

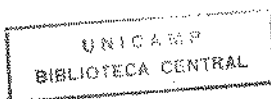
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE OTIMO DE SISTEMAS DINAMICOS

PROF. DR. JOSÉ CLAUDIO GEROMEL

Tese apresentada à FEC-UNICAMP
como parte dos requisitos exigidos
para obtenção do título de
Prof. Livre-Docente na Área de
Sistemas de Controle.

- 1986 -



Tudo que faço ou medito
Fica sempre na metade
Querendo, quero o infinito
Fazendo, nada é verdade

Fernando Pessoa, *Poemas*

À Bruna, Daniel e Gabriela

AGRADECIMENTO

Ao agradecer a muitas pessoas a ajuda e incentivo recebidos, gostaria de agradecer particularmente a S^{ta} Elza Aoki. Sem seu trabalho, competência e dedicação não só este texto mas também muitos outros não teriam sido concluídos.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os resultados de nossas atividades de pesquisa que já foram ou estão sendo publicados e que dizem respeito à Teoria de Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos.

Pretendemos apresentar nossa contribuição dentro de um contexto unificador. Isto é possível pois em última análise, os vários aspectos teóricos abordados (Estabilidade, Restrições Estruturais, Robustez, etc.) decorrem das condições de otimalidade dos problemas de controle ótimo.

São considerados modelos dinâmicos contínuos e discretos.

ÍNDICE

CAP. I : INTRODUÇÃO GERAL	1
CAP. II : CONTROLE ÓTIMO - OS RESULTADOS DE BASE	6
II.1. Cálculo Variacional	7
II.2. Princípio do Mínimo de Pontryagin (PMP)	12
II.3. Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (EHJB)	23
II.4. Relação entre PMP e EHJB	30
CAP. III : SOLUÇÃO EM MALHA ABERTA - MÉTODOS NUMÉRICOS	34
III.1. Iteração no Espaço de Controle	35
III.2. Gradiente Projetado	37
III.3. Decomposição Min/Max	43

CAP. IV : SOLUÇÃO EM MALHA FECHADA - ESTABILIDADE	48
IV.1. Equação de Riccati Estacionária	50
IV.2. Controle com Restrições de Estrutura	54
IV.3. Equação de Riccati Generalizada	58
IV.4. Funções Matriciais	66
IV.5. Controle de Norma Mínima	71
CAP. V : ROBUSTEZ - CONTROLADORES ÓTIMOS	79
V.1. Estabilidade e a EHJB	80
V.2. Robustez	81
V.3. Modelos Simplificados - Reguladores Ótimos	86
CAP. VI : APLICAÇÕES PRÁTICAS	89
VI.1. Sistemas com Estruturas Especiais	90
- Large Space Telescope	92
- Pêndulo composto	95
VI.2. Sistemas de Potência	97
- Controle carga/frequência	99
VI.3. Sistemas Mecânicos	102
- Estruturas flexíveis	105
CAP. VII : CONCLUSÃO GERAL	107
CAP. VIII : BIBLIOGRAFIA	109

Relacionamos somente os trabalhos técnicos de nossa autoria. Eles contêm extensa bibliografia relacionando outros autores. A bibliografia aqui apresentada permite tão somente evidenciar nossa contribuição pessoal.

CAP. I : INTRODUÇÃO GERAL

A Teoria de Controle Ótimo permite expressar matematicamente, em forma fechada, um objetivo a partir do qual uma determinada lei de controle pode ser calculada. Tal objetivo deve ser escolhido de forma a estabelecer uma relação de ordem com respeito a performance ideal do sistema. Em consequência, quando minimizado (ou maximizado), caracteriza a lei de controle mais aceitável dentro das restrições existentes.

Se nos restringirmos a importante classe de sistemas dinâmicos lineares, o teorema de Nyquist (desenvolvido mais de 20 anos antes que o Princípio de Pontryagin) permite este tipo de síntese. Aumentar a margem de ganho e/ou de fase de um determinado sistema de controle (p.ex. via compensação) é sem dúvida um objetivo a ser fortemente considerado sobretudo em face de propriedades tais como a Robustez que hoje sabemos são consequências desta decisão.

Vale entretanto lembrar que os modelos dinâmicos mais simples representados no tempo podem tornar-se extremamente complicados ao serem representados em frequência. Este fato baseia-se na seguinte observação: a otimiza

ção está vinculada às propriedades tais como convexidade e diferenciabilidade que podem contribuir de forma decisiva em sua complexidade. Neste contexto uma equação diferencial linear pode ser vista como uma restrição *convexa* ao passo que sua representação frequencial é uma função racional que geralmente não apresenta esta propriedade. Por exemplo, considere um sistema cuja resposta ao impulso em malha aberta é $F(t)$, sendo $y(t)$ sua variável de saída e $u(t)$ sua variável de controle. Um problema típico de controle ótimo pode ser escrito na forma

$$\text{Min}_{u \in U} \left\{ \int_0^T f(y, u) dt \quad \text{s.a.} \quad y = F(t) * u \right\}$$

ao passo que em frequência teríamos

$$\text{Max}_{h \in H, \omega} \left\{ \frac{F_H(\omega)}{|F_H(\omega)|} \quad \text{s.a.} \quad |F_H(\omega)| = 1 \right\}$$

sendo $F_H(\cdot)$ a resposta em frequência do sistema em malha fechada que depende da função de transferência do controlador $H(s)$ a qual é completamente definida pelo vetor de parâmetros $h \in H$.

Este fato nos dá uma forte indicação, talvez não histórica, porém certamente técnica do motivo da Teoria de Controle Ótimo ter evoluído quase que exclusivamente baseada na representação temporal de sistemas dinâmicos. Adiciona-se ainda um outro fato da maior importância: o estabelecimento por Kalman do conceito de *variáveis de estado* com o qual tornou-se possível a representação sistemática de sistemas dinâmicos complexos isto é, de grandes dimensões, não lineares, etc.

Nos anos 50 surge o Princípio de Pontryagin (é interessante notar que seu aparecimento se deu na mesma época que as condições de Kuhn-Tucker) o qual estabelece as condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo. Tais condições baseiam-se em uma função chamada *Hamiltoniano* já na época amplamente utilizada em Mecânica.

A necessidade de operacionalizar o Princípio do Mínimo fez com que algumas técnicas fossem desenvolvidas. A primeira chamada *Quasi-linearização* foi proposta para a solução numérica de sistemas de equações diferen-

ciais não lineares com condições de contorno inicial e final e que são frequentes em problemas de controle ótimo por exemplo, aqueles com estado final livre e horizonte de otimização fixo. A segunda não pode ser caracterizada como uma técnica mas sim como uma propriedade dos chamados Problemas Linear-Quadráticos (PLQ). Para estes problemas o Princípio de Pontryagin fornece condições necessárias e suficientes de otimalidade e se traduzem em uma única equação chamada *equação de Riccati* que ao ser resolvida permite determinar a lei de controle ótima em *malha fechada*.

A equação de Riccati apresenta um conjunto formidável de propriedades e tornou-se nos últimos 20 anos uma das mais importantes equações, objeto de estudo da teoria de controle.

Dentro deste esforço de explicitar os fatos mais importantes (na opinião do autor) que contribuíram de maneira decisiva para o desenvolvimento da Teoria de Controle Ótimo, não podemos esquecer do Princípio de Otimalidade de Bellman. Este princípio é a peça fundamental que permite estabelecer as condições suficientes de otimalidade em uma única equação - a equação iterativa de Programação Dinâmica.

Tal equação nada mais é senão a versão discretizada da equação de Hamilton-Jacobi já então conhecida. Entretanto a contribuição de Bellman foi tão decisiva, seja evidenciando aspectos teóricos como também propondo métodos numéricos de solução, que justamente seu nome foi colocado ao lado dos outros dois já mencionados.

A bem da verdade, a equação de HJB é extremamente difícil de ser resolvida a não ser para problemas com estruturas especiais (p.ex. PLQ) ou de pequenas dimensões. Entretanto a metodologia introduzida é poderosa e contribuiu para abrir novas frentes de estudo (ver cap. V).

Deve-se notar que por algum tempo, a Teoria de Controle Ótimo foi objeto, por assim dizer, de "muito controle" e relativamente "pouca otimização". Os usuários potenciais estavam muito mais preocupados com a estrutura e propriedades da lei de controle obtida (p.ex. estrutura em malha aberta ou fechada e propriedades tais como estabilidade, sensibilidade à variação de parâmetros, etc.) do que com os métodos a serem empregados em sua determinação.

Na década de 70 os aspectos relativos à otimização puderam ser desenvolvidos a partir sobretudo da Teoria de Dualidade em Programação Matemática

ca introduzida por Rockafellar e dos métodos de Decomposição abordados de maneira notável por Lasdon em seu conhecido livro. O desenvolvimento realmente explosivo desta área deve-se, ao nosso ver, a um fato simples: uma restrição dinâmica (equação diferencial ou Δ diferenças) quando dualizada fornece uma função dual aditivamente separável no tempo e portanto decomponível.

Devemos notar que o inverso também ocorre. Realmente, nos últimos anos, algumas questões levantadas no âmbito de sistemas de controle estão contribuindo para o desenvolvimento da Programação Matemática. Neste sentido devemos citar a otimização de funções matriciais (ver cap. IV).

Atualmente dispomos de métodos numéricos eficientes que permitem resolver os mais variados problemas de controle ótimo considerando inclusive restrições estruturais nas leis de controle. Dispomos também de um embasamento teórico importante que permite caracterizar a lei de controle ótima seja em malha aberta (PMP) ou em malha fechada (EHJB). Por conseguinte é possível agora promover a aplicação prática de todo este desenvolvimento. O estudo de Robustez de sistemas dinâmicos tem exatamente esta finalidade.

Robustez é uma propriedade altamente desejável em um sistema de controle e traduz-se no fato deste continuar estável (numa vizinhança do seu ponto de operação) mesmo sujeito a perturbações pre-especificadas. Por exemplo, podemos associar a um determinado processo um modelo simplificado a partir do qual uma lei de controle é sintetizada. Tal controle, ao ser robusto em relação às simplificações introduzidas tem sua viabilidade prática garantida.

É possível mostrar (ver cap. V) que a solução da EHJB fornece uma função de Lyapunov associada ao sistema de controle em malha fechada sendo ainda adequada ao estudo de sua robustez. Isto significa que a função de Lyapunov é obtida de maneira metodológica via um processo de otimização. Ou seja, resulta da solução de um problema que pelo que foi dito podemos resolver de maneira eficaz.

A Robustez de sistemas de controle já vem sendo estudada há algum tempo e temos certeza, será um dos principais objetos de investigação nos próximos anos.

Este trabalho é dividido em 8 partes, a saber: após este primeiro capítulo introdutório, analisamos no cap. II os resultados de base da Teoria

de Controle Ótimo. Os temas são apresentados de forma suscinta por estarem presentes na maioria das publicações especializadas. Vale entretanto ressaltar que a maneira de apresentá-los reflete uma visão pessoal do autor.

No capítulo III consideramos os métodos numéricos que pudemos desenvolver para a solução em malha aberta. No cap. IV uma propriedade fundamental de sistemas de controle em malha fechada é estudada - sua Estabilidade. Uma generalização da equação de Riccati é apresentada a qual permite a determinação de controladores com estruturas pré-especificadas. Este aspecto é também analisado via otimização de funções matriciais.

O capítulo V é inteiramente dedicado ao estudo de Robustez de Controladores Ótimos onde a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman tem uma importância fundamental que tentaremos explicitar.

Em seguida no cap. VI, descrevemos algumas aplicações práticas que já pudemos realizar com sucesso. Estas envolvem sistemas lineares, não lineares, de grande porte, elétricos e mecânicos.

Finalmente no cap. VII são resumidas as mais importantes conclusões observadas bem como alguns temas para futura investigação são brevemente discutidos. O cap. VIII não constitui propriamente uma bibliografia mas simplesmente uma listagem das várias publicações que pudemos realizar sobre os temas abordados.

CAP. II : CONTROLE ÓTIMO - OS RESULTADOS DE BASE

Vamos inicialmente introduzir a notação utilizada neste capítulo. Denotamos $x(t)$ como uma *trajetória* no \mathbb{R}^n isto é uma função que leva os elementos do intervalo real $t \in [0, T]$ para o \mathbb{R}^n sendo T previamente especificado podendo eventualmente ser $+\infty$. Sempre que ficar claro usaremos somente x para notar uma trajetória no \mathbb{R}^n .

Sendo x e y duas trajetórias genéricas definidas sobre o mesmo intervalo real (tempo) $t \in [0, T]$, o produto escalar pode ser expresso por

$$\langle x, y \rangle_T \stackrel{\Delta}{=} \int_0^T x(\tau)' y(\tau) d\tau \quad (1)$$

onde $(\cdot)'$ indica transposição. Neste mesmo espaço (1) induz a norma

$$\|x\|_T \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle_T} \quad (2)$$

É importante notar que (1-2) não são válidas para qualquer conjun-

to de trajetórias no \mathbb{R}^n . Por exemplo a trajetória descontínua $x(0) = 1$ e $x(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T]$ é tal que $\|x\|_T = 0$ o que contradiz o fato de $\|x\|_T$ ser uma norma induzida por (1). Seja Ω o conjunto de funções onde (1-2) se verificam (por exemplo Ω pode ser considerado o conjunto de todas as funções contínuas no \mathbb{R}^n) então surge como decorrência imediata um importante resultado a ser usado em seguida

$$\langle x, y \rangle_T = 0 \quad \forall y \in \Omega \rightarrow x = 0 \in \Omega \quad (3)$$

ou seja, a única trajetória ortogonal à todas as trajetórias em Ω é a trajetória nula.

Consideraremos ainda funções do tipo $J(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ as quais associam a cada trajetória de Ω um número real dado por $J(x)$. Sempre assumiremos que $J(\cdot)$ é duplamente diferenciável em relação à seu argumento e denotaremos por $J_x(\cdot)$ seu gradiente e por $J_{xx}(\cdot)$ sua matriz Hessiana.

Da mesma forma $\dot{x}(t)$ indica a derivada temporal de $x(t)$ ou seja $\dot{x} = dx/dt$ e $J_{\dot{x}}(\cdot)$ indica a derivada primeira de $J(\cdot)$ em relação à \dot{x} . É claro que vale a seguinte relação diferencial

$$\delta J(x) = \langle J_x(x), \delta x \rangle_T \quad (4)$$

II.1. Cálculo Variacional

Nesta breve introdução ao Cálculo Variacional, consideramos problemas do tipo

$$\text{Min } J(x) \quad (5)$$

onde $J(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *funcional* (assim chamada por depender de uma função em Ω) dada por

$$J(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt + g(x(T)) \quad (6)$$

onde f e g são funções de classe C^1 e T (horizonte de otimização) é um real conhecido. Diz-se que $x \in \Omega$ é um *extremante global* de (5) se $x(t)$ satisfaz

$$J(x) \leq J(y), \quad \forall y \in \Omega \quad (7)$$

Praticamente, sem as hipóteses usuais de convexidade e portanto unicidade de solução com custo mínimo é muito difícil determinar uma trajetória que verifique (7). Definimos então um *extremante local* de (5) à uma trajetória de Ω tal que

$$J(x) \leq J(y), \quad \forall y \in \Omega_\rho \subseteq \Omega \quad (8)$$

onde Ω_ρ define uma vizinhança fechada de x , ou seja

$$\Omega_\rho \triangleq \{y \in \Omega \mid \|y - x\|_T \leq \rho\} \quad (9)$$

sendo claro que $\Omega_\rho \subseteq \Omega$.

É importante notar que sendo Ω um conjunto de funções ao qual podemos associar as noções de produto escalar e distância dadas por (1-2) então a maneira de determinarmos as condições de otimalidade para o problema (5) segue muito de perto o mesmo desenvolvimento que é feito em programação matemática e baseia-se sobretudo na primeira variação do critério (4).

Teorema 1 : Se $x \in \Omega$ é a solução ótima de (5-6) com $x(0) = x_0$ e T fixo então $x(t)$ satisfaz

$$f_x - \frac{d}{dt} f_x^* = 0 \quad (10)$$

sujeita à condição de contorno

$$(f_x^* + g_x) \Big|_{t=T} = 0 \quad (11)$$

Prova : Tomando δx uma trajetória arbitrária em Ω e ϵ um escalar suficientemente pequeno de tal forma $y = x + \epsilon \delta x \in \Omega_\rho$ então podemos desenvolver $J(y)$

em s\u00e9rie de Taylor obtendo

$$J(y) = J(x) + \varepsilon \int_0^T \{ f'_x \delta x + f'_x \delta \dot{x} \} dt + \varepsilon g'_x \delta x \Big|_{t=T} + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

onde $O(\varepsilon^2)$ denota os termos de ordem superior ou igual a 2 em ε e que devido as hip\u00f3teses de diferenciabilidade assumidas \u00e9 tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon^2)/\varepsilon = 0 \quad (13)$$

Por outro lado integrando por partes vem:

$$\int_0^T f'_x \delta \dot{x} dt = f'_x \delta x \Big|_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} f'_x \delta x dt \quad (14)$$

lembrando que $x(0) = x_0$ ent\u00e3o $\delta x(0) = 0$. Consequentemente (12) se reduz a

$$J(y) = J(x) + \varepsilon \int_0^T \left\{ f_x - \frac{d}{dt} f'_x \right\} \delta x dt + \varepsilon (f_x + g_x)' \delta x \Big|_{t=T} + O(\varepsilon^2) \quad (15)$$

Dividindo ambos os lados de (15) por ε e passando o limite obtemos a varia\u00e7\u00e3o de primeira ordem do crit\u00e9rio na forma:

$$\delta J(x) = \left\langle f_x - \frac{d}{dt} f'_x, \delta x \right\rangle_T + (f_x + g_x)' \delta x \Big|_{t=T} \quad (16)$$

Entretanto, por hip\u00f3tese x \u00e9 a solu\u00e7\u00e3o \u00f3tima do problema em quest\u00e3o implicando que $\delta J(x) = 0$ pois caso contr\u00e1rio sempre seria poss\u00edvel determinar $\delta x \in \Omega$ tal que $J(y) < J(x)$ caracterizando um absurdo.

Em consequ\u00eancia, assumindo $\delta J(x) = 0$ em (16) e lembrando que δx \u00e9 completamente arbitr\u00e1rio em Ω , a propriedade (3) implica exatamente em (10) e (11) o que prova o teorema proposto.

Na literatura a equa\u00e7\u00e3o (10) \u00e9 conhecida como equa\u00e7\u00e3o de *Euler-Lagrange* e a condi\u00e7\u00e3o de contorno (11) \u00e9 conhecida como *condi\u00e7\u00e3o de Transversalidade*. Podemos concluir pelo teorema anterior que (10) e (11) s\u00e3o condi\u00e7\u00f5es necess\u00e1rias de otimalidade para o problema (5) e constituem portanto uma

maneira de caracterizar sua solução ótima desde que um teste suplementar seja realizado de tal forma a verificar que a funcional $J(x)$ assume o menor valor possível em Ω_0 .

Isto pode ser feito facilmente determinando

$$\delta^2 J(x) = \frac{1}{2} \int_0^T [\delta x' \delta x'] \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xx}^* \\ f_{xx}^* & f_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix} dt + \frac{1}{2} g_{xx} \Big|_{t=T} \quad (17)$$

o que nos permite concluir que se as matrizes Hessianas das funções f e $g \in C^2$, calculadas sobre uma trajetória que satisfaz o teorema 1, forem estritamente definidas positivas então $\delta^2 J(x) > 0$ então x satisfaz as condições necessárias e suficientes para otimalidade e conseqüentemente resolve (5).

Devemos entretanto notar que este resultado pode tornar-se extremamente conservativo na medida que em (17) a dependência entre δx e $\delta \dot{x}$ não foi explicitada.

Notas

1. O teorema anterior fornece as condições necessárias de otimalidade para um tipo específico de problemas isto é, aqueles com estado final livre e horizonte de otimização fixo. Para outros problemas clássicos de controle ótimo (p.ex. com estado final fixo ou horizonte de otimização livre) a obtenção das condições necessárias de otimalidade segue o mesmo raciocínio e será portanto omitido. Vale entretanto lembrar que a equação de Euler-Lagrange sempre estará presente alterando tão somente sua condição de contorno (11).
2. Se eventualmente f não depender explicitamente de \dot{x} então (10) se reduz a $f_x = 0$. Este fato já podia ser previsto na medida que neste caso, a funcional é aditivamente separável no tempo e conseqüentemente vale a igualdade

$$\text{Min} \int_0^T f(x(t)) dt = \int_0^T \{\text{Min} f(x(t))\} dt \quad (18)$$

Exemplo 1 : Considere o seguinte problema de otimização

$$\text{Min} \int_0^1 \{x(t)^2 + \beta^2 \dot{x}(t)^2\} dt$$

com $x(0) = 1$ e $x(1)$ livre. O parâmetro $\beta \in \mathbb{R}_+$ será fixado posteriormente. Neste caso particular, as condições de otimalidade fornecidas pelo teorema 1 são necessárias e suficientes pois a funcional é estritamente convexa. Ademais é imediato calcular

$$\delta^2 J(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \{ \delta x^2 + \beta^2 \delta \dot{x}^2 \} dt$$

$$> 0, \quad \forall \delta x \in \Omega$$

De (10) e (11) podemos imediatamente calcular a solução ótima na forma

$$x - \beta^2 \ddot{x} = 0 \quad ; \quad \dot{x}(1) = 0$$

ou seja

$$x(t) = \cosh \beta^{-1}(t-1) / \cosh \beta^{-1}$$

Na figura seguinte representamos graficamente esta função para alguns valores

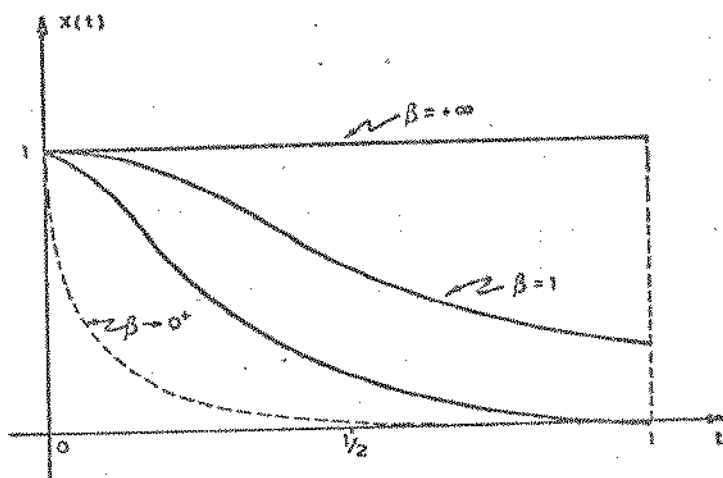


Fig. 1 - Representação gráfica da trajetória ótima.

de β . Um caso importante ocorre para β tendendo a zero, quando então a trajetória ótima tende para a função

$$\bar{x}(t) = e^{-t/\beta} \in \Omega$$

cujo custo associado $J(\bar{x})$ tende para zero. A função $\bar{x}(t)$ é arbitrariamente "próxima" da função

$$x(t) = \begin{cases} 1 & p/t = 0 \\ 0 & p/0 < t \leq 1 \end{cases}$$

que obviamente não pertence a Ω mas é a solução ótima do problema proposto para $\beta = 0$. Isto evidencia que as condições (10-11) são restritas ao conjunto Ω devido ao fato de termos usado na prova do teorema 1 a relação (3).

