



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

LAÍS CARRER SILVA

**Análise de rotores sobre mancais de esferas
com contato angular utilizando modelo
reduzido do contato EHD**

CAMPINAS
2019

LAÍS CARRER SILVA

Análise de rotores sobre mancais de esferas com contato angular utilizando modelo reduzido do contato EHD

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos exigidos para obtenção do título de
Mestra em Engenharia Mecânica, na Área de
Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA
ALUNA LAÍS CARRER SILVA, E ORIENTADA PELA
PROFA. DRA. KATIA LUCCHESI CAVALCA DEDINI

CAMPINAS

2019

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 137123/2017-5

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

C233a Carrer, Laís, 1988-
Análise de rotores sobre mancais de esferas com contato angular utilizando modelo reduzido de contato EHD / Laís Carrer Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores. 2. Mecânica do contato. 3. Rolamento de esferas. 4. Lubrificação. I. Cavalca, Kátia Lucchesi, 1963-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of rotors supported by angular contact ball bearings applying EHD reduced contact model

Palavras-chave em inglês:

Rotors

Contact mechanics

Ball bearing

Lubrication

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestra em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]

Marco Lúcio Bittencourt

Thiago de Paula Sales

Data de defesa: 25-02-2019

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INTEGRADOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Análise de rotores sobre mancais de esferas
com contato angular utilizando modelo
reduzido do contato EHD**

Autora: Laís Carrer Silva

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof^a. Dr^a. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Marco Lucio Bittencourt

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Thiago de Paula Sales

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEM

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 25 de fevereiro de 2019.

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Luisa e Jurandir.

Agradecimentos

Muitas pessoas foram importantes para a conclusão deste trabalho e a elas presto o meu mais sincero agradecimento:

Aos meus pais, que sempre acreditaram em mim e me incentivaram a ir atrás dos meus sonhos, por todo amor e atenção que sempre me deram. Vocês fazem a vida ser mais doce e as dificuldades parecerem menores do que realmente são.

A todos os meus amigos do Laboratório de Máquinas Rotativas que me ajudaram com palavras de incentivo, conselhos, ensinamentos e contribuições para este trabalho. Agradeço principalmente à Letícia Bizarre, que me auxiliou desde o começo com toda dedicação.

Ao Leandro, por todo amor, paciência, companheirismo e conselhos valiosos neste tempo juntos.

À minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Katia Lucchesi Cavalca, que acreditou em mim e me deu todo o apoio, orientação e ensinamentos necessários para que este trabalho se realizasse, sou profundamente grata.

E ao CNPq pelo apoio financeiro durante todo o desenvolvimento do projeto.

Never regard study as a duty, but as the enviable opportunity to learn to know the liberating influence of beauty in the realm of the spirit for your own personal joy and to the profit of the community to which your later work belongs.

Albert Einstein

Resumo

Rotores são componentes críticos de máquinas rotativas, amplamente utilizados em diferentes áreas da indústria, como compressores, motores elétricos, transmissões automotivas, turbinas eólicas e outros. O desenvolvimento de modelos computacionais precisos capazes de simplificar a fase de projeto das máquinas rotativas é essencial para reduzir os custos de testes e protótipos e reduzir o consumo de tempo de processamento, melhorando o desempenho na previsão dos comportamentos dinâmicos dos sistemas. Neste contexto, o presente trabalho estuda um modelo para mancais de esferas com contato angular, otimizado, por parâmetros de força equivalente. São utilizados, para aplicação destes mancais, modelos de rotores por parâmetros concentrados, variando a posição do disco (centrado e descentrado), sujeitos a um desbalanceamento rotativo, também combinando cargas radiais e axiais. A matriz de rigidez é obtida usando coeficientes de influência. Para as forças dissipativas, considera-se que o amortecimento seja proporcional à rigidez. O rotor é apoiado em dois rolamentos de esferas com contato angular sob lubrificação elastohidrodinâmica (EHD). É feito também um modelo de rotor por elementos finitos, utilizando a teoria de Timoshenko para o eixo, para uma modelagem mais completa, contemplando efeitos de inércia, elasticidade e cisalhamento. Para obter os parâmetros de rigidez e o amortecimento das forças de reação equivalentes para cada mancal, nas direções axial e radial, é realizada uma otimização, integrando o equilíbrio de forças das esferas dos rolamentos com a solução do algoritmo de integração numérica multiníveis das equações EHD. As forças não-lineares de reação dos rolamentos são incluídas no modelo como forças externas e o sistema completo de equações é, então, resolvido no domínio do tempo, permitindo a análise das respostas do rotor e do rolamento. Obtêm-se, também, as frequências fundamentais do sistema completo. Finalmente, utilizando o modelo de rotor por elementos finitos, compara-se os resultados simulados com experimentais da Literatura. Encontram-se, então, as principais frequências do sistema completo e uma boa aproximação das amplitudes finais. O que sugere que a metodologia apresentada neste trabalho é promissora para representação do comportamento de um sistema rotor-mancal de esferas com contato angular lubrificado.

Palavras-chave: Rotores, Mecânica do contato, Rolamento de esferas, Lubrificação.

Abstract

Rotors are critical components of rotary machines, widely used in different areas of the industry, such as compressors, electric motors, automotive transmissions, wind turbines and others. The development of accurate computational models capable of simplifying the design phase of rotating machines is essential to reduce testing and prototyping costs and reduce processing time consumption by improving performance in predicting the dynamic behavior of systems. In this context, the present work studies a model for angular contact ball bearings optimized by equivalent force parameters. The numerical application uses rotor-bearings model by lumped parameters, varying the position of the disc (centered and offset), subject to a rotational imbalance and also combining radial and axial loads. The stiffness matrix is obtained using coefficients of influence. For the dissipative forces, one considers damping as being proportional to stiffness. The rotor is supported by two angular contact ball bearings under elastohydrodynamic lubrication (EHD). A finite element model is also built, using Timoshenko's theory for the shaft, for a more complete modeling, including effects of inertia, elasticity and shear. To obtain the stiffness and damping parameters of the equivalent reaction forces for each bearing, in the axial and radial directions, an optimization is performed, integrating the forces equilibrium of the ball bearings with the multilevel numerical integration algorithm solution of the EHD equations. The non-linear reaction forces of the bearings are included in the model as external forces and the complete system of equations is then solved in the time domain, allowing the analysis of rotor and bearings responses. It is also obtained the fundamental frequencies of the complete system. Finally, using the finite element model for the rotor, it is carried out a comparison of the results simulated with experimental literature. The main frequencies of the complete system are thus found with a good approximation of the final amplitudes. This suggests that the methodology presented in this work is promising to represent the behavior of a rotor-ball-bearing system with lubricated angular contact.

Keywords: Rotors, Contact mechanics, Ball bearing, Lubrication.

Lista de figuras

Figura 2.1. Mancal de rolamento de esferas com contato angular.....	24
Figura 2.2. Aproximação do contato lubrificado por meio de um modelo massa-mola-amortecedor, Wijnant et al.(1999).....	27
Figura 3.1. Equilíbrio das forças de rotação e momentos.	30
Figura 3.2 Distribuição de carregamento em mancais radiais, carga em z (Changsen,1991).....	31
Figura 3.3 Exemplos de superfícies de contato não conformes	32
Figura 3.4 Representação da espessura calculada $h(x,y)$ (modificado de Bizarre e Cavalca, 2014)	33
Figura 3.5. Representação do filme de óleo do mancal de esferas como um sistema mola-amortecedor, vista plano y-z.....	34
Figura 3.6 Representação do filme de óleo do mancal de esferas para um sistema massa mola com contato angular, vista lateral x-z.....	35
Figura 3.7. Representação do deslocamento radial da j-ésima esfera de um mancal de esferas.	37
Figura 3.8 Modelo rotor Laval centrado biapoado	39
Figura 3.9 Modelo rotor Laval centrado com mancais de esferas, mostrando os graus de liberdade e forças aplicadas.	40
Figura 3.10. Modelo de rotor Laval Biapoado com o disco descentrado.	41
Figura 3.11 Diagrama de Campbell, Kramer (1993)	43
Figura 3.12. Rotor Laval com disco descentrado apoiado em mancais de esferas com contato angular, com os graus de liberdade e forças aplicadas.	43
Figura 3.13 Exemplo de rotor com eixo discretizado em $N = 14$ elementos de viga e 15 nós.....	46
Figura 3.14 Elemento de eixo com os nós i e j , cada um com 5 graus de liberdade.....	47
Figura 3.15 Representação da montagem da matriz global do eixo	52
Figura 3.16 Representação da montagem de uma matriz global do eixo com a inclusão do disco.....	53
Figura 3.17 Representação do vetor f_{g1} com as forças externas atuantes nos nós dos mancais e do disco.....	54
Figura 3.18 Representação do vetor de força global com os pesos dos nós do eixo	54

Figura 3.19 Fluxograma da sequência de cálculos e programas.....	56
Figura 4.1 Força de reação nos mancais do caso 2, para três níveis de velocidade de rotação, 500, 7000 e 15000 RPM	59
Figura 4.2 Distribuição dos ângulos de contato para cada esfera, nos anéis interno e externo, para todas as rotações simuladas. (mancal 1 casos 2 e 3).....	60
Figura 4.3 Parâmetros equivalentes de força de restituição, K_R , d_R e ΔF_R , direção radial e K_A , d_A e ΔF_A , direção axial.....	61
Figura 4.4 Amortecimento equivalente para as três combinações de carga	62
Figura 4.5. Órbitas do centro do eixo para os casos EHD e Hertz para três velocidades de rotação, (a) 5000 RPM, (b) 7478 RPM (frequência natural) e (c) 10000 RPM	64
Figura 4.6 Resposta no tempo do deslocamento do mancal utilizando o modelo EHD em velocidade de operação de 5000 rpm, nas direções (a) x , axial, (b) y , radial horizontal e (c) z , radial vertical.	65
Figura 4.7 Espectro de frequência para o Rotor Laval em velocidade de operação de 5000 rpm.....	66
Figura 4.8 Diagrama de Campbell para o caso 2	69
Figura 4.9 Deslocamento do disco (a) y - horizontal, (b) z - vertical, (c) x – axial e (d) Nutação em torno do eixo z (γz) e y (γy) e deslocamento do eixo (e) mancal 1, y_{m1} z_{m1} x_{m1} e (f) mancal 2, y_{m2} z_{m2} x_{m2}	70
Figura 4.10 Órbita de disco, considerando contato seco e lubrificado (EHD), com velocidades de rotação que variam de 500 RPM a 13000 RPM, dimensões em [m].....	71
Figura 4.11 Órbita do Mancal 1 considerando modelos de contato seco e lubrificado com velocidades de rotação variando de 500 RPM a 13000 RPM, dimensões em [m]. De (a) a (d), a excentricidade de massa é $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ m e em (e) e (f) é $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-5}$ m.....	72
Figura 4.12 Posição central da órbita do rolamento 1 para o caso seco e em lubrificação EHD, variando a excentricidade da massa do disco, ε	73
Figura 4.13 Perfil de pressão adimensional no contato interno, para EHD e contato seco, e espessura do filme de óleo para a esfera mais carregada, em velocidades de rotação de 500, 4000, 8580 e 13000 rpm, respectivamente.	74
Figura 4.14 Espectro de frequência para um disco balanceado, $\varepsilon = 0$, com velocidade de rotação de 13000 RPM (216 Hz). (a) Aceleração do disco, direção y (b) deslocamento do mancal 1, direção z_{m1}	75
Figura 4.15 Configuração do rotor modelado por elementos finitos (caso 3)	76
Figura 4.16 Diagrama de Campbell do rotor (caso 3).....	77

Figura 4.17 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para uma velocidade de 500 RPM	77
Figura 4.18 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para um a velocidade de 5000 RPM	78
Figura 4.19 Resposta do deslocamento no tempo para o mancal 2 considerando contato com lubrificação EHD, velocidade de 5000 RPM	78
Figura 4.20 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para um a velocidade de 9000 RPM	79
Figura 4.21 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para um a velocidade de 15000 RPM	79
Figura 4.22 Espectro em frequência do deslocamento do mancal 2 (caso 3), na direção y, para 500 RPM de velocidade de rotação	80
Figura 4.23 Espectro em frequência do deslocamento do mancal 2 (caso 3), na direção y, para 5000 RPM de velocidade de rotação	81
Figura 4.24 Representação do perfil de órbitas nos nós do rotor.....	82
Figura 4.25 Modelo de um <i>spindle</i> , Aini 1990	83
Figura 4.26 Resposta em frequência na direção z do nó 1.	84
Figura A.0.1 Viga apoiada sujeita a forças e momentos.....	93
Figura A.0.2 Ilustração do deslocamento do eixo em duas vistas, plano x-z, acima, e plano x-y, abaixo.....	94

Lista de tabelas

Tabela 4.1 Níveis de cargas utilizados para caracterização dos mancais	57
Tabela 4.2. Variações de rotação para as quais foram caracterizados os mancais.....	57
Tabela 4.3 Características Geométricas do Mancal 7006	58
Tabela 4.4 Características operacionais e geométricas do rotor Laval centrado	63
Tabela 4.5 Coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes para as forças de reação do mancal com modelo de lubrificação EHD para três velocidades de rotação distintas 5000, 7478 e 10000 rpm.....	63
Tabela 4.6 Coeficientes de rigidez equivalente para as forças de reação do mancal com modelo de contato seco de Hertz, para três velocidades de rotação distintas 5000, 7478 e 10000 rpm.....	64
Tabela 4.7. Características geométricas e de operação do rotor (caso 2)	67
Tabela 4.8 Parâmetros equivalentes EHD para o mancal 1.	67
Tabela 4.9 Parâmetros equivalentes EHD para o mancal 2.	68
Tabela 4.10 Parâmetros de rigidez equivalente para o contato seco de Hertz.	68
Tabela 4.11 Carga, amplitude e valor médio relacionados aos gráficos apresentados na figura 4.9, após transiente inicial.....	70
Tabela 4.12 Características geométricas do mancal utilizado em Aini (1990).....	82
Tabela 4.13 Características do Eixo do Rotor Aini (1990).....	83
Tabela 4.14 Parâmetros de força de reação do mancal Aini,	84

Lista de abreviaturas e siglas

Letras Latinas

A	Área da seção transversal do eixo do rotor	[m]
a	Proporção da distância do primeiro mancal e o disco	
b	Proporção da distância do segundo mancal e o disco	
$[C]$	Matriz de amortecimento	[N.s/m]
C_i	Amortecimento interno no contato	[N.s/m]
C_o	Amortecimento interno no contato	[N.s/m]
D	Diâmetro da esfera	[m]
d_m	Diâmetro primitivo do mancal	[m]
d	Expoente da força de restituição do mancal	
d	Diâmetro do eixo	[m]
E	Módulo de elasticidade	[N/m ²]
f	Razão de osculação	
f_g	Vetor de esforços generalizados	[N]
F	Força	[N]
g	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
$[G]$	Matriz giroscópica	[N.s/m]
h	Espessura do filme de óleo	[m]
h_0	Deslocamento do centro da esfera	[m]
i	Número imaginário	
I	Momento de inércia do eixo	[m ⁴]
I_d	Momento de inercia diametral do disco	[m ⁴]
I_p	Momento de inercia polar do disco	[m ⁴]
k	Fator de força de cisalhamento	
$[K]$	Matriz de rigidez	
K	Coefficiente equivalente de rigidez de força do mancal	[N/m ^d]
l	Comprimento do eixo	[m]

p	Campo de pressão em um filme de óleo	
R	Forças atuantes no disco	[N]
u_m	Velocidade relativa Reynolds	[m/s]
m	Massa do disco	[kg]
$[M]$	Matriz de inércia	
M_g	Momento giroscópico	[N.m]
t	Tempo	[s]

Letras Gregas

α	Ângulo nominal de contato esfera-pista	[rad]
β	Coefficiente de amortecimento proporcional à rigidez	
δ	Deslocamento no contato	[m]
ΔF	Coefficiente de força residual	[N]
ϵ	Excentricidade da massa desbalanceada	[m]
η	Viscosidade	[N.s/m ²]
θ	Ângulo de rotação do elemento de eixo	[rad]
λ	Coefficiente de escorregamento	
ν	Coefficiente de Poisson	
φ_y	Ângulo de rotação do disco em y	[rad]
φ_z	Ângulo de rotação do disco em z	[rad]
Φ	Efeito de cisalhamento	
ψ	Ângulo de Azimuth	[rad]
ω	Frequência natural	[rad/s]
ω_c	Velocidade angular da gaiola	[rad/s]
Ω	Velocidade de rotação do eixo	[RPM]

Subscritos

i	Primeiro nó de um elemento de eixo
i	Pista interna do mancal de esferas

<i>o</i>	Pista externa do mancal de esferas
<i>j</i>	Segundo nó de um elemento de eixo
<i>j</i>	Posição da esfera no mancal
<i>A</i>	Axial
<i>R</i>	Radial
<i>H</i>	Relativo ao contato de Hertz
<i>m</i>	Relativo ao mancal
<i>x</i>	Em relação ao eixo x
<i>y</i>	Em relação ao eixo y
<i>z</i>	Em relação ao eixo z
<i>el</i>	Relativo ao elemento de viga
<i>g</i>	Global

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	22
2.1	Rotores	22
2.2	Mancais de esferas	24
3	MODELAGEM TEÓRICA.....	30
3.1	Caracterização dos mancais de esferas em lubrificação EHD	30
3.2	Força de reação nos mancais.....	37
3.3	Caso 1: Parâmetros Concentrados e Disco Centrado.....	39
3.4	Caso 2: Parâmetros Concentrados e Disco Descentrado	41
3.5	Caso 3: Modelo do Rotor pelo Método dos Elementos Finitos	45
3.5.1	Matrizes Elementares	47
3.5.2	Matrizes Globais e Sistema Completo	52
3.6	Fluxograma	55
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
4.1	Forças não lineares.....	59
4.2	Caso 1: Parâmetros Concentrados e Disco Centrado.....	63
4.3	Caso 2: Parâmetros Concentrados e Disco Descentrado	67
4.4	Caso 3: Rotor por Elementos Finitos	75
4.5	Validação Experimental com a Literatura.	82
5	CONCLUSÕES.....	85
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	86
	Referências.....	87
	Apêndice A - Coeficientes de Influência de Rigidez	93

1 INTRODUÇÃO

Rotores são componentes de máquinas rotativas com diversas aplicações na indústria, desde turbinas eólicas, turbinas a vapor até eixos de transmissão de automóveis. Tendo em vista a ampla variedade de aplicações e a necessidade de reduzir tempo e custo de projeto, busca-se o desenvolvimento de modelos matemáticos de rotores que se aproximem do comportamento real do conjunto e de seus componentes.

Rotores, como componentes rotativos, devem ser acoplados a mancais, componentes que unem partes móveis (girantes, no caso de rotores) a partes fixas. Existem diversos tipos de mancais para as mais diversas aplicações, cada um com suas especificidades de aplicação, custo, tempo de vida e outros parâmetros importantes para a sua seleção.

Mancais de rolamentos são amplamente utilizados por possibilidade de trabalho em rotações mais elevadas, principalmente no caso do mancal de esferas, e boa capacidade de carga em tamanho reduzido, podendo ser também de rolo e agulha.

Neste trabalho, é feita a análise do comportamento de um conjunto rotor-mancal de esferas com lubrificação EHD e contato angular. Para tanto, é considerado no rotor um disco centrado com massa residual que resulta em desbalanceamento rotativo. Foram acrescentadas, também, forças externas radiais e axiais para explorar a função do contato angular no mancal, sendo que, para isso, utiliza-se a decomposição dos parâmetros de força de contato advindos da caracterização deste mancal.

Para caracterização dos mancais, foi finalizada, neste trabalho a interface gráfica feita por Bizarre e Cavalca (2014) e Bizarre (2015) em sua dissertação de mestrado, que utiliza a distribuição de forças, implementadas por Radaelli (2013), em conjunto com o integrador multiníveis para EHD, Nonato e Cavalca (2010), e a otimização paramétrica do mancal com decomposição radial e axial.

A conclusão deste programa consistiu na montagem de um *loop*, no qual é verificado, ao final da otimização, se com os parâmetros encontrados, é possível calcular as forças aplicadas inicialmente, com um erro pré-definido. Caso o critério de erro não seja atendido, todo o processo de busca é refeito. Também foi implementada a possibilidade de otimizar os

parâmetros por esfera ou por mancal, sendo este último caso, o utilizado para a aplicação neste trabalho.

Inicialmente, estima-se a distribuição de carga nas esferas e realiza-se o equilíbrio de forças no mancal, segundo literatura clássica de mancais, tratando-se de um programa computacional que descreve o comportamento de um mancal de esferas com contato angular. Considera-se no modelo até cinco graus de liberdade, incluindo forças de inércia e momentos giroscópicos das esferas, sendo feito o equilíbrio de forças para cada esfera e para o mancal completo, pelo método iterativo de Newton-Raphson. Neste caso, o ponto de partida arbitrário para o método de busca é a aproximação pelo contato seco de Hertz. O resultado desta etapa é a distribuição de forças para cada contato em cada esfera, assim como seus respectivos deslocamentos em relação a cada pista e os ângulos de contato resultantes.

Segundo Bizarre et al. (2016), na primeira iteração, são determinados os parâmetros adimensionais de Moes, que caracterizam o contato da esfera com as pistas do mancal. Estes parâmetros são fornecidos como entrada para a integração multiníveis, segundo Nonato e Cavalca (2010), onde é resolvido um sistema de equações para encontrar a resposta do mancal tanto estática (posição de equilíbrio numa dada rotação) quanto dinâmica (quando o sistema é sujeito à pequenas perturbações), considerando regime de lubrificação elastohidrodinâmico (EHD).

Na otimização, Bizarre e Cavalca (2014) se valeram do algoritmo de Levenberg-Marquardt para ajustar a curva de pontos estáticos de contato. Com estes pontos são encontrados os parâmetros que compõem a força restitutiva. Para fazer esta análise em mancais com contato angular, as forças e deslocamentos foram decompostos em radial e axial, encontrando-se assim, parâmetros equivalentes em cada direção.

Durante o processo de iteração, é definida a convergência dos parâmetros por esfera do mancal, assim como proposto no trabalho de Bizarre et al. (2018). Porém, para a inclusão do modelo de força não linear dos mancais no rotor, a otimização é feita novamente, sendo que desta vez os parâmetros utilizados são os otimizados para o mancal completo.

São propostos neste trabalho três casos. A primeira etapa consiste na análise de um rotor Laval com disco centrado com massa residual desbalanceada apoiado sobre dois mancais de esferas com contato angular. O segundo caso trata de um rotor com disco descentrado, sendo, portanto, incluído o efeito giroscópico do disco. A matriz de rigidez do eixo é encontrada por

parâmetros concentrados, considerando três pontos de interesse: o disco e os dois mancais. Utiliza-se o método dos coeficientes de influência, aproximando o eixo a um sistema massa-mola-amortecedor, e a dissipação de energia é aproximada por uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de rigidez. Eixo e mancais tem massa considerada desprezível.

Por fim, no terceiro caso, o sistema é representado pelo método dos elementos finitos, sendo o eixo discretizado em elementos contínuos modelados pela teoria de viga de Timoshenko com efeito de cisalhamento, efeito giroscópico e amortecimento proporcional a rigidez. Neste sistema, também é incluída uma força axial, sendo a inserção do efeito dos mancais feita através de forças de reação aplicadas aos nós correspondentes aos mesmos. Toda a modelagem foi desenvolvida e implementada neste trabalho.

O sistema é, então, representado em espaço de estados e resolvido por um integrador numérico. Os resultados são analisados no tempo e é feita a comparação das orbitas em lubrificação EHD com um caso de mancal com contato seco (Hertz), comparando-se a amplitude das órbitas e a posição de seus centros, para diferentes velocidades de rotação. Estas informações são analisadas juntamente com os parâmetros do mancal em lubrificação EHD e a espessura de filme de óleo naquelas condições.

É feita, também, uma análise em frequência, utilizando uma transformada de Fourier discreta para identificar as frequências fundamentais do sistema, que são comparadas às frequências críticas do rotor identificadas no diagrama de Campbell, para um sistema biapoiado, e também as frequências do mancal, sendo identificadas as harmônicas da BPFO - *Ball passing frequency in the outer ring* (em português, frequência de passagem da esfera no anel externo).

O objetivo do presente trabalho é analisar diferentes modelos de rotor, tanto por parâmetros concentrados, como por elementos finitos, apoiados em mancais de esferas com contato angular sujeitos a cargas radiais e axiais, considerando o modelo de contato por lubrificação EHD.

Com os parâmetros equivalentes encontrados, foi possível obter as equações de movimento do sistema completo rotor-mancais, seja por parâmetros concentrados, seja por elementos finitos, sendo então possível analisar o comportamento de um conjunto rotor-mancais de esferas, com lubrificação EHD e contato angular, o que consiste na principal contribuição deste trabalho. Finalmente, foi obtida a solução numérica para um sistema rotativo completo existente na literatura, permitindo a comparação dos resultados teóricos deste trabalho aos dos testes experimentais encontrados em laboratório e publicados no trabalho de Aini (1990).

O desenvolvimento deste trabalho se dará abordando o seguinte conteúdo:

O capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica, apresentando os principais autores, incluindo trabalhos mais recentes e dividido os temas em rotores e mancais de esfera.

No capítulo 3 a metodologia apresenta a caracterização dos mancais, que envolverá a distribuição de forças nas esferas, a inclusão do efeito elastohidrodinâmico no contato esfera-pista e a otimização dos parâmetros. Além disso, apresenta o modelo das forças de reação nos mancais, aplicando a decomposição das reações em três direções. Finalmente, são apresentados três estudos de caso.

No capítulo 4, para apresentação de resultados e discussões, são feitas simulações para diversos velocidades de rotação e três distribuições de cargas distintas. Os resultados dos parâmetros otimizados nas direções axial e radial são apresentados graficamente, assim como as órbitas, respostas no tempo e frequência para os três casos de rotores utilizados. Por fim, é feita uma comparação com testes experimentais encontrados na Literatura.

