



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Jorge Andres Puerto Acosta

**Propostas para Discretização e
Identificação em Espaço de Estado de
Sistemas Estocásticos MÍMO Lineares com
Parâmetros Variantes (LPV)**

Campinas

2019

Jorge Andres Puerto Acosta

**Propostas para Discretização e Identificação em
Espaço de Estado de Sistemas Estocásticos MIMO
Lineares com Parâmetros Variantes (LPV)**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Jorge Andres Puerto Acosta, e orientada pelo Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

P962p Puerto Acosta, Jorge Andres, 1979-
Propostas para discretização e identificação em espaço de estado de sistemas estocásticos MIMO lineares com parâmetros variantes (LPV) / Jorge Andres Puerto Acosta. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Celso Pascoli Bottura.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares variantes no tempo. 2. Sistemas estocásticos. 3. Correlação canônica (Estatística). 4. Identificação de sistemas. 5. Métodos de espaço de estados. I. Bottura, Celso Pascoli, 1938-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Proposals for discretization and identification on the state space of linear parameter varying (LPV) MIMO stochastic systems

Palavras-chave em inglês:

Linear time-varying systems

Stochastic systems

Canonical correlation (Statistics)

Systems identification

State space method

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Celso Pascoli Bottura [Orientador]

Paulo César Pellanda

Luiz Carlos Sandoval Góes

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

Mateus Giesbrecht

Data de defesa: 09-01-2019

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-3029-5861>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3337164073979631>

COMISSÃO JULGADORA-TESE DE DOUTORADO

Candidato: Jorge Andres Puerto Acosta RA: 090047

Data da Defesa: 09 de Janeiro de 2019

Título da Tese: Propostas para Discretização e Identificação em Espaço de Estado de Sistemas Estocásticos MIMO Lineares com Parâmetros Variantes (LPV)

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Paulo César Pellanda

Instituto Militar de Engenharia

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Mateus Giesbrecht

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação o/Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

“Dedico este trabajo a mis padres Myriam y Pedro y a las mujeres que han acompañado mi vida: mis hermanas, Gladys, Yolanda, Liliana, Claudia, Maryluz, Alexandra, mis sobrinas Jessica, Emily, Sofia, Vivian, mi esposa, Angie y a el brillo de cada mañana: mi hija, Sabrina Naira” .

Dedico este trabalho à minha mãe Myriam ao meu pai Pedro e às mulheres que tem acompanhado minha vida: minhas irmãs, Gladys, Yolanda, Liliana, Claudia, Maryluz, Alexandra, minhas sobrinhas Jessica, Emily, Sofia, Vivian, minha esposa, Angie e ao brilho que aparece a cada manhã: minha filha, Sabrina Naira .

Agradecimentos

É difícil determinar quem deve aparecer primeiro neste espaço de gratidão já que cada pessoa tem contribuído de uma maneira especial na elaboração deste trabalho, mesmo assim começarei por agradecer profundamente aos meus pais Myriam e Pedro, especialmente à minha mãe pelos esforços feitos na sua vida que me conduziram até o lugar onde agora estou. Posteriormente agradeço às minhas irmãs pelo apoio incondicional em cada dia da minha vida. Às minhas sobrinhas pelos sorrisos.

À minha companheira Angie, pelo suporte e a compreensão nos intermináveis dias de trabalho, à minha filha Sabrina que sem saber me deu força cada dia para continuar.

Gostaria agradecer ao meu orientador o Prof. Dr. Celso P Bottura, por sua inspiradora forma de ser, sua dedicação e por sem duvida alguma ser uma das mais importantes referencias profissionais na minha carreira até agora.

Gostaria também agradecer aos meus colegas de laboratório que tornaram-se amigos no transcorrer destes anos de doutorado. Especialmente a Elvis e Jean, obrigado pela amizade.

Finalmente gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora por terem aceito participar na avaliação deste trabalho, à UNICAMP pelo suporte dado e a CAPES pelo suporte econômico.

“Quando era jovem, após me graduar na universidade, pensei em me tornar primeiro-ministro ou milionário, mas achei que nenhuma dessas opções seria satisfatória. Eu concluí que a educação é a única coisa à qual um homem poderia dedicar sua vida sem arrependimentos, e assim busquei uma carreira na área de educação ”

(Jigoro Kano)

“Seja alegre e otimista. Não perca tempo em olhar para trás, para ver o que já fez. Olhe para frente e caminhe confiante e alegre, praticando o bem e ajudando a todos. Dê a mão a cada criatura que se lhe aproxima, diga sempre uma palavra de conforto e carinho, tenha para todos um sorriso de bondade, e a verdadeira felicidade passará a constituir seu clima permanente de vida”

(C. Torres Pastorino)

Resumo

A busca de métodos e algoritmos eficientes para identificação de sistemas multivariáveis LPV tem avançado sobretudo para o caso de identificação determinística, isto em parte porque a complexidade na modelagem experimental de sistemas, a partir de dados LPV, tende a aumentar quando se trata do caso estocástico. Neste trabalho propomos métodos e algoritmos para identificação no espaço de estado de sistemas LPV multivariáveis estocásticos, baseados em extensões da teoria de realização estocástica mínima de Akaike. Nos métodos: método iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlações canônicas (ICCALPV) e iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlação canônica condicional (3C2ILPV) aqui propostos, estendemos o método de identificação LTI por análise de correlação canônica condicional de Katayama/Larimore para sistemas LPV estocásticos e usamos aproximações sucessivas para obter o modelo LPV afim aos parâmetros. Para os métodos: identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica kernelizada de dois passos (K2SIDLPV) e Método de identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica condicional kernelizada (3CKLPV) também aqui propostos, as kernelizações da análise de correlação canônica (KCCA), e da análise de correlação canônica condicional K3CA são também elaboradas. No método ICCALPV a KCCA é usada para estender a teoria de realização de séries temporais estocásticas de Akaike e obter a identificação do modelo LPV. No método 3CKLPV usamos a K3CA para identificar o modelo LPV com entradas exógenas. Um segundo objetivo alcançado, a partir dos conceitos de transformação conforme e de transformação fracionária linear (LFT), permite uma estrutura generalizada de representação de sistemas lineares e não lineares, tais como: sistemas em malha aberta, em malha fechada, variantes no tempo, não lineares, incertos e LPV. Explorando a estrutura generalizada e a LFT apresentamos propostas de discretização de sistemas LPV multivariáveis contínuos, salientando a discretização com períodos de amostragem variantes no tempo ou incertos, acionados por eventos no controle em rede. Neste trabalho validamos e comparamos nossas propostas para identificação no espaço de estado de sistemas LPV multivariáveis estocásticos: ICCALPV, 3C2ILPV, K2SIDLPV e 3CKLPV com o método PSBID de identificação LPV, obtendo bons resultados, tanto em tempos de processamento como em acuidade, conforme mostrado nos exemplos.

Palavras-chaves: Identificação Estocástica por Espaço de Estado de Sistemas LPV;
Análise de Correlação Canônica Kernelizada; Discretização de Sistemas LPV.

Abstract

The search for efficient algorithms and methods for multivariable LPV system identification has advanced mainly for the case of deterministic identification, partially due to the complexity increase tendency for modeling systems from LPV data for the stochastic case. In this work, methods and algorithms for state space identification of multivariable LPV stochastic systems based on extensions of the minimal stochastic realization theory of Akaike are proposed. For the methods ICCALPV and 3C2ILPV here proposed, we extend the conditional canonical correlation identification method for LTI systems of Katayama/Larimore to stochastic LPV systems and use successive approximations to obtain the LPV model with affine parameter dependence. For the K2SIDLPV and 3CKLPV methods, also here proposed, the kernelizations of the canonical correlation analysis KCCA and of the conditional canonical correlation analysis K3CA are also elaborated. For the K2SIDLPV algorithm, the KCCA is used to extend the Akaike's stochastic time series realization theory and to obtain the LPV model identification. For the 3CKLPV algorithm the K3CA is used to identify the LPV model with exogenous inputs. A second achieved objective, based on the conformal mapping and linear fractional transformation (LFT) concepts, allows a generalized framework representation (GFR) for linear and nonlinear systems such as open loop, closed loop, time varying, nonlinear, uncertain, LPV. Exploring the GFR and the LFT representation, we present proposals for the discretization of continuous of LPV dynamic systems, specially for the discretization of uncertain or time varying sampling period, event triggered in network control.

In this work the comparisons and validations of our proposals for multivariable stochastic state space LPV dynamic systems identification: ICCALPV, 3C2ILPV, K2SIDLPV and 3CKLPV with the PSBID LPV model identification method, presented good results both for elapsed time as for accuracy, as shown through examples.

Keywords: State Space Stochastic Identification of LPV systems; Kernelized Canonical Correlation Analysis; LPV Continuous Systems Discretization.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Relações entre os Capítulos e os Temas Tratados.	26
Figura 2 – Diagrama de Controle por Ganho Escalonado.	28
Figura 3 – Sistema Geral.	42
Figura 4 – Sistema Dinâmico.	42
Figura 5 – Diagrama LFT Inferior.	44
Figura 6 – Diagrama LFT Superior.	44
Figura 7 – Sistema Representado via LFT Superior.	45
Figura 8 – Representações de um sistema LTI.	47
Figura 9 – Sistema MIMO em Malha Fechada.	49
Figura 10 – Sistema MIMO Contínuo em Malha Fechada.	50
Figura 11 – Sistema Discreto MIMO em Malha Fechada.	51
Figura 12 – Sistema em Malha Fechada via LFT.	53
Figura 13 – Representações de um sistema LTI discreto em malha fechada	55
Figura 14 – Representação Geral de Sistema LPV via LFT.	56
Figura 15 – Diagramas de Bode Discreto e Contínuo.	60
Figura 16 – Diagrama do Modelo de Erros em Variáveis.	66
Figura 17 – EIV com \tilde{u} RBMZ e uso de IV.	81
Figura 18 – EIV com \tilde{u} RBMZ e uso de Mínimos Quadrados.	83
Figura 19 – EIV com \tilde{u} não sendo RBMZ e uso de IV.	84
Figura 20 – EIV com \tilde{u} não sendo RBMZ e uso de Mínimos Quadrados	85
Figura 21 – Bancada de vibração torcional.	87
Figura 22 – Representação esquemática do sistema eletromecânico de um grau de liberdade.	87
Figura 23 – Diagrama de corpo livre considerando que o acoplamento é um corpo rígido.	88
Figura 24 – Comparações entre Velocidade Medida e Velocidade Estimada pelo Método CCA.	89
Figura 25 – Comparações das saídas dos Modelos Identificados.	90
Figura 26 – Diagrama da representação LPV-LFT.	95
Figura 27 – Diagrama de polos do modelo afim contínuo.	100
Figura 28 – Resposta em frequência do modelo discreto Afim.	101
Figura 29 – Comparação dos resultados das discretizações.	102

Figura 30 – Diagrama de blocos do sistema Massa-Mola-Amortecedor.	103
Figura 31 – Diagrama de Bode Modelo Local Discretizado para $\delta_m = -0,0086$.	105
Figura 32 – Diagrama de Bode do Modelo Local Discretizado	106
Figura 33 – Representação LPV-LFT a discretizar.	107
Figura 34 – Diagrama de blocos da representação LPV-LFT a discretizar.	108
Figura 35 – Diagrama da representação LPV-LFT discretizada.	109
Figura 36 – Comparação dos resultados das discretizações em IDv06 vs Procedimento 2.112	
Figura 37 – Rede de Controle.	113
Figura 38 – Diagrama do modelo LPV-LFT a partir do modelo afim ao parâmetro $\delta_T(k)$.118	
Figura 39 – Representação LPV do período de amostragem variante.	119
Figura 40 – Modelo a Discretizar conectado com o Modelo LPV-LFT do Período de Amostragem.119	
Figura 41 – Resumo da Proposta 1, para Período de Amostragem Variante.	121
Figura 42 – Resumo da Proposta 2 para Período de Amostragem Variante.	122
Figura 43 – Média{VAF}=37% com PI:1 e IN:1-20.	144
Figura 44 – Média{VAF}=87% com PI:2 e IN:1-20.	144
Figura 45 – Média{VAF}	148
Figura 46 – Média{Tempo}	148
Figura 47 – Média {VAF}	149
Figura 48 – Tempo transcorrido na execução do algoritmo	150
Figura 49 – Média{VAF}	158
Figura 50 – Média{VAF}	177
Figura 51 – Tempo transcorrido na execução do algoritmo	177
Figura 52 – Saída Comparada no Tempo.	178
Figura 53 – Média{ VAF}	179
Figura 54 – Tempo transcorrido na execução do algoritmo	179

Lista de tabelas

Tabela 1 – Nomenclatura no Método MOESP.	66
Tabela 2 – VAF da Identificação do Modelo “Flapping Dynamics”	144
Tabela 3 – VAF Médio do Sistema MIMO LPV identificado via ICCALPV. . .	146
Tabela 4 – Comparação das identificações do modelo de Flapping Dynamics. .	148
Tabela 5 – Comparação dos Modelos MIMO LPV Identificados com ICCALPV e PSBID.	149
Tabela 6 – Comparações dos Algoritmos.	157
Tabela 7 – Configuração do Algoritmo K2SIDLPV1	177
Tabela 8 – Configuração do Algoritmo 3CKLPV	179

Lista de abreviaturas e siglas

<i>LCSI</i>	Laboratorio de Controle e Sistemas Inteligentes
<i>LTI</i>	Sistema linear invariante no tempo
<i>LTV</i>	Sistema linear Variante no tempo
<i>LPV</i>	Sistema linear com Parâmetros Variantes
<i>MIMO</i>	Multipla entrada multipla saída
<i>LFT</i>	Transformada fracionária linear
<i>ICCALPV</i>	Método iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlações canônicas
<i>3C2ILPV</i>	Método iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlação canônica condicional
<i>K2SIDLPV</i>	Método de identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica kernelizada de dois passos
<i>3C2ILPV</i>	Método de identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica condicional kernelizada
<i>GSC</i>	Controle por escalonamento de ganhos
<i>LPV – A</i>	Sistema LPV com dependência afim ao parâmetro
<i>LPV – IA</i>	Sistema LPV com dependência de entrada afim ao parâmetro
<i>LPV – OA</i>	Sistema LPV com dependência de saída afim ao parâmetro
<i>LPV – SA</i>	Sistema LPV com dependência de estado afim ao parâmetro
<i>LPV – LFT</i>	Sistema LPV na forma LFT
<i>ARX</i>	Modelo Auto-regressivo

<i>ARMAX</i>	Modelo Auto-regressivo com média móvel
<i>IV</i>	Variável Instrumental
<i>PEM</i>	“Predictor Error Model”
<i>LS – SVM</i>	Quadrados mínimos por maquinas de vetor suporte
<i>GB</i>	Método de otimização por gradiente
<i>EM</i>	Maximização da esperança
<i>LMI</i>	Desigualdades Matriciais lineares
<i>SID</i>	Identificação de sistemas
<i>PSBID</i>	“Predictor Based Subspace Identification”
<i>PSBID_{opt}</i>	PSBID método ótimo
<i>SVD</i>	Decomposição por valores singulares
<i>CVA</i>	Análise de variáveis canônicas
<i>CCA</i>	Análise por correlação canônica
<i>3CA</i>	Análise por correlação canônica condicional
<i>LQ</i>	Decomposição LQ
<i>QR</i>	Decomposição QR
<i>MIMO</i>	Múltiplas entradas múltiplas saídas
<i>SISO</i>	Entrada única saída única
<i>ZSR</i>	Resposta de estado zero
<i>TF</i>	Função de transferência
<i>MTF</i>	Matriz de transferência
<i>MOESP</i>	“Multivariable Output-Error State Space”

<i>PI</i>	Perturbação de entrada no capítulo 3, “Past Information” no capítulo 4
<i>PO</i>	Perturbação de saída
<i>EIV</i>	Erros em variáveis
<i>Benchmark</i>	Sistema simulado que permite a aquisição de dados e teste de algoritmos
<i>ZOH</i>	segurador de ordem zero
<i>A</i>	Amostrador ideal na figura 37
<i>IN</i>	“Iterations Number”
<i>VAF</i>	“Variance Accounted For”
<i>GSV</i>	Vetor de parâmetros de escalonamento
<i>RKHS</i>	Kernel reprodutor no espaço de Hilbert
<i>GEP</i>	Problema de autovalor generalizado
<i>ARE</i>	Equação algébrica de Riccati
Nota	A abreviação PI é usada para diferentes termos em diferentes capítulos, porém a diferença pode ser esclarecida pelo contexto e o capítulo no qual aparece a abreviação.

Lista de símbolos

δ_k	Vetor de parâmetros
u_k	Vetor de entrada
y_k	Vetor de saídas
x_k	Vetor de estado
$A(\delta_k), B(\delta_k), C(\delta_k), D(\delta_k)$	Matrizes dependentes do vetor δ_k
$\bullet_1 \otimes \bullet_2$	Produto de Kronecker entre as matrizes \bullet_1 e \bullet_2
$\bullet_1 \odot \bullet_2$	Produto de Khatri- Rao entre as matrizes \bullet_1 e \bullet_2
A_0, B_0, C_0, D_0	Matrizes de estado do sistema nominal $x_{k+1} = A_0 x_k + \sum_{i=1}^s A_i \delta_{i,k} x_k + B_0 u_k + \sum_{i=1}^s B_i \delta_{i,k} u_k$ $y_k = C_0 x_k + \sum_{i=1}^s C_i \delta_{i,k} x_k + D_0 u_k + \sum_{i=1}^s D_i \delta_{i,k} u_k$] Modelo LPV com dependência afim aos parâmetros
Δ_k	Matriz diagonal de parâmetros
s	Frequência complexa contínua
z	Frequência complexa discreta
\mathbb{C}	Conjunto das variáveis complexas
$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$	Matriz bloco matricial
Δ_l	Matriz diagonal inferior
Δ_u	Matriz diagonal superior
$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l)$	Transformada fracionária linear inferior
$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u)$	Transformada fracionária linear superior
$G(s)$	Função/Matriz de transferência contínua

$G(z)$ Função/Matriz de transferência discreta

$$\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de transferência } MTF \text{ contínua}$$

$$\begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1}(z) & \dots & G_{mn}(z) \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de transferência } MTF \text{ discreta}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{Matriz bloco que contem as matrizes do modelo de estado contínuo ou discreto}$$

$$\mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s} I \right) \quad \text{Matriz de transferência contínua}$$

$$\mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{z} I \right) \quad \text{Matriz de transferência discreta}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad \text{Matriz de transferência contínua/discreta}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i A_i & B_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i B_i \\ \hline C_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i C_i & D_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i D_i \end{array} \right] \quad \text{Matriz de transferência contínua/discreta afim aos parâmetros}$$

$\bullet_{0|s-1}$ Matriz bloco de Hankel de dados entre $0 \leq s-1$ e $\bullet = U, Y, \dots$

$\hat{E}_{\{\bullet_{1,0|s-1} \mid \bullet_{2,0|s-1}\}}$ Projeção ortogonal de $\bullet_{1,0|s-1}$ ao longo de $\bullet_{2,0|s-1}$

$\hat{E}_{\|\mathcal{C}\}\{\alpha|\mathcal{B}\}}$ Projeção Oblíqua de α em \mathcal{B} ao longo de \mathcal{C}

Γ Matriz de observabilidade estendida

\mathcal{C} Matriz de controlabilidade estendida

Ψ Matriz de Toeplitz

$\Lambda_{\bullet_1 \bullet_2}$ Matriz de covariâncias entre \bullet_1 e \bullet_2

$\Sigma_{\bullet_1 \bullet_2}$	Matriz de covariâncias entre \bullet_1 e \bullet_2
$\Sigma_{\bullet_1 \bullet_2 \bullet_3}$	Matriz de covariâncias condicionais entre \bullet_1 e \bullet_2 dado \bullet_3
$u_{e0 t}$	Matriz de entradas estendida com t informações do passado
$u_{e0 t,k}$	Vetor de entradas estendido com t informações do passado
$X_{f w}$	Espaço de estado
\hat{x}_k	Vetor de estado estimado
\tilde{x}_k	Vetor do erro de estimação do estado x_k
\hat{x}_k^i	Vetor de estado estimado na i -ésima iteração

Sumário

1	Introdução	24
1.1	Prefácio	24
1.2	Objetivo da Pesquisa	27
1.3	Estado da Arte	27
1.3.1	Modelagem do Sistema Linear com Parâmetros Variantes	28
1.3.2	Abordagem Analítica	31
1.3.3	Abordagem por Identificação	31
1.4	Contribuições e Organização	36
1.5	Trabalhos Publicados e Submetidos	38
1.5.1	Publicados	38
1.5.2	Submetidos	39
I	Fundamentos, Representações e Identificação LTI	40
2	Sobre Representações de Sistemas Dinâmicos	41
2.1	Introdução	41
2.2	Definições Básicas	41
2.2.1	Sistema	41
2.2.2	Transformada Fracionária Linear	43
2.3	Realizações LTI usando LFT	45
2.3.1	Realização Contínua	47
2.3.2	Realização Discreta	48
2.4	Representações Generalizadas	48
2.4.1	Representação Generalizada de Malha Fechada LTI	49
2.4.2	Sistemas Aumentados Contínuos	49
2.4.3	Sistema Discreto Aumentado via LFT	51
2.4.4	Representação Generalizada Contínua LPV	54
2.4.5	Discretização de um sistema LTI	57
2.5	Conclusões	59
3	Identificação no Espaço de Estado de Sistemas LTI em Malha Aberta	61

3.1	Introdução	61
3.2	Problema de Identificação Determinística	61
3.2.1	Método MOESP	62
3.2.2	Modificações do Método MOESP	66
3.2.3	Problema de Erros em Variáveis (EIV)	67
3.2.4	Abordagem do problema EIV por Subespaços	68
3.2.4.1	Estimação das Matrizes B_T e D	71
3.3	Identificação Estocástica	75
3.3.1	Problema de Identificação Estocástica com Entradas Exógenas	75
3.3.2	Identificação pelo Método CCA	76
3.4	Aplicação	80
3.4.1	Método EIV	80
3.4.1.1	Benchmark EIV de Sexta Ordem	81
3.4.1.2	Conclusão do uso do algoritmo MOESP EIV	86
3.4.2	Aplicação do Método CCA	86
3.4.2.1	Modelo analítico	87
3.4.2.2	Sinais de excitação e de saída	88
3.4.2.3	Identificação pelo método CCA	88
3.4.2.4	Validações e comparação de resultados	88
3.4.2.5	Conclusões	89
II	Contribuições em Discretização e Identificação LPV	91
4	Geração de Dados e Discretização de Sistemas LPV	92
4.1	Introdução	92
4.2	Discretização LPV para Obtenção de Modelos LTI Locais	94
4.2.1	Procedimento 1.	94
4.2.2	Exemplo: “F-16 VISTA Flight Model”	96
4.2.3	Exemplo: Sistema Massa Mola Amortecedor.	103
4.2.4	Procedimento 2.	107
4.2.5	Exemplo: “F-16 VISTA Flight Model”	110
4.2.6	Comparação de resultados	111
4.2.7	Conclusões	112

