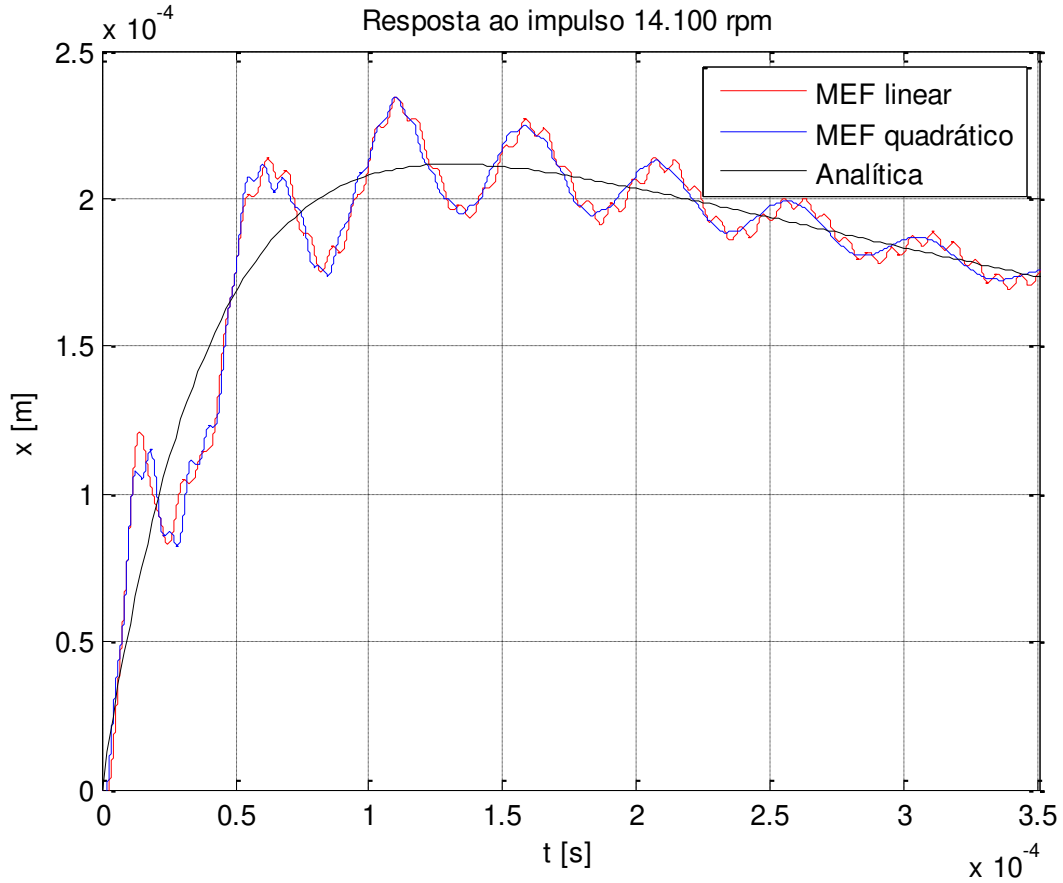


Figura 5.5 – Resposta ampliada do colar do sistema ao impulso unitário (14.100 rpm)

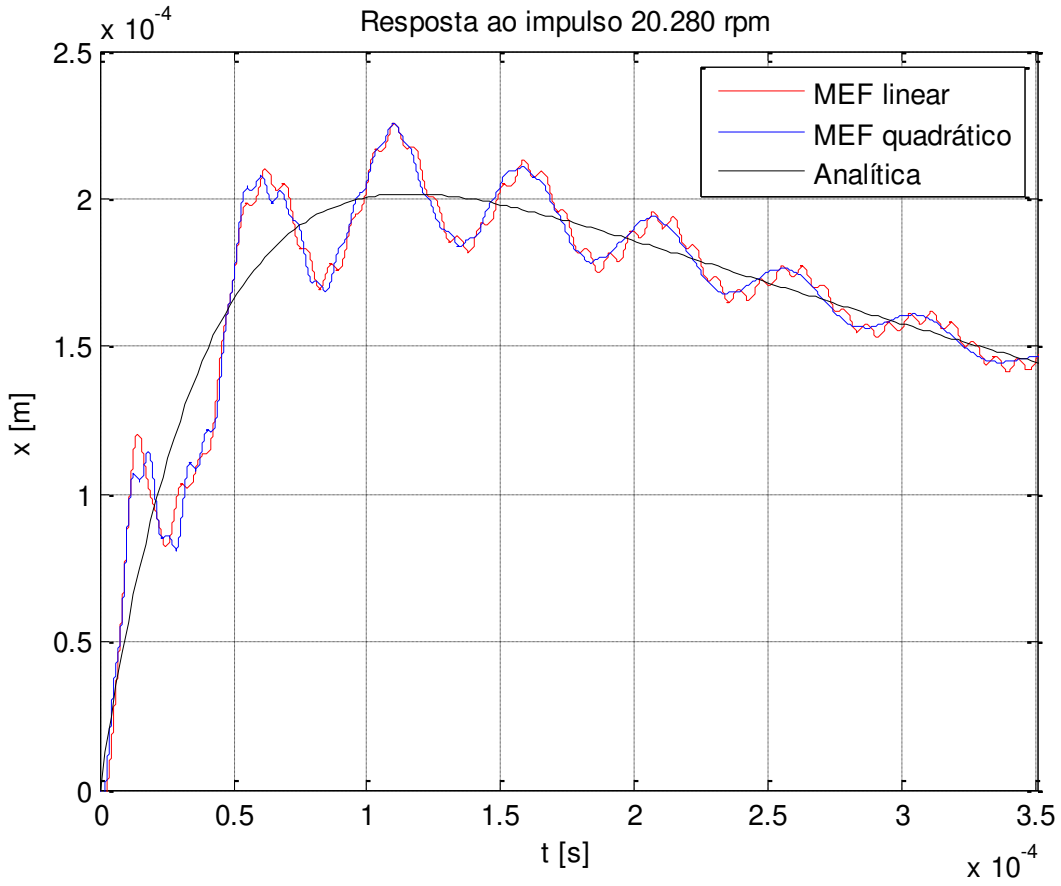


Figura 5.6 – Resposta ampliada do colar do sistema ao impulso unitário (20.280 rpm)

É possível verificar que a resposta utilizando elementos lineares fornece termos com frequência mais elevada que a resposta utilizando elementos quadráticos. A primeira frequência natural se assemelha com a resposta analítica, que é a tendência da resposta do sistema. A segunda frequência natural é responsável pela resposta observada pela linha azul, obtida com os elementos quadráticos. Há ainda uma terceira frequência natural, mais facilmente observada na resposta utilizando elementos lineares, que é a linha vermelha nos gráficos.

Essa diferença entre as respostas utilizando os dois elementos, relativas às frequências dos modos de frequências mais elevadas, pode ser observada a partir dos parâmetros modais do sistema, obtidos a partir do autoproblema. É possível estimar os autovalores do sistema a partir da matriz de estados (Seção 4.2.3) e, a partir desses autovalores, é possível estimar os parâmetros modais, frequência natural e fator de amortecimento. Para as duas condições de rotação, os autovalores são mostrados na Tabela 5.2 e os parâmetros modais, na Tabela 5.3. Da estrutura dos autovalores (Eq. (4.48)), espera-se que pares complexos conjugados sejam de modos subamortecidos, enquanto que duas raízes reais negativas e distintas sejam de modos superamortecidos. O MEF fornece, para cada grau de liberdade do sistema, um par de

autovalores, de forma que se obtêm, para essa malha de 5 nós, 10 autovalores.

Tabela 5.2 – Autovalores obtidos para o modelo 1GDL e MEF (5 nós)

Rotação	Parâmetros Concentrados	Modelo	
		MEF linear	MEF quadrático
14.100 rpm	-1.120,85	-1.120,75	-1.120,64
	-24.721,58	-25.772,87	-25.846,59
		-6.827,74 ± j 125.010,07	-7.203,27 ± j 126.688,84
		-44.068,43 ± j 337.388,88	-21.298,04 ± j 327.536,60
		-1.462,38 ± j 735.259,86	-54.871,99 ± j 502.493,99
		-1.647,62 ± j 782.192,63	-13.708,01 ± j 898.295,73
20.280 rpm	-1.734,61	-1.734,48	-1.734,36
	-24.562,36	-25.623,04	-25.697,49
		-6.955,32 ± j 125.010,15	-7.337,96 ± j 126.691,58
		-44.844,04 ± j 337.169,89	-21.696,36 ± j 327.644,50
		-1.487,00 ± j 735.252,07	-55.841,80 ± j 502.039,12
		-1.674,30 ± j 782.181,07	-13.917,63 ± j 898.170,28

Pode-se observar que os autovalores do modelo de parâmetros concentrados são reais, negativos e distintos, o que significa um sistema estável e superamortecido. Para o MEF, observa-se que o primeiro par de autovalores, relativo ao modo predominante da resposta, também é real, negativo e distinto, o que indica que a resposta predominante do MEF tem a mesma característica da resposta do sistema 1GDL. Ainda, esses autovalores são próximos aos do modelo por parâmetros concentrados. Os autovalores do MEF relativos aos demais modos são todos do tipo complexo conjugado, com parte real negativa, o que significa que esses modos também são estáveis, mas subamortecidos. É possível calcular os parâmetros modais de frequência natural e de fator de amortecimento a partir de cada par de autovalores, o que fornece os valores apresentados na Tabela 5.3.

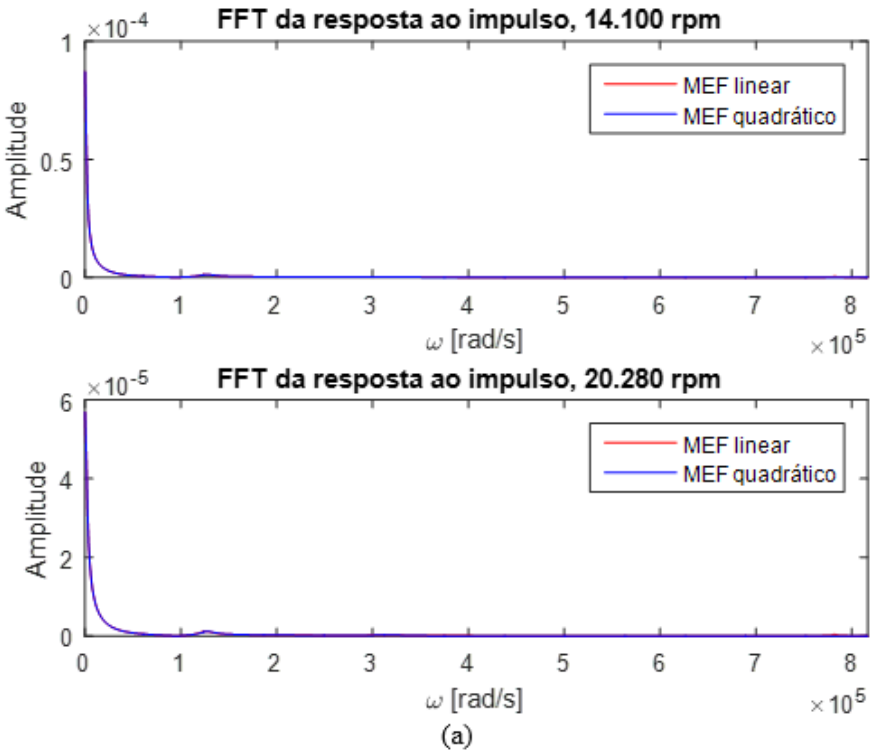
Tabela 5.3 – Frequências naturais e fatores de amortecimento do sistema

Rotação	ω_n (rad/s)			ξ		
	Parâmetros Concentrados	MEF linear	MEF quadrático	Parâmetros Concentrados	MEF linear	MEF quadrático
14.100 rpm	5.263,9	5.374,5	5.381,9	2,4547	2,5020	2,5054
		125.196	126.893		0,0545	0,0568
		340.255	328.228		0,1295	0,0649
		735.261	505.481		0,0020	0,1086
		782.194	898.400		0,0021	0,0153
20.280 rpm	6.527,3	6.666,5	6.676,0	2,0144	2,0519	2,0545
		125.203	126.904		0,0556	0,0578
		340.139	328.362		0,1318	0,0661
		735.254	505.135		0,0020	0,1105
		782.183	898.278		0,0021	0,0155

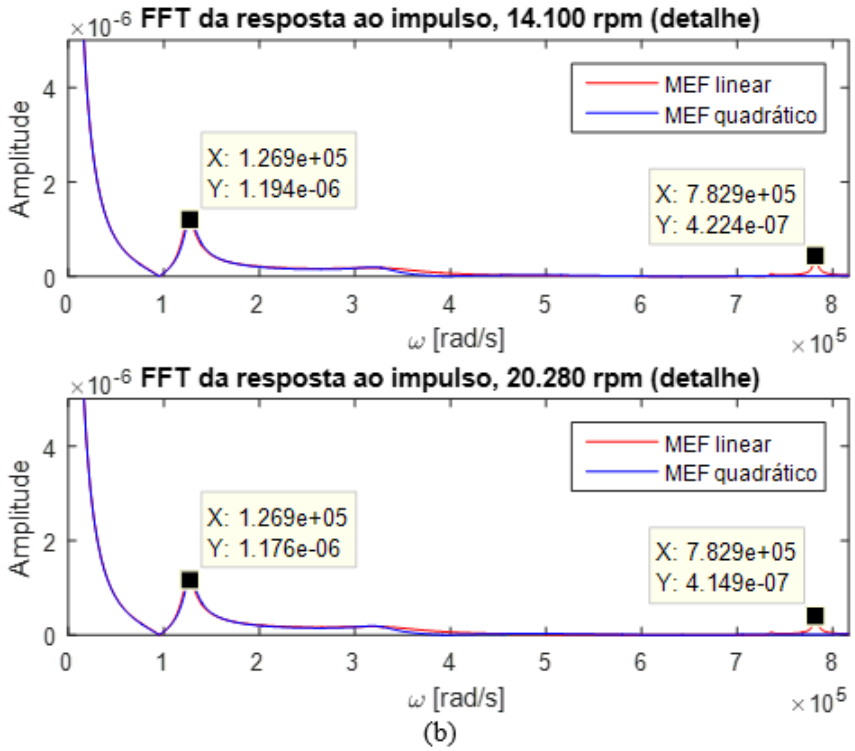
Pode-se observar que a primeira frequência natural é aproximadamente a mesma, tanto para o modelo de parâmetros concentrados, quanto para o MEF, para elementos lineares ou quadráticos. Há diferenças significativas entre os dois resultados a partir da quarta frequência natural. Pode-se observar que os fatores de amortecimento relativos aos modos de alta frequência (4ª e 5ª frequência) apresentam um fator de amortecimento, para o modelo linear, de pelo menos uma ordem de grandeza menor que o fator de amortecimento para o modelo quadrático. Como essas frequências no MEF, utilizando elementos lineares, apresentam um fator de amortecimento mais baixo, a resposta (curva vermelha) ao impulso possui uma componente de alta frequência não observada nas respostas a partir dos elementos quadráticos (curva azul), pois estes possuem fator de amortecimento mais elevado.

Outra forma de verificação faz-se calculando a transformada de Fourier da resposta, de forma a observar as frequências predominantes do sistema. De fato, a Figura 5.7 (a) e (b) mostra a Transformada de Fourier da resposta ao impulso para ambas as rotações. Observam-se dois picos de alta frequência da resposta do sinal. O primeiro, em torno de $1{,}27\times10^5$ rad/s, relativo à segunda frequência natural do sistema. O terceiro, em torno de $7{,}83\times10^5$ rad/s, relativo à quinta frequência natural. É importante notar a inversão de fase de aproximadamente -90º na primeira frequência natural, de acordo com a Figura 5.7 (c). Conforme comentado anteriormente, esse modo de alta frequência tem um fator de amortecimento uma ordem de grandeza menor quando se utilizam elementos lineares, comparados aos elementos quadráticos. Portanto, essa frequência participa na resposta temporal do sistema apenas quando se utilizam elementos lineares. Por isso, é possível observar, nas respostas ao impulso do sistema, três frequências naturais (curva vermelha), para elementos lineares, e duas frequências naturais

(curva azul), para elementos quadráticos.



