



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Andressa Moura de Souza

**Uma Abordagem LMI para o Controle por
Realimentação de Saída Baseado em
Aproximação de Modelo**

Campinas

2021

Andressa Moura de Souza

Uma Abordagem LMI para o Controle por Realimentação de Saída Baseado em Aproximação de Modelo

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Andressa Moura de Souza, e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

Campinas
2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

So89a Souza, Andressa Moura de, 1991-
Uma abordagem LMI para o controle por realimentação de saída baseado em aproximação de modelo / Andressa Moura de Souza. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas incertos. 2. Funções de Lyapunov. 3. Sistemas de controle por realimentação. 4. Controle robusto. I. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: An LMI approach for output-feedback control based on model matching

Palavras-chave em inglês:

Uncertain systems

Lyapunov functions

Feedback control systems

Robust control

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestra em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira [Orientador]

Paulo Augusto Valente Ferreira

Valter Júnior de Souza Leite

Data de defesa: 19-03-2021

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-0203-8278>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3749379315033830>

COMISSÃO JULGADORA - DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidata: Andressa Moura de Souza RA: 229985

Data de defesa: 19 de março de 2021

Título da Dissertação: "Uma Abordagem LMI para o Controle por Realimentção de Saída Baseado em Aproximação de Modelo"

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite (CEFET/MG)

A Ata de Defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

*A todos que me auxiliaram na construção desta dissertação, em especial minha família,
meu companheiro, meus amigos e professores.*

Agradecimentos

À Deus por iluminar e guiar os meus passos rumo ao melhor caminho. À minha mãe **Genilda Moura** por acreditar nos meus sonhos e sempre me lembrar que a educação e o conhecimento transforma a nossa vida para o melhor, sempre! Ao meu pai **Antônio Guedes** por apoiar as minhas escolhas e acreditar no meu sucesso. Ao meu padastro **Jairo Alves** por todas as palavras de incentivo recebidas e à minha madrastra **Renilda Candeias** por todo o carinho e apoio oferecido durante a construção desta dissertação.

À minha avó **Raimunda Moura** por me ensinar as maiores virtudes de um ser humano, amor e bondade, porque antes de ser bom profissional é o nosso dever ser um bom ser humano. Aos meus irmãos **Adrielly** e **João Lucas**, por estarem ao meu lado durante quase toda a minha vida escolar e serem os meus primeiros alunos e ao meu irmão/afilhado **Mateus** por me mostrar um amor até então desconhecido e que se reflete em tudo que me proponho a fazer.

Aos meus sogros **José Augusto** e **Maria Auxiliadora** por tornarem as minhas férias mais felizes, a base de muito vinho e dendê, duas grandes paixões. Ao meu companheiro de vida **Vitor Augusto** por todo o apoio, incentivo e amparo oferecidos, é muito bom quando se tem alguém especial que acima de qualquer coisa acolhe, apoia e respeita as nossas escolhas.

À minha orientadora da graduação **Dra. Márcia L. M. Prado** por me apresentar o mundo do controle e ser uma grande inspiração para mim, te conhecer me abriu muitas portas e como sou grata por isso.

Ao meu orientador da pós-graduação **Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira** por ter sido o melhor orientador que eu poderia ter tido durante o mestrado, Deus fez tudo tão perfeito que colocou no meu caminho uma pessoa não só competente e inteligente como também de bom coração. Obrigada por me mostrar o que é ser um bom pesquisador e professor. Mas, para Deus um só não bastava, então ele resolveu me dar dois dos melhores orientadores que eu poderia ter tido durante o mestrado, **Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira** e **Dr. Pedro L. D. Peres**. Esse combo fez tudo ser mais perfeito, ou seja, trabalhos de altíssima qualidade. Obrigada **Pedro** por cada contribuição não só acadêmica como também pessoal.

À **Dra. Cecília de Freitas Morais** por estar no lugar certo e no momento ideal, ver sua trajetória me inspira. Obrigada por estar sempre disposta a me ajudar e por tornar meus momentos em Campinas mais alegres e divertidos.

Aos meus amigos da FEEC **Alejandro, Bruno, Glauco, Hellen, Daniel, Juliane, Álvaro, Valéria, Vanessa** e **Salvador** por todo o apoio que recebi durante este período e principalmente na etapa das disciplinas. E um agradecimento especial à **Amanda** e **Izabella** por serem meus verdadeiros anjos em Campinas, obrigada por me

ajudarem tanto e pela linda amizade construída neste período. Nunca esquecerei o dia que vocês me receberam no Aeroporto de Vira-Copos, naquele momento senti que não estaria sozinha.

Às minhas colegas de casa **Adriana** e **Lucimar** por me auxiliarem na mudança e por tornarem esse processo mais leve, engraçado e confortante. E à minha vizinha **Vera** por toda a hospitalidade e acolhimento ofertados durante a minha chegada no condomínio.

Às minhas amigas **Glaucia** e **Thaylane** por sempre acreditarem na realização desse sonho, podem ter certeza que tudo isso começou com vocês em Feira de Santana-BA.

Aos membros da banca **Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira** e **Dr. Valter Júnior de Souza Leite** por terem aceitado o convite e por todas as contribuições e sugestões apresentadas.

E à **Unicamp** por oferecer toda a estrutura necessária para a realização dessa dissertação, ao **SAE** pelos auxílios recebidos durante o segundo ano do mestrado e às agências de fomento à pesquisa, como **CAPES** e **CNPq**. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil.

Resumo

Esta dissertação propõe uma nova estratégia de projeto de controle por aproximação de modelos para sistemas lineares a tempo contínuo com parâmetros incertos na forma politópica. A lei de controle é por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa e, como métricas de desempenho para avaliar o descasamento entre o modelo de referência e o sistema controlado, utilizam-se as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A novidade técnica em relação aos métodos disponíveis na literatura é que as matrizes do controlador e do modelo de referência aparecem linearmente nas condições de projeto, podendo ser tratadas diretamente como variáveis de otimização. Portanto, o método é particularmente adequado para o projeto de controladores estruturados (por exemplo, descentralizados), permitindo também a busca pelos valores de parâmetros no modelo de referência que fornecem os menores erros de aproximação. As condições de síntese são resolvidas iterativamente, um conjunto de desigualdades matriciais lineares a cada iteração. Exemplos baseados em modelos físicos e comparações com outros métodos da literatura ilustram as vantagens do método proposto.

Palavras-chaves: controle por aproximação de modelo; realimentação dinâmica de saída; incertezas politópicas; desigualdades matriciais lineares; sistemas lineares contínuos no tempo.

Abstract

This dissertation proposes a new design strategy for model match control of linear continuous-time systems with uncertain parameters in the polytopic form. A fixed order dynamic output-feedback control law is used and, as performance metric to evaluate the mismatch between the reference model and the controlled system, the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms are used. The novelty of the technique with respect to the methods available in the literature is that the controller and reference model matrices appear linearly in the design conditions, and can be treated directly as optimization variables. Therefore, the method is particularly suitable for designing structured controllers (for example, decentralized), also allowing the search for the values of the parameters in the reference model that provide the smallest approximation errors. The synthesis conditions are solved iteratively, a set of linear matrix inequalities at each iteration. Examples based on physical models and comparisons with other methods from the literature illustrate the advantages of the proposed method.

Keywords: model match control; dynamic output-feedback; polytopic uncertainties; linear matrix inequalities; continuous-time linear systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos do sistema representando o problema de controle por aproximação de modelo, em que \mathcal{G} é a planta, \mathcal{G}_c o controlador e \mathcal{G}_r o modelo de referência.	23
Figura 2 – Módulo da resposta em frequência de \mathcal{G} e \mathcal{G}_r	26
Figura 3 – Módulo da resposta em frequência de \mathcal{G}_{e_2} e \mathcal{G}_{e_∞}	26
Figura 4 – Respostas ao impulso ao quadrado de \mathcal{G}_{e_2} ($h_2(t)$) e \mathcal{G}_{e_∞} ($h_\infty(t)$).	27
Figura 5 – Diagrama esquemático do Algoritmo 1.	36
Figura 6 – Sistema de tanques interligados.	38
Figura 7 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (3.15) e do modelo de referência para Exemplo 1.	41
Figura 8 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador calculado por Método dos dois estágios (2Est) dado em (3.16) ($n_c = 2$, $\mu = 0,0725$) e do modelo de referência para o Exemplo 1.	42
Figura 9 – Resposta ao degrau do sistema de dois tanques controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.15) (em azul), (3.16) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1.	43
Figura 10 – Resposta ao impulso do sistema de dois tanques controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.15) (em azul), (3.16) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1.	44
Figura 11 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador estruturado dado em (3.17) e do modelo de referência para o Exemplo 1.	45
Figura 12 – Resposta ao degrau do sistema de dois tanques controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) e do sistema de referência para o controlador estruturado de ordem $n_c = 2$	46
Figura 13 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (3.18) e do modelo de referência para Exemplo 2.	48
Figura 14 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (3.19) ($n_c = 2$, $\mu = 0,3273$) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	49

Figura 15 – Resposta ao degrau do sistema VTOL controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.18) (em azul) e (3.19) (em verde) e do sistema de referência (em vermelho).	50
Figura 16 – Resposta ao impulso do sistema VTOL controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com com os controladores dado em (3.18) (em azul) e (3.19) (em verde) e do sistema de referência (em vermelho). . .	51
Figura 17 – Diagrama de Bode do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (3.20) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	52
Figura 18 – Resposta ao degrau do sistema helicóptero VTOL controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) e do sistema de referência para o controlador descentralizado dado em (3.20).	53
Figura 19 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.12) e do modelo de referência para o Exemplo 1.	64
Figura 20 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (4.13) ($n_c = 1$, $\gamma = 0,1681$) e do modelo de referência para o Exemplo 1.	65
Figura 21 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado por (4.12) (em azul), (4.13) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1. . .	66
Figura 22 – Resposta ao impulso do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado por (4.12) (em azul), (4.13) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1. . .	67
Figura 23 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (4.15) e do modelo de referência para o Exemplo 1.	68
Figura 24 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador estruturado dado em (4.16) e do modelo de referência para o Exemplo 1.	69
Figura 25 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (4.16) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	70
Figura 26 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.17) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	72
Figura 27 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (4.18) ($n_c = 2$, $\gamma = 0,1248$) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	73

Figura 28 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado em (4.17) (em azul), (4.18) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 2.	74
Figura 29 – Resposta ao impulso do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado em (4.17) (em azul), (4.18) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 2.	75
Figura 30 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_e (considerando toda a faixa incerta) com os controladores \mathcal{H}_2 (em ciano) e \mathcal{H}_∞ (em amarelo) dados em (3.18) e (4.17), respectivamente, para o sistema VTOL.	76
Figura 31 – Diagrama de Bode do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (4.19) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	77
Figura 32 – Resposta ao degrau do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (4.19) e do modelo de referência para o Exemplo 2.	78
Figura 33 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.20) e do modelo de referência para o Exemplo 3.	80
Figura 34 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.21) e do modelo de referência para o Exemplo 3.	81
Figura 35 – Diagrama de Bode do modelo amortecedor-massa-mola ($n = 4$) (considerando toda a faixa incerta) e do modelo reduzido (4.22).	83
Figura 36 – Diagrama de Bode do modelo amortecedor-massa-mola ($n = 4$) (considerando toda a faixa incerta) e do modelo reduzido ($n_r = 2$) obtido por MO16 $_{T_2/T_4}$ ($\gamma = 0,2358$).	84

Lista de tabelas

Tabela 1	– Resultados do Algoritmo 1 (Algoritmo 1 (A1)) e do método dos dois estágios (2Est) proposto em (AGULHARI <i>et al.</i> , 2010) para o Exemplo 1. 2Est* denota o método dos dois estágios testado sem a transformação de similaridade dada em (3.13).	41
Tabela 2	– Resultados do Algoritmo 1 (A1) e do método dos dois estágios (2Est) proposto em (AGULHARI <i>et al.</i> , 2010) para o Exemplo 2.	47
Tabela 3	– Resultados do Algoritmo 2 (Algoritmo 2 (A2)) e do método dos dois estágios (2Est) (AGULHARI <i>et al.</i> , 2010) para o Exemplo 1.	64
Tabela 4	– Resultados do Algoritmo 2 (A2) e do método dos dois estágios (2Est) (AGULHARI <i>et al.</i> , 2010) para o Exemplo 2.	71
Tabela 5	– Resultados do Algoritmo 2 (A2) e do método dos dois estágios (2Est) (AGULHARI <i>et al.</i> , 2010) para o Exemplo 3.	79
Tabela 6	– Resultados do Algoritmo 2 (A2), com os ajustes da Seção 4.4, e do método de redução de modelos (MO16) proposto em (MAZZOCCANTE; OLIVEIRA, 2016).	83

Lista de abreviaturas e siglas

2Est Método dos dois estágios.

A1 Algoritmo 1.

A2 Algoritmo 2.

SISO *Single Input Single Output*.

Lista de símbolos

0 Matriz de zeros de dimensão apropriada.

I Matriz identidade de dimensão apropriada.

M' Transposta da matriz M .

$M \prec 0$ Matriz definida negativa.

$M \succ 0$ Matriz definida positiva.

M^* Conjugado transposta da matriz M .

M^\perp Base para o espaço nulo da matriz M ($MM^\perp = 0$).

M^{-1} Inversa da matriz M .

Λ_N Simplex unitário de dimensão N .

\mathbb{R} Conjunto dos números reais.

\mathbb{R}^+ Conjunto dos números reais positivos.

\mathbb{R}^n Espaço de vetores reais de ordem n .

$\mathbb{R}^{n \times m}$ Espaço de matrizes reais de ordem $n \times m$.

$\text{He}(M)$ Denota $M + M'$.

$\det(M)$ Determinante da matriz M .

Sumário

1	Introdução	17
2	Definição do Problema e Fundamentos Matemáticos	21
2.1	Definição do Problema	21
2.2	Definição da Norma \mathcal{H}_2	23
2.3	Definição da Norma \mathcal{H}_∞	24
2.4	Implementação Computacional	27
2.5	Comparações com Outros Métodos	28
2.6	Resultados Algébricos Úteis	29
3	Controle por Aproximação de Modelo: Norma \mathcal{H}_2	30
3.1	Condições de Projeto	30
3.2	Experimentos Numéricos	38
3.2.1	Exemplo 1	38
3.2.2	Exemplo 2	46
3.3	Conclusão	53
4	Controle por Aproximação de Modelo: Norma \mathcal{H}_∞	54
4.1	Condições de Projeto	54
4.2	Construindo $\mathcal{B}_g(\alpha)$	56
4.3	Procedimento Iterativo	57
4.4	Redução de Modelos	61
4.5	Exemplos Numéricos	62
4.5.1	Exemplo 1	62
4.5.2	Exemplo 2	70
4.5.3	Exemplo 3	78
4.5.4	Exemplo 4	81
4.6	Conclusão	84
5	Conclusão	85
5.1	Perspectivas de Trabalhos Futuros	85
5.2	Artigos Produzidos	86
	Referências	87

1 Introdução

As técnicas clássicas de controle para sistemas lineares invariantes no tempo utilizam especificações de projeto tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, como por exemplo, margens de ganho e fase, frequência de corte, tempo de subida, máxima sobrelevação, tempo de acomodação, erro em regime estacionário, integral do erro absoluto e integral do erro ao quadrado (OGATA, 1990). Em geral, esses critérios de desempenho podem ser tratados satisfatoriamente por métodos de controle tradicionais se o modelo linear não for afetado por parâmetros incertos. Por outro lado, o tratamento de modelos incertos com certificados de estabilidade e desempenho é uma área de pesquisa dominada principalmente pelos métodos desenvolvidos a partir da teoria de Lyapunov. Neste contexto, destaca-se a formulação de condições de análise e projeto em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), e as principais razões para este fato são a facilidade de programação e a disponibilidade de algoritmos baseados em programação semidefinida (VANDENBERGHE; BOYD, 1996) eficientes para resolver LMIs (BOYD *et al.*, 1994).

Esforços têm sido feitos para incorporar as especificações clássicas de projeto de controle mencionadas anteriormente em procedimentos de projeto baseados em LMIs, por exemplo, impondo uma região de alocação de polos ao sistema em malha fechada (CHILLALI; GAHINET, 1996). No entanto, uma alternativa mais interessante para lidar com especificações no domínio do tempo e outros critérios tradicionais de desempenho é certamente o *controle por aproximação de modelos* (do inglês, *model match control*). Nessa técnica, todas as características desejadas para o sistema controlado são dadas em termos de um *modelo de referência*. O controle por aproximação de modelos é um tópico relevante em sistemas multivariáveis lineares tanto do ponto de vista teórico quanto prático, que pode beneficiar diretamente muitos problemas comuns de engenharia. De fato, as técnicas de controle por aproximação de modelos podem ser aplicadas para, por exemplo, desacoplamento (PARASKEVOPOULOS, 1978; TORRES MUÑOZ; MALABRE, 2003), seguimento de modelo (ANTSAKLIS, 1986), rastreamento (HIKITA, 1981), sistemas inversos (WANG; DAVISON, 1973), observadores dinâmicos (WOLOVICH *et al.*, 1977), controle adaptativo por modelo de referência (ICHIKAWA, 1985) e redução de ordem de modelos (MOORE, 1981).

Nas primeiras formulações, o problema era conhecido como controle por aproximação de modelo exato (ERZBERGER, 1968; WOLOVICH, 1972), e o objetivo era projetar um controlador de forma que o sistema em malha fechada correspondesse precisamente ao modelo de referência. A partir da década de 1970, várias estratégias para controle por aproximação de modelo *exato* foram investigadas, explorando técnicas de espaço de estados (WANG; DESOER, 1972; MOORE; SILVERMAN, 1972; MORSE, 1973a;

PARASKEVOPOULOS *et al.*, 1993), funções de transferência (WOLOVICH, 2012; WOLOVICH *et al.*, 1977; KUČERA, 1977; ÅSTRÖM, 1980), álgebra polinomial (KUČERA, 1981; KUČERA, 1991) e técnicas geométricas (MORSE, 1973b; MORSE, 1973c; MALABRE; KUČERA, 1984). Veja (KUČERA; TOLEDO, 2014) para um apanhado geral sobre a aproximação de modelo exata. Apesar das significativas conquistas nesta linha de investigação, a aproximação de modelo exata tem desvantagens pois a exatidão geralmente exige controladores de alta ordem e, mais importante, os métodos não são adequados para levar em consideração a presença de parâmetros incertos. Esses inconvenientes podem ser tratados por meio de uma aproximação de modelo não exata (PARASKEVOPOULOS; KING, 1978), na qual a especificação do projeto é encontrar um controlador tal que a diferença entre o sistema de malha fechada e o modelo de referência, de acordo com algum critério, seja o menor possível. Nesse contexto, destacam-se as abordagens baseadas na otimização de critérios quadráticos (KREINDLER; ROTHSCILD, 1976; PARASKEVOPOULOS; KING, 1978; MORRIS *et al.*, 1992; PELLANDA; APKARIAN, 2003), e normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 (FRANCIS; DOYLE, 1987; JONCKHEERE; YU, 1999), em geral associadas a um sinal de erro gerado a partir da diferença das saídas de ambos os sistemas (controlado e referência).

Em relação às formulações de aproximação de modelos resolvidas em termos da teoria de estabilidade de Lyapunov, como as baseadas nas normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , pode-se observar uma grande flexibilidade fornecida pelas condições de projeto expressas por LMIs. Com efeito, uma das características atraentes das condições baseadas em LMIs é a possibilidade de lidar com parâmetros incertos, invariantes ou variantes no tempo, de uma maneira imediata (BOYD *et al.*, 1994). Nesse contexto, pode-se citar as estratégias de aproximação de modelo propostas em (PELLANDA; APKARIAN, 2003; COUTINHO *et al.*, 2009; RODRIGUES *et al.*, 2009; GODINHO *et al.*, 2012; BACHUR *et al.*, 2011; GONÇALVES *et al.*, 2011; BACHUR, 2011). No entanto, sabe-se que o projeto de controle robusto para sistemas incertos é um problema desafiador, mesmo considerando as leis de controle por realimentação de estados. Ao lidar com parâmetros incertos, em geral, as condições de síntese são formuladas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, que são problemas de otimização semi-infinitos (ou de dimensão infinita). Soluções aproximadas em termos de relaxações polinomiais têm sido apresentadas como uma alternativa efetiva para resolver esses problemas (BLIMAN, 2004; CHESI *et al.*, 2009; OLIVEIRA; PERES, 2007). No entanto, a principal fonte de conservadorismo das condições de síntese provavelmente se deve às manipulações (mudança de variáveis, restrições estruturais) que transformam as condições de estabilidade em malha fechada (geralmente não lineares) em desigualdades matriciais que são lineares nas variáveis de otimização, resultando, portanto, em apenas condições suficientes. Dito isso, certamente vale a pena investigar o problema de aproximação de modelos para sistemas incertos, especialmente considerando leis de controle de realimentação de saída, que são mais adequadas para aplicações

práticas.

Esta dissertação propõe uma nova estratégia de projeto de controle por aproximação de modelos para sistemas lineares a tempo contínuo com parâmetros incertos na forma politópica. Com o objetivo de obter uma técnica com maior apelo prático, a planta é controlada por uma lei de controle por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa, e como métricas de desempenho para avaliar o descasamento entre o modelo de referência e o sistema controlado utilizam-se as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A novidade técnica em relação aos métodos de controle por aproximação de modelo disponíveis na literatura é que as matrizes do controlador e do modelo de referência aparecem linearmente nas condições de projeto (formuladas em termos de LMIs), sendo tratadas diretamente como variáveis de otimização. Isso significa que, diferentemente da maioria dos métodos baseados em LMIs, nenhuma mudança de variável é necessária para recuperar o controlador. Portanto, o método é particularmente adequado para o projeto de controladores estruturados (por exemplo, descentralizados) e também pode considerar algumas entradas do modelo de referência como variáveis extras restritas a intervalos, permitindo que o problema de otimização encontre os valores que fornecem o menor erro de aproximação. Assim como nos trabalhos de (FELIPE, 2017; SPAGOLLA, 2019; LEMAIRE, 2019), as condições de síntese são resolvidas iterativamente, com um conjunto de LMIs resolvido a cada iteração. As vantagens da técnica proposta são avaliadas por meio de modelos de plantas que representam sistemas físicos, e por meio de comparações numéricas com uma outra técnica da literatura.

Esta dissertação está organizada em 4 capítulos, descritos de forma resumida a seguir.

- Capítulo 2: apresenta a definição do problema de controle por aproximação de modelos, definições e interpretações das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e informações sobre como as condições de projeto propostas podem ser resolvidas computacionalmente e como são comparadas com técnicas da literatura.
- Capítulo 3: descreve a técnica de controle por aproximação de modelo utilizando a norma \mathcal{H}_2 como métrica de desempenho. O principal resultado é um algoritmo iterativo em que LMIs são resolvidas a cada iteração. Experimentos numéricos ilustram os resultados.
- Capítulo 4: apresenta uma adaptação do algoritmo apresentado no Capítulo 3, utilizando a norma \mathcal{H}_∞ como métrica de desempenho. Como contribuição adicional apresenta-se um procedimento para obter um controlador de ordem $n_c + 1$ a partir de um controlador de ordem n_c . Uma extensão para tratar o problema de redução de ordem de modelos é apresentada e experimentos numéricos ilustram os resultados.

- Conclusão: apresenta as considerações finais desta dissertação de mestrado, bem como perspectivas de trabalhos futuros e os artigos que foram publicados e submetidos durante o período de pesquisa.

2 Definição do Problema e Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo é apresentada a definição do problema de controle por aproximação de modelo para sistemas lineares incertos a tempo contínuo na forma politópica. As definições das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas incertos invariantes no tempo são também apresentadas, pois são utilizadas como métricas de avaliação do erro de aproximação entre o modelo de referência e o sistema controlado. Nesse contexto, também é fornecida uma interpretação do uso das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no problema de aproximação de modelo. Alguns resultados algébricos importantes no contexto de sistemas incertos tratados por LMIs, uma metodologia de comparação com outros métodos da literatura e uma breve discussão sobre como resolver LMIs dependentes de parâmetros finalizam o capítulo.

2.1 Definição do Problema

Considere o sistema linear incerto a tempo contínuo

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x} = A(\alpha)x + B_u(\alpha)u + B_w(\alpha)w \\ z = C_z(\alpha)x + D_{zu}(\alpha)u + D_{zw}(\alpha)w \\ y = C_y(\alpha)x + D_{yw}(\alpha)w \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, representam respectivamente os estados do sistema, a entrada de controle, a entrada externa, a saída controlada e a saída medida. As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_u(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $B_w(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_z(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, $C_y(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D_{zu}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$, $D_{zw}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$, $D_{yw}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ possuem estrutura politópica, isto é, são descritas pela combinação convexa de N vértices conhecidos na forma

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)'$ um vetor de parâmetros incertos que pertence ao simplex unitário

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0 \right\}$$

É importante mencionar que os parâmetros incertos α_i não costumam representar parâmetros físicos, como massas, constantes de mola, capacitâncias, resistências, etc. Normalmente os parâmetros α_i são criados para representar um hiperretângulo em termos da combinação convexa de seus vértices. O hiperretângulo, por outro lado, é um

modelo mais natural para representar um conjunto de parâmetros físicos representados por intervalos. A razão para utilizar os parâmetros α_i (não negativos) na descrição do modelo é a maior facilidade de tratamento das condições de análise e projeto, que normalmente são expressas em termos de desigualdades polinomiais nesses parâmetros.

O objetivo deste trabalho é projetar um controlador por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa $n_c \geq 0$, dado na forma

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases}$$

com $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_y}$, $C_c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$ e $D_c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, tal que o sistema em malha fechada

$$\mathcal{G}_{cl} : \begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl}(\alpha) x_{cl} + B_{cl}(\alpha) w \\ z = C_{cl}(\alpha) x_{cl} + D_{cl}(\alpha) w \end{cases} \quad (2.2)$$

com

$$\begin{aligned} x_{cl} &= \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \\ A_{cl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) + B_u(\alpha) D_c C_y(\alpha) & B_u(\alpha) C_c \\ B_c C_y(\alpha) & A_c \end{bmatrix}, \\ B_{cl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_u(\alpha) D_c D_{yw}(\alpha) + B_w(\alpha) \\ B_c D_{yw}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ C_{cl}(\alpha) &= [C_z(\alpha) + D_{zu}(\alpha) D_c C_y(\alpha) \quad D_{zu}(\alpha) C_c], \\ D_{cl}(\alpha) &= [D_{zu}(\alpha) D_c D_{yw}(\alpha) + D_{zw}(\alpha)], \end{aligned}$$

seja assintoticamente estável e apresente um comportamento o mais próximo possível do modelo de referência de ordem n_r dado na forma

$$\mathcal{G}_r : \begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r w \\ z_r = C_r x_r + D_r w \end{cases} \quad (2.3)$$

com $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_w}$, $C_r \in \mathbb{R}^{n_z \times n_r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$. O sinal de erro $e = z - z_r$ é definido para representar a diferença entre o sistema em malha fechada (2.2) e o sistema de referência (2.3). A dinâmica do erro é representada por

$$\mathcal{G}_e : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{cl} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha) & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}}_{A_e(\alpha)} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ x_r \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{cl}(\alpha) \\ B_r \end{bmatrix}}_{B_e(\alpha)} w \\ e = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{cl}(\alpha) & -C_r \end{bmatrix}}_{C_e(\alpha)} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ x_r \end{bmatrix} + \underbrace{[D_{cl}(\alpha) - D_r]}_{D_e(\alpha)} w \end{cases}$$

e a Figura 1 apresenta um diagrama de blocos ilustrando o problema de controle por aproximação de modelo.

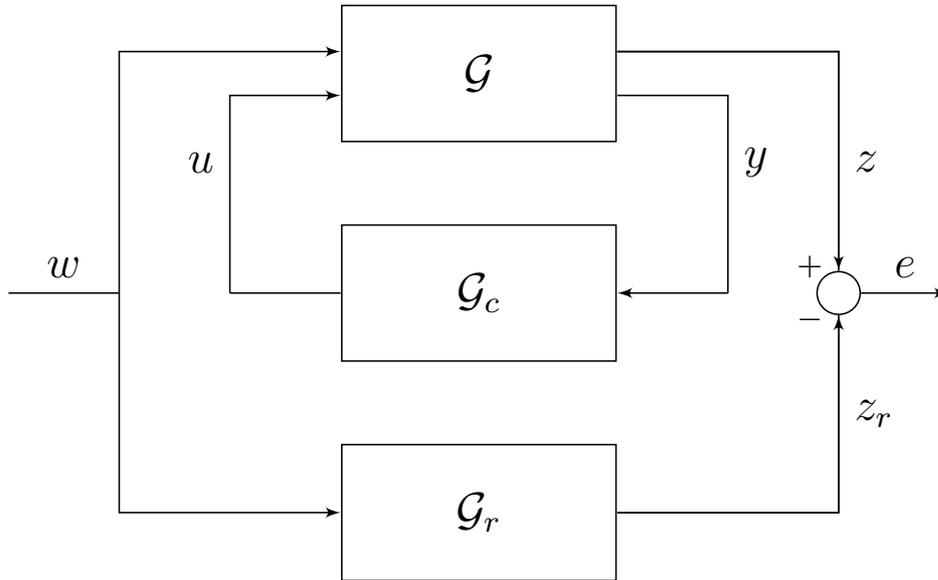


Figura 1 – Diagrama de blocos do sistema representando o problema de controle por aproximação de modelo, em que \mathcal{G} é a planta, \mathcal{G}_c o controlador e \mathcal{G}_r o modelo de referência.

Como estratégias para buscar pelo menor sinal de erro, adotam-se as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que são medidas de desempenho amplamente utilizadas na literatura de sistemas incertos tratados por LMIs. A próxima seção apresenta a definição da norma \mathcal{H}_2 .

2.2 Definição da Norma \mathcal{H}_2

Considere o sistema (2.1) em malha aberta ($u = 0$) estável e com $D_{zw}(\alpha) = 0$, cuja função de transferência da entrada w para a saída z é dada por

$$G(s, \alpha) = C_z(\alpha)(sI - A(\alpha))^{-1}B_w(\alpha) \quad (2.4)$$

Para um valor fixo de α , a norma \mathcal{H}_2 (ZHOU; DOYLE, 1998) desse sistema é definida como

$$\|G(s, \alpha)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{traço}(G^*(j\omega, \alpha)G(j\omega, \alpha))d\omega$$

ou

$$\|G(s, \alpha)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{traço}(h^*(\tau, \alpha)h(\tau, \alpha))d\tau$$

em que $h(t, \alpha)$ é a matriz de resposta ao impulso do sistema (2.1), calculada por meio da transformada inversa de Laplace de $G(s, \alpha)$ dada em (2.4).

Um limitante superior (custo garantido) para a norma \mathcal{H}_2 , válido para todo $\alpha \in \Lambda_N$, pode ser computado pelo lema apresentado a seguir (BOYD *et al.*, 1994).