II.2. Princípio do Mínimo de Pontryagin (PMP)

O princípio do Mínimo (ou Máximo) de Pontryagin resulta na verdade em um conjunto de equações que estabelece uma condição necessária de otimalidade para problemas de controle ótimo. Tais problemas apresentam uma funcional como objetivo a ser minimizado, respeitando a dinâmica do sistema que se deseja controlar.

A dinâmica a que nos referimos traduz-se matematicamente por uma equação diferencial (caso contínuo) ou a diferenças (caso discreto) e deve ser entendida como uma restrição a ser satisfeita durante todo o horizonte de otimização.

O Princípio do Mínimo de Pontryagin se revelou no decorrer de anos de utilização como uma ferramenta de real importância não somente por caracterizar a solução ótima de problemas como aqueles brevemente descritos acima, mas também por permitir o desenvolvimento de alguns métodos numéricos (ver cap. III).

Por isso o PMP merece ser analisado com ênfase. Neste capítulo inicialmente estabelecemos as equações canônicas de forma heurística para em seguida apresentarmos uma prova rigorosa, baseada em conceitos do cálculo variacional já introduzidos.

Consideramos inicialmente os sistemas contínuos no tempo, para os quais o seguinte problema de controle ótimo é abordado

$$\begin{aligned} \text{Min } & \int_0^T f(x(t), u(t)) dt + g(x(T)) \\ & \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) ; \quad x(0) = x_0 \\ & u(t) \in U \end{aligned} \quad (19)$$

com T fixo e $x(T)$ livre. As variáveis de estado e de controle são notadas por $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ respectivamente. Supomos que a equação diferencial acima indicada admite uma e só solução para todo $u(t) \in U$ dado no intervalo de tempo $[0, T]$. Assumimos ainda que sua solução $x(t) \triangleq X(x_0, u(t))$ pertence a Ω . Como uma equação diferencial geralmente "suaviza" sua excitação, a variável de controle pode pertencer a um conjunto de funções muito mais amplo que Ω .

Como consequência direta da hipótese de unicidade de solução da equação diferencial, podemos reescrever (19) na forma compacta

$$\begin{aligned} \text{Min } & J(u) \\ \text{u} \in & U \end{aligned} \quad (20)$$

Infelizmente, a funcional $J(\cdot)$ geralmente não pode ser inteiramente explicitada na medida que $X(x_0, u(t))$ não pode ser obtida em forma fechada por envolver a resolução de uma equação diferencial não linear.

Vamos então considerar a equação diferencial como uma restrição a ser satisfeita para $\forall t \in [0, T]$. Neste caso o problema (19) apresenta uma função objetivo que deve ser minimizada sujeito a uma restrição de igualdade à qual associamos um vetor $p(t) \in \mathbb{R}^n$ de multiplicadores de Lagrange chamado *co-estado*.

Como na teoria clássica de Programação Matemática podemos imediatamente definir a função Lagrangeana na forma

$$\mathcal{L}(x, u, p) \triangleq \int_0^T f(x, u) dt + g(x(T)) + \int_0^T p' (F(x, u) - \dot{x}) dt \quad (21)$$

que deve ser extremalizada em relação às três variáveis tomadas de maneira in dependentes. Neste sentido escrevemos (21) na forma equivalente

$$\mathcal{G}(x, u, p) = \int_0^T \{H(x, u, p) - p' \dot{x}\} dt + g(x(T)) \quad (22)$$

onde $H(\cdot)$ é conhecida como função Hamiltoniana e é dada por

$$H(x, u, p) \triangleq f(x, u) + p'F(x, u) \quad (23)$$

Considerando inicialmente $U \equiv \mathbb{R}^m$ obtemos após aplicação direta do teorema 1:

* *Extremalização em relação ao estado*

$$H_x + \dot{p} = 0 \quad ; \quad p(T) = g_x \Big|_{t=T} \quad (24)$$

* *Extremalização em relação ao co-estado*

$$H_p - \dot{x} = 0 \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (25)$$

Note que a equação acima nada mais é que a equação dinâmica do problema em estudo.

* *Extremalização em relação ao controle*

$$H_u = 0 \quad (26)$$

Como $\mathcal{G}(\cdot)$ em (22) não depende de \dot{u} então a equação de Euler-Lagrange se reduz simplesmente à (26).

Estas são as equações que constituem o chamado Princípio do Mínimo de Pontryagin. Temos exatamente $2n+m$ equações que devem permitir (a menos que ocorra degenerescência) o cálculo das $2n+m$ incógnitas a saber $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $p(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

É claro que se as variáveis de controle estiverem restritas a $U \subset \mathbb{R}^m$ então (26) não mais se verifica. A generalização para este caso é simples e decorre da observação que $\mathcal{G}(\cdot)$ não deve ser extremalizado mas sim minimizado sobre U . Consequentemente (26) torna-se

$$\text{Min}_{u \in U} H(x, u, p) \quad (27)$$

sendo que o estado e o co-estado continuam a satisfazerem (24) e (25). Como comentado anteriormente, se considerarmos outros tipos de problemas (p.ex. com estado final fixo), as equações anteriores continuam válidas alterando tão somente suas condições de contorno. As equações (24) e (25) são conhecidas na literatura como *equações Canônicas*.

Teorema 2 : Para que $u(t) \in U$ seja solução ótima de (19) é necessário que exista $p(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \text{a) } u(t) \text{ resolve } \text{Min}_{u \in U} H(x, u, p) \\ \text{b) } H_x + \dot{p} = 0 \quad ; \quad p(T) = E_x \Big|_{t=T} \\ \text{c) } H_p - \dot{x} = 0 \quad ; \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (28)$$

Prova : Consideramos que $u(t)$ é uma solução ótima de (19) ou seja $J(u) \leq J(v)$ $\forall v \mid \|v - u\|_T \leq \epsilon$, sendo ϵ um escalar arbitrariamente pequeno (positivo). Com uma trajetória de controle $v(t)$ satisfazendo a relação anterior, a solução da equação diferencial é $y(t) = X(x_0, v(t))$ a qual pode ser expandida em série de potências:

$$y(t) = x(t) + \epsilon \delta x(t) + O(\epsilon^2) \quad \forall t \in [0, T] \quad (29)$$

Por outro lado, o custo associado é

$$J(v) = \int_0^T f(y(t), v(t)) dt + g(y(T)) \quad (30)$$

o que nos permite escrever

$$J(v) - J(u) = \int_0^T \{f(y, v) - f(x, u)\} dt + \epsilon g'_x \delta x \Big|_{t=T} + O(\epsilon^2) \quad (31)$$

usando a definição da função Hamiltoniana (23) a variação do critério acima determinada fica

$$J(v) - J(u) = \int_0^T \{H(y, v, p) - H(x, u, p)\} dt - \epsilon \int_0^T p' \delta \dot{x} dt + \epsilon g'_x \delta x \Big|_{t=T} + O(\epsilon^2) \quad (32)$$

Entretanto a função Hamiltoniana é diferenciável em relação ao estado. Este fato nos permite desenvolvê-lo em série de potências na forma

$$\begin{aligned} H(y, v, p) &= H(x, v, p) + \epsilon H_x(x, v, p) \delta x + O(\epsilon^2) \\ &= H(x, v, p) + \epsilon H_x(x, u, p) \delta x + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (33)$$

É importante notar que a última equação acima decorre do fato da expansão de $H_x(x, v, p)$ se escrever $H_x(x, v, p) = H_x(x, u, p) + O(\epsilon)$ e conseqüentemente

$$\epsilon H_x(x, v, p) = \epsilon H_x(x, u, p) + \epsilon O(\epsilon) \quad (34)$$

sendo que os termos $\epsilon O(\epsilon)$ são de ordem ϵ^2 e estão representados em $O(\epsilon^2)$.

Além disso a seguinte igualdade diferencial se verifica facilmente por integração por partes

$$\int_0^T p' \delta \dot{x} dt = p' \delta x \Big|_{t=T} - \int_0^T \dot{p}' \delta x dt \quad (35)$$

e finalmente levando (35) e (33) em (32) vem

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \int_0^T \{H(x, v, p) - H(x, u, p)\} dt + \\ &+ \epsilon \langle H_x + \dot{p}', \delta x \rangle_T + \epsilon (p - g_x)' \delta x \Big|_{t=T} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (36)$$

utilizando (28-b) em (36) obtemos a equação

$$J(v) - J(u) = \int_0^T \{H(x, v, p) - H(x, u, p)\} dt + O(\epsilon^2) \quad (37)$$

a qual permite concluir que realmente $u(t)$ satisfaz a condição (28-a). De fato, por absurdo suponhamos que exista em U uma trajetória $v(t)$ de tal forma que $H(x, v, p) < H(x, u, p)$ em um intervalo de tempo δt . É claro que neste

caso δt pode ser tomado suficientemente pequeno de tal forma que $\|v - u\|_T \leq \epsilon$ e

$$\int_0^T \{H(x, v, p) - H(x, u, p)\} dt < 0 \quad (38)$$

se verifiquem simultaneamente. Em vista de (37) teremos $J(v) < J(u)$ o que é um absurdo pois por hipótese $u(t)$ resolve (19). Consequentemente

$$H(x, u, p) \leq H(x, v, p) \quad \forall v \in U \quad (39)$$

o que prova o teorema proposto.

Devemos notar que na prova do teorema anterior não é necessária nenhuma hipótese referente à diferenciabilidade de $H(\cdot)$ em relação à u . Entre tanto no caso de $H_u(\cdot)$ existir, uma propriedade muito importante decorre de (37). Com efeito, seja $v(t) = u(t) + \epsilon \delta u(t)$ então passando ao limite para ϵ tendendo a zero, ambos os membros de (37) obtemos:

$$\delta J(u) = \langle H_u(x, u, p), \delta u \rangle_T \quad (40)$$

o que evidencia o fato de com $H_u \neq 0$ podermos alterar $u(t)$ de tal forma a obter um menor valor do critério (ver cap. III). Além disso, no caso irrestrito $U \equiv \mathbb{R}^m$ é claro que a otimalidade de $u(t)$ deve ser verificada quando $\delta J(u) = 0$ ou seja

$$H_u(x, u, p) = 0 \quad (41)$$

que é uma das condições de otimalidade já obtida (26).

Outra consequência importante do PMP que permite muitas simplificações no cálculo do valor ótimo do critério ocorre para problemas nos quais a função Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo. Temos,

$$\frac{dH}{dt} = H'_x \dot{x} + H'_u \dot{u} + H'_p \dot{p} \quad (42)$$

que em vista de (28b) e (28c) assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= H'_u \dot{u} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

sendo que a última igualdade é uma consequência imediata de (41). Concluimos então que $H(x, u, p) = h_0 \equiv \text{cte} \quad \forall t \in [0, T]$. Com h_0 conhecido e supondo apenas por simplicidade que $g(\cdot) = 0$, obtemos diretamente de (21):

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T \{H(x, u, p) - p' \dot{x}\} dt \\ &= h_0 T - \langle p, \dot{x} \rangle_T \end{aligned} \quad (44)$$

Como veremos mais adiante esta maneira de calcular o valor ótimo do critério é muito importante no estudo de robustez de controladores ótimos. Para ilustrar o que foi visto vamos em seguida resolver um exemplo simples porém importante.

Exemplo 2 : Consideramos o chamado Problema Linear-Quadrático com

$$f(x, u) = \frac{1}{2} x' Q x + \frac{1}{2} u' R u$$

$$F(x, u) = Ax + Bu$$

$$g(x(T)) = 0$$

onde Q e R são matrizes simétricas tais que $Q \geq 0$ e $R > 0$. Aplicando diretamente as condições de otimalidade estabelecidas no teorema 2 temos

$$u(t) = -R^{-1} B' p(t)$$

e as equações canônicas

$$\begin{cases} Qx + A'p + \dot{p} = 0 & ; & p(T) = 0 \\ Ax - BR^{-1}B'p - \dot{x} = 0 & ; & x(0) = x_0 \end{cases}$$

Portanto, para podermos determinar a trajetória ótima de controle devemos resolver o sistema de equações diferenciais lineares acima com $2n$ variáveis. Definindo $z' \triangleq [x', p']$ e $\Phi(T) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ como sendo sua matriz de transição

de estado, temos imediatamente $z(T) = \Phi(T)z(0)$ que pode ser reescrita na forma particionada

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(T) & \Phi_{12}(T) \\ \Phi_{21}(T) & \Phi_{22}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$$

Nesta forma fica evidente que podemos determinar $p(0)$ de tal maneira que a condição terminal sobre o co-estado seja satisfeita. Temos então

$$p(0) = -\Phi_{22}(T)^{-1} \Phi_{21}(T)x(0)$$

o que permite definir completamente $z(0)$ e por consequência $z(t)$ $\forall t \in [0, T]$. Obtemos então

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -R^{-1}B' \end{bmatrix} z(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -R^{-1}B' \end{bmatrix} \Phi(t)z(0) \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo $p(0)$ na igualdade anterior, a lei de controle se reduz a

$$u(t) = -G(t)x(0)$$

onde $G(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é dada por

$$G(t) = R^{-1}B'(\Phi_{21}(t) - \Phi_{22}(t)\Phi_{22}(T)^{-1}\Phi_{21}(T))$$

Esta maneira de expressar a solução ótima do PLQ é fundamental para concluirmos que embora $G(t)$ não dependa da condição inicial $x(0)$, seu conhecimento é absolutamente necessário para a determinação de $u(t)$. O mesmo problema ao ser resolvido pela EHJB fornece um resultado surpreendentemente diferente. É exatamente dentro deste contexto que se deve estabelecer a discussão sobre a estrutura da lei ótima de controle (malha aberta ou malha fechada), isto no entanto fica para um pouco mais tarde.

Em seguida passaremos a analisar alguns problemas de controle ótimo envolvendo modelos a tempo-discreto isto é, aqueles cuja dinâmica é representada por equações à diferenças finitas.

Como feito anteriormente para sistemas contínuos, nosso objetivo é obter as condições necessárias de otimalidade que constituem o chamado Prin-

cípio do Mínimo Discreto.

Seja o seguinte problema de controle ótimo a tempo-discreto

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{t=0}^{T-1} f(x(t), u(t)) + g(x(T)) \\ & x(t+1) = F(x(t), u(t)) ; x(0) = x_0 \\ & u(t) \in U \end{aligned} \quad (45)$$

com T fixo (inteiro) e $x(T)$ livre. Por hipótese $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e f , g são funções de classe C^1 em relação a $x(t)$. Como anteriormente comentado, com $u(t) \in U$, $t \in [0, T-1]$ fixo, a solução única da equação a diferenças $x(t) = X(x_0, u(t))$ permite avaliar o valor da função objetivo. Podemos então reescrever (45) na forma

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & J(u(0), \dots, u(T-1)) \\ & u(t) \in U \end{aligned} \quad (46)$$

Sendo que infelizmente a funcional $J(\cdot)$ geralmente não pode ser inteiramente explicitada na medida que a equação a diferenças não admite uma solução em forma fechada.

Em seguida usaremos conceitos similares àqueles definidos anteriormente para sistemas contínuos. Por exemplo, a versão discreta de (1) para $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ é

$$\langle x, y \rangle_T \triangleq \sum_{t=0}^T x(t)'y(t) \quad (47)$$

Devemos entretanto notar que no caso de sistemas discretos, o conjunto Ω pode ser tomado como qualquer conjunto de trajetórias reais definidas em $t \in [0, T]$. Assim sendo a propriedade (3) está assegurada com o produto escalar definido em (47).

Teorema 3 : Para que $u(t) \in U$ seja solução ótima de (45) é necessário que

exista $p(t)$ tal que

$$a) u(t) \text{ resolve } \underset{u \in U}{\text{Min}} H(x, u, p)$$

$$b) H_x - p(t-1) = 0 \quad ; \quad p(T-1) = g_x \Big|_{t=T} \quad (48)$$

$$c) H_p - x(t+1) = 0 \quad ; \quad x(0) = x_0$$

Prova : A prova deste teorema segue em linhas gerais a prova do teorema 2. Seja $u(t)$ a solução ótima de (45), ou seja $J(u) < J(v) \quad \forall v / |v - u|_T < \epsilon$ (escalar positivo arbitrariamente pequeno). Com a trajetória de controle $v(t)$, a solução da equação à diferenças não linear é dada por $y(t) = X(x_0, v(t))$ que pode ser expandida em série de potências:

$$y(t) = x(t) + \epsilon \delta x(t) + O(\epsilon^2) \quad \forall t \in [0, T] \quad (49)$$

Temos então o custo associado:

$$J(v) = \sum_{t=0}^{T-1} f(y(t), v(t)) + g(y(T)) \quad (50)$$

que nos permite estabelecer a diferença

$$J(v) - J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \{f(y, v) - f(x, u)\} + \epsilon g'_x \delta x \Big|_{t=T} + O(\epsilon^2) \quad (51)$$

utilizando a definição da função Hamiltoniana (23), podemos reescrever a variação do critério aciona estabelecida, na forma

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \sum_{t=0}^{T-1} \{H(y, v, p) - H(x, u, p)\} - \\ &\quad - \epsilon \sum_{t=0}^{T-1} p(t)' \delta x(t+1) \\ &\quad + \epsilon g'_x \delta x \Big|_{t=T} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (52)$$

Entretanto, a função $H(\cdot)$ é diferenciável em relação ao estado. Desta maneira a relação (33) continua válida, ou seja:

$$H(y, v, p) = H(x, v, p) + \epsilon H_x(x, u, p) \delta x + O(\epsilon^2) \quad (53)$$

Por outro lado a condição inicial fixa $x(0) = x_0$ impõe $\delta x(0) = 0$ e a condição

de contorno (48-b) permite estabelecer a igualdade

$$\sum_{t=0}^{T-1} p(t-1)' \delta x(t) = \sum_{t=0}^{T-1} p(t)' \delta x(t+1) - g'_x \delta x \Big|_{t=T} \quad (54)$$

levando (53) e (54) em (52) obtemos imediatamente

$$J(v) - J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \{H(x, v, p) - H(x, u, p)\} + \varepsilon \langle H_x - p(t-1), \delta x \rangle_T + O(\varepsilon^2) \quad (55)$$

Novamente, utilizando a equação que define a trajetória ótima do co-estado (48-b) temos:

$$J(v) - J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \{H(x, v, p) - H(x, u, p)\} + O(\varepsilon^2) \quad (56)$$

a qual nos permite concluir que realmente $u(t)$ satisfaz (48-a). Este fato pode ser mostrado facilmente por absurdo e por seguir a mesma linha de raciocínio utilizada na prova do teorema 2 será omitido. Concluimos então que

$$H(x, u, p) \leq H(x, v, p) \quad \forall v \in U \quad (57)$$

o que prova o teorema proposto.

Da mesma forma, de (55) vem imediatamente que, sendo $H(\cdot)$ diferenciável em relação a $u(t)$ então para $v(t) = u(t) + \varepsilon \delta u(t)$ a primeira variação do critério é dada por

$$\delta J(u) = \langle H_u(x, u, p), \delta u \rangle_T \quad (58)$$

e conseqüentemente $\delta J(u) = 0$ sempre que $H_u = 0$ que nada mais é que a condição necessária de otimalidade do problema indicado em (48-a) para $U \equiv \mathbb{R}^m$.

Isto encerra nosso estudo sobre o PMP. Nosso objetivo foi tão somente evidenciar os aspectos que achamos essenciais sobre esta teoria. É óbvio que muitos outros já foram desenvolvidos mas entretanto fogem do escopo deste trabalho.

Neste sentido devemos notar que consideramos até agora problemas

com restrições são nas variáveis de controle. A generalização do PMP para problemas com restrições nas variáveis de estado pode ser feita (e já o foi) porém é evidente que o co-estado não mais necessariamente satisfaz (28-b) ou no caso discreto (48-b). Tais problemas (sobretudo no caso discreto) podem ser tratados com o auxílio das condições de Kuhn-Tucker o que faz com que a existência de uma equação dinâmica passe a ser totalmente secundário.

Resta ainda notar um outro aspecto que ainda não consideramos. Trata-se de problemas com horizonte de otimização infinito ($T \rightarrow +\infty$).

Nos próximos capítulos este caso será analisado com ênfase, sobretudo no cap. V por ser fundamental para o estudo de estabilidade (robustez) de sistemas dinâmicos em malha fechada.

II.3. Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (EHJB)

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (também conhecida, sobretudo no caso discreto, por equação iterativa de Programação Dinâmica) tornou-se no decorrer da última década de fundamental importância no estudo de controle ótimo.

Neste capítulo faremos seu desenvolvimento a partir do chamado Princípio de Otimalidade primeiramente enunciado por Bellman. Não temos a pretensão de analisar todos os aspectos ligados à EHJB pois como se sabe somente Bellman publicou mais de uma centena de artigos técnicos a seu respeito.

As hipóteses sob as quais a EHJB é válida são extremamente fracas, fazendo com que possa ser, quase sempre, aplicada. Entretanto, em contrapartida sua solução é difícil de ser determinada mesmo numericamente.

Resta citar mais dois aspectos da EHJB. O Primeiro é que sua solução permite determinar a lei ótima de controle em *malha fechada* e portanto com uma estrutura desejável dentro do contexto da teoria de Controle. O Segundo igualmente importante e que será objeto de estudo no cap. V, é que sua solução fornece uma função de Lyapunov adequada ao estudo de Robustez.

Por ser mais simples e natural, consideramos inicialmente os sistemas dinâmicos a tempo-discreto. Seja a função $v(\xi, \tau): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (cost to

go) assim definida

$$v(\xi, \tau) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u \in U} \sum_{t=\tau}^{T-1} f(x(t), u(t)) + g(x(T))$$

$$x(t+1) = F(x(t), u(t)) \quad (59)$$

$$x(\tau) = \xi$$

É claro que a solução ótima de (45) corresponde à situação definida por $(\xi, \tau) = (x_0, 0)$ ou seja

$$v(x_0, 0) = \min_{u(t) \in U} J(u(0), \dots, u(T-1)) \quad (60)$$

A determinação desta função pode ser feita de maneira iterativa a partir do Princípio de Otimalidade enunciado em seguida.

Princípio de Otimalidade : Seja $u(t)$, $t \in [0, T-1]$ a solução ótima de (59) para $(\xi, \tau) = (x_0, 0)$ e $x(t) = X(x_0, u(t))$ a trajetória correspondente do estado. Para $\forall \tau \in [0, T-1]$, a trajetória ótima do estado de (59) considerando $(\xi, \tau) = (x(\tau), \tau)$ é exatamente $x(t) = X(x_0, u(t))$ com $t \in [\tau, T]$.

Em outras palavras (veja a fig. 2) se uma trajetória é ótima para um dado problema então qualquer parte final desta mesma trajetória também é ótima para o problema cuja origem dos tempos corresponde a qualquer estado inicial sobre esta mesma trajetória.

Assumindo como verdadeiro o Princípio de Otimalidade podemos imediatamente estabelecer a EHJB para sistemas discretos, neste caso também chamada de equação iterativa de Programação Dinâmica. Temos então:

$$v(x, t) = \min_{u \in U} \{f(x, u) + v(F(x, u), t+1)\} \quad (61)$$

que obviamente deve satisfazer a condição de contorno terminal:

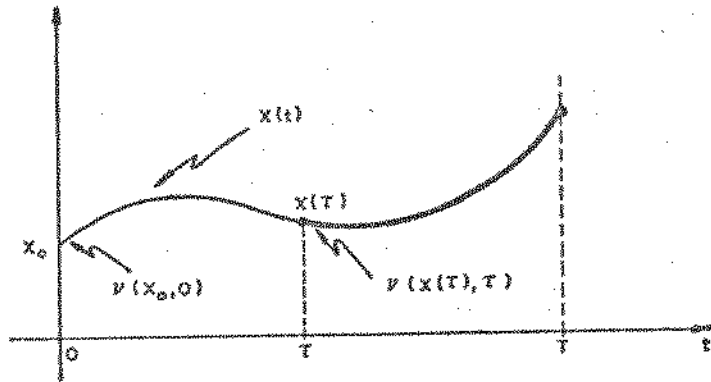


Fig. 2 - Representação gráfica do princípio de otimalidade.

$$v(x, T) = g(x) \quad (62)$$

A solução desta equação é obtida iterativamente a partir de $t = T$. Neste instante (62) é válida, em seguida, fazendo $t = T-1, T-2, \dots, 0$ e usando (61) obtêm-se $v(x, t)$ para todo $t \in [0, T]$.

