



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Faculdade de Engenharia Mecânica

**Barbara Zaparoli Cunha**

**Efeitos das Condições de Alimentação de Óleo  
de Mancais Lubrificados no Comportamento  
Dinâmico do Rotor**

CAMPINAS

2019

**Barbara Zaparoli Cunha**

# **Efeitos das Condições de Alimentação de Óleo de Mancais Lubrificados no Comportamento Dinâmico do Rotor**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestra em Engenharia Mecânica, na área de Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Gregory Bregion Daniel

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA  
ALUNA BARBARA ZAPAROLI CUNHA, E  
ORIENTADA PELO PROF. DR. GREGORY  
BREGION DANIEL.

CAMPINAS

2019



Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

C914e Cunha, Barbara Zaparoli, 1995-  
Efeitos das condições de alimentação de óleo de mancais lubrificados no comportamento dinâmico do rotor / Barbara Zaparoli Cunha. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Gregory Bregion Daniel.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores - Dinâmica. 2. Mancais. 3. Lubrificação. 4. Cavitação. I. Daniel, Gregory Bregion. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Effects of oil supply conditions of the hydrodynamic journal bearing on rotor dynamic behaviour

**Palavras-chave em inglês:**

Rotors - Dynamics

Bearings

Lubrication

Cavitation

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestra em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Gregory Bregion Daniel [Orientador]

Tiago Henrique Machado

Aldemir Aparecido Cavalini Junior

**Data de defesa:** 08-11-2019

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-0671-0041>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5831457752787326>

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INTEGRADOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

## **Efeitos das Condições de Alimentação de Óleo de Mancais Lubrificados no Comportamento Dinâmico do Rotor**

Autora: Barbara Zaparoli Cunha

Orientador: Prof. Dr. Gregory Bregion Daniel

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

---

Prof. Dr. Gregory Bregion Daniel, Presidente  
DSI/FEM/UNICAMP

---

Prof. Dr. Tiago Henrique Machado  
DSI/FEM/UNICAMP

---

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Junior  
FEMEC/UFU

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 08 de Novembro de 2019.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho à minha mãe, Juliane, minha eterna força.

## Agradecimentos

Aos meus pais, Antônio e Juliane, não só pelo amparo e amor que nunca me faltou, mas também por todos valores transmitidos, por serem exemplo e referência para minha vida e por sempre terem acreditado em mim e terem me ensinado a fazê-lo. Vocês são e sempre serão parte de todas minhas conquistas.

À minha irmã, por ser minha companheira e meu refúgio de todos momentos.

À toda minha família, os Zaparoli e os Cunha, por serem a base e o reflexo de quem eu sou e por me darem a certeza que sempre posso contar com vocês.

Ao meu orientador e grande amigo, Gregory, pela parceria, confiança, compreensão, incentivo e por tantos conhecimentos compartilhados.

Aos amigos da Unicamp, às *roommates* do Apt303 e à família do Convento, por todo crescimento pelo qual passamos juntos, pelo apoio desmedido e por terem me proporcionado tantos momentos felizes, tornando essa uma jornada memorável.

Aos eternos amigos de Passos, por toda força, carinho e motivação que só vocês sabem dar, mesmo distantes.

A todos meus colegas do LAMAR, por terem colaborado com essa conquista em todos aspectos, compartilhando conhecimentos, experiências, cafés, os momentos difíceis e os momentos de alegria.

A Unicamp e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela formação acadêmica e por todas oportunidades que encontrei aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar a influência das condições de lubrificação de mancais hidrodinâmicos no comportamento estático e dinâmico do rotor. À vista disso, desenvolveu-se um modelo para solução da equação de lubrificação de Reynolds com conservação de massa e condição de cavitação baseado na abordagem  $p$ - $\theta$ . O modelo implicitamente considera a condição de cavitação de acordo com a teoria de Jakobsson-Floberg-Olsson, localizando as fronteiras de ruptura e reformação do filme de maneira automática, e considera as condições de entrada de lubrificante como condições de contorno aplicadas à região do *groove*. Para a implementação numérica do modelo foi utilizado o Método dos Volumes Finitos, por se tratar de um esquema localmente conservativo e que, portanto, favorece a representação correta dos fluxos. A solução do problema fornece o campo de pressão e de fração volumétrica ao longo de todo mancal, a partir dos quais é possível determinar as forças hidrodinâmicas e a posição de equilíbrio estático do eixo no mancal. Além disso, considerando que as forças hidrodinâmicas têm comportamento linear em torno da posição de equilíbrio, calcula-se os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do mancal. Por fim, a análise dinâmica do sistema é realizada aplicando o Método dos Elementos Finitos para modelar a equação de movimento do conjunto rotor-mancais. Essa análise permite definir as velocidades críticas, o limiar de instabilidade e a resposta dinâmica no domínio do tempo. Deste modo, é possível impor diferentes condições de entrada de lubrificante e observar seus efeitos na resposta estática e dinâmica do rotor. Diante disso, foram realizadas análises da influência da posição de entrada de óleo no mancal, da influência da pressão de alimentação e, por fim, da influência da vazão de entrada considerando cenários de falta de lubrificação (*starvation*) e com lubrificação plena (*flooded*). Os resultados mostraram que a condição de lubrificação é decisiva no desempenho do mancal, podendo mudar consideravelmente a capacidade de carga, os coeficientes equivalentes e, inclusive, o comportamento estável do sistema. É notável a relação do desempenho do mancal principalmente com a posição do *groove* e a evidente transição do comportamento entre lubrificação em *starvation* e *flooded*.

**Palavras Chave:** Condições de lubrificação; Starvation; Dinâmica de rotores; Mancais Hidrodinâmicos; Coeficientes Dinâmicos; Modelo de cavitação com conservação de massa;

## ABSTRACT

This work aims to analyze the influence of lubricant supply conditions of hydrodynamic bearings on the static and dynamic behavior of the rotor. Therefore, a mass-conservative cavitation model based on  $p$ - $\theta$  formulation of the Reynolds equation is developed. This approach implicitly considers Jakobsson-Floberg-Olsson cavitation conditions, leading to the automatic localization of the film reformation and rupture boundaries, and also considers the lubricant supply conditions as boundary conditions applied to the groove region. The Finite Volume Method is applied to numerically implement the model because it is a locally conservative scheme and therefore aids in the accurate representation of the flows. The problem solution provides the pressure and liquid fraction fields throughout the bearing domain, from which it is possible to determine the hydrodynamic forces and the equilibrium position of the shaft in the bearing. In addition, considering that the hydrodynamic forces have a linear behavior close to the equilibrium position, the equivalent stiffness and damping coefficients of the bearing are calculated. Finally, the dynamic analysis of the system is carried out by applying the Finite Element Method to model the equation of motion of the rotor-bearing assembly. This analysis allows to define the critical velocities, the instability threshold and the dynamic response in time domain of the rotating system. Thus, it is possible to apply different lubricant supply conditions and investigate their effects on the static and dynamic rotor response. Therefore, analyses of the influence of the oil inlet position on the bearing, the influence of the feed pressure and, finally, the influence of the inlet flow considering starvation and flooded bearing conditions were performed. The results showed that the lubricant supply condition is decisive in the performance of the bearing because it can considerably change the load capacity, the equivalent coefficients and even the instability threshold of the rotor system. There is a remarkable relationship between bearing performance and groove position as well as an evident behavior transition between starvation and flooded lubrication.

**Key Word:** Supply Conditions; Starvation; Rotordynamics; Hydrodynamic Bearings; Dynamic Coefficients; Mass-conservative cavitation model.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Bronzinas com falha prematura devido à insuficiência ou diluição do óleo lubrificante. Fonte: Mahle, 2016. ....                                                                                         | 20 |
| Figura 2: Mancal com falhas de <i>wiping</i> devido à perda temporária de lubrificação. a) Metade carregada do mancal. b-) Detalhe da falha. Fonte: McCloskey, 1995.....                                          | 21 |
| Figura 3: Esboço de um conjunto de mancal hidrodinâmico com dois grooves. Adaptado de Brito (2009). ....                                                                                                          | 32 |
| Figura 4: Esquema mostrando algumas medidas do conjunto mancal e munhão ou eixo. Adaptado de Pedreira e Weber (2006). ....                                                                                        | 33 |
| Figura 5: Representação de um mancal hidrodinâmico, mostrando uma hipótese em detalhe (a) e uma visão geral (b). Adaptado de Norton (2013). ....                                                                  | 34 |
| Figura 6: Representação das forças e deformações em um fluxo newtoniano. ....                                                                                                                                     | 36 |
| Figura 7: Distribuição ilustrativa da pressão hidrodinâmica pelo modelo de lubrificação de Reynolds com diferentes condições de cavitação. Adaptado de Profito e Zachariadis (2015). ....                         | 39 |
| Figura 8: Vista aberta do plano $xz$ de um mancal ilustrando uma condição de lubrificação insuficiente ( <i>starvation</i> ).....                                                                                 | 45 |
| Figura 9: Ilustração do filme lubrificante representado como um conjunto de molas e amortecedores. ....                                                                                                           | 48 |
| Figura 10: Representação do domínio discretizado para solução pelo método dos volumes finitos. Adaptado de Daniel (2012). ....                                                                                    | 51 |
| Figura 11: Balanço de fluxo para o volume de controle P. ....                                                                                                                                                     | 54 |
| Figura 12: Fluxograma do processo iterativo da formulação $p-\theta$ . ....                                                                                                                                       | 55 |
| Figura 13: Balanço de fluxos no <i>groove</i> , modelado como um volume de controle.....                                                                                                                          | 57 |
| Figura 14: Representação do lócus de um mancal hidrodinâmico. ....                                                                                                                                                | 58 |
| Figura 15: Exemplo da configuração de um sistema rotativo. ....                                                                                                                                                   | 61 |
| Figura 16: Esquema da montagem de uma matriz global do sistema rotativo. Adaptado de Daniel (2012). ....                                                                                                          | 63 |
| Figura 17: Solução geral de EDO linear composta por uma componente exponencial (a) e uma senoidal (b), resultando na função resposta na forma de uma senoidal amortecida (c). Fonte: Chapra e Canale (2015). .... | 65 |

|                                                                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 18: Distribuições de temperatura do lubrificante encontradas por Brito (2009) e indicação das viscosidades máxima e mínima. Adaptado de Brito (2009). ....                                                      | 67 |
| Figura 19: Resultado do lócus do eixo variando a carga específica e a pressão de entrada ( $Pf$ :50, 100, 150, 200, 250, e 350kPa), conforme apresentado por Brito (2009). ....                                        | 68 |
| Figura 20: Lócus do eixo simulado com $Pf$ variando em 50, 100, 150, 200, 250, e 350kPa: (a) $\mu_{min} = 0,0111Pa.s$ ; (b) $\mu_{med} = 0,02Pa.s$ ; (c) $\mu_{max} = 0,0293Pa.s$ . ....                               | 69 |
| Figura 21: Distribuições de pressão obtidas com $Ws=1,1MPa$ e $Pf=100kPa$ variando o comprimento do <i>groove</i> entre $b/L=0,875$ e $b/L=0,3$ . Adaptado de Brito (2009). ....                                       | 70 |
| Figura 22: Distribuições de pressão com o modelo $p-\theta$ , $Ws=1,1Mpa$ , $Pf=100kPa$ e $\mu=0,0111Pa.s$ variando o comprimento do <i>groove</i> em $b/L=0,875$ e $b/L=0,3$ . ....                                   | 70 |
| Figura 23: Regiões com filme completo e filme cavitado obtidas com $Ws=1,1MPa$ e $Pf=100kPa$ variando o comprimento do <i>groove</i> entre $b/L=0,875$ e $b/L=0,3$ . Adaptado de Brito (2009). ....                    | 71 |
| Figura 24: Regiões com filme completo e filme cavitado obtidas pela abordagem $p-\theta$ com $Ws=1,1Mpa$ , $Pf=100kPa$ e $\mu=0,0111Pa.s$ variando o comprimento do <i>groove</i> entre $b/L=0,875$ e $b/L=0,3$ . .... | 71 |
| Figura 25: Teste de seleção de malha na direção x. ....                                                                                                                                                                | 72 |
| Figura 26: Teste de seleção de malha na direção z. ....                                                                                                                                                                | 73 |
| Figura 27: Rotor discretizado em elementos finitos (unidade em milímetros). Fonte: Ramos, 2019. ....                                                                                                                   | 73 |
| Figura 28: Ilustração das posições dos <i>grooves</i> simuladas. Adaptado de Brito (2009). ....                                                                                                                        | 74 |
| Figura 29: Campo de Pressão para diferentes posições do <i>groove</i> em um mancal operando em 30Hz. ....                                                                                                              | 75 |
| Figura 30: Campo da fração volumétrica para diferentes posições do <i>groove</i> em um mancal operando em 30Hz. ....                                                                                                   | 75 |
| Figura 31: Influência da posição do <i>groove</i> no lócus e na vazão. ....                                                                                                                                            | 76 |
| Figura 32: Influência da posição do <i>groove</i> na área do mancal com filme completo de óleo. ....                                                                                                                   | 77 |
| Figura 33: Influência da posição do <i>groove</i> no coeficiente equivalente de rigidez. ....                                                                                                                          | 77 |
| Figura 34: Influência da posição do <i>groove</i> no coeficiente equivalente de amortecimento. ....                                                                                                                    | 78 |
| Figura 35: Influência da posição do <i>groove</i> no diagrama de Campbell. ....                                                                                                                                        | 79 |



|                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 36: Influência da posição do groove no fator de amortecimento. ....                                                                                  | 79  |
| Figura 37: Órbita do eixo no mancal com rotação de 30Hz para diferentes posições do groove. ....                                                            | 80  |
| Figura 38: Órbita do rotor no mancal com rotação de 60Hz para diferentes posições do groove. ....                                                           | 81  |
| Figura 39: Efeitos da variação da pressão de alimentação no locus e na vazão de entrada do mancal. ....                                                     | 82  |
| Figura 40: Área com filme completo para diferentes pressões de alimentação. ....                                                                            | 83  |
| Figura 41: Coeficiente de rigidez para diferentes pressões de alimentação para mancais com groove em 0° e em 270°. ....                                     | 83  |
| Figura 42: Coeficiente de amortecimento para diferentes pressões de alimentação para mancais com groove em 0° e em 270°. ....                               | 84  |
| Figura 43: Efeitos da variação da pressão de alimentação no fator de amortecimento (destaque no limiar de instabilidade). Simulações com groove em 0°. .... | 85  |
| Figura 44: Efeitos da variação da pressão de alimentação no fator de amortecimento. Simulações com groove em 270°. ....                                     | 85  |
| Figura 45: Locus do eixo com rotação de 30Hz variando a vazão de entrada de lubrificante. ....                                                              | 87  |
| Figura 46: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em 0°. Valor da vazão de referência em destaque. ....                            | 87  |
| Figura 47: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em 270°. Valor da vazão de referência em destaque. ....                          | 88  |
| Figura 48: Influência da vazão no fator de amortecimento. Valor da vazão de referência em destaque. ....                                                    | 89  |
| Figura 49: Locus do eixo com rotação de 60Hz variando a vazão de entrada de lubrificante. ....                                                              | 89  |
| Figura 50: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em 0°. Valor da vazão de referência em destaque. ....                            | 90  |
| Figura 51: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em 270°. Valor da vazão de referência em destaque. ....                          | 90  |
| Figura 52: Influência da vazão prescrita no fator de amortecimento de um rotor operando a 60Hz. ....                                                        | 91  |
| Figura 53: Comparação entre Reynolds e $p - \theta$ : distribuição de pressão para 30Hz. ...                                                                | 108 |

|                                                                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 54: Comparação entre Reynolds e $p-\theta$ : locus e vazão de saída de lubrificante.<br>.....                                                                   | 109 |
| Figura 55: Comparação entre Reynolds e $p-\theta$ : coeficiente de rigidez. ....                                                                                       | 110 |
| Figura 56: Comparação entre Reynolds e $p-\theta$ : coeficiente de amortecimento.....                                                                                  | 110 |
| Figura 57: Comparação entre Reynolds e $p-\theta$ : Diagrama de Campbell.....                                                                                          | 111 |
| Figura 58: Comparação entre Reynolds e $p-\theta$ : fator de amortecimento.....                                                                                        | 111 |
| Figura 59: Distribuição de pressão na simetria axial com rotação de 30Hz para o modelo<br>de Reynolds e o modelo $p-\theta$ , ambos com a mesma vazão de entrada. .... | 112 |
| Figura 60: Locus e vazão de saída para modelo de Reynolds e o modelo $p-\theta$ , impondo<br>a mesma vazão de entrada. ....                                            | 112 |
| Figura 61: Coeficiente de rigidez para modelo de Reynolds e o modelo $p-\theta$ , impondo a<br>mesma vazão de entrada.....                                             | 113 |
| Figura 62: Coeficiente de amortecimento para modelo de Reynolds e o modelo $p-\theta$ ,<br>impondo a mesma vazão de entrada. ....                                      | 113 |
| Figura 63: Distribuição de pressão na simetria do mancal para diferentes modelos de<br>lubrificação. ....                                                              | 116 |
| Figura 64: Locus do eixo no mancal para os diferentes modelos de lubrificação com<br>cavitação e conservação de massa. ....                                            | 116 |
| Figura 65: Modelo do elemento finito de viga. ....                                                                                                                     | 118 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Dados do mancal baseado no estudo de Brito (2009).....                                                      | 67 |
| Tabela 2: Características do mancal e condição de operação. ....                                                      | 72 |
| Tabela 3: Características do Rotor.....                                                                               | 73 |
| Tabela 4: <i>Groove</i> utilizado para simular as influências das condições de lubrificação na dinâmica do rotor..... | 74 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

|       |                                   |
|-------|-----------------------------------|
| GDL   | Grau de Liberdade                 |
| JFO   | Jacobson-Floberg-Olsson           |
| LAMAR | Laboratório de Máquinas Rotativas |
| MEF   | Método dos Elementos Finitos      |
| MVF   | Método dos Volumes Finitos        |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                      |                                                                          |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $N_g$                | Número de volumes de controle no <i>groove</i>                           |
| $Q_{fonte}$          | Termo fonte da vazão no <i>groove</i>                                    |
| $R_M$                | Raio do Mancal                                                           |
| $c_r$                | Folga Radial                                                             |
| $\alpha_g$           | Posição circunferencial do <i>groove</i>                                 |
| $\beta_c$            | Constante de proporcionalidade estrutural                                |
| $\mu_a$              | Viscosidade artificial                                                   |
| $\omega_i$           | i-ésima frequência natural do sistema                                    |
| [A]                  | Matriz do espaço de estados                                              |
| [C]                  | Matriz de amortecimento                                                  |
| [G]                  | Matriz do efeito giroscópico                                             |
| [K]                  | Matriz de rigidez                                                        |
| [M]                  | Matriz de Massa                                                          |
| $\Delta x, \Delta z$ | Incrementos da malha na direção circunferencial e axial, respectivamente |
| $a$                  | Largura do <i>groove</i>                                                 |
| $b$                  | Comprimento circunferencial do <i>groove</i>                             |
| $F$                  | Forças hidrodinâmicas                                                    |
| $h$                  | Espessura do filme de óleo                                               |
| $X, Y, Z$            | Sistema de coordenadas no referencial do rotor                           |
| $\zeta$              | Fator de amortecimento                                                   |
| $\xi$                | Excentricidade do desbalanceamento                                       |
| $\Omega$             | Velocidade de rotação do eixo                                            |
| $D$                  | Diâmetro do Mancal                                                       |
| $E$                  | Módulo de Elasticidade                                                   |
| $N$                  | Número/Quantidade                                                        |
| $P$                  | Pressão hidrodinâmica                                                    |
| $Q$                  | Vazão                                                                    |
| $R$                  | Raio do Mancal                                                           |
| $U$                  | Velocidade da superfície do eixo na direção circunferencial              |
| $V$                  | Velocidade normal da superfície do eixo                                  |

|               |                                                                                                        |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $W$           | Carga no mancal                                                                                        |
| $e$           | Excentricidade                                                                                         |
| $g$           | Constante gravitacional                                                                                |
| $j$           | Unidade imaginária                                                                                     |
| $m$           | Massa desbalanceada                                                                                    |
| $q$           | Grau de liberdade do sistema                                                                           |
| $t$           | Tempo                                                                                                  |
| $v$           | Velocidade do fluido de óleo                                                                           |
| $w$           | Grau de liberdade no espaço de estado                                                                  |
| $x, y, z$     | Sistema de coordenadas do fluido lubrificante                                                          |
| $\alpha$      | Coordenada circunferencial do mancal [°]                                                               |
| $\beta$       | Módulo volumétrico (Bulk Modulus)                                                                      |
| $\varepsilon$ | Razão de excentricidade                                                                                |
| $\theta$      | Fração volumétrica da folga ocupada com lubrificante na fase líquida /<br>Densidade relativa do fluido |
| $\lambda$     | Autovalores                                                                                            |
| $\mu$         | Viscosidade dinâmica                                                                                   |
| $\rho$        | Densidade                                                                                              |
| $\tau$        | Tensão de cisalhamento                                                                                 |
| $\omega$      | Velocidade de precessão do rotor                                                                       |
| $\epsilon$    | Erro relativo da força no método de Newton-Raphson                                                     |
| $\phi$        | Ângulo de Atitude                                                                                      |

### Subscritos

|            |                                                                   |
|------------|-------------------------------------------------------------------|
| 0          | Relativo à posição de equilíbrio                                  |
| P          | Referente ao volume de controle em questão                        |
| W, E, S, N | Referente aos volumes oeste, leste, sul, norte, respectivamente   |
| w, e, s, n | Referente às fronteiras oeste, leste, sul, norte, respectivamente |
| <i>Cou</i> | Referente ao termo de Couette                                     |
| <i>Poi</i> | Referente ao termo de Poiseuille                                  |
| <i>Sq</i>  | Referente ao termo de <i>Squeeze</i>                              |
| <i>X</i>   | Referente à direção horizontal do referencial do mancal/rotor     |

|            |                                                             |
|------------|-------------------------------------------------------------|
| <i>Y</i>   | Referente à direção vertical do referencial do mancal/rotor |
| <i>Z</i>   | Referente à direção axial do referencial do mancal/rotor    |
| <i>f</i>   | Relativo ao fornecimento/alimentação de lubrificante        |
| <i>in</i>  | Relativo à entrada de lubrificante                          |
| <i>out</i> | Relativo à saída do lubrificante                            |
| <i>rup</i> | Relativo à ruptura/cavitação do filme                       |
| <i>x</i>   | Referente à direção circunferencial do mancal               |
| <i>y</i>   | Referente à direção ao longo da espessura do lubrificante   |
| <i>z</i>   | Referente à direção axial do mancal                         |

### **Sobrescritos**

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| · | Diferenciação com respeito ao tempo |
|---|-------------------------------------|

## SUMÁRIO

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. INTRODUÇÃO.....                                                                  | 19  |
| 2. CONTEXTO HISTÓRICO .....                                                         | 24  |
| 3. MANCAIS HIDRODINÂMICOS E MODELOS DE LUBRIFICAÇÃO .....                           | 32  |
| 3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS .....                               | 32  |
| 3.2 TEORIA DE LUBRIFICAÇÃO DE REYNOLDS .....                                        | 34  |
| 3.3 CONDIÇÃO DE CAVITAÇÃO .....                                                     | 38  |
| 3.4 ALGORITMO DE ELROD .....                                                        | 40  |
| 3.5 FORMULAÇÃO POR VIJAYARAGHAVAN E KEITH .....                                     | 42  |
| 3.6 FORMULAÇÃO P- $\theta$ .....                                                    | 43  |
| 3.7 CONDIÇÃO DE LUBRIFICAÇÃO INSUFICIENTE ( <i>OIL STARVATION</i> ) .....           | 44  |
| 3.8 COEFICIENTES DINÂMICOS .....                                                    | 47  |
| 4. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....                                                     | 50  |
| 4.1 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS APLICADO NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS .....     | 50  |
| 4.2 MODELAGEM DO ROTOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....                      | 60  |
| 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....                                                     | 66  |
| 5.1 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA .....                                   | 66  |
| 5.2 CARACTERÍSTICAS DO ROTOR SIMULADO E SELEÇÃO DOS CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA ..... | 72  |
| 5.3 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA POSIÇÃO DO <i>GROOVE</i> . .....                       | 74  |
| 5.4 INFLUÊNCIA DA PRESSÃO DE ALIMENTAÇÃO .....                                      | 81  |
| 5.5 INFLUÊNCIA DA VAZÃO DE ENTRADA .....                                            | 86  |
| 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....                                | 93  |
| 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....                                          | 95  |
| REFERÊNCIAS .....                                                                   | 96  |
| APÊNDICE I - COMPARAÇÃO ENTRE MODELO DE REYNOLDS E P- $\theta$ .....                | 108 |
| APÊNDICE II - COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE LUBRIFICAÇÃO .....                     | 115 |
| APÊNDICE III - DESCRIÇÃO DAS MATRIZES DE ELEMENTOS FINITOS .....                    | 118 |



## 1. INTRODUÇÃO

As máquinas rotativas são caracterizadas pela presença de um eixo rotativo apoiado sobre mancais. Desta forma, o conceito abrange turbinas, compressores, redutores, bombas e motores, possuindo aplicação em praticamente todos setores da mecânica. Além disso, o funcionamento das máquinas rotativas envolve princípios de diversas áreas de estudo, como mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, transferência de calor, dinâmica, vibrações e controle de sistemas mecânicos. Por conseguinte, diversas pesquisas têm sido conduzidas no tema, levando ao desenvolvimento de sistemas rotativos mais confiáveis e eficientes, assim como a modelos matemáticos cada vez mais representativos.

Um dos elementos fundamentais no progresso das máquinas rotativas foram os mancais hidrodinâmicos, pois são capazes de operar sustentando rotores com altas cargas e/ou com altas velocidades de rotação e ainda possuem boas propriedades de amortecimento. Nos mancais hidrodinâmicos radiais, as superfícies do mancal e do eixo são separadas por um filme de fluido lubrificante que, devido ao próprio movimento das partes, gera um campo de pressão hidrodinâmica capaz de suportar os carregamentos radiais do eixo. Além da excelente capacidade de carga, os mancais hidrodinâmicos possuem uma vida útil extensa quando projetados e utilizados corretamente, uma vez que o lubrificante reduz consideravelmente o atrito, o desgaste e o aquecimento dos componentes do sistema. À vista disso, os mancais hidrodinâmicos são comumente utilizados em plantas industriais, usinas elétricas, veículos, indústrias petrolíferas, entre outros.

Devido a ampla aplicabilidade dos mancais hidrodinâmicos em rotores, assim como a grande quantidade de fenômenos e parâmetros envolvidos no seu projeto, fica evidente a necessidade de desenvolver estudos focados em compreender e modelar melhor o comportamento desses componentes. Esse conhecimento é necessário para o projeto de máquinas capazes de suportar cargas e velocidades mais elevadas, com maior estabilidade, confiabilidade e eficiência.

Resultados já obtidos em pesquisas sobre dinâmica de rotores mostram que, de fato, os mancais hidrodinâmicos desempenham grande influência no comportamento dinâmico do rotor. Assim sendo, a flexibilidade dos mancais deve ser considerada durante a análise dinâmica, como realizado primeiramente por Smith (1933). Machado (2011) destaca que o filme de lubrificante que separa as superfícies tem papel essencial nas interações

dinâmicas entre as partes fixas e móveis, uma vez que o filme lubrificante possui rigidez e amortecimento inerentes, comportando-se como um sistema mola-amortecedor.

Diante disso, infere-se que é mandatório modelar o filme de lubrificante. Para tal, o desenvolvimento desse modelo é realizado utilizando a teoria de lubrificação de Reynolds, que deduz uma equação para o cálculo do campo de pressão hidrodinâmica no filme, e o método de linearização proposto por Lund (1964), que aborda o filme lubrificante como um conjunto mola-amortecedor que pode ser facilmente acoplado às equações de movimento do sistema rotativo.

Contudo, Vijayaraghavan e Keith (1992), Pierre e Fillon (2000), Tanaka (2000), Brito et al. (2014) e outros muitos trabalhos mostraram que o filme lubrificante e, conseqüentemente, a distribuição de pressão, são notoriamente influenciados pelas condições de entrada de óleo lubrificante no mancal. Dessa forma, o projeto inadequado dos parâmetros de entrada de óleo piora o desempenho do rotor como um todo e pode inclusive levar a falhas no conjunto, como ilustrado na Figura 1 e na Figura 2, que mostram mancais excessivamente desgastados devido ao contato metal-metal resultante da lubrificação insuficiente de óleo (*starvation*). Apesar disso, boa parte dos estudos não levam em conta a entrada de lubrificante no modelo do mancal, sendo raros os modelos que o fazem juntamente com a análise dinâmica do rotor.

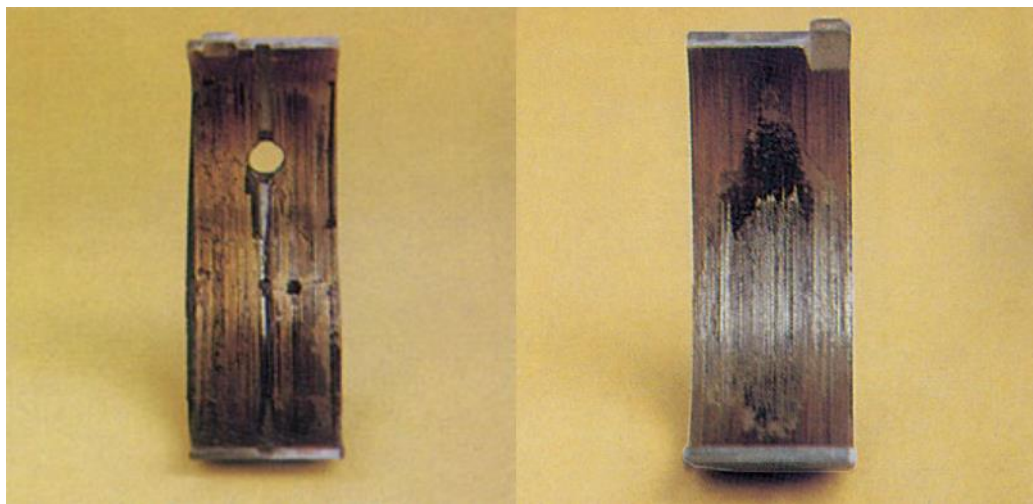


Figura 1: Bronzinas com falha prematura devido à insuficiência ou diluição do óleo lubrificante. Fonte: Mahle, 2016.

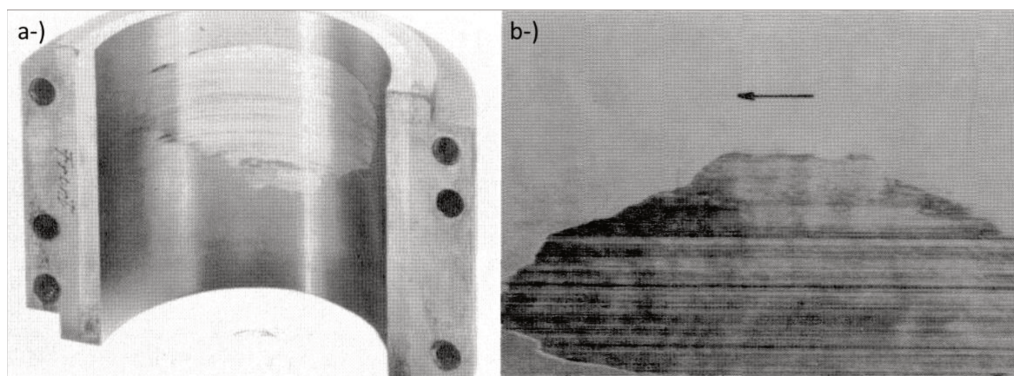


Figura 2: Mancal com falhas de *wiping* devido à perda temporária de lubrificação. a) Metade carregada do mancal. b-) Detalhe da falha. Fonte: McCloskey, 1995.

Nesse contexto, falta entendimento dos possíveis efeitos dos parâmetros de entrada de óleo no comportamento dinâmico da máquina, logo, o presente trabalho se propõe a modelar e avaliar tais efeitos. Para tanto, serão estudados como parâmetros de alimentação do mancal: a posição dos canais de fornecimento (*grooves*), a pressão de alimentação do lubrificante e a vazão de entrada de lubrificante. Para cada cenário, o comportamento do mancal e do rotor será analisado no caso estático, através da capacidade de carga do mancal, e no caso dinâmico, pela avaliação dos coeficientes dinâmicos, diagrama de Campbell, fator de amortecimento e órbitas do eixo.

Para que seja possível representar a entrada e os fluxos de lubrificante com acurácia, é necessário solucionar a equação de lubrificação de Reynolds sem infringir a conservação de massa ao longo de todo o mancal. Dessa forma, utilizou-se a formulação  $p-\theta$  (Ausas et al., 2009) baseada no conceituado Algoritmo de Elrod (1981) e solucionada pelo Método dos Volumes Finitos (MVF). Essa abordagem do problema permite não somente a conservação de massa global, para todo mancal, como também a conservação local, para cada volume de controle. Além disso, as fronteiras de ruptura e reformação do filme de óleo são encontradas implicitamente e as condições de contorno relacionadas à entrada de lubrificante são facilmente impostas no modelo.

Já a análise dinâmica de um sistema rotativo, composto por mancais hidrodinâmicos, eixo flexível e sujeito a uma força de desbalanceamento no disco, é realizada através da solução da equação de movimento obtida através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Desta maneira, o eixo é modelado por elementos de viga, o disco por um elemento de disco e os mancais pelo sistema mola-amortecedor caracterizado pelos coeficientes equivalentes obtidos através da linearização das forças hidrodinâmicas do mancal.

Diversos modelos para analisar o comportamento estático e dinâmico dos mancais e dos rotores já foram desenvolvidos no Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) considerando diversos aspectos e fenômenos destes componentes, contudo ainda havia a necessidade de um modelo conservativo que considerasse a influência do efeito da condição de entrada de óleo. Tal necessidade foi satisfeita com o modelo implementado neste trabalho, possibilitando a análise do fornecimento de óleo e, futuramente, das falhas relacionadas a falta de lubrificação.

O presente trabalho encontra-se dividido em 6 capítulos, sendo que o Capítulo 2 contextualiza historicamente o presente trabalho entre os estudos sobre a influência das condições de entrada de lubrificante no comportamento de mancais hidrodinâmicos e rotores. O Capítulo 3 mostra os conceitos básicos de mancais hidrodinâmicos e apresenta a modelagem teórica utilizada para desenvolver o modelo de lubrificação considerando as condições de entrada do óleo, garantindo a conservação de massa e englobando abordagens com condição de lubrificação insuficiente (*starvation*). A implementação numérica do modelo é mostrada no Capítulo 4, descrevendo os métodos de volumes finitos e elementos finitos utilizados, assim como as condições de contorno aplicadas ao problema.

O Capítulo 5 apresenta a comparação do modelo de lubrificação utilizado com trabalhos precedentes assim como resultados mostrando a influência da posição do *groove*, da pressão de alimentação do lubrificante e da vazão de entrada de lubrificante no comportamento estático e dinâmico do rotor. Destaca-se que a variação da vazão de alimentação do lubrificante permite analisar tanto o comportamento de mancais inundados (*flooded*) como o de mancais com lubrificação insuficiente (*starved*). Por fim, as conclusões e sugestões de trabalhos futuros estão descritas no Capítulo 6.

O trabalho também possui três apêndices, sendo que o Apêndice I apresenta uma comparação entre o modelo de lubrificação clássico de Reynolds e o modelo conservativo  $p-\theta$ , mostrando quando se diferem e quando se assemelham, o Apêndice II mostra a comparação entre os modelos de lubrificação com conservação de massa estudados, indicando uma equivalência entre eles, e o Apêndice III mostra as matrizes utilizadas no MEF.

Diante disso, este trabalho contribui com o atual estado da arte fornecendo resultados relevantes relacionados a influência das condições de entrada de lubrificante do mancal hidrodinâmico no comportamento dinâmico do rotor.

## 2. CONTEXTO HISTÓRICO

No decorrer da Revolução Industrial, ocorreu um grande avanço tecnológico com o surgimento e ampla utilização de diversas máquinas. Logo notou-se que o atrito era um problema a ser estudado e minimizado a fim de evitar problemas de superaquecimento, desgaste e aumentar a eficiência das máquinas.

Nesse contexto, surgiu um novo campo de estudos da engenharia, a tribologia, responsável pelos estudos referentes à interação de superfícies com movimento relativo em todos seus aspectos, incluindo atrito, desgaste e lubrificação (Czichos, 2009). Embora estudos anteriores tenham ocorrido, o estabelecimento da tribologia como ciência é atribuído a três cientistas, Nikolai Petrov (1883), Beauchamp Tower (1883) e Osborne Reynolds (1886), que, de forma independente, concentraram suas pesquisas na lubrificação hidrodinâmica.

