

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Ricardo Ugliara
Mendes E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 18/02/2011
Katia Lucchese Cavalcanti
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Ricardo Ugliara Mendes

Desenvolvimento de um Sistema de Atuação
Magnética para Excitação de Sistemas
Rotativos

Campinas, 2011

Ricardo Ugliara Mendes

Desenvolvimento de um Sistema de Atuação Magnética para Excitação de Sistemas Rotativos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Co-Orientador: Prof. Dr. Luiz Otávio Saraiva Ferreira

Campinas

2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M522d	Mendes, Ricardo Ugliara Desenvolvimento de um sistema de atuação magnética para excitação de sistemas rotativos / Ricardo Ugliara Mendes. --Campinas, SP: [s.n.], 2011. Orientadores: Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, Luiz Otávio Saraiva Ferreira. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Rotores - Dinâmica. 2. Projetos mecânicos. I. Dedini, Kátia Lucchesi Cavalca. II. Ferreira, Luiz Otávio Saraiva. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.
-------	--

Título em Inglês: Development of a magnetic actuation system to rotating system excitation

Palavras-chave em Inglês: Rotors - Dynamics, Mechanical design

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Robson Pederiva, Marcelo Becker

Data da defesa: 18/02/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

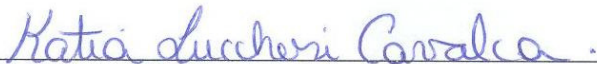
Desenvolvimento de um Sistema de Atuação
Magnética para Excitação de Sistemas
Rotativos

Autor: Ricardo Ugliara Mendes

Orientador: Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Co-Orientador: Prof. Dr. Luiz Otávio Saraiva Ferreira

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:


Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Robson Pederiva
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Marcelo Becker
Universidade de São Paulo – São Carlos

Campinas, 18 de fevereiro de 2011.

Dedico este trabalho aos meus pais e à minha namorada.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar meu caminho e permitir a realização deste trabalho através do auxílio de pessoas muito importantes, às quais presto minha homenagem:

À professora Kátia Lucchesi Cavalca pela paciência e orientação em mais esta etapa da minha vida acadêmica.

Ao pesquisador Hélio Fiori de Castro pelo auxílio, sobretudo na parte experimental, a qual permitiu a verificação da aplicação deste trabalho.

Aos meus pais Anne Claires Ugliara Mendes e José Carlos Mendes pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

À minha namorada Cláudia Oliveira Pessini por todo incentivo, carinho e compreensão, presente mesmo nos finais de semana passados em frente ao computador.

Ao grande amigo Vinícius Gabriel Segala Simionatto pela amizade, longas conversas pós-expediente e grande ajuda durante a realização desta pesquisa.

A todos os amigos: Denise, Diogo, Efrain, Fábio, Felipe, Gregory, Kellen, Keyla, Leonardo, Matheus, Rafael, Robert e Tiago do LAMAR; Fábio, Hugo e Leonardo do LDEM, pela amizade, por todo o tempo compartilhado, pelo incentivo e pelas conversas engrandecedoras.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida, que viabilizou a realização deste trabalho.

“Ao infinito, e além.”

Buzz Lightyear do Comando Estelar

Resumo

MENDES, Ricardo Ugliara, *Desenvolvimento de um Sistema de Atuação Magnética para Excitação de Sistemas Rotativos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2011. 119 p. Dissertação (Mestrado).

Máquinas rotativas apresentam um vasto campo de aplicação como aeronaves, fábricas, laboratórios e usinas de energia. Estas aplicações contêm eixos girando a altas velocidades que devem ter alto nível de confiabilidade. Assim, a análise do comportamento dinâmico destas bombas e turbinas é necessária para estabelecer padrões de funcionamento do equipamento. Ultimamente, com projetos feitos com auxílio de computador, modelos de elementos finitos de eixos incluindo mancais, discos, selos e acoplamentos têm sido desenvolvidos. Através destes modelos, o comportamento das máquinas pode ser previsto, permitindo projetos otimizados baseados nos cálculos de velocidades críticas e simulações de instabilidades do filme de óleo. Estas informações fornecem a base para o desenvolvimento de controladores para reduzir vibrações durante a partida de máquinas, assim como aceleração ou desaceleração através das velocidades críticas, ou ainda para controlar instabilidades do filme de óleo. Uma das técnicas aplicadas na identificação de parâmetros de máquinas e estruturas é a análise modal, a qual consiste em aplicar uma força de perturbação no sistema e, então, medir sua resposta. Entretanto, há uma dificuldade que traz limitações à excitação de sistemas com eixos rotativos, quando utilizando martelos de impacto ou *shakers*, uma vez que, devido ao atrito, forças tangenciais e ruídos indesejados podem ser aplicados ao sistema. Portanto, o estudo de uma técnica de excitação externa sem contato se torna de grande interesse. Neste sentido, o presente trabalho trata do estudo e desenvolvimento de um modelo em elementos finitos de máquinas rotativas integrado ao modelo de um atuador magnético como fonte de excitação externa, focando na resposta do modelo e sua interação com o atuador. Também é apresentada uma comparação entre simulações numéricas e testes práticos obtidos de uma bancada experimental.

Palavras-chave: máquinas rotativas, atuador magnético, excitação sem contato.

Abstract

MENDES, Ricardo Ugliara, *Development of a Magnetic Actuation System to Rotating System Excitation*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2011. 119 p. Dissertação (Mestrado).

Rotating machines have a wide range of application such as airplanes, factories, laboratories and power plants. These applications contain shafts rotating at high speeds that must have high trust levels. Thus, the dynamic behavior analysis of these pumps and turbines is required to establish operational patterns of the equipment. Lately, with computer aid design, shafts finite element models including bearings, discs, seals and couplings have been developed. Through these models the machines behavior can be predicted, allowing optimized design based on the critical speeds calculus and oil instabilities simulations. These informations provide the basis for controller development in order to reduce vibrations during the machines start-up and acceleration or deceleration through the critical speeds, or even to control oil instabilities. One of the techniques applied in parameters identification of machines and structures is the modal analysis, which consists of applying a perturbation force into the system and then to measure its response. However, there is a difficulty that brings limitations to the excitation of systems with rotating shafts when using impact hammers or shakers, due to friction, undesired tangential forces and noise that can be applied to the system. Therefore, the study of a non-contact technique of external excitation becomes of high interest. In this sense, the present work deals with the study and development of a finite element model for rotating machines using a magnetic actuator as source of external excitation, focusing on the model response and its interaction with the actuator. It is also presented a comparison between the numerical simulations and practical tests obtained from a rotor test rig.

Key-words: rotating machinery, magnetic actuator, excitation without contact.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Mancal Magnético Heteropolar (HARRIS e WIDBRO, 2003).	8
Figura 2 – Mancal Magnético Homopolar (http://www.iem.rwth-aachen.de/index.pl/mechatronics__drives?makePrintable=1 Acesso em 03/03/2011).	9
Figura 3 – Montagem diferencial.	11
Figura 4 – Esquema de um sistema rotativo e sistema de referência.	15
Figura 5 – Ângulos de rotação de uma máquina rotativa.	16
Figura 6 – Representação do desbalanceamento rotativo residual de massa.	17
Figura 7 – Sistema de coordenadas utilizado por Nelson e McVaugh (1976).	23
Figura 8 – Elemento de disco.	23
Figura 9 – Elemento de eixo.	25
Figura 10 – Arranjo das matrizes de cada elemento na matriz global (CASTRO, 2007).	28
Figura 11 – Princípio de funcionamento de um mancal hidrodinâmico.	30
Figura 12 - Curva Guembel e Locus (lugar geométrico do centro do eixo).	31
Figura 13 – Modelo matemático do mancal hidrodinâmico.	32
Figura 14 - Diagrama do Sistema do Atuador Magnético.	34
Figura 15 – Modelo Completo de um atuador magnético.	35
Figura 16 - Sistema magnético.	36
Figura 17 – Sistema elétrico.	39
Figura 18 - Montagem Diferencial (MASLEN, 2000).	40
Figura 19 – (a) dipolos magnéticos desorientados; (b) dipolos magnéticos alinhados devido à ação de campo magnético externo.	42

Figura 20 – Curva de histerese de um material ferromagnético.....	43
Figura 21 – Força de Lorentz. Onde Q_e é a carga elétrica, v_Q sua velocidade, B o campo magnético, α_Q o ângulo entre a velocidade e o campo magnético, e F_L é a força aplicada na carga.	46
Figura 22 – Funcionamento do sensor de efeito hall. (a) sem campo magnético, (b) com campo magnético de cima para baixo, (c) com campo magnético de baixo para cima (FURTADO, 2008).	47
Figura 23 – Modelo matemático completo do sistema magnético.	49
Figura 24 – Resumo das técnicas de análise.....	53
Figura 25 – Ferramentas de análise a partir da resposta da integração numérica.	54
Figura 26 – Movimento de precessão: (a) direta; (b) retrógrada.	55
Figura 27 – Diagrama em cascata – <i>oil whirl</i> e <i>oil whip</i> (MUSZYNSKA, 2005).....	59
Figura 28 – <i>Oil whirl</i> de segundo modo (MUSZYNSKA, 2005): (a) <i>oil whip</i> se transformando em <i>oil whirl</i> de segundo modo; (b) estabilização do <i>oil whip</i> e coexistência do <i>oil whip</i> e o <i>oil whirl</i> de segundo modo.	61
Figura 29 - Ferramentas de análise a partir da resposta da equação homogênea.	62
Figura 30 – Diagrama de Campbell. (a) mancais isotrópicos; (b) mancais anisotrópicos.	67
Figura 31 – Composição da órbita a partir dos vetores girantes direto e retrógrado.....	70
Figura 32 – Exemplo de modo natural.	71
Figura 33 - Ferramentas de análise a partir da resposta da equação particular.	72
Figura 34 – Exemplo de FRF.....	74
Figura 35 – Exemplo de modo operacional.....	76
Figura 36 – Diagrama de blocos da organização e sequência do programa.	77
Figura 37 – (a) estrutura de suporte do atuador magnético; (b) sistema de coordenadas rotacionado de 45°.	78
Figura 38 – (a) detalhe da estrutura de suporte e bobinas; (b) atuador magnético instalado na	

bancada.	79
Figura 39 – Modos Naturais do Atuador Magnético. (a) primeiro modo a 576 Hz; (b) segundo modo a 774 Hz; (c) malha utilizada no modelo em elementos finitos.	80
Figura 40 - Amplificador utilizado; modelo 4-Q-DC-Servoamplifier ADS50/5.....	81
Figura 41 – Caracterização dos quatro amplificadores utilizados.....	82
Figura 42 – Curvas de saturação do atuador magnético.....	83
Figura 43 – Bancada Experimental.	85
Figura 44 – Instrumentação da bancada experimental.	86
Figura 45 – Modelo em elementos finitos da bancada experimental.	87
Figura 46 – Dados dos mancais hidrodinâmicos: (a) Curva Guembel; (b) Deslocamento estático nas duas direções em função das velocidades de rotação; (c) Coeficientes Equivalentes de Rigidez; (d) Coeficientes Equivalentes de Amortecimento.....	88
Figura 47 - Diagrama de Campbell.	91
Figura 48 – Variação do amortecimento modal associado às curvas do Diagrama de Campbell.	91
Figura 49 – Modos naturais do sistema para uma velocidade de rotação de 1200 rpm: (a) 10,90 Hz; (b) 11,38 Hz; (c) 23,04 Hz; (d) 23,17 Hz; (e) 155,77 Hz; (f) 163,98 Hz.....	93
Figura 50 – Resposta ao impulso com rotação nula (nó do disco).	94
Figura 51 – Função resposta em frequência do sistema. (a) módulo; (b) fase.	95
Figura 52 – Modos operacionais: (a) 180 rpm; (b) 660 rpm; (c) 1380 rpm; (d) 2400 rpm.	96
Figura 53 – Deslocamento do disco em y e z em função da velocidade de rotação (nó do primeiro mancal).	98
Figura 54 – Diagrama em cascata (nó do primeiro mancal).....	98
Figura 55 – (a) sistema de coordenadas do atuador; (b) força magnética no referencial do atuador (x_1, x_2); (b) força magnética no referencial inercial (Y, Z).	100
Figura 56 – Validação: rotação 1800 rpm, excitação 20 Hz.....	101

Figura 57 – Validação: rotação 1800 rpm, excitação 25 Hz.....	102
Figura 58 – Validação: rotação 1800 rpm, excitação 30 Hz.....	102
Figura 59 – Validação: rotação 2100 rpm, excitação 20 Hz.....	103
Figura 60 – Validação: rotação 2100 rpm, excitação 25 Hz.....	103
Figura 61 – Validação: rotação 2100 rpm, excitação 30 Hz.....	104
Figura 62 – Validação: rotação 2400 rpm, excitação 19 Hz.....	104
Figura 63 – Validação: rotação 2400 rpm, excitação 25 Hz.....	105
Figura 64 – Validação: rotação 2400 rpm, excitação 30 Hz.....	105

Lista de Abreviaturas e Siglas

AMB – *Active Magnetic Bearing* (Mancal Magnético Ativo)

dFRF – *Directional Frequency Response Function* (Função Resposta em Frequência Direcional)

FMECA – *Failure Modes, Effects, Critically Analysis* (Modos de Falha, Efeitos, Análise Crítica)

FRF - *Frequency Response Function* (Função Resposta em Frequência)

LMS – *Least Mean Square* (Menor Média Quadrática)

ODS – *Operational Deflection Shape* (Modo Operacional)

P – Controle Proporcional

PD – Controle Proporcional Derivativo

PI – Controle Proporcional Integral

PID – Controle Proporcional Integral Derivativo

PWM – *Pulse Width Modulation* (Modulação por Largura de Pulso)

Lista de Símbolos

Letras Latinas

- a, b – diâmetros maior e menor da órbita do modo natural do rotor [m]
- a_0, a_n, b_n, n – coeficientes da série de Fourier para sinais reais
- $a_n^y, a_n^z, b_n^y, b_n^z, a_o^y, a_o^z, A_D^y, A_D^z, A_R^y, A_R^z$ – coeficientes da série de Fourier para sinais complexos
- A – amplitude da resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcott [m]
- A_e – área do elemento de eixo [m²]
- A_g – área do air-gap [m²]
- $[A_S]$ – matriz dinâmica do sistema
- B^* – densidade de fluxo magnético variável [T]
- B – densidade de fluxo magnético [T]
- B_b – densidade de fluxo magnético de polarização [T]
- B_h – densidade de fluxo magnético que incide no hall sensor [T]
- B_{ref} – densidade de fluxo magnético de referência [T]
- $[B_S]$ – matriz de ganho de entrada
- c – amortecimento viscoso da viga bi-apoiada [Ns/m]
- c_1, c_2 – constantes polinomiais da equação de primeiro grau do amplificador PWM
- $C_{yy}, C_{yz}, C_{zy}, C_{zz}$ – coeficiente de amortecimento do mancal hidrodinâmico [Ns/m]
- $[C_S]$ – matriz de ganho de saída
- d – diâmetro da viga bi-apoiada [m]
- d_e – diâmetro do elemento de eixo [m]
- d_i, d_o – diâmetros interno e externo do elemento de disco [m]
- dt, df – períodos de discretização dos sinais no tempo e na frequência da transformada discreta de Fourier [s], [Hz]

$[D_S]$ – matriz de ligação direta

e – excentricidade da massa desbalanceada do disco [m]

E – módulo de elasticidade (módulo de Young) [N/m²]

$f(t)$ – série de Fourier

$f(k)$ – transformada discreta de Fourier

$F_{1a}, F_{1b}, F_{2a}, F_{2b}$ – forças magnéticas nas bobinas a e b das direções x_1 e x_2 [N]

$\{F\}$ – vetor global de forças

F_{dy}, F_{dz} – forças de desbalanceamento em y e z [N]

F_m – força magnética [N]

F_q – força generalizada atuando na coordenada generalizada q [N]

F_{x1}, F_{x2} – forças magnéticas resultantes nas direções x_1 e x_2 [N]

F_{y0}, F_{z0} – cargas estáticas no mancal hidrodinâmico em y e z [N]

F_L – força de Lorentz [N]

F_R, F_T – forças de reação radial e tangencial no mancal hidrodinâmico [N]

h – espessura do filme de óleo [m]

H – intensidade de campo magnético [A/m]

H_m – impedância mecânica

i – corrente elétrica na bobina do atuador magnético [A]

I_{dx} – momento de inércia polar do disco [kg.m²]

I_{dy}, I_{dz} – momentos de inércia radial do disco em y e z [kg.m²]

I_{out} – corrente de saída do amplificador PWM [A]

I_{yy}, I_{zz} – momentos de inércia de área em y e z [m⁴]

k – rigidez da viga bi-apoiada [N/m]

K_h – constante que relaciona fluxo magnético medido e tensão de saída do sensor hall [V/T]

$K_{yy}, K_{yz}, K_{zy}, K_{zz}$ – coeficiente de rigidez do mancal hidrodinâmico [N/m]

K_P – ganho do controlador proporcional

l_c – comprimento da curva amperiana no núcleo ferromagnético [m]

l_g – *air-gap* [m]

l_s – comprimento da curva amperiana no eixo [m]

L – comprimento da viga bi-apoiada [m]

L_B – indutância da bobina [H]
 L_D – espessura do disco [m]
 L_E – comprimento do elemento de eixo [m]
 L_m – comprimento do mancal hidrodinâmico na direção x [m]
 m – massa do disco rígido [kg]
 $[M], [G], [C], [K]$ – matrizes globais de massa, giroscópica, de amortecimento e de rigidez
 m_D – massa do elemento de disco [kg]
 $[M_D], [G_D]$ – matrizes de massa e giroscópica do elemento de disco
 $[M_{DT}], [M_{DR}]$ – matrizes de inércia de translação e rotação do elemento de disco
 $[M_E], [G_E], [K_E]$ – matrizes de massa, giroscópica e de rigidez do elemento de eixo
 $[M_{ET}], [M_{ER}]$ – matrizes de inércia de translação e rotação do elemento de eixo
 N – número de espiras da bobina do atuador magnético
 O, O' – origens dos sistemas de coordenadas móvel e inercial
 p – pressão gerada no interior do filme de óleo [Pa]
 q – coordenada generalizada
 Q – solução da equação não homogênea (FRF)
 Q_h – solução da equação homogênea (problema de autovalor e autovetor)
 Q_e – carga elétrica [C]
 Q_y, Q_z – solução da equação não homogênea (FRF) em y e z
 r – razão entre a frequência de rotação e a frequência natural do rotor de Jeffcott
 $\{r_k\}, \{s_k\}$ – partes real e imaginária do k -ésimo autovetor
 R', R'' – módulos dos vetores girantes direto e retrógrado
 R – posição do centro de massa do disco
 R_m – raio do mancal hidrodinâmico [m]
 R_B – resistência da bobina [Ω]
 s – variável de estado
 t – tempo [s]
 T_c – energia cinética [J]
 T_h – constante de tempo do hall sensor [s]
 T_k – período fundamental do vetor girante [s]

v_g – volume do air-gap [m³]
 v_L, v_R – quedas de tensão no indutor e no resistor [V]
 v_Q – velocidade da carga elétrica [m/s]
 V – translação no eixo y [m]
 V_h – tensão de saída do hall sensor [V]
 V_{in} – tensão de entrada do amplificador PWM [V]
 V_p – energia potencial [J]
 V_B – tensão na bobina do atuador magnético [V]
 W – translação no eixo z [m]
 W_f – energia armazenada no campo magnético [J]
 W_m – carga estática do mancal hidrodinâmico [N]
 u_y, u_z – plano do sistema de coordenadas móvel com centro em O
 xyz – sistema de coordenadas inercial com centro em O'
 y_0, z_0 – deslocamentos em y e z do centro geométrico do rotor de Jeffcott [m]
 y_r, z_r – deslocamentos em y e z do centro de massa do rotor de Jeffcott [m]

.....

Letras Gregas

α', α'' – fases dos vetores girantes direto e retrógrado [rad]
 α – inclinação da órbita do modo natural do rotor [rad]
 α_C – fator que relaciona a matriz de amortecimento estrutural e a matriz de massa
 α_Q – ângulo entre a velocidade da carga elétrica e o campo magnético incidente [rad]
 β_C – fator que relaciona a matriz de amortecimento estrutural e a matriz de rigidez
 B, Γ – rotações em torno dos eixos y e z [rad]
 γ – fase da resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcott [rad]
 Δ_y, Δ_z – perturbações nas direções y e z [m]
 η – movimento de nutação [rad]
 θ – deslocamento angular do rotor [rad]

$\lambda, \{\phi\}$ – autovalor e autovetor correspondente
 $[A]$ – matriz espectral ou matriz dos autovalores
 μ – permeabilidade magnética do ar [Wb/Am]
 μ_m – viscosidade absoluta do filme de óleo [Pa.s]
 ξ – fator de amortecimento
 ρ – densidade absoluta [kg/m³]
 σ_k, ω_k – partes real e imaginária do k-ésimo autovalor
 $\{\Phi\}$ – vetor de resposta do problema de autovalor e autovetor
 ψ – movimento de precessão [rad]
 $[\Psi]$ – matriz modal ou matriz dos autovetores
 ω – frequência das componentes harmônicas da série de Fourier [Hz]
 ω_n – frequência natural [Hz]
 Ω - velocidade de rotação do eixo ou movimento de spin [rpm]

.....

Sobrescritos

. – diferenciação em relação ao tempo
 – – complexo conjugado

Sumário

1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	4
2.1 Dinâmica de Rotores	4
2.2 Atuador Magnético	7
3 Modelagem	15
3.1 Sistema Mecânico	15
3.1.1 Rotor de Jeffcott e Desbalanceamento	17
3.1.2 Modelo em Elementos Finitos	21
3.1.3 Força Peso	28
3.1.4 Mancais Hidrodinâmicos - Modelos Lineares	29
3.2 Sistema Magnético	34
3.2.1 Campo magnético e força magnética	35
3.2.2 Montagem Diferencial e Linearização	40
3.2.3 Histerese e Fluxo Magnético de Polarização	42
3.2.4 Controle	45
3.2.5 Sensor de Efeito <i>Hall</i>	45
3.2.6 Amplificador PWM	47
3.2.7 Modelo Matemático Completo do Sistema Magnético	48
3.3 Espaço de Estados	50
4 Ferramentas de Análise	52
4.1 Integração Numérica	54
4.1.1 Órbitas	54
4.1.2 Série de Fourier, DFT e FFT	56
4.1.3 Diagrama em Cascata	58
4.2 Resposta Livre	62
4.2.1 Problema de Autovalor e Autovetor	63
4.2.2 Diagrama de Campbell e Velocidades Críticas	66

4.2.3 Modos Naturais ou Modos Próprios de Vibrar	67
4.3 Resposta Forçada	71
4.3.1 Função Resposta em Frequência (FRF)	72
4.3.2 Modos Operacionais	74
4.4 Programa Desenvolvido	76
5 Atuador Magnético	78
6 Descrição do Sistema e Modelos	84
6.1 Descrição da Bancada Experimental	84
6.2 Modelo em Elementos Finitos	87
7 Resultados	90
7.1 Análises do Sistema em Estudo	90
7.2 Validação do Modelo – Testes Experimentais	99
8 Conclusões	108
9 Referências Bibliográficas	110
Apêndice A – Série de Fourier	117

1 Introdução

Máquinas rotativas ocupam um lugar de destaque no contexto de máquinas e estruturas devido à sua presença em diversas áreas. Como exemplo, tem-se sua utilização na forma de turbinas de grande porte em usinas hidrelétricas e termoeletricas, em geradores de usinas eólicas, em aeronaves, em motores de propulsão naval, em automóveis, em compressores e em bombas.

Estas aplicações estão associadas à mecânica (cinética) devido à alta velocidade a que seus eixos são submetidos e à inércia de seus componentes associados. Portanto, é necessário conhecer o comportamento dinâmico destas máquinas para que seu projeto seja adequado, uma vez que um acidente pode causar grandes danos.

A dinâmica de rotores é um vasto campo de estudo em vista da quantidade significativa de fenômenos característicos envolvidos. Isto se deve à complexidade dessas máquinas, que podem ser constituídas de diversos rotores, acoplamentos entre eixos, entre eixo e motor de acionamento, selos de fluxo e mancais hidrodinâmicos, magnéticos ou de rolamento.

Atualmente, com o auxílio de computadores, modelos bem realistas são utilizados, permitindo uma previsão muito boa do comportamento dos eixos. Mas, conforme visto acima, a análise de máquinas rotativas não pode ser restrita apenas ao eixo; mancais hidrodinâmicos, por exemplo, podem levar o sistema à instabilidade quando sua rotação chega próxima ao dobro da velocidade crítica (fenômeno conhecido na literatura por “*oil whip*”). Portanto, também são adicionados os efeitos de seus outros elementos constituintes. A partir da resposta destes modelos, o projeto das máquinas pode ser otimizado em função do cálculo das frequências críticas e de simulações das condições de utilização. Esta informação pode ser utilizada como base para o controle de vibração do rotor durante sua operação, partida, aceleração ou desaceleração, ou ainda, para o controle das instabilidades.

No contexto da identificação e ajuste de parâmetros, a análise modal constitui-se numa

técnica amplamente empregada no estudo dinâmico de máquinas e estruturas. Nesta técnica, em geral, uma força de excitação é aplicada à estrutura e, então, sua resposta é medida. Na maioria dos casos esta força é aplicada por um dispositivo eletromecânico, denominado *shaker*, ou por meio de martelos de impacto. Sob o controle de um gerador de sinal, um *shaker* pode excitar o sistema com sinais de diferentes tipos e características. A conexão física entre a estrutura e a fonte de excitação, bem como a qualidade do sinal gerado, são importantes fatores na qualidade dos resultados experimentais.

Na dinâmica de rotores há um fator limitante na parte experimental, envolvendo a análise modal de máquinas rotativas a altas velocidades: o atrito gerado na conexão da fonte de excitação externa com o rotor pode inserir indesejadas forças tangencias no sistema, além de ser uma grande fonte de ruído.

Diante dessa limitação, atuadores eletromagnéticos surgem como uma solução viável para o estudo de máquinas rotativas a altas velocidades de rotação, pois possibilitam a excitação do sistema através de forças eletromagnéticas, sem nenhum tipo de interação mecânica entre a fonte de excitação e a estrutura em análise, fato este que corrobora com a motivação deste trabalho.

Ao modelo do rotor foi integrado o modelo físico de um atuador magnético utilizado como fonte de excitação externa sem contato.

Para a validação, os resultados obtidos nas simulações foram comparados com resultados adquiridos em uma bancada de testes em laboratório.

Portanto, este trabalho contribui na integração de um modelo para máquinas rotativas ao modelo de um atuador magnético utilizado como fonte de excitação externa, constituindo o alicerce para a utilização do atuador magnético como fonte de excitação para a realização de análise modal de máquinas rotativas, e como atuador para o controle de vibração ou de instabilidades induzidas por mancais hidrodinâmicos, objetivos principais deste trabalho.

Na sequência, o capítulo 2 deste trabalho apresenta uma revisão da bibliografia relevante para o desenvolvimento do modelo em elementos finitos do eixo, do modelo dos mancais hidrodinâmicos e do modelo do atuador magnético.

A modelagem de todo o sistema integrado é desenvolvida no capítulo 3, e a descrição das ferramentas utilizadas em sua análise são descritas no capítulo 4. No capítulo 5 é apresentado o atuador magnético e sua caracterização. Por fim, a montagem experimental, os modelos utilizados e o programa desenvolvido são descritos no capítulo 6.

A comparação entre os resultados simulados e experimentais é apresentada no capítulo 7 e, finalmente, no capítulo 8, são apresentadas as conclusões finais e sugestões para continuidade do trabalho.

2 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica é apresentada em duas partes, sendo que a primeira faz um breve levantamento da história da dinâmica de rotores e apresenta alguns trabalhos desenvolvidos recentemente na área. A segunda parte trata de atuadores e mancais magnéticos.

2.1 Dinâmica de Rotores

De acordo com Vance (1988), Rankine foi o primeiro a publicar um trabalho sobre a análise de dinâmica de rotores, em 1869. Seu trabalho estudou o comportamento de sistemas rotor-mancal nas velocidades críticas. Utilizando um modelo composto por uma massa rígida descrevendo uma órbita circular e uma mola radial, Rankine previu erroneamente que máquinas rotativas jamais seriam capazes de ultrapassar a primeira velocidade crítica. Em 1883, Carl Gustaf Patrik de Laval construiu a primeira turbina a vapor de um estágio, e focou seu estudo na observação do efeito da auto-centragem do eixo, quando da rotação acima da velocidade crítica.

Segundo Kramer (1993), com os trabalhos de Dunkerley (1894) e Föppl (1895), foi mostrado que o eixo possui várias velocidades críticas. O momento giroscópico também passou a ser considerado, juntamente com sua dependência da velocidade de rotação. Em 1910, Stodola apresentou um procedimento gráfico para calcular as velocidades críticas, que foi utilizado até o início da utilização dos computadores, quando este método foi substituído pelo método da matriz de transferência de Myklestad (1944) e Prohl (1945).

O modelo utilizado por Föppl, composto por um eixo sem massa, com um disco circular em seu centro, suportado por mancais rígidos, atualmente recebe o nome de rotor de Jeffcott. Este nome é utilizado graças ao trabalho de Henry Homan Jeffcott, em 1919, onde foi analisada a resposta ao desbalanceamento de máquinas rotativas submetidas a altas velocidades de rotação.

Sua análise explicou como a amplitude do movimento de precessão do eixo se torna máxima na velocidade crítica, mas diminui quando a velocidade de rotação se torna maior devido ao fenômeno da auto-centragem.

É importante observar que, principalmente na Europa, este modelo também é conhecido como rotor de Laval, devido à sua grande semelhança com o rotor citado anteriormente, construído por Laval.

Atualmente, com a utilização de computadores na modelagem de eixos, foi desenvolvida uma técnica denominada Modelagem por Elementos Finitos. Nesta técnica, o eixo contínuo é dividido em finitos elementos. Os primeiros modelos utilizavam a viga de Euler-Bernoulli, cujas equações são obtidas a partir da aplicação da equação de Lagrange em uma viga simples. Em seguida, o modelo era expandido para duas direções, considerando apenas a inércia de translação do eixo e sua rigidez. Cowper (1966) deriva uma fórmula para o cálculo de coeficientes de cisalhamento de vigas e a compara às fórmulas de diversos outros autores. Um avanço na modelagem de máquinas rotativas é mostrado em Nelson e McVaugh (1976), que estudaram um modelo denominado viga de Rayleigh, que leva em consideração a inercia de rotação do eixo e o efeito giroscópico, dependente da velocidade de rotação. No trabalho de Zorzi e Nelson (1977) é inserido o amortecimento interno na modelagem de elementos finitos e estudada sua influência na estabilidade das máquinas rotativas. O amortecimento interno é inerente à capacidade do material constituinte do eixo de dissipar energia através do atrito de suas camadas cristalinas. Em 1980, os mesmos autores publicaram em um trabalho sobre a influência do torque axial na vibração translacional do eixo, adicionando uma matriz de rigidez proporcional ao torque aplicado. Buscando uma aproximação melhor, Nelson (1980) estudou a incorporação do efeito de cisalhamento transversal na modelagem de máquinas rotativas, modelo conhecido como viga de Timoshenko, e concluiu que sua adição aumenta a precisão dos cálculos das frequências naturais do sistema.

Todos os estudos descritos anteriormente consideravam um eixo cilíndrico, o que implica em uma seção transversal constante, logo, inércia constante ao longo de todo seu comprimento.

Mas, como isso não é observado em algumas máquinas rotativas, a solução era aproximar o perfil cônico de alguns eixos para diversos elementos cilíndricos, aumentando ou diminuindo gradativamente seus diâmetros. Neste sentido, Greenhill et al. (1985) e Genta e Gugliotta (1988) propõem duas formulações para elementos cônicos, obtendo assim, mais precisão nos cálculos para eixos com este formato.

Uma vez obtido um modelo representativo do eixo, deve-se incorporar os modelos dos outros elementos das máquinas rotativas (como mancais, selos de fluxo, estruturas de sustentação, rotores), de forma a estudar os demais fenômenos inerentes a estes sistemas. Nelson (2007) faz uma revisão sobre estes principais fenômenos, discorrendo de maneira informativa, sem entrar nos equacionamentos. E Swanson et al. (2005), foca nos modos de vibrar e velocidades críticas de máquinas rotativas.

Autores considerados referências na área, como Vance (1988), Kramer (1993) e Childs (1993), modelaram muitos dos componentes citados anteriormente e analisaram suas influências em máquinas rotativas. Vários trabalhos mais aprofundados em cada uma destas áreas podem ser encontrados na literatura.

Cavalca (1988) estudou a utilização de roletes externos para inserir amortecimento ao sistema durante sua passagem pela velocidade crítica, reduzindo assim a amplitude da vibração.

A análise e comparação de vários métodos para o cálculo de coeficientes de mancais hidrodinâmicos foi feita por Silva(2004). Machado e Cavalca (2009) utilizaram o método das diferenças finitas para resolver a equação de Reynolds para mancais multilobulares, e a partir do campo de pressão calcularam coeficientes lineares. Enquanto que Castro (2007) estudou um modelo não-linear e calculou coeficientes não-lineares, fazendo, ao final, a calibração de seus modelos através de um método de ajuste meta-heurístico baseado em algoritmo genético.

Rotores não simétricos ou com anisotropia apresentam modos de precessão direta e retrograda, neste sentido, Kessler (1999) estudou análise modal complexa com o objetivo de

distinguir estes dois modos. Santana (2009) focou seu estudo na influência do grau de anisotropia (tanto nos mancais quanto na estrutura de suporte) no aparecimento de modos de precessão retrógrada, porém utilizando a função resposta em frequência direcional. Mesquita et al. (2002) analisaram as vantagens da utilização da função resposta em frequência direcional (dFRF) sobre a função resposta em frequência tradicional (FRF) na análise de máquinas rotativas.

