

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

"CONVECÇÃO NATURAL ENTRE DUAS PLACAS PLANAS  
VERTICAIS, ISOTÉRMICAS, AQUECIMENTO ASSIMÉ-  
TRICO, REGIME TRANSIENTE, LAMINAR"

Autor: JOSÉ TOMAZ VIEIRA PEREIRA

Orientador: JOAQUIM SEVERINO DE PAIVA NETTO

Tese apresentada à Faculdade de En-  
genharia de Campinas da UNICAMP co-  
mo parte dos requisitos necessários  
para obtenção do título de MESTRE  
EM CIÊNCIAS.

DEZEMBRO DE 1977

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

"CONVECÇÃO NATURAL ENTRE DUAS PLACAS PLANAS VERTICAIS,  
AQUECIMENTO ASSIMÉTRICO, REGIME TRANSIENTE, LAMINAR"

R E S U M O

Estudo numérico da convecção natural entre duas placas planas verticais. Inicialmente as placas e o ar ambiente estão à mesma temperatura e não há escoamento de ar. Repentinamente uma das placas tem sua temperatura elevada de  $\Delta t_1$  e a outra de  $\Delta t_2$  em relação a temperatura ambiente. Devido a esses gradientes de temperatura o ar em contato com as placas se aquece e conseqüentemente sua densidade diminui. Essa diferença de densidades induz um movimento ascendente do fluido mais leve.

Foi feito um estudo do desenvolvimento dos perfis de velocidade, temperatura e pressão do ar entre as placas, desde o instante inicial em que foi induzido o escoamento de ar até a situação final onde as condições de regime permanente foram praticamente atingidas.

As características de transferência de calor são apresentadas em termos do número de Nusselt.

## Í N D I C E

	<u>PÁG.</u>
CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2	
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	4
a) Equações Principais .....	5
b) Equações auxiliares para cálculo da pressão ..	7
CAPÍTULO 3	
TRATAMENTO NUMÉRICO .....	12
a) O método implícito de direções alternadas ....	12
b) Equações de diferenças finitas .....	15
c) Equações auxiliares .....	20
d) Condições de contorno .....	21
e) Condições iniciais .....	23
CAPÍTULO 4	
SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINI TAS .....	24
a) Equações resolvidas pelo Método implícito de D.A. ....	24
b) Solução de equação da continuidade .....	26
c) Equações auxiliares para a Pressão (P') resol- vidas por processo iterativo .....	27
d) Equações dos Resíduos .....	28
CAPÍTULO 5	
RESULTADOS E COMPARAÇÕES .....	31
a) Aquecimento simétrico $RT = 1$ .....	32

	<u>PÁG.</u>
b) Aquecimento assimétrico $RT = 1/2$ .....	38
c) Aquecimento assimétrico $RT = 0$ .....	44
CAPÍTULO 6	
CONCLUSÕES .....	59
NOMENCLATURA .....	60
BIBLIOGRAFIA .....	61
APÊNDICE .....	63

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Este estudo originou-se do interesse em se determinar a influência da fase transitória na transferência de calor e na descarga do escoamento através do duto formado por uma parede vertical e uma placa de pequena espessura, e no estabelecimento de um método de simulação para essa classe de problemas.

Devido à pouca disponibilidade de trabalhos sobre o assunto, o estudo foi restringido ao duto formado por placas planas verticais, isotérmicas. Apesar de desenvolvido para placas isotérmicas (aquecimento simétrico ou assimétrico), o método pode ser adaptado para outras condições, como temperaturas variáveis e fluxos de calor (simétricos ou assimétricos), constantes ou variáveis.

Estudos da convecção natural entre placas planas verticais, foram feitos por vários pesquisadores. Para regime permanente e várias condições de contorno existem estudos numéricos cujos resultados foram confirmados experimentalmente. Para o regime transitório foi localizado apenas um trabalho numérico, sem confirmação experimental.

Como o presente estudo é também apenas numérico, os resultados obtidos para a situação final onde as condições de regime permanente são praticamente atingidas, serão comparados com os resultados existentes na literatura para o regime permanente.

A solução matemática fechada para o regime permanente, perfis de velocidade e temperatura completamente desenvolvidos, escoamento laminar e aquecimento assimétrico foi estudada por W. AUNG [1]. Os resultados são apresentados tanto para fluxos de calor uniforme como para temperaturas uniforme (assimétricos ou não). As hipóteses de perfis de velocidade e temperatura completamente desenvolvidos, porém, não são realistas para a maioria dos casos práticos, em virtude da região de desenvolvimento desses perfis ser muito grande.

Uma solução numérica para a região de desenvolvimento dos perfis de velocidade e temperatura foi obtida por BODOIA & OSTERLE [2]. As equações da continuidade, quantidade de movi -

mento e energia foram resolvidas numericamente pela técnica de diferenças finitas, utilizando um esquema especial do Método de Eliminação de Gauss. O estudo foi feito para placas planas isotérmicas, com temperaturas acima da temperatura ambiente, tendo sido adotado um perfil uniforme para a velocidade na entrada. A temperatura na entrada foi tomada igual à temperatura ambiente. Os resultados obtidos para várias alturas de placa tendem assintoticamente para os resultados conseguidos com perfis totalmente desenvolvidos, quando a altura das placas é grande comparada com a separação entre elas.

Resultados numéricos e experimentais foram apresentados por AUNG, FLETCHER & SERNAS [3], também para a região de desenvolvimento dos perfis de velocidade e temperatura. A parte numérica considerou placas com temperaturas e fluxos de calor uniformes (aquecimento assimétrico ou não), tendo sido utilizada a técnica de diferenças finitas, e o sistema de equações resolvido por redução de matriz. Resultados experimentais foram obtidos para placas isotérmicas (aquecimento assimétrico ou não). Os resultados numéricos e experimentais estão em boa concordância e confirmaram os resultados obtidos anteriormente por BODOIA & OSTERLE [2].

Para o regime transiente KETTLEBOROUGH [4], estudou numericamente o caso das placas planas paralelas, verticais, incluindo a região de entrada. As placas são isotérmicas e o aquecimento é simétrico. Ele considerou a equação da quantidade de movimento segundo a direção do escoamento principal e segundo a direção perpendicular a esse escoamento. (Em todos os outros trabalhos examinados a equação da quantidade de movimento na direção perpendicular ao escoamento principal foi desprezada). A combinação dessas duas equações possibilitou a eliminação do termo de pressão e a obtenção de uma terceira equação em termos de velocidade.

Kettleborough testou vários métodos numéricos e optou por uma combinação de um método explícito simples e um método implícito de direções alternadas. O regime quase-permanente foi atingido, partindo das condições de repouso, mas os valores obtidos para o regime quase-permanente não são comparados com valores de outros trabalhos numéricos ou experimentais. Em seu trabalho, os perfis de temperatura e velocidade se desenvolvem até um valor máximo, quando o regime quase-permanente é atingido.

No presente trabalho as equações da quantidade de movimento, energia e continuidade e equações auxiliares para a pressão foram resolvidas numericamente em um computador digital pela técnica das diferenças finitas. As equações da quantidade de movimento e energia foram resolvidas pelo Método Implícito de Direções Alternadas de PEACHMAN & RACHFORD [5], adaptado ao problema. A equação da continuidade foi resolvida numericamente de modo direto e as equações auxiliares para a pressão, através de um processo iterativo.

A técnica utilizada permite o cálculo da distribuição de velocidades e temperaturas para todos os pontos da rede, excluindo os pontos extremos (entrada e saída).

A temperatura na entrada foi admitida constante e igual a temperatura ambiente. A temperatura na saída e as velocidades na entrada e saída são determinadas, para cada incremento de tempo, através dos valores obtidos para os pontos internos, através de uma aproximação polinomial, utilizando a primeira fórmula de Newton [6].

As condições de contorno e iniciais adotadas, foram:

#### Condições de contorno

1. paredes isotérmicas,  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  mantidos constantes;
2. temperaturas e velocidades na entrada e saída determinadas como explicado acima;
3. velocidades nulas junto às paredes;
4. diferença de pressão  $P'$ , nula na entrada e na saída.

#### Condições iniciais

1. velocidades nulas para todos os pontos da rede;
2. Temperaturas iguais a temperatura ambiente, para todos os pontos.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A Fig. (1), mostra a geometria do problema. Um duto vertical é formado por duas placas paralelas de altura "l" profundidade infinita, separadas por uma distância "b".

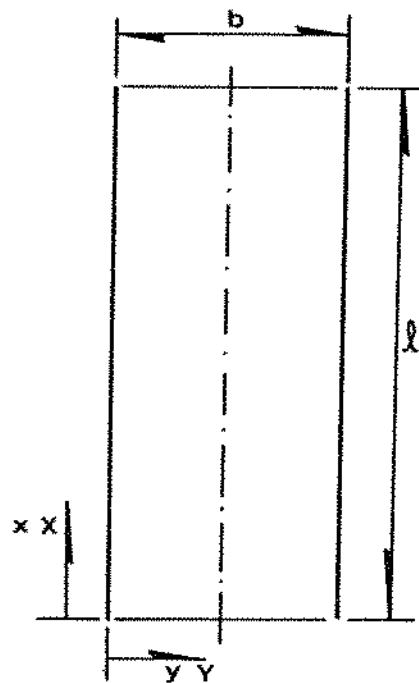


FIG.(1) - Geometria do problema

O conjunto, placas e o ar ambiente, está a mesma temperatura e o ar está inicialmente parado. Repentinamente as placas têm suas temperaturas elevadas de  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  em relação à temperatura do ambiente. Devido a esses gradientes de temperaturas o ar em contato com as placas é aquecido e sua densidade diminui. A diminuição da densidade provoca um movimento do ar quente para cima. As diferenças de temperaturas  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  são mantidas constantes. Os perfis de velocidade, temperatura, etc., vão se modificando em função do tempo, desde o instante inicial ( $t=0$ ), até se estabilizarem (regime quase-permanente), como será mostrado neste estudo.



a) Equações Principais

As equações da continuidade, quantidade de movimento e energia foram utilizadas com as seguintes hipóteses simplificadas:

1. As variações de temperatura e pressão são moderadas, de modo que sua influência nas propriedades do fluido são pequenas. As propriedades do fluido foram avaliadas a uma temperatura média entre as temperaturas do ambiente e da parede mais quente e assumidas constantes, exceto a densidade quando aparece no termo da força de flutuação na equação da quantidade de movimento.

2. Como a velocidade do fluido é relativamente baixa, a dissipação viscosa foi desprezada.

3. A componente "y" da equação da quantidade de movimento foi desprezada por ser de uma ordem de grandeza menor que a componente "x" (R. S. BODKEY [7]).

4. A condução de calor na direção "x" foi desprezada diante da condução na direção "y" porque o gradiente de temperatura na direção "x" é muito menor que na direção "y".

5.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  foi desprezado por ser muito menor que  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Com essas hipóteses, as equações do escoamento ficam:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Equação da Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - g \quad (2)$$

Equação da Energia

$$\frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{\partial T}{\partial y} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

Definindo:

$$P' = P - P_0 \quad (4)$$

onde:  $P_0$  - Pressão hidrostática fora do duto,  
 $P$  - Pressão dentro do duto, na mesma altura.

Derivando (4) em relação a "x"

$$\frac{dP'}{dx} = \frac{dP}{dx} - \frac{dP_0}{dx}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP'}{dx} + \frac{dP_0}{dx}$$

Mas  $\frac{dP_0}{dx} = -\rho_0 g$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP'}{dx} - \rho_0 g \quad (5)$$

Substituindo (5) em  $-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = g$

e reordenando obtem-se:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - g = -\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dx} + g \left( \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right) \quad (6)$$

Assumindo que a densidade é função apenas da temperatura (não é afetada pela variação da pressão) e considerando o ar como um gás perfeito:

$$P = \rho RT$$

$$\rho_0 = \frac{P}{RT_0}$$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

o último termo da expressão (6) pode ser escrito

$$g\left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\right) = g \left[ \frac{P/RT_0 - P/RT}{P/RT} \right]$$
$$g\left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\right) = g \left[ \frac{T - T_0}{T_0} \right] \quad (7)$$

Substituindo (6) e (7) em (2) obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dx} + g \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \quad (8)$$

No conjunto de equações (1), (8), (3), tem-se 4 incógnitas (u,v,T e P'). Para resolver o sistema é necessário fazer mais alguma hipótese ou obter dados experimentais.

Foi feita a hipótese de que a pressão pode ser calculada através de um tratamento unidimensional do problema.

#### b) Equações auxiliares para cálculo da pressão

Para a obtenção dessas equações auxiliares foi assumido que o ar escoava através do duto com uma velocidade média constante, para cada incremento de tempo, desde a entrada até a saída do duto. As propriedades do ar foram consideradas constantes em cada seção do duto.

##### b.1. Equação da Continuidade

$$\frac{dW}{dx} = 0$$

onde W é a velocidade média do escoamento.

##### b.2. Equação da Quantidade de Movimento.

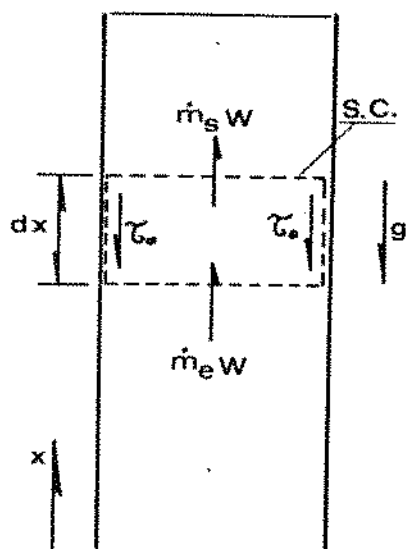


FIG.(2) - Volume de controle elementar para aplica-  
ção da segunda lei de Newton

Para um volume de controle fixo em relação ao siste-  
ma de coordenadas, a 2<sup>a</sup> lei de Newton estabelece que a resultan-  
te das forças externas que atuam sobre o fluido é igual ao fluxo  
líquido da quantidade de movimento para o volume de controle,  
mais a aceleração da massa contida no volume de controle (I. H.  
SHAMES [8] ).

$$d(F_s) + \iiint_{v.c.} F_c \rho dv = \iint_{s.c.} W(\rho \vec{W} d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{v.c.} W \rho dv \right) \quad (9)$$

$d(F_s)$  = Forças de superfície atuando sobre o volume de controle  
elementar.

$$d(F_s) = - A \frac{dp}{dx} dx - \tau_0 P_e dx \quad (10)$$

onde: A - área de escoamento

$\tau_0$  - Tensão de cisalhamento na parede.

$P_e$  - Perímetro.

$\iiint_{v.c.} Fc\rho dv =$  Forças de campo atuando sobre o volume de controle

$$\iiint_{v.c.} Fc\rho dv = - g\rho A dx \quad (11)$$

$\oint_{s.c.} W(\rho \vec{W} d\vec{A}) =$  Fluxo líquido da quantidade de movimento para o volume de controle.

$$\oint_{s.c.} W(\rho \vec{W} d\vec{A}) = 0 \quad \text{pois } W \text{ é constante} \quad (12)$$

$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{v.c.} W\rho dv \right) =$  Aceleração da massa interna ao volume de controle.

Como  $\rho$  e  $W$  estão sendo considerados constantes para todo o volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{v.c.} W\rho dv \right) = \frac{\partial}{\partial t} (W\rho A dx)$$

$\rho A dx$  são constantes com o tempo, portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} (W\rho A dx) = \rho A dx \frac{dW}{dt} \quad (13)$$

Substituindo (10), (11), (12) e (13) em (9), multiplicando por  $\frac{1}{A dx}$  e reordenando,

$$\rho \frac{dW}{dt} = - \rho g - \frac{dP}{dx} - \tau_o \frac{Pe}{A} \quad (14)$$

Assumindo que a perda de carga num dado instante é igual a perda de carga para um escoamento em regime permanente,

com a mesma velocidade do escoamento do instante considerado, tem-se para o regime laminar. (DAUGHERTY & FRANZINI [9]),

$$\tau_0 = \frac{f}{4} \rho \frac{W^2}{2} \quad (15)$$

onde,  $f = 64/Re$ , é o fator de atrito.

Rearranjando (14) e (15) e escrevendo o nº de Reynolds (Re) em função do raio hidráulico ( $R_h = A/Pe$ ), obtêm-se

$$\rho \frac{dW}{dt} = -\rho g - \frac{dP}{dx} - 2\mu W \left( \frac{Pe}{A} \right)^2 \quad (16)$$

Para a geometria do problema

$R_h = b/2$ , que substituindo em (16), resulta

$$\rho \frac{dW}{dt} = -\rho g - \frac{dP}{dx} - \frac{8\mu W}{b^2} \quad (17)$$

Substituindo (7) em (17) e rearranjando obtêm-se

$$\frac{dP'}{dx} = \rho g \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) - \rho \frac{dW}{dt} - \frac{8\mu W}{b^2} \quad (18)$$

### b.3. Equação da Energia

Aplicando a equação da 1ª lei da Termodinâmica para o volume de controle da Fig. 3, obtêm-se (G.J. VAN WYLEN [10]).

$$\dot{Q}_{v.c.} + \dot{m}_e \left[ h_e + \frac{W_e^2}{2} + Z_e g \right] = \dot{m}_s \left[ h_s + \frac{W_s^2}{2} + Z_s g \right] + \dot{W}_{v.c.} + \frac{d}{dt} (E_{v.c.})$$

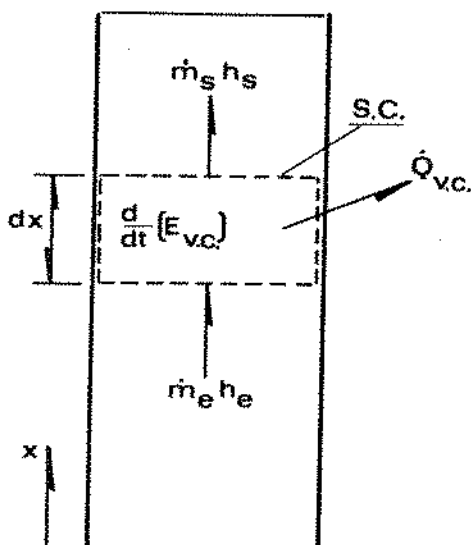


FIG. (3) - Volume de controle elementar para aplica-  
ção da primeira lei da termodinâmica.

Desprezando as variações de energia cinética e poten-  
cial e considerando que  $\dot{W}_{v.c.} = 0$ , a 1ª lei fica:

$$\dot{Q}_{v.c.} + \dot{m}_e h_e = \dot{m}_s h_s + \frac{d}{dt} (E_{v.c.}) \quad (19)$$

onde  $\dot{Q}_{v.c.}$  = taxa de transferência de calor para dentro do volu-  
me de controle.

$\dot{m}_e, \dot{m}_s$  = descargas para dentro e para fora do v.c.

$h_e, h_s$  = entalpias associadas as massas que entram e que  
saem do v.c.

$\frac{d}{dt} [E_{v.c.}]$  = variação da energia total do volume de controle.

A energia do volume de controle  $E_{v.c.}$  é a soma das  
energias interna, cinética e potencial.

$$E_{v.c.} = U + \frac{1}{2} m W^2 + mgx$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (\text{Ev.c.}) = \frac{dU}{dt} + mW \frac{dW}{dt} + m g \frac{dx}{dt}$$

Pela equação da continuidade tem-se

$\dot{m}_e = \dot{m}_s = \dot{m}$ , que pode ser escrita em função da velocidade

$$\dot{m} = A_p W$$

Como o fluido está sendo tratado como um gás perfeito, a entalpia e a energia interna são funções apenas da temperatura.

$$dh = C_{po} dT \quad \therefore h_e - h_s = C_{po}(T_e - T_s)$$

$$dU = mC_{vo} dT$$

onde  $m$  é a massa contida no volume de controle elementar.

$$m = A_p dx$$

Substituindo em (19) e reordenando

$$\dot{Q}_{v.c.} + A_p W C_{po} (T_e - T_s) = A_p C_{vo} dx \frac{dT}{dt} + A_p W dx \frac{dW}{dt} + A_p g dx W \quad (20)$$

As equações (1), (8), (3), (18) e (20) podem ser resolvidas numericamente. As equações (18) e (20) foram estabelecidas com a finalidade de fornecer a distribuição da diferença de pressões ( $P'$ ) desde a entrada ( $x = 0$ ) até a saída do duto, quando ( $x = l$ ).



CAPÍTULO 3

TRATAMENTO NUMÉRICO

a) O método implícito de direções alternadas

Para a solução do problema foi escolhido um método numérico de diferenças finitas, mais especificamente o método implícito de direções alternadas de PEACEMAN e RACHFORD [5]. Este método foi concebido originalmente para sistemas de equações lineares, tendo sido adaptado neste trabalho para um sistema não linear. Nesta situação não existem teoremas provando a convergência do método e sua aplicabilidade é verificada através do cálculo dos resíduos.

A falta de tais teoremas não tem impedido a utilização do método, sendo que as razões usuais para sua escolha são as suas características de rapidez e economia de memória. Comparado com métodos sem direções alternadas ele permite economia de operações e, teoricamente, não tem limitações quanto ao tamanho do incremento no tempo para se obter estabilidade e convergência.

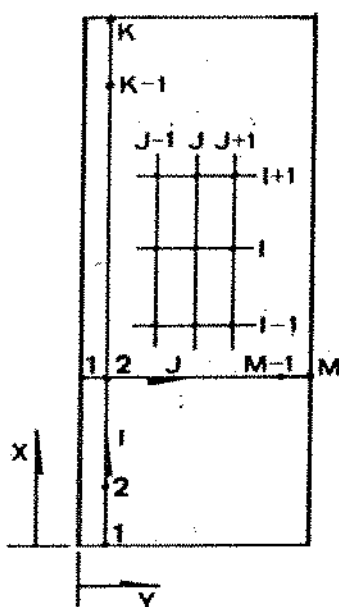
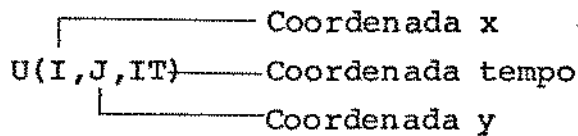


FIG. (4) - Rede utilizada para diferenças finitas.

As equações básicas são escritas na forma de diferenças finitas, já adequadas ao método numérico utilizado (método Implícito de Direções Alternadas [5]).

Notação: U(I,J,IT) - Velocidade na direção do escoamento (x)  
V(I,J,IT) - Velocidade transversal (y)  
T(I,J,IT) - Temperatura  
P'(I) - Diferença de pressão  
t - tempo

Significado dos índices



I = 1,2, ..... K  
J = 1,2, ..... M  
IT = 1,2,3,4

IT = 1 - Valor médio  
IT = 2 - Valor inicial  
IT = 3 - Valor obtido no final da primeira etapa  
IT = 4 - Valor obtido no final da segunda etapa

A utilização do método de direções alternadas pode ser ilustrada, tomando-se a equação da energia.

Equação da Energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Esta equação, é transformada em duas equações, (1ª etapa e 2ª etapa), na forma de diferenças finitas, para utilização com este método.

Na equação da primeira etapa é considerada a variação da temperatura com o tempo e com a direção y.