4.3	Discretização via LFT para Obtenção de Modelos LPV na Rede	113
4.3.1	Discretização dos Modelos LPV afins aos Parâmetros	114
4.3.2	Representação LFT para Obter Modelos Locais Afins aos Parâmetros	115
4.3.3	Discretização para obter o Modelo Global LPV-LFT	118
4.3.4	Exemplo: “F-16 VISTA Flight Model” com Período de Amostragem Incerto	123
4.3.5	Conclusão	125
5	Método de Identificação ICCALPV	126
5.1	Introdução	126
5.2	Modelo LPV	127
5.3	Método ICCALPV	128
5.3.1	Vetor de Estado Inicial	129
5.3.2	Matrizes de Entrada Aumentadas	132
5.3.3	Reformulação do Modelo	134
5.3.4	Vetor de Estado Calculado com Informações do Passado	134
5.3.5	Estimação do Modelo MIMO LPV	135
5.3.5.1	Vetor Estimado e Vetor de Erro de Estimação	135
5.3.5.2	Iteração da Estimação de Estado	136
5.3.5.3	Processo para Obter as Matrizes de Estado	138
5.3.6	Algoritmo ICCALPV	139
5.4	Simulações e Comparações entre os Métodos ICCALPV e PSBID	142
5.4.1	Exemplos	142
5.4.1.1	Modelo da Dinâmica Tremulante “Flapping”	142
5.4.1.2	Sistema MIMO LPV	145
5.4.2	Comparação entre ICCALPV e $PBSID_{opt}$	146
5.4.2.1	Comparação dos Métodos para Modelagem do “Flapping”	147
5.4.2.2	Comparação das Identificações do sistema MIMO LPV	149
5.5	Conclusão	150
6	Método de Identificação 3C2ILPV	151
6.1	Introdução	151
6.2	Modelo MIMO LPV Inovativo com Dependência Afim aos Parâmetros	152
6.3	Método 3C2ILPV	152
6.3.1	Filtro de Kalman	152
6.3.2	Processo de Obtenção das Matrizes do Modelo LPV na Forma Inovativa	154

6.3.3	Algoritmo 3C2ILPV	155
6.4	Simulação e comparação dos métodos 3C2ILPV, ICCALPV e PSBID	156
6.5	Conclusão	158
7	Realização e Métodos de Identificação por KCCA	159
7.1	Introdução	159
7.2	Análise de Correlação Canônica Kernelizada	160
7.2.1	Regularização	164
7.2.2	Análise de Correlação Canônica Condicional Kernelizada	164
7.3	Identificação LPV via Correlação Canônica Kernelizada	165
7.3.1	Método K2SIDLPV	166
7.3.2	Passo 1: Estimação do vetor de estado inicial via KCCA	166
7.3.2.1	GEP Kernelizado e Regularização	169
7.3.3	Passo 2: Estimação do Sistema LPV	170
7.3.4	Algoritmo K2SIDLPV	171
7.4	Método 3CKLPV	172
7.4.1	Passo 1: Vetor de Estado Inicial	173
7.4.1.1	Matrizes de Covariâncias Condicionais Kernelizadas	173
7.4.1.2	Matrizes de \mathcal{E} , \mathcal{O} Estendidas e Vetor de Estado	174
7.4.2	Passo 2: Modelo MIMO LPV	175
7.4.3	Algoritmo 3CKLPV	176
7.5	Aplicação	176
7.5.1	K2SIDLPV	177
7.5.2	3CKLPV	179
7.6	Conclusão	180
	Conclusão	181
7.7	Trabalhos Futuros	182
	Referências	183

1 Introdução

1.1 Prefácio

Nas últimas décadas, no Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes -LCSI- da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas -FEEC/UNICAMP- contribuições significativas para identificação determinística e estocástica no espaço de estado de sistemas dinâmicos e de séries temporais multivariadas são realizadas. Trabalhos como [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] explicitam os fundamentos das teorias de realização determinística e estocástica nas quais são baseados os métodos de identificação linear e invariante no tempo (LTI) mais reconhecidos pela comunidade de controle baseado no modelo. No LCSI, importantes trabalhos fundamentados nas bases conceituais da teoria de realização determinística [1] e da teoria da realização estocástica LTI [4, 5, 6, 7, 8] foram elaborados. Contribuições para a resolução dos problemas de modelagem de sistemas não-lineares [11] e lineares variantes no tempo (LTV) [12, 13] baseados em dados também resultaram das pesquisas no LCSI.

Nesta tese propomos contribuições à discretização, à teoria da realização estocástica e aos métodos de identificação de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV). Como no caso de alguns dos trabalhos do LCSI em que esta tese se baseia, “a matemática aqui tratada e a forma utilizada para tanto não enfatiza o rigor matemático, ela é feita para viabilizar o que consideramos objetivos importantes” [1], ou seja, nossa principal preocupação é a adequada aplicação dos conceitos de identificação por subespaços aos problemas de modelagem de sistemas lineares com parâmetros variantes a partir de dados experimentais.

As motivações para pesquisar a identificação no espaço de estado de sistemas LPV multivariáveis, estão diretamente associadas ao crescimento do interesse da comunidade científica por estes modelos, principalmente por que as características não lineares de sistemas reais podem ser aproximadas de forma mais acurada mediante a representação LPV.

A complexidade das aplicações em diferentes áreas como aeronáutica, automo-

tiva, robótica, dentre outras, exige nos projetos de controle automático, modelagem adequada dos sistemas dinâmicos subjacentes à aplicação. As modelagens LPV podem capturar de melhor forma os efeitos das variações no tempo do que as modelagens LTI, e podem ser consideradas mais gerais e menos complexas do que as representações não-lineares, pois os modelos LPV podem ser considerados uma representação intermediária entre os dois paradigmas: linear e não linear de modelagem.

De forma geral nosso objetivo principal se iniciou com a idéia de estender técnicas de identificação LTI para sistemas lineares com parâmetros variantes, com o fim de obter modelos estocásticos LPV eficientes. Este propósito foi se transformando e ganhando um carácter mais complexo, o que permitiu propor um conjunto de novos métodos de identificação de sistemas MIMO¹ LPV, seus algoritmos e suas respectivas aplicações. Além deste objetivo principal, conseguimos o objetivo secundário: uma proposta de discretização de sistemas LPV com período de amostragem incerto² usando as transformações conformes LFT (Linear Fractional Transformations).

A tese está dividida em oito capítulos incluindo a introdução e as conclusões. Na figura 1 apresentamos a relação entre os capítulos e os temas tratados, com o propósito de facilitar a leitura do texto.

¹ Multi Input Multi Output

² ou variante no tempo

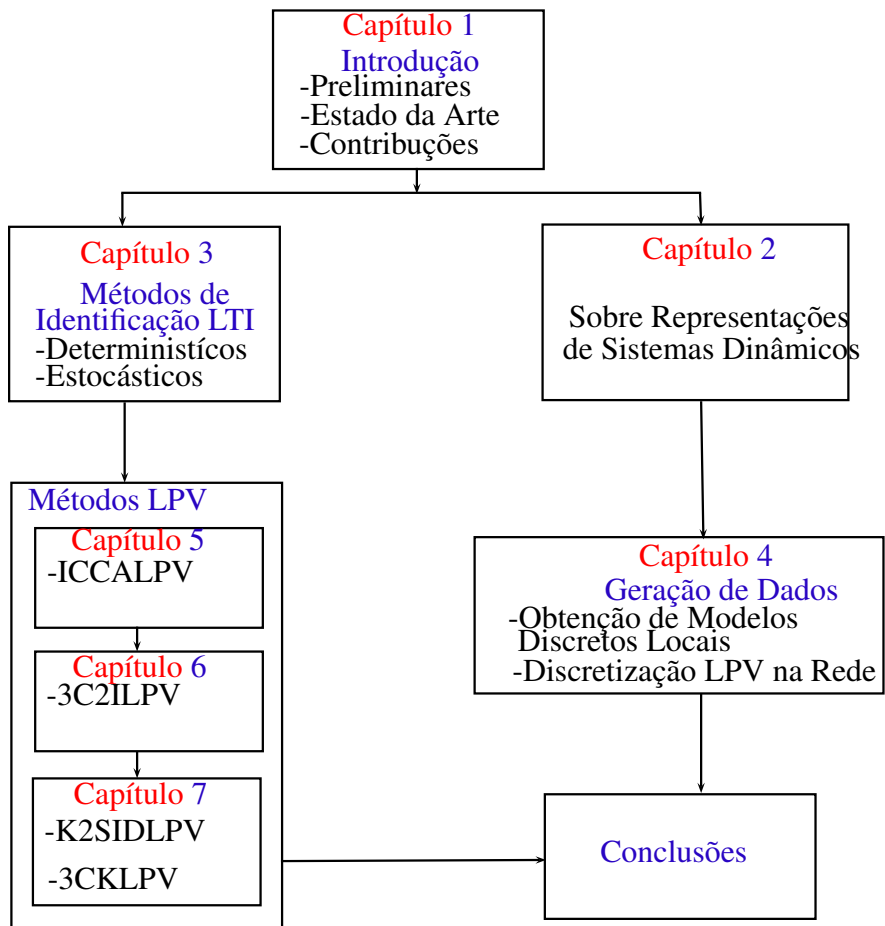


Figura 1 – Relações entre os Capítulos e os Temas Tratados.

1.2 Objetivo da Pesquisa

Desenvolver e/ou estender métodos de identificação no espaço de estado para sistemas lineares discretos com parâmetros variantes, com a finalidade de obter modelos multivariáveis estocásticos LPV eficazes a partir dos dados de entrada saída e parâmetros de escalonamento (sequenciamento) do sistema.

1.3 Estado da Arte

Diferentes métodos de controle baseados no modelo, têm sido desenvolvidos nas últimas décadas. Porém, o desempenho do sistema de controle depende da qualidade do modelo. Isto é evidenciado de maior maneira nos processos que implicam sistemas não lineares controlados ao redor de um conjunto de pontos de operação.

O método mais comumente usado para o controle destes sistemas não lineares (linearizados) de amplo espectro de operação é o controle por escalonamento de ganhos (GSC)³. Tal método foi desenvolvido para projetar um conjunto de controladores Lineares Invariantes no Tempo (LTI⁴) ao redor de diferentes pontos de operação. Cada controlador associado ao seu respectivo ponto de operação, como é de se esperar, apresenta um desempenho suficientemente bom no entorno de dito ponto. Assim, os ganhos associados aos controladores LTI nos pontos de operação escalonados são interpolados para garantir o processo de controle automático dentro do espectro de operação da planta não linear. Isto é feito atualizando o ganho do controlador interpolado através de uma variável auxiliar chamada variável de escalonamento⁵ ver [14, 15, 16]. Na figura 2, é apresentado o diagrama de controle por ganhos escalonados. O problema de controle por ganhos escalonados, tem sido bastante pesquisado [17, 18] e junta um grande conjunto de métodos e aplicações nas áreas de aeronáutica, automotiva, aviônica, mecânica, mecatrônica, robótica, e computação como é exposto em [19, 20].

O processo de controle por ganho escalonado de uma planta não linear encontra-se representado na Figura 2. Para isto, o controlador por ganho escalonado requer um

³ conhecido também como: Controle por ganhos escalonados ou em inglês como: “Gain Scheduling Control”

⁴ do inglês “Linear Time Invariant ”

⁵ do inglês: “Scheduling Variable”

modelo adequado tal que mantenha uma dependência congruente com os parâmetros que variam (no diagrama as variáveis de escalonamento).

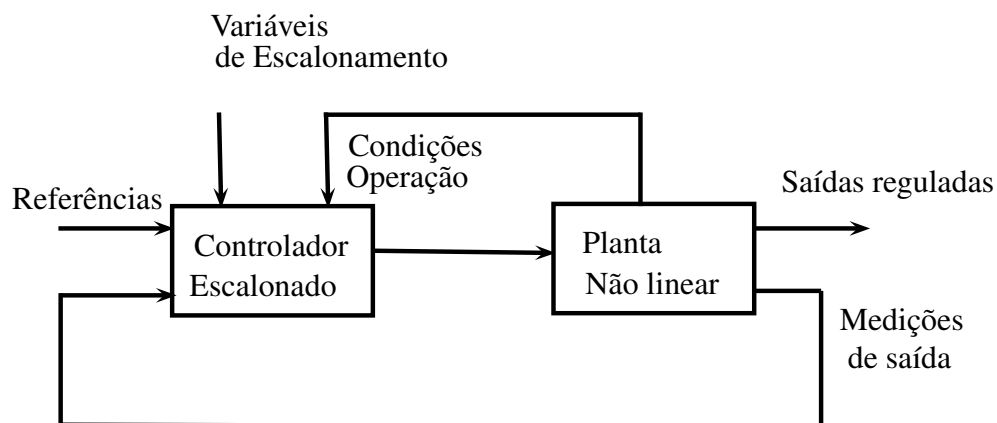


Figura 2 – Diagrama de Controle por Ganho Escalonado.

Na década dos 1990's os métodos LPV receberam grande atenção em aplicações de controle e especialmente no desenvolvimento de uma teoria sistemática de controle por escalonamento de ganhos. Alguns dos autores da área de controle LPV em dita década são J. Shamma, M. Athans, A. Packard; posteriormente trabalhos que apresentam abordagens por desigualdades matriciais e controle robusto podem ser vistos em [21, 22] e nas referências destes trabalhos. Alguns dos primeiros desenvolvedores de algoritmos de identificação de sistemas LPV são L. Lee, K. Poolla[23], M. Nemani, R.Ravikanth [24], M. Lovera [25], V. Verdult [26], [27] dentre outros.

1.3.1 Modelagem do Sistema Linear com Parâmetros Variantes

A modelagem adequada da planta no problema de controle por ganho escalonado, tem várias abordagens. Dentre essas, duas são frequentemente usadas. A primeira é a abordagem analítica [17, 18, 28] baseada na descrição do modelo não linear em função da dinâmica da planta através de equações não lineares. A outra é a abordagem baseada na identificação a partir dos dados entrada saída medidos do sistema [29, 30].

As duas abordagens citadas para controle de ganho escalonado tratam da modelagem em presença de uma dinâmica não linear, através de modelos com dependência de

parâmetros variantes lineares (LPV⁶) conforme a denominação introduzida por Shamma e Athans em 1988 [31]. Em [25] é proposto o modelo LPV discreto no tempo como um conjunto de matrizes de estado que são funções de um vetor que varia de acordo com um vetor de parâmetros mensurável. Informações aprofundadas sobre os modelos de entrada-saída podem ser vistas em [29, 32].

O modelo discreto em espaço de estado de um sistema LPV no qual as matrizes são funções de um vetor de parâmetros variantes é:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(\delta_k)x_k + B(\delta_k)u_k \\ y_k &= C(\delta_k)x_k + D(\delta_k)u_k\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $\delta_k \in \mathbb{R}^s$ é o vetor de parâmetros, $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ a entrada, $y_k \in \mathbb{R}^l$ a saída e k é o k -ésimo instante de amostragem. Algumas das formas mais comuns associadas ao modelo em (1.1) [26, 25, 33, 34] são:

1. Dependência afim ao parâmetro (LPV-A)⁷:

Considere a matriz $A(\delta_k)$ expressa como:

$$A(\delta_k) = A_0 + A_1\delta_{1,k} + \dots + A_s\delta_{s,k}\tag{1.2}$$

e as matrizes $B(\delta_k)$, $C(\delta_k)$, $D(\delta_k)$ com o mesmo tipo de estrutura.

O modelo em (1.1) pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_0x_k + A_1\delta_{1,k}x_k + \dots + A_s\delta_{s,k}x_k + B_0u_k + B_1\delta_{1,k}u_k + \dots + B_s\delta_{s,k}u_k \\ y_k &= C_0x_k + C_1\delta_{1,k}x_k + \dots + C_s\delta_{s,k}x_k + D_0u_k + D_1\delta_{1,k}u_k + \dots + D_s\delta_{s,k}u_k\end{aligned}\tag{1.3}$$

ou de forma compacta como:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_0x_k + \sum_{i=1}^s A_i\delta_{i,k}x_k + B_0u_k + \sum_{i=1}^s B_i\delta_{i,k}u_k \\ y_k &= C_0x_k + \sum_{i=1}^s C_i\delta_{i,k}x_k + D_0u_k + \sum_{i=1}^s D_i\delta_{i,k}u_k\end{aligned}\tag{1.4}$$

Usando o produto de Kronecker dado por:

⁶ do inglês “Linear Parameter Varying”

⁷ “LPV-A” do inglês “Affine parameter dependence”

$$\text{Produto de Kronecker } A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

o modelo em (1.4), pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $A_p = [A_1 \dots A_s]$ e as matrizes B_p, C_p, D_p com o mesmo tipo estrutura.

2. Dependência I/O/S/ Afim ao Parâmetro

- a) LPV-IA⁸: Apenas as matrizes $B(\delta_k), D(\delta_k)$ são consideradas como dependentes dos parâmetros variantes. E as matrizes A e C são supostas como constantes. Ou seja: $A = A_0, C = C_0$.
- b) LPV-OA⁹: Apenas as matrizes $A(\delta_k)$ e $D(\delta_k)$ são consideradas como dependentes dos parâmetros variantes. E as matrizes B e C são supostas como constantes. Ou seja: $B = B_0, C = C_0$.
- c) LPV-SA¹⁰: Apenas as matrizes $A(\delta_k)$ e $B(\delta_k)$ são consideradas como dependentes dos parâmetros variantes. E as matrizes C e D são supostas como constantes. Ou seja: $C = C_0, D = D_0$.

3. Dependência de parâmetro LFT (LPV-LFT)¹¹: Neste caso a planta é suposta como sendo constituída como uma interligação por realimentação da forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0w_k + B_1u_k \\ z_k &= C_0x_k + D_{00}w_k + D_{01}u_k \\ y_k &= C_1x_k + D_{10}w_k + D_{11}u_k \end{aligned} \quad (1.6)$$

⁸ “LPV-IA” do inglês “Input-Affine Parameter Dependence”

⁹ “LPV-OA” do inglês “Output-Affine Parameter Dependence”

¹⁰ “LPV-SA” do inglês “State-Affine Parameter Dependence”

¹¹ “LPV-LFT” do inglês “LFT Parameter Dependence”

com vetor de parâmetros :

$$w_k = \Delta_k z_k \quad (1.7)$$

onde w e $z \in \mathbb{R}^r$, $r = r_1 + \dots + r_s$, e

$$\Delta_k = \text{diagonal}(\delta_{1,k} I_{r_1}, \dots, \delta_{s,k} I_{r_s}) \quad (1.8)$$

Como exposto anteriormente, as duas abordagens diferentes para a modelagem de sistemas lineares com parâmetros variantes, a analítica e a de identificação são detalhadas a seguir (LPV):

1.3.2 Abordagem Analítica

A premissa subjacente, para o desenvolvimento de métodos analíticos, é que um modelo de estado contínuo não linear para a planta está disponível [17, 18, 28].

Existem várias metodologias para obter o modelo analítico do sistema, dentre elas a linearização Jacobiana, a transformação de estado [19] e a substituição de função [28] (metodologias que não são abordadas neste texto dado que nosso interesse está na abordagem por identificação).

1.3.3 Abordagem por Identificação

Comunmente os algoritmos desenvolvidos para a identificação de sistemas LPV são divididos em dois conjuntos. O primeiro conjunto contém abordagens globais, para os quais os dados de entrada-saída são adquiridos num único experimento, no qual são excitados tanto o parâmetro como o sistema. Por outro lado o segundo conjunto contém algoritmos para a abordagem local, a qual considera um conjunto de experimentos ao redor de diferentes pontos de operação. Esta abordagem é de parâmetros constantes. Cada parâmetro constante produz um modelo LTI. Os múltiplos modelos LTI são interpolados com a finalidade de fornecer um modelo LPV.

a. Abordagem local

A ideia básica da abordagem consiste em obter um conjunto de modelos LTI que serão interpolados para a obtenção de um modelo LPV. Esses modelos podem ser

obtidos a partir da fixação do parâmetro δ_k em (1.1). Um conjunto de matrizes $A(\delta)$, $B(\delta)$, $C(\delta)$, $D(\delta)$, na forma afim ou LFT (ver [33, 26, 23]) que permita uma adequada aproximação ao modelo em (1.1), é obtido.

Em [19, 35], são apresentados os passos mais comumente empregados para a obtenção dos modelos locais, que são listados a seguir:

1. Use um algoritmo de identificação LTI para obter um conjunto de modelos LTI no entorno de pontos de operação desejados (exemplos: Métodos de entrada-saída como: ARMAX, ARX, PEM [36], métodos no domínio da frequência [37], métodos de subespaços [38, 39, 40])
2. Obtenha o modelo LPV por interpolação das matrizes de estado dos modelos locais LTI.

Algumas das dificuldades apresentadas na interpolação direta das matrizes de estado para a obtenção do modelo LPV residem na impossibilidade de fixar uma base para a representação de estado. Isto implica em uma grande dificuldade para impor a parametrização da matriz de estado neste tipo de modelos [19].

A interpolação dos modelos tem sido bastante estudada, e trabalhos recentes neste sentido podem ser vistos em [41, 42, 43, 44].

b. Abordagem Global

Estes métodos foram propostos inicialmente por [45, 46], o primeiro usa uma abordagem de LFT e programação não linear, o segundo uma proposta por subespaços. A ideia geral nesta abordagem é minimizar o erro de saída entre a saída medida e a saída estimada a partir do modelo.

Algumas considerações em relação à função custo e à otimização não linear são realizadas em [19, 23]. Algumas das técnicas de identificação por subespaço podem ser vistas em [47, 26, 48].

c. Abordagem “GLocal”

Métodos de identificação LPV a partir de modelos locais têm limitações como possíveis inclusões de instabilidade global ou no melhor dos casos de representar o sistema linearizado dentro somente do espectro da linearização jacobiana. Os

métodos globais por outra parte requerem fortes suposições em relação à persistência da excitação, tanto no parâmetro quanto no sistema [49, 50].

A pesquisa atual está visando o desenvolvimento de técnicas de identificação de modelos LPV que sejam menos exigentes em relação à variação do parâmetro de escalonamento [51].

Propostas que misturam a modelagem analítica e a experimental (identificação) estão sendo exploradas como é o caso apresentado em [52, 53], onde o conhecimento analítico do sistema permite obter o modelo global do sistema, e então usando experimentos locais obter o modelo sem uso de interpolação. Este procedimento é inspirado por S. Hara [54] e é nomeado como abordagem Glocal. Trabalhos recentes na área podem ser vistos em [55, 56].

d. Abordagem Estocástica

Nas seções anteriores foram apresentadas as abordagens determinísticas usadas para a identificação de sistemas LPV, no entanto também são encontradas na literatura algumas abordagens estocásticas ao problema de identificação LPV. Muitas dessas soluções tratam o problema de identificação por métodos baseados em modelos de entrada-saída LTI (I/O).

Em [57], é apresentada uma extensão do método de variável instrumental (IV) baseada no modelo Box-Jenkins (BJ) [58] onde é considerada a perturbação à saída do sistema LPV (BJ-LPV-para sistemas com ruído). A extensão é baseada em [59, 60, 58], e nos avanços da teoria de modelagem por preditores de erro (PEM¹²-LPV) introduzidos em [29].

Uma abordagem conjunta (determinística e estocástica) é apresentada em [61, 62] onde as entradas são consideradas gerais e o vetor de parâmetros variantes é considerado como um ruído branco estacionário.

