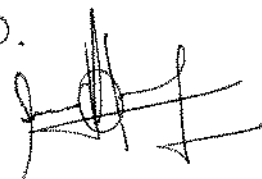


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

Este exemplar corresponde
à redação final da tese
defendida por Rubens da
Silva Telles e aprovada pela
Comissão Julgadora em
14/12/90.

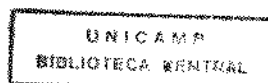


EFEITO DA DISPERSÃO HIDRODINAMICA
NA CONVECÇÃO NATURAL
POR DIFUSÃO DUPLA EM MEIOS POROSOS

TELLES

Publicação

FEM 062/90



Autor : Rubens Silva Telles

Orientador : Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

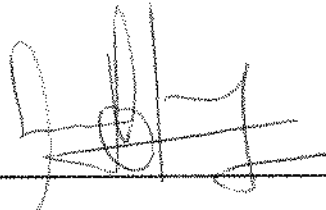
Tese de: Mestrado

Título da Tese: Efeito da Dispersão Hidrodinâmica na
Convecção Natural por Difusão Dupla em
Meios Porosos.

Autor: Rubens Silva Telles

Orientador: Prof. Dr. Osvalir Vidal Trevisan

Aprovado por



Prof. Dr. Osvalir Vidal Trevisan, Presidente



Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani



Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

Campinas, 14 de Julho de 1990

Havendo-me a experiência ensinado que tudo quanto na vida corrente sucede é com frequência vão e fútil, e tendo eu observado que nada do que direta ou indiretamente me provocava temor era em si mesmo bom ou mau, a não ser enquanto afetava o espírito, decidi por fim inquirir se haveria algo que constituísse o verdadeiro bem, susceptível de se comunicar, e pelo qual exclusivamente, rejeitando tudo o mais, o ^o ânimo fosse afetado; mais ainda, se haveria algo que, uma vez encontrado e adquirido, proporcionasse a fruição eterna da suprema e contínua alegria.

Bento de Espinosa in Tratado da Reforma do Entendimento, 1661.

Quero dedicar este trabalho aos meus pais FRANCISCO e LAZARA pelo apoio, incentivo e dedicação e a MARIA TEREZA pela paciência e carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan pela orientação e presteza com que atuou na realização deste trabalho e especialmente na confiança e amizade creditadas a minha pessoa.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pela concessão de bolsa de estudo para a realização deste trabalho.

Aos companheiros dos Deptos. de ENERGIA e TÉRMICA e FLUIDOS que, direta ou indiretamente, colaboraram para a efetivação deste trabalho.

Ao CIFEM pela cessão de uso da infraestrutura de informática, sem a qual o trabalho não seria realizado.

Aos amigos próximos que partilharam dos momentos alegres e dos momentos difíceis e aos amigos que ficaram distantes a certeza da compreensão.

RESUMO

Esta dissertação aborda os efeitos da dispersão hidrodinâmica na convecção natural em meios porosos junto a superfícies verticais impermeáveis. Considera-se a convecção promovida pela variação de densidade devido a combinação dos gradientes de temperatura e de concentração. A parametrização do fenômeno é obtida através da análise de escala. Quatro casos são obtidos conforme a intensidade do termo de dispersão. Na procura de soluções de similaridade as variáveis de similaridade e os parâmetros relacionados à dispersão são encontradas com ajuda da análise de escala. O algoritmo de Runge-Kutta e o método de "shooting" são utilizados para a resolução das equações resultantes das transformações similares. Vários ensaios são realizados cobrindo ampla faixa de variações dos parâmetros.

ABSTRACT

The present dissertation treats the problem of hydrodynamic dispersion on natural convection in porous medium near impermeable surfaces. The study considers the convection promoted by the density variation due to the combination of temperature and concentration gradients. The parametrization of the phenomenon is obtained through scale analysis. Four cases are possible according to the intensity of dispersion term. In search of similarity solutions the similarity variables and parameters associated to dispersion are found with aid of scale analysis. The Runge-Kutta algorithm and the 'shooting' method are used to solve the equations resulting from the similarity transformations. Several cases are solved covering an extensive range of the governing parameters.

EFEITO DA DISPERSÃO HIDRODINÂMICA NA CONVECÇÃO NATURAL POR DIFUSÃO DUPLA EM MEIOS POROSOS

INDÍCE

Nomenclatura.....	i
Lista de Figuras.....	iv
Lista de Tabelas.....	v
I. Introdução.....	1
II. Formulação Matemática.....	7
2.1. Obtenção das Equações Completas e das equações governantes em camada limite.....	7
2.1.a. Equação da continuidade.....	7
2.1.b. Equação do momentum.....	8
2.1.c. Equação da energia.....	9
2.1.d. Equação do constituinte.....	14
2.2. Variação dos Termos de Dispersão.....	25
III. Análise de Escala.....	28
3.1. 1º Caso: $\alpha \gg \{\nu \text{ e } D \gg \gamma v$	30
3.1.a. Escoamento dirigido pela transferência de calor.....	30
3.1.a.a. $\delta_c \ll \delta_T$	35
3.1.a.b. $\delta_T \ll \delta_c$	36
3.1.b. Escoamento dirigido pela transferência de massa.....	36
3.2. 2º Caso: $\alpha \gg \{\nu \text{ e } D \ll \gamma v$	38
3.2.a. Escoamento dirigido pela transferência de calor.....	38
3.2.a.a. $\delta_c \ll \delta_T$	39
3.2.a.b. $\delta_T \ll \delta_c$	40
3.2.b. Escoamento dirigido pela transferência de massa.....	40
3.2.b.a. $\delta_c \ll \delta_T$	42
3.2.b.b. $\delta_T \ll \delta_c$	42
3.3. 3º Caso: $\alpha \ll \{\nu \text{ e } D \gg \gamma v$	44

3.4.	4 ^o Caso: $\alpha \ll \xi v \text{ e } D \gg \gamma v$	46
IV.	Soluções de similaridade.....	49
4.1.	Obtenção das Equações Diferenciais Ordinárias.....	49
4.1.1.	1 ^o Caso: $\alpha \gg \xi v \text{ e } D \gg \gamma v$	51
4.1.1.a.	Escoamento dirigido pela transferência de calor.....	51
4.1.1.b.	Escoamento dirigido pela transferência de massa.....	53
4.1.2.	2 ^o Caso: $\alpha \gg \xi v \text{ e } D \ll \gamma v$	54
4.1.2.a.	Escoamento dirigido pela transferência de calor.....	54
4.1.2.b.	Escoamento dirigido pela transferência de massa.....	55
4.1.3.	3 ^o Caso: $\alpha \ll \xi v \text{ e } D \gg \gamma v$	56
4.1.3.a.	Escoamento dirigido pela transferência de calor.....	56
4.1.3.b.	Escoamento dirigido pela transferência de massa.....	57
4.1.4.	4 ^o Caso: $\alpha \ll \xi v \text{ e } D \ll \gamma v$	58
4.1.4.a.	Escoamento dirigido pela transferência de calor.....	58
4.1.4.b.	Escoamento dirigido pela transferência de massa.....	58
4.2.	Discretização e Algoritmo de Solução.....	59
V.	Discussões e Resultados.....	67
5.1.	1 ^o Caso: $\alpha \gg \xi v \text{ e } D \gg \gamma v$	67
5.2.	2 ^o Caso: $\alpha \gg \xi v \text{ e } D \ll \gamma v$	79
5.3.	3 ^o Caso: $\alpha \ll \xi v \text{ e } D \gg \gamma v$	87
5.4.	4 ^o Caso: $\alpha \ll \xi v \text{ e } D \ll \gamma v$	97
VI.	Conclusões.....	105
	Bibliografia.....	107
	Apêndice A.....	109

NOMENCLATURA

A	- área
c	- perfil similar de concentração
C	- concentração
C_p	- calor específico a pressão constante
d	- diâmetro do poro
D	- difusividade mássica
\mathbb{D}	- tensor difusivo adimensional
D_s	- parâmetro de dispersão
e	- energia específica do sistema
E	- energia do sistema
\mathbb{E}	- tensor de tensões
f'	- perfil similar de velocidade
g	- aceleração gravitacional
G	- variável generalizada (C ou T)
h	- entalpia
H	- comprimento de camada limite
\mathbb{I}	- tensor unitário
j	- fluxo de massa
k	- condutividade térmica do meio
K	- permeabilidade
ℓ	- comprimento de mistura
Le	- número de Lewis
m	- igual a $e'(0)$ (Cap. V)
n	- igual a $c'(0)$ (Cap. V)
$N = \frac{\beta c \Delta C}{\beta \Delta T}$	- taxa de empuxo
Nu	- número de Nusselt
$O(\)$	- ordem de grandeza
p	- iteração
P	- pressão
Pe	- número de Peclet
q''', q''''	- fluxo de calor
\dot{Q}	- taxa de calor na unidade de tempo

Q	- matriz das derivadas de Nachtsheim-Swigert
Ra	- número de Darcy-Rayleigh
Ra_{γ}	- número de Rayleigh-Gama
Ra_{ξ}	- número de Rayleigh-Lewis-Psi
Sh	- número de Sherwood
t	- tempo
T	- temperatura
u, v	- componentes de velocidade
V	- velocidade
V	- volume
x, y	- coordenadas cartesianas
X	- matriz dos novos valores arbitrários
W	- potência
z	- variável adimensional generalizada (θ ou c)

Símbolos Gregos

α	- difusividade térmica do meio
β	- coeficiente de expansão térmica
β_c	- coeficiente de expansão da concentração
γ	- coeficiente de dispersão mássica
δ	- espessura de camada limite
δ_c	- espessura da camada limite de concentração
δ_T	- espessura da camada limite térmica
ΔC	- diferença de concentração da parede ao meio
Δn	- incremento do valor arbitrário $e'(0)$
Δm	- incremento do valor arbitrário $c'(0)$
ΔT	- diferença de temperatura da parede ao meio
ε'_1	- coeficiente de dispersão longitudinal
ε'_2	- coeficiente de dispersão transversal
ε_{2c}	- coeficiente transversal de dispersão mássica
ε_{2T}	- coeficiente transversal de dispersão térmica
ϕ	- porosidade
η	- variável de similaridade
ψ	- função de corrente
λ	- parâmetro para o método de Marquardt

- μ - viscosidade cinemática
- ν - viscosidade dinâmica
- ρ - densidade
- e - perfil similar de temperatura
- φ - amplitude das variações randômicas
- ω - difusividade generalizada (α ou D)
- θ - fator de relaxação
- ξ - coeficiente de dispersão térmica

Subscriptos

- c - relativo ao valor arbitrário da variável
- D - relativo ao termo de dispersão
- f - relativo a parte fluida
- FB - forças de campo
- FR - forças de resistência ao escoamento
- FS - forças de superfície
- i - unidade do elemento
- P - a pressão constante
- s - relativo a parte sólida
- S - relativo ao sistema
- x - a x constante
- y - a y constante
- C_{∞}, C_0 - valores de referência

Superescritos

- $()^*$ - variável adimensional

LISTA DE FIGURAS

1. Dispersão do fluido traçador.
2. Camada limite em relação a propriedade G.
3. Camadas limites térmica e mássica.
4. Integração através das camadas limites.
5. Perfil de velocidade quando $N = 0$.
6. Influência do número de Lewis nos perfis de velocidade quando $N = 1$.
7. Influência do número de Lewis nos perfis de velocidade quando $N = 4$.
8. Influência de N nos perfis de velocidade quando $Le = 1$.
9. Perfil de temperatura quando $N = 0$.
10. Influência do número de Lewis nos perfis de temperatura quando $N = 1$.
11. Influência do número de Lewis nos perfis de temperatura quando $N = 4$.
12. Influência do número de Lewis nos perfis de concentração quando $N = 0$.
13. Influência do número de Lewis nos perfis de concentração quando $N = 1$.
14. Influência do número de Lewis nos perfis de concentração quando $N = 4$.
15. Influência de N nos perfis de temperatura e concentração quando $Le = 1$.
16. Efeito do número de Lewis na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa.
17. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de velocidade quando $N = 1$.
18. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de velocidade quando $N = 4$.
19. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de temperatura quando $N = 1$.
20. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de temperatura quando $N = 4$.
21. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de concentração quando $N = 0$.

22. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de concentração quando $N = 1$.
23. Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de concentração quando $N = 4$.
24. Efeito de Ra_γ na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa.
25. Perfis de velocidade quando $N = 0$.
26. Influência de Ra_ξ nos perfis de velocidade quando $N = 1$.
27. Influência de Ra_ξ nos perfis de velocidade quando $N = 4$.
28. Perfis de temperatura quando $N = 0$.
29. Influência de Ra_ξ nos perfis de temperatura quando $N = 1$.
30. Influência de Ra_ξ nos perfis de temperatura quando $N = 4$.
31. Influência de Ra_ξ nos perfis de concentração quando $N = 0$.
32. Influência de Ra_ξ nos perfis de concentração quando $N = 1$.
33. Influência de Ra_ξ nos perfis de concentração quando $N = 4$.
34. Efeito de Ra_ξ na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa.
35. Influência de Ds nos perfis de velocidade quando $N = 0$.
36. Influência de Ds nos perfis de velocidade quando $N = 1$.
37. Influência de Ds nos perfis de velocidade quando $N = 4$.
38. Influência de Ds nos perfis de temperatura quando $N = 0$.
39. Influência de Ds nos perfis de temperatura quando $N = 1$.
40. Influência de Ds nos perfis de temperatura quando $N = 4$.
41. Influência de Ds nos perfis de concentração quando $N = 0$.
42. Influência de Ds nos perfis de concentração quando $N = 1$.
43. Influência de Ds nos perfis de concentração quando $N = 4$.

LISTA DE TABELAS

1. Expressões do termo de dispersão (α_D ou D_D).
2. Equivalências de escalas entre os casos 3.1.a e 3.1.b.
3. Escalas sem a presença de dispersão.
4. Equivalência de escalas entre os casos 3.2.a e 3.2.b.
5. Escalas com o efeito da dispersão na equação do constituinte químico.
6. Equivalência de escalas o 2º e 3º Casos.
7. Escalas com o efeito de dispersão na equação da energia.
8. Equivalência de escalas entre o 1º e 4º Casos.
9. Escalas com os efeitos da dispersão na equação da energia e na do constituinte químico.
10. Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.
11. Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.
12. Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.
13. Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Já se encontra bem estabelecido na literatura de fenômenos de transporte em meios porosos que a difusão nestes meios resulta da contribuição de dois componentes com fenomenologia distinta [1,2]. O primeiro componente é aquele representado pela difusão molecular, onde o movimento é estabelecido devido a existência de um gradiente da propriedade, sendo a intensidade do transporte diretamente proporcional à magnitude do gradiente. Os dois casos mais clássicos desta ocorrência são o transporte de calor por condução, regido pela lei de Fourier, e a de difusão de massa, dada pela lei de Fick. A difusão molecular está presente tanto em meios contínuos parados como em fluidos em movimento, sendo a única a se manifestar nos sistemas estagnados. A segunda componente a contribuir para a difusão em meios porosos é chamada de dispersão hidrodinâmica. Encontrada apenas nas configurações porosas com fluido em movimento, a dispersão explica as diferenças, observadas nos experimentos de laboratório, entre os coeficientes de transferência de calor e massa calculados para as direções transversais ao escoamento e os obtidos para as direções longitudinais, ao longo do eixo principal de escoamento do fluido.

A teoria da dispersão hidrodinâmica teve seus conceitos introduzidos por Taylor [3] em 1953 e avançou mais tarde com os trabalhos de Safman [4]. Seu desenvolvimento está bastante relacionado com o espalhamento de solutos e o escoamento de fluidos miscíveis em meios porosos, de grande aplicação nas operações de extração de petróleo e no controle de poluição dos mananciais hídricos.

De outro lado a convecção natural em meios porosos tem sido matéria de um grande número de estudos nas últimas décadas, principalmente pelo interesse e necessidade cada vez maior da humanidade em ter seus problemas de controle ambiental devidamente encaminhados. Na quase totalidade destes estudos, o objeto de análise é a convecção natural promovida por um único componente difusivo, geralmente a temperatura. Muito pouco tem sido estudado sobre o comportamento da convecção provocada por efeitos de empuxo combinados. Uma recente

revisão dos trabalhos feitos nesta área [5] mostra que a grande maioria dos estudos foram dirigidos á análise de estabilidade do escoamento em situações próximas ao estado crítico, de estabelecimento do movimento convectivo. Dos poucos estudos que se dedicam ao regime de transporte plenamente estabelecido, vale citar o trabalho de Khairy e Bejan [6], que se refere ao escoamento promovido pelo empuxo combinado junto a uma parede vertical envolta em um meio poroso. No trabalho citado considera-se que a difusão de calor e do componente químico se desenvolve unicamente pela componente molecular. A dispersão hidrodinâmica é implicitamente negligenciada, o que neste caso é uma hipótese passível de discussão.

Para se ter idéia da ocorrência do fenômeno e por conseguinte fazer uma boa análise, Greenkorn [7] indica um modelo descrito a seguir. Consideremos a Figura 1 onde para um certo tempo $t < 0$ temos um elemento de um meio poroso saturado por um fluido e no momento $t = 0$ inicia-se a mistura de outro fluido diferenciado pela presença de um corante. Estes dois fluidos são miscíveis entre si e não ocorre reação química entre eles. Chamemos o fluido contendo corante de traçador e por um instante este traçador é injetado sobre a face de entrada do meio poroso. A interação entre os fluidos aumentará e eles vão se misturar em razão da difusão molecular, da estrutura dos poros e do perfil de velocidade dentro dos poros. A dispersão hidrodinâmica é justamente provocada pela soma de dois efeitos: do caminho a ser percorrido pelo escoamento através da estrutura dos poros e do perfil de velocidade resultante dentro dos poros.

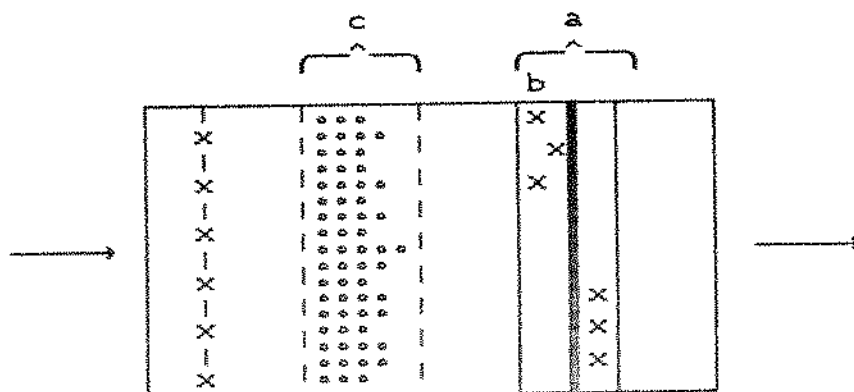


Figura 1 - Dispersão do fluido traçador.

Quando o traçador é adicionado, ocorre um salto na sua concentração representado pela linha dos x's à esquerda na Figura 1. Como o escoamento é da esquerda para a direita, a linha dos x's espalha-se devido ao próprio diferencial de concentração, à variação de velocidade nos poros e aos diferentes caminhos percorridos pelo escoamento, identificado na Figura 1 como região c. Algum tempo após $t = 0$, os elementos x's estarão contidos na região identificada como a à direita da Figura 1. O espalhamento observado na região a é o resultado da combinação dos fenômenos de difusão e de dispersão. Caso não ocorressem tais fenômenos, o nível de concentração representado pelos x's permanecia sobre uma linha como mostrado na região b da Figura 1.

Os modelos encontrados na literatura da área descrevem a dispersão como sendo formada por componentes transversais e longitudinais em relação as direções do escoamento. No caso de um escoamento bidimensional, por exemplo, existirão as dispersões transversais e longitudinais nas duas direções do escoamento. Johnson e Perkins [8] sugerem expressões que quantificam estes termos da dispersão e concluem que a dispersão longitudinal tem valor mais significativo do que a dispersão transversal. Na maior parte dos trabalhos estudados, os autores se preocupam especificamente com o efeito da dispersão apenas na transferência de calor. A conclusão comum destes trabalhos é que o termo que quantifica o efeito de dispersão na expressão da difusividade térmica é proporcional à velocidade. Georgiadis e Catton [9] propõem-se a determinar coeficientes efetivos de transferência de calor em tubos porosos cilíndricos. Os autores utilizam-se do modelo de Darcy-Forchheimer-Brinkman para a equação do momentum e concluem que a condutividade térmica efetiva depende da condutividade térmica de estagnação (constante), do número de Peclet e da geometria intersticial do meio poroso (por exemplo, da porosidade do meio). O número de Peclet tem como seu termo a velocidade local de escoamento e ainda depende do diâmetro do poro e da difusividade térmica do fluido infiltrante. São diversas as técnicas utilizadas para a obtenção dos parâmetros de dispersão. No trabalho de Georgiadis e Catton [9] utiliza-se a técnica de processos estocásticos associada a um detalhamento físico de uma formulação microdinâmica da camada limite. Outro trabalho dos mesmos autores [10] procura já analisar o efeito da dispersão na convecção natural em meios porosos quando a aproximação da camada limite não se

aplica. É utilizado o modelo de Darcy-Forchheimer para a equação do momentum e à expressão da condutividade térmica é adicionado o termo da dispersão hidrodinâmica no problema clássico de convecção de Bénard, que descreve o caso de convecção natural provocado pelo empuxo em meios porosos saturados horizontais. As principais conclusões a que chegam estes pesquisadores são: 1) que a dispersão em convecção natural não pode ser negligenciada mesmo em baixas velocidades (ao contrário do que, a priori, poderia ser erroneamente induzido, pois o termo de dispersão depende da velocidade); 2) que a taxa de transferência de calor depende da relação entre o diâmetro do poro e a espessura da camada porosa: no caso numa relação inversa.

Alguns trabalhos estudam especificamente a dispersão hidrodinâmica transversal como o trabalho de Cheng e Zheng [11]. Neste trabalho os autores consideram o efeito dispersivo na camada limite térmica no caso de uma convecção mista, sobre uma pluma térmica acima de uma fonte de calor horizontal em um meio poroso de extensão infinita. Como em outros trabalhos, estuda-se o efeito da dispersão associado a efeitos do tipo inercial (Forchheimer), do que resultam conclusões não específicas em relação à dispersão hidrodinâmica. A técnica utilizada é a de buscar soluções de similaridade, passando pela obtenção de equações diferenciais ordinárias, posteriormente resolvidas numericamente com boa precisão pelo algoritmo de Runge-Kutta. Estes pesquisadores concluíram que embora os efeitos de inércia e de dispersão hidrodinâmica transversal tenham grande influência sobre o perfil de velocidades o efeito de inércia sobre distribuição de temperatura é pequeno enquanto o de dispersão é maior, levando ao aumento da espessura da camada limite térmica. Outro trabalho que estuda a dispersão hidrodinâmica transversal em convecção natural é o de Hong e Tien [12], onde a configuração é a de uma placa plana vertical aquecida em um meio poroso — de grande interesse para o nosso trabalho. Os autores adotam um modelo onde a condutividade térmica efetiva é representada por uma soma de uma condutividade térmica de estagnação e um termo de dispersão que depende da velocidade do escoamento. O trabalho procura associar o efeito de dispersão ao efeito da condição de não deslizamento na parede, para explicar o elevado gradiente de temperatura próximo à parede observados em trabalhos anteriores. É levada em conta a aproximação de Boussinesq para a formulação das equações governantes da camada limite. Soluções de

similaridade são obtidas através da técnica de perturbação singular. A principal conclusão a que chegam os autores é que o efeito de dispersão hidrodinâmica aumenta a transferência de calor enquanto que os efeitos de inércia e de fronteira agem no sentido oposto.

Hunt e Tien [13] estudaram o efeito da dispersão hidrodinâmica em convecção forçada em canais com interior de material fibroso. O escopo é o da transferência de calor e massa em um meio fibroso de porosidade constante. O trabalho situa-se na faixa de números de Reynolds elevados, onde os efeitos de inércia e de dispersão hidrodinâmica são predominantes. À dispersão hidrodinâmica são associados outros efeitos e foi montado um modelo onde todos os efeitos são incorporados a um método de volume médio. O objetivo do trabalho foi de quantificar analítica e experimentalmente a dispersão e estimar a transferência de calor na superfície aquecida. A análise exige um modelo de equação da energia onde a dispersão é incluída pela relação entre o fluxo dispersivo para um gradiente macroscópico de temperatura e uma condutividade dispersiva empírica. A conclusão principal a que chegam os pesquisadores é que a transferência de calor aumenta devido a dispersão hidrodinâmica e que a condutividade dispersiva depende da velocidade de escoamento.

Bejan e Khairy [6] estudaram a convecção provocada pelos efeitos de empuxo combinados quando a variação da densidade é causada pela diferença de temperatura e concentração, mas sem levar em conta os efeitos da dispersão. O objetivo dos autores foi o de estudar a camada limite do escoamento de convecção natural governado pela variação da temperatura e da concentração próximo a uma parede vertical plana em um meio poroso. O estudo emprega a formulação da equação de momentum baseada exclusivamente no modelo de Darcy. Utiliza-se a técnica de análise de escala para determinar as magnitudes e as variações da velocidade e dos parâmetros de troca de calor e massa. Levam-se em conta as espessuras das camadas limites térmica e mássica. Obtidas as magnitudes, pode-se comparar os resultados da análise de escala com as soluções de similaridade para todos os regimes possíveis de escoamento, em número de quatro neste caso. Os resultados são analisados conforme os efeitos dos parâmetros adimensionais encontrados quando da adimensionalização das equações governantes. Como as soluções de similaridade confirmam as magnitudes estimadas pela análise de escala,

os autores afirmam que a análise de escala é um método de auto-resolução no campo da convecção, isto é, um método analítico que é capaz de apresentar resultados úteis por um esforço matemático bem menor que os métodos usuais.

O objetivo de nosso trabalho é o de estudar o efeito da dispersão hidrodinâmica na transferência de calor e massa junto a superfícies envoltas em meios porosos saturados. O Capítulo seguinte explicita a formulação matemática do problema contendo o termo de dispersão. Nos capítulos posteriores, parte-se em busca da solução do problema fazendo-se inicialmente a análise de escala de sorte a organizar parametricamente o trabalho, assim como para delinear a composição das séries a serem submetidas a ensaio. Após a aplicação deste método analítico, seguimos adiante em procura de soluções similares através do algoritmo de Runge-Kutta e ao final discutimos os resultados conforme a composição e a variação dos parâmetros envolvidos.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos as equações governantes do escoamento fluido, do transporte de energia e constituinte. A configuração é a de uma superfície vertical plana envolta em um meio poroso saturado, sendo o escoamento em regime permanente e bidimensional e o meio poroso homogêneo e isotrópico. A dispersão entrará como uma característica de anisotropia do processo de troca de calor e massa, embora o meio poroso seja formado homogeneamente.

Primeiramente analisaremos as equações governantes completas, a seguir tendo-se o modelamento da dispersão e assumindo a aproximação de camada limite, faremos a análise de escala e então obteremos as equações que descrevem o fenômeno objeto de estudo neste trabalho.

2.1) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES COMPLETAS E DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES NA CAMADA LIMITE.

