

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Como Requisito Parcial à Obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

TOLEDO

CARACTERIZAÇÃO GEOESTATÍSTICA  
EM  
SIMULADORES NUMÉRICOS DE RESERVATÓRIO

*Este exemplar corresponde a redação final de  
tese defendida pelo Eng<sup>o</sup> JOAQUIM PEDRO DE TOLEDO e  
aprovada pela comissão julgadora em 29/11/90*

Autor : Joaquim Pedro de Toledo *J.P.T.*  
Orientador : Armando Zaupa Remacre *A.Z.R.*

*Armando Zaupa Remacre*  
PROF. DR. ARMANDO ZAUPA REMACRE

57/90

novembro de 1990

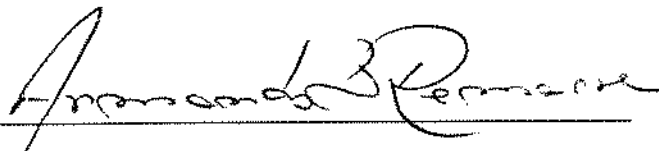


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

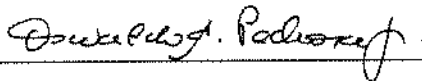
A dissertação "Caracterização Geoestatística em Simuladores Numéricos de Reservatório", elaborado por Joaquim Pedro de Toledo e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 29 de Novembro de 1990.

Banca Examinadora



Armando Zaupa Remacre, Dr. Ing.



Oswaldo Antunes Pedrosa Júnior, Ph. D.



Lideniro Alegre, Ph. D.

*À meus pais;  
J. Toledo (in memoriam) e  
Maria Luiza*

## Agradecimentos

Ao Prof. Armando Zaupa Remacre, pelas sugestões, suporte e confiança na realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Petróleo e dos Departamento colaboradores, pelos ensinamentos.

Aos colegas de curso, pela amizade e apoio durante o curso.

Aos funcionários do DEP-CEPETRO, pela paciência e atenção.

Aos meus irmãos, pela colaboração em minha formação .

Aos republicanos da Aquarius, pela experiência de vida de Ouro Preto.

Aos amigos José Elias e Luíz Fernando, pelo convívio e constante apoio.

A Simoni, pela força no ingresso do curso e sincera amizade.

A Adriana, pela força na busca do caminho.

## Resumo

Na engenharia de petróleo são várias as variáveis que se prestam a um tratamento estocástico, dentre elas a permeabilidade e porosidade. A partir do formalismo das funções aleatórias criou-se modelos numéricos representativos das heterogeneidades inerentes de um reservatório de petróleo.

Para tal trabalhou-se com modelo variográfico do tipo potencial ( $\gamma(h) = \gamma_0 \cdot h^\beta$ ) que representa também processos fractais. O método usado para simulações de populações com tal modelo variográfico a uma dimensão foi o da decomposição espectral. A simulação a duas ou três dimensões foi feita pelo método das Bandas Rotativas.

De posse de um gerador de modelos numéricos com características desejadas, no caso, fractais, procedeu-se dois tipos de estudos. O primeiro foi da determinação do número de poços ótimos para que se realize uma simulação condicional representativa da informação disponível. A segunda aplicação foi a incorporação da análise de teste na simulação condicional. Sendo que o objetivo é de otimizar o uso das informações disponíveis. Este tipo de informação apresenta uma característica de ter um volume bem maior que qualquer outro tipo de informação de poço sobre o reservatório. Associando-se, ainda, o fato de ter bom grau de confiança nas medidas de testes de poço. Para levar a termo essa informação de grande volume é necessário modificações nos algoritmos de condicionalização .

## Abstract

There are many variables in the Petroleum Engineering which can be subject to a stochastic treatment, some of them being permeability and porosity. Based on the formalism of random functions, numerical models have been developed, and they demonstrate the heterogeneities existent within a petroleum reservoir.

In order to develop these numerical models, a power-law variographic model  $\gamma(h) = \gamma_0 h^\beta$ , which also represents fractals processes, was used. Spectral analysis was the method used for population simulations in one dimension. The Turning Bands, in its turn, was the method used for simulations in two or three dimensions.

A numerical models generator having the desired characteristics, fractal ones in this case, was used in order to develop two kinds of study. The first one was related for the establishment of the optimum number of wells in order to have a conditional simulation, which represents the available information. The second one regarded the incorporation of the test analysis into the conditional simulation, aiming at maximizing the use of the available information. This kind of information is known for having a large content than any other types of well information about reservoir. Besides, this kind of information is very reliable when it is dealing with measure in well tests. To present this type of information, it is necessary to modify the algorithms of conditionalization.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Método Geoestatístico</b>	<b>8</b>
2.1	Teoria das Variáveis Regionalizadas . . . . .	8
2.2	Método de Estimativa Geoestatística . . . . .	14
2.2.1	Discussão Sobre Amostragem . . . . .	14
2.2.2	Método de Estimativa Geoestatística – Krigagem . . . . .	16
2.3	Modelagem Numérica - Simulação Geoestatística . . . . .	20
2.3.1	Princípio de Simulação Condicional . . . . .	20
2.3.2	Simulação Geoestatística Não Condicional . . . . .	22
2.3.3	Métodos no Domínio do Espaço . . . . .	24
2.3.4	Métodos no Domínio da Frequência . . . . .	29
2.3.5	Método das Bandas Rotativas para Variogramas de Potência . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Simulação Numérica de Reservatório</b>	<b>37</b>
3.1	Método de Solução do Sistema de Equações . . . . .	39
3.1.1	Condições de Contorno . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Estudo da Densidade Amostral para Modelagem Numérica</b>	<b>44</b>
4.1	Reservatório Hipotético . . . . .	45
4.2	Aplicação do Estudo de Densidade Amostral . . . . .	51
4.3	Aplicação e Resultados . . . . .	54

4.3.1	Análise Variográfica . . . . .	54
4.3.2	Comparando os Históricos . . . . .	58
4.4	Efeito da Distribuição das Heterogeneidades . . . . .	61
4.4.1	Aplicação e Resultados . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Incorporação da Análise de Teste de Poços Produtores na Geoestatística</b>	<b>70</b>
5.1	O Teste de Poço como Amostra . . . . .	71
5.1.1	Descrição pelos Aspectos de Fluxo . . . . .	71
5.1.2	Descrição sob o Aspecto Amostral Condicionante . . . . .	73
5.1.3	Técnica Condicionante . . . . .	75
5.2	Aplicação . . . . .	78
5.2.1	O Reservatório Hipotético . . . . .	78
5.2.2	Análise Variográfica . . . . .	80
5.2.3	Análise de Teste . . . . .	81
5.2.4	Modelagem Geoestatística . . . . .	85
5.2.5	Comparação dos Históricos . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Conclusões e Sugestões</b>	<b>103</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>105</b>
	<b>Apêndice A: Método Espectral de Simulação Unidimensional de Modelos Variográficos de Potência ("Power-Law ")</b>	<b>109</b>



## Lista de Tabelas

2.1	Estudo do erro para simulações em malha 100 x 100 . . . . .	32
2.2	Estudo do erro para simulações em malha 100 x 100 . . . . .	32
2.3	Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20 . . . . .	33
2.4	Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20 . . . . .	33
2.5	Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20 malha 100x100 . . . . .	34
2.6	Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20 e malha 100x100 . . . . .	34
4.1	Análise dos parâmetros estatísticos da porosidade . . . . .	55
4.2	Análise dos parâmetros estatísticos da permeabilidade . . . . .	55
5.1	Dados estatísticos do reservatório . . . . .	78
5.2	Comparação entre as amostras de perfilagem (pontual) e de análise de teste (de bloco) . . . . .	84

## Lista de Figuras

1.1	Fluxograma da metodologia geoestatística . . . . .	3
2.1	Esquema da simulação condicional . . . . .	23
2.2	Esquema das projeções ortogonais nas bandas . . . . .	28
2.3	Estudo dos variogramas experimentais obtidos para diversas variáveis de simulação com $\beta = 0.5$ e $\beta = 1.5$ . . . . .	36
4.1	Variograma experimental do reservatório hipotético para a variável porosi- dade . . . . .	46
4.2	Histograma da porosidade e permeabilidade . . . . .	47
4.3	Variograma experimental do reservatório hipotético para a variável perme- abilidade . . . . .	48
4.4	Mapas de iso-porosidade e iso-saturação de água para o reservatório hipotético	49
4.5	Curvas de permeabilidades relativas de óleo-água e gás-líquido . . . . .	50
4.6	Distribuição dos 20 poços na fase exploratória do campo na parte superior e os 40 poços na fase em desenvolvimento do campo . . . . .	52
4.7	Distribuição dos 80 poços do campo desenvolvido . . . . .	53
4.8	Variograma experimental para a porosidade e Ln da permeabilidade com 20 amostras . . . . .	56
4.9	Variograma experimental para a porosidade e Ln da permeabilidade com 40 amostras . . . . .	57
4.10	Variograma experimental para a porosidade e Ln da permeabilidade com 80 amostras . . . . .	59
4.11	Comparação do histórico de pressão entre o modelo com 20 poços e reser- vatório ideal . . . . .	61

4.12	Comparação do histórico de pressão entre o modelo com 40 poços e reservatório ideal na parte superior e modelado com 80 poços e reservatório ideal na parte inferior . . . . .	62
4.13	Comparação do histórico de produção de gás e água 20 poços e reservatório ideal . . . . .	63
4.14	Comparação do histórico de produção de gás e água 40 poços e reservatório ideal . . . . .	64
4.15	Comparação do histórico de produção de gás e água 80 poços e reservatório ideal . . . . .	65
4.16	Mapas de permeabilidade para duas distribuições com variograma igual $\gamma(h) = C_0 h^{0.83}$ . . . . .	67
4.17	Comparação entre os históricos de produção de gás e água . . . . .	69
5.1	Esquema de krigagem com testes de poços . . . . .	77
5.2	Histogramas das variáveis porosidade e permeabilidade . . . . .	79
5.3	Malha dos poços de produção . . . . .	81
5.4	Variogramas experimentais e ajustado do campo amostrado . . . . .	82
5.5	Relação entre a porosidade e a permeabilidade do teste . . . . .	85
5.6	Mapas de permeabilidade. Figura superior reservatório hipotético e inferior o modelo a. . . . .	87
5.7	Mapas de permeabilidade. Figura superior modelo c e inferior o modelo d. . . . .	88
5.8	Mapas de porosidade. Figura superior reservatório hipotético e inferior o modelo a. . . . .	89
5.9	Mapas de porosidade. Figura superior o modelo c e inferior o modelo d. . . . .	90

5.10	Mapas do modelo b. Figura superior para porosidade e inferior para permeabilidade. . . . .	91
5.11	Comparação entre os históricos de pressão (parte superior) e de produção de óleo (parte inferior) . . . . .	94
5.12	Comparação entre os históricos de produção de gás (parte superior) e de produção de água (parte inferior) . . . . .	95
5.13	Comparação entre as relações gás-óleo (parte superior) e água-óleo (parte inferior) . . . . .	96
5.14	Comparação entre a produção acumulada de óleo (parte superior) e a recuperação (parte inferior) . . . . .	97
5.15	Comparação entre as produções acumuladas de gás (parte superior) e de água (parte inferior) . . . . .	98
5.16	Diferenças entre os históricos para vazão de óleo (parte superior) e para recuperação (parte inferior) . . . . .	99
5.17	Diferenças entre os históricos para vazão de gás (parte superior) e para vazão de água (parte inferior) . . . . .	100
5.18	Comparação entre os históricos de pressão do poço (parte superior) e de pressão do bloco (parte inferior) . . . . .	101
5.19	Comparação entre os históricos de vazão de óleo do poço (parte superior) e de vazão de gás do poço (parte inferior) . . . . .	102
A.1	Modelos em $\gamma(r) = r^\beta$ . . . . .	109
A.2	Gráfico de correlação entre o expoente espectral $\alpha$ e a dimensão fractal D .	114
A.3	Comparação entre as populações geradas unidimensionalmente e seus variogramas para $\beta$ igual 0.5, 1.0 e 1.5. . . . .	116

## Nomenclatura

### Letras Romanas:

A	área da secção transversal do bloco	$m^2$
a	amplitude do variograma	m
B	fator volume de formação	-
$C_0$	variância do efeito de pepita	-
$C_1$	variância unidimensional	-
$C_2$	variância bidimensional	-
$C_3, C$	variância tridimensional	-
$C_t$	compressibilidade da rocha	$m^3/Pa$
D	dimensão fractal	-
f	frequência	$s^{-1}$
h	distância (capítulo 2)	m
h	espessura da camada (capítulo 3)	m
K	permeabilidade efetiva	$m^2 (1,013 \times 10^{15} \text{ md})$
$K_r$	permeabilidade relativa	-
m	média	-
p	pressão	Pa
$P_c$	pressão capilar	Pa
$p_{wf}$	pressão de fundo de poço	Pa
PI	índice de produtividade	-
q	vazão	$m^3/s (86400 \text{ m}^3/\text{dia})$
$r_w$	raio do poço	m
$R_s$	razão de solubilidade	-
$S_l$	saturação da fase l	-
s	fator de película ("skin")	-
$T = \frac{\lambda A}{\Delta x}$	transmissibilidade	$m^3/Pa.s$
t	tempo	s
$V_p$	volume poroso	$m^3$
Y	variável de um processo estocásticos	-
Z	função aleatória	-
z	variável aleatória (capítulo 2)	-
z	distância vertical	m

## Letras Gregas

$\alpha$	expoente da função expectral em modelos fractais	-
$\beta$	expoente do variograma de potência	-
$\gamma$	função variograma	-
$\gamma$	densidade (capítulo 3)	$N/m^3$
$\epsilon$	erro	-
$\lambda$	transmissibilidade	$m^2/Pa.s$
$\lambda_\alpha$	poderador de krigagem	-
$\mu$	viscosidade	$Pa.s$
$\nu$	nível de iteração	-
$\phi$	porosidade	-
$\phi_k$	fase angular (capítulo 2)	rad
$\sigma^2$	variância	-
$\omega$	frequência angular	rad/s
$\omega$	expoente da média potencial (capítulo 5)	-
$\Omega$	intervalo da função espectral	-

## Operadores

A	matriz decomposta de covariância
C	matriz de covariância
D	matriz de acumulação
G	vetor dos termos de gravidade
Q	vetor dos termos fonte
T	matriz de transmissibilidade
$\Delta$	operador de diferenças finitas
$\Delta_t$	operador de diferenças finitas no tempo

## Subscritos

i	inicial
$i \pm 1/2$	fronteiras dos blocos
$i$	centro do bloco
k	relativo a krigagem
l	componentes das fases; l=o,g,w (óleo, gás, água)
T	total
x,y,z	direções das coordenadas cartesianas
u,v,w	direções de coordenadas ortogonais

## Sobrescrito

n	nível de tempo
*	estimado
-	propriedade média
'	$\frac{d}{dx}$ ou $\frac{\partial}{\partial x}$

# 1 Introdução

Na caracterização de reservatório é muito difícil a determinação precisa do meio poroso em relação as suas características petrofísicas. Devido a complexidade diagenética da rocha reservatório , não há uma maneira de equacionar estas formas naturais através de uma interpretação determinística, sem ao menos realizar diversas hipóteses e aproximações.

Surge, então , a abordagem estocástica para representar o modelo físico do reservatório. De uma maneira geral, um fenômeno estocástico permite uma infinidade de soluções , embora elas obedeçam as características estatísticas do processo. Há uma tentativa de representar a realidade do domínio. Com o objetivo de fornecer uma caracterização do reservatório que nos dê um erro mínimo nas comparações dos históricos futuros do campo e não somente a determinação e ajuste de valores que moldem aos históricos passados. O problema é prever e saber qual a credibilidade desta previsão .

Inúmeras características da realidade direcionam para a abordagem estocástica no estudo de reservatório . Pois não se conhece a informação sobre a real geometria e propriedades petrofísicas do reservatório , somado a dificuldade de conhecer as relações aditivas de variáveis como a permeabilidade e por outro lado dispõe-se de um conhecimento das informações estatísticas das amostras possíveis de um campo (perfilagens, análise de teste, testemunhos, sísmica, dados geológicos, etc...). Podendo, assim, dar convergência a técnica. Possibilitando ter resultados estatísticos que precisem o grau de risco de um investimento.

O domínio do reservatório a ser estudado é muito amplo, portanto é necessário estudar as condições mínimas para que, numa infinidade de combinações possíveis, nem sempre satisfatórias, possamos ter uma certa garantia de convergência. Ou seja, de todos os reservatórios possíveis de serem imaginados, quais teriam maior semelhança ao reservatório real?

Como uma técnica que diminui o caminho na busca desta convergência de



solução , escolheu-se a geoestatística por incorporar uma série de características desejáveis na modelagem do reservatório . A geoestatística interpreta o domínio do reservatório como um meio em que há com a autocorrelação entre as distribuições de suas variáveis. Assim, busca-se através de um conjunto de amostras distribuído espacialmente, estudar a sua variabilidade e correlação amostral afim de inferir informações mais detalhadas no interior do domínio amostrado. Assim o modelo a ser idealizado via geoestatística deve estar coordenado com a necessidade de entrada de dados de simuladores de fluxo para previsão de comportamento do reservatório . Mostrando, desta feita, o dinamismo e conveniência das técnicas de modelagem e simulação numérica de reservatório estarem atuando conjuntamente.

A metodologia de estudos geoestatística em caracterização de reservatórios, pode-se organizar através de um fluxograma (figura 1.1).

O estudo a ser realizado nesta dissertação pretende, de forma geral, mostrar a eficiência da modelagem estocástica das heterogeneidades do reservatório , via geoestatística , analisada sob a ótica da densidade amostral e efeitos de escala de observação . Isso é feito avaliando-se a eficiência através da comparação dos históricos de produção e pressão de campos hipotéticos criados.

Dentro deste contexto abrangente, seguem alguns tópicos que poderão ser relevantes na composição de conceituação teórica e confecção dos algoritmos. Descrevendo sumariamente sobre cada capítulo desta dissertação , procura-se mostrar estes tópicos de interesse.

No capítulo 2, procura-se dar início a conceituação dos tipos de variáveis que podem ser tratadas geoestatisticamente, conhecer os momentos estatísticos, as Hipóteses de Estacionaridade e realizar um estudo mais completo da função de correlação (variograma) com ênfase ao modelo variográfico de potência. Há a preocupação com a discussão sobre amostragem no estudo de reservatório de petróleo. Faz-se a revisão do método de estimativa geoestatística (Teoria da Krigagem) e sua utilização . Descreve-se a teoria

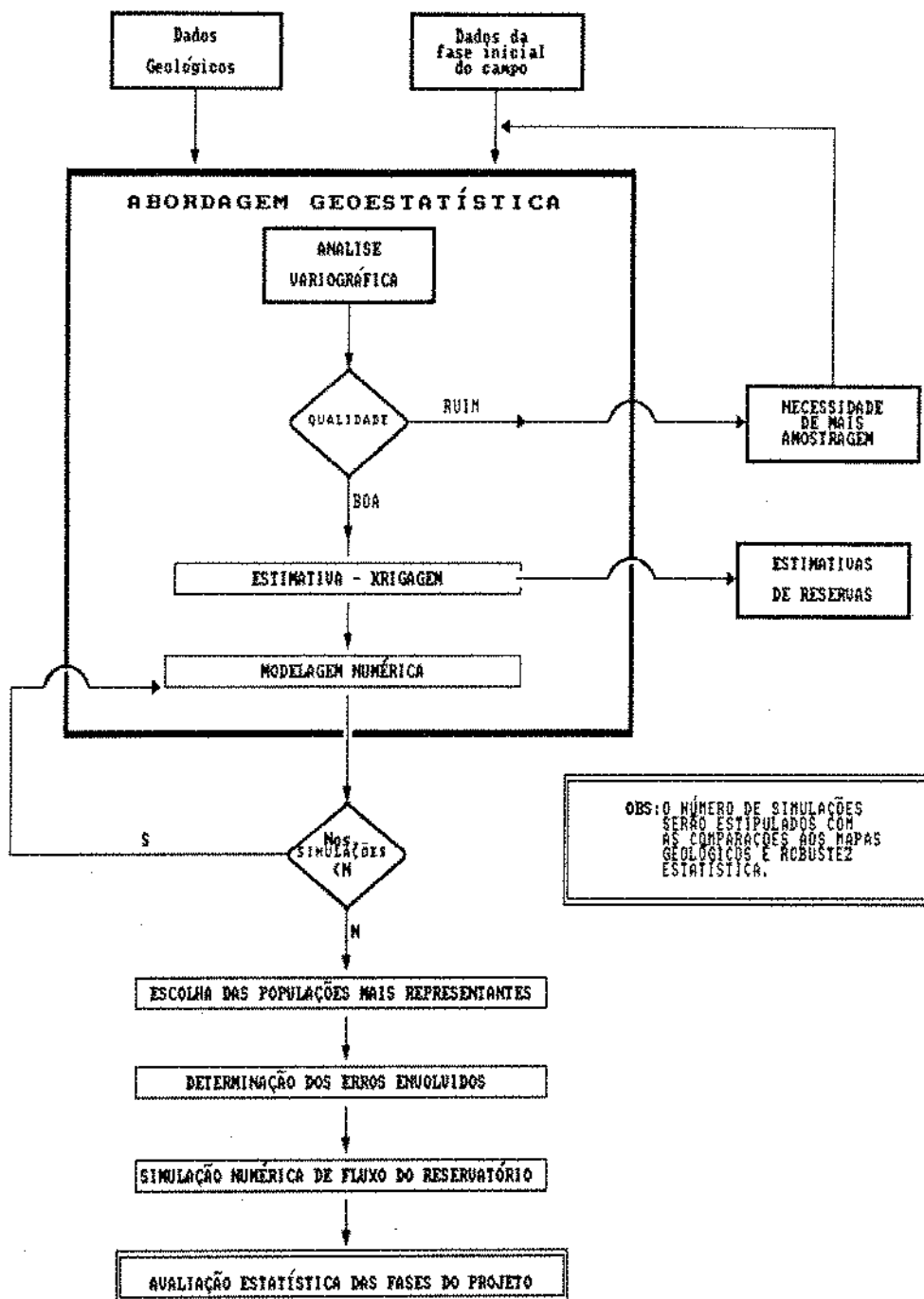


Figura 1.1: Fluxograma da metodologia geoestatística

da modelagem numérica geoestatística , com o objetivo de mostrar como é possível a realização de um processo estocástico via geoestatística . Descrição da teoria da condicionalização aos pontos amostrados, resumindo os principais métodos de geração de populações não condicionais, com enfoque ao método das Bandas Rotativas para modelos variográficos de potência. Em apêndice, relativo a este capítulo, apresenta-se o conceito e algoritmo do método espectral para simulações unidimensionais de modelos variográficos de potência e sua **interrelação com a teoria dos fractais**.

No capítulo 3, far-se-á uma revisão do equacionamento do fluxo em modelos trifásicos, do tipo "Black-Oil", a três dimensões, embora aqui se tenha usado somente bidimensional. Mostrando a solução das equações de fluxo pelo método IMPES (solução implícita na pressão e explícita na saturação ), por ter sido este o método utilizado no simulador numérico de reservatório da tese no estudo comparativo entre os históricos.

No capítulo 4, procurou-se estudar o efeito da densidade amostral na modelagem numérica geoestatística . Discutindo a qualidade da amostra sob o ponto de vista variográfico e como fator condicionalizante. Apresentando-se aplicação prática para este estudo. O objetivo aqui será de saber o ponto inicial da aplicação da simulação condicional.

No capítulo 5, estuda-se a incorporação da análise de teste de poços à geoestatística . Com o objetivo da verificação da qualidade do tipo desta amostra baseado na literatura existente. Descrição do algoritmo para condicionalizar amostras de características volumétricas através da krigagem entre blocos (blocos de geometria cilíndrica como suporte estimante). Realização de um estudo envolvendo a comparação entre o reservatório hipotético e ganho de representatividade na modelagem com o aumento de suporte da amostra da análise de teste.

No capítulo 6, faz-se um balanço relativo aos dois últimos capítulos bem como algumas recomendações para os estudos futuros.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Na busca de melhores estimativas de reservas na indústria de petróleo, proporcionou à geoestatística um campo para convergência de aplicação da teoria das probabilidades. Utilizando estimadores do tipo BLUE ("Best Linear Unbiased Estimator"), em uma técnica conhecida como Krigagem, como colocado por A. G. Journel e Ch. J. Huijbregts [22], 1978. Alguns trabalhos práticos foram realizados em campos de petróleo já desenvolvidos e mostraram a eficiência da técnica (A. J. Da Costa e Silva [8], 1985).

Surge, então, a preocupação com a amostragem e o efeito da escala de observação. Alguns pesquisadores propuseram a utilização de resultados de perfilagem como P. Delfiner, J. P. Delhomme e J. Pelissier [11], 1983. Há também a possibilidade da utilização de informações que não são quantificadas a um valor determinado ("soft information"). Isto foi proposto porque as dimensões do reservatório chegam em geral a centenas de metros e a discretização da malha dos poços é muito esparsa, o que dificulta a qualidade da amostra. Algumas medidas, como a sísmica 3-D, podem fornecer uma faixa de valores (intervalos de confiança da variável medida) à escala intermediária da amostragem efetuadas nos poços. A teoria para a utilização destes valores em sistemas de krigagem apresentam-se desenvolvidos por A. G. Journel [23] [24], 1986, por A. Galli [17], 1984 e por O. Debrule e C. Kostov [13], 1986. Informações a microescala tem sido útil no estudo do comportamento do variograma na origem e determinação da dimensão fractal (T. A. Hewett [20], 1986).

Um tratamento especial, tem sido dado na manipulação de variáveis não aditivas como a permeabilidade, pois sua participação nas equações de fluxo é importante na componente de transmissibilidade, que depende da distribuição da permeabilidade no interior do reservatório. Não sendo possível a composição de uma média da variável sem que se conheça as distribuições das linhas de fluxo. Portanto surge a abordagem estocástica para estes casos em que a solução analítica ou mesmo numérica fica sem possibilidades de se realizar. Estes conceitos foram bem introduzidos por H. H. Haldorsen e E. Dams-

leth [19], (1990). Em uma realização estocástica, a geoestatística permite criar modelos numéricos para esta variável, que preserva sua variabilidade e correlação espacial. Esta técnica é conhecida como simulação geoestatística condicional (C. Matheron [28], 1973, e A. G. Journel [22], 1978, e A. Montouglou e J. L. Wilson [27], 1981). A vantagem dos modelos numérico é o de se obter uma realização mais discreta deste tipo de variável, não compondo estimações (formas aditivas de tratar a variável), preservando a característica primordial da variabilidade e portanto maior semelhança com o reservatório original. Um exemplo de caracterização de reservatório é mostrado nos trabalhos de A. Z. Remacre [30], 1987. A. J. Desbarats [15], 1987, que propõem a correlação entre as proporções de arenito e argila (obtidos na simulação condicional) afim de obter resultados da relação do  $V_{sh}$  (percentual de argila) e a permeabilidade. Há também o tratamento tensorial da permeabilidade, buscando uma média para esta variável em processos iterativos a satisfazer equações básicas de fluxo (G. Le Loc'h [25], 1987).

Uma abordagem semelhante, feita através de distribuições fractais (B. B. Mandelbrot [26], 1983), cujas características são de fazer o estudo das variabilidades em diferentes escalas de observação e as correlacionar entre si. Mantendo o conceito de "self-similarity", ou seja, em cada escala de observação, a variância apresenta-se proporcional ao fator de escala (T. A. Hewett e R. A. Behrens [21], 1988). Uma aplicação prática desta modelagem fractal foi apresentada por J. L. Mathews, A. S. Emanuel e K. A. Edwards [29], 1989, em rochas clásticas do campo de Mitsue, Canadá.

Há um forte interrelacionamento entre a geoestatística e a teoria dos fractais, no que tange a parte estocástica dos fractais. Além de ambas teorias apresentarem a possibilidade de realizações estocásticas, os pesquisadores Bruno e Raspa [6] mostraram de forma analítica a relação entre a dimensão fractal e o variograma do tipo potencial (lembrando que a dimensão fractal é o objeto de definição da teoria dos fractais). Levando as duas teorias a se fundirem em uma única direção de pesquisa. Tornando-se comum em trabalhos já publicados a terminologia da geoestatística fractal.

Os simuladores de reservatório utilizam escalas de dezenas de metros para os

blocos, podendo utilizar da simulação numérica geoestatística para fornecer uma malha relativas as células de simulação para as variáveis como permeabilidade e porosidade. Alterando assim os perfis de saturação e pressões no interior do reservatório . Há também estudos de equações com termos convectivos - condutivos, em que a dispersão física e numérica ficam influenciado pelas heterogeneidades do reservatório , como estudado por T. A. Hewett [20], 1986 e A. Arya [2], 1985.

Em estudos de simulação de reservatório , tem-se mais interesse pelo que acontece na macroescala do que na microescala dos poros da rocha. A permeabilidade pode ser obtida por análises de testemunhos (amostra pontual), ou ser estimada a partir de testes de poço . Investigando, desta maneira, zonas com características petrofísicas diferentes. Para a geoestatística tanto o efeito do suporte como da escala amostral serão levados em conta. Neste tipo de estudo de diferentes escalas para uma variável não aditiva se destaca o trabalho de O. Debrule e H. H. Haldorsen [12], 1986. Mas efetivamente o trabalho que mais veio a contribuir na utilização de análise de teste como região condicionalizante foi o de F. G. Alabert [1], 1989. No capítulo 5 dar-se-á mais ênfase a este trabalho no sentido de utilização deste tipo de amostragem.

A realização de modelos estocásticos via geoestatística , especificamente em relação ao seu desenvolvimento matemático, ocasionou um grande número de aplicações em outras áreas de pesquisas. Assim os métodos de simulação apresentados por A. G. Journel [22] são desenvolvidos para a mineração , A. Mantoglou [27]na parte de hidrologia, dando ênfase ao método espectral de gerações de populações e C. G. Fox [16] na apresentação de um método espectral para populações que apresentem seus espectros da forma potencial. Isto foi útil na elaboração de um algoritmo que fosse capaz de simular geoestatisticamente o modelo variográfico de potência. Realizando, assim, uma população de características fractais.

## 2 Método Geoestatístico

### 2.1 Teoria das Variáveis Regionalizadas

Descrito por Matheron [28], procura conceituar as variáveis que apresentam uma distribuição no espaço, como variável regionalizada. No estudo deste tipo de variável conceitua-se também as variáveis aleatórias ( $z$ ) que assumem um atributo numérico com uma certa distribuição probabilística e função aleatória ( $Z$ ) definida por :

- ( i ) – Localmente,  $Z(x_i)$  é uma variável aleatória.
- ( ii ) – Espacialmente,  $Z(x_i)$  e  $Z(x_{i+h})$ , em geral, não são independentes e pode existir uma correlação entre eles.

Enquadram-se como variáveis regionalizadas, entre outras, a distribuição de permeabilidade e porosidade no reservatório de petróleo.

Para caracterização de uma variável regionalizada, utiliza-se os momentos estatísticos.

#### Momento de Primeira Ordem – Esperança

$$E\{Z(x)\} = \frac{1}{V} \int_V Z(y)dy = m(x) \quad (2.1)$$

#### Momentos de Segunda Ordem

- ( i ) – Variância “a priori”

$$Var\{Z(x)\} = E\{[Z(x) - m(x)]^2\} \quad (2.2)$$

- ( ii ) – Covariância

$$C(x_1, x_2) = E\{[Z(x_1) - m(x_1)] \cdot [Z(x_2) - m(x_2)]\} \quad (2.3)$$

- ( iii ) – Variograma

$$2\gamma(x_1, x_2) = E\{[Z(x_1) - Z(x_2)]^2\} \quad (2.4)$$

## A Hipótese de Estacionaridade

Quando se pensa em distribuição de porosidade num reservatório , determinadas hipóteses a esta população deverão ser assumidas para que se possa manipular a variável através de uma concepção probabilística. Para tal pode-se assumir que a população é estacionária , ou seja , obedeça as hipóteses de estacionaridade:

( i ) - Existir uma média (esperança que não dependa da posição  $x$  do suporte amostral).

$$E\{Z(x)\} = m \quad \forall x, \quad (2.5)$$

( ii ) - *Estacionaridade de 2ª ordem* - Existir a função covariância entre  $\{Z(x), Z(x+h)\}$  e ser dependente somente de  $h$ .

$$C(h) = E\{Z(x+h).Z(x)\} - m^2 \quad \forall x, \quad (2.6)$$

resultando em outras relações :

$$Var\{Z(x)\} = C(0) \quad \forall x,$$

onde  $C(0)$  é a covariância na origem ( $h = 0$ ) e

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

( iii ) - *Hipótese Intrínseca* - Existir uma variância finita para toda diferença  $[Z(x+h) - Z(x)]$  , que não dependa de  $x$  .

$$2\gamma(x_1, x_2) = E\{[Z(x_1) - Z(x_2)]^2\} = Var\{Z(x+h) - Z(x)\} \quad \forall x \quad (2.7)$$

Para fenômenos geológicos , como teores minerais , porosidade e permeabilidade de rochas reservatório , tais hipóteses podem ser assumidas . O resultado deste enfoque tem-se verificado nas aplicações da geoestatística na indústria mineral ( incluindo petróleo ) e estudos hidrológicos , mostrando-se como uma ferramenta útil e eficaz nos resultados.



### A função Variograma

A função de correlação mais utilizada em geoestatística é o variograma, que pode ser estimada de forma discreta (experimental) através de:

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad (2.8)$$

### Propriedades do Variograma

$$\gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(h) = \gamma(-h) \quad (2.9)$$

### Propriedade Estrutural - Comportamento na Origem

É importante as características de correlação próximas a origem no variograma, pois a estimativa utiliza-se principalmente dos valores à distâncias menores. Há os seguintes tipos de comportamento na origem:

( i ) - Variável com alta continuidade. Apresentará um comportamento hiperbólico na origem do variograma.

$$\gamma(h) \approx A|h|^2 \quad \text{para} \quad h \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

( ii ) - Comportamento linear. Característico de variáveis com maior variabilidade espacial.

$$\gamma(h) \approx A|h| \quad \text{para} \quad h \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

( iii ) - Descontinuidade na origem. Para variáveis que apresentam variabilidade não percebida pelo suporte amostral. Este comportamento é conhecido por Efeito de Pepita.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0 \quad \gamma(0) = 0 \quad (2.12)$$

Pela propriedade aditiva da função pode-se escrever :

$$\gamma(h) = C_0 + \gamma_1(h) \quad (2.13)$$

O caso limite deste tipo de comportamento é conhecido como Efeito de Pepita Puro , com a variável totalmente aleatória .

$$\gamma(0) = 0 \quad ; \quad \gamma(h) = C_0 \quad (2.14)$$

### Propriedades Anisotrópicas .

A função variograma é dependente somente de  $h$  , assumindo características vetoriais . Caso o variograma não venha depender da direção de  $h$  , estará em um caso isotrópico  $[\gamma(|h|)]$ . Mas caso apresente estreita relação de  $\gamma(h)$  com a direção do vetor  $\vec{h}$ , tratar-se-á de um caso anisotrópico.

Tipos de anisotropias :

*Anisotropia Geométrica* – Quando os variogramas apresentam uma mesma variabilidade global , mas com diferentes valores de  $|h|$  em cada direção .

*Anisotropia Zonais* – Quando o variograma , em direções distintas, apresentam diferentes variabilidades . Em modelos com patamares ( variância "a priori" ) , estas se apresentam diferentes para uma mesma amplitude .

### Modelos Variográficos Teóricos .

Há uma necessidade de equacionar os modelos variográficos experimentais para que tais possam ser manipulados com mais eficácia pelos algoritmos da geoestatística. Os modelos variográficos teóricos não foram concebidos de forma arbitrária, mas com correspondências às diversas correionalizações que ocorrem na natureza.

Os principais modelos se classificam :

( i ) – Com patamar e comportamento linear na origem :

*Modelo Esférico*

$$\gamma(r) = \begin{cases} C \cdot \left[ \frac{3r}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^3 \right] & \forall r \in [0, a] \\ C & \forall r \geq a \end{cases} \quad (2.15)$$

*Modelo Exponencial*

$$\gamma(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (2.16)$$

( ii ) - Com patamar e comportamento parabólico na origem :

*Modelo Gaussiano*

$$\gamma(r) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \quad (2.17)$$

( iii ) - Modelos sem patamar :

*Modelo Logarítmo*

$$\gamma(r) = \text{Log}(r + 1) \quad (2.18)$$

*Modelo de Potência ( " Power-Law " )*

$$\gamma(h) = \gamma_0 \cdot h^\beta \quad 0 < \beta < 2 \quad (2.19)$$

Este último modelo tornou-se objeto de estudo desta dissertação por inúmeras particularidades , como os diversos comportamentos na origem. Mas o motivo que relocaliza este modelo como objeto de estudo é a Teoria dos Fractais [26] , pois o parâmetro  $\beta$  mantém estreita relação com a dimensão fractal conforme citado por Bruno e Raspa [6]. Esta demonstração pode ser encontrada no apêndice A. A Teoria dos Fractais tem colaborado bastante no estudos de processos estocásticos e tem sido uma ferramenta útil na caracterização de reservatório de petróleo. O modelo de potência permite que se faça um paralelo com a geometria fractal e possibilita via geoestatística realizar uma modelagem numérica fractal do reservatório sob uma outra óptica . Com isto pode-se beneficiar em observar um processo sob duas teorias que se fundem em um análise estocástica para as variáveis permeabilidade e porosidade. Para efeitos de caracterização

espacial de variáveis (variografia) a geoestatística possui ferramentas mais apropriadas, anisotropias, por exemplo, e permite considerar através de estruturas imbricadas a modelização de multi-fractais (possuir dimensões fractais diferentes em diferentes escalas de observação).