A abordagem feita pelos autores de [61] é baseada numa versão recursiva de identificação de sistemas bilineares apresentada em [63]. O propósito da identificação LPV recursiva nesse trabalho é gerar uma entrada geral que permita tratar o sistema LPV como um sistema bilinear, com base na suposição de que um sistema

¹² do inglês “Prediction Error Model”

bilinear é uma classe particular de sistema LPV, no qual as entradas são exatamente iguais aos parâmetros variantes no tempo [26].

Algumas abordagens de identificação de sistemas LPV são chamadas de totalmente mensuráveis [24], [23] [25]. Isto quer dizer que é pressuposto que o sistema a identificar permite a medida das variáveis de estado, entradas, saídas e parâmetros. Recentemente Rizvi [64, 65] aplica a mesma suposição para obter uma identificação não paramétrica usando quadrados mínimos através de máquina de vetor suporte (LS-SVM)¹³ e Variável Instrumental (IV)¹⁴. A principal limitação destes métodos é requerer conhecimento total sobre o vetor de estado, caso que não ocorre normalmente em processos reais.

Em outros casos, algumas características do modelo¹⁵ a ser identificado são conhecidas e outras poucas precisam ser identificadas. Esses métodos em identificação LTI são comumente conhecidos como modelos de caixa cinza. Em Angelis [66, 67, 68], abordagens usando o filtro de Kalman são efetuadas. Nas abordagens por métodos de erro de predição (PEM)¹⁶, as constantes do modelo são obtidas via minimização do erro quadrático da predição. Em geral, para os métodos PEM são usadas duas metodologias: *i.*) baseadas no gradiente (GB) [23, 26] e *ii.*) baseadas na maximização da esperança (EM) [69]. Os métodos GB aplicam a minimização por gradiente, método de Newton, Levenberg-Marquardt ou semelhantes [70, 23, 71, 72]. No caso EM, o vetor de estado é tratado como desconhecido e a aproximação deste é feita através de um filtro de Kalman, posteriormente o sistema de equações é atualizado repetidamente até se obter convergência [72], porém, os métodos EM dependem fortemente dos modelos iniciais, e no caso LPV podem ser de difícil acesso.

Outros métodos caracterizam os erros como ruídos brancos com distribuição uniforme¹⁷, e o modelo obtido é um sistema determinístico [73, 74, 69]. Por causa da suposição feita na caracterização do ruído, o problema de identificação é resolvido via

¹³ do inglês: “Least Square Support Vector Machine”

¹⁴ do inglês: Instrumental Variable

¹⁵ a palavra “caraterísticas” faz referência aos parâmetros do modelo, não indica variável de escalonamento

¹⁶ do inglês: “Predictor Error Method”

¹⁷ Conhecidos em inglês como: “set-membership”

desigualdades matriciais lineares (LMI¹⁸). Porém, estes métodos podem ser computacionalmente custosos devido à quantidade de LMI a serem resolvidas.

Abordagens de identificação globais têm sido desenvolvidas. Os dados de entrada, saída e variáveis de escalonamento são capturados num único experimento. Muitos destes métodos são baseados em métodos de identificação de sistemas LTI, portanto, seus algoritmos podem ser caracterizados em um passo de tratamento dos dados de entrada, outro de decomposição ortogonal e finalmente uma decomposição em valores singulares [75, 27, 62, 76, 59, 77, 78, 79, 10]. Uma das principais desvantagens destes métodos é a chamada maldição da dimensionalidade, como pode ser visto em [75, 48]. Alguns dos métodos de identificação por espaço de estado (SID¹⁹) de sistemas LPV baseados em métodos LTI são:

1. Realização de Ho-Kalman

O método de Ho-Kalman [80], baseado na representação a partir da resposta impulsiva é estendido por Tóth [77] para sistemas LPV com o uso das matrizes bloco de Hankel generalizadas. O principal problema desta abordagem se encontra no crescimento exponencial das matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas e no crescimento polinomial das dimensões das matrizes de parâmetros.

2. PO-MOESP

O método PO-MOESP para o caso LPV é uma extensão do método LTI feita por Felici [51]. Neste caso a variável de escalonamento é considerada como periódica, com o propósito de reduzir os problemas de dimensão. O método PO-MOESP usa a teoria da realização determinística de Kalman [81] para obter as matrizes $A(\delta_k)$ e $B(\delta_k)$ e projeção para obter as matrizes restantes do modelo de estado LPV-SA.

3. $PBSID_{opt}$

O método PSBID²⁰, é baseado na proposta LTI de Chiuso [82] onde é tratada a predição ótima do estimador de estado. Os métodos LPV associados são de-

¹⁸ do Inglês: “Linear Matrix Inequalities”

¹⁹ do inglês: “Subspace IDentification”

²⁰ do inglês: “Predictor Based Subspace Identification”

envolvidos inicialmente por Verdult [75] e Verhaegen [26], e posteriormente por W. van Wingerden [48, 76]. Os métodos aqui mencionados ainda estão submetidos à maldição da dimensionalidade que acarreta propostas de mudanças nestes métodos para tratar o problema da dimensão, seja usando kernel no cálculo da SVD [76], regularização por norma nuclear [83], estimação esparsa [84] ou formulações tensoriais [85].

4. CVA

O método CVA²¹ proposto por W. Larimore [86] para sistemas LTI é dado para o caso LPV em [78]. Ele baseia-se na teoria da realização estocástica mínima de Akaike [87, 88, 89].

1.4 Contribuições e Organização

Neste trabalho, um conjunto de algoritmos de identificação de sistemas lineares variantes no tempo que estendem as técnicas de identificação por subespaços de séries temporais e sistemas estocásticos de Akaike [87, 88, 89] e o método de identificação estocástica CCA [90, 91, 40] é proposto.

Também, algoritmos de discretização de sistemas LPV para obter modelos locais LTI a partir do modelo contínuo global LPV na forma transformada fracionária linear (LFT) e a discretização do modelo LPV para o controle em rede, com período de amostragem variante no tempo/ou incerto são propostos.

As nossas propostas e contribuições estão apresentadas em 8 capítulos; no capítulo 1, o estado da arte bem como uma abordagem geral dos diferentes métodos de identificação LPV são apresentadas. No capítulo 2, uma breve revisão sobre a transformação conforme LFT e suas aplicações é apresentada. Neste capítulo ainda generalizamos a representação de sistemas LTI e não lineares via LFT. No capítulo 3, apresentamos uma breve revisão de alguns dos métodos de identificação LTI determinísticos e estocásticos que consideramos fundamentais no desenvolvimento da teoria de identificação por subespaços nos anos recentes.

²¹ do inglês: “Canonical Variate Analysis

Os primeiros capítulos podem ser considerados como básicos, de forma que o leitor avançado e com interesse nos métodos de identificação LPV, pode ir diretamente às nossas propostas de identificação no espaço de estado de sistemas LPV, nos capítulos 5, 6 e 7.

Nossas propostas de identificação são desenvolvidas inicialmente no capítulo 5, com o método e o algoritmo que denominamos ICCALPV²². Neste capítulo, apresentamos a estrutura básica das matrizes de dados e os modelos LTI com os quais os vetores de estado do modelo LPV são aproximados. Na proposta, usamos as matrizes de Hankel e o produto Khatri-Rhao para calcular de forma eficiente as matrizes de dados com as quais é calculado o vetor de estado que posteriormente é refinado iterativamente.

No capítulo 6, o método 3C2ILPV²³ e seu respectivo algoritmo são propostos. Este método constitui uma melhora ao ICCALPV em termos de variância e acuidade. No 3C2ILPV, usamos o filtro de Kalman para refinar a estimativa do vetor de estado; isto resulta em menor quantidade de iterações e maior acuidade, com um custo em tempo ligeiramente superior ao do método ICCALPV.

No capítulo 7, propomos a realização kernelizada da análise de correlação canônica (CCA) e a da análise de correlação canônica condicional (3CA). A primeira kernelização dá origem ao método de identificação MIMO LPV K2SIDLPV²⁴ e a seu respectivo algoritmo. O K2SIDLPV é inspirado na teoria de identificação de séries temporais, onde a projeção ortogonal das entradas do passado no espaço das saídas do futuro produzem o preditor ótimo das saídas com o qual são calculados o espaço de estado e o vetor de estado. Posteriormente, de forma iterativa é melhorada a estimativa do vetor de estado e a realização do modelo de Markov.

Na segunda kernelização, propomos a realização não linear baseada na correlação canônica condicional que dá origem ao método 3CKLPV²⁵ e a seu respectivo algoritmo. No 3CKLPV, usamos o conceito de identificação de sistemas com entrada exógena para obter uma estimativa do vetor de estado inicial. Posteriormente, usando o vetor de estado inicial e as medições das entradas, saídas e parâmetros é obtida a

²² Iterative Canonical Correlation LPV System Identification

²³ Conditional Canonical Correlation Iterative Identification of MIMO Linear Parameter Varying Systems method

²⁴ Kernel Canonical Correlation Two Steps System Identification of LPV Systems

²⁵ Conditional Canonical Correlation Kernelized for MIMO LPV System Identification

realização do modelo LPV na forma inovativa.

No capítulo 7, as kernelizações dos métodos CCA e 3CA permitem reduzir o tamanho das matrizes associadas ao cálculo da decomposição em valores singulares (SVD), que constitui um problema para muitos dos métodos de identificação de sistemas LPV, devido ao crescimento exponencial das matrizes associadas aos cálculos das decomposições SVD e LQ.

1.5 Trabalhos Publicados e Submetidos

1.5.1 Publicados

1. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P. “A Procedure to Generate Discrete MIMO Closed-loop Benchmark via LFT with Application to State Space Identification”, ICINCO, 15th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, Porto, Portugal, 2018.
2. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P. Identificação Iterativa por Correlação Canônica de Sistemas MIMO LPV, CBA, Congresso Brasileiro de Automática, João Pessoa, Brasil, 2018.
3. Puerto Acosta, J. A., Forero, A. J., Bottura, C. P. Identificação Estocástica no Espaço de Estado por Análise de Correlações Canônicas: Teoria, Aplicação e Validação, CBA, Congresso Brasileiro de Automática, João Pessoa, Brasil, 2018.
4. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P., “Discretization of Linear Parameter Varying Systems in the LFT Representation with Parameter Dependent Sampling Rates”, CEEC, 9th Computer Science and Electronic Engineering Conference, Colchester, UK, 2017.
5. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P., “Discretization of Linear Parameter Varying Systems in the Linear Fractional Representation with Constant and with Parameter Dependent Sampling Rates”, CCAC, 3rd Colombian Conference on Automatic Control, Cartagena, Colômbia, 2017.

6. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P., Identificação por Subespaços de Sistemas MIMO com Erros em Variáveis, DINCON, Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José de Rio Preto, Brasil, 2017.
7. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P., Modelagem Computacional de Sistemas em Malha Fechada com Erros em Variáveis, DINCON, Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José de Rio Preto, Brasil, 2017.
8. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P. Discretização de Modelo Afim em Espaço de Estado de Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes via LFT, CBA, Congresso Brasileiro de Automática, Vitória, Brasil, 2016.
9. Puerto Acosta, J. A., Forero, A. J., Bottura, C. P. Identificação no Espaço de Estado de um Sistema Eletro Mecânico Usando os Métodos MOESP E CCA, SBAI, Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Natal, Brasil, 2015.

1.5.2 Submetidos

1. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P. “Proposal for State Space Identification of MIMO LPV Stochastic Systems: ICCALPV”, 2019, submetido para revista.
2. Puerto Acosta, J. A., Bottura, C. P. “3C2ILPV: Conditional Canonical Correlation Iterative Identification of Linear Parameter Varying Systems Algorithm”, 2018.

Parte I

Fundamentos, Representações e Identificação LTI

2 Sobre Representações de Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Em sua tese de doutorado, John C. Doyle [92] tinha como um dos seus objetivos propor uma abordagem mais geral para problemas de controle, com a intenção de fornecer um novo paradigma para a teoria de controle, donde as teorias de identificação e de estimação de estado com maior abrangência e conteúdo do que as permitidas pelas teorias clássicas e modernas de controle.

Ele tinha como prioridade o tratamento de incertezas de modelagem, donde o problema de controle robusto. Nesta tese, nossa prioridade é diferente: trata-se do problema de identificação de sistemas LPV multivariáveis. Contudo, o objetivo de Doyle de um paradigma mais geral, também tem grande importância para este problema, como de fato para toda a teoria pós-moderna de controle, estimação e identificação. Para este paradigma geral, são fundamentais os conceitos de matriz de transferência, representação de estado e transformações fracionárias lineares.

Dados estes interesses, neste capítulo apresentamos um texto que reúne alguns conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos priorizando nossos objetivos nesta tese, de uma forma que pode ser considerada original.

2.2 Definições Básicas

2.2.1 Sistema

Inicialmente falaremos do sistema como um conceito geral. O ponto de vista de sistema enfatiza o estabelecimento de relações de causa, efeito, ou seja, relações entrada saída para a caracterização de um sistema geral. Um sistema é uma coleção de componentes interligados para desempenhar uma função. Cada sistema pode ser classificado em decorrência das suas características de funcionamento, gerando uma classe de sis-

tema. Portanto, neste capítulo quando se faz referência a sistema geral, considera-se um conjunto que interliga entradas com saídas; como é apresentado na figura 3. De forma

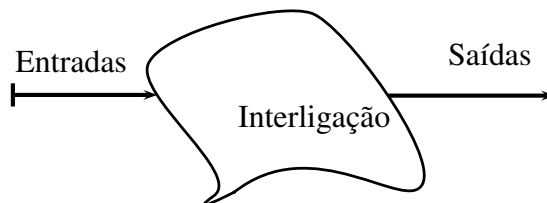


Figura 3 – Sistema Geral.

semelhante, quando é usado o termo sistema dinâmico, está sendo feita a referência a uma classe particular de sistema onde algumas das suas características variam com o tempo (t). Na figura 4, representamos o sistema dinâmico com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.

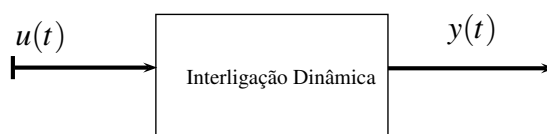


Figura 4 – Sistema Dinâmico.

Para cada um dos casos ilustrados nas figuras 3 e 4, é possível obter uma descrição matemática da interligação entre as múltiplas entradas e as múltiplas saídas, representação que é denominada de forma geral como modelo. No caso de um sistema geral pretende-se obter a relação matemática entre as múltiplas entradas e múltiplas saídas; No caso do sistema dinâmico pretende-se capturar a dinâmica do processo em função do tempo (t) ou da frequência complexa (s ou z)^{1,2}.

A seguir, realizamos a descrição matemática de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), usando a transformação conforme conhecida como: Transformação Fracionária Linear [93].

¹ s frequência complexa contínua

² z frequência complexa discreta

2.2.2 Transformada Fracionária Linear

A Transformação Fracionária Linear (LFT) é conhecida na teoria de variáveis complexas³ como um operador que mapeia a função $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, na forma

$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds} \quad (2.1)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. A forma em (2.1) é chamada LFT escalar. Se $c \neq 0$ então $F(s)$ pode ser rescrita como

$$F(s) = \alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1} \quad (2.2)$$

Supondo

$$\alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1} = (\alpha - \alpha\gamma s + \beta s)(1 - \gamma s)^{-1}$$

pode ser estabelecida a relação entre (2.1) e (2.2) a partir de: $a = \alpha$, $b = \beta - \alpha\gamma$, $c = 1$, $d = -\gamma$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

A Transformação Fracionária Linear em (2.1) pode ser generalizada para o caso matricial com as matrizes complexas:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p1+p2) \times (q1+q2)}, \quad (2.3)$$

$\Delta_l \in \mathbb{C}^{(q2 \times p2)}$ e $\Delta \in \mathbb{C}^{(q1 \times p1)}$.

A Transformação Fracionária Linear, $\mathcal{F}(M, \bullet)$ é dividida em dois tipos: inferior e superior. A LFT inferior das matrizes M e Δ_l ,

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) : \mathbb{C}^{q2 \times p2} \mapsto \mathbb{C}^{q1 \times p1}$$

pode ser definida como:

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \triangleq M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21} \quad (2.4)$$

supondo que $(I - M_{22} \Delta_l)^{-1}$ existe. E de forma semelhante a LFT superior é definida como:

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) : \mathbb{C}^{q1 \times p1} \mapsto \mathbb{C}^{q2 \times p2}$$

³ O conjunto das variáveis complexas é denotado por: \mathbb{C}

sendo

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) \triangleq M_{22} + M_{21} \Delta_u (I - M_{11} \Delta_u)^{-1} M_{12} \quad (2.5)$$

supondo que $(I - M_{11} \Delta_u)^{-1}$ existe.

A matriz M nas LFT inferior e superior é chamada matriz de coeficientes. Nas figuras 5, 6 são representadas graficamente as LFT inferior e superior, respectivamente.

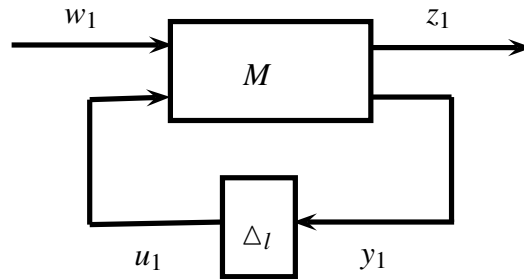


Figura 5 – Diagrama LFT Inferior.

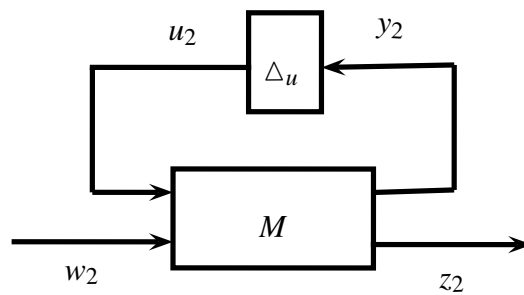


Figura 6 – Diagrama LFT Superior.

A LFT inferior na figura 5, representa o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$u_1 = \Delta_l y_1$$

e a LFT superior na figura 6, representa o conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$u_2 = \Delta_u y_2$$

Então, o modelo matemático que descreve a interligação das múltiplas entradas com as múltiplas saídas no sistema geral apresentado na figura 3 pode ser expresso graficamente como:

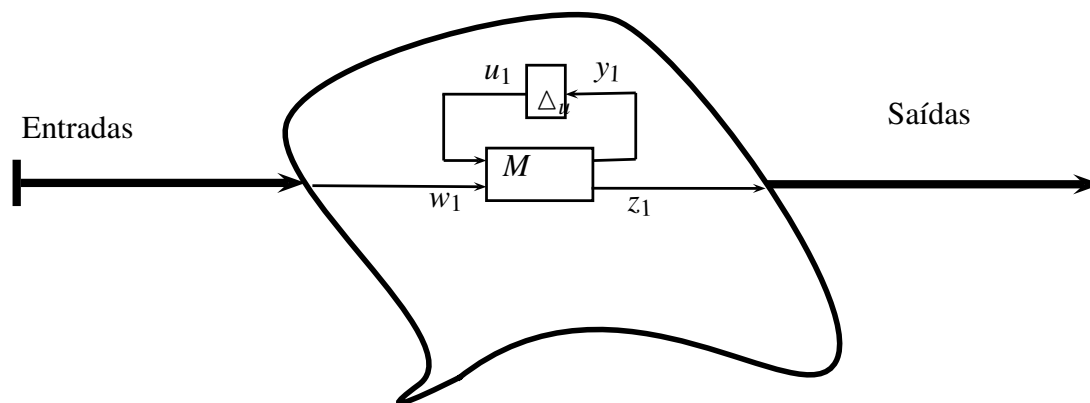


Figura 7 – Sistema Representado via LFT Superior.

e analiticamente como:

$$z_1 = \mathcal{F}_\bullet(M, \Delta_\bullet)w_1; \text{ com } \bullet = l \text{ ou } u$$

O modelo matemático do sistema dinâmico da figura 4 requer considerações especiais sobre à sua representação; portanto a seguinte seção é destinada à obtenção do modelo matemático decorrente de cada consideração e é dividida em várias partes que embora sejam consideradas independentes por muitos autores, as consideramos estreitamente relacionadas como discutiremos a seguir.

2.3 Realizações LTI usando LFT

Na teoria de controle para sistemas contínuos e discretos lineares invariantes no tempo (LTI), são usais duas abordagens. A primeira inclui os métodos de análise e projeto no domínio da frequência, baseada nos conceitos de função de transferência e resposta em frequência. A segunda envolve o conceito de espaço de estado [81, 94, 95] e o uso de equações diferenciais ou a diferenças, para descrever um sistema dinâmico.

Embora essas duas abordagens tenham sido inicialmente consideradas independentes e mesmo incompatíveis, elas de fato são complementares [96], o que permite criar análise e estratégias que combinem técnicas dos domínios da frequência e do espaço de estado.

As matrizes de transferência para sistemas contínuos baseiam-se nas equações diferenciais que descrevem o comportamento de um determinado sistema dinâmico. Considere a equação diferencial :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = c\frac{du(t)}{dt} - u(t) \quad (2.8)$$

sendo $y(t)$ a saída e $u(t)$ a entrada. A resposta de (2.8) é excitada pela condição inicial e pela entrada $u(t)$. Se todas as condições iniciais são zero, a resposta é unicamente excitada pela entrada e é conhecida como resposta de estado zero (ZSR)⁴ [97, 98, 94, 95]. No caso de entrada e saída únicas (SISO)⁵, a resposta no domínio da frequência descrita através da transformada de Laplace é denominada função de transferência (TF) e no caso MIMO matriz de transferência (MTF). Então a ZSR da equação em (2.8) pode ser expressa como:

$$G(s) = \frac{cs - 1}{s^2 + as + b}$$

onde a função racional $G(s)$ representa a função de transferência SISO. No caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas a MTF é expressa como:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

Existem outras representações associadas aos sistemas LTI que dependem da frequência e um outro parâmetro (exemplo: tempo, incerteza, variáveis de escalonamento), esses sistemas podem ser mais difíceis de representar pela abordagem clássica porque podem representar sistemas variantes no tempo e/ou não racionais no argumento s [96]. Estes problemas podem ser evitados com o uso de funções/matrizes de transferência paramétricas as quais não são tratadas neste trabalho mas podem ser consultadas em [96, 99, 100].

⁴ do inglês: “Zero-State Response”

⁵ do inglês: “Single Input Single Output”

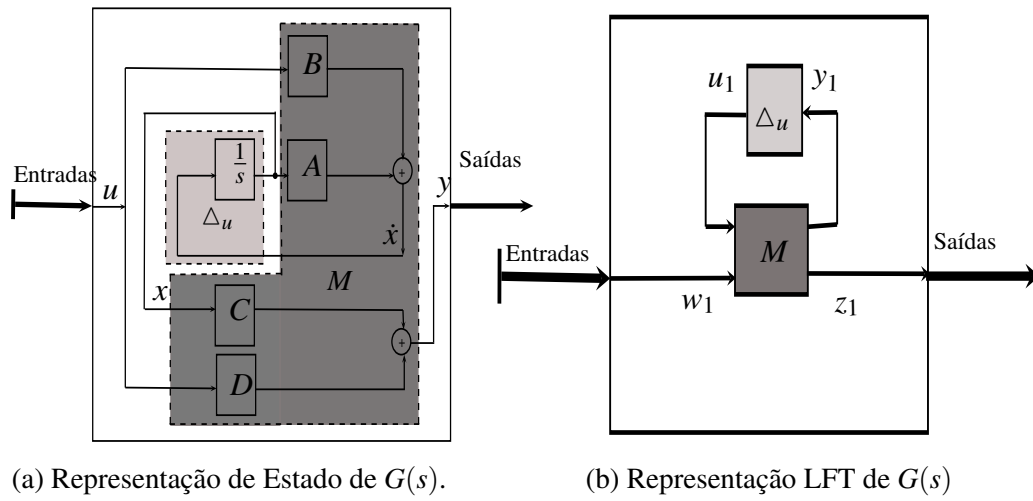


Figura 8 – Representações de um sistema LTI.