Mesquita (2004) estudou metodologias de identificação de modos operacionais e modos naturais de máquinas rotativas, focando nos modos operacionais mistos, onde algumas estações do rotor desenvolvem movimento de precessão direta, e outras, movimento de precessão retrógrada. Seus modelos são validados a partir de técnicas de análise modal tradicional e complexa.

Destaca-se, aqui, o interesse em realizar testes com excitação externa controlada e aplicada sem contato direto com o rotor, ou seja, através de atuadores magnéticos.

2.2 Atuador Magnético

A utilização da levitação magnética começou em meados de 1800, mas apenas na década de 1960 os mancais magnéticos se tornaram uma realidade; mesmo ainda sendo sistemas de alto custo, utilizados principalmente em aplicações de grande escala como turbogeradores (HARRIS e WIDBRO, 2003).

Atuadores magnéticos são compostos basicamente por solenoides; bobinas enroladas em um núcleo de material ferromagnético. Quando uma corrente é aplicada nas bobinas, um campo magnético é induzido em seu núcleo ferromagnético e por este conduzido, gerando a força magnética. O mancal magnético ativo (tratado na literatura por “*Active Magnetic Bearing*”, AMB) utiliza como base atuadores magnéticos (Figura 1). As principais vantagens deste mancal sobre outros tipos de mancais são a reduzida manutenção, ausência de lubrificação, e desta forma,

ausência de selos e de contaminação, e possibilidade de operar em condições extremas como baixíssimas ou elevadas temperaturas e vácuo. Os AMBs têm sido utilizados em diversos tipos de máquinas rotativas, desde bombas turbomoleculares a turbinas de vapor, devido a seu vasto campo de atuação, tanto no que diz respeito ao tamanho quanto a carga suportada. Devido à ausência de contato, a velocidade de rotação destes equipamentos é limitada apenas pelas propriedades de fratura de seu rotor, e não pelo mancal como era observado com mancais hidrodinâmicos ou de rolamento (KNOSPE, 2005).



Figura 1 – Mancal Magnético Heteropolar (HARRIS e WIDBRO, 2003).

Schweitzer (2002) aborda as limitações físicas dos mancais magnéticos, como capacidade de carga, velocidade, precisão, perdas, tamanho, rigidez e temperatura de operação. É colocado que a capacidade de carga do atuador depende de fatores como o arranjo e a geometria dos pólos, as propriedades do material do núcleo ferromagnético, os sistemas elétrico e eletrônico e as leis de controle empregadas. O autor também observa que a faixa de operação do mancal apresenta relação diretamente proporcional à potência do amplificador e inversamente proporcional à força magnética.

No trabalho de Araújo e Lépre (1993) foi apresentado um controle de vibração de rotores utilizando ímãs permanentes. Os autores utilizaram um ímã com deslocamento senoidal como excitação externa a 400 rad/s, com *air-gap* de 3mm e amplitude máxima de 1 mm. Como força de

controle foi utilizado outro ímã submetido às mesmas condições de deslocamento, porém com frequência de 480 rad/s. No teste experimental, utilizando um rotor com velocidade de 1000rpm, observou-se a redução da amplitude de vibração.

Em um relatório apresentado à Agência Espacial Norte Americana (NASA), Skowronski e Bisese (1993) fizeram uma introdução básica sobre atuadores magnéticos, onde estudam diversos parâmetros que influenciam a força magnética obtida, como número de espiras, corrente, área do pólo e tamanho do entreferro. Os autores abordam a utilização de atuadores magnéticos na sustentação de painéis solares de uma estação espacial.

Allaire et al. (1997), também em relatório à NASA, apresentaram os resultados obtidos sobre a perda de energia em mancais magnéticos. Os autores utilizaram, em uma câmara de vácuo, um rotor suportado por dois mancais magnéticos acionados por dois motores elétricos. O sistema foi projetado para medir as perdas nos mancais através da medição acurada da conversão da energia cinética do rotor em energia térmica. As comparações são realizadas entre duas geometrias de mancais: heteropolar (Figura 1) e homopolar (Figura 2). Sendo que a última configuração foi a que apresentou menores perdas. Os resultados obtidos também são verificados no modelo em elementos finitos desenvolvido pelos autores.

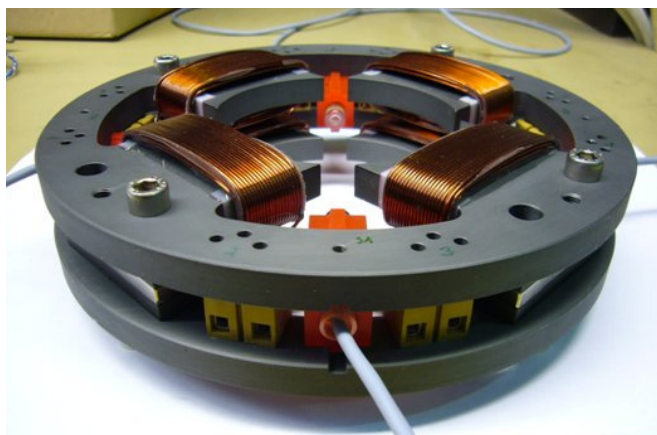


Figura 2 – Mancal Magnético Homopolar (http://www.iem.rwth-aachen.de/index.pl/mechatronics__drives?makePrintable=1 Acesso em 03/03/2011).

O completo desenvolvimento da utilização das equações de Maxwell no cálculo da força magnética pode ser encontrado em Maslen (2000), juntamente com um reassunto geral sobre a origem de forças magnéticas, ferromagnetismo, histerese. Neste trabalho, Maslen apresentou um estudo muito amplo sobre atuadores eletromagnéticos, desde uma análise detalhada sobre sua construção, até os cálculos do campo e força magnética obtidos. O autor também expõe toda a teoria por trás dos amplificadores utilizados em mancais magnéticos e como desenvolver o amplificador adequado. Características dos sensores de posicionamento normalmente utilizados em mancais eletromagnéticos são abordados. Por fim, o autor aborda técnicas de controle analógico e digital, bem como estratégias de controle no espaço de estados.

Howe (2000) apresenta diversas aplicações que têm sido desenvolvidas na Universidade de Sheffield (Reino Unido), como controle de flaps de aviões, controle de válvulas de injeção de motores a diesel e atuadores de múltiplos graus de liberdade.

No trabalho de Aenis et al. (2002) é estudada a identificação de falhas através de mancais magnéticos utilizados em bombas de água. O diagnóstico foi realizado a partir de funções de resposta em frequência (FRF). Para que essa técnica possa ser aplicada corretamente, faz-se necessária a correta estimativa da força magnética. Desta forma, um dos pontos de destaque do trabalho é a análise de diversas formas de estimar estas forças. Os autores concluíram que a partir da medição da corrente das bobinas obtém-se um erro máximo de 8% na estimação da força. Utilizando sensores de efeito Hall em um dos pólos do atuador esse erro cai para 2% e, com um sensor em cada um dos dois pólos, para 1%.

Boehm et al. (1993) apresentaram uma comparação entre alguns tipos de sensores utilizados em mancais magnéticos: sensores de corrente parasita (*eddy current*), de efeito hall, ultrassônicos, ópticos, capacitivos e a laser. Os autores analisam características como resposta em frequência, estabilidade, sensibilidade a ruído, e a temperatura e defasagem entre sinal de entrada e de saída.

A identificação de falhas em trincas e no contato do eixo com selos foi feita no trabalho de

Bash (2005), porém o autor utilizou os mancais magnéticos como atuadores magnéticos, uma vez que o sistema era suportado por mancais convencionais.

Polajzer (2003) estuda a construção de mancais magnéticos utilizando funções de otimização para determinar seus parâmetros geométricos. Também são apresentadas simulações em elementos finitos na análise do campo magnético gerado. O autor finaliza o trabalho desenvolvendo um controlador PI em cascata com um PD para fazer o controle do mancal.

Chiba et al. (2005) é uma grande referência nesta área. Seu trabalho aborda o desenvolvimento de atuadores magnéticos incluindo a montagem diferencial onde se tem dois atuadores em lados opostos (Figura 3), uma vez que atuadores magnéticos só geram força de atração. Também é feito o cálculo da força magnética e sua linearização utilizando uma corrente de polarização constante. Jastrzebski e Pöllänen (2009) propõe outra solução para a linearização, onde é utilizada uma corrente de polarização variável, visando minimizar o gasto de energia e a sensibilidade do sistema a ruídos.

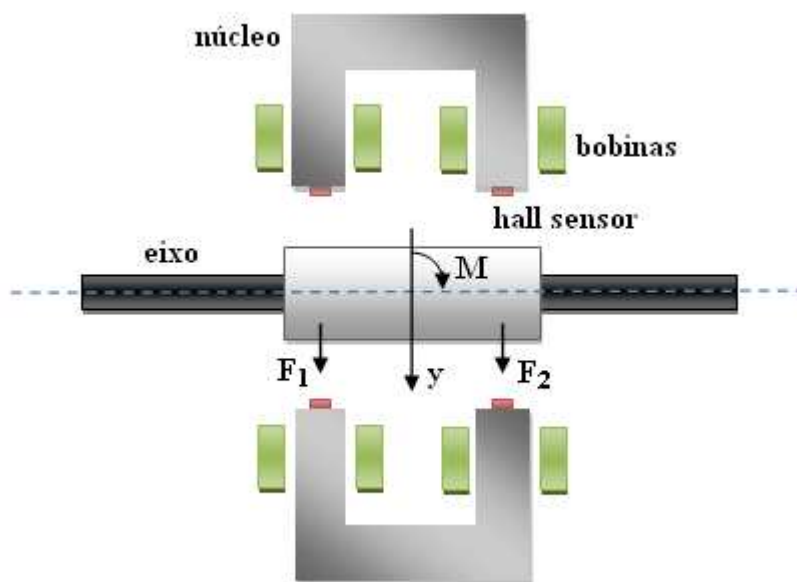


Figura 3 – Montagem diferencial.

Ainda no trabalho de Chiba et al. (2005) são desenvolvidos modelagem, controle, e sistema de potência para mancais magnéticos e motores elétricos sem mancal, onde a sustentação do rotor é feita pelo próprio motor.

Este é o tema do trabalho de Ferreira et al.(2002). Foi desenvolvida uma máquina de indução trifásica sem mancal. Para sustentar o rotor, são utilizados atuadores magnéticos onde suas bobinas são apresentadas sobre o mesmo encapsulamento das bobinas destinadas à geração de torque. Para fazer o controle da posição do sistema foram utilizados dois controladores, um controlador PD para fazer o controle da posição rotor devido a suas características de resposta rápida, e um controlador PI para controlar a corrente, escolhido devido a peculiaridade de zerar erros em regime, o que garante o nível de corrente no sistema.

Um atuador magnético em uma direção foi construído por Furtado (2008). Para controlar a força do atuador, um controlador proporcional foi implementado analogicamente a partir de amplificadores operacionais. É apresentada a bancada utilizada nos testes experimentais, onde foi possível a obtenção da função de transferência entre a força magnética do atuador e as células de carga, os sensores de deslocamento da massa e os sensores de deslocamento dos mancais.

A partir de simulações feitas em elementos finitos, Furtado et al. (2008), são analisadas as influências de detalhes construtivos como geometria dos pólos, distribuição das espiras no núcleo ferromagnético e posição dos sensores de efeito hall, utilizados na medição do campo magnético. Pilat (2010) apresenta um algoritmo utilizado juntamente com um programa CAD para otimizar a geometria do pólo magnético, em seguida, as geometrias obtidas eram importadas para um *software* de elementos finitos onde eram validadas em função da força magnética e do campo magnético obtidos.

Em Castro et al. (2007) são apresentados resultados de testes experimentais do atuador de Furtado (2008), comparando diferentes dimensões de *air-gap*. Variando-se a corrente utilizada, também são levantadas as curvas de saturação do material do atuador. Um resultado importante é que, os pólos do atuador magnético exercerem forças magnéticas F_1 e F_2 muito próximas em

magnitude, de forma que o momento resultante M no eixo é desprezível (Figura 3).

O trabalho de Cole et al.(2004) se insere nesse contexto de detecção de falhas. Porém, seu objetivo é desenvolver um controle ativo para o que os autores chamam de falhas externas e falhas internas. Falhas externas ocorrem devido a perturbações externas ao sistema do atuador magnético, como perdas de massa, deformações e até mesmo quebra do rotor. Falhas internas são erros de *software*, falhas em placas de aquisição, em bobinas do atuador, em sensores; ou seja, tudo aquilo que prejudica os processos de atuação, controle e aquisição de dados. Foi desenvolvido um controlador robusto em conjunto com um sistema de detecção de falhas implementado a partir de uma rede neural.

Os estudos de Silva (2006) também são voltados para a detecção de falhas em sistemas rotativos com mancais magnéticos ativos. O diagnóstico foi baseado no emprego de equações de correlações, através da formulação matricial de Ljapunov, para sistemas lineares estacionários, juntamente com redes neurais artificiais. A técnica foi aplicada a partir de dois modelos realizados a partir do método de elementos finitos para o rotor. O autor conseguiu detectar, localizar e discernir falhas mecânicas e elétricas no sistema.

Confiabilidade e segurança aplicados a mancais magnéticos são os temas de estudo de Schweitzer (2005). O autor caracteriza os mancais magnéticos como sistemas tipicamente mecatrônicos, uma vez que são compostos de sistema elétrico, mecânico e de processamento de dados (*software*). Desta forma, estão sujeitos a uma vasta gama de falhas em seus subsistemas, exemplificadas pelo autor. Apesar de ser teoricamente impossível criar um sistema a prova de falhas, o autor sugere diversas medidas que, juntas, podem aumentar sensivelmente a confiabilidade e segurança desse tipo de sistema. Por exemplo, a utilização de redundâncias e mancais de segurança, a aplicação da norma ISO (mais especificamente a norma ISO 14839 – Vibração de Máquinas Rotativas Equipadas com Mancais Magnéticos Ativos), utilização de FMECA (*Failure Modes, Effects, Criticality Analysis*) que consiste na análise do produto feita por especialistas de diversas áreas como projeto, produção, teste, reparo e usuários finais. É abordado também o conceito de máquinas inteligentes, que são máquinas capazes de reconhecer

seu estado atual e de otimizá-lo. A capacidade de auto-diagnóstico e auto-calibração reduz a necessidade de manutenção e aumenta a segurança do sistema. Por fim, foi apresentada uma bancada onde foi testado o conceito de máquina inteligente.

Guiráo (2006) estudou a influência da variação dos parâmetros do controle *feedback* tipo PID em sistemas com mancais magnéticos. Um controle adaptativo, do tipo *feedforward* utilizando um algoritmo LMS (*Least Mean Square*), foi utilizado em sobreposição ao controle PID para fazer o controle da vibração do rotor nas velocidades críticas. Também foi analisado o efeito da posição dos sensores de erro e a variação do mancal utilizado no controle da vibração. Em análise semelhante, Perini (2009) comparou a redução na vibração de um sistema sustentado por mancais convencionais, utilizando o mancal magnético apenas como atuador utilizando um controlador *feedback*, e outro sistema suportado por mancais magnéticos também utilizados no controle da vibração, utilizando o controlador *feedforward* sobreposto ao *feedback*. Seu estudo foi focado na análise do desempenho do sistema de controle em função da posição e da quantidade de sensores de erro.

3 Modelagem

Os sistemas com atuadores magnéticos podem ser subdivididos em dois sistemas básicos a saber: mecânico (oriundo da máquina a ser excitada) e magnético (componentes do atuador magnético propriamente dito). Este capítulo apresenta cada um destes sistemas e, ao final, o modelo das equações no espaço de estados.

3.1 Sistema Mecânico

Na Figura 4 tem-se o sistema de referência inercial e um exemplo de modelo mecânico composto por um eixo, um disco e dois mancais; há também a representação da linha neutra (L.N.) ou linha de rotação própria do rotor.

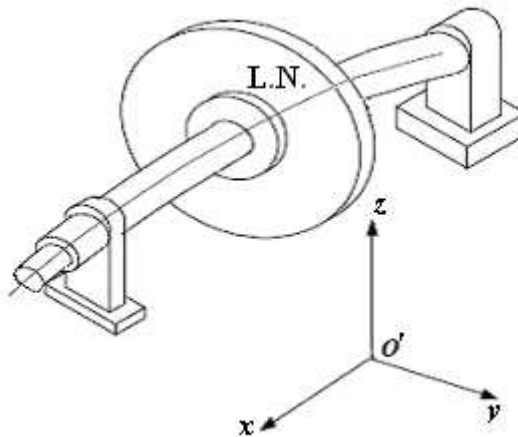


Figura 4 – Esquema de um sistema rotativo e sistema de referência.

A dinâmica de máquinas rotativas pode ser descrita a partir de três rotações conforme demonstrado na Figura 5: spin, precessão e nutação. Spin é a rotação própria do eixo; em torno de sua linha de centro (denominado por Ω).

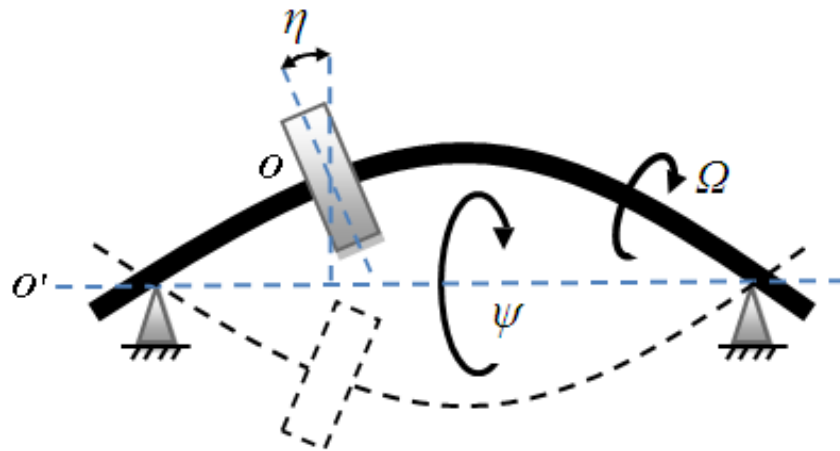


Figura 5 – Ângulos de rotação de uma máquina rotativa.

Diversos efeitos, que serão mostrados a frente (como as forças peso e de desbalanceamento), fazem com que o eixo gire fletido, desenvolvendo um arco que rotaciona em torno da linha que une os mancais. Este movimento é conhecido como precessão (ψ), podendo ser direta ou retrógrada; caso o movimento seja no mesmo sentido da rotação própria do eixo ou no sentido oposto, respectivamente. Este movimento também é chamado na literatura, em inglês, de *forward whirl* e *backward whirl*.

Conforme pode ser observado na Figura 5, quando o disco não está centrado no eixo, conforme se desenvolve o movimento de precessão, o disco realiza um movimento angular denominado nutação (η). Este movimento também ocorre quando a deflexão do eixo apresenta mais de um arco de flexão devido à excitação de outros modos de vibrar além do primeiro.

O modelo mecânico, apresentado nesta seção, foi dividido em quatro partes. Primeiramente é descrito o rotor de Jeffcott e a força de desbalanceamento, para então ser introduzida a modelagem do eixo utilizando o método dos elementos finitos. Em seguida, é apresentada a força peso, finalizando com o modelo dos mancais hidrodinâmicos.

3.1.1 Rotor de Jeffcott e Desbalanceamento

Conforme citado anteriormente, o rotor de Jeffcott (ou rotor Laval) corresponde a um modelo de máquina rotativa com dois graus de liberdade, composto por um eixo de massa desprezível, e um disco rígido posicionado no centro da linha axial que une os mancais. Desta forma, os dois graus de liberdade determinam o plano do deslocamento do disco. Os mancais são considerados rígidos, ou seja, com uma rigidez muito maior que a rigidez do eixo, que é calculada a partir da equação da viga bi-apoiada com uma carga em seu centro, conforme a Equação 1 (RAO, 2003). E o amortecimento corresponde a um amortecimento viscoso c .

$$k = \frac{48EI_{yy}}{L^3} \quad (1)$$

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi}{64}d^4 \quad (2)$$

Onde, E é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young), I_{yy} é o momento de inércia de área do eixo, L seu comprimento e d o diâmetro.

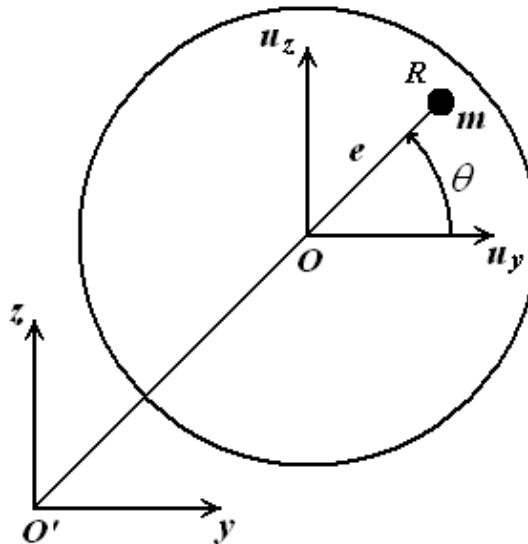


Figura 6 – Representação do desbalanceamento rotativo residual de massa.

A Figura 6 apresenta uma vista do plano yz da Figura 4 durante a operação do rotor, sendo O o centro geométrico do disco e a origem do sistema de coordenadas móvel, O' é a origem do referencial inercial u_y-u_z , localizado na linha que une o centro dos dois mancais, R é a posição do centro de massa do disco, e é a excentricidade, m é a massa do disco e θ é o deslocamento angular do disco devido à rotação do eixo.

Podemos obter as seguintes equações de movimento (KRAMER, 1993):

$$m\ddot{y}_R = -c\dot{y}_0 - ky_0 \quad (3)$$

$$m\ddot{z}_R = -c\dot{z}_0 - kz_0 \quad (4)$$

e os sub-índices se referem a:

R = centro de massa do disco

O = centro geométrico do disco

Nota-se que as forças devido às rigidezes e amortecimentos são funções do deslocamento do centro geométrico do eixo, e não do centro de massa, uma vez que estão associados à deflexão do eixo apenas. Assim, tem-se:

$$y_R = y_0 + e \cdot \cos\theta \quad (5)$$

$$\dot{y}_R = \dot{y}_0 - e \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \quad (6)$$

$$\ddot{y}_R = \ddot{y}_0 - e \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta - e \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta \quad (7)$$

$$z_R = z_0 + e \cdot \sin\theta \quad (8)$$

$$\dot{z}_R = \dot{z}_0 + e \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \quad (9)$$

$$\ddot{z}_R = \ddot{z}_0 + e \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - e \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta \quad (10)$$

E substituindo nas Equações 3 e 4 obtemos o efeito da massa desbalanceada no referencial inercial:

$$m\ddot{y}_0 + c\dot{y}_0 + ky_0 = me(\ddot{\theta} \cdot \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta) \quad (11)$$

$$m\ddot{z}_0 + c\dot{z}_0 + kz_0 = -me(\ddot{\theta} \cdot \cos\theta - \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta) \quad (12)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_{dy} \\ F_{dz} \end{Bmatrix} = me \cdot \dot{\theta}^2 \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} + me \cdot \ddot{\theta} \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

O vetor de forças da Equação 13 representa o desbalanceamento rotativo, um efeito que ocorre devido ao fato da distribuição das massas de todos os componentes das máquinas rotativas não serem perfeitamente distribuídas ao longo de suas seções transversais. Nos modelos de muitos autores (MESQUITA, 2004; SILVA, 2004; CASTRO, 2007; SANTANA, 2009), assim como neste trabalho, usualmente é levado em conta apenas o desbalanceamento dos discos, uma vez que suas massas costumam ser muito maiores que a massa de uma seção do eixo. Entretanto, há modelagens como a apresentada em Nelson (1980), onde é levada em consideração uma força de desbalanceamento distribuída ao longo de todo o eixo.

Considerando o sistema em rotação constante ($\ddot{\theta}=0$, $\dot{\theta}=\Omega$ e $\theta=\Omega t$), o termo de aceleração angular da Equação 13 é nulo, resultando em:

$$m\ddot{y}_0 + c\dot{y}_0 + ky_0 = me\Omega^2 \cos \Omega t \quad (14)$$

$$m\ddot{z}_0 + c\dot{z}_0 + kz_0 = me\Omega^2 \sin \Omega t \quad (15)$$

Assim, a resposta em regime permanente do sistema, de acordo com Kramer (1993), é:

$$y_0 = A \cdot \cos(\Omega t - \phi) \quad (16)$$

$$z_0 = A \cdot \sin(\Omega t - \phi) \quad (17)$$

Sendo que as amplitudes (A) e as fases (γ) em ambas as direções são iguais e dadas por:

$$A = \frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} \quad (18)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi \cdot r}{1-r^2} \right) \quad (19)$$

Tal que:

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (20)$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (21)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (22)$$

Onde r é a razão entre a velocidade de rotação do eixo (Ω) e a frequência natural (ω_n), e ζ é o fator de amortecimento.

A partir das Equações 16 e 17 observa-se que a órbita descrita pelo rotor isotrópico será sempre circular e em sincronia com a rotação do eixo, sendo chamada, portanto, de precessão síncrona. Conforme r aumenta, a Equação 19 mostra que o ângulo γ varia de 0 ($\Omega = 0$) a 90 graus ($\Omega = \omega_n$), quando então ocorre a inversão de fase até 180 graus ($\Omega \gg \omega_n$), e a massa desbalanceada desenvolve uma órbita menor do que o centro geométrico do eixo. Simultaneamente, da Equação 18, observa-se que a amplitude da órbita vai diminuindo e tende à excentricidade e . Estes dois efeitos combinados resultam no efeito da auto-centragem do eixo, ou seja, após cruzar a velocidade crítica, a órbita de precessão do eixo tende à excentricidade da massa desbalanceada.

3.1.2 Modelo em Elementos Finitos

Neste trabalho, o modelo dinâmico foi obtido utilizando-se o método dos elementos finitos. Neste método, um sistema contínuo é discretizado em elementos finitos considerados, individualmente, contínuos. Assim, o deslocamento de qualquer ponto do sistema é expresso em função dos deslocamentos de um conjunto finito de nós, aplicando-se uma função de interpolação. Desta forma, a equação de movimento resultante é (KRAMER, 1993):

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (23)$$

Onde $[M]$, $[C]$, $[K]$ e $[G]$ são as matrizes globais de massa, amortecimento, rigidez e efeito giroscópico, respectivamente. $\{F\}$ contém as forças externas como a força de desbalanceamento e a força peso, Ω é a velocidade de rotação do sistema.

A matriz $[C]$, que representa o amortecimento estrutural do rotor, é proporcional às matrizes de massa e de rigidez:

$$[C] = \alpha_c [M] + \beta_c [K] \quad (24)$$

Na modelagem por elementos finitos foram utilizadas as matrizes apresentadas em Nelson e McVaugh (1976). As matrizes são obtidas a partir da aplicação da Equação de Lagrange (Equação 25) aos elementos de viga e de disco.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} + \frac{\partial V_p}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (25)$$

Sendo:

T_c = energia cinética [J]

V_p = energia potencial [J]

q_i = i-ésima coordenada generalizada

F_{q_i} = força generalizada atuando em q_i [N]

A deformação do centro da seção transversal de um elemento é definida pelas translações $V(X,t)$ e $W(X,t)$, nas direções Y e Z , em relação ao referencial fixo XYZ . A orientação do elemento é fornecida pelas rotações $B(X,t)$ e $\Gamma(X,t)$ em torno dos eixos Y e Z , respectivamente. De forma que o vetor de coordenadas generalizadas, conforme a Figura 7 é dado por:

$$q = \{V_i \quad W_i \quad B_i \quad \Gamma_i\}^T \quad (26)$$

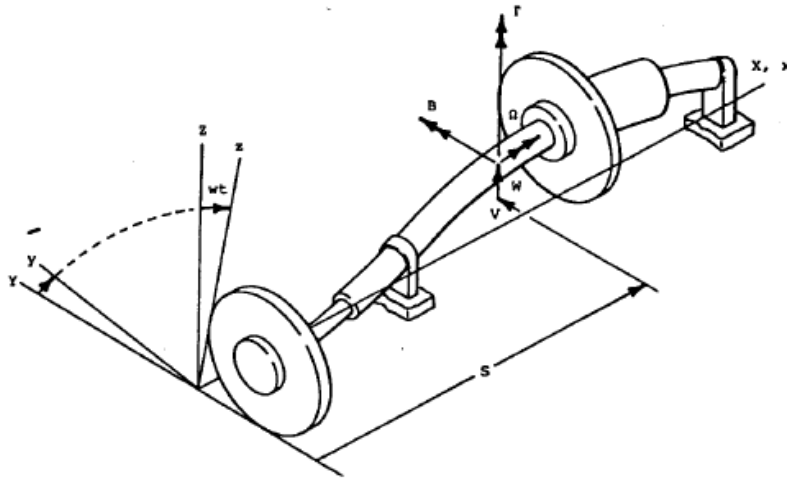


Figura 7 – Sistema de coordenadas utilizado por Nelson e McVaugh (1976).

Os discos são considerados corpos rígidos, sendo modelados por apenas um nó, conforme a Figura 8.

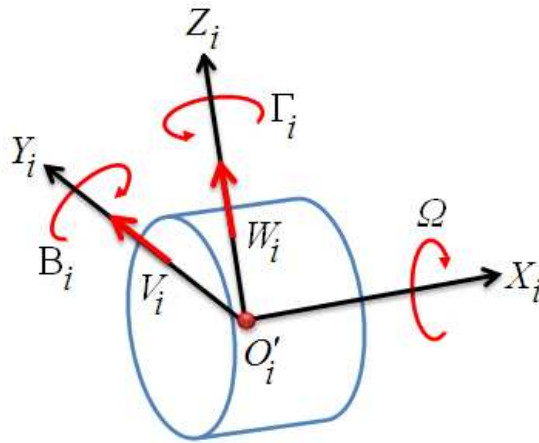


Figura 8 – Elemento de disco.

Portanto, para um elemento de disco, o desenvolvimento da Equação de Lagrange fornece a seguinte equação de movimento não amortecida:

$$[M_D]\{\ddot{q}_i\} + \Omega[G_D]\{\dot{q}_i\} = \{F\} \quad (27)$$

A matriz de massa é obtida a partir da soma de duas matrizes: a matriz de inércia de translação e a matriz de inércia de rotação:

$$[M_D] = [M_{DT}] + [M_{DR}] \quad (28)$$

Sendo que $\{F\}$ são as forças externas, como a força de desbalanceamento, $[M_{DT}]$ a matriz de inércia de translação do disco e $[M_{DR}]$ a matriz de inércia de rotação do disco. De acordo com Nelson e McVaugh (1976):

$$[M_{DT}] = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[M_{DR}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[G_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dx} \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$I_{dy} = I_{dz} = \frac{m_D}{12} \left(\frac{3}{4} (d_o^2 + d_i^2) + L_D^2 \right) \quad (32)$$

$$I_{dx} = \frac{m_D}{8} (d_o^2 + d_i^2) \quad (33)$$

Onde m_D é a massa do disco, I_{dy} é o momento de inércia radial e I_{dx} o momento de inércia polar, d_o o diâmetro externo do disco, d_i o diâmetro interno e L_D , a espessura do disco.

O eixo é modelado a partir de elementos de viga (contendo dois nós cada elemento) com massa contínua e seção transversal constante, Figura 9. As translações e rotações dos elementos de viga são calculadas a partir das coordenadas generalizadas dos extremos dos elementos, utilizando-se funções de forma.

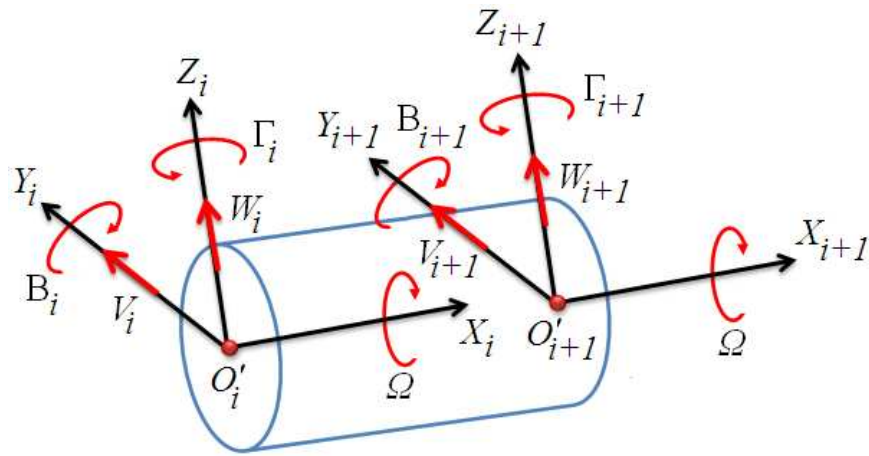


Figura 9 – Elemento de eixo.