(a)



(b)

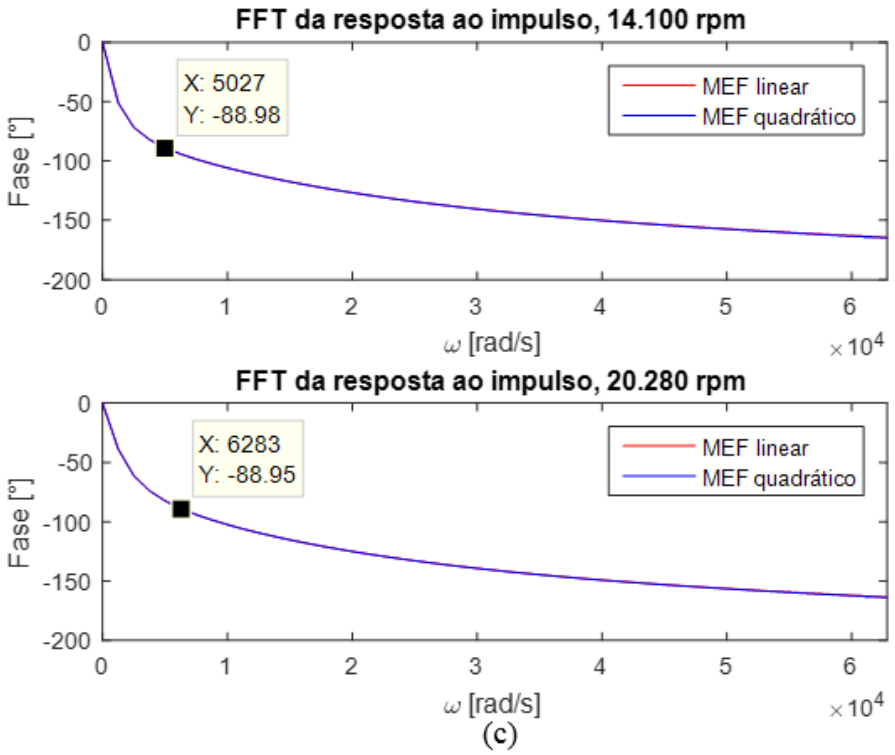


Figura 5.7 –Transformada de Fourier da resposta ao impulso: (a) diagrama de amplitude; (b) detalhe do diagrama de amplitude; (c) detalhe do diagrama de fase.

Outra evidência que corrobora com a afirmação de que as componentes de alta frequência da resposta ao impulso são devidos, de fato, aos modos de alta frequência, é o cálculo da frequência natural através da equação analítica de vibração axial de meios contínuos, Seção 4.3. A equação a ser resolvida numericamente é a Eq. (4.89). Nessa equação, o módulo de elasticidade E, a densidade ρ e a área da seção transversal A do eixo são os mesmos dados previamente utilizados. O eixo tem comprimento L de 103,1 mm, a massa do compressor m_c, localizado a uma distância l_c de 13,9 mm, e da turbina m_t, localizada a uma distância l_t de 89,2 mm, são de 20 g e a massa do colar m_d é de um disco de mesma densidade do eixo, com diâmetros externo e interno de 30 mm e17 mm, respectivamente e espessura 1,5 mm. O mancal com coeficientes equivalentes K_{xx} e C_{xx} está localizado a uma distância l_d igual a 72,1 mm. Esses coeficientes são dados na Tabela 5.1, para duas rotações diferentes.

Substituindo esses parâmetros na Eq. (4.89), a primeira raiz obtida da equação é 5.259,3 rad/s, para 14.100 rpm, e 6.518,3 rad/s, para 20.280 rpm, relativo ao primeiro modo. A segunda raiz, ou segunda frequência natural, é de 124.899 rad/s, para 14.100 rpm, e 124.931 rad/s, para 20.280 rpm. Quando estes resultados são comparados aos valores da Tabela 5.3, vemos que, de fato, as altas frequências de vibração da resposta ao impulso são relativas

aos modos de alta frequência do sistema. Ainda, pode-se dizer que os resultados obtidos através dos modelos pelo MEF são próximos aos resultados obtidos da equação analítica de vibração de meios contínuos, conforme Tabela 5.4, a qual também apresenta as diferenças percentuais entre os vários resultados.

Tabela 5.4 – Diferença entre as duas primeiras frequências naturais dos vários modelos, comparadas à equação analítica de vibração de meios contínuos

	$\omega_n^{(1)}$ (rad/s)	Diferença percentual	$\omega_n^{(2)}$ (rad/s)	Diferença percentual
14.100 rpm				
Eq. meios contínuos	5.259,3	-	124.899	-
Parâmetros Concentrados	5.263,9	0,088%	-	-
MEF linear	5.374,5	2,19%	125.169	0,216%
MEF quadrático	5.381,9	2,33%	126.893	1,60%
20.280 rpm				
Eq. meios contínuos	6.518,3	-	124.931	-
Parâmetros Concentrados	6.527,3	0,139%	-	-
MEF linear	6.666,5	2,27%	125.203	0,218%
MEF quadrático	6.676,0	2,42%	126.904	1,58%

A Tabela 5.4 mostra que a diferença entre a primeira frequência natural calculada pelo MEF é de aproximadamente 2%, quando comparada à solução analítica. É importante observar que a resposta predominante do sistema corresponde à primeira frequência natural, de forma que a resposta do MEF fornece um resultado satisfatório. A segunda frequência natural apresenta uma diferença percentual ainda menor, mas é menos influente na resposta do sistema.

Outro ponto a ser observado é a convergência da malha, ou seja, se existe a variação da frequência natural com o número de elementos finitos utilizados na discretização do sistema. Ao refinar a malha de elementos finitos utilizada acrescentam-se mais graus de liberdade ao sistema, o que introduz mais autovalores/modos de vibrar do sistema. A primeira frequência natural é a frequência mais baixa obtida a partir dos autovalores. A variação da primeira frequência natural com o número de elementos (distribuídos uniformemente), tanto lineares quanto quadráticos, está mostrada na Figura 5.8, enquanto que a variação do fator de amortecimento está mostrado na Figura 5.9.

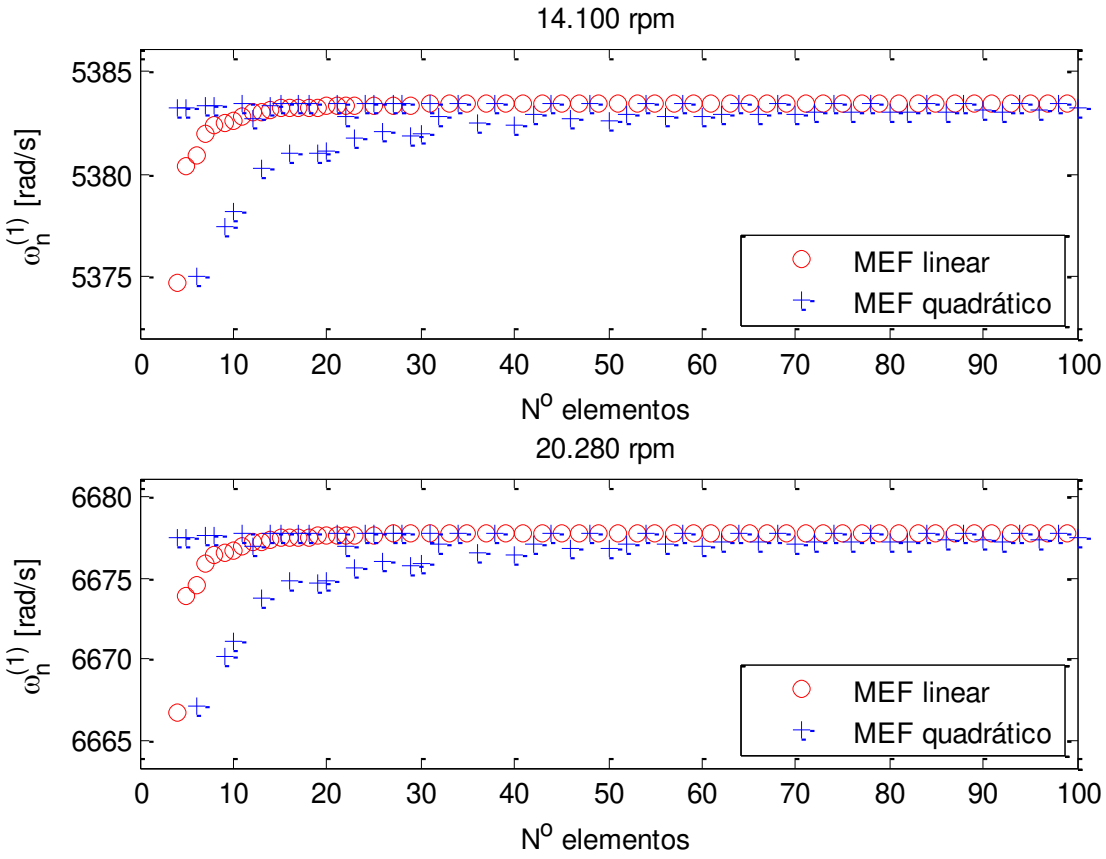


Figura 5.8 – Variação da primeira frequência natural com o número de elementos do sistema

Pode-se observar que a variação desses valores é muito pequena com o número de elementos e que tende assintoticamente a um valor de frequência a partir de um determinado número de elementos. A diferença entre o maior e menor valor nos gráficos tanto da frequência natural como do fator de amortecimento é de apenas 0,3%, uma diferença muito pequena, o que indica que a discretização do eixo no MEF pouco influencia as características dinâmicas da resposta predominante do sistema. A discretização do eixo é importante para casos em que há eixos escalonados, o que não ocorre para o turbocompressor aqui estudado.

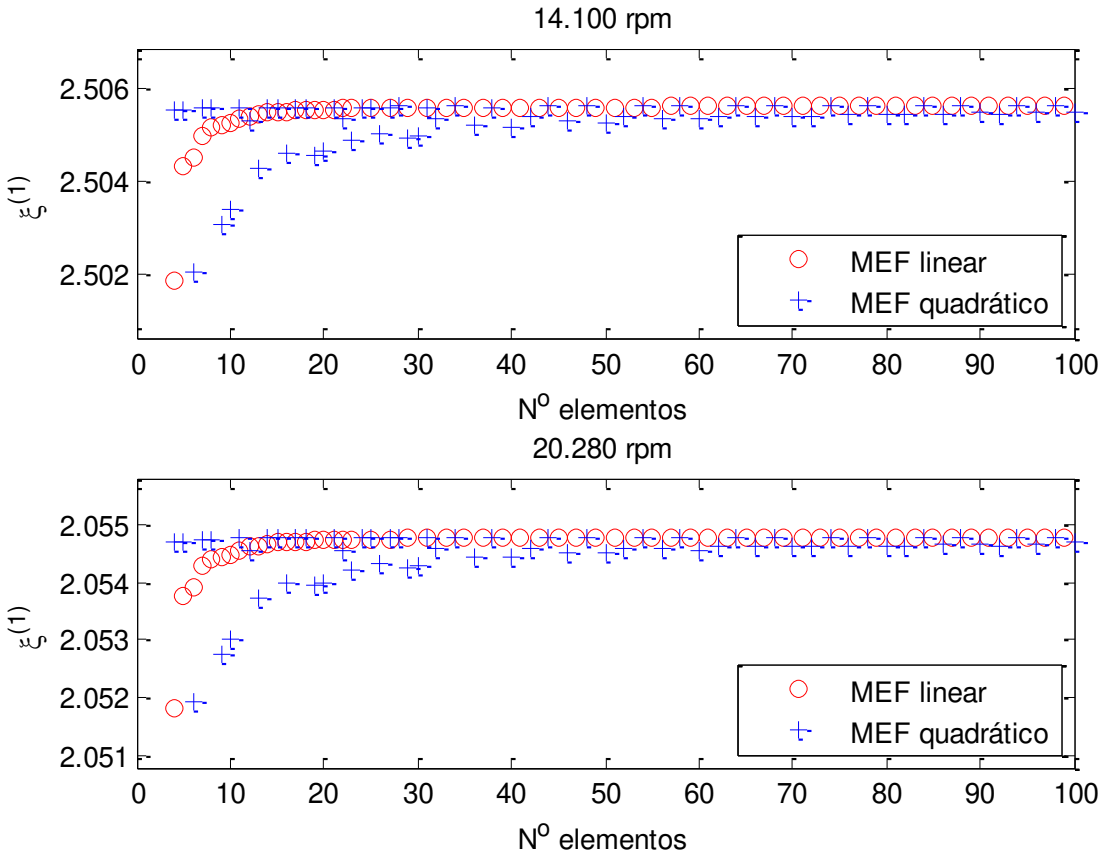


Figura 5.9 – Variação do fator de amortecimento associado à primeira frequência natural com o número de elementos do sistema

Outra discretização importante é a do mancal axial. Ao invés de concentrar todo o mancal num único nó, pode-se fazer a discretização proposta na Seção 4.1.5, ou seja, dividir os mancais e o colar em elementos diferentes. Assim, a malha de elementos finitos com o mancal discretizado é representada na Figura 5.10. Nessa discretização, o colar é modelado como um disco rígido no nó 5, da mesma maneira que na discretização anterior, mas os mancais são representados através de seus coeficientes equivalentes nos nós 4 e 6, que é a região física por onde o filme de óleo escoa. Os coeficientes, nesse caso, são, em cada nó, metade dos valores apresentados na Tabela 5.1.Note que os mancais estão distantes 50 µm do colar do eixo (Figura 5.1), de forma que a distância entre nós dos nós 3 a 7 é de metade desse valor, 25 µm.

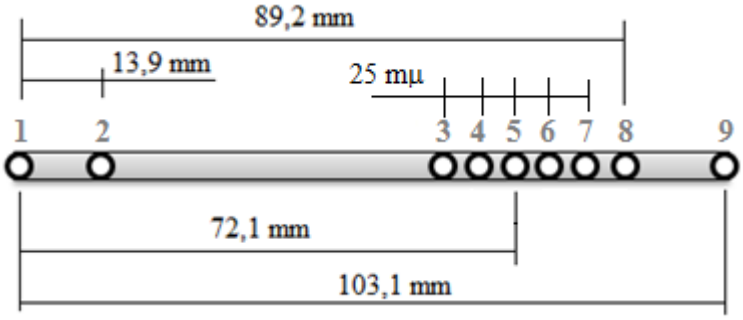


Figura 5.10 – Malha do MEF com discretização do mancal

A resposta ao impulso unitário desse sistema está mostrada na Figura 5.11. Dessa resposta, podem-se tirar as mesmas conclusões obtidas anteriormente: o modo predominante é superamortecido, com uma oscilação sobreposta à resposta predominante relativa aos modos de alta frequência. Essa discretização do mancal pode provocar maior instabilidade numérica, pois a dimensão da malha no mancal é cerca de três ordens de grandeza menor que os demais elementos. No entanto, é interessante, pois permite adicionar ao modelo do sistema coeficientes equivalentes para mancais diferentes. O turbocompressor utiliza dois mancais axiais, em ambos os lados do colar, sendo que cada mancal absorve as vibrações que ocorrem num sentido (um absorve as vibrações para a direita e o outro, para a esquerda). Se os mancais têm perfis diferentes, então seus coeficientes equivalentes são diferentes, o que implica que, à direita e à esquerda do colar, somam-se coeficientes diferentes às matrizes de rigidez e amortecimento. Esse efeito não pode ser observado quando se concentra todo o conjunto colar e mancais num único nó.