Lema 2.1. *Considere a função de transferência dada em (2.4) com $A(\alpha)$ Hurwitz. As seguintes condições são equivalentes para todo $\alpha \in \Lambda_N$:*

$$i) \|G(s, \alpha)\|_2^2 < \mu^2$$

ii) *Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$ e $M(\alpha) = M(\alpha)'$ de dimensões apropriadas, tais que*

$$\begin{aligned} \text{traço}(M(\alpha)) - \mu^2 &< 0 \\ B_w(\alpha)'P(\alpha)B_w(\alpha) - M(\alpha) &\prec 0 \\ A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + C_z(\alpha)'C_z(\alpha) &\prec 0 \end{aligned}$$

iii) *Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$ e $M(\alpha) = M(\alpha)'$ de dimensões apropriadas, tais que*

$$\begin{aligned} \text{traço}(M(\alpha)) - \mu^2 &< 0 \\ C_z(\alpha)P(\alpha)C_z(\alpha)' - M(\alpha) &\prec 0 \\ A(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A'(\alpha) + B_w(\alpha)B_w'(\alpha) &\prec 0 \end{aligned}$$

O valor da norma \mathcal{H}_2 de pior caso, isto é, o menor valor que μ pode assumir para todo $\alpha \in \Lambda_N$, pode ser determinado por meio de um problema de otimização que minimiza o valor de μ sujeito às desigualdades dos itens ii) ou iii) do Lema 2.1.

2.3 Definição da Norma \mathcal{H}_∞

Considere novamente o sistema (2.1), estável e com função de transferência da entrada w para a saída z dada por

$$G(s, \alpha) = C_z(\alpha)(sI - A(\alpha))^{-1}B_w(\alpha) + D_{zw}(\alpha) \quad (2.5)$$

Para um α fixo, a norma \mathcal{H}_∞ (ZHOU; DOYLE, 1998) é definida como

$$\|G(s, \alpha)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{max}(G(j\omega, \alpha))$$

em que $\sigma_{max}(G(j\omega, \alpha))$ é o maior valor singular de $G(j\omega, \alpha)$. Sendo assim, a norma \mathcal{H}_∞ é o maior valor singular de $G(s, \alpha)$ para toda a faixa de frequência. Caso $G(s, \alpha)$ seja um sistema de uma entrada e uma saída (do inglês, *Single Input Single Output* — SISO), a norma \mathcal{H}_∞ corresponde à maior magnitude da resposta em frequência do sistema.

O cálculo de um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ pode ser feito por meio do lema apresentado a seguir.

Lema 2.2. Considere a função de transferência dada em (2.5) com $A(\alpha)$ Hurwitz. As seguintes condições são equivalentes:

i) $\|G(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$

ii) Existe uma matriz $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) & \star & \star \\ B_w(\alpha)'P(\alpha) & -\gamma I & \star \\ C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0$$

A norma \mathcal{H}_∞ de pior caso pode ser calculada minimizando o valor de γ sujeito à condição do item ii) do Lema 2.2 (conhecida como *bounded real lemma*).

Interpretação das Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no Problema de Controle Por Aproximação de Modelos

Nesta seção é apresentado um exemplo que ajuda na interpretação do uso das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no problema de controle por aproximação de modelo. Considere uma planta SISO \mathcal{G} e um modelo de referência \mathcal{G}_r (gerados randomicamente) dados por

$$\mathcal{G} : \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \frac{Z(s)}{W(s)} \\ \frac{Y_1(s)}{W(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{W(s)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{Z(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U(s)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{-0,1981s^5 - 1,0631s^4 - 1,8338s^3 - 0,7757s^2 + 0,1944s - 0,1547}{s^6 + 6,4947s^5 + 17,1155s^4 + 21,8218s^3 + 13,3898s^2 + 4,9578s + 1,3879} \\ \frac{0,0740s^5 + 0,1761s^4 - 0,1753s^3 - 0,4794s^2 - 0,1157s - 0,0720}{s^6 + 6,4947s^5 + 17,1155s^4 + 21,8218s^3 + 13,3898s^2 + 4,9578s + 1,3879} \\ \frac{-0,0669s^5 - 0,4664s^4 - 0,8962s^3 - 0,6597s^2 - 0,2250s - 0,0500}{s^6 + 6,4947s^5 + 17,1155s^4 + 21,8218s^3 + 13,3898s^2 + 4,9578s + 1,3879} \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{c} \frac{4,2890s^5 + 23,0198s^4 + 49,2157s^3 + 44,5021s^2 + 12,4990s - 5,1188}{s^6 + 6,4947s^5 + 17,1155s^4 + 21,8218s^3 + 13,3898s^2 + 4,9578s + 1,3879} \\ \frac{-0,9583s^5 - 5,0277s^4 - 9,9257s^3 - 8,3810s^2 - 0,7746s - 0,9463}{s^6 + 6,4947s^5 + 17,1155s^4 + 21,8218s^3 + 13,3898s^2 + 4,9578s + 1,3879} \\ \frac{-1,7827s^5 - 7,6054s^4 - 13,0446s^3 - 6,4175s^2 - 0,0248s - 0,0623}{s^6 + 6,4947s^5 + 17,1155s^4 + 21,8218s^3 + 13,3898s^2 + 4,9578s + 1,3879} \end{array} \right] \right\}$$

$$\mathcal{G}_r : \left\{ \frac{Z_r(s)}{W(s)} = \frac{0,0012s^2 + 0,3837s + 0,4645}{s^3 + 6,8607s^2 + 14,6752s + 8,8145} \right\}$$

com respostas em frequência mostradas na Figura 2. Dois controladores foram projetados por meio da técnica de aproximação de modelo, resultando nos seguintes ganhos

$$K_{\mathcal{H}_2} = [0,8293 \quad -0,5836], \quad K_{\mathcal{H}_\infty} = [0,7292 \quad -0,4406]$$

Os sistemas em malha fechada com os controladores $K_{\mathcal{H}_2}$ e $K_{\mathcal{H}_\infty}$ são representados por \mathcal{G}_{cl_2} e \mathcal{G}_{cl_∞} , obtidos com as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como métricas do erro de aproximação, respectivamente.

A Figura 3 mostra os módulos das respostas em frequência das dinâmicas dos erros de aproximação \mathcal{G}_{e_2} e \mathcal{G}_{e_∞} , permitindo a determinação das normas \mathcal{H}_∞ por inspeção (valores dos picos). A Figura 4 apresenta as respostas ao impulso ao quadrado de ambos

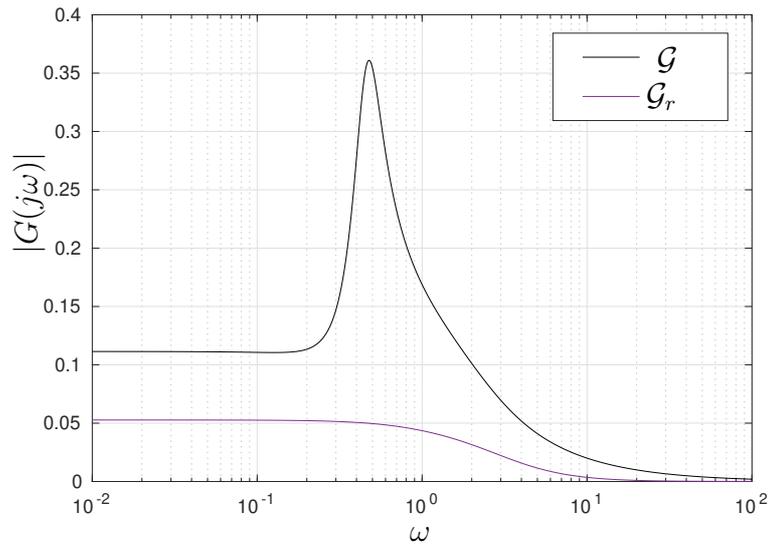


Figura 2 – Módulo da resposta em frequência de \mathcal{G} e \mathcal{G}_r .

os sistemas, podendo a norma \mathcal{H}_2 ser computada por meio das áreas em azul ou vermelho. Como estabelecido na Seção 2.2, a norma \mathcal{H}_2 também pode ser obtida a partir da resposta em frequência, calculando-se a raiz quadrada da área de $|G(j\omega)|^2/2\pi$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Os valores das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para os dois sistemas são dados por

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_{e_2}\|_2 &= 0,099, & \|\mathcal{G}_{e_\infty}\|_2 &= 0,104 \\ \|\mathcal{G}_{e_2}\|_\infty &= 0,154, & \|\mathcal{G}_{e_\infty}\|_\infty &= 0,109 \end{aligned}$$

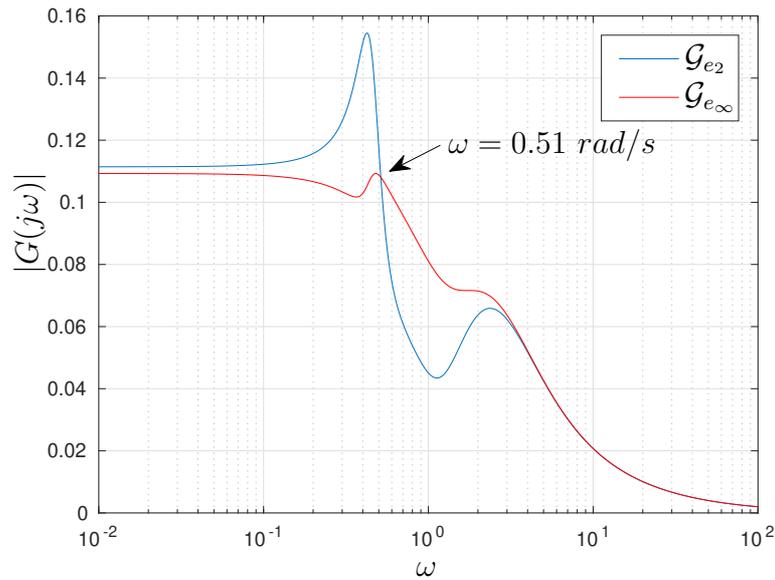


Figura 3 – Módulo da resposta em frequência de \mathcal{G}_{e_2} e \mathcal{G}_{e_∞} .

O valor da norma \mathcal{H}_∞ de \mathcal{G}_{e_∞} (pico da curva em vermelho na Figura 3) indica a frequência em que ocorrerá o *pior* descasamento entre o sistema controlado e o modelo

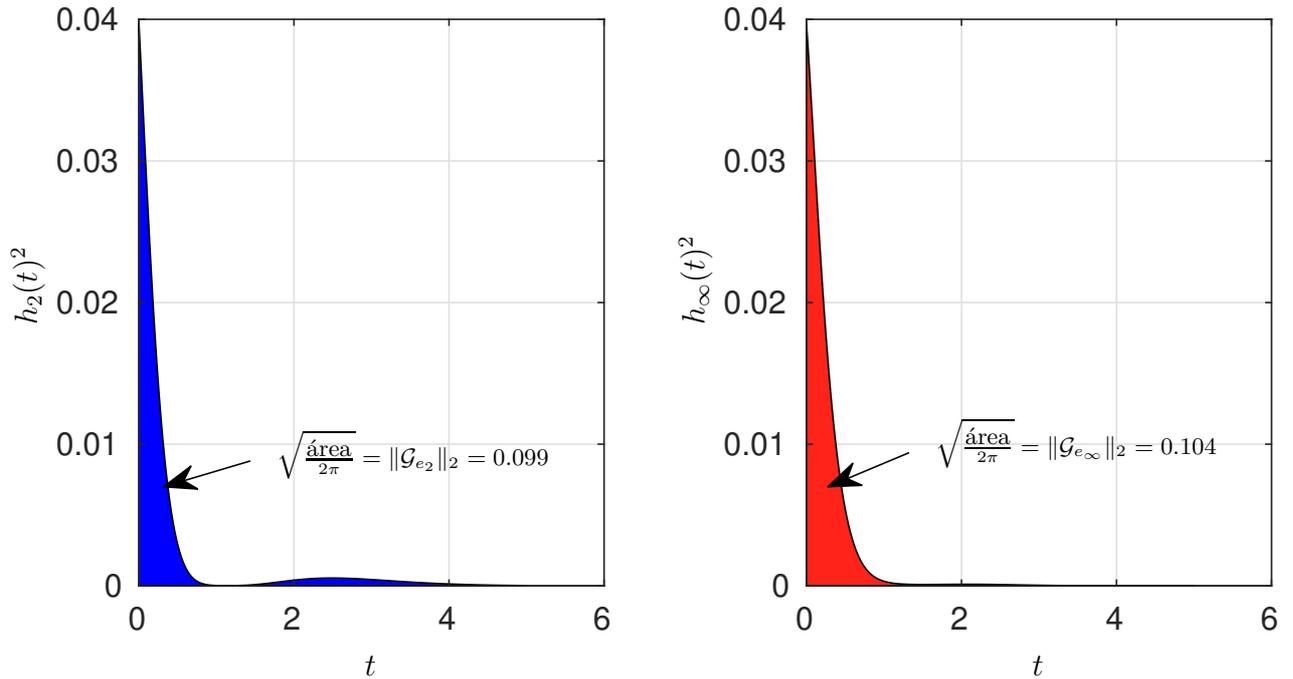


Figura 4 – Respostas ao impulso ao quadrado de \mathcal{G}_{e_2} ($h_2(t)$) e \mathcal{G}_{e_∞} ($h_\infty(t)$).

de referência. Nesse caso em particular a maior amplitude, 0,109, acontece em uma faixa de baixas frequências ($\omega < 0,1 \text{ rad/s}$). Por outro lado, como mencionado anteriormente, o valor da norma \mathcal{H}_2 não tem relação com a amplitude máxima da curva azul, mas sim com a *área* abaixo da curva (elevada ao quadrado e dividida por 2π). Essa característica dificulta um comparativo imediato entre as duas estratégias de projeto apenas observando os valores das normas. De fato, nesse exemplo os valores das normas são muito próximos, mas percebe-se claramente que o erro associado a \mathcal{G}_{e_2} é maior para $\omega \leq 0,51$, e é menor para ω maior que $0,51 \text{ rad/s}$ e menor que $\approx 3 \text{ rad/s}$. Isso ilustra bem o caráter de atenuação “média” associado à norma \mathcal{H}_2 , pois o procedimento de otimização prioriza a diminuição da área e não do pico da curva. A otimização da norma \mathcal{H}_∞ , em contrapartida, tenta minimizar o valor de pico, tendendo a deslocar toda a resposta em frequência para baixo. Por essa razão, diante de incertezas no conteúdo frequencial dos sinais exógenos que agem na planta, o critério baseado na norma \mathcal{H}_∞ é considerado mais robusto (ZHOU; DOYLE, 1998). Além disso, também é possível otimizar a norma \mathcal{H}_∞ em apenas uma faixa de frequências (IWASAKI; HARA, 2005).

2.4 Implementação Computacional

Assim como nas desigualdades presentes nos Lemas 2.1 e 2.2, todas as condições propostas nesta dissertação são formuladas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, com a vantagem de fornecer uma apresentação mais clara. Porém, LMIs dependentes de parâmetros são problemas de otimização semi-infinitos, não admitindo

um tratamento numérico antes que uma estrutura particular (aproximação) seja imposta para as variáveis de otimização. Como tornou-se rotina na literatura de sistemas incertos, *aproximações polinomiais* de grau arbitrário são as técnicas mais eficazes para resolver LMIs dependentes de parâmetros, com amplo suporte teórico (BLIMAN *et al.*, 2006; OLIVEIRA; PERES, 2007), de programação (AGULHARI *et al.*, 2019; LÖFBERG, 2004; GAHINET *et al.*, 1995) e numérico (STURM, 1999; ANDERSEN; ANDERSEN, 2000) disponível. Nos exemplos apresentados nos próximos capítulos, as condições de projeto foram resolvidas empregando aproximações polinomiais de grau um para todas as variáveis (com exceção das matrizes do controlador) e as relaxações de Pólya para gerar as LMIs (OLIVEIRA; PERES, 2007). A implementação utiliza o *parser* ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019), que trabalha em conjunto com o *parser* YALMIP (LÖFBERG, 2004). As LMIs resultantes são resolvidas com o *solver* de programação semidefinida Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000). Os experimentos foram realizados em um PC com as seguintes configurações: Core i5-8265U (6MB Cache, 1,6 Ghz até 3,9 Ghz), 8 GB de RAM, Windows 10 Home (64bits), e Matlab version 2019b (win64).

2.5 Comparações com Outros Métodos

O sistema \mathcal{G}_e pode ser reestruturado na forma de um problema de realimentação estática de saída, como apresentado a seguir

$$\mathcal{G}_a : \begin{cases} \dot{x}_a = A_a(\alpha)x_a + B_{ua}(\alpha)u + B_{wa}(\alpha)w \\ z_e = C_{za}(\alpha)x_a + D_{zua}(\alpha)u + D_{zwa}(\alpha)w \\ y_a = C_{ya}(\alpha)x_a + D_{yua}(\alpha)u \end{cases} \quad (2.6)$$

com $u = Ly_a$ e

$$A_a(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad B_{ua} = \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{wa} = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix}, \quad C_{za} = [C_z \quad 0 \quad -C_r],$$

$$C_{ya} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & C_y & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zua} = \begin{bmatrix} 0 & D_{zu} \end{bmatrix}, \quad D_{zwa} = \begin{bmatrix} D_{zw} & -D_r \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ x_r \end{bmatrix}$$

Portanto, o problema de aproximação de modelo pode ser resolvido por qualquer condição de controle \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída de um sistema incerto com a estrutura acima. Entre diversas técnicas disponíveis na literatura, o método proposto é comparado com o chamado método dos dois estágios (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001a; ARZELIER *et al.*, 2003; ARZELIER *et al.*, 2009; MOREIRA *et al.*, 2011; AGULHARI *et al.*, 2012), que fornece um bom compromisso entre conservadorismo e esforço computacional e é capaz de levar em consideração incertezas em todas as matrizes

do sistema. Como será visto adiante, essa reestruturação das matrizes do sistema não é necessária na abordagem proposta, pois as matrizes do sistema \mathcal{G}_e aparecem linearmente nas condições de síntese.

2.6 Resultados Algébricos Úteis

Os lemas apresentados a seguir são importantes para a construção dos resultados propostos nesta dissertação (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001).

Lema 2.3. (*Lema de Finsler*) Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{posto}(B) < n$ e B^\perp uma base para o espaço nulo de B (isto é, $BB^\perp = 0$). As seguintes condições são equivalentes

- i) $w'Qw < 0, \forall w \neq 0 : Bw = 0,$
- ii) $B^\perp'QB^\perp \prec 0,$
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B'B \prec 0,$
- iv) $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XB + B'X' \prec 0.$

Lema 2.4. (*Complemento de Schur*) Considere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

As seguintes condições são equivalentes

- i) $M \succ 0$ se e somente se $A \succ 0$ e $C - B'A^{-1}B \succ 0$
- ii) $M \succ 0$ se e somente se $C \succ 0$ e $A - BC^{-1}B' \succ 0$
- iii) Se $A \succ 0$, $M \succeq 0$ se e somente se $C - B'A^{-1}B \succeq 0$
- iv) Se $C \succ 0$, $M \succeq 0$ se e somente se $A - BC^{-1}B' \succeq 0$

3 Controle por Aproximação de Modelo: Norma \mathcal{H}_2

Neste capítulo é proposta uma nova técnica de projeto por aproximação de modelo para sistemas lineares contínuos no tempo com parâmetros incertos na forma politópica. O sistema incerto é controlado por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa, e utiliza-se a norma \mathcal{H}_2 como métrica de avaliação da diferença entre o sistema controlado e o sistema de referência. As condições de projeto são formuladas em termos de LMIs e o ganho de controle é computado por meio de um algoritmo iterativo inspirado nos trabalhos de (FELIPE, 2017; SPAGOLLA, 2019; LEMAIRE, 2019). A principal novidade em relação às técnicas existentes é que tanto os ganhos de controle quanto o modelo de referência aparecem linearmente nas condições de projeto. Os resultados são ilustrados por meio de exemplos numéricos retirados da literatura.

3.1 Condições de Projeto

A síntese do controlador \mathcal{G}_c por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa para o sistema \mathcal{G}_e é realizada por meio das LMIs dependentes de parâmetros propostas pelo teorema apresentado a seguir, que é uma condição suficiente para a determinação de um limitante superior (custo garantido) para a norma \mathcal{H}_2 do sistema \mathcal{G}_e .

Teorema 3.1. *Sejam $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $B_3(\alpha)$ e $B_4(\alpha)$ matrizes incertas no parâmetro α com coeficientes conhecidos e $\det(B_4(\alpha)) \neq 0$, $\forall \alpha \in \Lambda_N$. Se existirem matrizes $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c+n_r) \times (n_x+n_c+n_r)}$, $M(\alpha) = M(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, $X_4(\alpha)$, $X_6(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c+n_r) \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_5(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times (n_x+n_c+n_r)}$, A_c , B_c , C_c , D_c e um escalar $\mu > 0$ tais que*

$$\mu^2 > \text{traço}(M(\alpha)) \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}_g(\alpha)\mathcal{B}_g(\alpha)) \prec 0 \quad (3.2)$$

$$\mathcal{Q}_c(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}_c(\alpha)\mathcal{B}_c(\alpha)) \prec 0 \quad (3.3)$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_g(\alpha) &= [B_1(\alpha) \ B_2(\alpha) \ B_3(\alpha) \ B_4(\alpha)], \\ \mathcal{X}_g(\alpha) &= [X_1(\alpha)' \ X_2(\alpha)' \ X_3(\alpha)' \ X_4(\alpha)']', \\ \mathcal{Q}_g(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star & \star \\ C_e(\alpha) & 0 & -I & \star \\ A_e(\alpha) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q}_c(\alpha) &= \begin{bmatrix} -M(\alpha) & \star \\ 0 & P(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_c(\alpha) = \begin{bmatrix} B_e(\alpha) & -I \\ X_5(\alpha) \\ X_6(\alpha) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

então A_c , B_c , C_c e D_c são as matrizes do controlador por realimentação dinâmica de saída \mathcal{G}_c que estabiliza o sistema \mathcal{G}_e com μ como custo garantido \mathcal{H}_2 .

Demonstração. Como a desigualdade (3.2) está na forma *iv* do Lema de Finsler, tem-se a condição equivalente

$$\mathcal{B}_g(\alpha)^{\perp'} \mathcal{Q}_g(\alpha) \mathcal{B}_g(\alpha)^{\perp} \prec 0,$$

com

$$\mathcal{B}_g(\alpha)^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & (-B_4(\alpha)^{-1}B_1(\alpha))' \\ 0 & I & 0 & (-B_4(\alpha)^{-1}B_2(\alpha))' \\ 0 & 0 & I & (-B_4(\alpha)^{-1}B_3(\alpha))' \end{bmatrix}',$$

que novamente pode ser reescrita na forma *iv*. do Lema de Finsler, isto é,

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0 \tag{3.4}$$

com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star \\ C_e(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = [A_e(\alpha) \ -I \ 0] \tag{3.6}$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} (-B_4(\alpha)^{-1}B_1(\alpha))' \\ (-B_4(\alpha)^{-1}B_2(\alpha))' \\ (-B_4(\alpha)^{-1}B_3(\alpha))' \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Adotando

$$\mathcal{B}(\alpha)^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_e(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e aplicando novamente o Lema de Finsler em (3.4), tem-se a seguinte condição

$$\begin{bmatrix} A_e(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A_e(\alpha) & \star \\ C_e(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.8}$$

que pode ser reconhecida como uma extensão, em termos de LMI dependente de parâmetros, do *gramiano de observabilidade* (BOYD *et al.*, 1994) associado ao sistema \mathcal{G}_e . Computando uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}_c(\alpha)$ definido no Teorema 3.1, por exemplo,

$$\mathcal{B}_c(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I \\ B_e(\alpha) \end{bmatrix}$$

tem-se, pelo Lema de Finsler, que (3.3) é equivalente a $\mathcal{B}_c(\alpha)^{\perp'} \mathcal{Q}_c(\alpha) \mathcal{B}_c(\alpha)^\perp \prec 0$, que fornece

$$M(\alpha) \succ B_e(\alpha)' P(\alpha) B_e(\alpha)$$

Essa última desigualdade, juntamente com (3.8) e (3.1), atendem as condições do Lema 2.1 e, como consequência, μ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema \mathcal{G}_e . \square

A principal novidade das condições de projeto do Teorema 3.1 é que todas as matrizes dinâmicas do sistema \mathcal{G}_e e, conseqüentemente, todas as matrizes do sistema \mathcal{G} e do controlador \mathcal{G}_c , aparecem de forma afim nas desigualdades. O primeiro benefício dessa estrutura é que os ganhos do controlador podem ser tratados como variáveis de otimização do problema, e não recuperadas a *posteriori* por meio de mudanças de variáveis. Nota-se que o uso de mudanças de variáveis é o paradigma vigente na literatura para a síntese de controladores dinâmicos por realimentação de saída (SCHERER *et al.*, 1997), o que em geral dificulta a formulação do problema em termos de LMIs sem a imposição de restrições de estrutura nas variáveis de otimização (potenciais fontes de conservadorismo) ou restrições nas matrizes do sistema, por exemplo, algumas matrizes não poderem ser incertas. Além disso, se os ganhos do controlador são variáveis do problema, restrições estruturais, como descentralização, podem ser levadas em conta sem nenhum conservadorismo adicional. A segunda vantagem do fato das matrizes de \mathcal{G}_e aparecerem de forma afim na desigualdade de síntese é que as matrizes do modelo de referência também não multiplicam nenhuma outra variável e, como consequência, alguns dos elementos dessas matrizes poderiam ser considerados como variáveis, fornecendo um grau extra de liberdade na escolha do modelo de referência. Por exemplo, alguns parâmetros poderiam ser especificados por faixas. Assim, o problema de otimização determinaria o melhor valor dentro da faixa para o qual o controlador é capaz de fornecer a menor “distância” (considerando o critério \mathcal{H}_2) em relação ao sistema controlado.

Como contraponto das interessantes vantagens oferecidas pelo Teorema 3.1, nota-se que são necessárias algumas matrizes de inicialização para que o problema seja linear nas variáveis de decisão, isto é, formulado em termos de LMIs dependentes de parâmetros. Como em princípio não existe uma regra geral para a escolha das matrizes $B_i(\alpha)$ de modo a produzir soluções factíveis, espera-se que os resultados sejam conservadores. Contudo, o problema da inicialização pode ser contornado por meio de algumas técnicas propostas em (FELIPE *et al.*, 2016; FELIPE, 2017; FELIPE; OLIVEIRA, 2021) e mais

recentemente em (SPAGOLLA, 2019; LEMAIRE, 2019). Embora siga um caminho similar, nesta dissertação é proposta uma estratégia diferente dos algoritmos iterativos dos trabalhos citados quando há um custo associado, como limitantes para as normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ .

O primeiro passo para encontrar as matrizes $B_i(\alpha)$ necessárias para a inicialização do Teorema 3.1 é o projeto de um controlador \mathcal{G}_c estabilizante, isto é, que apenas estabiliza o sistema \mathcal{G}_e . Nessa etapa utiliza-se uma condição de projeto proposta em (FELIPE, 2017), como apresenta o próximo teorema.

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{B}_s(\alpha) = [B_{s_1}(\alpha) \ B_{s_2}(\alpha) \ B_{s_3}(\alpha)]$ uma matriz incerta no parâmetro α com coeficientes conhecidos e $\det(B_{s_3}(\alpha)) \neq 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$. Se existirem matrizes $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, 2, 3$, A_c , B_c , C_c e D_c tais que*

$$\mathcal{Q}_s(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}_s(\alpha)\mathcal{B}_s(\alpha)) \prec 0 \quad (3.9)$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com

$$\mathcal{Q}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star \\ A_e(\alpha) & -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix}$$

então A_c , B_c , C_c e D_c são as matrizes do controlador por realimentação dinâmica de saída \mathcal{G}_c que estabiliza o sistema \mathcal{G}_e .

Como provado em (FELIPE, 2017), a escolha $\mathcal{B}_s(\alpha) = [I \ I \ -I]$ garante que as condições do Teorema 3.2 sempre fornecem uma solução factível se a matriz $A_e(\alpha)$ for substituída por $A_e(\alpha) - rI$, sendo r um escalar real a ser minimizado durante a otimização. Caso $r \leq 0$, o controlador é estabilizante, pois os autovalores de $A_e(\alpha)$ estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Caso $r > 0$, as matrizes $X_i(\alpha)$ podem ser utilizadas como uma nova condição inicial $\mathcal{B}_s(\alpha)$, isto é, $\mathcal{B}_s(\alpha) = [X_1(\alpha)' \ X_2(\alpha)' \ X_3(\alpha)']$, com a garantia de que o próximo valor de r é menor ou igual ao r anterior. Para mais detalhes sobre a implementação do algoritmo iterativo baseado no Teorema 3.2, com r minimizado a cada iteração, recomenda-se a leitura da dissertação de (FELIPE, 2017). Como contribuição deste trabalho, o próximo teorema fornece uma condição inicial ligeiramente diferente para o Teorema 3.2.

Teorema 3.3. *A escolha*

$$\mathcal{B}_s(\alpha) = [I \ \varphi I \ -I], \quad \varphi \in \mathbb{R}^+ \quad (3.10)$$

garante que a condição (3.9) testada com

$$A_e(\alpha) = A_e(\alpha) - rI, \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad (3.11)$$

sempre fornece uma solução factível para um valor de r suficientemente grande.

Demonstração. Substituindo as escolhas dadas em (3.10) e (3.11), e fixando

$$\mathcal{X}_s(\alpha) = (-r/2)\mathcal{B}_s(\alpha)'$$

na desigualdade (3.9), tem-se

$$\begin{bmatrix} -rI & \star & \star \\ P(\alpha) - r\varphi I & -r\varphi^2 I & \star \\ A_e(\alpha) & (r\varphi - 1)I & -rI \end{bmatrix} \prec 0$$

Escolhendo $P(\alpha) = r\varphi I$ e aplicando um complemento de Schur, tem-se

$$\begin{aligned} -rI - \begin{bmatrix} A_e(\alpha)' \\ (r\varphi - 1)I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -r^{-1}I & 0 \\ 0 & -r^{-1}\varphi^{-2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_e(\alpha)' \\ (r\varphi - 1)I \end{bmatrix} &\prec 0 \\ \Rightarrow -rI + r^{-1}A_e(\alpha)A_e(\alpha)' + \varphi^{-2}r^{-1}(\varphi r - 1)^2 I &\prec 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade por $0,5\varphi r > 0$, obtém-se

$$rI \succ (1/2)\varphi A_e(\alpha)A_e(\alpha)' + (1/2\varphi)I$$

que sempre pode ser satisfeita para um r suficientemente grande. \square

A escolha inicial $B_s(\alpha)$ e a relaxação r introduzida pelo Teorema 3.3 garantem que as condições do Teorema 3.2 sempre fornecem soluções em termos de um valor finito para r . Note que a existência de solução independe da escolha de $\varphi \in \mathbb{R}^+$.