Equação da primeira etapa

$$\frac{T(I,J,3)-T(I,J,2)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{T(I+1,J,2)-T(I-1,J,2)}{2\Delta x} \right] +$$

$$V(I,J,1) \left[ \frac{T(I,J+1,3)-T(I,J-1,3)}{2\Delta y} \right] = \alpha \left[ \frac{T(I,J+1,3)-2T(I,J,3)+T(I,J-1,3)}{\Delta y^2} \right]$$

Equação da segunda etapa

Na equação da segunda etapa é considerada a variação da temperatura com o tempo e com a direção x. A solução da equação da primeira etapa fornece os valores de  $T(I,J,3)$  que são utilizados na segunda etapa, para obtenção de  $T(I,J,4)$ .

$$\frac{T(I,J,4)-T(I,J,3)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{T(I+1,J,4)-T(I-1,J,4)}{2\Delta x} \right] +$$

$$V(I,J,1) \left[ \frac{T(I,J+1,3)-T(I,J-1,3)}{2\Delta y} \right] = \alpha \left[ \frac{T(I,J+1,3)-2T(I,J,3)+T(I,J-1,3)}{\Delta y^2} \right]$$

Os valores médios para  $U$  e  $V$  e os valores iniciais para  $T$  devem ser conhecidos para se poder iniciar a primeira etapa e são mantidos constantes em ambas as etapas.

Esse mesmo procedimento é utilizado para a equação da quantidade de movimento e permite calcular  $U(I,J,4)$ .  $V(I,J,4)$  sai diretamente, através da equação da continuidade.

Com os valores de  $U(I,J,4)$  e  $V(I,J,4)$  são determinados os novos valores médios,

$$U(I,J,1) = \frac{1}{2} (U(I,J,2) + U(I,J,4))$$

$$V(I,J,1) = \frac{1}{2} (V(I,J,2) + V(I,J,4))$$

e um novo valor inicial

$$T(I,J,2) = T(I,J,4)$$

Com esses valores, é iniciada a primeira etapa do incremento de tempo seguinte. Esse procedimento é repetido até o tempo final desejado.

Deve ser observado que cada incremento de tempo vale  $2\Delta t$ , sendo um  $\Delta t$  para cada etapa.

b) Equações de diferenças finitas

Equação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dx} + g(T/T_0 - 1) \quad (8)$$

Para a primeira etapa, na forma de diferenças finitas esta expressão fica:

$$\begin{aligned} & \frac{U(I,J,3) - U(I,J,2)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{U(I+1,J,2) - U(I-1,J,2)}{2\Delta x} \right] + \\ & V(I,J,1) \left[ \frac{U(I,J+1,3) - U(I,J-1,3)}{2\Delta y} \right] = \nu \left[ \frac{U(I,J+1,3) - 2U(I,J,3) + U(I,J-1,3)}{\Delta y^2} \right] \\ & - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{P'(I+1) - P'(I-1)}{2\Delta x} \right] + g \left[ T(I,J,1)/T_0 - 1 \right] \end{aligned}$$

Reordenando e escrevendo de forma mais compacta obtém-se:

$$A(J) \cdot U(I,J-1,3) + B(J) \cdot U(I,J,3) + C(J) \cdot U(I,J+1,3) = D(J) \quad (21)$$

onde

$$A(J) = - \left( \frac{\nu}{\Delta y^2} + \frac{V(I,J,1)}{2\Delta y} \right)$$

$$B(J) = \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{2 \cdot \nu}{\Delta y^2} \right)$$

$$C(J) = \left( \frac{V(I,J,1)}{2\Delta y} - \frac{v}{\Delta y^2} \right)$$

$$D(J) = \frac{U(I,J,2)}{\Delta t} - \frac{U(I,J,1)}{2\Delta x} (U(I+1,J,2) - U(I-1,J,2)) - \\ - \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot \Delta x} (P'(I+1) - P'(I-1)) + g(T(I,J,1)/T_0-1)$$

$$J = 2, 3, \dots, M-1$$

Para a segunda etapa, a expressão (8) toma a forma abaixo:

$$\frac{U(I,J,4) - U(I,J,3)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{U(I+1,J,4) - U(I-1,J,4)}{2\Delta x} \right] + \\ + V(I,J,1) \left[ \frac{U(I,J+1,3) - U(I,J-1,3)}{2\Delta y} \right] = \\ = v \left[ \frac{U(I,J+1,3) - 2U(I,J,3) + U(I,J-1,3)}{\Delta y^2} \right] - \\ - \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot \Delta x} \left[ P'(I+1) - P'(I-1) \right] + g \left[ T(I,J,1)/T_0-1 \right],$$

ou, na forma reordenada e compacta:

$$A(I) U(I-1,J,4) + EC U(I,J,4) + C(I) U(I+1,J,4) = D(I) \quad (22)$$

onde:

$$A(I) = - \frac{U(I,J,1)}{2\Delta x}$$

$$EC = \frac{1}{\Delta t} \quad e$$

$$C(I) = \frac{U(I, J, 1)}{2\Delta x}$$

$$D(I) = \frac{U(I, J, 3)}{\Delta t} - V(I, J, 1) \left[ \frac{U(I, J+1, 3) - U(I, J-1, 3)}{2\Delta y} \right] +$$

$$+ v \left[ \frac{U(I, J+1, 3) - 2U(I, J, 3) + U(I, J-1, 3)}{\Delta y^2} \right] -$$

$$- \frac{1}{\rho} \left[ \frac{P'(I+1) - P'(I-1)}{2\Delta x} \right] + g \left[ T(I, J, 1) / T_0 - 1 \right]$$

$$I = 2, 3, \dots, K-1$$

Equação da Energia

A equação da energia é dada pela expressão (3):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Para a primeira etapa, na forma de diferenças finitas a expressão (3) fica:

$$\frac{T(I, J, 3) - T(I, J, 2)}{\Delta t} + U(I, J, 1) \left[ \frac{T(I+1, J, 2) - T(I-1, J, 2)}{2\Delta x} \right] +$$

$$+ V(I, J, 1) \left[ \frac{T(I, J+1, 3) - T(I, J-1, 3)}{2\Delta y} \right] = \alpha \left[ \frac{T(I, J+1, 3) - 2T(I, J, 3) + T(I, J-1, 3)}{\Delta y^2} \right]$$

ou na forma reordenada e compacta

$$A1(J) \cdot T(I, J-1, 3) + B1J \cdot T(I, J, 3) + C1(J) \cdot T(I, J+1, 3) = D1(J) \quad (23)$$

onde

$$A1(J) = - \left[ \frac{\alpha}{\Delta y^2} + \frac{V(I,J,1)}{2\Delta y} \right]$$

$$B1(J) = \left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\alpha}{\Delta y^2} \right] e$$

$$C1(J) = \left[ \frac{V(I,J,1)}{2\Delta y} - \frac{\alpha}{\Delta y^2} \right]$$

$$D1(J) = \frac{T(I,J,2)}{\Delta t} - U(I,J,1) \left[ \frac{T(I+1,J,2) - T(I-1,J,2)}{2\Delta x} \right]$$

$$J = 2, 3, \dots, M-1$$

Para a segunda etapa a equação da energia toma a forma abaixo:

$$\begin{aligned} & \frac{T(I,J,4) - T(I,J,3)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{T(I+1,J,4) - T(I-1,J,4)}{2\Delta x} \right] + \\ & + V(I,J,1) \left[ \frac{T(I,J+1,3) - T(I,J-1,3)}{2\Delta y} \right] = \alpha \left[ \frac{T(I,J+1,3) - 2T(I,J,3) + T(I,J-1,3)}{\Delta y^2} \right] \end{aligned}$$

ou na forma reordenada e compacta

$$A(I).T(I-1,J,4) + EC.T(I,J,4) + C(I).T(I+1,J,4) = D1(I) \quad (24)$$

onde

$$A(I) = - \frac{U(I,J,1)}{2\Delta x}$$

$$EC = \frac{1}{\Delta t} \quad e$$

$$C(I) = \frac{U(I,J,1)}{2\Delta x}$$

$$Dl(I) = \frac{T(I,J,3)}{\Delta t} - V(I,J,1) \left[ \frac{T(I,J+1,3) - T(I,J-1,3)}{2\Delta y} \right] + \\ + \alpha \left[ \frac{T(I,J+1,3) - 2T(I,J,3) + T(I,J-1,3)}{\Delta y^2} \right]$$

$$I = 2, 3, \dots, K-1$$

A Equação da Continuidade é dada pela expressão (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Esta equação não é função do tempo e será utilizada para determinação da velocidade transversal (V), depois de executada a 2ª etapa com as equações da quantidade de movimento e energia.

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{U(I+1,J,4) - U(I-1,J,4)}{2\Delta x} + \frac{U(I+1,J+1,4) - U(I-1,J+1,4)}{2\Delta x} \right] +$$

$$\frac{V(I,J+1,4) - V(I,J,4)}{\Delta y} = 0$$

Como as velocidades U e V são nulas em ambas as paredes (condições de contorno), a equação da continuidade escrita na forma de diferenças finitas foi desmembrada em duas equações.

Com a primeira equação, a velocidade  $V(I,J,4)$  é calculada para valores de  $J = M-1, M-2, \dots, J_{\text{médio}} + 1$ .

$$V(I,J,4) = V(I,J+1,4) +$$

$$+ \frac{\Delta y}{4\Delta x} \left[ U(I+1,J,4) + U(I+1,J+1,4) - U(I-1,J,4) - U(I-1,J+1,4) \right] \quad (25)$$

Com a segunda equação



$$V(I, J+1, 4) = V(I, J, 4) -$$

$$- \frac{\Delta y}{4\Delta x} \left[ U(I+1, J, 4) + U(I+1, J+1, 4) - U(I-1, J, 4) - U(I-1, J+1, 4) \right] \quad (26)$$

a velocidade  $V(I, J, 4)$  é calculada para valores de  $J = 2, 3, \dots$ ,  
 $J_{\text{médio}} - 1$ .

Os valores para  $J_{\text{médio}}$  são determinados através dos valores adjacentes, igualmente espaçados através da primeira fórmula de interpolação de Newton [6].

c) Equações auxiliares

c.1) Equação da energia

A expressão (20) é a quarta equação do sistema a ser resolvida.

$$\dot{Q}v.c. + A_p W C_{po}(T_e - T_s) = A_p C_{vo} \frac{dT}{dt} + A_p W \frac{dW}{dt} + A_p g \frac{dxW}{dt}$$

Na forma de diferenças finitas esta equação fica:

$$\dot{Q}v.c. + b_p C_{po} W_2 \left[ T(I-1, 2) - T(I, 2) \right] = b_p C_{vo} \Delta x \frac{T(I, 2) - T(I, 1)}{2\Delta t} +$$

$$+ b_p \Delta x W_2 \left( \frac{W_2 - W_1}{2\Delta t} \right) + b_p g \Delta x W_2$$

Reordenando:

$$T(I, 2) = \frac{\left[ \dot{Q}v.c. + Z_{1E} W_2 T(I-1, 2) + C_{vo} T(I-1) - W_2 (W_2 - W_1 + Z_{2E}) / Z_{3E} \right]}{(C_{vo} + Z_{1E} W_2)} \quad (27)$$

onde

$$Z_{1E} = 2 \cdot \Delta t \cdot C_{po} / \Delta x$$

$$Z_{2E} = 2 \cdot g \cdot \Delta t$$

$$Z3E = RJ.g$$

RJ é a constante de Joule

Qv.c. - calor que entra no v.c. durante o intervalo de tempo  $2.\Delta t$ , sendo  $\Delta t$  o intervalo de tempo usado em cada etapa para a solução das equações da energia e quantidade de movimento. Qv.c. é calculado a partir dos valores de  $T(I,J,4)$  obtidos na segunda etapa.

Em  $T(I,2)$ ;  $T(I,1)$ ,  $W2$ ,  $W1$  o índice (2) significa tempo presente e o índice (1) o tempo passado.

c.2) Equação da quantidade de movimento.

A quinta equação do sistema a ser resolvido é dada pela expressão (18):

$$\frac{dP'}{dx} = \rho g \left[ \frac{T-T_0}{T_0} \right] - \rho \frac{dW}{dt} - \frac{8\mu W}{b^2}$$

Para trabalhar em unidades coerentes é necessário introduzir uma constante de conversão "gc", e a equação (18) assume a forma:

$$\frac{dP'}{dx} = \frac{1}{gc} \left[ \rho g (T/T_0 - 1) - \rho \frac{dW}{dt} - \frac{8\mu W}{b^2} \right]$$

ou em diferenças finitas:

$$\frac{P'(I) - P'(I-1)}{\Delta x} = \frac{\rho g}{gc} (T(I,2)/T_0 - 1) - \frac{\rho}{gc} \left[ \frac{W2 - W1}{2\Delta t} \right] - \frac{8\mu}{b^2 gc} W2$$

Explicitando  $P'(I)$

$$P'(I) = P'(I-1) + \frac{\Delta x \rho g}{gc} \left[ T(I,2)/T_0 - 1 \right] - \frac{\Delta x \rho}{2gc\Delta t} [W2 - W1] - \frac{8\mu \Delta x}{b^2 gc} W2 \quad (28)$$

d) Condições de Contorno

Condições de contorno junto à parede, para  $t > 0$

Velocidades  $u$  e  $v$ , nulas para todo  $x$

$$u = v = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq l ; \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = b$$

Temperatura da parede quente

$$T = T_1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq l \quad \text{e} \quad y = 0$$

Temperatura da parede fria

$$T = T_2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq l \quad \text{e} \quad y = b$$

ou, para a notação em diferenças finitas

$$\left. \begin{array}{l} U(I,1,IT) = 0 \\ U(I,M,IT) = 0 \\ V(I,1,IT) = 0 \\ V(I,M,IT) = 0 \\ T(I,1,IT) = T_1 \\ T(I,M,IT) = T_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sendo:} \\ I = 1, 2, \dots, K \\ IT = 1, 2, 3, 4 \\ J = 1 - \text{parede quente} \\ J = M - \text{parede fria} \end{array}$$

Na entrada e na saída do escoamento entre as paredes as velocidades  $u$  e  $v$  são determinadas por aproximação polinomial para  $x = 0$  e  $x = l$  com  $0 < y < b$ .

Pressões  $P'$  nulas para a entrada e para a saída ( $x = 0$  e  $x = l$ ), independente de  $y$ .

Temperatura na entrada igual a temperatura ambiente

$$T = T_0 \quad \text{para } x = 0$$

Temperatura na saída determinada por aproximação polinomial para  $x = l$  e  $0 < y < b$ .

Ou em termos de diferenças finitas:

$$U(1,I,IT); \quad U(K,J,IT) \quad \text{e} \quad T(K,J,IT)$$

onde  $I = 1$  - entrada

$I = K$  - saída

são determinados por meio de aproximação polinomial, utilizando

a primeira fórmula de Newton, para valores de U e T igualmente es-  
paçados.

Para a pressão tem-se:

$$P'(1) = 0 \text{ - entrada}$$

$$P'(K) = 0 \text{ - saída}$$

e) Condições Iniciais

As condições iniciais adotadas para  $t = 0$  foram velo-  
cidades e pressões nulas para todo o sistema.

$$u = v = 0; \quad P' = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq l \text{ e } 0 \leq y \leq b$$

Temperaturas iguais a temperatura ambiente, para todo o  
sistema, exceto para as paredes.

$$T = T_0 \text{ para } 0 \leq x \leq l \text{ e } 0 < y < b$$

$$T = T_1 \text{ para } 0 \leq x \leq l \text{ e } y = 0$$

$$T = T_2 \text{ para } 0 \leq x \leq l \text{ e } y = b$$

ou em termos de diferenças finitas

$$\left. \begin{array}{l} U(I, J, IT) = 0 \\ V(I, J, IT) = 0 \\ T(I, J, IT) = T_0 \\ T(I, 1, IT) = T_1 \\ T(I, M, IT) = T_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} J = 1, \dots, M \\ J = 2, \dots, M-1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} U(I, J, IT) = 0 \\ V(I, J, IT) = 0 \\ T(I, J, IT) = T_0 \\ T(I, 1, IT) = T_1 \\ T(I, M, IT) = T_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} I = 1, \dots, K \\ IT = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

CAPÍTULO 4

SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS

a) Equações resolvidas pelo Método Implícito de D.A.

a.1) Equações resolvidas na primeira etapa.

Equação da Quantidade de Movimento escrita na forma da expressão (21).

$$A(J) U(I, J-1, 3) + B_J U(I, J, 3) + C(J) U(I, J+1, 3) = D(J)$$

$$J = 2, 3, \dots, M-2, M-1$$

Desenvolvendo:

$$A(2) U(I, 1, 3) + B_J U(I, 2, 3) + C(2) U(I, 3, 3) + \dots = D(2)$$

$$A(3) U(I, 2, 3) + B_J U(I, 3, 3) + C(3) U(I, 4, 3) + \dots = D(3)$$

$$A(4) U(I, 3, 3) + B_J U(I, 4, 3) + C(4) U(I, 5, 3) + \dots = D(4)$$

.                    .                    .  
:                    :                    :  
.

$$A(M-2) U(I, M-3, 3) + B_J U(I, M-2, 3) + C(M-2) U(I, M-1, 3) + \dots = D(M-2)$$

$$A(M-1) U(I, M-2, 3) + B_J U(I, M-1, 3) + C(M-1) U(I, M, 3) + \dots = D(M-1)$$

Condição de contorno

$$U(I, 1, 3) = 0 \text{ - Parede quente}$$

$$U(I, M, 3) = 0 \text{ - parede fria}$$

Um conjunto de equações semelhante a este é obtido para cada valor de I. Pode-se observar que o conjunto de  $U(I, \dots, 3)$ , acima forma uma matriz tridiagonal. Essa matriz pode ser resolvida diretamente por processo não iterativo. (B. CARNAHAN [11]; PEACEMAN & RACHFORD [5]). Matrizes semelhantes podem ser obtidas para as equações (23), (22) e (24), como segue.

Equação da energia escrita na forma reordenada da expressão (23)

$$A_I(J) T(I, J-1, 3) + B_{IJ} T(I, J, 3) + C_I(J) T(I, J+1, 3) = D_I(J)$$

$$J = 2, 3, \dots, M-1, M-1$$

ou

$$\begin{aligned}
 A_1(2) T(I,1,3) + B_1 J T(I,2,3) + C_1(2) T(I,3,3) + \dots &= D_1(2) \\
 A_1(3) T(I,2,3) + B_1 J T(I,3,3) + C_1(3) T(I,4,3) + \dots &= D_1(3) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 A_1(M-2) T(I,M-3,3) + B_1 J T(I,M-2,3) + C_1(M-2) T(I,M-1,3) + \dots &= D_1(M-2) \\
 A_1(M-1) T(I,M-2,3) + B_1 J T(I,M-1,3) + C_1(M-1) T(I,M,3) \dots &= D_1(M-1)
 \end{aligned}$$

Condições de contorno

$$\begin{aligned}
 T(I,1,3) &= T_1 - \text{Parede quente} \\
 T(I,M,3) &= T_2 - \text{Parede fria}
 \end{aligned}$$

Resolvendo esses dois conjuntos de equações, todos os valores de  $V$  e  $T$ , exceto para  $I=1$  e  $I=K$ , são determinados. Os valores de  $U(1,J,3)$ ,  $U(K,J,3)$  e  $T(K,J,3)$ , para  $J=2,3,\dots,M-1$  são determinados por aproximação polinomial, utilizando os valores obtidos para os pontos ( $I=2,3,4,5$  e  $I=K-2,K-3,K-4, K-5$ ).

a.2) Equações resolvidas na segunda etapa

Equação da Quantidade de Movimento dada pela expressão (22)

$$A(I) U(I-1,J,4) + EC U(I,J,4) + C(I) U(I+1,J,4) = D(I)$$

$$I = 2, 3, \dots, K-2, K-1$$

ou

$$\begin{aligned}
 A(2) U(1,J,4) + EC U(2,J,4) + C(2) U(3,J,4) + \dots &= D(2) \\
 A(3) U(2,J,4) + EC U(3,J,4) + C(3) U(4,J,4) + \dots &= D(3) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 A(K-2) U(K-3,J,4) + EC U(K-2,J,4) + C(K-2) U(K-1,J,4) + \dots &= D(K-2) \\
 A(K-1) U(K-2,J,4) + EC U(K-1,J,4) + C(K-1) U(K,J,4) \dots &= D(K-1)
 \end{aligned}$$

Condições de contorno



valor de  $V(I, J_{\text{m\u00e9dio}}, 4)$  \u00e9 obtido por aproxima\u00e7\u00e3o polinomial a partir dos valores de  $V(I, J, 4)$  para  $J = J_{\text{m\u00e9dio}} - 3, J_{\text{m\u00e9dio}} - 1, J_{\text{m\u00e9dio}} + 1, J_{\text{m\u00e9dio}} + 3$ .

Com  $V(I, J, 4)$  s\u00e3o determinados

$$V(I, J, 1) = \frac{1}{2} \left[ V(I, J, 4) + V(I, J, 2) \right]$$

c) Equa\u00e7\u00f5es auxiliares para a Press\u00e3o ( $P'$ ) resolvidas por processo iterativo.

Com os valores de  $T(I, J, 4)$  calculados ao final da segunda etapa (a.2), a quantidade de calor que entra no volume de controle \u00e9 calculada, a partir da equa\u00e7\u00e3o de Fourier (FRANK KREITH [12]).

$$\dot{Q}_{v.c.} = -kA \left[ \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} - \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=b} \right]$$

onde:

A \u00e9 a \u00e1rea lateral do volume de controle, que para uma profundidade unit\u00e1ria vale:

$$A = 1 \cdot dx$$

$\frac{dT}{dy}$  : gradientes de temperatura nas paredes

Em termos de diferen\u00e7as finitas, e utilizando para  $\frac{dT}{dy}$

uma derivada de 5 pontos [HILDEBRAND (6)]

$$Q(I) = \frac{\Delta t \cdot k}{6 \cdot b \cdot y} \left\{ 25 \left[ T(I, 1, 4) + T(I, M, 4) \right] - 48 \left[ T(I, 2, 4) + T(I, M-1, 4) \right] + 36 \left[ T(I, 3, 4) + T(I, M-2, 4) \right] - 16 \left[ T(I, 4, 4) + T(I, M-3, 4) \right] + 3 \left[ T(I, 5, 4) + T(I, M-4, 4) \right] \right\}$$



Com os valores de  $Q(I)$  calculados para  $I=2, \dots, K-1$  e com uma velocidade média  $W2$  arbitrada, a equação auxiliar (27) é resolvida, fornecendo os valores da temperatura média  $T(I,2)$  para cada  $x(I=2, \dots, K-1)$ .

Esses valores de  $T(I,2)$  e  $W2$  substituídos na equação auxiliar (28) possibilitam o cálculo de  $P'(I)$  para  $I=2, \dots, K$ . As condições de contorno para  $P'$  estabelecem que  $P'(1)=P'(K)=0$ .  $P'(1)$  é sempre assumido como zero, devido a forma da equação (28). Se o valor de  $W2$  for correto, as condições de contorno para  $P'$  serão satisfeitas e  $P'(K)=0$ . Se  $P'(K) \neq 0$ , um novo valor de  $W2$  é estimado e o processo é repetido até que as condições de contorno para  $P'$  sejam satisfeitas.

O valor de  $W2$  é estimado de modo a permitir uma convergência mais rápida para o processo iterativo. Supondo que o primeiro valor para  $W2=V1$ , conduziu a um valor de  $P'(K)=P1 \neq 0$  e que um segundo valor para  $W2=V2$  conduziu a  $P'(K)=P2 \neq 0$ , o novo valor de  $W2$  será:

$$W2 = V2 - (V2-V1) \frac{P2}{(P2-P1)}$$

Com os valores calculados para  $P'(I)$ ,  $U(I,J,1)$ ,  $V(I,J,1)$  e  $T(I,J,1)$ , a primeira etapa é reiniciada. Para cada incremento no tempo ( $2\Delta t$ ), esse procedimento é repetido duas vezes, e o processo continua até o tempo final desejado.