Aplicando a Equação de Lagrange para um elemento de viga entre os nós i e j , obtém-se:

$$[M_E] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \end{Bmatrix} + \Omega [G_E] \begin{Bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{q}_j \end{Bmatrix} + [K_E] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (34)$$

A matriz de massa do elemento de viga $[M_E]$ também é composta por dois componentes: a matriz de massa clássica de um elemento de viga $[M_{ET}]$ e a matriz de massa de um elemento de viga que contém a influência do efeito inercial rotacional $[M_{ER}]$, conforme Equação 35.

$$[M_E] = [M_{ET}] + [M_{ER}] \quad (35)$$

E as matrizes (NELSON e MCVAUGH, 1976), são:

$$[M_{ET}] = \frac{\rho A L_e}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & & \\ & & -22L_e & 4L_e^2 & & & & \\ 22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13L_e & 156 & & & \\ 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 156 & & \\ 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 22L_e & 4L_e^2 & \\ -13L_e & 0 & 0 & -3L_e^2 & -22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[M_{ER}] = \frac{\rho d_e^2}{480L_e} \cdot \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & & \\ & & -3L_e & 4L_e^2 & & & & \\ 3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L_e & 36 & & & \\ 0 & -36 & 3L_e & 0 & 0 & 36 & & \\ 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & 3L_e & 4L_e^2 & \\ 3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$[G_E] = \frac{\rho A d_e^2}{240L_e} \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & & & \\ -3L_e & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -3L_e & 4L_e^2 & 0 & & & & \\ 0 & 36 & -3L_e & 0 & 0 & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L_e & 36 & 0 & & \\ -3L_e & 0 & 0 & L_e^2 & 3L_e & 0 & 0 & \\ 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & 3L_e & 4L_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[K_E] = \frac{EI_{yy}}{L_e^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & \\ 0 & -6L_e & 4L_e^2 & & & & & \\ 6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6L_e & 12 & & & \\ 0 & -12 & 6L_e & 0 & 0 & 12 & & \\ 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 4L_e^2 & \\ 6L_e & 0 & 0 & 2L_e^2 & -6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi}{64} d_e^4 \quad (40)$$

onde:

L_e = comprimento do elemento [m]

A = área da seção transversal do elemento [m²]

ρ = densidade do material [kg/m³]

d_e = diâmetro do elemento [m]

E = módulo de Young (módulo de elasticidade) [N/m²]

I_{yy} = momento de inércia de área [m⁴]

As matrizes de cada elemento são agrupadas em matrizes globais, que contém todos os graus de liberdade do modelo, conforme a Figura 10, utilizadas na equação de movimento do sistema rotativo (Equação 23).

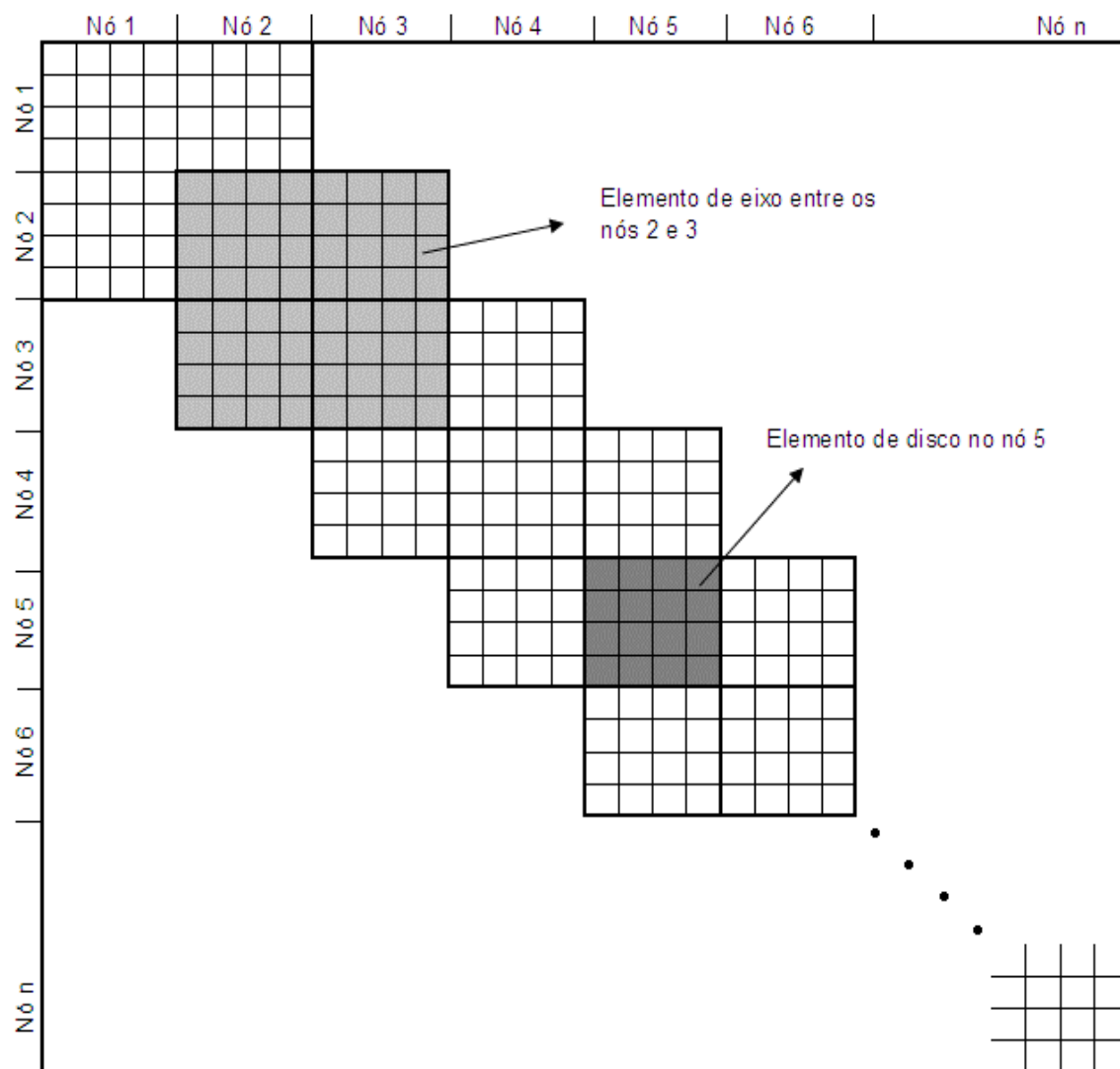


Figura 10 – Arranjo das matrizes de cada elemento na matriz global (CASTRO, 2007).

3.1.3 Força Peso

Em rotores verticais, a gravidade é desconsiderada na análise das vibrações laterais, uma vez que age no sentido axial do rotor e este grau de liberdade não é considerado nos modelos utilizados para análise de vibração lateral de rotores. Já em rotores horizontais este efeito não

pode ser negligenciado.

Para inserir a força peso no modelo, calcula-se a massa de cada elemento e multiplica-se pela gravidade. Então o peso total do elemento é igualmente distribuído, e somado no vetor de forças externas na posição relativa aos seus dois nós adjacentes.

3.1.4 Mancais Hidrodinâmicos - Modelos Lineares

Os mancais são elementos de sustentação, conectando a parte móvel à parte fixa de uma máquina rotativa. Sua função é restringir graus de liberdade do eixo absorvendo energia, sendo responsável por grande parte do amortecimento do sistema. Nos mancais hidrodinâmicos, o eixo é sustentado por um filme de óleo dentro de um alojamento com superfície curva (cilíndrica, elíptica ou multilobular).

Conforme o eixo inicia sua rotação, são geradas forças de cisalhamento que empurram o óleo lubrificante para a parte inferior do mancal. Isto gera uma alta pressão que tende a suportar a carga do rotor (W_m). Uma implicação deste mecanismo de operação é a existência de contato metal-metal (dada pela ausência do filme de óleo) no início e no fim do funcionamento do rotor, conforme ilustrado na Figura 11.

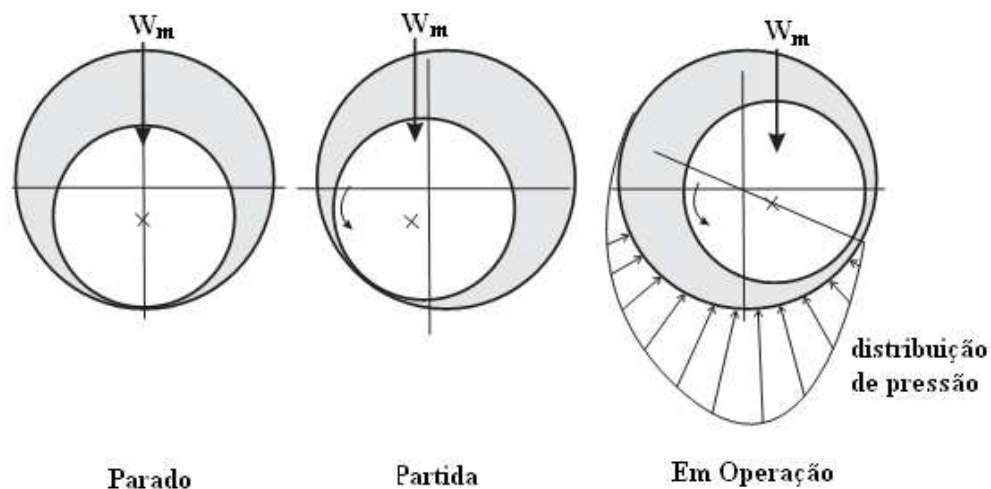


Figura 11 – Princípio de funcionamento de um mancal hidrodinâmico.

Outro efeito inerente a esse tipo de mancal é a auto-centragem do eixo. Com o aumento da velocidade de rotação, o aumento da pressão do óleo, e consequentemente, da espessura mínima do filme de óleo, tende a centralizar o eixo dentro do mancal, conforme ilustrado na Figura 12. A curva em vermelho é conhecida como Curva Guembel, e representa a posição estática do centro do eixo de acordo com a variação de sua velocidade de rotação.

Podem-se observar que, para velocidade nula, o eixo se encontra na posição inferior do mancal (ausência de filme de óleo) e para uma rotação infinita, tende a se localizar no centro do mancal.

Todas as órbitas obtidas para esse tipo de mancal ocorrem ao redor do ponto (representado na Figura 12 por “C”) da Curva Guembel, correspondente à velocidade de rotação do eixo. Na dinâmica de rotores, este ponto recebe a denominação de “locus”.

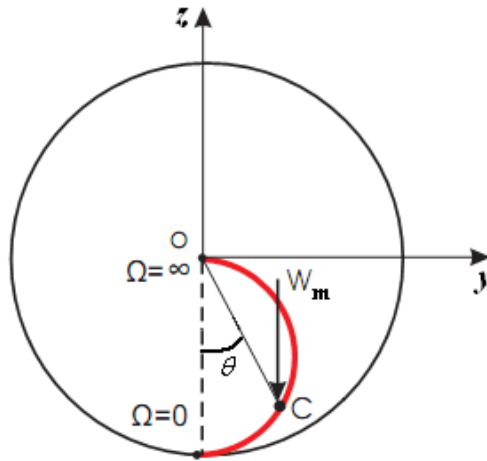


Figura 12 - Curva Guembel e Locus (lugar geométrico do centro do eixo).

Sendo o lubrificante responsável pelas forças hidrodinâmicas de sustentação e pelo campo de pressões, o modelo matemático deste tipo de mancal consiste na substituição do filme de óleo por coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes, como ilustrado na Figura 13, onde:

- K_{yy} , K_{zz} , C_{yy} e C_{zz} são os coeficientes de rigidez e amortecimento nas direções y e z .
- K_{yz} e C_{yz} são a rigidez e o amortecimento quando a força é aplicada na direção y porém com efeito na direção z .
- K_{zy} e C_{zy} são a rigidez e o amortecimento quando a força é aplicada na direção z porém com efeito na direção y .

Os termos K_{yy} , K_{zz} , C_{yy} e C_{zz} são chamados de coeficientes diretos, e os termos K_{yz} , K_{zy} e C_{yz} e C_{zy} são chamados de coeficientes acoplados ou cruzados.

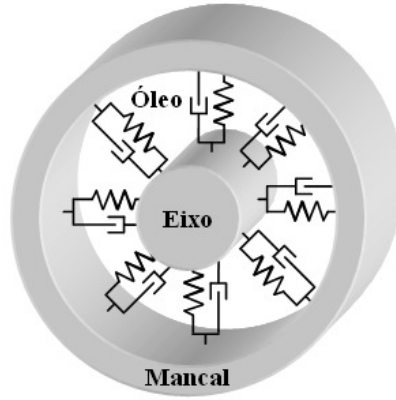


Figura 13 – Modelo matemático do mancal hidrodinâmico.

A distribuição de pressão do filme de óleo é dada a partir da equação de Reynolds (Equação 41), derivada por Osborn Reynolds em 1886, e resolvida a partir do método das diferenças finitas conforme Machado e Cavalca (2009).

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu_m \Omega \frac{\partial h}{\partial y} + 12\mu_m \frac{\partial h}{\partial t} \quad (41)$$

onde:

t = tempo

Ω = velocidade do rotor

h = espessura do filme de óleo

μ_m = viscosidade absoluta do filme de óleo

p = pressão gerada no interior do filme de óleo

Uma vez que o campo de pressão foi obtido, as forças de reação do filme de óleo são calculadas pela integração do campo de pressão que age na superfície do mancal:

$$\begin{Bmatrix} F_R \\ F_T \end{Bmatrix} = \int_{-L_m/2\theta_1}^{+L_m/2\theta_2} \int p \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} R_m d\theta dx \quad (42)$$

onde:

F_R = força de reação radial no mancal

F_T = força de reação tangencial no mancal

L_m = comprimento do mancal na direção x

θ = coordenada angular da posição estática do centro do eixo

p = pressão gerada no interior do filme de óleo

R_m = raio do mancal

E reescrevendo a equação no sistema de coordenadas xyz , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_R \sin \theta + F_T \cos \theta \\ F_R \cos \theta + F_T \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Como pode ser observado a partir da Equação 41, a força de reação depende dos deslocamentos e velocidades nas direções y e z . Assim, para pequenos deslocamentos (Δy e Δz) medidos a partir da posição de equilíbrio estático (y_0 e z_0), a expansão em série de Taylor até os termos de primeira ordem fornece:

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y0} \\ F_{z0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Sendo $F_{y0} = 0$, enquanto que $F_{z0} = W_m$ (carga estática). A partir da Equação 43, os coeficientes equivalentes são obtidos fazendo as derivadas parciais na condição de equilíbrio estático:

$$K_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial j} \right)_0 \quad (45)$$

$$C_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{j}} \right)_0 \quad (46)$$

Os coeficientes utilizados neste trabalho foram avaliados conforme descrito em Machado e Cavalca (2009); e fornecidos pelos próprios autores.

3.2 Sistema Magnético

O sistema magnético não é composto apenas pelo atuador magnético, incorporando, também, o controle da força do atuador, o amplificador de potência e o sensor de efeito hall utilizado na realimentação do controle do campo magnético (Figura 14). Esta seção foi subdividida em seis partes, de forma que as três primeiras abordam questões referentes à modelagem do atuador magnético propriamente dito, e as três partes seguintes apresentam os modelos utilizados para o sensor de efeito hall, o controlador e o amplificador PWM. Finalmente, na última parte é apresentado o modelo completo do atuador magnético a partir das equações desenvolvidas.

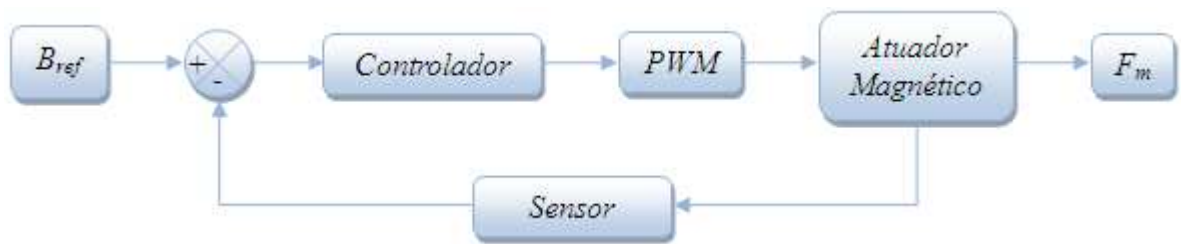


Figura 14 - Diagrama do Sistema do Atuador Magnético.

Conforme será mostrado, a força magnética é proporcional ao campo magnético, desta forma, para uma força desejada tem-se o fluxo magnético necessário (B_{ref}), assim o controle da força do atuador é feito a partir do controle do campo magnético (FURTADO, 2008). Esta abordagem se difere na abordagem utilizada por diversos autores (MASLEN, 2000; CHIBA,

2005; PERINI, 2009) que tratam de mancais magnéticos; uma vez que, nestes casos, para mancais magnéticos, o controle é feito em função do deslocamento do eixo. O objetivo do mancal é manter a levitação, sem se preocupar com a força que é aplicada. Já no caso do atuador magnético, o controle é feito em função do campo, pois deseja-se que o atuador aplique no eixo uma força determinada, independentemente do deslocamento do eixo.

3.2.1 Campo magnético e força magnética

Um modelo esquemático do sistema de um atuador magnético é apresentado na Figura 15. Nos atuadores eletromagnéticos, a bobina do circuito elétrico é responsável por gerar um campo magnético no material ferromagnético. Assim, nas folgas (*air-gaps*) (l_g), são induzidos pólos magnéticos norte (N) nas extremidades de onde o campo emerge, e pólos magnéticos sul (S) nas extremidades onde o campo imerge, fazendo com que sempre apareça uma força de atração (F_m) entre as partes móvel (sistema mecânico) e fixa (atuador).

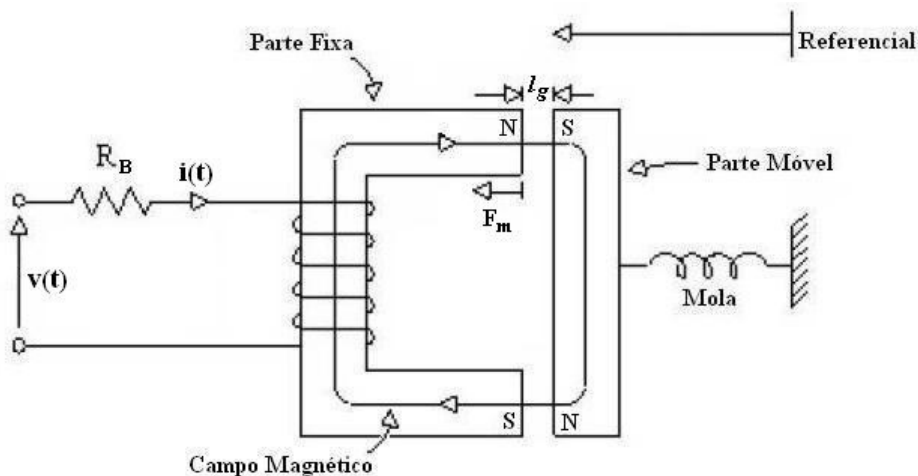


Figura 15 – Modelo Completo de um atuador magnético.

No cálculo do campo magnético resultante devido a uma distribuição de correntes, para casos onde relativa simetria está presente, podem-se utilizar uma lei desenvolvida por André

Marie Ampère (1775-1836).

A Lei de Ampère diz que “a integral de linha sobre um caminho fechado da intensidade de campo magnético (H) produzido por correntes é igual à corrente líquida que atravessa a superfície limitada pelo caminho de integração” (HALLIDAY et al, 2007). A esse caminho fechado, dá-se o nome de curva amperiana. Portanto, tem-se:

$$\oint H \cdot dl = \sum i \quad (47)$$

A densidade de fluxo magnético (B) pode ser encontrada a partir de uma relação com a intensidade de campo magnético (H), dada por um fator característico do meio, a permeabilidade magnética (μ). A permeabilidade magnética do ar é $4\pi 10^{-7}$ Wb/Am. Assim:

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (48)$$

Desta forma, para o atuador magnético representado na Figura 16, podem-se escrever:

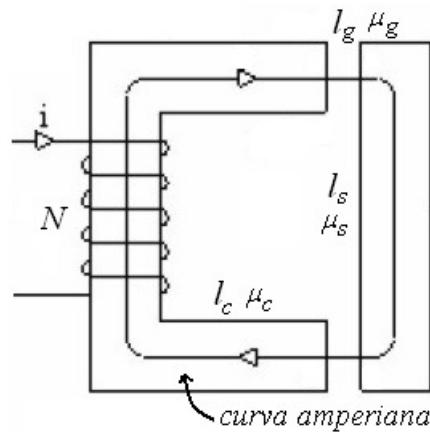


Figura 16 - Sistema magnético.

$$N \cdot i = B \cdot \left(\frac{2 \cdot l_g}{\mu_g} + \frac{l_s}{\mu_s} + \frac{l_c}{\mu_c} \right) \quad (49)$$

Onde:

i = corrente elétrica [A]

B = densidade de fluxo magnético [T]

H = intensidade de campo magnético [A/m]

N = número de espiras da bobina

l = comprimento da curva amperiana [m]

μ = permeabilidade magnética do meio [Wb/Am ou H/m]

e os sub-índices se referem a:

g = *air-gap*

c = núcleo ferromagnético do mancal

s = eixo

Como as permeabilidades magnéticas dos materiais do atuador e do eixo são muito maiores que a do *air-gap*, é possível desprezar seus respectivos termos (CHIBA, 2005), resultando em:

$$B = \frac{\mu_g \cdot N \cdot i}{2 \cdot l_g} \quad (50)$$

Segundo Sen (1997), a energia armazenada no campo magnético é dada por:

$$W_f = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_g} \cdot v_g \quad (51)$$

onde v_g é o volume do *air-gap*, dado por:

$$\nu_g = A_g \cdot l_g \quad (52)$$

Sendo A_g a área do pólo do atuador. Assim,

$$W_f = \frac{B^2 \cdot A_g \cdot l_g}{\mu_g} \quad (53)$$

A força magnética pode ser obtida através da derivada da energia armazenada no campo magnético em função do espaço, desta maneira:

$$F_m = -\frac{dW_f}{dx} = -\frac{B^2 \cdot A_g}{\mu_g} \quad (54)$$

Ou, substituindo a Equação 50 na Equação 53,

$$F_m = -\frac{\mu_g \cdot A_g \cdot N^2 \cdot i^2}{4 \cdot l_g^2} \quad (55)$$

Deve-se ressaltar que o sinal negativo na expressão simboliza que as forças geradas serão sempre de atração para eletroímãs, como mostrado anteriormente.

Desta forma, a partir da Equação 54, fica claro que, uma vez garantido o campo magnético do atuador, garante-se a força magnética. E o campo magnético, dado pela Equação 50, por sua vez, é dependente de duas grandezas variáveis: o *air-gap* e a corrente nas bobinas do atuador. O *air-gap* varia com a vibração do eixo, portanto, este é o efeito que deve ser compensado pelo controlador do atuador magnético, mostrado adiante. Esta compensação é feita através da variação da corrente nas bobinas.

Um ponto importante a ser observado, é o fato do sistema elétrico do atuador magnético se

tratar de um sistema de primeira ordem composto pela resistência do fio (R_B) e pela indutância da bobina (L_B), denominado, portanto, circuito RL (Figura 17).

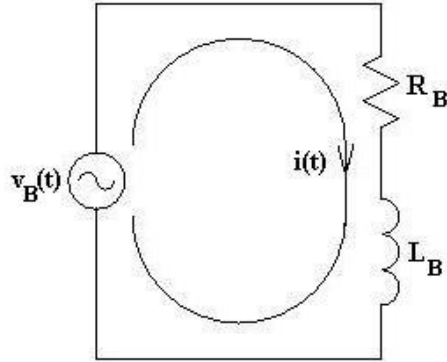


Figura 17 – Sistema elétrico.

Quando este sistema é submetido a uma tensão variável $v_B(t)$, aplicando-se a lei de Kirchoff para sistemas de malha fechada, obtém-se:

$$v_B(t) = v_R(t) + v_L(t) \quad (56)$$

Onde as quedas de tensão do indutor ($v_L(t)$) e do resistor ($v_R(t)$) são dadas respectivamente por:

$$v_L(t) = L_B \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (57)$$

$$v_R(t) = R_B \cdot i(t) \quad (58)$$

Assim, a Equação 56 pode ser reescrita como uma equação diferencial (Equação 59), que fornece a relação entre a tensão aplicada na bobina e a corrente obtida.

$$L_B \cdot \frac{di(t)}{dt} + R_B \cdot i(t) = v_B(t) \quad (59)$$

Por este motivo, foi utilizado um amplificador PWM no modo de controle de corrente, (conforme será mostrado a frente), onde, para uma dada tensão de entrada do amplificador, seu controle interno se encarrega de garantir uma corrente de saída proporcional, independente da dinâmica do sistema elétrico (regida pela Equação 59).

Consequentemente, conforme citado acima, ao controlador do atuador magnético, basta apenas realizar a compensação da variação do *air-gap*, em função da vibração do eixo.

3.2.2 Montagem Diferencial e Linearização

Conforme visto, atuadores magnéticos só podem proporcionar forças de atração. Desta forma, para se poder excitar o sistema nos dois sentidos é necessário utilizar um par de atuadores radialmente opostos (MASLEN, 2000). A chamada, montagem diferencial, está representada na Figura 18.

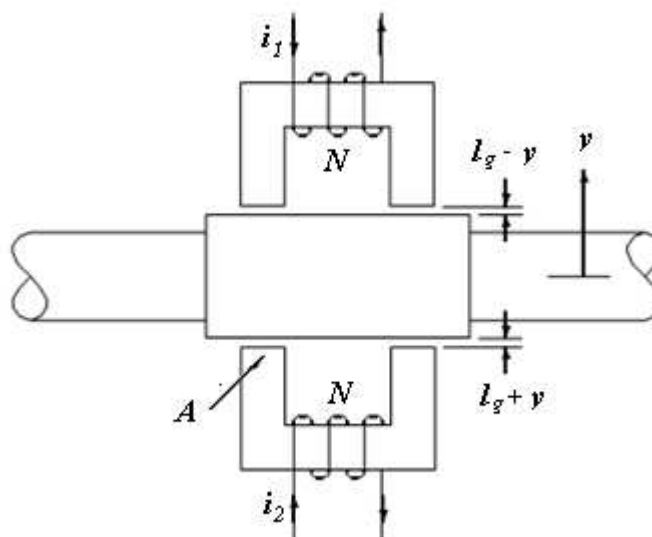


Figura 18 - Montagem Diferencial (MASLEN, 2000).

Para a direção y, a partir da Equação 54, tem-se a seguinte força:

$$F_m = \frac{A_g}{\mu_g} (B_1^2 - B_2^2) \quad (60)$$

Para linearizar a força magnética obtida, são utilizados um fluxo magnético de polarização B_b e um fluxo magnético variável B^* , tal que:

$$B_1 = B_b + B^* \quad (61)$$

$$B_2 = B_b - B^* \quad (62)$$

Assim, a partir da Equação 60 obtém-se:

$$F_m = \frac{A_g}{\mu_g} \left((B_b + B^*)^2 - (B_b - B^*)^2 \right) \quad (63)$$

Desenvolvendo, obtém-se uma equação linear para a força magnética na direção y (FURTADO, 2008):

$$F_m = \frac{A_g}{\mu_g} 4B_b B^* \quad (64)$$

Manipulando a Equação 64, pode-se obter o fluxo magnético necessário para se obter uma determinada força magnética:

$$B^* = \frac{F_m \mu_g}{4B_b A_g} \quad (65)$$

3.2.3 Histerese e Fluxo Magnético de Polarização

Os materiais ferromagnéticos contêm dipolos magnéticos alinhados de maneira aleatória em sua estrutura cristalina (Figura 19(a)), de forma que seu campo magnético resultante é nulo (o que não ocorre no caso de ímãs permanentes). Porém, estes dipolos magnéticos podem ser alinhados devido à aplicação de um campo magnético externo (Figura 19(b)). Assim, este fluxo magnético é amplificado.

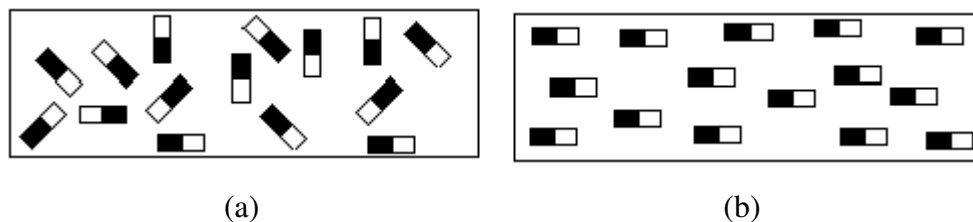


Figura 19 – (a) dipolos magnéticos desorientados; (b) dipolos magnéticos alinhados devido à ação de campo magnético externo.

A Figura 20 apresenta a característica de uma curva de histerese de um material ferromagnético. Pode-se ver que, partindo do ponto *a*, quanto maior a intensidade do campo magnético externo (H) ao qual o material está submetido, maior será a orientação dos seus dipolos magnéticos, portanto, maior será fluxo magnético obtido, até que se atinja o ponto *b*. Nesse momento, um acréscimo na intensidade do campo externo não mais resultará num aumento substancial do fluxo resultante, pois apenas a parcela ligada ao campo externo aumentará, sendo que a parcela relacionada aos dipolos não mais se altera, devido ao total alinhamento dos mesmos. Quando se observa este comportamento, diz-se que o material ferromagnético atingiu sua saturação magnética.

Na faixa de operação entre os pontos *a* e *b*, a polarização do material é um processo reversível. Mas, uma vez atingida a saturação magnética, o processo se torna irreversível,

impedindo o sistema de retornar a sua posição inicial (ponto *a*). De forma que se o campo externo for retirado, o sistema retorna ao ponto *c*, apresentando uma magnetização residual (LEITE e FIGUEIREDO, 2007).

Invertendo o sentido do campo externo, o material apresenta o comportamento do segmento *cd*; apresentando saturação magnética em sentido oposto no ponto *d*, e, ao retirar-se o campo, a magnetização residual no ponto *e*. A curva *abcde* é chamada de *laço de histerese* e nos pontos *c* e *e*, o material apresenta o comportamento de ímãs permanentes devido à magnetização residual.

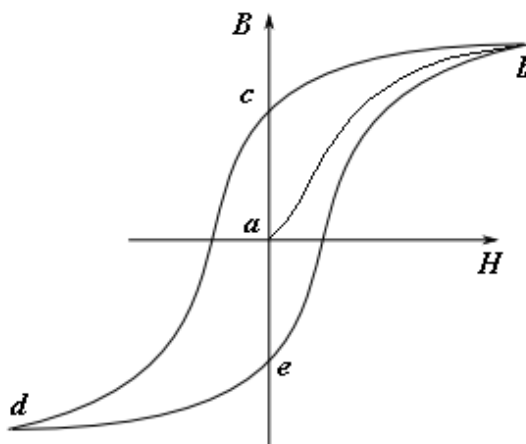


Figura 20 – Curva de histerese de um material ferromagnético.

Conforme se pode observar na Equação 54, a força magnética é calculada a partir do campo magnético. E a partir da equação do campo magnético (Equação 50), tem-se que este depende da corrente aplicada nas bobinas do atuador.

Assim, conhecer a curva de histerese do material do núcleo do atuador (sobretudo o segmento *ab*) apresenta duas vantagens: o atuador pode ser projetado para operar no intervalo contido no segmento *ab*, onde a polarização do material é reversível; e é possível saber até que ponto o aumento da corrente proporciona um aumento do campo magnético, e assim, um aumento da força magnética.

A importância de conhecer a relação corrente – campo magnético se deve ao fato de que a bobina possui uma limitação quanto à corrente máxima a qual pode ser submetida. Essa limitação advém da perda de energia em forma de calor que ocorre devido à resistência do fio da bobina (Efeito Joule). O calor pode danificar o verniz das bobinas do atuador magnético, ocasionando um curto-circuito; o que causaria grandes danos a todos os componentes elétricos do sistema.

O cálculo do fluxo magnético de polarização deve ser feito de maneira que este seja suficientemente elevado, a fim de evitar que o fluxo magnético variável altere o sentido do campo magnético do atuador; uma vez que isto acarretaria a perda de energia na troca do sentido da polarização do material ferromagnético.

A partir das Equações 61 e 62 tem-se que, para um dos lados do atuador magnético:

$$B = B_b \pm B^* \quad (66)$$

No caso extremo, considerando-se a força máxima que pode ser exercida pelo atuador magnético ($F_m = F_{max}$), o menor fluxo de polarização necessário é:

$$B_b = B_{max}^* \quad (67)$$

Substituindo na equação 65 e isolando o fluxo de polarização, obtém-se:

$$B_b = \sqrt{\frac{F_{max} \mu_g}{4A_g}} \quad (68)$$

A Equação 68 fornece o valor mínimo do fluxo magnético de polarização necessário para que não ocorram perdas pela troca do sentido de polarização do atuador.

3.2.4 Controle

O controle da força do atuador é feito através do campo magnético e seu papel é compensar as variações do *air-gap* devido à vibração do eixo, conforme dito anteriormente. Assim, o sinal do campo desejado é comparado com o sinal do campo medido pelo *hall sensor* e realimentado no controlador do sistema.

Marszolek (2006) fez uma comparação entre algumas técnicas de controle (P, PD e PID) e a resposta obtida para o controle da força de excitação foi semelhante. A partir destes resultados, Furtado (2008a) utilizou um controlador proporcional e obteve uma resposta compatível com a aplicação experimental tanto na amplitude da força quanto na frequência de corte. Define-se frequência de corte como a máxima frequência atingida com o atuador mantendo o ganho da força magnética gerada.

Sendo a operação da bancada, na configuração aqui utilizada, de 0 a 60 Hz, a frequência de corte de 140 Hz é suficiente para a aplicação dos testes. O mesmo se aplica à força de excitação, cuja magnitude de 155 N corresponde ao valor desejado para a excitação externa do sistema.

3.2.5 Sensor de Efeito *Hall*

Uma vez que, neste caso, o controle da força do atuador é feito em função do campo magnético, faz-se necessário uma forma de medi-lo. Isto pode ser feito a partir da utilização de sensores de efeito *hall*.

Em 1878, Edwin H. Hall provou que, quando uma carga (corrente) passa por um material condutor, imerso em um campo magnético perpendicular ao sentido da corrente, surge uma diferença de potencial nas laterais do material condutor (HALLIDAY et al., 2007). Esta diferença

de potencial ocorre devido ao deslocamento das cargas (Figura 21), provocado pela força de Lorentz:

$$F_L = Q_e \cdot v_Q \times B = Q_e \cdot v_Q \cdot B \cdot \text{sen}(\alpha_Q) \quad (69)$$

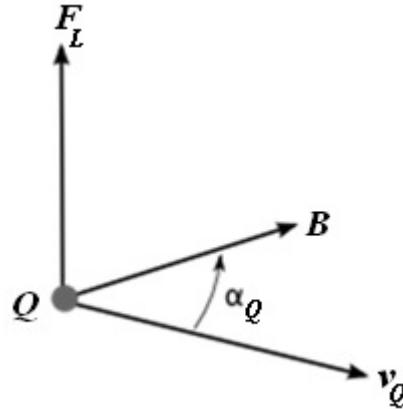


Figura 21 – Força de Lorentz. Onde Q_e é a carga elétrica, v_Q sua velocidade, B o campo magnético, α_Q o ângulo entre a velocidade e o campo magnético, e F_L é a força aplicada na carga.