Em 1883, Petrov realizou experimentos sobre os efeitos do lubrificante no atrito dos mancais, concluindo que a principal propriedade de um lubrificante é sua viscosidade e não a densidade, divergindo do pensamento contemporâneo (Williams, 2005). A partir de seus experimentos, foi possível formular uma equação para o coeficiente de atrito em mancais com eixo concêntrico bem como definir grupos de parâmetros adimensionais cruciais na teoria de lubrificação. Com isso, pode-se compreender que na lubrificação hidrodinâmica o atrito se deve ao cisalhamento viscoso do fluido e não às interações entre as asperezas das superfícies, como se pensava até então (Persson, 2013).

Durante o mesmo período, Tower também realizou experimentos com mancais lubrificados hidrodinamicamente e percebeu que o coeficiente de atrito era muito menor do que o esperado. Em um dos seus experimentos, Tower fez um furo radial no mancal através do qual adicionaria óleo lubrificante e se surpreendeu ao verificar que o óleo jorrava pelo furo quando o eixo era rotacionado, mesmo com o furo vedado por cortiça. Assim, Tower (1883) pode concluir que a pressão no fluido era bem maior que a esperada e, através de medidas de pressão ao longo da superfície do mancal, revelou também a distribuição de pressão tal como conhecemos hoje (Norton, 2013; Ferreira, 2009).

Através dos experimentos de Petrov e Tower concluiu-se que o fluido lubrificante entre as superfícies em movimento forma um filme no qual desenvolve-se o campo de

pressão hidrodinâmica que sustenta o eixo e evita o contato mecânico entre as partes, surgindo então o conceito de lubrificação hidrodinâmica (Williams, 2005).

Apesar da relevância e contribuições desses experimentos, era preciso ainda uma base teórica que as sustentassem. Essa base foi apresentada por Osborne Reynolds em 1886. Em seu clássico artigo para a Royal Society, Reynolds utilizou uma forma reduzida da equação de Navier-Stokes e a equação da continuidade para deduzir uma equação diferencial de segunda ordem que modela o comportamento da pressão no filme de lubrificante, o que permitiu comparar suas hipóteses teóricas com os resultados experimentais obtidos por Tower (Hamrock et al., 1999). Esse artigo é considerado a base para toda teoria de lubrificação hidrodinâmica, sendo a equação de Reynolds utilizada até hoje.

Por se tratar de uma equação diferencial parcial não homogênea de termos não lineares, não há solução analítica da equação de Reynolds com conservação de massa ao longo de todo mancal, assim, os estudos se concentraram na solução analítica para casos simplificados ou na solução numérica da equação.

Em 1904, Sommerfeld resolveu analiticamente a equação de Reynolds para mancais longos ( $L/D > 4$ , Frene et al, 1997), admitindo como hipótese que o fluxo do lubrificante na direção axial pode ser ignorado. Logo, o termo da equação referente ao gradiente de pressão na direção axial também pode ser negligenciado. Sommerfeld também derivou uma equação para a carga total em um mancal longo, cujos termos podem ser rearranjados na forma adimensional, resultando em um número conhecido como Número de Sommerfeld, que caracteriza o mancal (Norton, 2013).

A solução analítica da Equação de Reynolds para mancais curtos ( $L/D < 0,5$ , Frene et al, 1997) foi desenvolvida por Ocvirk (1952) e DuBois e Ocvirk (1953), considerando que o fluxo circunferencial de lubrificante em mancais infinitamente curtos pode ser negligenciado quando comparado ao fluxo axial.

Apesar da relevância dessas soluções analíticas para mancais curtos e longos, a sua aplicação é restrita para casos específicos. Com o advento dos computadores, a solução numérica da equação de Reynolds se tornou praticável. Em 1956, Pinkus foi o primeiro a encontrar uma solução numérica para a equação de Reynolds, utilizando o método das diferenças finitas para obter a distribuição de pressão hidrodinâmica em

mancais circulares, elípticos e trilobulares, sem necessidade de se restringir a mancais curtos ou longos.

Os avanços computacionais alavancaram o desenvolvimento de modelos de mancais hidrodinâmicos mais completos, que permitiram um grande progresso na compreensão do funcionamento desses componentes de máquina. Pode-se citar estudos não só envolvendo mancais de diferentes geometrias (Pinkus, 1956, 1958 e 1959), mas também considerando o fenômeno da cavitação (Jakobsson, 1957; Olsson, 1965; Floberg, 1973), os efeitos térmicos (Dowson, 1962; Han e Paranjpe, 1990; Paranjpe e Han, 1995), análise termohidrodinâmica (THD) (Cameron, 1951; Bouard et Al., 1996), interferência da rugosidade nas superfícies (Patir e Cheng, 1978; 1979), consideração das elasticidades dos corpos no mancal (Dowson e Higginson, 1977; Zhang, 1987), a influência dos tratamentos e acabamentos superficiais (Etsion, 2005; Etsion, 2013; Wang, 2014), entre outros.

Dessa forma, os modelos numéricos de mancais hidrodinâmicos estão cada vez mais completos e complexos, a fim de envolver os diversos fenômenos e parâmetros que influenciam a operação do mancal hidrodinâmico. É evidente que a condição de lubrificação é um destes parâmetros, mas apesar disso, os modelos de lubrificação comumente não consideram a influência do *groove* e admitem que a formação de filme completo ocorre sempre na região de máxima espessura de filme. Os resultados mostrados por Vijayaraghavan e Keith (1992) indicam que essa consideração resulta em erros de, em média, 8% na capacidade de carga e de até 150% na vazão lateral para os casos simulados. Devido à evidente importância dos efeitos da condição de entrada de lubrificante, diversos estudos têm se dedicado a modelar e compreender esses efeitos no comportamento do mancal.

Os pioneiros foram Etsion e Pinkus (1974 e 1975) que calcularam a posição angular da formação do filme completo, onde o filme de óleo se estende por toda largura do mancal, assim como a largura efetiva de filme a montante desse ponto em função da geometria do furo de alimentação. Outros diversos estudos utilizaram a equação de Reynolds para estudar a influência dos parâmetros de entrada do lubrificante no desempenho do mancal, como Dowson et al. (1984), Knight et al. (1985), Artiles e Heshmat (1985), Chun e Lalas (1993), Mistry et al. (1997), Tanaka (2000), He et al. (2005), Roy e Majumdar (2005), Roy e Lala (2009) e Wang et al. (2018).



Contudo, a fim de reproduzir os fluxos no mancal com acurácia, requer-se um modelo que atenda ao princípio da conservação de massa, como o proposto por Elrod e Adams (1974) e aperfeiçoado por Elrod (1981). O algoritmo de cavitação de Elrod não só garante a conservação de massa ao longo de todo mancal, como também localiza implicitamente as fronteiras de reformação e ruptura do filme de óleo, em conformidade com a teoria de cavitação de Jakobsson-Floberg-Olsson (JFO). Vijayaraghavan e Keith (1989) apresentaram uma abordagem matemática para a implementação do algoritmo de Elrod e propuseram uma técnica de diferenciação distinta para o termo do fluxo convectivo, a fim de melhorar a convergência do algoritmo. Ausas et al. (2009) desenvolveu outra abordagem baseada no algoritmo de Elrod, conhecida como abordagem  $p - \theta$ , na qual resolve tanto o campo de pressão quanto o campo de fração volumétrica de lubrificante no mancal, sendo que o comportamento de ambas variáveis está atrelado através das condições de cavitação.

Estes algoritmos de cavitação com conservação de massa são amplamente utilizados nos modelos de mancais hidrodinâmicos, sobretudo em análises que exigem uma modelagem realista dos fluxos de lubrificante e das fronteiras de reformação e ruptura. Paranjpe e Goenka (1990) destacam que os modelos conservativos representam bem os fluxos de entrada e de saída do lubrificante, enquanto o modelo clássico de Reynolds resulta em uma discrepância considerável entre esses fluxos, principalmente nos casos em que o mancal não possui fornecimento abundante de lubrificante.

Por conseguinte, diversos autores têm utilizado algoritmos conservativos para avaliar as condições de lubrificação do mancal. Downson et al. (1985a e 1985b) estudou a influência da pressão de alimentação e da geometria de um *groove* axial localizado na região de espessura máxima de filme de óleo, mostrando boa correlação entre o modelo teórico utilizando o algoritmo de Elrod e os resultados experimentais. Claro e Miranda (1993) utilizaram o mesmo algoritmo para analisar diferentes posições do *groove* e obtiveram boa correspondência com resultados experimentais, mostrando melhoras significativas quando comparado com as abordagens clássicas, principalmente quanto à estimativa da vazão lateral. Vijayaraghavan e Keith (1992) simularam a performance de mancais com *grooves* axiais e circunferenciais, com um ou dois *grooves* localizados em diversas posições com pressão de alimentação igual a pressão ambiente e mostraram que, em geral, *grooves* localizados na região cavitada interferem menos na distribuição de

pressão e, portanto, garantem uma performance melhor quanto à capacidade de carga, apesar de resultarem em mais vazão lateral de lubrificante.

Análises com conservação de massa incluindo os efeitos termohidrodinâmicos foram realizados por Vijayaraghavan et al. (1996), Pierre e Fillon (2000), Costa et al. (2003) e Brito et al. (2014) que mostraram que parâmetros de performance do mancal, como a excentricidade, a temperatura máxima atingida e a perda de potência estão diretamente ligados à temperatura de entrada e a vazão de lubrificante, sendo que essa última depende substancialmente da pressão de alimentação, da posição e da geometria do *groove*.

Esses estudos também indicam que uma redução da pressão ou da vazão de alimentação pode ser benéfica, pois além de diminuir o consumo de lubrificante, também reduz a perda de potência por atrito devido à diminuição da área de filme completo, como apontado por Mansoor e Shayler (2018). Contudo, essa redução leva ao aumento da pressão e da temperatura máxima, logo, deve ser aplicada cautelosamente e não é recomendada para mancais operando com altas cargas. Baseado nesse conceito, Hirani (2005) aplicou um algoritmo genético de otimização a fim de minimizar simultaneamente a perda de potência e a vazão de lubrificante, com restrições na espessura de filme, no aumento de temperatura e na pressão hidrodinâmica máxima, encontrando assim uma configuração ótima do mancal e das condições de lubrificação para cada condição de operação.

A literatura também é extensiva em trabalhos experimentais que atestam que os efeitos das condições de lubrificação são significativos na performance do mancal (Costa et al., 2003; Brito et al., 2008, 2012, 2014; Ahmad et al., 2013a, 2013b, 2014a, 2014b). Lijesh et al. (2016) ainda indica teórica e experimentalmente que a configuração do *groove* é um aspecto essencial na determinação do nível de desgaste de um mancal operando em regime de lubrificação mista.

Contudo, a maioria dos estudos sobre as influências das condições de lubrificação analisam o comportamento estático do mancal e não investigam as influências no comportamento dinâmico. A análise dos efeitos dinâmicos dos mancais é de grande importância, uma vez que estes devem ser levados em consideração no projeto de um rotor para determinação das frequências naturais e limiares de instabilidade do sistema.

Essa análise pode ser feita através da inclusão da flexibilidade dos mancais no modelo do sistema rotativo, como sugerido por Newkirk e Taylor em 1925.

Stodola (1925) e Hummel (1926) foram os primeiros a modelar os efeitos dinâmicos dos mancais, representando-os como um simples suporte de mola e, a partir de então, muitas análises de rotodinâmica acoplaram o filme lubrificante dos mancais como elementos de mola e amortecedores na solução do sistema (Tiwari et al., 2004). Porém, foi somente em 1964 que Lund sugeriu o método das perturbações infinitesimais para linearização da força hidrodinâmica em torno da posição de equilíbrio, facilitando o acoplamento dos modelos e a solução do sistema. O método proposto por Lund é testado e aceito para a maioria das condições de operação (Alves, 2018), porém ele é usualmente empregado no modelo de lubrificação clássico de Reynolds, sendo de desconhecimento da autora a aplicação do método de perturbações em um modelo de lubrificação com conservação de massa e condição de cavitação.

Diante disso, a maioria das análises dinâmicas que consideram os efeitos das condições de lubrificação foram feitas utilizando o modelo clássico de Reynolds, que, como visto anteriormente, não é o mais recomendado para considerar tais efeitos pois não aplica condições de cavitação que garantam conservação de massa ao longo de todo mancal. Apesar disso, conclusões importantes foram feitas por tais estudos: Akkok e Ettles (1980) observa que *grooves* estreitos melhoram a estabilidade do sistema rotativo; Knight et al. (1985) analisa os efeitos da pressão de alimentação em mancais com dois *grooves* axiais e conclui que o aumento da pressão de entrada leva à diminuição do limiar de instabilidades destes mancais; Morton et al. (1987) constata que *grooves* circunferenciais possuem efeito estabilizador e que o comprimento do arco desses *grooves* também influencia o limiar de instabilidade; Roy e Majumdar (2005) mostraram que tanto a capacidade de carga quanto a estabilidade melhoram quando o *groove* é localizado na região superior do mancal em comparação com *groove* na região inferior, além de mostrarem as influências da geometria do *groove*; Roy e Laha (2009) analisaram a influência da posição do *groove* e verificaram que a posição de 12° em relação ao topo do mancal apresenta a melhor capacidade de carga e a maior vazão de óleo e também indicaram que a redução do comprimento do *groove* melhora a estabilidade do sistema.

Wang e Khonsari (2008a, 2008b) realizaram a análise não linear da equação de movimento do eixo em um mancal longo solucionado analiticamente utilizando condição de cavitação de Reynolds-Floberg-Jakobsson e concluíram que o limiar de instabilidade

varia com a posição do *groove*, sendo que o mancal com *groove* em  $0^\circ$  é mais instável para altas excentricidades e mais estável para baixas excentricidades quando comparado com *grooves* em  $45^\circ$  ou  $90^\circ$ . Além disso, o trabalho mostra que o aumento da pressão de entrada leva a diminuição do limiar de instabilidade para mancais com *groove* em  $0^\circ$ .

Nota-se que, apesar da extensa quantidade de estudos e modelos de mancais hidrodinâmicos considerando as condições de entrada de óleo, há uma carência de estudos que utilizem os modelos de cavitação com conservação de massa para análise dos efeitos destes parâmetros no comportamento dinâmico do rotor. Além disso, os estudos de instabilidade mencionados acima são aplicados para rotores rígidos, porém, para uma análise completa do sistema rotativo, deve-se considerar a flexibilidade tanto do mancal quanto do rotor. Diante disso, o presente trabalho se propõe a empregar um algoritmo com conservação de massa para realizar a análise dinâmica de um rotor flexível com diferentes condições de entrada de lubrificante, variando posição do *groove*, pressão de alimentação e vazão de alimentação.

As análises variando a vazão de alimentação foram incluídas para abranger também condições de lubrificação insuficiente, denominadas como condição de *starvation*. Em um mancal operando sob *starvation*, a região de reformação do filme de óleo ocorre mais a jusante, tornando a extensão do filme completo menor do que em um mancal que opera com vazão suficiente (mancal inundado ou *flooded*). Parte dos estudos de *starvation* utilizam o modelo clássico de Reynolds com um método iterativo dos fluxos para definir onde o filme se forma, tanto em mancais circulares (Artiles e Heshmat, 1985; Gethin e Medwell, 1985; Tanaka, 2000) quanto em mancais tilting-pad (He et al., 2005; Nichols et al., 2018). Entretanto, essa análise pode ser feita de forma automática e mais apurada utilizando os modelos com conservação de massa, como realizado por Vincent e Frene (1995) e Vijayaraghavan et al. (1996).

De modo geral, os estudos do fenômeno mostram que mancais operando com *starvation* resultam em temperaturas do filme mais elevadas, excentricidades maiores e menor perda de potência, sendo que os efeitos se ampliam para altas velocidades de rotação. A diminuição da perda de potência com o aumento do nível de *starvation* está relacionado não somente à diminuição da área de filme completo, onde ocorrem as perdas devido ao atrito viscoso, como também à elevação da temperatura e, consequentemente, à diminuição da viscosidade do lubrificante. Os dados experimentais dos estudos

mencionados acima, assim como os obtidos por Heshmat e Gorski (1987), Heshmat e Pinkus (1985) e Nicholas et al. (2008) concordam com essas observações.

Análises do comportamento dinâmicos de mancais com *starvation* foram realizadas pelo método dos coeficientes equivalentes obtidos com a equação clássica de Reynolds por Artiles e Heshmat (1985), He et al. (2005) e Nichols et al. (2018) e pelo método de mobilidade aplicado ao modelo de Elrod por Vincent e Frene (1995). Esses estudos indicam que, como esperado, a lubrificação insuficiente influencia significativamente o comportamento dinâmico do mancal. No entanto, ainda se faz necessário mais análises para melhorar o entendimento desses efeitos, não só devido a maior adequação de fazê-lo com o emprego de modelos conservativos, mas também para avaliar a órbita e o comportamento estável do rotor sob condições de *starvation*.

Dessa forma, o presente trabalho realizará a análise dos efeitos das condições de lubrificação no comportamento estático e dinâmico do mancal de um rotor flexível, incorporando inclusive casos de mancais em *starvation*, através de um modelo de lubrificação com conservação de massa.

### 3. MANCAIS HIDRODINÂMICOS E MODELOS DE LUBRIFICAÇÃO

#### 3.1 Conceitos Básicos de Mancais Hidrodinâmicos

Os mancais hidrodinâmicos são caracterizados pela presença de um filme hidrodinâmico que separa completamente as superfícies do eixo e do mancal. O filme é formado pela lubrificação hidrodinâmica, que ocorre quando existe suprimento de lubrificante e velocidade relativa suficiente para que o próprio movimento das interfaces bombeie o fluido, criando um filme dinâmico de lubrificante que as mantêm separadas (Norton, 2013).

Nos mancais hidrodinâmicos, a pressão responsável por sustentar o eixo se desenvolve porque a espessura do fluido diminui na direção de escorregamento, assim a rotação do eixo leva o lubrificante para a região onde a espessura de filme é mínima (Budynas e Nisbett, 2011; Hamrock et al., 1999). Como o atrito envolvido é completamente em virtude do cisalhamento do fluido lubrificante, geralmente considerado um fluido newtoniano, minimiza-se o desgaste e o aquecimento do conjunto, o que torna o mancal um componente confiável e durável. A lubrificação também auxilia na dissipação de calor, na proteção contra a oxidação e no amortecimento de variações bruscas de carga, ampliando a vida útil dos componentes (Machado, 2011).

A Figura 3 mostra o conjunto de um mancal hidrodinâmico, indicando a estrutura que suporta o mancal, o mancal (ou bucha), o eixo em rotação dentro do mancal, o lubrificante que ocupa a folga entre mancal e eixo, os furos e sulcos pelos quais o lubrificante é fornecido, comumente chamados de *grooves*, e a vista frontal e lateral do campo de pressão hidrodinâmica desenvolvido.

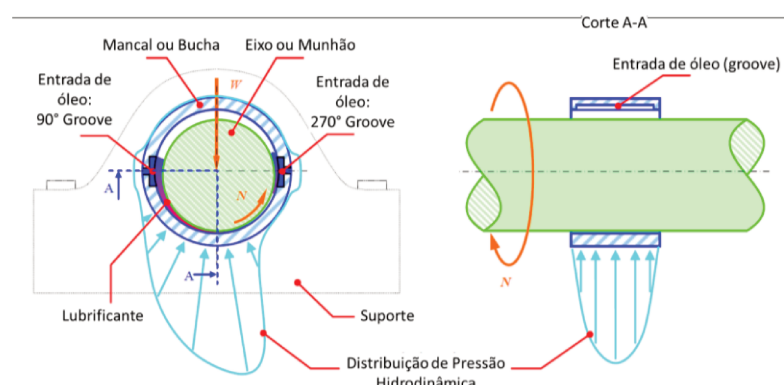


Figura 3: Esboço de um conjunto de mancal hidrodinâmico com dois grooves. Adaptado de Brito (2009).

A Figura 4 mostra uma seção de um conjunto mancal-eixo, apresentando algumas dimensões e referências importantes na compreensão do funcionamento do mancal. Para um conjunto em que o mancal tem raio  $R_M$  e o eixo tem raio  $R$ , a folga radial é dada por:

$$c_r = R_M - R \quad (1)$$

O ponto C da Figura 4 representa a posição de equilíbrio estático do eixo, ou seja, a posição em que a carga no eixo e as forças hidrodinâmicas que o sustentam estão em equilíbrio. A linha dos centros é a linha que passa pelo centro do mancal, ponto O, e pelo centro do eixo, ponto C (Figura 4). O ângulo formado entre a linha de centros e o eixo vertical é conhecido como ângulo de atitude,  $\phi$ . A distância entre os centros do mancal e do eixo é a excentricidade,  $e$ , que normalmente é adimensionalizada pela razão de excentricidade:

$$\varepsilon = \frac{e}{c_r} \quad (2)$$

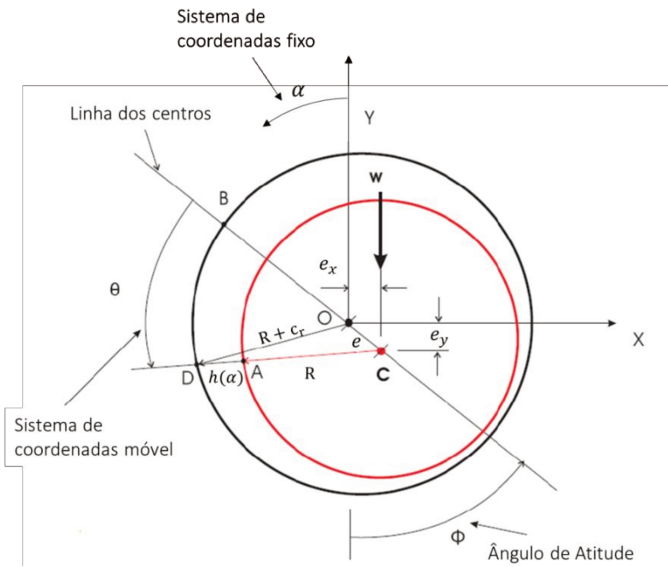


Figura 4: Esquema mostrando algumas medidas do conjunto mancal e munhão ou eixo.  
Adaptado de Pedreira e Weber (2006).

Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo da Figura 4 e desprezando os termos de segunda ordem, tem-se a expressão para a espessura do filme de óleo:

$$h(\alpha) = c_r + e_x \sin \alpha - e_y \cos \alpha \quad (3)$$

O valor de espessura máxima,  $h_{max}$ , se dá quando a coordenada circunferencial  $\alpha$  é igual ao ângulo de atitude  $\phi$ , enquanto o valor mínimo da espessura,  $h_{min}$ , ocorre no extremo oposto da linha de centros.

### 3.2 Teoria de Lubrificação de Reynolds

Para elaborar a equação que é considerada a base teórica da lubrificação hidrodinâmica em mancais, Reynolds (1886) admitiu a hipótese de que a espessura do filme de fluido é muito pequena em comparação com o raio do eixo e do mancal, logo, a curvatura poderia ser negligenciada e a análise poderia ser feita modelando mancal e eixo como placas não paralelas, como apresentado na Figura 5.a (Budynas e Nisbett, 2011).

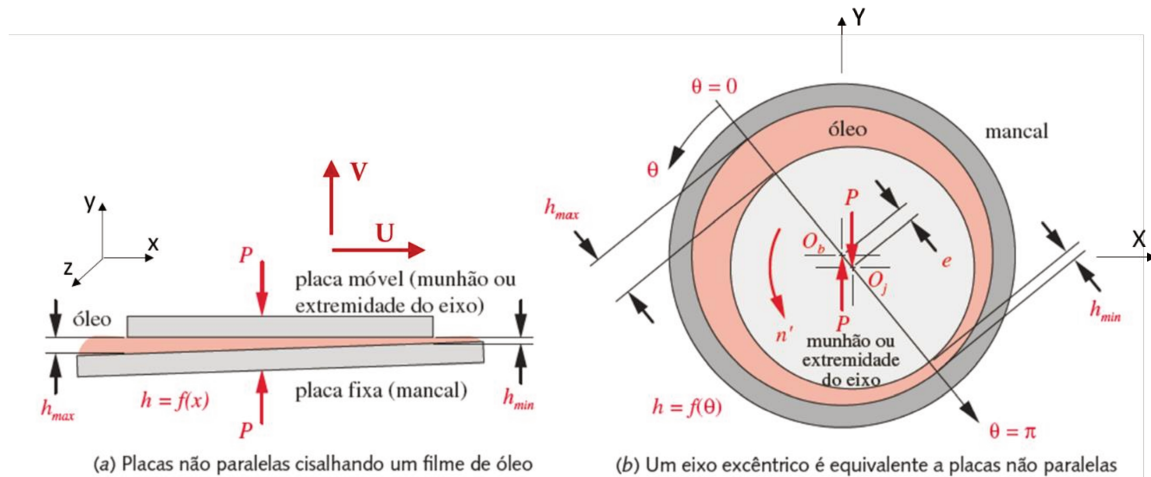


Figura 5: Representação de um mancal hidrodinâmico, mostrando uma hipótese em detalhe (a) e uma visão geral (b). Adaptado de Norton (2013).

As demais considerações também foram admitidas no modelo de Reynolds:

1. O lubrificante é um fluido Newtoniano com viscosidade dinâmica  $\mu$ ;
2. As forças de inércia do fluido são desprezadas;
3. O lubrificante é incompressível;
4. A viscosidade do fluido é constante em todo escoamento, mantidas a carga e a velocidade constante;
5. O fluido adere às superfícies do eixo e do mancal, logo, a velocidade do fluido na interface é igual à velocidade da superfície a que está aderido;
6. A pressão ao longo da espessura do filme é constante, uma vez que é uma dimensão muito pequena;
7. As forças de campo são desconsideradas;
8. O fluxo é laminar.



### 3.2.1 Componentes da Velocidade do Fluido Lubrificante

Para deduzir a equação de Reynolds é preciso definir as componentes da velocidade do fluido lubrificante nas direções circunferencial ( $v_x$ ), axial ( $v_z$ ) e através da espessura do filme de óleo ( $v_y$ ).

A velocidade do fluxo através da espessura ( $v_y$ ) ocorre apenas em consequência da velocidade normal da superfície do eixo ( $V$ ), uma vez que não há variação da pressão nessa direção (hipótese 6). Dessa forma,  $v_y$  possui duas componentes: uma devido à mudança temporal da espessura de filme ( $\partial h/\partial t$ ) e outra devido à mudança espacial da espessura, causada pela velocidade da superfície na direção circunferencial ( $U$ ) que provoca um fluxo de advecção (San Andres, 2009):

$$v_y = V = \frac{dh(x, t)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} U \quad (4)$$

O cálculo da velocidade do fluxo nas direções circunferencial e axial é realizado através do balanço de forças. Como as forças inerciais são desprezadas (hipótese 2), as forças atuantes no fluido são devido às pressões e às tensões de cisalhamento (Figura 6.a). Dessa forma, o equilíbrio das forças na direção  $x$  para um volume infinitesimal de fluido pode ser descrito pela Equação (5):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta z \Delta y + \frac{\partial \tau}{\partial x} \Delta x \Delta z \Delta y = 0 \quad (5)$$

Por se tratar de um fluido newtoniano (hipótese 1), a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação (Figura 6.b), isto é:

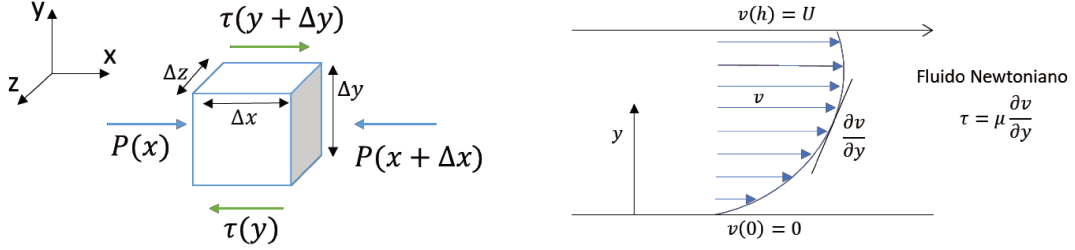
$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6)$$

Substituindo a Equação (6) na Equação (5) e simplificando, tem-se:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \rightarrow v_x = \iint \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} dy dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y^2 + Ay + B \quad (7)$$

Onde as constantes de integração  $A$  e  $B$  podem ser encontradas aplicando-se as condições de contorno decorrentes da hipótese 5. Assim, como a superfície do mancal é estacionária, a superfície do eixo se move com velocidade  $U$  na direção  $x$  e o fluido adere às superfícies (Figura 6.b), depreende-se então as condições de contorno:

$$\begin{cases} y = 0; v_x = 0 \rightarrow B = 0 \\ y = h(x); v_x = U \rightarrow A = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h(x) \end{cases} \quad (8)$$



a-) Forças agindo na direção x em um volume infinitesimal de lubrificante.

b-) Representação de um fluido newtoniano e das condições de contorno da velocidade do fluido em y.

Figura 6: Representação das forças e deformações em um fluxo newtoniano.

Aplicando a Equação (8) na Equação (7), obtém-se a expressão da velocidade na direção circunferencial do mancal:

$$v_x(z, x, t) = \frac{U}{h(x, t)} y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P(z, x, t)}{\partial x} (y^2 - h(x, t)y) \quad (9)$$

O primeiro termo da equação descreve a velocidade do fluido devido ao cisalhamento, isto é, o termo convectivo, conhecido como fluxo de Couette, enquanto o segundo termo corresponde ao fluxo induzido pela diferença de pressão no lubrificante, conhecido como fluxo de Poiseuille.

A dedução da velocidade na direção axial ( $v_z$ ) pode ser feita de maneira análoga. No entanto, a condição de contorno neste caso é  $v_z(h) = 0$ , pois o eixo não se move na direção axial e, consequentemente, não há fluxo convectivo na direção z:

$$v_z(z, x, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P(z, x, t)}{\partial z} (y^2 - h(x, t)y) \quad (10)$$

### 3.2.2 Equação da continuidade

A equação de Reynolds é fundamentada pela equação da continuidade, que estabelece a conservação do fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Em que  $\rho$  é a densidade do fluido. A fim de obter os fluxos mássicos por unidade de comprimento, integra-se a Equação (11) ao longo da espessura de filme:

$$\begin{aligned} \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dy + \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy \\ + \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dy = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Como os parâmetros das diferenciais parciais são também parâmetros dos limites de integração, aplica-se a Regra de Leibniz (Equação (13)) nas integrais (San Andres, 2009).

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f dy - \left\{ f|_{y=b} \frac{db}{dx} - f|_{y=a} \frac{da}{dx} \right\} \quad (13)$$

Dessa forma, utilizando a Equação (13) e as condições de contorno das velocidades, cada termo da Equação (12) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h(x,t)} \rho dy - \rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - \rho \frac{\partial h}{\partial t} \\ \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} \rho v_x dy - \rho U \frac{\partial h}{\partial x} \\ \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy &= \rho v_y|_{y=h(x,t)} - \rho v_y|_{y=0} = \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} U \right) \\ \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dy &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{h(x,t)} \rho v_z dy - 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo na Equação (12) e simplificando, obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} \rho v_x dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{h(x,t)} \rho v_z dy = 0 \quad (15)$$

Dessa forma, substituindo as expressões das velocidades  $v_x$  e  $v_z$  (Equações (9) e (10)) na Equação (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} \rho \left( \frac{U}{h} y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - hy) \right) dy \\ + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{h(x,t)} \rho \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (y^2 - hy) dy = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Como o fluido é incompressível (hipótese 3), pode-se eliminar o termo da densidade ( $\rho$ ). Isto posto e realizando as integrais, obtém-se a forma clássica da Equação de Reynolds:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad (17)$$

O primeiro termo é conhecido como termo de *squeeze* e se deve ao esmagamento do filme de óleo por causa dos movimentos de translação do eixo; o segundo termo representa o fluxo de Couette na direção circunferencial e o terceiro e quarto termo descrevem o fluxo de Poiseuille nas direções circunferencial e axial, respectivamente.

### 3.3 Condição de Cavitação

A solução da equação de Reynolds ao longo de todo o mancal, como proposto por Sommerfeld (1904), resulta em uma distribuição de pressão com valores negativos na região divergente da folga ( $\partial h / \partial x < 0$ ). Esse resultado é inverossímil, pois, quando o fluido é submetido a pressões negativas abaixo da sua pressão de ruptura ( $P_{rup}$ ), ocorre a formação de bolhas de vapor e de gases no interior do fluido, fenômeno conhecido como cavitação e inerente aos mancais hidrodinâmicos (Ramos, 2019).

Diante disso, Gümbel (1914) propôs impor pressão nula na região divergente da cunha para considerar a condição de cavitação, abordagem conhecida como Half-Sommerfeld (Figura 7.a). O tratamento da condição de cavitação foi aprimorado ainda mais por Swift (1931) e Stieber (1933) que propuseram que, além da pressão nula na região cavitada, o gradiente de pressão é nulo na fronteira de ruptura do filme de óleo. Essa condição também é conhecida como condição de Reynolds, sendo ainda muito utilizada e resultando em distribuições de pressão análogas a apresentada na Figura 7.b. Esse tratamento normalmente é utilizado em conjunto com o algoritmo iterativo de Christopherson (1941) para localização da fronteira de ruptura do filme, pois nessa abordagem a fronteira não ocorrerá necessariamente na seção da espessura mínima de lubrificante (Brito, 2009; Ramos, 2019). Apesar de apresentar bons resultados quanto à distribuição de pressão e à capacidade de carga do mancal, esse modelo não garante a conservação de massa na fronteira de reformação e, portanto, não reproduz os fluxos de lubrificante de forma realista.

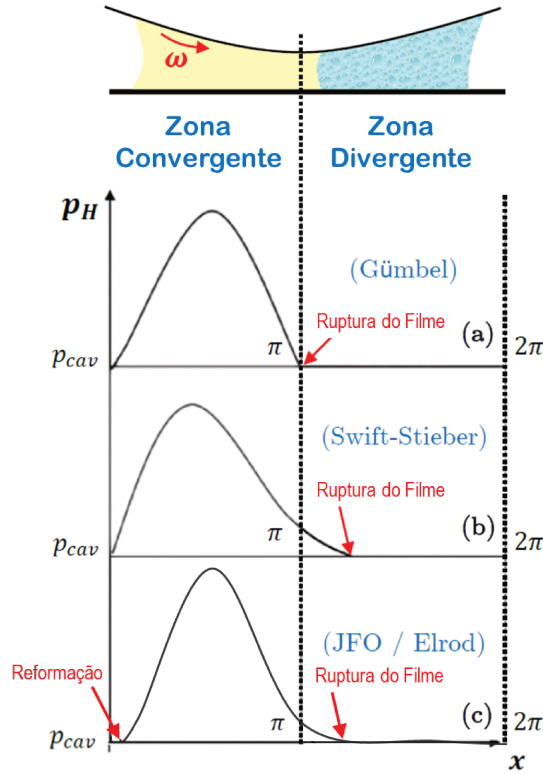


Figura 7: Distribuição ilustrativa da pressão hidrodinâmica pelo modelo de lubrificação de Reynolds com diferentes condições de cavitação. Adaptado de Profito e Zachariadis (2015).

Assim, Jacobson (1957), Floberg (1973) e Olsson (1965) desenvolveram uma teoria, denominada como teoria JFO, que visa garantir a conservação de massa ao longo de todo o domínio do mancal. A teoria JFO aborda o mancal através de duas regiões, sendo a região de filme completo, na qual a equação de Reynolds se aplica, e a região cavitada, na qual existe uma mistura de óleo lubrificante e outros gases com pressão constante e igual à pressão de ruptura. Além disso, a variável  $\theta$  é definida como a fração volumétrica da folga ocupada pelo lubrificante na fase líquida. Dessa forma,  $\theta$  é igual a unidade na região de filme completo, enquanto na região cavitada  $\theta$  é menor que a unidade. A fração da folga ocupada por gases e vapores equivale a  $(1 - \theta)$  e é chamada de *void-fraction*.

Uma vez que a pressão na região cavitada é constante, os termos de fluxo de Poiseuille serão nulos e o fluxo de uma quantidade  $\theta$  de lubrificante, disposta em estrias que aderem às superfícies do mancal e do eixo, será somente devido ao arrasto (termo de Couette). Assim sendo, o fluxo por unidade de comprimento na região cavitada é representado por (Ramos, 2019):

$$Q''_x = \frac{\theta U h}{2}, \quad \text{com } 0 < \theta < 1 \quad (18)$$

A teoria JFO adota as mesmas condições propostas pela condição Swift-Stieber para a ruptura do filme, isso é:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \text{com } P = P_{rup} \quad (19)$$

Por fim, para garantir a conservação de massa no domínio, também é necessário obedecer a Equação (20) na fronteira de reformação do filme de lubrificante.

$$-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{U}{2} = \frac{U}{2} \theta \quad (20)$$

Apesar da difícil implementação, as condições presentes na teoria de JFO são amplamente aceitas e empregadas, resultando em distribuições de pressão como na Figura 7.c. O Apêndice I mostra uma comparação entre resultados obtidos utilizando condição de cavitação de Reynolds e os obtidos utilizando as condições adotadas na teoria JFO, sinalizando quais as principais diferenças e semelhanças entre as abordagens.