## 2.2 Método de Estimativa Geoestatística

### 2.2.1 Discussão Sobre Amostragem

Sob a visão da geoestatística ter-se-ia os seguintes tipos de amostras :

( i ) - *Pontuais* - O atributo da amostra seria  $Z(x_i)$  , sendo o  $x_i$  o ponto amostrado no espaço  $R^n$  . Para tal tipo de amostragem enquadram-se as amostras de volume  $v$  muito menores que o volume  $V$  a ser amostrado ( $v \ll V$ ) .

( ii ) - *de Blocos* - Quando o volume do domínio amostrado  $v$  não é desprezível ao volume  $V$  que se deseja amostrar . Será , então , necessário definir sua geometria. Em geral admite-se suporte paralelepipedico. Na verdade pode ser qualquer um.

( iii ) - *Amostras em Intervalos de Confiança* - ( " *Soft Information* " ) - Atribuido a pontos ou blocos mas com a característica de não ter um valor preciso  $Z(x)$  e sim um intervalo de valores que a amostra pode assumir. Assim :

$$Z(x_i) \in ]a, b]$$

onde ,  $a$  e  $b$  são os atributos limites para a variável  $Z$  no ponto  $x_i$  .

A geoestatística vem conseguindo dar um tratamento a amostras deste tipo através de técnicas probabilísticas como krigagem das indicatrizes e krigagem probabilística ( " *soft kriging* " ) em trabalhos publicados por A. G. Journel [23] e [24]. Basicamente consiste determinar o valor de maior probabilidade no ponto  $x_i$  entre os atributos limites do ponto através dos dados amostrados pontuais . Sua utilização será útil em estudos de domínios com pouca amostragem ou quando a medição não tiver precisão suficiente .

No estudo de caracterização de reservatório de petróleo encontramos diversos tipos de amostragem , as quais podemos citar :

( i ) - *Testemunhos* - Trata-se de amostra pontual , cuja qualidade de in-

formação é muito boa , pois o material da rocha do reservatório contido no testemunho pode ser analisado em superfície para variáveis porosidade e permeabilidade principalmente . Em geral são poucos por campo desenvolvido pois representam alto custo , sendo mais utilizados em fase exploratória. Não ultrapassando a 10% dos poços testemunhados.

( ii ) - Perfilados - São amostras de características pontuais, uma vez que o raio de investigação dos equipamentos de perfilagem são desprezíveis em relação às dimensões do reservatório . De maneira geral permite grande refinamento de informações ao longo do poço ( informação na vertical ) . As informações que podem ser obtidas pela perfilagem são principalmente a porosidade  $\phi$  e a saturação de água irreducível (  $Sw_i$  ) , ambas variáveis regionalizadas . Outra informação poderá ser a permeabilidade , que será obtida através da utilização de fórmulas empíricas envolvendo a porosidade e a saturação de água irreducível , como :

$$K = c \cdot \frac{\phi^a}{Sw_i^b} \quad (2.20)$$

onde ; K é a permeabilidade

a , b , c são parâmetros de correlação entre as variáveis que são função principalmente do reservatório .

A confiabilidade deste tipo de formulação , depende da existência de uma quantidade suficiente de amostras pontuais ( no caso testemunhos ) para poder estabelecer a relação com a , b e c . Além disto há o fato da anisotropia em relação à permeabilidade vertical e horizontal que não se consegue inferir . Em função destas imprecisões pode-se trabalhar este tipo de informação amostral em intervalos de confiança.

Obs: O perfil é na verdade uma média móvel, já que a natureza de medida (elétrica ou radioativa) recebe influência dos valores acima e abaixo do ponto médio.

( iii ) - Análise de teste . Trata-se de uma amostragem de blocos, que irá nos fornecer principalmente uma permeabilidade média relativa a uma área de drenagem. Tratando-se de reservatórios heterogêneos, esta geometria diferencia-se da radial, sendo este problema objetivo de discussão do capítulo 5 desta tese. Em campos desenvolvidos há

bastante informações de poços testados , o que torna esta informação uma das principais formas de analisar a variável permeabilidade .

A densidade amostral no estudo de reservatório é bastante baixa principalmente no sentido horizontal do campo , pois as malhas são largas e muitas vezes irregulares . Na direção vertical , pelo contrário , há uma discretização muito fina . Por estes motivos será comum inferir amostras em intervalos de confiança , destacando dados provenientes da sísmica a três dimensões e dados geológicos.

### 2.2.2 Método de Estimativa Geoestatística – Krigagem

#### Teoria da Krigagem .

Definido por G. Matheron [28] como “*uma técnica local de estimativa através do melhor estimador linear não enviesado*”. De maneira simples seria :

$$Z_k^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z_{\alpha} \quad (2.21)$$

onde ;  $Z_k^*$  é o valor estimado de um bloco ou um ponto.

$\lambda_{\alpha}$  são os ponderadores de krigagem .

$Z_{\alpha}$  são os atributos dos pontos estimantes na vizinhança do bloco ou ponto à estimar.

O método consiste em minimizar a variância de estimativa . Adotado as seguintes relações :

*Média da krigagem , por hipótese :*

$$E\{Z_k^*\} = m. \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = m = E\{Z_v\} \quad (2.22)$$

sendo ;  $Z_v$  o valor verdadeiro do domínio estimado .

*Média do erro de krigagem :*

$$E\{Z_v - Z_k^*\} = 0 \quad (2.23)$$

A condição do não - viés:

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1 \quad (2.24)$$

Variância de Estimativa :

$$\begin{cases} E\{[Z_v - Z_k^*]^2\} = E\{Z_v^2\} - 2E\{Z_v Z_k^*\} + E\{Z_k^{*2}\} \\ E\{Z_v^2\} = \bar{C}(V, V) + m^2 \\ E\{Z_v Z_k^*\} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(V, v_{\alpha}) + m^2 \\ E\{Z_k^{*2}\} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) + m^2 \end{cases} \quad (2.25)$$

onde ;

$\bar{C}(V, V)$  é a covariância média do domínio estimado consigo mesmo , caso seja um bloco será necessário método numérico para calculá-lo .

$\bar{C}(V, v_{\alpha})$  é a covariância média entre o domínio estimado e o estimante  $\alpha$ , caso  $v_{\alpha}$  seja um bloco haverá a necessidade de métodos numéricos para calculá-lo, mas se  $V$  e  $v_{\alpha}$  forem pontuais basta utilizar a equação da covariância do modelo estudado .

$\bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta})$  é a covariância média entre os pontos estimantes, inclusive consigo próprios. Caso  $v_{\alpha}$  e/ou  $v_{\beta}$  forem do suporte de blocos, será também necessário métodos numéricos, senão basta calcular através da covariância modelada.

Retornando aos valores da equações 2.25, tem-se :

$$E\{[Z_v - Z_k^*]^2\} = \bar{C}(V, V) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(V, v_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) \quad (2.26)$$

Para adotar a condição de não -viés (equação 2.24), A equação 2.26 recebe uma parcela adicional:

$$E\{[Z_v - Z_k^*]^2\} - 2\mu \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}$$

onde ,  $\mu$  é o coeficiente de Lagrange .



Minimizando o erro de estimativa tem-se :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} \{E\{[Z_v - Z_k^*]^2\} - 2\mu \sum_\alpha \lambda_\alpha\} = 0 \quad (2.27)$$

Obtem-se o sistema de krigagem :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \bar{C}(v_\alpha, v_\beta) - \mu = \bar{C}(v_\beta, V) & \forall \beta = 1, n \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Para obter os ponderadores basta resolver o sistema de equações lineares representado matricialmente por :

$$[M_{\alpha\beta}] \cdot [\lambda] = [C_{\beta v}]$$

$M_{\alpha\beta}$  é matriz de krigagem , representando a covariância ou variograma entre as amostras.

$\lambda$  é a matriz dos ponderadores.

$C_{\beta v}$  é a matriz segundo membro, representando a covariância ou variogramas médios entre as amostras e o estimado .

*Variância de Krigagem :*

$$\sigma_k^2 = E\{[Z_v - Z_k^*]^2\} = \bar{C}(V, V) + \mu - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \bar{C}(v_\alpha, V) \quad (2.29)$$

*Propriedades da Krigagem*

Entre outras podemos citar:

( i ) - Existência e unicidade de solução .

( ii ) - A krigagem é um interpolador exato , ou seja , se um volume estimado

$V$  coincide com o suporte  $v_{\alpha i}$  de uma amostra ,tem-se :

$$Z_k^* = Z_{\alpha i} \quad \sigma_k^2 = 0$$

( iii ) - Pode-se tanto usar a função covariância quanto a função variograma  $\gamma$  , com vantagem para a covariância que torna a matriz de krigagem diagonalmente dominante .

( iv ) - Depende do suporte do estimante , geometria do estimado e da função de correlação entre as amostras para determinar os ponderadores.

( v ) - Há ortogonalidade do erro de krigagem, ou seja:

$$Cov(Z_k^*, Z - Z_k^*) = \langle Z_k^*, Z - Z_k^* \rangle = 0$$

Demonstra-se a ortogonalidade, para uma krigagem sem a condição do não -viés, com o sistema de krigagem definido por:

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta}(x) C_{\alpha\beta} = C_{\alpha x}$$

e o estimado por:

$$Z_{0k}^* = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}(y) Z_0(x_{\alpha})$$

Sabendo que  $C_{\alpha\beta} = E\{Z_0(x_{\alpha}), Z_0(x_{\beta})\}$ . A covariância,  $C_{Z^*R}$ , entre o erro de krigagem,  $R(x)$ , e o valor krigado,  $Z_{0k}^*$ , torna-se:

$$C_{Z^*R} = E\{Z_{0k}^*(y), R(x)\} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \cdot C_{\alpha R} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left[ C_{\alpha x} - \sum_{\beta} \lambda_{\beta}(x) C_{\alpha\beta} \right] = 0,$$

portanto como queria se demonstrar, o krigado e o erro de krigagem são ortogonais.

## 2.3 Modelagem Numérica - Simulação Geoestatística

No estudo de reservatório de petróleo, tem-se grande preocupação com relação a transmissibilidade do fluxo no meio poroso. Para compreensão desta propriedade necessita-se conhecer a distribuição da variável permeabilidade no interior do reservatório. A permeabilidade apresenta a característica de não ser aditiva e sua composição em forma de média fica influenciada pelo sentido de fluxo. Portanto métodos de estimativa irão tratá-la de forma aditiva e ter-se-á o problema de não revelar o verdadeiro comportamento do fluido no interior do reservatório. Sabendo que os simuladores numéricos de reservatório trabalham com métodos de diferenças finitas (discreto), há a necessidade de fornecer aos mesmos a distribuição de permeabilidade que contenha a variabilidade do domínio reservatório.

A modelagem numérica geoestatística de processos estocásticos busca o objetivo de fornecer a variabilidade espacial (mesmo variograma para população modelada), mesma média e mesmo histograma (distribuição probabilística) que a população amostral. Além desta propriedade, pode-se impor a obrigatoriedade da condicionalização ao ponto amostrado, ou seja, o atributo da variável simulada  $Z_s(x)$  tem de apresentar o mesmo valor  $Z(x)$  do ponto amostrado. A técnica busca fornecer o verdadeiro valor da variável permeabilidade dentro do domínio do reservatório. Pode também ser estendida às variáveis porosidade, compressibilidade da rocha, entre outras.

### 2.3.1 Princípio de Simulação Condicional

O problema consiste em obter uma variável regionalizada simulada  $Z_{sc}(x)$  isomórfica a variável regionalizada  $Z_o(x)$ , representativa do domínio, que tenha o mesmo momento de segunda ordem  $\gamma(h)$ . Sendo que a realização  $Z_{sc}(x)$  deve ser condicional ao

valor amostrado :

$$Z_{sc}(x) = z_0(x) \quad x \in \text{conjunto amostral} \quad (2.30)$$

É permitido escrever :

$$z_0(x) = z_{0k}^*(x) + [z_0(x) - z_{0k}^*(x)] \quad (2.31)$$

onde ;

$z_0(x)$  é o valor verdadeiro.

$z_{0k}^*(x)$  é o valor krigado no ponto  $x$  .

$[z_0(x) - z_{0k}^*(x)]$  é o erro da krigagem.

Como se interpreta  $Z$  como uma função aleatória (F.A.), pode-se escrever:

$$Z_0(x) = Z_{0k}^*(x) + [Z_0(x) - Z_{0k}^*(x)]$$

A idéia é substituir  $[z_0(x) - z_{0k}^*(x)]$ , desconhecido por um outro erro que lhe é isomórfico e conhecido. Como existe a propriedade ortogonalidade entre a krigagem e o erro de krigagem , demonstrada por A. G. Journel e J. Huijbregts [22] , expressa por :

$$E\{Z_{0k}^*(y) \cdot [Z_0(x) - Z_{0k}^*(x)]\} = 0 \quad (2.32)$$

Afirma-se que o erro de krigagem  $[Z_0(x) - Z_{0k}^*(x)]$  é isomórfico e independente do erro de krigagem da variável simulada  $[Z_s(x) - Z_{sk}^*(x)]$  por terem a mesma função do variograma . Pode-se , através da equação 2.31 e da informação anterior , dizer ter independência entre o valor krigado e o erro de krigagem da variável simulada . Diante de tais propriedades , pode-se por hipótese afirmar :

$$Z_{sc}(x) = Z_{0k}^*(x) + [Z_s(x) - Z_{sk}^*(x)] \quad (2.33)$$

A variância do erro de estimativa através da população simulada  $z_{sc}$  será o erro de krigagem de  $z_0$  mais o erro de krigagem da simulação não condicional :

$$E\{[Z_0(x) - Z_{sc}(x)]^2\} = E\{[Z_0(x) - Z_{0k}^*(x)]^2\} + E\{[Z_s(x) - Z_{sk}^*(x)]^2\} =$$

$$= 2.E\{[Z_0(x) - Z_{0k}^*(x)]^2\} = 2.\sigma_k^2 \quad (2.34)$$

onde ;  $\sigma_k^2$  é a variância de krigagem, ou seja, se usarmos um valor simulado como estimador teremos um variância do erro duas vezes maior que a krigagem.

Portanto na obtenção da condicionalização para processos estocásticos , tem-se:

( i ) - A população simulada  $Z_{sc}$  tem a mesma esperança que a condicionalizante  $Z_0$  .

$$E\{Z_{sc}(x)\} = E\{Z_0(x)\} = m \quad \forall x$$

( ii ) - Os variogramas de  $Z_0$  e  $Z_{sc}$  são idênticos .

( iii ) - O dado experimental  $z_0(x_i)$  terá o mesmo valor do simulado  $z_{sc}(x_i)$ .

De maneira esquemática, a simulação condicional constitui-se de duas populações não condicionais (uma da malha amostral e outra da malha a ser simulada) e duas krigagens (uma das amostras condicionalizantes e outra da população não condicional com a mesma malha das amostras). Feitas as diferenças desta krigagens, soma-se um ruído representado pela simulação não condicional de malha que deseja simular. Estas simulações e krigagens podem ser visualizadas através do esquema mostrado na figura 2.1.

### 2.3.2 Simulação Geoestatística Não Condicional

A geração de uma simulação não condicional é necessária para compor a simulação condicional, conferindo as mesmas características variográficas e histograma à população amostrada responsável pela condicionalização .

Existem duas categorias de métodos para a construção de simulações não condicionais :

- *no domínio do espaço ou do tempo* - A função de correlação a ser utilizada é a covariância .

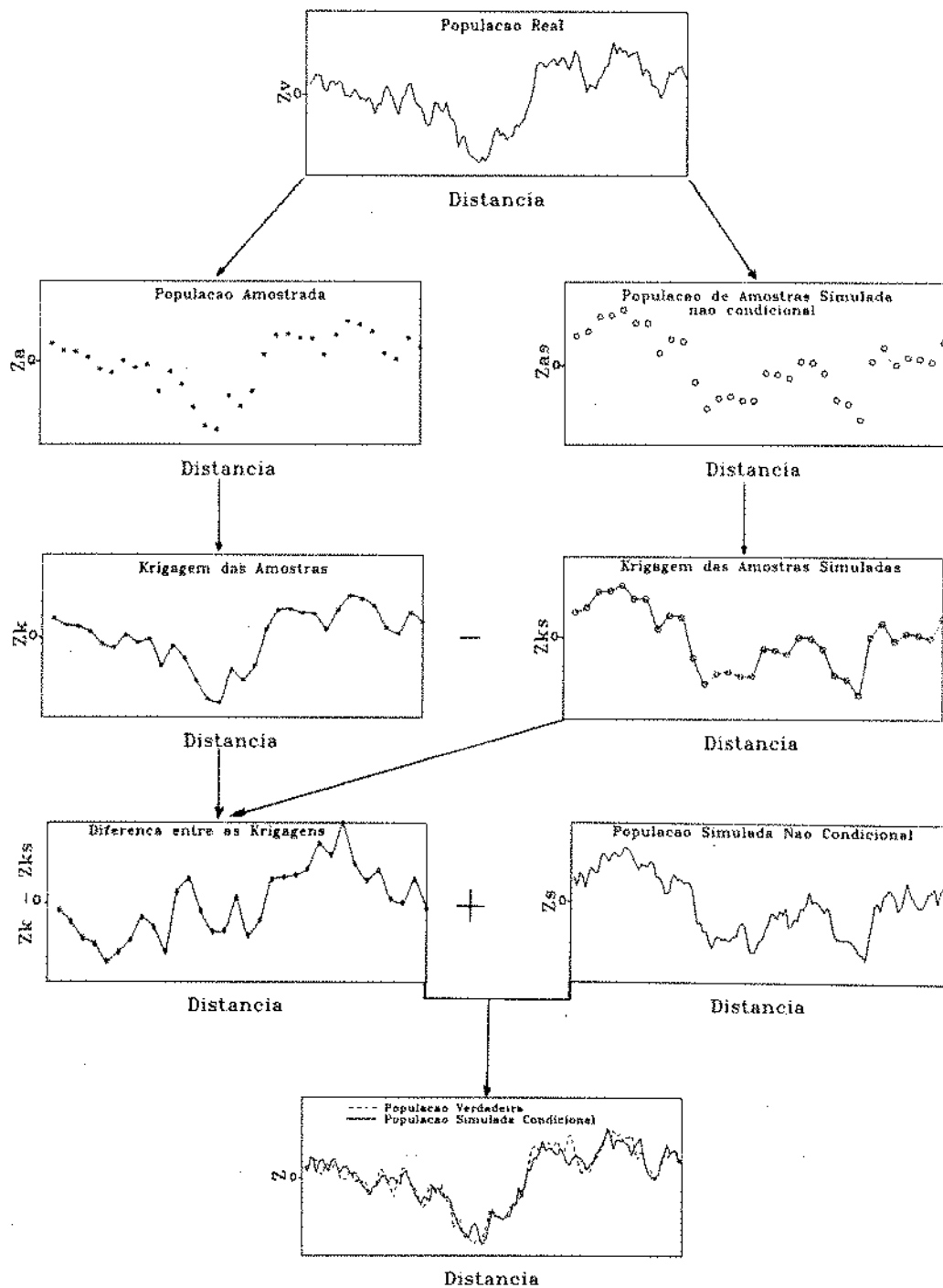


Figura 2.1: Esquema da simulação condicional

- *no domínio da frequência* - A função de correlação a ser utilizada é a de densidade espectral .

Na literatura tem sido apresentado vários métodos que se justificam para simulações a uma , duas e três dimensões com diversos parâmetros de precisão e eficiência computacional do algoritmo empregado.

É comum às duas categorias de simulações geoestatística a utilização de algoritmos de geração de números aleatórios com o objetivo de :

a) - Garantia da independência entre as simulações , caracterizando a abordagem estocástica .

b) - Obtenção de uma população Gaussiana , que é própria de muitos processos e facilita a utilização de anamorfozes para obtenção de outras distribuições probabilísticas. A realização Gaussiana é garantida pelo fato da somatória de populações de número aleatório nos métodos utilizados . Isto é resultado do Teorema do Limite Central, enunciado por; " *O resultado da soma dos eventos aleatórios de mesma distribuição tende a uma lei normal* " .

### 2.3.3 Métodos no Domínio do Espaço

#### A)- Método Matricial .

Descrito por Schever e Stoller [31] , consiste em transformar a matriz de covariância  $C$  , definida pelos elementos  $c_{ij} = C(t_i - t_j) = c(h)$  , em :

$$C = A.A^t$$

onde ; $A^t$  é a matriz transposta de A.

Uma das maneiras mais utilizadas para esta decomposição é o método de decomposição LU .

A geração dos n-componentes da simulação não condicional , $Y(t_i)$  , fica deter-

minado pela equação :

$$Y = A.x + m \quad (2.35)$$

onde ;  $x$  é o vetor da população aleatória e  $m$  é o vetor das médias .

A limitação do método está na decomposição de matrizes muito grandes , que envolvem correspondentes esforços computacionais . Para contornar este problema procura-se fazer simulações por zonas , mas isto causa uma quebra de continuidade na população simulada . Este método permite simular valores de blocos e não somente pontuais .

### B)- Métodos das Médias Móveis .

Define-se para tal método que a população simulada  $Y(t)$  é dada pela equação:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u).x(u)du \quad (2.36)$$

onde;

$x(u)$  é um conjunto de números aleatórios .

$f(t)$  é uma função peso a  $x(u)$  que varia com a direção e distância .

$u$  é a discretização utilizada .

A função peso  $f$  se correlaciona com a covariância da seguinte forma :

$$\begin{aligned} C(Y(t), Y(t+h)) &= E\{Y(t).Y(t+h)\} - E\{[Y(t)]\}E\{[Y(t+h)]\} \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u).x(u)du. \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u-v).x(v)dv\right\} - 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(t-u-v).E\{x(u).x(v)\}dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(t-u-v).C_x(u-v)dudv = C(h) \quad (2.37) \end{aligned}$$

Logo a função covariância é a convolução da função peso . De maneira discreta pode-se definir :

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-u_k).x(u_k) \quad (2.38)$$



onde ;  $u_k$  são os valores dos pontos de a malha de discretização .

Este método tem grande aplicações em simulação unidimensional , mas pode ser utilizado a duas e três dimensões com círculos e esferas com funções pesos no interior dos mesmos . Os centros dos círculos passeiam numa malha definida em plano. A realização de  $Y(t)$  apresenta um variograma isotrópico de amplitude definida , não conseguindo introduzir anisotropias zonais .

### C)- Métodos Autoregressivos .

De maneira geral pode equacioná-lo por :

$$Y(t) = \alpha_1 Y(t-1) + \alpha_2 Y(t-2) + \dots + \alpha_p Y(t-p) + x(t) \quad (2.39)$$

onde ;

$x(t)$  é uma variável aleatória independente .

$\alpha_p$  são coeficientes de autoregressão .

O variograma deste método fica vinculado aos valores de  $\alpha$  e pode representar modelos variográficos exponenciais. A sua facilidade parece atrair na realização de simulações unidimensionais ( otimização no método das Bandas Rotativas ) , mas a relação dos coeficientes de autoregressão não é simples para os diversos modelos variográficos .

Em duas dimensões pode adotar fórmulas de autoregressão do tipo :

$$Y(i, j) = \alpha [y(i-1, j) + y(i, j-1)] + x(i, j)$$

Ainda assim fica impróprio a correlação de  $\alpha$  a modelos variográficos representativos da população amostral . Esta é a limitação do método , que o torna o menos objetivo de todos.

**D)- Método das Bandas Rotativas ( TBM.)**

Os métodos anteriormente citados , quando aplicados a duas ou três dimensões, apresentam restrições em termos computacionais. O método das Bandas Rotativas, apresenta por G. Matheron [28], é aplicável a espaços n-dimensionais , a partir de simulações unidimensionais independentes cujo tempo computacional não é proibitivo .

O método não consiste da realização direta de um processo estocástico a n-dimensões , mas sim da soma ponderada de valores simulados unidimensionalmente sobre retas . Estas simulações são relativas as covariâncias unidimensionais obtidas a partir de covariâncias bi ou tri-dimensionais, cujas equações são demonstradas por A. G. Journel [22].

Caso tridimensional :

$$C_1(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon}[\epsilon.C(\epsilon)] \quad (2.40)$$

Caso bidimensional :

$$\int_0^r \frac{C_1(\epsilon)}{\sqrt{(r^2 - \epsilon^2)}} d\epsilon = \frac{\pi}{2} C_2(r) \quad (2.41)$$

onde;  $C_n$  é a covariância na n-ésima dimensão , para n=3 é comum representar somente por C.

Portanto se  $x_{D1}$  é a projeção de um ponto na reta  $D_1$  , como mostrado na figura 2.2, pode-se considerar que  $Z_1(x) = Y(x_{D1})$  , onde  $Y(x_{D1})$  é o atributo na posição  $x_{D1}$  . A variável regionalizável  $Y(x_{D1})$  é estacionária de segunda ordem , ou seja , possui  $E\{Y(x_{D1})\} = 0$  e covariância unidimensional  $C_1(h_{D1})$  . Tem-se desta forma :

$$E\{Z_1(x).Z_1(x+h)\} = E\{Y(x_{D1}).Y(x_{D1}+h_{D1})\} = C_1(h_{D1}) \quad (2.42)$$

Pelo princípio do método das Bandas Rotativas, figura 2.2:

$$Z_s(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i(u_{Di}, v_{Di}, w_{Di}) \quad (2.43)$$

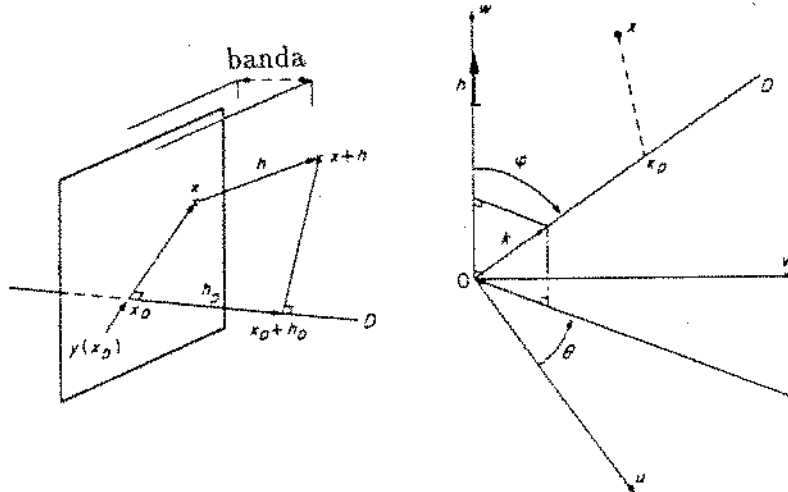


Figura 2.2: Esquema das projeções ortogonais nas bandas

onde ;  $Z_s$  é o valor simulado e  $Y_i$  é o atributo da projeção do ponto a ser simulado na  $i$ -ésima reta .

Sendo a realização de uma variável regionalizada tridimensional ,  $Z_s(x) = Z_s(u, v, w)$  , terá covariância :

$$E\{Z_s(x).Z_s(x+h)\} = C(h)$$

Além das características de tempo computacional reduzido em comparação entre os outros métodos , as Bandas Rotativas pode promover realizações para processos anisotrópicos . Basta realizar simulações independentes para cada parcela do modelo . De maneira geral :

$$C(h_u, h_v, h_w) = C_0 + C_1(h_w) + C_2(h_u, h_v) + C_3(|h|)$$

onde ;  $C_0, C_1, C_2$  e  $C_3$  são covariâncias isotrópicas .

Para duas dimensões , Montoglou e Wilson [27], propõe uma distribuição espacial das bandas de forma a produzir um feixe de  $N$  retas .Eles estudaram também o erro em função do número de linhas . Sendo o erro  $\epsilon = C_s(r) - C(r)$  e  $C_s$  a covariância dos dados simulados ,  $\epsilon$  tende para zero quando o valor de  $N$  aumenta . Tendo a ordem do limite do erro como :

$$\frac{K(\sigma^2, b)}{12N^2} \leq \epsilon \leq \frac{K(\sigma^2, b)}{6N^2}$$

onde ;  $K(\sigma^2, b)$  é o valor constante assumido para determinada simulação , função do modelo ( $b$ ) e variância ( $\sigma^2$ ) do processo .

Foi sugerido , com base neste estudo , a utilização de oito retas para modelos variográficos exponenciais . O erro cometido foi menor que 2.6 % .

Em simulações tridimensionais é comum utilizar a aproximação do icosaedro . São obtidas 15 retas ligando os pontos médios de arestas opostas de um icosaedro regular. Isto veio a facilitar o algoritmo de obtenção das retas , pois basta obter um conjunto de três retas (triedro regular) e através de 5 rotações sucessivas obter as demais retas . Outra vantagem desta disposição das retas é a vetorização das simulações unidimensionais sobre as bandas e conseqüente facilidade em encontrar o atributo da projeção em cada banda do ponto simulado .

Em geral as simulações unidimensionais independentes são feitas utilizando o métodos das médias móveis ou métodos espectrais .

#### 2.3.4 Métodos no Domínio da Frequência

Este método consiste em utilizar a função a densidade espectral  $S(w)$  , que contem as mesmas informações da função covariância sobre a população a ser simulada . Estas funções se interrelacionam por :

$$S(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(w.r).C(r)dr \quad (2.44)$$

A população a ser realizada  $Y(t)$  é dada por Shinozuka [33]:

$$Y(t) = 2 \sum_{k=1}^M \sqrt{[S_1(w_k)\Delta w]} \cos(w'_k t + \phi_k) \quad (2.45)$$

onde ;

$$w'_k = w_k + \delta w \text{ para } k = 1, 2, \dots, M .$$

$$w_k = \left[ k - \frac{1}{2} \right] . \Delta w$$

$\Delta w = \frac{\Omega}{M}$  sendo  $[-\Omega, \Omega]$  a região de significância da função densidade espectral.

$\delta w$  é uma frequência aleatória adicional para evitar periodicidade .

$\phi_k$  são ângulos aleatórios entre 0 e  $2\pi$  .

Este método é geralmente empregado quando se tem dificuldade de obter a equação da covariância bidimensional para alguns modelos de variograma, por exemplo, o exponencial , o gaussiano e o esférico (a utilização da fórmula 2.41 não é imediata para tais modelos). Daí sua larga utilização associado ao método das Bandas Rotativas [22] e [27].

Outra utilização é em modelos de variogramas sem patamar , que torna difícil a solução analítica para a função peso  $f$  de convolução da covariância no método das Médias Móveis . Para esse estudo utilizou-se o modelo variográfico de potência, simulando o através de métodos no domínio da frequência, pelo fato de não apresentar patamar. No apêndice A encontra-se a discussão e desenvolvimento matemático do algoritmo para simulação geoestatística unidimensional do modelo potencial .

### 2.3.5 Método das Bandas Rotativas para Variogramas de Potência

Utilizou-se de um algoritmo de realização de um processo estocástico no espaço  $R^n$  em malha regular bi ou tri-dimensional com momento estatístico de segunda ordem conhecido ,  $\gamma \propto h^\beta$  , com distribuição normal para a população . O algoritmo baseia-se no método das Bandas Rotativas cujas retas (bandas) estão dispostas na aproximação do

icosaedro .

Na simulação unidimensional sobre as retas, utilizou-se o método espectral no domínio da frequência (apêndice A). Em função disto apresenta as discretizações nas bandas um valor fixo e necessariamente uma potência de 2. Isto causa um aumento no vetor que contem os atributos simulados de todas as bandas. Ter-se-á um vetor da ordem de  $15 \times 2^N$  elementos, onde N é a potência utilizada no algoritmo do método espectral. Para obter boa precisão recomenda-se  $N=9$ , ou seja, 512 divisões por reta. No caso das Médias Móveis o número de discretização nas bandas ficava influenciado pelo tamanho da malha e a amplitude do modelo variográfico (esférico e exponencial) . As alterações nos valores da discretização são menores que as usadas no método espectral.

Pela própria solução da subrotina de geração unidimensional , sempre se tem a preocupação com a forma do variograma  $\gamma(h) \propto h^\beta$ , portanto para diferentes valores de  $\beta$  tem-se valores de variância da população final diferentes que para um caso específico devem ser normalizadas. Com isto a forma  $h^\beta$  permanece e se obtem a população com o variograma requerido  $\gamma(h) = \gamma_0 \cdot h^\beta$ . Alguns outros fatores também influenciam esta variância, como a discretização das bandas, tamanho da malha a ser simulada e o tamanho do bloco desta malha.

É importante salientar que o comportamento próximo a origem do variograma é de fundamental importância, pois na condicionalização trabalha-se com variogramas médios a distâncias da ordem dos primeiros passos (vizinhança), daí a necessidade do comportamento na origem da população gerada ser fiel ao modelo variográfico desejado.

Para a verificação da qualidade deste método em variograma de potência, buscou-se estudar casos excêntricos de  $\beta = 0.5$  e  $\beta = 1.5$ . Comparando o variograma experimental das populações geradas com o variograma modelado. Como as populações têm diferentes variâncias, procurou-se compará-las pelo erro médio absoluto da variável normalizada, ou seja, o erro absoluto percentual em relação ao valor do modelo ajustado, o erro médio normalizado e o desvio padrão em relação a este erro. Os variogramas

experimentais foram realizados no plano tomando-se somente um nível da total população simulada.

### Influência da Dimensão Vertical do Bloco

A primeira proposição de estudo foi verificar a influência do tamanho do bloco a ser simulado, cujos resultados podem ser mostrados na fig 2.2 e tabela 2.1 e 2.2.

dimensão do bloco	$\beta = 0.5$		
	erro médio absoluto (%)	erro médio normalizado (%)	desvio padrão (%)
100 x 100 x 20	2.7117	-0.1979	2.2914
100 x 100 x 30	3.9554	-0.8466	4.9295
100 x 100 x 50	3.9099	-0.6614	5.3265

Tabela 2.1: Estudo do erro para simulações em malha 100 x 100

dimensão do bloco	$\beta = 1.5$		
	erro médio absoluto (%)	erro médio normalizado (%)	desvio padrão (%)
100 x 100 x 20	1.5400	-0.0544	3.3829
100 x 100 x 30	3.8503	0.3684	4.7320
100 x 100 x 50	9.5530	0.7609	11.6283

Tabela 2.2: Estudo do erro para simulações em malha 100 x 100

Observa-se que quanto menor a dimensão vertical em relação as demais melhores são os resultados obtidos, tanto em termos do erro como da variabilidade deste erro. Para  $\beta > 1.0$  os resultados são melhores do que  $\beta < 1.0$ , pois quando  $\beta \rightarrow 2.0$  aproxima-se comportamento parabólico, ou seja, a variável se torna mais regular. Apesar que quando aumenta-se o valor da dimensão vertical do bloco, o aumento na variação do erro é mais sensível em  $\beta > 1.0$ , chegando no caso de  $z=50m$  ser pior que  $\beta < 1.0$ .

O método espectral é mais recomendável quando utilizado a duas dimensões. Isto também pode ser entendido pelo fato dos cossenos diretores das retas estarem próximas ao plano dos pontos simulados e as projeções  $Y(x_{Di})$  serem mais variáveis e representativa do espaço  $R^n$ . Mas pelas tabelas 1 e 2 pode-se notar que tal influência não é tão marcante



para o caso de  $\beta = 0.5$ , apesar de o comportamento próximo a origem do variograma experimental ser mais favorável quando a dimensão vertical é muito menor que a lateral. No estudo de comportamento de reservatório, este fato é muito próprio, pois as dimensões laterais são muito superiores às que na direção vertical. Vindo a favorecer a utilização do método das Bandas Rotativas aliado ao método espectral unidimensional na geração de modelos numéricos para o reservatório, quando as variáveis envolvidas apresentarem características fractais (modelo de potência).

### Influência do Número de Elementos Gerados

Outro fator analisado é a influência do número de elementos gerados (robustez estatística). Pela tabela 2.3 e 2.4 e fig 2.2:

dimensão do bloco	$\beta = 0.5$		
	erro médio absoluto (%)	erro médio normalizado (%)	desvio padrão (%)
100 x 100	2.7117	-0.1979	2.4914
50 x 50	3.7250	-0.2513	4.6628
25 x 25	3.9200	-0.9749	4.4547

Tabela 2.3: Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20

dimensão do bloco	$\beta = 1.5$		
	erro médio absoluto (%)	erro médio normalizado (%)	desvio padrão (%)
100 x 100	1.5400	-0.0544	3.3829
50 x 50	5.6004	-1.2970	8.4717
25 x 25	9.7379	-2.6650	12.7997

Tabela 2.4: Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20

Pode-se notar no caso que para  $\beta > 1.0$  é importante o número de elementos

gerados. O erro e desvio deste erro cresce com a diminuição de número da população simulada. Já para  $\beta < 1.0$  os valores do desvio padrão quase não sofrem alteração, mas em compensação há um aumento do erro médio com a diminuição dos elementos da malha. O fato ocorre por substituir integrais por somas discretas e quanto menos discretizadas, maiores serão as oscilações estatísticas não controladas. Afastando mais e mais das hipóteses da geração de um processo isotrópico e estacionário de segunda ordem. A geração de uma população pequena de pontos ou blocos simulados é sempre um fator restritivo em termos de estudos estocásticos, estando ciente do aumento da imprecisão do método das Bandas Rotativas.

Há a influência do número de divisões das bandas, próprio do algoritmo espectral. Dentre os resultados mostrados em tabela 2.5 e 2.6 e fig 2.2, houve grande diferença de acuracidade de resultados ao se diminuir o número de divisões em uma potência de 2.