#### d) Equações dos Resíduos

Os resíduos das equações da Quantidade de Movimento e da energia foram obtidos a partir dos valores médios  $U(I,J,1)$ ,  $V(I,J,1)$ ,  $T(I,J,1)$  e da diferença de Pressão  $P'(I)$ .

Resíduo para a Equação da Quantidade de Movimento.

$$\begin{aligned} RM(I,J) = & \frac{U(I,J,1) - U(I,J,2)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{U(I+1,J,1) - U(I-1,J,1)}{2\Delta x} \right] + \\ & + V(I,J,1) \left[ \frac{U(I,J+1,1) - U(I,J-1,1)}{2\Delta y} \right] - v \left[ \frac{U(I,J+1,1) - 2U(I,J,1) + U(I,J-1,1)}{\Delta y^2} \right] \\ & + \frac{gc}{\rho} \left[ \frac{P'(I+1) - P'(I-1)}{2\Delta x} \right] - g \left[ \frac{T(I,J,1)}{T_0} - 1 \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Resíduo para a equação da energia

$$\begin{aligned}
 RE(I,J) = & \frac{T(I,J,1) - T(I,J,2)}{\Delta t} + U(I,J,1) \left[ \frac{T(I+1,J,1) - T(I-1,J,1)}{2\Delta x} \right] + \\
 & + V(I,J,1) \left[ \frac{T(I,J+1,1) - T(I,J-1,1)}{2\Delta y} \right] - \alpha \left[ \frac{T(I,J+1,1) - 2T(I,J,1) + T(I,J-1,1)}{\Delta y^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

A análise dos resíduos mostrou que as equações estavam sendo bem satisfeitas, com os resíduos da equação da energia oscilando em torno de  $10^{-3}$  e os resíduos da equação da quantidade de movimento apresentando valores da ordem de  $10^{-4}$  para a região de entrada ( $I=2$ ) e valores da ordem de  $10^{-6}$  para as demais regiões. No entanto, a observação dos valores obtidos para a velocidade  $U$ , mostrava que seus valores cresciam a partir da entrada para a saída do duto, de tal forma que a velocidade média para o escoamento crescia mais que o esperado pela variação da densidade.

Para contornar o problema, foi determinada a posição onde o resíduo era mínimo e os valores de  $U$  para essa posição (posição de referência) foram tomados como corretos.

Para as outras posições os valores de  $U$  foram corrigidos de modo a manter constante a descarga passando pela posição de referência (posição de resíduo mínimo). Para a correção dos valores de  $U$  foi considerada a variação da densidade com a temperatura. Como o ar está sendo considerado como um gás perfeito, a variação da densidade com a temperatura é dada por:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

Para a posição de referência foi calculado

$$C_R = \int_0^b \rho_R u_R dy$$

Para as demais posições  $I = 1, \dots, R-1, R+1, \dots, K$  foi determinado:

$$C_I = \int_0^b \rho_I u_I dy$$

e a velocidade U corrigida para

$$U_I \text{ corrigido} = U_I \frac{C_R}{C_I} \quad I = 1, 2, \dots, K$$

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS E COMPARAÇÕES

São apresentados os resultados obtidos para um aquecimento simétrico e dois assimétricos. Nos três casos, a altura das paredes, o espaçamento entre elas, a temperatura da parede mais quente e a temperatura do ambiente são mantidos constantes.

A altura da parede foi tomada igual a 3,0 metros por apresentar a altura média da parede de uma residência térrea. A temperatura ambiente de 298<sup>o</sup>K (25<sup>o</sup>C) é ligeiramente maior que a temperatura média para a região de Campinas. A diferença entre a temperatura do ambiente  $T_0$  e a temperatura da parede mais quente ( $T_1$ ), bem como o espaçamento entre as paredes foram tomados arbitrariamente.

- $l = 3,0$  metros : altura das paredes
- $b = 2,4 \cdot 10^{-2}$  metros : espaçamento entre paredes
- $T_0 = 298^{\circ}\text{K}$  : temperatura do ambiente
- $T_1 = 303,5^{\circ}\text{K}$  : temperatura da parede mais quente

Definindo uma razão adimensional de temperaturas

$$RT = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}$$

onde:  $T_2$  = temperatura da parede mais fria  
 $T_1$  = temperatura da parede mais quente  
 $T_0$  = temperatura ambiente

Os 3 casos podem ser designados pelos valores de RT

- RT = 1 - Aquecimento simétrico  $T_1 = T_2$
- RT = 1/2 - Aquecimento assimétrico  $T_2 = (T_1 + T_0)/2$
- RT = 0 - Aquecimento assimétrico  $T_2 = T_0$

Os resultados para o número de Nusselt local são apresentados para paredes com altura de 3,0 m e espaçamento entre paredes, de  $1,05 \times 10^{-2}$  m, para efeito de comparação com resultados publicados.

a. Aquecimento simétrico  $RT = 1$

Os perfis de velocidade longitudinal  $U$ , para entrada e saída do duto podem ser observados nas Fig. (5) e (6). Inicialmente os picos de velocidades estão próximos às paredes, passando após 2,5 segundos para a região central do duto.

Quando isto ocorre, o perfil de entrada é mais achatado do que o de saída. No entanto pode ser observado através da Fig. (7), que para um tempo de 9,0 segundos quando a velocidade  $U$  atinge o valor máximo, o perfil de saída é mais achatado que o de entrada, permanecendo nessa configuração até praticamente atingir o regime permanente. Provavelmente esse achatamento ocorre porque a força de flutuação é maior nas regiões mais quentes e o ar tem temperatura maior junto às paredes. Pela Fig. (7) pode ser visto ainda, que a velocidade para a condição de regime quase-permanente ( $t = 30s$ ) é menor que para ( $t = 9,0s$ ).

Observando a Fig. (20), número de Nusselt médio em função do tempo, pode-se notar que o valor do  $N\theta$  de Nusselt,  $Nu = 4,32$  em  $t = 0,75s$  cai para  $Nu = 1,94$  em  $t = 6,0s$  e depois sobe para  $Nu = 2,37$  em  $10,5s$ , estabilizando-se a partir daí. Conclui-se que a taxa de transferência de calor é muito maior no início do transitório, quando a velocidade é baixa, mas os gradientes de temperaturas são elevados. Essa grande quantidade de calor absorvida pelo ar, faz com que sua temperatura se eleve rapidamente, proporcionando como consequência uma força de flutuação elevada, que o acelera. O aumento da velocidade faz com que uma massa considerável de ar frio entre no duto. O ar que entra provoca o abaixamento de temperatura dentro do duto, com efeitos mais pronunciados na entrada, como pode ser visto na Fig. (8). Esse ar, em virtude de possuir uma velocidade maior fica menos tempo dentro do duto e não é aquecido até a temperatura do ar que saiu, provocando uma diminuição da força de flutuação, perdendo consequentemente velocidade.

A distribuição de temperaturas pode ser observada na Fig. (8), onde o efeito de flutuação descrito acima pode ser facilmente observado.

A velocidade transversal  $V$  é mostrada na Fig. (9), para em tempo de 30,0s. Pode ser observado que na região de entrada o sentido de  $V$  é do centro para as paredes, provocado pela aceleração do ar junto as mesmas. Na região de saída do duto, os valores de  $V$  são muito pequenos comparados com os da entrada, mas indicam que o perfil de  $U$  não está totalmente desenvolvido para essa altura de duto.

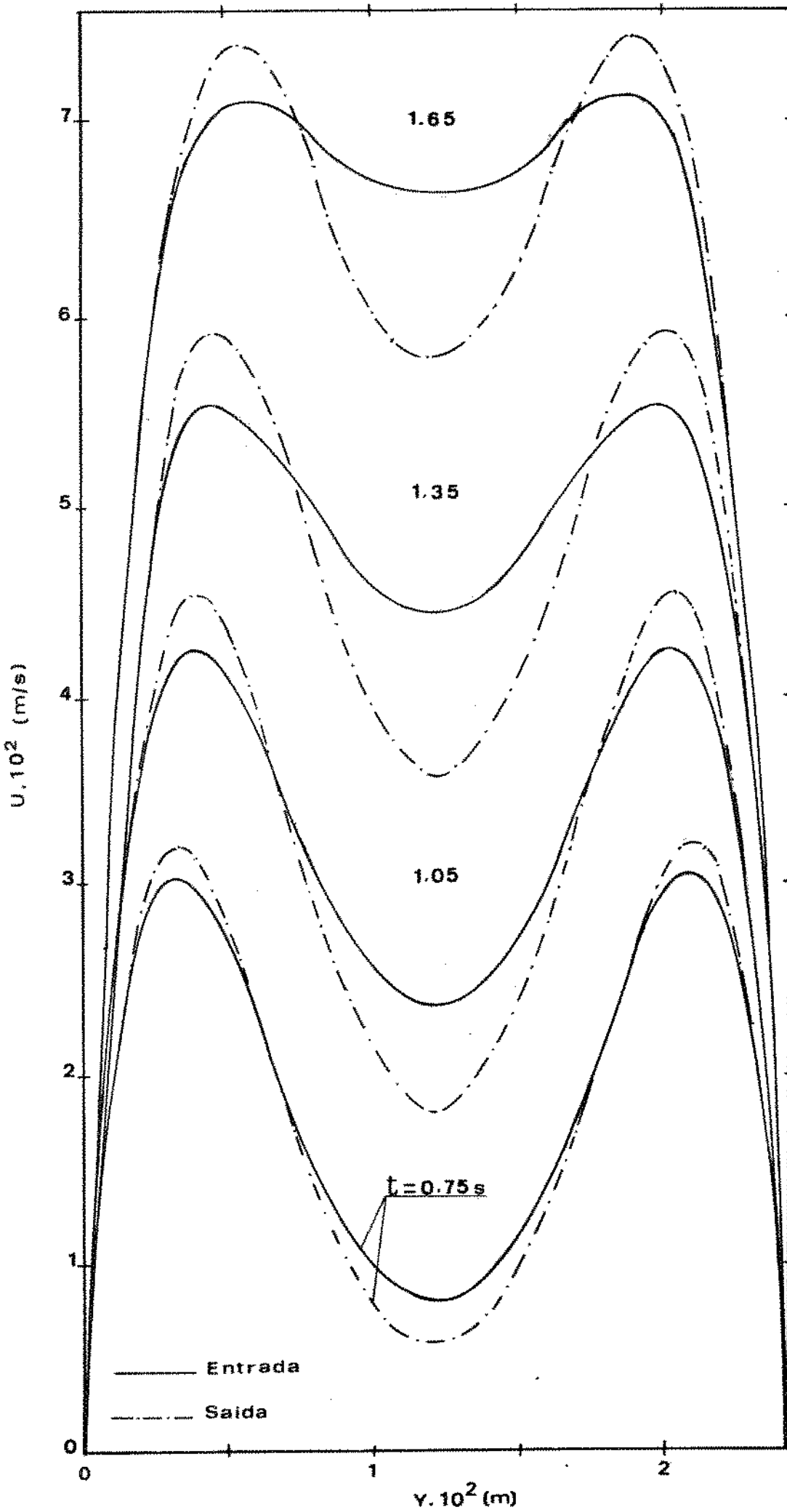


FIG. (5) - Perfis da Velocidade  $U$  para o início do transitório. Aquecimento simétrico.

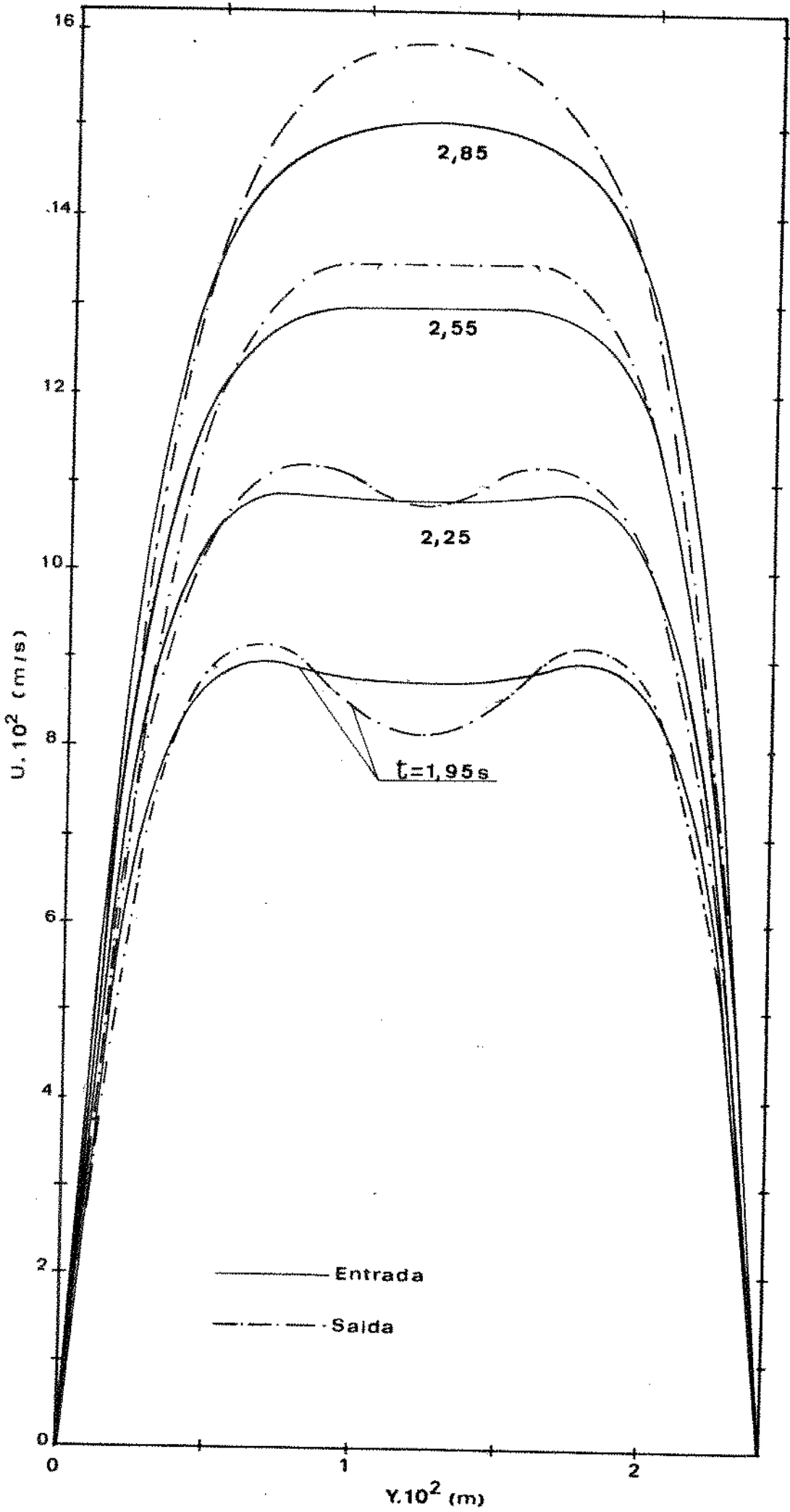


FIG. (6) - Evolução dos perfis da velocidade  $U$  x  $Y$  para a fase inicial do transitório. Aquecimento simétrico.

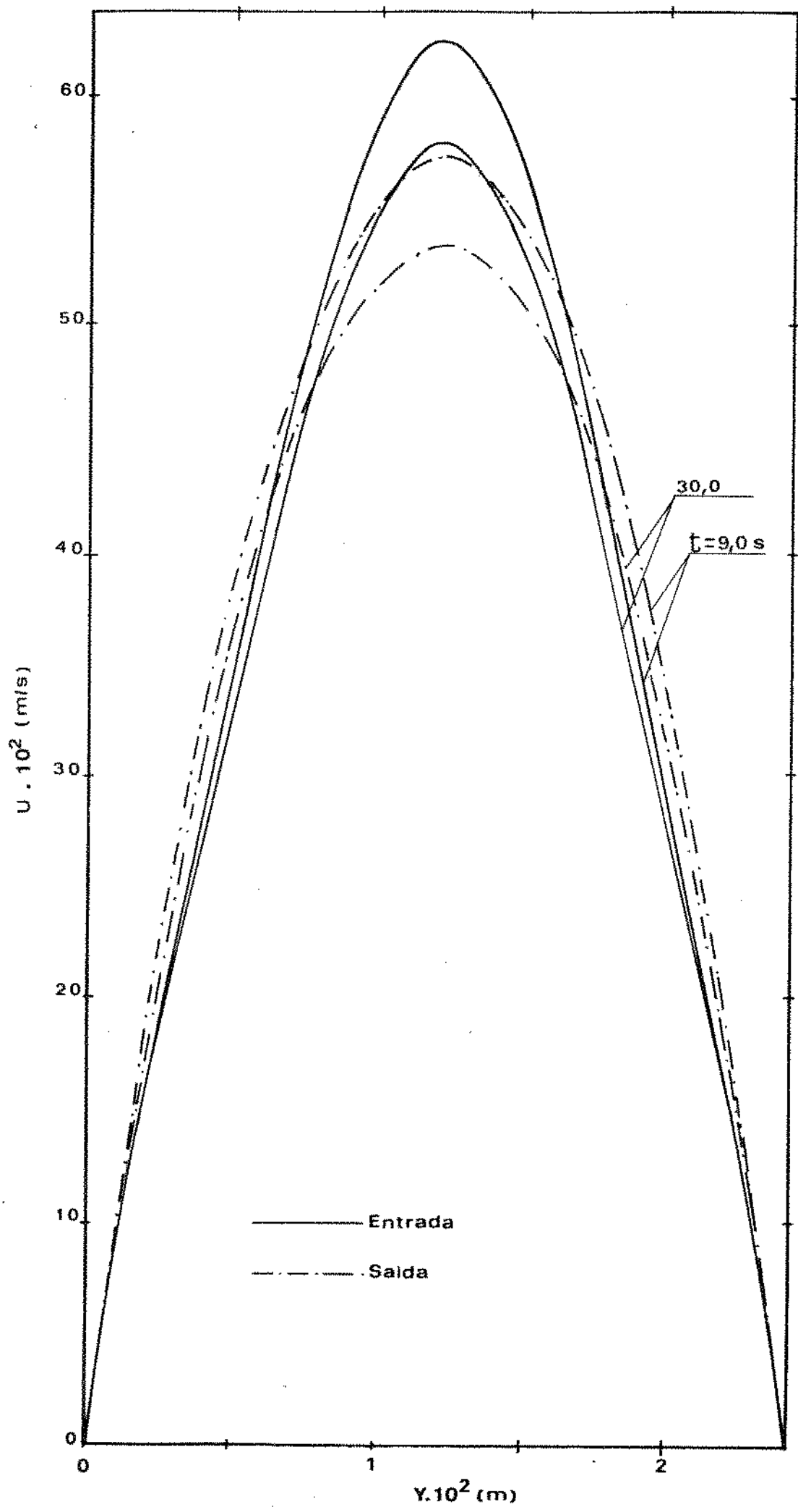


FIG. (7) - Velocidade máxima de U e velocidade para condição de regime praticamente permanente. Aquecimento simétrico.



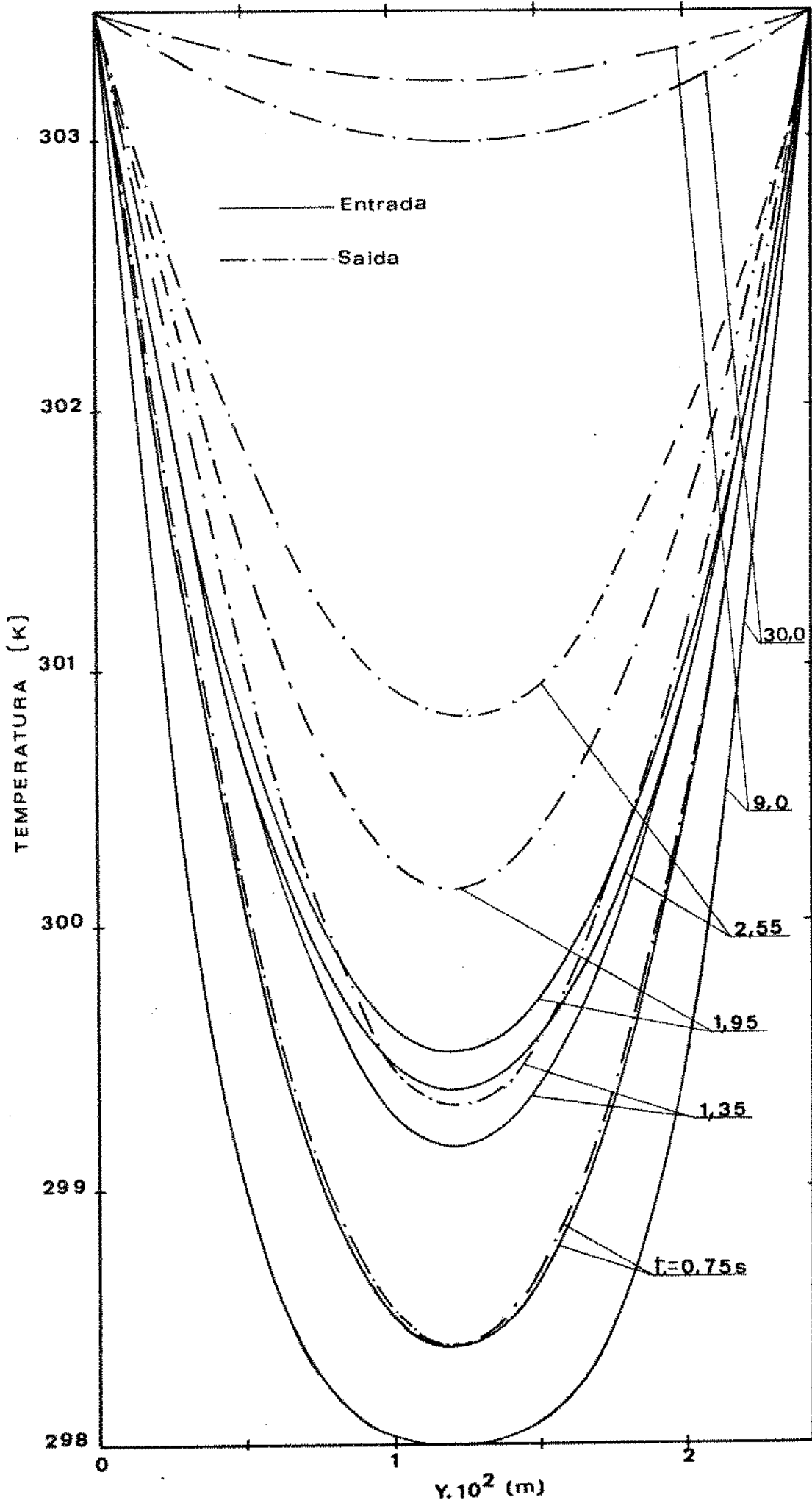


FIG. (8) - Desenvolvimento dos perfis de temperatura desde 0,75s até o regime quase-permanente. Aquecimento simétrico.