Uma vez que um controlador estabilizante \mathcal{G}_c está disponível, o próximo passo é produzir uma condição inicial para o Teorema 3.1, de modo que o mesmo garantidamente forneça um controlador estabilizante associado a um custo garantido \mathcal{H}_2 . Neste ponto, a estratégia proposta neste trabalho diferencia-se das técnicas utilizadas em (FELIPE, 2017; SPAGOLLA, 2019; LEMAIRE, 2019). O teorema apresentado a seguir computa um custo garantido para o sistema \mathcal{G}_e e, como subproduto, fornece condições iniciais para o Teorema 3.1.

Teorema 3.4. *Seja \mathcal{G}_c um controlador estabilizante conhecido para \mathcal{G}_e . Se existirem matrizes $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c+n_r) \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c+n_r) \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times (n_x+n_c+n_r)}$ e um escalar $\mu_a > 0$ tais que (3.1), (3.3) e (3.4) são verificadas $\forall \alpha \in \Lambda_N$, com*

$$\mathcal{X}(\alpha) = [X_1(\alpha)' \quad X_2(\alpha)' \quad X_3(\alpha)']'$$

e $\mathcal{Q}(\alpha)$ e $\mathcal{B}(\alpha)$ dadas em (3.5) e (3.6) respectivamente, então μ_a é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema \mathcal{G}_e .

A prova do Teorema 3.4 não é apresentada pois trata-se de uma condição conhecida para o cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 para sistemas lineares incertos contínuos no tempo (OLIVEIRA; PERES, 2008). Como \mathcal{G}_e é estável, as condições do Teorema 3.4

sempre produzem uma solução factível, fornecendo um custo garantido dado por μ_a e, mais importante, o conjunto de variáveis $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$. Note que as escolhas

$$\begin{aligned} B_1(\alpha) &= X_1(\alpha)', B_2(\alpha) = X_2(\alpha)', \\ B_3(\alpha) &= X_3(\alpha)', B_4(\alpha) = -I \end{aligned} \quad (3.12)$$

podem ser utilizadas para inicializar o Teorema 3.1 com garantia de solução factível. A condição (3.4), assegurada por uma solução factível do Teorema 3.4, é equivalente a (3.2), garantindo que o Teorema 3.1 inicializado com as escolhas dadas em (3.12) fornece uma solução factível com um valor de μ (caso o mesmo esteja sendo minimizado) no mínimo igual ao valor de μ_a calculado pelo Teorema 3.4, podendo ser menor, pois as matrizes do controlador voltam a ser variáveis do problema.

Resumindo a discussão apresentada até este ponto, sempre que um controlador estabilizante está disponível, é possível construir uma solução factível para o Teorema 3.1, que fornece um novo controlador estabilizante e um custo garantido \mathcal{H}_2 associado. Além disso, as variáveis $X_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 4$ podem ser utilizadas para construir uma nova condição inicial, e assim sucessivamente, com garantia de não crescimento para μ , como prova o próximo teorema.

Teorema 3.5. *Sejam $\bar{\mu}$, $\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)$ e $\bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha)$ soluções do Teorema 3.1 para uma determinada matriz de inicialização $\bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)$. A escolha $\mathcal{B}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)'$ em um novo teste das condições do Teorema 3.1 garante solução para $\mu \leq \bar{\mu}$.*

Demonstração. Como (3.1), (3.3) e

$$\bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha) + \text{He} \left(\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha) \bar{\mathcal{B}}_g(\alpha) \right) \prec 0$$

estão satisfeitas com $\bar{\mu}$, um novo teste

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) + \text{He} \left(\mathcal{X}_g(\alpha) \bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)' \right) \prec 0$$

está automaticamente satisfeito com $\mathcal{Q}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha)$ e $\mu \leq \bar{\mu}$ pois $\mathcal{X}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)'$ é uma solução válida. \square

O Algoritmo 1 é o resultado das propriedades e condições de análise e síntese apresentadas neste capítulo. Como entrada, devem ser fornecidos o número máximo de iterações it_{max} , ϵ (uma tolerância) e a inicialização para a etapa de estabilização (matriz $\mathcal{B}_s(\alpha)$). O valor de φ deve ser dado e a matriz dinâmica $A_e(\alpha)$ é alterada para contemplar o fator de relaxação r . O algoritmo permanece na fase 1 até que um controlador estabilizante seja encontrado e $k < it_{max}$. Se um controlador for encontrado, r é removido do problema e, na linha 9, as condições do Teorema 3.4 são testadas, de modo a produzir a condição inicial $\mathcal{B}_g(\alpha)$ (de acordo com (3.12)) para o Teorema 3.1. Nesse ponto o algoritmo passa para a fase 2, em que é produzida uma sequência de custos μ_k por meio das condições

do Teorema 3.1 até que o número máximo de iterações seja atingido ou o decréscimo de μ entre uma iteração e outra esteja dentro de uma certa tolerância ϵ especificada *a priori*. Caso o algoritmo seja encerrado durante a fase 2, o procedimento fornece um ganho estabilizante para o sistema em malha fechada e um custo garantido para a dinâmica do erro de aproximação.

Se um controlador estabilizante estiver disponível, a fase 1 do algoritmo pode ser simplificada. Nesse caso apenas as linhas 7–11 precisam ser executadas, e logo em seguida passa-se para a fase 2. Esse procedimento pode ser útil quando as condições do Teorema 3.2 falham, mas alguma outra condição de síntese da literatura encontra um controlador estabilizante. A Figura 5 ilustra as etapas realizadas pelo Algoritmo 1 em termos de um fluxograma, facilitando compreensão do método.

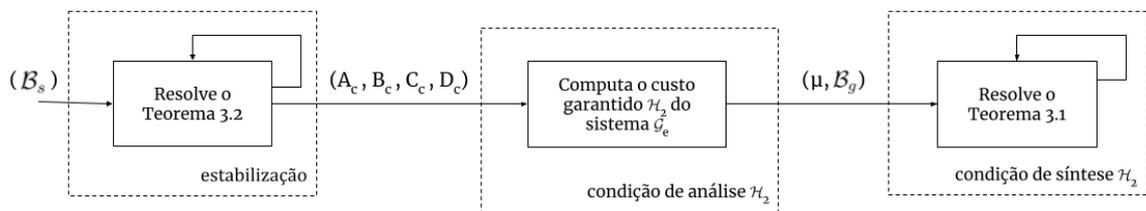


Figura 5 – Diagrama esquemático do Algoritmo 1.

Algoritmo 1

```

1: Inicialização:  $it_{max}, \mathcal{B}_s(\alpha) \leftarrow [I \ \varphi I \ -I], \varphi > 0, k \leftarrow 0, fase \leftarrow 1, A_e(\alpha) \leftarrow (A_e(\alpha) - rI)$ 
2: Enquanto  $k < it_{max}$  Resolva
3:    $k \leftarrow k + 1;$ 
4:   Se fase = 1 Então
5:     Resolva min  $r$  s. a  $P(\alpha) \succ 0$  e (3.9)
6:     Se  $r \leq 0$  Então
7:        $\mathcal{G}_c \leftarrow (A_c, B_c, C_c, D_c);$ 
8:        $r \leftarrow 0;$ 
9:       Resolva min  $\mu$  s. a  $P(\alpha) \succ 0$ , (3.1), (3.3) e (3.4)
10:      inicialize  $\mathcal{B}_g(\alpha)$  de acordo com (3.12)
11:      fase  $\leftarrow 2;$ 
12:    Senão
13:       $\mathcal{B}_s(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}_s(\alpha)';$ 
14:    Fim Se
15:    Senão Se fase = 2 Então
16:      Resolva min  $\mu$  s. a  $P(\alpha) \succ 0$  e (3.1)–(3.3)
17:       $\mu_k \leftarrow \mu;$ 
18:      Se  $|\mu_k - \mu_{k-1}| < \epsilon$  Então
19:        abandone;
20:      Fim Se
21:       $\mathcal{B}_g(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}_g(\alpha)';$ 
22:    Fim Se
23:  Fim Enquanto
24:  Se fase = 2 Então Retorna  $(A_c, B_c, C_c, D_c, \mu_k)$ 
25:  Fim Se

```

Como um comentário final a respeito do Algoritmo 1, perceba que a fase 1 procura por um controlador estabilizante para a matriz dinâmica modificada $A_e(\alpha) - rI$, ou seja, que os todos os autovalores da matriz $A_e(\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda_N$, tenham parte real menor do que r a cada iteração. Numericamente, a estrutura da matriz $A_e(\alpha)$ quando $n_c > 0$ induz soluções numéricas com $B_c = C_c = 0$ e A_c bloco diagonal. Embora tal propriedade não seja um problema para o processo de estabilização, a estrutura definida na fase 1 tende a se manter na fase 2, potencialmente fornecendo soluções conservadoras em termos da norma \mathcal{H}_2 . Com o objetivo de prevenir a ocorrência de tais estruturas, a seguinte transformação de similaridade para o sistema \mathcal{G}_{cl} pode ser usada

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ T & -I_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times (n-n_c)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Essa transformação cria um acoplamento entre os estados do sistema e do controlador $(Tx - x_c)$, evitando as escolhas triviais mencionadas acima. Não foi observada a ocorrência das estruturas com blocos de zero em controladores estáticos.

3.2 Experimentos Numéricos

Nos exemplos apresentados a seguir, o Algoritmo 1 é testado com $it_{max} = 30$ e $\epsilon = 10^{-3}$. As variáveis de folga quadradas $X_i(\alpha)$ nos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.4 são consideradas simétricas e as retangulares arbitrárias. Outras estruturas (por exemplo, diagonal) podem ser usadas, possivelmente fornecendo diferentes resultados com complexidades numéricas distintas. A estrutura simétrica foi escolhida para as variáveis quadradas por ter fornecido melhores resultados no geral, além de demandar um menor esforço computacional do que a estrutura arbitrária. Valores distintos para o parâmetro de entrada φ permitem computar diferentes controladores estabilizantes na fase 1. Os seguintes valores são testados: $\varphi \in \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1\}$. Como uma medida da complexidade do método, é apresentado o tempo computacional demandado pela implementação do algoritmo proposto e de outras técnicas da literatura. Essa quantidade contempla tanto o tempo exigido na resolução quanto o tempo necessário para definir as LMIs (tempo de *parser*). A transformação de similaridade proposta em (3.13) foi utilizada nas duas fases do Algoritmo 1.

3.2.1 Exemplo 1

Considere o problema de controle de nível de dois tanques interligados proposto em (BACHUR *et al.*, 2011) e reproduzido na Figura 6.

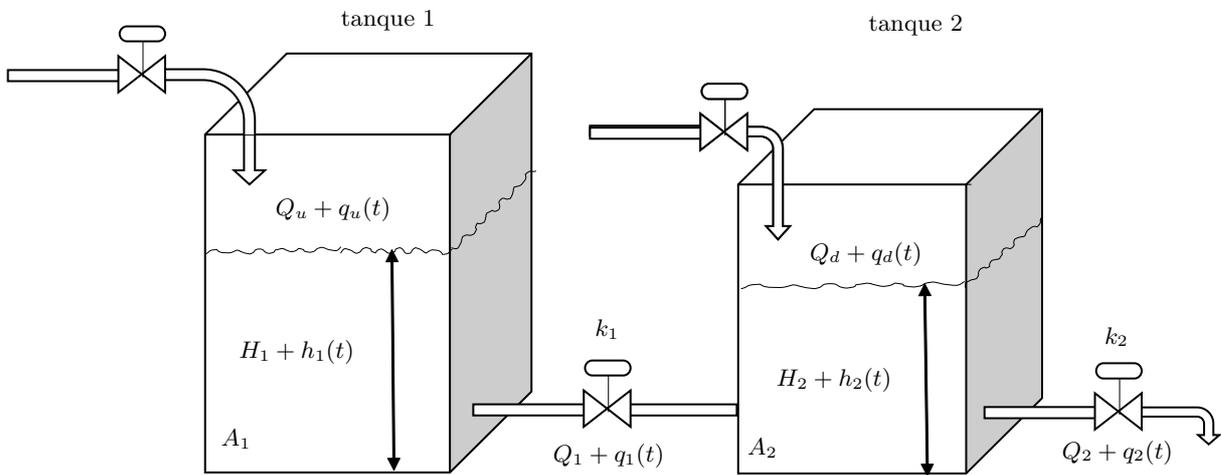


Figura 6 – Sistema de tanques interligados.

Conforme sugerido em (BACHUR *et al.*, 2011), os pontos de operação, representados por letras maiúsculas, são dados por: $Q_u = Q_1 = 0,4 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_d = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$, $H_1 = 2 \text{ m}$ e $H_2 = 1 \text{ m}$.

O sinal de controle da vazão de entrada no tanque 1 é dado por $u = q_u$. O vetor de variáveis exógenas é dado por $w = [w_1 \ w_2 \ w_3]'$ (sinal de referência, w_1 , distúrbio da segunda vazão de entrada no tanque 2, $w_2 = q_d$, e ruído de medição, w_3). O vetor de estados é definido por $x = [h_1 \ h_2 \ \nu]'$, sendo h_i o nível do tanque i e ν uma variável

associada à ação de controle integral dada por $\nu = \int (w_1 - h_2 - w_3) dt$. A saída controlada é dada por z e y é a saída medida do sistema associada a h_2 . A representação linear da dinâmica é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} & 0 \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1 + k_2}{A_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} w$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

As áreas transversais dos tanques são $A_1 = 10 \text{ m}^2$ e $A_2 = 5 \text{ m}^2$. Os coeficientes de vazão nos dutos são considerados incertos na forma $0,15 \leq k_1 \leq 0,25$ e $0,2 \leq k_2 \leq 0,3$. Na aplicação do método proposto as matrizes D_{zu} e D_{yw} do modelo de (BACHUR *et al.*, 2011) são consideradas iguais a zero.

O objetivo é projetar um controlador dinâmico de saída, voltado para as influências do sinal de referência w_1 sobre a saída z , sem levar em consideração os efeitos das entradas w_2 e w_3 , de forma que o comportamento do sistema em malha fechada se aproxime do modelo de referência definido pela função de transferência

$$G_r(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.14)$$

com $0,5 \leq \xi \leq 1,5$ e $\omega_n = 0,15 \text{ rad/s}$. Note que a possibilidade de considerar faixas para os parâmetros é uma flexibilidade importante da abordagem proposta. Nesse ponto é importante salientar que o erro de aproximação pode variar com o valor de ξ , principalmente pelo fato da condição de projeto ser apenas suficiente (subótima). Portanto, realizar o projeto considerando uma faixa de valores (que atende os requisitos de projeto) permite que o problema de otimização determine o valor de ξ que produzirá o menor erro de aproximação utilizando a abordagem proposta. Como regra geral, todas as funções de transferência associadas aos modelos de referência propostos nesta dissertação são representadas na forma de estados pela estrutura canônica controlável. Outras representações podem fornecer resultados diferentes.

A aplicação do Algoritmo 1 (A1) produz os seguintes resultados (ganhos dos controladores truncados com 4 casas decimais):

- $n_c = 0$,

$$D_c = \begin{bmatrix} -10,9567 & 0,2949 \end{bmatrix}$$

- $n_c = 1$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} -1,0875 & -1,3438 & 0,1438 \\ \hline -5,7943 & -9,3292 & 0,8261 \end{array} \right]$$

- $n_c = 2$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,0133 & 3,4124 & -29,4554 & 1,2292 \\ -0,0886 & -1,6974 & 12,5887 & -0,5160 \\ \hline -2,1498 & 15,9268 & -189,2027 & 8,1382 \end{array} \right] \quad (3.15)$$

Os custos garantidos \mathcal{H}_2 , os valores de ξ (determinados para $n_c = 2$) e a complexidade computacional são informados na Tabela 1, juntamente com os resultados da abordagem de realimentação de saída de (AGULHARI *et al.*, 2010) adaptada para tratar o problema de controle por aproximação de modelo. A técnica, em dois estágios (2Est), oferece duas possibilidades tanto para o primeiro estágio (Teorema 1 e Corolário 2) quanto para o segundo estágio (Corolário 4 e Corolário 5). Todas as quatro combinações entre primeiro e segundo estágios foram testadas, e apenas o melhor resultado é reportado. O controlador de segunda ordem computado por 2Est é dado por

- $n_c = 2$, $\mu = 0,0725$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,1780 & -4,1126 & -8,6012 & 0,5465 \\ 0,0147 & -14,0204 & 13,8993 & 0,0033 \\ \hline -1,5099 & 19,7009 & -146,8847 & 5,4562 \end{array} \right] \quad (3.16)$$

O parâmetro it é o número total de iterações e $s./it$ é o tempo médio em segundos por iteração. No método dos dois estágios, foram testados 13 valores para o escalar do primeiro estágio (informados em termos de φ na tabela). Cada estágio conta como uma iteração (como o segundo estágio só é testado para valores de φ factíveis no primeiro estágio, o método pode realizar um máximo de 26 iterações). O valor de ξ foi escolhido pela técnica proposta neste trabalho, uma vez que o método dos dois estágios não é capaz de tratar modelo de referência com variáveis de otimização. Na Tabela 1 também são mostrados os resultados obtidos para $n_c = 1$ e $n_c = 2$ pela técnica 2Est, denotada por 2Est*, sem a aplicação da transformação de similaridade sugerida em (3.13). Como pode ser visto, os custos garantidos variam marginalmente com o crescimento de n_c . Além disso, também observam-se estrutura diagonal para A_c e matrizes nulas B_c e C_c . Esse resultado mostra que a transformação de similaridade proposta pode beneficiar outras condições de realimentação dinâmica de saída baseadas na formulação estática. Como a aplicação da transformação de similaridade sempre mostra-se vantajosa, a mesma é aplicada nos experimentos numéricos apresentados a seguir e no próximo capítulo.

A Figura 7 mostra o Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (3.15) e do modelo de referência (em vermelho). A Figura 8 apresenta o Diagrama de Bode resultante do controlador fornecido por 2Est dado em (3.16). Percebe-se que o controlador (3.15) apresenta uma melhor aproximação que o controlador (3.16).

Tabela 1 – Resultados do Algoritmo 1 (A1) e do método dos dois estágios (2Est) proposto em (AGULHARI *et al.*, 2010) para o Exemplo 1. 2Est* denota o método dos dois estágios testado sem a transformação de similaridade dada em (3.13).

método	n_c	φ	ξ	μ	it_{total}	$s./it$
2Est*	2	10^{+5}	1,4999	0,1333	25	2,28
2Est	2	10^{+5}	1,4999	0,0725	25	1,65
A1	2	10^{-1}	$0,5 \leq \xi \leq 1,5$	0,0176	28	1,48
2Est*	1	10^{+6}	1,4999	0,1258	26	1,58
2Est	1	10^{+5}	1,4999	0,0726	26	1,30
A1	1	10^{-1}	1,4999	0,1012	8	1,62
2Est	0	10^{+6}	1,4999	0,1233	26	1,17
A1	0	10^{-1}	1,4999	0,1019	14	1,26

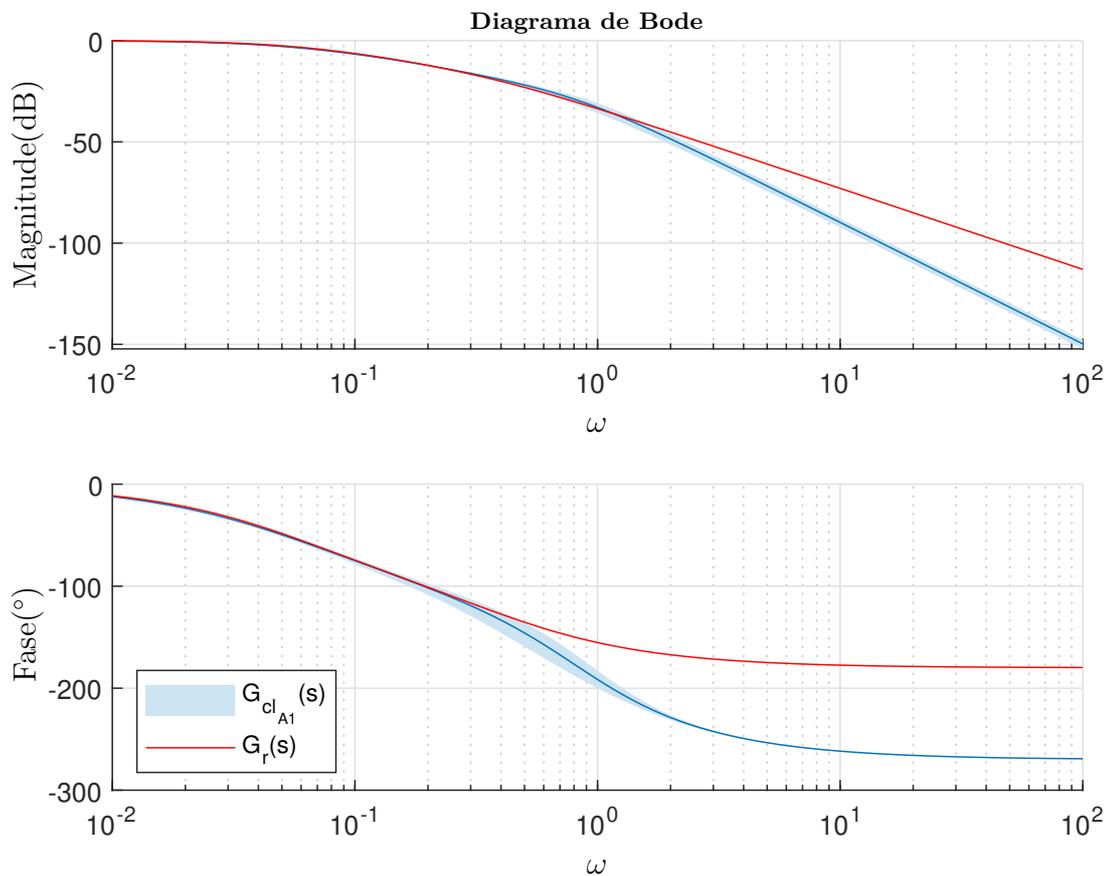


Figura 7 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (3.15) e do modelo de referência para Exemplo 1.

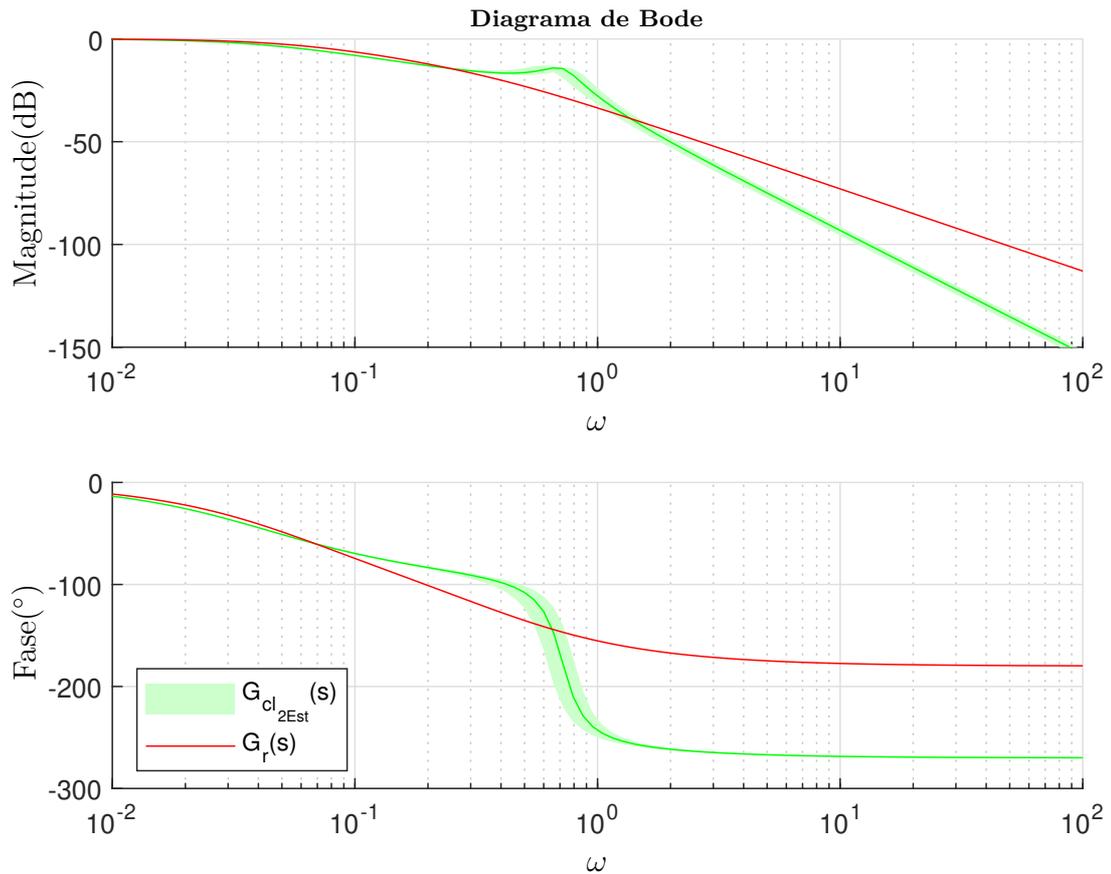


Figura 8 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador calculado por **2Est** dado em (3.16) ($n_c = 2$, $\mu = 0,0725$) e do modelo de referência para o Exemplo 1.

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada com os controladores (3.15) (em azul) e (3.16) (em verde) para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência (em vermelho) são mostradas na Figura 9. Como pode ser percebido, o controlador (3.15) consegue garantir uma faixa de resposta mais próxima do modelo de referência que o controlador (3.16).

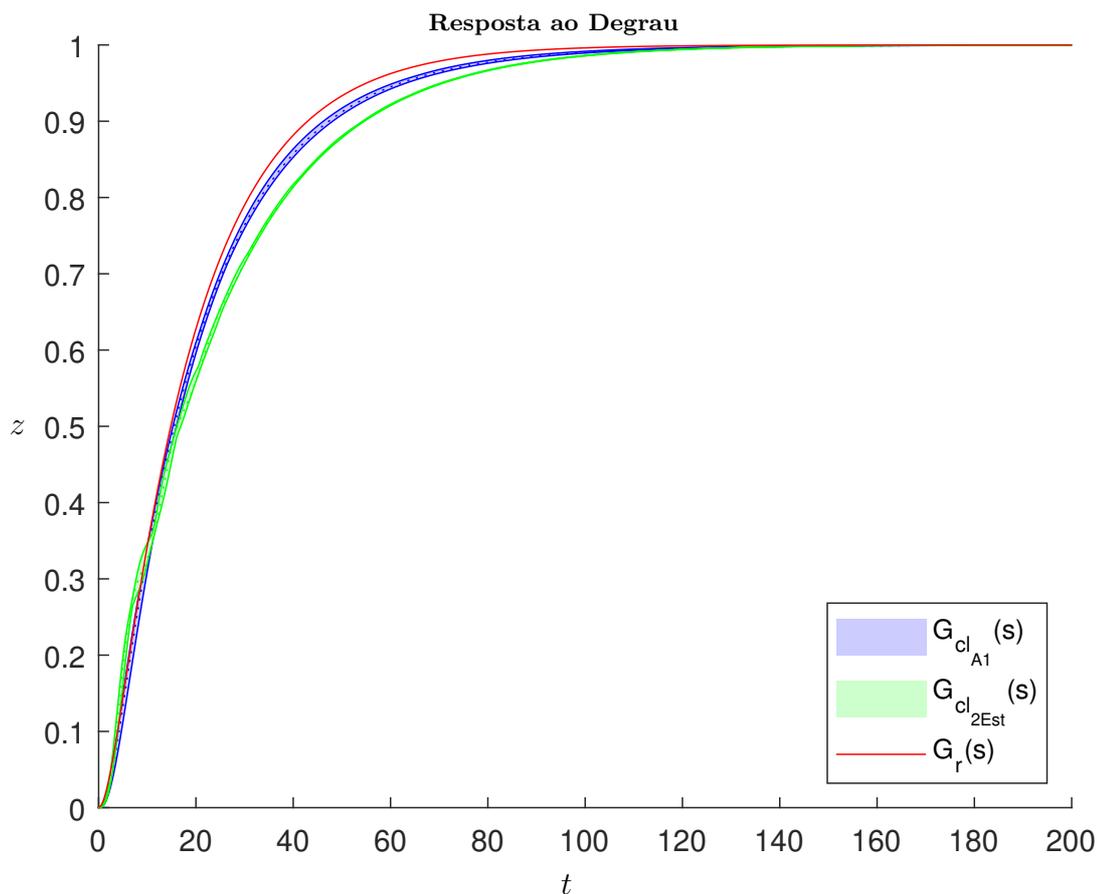


Figura 9 – Resposta ao degrau do sistema de dois tanques controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.15) (em azul), (3.16) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1.

A resposta ao impulso do sistema em malha fechada com o uso dos controladores (3.15) (em azul) e (3.16) (em verde) para toda a faixa de incerteza é mostrada na Figura 10 juntamente com a resposta do sistema de referência (em vermelho). Nota-se que a resposta do modelo de referência encontra-se totalmente contida em toda a faixa de resposta dada pelo o controlador (3.15). Por outro lado, até 20 segundos a resposta do controlador (3.16) apresenta uma grande discrepância em relação à resposta do modelo de referência, o que evidencia ainda a mais a vantagem do controlador calculado com a técnica proposta.

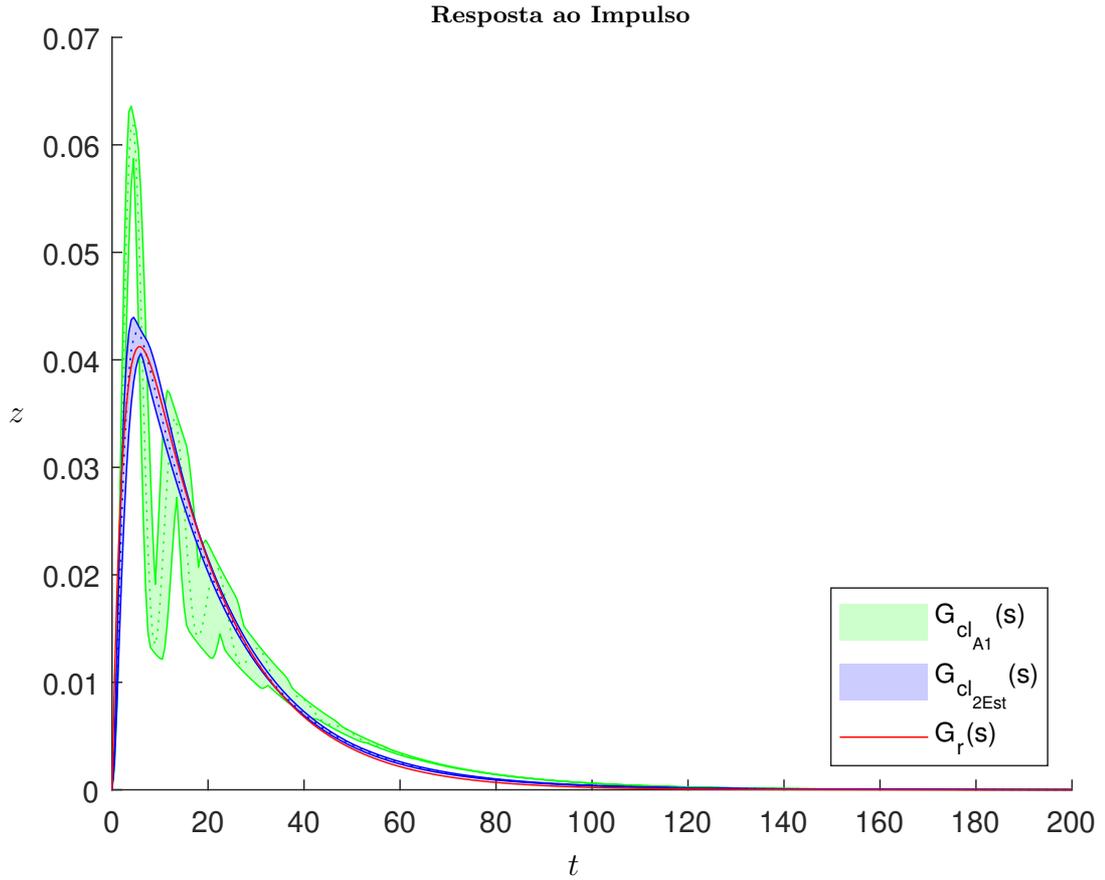


Figura 10 – Resposta ao impulso do sistema de dois tanques controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.15) (em azul), (3.16) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1.