2.3.1 Realização Contínua

A LFT é usada para estabelecer a relação entre as matrizes de transferência e a equação de estado contínua:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde x é a variável de estado e A, B, C, D são as matrizes de estado e representam uma realização da matriz de transferência do sistema. Usando a definição da LFT superior e tomando M como

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{s}I = \Delta$$

fazendo o produto $s^{-1}I$ com $(I - As^{-1})^{-1}$ e reduzindo os termos semelhantes, tem-se a matriz de transferência associada com (2.9) dada como

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s}I \right). \tag{2.10}$$

A equação em (2.10) é uma LFT superior. Na Figura 8, é apresentada uma equivalência entre a representação de estado e a LFT superior que descrevem a matriz de transferência a partir da realização em espaço de estado LTI da Figura 6.

2.3.2 Realização Discreta

A equação de estado para sistema discreto é apresentada a seguir

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde x_k é o estado no k -ésimo instante de amostragem. Ela pode ser representada como uma LFT fazendo $\Delta = z^{-1}I$,

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B =: \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \Delta \right).\tag{2.12}$$

2.4 Representações Generalizadas

Diferentes modelos de sistemas dinâmicos podem ser representados pela interconexão de diferentes componentes com os sistemas LTI da seção 2.3. A LFT é uma classe particular da transformada de Mobius, o que implica que é uma transformação conforme [101, 102, 103] que permite representar um sistema em diferentes espaços sem perder as características de estabilidade do sistema inicial, dentre outras. Desta forma podemos construir uma representação de estrutura generalizada (GFR⁶) [92] que permita descrever, analisar e projetar dinâmicas de sistemas embutindo e preservando de forma pós-moderna as teorias de controle clássica e moderna. No caso particular de identificação de sistemas dinâmicos multivariáveis a GFR permite o uso das ferramentas LTI amplamente conhecidas e desenvolvidas para a modelagem experimental de sistemas não lineares. Uma das formas amplamente usada em controle robusto [104] é a representação de incertezas via LFT, porém esta constitui apenas uma das representações de estrutura generalizada (GFR) de sistemas para descrever, analisar e sintetizar sistemas de controle robusto. Nesta seção apresentamos a representação LFT com uma interface LTI, que permite a GFR de um amplo espectro de sistemas⁷, assim como viabiliza uma ponte entre abordagens frequenciais e de espaço de estado. Além disso, a LFT permite a representação equivalente entre representações no domínio da frequência complexa contínua e da frequência complexa discreta ou seja a discretização de sistemas multivariáveis contínuos, tanto para sistemas LTI como para sistemas mais

⁶ General Framework Representation

⁷ sistemas LTI, LVT, LPV, Não lineares, dentre outros

complexos como o de controle automático na rede, onde se tem processos contínuos e controladores discretos interagindo em malha fechada [96, 105], assunto que abordaremos no capítulo 4. A seguir, com o propósito de explicitar nossa visão, apresentamos alguns exemplos de GFR.

2.4.1 Representação Generalizada de Malha Fechada LTI

Considere o sistema contínuo de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO⁸) em malha fechada, figura 9, que podemos abordar como um sistema aumentado cuja saída é constituída pela saída do sistema de malha fechada original e pelo seu sinal de controle e tendo como entrada o vetor de entrada exógeno do sistema original, o qual

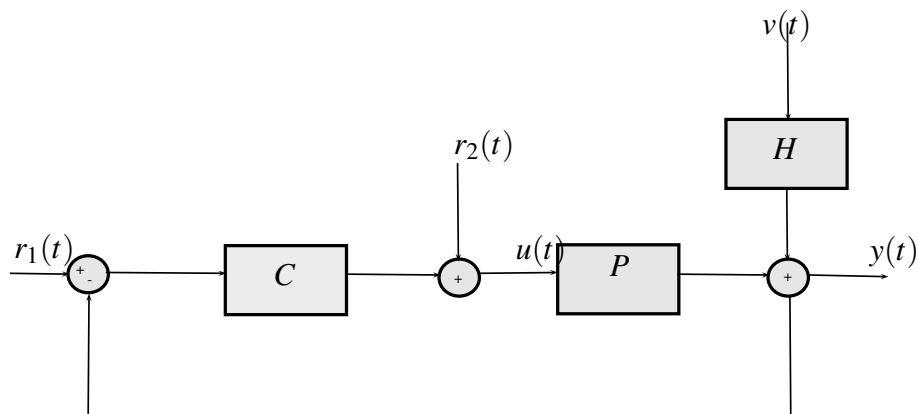


Figura 9 – Sistema MIMO em Malha Fechada.

representaremos de forma generalizada via LFT.

2.4.2 Sistemas Aumentados Contínuos

O sistema em malha fechada apresentado na figura 9 pode ser representado como um sistema aumentado [106, 107] com vetor de estado aumentado dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

onde $x_p(t) \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estado associado à planta P , e $x_c(t) \in \mathcal{R}^m$ é o vetor de estado associado ao controlador C .

⁸ do inglês “Multi Input Multi Output”

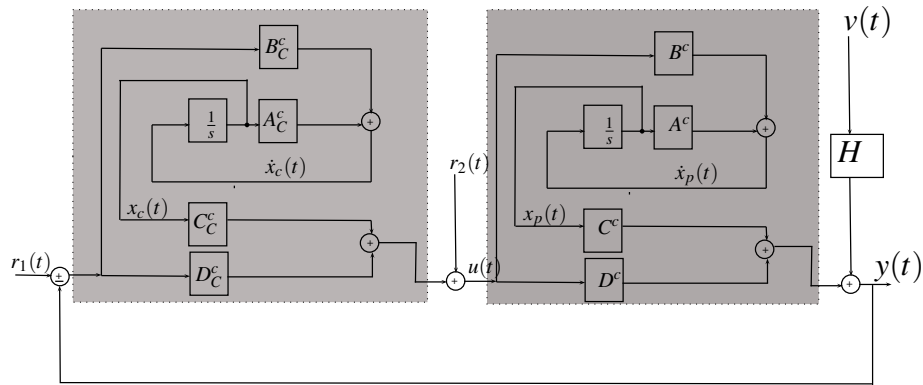


Figura 10 – Sistema MIMO Contínuo em Malha Fechada.

A planta do sistema na figura 10 é dada como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A^c x_p(t) + B^c u(t) \\ y(t) &= C^c x_p(t) + D^c u(t)\end{aligned}\quad (2.13)$$

e o controlador:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c^c x_c(t) + B_c^c [r_1(t) - y(t)] \\ u(t) &= r_2(t) + C_c^c x_c(t) + D_c^c [r_1(t) - y(t)]\end{aligned}\quad (2.14)$$

onde A^c , B^c , C^c , D^c , A_c^c , B_c^c , C_c^c , D_c^c , são as matrizes da planta e do controlador respectivamente. Os sinais $u(t) \in \mathcal{R}^{nu}$, $y(t) \in \mathcal{R}^{my}$, $r_1(t) \in \mathcal{R}^{nr_1}$ e $r_2(t) \in \mathcal{R}^{nr_2}$, são controles, saídas e entradas exógenas.

O sistema aumentado associado ao conjunto planta/controlador na figura 10, pode ser representado como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \bar{A}_{TC} \tilde{x}(t) + \bar{B}_{TC} \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \bar{C}_{TC} \tilde{x}(t) + \bar{D}_{TC} \tilde{u}(t)\end{aligned}\quad (2.15)$$

as matrizes \bar{A}_{TC} , \bar{B}_{TC} , \bar{C}_{TC} , \bar{D}_{TC} de forma compatível descrevem o sistema aumentado. Os cálculos das matrizes aumentadas, são realizados de forma análoga aos apresentados na seção 2.4.3. Os sinais

$$\tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$$

no sistema aumentado (2.15) representam a entrada conjunta, a saída conjunta e o estado aumentado respectivamente.

2.4.3 Sistema Discreto Aumentado via LFT

O sistema na figura 9⁹ com planta e controlador dados por:

$$\begin{aligned} x_{pk+1} &= Ax_{pk} + Bu_k \\ y_k &= Cx_{pk} + Du_k \end{aligned} \tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned} x_{ck+1} &= A_c x_{ck} + B_c [r_{1k} - y_k] \\ u_k &= r_{2k} + C_c x_{ck} + D_c [r_{1k} - y_k] \end{aligned} \tag{2.17}$$

pode ser representado como na figura 11, e o sistema aumentado correspondente tem a

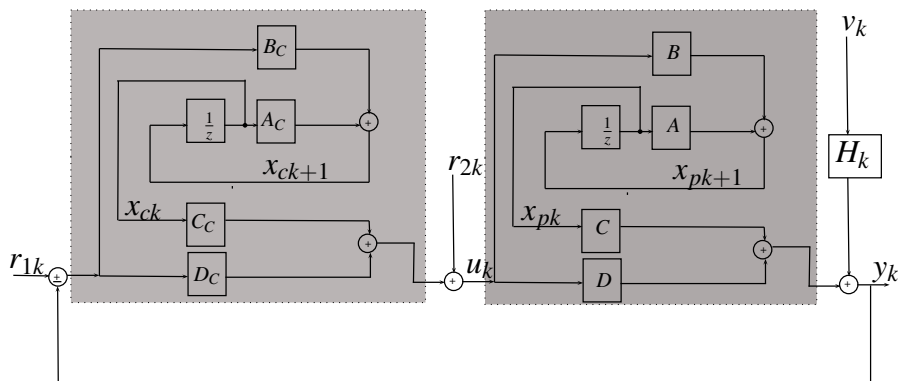


Figura 11 – Sistema Discreto MIMO em Malha Fechada.

representação geral da figura 12.

⁹ Nas equações (2.16) e (2.17), $A, B, C, D, A_c, B_c, C_c, D_c$, são matrizes da planta e do controlador, respectivamente. Os sinais $u_k \in \mathcal{R}^{nu}$, $y_k \in \mathcal{R}^{my}$, $r_{1k} \in \mathcal{R}^{nr_1}$ e $r_{2k} \in \mathcal{R}^{nr_2}$, são as entradas, saídas e entradas exógenas discretas.

Supondo $v_k = 0$ na figura 10, temos que o conjunto ¹⁰ controle-saída é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_{pk+1} \\ x_{ck+1} \\ u_{sk} \\ y_k \\ u_k \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{pk} \\ x_{ck} \\ r_{sk} \\ r_{2k} \\ r_{1k} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$r_{sk} = Du_k$$

onde M é a matriz calculada a partir da topologia da figura 11, como uma GFR via LFT dada por:

$$M = \begin{bmatrix} A - BD_cC & BC_c & -BD_c & BD_c & B \\ -B_cC & A_c & B_c & B_c & 0 \\ -D_cC & C_c & -D_c & D_c & I \\ C & 0 & I & 0 & 0 \\ -D_cC & C_c & -D_c & D_c & I \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

ou

$$M = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_2 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Então o sistema de malha fechada da figura 10 tem representação geral de sistema aumentado via LFT:

$$\tilde{G}(z) = \mathcal{F}_u \{ \mathcal{F}_l(M, D), z^{-1} \} \quad (2.21)$$

Para matriz de transferência direta $D \neq 0$ em (2.21), o sistema pode ser representado pela figura 12. A LFT em (2.21), pode ser simplificada se $D = 0$; neste caso para o sistema aumentado:

$$M = \begin{bmatrix} \overbrace{A - BD_cC \quad BC_c}^{\bar{A}} & \overbrace{BD_c \quad B}^{\bar{B}} \\ -B_cC & A_c & B_c & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{-D_cC \quad C_c}_{\bar{C}} & \underbrace{D_c \quad I}_{\bar{D}} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

¹⁰ Na figura 11 o sinal u_k é dividido em duas partes: antes da caixa cinza é chamado u_k , e depois da caixa cinza é chamado u_{sk}

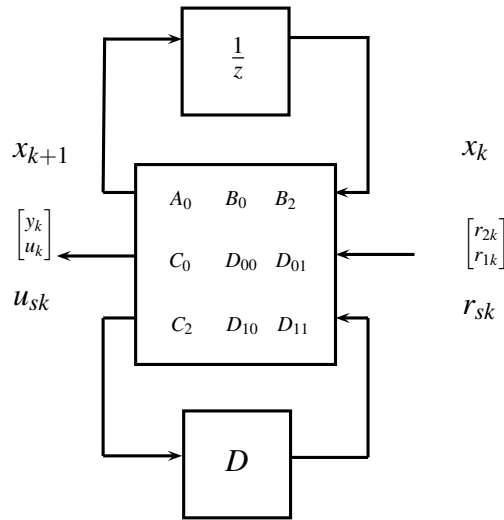


Figura 12 – Sistema em Malha Fechada via LFT.

o sistema em (2.18), com $D = 0$ é expresso por:

$$\begin{bmatrix} x_{pk+1} \\ x_{ck+1} \\ y_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \\ r_{2k} \\ r_{1k} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Então o sistema discreto aumentado é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{A}x_k + \bar{B}\tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= \bar{C}x_k + \bar{D}\tilde{u}_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} são as matrizes de estado compatíveis e os sinais discretos

$$\tilde{u}_k = \begin{bmatrix} r_{2k} \\ r_{1k} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{nr_1+nr_2},$$

$$\tilde{y}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{my+nu}$$

e

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{pk} \\ x_{ck} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n+m}$$

representam a entrada conjunta, a saída conjunta e o estado conjunto respectivamente.

Finalmente, o controlador e a planta, calculados a partir da representação discreta aumentada, são dados por:

$$P_k = \left[\begin{array}{c|c} A_0 - B_2 D_{11}^{-1} C_2 & B_2 D_{11}^{-1} \\ \hline C_1 & 0 \end{array} \right] \quad (2.25)$$

e

$$C_k = \left[\begin{array}{c|c} A_0 - B_2 D_{11}^{-1} C_2 & B_0 - B_2 D_{11}^{-1} D_{10} \\ \hline D_{11}^{-1} C_2 & D_{11}^{-1} D_{10} \end{array} \right] \quad (2.26)$$

O sistema discreto (contínuo) em malha fechada LTI, pode ser representado via LFT como uma GFR como na figura 13. Na figura 13a, é apresentada a representação em espaço de estado do sistema em malha fechada. Na figura 13b, apresenta-se a representação via LFT em forma de matriz de transferência.

2.4.4 Representação Generalizada Contínua LPV

Nesta seção, é considerado um caso especial dos modelos em espaço de estado e a respectiva representação destes modelos via LFT em relação à matriz de parâmetros variantes, de forma que estas variações entrem no sistema em malha fechada. A construção básica destes modelos é realizada inserindo nos componentes variações paramétricas como apresenta-se a seguir:

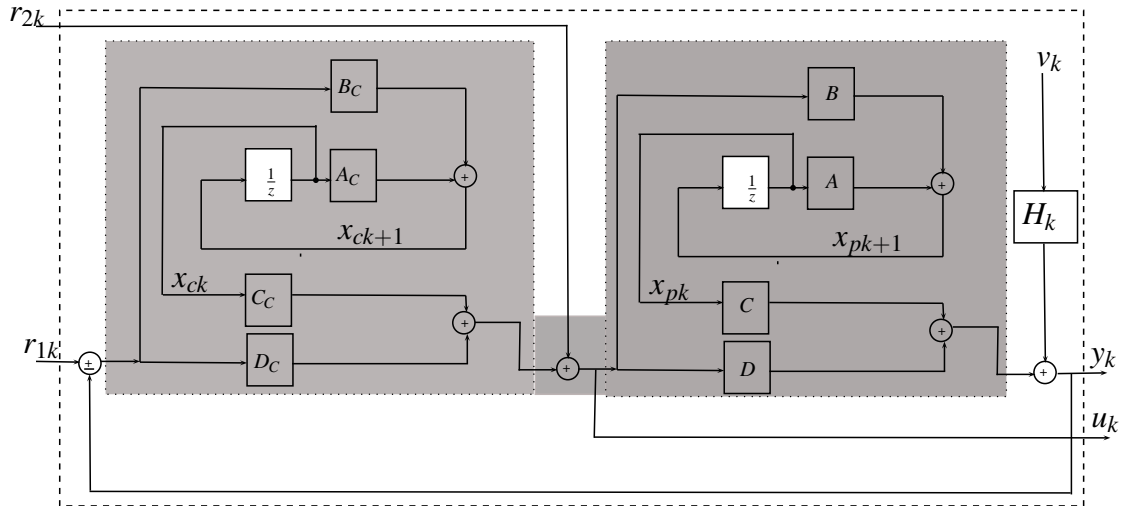
Considere o sistema linear com variações paramétricas δ_i e matriz de transferência

$$G_\delta(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{A}_i & B_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{B}_i \\ \hline C_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{C}_i & D_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{D}_i \end{array} \right] \quad (2.27)$$

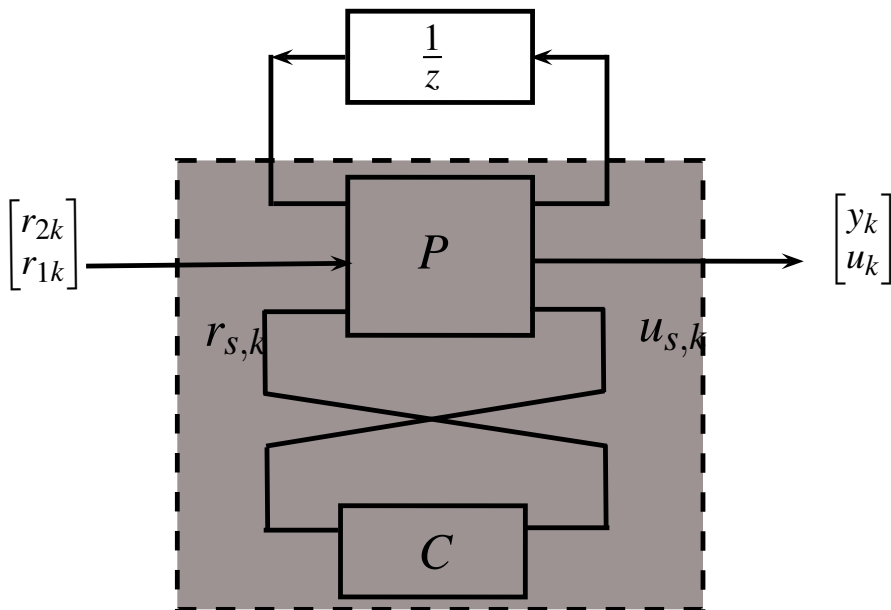
onde $A_0, \hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_0, \hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C_0, \hat{C}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $D_0, \hat{D}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $\delta \in \mathbb{R}^j$.

Os termos A_0, B_0, C_0, D_0 em (2.27), são interpretados como o sistema nominal $G(s)$. As matrizes $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$ são o conjunto consequência da i -ésima variação paramétrica δ_i na equação de estado. Dita variação, pode ser especificada dentro de um intervalo de $[-1 \quad 1]$.

A seguir, é apresentada a representação geral do sistema LPV via LFT. Nesta abordagem as variações dos parâmetros podem ser representadas como um bloco de ganhos de realimentação, como se mostra na Figura 14.



(a) Representação de Estado de $\tilde{G}(z)$.



(b) Representação LFT de $\tilde{G}(z)$.

Figura 13 – Representações de um sistema LTI discreto em malha fechada

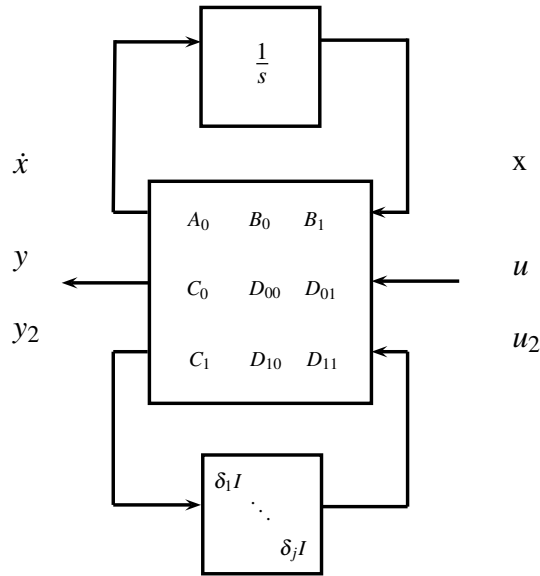


Figura 14 – Representação Geral de Sistema LPV via LFT.

Para a realização da Figura 14, considere a matriz de transferência $G_\delta(s) = \mathcal{F}_u(M_\delta, \frac{1}{s}I)$ onde

$$M_\delta \triangleq \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{A}_i & B_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{B}_i \\ C_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{C}_i & D_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i \hat{D}_i \end{bmatrix}$$

e a matriz¹¹

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 I \dots \delta_j I\}.$$

sendo que M_δ pode-se escrever também como:

$$M_\delta = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^j \delta_i \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix}$$

Agora suponha a matriz P_i com posto q_i

$$P_i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_y) \times (n+n_u)}$$

assim $\delta_i P_i$, pode-se escrever como:

$$\delta_i P_i = \begin{bmatrix} L_i \\ W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i I_{q_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ Z_i \end{bmatrix}',$$

¹¹ Com I de tamanho apropriado

e M_δ como

$$M_\delta = \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}}^{M_{11}} + \overbrace{\begin{bmatrix} L_1 \dots L_j \\ W_1 \dots W_j \end{bmatrix}}^{M_{12}} \overbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 I_{q_i} & & \\ & \dots & \\ & & \delta_j I_{q_i} \end{bmatrix}}^{\Delta} \overbrace{\begin{bmatrix} R_1 \dots R_j \\ Z_1 \dots Z_j \end{bmatrix}}^{M_{21}} \quad (2.28)$$

O bloco de parâmetros variantes em função da LFT inferior é expresso como:

$$M_\delta = \mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \right)$$

As matrizes M_{12} e M_{21} em (2.28), podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} [L_1 \dots L_j] &= B_1 \\ [W_1 \dots W_j] &= D_{01} \\ [R_1 \dots R_j]' &= C_1 \\ [Z_1 \dots Z_j]' &= D_{10} \\ 0 &= D_{11} \end{aligned}$$

e portanto o sistema LPV contínuo pode ser representado pela LFT superior:

$$G(\Delta) = \mathcal{F}_u \left(\mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \right), \frac{1}{s} I \right).$$

2.4.5 Discretização de um sistema LTI

A relação entre a frequência complexa s e a frequência discreta z pode ser dada pela transformação conforme:

$$s = \frac{z+1}{z-1} \quad (2.29)$$

A representação de um sistema contínuo em espaço de estado é dada pela LFT $\mathcal{F}_u \left(M, \frac{1}{s} I \right)$. $1/s$ pode ser expresso em função da inversa da equação (2.29), cuja representação LFT

inferior é $\mathcal{F}_l(N, z^{-1}I)$, com:

$$N = \begin{bmatrix} I & \sqrt{2}I \\ -\sqrt{2}I & -I \end{bmatrix}$$

e $\Delta = z^{-1}I$. Portanto

$$\mathcal{F}_l(N, z^{-1}I) = \frac{1}{s} = I - \sqrt{2}Iz^{-1}I(I + z^{-1}I)^{-1}\sqrt{2}I.$$

Agora considere o sistema contínuo, com matriz de transferência $G(s)$ e realização em espaço de estado com matrizes A, B, C, D :

$$G(s) = \mathcal{F}_u\left(M, \frac{1}{s}I\right) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Fazendo $\mathcal{F}_u(M, \mathcal{F}_l(N, z^{-1}I))$ tem-se o correspondente sistema discreto com matriz de transferência \tilde{G} e matriz de coeficientes \tilde{M} :

$$\tilde{G} = \mathcal{F}_l\left(M, \frac{z-1}{z+1}I\right) = \mathcal{F}_l(\tilde{M}, z^{-1}I)$$

sendo que \tilde{M} pode ser obtido usando a produto estrela [108] como:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde,

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_u(N, A) & N_{21}RB \\ CN_{11}ARN_{12} + CN_{12} & \mathcal{F}_u(G, N_{11}) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\text{com } R = (I - AN_{11})^{-1}$$

que pode ser reescrito como:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1}(I+A) & -\sqrt{2}(I-A)^{-1}B \\ \sqrt{2}C(I-A)^{-1} & C(I-A)^{-1}B + D \end{bmatrix}$$

A matriz de blocos \tilde{M} contém as matrizes da realização de estado discretizada.