Pode-se observar que os resultados obtidos na Figura 5.11 são muito semelhantes aos anteriores, de forma que a discretização do mancal também não altera significativamente a resposta do colar ao impulso. No entanto, deve-se observar que, ao discretizar o mancal, é necessário, para a convergência dos resultados da integração temporal, um passo de tempo uma ou duas ordens de grandeza menor que no caso anterior (1×10^{-7} s e 1×10^{-8} s, para o caso anterior, e 1×10^{-9}, para o caso da discretização do mancal), o que pode provocar erros numéricos na integração das equações do sistema. Obviamente, o tempo computacional para obter os resultados simulados é também maior, mas é interessante notar que as respostas não variam muito com essa discretização.

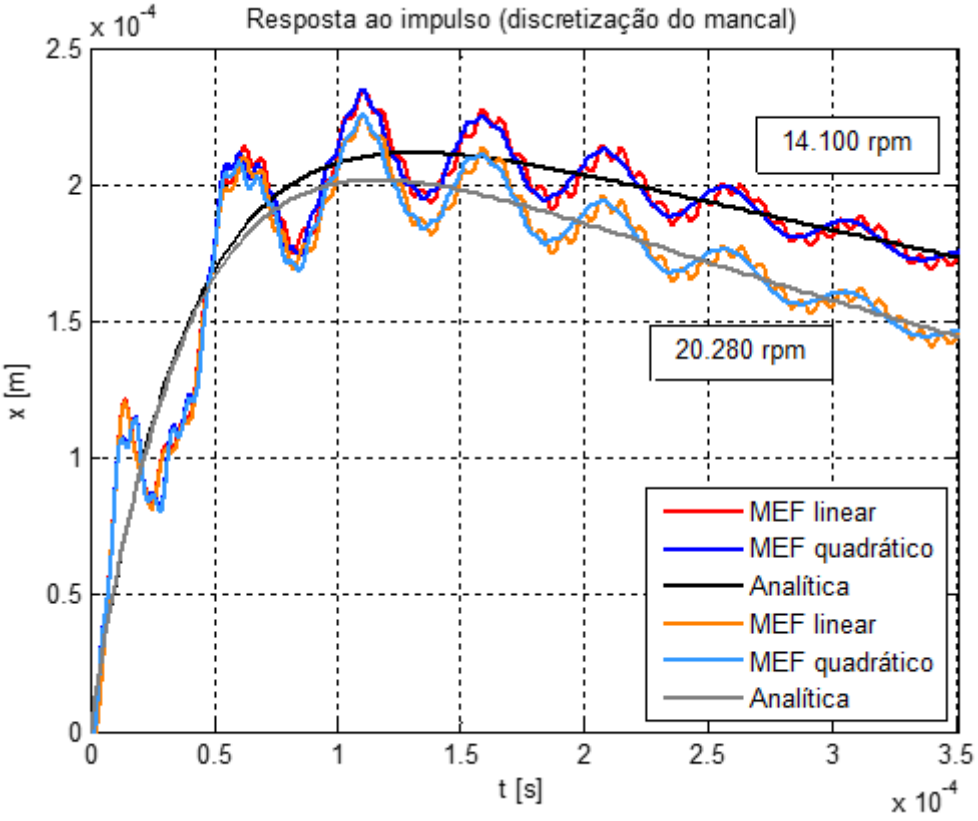


Figura 5.11 – Resposta do colar do sistema ao impulso unitário (discretização do mancal axial)

A discretização do mancal também não altera significativamente os parâmetros modais do sistema. Essa discretização fornece resultados para as frequências naturais e fatores de amortecimento bem próximos aos obtidos com o modelo anterior, sem a discretização do mancal, conforme pode ser observado na Tabela 5.5. Utilizando elementos lineares, a primeira frequência natural e o correspondente fator de amortecimento diferem apenas 2% dos valores obtidos previamente, enquanto que a utilização de elementos quadráticos fornece valores com uma diferença de 3% dos resultados anteriores, para as duas rotações. Essas diferenças são ainda menores para as altas frequências (inferiores a 0,5%), o que indica que a discretização do mancal não altera o resultado global da estrutura, apesar do eventual risco de instabilidade numérica.

Tabela 5.5 – Diferenças entre as duas primeiras frequências naturais com a discretização do mancal no MEF

	$\omega_n{}^{(1)}$ (rad/s)	Diferença percentual	$\omega_n{}^{(2)}$ (rad/s)	Diferença percentual
14.100 rpm				
MEF linear	5.374,5	-	125.169	-
MEF linear mancal discretizado	5.305,7	1,28%	125.195	0,021%
MEF quadrático	5.381,9	-	126.893	-
MEF quadrático mancal discretizado	5.564,9	3,40%	126.890	0,002%
20.280 rpm				
MEF linear	6.666,5	-	125.203	-
MEF linear mancal discretizado	6.492,6	2,61%	125.199	0,003%
MEF quadrático	6.676,0	-	126.904	-
MEF quadrático mancal discretizado	6.813,4	2,06%	126.898	0,005%

5.2. Resposta ao degrau

A resposta ao degrau do sistema é de fundamental importância. Segundo Zhu e Zhang (2003), que estudaram modelos para o mancal axial, a força axial da turbina pode ser modelada como um degrau de amplitude arbitrária ΔF, isto é, a excitação é do tipo $\Delta F\theta(t)$. Entretanto, Zhu e Zhang não discutem como obter essa amplitude arbitrária. Assim sendo, será estudada a resposta ao degrau unitário do sistema e, em seguida, um cálculo para estimativa da amplitude do degrau. Como o sistema estudado é linear, então a resposta ao degrau unitário fornece as características qualitativas mais importantes da resposta do sistema a esse tipo de excitação, enquanto que a resposta a um degrau de amplitude arbitrária é simplesmente a resposta ao degrau unitário multiplicada por essa amplitude.

Assim, seja a malha de elementos finitos dada na Figura 5.2. A resposta desse sistema a uma entrada do tipo degrau unitário no nó 4, utilizando tanto elementos lineares como quadráticos, é dada na Figura 5.12, para a rotação de 14.100 rpm, e na Figura 5.13, para 20.280 rpm.

Da resposta ao degrau, não é possível observar diferenças significativas entre os

modelos utilizados. Também não é possível observar vibrações devido aos modos de alta frequência.

Pode-se obter desse gráfico, também, os parâmetros de ganho estático e de tempo de estabilização. Para a rotação de 14.100 rpm, o ganho estático é de $0{,}219\times10^{-6}$ µm/N, com um tempo de estabilização de 3,5 ms, enquanto que para a rotação de 20.280 rpm, o ganho estático é de $0{,}142\times10^{-6}$ µm/N, com um tempo de estabilização de 2,3 ms. Conforme discutido na Seção 4.2.6.1, espera-se que um maior amortecimento do sistema implique em um menor tempo de estabilização. Isso também é observado na resposta fornecida pelo MEF que, apesar de possuir modos de altas frequências, estes não são observados, sendo que apenas a resposta predominante foi observada.

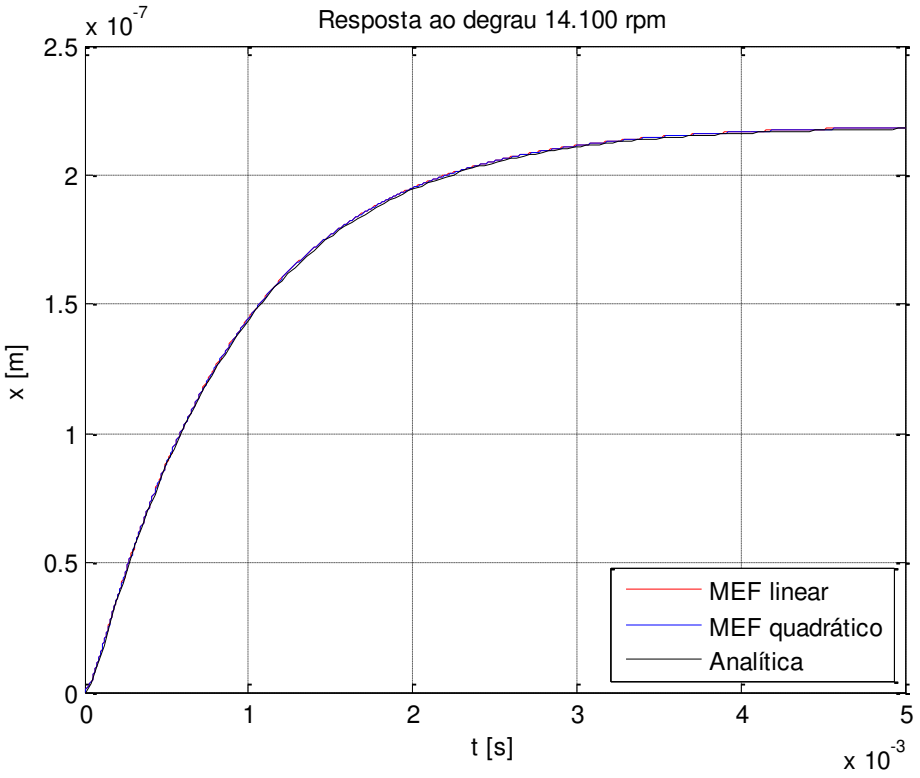


Figura 5.12 – Resposta do colar do sistema ao degrau unitário (14.100 rpm)

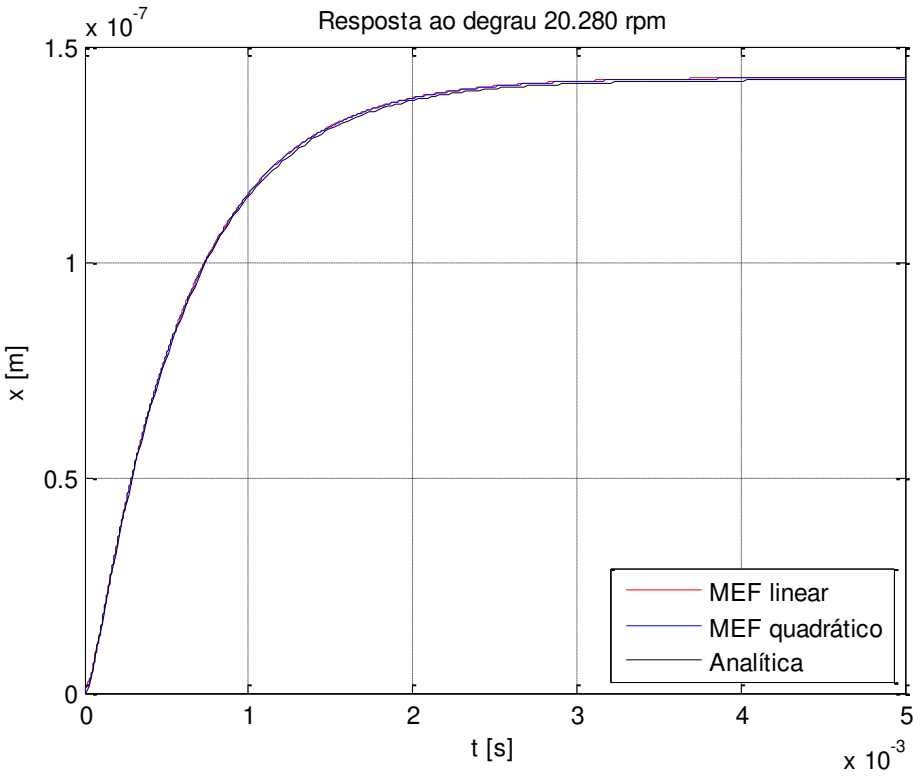


Figura 5.13 – Resposta do colar do sistema ao degrau unitário (20.280 rpm)

O primeiro parâmetro, o ganho estático, é importante, pois fornece a relação entrada/saída do sistema linear, necessária para calcular a resposta do sistema a um degrau de amplitude arbitrária. O tempo de estabilização é uma medida do tempo necessário para o sistema encontrar sua posição de equilíbrio em regime permanente. No caso de turbocompressores para aplicação automobilística, é desejável que o sistema apresente as menores vibrações possíveis, pois isso pode gerar ruídos e desconforto, de forma que um tempo menor de estabilização significa menor desconforto para os passageiros.

A fim de obter uma estimativa para a amplitude arbitrária do degrau, foi desenvolvida a metodologia apresentada na Seção 4.4. Propôs-se um método para estimar a amplitude do degrau em função da rotação do sistema. Discutiram-se dois modelos diferentes para estimativa dessa força. O primeiro, por simplicidade, chamar-se-á analítico, pois a equação final para a amplitude da força é uma equação analítica em função apenas da rotação (e de parâmetros geométricos do sistema, que não variam com a rotação), Eq. (4.96), e o segundo é chamado de operacional, pois obtém-se a força em função de parâmetros operacionais da turbina, como a vazão volumétrica dos gases, sua temperatura e pressão. O segundo método exige o cálculo da raiz da Eq. (4.106) através de um método numérico, a fim de obter a rotação do sistema. O método utilizado para obter as raízes dessa equação foi o método de Newton-Raphson.

Antes, porém, é importante observar que é necessário avaliar a diferença de entalpia Δh, para obter a rotação Ω da turbina em função da vazão dos gases de entrada Q, na Eq. (4.106). Essa diferença de entalpia é dada pela Eq. (4.107) e depende das entalpias molares $\bar{h}_i(T)$, de cada gás da mistura e da temperatura T em que os gases se encontram. Para estimar esses valores, foram utilizadas as Tabelas A-22 e A-23 de Moran et al. (2014, p. 963-968). Essa tabela fornece os valores da entalpia h e da entalpia molar $\bar{h}$ em função de valores selecionados da temperatura, para o ar atmosférico e para diversos gases ideais, dentre os quais o CO_2, H_2O (vapor) e N_2. A fim de facilitar a implementação computacional desses valores, foi obtido um polinômio interpolador de $\bar{h} = \bar{h}(T) = p(T)$, através do método dos mínimos quadrados. A entalpia em função da temperatura para o ar atmosférico e as entalpias molares em função da temperatura para cada substância estão mostradas nos gráficos abaixo, juntamente com os valores obtidos das Tabelas A-22 e A-23 e as curvas dos polinômios interpoladores.