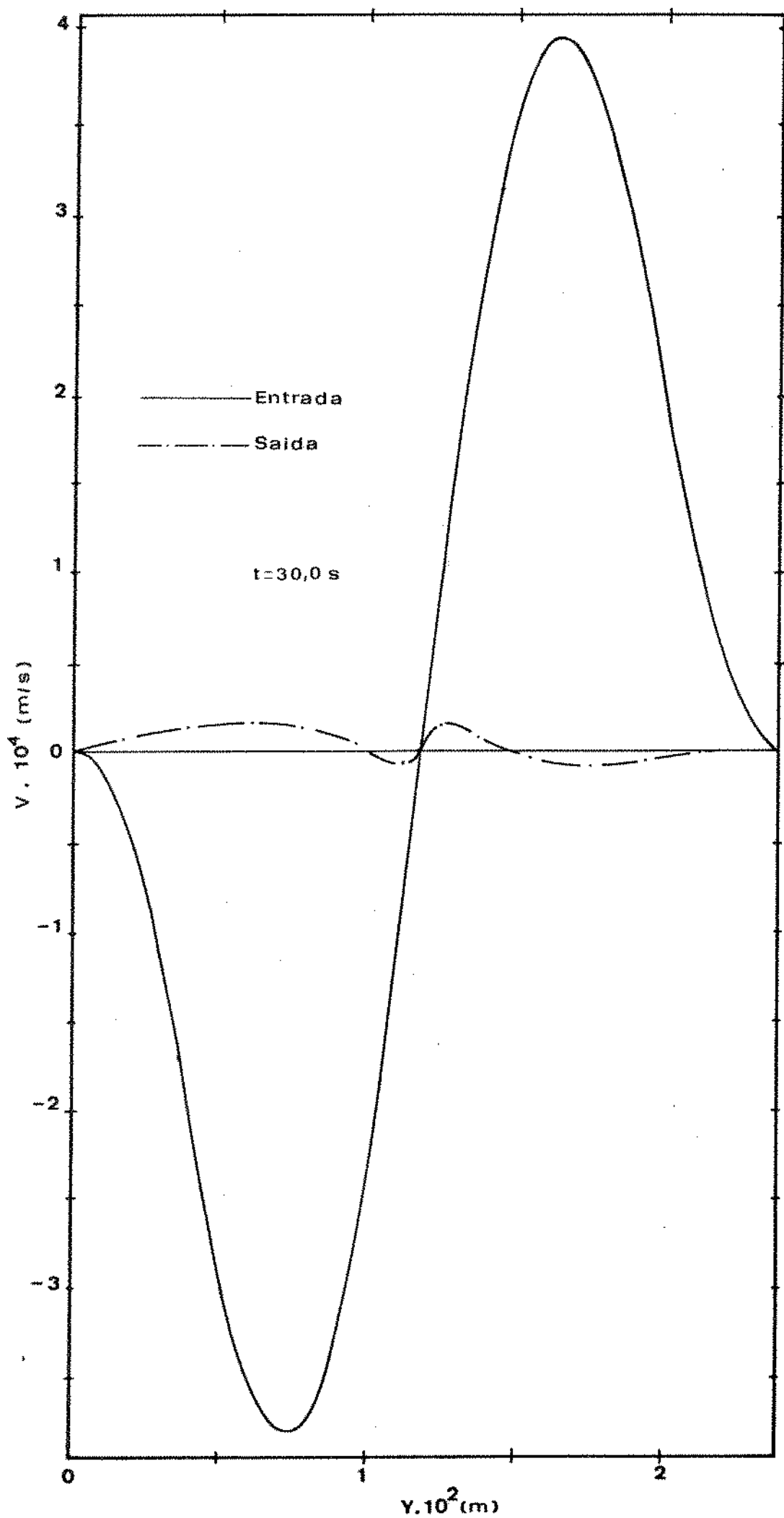


FIG. (9) - Velocidade transversal para o regime quase-permanente. Aquecimento simétrico.

b. Aquecimento assimétrico  $RT = 1/2$

Através da Fig. (10) podem ser observados dois picos para cada perfil de velocidade  $U$ , para tempos próximos do início do transitório. O pico maior está próximo à parede mais quente, porque nessa região a força de flutuação é maior. Para tempos maiores que 1,95s, os picos praticamente desaparecem para a região de entrada como pode ser visto na Fig (11) que apresenta um perfil achatado, sendo que para a região de saída o pico próximo a parede mais fria desapareceu, mas permanece o pico próximo à parede quente, agora um pouco mais deslocado para o centro do duto.

A velocidade máxima ocorre para  $t = 10,5s$ , sendo o perfil de saída mais achatado que o de entrada, e deslocado ligeiramente em direção à parede mais quente, como pode ser visto na Fig. (12). As velocidades para  $t = 30,0s$ , regime quase-permanente são menores que para 10,5s.

Examinando as Fig. (20) e (13) conclui-se que o mesmo fenômeno de flutuação ocorreu para esta condição de aquecimento.

A distribuição de  $V$  é mostrada na Fig. (14) para  $t = 30,0s$ , onde pode ser visto que para a região de entrada, a movimentação do fluido é maior em direção à parede mais quente. Para a região de saída os valores de  $V$ , embora pequenos servem para indicar que o perfil de velocidade  $U$  não está totalmente desenvolvido.

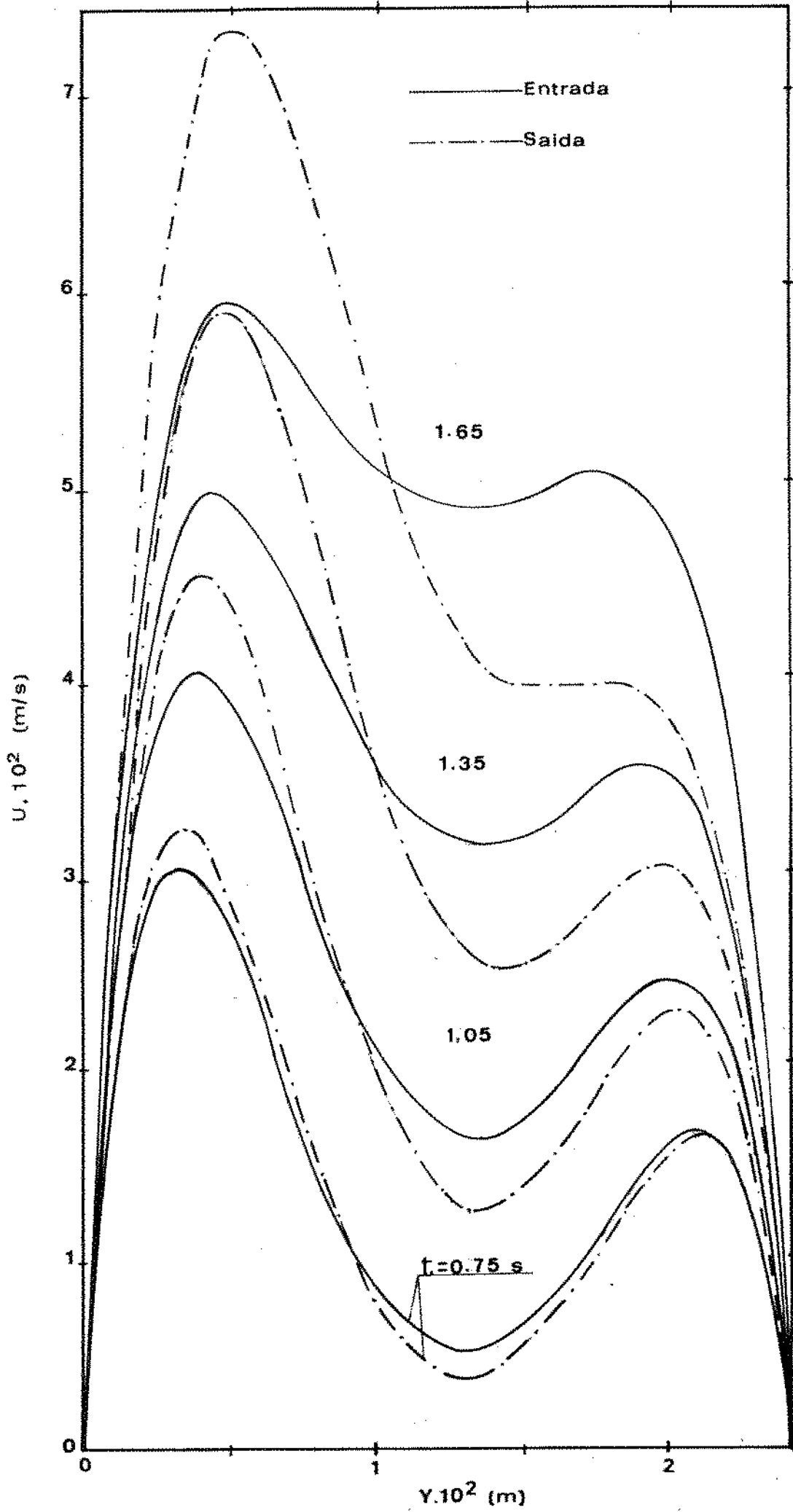


FIG. (10) - Perfis de U para o início do transitório, mostrando a influência do aquecimento assimétrico  $RT = 1/2$ .

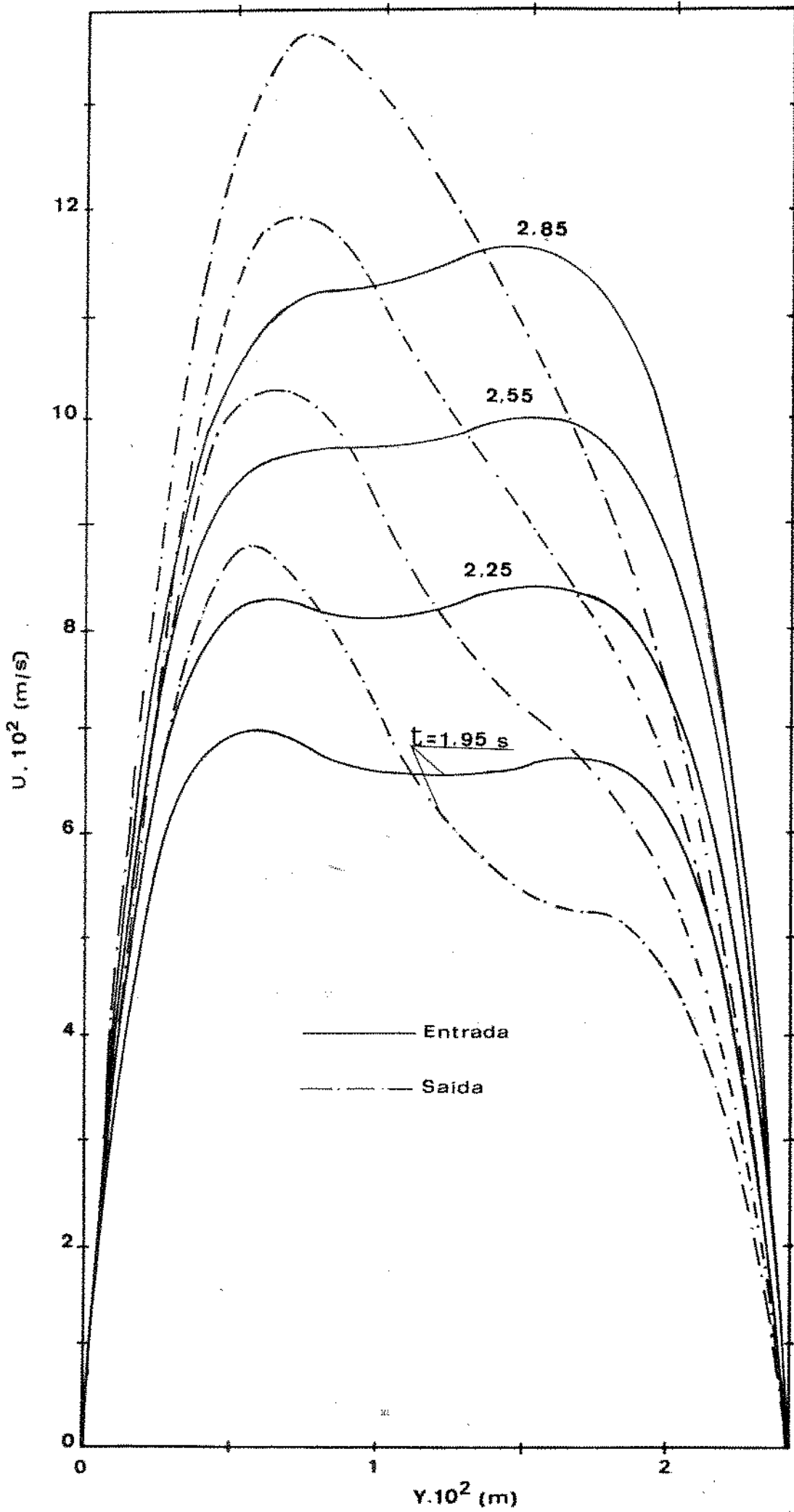


FIG. (11) - Sequência do desenvolvimento de U para aquecimento assimétrico com  $RT = 1/2$ .

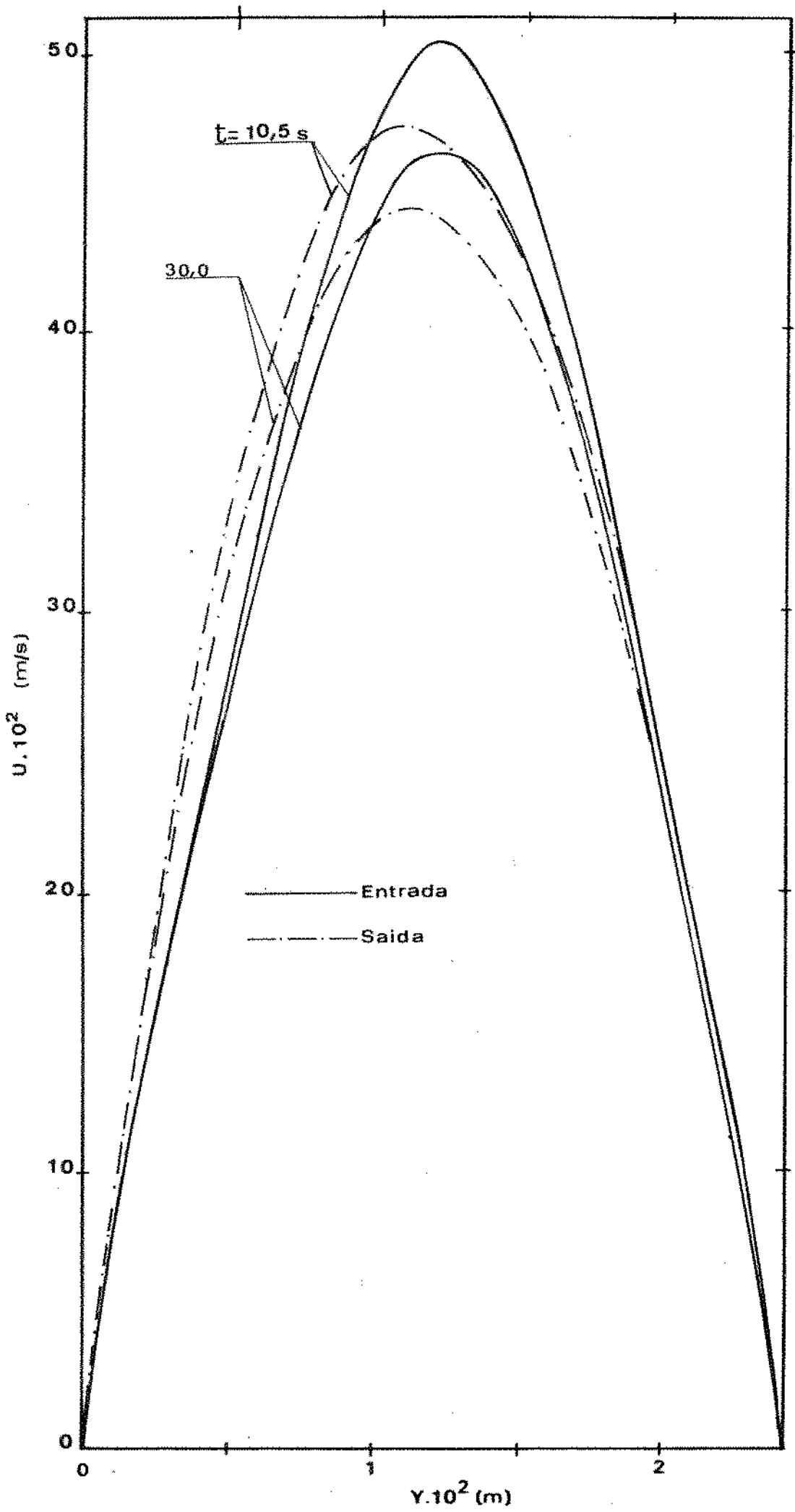


FIG. (12) - Velocidade  $U$ , máximo e de regime quase-permanente para razão de temperatura  $RT = 1/2$

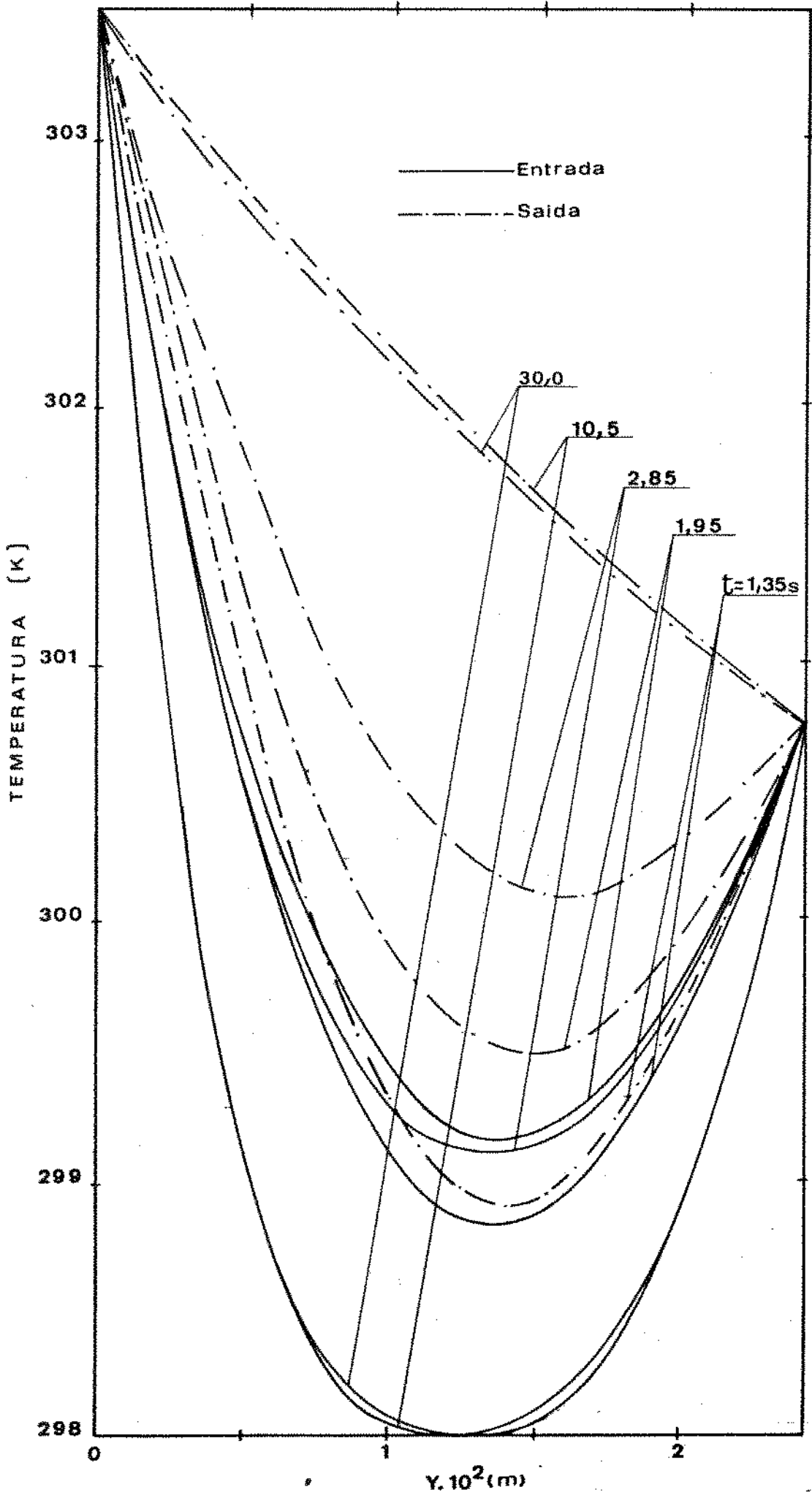


FIG. (13) - Evolução dos perfis de temperatura, desde um tempo próximo do início do transitório até a condição de regime quase-permanente, com aquecimento assimétrico de  $R_T = 1/2$ .

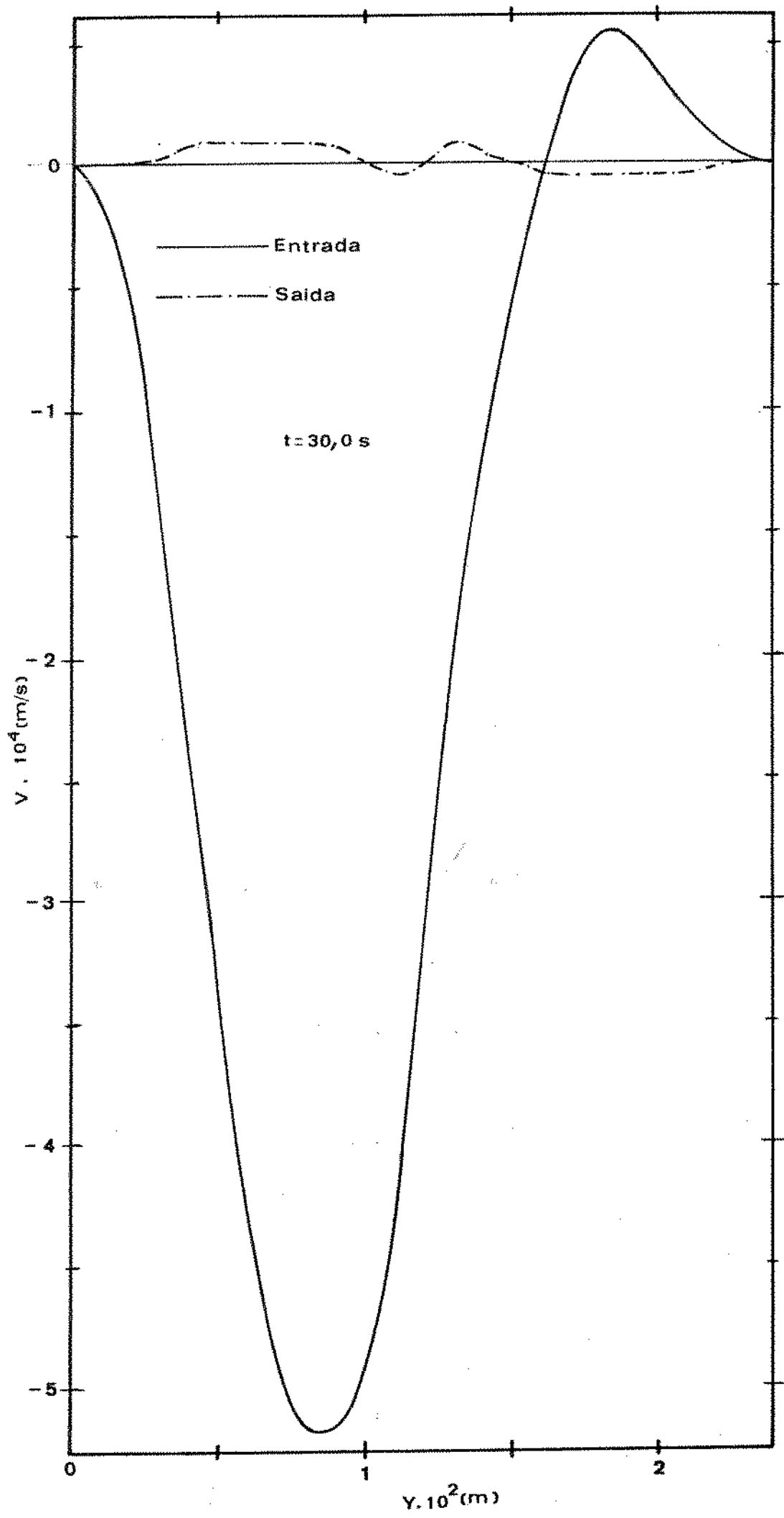


FIG. (14) - Velocidade transversal  $V$ , para a condição de regime quase-permanente. Aquecimento assimétrico de  $RT = 1/2$ .



c. Aquecimento assimétrico  $RT = 0$

O perfil da velocidade longitudinal mostrado na Fig. (15) apresenta apenas um pico, próximo à parede mais quente. No início do transitório até um tempo de 1,35s, os perfis de entrada e saída apresentam o mesmo aspecto, mas a partir de  $t = 1,65s$  os perfis de entrada começam a se modificar, como mostra a Fig. (16), deslocando-se para a região central do escoamento. A velocidade máxima é atingida para  $t = 12,0s$ , e o máximo de velocidade ocorre na região de saída como pode ser visto através da Fig. (17). Como nos casos anteriores a velocidade cresce até um valor máximo, depois decresce oscilando ligeiramente até se estabilizar. Para esta condição de aquecimento, o perfil de entrada apresenta um pico próximo a região central para  $t = 12,0s$ , enquanto que o perfil de saída apresenta um pico afastado do centro na direção na parede mais quente.