É fácil notar que a solução ótima do problema de otimização indicado no lado direito de (61) depende de cada valor particular de $x \in \mathbb{R}^n$. Considerando a função

$$\mu(x, t) = \arg \min_{u \in U} \{f(x, u) + v(F(x, u), t+1)\} \quad (63)$$

é evidente que a solução ótima de (45) é dada por

$$u(t) = \mu(x(t), t), \quad t \in [0, T-1] \quad (64)$$

ou seja, por construção, obtemos uma solução em malha fechada.

É interessante verificar que esta propriedade não é perdida mesmo que as variáveis de estado estejam sujeitas a algum tipo de restrição. De fato, para $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ o mesmo procedimento pode ser adotado a menos de uma pequena modificação. Para todo $x \in X$ devemos determinar $u \in U(x)$ de tal forma que necessariamente $x(t+1) \in X$. O conjunto $U(x) \subseteq U$ é assim definido

$$U(x) \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m \text{ t.q. } \exists u \in U \text{ com } F(x, u) \in X\} \quad (65)$$

Embora (61) seja simples de ser analisada no plano formal, o mesmo não ocorre quando desejamos resolvê-la numericamente. Para se ter uma idéia da dificuldade associada à sua solução vamos supor que as variáveis de estado são representadas por valores discretos tomados em um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a priori fixado e que representa a região de interesse no espaço de estado, ou seja

$$x \in \{x_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (66)$$

Podemos então estimar que o número de posições de memória requeridas é da ordem de $T(n_x)^n$ que pode tornar-se enorme mesmo tratando-se de problemas com dimensões reduzidas (para $n=3$ e $T=10$ seu valor é 10^7).

Isto em grande parte é devido à generalidade com que (61) foi obtida. Atualmente sabe-se que sua solução pode ser determinada com muito mais eficiência se algumas hipóteses simplificadoras forem consideradas como por exemplo a *convexidade* de $v(x, t)$ em relação a $x \in \mathbb{R}^n$.

Esta hipótese em particular viabiliza a aplicação de métodos numéricos já bem estabelecidos e ao mesmo tempo não parece restringir em demasia a gama de problemas possíveis de serem resolvidos (ver cap. V).

Vamos agora considerar a versão contínua da EHJB definindo a função "cost to go"

$$v(\xi, \tau) \triangleq \min_{u \in U} \int_{\tau}^T f(x(t), u(t)) dt + g(x(T))$$

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (67)$$

$$x(\tau) = \xi$$

Novamente é evidente que a solução ótima de (19) corresponde à situação $(\xi, \tau) = (x_0, 0)$ ou seja

$$v(x_0, 0) = \min_{u \in U} J(u) \quad (68)$$

Considerando válido o Princípio de Otimalidade e aplicando (61) entre os instantes de tempo t e $t + \delta t$ com δt arbitrariamente pequeno temos:

$$v(x, t) = \min_{u \in U} \{f(x, u)\delta t + v(x + F(x, u)\delta t, t + \delta t)\} \quad (69)$$

Supondo que $v(., .)$ seja uma função de classe C^1 em relação às variáveis x e t , podemos desenvolvê-la em série de Taylor e reter só os termos em primeira ordem em δt pois em seguida δt será reduzido à zero. Temos portanto

$$v(x + F(x, u)\delta t, t + \delta t) \approx v(x, t) + v_t(x, t)\delta t + v_x(x, t)'F(x, u)\delta t \quad (70)$$

que ao ser substituída em (69), dividindo ambos os termos por δt e passando ao limite para $\delta t \rightarrow 0$, fornece:

$$v_t(x, t) + \min_{u \in U} \{f(x, u) + v_x(x, t)'F(x, u)\} = 0 \quad (71)$$

finalmente, com a definição da função Hamiltoniana e lembrando que para $\tau = T$ em (67) temos $v(\xi, T) = g(\xi)$ obtemos a forma final da EHJB:

$$v_t(x, t) + \min_{u \in U} H(x, u, v_x(x, t)) = 0 \quad (72)$$

que tem como condição de contorno terminal $v(x, T) = g(x)$. A equação diferencial às derivadas parciais acima geralmente não admite solução em forma fechada (uma exceção importante é o PLQ). Sua solução numérica passa necessariamente pela discretização do problema contínuo o que nos remete à solução de (61) com as diversas dificuldades anteriormente comentadas.

Finalmente a solução de (72) fornece naturalmente uma lei de controle em malha fechada dada por

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \mu(x(t), t) \\
 &= \arg \underset{u \in U}{\text{Min}} H(x(t), u, v_x(x(t), t))
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

Exemplo 3 : Consideramos novamente o mesmo problema Linear-Quadrático já resolvido no exemplo 2. A função Hamiltoniana é dada por

$$H(x, u, v_x) = \frac{1}{2} x' Q x + \frac{1}{2} u' R u + v_x' (A x + B u)$$

Para simplificar a notação, sempre que possível não explicitaremos os argumentos das funções. Com (73) obtemos a lei ótima de controle após a minimização da função $H(\cdot)$ acima, então

$$\mu(x, t) = -R^{-1} B' v_x(x, t)$$

e (72) se reduz a

$$v_t + v_x' A x - \frac{1}{2} v_x' B R^{-1} B' v_x + \frac{1}{2} x' Q x = 0$$

Esta é a forma final da EHJB que pode ser resolvida pelo método do produto impondo-se: $v(x, t) = \frac{1}{2} x' P(t) x$. Substituindo esta função na equação acima determinamos a matriz $P(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que é solução de

$$\dot{P}(t) + A' P(t) + P(t) A - P(t) B R^{-1} B' P(t) + Q = 0$$

com a condição de contorno terminal $P(T) = 0$. A equação acima é chamada "Equação de Riccati" e embora seja não linear pode ser resolvida numericamente de forma muito eficiente. Finalmente, a lei de controle é expressa na forma

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

onde $K(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é dada por $K(t) = \frac{1}{2} R^{-1} B' P(t)$.

Ao compararmos a lei de controle aqui estabelecida à partir da EHJB e aquela determinada com auxílio do PMP (ver exemplo 2) notamos uma diferença fundamental que é expressa graficamente na figura 3.

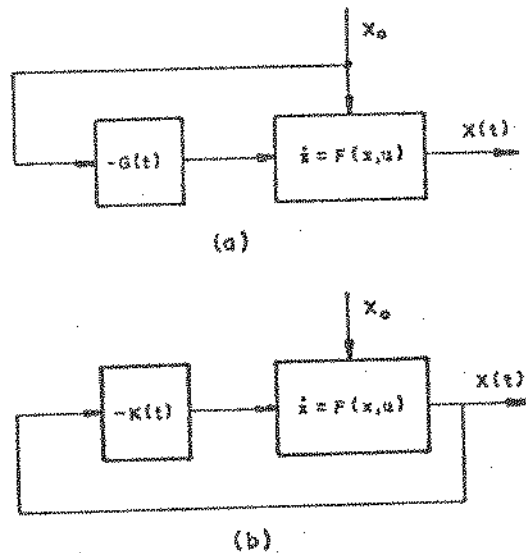


Fig. 3 - Estruturas das leis de controle obtidas via PMP (a) e EHJB (b).

Ou seja, com o PMP a lei de controle depende explicitamente da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que se não for exatamente conhecida implicará em perda de otimalidade. Ao contrário, com a EHJB, a lei de controle determinada não depende explicitamente da condição inicial a qual não precisa ser conhecida para o cálculo da matriz de ganho $K(t)$. A figura 3b indica claramente que mudanças em x_0 refletem-se em $x(t)$ que é realimentada, sem que isto acarrete qualquer perda de otimalidade.

Infelizmente o preço a ser pago por esta propriedade adicional é alto, na medida que a EHJB é muito mais difícil de ser resolvida que as equações canônicas do PMP. Podemos entretanto fazer com que a solução ótima obtida por esta última técnica de certa forma não dependa explicitamente da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Isto será analisado em seguida.

II.4. Relação entre PMP e EHJB

Como vimos anteriormente a EHJB fornece a solução de um dado problema de controle ótimo ao passo que o PMP somente caracteriza esta mesma solução impondo condições que geralmente (a menos de convexidade) são somente necessárias para otimalidade. É portanto evidente que ao resolvermos a EHJB devemos poder determinar o vetor co-estado $p(t) \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que as equações canônicas do PMP sejam satisfeitas.

Teorema 4 : Seja $v(x, t)$ a solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (72), então com $p(t) \triangleq v_x(x, t)$ as equações do Princípio do Mínimo de Pontryagin são satisfeitas.

Prova : Sendo $v(x, t)$ a solução da EHJB então por construção (28-a e c) são satisfeitas. Para provarmos que (28-b) também é satisfeita, procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{d}{dt} v_x(x, t) \\ &= v_{xt}(x, t) + v_{xx}(x, t)' \dot{x} \end{aligned} \quad (74)$$

Por outro lado, derivando (72) em relação a x sobre a trajetória ótima do controle vem:

$$v_{xt}(x, t) + H_x(x, u, p) + v_{xx}(x, t)' \dot{x} = 0 \quad (75)$$

Que substituída em (74) fornece imediatamente $\dot{p} + H_x = 0$. Ademais, no instante final $p(T) = v_x(x, T) = g_x|_{t=T}$ e conseqüentemente (28-b) é satisfeita.

Isto prova o teorema proposto.

Corolário 4 : Seja $v(x, t)$ a solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (61), então com $p(t) \triangleq v_x(x(t), t)$ as equações do Princípio do Mínimo de Pontryagin são satisfeitas.

Prova: Por construção (48-c) sempre se verifica. Por outro lado considerando em (61) a trajetória ótima do controle e derivando-a em relação a x obtemos

$$\begin{aligned} v_x(x, t) &= f_x(x, u) + v_{x(t+1)}(x(t+1), t+1)' F_x(x, u) \\ &= H_x(x, u, p) \end{aligned} \quad (76)$$

implicando em:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{v(x, t) - H(x, u, p)\} = 0 \quad \forall t \in [0, T-1] \quad (77)$$

o que mostra claramente que na solução ótima a função Hamiltoniana e a função $v(x, t)$ são iguais, a menos de uma constante, em todo o horizonte de otimização. Consequentemente (48-a) é satisfeita. Utilizando novamente (76) podemos concluir com a definição do co-estado que $p(t-1) = H_x$ e ainda $p(T-1) = g_x|_{t=T}$ o que prova o corolário proposto.

Além de estabelecer a ligação entre a EHJB e o PMP estes teoremas são importantes pois permitem determinar a variação do critério que ocorre devido a variações no estado. Por exemplo, em relação ao estado inicial temos no caso contínuo

$$p(0) = \frac{d}{dx_0} \{ \min_{u \in U} J(u) \} \quad (78)$$

e no caso discreto

$$p(-1) = \frac{d}{dx_0} \{ \min_{u \in U} J(u) \} \quad (79)$$

Ademais é interessante notar que (78) e (79) não são propriedades da lei ótima de controle. De fato, os teoremas anteriores permanecem válidos para qualquer trajetória factível $u(t) \in U$. Neste caso os valores de $p(0)$ ou $p(-1)$ se modificam de tal forma que (78) e (79) permaneçam válidas porém não são mais calculadas considerando o controle que minimiza $J(u)$ mas sim um controle factível qualquer.

Estamos agora em condição de analisar um problema anteriormente co

mentado. Trata-se de obter uma solução em malha aberta (via o PMP) que independa da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supomos que x_0 pode variar dentro de um conjunto $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e que (19) é reescrito na forma

$$\min_{u \in U} J(u, x_0) \quad (80)$$

a qual evidencia a dependência de $J(u)$ em (20) com $x_0 \in X_0$. É claro que para qualquer $x_0 \in X_0$ podemos estabelecer as condições de otimalidade associadas ao problema (80) que é de pouca valia pois devemos de alguma forma fixar x_0 para então determinar a solução ótima em relação ao controle. Neste sentido propomos o seguinte problema

$$\min_{u \in U} \max_{x_0 \in X_0} J(u, x_0) \quad (81)$$

o qual admite a interpretação: o controle ótimo é obtido impondo-se que a condição inicial seja aquela correspondente ao pior caso possível. Sendo $x_0^* \in X_0$ a solução do problema acima então

$$\min_{u \in U} J(u, x_0) \leq \min_{u \in U} J(u, x_0^*) \quad \forall x_0 \in X_0 \quad (82)$$

implicando que qualquer mudança em x_0 só fará o critério diminuir

Nosso propósito agora é de estabelecer as condições necessárias de otimalidade do problema (81). Supondo que a função $J(u, x_0)$ admite um ponto de sela e lembrando que pelo teorema 4 podemos calcular $p(0) = \partial J(u, x_0) / \partial x_0$ então as condições de Kuhn-Tucker podem ser utilizadas para determinar a solução de (81).

Para simplificar vamos considerar $X_0 \triangleq \{x_0 \in \mathbb{R}^n / |x_0|^2 \leq 1\}$ e a maximização indicada em (81) traduz-se em:

$$\begin{aligned} p(0) + 2\lambda x_0 &= 0 \\ |x_0|^2 &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \\ \lambda(|x_0|^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

que supondo $p(0) \neq 0$ admite a solução única

$$x_0^* = p(0) / |p(0)| \quad (84)$$

Podemos então concluir que as condições necessárias de otimalidade para o problema (81) são exatamente aquelas estabelecidas pelo teorema 2 com $x(0) = x_0^*$. De maneira similar podemos obter a versão discreta de (84) que é dada por

$$x_0^* = p(-1) / |p(-1)| \quad (85)$$

que deve ser adicionada às condições estabelecidas pelo teorema 3.

Em conclusão devemos notar que estas condições (84) ou (85) não complicam em demasia as equações canônicas do PMP e associam à solução em malha aberta uma propriedade muito importante na prática. Realmente, este mesmo tipo de raciocínio foi usado com muito sucesso por exemplo em Controle descentralizado.

CAP. III : SOLUÇÃO EM MALHA ABERTA - MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo analisamos alguns métodos numéricos que foram especialmente desenvolvidos para tratar problemas de controle ótimo. Somente a versão discreta será apresentada pois os problemas envolvendo sistemas contínuos normalmente são discretizados de forma a viabilizar o uso de modernos computadores digitais.

Mais especificamente, tais métodos podem ser caracterizados como *Primals*, ou seja a partir de uma solução factível inicial outras são iterativamente geradas até que a solução ótima seja obtida. Como teste de otimalidade as equações canônicas do PMP são usadas.

É importante ressaltar que qualquer problema de controle ótimo envolvendo sistemas dinâmicos discretos com horizonte de otimização finito ($T < \infty$) pode ser visto como um problema clássico de Programação Matemática o qual, em princípio, pode ser resolvido por métodos eficientes já bem estabelecidos na literatura. Por exemplo, no capítulo anterior não consideramos problemas com restrições nas variáveis de estado por complicar em demasia o PMP,

ao contrário dentro do presente contexto tal fato se torna absolutamente secundário.

III.1. Iteração no Espaço de Controle

Este foi talvez o primeiro método desenvolvido especificamente para tratar problemas de controle ótimo. Seu desenvolvimento é inteiramente baseado nas equações canônicas do PMP.

Consideramos novamente o problema discreto (45) com horizonte de otimização fixo e estado final livre:

$$\text{Min} \sum_{t=0}^{T-1} f(x(t), u(t)) + g(x(T))$$

$$x(t+1) = F(x(t), u(t)); x(0) = x_0 \quad (86)$$

$$u(t) \in U$$

supondo conhecida uma trajetória factível $u(t)$, $t \in [0, T-1]$ então o valor do critério $J(u)$ pode ser calculado e além disso como consequência imediata de (58) temos

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u(t)} = H_u(x(t), u(t), p(t)); t \in [0, T-1] \quad (87)$$

Esta igualdade é importante pois mostra que o gradiente de $J(u)$ é muito simples de ser calculado. De fato, em (87) as trajetórias do estado e do co-estado devem satisfazer respectivamente (48c e b) que neste caso são completamente *desacopladas*.

Com a trajetória $u(t)$ factível, (48-c) permite determinar $x(t)$ por simples integração a partir da condição inicial $x(0) = x_0$. Em seguida (48-b) pode ser integrada a partir da condição terminal obtendo-se $p(t)$ e finalmente por simples diferenciação (87) é calculada.

É evidente que (48-a) não é satisfeita a menos que a trajetória

factível $u(t)$ seja ótima. Esta condição é usada no algoritmo abaixo como teste de otimalidade

Passo 1 : Determine $u^k \in U$ e faça $k=0$

Passo 2 : Com (87) determine $\nabla J(u^k)$ e a direção factível d^k . Sendo U um conjunto de restrições lineares então

$$d^k = \text{proj}_U \nabla J(u^k)$$

Passo 3 : Se $\|d^k\| < \epsilon$ com ϵ positivo suficientemente pequeno então u^k satisfaz as equações canônicas do PMP. Caso contrário continue ao passo seguinte.

Passo 4 : Determine uma nova solução factível

$$u^{k+1} = \arg \min_{\alpha > 0} J(u^k - \alpha d^k)$$

faça $k=k+1$ e volte ao passo 2.

Um dos aspectos mais importante do método acima é que, sob a hipótese de diferenciabilidade de $H(\cdot)$ em relação ao controle, sua convergência está sempre assegurada. Entretanto sua taxa de convergência é tipicamente *linear* e conseqüentemente pode tornar-se ineficiente em problemas de grande porte.

Dentro deste mesmo contexto de métodos primais, podemos também considerar o seguinte procedimento iterativo

$$u^{k+1} = \arg \min_{v \in U} H(x^k, v, p^k) \quad (88)$$

que é inicializado com qualquer $u^0 \in U$. A grande vantagem de (88) é que a busca unidimensional do passo 4 é completamente desnecessária. Em contra parti-

da, embora qualquer ponto fixo $u^* = u^{k+1} = u^k$ satisfaça as equações canônicas do PMP, sua convergência não pode ser sempre garantida.

III.2. Gradiente Projetado

Até agora consideramos problemas inclusive com dinâmica não linear, porém sem restrições nas variáveis de estado. Vamos agora considerar um problema com restrições nas variáveis de estado mas com restrições dinâmicas lineares:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=0}^{T-1} f(x(t), u(t)) + g(x(T))$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + y(t)$$

$$u(t) \in U$$

$$x(t+1) \in X$$

onde $x(0) = x_0$ e a entrada $y(t)$, $t \in [0, T-1]$ são supostas conhecidas. Por simplicidade os conjuntos U e X definem limitantes inferiores e superiores respectivamente em $u(t)$ e $x(t+1)$ para todo $t \in [0, T-1]$, ou seja

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m \quad \text{t.q.} \quad \underline{u} \leq u \leq \bar{u}\} \quad (90)$$

$$X \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \quad \text{t.q.} \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

Como a dinâmica indicada em (89) é linear, podemos obter sua solução em forma fechada $x(t) = X(x_0, u(t), y(t))$ e consequentemente definindo $z' \triangleq [u(0)' x(1)' \dots u(T-1)' x(T)']$, (89) se reduz a:

$$\text{Min} \quad \psi(z)$$

$$Gz = y$$

$$z \in Z$$

(91)

É importante notar que $\dim(z) = (n+m)T$ e que devido à (90) e à definição do vetor z acima adotada, o conjunto Z é do mesmo tipo que U e X . Ademais a matriz G é simples de ser determinada a partir de A e B e a função $\psi(z)$, bem como seu gradiente $\nabla\psi(z)$ podem ser imediatamente avaliados para qualquer z factível.

O problema (91) pode ser resolvido por um grande número de diferentes métodos de programação não linear. O método que será apresentado em seguida permite levar em conta uma propriedade importante, geralmente presente em problemas de controle ótimo do tipo em consideração.

Propriedade : Seja $Z_G \triangleq \{z \text{ t.q. } Gz=y\}$ então para $\forall z \in Z_G$, o número de desigualdades ativas em Z é muito menor que o número de restrições de igualdade que definem Z_G .

Em outras palavras, sendo z um elemento qualquer de Z_G então $x(t) = X(x_0, u(t), y(t))$ satisfaz a equação às diferenças (89), e o número de vezes que a trajetória de controle e a do estado correspondente tocam as restrições (90), em cada instante de tempo, é muito pequeno quando comparado com a dimensão do vetor de estado.

Supondo que conhecemos z^0 factível, nosso propósito é determinar iterativamente a sequência $\{z^k\}_0^\infty$ de tal forma que cada z^k seja factível e convergentes para z^* que satisfaz as condições de Kuhn-Tucker quando aplicadas à (91). Podemos determinar z^{k+1} a partir de z^k resolvendo

$$\begin{cases} z^{k+1} = \arg \min_{\alpha \geq 0} \psi(z^k - \alpha d(z^k)) \\ z^0 = \text{dado} ; k=0,1,\dots \end{cases} \quad (92)$$

onde $d(\cdot) \in \mathbb{R}^{(n+m)T}$ é uma direção *usável* a ser definida.

Dentre as várias maneiras possíveis de se determinar a direção $d(\cdot)$ propomos a seguinte

$$d(z) \triangleq \arg \min_{\xi} \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla\psi(z) - \xi\|^2 \text{ s.a. } G\xi = 0 ; S(z)\xi \leq 0 \right\} \quad (93)$$

onde $S(z) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{(n+m)T}$ é uma matriz do tipo *signal* assim definida

$$\{S(z)_{ij}\} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_j = \underline{z}_j \\ -1 & \text{se } z_j = \bar{z}_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (94)$$

Note que a dimensão r é igual ao número de restrições ativas em Z . Ou seja se alguma componente z_j não for igual a qualquer dos dois limitantes então a linha correspondente de $S(z)$ é nula e não precisa ser considerada.

Definindo $\Omega(z) \triangleq \{\xi \text{ t.q. } S(z)\xi \leq 0\}$, o problema (93) pode ser reescrito na forma:

$$d(z) \triangleq \text{Proj}_{N(G) \cap \Omega(z)} \nabla\psi(z) \quad (95)$$

cuja interpretação é simples: $d(\cdot)$ é a projeção ortogonal do gradiente de $\psi(\cdot)$ sobre a intersecção do espaço nulo de G com $\Omega(\cdot)$. É claro que se $S(z) = 0$ então $\Omega(z) \equiv \mathbb{R}^{(n+m)T}$ e (95) se reduz a

$$\begin{aligned} d(z) &= \text{proj}_{N(G)} \nabla\psi(z) \\ &= P \nabla\psi(z) \end{aligned} \quad (96)$$

onde $P = I - G'(GG')^{-1}G$ é o operador projeção ortogonal de Rosen.

A dificuldade maior que está explícita em (95) é que $d(z)$ é obtida após projeção de $\nabla\psi(z)$ em um sub-espaço linear que se modifica em cada iteração de (92). Entretanto a parte mais custosa em (95) diz respeito à projeção sobre o espaço nulo de G que permanece sempre constante.