Divisões nas Bandas			$\beta = 0.5$		
			erro médio absoluto (%)	erro médio normalizado (%)	desvio padrão (%)
	512		2.7117	-0.1979	2.4914
	128		8.7440	-0.2308	11.0045

Tabela 2.5: Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20 malha 100x100

divisões nas Bandas			$\beta = 1.5$		
			erro médio absoluto (%)	erro médio normalizado (%)	desvio padrão (%)
	512		1.5400	-0.0544	3.3829
	128		2.9344	-0.4663	3.9077

Tabela 2.6: Estudo do erro para simulações em um nível para blocos de dimensões 100x100x20 e malha 100x100

Este tem-se verificado um problema do método espectral, pois necessita de um

número de discretizações da ordem de  $2^N$ , alterando de forma significativa as divisões com pequena variação do expoente  $N$ . Torna-se impraticável buscar maior precisão aumentando a discretização no método espectral unidimensional, que acarretaria uma grande alocação de memória no computador. Além disto, há envolvido neste problema duas fontes de erro, uma da própria geração unidimensional nas bandas e outra do método das Bandas Rotativas no que se refere às projeções dos pontos  $x_i$  em seus respectivos  $x_{D_i}$  (projetados) de cada banda.

Por hipótese a realização do processo deveria ser isotrópica, mas quando investiga o processo discreto, fazendo aproximações das hipóteses, verifica-se uma certa anisotropia, figura 2.3. A anisotropia é mais acentuada para  $\beta > 1.0$ . Diminuindo com o aumento da população simulada, indicando que a fonte de erro está na falta de robustez da população gerada (poucos dados). É importante observar que próximo a origem não ocorre anisotropia, não constituindo, em termos práticos um problema.

Desta maneira pode-se mostrar que é possível simular através da geoestatística o modelo variográfico de potência. Tendo a restrição ao uso, em populações de muito poucos elementos simulados, sabendo que para tal as hipóteses intrínseca de estacionaridade e dos próprios métodos de simulação de processos estocásticos ficam comprometidas do ponto de vista teórico, mas do ponto de vista de sua aplicabilidade será utilizável para os fins em questão .

Como em geral acontece que se deseja simular muitos pontos esse problema não chega ser um impedimento. Pode-se também simular mais pontos que o necessário e reter somente o desejado. Neste caso é preciso verificar se pontos retidos obedecem o variograma imposto.

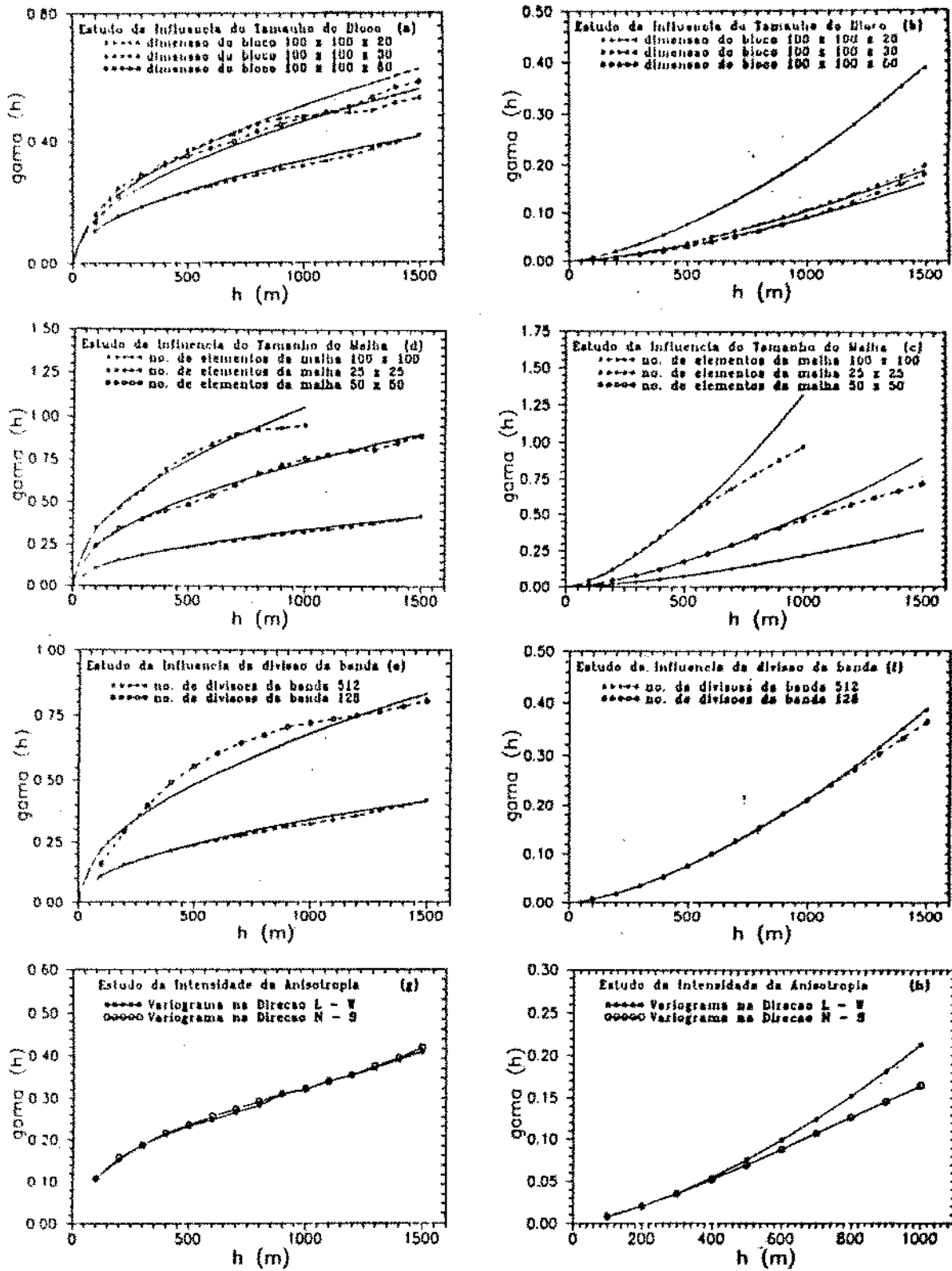


Figura 2.3: Estudo dos variogramas experimentais obtidos para diversas variáveis de simulação com  $\beta = 0.5$  e  $\beta = 1.5$

### 3 Simulação Numérica de Reservatório

O objetivo deste capítulo é fazer uma descrição sucinta da simulação numérica do comportamento de fluxo de um reservatório. Utiliza-se o estudo de fluxo de um escoamento multifásico do tipo óleo, água e gás, com água e óleo imissíveis e gás solúvel somente no óleo. Caracterizando o sistema conhecido como modelo  $\beta$  ou "Black-oil", que já foi exaustivamente estudado em literatura. Nesta descrição procura-se dar noções sobre o equacionamento do modelo, método de solução e o tratamento das condições de contorno.

As equações parciais de fluxo na direção x podem ser escritas por :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_w \left( \frac{\partial p_w}{\partial x} - \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_w}{B_w} \right) + q_w \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_o \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right) + q_o \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_g \left( \frac{\partial p_g}{\partial x} - \gamma_g \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ R_s \lambda_o \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left( R_s \phi \frac{(1 - S_g - S_w)}{B_o} + \phi \frac{S_g}{B_g} \right) + R_s q_o + q_g \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$p_o - p_w = P_{cow} \quad (3.4)$$

$$p_g - p_o = P_{cog} \quad (3.5)$$

Define-se :

l, como a fase do componente, que pode ser óleo(o), água(w) e gás(g).

$p_l$ , a pressão na fase l.

$\gamma_l$ , a densidade em termos da pressão na fase l.

$z$ , a distância vertical.

$q_l$ , a vazão da fase l.

$S_l$ , a saturação da fase l.

$R_s$ , razão de solubilidade entre óleo e gás em solução.

$\phi$ , porosidade.

$B_l$ , fator volume de formação.

$P_{cow}$ , pressão capilar entre óleo e água.

$P_{cog}$ , pressão capilar entre óleo e gás.

$\lambda_l$ , transmissibilidade da fase l, definida por:

$$\lambda_l = \frac{k_{rl}}{\mu_l B_l} \cdot K$$

$k_{rl}$ , a permeabilidade relativa da fase l.

$\mu_l$ , a viscosidade da fase l.

$K$ , a permeabilidade absoluta.

O método utilizado para resolver este sistema de equações diferenciais parciais é o das diferenças finitas, que após equacionado, resultará em um sistema da forma matricial. Cujo grau de dificuldade de solução será em função do método adotado de solução como o tratamento das não linearidades das equações e otimizações na solução da matriz do sistema. Portanto algumas destas particularidades serão apresentadas :

( i ) - *Discretização do tipo bloco centrado* - Divide-se uma dimensão L em M blocos e localiza-se o ponto da malha (i) no centro deste bloco.

( ii ) - *Tratamento das Transmissibilidades* - Tomando o ponto i como centro do bloco l, necessitamos de saber nas equações discretas o valor da transmissibilidades T na posição  $i \pm 1/2$ . Por consequência da natureza destas equações adota-se uma maneira de ponderar as permeabilidades relativas através do esquema conhecido como "upstream-weighting", definido por :

$$k_{rl_{i+1/2}} = \begin{cases} k_{rl}(S_{Wi}) & \text{fluxo } i \Rightarrow i + 1 \\ k_{rl}(S_{Wi+1}) & \text{fluxo } i + 1 \Rightarrow i \end{cases} \quad (3.6)$$

( iii ) – *Tratamento das Não Linearidades* - Muitas das funções que compõem as equações discretas são relacionadas com as pressões e saturações que são as incógnitas do sistema. As funções da pressão são consideradas não linearidades fracas e podem ser tratadas no n-ésimo delta de tempo desde que o incremento não seja muito grande a ponto de não garantir a convergência da solução . Enquadra-se em linearidades fracas a razão de solubilidade, os fatores volume de formação , a densidade dos fluidos e viscosidade. As não linearidades fortes ficam por conta das funções de saturação e pressão capilar e são principalmente as permeabilidades relativas. Devem ser tratadas no n-ésimo tempo da variável saturação .

### 3.1 Método de Solução do Sistema de Equações

Foi utilizado o programa PC-BOAST, que emprega a solução do tipo IMPES (Método Implícito na Pressão e Explícito na Saturação ), descrito por Danilov et al. [9] e equacionado por Breitenbach et al. [5] e Coast [7]. Possui a vantagem de tratar as não linearidades fortes explicitamente (no passo de tempo n), diminuindo o cálculo computacional. Sendo que para o cálculo implícito da pressão no tempo n+1, as linearidades fracas podem ser calculadas no tempo n. O sistema implícito em relação a pressão torna-se então da forma linear. Reduzindo o número de operações para a solução do sistema.

Obtido o vetor de pressões  $p_i^{n+1}$ , calcula-se o valor das saturações no passo de tempo n+1, a partir da substituição dos valores de  $p_i^{n+1}$  nas equações 3.1, 3.2 e 3.3. Quando conhecidos os valores de  $S_l^{n+1}$ , novas pressões capilares são calculadas, que conjuntamente às saturações serão utilizadas no cálculo implícito das pressões no passo seguinte.

A convergência do método IMPES não é garantida para toda variação do tempo, necessitando determinar as máximas variações de pressão e saturação por intervalo de tempo, para garantir a convergência e diminuir os erros numéricos introduzidos.

De maneira sucinta, poderemos escrever as equações de diferenças finitas

através de um sistema matricial de equações parabólicas , cujas variáveis seriam  $p^{n+1}$ :

$$TP^{n+1} = D(P^{n+1} - P^n) + G + Q$$

onde; T é a matriz de banda das transmissibilidades, D é a matriz diagonal dos termos de acumulação , G é a matriz que inclui os termos de gravidade e pressão capilar, Q é a matriz coluna dos termos fontes ou sumidouro e P a matriz coluna das pressões no tempo n e n+1.

Para a solução do sistema matricial no programa PC-BOAST, escolheu-se o método "LSOR". Trata-se de um método iterativo com um fator peso  $\omega$  que o diferencia do método Gauss-Seidel. Assim:

$$t_{ij}p_{ij}^{\nu+1} = \omega \left[ \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}p_{ij}^{\nu+1} + \sum_{k=i+1}^N s_{ik}p_{ik}^{\nu} + x_{li} \right] + (1 - \omega)p_{li}^{\nu} \quad (3.7)$$

onde ;  $x_{li}$  são os termos independentes, representados por:

$$x_{li} = d_{li} \cdot p_{li} + g_{li} + q_{li}$$

$$s_{ij} = d_{ij} - t_{ij}$$

A velocidade e o número mínimo de iterações depende do fator  $\omega$  , que no estudo em questão a duas dimensões utilizou-se 1,7. Pode-se fazer uma otimização do valor de inicial de  $\omega$ , através do número de iterações em cada passo de tempo.

### 3.1.1 Condições de Contorno

#### Condições Iniciais

Determinada pela pressão e saturações iniciais em cada bloco. Para t=0, tem-se:

$$p_l(0) = p_{li} \quad (3.8)$$

$$S_l(0) = S_{li} \quad (3.9)$$



Em geral, nos reservatórios sub-saturados, a saturação de gás é nula e a saturação de água é equivalente a saturação irreducível.

### Condições de contorno Externas

O simulador utiliza-se de malha regular e retangular, com o limite do reservatório fechado ao fluxo. Isto se traduz por :

$$p(0, y, z, t) = p(1, y, z, t) \quad (3.10)$$

$$p(n + 1, y, z, t) = p(n, y, z, t) \quad (3.11)$$

Isto também é válido para as coordenadas  $y$  e  $z$ .

### Condições de Contorno Internas

Trata-se de como é manipulado o termo de vazão (termo fonte ou sumidouro) representado pelo poço na célula  $i$ . No simulador o poço ocupará a região central do bloco e com a utilização do índice de produtividade (IP) a definição da vazão será :

$$Q_o = IP \cdot \left( \frac{\lambda_o}{B_o} \right) (p - p_{wf}) \quad (3.12)$$

Sendo  $p$  a pressão do bloco que contem o poço e  $p_{wf}$  a pressão no poço .

O índice de produtividade será calculado em função das condições do reservatório e do poço , bem como o fato do fluxo ser radial ao redor do poço . O índice de produtividade fica equacionado :

$$IP = \frac{0.00216 \cdot K \cdot h}{Ln \left[ \frac{0.121 \sqrt{D_x \cdot D_y}}{r_w} \right] + S} \quad (3.13)$$

onde ;

$K$  é a permeabilidade absoluta da camada , em milidarcy .

$h$  é a espessura da camada, em metros .

$D_x$  é a dimensão do bloco na direção x, em metros .

$D_y$  é a dimensão do bloco na direção y, em metros .

$r_w$  é o raio do poço , em metros .

S é o fator de película ("skin ") .

O tratamento do termo de vazão poderá ser feito das seguintes formas :

*Caso 1 - Vazão de óleo especificada .*

Para o estudo a duas dimensões, tem-se as equações de vazão para os outros componentes:

Água :

$$Q_w = Q_o \left( \frac{\lambda_w/B_w}{\lambda_o/B_o} \right) \quad (3.14)$$

Gás :

$$Q_g = Q_o \left( \frac{\lambda_g/B_g}{\lambda_o/B_o} \right) + (R_{so})Q_o + (R_{sw})Q_w \quad (3.15)$$

*Caso 2 - Vazão total especificada .*

Define-se razão de mobilidade da fase l ,  $\alpha_{lT}$  :

$$\alpha_{lT} = \left( \frac{\lambda_l}{\lambda_o + \lambda_w + \lambda_g} \right) \quad (3.16)$$

A vazão da fase l será :

$$Q_l = \left( \frac{\alpha_{lT}}{\alpha_{oT} + \alpha_{wT} + \alpha_{gT}} \right) Q_T \quad (3.17)$$

*Caso 3 - Tratamento implícito com pressão de poço especificada ( $p_{wf} = cte.$ )*

$$Q_o = \left[ (IP) \cdot \frac{\lambda_o}{B_o} \right]^n (p^{n+1} - p_{wf}) \quad (3.18)$$

*Caso 4 - Tratamento explícito com pressão de poço especificada ( $p_{wf} = \text{cte.}$ ) .*

$$Q_o = \left[ (IP) \cdot \frac{\lambda_o}{B_o} \right]^n (p^n - p_{wf}) \quad (3.19)$$

## 4 Estudo da Densidade Amostral para Modelagem Numérica

Neste capítulo tem-se por objetivo discutir o número de amostras pontuais (poços perfilados) nas fases de desenvolvimento de um campo petrolífero e a interrelação desta amostragem no tratamento geoestatístico afim de caracterizar o reservatório. Este estudo deseja indicar em que melhor fase seria feito o uso da ferramenta geoestatística. Procura-se mostrar que não é possível formular um número ideal de amostras para caracterizar um reservatório. Isto dependerá da forma e do grau da heterogeneidade, daí a importância da geoestatística acompanhar todas as fases do projeto de um campo, para diagnosticar as heterogeneidades e determinar a incorporação de novas amostragens ou outras já disponíveis (análises de teste, sísmica a 3-D, etc.).

Outro ponto deste capítulo será de verificar o comportamento do reservatório quando for homogêneo e com diferentes distribuições de heterogeneidades, apesar de apresentar o mesmo variograma. Fazendo disto um estudo complementar à importância da caracterização do reservatório.

A metodologia básica para tal estudo será a criação de um reservatório hipotético e através de diversas campanhas de amostragens, tentar reproduzir o reservatório hipotético através de modelagem geoestatística e obtenção do histórico do campo. Há a preocupação com uma metodologia que atenda à proposta deste capítulo de forma sistemática, sem o compromisso total com a realidade de um campo de petróleo. Por exemplo, utilizou-se uma vazão elevada para otimizar o tempo da simulação de fluxo, atingindo mais rapidamente os critérios de fim de simulação. A forma adotada do reservatório será geométrica quadrada. Supos-se ainda que todos poços tivessem a mesma vazão e tempo de produção, entre outros detalhes do próprio simulador que não fazem parte da realidade, mas que permitirão fazer uma análise clara e objetiva da proposta do estudo.

## 4.1 Reservatório Hipotético

Utilizou-se a palavra hipotético e ideal para se referir ao mesmo reservatório, ou seja, com realizações de processos estocásticos pretende-se obter uma imagem ideal do reservatório hipotético. O reservatório será descrito do ponto de vista de suas características petrofísicas (porosidade e permeabilidade), características de fluido e condições iniciais.

### Características Físicas do Reservatório

Trata-se de um reservatório de forma quadrada, representado por 256 blocos (malha  $16 \times 16$ ) de dimensões de  $200 \times 200 \times 80$  metros por bloco, onde são conhecidas as propriedades petrofísicas (porosidade, permeabilidade e saturação inicial de água) mostrando como a máxima representação de heterogeneidade. A malha de heterogeneidade foi criada a partir da simulação geoestatística não condicional de um modelo variográfico de potência:

$$\gamma(h) \propto h^\beta$$

As características estatísticas das variáveis ficam representadas por:

*Porosidade :*

Média = 20.779 %

Histograma – A variável porosidade apresenta uma distribuição probabilística normal.

Variância = 4.0586 %

Variograma :

$$\gamma(h) = 0.00865h^{0.83}$$

O valor de  $\beta = 0.83$  foi encontrado na literatura (T. A. Hewett [20]), para o qual gerou-se uma população de 256 pontos simulados ( $y_i$ ) não condicionais de média zero

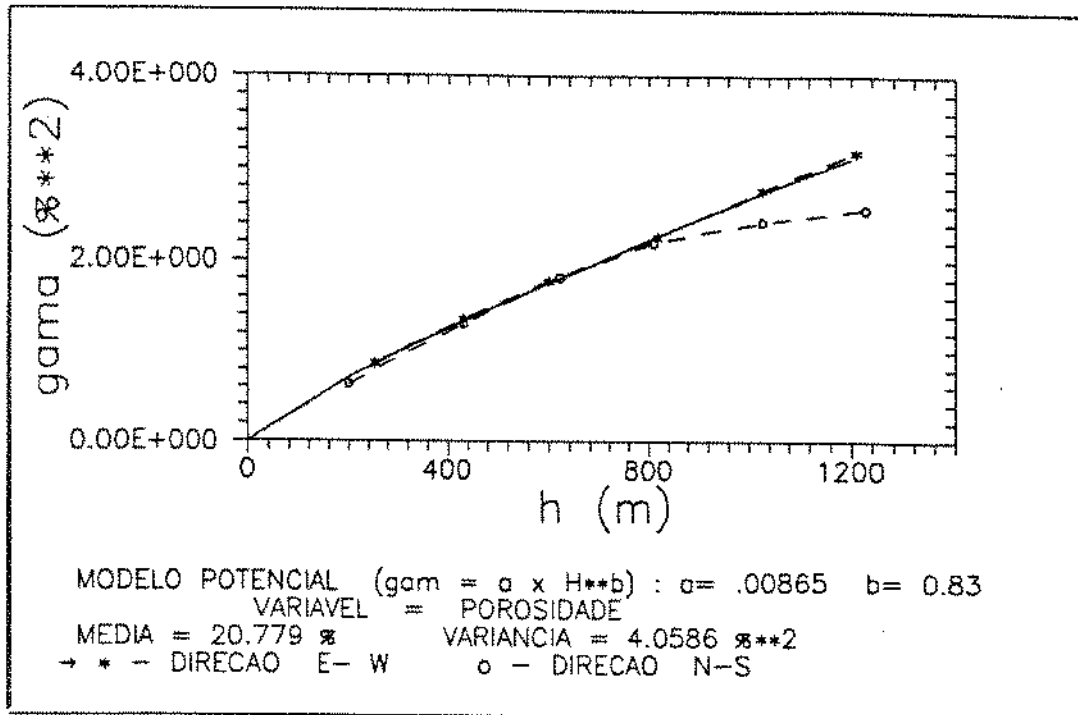


Figura 4.1: Variograma experimental do reservatório hipotético para a variável porosidade e variância teórica igual a 1. Sobre esta população ( $y_i$ ) de distribuição gaussiana, foram feitas anamorfoses (mudanças na distribuição probabilística) para adequar as variáveis que se deseja estudar. Então para obter a porosidade fez a seguinte mudança de variável (função de anamorfose):

$$\phi_i = 2.5y_i + 15$$

*Permeabilidade - K*

Média =  $1,473.10^{-13}m^2$  (149,25 mD) e 4,9692 para o logaritmo da permeabilidade, em milidarcy.

Histograma - Comportamento log-normal para a variável permeabilidade.

Variância =  $1,65.10^{-27}m^4$  (1693,33  $mD^2$ ) e 0.007215 para o  $\ln(K)$ , com a permeabilidade em milidarcy.

Variograma do logaritmo da variável :

$$\gamma(h) = 1.55 \times 10^{-3}h^{0.83}$$

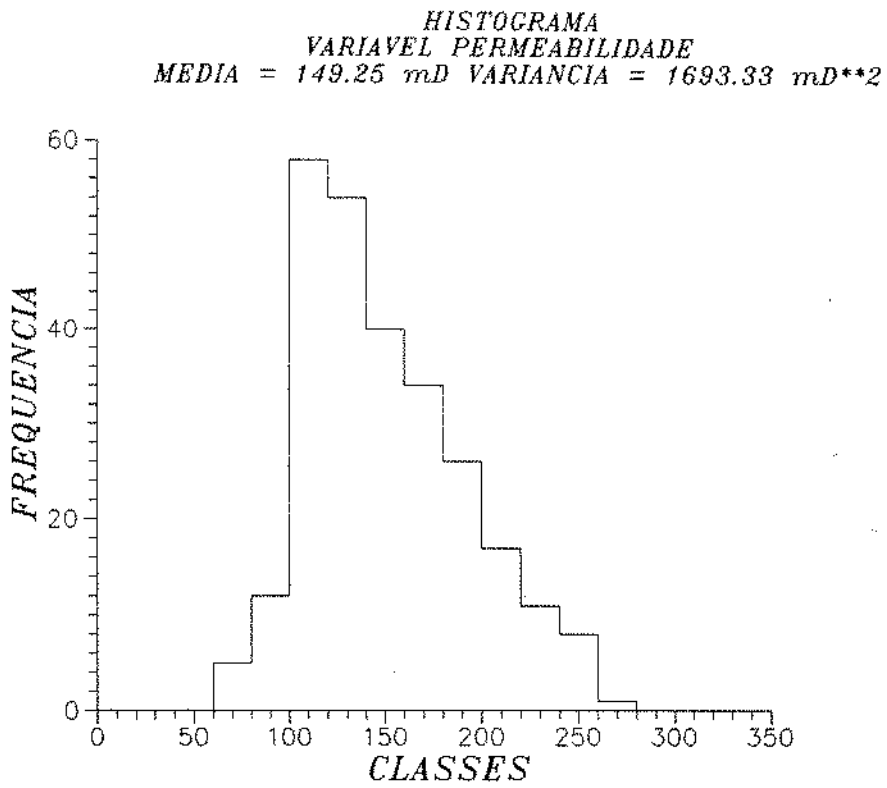
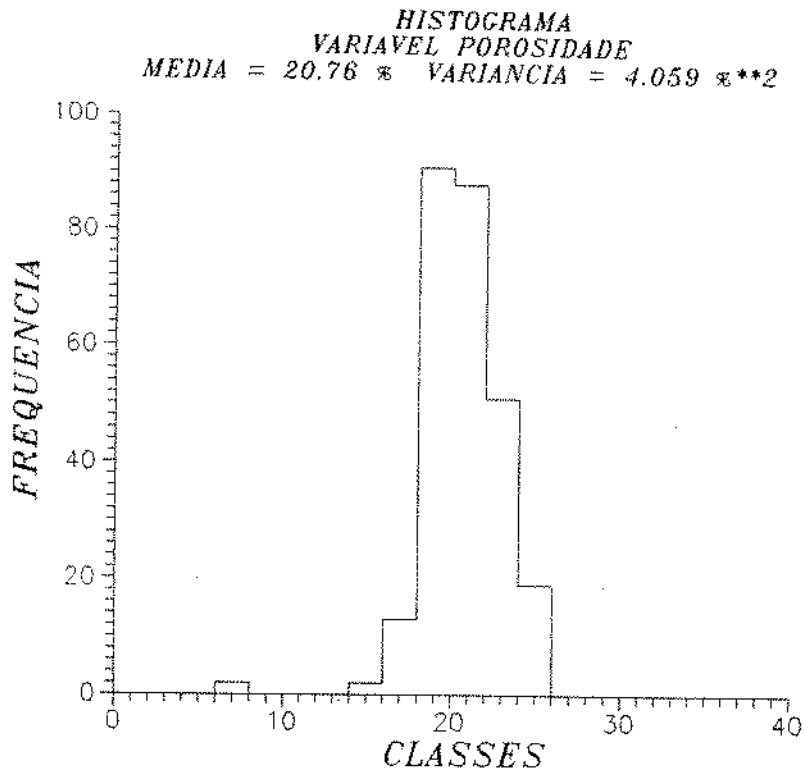


Figura 4.2: Histograma da porosidade e permeabilidade

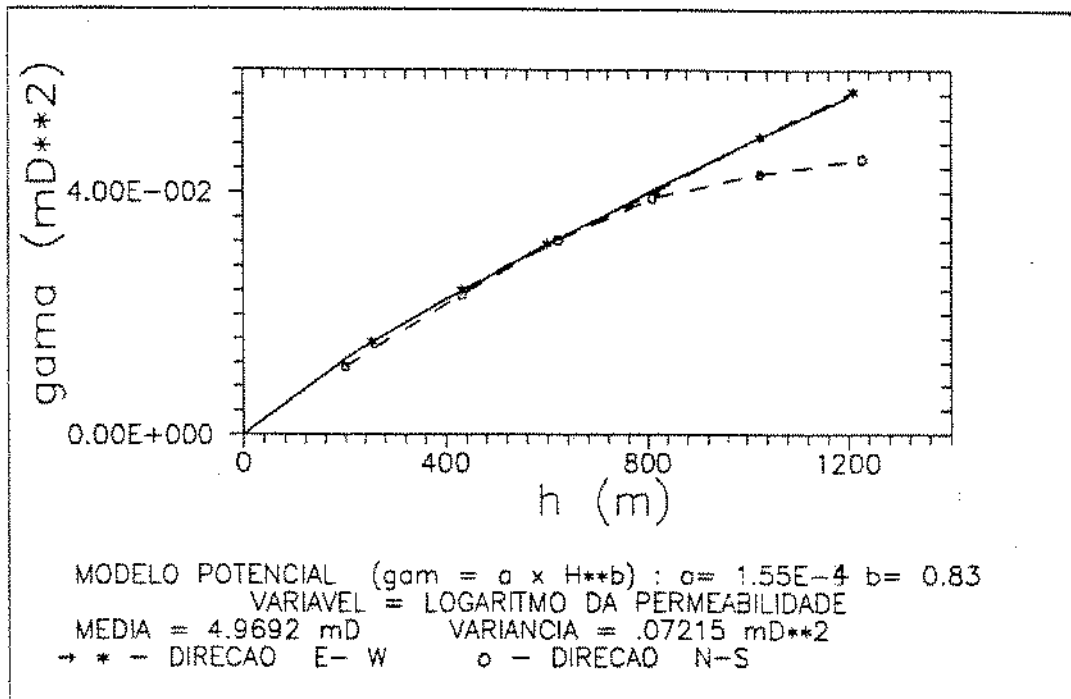


Figura 4.3: Variograma experimental do reservatório hipotético para a variável permeabilidade

Relação com a população não condicional gerada (função de anamorfose):

$$K = e^{\left(\frac{y_i}{40} + 4.2\right)}$$

*Saturação de Água Inicial .*

Deseja-se obter produção de água desde o início da simulação . Optou-se então por uma relação entre porosidade e permeabilidade. Citado em manuais de empresas de perfilagem para rochas clásticas:

$$S_{wi} = \frac{100 \cdot \phi^{2.25}}{\sqrt{K}}$$

com a permeabilidade (K) em milidarcy, a porosidade ( $\phi$ ) adimensional e a saturação inicial ( $S_{wi}$ ) adimensional.

As distribuições espaciais destas variáveis podem ser visualizadas através de mapas de iso-valores.



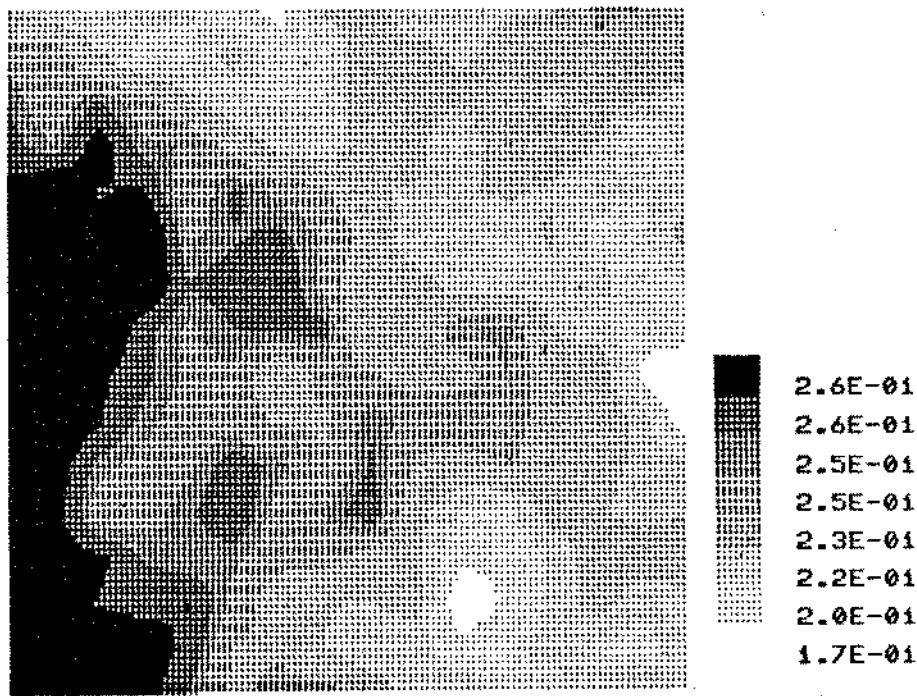
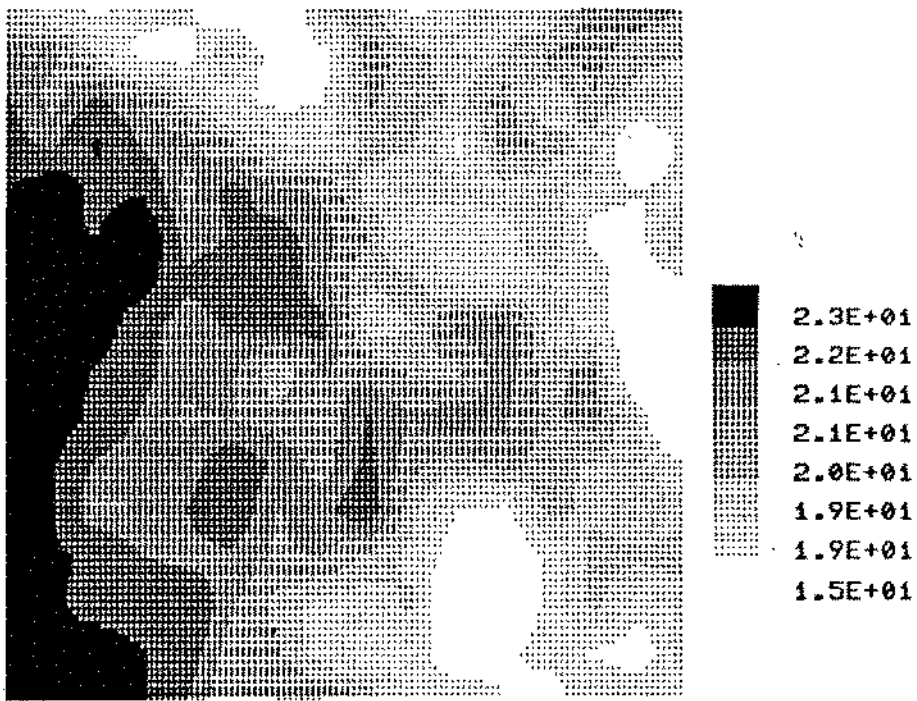


Figura 4.4: Mapas de iso-porosidade e iso-saturação de água para o reservatório hipotético

### Condições Iniciais do Reservatório

Supos-se um reservatório inicialmente sub-saturado, com elevada pressão inicial, para melhor observação do período de sub-saturação. A pressão de saturação é de 27.58 MPa e a pressão inicial de 62.16 MPa, fugindo das pressões médias dos campos conhecidos.

Considerou-se as pressões capilares entre as fases como sendo nulas. O topo do reservatório encontra-se a 2543.5 metros em sub-superfície. Em termos de viscosidade do óleo, pode ser classificado como pouco viscoso, com o valor de  $10^{-3}$  kg/m.s a temperatura de 333 K ( $60^{\circ}$  C) na pressão atmosférica. Por fim, adotou-se as curvas de permeabilidades relativa ficam representadas na figura 4.5.

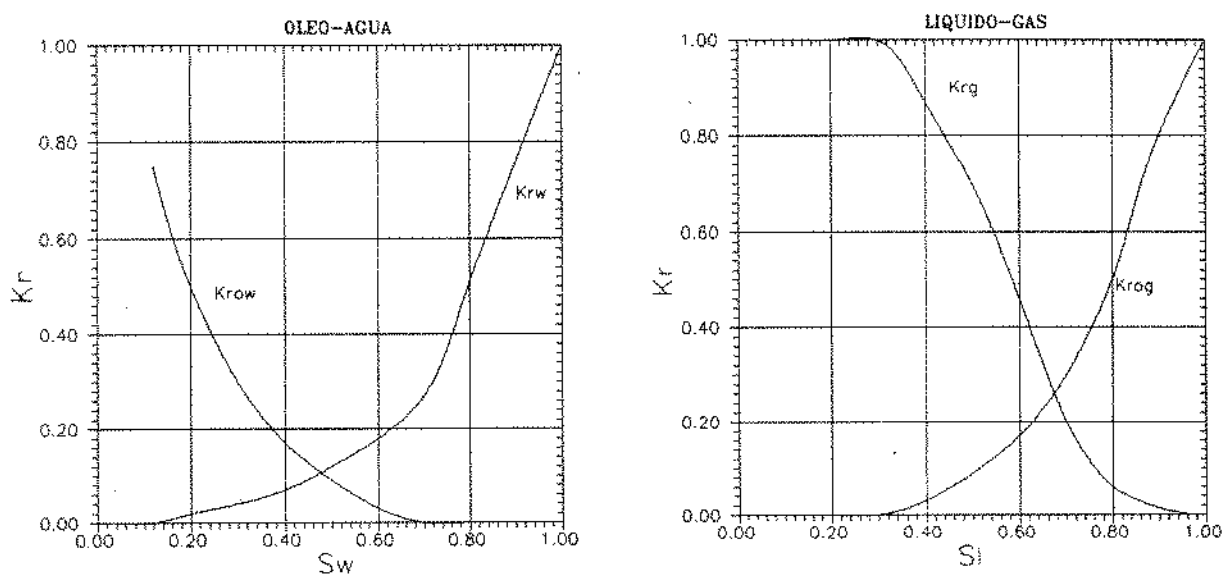


Figura 4.5: Curvas de permeabilidades relativas de óleo-água e gás-líquido

Os valores de vazão de produção total do campo foram exagerados (vazão total do campo  $4492 \text{ m}^3/\text{dia}$ ) para otimizar o tempo computacional dos programa de simulação numérica de reservatório que não interfere nas análises dos resultados.