Como um experimento adicional para esta planta, é projetado um controlador com uma restrição estrutural, de modo que o sinal de controle seja gerado pela soma de duas parcelas independentes associadas às duas saídas medidas, isto é

$$U(s) = G_1(s)Y_1(s) + G_2(s)Y_2(s)$$

com

$$G_1(s) = C_{c11}(sI - A_{c11})B_{c11} + D_{c11}, \quad G_2(s) = C_{c12}(sI - A_{c22})B_{c22} + D_{c12}$$

Essa restrição pode ser levada em conta de modo imediato pela abordagem proposta apenas impondo a estrutura desejada nas matrizes do controlador. Foram necessárias 20 iterações com um esforço computacional médio de 2,23 s./it para obter o seguinte controlador estruturado:

- $n_c = 2$, $\mu = 0,0589$, $\xi = 1,5$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,3342 & 0 & -0,8328 & 0 \\ 0 & -5,2587 & 0 & -0,1903 \\ \hline -5,3507 & 131,6049 & -31,7526 & 5,3937 \end{array} \right] \quad (3.17)$$

O Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (3.17) é mostrado na Figura 11 juntamente com o modelo de referência (em vermelho). Nota-se que há uma boa aproximação entre os sistemas nas baixas frequências apenas em termos de magnitude.

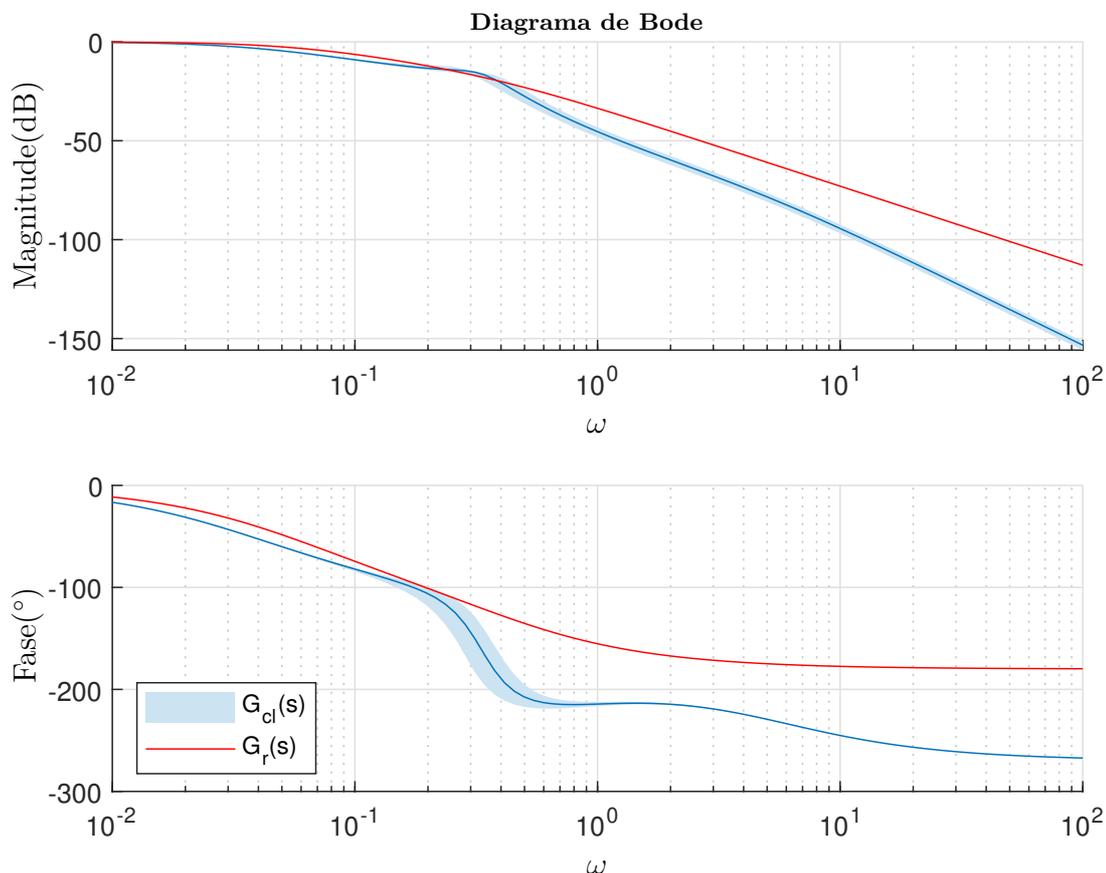


Figura 11 – Diagrama de Bode do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador estruturado dado em (3.17) e do modelo de referência para o Exemplo 1.

A Figura 12 apresenta a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o controlador (3.17) para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência ($\xi = 1,5$). Nesse caso percebe-se um significativo impacto na qualidade da aproximação, embora o erro em regime permaneça nulo.

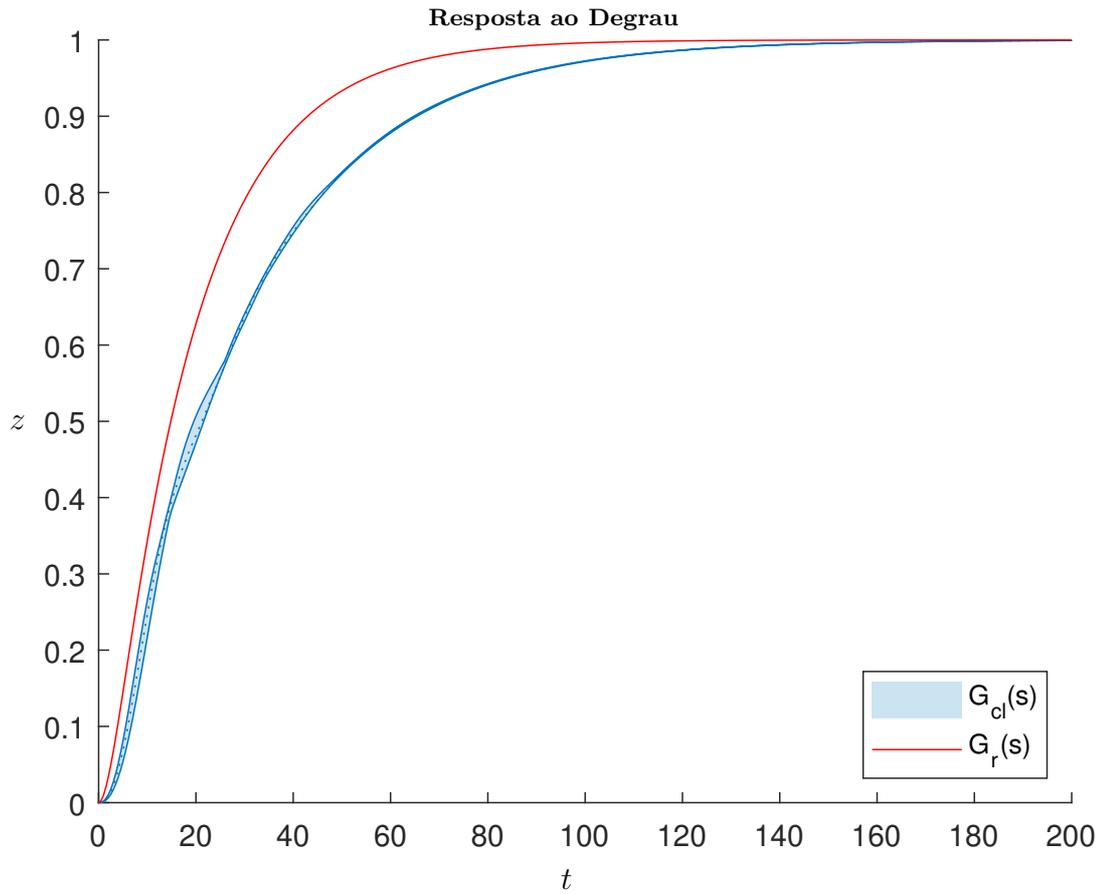


Figura 12 – Resposta ao degrau do sistema de dois tanques controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) e do sistema de referência para o controlador estruturado de ordem $n_c = 2$.

3.2.2 Exemplo 2

Considere o modelo (instável) do helicóptero VTOL proposto em (KEEL *et al.*, 1988) com a representação de estados linearizada (e com a inclusão de um integrador) dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 & 0 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 & 0 \\ 0,1002 & a_{32} & -0,7070 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,5446 & -7,5922 \\ -5,5200 & 4,4900 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

em que os parâmetros incertos são estruturados na forma

$$a_{32} = 0,3681 \pm 0,05$$

$$a_{34} = 1,4200 \pm 0,01$$

Tabela 2 – Resultados do Algoritmo 1 (A1) e do método dos dois estágios (2Est) proposto em (AGULHARI *et al.*, 2010) para o Exemplo 2.

método	n_c	φ	ξ	μ	it_{total}	s./it
2Est	2	1	1,7059	0,3273	20	3,22
A1	2	10^{-2}	$0,5 \leq \xi \leq 3$	0,0100	18	2,71
2Est	1	1	1,7059	0,3783	20	1,20
A1	1	10^{-2}	1,7059	0,0225	30	1,97
2Est	0	1	1,7059	0,3802	20	1,10
A1	0	10^{-2}	1,7059	0,1266	30	1,47

levando a uma representação politópica de $N = 4$ vértices. O objetivo é sintetizar uma lei de controle por realimentação dinâmica de saída de forma que o comportamento do sistema controlado se aproxime do modelo de referência dado em (3.14) com $0,5 \leq \xi \leq 3$, $\omega_n = 0,5 \text{ rad/s}$. Aplicando o Algoritmo 1 obtêm-se os seguintes controladores de ordens $n_c \in \{0,1,2\}$ (truncados com 4 dígitos decimais):

- $n_c = 0$,

$$D_c = \begin{bmatrix} 1,9127 & -0,3882 \\ 7,6314 & -1,5034 \end{bmatrix}$$

- $n_c = 1$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1,5365 & 0,8385 & 0,3551 & \\ -0,0188 & 0,3489 & -0,0543 & \\ \hline -0,8782 & 2,9374 & -0,1932 & \end{array} \right]$$

- $n_c = 2$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,3148 & -2,3596 & 4,1565 & -0,0849 \\ 0,0313 & -0,3336 & -1,8179 & 0,3476 \\ \hline 0,0540 & -0,2887 & 0,6383 & -0,0349 \\ 0,3030 & -1,7135 & 3,0731 & -0,1011 \end{array} \right] \quad (3.18)$$

Os custos garantidos \mathcal{H}_2 associados bem como informações sobre o esforço computacional são mostrados na Tabela 2. Para fins de comparação, os resultados obtidos com o método de (AGULHARI *et al.*, 2010) também são apresentados (a mesma implementação descrita no Exemplo 1 foi utilizada).

Os Diagramas de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (3.18) e do modelo de referência (em vermelho) são apresentados na Figura 13. Para fins comparativos, o controlador computado por 2Est é dado por

- $n_c = 2$, $\mu = 0,3273$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,7556 & -33,5687 & 34,3680 & -0,0253 \\ 0,0024 & -5,4880 & 4,3600 & 0,6033 \\ \hline 1,3836 & 63,4270 & -64,5818 & -0,2099 \\ -0,8062 & -37,5094 & 38,3751 & -0,0746 \end{array} \right] \quad (3.19)$$

e o diagrama de Bode do sistema controlado por (3.19) é mostrado na Figura 14. Nota-se uma melhor aproximação do controlador (3.18) em relação à fornecida por (3.19)

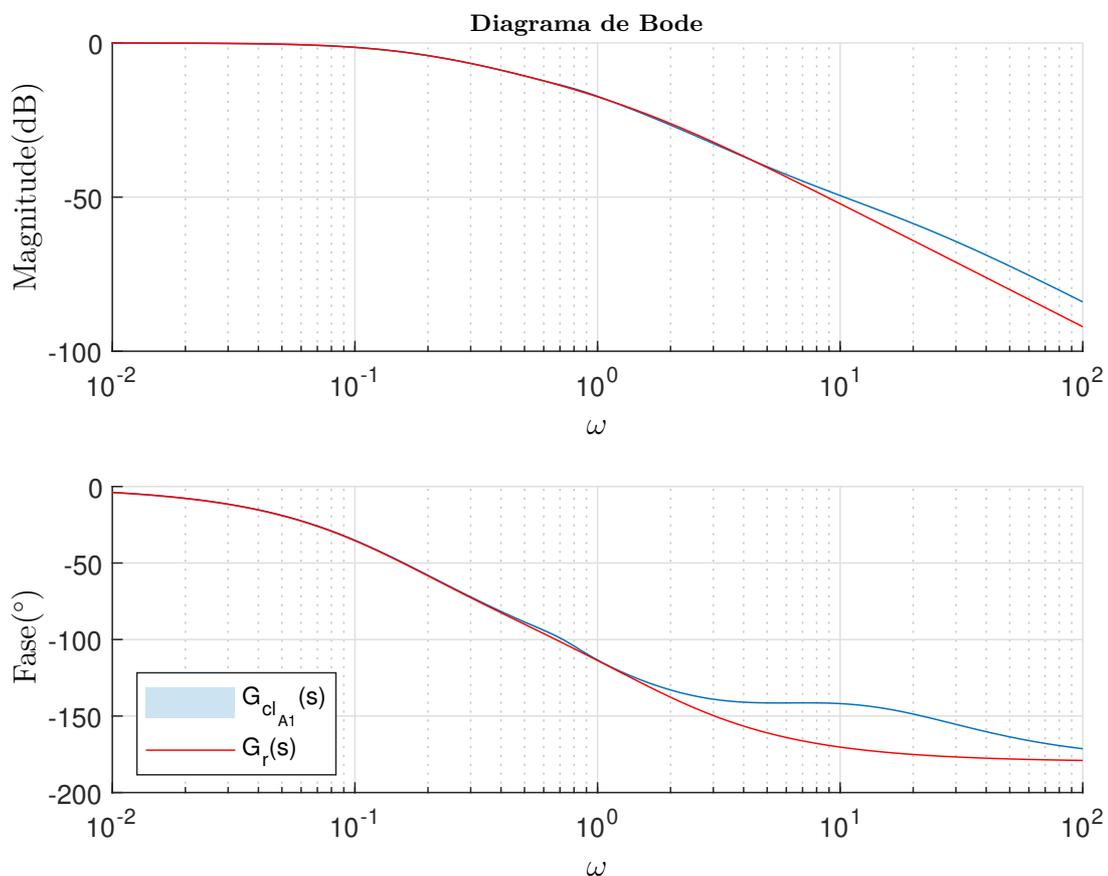


Figura 13 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (3.18) e do modelo de referência para Exemplo 2.

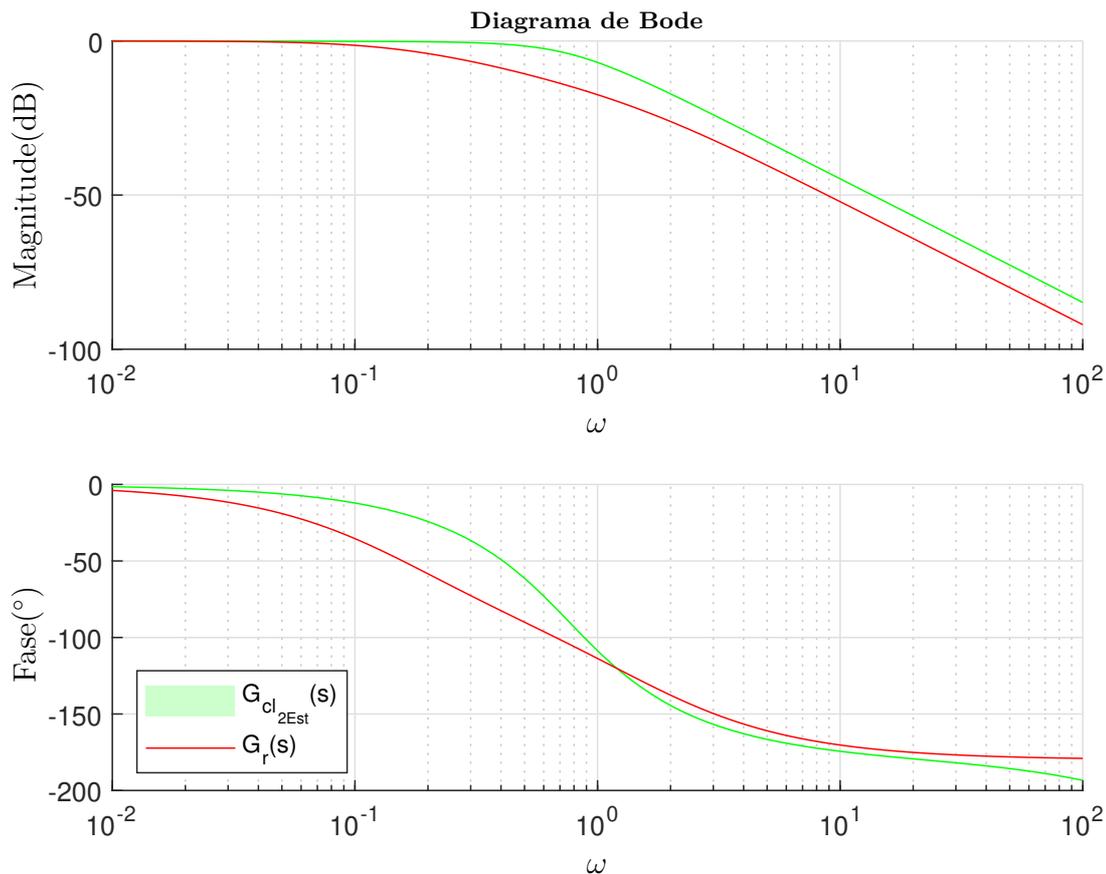


Figura 14 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (3.19) ($n_c = 2$, $\mu = 0,3273$) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

A Figura 15 mostra a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com os controladores (3.18) (em azul) e (3.19) (em verde) para toda a faixa de incerteza, sendo a linha em vermelho a resposta do sistema de referência. Claramente, a melhor aproximação do modelo de referência ocorre com o controlador (3.18).

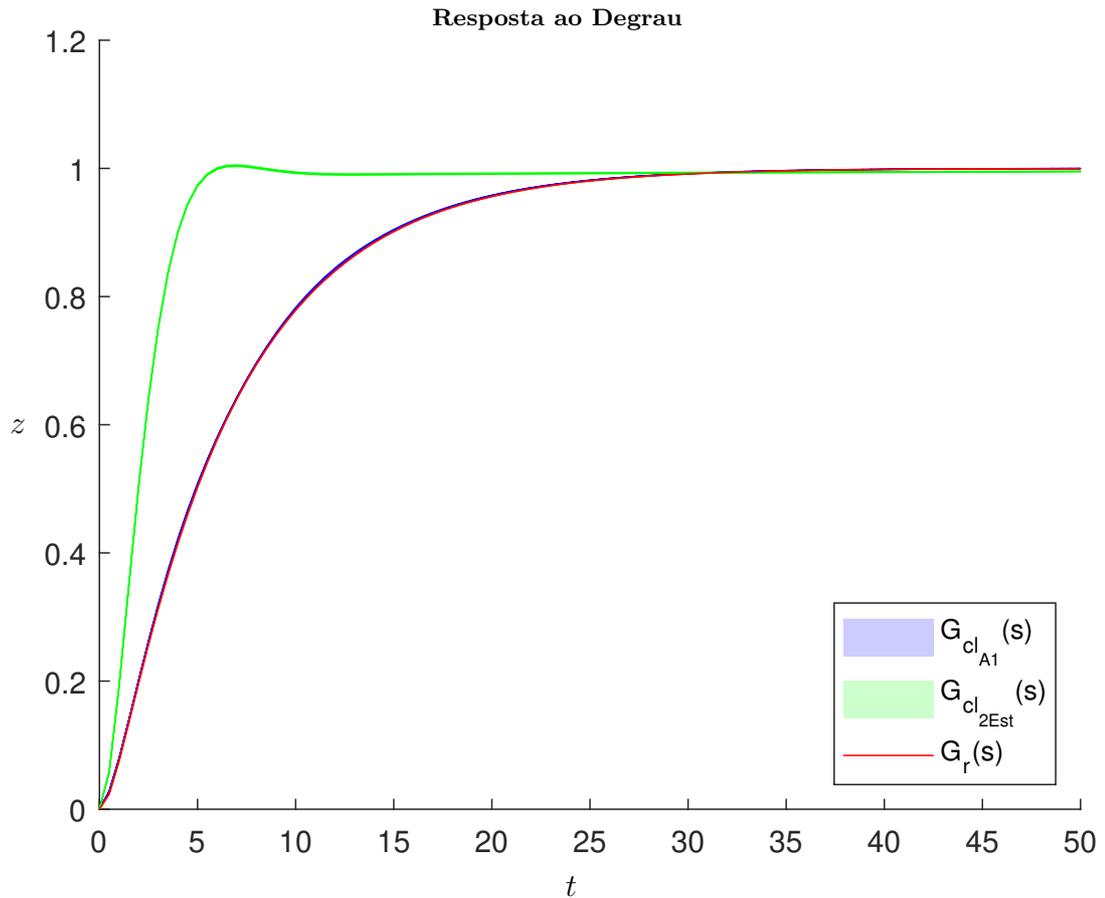


Figura 15 – Resposta ao degrau do sistema VTOL controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.18) (em azul) e (3.19) (em verde) e do sistema de referência (em vermelho).

A Figura 16 mostra a resposta ao impulso do sistema em malha fechada com os controladores (3.18) (em azul) e (3.19) (em verde) para toda a faixa de incerteza, juntamente com a resposta do sistema de referência, mostrando que com o uso do controlador (3.18) o sistema controlado se aproxima melhor da resposta ao impulso da referência.

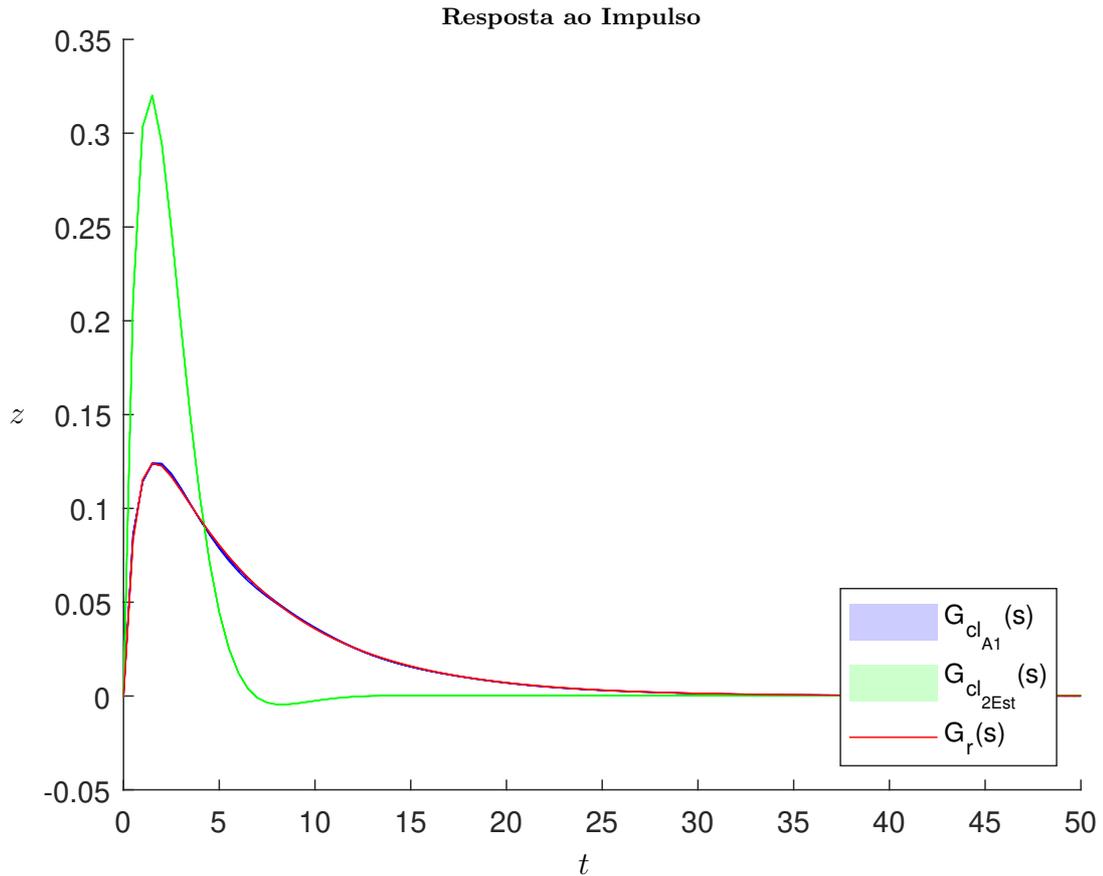


Figura 16 – Resposta ao impulso do sistema VTOL controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com os controladores dado em (3.18) (em azul) e (3.19) (em verde) e do sistema de referência (em vermelho).

Como experimento final para esta planta, é projetado um controlador descentralizado, garantindo que o sinal de controle associado à entrada i só depende da saída medida i , $i = 1, 2$. Foram necessárias 30 iterações com um esforço computacional médio de 2,61 s./it para obter um custo garantido $\mu = 0,2103$. Contudo, esse resultado pode ser melhorado com o custo adicional de mais 20 iterações, sendo obtido o seguinte controlador descentralizado:

- $n_c = 2$, $\mu = 0,1408$, $\xi = 1,7059$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -11.5894 & 0 & -42.6827 & 0 \\ 0 & -1.2563 & 0 & 0.3873 \\ \hline -1.4042 & 0 & -5.6735 & 0 \\ 0 & -0.2100 & 0 & -0.0297 \end{array} \right] \quad (3.20)$$

O Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (3.20) é mostrado na Figura 17 juntamente com o modelo de referência (em vermelho). Percebe-se que há uma boa aproximação entre os sistemas nas baixas frequências tanto em termos de magnitude quanto de fase.

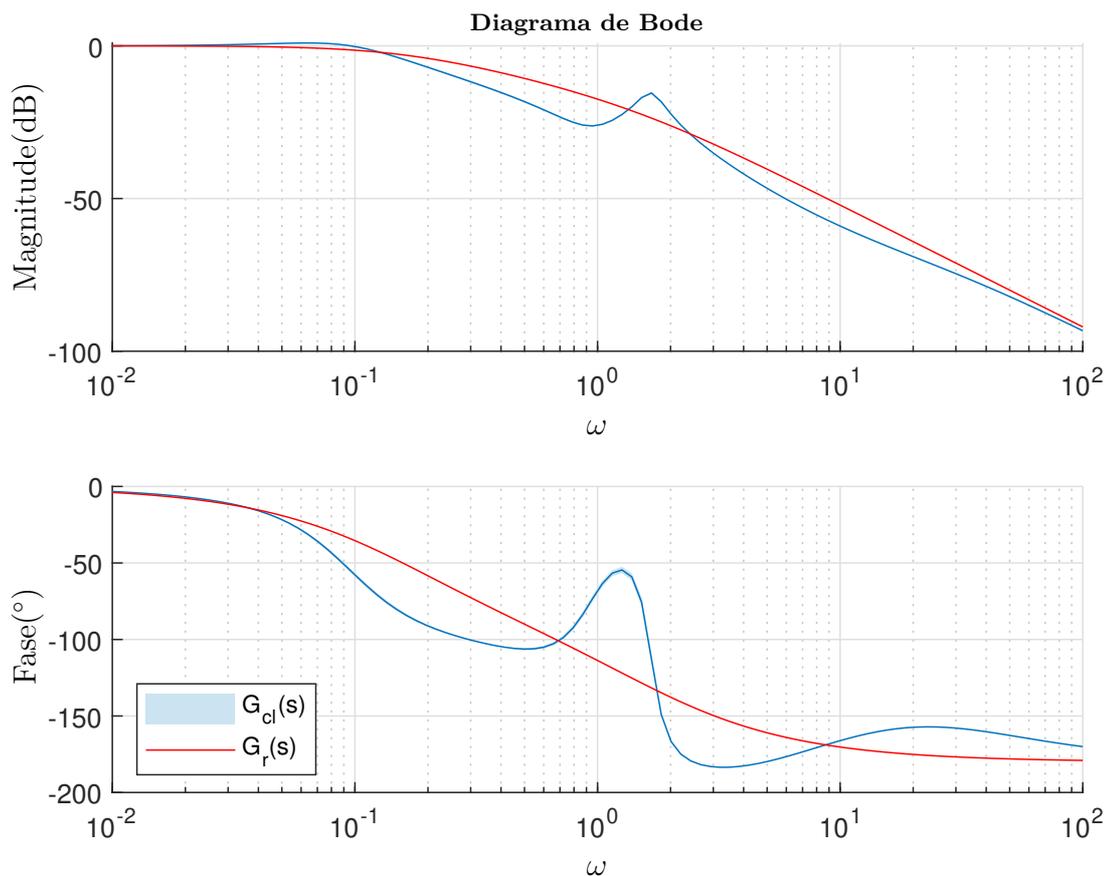


Figura 17 – Diagrama de Bode do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (3.20) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

A Figura 18 apresenta a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o controlador (3.20) para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência ($\xi = 1,7059$). Embora existam significativas diferenças na resposta transitória (o sistema controlado apresentou sobressinal de 12,4%), o controlador descentralizado é capaz de garantir erro em regime nulo.