Assumindo:

- 1) fluido incompressível
- 2) meio poroso homogêneo e isotrópico
- 3) validade da lei de Darcy para o movimento do fluido
- 4) validade da aproximação de Boussinesq para a variação da densidade da mistura com a temperatura e composição
- 5) equilíbrio termodinâmico local entre o meio poroso e a mistura
- 6) não ocorrência de reações químico-físicas entre o fluido e a matriz

Podemos exprimir as principais leis do transporte como [14]:

2.1.a) Equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

2.1.b) Equação do Momentum:

Segundo a Lei de Darcy, temos:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \right)$$

Fazendo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{Kg}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

A densidade (a pressão constante) depende da temperatura e da concentração [6], então:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{Kg}{\mu} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_P \frac{\partial C}{\partial x} \right]$$

Definimos os coeficientes de expansão térmica e da expansão da concentração:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{expansão térmica})$$

$$\beta_c = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_P \quad (\text{expansão da concentração})$$

Como $\frac{1}{\nu} = \frac{\rho}{\mu}$ e assumindo a pressão P como diferenciável até a 2ª ordem temos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right]$$

Fazendo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right]$$

Portanto:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{kg}{\nu} \left(\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

2.1.c) Equação da Energia:

Vamos primeiramente deduzir a equação da energia sem considerar a dispersão. Para um escoamento incompressível (ρ é constante em relação a posição) temos:

1ª Lei da Termodinâmica:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_s = \dot{Q} - \dot{W} \quad (2.3)$$

onde: E - energia do sistema

\dot{Q} - calor introduzido no sistema no intervalo de tempo Δt

\dot{W} - trabalho produzido pelo sistema no intervalo de tempo Δt

Mas, o termo à esquerda equação (2.3) vale:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_s = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \cdot \vec{V}) \quad \text{e} \quad E = \rho e V$$

onde: e - energia específica do sistema

ρ - densidade

V - volume

\vec{V}

- vetor velocidade

Então:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_s = \int_V \left[\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) \right] dV \quad (2.4)$$

Mas a energia específica é dada por:

$e = (\text{energia interna específica} + \text{energia cinética específica})$

$$e = u + \frac{1}{2} v^2 \quad (2.5)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (2.3) é o termo do calor:

$$\dot{Q} = \int_A -\vec{q}'' \cdot d\vec{A} + \int_V \dot{q}''' \cdot dV$$

Mas pelo Teorema de Gauss:

$$\dot{Q} = \int_V (\nabla \cdot (-\vec{q}'') + \dot{q}''') \cdot dV \quad (2.6)$$

O segundo termo à direita da equação (2.3) corresponde ao trabalho:

$$\dot{W} = \dot{W}_{FS} + \dot{W}_{FB} + \dot{W}_{FR}$$

- onde:
- \dot{W}_{FS} - forças de superfície
 - \dot{W}_{FB} - forças de campo
 - \dot{W}_{FR} - forças de resistência ao escoamento (atrito ou Darcy)

O trabalho realizado pelo sistema compreende a expansão volumétrica, a superação das forças viscosas (de superfície) e superação da força de resistência de Darcy. Sendo o trabalho por unidade de tempo dado pelo produto força x velocidade, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{FS} &= -\vec{V} \cdot \int d\vec{A} \\ \dot{W}_{FB} &= \vec{V} \cdot \rho \vec{g} \\ \dot{W}_{FR} &= -\vec{V} \cdot \left[-\frac{\mu}{K} \vec{V} \right] \end{aligned}$$

Notar que o sinal negativo que aparece nos termos devidos à

força de superfície e a força de resistência é proveniente do fato daquelas forças atuarem sobre o sistema e sendo assim o trabalho é realizado sobre o sistema. Portanto, teremos:

$$\dot{W} = - \int_A (\vec{V} \cdot \vec{E}) dA + \int_V (\vec{V} \cdot \rho \vec{g}) dV + \int_V \vec{V} \cdot \left(\frac{\mu}{K} \vec{V} \right) dV \quad (2.7)$$

onde: \vec{E} - tensor de tensões

Derivando (2.5) em relação ao tempo vem:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (\vec{V} \cdot \vec{V}) = \frac{Du}{Dt} + \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (2.8)$$

Usando o teorema de Gauss na equação (2.7), temos:

$$\dot{W} = \int_V \left[- \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{E}) + \vec{V} \cdot \rho \vec{g} + \frac{\mu}{K} V^2 \right] dV \quad (2.9)$$

Substituindo (2.4), (2.8), (2.9) em (2.3), vem:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) \right] dV = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot (-\vec{q}'') + \dot{q}''' \right) dV + \\ - \int_V \left[- \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{E}) + \vec{V} \cdot \rho \vec{g} + \frac{\mu}{K} V^2 \right] dV$$

ou simplesmente:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{q}'') + \dot{q}''' + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{E}) - \vec{V} \cdot \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} V^2$$

Mas,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \rho e \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (\rho e)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho e \nabla \cdot \vec{V} + e \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \vec{V} \cdot \nabla e$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = \rho \frac{De}{Dt} + e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho \right]$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = \rho \frac{De}{Dt} + e \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{= 0 \text{ (continuidade)}}$$

e de (2.8), temos:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

continuando o nosso raciocínio vem:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \cdot (-\vec{q}') + \dot{q}'' + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \mathbb{E}) - \vec{V} \cdot \rho \vec{g} - \vec{V} \cdot \left(\frac{\mu}{K} \vec{V} \right)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot (-\vec{q}') + \dot{q}'' + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \mathbb{E}) + \vec{V} \cdot \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V} \right]$$

Mas,

$$\nabla \cdot (\vec{V} \cdot \mathbb{E}) = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{E}) + \mathbb{E} : (\nabla \cdot \vec{V})$$

Então:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \nabla \cdot (-\vec{q}') + \dot{q}'' + \mathbb{E} : (\nabla \cdot \vec{V}) \\ &\quad + \underbrace{\vec{V} \cdot \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbb{E} - \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V} \right]}_{= 0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

O termo entre colchetes da equação (2.10) expressa exatamente o balanço de forças na equação da conservação da quantidade de movimento, sendo portanto nula.

$\vec{E} : (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ é uma operação traço e nela estão representadas as contribuições devido ao trabalho de expansão do sistema e as energias dissipadas devido à interação fluido-fluido e à interação fluido-matriz. Há ainda controvérsia sobre o modelamento destas contribuições, bem como sobre sua relevância. Dada a hipótese de escoamento incompressível e assumindo as dissipações internas como desprezíveis o último termo da equação (2.10) pode ser suprimido.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{q}'') + \dot{q}''' \quad (2.11)$$

A determinação da energia interna de um sistema é difícil, sendo mais fácil de medir a temperatura como propriedade. Para a mudança de variáveis basta lembrar que, sendo o fluido incompressível e há o equilíbrio termodinâmico local entre o meio poroso e a mistura:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} \quad (2.12)$$

Também supondo somente calor fluindo através da fronteira do sistema apenas por condução:

$$\vec{q}'' = -k \vec{\nabla} T \quad (2.13)$$

Relacionando (2.11), (2.12), (2.13) temos:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \dot{q}''' \quad (2.14)$$

Portanto, para um escoamento em regime permanente, sem geração de calor dentro do sistema, considerando o meio incompressível e ainda bidimensional temos:

$$\rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \quad (2.15)$$

Sendo

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (2.16)$$

temos:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad (2.17)$$

Ao escrever a equação, admite-se um equilíbrio termodinâmico entre o fluido e o meio poroso. Logo, também:

$$\rho C_p = \phi \rho_f C_{p_f} + (1 - \phi) \rho_s C_{p_s} \quad (2.18)$$

$$k = \phi k_f + (1 - \phi) k_s \quad (2.19)$$

$$\alpha = \phi \alpha_f + (1 - \phi) \alpha_s \quad (2.20)$$

2.1. d) Equação do Constituinte:

Partindo da equação da continuidade (2.1) e considerando que não há geração interna de massa, temos:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

Mas para vários componentes de fluido escoando temos:

$$\rho u = \sum \rho_i u_i \quad \text{e} \quad \rho v = \sum \rho_i v_i \quad (2.22)$$

onde u e v são as velocidades médias do escoamento e u_i e v_i são as velocidades de cada componente.

Com isso definimos a velocidade de difusão do componente i na direção correspondente a velocidade:

$$(u_i - u) \quad \text{e} \quad (v_i - v)$$

O produto de $\rho_i (u_i - u)$ é definido como o fluxo difusivo do constituinte i na direção x . Simbolicamente:

$$j_{x,i} = \rho_i (u_i - u) \quad (2.23)$$

$$j_{y,i} = \rho_i (v_i - v) \quad (2.24)$$

Rearranjando (2.23) e (2.24) e substituindo em (2.22) e depois em (2.21) temos:

$$u \frac{\partial (\rho_i w)}{\partial x} + v \frac{\partial (\rho_i v)}{\partial y} = - \frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} - \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} \quad (2.25)$$

Revertendo agora para a notação mais utilizada de concentração ($C_i = \rho_i$) e ρ sendo considerada constante, a equação (2.25) passa a ser:

$$u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y} = - \frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} - \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} \quad (2.26)$$

Os fluxos de massa $j_{x,i}$ e $j_{y,i}$ são conduzidos pelo gradiente de concentração ∇C_i (Lei da difusão de Fick):

$$j_{x,i} = - D_{i(i+1)} \frac{\partial C_i}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$j_{y,i} = - D_{i(i+1)} \frac{\partial C_i}{\partial y} \quad (2.28)$$

Sendo o meio isotrópico $D_{i(i+1)} = D_{(i+1)i} = D$, então substituindo (2.27), (2.28) em (2.26), vem:

$$u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y} = \nabla \cdot (D \nabla C) \quad (2.29)$$

Simplificando a notação, já que temos apenas um componente, ou concentração independente:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} C) \quad (2.30)$$

Passemos a tratar agora especificamente dos parâmetros de difusão-dispersão do problema. Os termos α e D , representando a difusividade térmica e a difusividade mássica respectivamente, possuem a seguinte forma generalizada adimensional [15]

$$D = (1 + \varepsilon'_2 |\vec{v}^*|^2) \mathbb{I} + (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) \vec{v}^* \vec{v}^{**} \quad (2.31)$$

onde: \mathbb{D} - tensor difusivo adimensional

\mathbb{I} - tensor unitário

\vec{v}^* - vetor velocidade (u^*, v^*) adimensional

$|\vec{v}^*|^2$ - produto escalar de \vec{v}^* por \vec{v}^*

$\vec{v}^* \vec{v}^{**}$ - produto diádico de \vec{v}^* por \vec{v}^*

ε'_1 - coeficiente de dispersão longitudinal

ε'_2 - coeficiente de dispersão transversal

Conforme Kvernold e Tyvand [15] ε'_1 e ε'_2 são coeficientes aproximadamente constantes para velocidades baixas e inversamente proporcionais à velocidade para velocidades elevadas. A transição entre uma relação quadrática para os termos de dispersão e uma relação linear estariam situadas na faixa de número de Peclet entre 5 e 50.

Mostramos a seguir as operações que determinam este tensor \mathbb{D} :

$$\vec{v}^* = [u^*, v^*]$$

onde u e v são as componentes nas direções x e y de um escoamento bidimensional.

$$|\vec{v}^*|^2 = u^{*2} + v^{*2} \quad (2.32)$$

Para fazer o produto diádico de $\vec{v}^* \vec{v}^{**}$, apoiaremos-nos nas operações tensorais:

$$\vec{v}^* \vec{v}^{**} = [u^* \ v^*] \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}^* \vec{v}^{**} = \begin{bmatrix} u^* u^* & u^* v^* \\ v^* u^* & v^* v^* \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

O tensor unitário tem a forma:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.32), (2.33) e (2.34) em (2.31), vem:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon'_2 (u^{*2} + v^{*2})) & 0 \\ 0 & (1 + \varepsilon'_2 (u^{*2} + v^{*2})) \end{bmatrix} + (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) \begin{bmatrix} u^* u^* & u^* v^* \\ v^* u^* & v^* v^* \end{bmatrix}$$

ou:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon'_2 v^{*2} + \varepsilon'_1 u^{*2} & (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) u^* v^* \\ (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) u^* v^* & 1 + \varepsilon'_1 v^{*2} + \varepsilon'_2 u^{*2} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

As equações da energia e do constituinte químico possuem uma forma que podemos generalizar como:

$$\frac{DG^*}{Dt^*} = \nabla \cdot (\mathbb{D} \cdot \nabla G^*) \quad (2.36)$$

onde G^* representa a concentração C^* ou a temperatura T^* e \mathbb{D} refere-se ao tensor de difusividade mássica ou da difusividade térmica respectivamente.

Para o nosso caso, o regime é permanente e assim (2.36) terá a forma:

$$u^* \frac{\partial G^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial G^*}{\partial y^*} = \nabla \cdot (\mathbb{D} \cdot \nabla G^*) \quad (2.37)$$

A operação tensorial do segundo membro de (2.37) é feita pelo operador:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x^*} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y^*} \hat{j}$$

Sabemos que:

$$\text{D.} \nabla G^* = \sum_{i=1}^2 \delta_i \left\{ \sum_{j=1}^2 D_{ij} e_j \right\} = \hat{i} (D_{11} e_1 + D_{12} e_2) + \hat{j} (D_{21} e_1 + D_{22} e_2)$$

portanto:

$$\begin{aligned} \text{D.} \nabla G^* = & \hat{i} \left[(1 + \varepsilon'_2 v^{*2} + \varepsilon'_1 u^{*2}) \frac{\partial G^*}{\partial x^*} + (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) u^* v^* \frac{\partial G^*}{\partial y^*} \right] + \\ & + \hat{j} \left[(1 + \varepsilon'_1 v^{*2} + \varepsilon'_2 u^{*2}) \frac{\partial G^*}{\partial x^*} + (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) v^* u^* \frac{\partial G^*}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aplicando o divergente em (2.38), temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\text{D.} \nabla G^*) = & \frac{\partial}{\partial x^*} \left[(1 + \varepsilon'_2 v^{*2} + \varepsilon'_1 u^{*2}) \frac{\partial G^*}{\partial x^*} + (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) u^* v^* \frac{\partial G^*}{\partial y^*} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[(1 + \varepsilon'_1 v^{*2} + \varepsilon'_2 u^{*2}) \frac{\partial G^*}{\partial x^*} + (\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) v^* u^* \frac{\partial G^*}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

A avaliação da importância de cada um dos termos envolvidos na equação (2.39) pode ser feita através de uma análise de escala. Para procedermos a esta análise de escala faz-se necessário retornar a equação (2.39) com seus termos escritos na forma dimensional. Do trabalho [15], retiramos as expressões das variáveis adimensionais:

$$x^* = \frac{x}{h}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad v^* = \frac{v}{\omega \sqrt{h}}, \quad u^* = \frac{u}{\omega \sqrt{h}}, \quad G^* = \frac{G}{\Delta G}$$

onde h tem unidade de comprimento e ω a difusividade térmica ou mássica de estagnação da matriz porosa (meio poroso + fluido).

Sendo assim, podemos então fazer com que a equação adimensionalizada (2.39) retorne a sua forma dimensional e portanto:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial G}{\partial x} + v \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\omega + \frac{\varepsilon'_2 h^2 v^2}{\omega} + \frac{\varepsilon'_1 h^2 u^2}{\omega} \right) \frac{\partial G}{\partial x} + \left(\frac{(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) h^2}{\omega} \right) uv \frac{\partial G}{\partial y} \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\omega + \frac{\varepsilon'_1 h^2 v^2}{\omega} + \frac{\varepsilon'_2 h^2 u^2}{\omega} \right) \frac{\partial G}{\partial x} + \left(\frac{(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) h^2}{\omega} \right) uv \frac{\partial G}{\partial y} \right] \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Como o nosso problema admite a aproximação de camada limite e já que, como dito anteriormente, os coeficientes de dispersão ε'_1 e ε'_2 são constantes a baixas velocidades e inversamente proporcionais à velocidades elevadas, façamos em (2.39) uma análise de escala dividida em duas partes:

PARTE 1: Os coeficientes ε'_1 e ε'_2 variam linearmente com o inverso da velocidade ou em termos adimensionais, com o inverso do número de Peclet.

Consideremos na Figura 2 a camada limite em relação a propriedade G (temperatura ou concentração) de comprimento H e de espessura δ .

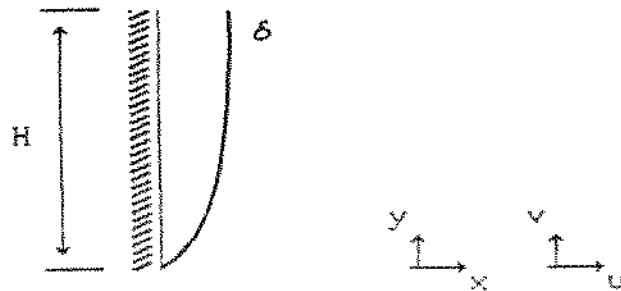


Figura 2 - Camada limite em relação a propriedade G.

Sabemos da mesma referência [15] que o número de Peclet, em

termos de escala, tem a seguinte ordem de magnitude do módulo.

$$Pe \sim |\vec{v}^*|$$

Mas

$$|\vec{v}^*| = |v^*| \sqrt{\left(\frac{u^*}{v^*}\right)^2 + 1}$$

e $\left(\frac{u^*}{v^*}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)$. Tendo sido admitida a aproximação de camada limite, temos pela equação da continuidade que:

$$\frac{u}{v} \sim \frac{\delta}{H} \ll 1$$

Portanto:

$$|\vec{v}^*| \sim v^* \quad (2.41)$$

E na forma dimensional:

$$|\vec{v}| \sim \frac{vh}{\omega} \quad (2.42)$$

Para expressar os parâmetros da dispersão de acordo com a terminologia de Jonhston e Perkins [8], fazemos:

$$\epsilon'_1 = \frac{\epsilon_1}{Pe} \quad \text{e} \quad \epsilon'_2 = \frac{\epsilon_2}{Pe}$$

que em termos de escala fica:

$$\epsilon'_1 \sim \frac{\epsilon_1 \omega}{vh} \quad \text{e} \quad \epsilon'_2 \sim \frac{\epsilon_2 \omega}{vh} \quad (2.43)$$

Utilizando (2.43) e ainda sabendo que de Jonhston e Perkins [8] $\epsilon_1 > \epsilon_2$, o lado direito da equação (2.40) fica em termos de escala:

$$\frac{1}{\delta} \left[\left(\omega, \epsilon_2 hv, \epsilon_1 h \frac{u}{v} u \right) \frac{\Delta G}{\delta} + \epsilon_1 uh \frac{\Delta G}{H} \right];$$

$$\frac{1}{H} \left[\left(\omega, \varepsilon_2 h v, \varepsilon_2 h \frac{u}{v} u \right) \frac{\Delta G}{\delta}, \varepsilon_1 h u \frac{\Delta G}{H} \right] \quad (2.44)$$

Vamos dividir (2.44) por $\Delta G \varepsilon_1 v$:

$$\left(\frac{\omega}{\varepsilon_1 v \delta^2}, \frac{\varepsilon_2 h}{\varepsilon_1 \delta^2}, \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta^2} h, \frac{u}{v} \frac{1}{\delta} \frac{1}{H} h \right);$$

$$\left(\frac{\omega}{H \varepsilon_1 v \delta}, \frac{1 h}{\delta H}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta H} h, \frac{u}{v} \frac{1}{H^2} h \right) \quad (2.45)$$

Identificando os termos da expressão (2.45) para podermos compará-los posteriormente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega}{\varepsilon_1 v \delta^2} & E &= \frac{\omega}{H \varepsilon_1 v \delta} \\ B &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \delta^2} h & F &= \frac{1}{\delta H} h \\ C &= \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta^2} h & G &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta H} h \\ D &= \frac{u}{v} \frac{1}{\delta} \frac{1}{H} h & H &= \frac{u}{v} \frac{1}{H^2} h \end{aligned}$$

E sempre lembrando que:

$$\frac{u}{v} \sim \frac{\delta}{H} \quad (\text{equação da continuidade})$$

Comparemos A e E:

$$A \sim E \left(\frac{H}{\delta} \right) \Rightarrow A \gg E \quad (2.46)$$

Comparemos C, D, F e H:

$$\left(\frac{\delta}{H} \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} h, \frac{\delta}{H} \cdot \frac{1}{\delta H} h, \frac{1}{\delta H} h, \frac{\delta}{H} \cdot \frac{1}{H^2} h \Rightarrow \frac{1}{H^2}, \frac{1}{H^2}, \frac{1}{\delta H}, \frac{\delta}{H^3}$$

$$\text{portanto: } F \gg C \sim D \gg H \quad (2.47)$$

Comparemos B e G:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\delta^2} h, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{\delta}{H}\right)^2 \cdot \frac{1}{\delta H} h \Rightarrow B \sim \left(\frac{H}{\delta}\right)^3 \Rightarrow B \gg G \quad (2.48)$$

Assim temos as classes (2.46), (2.47), (2.48):

$$\begin{aligned} A &\gg E \\ F &\gg C \sim D \gg H \\ B &\gg G \end{aligned}$$

Entre estas classes, vamos conservar A em relação aos outros:

1) Comparação entre B e F:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\delta^2} h, \frac{1}{\delta H} h \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \frac{\delta}{H}$$

na prática $B \gg F$ pois δ e H têm uma diferença de duas ordens de grandeza enquanto que ε_2 e ε_1 [8] têm diferença de uma ordem de grandeza. Assim,

$$B \gg C \sim D \gg H \quad (2.49)$$

2) Comparação entre F e G:

$$\frac{1}{\delta H} h, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\delta}{H} \cdot \frac{1}{H^2} h \Rightarrow \left(\frac{H}{\delta}\right)^2, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\text{certamente } F \gg G \quad (2.50)$$

3) Comparação entre B e E:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{1}{\delta^2} h, \quad \frac{\omega}{\epsilon_1 v} \cdot \frac{1}{\delta H}$$

Para compararmos B e E, é necessário analisar também o que ocorre com A e B:

$$\text{de A e B} \Rightarrow \frac{\omega}{\epsilon_1 v} \cdot \frac{1}{\delta^2}, \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{1}{\delta^2} h$$

Teremos assim três possibilidades:

3.1) A >> B

Se A >> B, o termo de dispersão desaparece e ficamos com:

$$\nabla \cdot (D \cdot \nabla G) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega \partial G}{\partial x} \right] \quad (2.51)$$

3.2) A ~ B

Se A ~ B, então temos B >> E e assim:

$$\nabla \cdot (D \cdot \nabla G) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\omega + \epsilon_2 h v) \frac{\partial G}{\partial x} \right] \quad (2.52)$$

3.3) A << B

Se A << B, temos:

$$\frac{\omega}{\epsilon_1 v} \ll \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} h \Rightarrow \frac{\omega}{\epsilon_2 v h} \ll 1$$

Voltando a E e B, vem:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{1}{\delta^2} h, \quad \frac{\omega}{\epsilon_1 v} \cdot \frac{1}{\delta H} \Rightarrow \frac{1}{\delta^2}, \quad \frac{\omega}{\epsilon_2 v h} \cdot \frac{\delta}{H} \cdot \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow 1, \quad \frac{\omega}{\epsilon_2 v} \cdot \frac{\delta}{H}$$

Mas como $\frac{\omega}{\epsilon_2 v h} \ll 1$ e $\frac{\delta}{H} \ll 1$, segue-se que B >> E e assim:

$$\nabla \cdot (\mathbb{D} \cdot \nabla G) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\omega + \varepsilon_2 h v) \frac{\partial G}{\partial x} \right] \quad (2.53)$$

Desta maneira podemos concluir que o termo de dispersão é um produto entre um coeficiente de dispersão transversal, a velocidade longitudinal ao escoamento e um comprimento característico h . Da literatura, observamos que este comprimento característico é o diâmetro do poro como nos indica, entre outros, Plumb [16].

PARTE 2: Os coeficientes ε'_1 e ε'_2 são constantes.

Partindo-se da equação (2.40), observamos que em termos de escala, ela pode ser escrita:

$$\frac{1}{\delta} \left[\left(\omega, \frac{\varepsilon'_2 h^2 v^2}{\omega}, \frac{\varepsilon'_1 h^2 u^2}{\omega} \right) \frac{\Delta G}{\delta}, \varepsilon'_1 u v h^2 \frac{\Delta G}{H} \right];$$

$$\frac{1}{H} \left[\left(\omega, \frac{\varepsilon'_1 h^2 v^2}{\omega}, \frac{\varepsilon'_2 h^2 u^2}{\omega} \right) \frac{\Delta G}{\delta}, \varepsilon'_1 u v h^2 \frac{\Delta G}{H} \right] \quad (2.54)$$

Dividindo (2.54) por $\frac{\Delta G \varepsilon'_1 v^2}{\omega}$, vem:

$$\left(\frac{\omega^2}{\varepsilon'_1 v^2 \delta^2}, \frac{\varepsilon'_2 h^2}{\varepsilon'_1 \delta^2}, \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta^2} h^2, \frac{u}{v} \frac{1}{\delta} \frac{1}{H} h^2 \right);$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\varepsilon'_1 v^2 H \delta}, \frac{h^2}{\delta H}, \frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1} \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta H} h^2, \frac{u}{v} \frac{1}{H^2} h^2 \right) \quad (2.55)$$

Vamos nomear os termos de (2.55):

$$A = \frac{\omega^2}{\varepsilon'_1 v^2 \delta^2} \quad E = \frac{\omega^2}{H \varepsilon'_1 v^2 \delta}$$

$$B = \frac{\epsilon'_2 h^2}{\epsilon'_1 \delta^2}$$

$$F = \frac{h^2}{\delta H}$$

$$C = \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta^2} h^2$$

$$G = \frac{\epsilon'_2}{\epsilon'_1} \frac{u}{v} \frac{u}{v} \frac{1}{\delta H} h^2$$

$$D = \frac{u}{v} \frac{1}{\delta} \frac{1}{H} h^2$$

$$H = \frac{u}{v} \frac{1}{H^2} h^2$$

A partir daqui, fazendo uma análise de escala totalmente semelhante à PARTE 1 concluiremos que:

$$\nabla \cdot (D \cdot \nabla G) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left[\omega + \frac{\epsilon'_2 h^2 v^2}{\omega} \right] \frac{\partial G}{\partial x} \right] \quad (2.56)$$

e assim para baixas velocidades o termo de dispersão é proporcional ao quadrado da velocidade no sentido longitudinal ao escoamento.

2.2) VARIAÇÃO DO TERMO DE DISPERSÃO.

No item 2.1 obtemos as equações governantes do escoamento para baixas e altas velocidades. Como o nosso trabalho refere a escoamento plenamente estabelecido, as equações da energia e do constituinte químico serão as seguintes:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\alpha + \epsilon_{2T} h v) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (2.57)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(D + \epsilon_{2C} h v) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (2.58)$$

Precisamos conhecer as variações de ϵ_{2T} e ϵ_{2C} e para isso levantamos da literatura as expressões para o termo de dispersão. A Tabela 1 apresenta este levantamento. Vale a pena lembrar que a difusividade térmica ou mássica efetiva é a soma de um termo de

estagnação e um termo de dispersão:

$$\alpha_{ef} = \alpha + \alpha_D \quad (2.59)$$

$$D_{ef} = D + D_D \quad (2.60)$$

Tabela 1 - Expressões do termo de dispersão (α_D ou D_D)

Referência	Termo de dispersão	Variação de ϵ_{2c} ou de ϵ_{2T}
[8]	$\epsilon_{2c} dv$	$\epsilon_{2c} = 0.0157$
[9] e [10]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = (0.43 \text{ até } 0.74) / \rho(1 - \phi)$
[11]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = 0.1 \text{ até } 0.2$
[12] e [13]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = 0 \text{ até } 0.0025$
[16]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = 0.14 \text{ até } 0.33$
[17]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = 0.02 \ell$
[18]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = 0.2 \ell \text{ até } 0.3 \ell$
[19]	$\epsilon_{2T} dv$	$\epsilon_{2T} = 0.01$

Nesta tabela fazemos as seguintes observações:

- a) d é o diâmetro do poro.
- b) ρ é a amplitude das flutuações randômicas.
- c) ϕ é a porosidade do meio poroso.
- d) ℓ é o comprimento de mistura segundo a Teoria de Van Driest.

Nos trabalhos de Georgiadis e Catton [9,10] foi usada a técnica de processos estocásticos e por isso a presença do termo ρ de flutuações aleatórias. Nos trabalhos de Cheng e Hsu [17,18] os respectivos

problemas foram resolvidos usando a técnica da média volumétrica e a dispersão térmica foi modelada com base na Teoria de Van Driest. Daí a presença do termo l de comprimento de mistura.

Escolhemos os termos de dispersão para o nosso caso, de modo a englobar uma faixa de valores média entre os termos citados na Tabela 1. Os escolhidos foram os termos das referências [8] para a transferência de massa e [16] para a transferência de calor.

O meio poroso escolhido como referência para o nosso trabalho é o arenito, conhecido por ser o principal elemento de reservatórios de petróleo. Segundo os autores a faixa de variação de d é de 0.17 a 0.55 cm. Os valores de d são confirmados por Bear [2] em seu livro clássico sobre dinâmica dos meios porosos. Chamemos ϵ_{2r} de ξ e ϵ_{2c} de γ . Assim temos as seguintes faixas de variação para os parâmetros ξ e γ :

$$0.024 < \xi < 0.182 \quad [\text{cm}] \quad (2.61)$$

$$0.003 < \gamma < 0.009 \quad [\text{cm}] \quad (2.62)$$

Como podemos observar, embora o parâmetro ξ tenha uma ordem de grandeza superior a γ o que ocorre normalmente é $\alpha \gg D$ ($Le \approx 100$) e assim γ terá uma influência superior na equação do constituinte químico e ξ terá pouca influência na equação da energia comparativamente. A partir disso, no Capítulo III trataremos da análise de escala para podermos ter as ordens de magnitude dos parâmetros envolvidos no problema.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE ESCALA

Neste capítulo procuramos identificar os diferentes regimes possíveis no problema de convecção natural proposto através da análise de escala [14]. Situações diversas são esperadas conforme a predominância dos diferentes parâmetros de difusão-dispersão. Partimos da Figura 3, onde temos representada a superfície vertical plana impermeável enterrada em um meio poroso. As camadas limites térmica e mássica de comprimento H e de espessuras δ_T e δ_C respectivamente, que resultam do transporte livre, estão também representadas:

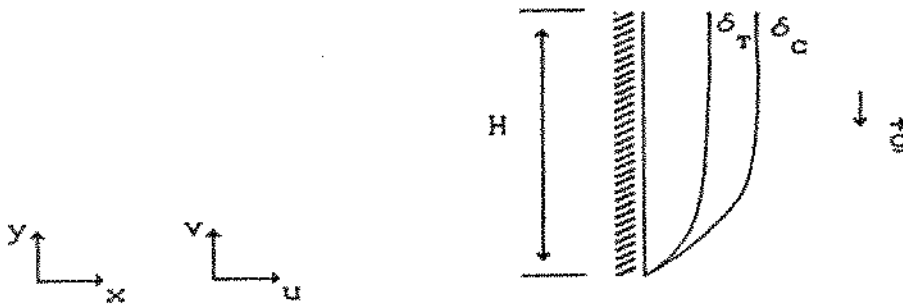


Figura 3 - Camadas limites térmica e mássica.