### 3.4 Algoritmo de Elrod

Em 1974, Elrod e Adams propuseram um modelo capaz de resolver a distribuição de pressão em todo o domínio do mancal considerando a conservação de massa. Como resultado, eles obtiveram uma equação “universal”, válida para todo mancal, que localiza as fronteiras de ruptura e reformação em concordância com a teoria JFO. O aprimoramento do modelo de Elrod e Adams (1974) foi realizado por Elrod (1981), que obteve um algoritmo mais preciso e com melhor desempenho numérico, sendo conhecido como Algoritmo de Cavitação de Elrod.

O modelo considera a pequena compressibilidade dos fluidos lubrificantes, definindo uma variável para a densidade relativa do fluido:

$$\theta = \frac{\rho}{\rho_{rup}} \quad (21)$$

Onde  $\rho_{rup}$  é a densidade do fluido correspondente à pressão de ruptura. A relação da pressão no fluido com a variável  $\theta$  se dá através da definição do módulo volumétrico  $\beta$  (*Bulk modulus*):

$$\beta = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (22)$$

No modelo de Elrod, a definição de  $\theta$  como densidade relativa do fluido só é válida na região de filme completo, ou seja, quando  $\rho \geq \rho_{rup}$  e  $\theta \geq 1$ . Na região cavitada, o significado de  $\theta$  se mantém como definido na teoria de JFO, ou seja, a fração de lubrificante na fase líquida.

A fim de construir uma equação válida ao longo de todo o mancal, define-se uma função *switch*, responsável por automaticamente mudar a forma da equação de acordo com a região e o significado de  $\theta$ .

$$g = \begin{cases} 1 & \text{quando } \theta \geq 1 \text{ (filme completo)} \\ 0 & \text{quando } \theta < 1 \text{ (filme cavitado)} \end{cases} \quad (23)$$

Através das Equações (22) e (23) é possível reescrever as derivadas parciais da pressão como derivadas parciais de  $\theta$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = g \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = g \frac{\beta}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (24)$$

Dessa forma, a equação clássica de Reynolds (Equação (17)) pode ser reformulada em função de  $\theta$  como:

$$\frac{\partial(h\theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h\theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} g\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} g\beta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \quad (25)$$

Além disso, a obtenção do campo de pressão a partir de  $\theta$  é facilmente realizada através da integração da Equação (22) em conjunto com a definição da função *switch* (Equação (23)):

$$P = P_{rup} + g\beta \ln(\theta) \cong P_{rup} + g\beta(\theta - 1) \quad (26)$$

Vale destacar que a aproximação feita na Equação (26) é válida uma vez que a densidade relativa do fluido assume valores ligeiramente maiores que a unidade.

É necessário observar que o modelo proposto por Elrod (1981) foi deduzido para mancais operando em regime permanente, ou seja, desconsiderando o primeiro termo da Equação (25). No entanto, como o presente trabalho visa analisar tanto o comportamento estático como o comportamento dinâmico do rotor no mancal, uma abordagem mais abrangente foi desenvolvida. Além disso, ressalta-se que, apesar do artifício da

compressibilidade utilizado por Elrod e Adams (1974) na Equação (21), o modelo final de Elrod (1981) é na realidade incompressível, logo, o módulo volumétrico utilizado não influencia o resultado do problema, mas apenas o tempo computacional da solução (Miranda, 1983; Brito, 2009).

Elrod (1981) também elaborou um algoritmo adequado para a solução da Equação (25) baseado em volumes de controle, nos quais o princípio de conservação de massa foi aplicado tendo em vista o esquema de diferenciação considerado para cada região. A estratégia adotada pelo Algoritmo de Cavitação de Elrod se mostrou muito promissora, uma vez que, através de uma única equação, soluciona  $\theta$  para todo o mancal e encontra as fronteiras de ruptura e reformação de forma implícita, automática e de acordo com a teoria JFO.

Por fim, vale enfatizar que o Algoritmo de Cavitação de Elrod se mostrou superior em relação ao modelo clássico de Reynolds quanto à representação da lubrificação hidrodinâmica quando considerado a rugosidade do mancal (Rao e Sawicky, 2005; Bayada et al., 2006) e a presença de texturas (Ausas et al., 2007), assim como na predição das vazões de lubrificante (Paranjpe e Goenka, 1990), mostrando-se adequado para as análises que demandam um modelo realístico dos fluxo de óleo, como as análises de condição de lubrificação e de *starvation*. Destaca-se ainda que, por se tratar de um método com conservação de massa, é necessário especificar uma fonte de lubrificante como condição de contorno do problema, de forma que o fluxo de entrada esteja em equilíbrio mássico com o fluxo de saída.

### 3.5 Formulação por Vijayaraghavan e Keith

Vijayaraghavan e Keith (1989) modificaram o Algoritmo de Cavitação de Elrod a fim de aprimorar a convergência do modelo, considerando um esquema de diferenciação diferente para cada região do domínio do mancal.

O trabalho proposto por Vijayaraghavan e Keith (1989) destaca que a Equação (25) assume a forma de uma equação diferencial parcial elíptica na região de filme completo ( $g = 1$ ) e hiperbólica na região cavitada ( $g = 0$ ), portanto, o esquema de diferenciação adequado é o esquema de diferenças centrais na região de filme completo e esquema *upwind* na região cavitada.



Para implementar a mudança automática entre os esquemas de diferenciação de acordo com a região do mancal, Vijayaraghavan e Keith (1989) utiliza a inserção de um termo de viscosidade artificial no termo de Couette, técnica comumente utilizada na simulação de fluxos transônicos. Assim, o termo de Couette é reescrito como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h\theta \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( h\theta - \mu_a \frac{\partial(h\theta)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (27)$$

Onde  $\mu_a$  é o termo de viscosidade artificial definido como:

$$\mu_a = \begin{cases} 0 & \text{quando } \theta \geq 1 \text{ (filme completo)} \\ 1 & \text{quando } \theta < 1 \text{ (filme cavitado)} \end{cases} \quad (28)$$

A modificação proposta altera a abordagem dos termos de Couette, passando a considerar os efeitos da compressibilidade desse fluxo, o que torna o algoritmo dependente do módulo volumétrico adotado, ao contrário do observado para o Algoritmo de Cavitação de Elrod. Vijayaraghavan e Keith (1989) não propõem modificações nos demais termos do Algoritmo de Elrod. Exemplos da influência da compressibilidade do lubrificante nos modelos de Elrod (1981) e Vijayaraghavan e Keith (1989) estão mostrados no Apêndice II.

### 3.6 Formulação P- $\theta$

O modelo  $p - \theta$  proposto por Ausas et al. (2009) se baseia nos mesmos conceitos da formulação de Elrod, isto é, imposição das condições da teoria JFO na equação de Reynolds para garantia da conservação de massa em todo domínio. A diferença dos métodos consiste que o modelo  $p - \theta$  possui duas variáveis desconhecidas: a variável  $P$  da pressão, presente nos termos de Poiseuille; e a variável  $\theta$  que representa somente a fração volumétrica e assume valores entre zero e um, presente nos termos de Squeeze e Couette. Dessa forma, o modelo dispensa o uso da função *switch* e do módulo volumétrico  $\beta$  e a Equação (25) pode ser reformulada como:

$$\frac{\partial(h\theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h\theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad (29)$$

Onde as condições de cavitação aplicadas a cada iteração são:

$$\begin{cases} \theta = 1 & \text{quando } P > P_{rup} \quad (\text{filme completo}) \\ P = P_{rup} & \text{quando } \theta < 1 \quad (\text{filme cavitado}) \end{cases} \quad (30)$$

Novamente as fronteiras de ruptura e cavitação são automaticamente encontradas. O esquema de diferenciação utilizado na solução numérica é o de diferenças centradas nos termos do fluxo de Poiseuille e *upwind* no termo de Couette, por se tratarem de termos de difusão e convecção, respectivamente.

Apesar das semelhanças entre a formulação de Elrod e a  $p - \theta$ , as mudanças na implementação resultam em diferenças relevantes na convergência do problema iterativo e o modelo  $p - \theta$  se mostra mais estável. O Apêndice II apresenta uma comparação entre os três modelos de cavitação com conservação de massa apresentados, isto é, modelo de Elrod (1981), modelo de Vijayaraghavan e Keith (1989) e o modelo  $p - \theta$  (Ausas et al., 2009), indicando que, de fato, todos apresentam resultados equivalentes.

### 3.7 Condição de Lubrificação Insuficiente (*Oil Starvation*)

Quando o lubrificante é fornecido a uma taxa suficiente para preencher toda a folga radial na região do *groove*, considera-se que o mancal opera com condição de lubrificação inundada, também chamada de lubrificação *flooded*. Se a vazão de entrada de lubrificante for menor que o necessário para essa condição, então o mancal está operando em condições insuficientes de lubrificação, o que é comumente chamado de *starvation* (Bonneau e Frene, 1983; He et al., 2005).

Em um mancal com *starvation* não há formação de filme hidrodinâmico na região de entrada do lubrificante, uma vez que a vazão de entrada não é suficiente para ocupar a folga da região. Contudo, com a diminuição da espessura na direção circunferencial, o lubrificante preenche toda a folga radial, promovendo a formação de filme e, conseqüentemente, o desenvolvimento de um gradiente de pressão, que leva o lubrificante a se espalhar lateralmente até preencher toda largura do mancal, como ilustrado na Figura 8.

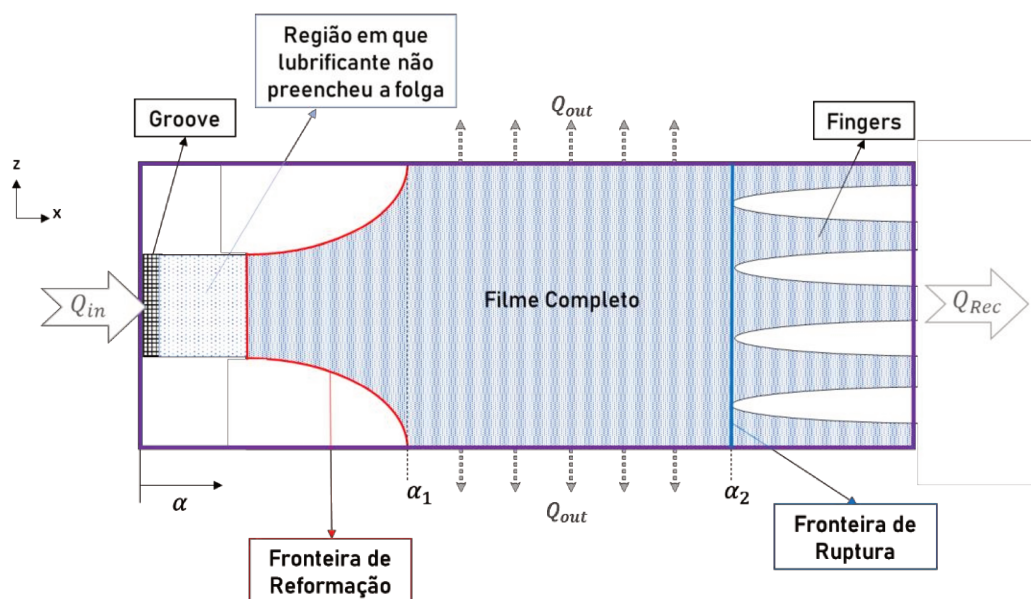


Figura 8: Vista aberta do plano xz de um mancal ilustrando uma condição de lubrificação insuficiente (*starvation*).

A Figura 8 mostra a vazão de fluxo de entrada  $Q_{in}$  através do *groove*, porém, devido à *starvation*, só haverá formação de filme completo mais a jusante. A região de pressão hidrodinâmica se estende desde a fronteira de reformaço até a fronteira de ruptura, mas é só na região  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  que o fluido preenche toda largura do mancal e que haverá vazão lateral  $Q_{out}$ . Após a fronteira de ruptura o fluido cavitava e há uma mistura de líquido e gases que é transportada por convecção na forma de *fingers*. Devido à ausência de gradiente de pressão, não há vazão lateral nessa região, portanto todo fluido cavitado recircula e se soma ao fluxo de entrada.

Os estudos e análises de mancais hidrodinâmicos normalmente são realizados considerando um fornecimento adequado de lubrificante, ou seja, na condição de lubrificação inundada. No entanto, os mancais frequentemente operam sob condições insuficientes de lubrificação, devido a problemas como entupimento do filtro de óleo, vazamento, subdimensionamento ou mal funcionamento das bombas de óleo, altas rotações de operação ou até mesmo a inviabilidade do fornecimento da vazão adequada (Artiles e Heshmat, 1985). Dessa forma, salienta-se a importância de estudar o fenômeno da *starvation* para avaliar sua influência no comportamento sob condição estática e dinâmica do mancal, assim como para estimar quais níveis de *starvation* podem ser aceitáveis e desenvolver sistemas de controle para o suprimento de lubrificante ou mesmo um sistema para alertar sobre a necessidade de uma inspeção no conjunto de alimentação.

A modelagem dos mancais hidrodinâmicos em condições de *starvation* pode ser baseada na abordagem de Reynolds ou nas abordagens com conservação de massa para resolver a distribuição de pressão.

Os trabalhos de Etsion e Pinkus (1974 e 1975) foram os primeiros a propor uma abordagem para analisar mancais operando com filmes incompletos na região de entrada do lubrificante através da solução conjunta da Equação de Reynolds e das equações das vazões de lubrificante. Para a obtenção das equações das vazões volumétricas em cada direção, basta integrar a equação da velocidade do fluido na área normal à sua direção. Dessa forma, para obter a vazão na direção circunferencial em uma dada seção de  $x$ ,  $q_x(x)$ , integra-se a Equação (9) ao longo da espessura do filme lubrificante, em  $y$ , e ao longo da largura do mancal, em  $z$ :

$$q_x(x) = \int_0^L \int_0^h v_x dy dz = \int_0^L \frac{Uh}{2} dz - \frac{h^3}{12\mu} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial x} dz \quad (31)$$

A vazão na direção axial é calculada de forma análoga, ou seja, integrando a Equação (10) ao longo do plano  $xy$ . Considerando a simetria do mancal e o fato que o fluxo axial deve ser constante em qualquer seção de  $z$  para respeitar a conservação de massa, tem-se que a análise do fluxo axial em uma borda do mancal equivale à metade da vazão lateral total:

$$Q_{out} = 2q_z|_{z=L} = 2 \int_0^{\pi D} \int_0^h v_z dy dx = - \int_0^{\pi D} \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{z=L} \quad (32)$$

Etsion e Pinkus (1974 e 1975) e Gethin e Medwell (1985 e 1987) calcularam a largura efetiva do filme de óleo logo após o *groove* e analisaram sua influência no comportamento estático do mancal. Para isso, eles utilizaram a Equação de Reynolds e as equações de vazão apresentadas, considerando que o fluxo do filme de entrada deve ser equivalente ao fluxo prescrito somado ao fluxo de recirculação para que haja equilíbrio mássico.

Os trabalhos de Artiles e Heshmat (1985) e Tanaka (2000) também resolveram a equação de Reynolds em conjunto com as equações de vazão para analisar diferentes graus de *starvation*. Para isso, eles consideraram que a formação de pressão só pode ocorrer após a seção circunferencial ( $\alpha_1$ ) em que a vazão de entrada é maior que a vazão necessária calculada, análise que exige um dispendioso processo iterativo. Estes estudos

mostraram que a capacidade de carga do mancal diminui com a escassez de lubrificante e que o grau de *starvation* aumenta com a velocidade de rotação do rotor, isto é, a formação de filme completo dar-se-á mais à jusante. Tanaka (2000) comparou seu modelo com resultados experimentais obtidos utilizando um mancal radial transparente, obtendo boa concordância. Artiles e Heshmat (1985) acoplaram a solução à equação da energia a fim de considerar a relação da viscosidade do fluido com a temperatura, concluindo que os efeitos da *starvation* aumentam significativamente quando os efeitos térmicos são considerados. Além disso, Artiles e Heshmat (1985) também analisaram os coeficientes equivalentes do mancal para diversos casos.

Já as análises de *starvation* utilizando os modelos com conservação de massa (como os citados nos capítulos anteriores) encontram a fronteira de reformação para uma dada vazão de entrada de lubrificante de forma intrínseca ao modelo, sem necessitar do processo iterativo, além de garantir uma melhor representatividade dos fluxos, como mencionado anteriormente. Essas análises foram realizadas por Elrod (1981), Vijayaraghavan et al. (1996) e Vincent e Frene (1995) através do controle do valor de  $\theta$  na região do *groove*, impondo valores menores que a unidade para representar condições de *starvation*.

A abordagem proposta no presente trabalho é analisar os casos *flooded* e *starvation* por meio do controle da vazão de entrada no *groove*, o que pode ser realizado alterando a natureza da condição de contorno do *groove* para uma condição de contorno de Neumann.

### 3.8 Coeficientes Dinâmicos

Analisando a equação de Reynolds completa, sabe-se que a pressão hidrodinâmica e, conseqüentemente, as forças hidrodinâmicas dependem não só da velocidade de rotação do eixo e das características do mancal, mas também da posição do eixo no mancal ( $e_x, e_y$ ) e da velocidade instantânea de translação do eixo no mancal ( $\dot{e}_x, \dot{e}_y$ ).

Devido a não linearidade da relação entre a força de sustentação com a posição e com a velocidade do eixo, a análise dinâmica do rotor exige a solução da distribuição de pressão e das forças para cada instante de tempo, demandando muito tempo computacional.

Contudo, Lund (1964, 1987) propôs que a relação da força hidrodinâmica com a posição e a velocidade do eixo pode ser assumida como linear, conforme descrito pelas Equações (33) e (34) obtidas através de uma expansão em série de Taylor até primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio estático.

$$F_x = F_{x0} + K_{xx}\Delta e_x + K_{xy}\Delta e_y + C_{xx}\Delta \dot{e}_x + C_{xy}\Delta \dot{e}_y \quad (33)$$

$$F_y = F_{y0} + K_{yx}\Delta e_x + K_{yy}\Delta e_y + C_{yx}\Delta \dot{e}_x + C_{yy}\Delta \dot{e}_y \quad (34)$$

Dessa forma, o filme lubrificante presente na cavidade do mancal comporta-se como um conjunto de molas e amortecedores lineares (Figura 9) cujos coeficientes de rigidez ( $K$ ) e amortecimento ( $C$ ) são as derivadas parciais das forças avaliadas na posição de equilíbrio:

$$\begin{aligned} K_{xx} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_0 & K_{xy} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_0 & K_{yx} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_0 & K_{yy} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_0 \\ C_{xx} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_0 & C_{xy} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_0 & C_{yx} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_0 & C_{yy} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_0 \end{aligned} \quad (35)$$

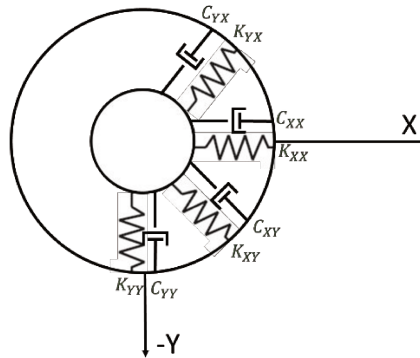


Figura 9: Ilustração do filme lubrificante representado como um conjunto de molas e amortecedores.

Os coeficientes de rigidez e amortecimento cuja perturbação e força associadas estão na mesma direção, são conhecidos como coeficientes diretos ou principais ( $K_{xx}, K_{yy}, C_{xx}$  e  $C_{yy}$ ), enquanto os que relacionam forças e perturbações em diferentes direções são chamados de coeficientes acoplados ou cruzados ( $K_{xy}, K_{yx}, C_{xy}$  e  $C_{yx}$ ) (Machado, 2011; Pedreira e Weber, 2006).

Os coeficientes são chamados de coeficientes equivalentes ou coeficientes dinâmicos do mancal e, uma vez calculados, podem ser acoplados a matriz de rigidez e amortecimento do rotor nos graus de liberdade correspondentes ao mancal, possibilitando

uma solução muito mais rápida e direta que na análise não linear. A acurácia dessa aproximação quando aplicada à abordagem clássica de Reynolds foi testada e aprovada para grande parte das aplicações usuais dos mancais hidrodinâmicos (Alves, 2018).

## 4. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho utilizou o Método dos Volumes Finitos para solução da equação de lubrificação de Reynolds pela formulação  $p - \theta$ , garantindo a conservação de massa do sistema. Diferentes condições de contorno foram impostas à região dos *grooves* para análise da influência dos parâmetros de entrada.

Uma vez concluído o modelo de lubrificação é possível obter as forças de sustentação do mancal e a posição de equilíbrio estático do eixo e, por fim, aplicar o método das perturbações para obter os coeficientes dinâmicos do mancal.

Dessa forma, o mancal é inserido na matriz de movimento do rotor como um conjunto de molas e amortecedores e o sistema é resolvido utilizando uma discretização do rotor pelo Método dos Elementos Finitos e o método de Runge-Kutta para integração numérica do problema no tempo.

A descrição detalhada de cada método e as etapas da solução são apresentados nos capítulos a seguir.

### 4.1 Método dos Volumes Finitos Aplicado na Solução da Equação de Reynolds

Dentre os diversos métodos clássicos de discretização para a solução de uma equação diferencial parcial, escolheu-se o Método dos Volumes Finitos (MVF) pois, além de acomodar bem a geometria do mancal e facilitar a imposição das condições de contorno, o método trabalha com a forma conservativa da equação, garantindo a conservação local das grandezas discretizadas.

Para isso, o MVF discretiza o domínio de interesse em volumes de tamanhos finitos e aproxima a integral da equação diferencial parcial dentro das fronteiras de cada um dos volumes, o que corresponde a realizar o balanço da grandeza conservada no volume de controle, assegurando o princípio da conservação em cada volume.

Para a aplicação do MVF no problema de lubrificação, realiza-se a discretização do filme de lubrificante através da divisão do domínio em um número finito de volumes de controle, como mostrado na Figura 10. A coordenada  $x$  varia ao longo do perímetro do mancal, que é dividido em  $N_x$  volumes de comprimento  $\Delta x$ , enquanto a coordenada  $z$  varia na direção axial do mancal, discretizada em  $N_z$  volumes de largura  $\Delta z$ . O filme não



é discretizado na direção  $y$ , uma vez que, segundo uma das premissas de Reynolds, o gradiente de pressão é nulo ao longo da espessura de filme.

$$\Delta x = \frac{2\pi R_m}{N_x - 1}; \quad \Delta z = \frac{L}{N_z - 1}; \quad (36)$$

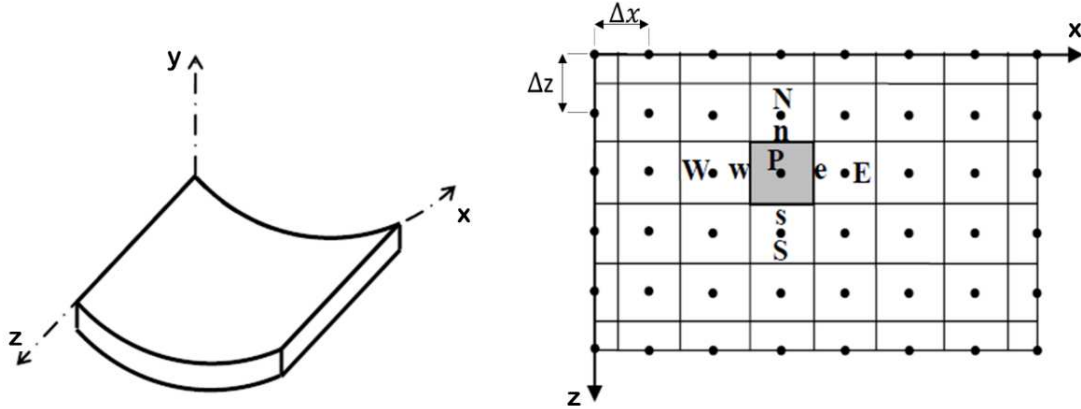


Figura 10: Representação do domínio discretizado para solução pelo método dos volumes finitos. Adaptado de Daniel (2012).

Observe na Figura 10 que os pontos representam os centros de cada volume de controle (*cell-centered volume*) e que cada volume interior possui quatro volumes vizinhos (W,E,S,N) limitados por quatro fronteiras ( $w, e, s, n$ ). As notações W, E, S, N indicam as direções oeste, leste, sul e norte, respectivamente.

O MVF pode ser empregado para solução da equação de lubrificação utilizando-se qualquer abordagem mencionada no Capítulo 3, a saber, abordagem clássica de Reynolds (1886), de Elrod (1981), de Vijayaraghavan e Keith (1989) e  $p-\theta$  (Ausas et al., 2009). Contudo, será demonstrada a sua aplicação com a formulação  $p-\theta$ , que foi a abordagem escolhida para obter os resultados deste trabalho, conforme justificado no Apêndice II.

Dessa forma, empregando o MVF na formulação  $p-\theta$  do modelo de lubrificação, calcula-se os valores da pressão e da fração de lubrificante no centroide de cada volume de controle através da integração numérica da Equação (29) ao longo do volume, que resulta em uma equação algébrica dependente dos valores nodais vizinhos para cada volume de controle (Schäfer, 2006):

$$\begin{aligned}
& \iint \left[ \frac{\partial(h\theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h\theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] dA = 0 \rightarrow \\
& \iint \frac{\partial(h\theta)}{\partial t} dA + \iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h\theta \right) dA - \iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dA \\
& \quad - \iint \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) dA = 0 \\
& \rightarrow Q_{sq} + Q_{Cou} - Q_{Poi_x} - Q_{Poi_z} = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

A integração da Equação (37) representa o balanço de fluxo volumétrico do volume de controle, que é equivalente ao balanço de massa, uma vez que o fluido é considerado incompressível. Para facilitar o equacionamento, cada termo de fluxo será analisado separadamente e posteriormente adicionado ao balanço de fluxo.

#### 4.1.1 Termo de Squeeze

O termo de *squeeze* é um termo fonte da equação devido ao comportamento transiente do fluido, associado com a velocidade do eixo e sua mudança de posição em cada instante. A integral do termo de *squeeze* na área do volume é avaliada explicitamente no centroide do volume, isto é (Profito e Zachariadis, 2015):

$$Q_{sq} = \iint \frac{\partial(h\theta)}{\partial t} dA = \frac{\partial(h\theta)}{\partial t} \bigg|_p \Delta x \Delta z \tag{38}$$

Empregando a regra do produto na derivada:

$$Q_{sq} = h_p \frac{\partial \theta_p}{\partial t} \Delta x \Delta z + \theta_p \frac{\partial h_p}{\partial t} \Delta x \Delta z = Q_{expansao} + Q_{esmagamento} \tag{39}$$

O primeiro termo, ou termo de expansão local, ocorre devido aos efeitos transientes associados com a variação da fração volumétrica e da área com filme cavitado (Profito e Zachariadis, 2015). Durante este trabalho desconsidera-se os efeitos transientes da fração volumétrica abrangidos por esse termo, uma vez que se assume que sua influência no fluxo total é ínfima. Essa abordagem possibilita a utilização dos coeficientes equivalentes para descrever o comportamento dinâmico do mancal com a aproximação linear proposta por Lund (1964, 1987).

O fluxo do segundo termo é provocado pela variação da espessura de filme no tempo, ou seja, devido à velocidade normal da superfície do eixo,  $V$ , que causa o

esmagamento do filme de óleo, e é modelado em função das velocidades de translação do centro do eixo ( $\dot{e}_x$  e  $\dot{e}_y$ ).

#### 4.1.2 Termo de Couette

A integração do termo de Couette no volume de controle representa o fluxo que entra no volume devido à convecção:

$$\begin{aligned} Q_{Cou} &= \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{2} h \theta \right) dx dz = \frac{U \Delta z}{2} h_e \theta_e - \frac{U \Delta z}{2} h_w \theta_w \\ &= Q_{Cou_e} - Q_{Cou_w} \end{aligned} \quad (40)$$

Portanto, o fluxo total de Couette saindo do volume é igual ao fluxo de Couette na fronteira leste menos o fluxo de Couette na fronteira oeste. Como os valores de  $\theta$  não são avaliados nas fronteiras, eles devem ser aproximados para o valor de  $\theta$  do volume à montante da fronteira considerada, esquema conhecido como *upwind* e indicado para o tratamento de termos convectivos.

#### 4.1.3 Termos de Poiseuille

O fluxo volumétrico de lubrificante devido ao gradiente de pressão na direção  $x$  é dado por:

$$\begin{aligned} Q_{Poi_x} &= \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dz \\ &= \Delta z \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_e - \Delta z \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_w = Q_{Poi_e} - Q_{Poi_w} \end{aligned} \quad (41)$$

Novamente, o fluxo total de Poiseuille na direção  $x$  é igual a diferença dos fluxos nas fronteiras leste e oeste. Como o fluxo de Poiseuille é difusivo, as derivadas parciais da pressão na expressão do fluxo são aproximadas pelo método da diferença central em torno de cada fronteira.

O cálculo do fluxo de Poiseuille na direção  $z$  é realizado de maneira análoga, ou seja, pela diferença dos fluxos entre as fronteiras norte e sul do volume.

#### 4.1.4 Balanço de Fluxo e Condição de Cavitação

Com todos fluxos definidos, pode-se reescrever o balanço de fluxo volumétrico da Equação (37) como mostrado na Equação (42) e representado na Figura 11.

$$Q_{sq} + Q_{cou} - Q_{poi_x} - Q_{poi_z} = 0 \rightarrow$$

$$Q_{sq} + Q_{cou_e} - Q_{cou_w} - Q_{poi_e} + Q_{poi_w} - Q_{poi_n} + Q_{poi_s} = 0 \rightarrow \quad (42)$$

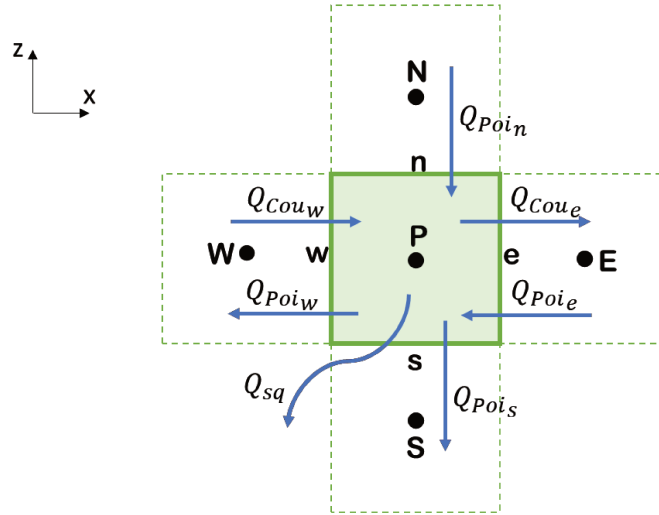


Figura 11: Balanço de fluxo para o volume de controle P.

Substituindo as aproximações numéricas de cada fluxo na Equação (42), obtém-se uma equação algébrica para cada volume de controle dependente dos valores nodais vizinhos através da qual é possível calcular os valores da pressão e da fração líquida de lubrificante no centroide do volume.

A fim de levar em conta as condições de cavitação do modelo, avalia-se a pressão do volume somente na região de filme completo, caso contrário impõe-se que  $P_p$  é igual a pressão de ruptura. Já a fração volumétrica  $\theta_p$  é calculada nos volumes de controle da região cavitada e é igual a unidade na região de filme completo. A aplicação do balanço de fluxo e das condições de cavitação para todos os volumes de controle da malha resulta em um sistema de equações que, neste trabalho, é resolvido pelo método iterativo de Gauss-Seidel, como esquematizado na Figura 12.

Uma vez convergidos os campos de pressão e de fração volumétrica, é possível calcular as forças hidrodinâmicas através da integração numérica do campo de pressão:

$$F_X = \int_0^{2\pi R} \int_0^L P(x, z) \cos(\alpha) dz dx = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_z} P_{i,j} \cos(\alpha_i) \Delta x \Delta z$$

$$F_Y = \int_0^{2\pi R} \int_0^L -P(x, z) \sin(\alpha) dz dx = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_z} -P_{i,j} \sin(\alpha_i) \Delta x \Delta z$$
(43)

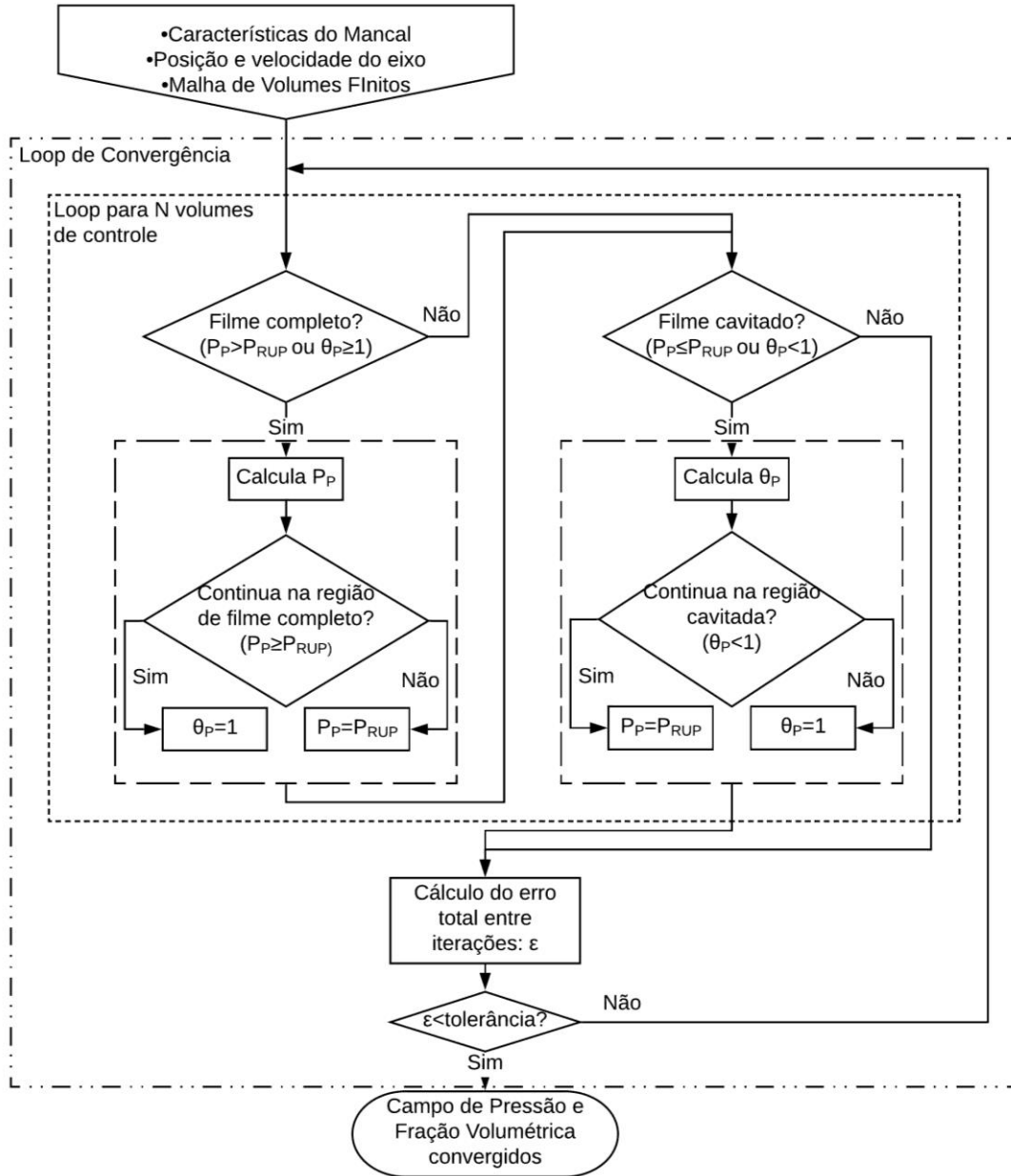


Figura 12: Fluxograma do processo iterativo da formulação p-θ.

#### 4.1.5 Condições de Contorno

Para que o sistema tenha solução, é necessário especificar as condições de contorno do problema. Primeiramente, considera-se que as laterais do mancal estão à

pressão atmosférica, o que equivale a aplicar condições de contorno de pressão igual a zero nos volumes de controle da borda. Além disso, determina-se que a primeira e a última coluna de volumes da direção  $x$  são iguais, a fim de impor a condição de circularidade do mancal, assegurando a continuidade da malha.

Uma vez que o modelo é conservativo e há vazão de saída de lubrificante pelas laterais do mancal, também deve haver entrada de lubrificante para que seja garantido o equilíbrio mássico do sistema. Essa entrada de lubrificante ocorre através dos *grooves*, conjunto de furos e ranhuras por onde o óleo é fornecido. Os *grooves* são modelados como um conjunto de volumes de controle nos quais é imposta a condição de contorno de entrada de óleo, que pode ser tanto a pressão de alimentação como a taxa de admissão de lubrificante.