A seguir é apresentada a discretização de um sistema contínuo, dado pelas matrizes de estado a seguir: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -185.7 & -1.161 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -185.8 \end{bmatrix}$ $C = I_{2 \times 2}$ $D = 0_{2 \times 1}$ com

$$\mathcal{F}_u \left(M, \frac{1}{s} I \right) = \frac{\begin{bmatrix} 185.8 \\ -185.8s + 3.3 \times 10^{-13} \end{bmatrix}}{s^2 + 1.161s + 185.7}$$

A matriz \tilde{M} no domínio da frequência z , é obtida, de acordo com o procedimento de conexão em estrela¹²:

$$M_d = \left[\begin{array}{cc|cc} \underbrace{\hspace{2cm}}_{A_d} & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{B_d} & \\ \hline 0.9970 & -0.0106 & 1.3987 & \\ 1.9770 & 0.9894 & 1.3987 & \\ \hline 0.0163 & 0.0075 & -0.9890 & \\ -1.3979 & 0.0075 & -0.9890 & \\ \hline \underbrace{\hspace{2cm}}_{C_d} & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{D_d} & \end{array} \right] \quad (2.32)$$

O sistema discretizado, com período de amostragem de $1,05 \times 10^{-2}$ segundos resultante é:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k \\ y_k &= C_d x_k + D_d u_k \end{aligned}$$

e na figura 15 os diagramas de Bode discreto e contínuo são comparados:

2.5 Conclusões

Neste capítulo, apresentamos a transformação conforme LFT e a abordagem GFR que permite múltiplas representações de sistemas LTI dinâmicos em malha aberta e malha fechada. Também permite a representação de sistemas não lineares como: variantes no tempo (LVT), LPV e outros sistemas não lineares. O modelo LPV da seção 2.4.4 pode representar um modelo não linear se a matriz diagonal Δ que realimenta o sistema representar uma não linearidade, um sistema incerto se Δ é uma incerteza,

¹² “star product”

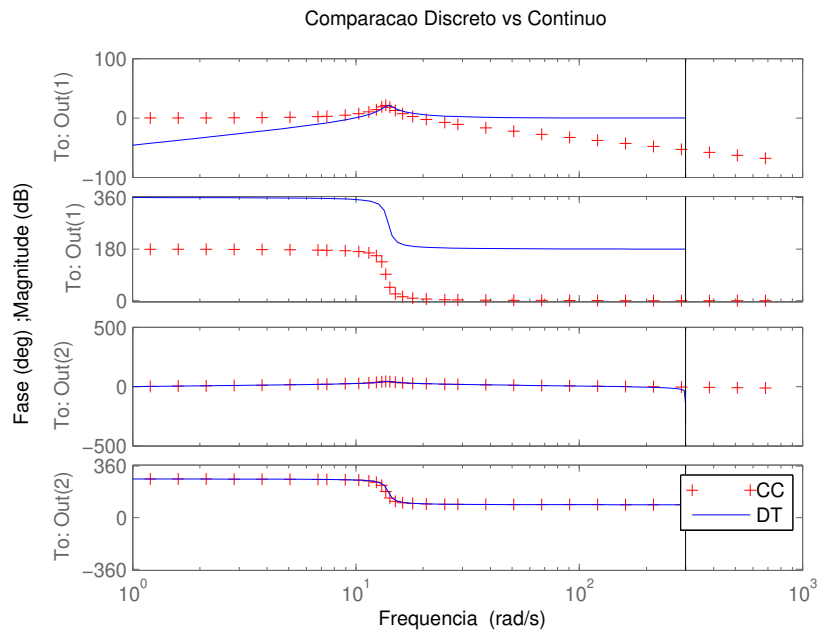


Figura 15 – Diagramas de Bode Discreto e Contínuo.

um sistema LPV se Δ é um parâmetro de escalonamento, ou um sistema LVT, se Δ é a variável tempo.

A LFT devido às suas características de transformação conforme permite uma representação equivalente entre sistemas contínuos e discretos mantendo as características de estabilidade do sistema original dentre outras.

3 Identificação no Espaço de Estado de Sistemas LTI em Malha Aberta

3.1 Introdução

A identificação por métodos de subespaços é muito importante nos processos associados a controle baseado no modelo. Nas últimas décadas múltiplas, propostas têm sido desenvolvidas e aprimoradas por muitos pesquisadores. Alguns dos métodos e teorias mais conhecidos são os baseados na teoria da realização determinística de Ho e Kalman [80], e na teoria da realização mínima estocástica de Akaike [87, 88, 89]. Para identificação determinística, destacam-se as propostas de Verhaegen et al [38, 39, 109]. No caso estocástico, destacam-se os refinamentos e as extensões do método de Akaike para identificação de sistemas propostos por Larimore [110, 86], Katayama [111], Chiuso [112], Bart de Moor et al [113, 114] e pelos autores citados nesses trabalhos.

Neste capítulo, são apresentadas breves revisões dos métodos de identificação por subespaços LTI MOESP [38, 115] e CCA [91]. Assim, o capítulo é dividido em uma breve exposição do problema de identificação LTI, seguido da apresentação do método MOESP e de suas principais variações: PI, PO e EIV. Posteriormente, apresenta-se o método de identificação estocástica CCA. Finalmente, aplicações são apresentadas. O capítulo está baseado nas publicações [116, 2, 3, 9]. Recomenda-se ao leitor interessado em aprofundar-se nas técnicas LTI determinísticas e estocásticas [1] e [4, 6] respectivamente.

3.2 Problema de Identificação Determinística

Para um conjunto de dados de entrada-saída $\{u(t), y(t), | t = 0, 1, \dots, N - 1\}$, com N sendo o número de amostras, busca-se identificar o sistema Linear Invariante no

Tempo (LTI) descrito por:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\y_k &= Cx_k + Du_k, \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde x_k é o vetor de estado, u_k o vetor de entrada, y_k o vetor de saída, e A, B, C, D matrizes constantes. O problema de identificação determinística por métodos de subespaços é determinar a ordem n do sistema e as matrizes (A, B, C, D) através da teoria de sistemas lineares no espaço de estado.

3.2.1 Método MOESP

O método MOESP¹ [38, 39] é baseado na generalização da realização de Ho e Kalman (1966)[80]. O método começa com a construção das matrizes de Hankel a partir dos dados de entrada-saída do processo.

Mediante uma projeção ortogonal do espaço linha da matriz de Hankel dos dados de saída sobre o espaço linha da matriz de Hankel dos dados de entrada, e de uma decomposição em valores singulares SVD, são obtidas a matriz de observabilidade estendida e a ordem do sistema. O passo a passo do algoritmo MOESP ordinário pode ser resumido como segue:

- Constroem-se as matrizes de dados como:

$$U_{0|s-1} = \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{N-1} \\ u_1 & \cdots & u_N \\ \vdots & & \vdots \\ u_{s-1} & \cdots & u_{s+N-2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{sm \times N}\tag{3.2}$$

e

$$Y_{0|s-1} = \begin{bmatrix} y_0 & \cdots & y_{N-1} \\ y_1 & \cdots & y_N \\ \vdots & & \vdots \\ y_{s-1} & \cdots & y_{s+N-2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{sp \times N}\tag{3.3}$$

¹ do inglês “Multivariable Output-Error State sPace”

- Calcula-se a decomposição LQ das matrizes de Hankel de entrada e de saída:

$$\begin{bmatrix} U_{0|s-1} \\ Y_{0|s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} = \bar{L}Q^T \quad (3.4)$$

- Projeta-se ortogonalmente $\hat{E}\{\bullet\}$ o espaço linha de $Y_{0|s-1}$ no espaço linha de $U_{0|s-1}$:

$$\hat{E}\{Y_{0|s-1}|U_{0|s-1}\} = L_{21}Q_1^T = L_{21}L_{11}^{-1}U_{0|s-1}$$

onde $Y_{0|s-1}$ pode ser expressa como:

$$Y_{0|s-1} = \Gamma_s + \Psi U_{0|s-1} \quad (3.5)$$

sendo a observabilidade estendida Γ_s

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix}$$

e a matriz de Toeplitz Ψ

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} D & & & \\ CB & D & & \\ \vdots & \ddots & & \\ CA^{s-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

substituindo (3.5) em (3.4) temos:

$$\Gamma_s X_0 + \Psi L_{11} Q_1^T = L_{21} Q_1^T + L_{22} Q_2^T \quad (3.6)$$

onde pode-se ver que o segundo membro é uma soma ortogonal, e o primeiro membro é uma soma direta, de modo que duas quantidades não são necessariamente ortogonais. Isto implica que: $\Gamma_s X_0 \neq L_{22} Q_2^T$ e $\Psi L_{11} Q_1^T \neq L_{21} Q_1^T$.

Pós multiplicando (3.5) por Q_2 tem-se

$$\Gamma_s X_0 Q_2 = L_{22} \quad (3.7)$$

- Calcula-se os valores singulares de L_{22} para obter a matriz de observabilidade estendida Γ_s e conseqüentemente a dimensão n , da seguinte forma:

$$L_{22} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), tem-se

$$\Gamma_s X_0 Q_2 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

- Calcula-se a matriz de observabilidade estendida

$$\Gamma_s = U_1 \Sigma_1^{1/2} \quad (3.9)$$

e $n = \dim \Sigma_1$.

- As matrizes A e C são calculadas a partir da matriz de observabilidade estendida como:

$$C = \Gamma_s(1 : p, 1 : n) \quad (3.10)$$

$$\Gamma_s(1 : p(s-1), 1 : n)A = \Gamma_s(p+1 : sp, 1 : n) \quad (3.11)$$

- As matrizes B e D são calculadas pelo método de mínimos quadrados, sendo $U_2^T L_{22} = 0$ e $U_2^T \Gamma_s = 0$; pré-multiplicando (3.6) por $U_2^T \in R^{(sp-n) \times sp}$ em (3.8), temos:

$$U_2^T \Psi L_{11} Q_1^T = U_2^T L_{21} Q_1^T \quad (3.12)$$

e pós multiplicando por Q_1 tem-se

$$U_2^T \begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ CB & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & \dots & D \end{bmatrix} = U_2^T L_{21} L_{11}^{-1} \quad (3.13)$$

Definindo

$$\begin{aligned} U_2^T &:= [\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \dots \quad \mathcal{L}_s], \\ U_2^T L_{21} L_{11}^{-1} &:= [\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \dots \quad \mathcal{M}_s] \end{aligned} \quad (3.14)$$

e

$$\bar{\mathcal{L}}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \dots & \mathcal{L}_1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$\in \mathbf{R}^{(sp-n) \times (s+1-i)}$, $i = 2, \dots, s$ temos a seguinte equação superdeterminada:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \bar{\mathcal{L}}_2 \Gamma_{s-1} \\ \mathcal{L}_2 & \bar{\mathcal{L}}_3 \Gamma_{s-2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_{s-1} & \bar{\mathcal{L}}_s \Gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{s-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde o bloco de coeficientes da matriz da equação (3.16) no primeiro membro tem dimensão $s(sp-n) \times (p+n)$. Para obter solução única de mínimos quadrados (D, B) , a matriz bloco tem que ter posto coluna cheio, então $s(sp-n) > (p+n)$ pode ser satisfeito; isto se cumpre se $s > n$.

3.2.2 Modificações do Método MOESP

O método de identificação MOESP tem um conjunto de variações que pretendem lidar com as perturbações no sistema apresentado na figura 16.

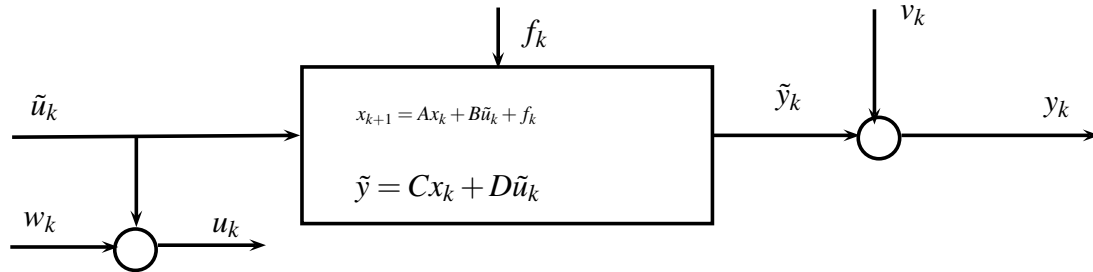


Figura 16 – Diagrama do Modelo de Erros em Variáveis.

Com dito propósito é reformulado o método MOESP para tratar o problema de acordo com o tipo de perturbação. As perturbações na figura 16 são: w_k o ruído de medição da entrada, f_k o ruído não mensurável associado ao modelo e v_k o ruído aditivo de saída. As variações do método são classificadas de acordo com a tabela 1.

Tabela 1 – Nomenclatura no Método MOESP.

Nomenclatura	Significado	Perturbações
PI	Perturbação na entrada	$f_k \neq 0, w_k \neq 0, v_k = 0$
PO	Perturbação na saída	$f_k = 0, w_k = 0, v_k \neq 0$
EIV	Erros em Variáveis	$f_k \neq 0, w_k \neq 0, v_k \neq 0$

As principais diferenças entre as variações do método estão na decomposição QR, onde as matrizes de dados são modificadas com o propósito de tratar cada perturbação. No caso das variações PI e PO, as estruturas dos dados com as quais são calculadas as decomposições QR são dadas por:

$$\begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix}$$

Com :

$$\Phi_N = \begin{cases} U_{s+1,s,N} & : PI - MOESP \\ \begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} \\ Y_{s+1,s,N} \end{bmatrix} & : PO - MOESP \end{cases}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} R_{22} & R'_{32} \end{bmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^T$$

O caso EIV é considerado mais complexo, e é apresentado na seção 3.2.3.

3.2.3 Problema de Erros em Variáveis (EIV)

O problema de erros em variáveis (EIV)² considera as perturbações na medida do sinal de entrada, assim como as perturbações próprias do sistema e as perturbações aditivas na saída, como é mostrado na figura 16. O ruído medido na entrada pode ser ruído branco ou ruído colorido. O sinal de saída é considerado poluído por uma perturbação de tipo ruído branco a qual não é correlata com a perturbação medida na entrada.

Considere o sistema apresentado na Figura 16, que pode ser representado no espaço de estado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B\tilde{u}_k + f_k \\ y_k &= \tilde{y}_k + v_k \\ \tilde{y}_k &= Cx_k + D\tilde{u}_k \\ \tilde{u}_k &= u_k - w_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{3.17}$$

O modelo em (3.17) é conhecido como EIV e é considerado para um conjunto de dados de entrada-saída $\{u_k, y_k, | k = 0, 1, \dots, N-1\}$, com N amostras. Nele x_k é o vetor de estado, u_k o vetor de entrada medido (perturbado), y_k o vetor de saída perturbado, as perturbações f_k, v_k , são supostas como ruídos brancos de médias nulas e variâncias unitárias, w_k pode ser considerado como ruído branco de média zero ou como ruído colorido; e A, B, C, D são matrizes constantes.

Múltiplas abordagens ao problema de identificação do modelo apresentado na figura 16 são feitas. Em algumas das mais significativas [117, 118, 119, 120] o problema de EIV é considerado um dos problemas mais difíceis de ser tratado. Na abordagem polinomial apresentada em [120], a identificação do sistema EIV é possível com as seguintes considerações:

- Todas perturbações e todos os sinais são de média zero.

² do inglês: “Errors-In-Variables”

- A ordem do sistema é conhecida.
- O sinal \tilde{u}_k livre de ruído é conhecido.
- As perturbações w_k e v_k são processos estacionários não correlatos com as entradas e saídas livres de ruído.

Outra abordagem é feita por Verhaegen [115], que trata o problema de identificação EIV usando análise por subespaços e Variável Instrumental (IV, esta abordagem será explicada na Seção 3.2.4). Algumas outras abordagens usando projeções ortogonais são discutidas em [121].

3.2.4 Abordagem do problema EIV por Subespaços

Esta abordagem divide o problema em duas categorias, de acordo com as considerações feitas sob o ruído. A primeira categoria supõe que tanto a entrada como a saída são poluídas por processos de ruído branco. A segunda categoria é mais geral, e supõe a entrada poluída seja por um processo de ruído branco ou por um processo de média móvel, enquanto a saída é suposta como um ruído colorido [115, 2, 3].

Cada categoria tem um algoritmo associado, e os dois algoritmos podem ser aplicados na identificação de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas MIMO³.

O problema foi descrito na Figura 16 e no modelo (3.17). Todos os processos w_k , f_k , v_k , são considerados ruídos brancos de médias zero e não correlatos com a entrada \tilde{u}_k ou seja as correlações entre o passado da entrada livre de ruído \tilde{u}_k e os processos w_k , f_k , v_k são nulas :

$$E[\tilde{u}_k w_j] = E[\tilde{u}_k f_j] = E[\tilde{u}_k v_j] = 0 \quad \text{para todo } j \geq k$$

onde $E[\cdot]$ é o operador esperança matemática.

Além disso, é suposto que w_k e v_k são independentes da sequência de estado x_k , e o processo de ruído f_k (com $k \geq 1$) é independente do estado inicial x_1 [38].

A abordagem aqui apresentada está sendo tratada através da “família” de algoritmos MOESP [38, 109], (Seção 3.2.1), a qual está constituída de dois passos, o primeiro

³ do inglês “Multiple Input Multiple Output”

é a estimação da matriz de observabilidade estendida $\hat{\Gamma}$ e da ordem do sistema, com o que podem ser estimadas as matrizes de estado (A, C) . O segundo passo consiste na estimação das matrizes de estado (B, D) a partir da estimação de (A, C) no passo um.

Para o desenvolvimento do passo um, é preciso construir as matrizes de dados $u_k, \tilde{u}_k, y_k, \tilde{y}, w_k, f_k, w_k$ no formato da matriz bloco de Hankel em (3.2). E através de:

$$Y_{j,s,N} = \Gamma_s X_{j,N} + H_s U_{j,s,N} - H_s W_{j,s,N} + G_s F_{j,s,N} + V_{j,s,N} \quad (3.18)$$

obter a matriz de observabilidade estendida, em (3.18); H_s, G_s são matrizes bloco de Toeplitz e $X_{j,N}$ é dada por:

$$X_{j,N} = \begin{bmatrix} x_j & \dots & x_{j+N-1} \end{bmatrix}$$

e os blocos de Toeplitz:

$$H_s = \begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ CB & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & \dots & D \end{bmatrix}$$

e

$$G_s = \begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde j é o índice de tempo no qual é inicializada a variável, N o número de amostras, e s o número de blocos.

O cálculo da matriz Γ_s , no sentido do problema de EIV, é feito de acordo com as características do sinal de entrada medida \tilde{u} . O primeiro é feito para \tilde{u}_k sendo ruído branco de média zero (RBMZ). O segundo considera que \tilde{u}_k não é ruído branco de média zero, e sim um sinal persistentemente excitante.

i) \tilde{u}_k sendo Ruído Branco de Média Zero

Em [115] é apresentado e provado o seguinte teorema

Teorema 3.1 *Dado o conjunto entrada-saída com ruído u_k, y_k que satisfaz o problema EIV, e supondo que a entrada livre de ruído de medição \tilde{u}_k é um ruído branco de média zero, para o qual tem-se a fatoração QR dada por:*

$$\begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} \\ U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \\ Y_{s+1,s,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.20)$$

O Teorema 3.1, implica que quando \tilde{u} é uma entrada livre de perturbação do tipo ruído branco de média zero, a matriz Γ_s pode ser estimada a partir de $\begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix}$.

ii) \tilde{u}_k não sendo Ruído Branco de Média Zero.

Nesta consideração são usadas as matrizes bloco de Hankel $U_{1,s,N}$ e $Y_{1,s,N}$ como variáveis instrumentais (IV) com o fim de remover o ruído. Pós-multiplicando

(3.18) por $\begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix}$ tem-se

$$Y_{j,s,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} = \Gamma_s X_{j,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} + H_s U_{j,s,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N} \\ Y_{1,s,N} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

quando $N \rightarrow \infty$. Então com base em (3.21) [115] é apresentado o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Dado o conjunto de entrada-saída u_k, y_k (ver [115], Teorema 3), e supondo que \tilde{u}_k não é uma sequência de ruído branco de média zero, a fatoração QR é dada por:*

$$\begin{bmatrix} U_{s+1,s,N} U_{1,s,N}^T & U_{s+1,s,N} Y_{1,s,N}^T \\ Y_{s+1,s,N} U_{1,s,N}^T & Y_{s+1,s,N} Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} R_{22} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N}^T & Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} Q_2^T \quad (3.23)$$

A prova do teorema 3.2, pode-se ver no apêndice A de [115].

Em (3.23), mostra-se que a estimação de Γ_s pode ser feita a partir de R_{22} e das discussões ao redor da estimação consistente da matriz Γ_s .

3.2.4.1 Estimação das Matrizes B_T e D

Múltiplas abordagens para o cálculo das matrizes B e D têm sido apresentadas na literatura. A mais comumente usada é a nomeada problema de estimação “linear-in-parameter” que pode ser vista em [115, 38, 39] e nas referências usadas nesses artigos.