As condições de contorno do problema visto através da Figura 3, são:

$$\begin{array}{llll} u = 0 & T = T_0 & C = C_0 & x = 0 \\ v \rightarrow 0 & T \rightarrow T_\infty & C \rightarrow C_\infty & x \rightarrow \infty \end{array}$$

As equações governantes obtidas e explicitadas nos Capítulos anteriores são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{kg}{\nu} \left(\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\alpha + \xi v) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(D + \gamma v) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.4)$$

Para que a análise de escala seja feita de maneira correta, devemos observar as seguintes considerações:

a) Para a equação (3.3), há duas situações a se analisar:

a.1) $\alpha \gg \xi v$

a.3) $\alpha \ll \xi v$

b) Para a equação (3.4), existem também duas situações:

b.1) $D \gg \gamma v$

b.3) $D \ll \gamma v$

Observamos que das combinações entre as situações a) e b) resultam quatro possibilidades a serem verificadas:

1º CASO: $\alpha \gg \xi v$ e $D \gg \gamma v$

2º CASO: $\alpha \gg \xi v$ e $D \ll \gamma v$

3º CASO: $\alpha \ll \xi v$ e $D \gg \gamma v$

4º CASO: $\alpha \ll \xi v$ e $D \ll \gamma v$

A seguir passamos a estudar cada um dos casos apontados

$$3.1) \quad \boxed{1^{\circ} \text{ CASO: } \alpha \gg \xi v \text{ e } D \gg \gamma v}$$

Determinação da equação para a velocidade v.

Como podemos ver, este é um caso limite onde a dispersão não é considerada tanto no transporte de energia como na transferência de massa. Integrando a equação (3.2) através da camada limite e utilizando as condições de contorno, vem:

$$v = \int_0^{\infty} \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + \int_0^{\infty} \frac{Kg}{\nu} \left[\beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right] dx$$

Mas,

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = dT \quad \text{e} \quad \frac{\partial C}{\partial x} dx = dC$$

Então:

$$v = \frac{Kg}{\nu} \left[\beta (T - T_{\infty}) + \beta_c (C - C_{\infty}) \right] \quad (3.5)$$

onde $T - T_{\infty} = \Delta T$ e $C - C_{\infty} = \Delta C$

Observando a equação (3.5), vemos que existirão duas possibilidades de o escoamento ser dirigido: pela transferência de calor ou pela transferência de massa.

3.1.a) Escoamento dirigido pela transferência de calor.

$$|\beta \Delta T| \gg |\beta_c \Delta C|$$

Determinação das escalas de v e δ_T :

A equação (3.5), fica então:

$$v = \frac{Kg}{\nu} \beta (T - T_{\infty}) \quad (3.6)$$

Em ordem de grandeza:

$$v \sim \frac{Kg}{\nu} \beta \Delta T \quad (3.7)$$

A equação (3.3), passa a ser:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Em ordem de grandeza:

$$u \frac{\Delta T}{\delta_T} \text{ ou } v \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \quad (3.9)$$

Mas da equação (3.1), também em ordem de grandeza:

$$\frac{u}{\delta_T} \sim \frac{v}{H} \quad (3.10)$$

Então, temos:

$$v \frac{\Delta T}{H} \text{ ou } v \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

$$\frac{v}{H} \Delta T \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \Rightarrow \delta_T^2 \sim \frac{\alpha H}{v} \Rightarrow \delta_T \sim \left(\frac{\alpha H}{v} \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.7) em (3.11), teremos:

$$\delta_T \sim \left(\frac{\alpha H \nu}{Kg \beta \Delta T} \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

que contém implicitamente o parâmetro adimensional

$$Ra = \frac{Kg H \beta \Delta T}{\alpha \nu}$$

pois, multiplicando e dividindo a expressão (3.12) por H^2 , resulta

$$\delta_T \sim \left(\frac{\alpha \nu H^2}{Kg\beta\Delta TH} \right)^{1/2} \Rightarrow \delta_T \sim H \left(\frac{\alpha \nu}{Kg\beta\Delta T} \right)$$

E assim:

$$\delta_T \sim HRa^{-1/2} \quad (3.13)$$

Multiplicando e dividindo a expressão (3.7) por αH , temos:

$$v \sim \frac{Kg\beta\Delta T \cdot \alpha}{\alpha \nu} \frac{\alpha}{H} \Rightarrow v \sim \frac{\alpha Ra}{H} \quad (3.14)$$

Determinação da Ordem de Grandeza do Número de Nusselt.

O número de Nusselt pode ser definido por:

$$Nu = \frac{q'}{k\Delta T} \quad (3.15)$$

Façamos a análise de ordem de grandeza na expressão (3.15):

$$Nu \sim \frac{\left(\frac{KH\Delta T}{\delta_T} \right)}{k\Delta T} \Rightarrow Nu \sim \frac{H}{\delta_T} \Rightarrow Nu \sim \frac{H}{HRa^{-1/2}}$$

E assim temos:

$$Nu \sim Ra^{1/2} \quad (3.16)$$

Determinação da ordem de grandeza do número de Sherwood.

O número de Sherwood pode ser definido por:

$$Sh = \frac{J'}{D\Delta C} \quad (3.17)$$

Façamos a análise de ordem de grandeza na expressão (3.17):

$$Sh \sim \frac{\left(\frac{DHAC}{\delta_c} \right)}{DAC} \Rightarrow Sh \sim \frac{H}{\delta_c} \quad (3.18)$$

Para a análise de escala correta de δ_c é necessário observar que δ_c pode ser maior ou menor que δ_T e sendo assim ocorrerão duas possibilidades extremas: $\delta_c \ll \delta_T$ e $\delta_T \ll \delta_c$ que completam a análise. Multiplicando a equação da continuidade (3.1) por C, temos:

$$C \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

Somando-se (3.19) à equação do constituinte (3.4), obtemos:

$$C \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Mas observamos que o primeiro membro da equação acima é composto de duas derivadas do produto e assim temos:

$$\frac{\partial(Cu)}{\partial x} + \frac{\partial(Cv)}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

Integrando (3.20) de $x = 0$ até uma posição $x = X$ (onde $X = \max(\delta_T, \delta_c)$) conforme visto na Figura 4 abaixo, temos:

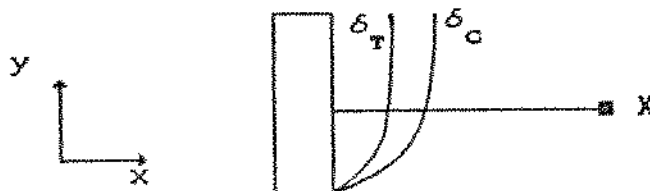


Figura 4 - Integração através das camadas limites

$$\int_0^x \frac{\partial(Cu)}{\partial x} dx + \int_0^x \frac{\partial(Cv)}{\partial y} dx = \int_0^x D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx$$

$$\int_0^x d(uC) + \frac{d}{dy} \int_0^x (vC) dx = D \int_0^x d \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

$$u_x C_x - u_0 C_0 + \frac{d}{dy} \int_0^x (vC) dx = D \left[\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_0 \right] \quad (3.21)$$

Integrando a equação (3.1) também através das camadas limites,

temos:

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^x \frac{\partial v}{\partial y} dx = 0$$

$$u_x - u_0 = - \frac{d}{dy} \int_0^x v dx \quad (3.22)$$

Mas, como dito anteriormente, a superfície vertical é impermeável e portanto:

$$u_0 = 0$$

Substituindo em (3.22), vem:

$$u_x = - \frac{d}{dy} \int_0^x v dx \quad (3.23)$$

Mas também sabemos que existem as outras condições de contorno:

$$C_x = C_\infty \text{ e } \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.24)$$

Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.21), vem:

$$- C_\infty \frac{d}{dy} \int_0^x v dx + \frac{d}{dy} \int_0^x (vC) dx = D \left[- \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_0 \right]$$

Então:

$$\frac{d}{dy} \int_0^x v(C - C_\infty) dx = -D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_0 \quad (3.25)$$

A análise de escala recomendada para a expressão (3.25) será:

$$\frac{v\Delta C}{H} \min(\delta_T, \delta_c) \sim \frac{D\Delta C}{\delta_c} \quad (3.26)$$

como podemos ver da Figura 4. Assim, teremos duas possibilidades a verificar:

$$3.1.a.a) \underline{\delta_c \ll \delta_T}$$

Então a expressão (3.26) fica:

$$\frac{v\Delta C}{H} \delta_c \sim D \frac{\Delta C}{\delta_c} \Rightarrow \delta_c^2 \sim \frac{HD}{v} \quad (3.27)$$

Substituindo (3.14) em (3.27), temos:

$$\delta_c^2 \sim \frac{HD}{\frac{\alpha}{H} Ra} \Rightarrow \delta_c^2 \sim \frac{H^2 D Ra^{-1}}{\alpha} \quad (3.28)$$

Mas, por definição:

$$Le = \frac{\alpha}{D} \quad (3.29)$$

Voltando a expressão (3.28) temos:

$$\delta_c^2 \sim H^2 Le^{-1} Ra^{-1} \Rightarrow \delta_c \sim H Le^{-1/2} Ra^{-1/2} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.13) em (3.30) obtemos a condição do número de Lewis para a ocorrência deste caso:

$$\delta_c \sim \delta_T Le^{-1/2} \text{ e ainda } \delta_c \ll \delta_T \Rightarrow Le \gg 1 \quad (3.31)$$

E finalmente substituindo (3.30) em (3.18), obteremos a escala do número de Sherwood para $\delta_c \ll \delta_T$:

$$Sh \sim \frac{H}{HRa^{-1/2}Le^{-1/2}} \Rightarrow Sh \sim (RaLe)^{1/2} \quad (3.32)$$

3.1.a.b) $\delta_T \ll \delta_c$

A expressão (3.26) neste caso fica:

$$\frac{v\Delta C}{H} \delta_T \sim D \frac{\Delta C}{\delta_c} \Rightarrow \delta_c \sim \frac{HD}{v\delta_T} \quad (3.33)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) em (3.33) teremos:

$$\delta_c \sim \frac{HD}{\frac{\alpha}{H} Ra HRa^{-1/2}} \Rightarrow \delta_c \sim HRa^{-1/2} Le^{-1} \quad (3.34)$$

Substituindo (3.13) em (3.34), verificamos o domínio de existência para este caso:

$$\delta_c \sim \delta_T Le^{-1} \text{ e ainda } \delta_T \ll \delta_c \Rightarrow Le \ll 1 \quad (3.35)$$

E substituindo (3.34) em (3.18) teremos a escala do número de Sherwood para $\delta_T \ll \delta_c$:

$$Sh \sim \frac{H}{HRa^{-1/2}Le^{-1}} \Rightarrow Sh \sim Ra^{1/2}Le \quad (3.36)$$

3.1.b) Escoamento dirigido pela transferência de massa.

Observando as equações governantes do escoamento ((3.1) a (3.4)), vemos que existe uma simetria e que para obtermos as análises de escala para este caso, não é necessário repetir todo o procedimento feito em 3.1.a e assim basta apenas obter uma tabela que relacione elementos obtidos em 3.1.a e os equivalentes em 3.1.b. Este caso

equivale a dizer que:

$$|\beta_c \Delta C| \gg |\beta \Delta T|$$

Tabela 2 - Equivalência de escalas entre os casos 3.1.a e 3.1.b

Caso 3.1.a	Caso 3.1.b
$\beta \Delta T$	$\beta_c \Delta C$
δ_T	δ_c
δ_c	δ_T
α	D
D	α
Ra	RaNLe
Le	Le^{-1}
Nu	Sh
Sh	Nu

Desta forma estaremos facilitando a visualização das escalas obtidas para este 1º CASO tanto para transferência de calor predominante como para transferência de massa predominante. A seguir apresentamos uma tabela completa com todas as escalas quando a dispersão não é levada em conta.

Tabela 3 - Escalas sem a presença de dispersão.

Mecanismo	ν	Nu	Sh	Observações
Transf. de calor	$\frac{\alpha}{H} Ra$	$Ra^{1/2}$	$(RaLe)^{1/2}$	$Le \gg 1$
$ N \ll 1$	$\frac{\alpha}{H} Ra$	$Ra^{1/2}$	$Ra^{1/2} Le$	$Le \ll 1$
Transf. de massa	$\frac{\alpha}{H} Ra N $	$(Ra N)^{1/2}$	$(RaLe N)^{1/2}$	$Le \ll 1$
$ N \gg 1$	$\frac{\alpha}{H} Ra N $	$(Ra N)^{1/2} Le^{-1/2}$	$(RaLe N)^{1/2}$	$Le \gg 1$

3.2) 2º CASO: $\alpha \gg \xi \nu$ e $D \ll \gamma \nu$

Neste caso, também ocorrerão duas possibilidades: o escoamento será dirigido pela transferência de calor ou pela transferência de massa.

3.2.a) Escoamento dirigido pela transferência de calor.

Determinação das escalas de ν e δ_T :

Como $\alpha \gg \xi \nu$ temos que este item será totalmente semelhante ao item 3.1.a.1 anterior e portanto:

$$\delta_T \sim H Ra^{-1/2} \quad (3.37)$$

$$\nu \sim \frac{\alpha}{H} Ra \quad (3.38)$$

Determinação da Ordem de Grandeza do Número de Nusselt

Novamente, a ordem de grandeza será análoga ao item 3.1.a, pois a ordem de grandeza do número de Nusselt é da ordem de δ_T^{-1} e assim temos:

$$Nu \sim Ra^{1/2} \quad (3.39)$$

Determinação da ordem de grandeza do número de Sherwood

Como $D \ll \gamma v$, a equação (3.4) passa a ter o seguinte formato:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\gamma v) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.40)$$

e aplicando o processo utilizado em 3.1.a. chegamos a uma equação semelhante à equação (3.25):

$$\frac{d}{dy} \int_0^x v(C - C_\infty) dx = -\gamma \left[v_0 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_0 \right] \quad (3.41)$$

sendo a escala recomendada:

$$\frac{v\Delta C}{H} \min(\delta_T, \delta_C) \sim \gamma \frac{v\Delta C}{\delta_C} \quad (3.42)$$

e novamente teremos duas possibilidades a verificar:

$$3.2.a.a) \quad \underline{\delta_C \ll \delta_T}$$

$$\frac{v\Delta C}{H} \delta_C \sim \gamma \frac{v\Delta C}{\delta_C} \Rightarrow \delta_C \sim (\gamma H)^{1/2} \quad (3.43)$$

e como $\delta_C \ll \delta_T$ e sabendo-se δ_T de (3.37), temos:

$$(\gamma H)^{1/2} \ll H Ra^{-1/2} \Rightarrow \frac{\gamma}{H} \cdot Ra \ll 1$$

onde $\frac{\gamma}{H} \cdot Ra$ foi denominado número de Rayleigh-gama (Ra_γ), portanto:

$$Ra_\gamma \ll 1 \quad (3.44)$$

e finalmente podemos ter a escala do número de Sherwood:

$$Sh \sim \frac{H}{\delta_c} \Rightarrow Sh \sim \left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2} \quad (3.45)$$

$$3.2.a.b) \quad \underline{\delta_T \ll \delta_c}$$

$$\frac{v\Delta C}{H} \delta_T \sim \gamma \frac{v\Delta C}{\delta_c} \Rightarrow \delta_c \sim \gamma Ra^{1/2} \quad (3.46)$$

e como $\delta_T \ll \delta_c$, temos:

$$HRa^{-1/2} \ll \gamma Ra^{1/2} \Rightarrow \frac{\gamma}{H} Ra \gg 1 \Rightarrow Ra_\gamma \gg 1 \quad (3.47)$$

e assim temos a escala do número de Sherwood:

$$Sh \sim \frac{H}{\delta_c} \Rightarrow Sh \sim \left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1} Ra^{-1/2} \quad (3.48)$$

3.2.b) Escoamento dirigido pela transferência de massa.

Determinação das escalas de v e δ_c :

Como $D \ll \gamma v$, este caso vai merecer uma nova análise para δ_c . Para a velocidade v , a escala será análoga ao item 3.1.b. Portanto:

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra |N| \quad (3.49)$$

Assim a equação (3.4) passa a ter a forma da equação (3.40):

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[c \gamma v \frac{\partial C}{\partial x} \right]$$

Fazendo a análise de escala, temos:

$$\frac{vAC}{H} \sim \frac{\gamma}{\delta_c} \frac{vAC}{\delta_c}$$

$$\delta_c \sim (\gamma H)^{1/2} \quad (3.50)$$

Determinação da Ordem de Grandeza do Número de Sherwood

O número de Sherwood tem sua escala dada pela expressão (3.18) e utilizando (3.50), vem:

$$Sh \sim \left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2} \quad (3.51)$$

Determinação da Ordem de Grandeza do Número de Nusselt

A escala do número de Nusselt é dada pela expressão:

$$Nu \sim \frac{H}{\delta_T} \quad (3.52)$$

Mas para uma correta análise de escala é necessário observar que δ_T depende do tamanho relativo entre δ_c e δ_T . Como neste caso temos que $\alpha \gg \gamma$ a equação (3.3) passa a ter a forma da equação (3.8):

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Ocorrerá agora o mesmo procedimento que no item 3.1.a, apenas trocando a concentração C pela temperatura T. Sendo assim, temos:

$$\frac{d}{dy} \int_0^x v(T - T_\infty) dx = -\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 \quad (3.53)$$

A análise de escala recomendada para esta expressão (3.53) será:

$$\frac{\nu \Delta T}{H} \min(\delta_T, \delta_c) \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T} \quad (3.54)$$

Analogamente a 3.1.a., teremos duas possibilidades a analisar:

$$3.2.b.a) \quad \underline{\delta_T \ll \delta_c}$$

$$\frac{\nu \Delta T}{H} \delta_T \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T} \Rightarrow \delta_T^2 \sim \frac{\alpha H}{\nu} \quad (3.55)$$

Substituindo (3.49) em (3.55), temos:

$$\delta_T^2 \sim \frac{\alpha H}{\frac{\alpha}{H} Ra |N|} \Rightarrow \delta_T^2 \sim H^2 Ra^{-1} |N|^{-1}$$

$$\delta_T \sim H (Ra |N|)^{-1/2} \quad (3.56)$$

Mas como $\delta_T \ll \delta_c$, então:

$$\gamma \gg H (Ra |N|)^{-1/2} \Rightarrow Ra_\gamma |N| \gg 1 \quad (3.57)$$

Portanto, substituindo (3.56) em (3.52), obtemos a escala do número de Nusselt para a condição (3.57):

$$Nu \sim (Ra |N|)^{1/2} \quad (3.58)$$

$$3.2.b.b) \quad \underline{\delta_c \ll \delta_T}$$

$$\frac{\nu \Delta T}{H} \delta_c \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T} \Rightarrow \delta_T \sim \frac{\alpha H}{\nu \delta_c} \quad (3.59)$$

Substituindo (3.49) em (3.59), temos:

$$\delta_T \sim \frac{\alpha H}{H Ra |N| (\gamma H)^{1/2}} \Rightarrow \delta_T \sim H^{3/2} (Ra |N|)^{-1} \gamma^{-1/2} \quad (3.60)$$

Mas como $\delta_c \ll \delta_T$, veremos em que condição (3.60) se verifica:

$$(\gamma H)^{1/2} \ll H^{3/2} (Ra |N|)^{-1} \gamma^{-1/2} \Rightarrow Ra_\gamma |N| \ll 1 \quad (3.61)$$

E finalmente temos a escala do número de Nusselt:

$$Nu \sim Ra |N| \left(\frac{\gamma}{H}\right)^{1/2} \quad (3.62)$$

Pelos resultados apresentados, as equações (3.1), (3.2), (3.8) e (3.40) apresentam uma simetria quando analisados os casos 3.2.a e 3.2.b. A Tabela 4 mostra a equivalência entre os parâmetros nos dois casos. Na tabela 5 estão resumidas as escalas de velocidade, número de Nusselt e número de Sherwood para o 2º caso.

Tabela 4 - Equivalência de escalas entre os casos 3.2.a e 3.2.b

Caso 3.2.a	Caso 3.2.b
$\beta \Delta T$	$\beta_c \Delta C$
N	N^{-1}
δ_T	δ_c
δ_c	δ_T
Nu	Sh
Sh	Nu
Ra	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1}$
$\left(\frac{\gamma}{H}\right)$	$(Ra N)^{-1}$
α	$\gamma \frac{\alpha}{H} Ra N $
$\gamma \frac{\alpha}{H} Ra$	α

Tabela 5 - Escalas com o efeito da dispersão na equação do constituinte químico.

Mecanismo	ν	Nu	Sh	Observações
Transf. de calor	$\frac{\alpha}{H} Ra$	$Ra^{1/2}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1} Ra^{-1/2}$	$Ra_{\gamma} \gg 1$
$ N \ll 1$	$\frac{\alpha}{H} Ra$	$Ra^{1/2}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2}$	$Ra_{\gamma} \ll 1$
Transf. de massa	$\frac{\alpha}{H} Ra N $	$(Ra N)^{1/2}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2}$	$Ra_{\gamma} N \gg 1$
$ N \gg 1$	$\frac{\alpha}{H} Ra N $	$Ra N \left(\frac{\gamma}{H}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2}$	$Ra_{\gamma} N \ll 1$

3.3) 3^o CASO: $\alpha \ll \{\nu \text{ e } D\} \gg \gamma \nu$

O conjunto de equações da quantidade de movimento, energia e constituinte químico do 2^o Caso é:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.63)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.64)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\gamma \nu) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.65)$$

E o mesmo conjunto para o 3^o Caso é:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.66)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\xi v) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.67)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.68)$$

Observando os dois conjuntos vemos que existe simetria entre as equações diferenciais, o que possibilita correlacionarmos os dois casos em termos de escala. De fato, existe uma maneira de determinarmos as escalas para o 3º Caso partindo-se do 2º Caso, sabendo-se as equivalências dos parâmetros entre os casos. As equivalências são exibidas na Tabela 6 a partir da qual obtemos os resultados para as escalas do 3º Caso.

Tabela 6 - Equivalência de escalas entre o 2º e 3º Casos

2º Caso	3º Caso
$\beta \Delta T$	$\beta_c \Delta C$
N	N^{-1}
δ_T	δ_c
δ_c	δ_T
α	D
D	α
γ	ξ
ξ	γ
Nu	Sh
Sh	Nu
Ra	$RaNL_e$
Ra_γ	$Ra_\xi N$

Tabela 7 - Escalas com o efeito da dispersão na equação da energia.

Mecanismo	ν	Nu	Sh	Observações
Transf. de calor	$\frac{Kg\beta\Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2}$	$(RaLe)^{1/2}$	$Ra_{\xi} \gg 1$
$ N \ll 1$	$\frac{Kg\beta\Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2}$	$(RaLe) \left(\frac{\xi}{H}\right)^{1/2}$	$Ra_{\xi} \ll 1$
Transf. de massa	$\frac{Kg\beta_c \Delta T}{\nu}$	$(LeRa N)^{-1/2} \left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1}$	$(RaLe N)^{1/2}$	$Ra_{\xi} N \ll 1$
$ N \gg 1$	$\frac{Kg\beta_c \Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2}$	$(RaLe N)^{1/2}$	$Ra_{\xi} N \gg 1$

onde $Ra_{\xi} = Ra Le \left(\frac{\xi}{H}\right)$

3.4) 4^o CASO: $\alpha \ll \xi \nu$ e $D \ll \gamma \nu$

O conjunto de equações para o 1^o Caso é:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.69)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.70)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.71)$$

E o mesmo conjunto para o 4^o Caso é:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg}{\nu} \left(\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3.72)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\xi v) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.73)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\gamma v) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (3.74)$$

Aqui também ocorre simetria entre as equações diferenciais e, como no 3^o Caso, conseguimos obter as equivalências entre os 1^o e 4^o Casos e na sequência as escalas do 4^o Caso.

Tabela 8 - Equivalência de escalas entre os 1^o e 4^o Casos.

1 ^o Caso	4 ^o Caso
$\beta \Delta T$	$N \beta_c \Delta C$
N	N
δ_T	δ_T
δ_c	δ_c
D	$\gamma \frac{Kg \beta \Delta T}{\nu}$
α	$\xi \frac{Kg \beta \Delta T}{\nu}$
Ra	$\left(\frac{\xi}{H} \right)^{-1}$
Le	$\left(\frac{\xi}{H} \right)$

A seguir, apresentamos uma tabela com as escalas de velocidade,

Nusselt e Sherwood para este 4º-CASO:

Tabela 9 - Escalas com os efeitos da dispersão na equação da energia e na do constituinte químico.

Mecanismo	ν	Nu	Sh	Observações
Transf. de calor	$\frac{Kg\beta\Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2} \left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1}$	$\gamma \gg \xi$
$ N \ll 1$	$\frac{Kg\beta\Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2}$	$\gamma \ll \xi$
Transf. de massa	$\frac{Kg\beta_c \Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{1/2} \left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2}$	$\gamma \ll \xi$
$ N \gg 1$	$\frac{Kg\beta_c \Delta T}{\nu}$	$\left(\frac{\xi}{H}\right)^{-1/2}$	$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^{-1/2}$	$\gamma \gg \xi$

Completada a análise de escala, a próxima etapa é procurar por soluções similares. As escalas obtidas neste Capítulo serão úteis para determinação de variáveis de similaridade e ainda as Tabelas aqui obtidas são de interesse para indicar a ordem de magnitude da intensidade de transferência de calor e de massa.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES DE SIMILARIDADE

Neste capítulo busca-se expor a solução encaminhada para o problema descrito nos capítulos anteriores. O item 4.1 descreve a obtenção das equações diferenciais ordinárias que permitem a existência de soluções similares. O item 4.2 trata dos algoritmos utilizados para a resolução dos sistemas de equações diferenciais obtidos.

4.1) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS

Apresenta-se inicialmente o procedimento geral empregado na obtenção das equações diferenciais ordinárias. Este procedimento é seguido em todos os casos para identificação das soluções de similaridade, onde uma variável de similaridade (adimensional) substitui as duas variáveis dimensionais x e y . Simbolicamente,

$$(x, y) \longrightarrow (\eta, y) \quad (4.1)$$

Na mudança de variáveis, as derivadas parciais terão as seguintes expressões:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_y = \frac{\partial C}{\partial \eta} \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_y + \frac{\partial C}{\partial y} \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_y$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_y = \frac{\partial C}{\partial \eta} \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_y \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_x = \frac{\partial C}{\partial \eta} \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_x + \frac{\partial C}{\partial y} \left. \frac{\partial y}{\partial y} \right|_x$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_x = \frac{\partial C}{\partial \eta} \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_x + \frac{\partial C}{\partial y} \quad (4.3)$$

Também considerando, para simplificar a condição de contorno, que:

$$\frac{v}{v_0} = -f'(\eta) \Rightarrow v = -v_0 \cdot f'(\eta) \quad (4.4)$$

sendo $v_0 = v_0(y)$ a velocidade v na parede da superfície vertical.

Definindo a função de corrente, a partir das velocidades, por

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \psi = - \int v dx \quad (4.5)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \int u dy \quad (4.6)$$

Necessita-se também dos perfis de similaridade da temperatura e da concentração:

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \Rightarrow T = \theta(\eta)(T_0 - T_\infty) + T_\infty \quad (4.7)$$

$$c(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_0 - C_\infty} \Rightarrow C = c(\eta)(C_0 - C_\infty) + C_\infty \quad (4.8)$$

Com o número de Rayleigh local [6] dado por

$$Ra_y = \frac{Kg\beta(T_0 - T_\infty)y}{\alpha\nu} \quad (4.9)$$

A seguir são analisados caso a caso os problemas descritos no capítulo III:

$$4.1.1) \quad \boxed{1^{\circ} \text{ CASO: } \alpha \gg \{v \text{ e } D \gg \gamma v}$$

4.1.1.a) Escoamento dirigido pela transferência de calor:

Da escala da velocidade v na Tabela 2 obtém-se a expressão da velocidade v_o :

$$v_o(y) = \frac{\alpha}{y} Ra_y$$

E utilizando a relação (4.4), temos:

$$v = -\frac{\alpha}{y} Ra_y f'(\eta) \quad (4.10)$$

Para simplificar a notação faz-se $f'(\eta) = f'$ e de forma coerente a primitiva e outras ordens de derivada que possam surgir para a variável f . A variável de similaridade pode ser obtida através da observação da escala de δ_T dada pela expressão (3.13):

$$\delta_T \sim HRa^{-1/2}$$

E assim:

$$\eta = \frac{x}{yRa_y^{-1/2}} \quad (4.11)$$

A função corrente será:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow v = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_y \quad (4.12)$$

Substituindo (4.10) em (4.12) e fazendo as operações de derivação, temos:

$$\psi = \alpha Ra_y^{1/2} f \quad (4.13)$$

Utilizando as relações de (4.2) e (4.6), obtem-se a expressão de similaridade para a velocidade u:

$$u = \frac{\alpha}{2y} Ra_y^{1/2} (f - \eta f') \quad (4.14)$$

Novamente para simplificar a notação, o termo (η) das variáveis θ e c deixará de ser registrado.

Equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg}{\nu} \left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_c \frac{\partial C}{\partial x} \right]$$

Utilizando as relações (4.2), (4.3), (4.7) e (4.8), (4.10) e (4.11) e ainda simplificando, temos:

$$f'' = -\theta' - Nc' \quad (4.15)$$

Equação da energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Novamente utilizando as relações de similaridade e simplificando, temos:

$$e'' = \frac{1}{2} fe' \quad (4.16)$$

Equação do constituinte químico:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Repetindo o processo de obtenção das equações similares anteriores, vem:

$$c'' = \frac{1}{2} fc'Le \quad (4.17)$$

4.1.1.b) Escoamento dirigido pela transferência de massa:

Verificando a escala de v na Tabela 2, pode-se escrever a expressão:

$$v_o = -\frac{\alpha}{y} Ra_y |N| \Rightarrow v = -\frac{\alpha}{y} Ra_y |N| f' \quad (4.18)$$

Como neste caso a escala de δ_c é $H(RaLe|N|)^{-1/2}$, a variável de similaridade assume a forma:

$$\eta = \frac{x}{y(Ra_y Le|N|)^{-1/2}} \quad (4.19)$$

A função de corrente será:

$$\psi = \alpha(Ra_y |N|)^{1/2} Le^{-1/2} f' \quad (4.20)$$

Utilizando as relações (4.2), (4.4) e (4.20) deriva-se a velocidade u :

$$u = \frac{\alpha(Ra_y |N|)^{1/2} Le^{-1/2}}{2y} (f - \eta f') \quad (4.21)$$

Equação da quantidade de movimento:

O procedimento é o mesmo seguido em 4.1.1.a, para obter:

$$f'' = -\frac{\theta'}{|N|} - c' \quad (4.22)$$

Equação da energia:

Por um procedimento análogo, obtém-se:

$$e'' = \frac{1}{2Le} fe' \quad (4.23)$$

Equação do constituinte químico:

Analogamente aos casos anteriores, resulta:

$$c'' = \frac{1}{2} fc' \quad (4.24)$$

4.1.2) 2º CASO: $\alpha \gg \zeta v$ e $D \ll \gamma v$

4.1.2.a) Escoamento dirigido pela transferência de calor:

Como $\alpha \gg \zeta v$, a variável de similaridade e as expressões de similaridade das velocidades u e v serão as mesmas que em 4.1.1.a e conseqüentemente as expressões para as equações da quantidade de movimento e da energia .

Equação da quantidade de movimento:

$$f'' = -e' - Nc' \quad (4.25)$$

Equação da energia:

$$e'' = \frac{1}{2} fe' \quad (4.26)$$

Equação do constituinte químico:

A equação, neste caso, apresenta o seguinte formato:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma v \frac{\partial c}{\partial x} \right] \quad (4.27)$$

Aplicando as técnicas utilizadas no item 4.1.1.a, temos:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = (C_0 - C_\infty) c' \left(\frac{1}{y Ra_y^{-1/2}} \right) \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = - (C_0 - C_\infty) c' \frac{\eta}{2y} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma v \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\alpha}{y} Ra_y \gamma (C_0 - C_\infty) \frac{1}{y Ra_y^{-1/2}} (f'' c' + c'' f') \frac{1}{y Ra_y^{-1/2}} \quad (4.30)$$

Substituindo (4.28), (4.29), (4.30) em (4.27), vem:

$$c'' = - \frac{c'}{f'} \left[f'' + \left(\frac{\gamma}{y} \right)^{-1} Ra_y^{-1} \frac{f}{2} \right] \quad (4.31)$$

Note que $\left(\frac{\gamma}{y} \right) Ra_y$ independe de y e o produto que aparece na equação (4.31) é Ra_γ (parâmetro adimensional). Portanto, a equação é diferencial ordinária e podemos encontrar as soluções de similaridade. A equação (4.31) passa a ser escrita:

$$c'' = - \frac{c'}{f'} \left[f'' + Ra_\gamma \frac{f}{2} \right] \quad (4.32)$$

4.1.2.b) Escoamento dirigido pela transferência de massa:

Neste caso como δ_c é dada por:

$$\delta_c \sim (\gamma H)^{1/2}$$

a variável de similaridade será:

$$\eta = \frac{x}{(\gamma y)^{1/2}} \quad (4.33)$$

e a função corrente:

$$\psi = \left(\frac{\gamma}{y} \right)^{1/2} \alpha Ra_y |N| f \quad (4.34)$$

Aplicando as mesmas técnicas apresentadas anteriormente,

obtem-se:

Equação da quantidade de movimento:

$$f'' = - \frac{\theta'}{|N|} - c' \quad (4.35)$$

Equação da energia:

$$e'' = Ra_\gamma |N| f e' \quad (4.36)$$

Equação do constituinte químico:

$$c'' = - \frac{c'}{F'} \left[f'' + \frac{f'}{N} \right] \quad (4.37)$$

$$4.1.3) \quad \boxed{3^o \text{ CASO: } \alpha \ll \xi v \text{ e } D \gg \gamma v}$$

4.1.3.a) Escoamento dirigido pela transferência de calor:

Neste caso a variável de similaridade mais conveniente é:

$$\eta = \frac{x}{(\xi y)^{1/2}} \quad (4.38)$$

e a função corrente:

$$\psi = \left(\frac{\xi}{y} \right)^{1/2} \alpha Ra_\gamma \frac{f}{y} \quad (4.39)$$

Novamente aplicando as mesmas técnicas utilizadas nos itens 4.1.1 e 4.1.2, temos:

Equação da quantidade de movimento:

$$f'' = -e' - Nc' \quad (4.40)$$

Equação da energia:

$$e'' = -\frac{e'}{f'} \left[f'' + \frac{f}{2} \right] \quad (4.41)$$

Equação do constituinte químico:

$$c'' = \frac{1}{2} Ra_{\xi} fc' \quad (4.42)$$

4.1.3.b) Escoamento dirigido pela transferência de massa:

Empregando como variável de similaridade:

$$\eta = \frac{x}{y(LeRa|N|)^{-1/2}} \quad (4.43)$$

e como função corrente:

$$\psi = \alpha(Ra_y|N|)^{1/2} Le^{-1} f' \quad (4.44)$$

deriva-se:

Equação da quantidade de movimento:

$$f'' = -\frac{e'}{|N|} - c' \quad (4.45)$$

Equação da energia:

$$e'' = -\frac{e'}{f'} \left[f'' + |N| Ra_{\xi} \frac{f}{2} \right] \quad (4.46)$$

Equação do constituinte químico:

$$c'' = \frac{1}{2} fc' \quad (4.47)$$

4.1.4) 4.º CASO: $\alpha \ll \xi v$ e $D \ll \gamma v$

4.1.4.a) Escoamento dirigido pela transferência de calor:

Sabendo-se que a variável de similaridade e a função corrente são as mesmas do item 4.1.3.a, temos:

Equação da quantidade de movimento:

$$f'' = -e' - Ne' \quad (4.48)$$

Equação da energia:

$$e'' = -\frac{e'}{f'} \left[f'' + \frac{f}{2} \right] \quad (4.49)$$

Equação do constituinte químico:

$$c'' = -\frac{c'}{f'} \left[f'' + Ds \frac{f}{2} \right] \quad (4.50)$$

onde o parâmetro $Ds = \frac{\xi}{\gamma}$, de ora por diante denominado razão de dispersão.

4.1.4.b) Escoamento dirigido pela transferência de massa:

Sendo a variável de similaridade e a função corrente as mesmas do que o item 4.1.2.b, temos:

Equação da quantidade de movimento:

$$f'' = - \frac{e'}{|N|} - c' \quad (4.51)$$

Equação da energia:

$$e'' = - \frac{e'}{f'} \left[f'' + \frac{1}{D_{\xi}} \frac{f}{\xi} \right] \quad (4.52)$$

Equação do constituinte químico:

$$c'' = - \frac{c'}{f'} \left[f'' + \frac{f}{\xi} \right] \quad (4.53)$$

4.2) DISCRETIZAÇÃO E ALGORITMO DE SOLUÇÃO

Neste ítem, desenvolve-se um método para solucionar o problema representado pelos sistemas de equações diferenciais ordinárias já descritos. Observando-se que as equações que formam o sistema são acopladas, o melhor algoritmo para a solução do problema é o de Runge-Kutta de 4^ª ordem que nos fornece uma boa precisão para os resultados obtidos.

O algoritmo de Runge-Kutta de 4^ª ordem consiste na integração numérica de uma equação diferencial ordinária com uma condição inicial. Segundo Kopchenova e Maron [20]:

$$y' = f(x, y) \quad (4.54)$$

com $y(x_0) = y_0$

Obtem-se o valor aproximado de y_{i+1} no ponto $x_{i+1} = x_i + h$ através das fórmulas:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (4.55)$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) \quad (4.56)$$

onde:

$$K_2^{(i)} = n f(x_i, y_i) \quad (4.57)$$

$$K_2^{(i)} = n f \left[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2} \right] \quad (4.58)$$

$$K_3^{(i)} = n f \left[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2} \right] \quad (4.59)$$

$$K_4^{(i)} = n f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}) \quad (4.60)$$

Como indicado pelos sistemas no início deste capítulo, neste trabalho há ocorrência de equações diferenciais de 2ª ordem. Para contornar esta situação, basta apenas fazer a seguinte transformação:

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'' \quad (4.61)$$

que reproduz seguinte sistema:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{dy}{dx} \\ y_2 &= \frac{dy_1}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Reportando-se ao problema proposto, temos as seguintes condições de contorno:

$$f = 0 \quad e = 1 \quad c = 1 \quad \text{em } \eta = 0 \quad (4.63)$$

$$f' \rightarrow 0 \quad e \rightarrow 0 \quad c \rightarrow 0 \quad \text{em } \eta \rightarrow \infty \quad (4.64)$$

Como verificado através do capítulo III, para cada Caso analisado foram obtidos dois sistemas de equações formados pela equação da quantidade de movimento, pela equação da energia e pela equação do constituinte químico. O primeiro sistema presente quando o movimento é dirigido pela transferência de calor ($|N| \ll 1$) e o segundo com o

movimento dirigido pela transferência de massa ($|N| \gg 1$). É importante observar que, embora esta separação apresente um significado físico, matematicamente apenas foram feitas duas transformações diferentes das variáveis dimensionais x e y para a variável adimensional η . Portanto, escolhendo o sistema de equações quando $|N| \ll 1$ para encaminharmos a solução, obtém-se também as soluções de similaridade quando $|N| \gg 1$.

Os sistemas a serem resolvidos apresentam 3 equações de 2ª ordem e aplicando-se (4.61) e (4.62) tem-se 6 equações com as seguintes incógnitas:

$$f(\eta) \quad f'(\eta) \quad \theta(\eta) \quad \theta'(\eta) \quad c(\eta) \quad c'(\eta) \quad (4.65)$$

São necessários valores iniciais para inicializar o algoritmo de Runge-Kutta. Das condições de contorno (4.63) tem-se $f(0)$, $\theta(0)$ e $c(0)$. Das outras três condições pode-se conhecer $f'(0)$ pela integração da equação da quantidade de movimento de 0 a ∞ :

$$\int_0^{\infty} f'' d\eta = - \int_0^{\infty} \theta' d\eta - N \int_0^{\infty} c' d\eta$$

$$f'(\infty) - f'(0) = - \theta(\infty) + \theta(0) - Nc(\infty) + Nc(0)$$

e utilizando as condições de contorno (4.63) e (4.64), temos:

$$f'(0) = - \theta(0) - Nc(0) \quad (4.66)$$

onde $\theta(0) = c(0) = 1$.

Sobram então duas condições iniciais desconhecidas: $\theta'(0)$ e $c'(0)$. A opção é então proceder ao "shooting method" de maneira que atribuindo valores para $\theta'(0)$ e $c'(0)$, tem-se todas as condições iniciais para dar partida ao algoritmo de Runge-Kutta que procederá a integração numérica até que as condições de contorno em $\eta \rightarrow \infty$ ($\theta(\infty)$ e $c(\infty)$) sejam satisfeitas. Isto, matematicamente, significa que:

$$\theta(\infty) = f(\theta'(0), c'(0)) \quad (4.67)$$

$$c(\omega) = f(e'(\eta), c'(\eta)) \quad (4.68)$$

O método mais conhecido para correção dos valores arbitrários de $e'(\eta)$ e $c'(\eta)$ é o de Newton-Raphson (NR). Fazendo a expansão em série de Taylor de 1^a-ordem de $z(\omega)$ a fim de obter uma equação de correção para os valores iniciais de $z'(\eta)$:

$$z(\omega) = z_c(\omega) + \frac{\partial z(\omega)}{\partial z'(\eta)} dz'(\eta) \quad (4.69)$$

onde z é uma variável genérica representando e ou c e

$z(\omega)$ = valor conhecido de z em $\eta \rightarrow \omega$ (no caso $z(\omega) \rightarrow 0$)

$z_c(\omega)$ = valor de z em $\eta \rightarrow \omega$ quando arbitramos o valor de $z'(\eta)$

$\frac{\partial z(\omega)}{\partial z'(\eta)}$ = o incremento em z em $\eta \rightarrow \omega$ quando assumido o valor $z'(\eta)$

$dz'(\eta)$ = o incremento necessário para o novo valor de $z'(\eta)$

O cálculo de $\partial z(\omega)/\partial z'(\eta)$ é feito da seguinte maneira:

$$\frac{\partial z(\omega)}{\partial z'(\eta)} = \frac{z_2(\omega) - z_1(\omega)}{z'_2(\eta) - z'_1(\eta)} \quad (4.70)$$

onde:

$z'_1(\eta) = k_1$, um valor assumido

$z'_2(\eta) = k_1 + \tau$, onde τ tem valor pequeno, na prática entre 10^{-5} e 10^{-2} .

$z_1(\omega)$ = valor de z obtido pela integração numérica da equação usando $z'_1(\eta)$.

$z_2(\omega)$ = valor de z obtido pela integração numérica da equação usando $z'_2(\eta)$.

É importante observar que, em termos computacionais, $\eta \rightarrow \omega$ é um valor finito, suficientemente grande para que mesmo que η seja aumentado não haja alteração significativa nos resultados. Mas, é fundamental que o método de correção dos valores de $e'(\eta)$ e $c'(\eta)$ dê aos valores de $e(\omega)$

e $c(\omega)$ (que tendem para um valor constante igual a zero) uma convergência assintótica após o valor $\eta \rightarrow \omega$ computacional.

Rogers e Adams [21], em seu livro sobre métodos numéricos, mostram que o método (NR) apresenta dois problemas: (1) o método pode apresentar mais de uma resposta e (2) somente uma destas respostas garante a convergência assintótica. Os autores [21] apresentam o método de Nachtsheim-Swigert (NS) para contornar estes problemas. Para satisfazer as condições de contorno assintóticas em $\eta \rightarrow \omega$, ou seja $\theta(\omega) \rightarrow 0$ e $c(\omega) \rightarrow 0$, é necessário também que $\theta'(\omega) \rightarrow 0$ e $c'(\omega) \rightarrow 0$. Chamando $\theta'(0)$ de m e $c'(0)$ de n , temos:

$$\theta(\omega) = \theta[m,n] = t_1 \quad (4.71)$$

$$c(\omega) = c[m,n] = t_2 \quad (4.72)$$

$$\theta'(\omega) = \theta'[m,n] = t_3 \quad (4.73)$$

$$c'(\omega) = c'[m,n] = t_4 \quad (4.74)$$

onde t_1, t_2, t_3, t_4 são números pequenos.

Fazendo a expansão em série de Taylor de 1^a ordem das expressões (4.71) a (4.74), vem:

$$\theta(\omega) = \theta_c(\omega) + \theta_m \Delta m + \theta_n \Delta n \quad (4.75)$$

$$c(\omega) = c_c(\omega) + c_m \Delta m + c_n \Delta n \quad (4.76)$$

$$\theta'(\omega) = \theta'_c(\omega) + \theta'_m \Delta m + \theta'_n \Delta n \quad (4.77)$$

$$c'(\omega) = c'_c(\omega) + c'_m \Delta m + c'_n \Delta n \quad (4.78)$$

A solução destas equações em termos de mínimos quadrados exige a determinação do valor mínimo de $E = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2$ com respeito a m e n . Diferenciando E em relação a m , resulta:

$$(\theta_m^2 + c_m^2 + \theta'_m{}^2 + c'_m{}^2) \Delta x + (\theta_m \theta_n + c_m c_n + \theta'_m \theta'_n + c'_m c'_n)$$

$$= - (\theta_{c m} \theta_m + c_{c m} c_m + \theta'_{c m} \theta'_m + c'_{c m} c'_m) \quad (4.79)$$

e diferenciando em relação a n, vem:

$$\begin{aligned} (\theta_{m n} \theta_n + c_{m n} c_n + \theta'_{m n} \theta'_n + c'_{m n} c'_n) \Delta x + (\theta_n^2 + c_n^2 + \theta_n'^2 + c_n'^2) \Delta y \\ = - (\theta_{c n} \theta_n + c_{c n} c_n + \theta'_{c n} \theta'_n + c'_{c n} c'_n) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Para simplificar a notação, as equações (4.79) e (4.80) passam a ser:

$$Q_{mm} \Delta m + Q_{mn} \Delta n = +Q_{cm} \quad (4.81)$$

$$Q_{mn} \Delta m + Q_{nn} \Delta n = +Q_{cn} \quad (4.82)$$

As soluções para Δm e Δn , as correções de $\theta'(0)$ e $c'(0)$ que promovem a convergência assintótica para as condições de contorno (4.77) e (4.78), são dadas por:

$$\Delta m = \frac{Q_{cm} Q_{nn} - Q_{cn} Q_{mn}}{Q_{mm} Q_{nn} - Q_{mn}^2} \quad (4.83)$$

$$\Delta x = \frac{Q_{cy} Q_{xx} - Q_{cx} Q_{xy}}{Q_{mm} Q_{nn} - Q_{mn}^2} \quad (4.84)$$

Para obter as derivadas em relação a m e n são necessárias três integrações com valores apropriados para $\theta'(0)$ e $c'(0)$. Estes valores são:

$$\theta'(0) = k_1 \quad c'(0) = 1_1 \quad (4.85)$$

$$\theta'(0) = k_1 + \tau \quad c'(0) = 1_1 \quad (4.86)$$

$$\theta'(0) = k_1 \quad c'(0) = 1_1 + \tau \quad (4.87)$$

onde k_1 e l_1 são valores assumidos constantes e λ está entre 10^{-5} e 10^{-2} .

Embora o método (NS) garanta solução única, é possível que o sistema formado pelas equações (4.83) e (4.84) apresente características não-lineares e assim, ocorra divergência no algoritmo de Runge-Kutta, quando da correção dos valores arbitrários $e'(0)$ e $c'(0)$. Matricialmente, o sistema tem a seguinte forma:

$$Q \cdot D = Q_c \quad (4.88)$$

Para atenuar esta dificuldade, Marquardt [22] mostrou que resolver o sistema (4.88) é equivalente a resolver:

$$(Q + \lambda I) \cdot D = Q_c \quad (4.89)$$

onde I é a matriz identidade e λ uma constante. Portanto, o sistema (4.89) passa a ser:

$$(Q_{mm} + \lambda) \Delta m + Q_{mn} \Delta n = +Q_{cm} \quad (4.90)$$

$$Q_{mn} \Delta m + (Q_{nn} + \lambda) \Delta n = +Q_{cn} \quad (4.91)$$

E os novos valores arbitrários $e'(0)$ e $c'(0)$ tem a seguinte forma matricial:

$$X = X + D \quad (4.92)$$

O procedimento de solução para o problema será então resumidamente:

- (a) Iniciar, por exemplo, $\lambda = 0.01$
- (b) Substituir λ por 0.1λ se $E(\text{iteração } p + 1) < E(\text{iteração } p)$.
- (c) Caso contrário, determinar um fator de relaxação dado por $X = X + \beta D$ tal que $E(\text{iteração } p + 1) < E(\text{iteração } p)$ e

substituir λ por 10λ .

onde E é o valor que deve ser minimizado pelo método (NS) e que equivale a:

$$E = \theta_c^2 + c_c^2 + \theta'_c{}^2 + c'_c{}^2 \quad \text{em } \eta \rightarrow \infty$$

A utilização do método de Marquardt é necessária quando há mal condicionamento da matriz Q, ou seja, a diagonal principal da matriz torna-se muito pequena fornecendo valores grandes de Δm e Δn e podendo provocar a divergência do algoritmo. O método funciona como um relaxante durante o caminho de obtenção das respostas de $\theta'(0)$ e $c'(0)$.

O apêndice A contém o programa computacional que incorpora os aspectos apresentados para a solução dos problemas de similaridade. Tendo em mãos o algoritmo apresentado para a solução dos sistemas de equações diferenciais, podem-se obter perfis similares de velocidade, temperatura e concentração para todos os casos analisados, o que é disposto no próximo Capítulo.

CAPÍTULO V

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tendo-se desenvolvido o método de solução, obtem-se as soluções de similaridade para velocidade, temperatura e concentração em todos os casos analisados no Capítulo III. A análise ocorrerá caso a caso e serão feitas comparações entre os casos de maneira a se defrontar os perfis de velocidade, temperatura e concentração, destacando-se influência da dispersão sobre os mesmos perfis.

$$5.1) \quad \boxed{1^{\circ} \text{ CASO: } \alpha \gg \zeta v \text{ e } D \gg \gamma v}$$

Para iniciar a análise, apresentam-se agora as soluções de similaridade para números de Nusselt e Sherwood locais. Como se sabe, o número de Nusselt local é dado por:

$$Nu_y = \frac{hy}{k} \quad (5.1)$$

Sabemos que na superfície impermeável vale o balanço entre o calor de convecção e o calor de condução

$$q_{conv} = q_{cond} \quad \text{em } x = 0$$

e ainda:

$$q_{conv} = hA\Delta T \quad \text{e} \quad q_{cond} = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (5.2)$$

Assim temos para h:

$$h = \frac{q_{cond}}{A\Delta T} \Rightarrow h = - \frac{k}{\Delta T} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (5.3)$$

Introduzindo as transformações de similaridade na derivada da expressão (5.3):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (5.4)$$

Portanto temos para (5.4):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \theta'(0) \Delta T \frac{1}{y Ra_y^{-1/2}} \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.3), vem:

$$h = - \frac{k}{\Delta T} \cdot \frac{\theta'(0) \Delta T}{y Ra_y^{-1/2}} \Rightarrow h = - \frac{k \theta'(0)}{y Ra_y^{-1/2}} \quad (5.6)$$

E, substituindo (5.6) em (5.1), temos:

$$Nu = - \theta'(0) Ra_y^{1/2} \quad (5.7)$$

O número de Sherwood local é dado por:

$$Sh_y = \frac{h_m y}{D} \quad (5.8)$$

onde h_m é o coeficiente de transferência de massa, que é dado por:

$$h_m = \frac{j_o}{\Delta C} \quad (5.9)$$

e j_o representa o fluxo de massa da parede, que é dado pela Lei de Fick:

$$j_o = - D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (5.10)$$

Analogamente ao que ocorre ao número de Nusselt local, temos:

$$Sh_y = - c'(0) Ra_y^{1/2} \quad (5.11)$$

Foram considerados valores de taxa de empuxo N na faixa de - 4 e 4, sendo que para cada N varia-se o número de Lewis de 1 a 100, valores esses comumente encontrados em convecção natural em meios porosos. As integrações feitas pelo método de Runge-Kutta tiveram como incremento $\Delta\eta = 0,0025$ e $\eta_{\max} = 15$ (valor considerado infinito). O critério para a convergência da solução adotado foi o de que as condições de contorno assintóticas $f'(\infty)$, $\theta(\infty)$, $c(\infty)$ apresentassem valores menores que 2×10^{-4} . Não houve necessidade de usar o método de Marquardt.

Tabela 10 - Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.

N	Le	$Nu_y Ra_y^{-1/2}$	$Sh_y Ra_y^{-1/2}$
0	1	0.444	0.444
	2	0.444	0.683
	4	0.444	1.019
	6	0.444	1.275
	8	0.444	1.491
	10	0.444	1.680
	100	0.444	5.544
0.1	1	0.465	0.465
	2	0.486	0.486
	5	0.543	0.543
	8	0.595	0.595
1	1	0.628	0.628
	2	0.593	0.930
	4	0.559	1.358
	6	0.541	1.685
	8	0.529	1.960
	10	0.521	2.202
	100	0.470	7.139
2	1	0.769	0.769
	2	0.710	1.122
	4	0.650	1.624
	6	0.618	2.009
	8	0.597	2.332
	10	0.582	2.617
	100	0.490	8.424

Tabela 10 - continuação

N	Le	$Nu_y Ra_y^{-1/2}$	$Sh_y Ra_y^{-1/2}$
3	1	0.888	0.888
	2	0.810	1.286
	4	0.728	1.852
	6	0.693	2.286
	8	0.655	2.652
	10	0.634	2.973
	100	0.506	9.532
4	1	0.992	0.992
	2	0.899	1.431
	4	0.798	2.055
	6	0.742	2.533
	8	0.707	2.936
	10	0.681	3.290
	100	0.521	10.521
-1.1	1	0.144	0.144
-1.2	1	0.199	0.199
-1.5	1	0.314	0.314
-1.9	1	0.421	0.421
-2.0	1	0.444	0.444
	2	0.488	0.832
-3.0	1	0.628	0.628
	2	0.488	0.832
-4.0	1	0.769	0.769
	2	0.627	1.046

Perfis de velocidade:

Foram confeccionados gráficos para $N = 0, 1$ e 4 sendo que para cada N o número de Lewis teve valores assumidos de $1, 10$ e 100 . Através da Figura 5, observamos que o perfil de velocidade é o mesmo qualquer que seja o valor de Lewis, pois a variação de f independe da variação de c ($N = 0$ na equação da quantidade de movimento). Embora o número de Lewis afete a variação de c na equação do constituinte químico quando

$$|N| \ll 1.$$

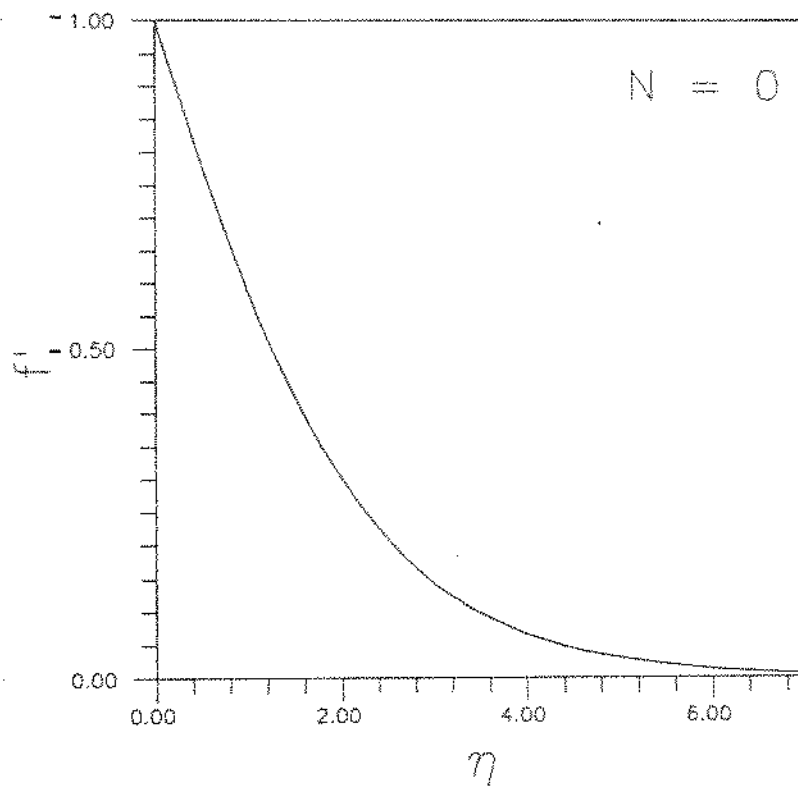


Figura 5 - Perfil de velocidade quando $N = 0$.

Nas Figuras 6 e 7 nota-se que mesmo variando-se o número de Lewis, a espessura da camada limite hidrodinâmica aumenta levemente no sentido crescente do número de Lewis. Observa-se também nas figuras 6 e 7 que quando se eleva Lewis a queda de velocidade, desde a parede até um local suficientemente distante dela, torna-se mais abrupta.

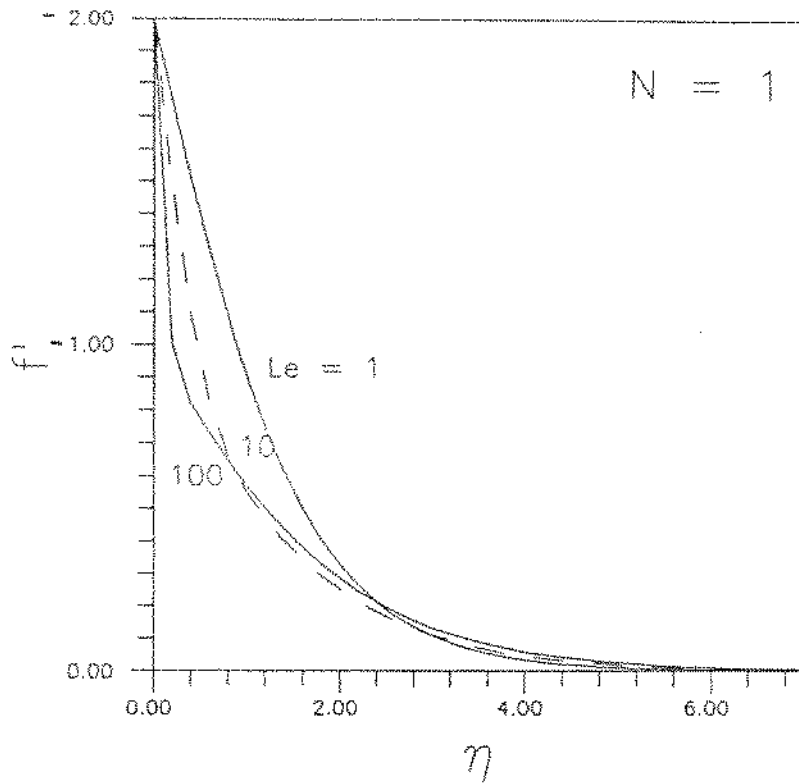


Figura 6 - Influência do número de Lewis nos perfis de velocidade quando $N = 1$.