Usualmente impõe-se uma pressão de alimentação,  $P_f$ , como condição de contorno de Dirichlet nos volumes do *groove*, resultando em uma vazão de entrada que também será dependente de outros fatores. A pressão de alimentação imposta pode ser positiva, indicando que o lubrificante é injetado com a pressão fixada, ou pode ser nula, o que corresponde a preencher a folga do mancal na região do *groove* com lubrificante, fornecendo-o com pressão atmosférica.

$$\begin{cases} \text{Volume no groove:} & P_p = P_f \text{ e } \theta_p = 1 \\ \text{Volume fora do groove:} & P_p \text{ e } \theta_p \text{ determinados pelo MVF} \end{cases} \quad (44)$$

Contudo, essa abordagem não garante um controle preciso da vazão de entrada e nem permite que o lubrificante seja admitido a uma taxa insuficiente para preencher a folga do mancal, condição necessária para avaliar *starvation*. Em vista disso, desenvolveu-se um modelo de condição de contorno no qual a vazão de entrada é definida através do acréscimo de um termo fonte na equação do balanço de fluxo dos volumes contidos no *groove*.

$$Q_{sq} + Q_{Cou_e} - Q_{Cou_w} - Q_{Poi_e} + Q_{Poi_w} - Q_{Poi_n} + Q_{Poi_e} - Q_{fonte} = 0 \quad (45)$$

Salienta-se que os *grooves* simulados apresentam geometria retangular especificada por seu comprimento  $b$  e sua largura  $a$ , como representado na Figura 13. Portanto, a geometria do *groove* é aproximada pela união de  $N_g$  volumes de controle, de forma que:

$$N_g = \text{round} \left( \frac{\text{Área do groove}}{\Delta x \Delta z} \right) \quad (46)$$

Dessa forma, a vazão total de lubrificante a ser admitida,  $Q_{in}$ , deve ser dividida igualmente entre os  $N_g$  volumes de controle do groove, logo:

$$Q_{fonte} = \frac{Q_{in}}{N_g} \quad (47)$$

#### 4.1.6 Cálculo das Vazões de Entrada e Saída

A fim de garantir que a vazão de entrada desejada esteja correta ou com o intuito de calcular a vazão de entrada em um mancal cuja pressão de alimentação  $P_f$  seja especificada, modela-se todo o *groove* como um sistema aberto no qual se aplica o balanço de fluxos, como esquematizado na Figura 13. Dessa forma, calcula-se a vazão de entrada no *groove*, modelado como um volume de controle:

$$Q_{in} = Q_{leste} - Q_{oeste} + Q_{norte} - Q_{sul} \quad (48)$$

Para assegurar que a conservação é respeitada no mancal, a vazão de saída do lubrificante pelas laterais do mancal deve ser igual a vazão de entrada. O cálculo da vazão de saída é feito pela integral da velocidade axial na borda do mancal, como indicado na Equação (32).

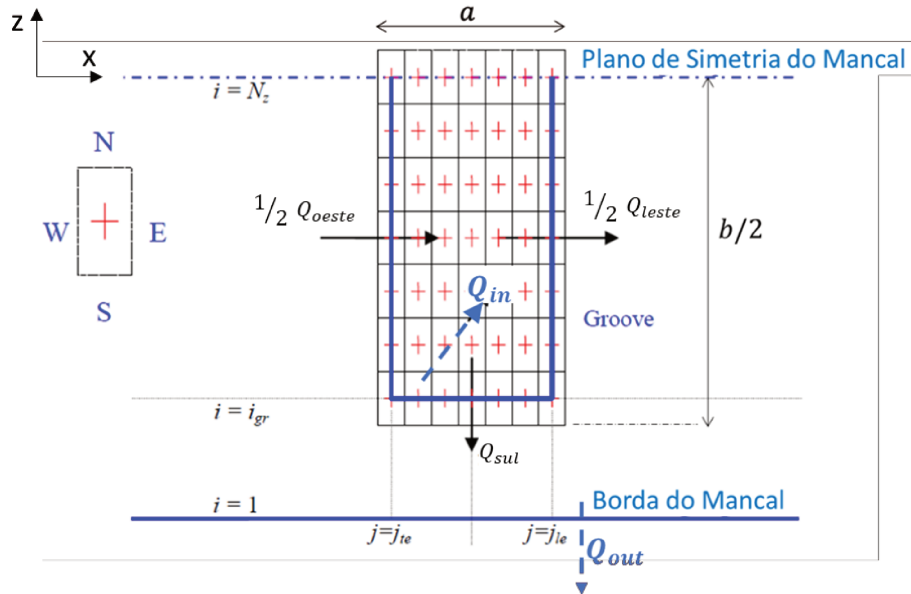


Figura 13: Balanço de fluxos no groove, modelado como um volume de controle.

#### 4.1.7 Busca da Posição de Equilíbrio Estático

Uma vez que o algoritmo para estimar o campo de pressão e as forças hidrodinâmicas está pronto, é possível encontrar a posição de equilíbrio estático. Primeiramente, é preciso esclarecer que na análise estática os termos variantes com o tempo são nulos ( $\partial/\partial t = 0$ ), logo, o termo de *squeeze* é zero. Dito isso, define-se a posição de equilíbrio estático como a localização do eixo no mancal ( $e_{x_0}, e_{y_0}$ ) na qual as forças hidrodinâmicas, obtidas pela análise estática, entram em equilíbrio com a carga estática aplicada no rotor.

A determinação da posição de equilíbrio estático é importante, pois, além de necessária para o cálculo dos coeficientes dinâmicos, também define a posição do centro de órbita de vibração do eixo no carregamento dinâmico e sinaliza a capacidade de carga do mancal.

No caso estudado, a carga estática do rotor é igual a força peso nos mancais,  $W$ , logo, procura-se a posição em que  $F_X$  seja nulo e  $F_Y$  seja igual e em sentido contrário a  $W$ . A busca pela posição de equilíbrio é feita através do método de Newton-Raphson, variando  $e_{x_0}$  e  $e_{y_0}$  e buscando minimizar o erro relativo da força,  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \left\| \frac{F_X}{W}, \frac{F_Y - W}{W} \right\| \quad (49)$$

A Figura 14 ilustra o lócus do eixo, que é o lugar geométrico formado pela localização da posição de equilíbrio com o aumento da velocidade de rotação, mostrando a melhora da capacidade de carga com o aumento da rotação.

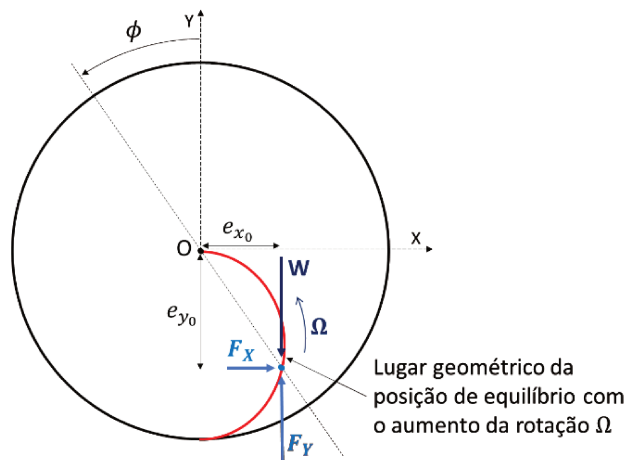


Figura 14: Representação do lócus de um mancal hidrodinâmico.



#### 4.1.8 Cálculo dos Coeficientes Equivalentes

Após encontrar a posição de equilíbrio estático, calcula-se os coeficientes dinâmicos do mancal a fim de considerar sua contribuição na rigidez e no amortecimento do sistema. A hipótese da linearidade das forças hidrodinâmicas para pequenas perturbações em torno da condição de equilíbrio é admitida, como modelado pelas Equações (33) e (34).

A obtenção dos coeficientes é realizada pela solução numérica da Equação (35) pelo método das diferenças finitas centradas em relação a posição de equilíbrio. Assim, aplica-se perturbações isoladamente em cada direção e também em cada sentido da posição de equilíbrio, obtendo as forças hidrodinâmicas resultantes, que são usadas para calcular os coeficientes de rigidez:

$$\begin{aligned}
 K_{xx} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_0 \approx \frac{F_x^{e_{x0}+\Delta e_x, e_{y0}} - F_x^{e_{x0}-\Delta e_x, e_{y0}}}{2\Delta e_x} \\
 K_{xy} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_0 \approx \frac{F_x^{e_{x0}, e_{y0}+\Delta e_y} - F_x^{e_{x0}, e_{y0}-\Delta e_y}}{2\Delta e_y} \\
 K_{yx} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_0 \approx \frac{F_y^{e_{x0}+\Delta e_x, e_{y0}} - F_y^{e_{x0}-\Delta e_x, e_{y0}}}{2\Delta e_x} \\
 K_{yy} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_0 \approx \frac{F_y^{e_{x0}, e_{y0}+\Delta e_y} - F_y^{e_{x0}, e_{y0}-\Delta e_y}}{2\Delta e_y}
 \end{aligned} \tag{50}$$

Onde o sobrescrito de  $F$  indica a posição do eixo para qual a força foi calculada, o subscrito de  $F$  indica a direção da força resultante e  $\Delta e_x$  e  $\Delta e_y$  são as perturbações aplicadas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

De maneira análoga, obtém-se os coeficientes de amortecimento através de perturbações na velocidade ( $\Delta \dot{e}_x$  e  $\Delta \dot{e}_y$ ), lembrando que no equilíbrio estático as velocidades eram nulas, logo:

$$\begin{aligned}
 C_{xx} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_0 \approx \frac{F_x^{\Delta \dot{e}_x} - F_x^{-\Delta \dot{e}_x}}{2\Delta \dot{e}_x} \\
 C_{xy} &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_0 \approx \frac{F_x^{\Delta \dot{e}_y} - F_x^{-\Delta \dot{e}_y}}{2\Delta \dot{e}_y}
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$C_{yx} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_0 \approx \frac{F_y^{\Delta \dot{e}_x} - F_y^{-\Delta \dot{e}_x}}{2\Delta \dot{e}_x}$$

$$C_{yy} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_0 \approx \frac{F_y^{\Delta \dot{e}_y} - F_y^{-\Delta \dot{e}_y}}{2\Delta \dot{e}_y}$$

Estes coeficientes podem ser acoplados às matrizes de rigidez e amortecimento do rotor, representando a influência dos mancais na resposta dinâmica dos rotores.

## 4.2 Modelagem do Rotor pelo Método dos Elementos Finitos

Uma vez que o comportamento do mancal hidrodinâmico foi compreendido e modelado, é necessário expandir a análise para todo o rotor de forma a avaliar o comportamento do sistema rotor-mancais. É a partir da análise rotodinâmica do conjunto que estima-se os parâmetros essenciais do projeto de rotores, como as velocidades críticas, em que a frequência de operação excita a frequência natural do sistema, e o limiar de estabilidade, que define a velocidade limite de operação do sistema devido ao surgimento de vibrações auto-excitadas (Pedreira e Weber, 2006).

O modelo do rotor desenvolvido se baseia na configuração e coordenadas mostradas na Figura 15. O problema é analisado no referencial inercial  $XYZ$ , sendo  $X$  o eixo horizontal,  $Y$  o eixo vertical e  $Z$  o eixo axial coincidente com a linha de centro do rotor não deformado, ou seja, é o mesmo utilizado na análise do mancal (Figura 4). O referencial móvel  $X'Y'Z'$  é determinado por uma rotação  $\omega t$  em torno do eixo  $Z$ , com  $\omega$  igual a velocidade de rotação do rotor (velocidade de precessão).

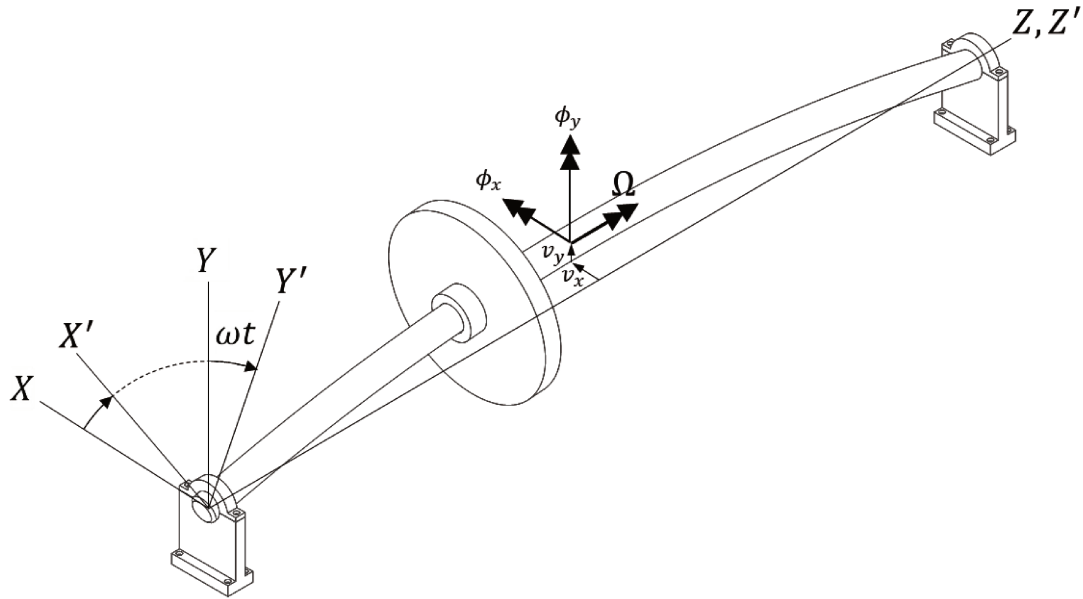


Figura 15: Exemplo da configuração de um sistema rotativo.

A análise de um rotor contínuo poder ser realizada pela teoria de vibração transversal da viga de Euler-Bernoulli, pois o material é homogêneo e elástico e a dimensão do comprimento é muito maior que as demais dimensões. Dessa forma, o modelo empregado considera as deformações axiais e torcionais como desprezíveis e as deformações transversais como pequenas, de forma que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares à linha neutra após a deformação (Pedreira e Weber, 2006). Portanto, o ângulo de rotação própria do rotor é dado por  $\Omega t$ , sendo  $\Omega$  a velocidade de rotação própria do rotor (rotação *spin*) (Alves, 2018).

Neste trabalho o problema é resolvido numericamente pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste na discretização do domínio em subdomínios contínuos localmente, conhecidos como elementos finitos. Cada elemento é delimitado por nós que possuem graus de liberdade que definem o movimento do sistema. O modelo de máquina rotativa desenvolvido inclui o rotor, modelado como elementos de viga, discos, adicionados como elementos de disco e os mancais, representados por um conjunto de molas e amortecedores lineares. Alguns subsistemas comuns de máquinas rotativas não foram considerados no modelo, como os acoplamentos, os selos de fluxo e a fundação.

No MEF a equação de movimento de cada elemento é aproximada por uma combinação de polinômios, chamados de funções de forma. Essas funções e suas derivadas possuem propriedades que garantem a condição de continuidade nas interfaces dos elementos, de modo que a solução seja compatível nos nós compartilhados por mais

de um elemento (Pedreira e Weber, 2006; Bittencourt, 2014). Cada grau de liberdade do sistema,  $q_i$ , possui uma equação de movimento que pode ser obtida pela equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (52)$$

Onde  $T$  representa a energia cinética do sistema,  $U$  é a energia de deformação,  $R$  a dissipação de energia e  $F_i$  é a força generalizada atuando sobre o grau de liberdade  $i$ . Segundo Nelson e McVaugh (1976), os termos de energia do sistema podem ser escritos como:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} - \Omega \{\dot{q}\}^T [G] \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} I_p \Omega^2 \quad (53)$$

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (54)$$

$$R = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [C] \{\dot{q}\} \quad (55)$$

Onde  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[G]$  e  $[C]$  são as matrizes de massa, rigidez, giroscópica e de amortecimento do sistema global e  $I_p$  é o momento polar de inércia. Substituindo as Equações (53) a (55) na equação de movimento (Equação (52)) para todos graus de liberdade, obtém-se um sistema de equações que determina a resposta dinâmica do sistema:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C + \Omega G] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (56)$$

A construção das matrizes e vetores globais  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[G]$ ,  $[C]$  e  $\{F\}$  é realizada pela sobreposição das matrizes e vetores dos elementos de eixos, de discos e de mancais nos respectivos graus de liberdade, como ilustrado na Figura 16. As matrizes dos elementos são mostradas no Apêndice III, porém o procedimento de dedução pode ser consultado no trabalho de Nelson e McVaugh (1976).

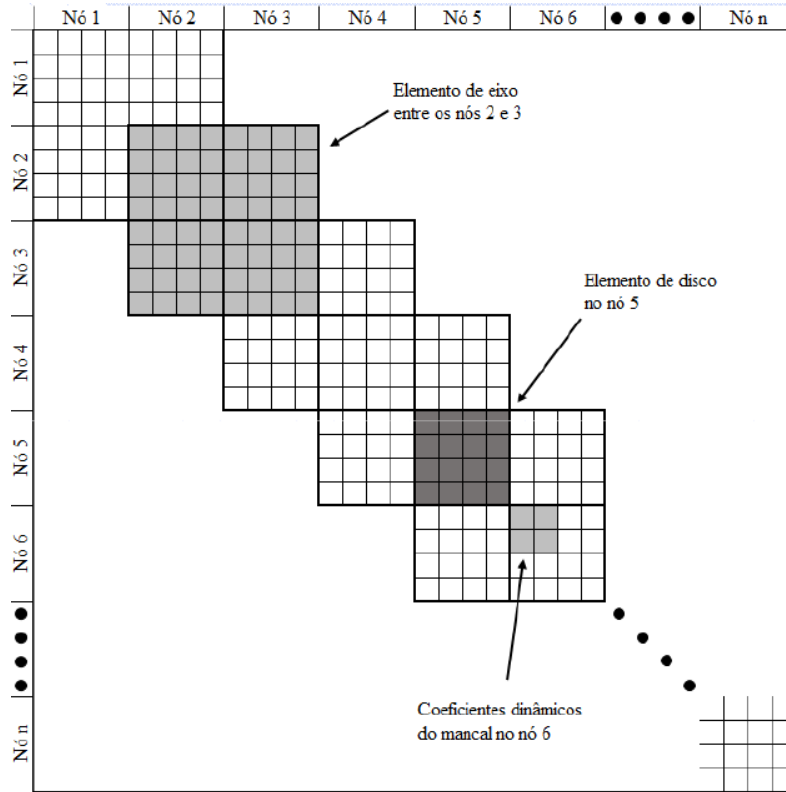


Figura 16: Esquema da montagem de uma matriz global do sistema rotativo. Adaptado de Daniel (2012).

#### 4.2.1 Solução da Equação de Movimento

A equação de movimento do rotor, Equação (56), construída segundo a metodologia de elementos finitos é:

$$\begin{aligned}
 [M]\{\ddot{q}(t)\} + [C + \Omega G]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} &= \{F(t)\} \\
 [M] &= [M_R] + [M_T] + [M_D] \\
 [C] &= [C_E] + [C_M] \\
 [G] &= [G_E] + [G_D] \\
 [K] &= [K_E] + [K_M] \\
 \{F(t)\} &= \{f_E\} + \{f_D\} + \{f_\xi(t)\}
 \end{aligned} \tag{57}$$

Onde as matrizes e vetores globais,  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[G]$ ,  $[C]$  e  $\{F\}$  são formados pelas matrizes e vetores dos elementos de eixo, disco e mancal descritos no Apêndice III. A força que excita o sistema na sua frequência de operação  $\Omega$  é a força de desbalanceamento  $f_\xi$  dependente da massa desbalanceada  $m$ , da excentricidade de desbalanceamento  $\xi$  e da fase do desbalanceamento  $\gamma$ , conforme descrito na Equação (58), sendo que a força atua no nó onde ocorre o desbalanceamento.

$$\{f_{\xi}(t)\} = \begin{Bmatrix} m\xi\Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma) \\ m\xi\Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Dessa forma, a Equação (57) resulta em um sistema com  $N_{GDL}$  equações, cada uma associada a um grau de liberdade do sistema.

A solução da equação de movimento do rotor é realizada utilizando uma transformação das coordenadas generalizadas para o espaço de estado, diminuindo a ordem da equação diferencial, como descrito por Silva (2004):

$$\begin{aligned} \{\dot{w}\} &= [A]\{w\} + \begin{Bmatrix} \{0\}_{N_{GDL} \times 1} \\ [M]^{-1}F(t) \end{Bmatrix} \\ \text{Onde,} \\ \{w\}_{2N_{GDL} \times 1} &= \begin{Bmatrix} \{\dot{q}(t)\} \\ \{q(t)\} \end{Bmatrix} \\ [A]_{2N_{GDL} \times 2N_{GDL}} &= \begin{bmatrix} [0]_{N_{GDL} \times N_{GDL}} & [I]_{N_{GDL} \times N_{GDL}} \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C + \Omega G] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

O cálculo dos autovalores e autovetores associados ao problema é realizado pela solução da equação característica do problema homogêneo, considerando  $w(t) = w_0 e^{j\lambda t}$ :

$$\det(\lambda[I] - [A]) = 0 \quad (60)$$

Dessa forma, obtém-se  $2N_{GDL}$  autovalores ( $\lambda$ ) e autovetores na forma de pares de complexos conjugados:

$$\lambda_{i,i^*} = -\zeta_i \omega_i \pm j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (61)$$

Onde  $\omega_i$  é uma frequência natural do sistema e  $\zeta$  é o fator de amortecimento definidos respectivamente como:

$$\omega_i = |\lambda_i| \quad (62)$$

$$\zeta_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \quad (63)$$

Note que, como a resposta é da forma  $w(t) = w_0 e^{j\lambda t}$ , temos que o primeiro termo da Equação (61) será responsável pela componente exponencial da resposta e o segundo termo pela componente oscilatória (Figura 17). Portanto, um valor negativo do fator de

amortecimento resulta em uma componente exponencial positiva na resposta, indicando que o sistema é instável.

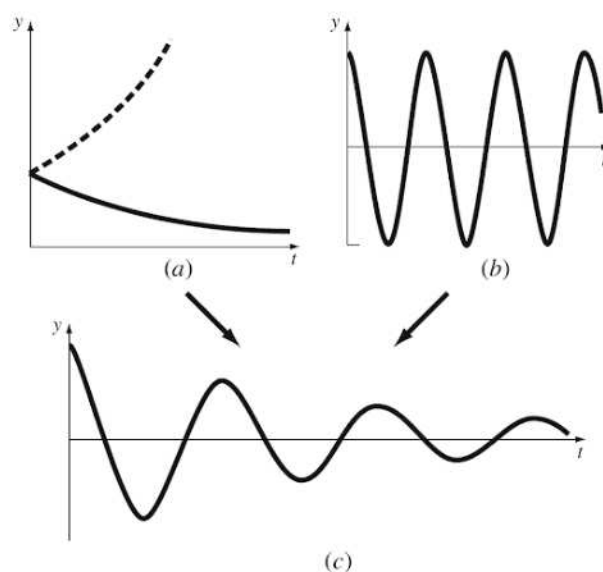


Figura 17: Solução geral de EDO linear composta por uma componente exponencial (a) e uma senoidal (b), resultando na função resposta na forma de uma senoidal amortecida (c). Fonte: Chapra e Canale (2015).

Devido ao efeito giroscópico e aos mancais hidrodinâmicos, o sistema e suas frequências naturais serão função da própria velocidade de rotação do rotor, relação costumeiramente representada pelo diagrama de Campbell.

Para encontrar a resposta no tempo, soluciona-se a equação de movimento do problema, Equação (57), no espaço de estado utilizando o método de Runge-Kutta implementado na função *ode45* do *software Matlab*®. No entanto, na solução no domínio do tempo a contribuição dos mancais é incorporada na equação de movimento do sistema como forças elásticas e de amortecimento, conforme descrito no Apêndice III.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nos capítulos anteriores foram apresentados os modelos teóricos e numéricos utilizados para obtenção do campo de pressão no mancal, da posição de equilíbrio estático do eixo, dos coeficientes equivalentes do mancal e da resposta dinâmica do rotor.

Diante disso, o presente capítulo apresenta inicialmente uma comparação dos resultados obtidos utilizando o modelo  $p-\theta$  com os resultados apresentados por Brito (2009) para fins de sustentação do modelo implementado.

Depois são apresentados os resultados do desempenho do mancal e do comportamento dinâmico do rotor utilizando o modelo de lubrificação  $p-\theta$  para avaliar diferentes condições de lubrificação. Dessa forma, são avaliadas as influências da posição circunferencial do *groove*, da pressão de entrada do lubrificante e da vazão de entrada do lubrificante.

### 5.1 Comparação com Resultados da Literatura

Brito (2009) desenvolveu um modelo de mancal hidrodinâmico utilizando o algoritmo de Elrod, porém o modelo também incluiu a equação de energia no filme lubrificante, a equação de transmissão de calor pela bronzina, as deformações elásticas e térmicas do mancal e os fenômenos de entrada do lubrificante pelo *groove*.

Diante disso, o mancal utilizado para comparação dos modelos possui as mesmas características e condições de operação que o utilizado nas simulações feitas por Brito (2009) (Tabela 1), exceto pela viscosidade, uma vez que ela é variável no modelo do Brito e constante no modelo implementado neste trabalho. A Figura 18 indica as distribuições de temperatura encontradas por Brito (2009), assim como os valores utilizados como referência para a viscosidade do lubrificante nas temperaturas de 40°C (temperatura de entrada do lubrificante) e de 70°C, temperaturas nas quais a viscosidade do óleo era conhecida. Dessa forma, a fim de viabilizar a comparação com o modelo com efeitos térmicos, foram realizadas simulações utilizando um valor de viscosidade mínima (relativa à viscosidade em 70°C), um valor de viscosidade máxima (relativa à viscosidade em 40°C) e um valor de viscosidade intermediário, como mostrado na Tabela 1. Destaca-se que o valor mínimo da viscosidade nos resultados termohidrodinâmicos realizados por



Brito (2009) é menor que a viscosidade mínima adotado nesse capítulo, uma vez que a temperatura pode atingir valores maiores que 70°C, como observado na Figura 18.

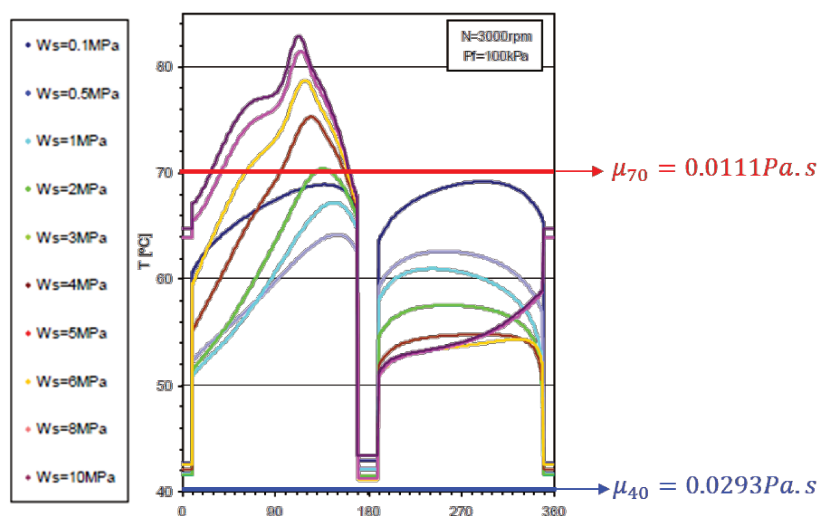


Figura 18: Distribuições de temperatura do lubrificante encontradas por Brito (2009) e indicação das viscosidades máxima e mínima. Adaptado de Brito (2009).

Tabela 1: Dados do mancal baseado no estudo de Brito (2009)

| Característica                             | Unidade | Valor                                     |
|--------------------------------------------|---------|-------------------------------------------|
| Diâmetro do mancal (D)                     | mm      | 100                                       |
| Largura do mancal (L)                      | mm      | 80                                        |
| Número de grooves                          | -       | 2                                         |
| Posição dos grooves em relação ao eixo Y   | °       | 90° e 270°                                |
| Comprimento axial do groove ( $b/L$ )      | -       | 0,875                                     |
| Largura do groove ( $a/D$ )                | -       | 0,18                                      |
| Folga Radial ( $c_r$ )                     | $\mu m$ | 75                                        |
| Velocidade de rotação do eixo ( $\Omega$ ) | Hz      | 50                                        |
| Variação da carga específica ( $W_s$ )     | Mpa     | 0,1 - 10                                  |
| Módulo volumétrico ( $\beta$ )             | GPa     | 1,8                                       |
| Viscosidade ( $\mu$ )                      | Pa.s    | min: 0,0111<br>med: 0,0200<br>max: 0,0293 |

A Figura 19 mostra os resultados obtidos para o lócus do mancal, segundo o modelo termohidrodinâmico de Brito (2009). Além da variação na carga específica, o resultado também considera diferenças na pressão de alimentação, que variou entre 50, 100, 150, 200, 250, e 350kPa. A Figura 20 mostra os resultados obtidos neste trabalho

com a abordagem  $p$ - $\theta$  considerando as mesmas condições de operação utilizadas por Brito na Figura 19, para os três valores de viscosidade dinâmica adotados.

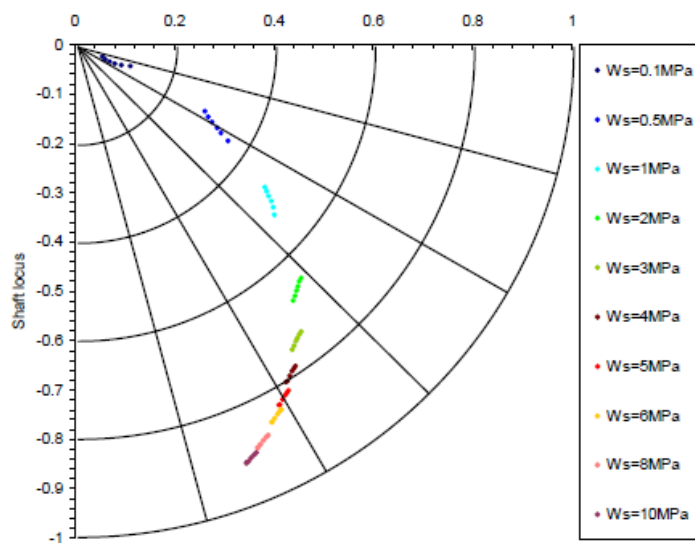


Figura 19: Resultado do lócus do eixo variando a carga específica e a pressão de entrada ( $P_f$ : 50, 100, 150, 200, 250, e 350kPa), conforme apresentado por Brito (2009).

A análise da Figura 20 mostra que o valor adotado na viscosidade possui efeitos significativos no resultado, uma vez que o lócus do mancal varia consideravelmente para cada viscosidade. Os resultados obtidos por Brito (2009) (Figura 19) se assemelham satisfatoriamente aos resultados obtidos com viscosidade mínima (Figura 20.a). A Figura 18 indica que, de fato, a temperatura do lubrificante se aproxima, em média, mais de 70°C do que de 40°C, logo, a semelhança do resultado com viscosidade mínima é coerente. Analisando o efeito da pressão de entrada nota-se que a capacidade de carga aumenta com o aumento da pressão de entrada, porém essa influência é mais visível no resultado do Brito (2009) (Figura 19), no qual as posições de equilíbrio estão mais espaçadas para diferentes pressões de entrada em comparação com os resultados obtidos neste trabalho (Figura 20). É coerente que esses efeitos realmente sejam mais notáveis em um modelo termohidrodinâmico, como o implementado por Brito (2009), pois nesse caso a pressão de entrada influencia não somente o campo de pressão, mas também o campo de temperatura e, conseqüentemente, a viscosidade do fluido.

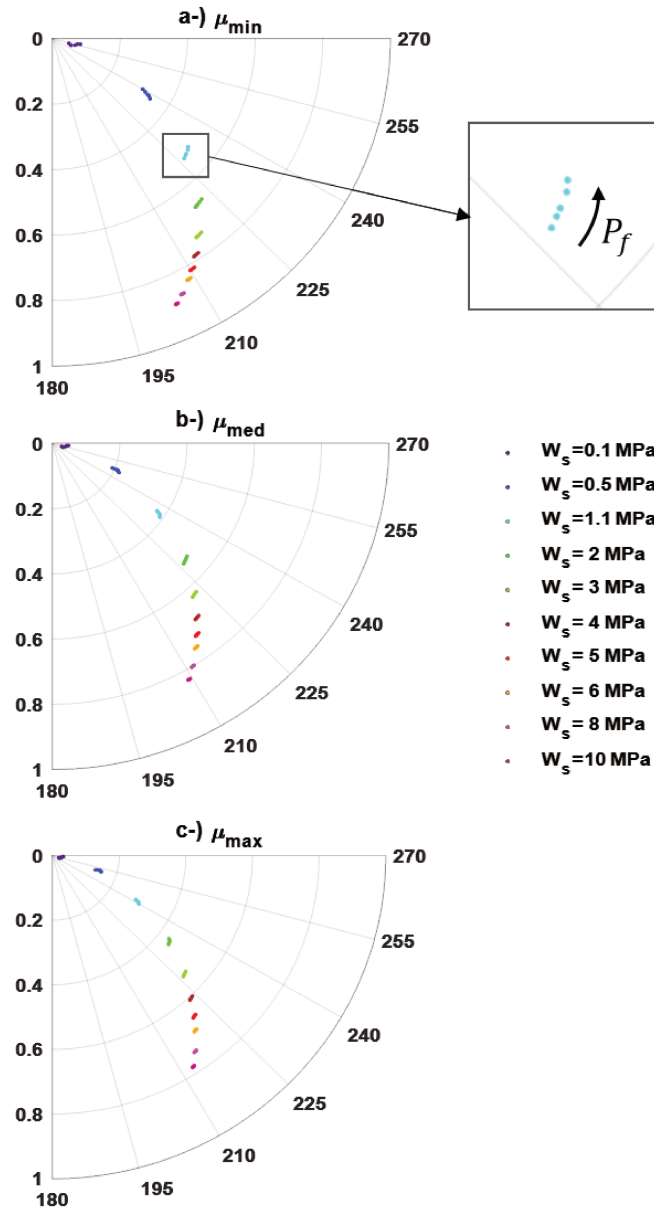


Figura 20: Lócus do eixo simulado com  $P_f$  variando em 50, 100, 150, 200, 250, e 350 kPa:  
 (a)  $\mu_{\min} = 0,0111 \text{ Pa.s}$ ; (b)  $\mu_{\text{med}} = 0,02 \text{ Pa.s}$ ; (c)  $\mu_{\max} = 0,0293 \text{ Pa.s}$ .

Brito (2009) também apresentou resultados da distribuição de pressão para diferentes comprimentos do *groove*, como apresentado na Figura 21. A Figura 22 mostra a reprodução dessas distribuições realizadas com viscosidade igual a  $0,111 \text{ Pa.s}$  utilizando a abordagem  $p-\theta$ , para fins de comparação. Observa-se grande semelhança entre os resultados, inclusive das fronteiras de reformação e ruptura, da região de desenvolvimento de pressão e do pico de máxima pressão.

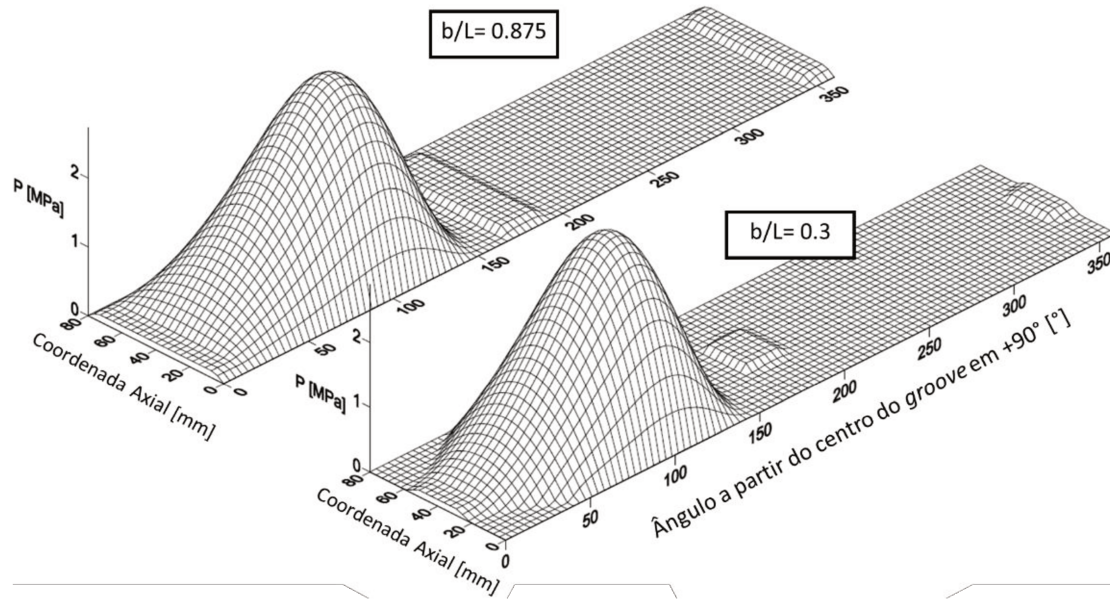


Figura 21: Distribuições de pressão obtidas com  $W_s=1,1\text{MPa}$  e  $P_f=100\text{kPa}$  variando o comprimento do *groove* entre  $b/L=0,875$  e  $b/L=0,3$ . Adaptado de Brito (2009).