No capítulo 5 são apresentadas as principais observações e êxitos acerca do trabalho feito e de seus resultados.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica deste trabalho aborda dois subtemas relacionados, Rotores e Mancais de Rolamentos de Esferas, apresentados separadamente para facilitar a exposição dos conteúdos. A apresentação da literatura de rotores expõe uma breve contextualização do surgimento das primeiras teorias, como também os métodos de abordagem dos modelos mais atuais. Nesta mesma linha, é apresentada a revisão de mancais de rolamento de esferas, focando em sua modelagem, tanto para contato seco de Hertz, como para regime de lubrificação EHD (Elastohidrodinâmica), que são os dois modelos utilizados e comparados neste trabalho.

2.1 Rotores

Rotores são parte principal de máquinas rotativas e começaram a ser largamente aplicados no início dos anos 1800s, como apontado por Vance (2010), devido ao crescente emprego de máquinas a vapor. Um dos precursores do estudo destes componentes foi Rankine (1869), que estudou o comportamento de rotores em velocidade crítica e concluiu que seria impossível a operação acima desta rotação.

Somente na década de 1880, De Laval desenvolveu um rotor de eixo delgado, flexível, com um disco desbalanceado e biapoado em mancais rígidos mostrando que, ao contrário da afirmação de Rankine, é possível a operação acima de sua velocidade crítica. Este modelo foi analiticamente analisado por Dunkerley (1894) e Föppl (1895), e desconsiderava o amortecimento do sistema, porém, reconhecia a existência de várias frequências críticas no eixo do rotor, já associando o efeito giroscópico e sua dependência com a velocidade. Dunkerley encontrou um método conhecido como *Southwell*, pelo qual a primeira frequência crítica pode ser calculada.

Em 1905, Stodola descreveu em seu livro as diferentes turbinas estudadas por ele e seus predecessores, e apresentou um método gráfico para calcular as frequências críticas. O amortecimento foi incluído no modelo de rotor por Jeffcott (1919), que mostrou matematicamente a resposta ao desbalanceamento na precessão do rotor, postulando que

quando a velocidade de rotação é muito superior a frequência crítica do sistema, o eixo tem um movimento autocentrado, ou seja, o rotor gira em torno de seu centro de gravidade

Myklestad (1944) e Prohl (1945) desenvolveram um método para calcular as frequências críticas por matriz de transferência, sendo o método de Myklestad utilizado para asas de avião, enquanto Prohl calcula a frequência crítica de rotores flexíveis dividindo-o em massas concentradas. Em 1948, Green publicou um artigo com a análise matemática do efeito giroscópico em rotores flexíveis operando na frequência crítica, utilizando método de parâmetros concentrados.

Gunter (1966) fez uma revisão da literatura em seu livro sobre estabilidade de sistema rotor-mancal. Krämer (1993) e Vance (2010) também recapitulam os principais autores e mostram a teoria consolidada até o momento.

A partir dos anos 1970, vários autores passaram a modelar os rotores pelo método dos elementos finitos, inicialmente utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, que despreza o efeito de cisalhamento do material. A fim de analisar estabilidade e desbalanceamento em rotores, trabalhos nos quais rotores eram modelados por elementos finitos foram publicados por Ruhl (1970) em sua tese de doutorado, seguido por Ruhl e Booker (1972), considerando no modelo apenas inércia translacional e rigidez de flexão.

Já em 1973, Tomas et al. incluem a inércia rotativa e momentos giroscópicos utilizando elementos de viga de Timoshenko. McVaugh e Nelson (1976), fazem uma generalização do elemento de viga do trabalho de Ruhl, incluindo os efeitos de inércia rotativa, momentos giroscópicos e carga axial. Zorzi e Nelson (1977) incluem e comparam amortecimento interno viscoso e histérico e avaliam a estabilidade do sistema.

Cowper, em 1966, apresentou em seu trabalho expressões para encontrar o coeficiente de cisalhamento para vigas de diferentes perfis de seção transversal. Em 1980, Nelson generaliza o elemento de viga de Timoshenko, incluindo fator de forma e efeito de cisalhamento transversal.

Desde então, a formulação de rotores por elementos finitos é amplamente utilizada no desenvolvimento de novos projetos de rotores e máquinas rotativas, bem para a modelagem computacional e inclusão de novos efeitos e recursos que melhor aproximem o projeto de sistemas reais.

2.2 Mancais de esferas

Um mancal de rolamento de esferas é composto, como mostrado na figura 2.1, pelas esferas que circulam pelas pistas dos anéis interno e externo, por estes anéis e pela gaiola que mantém as esferas igualmente espaçadas entre si. Quando em movimento, a gaiola tem a mesma velocidade tangencial que o centro das esferas, enquanto estas permitem o movimento relativo entre os anéis do mancal.

Estes mancais são amplamente utilizados em diferentes máquinas e equipamentos como perfuratrizes, máquinas de corte de metal, equipamentos médicos, rodas de carros de corrida, entre diversas outras aplicações e, para projetá-los, é necessário estudar as forças que governam o seu funcionamento. O primeiro trabalho neste caminho foi o de Hertz (1881), abordando a modelagem do contato elástico entre corpos sólidos. No caso dos mancais de rolamento, o contato ocorre entre as esferas e as pistas do mancal, até então desconsiderando o efeito do filme de óleo.



Figura 2.1. Mancal de rolamento de esferas com contato angular.

Em 1945, Palmgren publicou em seu livro as principais aplicações de mancais de elementos rolantes, apresentando as principais forças envolvidas, vida do mancal e as configurações mais utilizadas. Já em 1947, Lundberg e Palmgren, publicam um trabalho relacionando as cargas, sob as quais um mancal está sujeito, com seu tempo de vida. Uma abordagem ainda mais completa foi dada por Jones (1960), na qual é proposto um modelo analítico para as forças e deformações elásticas dos elementos do interior no mancal. Neste

trabalho é, também, sugerida a simplificação de pista de controle, sobre a qual no ponto de contato não há velocidade relativa entre as superfícies da pista e da esfera, ou seja, não há escorregamento.

Em 1950, Perret, seguido por Meldau (1951) concluíram que, mesmo livre de defeitos, um mancal de rolamentos possui uma vibração cíclica. Mais tarde, Shimizu e Tamura (1966, 1967 e 1968) fizeram uma análise do caráter elástico do contato entre os elementos do mancal, utilizando a teoria de Hertz, com o intuito de investigar as vibrações no eixo de um rotor apoiado em mancais de esferas.

Somente em 1978 a identificação da vibração inerente ao movimento de passagem das esferas foi descrita por Sunnersjö (1978), que analisou um rotor rígido apoiado em mancais de esferas, considerando a inércia do rotor. Na mesma linha, Fukata et al. (1985) analisaram as vibrações do sistema, descrevendo um modelo de rotor com dois graus de liberdade. Neste estudo, porém, a força restitutiva do mancal é introduzida como uma função da frequência de passagem das esferas pela pista.

Ainda poucas informações estavam disponíveis na literatura sobre os parâmetros dinâmicos de mancais de elementos rolantes. Neste cenário, Kraus et al. (1987) publicaram um trabalho experimental que caracterizou os parâmetros físicos de mancais de rolamentos lubrificados, valendo-se dos parâmetros modais, para encontrar aproximações para os valores de rigidez e amortecimento do mancal.

Com um propósito similar, Lim e Singh (1990a, 1990b, 1991 e 1992) propõem, em seus diversos trabalhos, a construção e aplicação de uma matriz de rigidez para relacionar as transmissões de vibrações entre o eixo e os mancais de rolamento, encontrada derivando as forças e momentos para cada grau de liberdade. O modelo desconsidera forças de inércia e momento giroscópico das esferas e o contato com a pista é hertziano. São feitas comparações com alguns resultados da rigidez radial, com a pré-carga axial, apresentados por Kraus et al. (1987).

Como ressaltado por Nonato (2013), apesar da aparente vantagem em utilizar a linearização destes parâmetros para simplificar a solução matemática, há uma considerável perda de representação do movimento entre as esferas e as pistas dos anéis, representada pela rigidez cicloestacionária inerente a este tipo de mancal.

Em 1991, Harris lança um livro com as diversas aplicações de mancais de rolamento, assim como carregamento estático, análise dinâmica de momentos e forças. Estes modelos são a base de cálculo das forças envolvidas na primeira etapa do presente trabalho.

Em 1997, Hagiú e Gafitanu (1997) modelaram o mancal de rolamento com contato angular operando em altas velocidades, considerando o contato de Hertz e incluindo o efeito de esmagamento de filme de óleo a fim de encontrar a rigidez e amortecimento equivalentes. Harsha (2006a e 2006b) também estudou o comportamento do mancal de esferas em altas velocidades de rotação, desconsiderando, entretanto, efeitos do filme de óleo.

Liew et al. (2002) também utilizou contato de Hertz para modelar e analisar a resposta transiente de um sistema rotor-mancais de elementos rolantes, considerando dois e cinco graus de liberdade. A representação da lubrificação foi feita por um coeficiente arbitrário de amortecimento.

Utilizando o contato de Hertz, Wang et al. (2014) faz uma análise do modelo de esferas de contato angular sem a hipótese de pista de controle, concluindo que para rotações mais altas, esta hipótese é mais próxima da condição simulada e que os efeitos da força de inércia não devem ser negligenciados.

Até este ponto, o modelo de contato utilizado é o de Hertz, que apesar de amplamente utilizado na modelagem de mancais de elementos rolantes até os dias de hoje, não incorpora em seu modelo, entre outras condições, o amortecimento e o efeito do filme de óleo na rigidez, sendo necessária a utilização do modelo de lubrificação EHD (Elastohidrodinâmica) para inclusão de mais efeitos na modelagem de mancais de rolamento. Este regime de lubrificação ocorre no contato de superfícies não conformes, que em altas velocidades acabam se deformando elasticamente, criando uma pequena região plana, onde é mantida uma sustentação pelo filme de óleo lubrificante.

Sob regime de lubrificação EHD, viscosidade e densidade do fluido não mais são independentes da pressão, consequência das circunstâncias de operação em que esta lubrificação se manifesta. Segundo Verner e Lubrecht (2000), suas principais características são:

1. Condições extremas, às quais o fino filme de óleo está sujeito, como não conformidades superficiais;

2. Altas pressões entre as superfícies de contato;
3. Altas tensões de cisalhamento.

Em 1981, Hamrock e Dowson publicaram um dos principais trabalhos até então, sobre lubrificação EHD, tratado como contato pontual, sendo proposto neste trabalho que a análise da elasticidade e da equação de Reynolds sejam simultâneas, mostrando-se assim um sistema complexo, principalmente para capacidade computacional da época.

Lubrecht et al. (1986), mostra a solução da lubrificação EHD do contato linear pelo método Multiníveis, reduzindo o consumo de tempo e computacional. Verner (1991) propôs uma simplificação do sistema de Lubrecht. Então, em 2000, Verner e Lubrecht utilizam o método *Multi-Level-Multi-Integration* (MLMI) para integração da equação da deformação elástica do contato.

Wijnant (1998) estuda a elipticidade da área de contato e situações de *starvation* na lubrificação, apresentando para tanto uma aproximação de rigidez e amortecimento para o contato lubrificado. Posteriormente esta metodologia é aplicada para um mancal completo em Wijnant et al. (1999), que propõem uma aproximação do contato lubrificado para um modelo massa-mola-amortecedor, como mostrado na figura 2.2.

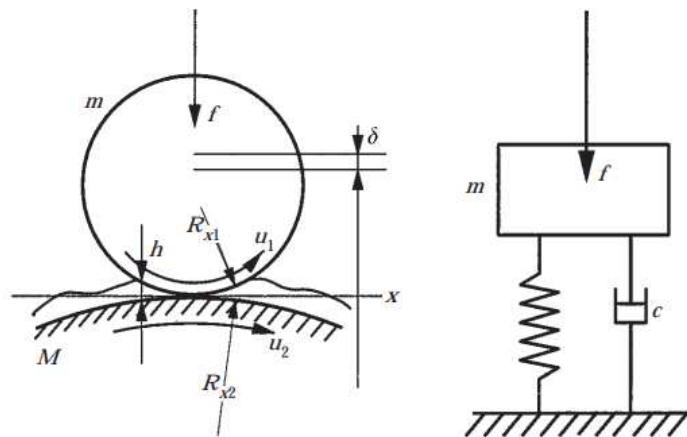


Figura 2.2. Aproximação do contato lubrificado por meio de um modelo massa-mola-amortecedor, Wijnant et al.(1999).

A resolução do problema da lubrificação EHD envolve a integração numérica simultânea da equação de Reynolds, espessura do filme de óleo, pressão e densidade de óleo dependentes

da pressão e equilíbrio de forças, como mostrado por Nonato e Cavalca (2010). É clara a complexidade computacional envolvida na resolução desta teoria.

Nonato e Cavalca (2014) propõem um modelo reduzido de força não linear, Q , para o contato lubrificado de um mancal de rolamento, em função do deslocamento, δ , como apresentado na equação (1), onde K é a rigidez equivalente, d é o expoente e ΔF é a força residual encontrada devido à sustentação do filme de óleo.

$$Q = K\delta^d + \Delta F \quad (1)$$

Previamente, Nonato e Cavalca (2010) já haviam mostrado que a força no contato pode ser representada por um polinômio cúbico para a rigidez, sendo o amortecimento do filme de óleo considerado viscoso. Também foi testada a linearidade em torno do ponto de equilíbrio, por Nonato e Cavalca (2012a), que se mostrou válida apenas nesta região, sendo que o modelo mais amplo para o deslocamento do mancal é claramente não linear.

Radaelli (2013) baseou-se em Harris (2001) para modelar mancais de rolamento de esferas com contato de Hertz, incluindo forças inerciais e momentos giroscópicos. Carvalho (2010) focou seu trabalho na influência de diferentes valores de folga e rotação da pista interna na variação da distribuição de carga nas esferas em um mancal radial. Radaelli (2013) modelou o mancal com 5 graus de liberdade encontrando a distribuição de forças e deslocamentos nas esferas de um mancal submetido a cargas radiais e axiais. Este último modelo é utilizado no presente trabalho para definir a distribuição de forças nos contatos de cada esfera e seus respectivos ângulos de contato.

Bizarre et al (2016) integram o trabalho de Radaelli (2013), buscando a convergência das equações para o equilíbrio de forças e posição de cada esfera com a solução da integração numérica do contato com lubrificação EHD, tratada no trabalho de Nonato e Cavalca (2010, 2012a, 2012b e 2014). O processo é feito para cada contato, interno e externo, entre cada esfera e as pistas do mancal. É feita, então, a modelagem das forças de contato, repositivas e dissipativas, e finalmente, o ajuste das forças nas direções radial e axial para encontrar os parâmetros equivalentes de rigidez e amortecimento, que tem, por fim, sua convergência testada. Em sequência, Bizarre et al. (2018) avaliaram o comportamento dos parâmetros de força de contato não linear, comparando com o contato seco para variações de carga e rotação, verificando a coerência dos parâmetros de pressão e espessura para essas variações.

Zang et al. (2014) faz uma análise da resposta de um sistema rotor-mancal de esferas com contato angular, avaliando a influência da camada de filme nas respostas de vibração, considerando um mancal rígido. O processo é iterativo, utilizando o método dos mínimos quadrados para os resultados numéricos de diferentes parâmetros. Em decorrência deste método é percebido que a presença de filme de óleo introduz não linearidades na resposta dinâmica do sistema. Na presença de camada de filme lubrificante, os parâmetros não são apenas dependentes do tempo, mas também da velocidade de rotação e a resposta do sistema com baixa carga axial apresenta movimentos caóticos.

Wang et al. (2017), também faz a análise no tempo iterativamente, ou seja, para cada passo do integrador do programa, é resolvido no sistema de equações para encontrar uma nova equação de força de restauração para o mancal. É analisado, então, um rotor apoiado em mancais de esferas com contato angular considerando as possíveis ondulações superficiais da esfera e das pistas decorrentes dos processos de fabricação, e feita uma análise do comportamento em um rotor de eixo rígido, com pré-carga, utilizando para o contato o modelo de Hertz e para o filme de óleo a aproximação de Hamrock e Dowson (1981).

Em vista do contexto exposto neste capítulo, o presente trabalho se enquadra na modelagem de rotores, por parâmetros concentrados e elementos finitos, suportados por mancais de esferas com contato angular e lubrificação elastohidrodinâmica. Para tanto, é utilizado um modelo reduzido de forças nos mancais, que serão inseridos no modelo do rotor por meio de forças de reação, representadas no sistema de coordenadas inerciais do rotor.

3 MODELAGEM TEÓRICA

3.1 Caracterização dos mancais de esferas em lubrificação EHD

O modelo reduzido do mancal de rolamentos consiste em encontrar os parâmetros que descrevem sua força de reação. Este processo de caracterização do mancal se dá em uma integração de diversos programas por meio de uma interface gráfica, iniciada no trabalho de Bizarre (2015) e finalizada ao decorrer deste trabalho. Nesta interface são feitas transferências de dados entre os programas, testes de convergência de resultados e apresentação final dos mesmos, por meio dos parâmetros de força dos mancais.

Primeiro são inseridos os dados geométricos do mancal, a velocidade de rotação e a carga estática a que o mancal está submetido (Radaelli, 2013). Este algoritmo equaciona o equilíbrio de forças das esferas de um mancal de rolamento. Utilizando o método iterativo de Newton-Raphson, o equilíbrio é feito para cada esfera e para o mancal completo, sendo o critério de parada um erro preestabelecido entre a carga de entrada no mancal e a carga final calculada a partir dos deslocamentos encontrados.

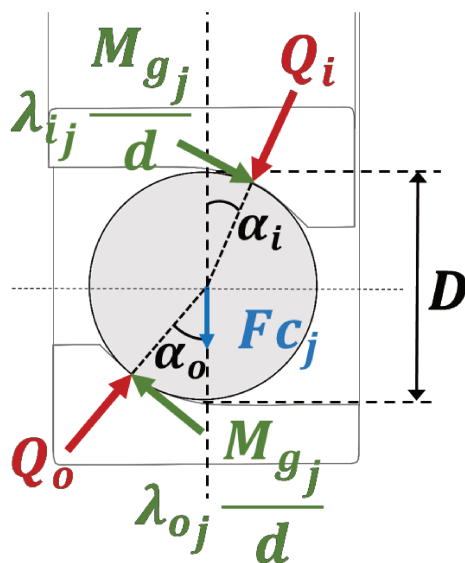


Figura 3.1. Equilíbrio das forças de rotação e momentos.

Na figura 3.1, é representado o equilíbrio de forças de um mancal com contato angular. O contato de Hertz é o modelo utilizado na primeira etapa, na qual é feito, para cada esfera, o equilíbrio de forças em rotação, considerando que o momento giroscópico (M_{gj}) e a força de inércia (F_{cj}) alteram os deslocamentos e ângulos de contato com a pista interna (α_{ij}) e externa (α_{oj}), como mostrado na figura 3.1, onde D é o diâmetro da esfera. λ_{oj} e λ_{ij} são coeficientes que representam o quanto do momento giroscópico é resistido pelo atrito das pistas, externa e interna, respectivamente, chamados de coeficientes de escorregamento das pistas, e assumem valores entre 0 e 2. Além disso, sua soma deve ser igual a 2. Ainda, estes coeficientes estão relacionados à teoria de pista de controle. Por fim, Q_{oj} e Q_{ij} são as cargas radiais suportadas pela j -ésima esfera. O subscrito j indica a posição angular de cada esfera, i , pista interna e o , pista externa.

Feito o equilíbrio de forças para cada esfera, é, então, realizado o equilíbrio para todo o mancal, sendo encontradas as primeiras aproximações para a carga suportada por cada esfera e o deslocamento resultante na direção do contato, assim como os ângulos de contato para cada esfera, conforme as equações 2 e 3:

$$Q_{ij}\sin\alpha_{ij} - Q_{oj}\sin\alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{D}(\lambda_{ij}\cos\alpha_{ij} - \lambda_{oj}\cos\alpha_{oj}) = 0 \quad (2)$$

$$Q_{ij}\cos\alpha_{ij} - Q_{oj}\cos\alpha_{oj} + \frac{M_{gj}}{D}(\lambda_{ij}\sin\alpha_{ij} - \lambda_{oj}\sin\alpha_{oj}) + F_{cj} = 0 \quad (3)$$

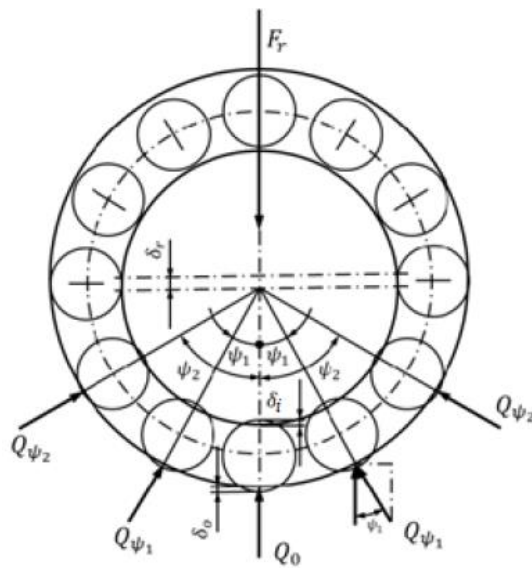


Figura 3.2 Distribuição de carregamento em mancais radiais, carga em z (Changsen,1991).

A primeira aproximação para a distribuição de cargas, Q_{ψ_j} , entre as esferas do mancal em cada pista na direção radial é feita considerando o ângulo de Azimuth, ψ_j , como mostrado na figura 3.2. Esta distribuição é encontrada iterativamente, para os contatos internos e externos, onde também são obtidos os deslocamentos internos, δ_{ij} , e externos, δ_{oj} , para cada esfera e os ângulos de contato para cada pista do mancal, α_{ij} e α_{oj} .

Concluído o equilíbrio de forças para o mancal em movimento, em seguida é introduzida a lubrificação no modelo do mancal, considerando o comportamento elastohidrodinâmico na interação da camada de óleo com as superfícies da esfera e de cada pista. Esta teoria é aplicável dada a não conformidade geométrica deste tipo de mancal, isto é, as superfícies de contato são reduzidas, conforme ilustrado na figura 3.3, gerando, em pressões mais altas, a compressão do filme de óleo e a deformação elástica dos corpos na região do contato.

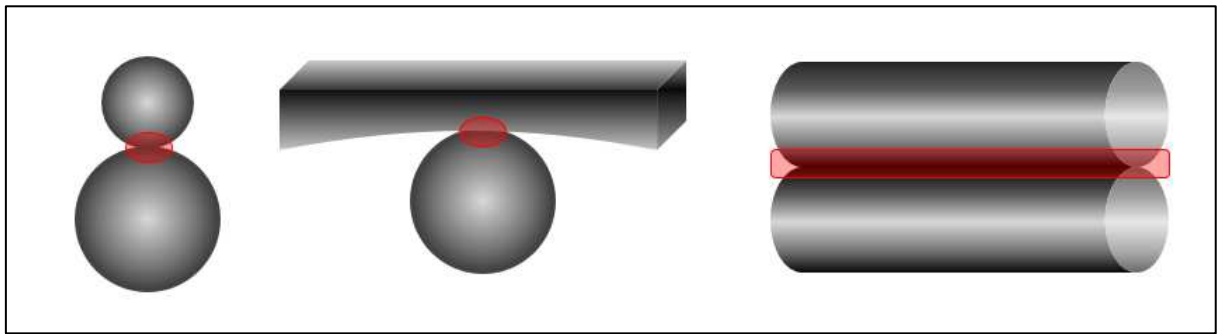


Figura 3.3 Exemplos de superfícies de contato não conformes

Vê-se, na figura 3.4, a representação do efeito da lubrificação EHD no contato entre as superfícies não conformes. Nesta representação, a superfície inicial (antes da aplicação de carga e em repouso) é a tracejada. A superfície azul representa unicamente a deformação elástica do contato não conforme e, finalmente, a superfície verde mostra a compressão do filme de óleo em conjunto com a deformação. O deslocamento do centro da esfera é representado por h_0 , e é possível encontrar uma distribuição da espessura de filme em relação ao referencial local do plano de contato (x,y) , $h(x,y)$.

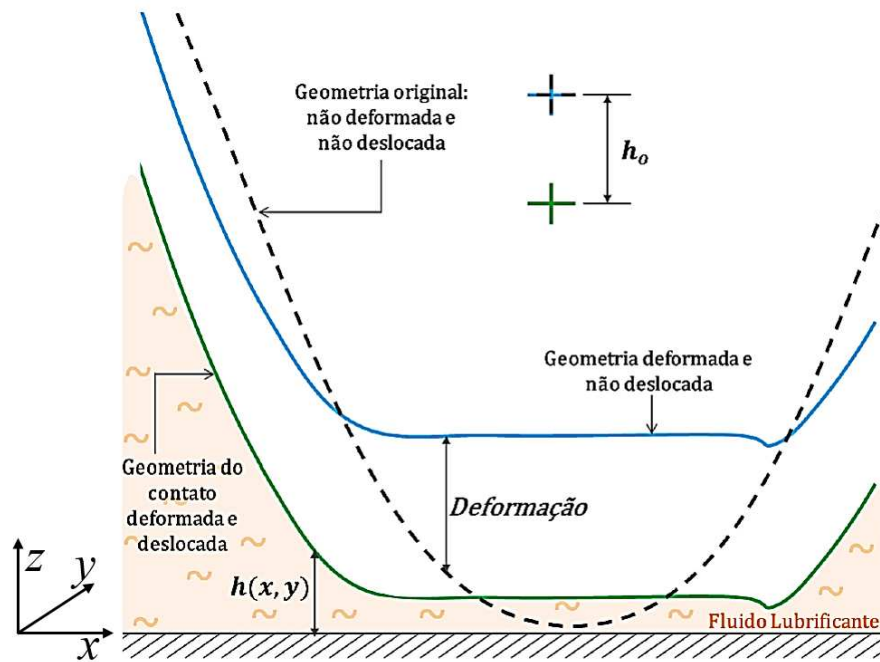


Figura 3.4 Representação da espessura calculada $h(x,y)$ (modificado de Bizarre e Cavalca, 2014)

Para introduzir os dados do equilíbrio de força como dados de entrada da simulação de cada contato com lubrificação EHD, são utilizados os parâmetros adimensionais de Moes, para carga (M) e para lubrificação (L), calculados a partir dos dados de carregamento e de velocidade de cada esfera. Estes parâmetros são introduzidos no modelo de lubrificação EHD implementado por Nonato (2009) e Nonato e Cavalca (2010).