Pela Fig. (18) pode ser observado que as flutuações de temperatura, embora bem pronunciadas para a região de entrada, não foram observadas para a região de saída.

A velocidade transversal  $V$ , para  $t = 30s$  mostrada na Fig. (19) apresenta para a região de entrada apenas o movimento em direção à parede mais quente, como era esperado, pois é junto a essa parede que o fluido se aquece. Na saída,  $V$  indica, como nos casos anteriores que o perfil de  $U$  não está totalmente desenvolvido.

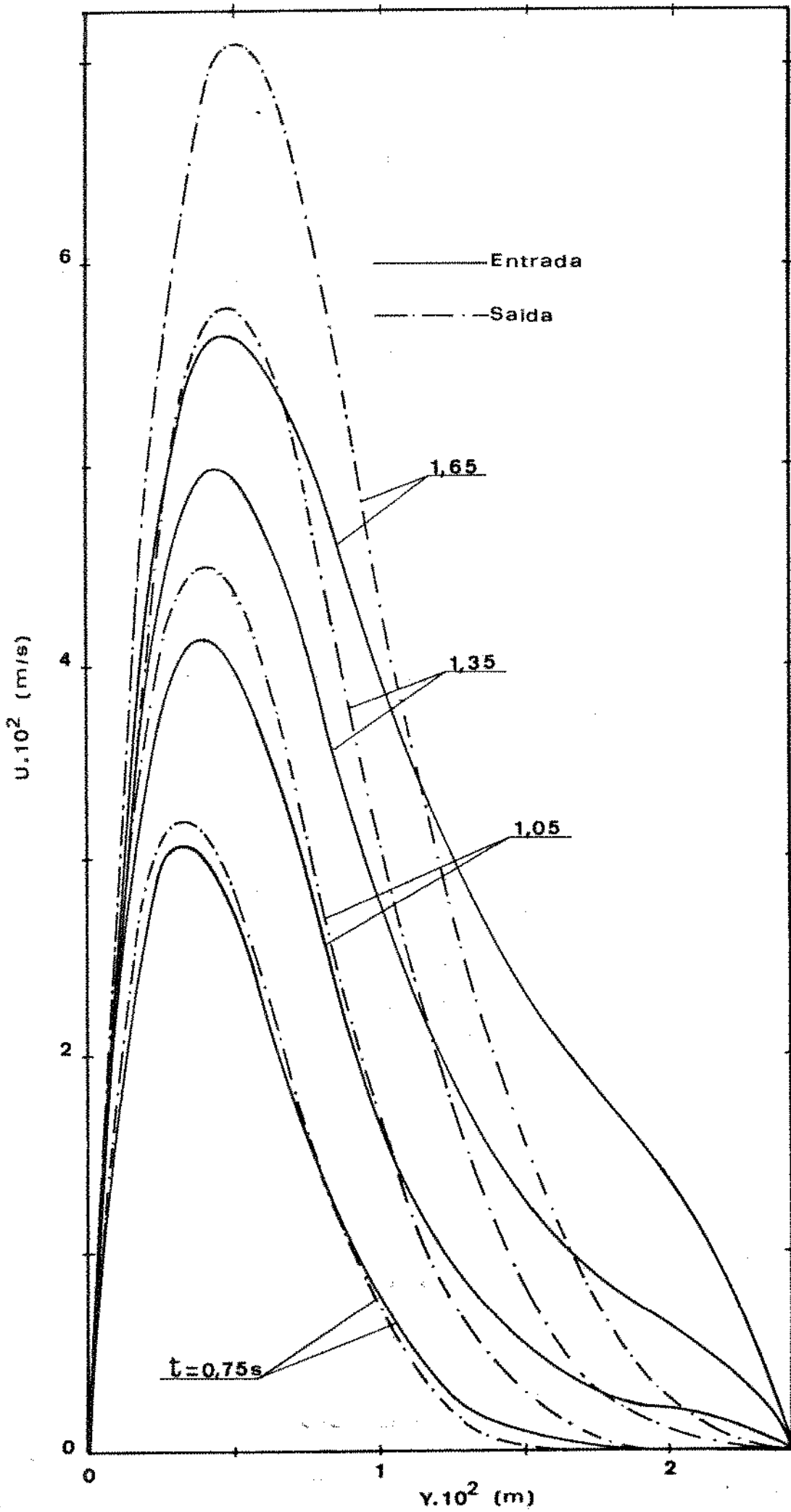


FIG. (15) - Velocidades  $U$ , para o início do transitório, mostrando apenas um pico, para aquecimento assimétrico de  $Rf = 0$ .

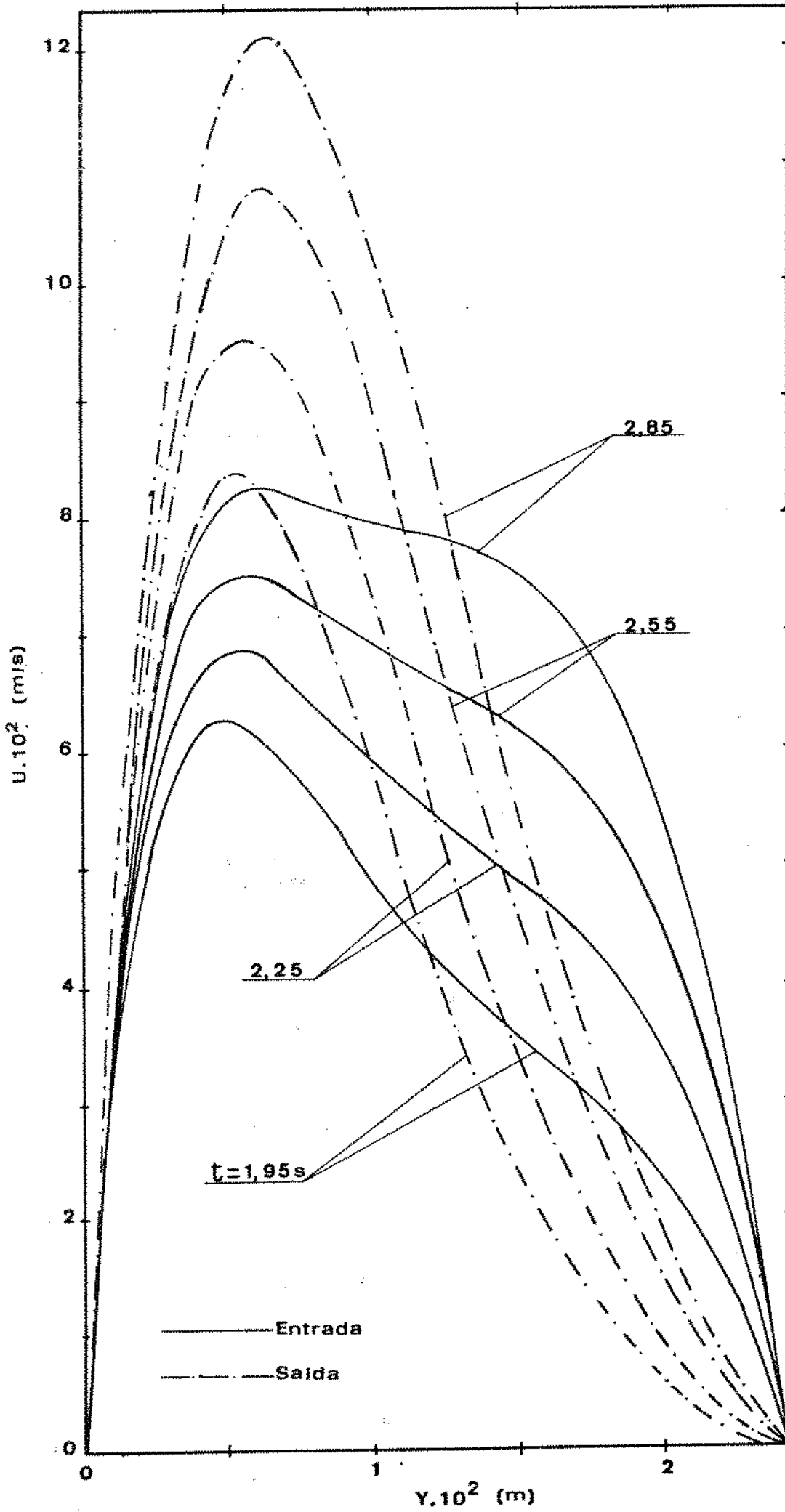


FIG. (16) - Sequência de desenvolvimento de  $U$  para o aquecimento assimétrico de  $RT = 0$ .

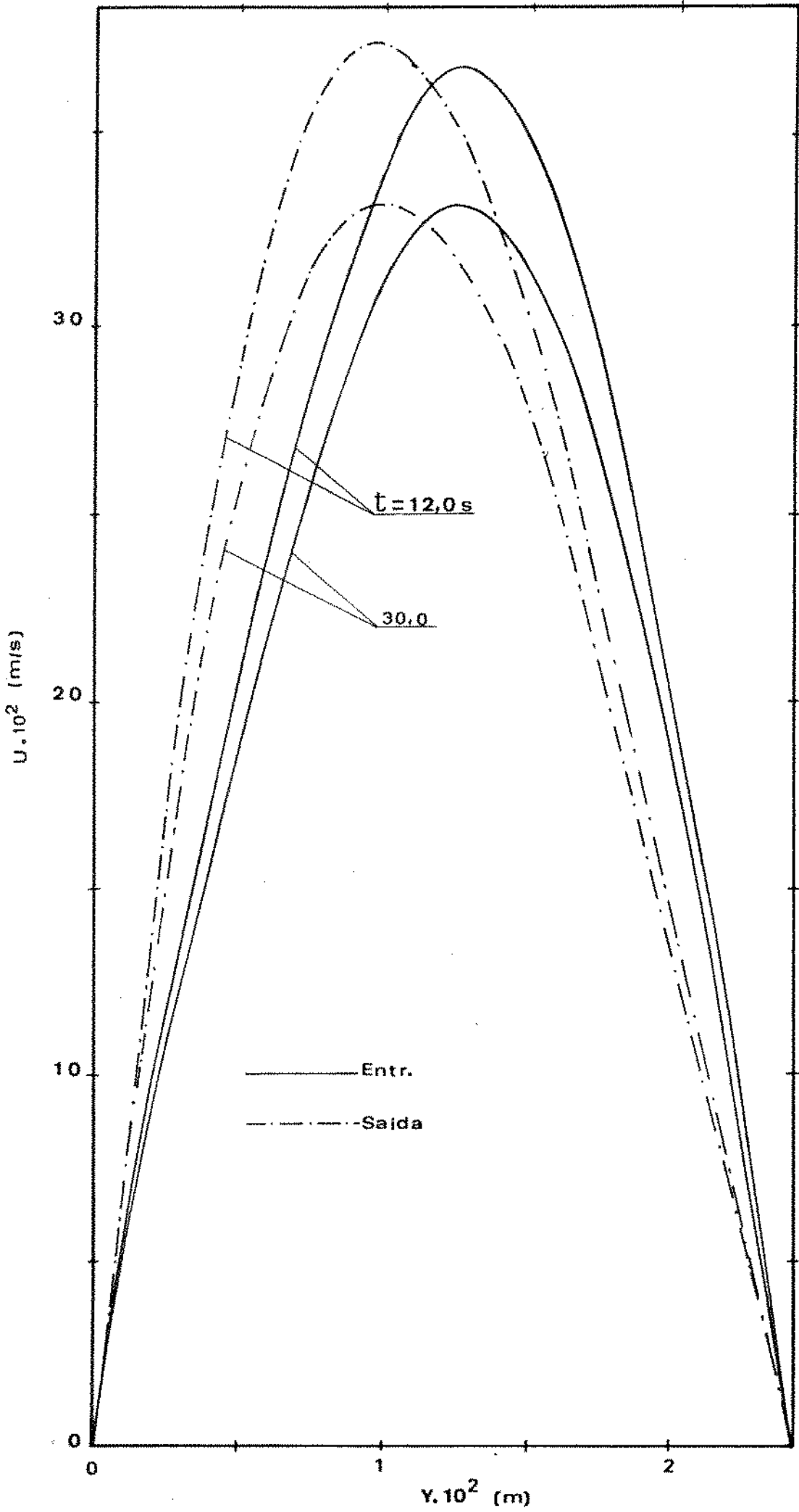


FIG. (17) - Velocidade U, máximo e de regime quase-permanente, para aquecimento assimétrico de  $RT = 0$ .

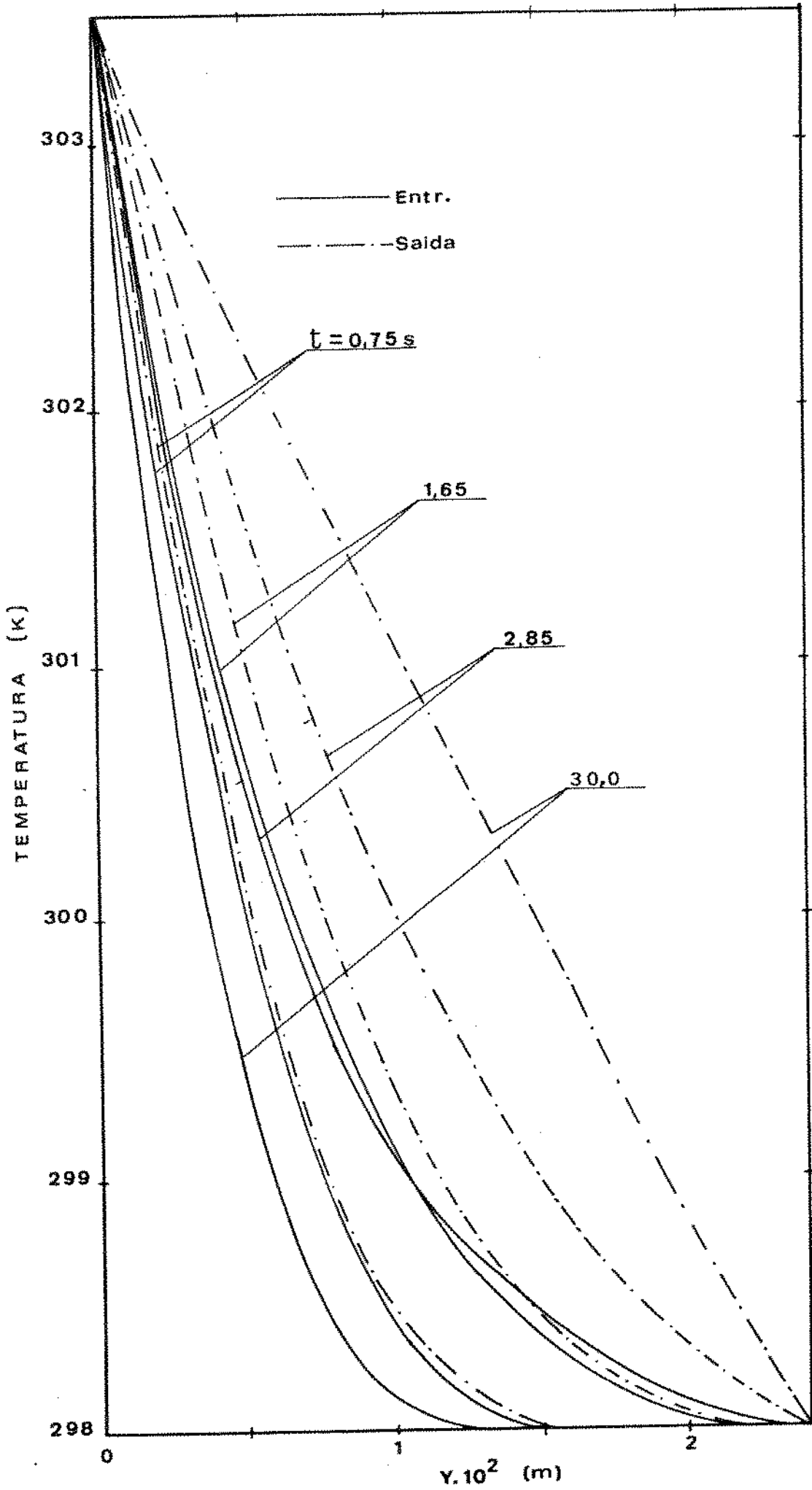


FIG. (18) - Desenvolvimento dos perfis de temperatura para  $Rf=0$ .

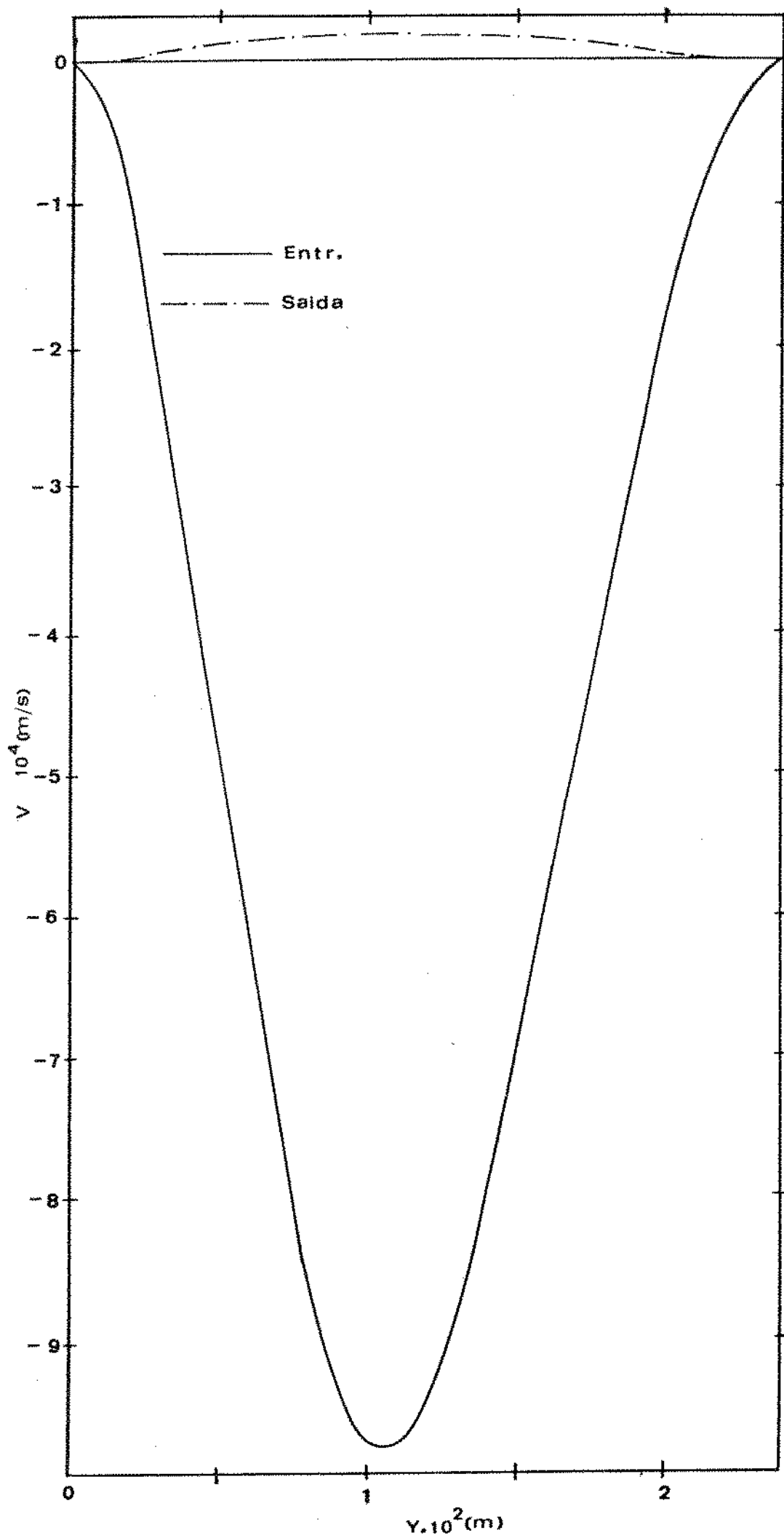


FIG. (19) - Velocidade transversal  $V$  para  $t = 30,0s$ , na condição de aquecimento assimétrico de  $RT = 0$ . Regime quase-permanente.

A Fig. (20) mostra a distribuição do N<sup>o</sup> de Nusselt médio em função do tempo. O número de Nusselt foi calculado, como abaixo:

$$\text{Nu}_J = \frac{q_J b}{k A(T_1 - T_0)} \quad \begin{array}{l} J = 1 \text{ parede quente} \\ J = M \text{ parede fria} \end{array}$$

onde:  $q_J$ : taxa total de transferência através da parede, positiva quando o calor entra no duto.

$k$  : condutividade térmica do fluido

$(T_1 - T_0)$ : Diferença entre a temperatura da parede quente a temperatura do ambiente.

Para todas as condições de aquecimento o número de Nusselt é máximo para o início do transitório, depois cai, passando por um mínimo e cresce ligeiramente se estabilizando.

Para o aquecimento simétrico, onde  $RT = 1$ , o N<sup>o</sup> de Nusselt é igual para as duas paredes. Para aquecimento assimétrico, o n<sup>o</sup> de Nusselt apresenta valores diferentes para as duas paredes, sendo positivo para as duas paredes quando  $RT = 1/2$ , negativo para a parede fria e positivo para a parede quente quando  $RT = 0$ .