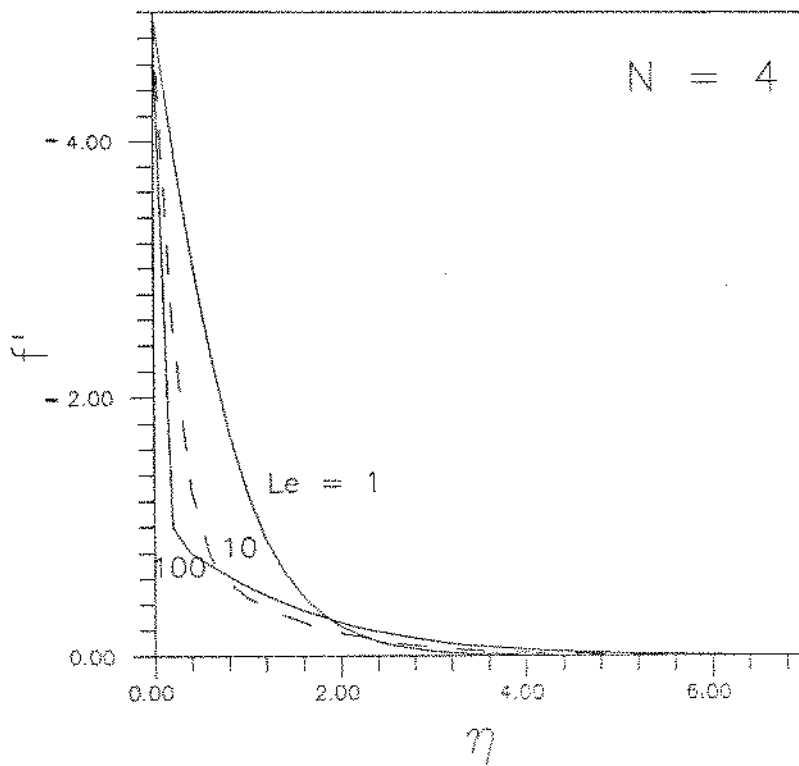


Figura 7 - Influência do número de Lewis nos perfis de velocidade quando $N = 4$.

A influência de N nos perfis de velocidade pode ser observada através da Figura 8 onde o número de Lewis é mantido fixo ($Le = 1$). Vê-se que a espessura da camada limite hidrodinâmica diminui com o aumento de N , o que é coerente com o aumento da força de empuxo que o acréscimo de N representa.

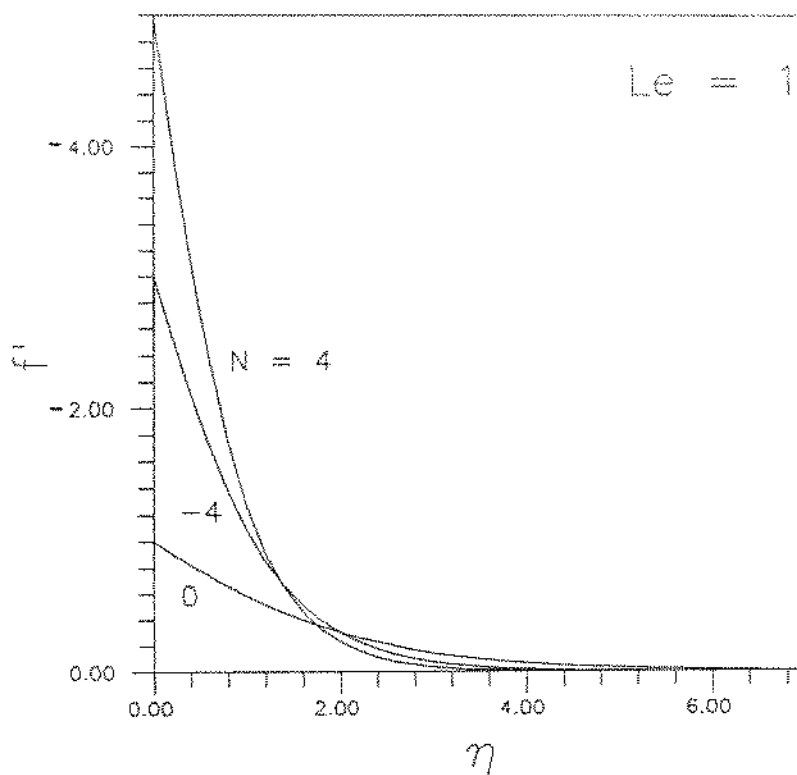


Figura 8 - Influência de N nos perfis de velocidade quando $Le = 1$.

Perfis de temperatura:

Fazendo-se a mesma variação de parâmetros N e Le , observa-se na Figura 9 que o perfil de temperatura independe de Le pelo mesmo motivo apresentado para o perfil de velocidades quando $N = 0$. Isto pode ser visualizado através das equações:

$$f'' = -\theta' - Nc' \quad \xrightarrow{N = 0} \quad f'' = -\theta'$$

$$\theta'' = \frac{1}{N} f\theta'$$

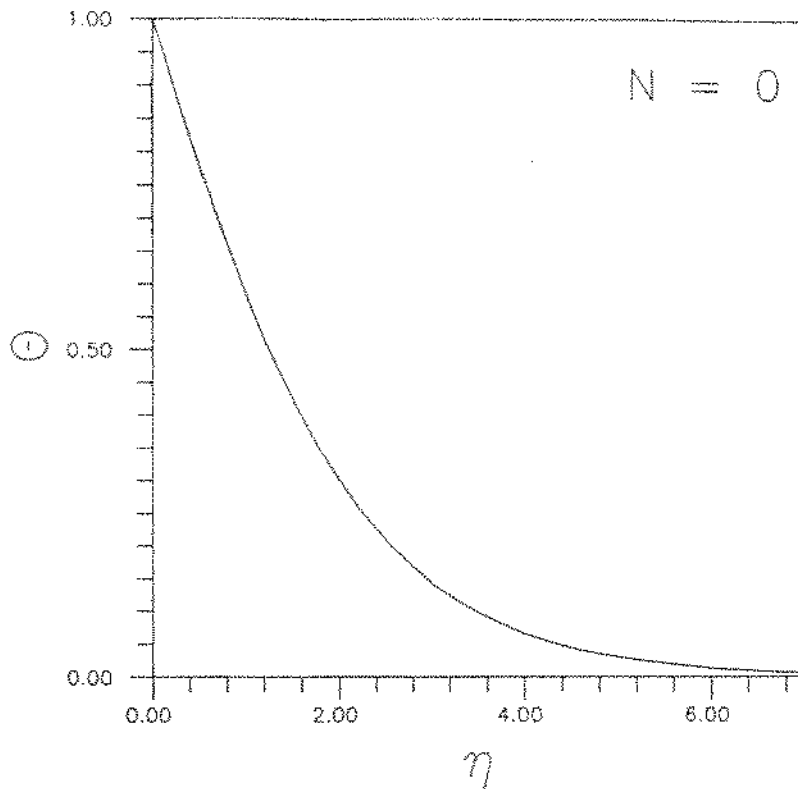


Figura 9 - Perfil de temperatura quando $N = 0$.

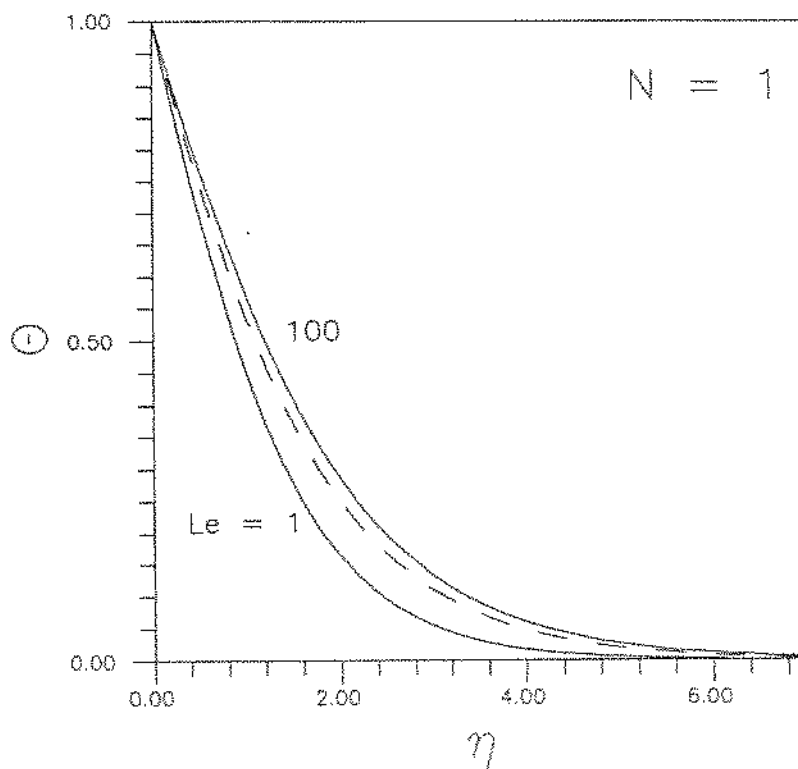


Figura 10- Influência do número de Lewis nos perfis de temperatura quando $N = 1$.

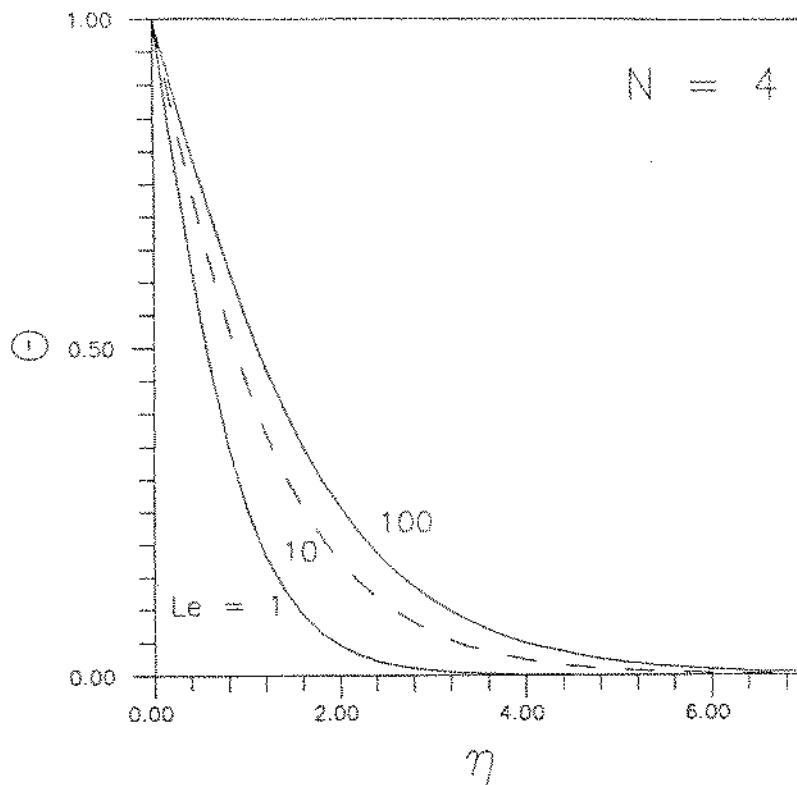


Figura 11 - Influência do número de Lewis nos perfis de temperatura quando $N = 4$.

Da análise de escala desenvolvida no Capítulo III o número de Nusselt é proporcional a δ_T^{-1} . Também da análise de escala quando $|N| \gg 1$ a espessura da camada limite térmica é proporcional a $Le^{1/2}$, ou seja, com o aumento de Lewis teremos um aumento de espessura da camada limite térmica. Observamos na Figura 10 e 11 que quando aumenta-se o número de Lewis, δ_T aumenta indicando que a transferência de calor diminui.

Perfis de concentração:

Quando $Le = 1$, as equações da energia e do constituinte químico tornam-se idênticas e assim os perfis de concentração e temperatura serão iguais para qualquer N . Quando Lewis aumenta, a camada limite da concentração estreita-se pois a razão δ_c/δ_T é proporcional a $Le^{-1/2}$. Aumentar Le significa induzir δ_T maior que δ_c e, por isso, na Figura 12 δ_c diminui e assim a transferência de massa aumenta.

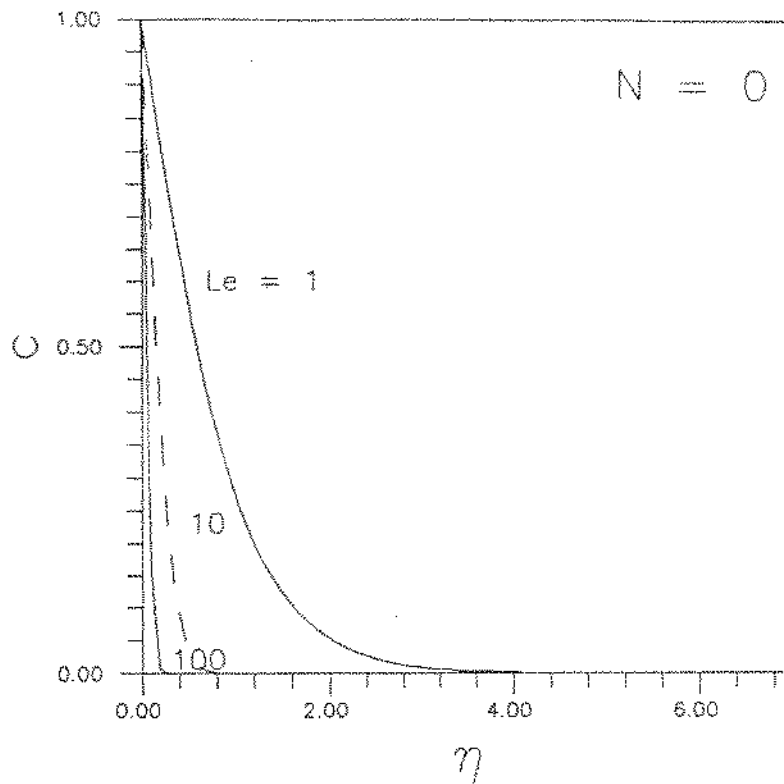


Figura 12 - Influência do número de Lewis no perfis de concentração quando $N = 0$.

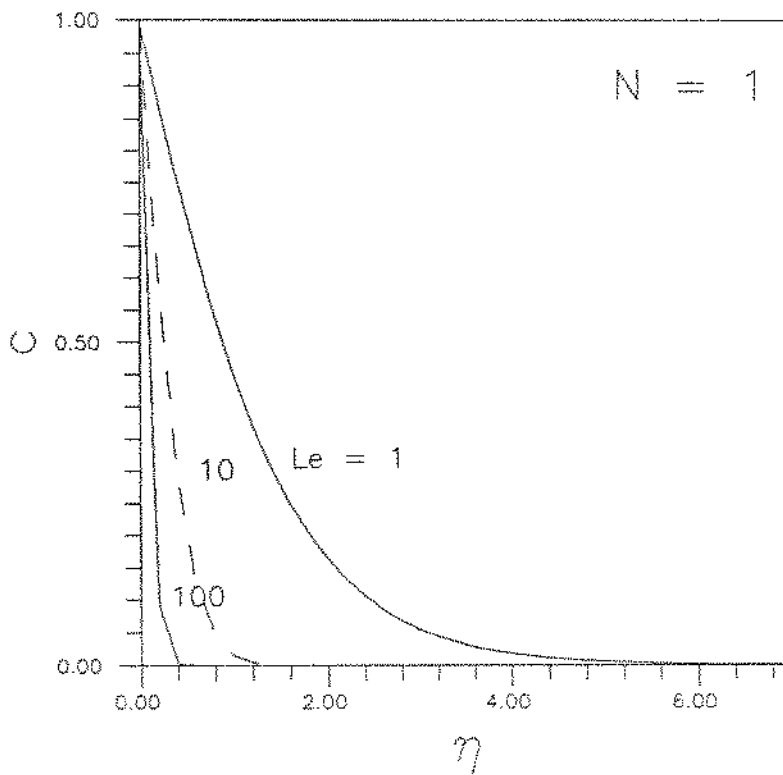


Figura 13 - Influência do número de Lewis nos perfis de concentração quando $N = 1$

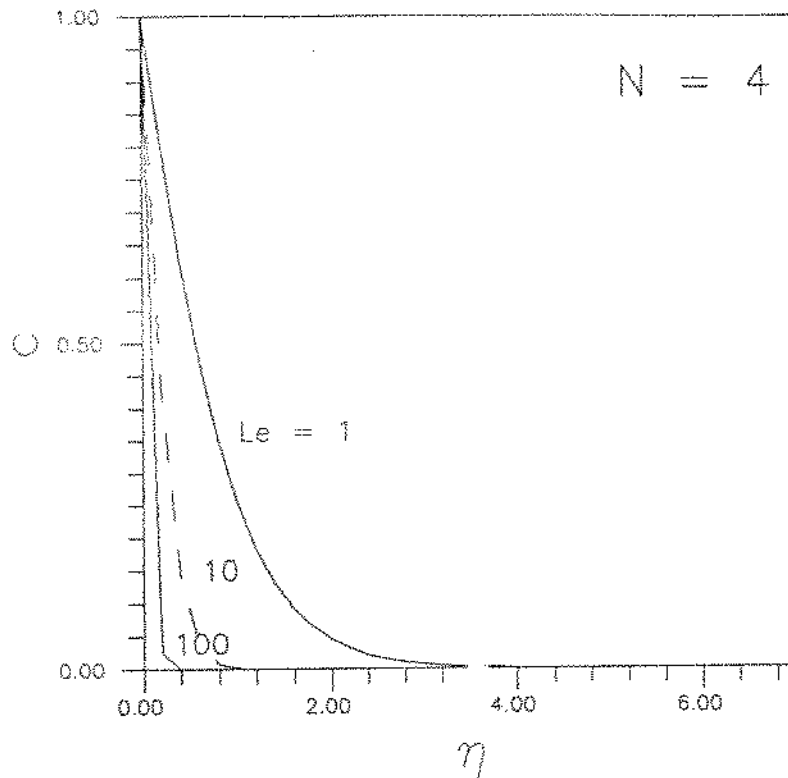


Figura 14 - Influência do número de Lewis nos perfis de concentração quando $N = 4$.

Comparando-se as Figuras 13 e 14, observa-se que com o aumento de N , δ_c diminui e assim a transferência de massa aumenta. Isto pode ser sintetizado pela Figura 15. Nela, a medida que N cresce, ocorre a diminuição de δ_T e δ_c , conseqüentemente haverá maior transferência de calor e massa. O comportamento das curvas confirmam a análise de escala para δ_T e δ_c que variam com $|N|^{-1/2}$.

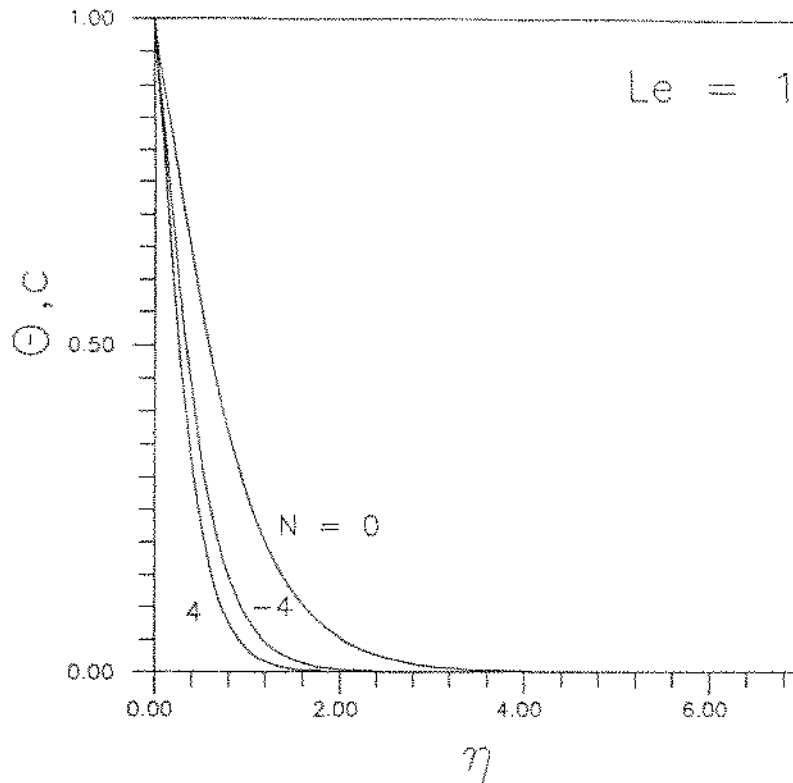


Figura 15 - Influência de N nos perfis de temperatura e concentração quando $Le = 1$

Confirmação da análise de escala:

Apresentamos a seguir um gráfico $e'(0)/c'(0)$ versus Le , onde $e'(0)/c'(0)$ nada mais é que a relação entre o número de Nusselt e o de Sherwood. O objetivo desse gráfico é o de confirmar as escalas reproduzidas no Capítulo III sob a Tabela 3. Por exemplo, da Tabela 3 quando $Le \gg 1$ e $|N| \ll 1$ temos em termos de escala:

$$\frac{Nu}{Sh} \sim \frac{Ra^{1/2}}{(LeRa)^{1/2}} \Rightarrow \frac{Nu}{Sh} \sim Le^{-1/2}$$

E substituindo as expressões do número de Lewis local (5.7) e a expressão do número de Sherwood local, temos:

$$\frac{e'(0)}{c'(0)} \sim Le^{-1/2}$$

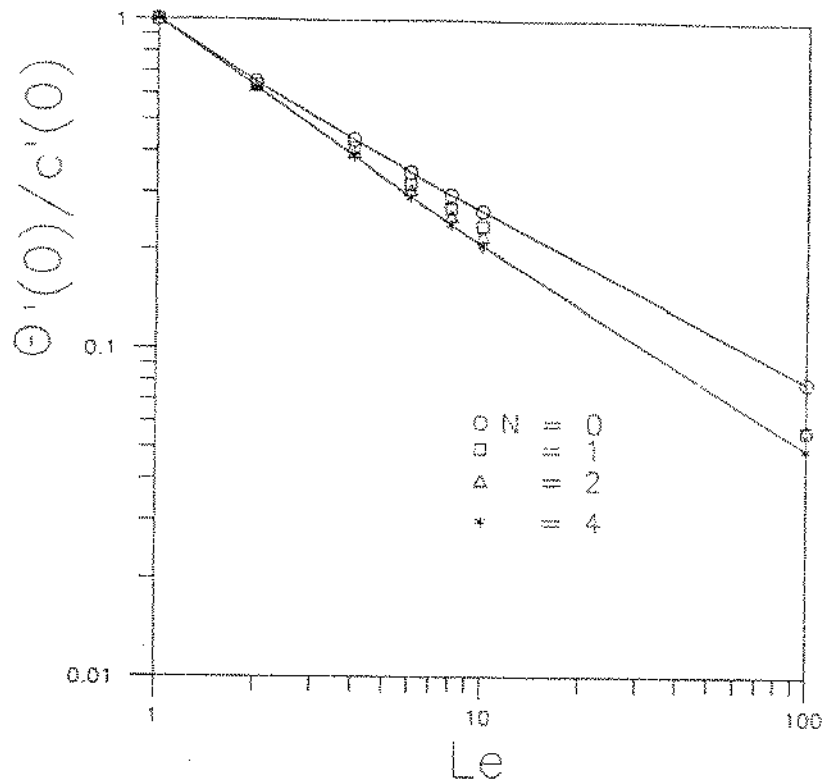


Figura 16 - Efeito do número de Lewis na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa.

Para confirmarmos a análise de escala basta saber qual a inclinação da reta obtida. No caso para $N = 0$, o coeficiente angular apresenta valor próximo de -0.5 , ou seja:

$$\log \left(\frac{Nu}{Sh} \right) \sim -0.5 \log(Le) \Rightarrow \frac{Nu}{Sh} \sim Le^{-1/2}$$

Para os outros valores de N , observa-se que no sentido crescente de N há aumento da inclinação das retas. Isto é consistente com os resultados da análise de escala. A última linha da Tabela 3 do Capítulo III indica que para $|N| \gg 1$ a razão Nu/Sh deve variar com Le^{-1} .

$$5.2) \quad \boxed{2^{\circ} \text{ CASO: } \alpha \gg \xi v \text{ e } D \ll \gamma v}$$

Para este caso, devemos inicialmente verificar a variação do parâmetro Ra_{γ} . Para um comprimento de camada limite unitário, temos:

$$0.003 < \frac{\gamma}{H} < 0.009 \quad \text{e} \quad 0 < Ra < 1000$$

$$0 < Ra_{\gamma} < 9$$

Para este caso foram considerados variações de N de 0 a 4 e de Ra_{γ} de 0 a 9, sendo que para N = 0 chegou-se a $Ra_{\gamma} = 100$. No algoritmo de Runge-Kutta o valor de η_{\max} foi igual a 15 e o incremento $\Delta\eta = 0.00025$. Houve necessidade de se aplicar o método de Marquardt com valor inicial de $\lambda = 1$. As expressões de Nusselt e Sherwood locais são as mesmas que no item 5.1. A seguir apresenta-se a Tabela 11 com as soluções similares para este caso. Como a variável de similaridade neste caso é igual a do 1º Caso, temos:

Tabela 11 - Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.

N	Ra_{γ}	$Nu_{\gamma} Ra_{\gamma}^{-1/2}$	$Sh_{\gamma} Ra_{\gamma}^{-1/2}$
0	0.1	0.444	1.596
	0.5	0.444	0.618
	0.8	0.444	0.456
	1	0.444	0.393
	2	0.444	0.241
	4	0.444	0.142
	6	0.444	0.102
	9	0.444	0.072
	100	0.444	0.0078
0.1	1	0.464	0.385
0.2	1	0.484	0.379
0.5	1	0.544	0.367
0.8	1	0.604	0.360
1	0.1	0.536	1.362
	0.5	0.609	0.545
	0.8	0.632	0.410
	1	0.642	0.356
	2	0.671	0.229
	4	0.691	0.146
	6	0.698	0.112
9	0.704	0.088	

Tabela 11 - continuação.

N	Ra_γ	$Nu_\gamma Ra_\gamma^{-1/2}$	$Sh_\gamma Ra_\gamma^{-1/2}$
2	0.1	0.632	1.289
	0.5	0.770	0.525
	0.8	0.807	0.399
	1	0.823	0.349
	2	0.850	0.231
	4	0.882	0.154
	6	0.889	0.121
	9	0.895	0.096
	3	0.1	0.730
0.5		0.920	0.518
0.8		0.964	0.396
1		0.981	0.349
2		1.019	0.235
4		1.040	0.160
6		1.048	0.128
9		1.054	0.102
4		0.1	0.828
	0.5	1.059	0.514
	0.8	1.104	0.396
	1	1.121	0.350
	2	1.157	0.239
	4	1.178	0.164
	6	1.186	0.132
	9	1.192	0.106

De maneira similar ao item 5.1 vamos dividir o estudo em quatro partes:

Perfis de velocidade:

Para este CASO 2, foram feitos gráficos para $N = 0, 1$ e 4 com $Ra_\gamma = 0.1, 1, 2, 4$ e 9 . Como a equação da energia é análoga ao do 1º CASO e em $N = 0$ não há influência do parâmetro Ra_γ , o perfil de velocidades será o mesmo que o da Figura 5. Na Figura 17 e 18 observa-se que quando Ra_γ é pequeno ($\ll 1$) a influência da dispersão é reduzida e os perfis de velocidade apresentam características semelhantes aos perfis de velocidade do item 5.1. Observa-se que para $Ra_\gamma \gg 1$ o comportamento é de aumento da espessura da camada limite hidrodinâmica a medida que se aumenta Ra_γ .

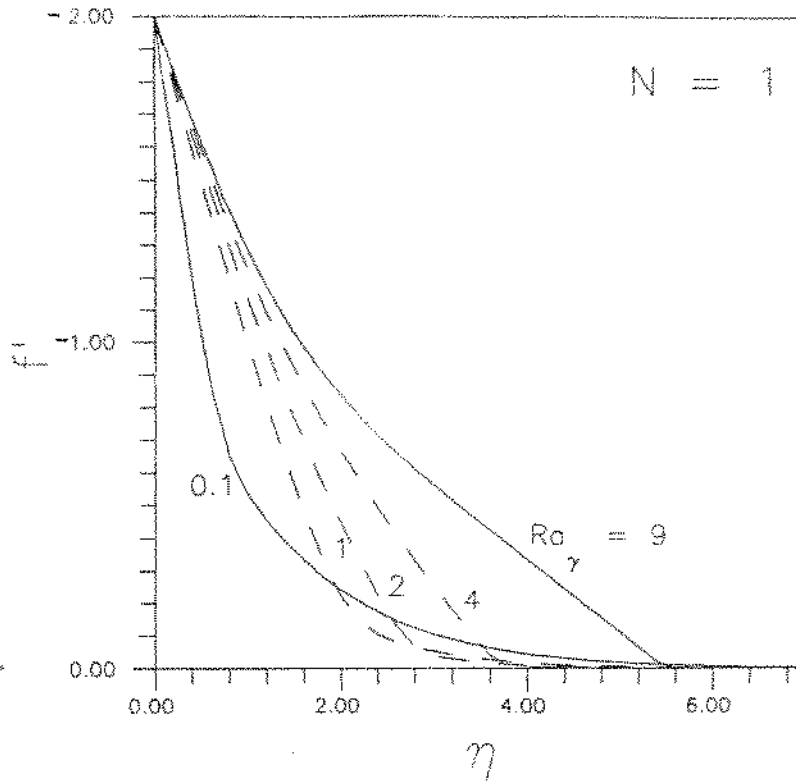


Figura 17 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de velocidade quando $N = 1$.