Assim, o princípio de funcionamento do sensor de efeito hall é ilustrado na Figura 22, onde é apresentada uma placa semicondutora do sensor por onde passa uma corrente elétrica i em três situações distintas. Na primeira não há campo magnético, não havendo, portanto, diferença de potencial entre as laterais da placa. Na segunda, devido ao campo magnético, nota-se o surgimento da diferença de potencial, e na terceira, com um campo magnético contrário, ocorre a polarização inversa da placa.

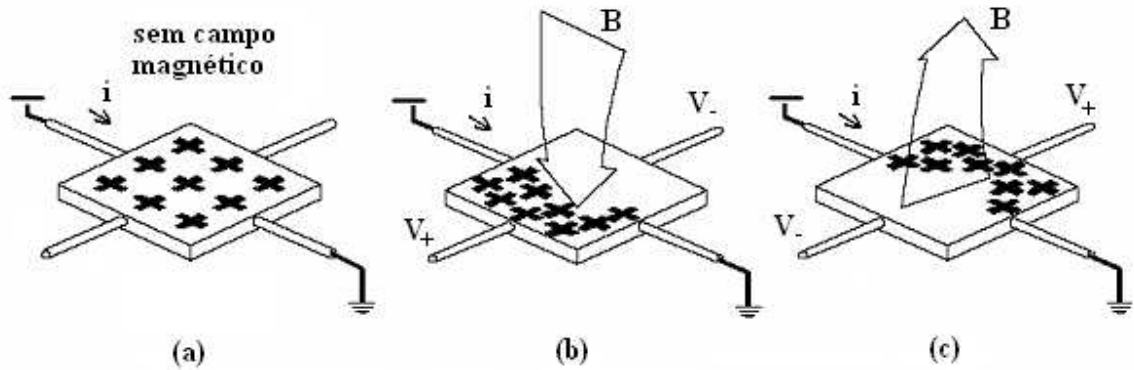


Figura 22 – Funcionamento do sensor de efeito hall. (a) sem campo magnético, (b) com campo magnético de cima para baixo, (c) com campo magnético de baixo para cima (FURTADO, 2008).

O sensor foi modelado a partir de uma função de transferência de primeira ordem, onde os parâmetros da equação foram obtidos do fabricante (MELEXIS).

$$\frac{V_h}{B_h} = \frac{K_h}{T_h s + 1} \quad (70)$$

onde:

V_h = tensão de saída do sensor [V]

B_h = campo magnético a ser medido [T]

K_h = constante que relaciona fluxo magnético e tensão de saída do sensor hall [V/T]

T_h = constante de tempo do sensor [s]

s = variável de estado

3.2.6 Amplificador PWM

Conforme a Figura 14, o sinal de saída do bloco de controle é um baixo sinal em tensão,

proporcional à corrente que deve ser enviada aos enrolamentos do atuador. Assim, o amplificador PWM (*pulse-width modulation*) desempenha duas importantes funções: fornecer às bobinas um sinal em corrente proporcional ao sinal de tensão e amplificar este sinal fornecendo potência.

O funcionamento deste tipo de amplificador, como o próprio nome já diz, se baseia na modulação da largura de pulso. A saída do amplificador é composta por um trem de pulsos que oscila em altíssima frequência (da ordem de kHz) entre seus valores máximo e mínimo. Desta forma, o valor médio da saída depende do ciclo de trabalho (*duty cycle*) do amplificador. Em outras palavras, a saída depende da proporção entre os tempos em que a saída fica em seu valor máximo e mínimo.

O amplificador PWM é modelado a partir de uma equação de primeiro grau (Equação 71) obtida experimentalmente a partir de um teste simples, que consiste em variar a tensão de entrada do amplificador e medir a corrente de saída. Vale ressaltar que o amplificador trabalha com um controlador interno que mantém a corrente de saída, independente da variação da carga em sua saída. Como a frequência de chaveamento é da ordem de kHz e a frequência de trabalho do sistema modelado não ultrapassa a faixa dos 100 Hz, a frequência de chaveamento é alta o bastante para não interferir na dinâmica do sistema.

$$I_{out} = c_1 \cdot V_{in} + c_2 \quad (71)$$

Onde:

I_{out} = corrente de saída do amplificador

V_{in} = tensão de entrada do amplificador

c_1, c_2 = constantes polinomiais

3.2.7 Modelo Matemático Completo do Sistema Magnético

Uma vez apresentadas a modelagem de todos os componentes do sistema magnético, o modelo matemático completo de um dos quatro atuadores pode ser visualizado na Figura 23.

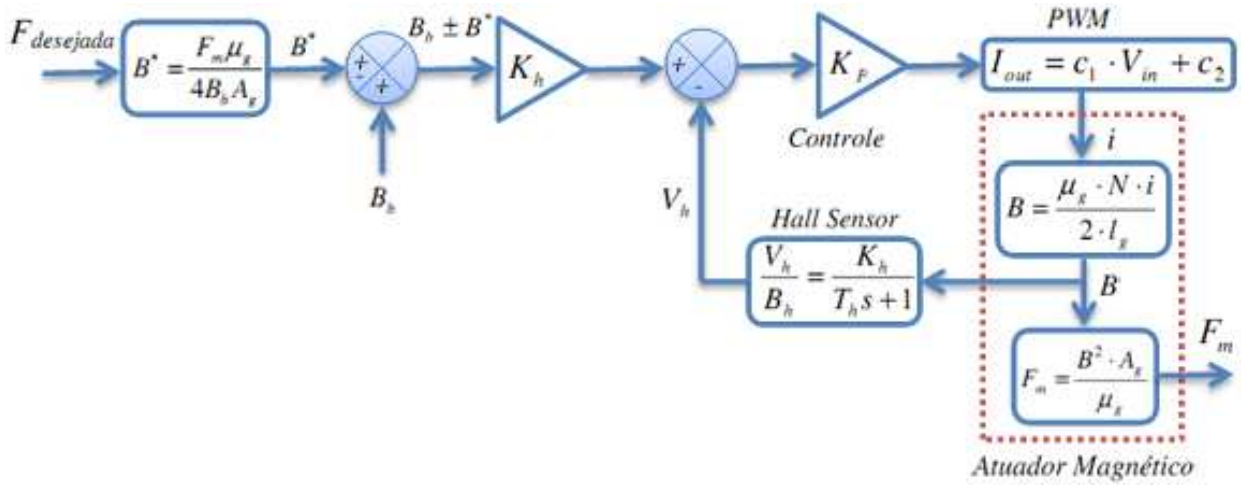


Figura 23 – Modelo matemático completo do sistema magnético.

Primeiramente, a partir da força magnética máxima a ser exercida pelo atuador, calcula-se o campo magnético de polarização (B_b) a partir da Equação 68. Em seguida, utiliza-se a Equação 65 para converter a força desejada ($F_{desejada}$) no campo magnético necessário (B^*).

De acordo com a linearização, obtida através da montagem diferencial, em um dos atuadores é feita a soma do campo magnético necessário (B^*) e do campo magnético de polarização (B_b), e no atuador radialmente oposto é feita a subtração. Na sequência, o campo resultante é multiplicado pelo ganho do *hall sensor* (K_h), de forma a se obter um valor de tensão equivalente que possa ser comparado com a tensão de saída do sensor (V_h), proporcional ao campo magnético medido (B).

Esta comparação é a entrada do controlador proporcional (K_P), e sua saída é a tensão de entrada do amplificador PWM (Equação 71), que se encarrega de fornecer a corrente elétrica (i) correspondente aos enrolamentos da bobina.

Esta corrente elétrica é a entrada da primeira equação (Equação 50) do modelo do atuador magnético (representado em vermelho), que correlaciona a corrente na bobina com o campo magnético produzido (B). Este campo magnético (“a ser medido”) é a entrada da Equação 70, que

descreve o comportamento do *hall sensor*. Finalmente, através da Equação 54 (segunda equação do modelo do atuador magnético), a força magnética obtida é calculada em função do campo magnético (B).

Desta forma, o modelo do sistema magnético esta pronto para ser integrado ao modelo do sistema mecânico; e este modelo completo, pronto para ser utilizado nas simulações numéricas.

3.3 Espaço de Estados

Para obter a resposta temporal do modelo em elementos finitos foi utilizada a representação em espaço de estados. Esta representação consiste em reescrever o sistema de n equações de 2ª ordem num sistema de $2n$ equações de 1ª ordem.

A partir das matrizes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica obtidas pelo modelo em elementos finitos, tem-se a equação de movimento vista anteriormente:

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (72)$$

Colocando na forma de espaço de estados, conforme descrito em Inman (2001):

$$\begin{cases} \{\dot{x}\} = [A_s]\{x\} + [B_s]\{u\} \\ \{y\} = [C_s]\{x\} + [D_s]\{u\} \end{cases} \quad (73)$$

Tem-se,

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C] + \Omega \cdot [G]) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

$$\{y\} = [I] \cdot \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + [0] \cdot \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

Onde Ω é a velocidade de rotação do eixo. A matriz $[A_S]$ é chamada de matriz dinâmica do sistema e $[B_S]$ a matriz de ganho de entrada, $[C_S]$ é a matriz de ganho de saída, e a matriz $[D_S]$, que expressa a influência direta da entrada na saída, é chamada matriz de ligação direta (GENTA, 1998).

Na Equação 74, os coeficientes dos mancais hidrodinâmicos são inseridos no modelo em elementos somados às matrizes de rigidez e amortecimento eixo nos respectivos nós correspondentes às posições dos mancais.

O vetor de força contém as excitações por desbalanceamento rotativo, a força peso (no caso de rotores horizontais) e a força do atuador magnético.

4 Ferramentas de Análise

Neste capítulo são descritas algumas das ferramentas de análise utilizadas no estudo da dinâmica de rotores, juntamente com uma breve revisão da formulação matemática envolvida. A resposta de um sistema dado pela equação diferencial (Equação 76), já vista anteriormente, pode ser obtida de duas formas: integração numérica no tempo ou cálculo analítico da solução homogênea e particular (Equação 77); sendo que cada um dos métodos apresenta vantagens específicas, como mostrado nas seções correspondentes. Um resumo das técnicas de análise, a serem vistas nas próximas seções, encontra-se na Figura 24.

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (76)$$

$$\{q(t)\} = \{q(t)_{\text{homogenea}}\} + \{q(t)_{\text{particular}}\} \quad (77)$$

As ferramentas estão separadas em três grupos: primeiro, são apresentadas as ferramentas utilizadas na análise da resposta a partir da integração numérica; em seguida, são apresentadas as ferramentas de análise em frequência da resposta livre analítica e, por fim, as ferramentas de análise em frequência da resposta forçada analítica.

A análise da resposta livre analítica fornece as frequências naturais do sistema e sua variação em função da rotação, além dos modos naturais diretos e retrógrados do rotor. Desta forma, é possível adaptar a máquina ainda na fase de projeto em função da faixa de operação desejada, de forma a se evitar as velocidades críticas e frequências naturais do sistema.

A resposta forçada analítica permite uma análise do comportamento do sistema em função da sua frequência de operação, os modos operacionais obtidos são uma estimativa de como o sistema se move em uma dada frequência, uma vez que a resposta de um sistema linear é dada

pela combinação linear de seus modos naturais.

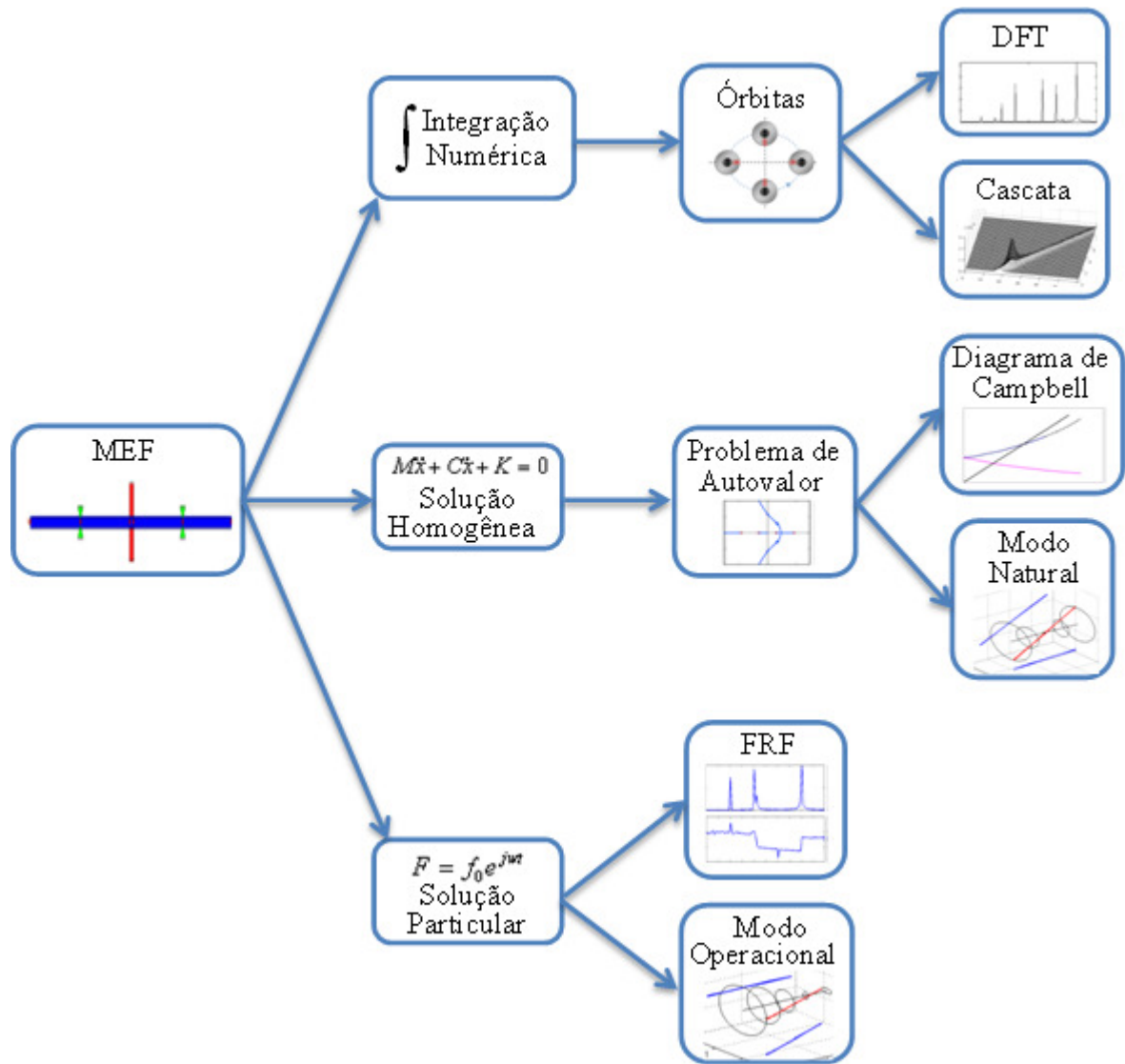


Figura 24 – Resumo das técnicas de análise.

A integração numérica no tempo é utilizada quando se deseja analisar efeitos transientes, ou incluir efeitos não lineares no modelo, o que não é possível nas respostas analíticas, uma vez que ambas são obtidas assumindo-se que o modelo é linear.

4.1 Integração Numérica

O método da integração numérica utiliza algoritmos iterativos específicos para equações diferenciais, em geral, de primeira ordem (por isso a utilização do espaço de estados, descrito anteriormente); e os métodos de análise de seus resultados são os mesmos utilizados na análise de respostas obtidas através de medições experimentais (Figura 25); como a transformada discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform - DFT*) e o diagrama em cascata.

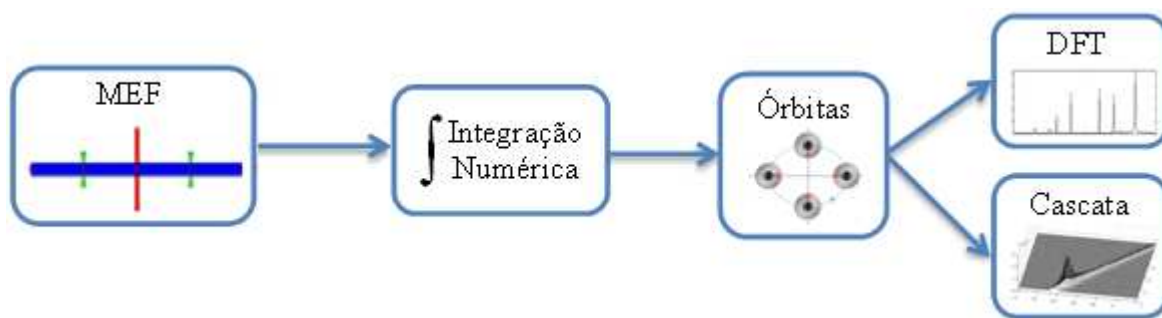


Figura 25 – Ferramentas de análise a partir da resposta da integração numérica.

Este método apresenta uma grande vantagem em relação ao método analítico, uma vez que permite a inclusão de efeitos não lineares, por exemplo, a utilização do modelo do atuador magnético como fonte de excitação externa. Desta forma, a primeira parte desta seção trata da obtenção das órbitas do modelo em função do tempo. As duas últimas partes tratam de como fazer uma análise em frequência a partir da resposta temporal.

4.1.1 Órbitas

As órbitas são obtidas a partir da combinação dos deslocamentos laterais do rotor nas direções y e z (Figura 7) ao longo do tempo, representando, portanto, o movimento de precessão

desenvolvido pelo eixo (Figura 5). Conforme citado anteriormente, este movimento pode ser direto (Figura 26(a)), caso seja no mesmo sentido da rotação própria do eixo, ou retrógrado (Figura 26(b)), caso seja no sentido contrário.

O estudo das órbitas permite ter uma idéia do movimento realizado pelo eixo durante a operação da máquina em regime transiente e constante. Caso o rotor seja isotrópico, as órbitas são circulares, caso contrário, os deslocamentos nas direções y e z são diferentes, originando órbitas elípticas.

Deseja-se que as máquinas rotativas desenvolvam sempre movimento de precessão direta, pois nesta condição as tensões internas do eixo não sofrem alteração em sua direção; e, se o movimento for circular, não sofrem alteração em módulo também. Já na precessão retrógrada, as tensões internas se alternam entre tração e compressão, uma situação crítica para o rotor, pois pode causar uma ruptura prematura por fadiga. A precessão retrógrada pode surgir devido à anisotropia dos mancais ou devido ao efeito giroscópico, oriundo do movimento de nutação do rotor.

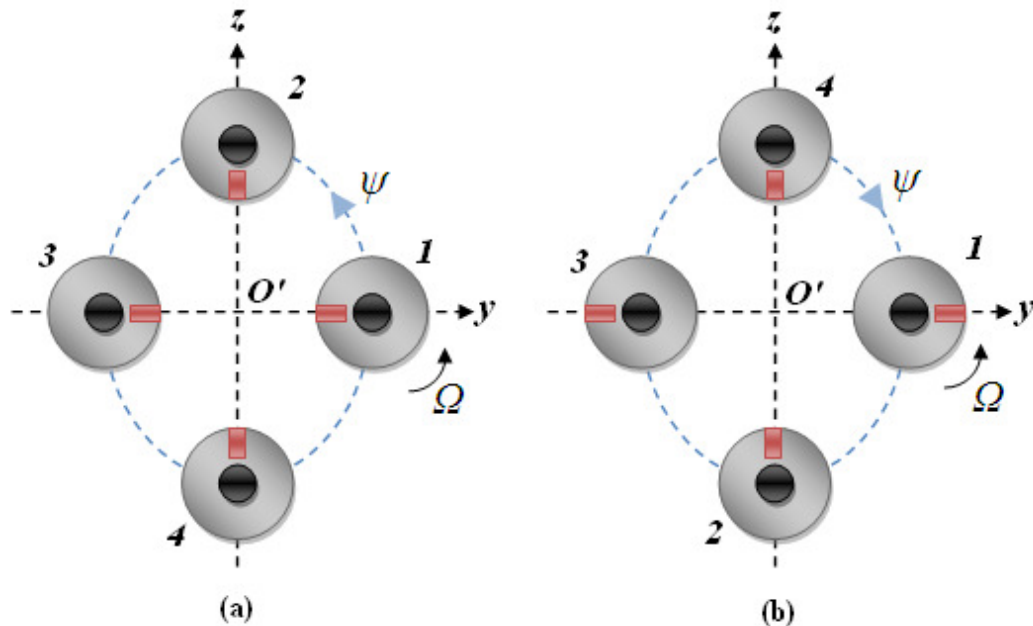


Figura 26 – Movimento de precessão: (a) direta; (b) retrógrada.

4.1.2 Série de Fourier, DFT e FFT

A partir da teoria inicialmente desenvolvida por Joseph Fourier (1768-1830), todo sinal real pode ser decomposto em uma soma de senos e cossenos a partir de sua expansão em uma série de Fourier, conforme a Equação 78 (PROAKIS e MANOLAKIS, 1995).

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (78)$$

Reescrevendo a Equação 78 em função de exponenciais complexas, obtém-se (Apêndice A):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega t} \right] \quad (79)$$

A partir da Equação 79, observa-se que a expansão de um sinal real a partir da série de Fourier possui um espectro que contempla o intervalo de frequências $[-\infty; \infty]$, e que, a partir dos coeficientes complexos da série, têm-se a informação do módulo e da fase para cada uma das componentes harmônicas do sinal. Ainda a partir da Equação 79, pode-se observar que as frequências positivas e negativas de mesmo módulo ($-n\omega$ e $n\omega$) apresentam coeficientes complexos conjugados, ou seja, com mesmo módulo e defasagem de 180° . Desta forma, é necessário analisar apenas a metade positiva do espectro, uma técnica conhecida como *half-spectrum*.

Outro ponto importante é que o termo a_0 , representa o ganho do sinal (componente de frequência nula), e que todas as amplitudes do gráfico de módulo possuem metade da amplitude real da sua componente harmônica.

Expandindo o conceito da série de Fourier na forma complexa, a partir da Equação 78, obtém-se (Apêndice A):

$$x = y + jz \quad (80)$$

$$f(t) = \frac{a_0^y + ja_0^z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_D^y + A_D^z) e^{jn\omega t} + (A_R^y + A_R^z) e^{-jn\omega t} \right] \quad (81)$$

Onde os termos A^y e A^z são referentes aos sinais y e z , e os sub-índices D e R às componentes diretas e retrógradas, (Apêndice A):

$$A_D^y = \left(\frac{a_n^y - jb_n^y}{2} \right) \quad (81a)$$

$$A_R^y = \left(\frac{a_n^y + jb_n^y}{2} \right) \quad (81b)$$

$$A_D^z = \left(\frac{b_n^z + ja_n^z}{2} \right) \quad (81c)$$

$$A_R^z = \left(\frac{-b_n^z + ja_n^z}{2} \right) \quad (81d)$$

Assim, para um sinal discretizado de acordo com a Equação 81, a parte associada à frequência positiva do espectro da transformada de Fourier diz respeito às componentes diretas, e a parte negativa, às componentes retrógradas. A análise espectral de um sinal temporal complexo, utilizando as partes positiva e negativa do espectro, é denominada *full-spectrum*.

A partir da análise anterior, fica clara a vantagem da utilização da técnica *full-spectrum*

sobre a técnica *half-spectrum* na dinâmica de rotores. O *half-spectrum* necessita de um espectro para cada direção do plano que contém a órbita do ponto do rotor a ser analisado, e mostra apenas a fase e a amplitude de suas componentes harmônicas. Enquanto que o *full-spectrum* mostra a mesma informação em apenas um gráfico, e mais, mostra também a informação sobre a direção do movimento das órbitas, se direto ou retrógrado. Se a componente positiva de uma dada frequência é maior que sua componente negativa, a contribuição desta frequência na composição da órbita é direta, caso contrário, é retrógrada. No entanto, normalmente, o espectro de um sinal é composto por picos em mais de uma frequência, sendo assim, o maior pico do espectro corresponde ao sentido predominante do movimento de precessão.

Portanto, uma vez obtida a resposta temporal, pode-se obter as componentes em frequência deste sinal. Devido ao fato do sinal, proveniente da simulação ou de uma medição experimental, ser discreto e finito, a ferramenta utilizada para obter sua expansão em série de Fourier é a Transformada Discreta de Fourier (*DFT - Discrete Fourier Transform*).

4.1.3 Diagrama em Cascata

A DFT é utilizada para medições em rotação constante, ou onde os efeitos observados não variam com o tempo. No entanto, é interessante estudar o comportamento das máquinas rotativas em situações específicas, como sua partida, aceleração ou desaceleração, onde as componentes em frequência mudam constantemente, como é o caso dos coeficientes de mancais hidrodinâmicos.

De acordo com Muszynska (2005), a solução para este problema consiste em calcular diversas DFTs e colocá-las em um mesmo gráfico tridimensional, denominado Diagrama em Cascata. As DFTs são calculadas a intervalos regulares de algum parâmetro de interesse onde seja possível visualizar a variação do espectro de frequências da máquina; usualmente, o parâmetro

considerado é o tempo ou a velocidade de rotação (estes dois gráficos são comumente diferenciados na literatura em inglês através dos nomes *waterfall* e *cascade*, respectivamente).

Um aspecto importante relacionado aos mancais, é que rotores sustentados por mancais hidrodinâmicos apresentam um fenômeno conhecido como instabilidade fluido-induzida, que pode ser subdividido em dois fenômenos: *oil whirl* (giro) e *oil whip* (chicotada). Ambos são vibrações orbitais de precessão direta e auto-excitadas (MUSZYNSKA, 2005) e podem ser facilmente entendidos a partir de um diagrama em cascata (descrito formalmente na seção 4.1.3) como na Figura 27.

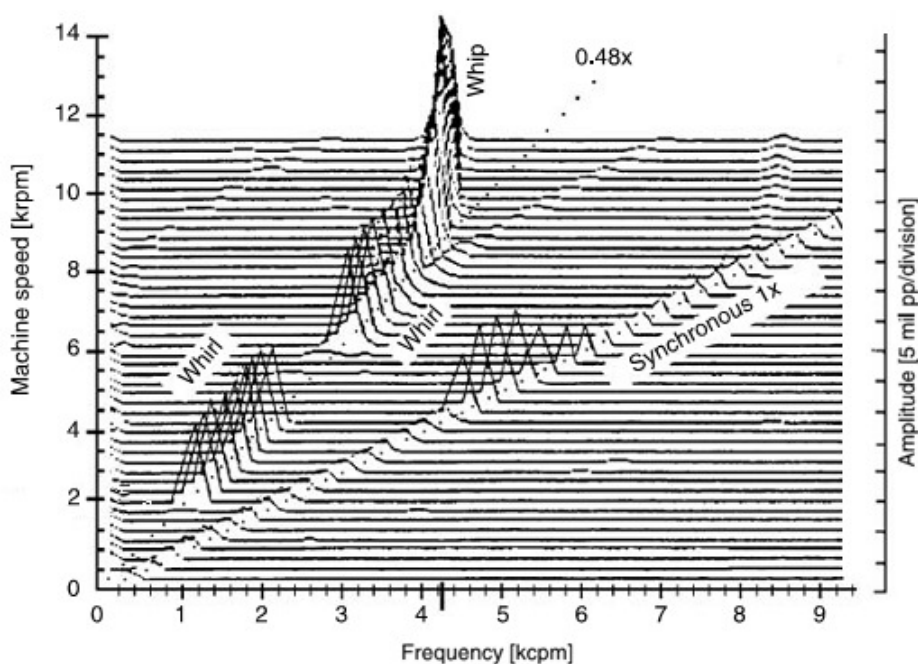


Figura 27 – Diagrama em cascata – *oil whirl* e *oil whip* (MUSZYNSKA, 2005).

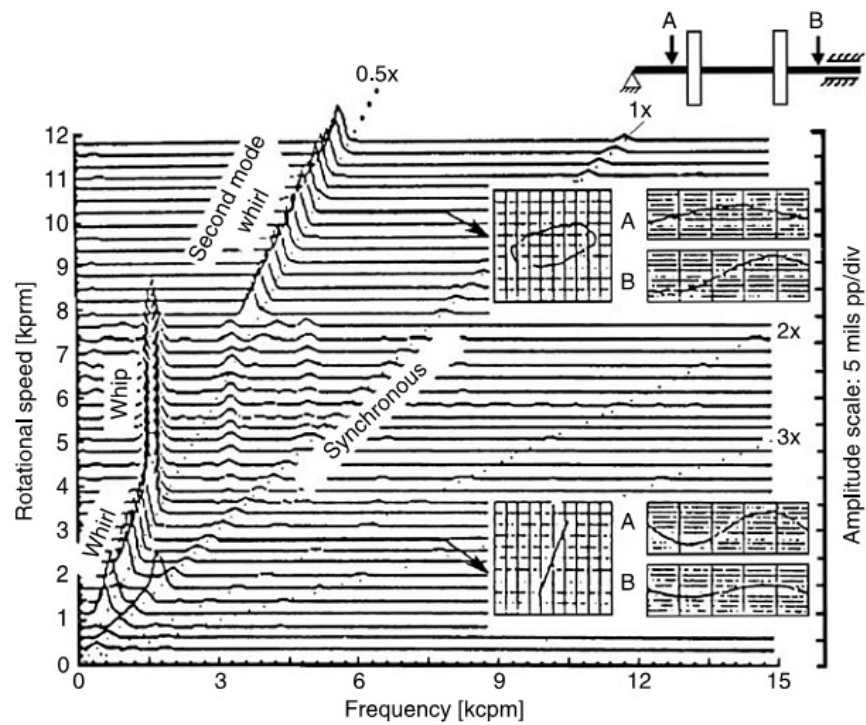
O *whirl* é caracterizado por uma excitação sub-síncrona comum entre 43% e 49 % da frequência de rotação do eixo (OLIVER, 2001). Segundo Muszynska (1986), quando o rotor inicia seu movimento de rotação, para velocidades baixas é observado apenas a excitação síncrona devido ao desbalanceamento, mas conforme a velocidade aumenta (geralmente ainda abaixo da primeira velocidade crítica) surge o *oil whirl*, onde o filme de óleo é mais flexível que o rotor (que se comporta como um corpo rígido) e, embora sua amplitude seja maior do que a

amplitude da vibração síncrona, é limitada devido às forças do filme de óleo. Conforme o rotor se aproxima da velocidade crítica, este efeito é encoberto pelo efeito da rotação síncrona; o efeito da elasticidade do rotor prevalece. Aumentando a rotação do rotor, o efeito síncrono diminui e o *oil whirl* volta a dominar o movimento, seguindo o mesmo padrão demonstrado anteriormente, até uma velocidade de rotação igual ao dobro da primeira velocidade crítica do sistema.

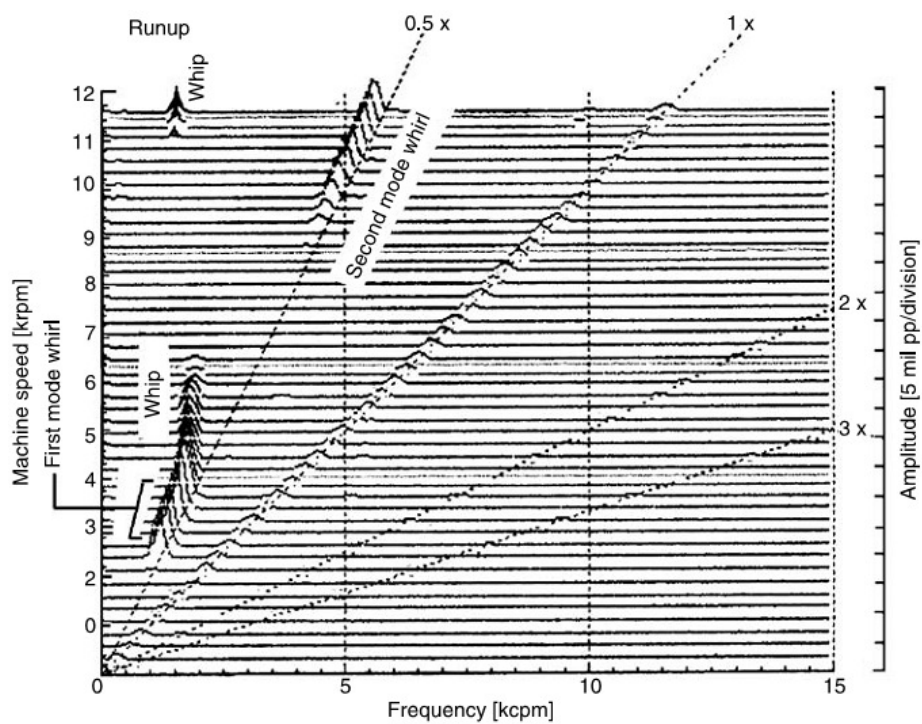
Neste momento, a frequência da instabilidade se torna muito próxima à velocidade crítica e continua constante mesmo que a rotação do eixo aumente, este fenômeno é conhecido como *oil whip*. A flexibilidade do eixo se torna dominante novamente, e a amplitude do movimento nos mancais é restrita apenas pela folga dos mancais, no entanto, a amplitude do rotor se torna muito grande (condição de ressonância), podendo causar grandes danos ao sistema.

Obviamente estes efeitos são melhor observados na localização dos mancais hidrodinâmicos. No disco, onde geralmente o desbalanceamento se encontra, a excitação síncrona se sobrepõe ao efeito do *oil whirl*, mas não ao *oil whip*.