Um sistema de equações, descrito por Venner (2000), é integrado para duas situações, caso estático e regime transiente, que envolvem as seguintes equações:

- A equação de Reynolds (1886), equação (4), obtida a partir da simplificação da equação de Navier-Stokes, descreve o fluxo do filme de óleo no contato esfera-pista, restringido pela condição de cavitação, pressão positiva.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

- A equação da deformação elástica, que engloba a geometria do contato, com relação a distribuição de pressão.
- A relação viscosidade-pressão.
- A relação densidade-pressão.

- A equação do equilíbrio de forças fornece a integral da pressão ao longo do filme que deve equilibrar a força aplicada.

Dada a complexidade matemática, a solução do problema de lubrificação é obtida pelo método de diferenças finitas multiníveis, a qual ocorre em duas etapas: a primeira é o equilíbrio estático, onde são feitas pequenas variações na carga aplicada, em uma região de linearidade do contato, em torno da posição de equilíbrio, descrito por Nonato e Cavalca (2012a). Nesta etapa, a equação de Reynolds é resolvida sem o termo referenciado como *squeeze*, que relaciona a variação da espessura adimensional, h , com o tempo, t . Obtém-se, então, o perfil de pressões, forças de reação e espessura de filme de óleo para cinco pontos estáticos, por contato em cada esfera carregada.

Em seguida, o sistema de equações é novamente resolvido para uma resposta transiente, sendo a equação de Reynolds solucionada em sua forma completa, e são encontrados, a partir desta integração, os dados de força, deslocamento e velocidade do contato.

Para utilizar os dados obtidos na integração multinível, o filme de óleo é representado como um sistema mola-amortecedor, como esquematizado na figura 3.5. Assim, as molas e amortecedores equivalentes em cada contato, interno e externo, de uma dada esfera estão em série entre si, enquanto que aquelas associadas a esferas distintas de um mesmo mancal estão em paralelo.

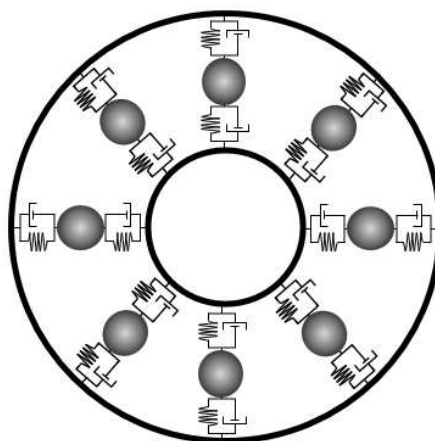


Figura 3.5. Representação do filme de óleo do mancal de esferas como um sistema mola-amortecedor, vista plano y-z.

A última etapa da caracterização dos mancais consiste em encontrar os parâmetros de força equivalente nos contatos. Os parâmetros da força restitutiva de cada contato é feito, como descrito por Bizarre et al. (2016), a partir do equilíbrio estático no modelo EHD. Utilizando o

algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963) é possível modelar a força de contato não linear de cada esfera. Os parâmetros encontrados são a rigidez equivalente ($K_{i,o}$), expoente do deslocamento ($d_{i,o}$) e a força residual $\Delta F_{i,o}$ na direção do contato, para as pistas internas e externas, como mostra a equação (5) (Nonato, 2013).

$$Q_{i,oj} = K_{i,o} \delta_{i,oj}^{d_{i,o}} + \Delta F_{i,o} \quad (5)$$

A equação (5) representa a força restitutiva no contato de cada esfera para um mancal com contato angular em movimento. Sendo os ângulos de contato, α_i e α_o , diferentes entre si, e as forças de reação, F_i e F_o , não colineares, como representado na figura 3.6.

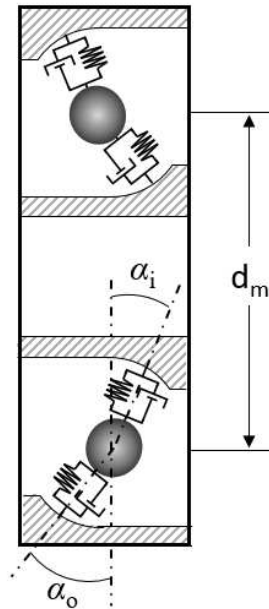


Figura 3.6 Representação do filme de óleo do mancal de esferas para um sistema massa mola com contato angular, vista lateral x-z.

Para a obtenção dos parâmetros totais equivalentes do mancal, faz-se necessária a decomposição das forças restitutivas e dissipativas de cada pista nas direções axial e radial, equação (6). Os subscritos *A* e *R* representam as direções axial e radial, respectivamente.

$$F_{i,oRj} = \text{sen}(\alpha_{i,oj})F_{i,oj}; \quad F_{i,oAj} = \text{cos}(\alpha_{i,oj})F_{i,oj} \quad (6)$$

Uma vez decompostas as forças nas direções radial e axial, sabe-se que o deslocamento total é a soma do deslocamento interno e externo, equação (7), para cada uma das direções em cada esfera.

$$\delta_{R,Aj} = \delta_{iR,Aj} + \delta_{oR,Aj} \quad (7)$$

Neste ponto, é possível fazer a otimização por esfera ou por mancal. No primeiro caso são encontrados parâmetros equivalentes para cada uma das esferas, esta solução dificulta a aplicação no rotor completo, uma vez que é interessante não necessitar de interpolação nas posições intermediárias das esferas em operação. Sendo assim, neste trabalho, esta opção foi utilizada apenas para facilitar a convergência dos parâmetros em etapas intermediárias. Foi realizada, então, a otimização para o mancal como resultado final.

Para tanto, é necessário encontrar a deformação total em cada esfera, conforme equação (8).

$$\delta_{R,Aj} = \left(\frac{F_{iR,Aj} - \Delta F_{iR,A}}{K_{iR,A}} \right)^{\frac{1}{d_{iR,A}}} + \left(\frac{F_{oR,Aj} - \Delta F_{oR,A}}{K_{oR,A}} \right)^{\frac{1}{d_{oR,A}}} \quad (8)$$

A partir da equação 8, encontram-se parâmetros totais em cada direção, que tornam verdadeiras as relações da equação (9).

$$\delta_{R,Aj} \cong \left(\frac{Q_{R,Aj} - \Delta F_{R,Aj}}{K_{R,Aj}} \right)^{\frac{1}{d_{R,Aj}}} \quad (9)$$

$$Q_{Rj} = K_R \delta_{Rj}^{d_R} + \Delta F_R; \quad Q_{Aj} = K_A \delta_{Aj}^{d_A} + \Delta F_A \quad (10)$$

Ao final da caracterização, é realizada uma verificação, onde, utilizando os deslocamentos encontrados no equilíbrio de forças, calculam-se as forças de reação no mancal com os parâmetros encontrados. Se o critério de erro não for atendido, isto é, se a força calculada não se aproxima suficientemente da força de entrada (carga aplicada), todo o procedimento deve ser refeito, utilizando como entrada do equilíbrio dinâmico das esferas, os parâmetros obtidos na última iteração. O processo de convergência se repete até que o critério de parada seja atendido.

A força de reação total em cada esfera, encontrada na simulação do contato para uma resposta transiente, é composta da força restitutiva e dissipativa, como mostrado nas equação (11). Aproxima-s, então, a força dissipativa de um amortecedor com coeficiente linear, C , para uma dada condição de carga e rotação.

$$Q_{transiente} = K_{i,o} \delta_{i,o}^{d_{i,o}} + \Delta F_{i,o} + C_{i,o} \dot{\delta}_{i,o} \quad (11)$$

Dada a consideração de linearidade do coeficiente de amortecimento equivalente, é encontrado o amortecimento equivalente e resultante em cada esfera e, em seguida, é feita a somatória para o mancal (figura 3.5). O ajuste desta etapa é feito por mínimos quadrados.

3.2 Força de reação nos mancais

Para a inclusão da força de reação no mancal é necessária a decomposição do deslocamento radial do mancal nos graus de liberdade y_m e z_m , do mancal, equação (12), como mostrado por Nonato e Cavalca (2014) e representado na figura 3.7. Quanto a notação, ψ_j representa o ângulo de Azimuth de esfera e P_d , a folga diametral.

$$\delta_{Rj} = \delta z_m \cos(\psi_j) + \delta y_m \sin(\psi_j) - \frac{P_d}{2} \quad (12)$$

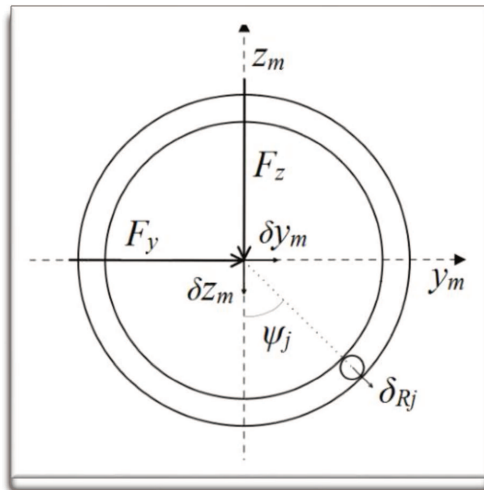


Figura 3.7. Representação do deslocamento radial da j -ésima esfera de um mancal de esferas.

Derivando o deslocamento radial de cada esfera, δ_{Rj} , no tempo, encontramos a velocidade do centro da esfera em relação a posição e velocidade de cada esfera.

$$\dot{\delta}_{Rj} = -\delta z_m \sin(\psi_j) \dot{\psi}_j + \delta y_m \cos(\psi_j) \dot{\psi}_j + \dot{\delta} z_m \cos(\psi_j) + \dot{\delta} y_m \sin(\psi_j) \quad (13)$$

O termo da velocidade angular nesta equação, $\dot{\psi}_j$, representa a velocidade da gaiola (ω_c), dada pela equação (14), sendo Ω a rotação do eixo, ou seja, a rotação da pista interna do mancal, d_m o diâmetro primitivo do mancal e D , o diâmetro da esfera. Considerando a pista externa em repouso:

$$\omega_c = \frac{\Omega(d_m - D \cos(\alpha))}{2d_m} \quad (14)$$

O equilíbrio estático no mancal se dá pela somatória das forças de reação das esferas nas direções x_m , y_m e z_m , figura 3.7, dado que Z é o número total de esferas de cada mancal. Substituindo δ_{Aj} por x_m temos as relações das forças restitutivas de reação do mancal, como visto na equação (17). Considerando δy_m , δx_m , $\dot{\delta} y_m$ e $\dot{\delta} z_m$ como y_m , z_m , $\dot{y}_m$ e $\dot{z}_m$, respectivamente, obtêm-se as equações (15) e (16):

$$F_{my} = \sum_{j=1}^Z \left[\left(K_R \left(z_m \cos(\psi_j) + y_m \sin(\psi_j) - \frac{P_d}{2} \right)^{d_R} + \Delta F_R \right) \cos(\psi_j) \right] \quad (15)$$

$$F_{mz} = \sum_{j=1}^Z \left[\left(K_R \left(z_m \cos(\psi_j) + y_m \sin(\psi_j) - \frac{P_d}{2} \right)^{d_R} + \Delta F_R \right) \sin(\psi_j) \right] \quad (16)$$

$$F_{mx} = \sum_{j=1}^Z (K_A x_m^{d_A} + \Delta F_A) \quad (17)$$

As forças dissipativas do mancal são, então, descritas pelas equações (18) a (20), obtidas com o produto do amortecimento equivalente do mancal pela derivada da posição no tempo, dada pela equação (13), para a direção radial, e diretamente pelo termo $\dot{x}_m$, para a direção axial.

$$F_{m\dot{y}} = \sum_{j=1}^Z \left[\left(C_j (\dot{z}_m \cos(\psi_j) + \dot{y}_m \sin(\psi_j)) + \omega_c (-z_m \sin(\psi_j) + y_m \cos(\psi_j)) \right) \cos(\psi_j) \right] \quad (18)$$

$$F_{m\dot{z}} = \sum_{j=1}^Z \left[\left(C_j (\dot{z}_m \cos(\psi_j) + \dot{y}_m \sin(\psi_j)) + \omega_c (-z_m \sin(\psi_j) + y_m \cos(\psi_j)) \right) \sin(\psi_j) \right] \quad (19)$$

$$F_{m\dot{x}} = \sum_{j=1}^Z (C_j \dot{x}_m) \quad (20)$$

Com as forças não lineares modeladas para cada mancal, este efeito é finalmente inserido no modelo dinâmico do rotor.

3.3 Caso 1: Parâmetros Concentrados e Disco Centrado

O primeiro modelo a ser considerado é um rotor Laval, como descrito em Kramer (1993). O disco é rígido com massa m , sem amortecimento interno, e um eixo de comprimento l de massa desprezível, com o módulo de elasticidade E , momento de inércia de área I e a área de seção transversal A .

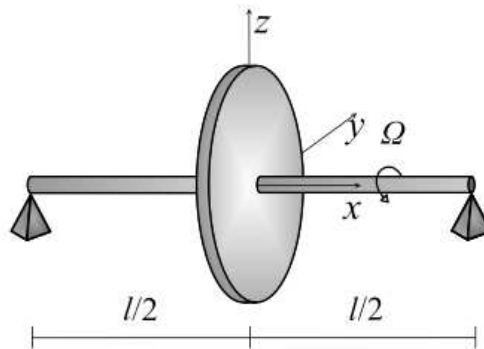


Figura 3.8 Modelo rotor Laval centrado biapoiado

São considerados inicialmente os rotores biapoiados, figura 3.8, para uma aproximação do sistema rotativo apoiado por mancais rígidos, a fim de encontrar as frequências fundamentais do problema. Montando, portanto, as matrizes do sistema, acrescenta-se o amortecimento estrutural proporcional e o deslocamento em x , que na forma homogênea resulta na expressão da equação (21) :

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (21)$$

sendo $[M]$ a matriz de massa do disco, $[K]$, a matriz de rigidez do eixo e $[C]$, a matriz de amortecimento proporcional a rigidez, por um coeficiente β estimado conforme o material do eixo, apresentados na equação (22).

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EA}{l} \end{bmatrix} \text{ e } [C] = \beta[K] \quad (22)$$

São encontrados os autovalores do sistema da equação (21) e posteriormente são encontradas as frequências naturais do sistema.

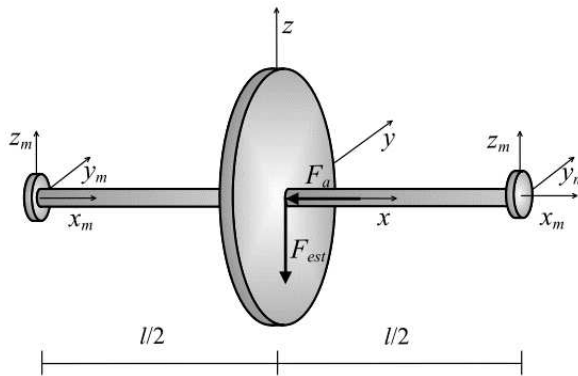


Figura 3.9 Modelo rotor Laval centrado com mancais de esferas, mostrando os graus de liberdade e forças aplicadas.

Para considerar os mancais no modelo do rotor, é necessário inserir seus respectivos graus de liberdade no sistema (figura 3.9). Isto é feito pelas equações que relacionam as forças restitutivas do eixo às reações não lineares dos mancais, conforme Kramer (1993). Obtém-se a equação de movimento em sua forma matricial (equação (23)):

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F\} \quad (23)$$

sendo $\{u(t)\}^T = \{y, z, x, y_m, z_m, x_m\}$ e $\{F\}^T = \{m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t), m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) + F_{est}, F_a, -2(F_{my} + F_{m\dot{y}}), -2(F_{mz} + F_{m\dot{z}}), -2(F_{mx} + F_{m\dot{x}})\}$

Neste caso, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são representadas, respectivamente, pelas equações (24) e (25).

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{48EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{4EA}{l} \\ -\frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{48EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{48EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{l} & 0 & 0 & \frac{4EA}{l} \end{bmatrix} e [C] = \beta[K] \quad (25)$$

3.4 Caso 2: Parâmetros Concentrados e Disco Descentrado

Para o sistema com o disco descentrado, figura 3.10, também é feita a análise para o rotor biapoiado, para encontrar as frequências naturais no sistema.

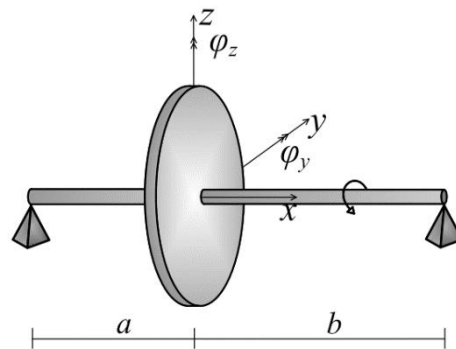


Figura 3.10. Modelo de rotor Laval Biapoiado com o disco descentrado.

O sistema de equações que descreve o rotor da figura 3.10 é representado na equação (26), porém, neste caso, as matrizes são as apresentadas nas equações (27) a (29), sendo I_d o momento de inércia diametral do disco.

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + ([C] + [G])\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (26)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{11} & 0 & k_{13} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k_{13} & 0 & k_{33} & 0 \\ k_{13} & 0 & 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}, \quad [C] = \beta[K] \quad (27)$$

$$k_{11} = \frac{3EI(a^3 + b^3)}{a^3b^3}, \quad k_{22} = \frac{EAl}{ab}, \quad k_{13} = \frac{3EI(a - b)}{a^2 - b^2} \quad (28)$$

Devido a posição descentrada do disco o efeito giroscópico passa a atuar sobre sua posição central, representada pela matriz $[G]$, equação (29), onde I_p é o momento de inercia polar do disco. O efeito giroscópico surge da mudança de direção do vetor de velocidade de rotação normal ao disco. Considera-se, então, a rotação φ_z em torno do eixo z e φ_y em torno do eixo y :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p\Omega \\ 0 & 0 & 0 & -I_p\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

A aproximação para o sistema biapoiado é uma solução para encontrar as frequências naturais do sistema. Nota-se, então, que devido a inclusão do efeito giroscópico, o sistema homogêneo não é mais independente da velocidade de rotação, sendo encontradas frequências naturais diferentes para cada velocidade de operação. Utiliza-se, nestes casos, a montagem de um diagrama de Campbell, no qual são representadas as curvas de frequência natural do sistema, ω_k em função da frequência de rotação Ω , como representado na figura 3.11.

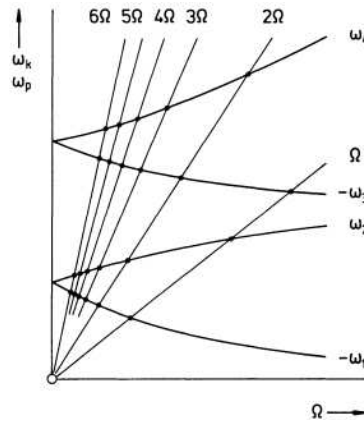


Figura 3.11 Diagrama de Campbell, Kramer (1993)

Para encontrar as velocidades críticas do sistema, utiliza-se a interseção das curvas, quando ω_k , frequência natural, coincide com a frequência de rotação, Ω .

Para a inclusão dos mancais no modelo, é necessário inserir os graus de liberdade dos mancais, sendo que, também neste caso, apenas as translações nos mancais são obtidas, uma vez que o modelo por parâmetros concentrados não permite a visualização do perfil de deformação do eixo, não sendo possível relacionar os ângulos φ_y e φ_z do disco aos ângulos de rotação em torno de y_m e z_m do mancal. Assim, o vetor de graus de liberdade do sistema, $\{u\}$, é descrito pela equação (30), e representado pela figura 3.12.

$$\{u(t)\} = \{y \ z \ x \ \varphi_y \ \varphi_z \ y_{m1} \ z_{m1} \ x_{m1} \ y_{m2} \ z_{m2} \ x_{m2}\}^T \quad (30)$$

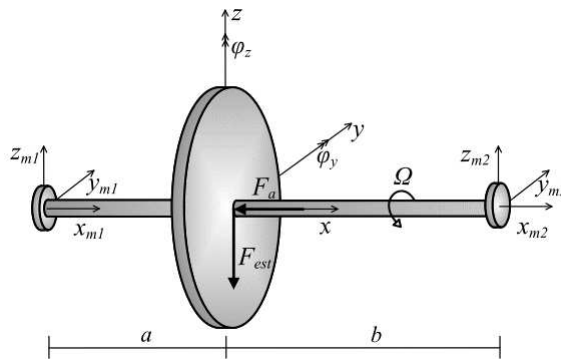


Figura 3.12. Rotor Laval com disco descentrado apoiado em mancais de esferas com contato angular, com os graus de liberdade e forças aplicadas.

A matriz de rigidez, $[K]$, representada pela equação (31), foi encontrada a partir dos coeficientes de influência (Apêndice A), considerando três nós distintos, mancal 1, disco e mancal 2:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & -k_{13} & -k_{111} & 0 & 0 & -k_{112} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 & k_{13} & 0 & 0 & -k_{111} & 0 & 0 & -k_{112} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{221} & 0 & 0 & -k_{222} \\ 0 & k_{13} & 0 & k_{33} & 0 & 0 & k_{131} & 0 & 0 & -k_{132} & 0 \\ -k_{13} & 0 & 0 & 0 & k_{33} & -k_{131} & 0 & 0 & k_{132} & 0 & 0 \\ -k_{111} & 0 & 0 & 0 & -k_{131} & k_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{111} & 0 & k_{131} & 0 & 0 & k_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{221} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{221} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{112} & 0 & 0 & 0 & k_{132} & 0 & 0 & 0 & k_{112} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{112} & 0 & -k_{132} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{112} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{222} \end{bmatrix} \quad (31)$$

As equações (32) descrevem os elementos da matriz $[K]$:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{3EI(a^3 + b^3)}{a^3b^3}, k_{111} = \frac{3EI}{a^3}, k_{112} = \frac{3EI}{b^3} \\ k_{13} &= \frac{3EIl(a - b)}{a^2b^2}, k_{131} = \frac{3EI}{a^2}, k_{132} = \frac{3EI}{b^2}, k_{33} = \frac{3EIl}{ab} \\ k_{22} &= \frac{EA}{ab}, k_{221} = \frac{EA}{a}, k_{222} = \frac{EA}{b} \end{aligned} \quad (32)$$

Assim como no caso 1, o amortecimento é proporcional à rigidez, equação (33), mas neste caso, traz apenas os termos relacionados ao nó do disco. Assim como apresentado em Kramer (1993), para um sistema de mancais não lineares, a força de reação do mancal é relacionada apenas à rigidez do eixo.

$$[C] = \beta \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & -k_{13} & & \\ 0 & k_{11} & 0 & k_{13} & 0 & & \\ 0 & 0 & k_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_{13} & 0 & k_{33} & 0 & & \\ k_{13} & 0 & 0 & 0 & k_{33} & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

O efeito giroscópico é considerado apenas no nó disco do rotor resultando na matriz da equação (34).

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \Omega & & \\ 0 & 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

O mancal, por sua vez, apresenta apenas propriedades de rigidez e amortecimento, resultando em uma matriz de inércia do sistema, $[M]$, que considera apenas o disco, com cinco graus de liberdade, como mostrado na equação (35).

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Para o vetor de forças foram consideradas as apresentadas na equação (36), em que o centro do disco tem cargas estáticas aplicadas nas direções z e x , e as direções y e z estão sujeitas ao desbalanceamento rotativo. Os parâmetros dos mancais, assim como no caso do disco centrado, foram aplicados na forma de uma força de reação externa.

$$\{F\} = \{R_y, R_z, R_x, 0, 0, -(F_{y1} + F_{y1}), -(F_{z1} + F_{z1}), -(F_{x1} + F_{x1}), -(F_{y2} + F_{y2}), -(F_{z2} + F_{z2}), -(F_{x2} + F_{x2})\}^T \quad (36)$$

Consideram-se as forças externas que atuam sobre o disco em y, z e x como $R_y = m\epsilon\Omega^2 \cos \Omega t$, $R_z = m\epsilon\Omega^2 \sin \Omega t - F_{est} - mg$ e $R_x = -F_a(1 + 0.05e^{i\Omega t})$, respectivamente.

3.5 Caso 3: Modelo do Rotor pelo Método dos Elementos Finitos

Usando como base um rotor semelhante ao aplicado em parâmetros concentrados, o conjunto foi separado em mancais, disco e eixo. O eixo foi discretizado em N elementos de viga contínuos, resultando em $N+1$ nós, como pode ser visto na figura 13.

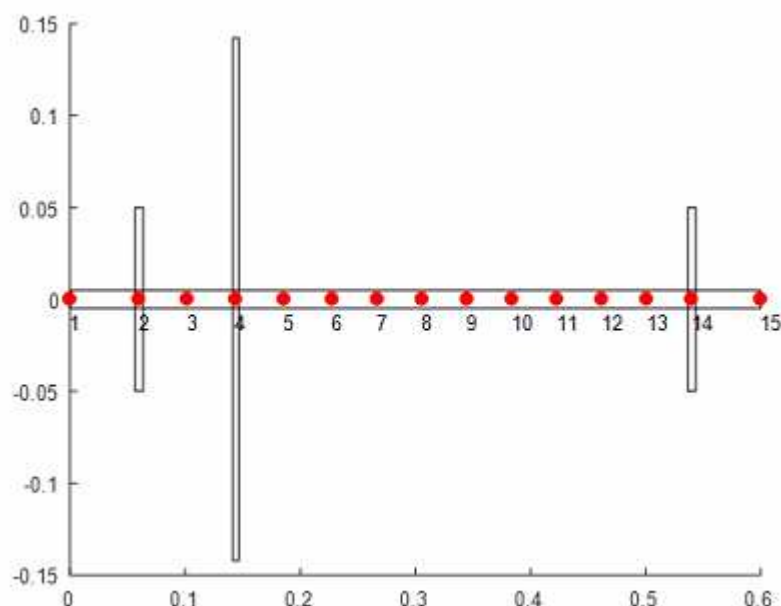


Figura 3.13 Exemplo de rotor com eixo discretizado em $N = 14$ elementos de viga e 15 nós

Para modelar o comportamento restitutivo do eixo foram utilizadas as matrizes propostas por Nelson (1980) que considera a teoria de viga de Timoshenko, para uma modelagem mais completa, contemplando efeitos de inércia, elasticidade e cisalhamento. É compreendido no modelo o efeito giroscópico e a tensão devida a força axial em cada elemento do eixo. O amortecimento foi modelado como proporcional à rigidez.