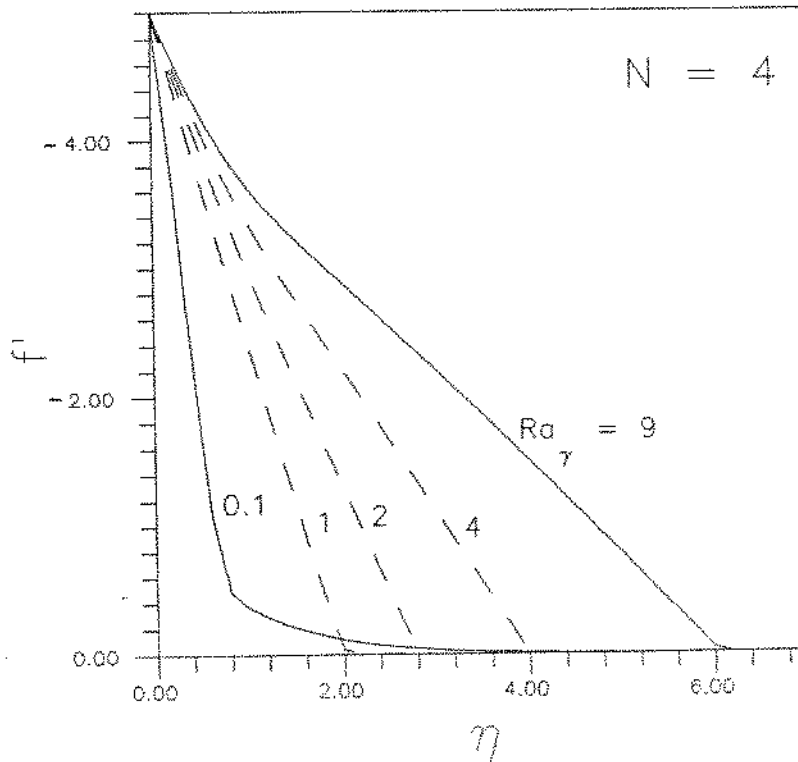


Figura 18 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de velocidade quando $N = 4$.

Perfis de Temperatura:

Do mesmo modo que para os perfis de velocidade, quando $N = 0$ o perfil de temperatura é o mesmo exibido na Figura 9. Na Figura 19 e 20, quando $Ra_\gamma \ll 1$ o comportamento dos perfis de temperatura são semelhantes ao perfis de temperatura do item 5.1. Quando $Ra_\gamma \gg 1$ a medida que se aumenta Ra_γ ocorre diminuição de δ_T e conseqüentemente um aumento na transferência de calor. Estes resultados são coerentes com a literatura que informa o aumento da transferência de calor devido ao efeito de dispersão. Quando se aumenta N observa-se que há aumento de transferência de calor. Isto é coerente com a escala da terceira linha da Tabela 5 do capítulo III onde o número de Nusselt é proporcional a $|N|^{1/2}$ com o aumento de Ra_γ .

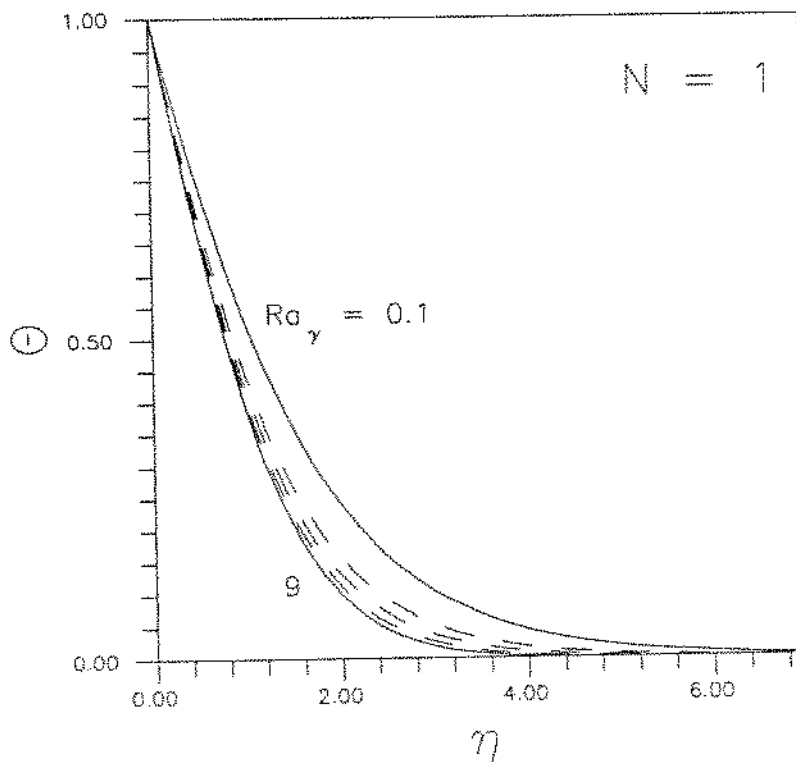


Figura 19 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de temperatura quando $N = 1$.

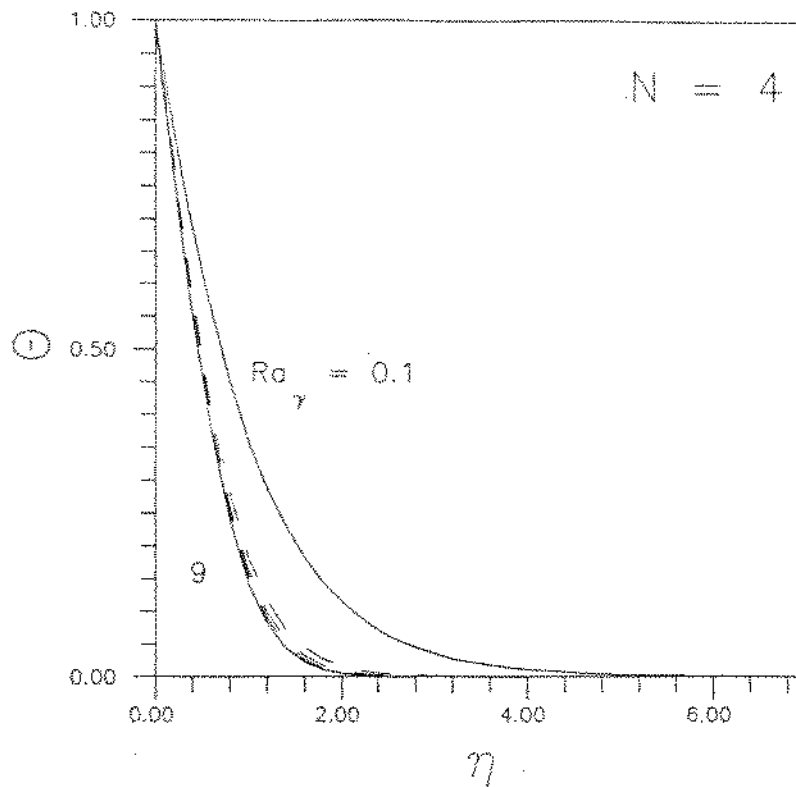


Figura 20 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de temperatura quando $N = 4$.

Perfis de Concentração:

Aqui ocorre uma modificação na característica dos perfis de concentração pois a equação do constituinte químico é diferente daquela exposta no item 5.1. Embora cada gráfico tenha a sua particularidade, notamos que nas Figuras 21, 22 e 23 ocorre o mesmo tipo de fenômeno quanto a variação de Ra_γ : quanto mais aumentamos Ra_γ mais espessa se torna δ_c e menos massa é transferida. Da mesma maneira que para os perfis de velocidade e temperatura, quando $Ra_\gamma \ll 1$ o comportamento dos perfis de concentração é semelhante aos perfis de concentração do item 5.1. Este comportamento confirma a análise de escala onde Sherwood diminui com o aumento de Ra_γ . Para comparar os perfis de concentração entre os itens 5.1 e 5.2 fixa-se o valor de α e de Ra . No caso sem dispersão para aumentar o número de Lewis deve-se diminuir a difusividade mássica D e no caso com dispersão na equação do constituinte químico para se aumentar Ra_γ aumenta-se γ . Portanto as equações do constituinte químico nos dois casos devem apresentar comportamento adverso.

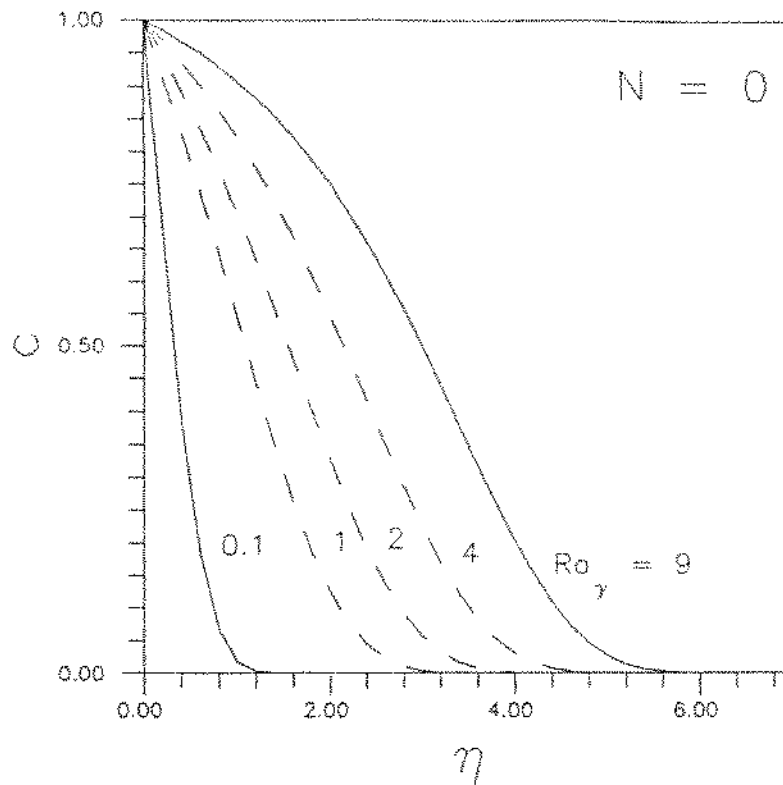


Figura 21 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de concentração quando $N = 0$.

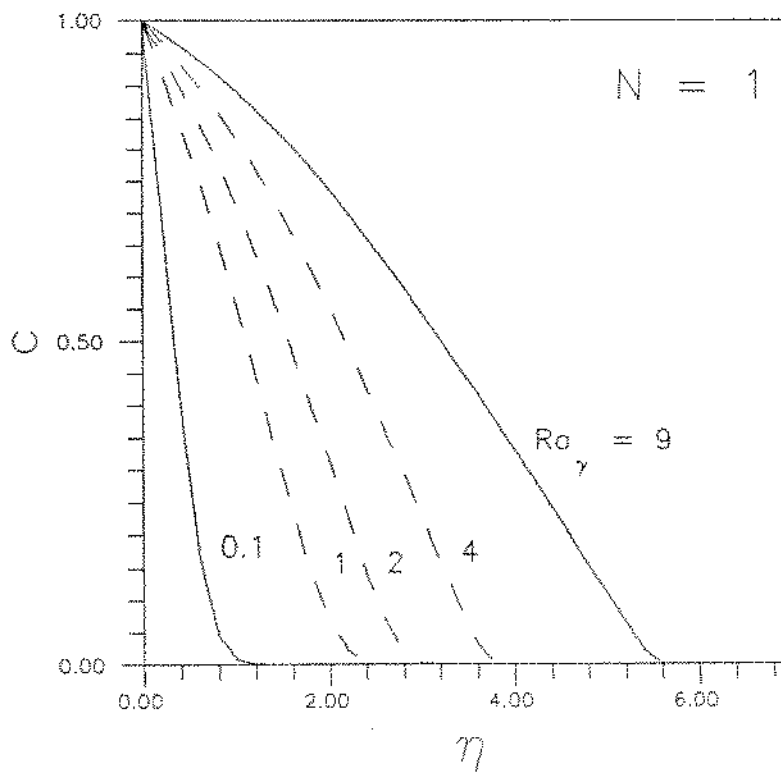


Figura 22 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de concentração quando $N = 1$.

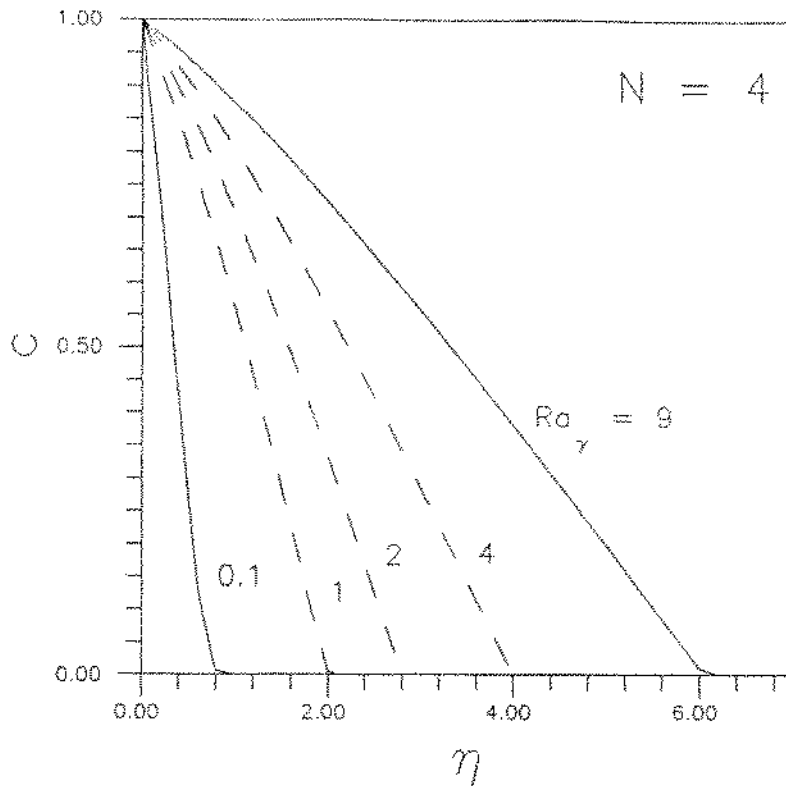


Figura 23 - Influência do número de Rayleigh-Gama nos perfis de concentração quando $N = 4$.

Confirmação da análise de escala:

A Figura 24 mostra a relação Nu/Sh em relação a Ra_γ quando $N = 0$. Da análise de escala para $|N| \ll 1$, a relação Nu/Sh deve ser proporcional a Ra_γ . A inclinação tem valor aproximado de 0.85, o que confirma a análise de escala.

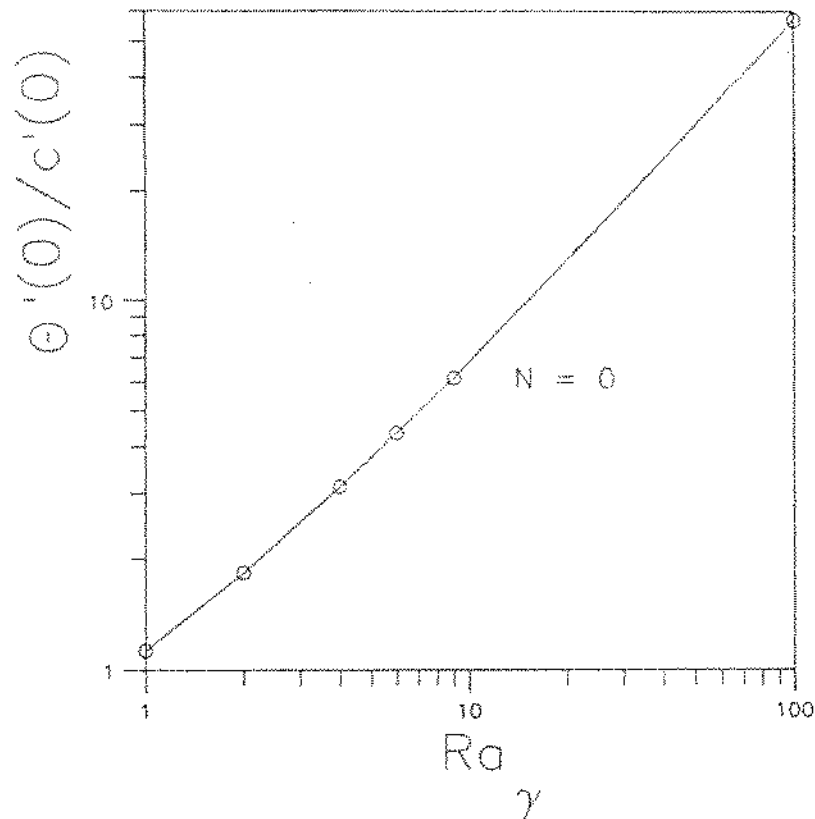


Figura 24 - Efeito de Ra_γ na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa.

5.3) 3^o CASO: $\alpha \ll \xi v e D \gg \gamma v$

Neste caso foram feitos ensaios para faixas de N de -4 a 4 e variações de Ra_ξ de 0 a 150. Para o algoritmo de Runge-Kutta foram utilizados como incremento $\Delta\eta = 0.00025$ e com $\eta_{max} = 15$. Foi necessária a utilização do método de Marquardt para obtenção das soluções similares, com valor inicial de $\lambda = 1$. A seguir apresenta-se a Tabela 12 das soluções similares para números de Nusselt e Sherwood locais.

Tabela 12 - Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais.

N	Ra_{ξ}	$Nu_y (\xi/y)^{1/2}$	$Sh_y (\xi/y)^{1/2}$
0	1	0.376	0.404
	2	0.376	0.661
	4	0.376	1.014
	10	0.376	1.687
	100	0.376	5.558
	150	0.376	6.826
0.1	1	0.378	0.440
0.2	1	0.377	0.470
0.5	1	0.372	0.545
0.8	1	0.363	0.606
1	1	0.356	0.642
	2	0.324	0.948
	4	0.291	1.381
	10	0.256	2.230
	100	0.210	7.168
	150	0.206	8.788
2	1	0.326	0.794
	2	0.284	1.151
	4	0.244	1.655
	10	0.201	2.649
	100	0.149	8.453
	150	0.144	10.359

Tabela 12 - continuação.

N	Ra_{ξ}	$Nu_Y (\xi/y)^{1/2}$	$Sh_Y (\xi/y)^{1/2}$
3	1	0.302	0.917
	2	0.255	1.318
	4	0.213	1.855
	10	0.170	3.005
	100	0.117	9.559
	150	0.112	11.712
4	1	0.282	1.023
	2	0.234	1.465
	4	0.191	2.088
	10	0.148	3.321
	100	0.097	10.546
	150	0.093	12.919
-1.1	1	1.508	0.298
-1.2	1	0.890	0.314
-1.5	1	0.529	0.369
-1.9	1	0.419	0.442
-2.0	1	0.405	0.460
-3.0	1	0.327	0.616
	2	0.254	0.838
-4.0	1	0.291	0.747
	2	0.224	1.030

Seguindo o estudo, divide-se a análise em quatro partes:

Perfis de velocidade:

Na equação da quantidade de movimento quando $N = 0$, as variações de velocidade dependem somente de θ' e por isso o perfil é o mesmo para qualquer valor de Ra_{ξ} . A Figura 25 mostra os perfis para $N = 0$ para este caso e para o caso sem dispersão. Verifica-se que a influência da dispersão na equação da energia é no sentido de tornar os gradientes de velocidades maiores.

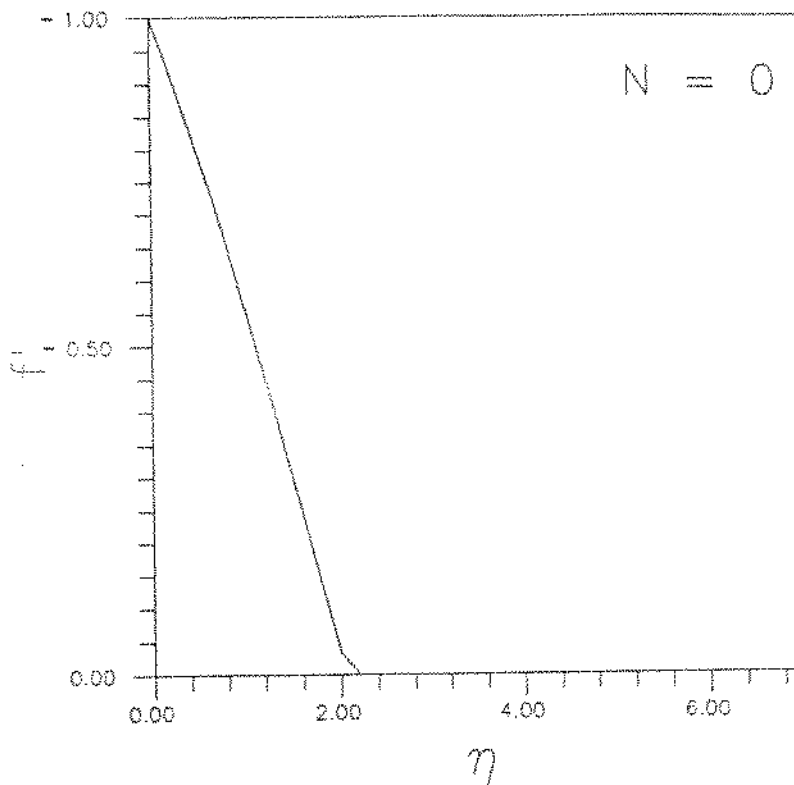


Figura 25 - Perfis de velocidade quando $N = 0$.

Nas Figuras 26 e 27 Ra_{ξ} influencia no aumento do gradiente de velocidade de maneira a reduzir a espessura da camada limite hidrodinâmica. Este comportamento é semelhante ao do número de Lewis pois as equações do constituinte químico nos dois casos são iguais apenas trocando Le por Ra_{ξ} . Comparando as duas Figuras vê-se que com o aumento de N as espessuras da camada limite hidrodinâmica diminuem.

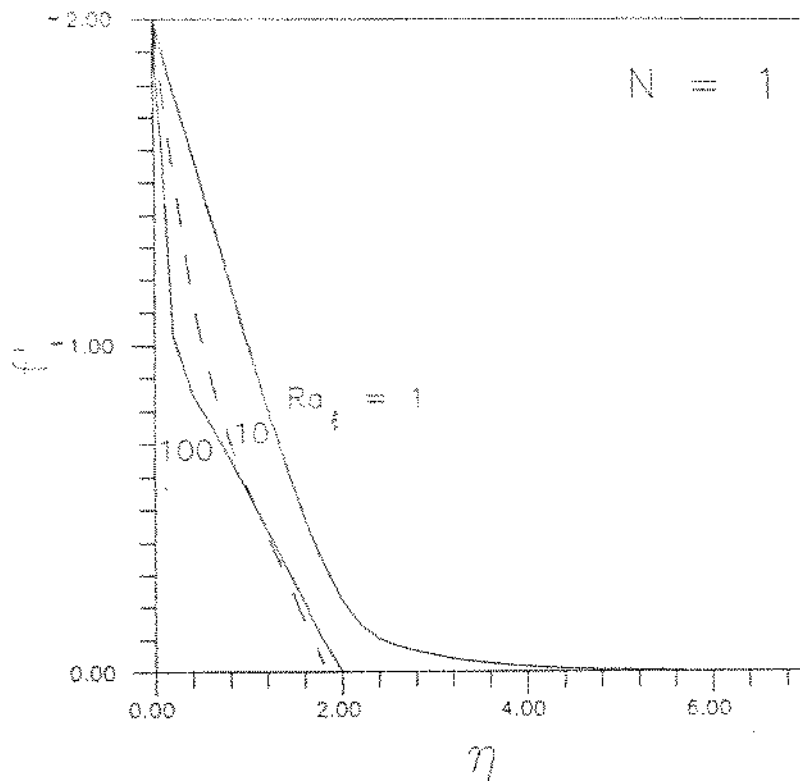


Figura 26 - Influência de Ra_ξ nos perfis de velocidade quando $N = 1$.

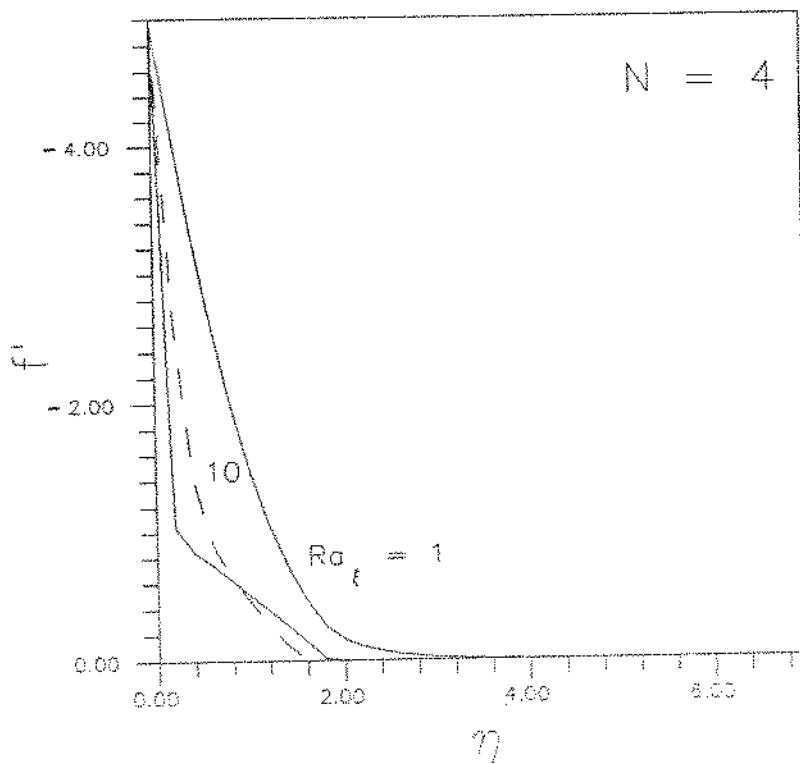


Figura 27 - Influência de Ra_ξ nos perfis de velocidade quando $N = 4$.

Perfis de Temperatura:

Pelo mesmo motivo apresentado para os perfis de velocidade, quando $N = 0$ os perfis de temperatura são os mesmos para qualquer Ra_ξ . A Figura 28 apresenta perfis de temperatura para este caso e para o apresentado no item 5.1. Vê-se que, para escoamento dirigido somente por gradientes de temperatura, o efeito da dispersão hidrodinâmica na equação da energia é de aumentar a transferência de calor com a diminuição de δ_T . Isto confirma o que a literatura informa.

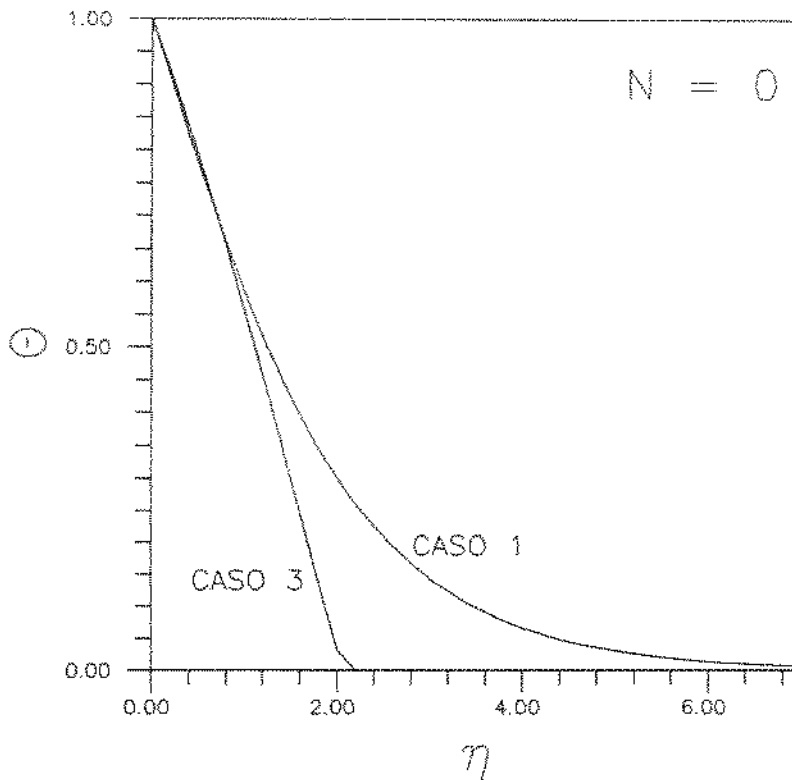


Figura 28 - Perfis de temperatura quando $N = 0$.

A influência de Ra_ξ nos perfis de temperatura nas Figuras 29 e 30 pode ser analisado da seguinte forma: quando $Ra_\xi \ll 1$, os perfis de temperatura tem suas camadas limites térmicas mais espessas a medida que diminuimos o valor de Ra_ξ . Isto sugere que a forma dos perfis tendem a ser semelhantes aos que foram obtidos para o caso sem dispersão no item 5.1. Quando $Ra_\xi \gg 1$ ocorre fenômeno idêntico ao já abordado sobre o número de Lewis: quanto maior Ra_ξ menor a transferência de calor.