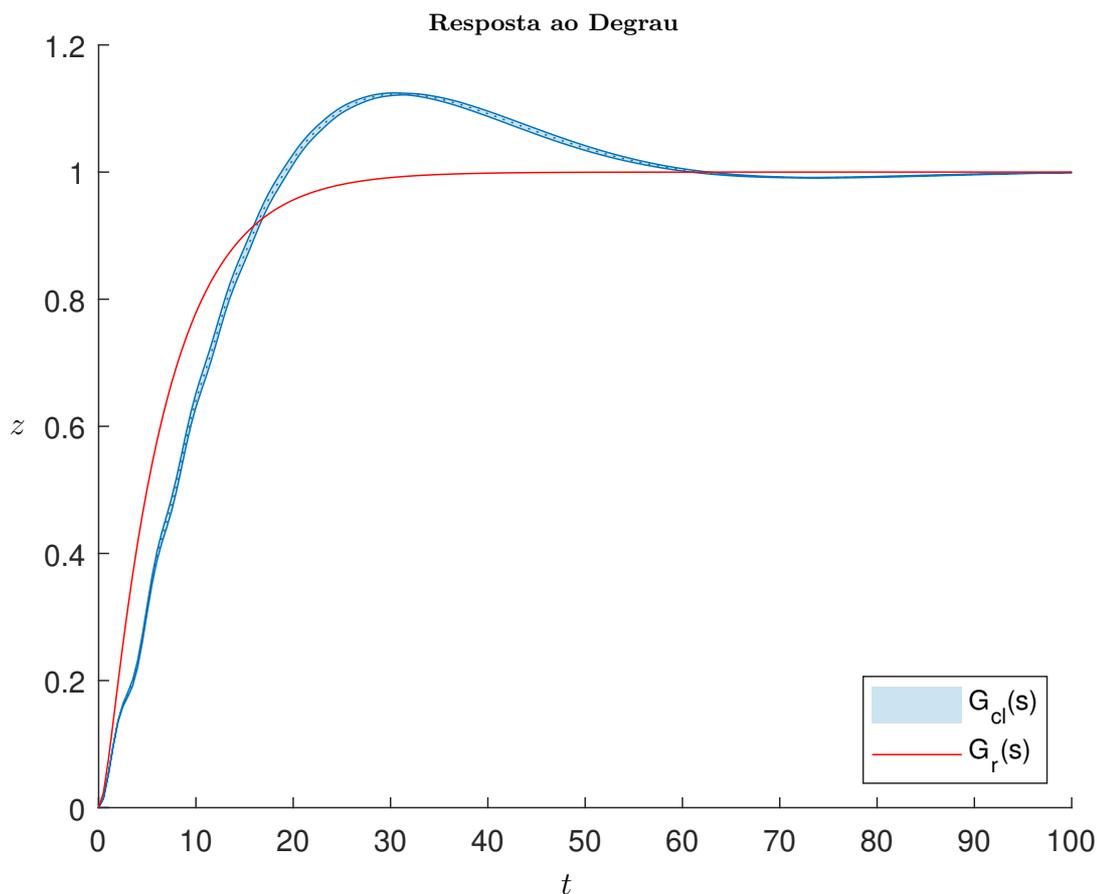


Figura 18 – Resposta ao degrau do sistema helicóptero VTOL controlado \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) e do sistema de referência para o controlador descentralizado dado em (3.20).

3.3 Conclusão

Novas condições de controle por aproximação de modelo utilizando a norma \mathcal{H}_2 como métrica para avaliação da diferença entre o sistema controlado e o modelo de referência foram propostas neste capítulo. O fato das matrizes do controlador e modelo de referência aparecerem linearmente nas condições de síntese fornece algumas facilidades interessantes, como por exemplo, atribuir um certo grau de liberdade ao modelo de referência, e impor estruturas no controlador, como descentralização. Exemplos numéricos retirados da literatura ilustraram a eficácia da técnica e um menor conservadorismo quando comparada a uma outra abordagem. Particularmente sobre a aproximação em termos da resposta em frequência, notam-se ótimas aproximações produzidas pela abordagem proposta dentro da faixa de passagem dos sistemas em todos os exemplos tratados. Finalmente, observa-se que a transformação de similaridade proposta também pode beneficiar outras técnicas da literatura no projeto de controladores dinâmicos.

4 Controle por Aproximação de Modelo: Norma \mathcal{H}_∞

Este capítulo propõe resultados similares aos do capítulo anterior, adotando a norma \mathcal{H}_∞ como métrica para a avaliação do erro de aproximação. Em geral, esses resultados apresentam as mesmas vantagens, como o projeto de controladores estruturados e a possibilidade de introduzir ao modelo de referência variáveis de otimização. Como contribuição adicional, também é apresentado um procedimento que permite calcular um controlador de ordem $n_c + 1$ a partir de um controlador de ordem n_c , com a garantia de que o custo garantido não aumenta. A extensão da técnica proposta para tratar o problema de redução de ordem de modelos incertos é discutida brevemente. Exemplos e comparações com outros métodos da literatura ilustram os resultados.

Para facilitar a prova de um resultado apresentado na Seção 4.3 (Teorema 4.4), neste capítulo trabalha-se com vetor de estados do sistema \mathcal{G}_e com as posições das componentes x_r e x_{cl} invertidas, isto é, $[x'_r \ x'_{cl}]'$. Nesse caso as matrizes $A_e(\alpha)$, $B_e(\alpha)$ e $C_e(\alpha)$ do sistema \mathcal{G}_e são dadas por ($D_e(\alpha)$ permanece igual)

$$A_e(\alpha) = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_{cl}(\alpha) \end{bmatrix}, B_e(\alpha) = \begin{bmatrix} B_r \\ B_{cl}(\alpha) \end{bmatrix}, C_e(\alpha) = [-C_r \ C_{cl}(\alpha)]$$

4.1 Condições de Projeto

Uma condição de síntese por aproximação de modelo baseada na existência de um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema \mathcal{G}_e é proposta no teorema a seguir. Ao minimizar um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema erro \mathcal{G}_e , a resposta em frequência do sistema incerto controlado tende a ser próxima à do modelo de referência, garantindo uma boa aproximação do modelo na frequência de pior caso.

Teorema 4.1. *Sejam $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $B_3(\alpha)$, $B_4(\alpha)$ e $B_5(\alpha)$ matrizes politópicas com coeficientes conhecidos e $\det(B_5(\alpha)) \neq 0$, $\forall \alpha \in \Lambda_N$. Se existirem matrizes $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c+n_r) \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, $X_5(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c+n_r) \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times (n_x+n_c+n_r)}$, $X_4(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times (n_x+n_c+n_r)}$, A_c , B_c , C_c , D_c e um escalar $\gamma > 0$ tais que*

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}_g(\alpha)\mathcal{B}_g(\alpha)) \prec 0 \quad (4.1)$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_g(\alpha) &= [B_1(\alpha) \ B_2(\alpha) \ B_3(\alpha) \ B_4(\alpha) \ B_5(\alpha)], \\ \mathcal{X}_g(\alpha) &= [X_1(\alpha)' \ X_2(\alpha)' \ X_3(\alpha)' \ X_4(\alpha)' \ X_5(\alpha)']', \\ \mathcal{Q}_g(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star \\ C_e(\alpha) & 0 & D_e(\alpha) & -\gamma I & \star \\ A_e(\alpha) & -I & B_e(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

então A_c, B_c, C_c, D_c fornecem o controlador \mathcal{G}_c que estabiliza o sistema \mathcal{G}_e com um custo garantido \mathcal{H}_∞ limitado por γ .

Demonstração. Considerando que (4.1) está na forma *iv.* do Lema de Finsler, uma condição equivalente pode ser obtida

$$\mathcal{B}_g(\alpha)^{\perp'} \mathcal{Q}_g(\alpha) \mathcal{B}_g(\alpha)^\perp \prec 0,$$

com

$$\mathcal{B}_g(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & (-B_5(\alpha)^{-1}B_1(\alpha))' \\ 0 & I & 0 & 0 & (-B_5(\alpha)^{-1}B_2(\alpha))' \\ 0 & 0 & I & 0 & (-B_5(\alpha)^{-1}B_3(\alpha))' \\ 0 & 0 & 0 & I & (-B_5(\alpha)^{-1}B_4(\alpha))' \end{bmatrix}',$$

que, usando a mesma propriedade novamente, produz

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0 \quad (4.2)$$

com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star \\ C_e(\alpha) & 0 & D_e(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = [A_e(\alpha) \ -I \ B_e(\alpha) \ 0] \quad (4.4)$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} (-B_5(\alpha)^{-1}B_1(\alpha))' \\ (-B_5(\alpha)^{-1}B_2(\alpha))' \\ (-B_5(\alpha)^{-1}B_3(\alpha))' \\ (-B_5(\alpha)^{-1}B_4(\alpha))' \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Considerando

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_e(\alpha) & B_e(\alpha) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e aplicando o Lema de Finsler novamente em (4.2), a seguinte condição equivalente é obtida

$$\begin{bmatrix} A_e(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A_e(\alpha) & \star & \star \\ B_e(\alpha)'P(\alpha) & -\gamma I & \star \\ C_e(\alpha) & D_e(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0,$$

que satisfaz a condição do Lema 2.2. Como consequência, γ é um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema \mathcal{G}_e . \square

Observe que na condição de síntese dada pela desigualdade (4.1), as matrizes do sistema \mathcal{G}_e aparecem linearmente (veja a matriz $\mathcal{Q}_g(\alpha)$), assim como nas condições de síntese apresentadas no capítulo anterior. Portanto, os mesmos comentários feitos para o Teorema 3.1 se aplicam ao Teorema 4.1.

De modo similar, o Teorema 4.1 possui a mesma desvantagem do Teorema 3.1, isto é, a necessidade de fornecer as matrizes de entrada $B_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$. Na falta de uma regra geral para a escolha destas matrizes, pode-se esperar por resultados conservadores ou, no pior cenário, nenhuma solução factível. A próxima seção apresenta o procedimento sistemático para a construção das matrizes $B_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$, tais que o Teorema 4.1 garanta a obtenção de uma solução factível com um valor finito para γ .

4.2 Construindo $\mathcal{B}_g(\alpha)$

A fim de produzir valores para $B_i(\alpha)$ que assegurem uma solução factível para o Teorema 4.1, o primeiro passo é computar um controlador que estabiliza \mathcal{G}_e sem considerar qualquer especificação com respeito à norma \mathcal{H}_∞ . Essa tarefa pode ser realizada utilizando o Teorema 3.2, que pode ser resolvido por meio de um procedimento iterativo de modo a obter um controlador estabilizante para o sistema \mathcal{G}_e .

Uma vez que o controlador estabilizante \mathcal{G}_c está disponível, as matrizes $B_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$, de forma que as condições do Teorema 4.1 sempre forneçam uma solução factível, podem ser computadas, como proposto a seguir.

Teorema 4.2. *Seja \mathcal{G}_c um controlador estabilizante conhecido para \mathcal{G}_e . Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3, 4$, de dimensões apropriadas e um escalar $\gamma_a > 0$ tais que (4.2) seja satisfeita $\forall \alpha \in \Lambda_N$, com*

$$\mathcal{X}(\alpha) = [X_1(\alpha)' \quad X_2(\alpha)' \quad X_3(\alpha)' \quad X_4(\alpha)']'$$

e $\mathcal{Q}(\alpha)$ e $\mathcal{B}(\alpha)$ dadas em (4.3) e (4.4), respectivamente, então γ_a é um custo garantido para o sistema \mathcal{G}_e . Além disso, as escolhas

$$\begin{aligned} B_1(\alpha) &= X_1(\alpha)', \quad B_2(\alpha) = X_2(\alpha)', \quad B_3(\alpha) = X_3(\alpha)', \\ B_4(\alpha) &= X_4(\alpha)', \quad B_5(\alpha) = -I \end{aligned} \tag{4.6}$$

são tais que as condições do Teorema 4.1 são factíveis e, ao minimizar γ , fornecem um custo garantido \mathcal{H}_∞ menor ou igual a γ_a .

Demonstração. Primeiro note que a desigualdade em (4.2) pode ser vista como uma versão do *bounded real lemma* com variáveis de folga. Consequentemente, a factibilidade de (4.2) assegura que γ_a é um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema \mathcal{G}_e como mostrado na prova do Teorema 4.1. Usando o Lema de Finsler, pode ser observado que (4.2) é equivalente a (4.1) e as escolhas propostas em (4.6) asseguram que (4.1) é garantidamente factível. Finalmente, ao testar o Teorema 4.1 minimizando o valor de γ , temos que $\gamma \leq \gamma_a$ pois ao resolver (4.1) as matrizes do controlador voltam a ser variáveis. \square

Perceba que as condições do Teorema 4.2 nada mais são do que uma maneira de computar custos garantidos \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares contínuos no tempo, e que sempre fornecem uma solução factível pois \mathcal{G}_c é um controlador estabilizante.

4.3 Procedimento Iterativo

Devido à simetria

$$\text{He}(\mathcal{X}_g(\alpha)\mathcal{B}_g(\alpha)) = \text{He}(\mathcal{B}_g(\alpha)'\mathcal{X}_g(\alpha))'$$

as soluções das variáveis $X_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$ podem ser usadas novamente como valores factíveis para $B_i(\alpha)$ em um novo teste do Teorema 4.1. Tal estratégia dá origem a um procedimento iterativo, proposto pelo Algoritmo 2, que realiza o controle por aproximação de modelo em duas fases, seguindo a mesma estratégia do Algoritmo 1, proposto no capítulo anterior. Na fase 1, o procedimento procura por um controlador estabilizante, resolvendo as condições do Teorema 3.2 com a inicialização e a relaxação proposta pelo Teorema 3.3. Se um controlador estabilizante não for encontrado, o algoritmo é encerrado. Caso contrário, o controlador factível é usado como entrada para resolver as condições do Teorema 4.2 e o procedimento vai para a fase 2. Durante a fase 2, as condições do Teorema 4.1 são resolvidas sequencialmente até uma tolerância pré-especificada associada a $\gamma_{k+1} - \gamma_k$ (γ_k representando o valor de γ na iteração k) ou até que o número máximo de iterações seja atingido. Se um controlador estabilizante está disponível, o algoritmo pode ser iniciado diretamente na linha 7. O próximo teorema mostra que tal procedimento iterativo produz valores de γ que não crescem ao longo das iterações.

Teorema 4.3. *Dada uma matriz de inicialização $\bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)$, sejam $\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)$ e $\bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha)$ soluções do Teorema 4.1 com $\bar{\gamma}$ o custo garantido mínimo alcançado. A escolha $\mathcal{B}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)'$ garante uma solução com $\gamma \leq \bar{\gamma}$ em um novo teste do Teorema 4.1.*

Demonstração. Como

$$\bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha) + \text{He}(\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)\bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)) \prec 0$$

está satisfeito com $\bar{\gamma}$, um novo teste

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) + \text{He} \left(\mathcal{X}_g(\alpha) \bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)' \right) \prec 0$$

está automaticamente satisfeito com $\mathcal{Q}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha)$, e $\gamma \leq \bar{\gamma}$ pois $\mathcal{X}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)'$ é uma solução válida. \square

Conforme a discussão apresentada no Capítulo 3, no caso \mathcal{H}_∞ o Algoritmo 2 também busca por um controlador estabilizante para a matriz dinâmica modificada $A_e(\alpha) - rI$ na fase 1, em geral resultando em soluções com $B_c = C_c = 0$ e A_c bloco diagonal. Desta forma, para evitar esse efeito, adota-se a transformação de similaridade (3.13) para o sistema \mathcal{G}_{cl} .

Uma vez que um controlador de ordem n_c computado usando o Algoritmo 2 está disponível, uma importante questão a ser colocada é se um controlador de ordem $n_c + 1$ sempre fornece um custo garantido menor ou igual ao de ordem n_c . A resposta é sim, se for adotada uma inicialização adequada para as matrizes $B_i(\alpha)$, com base nos valores previamente obtidos para um controlador de ordem n_c , conforme proposto pelo próximo teorema.

Teorema 4.4. *Sejam $\gamma > 0$ e $X_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$, soluções do Teorema 4.1 para um dado valor de n_c e matrizes de inicialização $B_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$. As escolhas*

$$\bar{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} B_2(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_3(\alpha) = \begin{bmatrix} B_3(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_4(\alpha) = \begin{bmatrix} B_4(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_5(\alpha) = \begin{bmatrix} B_5(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

em um novo teste do Teorema 4.1 com $n_c + 1$ asseguram a existência de um custo garantido menor ou igual a γ .

Demonstração. Supondo que para um dado valor de n_c a condição¹

$$\mathcal{Q}_g + \text{He}(\mathcal{X}_g \mathcal{B}_g) \prec 0$$

com

$$\mathcal{B}_g = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{bmatrix}, \mathcal{Q}_g = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star & \star \\ P & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star \\ C_e & 0 & D_e & -\gamma I & \star \\ A_e & -I & B_e & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{X}_g = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix},$$

está satisfeita com um certo valor de γ e as matrizes do controlador são dadas por $A_c^{n_c}$, $B_c^{n_c}$, $C_c^{n_c}$ e $D_c^{n_c}$. Seja a condição para ordem $n_c + 1$

$$\bar{\mathcal{Q}}_g + \text{He}(\bar{\mathcal{X}}_g \bar{\mathcal{B}}_g) \prec 0 \quad (4.8)$$

¹ A dependência das matrizes do parâmetro α é omitida para encurtar as fórmulas.

com

$$\begin{aligned} \bar{A}_e &= \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_{cl} & \bar{A}_b \\ 0 & \bar{A}_c & \bar{A}_a \end{bmatrix}, \bar{B}_e = \begin{bmatrix} B_r \\ B_{cl} \\ \bar{B}_a \end{bmatrix}, \bar{C}_e = \begin{bmatrix} -C'_r \\ C'_{cl} \\ \bar{C}'_a \end{bmatrix}', \bar{D}_e = -D_r + \bar{D}_{cl}, \\ \bar{Q}_g &= \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star & \star \\ \bar{P} & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star \\ \bar{C}_e & 0 & \bar{D}_e & -\gamma I & \star \\ \bar{A}_e & -I & \bar{B}_e & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{X}}_g = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \bar{X}_4 \\ \bar{X}_5 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_g &= [\bar{B}_1 \ \bar{B}_2 \ \bar{B}_3 \ \bar{B}_4 \ \bar{B}_5] \end{aligned}$$

e adotando as seguintes estruturas

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \bar{P}_a \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & \bar{B}_{ia} \end{bmatrix}, \bar{X}_i = \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & \bar{X}_{ia} \end{bmatrix}, i = \{1,2,5\}, \\ \bar{B}_j &= \begin{bmatrix} B_j \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{X}_j = [X_j \ 0], j = \{3,4\} \end{aligned}$$

Observe que as matrizes P , B_i , X_i , que aparecem como blocos das matrizes \bar{P} , \bar{B}_i e \bar{X}_i , são soluções da ordem n_c . Além disso, as estruturas das matrizes do controlador de ordem $n_c + 1$ são fixadas como

$$A_c^{n_c+1} = \begin{bmatrix} A_c^{n_c} & 0 \\ 0 & a_{c_{n_c+1}} \end{bmatrix}, B_c^{n_c+1} = \begin{bmatrix} B_c^{n_c} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, C_c^{n_c+1} = [C_c^{n_c} \ \dots \ 0], D_c^{n_c+1} = D_c^{n_c}$$

Essas escolhas particulares levam a

$$\begin{aligned} \bar{A}_b &= 0, \bar{A}_c = 0, \bar{B}_c = 0, \bar{C}_c = 0, \bar{A}_a = a_{c_{n_c+1}}, \\ \bar{A}_e &= \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_{cl} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & 0 \\ 0 & \bar{A}_a \end{bmatrix}, \bar{B}_e = \begin{bmatrix} B_r \\ B_{cl} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_e \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_e &= [-C_r \ C_{cl} \ 0] = [C_e \ 0], \bar{D}_e = -D_r + D_{cl} = D_e \end{aligned}$$

Além disso, (4.8) é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ P & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \bar{P}_a & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star & \star \\ C_e & 0 & 0 & 0 & D_e & -\gamma I & \star & \star \\ A_e & 0 & -I & 0 & B_e & 0 & 0 & \star \\ 0 & \bar{A}_a & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{He}(\text{H}) \prec 0,$$

com $H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$ e

$$H_1 = \begin{bmatrix} X_1 B_1 & 0 & X_1 B_2 & 0 \\ 0 & \bar{X}_{1a} \bar{B}_{1a} & 0 & \bar{X}_{1a} \bar{B}_{2a} \\ X_2 B_1 & 0 & X_2 B_2 & 0 \\ 0 & \bar{X}_{2a} \bar{B}_{1a} & 0 & \bar{X}_{2a} \bar{B}_{2a} \\ X_3 B_1 & 0 & X_3 B_2 & 0 \\ X_4 B_1 & 0 & X_4 B_2 & 0 \\ X_5 B_1 & 0 & X_5 B_2 & 0 \\ 0 & \bar{X}_{5a} \bar{B}_{1a} & 0 & \bar{X}_{5a} \bar{B}_{2a} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} X_1 B_3 & X_1 B_4 & X_1 B_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{X}_{1a} \bar{B}_{5a} \\ X_2 B_3 & X_2 B_4 & X_2 B_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{X}_{2a} \bar{B}_{5a} \\ X_3 B_3 & X_3 B_4 & X_3 B_5 & 0 \\ X_4 B_3 & X_4 B_4 & X_4 B_5 & 0 \\ X_5 B_3 & X_5 B_4 & X_5 B_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{X}_{5a} \bar{B}_{5a} \end{bmatrix}$$

Aplicando uma série de transformações de congruência para permutação de linhas e colunas, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_g & 0 \\ 0 & \bar{Q}_a \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{X}_g \mathcal{B}_g & 0 \\ 0 & \bar{X}_{ia} \bar{B}_{ia} \end{bmatrix} \right) \prec 0$$

com

$$\begin{aligned} \bar{X}_{ia} &= [\bar{X}'_{1a} \quad \bar{X}'_{2a} \quad \bar{X}'_{5a}]' \\ \bar{B}_{ia} &= [\bar{B}_{1a} \quad \bar{B}_{2a} \quad \bar{B}_{5a}] \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\mathcal{Q}_g + \text{He}(\mathcal{X}_g \mathcal{B}_g) \prec 0 \quad (4.9)$$

$$\bar{Q}_a + \text{He}(\bar{X}_{ia} \bar{B}_{ia}) \prec 0 \quad (4.10)$$

A condição (4.9) é factível por hipótese. Adotando as escolhas dadas em (4.7), isto é, $\bar{B}_{1a} = 1$, $\bar{B}_{2a} = 1$ e $\bar{B}_{5a} = -1$, e $\bar{X}_{ia} = (-\bar{r}/2) [\bar{B}'_{1a} \quad \bar{B}'_{2a} \quad \bar{B}'_{5a}]'$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -\bar{r}I & (\bar{P}_a - \bar{r}I) & \bar{A}'_a + \bar{r}I \\ (\bar{P}_a - \bar{r}I) & -\bar{r}I & (\bar{r}I - I) \\ \bar{A}_a + \bar{r}I & (\bar{r}I - I) & -\bar{r}I \end{bmatrix} \prec 0$$

Escolhendo $\bar{P}_a = \bar{r}I \succ 0$, $\bar{A}_a = -\bar{r}I$, aplicando um complemento de Schur e realizando algumas manipulações, obtém-se

$$\begin{aligned} -\bar{r}I - [(\bar{A}_a + \bar{r}I)(-\bar{r}I)^{-1}(\bar{A}'_a + \bar{r}I) + (\bar{r}I - I)(-\bar{r}I)^{-1}(\bar{r}I - I)] &\prec 0 \\ -\bar{r}I + (-\bar{r}I + \bar{r}I)(\bar{r}I)^{-1}(-\bar{r}I + \bar{r}I) + (\bar{r}I)^{-1}((\bar{r}I)^2 - 2\bar{r}I + I) &\prec 0 \\ -\bar{r}I + \bar{r}I - 2I + (\bar{r}I)^{-1} &\prec 0 \\ -2I + (\bar{r}I)^{-1} &\prec 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

que, multiplicando ambos os lados por $(1/2)\bar{r}I > 0$, produz

$$\begin{aligned} -\bar{r}I + (1/2)I &\prec 0 \\ \bar{r}I &\succ (1/2)I \end{aligned}$$

que é sempre verificada para um $\bar{r} > (1/2)$.

□

Embora a inicialização proposta no Teorema 4.4 possa ser útil para obter controladores de ordem maior, não existem garantias de que o valor de γ será menor do que aquele fornecido por um controlador de determinada ordem projetado diretamente usando as condições iniciais propostas pelo Teorema 4.2. Além disso, o resultado do Teorema 4.4 não é válido se a transformação de similaridade dada em (3.13) for aplicada ao sistema.

Algoritmo 2

```

1: Função ( $it_{max}, \mathcal{B}_s(\alpha) \leftarrow [I \ \varphi I \ -I], \varphi > 0$ )
2:   Inicialize:  $k \leftarrow 0$ ,  $fase \leftarrow 1$ ,  $A_e(\alpha) \leftarrow (A_e(\alpha) - rI)$ 
3:   Enquanto  $k < it_{max}$  Resolva
4:      $k \leftarrow k + 1$ ;
5:     Se  $fase = 1$  Então
6:       minimize  $r$  sujeito a  $P(\alpha) \succ 0$  e (3.9)
7:       Se  $r \leq 0$  Então
8:          $\mathcal{G}_c \leftarrow (A_c, B_c, C_c, D_c)$ ;
9:          $r \leftarrow 0$ ;
10:        minimize  $\gamma$  sujeito a  $P(\alpha) \succ 0$  e (4.2)
11:        inicialize  $\mathcal{B}_g(\alpha)$  de acordo com (4.6);
12:         $fase \leftarrow 2$ ;
13:      Senão
14:         $\mathcal{B}_s(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}_s(\alpha)'$ ;
15:      Fim Se
16:      Senão Se  $fase = 2$  Então
17:        minimize  $\gamma$  sujeito a  $P(\alpha) \succ 0$  e (4.1)
18:         $\gamma_k \leftarrow \gamma$ ;
19:        Se  $|\gamma_k - \gamma_{k-1}| < \epsilon$  Então
20:          abandone;
21:        Fim Se
22:         $\mathcal{B}_g(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}_g(\alpha)'$ ;
23:      Fim Se
24:    Fim Enquanto
25:    Se  $fase = 2$  Então Retorna  $(A_c, B_c, C_c, D_c, \gamma_k)$ ;
26:    Fim Se
27:  Fim Função

```

4.4 Redução de Modelos

Uma outra vantagem da abordagem proposta é o tratamento do problema de redução de ordem de modelos lineares incertos, demandando apenas pequenos ajustes na implementação do algoritmo iterativo. De fato, considerando o sistema \mathcal{G}_{cl} em malha aberta (desde que seja um sistema estável), isto é, fixando as escolhas $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha)$, $B_{cl}(\alpha) = B_w(\alpha)$, $C_{cl}(\alpha) = C_z(\alpha)$ e $D_{cl}(\alpha) = D_{zw}(\alpha)$, e adotando todas as matrizes do

modelo de referência (precisamente conhecido ou politópico) como variáveis de otimização, o Algoritmo 2 (assim como o Algoritmo 1 do capítulo anterior) pode produzir como solução um modelo que mais se aproxima do sistema em malha aberta. Caso a ordem escolhida para o modelo de referência seja menor do que a ordem da planta, então tem-se como resultado um modelo de *ordem reduzida*. A estratégia requer, porém, um ajuste do Algoritmo 2 na fase intermediária. Como na primeira fase apenas a matriz A_r do modelo de referência é calculada, a fase intermediária precisa de um valor fixo de B_r (não nulo) para computar um custo garantido para o sistema \mathcal{G}_e . Como B_r não interfere na estabilidade do sistema, a aplicação do Teorema 4.3 garante uma solução factível para qualquer valor de B_r . No experimento numérico apresentado na próxima seção, a seguinte estrutura foi escolhida (inspirada na forma canônica controlável):

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}$$

Ao iniciar-se a fase 2, B_r volta a ser uma variável de otimização.

Como comentário final, é importante salientar que a abordagem proposta, assim como a maioria dos métodos de redução de modelo baseados em LMIs, (WU, 1996; WU; JARAMILLO, 2002; TROFINO; COUTINHO, 2004; GONÇALVES *et al.*, 2009; ADEGAS; STOUSTRUP, 2012; MAZZOCCANTE; OLIVEIRA, 2017; MAZZOCCANTE, 2017; MAZZOCCANTE *et al.*, 2018), trata apenas sistemas estáveis.

4.5 Exemplos Numéricos

Nos exemplos apresentados a seguir, o Algoritmo 2 é testado com $it_{max} = 30$ e $\epsilon = 10^{-3}$. As variáveis de folga quadradas $X_i(\alpha)$ nos teoremas 4.1 e 3.2 são consideradas simétricas e as retangulares como arbitrárias. Os seguintes valores do parâmetro de entrada φ são testados: $\varphi \in \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1\}$.

4.5.1 Exemplo 1

Considere o sistema de controle de nível de dois tanques interligados apresentado na Seção 3.2.1. O objetivo é projetar um controlador por realimentação dinâmica de saída que considere apenas os efeitos da entrada w_1 (sinal de referência) sobre a saída z tal que o comportamento do sistema em malha fechada se aproxime do modelo de referência definido pela função de transferência

$$G_r(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com $0,5 \leq \xi \leq 1,5$ e $\omega_n = 0,15 \text{ rad/s}$.

As seguintes soluções (truncadas em 4 casas decimais) do Algoritmo 2 foram obtidas para os controladores de ordem $n_c = \{0,1,2\}$:

- $n_c = 0, \gamma = 0,4101,$

$$D_c = \begin{bmatrix} -13,9374 & 0,3179 \end{bmatrix}$$

- $n_c = 1, \gamma = 0,0714,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1,4316 & -16,3300 & 0,8259 \\ \hline -12,9127 & -156,0088 & 7,8673 \end{array} \right]$$

- $n_c = 2, \gamma = 0,0624,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -5,3746 & -0,7374 & -73,1711 & 3,6494 \\ 0,1102 & -0,0798 & 1,1606 & -0,0567 \\ \hline -47,1597 & -7,2144 & -655,9424 & 32,6992 \end{array} \right] \quad (4.12)$$

Para avaliar a eficácia do método proposto, os resultados do Algoritmo 2 (A2) são comparados com o método dos dois estágios de (AGULHARI *et al.*, 2010) (2Est), adaptado para lidar com o controle por aproximação de modelo (basicamente reescrevendo o sistema \mathcal{G}_e em uma estrutura de realimentação estática de saída). Com duas opções para o primeiro estágio (Teorema 1 e Teorema 2) e duas para o segundo (Corolário 6 e Corolário 7), quatro condições de síntese são possíveis, e apenas o melhor resultado é reportado. Como o método dos dois estágios não pode tratar os parâmetros do modelo de referência como variáveis de otimização, o valor de $\xi = 1,5$, definido pelo Algoritmo 2 como o melhor fator de amortecimento no caso de $n_c = 2$, foi utilizado. O primeiro estágio testa 13 valores de φ e os melhores resultados em termos de custo garantido \mathcal{H}_∞ para $n_c = \{0,1,2\}$ são apresentados na Tabela 3, bem como a complexidade computacional associada. Como pode ser visto, o Algoritmo 2 fornece valores menores de γ com esforço computacional similar.