As considerações para o disco neste modelo são semelhantes aos casos anteriores, tratado como rígido, desprezando possíveis perdas de energia, sujeito ao seu peso e à força de desbalanceamento rotativo, aplicadas ao eixo em um único nó designado para a posição do disco. Considera-se, ainda, que o disco tenha inércia e que está sujeito ao efeito giroscópico devido a sua posição e inclinação durante a operação.

Já os mancais são introduzidos como forças de reação nos nós onde se encontram. Os mancais são sujeitos a cargas estáticas diferentes, devido a posição do disco. Os coeficientes das forças de reação são, portanto, diferentes para a simulação considerando mancais com lubrificação EHD.

3.5.1 Matrizes Elementares

Os graus de liberdade de cada elemento, são mostrados na figura 3.14. Sendo estes agrupados pelo vetor $\{u_R\}$, equação (37), sem levar em conta os deslocamentos axiais, onde Ω é a frequência de rotação do sistema.

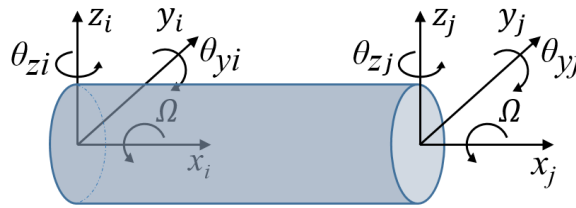


Figura 3.14 Elemento de eixo com os nós i e j , cada um com 5 graus de liberdade.

$$\{u_R\} = \{y_i \quad z_i \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad y_j \quad z_j \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}\}^T \quad (37)$$

Cada elemento do eixo é interpretado como contínuo e tem a sua matriz de rigidez à flexão, $[K_b]$, apresentada na equação (38).

$$[K_b] = \frac{EI}{l^3(1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & \\ 0 & -6l & (4 + \Phi)l^2 & & & & & \\ 6l & 0 & 0 & (4 + \Phi)l^2 & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & & & \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & & \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & -6l & (4 + \Phi)l^2 & \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad \text{Sim.} \quad (38)$$

sendo E o módulo de elasticidade, I o momento de inércia de área do elemento cilíndrico, l o comprimento do elemento e Φ é o efeito de cisalhamento, característico da viga de Timoshenko, segundo equação (39).

$$\Phi = \frac{12EI}{kGA l^2} \quad (39)$$

onde k é o fator de forma de cisalhamento, equação (40), conforme trabalho de Cowper (1966), para uma viga de perfil circular não-vazado. G é o módulo de cisalhamento, dado pela equação (41), sendo ν o coeficiente de Poisson do material da viga e A , a área da seção transversal da viga.

$$k = 6 \left(\frac{1 + \nu}{7 + 6\nu} \right) \quad (40)$$

$$G = 0.5 \left(\frac{E}{1 + \nu} \right) \quad (41)$$

A força axial também tem influência na rigidez em todas as direções, sendo representada pela matriz $[K_a]$, equação (42).

$$[K_a] = \frac{F_a}{30l(1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & & \\ 0 & a_1 & & & & & & \\ 0 & -a_2 & a_3 & & & & & \\ a_2 & 0 & 0 & a_3 & & & & \\ -a_1 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & & & \\ 0 & -a_1 & a_2 & 0 & 0 & a_1 & & \\ 0 & -a_2 & -a_4 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \\ a_2 & 0 & 0 & -a_4 & -a_2 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{Sim.} \quad (42)$$

sendo os elementos da matriz simétrica apresentados na equação (43).

$$\begin{aligned} a_1 &= 36 + 60\Phi + 30\Phi^2 \\ a_2 &= 3l \\ a_3 &= (4 + 5\Phi + 2,5\Phi^2)l^2 \\ a_4 &= (1 + 5\Phi + 2,5\Phi^2)l^2 \end{aligned} \quad (43)$$

A rigidez do elemento, $[K_{elR}]$, equação (44), é portanto, a soma das matrizes de rigidez à flexão, K_b , e rigidez à deformação axial, K_a :

$$[K_{elR}] = [K_a] + [K_b] \quad (44)$$

A matriz de inércia de translação e rotação, $[M_{elR}]$, do elemento de viga é representada na equação (45).

$$[M_{elR}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & & & & \\ 0 & \mu_1 & & & & & & \\ 0 & -\mu_2 & \mu_3 & & & & & \\ \mu_2 & 0 & 0 & \mu_3 & & & & \\ -\mu_4 & 0 & 0 & -\mu_5 & \mu_1 & & & \\ 0 & -\mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & \mu_1 & & \\ 0 & -\mu_5 & -\mu_6 & 0 & 0 & \mu_2 & \mu_3 & \\ \mu_5 & 0 & 0 & -\mu_6 & -\mu_2 & 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \quad \text{Sim.} \quad (45)$$

sendo os elementos da matriz $[M_{elR}]$, representados por $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ e μ_6 , apresentados nas equações (46).

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (156 + 294\Phi + 140\Phi^2)a_t + 36a_r \\ \mu_2 &= ((22 + 38,5\Phi + 17,5\Phi^2)a_t + (3 - 15\Phi)a_r)l \\ \mu_3 &= ((4 + 7\Phi + 3,5\Phi^2)a_t + (4 + 5\Phi + 10\Phi^2)a_r)l^2 \\ \mu_4 &= (54 + 126\Phi + 70\Phi^2)a_t - 36a_r \\ \mu_5 &= ((13 + 31,5\Phi + 17,5\Phi^2)a_t + (-3 + 15\Phi)a_r)l \\ \mu_6 &= ((3 + 7\Phi + 3,5\Phi^2)a_t + (1 + 5\Phi - 5\Phi^2)a_r)l^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Sendo a_t apresentada na equação (47) e a_r na equação (48), nas quais ρ representa a densidade do material e d , o diâmetro do eixo.

$$a_t = \frac{\rho A l}{420(1 + \Phi)^2} \quad (47)$$

$$a_r = \frac{\rho A \left(\frac{d}{2}\right)^2}{120l(1 + \Phi)^2} \quad (48)$$

E por fim, o efeito giroscópico de cada elemento de viga, dado pela matriz giroscópica do elemento, $[G_{elR}]$, equação (49), é uma matriz antissimétrica.

$$[G_{elR}] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ \mu_7 & 0 & & & & & & & -Sim. \\ -\mu_8 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -\mu_8 & \mu_9 & 0 & & & & & \\ 0 & \mu_7 & -\mu_8 & 0 & 0 & & & & \\ -\mu_7 & 0 & 0 & -\mu_8 & \mu_7 & 0 & & & \\ -\mu_8 & 0 & 0 & -\mu_{10} & -\mu_8 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\mu_8 & -\mu_{10} & 0 & 0 & \mu_8 & 9 & 0 & \end{bmatrix} \quad (49)$$

Sendo os elementos da matriz $[G_{elR}]$, representados por μ_7, μ_8, μ_9 e μ_{10} , mostrados nas equações (50):

$$\begin{aligned} \mu_7 &= 72a_r \\ \mu_8 &= 2(3 - 15\Phi)a_rl \\ \mu_9 &= 2(4 + 5\Phi + 10\Phi^2)a_rl^2 \\ \mu_{10} &= 2(1 + 5\Phi - 5\Phi^2)a_rl^2 \end{aligned} \quad (50)$$

Para a inclusão do grau de liberdade axial nas matrizes do elemento de viga são inseridas uma linha e uma coluna na primeira posição de cada nó, e acrescentados os termos da matriz de elemento de barra, para o deslocamento na direção axial. Reescreve-se o vetor dos graus de liberdade do elemento, entre os nós i e j , como mostrado na equação (51).

$$\{u(t)\} = \{x_i \ y_i \ z_i \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ x_j \ y_j \ z_j \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}\}^T \quad (51)$$

Com a inclusão do deslocamento na direção x do sistema, a matriz de rigidez do eixo é representada na equação (52):

$$[K_{el}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & K_{elR(1:4,1:4)} & & & & 0 & K_{elR(1:4,4:8)} & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & K_{elR(4:8,1:4)} & & & & 0 & K_{elR(4:8,4:8)} & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (52)$$

A matriz de inércia do eixo, por sua vez, resulta como mostrado na equação (53), com a inclusão dos elementos de barra.

$$[M_{el}] = \begin{bmatrix} \frac{\rho Al}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & M_{elR(1:4,1:4)} & & & & 0 & M_{elR(1:4,4:8)} & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ \frac{\rho Al}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \\ 0 & M_{elR(4:8,1:4)} & & & & 0 & M_{elR(4:8,4:8)} & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (53)$$

E por fim, a matriz giroscópica do elemento é apenas acrescentada de linhas e colunas nulas, nas primeiras posições de cada nó, uma vez que a força axial não contribui para o efeito giroscópico do elemento.

$$[G_{el}] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & \mu_7 & 0 & & & & & & & \\ 0 & -\mu_8 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & -\mu_8 & \mu_9 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \mu_7 & -\mu_8 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -\mu_7 & 0 & 0 & -\mu_8 & 0 & \mu_7 & 0 & & \\ 0 & -\mu_8 & 0 & 0 & -\mu_{10} & 0 & -\mu_8 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\mu_8 & -\mu_{10} & 0 & 0 & 0 & \mu_8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

O amortecimento, permanece proporcional à rigidez, equação (55), sendo β o coeficiente de proporcionalidade.

$$[C_{el}] = \beta [K_{el}] \quad (55)$$

3.5.2 Matrizes Globais e Sistema Completo

Para a montagem do sistema completo, é feita a alocação dos elementos em banda diagonal da matriz global, sobrepondo os elementos nos nós coincidentes, ou seja, somando os elementos das matrizes nesta posição, como exemplificado na figura 3.15.

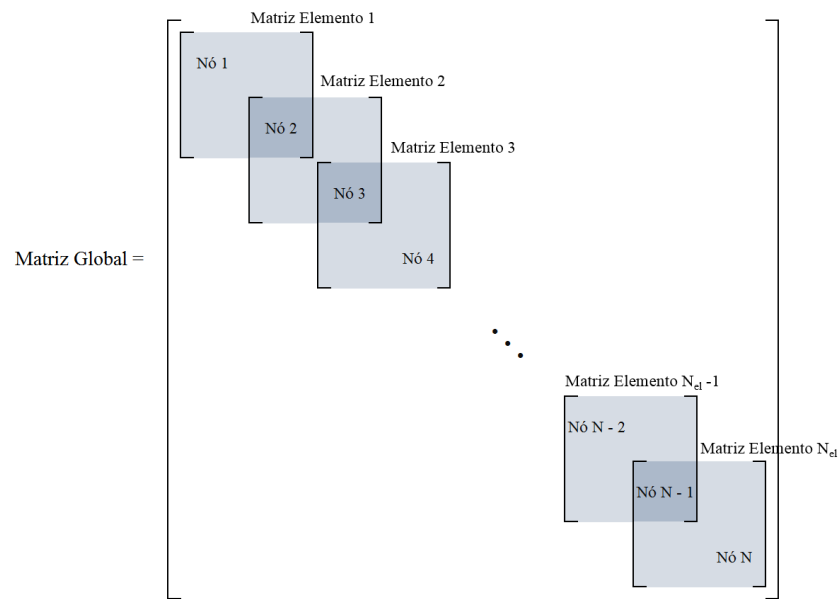


Figura 3.15 Representação da montagem da matriz global do eixo

O disco do modelo considerado no sistema tem apenas inércia, representada pela matriz $[M_D]$, equações (56). Está sujeito, também, ao efeito giroscópico representado pela matriz giroscópica $[G_D]$, equação (57).

$$[M_D] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$G_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Essa montagem é feita a partir das matrizes elementares de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, onde são somadas no nó do disco as matrizes correspondentes, $[M_D]$ e $[G_G]$ resultando, respectivamente, nas matrizes globais $[M_G]$, $[K_G]$, $[C_G]$ e $[G_G]$.

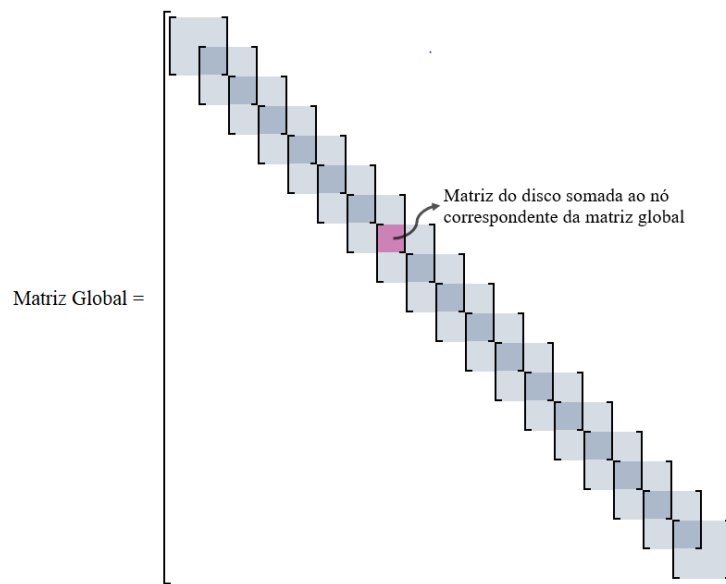


Figura 3.16 Representação da montagem de uma matriz global do eixo com a inclusão do disco.

As forças que atuam no disco são o desbalanceamento rotativo, resultante de uma massa residual desbalanceada, que com o movimento de rotação gera uma força na direção radial entre o centro de rotação do disco (centro geométrico) e o centro de massa do disco. Também são aplicados ao disco forças estáticas nas direções z , F_z , e na direção x , F_a , como mostrado na equação (58).

$$\{F_D\} = \begin{Bmatrix} F_a \\ me\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ me\Omega^2 \sin(\Omega t) - F_z - mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

As forças de reação dos mancais 1 e 2, $\{F_{R1}\}$ e $\{F_{R2}\}$, são representadas nas equações (59), utilizando as equações de (15) a (20), para as direções x, y e z, respectivamente. Sendo que o momento é deixado livre.

$$\{F_{R1}\} = - \begin{Bmatrix} F_{x1} + F_{\dot{x}1} \\ F_{y1} + F_{\dot{y}1} \\ F_{z1} + F_{\dot{z}1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F_{R2}\} = - \begin{Bmatrix} F_{x2} + F_{\dot{x}2} \\ F_{y2} + F_{\dot{y}2} \\ F_{z2} + F_{\dot{z}2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Estas forças são interpretadas como externas ao movimento e organizadas no vetor $\{f_{g1}\}$, figura 3.17, nos seus respectivos nós de atuação.

$$f_{g1} = \begin{bmatrix} [\text{zeros}] \begin{bmatrix} F_{R1} \end{bmatrix}^T & \dots & [\text{zeros}] & \dots & \begin{bmatrix} F_D \end{bmatrix}^T & \dots & [\text{zeros}] & \dots & \begin{bmatrix} F_{R2} \end{bmatrix}^T [\text{zeros}] \end{bmatrix}^T$$

Figura 3.17 Representação do vetor f_{g1} com as forças externas atuantes nos nós dos mancais e do disco.

Neste modelo a massa do eixo não é mais desprezível, então também é considerado um vetor de forças externas com a sua distribuição de peso, $\{f_{g2}\}$, representado na figura 3.18, contendo os vetores com a distribuição do peso por elementos, $\{P_k\}$ (equação (60)).

$$P_k = -\frac{\rho A l_k g}{2} \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (60)$$

$$f_{g2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} P_i \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} P_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_N \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Figura 3.18 Representação do vetor de força global com os pesos dos nós do eixo

O vetor de forças externas, $\{f_g\}$, é a composição dos vetores $\{f_{g1}\}$ e $\{f_{g2}\}$, como mostrado na equação (61).

$$\{f_g\} = \{f_{g1}\} + \{f_{g2}\} \quad (61)$$

O equacionamento do sistema completo é mostrado na equação (62).

$$[M_G]\{\ddot{u}(t)\} + ([C_G] + \Omega[G_G])\{\dot{u}(t)\} + [K_G]\{u(t)\} = \{f_g(t, u, \dot{u})\} \quad (62)$$

Para ser resolvido no tempo, o sistema precisa ser reescrito na forma de espaço de estados, como mostrado na equação (63), e a solução no tempo é realizada valendo-se de um integrador numérico.

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{\ddot{u}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ [M_G]^{-1}([C_G] + \Omega[G_G]) & [M_G]^{-1}[K_G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ [M_G]^{-1}\{f_g\} \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Com os resultados no domínio do tempo, são encontradas as órbitas para os nós de interesse e, então, é feita uma transformada discreta de Fourier para encontrar as frequências fundamentais do sistema.

3.6 Fluxograma

A figura 3.19 apresenta o fluxograma com os principais cálculos, considerações e resultados de cada etapa estudada neste trabalho.

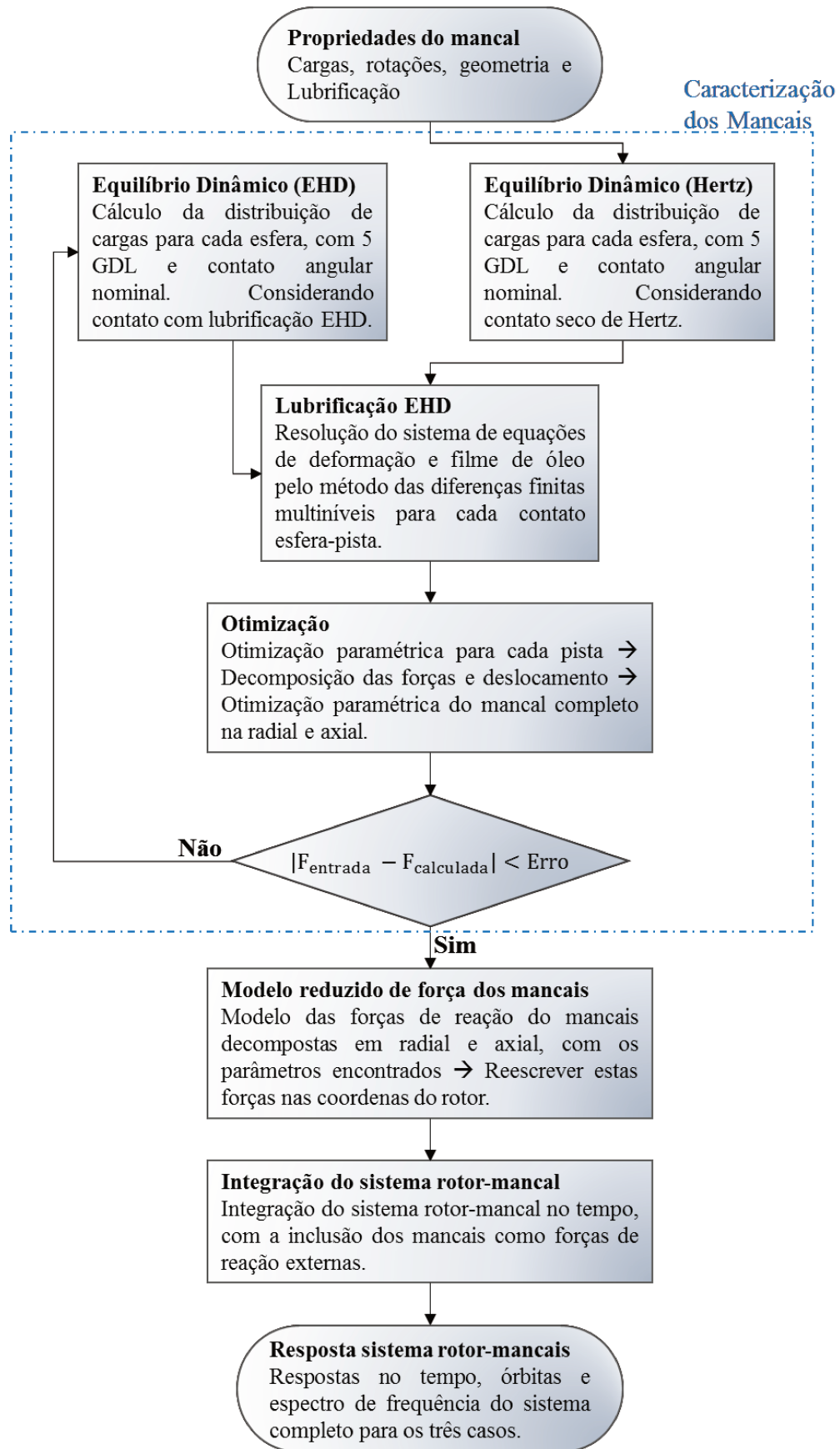


Figura 3.19 Fluxograma da sequência de cálculos e programas

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com a modelagem matemática apresentada no capítulo 3, foram caracterizados mancais para diversas rotações, obedecendo os limites impostos em catálogo. Foram utilizadas duas combinações de cargas, advindas da distribuição do carregamento externo, sendo três carregamentos diferentes para os mancais:

- Caso 1: Parâmetros concentrados e disco centrado entre os mancais.
- Caso 2: Parâmetros concentrados e disco descentrado.
- Caso 3: MEF e disco descentrado.

São aplicadas cargas de 500N na direção x (axial) e na direção z (radial), onde também é atuante o peso próprio do disco de 17 N. As distribuições de carga entre os mancais são apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Níveis de cargas utilizados para caracterização dos mancais					
Carregamento Externo (N)					
Caso 1: Mancal 1 e 2		Caso 2 e 3: Mancal 1		Caso 2 e 3: Mancal 2	
F_{xm}	F_{zm}	F_{xm1}	F_{zm1}	F_{xm2}	F_{zm2}
250	258,5	293	336	207	181

A tabela 4.2 apresenta os valores de rotação utilizados nas simulações, variando de 500 a 15000 RPM.

Tabela 4.2. Variações de rotação para as quais foram caracterizados os mancais						
Rotações (RPM)						
500	700	1000	2000	3000	4000	5000
6000	6800	7000	7478	8000	8580	9000
10000	11000	12000	12540	13000	14000	15000

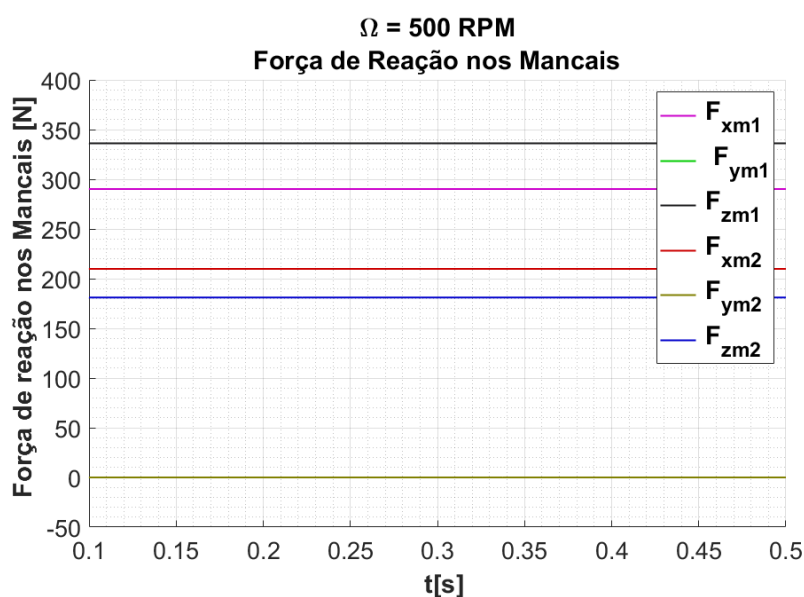
A tabela 4.3 mostra a geometria dos mancais utilizada no presente trabalho, uma vez que este mancal é semelhante ao utilizado no trabalho de Nonato (2013), que validou o modelo de contato EHD com os resultados experimentais de Wijnant (1998). Posteriormente, mancais equivalentes com contato angular tiveram este modelo expandido para cinco graus de liberdade, por Bizarre et al. (2018).

Tabela 4.3 Características Geométricas do Mancal 7006

Características do Mancal 7006		
Z	Número de esferas	11
D	Diâmetro da esfera (mm)	7,0
d_m	Diâmetro primitivo (mm)	42,5
-	Osculação da pista interna (%)	102,6
-	Osculação da pista externa (%)	108,6
P_d	Folga diametral (mm)	0
α	Contato angular nominal(°)	15

Como o caso 1 refere-se ao disco equidistante aos mancais, é conhecido que a distribuição de carga em cada mancal, nesta situação, será a mesma, dada a simetria. Para os casos 2 e 3, porém, não é tão simples. Uma vez que a elasticidade do rotor e a força restitutiva no mancal são aproximadas a molas em série para o sistema completo, não é possível saber inicialmente qual será a distribuição de força em cada um dos mancais. Sendo assim, como aproximação inicial, é feita a distribuição estática de carga apenas para o eixo. Em seguida, caracteriza-se o mancal para esta carga a uma determinada velocidade de rotação.

Encontrados os parâmetros de força aproximados, o rotor é simulado no tempo e a carga estática é encontrada. Analisando a resposta no tempo para diversas velocidades, verifica-se que esta distribuição se mantém praticamente constante ao longo de uma extensa faixa de velocidades, sendo possível otimizar os parâmetros do mancal para uma mesma distribuição de carga, conforme figura 4.1.