Uma das formas mais comuns do problema “linear-in-parameter” é o cálculo por mínimos quadrados apresentado nas equações (3.12)- (3.16). Porém, dado que é considerada a medida do sinal de entrada com ruído na medida, o uso de variáveis instrumentais no processo de estimação destas matrizes é de muita utilidade. Com o propósito de usar variáveis instrumentais é empregada a representação do modelo de erro de saída, no qual \tilde{y} no modelo apresentado em (3.17), é dado como:

$$\tilde{y} = CA^{k-j}x_j + \left(\sum_{\tau=j}^{k-1} \tilde{u}_\tau^T \otimes CA^{k-1-\tau} \right) \text{vec}(B) + (\tilde{u} \otimes I) \text{vec}(D) + \sum_{k-1}^{\tau=j} CA^{k-1-\tau} f_k \quad (3.24)$$

onde $\text{vec}(\cdot)$ é o vetor coluna formado pelas colunas de (\cdot) e \otimes o produto de Kronecker.

Define-se as seguintes matrizes:

$$\mathcal{U}_{j,N} = \begin{bmatrix} 0 & u_j^T \otimes I \\ u_j^T \otimes I & u_{j+1}^T \otimes I \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{\tau=j}^{j+N-2} u_\tau^T \otimes CA^{j+N-2-\tau} & u_{j+N-1}^T \otimes I \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{F}_{j,N} = \begin{bmatrix} 0 \\ CAf_j \\ \vdots \\ \sum_{\tau=j}^{j+N-2} CA^{j+N-2-\tau} f_\tau \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathcal{W}_{j,N} = \begin{bmatrix} 0 & w_j^T \otimes I \\ w_j^T \otimes I & w_{j+1}^T \otimes I \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{\tau=j}^{j+N-2} w_\tau^T \otimes CA^{j+N-2-\tau} & w_{j+N-1}^T \otimes I \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \text{vec}(B) \\ \text{vec}(D) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Levando em conta o ruído medido na entrada e fazendo conjuntos de vetores coluna com as medidas da saída desde o instante j até o instante $j + N - 1$, pode-se chegar a seguinte equação para o modelo de erro de saída:

$$Y_{j,N,1} = \Gamma_N x_j + \mathcal{U}_{j,N} \mathcal{P} + \underbrace{\mathcal{F}_{j,N} + \mathcal{W}_{j,N} \mathcal{P} - V_{j,N,1}}_{\substack{\text{Erro de saída} \\ \mathcal{E}_{j,N}}} \quad (3.29)$$

Para calcular as matrizes (B, D) a partir de (3.29), é preciso calcular a matriz Γ_N a partir das matrizes A, B do modelo real. Porém, as matrizes reais são desconhecidas; então o cálculo da matriz Γ_N é feito com as matrizes (A, C) estimadas no passo anterior. Assim, $\Delta\Gamma_N = \Gamma_N - \hat{\Gamma}_N$ para efeitos do cálculo consistente da dupla (B, D) . De forma semelhante, as matrizes definidas em (3.25) até (3.27) são expressas em função das matrizes (A, C) .

Assim, (3.29) pode ser reescrita como:

$$Y_{j,N,1} = \hat{\Gamma}_N x_j + \hat{\mathcal{U}}_{j,N} \mathcal{P} + \hat{\mathcal{F}}_{j,N} + \hat{\mathcal{W}}_{j,N} \mathcal{P} - V_{j,N,1} + \Delta_N \quad (3.30)$$

sendo

$$\Delta_N = \Delta_N \Gamma_N x_j + \Delta_N \mathcal{U}_{j,N} \mathcal{P} + \Delta_N \mathcal{F}_{j,N} + \Delta_N \mathcal{W}_{j,N} \mathcal{P} - V_{j,N,1}$$

Supondo a consistência na estimação de (A, C) temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$$

Escolhendo uma variável instrumental Z_N como:

$$Z_N = \begin{bmatrix} Y_{s+1,s,N} \otimes I & U_{s+1,s,N} \otimes I \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

a expressão em (3.30) pode ser dada como:

$$\frac{1}{N} Z_N^T Y_{j,N,1} = \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\Gamma}_N x_j + \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{U}}_{j,N} \mathcal{P} + \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{F}}_{j,N} + \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{W}}_{j,N} \mathcal{P} - \frac{1}{N} Z_N^T V_{j,N,1} + \frac{1}{N} Z_N^T \Delta_N \quad (3.32)$$

Se os seguintes requerimentos são cumpridos, então é possível ter uma estimação consistente de (B, D) (ver [115] para o detalhamento dos requisitos).

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{F}}_{j,N} = 0$
2. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{W}}_{j,N} = 0$
3. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \mathcal{V}_{j,N,1} = 0$
4. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{U}}_{j,N} = 0$
5. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \Delta_N = 0$
6. A matriz $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \hat{\mathcal{F}}_{j,N}$ tem posto completo.

Os algoritmos 1, 2 e 3 a seguir, constituem o método EIV-MOESP em sua implementação algorítmica.

Entrada: Escolha as entradas de dados

Entrada: Escolha o método de calcular as Matrizes A e C

Entrada: Escolha o método de calcular as Matrizes A e D

início

1. Construa as matrizes de dados —Algorithm 2—

2. — Algorithm 3 —

3. **if** Escolheu o calculo de B e D usando mínimos quadrados **then**

Faça [122]

$$Y_{0,N,1} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_s & \tilde{\mathcal{Y}} & \tilde{\mathcal{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

.

else

Escolha o cálculo de B e D usando

$$\tilde{y} = CA^{k-j} x_j + \left(\sum_{\tau=j}^{k-1} \tilde{u}_{\tau}^T \otimes CA^{k-1-\tau} \right) \text{vec}(B) + (\tilde{u} \otimes I) \text{vec}(D) + \sum_{k-1}^{\tau=j} CA^{k-1-\tau} f_k$$

end

Calcule as matrizes $\mathcal{U}_{j,N}$, $\mathcal{F}_{j,N}$, $\mathcal{W}_{j,N}$ e determine \mathcal{P} usando a variável instrumental

$$Z_N = \begin{bmatrix} Y_{s+1,s,N} \otimes I & U_{s+1,s,N} \otimes I \end{bmatrix}$$

fin

Saída: Matrizes de estado estimadas e figuras de polos e zeros

Algoritmo 1: Algoritmo de Identificação EIV

início

construa as matrizes de dados $\tilde{u}, \tilde{y}, v, f, w$ com a forma:

$$U_{j,s,N} = \begin{bmatrix} u_j & \cdots & u_{j+N-1} \\ u_{j+1} & \cdots & u_{j+N} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{j+s-1} & \cdots & u_{j+N+s-2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{sm \times N} \quad (3.33)$$

construa as matrizes Toepliz H, G, \tilde{y} com a forma:

$$H_s = \begin{bmatrix} D & \cdots & 0 \\ CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{s-2}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

fin

Algoritmo 2: Algoritmo de Identificação EIV - Matrizes de Dados

if \tilde{u} é Ruído Branco de média zero (RBMZ) **then**

Use o Teorema 3.1, e determine a matriz de observabilidade estendida $\hat{\Gamma}_s$ a partir de $\begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix}$.

$$\text{Com } \hat{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix}$$

E a ordem do sistema fazendo a decomposição em valores singulares de $\begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix}$

else

Use o Teorema 3.2 e determine a matriz de observabilidade estendida $\hat{\Gamma}_s$ a partir de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} R_{22} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_s X_{s+1,N} \begin{bmatrix} U_{1,s,N}^T & Y_{1,s,N}^T \end{bmatrix} Q_2^T$$

E a ordem do sistema fazendo a decomposição em valores singulares de $\begin{bmatrix} R_{22} \end{bmatrix}$

end

Com $\hat{\Gamma}_s$ determine \hat{A} e \hat{C}

Algoritmo 3: Algoritmo de Identificação EIV -Tipo de entrada

3.3 Identificação Estocástica

Nesta seção apresenta-se um método de identificação estocástica que se beneficia da teoria de realização estocástica desenvolvida por Akaike(1974, 1975, 1976)[87, 88, 89], para criar uma teoria de realização estocástica de sistemas estacionários lineares com entrada exógena, usando correlações canônicas condicionais entre o passado e o futuro do conjunto de dados finitos de entrada e saída em um processo estocástico estacionário [91], [123], [86],[112].

3.3.1 Problema de Identificação Estocástica com Entradas Exógenas

Considere um conjunto de dados finitos de entrada e saída de um processo. O problema de realização estocástica é encontrar um modelo matemático no espaço de estado que possa descrever adequadamente a dinâmica do sistema desconhecido. O modelo inovativo no espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Ke_k \\y_k &= Cx_k + Du_k + e_k\end{aligned}\tag{3.34}$$

onde, $x_k \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in R^m$ é a entrada exógena e $y_k \in R^p$ é a saída do processo, $e_k \in R^p$ é o processo estocástico de inovação, $A \in R^{n \times n}$ é a matriz de estado, $B \in R^{n \times m}$ é a matriz de entradas, $C \in R^{p \times m}$ é a matriz de saída, $D \in R^{p \times m}$ é a matriz de transmissão direta, $K \in R^{n \times p}$ é a matriz de ganho de Kalman.

Para a consideração estocástica do problema, são definidas as matrizes de covariâncias do conjunto entrada-saída w como segue:

$$\Lambda_{ww}(l) = E \{w_{k+l}w_k^T\} = \begin{bmatrix} \Lambda_{yy}(l) & \Lambda_{yu}(l) \\ \Lambda_{uy}(l) & \Lambda_{uu}(l) \end{bmatrix}, \quad l = 0, \pm 1, \dots\tag{3.35}$$

onde $E\{\cdot\}$ representa a esperança matemática e $w \in R^d$ é definido por:

$$w := \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix}\tag{3.36}$$

A matriz de densidade espectral é dada por:

$$\Phi_{ww}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Lambda_{ww}(l)z^{-l} = \begin{bmatrix} \Phi_{yy}(z) & \Phi_{yu}(z) \\ \Phi_{uy}(z) & \Phi_{uu}(z) \end{bmatrix}\tag{3.37}$$

Para resolver este problema de realização estocástica com entradas exógenas, é usado o método de análise de correlação canônica CCA, descrito na seguinte seção.

3.3.2 Identificação pelo Método CCA

Para um conjunto de dados finitos de entrada u e de saída y de um processo, dados da forma:

$$\{u_k, y_k \quad \text{com} \quad k = 0, 1, \dots, N + 2s - 2\} \quad (3.38)$$

onde N é o número de dados disponíveis para a identificação e s é o número de linhas das matrizes bloco de Hankel (3.39) e (3.40) e de Toeplitz (3.41) de dados; s é escolhido com o critério de $s \gg n$, onde n é a ordem do sistema obtida na identificação. O valor inicial de s é escolhido suficientemente grande e de forma arbitrária.

Com os vetores de entrada e saída são construídas as matrizes de Hankel de dados, da seguinte forma:

$$U_{s|2s-1} = \begin{bmatrix} u(s) & \cdots & u(s+N-1) \\ u(s+1) & \cdots & u(s+N) \\ \vdots & & \vdots \\ u(2s-1) & \cdots & u(N+2s-2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sm \times N} \quad (3.39)$$

e

$$Y_{s|2s-1} = \begin{bmatrix} y(s) & \cdots & y(s+N-1) \\ y(s+1) & \cdots & y(s+N) \\ \vdots & & \vdots \\ y(2s-1) & \cdots & y(N+2s-2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sp \times N} \quad (3.40)$$

As notações $U_{s|2s-1}$ e $Y_{s|2s-1}$ representam os dados futuros de entrada e saída respectivamente, começando desde o instante s até o instante $2s - 1$.

Com a matriz w de (3.36) é construída a matriz Toeplitz de dados de entrada-saída, na forma:

$$\check{W}_{0|s-1} = \begin{bmatrix} w(s-1) & \cdots & w(s+N-2) \\ w(s-2) & \cdots & w(s+N-3) \\ \vdots & & \vdots \\ w(0) & \cdots & w(N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sd \times N} \quad (3.41)$$

A notação $\check{W}_{0|s-1}$ representa os dados do passado de entrada-saída, começando no instante 0 até $s - 1$

A técnica CCA⁴ para identificação de sistemas estocásticos multivariáveis no espaço de estado baseia-se na busca da correlação canônica condicional entre o futuro e o passado dadas as entradas futuras, com a qual é possível obter as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas, [90].

As matrizes de covariância entre futuro e passado são definidas por:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & \Sigma_{up} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{pu} & \Sigma_{pp} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{fu} & \Sigma_{fp} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} U_{s|2s-1} \\ \check{W}_{0|s-1} \\ Y_{s|2s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{s|2s-1} \\ \check{W}_{0|s-1} \\ Y_{s|2s-1} \end{bmatrix}^T = \bar{L}\bar{L}^T \quad (3.42)$$

onde \bar{L} representa a matriz bloco triangular inferior. A matriz é obtida através da decomposição LQ da matriz conjunta das matrizes bloco de Hankel e Toeplitz, como é mostrado na equação a seguir:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} U_{s|2s-1} \\ \check{W}_{0|s-1} \\ Y_{s|2s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} = \bar{L}Q^T \quad (3.43)$$

De acordo com a teoria da decomposição LQ, obtêm-se matrizes triangulares inferiores \bar{L} com um bloco zero na parte superior direita, e matrizes Q ortogonais tais que $Q_i^T Q_j = I\delta_{ij}$.

Desta forma, substituindo a matriz \bar{L} em (3.43) na equação (3.42), obtêm-se:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & \Sigma_{up} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{pu} & \Sigma_{pp} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{fu} & \Sigma_{fp} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T & L_{31}^T \\ 0 & L_{22}^T & L_{32}^T \\ 0 & 0 & L_{33}^T \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

De (3.44), pode-se obter cada uma das matrizes de covariância de Σ , como:

$$\begin{aligned} \Sigma_{uu} &= L_{11}L_{11}^T, & \Sigma_{pu} &= L_{21}L_{11}^T, \\ \Sigma_{fu} &= L_{31}L_{11}^T, & \Sigma_{pp} &= L_{21}L_{21}^T + L_{22}L_{22}^T, \\ \Sigma_{fp} &= L_{31}L_{21}^T + L_{32}L_{22}^T, \\ \Sigma_{ff} &= L_{31}L_{31}^T + L_{32}L_{32}^T + L_{33}L_{33}^T \end{aligned} \quad (3.45)$$

⁴ Do inglês: “Correlation Canonical Analysis”

Sejam

$$f_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sp}, \quad u_{k+} = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sm} \quad (3.46)$$

respectivamente os vetores de saídas e entradas futuras⁵.

Para o passado os vetores de saídas e entradas de dimensão infinita são:

$$y_{k-} = \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad u_{k-} = \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Para o passado entrada-saída definimos os vetores de dimensão infinita:

$$p_k = \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ w_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad w_k = \begin{bmatrix} y_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d \quad \text{com} \quad d = p + m \quad (3.48)$$

Usando os vetores (3.46), (3.47) e (3.48), define-se a correlação canônica condicional das saídas futuras dadas as entradas futuras:

$$\Sigma_{ff|u} := E \left\{ \hat{E}(f|u_+^\perp) \hat{E}(f|u_+^\perp)^T \right\} \quad (3.49)$$

onde $\hat{E}(f|u_+^\perp)$ indica a projeção ortogonal do futuro sobre o complemento ortogonal de u ; a projeção ortogonal pode ser expressa mediante esperanças como:

$$\hat{E}(f|u) = E \{ f u^T \} E \{ u u^T \}^\dagger u = \Sigma_{fu} \Sigma_{uu}^\dagger u \quad (3.50)$$

e

$$\hat{E}(f|u^\perp) = f - \hat{E}(f|u) = f - \Sigma_{fu} \Sigma_{uu}^\dagger u \quad (3.51)$$

onde \dagger é a pseudo-inversa.

⁵ f_k aqui representa o futuro; não confundir com o ruído apresentado com nomenclatura semelhante no método MOESP.

Então, a covariância condicional do futuro dada a entrada futura é dada por:

$$\Sigma_{ff|u} = E \left\{ \hat{E}(f|u_+^\perp) \hat{E}(f|u_+^\perp)^T \right\} = \Sigma_{ff} - \Sigma_{fu}(\Sigma_{uu})^\dagger \Sigma_{uf} \quad (3.52)$$

Da mesma forma, são obtidas as matrizes de covariâncias condicionais $\Sigma_{pp|u}$ e $\Sigma_{fp|u}$.

Assim, usando as covariâncias de (3.45) e as definições anteriores, obtêm-se as covariâncias condicionais como:

$$\Sigma_{ff|u} = \Sigma_{ff} - \Sigma_{fu}\Sigma_{uu}^{-1}\Sigma_{uf} = L_{32}L_{32}^T + L_{33}L_{33}^T \quad (3.53)$$

$$\Sigma_{pp|u} = \Sigma_{pp} - \Sigma_{pu}\Sigma_{uu}^{-1}\Sigma_{up} = L_{22}L_{22}^T \quad (3.54)$$

$$\Sigma_{fp|u} = \Sigma_{fp} - \Sigma_{fu}\Sigma_{uu}^{-1}\Sigma_{up} = L_{32}L_{22}^T \quad (3.55)$$

As matrizes com os autovetores canônicos são obtidas mediante os cálculos das raízes quadradas inversas das matrizes de covariâncias condicionais $\Sigma_{ff|u}$ e $\Sigma_{pp|u}$, da forma:

$$\Sigma_{ff|u} = LL^T \quad \Sigma_{pp|u} = MM^T \quad (3.56)$$

Mediante a decomposição em valores singulares das matrizes L e M e da matriz de covariância condicional do futuro e do passado dadas as entradas futuras $\Sigma_{fp|u}$, são obtidas as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas como:

$$\begin{aligned} L^{-1}\Sigma_{fp|u}M^{-T} &= U\Sigma V^T, \\ \mathcal{O} &= LU\Sigma^{1/2} \quad \mathcal{C} = \Sigma^{1/2}V^T M^T \end{aligned} \quad (3.57)$$

As equações acima são obtidas pela decomposição em valores singulares da matriz de Hankel normalizada, ver [89]:

$$\begin{aligned} L^{-1}HM^{-T} &= U\Sigma V^T \\ H &= LU\Sigma V^T M^T \\ H &= (LU\Sigma^{1/2})(\Sigma^{1/2}V^T M^T) = \mathcal{O}\mathcal{C} \end{aligned} \quad (3.58)$$

A sequência de estado estimado \hat{X}_k é calculada usando a controlabilidade estendida, da forma:

$$\hat{X}_k = \mathcal{C}_k \Sigma_{pp|u}^{-1} \check{W}_{0|k-1} \quad (3.59)$$

A partir de (3.34) obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ \hat{Y}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ke \\ e \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

onde \hat{X}_{k+1} é a sequência de estado estimada no instante $k + 1$.

Resolvendo o sistema superdeterminado (3.60) e usando o método de regressão linear, obtêm-se o conjunto de matrizes (A, B, C, D) .

De aqui em diante, para facilitar a notação, Ke é chamado de ρ .

Para calcular o ganho de Kalman K e a solução P da equação algébrica de Riccati (ARE) do filtro de Kalman, é necessário calcular as matrizes de covariâncias do erro de predição, dadas por:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \frac{1}{N-1} \begin{bmatrix} \rho\rho^T & \rho e^T \\ e\rho^T & ee^T \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

O ganho de Kalman é dado por:

$$K = (APC^T + S)(CPC^T + R)^{-1} \quad (3.62)$$

onde a ARE do filtro de Kalman, é dada por:

$$P = APA^T - (APC^T + S)(CPC^T + R)^{-1}(APC^T + S)^T + Q \quad (3.63)$$

Assim, encontrando as matrizes do sistema (A, B, C, D, K) , chegamos no modelo inovativo (3.34)

3.4 Aplicação

3.4.1 Método EIV

A implementação da identificação cobre as duas considerações sobre a entrada \tilde{u} feitas na seção 3.2.3, para o cálculo das matrizes (A, C) e dois métodos para calcular as matrizes de estado (B, D) . A estrutura geral da implementação é mostrada no Algoritmo 1

3.4.1.1 Benchmark EIV de Sexta Ordem

A planta [115] é um sistema de ordem 6 com função de transferência dada por:

$$P_k = 0.01 \times \frac{-4.1925 \times 10^{-2} z^{-6} - 2.1995 z^{-5} + 48425 z^{-4} - 1.0271 z^{-3} - 3.5128 z^{-2} + 1.9922 z^{-1} - 5.3631 \times 10^{-2}}{-7.9698 \times 10^{-1} z^{-6} + 2.9386 z^{-5} - 5.4600 z^{-4} + 6.1217 z^{-3} - 4.4213 z^{-2} + 1.9260 z^{-1} - 4.2649 \times 10^{-1}} \quad (3.64)$$

A seguir, é apresentada uma relação dos resultados que inclui o mapa de polos e zeros em cada conjunto de opções para a identificação (de acordo com o apresentado no Algoritmo 1). Em cada mapa de polos e zeros, é mostrado o resultado de 40 identificações com entrada aleatória ruído branco e média zero. Finalmente, em cada caso é mostrado um conjunto de matrizes (A, B, C, D) estimadas (para exemplificar o resultado obtido).

1. Cálculo das matrizes (A, C) considerando \tilde{u} como um sinal ruído branco de média zero, e calculando (B, D) com o uso de variável instrumental (IV).

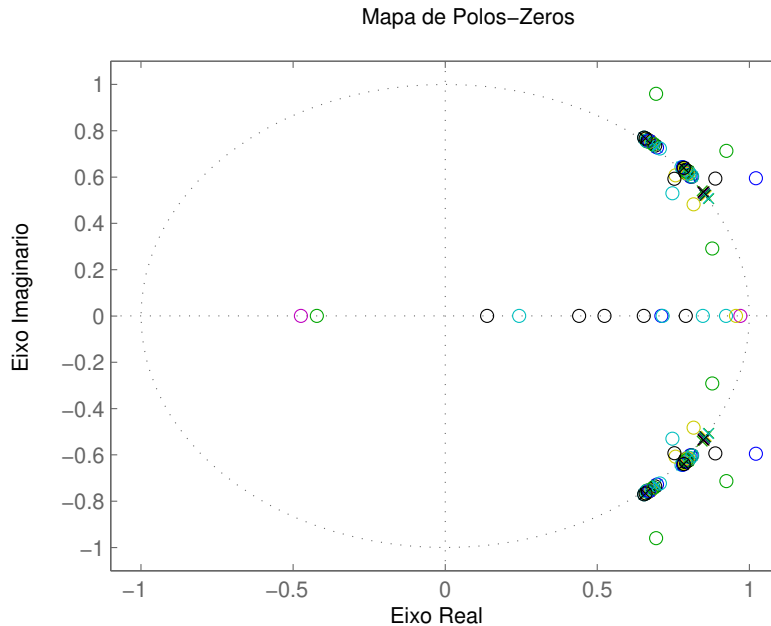


Figura 17 – EIV com \tilde{u} RBMZ e uso de IV.

Modelo estimado na iteração número 40:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8182 & 0.5845 & -0.08997 & 0.04577 & -0.005063 & -0.07964 \\ -0.5852 & 0.8114 & -0.05354 & 0.03321 & 0.008003 & -0.04925 \\ 0.03325 & 0.07431 & 0.7585 & -0.6548 & 0.1508 & 0.1285 \\ 0.01976 & 0.01086 & 0.6398 & 0.7641 & 0.04667 & -0.05271 \\ 0.006739 & -0.0008202 & -0.1173 & 0.09808 & 0.7242 & 0.7374 \\ 0.01127 & 0.02606 & 0.03705 & 0.02728 & -0.6658 & 0.7064 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4.076 \\ 1.619 \\ 2.465 \\ -1.274 \\ -0.6925 \\ 1.535 \end{bmatrix}, \quad C = [4.618 \quad 29.95 \quad 35.03 \quad -1.362 \quad -30.29 \quad 30.52]$$

$$D = 986.2$$

2. Cálculo das matrizes (A, C) considerando \tilde{u} como um sinal ruído branco de média zero, e calculando (B, D) usando mínimos quadrados.