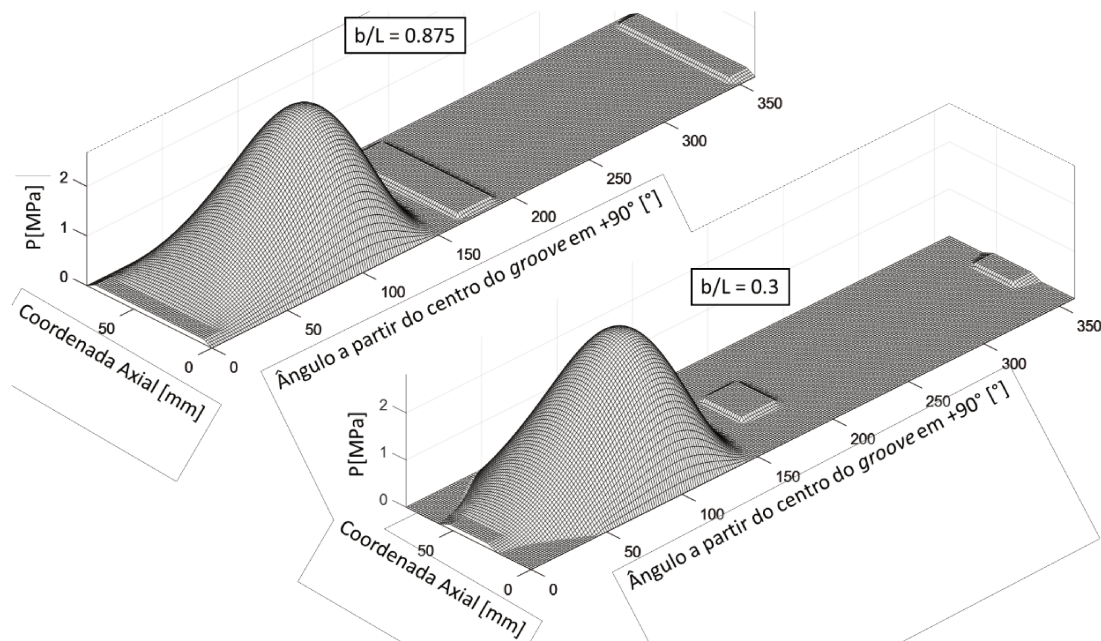


Figura 22: Distribuições de pressão com o modelo  $p-\theta$ ,  $W_s=1,1\text{MPa}$ ,  $P_f=100\text{kPa}$  e  $\mu=0,0111\text{Pa.s}$  variando o comprimento do *groove* em  $b/L=0,875$  e  $b/L=0,3$ .

Por fim, a Figura 23 e a Figura 24 mostram as regiões com filme completo e filme cavitado obtidas por Brito (2009) e no presente trabalho, respectivamente. Novamente, a semelhança entre os resultados é notável, sendo que o resultado obtido neste trabalho apresenta fronteiras mais contínuas devido a utilização de uma malha mais refinada.

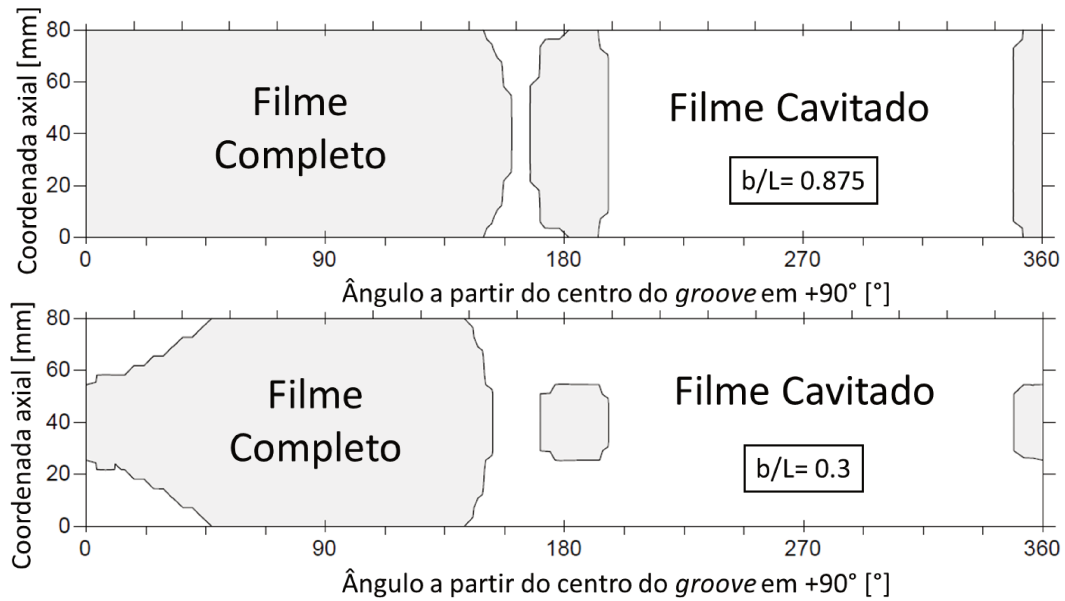


Figura 23: Regiões com filme completo e filme cavitado obtidas com  $W_s=1,1\text{MPa}$  e  $P_f=100\text{kPa}$  variando o comprimento do *groove* entre  $b/L=0,875$  e  $b/L=0,3$ . Adaptado de Brito (2009).

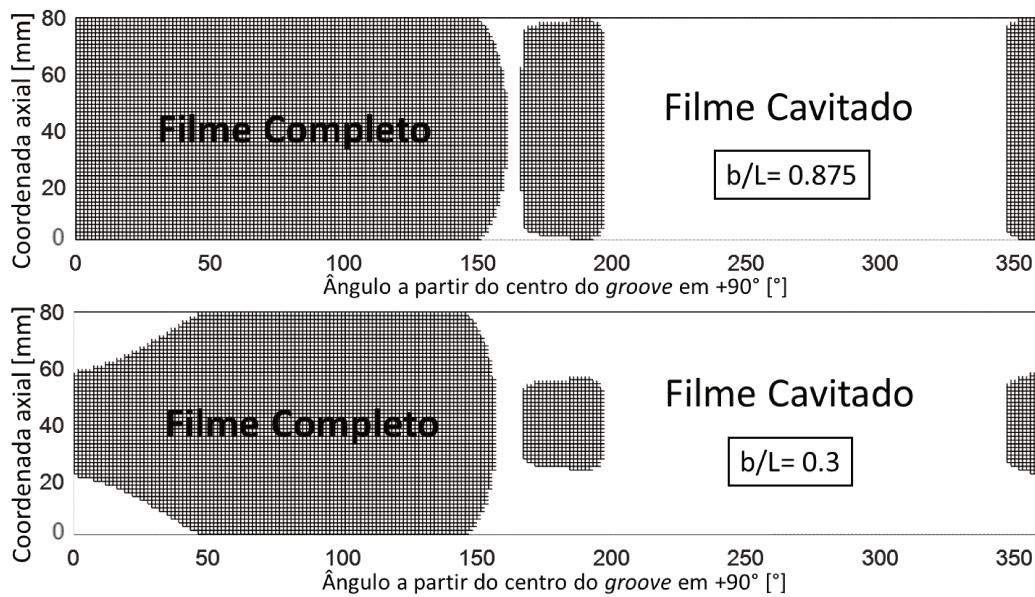


Figura 24: Regiões com filme completo e filme cavitado obtidas pela abordagem  $p-\theta$  com  $W_s=1,1\text{Mpa}$ ,  $P_f=100\text{kPa}$  e  $\mu=0,0111\text{Pa.s}$  variando o comprimento do *groove* entre  $b/L=0,875$  e  $b/L=0,3$ .

Portanto, conclui-se que o modelo utilizado está coerente com a literatura, uma vez que apresentou resultados com boa concordância. Entretanto, ressalva-se que os efeitos térmicos têm grande relevância no comportamento do mancal.

## 5.2 Características do Rotor Simulado e Seleção dos Critérios de Convergência

Todos os resultados apresentados no presente capítulo e nos capítulos que se seguem foram obtidos considerando um sistema rotor-mancais, cujas características do mancal e as condições de operação são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2: Características do mancal e condição de operação.

| Característica                           | Unidade | Valor  |
|------------------------------------------|---------|--------|
| Diâmetro do mancal (D)                   | mm      | 30     |
| Largura do mancal (L)                    | mm      | 20     |
| Folga radial ( $c_r$ )                   | $\mu m$ | 90     |
| Variação da rotação do eixo ( $\Omega$ ) | Hz      | 5 a 60 |
| Carga vertical no mancal ( $W$ )         | N       | 16,58  |
| Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )           | Pa.s    | 0,05   |

Para a simulação do campo de pressão foi utilizado um critério de convergência igual a  $10^{-5}$  no erro total do campo de pressão entre duas iterações do método de Gauss-Seidel. A malha de volumes finitos utilizada foi de  $N_x = 151$  e  $N_z = 151$ , definida após os testes de seleção de malha da Figura 25 e Figura 26, respectivamente. Já o critério de parada do método de Newton-Raphson (Equação (49)) utilizado para encontrar a posição de equilíbrio estático foi de  $\epsilon = 0,5\%$ .

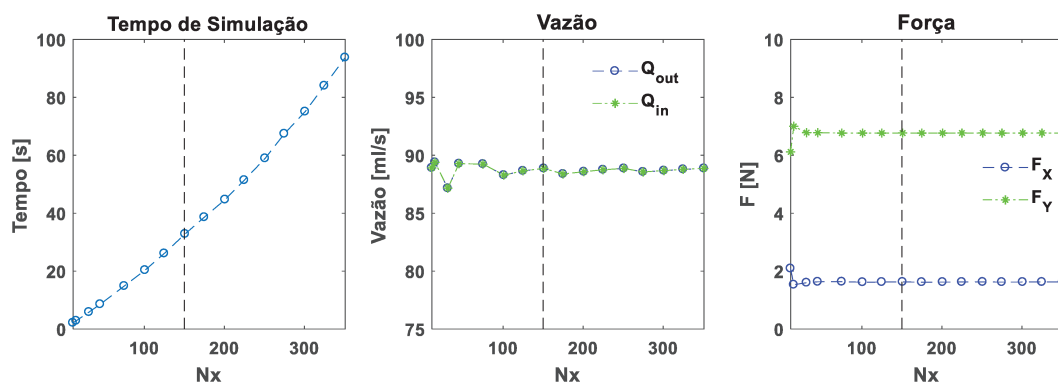


Figura 25: Teste de seleção de malha na direção x.



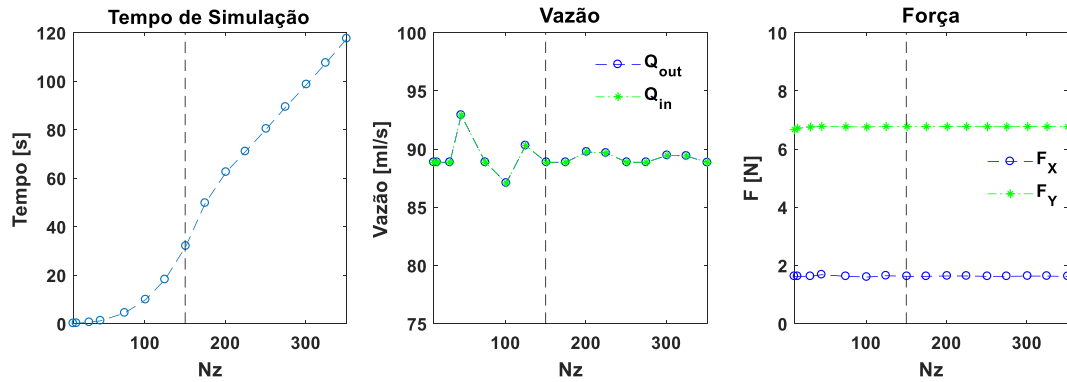


Figura 26: Teste de seleção de malha na direção z.

A Figura 27 mostra as dimensões do rotor e a malha de elementos finitos utilizada para obtenção dos resultados de rotodinâmica. Note que o modelo possui 10 elementos de viga, um elemento de disco e 2 elementos de mancais (conjunto de molas e amortecedores) simetricamente dispostos. Dessa forma, a malha possui 11 nós, logo, 44 graus de liberdade (GDL) no total. As características do rotor estão listadas na Tabela 3.

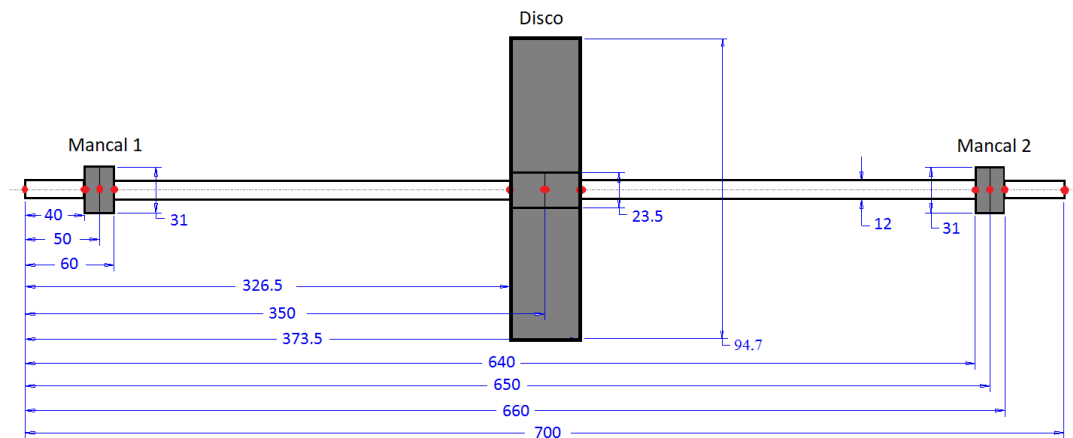


Figura 27: Rotor discretizado em elementos finitos (unidade em milímetros). Fonte: Ramos, 2019.

Tabela 3: Características do Rotor

| Característica                               | Unidade           | Valor     |
|----------------------------------------------|-------------------|-----------|
| Módulo de elasticidade ( $E$ )               | GPa               | 200,0     |
| Densidade ( $\rho$ )                         | Kg/m <sup>3</sup> | 7850,0    |
| Constante de proporcionalidade ( $\beta_c$ ) | s                 | $10^{-4}$ |
| Excentricidade do desbalanceamento ( $\xi$ ) | mm                | 37,0      |
| Massa desbalanceada ( $m$ )                  | g                 | 1,7       |
| Constante gravitacional ( $g$ )              | m/s <sup>2</sup>  | 9,81      |
| 1ª frequência crítica do sistema             | Hz                | 22,5      |

### 5.3 Análise da Influência da Posição do *Groove*.

Para realizar o estudo da influência da posição do *groove*, manteve-se fixa a geometria e a pressão de alimentação, variando apenas a posição do *groove*, como mostrado na Tabela 4 e ilustrado na Figura 28. Note que os testes são feitos com apenas um *groove*, exceto para a posição “90° e 270°”, em que haverá dois *grooves*.

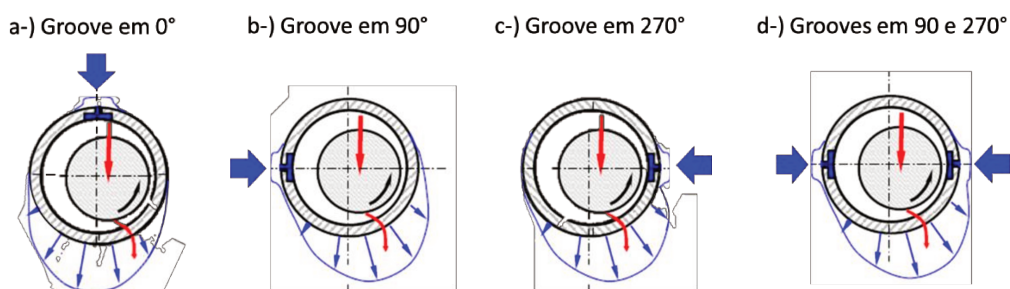


Figura 28: Ilustração das posições dos *grooves* simuladas. Adaptado de Brito (2009).

Tabela 4: *Groove* utilizado para simular as influências das condições de lubrificação na dinâmica do rotor.

| Característica                           | Valor                           |
|------------------------------------------|---------------------------------|
| Comprimento axial do <i>groove</i> (b/L) | 0,5                             |
| Largura do <i>groove</i> (a/D)           | 0,18                            |
| Pressão de Alimentação                   | 0Pa                             |
| Posição do <i>groove</i>                 | 0°<br>90°<br>270°<br>90° e 270° |

A Figura 29 e a Figura 30 mostram, respectivamente, a distribuição de pressão e de fração volumétrica para todas posições de *groove* simuladas para um mancal operando a 30Hz. As bordas do mancal, onde aplica-se a condição de contorno de  $\theta = 1$  e  $P = P_{rup}$ , foram retiradas da Figura 30 para facilitar a visualização. Observa-se na Figura 29 que os campos de pressão são similares para todas posições testadas, exceto para posição do *groove* em 270°, em que o campo é mais estreito e o valor do pico de pressão é maior que nas demais distribuições.

Já na Figura 30 fica evidente as diferentes posições do *groove* e os diferentes fluxos de lubrificante resultantes, sendo possível observar também as regiões com filme



completo e cavitado. Novamente, o mancal com *groove* em  $270^\circ$  se destaca por apresentar fluxos com frações volumétricas de lubrificante menores que os demais, assim como uma área com filme completo diminuta. A diferença entre o mancal com um *groove* em  $90^\circ$  e o mancal com dois *grooves* ( $90/270^\circ$ ) é sutil, sendo que aparentemente o groove em  $270^\circ$  não contribui muito para os fluxos deste último mancal.

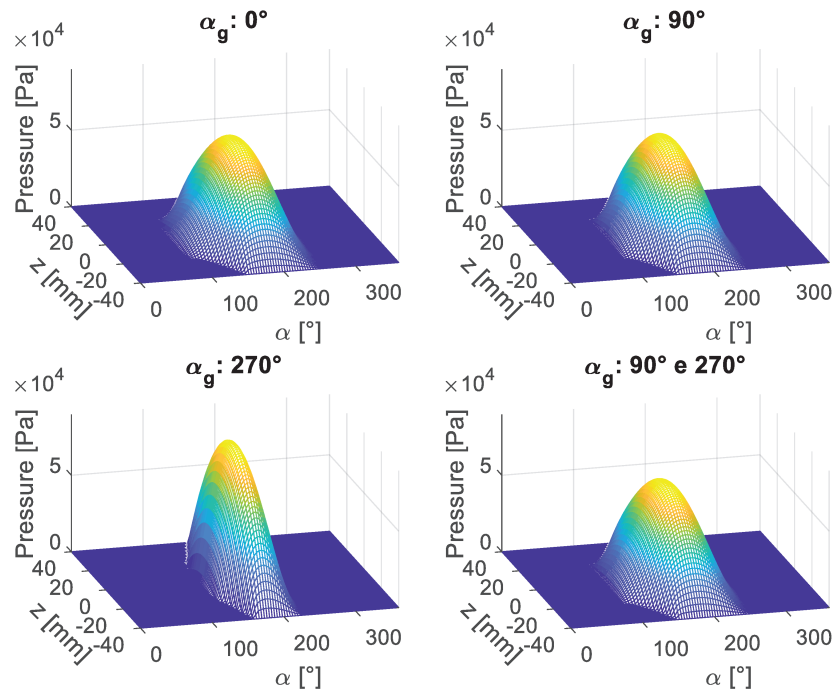


Figura 29: Campo de Pressão para diferentes posições do *groove* em um mancal operando em 30Hz.

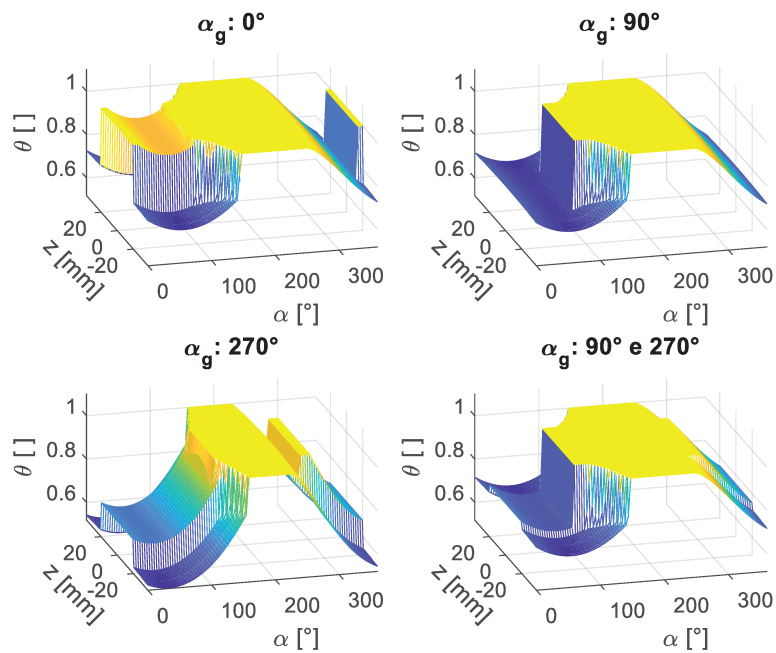


Figura 30: Campo da fração volumétrica para diferentes posições do *groove* em um mancal operando em 30Hz.

A Figura 31 mostra os efeitos da posição do *groove* na posição de equilíbrio do eixo e na vazão de entrada. O resultado mostra que a configuração com *groove* em  $270^\circ$  apresenta a pior capacidade de carga, enquanto a configuração com  $0^\circ$  apresenta a melhor capacidade de carga. A configuração com um *groove* em  $90^\circ$  e a configuração com dois *grooves* em  $90$  e  $270^\circ$  apresentam resultados intermediários e solução praticamente coincidente. Observa-se comportamento semelhante em relação à vazão de entrada, evidenciando que capacidade de carga e vazão de entrada estão diretamente relacionadas.

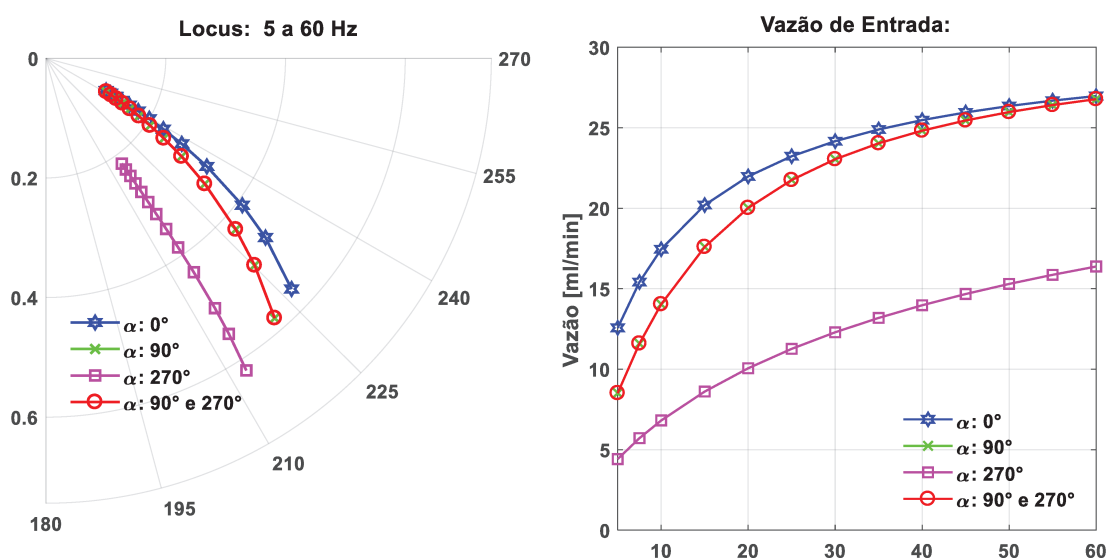


Figura 31: Influência da posição do *groove* no lócus e na vazão.

Como o mancal com *groove* em  $270^\circ$  resulta em baixa capacidade de carga e vazão de entrada e como o *groove* em  $270^\circ$  parece contribuir pouco para o desempenho do mancal com dois *grooves*, entende-se que essa é uma posição desfavorável para o *groove*. Isso se dá uma vez que o *groove* em  $270^\circ$  está mais próximo à região da espessura mínima do filme de óleo, dificultando a entrada de lubrificante. Portanto, a melhor posição para localização do *groove*, a fim de aumentar a vazão de entrada e a capacidade de carga, seria próxima a região de maior espessura de filme, como é o caso do *groove* em  $0^\circ$ . Ademais, deve-se evitar posicionar o *groove* dentro da zona de formação de pressão, pois além do *groove* atrapalhar a distribuição de pressão, essa configuração pode levar à presença de fluxo reverso no *groove*, como observado por Brito (2009).

A Figura 32 mostra a influência da posição do *groove* na área com filme completo. Nota-se pela figura que a área com filme completo de óleo também tem relação direta com a capacidade de carga e a vazão de entrada de lubrificante, como esperado. Além disso, observa-se que, à medida que a rotação do eixo aumenta, é necessária uma vazão

maior para manter aproximadamente a mesma área do mancal com filme completo. Apesar da pressão de entrada permanecer constante, a vazão aumenta com a rotação devido ao aumento do efeito de arrasto.

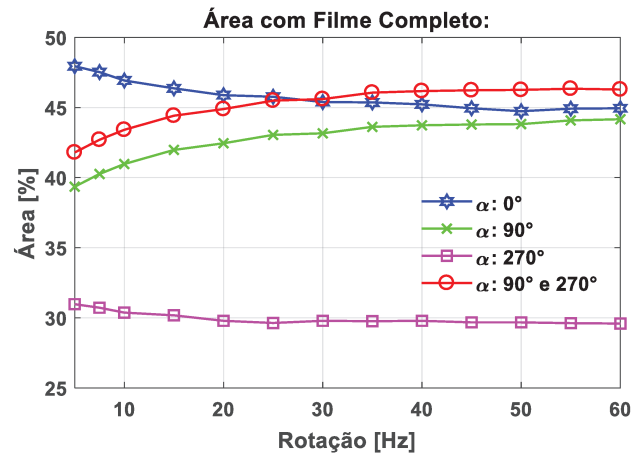


Figura 32: Influência da posição do *groove* na área do mancal com filme completo de óleo.

A Figura 33 e a Figura 34 mostram a grande influência da posição do *groove* nos coeficientes de rigidez e amortecimento, sendo as causas desses efeitos difíceis de identificar, uma vez que o cálculo dos coeficientes depende de vários fatores, como posição de equilíbrio, formato do campo de pressão, sensibilidade do campo, entre outros. A posição do *groove* no mancal pode, inclusive, definir o sinal do coeficiente, como observado nos coeficientes cruzados  $K_{yx}$  e  $C_{yx}$ .

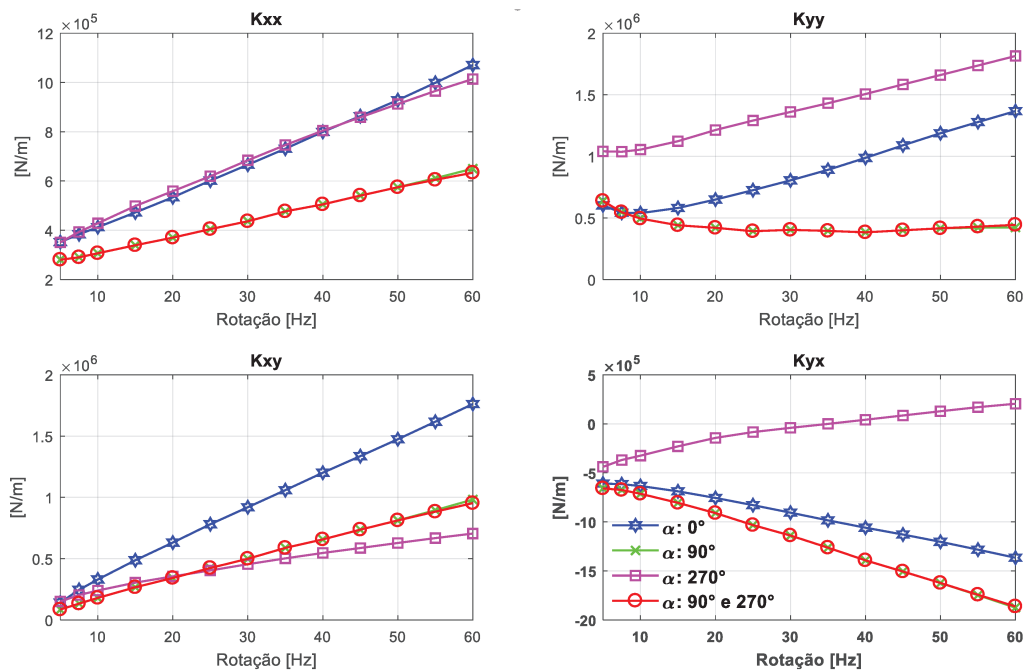


Figura 33: Influência da posição do *groove* no coeficiente equivalente de rigidez.

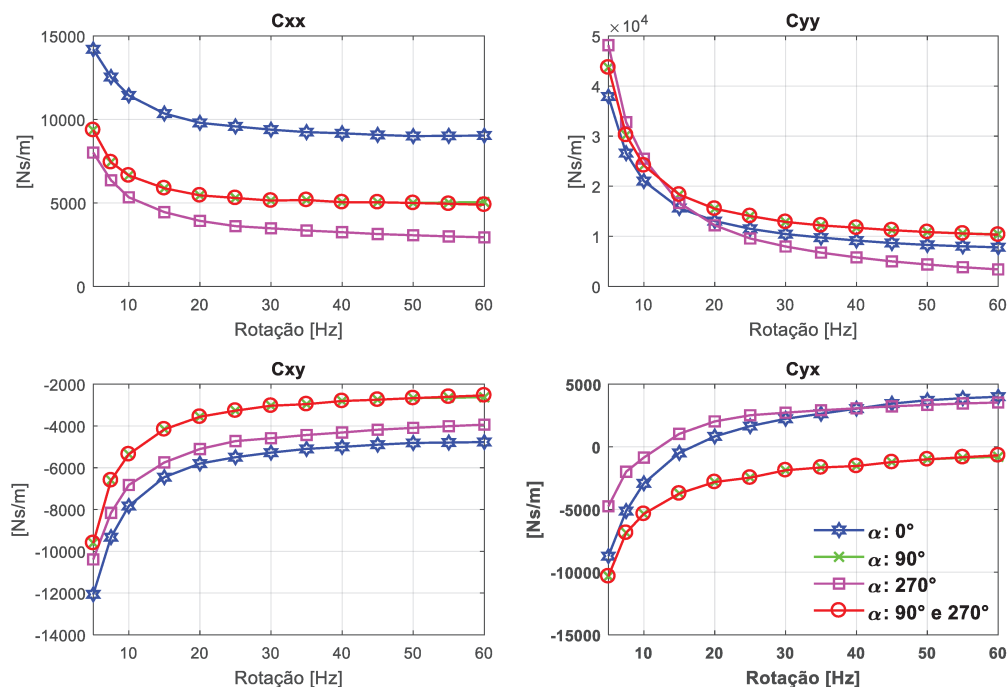


Figura 34: Influência da posição do *groove* no coeficiente equivalente de amortecimento.

Apesar dos efeitos significativos nos coeficientes, a posição do *groove* não tem efeito tão expressivo no diagrama de Campbell do rotor, sendo que a velocidade crítica do sistema é em torno de 22,5 Hz para todas posições, como indicado na Figura 35. Esse cenário pode ser explicado pelo fato de que as rigidezes do eixo e do mancal estão associadas em série, dessa forma, como o eixo é flexível, os efeitos da rigidez menor do eixo prevalecem em relação aos efeitos do mancal. Da mesma forma, o efeito do amortecimento estrutural do eixo predomina em relação ao amortecimento viscoso do filme de óleo, uma vez que estão associados em série e o amortecimento estrutural é significativamente menor que o amortecimento do mancal.

Contudo, a Figura 36 mostra que a posição do *groove* afeta consideravelmente o fator de amortecimento e, conseqüentemente, o comportamento dinâmico do sistema, chegando a mudar o limiar de instabilidade de tal maneira que a configuração com *groove* em  $270^\circ$  não fica instável para as velocidades simuladas. Assim, a instabilidade do sistema é notoriamente influenciada pelo mancal apesar da rigidez e do amortecimento equivalentes do mesmo serem predominantemente determinados pelo eixo, em se tratando de um eixo flexível. Isso ocorre uma vez que a instabilidade indicada pelo fator de amortecimento na Figura 36 é relacionada a um modo de vibrar de corpo rígido, portanto, o eixo não influencia nesse fator e é o mancal que determina o comportamento instável do conjunto.

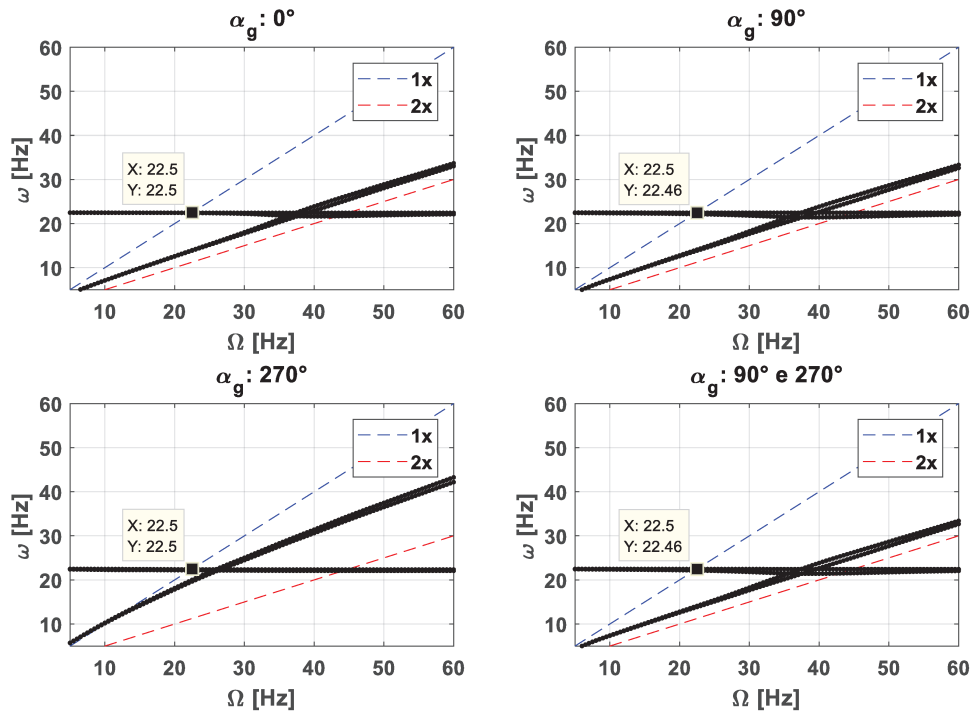


Figura 35: Influência da posição do groove no diagrama de Campbell.

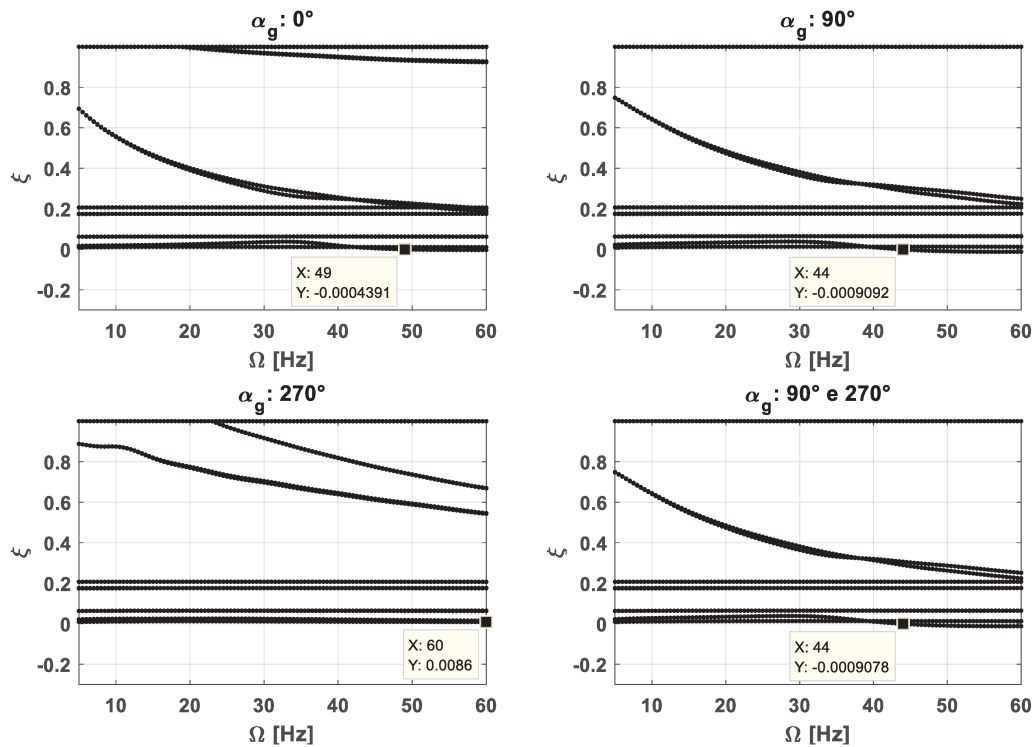


Figura 36: Influência da posição do groove no fator de amortecimento.