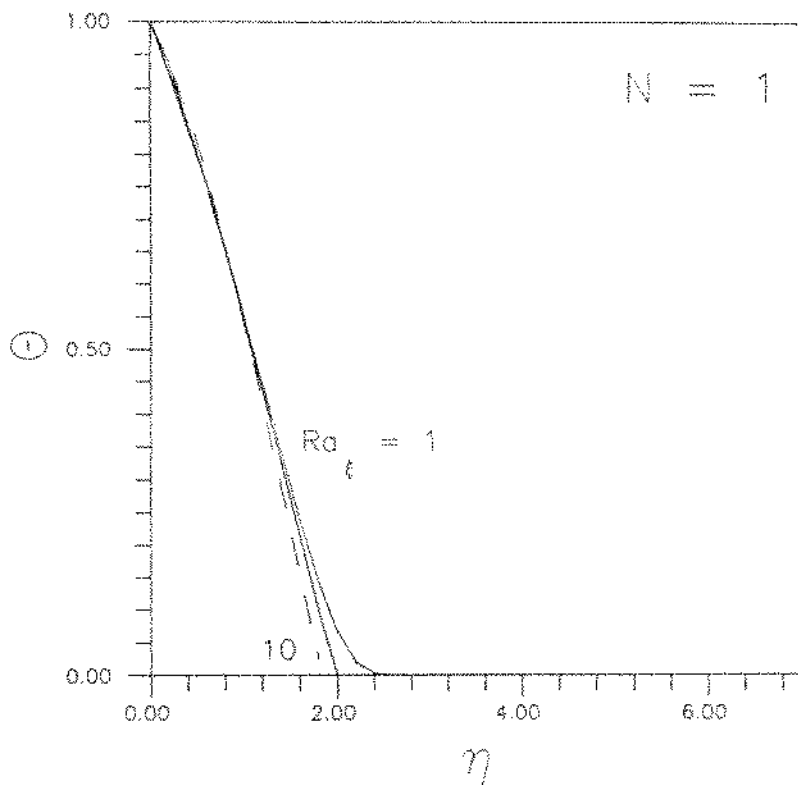


Figura 29 - Influência de Ra_{ξ} nos perfis de temperatura quando $N = 1$.

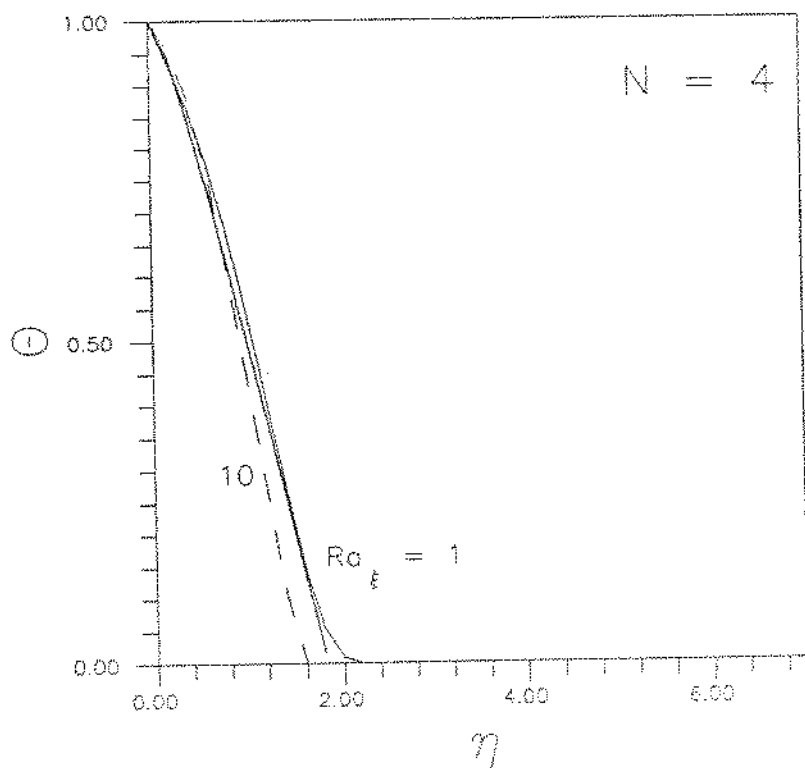


Figura 30 - Influência de Ra_{ξ} nos perfis de temperatura quando $N = 4$.

Perfis de concentração:

A influência de Ra_ξ nos perfis de concentração é de aumentar a transferência de massa a medida que se aumenta o parâmetro. As Figuras 31, 32 e 33 mostram os perfis de concentração para $N = 0, 1$ e 4 . Para $N = 1$ e 4 , os perfis são totalmente idênticos aos perfis de concentração do caso sem dispersão no item 5.1. Quando $N = 0$, apenas o perfil para $Ra_\xi = 1$ apresenta a camada limite mais espessa do que o equivalente para $Le = 1$. Isto comprova o que foi dito no Capítulo II, que parâmetro ξ é menos significativo que a difusividade térmica α . A razão de empuxo N quando aumenta, torna a transferência de massa maior.

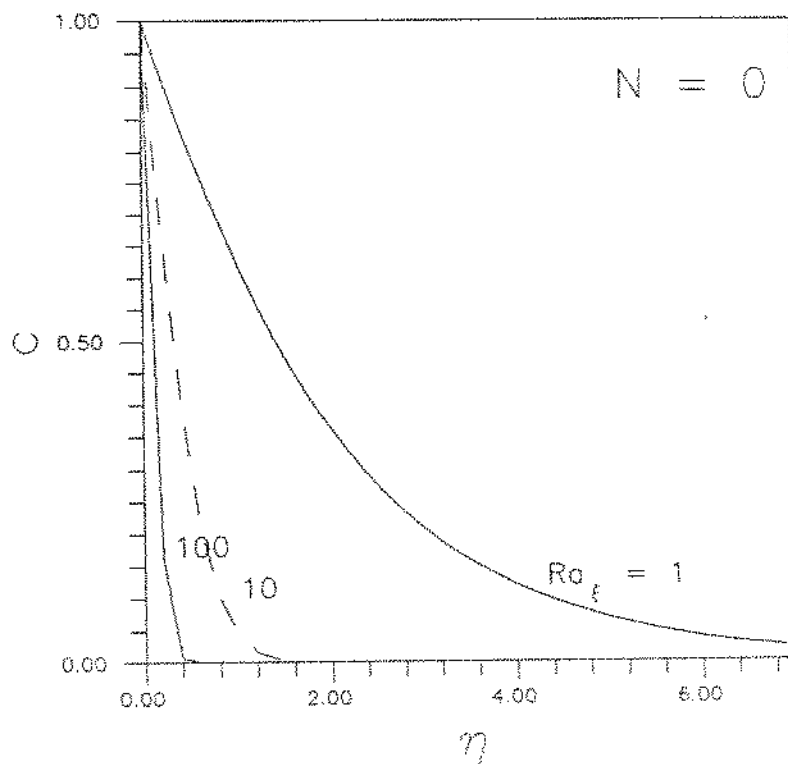


Figura 31 - Influência de Ra_ξ nos perfis de concentração quando $N = 0$.

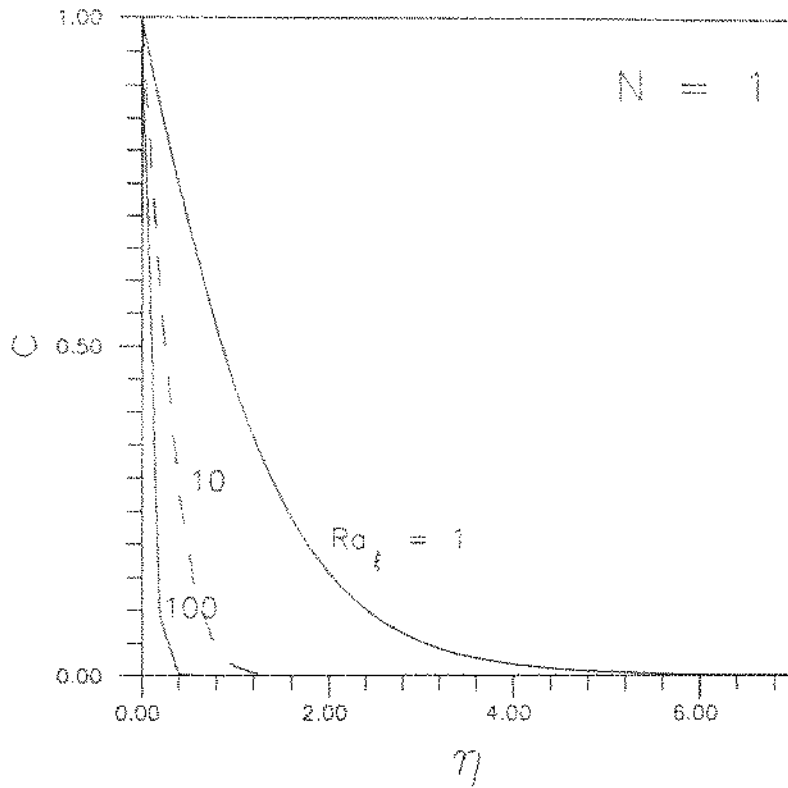


Figura 32 - Influência de Ra_ξ nos perfis de concentração quando $N = 1$.

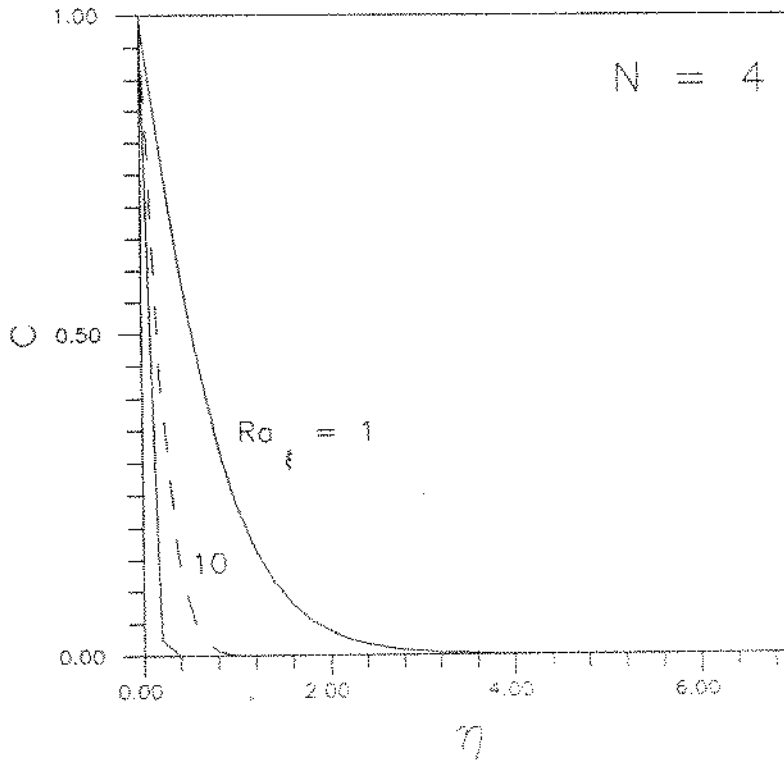


Figura 33 - Influência de Ra_ξ nos perfis de concentração quando $N = 4$.

Confirmação da análise de escala:

A Figura 34 mostra a razão Nu/Sh em função de Ra_γ . Pela análise de escala do Capítulo III, quando $N = 0$ deve ocorrer $Nu/Sh \sim Ra_\gamma^{-1/2}$. Isto é confirmado pela inclinação da reta para $N = 0$, que é aproximadamente igual a -0.5 . Para os outros valores de N ocorre pequena variação da inclinação das retas, confirmando a análise de escala que para $|N| \gg 1$ e $Ra_\gamma \gg 1$ a razão Nu/Sh deve variar com $Ra_\gamma |N| \gg 1$.

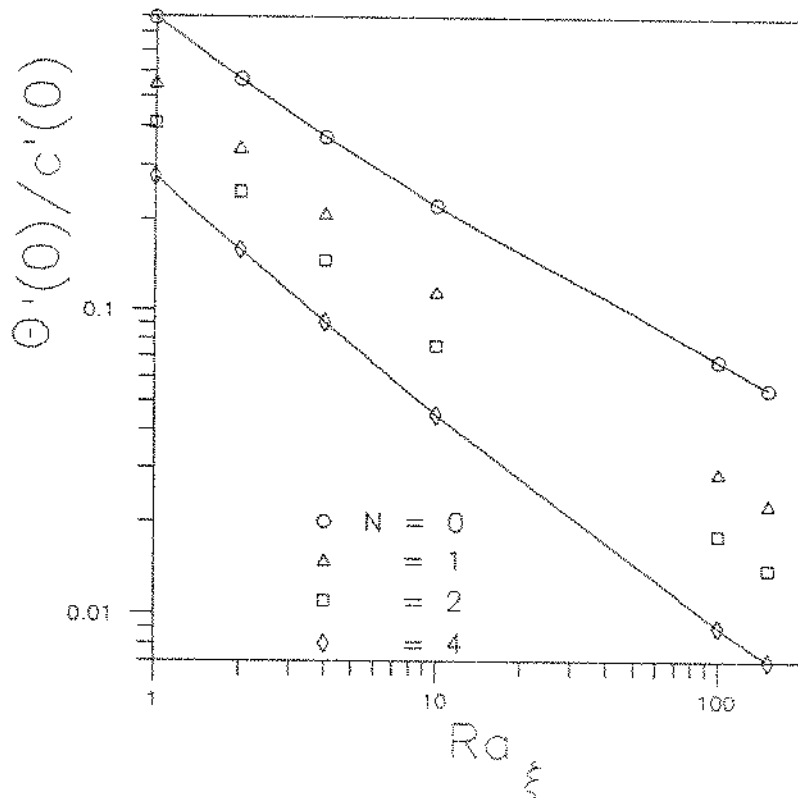


Figura 34 - Efeito de Ra_γ na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa.

5.4) 4° CASO: $\alpha \ll \xi v$ e $D \ll \gamma v$

Os ensaios neste caso foram feitos na faixa de N de 0 a 4 com variações de D_s de 0 a 20. O passo no algoritmo de Runge-Kutta é de $\Delta\eta = 0.0001$ e $\eta_{\max} = 7.5$ encontrado como suficiente. Houve necessidade de se utilizar o método de Marquardt com valor inicial de $\lambda = 20$. A seguir apresenta-se a Tabela 13 com as soluções similares para números de Nusselt e Sherwood Locais.

Tabela 13 - Sumário de soluções de similaridade para Números de Nusselt e Sherwood Locais

N	D_s	$Nu_y (\xi/y)^{1/2}$	$Sh_y (\xi/y)^{1/2}$
0	1	0.377	0.377
	2	0.532	0.310
	4	0.753	0.242
	8	1.065	0.181
	10	1.191	0.164
0.1	1	0.377	0.377
0.2	1	0.377	0.377
0.5	1	0.377	0.377
0.8	1	0.377	0.377
1	1	0.377	0.377
	2	0.572	0.343
	4	0.851	0.309
	8	1.244	0.278
	10	1.401	0.270
	15	1.735	0.256
	20	2.016	0.247

Tabela 13 - continuação.

N	Ds	$Nu_y (\xi/y)^{1/2}$	$Sh_y (\xi/y)^{1/2}$
2	1	0.377	0.377
	2	0.585	0.354
	4	0.884	0.332
	8	1.303	0.312
3	1	0.377	0.377
	2	0.592	0.360
	4	0.900	0.343
	8	1.332	0.328
4	1	0.377	0.377
	2	0.595	0.363
	4	0.909	0.350

O estudo será dividido em três partes:

Perfis de velocidade:

Quando $N = 0$, as variações de velocidade vão depender exclusivamente das variações de temperatura. Observa-se que o efeito de D_s é de diminuir a espessura de camada limite hidrodinâmica e conseqüentemente aumentar os gradientes de velocidade. A Figura 35 mostra este efeito.

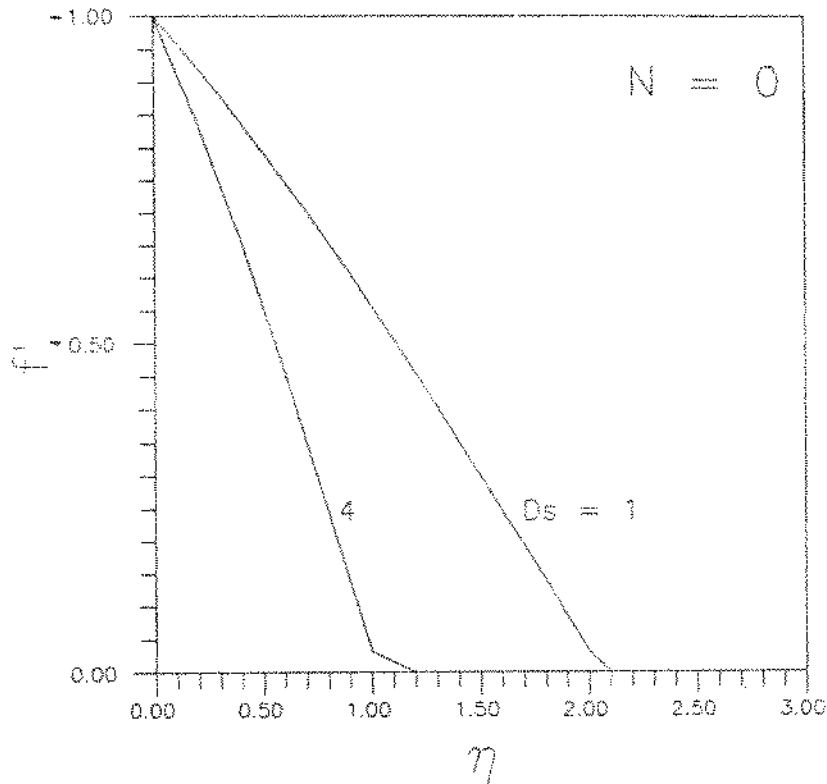


Figura 35 - Influência de D_s nos perfis de velocidade quando $N = 0$.

Nas Figuras 36 e 37 observa-se também que a influência de D_s é no sentido de tornar menos espessa a camada limite hidrodinâmica. Comparando-se as Figuras 35, 36 e 37 vê-se que o efeito de N é no sentido inverso: quanto maior N maior a espessura de camada limite hidrodinâmica. A associação destes dois efeitos leva a Figura 37 apresentar perfis próximos mesmo para valores de D_s diferentes.

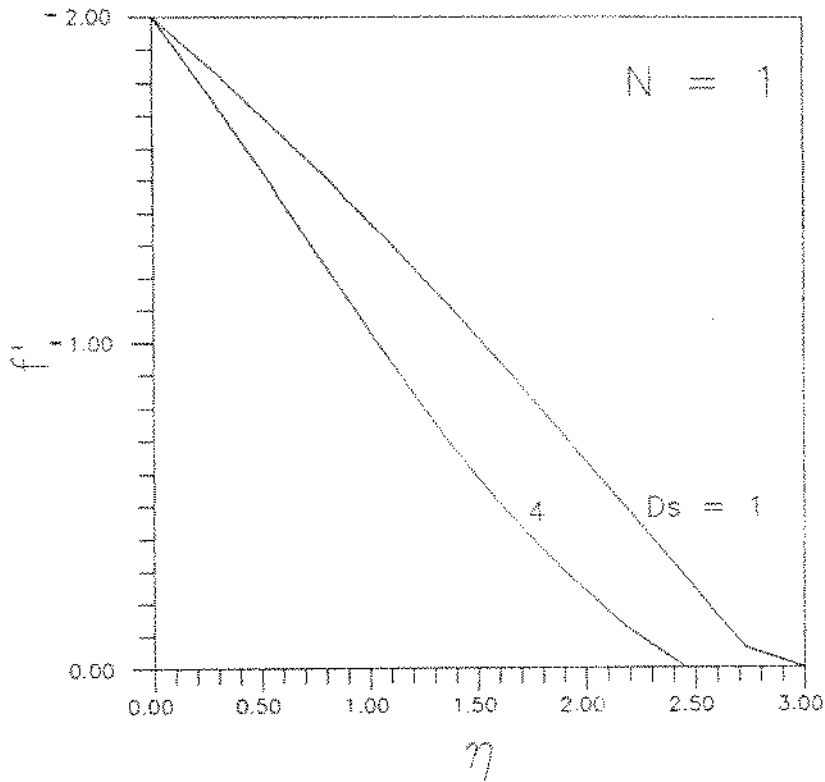


Figura 36 - Influência de Ds nos perfis de velocidade quando $N = 1$

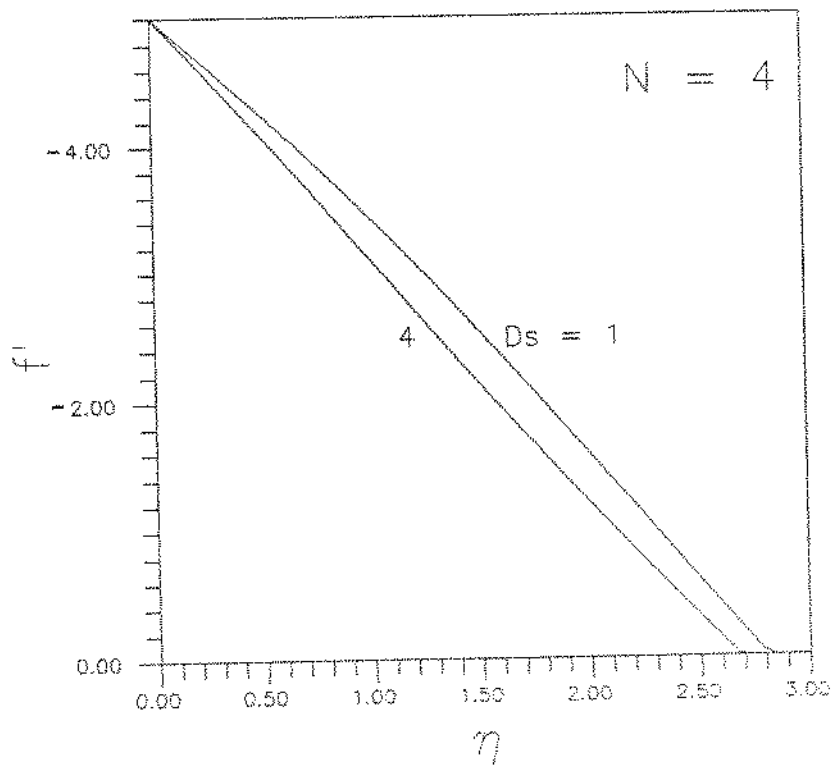


Figura 37 - Influência de Ds nos perfis de velocidade quando $N = 4$

Perfis de temperatura:

Na figura 38 observa-se que a medida que aumenta-se D_s a camada limite térmica tem sua espessura δ_T reduzida e conseqüentemente a transferência de calor aumenta.

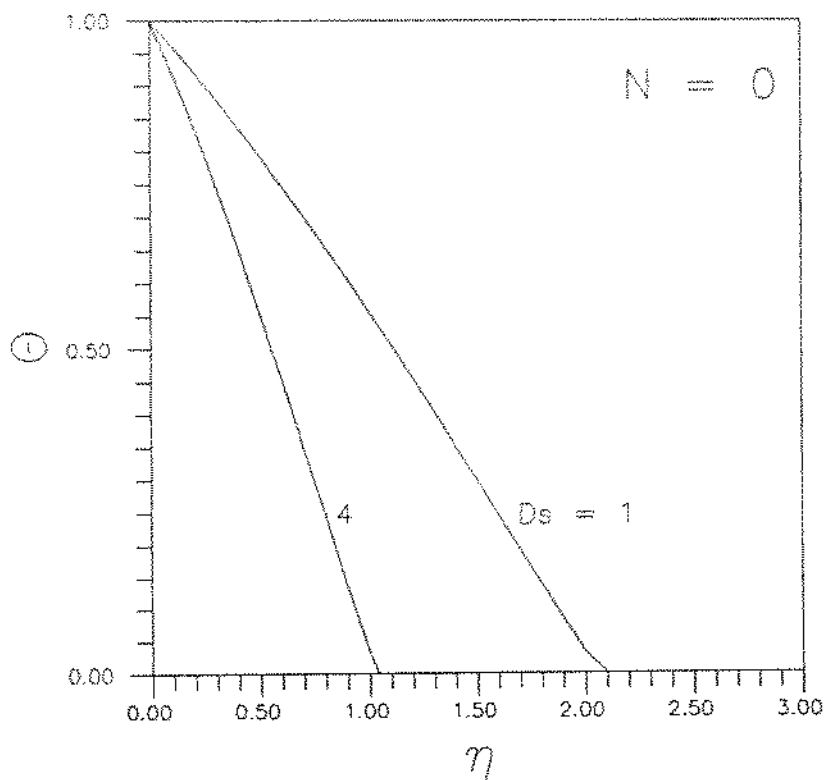


Figura 38 - Influência de D_s nos perfis de temperatura quando $N = 0$.

Nas Figura 39 e 40 o parâmetro D_s tem a mesma influência que na Figura 38. Comparando-se as Figuras 38, 39 e 40 quando $D_s = 1$, significa que $\xi = \gamma$ e pela análise de escala δ_T varia com ξ para $|N| \ll 1$ e com γ para $|N| \gg 1$. Portanto os perfis de temperatura serão iguais para $D_s = 1$ qualquer que seja N . Para outros valores de D_s , a influência de N é aumentar a espessura δ_T .

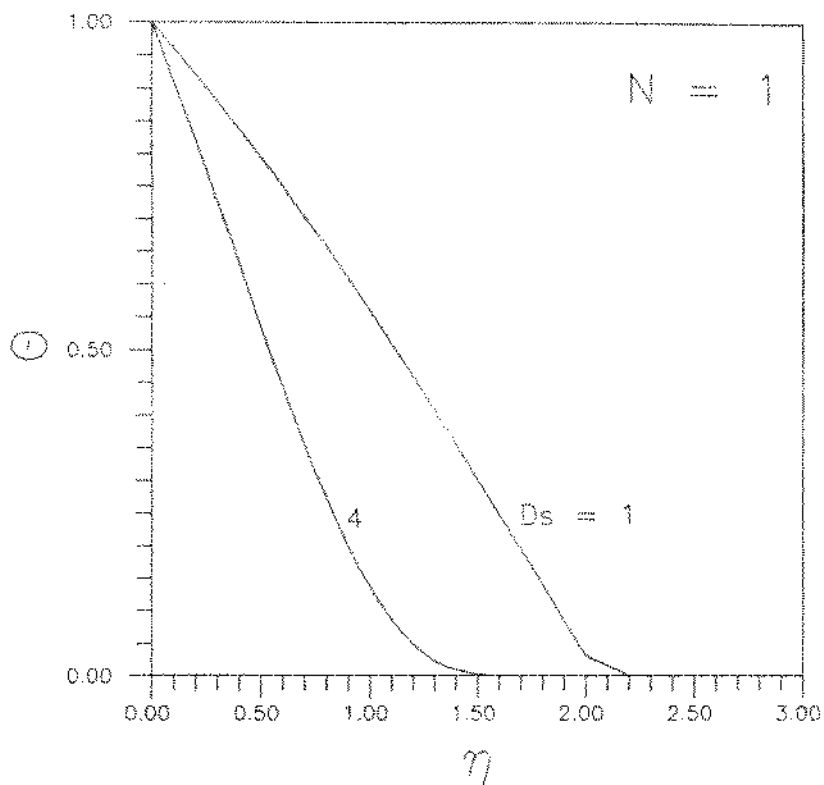


Figura 39 - Influência de D_s nos perfis de temperatura para $N = 1$.

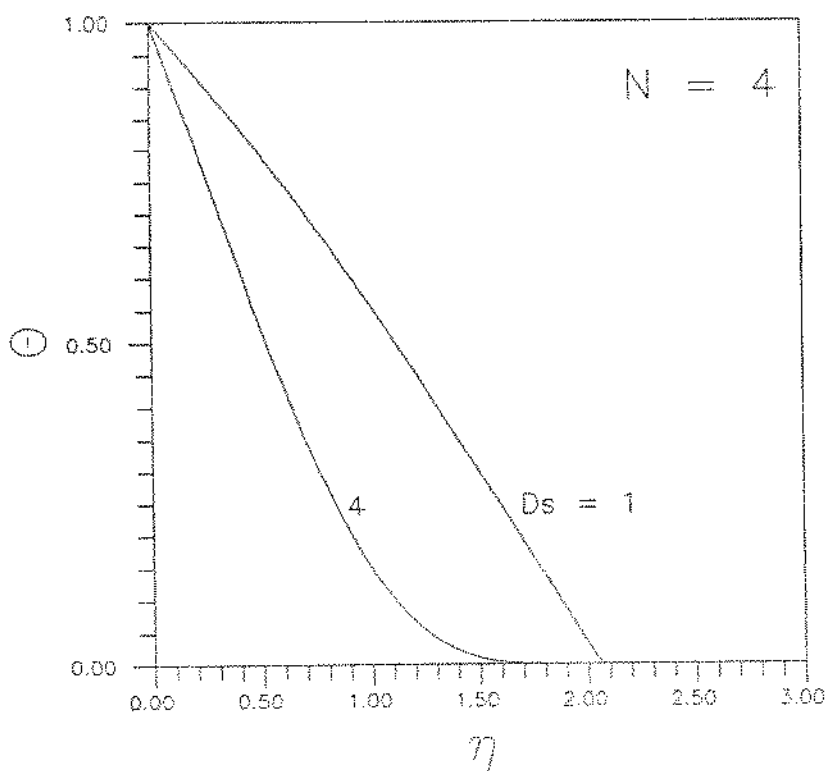


Figura 40 - Influência de D_s nos perfis de temperatura para $N = 4$.

Perfis de concentração:

Da mesma maneira que observado para os perfis de temperatura, o parâmetro Ds diminui a espessura δ_c e aumenta a transferência de massa. Isto pode ser observado nas Figuras 41, 42 e 43.