Modelo estimado na iteração 40:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8295 & -0.5736 & -0.01602 & -0.06852 & -0.04084 & -0.04557 \\ 0.5644 & 0.8228 & 0.005882 & 0.09929 & -0.0003194 & 0.03232 \\ 0.01332 & -0.05876 & 0.7862 & 0.6102 & 0.1557 & 0.09169 \\ -0.007418 & -0.06371 & -0.6224 & 0.7771 & 0.1616 & 0.1057 \\ 0.01501 & 0.003931 & -0.002926 & -0.1736 & 0.7573 & 0.673 \\ 0.002608 & -0.007529 & 0.009834 & 0.01149 & -0.6065 & 0.7761 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.003887 \\ -0.5537 \\ 2.512 \\ -5.722 \\ 7.856 \\ -6.95 \end{bmatrix}, \quad C = [-16.15 \quad -27.045 \quad 0.940 \quad 0.67 \quad -41.932 \quad 0.74]$$

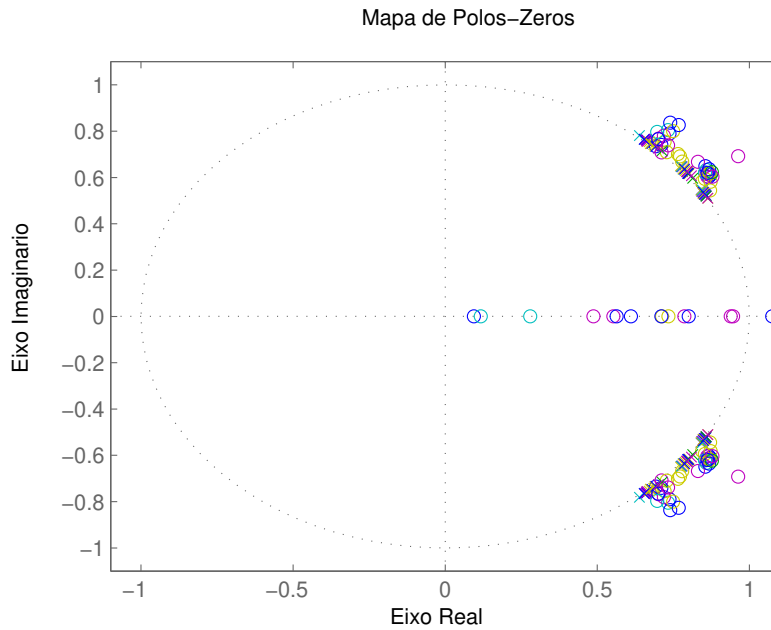


Figura 18 – EIV com \tilde{u} RBMZ e uso de Mínimos Quadrados.

$$D = [3.717]$$

3. Cálculo das matrizes (A, C) considerando \tilde{u} como um sinal não ruído branco de média zero, e calculando (B, D) com o uso de variável instrumental (IV).

Neste caso o sinal \tilde{u} é um ruído colorido. Isto é feito com a seguinte função de transferência (a função de transferência do ruído é tomada de [90]):

$$H_k = \frac{z^{-2} - 0.2z^{-1} - 0.48}{z^{-2} + 0.4z^{-1} + 0.8} \quad (3.65)$$

Modelo estimado na iteração 40:

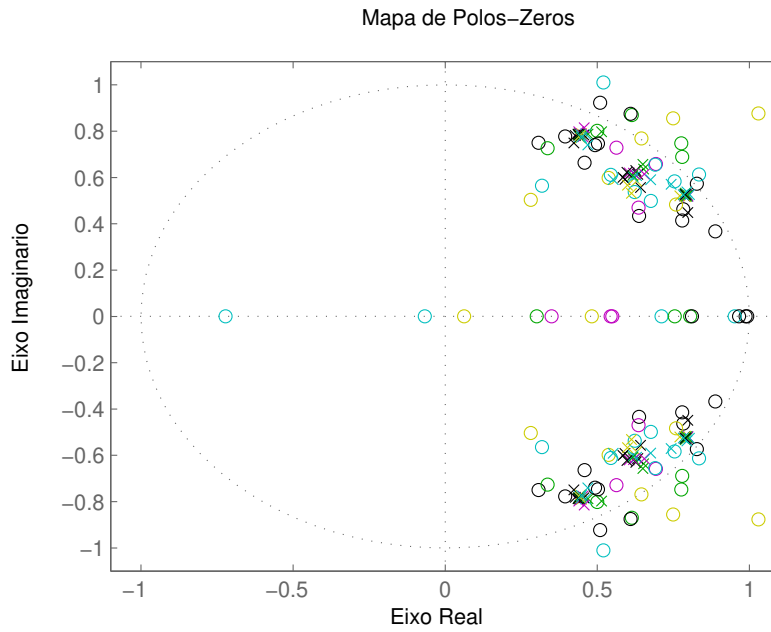


Figura 19 – EIV com \tilde{u} não sendo RBMZ e uso de IV.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5969 & 0.2688 & 0.06887 & 0.002819 & 0.002236 & -0.004585 \\ -1.333 & 0.7515 & -0.003198 & 0.01831 & -0.005226 & 0.007379 \\ 0.1146 & -0.548 & 0.4849 & 0.4044 & -0.007844 & 0.02598 \\ -0.1098 & 0.4229 & -1.088 & 0.6094 & 0.07342 & -0.116 \\ 0.00275 & 0.1008 & 0.3462 & -0.2929 & 0.6428 & -0.3396 \\ -0.2265 & 0.2234 & -0.191 & 0.07202 & 1.039 & 0.6371 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -31.5 \\ 77.11 \\ -396.4 \\ -37.41 \\ 121.6 \\ -158.7 \end{bmatrix}, \quad C = [-371.3 \quad -64.84 \quad 58.58 \quad -3.454 \quad 3.216 \quad -6.087]$$

$$D = [460.9]$$

4. Cálculo das matrizes (A, C) considerando \tilde{u} como um sinal não ruído branco de média zero, e calculando (B, D) com o uso mínimos quadrados.

Como no caso anterior a entrada é um ruído branco com função de transferência (3.65).

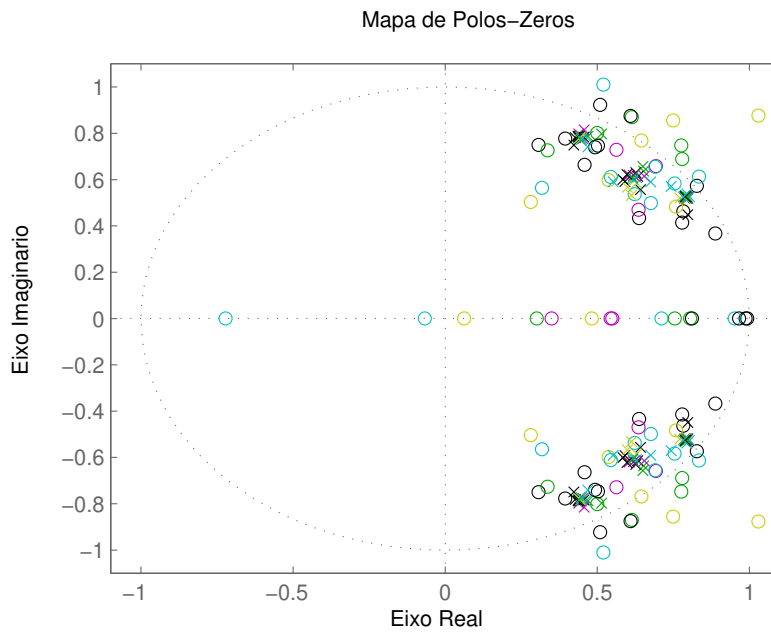


Figura 20 – EIV com \tilde{u} não sendo RBMZ e uso de Mínimos Quadrados .

Modelo estimado na iteração 40:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7241 & 0.1172 & 0.0245 & 0.002845 & -0.001035 & 0.002013 \\ -2.619 & 0.7021 & 0.04285 & 0.01392 & -0.00244 & 0.005861 \\ -1.259 & -0.01791 & 0.562 & -0.5044 & 0.02083 & -0.05097 \\ -1.934 & -0.9335 & 0.7441 & 0.6896 & 0.04327 & -0.08338 \\ -0.1427 & 0.1992 & 0.04663 & 0.05306 & 0.6098 & 0.5733 \\ -1.169 & -0.3763 & 0.4006 & 0.2826 & -0.7945 & 0.2797 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3166 \\ -1.515 \\ 3.28 \\ -5.038 \\ 5.658 \\ -4.942 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -355.4 & -220.7 & 46.6 & -2.96 & -3.15 & 8.921 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2.881 \end{bmatrix}$$

3.4.1.2 Conclusão do uso do algoritmo MOESP EIV

Nesta Seção, é apresentado o algoritmo de identificação por subespaços em malha aberta de erros em variáveis, com a implementação do cálculo das matrizes de estado (A, C) a partir de dois algoritmos que dependem das características da excitação. O cálculo das matrizes (B, D) é feito por mínimos quadrados e com o uso de variável instrumental. Este último método, implica um tratamento das perturbações a fim de cancelar o efeito destas na identificação.

O sistema apresentado para implementação é um problema que tem auto-valores muito próximos entre eles e complexos conjugados perto do limite de estabilidade $(0.9970e^{\pm j0.1677}, 0.9970e^{\pm j0.1679}, 0.9891e^{\pm j0.9140}, 0.9873e^{\pm j0.1.2784}, 0.9872e^{\pm j1.2894})$ o que o faz de difícil identificação. Ao aplicar o método com entrada sendo ruído branco de média zero, na Figura 17 pode-se observar que das 40 identificações, aproximadamente a metade está dentro do círculo unitário e representa o comportamento do sistema a identificar. Na Figura 18 são calculadas as matrizes com o uso da variável instrumental, e os resultados são muito próximos dos do caso anterior, isto devido a que o tratamento por IV pretende reduzir o efeito da perturbação, que no caso é pequeno, por tratar-se de uma entrada ruído branco. Já nas identificações que inserem ruído colorido, nas Figuras 18 e 19, encontra-se um melhor desempenho do algoritmo usando IV que apresenta um maior número de estimações consistentes das matrizes de estado.

3.4.2 Aplicação do Método CCA

Nesta seção é apresentada uma aplicação a um sistema eletromecânico rotacional que será chamado de bancada de vibração torcional, a qual está composta de

um servo motor, um acoplamento, um disco, um encoder e dois freios eletromagnéticos [116, 124]. Na Figura 21 é apresentada uma foto da bancada. Na figura pode-se observar que o eixo do motor está ligado com um disco de 3 mm de espessura, através de um acoplamento. O motor fornece um torque no eixo do disco e o torque aplicado gera uma mudança na posição angular e na velocidade no disco. Para ampliar as informações

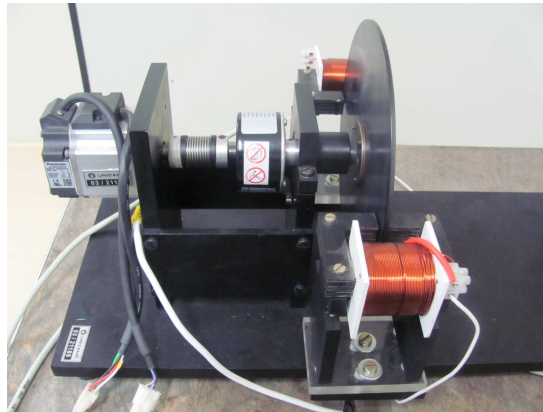


Figura 21 – Bancada de vibração torcional.

da bancada e da instrumentação usada para a aquisição de dados ver [124].

3.4.2.1 Modelo analítico.

Na Figura 22, apresenta-se a representação esquemática da bancada de vibração torcional da Figura 21, considerando o acoplamento como um corpo rígido.

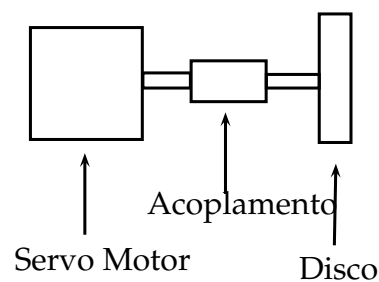


Figura 22 – Representação esquemática do sistema eletromecânico de um grau de liberdade.

Na Figura 23, apresenta-se o diagrama de corpo livre [97, 98] do sistema da Figura 22 considerando o acoplamento como um corpo com rigidez infinita, que para

simplificar a notação será chamado de acoplamento rígido. No diagrama de corpo livre da Figura 23, $T(t)$ em Newtons-metro Nm representa o torque aplicado no eixo do servo motor, J_{eq} em Kgm^2 é a inércia equivalente; T_d representa o atrito no disco e é expresso como $T_d = C\dot{\theta}(t)$, onde C em Nms/rad é o coeficiente de amortecimento.

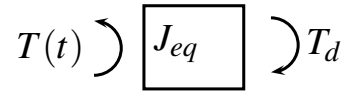


Figura 23 – Diagrama de corpo livre considerando que o acoplamento é um corpo rígido.

3.4.2.2 Sinais de excitação e de saída

O sinal de excitação é um sinal seno-chirp [125, 124] de $320 \times 10^{-3} N.m$ de amplitude e um período de $20s$, na faixa de frequência de $500 \times 10^{-3} Hz$ até $15 Hz$. O sinal de torque de referência é chamado de $Tref$, e é adquirido com a placa de captura da dSpace, modelo DS1104. O sinal de saída é um sinal de velocidade angular denominado $Venc1$. Os sinais de entrada-saída têm frequência de amostragem de $1 \times 10^3 Hz$ e sete períodos de $20s$ de duração cada um.

3.4.2.3 Identificação pelo método CCA

Na identificação usando o método CCA, foi obtido um modelo no espaço de estado discreto de primeira ordem, dado por:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1) &= (0,99)\hat{x}(t) - 2,55 \times 10^{-4}u(t) - 2,88 \times 10^{-5}e(t) \\ y(t) &= (-3,10 \times 10^3)\hat{x}(t) + (3,32)u(k) + e(t)\end{aligned}\quad (3.66)$$

Na figura 24 é mostrada a comparação gráfica do sinal de velocidade medido na bancada de vibração torcional com a velocidade estimada pelo método de identificação CCA.

3.4.2.4 Validações e comparação de resultados

Para o processo de validação de dados no tempo dividimos o vetor de dados adquiridos em dois conjuntos, cada conjunto com 60000 amostras. O primeiro conjunto é usado na identificação dos modelos e o segundo conjunto é usado na validação.

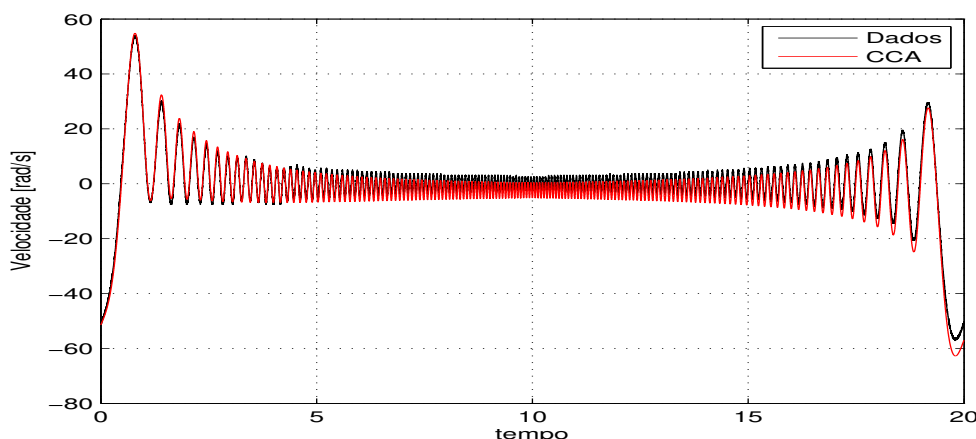


Figura 24 – Comparações entre Velocidade Medida e Velocidade Estimada pelo Método CCA.

A comparação entre os sinais de velocidade estimada e de velocidade medida é feita com o cálculo do ajuste apresentado na Equação (3.67), onde $V_{\hat{enc}1}$ é o sinal estimado a partir de cada modelo identificado, V_{enc1} é o sinal medido experimentalmente e $\overline{V_{enc1}}$ a média de V_{enc1}

$$A_{juste} = 100 \left(1 - \frac{\| (V_{enc1} - V_{\hat{enc}1}) \|}{\| (V_{enc1} - \overline{V_{enc1}}) \|} \right) \quad (3.67)$$

No caso da identificação pelo método MOESP ordinário, o ajuste é de 60,0891%; no caso da identificação usando o método CCA tem-se uma percentagem de ajuste de 81,3615%. Na Figura 25, apresenta-se a comparação gráfica destes ajustes com os dados experimentais.

3.4.2.5 Conclusões

A partir de dados experimentais, obteve-se o modelo do sistema eletromecânico usando o método de identificação em espaço de estado CCA; o modelo obtido, que inclui uma estimativa do ganho K permitiu determinar um modelo do ruído. Isto constituiu uma melhora em relação à modelagem dos dados obtida usando o método MOESP.

Também foram apresentadas breves revisões teóricas dos métodos CCA e MOESP com o propósito de mostrar os problemas de identificação LTI determinístico e estocástico.

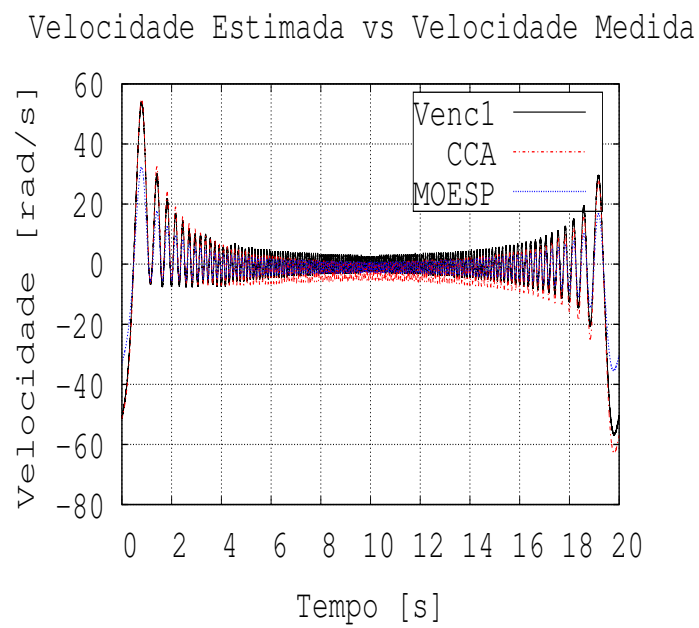


Figura 25 – Comparações das saídas dos Modelos Identificados.

Parte II

Contribuições em Discretização e Identificação LPV

4 Geração de Dados e Discretização de Sistemas LPV

4.1 Introdução

Neste trabalho, dois tipos de dados são considerados como disponíveis para o processo de identificação. O primeiro, é o conjunto de dados gerados através de um “benchmark”¹, e o segundo é o conjunto de dados medidos experimentalmente.

O primeiro conjunto está associado ao modelo empregado na geração de dados. Neste trabalho, são usados o modelo LPV com dependência afim aos parâmetros e o modelo LPV-LFT. O conjunto de benchmarks discretos aqui usados têm sido amplamente testado por diferentes autores. Por outra parte, existem múltiplas aplicações que juntam sistemas discretos e contínuos, como no caso de controle na rede onde o controlador é discreto enquanto a planta é contínua. Outro caso a considerar é quando o modelo é obtido a partir das leis da física como um sistema contínuo; porém precisa-se dele como um modelo discreto sob o qual deseja-se projetar um controlador discreto.

A transformação de processos contínuos para discretos é amplamente estudada e desenvolvida quando trata-se de sistemas Lineares Invariantes no Tempo² (LTI). No caso de sistemas LPV os métodos e procedimentos de transformação de sistemas contínuos para discretos têm sido menos desenvolvidos [126], porque os sistemas LPV envolvem múltiplas características que tornam mais difícil a discretização. Algumas dessas características advém da possibilidade de representar sistemas lineares e não lineares em diversos pontos de operação ou de representar sistemas variantes no tempo ou da própria variação dos parâmetros.

No caso da geração de dados a partir de benchmarks amplamente testados, temos diferentes modelos na literatura; porém, nos casos associados à transformação de modelos contínuos em discretos tem-se ainda uma limitante, já que a discretização de

¹ Entenda-se “benchmark” como um sistema simulado que permite a aquisição de dados e teste de algoritmos propostos.

² “LTI” do inglês “Linear Time Invariant”

sistemas LPV não é uma tarefa trivial [126, 127]. Neste tema usamos metodologias de discretização de sistemas LPV baseadas na LFT e suas propriedades, explorando que a LFT é uma transformação conforme que preserva as características de estabilidade do sistema contínuo original. A seguir, são apresentadas nossas propostas de discretização baseadas na LFT para sistemas LPV [33, 128, 129, 130].

O modelo LPV-LFT contínuo a ser discretizado neste capítulo é representado com a Transformada Fracionária Linear (LFT), e a forma básica é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + B_0w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_0x(t) + D_{00}w(t) + D_{01}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{10}w(t) + D_{11}u(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde

$$w(t) = \Delta(t)z(t)\tag{4.2}$$

sendo

$$\Delta(t) = \text{diagonal}(\delta_{1,k}I_{r_1}, \dots, \delta_{s,k}I_{r_s})\tag{4.3}$$

sendo r_i o tamanho para cada $\delta_{i,k}$ (ver [104, 34]), com $w(t)$ e $z(t) \in \mathbb{R}^r$, $r = r_1 + \dots + r_s$.

Neste capítulo, abordamos o problema de discretização de modelos LPV-LFT³, fazendo duas considerações em relação ao período de amostragem. Nesta primeira, consideramos o período de amostragem fixo e apresentamos um procedimento de discretização aproximada de sistemas contínuos LPV na forma LFT, estendendo o procedimento de discretização via LFT de sistemas LTI em torno de múltiplos pontos de operação, com o propósito de obter múltiplos modelos discretos afins ao modelo LPV contínuo. Na segunda parte da primeira consideração é apresentado o procedimento de discretização do sistema contínuo LPV-LFT e a relação com o modelo afim discreto.

Na segunda, a discretização é realizada para um período de amostragem dependente de um parâmetro. Nesta consideração é proposto um procedimento de discretização do sistema LPV-LFT contínuo, inserindo o parâmetro do qual depende o período de amostragem, na representação geral do sistema LPV-LFT discreto.

Cabe salientar que as discretizações aqui tratadas supõem um processo de amostragem ideal e um segurador de ordem zero. A amostragem dos dados é considerada

³ Sistema LPV na representação fracionária Linear

perfeitamente sincronizada, como em [126], onde o segurador de ordem zero da entrada e os parâmetros medidos são perfeitamente sincronizados e o amostrador é ideal.