Essa instabilidade indicada para os mancais com *grooves* em  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $90^\circ/270^\circ$  ocorre devido à instabilidade fluido-induzida, isto é, quando a velocidade média do fluido lubrificante entra em ressonância com a primeira frequência natural do sistema  $\omega_n$ . Normalmente isso ocorre quando a velocidade de rotação do eixo é aproximadamente o

dobro da primeira frequência natural ( $\Omega \approx 2\omega_n$ ), uma vez que a velocidade média do fluido é próxima da metade da velocidade de rotação do eixo quando se considera pequenas excentricidades. Porém, as diferentes condições de lubrificação podem levar a diferentes perfis de velocidade e, conseqüentemente, a mudanças nas velocidades média do fluido e nos limiares de instabilidade.

De fato, o limiar de instabilidade dos casos de  $90^\circ$  e  $90^\circ/270^\circ$  ocorre próximo a  $2\omega_n$  e ocorre um pouco mais adiante para o caso de  $0^\circ$ , como indicado na Figura 36. Como mencionado, a configuração com *groove* em  $270^\circ$  não fica instável nos casos simulados, o que pode ser justificado pela evidente diferença do comportamento dos fluxos nesse caso (Figura 30), pelas altas excentricidades que permanecem até 60Hz (Figura 31) e pelos valores reduzidos dos coeficientes de rigidez cruzados, sendo que o  $K_{yx}$  atinge inclusive valores positivos (Figura 33).

Na Figura 37, observa-se as órbitas do rotor para as diferentes posições dos *grooves* para uma rotação de 30Hz, na qual todas órbitas se mostram estáveis, como esperado segundo o limiar de estabilidade indicado na Figura 36, porém apresentam centros e formatos diferentes.

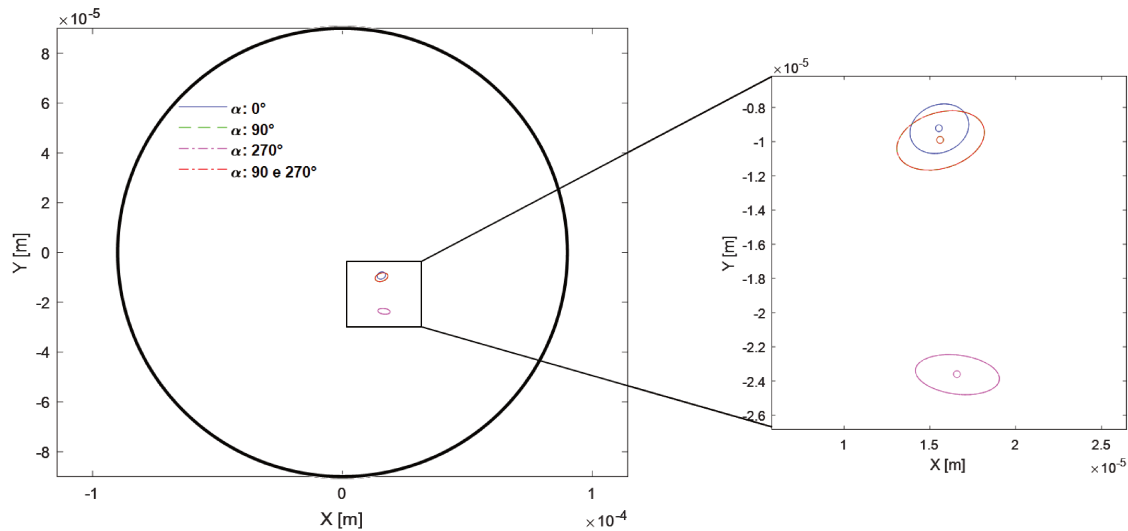


Figura 37: Órbita do eixo no mancal com rotação de 30Hz para diferentes posições do *groove*.

Já na Figura 38, que mostra as órbitas para rotação de 60Hz, apenas a órbita correspondente ao *groove* em  $270^\circ$  está estável, conforme previsto pelo cálculo do fator de amortecimento.

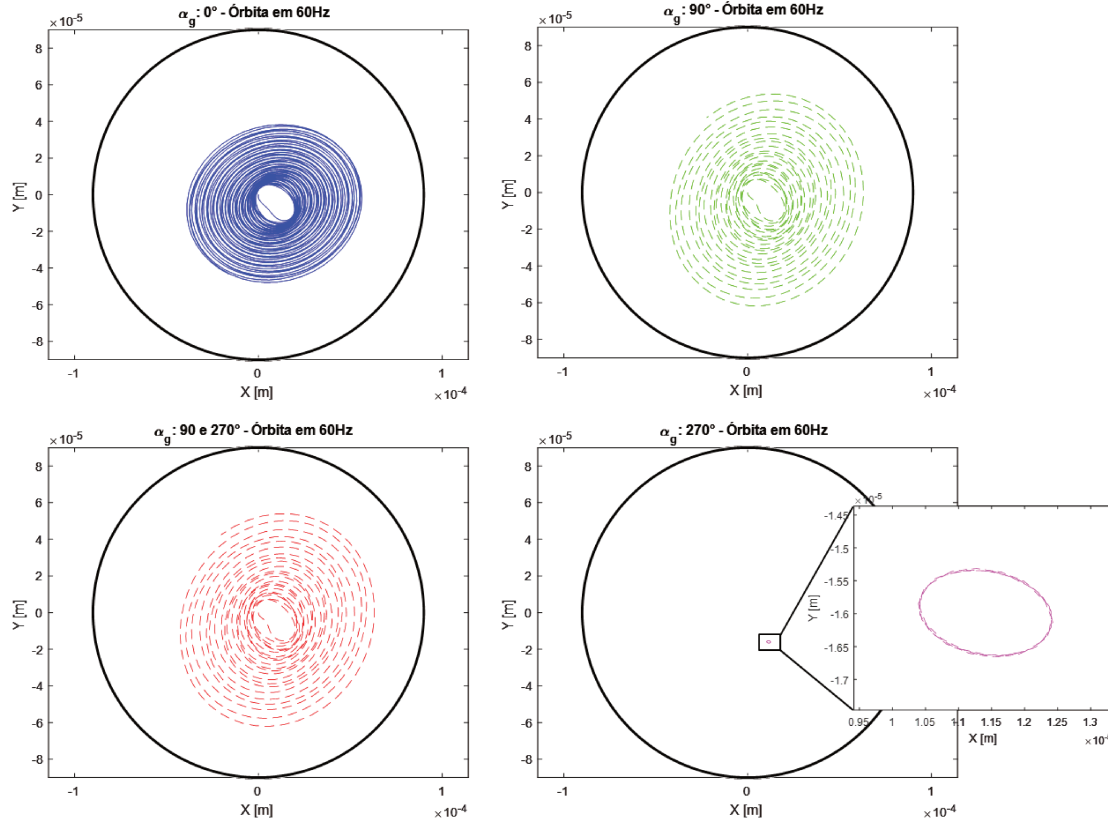


Figura 38: Órbita do rotor no mancal com rotação de 60Hz para diferentes posições do *groove*.

Dessa forma, fica claro que a posição do groove exerce uma grande influência, tanto no comportamento estático, quanto no comportamento dinâmico do rotor, chegando inclusive a mudar completamente o limiar de instabilidade. Destaca-se que atenção redobrada deve ser tomada em mancais com *groove* em  $90^\circ$  cujo sentido de rotação pode ser revertido, pois a posição relativa do *groove* passa a ser em  $270^\circ$ .

#### 5.4 Influência da Pressão de Alimentação

A fim de analisar os efeitos da pressão de entrada de lubrificante no *groove*,  $P_f$ , foram simulados casos com *grooves* com a mesma geometria usada no Capítulo 5.3, isto é,  $b/L = 0,5$  e  $a/D = 0,18$ , variando a pressão de alimentação de 0 a 50kPa na condição de contorno do *groove* (Equação (44)). As simulações foram feitas para um *groove*, tanto na posição de  $0^\circ$  como na de  $270^\circ$ , com o intuito de avaliar a influência de  $P_f$  em mancais que apresentaram comportamentos distintos entre si na análise do Capítulo 5.3.

A Figura 39 apresenta o lócus e a vazão de entrada para todos esses casos. No mancal com *groove* em  $0^\circ$  o aumento da pressão de entrada até 50kPa leva ao aumento



da capacidade de carga, ou seja, o aumento de  $P_f$  melhora a lubrificação do mancal, aumentando sua área de sustentação, o que compensa o pico de pressão de injeção na direção negativa do eixo vertical. Já para o mancal com *groove* em  $270^\circ$ , a capacidade de carga melhora com o aumento de  $P_f$  até 25kPa, porém além desse valor a pressão de injeção passa a ser muito influente, deslocando a posição de equilíbrio para a esquerda. De forma geral a excentricidade do mancal com *groove* em  $270^\circ$  permanece mais elevada, o que indica que a posição do *groove* é mais influente que a pressão de alimentação para este caso. Nota-se ainda que, como previsto, o aumento da pressão de alimentação para a mesma condição de operação resulta em um aumento da vazão de entrada de lubrificante.

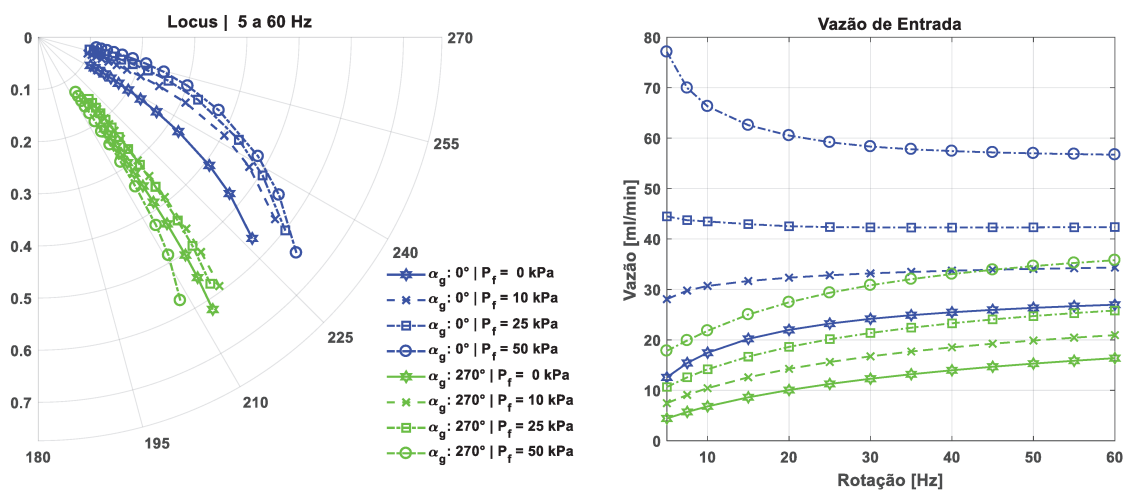


Figura 39: Efeitos da variação da pressão de alimentação no lócus e na vazão de entrada do mancal.

Como observado, não é sempre que a pressão de entrada tem efeito direto na posição de equilíbrio, isto é, nem sempre o eixo se distancia do *groove* com o aumento do pico de pressão de injeção. Isso ocorre porque outros fatores mudam com o aumento da pressão de entrada, como a área de sustentação do eixo e o formato e a pressão máxima do campo de pressão, que podem compensar o pico de injeção no *groove*.

A Figura 40 indica o aumento da área de sustentação com o aumento da pressão de alimentação, explicando o aumento da capacidade de carga observado para a maioria dos casos.



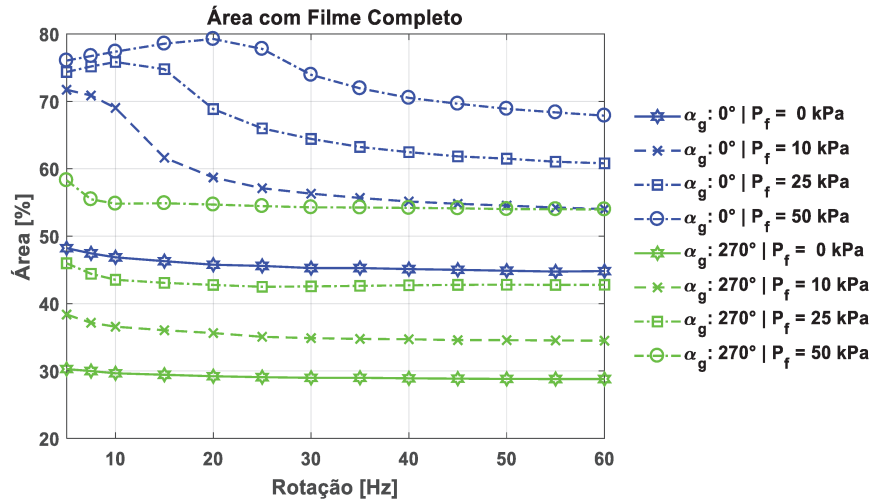


Figura 40: Área com filme completo para diferentes pressões de alimentação.

Na análise dinâmica do rotor o efeito da pressão de alimentação também é relevante, como indicam os coeficientes de rigidez e amortecimento mostrados na Figura 41 e na Figura 42, respectivamente. Observa-se que os valores dos coeficientes dinâmicos são fortemente dependentes não só da posição do *groove*, mas também da pressão de alimentação.

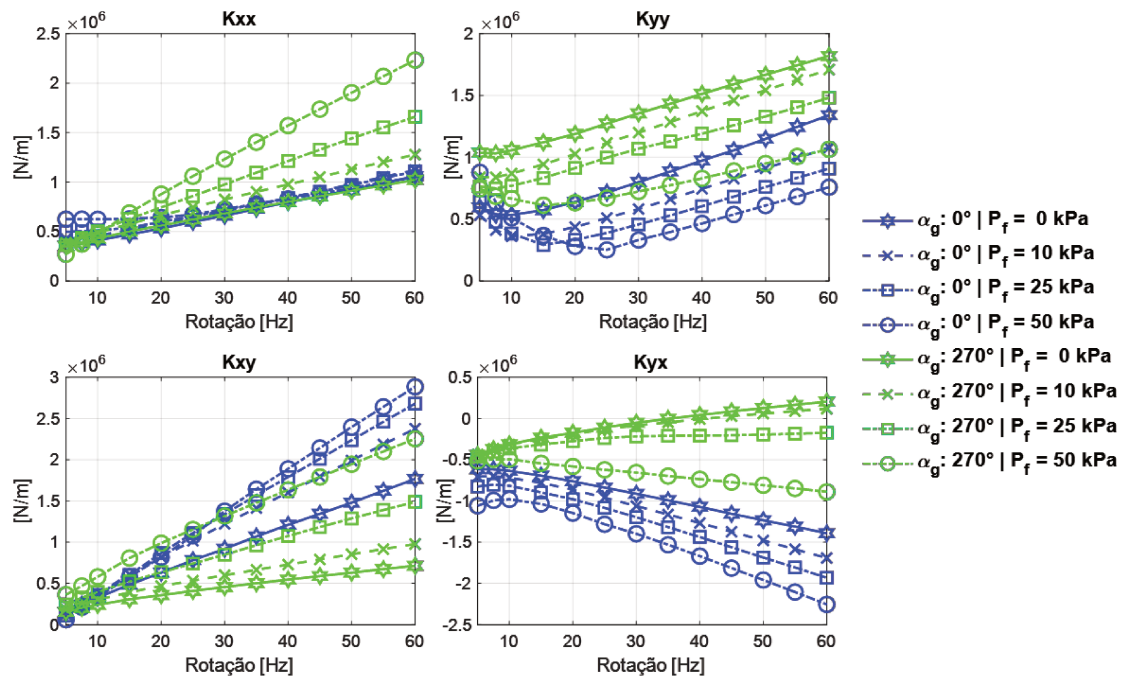


Figura 41: Coeficiente de rigidez para diferentes pressões de alimentação para mancais com *groove* em  $0^\circ$  e em  $270^\circ$ .

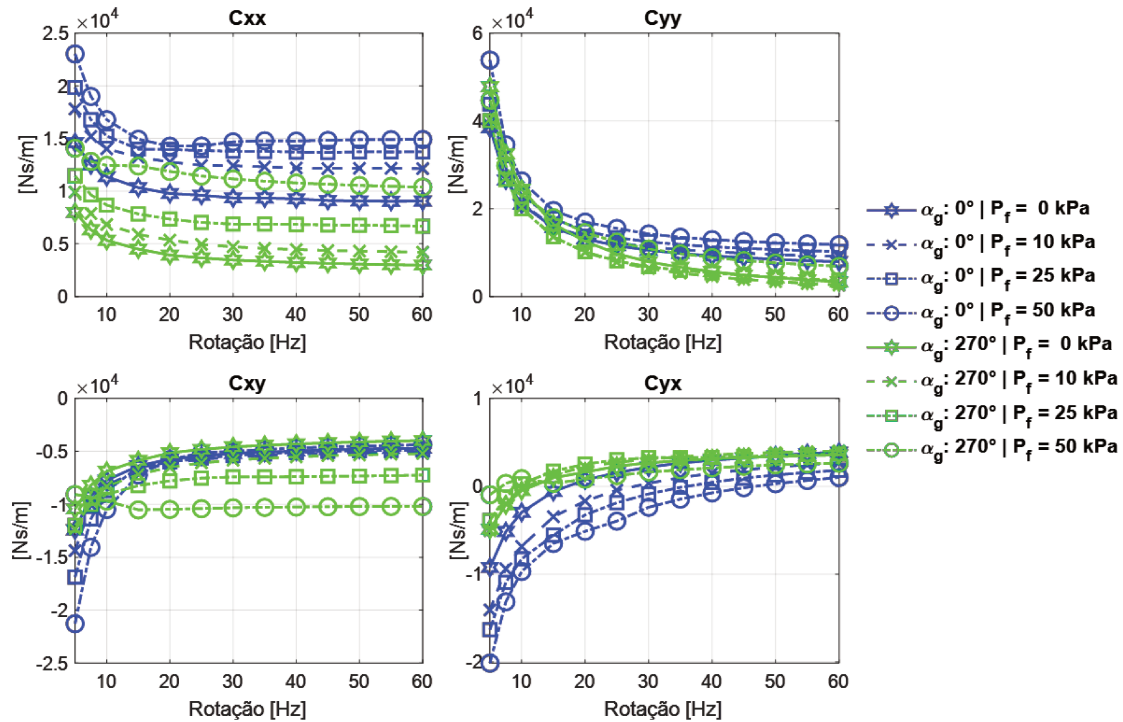


Figura 42: Coeficiente de amortecimento para diferentes pressões de alimentação para mancais com *groove* em  $0^\circ$  e em  $270^\circ$ .

A Figura 43 mostra a influência da pressão de alimentação no fator de amortecimento para o mancal com *groove* em  $0^\circ$ . Evidencia-se a mudança do limiar de instabilidade, indicando que quanto maior a pressão de entrada, menor a velocidade de rotação em que o rotor fica instável. Knight et al. (1985) e Wang e Khonsari (2008a, 2008b) chegaram a conclusões semelhantes quanto à influência de  $P_f$  na instabilidade do rotor.

Já o fator de amortecimento da configuração do *groove* em  $270^\circ$  permanece positivo para todas as pressões de entrada e velocidades simuladas, como mostrado na Figura 44, indicando que o sistema permanece estável.

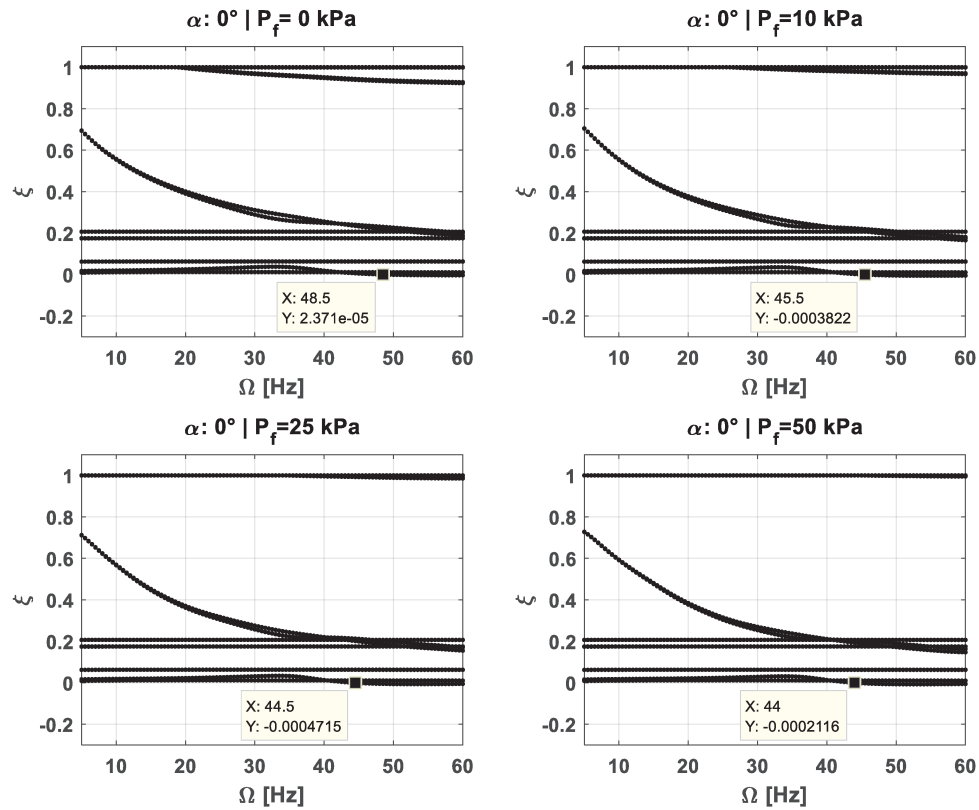


Figura 43: Efeitos da variação da pressão de alimentação no fator de amortecimento (destaque no limiar de instabilidade). Simulações com *groove* em  $0^\circ$ .

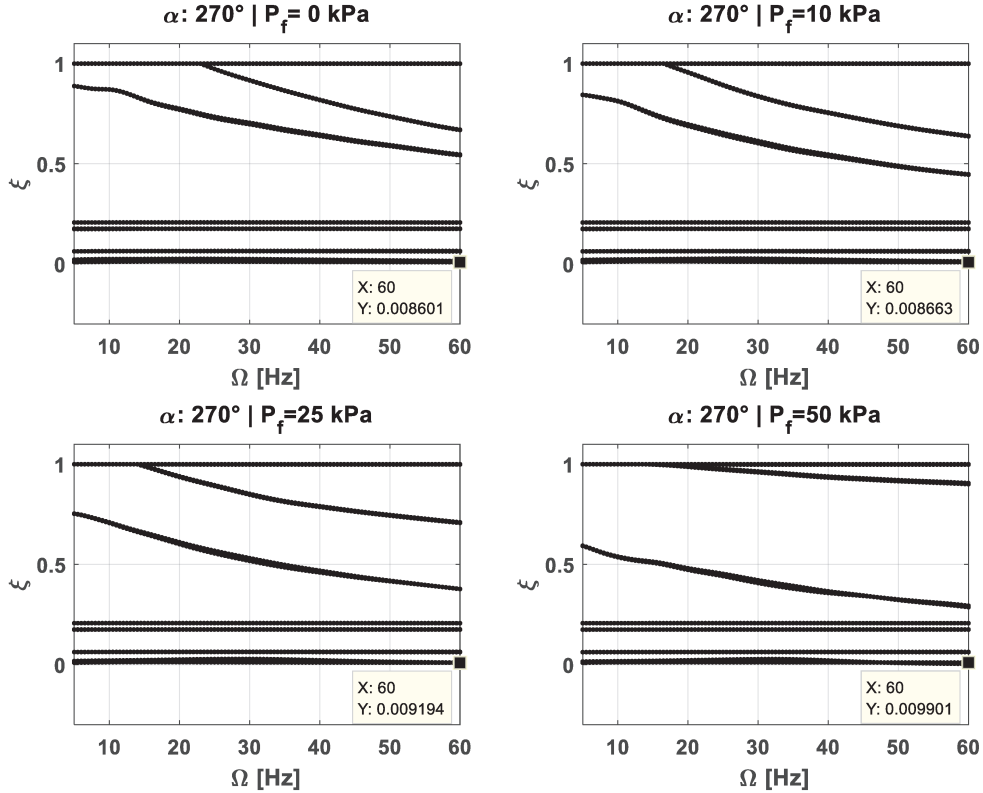


Figura 44: Efeitos da variação da pressão de alimentação no fator de amortecimento. Simulações com *groove* em  $270^\circ$ .

## 5.5 Influência da Vazão de Entrada

O estudo da influência da vazão de entrada no *groove* foi realizado com a mesma geometria do *groove*,  $b/L = 0,5$  e  $a/D = 0,18$ , e novamente para as posições do *groove* em  $0^\circ$  e  $270^\circ$ .

Visando entender como a variação da vazão influencia no comportamento do mancal, desde cenários em *starvation* até condições de mancal inundado (*flooded*), os estudos desta seção se concentram apenas nas velocidades de rotação de 30Hz e 60Hz. O procedimento adotado consiste primeiro em calcular qual seria a vazão de entrada resultante da condição de pressão de alimentação igual a pressão ambiente, suficiente para preencher a folga da região do *groove* com lubrificante. Isto é, impõe-se que  $P_f = 0 \text{ Pa}$  e obtém-se a vazão de entrada de referência,  $Q_{ref}$ . Então, para a mesma condição de operação, realiza-se simulações impondo vazões de entrada progressivamente menores e maiores que  $Q_{ref}$ , resultando em cenários com lubrificação *starved* e *flooded*, respectivamente. Para tal, utiliza-se a condição de contorno descrita na Equação (45) nos volumes de controle do *groove*.

### 5.5.1 Operação em 30 Hz

Nessa seção são apresentados os resultados de um rotor operando em 30Hz com vazão de entrada variando de 12,1 a 36,3 ml/min para o caso do *groove* posicionado em  $0^\circ$ , e com vazão de entrada de 6,2 a 18,6 ml/min para o *groove* posicionado em  $270^\circ$ . A Figura 45 mostra como varia a posição de equilíbrio com a variação da vazão prescrita de lubrificante e destaca as posições e vazões de referência, isto é, correspondentes a condição inundada com  $P_f$  igual a pressão ambiente. A Figura 45 mostra que, como esperado, a capacidade de carga diminui à medida que a vazão de entrada diminui, porém observa-se que essa relação é mais intensa para vazões menores que a de referência, ou seja, com lubrificação *starved*.

Nota-se que na região de lubrificação inundada o aumento da vazão de entrada leva a uma tendência da posição de equilíbrio para direita no caso de  $0^\circ$  e para a esquerda no caso de  $270^\circ$ , o que pode indicar uma influência da pressão de injeção resultante da vazão de entrada imposta. Já para a região em *starvation*, nota-se que há uma semelhança do comportamento dos dois mancais, principalmente quando as vazões de entrada são próximas.

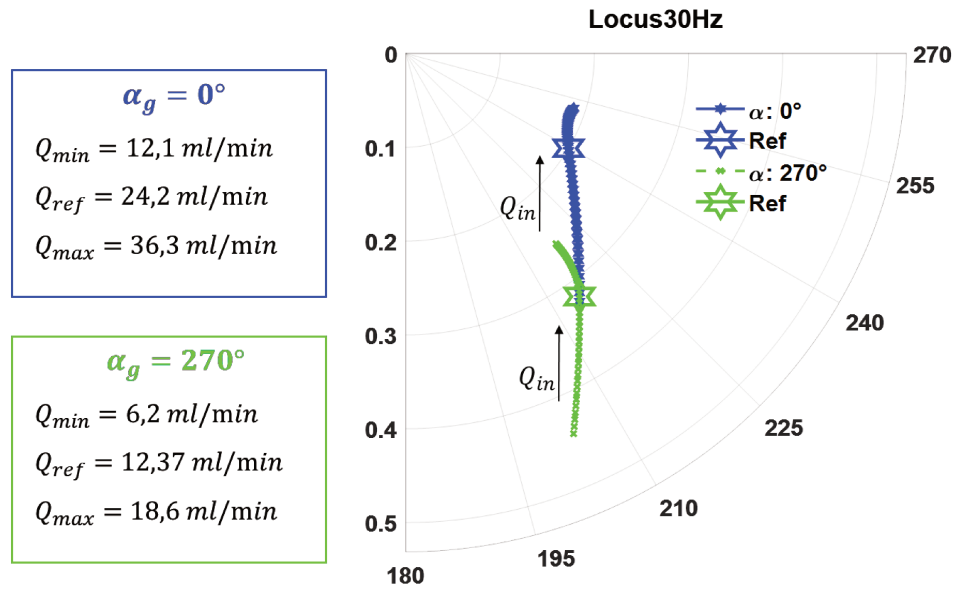


Figura 45: Lócus do eixo com rotação de 30Hz variando a vazão de entrada de lubrificante.

A variação dos coeficientes dinâmicos em relação a vazão prescrita de lubrificante é mostrada na Figura 46 para o *groove* localizado em  $0^\circ$  e na Figura 47 para o *groove* localizado em  $270^\circ$ , revelando uma mudança de comportamento quando a condição de entrada muda de *starved* para *flooded* (transição indicada pela linha tracejada vertical). Destaca-se também a diferença na aparência das curvas para as duas posições distintas do *groove*.

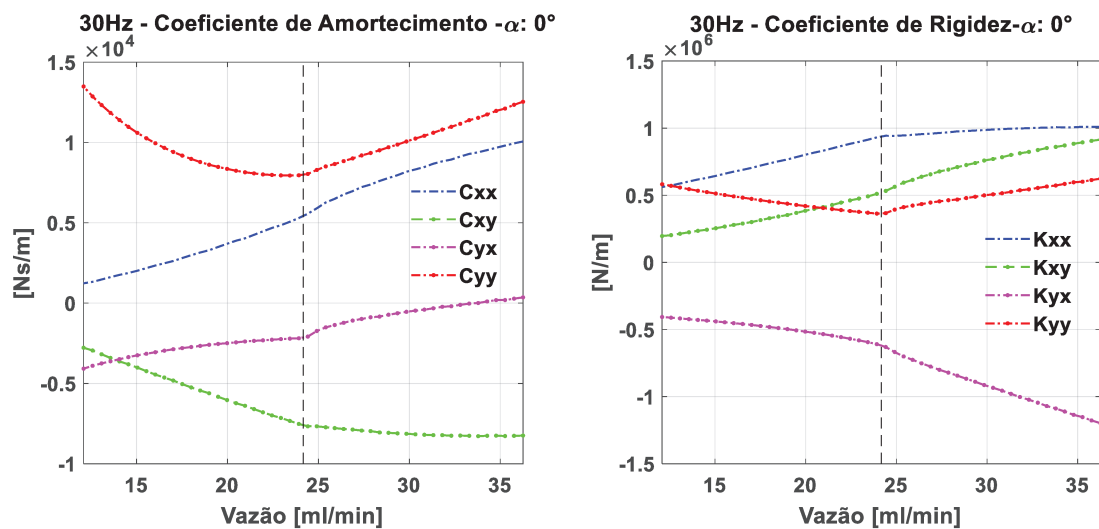


Figura 46: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o *groove* em  $0^\circ$ . Valor da vazão de referência em destaque.

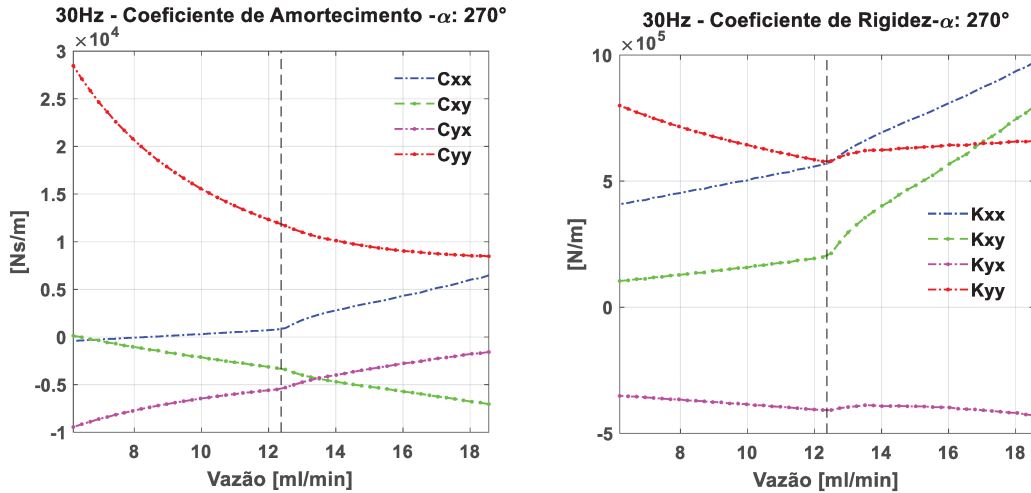


Figura 47: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em 270°. Valor da vazão de referência em destaque.

Uma vez que a vazão de entrada influencia nos coeficientes equivalentes, é esperado uma mudança no comportamento dinâmico de todo rotor, como de fato pode ser observado na variação do fator de amortecimento mostrado na Figura 48 para ambas posições do *groove*. Novamente observa-se uma grande mudança no comportamento do sistema nas proximidades da vazão de referência, onde nota-se a existência de uma faixa de transição do comportamento em *starvation* para o inundado.

Para a posição do *groove* em 270°, a variação é tão significativa que para condições de entrada *starved* ( $\theta_f < 1$ ) os resultados indicam que o rotor fica instável, mesmo operando a 30 Hz, velocidade em que o rotor opera estável na análise clássica (Figura 58). Ressalta-se que o modelo implementado assume a condição de lubrificação hidrodinâmica no mancal. Entretanto, para as condições extremas de falta de lubrificação apresentadas no caso em *starvation* do *groove* em 270°, não é possível garantir que haja as condições necessárias para que exista a lubrificação hidrodinâmica. Além disso, a análise não considera os efeitos termohidrodinâmicos, que serão mais expressivos para lubrificação em *starvation*. Portanto, torna-se necessário um maior cuidado na interpretação dos resultados na condição de *starvation*, além da necessidade de validação experimental dos resultados obtidos.

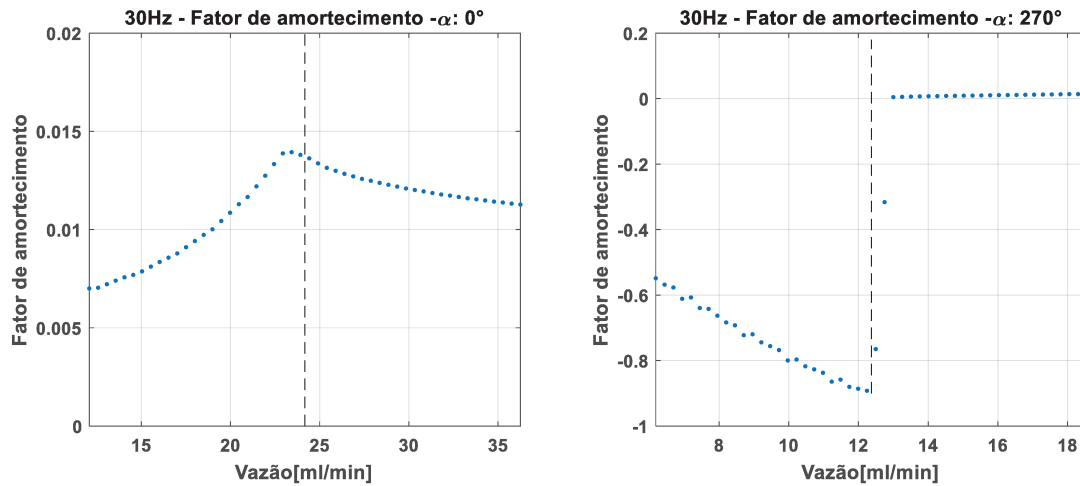


Figura 48: Influência da vazão no fator de amortecimento. Valor da vazão de referência em destaque.

### 5.5.2 Operação em 60 Hz

De maneira análoga, realizou-se a análise da influência da vazão de entrada de lubrificante no comportamento do mancal e do rotor para uma velocidade de rotação de 60 Hz, que resulta em um comportamento instável na análise clássica (Figura 58). Neste caso, a vazão varia de 18,7 a 40,5 ml/min para o *groove* localizado em 0° e de 8,2 a 24,7 ml/min para o *groove* localizado em 270°. A Figura 49 mostra que os efeitos da vazão de entrada no lócus do eixo para rotação de 60Hz são semelhantes aos percebidos na rotação de 30Hz.