Para fins comparativos, o controlador de segunda ordem computado por 2Est é dado por

- $n_c = 2, \gamma = 0,1681,$

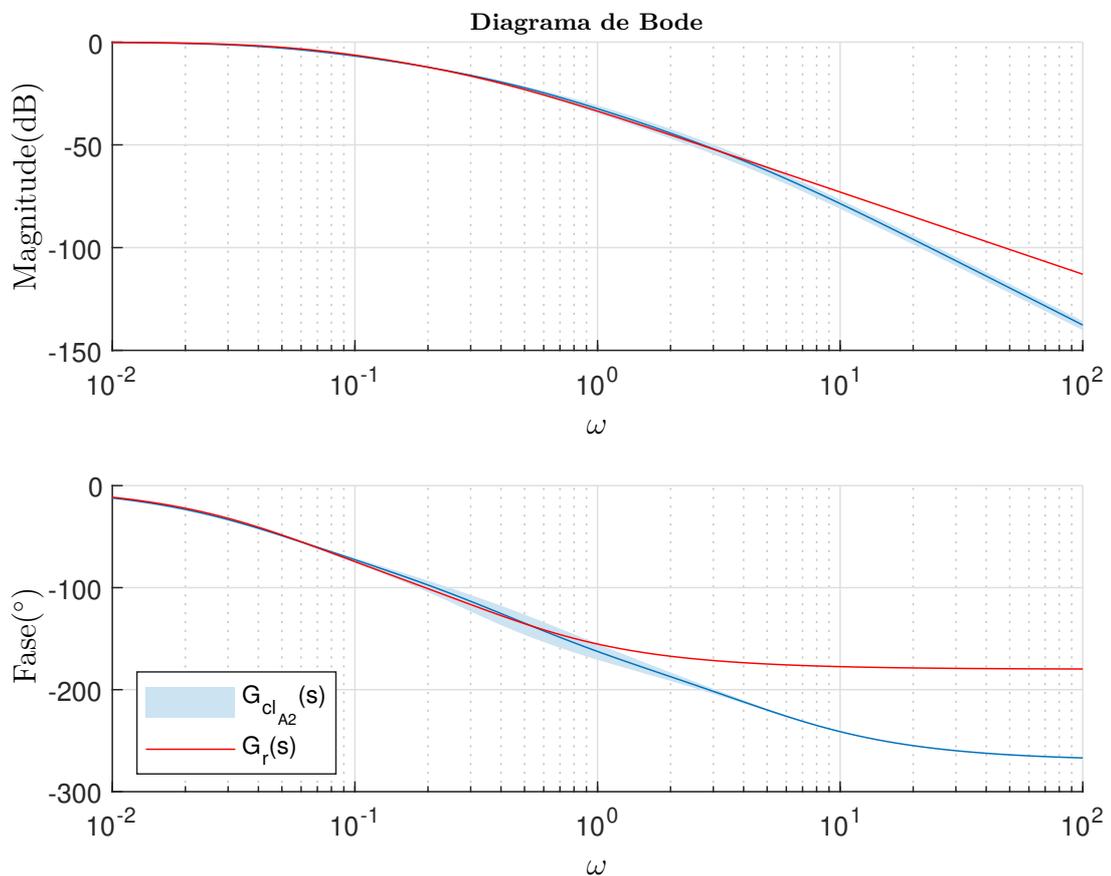
$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,1911 & -2,0090 & -10,1654 & 0,5177 \\ 0,0086 & -11,5550 & 11,3807 & 0,0082 \\ \hline -1,9440 & 1,5383 & -127,2523 & 5,3572 \end{array} \right] \quad (4.13)$$

A Figura 19 mostra o Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (4.12) e do modelo de referência (em vermelho). Observe que há uma boa aproximação até 1 rad/s , tanto na magnitude quanto na fase. A mesma conclusão, por

Tabela 3 – Resultados do Algoritmo 2 (A2) e do método dos dois estágios (2Est) (AGU-LHARI *et al.*, 2010) para o Exemplo 1.

Método	n_c	φ	ξ	γ	it	s/it
2Est	2	10^{+5}	1,5	0,1681	26	1,70
A2	2	10^{-2}	$0,5 \leq \xi \leq 1,5$	0,0624	30	1,14
2Est	1	10^{+5}	1,5	0,1846	26	1,65
A2	1	10^{-2}	1,5	0,0714	30	1,04
2Est	0	10^{+6}	1,5	0,7041	26	1,40
A2	0	10^{-2}	1,5	0,4101	30	0,72

outro lado, não pode ser tirada em relação ao controlador (4.13), uma vez que se pode observar maiores discrepâncias entre o sistema controlado e o modelo de referência para $\omega < 1 \text{ rad/s}$ (veja a Figura 20).

Figura 19 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.12) e do modelo de referência para o Exemplo 1.

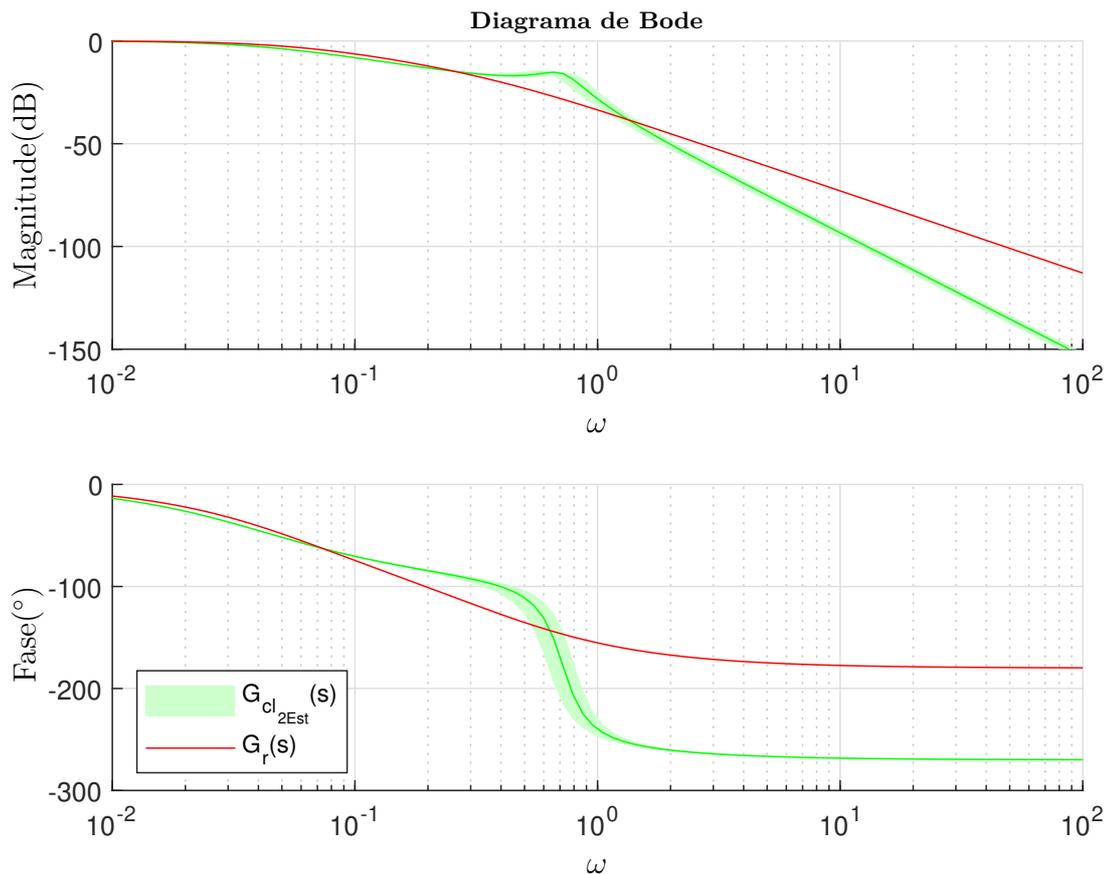


Figura 20 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (4.13) ($n_c = 1$, $\gamma = 0,1681$) e do modelo de referência para o Exemplo 1.

A Figura 21 mostra a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com os controladores (4.12) (em azul), (4.13) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho), que é apresentada para fornecer mais informações sobre a qualidade da aproximação em termos de resposta transitória. Observe que a trajetória com o controlador (4.12) encontra-se mais próxima do modelo de referência quando comparada com a trajetória fornecida pelo controlador (4.13), com uma pequena diferença entre 30 e 80 segundos.

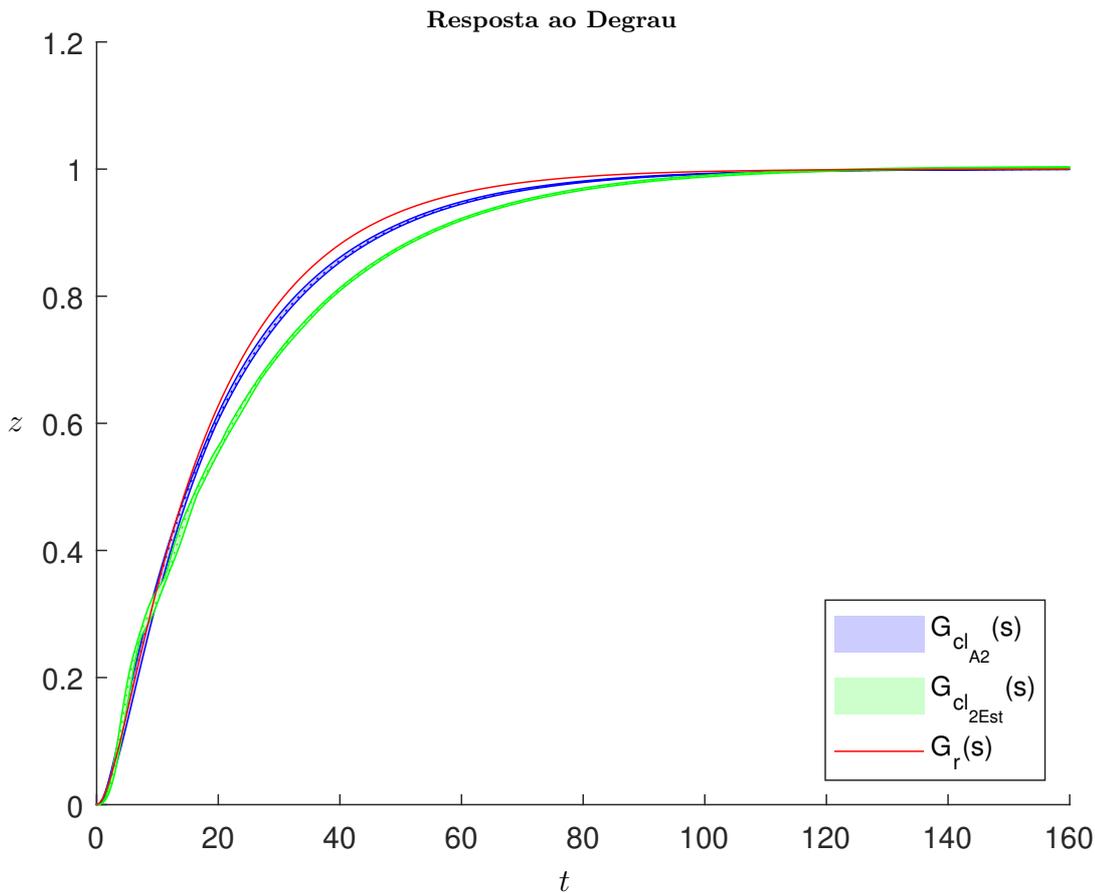


Figura 21 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado por (4.12) (em azul), (4.13) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1.

A Figura 22 apresenta a resposta ao impulso do sistema em malha fechada com os controladores (4.12) (em azul), (4.13) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho). Claramente, a trajetória fornecida pelo controlador (4.12) encontra-se mais próxima do modelo de referência.

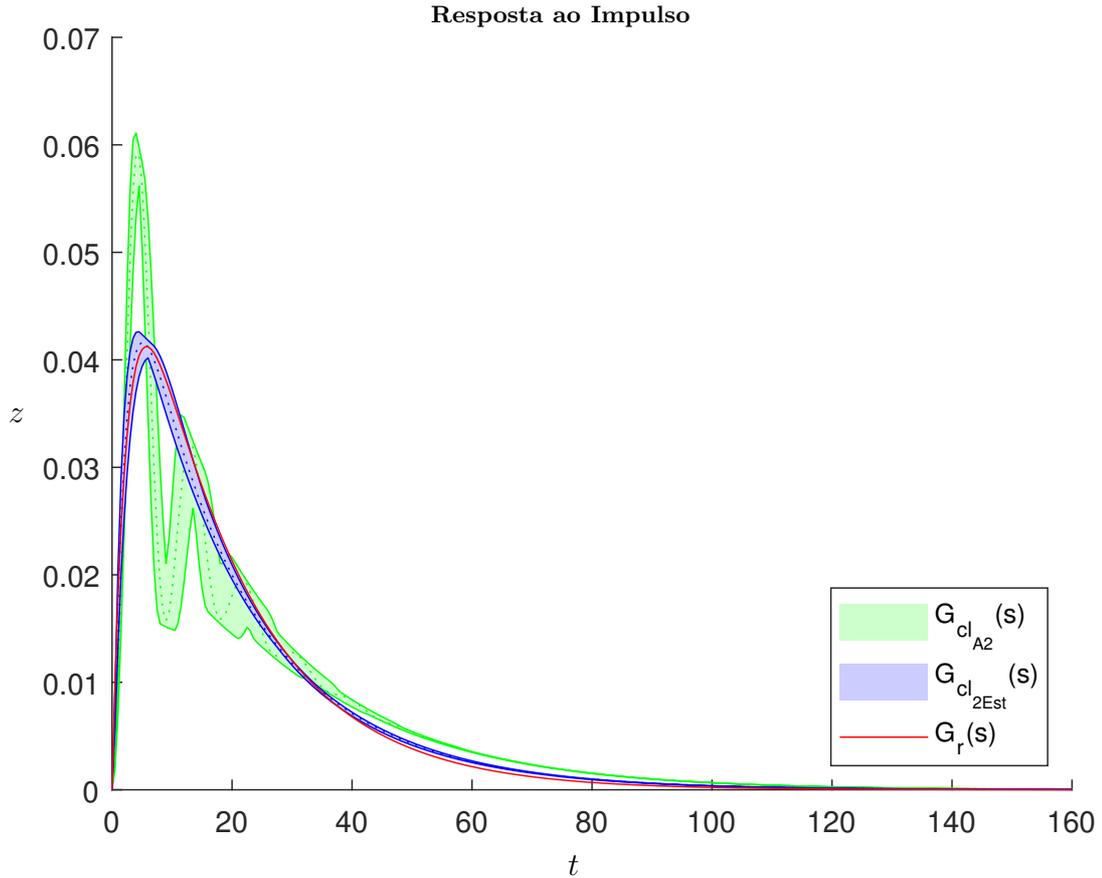


Figura 22 – Resposta ao impulso do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado por (4.12) (em azul), (4.13) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 1.

Como um experimento adicional, o resultado do Teorema 4.4 foi usado para projetar um controlador de ordem $n_c = 2$, começando por um controlador estático. Perceba que nesse caso o custo garantido não pode aumentar conforme n_c cresce. Os resultados são: $(n_c; it; \gamma)$: $(0; 28; 0,4066)$, $(1; 2; 0,4042)$ e $(2; 2; 0,4020)$. As matrizes do controlador de ordem $n_c = 2$ são dadas por:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -14,3847 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -14,0642 & -0,0000 & -0,0000 \\ \hline 0,0000 & 0,0000 & -14,5862 & 0,3358 \end{array} \right] \quad (4.14)$$

Os custos garantidos são não crescentes à medida que n_c cresce e também pode ser observado durante a execução do algoritmo que o primeiro custo garantido após o aumento da ordem é, de fato, menor que o de ordem inferior, conforme previsto teoricamente pelo Teorema 4.4. No entanto, este controlador é equivalente a um estático, uma vez que os dois modos da matriz A_c não são controláveis e nem observáveis (as matrizes B_c e C_c são praticamente nulas). Além disso, a melhoria em termos de γ à medida que n_c cresce é marginal. O uso da transformação de similaridade (3.13) pode ajudar a atenuar este

efeito indesejável, mas sem as garantias teóricas estabelecidas pelo Teorema 4.4. Os resultados com a aplicação da transformação de similaridade são: $(n_c; it; \gamma)$: $(0; 28; 0,4066)$, $(1; 30; 0,1984)$ e $(2; 30; 0,0531)$. As matrizes do controlador de ordem $n_c = 2$ são dadas por:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,0138 & 0,0004 & -0,1317 & 0,0064 \\ 0,0007 & -0,0413 & 0,0351 & 0,0002 \\ \hline -0,1677 & 0,0229 & -1,6253 & 0,0783 \end{array} \right] \cdot 10^3 \quad (4.15)$$

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada (para toda a faixa de incerteza) é mostrada na Figura 23. Apesar dos custos garantidos dos controladores (4.12) e (4.15) serem muito próximos, percebe-se que para o controlador (4.15) a resposta ao degrau é menos afetada pelas incertezas.

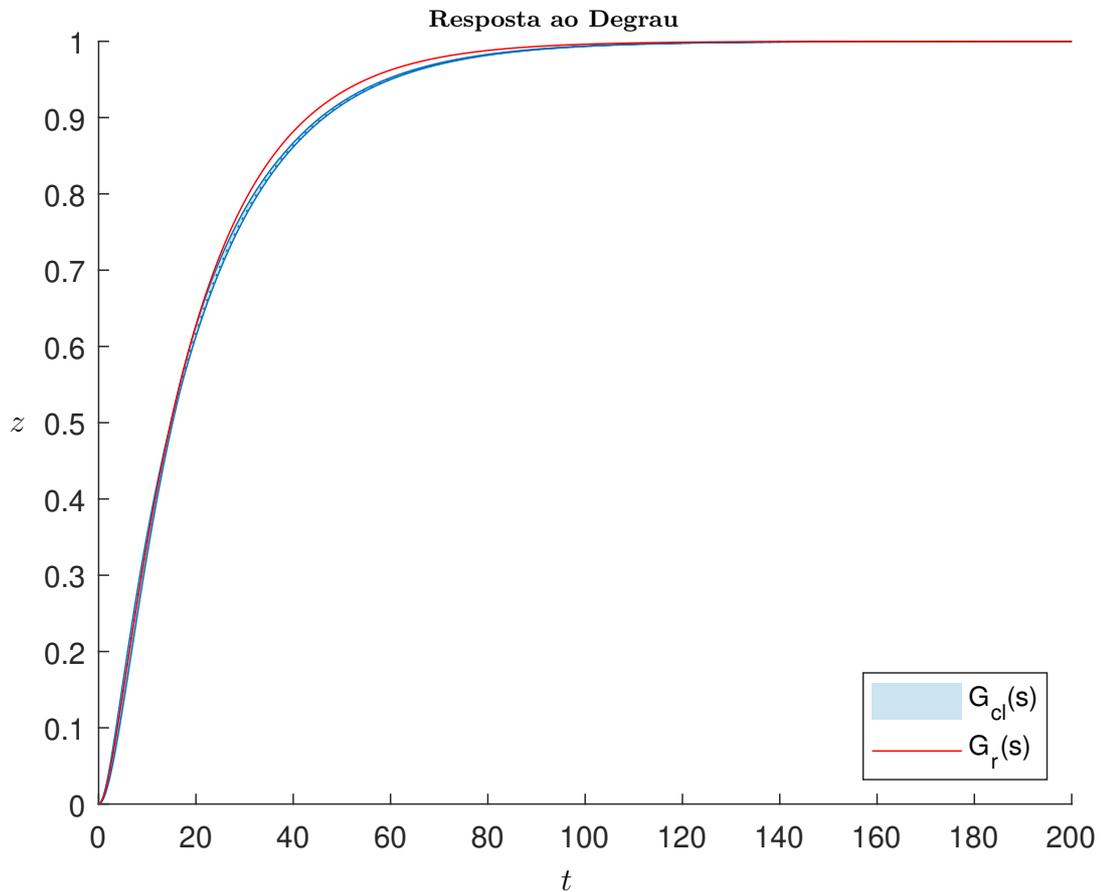


Figura 23 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (4.15) e do modelo de referência para o Exemplo 1.

Para concluir este exemplo, o Algoritmo 2 é utilizado para projetar um controlador com restrição estrutural, garantindo que o sinal de controle possa ser computado por meio de duas parcelas (que são somadas) independentes relacionadas às duas saídas

medidas. Como resultado, foram necessárias 30 iterações com um esforço computacional médio de 1,41 s./it para obter o seguinte controlador descentralizado:

- $n_c = 2$, $\gamma = 0,1390$, $\xi = 1,5$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -2,6461 & 0 & -6,3745 & 0 \\ 0 & -2,2682 & 0 & -0,1220 \\ \hline -52,8275 & 91,2838 & -145,8136 & 5,6443 \end{array} \right] \quad (4.16)$$

O Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (4.16) é mostrado na Figura 24 juntamente com o modelo de referência (em vermelho).

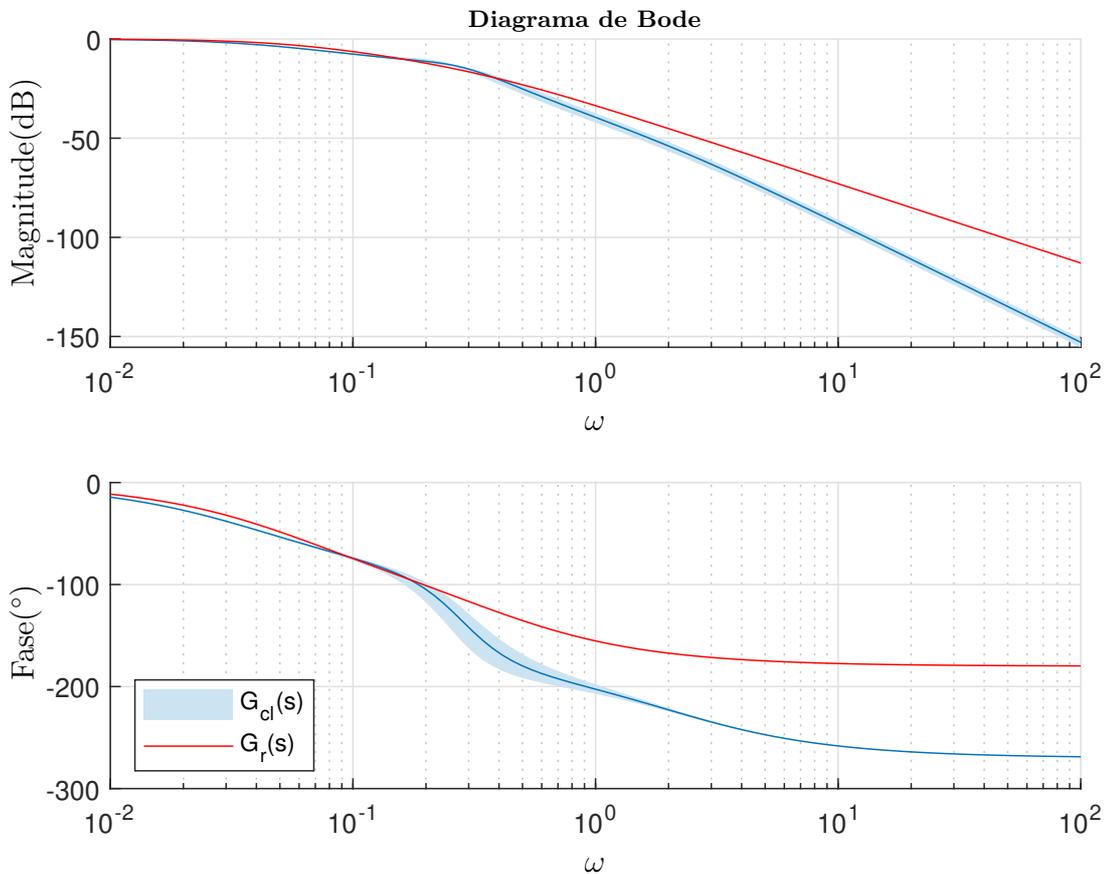


Figura 24 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador estruturado dado em (4.16) e do modelo de referência para o Exemplo 1.

Na Figura 25 é apresentada a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o controlador (4.16) para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência ($\xi = 1,5$). Em comparação ao controlador \mathcal{H}_2 estruturado projetado na Seção 3.2.1, o controlador estruturado \mathcal{H}_∞ produziu uma resposta ao degrau mais fiel à do modelo de referência. A mesma observação se aplica aos diagramas de Bode.

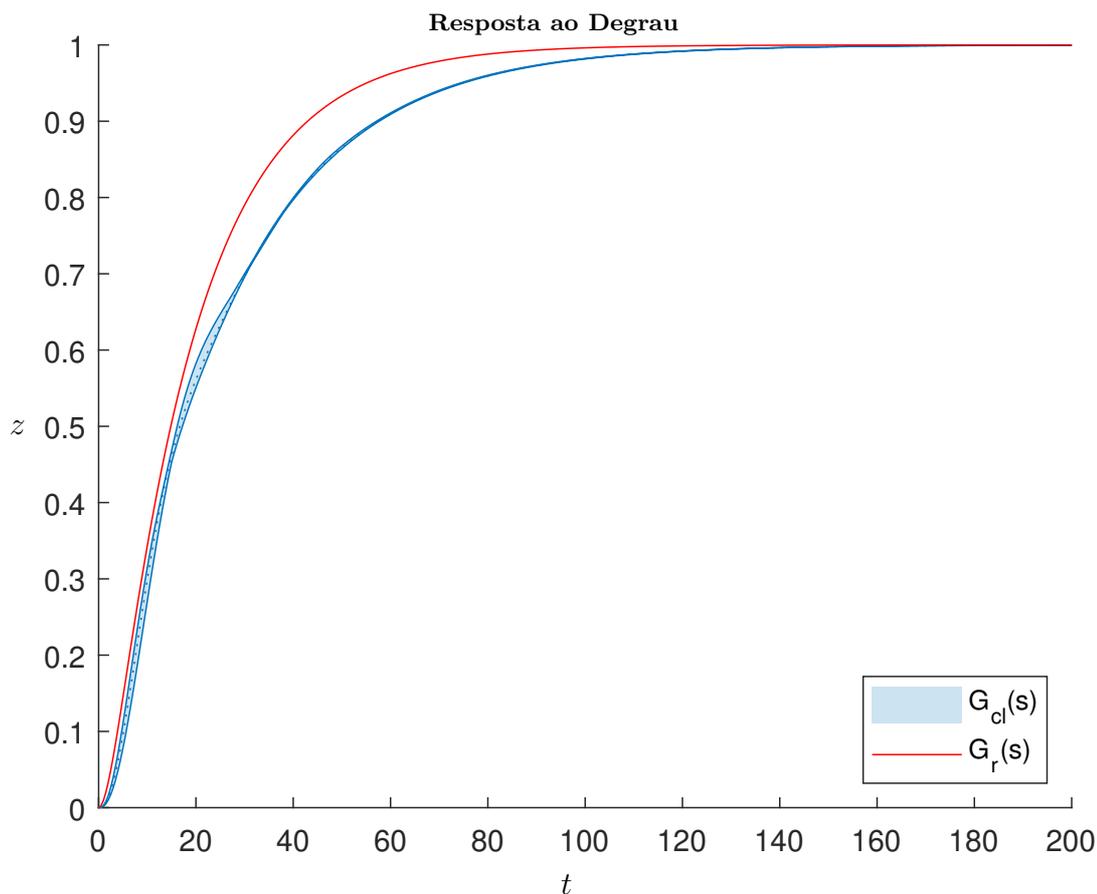


Figura 25 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (4.16) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

4.5.2 Exemplo 2

Considere o modelo do helicóptero VTOL apresentado na Seção 3.2.2. O objetivo é projetar uma lei de controle por realimentação dinâmica de saída de modo a aproximar o comportamento do sistema em malha fechada ao seguinte modelo de referência

$$G_r(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com $0,5 \leq \xi \leq 3$, $\omega_n = 0,5 \text{ rad/s}$. Considerando os controladores de ordem $n_c \in \{0,1,2\}$, as seguintes soluções foram encontradas com o Algoritmo 2:

- $n_c = 0$, $\gamma = 0,0805$,

$$D_c = \begin{bmatrix} 0,1446 & -0,0146 \\ 2,1676 & -0,2579 \end{bmatrix}$$

Tabela 4 – Resultados do Algoritmo 2 (A2) e do método dos dois estágios (2Est) (AGULHARI *et al.*, 2010) para o Exemplo 2.

Método	n_c	φ	ξ	γ	it	s/it
2Est	2	10^{-4}	1,9229	0,1248	26	2,88
A2	2	1	$0,5 \leq \xi \leq 3$	0,0175	20	2,52
2Est	1	10^{-3}	1,9229	0,1710	26	2,14
A2	1	1	1,9229	0,0533	30	1,16
2Est	0	10^{-2}	1,9229	0,5565	26	1,54
A2	0	1	1,9229	0,0805	30	0,92

- $n_c = 1, \gamma = 0,0533,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 14,1534 & 116,1325 & -9,9475 \\ 0,9296 & 7,7019 & -0,6785 \\ \hline 3,1349 & 22,5221 & -1,8432 \end{array} \right]$$

- $n_c = 2, \gamma = 0,0175,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,5230 & -2,9163 & 5,9143 & -0,0080 \\ 0,7559 & -3,0618 & 2,6588 & 0,4434 \\ \hline -0,0430 & 0,2154 & -0,3146 & -0,0234 \\ 0,3077 & -1,7550 & 4,4156 & -0,1339 \end{array} \right] \quad (4.17)$$

Informações sobre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ e esforço computacional associados ao Algoritmo 2 e ao método dos dois estágios são apresentados na Tabela 4. Claramente, o Algoritmo 2 fornece melhores resultados em termos de custo garantido.

A Figura 26 mostra o Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (4.17) e do modelo de referência (em vermelho). Para fins comparativos, considere o controlador de segunda ordem sintetizado por 2Est, dado por

- $n_c = 2, \gamma = 0,1248,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,2460 & -0,7424 & 5,0342 & -0,4516 \\ 0,7869 & -3,5993 & -19,4074 & 2,4851 \\ \hline -0,1975 & 2,2126 & 0,9933 & -0,3470 \\ -0,2997 & -0,9879 & 8,5941 & -0,8187 \end{array} \right] \quad (4.18)$$

que fornece o diagrama de Bode para o sistema em malha fechada apresentado na Figura 27. Como pode ser visto, a aproximação fornecida pelo controlador (4.17) fornece uma resposta em frequência mais próxima da resposta do sistema de referência quando comparada com a do controlador (4.18).