## 4.2 Aplicação do Estudo de Densidade Amostral

Basicamente se restringe em comparar os históricos dos reservatórios obtidos via modelagem numérica geoestatística com o histórico do campo ideal. O procedimento adotado foi o seguinte :

### A) - Escolha da Malha Amostral .

Adotou-se que quando tivesse um poço (amostra pontual), seriam seus atributos os valores de porosidade, permeabilidade e saturação de água inicial correspondentes aos valores do reservatório hipotético no ponto de locação do poço.

O número de poços foi escolhido para representar fases distintas de um projeto de um campo de petróleo. Procurou-se no sorteio (aleatório estratificado) da malha priorizar uma distribuição espacial dos poços no reservatório que o tornasse representativo. Obedeceu o princípio técnico da não existência de poços gêmeos. Assim obteve-se as distribuições :

*Primeira Campanha - Fase Exploratória .*

20 Poços - Vide figura 4.6.

*Segunda Campanha - Fase de Desenvolvimento .*

40 Poços - Vide figura 4.6.

*Terceira Campanha - Campo Desenvolvido .*

80 Poços - Vide figura 4.7.

### B) - Estudo Variográfico .

Procurou-se fazer o estudo variográfico para as três fases anteriormente citadas, utilizando no caso de 20 poços o conceito de variograma médio. Devido a sua baixa densidade amostral, ignora a direção e passa a obter um variograma médio que dependa

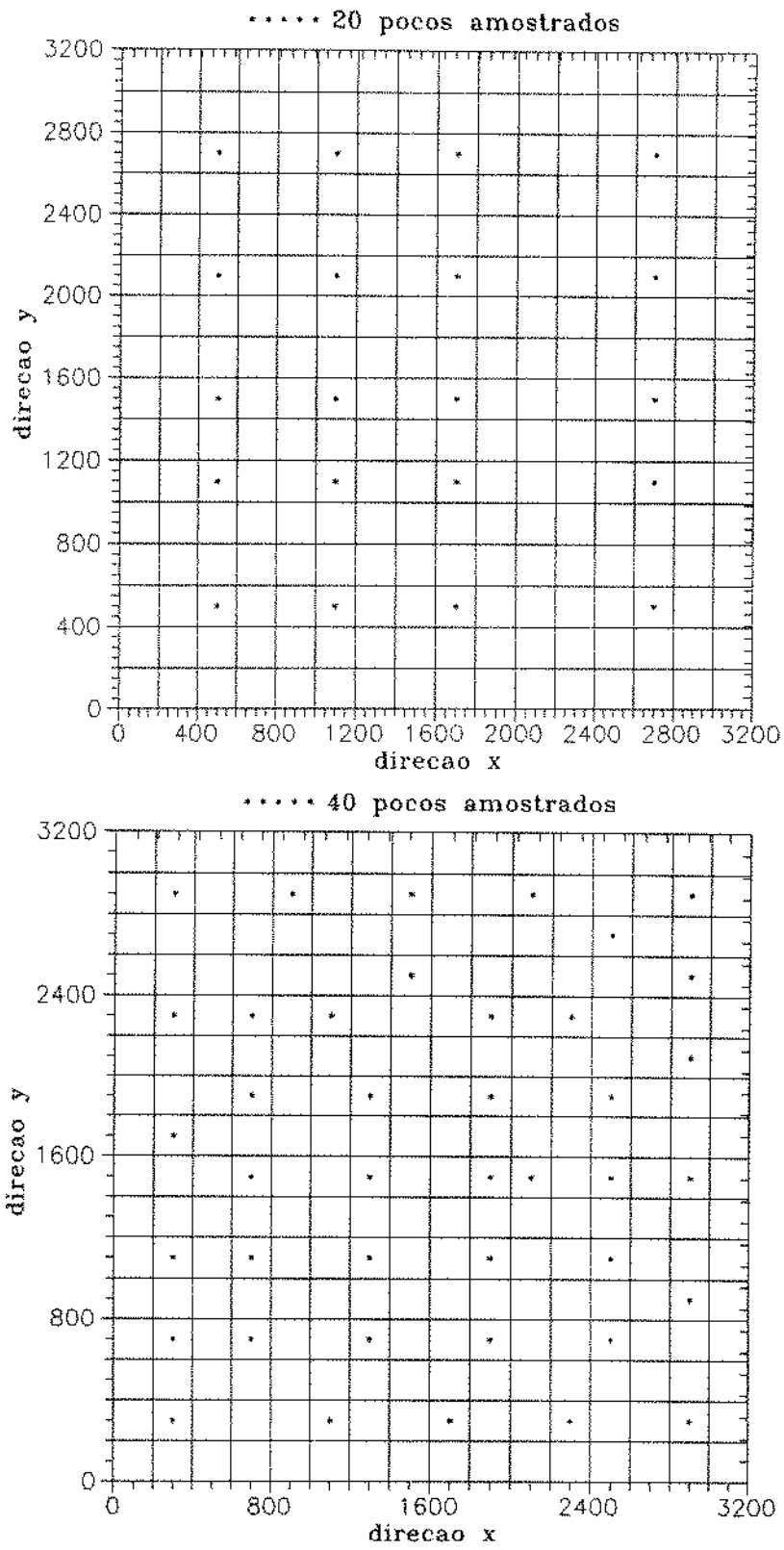


Figura 4.6: Distribuição dos 20 poços na fase exploratória do campo na parte superior e os 40 poços na fase em desenvolvimento do campo

somente da distância  $|h|$ , não importando sua direção . Esta fase de estudo é importante agir de forma crítica aos resultados obtidos, dando prioridade ao ajuste variográfico aos primeiros pontos do variograma experimental. O modelo variográfico adotado foi o potencial por apresentar maior flexibilidade de ajuste quando o variograma experimental não apresenta-se perfeitamente definido.

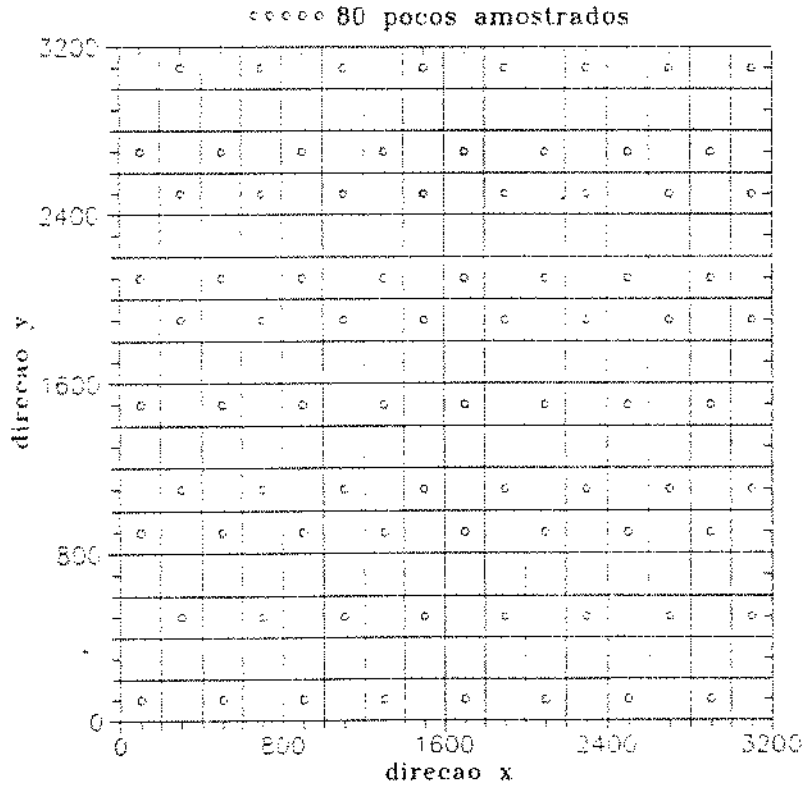


Figura 4.7: Distribuição dos 80 poços do campo desenvolvido

### C) - Simulação Condicional Geoestatística - Modelagem Numérica

De posse de uma população condicionalizante (valores das variáveis dos poços) e de uma função de correlação entre as amostras (variograma), é possível obter uma população não condicional com malha de  $16 \times 16$  pontos que apresente a mesma característica variográfica. A escolha da malha não condicional fica determinada pelo reservatório hipotético, cuja variabilidade máxima fica determinada em 256 blocos. Com estes dois tipos de populações obteve-se a modelagem geoestatística para as variáveis porosidade e permeabilidade. No caso da permeabilidade trabalhou-se com o logaritmo da variável, tor-

nando sua distribuição probabilística gaussiana, que condiz com o algoritmo de simulação geostatística .

#### D) - Comparação dos Históricos .

Propõe-se comparar os históricos de cada modelo com o similar do reservatório ideal. Dado um modelo amostral, adota-se no reservatório ideal o mesmo número de poços e mesmas condições iniciais e de fluido. Faz-se a simulação numérica de fluxo dos dois reservatórios e os compara através de seus históricos de pressão e produção .

Para melhor aproveitamento didático, cada modelo amostral é comparado com o reservatório ideal como se ambos estivessem iniciado a sua produção a vazão constante em seus  $n$  poços . Apesar de se afastar do que acontece na realidade, onde os poços entram em produção com vazão e tempos diferentes. A proposição deste tipo de comparação traz o benefício da não interferência entre os esquemas amostrais e permite uma comparação ao longo de todo históricos, nos diversos tipos de comportamentos do reservatório .

### 4.3 Aplicação e Resultados

#### 4.3.1 Análise Variográfica

Os resultados devem ser analisados a partir da média, variância e os parâmetros do variograma potencial ( $\gamma_0$  e a potência  $\beta$ ). O valor de  $\gamma_0$  está intimamente ligado a variância e revela a intensidade da variabilidade global e o expoente  $\beta$  representa a heterogeneidade entre as amostras correlacionadas. Se  $\beta$  for pequeno, menor será a correlação espacial entre as amostras e no caso extremo de  $\beta = 0$  onde a variável é puramente aleatória (efeito de pepita puro).

Discutindo os resultados desta forma, apresentamos as tabelas 4.1 e 4.2, comparando os casos amostrais selecionados.

Para o caso de 20 amostras pontuais, apresenta uma média maior tanto em

*	média (%)	var. (% <sup>2</sup> )	$C_0$	$\beta$
Ideal	20.779	4.0586	0.0087	0.830
20 poços	21,267	2,0890	0,0150	0,700
40 poços	20,508	4,2910	0,0208	0,700
80 poços	20,784	3,7080	0,0120	0,750

Tabela 4.1: Análise dos parâmetros estatísticos da porosidade

*	média (md)	var. (md <sup>2</sup> )	$C_0 \cdot 10^{-4}$	$\beta$
Ideal	149,2	1666,7	1,55	0,830
20 poços	156,7	928,1	2,10	0,700
40 poços	144,7	1660,1	0,94	0,900
80 poços	149,0	1509,9	2,20	0,750

Tabela 4.2: Análise dos parâmetros estatísticos da permeabilidade

relação a porosidade e permeabilidade do que o reservatório hipotético. Sendo a maior diferença entre os casos. A variância foi bastante inferior o que resultará em menor heterogeneidade no reservatório a ser modelado. O variograma apresentou conseqüentemente menores valores que a função variograma do reservatório ideal, tornando este fator determinante em mascarar as heterogeneidades que seriam desejadas reproduzir perante a modelagem. Há uma diminuição entre a correlação espacial das amostras ( $\beta = 0.7$ ) e o que é pior, a confiabilidade ao variograma experimental é pequena, pois os pontos experimentais apresentam oscilantes, dificultando o ajuste ao modelo. Isto fica demonstrado na figura 4.8. Pode-se dizer, finalmente que os 20 poços não são representativos do reservatório.

No caso com 40 poços, a média, ao contrário da amostragem anterior, é menor e a diferença com o ideal também menor. Um fato interessante é o da variância ser um pouco maior e os valores do variograma serem numericamente maiores que do reservatório hipotético. A conseqüência será um reservatório modelado com maior variabilidade e portanto maiores restrições ao fluxo. Há uma melhoria do ajuste variográfico para a variável porosidade e permeabilidade em relação a fase anterior (figura 4.9). Ocorre uma diminuição da heterogeneidade para a permeabilidade ( $\beta = 0.9$ ), apesar da confiabilidade do ajuste não ser bom em nenhuma das direções.

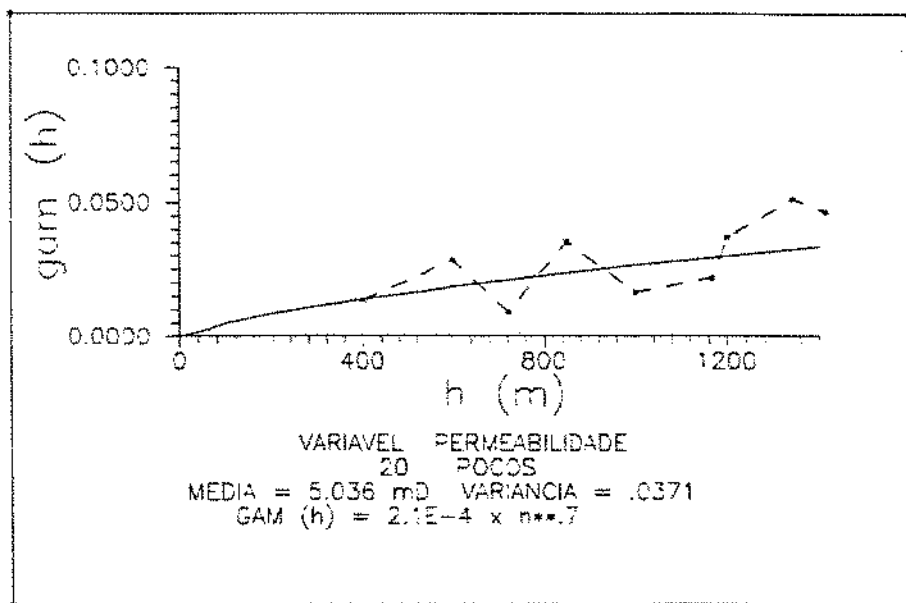
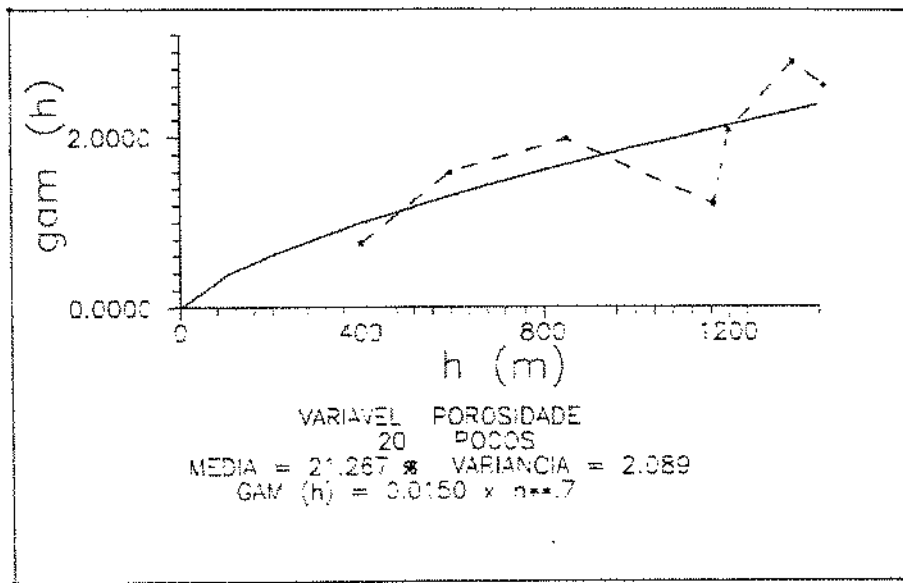


Figura 4.8: Variograma experimental para a porosidade e Ln da permeabilidade com 20 amostras



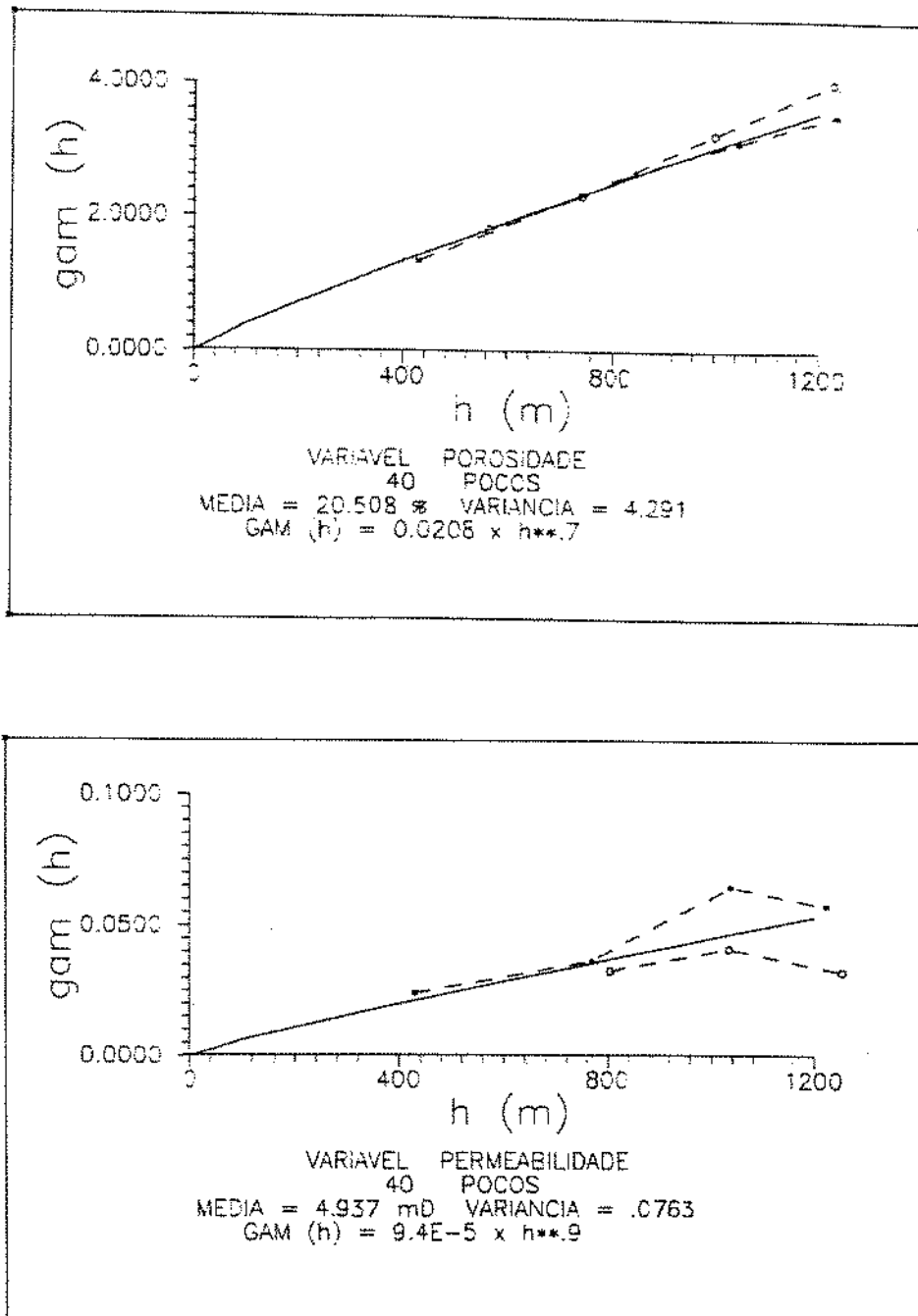


Figura 4.9: Variograma experimental para a porosidade e Ln da permeabilidade com 40 amostras

O caso mais favorável é o de 80 amostras, onde apresentam os melhores variogramas ajustados em ambas as direções (figura 4.10). Os valores das médias são ligeiramente superiores para ambas as variáveis e a variância inferior em relação ao reservatório ideal. Quando analisado em relação ao expoente  $\beta$ , tem-se o melhor resultados de todos ( $\beta = 0.75$ ). Devido é claro a maior quantidade de informações amostral, que confere maior representatividade estatística do reservatório hipotético.

### 4.3.2 Comparando os Históricos

Para a comparação entre os históricos de pressão e produção entre o reservatório hipotético e o modelado a partir de 20 poços , ambos produzindo a uma vazão constante de óleo por poço de  $224.6 \text{ m}^3/\text{dia}$  por poço, confirma as expectativas anteriores. O reservatório modelado apresenta-se com uma menor queda de pressão para as mesmas condições de vazão , pois possui porosidade e permeabilidade médias superiores ao reservatório hipotético e menor variabilidade. Haverá uma menor produção de gás e água devido a esta menor queda de pressão , o que pode ser confirmado nos gráficos de comparação de históricos (figuras 4.11 e 4.13). Verifica-se também o maior diferencial entre as comparações de históricos (caso mais desfavorável ), colocando que a técnica geoestatística necessita de mais informações e pontos condicionalizantes afim de representar melhor o domínio amostrado.

Com relação a 40 poços amostrados, o fato de uma média menor e uma variabilidade maior (mais heterogêneo) implicam em maior queda de pressão quando submetido o campo a uma produção de óleo constante. Em contrapartida a variável permeabilidade mostrou ter maior correlação espacial entre as amostragens que acarretaria maior continuidade lateral, com mudanças menos bruscas da variável de célula para célula, resultando em menor queda de pressão . As análises feitas nos históricos (figuras 4.12 e 4.14), mostram que o fato da média e heterogeneidade foram predominantes, portanto o reservatório modelado apresentou maior queda de pressão . Apesar da diferença de comportamento ser menos acentuada que o modelo anterior. A análise da continuidade

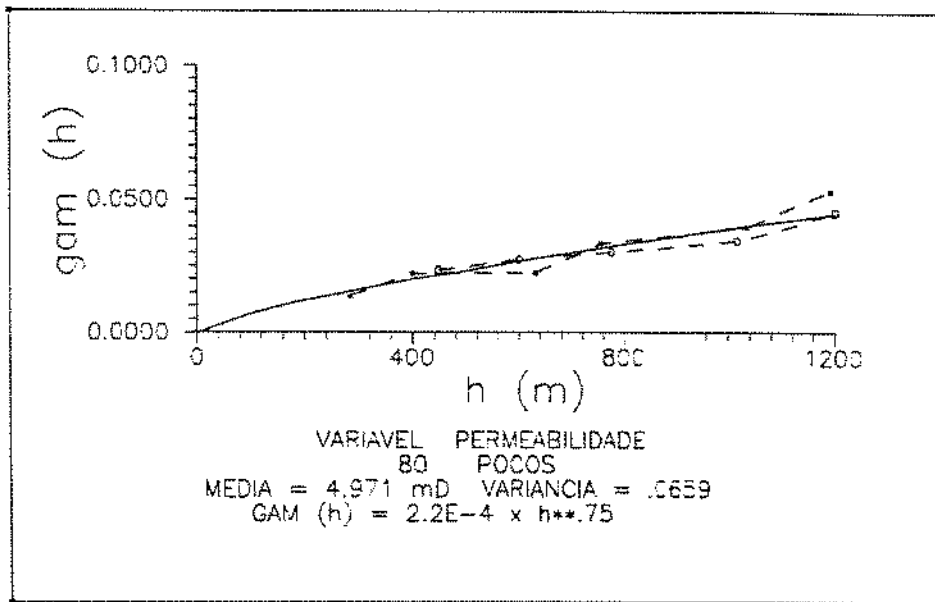
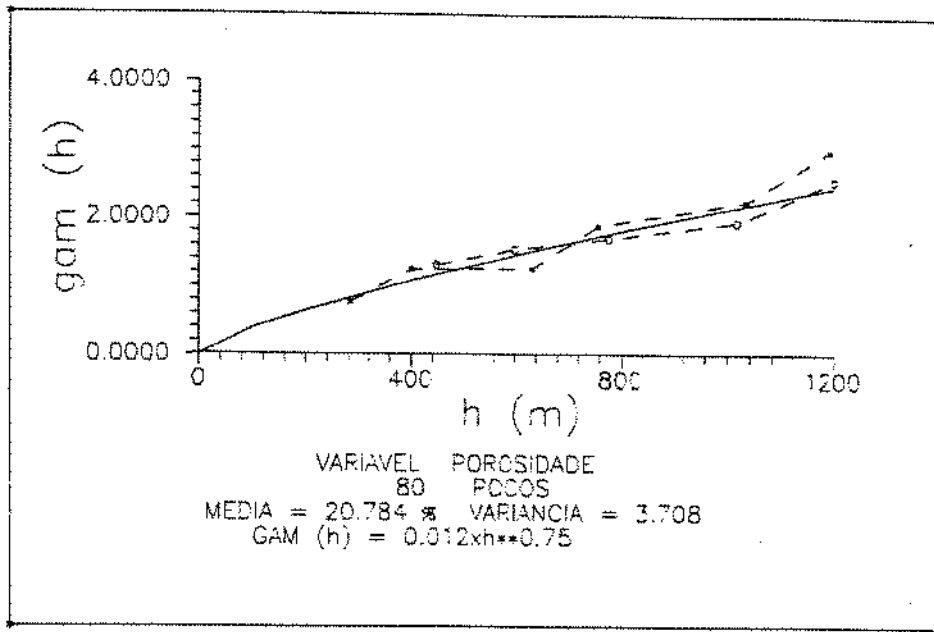


Figura 4.10: Variograma experimental para a porosidade e Ln da permeabilidade com 80 amostras

espacial torna difícil pelo o fato dos valores de  $\beta$  não serem muito diferentes.

Por fim, a modelagem do reservatório com 80 poços apresentou os históricos bastante próximos quando submetidos a simulação de fluxo a uma vazão total de 4492  $m^3/dia$ . No histórico de pressão teve uma ligeira diferença, com maior queda de pressão no fim do histórico. Apesar da média das variáveis envolvidas serem pouco superiores, foi mais importante a diminuição da correlação espacial ( $\beta = 0.75$ ). Este efeito só foi possível de ser percebido pela diferença não significativa entre as médias e variâncias do modelo e hipotético. Graficamente fica difícil de ser visualizado este comportamento (figuras 4.12 e 4.15), mas numericamente nota-se esta diferença. Mostrando a sensibilidade às variações de correlação entre os reservatório estudados. É conveniente lembrar que as diferenças entre os expoentes  $\beta$  foram pequenas.

Resumindo, é importante uma amostragem que seja representativa do reservatório, isto é, em quantidade e qualidade (distribuição no domínio do reservatório). Sendo que a caracterização ideal é feita a partir de amostras que possuam a mesma média e mesmos momentos estatísticos de segunda ordem do domínio a ser modelado. O variograma traz consigo a informação da heterogeneidade (variância) e sua correlação espacial que no estudo proposto mostrou-se como fator de distorção do histórico. É difícil a obtenção da função variograma com baixa densidade amostral, que também compromete a verdadeira média e variância do domínio e a condicionalização para realização do modelo. O erro por falta de pontos condicionais nos leva a formação de imagens que fogem da representatividade do hipotético-ideal. Portanto, a geoestatística quando na fase exploratória (baixa densidade amostral) deve servir como ferramenta suporte, mas com forte senso crítico para não inferir suposições que não torne verdade o estudo de caracterização do campo.

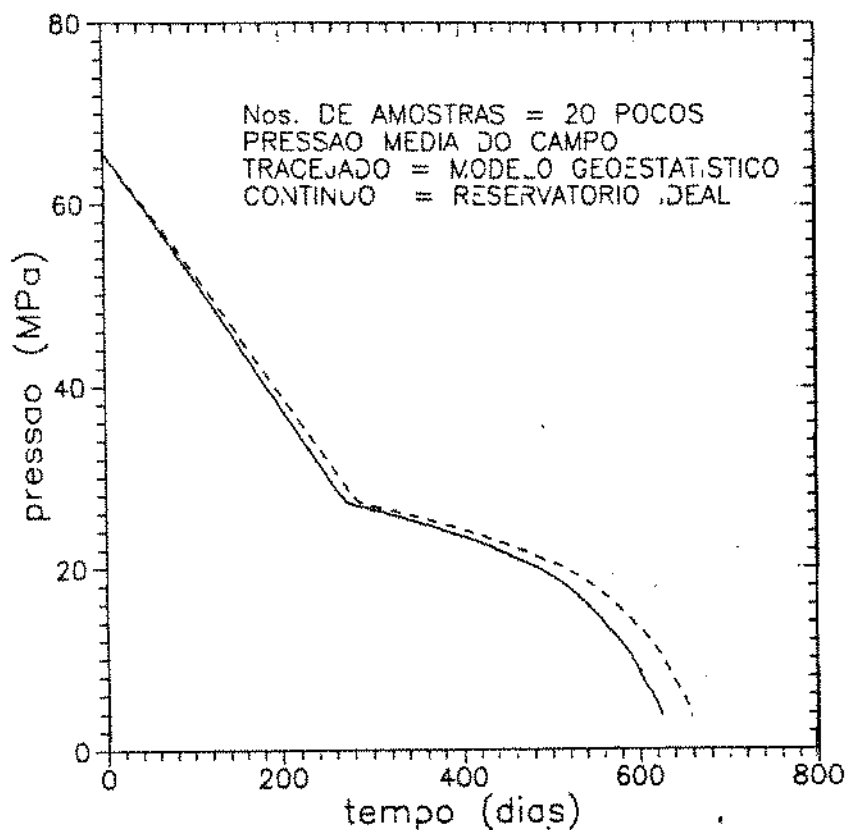


Figura 4.11: Comparação do histórico de pressão entre o modelo com 20 poços e reservatório ideal

#### 4.4 Efeito da Distribuição das Heterogeneidades

Quando se trabalha com processos estocásticos na obtenção de variáveis do tipo permeabilidade e porosidade em reservatório tem-se logo a idéia de obter a imagem que represente a distribuição da variável dentro do domínio. A partir da posse de uma variograma representativo das variáveis do reservatório, torna-se possível obter esta imagem, ficando as noções que a mesma é única e representativa do reservatório. Mas para um mesmo variograma, podemos obter infinitas realizações de populações com diferentes distribuições no reservatório. Mesmo com a simulação geoestatística condicional, haverá sempre uma parcela não condicional da população que permitirá inúmeras configurações.

Isto é próprio de processos estocásticos, que no estudo de reservatório, mesmo que se consiga representar a média, as variabilidades globais das variáveis e o histórico total do campo, pode-se localmente ter diferenciação dos históricos nos poços. Certamente

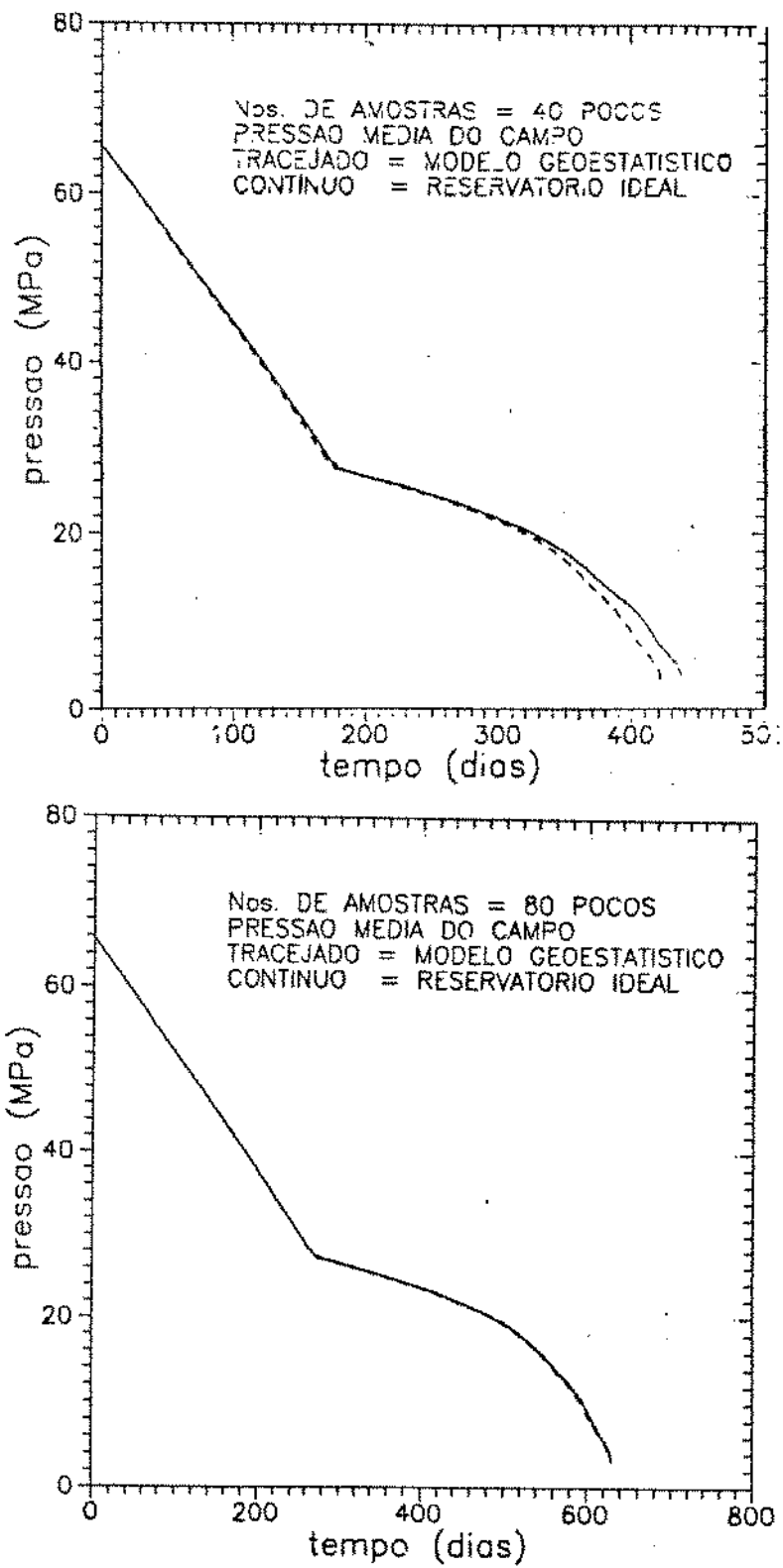


Figura 4.12: Comparação do histórico de pressão entre o modelo com 40 poços e reservatório ideal na parte superior e modelado com 80 poços e reservatório ideal na parte inferior

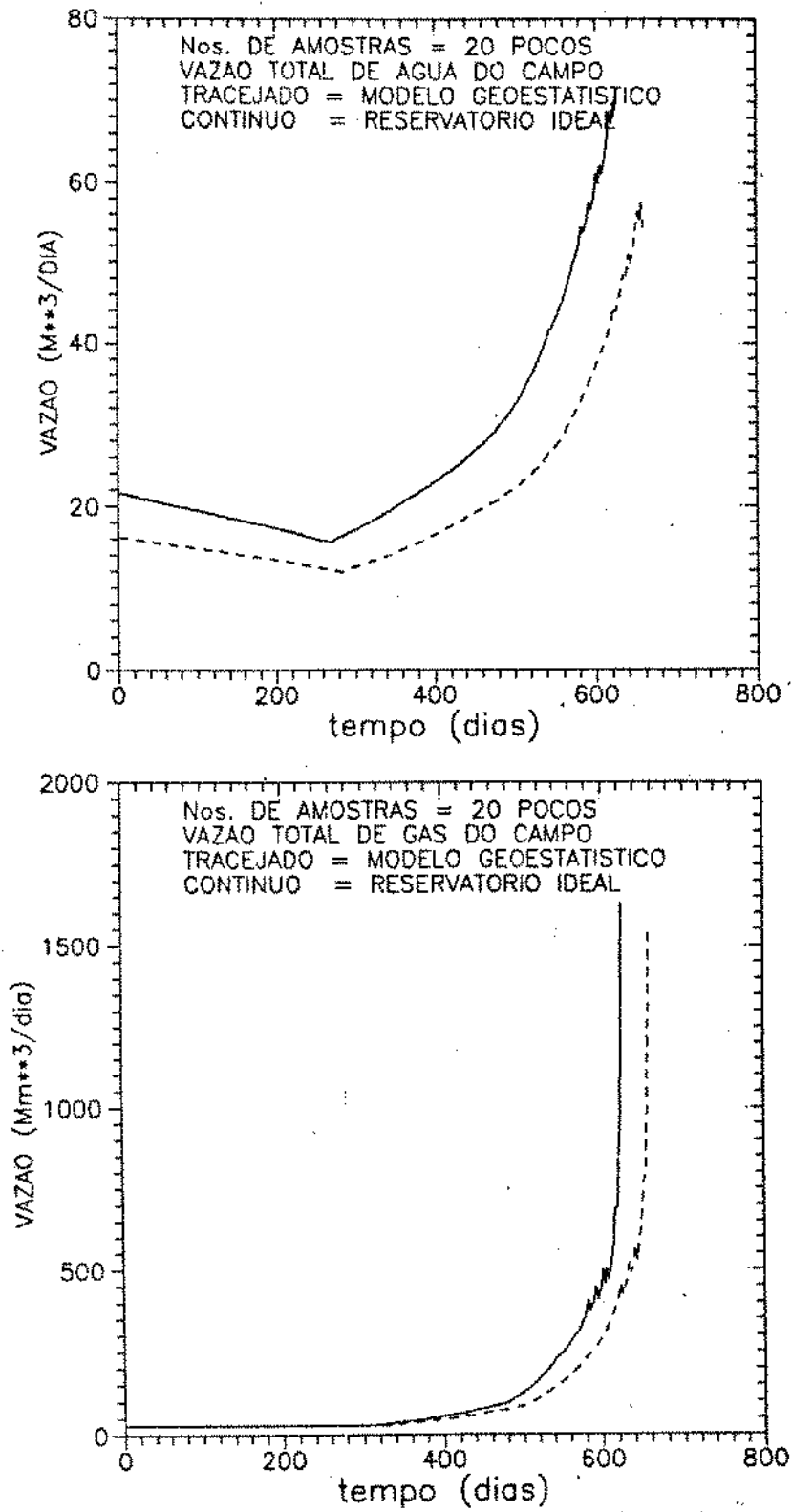


Figura 4.13: Comparação do histórico de produção de gás e água 20 poços e reservatório ideal