De acordo com Muszynska e Bentley (1989), em alguns casos, com o aumento da rotação do rotor, o *oil whip* pode se transformar em um *oil whirl* de segundo modo (Figura 28(a)) ou simplesmente estabilizar, havendo ainda a possibilidade da coexistência do *oil whip* e o *oil whirl* de segundo modo (Figura 28(b)).



(a)



(b)

Figura 28 – *Oil whirl* de segundo modo (MUSZYNSKA, 2005): (a) *oil whip* se

transformando em *oil whirl* de segundo modo; (b) estabilização do *oil whip* e coexistência do *oil whip* e o *oil whirl* de segundo modo.

Analisando a descrição feita acima, conforme Bentley (2001), temos que o *oil whirl* é influenciado principalmente pelas características do fluido, portanto, dependente da velocidade de rotação; e *oil whip* é influenciado pelas características mecânicas do sistema, dependendo, portanto, da velocidade crítica do sistema.

4.2 Resposta Livre

A resposta livre do sistema rotativo é obtida a partir da parte homogênea da Equação 74, mostrada na Equação 82. E fornece informações como as frequências naturais e os modos de vibrar do sistema (Figura 29), permitindo que seu projeto seja feito em função da faixa de frequências de operação desejada.

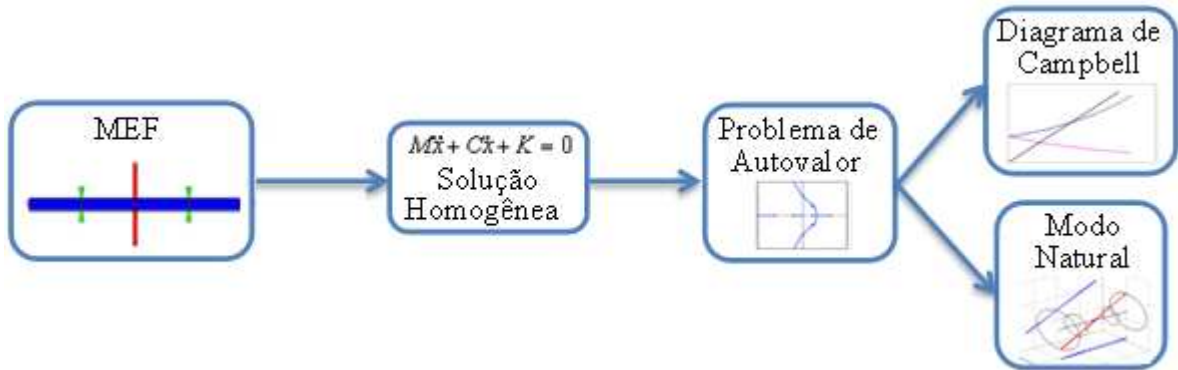


Figura 29 - Ferramentas de análise a partir da resposta da equação homogênea.

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C] + \Omega \cdot [G]) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (82)$$

Definindo:

$$[A_s] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}([C] + \Omega \cdot [G]) \end{bmatrix} \quad (83)$$

E substituindo na Equação 82, obtém-se:

$$[A_s] \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (84)$$

4.2.1 Problema de Autovalor e Autovetor

Conforme mostrado anteriormente, a resolução da Equação 84 permite a obtenção da resposta livre do sistema. A seguir, mostra-se que, para tanto, é necessário resolver um problema de autovalor generalizado. Inicialmente, propõe-se uma solução na forma:

$$\{Q_h\} = \{\Phi\} \cdot e^{\lambda t} \quad (85)$$

Onde:

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ \lambda_k \{\varphi\} \end{Bmatrix} \quad (86)$$

Substituindo na Equação 84:

$$([A_s] - \lambda[I]) \cdot \{\Phi\} \cdot e^{\lambda t} = \{0\} \quad (87)$$

Nota-se que se λ é complexo, $e^{\lambda t} = I$ para qualquer t ; se λ for real positivo, a exponencial sempre aumenta sua amplitude com o aumento de t ; e a exponencial tende a zero, se λ for negativo. Assim, para uma solução válida para todos os valores de t , tem-se:

$$([A_s] - \lambda[I]) \cdot \{\Phi\} = \{0\} \quad (88)$$

A resolução da Equação 88 constitui um problema de autovalor generalizado. Portanto, para existir uma solução diferente da trivial ($\Phi=0$):

$$\det([A_s] - \lambda[I]) = \{0\} \quad (89)$$

A expressão em λ , resultante da expansão dos termos do determinante, é chamada de equação característica, e suas raízes são os autovalores (λ_k) do sistema (Equação 90), de onde podem ser obtidas frequências naturais (ω_{nk}) e o amortecimento modal (ξ_k) dos respectivos modos do sistema (Equações 91 e 92). Alguns dos $2N$ autovalores (sendo N o número de graus de liberdade do sistema) se apresentam na forma de complexos conjugados, onde a parte real corresponde ao decaimento da resposta temporal (portanto, nula para o caso de sistemas conservativos) e a parte imaginária corresponde ao caráter oscilatório. Deve-se observar, também, que a estabilidade do sistema depende dos sinais das partes reais dos autovalores serem negativas. Caso a parte real do autovalor seja positiva, a função exponencial, relativa à aquele autovalor, aumenta continuamente com o tempo, levando o sistema à instabilidade.

$$\lambda_k, \bar{\lambda}_k = \xi_k \omega_{nk} \pm j \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2} \quad (90)$$

$$\omega_{nk} = |\lambda_k| \quad (91)$$

$$\xi_k = \text{Re}(\lambda_k) / \omega_{nk} \quad (92)$$

Conforme visto na Equação 90, as frequências naturais e os modos próprios de vibrar são

associados aos autovalores complexos conjugados. Entretanto, dentre os $2N$ autovalores do sistema, aparecem diversos autovalores reais negativos com módulo muito alto. Estes descrevem movimentos altamente amortecidos e sem caráter oscilatório (parte imaginária), não apresentando, portanto, significado físico, ou mesmo frequências naturais e modos de vibrar associados (KRAMER, 1993).

Substituindo cada autovalor (λ_k) na Equação 88, e resolvendo para a variável $\{Q_h\}$, obtém-se os autovetores do sistema e, assim, os modos de vibrar, conforme será demonstrado na seção 4.2.3.

Desta forma, a partir da Equação 85, tem-se que a resposta homogênea do sistema é dada por:

$$\{Q_h(t)\} = \sum_{k=1}^N \left(\{\Phi_k\} e^{\lambda_k t} + \{\overline{\Phi}_k\} e^{\overline{\lambda}_k t} \right) \quad (93)$$

Onde $\{\overline{\Phi}\}$ a barra representa o complexo conjugado. A solução do problema de autovalor generalizado é usualmente expressa em função de duas matrizes (INMAN, 2001): uma matriz diagonal contendo os autovalores, denominada matriz espectral $[A]$, e uma matriz contendo todos os autovetores do sistema, denominada matriz modal $[\Psi]$.

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \lambda_{N+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2N} \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$[\Psi] = [\{\varphi_1\} \quad \cdots \quad \{\varphi_N\} \quad \{\varphi_{N+1}\} \quad \cdots \quad \{\varphi_{2N}\}] \quad (95)$$

4.2.2 Diagrama de Campbell e Velocidades Críticas

Quando um corpo gira ao redor de um eixo, se uma rotação é aplicada perpendicular a este eixo, surge um momento de reação denominado momento giroscópico. O eixo deste momento é perpendicular ao eixo das duas rotações anteriores. Para a máquina rotativa, representada na Figura 5, tem-se a rotação própria do eixo (Ω) e, conforme visto, quando o disco não se encontra na distância média entre os mancais, há uma segunda rotação denominada nutação (η). Desta forma, surge o momento giroscópico que torna a equação de movimento do sistema dependente da velocidade. A matriz giroscópica é responsável por acoplar os graus de liberdade correspondentes ao plano perpendicular ao eixo de rotação própria do rotor.

Portanto, com a variação da rotação do sistema, a resposta do problema de autovalor sofre variações, refletidas na variação das frequências naturais do sistema, conforme a Equação 82.

Uma forma de analisar essa variação é através do Diagrama de Campbell (Figura 30), onde são plotadas as frequências naturais em função da frequência de rotação no sistema. Ou seja, para cada frequência de rotação deve-se resolver o problema de autovalor generalizado e correlacionar as frequências naturais de cada velocidade com as frequências naturais anteriores, de forma a se obter corretamente o diagrama. Uma forma de fazer isto, é utilizar a correlação dos modos de vibrar entre os resultados de uma rotação e da rotação seguinte, uma vez que estes variam muito pouco com a variação da velocidade de rotação e são ortogonais entre si. Neste trabalho, a correlação dos modos foi feita através do MAC (*Modal Assurance Criterion*), de acordo com Allemang (2003).

No diagrama também é plotada uma linha onde os valores da frequência de rotação são iguais aos valores do eixo das frequências naturais (comumente chamada de linha 1X ou 1/60, devido à conversão de Hz para rpm). Assim, os pontos onde a linha 1X cruza com as linhas das frequências naturais são aqueles onde a velocidade de rotação coincide com as frequências

naturais do sistema. A estes pontos dá-se o nome de velocidades críticas.

Na Figura 30(a) observa-se que, quando o rotor está em repouso (rotação nula), as frequências naturais são iguais duas a duas, e se distanciam conforme a rotação aumenta devido ao efeito giroscópico. Na Figura 30(b), observa-se que as frequências não são iguais na rotação nula, este comportamento pode ocorrer devido à anisotropia nos mancais.

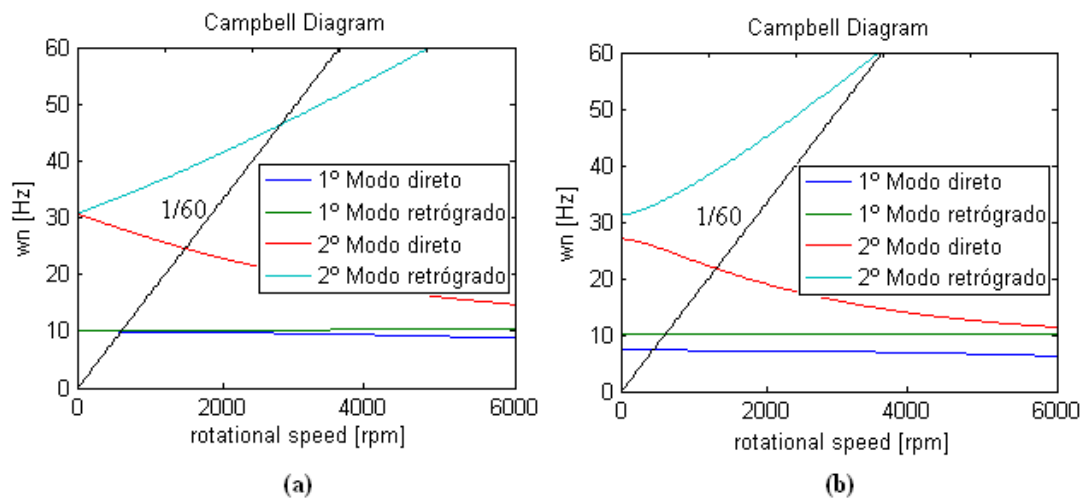


Figura 30 – Diagrama de Campbell. (a) mancais isotrópicos; (b) mancais anisotrópicos.

Também é possível traçar um diagrama semelhante contendo a variação dos autovalores ou dos amortecimentos modais, e a partir deles estudar a estabilidade do sistema.

4.2.3 Modos Naturais ou Modos Próprios de Vibrar

A vibração do sistema é dada em função de seus modos naturais, descritos pela parte correspondente aos deslocamentos dos autovalores da Equação 86. Os módulos dos autovetores representam a amplitude relativa entre os pontos do rotor, e sua fase, a fase relativa entre os pontos, para cada uma das frequências naturais, obtidas a partir dos autovalores correspondentes.

A partir das Equações 86 e 93, para um autovalor (λ_k), tem-se que a resposta do rotor é dada por:

$$\{q_k(t)\} = \{\varphi_k\}e^{\lambda_k t} + \{\bar{\varphi}_k\}e^{\bar{\lambda}_k t} \quad (96)$$

Definindo as partes real e imaginária dos autovalores e autovetores como:

$$\lambda_k, \bar{\lambda}_k = \sigma_k \pm j\omega_k \quad (97)$$

$$\{\varphi_k\}, \{\bar{\varphi}_k\} = \{r_k\} \pm j\{s_k\} \quad (98)$$

E substituindo na Equação 96, obtém-se:

$$\{q_k(t)\} = (\{r_k\} + j\{s_k\})e^{(\sigma_k + j\omega_k)t} + (\{r_k\} - j\{s_k\})e^{(\sigma_k - j\omega_k)t} \quad (99)$$

$$\{q_k(t)\} = e^{\sigma_k t} \left[(\{r_k\} + j\{s_k\})e^{j\omega_k t} + (\{r_k\} - j\{s_k\})e^{-j\omega_k t} \right] \quad (100)$$

Mas, conforme visto anteriormente, a parte real dos autovalores é responsável pelo decaimento da resposta do modo. Assim, para representar os modos de vibrar, podem-se considerar $\sigma_k=0$ (KRAMER, 1993). Combinando as respostas para as direções Y e Z de um dos pontos do rotor:

$$y_k(t) = \left[(r_k^y + js_k^y)e^{j\omega_k t} + (r_k^y - js_k^y)e^{-j\omega_k t} \right] \quad (101)$$

$$z_k(t) = \left[(r_k^z + js_k^z)e^{j\omega_k t} + (r_k^z - js_k^z)e^{-j\omega_k t} \right] \quad (102)$$

E utilizando a notação complexa ($x=y+jz$),

$$x_k(t) = \left[(r_k^y - s_k^z) + j(r_k^z + s_k^y) \right] e^{j\omega_k t} + \left[(r_k^y + s_k^z) + j(r_k^z - s_k^y) \right] e^{-j\omega_k t} \quad (103)$$

Que pode ser reescrito da seguinte forma compacta:

$$x_k(t) = R' e^{j(\omega_k t + \alpha')} + R'' e^{-j(\omega_k t + \alpha'')} \quad (104)$$

Onde:

$$R' = \sqrt{(r_k^y - s_k^z)^2 + (r_k^z + s_k^y)^2} \quad (105)$$

$$R'' = \sqrt{(r_k^y + s_k^z)^2 + (r_k^z - s_k^y)^2} \quad (106)$$

$$\alpha' = \arctg\left(\frac{r_k^z + s_k^y}{r_k^y - s_k^z}\right) \quad (107)$$

$$\alpha'' = \arctg\left(\frac{r_k^z - s_k^y}{r_k^y + s_k^z}\right) \quad (108)$$

A partir da Equação 104, verifica-se que a órbita do rotor pode ser reescrita a partir da soma de dois vetores girantes, um direto e um retrógrado, com módulos R' e R'' , e fase α' e α'' , respectivamente. Os vetores possuem período fundamental dado pela Equação 109. Assim, para obter-se a órbita, basta calcular a soma dos vetores para um período.

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} \quad (109)$$

Se a componente associada à frequência positiva (ω_k) predomina, o rotor desenvolve um

órbita direta, caso a componente associada à frequência negativa ($-\omega_k$) predomine, a órbita é retrógrada. Para componentes de módulos iguais, a órbita desenvolvida é uma linha, e caso uma das duas seja nula, a órbita é circular, direta ou retrógrada.

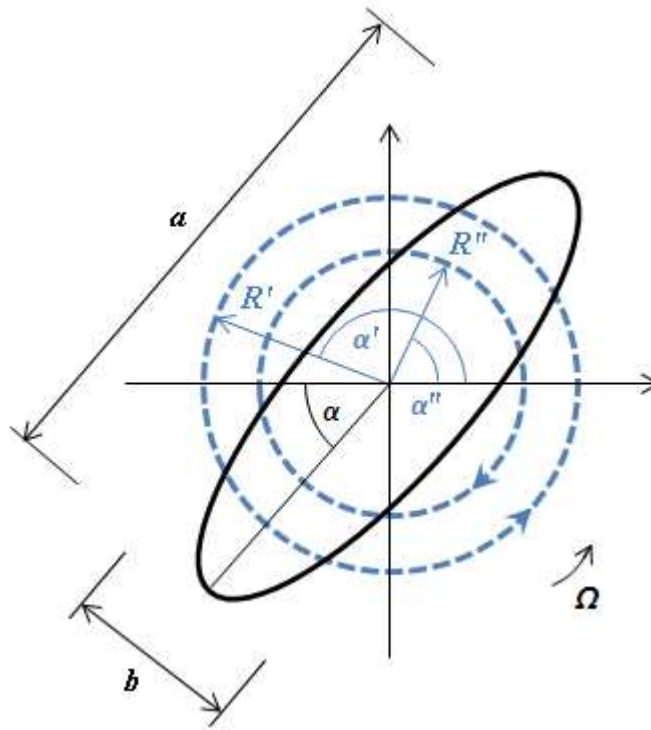


Figura 31 – Composição da órbita a partir dos vetores girantes direto e retrógrado.

O significado físico da Equação 104 é mostrado na Figura 31, de onde se observa que o raio maior, o raio menor e a inclinação da elipse são dados, respectivamente, por:

$$a = R' + R'' \quad (110)$$

$$b = |R' - R''| \quad (111)$$

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \quad (112)$$

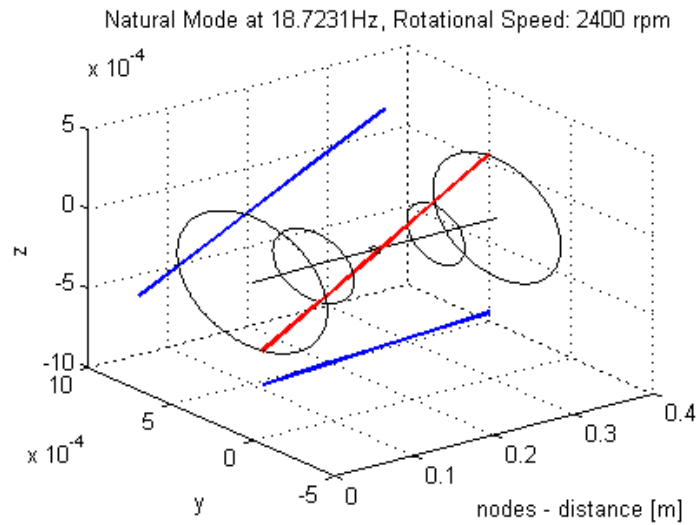


Figura 32 – Exemplo de modo natural.

Finalmente, os modos naturais são obtidos organizando-se as órbitas de todos os pontos do rotor em um único gráfico (Figura 32) e traçando uma linha para um dado ponto do período. As linhas azuis são as projeções da linha vermelha nos planos XY e XZ.

4.3 Resposta Forçada

Quando um rotor não é perfeitamente balanceado, uma massa residual que se encontra fora de seu centro geométrico excita o rotor na mesma frequência de sua rotação, conforme visto anteriormente, na seção sobre o rotor de Jeffcott. Nestes casos, para se obter a resposta analítica completa do sistema, é necessário obter, além da solução homogênea da equação Equação 76, também a solução particular, dada pela vibração forçada do eixo.

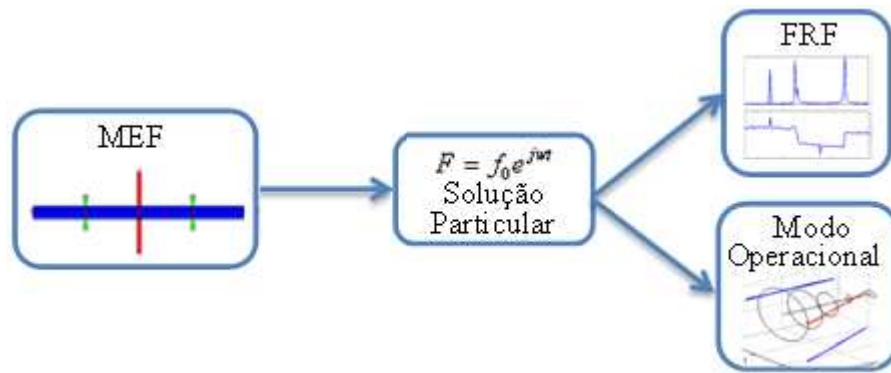


Figura 33 - Ferramentas de análise a partir da resposta da equação particular.

Desta forma, primeiro é mostrada a análise em frequência da solução particular para, em seguida, serem apresentados os modos operacionais. As ferramentas de análise resposta forçada estão representadas na Figura 33.

4.3.1 Função Resposta em Frequência (FRF)

A função resposta em frequência (*Frequency Response Function - FRF*) consiste na resposta do sistema em função da frequência da força de excitação.

Quando excitado por uma força harmônica, um sistema linear vibra na mesma frequência, porém apresentando diferentes valores de amplitude e fase. Portanto, a FRF é uma grandeza complexa que pode ser representada através de um gráfico de módulo (ou amplitude) e outro de fase, e fornece importantes informações sobre a resposta do sistema em função da frequência de excitação.

No caso da dinâmica de rotores, essa força usualmente é a força devido à massa desbalanceada, que excita o rotor na mesma velocidade da sua rotação. A excitação harmônica devido ao desbalanceamento é dada pelas Equações 113 e 114, nas direções Y e Z , respectivamente:

$$f_y(t) = me\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (113)$$

$$f_z(t) = jme\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (114)$$

$$\{f(t)\} = \{F\} e^{j\Omega t} = me\Omega^2 \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ j \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} \quad (115)$$

A solução particular proposta e suas derivadas são (GENTA, 1998):

$$\{q(t)\} = \{Q\} e^{j\Omega t} \quad (116)$$

$$\{\dot{q}(t)\} = j\Omega \{Q\} e^{j\Omega t} \quad (117)$$

$$\{\ddot{q}(t)\} = -\Omega^2 \{Q\} e^{j\Omega t} \quad (118)$$

Substituindo a solução proposta e a excitação devido ao desbalanceamento na Equação 76, obtém-se:

$$[H_m] \cdot \{Q\} e^{j\Omega t} = \{F\} e^{j\Omega t} \quad (119)$$

Portanto,

$$\{Q\} = [H_m]^{-1} \{F\} \quad (120)$$

Onde H_m é a impedância mecânica dada por:

$$[H_m] = [-\Omega^2[M] + j\Omega([C] + \Omega[G]) + [K]] \quad (121)$$

O resultado da Equação 120 é uma grandeza complexa, conforme previsto, que ao ser substituído na solução proposta pela Equação 116, fornece a FRF conforme a Equação 122, demonstrada na Figura 34.

$$\{x(t)\} = \{Q\}e^{j(\Omega t + \angle Q)} \quad (122)$$

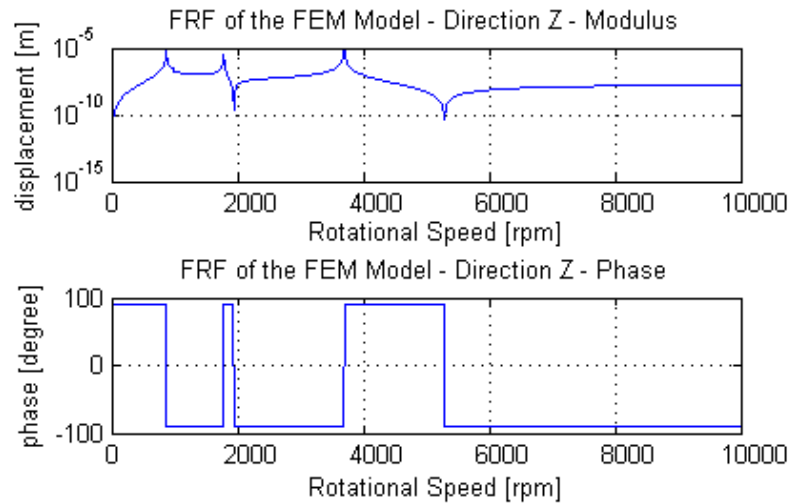


Figura 34 – Exemplo de FRF.

Os picos de deslocamento correspondem a inversões de fase, ou seja, ocorrem nas frequências naturais do sistema.

4.3.2 Modos Operacionais

Os modos operacionais (*Operational Deflection Shapes* – ODS) representam as deflexões

da estrutura devido à ação de uma força externa, ou, em uma forma mais generalizadas, representam o movimento relativo entre dois ou mais graus de liberdade da estrutura, quando excitada por forças externas (RICHARDSON, 1997). Os ODSs são uma estimativa do quanto a estrutura está se movendo, em que ponto e a direção deste movimento, sendo, portanto, uma importante ferramenta na análise de vibrações de sistemas mecânicos.

A vibração de um sistema mecânico (e logo, seus modos operacionais) é dada pela combinação linear de seus modos naturais para sistemas com amortecimento estrutural proporcional, como são os aqui analisados. Assim, quando o ODS é calculado para uma das frequências naturais do sistema, o modo associado à aquela frequência entra em ressonância e se torna dominante. Portanto, o ODS assume, aproximadamente, a forma daquele modo natural.

Os modos operacionais podem ser calculados em função do tempo, calculando-se a resposta analítica completa (Equação 77) ou integrando o sistema numericamente, e então, organizando a resposta de seus graus de liberdade para um certo instante de tempo. Ou podem ser calculados no domínio da frequência em função da FRF.

No caso da dinâmica de rotores, usualmente, a força de excitação externa considerada é a força de desbalanceamento. Assim, os modos operacionais podem ser obtidos diretamente da FRF demonstrada na seção 4.3.1.

Uma vez que a resposta da FRF é uma grandeza complexa, os vetores $\{Q_y\}$ e $\{Q_z\}$, correspondentes à direção Y e Z respectivamente, formam 90° entre si e podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\{y\} = |\{Q_y\}| \sin(\Omega t + \angle\{Q_y\}) \quad (123)$$

$$\{z\} = |\{Q_z\}| \sin(\Omega t + \angle\{Q_z\}) \quad (124)$$

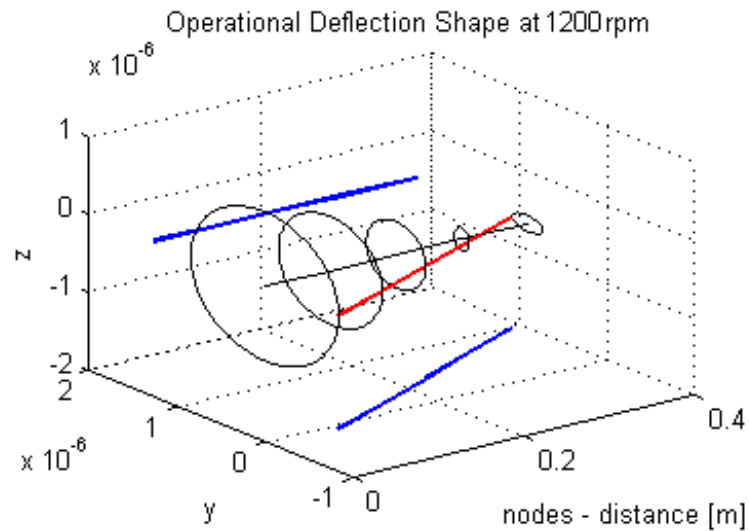


Figura 35 – Exemplo de modo operacional.

E a variação dessas grandezas para um período, resulta na órbita do modo operacional para um dos pontos do rotor. Organizando as órbitas de todos os pontos de discretização do rotor em um gráfico tridimensional, obtêm-se os modos operacionais (Figura 35).

4.4 Programa Desenvolvido

A implementação dos modelos e ferramentas de análise, descritos nas seções anteriores, foi feita no ambiente MATLAB. Na Figura 36 encontra-se a organização do programa. Primeiramente, em azul, é feita a entrada dos dados do rotor, mancais hidrodinâmicos, atuador e das propriedades dos materiais. No pré-processamento (vermelho), a partir dos dados de entrada, são montadas as matrizes do sistema com base nos modelos do eixo, dos discos e dos mancais. Em verde, na fase de processamento, o programa executa a simulação desejada e, no pós-processamento em cinza, os resultados são exibidos através das saídas gráficas.

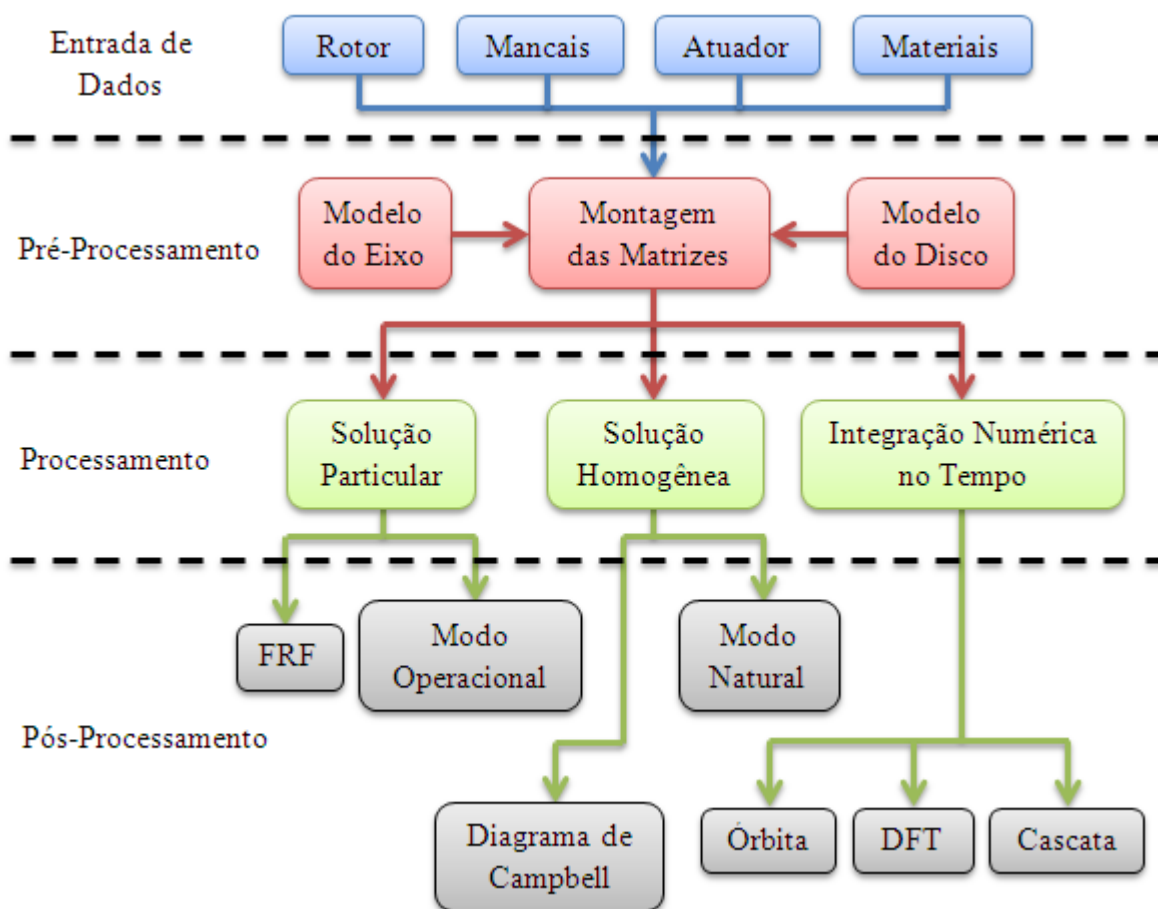


Figura 36 – Diagrama de blocos da organização e sequência do programa.

Desta forma, após os testes e validações realizados no capítulo 7, o programa está preparado para ser incorporado ao pacote de programas desenvolvido no laboratório, Rotortest®, agregando o modelo do atuador, na linguagem Fortran, como fonte de excitação externa, de forma a dar continuidade à modelagem e análise de sistemas rotativos previamente iniciada no laboratório.

5 Atuador Magnético

O atuador magnético utilizado possui geometria homopolar, uma vez que esta geometria apresentou menos perdas no trabalho de Allaire et al. (1997), conforme citado anteriormente; sendo capaz de excitar o sistema em duas direções (x_1, x_2) a 45° do sistema de coordenadas inicial, conforme a Figura 37(b). Esta configuração foi necessária devido à montagem do sistema físico na bancada, pois o posicionamento das bobinas em y-z implicaria na elevação do conjunto rotor-mancais, comprometendo a rigidez dos suportes dos mancais, e consequentemente, as análises em frequência do rotor. A folga radial do mancal é de 1,7 mm, e o pólo do atuador possui 25 mm de largura e 20 mm de espessura. Cada uma das oito bobinas possui 415 espiras, totalizando 830 espiras para cada um dos quatro núcleos ferromagnéticos, Figura 38(a).