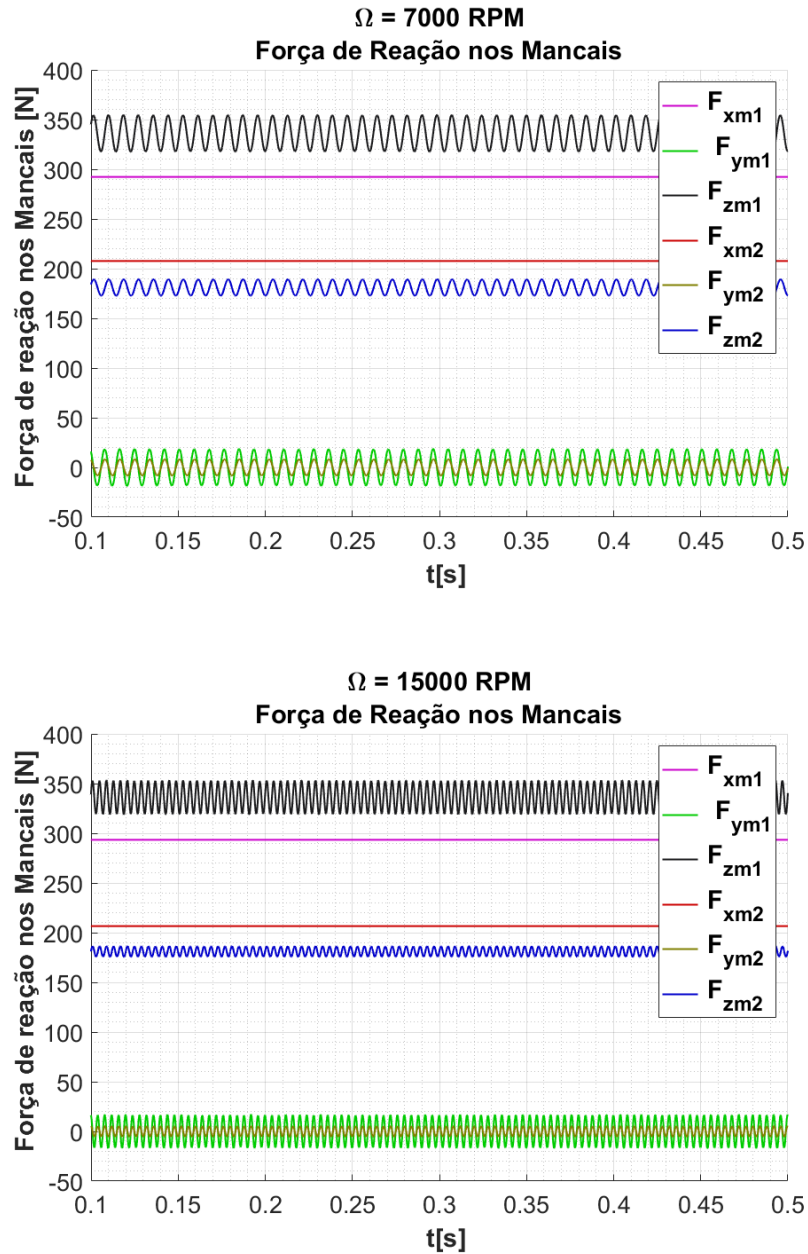


Figura 4.1 Força de reação nos mancais do caso 2, para três níveis de velocidade de rotação, 500, 7000 e 15000 RPM

4.1 Forças não lineares

Na figura 4.2 é possível ver a curva para os ângulos de contato, interno e externo, variando com a velocidade de rotação, evidenciando uma maior diferença entre os ângulos internos e externos de cada esfera. É notória a necessidade de decomposição das forças de contato em radiais e axiais. Principalmente com o aumento de velocidade de rotação, quando as esferas

menos carregadas apresentam maior variação do seu ângulo de contato, devido a maior participação da força de inércia e do momento giroscópico no balanço de forças para estas esferas.

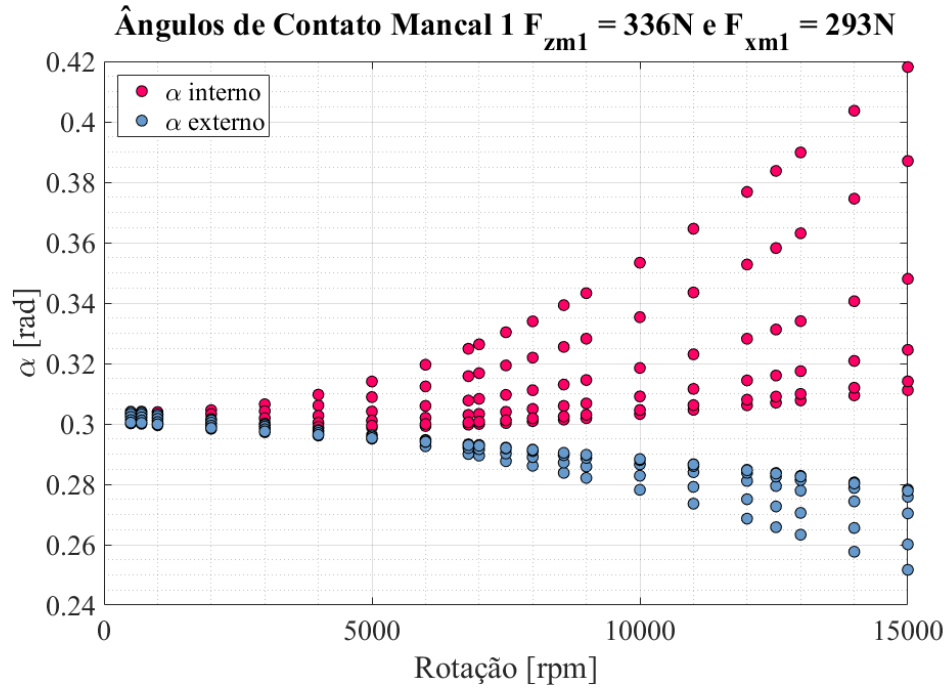


Figura 4.2 Distribuição dos ângulos de contato para cada esfera, nos anéis interno e externo, para todas as rotações simuladas. (mancal 1 casos 2 e 3).

Para os três níveis de carregamento e para as todas as velocidades apresentadas nas tabelas 4.1 e 4.2, foi feita a caracterização do mancal. Os parâmetros de força de restituição, K (rigidez equivalente), d (expoente do deslocamento) e ΔF (força de sustentação), são apresentados nos gráficos da figura 4.3, para as direções axial e radial.

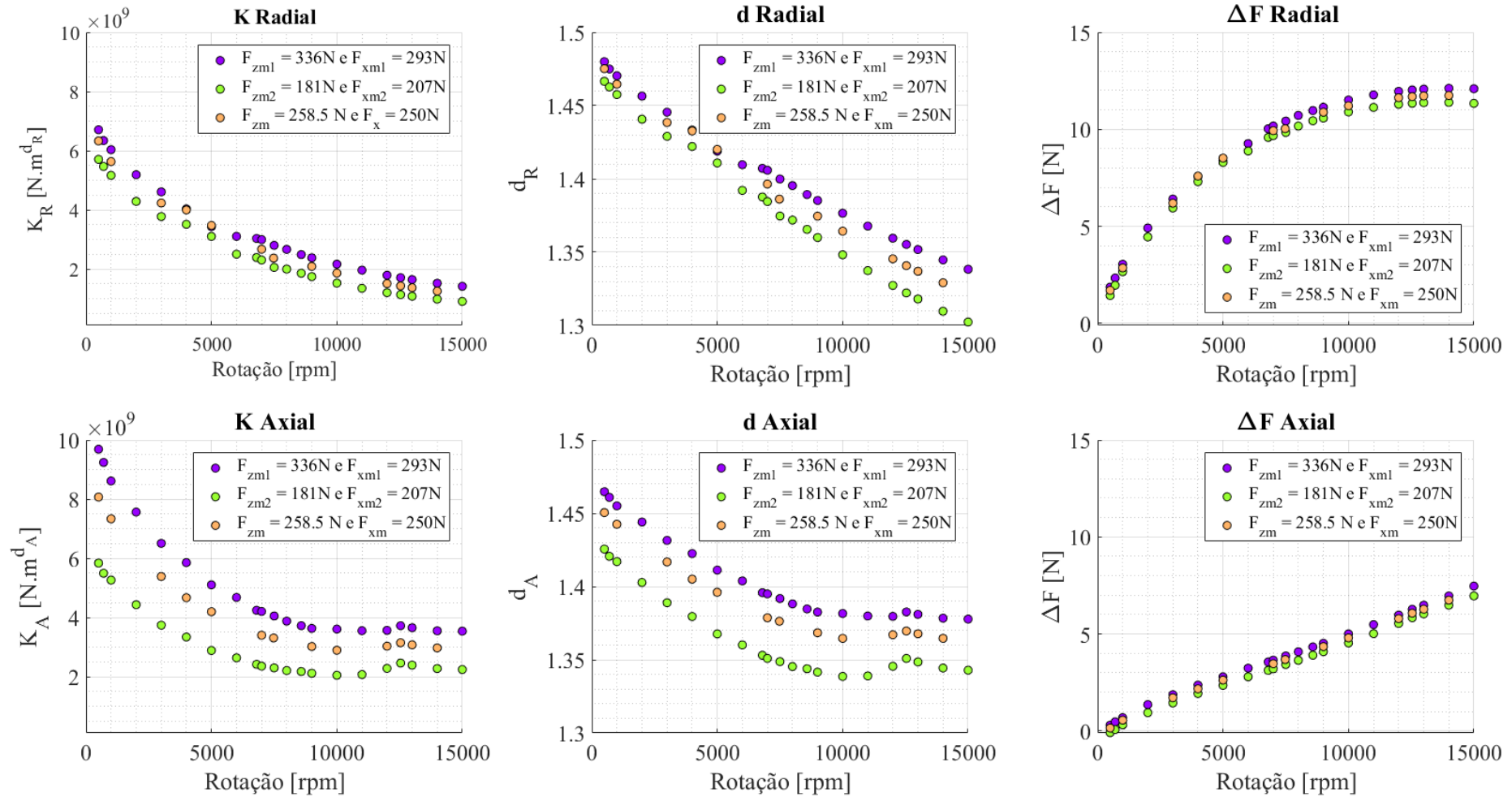


Figura 4.3 Parâmetros equivalentes de força de restituição, K_R , d_R e ΔF_R , direção radial e K_A , d_A e ΔF_A , direção axial.

Enquanto a rigidez equivalente e o expoente tem valor mais baixo com o aumento da velocidade de rotação, o ΔF aumenta devido ao crescente efeito hidrodinâmico do filme de óleo, resultando em uma força de sustentação.

Nota-se também que, para combinação de cargas mais baixas, obtém-se parâmetros de rigidez e expoente de deslocamento menores. Também podemos inferir dos gráficos da figura 4.3 que a variação de carga é mais influente para os parâmetros na direção axial, principalmente para K e d , enquanto ΔF apresenta curvas muito próximas para as distribuições de carga utilizadas.

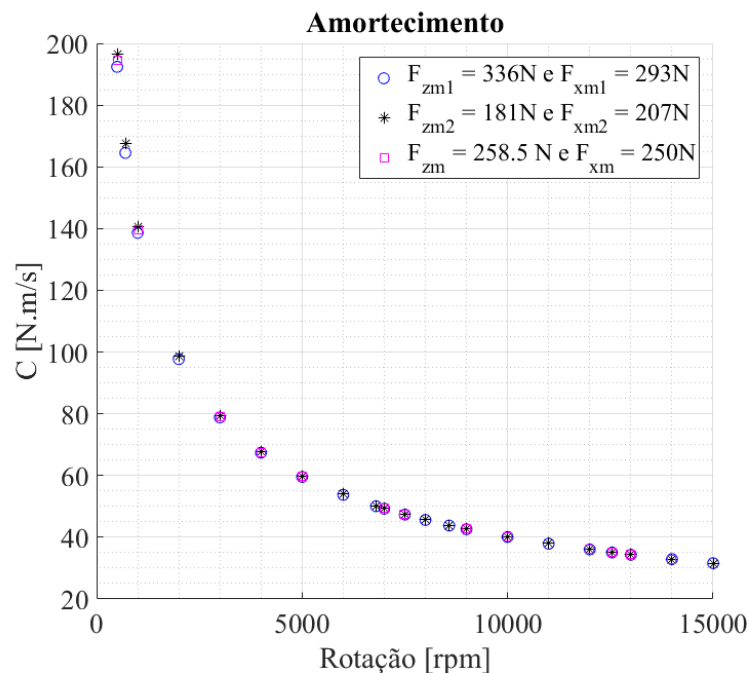


Figura 4.4 Amortecimento equivalente para as três combinações de carga

O amortecimento total por mancal é apresentado na figura 4.4. Pouco se altera com a variação de carga, tendo uma queda acentuada com o aumento da velocidade de rotação, mostrando que o comportamento da dissipação de energia está intrinsicamente ligado à velocidade tangencial relativa entre os corpos.

São calculados, para efeito de comparação, os parâmetros para o mancal, considerando contato seco de Hertz, equação (64). Para tanto, é feito o ajuste de deslocamento e força, para cada contato, resultante da simulação dinâmica de 5 graus de liberdade para o mancal. Encontra-se, então, um valor de K_H , rigidez equivalente no contato seco, para o mancal completo, dada as condições de carregamento e velocidade de rotação.

$$Q_H = K_H \delta^{1.5} \quad (64)$$

4.2 Caso 1: Parâmetros Concentrados e Disco Centrado

Para o caso 1, rotor Laval modelado por parâmetros concentrados, as características geométricas e operacionais são apresentadas na tabela 4.4.

Tabela 4.4 Características operacionais e geométricas do rotor Laval centrado		
Características do Rotor Caso 1		
l	Comprimento do eixo (m)	0,2790
m	Massa do disco (kg)	1,7478
E	Modulo de elasticidade (Pa)	210×10^9
I	Momento de inércia de área (m ⁴)	$2,3234 \times 10^{-9}$
A	Área da seção transversal do eixo (m ²)	$1,7087 \times 10^{-4}$
β	Coefficiente do amortecimento proporcional	$2,0 \times 10^{-4}$
F_a	Força externa aplicada no disco (N), direção x	500
F_{est}	Força externa aplicada no disco (N), direção z	500
e	Excentricidade da massa desbalanceada (m)	$1,0 \times 10^{-5}$

Foram simuladas três condições de velocidade, 5000, 7478 e 10000 RPM, sendo 7478 RPM a frequência natural do sistema com mancal rígido (rotor biapoado). Os parâmetros das forças de reação encontradas para uma carga de 250 N na direção z e 258 N na direção x , axial, são mostradas nas tabelas 4.5 para EHD e tabela 4.6 para contato seco de Hertz.

Tabela 4.5 Coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes para as forças de reação do mancal com modelo de lubrificação EHD para três velocidades de rotação distintas 5000, 7478 e 10000 rpm.

Rotação [rpm]	K_R [N/m ^{dR}]	d_R []	ΔF_R [N]	K_A [N/m ^{dA}]	d_A []	ΔF_A [N]	C [N/s ²]
5000	$3,47 \times 10^9$	1,42	8,52	$4,20 \times 10^9$	1,39	2,62	5,44
7478	$2,37 \times 10^9$	1,38	10,03	$3,31 \times 10^9$	1,37	3,68	4,32
10000	$1,86 \times 10^9$	1,36	11,21	$2,89 \times 10^9$	1,36	4,80	3,64

Tabela 4.6 Coeficientes de rigidez equivalente para as forças de reação do mancal com modelo de contato seco de Hertz, para três velocidades de rotação distintas 5000, 7478 e 10000 rpm.

Rotação [rpm]	5000	7478	12000
K_{HR} [N/m ^{dR}]	$8,33 \times 10^9$	$8,23 \times 10^9$	$8,09 \times 10^9$
K_{HA} [N/m ^{dR}]	$1,52 \times 10^{10}$	$1,52 \times 10^{10}$	$1,53 \times 10^{10}$

Para este caso, as órbitas em três condições distintas de velocidade de rotação do eixo, figura 4.5, mostram o comparativo entre os modelos de contato com lubrificação EHD e o modelo de contato seco de Hertz. A maior amplitude apresentada nesta figura é para uma rotação de 7478 rpm (124.63 Hz, aproximadamente), que é exatamente a frequência natural calculada.

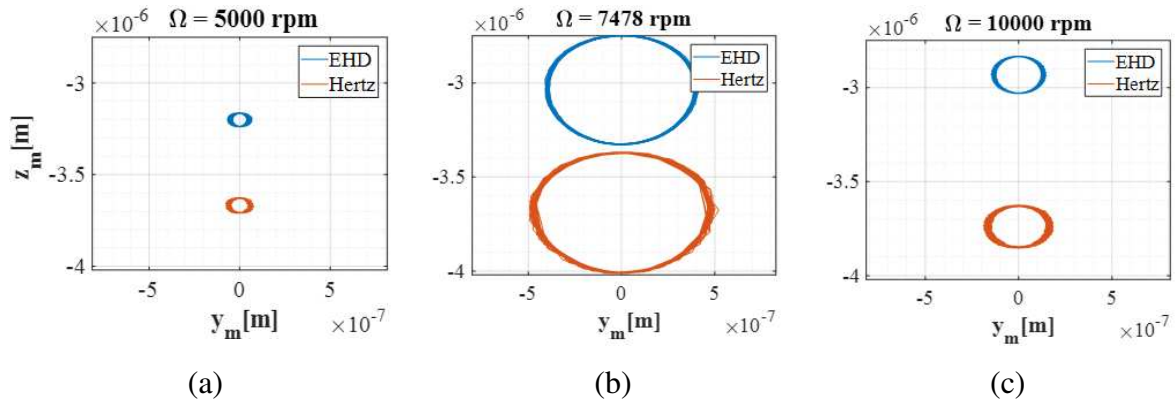
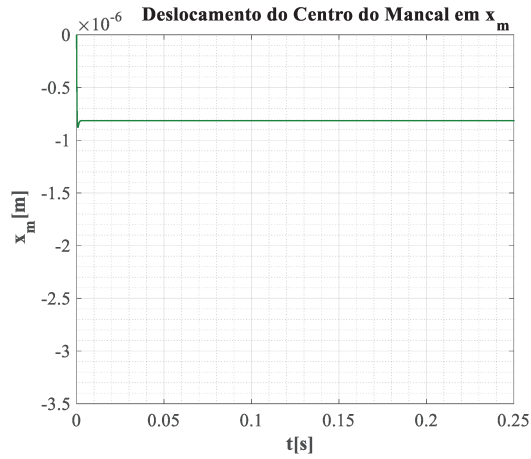


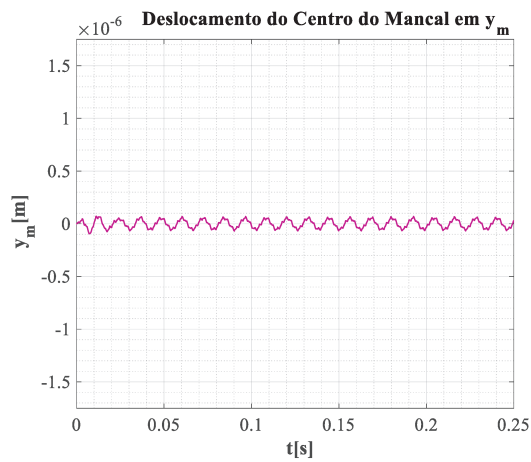
Figura 4.5. Órbitas do centro do eixo para os casos EHD e Hertz para três velocidades de rotação, (a) 5000 RPM, (b) 7478 RPM (frequência natural) e (c) 10000 RPM

Nota-se que as órbitas têm formato semelhante à mesma velocidade, sendo mais evidente a diferença de amplitude para 7478 e 10000 rpm, quando a resposta do contato seco é sutilmente maior que a resposta EHD.

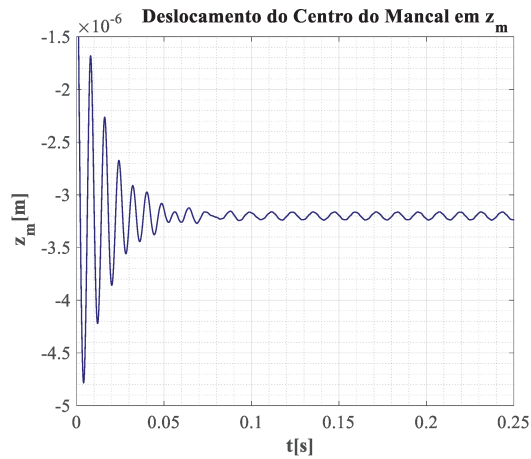
A órbita da resposta EHD é mais centrada em relação ao mancal que a resposta com contato seco, para as três velocidades, o que está relacionado aos termos ΔF_R da força de reação do mancal, que representam a sustentação do filme de óleo considerada neste modelo.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6 Resposta no tempo do deslocamento do mancal utilizando o modelo EHD em velocidade de operação de 5000 rpm, nas direções (a) x , axial, (b) y , radial horizontal e (c) z , radial vertical.

A Figura 4.6 a representa o deslocamento no grau de liberdade x_m , que não está sujeito a forças oscilatórias, e portanto, com resposta constante em regime permanente. A figura 4.6 (b) apresenta a amplitude de oscilação do mancal em y_m , na qual é possível ver a sobreposição das harmônicas devido ao mancal de rolamento com a resposta do rotor. Efeito este não mais

expressivo em z_m , com acentuada resposta transiente, que apresenta o efeito das harmônicas do mancal suavizado. Nesta direção, porém, a força externa é uma sobreposição de força estática, peso próprio do disco, e força dinâmica devido ao desbalanceamento.

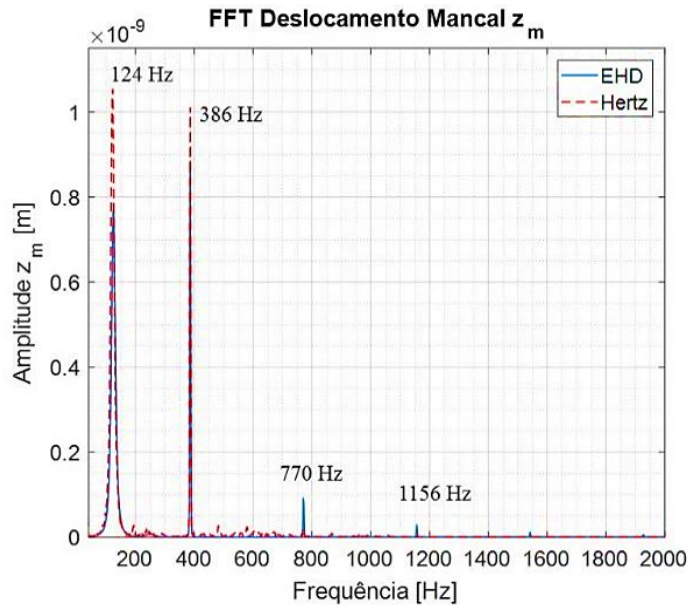


Figura 4.7 Espectro de frequência para o Rotor Laval em velocidade de operação de 5000 rpm.

O espectro de frequências, empregando a resposta no tempo na direção z_m , é apresentado na figura 4.7. Foi utilizado o sinal completo, uma vez que esta possui um transiente mais relevante que as outras respostas, possibilitando a visualização da frequência natural do sistema em 124,63 Hz, o primeiro pico encontrado no espectro.

Os picos de 386 Hz, 770 Hz e 1156 Hz são, respectivamente, a primeira, segunda e terceira harmônica da BPFO (*Ball passing frequency in the outer race*), ou ainda, da frequência de passagem da esfera pela pista externa do mancal, representada pela equação (65).

$$BPFO = \frac{Z \cdot \Omega}{2} \left(1 - \frac{D}{d_m} \cos(\alpha) \right) \quad (65)$$

Verifica-se, também, na figura 4.7 a diferença da amplitude de resposta do contato seco, modelo de Hertz, em comparação com a resposta do mancal sob regime EHD, sendo esta segunda mais amortecida e com menor pico para as primeiras frequências.

4.3 Caso 2: Parâmetros Concentrados e Disco Descentrado

São apresentadas, na tabela 4.7, as características geométricas e de operação para o rotor do caso 2, modelado por parâmetros concentrados, com disco descentrado.

Tabela 4.7. Características geométricas e de operação do rotor (caso 2)

	Descrição	Valor
l	Distância entre mancais (m)	0,2790
a	Distância entre o mancal 1 e o disco (m)	$8,37 \times 10^{-2}$
m	Massa do disco (kg)	1,7478
E	Módulo de elasticidade do eixo (Pa)	210×10^9
I	Momento de inércia de área do eixo (m ⁴)	$2,3235 \times 10^{-9}$
I_d	Momento de inércia diametral do disco (m ⁴)	$6,2 \times 10^{-3}$
I_p	Momento de inércia polar do disco (m ⁴)	$1,23 \times 10^{-2}$
A	Área da seção transversal do eixo (m ²)	$6,8349 \times 10^{-4}$
β	Coeficiente de amortecimento proporcional	$2,0 \times 10^{-4}$
F_a	Carga aplicada (N), direção x	500
F_{est}	Carga aplicada (N), direção z	500
ε	Excentricidade da massa do disco (m)	$1,0 \times 10^{-5}$

Os dados resultantes da caracterização do rolamento são apresentados nas tabelas 4.8 e 4.9, divididos em parâmetros equivalentes axiais e radiais.

Tabela 4.8 Parâmetros equivalentes EHD para o mancal 1.

Rotação, rpm	K_{R1} , N/m ^{dR1}	d_{R1}	ΔF_{R1} , N	K_{A1} , N/m ^{dA1}	d_{A1}	ΔF_{A1} , N	C_1 , N/s ²
500	$6,71 \times 10^9$	1,48	1,87	$9,69 \times 10^9$	1,46	0,31	17,80
2000	$5,19 \times 10^9$	1,46	4,91	$7,56 \times 10^9$	1,44	1,36	8,95
4000	$4,04 \times 10^9$	1,43	7,55	$5,86 \times 10^9$	1,42	2,37	6,15
6000	$3,11 \times 10^9$	1,41	9,27	$4,68 \times 10^9$	1,40	3,24	4,90
8580	$2,49 \times 10^9$	1,39	10,97	$3,72 \times 10^9$	1,38	4,33	3,99
13000	$1,65 \times 10^9$	1,35	12,07	$3,65 \times 10^9$	1,38	6,48	3,11

Tabela 4.9 Parâmetros equivalentes EHD para o mancal 2.

Rotação, rpm	K_{R2} , N/m ^{dR2}	d_{R2}	ΔF_{R2} , N	K_{A2} , N/m ^{dA2}	d_{A2}	ΔF_{A2} , N	C_2 , N/s ²
500	$5,71 \times 10^9$	1,47	1,44	$5,84 \times 10^9$	1,43	-0,09	18,06
2000	$4,29 \times 10^9$	1,44	4,45	$4,43 \times 10^9$	1,40	0,94	9,00
4000	$3,52 \times 10^9$	1,42	7,30	$3,33 \times 10^9$	1,38	1,93	6,18
6000	$2,51 \times 10^9$	1,39	8,88	$2,64 \times 10^9$	1,36	2,80	4,91
8580	$1,86 \times 10^9$	1,37	10,44	$2,18 \times 10^9$	1,34	3,91	3,99
13000	$1,08 \times 10^9$	1,32	11,37	$2,39 \times 10^9$	1,35	6,04	3,10

A mesma distribuição da carga foi usada para calcular os dados na Tabela 4.10, usando a formulação para contato seco (Hertz).

Tabela 4.10 Parâmetros de rigidez equivalente para o contato seco de Hertz.