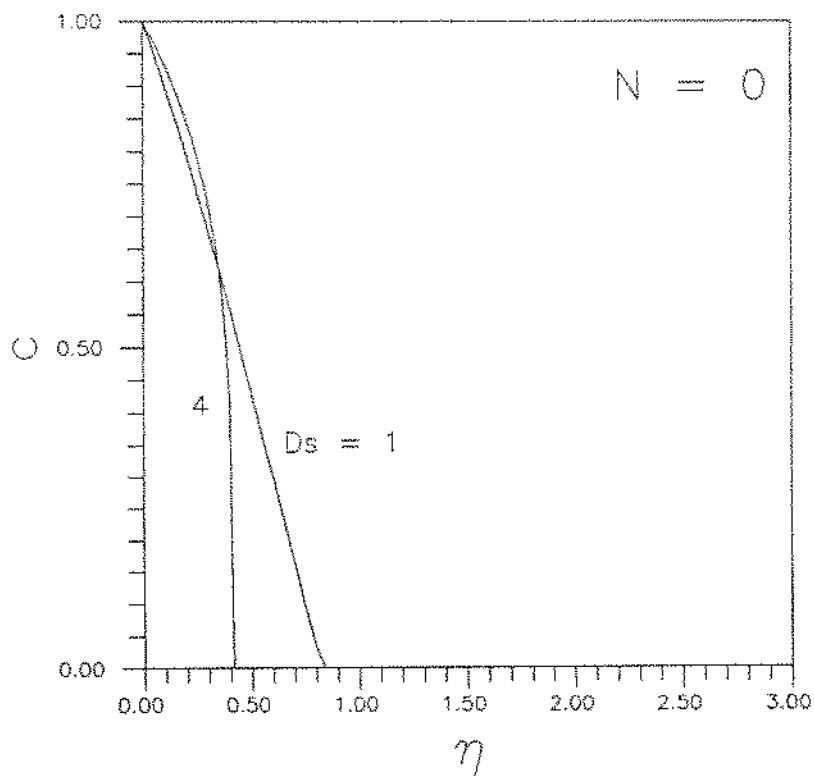


Figura 41 - Influência de Ds nos perfis de concentração quando $N = 0$.

Comparando as três Figuras, observamos que quando $Ds = 1$ os perfis são os mesmos para qualquer N . Isto ocorre pelo mesmo motivo apresentado para os perfis de temperatura. Quando Ds é diferente de 1, vê-se que quando N cresce, a espessura δ_c aumenta tornando os perfis na Figura 43 próximos.

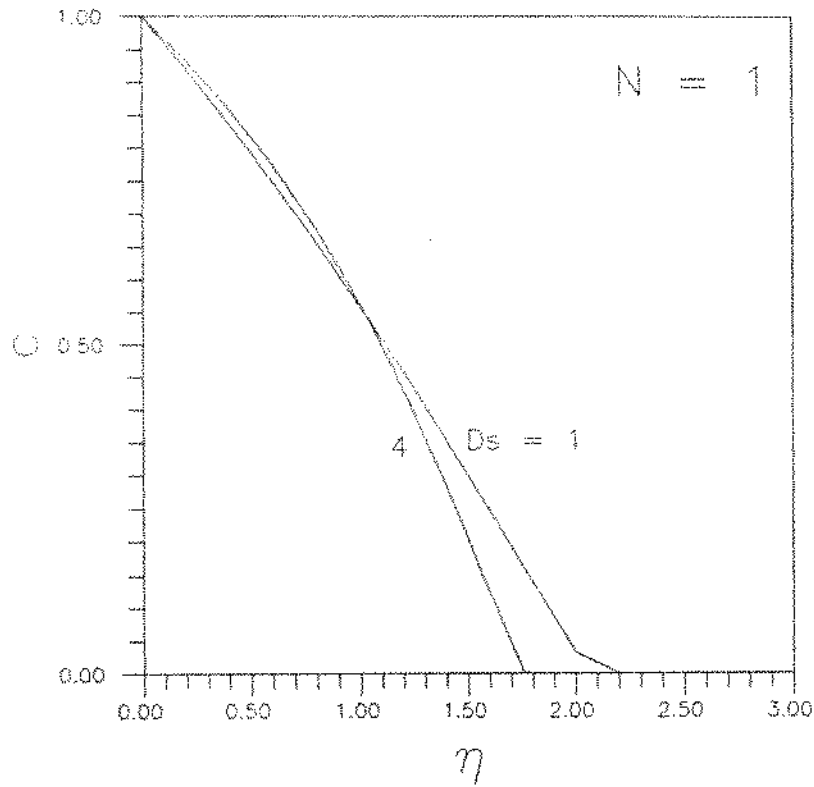


Figura 42 - Influência de D_s nos perfis de concentração quando $N = 1$.

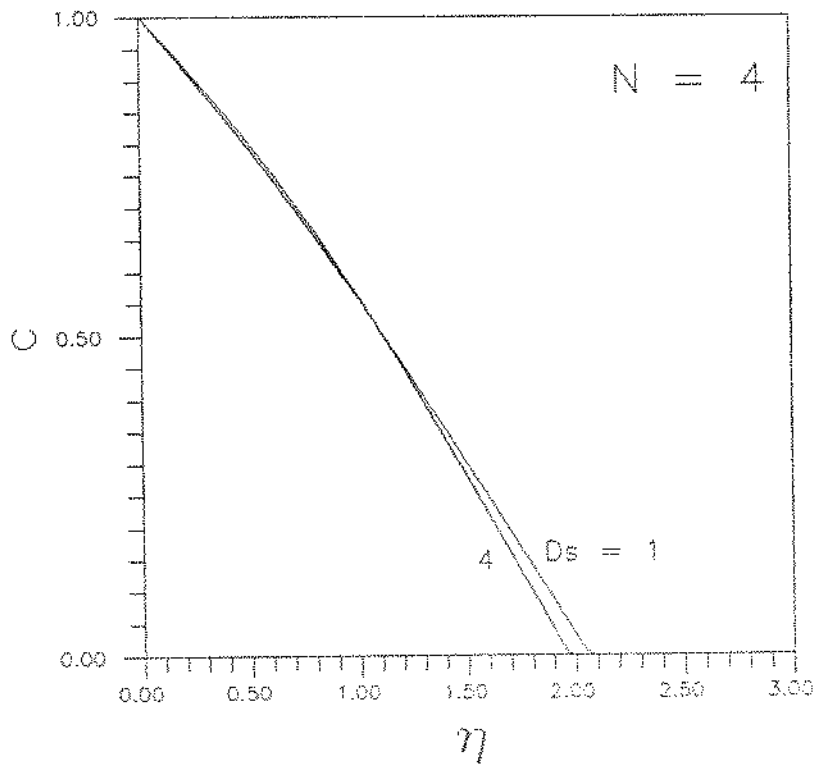


Figura 43 - Influência de D_s nos perfis de concentração quando $N = 4$.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Estudamos analiticamente neste trabalho os efeitos da dispersão hidrodinâmica na convecção natural por difusão dupla em meios porosos. Foi feito uso de duas técnicas analíticas: a análise de escala e a solução de similaridade do problema da convecção em camada limite.

No estudo foram levantados vários perfis de velocidade temperatura e concentração para os quatro casos analisados. Do 1º caso onde $\alpha \gg \xi v$ e $D \gg \gamma v$, pode-se afirmar que o aumento do número de Lewis torna os gradientes de velocidade mais intensos para $N > 0$. O aumento da razão N torna mais espessa a camada limite hidrodinâmica porque o aumento de N significa aumento na força de empuxo.

Dos perfis de temperatura relativos ao 1º caso conclue-se que o aumento do número de Lewis ocasiona menor transferência de calor enquanto o aumento de N favorece a transferência de calor. A combinação destes dois efeitos faz com que os perfis de temperatura da Figura 14 ($N = 4$) tornem-se distantes uns aos outros com a variação do número de Lewis. Quanto aos perfis de concentração, o aumento do número de Lewis e também o aumento de N favorecem a transferência de massa, confirmando a análise de escala.

No 2º caso ($\alpha \gg \xi v$ e $D \ll \gamma v$) onde a dispersão é predominante na equação do constituinte químico, a influência de Ra_γ nos perfis de velocidade é a de tornar os gradientes de velocidade desde a parede até um ponto suficientemente distante mais suaves. Conclue-se também que, para valores de $Ra_\gamma \ll 1$, os perfis de velocidade adquirem formas semelhantes aos perfis de velocidade do caso sem dispersão mostrando coerência de análise. Nos perfis de temperatura quando $Ra_\gamma \ll 1$, o comportamento é semelhante aos perfis do caso sem dispersão e o aumento de Ra_γ favorece a transferência de calor assim como o aumento de N . Dos perfis de concentração, conclue-se que o aumento de Ra_γ reduz a transferência de massa, sendo coerente com a análise de escala.

No 3º caso ($\alpha \ll \xi v$ e $D \gg \gamma v$) a dispersão é predominante na equação da energia. Em relação aos perfis de velocidade conclue-se que

o aumento de Ra_{ξ} torna os gradientes de velocidade mais intensos, mostrando um comportamento semelhante ao do caso sem dispersão. A influência de N nos perfis de velocidade é de tornar menos espessa a camada limite hidrodinâmica devido ao aumento da força de empuxo. Quando o movimento é provocado pelo empuxo devido a gradientes de temperatura ($N = 0$), pela comparação do perfil de temperatura do caso sem dispersão com o perfil obtido no 3º caso, conclui-se que o efeito de dispersão na equação de energia com o empuxo promovido somente por gradientes de temperatura é o de aumentar a transferência de calor, portanto confirmando o divulgado na literatura revisada. Quando o empuxo é promovido por gradientes de temperatura e concentração, a influência de $Ra_{\xi} \gg 1$ é semelhante ao que ocorre com o número de Lewis: quanto mais se aumenta Ra_{ξ} , mais se reduz a transferência de calor. Quando $Ra_{\xi} \gg 1$, os perfis de concentração são iguais aos do caso se: dispersão.

Para o 4º caso ($\alpha \ll \xi v$ e $D \ll \gamma v$) a dispersão é totalmente predominante. Para os perfis de velocidade conclui-se que a influência do parâmetro de dispersão Ds é de tornar as variações de velocidade mais fortes no sentido crescente de Ds e que o aumento de N faz com que os gradientes de velocidade tornem-se menores. A combinação destes dois efeitos faz com que os perfis relativos ao parâmetro Ds fiquem mais próximos a medida que N aumenta. Quando $Ds = 1$, os perfis de temperatura são iguais para qualquer valor de N devido a dependência da espessura da camada limite térmica. Quando $|N| \ll 1$, a análise de escala no Capítulo III mostra que δ_T depende de ξ e por outro lado quando $|N| \gg 1$ a dependência é em relação a γ e sendo $\xi = \gamma$, os perfis serão iguais. Quando $Ds \gg 1$ o aumento de Ds favorece a transferência de calor enquanto que o aumento de N atua no sentido contrário. A influência de Ds nos perfis de concentração é no sentido de aumentar a transferência de massa com o aumento de Ds enquanto que a influência de N é a de reduzi-la para um aumento de N .

As Figuras que fornecem a influência dos parâmetros Le , Ra_{γ} e Ra_{ξ} na razão entre a transferência de calor e a transferência de massa mostraram que a análise de escala é um bom método analítico e que fornece boas indicações para as ordens de grandeza dos parâmetros envolvidos.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - SCHEIDEGGER, A.E. The physics of flow through porous media. Univ. of Toronto Press, 1963.
- 2 - BEAR, J. Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier, 1972.
- 3 - TAYLOR, G.I. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through atabe, Proc. Royal Soc. A 219, 186-203, 1953.
- 4 - SAFFMAN, P.G. Dispersion due to molecular diffusion and macroscopic mixing in flow through a network of capillarios, J. Fluid Mech. 7, 194-208, 1960.
- 5 - TREVISAN, O.V. e BEJAN, A. Combined heat and mass transfer by natural convection in a porous medium, Advances in Heat Transfer 20, 315-49, 1990.
- 6 - BEJAN, A. e KHAIRY, K.R. Heat and mass transfer by natural convection in a porous medium, Int. Journal of Heat and Mass Transfer 28, 909-18, 1985.
- 7 - GREENKORN, R.A. Flow phenomena in porous media, Marcel Dekker Inc., 1983.
- 8 - PERKINS, T.K. e JOHNSTON, O.C. A review of diffusion and dispersion in porous media, Pet. Trans. AIME 228, SPEJ 70, 1963.
- 9 - GEORGIADIS, J.G. e CATTON, I. An effective equation governing convective transport in porous media, Journal of Heat Transfer Trans. of ASME 110, 635-40, 1988.
- 10 - GEORGIADIS, J.G. e CATTON, I. Effect of hidrodynamic dispersion on heat transport in the porous Bénard problem, 1988.
- 11 - CHENG, P. e ZHENG, T.M. Mixed convection in thermal plume above a horizontal line source of heat in a porous medium of infinite extent, Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf. 5, 2671-75, 1986.
- 12 - HONG, J.T. e TIEN, C.L. Analysis of thermal dispersion effect on vertical-plate natural convection in porous media, Int. J. Heat Mass Transfer 30, 1, 143-50, 1987.
- 13 - HUNT, M.L. e TIEN, C.L. Effects of thermal dispersion on forced convection in fibrous media, Int. J. Heat and Mass Transfer 31, 2, 301-09, 1988.

- 14 - BEJAN, A. Convection heat transfer, Cap. 9, Wiley, New York, 1984.
- 15 - KNERVOLD, O. e TYVAND, P. Dispersion effects on thermal convection in porous media, Journal of Fluid Mechanics 99, 673-86, 1980.
- 16 - PLUMB, O. A. The effect of thermal dispersion on heat transfer in packed bed boundary layers, ASME JSME Joint Thermal Conference Proc. 2, 17-21, 1983.
- 17 - CHENG, P. e HSU, C.T. Applications of Van Driest's mixing length theory to transverse thermal dispersion in forced convective flow through a packed bed, Int. Comm. Heat Mass Transfer 13, 613-25, 1986.
- 18 - HSU, C.T. e CHENG, P. Closure schemes of the macroscopic energy equation for convective heat transfer in porous media, Int. Comm. Heat Mass Transfer 15, 689-703, 1988.
- 19 - KUO, S. M. e TIEN, C. L. Transverse dispersion in packed-sphere beds, 1986.
- 20 - KOPCHENOVA, N.V. e MARON, I.A. Computational mathematics, Mir Publishers, Moscow, 4^a Edição, 1987.
- 21 - ADAMS, J.A. e ROGERS, D.F. Computer-aided heat transfer analysis, Mc-Graw Hill International Book Company, 1973.
- 22 - MARQUARDT, D.W. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameter, J. Soc. Ind. Appl. Math. 11, 2, 431-41, 1963.

APÉNDICE A

PROGRAMA FORTRAN

C PROGRAMA PARA A OBTENCAO DE SOLUCOES SIMILARES PARA O
C 4^o CASO CASO DO PROBLEMA DE ESCOAMENTO COM DISPERSAO.
C

C ESTE PROGRAMA É DIRIGIDO PARA SOLUÇÕES EM $N \geq 0$.

C*****

C AS VARIÁVEIS DO PROGRAMA CORRESPONDEM A:

C X1 = f'

C X2 = f

C Y1 = e'

C Y2 = e

C Z1 = c'

C Z2 = c

C*****

IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)

REAL N,LAMBDA

DIMENSION X1(100000),X2(100000),Y1(100000),Y2(100000),Z1(100000)

DIMENSION ETAC(100000),YO(20),ZO(20),RC(0:20),Z2(100000)

WRITE(*,*)'FORNEÇA OS VALORES DE INCREMENTO DE X '

READ(*,*)DX

WRITE(*,*)'FORNEÇA OS VALORES DE N E PAR. DE DISPERSAO '

READ(*,*)N,DS

WRITE(*,*)'FORNEÇA O PRIMEIRO VALOR MÁXIMO DE X '

READ(*,*)XMAX

WRITE(*,*)'FORNEÇA O INCREMENTO DE APRESENTAÇÃO'

READ(*,*)XINC

WRITE(*,*)'FORNEÇA LAMBDA'

READ(*,*)LAMBDA

WRITE(*,*)'FORNEÇA O DELTA1 (DERIVADA)'

READ(*,*)DELTA1

C*****

C ETAC) É A VARIÁVEL DE SIMILARIDADE η

C

C XMAX É O VALOR MÁXIMO DE ETAC)

C YO e ZO CORRESPONDEM AOS VALORES ARBITRÁRIOS DE $e'(0)$ E $c'(0)$

C

C DELTA 1 É O VALOR DO INCREMENTO PARA FORNECER OS VALORES PARA
C O CÁLCULO DAS DERIVADAS DE NACHTSHEIM-SWIGERT

C

C LAMBDA É O PARÂMETRO DO MÉTODO DE MARQUARDT

C*****

open(unit=9,file='F.dat',status='UNKNOWN')

C RC) É O CÁLCULO DO ERRO E PARA O MÉTODO DE MARQUARDT

RCO) =10.

C K É O CONTADOR DE RC)

k=1

C ALFA É O FATOR DE RELAXAÇÃO

alfa=1.

C CHUTES INICIAIS

301 K=1

write(*,*)'FORNEÇA OS CHUTES INICIAIS PARA TETA'(CO) E c'(CO)'

READ(*,*)YOC1),ZOC1)

C CONDIÇÕES DE CONTORNO

300 X2(1)=0.0

Y2(1)=1.0

Z2(1)=1.0

C

400 X0=-(Y2(1)+N*Z2(1))

C GUARDAR CHUTES INICIAIS

P1X1=X0

P1Y1=YOC(K)

P1Z1=ZOC(K)

C VARIÁVEL DE CONTROLE LÓGICO

A=0.0

C

C O PRÓPRIO ALGORITMO DE RUNGE-KUTTA

C

11 I=1

ETAC(I)=0.0

C INICIALIZAÇÃO DO RUNGE-KUTTA

X1(I)=X0

Y1(I)=YOC(K)

Z1(I)=ZOC(K)

TETA1=YOC(K)

CLIN1=ZOC(K)

WRITE(*,111)TETA1

111 FORMAT(1X,'VALOR DE TETA'(CO)=' ,F7.3, //)

WRITE(*,116)CLIN1

116 FORMAT(1X,'VALOR DE C'(CO)=' ,F7.3, //)

C

$$\begin{aligned}
25 \quad D1 X2 &= DX * X1(I) \\
D1 Y2 &= DX * Y1(I) \\
D1 Z2 &= DX * Z1(I) \\
D1 X1 &= -DX * (Y1(I) + N * Z1(I))
\end{aligned}$$

C*****

C QUANDO N É NEGATIVO TEMOS D1X1 = DX*(Y1(I) + N*Z1) E ASSIM
C POR DI ANTE

C*****

$$\begin{aligned}
D1 Y1 &= -DX * (Y1(I) / X1(I)) * (-Y1(I) - N * Z1(I) + 0.5 * DS * X2(I)) \\
D1 Z1 &= -DX * (Z1(I) / X1(I)) * (-Y1(I) - N * Z1(I) + 0.5 * X2(I))
\end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned}
D2 X2 &= DX * (X1(I) + D1 X1 / 2.0) \\
D2 Y2 &= DX * (Y1(I) + D1 Y1 / 2.0) \\
D2 Z2 &= DX * (Z1(I) + D1 Z1 / 2.0) \\
D2 X1 &= -DX * ((Y1(I) + D1 Y1 / 2.0) + N * (Z1(I) + D1 Z1 / 2.0)) \\
D2 &= -DX * ((Y1(I) + D1 Y1 / 2.0) / (X1(I) + D1 X1 / 2.0)) \\
D2 Y1 &= D2 * (-Y1(I) - D1 Y1 / 2.0 - N * (Z1(I) + D1 Z1 / 2.0) + 0.5 * DS * (X2(I) + D1 X2 / 2.0)) \\
D2 Z &= -DX * ((Z1(I) + D1 Z1 / 2.0) / (X1(I) + D1 X1 / 2.0)) \\
D2 Z1 &= D2 Z * (-Y1(I) - D1 Y1 / 2.0 - N * (Z1(I) + D1 Z1 / 2.0) + 0.5 * (X2(I) + D1 X2 / 2.0))
\end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned}
D3 X2 &= DX * (X1(I) + D2 X1 / 2.0) \\
D3 Y2 &= DX * (Y1(I) + D2 Y1 / 2.0) \\
D3 Z2 &= DX * (Z1(I) + D2 Z1 / 2.0) \\
D3 X1 &= -DX * ((Y1(I) + D2 Y1 / 2.0) + N * (Z1(I) + D2 Z1 / 2.0)) \\
D3 &= -DX * ((Y1(I) + D2 Y1 / 2.0) / (X1(I) + D2 X1 / 2.0)) \\
D3 Y1 &= D3 * (-Y1(I) + D2 Y1 / 2.0 - N * (Z1(I) + D2 Z1 / 2.0) + 0.5 * DS * (X2(I) + D2 X2 / 2.0)) \\
D3 Z &= -DX * ((Z1(I) + D2 Z1 / 2.0) / (X1(I) + D2 X1 / 2.0)) \\
D3 Z1 &= D3 Z * (-Y1(I) - D2 Y1 / 2.0 - N * (Z1(I) + D2 Z1 / 2.0) + 0.5 * (X2(I) + D2 X2 / 2.0))
\end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned}
D4 X2 &= DX * (X1(I) + D3 X1) \\
D4 Y2 &= DX * (Y1(I) + D3 Y1) \\
D4 Z2 &= DX * (Z1(I) + D3 Z1) \\
D4 X1 &= -DX * ((Y1(I) + D3 Y1) + N * (Z1(I) + D3 Z1)) \\
D4 &= -DX * ((Y1(I) + D3 Y1) / (X1(I) + D3 X1)) \\
D4 Y1 &= D4 * (-Y1(I) + D3 Y1) - N * (Z1(I) + D3 Z1) + 0.5 * DS * (X2(I) + D3 X2) \\
D4 Z &= -DX * ((Z1(I) + D3 Z1) / (X1(I) + D3 X1)) \\
D4 Z1 &= D4 Z * (-Y1(I) - D3 Y1 - N * (Z1(I) + D3 Z1) + 0.5 * (X2(I) + D3 X2))
\end{aligned}$$

C

```

I=I+1
ETAC(I)=ETAC(I-1)+DX
X2(I)=X2(I-1)+(C(D1X2+2.*D2X2+2.*D3X2+D4X2)/6.)
Y2(I)=Y2(I-1)+(C(D1Y2+2.*D2Y2+2.*D3Y2+D4Y2)/6.)
Z2(I)=Z2(I-1)+(C(D1Z2+2.*D2Z2+2.*D3Z2+D4Z2)/6.)
X1(I)=X1(I-1)+(C(D1X1+2.*D2X1+2.*D3X1+D4X1)/6.)
Y1(I)=Y1(I-1)+(C(D1Y1+2.*D2Y1+2.*D3Y1+D4Y1)/6.)
Z1(I)=Z1(I-1)+(C(D1Z1+2.*D2Z1+2.*D3Z1+D4Z1)/6.)

C
C WRITE(*,1005)ETAC(I),X1(I),X2(I),Y1(I),Y2(I),Z1(I),Z2(I)
C 1005 FORMAT(1X,F5.2,6F8.3)
IF((X1(I).GT.1.E30).OR.(Y1(I).GT.1.E30).OR.(Z1(I).GT.1.E30))
!GO TO 200
IF((C(eta(I)).GT.XMAX).AND.(A.EQ.2.)) GOTO 22
IF((C(eta(I)).GT.XMAX).AND.(A.EQ.3.)) GOTO 24
IF((C(eta(I)).GT.XMAX) GOTO 35
GOTO 25
200 write(*,1100)ETAC(I),X1(I),Y2(I),Z2(I)
1100 format(1X,f5.2,'X1(I)=' ,F7.5,5X,'Y2(I)=' ,F7.5,5X,'Z2(I)=' ,F7.5)
WRITE(*,*)'QUAL O NOVO VALOR MAXIMO DE X?'
READX*,*)XMAX
GO TO 301
35 IF((ABS(X1(I))).LE..0002).AND.(Y2(I)).LE..0002).AND.(Z2(I)).
!LE..0002))GOTO 41
write(*,1000)X1(I),Y2(I),Z2(I)
1000 format('X1(I)=' ,F7.5,5X,'Y2(I)=' ,F7.5,5X,'Z2(I)=' ,F7.5)
T3=Y1(I)
T4=Y2(I)
T5=Z1(I)
T6=Z2(I)
C NOVA TENTATIVA PARA TETA'(O)
YOCK)=P1Y1+DELTA1
XO=P1X1
ZOCK)=P1Z1
A=2.
C VOLTAM OS VALORES DAS CONDICÕES DE CONTORNO
X2(I)=0.0
Y2(I)=1.0
Z2(I)=1.0

```


GO TO 11

C

22 H3=Y1(I)
H4=Y2(I)
H5=Z1(I)
H6=Z2(I)

C

NOVA TENTATIVA PARA C'(CO)
Z0(K)=P1 Z1 + DELTA1
X0=P1 X1
Y0(K)=P1 Y1
A=3.

C

VOLTAM OS VALORES DAS CONDICÕES DE CONTORNO
X2(1)=0.0
Y2(1)=1.0
Z2(1)=1.0
GOTO 11

C

24 G3=Y1(I)
G4=Y2(I)
G5=Z1(I)
G6=Z2(I)

C

DETERMINAÇÃO DAS DERIVADAS DE NACHTSHEIM-SWIGERT
H9=(H3-T3)/DELTA1
O9=(G3-T3)/DELTA1
Q9=(H4-T4)/DELTA1
R9=(G4-T4)/DELTA1
T9=(H5-T5)/DELTA1
U9=(G5-T5)/DELTA1
X9=(H6-T6)/DELTA1
W9=(G6-T6)/DELTA1

C

C ESQUEMA DE ITERAÇÃO DE NACHTSHEIM-SWIGERT

C

YY=(Q9**2+X9**2+H9**2+T9**2) + LAMBDA
YZ=Q9*R9+X9*W9+H9*O9+T9*U9
ZZ=(R9**2+W9**2+O9**2+U9**2) + LAMBDA

C

YY9=-Y2(I)
ZZ9=-Z2(I)

C

```
CY=YY9*Q9+ZZ9*X9-Y1(I)*H9-Z1(I)*T9
CZ=YY9*R9+ZZ9*W9-Y1(I)*O9-Z1(I)*U9
```

C

```
R(K)=T3**2+T4**2+T5**2+T6**2
write(*,107)r(k),r(k-1)
```

107 format(1x,'r(k)=',e12.5,5x,'r(k-1)=',e12.5)

C*****

C METODO DE MARQUARDT

C*****

C

```
IF((K.EQ.1)) GOTO 101
IF((R(K)-R(K-1)).GE.0.0) GOTO 102
IF(B.EQ.1..AND.K.GE.2) GOTO 103
B=0.0
LAMBDA=0.10*LAMBDA
WRITE(*,2)LAMBDA
2 FORMAT(1X,'REDUZ LAMBDA=',E12.5)
GOTO 101
```

102 B=1.0

```
1203 IF(C.EQ.1.) ALFA = 1.
ALFA=0.8*ALFA
write(*,1200)alfa
```

1200 format(1x,'alfa=',e12.5,/)

C write(*,*)'residuos na fase de relaxacao'

C write(*,1202)resy,rez

C 1202 format(1x,'resy=',e12.5,5x,'rez=',e12.5,/)

```
Y(K)=Y(K-1)+ALFA*DELTAY
Z(K)=Z(K-1)+ALFA*DELTAZ
GOTO 300
```

103 IF((R(K)-R(K-1)).GE.0.0) GOTO 102

```
LAMBDA=10.*LAMBDA
WRITE(*,3)LAMBDA
```

3 FORMAT(1X,'AUMENTA LAMBDA=',E12.5)

```
write(*,*)'saiu beleza!'
```

B=0.0

C=1.

GOTO 100

C

RY=CY*ZZ-CZ*YZ

RZ=CZ*YY-CY*YZ

C

C

OBTENCAO DOS VALORES DOS DELTAS CORRESPONDENTES

C

DELTAY=RY/DET

DELTAZ=RZ/DET

C

C

NOVOS VALORES PARA TETA'(CO) E c'(CO)

IFCB.EQ.1.0) GOTO 1203

K=K+1

YO(K)=YO(K-1)+DELTAY

ZO(K)=ZO(K-1)+DELTAZ

A=0.0

VOLTAM AS CONDICÕES DE CONTORNO

X2(1)=0.0

Y2(1)=1.0

Z2(1)=1.0

GOTO 400

C

IMPRESSAO DOS VALORES DE f', e E c.

41 WRITE(*,120)Y1(I)

120 FORMAT(1X,'VALOR DE TETA'(INFINITO)=' ,F8.5)

fim=(xmax/dx)+1.5

IFIM=FIM

var=(XINC/dx)+0.5

IVAR=VAR

i=1

155 IF(I.GT.IFIM) GO TO 158

WRITE(9,150)ETA(I),X1(I)

150 FORMAT(1X,F8.2,F7.3)

OPEN(UNIT=8,FILE='T.DAT',STATUS='UNKNOWN')

WRITE(8,153)ETA(I),Y2(I)

153 FORMAT(1X,F8.2,F7.3)

OPEN(UNIT=4,FILE='C.DAT',STATUS='UNKNOWN')

WRITE(4,154)ETA(I),Z2(I)

154 FORMAT(1X,F8.2,F7.3)

I=I+IVAR

GO TO 155

158 STOP

END