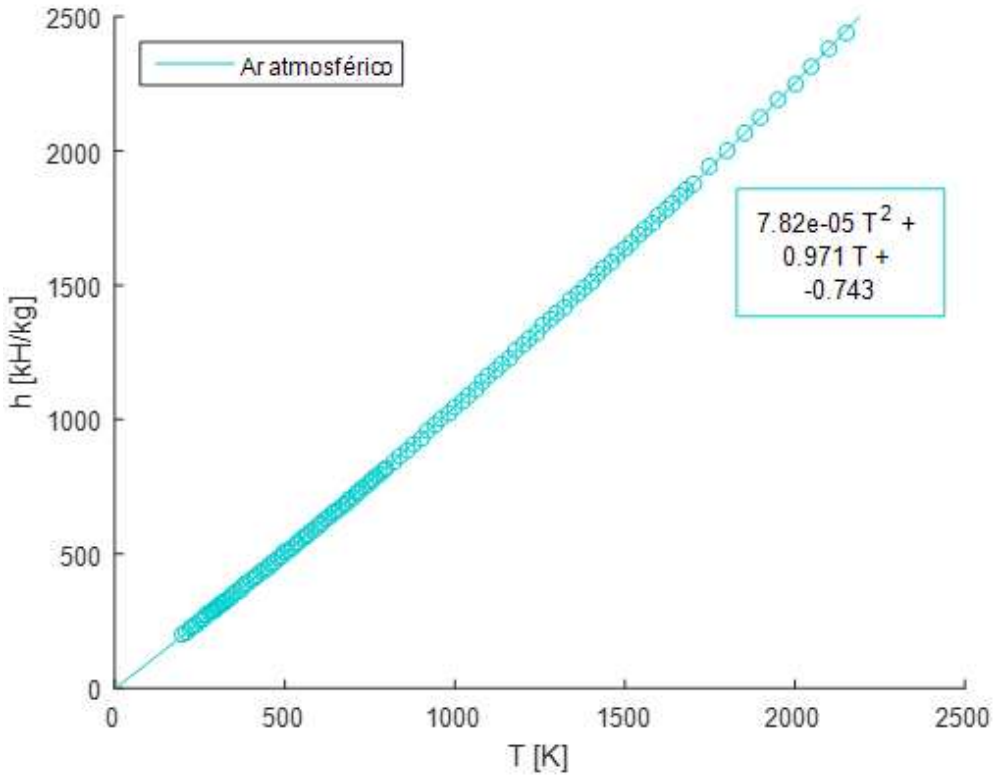


Figura 5.14 – Entalpia em função da temperatura (Ar atmosférico)

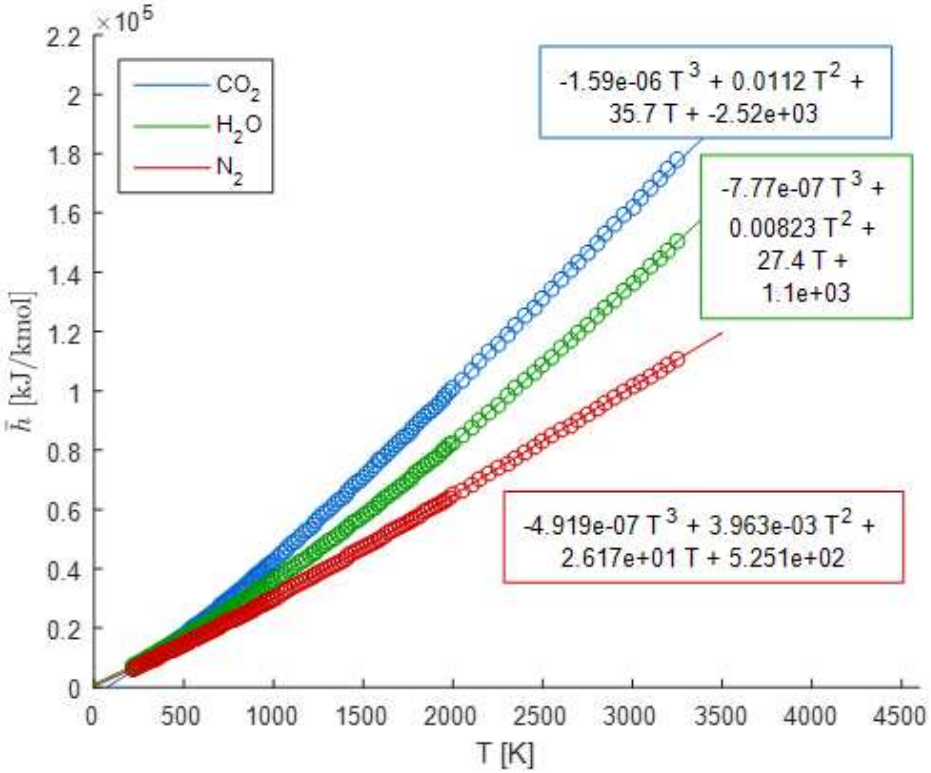


Figura 5.15 – Entalpia molar em função da temperatura (CO_2, H_2O vapor e N_2)

Assim, seja a turbina com raios das pás r_2 e r_3 iguais a 40 mm e 25 mm, respectivamente, ângulos de entrada e saída α_2 e β_3 iguais a 80° e 20°, respectivamente, e cuja área de entrada é uma casca cilíndrica de raio 45 mm e espessura 15 mm. Para os parâmetros operacionais, por simplicidade, admitir-se-á que estes se mantêm constantes. Ainda, será considerado padrão ar frio, pois no experimento realizado por Vieira (2014), a turbina do turbocompressor foi impulsionada utilizando-se ar comprimido do laboratório. Assim, admitindo que o ar comprimido entre na turbina com uma temperatura de 20 °C e uma pressão de $1{,}85\times10^5$ Pa, e que a turbina descarrega para a atmosfera (pressão de saída é a atmosférica), então a massa molar do ar é 0,028964 kg/mol e a densidade do ar na entrada da turbina é 2,198 kg/m^3.

Com esses parâmetros geométricos e operacionais e com os polinômios interpoladores para facilitar o cálculo da diferença de entalpia Δh, é possível avaliar como a força axial do sistema varia com a sua rotação. Primeiramente, é importante notar que a rotação do sistema varia com a vazão de entrada, conforme mostrado no gráfico da Figura 5.16. A equação analítica (4.95) prevê uma relação linear entre a rotação e a vazão, fato observado também pelo modelo operacional da Eq. (4.106).

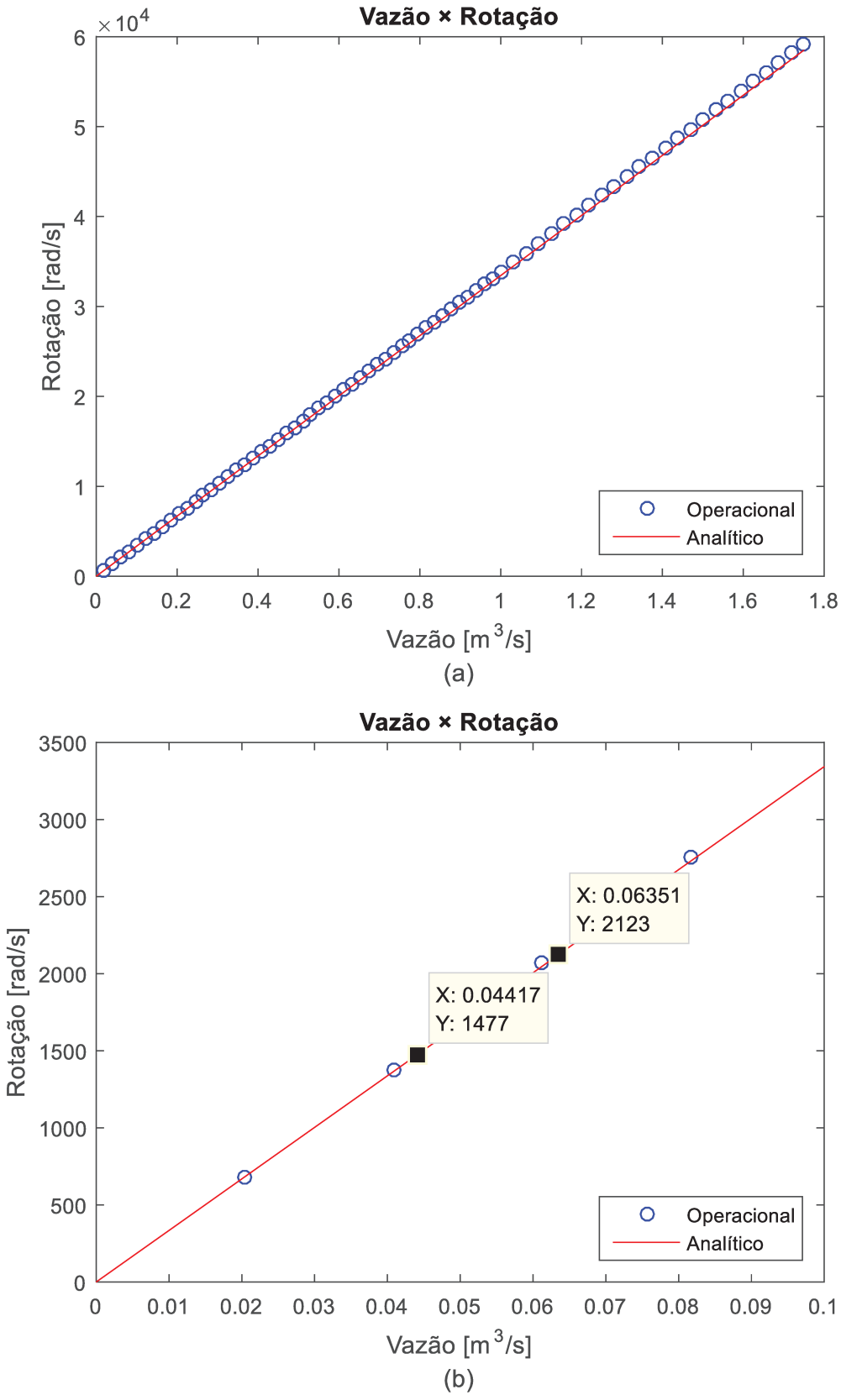
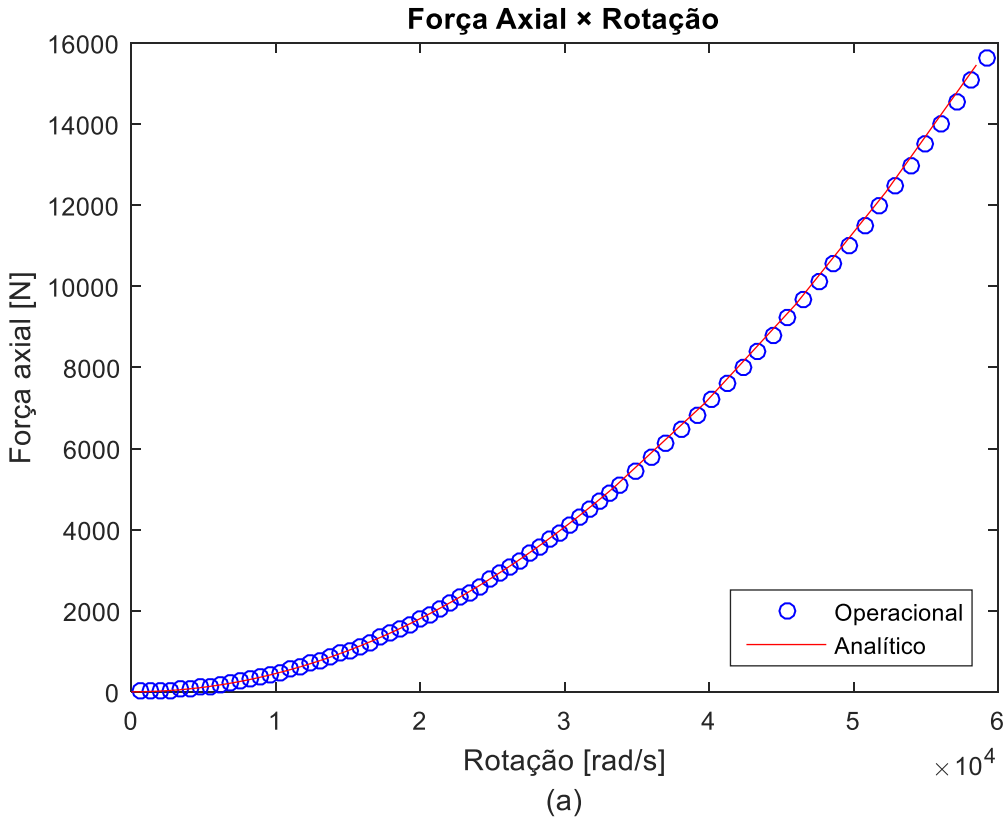


Figura 5.16 – (a) Rotação do sistema em função da vazão volumétrica dos gases de entrada e (b) Detalhe para faixa de rotação analisada

Um dos resultados mais importantes desse trabalho é a variação da força axial do sistema em função da rotação do mesmo, dado na Figura 5.17. Esse gráfico mostra que a amplitude do degrau varia com a rotação do sistema de forma quadrática, conforme esperado pela equação analítica (4.96) e observado também através do modelo "operacional". Pode-se observar boa concordância entre os dois modelos. Com esse gráfico, é possível observar a resposta ao degrau do sistema, para diversas rotações. Para 14.100 rpm (~1.476 rad/s), o sistema é excitado com um degrau de amplitude 9,85 N, enquanto que para a rotação de 20.280 rpm (~2.123 rad/s), o degrau tem amplitude 20,4 N. A resposta ao degrau desse sistema nessas rotações, portanto, é a resposta ao degrau unitário multiplicado por esses valores.

Portanto, na rotação de 14.100 rpm, a posição de equilíbrio do sistema após aplicação da força é 2,14 µm, enquanto que para a rotação de 20.280 rpm, é de 2,89 µm. É importante notar que a folga mínima do filme de óleo (ou seja, a distância entre o colar e o mancal), é em torno de 50 µm, de forma que não há contato entre o colar e o mancal. Esta observação é importante, pois busca-se que não ocorra contato entre mancal e colar, de forma a minimizar atritos e desgaste do sistema.



(a)

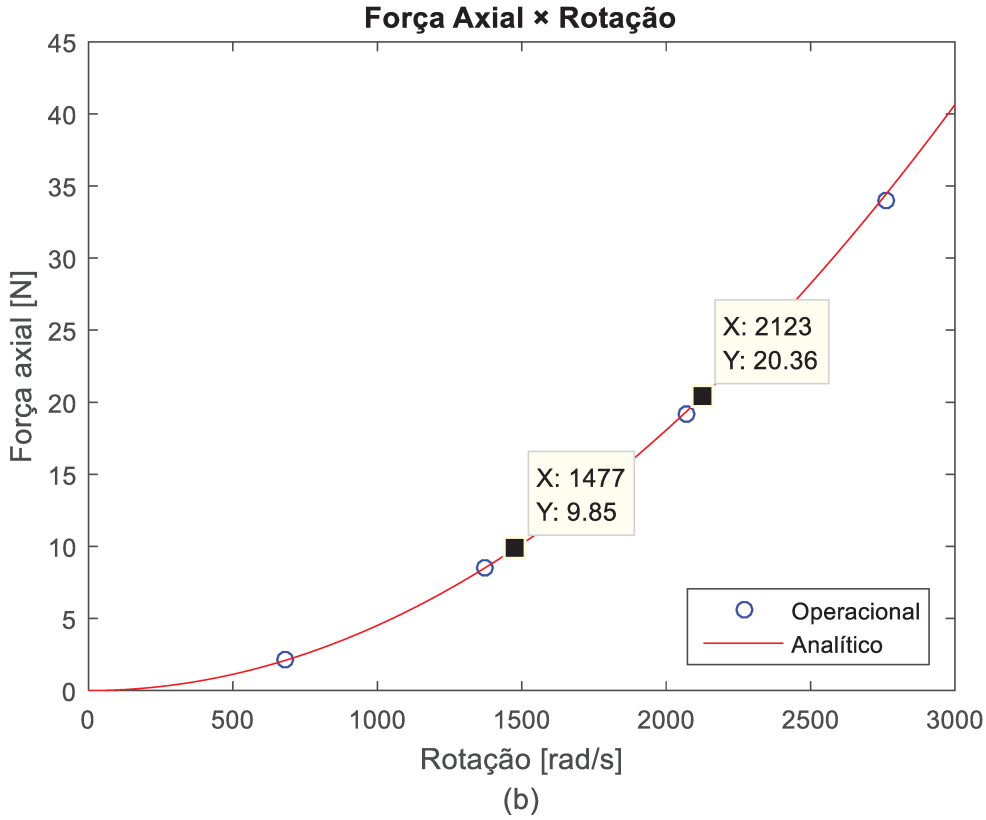


Figura 5.17 – (a) Amplitude da força axial do sistema em função da rotação e (b) Detalhe para faixa de rotação analisada

Outro ponto importante a ser observado na Figura 5.17 é que o valor da amplitude do degrau em função da rotação corresponde ao *comportamento em regime permanente* do sistema naquela rotação. Isso significa que estes valores não levam em consideração a aceleração/desaceleração do sistema de uma rotação para outra, ou seja, ao aumentar a rotação do sistema, não necessariamente a força axial de excitação do sistema variará de forma quadrática. Porém, para cada valor da rotação do sistema, após o mesmo entrar em equilíbrio, a força axial do tipo degrau tem a amplitude mostrada no gráfico da Figura 5.17.

A fim de levar em consideração as acelerações/desacelerações do sistema, uma nova metodologia deve ser desenvolvida. Quando há aceleração/desaceleração do sistema, altera-se a rotação do mesmo e esta rotação, como já visto, varia com o fluxo volumétrico de entrada. Portanto, para que haja variação da rotação, o fluxo volumétrico deve aumentar ou diminuir, de forma que não mais se trabalha com a hipótese de regime permanente. Assim, o termo dN/dt do Teorema de Transporte de Reynolds, Eq. (3.1), não é mais nulo, conforme premissa assumida para os cálculos desenvolvidos para as equações da quantidade de movimento linear, da quantidade de movimento angular e da energia.