Rotação, rpm	500	2000	4000	6000	8580	13000
K_{HR1} , N/m ^{3/2}	$8,42 \times 10^9$	$8,41 \times 10^9$	$8,38 \times 10^9$	$8,32 \times 10^9$	$8,22 \times 10^9$	$7,97 \times 10^9$
K_{HA1} , N/m ^{3/2}	$1,51 \times 10^{10}$	$1,51 \times 10^{10}$	$1,51 \times 10^{10}$	$1,51 \times 10^{10}$	$1,51 \times 10^{10}$	$1,52 \times 10^{10}$
K_{HR2} , N/m ^{3/2}	$8,41 \times 10^9$	$8,39 \times 10^9$	$8,35 \times 10^9$	$8,27 \times 10^9$	$8,12 \times 10^9$	$7,72 \times 10^9$
K_{HA2} , N/m ^{3/2}	$1,52 \times 10^{10}$	$1,52 \times 10^{10}$	$1,52 \times 10^{10}$	$1,53 \times 10^{10}$	$1,53 \times 10^{10}$	$1,55 \times 10^{10}$

Observa-se facilmente que os parâmetros encontrados utilizando o modelo reduzido EHD variam significativamente com a velocidade de rotação, enquanto os parâmetros para o contato seco hertziano são mais rígidos e praticamente constantes em relação à velocidade de rotação.

O Diagrama Campbell, apresentado na figura 4.8, baseou-se em um rotor biapoado para determinar as velocidades críticas do rotor: 144 Hz (direta) e 115 Hz e 209 Hz (retrogradadas). O movimento de precessão direta de um rotor ocorre quando a sua órbita gira no mesmo sentido da rotação do eixo (*forward whirl*); por outro lado, a precessão retrógrada (*backward whirl*) é quando a órbita gira no sentido contrário.

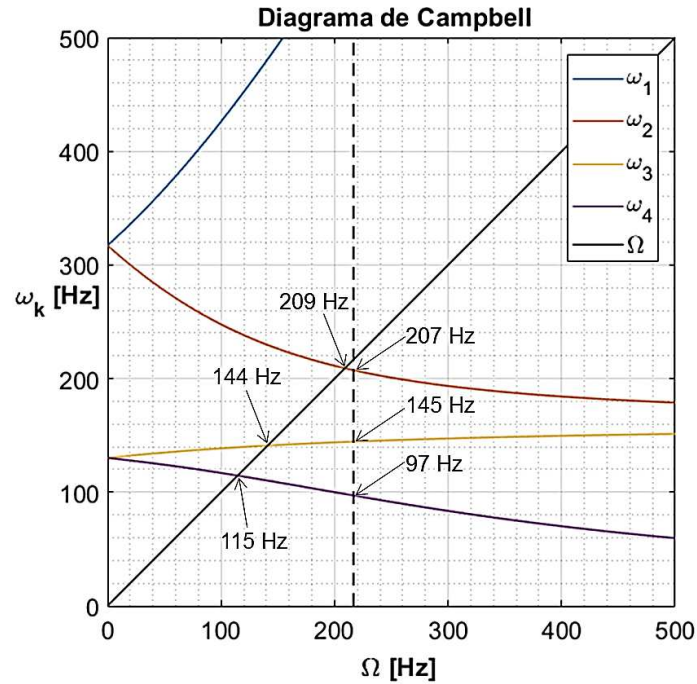


Figura 4.8 Diagrama de Campbell para o caso 2

A resposta completa do sistema no tempo é realizada assumindo uma condição inicial nula para todas as variáveis de posição e velocidade. A figura 4.9 mostra a resposta transiente e permanente para o disco com cinco graus de liberdade ($y, z, x, \gamma_y, \gamma_z$) e os rolamentos 1 e 2 (y_{m1}, z_{m1}, x_{m1} e y_{m2}, z_{m2}, x_{m2}) respectivamente a uma velocidade de rotação de 8580 rpm (velocidade crítica, 144 Hz).

Verifica-se que a amplitude de oscilação no rolamento 1 é maior que o rolamento 2 devido ao nível de carga estática. No disco, a parte transiente é mais expressiva na direção z devido às condições iniciais e à força estática nessa direção.

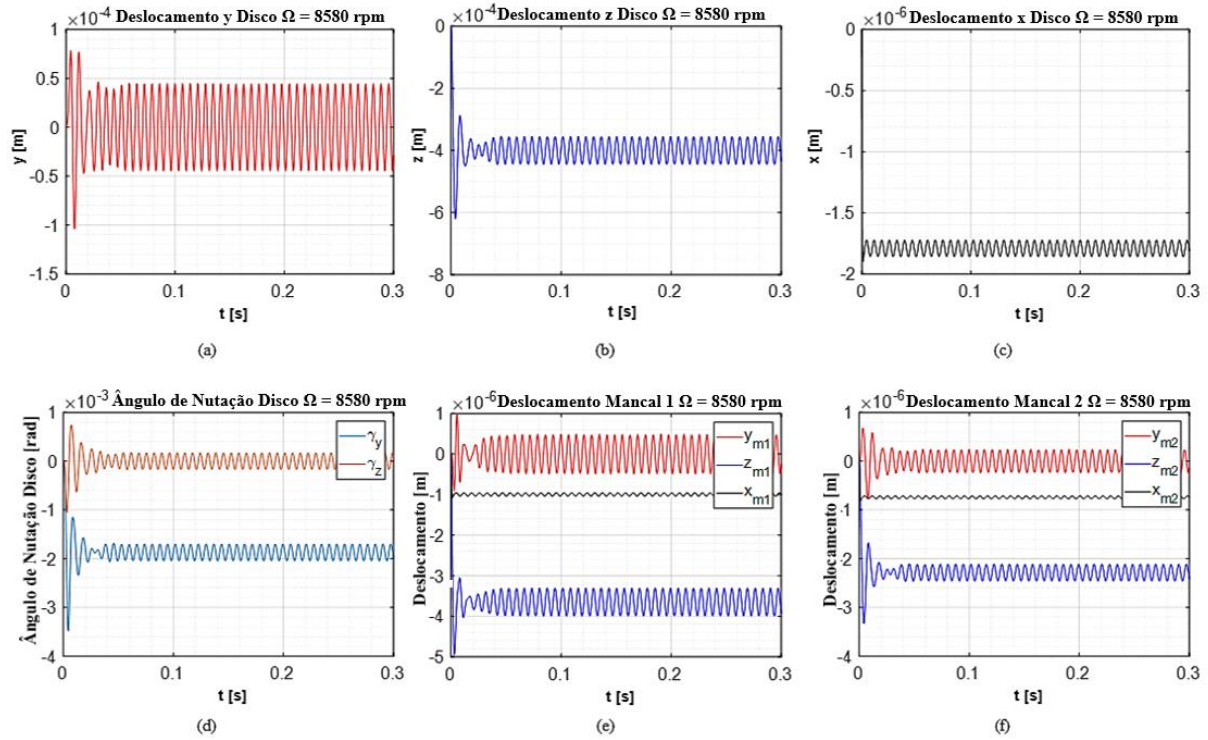


Figura 4.9 Deslocamento do disco (a) y - horizontal, (b) z - vertical, (c) x – axial e (d) Nutação em torno do eixo z (γ_z) e y (γ_y) e deslocamento do eixo (e) mancal 1, y_{m1} z_{m1} x_{m1} e (f) mancal 2,

$$y_{m2} \ z_{m2} \ x_{m2}.$$

Com o intuito de facilitar comparações, montou-se a tabela 4.11 contendo as informações de carga, amplitude pico-a-pico e valor médio para os gráficos da figura 4.9, obtidos desconsiderando o período transiente inicial.

Tabela 4.11 Carga, amplitude e valor médio relacionados aos gráficos apresentados na figura 4.9, após transiente inicial.

	GDL	Carga, N	Amplitude, m	Centro, m
(a)	y	0	$8,96 \times 10^{-5}$	0
(b)	z	517	$8,96 \times 10^{-5}$	$-4,00 \times 10^{-4}$
(c)	x	500	$1,37 \times 10^{-7}$	$-1,79 \times 10^{-6}$
	y_{m1}	0	$9,91 \times 10^{-7}$	0
(e)	z_{m1}	336	$6,95 \times 10^{-7}$	$-3,65 \times 10^{-6}$
	x_{m1}	292	$8,01 \times 10^{-8}$	$-9,94 \times 10^{-7}$
	y_{m2}	0	$4,88 \times 10^{-7}$	0
(f)	z_{m2}	181	$3,47 \times 10^{-7}$	$-2,29 \times 10^{-6}$
	x_{m2}	208	$5,90 \times 10^{-8}$	$-7,41 \times 10^{-7}$

A órbita do centro disco, para seis diferentes velocidades de rotação do eixo, é mostrada na figura 4.10, comparando os resultados com o sistema equivalente modelado com rolamentos de contato seco.

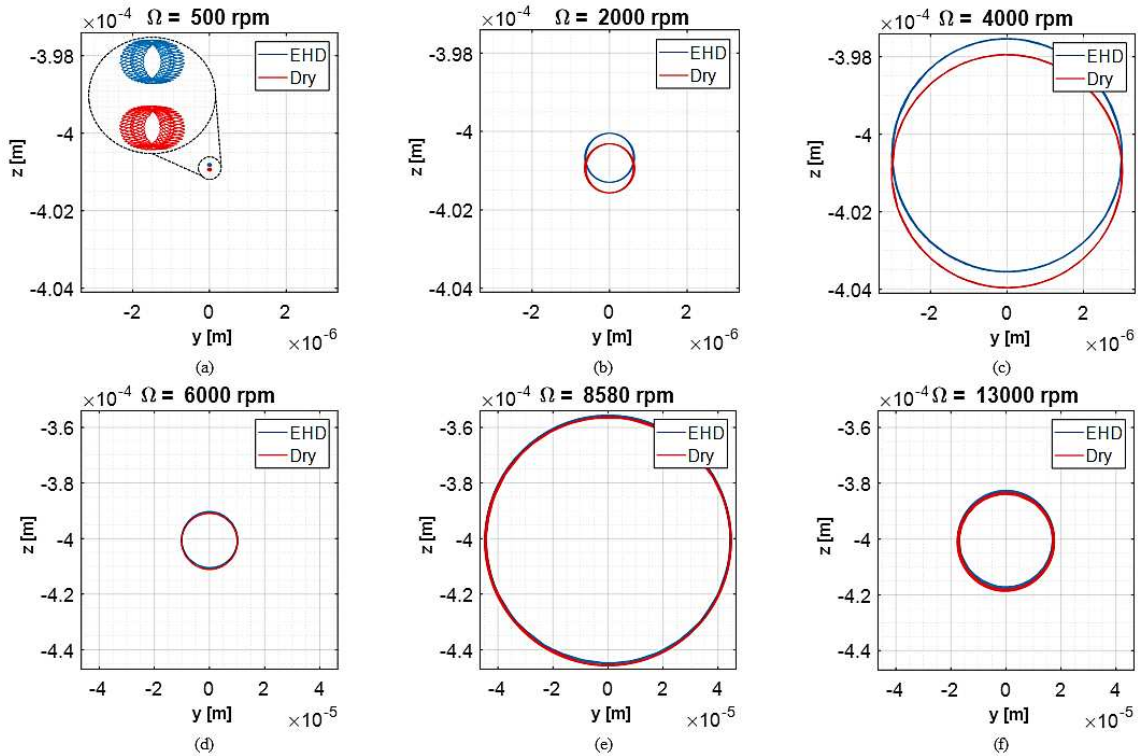


Figura 4.10 Órbita de disco, considerando contato seco e lubrificado (EHD), com velocidades de rotação que variam de 500 RPM a 13000 RPM, dimensões em [m].

A velocidade de 8580 rpm é a velocidade crítica do sistema, portanto, a maior amplitude da resposta é observada. As órbitas dos discos para ambos os casos são semelhantes e, à medida que a velocidade aumenta, torna-se menos perceptível a distância entre seus centros.

Ao contrário do disco, as órbitas dos mancais, figura 4.11, têm uma variação de formato acentuada, dependente da velocidade de rotação, porém similares entre EHD e contato seco, com formato achatado em velocidades mais baixas. A distância entre o centro da órbita do caso EHD e o caso Hertz aumenta à medida que a velocidade de rotação também aumenta com a rotação, o que pode ser justificado pela presença do termo ΔF , pois assim como no caso 1, este termo está relacionado à sustentação hidrodinâmica do filme de óleo.

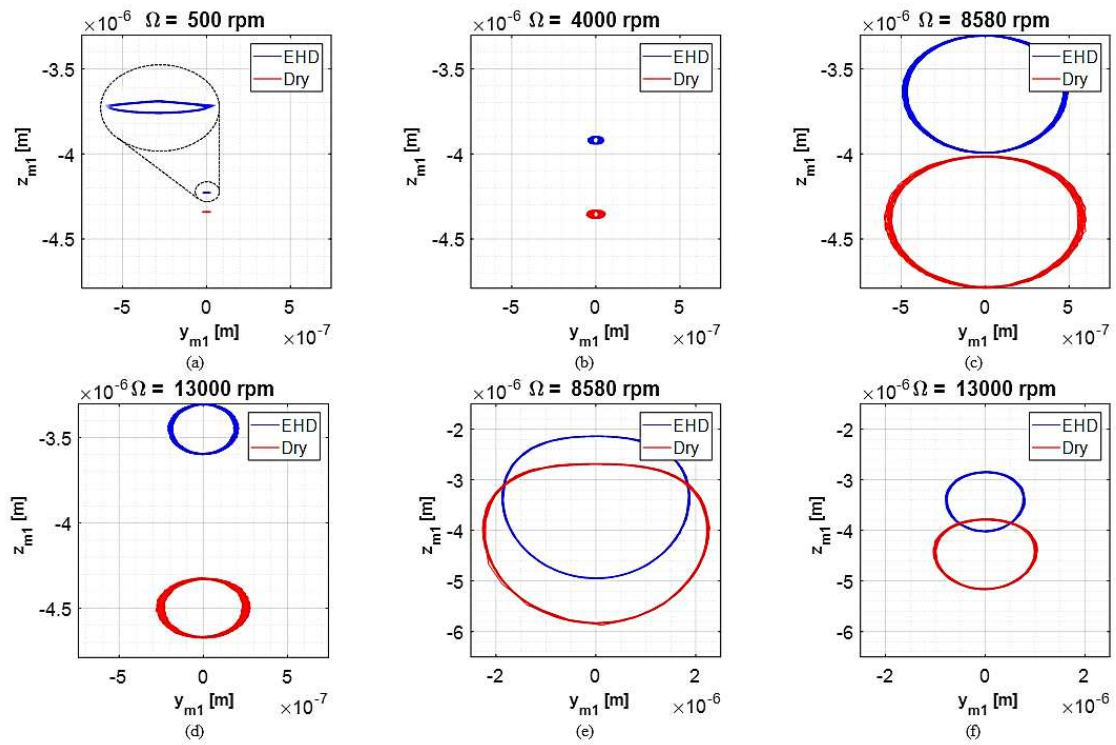


Figura 4.11 Órbita do Mancal 1 considerando modelos de contato seco e lubrificado com velocidades de rotação variando de 500 RPM a 13000 RPM, dimensões em [m]. De (a) a (d), a excentricidade de massa é $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ m e em (e) e (f) é $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-5}$ m

Observando a figura 4.12, vê-se que com o aumento da velocidade de rotação, a posição de equilíbrio do rolamento para o modelo EHD (quadrados e asteriscos) sobe em direção ao centro do mancal, como observado em Nonato e Cavalca (2014), devido ao filme de óleo mais espesso, figura 4.13. (a) a (d).

É perceptível na Figura 4.11 (a), a posição central para 8580 rpm para $\varepsilon = 4 \times 10^{-5}$ m (asteriscos - EHD e estrelas - Hertz) são superiores à simulação com $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ m (quadrados - EHD e esferas - Hertz), devido à forma da órbita, como pode ser visto comparando a figura 4.11 (c) e (e).

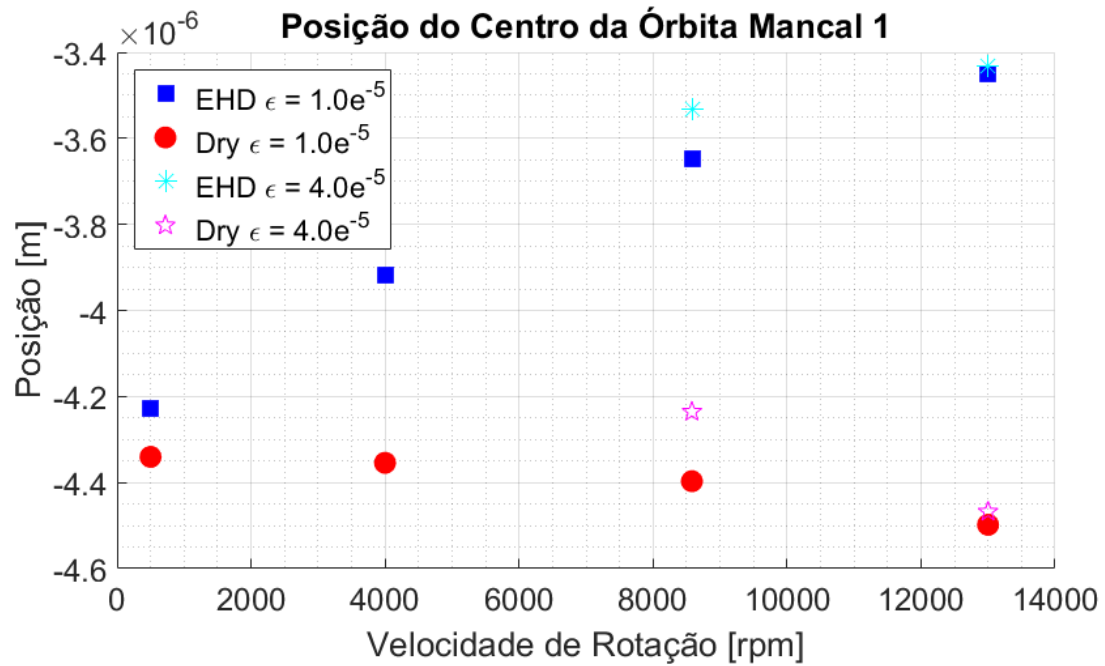
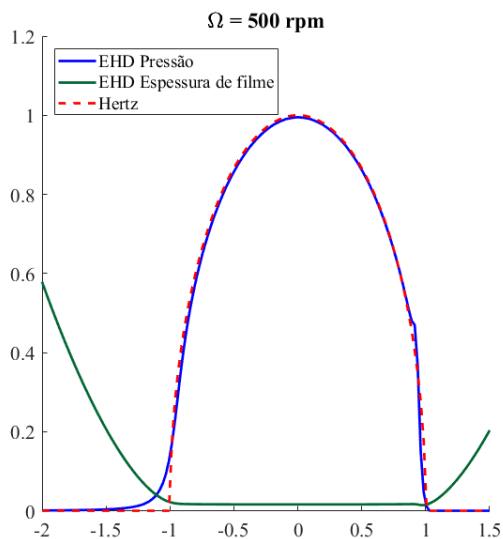
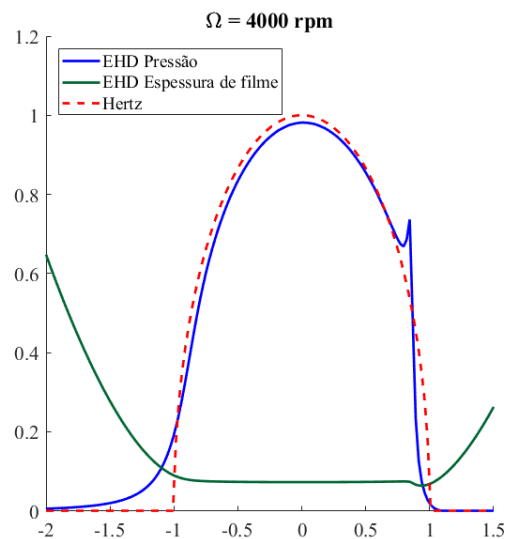


Figura 4.12 Posição central da órbita do rolamento 1 para o caso seco e em lubrificação EHD, variando a excentricidade da massa do disco, ϵ



(a)



(b)

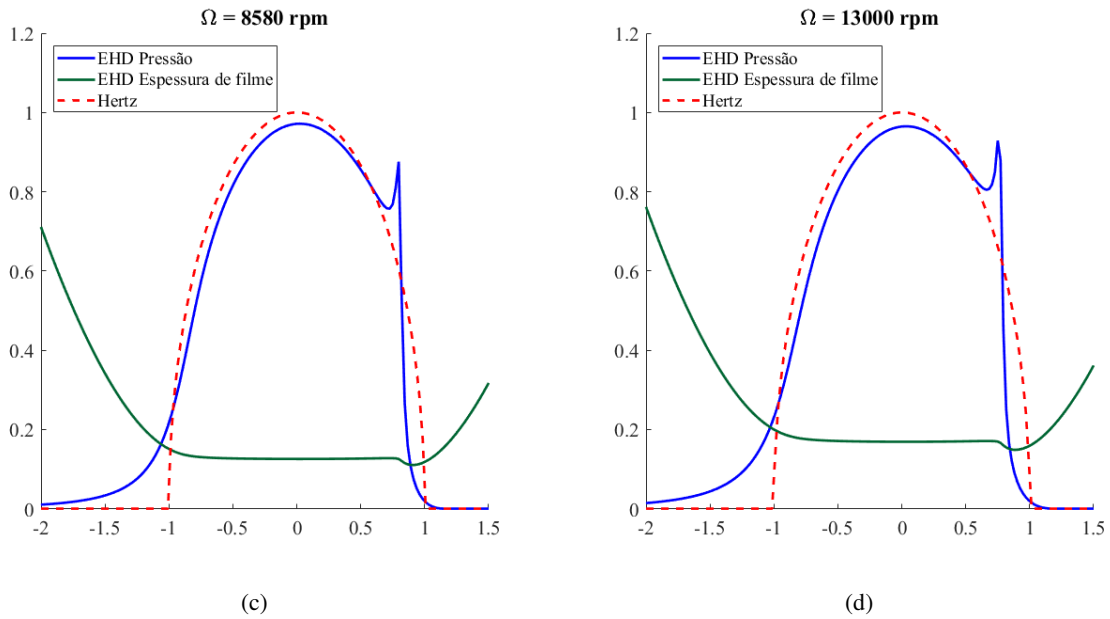


Figura 4.13 Perfil de pressão adimensional no contato interno, para EHD e contato seco, e espessura do filme de óleo para a esfera mais carregada, em velocidades de rotação de 500, 4000, 8580 e 13000 rpm, respectivamente.

A figura 4.13 ilustra a diferença entre os perfis adimensionais de pressão (EHD e Hertz) para o contato interno da esfera mais carregada do mancal 1 para as mesmas rotações apresentadas na figura 4.12. Fica claro que, quanto mais baixa a velocidade do conjunto, o perfil de pressão do contato EHD mais se aproximam do perfil do contato seco de Hertz, e a espessura adimensional do filme de óleo diminui. O que também pode ser observada nas tabelas 4.8 e 4.9, para os pontos de menor velocidade, mais próximo de 1,5 está o coeficiente d e o ΔF torna-se praticamente nulo.

A figura 4.14 (a) mostra o espectro de frequência de aceleração do disco, onde se pode observar as três componentes de frequências naturais, 96 Hz, 144 Hz e 208 Hz, nos casos EHD e seco, para uma frequência de rotação de 216 Hz (linha pontilhada na figura 4.8). As três primeiras harmônicas da BPFO do mancal são detectadas apenas para o contato EHD.

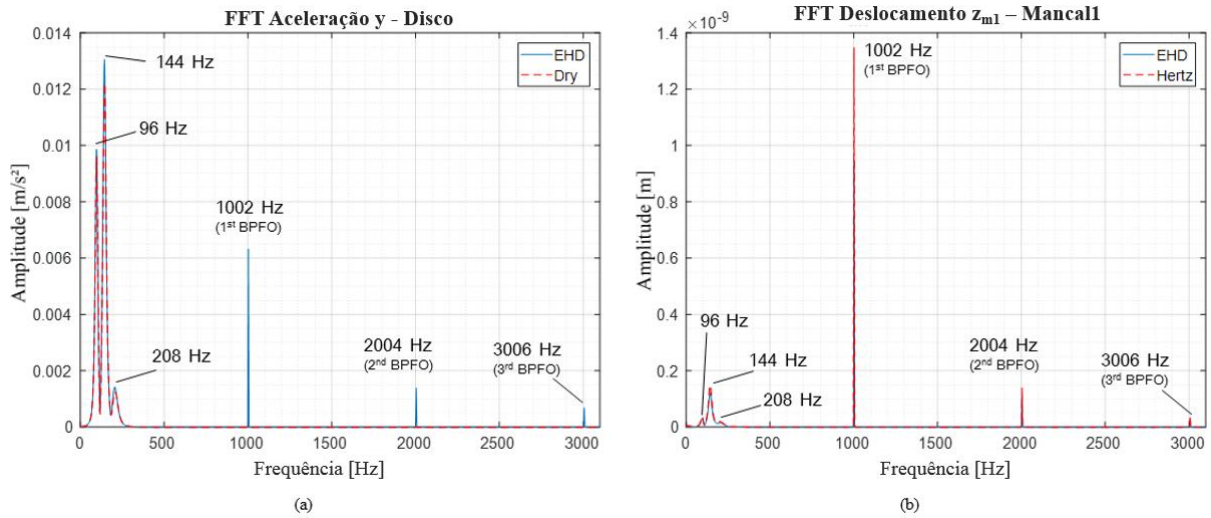


Figura 4.14 Espectro de frequência para um disco balanceado, $\varepsilon = 0$, com velocidade de rotação de 13000 RPM (216 Hz). (a) Aceleração do disco, direção y (b) deslocamento do manca1, direção z_{m1}

A figura 4.14 (b) apresenta o espectro de frequências para o deslocamento na direção z_{m1} . Os picos de frequência natural são menos expressivos quando comparados com a figura 4.14 (a), porém as frequências do manca1, BPFOs, são consideravelmente mais influentes, mostrando uma amplitude maior para o caso de Hertz.

4.4 Caso 3: Rotor por Elementos Finitos

O terceiro caso de estudo é a aplicação dos mancais de rolamento em modelo de rotor por elementos finitos, como mostrado na figura 4.15.