Como na expressão de Nusselt dada acima a única variável é a taxa de transferência de calor, pode ser concluído que a taxa líquida (considerando a contribuição das duas paredes) de transferência de calor para  $RT = 1/2$  é maior que para  $RT = 0$  e para  $RT = 1$  é maior que para  $RT = 1/2$ .

Na Fig. (21), o número de Nusselt local, para  $l = 3,0$  m,  $b = 1,05 \times 10^{-2}$  m para o regime quase permanente, é comparado com resultados obtidos por AUNG, FLETCHER & SERNAS (3). São observadas diferenças apenas para a região de entrada, até a altura de 0,6 metros.

Na Fig. (22) pode ser visto o desenvolvimento em função do tempo da velocidade  $U$  para a região central do escoamento  $U(1, \text{Jmédio}, 4)$  e  $U(K, \text{Jmédio}, 4)$ , para as três condições de aquecimento  $RT = 1$ ,  $RT = 1/2$  e  $RT = 0$ . Relacionando os valores de  $U$ , com as condições de aquecimento pode ser notado que os valores de  $U$  crescem em função da razão de aquecimento, a partir de  $RT = 0$  (apenas uma parede aquecida, em relação ao ambiente).

Os picos de velocidades são atingidos primeiramente pa-

ra  $RT = 1$ , em  $t = 9,0s$ , depois para  $RT = 1/2$  em  $t = 10,5s$  e finalmente para  $RT = 0$  em  $t = 12,0s$ . Observando a Fig. (20), pode ser notado que o  $N\bar{v}$  de Nusselt médio é igual e positivo para as duas paredes, quando  $RT = 1$ , resultando uma taxa líquida de transferência de calor maior para essa condição de aquecimento. Com isso o ar é aquecido mais rapidamente, o máximo de velocidade é atingido num tempo mais curto, e os valores da velocidade  $U$  são maiores que para as outras condições de aquecimento. A conclusão é que o tempo necessário para atingir o máximo de velocidade é de certa forma inversamente proporcional à taxa líquida de transferência de calor, e que as velocidades  $U$  são diretamente proporcionais a essa taxa líquida de transferência de calor.

Pode ser observado que a velocidade  $U$ , cresce com o tempo, atinge um valor máximo, passando a seguir por um mínimo, oscilando de modo suave até a estabilização para condição de regime quase permanente. Um comportamento semelhante foi observado por GOLDSTEIN & ECKERT (13) em pesquisa experimental, realizada com placa plana vertical inversa em água e com fluxo de calor constante, e por CALLAHAN & MARNER (14) em trabalho numérico e experimental com placas planas verticais isotérmicas.

A Fig. (23) mostra a descarga de ar através do duto para as várias condições de aquecimento. O comportamento é semelhante ao observado na Fig. (22), como era de se esperar.

A Fig. (24) dá a distribuição de  $P'$  ao longo de  $x$  para os 3 casos de aquecimento considerado. Como  $P'$  é função da velocidade, os valores de  $P'$  (negativos) são proporcionais às velocidades e conseqüentemente às taxas líquidas de transferência de calor.

Na Fig. (25) é feita a comparação de valores obtidos para a descarga através do duto, para duas alturas  $\ell = 3,0 m$  e  $\ell = 4,8$ , para as três condições de aquecimento para o tempo de  $30,0s$ , com resultados apresentados por AUNG, FLETCHER & SERNAS(3).

A comparação mostra uma concordância boa, apresentando um desvio máximo de  $6,7\%$ .

Na Fig. (26) os valores das velocidades  $U$  para regime permanente, perfil totalmente desenvolvido, são comparados com aqueles obtidos através da solução matemática desenvolvida por W. AUNG (1).



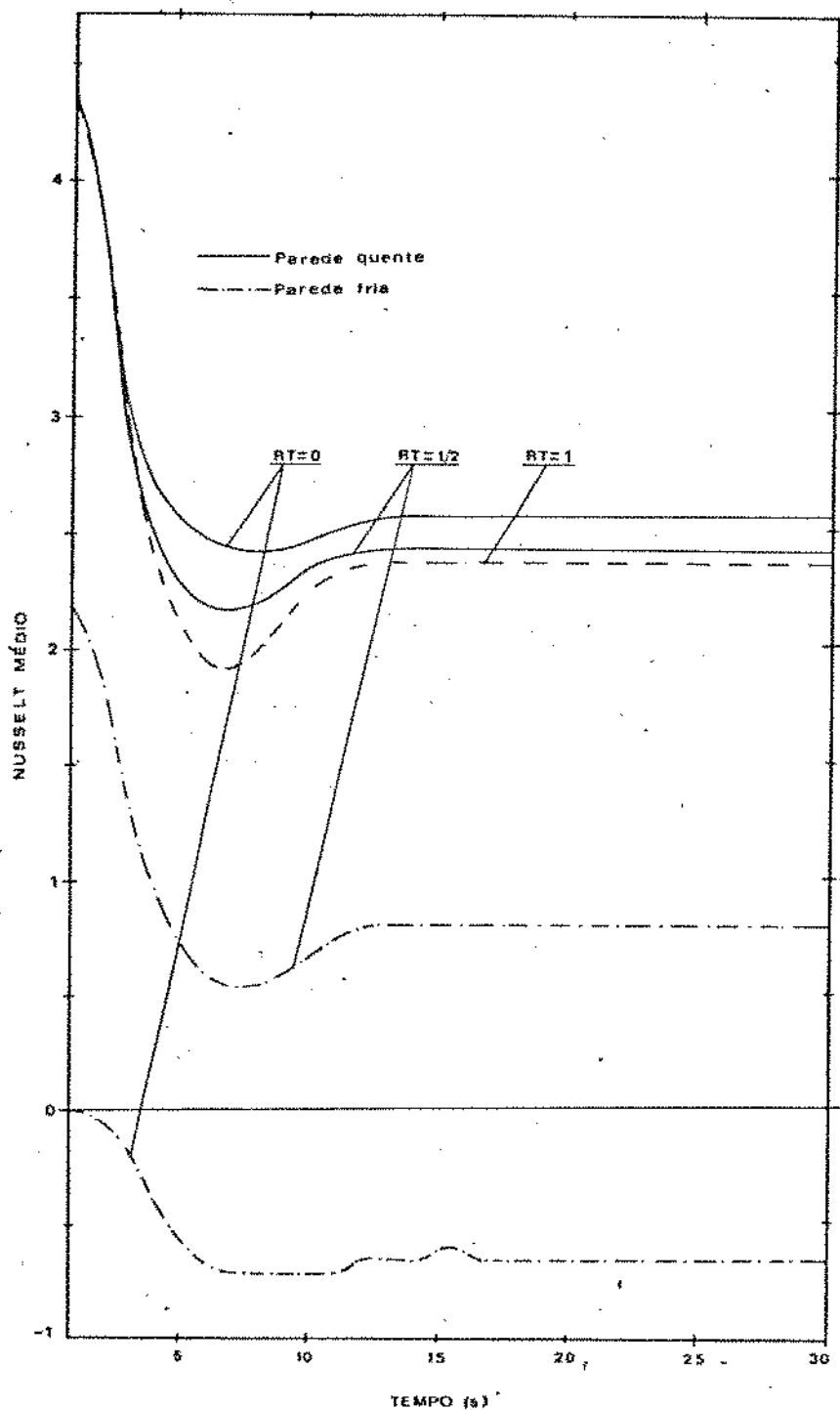


FIG. (20) - Número de Nusselt médio, em função do tempo para as três condições de aquecimento  $RT=0$ ;  $RT = 1/2$  e  $RT = 1$ .

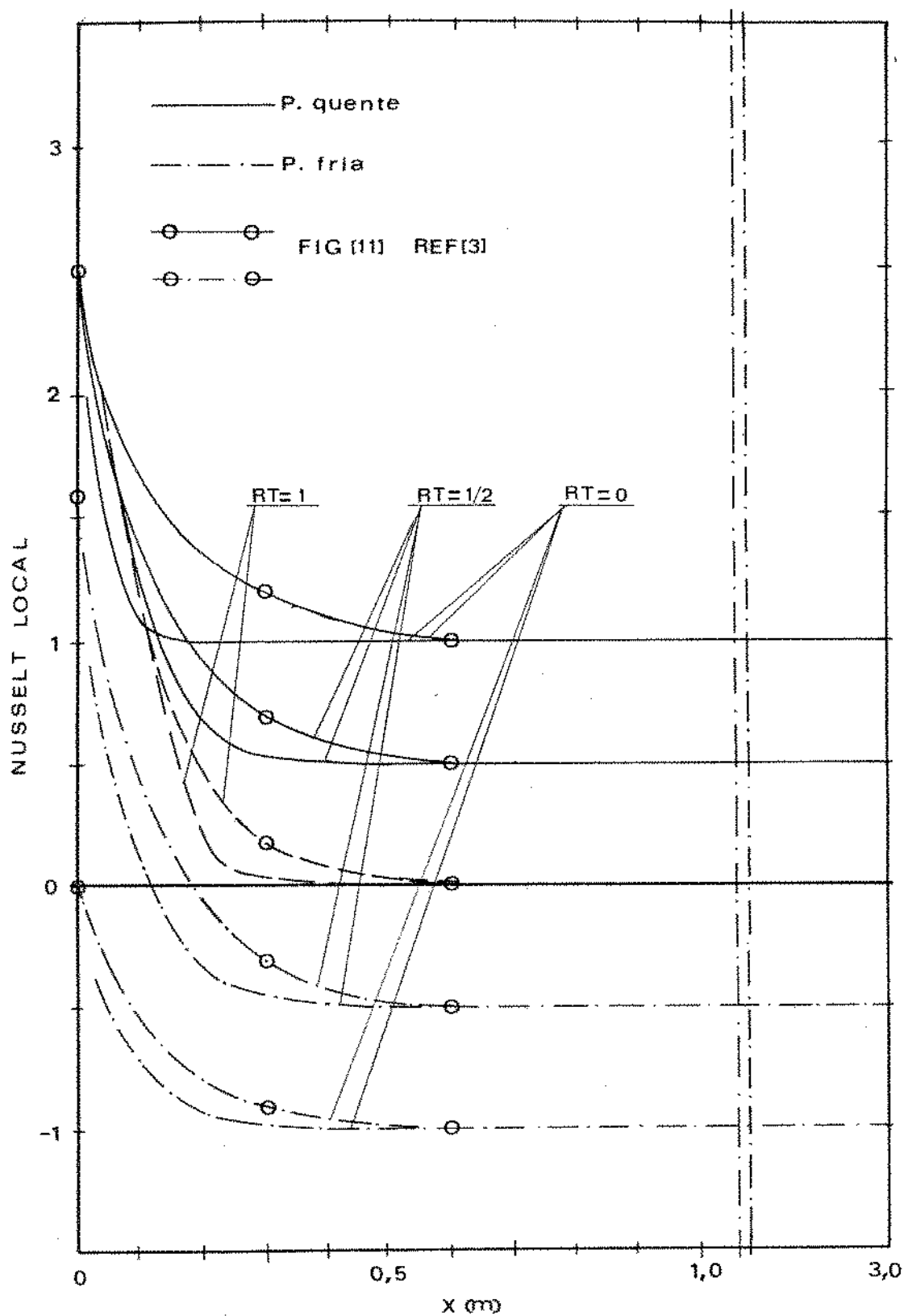


FIG. (21) - Número de Nusselt local para Regime Permanente, escoamento completamente desenvolvido, comparado com resultado dos obtidos por AUNG, FLETCHER & SERNAS (3).

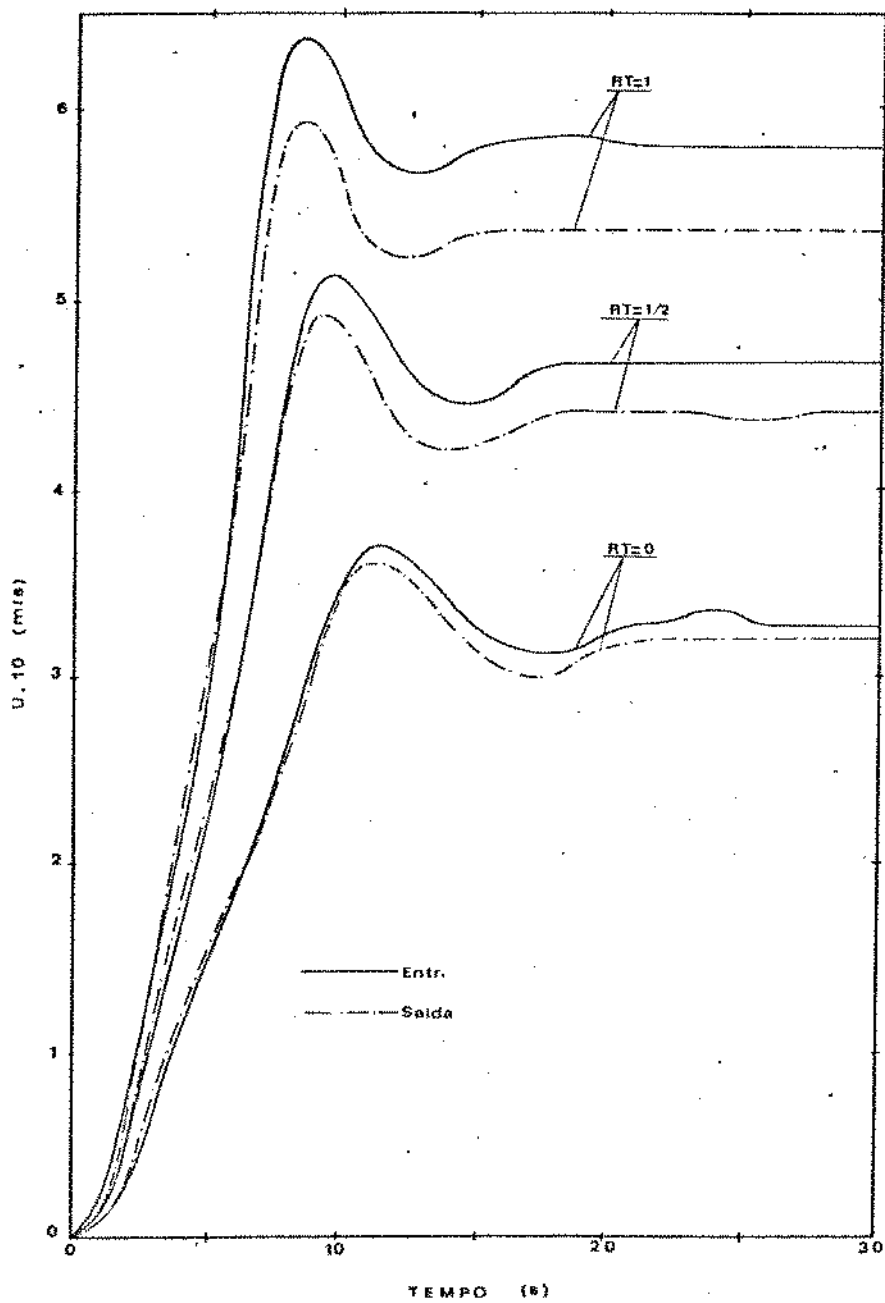


FIG. (22) - Velocidade  $U$ , para entrada e saída, na região central do duto ( $y = b/2$ ), para as três condições de aquecimento.

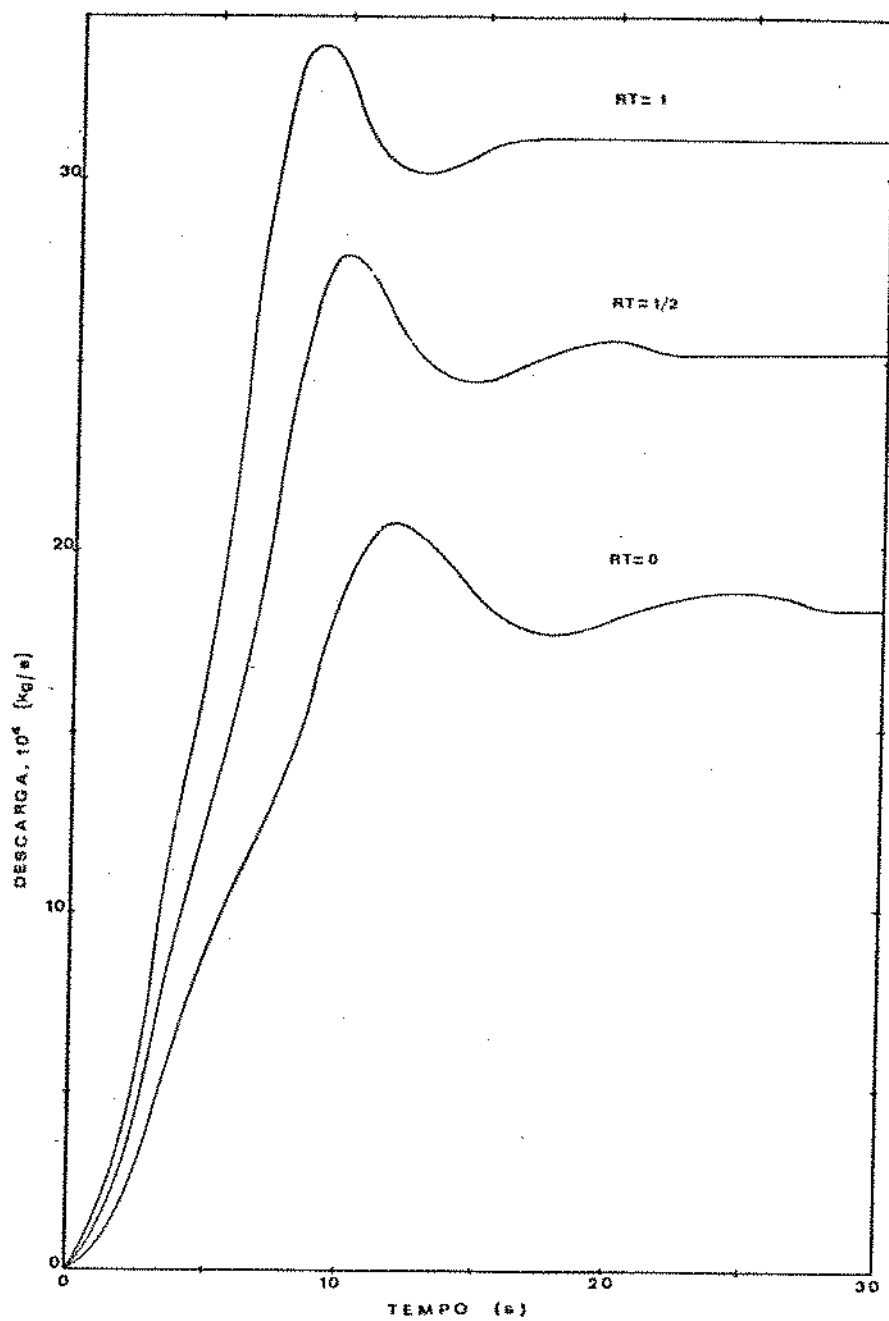


FIG. (23) - Descarga em função do tempo para  $RT = 1$ ;  $RT = 1/2$  e  $RT = 0$ .

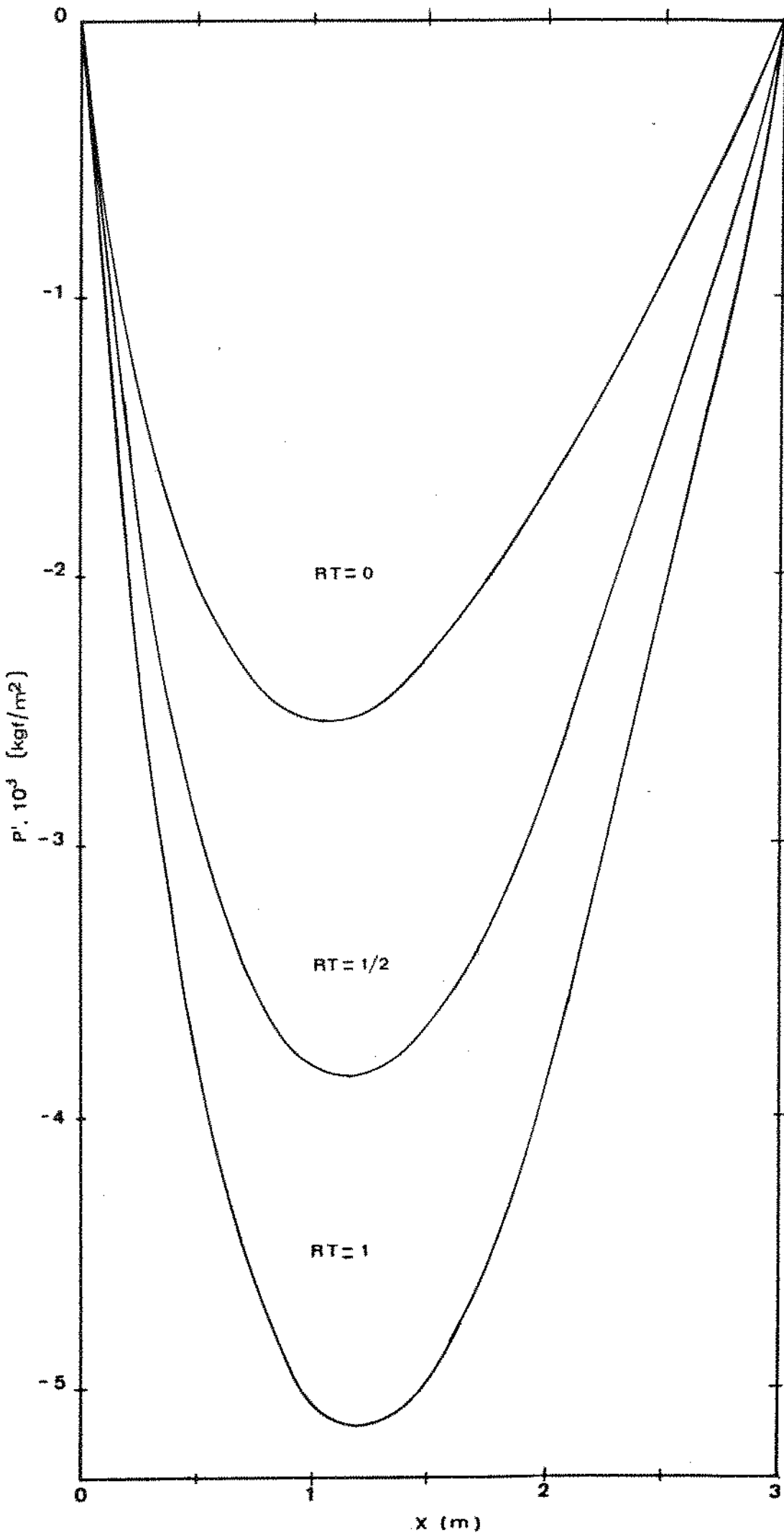


FIG. (24) - Diferença de pressões  $P'$  em função de  $x$  para as três condições de aquecimento.