5.3. Validação experimental preliminar

A partir do trabalho de Vieira (2014), sabe-se que a temperatura medida do óleo no reservatório, a ser circulada pelo turbo, foi de 37/38 °C. No entanto, após entrar no turbo, mas antes de chegar aos mancais axiais, esse óleo circula através dos mancais radiais, o que provoca um aumento na sua temperatura. Esse aumento de temperatura foi estimado através de um modelo THD (ALVES, 2011), levando em consideração a lubrificação dos mancais radiais. Com isso, novos coeficientes equivalentes para os mancais axiais foram estimados (DANIEL, VIEIRA e CAVALCA, 2016).

Tabela 5.6 – Temperatura e espessura mínima do filme de óleo passando pelo mancal axial, para três rotações diferentes (DANIEL, VIEIRA e CAVALCA, 2016)

N (rpm)	Folga mínima nos mancais (μm)	Espessura mínima do filme de óleo (medida) (μm)	Temperatura de reposição do óleo (estimado) (°C)
14.100	49,9	23,8	60,6
20.280	49,9	20,5	73,0
27.580	49,9	17,2	89,2

A Tabela 5.6 mostra os valores estimados da temperatura de reposição do óleo para três rotações distintas, a folga mínima entre os mancais axiais, neste caso, 49,9 μm e, para cada rotação, a espessura mínima do filme de óleo, medida nos experimentos realizados por Vieira (2014). Com esses valores de temperatura de reposição do óleo, é possível estimar coeficientes para os mancais axiais, nas três rotações, mostrados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Coeficientes equivalentes dos mancais axiais

N (rpm)	Mancal 1			Mancal 2		
	F_1 (N)	K_{xx1} (N/m)	C_{xx1} (N.s/m)	F_2 (N)	K_{xx2} (N/m)	C_{xx2} (N.s/m)
14.100	32,75	2,264E+06	2,170E+03	-38,03	4,460E+06	3,996E+03
20.280	44,04	1,527E+06	1,119E+03	-28,24	6,834E+06	3,861E+03
27.580	57,71	9,969E+05	5,815E+02	-20,06	1,048E+07	3,885E+03

Para cada velocidade de rotação, dadas a temperatura e a espessura mínima medida do filme de óleo, é possível calcular a força suportada pelo mancal axial. A partir de pequenas perturbações de deslocamento e velocidade em torno da posição de equilíbrio do mancal, estimam-se os coeficientes de rigidez e amortecimento do mesmo, conforme discutido na Seção

4.1.5. Para a configuração do turbocompressor, mostrada na Figura 5.18, isto é, o Mancal 1 é o mancal do lado da turbina e o Mancal 2 é o mancal do lado do compressor, então o Mancal 1 é capaz de suportar a força F_1 e tem coeficientes equivalentes de rigidez K_{xx1} e amortecimento C_{xx1}. Para o Mancal 2, os parâmetros são análogos. É importante notar que F_1 e F_2 tem sinais contrários, pois cada mancal é capaz de suportar cargas em sentidos opostos.

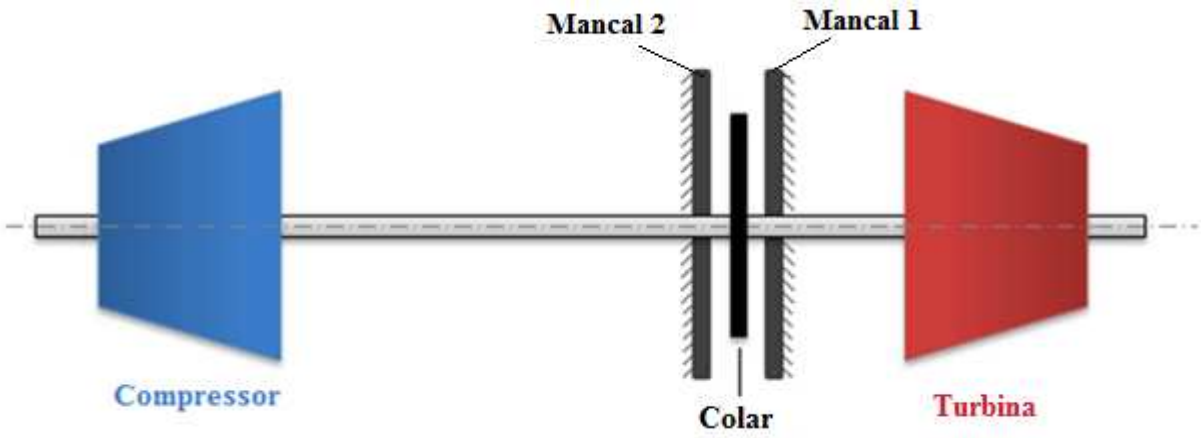


Figura 5.18 – Configuração do turbocompressor

Neste caso, os mancais 1 e 2 têm coeficientes equivalentes diferentes, de forma que é possível inserir no MEF a contribuição de cada mancal ao sistema através de sua discretização. No entanto, conforme discutido na Seção 4.2.6, os dois mancais são modelados como molas e amortecedores em paralelo, o que significa que, se quisermos concentrar todo o mancal num único nó, então os coeficientes equivalentes do mancal serão a soma dos coeficientes mostrados na Tabela 5.7. A capacidade de carga total dos dois mancais também é a soma algébrica das forças apresentadas na Tabela 5.7. Como as forças têm sinais contrários, então o mancal inteiro é capaz de suportar uma força, em módulo, menor que as duas componentes separadas. Isso fornece os resultados mostrados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Coeficientes equivalentes globais dos mancais axiais

N (rpm)	F (N)	Kxx (N/m)	Cxx (N/m)
14.100	-5,286	6,723E+06	6,165E+03
20.280	15,80	8,361E+06	4,980E+03
27.580	37,65	1,147E+07	4,466E+03

O passo seguinte é verificar se, ao utilizar os valores de carga estimados nas Tabelas 5.7 e 5.8, chega-se próximo a espessura mínima de filme de óleo mostrada na Tabela 5.6. Deve-se, portanto, excitar o sistema com um degrau cuja amplitude é mostrada na Tabela 5.7, se

houver a discretização dos mancais, ou na Tabela 5.8, se o mancal for concentrado num único nó. Os resultados encontram-se na Figura 5.19.

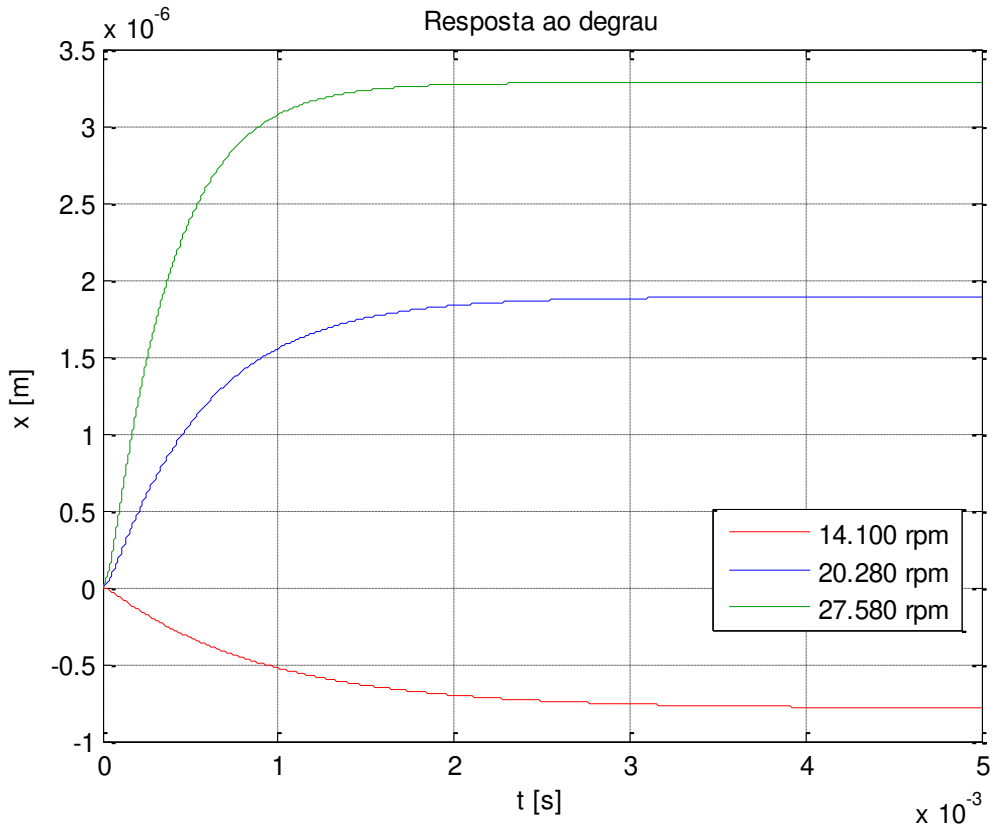


Figura 5.19 – Resposta do colar ao degrau de amplitude arbitrária, para três rotações

A posição em regime permanente do sistema permite estimar a espessura mínima do filme de óleo, mostrada na Tabela 5.9. Essa espessura é calculada levando em consideração o esquema mostrado na Figura 5.20. Nesta figura, h_0 é a espessura inicial do filme de óleo (antes da aplicação do degrau), que é simplesmente a distância entre o mancal e o colar ao fazer a discretização do mesmo no MEF (é dimensão da folga mínima, ou ainda, do elemento que discretiza o conjunto do mancal axial). Ao aplicar o degrau, a posição do colar se altera de $\Delta x = x_\infty - x_0$, que é a posição final x_∞, em regime permanente, do nó do colar, subtraído de sua posição inicial x_0. Na Tabela 5.9, Espessura calculada é variação da espessura do filme de óleo antes e após a aplicação do degrau, $h_0 - \Delta x$, sendo que se calcula essa variação para os dois mancais e mostra-se o menor dentre os dois valores (pois, sendo dois mancais, ao deslocar o colar, uma espessura irá aumentar de uma distância $-(-|\Delta x|)$ e a outra irá diminuir de uma distância $-|\Delta x|$), fornecendo a espessura mínima do filme de óleo calculada para a entrada degrau estipulada. Ainda, na Tabela 5.9, Espessura mínima do filme de óleo é o parâmetro medido (VIEIRA, 2014).

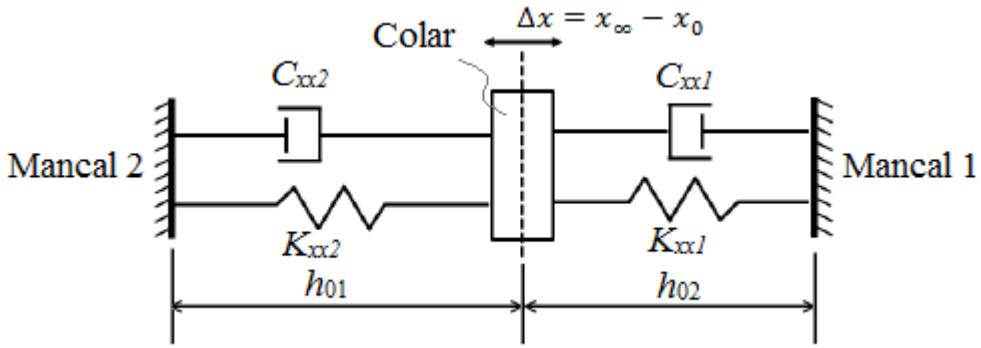


Figura 5.20 – Esquema simplificado do conjunto mancais e colar (sistema massa-mola-amortecedor)

Tabela 5.9 – Coeficientes equivalentes globais dos mancais axiais

N (rpm)	Espessura mínima do filme de óleo (µm)	Espessura calculada (µm)
14.100	23,8	24,2
20.280	20,5	23,1
27.580	17,2	21,7

Pode-se observar que o MEF fornece resultados próximos aos experimentos de Vieira (2014). Por fim, os resultados da amplitude do degrau em função da rotação, apresentados na Figura 5.17, foram obtidos para a condição de teste realizada, isto é, movimentando a turbina por ar comprimido. Para as três rotações em análise, o modelo para a força axial da turbina em função da rotação, Eq. (4.96), fornece os valores mostrados na Tabela 5.10. É importante notar que, como não se conhecem as propriedades termodinâmicas do ar comprimido utilizado nos experimentos, estes parâmetros de entrada foram estimados, conforme detalhado no Anexo D (os testes foram realizados na Technische Universität Darmstadt, no período de entre julho e agosto de 2014, quando a temperatura externa média era de 28 °C, valor este assumido para o ar). A pressão de entrada do ar comprimido foi, então, estimada para cada velocidade de rotação do eixo (Anexo D), obtendo-se, assim, a amplitude da força axial $|F_x|$ a partir do modelo proposto na Eq. (4.96). A comparação entre as forças estimadas pelo modelo teórico $|F_x|$ e as calculadas a partir da espessura medida em Vieira (2014) , encontram-se na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 – Amplitude da força axial em função da rotação

N (rpm)	N (rad/s)	p (bar)	$\|F_x\|$ (N)	$\|F\|$ (N)
14.100	1.477	1,3	6,736	5,286
20.280	2.124	1,6	17,15	15,8
27.580	2.888	1,8	35,69	37,65

Observa-se a proximidade dos valores de força axial para as três rotações, o que certamente sinaliza positivamente para os resultados aqui obtidos, lembrando sempre tratar-se de uma validação preliminar. Desta forma, o modelo por elementos finitos do turbocompressor, assim como o modelo preliminar para força axial na turbina, são promissores para análise desse sistema em regime quase estático a cada velocidade de rotação.

6. Conclusões

6.1. Conclusões e comentários

O presente trabalho tem por hipótese que a vibração axial de um turbocompressor pode ser modelada através de elementos finitos, utilizando-se elementos de barras, adicionando ao sistema descontinuidades como massas concentradas e mancais axiais, modelados, por sua vez, através de seus coeficientes dinâmicos equivalentes, e excitando externamente o sistema com funções do tipo impulso e degrau. As discretizações do eixo e do mancal permitem observar as respostas dinâmicas nos diversos nós considerados, além de permitir a inserção no modelo de efeitos locais dos mancais axiais no sistema global.

O modelo de elementos finitos da estrutura gera um sistema de equações dinâmicas que, se excitados com um impulso, são sujeitos a condições iniciais de velocidade, mas voltam após algum tempo à posição de equilíbrio, oscilando ou não, dependendo da matriz de amortecimento (que pode fornecer autovalores complexos, caso em que os modos são subamortecidos e a estrutura vibra, ou autovalores reais negativos, caso em que os modos são superamortecidos e a estrutura não apresenta vibrações excessivas). Se excitados com um degrau, então há uma alteração do equilíbrio do sistema e uma (possível) vibração em torno dessa nova posição de equilíbrio. Foram comparadas as respostas do MEF, utilizando-se tanto elementos lineares como quadráticos, e também com um modelo mais simples de parâmetros concentrados, no qual toda a massa do sistema é concentrada na posição do colar do eixo.

Primeiramente, observa-se que as matrizes de rigidez e amortecimento do sistema dependem da velocidade de rotação do turbocompressor, pois os coeficientes equivalentes dos mancais axiais dependem dessa velocidade. No entanto, observa-se que os parâmetros modais do sistema mais suscetíveis a essa variação são relativos à primeira frequência natural do mesmo. Quanto à utilização de elementos lineares ou quadráticos, pode-se dizer que ambos os elementos fornecem resultados muito semelhantes, no exemplo aqui analisado. Da resposta ao impulso, observa-se que elementos lineares apresentam predominantemente em sua resposta, a sobreposição de três modos próprios do sistema, cujas frequências são da ordem de 5.300 (para velocidade de rotação de 14.100 rpm) ou 6.600 (para 20.280 rpm), para a primeira frequência natural, e de 125.000 e 780.000 rad/s para os modos em frequências mais elevadas (em ambas velocidades de rotação), enquanto que os elementos quadráticos apresentam contribuição mais significativa de apenas dois modos próprios, a primeira frequência natural e a resposta relativa

à frequência de 125.000 rad/s.