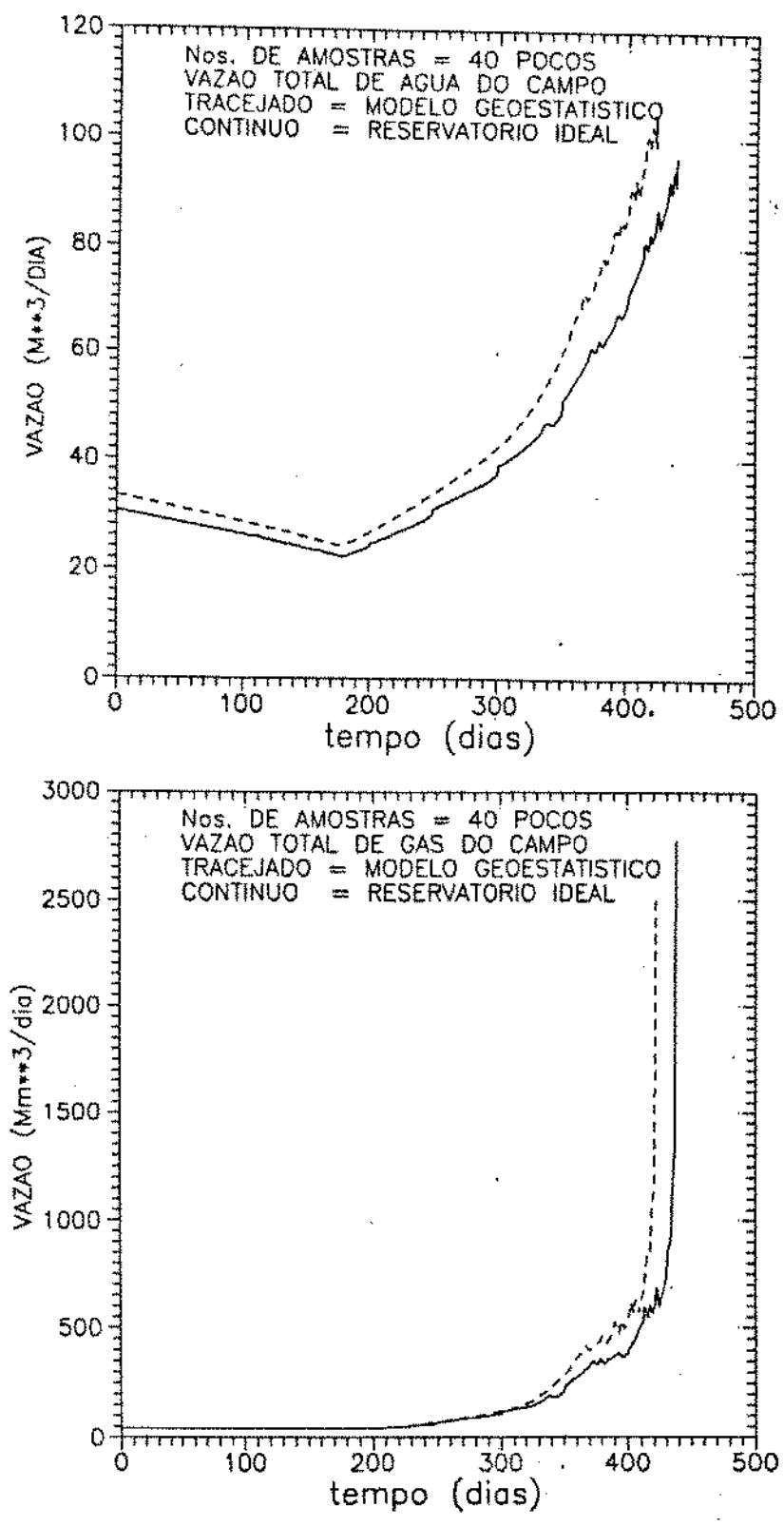


Figura 4.14: Comparação do histórico de produção de gás e água 40 poços e reservatório ideal



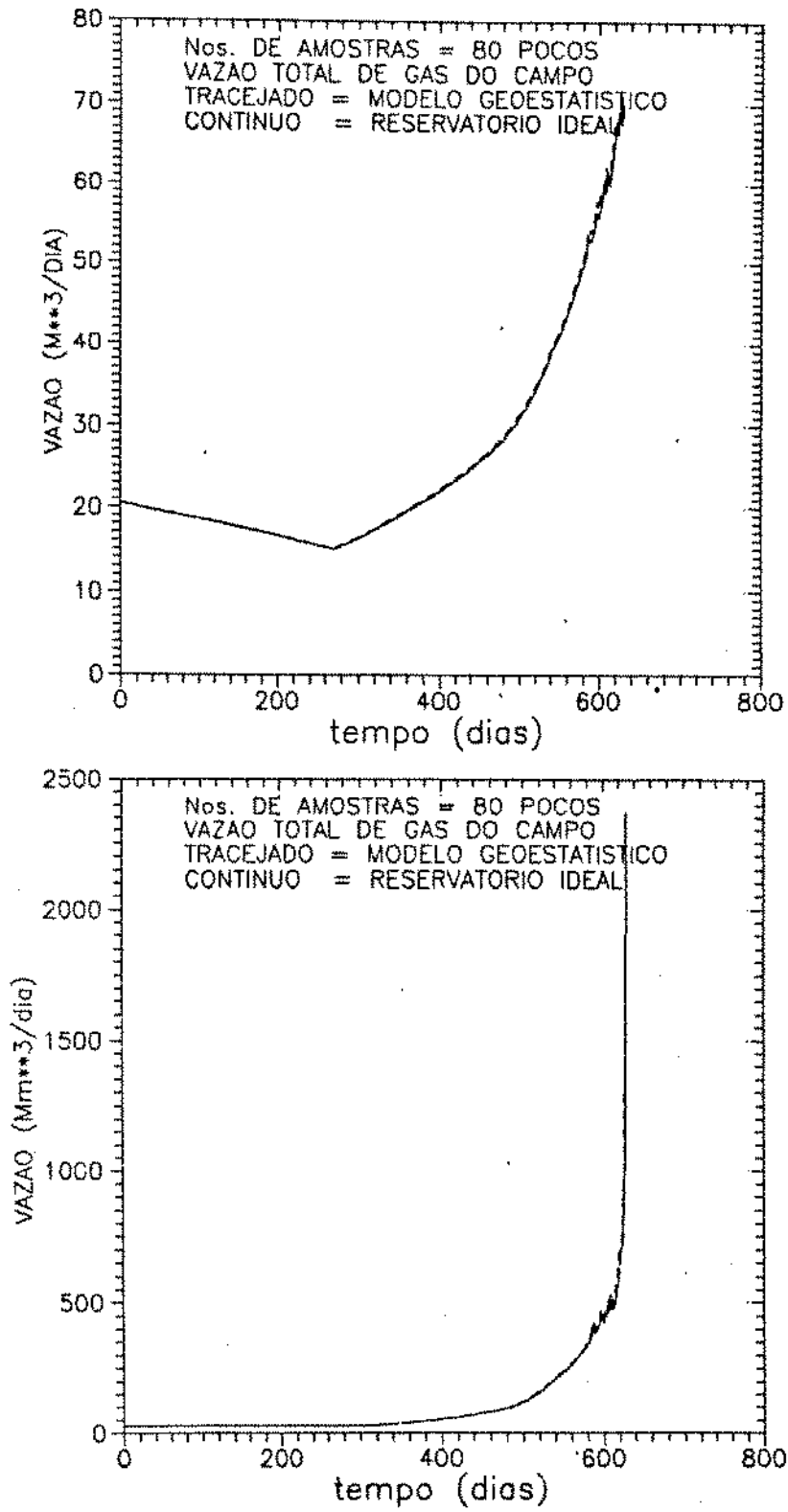


Figura 4.15: Comparação do histórico de produção de gás e água 80 poços e reservatório ideal

pela não coincidência das imagens geradas, sendo recomendável a alteração da população não condicional (responsável pela distribuição das heterogeneidades). Pensando justamente nesta possibilidade, decidiu-se fazer uma exemplificação de como a população não condicional afeta o comportamento de fluxo.

#### 4.4.1 Aplicação e Resultados

O procedimento adotado foi a comparação do reservatório hipotético definido anteriormente com um segundo reservatório hipotético que possui as seguintes características :

a) - Mesma geometria e número de blocos de simulação .

b) - Mesma média :  $m_{H1} = m_{H2}$

c) - Mesma variância :  $\sigma_{H1}^2 = \sigma_{H2}^2$

d) - Distribuição espacial das variáveis diferentes. Obtidas a partir de outra sequência de números aleatórios no algoritmo de simulação geoestatística não condicional. A comparação desta duas distribuições esta feita nos mapas da figura 4.16.

Outro caso a ser comparado será o do reservatório homogêneo com a mesma média para a porosidade e permeabilidade dos casos anteriores.

Simulou-se numericamente o fluxo destes três reservatórios com vazão de óleo constante em 40 poços . Sendo que os reservatórios de mesma correlação espacial (variograma) apresentaram comportamentos próximos embora diferentes. Ambos casos tiveram diferenças maiores para o reservatório homogêneo. Pelas curvas de produção de gás, onde o reservatório homogêneo teve menor produção , pode-se afirmar que os reservatório heterogêneos tiveram maior queda de pressão devido aos caminhos de fluxo mais tortuosos no interior do reservatório . Estas afirmações podem ser visualizadas graficamente na figura 4.17.

Portanto será importante a representatividade da informação , tanto no sentido

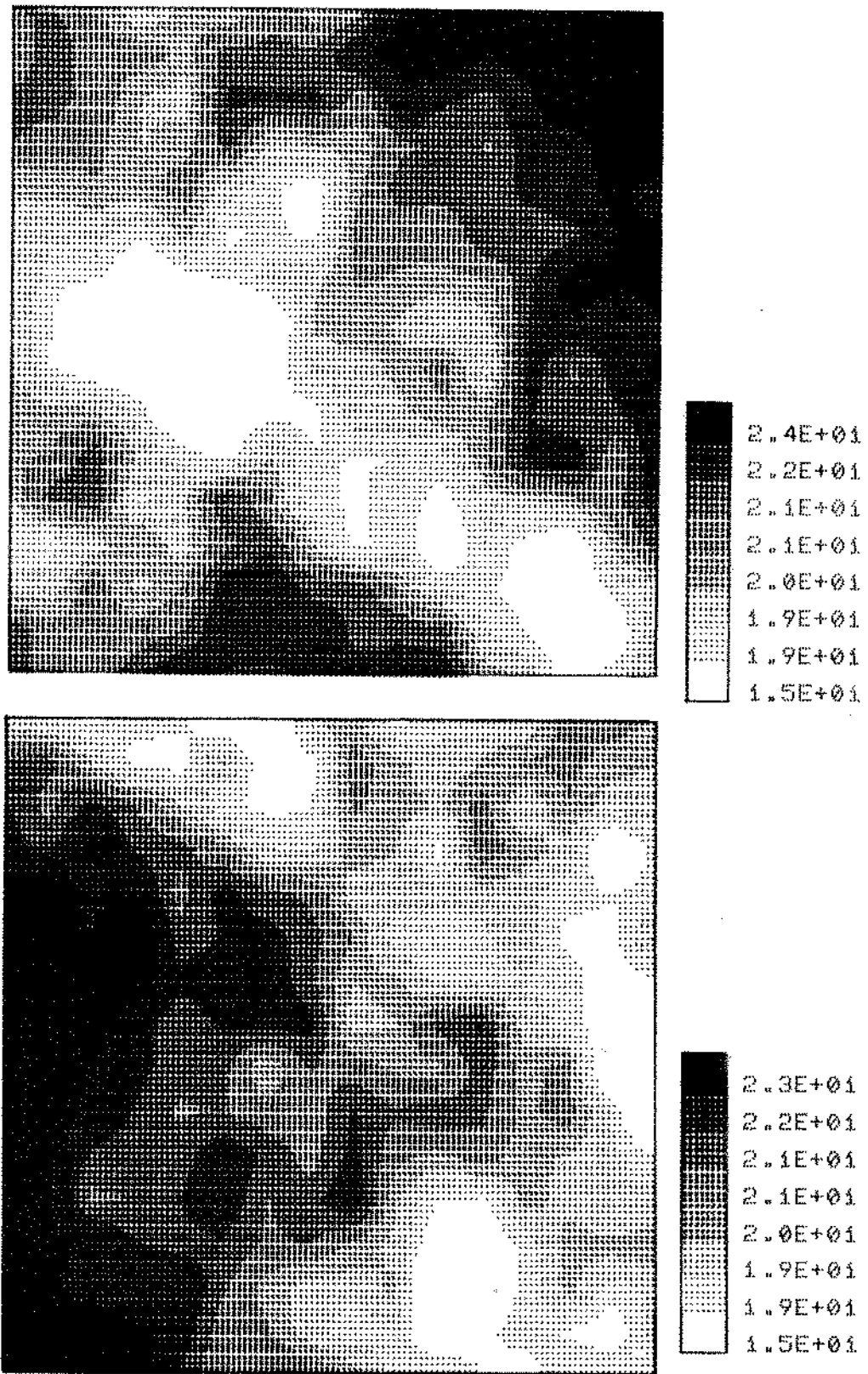


Figura 4.16: Mapas de permeabilidade para duas distribuições com variograma igual  $\gamma(h) = C_0 h^{0.83}$

de conhecer as propriedades estatísticas e quantificação do grau de heterogeneidade do campo, como na condicionalização dos modelos simulados. Evitando a representação de modelos que apesar de mesma característica estatística não tenham compromisso com real reprodução do reservatório estudado.

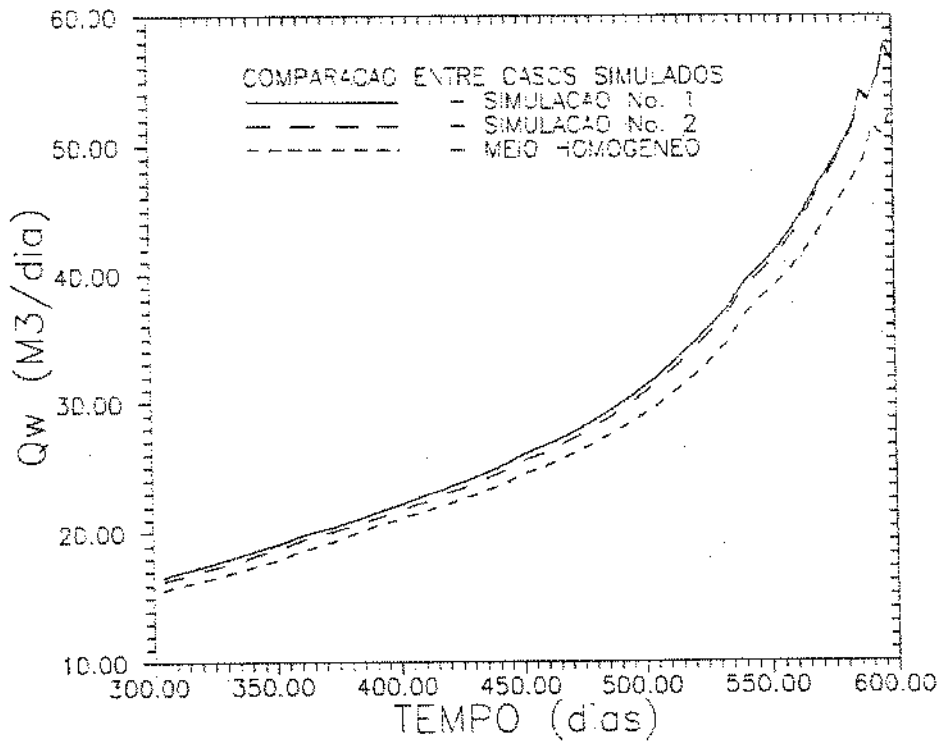
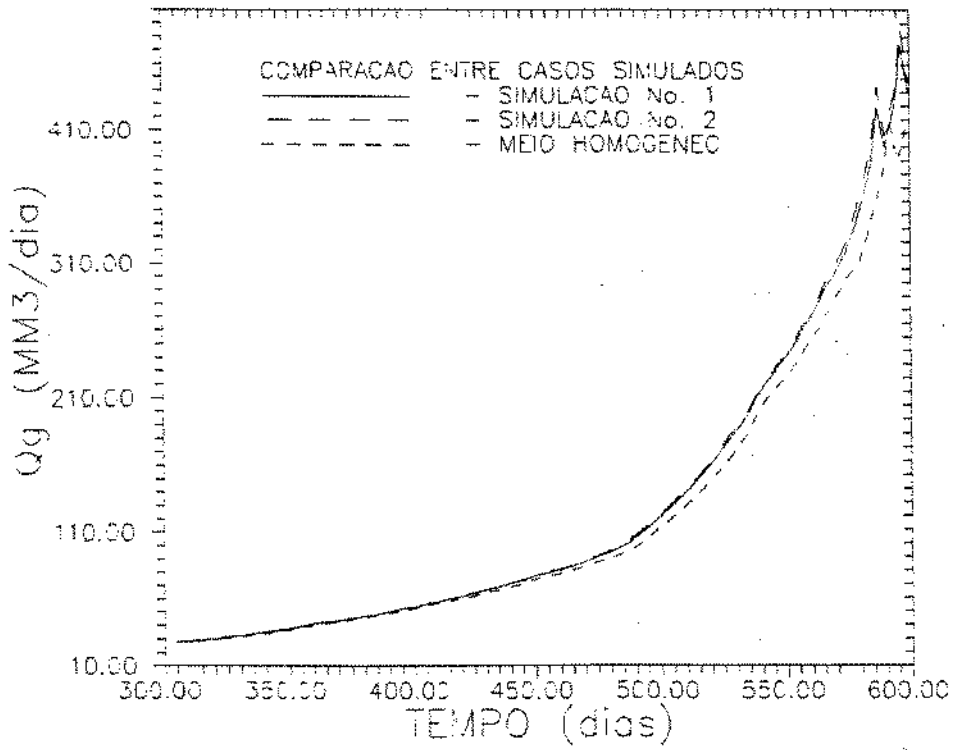


Figura 4.17: Comparação entre os históricos de produção de gás e água

## 5 Incorporação da Análise de Teste de Poços Produtores na Geoestatística

No estudo de caracterização de reservatório é de suma importância a análise de teste. Este tipo de amostra tem as seguintes vantagens:

- a) – É relativamente comum em campos durante a fases de exploração e desenvolvimento.
- b) – Informa o valor da variável permeabilidade com certa segurança.
- c) – O volume de investigação da amostra de análise de teste é abrangente e assume-se um raio de investigação que garante um aumento do suporte amostral e o verdadeiro valor médio da variável no interior do domínio do teste.
- d) – O custo do teste é relativamente pequeno em relação ao custo do poço .

Diante de perspectivas favoráveis ao uso deste tipo de amostra, surge então a dúvida: "Como aproveitar esta amostra na caracterização do reservatório através da geoestatística?" Pois se considerarmos um teste, o mesmo será definido para reservatório homogêneo com geometria, em geral, cilíndrica, que em um meio heterogêneo não o é. Há também o problema da condicionalização através deste tipo de amostra. Em termos de mapas das variáveis haverá uma certa fuga da realidade pois estará representando propriedades médias ao redor dos poços testados. Neste estudo não está interessado na confecção de imagens, mas sim nos resultados que nos possam fornecer os simuladores de fluxo.

Neste capítulo se propõe a investigar as questões citadas anteriormente, mostrando como deve ser manipulada a amostragem e descrição do algoritmo de condicionalização com amostras de porte volumétrico. Na tentativa de ilustrar o "ganho" com o suporte amostral, como no capítulo anterior, serão feitas aplicações práticas.

## 5.1 O Teste de Poço como Amostra

### 5.1.1 Descrição pelos Aspectos de Fluxo

#### *Teste de Fluxo.*

Em geral realizado a vazão constante, consistindo basicamente na medição das pressões de fundo de poço ( $p_{wf}$ ) durante um certo período de tempo de produção . Este período é em torno de 24 horas em cada teste.

Admitindo a equação de queda de pressão para um reservatório infinito, no período transiente, utilizando a aproximação logarítmica em um sistema compatível de unidades:

$$p_{wf} = p_i - 0.1832 \frac{qB\mu}{Kh} \left[ \log(t) + \log \left( \frac{K}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) + 0.3514 + 0.8686s \right] \quad (5.1)$$

onde;

$p_i$  é a pressão inicial.

$q$  é a vazão do teste.

$B$  é o fator volume de formação .

$\mu$  é a viscosidade do fluido.

$K$  é a permeabilidade efetiva.

$h$  é a espessura da formação .

$t$  é o tempo de produção .

$\phi$  é a porosidade.

$c_t$  é a compressibilidade total (rocha + fluido).

$r_w$  é o raio do poço .

$s$  é o fator de dano do poço ("skin").

A equação 5.1 indica que se plotar graficamente  $p_{wf}$  vs.  $\log t$ , ter-se-á uma reta de inclinação  $-m$ . Cujas relação com a permeabilidade é:

$$K = \frac{0.1832q.B.\mu}{m.h} \quad (5.2)$$

Para obter o valor da permeabilidade média de poço necessita de um registro de pressão de fundo de poço vs. o tempo de produção e realizar o gráfico proposto, obtendo o coeficiente de inclinação da reta. Os outros dados necessários na equação 5.2 já são conhecidos.

#### *Testes de Crescimento de Pressão .*

Consiste em registrar as pressões de fundo de poço  $p_{wDb}$  após o fechamento da vazão do mesmo. Obtem-se como informações , a permeabilidade efetiva do meio poroso testado, o dano de formação e a região drenada. Dentre os vários métodos de crescimento de pressão , decidiu-se optar pela utilização e descrição do método de Horner.

#### *Método de Horner .*

A equação adimensionalizada de queda de pressão num reservatório infinito produzindo a vazão constante é dado por:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} [\text{Ln}(t_D) + 0.80907 + 2s] \quad (5.3)$$

onde  $t_D$  é o tempo adimensionalizado.

Após um tempo de produção  $t_p$ , fecha-se o poço por um período  $\Delta t$  de tempo e o equacionamento do comportamento da pressão ( $p_{wDs}$ ) pelo princípio da superposição fica:

$$p_{wDs}[(t_p + \Delta t)_D] = p_{wD}[(t_p + \Delta t)_D] - p_{wD}(\Delta t_D) \quad (5.4)$$

Substituindo a equação 5.3 na equação 5.4 tem-se:

$$p_{wDs} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t} \right) \quad (5.5)$$

Analogamente ao método anterior, se plotar um gráfico  $p_{ws}$  vs.  $\log \left( \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t} \right)$ , obtem-se uma reta de coeficiente  $m$  que relaciona com a permeabilidade através da equação:

$$K = 0.1832 \frac{q \cdot B \cdot \mu}{m \cdot h} \quad (5.6)$$



### 5.1.2 Descrição sob o Aspecto Amostral Condicionante

Ao utilizar a análise de teste de poço, como uma amostra condicionante, algumas considerações deverão ser feitas. Por exemplo, a técnica da análise de teste considera o reservatório homogêneo e a geometria da amostra passa a ser radial, criando o conceito de raio de drenagem.

Para o estudo estocástico que tenta justamente modelar a heterogeneidade do campo, não pode tomar este conceito grosseiramente. No estudo estocástico entende-se o valor de permeabilidade como um valor médio do domínio do teste e sua geometria fica dependente da própria heterogeneidade. Surgindo uma outra proposição no conceito de raio de drenagem.

Uma metodologia para trabalhar o teste do poço como amostra condicionante em um reservatório real foi mostrado por F. G. Alabert [1]. No método proposto procurou-se estudar a permeabilidade média em função de dois parâmetros. Um de características geométricas relativas ao raio de drenagem  $r_d$  e o outro relacionado com a composição média da variável, designado por  $\omega$  (média potencial), definindo a permeabilidade média ( $\bar{K}$ ) por:

$$\bar{K}(\omega, A)^\omega = \frac{1}{N(A)} \sum_{x' \in V(A)} K(x')^\omega \quad (5.7)$$

onde;  $N$  é o número de valores discretos de permeabilidade, função do raio de drenagem e  $A$  é o fator geométrico do raio de drenagem que se relaciona por:

$$r_d(t) = A \cdot \sqrt{\frac{K \cdot t}{\phi \mu c_t}}$$

onde as variáveis seguem as denominações da seção anterior.

A idéia, então, será de se estudar, através de inúmeras realizações estocásticas de heterogeneidade do volume abrangido pelo teste, os valores de  $\omega$  e  $A$  que minimizem o erro entre o valor médio da permeabilidade calculada através da equação 5.7 e o valor da permeabilidade medida ( $K$ ) no teste. Onde o maior interesse é no valor de  $A$  que muito certamente nos levará a um raio de drenagem condicionante diferente do obtido

para o reservatório homogêneo, provavelmente com menor valor (relativo a uma forma não cilíndrica). Lembrando que estas realizações estocásticas são feitas para um modelo variográfico, para cada modelo (próprio para cada reservatório ) deve ser feito um estudo semelhante para obter os melhor valor de A.

O estudo deve ser feito através da utilização de um método Monte Carlo, cuja preocupação será :

$$E\{\bar{K}(i)\} = E\{K(i)\}$$

e a minimização do erro

$$MIN. \quad \longrightarrow \quad E\left\{\frac{|\bar{K}(i) - K(i)|}{K(i)}\right\}$$

Do exemplo realizado por F. G. Alabert, algumas conclusões podem ser generalizadas:

( i ) - O expoente  $\omega$  da média potencial é fortemente ligado com o nível de correlação espacial. Sendo que  $\omega$  cresce quando a amplitude do modelo variográfico cresce em relação ao tamanho do domínio testado. Há também uma tendência a estabilizar seu valor com crescimento da amplitude variográfica mantido o domínio do teste.

( ii ) - A qualidade dos valores ótimos de A e  $\omega$  depende do tempo do teste. Sendo que independente do tempo, o volume médio drenado ou o valor de A se mostrou menor que o proposto para o reservatório homogêneo.

( iii ) - Se a proporção de baixa permeabilidade aumenta a média se torna mais próxima da média harmônica e se a proporção diminui, aproxima-se mais da média aritmética.

( iv ) - Com o aumento da variância do domínio a ser testado a permeabilidade média tende a diminuir, e insistindo no aumento da variância a média tende a se estabilizar.

### 5.1.3 Técnica Condicionante

Partindo do princípio da condicionalização apresentado na seção 2.3, a técnica haverá a necessidade de ter as seguintes características:

( i ) - O atributo  $Z_{V_i}(x)$  no domínio da amostra deve ser mantido.

$$Z_{V_i}(x) = Z \quad \forall x \in V_i$$

( ii ) - Conhecer o variograma experimental pontual para obter a máxima variabilidade do domínio.

( iii ) - Possuir uma população não condicional que tenha as características do variograma acima citado, com uma distribuição espacial que nos subdomínio  $V_i$  assumam um único valor  $Z_{s_i}$ .

Respeitando os parâmetros acima, pode-se criar um algoritmo de condicionalização . Suas características são :

a) - As entradas de dados serão o modelo do variograma pontual, a população condicionalizante, especificando se é uma amostra pontual ou de bloco (informação da geometria) e a população não condicional. Informações adicionais para a realização do programa computacional serão o raio de investigação (vizinhança) para as amostras que participarão da krigagem e discretização para o cálculo numérico da covariância média da matriz de krigagem.

b) - Realização da diferença entre os valores condicionantes e os valores não condicionais no ponto  $x_i$ .

$$Z_D(x_i) = Z(x_i) - Z_s(x_i)$$

Isto traz a vantagem de realizar a krigagem só uma vez, pois segundo a equação de condicionalização 2.32.

$$Z_{sc}(x) = Z_{ok}^*(x) + [Z_s(x) - Z_{sk}^*(x)]$$

Por ter dois valores krigados, a equação pode ser representados pela krigagem da diferença mais os valores não condicionais.

$$Z_{sc}(x) = [Z_o^*(x) - Z_s^*(x)]_k + Z_s(x)$$

c) - Pesquisa das amostras para a realização da krigagem do ponto  $x$  ou bloco  $X$ . Utiliza-se de uma pesquisa por quadrante, onde se estabelece o número máximo de amostras por quadrante selecionando as mais próximas. Se  $x \in V_i$  (domínio de uma amostra de bloco),  $Z(x)$  assume o valor  $Z_D(x)$ .

d) - Montagem do sistema de krigagem para o ponto  $x$  ou bloco  $X$ . No caso do bloco  $X$  e amostras de bloco  $Y_i$  ter-se-á de utilizar subrotinas de cálculo numérico para as covariâncias médias  $\bar{c}_{XY_i}$ ,  $\bar{c}_{XX}$  e  $\bar{c}_{Y_iY_i}$ . Isto se faz através da discretização dos domínio amostrais e médias entre as covariâncias:

$$\bar{C}_{X_iY_j} = \frac{1}{N_1N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c(h_{ij}) \quad \implies \quad h_{ij} = |x_i - y_j|$$

onde;  $N_1$  e  $N_2$  são as discretizações em cada amostra e  $x_i$  e  $y_j$  são os pontos de discretização de cada domínio amostral. No caso de  $\bar{C}_{XX}$  utiliza-se uma componente aleatória para as coordenadas  $x_i$  da discretização para evitar de  $h_{ij} = 0$  se repetir  $N$  vezes. Atenuando o valor da covariância e conhecido como Efeito Zero (A. G. Journel [22]).

Estas covariâncias médias podem ser melhor compreendidas no esquema da figura 5.1, que também mostra como um bloco  $Z_k$ , pode ao mesmo tempo ser estimado por pontos  $Z_\alpha$  e blocos  $\bar{Z}_\alpha$ , que neste estudo possuem a geometria cilíndrica, por representar um teste de poço.

e) - Solução do sistema de krigagem e cálculo da variância de krigagem.

f) - Realização dos passos de c a d para todos os pontos da malha que se deseja simular.

g) - Soma da componente não condicional aos valores de krigagem da diferença e obtenção da população simulada condicional.

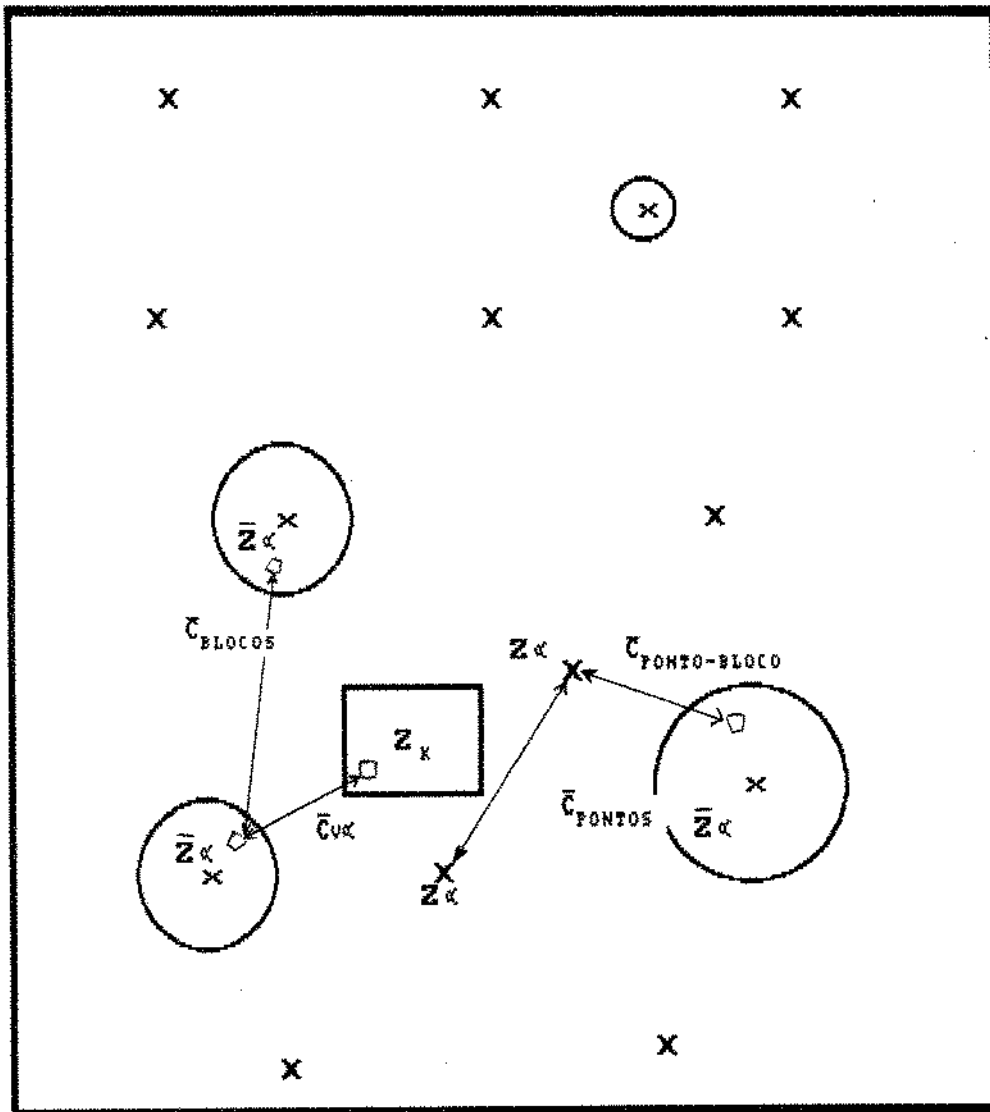


Figura 5.1: Esquema de krigagem com testes de poços

Através dos erros de krigagem, poderemos ter uma noção do erro em se querer estimar através da simulação geoestatística. Isto nos fornecerá a confiabilidade da modelagem, caracterizando o processo estocástico.

De posse de tal algoritmo e os conhecimentos dos dados de campo sobre perfis e testes de poços, poderemos criar entradas de dados para simuladores numéricos de reservatório, que com mais certeza representarão os históricos do campo.

## 5.2 Aplicação

No intuito de ilustrar as considerações sobre a incorporação da análise de teste na caracterização geoestatística de reservatório, usou-se de um reservatório hipotético e da tentativa de representação do histórico a partir de amostras do mesmo.

Com o interesse de verificar o suporte amostral, trabalhou-se com um número fixo de poços. Basicamente, procura-se modelar o reservatório com amostras pontuais (perfilagem de poços) e depois com números crescentes de testes de poços. Tentando com isto estabelecer uma relação de quanto será vantajoso um maior número de teste de fluxo e crescimento de pressão nos poços de petróleo.

Assim se descrever-se-á sobre o campo hipotético, o estudo variográfico, os resultados do teste de fluxo e crescimento de pressão, sobre a modelagem numérica geoestatística e as comparações entre os históricos.

### 5.2.1 O Reservatório Hipotético

O reservatório hipotético foi criado a partir da simulação não condicional de um modelo variográfico de potência, cujo valor do expoente  $\beta$  é 0.75. Algumas normalizações são feitas para adequar as populações de porosidade e permeabilidade a realidade de reservatório de petróleo. Apresentando as seguintes características estatísticas (tabela 5.1) e os seus histogramas na figura 5.2.

variável	média	variância
porosidade	16.664 %	23.35 % <sup>2</sup>
permeabilidade	112.09 mD ( $1,099 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$ )	21143 $mD^2$ ( $2,038 \cdot 10^{-26} \text{ m}^4$ )

Tabela 5.1: Dados estatísticos do reservatório

A discretização feita no reservatório foi de  $30 \times 30$  blocos de geometria quadrada de  $100 \times 100 \times 100 \text{ m}^3$ , produzindo em 36 poços com uma vazão total de  $4865.4 \text{ m}^3/\text{dia}$  ( $0.0563 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Inicialmente o reservatório encontrava-se subsaturado com uma pressão

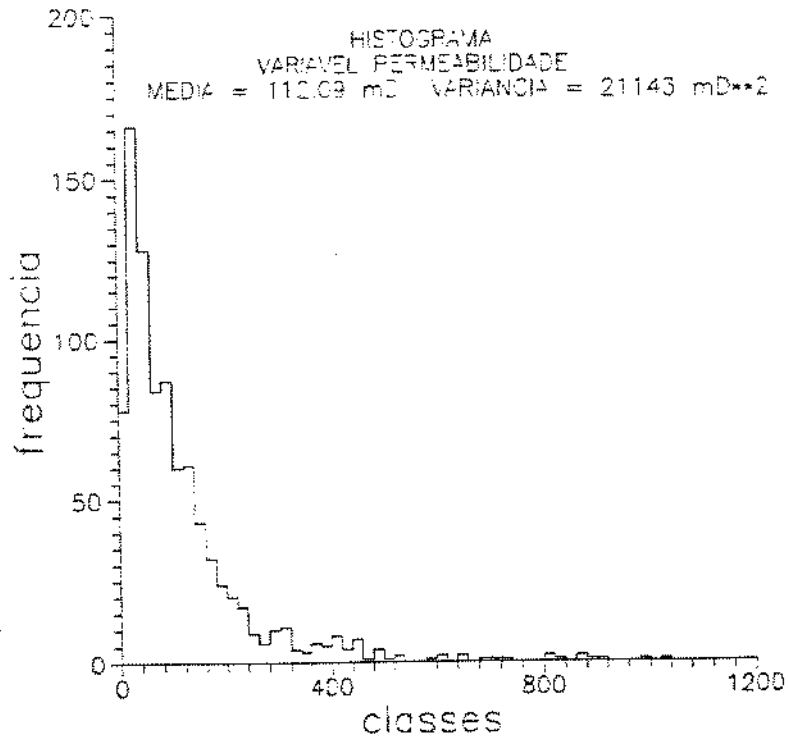
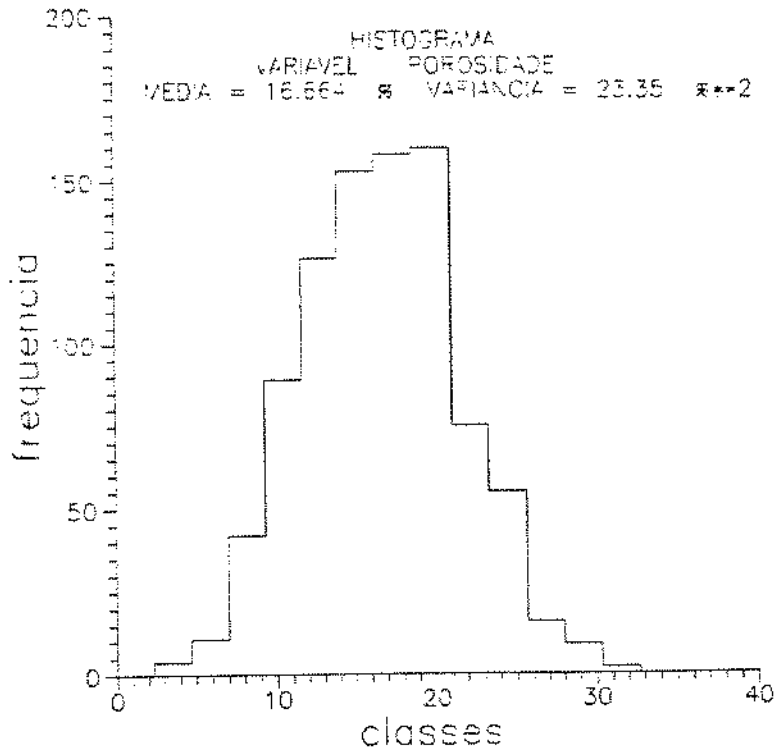


Figura 5.2: Histogramas das variáveis porosidade e permeabilidade

inicial de 29.65 MPa e a pressão de saturação de 27.58 MPa. As características do fluido do reservatório são as mesmas apresentadas no capítulo 4, inclusive as mesmas curvas de permeabilidade relativa.