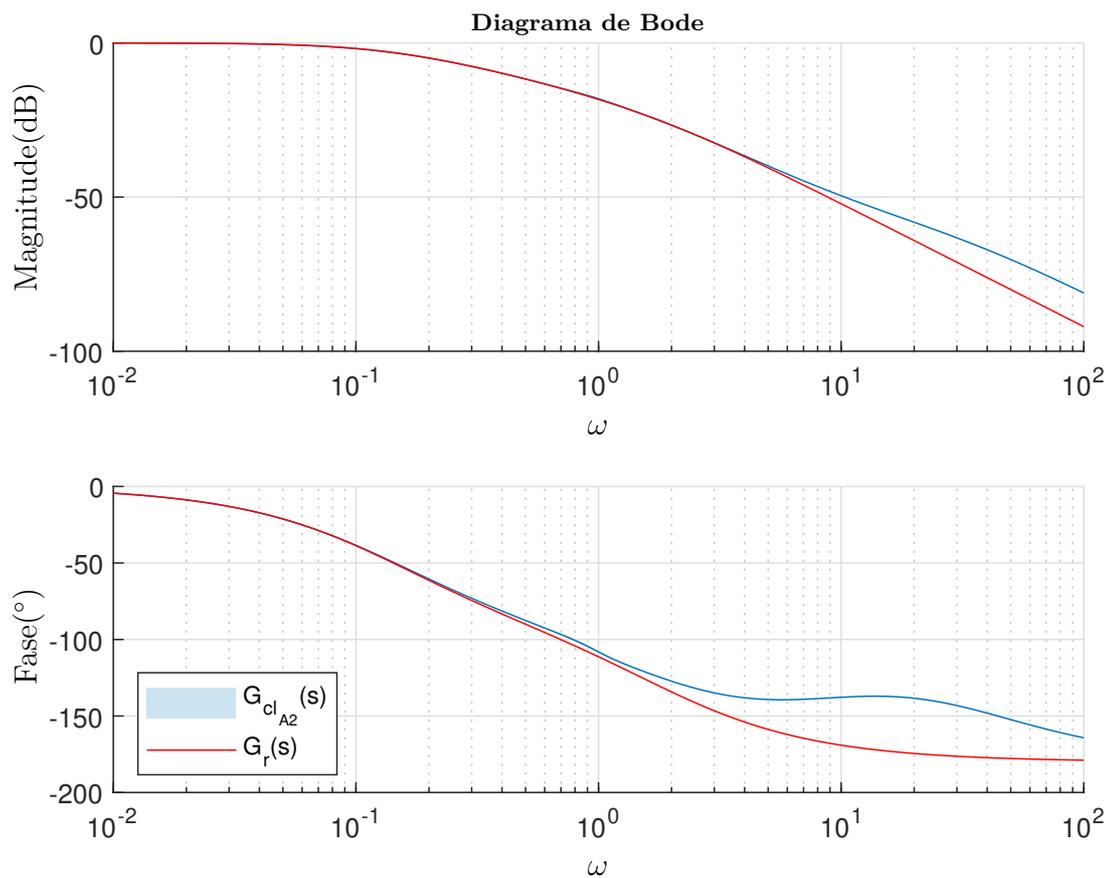


Figura 26 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.17) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

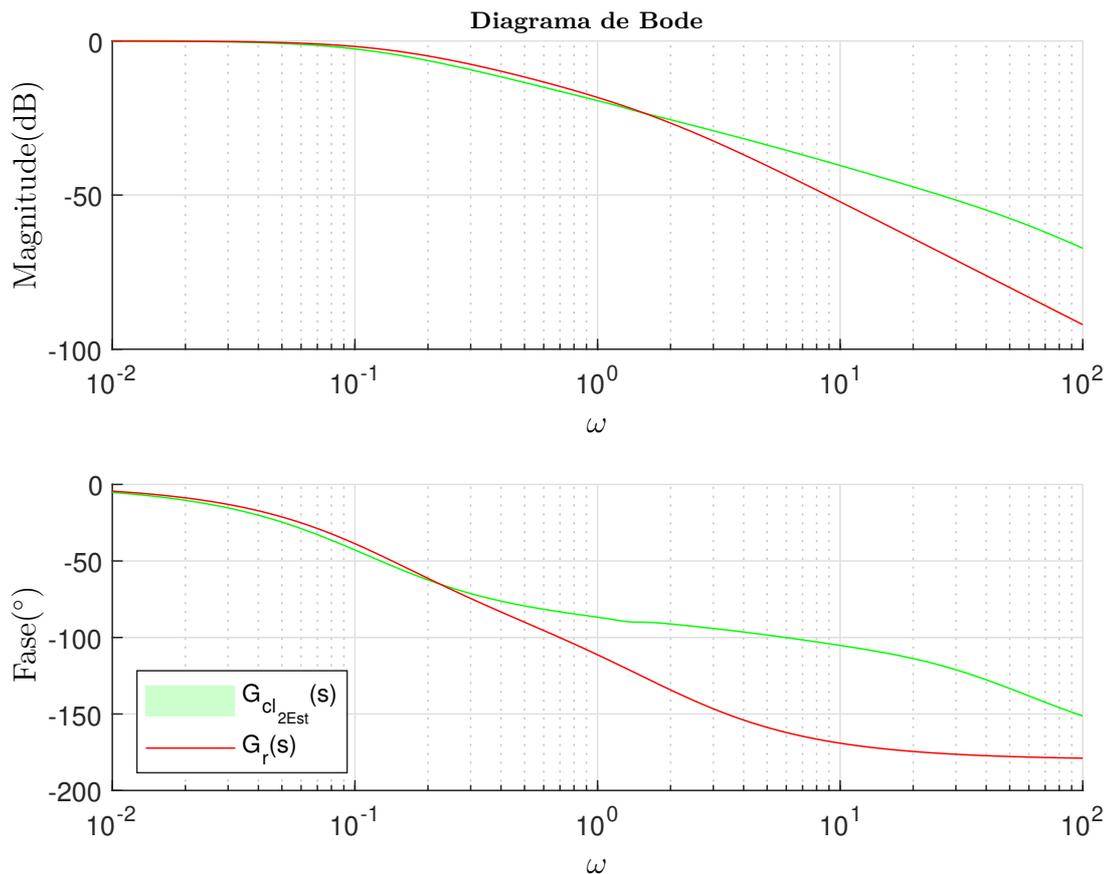


Figura 27 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado por (4.18) ($n_c = 2$, $\gamma = 0,1248$) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

A Figura 28 mostra a resposta ao degrau do sistema em malha fechada (toda a faixa de incerteza) com o controlador (4.17) (em azul), que é mais fiel à do modelo de referência quando comparada com a trajetória produzida pelo controlador (4.18) (em verde).

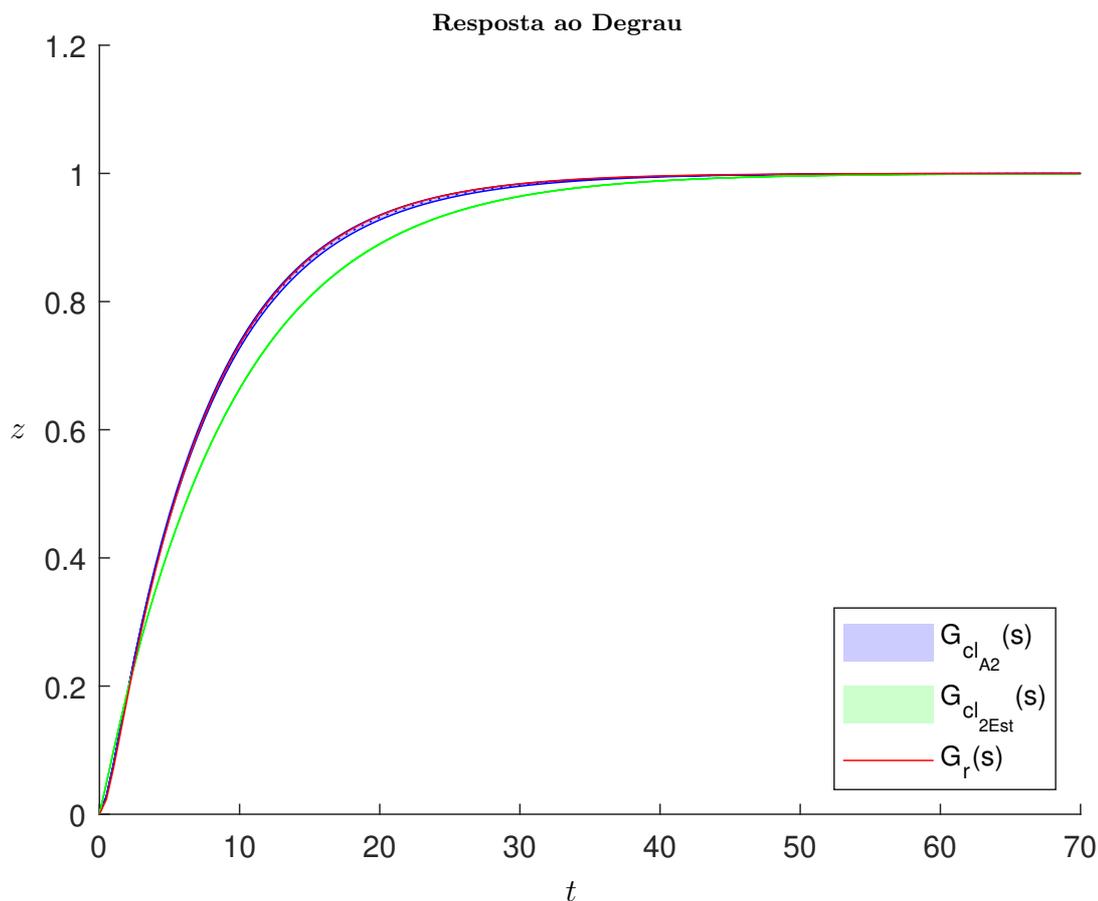


Figura 28 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado em (4.17) (em azul), (4.18) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 2.

A Figura 29 mostra a resposta ao impulso do sistema em malha fechada com os controladores (4.17) (em azul) e (4.18) (em verde) e do modelo de referência. É possível perceber que a trajetória relativa ao modelo de referência (em vermelho) encontra-se totalmente dentro da faixa de incerteza da curva fornecida pelo controlador (4.17), diferente da apresentada pelo controlador (4.18).

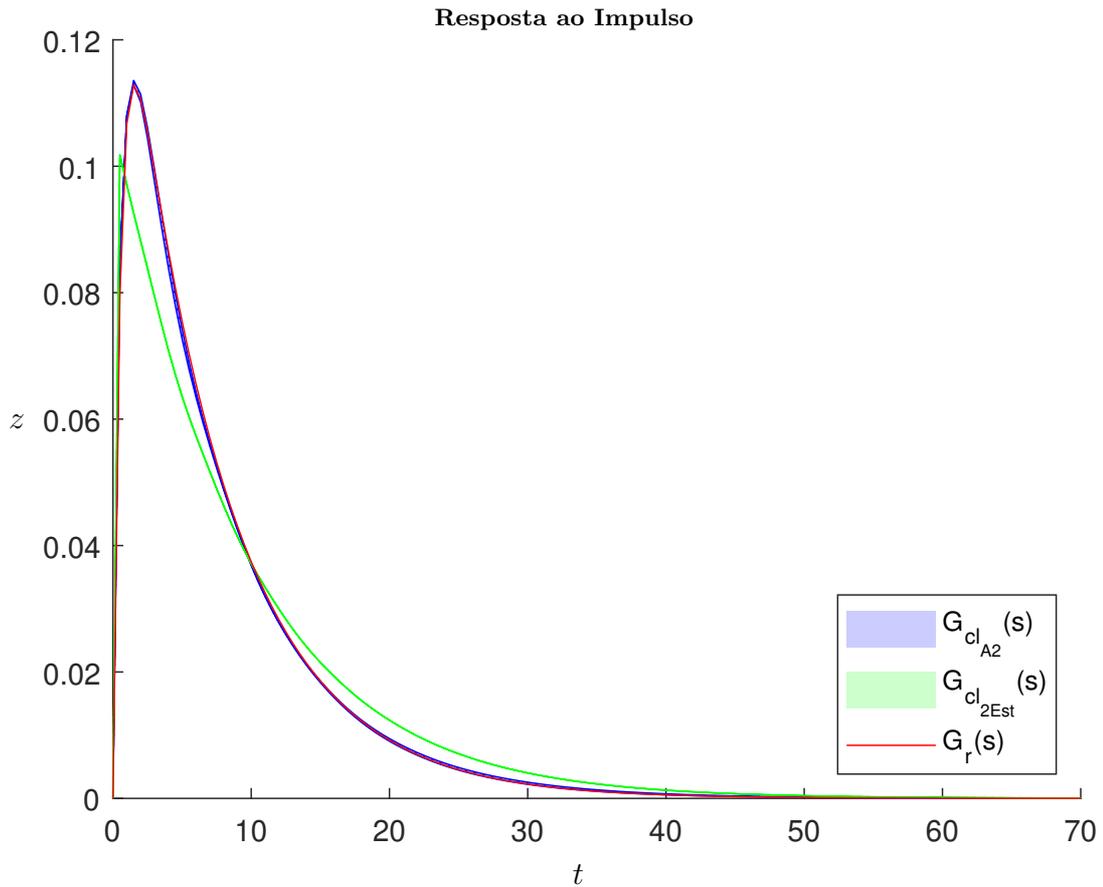


Figura 29 – Resposta ao impulso do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com os controladores dado em (4.17) (em azul), (4.18) (em verde) e do modelo de referência (em vermelho) para o Exemplo 2.

O próximo experimento sobre o modelo VTOL é uma comparação entre os controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ dados em (3.18) e (4.17), respectivamente, em termos da resposta em frequência. Para aumentar a precisão da comparação, são computados os diagramas de Bode da dinâmica do erro de aproximação, isto é, do sistema \mathcal{G}_e , como mostra a Figura 30. Observa-se que os erros associados a $\mathcal{G}_{e\mathcal{H}_2}$ (em ciano) e $\mathcal{G}_{e\mathcal{H}_\infty}$ (em amarelo) estão bem próximos quando $3 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 10 \text{ rad/s}$ e para valores de ω fora dessa faixa o erro associado a $\mathcal{G}_{e\mathcal{H}_2}$ é menor. Sobre a grande faixa de incerteza observada na fase do erro associado a $\mathcal{G}_{e\mathcal{H}_2}$ para $\omega < 1$, percebe-se um fenômeno interessante, que é a existência de zeros de fase não mínima para alguns valores de α .

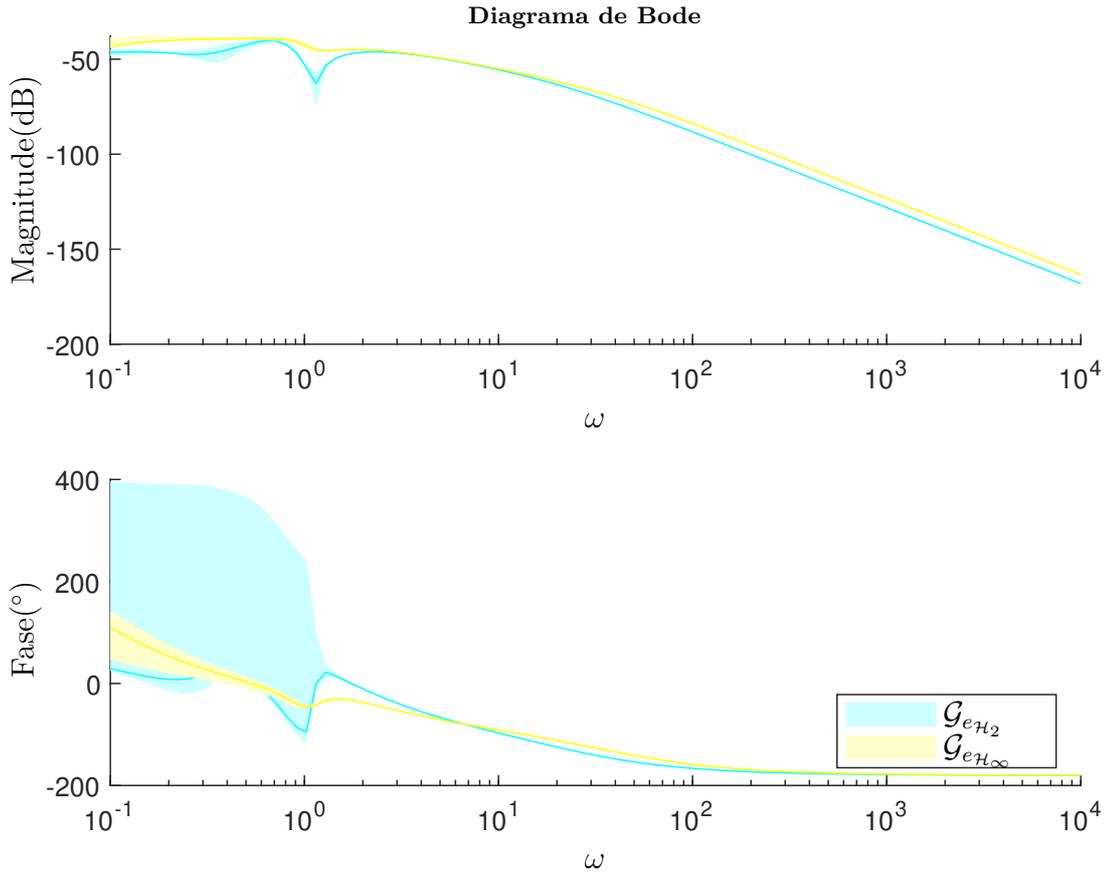


Figura 30 – Diagrama de Bode do sistema \mathcal{G}_e (considerando toda a faixa incerta) com os controladores \mathcal{H}_2 (em ciano) e \mathcal{H}_∞ (em amarelo) dados em (3.18) e (4.17), respectivamente, para o sistema VTOL.

Para finalizar o experimento, é projetado um controlador descentralizado. Foram necessárias 30 iterações com um esforço computacional médio de 3,28 s./it para obter o seguinte controlador descentralizado:

- $n_c = 2$, $\gamma = 0,2435$, $\xi = 1,9229$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -37.6558 & 0 & 35.6373 & 0 \\ 0 & -3.1714 & 0 & 5.6497 \\ \hline 40.8626 & 0 & -38.9327 & 0 \\ 0 & 0.3172 & 0 & -0.6192 \end{array} \right] \quad (4.19)$$

O Diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o controlador (4.19) é mostrado na Figura 31 juntamente com o modelo de referência (em vermelho).

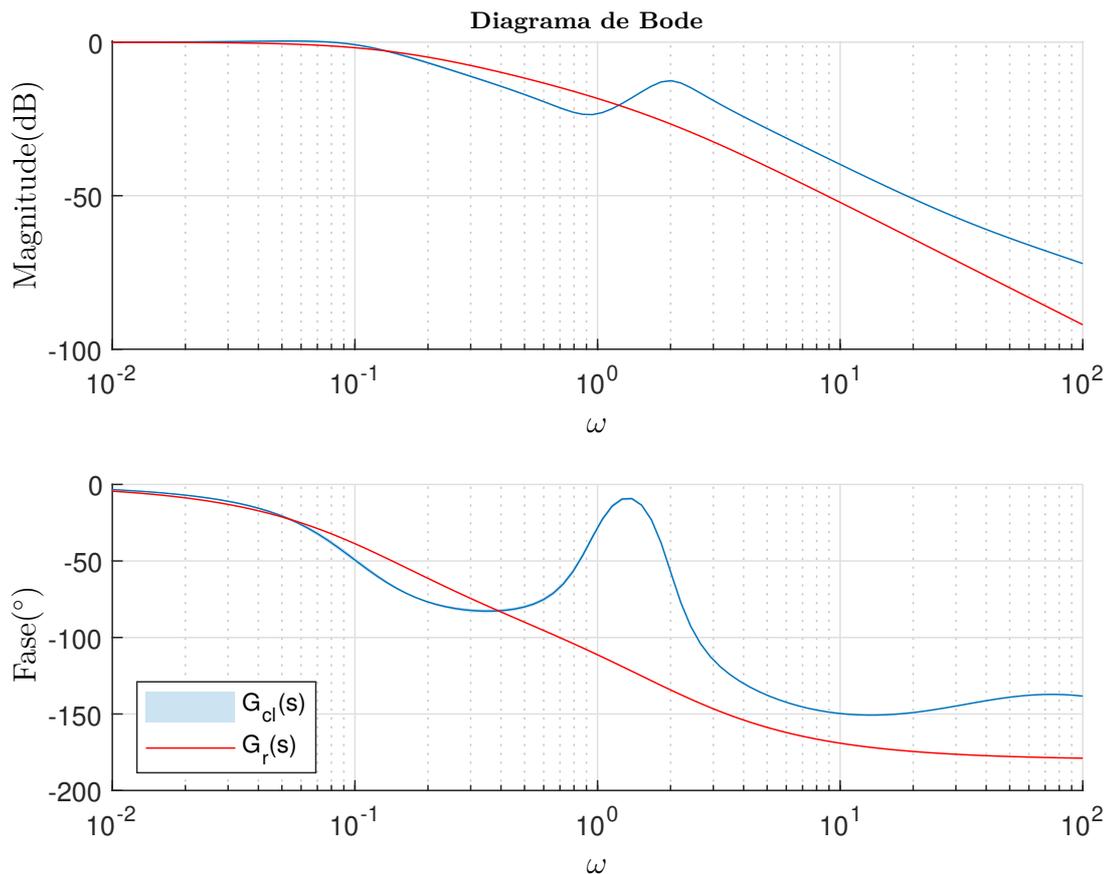


Figura 31 – Diagrama de Bode do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (4.19) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

Na Figura 32 é apresentada a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o controlador (4.19) para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência ($\xi = 1,9229$). Em comparação com o projeto do controlador descentralizado \mathcal{H}_2 apresentado na Seção 3.2.2, observa-se que o projeto com a norma \mathcal{H}_∞ forneceu uma melhor aproximação da resposta em frequência em relação à do modelo de referência.

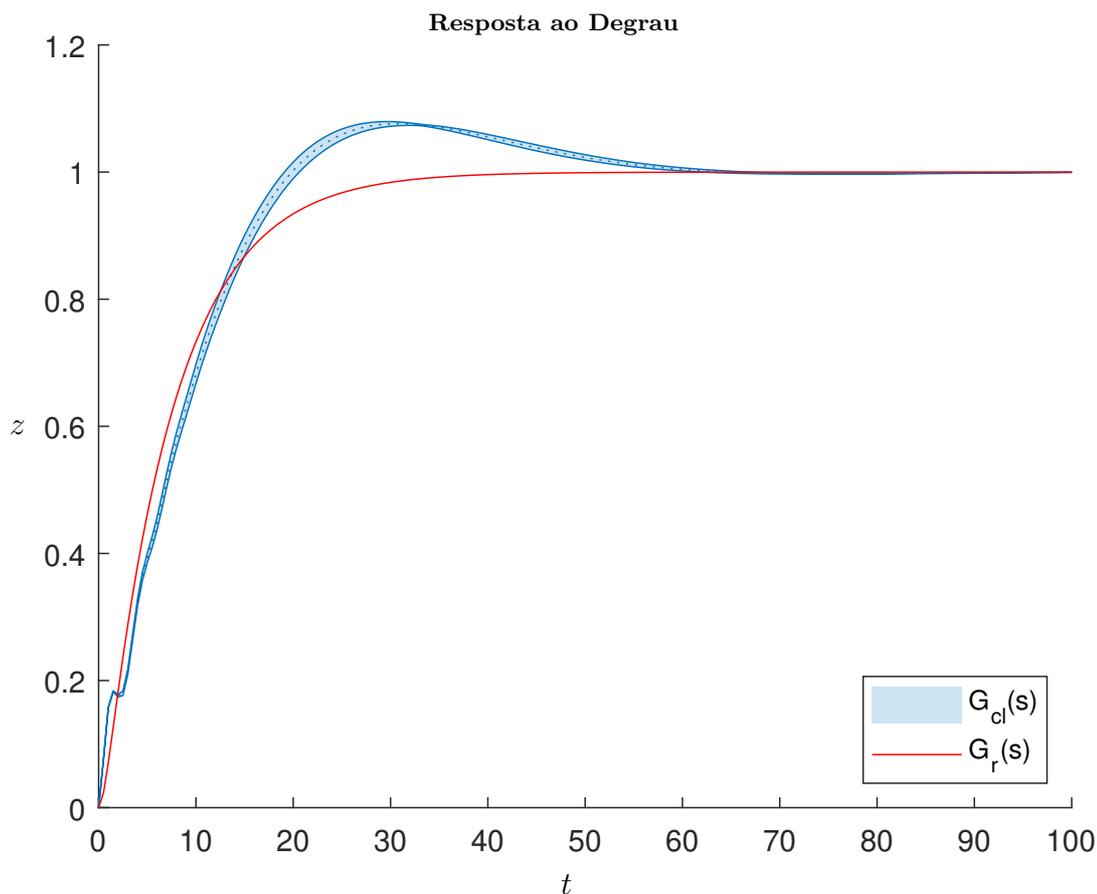


Figura 32 – Resposta ao degrau do sistema G_{cl} (considerando toda a faixa incerta) com controlador descentralizado dado em (4.19) e do modelo de referência para o Exemplo 2.

4.5.3 Exemplo 3

Considere o sistema amortecedor-massa-mola, com uma massa e uma mola, descrito em (CAUN *et al.*, 2018)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

em que $k \in [1,2; 0,8]$ e $c \in [2,2; 1,8]$ são parâmetros incertos.

O sistema amortecedor-massa-mola deve ter o comportamento do seguinte modelo de referência

$$G_r(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com $0,5 \leq \xi \leq 0,7$, $\omega_n = 0,5 \text{ rad/s}$. As soluções do Algoritmo 2 (controladores de ordens $n_c \in \{0,1,2\}$) são mostradas a seguir.

Tabela 5 – Resultados do Algoritmo 2 (A2) e do método dos dois estágios (2Est) (AGULHARI *et al.*, 2010) para o Exemplo 3.

Método	n_c	φ	ξ	γ	it	s/it
2Est	2	1	0,7	0,3168	26	1,72
A2	2	10^{-1}	$0,5 \leq \xi \leq 0,7$	0,1982	30	0,15
2Est	1	1	0,7	0,3836	26	1,96
A2	1	10^{-1}	0,7	0,3695	17	0,78
2Est	0	1	0,7	0,5839	26	1,27
A2	0	10^{-1}	0,7	0,5741	5	0,71

- $n_c = 0, \gamma = 0,5741,$

$$D_c = 0,1571$$

- $n_c = 1, \gamma = 0,3695,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -116,0714 & 148,8573 \\ \hline 106,5827 & -136,6254 \end{array} \right]$$

- $n_c = 2, \gamma = 0,1982,$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -19,0765 & -4,9439 & 18,8231 \\ 51,9699 & 13,0659 & -51,2665 \\ \hline 30,0947 & 7,6871 & -29,7311 \end{array} \right] \quad (4.20)$$

Os valores de φ , ξ e custos garantidos (soluções do Algoritmo 2 e do método dos dois estágios), bem como o esforço computacional, para $n_c = \{0,1,2\}$ são dados na Tabela 5.

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada (toda a faixa de incerteza) com o controlador (4.20) e do modelo de referência são mostradas na Figura 33 e, apesar da grande faixa de incerteza, a trajetória do modelo de referência está completamente inserida na faixa de incerteza.

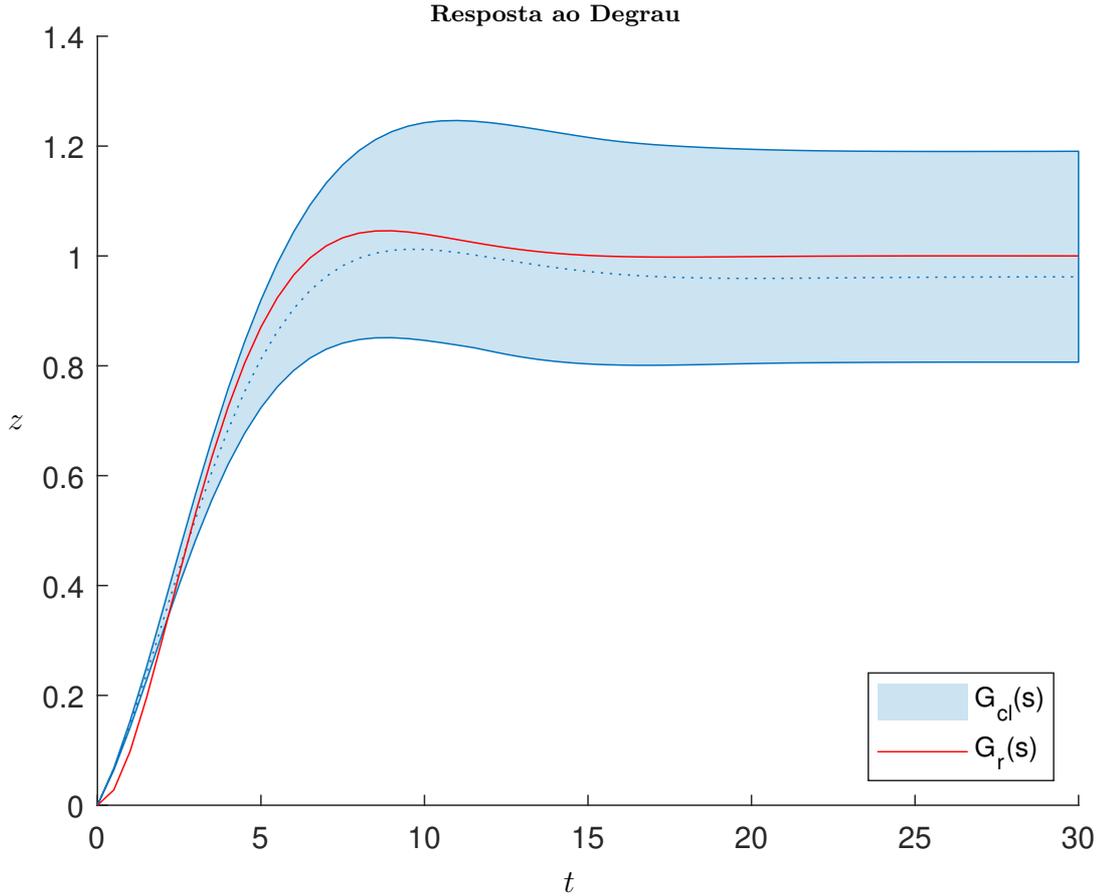


Figura 33 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.20) e do modelo de referência para o Exemplo 3.