Da resposta ao impulso, ainda, foi analisada a influência da discretização do eixo e dos mancais axiais na resposta do sistema, observando-se os parâmetros modais, através da matriz de estados, como as primeiras frequências naturais e os respectivos fatores de amortecimento, assim como a resposta temporal da vibração axial do colar do eixo, cujo sistema de equações foi integrado numericamente.

Quanto à discretização do eixo, pode-se dizer que há pouca variação dos parâmetros modais, observando-se particularmente a variação da primeira frequência natural e seu respectivo fator de amortecimento, com o número de elementos de eixo no sistema. Observou-se que, para elementos lineares, não há variação observável ao discretizar o eixo com 10 elementos ou mais, enquanto que, para elementos quadráticos, a variação é desprezível com 30 ou mais elementos.

Da discretização do mancal, nota-se, eventualmente, maior risco de instabilidade numérica na solução do sistema, devido as dimensões reduzidas dos elementos do mancal axial (folga mínima). Para integração numérica do sistema, quando há discretização do mancal, é necessária a utilização de um incremento temporal menor, o que acarreta num maior tempo computacional para obtenção da resposta. No entanto, a vantagem dessa discretização é a possibilidade de introduzir no modelo mancais axiais de diferentes perfis, com coeficientes equivalentes diferentes, já que, no caso de turbocompressores, há dois mancais axiais ao redor do colar do eixo, absorvendo vibrações em sentidos opostos.

Da resposta ao degrau, não é possível observar as componentes de alta frequência da resposta do sistema, mas podem-se estimar parâmetros como o ganho estático do sistema e o tempo de estabilização. Foi proposto um modelo para estimar a força axial proveniente do fluxo de gases da turbina, modelada como um degrau de amplitude arbitrária. Obteve-se, portanto, a resposta do sistema multiplicando-se a resposta ao degrau unitário do sistema pela amplitude do degrau, o que remonta ao ganho estático do sistema. O tempo de estabilização é um parâmetro importante, pois é uma estimativa do tempo necessário para que o sistema reduza a níveis desprezíveis suas vibrações.

Do modelo para estimativa da força axial, sabe-se que, por hipótese, admitiu-se o sistema operando em regime permanente, de forma que o fluxo de gases passando pela turbina era constante. Assim, das equações fundamentais da dinâmica dos fluidos (Teorema de

Transporte de Reynolds), obteve-se duas equações para modelar a força axial da turbina no eixo do sistema. A primeira equação foi obtida de forma analítica, dependendo exclusivamente dos parâmetros geométricos da turbina e das propriedades termodinâmicas do fluxo de gases passando pela mesma, indicando que a força axial dependente da rotação da turbina varia de forma quadrática com a mesma. A segunda equação obtida, dependente dos mesmos parâmetros, deve ser resolvida numericamente para se obter a rotação em função da vazão dos gases de entrada e, uma vez obtida essa rotação, pode-se estimar a força axial. Ambos os métodos produziram resultados para a força axial, em função da rotação do sistema, muito próximos entre si.

Por fim, foi feita uma validação experimental preliminar dos modelos propostos. Foi considerado para tanto, um experimento que consistiu em medir a espessura mínima do filme de óleo dos mancais em três diferentes rotações do eixo (VIEIRA, 2014). Simultaneamente, foi utilizada uma estimativa da temperatura de entrada do filme de óleo no mancal axial a partir do pré-aquecimento do filme nos mancais radiais (DANIEL, VIEIRA e CAVALCA, 2016). Os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento nos mancais foram calculados e, consequentemente, as forças de sustentação hidrodinâmicas. A validação do modelo com os resultados experimentais consistiu, portanto, em comparar a espessura mínima obtida por simulação numérica nas três diferentes rotações e correspondentes condições de carregamento, com as medições de Vieira (2014). Ao comparar os resultados medidos da espessura do filme de óleo com o resultado encontrado pelo MEF, observa-se boa concordância entre os valores na faixa de rotações consideradas. Evoluiu-se, em seguida, para comparação da estimativa das forças axiais, cujos resultados também se mostraram adequados ao estágio preliminar da análise.

Assim, após as considerações apresentadas, conclui-se que os modelos propostos para simulação numérica do comportamento de um eixo rotativo, apoiado por mancais axiais e sujeito a uma excitação externa em regime permanente, são viáveis e promissores para estimativa inicial de projeto do desempenho dos mancais.

6.2. Sugestões para trabalhos futuros

Ao propor um modelo para a força axial da turbina, é natural admitir que futuramente esse modelo deve ser comparado a resultados de testes experimentais específicos, o que sugere que um trabalho empírico dessa natureza deve ser realizado.

O modelo proposto também pode ser expandido para levar em considerações outras possibilidades. Primeiramente, ao admitir que o sistema encontra-se em regime permanente, simplificam-se as equações que regem o problema, o que, por sua vez, implica na obtenção de uma equação que vale exclusivamente para o equilíbrio quase estático do sistema. Portanto, um desdobramento natural é desenvolver o modelo para observar o comportamento do sistema rotativo em aceleração/desaceleração, ou seja, obter o modelo de força axial para o sistema em função da variação da rotação.

Também é natural estudar o sistema a uma entrada harmônica, visto que é válido admitir que a força axial do sistema varia de forma harmônica, mesmo em regimes quase estáticos, pois, com a rotação da turbina, embora supôs-se um fluxo constante, sempre haverá uma pequena perturbação no fluxo dos gases, principalmente devido à passagem das pás da turbina no escoamento, o que pode causar pequenas flutuações do valor médio esperado, modelado através do degrau.

Pode-se também fazer uma abordagem computacional mais robusta do escoamento dos gases através da turbina, através de métodos numéricos (CFD, por exemplo), para obter o campo de pressões do fluido sobre as pás da turbina que, uma vez integrado sobre a área das mesmas, resulta nas forças agindo sobre as pás, as quais podem ser decompostas radial e axialmente, de forma a prover a força axial atuando sobre o sistema.

Por fim, como o turbocompressor é composto de um compressor e uma turbina, pode-se também estimar a força axial total agindo no sistema devido aos fluxos tanto de gás, na turbina, como de ar, no compressor, o que não foi realizado neste trabalho, pois, nas condições de teste, o compressor estava aberto para a atmosfera, sendo que a única força axial agindo no sistema era devido ao fluxo de ar na turbina. No entanto, deve-se salientar que o modelo para o compressor é semelhante ao da turbina, visto que a turbina radial e o compressor funcionam de forma muito semelhante, havendo apenas a inversão do sentido do fluxo de um equipamento para o outro.

Referências

AHMED, S. A.; FILLON, M.; MASPEYROT, P. Influence of Pad and Runner Mechanical Deformations on the Performance of a Hydrodynamic Fixed Geometry Thrust Bearing. **Proc. of the Institution of Mechanical Engineers**, 224, n. Part J: Journal of Engineering Tribology, 2010. 305-315.

ALMQVIST, T.; GLAVATSKIH, S. B.; LARSSON, R. THD Analysis of Tilting Pad Thrust Bearings - Comparison Between Theory and Experiments. **Transactions of the ASME**, 122, April 2000. 122-417.

ALVES, D. S. **Investigação do efeito térmico no comportamento dinâmico de mancais hidrodinâmicos**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, p. 159. 2011.

ARGHIR, M.; ALSAYED, A.; NICOLAS, D. The Finite Volume Solution of the Reynolds Equation of Lubrication with Film Discontinuities. **International Journal of Mechanical Sciences**, 44, 2002.

ARGYRIS, J. H. **Energy Theorems and Structural Analysis**. [S.l.]: Butterworth, 1960. reprinted from Aircraft Eng., 1954-5.

BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações Mecânicas**. Tradução de All Tasks. 2ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 616 p. Revisão Técnica: Mario F. Mucheroni.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.

BOWDEN, F. P.; TABOR, D. **The friction and lubrication of solids**. [S.l.]: Oxford University Press, 1950. 374 p.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de máquinas de Shigley:** projeto de engenharia mecânica. Tradução de João Batista de Aguiar e José Manoel de Aguiar. 8ª. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2011. 1084 p.

CALMON, F. Entenda o conceito de downsizing nos motores. **Carpress**, 2009. Disponivel em: <http://carpress.uol.com.br/reportagem/item27139.shl>. Acesso em: 2016.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2002. 733 p.

DADOUCHE, A.; FILLON, M.; BLIGOUD, J. C. Experiments on Thermal Effects in a Hydrodynamic Thrust Bearing. **Tribology International**, 33, 2000. 167-174.

DADOUCHE, A.; FILLON, M.; DMOCHOWSKI, W. Performance of a Hydrodynamic Fixed Geometry Thrust Bearing: Comparison between Experimental Data and Numerical Results. **Tribology Transactions**, 49, 2006. 419-426.

DANIEL, G. B.; VIEIRA, L. C.; CAVALCA, K. L. Sensitivity analysis of the dynamic characteristics of thrust bearings. **3rd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling**, Maresias, 1, 2016. 1-10.

DIANA, G.; MASSA, E.; PIZZIGONI, B. Finite element method for computing oil whirl instability of a rotating shaft supported by elastic bearings. **I. Mech. E.**, 1975. 659-663.

DIMARAGONAS, A. D. A general method for stability analysis of rotating shafts. **Ingenieur-Archive**, 44, 1975. 9-20.

DIXON, S. L.; HALL, C. A. **Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery**. 6ª. ed. Boston: Butterworth-Heinemann, 2010. 480 p.

DOWSON, D. A Generalized Reynolds Equation for Fluid Film Lubrication. **International Journal of Mechanical Sciences**, 4, n. Issues 2, 1962. 159-170.

DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shafts. **Phil. Trans. of the Royal Society**, 185, n. I, 1895. 279-360.

ELGER, D. F. et al. **Engineering Fluid Mechanics**. 10ª. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2013. 688 p.

ENGINE TECHNOLOGY INTERNATIONAL. International Engine of the Year Awards 2016, 2016. Disponivel em: <http://www.ukipme.com/engineoftheyear/>. Acesso em: 2016.

ESHLEMAN, R. L. Critical speeds and response of flexible rotor systems. **ASME Flexible Rotor-Bearing System Dynamics**, 1, 1972.

FÖPPL, A. Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle. **Der Civilingenieur**, 4, 1895. 335-342.

FOX,. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introduction to Fluid Mechanics**. 6ª. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2004. 787 p.

GASCH, R. Vibration of large turbo-rotors in fluid film bearings on an elastic foundation. **Journal of Sound and Vibration**, 47, 1976. 53-73.

GENTA, G.; GUGLIOTTA, A. A conical element for finite element rotor dynamics. **ASME Journal of Sound and Vibration**, 120, 1988. 175-182.

GLAVATSKIH, S. B.; FILLON, M.; LARSSON, R. The Significance of Oil Thermal Properties on the Performance of a Tilting-Pad Thrust Bearing. **Journal of Tribology**, 124, 2002. 377-385.

GREENHILL, L. M.; BICKFORD, W. B.; NELSON, H. D. A conical beam finite element for rotor dynamics analysis. **Jounal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, 107, 1985. 421-430.

HAMROCK, B. J. **Lubrication of Machine Elements**. [S.l.]: NASA (National Aeronautics and Space Administration) - Scientific and Technical Information Branch, 1984. 91 p. NASA Reference Publication 1126.

HAMROCK, B. J.; SCHMID, S. R.; JACOBSON, B. **Fundamentals of Machine Elements**. 2ª. ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2005. 980 p.

HAMROCK, B. J.; SCHMID, S. R.; JACOBSON, B. O. **Fundamentals of Fluid Film Lubrication**. 2nd ed. ed. New York: McGraw-Hill, 1994.

JEFFCOTT, H. H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed. **Phil. Mag.**, 6, n. 37, 1919. 304-314.

KHONSARI, M. M.; BOOSER, E. R. **Applied Tribology:** Bearing Design and Lubrication. 2nd. ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008. 560 p.

KORPELA, S. A. **Principles of Turbomachinery**. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 480 p.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 10th. ed. Hoboken: John wiley & Sons, 2011. 1283 p.

LUND, J. W. Spring and Damping Coefficients for the Tilting Pad Journal Bearing. **ASLE Transactions**, 7, 1964. 342-352.

LUND, J. W. Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. **ASME Journal of Tribology**, 109, 1987. 37-41.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2a Ed. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2004.

MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. 2a. ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1986.

MOHIUDDIN, M. A.; KHULIEF, Y. A. Modal characteristis of rotors using a conical shaft finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 115, n. 1-2, 1994. 125-144.

MORAN, M. J. et al. **Fundamentals of Engineering Thermodynamics**. 8a. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.

MÜLLER, P. C.; SCHIEHLEN, W. O. **Linear Vibrations**. Tradução de S. Swierczkowski. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1985.

MYKLESTAD, N. O. A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibrations. **Int. Aeron. Sci.**, 11, 1944. 153-162.

NELSON, H. D. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. **ASME Journal of Mechanical Design**, 102, n. 4, 1980. 793-803.

NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **ASME Journal of Engineering for Industry**, 98, n. 2, 1976. 593-600.

NICE, K. ComoTudoFunciona, 04 Dezembro 2000. Disponivel em: <http://carros.hsw.uol.com.br/turbocompressores.htm>. Acesso em 10 de Janeiro de 2014.

OCVIRK, E. W. **Short bearing approximation for full journal bearings**. Technical Note 2808. ed. [S.l.]: Cornell University, 1952.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 5th. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010. 905 p.

OLIVON, B. O que o Inovar-Auto quer das empresas. **Revista Exame**, 2012. Disponivel em: <http://exame.abril.com.br/economia/noticias/o-que-o-inovar-auto-quer-das-empresas>. Acesso em: 2016.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. 1a Ed. ed. [S.l.]: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

PETROV, N. P. Friction in Machines and the Effect of Lubricant. **Inzenernii Zhurnal**, St. Petersburg, 1, 2, 3, 4, 1883. 71-140, 228-279, 377-436, 535-564.

PINKUS, O. Analysis of Eliptical Bearings. **Transactions of ASME**, 78, 1956. 965-973.

PINKUS, O. Analysis and Characteristics of Three-lobe Bearings. **Journal of Basic Engineering**, 1959. 49-55.

PINKUS, O.; LYNN, W. Solution of the Tapered-Land Sector Thrust Bearing. **Transactions of ASME**, 80, 1958. 1510-1516.

PONCIANO, H. Hyundai HB20 Turbo encara VW Up! TSI. **Jornal do Carro - Comparativos**, 2016. Disponivel em: <http://www.estadao.com.br/jornal-do-carro/noticias/carros,hyundai-hb20-turbo-encara-vw-up!-tsi,28793,0.htm>. Acesso em: 2016.

PROHL, M. A. A general method of calculating critical speeds of flexible rotors. **ASME Journal Appl. Mech. Trans.**, 67, n. E, 1945. 142-146.

RANKINE, W. J. M. On the centrifugal force of rotating shafts, 27, 1869.

RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.

REYNOLDS, O. On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. **Philosophical Transactions of Royal Society of London**, 177, Part 1, n. Series A, 1886. 157-234.

ROUCH, K. E.; KAO, J. S. A tapered beam finite element for rotor dynamics analysis. **ASME Journal of Sound and Vibration**, 66, n. 1, 1979. 119-140.

RUHL, R. L. **Dynamics of distributed parameter rotor systems: transfer matrix and finite element techniques**. Cornell University. Ithaca, NY, p. 642. 1970.

RUHL, R. L.; BOOKER, J. F. A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems. **ASME Journal of Engineering for Industry**, 94, 1972. 126-132.

SHIZHU, W.; PING, H. **Principles of Tribology**. Solaris South Tower: Tsinghua University Press, 2012. 458 p.

SIURU, J. . W. D. Automotive Superchargers and Turbochargers. In: LOGAN, JR., E.; ROY, R. **Handbook of Turbomachinery**. 2ª. ed. New York: Marcel Dekker, Inc., 2003. Cap. 13, p. 818-866.