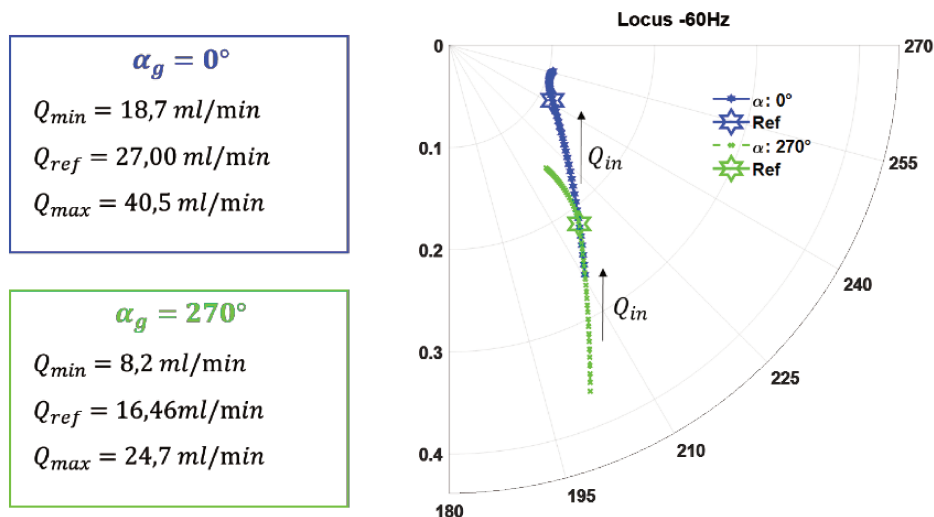


Figura 49: Lócus do eixo com rotação de 60Hz variando a vazão de entrada de lubrificante.

A Figura 50 e a Figura 51 mostram a influência da vazão de entrada nos coeficientes equivalentes para o *groove* localizado em 0° e 270°, respectivamente. Mais

uma vez, a vazão mostra ter grande importância no comportamento do mancal, principalmente quando se analisa a transição antes e depois da vazão de referência.

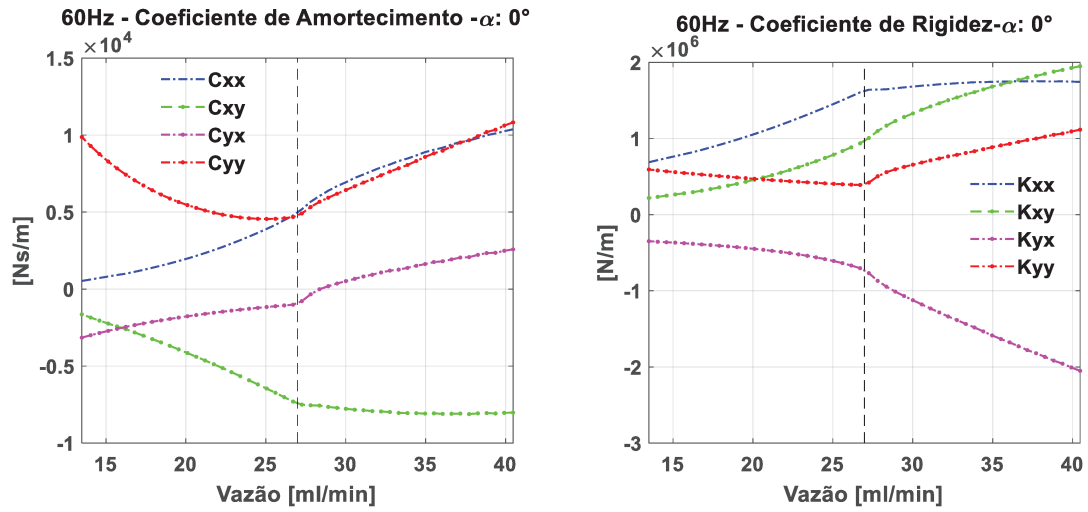


Figura 50: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em  $0^\circ$ . Valor da vazão de referência em destaque.

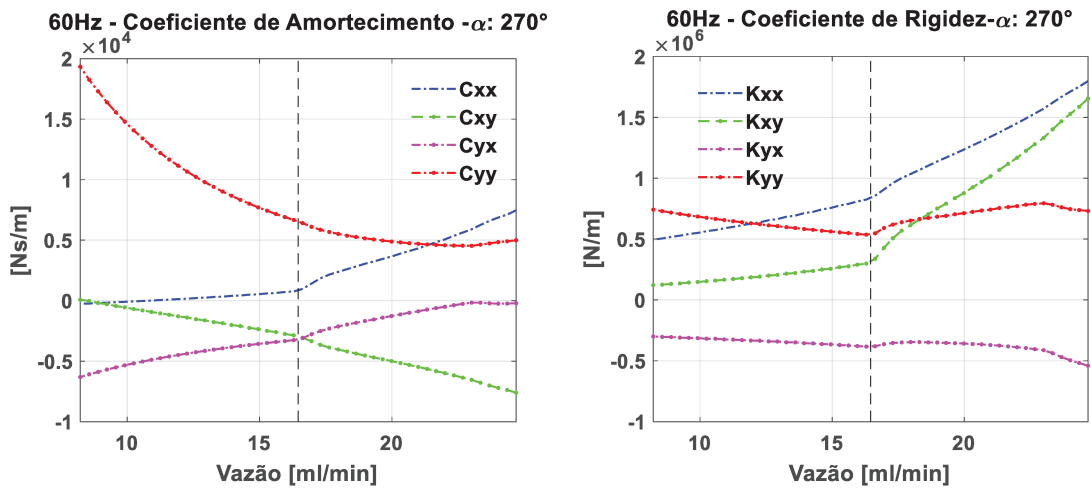


Figura 51: Influência da vazão nos coeficientes equivalentes para o groove em  $270^\circ$ . Valor da vazão de referência em destaque.

Os resultados do fator de amortecimento, mostrados na Figura 52, indicam que para uma condição de entrada *starved* ( $\theta_f < 1$ ) o rotor com *groove* em  $0^\circ$  opera estável, enquanto o rotor com *groove* em  $270^\circ$  opera instável. Por outro lado, para condições de entrada *flooded* ( $\theta_f = 1$ ), o comportamento se inverte, isto é, o rotor com *groove* em  $0^\circ$  está instável, enquanto o rotor com *groove* em  $270^\circ$  está estável. Esses comportamentos sob a condição *flooded* são condizentes com os resultados já apresentados nas análises da posição do *groove*, como mostrado previamente no Capítulo 5.3.



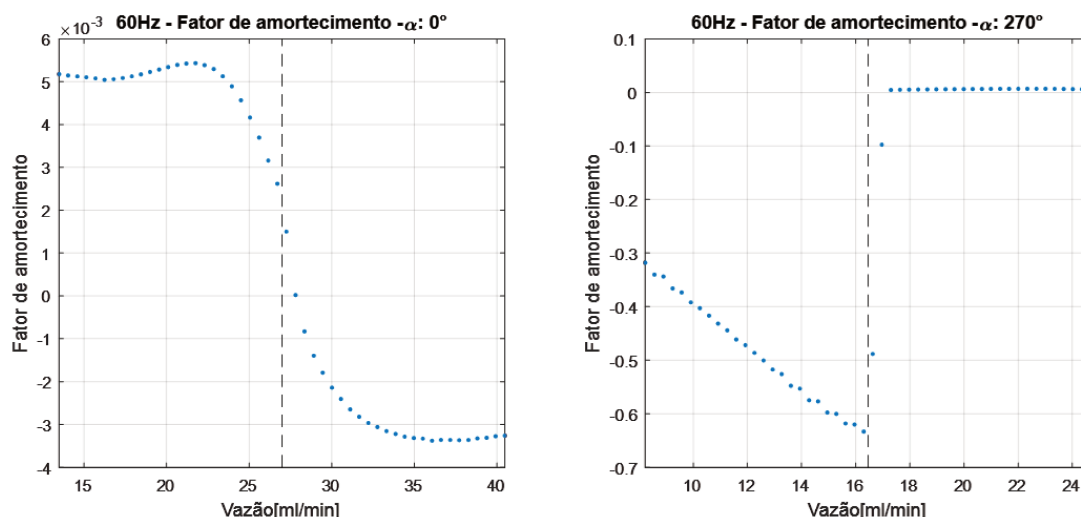


Figura 52: Influência da vazão prescrita no fator de amortecimento de um rotor operando a 60Hz.

Portanto, os resultados mostram que a consideração da vazão de entrada, assim como dos demais parâmetros de fornecimento do lubrificante, são de grande importância na análise do comportamento dinâmico do sistema rotor-mancais. É visível principalmente que há uma grande sensibilidade do mancal quanto a natureza da sua condição de lubrificação, se inundada ou em *starvation*, sendo que o desempenho do mancal muda consideravelmente entre essas condições, o que pode ser percebido na análise de instabilidade. Nota-se também que, apesar da mudança ser brusca, existe uma zona de transição contínua do comportamento *starved* para o inundado, uma vez que há pontos intermediários entre ambos patamares.

Contudo, salienta-se novamente a necessidade de validação experimental dos resultados obtidos, principalmente nas condições de lubrificação em *starvation*, uma vez que os efeitos termohidrodinâmicos desconsiderados são mais relevantes nessas condições e que a lubrificação hidrodinâmica assumida pode não ser mais válida para casos extremos de lubrificação insuficiente.

Também é importante destacar que, apesar da condição de lubrificação com *starvation* ser favorável por manter o mancal com *groove* em  $0^\circ$  com comportamento estável em 60Hz, a lubrificação insuficiente pode acarretar outros diversos problemas, como o superaquecimento dos componentes, o aumento do desgaste do mancal e, inclusive, o rompimento do filme hidrodinâmico, expondo a máquina a uma eventual falha abrupta. As mesmas considerações podem ser feitas para os mancais com *groove*

em  $270^\circ$ , pois, mesmo operando inundados, eles estão sujeitos a altas excentricidades de operação e vazões de lubrificante reduzidas.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresenta uma contribuição à modelagem de mancais hidrodinâmicos considerando as condições de entrada do lubrificante e a inclusão deste modelo na avaliação do comportamento dinâmico do rotor. Assim, foi possível realizar um estudo da influência dos parâmetros de entrada de lubrificante no desempenho do mancal e do sistema rotativo.

À vista disso, foram analisados e implementados diferentes modelos de lubrificação com conservação de massa que incluem as condições de cavitação e as condições de contorno que ditam a entrada de lubrificante no modelo do mancal. Deste modo, utilizou-se o método dos volumes finitos para implementar o modelo clássico de lubrificação de Reynolds (1886), assim como os modelos de cavitação propostos por Elrod (1981), Vijayaraghavan e Keith (1989) e Ausas et al. (2009). Constatou-se que tais modelos de cavitação apresentam resultados equivalentes e são apropriados para a análise das condições de lubrificação, já o modelo clássico apresenta resultados semelhantes somente nos casos em que é imposta lubrificação completamente inundada. Dessa forma, as análises deste trabalho foram conduzidas com o modelo proposto por Ausas et al. (2009), conhecido como modelo  $p-\theta$ , devido a melhor robustez na convergência.

É importante ressaltar que a implementação da condição de contorno da entrada do lubrificante foi executada com duas abordagens distintas, sendo elas a imposição da pressão de alimentação ou a imposição da vazão de alimentação. A análise realizada com condição de entrada por vazão de alimentação é a mais adequada para tratar cenários com lubrificação insuficiente, também conhecida como condição de *starvation*.

O presente trabalho realizou análises para diferentes condições de entrada de lubrificante, obtendo os efeitos da posição do *groove*, da pressão de alimentação e da vazão de alimentação no comportamento estático e dinâmico do sistema rotativo. Os resultados obtidos mostraram uma grande influência dos parâmetros de entrada em muitos aspectos do comportamento do rotor.

A posição do *groove* no mancal se revelou muito importante para determinar desde a capacidade de carga do mancal até o limiar de instabilidade do rotor. Observa-se que o desempenho de um mancal com um groove em 90° ou dois grooves em 90 e 270° é praticamente equivalente. Além disso, destaca-se que a performance do mancal com um

só groove em  $270^\circ$  é completamente distinta das demais configurações de *groove*, apresentando desempenho estático inferior, uma vez que possui vazão de entrada, área lubrificada e capacidade de carga bastante reduzidas, contudo indica comportamento estável do rotor mesmo após rotações superiores ao dobro da primeira frequência natural do mesmo.

Já o aumento da pressão de alimentação provoca, em geral, uma melhora na capacidade de carga e o aumento do volume de vazão de entrada. Quanto à influência da pressão de alimentação no comportamento dinâmico do mancal, observa-se que há uma grande relação com a posição do *groove*, de forma que o aumento da pressão de alimentação para o *groove* em  $0^\circ$  causou uma diminuição do limiar de instabilidade, enquanto para o *groove* em  $270^\circ$  não houve instabilidades para as condições testadas.

A influência da vazão de entrada também se mostrou muito dependente da posição do *groove*. De maneira geral, observa-se que há uma mudança expressiva do comportamento do rotor quando a vazão de entrada passa de uma condição inundada para uma condição *starved*, em que a folga do mancal não é completamente preenchida pelo lubrificante na região do *groove*. O mancal com *groove* posicionado em  $270^\circ$  mostrou comportamento instável para condições de lubrificação *starved* e comportamento estável com lubrificação inundada para ambas as velocidades de rotação testadas (30Hz e 60Hz). Por outro lado, o mancal com groove posicionado em  $0^\circ$  está estável para rotação de 30Hz em ambas condições de lubrificação testadas (*starved* e *flooded*) e fica instável em 60Hz apenas para lubrificação inundada. Portanto, a lubrificação insuficiente pode afetar de diferentes formas o comportamento do mancal, logo torna-se mandatório investigar os efeitos da vazão de lubrificante para cada condição de lubrificação da máquina.

Dessa forma, conclui-se que as condições de alimentação do mancal são extremamente importantes e influentes no comportamento da máquina rotativa, sendo que a posição do *groove* se mostrou um parâmetro de relevância em especial. Portanto, para uma análise criteriosa e acurada do mancal e do conjunto do rotor, faz-se necessário a utilização de modelos de lubrificação conservativos nos quais a condição de entrada de lubrificante é modelada e seus efeitos são considerados nos resultados estáticos e dinâmicos do sistema.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como desdobramento deste trabalho, propõem-se como próximas etapas:

- Análise da influência do termo de expansão local ( $\partial\theta/\partial t$ ), avaliando sua inclusão na análise não-linear em comparação ao seu negligenciamento assumido na análise linear por coeficientes;
- Análise dos efeitos de lubrificação *starved* na resposta temporal do rotor;
- Inclusão dos efeitos térmicos no modelo do mancal, assim como análise da influência da temperatura de entrada do lubrificante;
- Validação experimental dos modelos obtidos neste trabalho.

## REFERÊNCIAS

AHMAD, M. A.; KASOLANG, S.; DWYER-JOYCE, R. Experimental Study of Oil Supply Pressure Effects on Bearing Friction in Hydrodynamic Lubrication. In: **Applied Mechanics and Materials**. Trans Tech Publications, p. 977-981, 2013a.

AHMAD, M. A., KASOLANG, S., DWYER-JOYCE, R., BAKAR, M. A. A. The Effects of Oil Groove Position on Torque and Frictional Force in Hydrodynamic Journal Bearing. In: **Applied Mechanics and Materials**. Trans Tech Publications, p. 907-912, 2013b.

AHMAD, M. A.; KASOLANG, S.; DWYER-JOYCE, R. S. Experimental study on the effects of oil groove location on temperature and pressure profiles in journal bearing lubrication. **Tribology International**, v. 74, p. 79-86, 2014a.

AHMAD, M. A.; KASOLANG, S.; DWYER-JOYCE, R. S. Experimental study on the effects of oil groove location on temperature and pressure profiles in journal bearing lubrication. **Tribology International**, v. 74, p. 79-86, 2014b.

AKKOK, M.; MCC. ETTLES, C. M. The effect of grooving and bore shape on the stability of journal bearings. **ASLE Transactions**, v. 23, n. 4, p. 431-441, 1980.

ALVES, D.S. **Sistemas rotativos sujeitos às não linearidades de mancais lubrificados**. Tese (Doutorado). Campinas, Brasil: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2018.

ARTILES, A.; HESHMAT, H. Analysis of starved journal bearings including temperature and cavitation effects. **Journal of tribology**, v. 107, n. 1, p. 1-13, 1985.

AUSAS, R., RAGOT, P., LEIVA, J., JAI, M., BAYADA, G., BUSCAGLIA, G. C. The impact of the cavitation model in the analysis of microtextured lubricated journal bearings. **Journal of Tribology**, v. 129, n. 4, p. 868-875, 2007.

AUSAS, R. F.; JAI, M.; BUSCAGLIA, G.C. A mass-conserving algorithm for dynamical lubrication problems with cavitation. **Journal of Tribology**, v. 131, n. 3, p. 031702, 2009.

BAYADA, G.; MARTIN, S.; VÁZQUEZ, C. Micro-roughness effects in (elasto) hydrodynamic lubrication including a mass-flow preserving cavitation model. **Tribology International**, v. 39, n. 12, p. 1707-1718, 2006.

BONNEAU, D.; FRENE, J. Film formation and flow characteristics at the inlet of a starved contact—theoretical study. **Journal of Lubrication Technology**, v. 105, n. 2, p. 178-185, 1983.

BOUARD, L.; FILLON, M.; FRENE, J. Comparison between three turbulent models—application to thermohydrodynamic performances of tilting-pad journal bearings. **Tribology International**, v. 29, n. 1, p. 11-18, 1996.

BRITO, F. P., MIRANDA, A. S., CLARO, J. C. P., FILLON, M. Experimental study of the influence of groove flow rate on the performance of a single and a twin groove journal bearing. In: Proceedings of the STLE Annual Meeting, Cleveland Convention Center, Ohio, p. 18-22, 2008.

BRITO, F.P. **Thermohydrodynamic performance of twin groove journal bearings considering realistic lubricant supply conditions: a theoretical and experimental study**. Tese (Doutorado). Guimarães, Portugal: School of Engineering, Universidade do Minho. 2009.

BRITO, F. P., MIRANDA, A. S., CLARO, J. C. P., FILLON, M. Experimental comparison of the performance of a journal bearing with a single and a twin axial groove configuration. **Tribology international**, v. 54, p. 1-8, 2012.

BRITO, F.P., MIRANDA, A. S., CLARO, J. C. P., TEIXEIRA, J. C., COSTA, L., FILLON, M. The role of lubricant feeding conditions on the performance improvement

and friction reduction of journal bearings. **Tribology International**, v. 72, p. 65-82, 2014.

BUDYNAS, R. G., NISBETT, J. K. **Shigley's mechanical engineering design**. New York: McGraw-Hill, 2008.

CHAPRA, S. C., CANALE, R.P. **Numerical Methods for Engineers**. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2015.

CHRISTOPHERSON, D.G. **A new mathematical method for the solution of film lubrication problems**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, v. 146, n. 1, p. 126-135, 1941.

CHUN, S. M.; LALAS, D. P. Parametric study of inlet oil temperature and pressure for a half-circumferential grooved journal bearing. **Tribology transactions**, v. 35, n. 2, p. 213-224, 1992.

CLARO, J.C.P.; MIRANDA, A.A.S. Analysis of hydrodynamic journal bearings considering lubricant supply conditions. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 207, n. 2, p. 93-101, 1993.

COSTA, L., MIRANDA, A. S., FILLON, M., CLARO, J. C. P. An analysis of the influence of oil supply conditions on the thermohydrodynamic performance of a single-groove journal bearing. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: **Journal of Engineering Tribology**, v. 217, n. 2, p. 133-144, 2003.

CZICHOS, H. Tribology: a systems approach to the science and technology of friction, lubrication, and wear. **Elsevier**, 2009.



DANIEL, G.B. **Desenvolvimento de um Modelo Termohidrodinâmico para Análise em Mancais Segmentados**. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2012. Tese (Doutorado).

DOWSON, D. **A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication**. International Journal of Mechanical Sciences, v. 4, n. 2, p. 159-170, 1962.

DOWSON, D., HIGGINSON, G. R., ARCHARD, F. J., CROOK, A. W. **Elastohydrodynamic Lubrication**, SI Edition, Pergamon Press. 1977.

DOWSON, D.; TAYLOR, C. M.; MIRANDA, A. A. S. The Prediction of Liquid Film Journal Bearing Performance with a Consideration of Lubricant Film Reformation: Part 1: Theoretical Results. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 199, n. 2, p. 95-102, 1985a.

DOWSON, D.; TAYLOR, C. M.; MIRANDA, A. A. S. The Prediction of Liquid Film Journal Bearing Performance with a Consideration of Lubricant Film Reformation: Part 2: Experimental Results. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 199, n. 2, p. 103-111, 1985b.

DUBOIS, G. B.; OCVIRK, F. W. Analytical derivation and experimental evaluation of short-bearing approximation for full journal bearing. 1953.

ELROD, H. G., ADAMS, M. L., "A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems," Leeds-Lyon Conference on Cavitation, Leeds Univ. England, 1974.

ELROD, H.G. A cavitation algorithm. **Journal of lubrication Technology**, v. 103, n. 3, p. 350-354, 1981.

ETSION, I.; PINKUS, O. Analysis of short journal bearings with new upstream boundary conditions. **Journal of Lubrication Technology**, v. 96, n. 3, p. 489-496, 1974.

ETSION, I.; PINKUS, O. **Solutions of finite journal bearings with incomplete films.** ASME J. Lubr. Technol, v. 97, p. 89-93, 1975.

ETSION, I. Modeling of surface texturing in hydrodynamic lubrication. **Friction**, v. 1, n. 3, p. 195-209, 2013.

FERREIRA, R.B. **Análise numérica de mancais hidrodinâmicos lisos e ranhurados utilizando o método dos volumes finitos.** 2009. 92 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

FLOBERG, L. Lubrication of two rotating cylinders at variable lubricant supply with reference to the tensile strength of the liquid lubricant. **Journal of Lubrication Technology**, v. 95, n. 2, p. 155-163, 1973.

FRENE, J., NICOLAS, D., DEGUEURCE, B., BERTHE, D., GODET, M., Hydrodynamic lubrication: bearings and thrust bearings. **Elsevier**, 1997.

GETHIN, D. T.; MEDWELL, J. O. Analysis of high speed bearings operating with incomplete films. *Tribology international*, v. 18, n. 6, p. 340-346, 1985.

GETHIN, D. T.; MEDWELL, J. O. Paper III (iv) Starvation effects in two high speed bearing types. In: **Tribology series**. Elsevier, 1987. p. 81-92.

GÜMBEL, L. Das problem der Lagerreibung. **Mbl. Berlin. Bez. Ver. dtsh. Ing**, v. 5, 1914.

HAMROCK, B. J.; JACOBSON, B. O.; SCHMID, S. R. Stresses and Deformation in Cylinders. **Fundamentals of machine elements**, McGraw-Hill, 1999.

HE, M., ALLAIRE, P., BARRETT, L., NICHOLAS, J. Thermohydrodynamic modeling of leading-edge groove bearings under starvation condition. **Tribology transactions**, v. 48, n. 3, p. 362-369, 2005.

HESHMAT, H.; GORSKI, P. Paper III (iii) Mixing inlet temperatures in starved journal bearings. In: **Tribology Series**. Elsevier, 1987. p. 73-79.

HESHMAT, H.; PINKUS, O. Performance of Starved Journal Bearings with Oil Ring lubrication. 1985.

HIRANI, H. Multiobjective optimization of journal bearing using mass conserving and genetic algorithms. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: **Journal of Engineering Tribology**, v. 219, n. 3, p. 235-248, 2005.

HUMMEL, Charles. **Kritische Zahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager**. 1926. Tese de Doutorado. ETH Zurich.

JAKOBSSON, B. The finite journal bearing, considering vaporization. **Transactions of Chalmers University of Technology**, v. 190, 1957.

KNIGHT, J. D.; BARRETT, L. E.; CRONAN, R. D. The effects of supply pressure on the operating characteristics of two-axial-groove journal bearings. **ASLE transactions**, v. 28, n. 3, p. 336-342, 1985.

LIJESH, K. P., MUZAKKIR, S. M., HIRANI, H., THAKRE, G. D. Control on wear of journal bearing operating in mixed lubrication regime using grooving arrangements. **Industrial Lubrication and Tribology**, 2016.

LUND, J. W. Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing. **ASLE transactions**, v. 7, n. 4, p. 342-352, 1964.

LUND, J. W. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. **Journal of Tribology**, v. 109, n. 1, p. 37-41, 1987.

MANSOOR, Y.; SHAYLER, P. The effect of oil feed pressure on the friction torque of plain bearings under light, steady loads. **Tribology International**, v. 119, p. 316-328, 2018.

MAHLE METAL LEVE. **Manual de Falhas Prematuras**. 2016

MACHADO, T. H. **Avaliação de mancais hidrodinâmicos com descontinuidades geométricas**. 2011. 122 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

MACHADO, T. H.; ALVES, D. S.; CAVALCA, K. L. Discussion about nonlinear boundaries for hydrodynamic forces in journal bearing. **Nonlinear Dynamics**, v. 92, n. 4, p. 2005-2022, 2018.

MCCALLION, H.; LLOYD, T.; YOUSIF, F. B. The influence of oil supply conditions on the film extent and oil flow in journal bearings. In: **IMEchE Tribology Convention**. 1971. p. 31-37.

MCCLOSKEY, T. H. Troubleshooting Bearing and Lube Oil System Problems. In: **Proceedings of the 24th Turbomachinery Symposium**. Texas A&M University. Turbomachinery Laboratories, 1995.

MIRANDA, A.A.S. Oil flow, cavitation and film reformation in journal bearings, including an interactive computer-aided design study. 1983. Tese (Doutorado) - University of Leeds.

MISTRY, K.; BISWAS, S.; ATHRE, K. A new theoretical model for analysis of the fluid film in the cavitation zone of a journal bearing. **Journal of tribology**, v. 119, n. 4, p. 741-746, 1997.

MORTON, P. G.; JOHNSON, J. H.; WALTON, M. H. Paper XI (ii) The influence of grooves in bearings on the stability and response of rotating systems. In: **Tribology Series**. Elsevier, p. 347-354, 1987.

NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **Journal of Engineering for Industry**, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.

NEWKIRK, B. L.; TAYLOR, H. D. Shaft whipping due to oil action in journal bearings. **General Electric Review**, v. 28, n. 8, p. 559-568, 1925.

NICHOLAS, J. C., ELLIOTT, G., SHOUP, T. P., MARTIN, E. Tilting pad journal bearing starvation effects. In: **Proceedings of the 37th Turbomachinery Symposium**. Texas A&M University. Turbomachinery Laboratories, 2008.

NICHOLS, B. R.; FITTRO, R. L.; GOYNE, C. P. Rotor Damped Natural Frequencies and Stability Under Reduced Oil Supply Flow Rates to Tilting-Pad Journal Bearings. **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, v. 140, n. 12, p. 122502, 2018.

NORTON, R.L. **Projeto de máquinas**. Bookman editora, 2013.

OLSSON, K. Cavitation in dynamically loaded bearings. **Transactions of Chalmers University of Technology**, v. 308, 1965.

OCVIRK, F.W. Short-bearing approximation for full journal bearings. 1952.

PARANJPE, R. S.; GOENKA, P. K. Analysis of crankshaft bearings using a mass conserving algorithm. **Tribology Transactions**, v. 33, n. 3, p. 333-344, 1990.

PARANJPE, R. S.; HAN, T. A Finite Wolume Analysis of the Thermohydrodynamic Performance of Finite Journal Bearings. **Journal of Tribology**, v. 112, p. 557, 1990.

PARANJPE, R. S.; HAN, T. A transient thermohydrodynamic analysis including mass conserving cavitation for dynamically loaded journal bearings. **Journal of tribology**, v. 117, n. 3, p. 369-378, 1995.

PATIR, N.; CHENG, H. S. An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. **Journal of lubrication Technology**, v. 100, n. 1, p. 12-17, 1978.

PATIR, N.; CHENG, H. S. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces. **ASME, Lubrication Division**, 1978.

PEDREIRA, J.A.; WEBER, H.I. **Dinâmica de Máquinas Rotativas em Mancais Hidrodinâmicos**. Rio de Janeiro, 2006. 113p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PERSSON, C.; BERG, S. Strategies towards injectable, load-bearing materials for the intervertebral disc: a review and outlook. **Journal of Materials Science: Materials in Medicine**, v. 24, n. 1, p. 1-10, 2013.

PETROV, N. P. Friction in Machines and the Effect of the Lubricant. **Inzh. Zh.**, St-Peterb., 1883.

PIERRE, I.; FILLON, M. Influence of geometric parameters and operating conditions on the thermohydrodynamic behaviour of plain journal bearings. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, v. 214, n. 5, p. 445-457, 2000.

PINKUS, O. Analysis of elliptical bearings. **Trans ASME**, v. 78, p. 965, 1956.

PINKUS, O. Solution of Reynolds equation for finite journal bearings. **Trans. ASME**, v. 80, p. 858-864, 1958.

PINKUS, O. Analysis and characteristics of the three-lobe bearing. **Journal of Basic Engineering**, v. 81, n. 1, p. 49-55, 1959.

PROFITO, F. J.; ZACHARIADIS, D. C. **On the development of advanced techniques for mixed-elastohydrodynamic lubrication modelling of journal and sliding bearing systems**. Tese (Doutorado). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015

RAMOS, D. J. **Efeito da cavitação em mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de rotores**. 2019. 1 recurso online (106 p.). Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

RAO, T.V.V.L.N.; SAWICKI, J.T. Stability analysis of a rough journal bearing considering cavitation effects. **Journal of tribology**, v. 127, n. 1, p. 112-119, 2005.

REYNOLDS, O. IV. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, n. 177, p. 157-234, 1886.

ROY, L.; LAHA, S. K. Steady state and dynamic characteristics of axial grooved journal bearings. **Tribology International**, v. 42, n. 5, p. 754-761, 2009.

ROY, L.; MAJUMDAR, B. C. Effect of the location of axial groove on the steady state and dynamic characteristics of oil journal bearings. In: National conference on Machines and Mechanisms, p. 261–268, 2005.

SAN ANDRES, L. Notes 02. Classical Lubrication Theory. 2009. Available electronically from <http://hdl.handle.net/1969.1/93242>.

SCHÄFER, M. **Computational engineering: Introduction to numerical methods**. Berlin: Springer, 2006.

SILVA, E. L. **Dinâmica de rotores: modelo matemático de mancais hidrodinâmicos**. 2004. Dissertação (Mestrado) – Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

SMITH, D. M. The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 142, n. 846, p. 92-118, 1933.

SOMMERFELD, A. The hydrodynamic theory of lubrication friction. **Z. Math. Phys**, v. 50, n. 1-2, p. 97-155, 1904.

STIEBER, W. **Des Schwimm lager: hydrodynamische Theorie des Gleitlagers**. VDI-Verlag, GmbH., 1933.

STODOLA, A. Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager. **Schweizerische Bauzeitung**, v. 85, n. 21, p. 265-266, 1925.

SWIFT, H. W. The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings. (includes appendix). In: **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**. Thomas Telford-ICE Virtual Library, p. 267-288, 1932.

TANAKA, M. Journal bearing performance under starved lubrication. **Tribology international**, v. 33, n. 3-4, p. 259-264, 2000.

TIWARI, R.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I. Identification of dynamic bearing parameters: a review. **Shock and Vibration Digest**, v. 36, n. 2, p. 99-124, 2004.

TOWER, B. First report on friction experiments. **Proceedings of the institution of mechanical engineers**, v. 34, n. 1, p. 632-659, 1883.

VIJAYARAGHAVAN, D.; KEITH JR, T. G. Development and evaluation of a cavitation algorithm. **Tribology Transactions**, v. 32, n. 2, p. 225-233, 1989.



VIJAYARAGHAVAN, D.; KEITH JR, T. G. Effect of type and location of oil groove on the performance of journal bearings. **Tribology transactions**, v. 35, n. 1, p. 98-106, 1992.

VIJAYARAGHAVAN, D.; KEITH JR, T. G.; BREWE, D. E. Effect of lubricant supply starvation on the thermohydrodynamic performance of a journal bearing. **Tribology transactions**, v. 39, n. 3, p. 645-653, 1996.

VINCENT, B.; MASPEYROT, P.; FRÉNE, J. Starvation and cavitation effects in finite grooved journal bearing. In: **Tribology Series**. Elsevier, p. 455-464, 1995.

WANG, J. K.; KHONSARI, M. M. Effects of oil inlet pressure and inlet position of axially grooved infinitely long journal bearings. Part I: Analytical solutions and static performance. *Tribology International*, v. 41, n. 2, p. 119-131, 2008a.

WANG, J. K.; KHONSARI, M. M. Effects of oil inlet pressure and inlet position of axially grooved infinitely long journal bearings. Part II: Nonlinear instability analysis. *Tribology International*, v. 41, n. 2, p. 132-140, 2008b.

WANG, L. Use of structured surfaces for friction and wear control on bearing surfaces. **Surface Topography: Metrology and Properties**, v. 2, n. 4, p. 043001, 2014.

WANG, L. L., WEI, Y. L., YUAN, G. T., GUO, S. H. Analysis of Steady State Characteristics for Single-axial Groove Sleeve Bearing. In: **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**. IOP Publishing p. 012013, 2018.

WILLIAMS, J. **Engineering tribology**. Cambridge University Press, 2005.

ZHANG, Y. Linear deformation of a journal bearing and its relationship to hydrodynamic pressure. **Wear**, v. 115, n. 1-2, p. 41-52, 1987.

## APÊNDICE I - COMPARAÇÃO ENTRE MODELO DE REYNOLDS E P- $\theta$

Este capítulo apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo clássico de Reynolds e os obtidos com um modelo com cavitação e conservação de massa utilizando a formulação p- $\theta$ . Como o modelo de Reynolds não garante a conservação de massa em todo o mancal, não é necessário especificar uma condição de entrada de lubrificante através de um *groove*, de modo que o modelo considera que o mancal opera inundado. Porém, é preciso especificar um groove para o modelo p- $\theta$ , logo, as condições de contorno dos problemas são diferentes, tornando difícil compará-los.

Uma tentativa foi feita utilizando, na formulação p- $\theta$ , um *groove* localizado em  $\alpha_g = 0^\circ$  que se estende ao longo de todo comprimento do mancal ( $b/L = 1$ ) e que possui largura equivalente a um volume de controle ( $a = \Delta x$ ), ou seja, o *groove* equivale a primeira coluna de volumes finitos da malha. Foi imposta uma pressão de entrada no *groove* igual a pressão ambiente ( $P_f = 0 \text{ Pa}$ ), de modo que toda a espessura de filme é preenchida com lubrificante na região do groove ( $\theta = 1$ ), porém sem formar pressão adicional. Os dados do mancal e do rotor utilizados são os mesmos apresentados na Tabela 2 e na Tabela 3, respectivamente.

A Figura 53 mostra o perfil da pressão hidrodinâmica no plano de simetria axial do mancal, mostrando que, de fato, as duas abordagens levam a resultados diferentes.

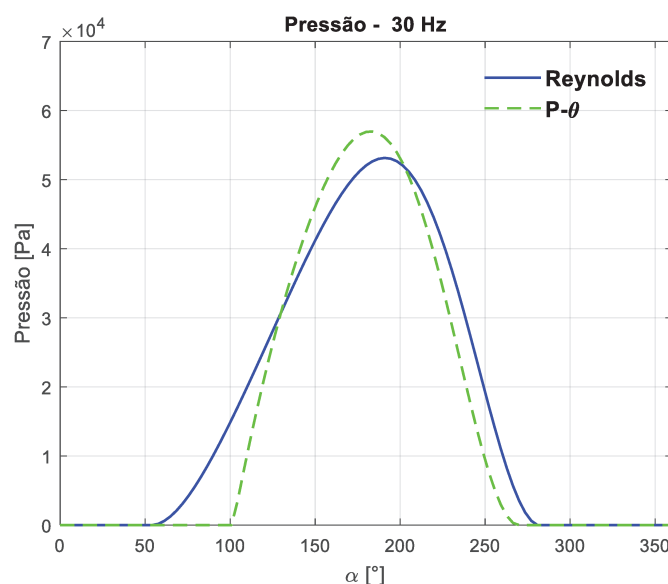


Figura 53: Comparação entre Reynolds e p-  $\theta$ : distribuição de pressão para 30Hz.

Consequentemente, a Figura 54 mostra que os resultados de lócus e vazão também são diferentes para os dois modelos, principalmente quanto à vazão, visto que o *groove* utilizado na formulação  $p-\theta$  não foi suficiente para garantir a mesma vazão observada em um mancal idealmente inundado como no modelo de Reynolds.