CONDIÇÕES: $b = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{m}$ $T_0 = 298^\circ\text{K}$ ; $T_1 = 303,5^\circ\text{K}$		PRESENTE SOLUÇÃO [kg/s]	FIG.9 [Ref. (3)] [kg/s]	DESVIO PERCENTUAL
$z = 3,0\text{m}$	RT = 1	0,0068	0,0068	0,0
	RT = 1/2	0,0055	0,0053	3,6
	RT = 0	0,0040	0,0038	5,0
$z = 4,8\text{m}$	RT = 1	0,0077	0,0073	5,2
	RT = 1/2	0,0062	0,0059	4,8
	RT = 0	0,0045	0,0042	6,7

FIG. (25) - Descarga [kg/s] através do duto, para  $t = 30,0\text{s}$ , duas alturas e várias condições de aquecimento, comparados com resultados de regime permanente de AUNG, FLETCHER & SERNAS (3)

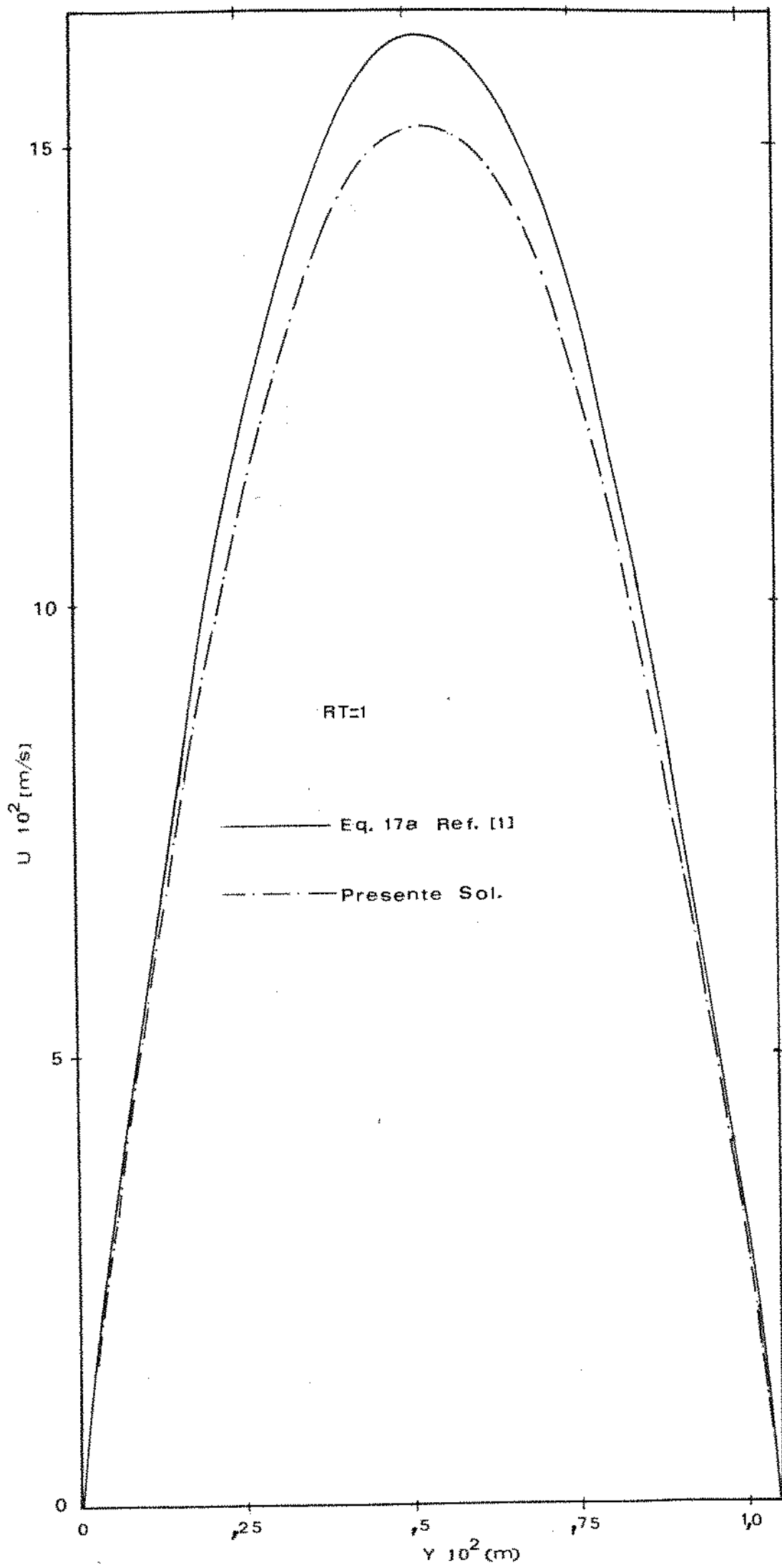


FIG. (26) - Velocidade U para aquecimento simétrico, comparada com a solução dada pela Equação 17a - Ref. (1)

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Foi estudado o escoamento através do duto formado por duas paredes verticais isotérmicas, com aquecimento simétrico e assimétrico, desde um instante inicial ( $t = 0$ ), até praticamente atingir o regime permanente.

A solução foi obtida através das equações da energia e quantidade de movimento, resolvidas por um método implícito de direções alternadas, da equação da continuidade, resolvida de modo direto, e de equações auxiliares resolvidas por um processo iterativo.

O estabelecimento do perfil de velocidades para a entrada foi obtido por aproximação polinomial com correção para satisfazer a equação da continuidade.

São apresentados resultados na forma de gráficos para a velocidade na direção do escoamento, para a velocidade transversal, para temperaturas, diferença de pressões  $P'$ , número de Nusselt local e médio e descarga através do duto.

Não existem resultados comparáveis para a fase transitória, mas na fase de Regime Permanente, os resultados disponíveis foram comparados com os obtidos neste trabalho, apresentando um desvio máximo de 6,7% para a descarga e uma boa concordância para o  $N_0$  de Nusselt local.

As flutuações observadas nos valores da velocidade na direção principal e também em outros parâmetros, antes de ser atingido o regime permanente, foram observados em estudos realizados com placas planas por GOLDSTEIN & ECKERT (13) e CALLAHAN & MARNER (14).

Como pode ser notado, trata-se de um transiente bastante rápido, com influência reduzida nos valores médios do calor transmitido.

Apesar de não ter sido feito comparações para a fase transitória, os resultados obtidos para o regime quase-permanente, conferem uma certa confiabilidade ao método.



NOMENCLATURA

- u, U - Velocidade na direção do escoamento (m/s)
- v, V - Velocidade transversal (m/s)
- g - Aceleração da gravidade
- P - Pressão dentro do duto
- P<sub>o</sub> - Pressão hidrostática fora do duto
- P' = P - P<sub>o</sub>
- R - Constante do ar
- T - Temperatura do ar dentro do duto
- T<sub>o</sub> - Temperatura do ambiente
- W - Velocidade média do escoamento
- A - Área de escoamento por unidade de profundidade
- Pe - Perímetro
- f - Fator de atrito
- Re - Número de Reynolds
- Rh - Raio hidráulico
- b - Espaçamento entre as placas
- ℓ - Altura das placas
- h - Entalpia específica
- $\dot{m}$  - Descarga
- E - Energia total
- t - Tempo
- $\dot{Q}$  - Taxa de transferência de calor
- $\dot{W}$  - Potência
- C<sub>po</sub> - Calor Específico a pressão constante
- C<sub>vo</sub> - Calor Específico a volume constante
- gc - Constante de conversão
- RT - Razão adimensional de temperaturas

Símbolos Gregos

- $\nu$  - Viscosidade cinemática do fluido
- $\rho$  - Densidade do fluido
- $\alpha$  - Difusividade térmica
- $\rho_0$  - Densidade do fluido à temperatura T<sub>o</sub>
- $\tau_0$  - Tensão de cisalhamento na parede
- $\mu$  - Viscosidade dinâmica

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. AUNG - FULLY DEVELOPED LAMINAR FREE CONVECTION BETWEEN VERTICAL PLATES HEATED ASYMMETRICALLY.  
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp 883-895  
Pergamon Press 1972.
- [2] J.R. BODOIA and J.F. OSTERLE - THE DEVELOPMENT OF FREE CONVECTION BETWEEN HEATED VERTICAL PLATES  
Transactions of the ASME  
February - 1962.
- [3] W. AUNG L.S. FLETCHER and V. SERVAS - DEVELOPING LAMINAR FREE CONVECTION BETWEEN VERTICAL FLAT PLATES WITH ASYMMETRIC HEATING.  
Int. J. Heat Mass Transfer - Vol. 15, pp 2293-2308  
Pergamon Press 1972.
- [4] C.F. KETTLEBOROUGH - TRANSIENT LAMINAR FREE CONVECTION BETWEEN HEATED VERTICAL PLATES INCLUDING ENTRANCE EFFECTS.  
Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 15 pp 883-896  
Pergamon Press 1972.
- [5] D.W. PEACEMAN and H.H. RACHFORD, JR. - THE NUMERICAL SOLUTION OF PARABOLIC AND ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS  
J. Soc. Industr. Appl. Math. Vol. 3, Nº 1, March 1955.
- [6] F.B. HILDEBRAND - INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALISES  
Mc-GrawHill Book Co.
- [7] R.S. BRODKEY - THE PHENOMENA OF FLUID MOTIONS  
Addison - Wesley Publishing Co.
- [8] I.H. SHAMES - MECHANICS OF FLUIDS  
McGraw-Hill Book Co. Inc.

- [9] DAUGERTY & FRANZINI - FLUID MECHANICS FOR ENGINEERING APPLICATIONS  
McGraw-Hill Book Co. Inc.
- [10] G.J. VAN WYLEN & R.E. SONTAG - FUNDAMENTOS DA TERMODINÂMICA CLÁSSICA - 2a. EDIÇÃO  
Editora Edgard Blücher Ltda.
- [11] B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES - APPLIED NUMERICAL METHODS  
John Wiley & Sons. Inc.
- [12] FRANK KREITH - PRINCÍPIOS DA TRANSMISSÃO DE CALOR  
Editora Edgard Blucher Ltda.
- [13] R.J. GOLDSTEIN and E.R.G. ECKERT - THE STEADY AND TRANSIENT FREE CONVECTION BOUNDARY LAYER ON A UNIFORMLY HEATED VERTICAL PLATE  
Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 1, pp 208-218  
Pergamon Press 1960.
- [14] G.D. CALLAHAN and W.J. MARNER - TRANSIENT FREE CONVECTION WITH MASS TRANSFER ON AN ISOTHERMAL VERTICAL FLAT PLATE  
Int. J. Heat Mass Transfer. Vol 19, pp 165-174.  
Pergamon Press 1976.

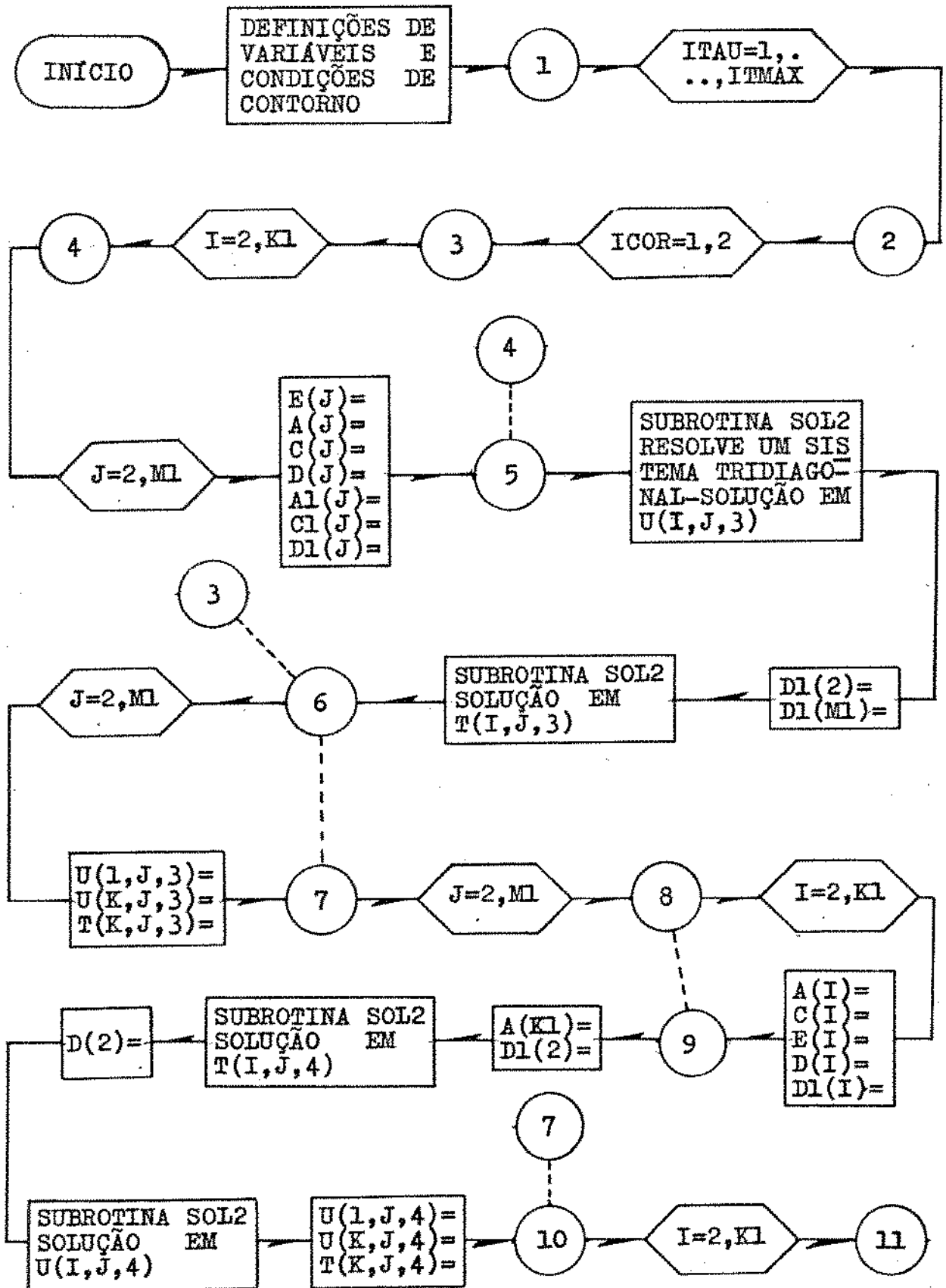
## APÊNDICE

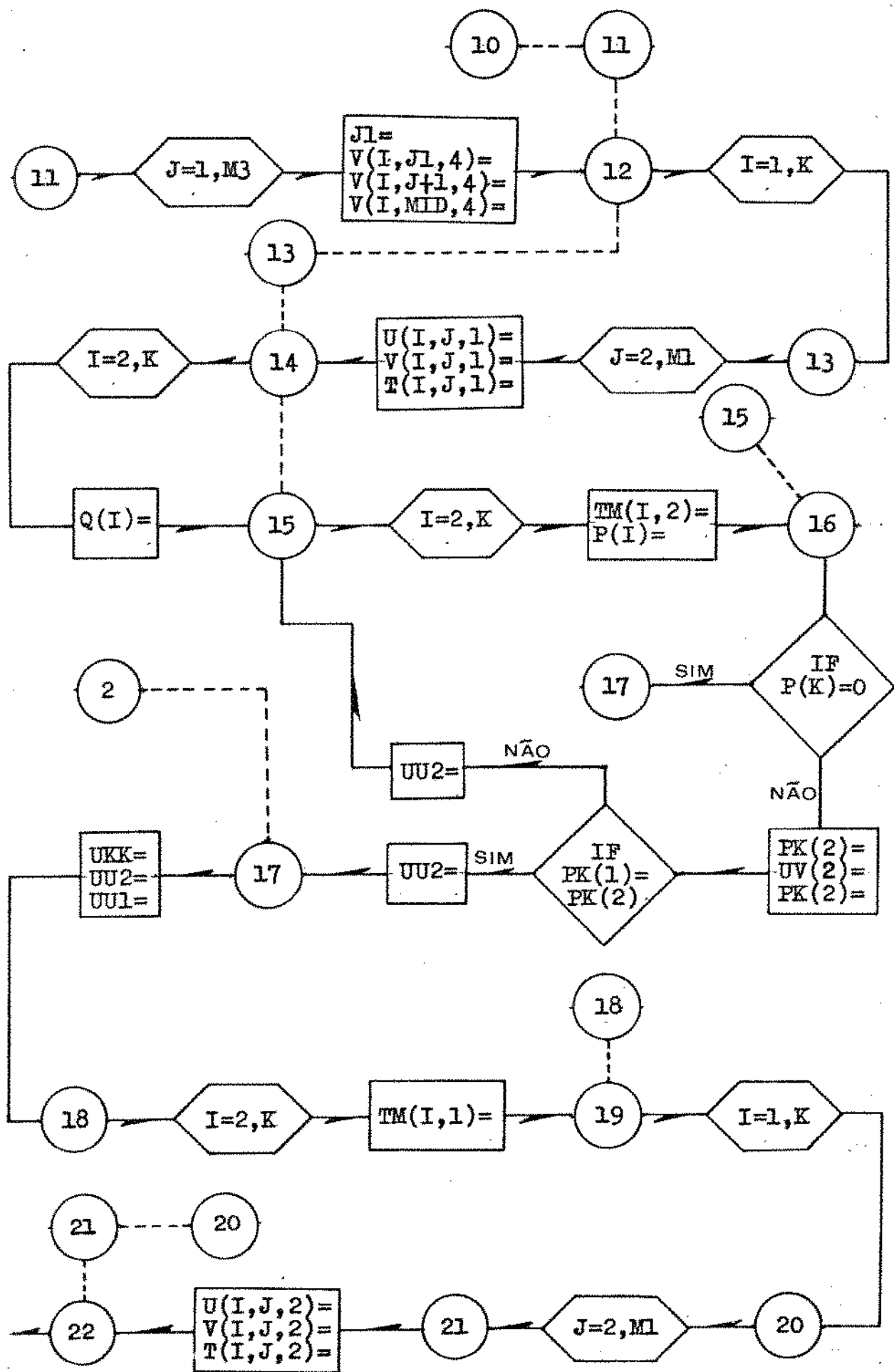
No Apêndice estão o diagrama de Blocos e a listagem do programa principal e subrotinas utilizadas para obtenção dos resultados relatados.

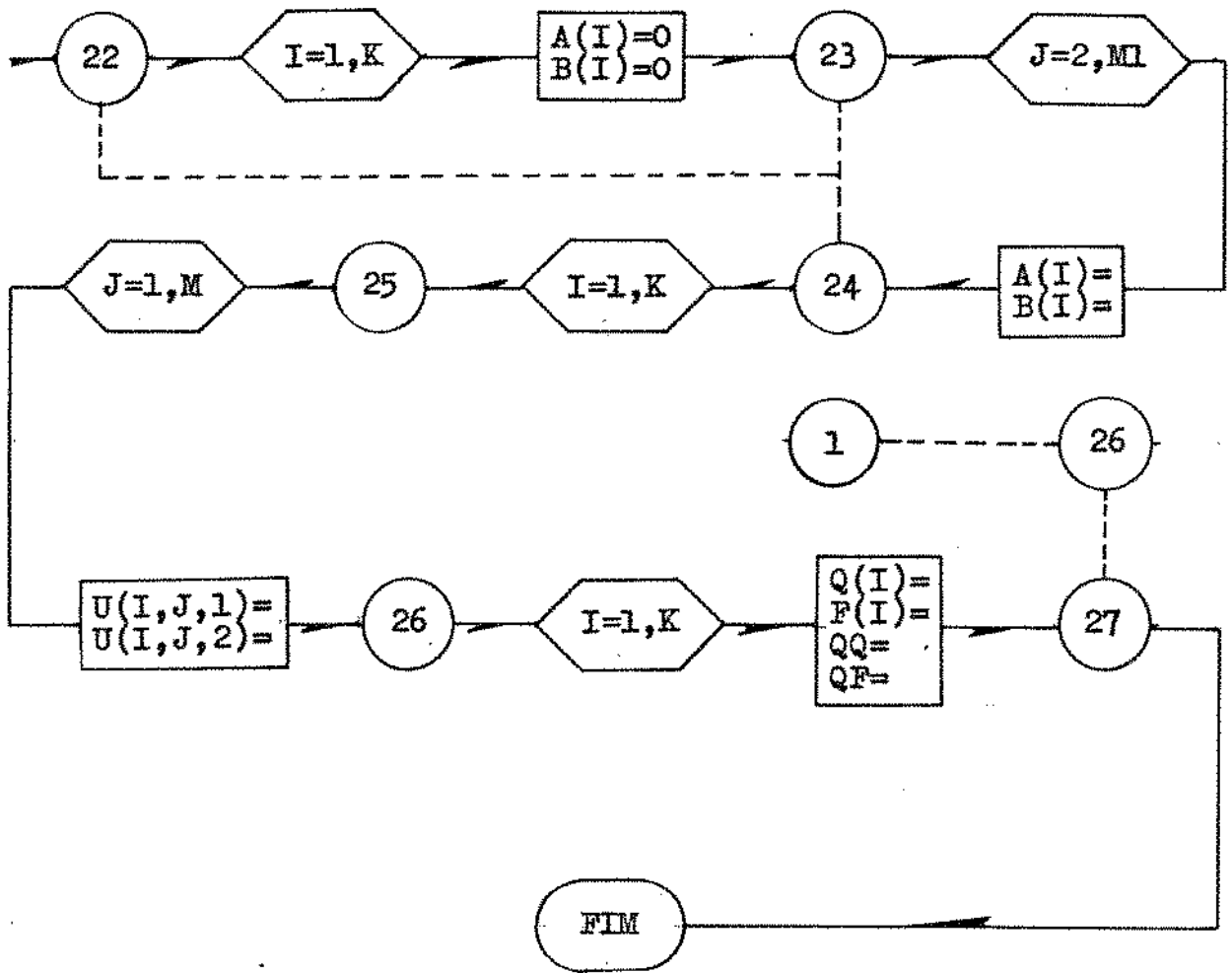
A execução do programa, como está listado, fornece os resultados na forma numérica e em gráficos. Somente os valores da velocidade de regime permanente para perfil totalmente desenvolvido (velocidade de AUNG), não é fornecida na forma numérica.

O programa principal é auto-explicativo, nas partes essenciais. Todos os vetores que iniciam por PL ... ( ) estão relacionados com a subrotina de plotagem PLOT. Essa subrotina exige que os valores colocados nos DIMENSION sejam exatamente iguais aos efetivamente utilizados na Subrotina PLOT.

DIAGRAMA DE BLOCOS SIMPLIFICADO, PARA O PROGRAMA PRINCIPAL







::26:: CONDIC0ES DE CONTORNO PARA ENTRADA E SAIDA  
APROXIMACAO POLINOMIAL, UTILIZANDO VALORES DO MIOLO  
TEMPERATURA NA ENTRADA CONSTANTE E = T0

METODO UTILIZADO \*\* PEACEMAN E RACHFORD \*\* DIRECOES ALTERNADAS

DIMENSION A(31),B(31),C(31),D(31),E(31),A1(31),P(31),C1(31),D1(31),  
TEMP(31),T(31,31,5),V(31,31,4),U(31,31,6),PLU(279),  
PLT(279),PLP(124),PLB(155),PLA(155),  
TM(31,2),Q(31),F(31),UV(3),PK(3),PLTC(280),  
PLM(160),PLN(280),PLVC(280),PNL(210),PLUNG(93)  
DATA DTAU/.015/,RO/.07323/,CPO/.240/,CVO/.171/,Y/.07864/  
M/31/,CA/.4175E-05/,RNI/.1707E-03/,X/10./,G/32.1739/,  
ITMAX/10/,IESC/25/,K/31/,T1/547./,T2/537./,ZERO/.1E-06/  
RJ/778.2/,TO/537./

M1=M-1  
M2=M-2  
M3=M1/2-1  
NID=M3+2  
K1=K-1  
K2=K-2  
DX=X/K1  
DY=Y/M1

IMAX\*\*PARAMETRO DE CONTROLE PARA PLOTAR EM FUNCAO DO TEMPO  
AFETA OS DIMENSION'S PLN,PLN E PLVC(2,3,3\*IMAX) RESPECT.  
IMAX=4\*ITMAX  
JK=0

DO 1 N1=1,5,2  
CONSTANTES PARA CALCULA DA VELOCIDADE DE AUNG.  
RT=(T2-T0)/(T1-T0)  
CAUNG=G\*(T1-T0)/T0\*Y\*\*2/RNI  
JK=JK+1

IM1=N1\*IMAX  
IM2=IM1+IMAX  
MN1=JK\*IMAX  
MN2=JK\*K  
NN1=N1\*K1  
NN2=NN1+K1  
L1=1  
L2=2  
ICONT=0  
IGRAF=IESC  
IFIM=IESC+70  
PP=1.