SOMMERFELD, A. Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. **Zs. Math. And Phys.**, 50, n. No. 1, 1904. 97-155.

STEPHENSON, R. W.; ROUCH, K. E.; ARORA, R. Modeling of rotors with axisymetric solid harmonic elements. **Journal of Sound and Vibration**, 131, n. 3, 1989. 431-443.

STODOLA, A. Kritische Wellenstorung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager. **Schweizerische Bauzeiting**, 85, 1925. 265-266.

THOMAS, D. L.; WILSON, J. M.; WILSON, R. R. Timoshenko beam finite elements. **ASME Journal of Sound and Vibration**, 31, n. 3, 1973. 315-330.

THORKILDSEN, T. Solution of a distributed mass and unbalanced rotor system using a consistent mass matrix approach. **MSE Engineering Report**, 1972.

TO, C. W. S. A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotatory inertia for vibration analysis. **ASME Journal of Sound and Vibration**, 78, n. 4, 1981. 475-484.

TOWER, B. First report on friction experiments. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers,** 1883. 632-659.

TOWER, B. Second report on friction experiments. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, 1885. 58-70.

TUCKMANTEL, F. W. S. **Integração de Sistemas Rotor-Mancais Hidrodinâmicos-Estrutura de Suporte para Resolução Numérica**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, p. 177. 2010.

TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **J. Aero. Sci.**, 23, 1956. 805-23.

VIEIRA, L. C. **Análise de Mancais Axiais sob Lubrificação Hidrodinâmica**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, p. 179. 2011.

VIEIRA, L. C. **Análise de um Modelo Termohidrodinâmico para Mancais Axiais**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2014. No prelo.

WIKIMEDIACOMMONS. File:Turbocharger.jpg. **Wikimedia Commons, Author:** Quentin Schwinn (NASA), 2003. Disponivel em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turbocharger.jpg>. Acesso em: 02 Dezembro 2015.

ZHU, Q.; ZHANG, W. J. A Preliminary Nonlinear Analysis of the Axial Transient Response of the Sector-Shaped Hydrodynamic Thrust Bearing-Rotor System. **Transactions of the ASME**, 125, Outubro 2003. 854-858.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 5th. ed. Boston: Butterworth-Heinemann, v. I - The Basis, 2000. 708 p.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. **ASME Journal of Engineering for Power**, 99, 1977. 71-76.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. The dynamics of rotor-bearing systems with axial torque – A finite element approach. **ASME Journal of Mechanical Design**, 102, 1980. 158-161.

Anexo A – Matriz Fundamental

Para um sistema linear homogêneo de equações diferenciais de ordem n:

$$\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} \tag{A.1}$$

sempre existe um conjunto de n vetores soluções linearmente independentes $\varphi_i(t)$, $i = 1(1)n$, que coincidem no instante $t = 0$ com os n vetores unitários $\hat{e}_i$ (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\varphi_i(0) = \hat{e}_i, \quad i = 1(1)n \tag{A.2}$$

e satisfazem a Eq. (A.1). Esse conjunto de vetores solução formam as colunas da matriz regular $n \times n$, $[\Phi(t)]$, chamada de matriz fundamental:

$$[\Phi(t)] = [\varphi_1(t)|\varphi_2(t)| \dots |\varphi_n(t)] \tag{A.3}$$

que também satisfaz o conjunto de equações diferenciais definido em (A.1):

$$\left[\dot{\Phi}(t)\right] = [A][\Phi(t)], \quad [\Phi(0)] = [I] \tag{A.4}$$

A matriz fundamental possui algumas propriedades características importantes. Primeiramente, é importante observar que qualquer matriz regular $\left[\widetilde{\Phi}(t)\right]$ que satisfaça a equação diferencial matricial $\left[\dot{\widetilde{\Phi}}(t)\right] = A\left[\widetilde{\Phi}(t)\right]$ é chamada de matriz fundamental. No entanto, a matriz fundamental definida em (A.3) possui a propriedade adicional na qual $[\Phi(0)] = [I]$. A relação entre $\left[\widetilde{\Phi}(t)\right]$ e $[\Phi(t)]$ é $\left[\widetilde{\Phi}(t)\right] = [\Phi(t)]\left[\widetilde{\Phi}(0)\right]$ (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985).

Observando que $y(t) = y_0 e^{at}$ é uma solução da equação diferencial escalar $\dot{y}(t) = ay(t)$, pode-se representar a matriz fundamental (A.3) como uma solução de (A.4) pela *função exponencial matricial* (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$[\Phi(t)] = e^{[A]t} \tag{A.5}$$

A função exponencial matricial é definida para todo sistema matricial $[A]$ através da série infinita convergente (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{1}{2!}([A]t)^2 + \frac{1}{3!}([A]t)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([A]t)^k}{k!} \tag{A.6}$$

Uma consequência de (A.5) e (A.6) é que:

$$\left[\dot{\Phi}(t)\right] = [A][\Phi(t)] = [\Phi(t)][A] \tag{A.7}$$

isto é, (A.5) satisfaz (A.4) e também $[\Phi(t)]$ e $[A]$ comutam.

Além disso, (A.5) e (A.6) implicam na *propriedade de transição* da matriz fundamental $[\Phi(t)]$ (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985). De fato, a partir de:

$$\begin{aligned}
e^{[A](t_1+t_2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A]^k (t_1+t_2)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} ([A]t_1)^j ([A]t_2)^{k-j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} ([A]t_1)^j \frac{1}{(k-j)!} ([A]t_2)^{k-j} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} ([A]t_1)^j \frac{1}{k!} ([A]t_2)^k \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} ([A]t_1)^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ([A]t_2)^k \\
&= e^{[A]t_1} \cdot e^{[A]t_2} = e^{[A]t_2} \cdot e^{[A]t_1}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

onde, em (1), utiliza-se a propriedade $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k-j}$ e, em (2), $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{\infty} b_j$, segue que:

$$[\Phi(t_1 + t_2)] = [\Phi(t_1)][\Phi(t_2)] = [\Phi(t_2)][\Phi(t_1)] \tag{A.9}$$

Se $t_1 = -t_2 = t$ em (A.9), temos $[\Phi(0)] = [\Phi(t)][\Phi(-t)]$. Como $[\Phi(0)] = [I]$, isso implica

que:

$$[\Phi(t)]^{-1} = [\Phi(-t)] \tag{A.10}$$

isto é, o inverso da matriz fundamental pode ser obtido tomando-se o negativo do argumento temporal na matriz fundamental (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985). Essa propriedade também é uma consequência imediata de (A.5):

$$[\Phi(t)]^{-1} = \left(e^{[A]t}\right)^{-1} = e^{-[A]t} = [\Phi(-t)] \tag{A.11}$$

Outra propriedade importante da matriz fundamental é a formula de Jacobi-Liouville para o determinante do Wronskiano (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\det[\Phi(t)] = e^{(\mathrm{tr}[A])t} \tag{A.12}$$

onde $\mathrm{tr}[A]$ é o traço da matriz $[A]$, ou ainda, a soma dos elementos da diagonal de $[A]$. A demonstração de (A.12) será omitida, mas pode ser obtida em (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985).

Por fim, para completar a lista de propriedades da matriz fundamental, a relação muito útil mostrada abaixo pode ser obtida de (A.4) e (A.5) (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\int_0^t [\Phi(\tau)]d\tau = [A]^{-1}([\Phi(t)] - [I]) = ([\Phi(t)] - [I])[A]^{-1} \tag{A.13}$$

sempre que $\det[A] \neq 0$.

Anexo B – Solução particular de um sistema de equações

A solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} + \{b(t)\}, \{y(0)\} = \{y_0\} \tag{B.1}$$

é a soma da solução homogênea com uma solução particular:

$$\{y(t)\} = [\Phi(t)]\{y_0\} + \{y_p(t)\} \tag{B.2}$$

A solução particular do sistema pode ser obtida pelo método de variação das constantes (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985). Para isso, escolhemos uma solução particular da forma:

$$\{y_p(t)\} = [\Phi(t)]\{c(t)\} \tag{B.3}$$

Essa solução particular deve satisfazer a equação diferencial (B.1):

$$\begin{aligned} \{\dot{y}_p(t)\} &= [\dot{\Phi}(t)]\{c(t)\} + [\Phi(t)]\{\dot{c}(t)\} \\ &= [A][\Phi(t)]\{c(t)\} + [\Phi(t)]\{\dot{c}(t)\} \\ &= [A]\{y_p(t)\} + \{b(t)\} \end{aligned} \tag{B.4}$$

Portanto, a equação diferencial para determinar $\{c(t)\}$ é:

$$[\Phi(t)]\{\dot{c}(t)\} = \{b(t)\} \tag{B.5}$$

Aplicando a propriedade (A.10), têm-se:

$$\{\dot{c}(t)\} = [\Phi(-t)]\{b(t)\} \tag{B.6}$$

e integrando, obtêm-se:

$$\{c(t)\} = \{c(0)\} + \int_0^t [\Phi(-\tau)]\{b(\tau)\}d\tau \tag{B.7}$$

Se tomarmos o instante de tempo $t = 0$ na Eq. (B.3), temos a solução particular $\{y_p(0)\} = \{0\}$. Portanto,

$$\{c(0)\} = \{0\} \tag{B.8}$$

e isso, em conjunto com as Eqs. (B.3) e a propriedade (A.9), implica na solução particular (MÜLLER e SCHIEHLEN, 1985):

$$\{y_p(t)\} = [\Phi(t)] \int_0^t [\Phi(-\tau)]\{b(\tau)\}d\tau = \int_0^t [\Phi(t-\tau)]\{b(\tau)\}d\tau \tag{B.9}$$

Anexo C – Método de Newmark

Seja o sistema de equações de movimento:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{r(t)\} \tag{C.1}$$

O método de integração de Newmark assume que (BATHE, 1996):

$$^{t+\Delta t}\{\dot{u}\} = {}^{t}\{\dot{u}\} + \left((1-\delta)\ {}^{t}\{\ddot{u}\} + \delta\, {}^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\}\right)\Delta t \tag{C.2}$$

$$^{t+\Delta t}\{u\} = {}^{t}\{u\} + {}^{t}\{\dot{u}\}\Delta t + \left(\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ {}^{t}\{\ddot{u}\} + \alpha\, {}^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\}\right)\Delta t^2 \tag{C.3}$$

onde α e δ são parâmetros que podem ser determinados de forma a se obter precisão e estabilidade do algoritmo ($\delta \geq 0.5$ e $\alpha \geq 0.25(0.5+\delta)^2$).

Além das Eqs. (C.2) e (C.3), a equação de equilíbrio (C.1) também é considerada no tempo $t + \Delta t$:

$$[M]\,^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\} + [C]\,^{t+\Delta t}\{\dot{u}\} + [K]\,^{t+\Delta t}\{u\} = {}^{t+\Delta t}\{r\} \tag{C.4}$$

A partir de (C.2) e (C.3), é possível obter equações para $^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\}$ e $^{t+\Delta t}\{\dot{u}\}$ apenas em termos dos deslocamentos desconhecidos $^{t+\Delta t}\{u\}$. Essas duas relações de $^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\}$ e $^{t+\Delta t}\{\dot{u}\}$ são, então, substituídas em (C.4) para se obter $^{t+\Delta t}\{u\}$ e, em seguida, usando (C.2) e (C.3), pode-se calcular $^{t+\Delta t}\{\dot{u}\}$ e $^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\}$. Com isso, é possível elaborar o seguinte algoritmo (BATHE, 1996):

A. Cálculos preliminares

1. Obter as matrizes de massa $[M]$, de rigidez $[K]$ e de amortecimento $[C]$.
2. Inicializar os vetores $^{0}\{u\}$, $^{0}\{\dot{u}\}$ e $^{0}\{\ddot{u}\}$.
3. Selecionar um incremento de tempo Δt e os parâmetros α e δ para calcular as seguintes constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \qquad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \qquad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \qquad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$
$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right); \quad a_6 = \Delta t(1-\delta) \qquad a_7 = \delta \Delta t$$

4. Montar a matriz de rigidez efetiva $[\overline{K}]$: $[\overline{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$.

B. Para cada instante de tempo

5. Calcular a carga efetiva no instante de tempo $t + \Delta t$:

$$^{t+\Delta t}\{\bar{r}\} = {}^{t+\Delta t}\{r\} + [M]\left(a_0\ {}^{t}\{u\} + a_2\ {}^{t}\{\dot{u}\} + a_3\ {}^{t}\{\ddot{u}\}\right) + [C]\left(a_1\ {}^{t}\{u\} + a_4\ {}^{t}\{\dot{u}\} + a_5\ {}^{t}\{\ddot{u}\}\right)$$

6. Resolver para os deslocamentos no instante de tempo $t + \Delta t$:

$$[\overline{K}]\,{}^{t+\Delta t}\{u\} = {}^{t+\Delta t}\{\bar{r}\}$$

7. Calcular as acelerações e velocidades no instante de tempo $t + \Delta t$:

$$^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\} = a_0\left({}^{t+\Delta t}\{u\} - {}^{t}\{u\}\right) - a_2\ {}^{t}\{\dot{u}\} - a_3\ {}^{t}\{\ddot{u}\}$$
$$^{t+\Delta t}\{\dot{u}\} = {}^{t}\{\dot{u}\} + a_6\ {}^{t}\{\ddot{u}\} + a_7\,{}^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\}$$

É importante observar que o algoritmo exige que se inicialize os vetores ${}^{0}\{u\}$, ${}^{0}\{\dot{u}\}$ e ${}^{0}\{\ddot{u}\}$. Os dois primeiros são obtidos diretamente das condições iniciais do problema, mas o vetor de acelerações não. Em geral, se não há informações a respeito da aceleração inicial a ser utilizada, esta é obtida da seguinte forma:

$$^{0}\{\ddot{u}\} = [M]^{-1}\left(\{r(0)\} - [C]\ {}^{0}\{\dot{u}\} - [K]\ {}^{0}\{u\}\right) \qquad \text{(C.5)}$$

Anexo D – Relação da força axial com a pressão do fluido de trabalho

Seja um escoamento em regime permanente de um fluido incompressível e invíscido ao longo de um duto fechado de seção variável. Sabe-se que neste tipo de escoamento, a variação de pressão é proporcional ao quadrado da vazão ou, analogamente, que a vazão é proporcional à raiz da pressão, o que pode ser demonstrado utilizando-se a Equação de Bernoulli e a equação da continuidade (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2004). Sejam dois pontos 1 e 2 ao longo do escoamento interno em um duto. A Equação de Bernoulli estabelece que:

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \tag{D.1}$$

onde V é a velocidade do fluido ao longo do duto, z, a altura em relação a um referencial e p, a pressão do fluido. Ainda, g é a aceleração da gravidade e ρ, a densidade do fluido, constante, que parte da hipótese que o fluido é incompressível. Ainda, da continuidade, escreve-se que:

$$\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \rightarrow V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} \tag{D.2}$$

Desprezando a variação de energia potencial do escoamento entre os pontos 1 e 2 ($z_1 \approx z_2$), substituindo (D.2) em (D.1) e rearranjando para V_2, obtém-se:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}} \tag{0.1}$$

A vazão volumétrica Q_2 é simplesmente o produto da expressão (0.1) pela área da seção transversal, $Q_2 = V_2 A_2$. Portanto, observa-se da Eq. (0.1) que o fluxo é diretamente proporcional à raiz quadrada da variação de pressão $\Delta p = p_1 - p_2$:

$$Q \propto \sqrt{\Delta p} \tag{D.4}$$

Com essa consideração, seja a expressão da força axial, Eq. (4.96), repetida abaixo por

conveniência, mas reescrita para obter o módulo da força:

$$|F_x| = \frac{\rho A_2 r_2 r_3}{\tan\alpha_2 \tan\beta_3}\Omega^2 \tag{D.5}$$

Substituindo a Eq. (4.92) para expressão da densidade do ar em função de sua temperatura e pressão, temos que:

$$|F_x| = \frac{p_{ar}}{\left(\frac{\bar{R}}{M_{ar}}\right)T_{ar}}\frac{A_2 r_2 r_3}{\tan\alpha_2 \tan\beta_3}\Omega^2 \tag{D.6}$$

Observando que a força axial agindo no eixo é proporcional à vazão mássica do escoamento passando pela turbina, Eqs. (4.93) ou (4.94), e que esta vazão é proporcional à velocidade de rotação do eixo, Eq. (4.95), e como a vazão depende da raiz da pressão, então é possível reescrever a Eq. (D.6) como:

$$|F_x| = \frac{1}{\left(\frac{\bar{R}}{M_{ar}}\right)T_{ar}}\frac{A_2 r_2 r_3}{\tan\alpha_2 \tan\beta_3}\left(\Omega\sqrt{p_{ar}}\right)^2 \tag{D.7}$$

Desta forma, é possível observar, da expressão (D.7) que, mantendo constantes os parâmetros geométricos da turbina (A_2, r_2, r_3, α_2 e β_3), para uma dada rotação Ω, a força axial varia com a pressão e a temperatura do ar de entrada na turbina. Para os parâmetros geométricos estabelecidos na Seção 5.2 e para as três rotações mostradas na Seção 5.3, as Tabelas D.1, D.2 e D.3 indicam a relação da força com a pressão e a temperatura do ar de entrada, tendo por valor de referência a força estimada a partir das medições realizadas por Vieira (2014).