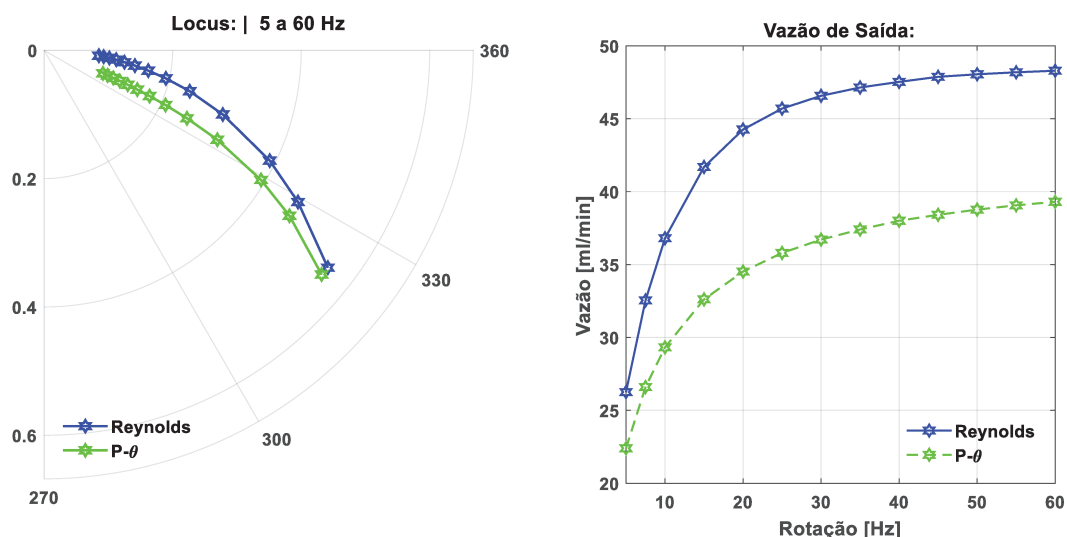


Figura 54: Comparação entre Reynolds e  $p-\theta$ : locus e vazão de saída de lubrificante.

Os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento obtidos encontram-se na Figura 55 e na Figura 56, respectivamente, e revelam que os valores são distintos para todos coeficientes, principalmente para os coeficientes de rigidez diretos. Além disso, os valores dos coeficientes de amortecimento cruzados  $C_{xy}$  e  $C_{yx}$  são iguais no modelo de Reynolds, como esperado, porém o mesmo não ocorre no modelo  $p-\theta$ .

Apesar das diferenças consideráveis nos resultados do caso estático e nos coeficientes equivalentes, a comparação dos resultados do diagrama de Campbell e do fator de amortecimento, Figura 57 e Figura 58, respectivamente, mostram que o comportamento dinâmico dos rotores não é muito distinto, principalmente porque, se tratando de um rotor flexível, o comportamento dinâmico é determinado predominantemente pela rigidez do rotor, sendo que a influência do mancal é menos notória. A Figura 57 destaca a velocidade crítica e a Figura 58 destaca os limiares de instabilidade de cada modelo, indicando valores próximos.

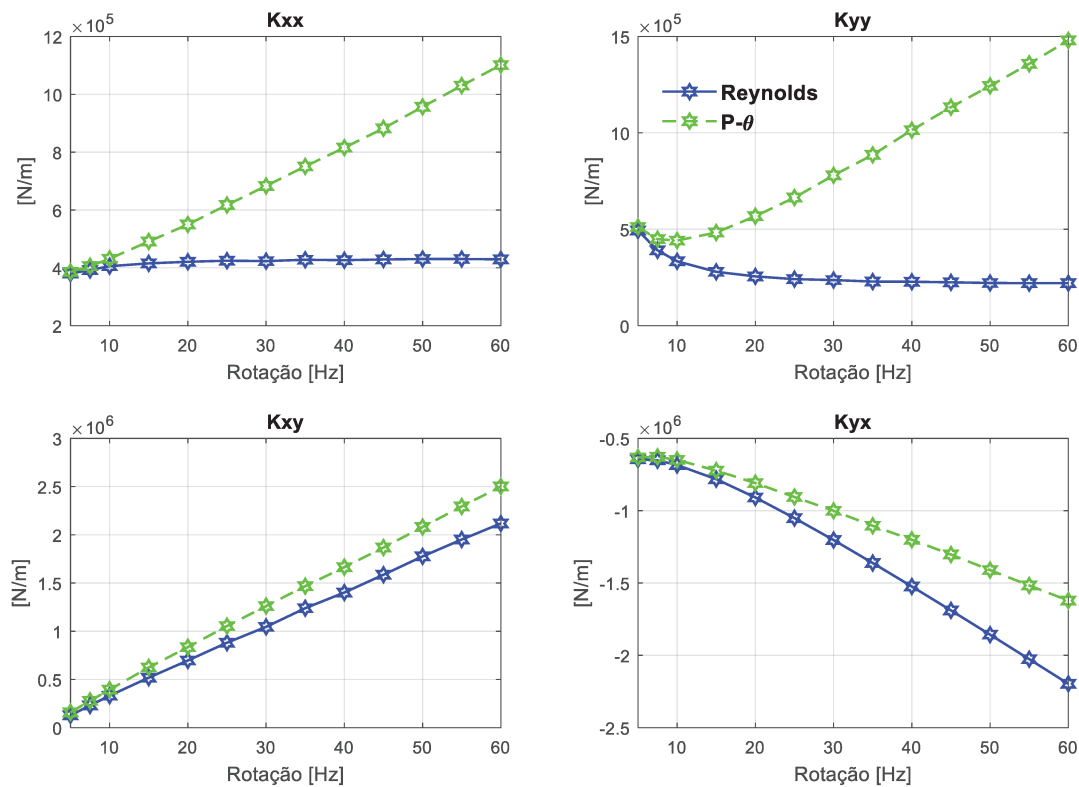


Figura 55: Comparação entre Reynolds e  $p-\theta$ : coeficiente de rigidez.

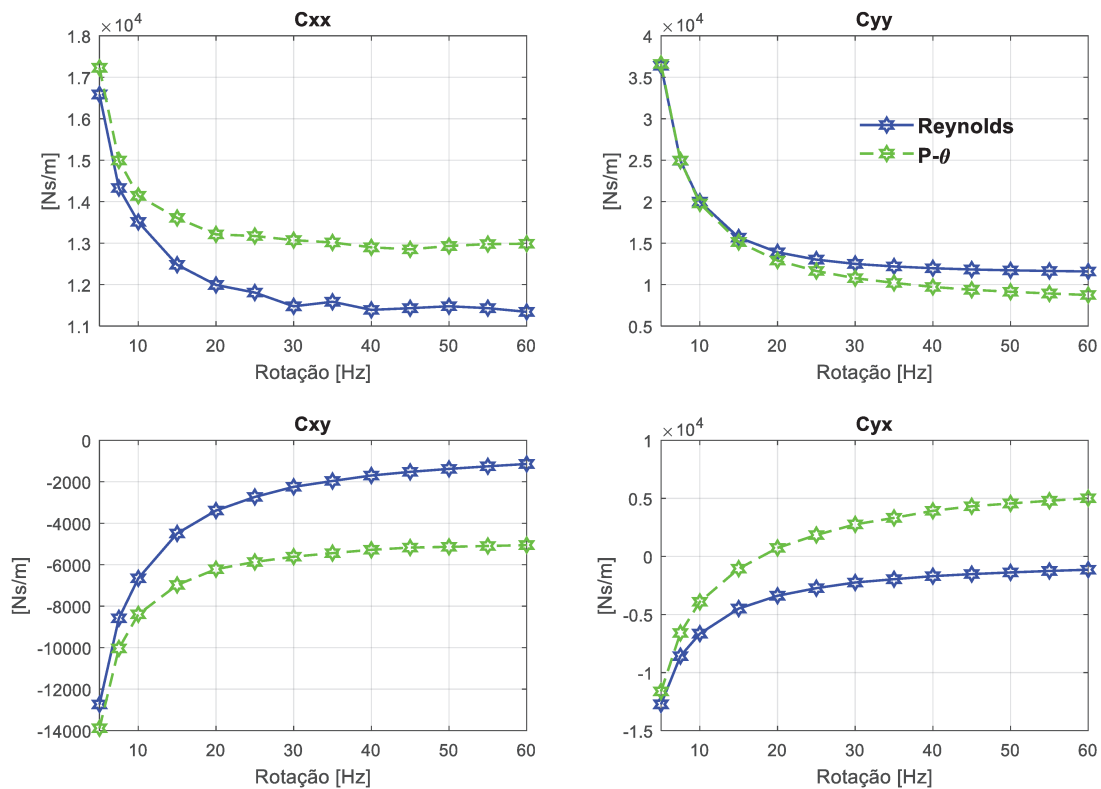


Figura 56: Comparação entre Reynolds e  $p-\theta$ : coeficiente de amortecimento.

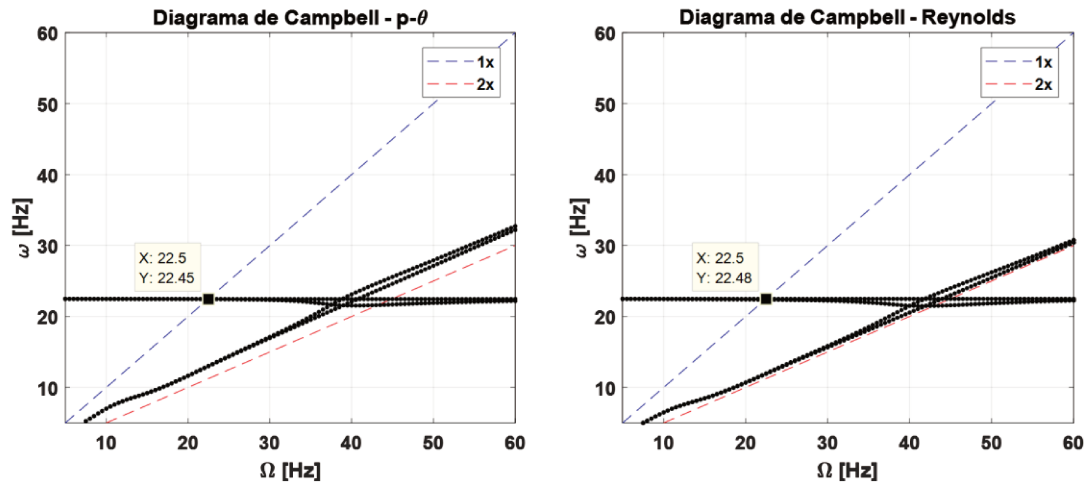


Figura 57: Comparação entre Reynolds e  $p-\theta$ : Diagrama de Campbell.

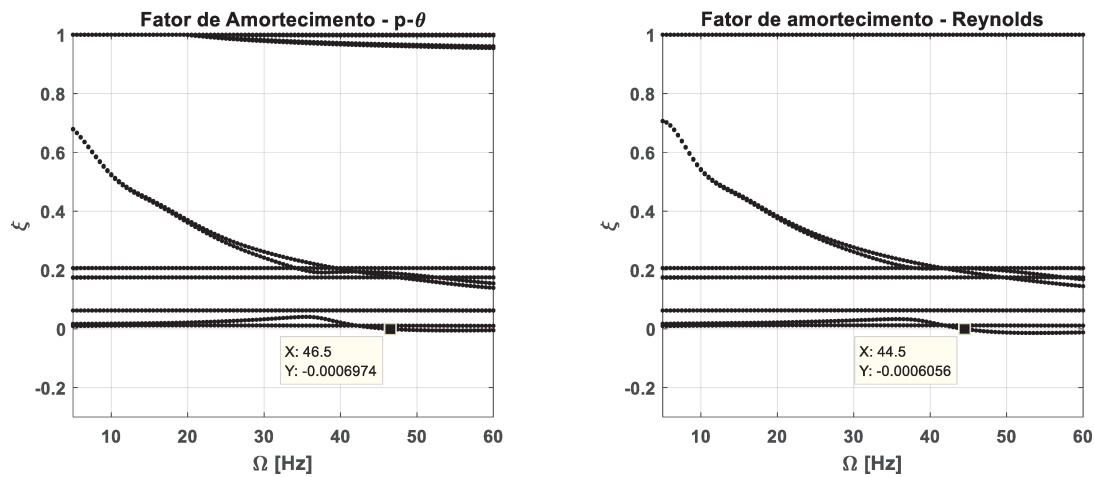


Figura 58: Comparação entre Reynolds e  $p-\theta$ : fator de amortecimento.

Por fim, ainda tentando equiparar as condições de contorno dos dois modelos, realizou-se uma simulação em que, conhecida a vazão de saída resultante do modelo de Reynolds, impunha-se essa mesma vazão como condição de contorno de entrada no modelo  $p-\theta$ , ou seja, garantindo que ambos modelos operem com mesma vazão. Para tanto, o *groove* utilizado no modelo  $p-\theta$  possui comprimento axial  $b/L = 1$  e largura  $a/D = 1,1$ , de forma a distribuir a vazão de entrada de forma homogênea, sem resultar em uma pressão de entrada proeminente.

A Figura 59 mostra a comparação da distribuição de pressão dos dois modelos quando a vazão de ambos é correspondente, indicando que, neste caso, os modelos apresentam resultados semelhantes. A Figura 60 mostra o lócus e a vazão de saída dessa abordagem, indicando que tanto as posições de equilíbrio como as vazões de saída obtidas com Reynolds e  $p-\theta$  são equivalentes.

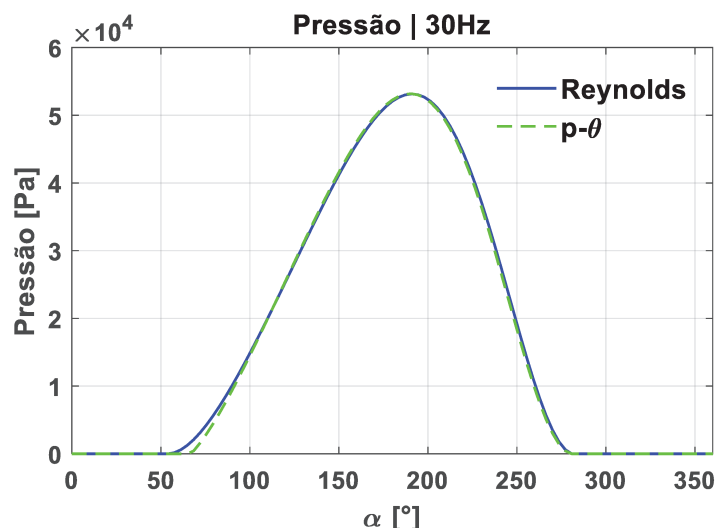


Figura 59: Distribuição de pressão na simetria axial com rotação de 30Hz para o modelo de Reynolds e o modelo p- $\theta$ , ambos com a mesma vazão de entrada.

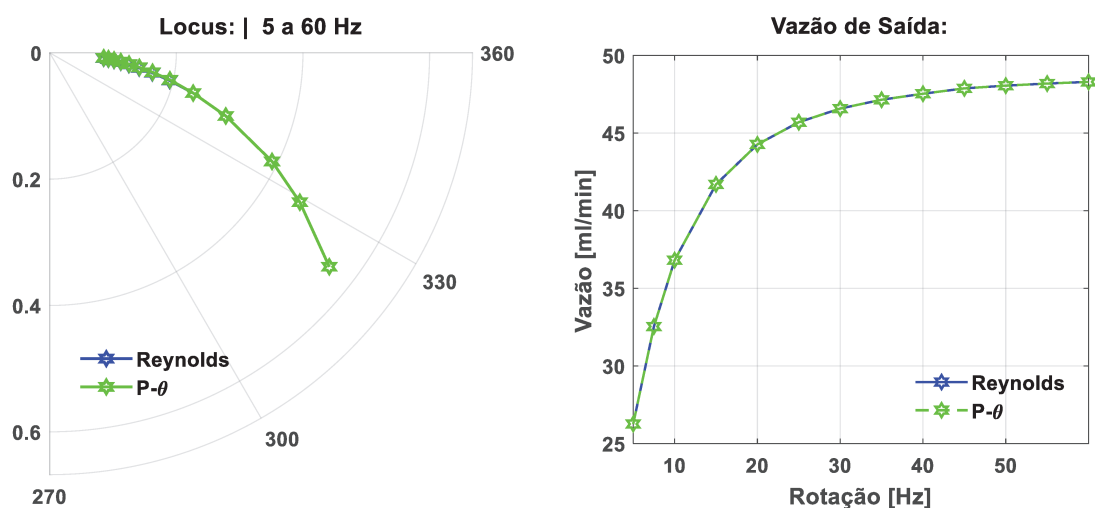


Figura 60: Lócus e vazão de saída para modelo de Reynolds e o modelo p- $\theta$ , impondo a mesma vazão de entrada.

Os coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento obtidos empregando essa abordagem estão mostrados na Figura 61 e na Figura 62, respectivamente. Destaca-se que as perturbações na posição e na velocidade do eixo aplicadas no modelo de Reynolds resultam em mudanças nas vazões de saída calculadas e que, portanto, as vazões de entrada impostas no modelo p- $\theta$  devem ser correspondentes as encontradas no modelo de Reynolds para cada perturbação. Diante disso, nota-se que mantendo as vazões iguais nos dois modelos, o comportamento dos coeficientes apresenta boa concordância de forma geral.

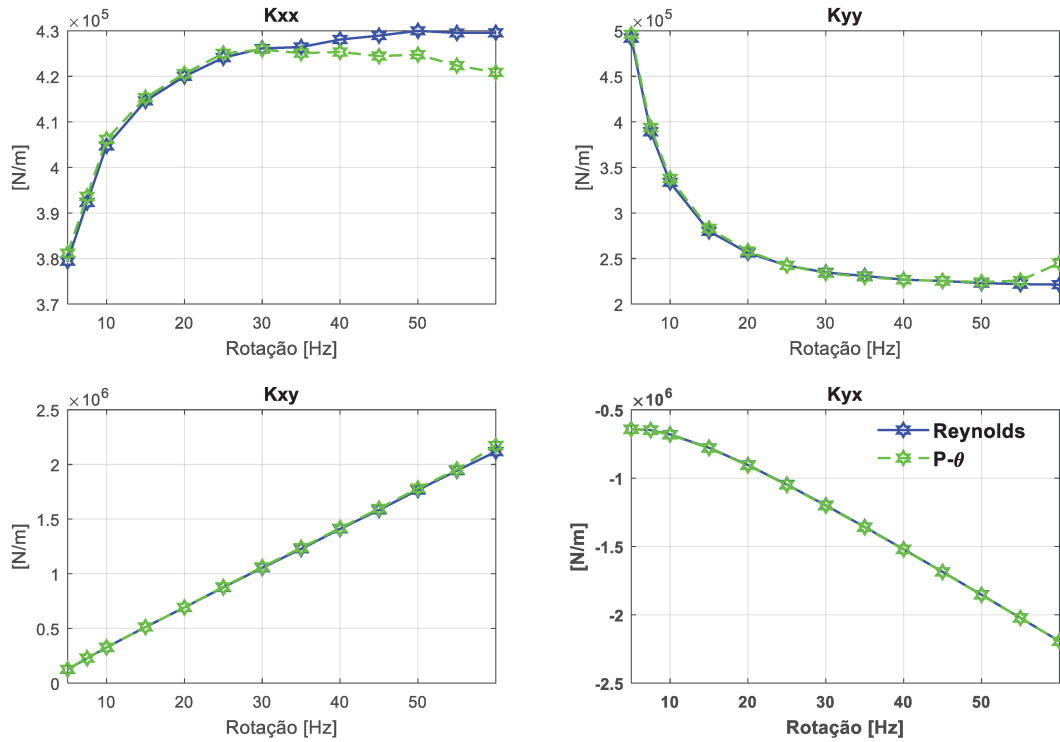


Figura 61: Coeficiente de rigidez para modelo de Reynolds e o modelo  $p-\theta$ , impondo a mesma vazão de entrada

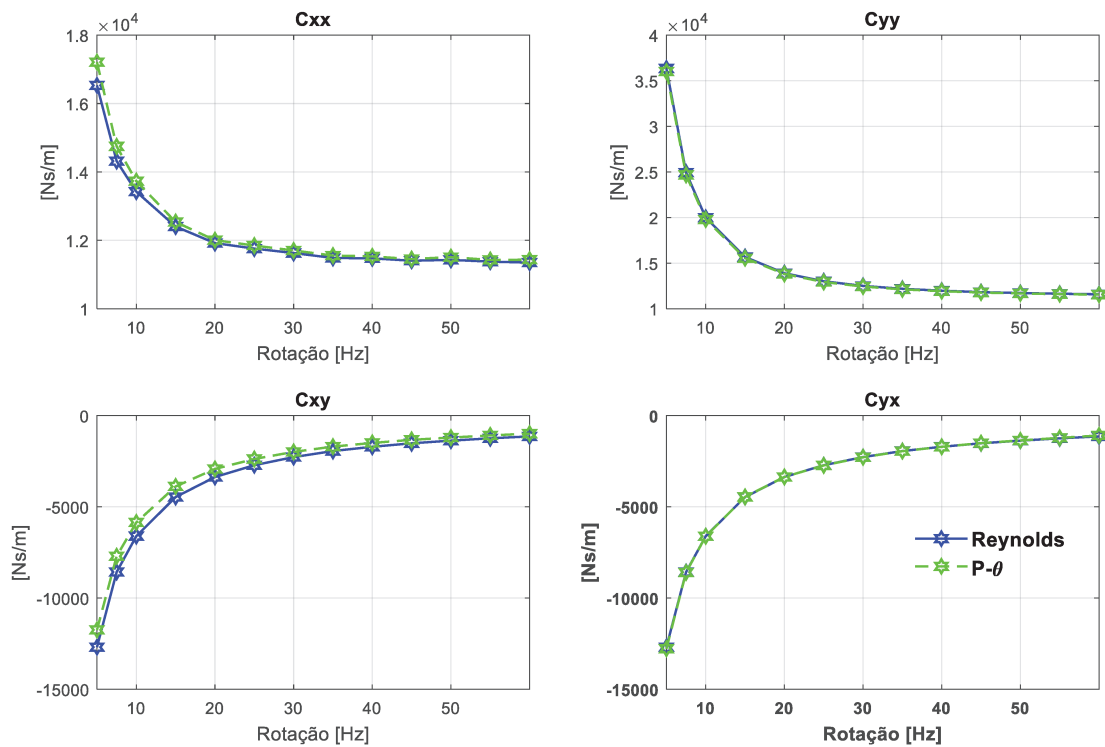


Figura 62: Coeficiente de amortecimento para modelo de Reynolds e o modelo  $p-\theta$ , impondo a mesma vazão de entrada.

Portanto, conclui-se que as diferentes condições de cavitação adotadas nos modelos realmente levam a resultados distintos, uma vez que a condição do modelo de Reynolds considera que o mancal se encontra completamente inundado. Entretanto, se a

condição de lubrificação imposta no modelo de cavitação com conservação de massa reproduzir a condição de mancal completamente inundado encontrada com o modelo de Reynolds, os resultados obtidos são equivalentes. Ou seja, de fato a diferença dos modelos se deve às diferentes condições de lubrificação adotadas.

Contudo, mancais com lubrificação completamente inundada como a modelada na última abordagem apresentada, dificilmente representam os mancais utilizados na prática. A conclusão é coerente com as observações feitas por Paranjpe e Goenka (1990) de que as discrepâncias nos fluxos do modelo de Reynolds sempre existem, porém são maiores nos casos em que o fornecimento de lubrificante não é abundante (fornecimento por furo ou com baixas pressões de alimentação).

Em vista disso, é fundamental analisar em quais condições o modelo com cavitação de Reynolds é uma boa representação do problema e pode ser aplicado sem prejuízo à análise.



## APÊNDICE II - COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE LUBRIFICAÇÃO

O desenvolvimento de um modelo de lubrificação com conservação de massa e condições de cavitação e de entrada de lubrificante foi essencial para a realização do presente trabalho. Desta forma, o Capítulo 3 apresentou diferentes modelos que atendem esses critérios, a saber, o modelo de Elrod (1981) (Capítulo 3.4), o modelo de Vijayaraghavan e Keith (1989) (Capítulo 3.5) e o modelo  $p - \theta$  (Ausas et al., 2009) (Capítulo 3.6).

Portanto, realizou-se uma comparação dos resultados obtidos com esses modelos a fim de selecionar o mais adequado. As simulações foram realizadas para o mancal da Tabela 2 com pressão de alimentação de 0 kPa e com o *groove* localizado em  $0^\circ$ . No caso dos modelos de Elrod (1981) e de Vijayaraghavan e Keith (1989), as análises foram feitas com dois valores do módulo volumétrico  $\beta$  para evidenciar os efeitos de compressibilidade de cada modelo.

A Figura 63 mostra a distribuição de pressão hidrodinâmica para a rotação de 30 Hz, evidenciando que os modelos apresentam resultados equivalentes, exceto para o caso do modelo de Vijayaraghavan e Keith (1989) com o menor valor do módulo volumétrico. Esse resultado é coerente, uma vez que todos três modelos são baseados na equação modificada de Reynolds e adotam as condições de cavitação da teoria JFO, porém somente o modelo de Vijayaraghavan e Keith (1989) considera os efeitos de compressibilidade no fluxo de Couette e, portanto, o resultado desse modelo se distancia dos demais quando o fluido não pode mais ser considerado incompressível.

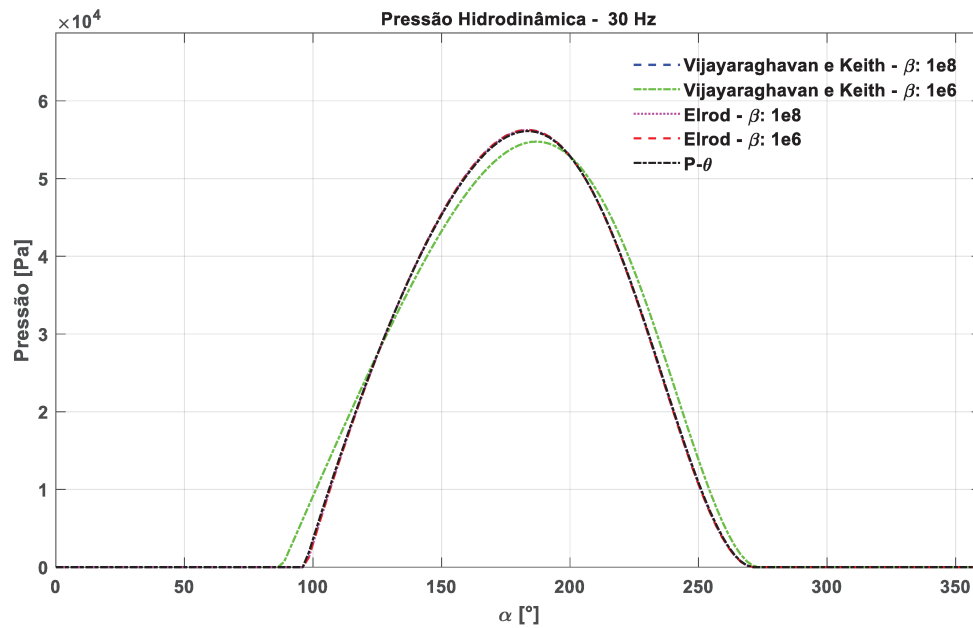


Figura 63: Distribuição de pressão na simetria do mancal para diferentes modelos de lubrificação.

A Figura 64 mostra o lócus obtido com cada modelo, indicando novamente que, mesmo para diferentes condições de operação, os modelos levam a resultados similares quando o fluido é incompressível.

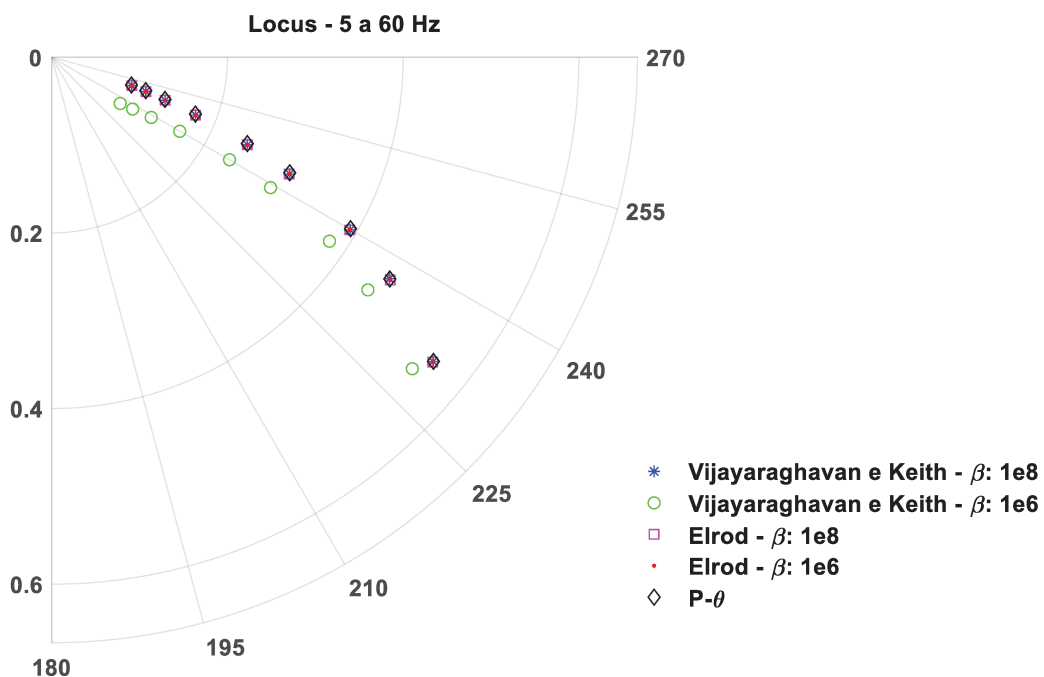


Figura 64: Lócus do eixo no mancal para os diferentes modelos de lubrificação com cavitação e conservação de massa.

Logo, conclui-se que os três modelos são adequados. Diante disso, o modelo  $p-\theta$  foi escolhido para a obtenção dos resultados deste trabalho, uma vez que este modelo

apresentou maior facilidade e robustez na convergência, isto é, além de convergir mais rápido, convergiu sem problemas em casos em que os demais apresentaram dificuldade, sendo necessário aplicar uma sub-relaxação no método de Gauss-Seidel.

## APÊNDICE III - DESCRIÇÃO DAS MATRIZES DE ELEMENTOS FINITOS

Neste apêndice são apresentadas as matrizes utilizadas para modelagem de sistemas rotativos por elementos finitos, cujo procedimento foi descrito no Capítulo 4.2.

### i. Elemento do Eixo

Os elementos utilizados no eixo do rotor são elementos de viga de Euler-Bernouli com seção transversal cilíndrica com um nó em cada extremidade, onde cada nó apresenta 2 graus de liberdade de deslocamento transversal e 2 graus de liberdade de rotação de flexão, como representado na Figura 65. Portanto, o vetor de deformação do elemento é:

$$\{e\} = \{v_{x_1} \ v_{y_1} \ \phi_{x_1} \ \phi_{y_1} \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ \phi_{x_2} \ \phi_{y_2}\}^T \quad (64)$$

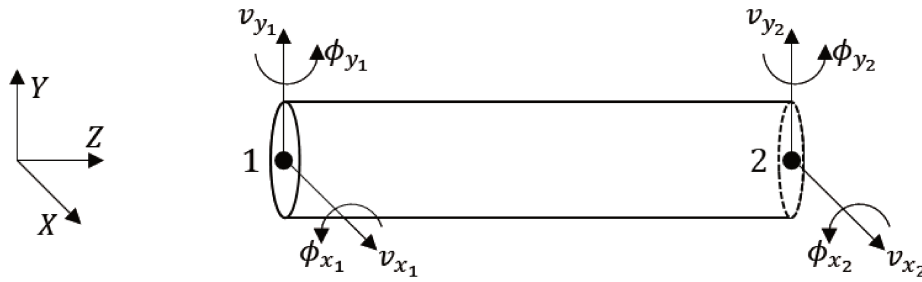


Figura 65: Modelo do elemento finito de viga.

Para implementar o programa do método dos elementos finitos utiliza-se os polinômios cúbicos de Hermite como funções de forma do elemento de viga:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 2 \left(\frac{z}{h}\right)^3 - 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 1 \\ \phi_2(x) &= h \left( \left(\frac{z}{h}\right)^3 - 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \left(\frac{z}{h}\right) \right) \\ \phi_3(x) &= -2 \left(\frac{z}{h}\right)^3 + 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \\ \phi_4(x) &= h \left( \left(\frac{z}{h}\right)^3 - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (65)$$

Onde  $h$  é o comprimento de cada elemento de eixo. O vetor contendo as funções de forma,  $[N_1^e]$ , e suas derivadas em relação a  $z$  são definidos como:

$$\begin{aligned}
[N_1^e] &= \begin{bmatrix} \phi_1(z) & 0 & 0 & \phi_2(z) & \phi_3(z) & 0 & 0 & \phi_4(z) \\ 0 & \phi_1(z) & \phi_2(z) & 0 & 0 & \phi_3(z) & -\phi_4(z) & 0 \end{bmatrix} \\
[N_2^e] &= \frac{\partial}{\partial z} [N_1^e] \\
[B_1^e] &= \frac{\partial}{\partial z} [N_2^e] \\
[C_1^e] &= \frac{\partial}{\partial z} [B_1^e]
\end{aligned} \tag{66}$$

Utilizando esses vetores é possível calcular as matrizes de rigidez,  $[K_E^e]$ , de massa de translação,  $[M_T^e]$ , de massa de rotação,  $[M_R^e]$  e do efeito giroscópico,  $[G_E^e]$ , do elemento do eixo (Bittencourt, 2010):

$$\begin{aligned}
[K_E^e] &= \int_0^{h_e} [B_1^e]^T EI [B_1^e] dz \\
[M_T^e] &= \int_0^{h_e} [N_1^e]^T \rho A [N_1^e] dz \\
[M_R^e] &= \int_0^{h_e} I_D^e [N_2^e]^T [N_2^e] dz \\
[G_E^e] &= \int_0^{h_e} I_P^e [N_2^e(1, :)]^T [N_2^e(2, :)] dz
\end{aligned} \tag{67}$$

Onde  $I$  é o momento de inércia de área do eixo,  $A$  é sua seção transversal,  $I_D^e$  é o momento de inércia diametral do elemento e  $I_P^e$  é o momento de inércia polar do elemento. A matriz de amortecimento  $[C_E^e]$  é calculada considerando amortecimento estrutural proporcional às matrizes de massa e rigidez, também conhecida como matriz de amortecimento de Rayleigh, de acordo com a Equação (68). Considera-se que o amortecimento estrutural independe da massa, logo  $\alpha$  é igual a zero, como usualmente adotado para materiais metálicos, e estima-se que a constante de proporcionalidade  $\beta_c$  é  $10^{-4}$ s (Machado et al., 2018).

$$[C_E^e] = \alpha [M^e] + \beta_c [K_E^e] \tag{68}$$

O vetor de esforços devido ao carregamento no elemento de eixo será apenas devido ao próprio peso do elemento de eixo:

$$\{f_E^e\} = \left\{ 0 \quad -\frac{g\rho Ah}{2} \quad -\frac{g\rho Ah^3}{12} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{g\rho Ah}{2} \quad \frac{g\rho Ah^3}{12} \quad 0 \right\}^T \tag{69}$$

## ii. Elemento de Disco

Os elementos de disco foram modelados como corpos rígidos atrelados a um nó, logo, possuem 2 graus de liberdade de translação e 2 de rotação. Portanto, a montagem da matriz de massa do disco, contendo as inércias de translação e rotação, é feita de maneira direta:

$$[M_D] = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d^D \end{bmatrix} \quad (70)$$

Onde  $m_D$  é a massa do disco e  $I_d^D$  é o momento de inércia diametral do disco. A matriz contendo o efeito giroscópico do disco será:

$$[G_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p^D \\ 0 & 0 & I_p^D & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Onde  $I_p^D$  é momento de inércia polar do disco. O vetor de forças associadas ao elemento do disco contém a força peso do disco,  $W_{disco}$ :

$$\{f_D\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W_{disco} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

## iii. Sistema mola-amortecedor do mancal

Como já mencionado, para pequenas perturbações em torno da posição de equilíbrio, considera-se que a relação da posição e da velocidade do centro do eixo com a força hidrodinâmica nos mancais é linear. Dessa forma, os mancais podem ser modelados como um conjunto de molas e amortecedores lineares, assim, o vetor da força hidrodinâmica no nó do mancal será:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix}_i &= \begin{Bmatrix} F_{X_0} \\ F_{Y_0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x - e_{x0} \\ v_y - e_{y0} \end{Bmatrix}_i - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{Bmatrix}_i \\ &= \begin{Bmatrix} F_{X_0} \\ F_{Y_0} \end{Bmatrix} - [K_M] \begin{Bmatrix} v_x - e_{x0} \\ v_y - e_{y0} \end{Bmatrix}_i - [C_M] \begin{Bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (73)$$

Logo, a matriz de rigidez e amortecimento do mancal,  $[K_M]$  e  $[C_M]$ , são formadas pelos coeficientes dinâmicos, calculados segundo o procedimento apresentado no

Capítulo 4.1.8. Destaca-se que o modelo dos mancais apresentado não possui rigidez ou amortecimento em relação aos graus de liberdade de rotação.

Para solução da equação característica do problema homogêneo, as matrizes de rigidez  $[K_M]$  e amortecimento  $[C_M]$  são somadas as matrizes globais do sistema nos respectivos nós de liberdade, alterando a rigidez e o amortecimento do conjunto. Contudo, para solução do problema no tempo, a contribuição dos mancais é inserida no sistema pela adição do vetor de forças da Equação (73) no lado direito da Equação (57) nos graus de liberdade dos mancais. Dessa forma considera-se as forças de restauração do sistema em função da posição e da velocidade do eixo em relação a posição de equilíbrio.