Uma das principais características da técnica proposta nesta dissertação, que é o fato das matrizes do controlador serem variáveis de otimização, garante a possibilidade de se projetar um controlador de tal maneira que sejam atribuídos limitantes a todas as componentes das matrizes A_c , B_c , C_c e D_c . Com esse propósito, os controladores de ordens $n_c = 1$ e $n_c = 2$ foram reprojatados (com o mesmo modelo de referência) com as seguintes restrições

$$|A_{cij}| \leq 5, \quad |B_{ci1}| \leq 5, \quad |C_{ci1}| \leq 5, \quad |D_c| \leq 5, \quad i, j = 1, 2$$

Foram obtidos os seguintes resultados: $(n_c; it; \gamma)$: (1; 24; 0,2035) e (2; 24; 0,3820); $\xi = 0,7$:

- $n_c = 1$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -3,8148 & 4,8104 \\ \hline 4,0241 & -5,0000 \end{array} \right]$$

- $n_c = 2$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0,9303 & -0,2754 & 0,7724 \\ 5,0000 & 0,2977 & -5,0000 \\ \hline 3,7402 & 0,2560 & -3,7564 \end{array} \right] \quad (4.21)$$

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada (toda a faixa de incerteza) com o controlador (4.21) e do modelo de referência são mostradas na Figura 34. Como pode ser observado, todas as entradas das matrizes do controlador atendem os limitantes impostos. Além disso, a partir dos 2 segundos o sistema controlado apresenta um comportamento semelhante ao assegurado pelo controlador (4.20) (livre de restrições).

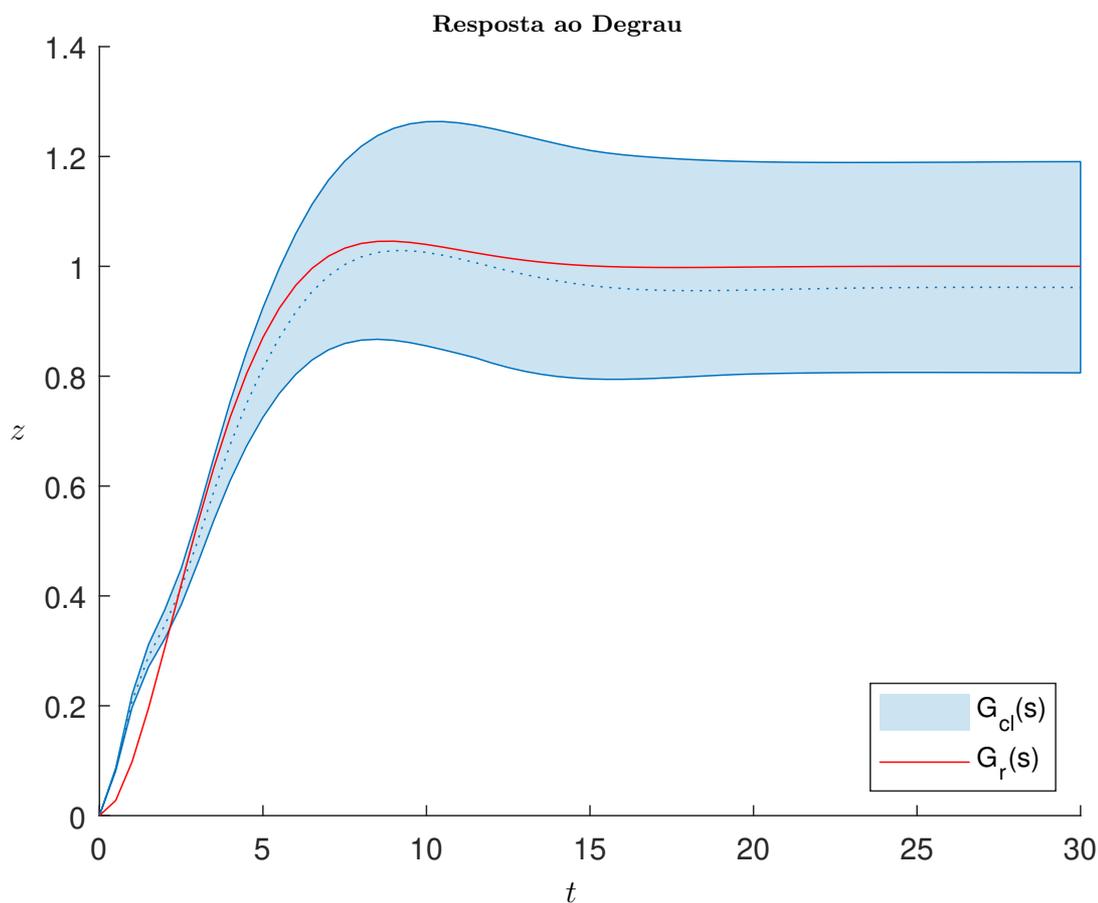


Figura 34 – Resposta ao degrau do sistema \mathcal{G}_{cl} (considerando toda a faixa de incerteza) com o controlador dado em (4.21) e do modelo de referência para o Exemplo 3.

4.5.4 Exemplo 4

Considere o modelo amortecedor-massa-mola, com duas massas e duas molas, proposto em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001b) com a representação em espaços de estados dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -(k_1 + k_2) & k_2 & -\frac{c}{m_1} & 0 \\ k_2 & -k_2 & 0 & \frac{c}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

em que o coeficiente de atrito viscoso é um parâmetro incerto dado por $c \in [1, 3]$ e $k_1 = k_2 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0,5$.

O objetivo deste experimento é ilustrar a capacidade da técnica proposta de computar modelos de ordem reduzida. Em particular, é computado um modelo de 2 estados que melhor represente o sistema original de ordem 4.

Aplicando o Algoritmo 2 com os ajustes indicados na Seção 4.4, foi obtido o seguinte modelo incerto de segunda ordem:

$$\begin{aligned} A_r(\alpha) &= \alpha_1 \begin{bmatrix} -1,3898 & 0,28222 \\ 1,2767 & -0,8562 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1,7 & 1,0022 \\ 0,92485 & -0,73392 \end{bmatrix} \\ B_r(\alpha) &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 0,67818 \\ 0,081932 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0,83082 \\ -0,21687 \end{bmatrix} \\ C_r(\alpha) &= \alpha_1 \begin{bmatrix} -1,1057 & 1,4249 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -0,10579 & 0,7833 \end{bmatrix} \\ D_r(\alpha) &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 0,097183 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0,048901 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Com o objetivo de realizar uma avaliação mais rigorosa da adaptação da técnica proposta em termos de conservadorismo, os resultados produzidos pelo Algoritmo 2 são comparados com a abordagem de (MAZZOCANTE; OLIVEIRA, 2016) (MO16), especializada em redução de modelos por meio de LMIs utilizando a norma \mathcal{H}_∞ . Essa técnica também é realizada em dois estágios, e no primeiro estágio existe a possibilidade de realizar a busca em dois escalares β_k e β_e . Os valores testados para os escalares β_k e β_e foram os mesmos do escalar φ utilizados no Algoritmo 2, permitindo um máximo de 32 ($2 \times 4 \times 4$) iterações. A técnica de MO16 oferece duas possibilidades tanto para o primeiro estágio (Teoremas 1 e 2) quanto para o segundo (Teoremas 3 e 4), e todas as combinações foram testadas. A Tabela 6 apresenta os custos garantidos obtidos e informações sobre a complexidade computacional. Como pode ser observado, A2 forneceu o menor custo garantido, com esforço computacional semelhante ao de MO16.

Tabela 6 – Resultados do Algoritmo 2 (A2), com os ajustes da Seção 4.4, e do método de redução de modelos (MO16) proposto em (MAZZOCCANTE; OLIVEIRA, 2016).

método	n	n_r	φ	β_k	β_e	γ	it_{total}	$s./it$
MO16 $_{T1/T3}$	4	2	-	1	0,001	0,2842	32	1,48
MO16 $_{T1/T4}$	4	2	-	1	0,01	0,3114	32	0,55
MO16 $_{T2/T3}$	4	2	-	1	1	0,2358	32	0,83
MO16 $_{T2/T4}$	4	2	-	1	1	0,2358	32	0,79
A2	4	2	0,01	-	-	0,1917	24	0,63

O Diagrama de Bode do modelo amortecedor-massa-mola ($n = 4$) é mostrado na Figura 35 juntamente com o do modelo reduzido de segunda ordem dado em (4.22) (em vermelho). Como pode ser observado, o modelo reduzido aproxima bem o sistema original até em torno de 2 rad/s .

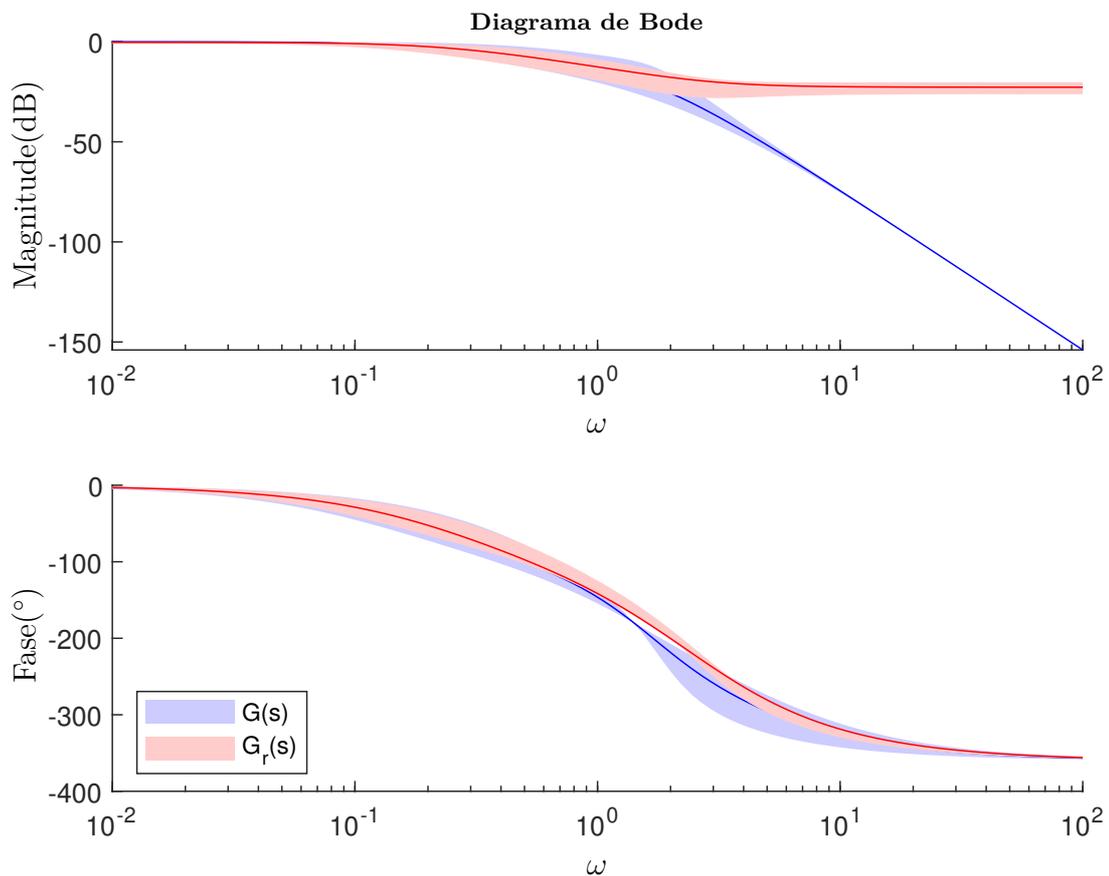


Figura 35 – Diagrama de Bode do modelo amortecedor-massa-mola ($n = 4$) (considerando toda a faixa incerta) e do modelo reduzido (4.22).

A Figura 36 apresenta o Diagrama de Bode fornecido por MO16 $_{T2/T4}$ ($\gamma = 0,2358$). Percebe-se que o modelo reduzido (4.22) apresenta uma melhor aproximação na fase e uma aproximação similar na magnitude quando comparado ao modelo reduzido obtido por MO16 $_{T2/T4}$.

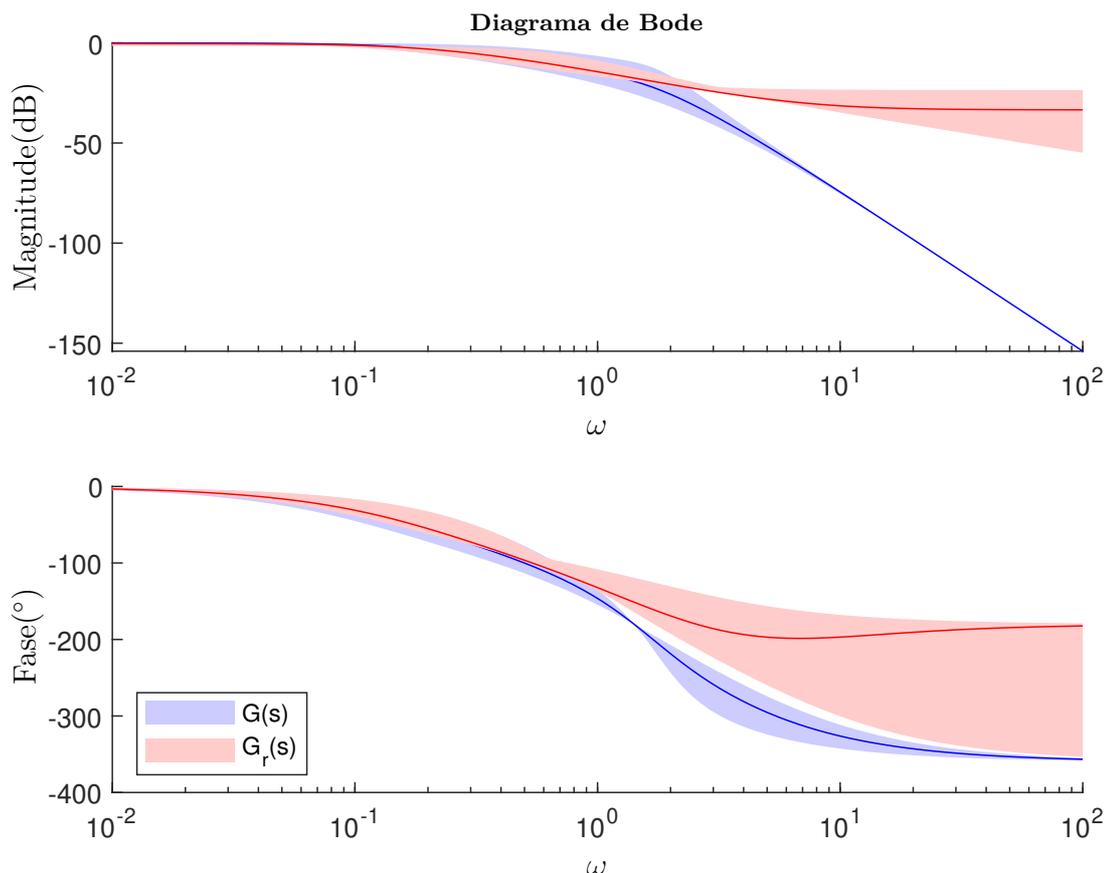


Figura 36 – Diagrama de Bode do modelo amortecedor-massa-mola ($n = 4$) (considerando toda a faixa incerta) e do modelo reduzido ($n_r = 2$) obtido por $MO16_{T2/T4}$ ($\gamma = 0,2358$).

4.6 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas condições de controle por aproximação de modelo utilizando a norma \mathcal{H}_∞ como critério para o erro de aproximação. Novamente, as matrizes do controlador e modelo de referência aparecerem linearmente nas condições de projeto, provendo as mesmas vantagens. Como contribuição adicional, também foi proposta uma estratégia para projetar um controlador de ordem $n_c + 1$ a partir de um controlador de ordem n_c , com garantia teórica que o custo garantido não aumenta. Contudo, em termos práticos a técnica não fornece bons resultados sem o uso da transformação de similaridade proposta, como foi ilustrado no exemplo dos tanques. De modo geral, nos exemplos numéricos foram observados um bom êxito da técnica e excelentes resultados quando comparados a uma outra abordagem da literatura. Assim como no capítulo anterior, a abordagem proposta produziu excelentes aproximações em termos de resposta em frequência dentro da faixa de passagem de todos os sistemas investigados. Também foi apresentado um exemplo que ilustrou o potencial do método no problema de redução de ordem de modelos.

5 Conclusão

Nesta dissertação foram apresentadas novas técnicas para o problema de controle por aproximação de modelo utilizando as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como métricas de desempenho. Em ambas as técnicas a vantagem principal é o fato de tanto as matrizes do controlador quanto as matrizes do sistema de referência aparecerem linearmente nas condições de projeto, que são formuladas em termos da resolução iterativa de LMIs. Desta forma, as matrizes do controlador são consideradas variáveis de otimização do problema e as matrizes do sistema de referência podem oferecer graus de liberdade. Por exemplo, em todos os exemplos investigados, o fator de amortecimento sempre foi tratado como uma variável de otimização, permitindo que a condição de síntese determinasse o valor que produz o menor erro de aproximação. Com relação à lei de controle utilizada para realizar a aproximação, é importante mencionar o uso da realimentação de saída de ordem fixa. Embora essa estrutura seja a mais viável para aplicações práticas, impõe um grande desafio do ponto de vista teórico na formulação das condições de projeto em termos de programação convexa. De fato, realimentação de saída de ordem fixa é um problema em aberto na literatura, mesmo para modelos não afetados por parâmetros incertos, existindo apenas condições suficientes. Nesse contexto a abordagem proposta apresentou uma estratégia diferente para abordar o problema, em termos de um algoritmo iterativo com duas fases. Os exemplos e as comparações apresentadas a partir de modelos físicos retirados da literatura ilustram a eficácia da técnica, que apresenta melhores aproximações do que outra técnica da literatura e fornece uma facilidade maior no projeto de controladores estruturados. Também foi mostrado o potencial da técnica no problema de redução de ordem de modelos incertos, sendo esse um tema promissor para pesquisas futuras.

5.1 Perspectivas de Trabalhos Futuros

No que se refere às perspectivas futuras do presente trabalho, propõem-se as seguintes sugestões:

1. A extensão dos resultados apresentados no tratamento de sistemas incertos a tempo discreto;
2. O tratamento de sistemas com parâmetros variantes no tempo;
3. Estender a formulação baseada na norma \mathcal{H}_∞ para tratar faixas limitadas de frequência;
4. Incluir algum critério de desempenho na primeira fase do algoritmo;

5. Estender a técnica para tratar critérios multi-objetivos;
6. Investigar e explorar as particularidades da técnica proposta no problema de redução de ordem de modelos.

5.2 Artigos Produzidos

Publicado

1. SOUZA, M. A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Controle por Aproximação de Modelo Utilizando Realimentação de Saída por Meio de LMIs Iterativas. In: Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática. Brasil: Novembro, 2020. vol 2. DOI: <https://doi.org/10.48011/asba.v2i1.1278>;

Submetido

1. SOUZA, M. A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ Model Match Output-Feedback Control by means of an LMI-based Algorithm. In: IEEE Control Systems Letters and 60th CDC IEEE Conference on Decision and Control. Austin, TX, USA, December, 2021.

Referências

- ADEGAS, F. D.; STOUSTRUP, J. $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ model reduction through dilated linear matrix inequalities. In: *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2012)*. Aalborg, Denmark: [s.n.], 2012. p. 728–733. Citado na página 62.
- AGULHARI, C. M.; FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 45, n. 3, p. 36:1–36:25, ago. 2019. <<http://rolmip.github.io>>. Citado na página 28.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, GA, USA: [s.n.], 2010. p. 6894–6901. Citado 8 vezes nas páginas 13, 40, 41, 47, 63, 64, 71 e 79.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI relaxations for reduced-order robust \mathcal{H}_∞ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1532–1537, jun. 2012. Citado na página 28.
- ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In: FRENK, H.; ROOS, K.; TERLAKY, T.; ZHANG, S. (Ed.). *High Performance Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2000, (Applied Optimization, v. 33). p. 197–232. <<http://www.mosek.com>>. Citado na página 28.
- ANTSAKLIS, P. J. On finite and infinite zeros in the model matching problem. In: *Proceedings of the 25th IEEE Conference on Decision and Control*. Athens, Greece: [s.n.], 1986. p. 1295–1299. Citado na página 17.
- ARZELIER, D.; GRYAZINA, E. N.; PEAUCELLE, D.; POLYAK, B. T. *Mixed LMI/Randomized methods for static output feedback control design: Stability and performance*. [S.l.], 2009. Citado na página 28.
- ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; SALHI, S. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In: *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*. Milan, Italy: [s.n.], 2003. p. 425–430. Citado na página 28.
- ÅSTRÖM, K. J. Robustness of a design method based on assignment of poles and zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 25, n. 3, p. 588–591, jun. 1980. Citado na página 18.
- BACHUR, W. E. G. *Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência*. Dissertação (Mestrado) — Associação ampla entre UFSJ e CEFET-MG, Belo Horizonte, MG, Brasil, Junho 2011. Citado na página 18.

- BACHUR, W. E. G.; GONÇALVES, E. N.; LEITE, V. J. S.; PALHARES, R. M. Multi-objective robust discrete dynamic output-feedback control synthesis based on closed-loop reference model. In: *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Denver, CO, USA: [s.n.], 2011. p. 632–637. Citado 3 vezes nas páginas 18, 38 e 39.
- BLIMAN, P.-A. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, v. 51, n. 3-4, p. 165–169, mar. 2004. Citado na página 18.
- BLIMAN, P.-A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA: [s.n.], 2006. p. 1486–1491. Citado na página 28.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 24 e 32.
- CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. *Cogent Engineering*, v. 5, n. 1, 2018. Citado na página 78.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009. v. 390. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 390). Citado na página 18.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, mar. 1996. Citado na página 17.
- COUTINHO, D. F.; PEREIRA, L. F. A.; YONEYAMA, T. Robust \mathcal{H}_2 model matching from frequency domain specifications. *IET Control Theory & Applications*, v. 3, n. 8, p. 1119–1131, ago. 2009. Citado na página 18.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 29.
- ERZBERGER, H. Analysis and design of model following control systems by state space techniques. In: *Proceedings of the 9th Joint Automatic Control Conference*. Ann Arbor, MI, USA: [s.n.], 1968. p. 572–581. Citado na página 17.
- FELIPE, A. *Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização*. Dissertação (M.Sc. Thesis) — FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 19, 30, 32, 33 e 34.

- FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021. DOI: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3038359>>. Citado na página 32.
- FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. An iterative LMI based procedure for robust stabilization of continuous-time polytopic systems. In: *Proceedings of the 2016 American Control Conference*. Boston, MA, USA: [s.n.], 2016. p. 3826–3831. Citado na página 32.
- FRANCIS, B. A.; DOYLE, J. C. Linear control theory with an H_∞ optimality criterion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 25, n. 4, p. 815–844, jul. 1987. Citado na página 18.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The Math Works, 1995. Citado na página 28.
- GODINHO, D. A.; GONÇALVES, E. N.; LEITE, V. J. S.; PALHARES, R. M. Síntese de pré-filtro discreto: Formulação LMI para aproximação de modelo \mathcal{H}_∞ . In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 756–761. Citado na página 18.
- GONÇALVES, E. N.; BACHUR, W. E. G.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ / reference model dynamic output-feedback control synthesis. *International Journal of Control*, v. 84, n. 12, p. 2067–2080, 2011. Citado na página 18.
- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; CHASIN, A. N. V. Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 82, n. 11, p. 2158–2168, September 2009. Citado na página 62.
- HIKITA, H. Design of exact model matching systems and its applications to output tracking problems. *International Journal of Control*, v. 34, n. 6, p. 1095–1111, 1981. Citado na página 17.
- ICHIKAWA, K. *Control System Design Based on Exact Model Matching Techniques*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1985. v. 74. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 74). Citado na página 17.
- IWASAKI, T.; HARA, S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 1, p. 41–59, jan. 2005. Citado na página 27.
- JONCKHEERE, E.; YU, G.-R. Propulsion control of crippled aircraft by \mathcal{H}_∞ model matching. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 7, n. 2, p. 142–159, 1999. Citado na página 18.
- KEEL, L.; BHATTACHARYYA, S. P.; HOWZE, J. W. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 1, p. 68–78, 1988. Citado na página 46.
- KREINDLER, E.; ROTHSCHILD, D. Model-following in linear-quadratic optimization. *AIAA Journal*, v. 14, n. 7, p. 835–842, July 1976. Citado na página 18.

KUČERA, V. Discrete linear model following systems. *Kybernetika*, v. 13, n. 5, p. 333–342, 1977. Citado na página 18.

KUČERA, V. Exact model matching, polynomial equation approach. *International Journal of Systems Science*, v. 12, n. 12, p. 1477–1484, 1981. Citado na página 18.

KUČERA, V. *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*. Hemel Hempstead, England: Prentice-Hall, Inc., 1991. Citado na página 18.

KUČERA, V.; TOLEDO, E. C. A review of stable exact model matching by state feedback. In: *Proceedings of the 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2014)*. Palermo, Italy: [s.n.], 2014. p. 85–90. Citado na página 18.

LEMAIRE, A. A. *Métodos Iterativos Baseados em Desigualdades Matriciais Lineares para Controle de Sistemas Lineares Incertos Positivos Contínuos no Tempo*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Agosto 2019. Citado 4 vezes nas páginas 19, 30, 33 e 34.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. Citado na página 28.

MALABRE, M.; KUČERA, V. Infinite structure and exact model matching problem: A geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 29, n. 3, p. 266–268, mar. 1984. Citado na página 18.

MAZZOCCANTE, G.; OLIVEIRA, R. Redução de ordem \mathcal{H}_∞ de sistemas incertos a tempo contínuo usando relaxações LMIs. *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, Vitória, ES, Brasil, p. 948–953, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 13, 82 e 83.

MAZZOCCANTE, G. S. *Redução de modelos lineares incertos usando as normas \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_∞ em baixas frequências por meio de relaxações LMIs*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Outubro 2017. Citado na página 62.

MAZZOCCANTE, G. S.; HILHORST, G.; PIPELEERS, G.; OLIVEIRA, R. C. L. F. \mathcal{H}_∞ model order reduction of uncertain linear systems using generalized KYP lemma. In: *Proceedings of the 2018 European Control Conference*. Limassol, Cyprus: [s.n.], 2018. p. 2616–2622. Citado na página 62.

MAZZOCCANTE, G. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F. \mathcal{H}_2 order and parameter dependency reduction of uncertain linear systems using LMI relaxations. In: *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*. Toulouse, France: [s.n.], 2017. p. 6512–6517. Citado na página 62.

MOORE, B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, p. 17–32, February 1981. Citado na página 17.

MOORE, B. C.; SILVERMAN, L. M. Model matching by state feedback and dynamic compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 4, p. 491–497, ago. 1972. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

- MOREIRA, H. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_2 static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 32, n. 1, p. 1–13, January/February 2011. Citado na página 28.
- MORRIS, J. C.; APKARIAN, P.; DOYLE, J. C. Synthesizing robust mode shapes with μ and implicit model following. In: *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Control Applications*. Dayton, OH, USA: [s.n.], 1992. v. 2, p. 1018–1023. Citado na página 18.
- MORSE, A. Structure and design of linear model following systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 18, n. 4, p. 346–354, August 1973. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- MORSE, A. S. Structural invariants of linear multivariable systems. *SIAM Journal on Control*, v. 11, n. 3, p. 446–465, 1973. Citado na página 18.
- MORSE, A. S. Structure and design of linear model following systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 18, n. 4, p. 346–354, ago. 1973. Citado na página 18.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1990. Citado na página 17.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, jul. 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 28.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A convex optimization procedure to compute \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 29, n. 4, p. 295–312, July/August 2008. Citado na página 34.
- PARASKEVOPOULOS, P. N. Decoupling controller design via exact model-matching techniques. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 125, p. 1285–1289, nov. 1978. Citado na página 17.
- PARASKEVOPOULOS, P. N.; KING, R. E. Multivariable process-controller design by approximate model-matching. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, IECI-25, n. 1, p. 50–54, fev. 1978. Citado na página 18.
- PARASKEVOPOULOS, P. N.; KOUMBOULIS, F. N.; ANASTASAKIS, D. F. Exact model matching of generalized state space systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 76, n. 1, p. 57–85, jan. 1993. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for \mathcal{H}_2 static output feedback synthesis. In: *Proceedings of the 2001 European Control Conference*. Porto, Portugal: [s.n.], 2001. p. 3800–3805. Citado na página 28.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 624–630, 2001. Citado na página 81.

- PELLANDA, P. C.; APKARIAN, P. Synthesis of controllers for modal shaping in linear parameter-varying systems via the implicit model following formulation. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, CO, USA: [s.n.], 2003. v. 6, p. 5161–5166. Citado na página 18.
- RODRIGUES, L. A.; GONÇALVES, E. N.; LEITE, V. J. S.; PALHARES, R. M. Robust reference model control with LMI formulation. In: *Proceedings of 11th IASTED International Conference on Control and Applications*. Cambridge, UK: [s.n.], 2009. p. 127–132. Citado na página 18.
- SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 7, p. 896–911, jul. 1997. Citado na página 32.
- SPAGOLLA, A. *Análise de Estabilidade e Síntese de Controle para Sistemas Lineares Positivos Discretos no Tempo por meio de Desigualdades Matriciais Lineares*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Março 2019. Citado 4 vezes nas páginas 19, 30, 33 e 34.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. Citado na página 28.
- TORRES MUÑOZ, J. A.; MALABRE, M. Simultaneous model matching and disturbance rejection with stability by state feedback. *Automatica*, v. 39, n. 8, p. 1445–1450, 2003. Citado na página 17.
- TROFINO, A.; COUTINHO, D. F. Robust order reduction. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, MA, USA: [s.n.], 2004. v. 4, p. 3363–3368. Citado na página 62.
- VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. Semidefinite programming. *SIAM Review*, v. 38, n. 1, p. 49–95, mar. 1996. Citado na página 17.
- WANG, S.-H.; DAVISON, E. J. A minimization algorithm for the design of linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 18, n. 3, p. 220–225, jun. 1973. Citado na página 17.
- WANG, S. H.; DESOER, C. A. The exact model matching of linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 3, p. 347–349, jun. 1972. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- WOLOVICH, W.; ELLIOTT, H.; ANTSAKLIS, P. On the stability of solutions to minimal and nonminimal design problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 1, p. 88–94, fev. 1977. Citado na página 18.
- WOLOVICH, W. A. The use of state feedback for exact model matching. *SIAM Journal on Control*, v. 10, n. 3, p. 512–523, ago. 1972. Citado na página 17.
- WOLOVICH, W. A. *Linear multivariable systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 11. Citado na página 18.

WOLOVICH, W. A.; ANTSAKLIS, P.; ELLIOTT, H. On the stability of solutions to minimal and nonminimal design problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 1, p. 88–94, fev. 1977. Citado na página 17.

WU, F. Induced \mathcal{L}_2 norm model reduction of polytopic uncertain linear systems. *Automatica*, Elsevier, v. 32, n. 10, p. 1417–1426, October 1996. Citado na página 62.

WU, F.; JARAMILLO, J. Numerical algorithm for model reduction of polytopic uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: [s.n.], 2002. p. 1748–1752 Vol.3. ISSN 0743-1619. Citado na página 62.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. New York: Prentice Hall, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 27.