Tabela D.1 – Força axial para rotação de 14.100 rpm

14100 rpm - Valor de referência: 5,286 N

T(°C)↓ p(bar)→	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55
20	5,855	6,122	6,388	6,654	6,920	7,186	7,452	7,719	7,985	8,251
21	5,836	6,101	6,366	6,631	6,897	7,162	7,427	7,692	7,958	8,223
22	5,816	6,080	6,344	6,609	6,873	7,138	7,402	7,666	7,931	8,195
23	5,796	6,060	6,323	6,586	6,850	7,113	7,377	7,640	7,904	8,167
24	5,777	6,039	6,302	6,564	6,827	7,089	7,352	7,615	7,877	8,140
25	5,757	6,019	6,281	6,542	6,804	7,066	7,327	7,589	7,851	8,112
26	5,738	5,999	6,260	6,520	6,781	7,042	7,303	7,564	7,825	8,085
27	5,719	5,979	6,239	6,499	6,759	7,019	7,279	7,539	7,798	8,058
28	5,700	5,959	6,218	6,477	6,736	6,995	7,254	7,513	7,773	8,032
29	5,681	5,939	6,197	6,456	6,714	6,972	7,230	7,489	7,747	8,005
30	5,662	5,920	6,177	6,434	6,692	6,949	7,207	7,464	7,721	7,979
31	5,644	5,900	6,157	6,413	6,670	6,926	7,183	7,439	7,696	7,952
32	5,625	5,881	6,137	6,392	6,648	6,904	7,159	7,415	7,671	7,926
33	5,607	5,862	6,117	6,371	6,626	6,881	7,136	7,391	7,646	7,900
34	5,589	5,843	6,097	6,351	6,605	6,859	7,113	7,367	7,621	7,875
35	5,570	5,824	6,077	6,330	6,583	6,836	7,090	7,343	7,596	7,849
36	5,552	5,805	6,057	6,310	6,562	6,814	7,067	7,319	7,571	7,824
37	5,534	5,786	6,038	6,289	6,541	6,792	7,044	7,295	7,547	7,799
38	5,517	5,767	6,018	6,269	6,520	6,770	7,021	7,272	7,523	7,774
39	5,499	5,749	5,999	6,249	6,499	6,749	6,999	7,249	7,499	7,749
40	5,481	5,731	5,980	6,229	6,478	6,727	6,976	7,226	7,475	7,724

T(°C)↓ p(bar)→	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8	1,85	1,9	1,95	2
20	8,517	8,783	9,049	9,315	9,582	9,848	10,114	10,380	10,646
21	8,488	8,753	9,019	9,284	9,549	9,814	10,080	10,345	10,610
22	8,459	8,724	8,988	9,252	9,517	9,781	10,045	10,310	10,574
23	8,431	8,694	8,958	9,221	9,485	9,748	10,011	10,275	10,538
24	8,402	8,665	8,927	9,190	9,453	9,715	9,978	10,240	10,503
25	8,374	8,636	8,898	9,159	9,421	9,683	9,944	10,206	10,468
26	8,346	8,607	8,868	9,129	9,389	9,650	9,911	10,172	10,433
27	8,318	8,578	8,838	9,098	9,358	9,618	9,878	10,138	10,398
28	8,291	8,550	8,809	9,068	9,327	9,586	9,845	10,104	10,363
29	8,263	8,522	8,780	9,038	9,296	9,554	9,813	10,071	10,329
30	8,236	8,493	8,751	9,008	9,266	9,523	9,780	10,038	10,295
31	8,209	8,465	8,722	8,979	9,235	9,492	9,748	10,005	10,261
32	8,182	8,438	8,693	8,949	9,205	9,461	9,716	9,972	10,228
33	8,155	8,410	8,665	8,920	9,175	9,430	9,684	9,939	10,194
34	8,129	8,383	8,637	8,891	9,145	9,399	9,653	9,907	10,161
35	8,102	8,356	8,609	8,862	9,115	9,368	9,622	9,875	10,128
36	8,076	8,329	8,581	8,833	9,086	9,338	9,590	9,843	10,095
37	8,050	8,302	8,553	8,805	9,056	9,308	9,560	9,811	10,063
38	8,024	8,275	8,526	8,777	9,027	9,278	9,529	9,780	10,030
39	7,999	8,249	8,498	8,748	8,998	9,248	9,498	9,748	9,998
40	7,973	8,222	8,471	8,721	8,970	9,219	9,468	9,717	9,966

Tabela D.2 – Força axial para rotação de 20.280 rpm

20280 rpm - Valor de referência: 15,8 N

T(°C)↓ p(bar)→	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55
20	12,11	12,66	13,21	13,76	14,32	14,87	15,42	15,97	16,52	17,07
21	12,07	12,62	13,17	13,72	14,27	14,82	15,36	15,91	16,46	17,01
22	12,03	12,58	13,12	13,67	14,22	14,77	15,31	15,86	16,41	16,95
23	11,99	12,54	13,08	13,63	14,17	14,72	15,26	15,81	16,35	16,90
24	11,95	12,49	13,04	13,58	14,12	14,67	15,21	15,75	16,30	16,84
25	11,91	12,45	12,99	13,53	14,08	14,62	15,16	15,70	16,24	16,78
26	11,87	12,41	12,95	13,49	14,03	14,57	15,11	15,65	16,19	16,73
27	11,83	12,37	12,91	13,44	13,98	14,52	15,06	15,59	16,13	16,67
28	11,79	12,33	12,86	13,40	13,94	14,47	15,01	15,54	16,08	16,62
29	11,75	12,29	12,82	13,35	13,89	14,42	14,96	15,49	16,03	16,56
30	11,71	12,25	12,78	13,31	13,84	14,38	14,91	15,44	15,97	16,51
31	11,68	12,21	12,74	13,27	13,80	14,33	14,86	15,39	15,92	16,45
32	11,64	12,17	12,69	13,22	13,75	14,28	14,81	15,34	15,87	16,40
33	11,60	12,13	12,65	13,18	13,71	14,23	14,76	15,29	15,82	16,34
34	11,56	12,09	12,61	13,14	13,66	14,19	14,71	15,24	15,77	16,29
35	11,52	12,05	12,57	13,09	13,62	14,14	14,67	15,19	15,71	16,24
36	11,49	12,01	12,53	13,05	13,57	14,10	14,62	15,14	15,66	16,19
37	11,45	11,97	12,49	13,01	13,53	14,05	14,57	15,09	15,61	16,13
38	11,41	11,93	12,45	12,97	13,49	14,01	14,52	15,04	15,56	16,08
39	11,38	11,89	12,41	12,93	13,44	13,96	14,48	15,00	15,51	16,03
40	11,34	11,85	12,37	12,89	13,40	13,92	14,43	14,95	15,46	15,98

17,1511

T(°C)↓ p(bar)→	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8	1,85	1,9	1,95	2
20	17,62	18,17	18,72	19,27	19,82	20,37	20,92	21,47	22,02
21	17,56	18,11	18,66	19,21	19,75	20,30	20,85	21,40	21,95
22	17,50	18,05	18,59	19,14	19,69	20,23	20,78	21,33	21,87
23	17,44	17,99	18,53	19,08	19,62	20,17	20,71	21,26	21,80
24	17,38	17,93	18,47	19,01	19,55	20,10	20,64	21,18	21,73
25	17,32	17,87	18,41	18,95	19,49	20,03	20,57	21,11	21,65
26	17,27	17,81	18,34	18,88	19,42	19,96	20,50	21,04	21,58
27	17,21	17,75	18,28	18,82	19,36	19,90	20,43	20,97	21,51
28	17,15	17,69	18,22	18,76	19,29	19,83	20,37	20,90	21,44
29	17,09	17,63	18,16	18,70	19,23	19,77	20,30	20,83	21,37
30	17,04	17,57	18,10	18,64	19,17	19,70	20,23	20,76	21,30
31	16,98	17,51	18,04	18,57	19,10	19,64	20,17	20,70	21,23
32	16,93	17,46	17,98	18,51	19,04	19,57	20,10	20,63	21,16
33	16,87	17,40	17,93	18,45	18,98	19,51	20,03	20,56	21,09
34	16,82	17,34	17,87	18,39	18,92	19,44	19,97	20,49	21,02
35	16,76	17,29	17,81	18,33	18,86	19,38	19,90	20,43	20,95
36	16,71	17,23	17,75	18,27	18,80	19,32	19,84	20,36	20,88
37	16,65	17,17	17,69	18,21	18,74	19,26	19,78	20,30	20,82
38	16,60	17,12	17,64	18,16	18,67	19,19	19,71	20,23	20,75
39	16,55	17,06	17,58	18,10	18,62	19,13	19,65	20,17	20,68
40	16,49	17,01	17,52	18,04	18,56	19,07	19,59	20,10	20,62

Tabela D.3 – Força axial para rotação de 27.580 rpm

27580 rpm - Valor de referência: 37,65 N

T(°C)↓ p(bar)→	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55
20	22,40	23,42	24,44	25,46	26,48	27,49	28,51	29,53	30,55	31,57
21	22,33	23,34	24,36	25,37	26,39	27,40	28,42	29,43	30,45	31,46
22	22,25	23,26	24,27	25,29	26,30	27,31	28,32	29,33	30,34	31,35
23	22,18	23,18	24,19	25,20	26,21	27,22	28,22	29,23	30,24	31,25
24	22,10	23,11	24,11	25,12	26,12	27,12	28,13	29,13	30,14	31,14
25	22,03	23,03	24,03	25,03	26,03	27,03	28,03	29,04	30,04	31,04
26	21,95	22,95	23,95	24,95	25,95	26,94	27,94	28,94	29,94	30,93
27	21,88	22,88	23,87	24,86	25,86	26,85	27,85	28,84	29,84	30,83
28	21,81	22,80	23,79	24,78	25,77	26,76	27,76	28,75	29,74	30,73
29	21,74	22,72	23,71	24,70	25,69	26,68	27,66	28,65	29,64	30,63
30	21,66	22,65	23,63	24,62	25,60	26,59	27,57	28,56	29,54	30,53
31	21,59	22,57	23,56	24,54	25,52	26,50	27,48	28,46	29,44	30,43
32	21,52	22,50	23,48	24,46	25,44	26,41	27,39	28,37	29,35	30,33
33	21,45	22,43	23,40	24,38	25,35	26,33	27,30	28,28	29,25	30,23
34	21,38	22,35	23,33	24,30	25,27	26,24	27,21	28,19	29,16	30,13
35	21,31	22,28	23,25	24,22	25,19	26,16	27,13	28,09	29,06	30,03
36	21,24	22,21	23,17	24,14	25,11	26,07	27,04	28,00	28,97	29,93
37	21,18	22,14	23,10	24,06	25,03	25,99	26,95	27,91	28,88	29,84
38	21,11	22,07	23,03	23,99	24,94	25,90	26,86	27,82	28,78	29,74
39	21,04	22,00	22,95	23,91	24,86	25,82	26,78	27,73	28,69	29,65
40	20,97	21,93	22,88	23,83	24,79	25,74	26,69	27,65	28,60	29,55

T(°C)↓ p(bar)→	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8	1,85	1,9	1,95	2
20	32,59	33,60	34,62	35,64	36,66	37,68	38,70	39,71	40,73
21	32,48	33,49	34,51	35,52	36,54	37,55	38,56	39,58	40,59
22	32,37	33,38	34,39	35,40	36,41	37,42	38,43	39,45	40,46
23	32,26	33,26	34,27	35,28	36,29	37,30	38,30	39,31	40,32
24	32,15	33,15	34,16	35,16	36,17	37,17	38,18	39,18	40,18
25	32,04	33,04	34,04	35,04	36,04	37,05	38,05	39,05	40,05
26	31,93	32,93	33,93	34,93	35,92	36,92	37,92	38,92	39,92
27	31,83	32,82	33,82	34,81	35,80	36,80	37,79	38,79	39,78
28	31,72	32,71	33,70	34,69	35,69	36,68	37,67	38,66	39,65
29	31,62	32,60	33,59	34,58	35,57	36,56	37,54	38,53	39,52
30	31,51	32,50	33,48	34,47	35,45	36,44	37,42	38,40	39,39
31	31,41	32,39	33,37	34,35	35,33	36,32	37,30	38,28	39,26
32	31,30	32,28	33,26	34,24	35,22	36,20	37,17	38,15	39,13
33	31,20	32,18	33,15	34,13	35,10	36,08	37,05	38,03	39,00
34	31,10	32,07	33,04	34,02	34,99	35,96	36,93	37,90	38,88
35	31,00	31,97	32,94	33,91	34,88	35,84	36,81	37,78	38,75
36	30,90	31,87	32,83	33,80	34,76	35,73	36,69	37,66	38,62
37	30,80	31,76	32,73	33,69	34,65	35,61	36,58	37,54	38,50
38	30,70	31,66	32,62	33,58	34,54	35,50	36,46	37,42	38,38
39	30,60	31,56	32,52	33,47	34,43	35,38	36,34	37,30	38,25
40	30,51	31,46	32,41	33,37	34,32	35,27	36,22	37,18	38,13

Os valores destacados em vermelhos correspondem aos valores da força axial que se encontram numa faixa de 15% em torno do valor de referência F_{ref} estimado por Daniel, Vieira e Cavalca (2016), isto é, $F_{ref} \pm 15\% F_{ref}$. Os valores em verde são os valores da força axial para a temperatura de entrada do ar na turbina de 28 °C e, respectivamente, para a pressão de

1,3 bar, para a rotação de 14.100 rpm; 1,6 bar, para 20.280 rpm; e 1,8 bar, para 27.580 rpm. Esses valores de pressão foram determinados a partir de $|F_x|$, Eq. (D.7), aproximada por um polinômio em $\Omega\sqrt{p_{ar}} = x$, isto é, $|F_x| = a_2x^2 + a_1x + a_0$, em que os termos a_1 e a_0 são nulos. Assim, para cada rotação Ω, a pressão varia de forma a obter uma regressão polinomial para as forças estimadas, atendendo a condição para que os termos a_1 e a_0 da regressão polinomial sejam próximos a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} a_2 &\to \frac{1}{\left(\frac{\bar{R}}{M_{ar}}\right)T_{ar}} \frac{A_2 r_2 r_3}{\tan\alpha_2 \tan\beta_3} \\ a_1 &\to 0 \\ a_0 &\to 0 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Os melhores valores para esse ajuste foram para as pressões de 1,3 bar, 1,6 bar e 1,8 bar, respectivamente, para as três velocidades de rotação de 14.100 rpm, 20.280 rpm e 27.580 rpm.