Definição 1 : Um vetor $\nabla_m \psi$ é chamado *gradiente modificado* de $\psi(\cdot)$ com relação

a $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{(m+n)T}$ se ele satisfaz

$$\text{proj}_{\mathcal{A}} \nabla_m \psi = \text{proj}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \nabla \psi \quad (97)$$

Esta definição é importante pois considerando $\mathcal{A} \triangleq N(G)$ e $\mathcal{B} \triangleq \Omega(z)$ então (95) pode ser reescrita na forma

$$d(z) = P \nabla_m \psi(z) \quad (98)$$

ou seja, a matriz P só precisa ser calculada uma única vez. Nas iterações subsequentes somente o gradiente modificado deve ser recalculado. Neste sentido, seja o problema dual associado a (93)

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \text{Min} \\ \lambda, \mu \geq 0 & \xi \end{array} L(\xi, \lambda, \mu) \quad (99)$$

onde $L(\cdot)$ é a função Lagrangeana dada por:

$$L(\cdot) \triangleq \frac{1}{2} \|\nabla \psi(z)\|^2 - \xi \Gamma^2 + \lambda' C\xi + \mu' S(z)\xi \quad (100)$$

É importante notar que (99) e (93) são absolutamente equivalentes na medida que (93) é um problema estritamente convexo.

Teorema 5 : O gradiente modificado de $\psi(\cdot)$ é dado por

$$\nabla_m \psi(z) = \nabla \psi(z) - S(z)' \mu(z) \quad (101)$$

onde $\mu(\cdot) \in \mathbb{R}^r$ resolve o seguinte problema quadrático

$$\mu(z) = \arg \text{Max}_{\mu \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2} \mu' Q(z) \mu + C(z)' \mu \right\} \quad (102)$$

onde $Q(z) \triangleq S(z) P S(z)'$ e $C(z) \triangleq S(z) P \nabla \psi(z)$.

Prova : É simples verificar-se que a solução ótima de (99) pode ser obtida re

solvendo-se

$$\begin{aligned} \text{Max } L(\xi(\mu), \lambda(\mu), \mu) \\ \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (103)$$

onde $\xi(\mu)$ e $\lambda(\mu)$ satisfazem $L_{\xi} = L_{\lambda} = 0$ pois estas variáveis são irrestritas. Consequentemente

$$\begin{bmatrix} I & G' \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\psi(z) - S(z)' \mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Por outro lado, como a equação ã diferenças em questão admite solução única, então G é uma matriz de rank completo. Isto permite explicitar a solução de (104)

$$\begin{bmatrix} \xi(\mu) \\ \lambda(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ (GG')^{-1}G \end{bmatrix} (\nabla\psi(z) - S(z)' \mu) \quad (105)$$

A primeira equação acima implica imediatamente que

$$\begin{aligned} d(z) &= \xi(\mu) \\ &= P(\nabla\psi(z) - S(z)' \mu) \end{aligned} \quad (106)$$

Acontece também que pela definição 1, o vetor gradiente modificado satisfaz (98) que por simples comparação com (106) resulta (101).

Finalmente, substituindo (105) em (103), após simples porém trabalhosa manipulação algébrica obtemos (102), o que prova o teorema proposto.

É importante notar que a dificuldade de obtenção do gradiente modificado está inteiramente concentrada na solução do problema (102). Ocorre entretanto que sua dimensão é exatamente o número de restrições ativas em Z e portanto sendo válida a propriedade anterior, sua solução é muito mais simples que a do problema original (93).

Podemos resumir os passos do algoritmo da seguinte forma:

Passo 1 : Determine $z^k \in Z_G \cap Z$ e faça $k=0$

Passo 2 : Determine o operador projeção ortogonal: $P = I - G'(GG')^{-1}G$

Passo 3 : Calcule com z^k as matrizes $Q(z^k)$ e $C(z^k)$ e resolva

$$\mu(z^k) = \arg \max_{\mu \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2} \mu' Q(z^k) \mu + C(z^k)' \mu \right\}$$

Passo 4 : Determine o gradiente modificado e a direção usável

$$\nabla_m \psi(z^k) = \nabla \psi(z^k) - S(z^k)' \mu(z^k)$$

$$d(z^k) = P \nabla_m \psi(z^k)$$

Passo 5 : Se $\|d(z^k)\| < \epsilon$ para ϵ positivo suficientemente pequeno, pare, z^k é a solução ótima procurada. Caso contrário vá ao passo 6.

Passo 6 : Determine z^{k+1} resolvendo (busca unidimensional)

$$z^{k+1} = \arg \min_{\alpha \geq 0} \psi(z^k - \alpha d(z^k))$$

faça $k = k + 1$ e volte ao passo 3.

Como foi comentado anteriormente, este algoritmo permite isolar no passo 2 o cálculo da matriz de projeção P que é realizado uma única vez durante todo o processo iterativo. Podemos ainda simplificar consideravelmente sua determinação utilizando o mesmo Teorema 5.

Neste sentido vamos decompor a matriz G por linhas, isto é

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} ; \quad g_k' \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 1} \quad (107)$$

e definimos $\mathcal{A} \triangleq N([g_1' \dots g_k'])$ e $\mathcal{B} \triangleq N(g_{k+1}')$. Com (98) podemos impor

$$\begin{aligned}
 d(z) &= P_{k+1} \nabla \psi(z) \\
 &= P_k \nabla_m \psi(z) \\
 &= P_k (\nabla \psi(z) - \varepsilon_{k+1}^i \mu(z))
 \end{aligned} \tag{108}$$

onde $\mu(z)$ satisfaz (102) porém com uma diferença importante. Neste caso a restrição de não negatividade $\mu \geq 0$ não deve ser imposta pois só restrições de igualdade estão sendo consideradas. Portanto

$$\mu(z) = \frac{\varepsilon_{k+1}^i P_k}{\varepsilon_{k+1}^i P_k \varepsilon_{k+1}^i} \nabla \psi(z) \tag{109}$$

que conjuntamente com (108) fornece

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varepsilon_{k+1}^i \varepsilon_{k+1}^i P_k}{\varepsilon_{k+1}^i P_k \varepsilon_{k+1}^i} \tag{110}$$

Esta equação recursiva, ao ser inicializada com $P_0 = I$, permite determinar após N iterações a matriz de projeção P .

Este resultado já conhecido há longo tempo, permite evidenciar o processo de cálculo do algoritmo anteriormente apresentado.

Finalmente devemos enfatizar que sua eficiência está intimamente ligada com uma propriedade que na maioria das vezes se verifica. Realmente, em inúmeras aplicações práticas que foram realizadas ela sempre se mostrou presente de forma marcante.

III.3. Decomposição Mín/Max

Analisaremos agora um problema *não convencional* de controle ótimo no sentido que o PMP não é diretamente aplicável devido a não diferenciabilidade de sua função objetivo.

Tais problemas aparecem na prática quando desejamos mudar o ponto

de operação de um determinado sistema de controle e ao mesmo tempo inibir indesejáveis amplitudes de sobre-sinal (overshoot) que possam comprometer o seu desempenho. Como exemplo podemos citar o sistema *Posicast* desenvolvido em 1957 para sistemas contínuos de 2ª ordem.

De maneira geral o seguinte problema deve ser considerado

$$\min_{u(t)} \max_{0 \leq t \leq T-1} f(x(t), u(t))$$

$$x(t+1) = F(x(t), u(t)); \quad x(0) = x_0 \quad (111)$$

$$u(t) \in U$$

Como anteriormente, (111) pode ser reescrito na forma (46). Porém mesmo assumindo que $f \in C^1$, geralmente $J(u)$ não é diferenciável. Neste sentido, antes de aplicarmos o PMP, alguma manipulação deve ser adotada de maneira a eliminar esta dificuldade. Isto é feito tendo como base a Teoria de Dualidade, assumindo que (111) seja *convexo*.

Teorema 6 : Suponha que (111) seja convexo e que $x(t) = X(x_0, u(t))$ seja a solução da equação à diferenças indicada em (111). Então

$$\min_{u \in U} J(u) = \max_{\gamma \in \Lambda} \min_{u \in U} \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t) f(x(t), u(t)) \quad (112)$$

$$\text{onde } \Lambda \triangleq \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^T \text{ t.q. } \gamma(t) \geq 0 \text{ e } \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t) = 1 \right\}.$$

Prova : É fácil notar que para qualquer $u(t) \in U$ dado temos:

$$J(u) = \min_{\sigma} \{ \sigma \text{ s.a. } \sigma \geq f(x(t), u(t)), \quad t=0, \dots, T-1 \} \quad (113)$$

Assumindo que (111) seja convexo, podemos determinar o dual do lado direito da igualdade acima e obtemos

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} J(u) &= \min_{\sigma, u \in U} \{ \sigma \text{ s.a. } \sigma \geq f(x(t), u(t)), t=0, \dots, T-1 \} \\ &= \max_{\gamma \in \Lambda} \min_{\sigma, u \in U} \left\{ \sigma + \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t) (f(x(t), u(t)) - \sigma) \right\} \end{aligned} \quad (114)$$

Finalmente notando que $\gamma \in \Lambda$ então a contribuição devido a σ em (114) é nula e obtemos diretamente (112) que é o resultado desejado.

Podemos concluir que o problema (111) é equivalente a

$$\max_{\gamma \in \Lambda} \phi(\gamma) \quad (115)$$

onde $\phi(\gamma)$ é uma função de variável real definida em Λ por

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &\triangleq \min_{u \in U} \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t) f(x(t), u(t)) \\ &\text{s.a. } x(t+1) = F(x(t), u(t)); x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (116)$$

que apresenta as seguintes propriedades que são fundamentais na solução de (115):

- * $\phi(\cdot)$ é uma função *côncava* sobre o domínio convexo Λ .
- * Para $\gamma \in \Lambda$ dado, o valor de $\phi(\gamma)$ pode ser determinado pela solução de um problema clássico de controle ótimo (116).
- * Embora $\phi(\cdot)$ não seja necessariamente diferenciável em todos os pontos de seu domínio, o vetor

$$\theta(\gamma) \triangleq [f(x(0), u(0)) \dots f(x(T-1), u(T-1))] \quad (117)$$

é um de seus sub-gradientes ou seja $\theta(\gamma) \in \partial\phi(\gamma)$.

Estas propriedades nos permitem elaborar um algoritmo baseado em linearização externa para resolvermos o problema dual (115) e consequentemente

te o seu Primal (111).

De fato, sendo $\theta(\gamma)$ um elemento do seu conjunto de sub-gradientes então por definição

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &\leq \phi(\gamma^k) + \theta(\gamma^k)' (\gamma - \gamma^k) \\ &\leq \theta(\gamma^k)' \gamma ; \quad \forall \gamma, \gamma^k \in \Lambda \end{aligned} \quad (118)$$

ou seja, $\phi(\gamma)$ admite em todos os pontos de seu domínio, um hiperplano suporte que passa por $\phi(\gamma^k)$ e tem "declividade" $\theta(\gamma^k)$.

Passo 1 : Para $\gamma^k \in \Lambda$, resolva (116) e determine $\phi(\gamma^k)$ e $\theta(\gamma^k)$

Passo 2 : Resolva o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{Max } &\sigma \\ \text{s.a. } &\sigma \leq \theta(\gamma^p)' \gamma \quad p = 1, 2, \dots, k \\ &\gamma \in \Lambda \end{aligned}$$

seja (σ^k, γ^k) sua solução ótima.

Passo 3 : Se $\sigma^k - \phi(\gamma^k) \leq \epsilon$ com ϵ positivo suficientemente pequeno pare, a solução corrente é ótima. Caso contrário faça $k = k + 1$ e volte ao passo 1.

Devemos finalmente deixar claro que os métodos aqui apresentados foram aplicados em inúmeros problemas de grande porte tais como: Controle Ótimo de Usinas Hidráulicas e Encaminhamento Ótimo de Chamadas Telefônicas.

Sempre foram observados desempenhos sensivelmente superiores a outras metodologias existentes.

Em particular em um problema real de controle ótimo de usinas hidráulicas com 96 variáveis de estado e controle e 240 restrições, a proprie-

dade anteriormente discutida se verificou de maneira surpreendente. De fato, o número máximo de restrições ativas em Z correspondem a 26% do total enquanto que o número médio foi de somente 9,1% do total de restrições. Isto como sabemos contribui de forma decisiva para aumentar a eficiência da metodologia proposta.

Por outro lado, o problema linear definido no passo 2, com 12 variáveis, foi resolvido 19 vezes para se atingir uma solução com a precisão desejada. Em todos os exemplos resolvidos sempre a convergência foi conseguida.

CAP. IV : SOLUÇÃO EM MALHA FECHADA - ESTABILIDADE

Neste capítulo analisamos vários aspectos relativos à estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo. Ambos os casos contínuo e discreto serão considerados tendo como base o seguinte modelo em malha aberta

$$F(x, u) = Ax + Bu \quad (119)$$

onde $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$. Assumimos que o par (A, B) é completamente controlável e que a lei de controle é dada por uma realimentação linear do estado

$$\begin{aligned} u(t) &\stackrel{\Delta}{=} \mu(x(t)) \\ &= -Kx(t) \end{aligned} \quad (120)$$

onde $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é a matriz de ganho a ser oportunamente determinada.

Definição 2 : O ponto de equilíbrio $x = 0$ de (119-120) é *assintoticamente estável* se para qualquer $\epsilon > 0$ existir $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$a) \quad \|x_0\| \leq \delta(\epsilon) \rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon$$

$$b) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Esta definição deixa claro que a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema em estudo depende do seu comportamento no limite para t tendendo a infinito.

Sendo $\mu(x(t))$ em (120) determinada a partir de um problema de controle ótimo este necessariamente deve ser considerado com horizonte de otimização infinito. Neste sentido, devemos assumir que a EHJB admita uma *solução estacionária*, isto é $v(x, t)$ na verdade independe do tempo e será simplesmente denotada por $v(x)$.

Com esta hipótese, no caso discreto, (61) se reduz a

$$\begin{aligned} v(x) &= \min_{u \in U} \{ f(x, u) + v(F(x, u)) \} \\ &= f(x, \mu(x)) + v(F(x, \mu(x))), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (121)$$

e no caso contínuo, lembrando que $v_t(x) = 0$, com (73) vem

$$\begin{aligned} 0 &= \min_{u \in U} H(x, u, v_x(x)) \\ &= H(x, \mu(x), v_x(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (122)$$

Para podermos definir completamente estas duas últimas equações, nos resta definir a função $f(x, u)$, a qual será tomada como uma função quadrática:

$$f(x, u) = \frac{1}{2} x'Qx + \frac{1}{2} u'Ru \quad (123)$$

onde Q e R são duas matrizes simétricas definidas positivas com dimensões apropriadas.

IV.1. Equação de Riccati Estacionária

Começando pelo caso contínuo para o qual a função Hamiltoniana é dada por

$$H(x, u, v_x) = \frac{1}{2} x' Q x + \frac{1}{2} u' R u + v_x' (A x + B u) \quad (124)$$

com (122) vem imediatamente $u(x) = -R^{-1} B' v_x(x)$. Com a qual o Hamiltoniano acima deve ser nulo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Temos então

$$v_x' A x - \frac{1}{2} v_x' B R^{-1} B' v_x + \frac{1}{2} x' Q x = 0 \quad (125)$$

cuja solução pode ser colocada na forma $v(x) = \frac{1}{2} x' P x$ onde $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$A' P + P A - P B R^{-1} B' P + Q = 0 \quad (126)$$

que ao ser resolvida permite imediatamente a determinação da matriz de ganho em (120), isto é $K = R^{-1} B' P$.

É importante notar que a solução da equação de Riccati (126) é única e definida positiva. De fato

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_0' P x_0 &= v(x_0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x' \{Q + K' R K\} x dt \\ &> 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (127)$$

Consequentemente $v(x)$ se qualifica como uma possível função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada: $\dot{x} = (A - BK)x$. Tomando sua derivada temporal em relação à uma trajetória genérica vem:

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) &= \frac{1}{2} x' \{ (A - BK)'P + P(A - BK) \} x \\ &= -\frac{1}{2} x' (Q + K'RK) x \\ &< 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}\quad (128)$$

e portanto concluímos que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada. Além disso, com a função $v(x)$ podemos estimar o grau de estabilidade conseguido com o ganho K já calculado. Neste sentido, definindo

$$\sigma_c \triangleq \min_{x \neq 0} \frac{1}{2} \frac{x'Qx}{x'Px} > 0 \quad (129)$$

$$\theta^2 \triangleq \|P\| \|P^{-1}\| \geq 1$$

a inequação (128) pode ser reescrita na forma $\dot{v} \leq -2\sigma_c v$ a qual impõe

$$\|x(t)\|^2 \leq \theta^2 e^{-2\sigma_c t} \|x_0\|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (130)$$

Notamos, então que a definição 2 se aplica completamente se considerarmos $\delta(\epsilon) = \epsilon/\theta$. Além disso, devido à (130), nenhum modo próprio de (130) pode ser mais "rápido" que $e^{-\sigma_c t}$ e portanto, sendo $\lambda_j(\cdot)$ os autovalores de (\cdot) vem

$$\operatorname{Re} \{ \lambda_j(A - BK) \} \leq -\sigma_c \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (131)$$

que é o resultado desejado.

Finalmente, devemos salientar um aspecto extremamente favorável da equação de Riccati. Como podemos notar (126) é uma equação matricial não linear que à primeira vista pode ser difícil de ser resolvida numericamente.

Felizmente, esta impressão inicial não é verdadeira. Podemos reescrever (126) na forma equivalente

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + Q + K'RK = 0 \quad (132)$$

e adotar o seguinte processo iterativo

$$(A - BK_i)'P_i + P_i(A - BK_i) + Q + K_i'RK_i = 0 \quad (133)$$

$$K_{i+1} = R^{-1}B'P_i$$

que nada mais é que o método de Newton-Raphson aplicado diretamente em (132). Em cada iteração uma equação linear (eq. de Lyapunov) deve ser resolvida e (133) sempre converge assintoticamente, isto é, $P_1 \geq P_2 \geq \dots P_i \geq P_{i+1} \dots$ desde que K_0 seja escolhido de tal forma que $(A - BK_0)$ seja uma matriz com todos autovalores com partes real negativas.

O caso discreto pode ser analisado de maneira similar. Considerando-se $v(x) = \frac{1}{2} x'Px$ a lei ótima de controle é obtida por

$$\mu(x) = \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} x'Qx + \frac{1}{2} u'Ru + \frac{1}{2} (Ax + Bu)'P(Ax + Bu) \right\} \quad (134)$$

ou seja $\mu(x) = -(R + B'PB)^{-1}B'PAx$. Por outro lado, (121) deve ser satisfeita impondo que $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ deve satisfazer a chamada equação de Riccati discreta

$$A'PA - P + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA = 0 \quad (135)$$

que após ser resolvida permite determinar imediatamente a matriz de ganho de realimentação $K = (R + B'PB)^{-1}B'PA$.

Como no caso contínuo, a solução de (135) é única e definida positiva pois

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} x_0' P x_0 &= v(x_0) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \{x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t)\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} x(t)' \{Q + K' R K\} x(t) \\
&> 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{136}$$

e se qualifica como uma possível função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada $x(t+1) = (A - BK)x(t)$. A variação de $v(\cdot)$ sobre uma trajetória genérica satisfaz

$$\begin{aligned}
v(x(t+1)) &= \frac{1}{2} x(t)' (A - BK)' P (A - BK) x(t) \\
&= \frac{1}{2} x(t)' P x(t) - \frac{1}{2} x(t)' (Q + K' R K) x(t) \\
&< v(x(t)) \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t=0,1,\dots
\end{aligned} \tag{137}$$

a qual nos permite concluir que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Seu grau de estabilidade também pode ser facilmente estimado após definirmos

$$\sigma_d \triangleq \left\{ 1 - \min_{x \neq 0} \frac{x' Q x}{x' P x} \right\}^{1/2} \tag{138}$$

com o qual (137) se reduz a $v(x(t+1)) \leq \sigma_d^2 v(x(t))$ e portanto temos

$$\|x(t)\| \leq \theta(\sigma_d)^t \|x_0\| \tag{139}$$

Como $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\theta$ a definição 2 é satisfeita e concluimos ainda que os polos do sistema em malha fechada satisfazem

$$|\lambda_j(A - BK)| \leq \sigma_d \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (140)$$

ou seja, se situam dentro do círculo unitário no plano complexo, pois $0 \leq \sigma_d < 1$. Isto pode ser provado a partir da identidade matricial $P - PB(R + B'PB)^{-1}B'P = (P^{-1} + BR^{-1}B')^{-1}$ que levada a (135) fornece

$$P = Q + A'(P^{-1} + BR^{-1}B')^{-1}A \quad (141)$$

$$\geq Q$$

e conseqüentemente fica evidente que

$$\min_{x \neq 0} \frac{x'Qx}{x'Px} \leq 1 \quad (142)$$

o que com (138) justifica a afirmativa feita acima.

Como no caso contínuo, a solução da equação de Riccati discreta pode ser obtida com o método de Newton-Raphson o qual se resume na seguinte recorrência linear:

$$(A - BK_i)'P_i(A - BK_i) - P_i + Q + K_i'RK_i = 0 \quad (143)$$

$$K_{i+1} = (R + B'P_iB)^{-1}B'P_iA$$

que sempre converge assintoticamente, isto é, $P_1 \geq P_2 \geq \dots P_i \geq P_{i+1} \dots$ desde que inicializada com K_0 de tal forma que a matriz $(A - BK_0)$ tenha todos seus autovalores com módulos menores que um.

IV.2. Controle com Restrições de Estrutura

Desde o início da década passada, com o desenvolvimento de métodos numéricos cada vez mais eficientes para o tratamento de problemas de controle ótimo, foi possível introduzir restrições que traduzem certas necessidades de

ordem prática.

Por exemplo seja $y = h(x)$ com $y \in \mathbb{R}^r$ as variáveis de saída associadas a um determinado sistema dinâmico. Em cada instante de tempo somente $y(t) = h(x(t))$ é conhecida (mensurável), o que permite de forma indireta conhecer-se as variáveis de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ porém não exatamente a menos de situações triviais que não serão consideradas.

Neste caso é de interesse que a lei de controle $\mu(x)$ possa ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu_s(h(x)) \\ &= \mu_s(y)\end{aligned}\tag{144}$$

que traduz o fato que as variáveis realimentadas são exatamente aquelas exatamente conhecidas em todo instante de tempo. Temos então uma *realimentação de saída* que requer que a seguinte restrição estrutural seja satisfeita

$$\exists \mu_s(\cdot) \text{ t.q. } \mu(\xi) = \mu_s(h(\xi)); \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\tag{145}$$

No caso linear $h(x) = Cx$, com $C \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ de rank completo, a realimentação de estado $\mu(x) = -Kx$ pode ser colocada na forma de realimentação de saída $\mu_s(y) = -Gy$ desde que $\exists G \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ tal que $K = GC$. Isto é possível se e somente se

$$\mathcal{R}(K') \subseteq \mathcal{R}(C')\tag{146}$$

onde $\mathcal{R}(\cdot)$ indica o espaço imagem (range) de (\cdot) . Entretanto, como o espaço nulo de C é ortogonal ao range de C' , concluímos com (146) que as projeções de todas as colunas de K' no espaço nulo de C devem ser nulas, ou seja a matriz K deve satisfazer a restrição matricial:

$$K(I - C'(CC')^{-1}C) = 0\tag{147}$$

Esta restrição na verdade impõe uma estrutura especial na matriz de ganho e garante que ao ser satisfeita a implementação da lei de controle possa ser

realizada via realimentação de saída.

Um outro exemplo muito importante de problemas com restrições estruturais é o chamado *controle descentralizado* o qual analisaremos em seguida.