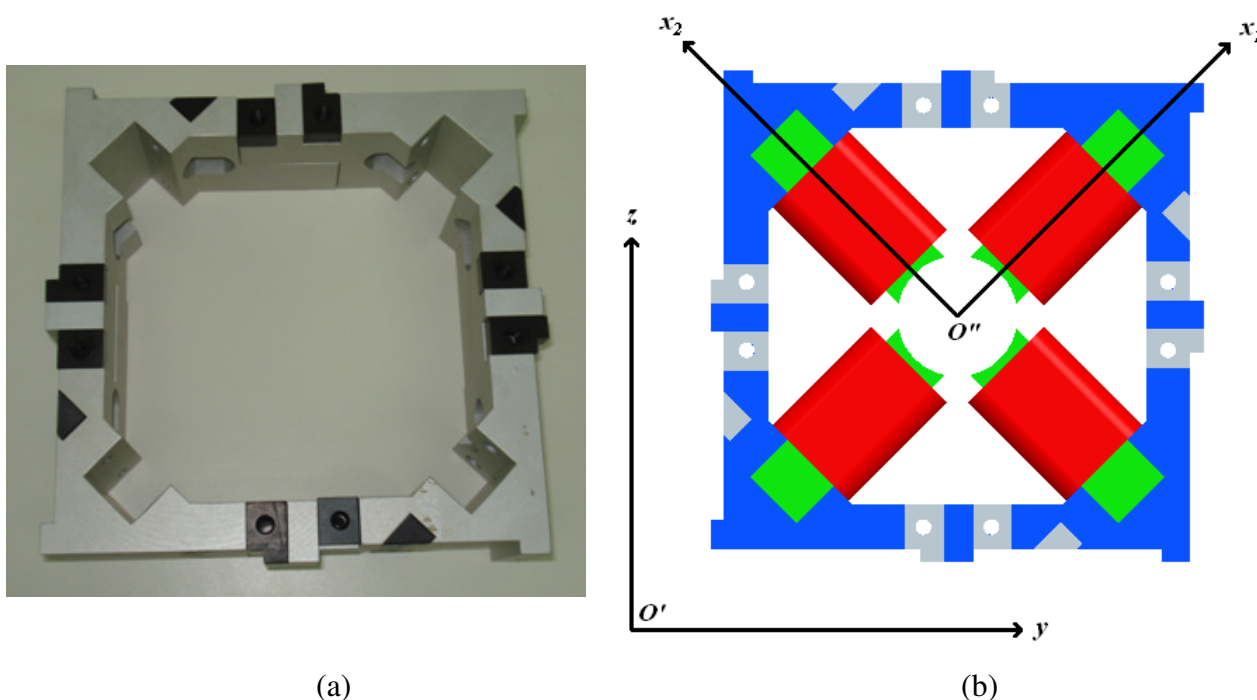
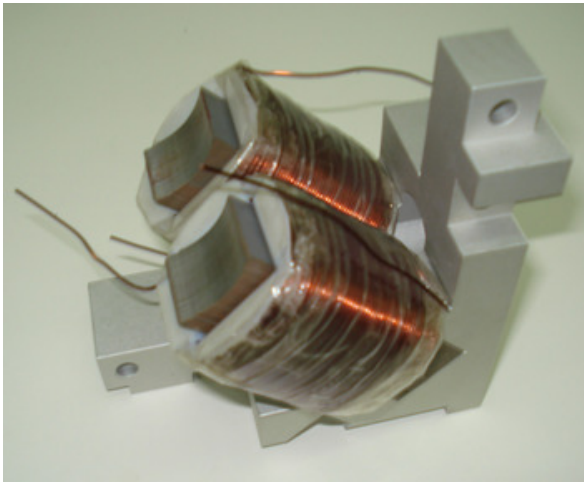
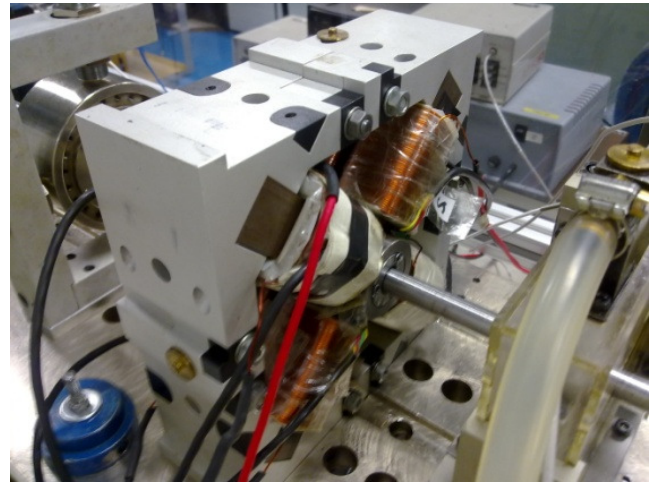


Figura 37 – (a) estrutura de suporte do atuador magnético; (b) sistema de coordenadas rotacionado de 45° .



(a)



(b)

Figura 38 – (a) detalhe da estrutura de suporte e bobinas; (b) atuador magnético instalado na bancada.

O modelo em CAD do suporte foi feito utilizando-se o *software* comercial Pro-Engineer e, utilizando-se o pacote Pro-Mechanica, foi realizada uma análise por elementos finitos, cuja malha pode ser vista na Figura 39(c), permitindo verificar as primeiras frequências naturais do suporte e seus respectivos modos naturais. A Figura 39 mostra o primeiro e o segundo modo de vibrar do sistema. Nota-se que a primeira frequência natural é, aproximadamente, de 576 Hz, e a segunda está próxima de 774 Hz, sendo que ambas encontram-se acima da faixa de operação do sistema, de 0 a 60 Hz.

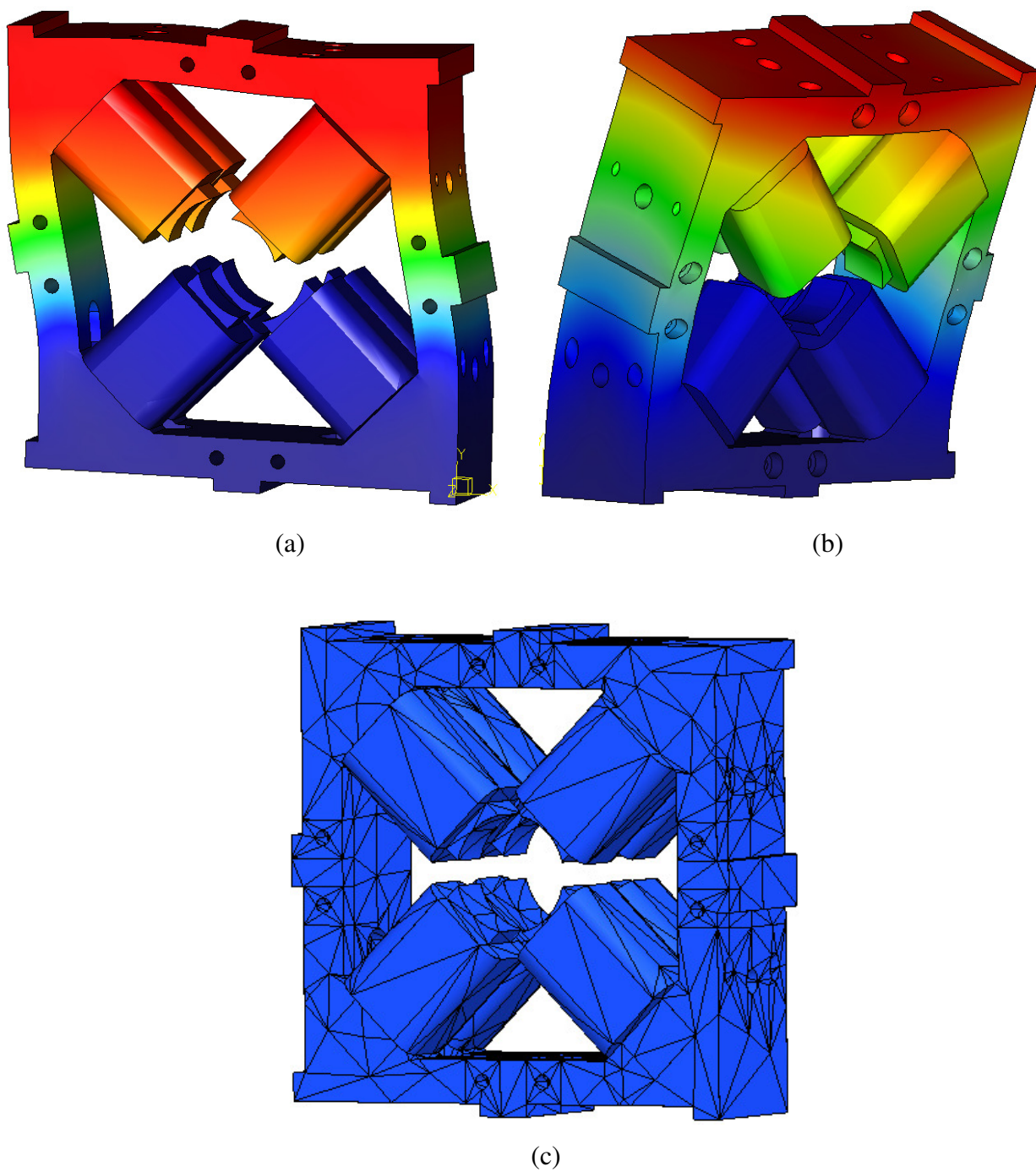


Figura 39 – Modos Naturais do Atuador Magnético. (a) primeiro modo a 576 Hz; (b) segundo modo a 774 Hz; (c) malha utilizada no modelo em elementos finitos.

Para fornecer a corrente necessária aos enrolamentos do atuador, foram utilizados quatro amplificadores do modelo 4-Q-DC-Servoamplifier ADS50/5 (Figura 40), da empresa suíça

MAXON. Uma vez que a força magnética depende, exclusivamente, da corrente circulante nas bobinas, e não da diferença de potencial aplicada na mesma, é utilizado o modo de controle de corrente. Desta forma, o modo *Current Control* teve sua caracterização feita a partir de um teste simples, que consiste na variação da tensão de entrada do amplificador e na medição da corrente de saída. As curvas obtidas são apresentadas na Figura 41. Este teste é importante para calibrar a leitura de corrente a partir dos amplificadores, uma vez que estas serão aplicadas às bobinas para gerar o campo e, conseqüentemente, as forças magnéticas. Além disso, os amplificadores devem ser caracterizados para a montagem do modelo do atuador.



Figura 40 - Amplificador utilizado; modelo 4-Q-DC-Servoamplifier ADS50/5.

Os sensores de efeito hall utilizados são da marca “MELEXIS”, modelo MLX90251, e foram calibrados por Furtado (2008).

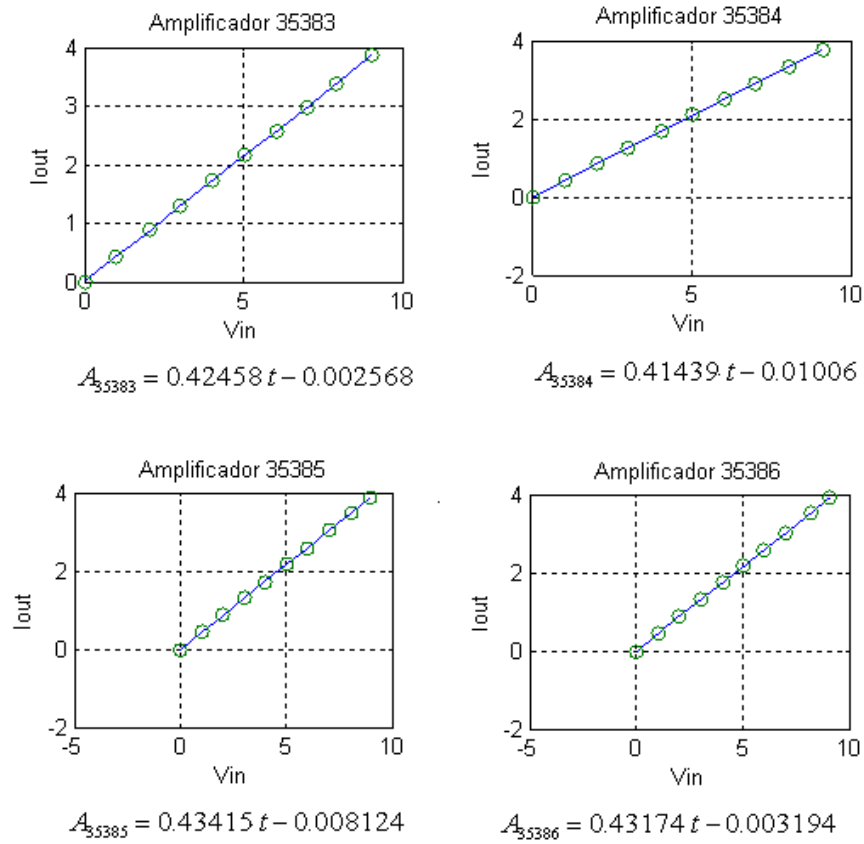


Figura 41 – Caracterização dos quatro amplificadores utilizados.

A importância do conhecimento da curva de histerese do atuador magnético foi tratada anteriormente na seção 3.2.3. Assim, para obter experimentalmente esta curva, foi realizado um teste que consiste na variação da corrente aplicada na bobina do atuador, e medição do campo magnético obtido, utilizando-se o sensor de efeito hall. Foi levantada a curva de saturação para três valores de *air-gap*, conforme mostrado na Figura 42.

Para um *air-gap* de 2.0 mm, o início da saturação pode ser observado. No caso de um *air-gap* de 2.5 mm, ainda é possível observar a tendência para saturação de forma sutil. Quando o *air-gap* é de 4.5 mm a tendência para saturação não mais ocorre no intervalo analisado.

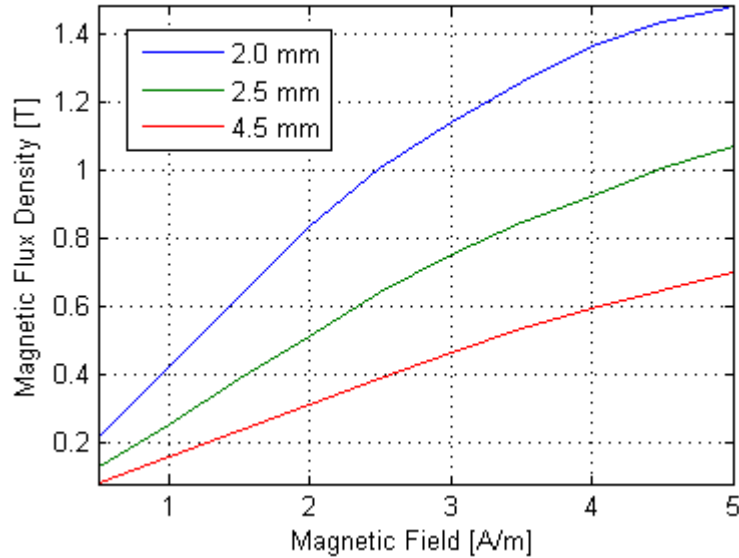


Figura 42 – Curvas de saturação do atuador magnético.

Este efeito é notado pois o ar possui uma permeabilidade magnética extremamente baixa. Portanto, com o aumento do air-gap, as perdas de fluxo magnético aumentam, o que faz com que o fluxo magnético obtido no circuito magnético diminua. Assim, é necessária uma corrente muito mais elevada para se atingir a saturação magnética do atuador. Em outras palavras, é necessária uma corrente mais elevada para se obter o mesmo campo magnético, ou seja, a mesma força magnética. Fato este que vai de encontro com a limitação citada na seção 3.2.3, onde uma elevada à corrente na bobina pode ocasionar um super-aquecimento (através do efeito Joule) e derreter o verniz de seus fios, causando um curto circuito que pode danificar todo o sistema elétrico do atuador.

6 Descrição do Sistema e Modelos

Com o objetivo de validar o programa desenvolvido, medidas obtidas da bancada experimental do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR) do DPM/FEM foram comparadas com as simulações obtidas do programa.

Desta forma, neste capítulo, são apresentadas as descrições da bancada de testes e do modelo utilizado nas simulações do programa computacional.

6.1 Descrição da Bancada Experimental

Conforme a Figura 43, a bancada experimental é composta por um eixo de aço 1030 de 12 mm de diâmetro e 800 mm de comprimento, e um disco de aço SAE 1020 cromado, montado no centro do eixo, com diâmetro de 94,82 mm, 47,5 mm de espessura e massa de 2,34 kg. O deslocamento do disco é medido através de dois sensores de proximidade Bi5-M18-LiU da “CE - Turck” com faixa de medida de 2 a 4 mm, e seu respectivo condicionador de sinal.

Ainda presa ao eixo, há uma luva de aço SAE 1030, com 80 mm de comprimento e 40 mm de diâmetro, onde é exercida a força excitação do atuador magnético. A luva se encontra a 62 mm de distância do primeiro mancal.

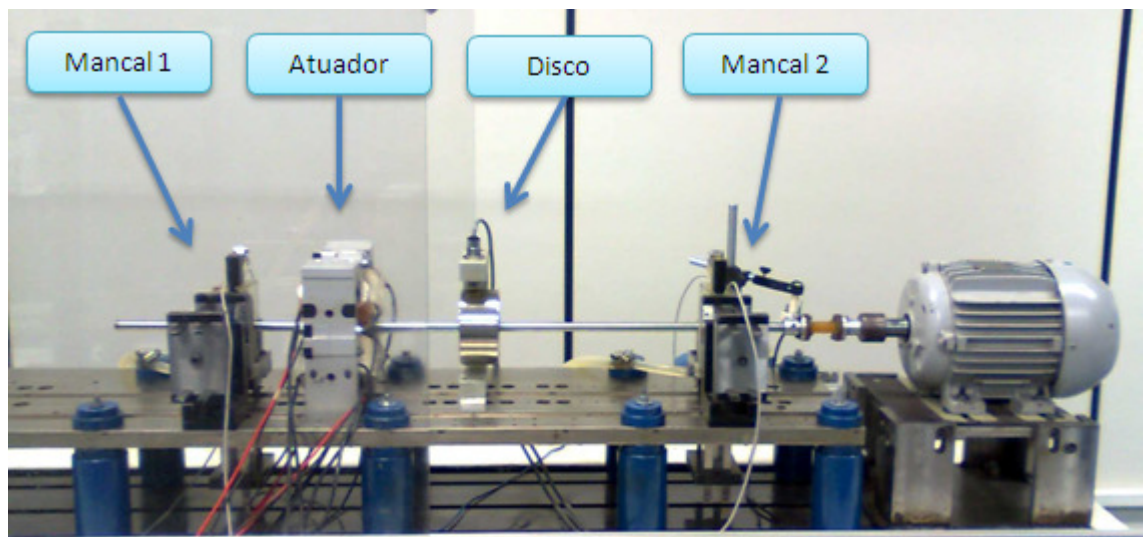


Figura 43 – Bancada Experimental.

A sustentação deste conjunto é feita por dois mancais hidrodinâmicos distanciados de 600 mm e dispostos simetricamente ao centro do eixo. Sua lubrificação é feita utilizando-se o óleo AWS 32 da Castrol (ISO VG 32). Os mancais possuem folga radial de 90 μm , espessura de 20 mm e diâmetro interno de 30 mm. Devido à diferença entre a folga do mancal e o diâmetro do eixo, um munhão é utilizado para ajustar a folga radial desejada. O mancal também possui três orifícios, sendo um central para a entrada de óleo e dois a 90 graus para os sensores de proximidade. Foram utilizados, juntamente com seus respectivos condicionadores de sinal, quatro sensores indutivos de proximidade da “Bently Nevada” que trabalham submersos, e sua faixa de medição é de 0 a 1,5 mm.

Os sinais dos seis sensores de proximidade passam, ainda, por dois filtros, um para remover o ganho DC e outro filtro analógico anti-aliasing com frequência de corte ajustável. Então, são adquiridos por uma placa de aquisição de sinais e controle AT-MIO-16-E2 (placa de controle de propósito geral) da “National Instruments” com: 16 canais de entrada e 4 de saída (analógica/digital) por placa, 1 canal para o trigger analógico/digital e um microprocessador de 12 bits. O *software* de gerenciamento, feito na plataforma LabView 7.1, e a calibração dos sensores foram feitos em trabalhos precedentes (CASTRO, 2007).

Na Figura 44 encontra-se uma visão geral da bancada experimental e sua instrumentação. A bancada também possui um inversor de frequência CFW-08 e um motor trifásico, ambos da marca “WEG”. Para fazer a comunicação entre o *software* e o inversor de frequência, foi utilizado o módulo de comunicação serial XC8, também da “WEG”.

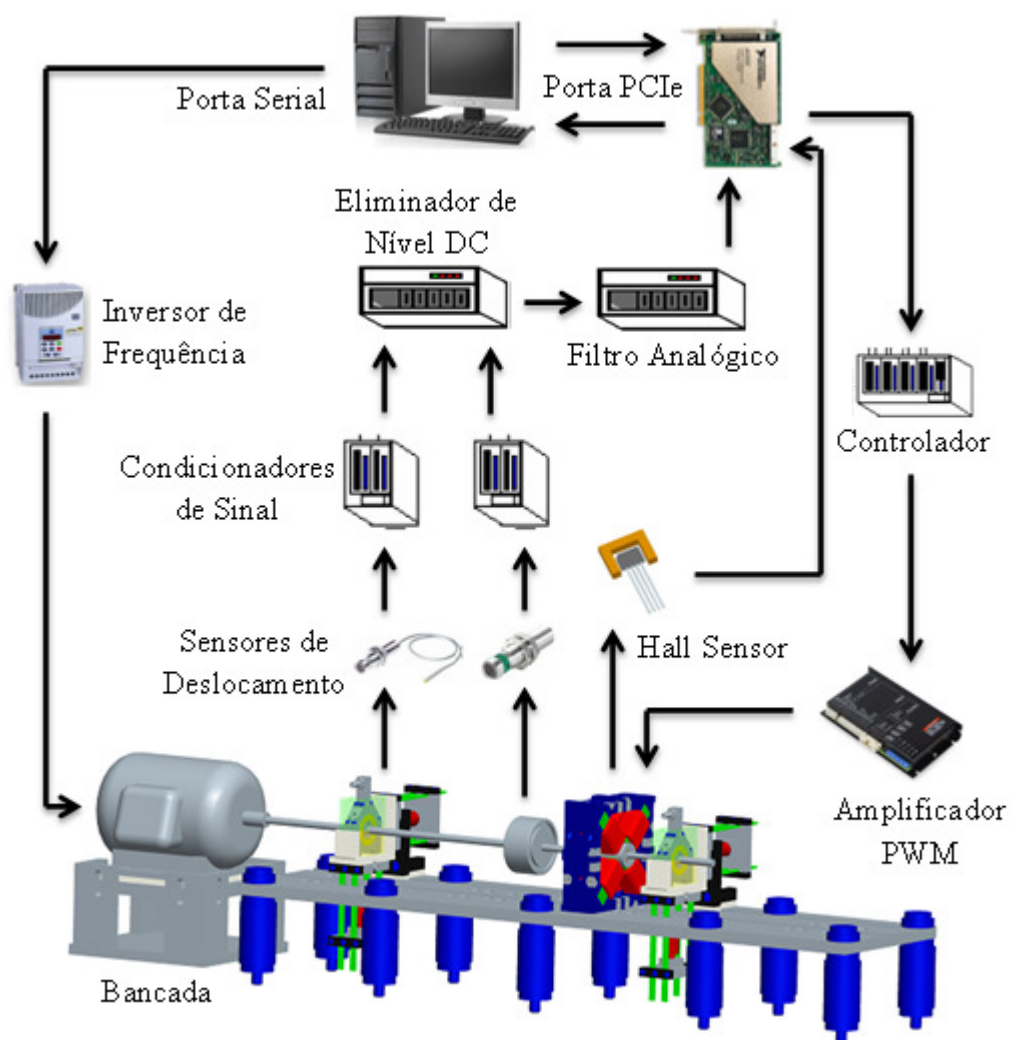


Figura 44 – Instrumentação da bancada experimental.

6.2 Modelo em Elementos Finitos

O modelo em elementos finitos, utilizado para simular a bancada experimental, é composto por 21 nós (números em vermelho), ou seja, 20 elementos (números em azul) conforme demonstrado na Figura 45. As setas verdes representam a posição onde é inserida a força de sustentação dos mancais hidrodinâmicos; nós 3 e 19. A força magnética devido ao atuador é inserida no nó central da luva (nó 6), o desbalanceamento se encontra no nó 11, o nó central do disco, e corresponde a uma massa de 15 g deslocada 1 cm de seu centro.

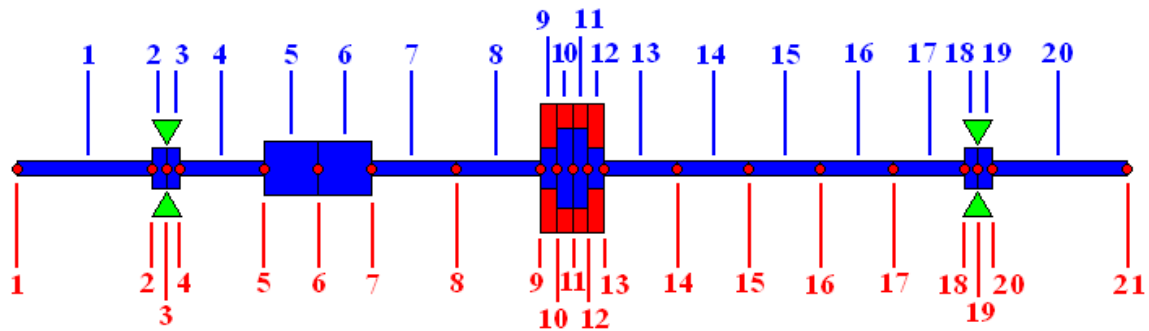
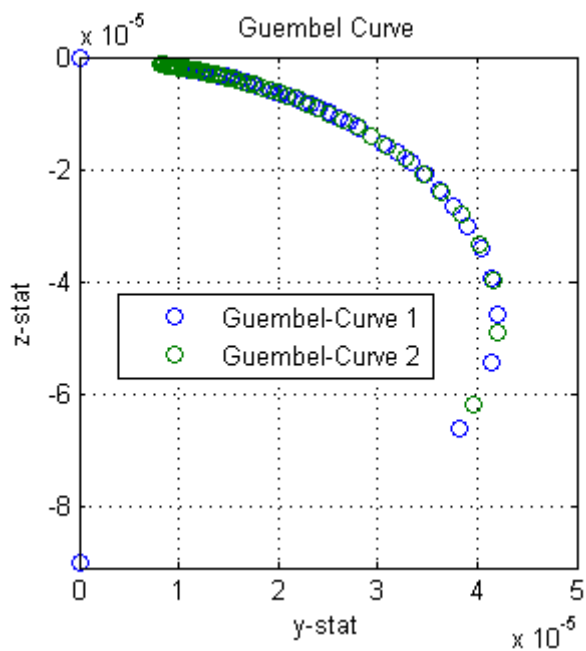


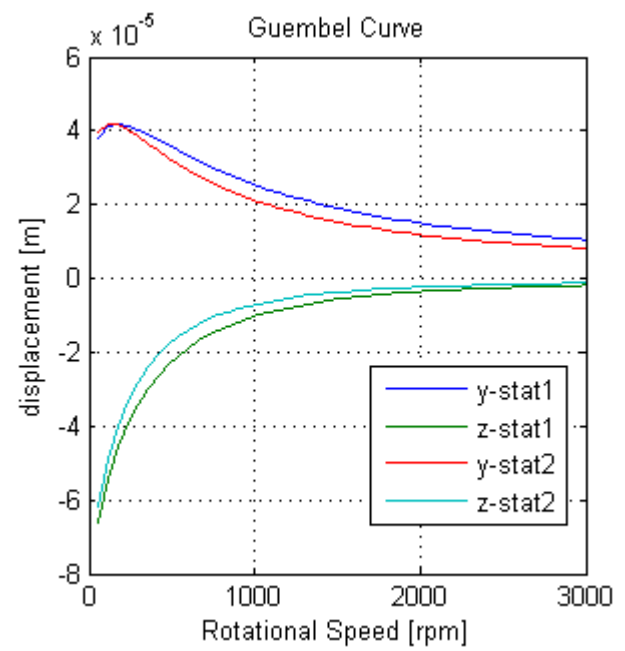
Figura 45 – Modelo em elementos finitos da bancada experimental.

As propriedades dos aços que compõem o eixo e o disco são: módulo de elasticidade (módulo de Young) $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, densidade $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, coeficiente que relaciona o amortecimento proporcional com a rigidez do sistema $\beta_C = 2 \times 10^{-4}$ (valor estimado para eixos de aço obtido do trabalho de Weiming e Novak de 1996). O óleo de lubrificação do mancal possui viscosidade de 0,04 Pa.s.

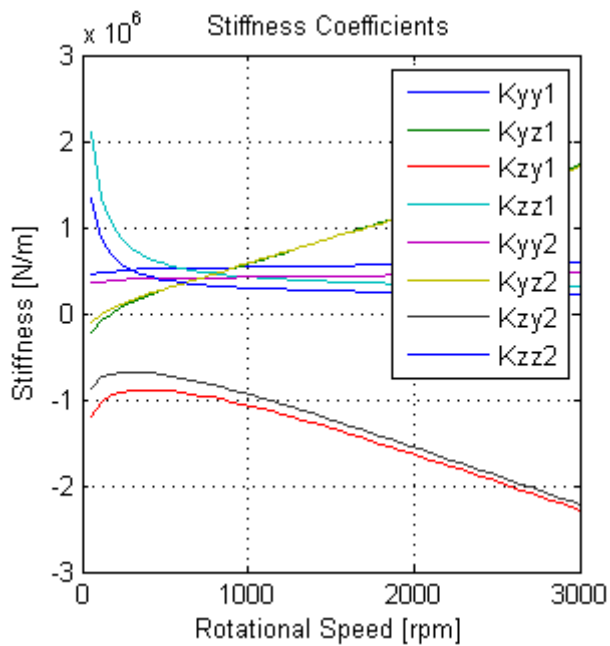
Os coeficientes do mancal hidrodinâmico, conforme citado anteriormente, foram calculados por Machado e Cavalc (2009), e se encontram na Figura 46.



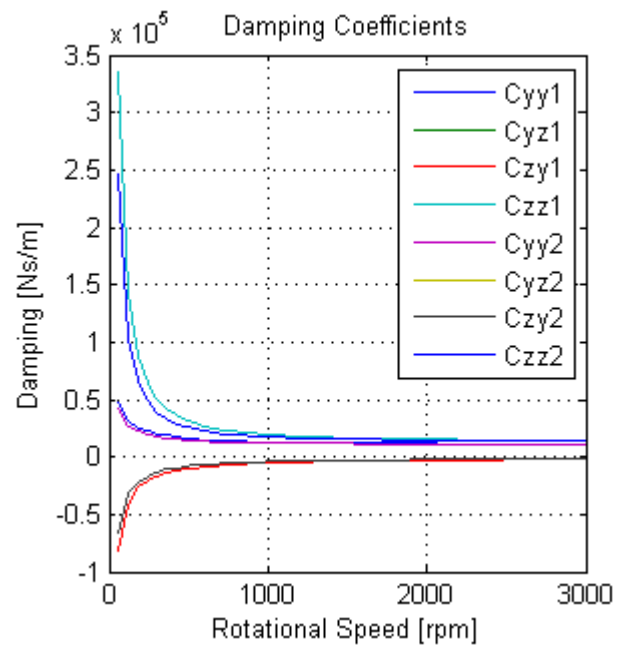
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 46 – Dados dos mancais hidrodinâmicos: (a) Curva Guembel; (b) Deslocamento estático nas duas direções em função das velocidades de rotação; (c) Coeficientes Equivalentes de Rigidez; (d) Coeficientes Equivalentes de Amortecimento.

O mancal mais próximo da luva do atuador (mancal 1) está sujeito a uma carga de 23,15 N e o mancal mais distante (mancal 2) a uma carga de 17,78 N. Conforme a teoria, pode-se observar que na curva Guembel calculada (Figura 46(a) e (b)), ocorre o efeito de auto-centragem do eixo, de forma que para uma velocidade, teoricamente infinita, este estaria perfeitamente centrado no mancal hidrodinâmico. A análise dos coeficientes de rigidez (Figura 46(c)) revela que os termos diretos não apresentam grandes variações com o aumento da frequência de rotação, ao contrário dos termos cruzados que representam a influência de uma direção sobre a outra. E os coeficientes de amortecimento (Figura 46(d)) diminuem com o aumento da frequência de rotação, desta forma, é esperado que o sistema se torne menos estável conforme sua rotação aumenta.

7 Resultados

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos. São apresentados resultados obtidos a partir de análises apresentadas no capítulo 4, através de simulação numérica dos modelos integrados do rotor e do atuador. Na sequência, os resultados experimentais são comparados às simulações numéricas para verificação do modelo desenvolvido.

7.1 Análises do Sistema em Estudo

As análises citadas no Capítulo 4 foram utilizadas com o intuito de mostrar os principais fenômenos característicos das máquinas rotativas, presentes no sistema estudado, e como estes são evidenciados a partir destas análises. Para tanto, uma sequência de simulações numéricas foram realizadas e seus resultados, apresentados e discutidos nesta seção.

A Figura 47 mostra o diagrama de Campbell do sistema em estudo. Pode-se observar a variação das quatro primeiras frequências na Figura 47(a). O amortecimento modal pode ser observado na Figura 48. As curvas em verde e azul ocorrem devido à presença dos mancais hidrodinâmicos. Para baixas rotações, estas frequências naturais apresentam elevado amortecimento modal. Com o aumento da velocidade, o amortecimento modal diminui sensivelmente, dando origem aos efeitos conhecidos como *oil whirl* e *oil whip*. Deve-se observar que a diferença entre estas duas frequências se deve ao fato de que os mancais estarem sujeitos a diferentes carregamentos.

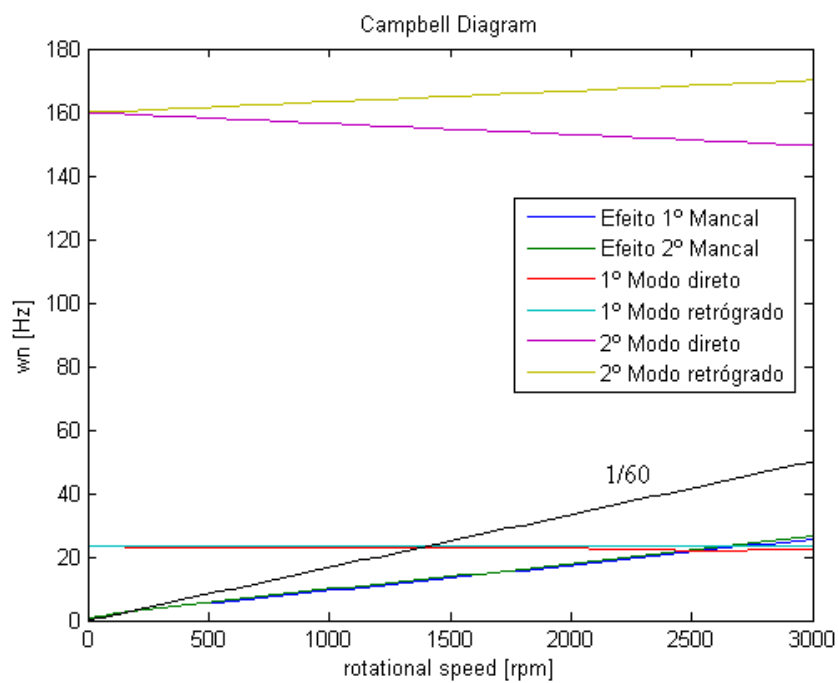


Figura 47 - Diagrama de Campbell.