CONTADOR DE TEMPO  
ITEMP=0  
TEMPO=0.

CONDIC0ES DE CONTORNO GERAIS, POSICOES 2,3 E 4  
SIGNIFICADO DOS INDICES  
1\*VALORES MEDIOS PARA O PROG.BASE      2\*VALORES INICIAIS  
3\*VALORES DO FINAL PRIM.PASSO      4\*FINAL SEG.PASSO

::X::ALTURA DA PAREDE  
::Y::ESPACO ENTRE AS DUAS PAREDES  
::U::VELOCIDADE NA DIRECAO DO ESCOAMENTO\*\*X\*\*  
::V::VELOCIDADE TRANSVERSAL,DIRECAO \*Y\*  
::T0::TEMPERATURA DO AR AMBIENTE  
::T1::TEMPERATURA DA PAREDE QUENTE  
::T2::TEMPERATURA DA PAREDE FRIA

VARIACAO DA DENSIDADE COM A TEMPERATURA RO=39.685/T  
CONSTANTES UTILIZADAS NO CALCULO DA VAZAO EM MASSA  
CVM=39.685\*DY  
DO 10 IT=1,5



```

DO 20 I=1,K
DO 20 J=1,M
T(I,J,IT)=T0
U(I,J,IT)=0
V(I,J,IT)=0
DO 30 I=1,K
T(I,M,IT)=T2
T(I,1,IT)=T1
CONTINUE
EA=RNI/(DY*DY)
EB=CA/(RO*CPO*DY*DY)
COEFICIENTE PARA A PRESSAO
CPR=G/(2*RO*DX)
EC=1./DTAU
ED1=EC-2.*EA
ED2=EC-2.*EB
EF=2*DX
EG=2*DY
COEFICIENTES CONSTANTES PARA CALCULO DE U E T - PRIM.PASSO
BJ=EC+2*EA
B1J=EC+2*EB
VALOR INICIAL PARA A TEMPERATURA E PRESSAO
DO 40 I=1,K
TM(I,2)=T0
TM(I,1)=T0
P(I)=0.
COEFICIENTES PARA CALCULO DA PRESSAO UNIDIMENSIONAL
UU2=.01
UU1=0.
UV(1)=.02
UV(2)=.02
VISCOSIDADE DINAMICA
RNI=RO*RNI
CONSTANTES PARA AS EQUACOES DE ENERGIA E MOMENTUM
Z1E=2*DTAU*CPO/DX
Z2E=G*2*DTAU
Z3E=RJ*G
Z1M=RO*DX
Z2M=Z1M/Z2E
Z3M=8*DX*RMI/(G*Y*Y)
COEFICIENTE MULTIPLICADOR PARA O FLUXO DE CALOR
CG=(DTAU*CA)/(6*Y*DY*RO)
::PLM(ITEMP) ::::: VAZAO EM MASSA
::PLN(ITEMP)::: NUSELT MEDIO
::PLVC(ITEMP)::: U NA ENTRADA E SAIDA((I=1 E K**J=16)
::PML(I)::: NUSELT LOCAL
::PLU(J):: VETOR DE PLOTAGEM U POR Y
::PLV(J):: VETOR DE PLOTAGEM V PR Y
::PLT(J):: VETOR DE PLOTAGEM T POR Y
::PLP(I):: VETOR DE PLOTAGEM P POR X
DO 50 J=1,M
PLA(J)=(O-1)*DY
PLB(J)=PLA(J)
PLU(J)=PLA(J)
PLONG(J)=PLU(J)
PLT(J)=PLU(J)
DO 56 I=2,K
II=I-1
PML(II)=(I-1)*DX
DO 60 I=1,K

```

```

60      PLP(I)=(I-1)*DX
      SIMBOLOS E CONSTANTES PARA CALCULO DO NUMERO DE NUSSELT
      Q(I),F(I):: GRADIENTE DE TEMP, NAS PAREDES QUENTE E FRIA
      QNUS::NUMERO DE NUSSELT RELATIVO A T1 E T0
      FNUS::NUMERO DE NUSSELT RELATIVO A T0 E T2
      CNUS :: CONSTANTE PARA CALCULO DO NUM.DE NUSELT
      CNUS=-Y/(12*DY*(T1-T0))
      CNUM :: CONSTANTE PARA NUSSELT MEDIO
      CNUM=CNUS*DX/X
      DO 70 I=1,ITMAX
      IP3=0
      DO 440 IP=1,7,2
      TYPE 3000,TEMPO,T2
3000    FORMAT(5X,ZF12.2)
      IP1=IP
      IP2=IP+1
      ITEMP=ITEMP+1
      IP3=IP-IP3
      DO 80 I*=1,IESC
      ICONT=ICONT+1

C
C
C
C
      PRIMEIRO PASSO NO TEMPO

      CALCULO DOS COEFICIENTES E TERMOS INDEPENDENTES
      DO 90 ICOR=1,2
      DO 100 I=2,K1
      DO 110 J=2,M1
      E(J)=V(I,J,1)/EG
      A(J)=-E(J)+EA
      C(J)=(E(J)-EA)
      D(J)= U(I,J,1)/EF*(U(I-1,J,2)-U(I+1,J,2))
1      +EC*U(I,J,2)+G*(T(I,J,1)/T0-1)-CPR*(P(I+1)-P(I-1))
      A1(J)=-E(J)+EB
      C1(J)=(E(J)-EB)
110    D1(J)=EC*T(I,J,2)+U(I,J,1)/EF*(T(I-1,J,2)-T(I+1,J,2))
      CALL SOL2(2,M1,A,BJ,C,D,TEMP)
      DO 120 J=2,M1
120    U(I,J,3)=TEMP(J)
      D1(2)=D1(2)-A1(2)*T1
      D1(M1)=D1(M1)-C1(M1)*T2
      CALL SOL2(2,M1,A1,B1J,C1,D1,TEMP)
      DO 130 J=2,M1
130    T(I,J,3)=TEMP(J)
100    CONTINUE
      DO 140 J=2,M1
      U(1,J,3)=4*(U(2,J,3)+U(4,J,3))-6*U(3,J,3)-U(5,J,3)
      U(K,J,3)=4*(U(K1,J,3)+U(K-3,J,3))-6*U(K-2,J,3)-U(K-4,J,3)
100    T(K,J,3)=4*(T(K1,J,3)+T(K-3,J,3))-6*T(K-2,J,3)-T(K-4,J,3)
C
      SEGUNDO PASSO NO TEMPO
      DO 150 J=2,M1
      DO 160 I=2,K1
      A(I)=-U(I,J,1)/EF
      C(I)=-A(I)
      E(I)=V(I,J,1)/EG
      D(I)=(EA-E(I))*U(I,J+1,3)+ED1*U(I,J,3)+(EA+E(I))*U(I,J-1,3)+
1      G*(T(I,J,1)/T0-1)-CPR*(P(I+1)-P(I-1))
100    D1(I)=(EB-E(I))*T(I,J+1,3)+ED2*T(I,J,3)+(EB+E(I))*T(I,J-1,3)
      A(K1)=A(K1)+C(K1)
      D1(2)=D1(2)-A(2)*T0
      CALL SOL2(2,K1,A,EC,C,D1,TEMP)

```

```

DO 170 I=2,K1
170 T(I,J,4)=TEMP(I)
D(2)=D(2)-A(2)*O(1,J,3)
CALL SOL2(2,K1,A,EC,C,D,TEMP)
DO 180 I=2,K1
180 U(I,J,4)=TEMP(I)
U(1,J,4)=4*(U(2,J,4)+U(4,J,4))-6*U(3,J,4)-U(5,J,4)
U(K,J,4)=4*(U(K1,J,4)+U(K-3,J,4))-6*U(K-2,J,4)-U(K-4,J,4)
150 T(K,J,4)=4*(T(K1,J,4)+T(K-3,J,4))-6*T(K-2,J,4)-T(K-4,J,4)
DO 190 I=2,K1
DO 190 J=1,M3
J1=M-J
V(I,J1,4)=V(I,J1+1,4)+DY/(4*DX)*(U(I+1,J1,4)+U(I+1,J1+1,4)-
1 U(I-1,J1,4)-U(I-1,J1+1,4))
V(I,J+1,4)=V(I,J,4)+DY/(4*DX)*(U(I-1,J,4)+U(I-1,J+1,4)-
1 U(I+1,J,4)-U(I+1,J+1,4))
190 V(I,MID,4)=.5625*(V(I,MID-1,4)+V(I,MID+1,4))-.0625*(V(I,
1 MID-3,4)+V(I,MID+3,4))
C VALORES MEDIOS PARA VELOCIDADE E TEMPERATURA
DO 200 I=1,K
DO 200 J=2,M1
U(I,J,1)=.5*(U(I,J,4)+U(I,J,2))
V(I,J,1)=.5*(V(I,J,4)+V(I,J,2))
200 T(I,J,1)=.5*(T(I,J,4)+T(I,J,2))
C CÁLCULO DOS FLUXOS DE CALOR, PARA CÁLCULO DA PRESSÃO
DO 210 I=2,K
210 Q(I)=CG*(25*(T(I,1,4)+T(I,M,4))-48*(T(I,2,4)+T(I,M1,4))
1 +36*(T(I,3,4)+T(I,M2,4))-16*(T(I,4,4)+T(I,M-3,4))+3*(T(I,5,4)
2 +T(I,M-4,4)))
270 DO 220 I=2,K
TM(I,2)=(Q(I)+Z1E*UU2*TM(I-1,2)+CVO*TM(I,1)-UU2*(UU2-UU1+Z2E)/
1 Z3E)/(CVO+Z1E*UU2)
220 P(I)=P(I-1)+Z1M*(TM(I,2)/TO-1)-Z2M*(UU2-UU1)-Z3M*UU2
IF(ABS(P(K)).LE.ZER0)GOTO 240
PK(2)=PK(1)
UV(2)=UV(1)
PK(1)=P(K)
UV(1)=UU2
IF(PK(1).EQ.PK(2))GOTO 250
UU2=UV(1)-PK(1)*(UV(1)-UV(2))/(PK(1)-PK(2))
GO TO 270
250 UU2=UV(2)
240 CONTINUE
20 CONTINUE
UKK=UU2
UU2=2*UU2-UU1
UU1=UKK
280 DO 260 I=2,K
TM(I,1)=TM(I,2)
TEMPO=TEMPO+2*DTAU
DO 420 I=1,K
DO 420 J=2,M1
U(I,J,2)=U(I,J,4)
V(I,J,2)=V(I,J,4)
420 T(I,J,2)=T(I,J,4)
DO 425 J=2,M1
425 T(I,J,2)=TO
C CÁLCULO DAS INTEGRAIS DA VAZÃO EM MASSA
DO 500 I=2,K
A(I)=0.

```

```

B(I)=0.
DO 505 J=2,M1
A(I)=A(I)+U(I,J,1)/T(I,J,1)
05 B(I)=B(I)+U(I,J,2)/T(I,J,2)
A(I)=A(I)*CVM
00 B(I)=B(I)*CVM
CORRECAO DAS VELOCIDADES PARA CORRECAO DO PERFIL
O VALOR DA INTEGRAL PARA I=15 FOI TOMADO COMO REFERENCIA
DO 510 I=2,K
DO 510 J=2,M1
U(I,J,1)=U(I,J,1)*A(15)/A(I)
510 U(I,J,2)=U(I,J,2)*B(15)/B(I)
IF(IGRAF.GT.IFIM) GO TO 80
IF(IGRAF.NE.ICONT) GO TO 80
WRITE(30,840)TEMPO,((U(I,J,2),J=1,M1),I=1,K,30),((T(I,J,2),
1 J=1,M1),I=2,K,29)
DO 451 J=1,M
U(L1,J,5)=U(1,J,2)
U(L2,J,5)=U(K,J,2)
451 T(L1,J,5)=T(2,J,2)
T(L2,J,5)=T(K,J,2)
L1=L1+2
L2=L1+1
IGRAF=IGRAF+10
80 CONTINUE
C CALCULO DE NUSELT LOCAL E MEDIO
C NUSELT POSITIVO QUANDO CALOR ENTRA NO DUTO
QQ=0.
QF=0.
DO 1000 I=1,K
Q(I)=-((25*T(I,1,2)-48*T(I,2,2)+36*T(I,3,2)-16*T(I,4,2)
1 +3*T(I,5,2))
F(I)=-((25*T(I,M,2)-48*T(I,M1,2)+36*T(I,M2,2)-16*T(I,M-3,2)
1 +3*T(I,M-4,2))
QQ=QQ+Q(I)
1000 QF=QF+F(I)
QQ=QQ-.5*(Q(1)+Q(K))
QF=QF-.5*(F(1)+F(K))
QNUS=CNUM*QQ
FNUS=CNUM*QF
PLN(ITEMP)=TEMPO
PLN(ITEMP+IM1)=QNUS
PLN(ITEMP+IM2)=FNUS
PLM(ITEMP)=TEMPO
PLM(ITEMP+MM1)=B(15)
PLIC(ITEMP)=TEMPO
PLTC(ITEMP+IM1)=T(2,16,2)
PLTC(ITEMP+IM2)=T(K,16,2)
PLVC(ITEMP)=TEMPO
PLVC(ITEMP+IM1)=U(1,16,2)
PLVC(ITEMP+IM2)=U(K,16,2)
IF(PP.EQ.4.)GO TO 42
IF(ICONI.GT.IFIM)GO TO 42
IXX=ITEMP+IM1-1
IF(U(1,16,2).GT.PLVC(IXX)) GO TO 42
WRITE(30,840)TEMPO,((U(I,J,2),J=1,M1),I=1,K,30),((T(I,J,2),
1 J=1,M1),I=2,K,29)
DO 43 J=1,M
U(L1,J,5)=U(1,J,2)
U(L2,J,5)=U(K,J,2)

```

```

T(L1,J,5)=T(2,J,2)
43 T(L2,J,5)=T(K,J,2)
L1=L1+2
L2=L1+1
PP=4.
42 CONTINUE
40 CONTINUE
70 CONTINUE
WRITE(30,840)TEMPO,((U(I,J,2),J=1,M1),I=1,K,30),
1 ((T(I,J,2),J=1,M1),I=2,K,29)
DO 990 J=1,M
U(L1,J,5)=U(1,J,2)
U(L2,J,5)=U(K,J,2)
T(L1,J,5)=T(2,J,2)
990 T(L2,J,5)=T(K,J,2)
DO 1010 I=1,8
T(I,M,5)=T0
DO 1010 J=1,M
PLU(J+I*M)=U(I,J,5)
1010 PLT(J+I*M)=T(I,J,5)
CÁLCULO DA VELOCIDADE DE AUNG
DO 2000 J=1,M
CY=(J-1)*DY/Y
C1(J)=CAUNG*(RT-1)*CY**3/6-RT*CY*CY/2+(2*RT+1)*CY/6)
PLUNG(J+M)=C1(J)
2000 PLUNG(J+2*M)=U(K,J,4)
CALL PLOT(9,PLUNG,31,3,31,0,27)
CALL PLOT(1,PLU,31,9,31,0,27)
CALL PLOT(2,PLT,31,9,31,0,28)
DO 1020 I=9,16
I1=I-8
T(I,M,5)=T0
DO 1020 J=1,M
PLU(J+I1*M)=U(I,J,5)
1020 PLT(J+I1*M)=T(I,J,5)
CALL PLOT(1,PLU,31,9,31,0,27)
CALL PLOT(2,PLT,31,9,31,0,28)
DO 1030 I=17,20
I1=I-16
T(I,M,5)=T0
DO 1030 J=1,M
PLA(J+I1*M)=U(I,J,5)
1030 PLB(J+I1*M)=T(I,J,5)
DO 55 I=1,K
55 PLP(I+MN2)=P(I)
DO 444 I=2,K
I1=I-1
PNL(I1+NN1)=CNUS*G(I)
444 PNL(I1+NN2)=CNUS*F(I)
I2=I2+5.
CALL PLOT(1,PLA,31,5,31,0,27)
CALL PLOT(2,PLB,31,5,31,0,28)
1 CONTINUE
WRITE(30,830)(PLVC(I),I=41,280),(PLN(I),I=41,280),
1 (PLTC(I),I=41,280),
2 (PLM(I),I=41,160),(PNL(I),I=31,210),(PLP(I),I=32,124)
CALL PLOT(3,PLM,40,4,40,0,29)
CALL PLOT(4,PLVC,40,7,40,0,29)
CALL PLOT(5,PLN,40,7,40,0,29)
CALL PLOT(6,PLP,31,4,31,0,29)

```

```

CALL PLOT(7,PNL,30,7,30,0,29)
CALL PLOT(8,PLTC,40,7,40,0,29)
830  FORMAT(///,40X,'VELOCIDADE CENTRAL NA ENTRADA E NA SAIDA',//,
1     (3(2(4(' ',10F11.6//))//)),40X,'NUMERO DE NUSSELT MEDIO',//,
2     (3(2(4(' ',10F11.6//))//)),40X,'TEMPERATURA CENTRAL',//,
2     (3(2(4(' ',10F11.6//))//)),40X,'VAZAO EM MASSA*LBM/SEG',//,
3     (3(4(' ',10F11.6//))//),40X,'NUMERO DE NUSSELT LOCAL',//,
4     (3(2(3(' ',10F11.6//))//)),40X,'DIFERENCA DE PRESSAO',//,
5     (10(' ',10F11.6//)))
840  FORMAT(//,40X,'TEMPO::SEGUNDOS = ',F10.5,///,40X,
1     'VELOCIDADE NA ENTRADA E NA SAIDA',//,(2(3(' ',10F11.6//)
2     )),40X,'TEMPERATURA NA ENTRADA E NA SAIDA',//,(2(3(' ',
3     10F11.5//))//))
STOP
END

```

```

SUBROUTINE PLOT(ND, PL, N, M, NL, NS, IFI)
ND=NUMERO DO GRAFICO
N=NUMERO DE PONTOS
M=NUMERO DE CURVAS A TRACAR + 1
PL=VETOR DE PLOTAGEM COM N*M COMPONENTES
NS=B SE AS ABSCISSAS ESTIVEREM EM ORDEN CRESCENTE
NL=NUMERO DE LINHAS USADAS COMO FUNDO DE ESCALA PARA AS ABSCISSAS
(RECOMENDA SE TOMAR NL = N)
IFI=NUMERO DA FILE A SER IMPRESSO

DIMENSION OUT(101), YPR(11), ANG(9), PL(1)
DATA BLANK(1), ANG(1), ANG(2), ANG(3), ANG(4), ANG(5), ANG(6), ANG(7), ANG(8), ANG(9)
1 FORMAT(1H1, 6X, 7H CHART , 12, /)
2 FORMAT(1H , F11.4, 5X, 10A1)
3 FORMAT(1H )
7 FORMAT(1H , 15X, /)
8 FORMAT(1H8, 5X, 11F10.4)
NLL=NL
IF(NS)16, 16, 16
CLASSIFICADOR DAS ABSCISSAS POR ORDEN CRESCENTE
10 DO 10 I=1, N
DO 14 J=1, N
IF(PL(I)-PL(J))14, 14, 11
11 L=I-N
LL=J-N
MUDANC# COMPLETA B(1).....B(9)
DO 12 K=1, M
L=L+N
LL=LL+N
F=PL(L)
PL(L)=PL(LL)
12 PL(LL)=F
14 CONTINUE
13 CONTINUE
TESTE NLL
16 IF(NLL)20, 18, 20
18 NLL=50.
*****IMPRESSO DO TITULO
20 WRITE(IFI, 1)ND
*****FATOR DE ESCALA DAS ABSCISSAS*****
SCAL=(PL(N)-PL(1))/FLOAT(NLL-1)
*****YMIN, YMAX, FATOR DE ESCALA DAS ORDENADAS****
N1=N+1
YMIN=PL(N1)
YMAX=YMIN
N2=N+N
DO 40 J=N1, N2
IF(PL(J)-YMIN)20, 25, 25
25 IF(PL(J)-YMAX)40, 40, 30
25 YMIN=PL(J)
DO TO 40
30 YMAX=PL(J)
40 CONTINUE
***** FATOR DE ESCALA DAS ORDENADAS
SCAL=(YMAX-YMIN)/100.
DO=PL(1)
L=1
***** NUMERO DE CURVAS A PLOTAR *****
M=M-1
IF(SCAL.NE.0) DO TO 40
WRITE(1, 41)N, YMAX
41 SIGNIFIC. 11, CONSTATANTE LE CURVA = 1, FILE 40

```

```

RETURN
42 I=1
43 F=I-1
NPR=NB+F*NSCAL
IF(PL(L)-NPR)50, 50, 70
50 DD 55 IX=1, 101
55 OUT(IX)=BLANK
DO 60 J=1, NY
LL=L+J+N
***** NUMERO DE COLONIA -- ORDENAR ARRAY *****
JP=(PL(LL)-YMIN)/VSCAL)+1.
OUT(JP)=RNG(J)
60 CONTINUE
WRITE(IFI, 2)NPR, (OUT(IZ), IZ=1, 101)
L=L+1
DO TO 60
70 WRITE(IFI, 3)
80 I=I+1
IF(I-NLL)40, 84, 86
84 KFR=PL(K)
DO TO 80
86 WRITE(IFI, 7)
VPR(L)=YMIN
***** IMPRESSAO DA ESCALA DAS ORDENACOES *****
DO 90 KN=1, 9
90 VPR(KN+1)=VPR(KN)+VSCAL*10.
VPR(L)=VMAX
WRITE(IFI, 8)(VPR(K), K=1, 11)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SDL2 ** RESOLVE UM SISTEMA DE EQUACOES LINEARES
SIMULTANEAS, SENDO A MATRIZ DOS COEFICIENTES TRIANGULAR DE
COEFICIENTES DA SUBDIAGONAL, DIAGONAL E SUPERDIAGONAL ESTAR
GUARDADAS EM A, B, C, ... OS TERMOS INDEPENDENTES EM *O* E O VETOR
SOLUCAO EM X(1), ..., X(L)

```

```

SUBROUTINE SDL2(J, L, A, B, C, D, V)
DIMENSION A(L), C(L), D(L), X(L), BETR(65), BARR(65)
BETR(J) = B
BARR(J) = D(J)/BETR(J)
K = J+1
DO 1 I = K, L
BETR(I) = B-(A(I)*C(I-1))/BETR(I-1)
BARR(I) = (D(I)-A(I)*BARR(I-1))/BETR(I)
X(I) = BARR(I)
L1 = L-I
DO 2 K = 1, L1
I = L-K
X(I) = BARR(I)-C(I)*X(I+1)/BETR(I)
RETURN
END

```