Suponha que os vetores de estado e de controle são compostos por N sub-vetores assim definidos

$$\begin{aligned} x' &\triangleq [x'_1, x'_2, \dots, x'_N] \\ u' &\triangleq [u'_1, u'_2, \dots, u'_N] \end{aligned} \quad (148)$$

onde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ e $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $i=1 \dots N$. Esta situação ocorre frequentemente quando se modela sistemas dinâmicos de grande porte compostos por um determinado número (N) de subsistemas interconectados entre si. As variáveis x_i e u_i neste caso representam respectivamente o estado e o controle (locais) de cada subsistema. Na figura 4 o caso $N = 3$ é representado graficamente.

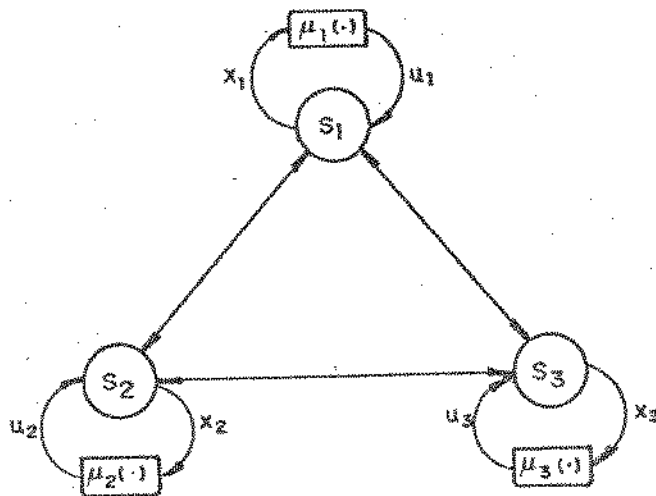


Fig. 4 - Estrutura descentralizada de controle.

De maneira a reduzir as trocas de informações entre subsistemas, a estrutura da lei de controle deve apresentar a forma

$$\mu(x) \stackrel{\Delta}{=} [\mu_1(x_1)', \dots, \mu_N(x_N)'] \quad (149)$$

De fato, neste caso, o controle em cada subsistema só depende das variáveis de estado do mesmo subsistema.

Considerando $\mu(x) = -Kx$ então (149) se verifica sempre que K seja uma matriz bloco diagonal, isto é

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & \\ 0 & & K_N \end{bmatrix} \quad (150)$$

onde naturalmente $K_i \in \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$ $i=1, 2, \dots, N$. É claro que (150) pode ser reescrita como uma restrição sobre a matriz K

$$K - \text{bloc diag} \{K_1, K_2, \dots, K_N\} = 0 \quad (151)$$

significando que todos os seus elementos fora da parte bloco diagonal devem ser nulos.

Estes dois exemplos são dois casos particulares importantes de controle com restrição de estrutura. De forma geral, devemos impor que $K \in \mathcal{S} \stackrel{\Delta}{=} \{K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \text{ t.q. } F(K) = 0\}$ onde $F(\cdot)$ é uma função matricial qualquer. Nos dois exemplos anteriores esta função pode ser imediatamente determinada a partir de (147) e (151).

Em seguida analisaremos alguns aspectos teóricos de problemas de controle ótimo com restrições estruturais a partir do desenvolvimento do que chamamos de equação de Riccati generalizada. No cap. VI vários exemplos ilustrativos serão resolvidos e apresentados em detalhes.

IV.3. Equação de Riccati Generalizada

Vamos novamente considerar o seguinte problema linear-quadrático relativo a sistemas contínuos:

$$\min \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru) dt \quad (152)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad x(0) = x_0$$

cuja solução ótima é dada por $u(t) = -K^*x(t)$; $K^* \triangleq R^{-1}B'P^*$ sendo P^* a solução definida positiva da equação de Riccati estacionária (126). Além disso o valor mínimo do critério pode ser facilmente determinado por $J^* = \frac{1}{2} x_0' P^* x_0$ e

$$\text{Sp}(A - BK^*) \subset \mathbb{C}^- \quad (153)$$

onde $\text{Sp}(\cdot)$ denota o conjunto dos autovalores de (\cdot) e \mathbb{C}^- representa o semi-plano esquerdo complexo. Deve-se entretanto notar que estas propriedades só foram conseguidas pois nenhuma restrição sobre o ganho K^* foi imposta.

Sabemos que com a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, o valor do critério quadrático de (152) pode ser determinado o que nos permite definir o problema de controle ótimo com restrição de estrutura na forma

$$\min_{K \in \mathcal{S}} J(K) \quad (154)$$

o qual infelizmente não pode ser resolvido com a equação de Riccati pois $K^* \notin \mathcal{S}$. Em seguida apresentamos uma generalização da equação de Riccati que permite tratar este tipo de problema.

Teorema 7 : Se a matriz $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$K + L = R^{-1}B'P \quad (155)$$

onde $L \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é uma matriz arbitrária e $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é a solução definida

positiva da equação de Riccati modificada

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q + L'RL = 0 \quad (156)$$

então $\text{Sp}(A - BK) \subset \mathbb{C}^-$.

Prova : Sendo P simétrica e definida positiva podemos considerar a seguinte função de Lyapunov: $v(x) = x'Px$ e portanto:

$$\dot{v}(x) = x'\{(A - BK)'P + P(A - BK)\}x \quad (157)$$

com (155) e (156) vem imediatamente

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x'\{-Q - L'RL - PBR^{-1}B'P + L'B'P + PBL\}x \\ &= -x'\{Q + (R^{-1}B'P - L)'R(R^{-1}B'P - L)\}x \\ &= -x'(Q + K'RK)x \\ &< 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (158)$$

o que prova o teorema proposto.

O resultado deste teorema deve ser entendido da seguinte forma. Com uma matriz L qualquer, (156) é resolvida obtendo-se P , estas duas matrizes permitem, com (155), determinar K sendo que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Consequentemente o valor do critério $J(K)$ pode ser calculado.

Teorema 8 : Suponha que $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do teorema 7 então

$$\begin{aligned} J(K) &= \frac{1}{2} x_0' P x_0 \\ &\geq \frac{1}{2} x_0' P^* x_0 = J(K^*) \end{aligned} \quad (159)$$

Prova : Com base no teorema anterior e na definição de $J(K)$ temos imediatamente

$$\begin{aligned}
J(K) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x'(Q + K'RK)x \, dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{v}(x(\tau)) \, d\tau \\
&= \frac{1}{2} v(x(0)) \\
&= \frac{1}{2} x_0' P x_0
\end{aligned} \tag{160}$$

pois o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Para provarmos que $J(K) \geq J(K^*)$, $\forall L \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, procedemos da seguinte maneira. Seja a seguinte equação de Riccati parametrizada em $\beta \in [0, 1]$

$$A'W_\beta + W_\beta A - W_\beta B R^{-1} B' W_\beta + Q + \beta L' R L = 0 \tag{161}$$

Por construção $P = W_1$ e $P^* = W_0$. Utilizando o teorema da função implícita a derivada $dW_\beta/d\beta$ pode ser calculada para todo $\beta \in [0, 1]$, ou seja

$$(A - B R^{-1} B' W_\beta)' \frac{dW_\beta}{d\beta} + \frac{dW_\beta}{d\beta} (A - B R^{-1} B' W_\beta) + L' R L = 0 \tag{162}$$

Ocorre entretanto que $L' R L \geq 0$, $\forall L \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $\text{Sp}(A - B R^{-1} B' W_\beta) \subset \mathbb{C}^-$ $\forall \beta \in [0, 1]$ implicando que $dW_\beta/d\beta \geq 0$ sendo portanto W_β uma função crescente de β . Consequentemente escolhendo $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$ temos

$$P = W_1 \geq W_0 = P^* \tag{163}$$

que é o resultado desejado.

É fundamental notar-se que nestes dois últimos teoremas a matriz L é completamente arbitrária. Por exemplo, fazendo $L = 0$ os resultados clássicos do problema linear-quadrático são conseguidos.

Por outro lado um grau de liberdade adicional foi criado (a escolha de L) e deve ser usado de tal forma a factibilizar a solução de (154), ou seja

$$K = R^{-1} B' P - L \in \mathcal{S} \tag{164}$$

Para um dado conjunto \mathcal{S} , a matriz L que satisfaz (164) não é ne-

cessariamente única. Assim sendo, temos interesse em determiná-la de tal forma a diminuir o grau de sub-otimalidade entre $J(K)$ e $J(K^*)$. A partir do teorema 8, concluímos que isto pode ser conseguido resolvendo-se

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|L\|^2 \quad \text{s.a.} \quad R^{-1}B'P - L \in \mathcal{S} \right\} \quad (165)$$

onde $\|\cdot\|$ indica uma norma qualquer no $R^m \times R^n$.

Lema 9 : Suponha que \mathcal{S} seja definido com $F(K) = K(I - C'(CC')^{-1}C)$ (realimentação de saída) e que $\|L\|^2 \triangleq \text{Tr}(L'L)$ então a solução ótima de (165) é dada por

$$L = F(R^{-1}B'P) \quad (166)$$

Prova : Como a função matricial que define \mathcal{S} é linear, o problema (165) é convexo. Sua solução ótima é então perfeitamente caracterizada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = 0 \quad (167)$$

onde $\mathcal{L}(\cdot)$ é a função Lagrangeana e $\Lambda \in R^m \times R^n$ é a matriz de variáveis duais associada à restrição $F(R^{-1}B'P - L) = 0$. Portanto:

$$\mathcal{L} \triangleq \frac{1}{2} \text{Tr}(L'L) + \text{Tr}(\Lambda'F(R^{-1}B'P - L)) \quad (168)$$

com a qual podemos reescrever (167) na forma[§]

$$\begin{cases} L - \Lambda H = 0 \\ \Lambda H - R^{-1}B'PH = 0 \end{cases} \quad (169)$$

onde $H \triangleq I - C'(CC')^{-1}C$. Pós-multiplicando a primeira equação por H e usando a propriedade $H^2 = H$, com a segunda equação vem imediatamente $R^{-1}B'PH - \Lambda H = 0$.

[§] Em seguida, neste mesmo capítulo, analisaremos problemas de otimização deste tipo, ou seja que envolvam funções matriciais e restrições como em (165)

Novamente com a primeira equação temos

$$\begin{aligned} L &= R^{-1}B'PH \\ &= F(R^{-1}B'P) \end{aligned} \quad (170)$$

que nada mais é que (166). Isto prova o teorema proposto.

É importante notar que com (166) podemos determinar $K = R^{-1}B'P - L = R^{-1}B'PC'(CC')^{-1}C$ a qual pode ser reescrita na forma $K = GC \in \mathcal{S}$ com $G \triangleq R^{-1}B'PC'(CC')^{-1}$.

No caso de controle descentralizado, isto é, com \mathcal{S} definido a partir de $F(K)$ dada em (151) o resultado estabelecido no lema 9 continua válido. A prova é similar aquela já apresentada e será portanto omitida.

Em seguida apresentamos um procedimento numérico simples para tratar dentro deste contexto, problemas do tipo (154).

Passo 1 : Faça $\ell = 0$ e escolha $P_0 \geq 0$

Passo 2 : Calcule a solução ótima de

$$L_{\ell+1} = \arg \min \left\{ \frac{1}{2} \|L\|^2 \text{ s.a. } R^{-1}B'P_{\ell} - L \in \mathcal{S} \right\}$$

Passo 3 : Faça $Q_{\ell+1} \triangleq Q + L_{\ell+1}'RL_{\ell+1}$ e resolva a equação de Riccati estacionária

$$A'P_{\ell+1} + P_{\ell+1}A - P_{\ell+1}BR^{-1}B'P_{\ell+1} + Q_{\ell+1} = 0$$

Passo 4 : Se $\|P_{\ell+1} - P_{\ell}\| < \epsilon$ onde ϵ é um número positivo suficientemente pequeno vá ao passo 5. Caso contrário faça $\ell = \ell + 1$ e volte ao passo 2.

Passo 5 : Determine o ganho de realimentação $K \in \mathcal{S}$

$$K = R^{-1}B'P_{\ell} - L_{\ell+1}$$

Devemos notar alguns aspectos importantes deste algoritmo, a saber.

No passo 1 a matriz P_0 pode ser considerada como $P_0 = P^*$. Neste caso o algoritmo começa com um ganho infactível ($K \notin \mathcal{S}$) mas com grau de sub-otimalidade nulo. Após a convergência o ganho será factível porém o grau de sub-otimalidade será certamente positivo e pode ser calculado por $(J - J^*)/J^* > 0$. Este é o "preço" a ser pago para se ter um controle com a estrutura desejada.

Em várias situações práticas importantes, tais como: realimentação de saída e controle descentralizado, a solução do problema indicado no passo 2 é trivial (ver lema 9) e claramente não requer nenhum esforço computacional adicional.

De maneira similar, o mesmo estudo pode ser feito para sistemas dinâmicos discretos. Seja o problema linear-quadrático discreto

$$\min \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \{x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)\} \quad (171)$$

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t) ; x(0) = x_0$$

cuja solução ótima é dada por $u(t) = -K^*x(t)$; $K^* = (R + B'P^*B)^{-1}B'P^*A$ sendo P^* a solução definida positiva da equação de Riccati (135). Além disso, o valor mínimo do critério é dado por $J^* = \frac{1}{2} x_0'P^*x_0$ e o sistema em malha fechada é assintoticamente estável isto é

$$\text{Sp}(A - BK^*) \subset C_u \quad (172)$$

onde C_u denota o círculo unitário no plano complexo.

Impondo a realimentação linear do estado $u(t) = -K x(t)$ sujeita à

restrições estruturais o problema (171) se reduz a

$$\min_{K \in \mathcal{S}} J(K) \quad (173)$$

Como no caso contínuo, a equação de Riccati discreta pode ser generalizada para tratar problemas deste tipo. Antes porém, com o intuito de simplificar a notação reescrevemos (135) na forma

$$H(P) = Q \quad (174)$$

e o ganho ótimo $\gamma(P) \triangleq (R + B'PB)^{-1}B'PA$.

Teorema 10 : Se a matriz $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$K + L = \gamma(P) \quad (175)$$

onde $L \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é uma matriz arbitrária e $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é a solução definida positiva da equação de Riccati modificada

$$H(P) = Q + L'(R + B'PB)L \quad (176)$$

então $\text{Sp}(A - BK) \subset \mathcal{C}_u$.

Prova : Como P é uma matriz definida positiva consideramos $v(x) = x'Px$ como uma função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada. Então,

$$v(x(t+1)) = x(t)' \{ (A - BK)'P(A - BK) \} x(t) \quad (177)$$

utilizando (176) vem

$$\begin{aligned} v(x(t+1)) = x(t)' \{ & P - Q - L'(R + B'PB)L + K'B'PBK + \\ & + \gamma(P)'(R + B'PB)\gamma(P) - K'B'PA - A'PBK \} x(t) \end{aligned} \quad (178)$$

Usando agora a equação (175) e lembrando que pela definição de $\gamma(P)$ é válida a relação $B'PA = (R + B'PB)\gamma(P)$, após muitas tediosas manipulações algébricas temos

$$\begin{aligned}
 v(x(t+1)) &= v(x(t)) - x(t)' \{Q + K'RK\}x(t) \\
 &< v(x(t)), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned}
 \tag{179}$$

o que corresponde ao resultado desejado.

Como no teorema 8, o valor do critério para todo K que satisfaz (175), pode ser facilmente calculado. De fato, temos o seguinte resultado.

Teorema 11 : Suponha que $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do teorema 10, então

$$\begin{aligned}
 J(K) &= \frac{1}{2} x_0' P x_0 \\
 &\geq \frac{1}{2} x_0' P^* x_0 = J(K^*)
 \end{aligned}
 \tag{180}$$

Prova : A partir do teorema anterior onde estabelecemos a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada temos

$$\begin{aligned}
 J(K) &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} x(t)' \{Q + K'RK\}x(t) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \{v(x(t)) - v(x(t+1))\} \\
 &= \frac{1}{2} v(x_0) \\
 &= \frac{1}{2} x_0' P x_0
 \end{aligned}
 \tag{181}$$

Para provarmos que $J(K) \geq J(K^*)$, $\forall L \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ procedemos de forma análoga ao caso contínuo definindo para $\beta \in [0, 1]$ a equação de Riccati

$$\Pi(W_\beta) = Q + \beta L' (R + B'PB)L
 \tag{182}$$

cuja derivada em relação a β é dada por

$$(A - B\gamma(W_\beta))' \frac{dW_\beta}{d\beta} (A - B\gamma(W_\beta)) - \frac{dW_\beta}{d\beta} + L'(R + B'PB)L = 0 \quad (183)$$

a qual nos permite concluir, pelo teorema de Lyapunov que, $dW_\beta/d\beta \geq 0$ ou seja, W_β é uma função crescente em relação a β . Escolhendo $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$ vem

$$P = W_1 \geq W_0 = P^* \quad (184)$$

e a prova é concluída.

É fácil verificar que a versão discreta do lema 9 estabelece, no lugar de (166) a relação

$$L = F(\gamma(P)) \quad (185)$$

cuja prova será omitida por envolver o mesmo tipo de manipulação algébrica que aquela já apresentada.

Assim sendo, para tratar o caso discreto, o algoritmo anterior precisa ser muito pouco alterado. Realmente, o problema de otimização no passo 2 admite a solução (185) e no passo 3 devemos resolver a equação de Riccati (176) isto é $\Pi(P_{\ell+1}) = Q_{\ell+1}$ onde $Q_{\ell+1} \triangleq Q + L_{\ell+1}'(R + B'P_\ell B)L_{\ell+1}$.

IV.4. Funções Matriciais

Como vimos anteriormente, funções de matrizes são frequentes em teoria de controle ótimo. De fato em (154), $J(K)$ representa o valor do critério para uma dada matriz de realimentação. É necessário determiná-la de tal forma que apresente uma estrutura pré-especificada ($K \in \mathcal{S}$) e $J(\cdot)$ seja minimizado.

É evidente que $J(K)$ expressa a dependência de $J(\cdot)$ em relação às variáveis K_{ij} $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$ e portanto arranjá-las em uma matriz ($m \times n$) ou em um vetor de dimensão $(m \cdot n)$ é uma questão absolutamente secundária.

Ocorre entretanto que no presente caso, tratar diretamente com matrizes é mais natural e mais simples. Neste sentido, do ponto de vista estritamente formal, devemos definir uma *métrica* no $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e como desejamos analisar problemas de otimização neste espaço devemos também estabelecer a noção de *gradiente matricial*.

Seja $\psi(\cdot)$ um mapeamento biunívoco que a cada matriz $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ associa um vetor $\psi(K) \in \mathbb{R}^{m,n}$ assim definido

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \psi(K) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} K_{11} \\ \vdots \\ K_{m1} \\ \vdots \\ K_{1n} \\ \vdots \\ K_{mn} \end{bmatrix} \quad (186)$$

Sejam Λ, K duas matrizes quaisquer no $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definimos o *produto escalar* de Λ por K na forma:

$$\begin{aligned} (\Lambda, K) &\stackrel{\Delta}{=} \langle \psi(\Lambda), \psi(K) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Lambda_{ij} K_{ij} \\ &= \text{Tr}(\Lambda'K) \end{aligned} \quad (187)$$

Esta definição de produto escalar induz a chamada *norma Euclídeana* de uma matriz que é dada por

$$\begin{aligned} |K| &= (K, K)^{1/2} \\ &= \text{Tr}(K'K)^{1/2} \end{aligned} \quad (188)$$

pode-se mostrar facilmente que (188) realmente satisfaz todos os axiomas de

norma. É importante notar que (187) e (188) são expressas diretamente em função das matrizes Λ e K e conseqüentemente não é necessário fazermos uso do mapeamento $\psi(\cdot)$ definido anteriormente.

Definição 3 : Seja $J(\cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da matriz $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, seu gradiente matricial é dado por

$$\frac{dJ(K)}{dK} \triangleq \left\{ \frac{\partial J(K)}{\partial K_{ij}} \quad i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (189)$$

Portanto, o gradiente matricial nada mais é que o gradiente de $J(\cdot)$ rearranjado em uma matriz de dimensão $m \times n$. Sua determinação é simples. Suponha que $J(K)$ possa ser expandida em série de potências numa vizinhança de $\epsilon = 0$ para qualquer $\Delta K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ou seja

$$\begin{aligned} J(K + \epsilon \Delta K) &= J(K) + \epsilon \text{Tr}\{M(K)' \Delta K\} + O(\epsilon^2) \\ &= J(K) + \epsilon \langle \psi(M(K)), \psi(\Delta K) \rangle + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (190)$$

com o que podemos concluir

$$\nabla_{\psi} J(K) = \psi(M(K)) \quad (191)$$

e como $\psi(\cdot)$ é um mapeamento biunívoco, admite inversa, então vem

$$\begin{aligned} \frac{dJ(K)}{dK} &= \psi^{-1}(\nabla_{\psi} J(K)) \\ &= M(K) \end{aligned} \quad (192)$$

Este último resultado nos permite determinar facilmente o gradiente matricial da função objetivo de (154). De fato, com o controle $u(t) = -Kx(t)$ temos

$$\begin{aligned}
 J(K) &= \frac{1}{2} x_0' \left\{ \int_0^{\infty} e^{(A-BK)'\tau} (Q + K'RK) e^{(A-BK)\tau} d\tau \right\} x_0 \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{P X_0\}
 \end{aligned} \tag{193}$$

onde $X_0 \triangleq x_0 x_0'$ e P é a solução definida positiva da equação de Lyapunov. (note que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável pois caso contrário $J(K)$ torna-se ilimitado):

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + Q + K'RK = 0 \tag{194}$$

utilizando (190) em conjunção com o teorema da função implícita, obtemos:

$$M(K) = (RK - B'P)V \tag{195}$$

onde $V \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é a matriz simétrica solução da equação matricial linear

$$(A - BK)V + V(A - BK)' + X_0 = 0 \tag{196}$$

É importante notar que tomando $K = R^{-1}B'P$ então $M(K) = 0$ e a condição necessária de otimalidade para a minimização de $J(K)$ é satisfeita. Realmente, com (194), obtemos novamente a solução do PLQ clássico. Além disso esta solução *não depende* da matriz V e conseqüentemente não depende da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Quando, como em (154), existem restrições estruturais $K \in \mathcal{S}$ esta conclusão não é necessariamente verdadeira. Reescrevendo (154) na forma

$$\min \{ J(K) \text{ s.a. } F(K) = 0 \} \tag{197}$$

podemos, a partir da definição anterior de produto escalar, estabelecer as condições necessárias de otimalidade de (197) com a função Lagrangeana

$$\mathcal{G}(K, \Lambda) \triangleq J(K) + (\Lambda, F(K)) \tag{198}$$

simplesmente derivando-a em relação a seus argumentos. Obtemos então

$$M(K) + \frac{\partial}{\partial K} \text{Tr}\{A'F(K)\} = 0$$

$$F(K) = 0 \quad (199)$$

Se considerarmos o problema de realimentação de saída então $F(K) = KH$, o que permite reescrever as condições de otimalidade anteriores na forma

$$(RK - B'P)V + AH = 0 \quad (200)$$

$$KH = 0$$

Supondo que V seja definida positiva o ganho ótimo é determinado por

$$K = R^{-1}B'P - R^{-1}AHV^{-1} \quad (201)$$

que ao ser levado em (194) fornece

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q + V^{-1}HA'R^{-1}AHV^{-1} = 0 \quad (202)$$

Este resultado merece algumas considerações. Em primeiro lugar, fica evidente que K depende da condição inicial $x_0 \in R^n$ escolhida. De fato o ganho K depende de V^{-1} a qual, por sua vez, depende explicitamente de x_0 . Note que com (196) temos

$$V = \int_0^{\infty} e^{(A-BK)\tau} x_0' e^{(A-BK)'\tau} d\tau \quad (203)$$

Por outro lado, ao compararmos (201-202) com (155-156) notamos que com $L \triangleq R^{-1}HV^{-1}$ os resultados dos teoremas 7 e 8 imediatamente se verificam. Isto mostra que a solução ótima de (154) pode ser obtida pelo algoritmo anteriormente apresentado. Entretanto o inverso não é necessariamente verdadeiro. Após a convergência, com a matriz L obtida, nem sempre é possível determinar-se A de tal forma que a igualdade acima seja verificada.