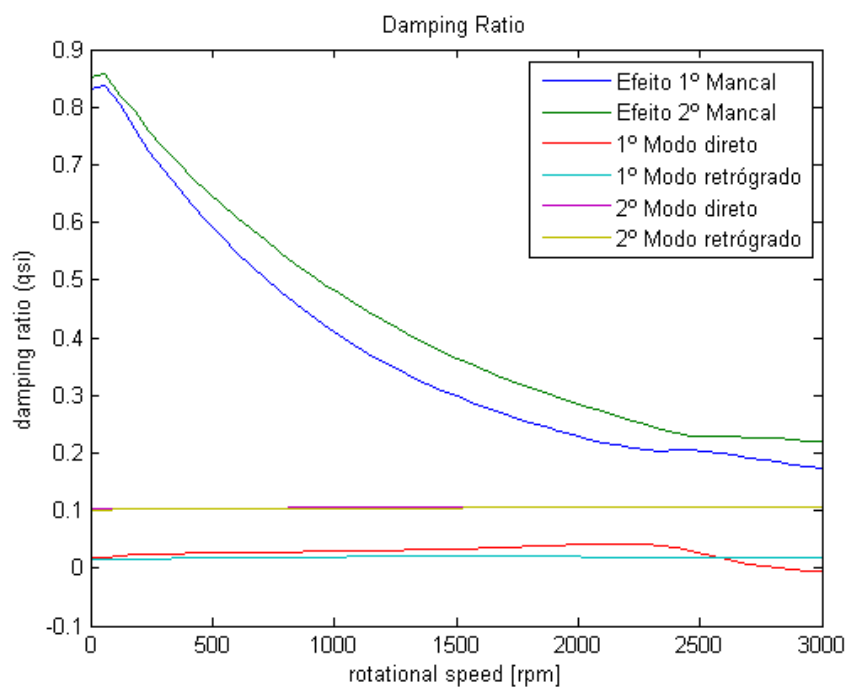
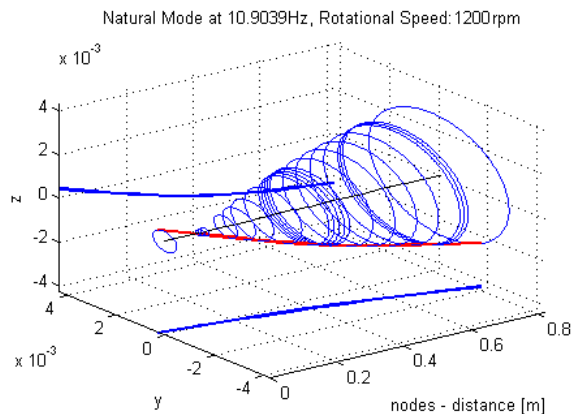


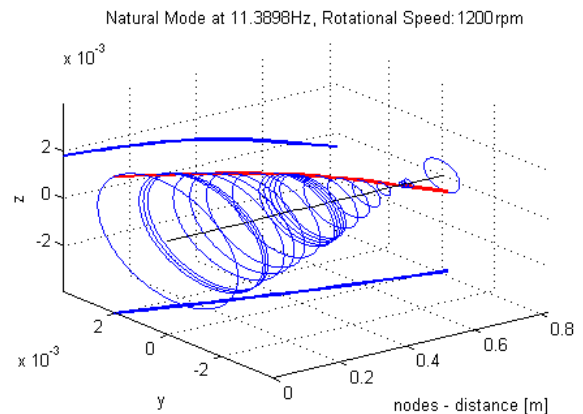
Figura 48 – Variação do amortecimento modal associado às curvas do Diagrama de Campbell.

O Diagrama de Campbell contém a variação das frequências naturais em função da variação da velocidade. Contudo, a forma dos modos naturais flexionais associados a estas frequências não se alteram, mantendo-se a ordem de 1º e 2º modos flexionais. Desta forma, na Figura 49(c) - 49(f) encontram-se os quatro primeiros modos de vibrar do rotor, calculados para a velocidade de rotação de 1200 rpm; as órbitas vermelhas indicam movimento retrógrado e as azuis indicam movimento direto. As Figura 49 (a) e (b) representam o efeito dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais nas deformações do rotor na frequência de rotação de 1200 rpm.

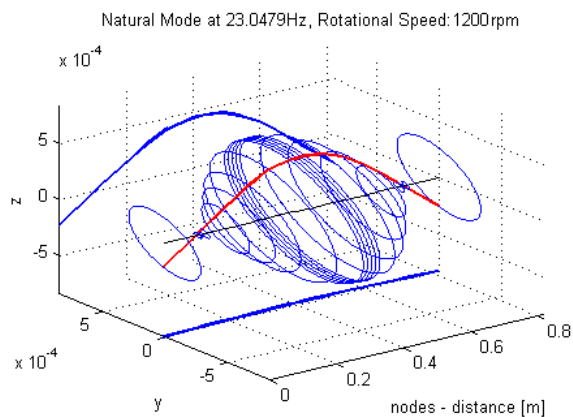
Os próximos dois modos (Figura 49 (c) e (d)) representam os modos direto (23 Hz) e retrógrado (23,2 Hz) referentes ao primeiro modo de flexão do eixo, e os dois modos seguintes (Figura 49 (e) e (f)), representam os modos direto (155,7 Hz) e retrógrado (163,9 Hz) referentes ao segundo modo de flexão, quando o eixo gira na frequência de 1200 rpm.



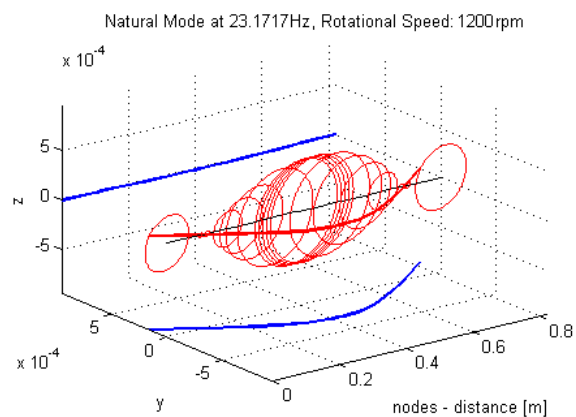
(a)



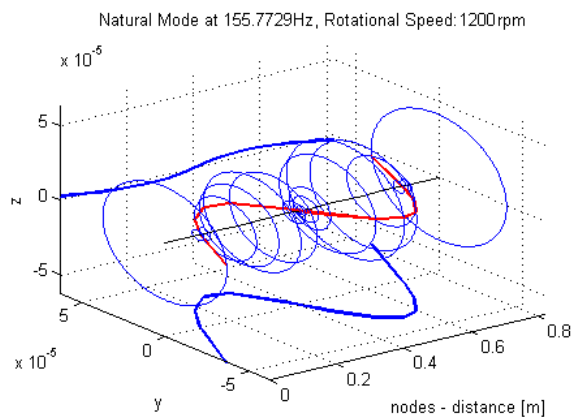
(b)



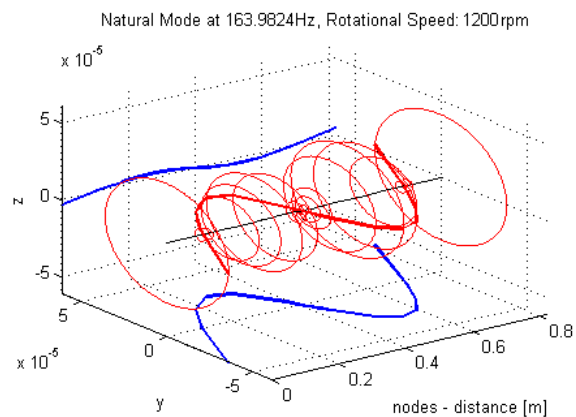
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 49 – Modos naturais do sistema para uma velocidade de rotação de 1200 rpm: (a) 10,90 Hz; (b) 11,38 Hz; (c) 23,04 Hz; (d) 23,17 Hz; (e) 155,77 Hz; (f) 163,98 Hz.

Com intuito de se obter as frequências naturais do sistema com rotação nula, foi utilizada a simulação de um teste impulsivo com o atuador magnético. O resultado do espectro em frequência da vibração do disco se encontra na Figura 50. Pode-se observar as frequências naturais na parte positiva e negativa do espectro, relativas às frequências naturais direta e retrógrada do primeiro modo de viga.

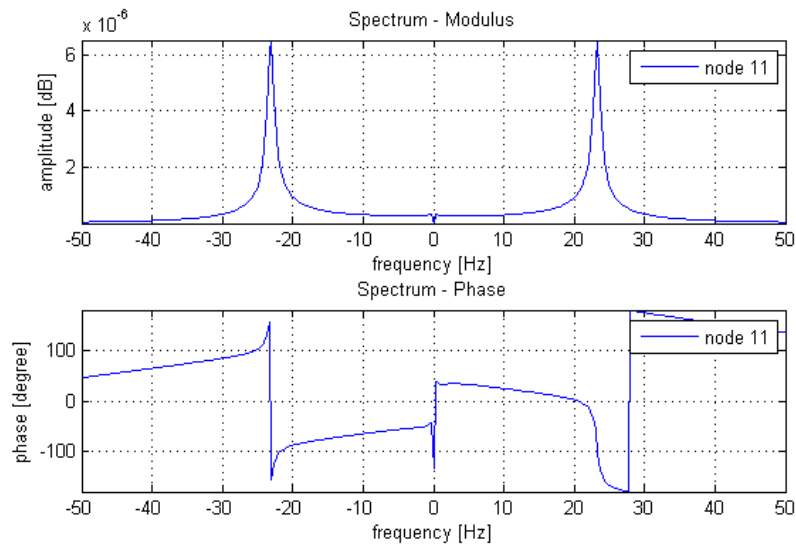
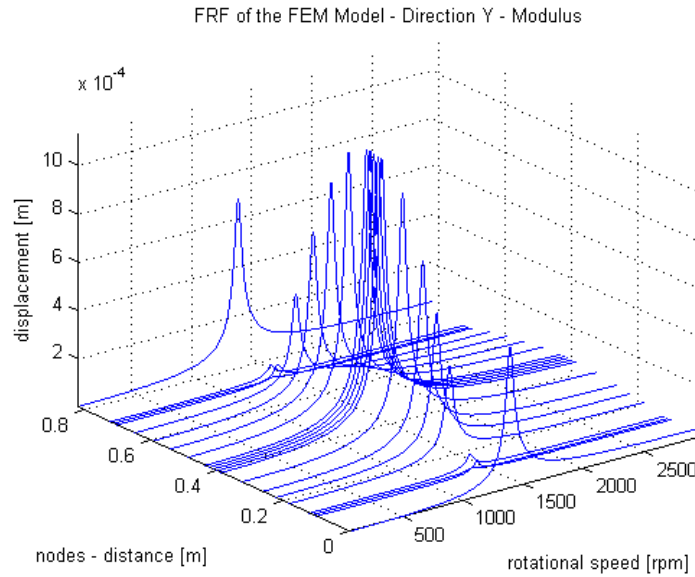


Figura 50 – Resposta ao impulso com rotação nula (nó do disco).

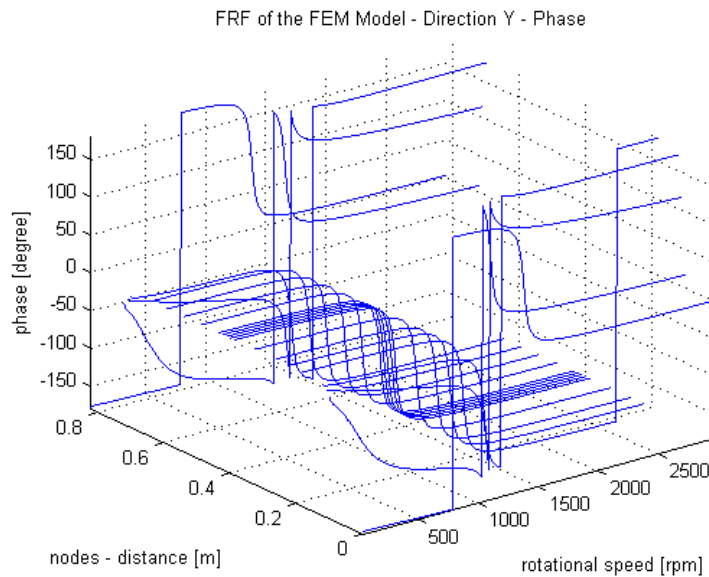
As magnitudes das FRFs na direção horizontal, de todos os nós do sistema, podem ser vistas na Figura 51, sendo que a resposta vertical apresenta o mesmo comportamento devido ao baixo grau de anisotropia do sistema. Na FRF há apenas um pico porque, conforme visto no Diagrama de Campbell, as frequências em torno de 23 Hz estão muito próximas. Observa-se que os nós relativos aos mancais apresentam pequeno deslocamento, e os nós das extremidades do eixo apresentam deslocamento elevado pois estas estão livres. Deve-se observar que seus deslocamentos estão positivos pois a Figura 51(a) representa o módulo do deslocamento, no entanto, a partir do gráfico de fase (Figura 51(b)) observa-se que as extremidades do eixo estão em oposição de fase com o resto do sistema. Os cinco nós relativos ao disco central apresentam praticamente o mesmo deslocamento, resultado da maior rigidez naqueles pontos, devido ao fato do disco possuir grande espessura.

Os modos operacionais para algumas frequências de rotação encontram-se na Figura 52. Observa-se que na faixa de operação da máquina rotativa em estudo (0-3000 rpm), os primeiros modos de flexão de viga predominam na composição do movimento de precessão. Através da variação da amplitude das órbitas dos modos, podemos ver que, conforme a rotação aumenta e se aproxima da velocidade crítica do sistema, a amplitude das órbitas aumenta, atingindo sua

amplitude máxima em torno da velocidade crítica (aproximadamente 1380 rpm - Figura 52(c)). Com o aumento da velocidade, a amplitude das órbitas diminui, conforme esperado, devido ao efeito da auto-centragem do eixo.



(a)



(b)

Figura 51 – Função resposta em frequência do sistema. (a) módulo; (b) fase.

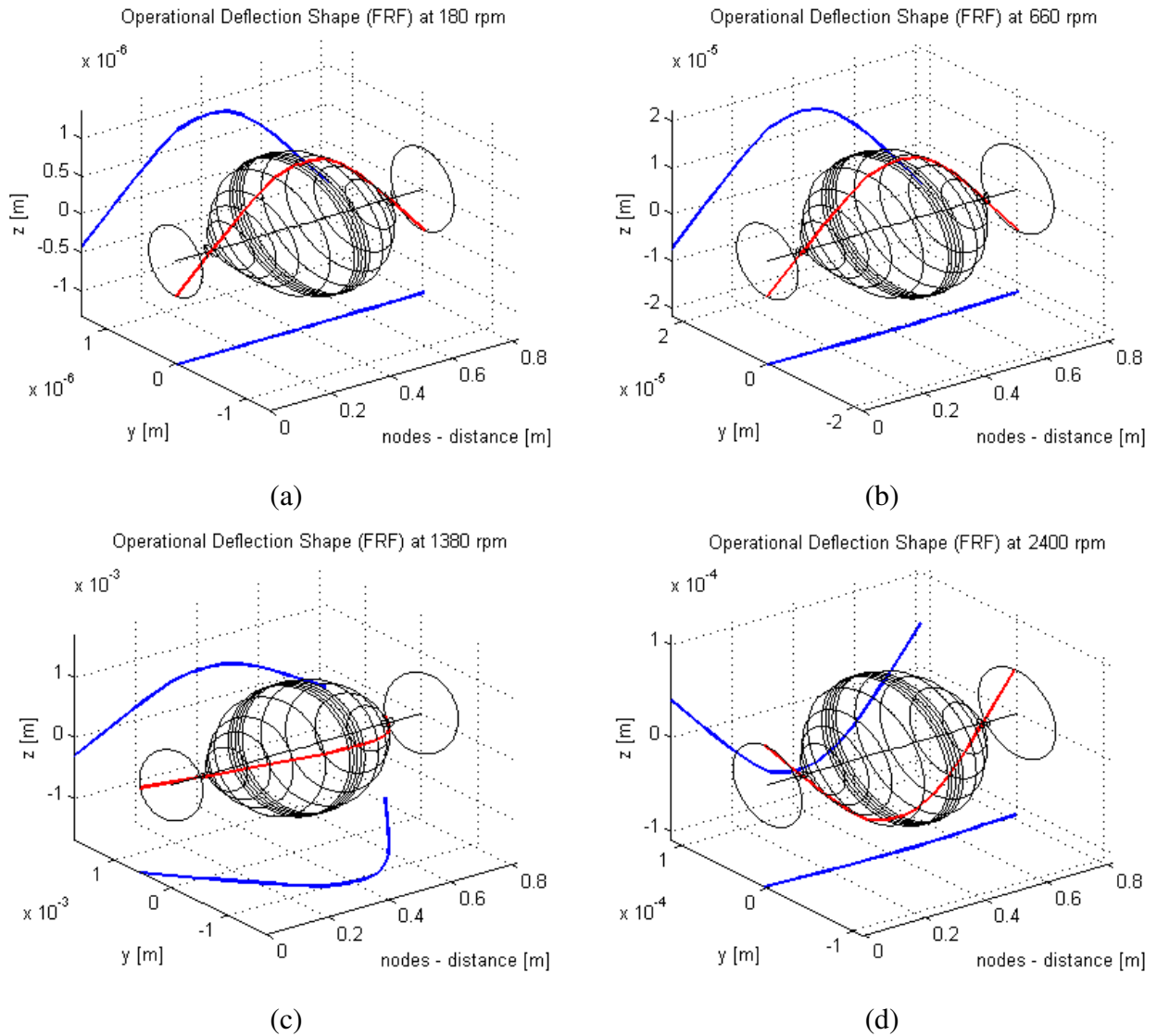


Figura 52 – Modos operacionais: (a) 180 rpm; (b) 660 rpm; (c) 1380 rpm; (d) 2400 rpm.

Com o objetivo de visualizar melhor o efeito da auto-centragem do eixo e do mancal hidrodinâmico, realizou-se uma simulação com aceleração constante de 195 rpm/s, variando a velocidade do rotor de 0 a 3900 rpm. O deslocamento desenvolvido pelo primeiro mancal encontra-se na Figura 53.

A partir da Figura 53 pode-se observar que a amplitude máxima se localiza em torno da

frequência de 1470 rpm. Entretanto, de acordo com os estudos de Cavalca (1988), a amplitude de vibração cresce a partir da velocidade crítica de rotação, quando, então, passa a aumentar rapidamente até um valor limite, sendo que a amplitude após a passagem pela ressonância depende do tempo decorrido na mesma, ou seja, depende da aceleração angular do rotor. Neste caso, a amplitude de vibração atinge seu valor máximo na região de ressonância e diminui em seguida, devido ao amortecimento do sistema. Portanto, a frequência natural do sistema ocorre em 1380 rpm quando do crescimento acentuado da amplitude de vibração do sistema.

Ainda na Figura 53, observa-se o efeito da auto-centragem do eixo conforme a rotação aumenta. Na Figura 48, observa-se que em torno da frequência 2844 rpm surge um amortecimento negativo, ou seja, um autovalor com parte real positiva (instável), efeito da instabilidade do *oil whip*. Entretanto, a parte real negativa neste ponto é muito pequena, levando um certo tempo para que a instabilidade se manifeste no sistema, ao contrário do que acontece no sistema real, onde ao atingir aproximadamente o dobro da frequência natural, o sistema se torna altamente instável devido ao *oil whip*. Esta é a limitação da modelagem da força de sustentação hidrodinâmica através de coeficientes lineares (Figura 54).

Conforme citado anteriormente, os deslocamentos do rotor em Y e Z se desenvolvem em torno do ponto da curva Guembel correspondente à sua velocidade de rotação; e conforme velocidade de rotação aumenta, este ponto tende ao centro do mancal. Este efeito também pode ser visualizado na Figura 53, onde se observa que o deslocamento estático tende ao centro do mancal com o aumento da rotação.

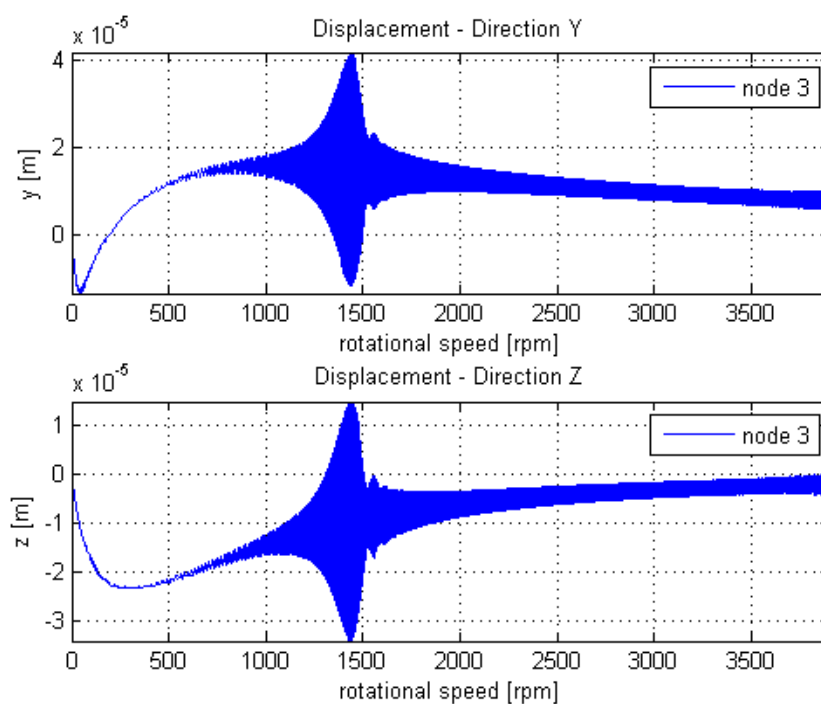


Figura 53 – Deslocamento do disco em y e z em função da velocidade de rotação (nó do primeiro mancal).

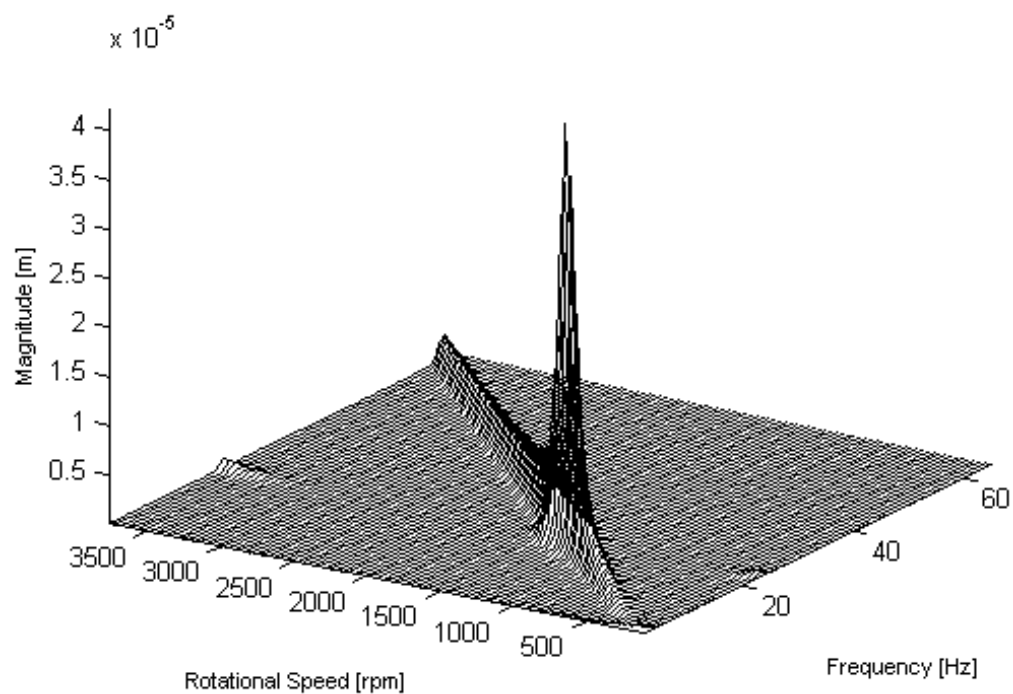
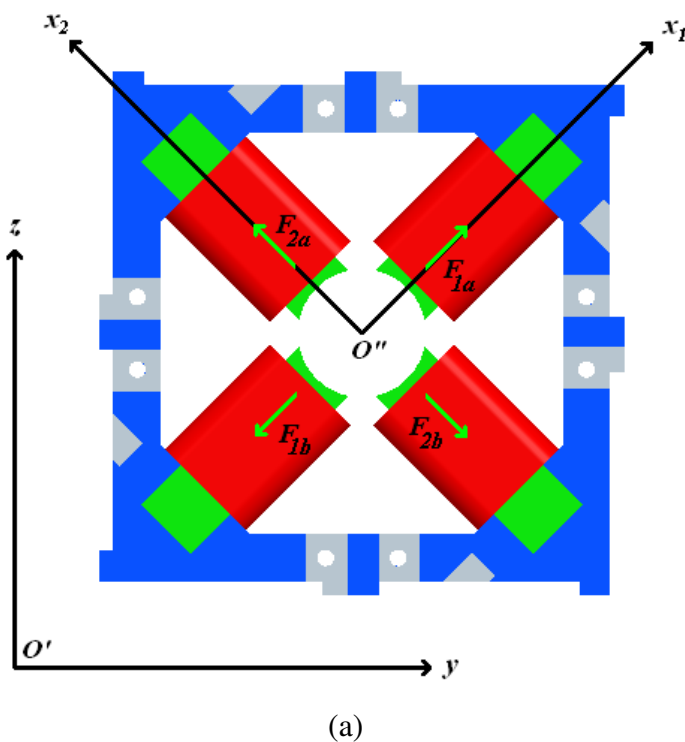


Figura 54 – Diagrama em cascata (nó do primeiro mancal).

7.2 Validação do Modelo – Testes Experimentais

Na Figura 55(b) observa-se a força magnética simulada em cada um dos pares de bobinas do atuador magnético nas direções x_1 e x_2 a 90° entre si (Figura 55 (a)), para o caso onde a rotação é de 1800 rpm e a excitação é de 20 Hz. Na força da direção x_1 , observa-se que a soma das forças das duas bobinas resulta na força senoidal desejada (Figura 55 (b)), resultado da linearização apresentada na seção 3.2.2. Conforme esperado, na direção x_2 há apenas uma força residual da ordem de 10^{-3} . A força magnética resultante no referencial inercial y-z pode ser visualizada na Figura 55 (c).



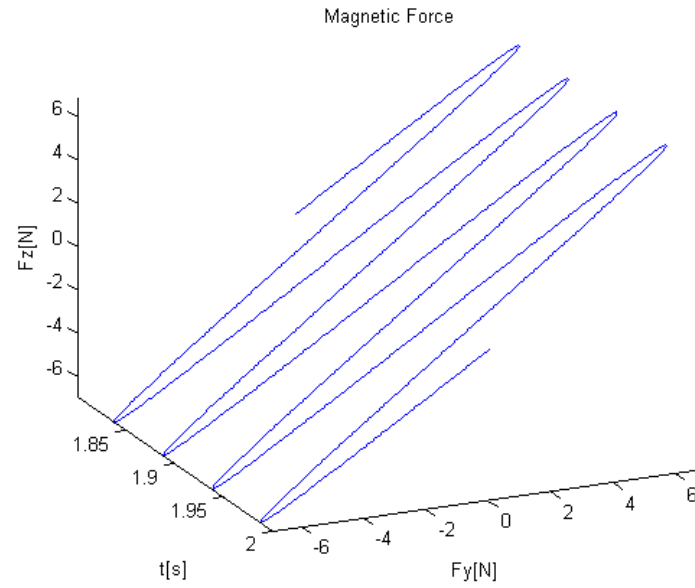
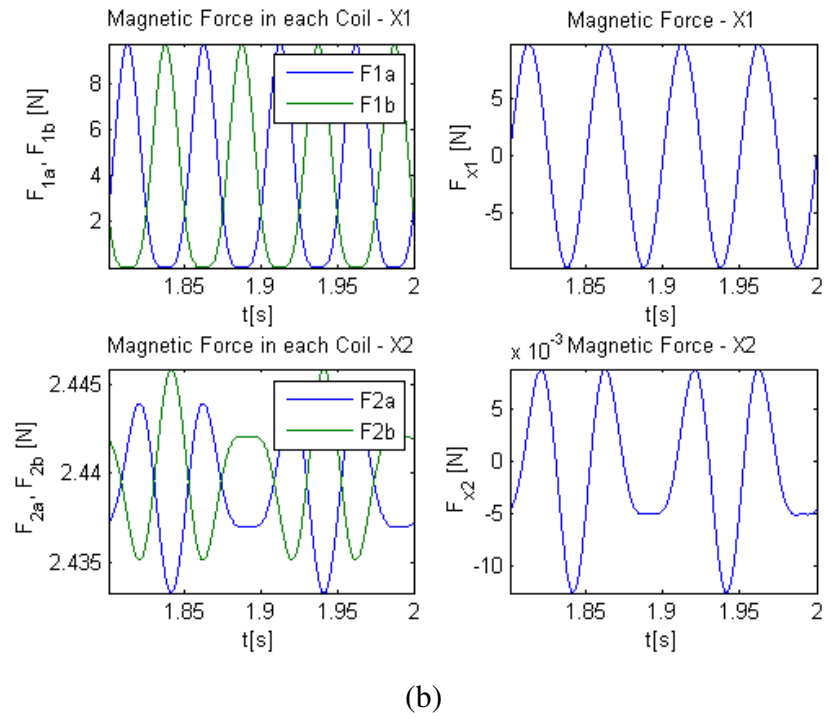


Figura 55 – (a) sistema de coordenadas do atuador; (b) força magnética no referencial do atuador (x_1, x_2); (c) força magnética no referencial inercial (Y, Z).

Com o intuito de validar o modelo, o espectro em frequência do deslocamento da massa foi

obtido experimentalmente e por simulação numérica (Figuras 56 a 64).

A comparação foi realizada para três diferentes rotações: 1800, 2100 e 2400 rpm; e três diferentes frequências de excitação do atuador magnético: 20, 25 e 30 Hz (exceto para o caso da rotação de 2400 rpm, como será explicado posteriormente). Em todos os casos, utilizou-se uma força de excitação senoidal de 10 N apenas na direção x_I (Figura 55 (a)).

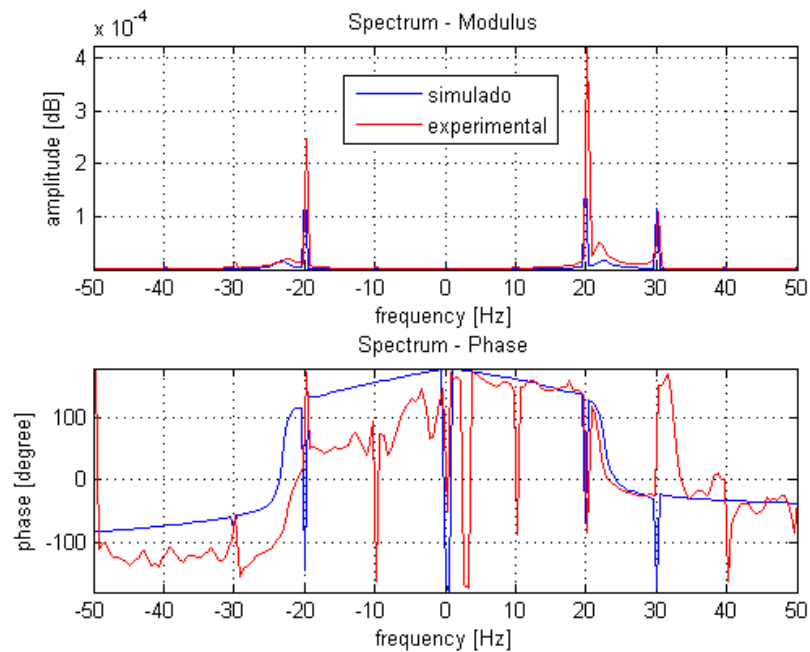


Figura 56 – Validação: rotação 1800 rpm, excitação 20 Hz.

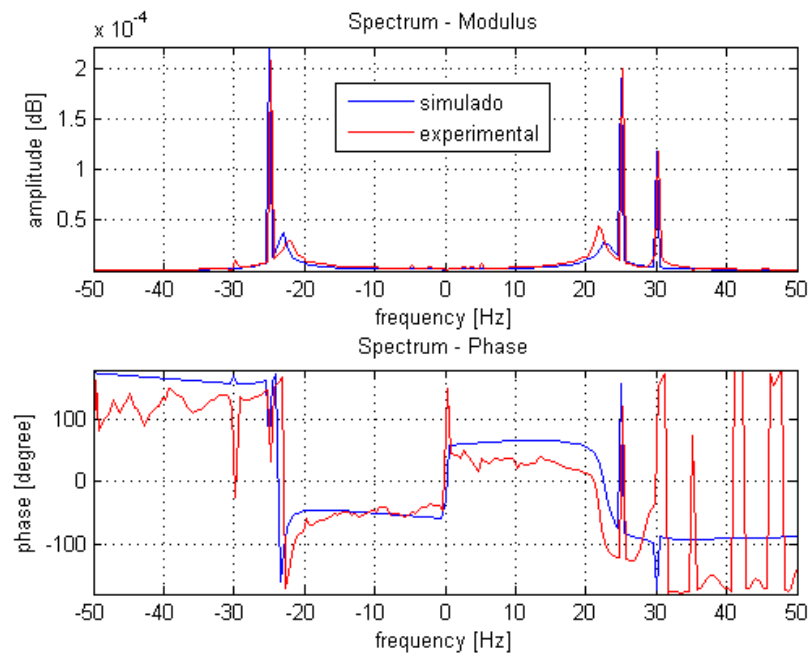


Figura 57 – Validação: rotação 1800 rpm, excitação 25 Hz.