As características de produção dos poços são as seguintes:

( i ) – Produção a vazão constante até que atinja a pressão de fundo de poço ( $p_{wf}$ ) de 1,379 MPa.

( ii ) – Após atingida a pressão mínima de fundo de poço , passa a produzir com pressão constante até a vazão mínima de 30  $m^3/dia$  ou pressão média do reservatório de 10 MPa.

Estas características também serão válidas para os reservatórios modelados.

### 5.2.2 Análise Variográfica

Foram distribuídos 36 poços no reservatório de forma regular em malhas de 500×500 metros que pode ser observada na figura 5.3. Pode-se também observar as diversas fases em que foram feitos os testes de poço . Adotou-se para fim de pesquisa, fases distintas com 12, 24 e 36 poços testados. Sendo que a escolha dos poços a serem testados em cada fase foi aleatória.

O estudo variográfico experimental para os pontos amostrais, foram feitos para as variáveis porosidade, permeabilidade e logaritmo da permeabilidade, utilizando em todos eles o conceito de variograma médio (figura 5.4). Os valores atribuídos aos pontos amostrais são os próprios da locação do poço no reservatório hipotético.

Pode-se observar que o variograma experimental apresenta maior média e menor variância (variabilidade global) em ambas as variáveis com o detalhe de terem menor correlação espacial (maior heterogeneidade) entre as amostras que o reservatório hipotético. Pois o expoente do variograma da porosidade é 0.425 contra  $\beta$  igual 0.75 do reservatório hipotético. Acontece também para a permeabilidade, apesar de ser em menor



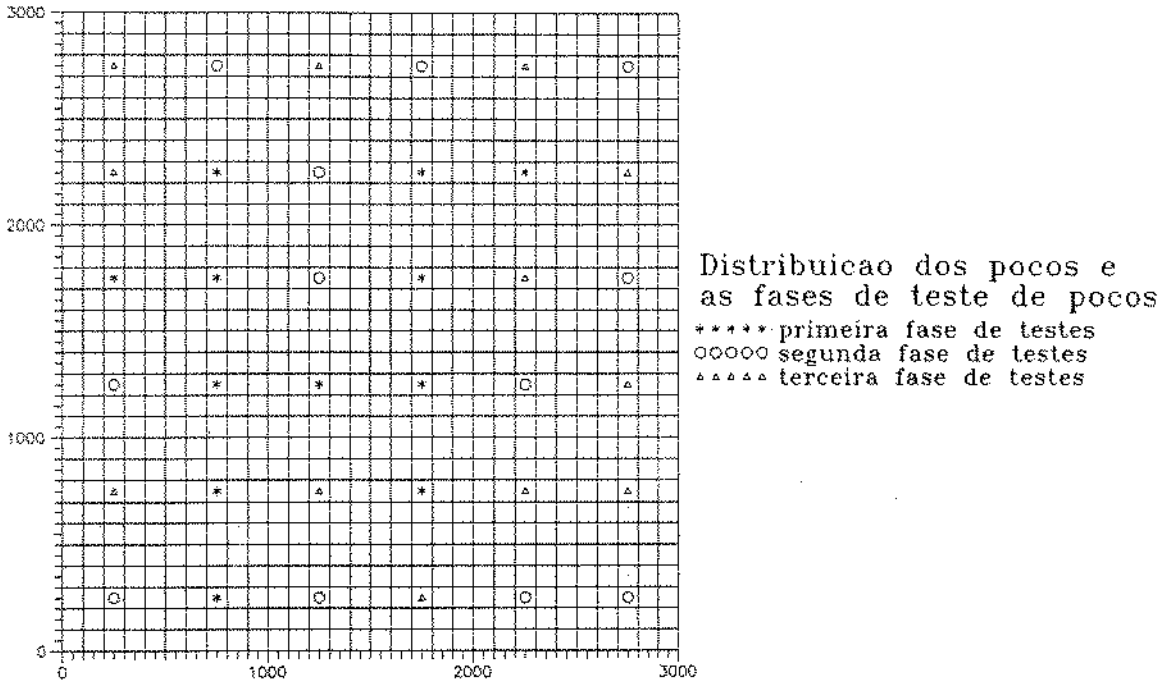


Figura 5.3: Malha dos poços de produção

escala, com  $\beta$  igual 0.67. Como pode ser observados nos gráficos dos variogramas, o ajuste dos pontos experimentais ao modelo de potência podem ser considerados bons apesar da malha ser bastante esparça.

### 5.2.3 Análise de Teste

Foram simulados teste de fluxo e crescimento de pressão (analisados pelo método de Horner) para todos os poços . Para cada poço foi analisado com o domínio compreendido pelo bloco onde se encontrava o poço e os blocos adjacentes com os respectivos atributos do reservatório hipotético. Não havendo interferência de um domínio de um poço com o outro.

Utilizando um simulador de fluxo e conhecendo o valor das variáveis no poço e ao redor dele, foi possível simular um teste de fluxo e crescimento de pressão com vazões

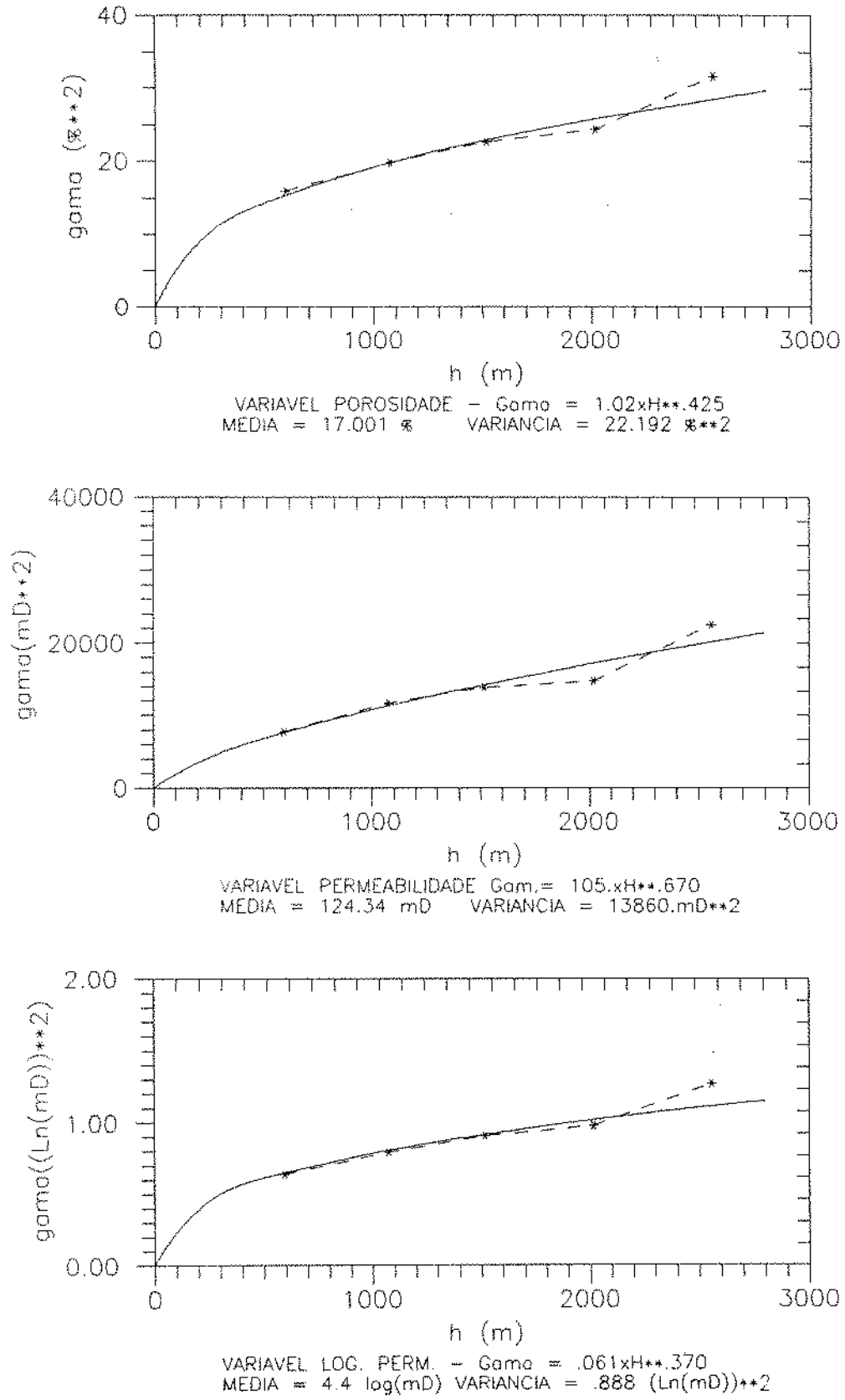


Figura 5.4: Variogramas experimentais e ajustado do campo amostrado

variáveis de poço para poço . Isto foi feito para se ter representatividade do período transiente de fluxo. Pois em regiões mais permeáveis este período tende a ser mais curto.

Outro detalhe é que o simulador utilizado apresentava as fronteiras seladas, então foi necessário se discretizar mais a malha em torno do poço , atribuindo o valor das variáveis nesta nova discretização ao atributo do domínio que ocupava anteriormente. Desta maneira pode-se atenuar o efeito da fronteira (condição de contorno externa) e o fato da geometria não ser cilíndrica.

É fato notar que haverá uma perturbação numérica do resultado, devido a estas aproximações que foram admitidas no simulador de fluxo para a realização do teste de poço. Para verificar esta imprecisão, fez-se uma comparação de um breve histórico de produção , no domínio do teste, entre a permeabilidade média do teste e os valores discretos de permeabilidade. Esta comparação confirmou a semelhança do histórico e possibilitou a utilização dos teste de poços simulados.

Os resultados são apresentados na tabela 5.2, sendo que a porosidade por suas características aditivas foi feita a média do domínio onde foi realizado o teste do poço. Notou-se que a permeabilidade obtida era dependente da distribuição da variável no raio de investigação do teste e o seu valor estava entre a média harmônica e a aritmética da permeabilidade no volume testado.

Daí a média da variável permeabilidade ser menor no caso em que as amostras são de poços testados quando comparado com reservatório hipotético. Mas esta diferença é compensada com a diminuição da heterogeneidade do modelo ao redor dos poços .

Outro fato interessante de analisar é o comportamento da permeabilidade do teste em relação a porosidade média (figura 5.5). Mostrando que os pontos não se ajustam perfeitamente a uma curva, eles só apresentam uma tendência exponencial entre as variáveis . Isto se justifica pela distribuição da permeabilidade ao redor do poço em cada teste ser diferente e conseqüentemente um expoente potencial de média da variável também diferente.

coord. x (m)	coord. y (m)	$\phi_{ponto}$ (%)	$K_{ponto}$ ( x $9,87.10^{-16} m^2$ )	$\phi_{bloco}$ (%)	$K_{bloco}$ ( x $9,87.10^{-16} m^2$ )
250	250	8.82	15.88	8.99	13.71
250	750	13.72	42.24	15.32	41.75
250	1250	18.96	120.43	17.09	83.56
250	1750	24.52	366.31	21.04	214.62
250	2250	25.79	472.77	25.71	347.28
250	2750	25.44	440.46	24.69	308.37
750	250	18.75	115.67	14.90	52.01
750	750	15.81	64.18	11.83	32.83
750	1250	14.87	53.25	13.66	35.35
750	1750	11.59	27.61	12.67	28.82
750	2250	22.85	262.24	20.55	166.77
750	2750	20.99	181.13	20.41	160.71
1250	250	7.33	11.76	9.68	13.78
1250	750	12.25	31.53	12.81	23.13
1250	1250	11.41	26.62	9.68	17.31
1250	1750	14.98	54.40	14.90	43.98
1250	2250	14.08	45.40	15.23	45.57
1250	2750	19.12	124.34	19.72	129.63
1750	250	16.72	77.72	15.99	47.10
1750	750	16.86	79.20	16.91	74.02
1750	1250	14.82	52.68	14.25	36.26
1750	1750	17.82	95.96	17.18	83.94
1750	2250	11.49	27.03	10.84	22.32
1750	2750	17.67	93.07	17.68	84.13
2250	250	18.33	106.24	18.33	108.36
2250	750	19.16	125.47	17.68	84.14
2250	1250	22.34	237.24	21.71	162.97
2250	1750	22.31	235.67	21.76	181.71
2250	2250	21.96	219.83	21.65	194.61
2250	2750	23.33	289.38	22.81	221.08
2750	250	17.92	97.81	16.62	66.54
2750	750	21.05	183.25	19.70	121.25
2750	1250	17.69	83.57	17.60	84.51
2750	1750	13.17	37.87	13.13	28.89
2750	2250	13.88	43.64	15.74	43.94
2750	2750	22.52	245.76	20.63	177.82
—	média	17.51	132.99	16.92	99.52

Tabela 5.2: Comparação entre as amostras de perfilagem (pontual) e de análise de teste (de bloco)

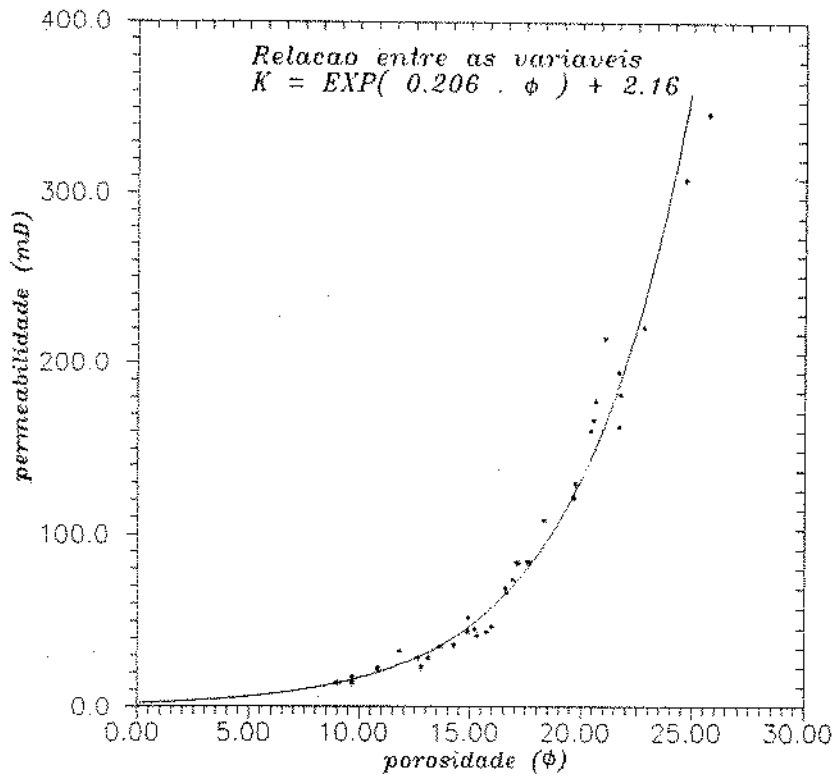


Figura 5.5: Relação entre a porosidade e a permeabilidade do teste

#### 5.2.4 Modelagem Geoestatística

Utilizando-se do algoritmo citado na seção 5.1.3 e das informações amostrais, pode-se obter as modelagens geoestatísticas para as variáveis porosidade e permeabilidade. Lembrando que no caso do poço testado, este apresentará uma geometria cilíndrica com raio de investigação de 150m. Os modelos de reservatórios realizados utilizaram os seguintes conjuntos amostrais :

- a) - Modelado com 36 amostras pontuais.
- b) - Modelado com 24 amostras pontuais e 12 poços testados.
- c) - Modelado com 12 amostras pontuais e 24 poços testados.
- d) - Modelado com 36 poços testados.

Os mapas apresentados nas figuras 5.6 a 5.10 confirmam as tendências variográficas e estatísticas citadas anteriormente sobre os dados amostrais. Como as amostras

pontuais apresentam maior média e menor variabilidade global, torna-se claro notar no mapa a maior continuidade entre as variáveis e regiões de mais alta porosidade e permeabilidade (melhor evidenciada). Já com 36 análises se teste, algumas regiões ficam mais representativas do reservatório hipotético, apresentando nas bordas do reservatório as maiores diferenças. Provavelmente pela falta de pontos condicionalizantes. Em termos de imagens, os modelos com 12, 24 e 36 testes, não tem tanta diferenciação no aspecto gráfico, apesar de numericamente diferentes.

### 5.2.5 Comparação dos Históricos

A comparação será feita através dos históricos de pressão, históricos de produção de óleo, água e gás, curvas de recuperação e relações gás-óleo (GOR) e água-óleo (WOR) (figuras 5.11 a 5.15). Outra forma de comparação será através das curvas de diferenças entre os modelos e o hipotético (figuras 5.16 e 5.17).

Com as análises estatísticas anteriormente realizadas, não há surpresa quando são feitas as comparações dos históricos globais do campo. O pior resultado foi revelado pelo modelo de 36 poços, que apresentou a menor queda de pressão, um maior tempo de produção de óleo com vazão constante, conseqüentemente menor produção de água e gás e a menor recuperação ao fim do tempo de comparação (1600 dias). Isto porque o modelo apresenta-se como um reservatório mais homogêneo e com valores médios para a porosidade e permeabilidade maiores.

Nota-se que este modelo foi o mais desfavorável por ter mais se afastado na tentativa de reprodução do histórico do campo hipotético. Por outro lado, o modelo foi o mais eficiente reservatório e o que pode recuperar mais óleo, levando a pensar que o modelo é o melhor entre os demais. A questão aqui é a reprodução mais próximas dos fatos que guiam um projeto de um campo produtor e não a geração de campos irreais que sejam mais eficientes, mas que na realidade causarão o maior erro de projeto.

A medida que vai adicionando mais amostras de teste de poço, os resultados

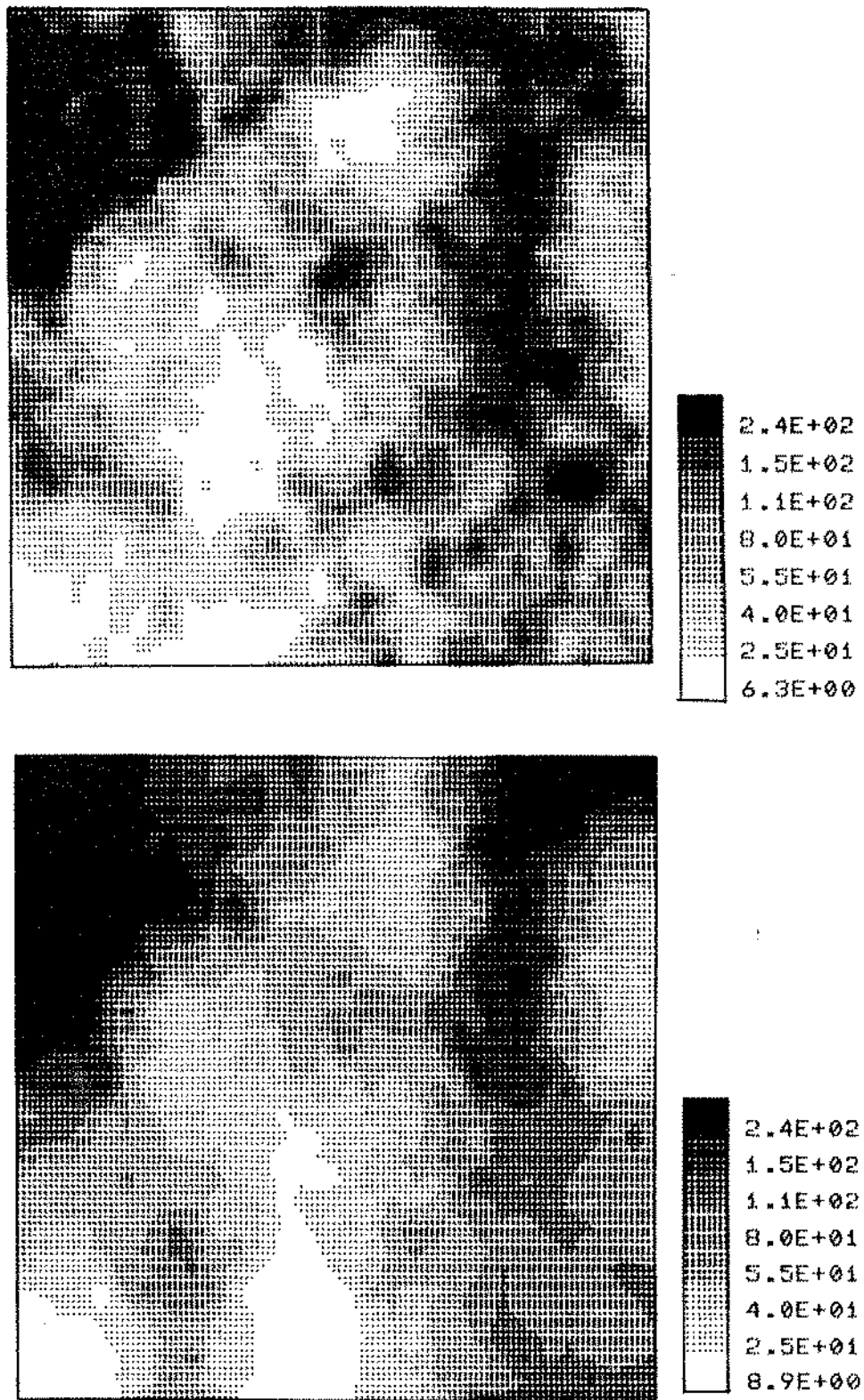


Figura 5.6: Mapas de permeabilidade. Figura superior reservatório hipotético e inferior o modelo a.

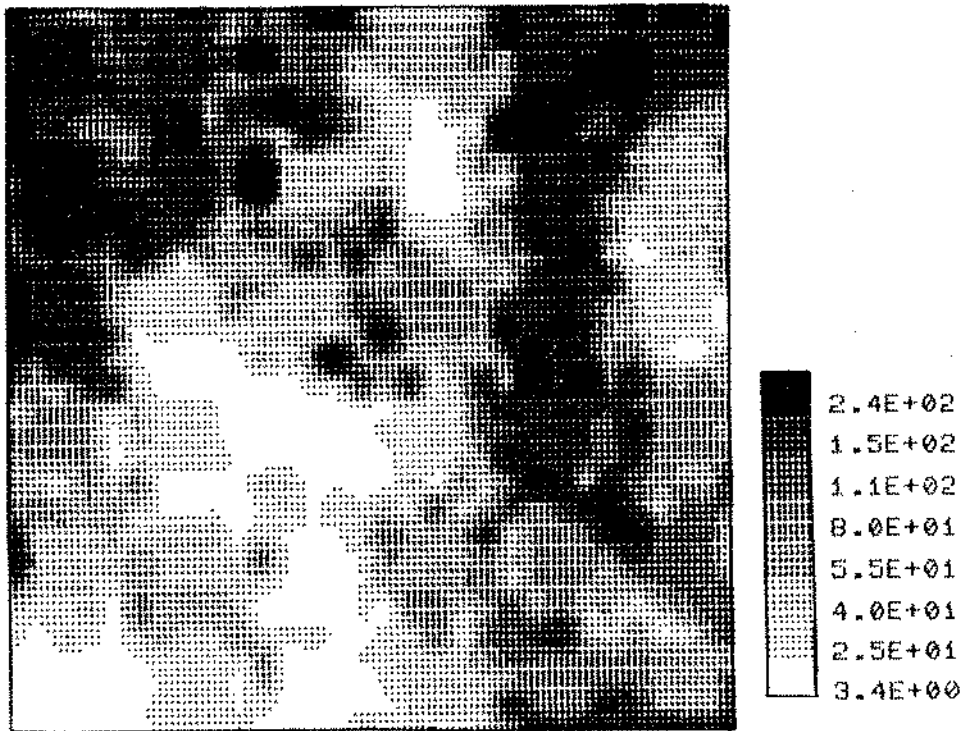
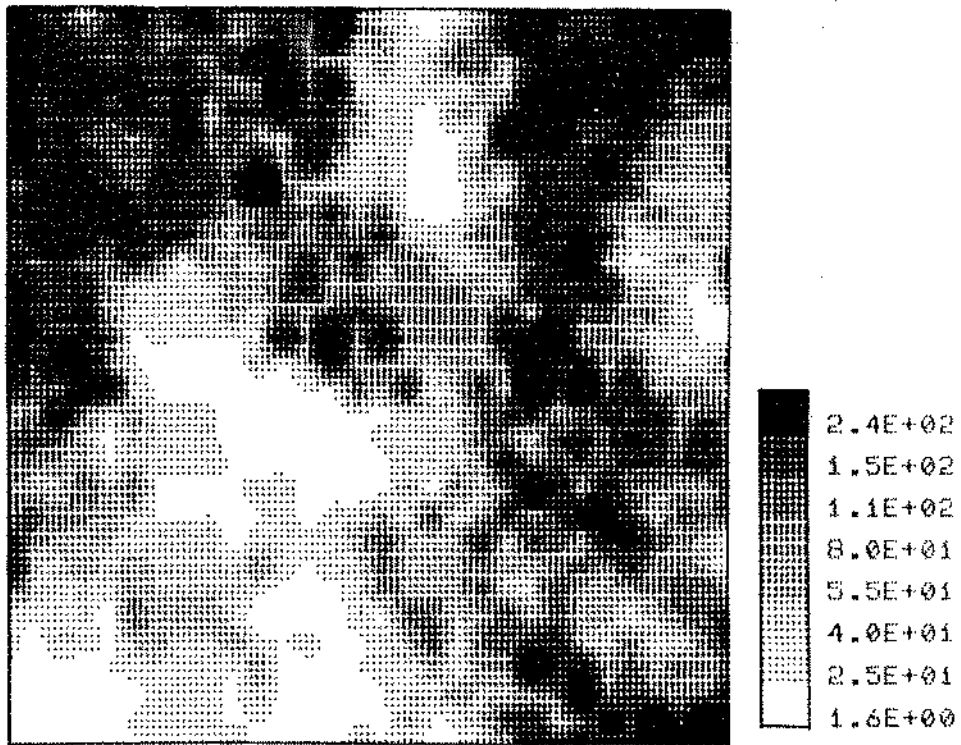


Figura 5.7: Mapas de permeabilidade. Figura superior modelo c e inferior o modelo d.



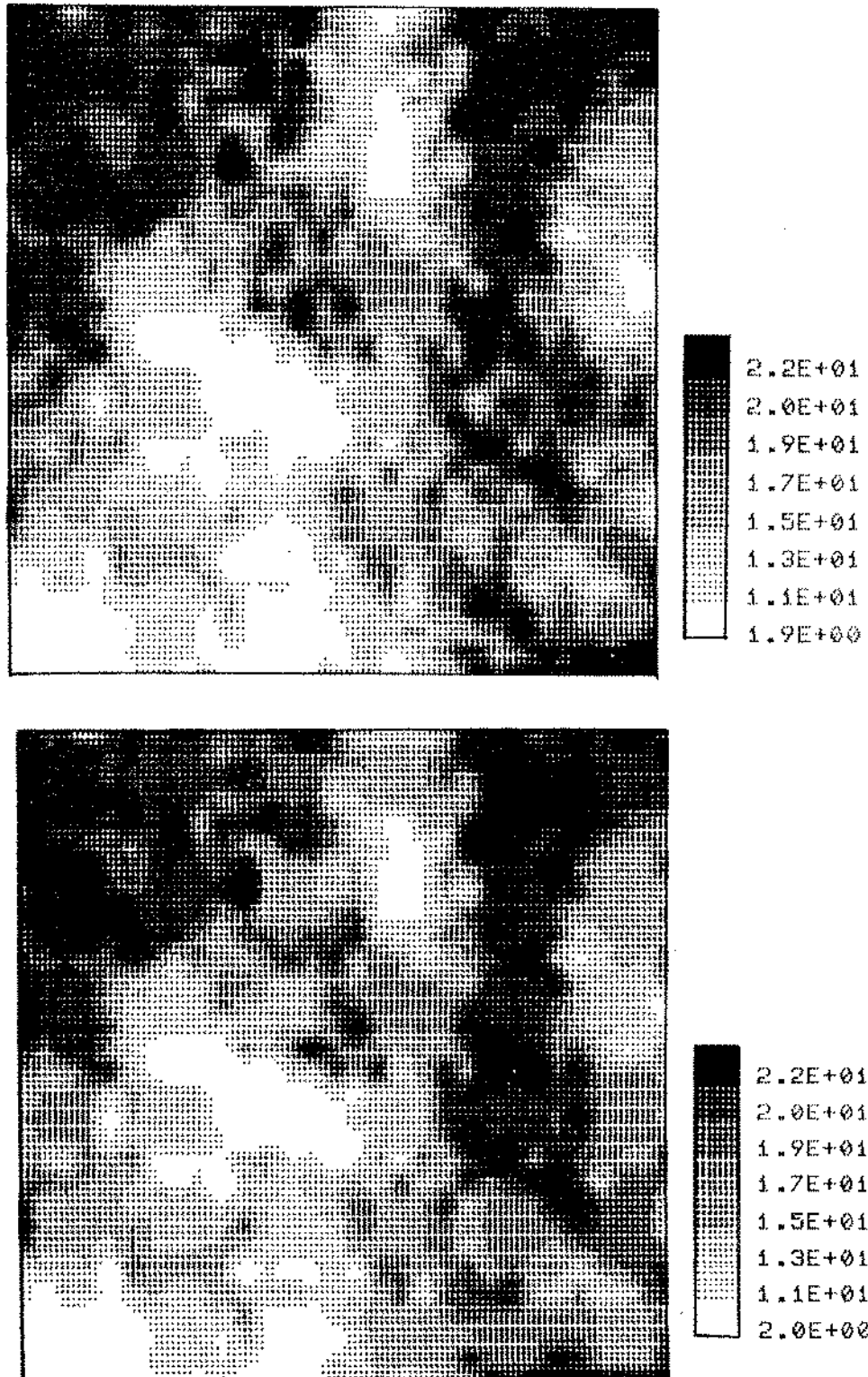


Figura 5.8: Mapas de porosidade. Figura superior reservatório hipotético e inferior o modelo a.

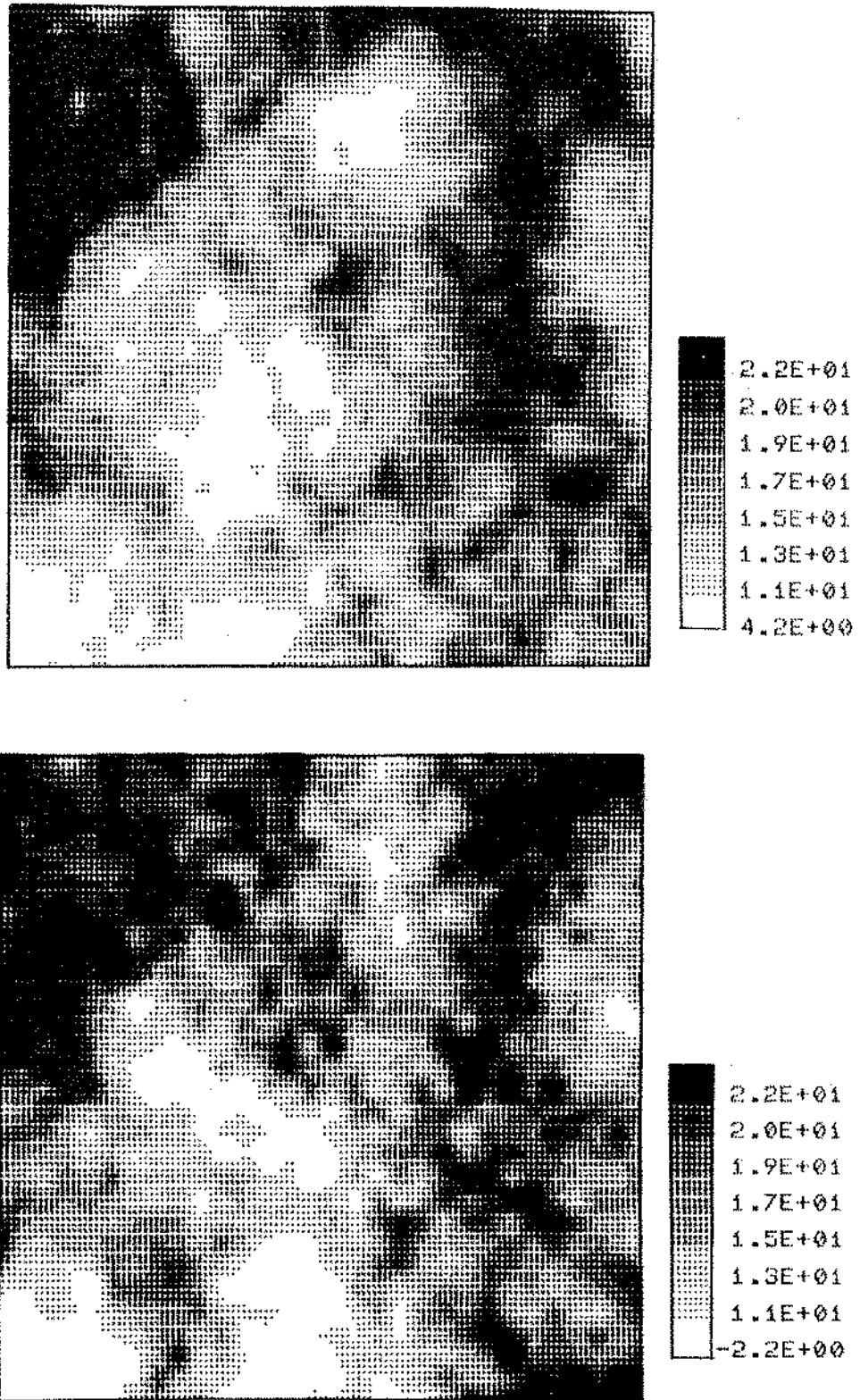


Figura 5.9: Mapas de porosidade. Figura superior o modelo c e inferior o modelo d.