Isto pode ser interpretado da seguinte forma. As condições necessã

rias de otimalidade (200) levam em conta o conhecimento do valor particular da condição inicial para fazer decrescer o valor da função objetivo $J(K)$. No método anteriormente apresentado, a matriz L é calculada iterativamente de tal forma a minimizar o grau de sub-otimalidade da solução sem o conhecimento da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

IV.5. Controle de Norma Mínima

Consideramos em seguida um problema de otimização envolvendo funções matriciais o qual, embora importante em teoria de controle, só há pouco tempo começou a receber a atenção devida.

$$\min_{Q \in S} f(Q) \quad (204)$$

onde $f(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função matricial definida no conjunto S ou seja

$$S \triangleq \{Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ t.q. } Q = Q' \leq 0\} \quad (205)$$

que representa o conjunto das matrizes simétricas semi-definidas negativas de dimensão n .

Devemos imediatamente notar que (204) não é um problema convencional de programação matemática, na medida que cada elemento de S é caracterizado via um processo de otimização. De fato

$$Q \in S \iff \max_{x \in \Gamma} x'Qx \leq 0 \quad (206)$$

onde $\Gamma \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$. Felizmente, fazendo uso das propriedades das funções matriciais anteriormente estabelecidas, é possível estabelecer as condições de otimalidade de (204) de maneira simples e compacta sobretudo a partir do seguinte resultado até certo ponto surpreendente.

Lema 12 : S é um conjunto convexo

Prova : Suponha $Q_1, Q_2 \in S$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Definindo $Q \stackrel{\Delta}{=} \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$ e usando (206) vem

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Gamma} x'Qx &\leq \alpha \max_{x \in \Gamma} x'Q_1x + (1 - \alpha) \max_{x \in \Gamma} x'Q_2x \\ &\leq 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (207)$$

e portanto $Q \in S$. Isto prova o lema proposto.

Em consequência, se $f(\cdot)$ for convexa então o problema (204) é convexo. Para caracterizarmos sua solução ótima é preciso generalizar as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker o que é conseguido reescrevendo-o na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f(Q) \\ \text{s.a.} \quad & x'Qx \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma \end{aligned} \quad (208)$$

Concluimos, tratar-se de um problema com infinitas restrições ao qual associamos a função Lagrangeana

$$\mathcal{L} \stackrel{\Delta}{=} f(Q) + \int_{\Gamma} \mu(\xi) \xi'Q\xi \, d\xi \quad (209)$$

onde $\mu(\xi) \in \mathbb{R}$ é uma variável dual associada à restrição $x'Qx \leq 0$ para $x = \xi \in \Gamma$. As condições de otimalidade de (208) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \frac{df(Q)}{dQ} + \int_{\Gamma} \mu(\xi) \xi \xi' \, d\xi &= 0 \\ \mu(\xi) &\geq 0 \\ \xi'Q\xi &\leq 0 \\ \int_{\Gamma} \mu(\xi) \xi'Q\xi \, d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (210)$$

O fato mais importante que podemos extrair das condições acima é

que elas podem ser escrita em função de uma matriz de variáveis duais dada por

$$\Lambda \triangleq \int_{\Gamma} \mu(\xi) \xi \xi' d\xi \quad (211)$$

a qual evidentemente é simétrica e semi-definida positiva. Temos então diretamente de (210)

$$\begin{aligned} \frac{df(Q)}{dQ} + \Lambda &= 0 \\ \Lambda &\geq 0 \\ Q &\leq 0 \\ (\Lambda, Q) &= 0 \end{aligned} \quad (212)$$

Estas condições generalizam ao caso matricial as condições clássicas de Kuhn-Tucker. Formalmente são idênticas na medida que a matriz de variáveis duais associada à restrição semi-definida negativa é semi-definida positiva. Ademais, seu produto escalar com a mesma restrição é nulo.

Como podemos notar, a determinação do par Λ, Q que satisfaz (212) apresenta sérias dificuldades sobretudo devido à relação (211). Neste sentido é necessário considerar-se um procedimento iterativo como este apresentado a seguir:

Passo 1 : Estabeleça arbitrariamente $\xi_j \in \Gamma, j=1, 2, \dots, k$

Passo 2 : Seja Q_k a solução ótima do problema relaxado

$$\begin{aligned} \min f(Q) \\ \text{s.a.} \quad \xi_j' Q \xi_j \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (213)$$

Passo 3 : Determine ξ_{k+1} a solução ótima de

$$\lambda_{k+1} = \max_{\xi \in \Gamma} \xi' Q_k \xi \quad (214)$$

Passo 4 : Se $\lambda_{k+1} \leq 0$ pare, Q_k é a solução ótima procurada. Caso contrário faça $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 2.

Após a convergência, a matriz dual definida em (211) pode ser exatamente calculada em função das variáveis duais associadas a cada restrição de (213), ou seja

$$\Lambda = \sum_{j=1}^k \mu_j \xi_j \xi_j' \quad (215)$$

Uma pequena consideração, referente à convergência deste algoritmo, deve ser feita. Supondo que $f(\cdot)$ é convexa e que existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ arbitrariamente grande, porém finito, tal que $\|Q_k\| \leq \rho$ então de fato qualquer elemento limite da sequência $\{Q_k\}$ converge para a solução ótima de (204).

Numa iteração genérica $k = p$ a última restrição introduzida em (213), $\xi_p' Q \xi_p \leq 0$ pode ser reescrita na forma

$$\xi_p' Q \xi_p + \lambda_{\max}(Q_p) \leq \xi_p' Q_p \xi_p \quad (216)$$

que deve ser satisfeita em qualquer iteração subsequente $\ell > p$, portanto

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(Q_p) &\leq \xi_p'(Q_p - Q_\ell)\xi_p \\ &\leq \|\xi_p\|^2 \|Q_p - Q_\ell\| \\ &\leq \|Q_p - Q_\ell\| \end{aligned} \quad (217)$$

implicando que para p e ℓ tendendo a infinito o lado direito de (217) tende para zero e conseqüentemente qualquer elemento limite da sequência $\{Q_k\}$ é factível.

Uma aplicação importante destes resultados teóricos é na determinação de uma lei de controle descentralizado com norma mínima para a seguinte classe de sistemas dinâmicos interconectados

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i v_i \\ y_i = C_i x_i \\ v_i = u_i + \sum_{j \neq i}^N L_{ij} x_j \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (218)$$

onde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $y_i \in \mathbb{R}^{r_i}$, $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $i = 1, 2, \dots, N$. Por hipótese todos os pares $[A_i, B_i]$ são controláveis e todos os pares $[A_i, C_i]$ são observáveis. O sistema global é descrito pela equação diferencial linear

$$\dot{x} = (A + BLC)x + Bu \quad (219)$$

onde $A \triangleq \text{bloc diag}\{A_1, \dots, A_N\}$, $B \triangleq \text{bloc diag}\{B_1, \dots, B_N\}$, $C \triangleq \text{bloc diag}\{C_1, \dots, C_N\}$ e a matriz L , chamada matriz de interconecção é formada pelos blocos L_{ij} isto é

$$L = \begin{bmatrix} 0 & L_{12} & \dots & L_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ L_{N1} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (220)$$

O problema que se coloca refere-se à determinação da lei de controle $u_i = -K_i x_i$ $i = 1, 2, \dots, N$ de tal forma que (219) seja assintoticamente estável.

Teorema 13 : Sejam Q e R matrizes simétricas definidas positivas. Então com $u = -Kx$, onde

$$K = R^{-1}B'P \quad (221)$$

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'QC = 0$$

o sistema (219), em malha fechada, é assintoticamente estável se

$$Q - L'RL > 0 \quad (222)$$

Prova : Com as hipóteses de controlabilidade e observabilidade consideradas, P é uma matriz simétrica definida positiva com a qual podemos obter a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Então

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) &= x'\{(A + BLC - BK)'P + P(A + BLC - BK)\}x \\ &= x'\{-C'QC - PBR^{-1}B'P + C'L'BP + PBLC\}x\end{aligned}\quad (223)$$

somando e subtraindo a quantidade $C'L'RLC$, vem

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) &= -y'(Q - L'RL)y - x'G'RGx \\ &\leq -y'(Q - L'RL)y\end{aligned}\quad (224)$$

onde $G \stackrel{\Delta}{=} LC - R^{-1}B'P$. Portanto $\dot{v}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Isto prova a estabilidade do sistema em malha fechada. Por outro lado, com $u = -Kx$ a solução de (219) é $x(t) = \exp\{(A + BG)t\}x_0$ e não existe $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{v}(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$ pois neste caso teríamos

$$\begin{aligned}x_0' e^{(A+BG)'t} G'RG e^{(A+BG)t} x_0 &= 0 \\ x_0' e^{(A+BG)'t} C'(Q - L'RL)C e^{(A+BG)t} x_0 &= 0\end{aligned}\quad (225)$$

e consequentemente $C \cdot \exp\{At\}x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0$ o que é uma impossibilidade pois o par $[A, C]$ é observável. Isto encerra a prova do teorema proposto.

É imediato verificar-se que existem infinitos pares Q, R que satisfazem a restrição matricial (222) e ademais garantem a estabilidade assintótica do sistema em estudo. Devemos então escolher o melhor par com um critério qualquer que pode ser aquele que forneça a matriz de ganho K com menor norma possível. Isto sem dúvida facilita a implementação prática da lei de controle obtida.

Finalmente é importante notarmos que se escolhermos Q e R matrizes bloco-diagonais então em (221) só intervirão matrizes com esta estrutura e consequentemente teremos K com a estrutura desejada.

De (221) vem imediatamente

$$\|K\| \leq \|R^{-1}\| \|B\| \|P\|$$

$$\leq \|R^{-1}\| \|B\| \max_{x_0 \in \Gamma} x_0' P x_0 \quad (226)$$

Porém, para todo $x_0 \in \Gamma$ temos (ver o estudo sobre a EHJB)

$$\begin{aligned} x_0' P x_0 &= \min \int_0^{\infty} (y' Q y + u' R u) dt \\ &\leq \|R\| \min \int_0^{\infty} (\gamma y' y + u' u) dt \\ &\leq \|R\| x_0' \tilde{P} x_0 \quad ; \quad \forall x_0 \in \Gamma \end{aligned} \quad (227)$$

onde $\gamma \triangleq \|Q\|/\|R\|$ e \tilde{P} é a solução definida positiva da equação de Riccati

$$A' \tilde{P} + \tilde{P} A - \tilde{P} B B' \tilde{P} + \gamma C' C = 0 \quad (228)$$

Substituindo (227) em (226) obtemos um limitante superior para a norma da matriz de ganho, na forma:

$$\|K\| \leq \|R\| \|R^{-1}\| \|B\| \|\tilde{P}\| \quad (229)$$

Devemos escolher as matrizes Q e R de tal forma que o lado direito da desigualdade acima seja minimizado. Neste sentido, observamos que \tilde{P} depende de γ de forma particular. De fato, determinando a derivada $d\tilde{P}/d\gamma$ para $\gamma \in \mathbb{R}_+$ concluímos que se trata de uma matriz semi-definida positiva e consequentemente $\|\tilde{P}\|$ será tanto menor quanto menor for o parâmetro $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Este fato torna aparente a escolha de $R = I$ (identidade) e Q com a menor norma possível sujeita obviamente à restrição matricial (222) a qual garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.

A determinação de tal matriz Q passa pela solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Q\|^2 \\ \text{s.a.} \quad & L'L - Q \leq 0 \end{aligned} \quad (230)$$

sendo que Q deve apresentar uma estrutura bloco diagonal, ou seja $Q = \text{bloc diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$.

Este problema é essencialmente do mesmo tipo que (204) e portanto pode ser resolvido pelo algoritmo já apresentado o qual deve sofrer algumas modificações para tratar a restrição $L'L - Q \leq 0$ no lugar de $Q \leq 0$.

Finalmente, devemos enfatizar que escolhendo a norma Euclídiana e sendo Q uma matriz bloco diagonal então $\|Q\|^2 = \sum_{i=1}^N \|Q_i\|^2$ e o problema a ser resolvido no passo 2 pode ser decomposto em N problemas totalmente desacoplados.

CAP. V : ROBUSTEZ - CONTROLADORES ÓTIMOS

Robustez é uma propriedade extremamente desejável em sistemas de controle pois traduz sua capacidade de funcionar (no presente caso, manter-se estável) mesmo quando a lei de controle seja determinada a partir de um modelo simplificado, isto é, que apresenta diferenças em relação ao sistema físico real.

Um grande número de trabalhos foram produzidos sobre este tema, considerando sobretudo, sistemas lineares com índices quadráticos ou ainda mais recentemente, sistemas não lineares. De maneira geral, os aspectos de robustez estudados, dizem respeito à variações nos ganhos de realimentação, que tentam explicitar dificuldades de implementação prática.

Muitas das condições de robustez só permitem uma análise "a posteriori" das eventuais perturbações pois dependem explicitamente da solução do problema de controle ótimo considerado.

Entretanto, para uma classe particular de sistemas não lineares, obtemos uma condição de robustez (relativa à estabilidade assintótica do sis-

tema em malha fechada) que não depende da solução ótima do problema proposto e por conseguinte permite uma análise "à priori" das eventuais modificações introduzidas durante a fase de modelamento.

Dentro deste contexto, podemos deixar de considerar, para efeito de cálculo do ganho de realimentação, as partes *complicantes* do modelo, evidenciando se possível, algum tipo de decomposição que favoreça e simplifique sua determinação.

V.1. Estabilidade e a HJBE

Seja o seguinte problema de controle ótimo, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle

$$\min \int_0^{\infty} \left(q(x) + \frac{1}{2} u' R u \right) dt \quad (231)$$

s.a.

$$\dot{x} = a(x) + B(x)u$$

Assumimos que $a(0) = 0$ e que o objetivo é regular o sistema em torno da origem. Neste sentido, o índice de desempenho considerado em (231) deve satisfazer

$$q(0) = 0 ; \quad q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (232)$$

$$R = R' > 0$$

Além disso, assumimos que, pelo menos em uma vizinhança da origem do espaço de estado Ω , a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman associada a (231) admite uma solução estacionária, ou seja

$$\min_u H(x, u, v_x(x)) = 0 \quad (233)$$

Como vimos anteriormente, a lei de controle resultante da minimização indicada acima é da forma $u(t) = \mu(x(t))$ e deve satisfazer

$$q(x) + \frac{1}{2} \mu(x)' R \mu(x) + v_x(x)' (a(x) + B(x)\mu(x)) = 0 \quad (234)$$

Ocorre entretanto que devido a (232), a função $v(x)$ é definida positiva e pode ser considerada, portanto, como uma candidata à função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada. Derivando-a em relação ao tempo e usando (234) vem

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= v_x(x)' (a(x) + B(x)\mu(x)) \\ &= -q(x) - \frac{1}{2} \mu(x)' R \mu(x) \\ &< 0 \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (235)$$

Esta desigualdade nos permite concluir que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Ademais, seu domínio de estabilidade pode ser estimado com $v(x)$ resolvendo

$$\Omega_\delta \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } v(x) \leq \delta = \min_{\xi \in \partial\Omega} v(\xi)\} \quad (236)$$

onde $\partial\Omega$ denota o contorno de Ω .

A importância deste resultado é aparente. Sob hipóteses extremamente fracas, a solução da EHJB estacionária não só fornece a lei ótima de realimentação mas também uma função de Lyapunov que permite estudar a estabilidade assintótica do seu ponto de equilíbrio. Quando for o caso, permite ainda determinar uma estimativa do seu domínio de estabilidade.

Por estas razões esta função parece ser a mais natural e será usada exhaustivamente no estudo de robustez de reguladores ótimos apresentado em seguida.

V.2. Robustez

Suponha que um determinado sistema físico é modelado segundo

(231) que nos permite inclusive determinar a lei de controle realimentado $u(t) = \mu(x(t))$.

Ocorre entretanto que no processo de modelamento algumas simplificações foram introduzidas de tal maneira que é possível prever que a lei de controle determinada não pode ser exatamente implementada na prática. Durante o processo de otimização não foram incluídas perturbações aditivas no controle as quais farão que o controle, na realidade, assuma a seguinte forma, com $\psi(0) = 0$.

$$u(t) = \mu(x(t)) + \psi(x(t)) \quad (237)$$

o problema que se coloca é determinar a classe de perturbações $\psi(\cdot)$ que não destroem a estabilidade do sistema em malha fechada.

Utilizando a função $v(x)$ como uma função de Lyapunov associada a uma trajetória genérica do sistema perturbado temos:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= v_x(x)'(a(x) + B(x)(\mu(x) + \psi(x))) \\ &= v_x(x)'B(x)\psi(x) - q(x) - \frac{1}{2} \mu(x)'R \mu(x) \end{aligned} \quad (238)$$

e concluímos que a estabilidade assintótica do sistema perturbado estará assegurada, inclusive com o mesmo domínio de estabilidade Ω_0 se $\psi(\cdot)$ satisfizer

$$v_x(x)'B(x)\psi(x) < q(x) + \frac{1}{2} \mu(x)'R \mu(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (239)$$

Fica aparente que esta condição de estabilidade, já há muito tempo conhecida, só pode ser testada "a posteriori" ou seja, após a solução da EHJB estacionária quando então $v(x)$ e conseqüentemente $v_x(x)$ são disponíveis.

No caso linear-quadrático, com $a(x) \triangleq Ax$; $B(x) = B$ (constante) e $q(x) = \frac{1}{2} x'Qx$ a função $v(\cdot)$ se reduz a uma forma quadrática, isto é $v(x) = \frac{1}{2} x'Px$ onde P é a solução definida positiva da equação de Riccati.

Com algumas manipulações algébricas em (239) obtemos uma condição

suficiente sobre $\psi(\cdot)$ dada por

$$\frac{\|B\psi(x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (240)$$

Teorema 14 : O ponto de equilíbrio (origem) do sistema em malha fechada, com o controle perturbado (237) é assintoticamente estável, com domínio Ω_δ se

$$q(x) > \frac{1}{2} \psi(x)'R\psi(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (241)$$

Prova : Considerando $v(x)$ como uma função de Lyapunov e derivando-a em relação a uma trajetória genérica do sistema perturbado vem

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= v_x(x)'(a(x) + B(x)(\mu(x) + \psi(x))) \\ &= v_x(x)'B(x)\psi(x) - q(x) - \frac{1}{2} \mu(x)'R\mu(x) \end{aligned} \quad (242)$$

que nada mais é que a condição (238) já obtida. Entretanto, levando em conta a condição necessária de otimalidade da minimização do Hamiltoniano indicada em (233):

$$v_x(x)'B(x) = -\mu(x)'R \quad (243)$$

podemos reescrever (242) na forma:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= -q(x) - \frac{1}{2} \mu(x)'R\mu(x) - \mu(x)'R\psi(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \psi(x)'R\psi(x) - \frac{1}{2} \psi(x)'R\psi(x) \end{aligned} \quad (244)$$

que pode ser facilmente fatorada, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= -q(x) + \frac{1}{2} \psi(x)'R\psi(x) - \frac{1}{2} (\mu(x) + \psi(x))'R(\mu(x) + \psi(x)) \\ &\leq -\left\{q(x) - \frac{1}{2} \psi(x)'R\psi(x)\right\} \\ &< 0 \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (245)$$

sendo que a última desigualdade decorre imediatamente de (241). Isto prova o

teorema proposto.

Novamente, a título de comparação, podemos particularizar este resultado para o problema linear-quadrático já definido. Temos

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} x' Q x \\ &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) |x|^2 \end{aligned} \quad (246)$$

e também

$$\psi(x)' R \psi(x) \leq \lambda_{\max}(R) \left(\frac{|\psi(x)|}{|x|} \right)^2 |x|^2 \quad (247)$$

o que nos leva a obter de (241) uma condição suficiente sobre $\psi(\cdot)$ que é dada por

$$\frac{|\psi(x)|}{|x|} < \frac{\lambda_{\min}^{1/2}(Q)}{\lambda_{\max}^{1/2}(R)} \quad (248)$$

Como vemos, esta condição independe de P , solução da equação de Riccati. De fato, (248) depende exclusivamente do critério adotado e deve ser levada em conta para garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada quando submetido a perturbações de amplitude limitada.

Ao desejarmos considerar perturbações tais que

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{|\psi(x)|}{|x|} = \gamma \quad (249)$$

basta definirmos o critério (231) tal que $\lambda_{\min}(Q) > \gamma^2 \lambda_{\max}(R)$ e a estabilidade de estará assegurada. É claro que este mesmo raciocínio não pode ser feito com (240) devido sua dependência explícita com a solução da equação de Riccati.

Ademais, geralmente a condição (248) é menos restritiva que (240), este fato é ilustrado no exemplo seguinte

Exemplo 4 : Considere um problema linear-quadrático com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; Q = q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; R = [1]$$

onde q é um escalar positivo a ser variado. Neste caso a condição (240) impõe que $\psi(\cdot) \in S_t(0, \gamma_p)$ e (248) impõe que $\psi(\cdot) \in S_t(0, \gamma_r)$ onde $S_t(\cdot, \cdot)$ indica um setor no plano $\psi(\cdot), x$. Da figura 5 abaixo notamos que para todo $q \in [0, +\infty)$

$$\gamma_p < \gamma_r$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \gamma_p = 1/2$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \gamma_r = +\infty$$

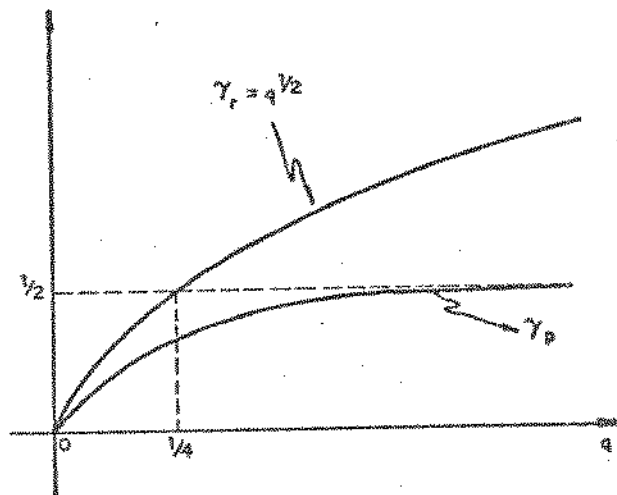


Fig. 5 - Comparação das condições de robustez.

o que mostra que neste exemplo simples a nossa condição de estabilidade (248) é menos restritiva que aquela já bem estabelecida na literatura. De fato $S_t(0, \gamma_p) \subset S_t(0, \gamma_r) \quad \forall q \in [0, +\infty)$.

V.3. Modelos Simplificados - Reguladores Ótimos

Em muitas situações, sobretudo naquelas que envolvem sistemas dinâmicos não lineares, a solução numérica da ERJB estacionária pode tornar-se extremamente difícil e conseqüentemente onerosa do ponto de vista computacional.

Por esta razão (entre outras) tende-se a simplificar os modelos matemáticos de tal forma a viabilizar sua solução mesmo, que para isto, seja necessário incorrer em perda de otimalidade.