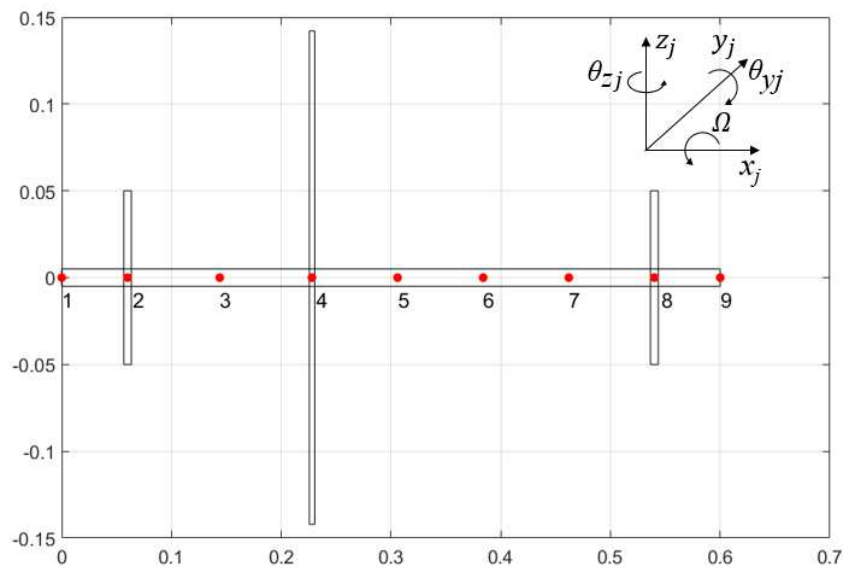


Figura 4.15 Configuração do rotor modelado por elementos finitos (caso 3)

Novamente, para avaliar as frequências naturais do sistema, o diagrama de Campbell é apresentado na figura 4.16, na qual é possível identificar várias curvas, relativas as diversas frequências naturais que surgem com a discretização em vários elementos e, conseqüentemente, vários graus de liberdade.

Porém, são apenas significativas as três curvas que são interceptadas pela reta de rotação do sistema, indicando as três frequências críticas do sistema, 26 Hz, 29 Hz e 56 Hz. Nota-se que para este caso foi escolhido um rotor com baixas frequências naturais, ou seja, o eixo modelado é bem mais flexível que nos casos anteriores, de modo a observar formas específicas de órbitas descritas na literatura, Aini (1990).

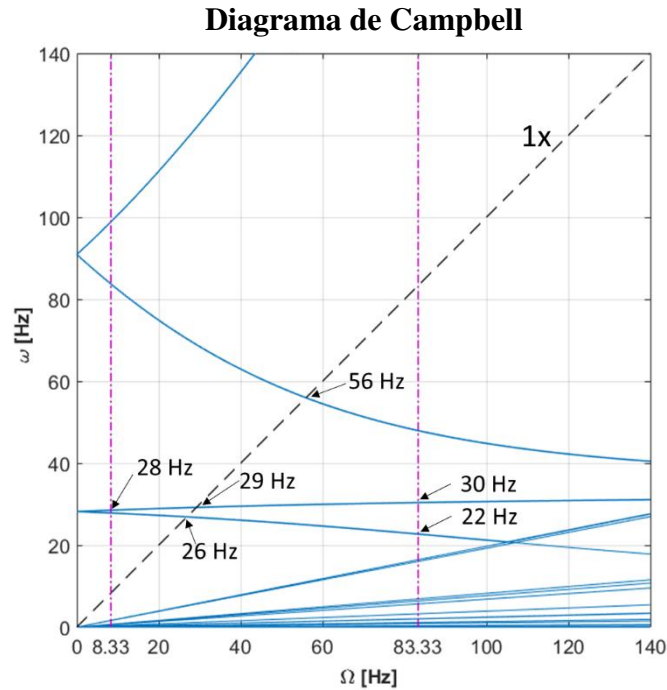


Figura 4.16 Diagrama de Campbell do rotor (caso 3)

Na figura 4.17, nota-se a similaridade entre as órbitas dos dois modelos contato, EHD e Hertz, evidenciando a tendência do regime de lubrificação se assemelhar ao seco em baixas velocidades, se diferenciando apenas pela fina camada de óleo que dá a sustentação no caso EHD. Outro ponto a ser observado é que, para esta faixa de velocidade, a resposta do mancal independe da modelagem do rotor, seja por parâmetros concentrados, caso 2, seja por ao MEF, caso 3, quando se comparam as figuras 4.11 (a) e 4.17.

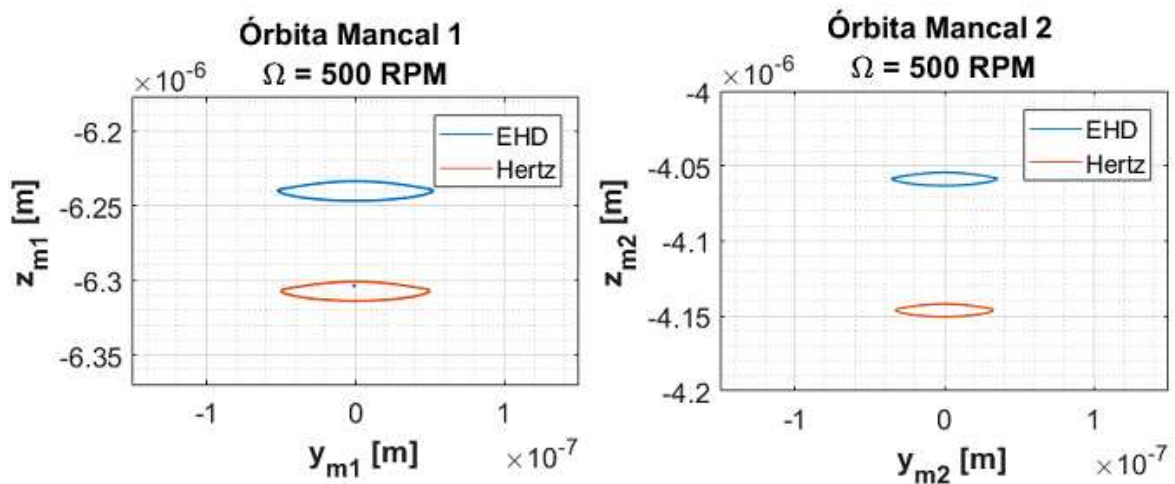


Figura 4.17 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para uma velocidade de 500 RPM

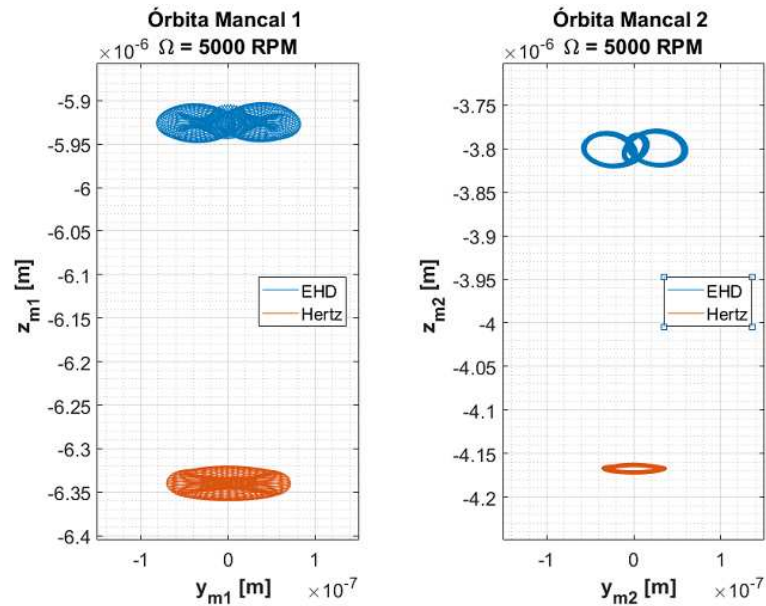


Figura 4.18 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para uma velocidade de 5000 RPM

Na figura 4.18, a órbita dos casos de contato seco e de Hertz apresentam diferenças significativas de formato. A diferença é notável entre os dois mancais, que estão sujeitos a cargas diferentes.

Observa-se na figura 4.18, que a órbita do caso EHD é maior que a do contato seco e com formato irregular, resultante da aplicação de um modelo diferente do comportamento do eixo quando modelado por elementos finitos, associado a uma maior flexibilidade do eixo.

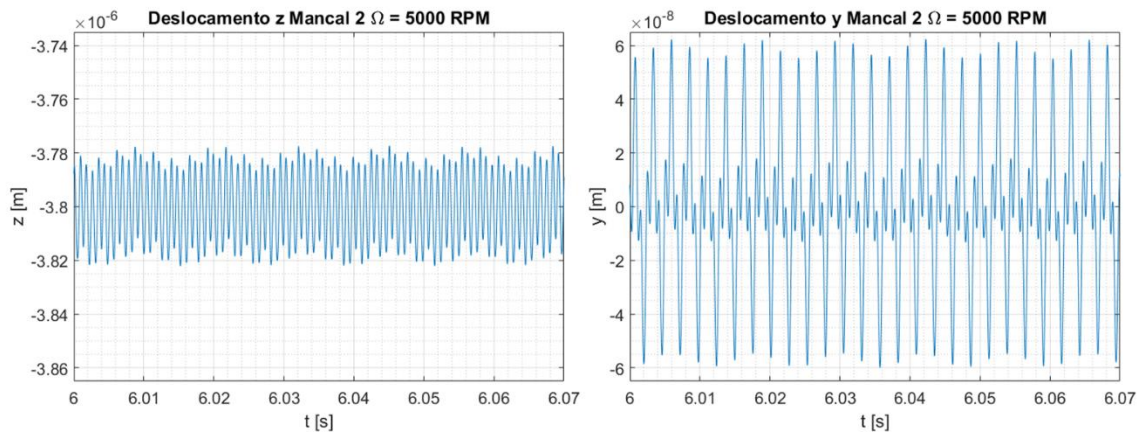


Figura 4.19 Resposta do deslocamento no tempo para o mancal 2 considerando contato com lubrificação EHD, velocidade de 5000 RPM

A figura 4.19 apresenta a resposta no tempo nas direções z e y do mancal 2 para o contato EHD, onde se avalia o comportamento da órbita pela sobreposição de harmônicas observadas nesta figura.

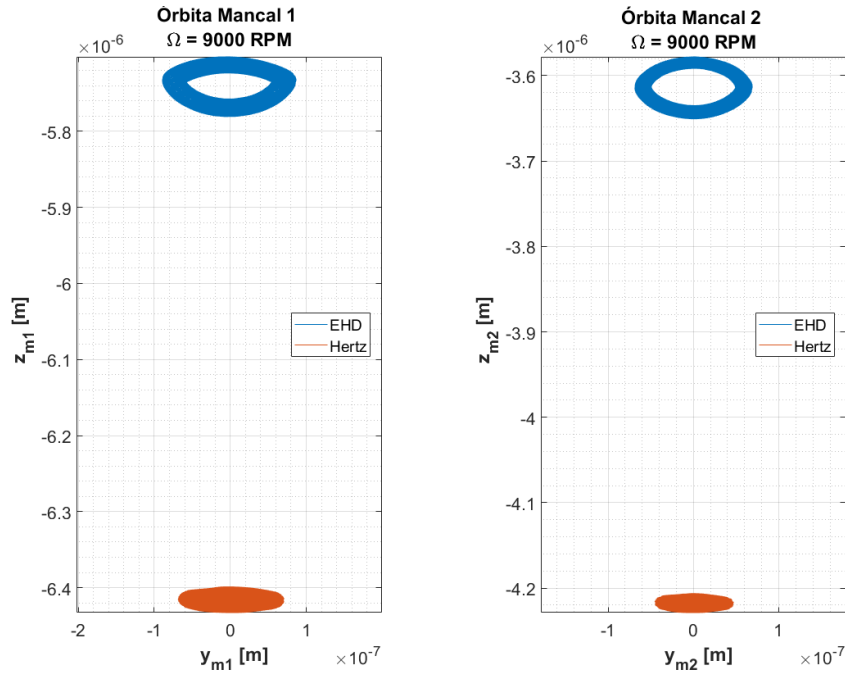


Figura 4.20 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para um a velocidade de 9000 RPM

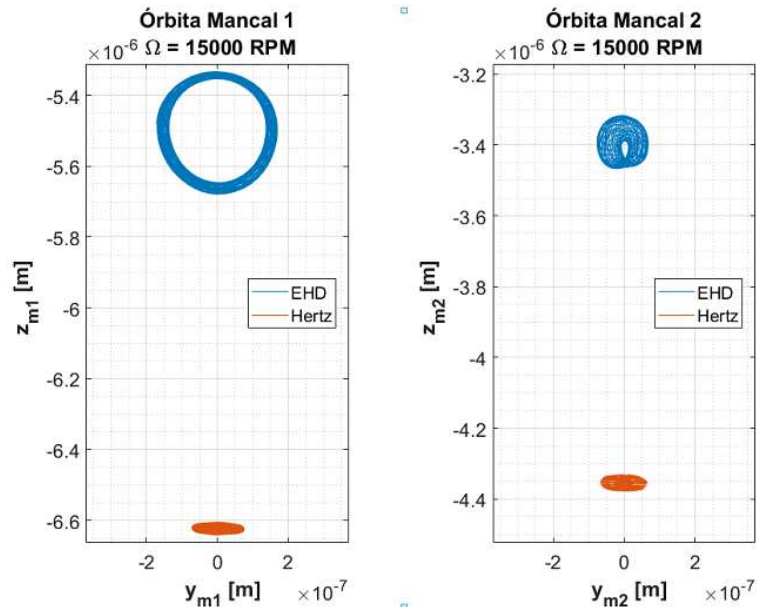


Figura 4.21 Órbitas dos mancais 1 e 2 para o caso 3, considerando lubrificação EHD e contato seco de Hertz, para um a velocidade de 15000 RPM

Para efeito de comparação das órbitas dos mancais em velocidades mais altas, são apresentados os gráficos das figuras 4.20, a 9000 RPM, e 4.21 a 15000 RPM. Nota-se que para

estas velocidades a amplitude da órbita do mancal EHD é superior ao modelo de Hertz, porém apresenta uma órbita mais próxima ao formato circular devido a maior participação do desbalanceamento rotativo na resposta.

Analisando os espectros de frequência dos mancais, apresentados na figura 4.22, observam-se claramente as BPFOs, 38,75, 77,08 e 115,4 Hz, mesmo se tratando da representação de um mancal saudável, bem expressivas, principalmente quando comparadas ao pico da frequência de excitação, 8,33 Hz. Por se tratar de baixa velocidade, o desbalanceamento rotativo do eixo é pouco influente na resposta do mancal. É possível identificar, também, a componente de frequência natural de 28,33 Hz, o que está de acordo com o representado no diagrama de Campbell, figura 4.16.

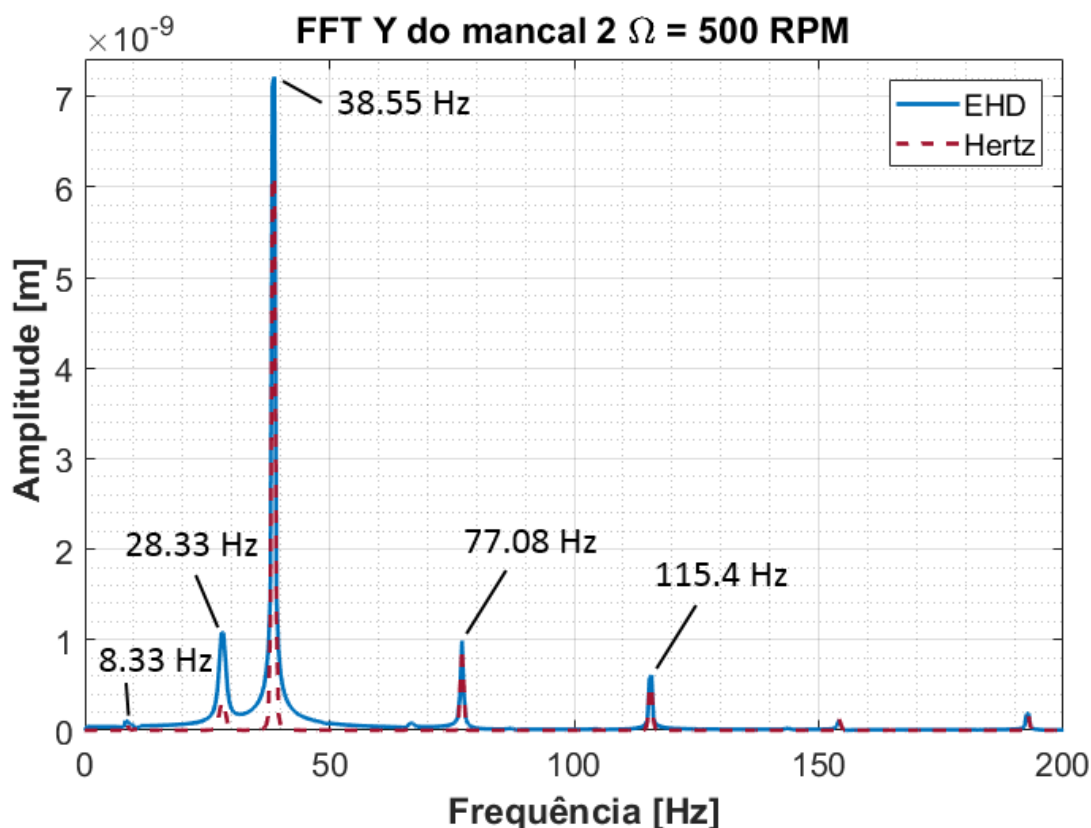


Figura 4.22 Espectro em frequência do deslocamento do mancal 2 (caso 3), na direção y, para 500 RPM de velocidade de rotação

A figura 4.23 apresenta o espectro de frequência para a condição de 5000 RPM, onde também são identificadas as componentes naturais de 22 Hz e 30 Hz na frequência de rotação de 83,3 Hz. O pico da velocidade de rotação é praticamente equivalente, em amplitude, para os

casos EHD e Hertz, enquanto os demais picos apresentam uma amplitude maior para o caso EHD, o que está condizente com a órbita maior, apresentada na figura 4.18.

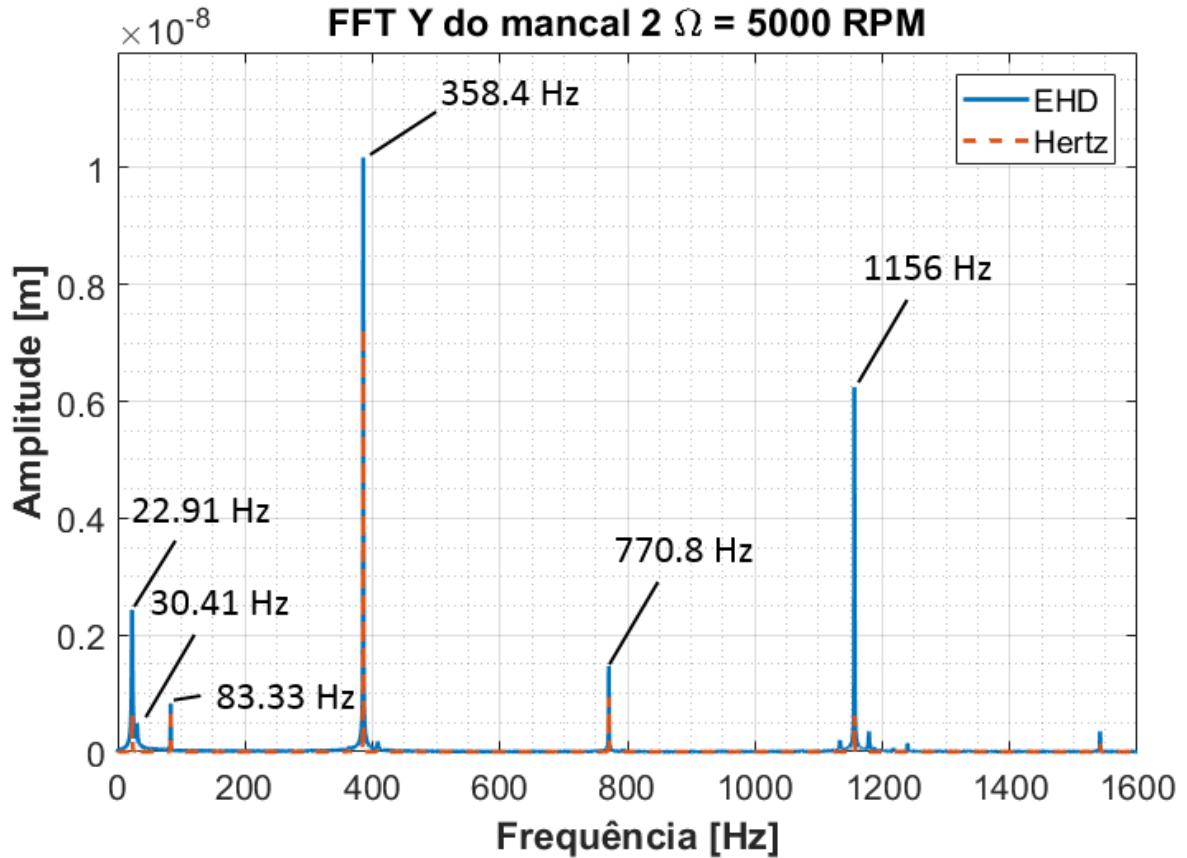


Figura 4.23 Espectro em frequência do deslocamento do mancal 2 (caso 3), na direção y, para 5000 RPM de velocidade de rotação

Uma das vantagens da representação por elementos finitos é a possibilidade de visualizar o comportamento de todos os nós do sistema durante a operação. A representação das órbitas do rotor a 5000 RPM, para mancais com lubrificação EHD, é mostrada na figura 4.24. São indicadas na figura as órbitas praticamente imperceptíveis dos mancais, quando comparadas com as demais, devido à alta rigidez neste ponto, e a órbita do disco, com a maior amplitude.

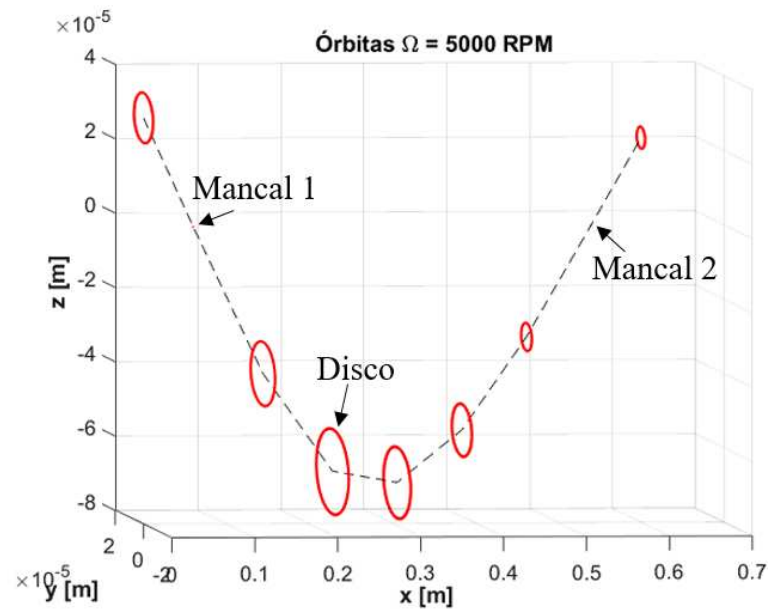


Figura 4.24 Representação do perfil de órbitas nos nós do rotor

4.5 Validação Experimental com a Literatura.

Esta seção apresenta uma comparação entre os resultados experimentais encontrados na tese de doutorado de Aini (1990) e o modelo reduzido do contato EHD em um mancal de esferas inserido em um rotor modelado por elementos finitos.

Os mancais utilizados têm as características apresentadas na tabela 4.12.

Tabela 4.12 Características geométricas do mancal utilizado em Aini (1990)

Características do Mancal		
Z	Número de esferas	16
D	Diâmetro da esfera (mm)	7,94
d_m	Diâmetro primitivo (mm)	54,0
-	Raio de curvatura da pista interna (mm)	4,08
-	Raio de curvatura da pista externa (mm)	4,61
α	Contato angular nominal (°)	15
P_d	Folga diametral (mm)	$8 \cdot 10^{-3}$

O modelo de rotor aplicado nesta secção é apresentado na figura 4.25, representando um *spindle* (ferramenta de perfuração) utilizado nos experimentos conduzidos por Aini (1990), onde os nós 2 e 4 localizam os mancais de esferas com contato angular, o nó 3 é o centro de massa do conjunto e o nó 1 é a extremidade da ferramenta que está sujeita a um desbalanceamento rotativo.

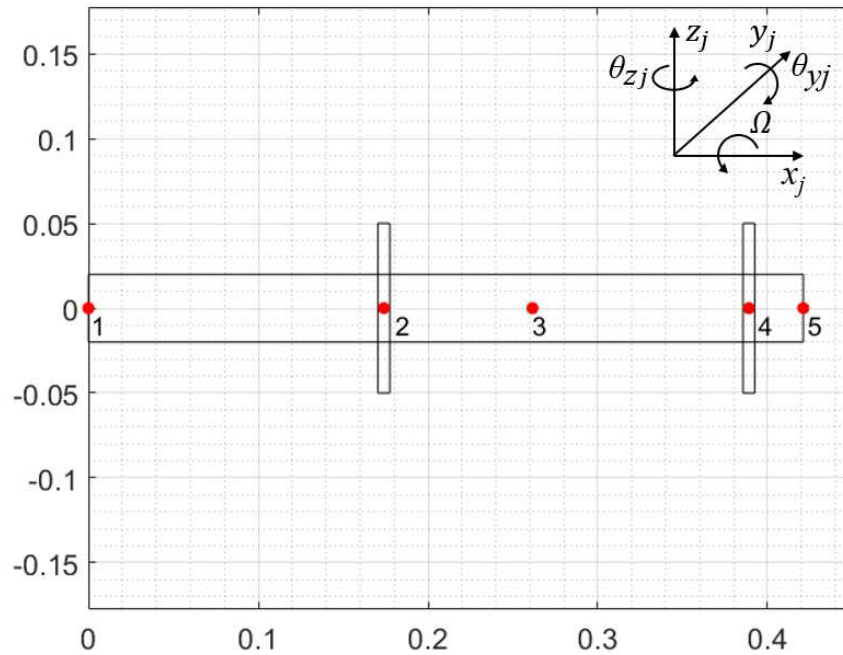


Figura 4.25 Modelo de um *spindle*, Aini 1990

As características de operação do eixo do rotor estão apresentadas na tabela 4.13.