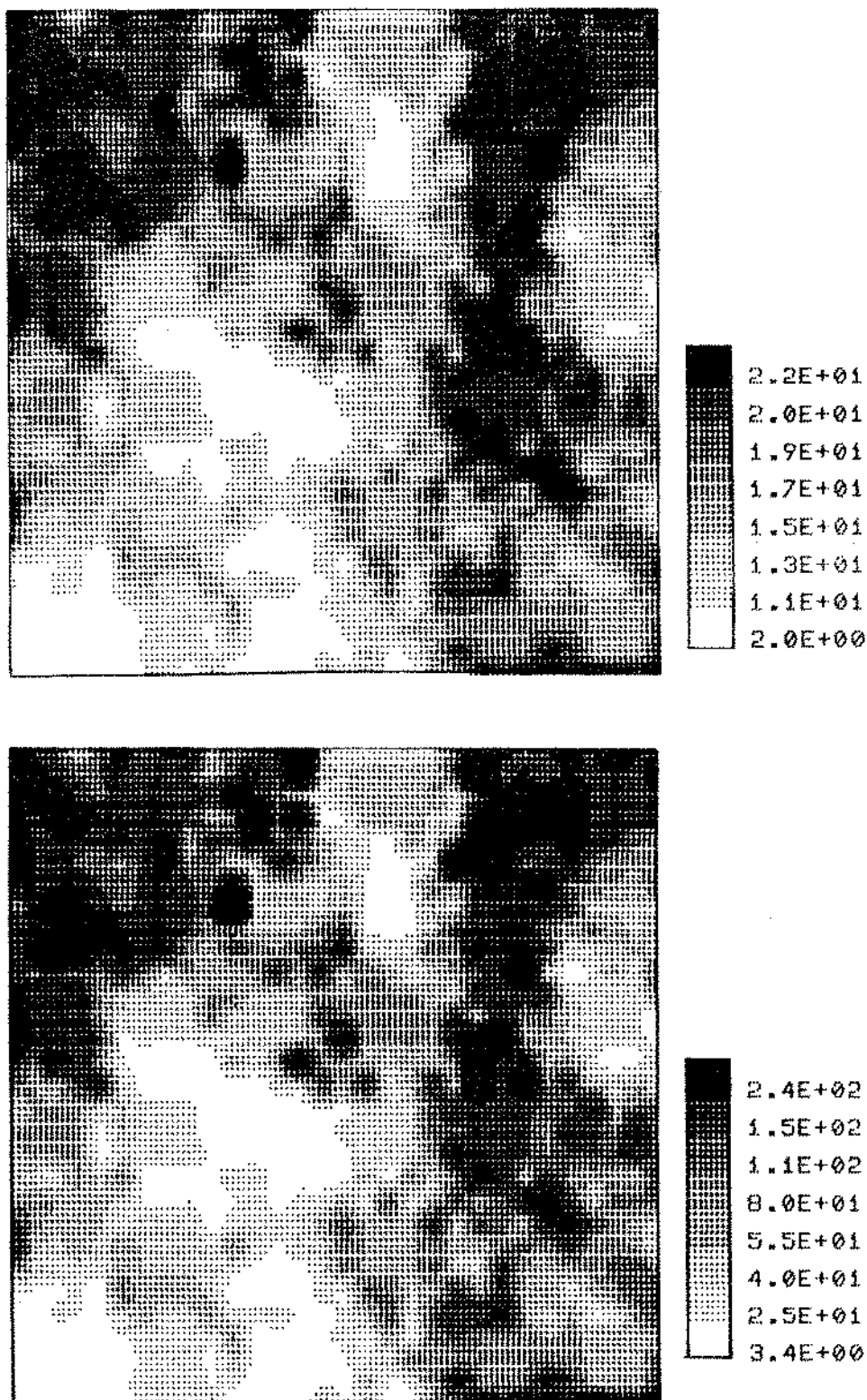


Figura 5.10: Mapas do modelo b. Figura superior para porosidade e inferior para permeabilidade.

vão melhorando , apesar de nenhum caso reproduzir fielmente o histórico do campo hipotético. Quando se compara os modelos com 24 e 36 testes de poços , seus resultados chegam a ser muito próximos, mostrando que a partir de um número adicional de testes os resultados passam a não contribuir significativamente na melhoria na reprodução dos históricos. Este resultado só será válido para este estudo em questão, por se tratar de um problema inerente desta amostragem. A explicação pelas últimas campanhas de testes não interferir é que elas foram realizadas próximas as bordas e em regiões com baixa permeabilidade e pelas práticas condicionantes causou pouca diferença numérica entre os modelos. Ainda sim o modelo com 36 testes de poço se mostrou mais representativo, confirmado pelos gráficos de diferenças entre os históricos (figuras 5.18 e 5.19).

A análise sendo feita somente em um poço , podemos sentir melhor os erros que incorremos em utilizar o valor da variável da análise de teste do poço . O comportamento da pressão média do bloco, produção de óleo e produção de gás é mais favorável ao modelo do poço testado (figuras 5.18 e 5.19). Mas quando analisamos pelo lado da pressão de fundo de poço , que no simulador é função da permeabilidade do bloco onde se encontra o poço produtor, nota-se um comportamento diferente. Inicialmente o modelo sem teste de poço é mais representativo e depois de certo tempo o modelo com teste assume a posição de ser mais semelhante ao hipotético. A explicação a este fato é que no início, onde os efeitos de fluxo dependem mais das condições próximas ao poço , o valor da permeabilidade na célula de produção são iguais para o hipotético e o modelo sem teste. Portanto inicialmente apresentou melhores resultados. Mas com a interferência entre os outros poços produtores e o fato de ser o modelo com testes de poços mais representativos em termos de semelhança de históricos, ele acaba por representar melhor o comportamento da pressão no fundo de poço ( $p_{wf}$ ). Mostrando que este é um problema inerente entre o modelo e o simulador utilizado. Este problema poderia ser atenuado se nos primeiros instantes de produção , onde ocorre os maiores diferenciais de pressão , se utilizasse para ambos os modelos os valores das amostras pontuais.

Em valores numéricos as diferenças entre os modelos e hipotético variam na

produção de óleo de aproximadamente  $400.000 \text{ m}^3$  para o modelo sem testes de poços (caso mais desfavorável) a  $40.000 \text{ m}^3$  no caso de todos os poços testados. Se colocássemos o preço do barril de petróleo a US\$ 30,0, teríamos um erro de retorno de investimento em torno de 75 milhões de dolares contra 7,5 milhões de dolares do pior para o melhor modelo.

Resumindo, há um ganho em termos de representatividade do histórico com o aumento do suporte amostral. Mas sempre deve estar atento para não manipular este tipo de variável de forma errônea, seguindo as recomendações da seção 5.1.2 sob o tratamento dos teste de poço como amostra condicionalizante.

Ter sempre em mente que este ganho nem sempre reverterá em uma melhoria significativa em termos de históricos. Como ocorrido com o caso dos modelos com 24 e 36 poços testados. Pois dependerá da localização e do valor do atributo da variável (ser uma zona de alta ou baixa permeabilidade).

Este tipo de condicionalização tem por objetivo gerar a melhor entrada de dados para os simuladores de comportamento de reservatório em termos da caracterização do mesmo. Não hávendo a preocupação com a geração de mapas, pois nas muitas distribuições espaciais das variáveis haverá subdomínios com o valor médio da variável, que não é representativo da realidade em termos de mapas geológicos.

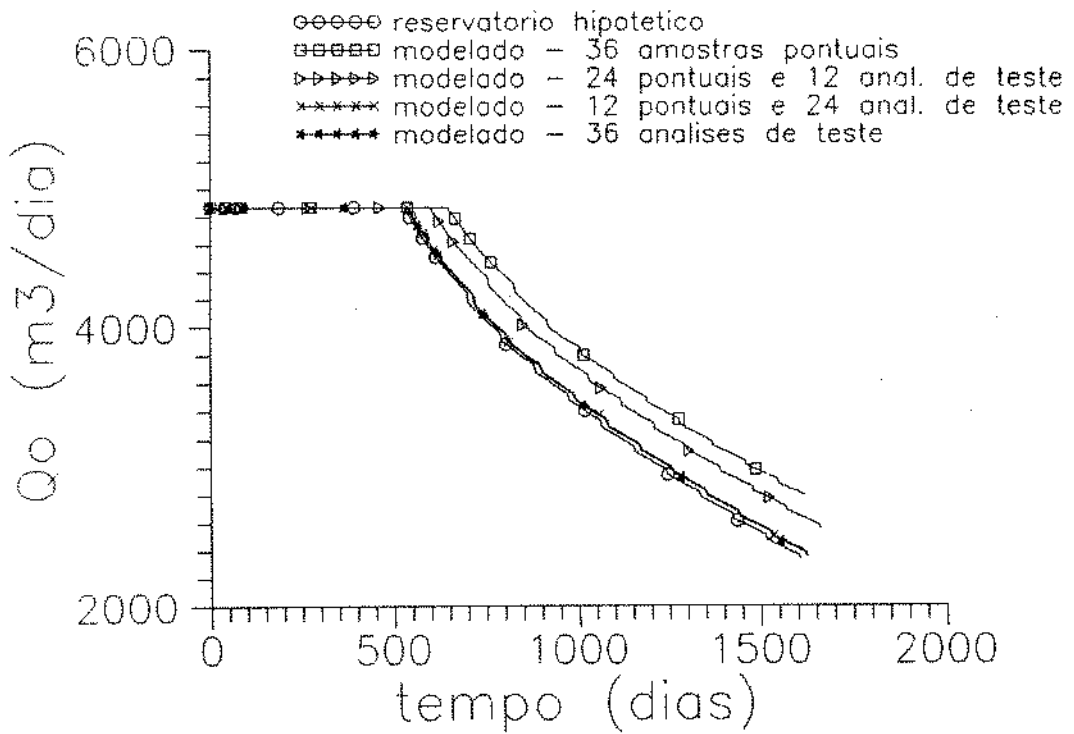
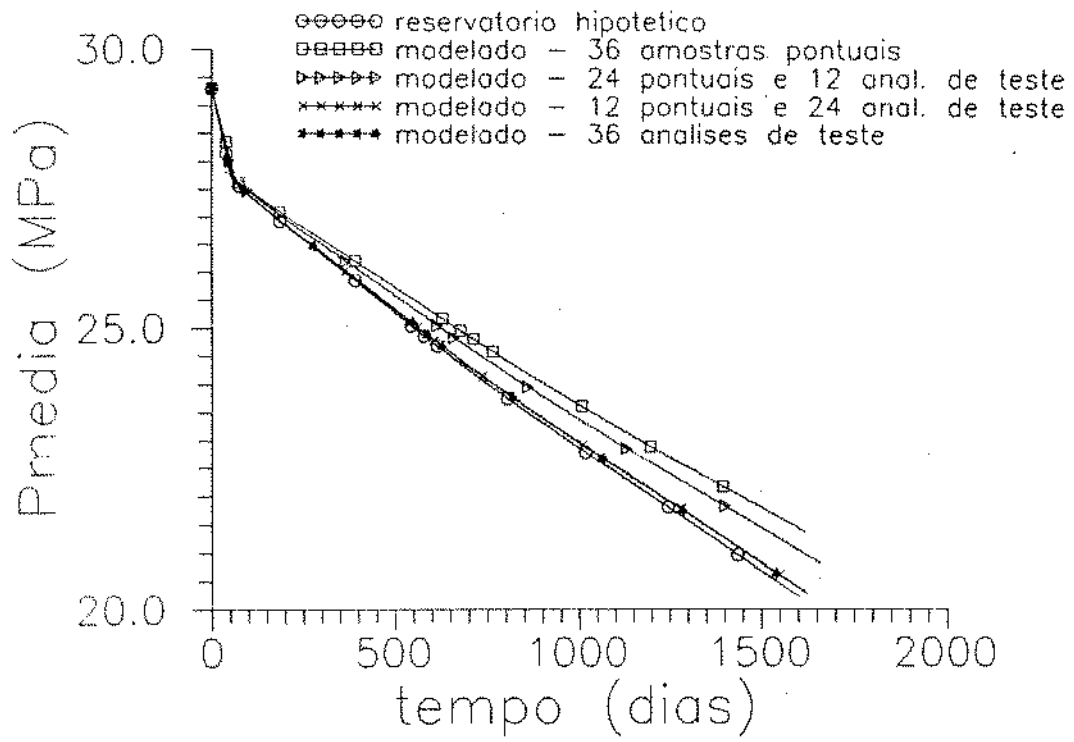


Figura 5.11: Comparação entre os históricos de pressão (parte superior) e de produção de óleo (parte inferior)

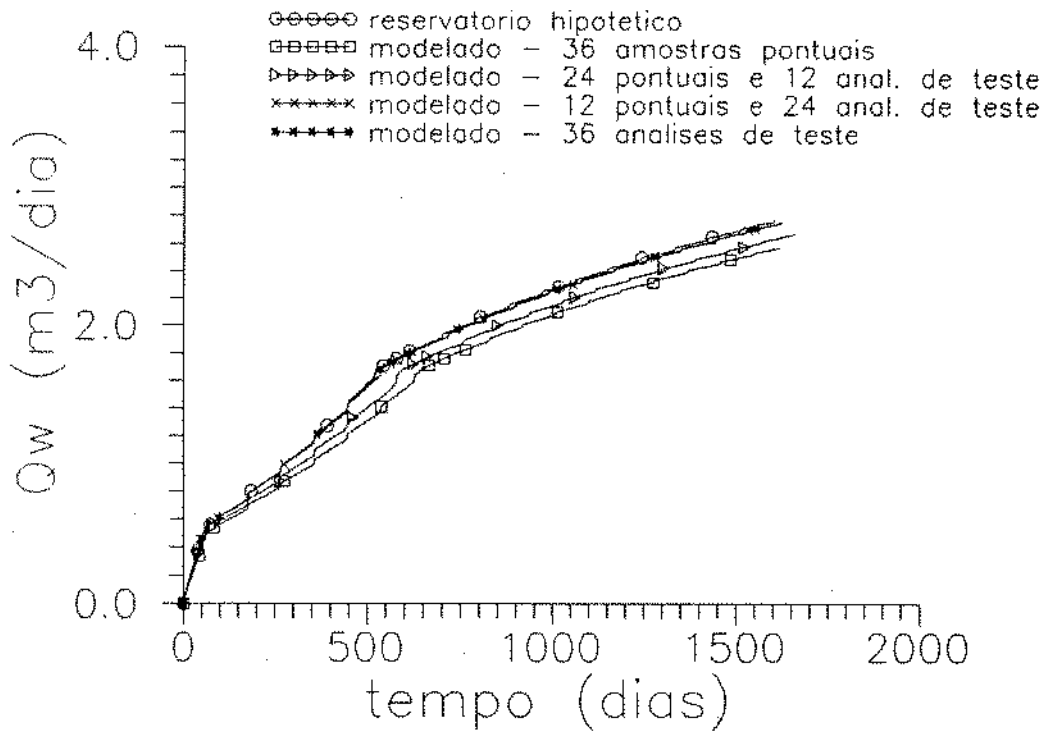
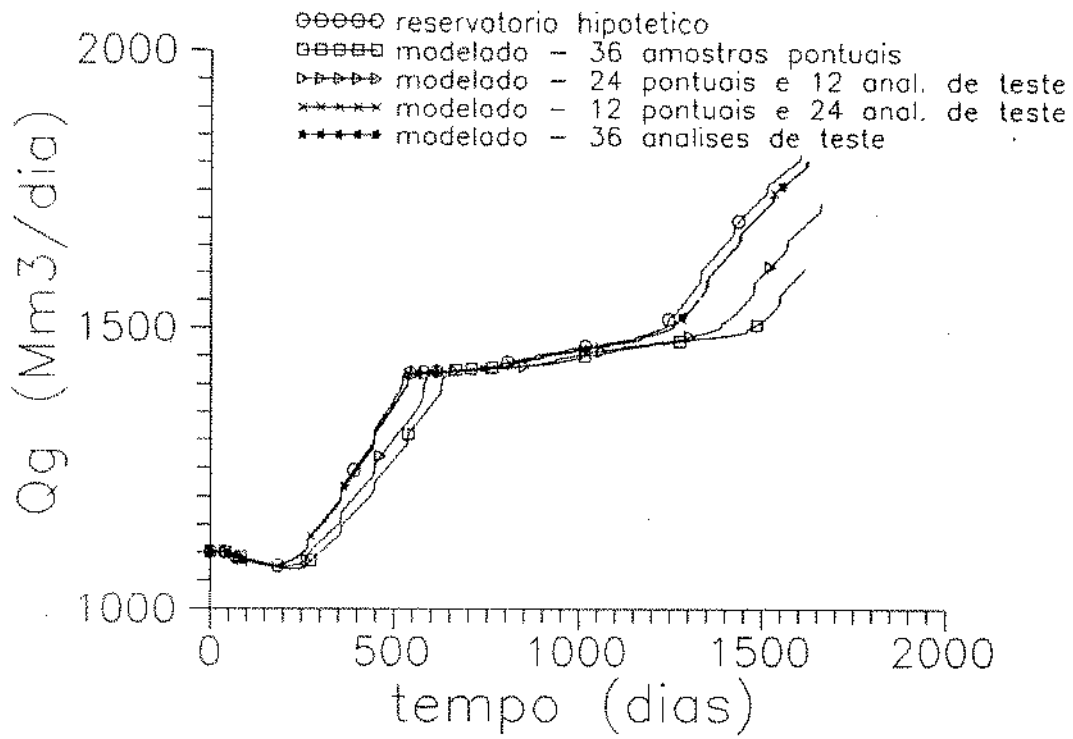


Figura 5.12: Comparação entre os históricos de produção de gás (parte superior) e de produção de água (parte inferior)

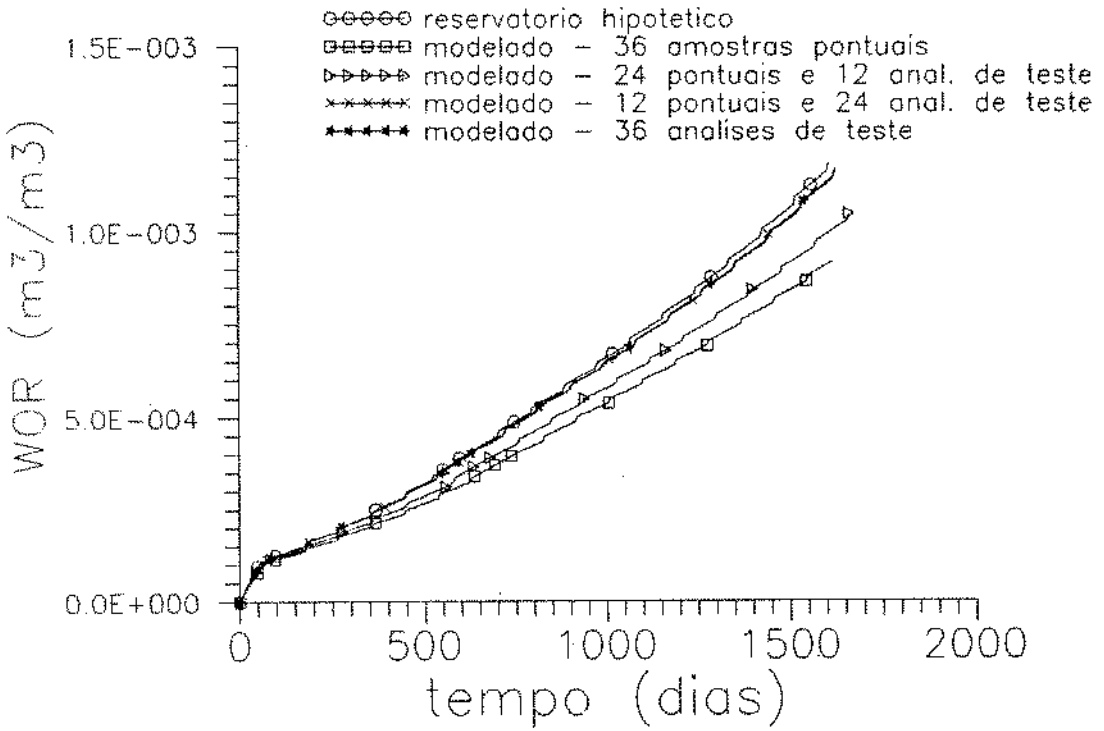
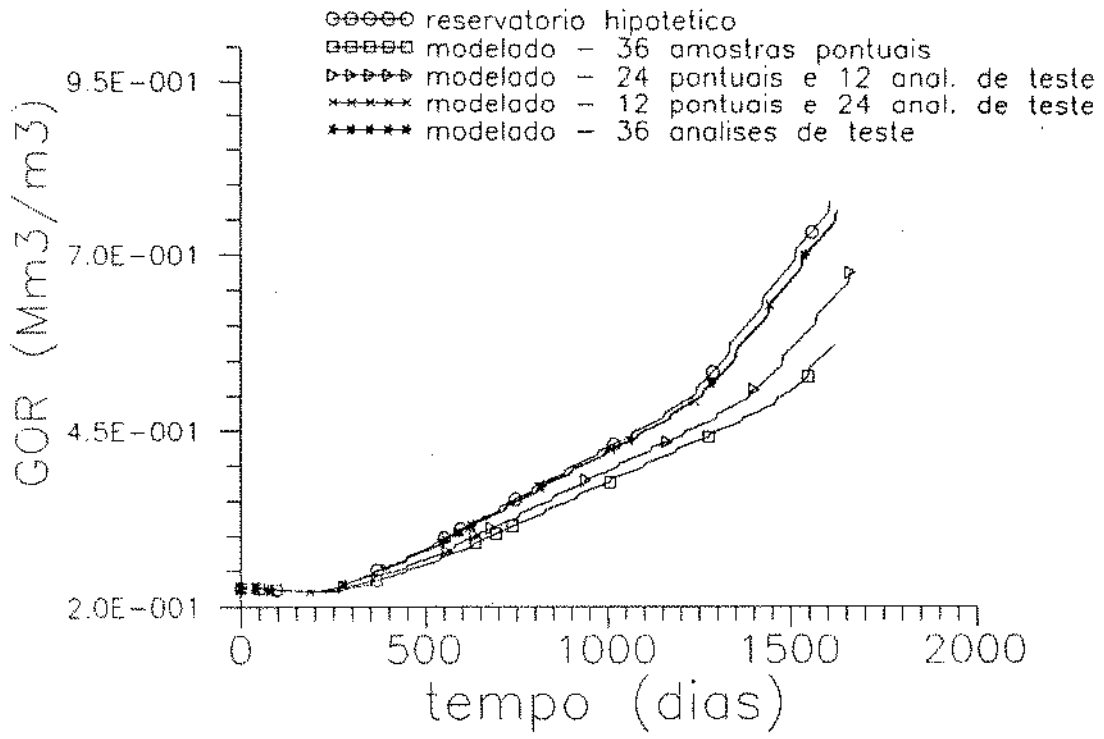


Figura 5.13: Comparação entre as relações gás-óleo (parte superior) e água-óleo (parte inferior)



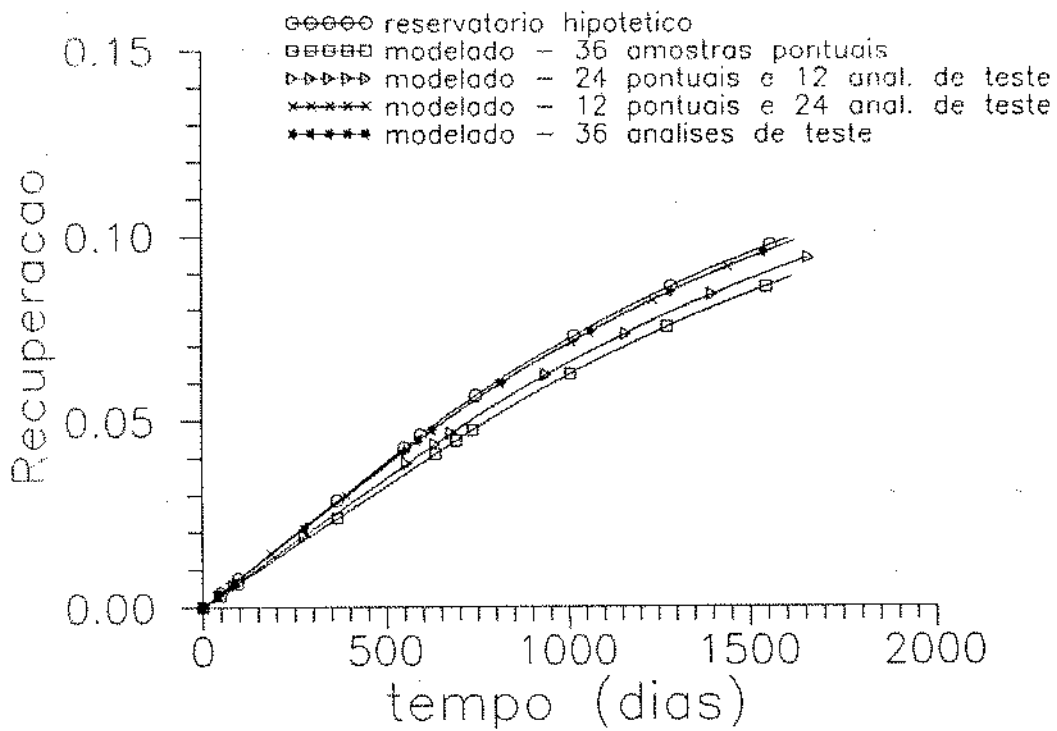
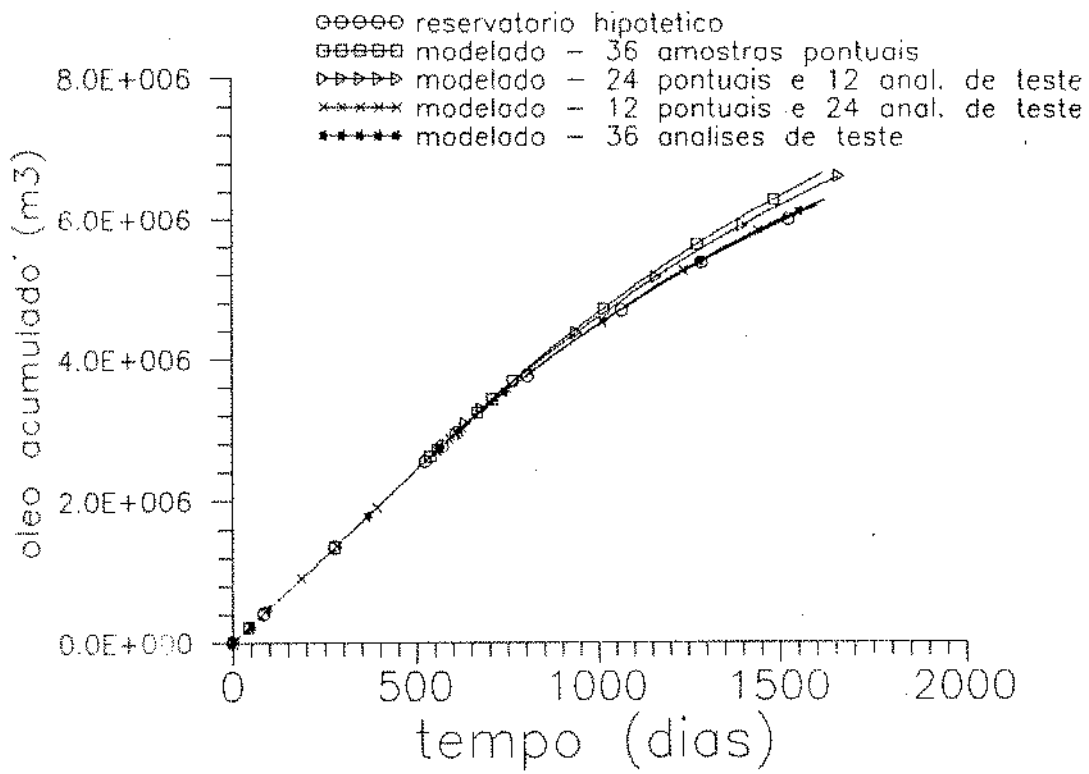


Figura 5.14: Comparação entre a produção acumulada de óleo (parte superior) e a recuperação (parte inferior)

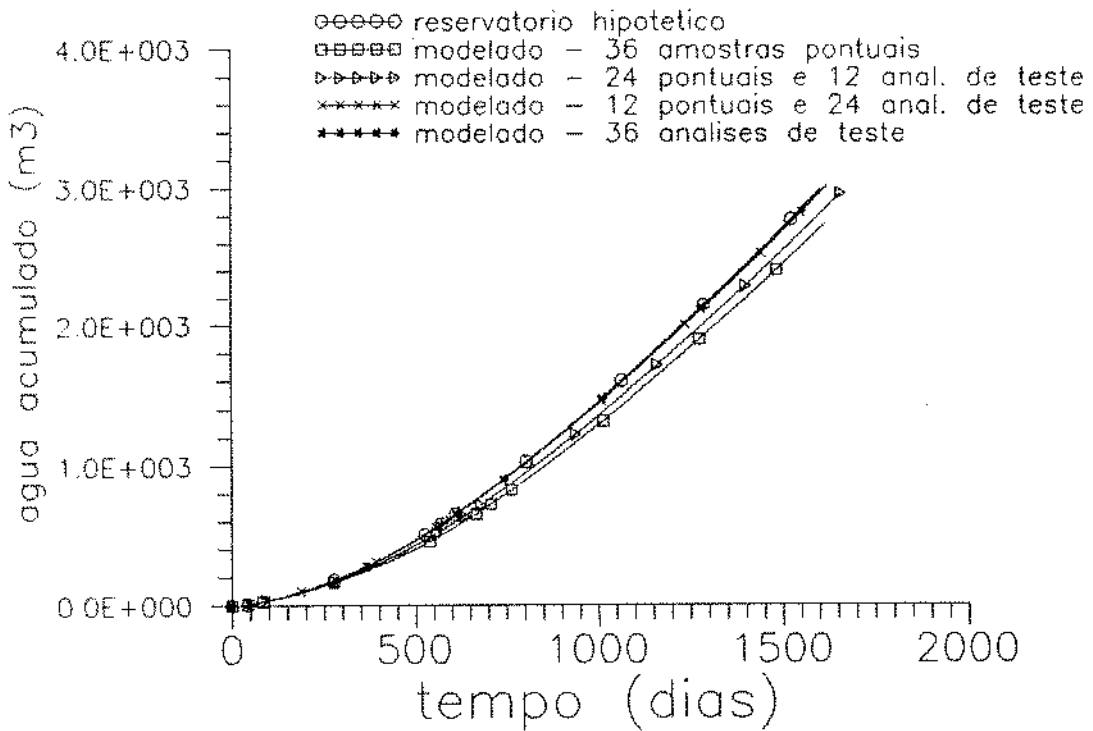
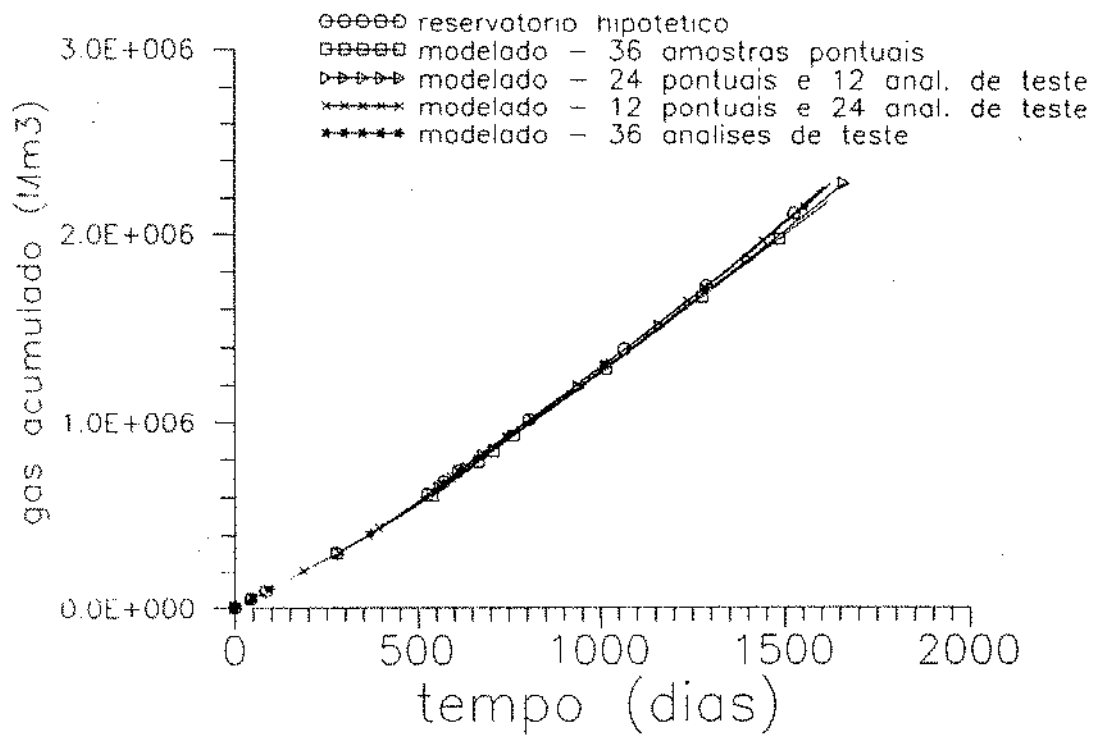


Figura 5.15: Comparação entre as produções acumuladas de gás (parte superior) e de água (parte inferior)

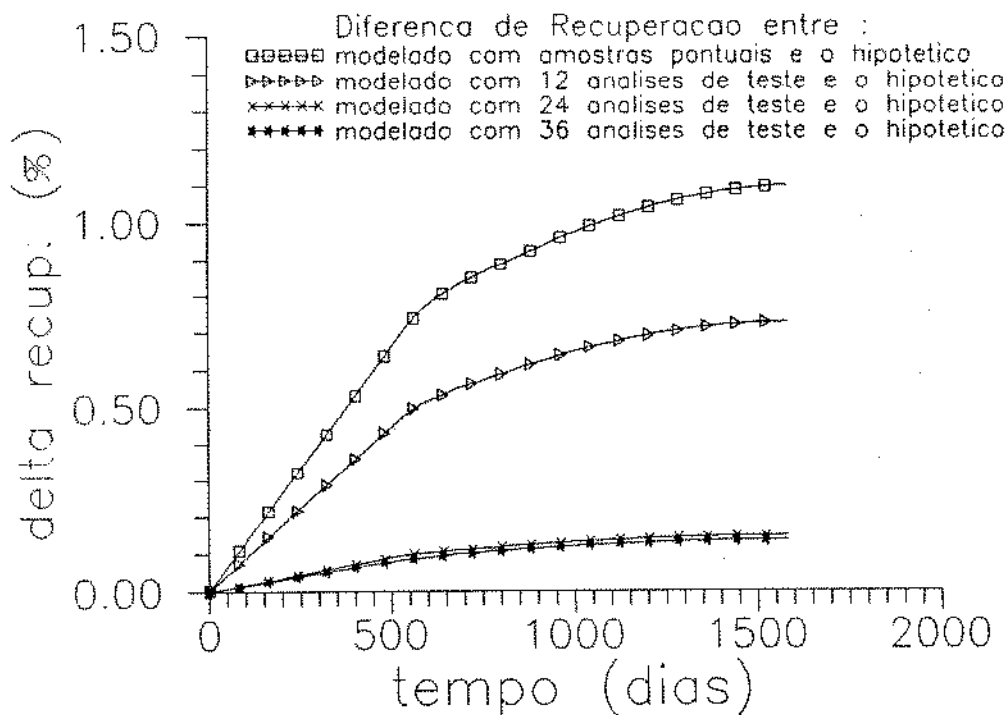
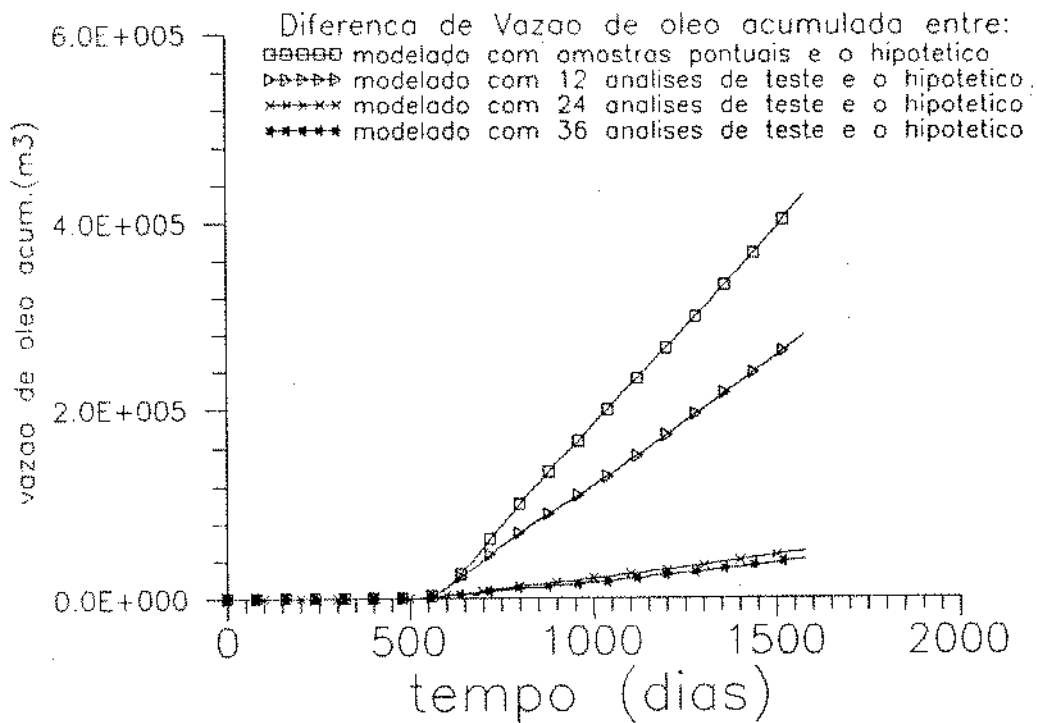


Figura 5.16: Diferenças entre os históricos para vazão de óleo (parte superior) e para recuperação (parte inferior)