É preciso entretanto garantir algumas propriedades básicas de projeto, tais como:

- * Estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, o que garante seu funcionamento numa vizinhança de um ponto de operação pré-estabelecido.
- * Uma estrutura desejável da lei de controle, de tal forma a possibilitar sua implementação com boa relação custo/benefício.

Os aspectos de robustez estudados podem ser aplicados neste contexto. Deliberadamente, deixamos de lado certas partes "complicantes" do modelo de tal maneira a simplificar sua solução numérica e ao mesmo tempo garantimos a presença das propriedades básicas essenciais anteriormente descritas.

Seja um sistema dinâmico interconectado, composto de N subsistemas lineares

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i v_i \\ v_i = u_i + \sum_{j=1}^N L_{ij}(x) x_j \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (250)$$

onde x_i , u_i denotam respectivamente as variáveis de estado e de controle de cada subsistema. Assumimos que a matriz de interconecção $L(x) \stackrel{\Delta}{=} \{L_{ij}(x) \mid i=1, \dots, N, j=1, \dots, N\}$ satisfaz

$$\sup_x \|L(x)\| < \gamma < \infty \quad (251)$$

como anteriormente comentado, ao fixarmos algum índice de performance, a solução da EHJB pode ser difícil na medida o sistema global (250) é não-linear.

Entretanto, se desprezarmos as interconecções entre subsistemas, isto é considerarmos $v_i = u_i \quad i=1, 2, \dots, N$, obtemos N subsistemas *desacoplados*. Ao introduzirmos um índice de performance *aditivamente separável* é possível determinar-se simplesmente uma lei de controle estabilizante (para o sistema real, com as interconecções) e com estrutura descentralizada.

Teorema 15 : A origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (250) com o controle descentralizado

$$u_i(x_i) = -B_i' P_i x_i \quad (252)$$

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i' P_i + \gamma^2 I_i = 0$$

Prova : É uma consequência imediata do teorema anterior. De fato, definindo

$$a(x) \stackrel{\Delta}{=} \text{bloc diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}x$$

$$B(x) \stackrel{\Delta}{=} \text{bloc diag}\{B_1, \dots, B_N\} \quad (253)$$

$$Q = q I \quad ; \quad R = I$$

notamos que a solução da EHJB é do tipo

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} x_i' P_i x_i \quad (254)$$

Resta portanto determinarmos o parâmetro $q > 0$. Com $\psi(x) = L(x)x$, a condição (248) impõe $\|L(x)\| < \sqrt{q}$ que pode ser sempre satisfeita, tendo como base (251), escolhendo $q = \gamma^2$. Consequentemente $0 \in \Omega_\delta \equiv \mathbb{R}^n$, o que prova o teorema

proposto.

Em seguida passamos a descrever algumas aplicações práticas deste e de outros resultados teóricos relatados anteriormente.

CAP. VI : APLICAÇÕES PRÁTICAS

Nosso principal objetivo neste capítulo é apresentar algumas aplicações práticas, realizadas com sucesso, dos resultados teóricos anteriormente obtidos.

Estes exemplos são importantes pois colocam em evidência algumas características fundamentais dos diversos métodos introduzidos neste trabalho. De fato, quando os comparamos com outros disponíveis na literatura, verificamos uma maior simplicidade e eficiência numérica na determinação das leis de controle bem como uma maior precisão na estimação de domínios de estabilidade. Isto indica que as funções de Lyapunov aqui adotadas são mais adequadas ao estudo dos sistemas dinâmicos em consideração.

Sem entrar em aspectos teóricos desnecessários, é importante analisarmos este último fato à luz dos exemplos numéricos resolvidos.

Em todos eles, o ganho de realimentação e a função de Lyapunov, associada ao sistema em malha fechada, são obtidos conjuntamente à partir da solução da EHJB que no caso linear-quadrático se reduz à equação de Riccati.

Desta maneira, ambos são resultantes de um mesmo processo (de otimização) o que parece ser decisivo para aumentar a qualidade do resultado final.

VI.1. Sistemas com Estruturas Especiais

Consideramos dois sistemas dinâmicos não lineares cujos modelos são descritos por equações diferenciais que podem ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i v_i \\ v_i = u_i + \sum_{j=1}^N L_{ij}(x) x_j \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (255)$$

que foram objeto de estudo no que diz respeito à suas propriedades de robustez, quando sujeitos à perturbações aditivas na lei de controle (interconexões).

Em princípio, o resultado fornecido pelo teorema 15 é perfeitamente aplicável e pode ainda ser generalizado para levar em conta dois aspectos adicionais.

No primeiro exemplo (Large Space Telescope), a matriz de interconexão é linear em relação à $x' \stackrel{\Delta}{=} [x'_1 \dots x'_N]$ e consequentemente

$$\sup_x \|L(x)\| = +\infty \quad (256)$$

inviabilizando de imediato a determinação de $\gamma \in \mathbb{R}_+$ conforme (251). Para eliminar esta dificuldade podemos definir o conjunto fechado (por hipótese) parametrizado em γ :

$$\Gamma(\gamma) \stackrel{\Delta}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|L(x)\| \leq \gamma\} \quad (257)$$

que faz com que o teorema 15 continue válido não mais no \mathbb{R}^n (estabilidade global) mas sim no seu interior ou seja $0 \in \Gamma(\gamma) \subset \Omega_g$. Além disso, podemos esti-

mar o domínio de estabilidade do ponto de equilíbrio resolvendo

$$\Omega_\tau \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } v(x) \leq \tau = \min_{\xi \in \partial\Gamma} v(\xi)\} \quad (258)$$

onde $\partial\Gamma$ denota o contorno de $\Gamma(\gamma)$ para algum $\gamma \in \mathbb{R}_+$ fixado.

Normalmente, a determinação do domínio Ω_τ definido em (258), passa pela solução de um problema de otimização *não convexo* que deve ser resolvido numericamente por qualquer método aplicável. Entretanto, nos casos em que $L(x)$ é *linear* em relação a $x \in \mathbb{R}^n$ e $v(x)$ é quadrática, sua solução é analítica. De fato, seja $L(x) \triangleq \{l_{ij}(x) = W_{ij}'x \text{ } i, j = 1, 2, \dots, N\}$ então

$$\begin{aligned} \|L(x)\| &\leq \text{Tr}\{L(x)'L(x)\}^{1/2} \\ &\leq \{x'Wx\}^{1/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (259)$$

onde

$$W \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{ij} W_{ij}' \geq 0 \quad (260)$$

Consequentemente, a minimização indicada em (258), que permite definir $\tau \in \mathbb{R}_+$ se reduz a

$$2\tau \triangleq \min_x \{x'Px \text{ s.a. } x'Wx = \gamma^2\} \quad (261)$$

e a partir de suas condições de otimalidade vem imediatamente

$$2\tau = \gamma^2 \min\{\lambda \text{ t.q. } \det(P - \lambda W) = 0\} \quad (262)$$

Concluimos então que para determinarmos τ , basta calcularmos o menor valor principal do feixe de matrizes simétricas P, W . Como P é estritamente definida positiva e W é sempre semi definida positiva então este número será positivo.

O segundo aspecto importante diz respeito à escolha da matriz Q em (253). Não é necessário tomá-la como $Q = qI$. Suponha que a matriz de inter

conecção é do tipo

$$L(x) = \text{bloc diag} \{L_i(x_j) \quad j \neq i = 1, 2, \dots, N\} \quad (263)$$

então podemos considerar $Q \triangleq \text{bloc diag}\{q_j \quad j = 1, 2, \dots, N\}$ onde $q_j \in \mathbb{R}_+$ satisfazem $\|L_i(x_j)\| \leq \sqrt{q_j} = \gamma_j$ o que nos permite concluir que

$$\Gamma(\gamma) \triangleq \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i(\gamma_j) \quad , \quad j=1, 2, \dots, N \quad (264)$$

Ademais, sendo $v(x)$ aditivamente separável então o domínio de estabilidade Ω_τ pode ser determinado resolvendo-se N problemas desacoplados, isto é:

$$\begin{aligned} \tau &= \min \{v(x) \quad \text{s.a.} \quad x \in \partial\Gamma\} \\ &= \min \{\tau_i\} \end{aligned} \quad (265)$$

onde τ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ são dados por:

$$\tau_i \triangleq \min \{v_i(x_i) \quad \text{s.a.} \quad x_i \in \partial\Gamma_i\} \quad (266)$$

levando em conta que as dimensões dos subsistemas são muito menores que a dimensão do sistema global, a formulação acima contribui para simplificar o cálculo de Ω_τ .

Exemplo 5 (Large Space Telescope) : Trata-se de um modelo desenvolvido por Siljak e diz respeito a um caso real. Um corpo no espaço, relacionado a três eixos coordenados (x, y, z) , está sujeito a ação de forças gravitacionais. Três atuadores de força estão a eles acoplados e podem exercer esforços nas direções dos três eixos (x, y, z) . O modelo dinâmico de 6ª ordem pode ser escrito na forma (equações de Euler):

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_x + b_x a_x \dot{\theta}_y \dot{\theta}_z = b_x f_x \\ \ddot{\theta}_y + b_y a_y \dot{\theta}_x \dot{\theta}_z = b_y f_y \\ \ddot{\theta}_z + b_z a_z \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y = b_z f_z \end{cases} \quad (267)$$

onde $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ indicam os deslocamentos angulares e (f_x, f_y, f_z) indicam as intensidades dos esforços nas direções dos eixos coordenados. Os parâmetros "a" e "b" dependem da geometria (momentos de inércia relativos a cada eixo) e dos atuadores utilizados.

Os valores numéricos fornecidos por Siljak são os seguintes

$$\begin{aligned} a_x &= 0.0026 & b_x &= 85.62 \\ a_y &= -0.064 & b_y &= 13.69 \\ a_z &= 0.061 & b_z &= 13.21 \end{aligned}$$

O objetivo principal é determinar realimentações locais (controle descentralizado) de tal forma que o esforço produzido em cada eixo só dependa do deslocamento e velocidade angulares relativos àquele eixo. Com o sistema assim controlado determinamos o domínio de estabilidade associado ao ponto de equilíbrio $(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = (0, 0, 0)$.

Definindo as variáveis de estado $x_1 \triangleq [\theta_x, \dot{\theta}_x]$, $x_2 \triangleq [\theta_y, \dot{\theta}_y]$, $x_3 \triangleq [\theta_z, \dot{\theta}_z]$ e as variáveis de controle $u_1 \triangleq [f_x]$, $u_2 \triangleq [f_y]$, $u_3 \triangleq [f_z]$ as equações (267) podem ser reescritas na forma (255) com $N = 3$ e

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ b_x \end{bmatrix} ; \quad B_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ b_y \end{bmatrix} ; \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_z \end{bmatrix} \quad (268) \\ L(x) &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_x \theta_y \\ 0 & -a_y \theta_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_z \theta_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É fácil verificar que a matriz de interconecção acima definida satisfaz

(263). A partir do teorema 15, com $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.8$ e $\gamma_3 = 0.01$ obtemos os controles descentralizados

$$\mu_1(x_1) = -[0.894 \quad 0.906] x_1$$

$$\mu_2(x_2) = -[0.894 \quad 0.965] x_2$$

$$\mu_3(x_3) = -[0.100 \quad 0.159] x_3$$

e as funções de Lyapunov $v_i(x_i) = \frac{1}{2} x_i^T P_i x_i$ $i = 1, 2, 3$ onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.810 & 0.010 \\ 0.010 & 0.010 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.863 & 0.065 \\ 0.065 & 0.070 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.016 & 0.007 \\ 0.007 & 0.012 \end{bmatrix}$$

Finalmente com (265) vem $2\tau = 1.64 = \min\{2.25, 96.92, 1.64\}$ o que nos permite escrever o domínio de estabilidade na forma

$$\Omega_\tau \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 \text{ t.q. } \sum_{i=1}^3 x_i^T P_i x_i \leq 1.64\} \quad (269)$$

Para efeito de comparação com outros resultados já existentes na literatura, na figura seguinte apresentamos a intersecção de Ω_τ com o plano $(\theta_y, \hat{\theta}_y)$ ou seja $\Omega_2 \triangleq \{x \in \Omega_\tau \text{ t.q. } x_1 = x_3 = 0\}$.

O subconjunto Ω_2 foi escolhido por ser aquele que apresenta a menor área possível. Mesmo assim sua área é mais que duas vezes maior que aquela estimada pelo melhor método até então existente na literatura.

Ademais é importante citar que dentre os métodos analisados, este aqui proposto é o mais simples e pode ser inteiramente automatizado com o auxílio de computadores digitais.

Exemplo 6 (Pêndulo Composto) : Trata-se de um modelo não linear de 4ª ordem desenvolvido por Lefevre, Richter e DeCarlo e diz respeito a dois pêndulos acoplados entre si por um dispositivo linear. As variáveis θ_1 e θ_2 medem os deslocamentos dos pêndulos em relação à vertical. O controle é exercido por duas forças externas f_1 e f_2 que são aplicadas nas massas. O modelo global pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + 2\xi\omega\dot{\theta}_2 + \omega^2 \text{sen}\theta_1 &= f_1 \\ \ddot{\theta}_2 + 2\xi\omega\dot{\theta}_1 + \omega^2 \text{sen}\theta_2 &= f_2\end{aligned}\quad (270)$$

onde fica aparente que os dois pêndulos são idênticos. Definindo as variáveis de estado $x_1 \triangleq [\theta_1, \dot{\theta}_1]$, $x_2 \triangleq [\theta_2, \dot{\theta}_2]$ e as variáveis de controle $u_1 \triangleq [f_1]$, $u_2 \triangleq [f_2]$ podemos reescrever as equações acima na forma (255) considerando $N = 2$ e

$$\begin{aligned}A_1 &= A_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= B_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (271)$$

$$L(x) \triangleq \begin{bmatrix} -\omega^2 \frac{\text{sen } \theta_1}{\theta_1} & 0 & 0 & -2\xi\omega \\ 0 & -2\xi\omega & -\omega^2 \frac{\text{sen } \theta_2}{\theta_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores numéricos utilizados foram $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e $\xi = 0.05$. Nosso objetivo é determinar uma lei de controle descentralizada que atue isoladamente e que só dependa das variáveis de estado de cada pêndulo de tal forma que o sistema global seja assintoticamente estável.

Ao contrário do exemplo anterior, definindo $\gamma \triangleq \sqrt{2}$, a desigualdade em (251) estará satisfeita, o que nos leva a utilizar diretamente o resultado do teorema 15. De fato

$$\begin{aligned}
 \sup_x \|L(x)\| &= \|L(0)\| \\
 &= \omega^2 \left\{ 1 + \left(\frac{2\xi}{\omega} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
 &= \sqrt{1.01}
 \end{aligned} \tag{272}$$

em consequência a origem é um ponto de equilíbrio (único) globalmente, assintoticamente estável. Os controladores descentralizados são tais que

$$u_1(x_1) \approx - [1.4 \quad 2.2] x_1$$

$$u_2(x_2) \approx - [1.4 \quad 2.2] x_2$$

Nas figuras seguintes mostramos uma simulação realizada com o sistema em malha fechada. O sistema inicia em $t = 0$ com uma condição inicial $\dot{\theta}_2(0) \neq 0$ e evolui sem controle até $t = 40s$ quando então os controladores são conectados. Nos 5 segundos seguintes os dois pêndulos atingem suas posições de equilíbrio $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

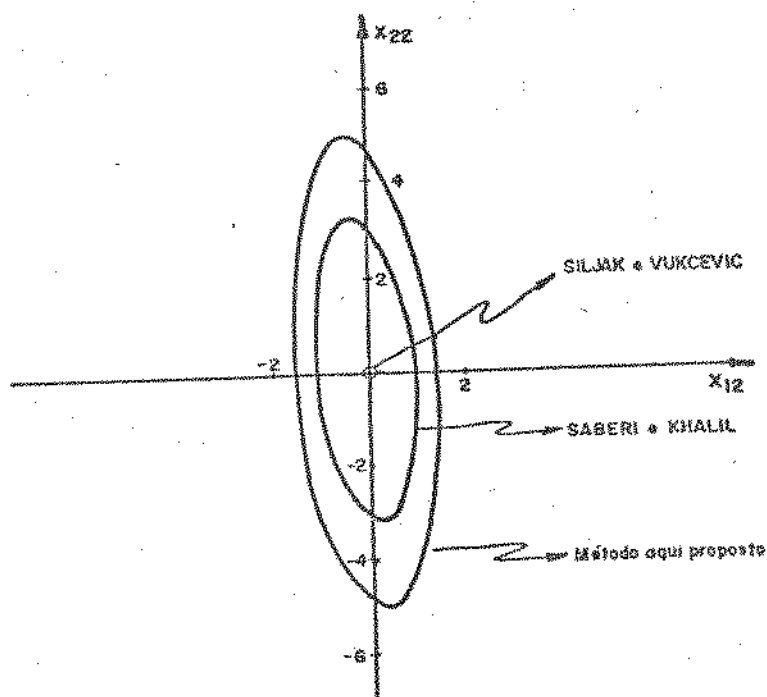


Fig. 6 - Representação gráfica de Ω_2 considerando três diferentes métodos.

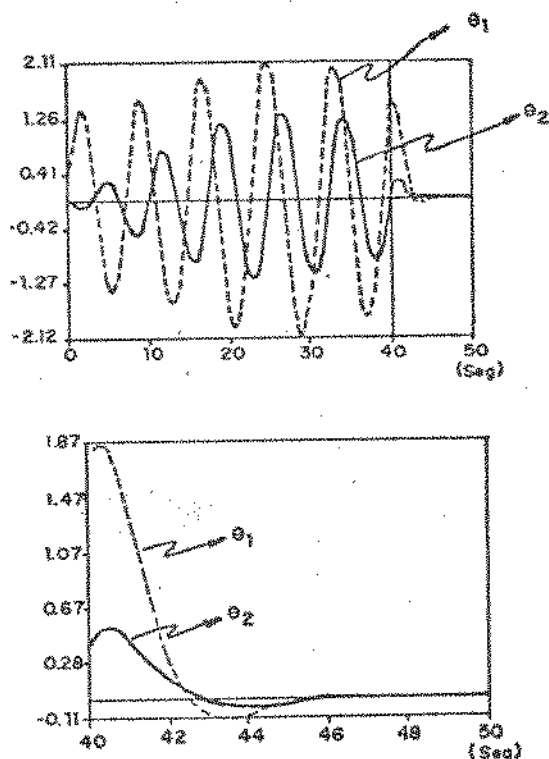


Fig. 7 - Trajetórias de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ (rad.).

VI.2. Sistemas de Potência

Consideramos o chamado problema de controle carga/frequência (CCF) sendo a lei de controle restrita a duas estruturas distintas: descentralizada e/ou realimentação de saída. O algoritmo utilizado é aquele apresentado no capítulo IV.

Duas áreas iguais de potência, interligadas entre si por meio de uma linha de transmissão, devem ser controladas de tal forma que os seguintes requisitos sejam satisfeitos

- * Em regime permanente a variação da frequência em cada área e a variação do fluxo de potência na linha devem ser nulas.
- * Como consequência, em regime permanente, cada área deve suprir sua própria demanda.
- * Cada área só pode ser controlada a partir de medidas locais efetuadas.

Não é permitida a troca de informações entre áreas.

* O Ganho de realimentação deve ser independente da perturbação na demanda considerada uma função degrau.

O modelo linearizado, proposto primeiramente por Elgerd e Fosha, neste caso (áreas iguais) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \tau_f \Delta \dot{f}_i + \Delta f_i = b_f (\Delta g_i - \Delta d_i - \Delta \phi_i) \\ \tau_g \Delta \dot{g}_i + \Delta g_i = \Delta z_i \\ \tau_z \Delta \dot{z}_i + z_i = \Delta W_i - r_f^{-1} \Delta f_i \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (273)$$

onde, em relação ao ponto de operação considerado, Δf_i , Δg_i , Δd_i e $\Delta \phi_i$, $i = 1, 2$, representam respectivamente os desvios de frequência, potência gerada e demanda em cada área e o desvio do fluxo de potência na linha. Temos ainda

$$\Delta \phi_1 = -\Delta \phi_2 = \tau_{12} \left\{ \int \Delta f_1 dt - \int \Delta f_2 dt \right\} \quad (274)$$

Uma outra variável importante e que será usada para definirmos as estruturas de controle é o chamado erro de controle de área assim definido

$$\Delta \psi_i = \Delta \phi_i + \beta_f \Delta f_i \quad i = 1, 2 \quad (275)$$

onde $\beta_f = b_f^{-1} + r_f^{-1}$. Em princípio, o sistema acima pode ser completamente descrito por 7 variáveis de estado, entretanto, duas outras são necessárias (integradores) para podermos conseguir satisfazer os requisitos básicos anteriormente descritos. Neste sentido, para efeito de cálculo da lei de controle, as perturbações de demanda em cada área Δd_i , $i = 1, 2$ não precisam ser consideradas.

Ao definirmos as variáveis de estado e controle relativas a cada subsistema (áreas)

$$\begin{aligned}
 x'_i &\stackrel{\Delta}{=} \left[\int \Delta\phi_i dt, \int \Delta f_i dt, \Delta f_i, \Delta g_i, \Delta z_i \right] \\
 u_i &\stackrel{\Delta}{=} [\Delta W_i]
 \end{aligned}
 \quad i = 1, 2 \quad (276)$$

notamos, que devido à (274), uma das suas componentes pode ser eliminada e temos então

$$\begin{aligned}
 x' &\stackrel{\Delta}{=} \left[\int \Delta\phi_1 dt, \int \Delta f_1 dt, \Delta f_1, \Delta g_1, \Delta z_1, \int \Delta f_2 dt, \right. \\
 &\quad \left. \Delta f_2, \Delta g_2, \Delta z_2 \right] \\
 u' &\stackrel{\Delta}{=} [\Delta W_1, W_2]
 \end{aligned}
 \quad (277)$$

Desta forma, as equações (273) podem ser reescritas na forma padrão $\dot{x} = Ax + Bu$ onde A e B são matrizes de dimensões apropriadas determinadas imediatamente, a partir dos valores numéricos fornecidos por Elgerd e Fosha:

$$\tau_f = 20 \text{ seg} ; \quad \tau_g = 0.3 \text{ seg} ; \quad \tau_z = 0.08 \text{ seg}$$

$$r_f = 2.4 \text{ Hz/puMW} ; \quad b_f = 120 \text{ Hz/puMW}$$

$$T_{12} = 0.545 \text{ puMW/Hz} ; \quad \beta_f = 0.425 \text{ puMW/Hz}$$

Em seguida, apresentamos vários resultados numéricos relativos a este problema que foram obtidos com o método descrito no capítulo IV (equação de Riccati generalizada).

Exemplo 7 (Controle Carga/Frequência): Consideramos, para efeito de simulação, somente uma perturbação do tipo degrau na demanda da área 1 com intensidade $\Delta d_1 = 0.01 \text{ puMW}$ (20 MW). Três casos foram resolvidos

Caso 1 - Realimentação de estado centralizada onde cada área tem informação a respeito de todas as variáveis de estado do sistema global (ver fig.

8) obtemos $\mu(x) = -K^*x$ onde

$$K^* = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.30 & 0.93 & 1.30 & 0.30 & 0.70 & 0.06 & 0.03 & 0. \\ -0.71 & 0.70 & 0.06 & 0.03 & 0. & 0.30 & 0.93 & 1.30 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Caso 2 - Realimentação de estado descentralizada onde cada área só tem informação a respeito das suas próprias variáveis de estado (ver fig. 9).