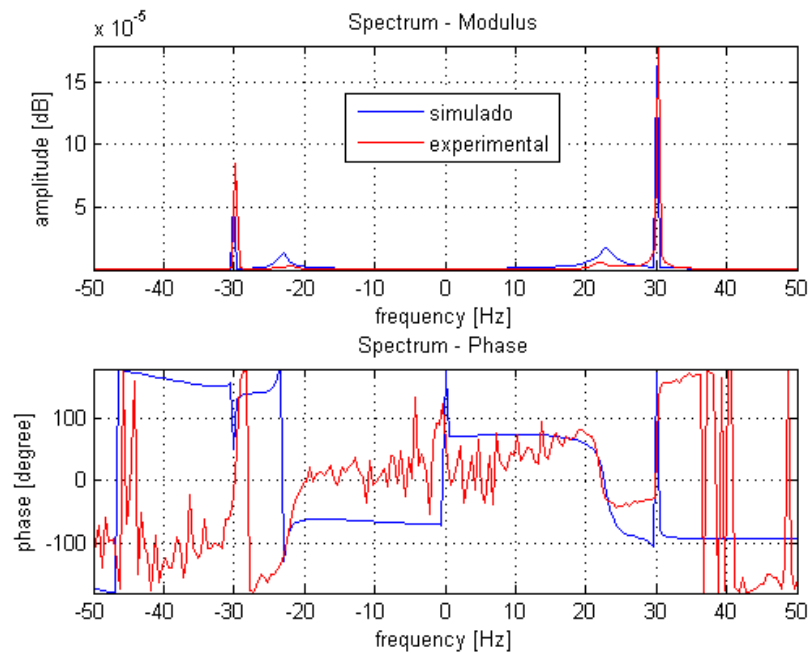


Figura 58 – Validação: rotação 1800 rpm, excitação 30 Hz.

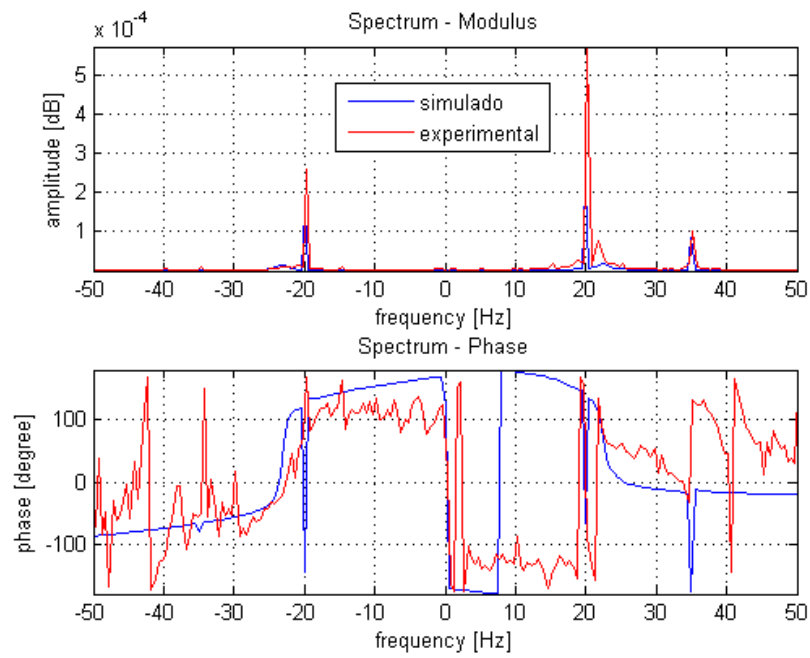


Figura 59 – Validação: rotação 2100 rpm, excitação 20 Hz.

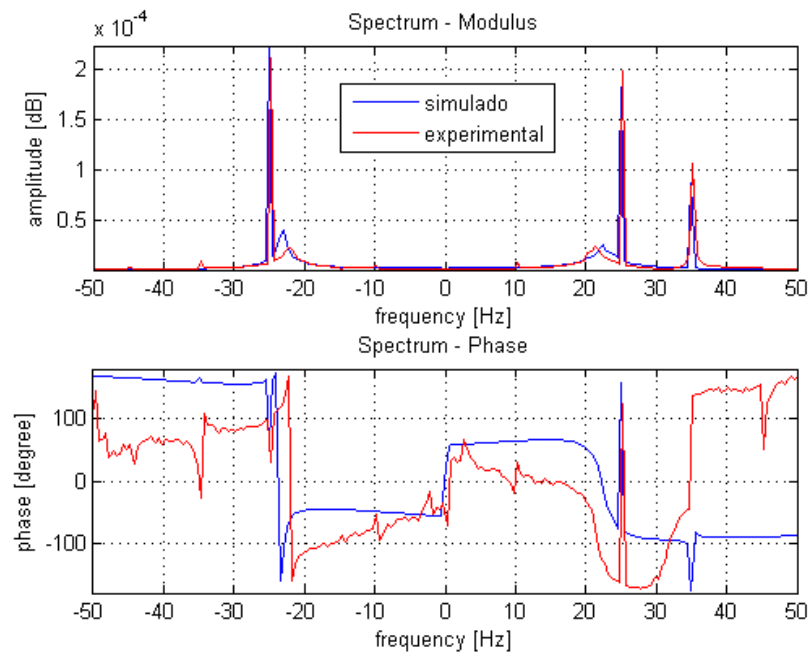


Figura 60 – Validação: rotação 2100 rpm, excitação 25 Hz.

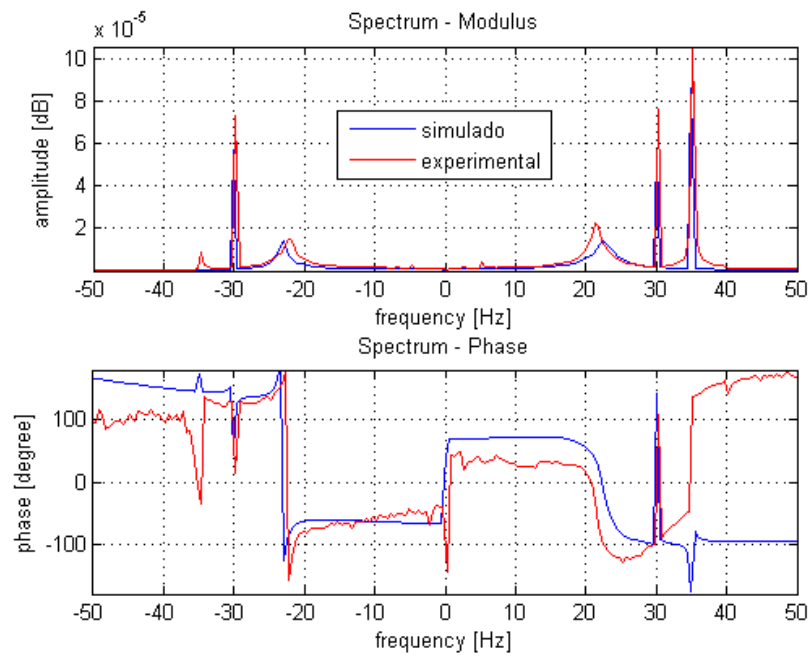


Figura 61 – Validação: rotação 2100 rpm, excitação 30 Hz.

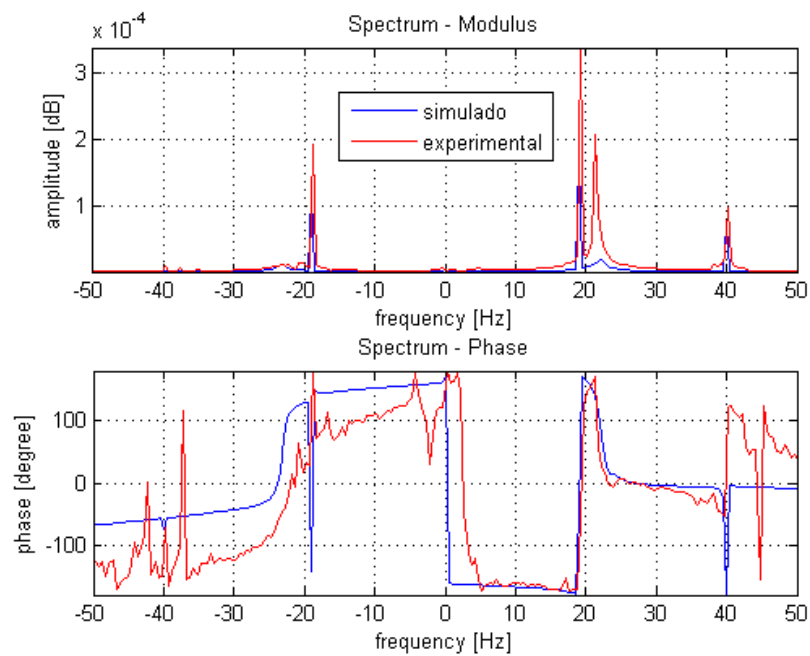


Figura 62 – Validação: rotação 2400 rpm, excitação 19 Hz.

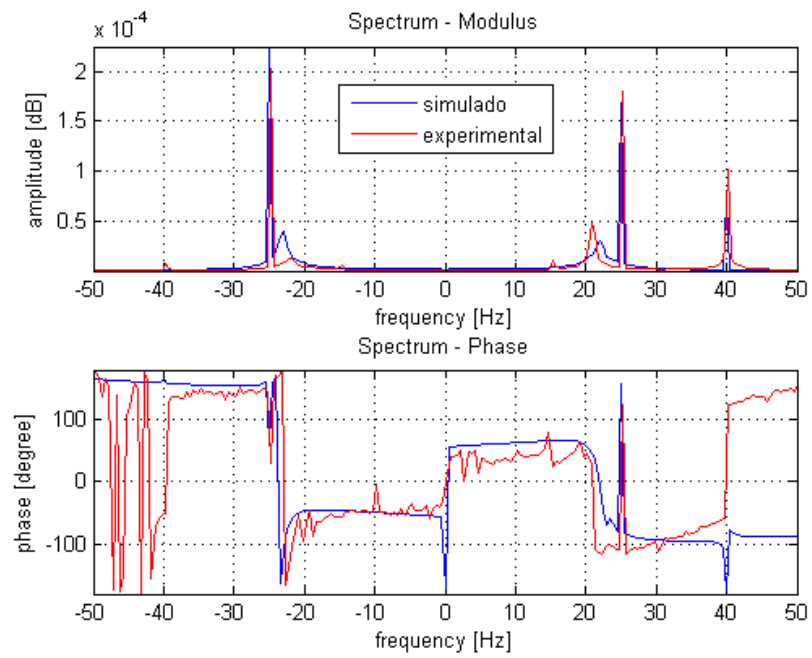


Figura 63 – Validação: rotação 2400 rpm, excitação 25 Hz.

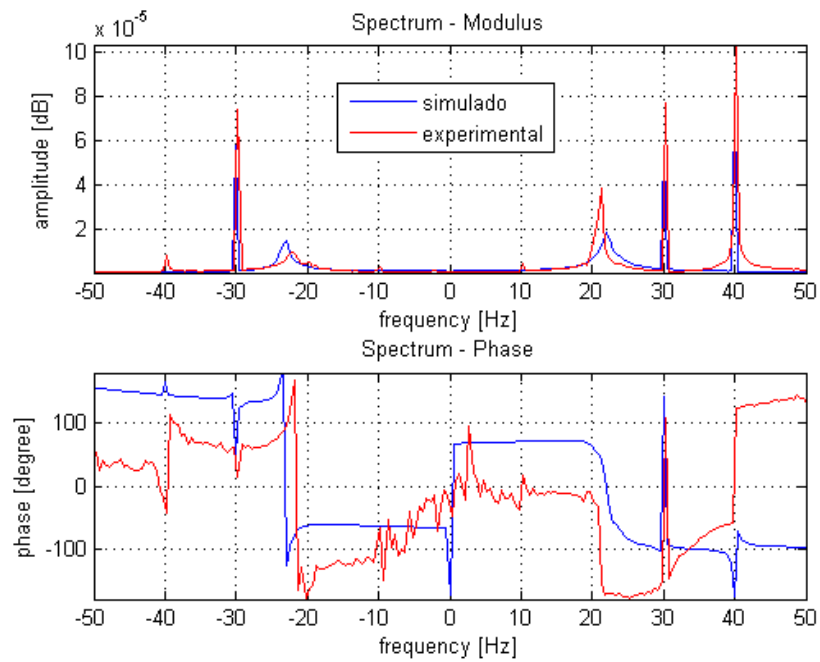


Figura 64 – Validação: rotação 2400 rpm, excitação 30 Hz.

É possível observar que o pico na velocidade de rotação, relativo à excitação por desbalanceamento, aparece predominantemente na parte positiva do espectro. Este fato ocorre porque, conforme mencionado previamente, o desbalanceamento é uma força síncrona. Os pequenos picos na parte negativa do espectro, relativos ao desbalanceamento, aparecem devido à anisotropia do sistema, no caso deste trabalho, devido aos mancais hidrodinâmicos.

Assim, tem-se que, a força de desbalanceamento (síncrona) excita apenas movimentos de precessão direta do sistema rotativo, a menos que este apresente alguma forma de anisotropia (KRAMER, 1993).

O pico amortecido em torno de 23 Hz representa a velocidade crítica do sistema, onde ocorre também a inversão de fase, e aparece na parte positiva e negativa do espectro pois, conforme será mostrado, há duas velocidades críticas (uma direta e uma retrógrada) muito próximas.

Para os casos onde a frequência de excitação é de 20 Hz (Figuras 56 e 59), observa-se que o maior pico em amplitude é o pico correspondente à frequência de excitação na parte positiva do espectro, desenvolvendo, portanto, movimento de precessão predominantemente direta. O pico de 30 Hz corresponde à frequência de rotação do eixo.

Enquanto que, para os casos onde a excitação é de 25 Hz (Figuras 57, 60 e 63), observa-se novamente que o pico da frequência de excitação da força magnética é dominante, porém na parte negativa do espectro, caracterizando movimento de precessão predominantemente retrógrada.

Estes fatos ocorrem pois, embora as velocidades críticas direta e retrógrada estejam muito próximas, estas não são coincidentes devido à anisotropia do sistema. Assim, a menor velocidade crítica, relativa à precessão direta, se encontra mais próxima da frequência de excitação de 20 Hz, e a velocidade crítica relativa à precessão retrógrada se encontra mais próxima da frequência de excitação de 25 Hz.

E, finalmente, quando a excitação é de 30 Hz (Figuras 58, 61 e 64), ou seja, mais distante de ambas as velocidades críticas, o pico dominante passa a ser o da velocidade de rotação, assim, a excitação pelo desbalanceamento rotativo prevalece e, logo, prevalece o movimento de precessão direta.

Quando a velocidade de rotação é 2400 rpm, se a excitação for de 20 Hz, o rotor da bancada experimental se torna instável. Isto ocorre, provavelmente, devido a frequência de excitação (20 Hz), a frequência do *oil whirl* (aproximadamente metade da frequência de rotação) e a velocidade crítica do sistema estarem muito próximas, levando o sistema à instabilidade. Entretanto, seriam necessários estudos mais aprofundados para verificar este fato.

Desta forma, para a rotação de 2400 rpm foi utilizada a frequência de excitação de 19 Hz. Neste caso (Figura 62), nota-se que a velocidade crítica do sistema apresenta um pico muito elevado nos dados experimentais, que pode ser entendido como o início do fenômeno descrito. Na simulação, este efeito não é visualizado pois, conforme será mostrado adiante, existe uma limitação quanto à modelagem linear do mancal hidrodinâmico, utilizada neste trabalho.

Segundo Castro (2007), existe uma grande dificuldade na obtenção de modelos que representem fielmente os sistemas reais; tal fato advém do desconhecimento de parâmetros inerentes do sistema, simplificações e aproximações dos modelos analíticos; fazendo-se necessário o uso de técnicas de ajustes de modelo. No entanto, o estudo destas técnicas compõem um extenso campo de pesquisa que não é o foco deste trabalho. Considerando-se que nenhum método de ajuste foi utilizado, a comparação entre os resultados experimentais e simulados mostra que o programa representa o sistema de forma promissora pra a aplicação pretendida.

A verificação da possibilidade de excitar modos diretos e, principalmente, retrógrados do rotor, tanto nas simulações quanto nas medições, corrobora com o principal objetivo do projeto do atuador magnético, obter uma fonte de excitação sem contato a ser utilizada na realização de análise modal complexa de sistemas rotativos.

8 Conclusões

O presente trabalho apresenta uma contribuição na integração de modelos de máquinas rotativas, com o modelo físico de um atuador magnético, utilizado como fonte de excitação externa sem contato.

Foi realizada uma revisão da literatura sobre diversos aspectos pertinentes às máquinas rotativas com ênfase na modelagem em elementos finitos. Também foram revisados diversos trabalhos sobre atuadores e mancais magnéticos, desde aspectos construtivos e modelagem, até trabalhos nos campos de controle e diagnose de falhas.

De posse do modelo completo do sistema, foram avaliados os resultados das simulações e comparados aos resultados obtidos experimentalmente. Foram comparados os espectros (transformada de Fourier) do deslocamento do disco. Verificou-se que o modelo representou o sistema físico de forma promissora, pois não foram realizados ajustes de parâmetros ou técnicas de otimização de busca. Outra implicação dos testes realizados, foi a verificação da capacidade do atuador magnético em excitar o sistema na forma desejada, sobretudo, nas frequências retrógradadas, atestando, assim, a possibilidade de sua utilização futura em testes de análise modal ou de controle de vibrações.

Após a validação, algumas das principais ferramentas de análise utilizadas em máquinas rotativas foram apresentadas e utilizadas na análise do rotor estudado, de forma a mostrar como permitem, de forma complementar, o entendimento dos fenômenos inerentes a este tipo de sistema dinâmico. Entretanto, seria necessário utilizar técnicas de análise modal para a realização experimental destas análises. Como este não era o foco do trabalho, estas ferramentas foram apenas utilizadas nos resultados simulados.

Através do diagrama de Campbell, é possível a obtenção da variação das frequências naturais do sistema em função de sua rotação e, desta forma, localizar suas velocidades críticas. A

partir do diagrama de Campbell, também é obtida a variação do amortecimento modal em função da velocidade de rotação, possibilitando uma análise qualitativa do quanto cada modo contribui na composição do movimento em cada velocidade de rotação. Estas análises podem ser utilizadas de forma conjunta com os modos naturais de vibrar do rotor, fornecendo uma idéia completa do comportamento do sistema.

Uma síntese das análises, feitas com o diagrama de Campbell, com o amortecimento modal, e com os modos naturais, pode ser obtida a partir da resposta forçada do sistema, utilizando a FRF e os modos operacionais. Estas ferramentas representam o comportamento completo do sistema, ou seja, como este realmente vibra, uma vez que os modos operacionais são combinações lineares dos modos naturais, visto que o sistema estudado permite a aproximação para amortecimento estrutural proporcional.

A partir de todas estas análises, verificou-se uma limitação da modelagem de mancais hidrodinâmicos utilizada. Apesar da instabilidade devido ao *oil whip* surgir, seu efeito é muito lento e demora para se tornar representativo, diferente do que é observado na prática, onde a instabilidade é prontamente verificada ao se atingir o limiar de estabilidade (CASTRO, 2007).

Também foi apresentada a obtenção do espectro de frequência, através da transformada de Fourier, de sinais temporais, e o diagrama em cascata, utilizado em casos onde as componentes harmônicas do sinal variam ao longo do tempo, útil no estudo da instabilidade fluido-induzida.

A seguir encontram -se algumas sugestões de continuidade de pesquisa são:

- Estudo de técnicas de ajustes de modelos, de forma a aproximar ainda mais o modelo da bancada experimental;
- Utilização do atuador magnético em análise modal, de forma a se levantar experimentalmente os diagramas de Campbell, modos naturais e operacionais;

9 Referências Bibliográficas

AENIS, M.; KNOPF, E.; NORDMANN, R. Active Magnetic Bearings for the Identification and Fault Diagnosis in Turbomachinery. *Mechatronics*, v.12, p.1011-1021, 2002.

ALLAIRE, P. E.; KNOSPE, C. R.; WILLIAMS, R. D.; LEWIS, D. W.; BARRET, L. E.; MASLEN, E. H.; HUMPHRIS, R. R. High Performance Magnetic Bearings for Aero Applications – Final Report. NASA Grant No. NAG3-1334, Mechanical, Aerospace and Nuclear Engineering, University of Virginia, Charlottesville, VA, United State. 37p. February 05, 1997.

ALLEMANG, R. J. The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse. *Sound and Vibration*, p.14-21, Aug. 2003.

ARAÚJO, C. A.; LÉPORE, F. P. N. Vibration Control of Flexible Rotors Using External Magnetic Forces. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v.15, n.4, p.350-390, 1993.

BASH, T. J. Active Magnetic Bearings used as an Actuator for Rotor Health Monitoring in Conjunction with Conventional Support Bearings. 2005. 75p. Dissertation (M.Sc.) - Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg – VA, United States.

BENTLY, D. E. The Death of Whirl and Whip. *Orbit*, p.42-46, Fourth Quarter, 2001.

BOEHM, J.; GERBER, R.; KILEY, N. R. C. Sensors for Magnetic Bearings. *IEEE Transactions of Magnetics*, v.29, n.6, p.2962-2964, November, 1993.

CASTRO, H. F. Análise de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores sob Instabilidade Fluido-Induzida. 2007. 176p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, Brasil.

CASTRO, H. F.; FURTADO, R. M.; CAVALCA, K. L.; PEDERIVA, R.; BUTZEK, N.; NORDMANN, R. Experimental Performance Evaluation of Magnetic Actuator used in Rotating

Machinery Analysis. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering, v.29, n.1/93, January-March, 2007.

CAVALCA, K. L. Estudo de um Dispositivo de Redução de Amplitude na Passagem de um Rotor pela Velocidade Crítica. 1988. 109p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, Brasil.

CHIBA, A.; FUKAO, T.; ISHICAWA, O.; OSHIMA, M.; TAKEMOTO, M.; DORRELL, D. G. Magnetic Bearings and Bearingless Drives. Newnes, 2005. 381p.

CHILDS, D. Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis. Wiley-Interscience, 1993. 496p.

COLE, M. O. T.; KEOGH, P. S.; SAHINKAYA, M. N.; BURROWS, C. R. Towards fault-tolerant active control of rotor-magnetic bearing systems. Control Engineering Practice, v.12, p.491-501, 2004.

COOLEY, J.; TURKEY, J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Mathematics of Computation, v.19, n.90, p.297-301, 1965.

COWPER, G. R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. Journal of Applied Mechanics, p.335-340, June 1966.

DUNKERLEY, S. On the Whirling and Vibration of Shafts. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, v.185, p.279-360, 1894.

FERREIRA, J. M. S.; CASTRO, F. E. F.; SALAZAR, A. O. Controle de Posição Radial de Máquina de Indução sem Mancal. CBA, 2002, Natal – RN, Brasil.

FÖPPL, A. Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle. Der Civilingenieur, n.4, p.335-342, 1895.

FURTADO, R. M. Desenvolvimento de um Atuador Magnético para Excitação sem Contato de Sistemas Rotativos. 2008. 113p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, Brasil.

FURTADO, R. M.; CAVALCA, K. L.; MENDES, R. U. Estudo de um Atuador Magnético para Aplicação em Análise Modal de Sistemas Rotativos. CONEM, 25-28 de Agosto, 2008, Salvador – BA, Brasil.

GENTA, G. Vibrations of Structures and Machines – Practical Aspects. New York: Springer-Verlag, 3rd edition, 1998. 591p.

GENTA, G.; GUGLIOTTA, A. A Conical Element for Finite Element Rotor Dynamics. Journal of Sound and Vibration, v.120, n.1, p.175-182, 1988.

GREENHILL, L. M.; BICKFORD, W. B.; NELSON, H. D. A Conical Beam Finite Element for Rotor Dynamics Analysis. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, v.107, p.421-430, October 1985.

GUIRÃO, P. H. F. Controle Ativo de Vibrações de Rotores com Mancais Magnéticos – Influência dos Parâmetros do Controlador PID. 2006. 114p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira – SP, Brasil.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentos de Física 3. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 7ª edição, 2007, 379p.

HARRIS, T.; WIDBRO, L. Magnetic Bearing – A New World Opens for Design Engineers. World Pumps, p.21-25, November, 2003.

HOWE, D. Magnetic Actuators. Sensors and Actuators, v.81, p.268-274, 2000.

INMAN, D. J. Engineering Vibration. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2nd edition, 2001, 620p.

JASTRZEBSKI, R. P.; PÖLLÄNEN, R. Compensation of Nonlinearities in Active Magnetic Bearings with Variable Force Bias for Zero- and Reduced-Bias Operation. Mechatronics, v.19, p.629-638, 2009.

JEFFCOTT, H. H. The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed – The Effect of Want of Balance. Philosophical Magazine, n.37, p.431-458, 1919.

KESSLER, C. L. Complex Modal Analysis of Rotating Machinery. 1999. 106p. Dissertation (Ph.D.) - University of Cincinnati, Cincinnati – OH, United States.

KNOSPE, C. R. Active Magnetic Bearings for Machining Applications. Control Engineering Practice, v.15, p.307-313, 2005.

KRÄMER, E. Dynamics of Rotors and Foundations. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993. 383p.

LEITE, V. S.; FIGUEIREDO, W. Determinação de Curvas de Histerese. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.29, n.2, p.53-56, 2007.

MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L. Evaluation of Dynamic Coefficients of Fluid Journal Bearings with Different Geometries. COBEM, November 15-20, 2009, Gramado - RS, Brazil.

MARSZOLEK, M. Implementierung von Hallsensoren in einen Magnetaktor zur Kraftmessung– Studienarbeit. Fachgebiet Mechatronik im Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt, Deutschland, 2006.

MASLEN, E. Magnetic Bearings. University of Virginia, 2000. 233p.

MESQUITA, A. L. A. Identificação de Modos Operacionais e Naturais de Vibração em Máquinas Rotativas Utilizando Coordenadas Complexas. 2004. 133p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, Brasil.

MESQUITA, A. L.; DIAS, M. J.; MIRANDA, U. A. A Comparison Between the Traditional Frequency Response Function (FRF) and the Directional Frequency Response Function (dFRF) in Rotordynamic Analysis. Mecânica Computacional, v.21, p.2227-2246, MECOM – First South-American Congress on Computational Mechanics, October 28-31, 2002, Santa Fé – Paraná, Argentina.

MUSZYNSKA, A. Rotordynamics. Taylor and Francis Group, 2005. 1054p.

MUSZYNSKA, A. Whirl and Whip – Rotor/Bearing Stability Problems. Journal of Sound and Vibration, v.110, n.3, p.443-462, 1986.

MUSZYNSKA, A.; BENTLY, D. E. Fluid-Generated Instabilities of Rotors. Orbit, p.6-14, April, 1989.

MYKLESTAD, N. O. A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and other Types of Beams. Journal of Aeronautical Science, v.11, p.153-162, 1944.

NELSON, F. C. Rotor Dynamics Without Equations. International Journal of COMADEM. v.10, n.3, p.2-10, July 2007.

NELSON, H. D. A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory. Journal of Mechanical Design, v.102, p.793-803, October 1980.

NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements. Journal of Engineering for Industry, p.593-600, May 1976.

OLIVER, G. An Introduction to Oil Whirl and Oil Whip. Bearing Journal, v.3, n.2, First Quarter, 2001.

PERINI, E. A. Redução de Vibrações de Rotores Utilizando Atuadores Magnéticos e Sistema de Controle Feedforward. 2009, 263p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira – SP, Brasil.

PILAT, A. Analytical modeling of active magnetic bearing geometry. Applied Mathematical Modeling, v.34, p.3805-3816, 2010.

POLAJZER, B. Design and Analysis of an Active Magnetic Bearing Experimental System. 2003, 77p. Dissertation (Ph.D.) - Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, Maribor, Slovenia.

PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications. Prentice Hall, 3rd edition, 1995. 1016p.

PROHL, M. A. A General Method of Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. Journal of Applied Mechanics, v.67, p.142-146, 1945.

RANKINE, W. J. M. On the Centrifugal Force of Rotating Shafts. The Engineer, v.27, April 9, 1869.

RAO, S. S. Mechanical Vibrations. Prentice Hall, 4th edition, 2003, 1078p.

RICHARDSON, M. H. Is it a Mode Shape, or an Operating Deflection Shape?, Sound and Vibration Magazine, 30th Anniversary Issue, March, 1997.

SANTANA, P. M. Resposta Complexa de um Sistema Rotor-Mancais-Fundação. 2009. 94p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, Brasil.

SCHWEITZER, G. Active Magnetic Bearings - Chances and Limitations. Proc. of 6th International IFToMM Conference, September 30-October 03, 2002, Sydney, Australia.

SCHWEITZER, G. Safety and Reliability Aspects For Active Magnetic Bearing Applications - A Survey. Journal of Systems and Control Engineering, Proc. of the Institution of Mechanical Engineers (ImechE), v.219, n.1, 2005.

SEN P. C. Principles of Electric Machines and Power Electronics. John Wiley & Sons, 2nd edition, 1997, 615p.

SILVA, E. L. Dinâmica de Rotores: Modelo Matemático de Mancais Hidrodinâmicos. 2004. 110p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba -PR, Brasil.

SILVA, G. M. Detecção de Falhas em Rotores Sustentados por Mancais Magnéticos Ativos. 2006. 96p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de

Campinas, Campinas – SP, Brasil.

SKOWRONSKI, L.; BISESE, A. Introduction to Magnetic Bearings. NASA – CR – 197187, Uncla, ECE 485, 16.p, April 05, 1993.

STODOLA, A. Dampf-und Gasturbinen. Berlin Springer, 1910.

SWANSON, E.; POWELL, C. D.; WEISSMAN, S. A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes. Sound and Vibration, p.10-17, May 2005

VANCE, J. M. Rotordynamics of Turbomachinery. Wiley-Interscience, 1988. 400p.

WEIMING, L.; NOVAK, M. Dynamic behavior of turbine-generator-foundation systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.24, n.3, p.339-360, 1996.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping. Journal of Engineering for Power, p.71-76, January 1977.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems with Axial Torque – A Finite Element Approach. Journal of Mechanical Design, v.102, p.158-161, January 1980.

Apêndice A – Série de Fourier

A representação da série de Fourier de um sinal real é dada por (PROAKIS e MANOLAKIS, 1995):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (125)$$

A partir da Equação de Euler (Equação 126), podem-se reescrever os termos em senos e cossenos na forma de exponenciais complexas (Equações 127 e 128):

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (126)$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (127)$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (128)$$

Substituindo na Equação 125, e reorganizando em função das exponenciais complexas, obtém-se:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) b_n e^{-jn\omega t} \right] \quad (129)$$

Expandindo o conceito da série de Fourier na forma complexa, a partir da Equação 125, obtém-se:

$$x = y + jz \quad (130)$$

$$f(t) = \left(\frac{a_0^y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^y \cos(n\omega t) + b_n^y \sin(n\omega t)] \right) + j \left(\frac{a_0^z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^z \cos(n\omega t) + b_n^z \sin(n\omega t)] \right) \quad (131)$$

$$f(t) = \frac{a_0^y + ja_0^z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_D^y + A_D^z)e^{jn\omega t} + (A_R^y + A_R^z)e^{-jn\omega t}] \quad (132)$$

Onde os termos A^y e A^z são referentes aos sinais y e z , e os sub-índices D e R às componentes diretas e retrógradas, onde:

$$A_D^y = \left(\frac{a_n^y - jb_n^y}{2} \right) \quad (132a)$$

$$A_R^y = \left(\frac{a_n^y + jb_n^y}{2} \right) \quad (132b)$$

$$A_D^z = \left(\frac{b_n^z + ja_n^z}{2} \right) \quad (132c)$$

$$A_R^z = \left(\frac{-b_n^z + ja_n^z}{2} \right) \quad (132d)$$

A DFT (*Discrete Fourier Transform*) de um sinal discreto com n elementos e período de amostragem dt , possui n elementos igualmente espaçados de df , dado por (PROAKIS e MANOLAKIS, 1995):

$$f(k) = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{n} kn} \quad (133)$$

$$df = \frac{1}{dt \cdot n} \quad (134)$$

E o vetor de frequências correspondente é dado por:

$$\omega(k) = \frac{k}{dt \cdot n} \quad (135)$$

A partir da Equação 134, pode-se observar que, com o aumento do número de pontos do sinal temporal, há o aumento na resolução da resposta em frequência, mas a resolução diminui com a redução do período de amostragem do sinal. Entretanto, se for reduzido o período de amostragem mas mantido o intervalo de tempo, o número de pontos aumenta na mesma proporção, fazendo com que não ocorram alterações na resolução do espectro, mas sim na faixa de frequência analisada (Equação 135). Desta análise conclui-se que, para que o espectro represente uma dada frequência $\omega(k)$, a frequência de amostragem do sinal temporal ($1/dt$) deve ser, no mínimo, igual ao dobro de $\omega(k)$ (uma relação conhecida como frequência de Nyquist).

O cálculo da DFT diretamente a partir de sua definição (Equação 133), no entanto, é muito lento. Neste sentido, Cooley e Turkey apresentaram em 1965 um algoritmo muito eficiente para o cálculo da DFT. Este algoritmo ficou conhecido como Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform - FFT*). Atualmente, a FFT é conhecida como uma família de algoritmos eficientes utilizados no cálculo da transformada discreta de Fourier.