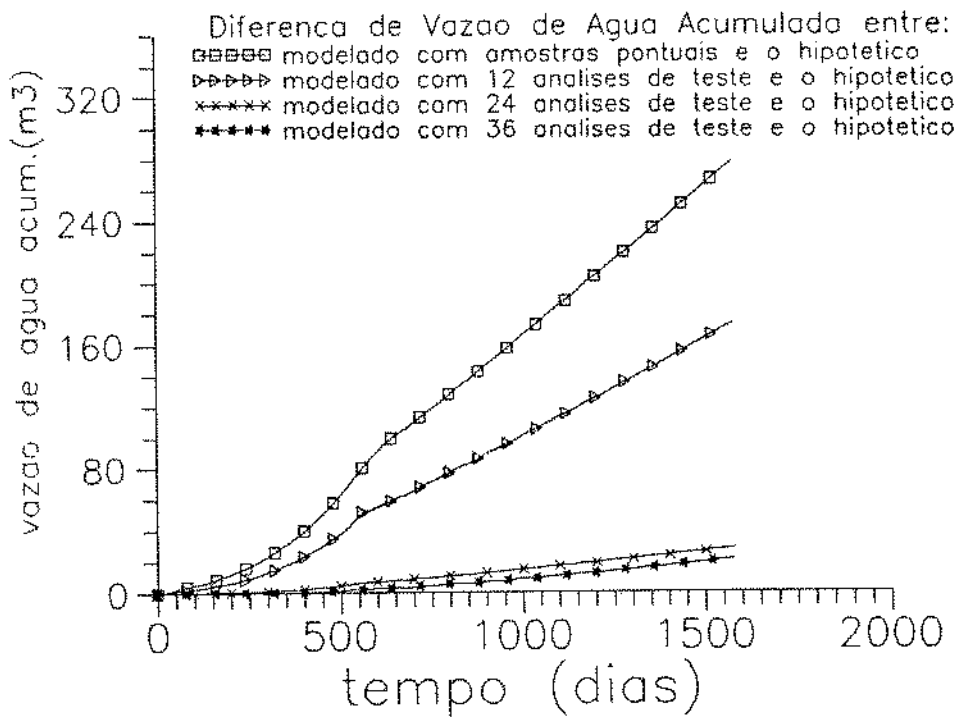
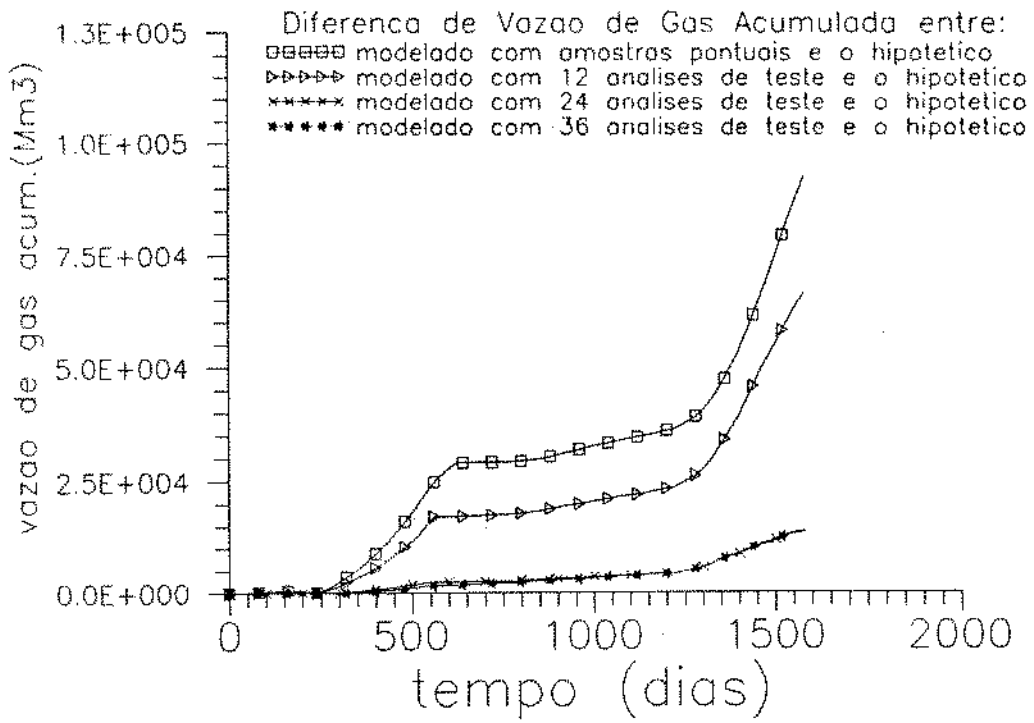


Figura 5.17: Diferenças entre os históricos para vazão de gás (parte superior) e para vazão de água (parte inferior)

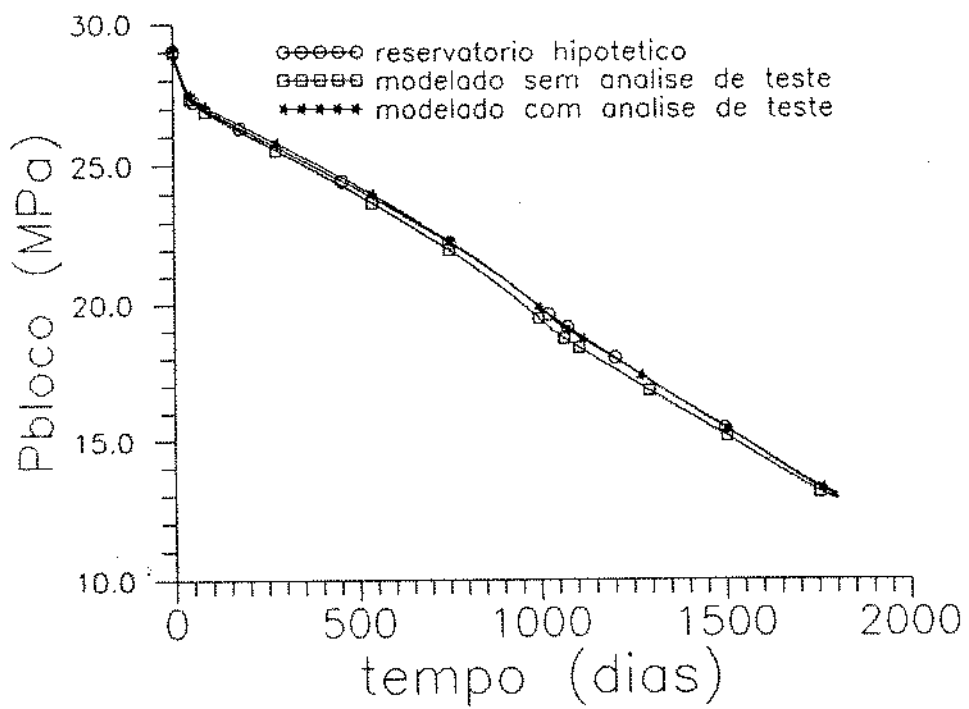
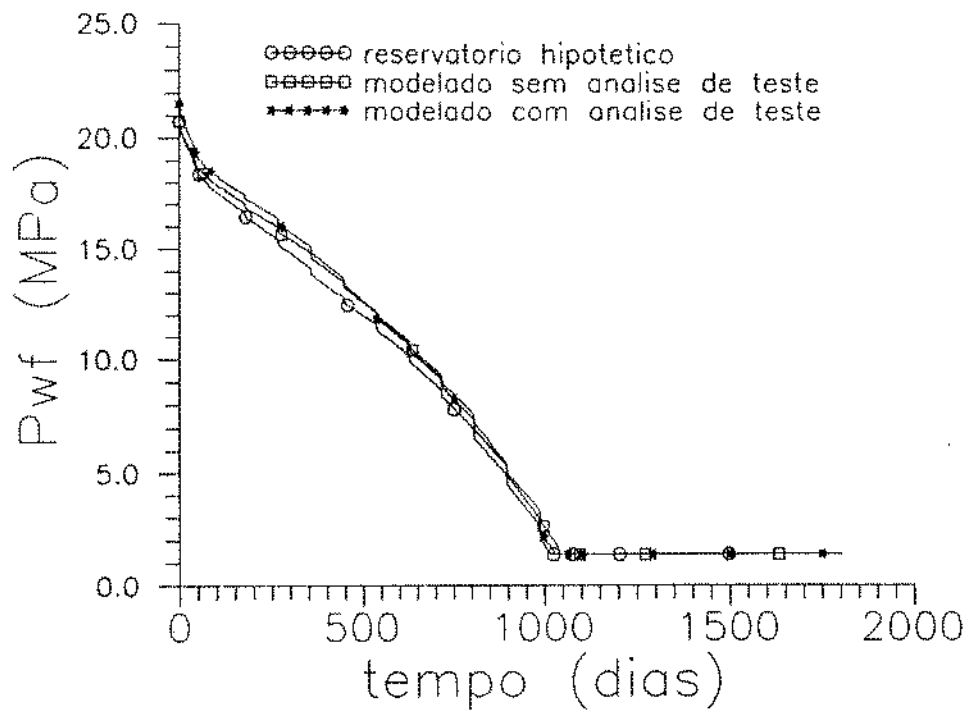


Figura 5.18: Comparação entre os históricos de pressão do poço (parte superior) e de pressão do bloco (parte inferior)

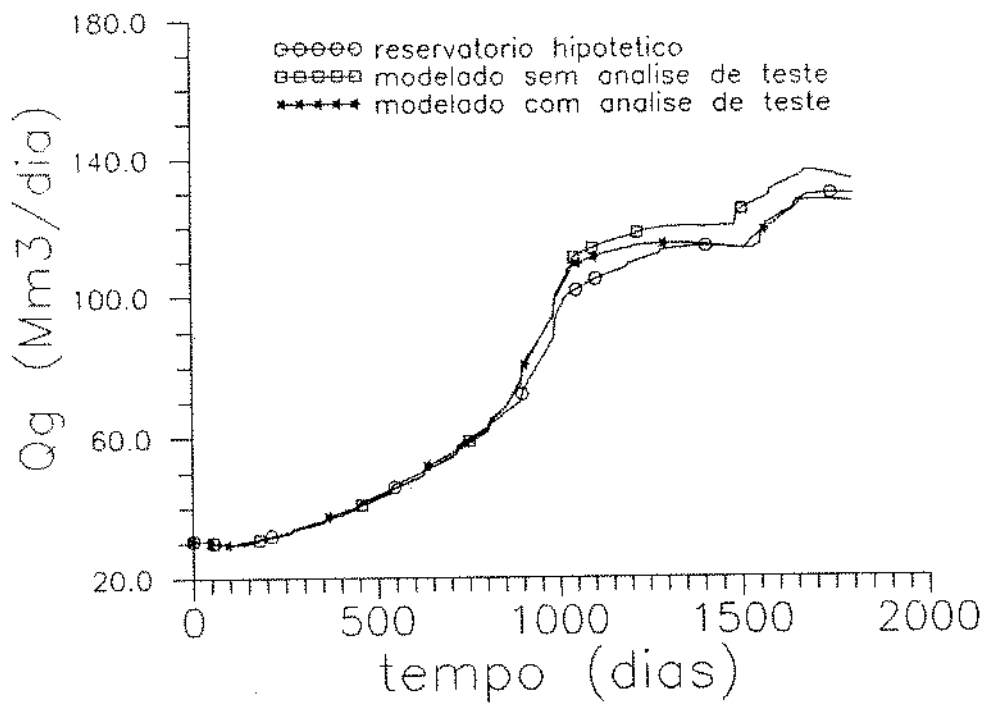
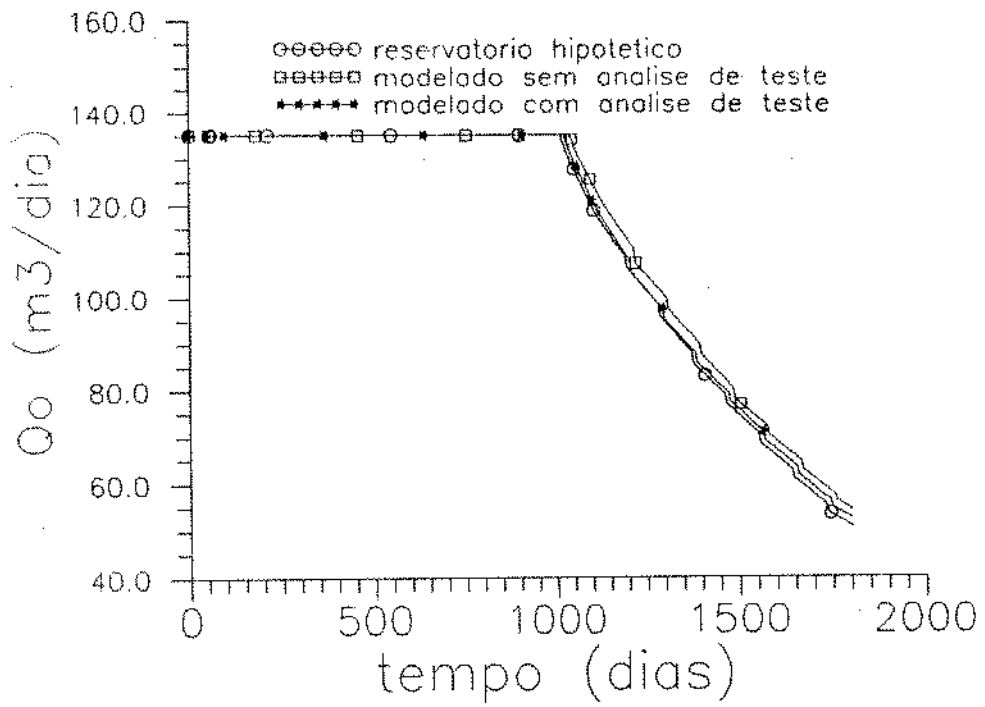


Figura 5.19: Comparação entre os históricos de vazão de óleo do poço (parte superior) e de vazão de gás do poço (parte inferior)

## 6 Conclusões e Sugestões

A geoestatística é uma técnica capaz de modelar numericamente as propriedades físicas, fornecendo uma interface fácil à entrada dos simuladores numéricos de reservatório. Tratando-se de processos estocásticos, infinitas configurações das variáveis (porosidade e permeabilidade) podem ser realizadas obedecendo os mesmos comportamentos geoestatísticos. Devido a isto poderá fornecer resultados estatísticos das curvas de previsão do comportamento do reservatório dando maior clareza quanto ao risco de investimentos futuros.

É de fundamental importância a representatividade da função variograma e do número de amostras condicionalizantes para a realização da modelagem geoestatística de um reservatório de petróleo. Tendo a noção que não se pode criar regras para determinar a densidade ideal de amostras dos campos, pois é dependente da heterogeneidade do reservatório e da qualidade das amostras. A densidade amostral para uma análise geoestatística fica mais confiável no campo desenvolvido e em projetos de recuperação suplementar.

A incorporação da análise de teste de poços como amostra, ou seja, o aumento do suporte amostral mostrou um ganho em tentar representar o histórico do campo. Aumentando a certeza do projeto de desenvolvimento do campo. Em termos de confecção de mapas torna-se errôneo a utilização destas amostras, porque estará atribuindo valores médios a um determinado volume ou área do mapa, mascarando as reais heterogeneidades.

Em relação a simulação geoestatística, pode-se simular populações que representem o variograma potencial através de método no domínio da frequência e verificar a natureza fractal destas populações.

Como sugestões, deve-se procurar desenvolver técnicas e critérios para dentre uma infinidade de realizações estocásticas que obedeçam as características geoestatísticas do campo, escolher as que melhor representem localmente os resultados dos poços. Sem que para isto simule numericamente o fluxo e compare os históricos para todas as rea-

lizações . Esta técnica seria através da krigagem indicatriz, que poderia prever a probabilidade de no ponto x a variável assumir o atributo Z.

A utilização da modelagem geoestatística do reservatório seria útil em determinação de locações de poços em recuperação suplementar (projetos de injeção ) determinando também as vazões de injeção que estabeleça a melhor relação custo-recuperação.



## Referências

- [1] Alabert, F. G., (1989), "Constraining Description of Randomly Heterogeneous Reservoir to Pressure Test Data - A Monte Carlo Study", SPE 19600, 64th Ann. Tech. Conf of SPE, oct. 1989.
- [2] Arya, A. e Hewett, A. S., (1985), "Dispersion and Reservoir Heterogeneity.", SPE 14364, 60th Ann. Tech. Conf. of SPE, Sep. 1985.
- [3] Aziz, K. e Settari A., *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Applied Science Public. Co., 1979.
- [4] Berry, M. V. e Lewis, Z. V., (1980), "On the Weistrass-Mandelbrot Fractal Function", Proc. Royal Soc. London, v. A-370, pp. 459-484.
- [5] Breitenbach, E. A., Thurnau, D. H. e Van Polen, H. K., (1969), "The Fluid Flow Simulation Equations.", Soc. Petrol. Eng. J., n<sup>o</sup> 2, pp. 155-69.
- [6] Bruno, R. e Raspa, R., (1989), "Geoestatistical Characterization of Fractal Models Surface.", In: Armstrong, M., Ed., *Geostatistics*, v. 1, pp. 77-89, Kluwer Academic Pub..
- [7] Coast, K. H., (1968), *Elements of Reservoir Simulation*, Lecture Notes, University of Texas, reeditada por Intercamp Resources Devenlopment and Engineering Inc., Houston.
- [8] Da Costa e Silva, A. J., (1986) "New Approach to the Characterization of Reservoir Heterogeneity Based on the Geomathematical Model and Kriging Technique", SPE 14275, 60th Ann. Tech. Conf. of SPE, sep. 1986.
- [9] Danilov, D. L., Konovalov, A. N. e Yakuba, S. I., (1968), "Equations and Boundary Value Problems in the Theory of Two Phase Flows through Porous Media.", Dokl. Akad. Nauk., URSS. 183, pp. 307-10.

- [10] Delfiner, P.,(1979), *Basic Introduction to Geostatistics*, Ecole d'Eté, Fontainebleau.
- [11] Delfiner, P., Delhomme, J. P. e Pelissier, J.,(1983) " Application of Geoestatistical Analysis to Evaluation of Petroleum Reservoirs with Well Logs", 24th SPWLA Ann. Log. Sym..
- [12] Debrule, O. e Haldorsen, H. H.,(1986) "Geostatistics for Permeability Estimation", *Reservoir Characterization*, ed. Lake and Carroll, Academic Press.
- [13] Debrule, O. e Kostov, C.,(1986), "An Interpolation Method Taking into Account Inequality Constraints: I-Methodology." , *Math. Geology*, vol 18, nº 1.
- [14] Debrule, O.,(1988) " A Review of Stocastics Models for Petroleum Reservoirs.", Proc. of 3rd Inter. Geoest. Congress, Avignon, França.
- [15] Desbarats, A. J., (1987), "Numerical Estimation of Effective in Sand-Shale Formation.", *Water Resources and Research*, vol. 23, nº 2, pp 273-286.
- [16] Fox, C. G.,(1987), "An Inverse Fourier Transform Algorithm for Generating Random Signals of a Specified Spectral Form", *Computer and Geoscience*, Vol 13 nº 4.
- [17] Galli, A. et al., (1984), "Dual Kriging - Its Properties and Use in Direct Contouring.", *Geost. Tahoe.*, parte 2, pp 621-633.
- [18] Glezen, W. H. e Lerche, I.,(1985), " A Model of Regional Fluid Flow: Sand Concentration Factors and Effective Lateral and Vertical Permeabilities.", *Math. Geology*, Vol 17, nº 3 .
- [19] Haldorsen, H. H. e Dasleth, E., (1990), "Stochastic Modeling", *Journal of Petroleum Technology*, April 1990, pp 404-417.
- [20] Hewett, T. A., (1986) "Fractal Distributions of Reservoir Heterogeneity and Their Influence on Fluid Transport. ", SPE 15386, 61st Ann. Tech. Conf. of SPE, oct 1986.

- [21] Hewett, T. A. e Behrens, R. A., (1988) " Conditional Simulation of Reservoir Heterogeneity with Fractals.", SPE 18326 , 63rd Ann. Tech. Conf. of SPE, oct 1988.
- [22] Journel, A. G. e Huijbregts, Ch. J., (1978), *Mining Geoestistics*, Academic Press, New York.
- [23] Journel, A. G. , "Non-parametric Estimation of Spatial Distribution.", *Math. Geology*, vol 15, nº 3.
- [24] Journel, A. G.,(1986) "Constrained Interpolation and Qualitative Information. The Soft Kriging Approach.", *Math. Geology*.
- [25] Le Loch'H, G., (1983), " An Efficient Strategy for Combining the Permeabilities", *Proc. of 3rd Inter. Geost. Congress, Avignon, França.*
- [26] Mandelbrot, B. B.,(1983), *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- [27] Mantoglou, A. e Wilson, J. L.,(1981) "Simulation of Random Fields with The Turning Bands Methods.", Report 264, Ralph M. Parsons Lab., Dep. of Civil Eng., Massachusetts Inst. of Tech..
- [28] Matheron, C., (1971), *The Theory of Regionalized Variables and Aplications .*, Les Cahiers du Cent. de Morph. Math., CG Fontainebleau.
- [29] Mathews, J. L., Emanuel, A. S. e Edwards, K. A., (1989), "Fractal Methods Improve Mitsue Miscible Prediction", *JPT-nov 1989*, pp 1136-1142.
- [30] Remacre, A. Z. et al., (1988), " Spacial Distribution of Erratic Shales Using Conditional Simulation. ", *Proc. of 3rd Inter. Geostatistic Congress, Avignon, França.*
- [31] Schever, E. M. e Stoller, D. S., (1962), "On The Generation of Normal Random Vectors.", *Technometrics*, vol 4, pp. 278-281.

- [32] Sheldon, J. W., Zondek, B. e Cardwell, W. T., (1959), "One-dimensional Incompressible, Non-capilar, Two Phase Fluid Flow in Porous Media.", Trans SPE of AIME, 216, pp. 290-6.
- [33] Shinozuka, M. e Jan, C. M., (1972), "Digital Simulation of Random Process and Its Application.", Journal of Sound and Vibration, vol. 25,  $n^{\circ}$ , pp. 111-128.
- [34] Stone, H. L. e Garder, A. O., Jr., (1961), "Analyses of Gas-cap or Dissolved-gas Reservoirs.", Trans. SPE of AIME, pp. 92-104.
- [35] Voss, R. F., (1985), "Random Fractal Forgeries.", Nato ASI Series, vol. f17, Fundamentals Algorithms for Computer Graphics.

## Apêndice A: Método Espectral de Simulação Unidimensional de Modelos Variográficos de Potência ("Power-Law")

O modelo variográfico potencial mostra algumas particularidades, que o faz merecedor de um estudo mais aprofundado. Dentre elas podemos assinalar:

### a) – Flexibilidade em relação ao seu comportamento como modelo

Pode tanto representar um caso em que a função variograma assume valor único,  $C_0$  (efeito de pepita puro), bem como variogramas de forte e baixa variabilidade quando analisados próximos à origem.

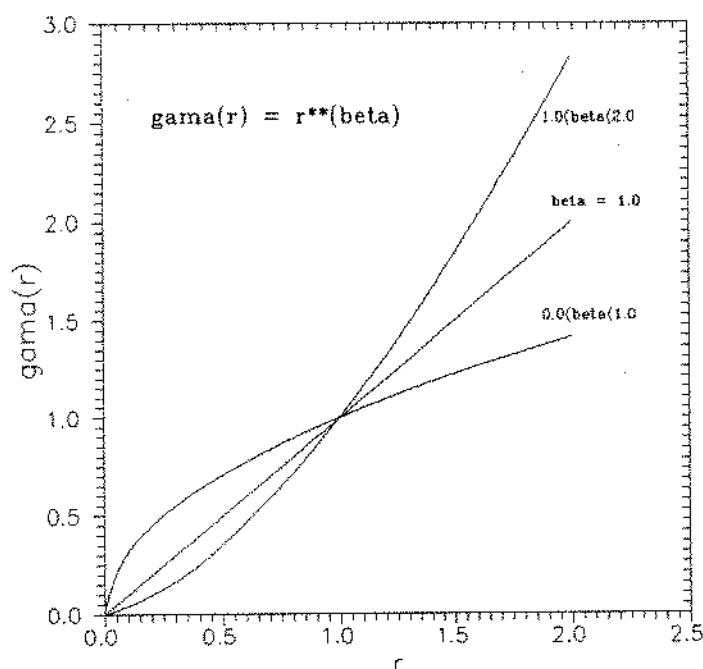


Figura A.1: Modelos em  $\gamma(r) = r^\beta$

### b) – Mesma estrutura variográfica em uma, duas ou três dimensões

Para uma dimensão , tem-se a relação :

$$\gamma_1(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon}[\epsilon \cdot \gamma(\epsilon)] \tag{A.1}$$

onde ;

$\gamma_1(\epsilon)$  é o variograma a uma dimensão .

$\gamma(\epsilon)$  é o variograma a três dimensões.

Sendo o modelo de potência representado por :

$$\gamma(h) = \gamma_0 \cdot h^\beta \tag{A.2}$$

Tem-se :

$$\gamma_1(h) = \gamma_0 \cdot (\beta + 1) \cdot h^\beta \tag{A.3}$$

Portanto mantem o mesmo expoente  $\beta$  , que é responsável pela forma do variograma .

### Relacionamento com a dimensão fractal .

O expoente  $\beta$  apresenta relação com a dimensão fractal (dimensão de Hausdorff - Besicovitch) , que tem mostrado interesse na modelagem de geometrias na natureza (geometria fractal) .

O estudo de geometrias fractais que foram generalizadas por B.B. Mandelbrot [26], pelo chamado movimento Browniano fracionário (f.B.m.) cuja relação pode ser dado por :

$$[Z(x_2) - Z(x_1)]^2 \propto [x_2 - x_1]^{2H} \tag{A.4}$$

$$D = 1 + E - H \tag{A.5}$$

onde ;

$Z(x)$  é o valor da função de uma variável e dependente de uma direção .

D é a dimensão fractal .

E é o número de dimensões do espaço euclidiano .

Nesta relação está imbutido o conceito de similaridade entre as escalas de observação (“self-similarity” ou “self-affinity”) . Em termos analíticos pode-se traduzir por :

$$I(\delta) = \frac{I(r.\delta)}{r^H} \quad (\text{A.6})$$

$$I(\delta) = Z(t + \delta) - Z(t) \quad (\text{A.7})$$

No estudo analítico e experimental realizado por R. Bruno e G. Raspa [6], mostrou-se que é possível calcular a dimensão fractal , D , identificando o comportamento na origem dos variogramas de primeira e segunda ordem .

Para o variograma de primeira ordem ( $\gamma_1$ ) :

$$D = 2 - \sigma \longrightarrow \gamma_1(h) = h^\sigma \quad (\text{A.8})$$

Tratando-se de variograma de segunda ordem ( $\gamma_2$ ) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\gamma_2(h)] \approx 0 = h^{c\sigma} \approx \lim_{h \rightarrow 0} [\gamma_1^c] \quad (\text{A.9})$$

Desta feita , para o caso unidimensional :

$$D = 2 - \sigma = 2 - \frac{\beta}{c} \quad (\text{A.10})$$

Sendo que o valor máximo de c é 2 e que na origem é exatamente 2 .Mas é importante lembrar que o conhecimento do variograma nem sempre é suficiente para identificar a dimensão fractal D . Como exemplo , temos o movimento Browniano e o processo de Poisson com função variograma proporcional a h , entretanto o movimento Browniano tem dimensão fractal 1.5 e o processo de Poisson 1.0 . Quando as variáveis de interesse são estocásticas , estará num campo próximo do movimento Browniano e

portanto mais distante de uma função mais bem comportada e simétrica do processo de Poisson . Para os propósitos do estudo estocástico de determinadas variáveis , a relação (A-10) será válida a uma dimensão com o valor de  $c$  igual a 2 .

Em analogia a estudos de ondulatório , uma das formas de caracterizar a função  $Z(t)$  , que estaria no domínio do tempo , seria de representá-la no domínio da frequência através de seu espectro de densidade  $S$  para o movimento Browniano fracionário é dado por :

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad (\text{A.11})$$

Uma vez reconhecida a relação entre o estudo do movimento Browniano fracionário e os variogramas potenciais , será possível utilizar a função de densidade espectral (A-11) para realizar a simulação de uma população com variogramas de potência através do método espectral unidimensional .

Em geoestatística é possível simular a população através de um espectro pela sua relação com a covariância :

$$C(r) = 2 \int_0^\infty \cos(f.r).S(f)df \quad (\text{A.12})$$

onde ;  $C ( r )$  é a covariância em função da distância  $r$  .

Esta também tem uma relação inversa :

$$S(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(f.r).C(r)dr \quad (\text{A.13})$$

Logo  $C ( r )$  e  $S ( f )$  contem as mesmas informações relativas a uma população  $Y ( t )$  , por analogia no domínio do tempo , expressas de formas diferentes .

O enfoque do domínio da frequência recria o processo  $Y(t)$  como a soma de um número infinito de funções seno - cossenoidais do tipo :

$$A. \cos ( f.t - \phi ) = A. \cos ( \phi ) \cos ( f.t ) - A. \sin ( \phi ) \sin ( f.t ) \quad (\text{A.14})$$

onde ;



A é a amplitude , que para o espectro do modelo de potência :

$$A = \frac{1}{f^\alpha}$$

f é a frequência em radianos .

$\phi$  é a fase em radianos .

As frequências e fases são variáveis aleatórios independentes que combinadas geram uma realização particular do processo .

Em termos de algoritmo computacional será necessário gerar sinais aleatórios transformados em números complexos no domínio da frequência e transformados inversamente usando transformada rápida de Fourier (FFT) para produzir um valor real Y (t) no domínio do tempo .

O algoritmo constará então :

1º - Geração de números aleatórios normalizados entre  $-\pi$  e  $\pi$  ( representando a fase ) .

2º - Vetorização do produto da amplitude e fase em um número complexo T :

$$T = A. \cos(\phi) + A. \sin(\phi) \tag{A.15}$$

Colocado sob a forma hermitiana , ou seja , uma função no plano real colocada no plano imaginário .

3º - Para solucionar a equação de geração da população :

$$Y(t) = REAL \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} T.F df \right] \tag{A.16}$$

onde ;

$$F = \cos(f.x) + i \sin(f.x)$$

Utiliza-se uma subrotina de transformada inversa seno e cosseno de Fourier (F.F.T.) . Isto irá fornecer uma população cujo número de elementos tem de ser potência

de 2 e a precisão é função do número de elementos , pois por hipótese deveriam ser somatórios infinitos. Para cada banda simulada , adotou-se 512 divisões (pontos simulados).

Desta forma é feita a simulação em cada banda sempre alterando a população de números aleatórios responsável pela fase citada no 1º passo do algoritmo .

Para conectar o modelo variográfico ao espectro de densidade de movimento Browniano fracionário , se propôs fazer um estudo para correlacionar os expoentes do variograma  $\beta$  com o expoente espectral  $\alpha$  . Desta feita simulou-se várias populações de 512 elementos com diversos valores de  $\alpha$  e diversas sementes . Foram calculadas as dimensões fractais destas populações e plotados em gráfico a dimensão fractal (Df) vs.  $\alpha$  (Fig A.2), determinando uma relação analítica :

$$D = 1.47 + 0.5 \cos\left(\frac{\alpha \cdot \pi}{2}\right) \tag{A.17}$$

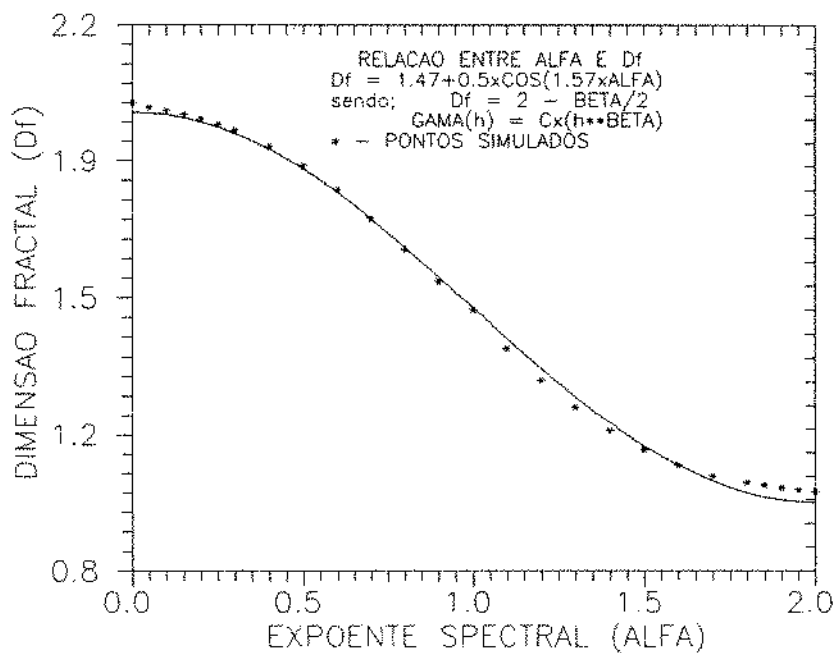


Figura A.2: Gráfico de correlação entre o expoente espectral  $\alpha$  e a dimensão fractal D .

É preciso notar que o valor  $D = 1.47$  se relaciona com  $\alpha = 1.0$  e  $\beta = 1.0$  , por-

tanto neste tipo de abordagem aproveita-se para fazer correções de imprecisões numéricas, pois o valor teórico de  $D$  seria 1.5 .

Foi realizado para toda população simulada o estudo variográfico que veio a confirmar a relação (A-10) com  $c$  igual a 2 . Para valores da potência variográfica baixa ( $\beta < 0.35$ ) , aumenta-se a imprecisão numérica principalmente do primeiro ponto do variograma experimental . Sabe-se que quanto menor o valor de  $\beta$  , maior é a variabilidade da população simulada não condicional . Revela-se uma certa atenuação da função na origem causada pela imprecisão numérica do método quando submetido a casos mais extremos . Ainda assim os resultados são bastante satisfatórios . A figura A.3 traz ilustrados alguns casos de populações geradas .

Pelo motivo acima , procurou-se no ajuste da curva da fig-A.2 dar mais acuracidade aos pontos com valores de  $\alpha$  e  $\beta$  pequenos. Para os maiores de 1.0 , a geração das populações tornaram-se mais homogêneas , diminuindo a variabilidade , tendendo ao caso extremo de  $\beta$  igual a 2 . Citado por Matheron [28], com solução analítica .

Gerada uma população não condicional unidimensional , pode atribuir tais valores às retas ( bandas ) do método das Bandas Rotativas a duas e três dimensões . Sendo que o número de divisões por bandas ficará determinado a uma potência de 2 do algoritmo de transformada rápida de Fourier.

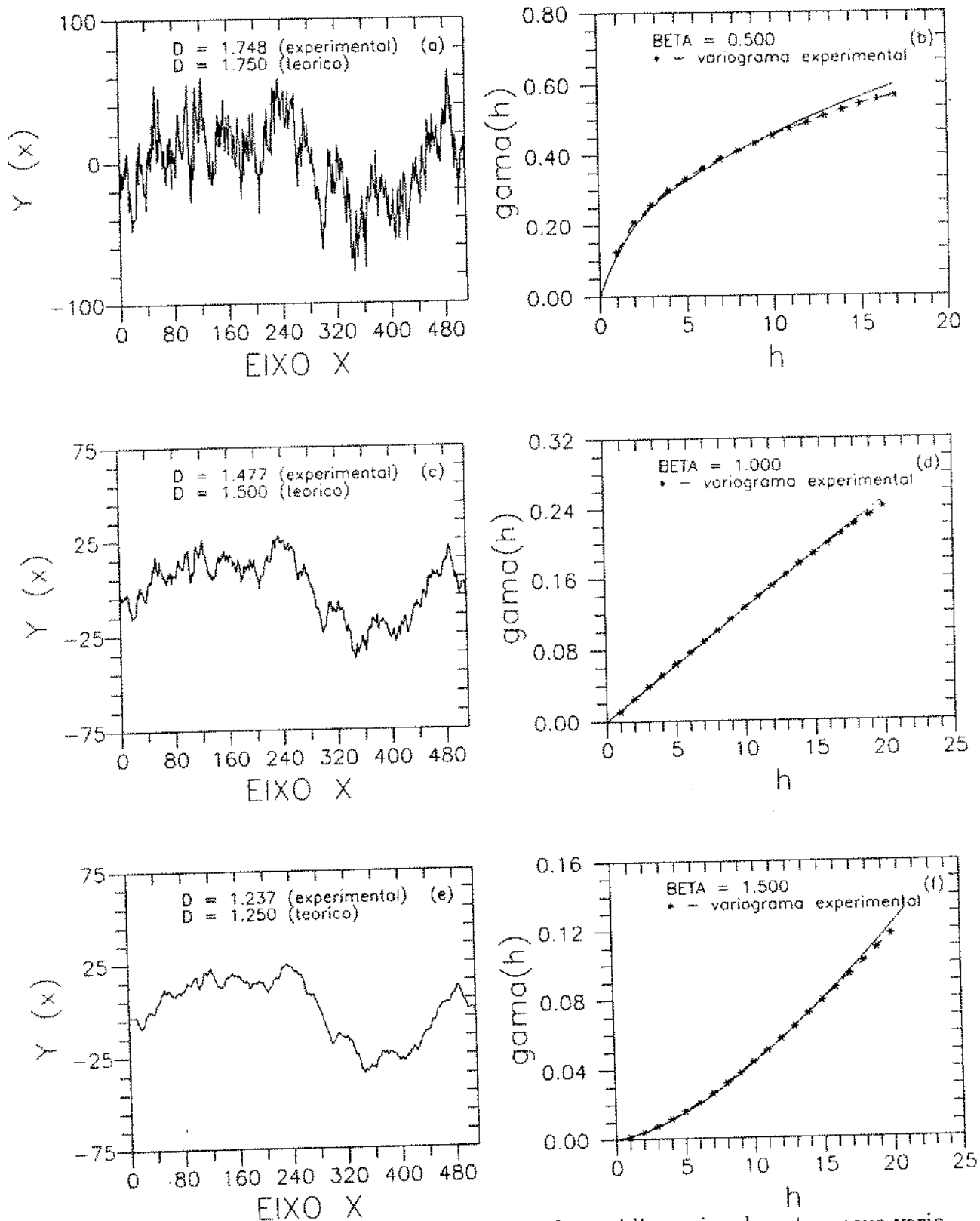


Figura A.3: Comparação entre as populações geradas unidimensionalmente e seus variogramas para  $\beta$  igual 0.5, 1.0 e 1.5.