Tabela 4.13 Características do Eixo do Rotor Aini (1990)

Características do Rotor	
Massa do eixo (kg)	5,5
Modulo de elasticidade (Pa)	210×10^9
Diâmetro do eixo (m)	$4,0 \times 10^{-2}$
Coefficiente do amortecimento proporcional	$2,0 \times 10^{-4}$
Rotação do eixo, Ω (RPM)	3000
Desbalanceamento (kg·m)	$5,3 \times 10^{-5}$

Os mancais são caracterizados nas condições de operação de um dos experimentos para uma pré-carga de 100N na direção axial e apenas o peso do conjunto na direção radial, encontrando os parâmetros de rigidez equivalente, K , expoente do deslocamento, d , força de

sustentação, ΔF , coeficiente de amortecimento, C , apresentados na tabela 4.14, onde os subscritos R e A representam, respectivamente, as direções radial e axial.

Tabela 4.14 Parâmetros de força de reação do mancal Aini,

K_R [N/m ^{dR}]	d_R []	ΔF_R [N]	K_A [N/m ^{dA}]	d_A []	ΔF_A [N]	C [N/s ²]
$1,38 \cdot 10^9$	1,35	6,03	$2,21 \cdot 10^8$	1,18	1,32	4,07

A figura 4.26 apresenta a DFT do sinal do deslocamento no tempo do nó 1 na direção z . É possível identificar a resposta ao desbalanceamento do rotor no primeiro pico em 50 Hz e suas harmônicas, 2X, 3X, 4X e 5X, também identificadas com amplitudes próximas das encontradas experimentalmente.

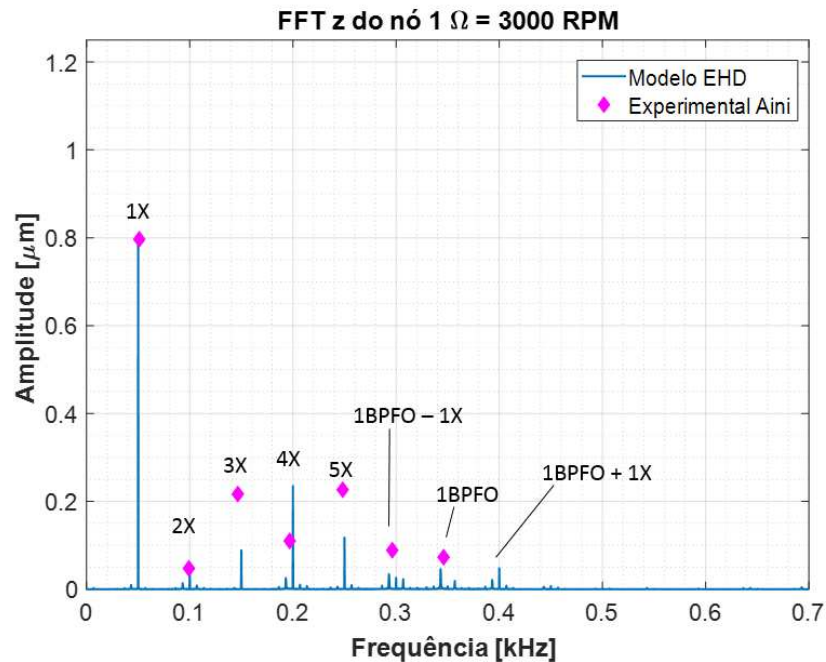


Figura 4.26 Resposta em frequência na direção z do nó 1.

Nota-se claramente a primeira harmônica da BPFO, que se trata da frequência de passagem de uma esfera para a posição da próxima esfera, e a componente da BPFO – 1X, que também são identificadas no trabalho. Na simulação computacional também foi encontrada a componente 1BPFO + 1X.

Desta forma, a modelagem EHD proposta para os mancais de esfera de contato angular, e sua interação com sistemas rotativos, mostra-se promissora para aplicações práticas.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho atingiu o propósito de finalizar a integração entre as rotinas computacionais que caracterizam os rolamentos de esferas iniciado por Bizarre et al. (2016), tornando mais simples o processo de obtenção dos parâmetros de força para o modelo reduzido do mancal para diversas condições.

Foi possível avaliar o comportamento de um rotor Laval por parâmetros concentrados para duas variações da posição de disco com mancais de rolamento sob regime de lubrificação EHD, comparando o resultado EHD com o modelo até então utilizado de contato seco de Hertz.

O mesmo foi feito para um rotor modelado por elementos finitos. Desta forma, a inclusão do modelo reduzido de forças não lineares, oriundas de mancais de esferas em lubrificação EHD, permite observar efeitos na resposta dinâmica de diferentes modelos de rotor, fundamentais para a análise do sistema completo, sendo possível inclusive comparar os resultados teóricos com experimentos descritos na literatura.

A comparação dos experimentos conduzidos por Aini (1990) com os resultados teóricos deste trabalho demonstram coerência do método de representação do contato angular esfera-pista pelo modelo reduzido do contato EHD. Para tal representação, a inclusão das forças de interação do contato no sistema do rotor foi feita através da transferência do sistema de coordenadas do mancal para as coordenadas do rotor, utilizando parâmetros otimizados para as direções radial e axial.

As principais frequências naturais, harmônicas da frequência de rotação e da frequência de passagem das esferas foram identificadas na simulação numérica dos sistemas rotativos, sinalizando de forma positiva para a representação destes componentes de acordo com os parâmetros otimizados das forças não lineares nos contatos esfera-pista.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Propõem-se como futuros trabalhos, os seguintes passos:

- Fazer simulações com outras distribuições de carregamento nos mancais, para avaliar o comportamento das curvas dos parâmetros com a rotação para diferentes casos;
- Fazer testes experimentais para comparação dos resultados de órbitas e frequências fundamentais.

Referências

BIZARRE, L.; CAVALCA, K. L. **Modelagem das Forças de Contato não Lineares em Mancais de Elementos Rolantes de Contato Angular**. Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), p. 1- 11, Uberlândia, Brasil, 2014.

BIZARRE, L.; **Modelagem de forças de contato não lineares em mancais de elementos rolantes de contato angular**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

BIZARRE, L.; NONATO, F.; CAVALCA, K. L. Investigation on the convergence of EHD lubrication in angular contact ball bearing. **11th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, 2016.

BIZARRE, L.; NONATO, F.; CAVALCA, K. L. Formulation of five degrees of freedom ball bearing model accounting for the nonlinear stiffness and damping of elastohydrodynamic point contacts. **Mechanism and Machine Theory**, v. 124, p. 179-196, 2018.

CHANGSEN, W. **Analysis of Rolling Element Bearings**, London: Mechanical Engineering Publications LTD, 1991.

COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. **Journal of applied mechanics**, v. 33, n. 2, p. 335-340, 1966.

DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shafts. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A**, v. 185, p. 279-360, 1894.

FÖPPL, A. Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle. **Der Civilingenieur**, v. 41, p. 333-342, 1895.

FUKATA, S.; GAD, E. H.; KONDOU, T.; AYABE, T.; TAMURA, H. On the radial vibration of ball bearings: computer simulation. **Bulletin of JSME**, v. 28, n. 239, p. 899-904, 1985.

GREENE, R. B. Gyroscopic effects on the critical speeds of flexible rotors. **Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME**, v. 15, n. 4, 70: 369–376, 1948.

GUNTER Jr, **Dynamic stability of rotor-bearing systems**. Relatório Técnico NASA-SP-113, 1966.

HAGIU, G. D.; GAFITANU, M. D. Dynamic characteristics of high speed angular contact ball bearings. **Wear**, v. 211, n. 1, p. 22-29, 1997.

HARRIS, T. A. **Rolling Bearing Analysis**, John Wiley & Sons, New York, 1991, 1013p.

HARSHA S.P., Nonlinear dynamic analysis of a high-speed rotor supported by rolling element bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v.290, p.65–100, 2006a.

HARSHA S.P., Nonlinear dynamic response of a balanced rotor supported by rolling element bearings due to radial internal clearance effect. **Mechanism and Machine Theory**, v.41, p.688–706, 2006b.

HERTZ, H. On the contact of solid elastic bodies and on hardness. **Journal of Mathematics**, v. 92, p. 156-171, 1881.

HAMROCK, B. J.; DOWSON, D.. **Ball bearing lubrication: the elastohydrodynamics of elliptical contacts**. Wiley, 1981.

JEFFCOTT, H. H.. XXVII. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed. The effect of want of balance. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 37, n. 219, p. 304-314, 1919.

JONES, A. B. A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearing under Arbitrary Load and Speed Conditions, **Journal of Basic Engineering**, Trans. ASME, v.82, n. 2, p. 309-320, 1960.

KRÄMER, E., **Dynamics of Rotors and Foundations**, New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 383p., 1993.

KRAUS, J.; BLECH, J. J.; BRAUN, S. G. In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by modal analysis. **Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design**, v. 109, n. 3, p. 235-240, 1987.

LUNDBERG, G.; PALMGREN, A. **Dynamic Capacity of Rolling Bearings**, ActaPolytech. Scand., Mech. Eng. Ser., v.1, p. 1–52, 1947.

LIEW, A.; FENG, N. S.; HAHN, E. J. Transient rotordynamic modeling of rolling element bearing systems. **ASME Turbo Expo 2001: Power for Land, Sea, and Air**. American Society of Mechanical Engineers, 2001.

LIM, T.C.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part I: Bearing stiffness formulation, **Journal of Sound and Vibration**, v. 139, p. 179-199, 1990a.

LIM, T.C.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part II: System Studies, **Journal of Sound and Vibration**, v. 139, p. 201-225, 1990b.

LIM, T.C.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part III: Geared Rotor, **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, p. 31-54, 1991.

LIM, T.C.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part IV: Statistical Energy Analysis, **Journal of Sound and Vibration**, v. 153, p. 37-50, 1992.

LUBRECHT, A. A., TEN NAPEL WE, BOSMA R. Multigrid, an alternative method for calculating film thickness and pressure profile in elastohydrodynamically lubricated line contacts. **Journal of Tribology, Transactions of the ASME**, v.108 , p. 551-556, 1986.

MARQUARDT, D. W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 431-441, 1963.

MELDAU, E. Die Bewegung der Achse von Wälzlager bei geringen Drehzahlen, **Werkstatt und Betrieb**, v. 84, p. 308-313, 1951.

MYKLESTAD, N. O.. A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 11, n. 2, p. 153-162, 1944.

NELSON, H. D. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. **ASME Journal of Mechanical Design**, v. 102, n. 4, p. 793-803, 1980.

NELSON, H. D.; McVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.

NONATO F. **Modelo dinâmico para o contato em mancais de elementos rolantes sujeitos à lubrificação elastohidrodinâmica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

NONATO, F.; CAVALCA, K. On the non-linear dynamic behavior of elastohydrodynamic lubricated point contact, **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, p. 4656-4671, 2010.

NONATO F.; CAVALCA, K. Local Linear Approximation for the Stiffness Characteristics of Elastohydrodynamic Point Contact. In:10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 513-523, 2012a.

NONATO, F.; CAVALCA, K. Investigation on the Damping Characteristics of Elastohydrodynamic Lubricated Point Contacts under Dynamic Loading. In:10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 503-512, 2012b.

NONATO, F. **Modelo Dinâmico para Mancais de Elementos Rolantes Radiais de Esferas Considerando os Efeitos da Lubrificação Elastohidrodinâmica**, 2013. Tese (Doutorado), Univesidade Estadual de Campinas, Campinas.

NONATO, F.; CAVALCA, K. An approach for including the stiffness and damping of elastohydrodynamic point contacts in deep groove ball bearing equilibrium models, **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, p. 6960-6978, 2014.

PALMGREN, A. **Ball and Roller Bearing Engineering**, Philadelphia: SKF Industries, 270 p, 1945.

PERRET, H. Elastische Spielschwingungen konstant belasteter Wälzlager, **Werkstatt und Betrieb**, v. 83, p. 354-358 1950.

PROHL, M. A. A general method for calculating critical speeds of flexible rotors. **ASME. Journal of Applied Mechanics** 12, , v. 12, p. A-142--A-148, 1945.

RADAELLI, G. Z. **Determinação do Carregamento Dinâmico em Mancais de Esfera de Contato Angular**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

RANKINE, W. J. M., On the centrifugal force of rotating shafts. **Van Nostrand's Eclectic Engineering Magazine (1869-1879)**, v. 1, n. 7, p. 598, 1869.

RAO, S.S. **Mechanical vibrations**, Pearson Education, 1995.

REYNOLDS, O. On the Theory of Lubrication and its application to M. Beauchamps Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 177, p. 157-234, 1886.

RUHL, R. L. **Dynamics of distributed parameter turborotor systems: transfer matrix and finite element techniques**. 1970. Tese (Doutorado), Cornell University, Ithaca, N. Y.

RUHL, R. L.; BOOKER, J. F. A finite element model for distributed parameter turborotor systems. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v.94, p. 126-132, 1972.

SHIMIZU, H.; TAMURA, H. Vibration of rotor based on ball bearing: 1st report, static stiffness of ball bearing. **Bulletin of JSME**, v. 9, n. 35, p. 524-532, 1966.

STODOLA, A., **Steam turbines**. Рипол Классик, 434 p., 1905.

SUNNERSJÖ, C. S. Varying compliance vibrations of rolling bearings. **Journal of sound and vibration**, v. 58, n. 3, p. 363-373, 1978.

TAMURA, H.; SHIMIZU, H. Vibration of rotor based on ball bearing: 2nd report, static stiffness of ball bearing containing a small number of balls. **Bulletin of JSME**, v. 10, n. 41, p. 763-775, 1967.

TAMURA, H.; SHIMIZU, H. Vibration of Rotor due to Ball Bearing: 3rd Report, Spring Property of Bearing Containing a Large Number of Balls. **Bulletin of JSME**, v. 11, n. 47, p. 825-837, 1968.

THOMAS, D. L.; WILSON, J. M.; WILSON, R. R. Timoshenko beam finite elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, n. 3, p. 315-330, 1973.

VANCE, J. M.; ZEIDAN, F.Y.; MURPHY, B., **Machinery Vibration and Rotordynamics**. John Wiley & Sons, 2010.

VENNER C. H., **Multilevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems**, Tese (Doutorado), University of Twente, 1991.

VENNER, C. H.; LUBRECHT, A. A. **Multilevel methods in lubrication**, Geen adressering : Elsevier, 2000. 400 p.

WANG, H.; HAN, Q.; ZHOU, D.. Nonlinear dynamic modeling of rotor system supported by angular contact ball bearings. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 85, p. 16-40, 2017.

WIJNANT Y.H., **Contact Dynamics in the field of Elastohydrodynamic Lubrication**, Tese (Doutorado), University of Twente, 1998.

WIJNANT, Y.H., WENSING, J.A., NIJEN, G.C.. The Influence of Lubrication on the Dynamic Behaviour of Ball Bearings, **Journal of Sound and Vibration**, v. 222, n. 4, p. 579-596, 1999.

ZHANG, Y. Y., WANG, X. L., ZHANG, X. Q., YAN, X. L.. Dynamic analysis of a high-speed rotor-ball bearing system under elastohydrodynamic lubrication. **ASME Journal of Vibration and Acoustics**, v. 136, n. 6, p. 061003-1--061003-11, 2014.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. **ASME Journal of Engineering for Power**, v. 99, n. 1, p. 71-76, 1977.

Apêndice A - Coeficientes de Influência de Rigidez

Coeficientes de influência de rigidez são calculados levando em consideração cada força ou momento atuante em um ponto, associado a cada grau de liberdade por uma rigidez, k_{ij} , devido a um deslocamento unitário deste grau de liberdade, u_j . Para obtenção de cada coeficiente é, então, feita a somatória das forças/momentos, F_i , em cada grau de liberdade, equação (A.1). Este método é muito utilizado em estruturas com múltiplos graus de liberdade, (Rao, 1995):

$$F_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

Na figura A.1, uma força F e um momento M são aplicados a uma distância d do apoio da viga, resultando em um deslocamento linear v e deslocamento angular φ .

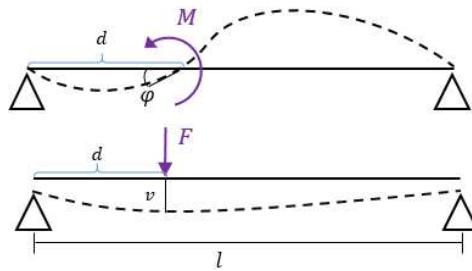


Figura A.0.1 Viga apoiada sujeita a forças e momentos.

Para determinar a rigidez que irá relacionar cada força unitária, utiliza-se da teoria de resistência dos materiais para uma viga apoiada em rótulas (biapoiada), para as direções y e z , e da teoria de barra para a direção x , axial. Tem-se, então, a equação (A.2).

$$F(v) = \frac{3EI}{d^3} v; F(\varphi) = \frac{3EI}{d^2} \varphi; M(v) = \frac{3EI}{d^2} v; M(\varphi) = \frac{3EI}{d} \varphi \quad (\text{A.2})$$

onde E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da viga.

Aplica-se a teoria para um rotor com um eixo cujo nó de interesse (nó do disco) está a uma distância b do apoio do lado direito e a uma distância a do apoio do lado esquerdo. A figura A.2 ilustra este caso, onde graus de liberdade y_{m1} e z_{m1} correspondem ao deslocamento do centro do mancal ao centro do eixo do lado esquerdo, e o y_{m2} e z_{m2} , do lado direito.

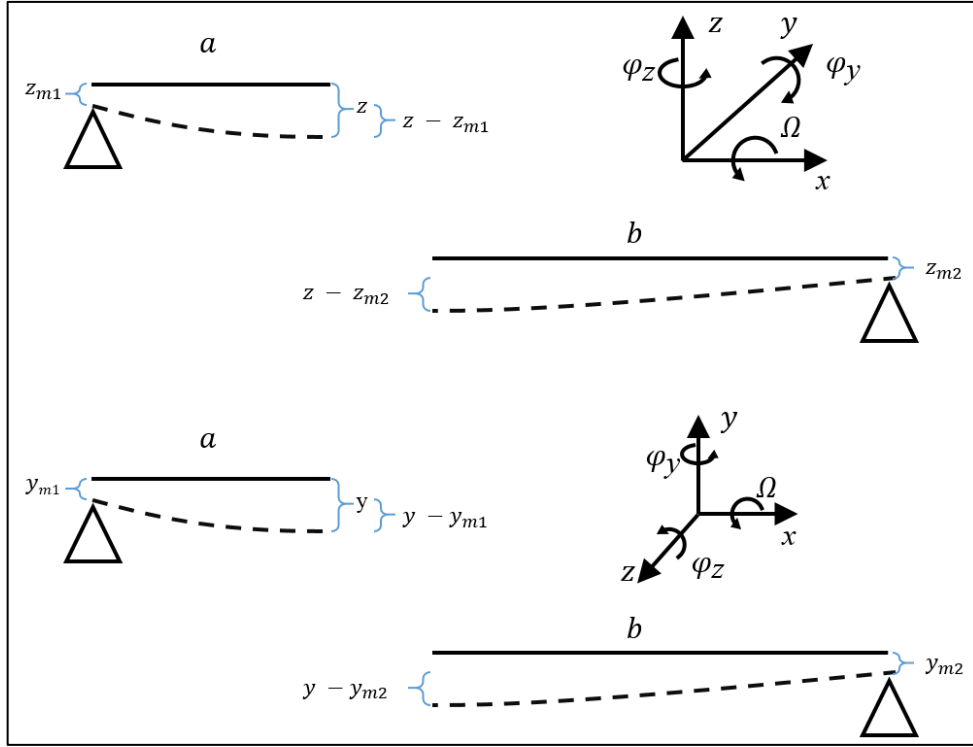


Figura A.0.2 Ilustração do deslocamento do eixo em duas vistas, plano x-z, acima, e plano x-y, abaixo.

Para o primeiro apoio $m1$ são encontradas as relações da equação (A.3):

$$\begin{aligned} F_{ay} &= \frac{3EI(y - y_{m1})}{a^3}; F_{a\varphi_z} = \frac{3EI\varphi_z}{a^2}; M_{ay} = \frac{3EI(y - y_{m1})}{a^2}; M_{a\varphi_z} = \frac{3EI\varphi_z}{a} \\ F_{az} &= \frac{3EI(z - z_{m1})}{a^3}; F_{a\varphi_y} = -\frac{3EI\varphi_y}{a^2}; M_{az} = -\frac{3EI(z - z_{m1})}{a^2}; M_{a\varphi_y} = \frac{3EI\varphi_y}{a} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Analogamente, para o segundo apoio $m2$ são encontradas as forças e momentos unitários da equação (A.4):

$$\begin{aligned} F_{by} &= \frac{3EI(y - y_{m2})}{b^3}; F_{b\varphi_z} = -\frac{3EI\varphi_z}{b^2}; M_{by} = -\frac{3EI(y - y_{m2})}{b^2}; M_{a\varphi_z} = \frac{3EI\varphi_z}{b} \\ F_{bz} &= \frac{3EI(z - z_{m2})}{b^3}; F_{b\varphi_y} = \frac{3EI\varphi_y}{b^2}; M_{bz} = \frac{3EI(z - z_{m2})}{b^2}; M_{a\varphi_y} = \frac{3EI\varphi_y}{b} \end{aligned} \quad (A.4)$$

A força total em y é mostrada nas equações (A.5) e (A.6):

$$F_y = F_{ay} + F_{a\varphi_z} + F_{by} + F_{b\varphi_z} = \frac{3EIy}{a^3} - \frac{3EIy_{m1}}{a^3} + \frac{3EI\varphi_z}{a^2} + \frac{3EIy}{b^3} - \frac{3EIy_{m2}}{b^3} - \frac{3EI\varphi_z}{b^2} \quad (A.5)$$

Rearranjando os termos e sabendo que $l = a + b$, tem-se, equação (A.6):

$$F_y = \frac{3EI(a^3 + b^3)}{a^3b^3}y - \frac{3EI(a - b)}{a^2b^2}\varphi_z - \frac{3EI}{a^3}y_{m1} - \frac{3EI}{b^3}y_{m2} \quad (\text{A.6})$$

O mesmo somatório é feito para a força em z , F_z e momentos em φ_y e φ_z , M_{φ_y} e M_{φ_z} , respectivamente apresentados, nas equações (A.7), (A.8) e (A.9):

$$F_z = \frac{3EI(a^3 + b^3)}{a^3b^3}z + \frac{3EI(a - b)}{a^2b^2}\varphi_y - \frac{3EI}{a^3}z_{m1} - \frac{3EI}{b^3}z_{m2} \quad (\text{A.7})$$

$$M_{\varphi_y} = \frac{3EI(a - b)}{a^2b^2}z + \frac{3EI}{ab}\varphi_y + \frac{3EI}{a^2}z_{m1} - \frac{3EI}{b^2}z_{m2} \quad (\text{A.8})$$

$$M_{\varphi_z} = -\frac{3EI(a - b)}{a^2b^2}y + \frac{3EI}{ab}\varphi_z - \frac{3EI}{a^2}y_{m1} + \frac{3EI}{b^2}y_{m2} \quad (\text{A.9})$$

Como a força externa axial é aplicada no nó do disco, o resultado é um dos lados da barra em compressão e o outro em tração. Considera-se que x_{m1} é o deslocamento na direção axial do centro do eixo em relação ao centro do mancal, para o primeiro apoio $m1$, e x_{m2} , para o segundo apoio $m2$. A força atuante em cada um dos lados dos apoios é, respectivamente, F_{ax} e F_{bx} , equação (A.10), onde A é a área transversal do eixo.

$$F_{ax} = \frac{EA}{a}(x - x_{m1}); F_{bx} = \frac{EA}{b}(x - x_{m2}) \quad (\text{A.10})$$

A força total axial no disco, F_x , é apresentada na equação (A.11):

$$F_x = F_{ax} + F_{bx} = \frac{EAl}{ab}x - \frac{EA}{a}x_{m1} - \frac{EA}{b}x_{m2} \quad (\text{A.11})$$

Sendo assim, a força de reação nas extremidades dos eixos (mancais) é a somatória das forças em ambos os lados de cada apoio, como mostrado nas forças apresentadas na equação (A.12):

$$F_{ym1} = F_{ay} + F_{a\varphi_z} = \frac{3EI}{a^3}y + \frac{3EI}{a^2}\varphi_z - \frac{3EI}{a^3}y_{m1}$$

$$F_{zm1} = F_{az} + F_{a\varphi_y} = \frac{3EI}{a^3}z - \frac{3EI}{a^2}\varphi_y - \frac{3EI}{a^3}z_{m1} \quad (\text{A.12})$$

$$F_{xm1} = F_{ax} = \frac{EA}{a}x - \frac{EA}{a}x_{m1}$$

$$F_{ym2} = F_{by} + F_{b\varphi_z} = \frac{3EI}{b^3} y - \frac{3EI}{b^2} \varphi_z - \frac{3EI}{b^3} y_{m2}$$

$$F_{zm2} = F_{bz} + F_{b\varphi_y} = \frac{3EI}{b^3} z + \frac{3EI}{b^2} \varphi_y - \frac{3EI}{b^3} z_{m2}$$

$$F_{xm2} = F_{bx} = \frac{EA}{b} x - \frac{EA}{b} x_{m2}$$

Finalmente, as equações (A.6), (A.7), (A.8), (A.9), (A.11) e (A.12) são expressas na sua forma matricial, relacionando o vetor de graus de liberdade $\{u\} = \{y \ z \ x \ \varphi_y \ \varphi_z \ y_{m1} \ z_{m1} \ x_{m1} \ y_{m2} \ z_{m2} \ x_{m2}\}^T$ ao vetor de forças $\{f\} = \{F_y \ F_z \ F_x \ M_{\varphi_y} \ M_{\varphi_z} \ F_{ym1} \ F_{zm1} \ F_{xm1} \ F_{ym2} \ F_{zm2} \ F_{xm2}\}^T$, por meio da matriz de rigidez $[K]$, como mostrado da equação (A.13):

$$\{f\} = [K]\{u\} \quad (\text{A.13})$$