Obtemos $\mu_i(x_i) = -K_i x_i$ onde

$$K_1 = K_2 = [0.71 \quad 0.49 \quad 1.00 \quad 1.30 \quad 0.31]$$

Caso 3 - Realimentação de saída onde cada área tem informação a respeito do vetor de saída global, assim definido

$$y \triangleq \left[\int \Delta\psi_1 dt, \Delta g_1, \int \Delta\psi_2 dt, \Delta g_2 \right]$$

Temos então $y = Cx$ onde C é uma matriz de dimensão apropriada facil-

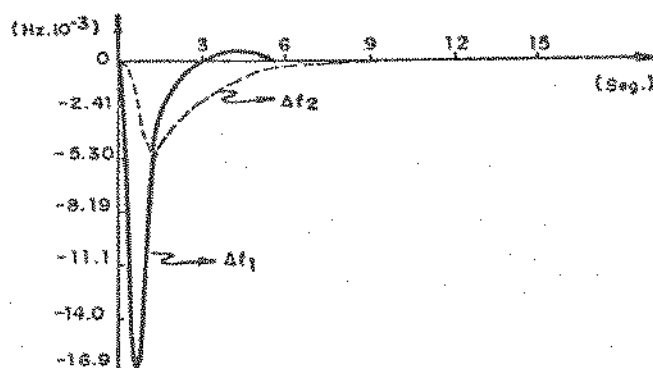


Fig. 8 - Desvio de frequência, caso 1.

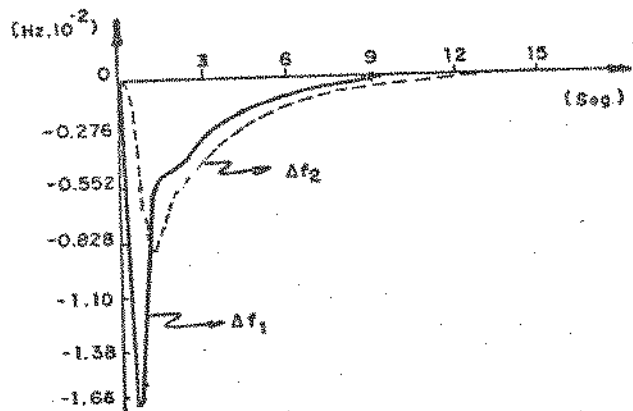


Fig. 9 - Desvio de frequência, caso 2.

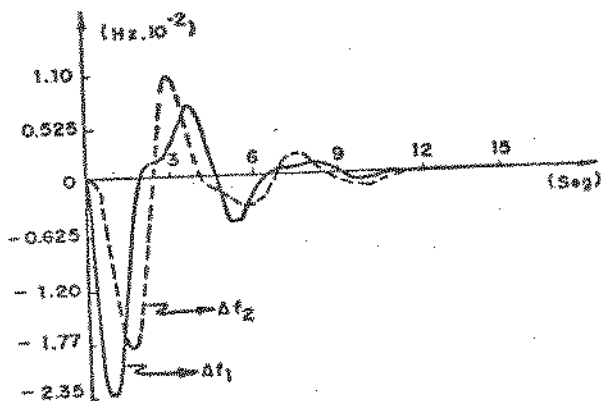


Fig. 10 - Desvio de frequência, caso 3.

mente determinada (ver fig. 10). Obtemos $\mu_s(y) = -Gy$ onde

$$G = \begin{bmatrix} 1.40 & 2.00 & 0.93 & 0.11 \\ 0.93 & 0.11 & 1.40 & 2.00 \end{bmatrix}$$

É importante adicionar que foram utilizadas as mesmas matrizes Q e R propostas no trabalho original de Elgerd e Fosha e que no passo 4, o parâmetro $\epsilon = 0.001$ foi utilizado para detetar a convergência do método que sempre se verificou.

VI.3. Sistemas Mecânicos

Consideramos um problema de controle ótimo, envolvendo uma estrutura mecânica delgada D que sofre ação de forças externas de controle de maneira a amortecer rapidamente eventuais vibrações. Trata-se de um sistema a parâmetros distribuídos que é portanto descrito por uma equação diferencial a derivadas parciais

$$N X(p, t) + M \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = f(p, t) \quad (278)$$

que está sujeita às condições de contorno e deve ser satisfeita para todos $p \in D$ (pontos do seu domínio) e $\forall t \geq 0$. Respectivamente denotamos $X(p, t)$ o deslocamento do ponto $p \in D$ em $t \geq 0$, $f(p, t)$ a força distribuída externamente aplicada, $M(\cdot)$ a massa distribuída ao longo da estrutura e $N(\cdot)$ um operador linear envolvendo diferenciais em relação aos eixos coordenados associados à estrutura.

As infinitas autofunções $\phi_i(\cdot)$ $i=1, 2, \dots$ ortonormais que satisfazem $N\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i$ (ω_i é chamado de i -ésimo modo de vibração) permitem escrever a solução de (278) na forma

$$X(p, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(p) x_i(t) \quad (279)$$

O conjunto de funções ortonormais $\{\phi_i\}$ constitui o chamado sistema de coordenadas *modais*. Nestas coordenadas, as funções $x_i(t)$ são soluções de um conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = f_i(t) \quad i=1,2,\dots \quad (280)$$

onde a i -ésima força modal é dada por

$$f_i(t) \triangleq \int_D \phi_i(\xi) f(\xi, t) d\xi \quad (281)$$

Praticamente, a ação das forças externas é feita em posições pré-estabelecidas da estrutura. Assim sendo, supondo que existem m atuadores colocados nas posições p_j $j=1, 2, \dots, m$ que produzem forças de intensidades $u_j(t)$ $j=1, \dots, m$, então

$$f(p, t) = \sum_{j=1}^m u_j(t) \delta(p - p_j) \quad (282)$$

onde $\delta(\cdot)$ denota a função impulso de Dirac. Consequentemente, de (281) e (282) vem

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \int_D \phi_i(\xi) \sum_{j=1}^m u_j(t) \delta(\xi - p_j) d\xi \\ &= \sum_{j=1}^m \phi_i(p_j) u_j(t) \quad i=1,2,\dots \end{aligned} \quad (283)$$

Por outro lado, assumindo que dispomos de m sensores de deslocamento localizados nas mesmas posições que os atuadores então

$$\begin{aligned} y_j(t) &= X(p_j, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(p_j) x_i(t) \end{aligned} \quad (284)$$

Da mesma forma, em situações práticas, não podemos levar em conta os infinitos modos de vibração da estrutura. Por algum critério reteremos no modelo os n mais significativos. Com esta hipótese simplificadora, o modelo matemático da estrutura pode ser escrito na forma convencional

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \Omega_n x(t) = Bu(t) \\ y(t) = B'x(t) \end{cases} \quad (285)$$

onde $x' \triangleq [x_1, x_2, \dots, x_n]$ é o vetor de estado, $u' \triangleq [u_1, u_2, \dots, u_m]$ é o vetor de controle e $y' \triangleq [y_1, y_2, \dots, y_m]$ é o vetor de saída. As matrizes $\Omega_n \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ completam a definição do modelo.

$$\Omega_n \triangleq \text{diag} \{ \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2 \} \quad (286)$$

$$B \triangleq \{ b_{ij} \triangleq \phi_i(p_j) \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m \}$$

Podemos imediatamente notar que embora Ω_n seja diagonal, a matriz B é completa fazendo com que as n equações diferenciais sejam acopladas. É claro que praticamente devemos esperar $m \ll n$ uma vez que devido aos custos envolvidos m deve ser pequeno e devido a precisão do modelo n deve ser grande. Entretanto, devemos notar que se eventualmente $m = n$ então é possível escolhermos as posições $\{p_j\}$ de tal forma que B seja não singular. Este fato é essencial para a determinação do chamado controle modal.

Ao sistema dinâmico (285) associamos o seguinte critério quadrático

$$\min \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru) dt \quad (287)$$

onde Q e R são matrizes simétricas definidas positivas tais que

$$\begin{aligned} Q &\triangleq \text{diag} \{ q_1, q_2, \dots, q_n \} \\ R &\triangleq B' \text{diag} \{ r_1, r_2, \dots, r_n \} B \end{aligned} \quad (288)$$

Em seguida veremos o motivo pelo qual estas matrizes são tomadas com estruturas especiais.

Exemplo 8 (Estrutura Flexível) : Consideramos um caso hipotético com $n=13$ e $m=6$. Três casos de interesse foram resolvidos com os dados numéricos correspondentes a um sistema real.

Caso 1 - Controle modal que implica numa realimentação de todos os $n = m = 6$ modos de vibração. De fato, definindo a variável $v = Bu$, o problema em questão pode ser decomposto em n problemas de 2ª ordem desacoplados (ver 288)

$$\min \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q_i x_i^2 + r_i v_i^2) dt \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{s.a.} \quad \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = v_i$$

Temos então $v = -k_p x - k_v \dot{x}$ e consequentemente $u = -B^{-1}(k_p x + k_v \dot{x})$. Esta solução só serve para efeito de estabelecer comparações pois impõe que o número de atuadores seja igual ao número de modos de vibração. Além disso não realimentam as variáveis que são efetivamente medidas, isto é $y(t)$.

Caso 2 - Realimentação de saída onde cada atuador tem informação a respeito dos deslocamentos medidos por todos os outros sensores. Temos então

$$u = -G_p y - G_v \dot{y}$$

Caso 3 - Realimentação de saída descentralizada onde cada atuador só tem informação a respeito do deslocamento medido pelo sensor a ele acoplado. A estrutura final de controle é a mesma que no caso anterior com a restrição adicional de G_p e G_v serem matrizes diagonais.

Nas duas figuras seguintes mostramos uma simulação do sistema em malha fechada que foi submetido em $t = 0$ a uma perturbação de posição (velocidade)

dade nula) nos seis primeiros modos de vibração. Como podemos notar, o controle modal (caso 1) é o que amortece mais rapidamente as vibrações. Nos outros dois casos o tempo de estabilização aumenta permanecendo ainda aceitável. Sobretudo no caso 3, a implementação do controle é simples e certamente de reduzido custo.

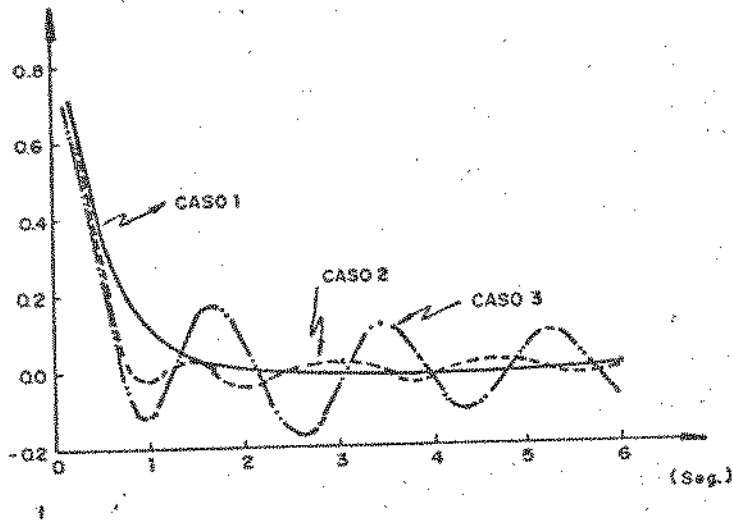


Fig. 11 - Deslocamentos na posição 1.

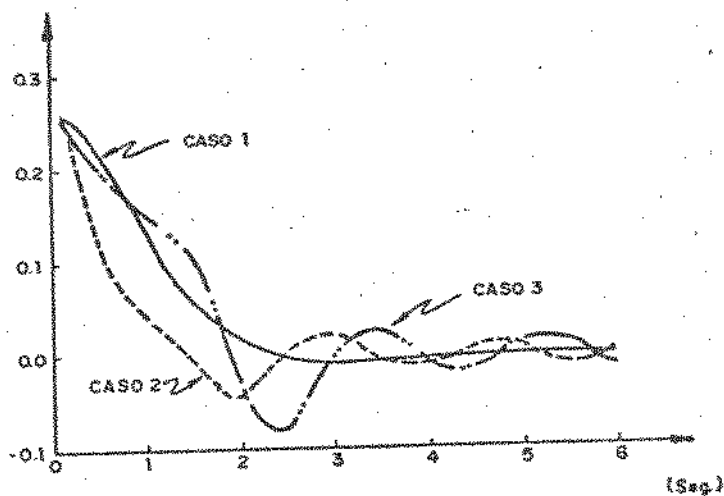


Fig. 12 - Deslocamentos na posição 2.

CAP. VII : CONCLUSÃO GERAL

Este trabalho foi escrito com o intuito de ser um texto unificador dos vários aspectos que compõe a chamada Teoria de Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos.

O esforço não foi pequeno pois tivemos que manipular um conjunto enorme, de largo espectro, de preocupações, problemas e métodos que foram objeto de pesquisa, principalmente, nestas últimas duas décadas.

Dentro deste enfoque incluímos vários resultados fundamentais, tais como o Princípio do Mínimo de Pontryagin e o Princípio de Otimalidade de Bellman a partir dos quais os conceitos mais recentemente introduzidos foram devidamente abordados.

A maioria dos conceitos e propriedades, inclusive aqueles há muito tempo desenvolvidos, foram introduzidos segundo uma visão pessoal do autor de tal maneira a ser possível evidenciar, dentro deste enfoque unificador, algumas contribuições em temas mais recentes.

Nossa maior preocupação foi deixar aparente nossa opinião de que as mais variadas técnicas de programação matemática são fundamentais para explicitar e resolver as condições de otimalidade associadas aos problemas considerados. Como exemplo devemos citar a otimização de funções matriciais que no momento, vem recebendo muita atenção por parte de inúmeros pesquisadores.

Nesta oportunidade, não podemos deixar de evidenciar alguns temas de pesquisa que, sem dúvida alguma, serão muito desenvolvidos em um futuro próximo. Tais temas já fazem parte de nossa preocupação imediata e constam, de forma preliminar, de alguns trabalhos desenvolvidos recentemente.

* *Robustez de Controladores a Tempo-Discreto* - Embora os sistemas discretos sejam essenciais para o uso de computadores digitais, sua robustez em relação à estabilidade praticamente ainda não foi estudada. Podemos prever maiores dificuldades do que aquela encontrada no caso contínuo. Entretanto um fato importante e encorajador ainda persiste : a solução estacionária da equação recursiva de Programação Dinâmica é uma função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada.

* *Análise de Robustez Via Métodos de Decomposição* - Em estudos preliminares que realizamos, pudemos concluir que o método de Decomposição de Benders Generalizado é uma ferramenta muito poderosa para o estudo de robustez de Sistemas Dinâmicos. Este fato baseia-se na seguinte observação: este método permite caracterizar as condições de otimalidade de um dado problema mesmo quando sua dinâmica está sujeita a variações arbitrárias nos parâmetros que definem o modelo matemático.

CAP. VIII : BIBLIOGRAFIA

- [1] Sur la Commande Periodique - *C. R. de La Academie des Sciences*, Paris, t. 284, 1977.
- [2] Sur un Probleme d'Optimisation Parametrique de l'Equation Matricielle de Lyapunov - *C. R. de l'Academie des Sciences*, Paris, t. 286, 1978.
- [3] Stability Approach to Robust Control for Interconnected Systems - *Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications* - M.G. Singh and A. Titli Editors, North Holland, 1979.
- [4] Stability of Two-Level Control Schemes Subject to Structural Perturbations - *International Journal of Control*, Vol. 29, No. 2, 1979.
- [5] An Algorithm for Optimal Decentralized Regulation of Linear-Quadratic Interconnected Systems - *Automatica*, Vol. 14, No. 4, 1979.

- [6] On Bounds of Lyapunov's Equation - *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-24, No. 3, 1979.
- [7] A Feasible Direction Method for Large Scale Programs with Non-Convex Objective : Decomposition Approach - *Journal of Opt. Theory and Applications*, Vol. 35, No. 1, 1981.
- [8] An Easy Way to Find Gradient Matrix of Composite Matricial Functions - *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, 1981.
- [9] Decomposition Approach to the Problem of Unit Commitment Schedule for Hydrothermal Systems, *IEE Proc.*, Vol. 127, No. 6, 1980.
- [10] Projection and Duality Techniques in Economic Equilibrium Models - *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-11, No. 5, 1981.
- [11] Sur la Dependence vis a vis des Conditions Initiales de la Solution de Certains Problems d'Optimization Dynamique - *Note Interne No. 81.1.36 - LAAS*, 1981.
- [12] Optimal Decentralized Control of Dynamic Systems - *Automatica*, Vol. 18, No. 5, 1982.
- [13] Stabilization of Continuous and Discrete Linear Systems Subjected to Control Structure Constraints - *International Journal of Control*, Vol. 63, No. 3, 1982.
- [14] Coordenação da Cooperação Energética no Médio São Francisco por um Método de Gradiente Reduzido - *Matemática Aplicada e Computacional*, Vol. 1, No. 2, 1982.
- [15] Parametrical Optimization Approach for Decentralized Regulation of Discrete Systems - *Advances in Control and Dynamic Systems*, Vol. XXII, Editor C. T. Leondes, Academic Press, 1986.

- [16] Decentralized Stabilization and Stability Domain Estimation of Continuous and Discrete Non-linear Systems - *International Journal of Control*, Vol. 40, No. 5, 1984.
- [17] On the Determination of a Diagonal Solution of the Lyapunov Equation - *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, No. 4, April 1985.
- [18] Decentralized Load Frequency Control - *IEE Proceedings - Part D (Control)*, Vol. 132, No. 5, September 1985.
- [19] Quelques Inegalites Relatives a La Solution de L'equation de Riccati - *Rapport LAAS No. 86057*, Mars 1986.
- [20] Non-Linear Programs with Complicated Variables : Theoretical Analysis and Numerical Experience - *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-16, No. 2, March/April 1986.
- [21] On the Robustness of Nonlinear Regulators and Its Application to Non-linear Systems Stabilization - *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 12, December 1985.
- [22] Contribuição ao Estudo de Sistemas com Controle de Ângulo de Disparo de Tiristores - *I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas* - Rio de Janeiro, 1973.
- [23] Retificadores Controlados - *XXVI Reunião Anual da SBPC*, 1974.
- [24] Algoritmo para Determinação de Curvas Invariantes de Recorrências Não Lineares - *XXVII Reunião Anual da SBPC*, 1975.
- [25] Controle Ótimo de Sistemas Modulados por Largura de Pulso - *XXVII Reunião Anual da SBPC*, 1976.
- [26] Interconnected Systems and the Robust Control Problem - *Third Formator Symposium*, Praga, Tchecoslovaquia, 1978.

- [27] Optimal Decentralized Control Problem : Application to Electrical Power Networks - *IFAC/IFORS Symposium on Optimization Methods : Applied Aspects*, Varna, Bulgaria, 1979.
- [28] Estabilização Descentralizada para uma Classe de Sistemas Lineares Invariantes - *3o. Congresso Brasileiro de Automática*, Rio de Janeiro, 1980.
- [29] Operação Ótima de Sistemas Hidrotérmicos : Um Método Primal de Solução - *XII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, 1980.
- [30] Operação Ótima de Sistemas Térmicos com Custo de Ligação - *XIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, 1980.
- [31] Decentralized Stabilization and Minimum Norm Optimization of Linear Systems - *IFAC/81: 8th Triennial World Congress*, Kyoto, Japan, 1981..
- [32] Saving Fuel for Electrical Energy through Optimal Control of Hydraulic Resources - *IFAC/81: 8th Triennial World Congress*, Kyoto, Japan, 1981.
- [33] Stability Analysis of Interconnected Systems : A Way to Improve Stability Conditions - *Automatic Control Conference (ACC)*, Arlington, USA, 1982.
- [34] Decentralized Stabilization and Stability Region Estimation for a Class of Non-Linear Systems - *20th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, 1981.
- [35] Controle Descentralizado : Técnicas e Aplicações - *1o. Simpósio em Controle de Processos por Computador*, Rio de Janeiro, 1981 (trabalho convidado).
- [36] Análise de Aplicabilidade da Decomposição Benders Generalizada - *XIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Vitória, 1981.

- [37] Coordenação da Operação Energética no Médio São Francisco por um Método de Gradiente Reduzido - 40. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Rio de Janeiro, 1981.
- [38] Condições Ótimas de Estabilidade para Sistemas Dinâmicos de Grande Porte : Aplicação a Síntese de Controladores Descentralizados - Workshop sobre Teoria de Controle - III Escola de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro 1982.
- [39] Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Sujeitos a Perturbações - IV Congresso Brasileiro de Automatica, Campinas, 1982.
- [40] Controle Ótimo de Recursos Hidráulicos - III Encontro Nacional de Automatica, Campinas, 1982 (trabalho convidado).
- [41] A New Stability Property of the Riccati Equation - IEEE Congress on Decision and Control, Orlando, USA, 1982.
- [42] Técnicas de Decomposição em Programação Matemática - III Simpósio CASTELAN em Matemática Aplicada, Florianópolis, 1983.
- [43] Análise Numérica de Decomposição Benders Generalizada na Solução do Problema de Ótimo Despacho - XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Florianópolis, 1983.
- [44] Um Novo Método Primal para Otimização de Problemas de Programação Matemática de Grande Porte - 60. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São José dos Campos, 1983.
- [45] Optimal Operation of Thermal Systems with Start-up Costs - 6th International Conference Analysis and Optimization of Systems, Nice, France, 1984.
- [46] Structural Constrained Controllers for Linear Discrete Dynamic Systems - IFAC/84 - 9th Triennial World Congress, Budapest, Hungary, 1984.

- [57] Controle Ótimo Determinístico - Vol. 1, Publicação LCC/CNPq, 1983.
- [58] Controle Ótimo Descentralizado de Sistemas Dinâmicos, Parte I : Formulação - *Revista Brasileira de Tecnologia*, Caderno de Automatica, aceito para publicação.
- [59] Controle Ótimo Descentralizado de Sistemas Dinâmicos, Parte II : Aplicação Prática - *Revista Brasileira de Tecnologia*, Caderno de Automatica, aceito para publicação.
- [60] The Parametrical Optimization Approach in the Structured Constrained Problems - *Encyclopedia of Systems and Control*, Madan Singh Editor, Pergamon Press, (artigo convidado).
- [61] Optimal Stability Conditions for the Vector Lyapunov Function Approach, no prelo.
- [62] Structural Constrained Controllers for Discrete-Time Linear Systems, *Automatica*, proposto para publicação.
- [63] A Dual-Projection Method for Large Scale Systems Optimization - *Control: Theory and Advanced Technology* - Special Issue on Large Scale Systems (To appear).
- [64] On the Robustness of Linear Continuous-Time Dynamic Systems - *IEEE Transactions on Automatic Control* - submetido para publicação.
- [65] Despacho Ótimo de Carga como um Problema Bi-critério: Análise e Implementação Através de um Novo Método Interativo - 60. Congresso Brasileiro de Automatica - submetido para publicação.
- [66] On the Robustness of Optimal Regulators for Nonlinear Discrete-Time Systems - *IEEE Congress on Decision and Control* and *IEEE Transactions on Automatic Control* - submetido para publicação.

- [67] An Interactive Projection Method for Multicriteria Optimization Problems - *SIAM Journal on Control and Optimization* - submetido para publicação.
- [68] A Twolayer Open-Loop Feedback Control - *IEEE Transactions on Automatic Control* - submetido para publicação.
- [69] Considerações sobre a Robustez de Reguladores Não Lineares a Tempo Discreto - 6o. Congresso Brasileiro de Automatica - submetido para publicação.
- [70] Decentralized Control of Large Systems with Multiple Time Scales - 10th. Triennial World Congress of IEAC - submetido para publicação.