4.2 Discretização LPV para Obtenção de Modelos LTI Locais

A ideia clássica de ganho escalonado como método de controle é baseada em projetar controladores LTI para um conjunto de modelos LTI operando ao redor de um número finito de pontos de operação; como foi exposto no capítulo 1. Como foi mencionado no capítulo 1, existem métodos de identificação baseados em algoritmos LTI associadas com um determinado ponto de operação; o conjunto de modelos LTI identificados desta forma constitui um conjunto de modelos locais. Cabe salientar que o propósito geral de nosso trabalho não abrange a identificação de sistemas LPV por interpolação dos modelos locais; porém reconhecemos que esta é uma importante atividade de pesquisa [31, 43, 131].

4.2.1 Procedimento 1.

A seguir é ampliada a visão apresentada em [33] (que é baseada no trabalho [132]) onde é obtido um conjunto de modelos discretos ao redor do ponto de operação do sistema LPV-LFT, podendo-se considerar os modelos como afins aos parâmetros.

A partir do sistema LPV-LFT da Figura 26, é obtido o conjunto de matrizes M_δ que contêm o parâmetro. Isto é conseguido por meio de uma LFT inferior:

$$M_\delta = \mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \right) \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_{00} \end{bmatrix} & M_{12} &= \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{01} \end{bmatrix} \\ M_{21} &= \begin{bmatrix} C_2 & D_{10} \end{bmatrix} & M_{22} &= \begin{bmatrix} D_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

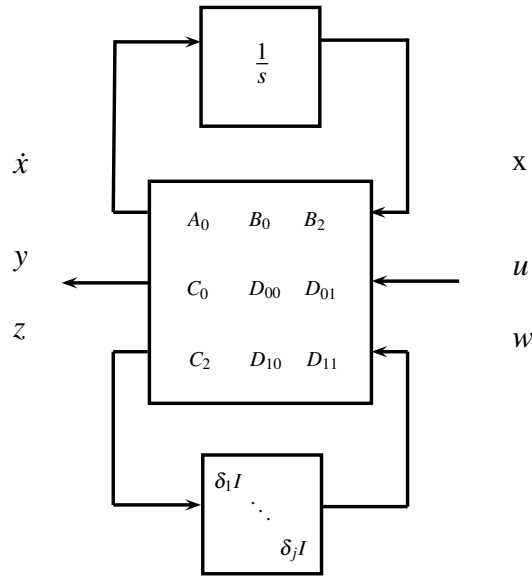


Figura 26 – Diagrama da representação LPV-LFT.

M_δ é um conjunto de matrizes avaliadas para cada ponto de operação em função dos parâmetros no instante de tempo k . Neste caso, M_δ pode ser expressa como:

$$M_{\delta_i, \eta}$$

onde i representa os δ_i parâmetros contidos na matriz Δ_j da Figura 26 portanto $i = 1, 2, \dots, j$ e $\eta = 1, 2, \dots, n$ corresponderá aos n pontos de operação avaliados.

A segunda parte do procedimento consiste em obter o modelo discreto afim ao parâmetro no instante k . Com esse propósito pode-se substituir o bloco realimentador $1/s$ da Figura 26 de diferentes maneiras; algumas dessas formas são apresentadas em [104], [133].

Nesta consideração temos o interesse de deixar em evidência o período de amostragem; portanto o bloco $1/s$ é substituído por:

$$s \approx \frac{2}{Td} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \tag{4.6}$$

onde a LFT inferior pode ser expressa como

$$\frac{1}{s} \approx \mathcal{F}_u(N, z^{-1}I) \tag{4.7}$$

sendo

$$N = \begin{bmatrix} -I & -\frac{\sqrt{2}Td}{2}I \\ \sqrt{2}I & \frac{Td}{2}I \end{bmatrix}, \quad e \quad \Delta = z^{-1}I$$

Para obter o modelo discreto afim ao parâmetro avaliado no instante de tempo discreto k , a LFT é calculada como:

$$\tilde{G} = \mathcal{F}_u(M_\delta, \mathcal{F}_l(N, z^{-1}I)) = \mathcal{F}_u(\tilde{M}, z^{-1}I) \quad (4.8)$$

onde \tilde{M} é a matriz resultante do produto estrela entre N e M_δ

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} (I + \frac{Td}{2}A)(I - \frac{Td}{2}A)^{-1} & \sqrt{2}\frac{Td}{2}(I - \frac{Td}{2}A)^{-1}B \\ \sqrt{2}C(I - \frac{Td}{2}A)^{-1} & C\frac{Td}{2}(I - \frac{Td}{2}A)^{-1}B + D \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

A matriz \tilde{M} contém as matrizes de estado discretas do modelo afim ao parâmetro no instante k .

4.2.2 Exemplo: “F-16 VISTA Flight Model”

A seguir, é apresentado o procedimento de discretização do modelo contínuo do “F-16 VISTA Flight Model”, apresentado em [134]. O modelo considera somente a movimentação longitudinal do avião. As velocidades angulares de rolamento, de guinada e o ângulo de deslocamento lateral do avião são supostos nulos. Assim, as equações padrão de período curto são

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (4.10)$$

Em (4.10), α representa o ângulo de ataque, q a taxa de arfagem, e δ_e a deflexão do profundor. A nível ajustado de voo, os coeficientes Z_α , M_α , M_q , Z_{δ_e} e M_{δ_e} dependem principalmente do número de Mach M e da altitude h .

As expressões dos coeficientes em (4.10) são dadas como:

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha &= 2,2 \times 10^{-1} - (4,10 \times 10^{-7})h - (2,60)M + (5,15 \times 10^{-5})Mh \\
 M_\alpha &= 1,71 \times 10^1 - (8,07 \times 10^{-4})h - (6,84 \times 10^1)M + (3,31 \times 10^{-3})Mh \\
 &\quad + (5,62 \times 10^1)M^2 - (2,92 \times 10^{-3})M^2h \\
 M_q &= -2,28 \times 10^{-1} + (7,06 \times 10^{-6})h - (2,12 \times 10^0)M + (4,86 \times 10^{-5})Mh \\
 Z_{\delta_e} &= -1,38 \times 10^{-3} - (8,75 \times 10^{-8})h - (3,40 \times 10^{-1})M + (7,98 \times 10^{-6})Mh \\
 M_{\delta_e} &= -8,16 \times 10^0 + (1,73 \times 10^{-4})h + (4,06 \times 10^1)M - (8,96 \times 10^{-4})Mh \\
 &\quad - (9,93 \times 10^1)M^2 + (2,42 \times 10^{-3})M^2h
 \end{aligned}$$

As faixas de projeto incluem as condições de voo:

$$M \in [0,4 \quad 0,8], \quad h \in [5000 \quad 25000]$$

normalizadas como:

$$\delta M \equiv \frac{M-0,6}{0,2} \in [-1 \quad 1], \quad \delta h \equiv \frac{h-15000}{10000} \in [-1 \quad 1]$$

Informações do modelo podem ser ampliadas em [134, 135, 136].

Procedimento de discretização

a. Modelo LPV-LFT contínuo

A partir do modelo em (4.10) pode-se escrever o modelo LPV-LFT contínuo do F-16 Vista como:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 \begin{array}{ccc}
 0,2200 & 1,0000 & -0,0014 \\
 17,1000 & -0,2280 & -8,1600 \\
 1,0000 & 0 & 0 \\
 0 & 1,0000 & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{cccccccccccc}
 -0,0000 & -0,0001 & -0,2312 & -1,2723 & -0,0008 & -0,0046 & 0 & 0 \\
 -0,0287 & 0,0000 & -8,9187 & 0,0330 & -0,0586 & 0,0001 & -10,6818 & 0,0616 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,0281 & -0,0002 & -0,0060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,0000 & 0,0001 & 0,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 7,6717 & 0,2375 & -4,5482 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,6497 & -0,0432 & 1,0936 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,0565 & -0,0008 & 0,0153 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,0012 & 0,0001 & -0,0044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -5,2613 & 0 & 9,2962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,0474 & 0 & 0,0393 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{cc}
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0
 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \tag{4.11}$$

e

$$\Delta_{\delta_{rc}} = \begin{bmatrix} hI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MhI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^2I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^2hI \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

O modelo em (4.11), pode ser obtido de diferentes formas, aqui é obtido a partir da representação afim aos parâmetros, apresentada em (4.10).

As matrizes contínuas do modelo afim em (4.10), são dadas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [A_0 | A_1 | A_3 | A_4 | A_5 | A_6] \\ [A_0 | A_1 | A_3] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,2200 & 1,0000 & -4.10 \times 10^{-7} & 0 \\ 17,1000 & -0,2280 & -8.07 \times 10^{-4} & 7.06 \times 10^{-6} \end{array} \middle| \begin{array}{cc} -2.6 & 0 \\ -68.4 & -2,12 \end{array} \right] \\ [A_4 | A_5 | A_6] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 5,15 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 3,31 \times 10^{-3} & 4,86 \times 10^{-5} & 56,2 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -2,92 \times 10^{-3} & 0 \end{array} \right] \\ \mathcal{B} &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -1.38 \times 10^{-3} & 8.75 \times 10^{-8} & -0.34 & 7.89 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ & -8.16 & 1.73 \times 10^{-4} & 40.6 & 8.96 \times 10^{-4} & -99.3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 2.42 \times 10^{-3} \end{array} \right] \\ \mathcal{C} &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

e o modelo afim é dado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i A_i & B_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i B_i \\ C_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i C_i & D_0 + \sum_{i=1}^j \delta_i D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Com

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A} = [A_0 | A_1 | \dots | A_j]$, $\mathcal{B} = [B_0 | B_1 | \dots | B_j]$ e de forma semelhante para as outras matrizes, em (4.14) δ_i representa o conjunto de valores dos parâmetros no i -ésimo instante.

Fazendo

$$m1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad mi = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$$

a matriz m_i pode ser decomposta por uma decomposição de posto cheio q_i para resultar:

$$\delta_i m_i = \begin{bmatrix} L_i \\ W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i I_{q_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ Z_i \end{bmatrix}',$$

e o conjunto de matrizes:

$$M_{\delta_{TC}} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}}^{M_{11TC}} + \overbrace{\begin{bmatrix} L_1 \dots L_i \\ W_1 \dots W_i \end{bmatrix}}^{M_{12TC}} \overbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 I_{q_i} & & \\ & \dots & \\ & & \delta_j I_{q_i} \end{bmatrix}}^{\Delta \delta_{TC}} \overbrace{\begin{bmatrix} R_1 \dots R_i \\ Z_1 \dots Z_i \end{bmatrix}'}^{M_{21TC}} \quad (4.15)$$

Com as matrizes em (4.32), podem ser calculadas as matrizes em (4.11) como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_1 \dots L_i \end{bmatrix} &= B_2 \\ \begin{bmatrix} W_1 \dots W_i \end{bmatrix} &= D_{01} \\ \begin{bmatrix} R_1 \dots R_i \end{bmatrix}' &= C_2 \\ \begin{bmatrix} Z_1 \dots Z_i \end{bmatrix}' &= D_{10} \\ 0 &= D_{11} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Levando em conta que o termo $D_{11} = 0$ representa um sistema linear, e que se $D_{11} \neq 0$ é preciso um tratamento especial; ver [104].

O procedimento acima pode não ter (de acordo com o sistema) uma resolução simples ou até não ter representação LFT-LPV a partir do modelo afim, por isso outras formas de obter o modelo podem ser vistas em [134, 104] entre outros.

b. Obtenção das matrizes $M_{\delta_i, \eta_{TC}}$ para discretizar

As matrizes contínuas calculadas em (4.16), são substituídas em (4.5) para se obter a LFT em (4.4). Isto, produzirá para cada ponto de operação um conjunto de matrizes $M_{\delta_i, \eta_{TC}}$.

Com uma amostragem ideal, pode-se supor que $\delta_i(t) \approx \delta_{ik}$; onde δ_{ik} corresponde com o parâmetro $\{i = 1, \dots\}$ amostrado no instante k . No caso do F-16 aqui apresentado são considerados vinte e um pontos de operação contidos entre um **espaço**

linear representado por: $linesp(a;b)$, $a = inicio$, $b = fim$, para $M = linesp(0,4; \quad 0,6)$ e $h = linesp(5000; \quad 25000)$ pés. Os modelos contínuos afins aos parâmetros são:

$$M_{\delta_{1,1T_c}} = \left[\begin{array}{cc|c} -0.7191 & 1.0000 & -0.1212 \\ -1.0190 & -0.9435 & -6.7990 \\ \hline 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \end{array} \right]$$

$$\vdots$$

$$M_{\delta_{21,21T_c}} = \left[\begin{array}{cc|c} -0.5778 & 1.0000 & 0.0848 \\ -0.5130 & -0.5945 & -6.8830 \\ \hline 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \end{array} \right]$$

a localização dos polos do modelo afim contínuo é mostrada na Figura 27.

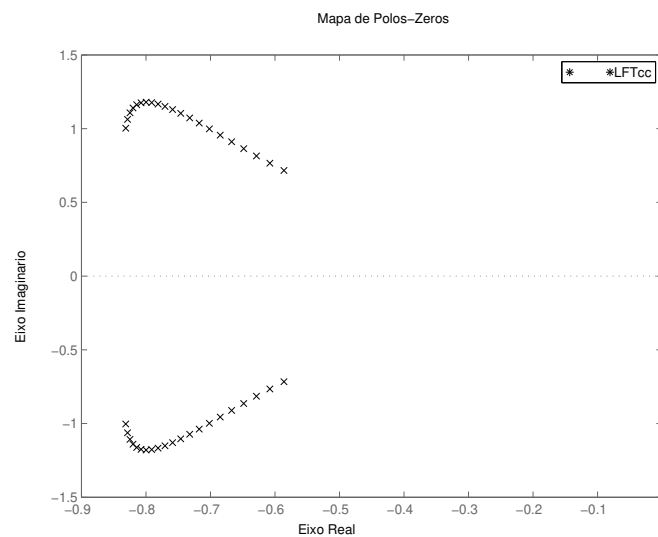


Figura 27 – Diagrama de polos do modelo afim contínuo.

c. Obtenção das matrizes discretas

Neste passo, são calculadas as η_{T_d} matrizes de estado discretas que constituem o sistema discreto afim aos parâmetros equivalente ao sistema contínuo afim aos parâmetros em (4.14).

Isto é feito obtendo a LFT em (4.8) e o produto estrela apresentado em (4.9) para cada $M_{\delta_i, \eta_{T_c}}$ calculada no passo anterior.

Assim, o conjunto de matrizes discretas associadas ao modelo afim, será dado por:

$$\begin{aligned}
 M_{\delta_{1,1T_d}} &= \begin{bmatrix} 0.9635 & 0.0480 & -0.0100 \\ -0.0489 & 0.9527 & -0.2346 \\ 1.3884 & 0.0339 & -0.0070 \\ -0.0346 & 1.3808 & -0.1659 \end{bmatrix} \\
 &\quad \vdots \\
 M_{\delta_{21,21T_d}} &= \begin{bmatrix} 0.9709 & 0.0486 & -0.0089 \\ -0.0249 & 0.9701 & -0.2397 \\ 1.3936 & 0.0343 & -0.0063 \\ -0.0176 & 1.3931 & -0.1695 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

A resposta em frequência do modelo afim, é apresentada na Figura 28.

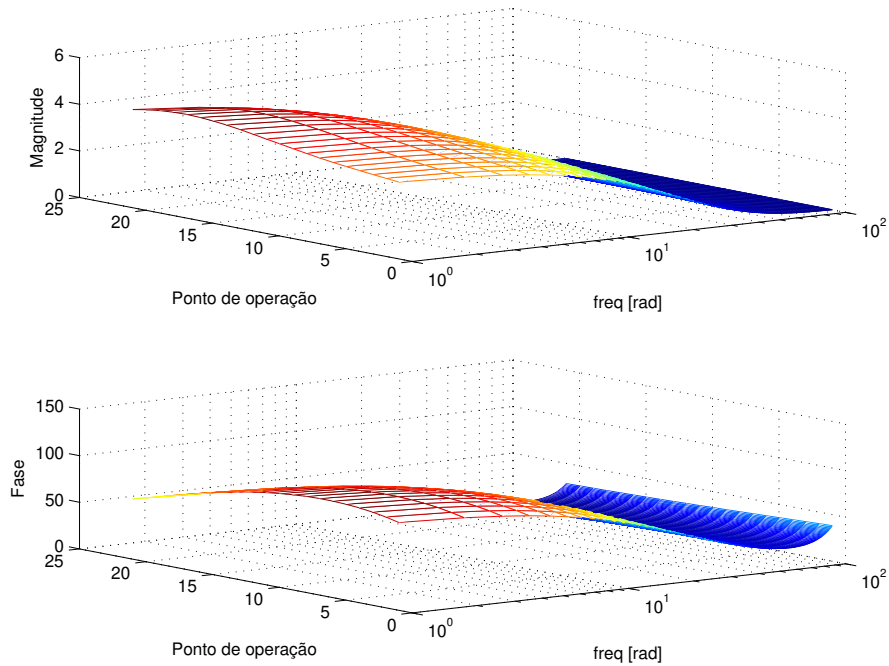


Figura 28 – Resposta em frequência do modelo discreto Afim.

d. Comparação de resultados

A seguir é apresentada uma comparação dos resultados obtidos na discretização do “F16 VISTA”. A comparação é feita entre o procedimento aqui apresentado e o exemplo 17 do toolbox “Predictor-based subspace identification toolbox version 0.6” [76], implementado por Houtzager [137] (**IDv06**); onde é apresentado o problema de discretização do “F16 VISTA”. No **IDv06** é usado o método de Euler e o método Tustin implementados em MATLAB para a discretização para sistemas LTI com o propósito de discretizar o modelo afim aos parâmetros do “F16 VISTA” contínuo.

Para comparar graficamente os vinte e um modelos discretizados é apresentada a figura 29, na qual os polos marcados como “Tustin” e “Euler” correspondem com os polos do modelo discretizado obtido com o toolbox **IDv06**. Os polos “LFT” na figura 29, correspondem com o modelo discretizado através do procedimento 1 apresentado nesta seção.

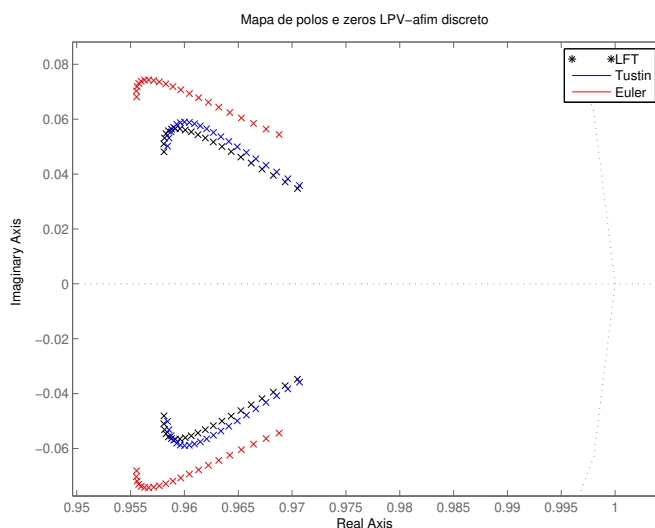


Figura 29 – Comparação dos resultados das discretizações.

A proximidade entre os resultados obtidos com o uso do método de Euler e o procedimento 1, aqui tratado, mostra que o nosso procedimento é eficaz e que a representação discreta obtida manteve a estabilidade do sistema contínuo.

4.2.3 Exemplo: Sistema Massa Mola Amortecedor.

Seja um sistema massa-mola-amortecedor. Suponha um deslocamento $x = x_1$, uma velocidade $x_2 = \dot{x}_1$, uma entrada F , uma rigidez $\bar{\tau}$, um coeficiente de amortecimento c , e uma massa m .

Consideremos m como variante em dependência de um parâmetro δ_m no intervalo de $[-1, 1]$, da forma:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\bar{m}(1 + 0.1\delta_m)}$$

onde \bar{m} é o valor nominal da massa. O sistema massa-mola-amortecedor com parâmetro m variante pode ser representado pela Figura 30. O parâmetro variante $1/m$ pode ser expresso como uma LFT inferior de acordo com a Figura 30 como:

$$\frac{1}{m} = \mathcal{F}_l(M, \delta_m), \quad \text{com}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}} & -\frac{-0.1}{\bar{m}} \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

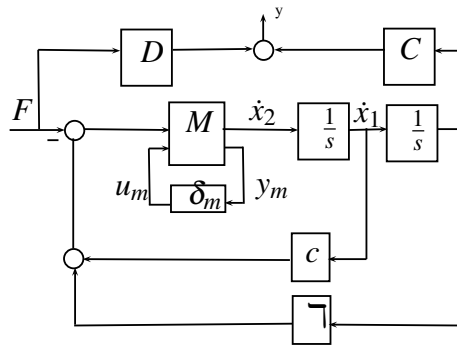


Figura 30 – Diagrama de blocos do sistema Massa-Mola-Amortecedor.

De acordo com a Figura 30, a LFT inferior relacionada ao parâmetro variante m tem como entradas u_m e F (supondo todas as outras entradas como zero, ou seja aplicando superposição), e como saídas y_m e \dot{x}_2 . Assim, usando $u_m, F, y_m, \dot{x}_2, M$ e δ_m é possível construir o conjunto de equações da LFT inferior apresentado em (2.6) para descrever o operador associado ao parâmetro variante m como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}} & -\frac{-0.1}{\bar{m}} \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \Delta = \delta_m$$

A construção do modelo afim apresentado na Figura 14, requer descrever conjuntos de entradas e saídas tanto para o sistema “conhecido” (A, B, C, D) quanto para o sistema afetado pelas variações dos parâmetros (A_i, B_i, C_i, D_i) . Assim, a entrada ao sistema é dada por F e a realimentação ao sistema é dada por $u_m = F \delta_m (1 + 0.1 \delta_m)^{-1}$, Agora suponhamos como saídas $\dot{x}_1, \dot{x}_2, y_1, y_2$ e y_m ; então usando a forma em (2.6) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_m \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F \\ u_m \end{bmatrix}, \quad [u_m] = \Delta [y_m] \quad (4.18)$$

Assim as matrizes Q e Δ em $\mathcal{F}_l(Q, \Delta)$, são dadas como:

$$Q = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \quad 1}^{A_0} & \overbrace{0}^{B_0} & \overbrace{0}^{B_1} \\ \underbrace{-\frac{\tau}{\bar{m}} \quad -\frac{c}{\bar{m}}}_{\frac{C_0}{C_1}} & \underbrace{\frac{1}{\bar{m}}}_{\frac{D_{00}}{D_{10}}} & \underbrace{-\frac{0.1}{\bar{m}}}_{\frac{D_{01}}{D_{11}}} \\ 1 \quad 0 & 0 & 0 \\ 0 \quad 1 & 0 & 0 \\ \tau \quad c & 1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\Delta = \delta_m$$

que representa o sistema LPV-LFT,

$$G(\Delta) = \mathcal{F}_u \left(\mathcal{F}_l(Q, \Delta), \frac{1}{s} I \right).$$

Usando o método de discretização da Seção 4.2, e o produto estrela em (2.31) obtêm-se a discretização do sistema. Dando uma variação ao parâmetro δ_m como um ruído branco de média 0 e variância 0,01, em torno do valor nominal $\bar{m} = 0,0054$, e fazendo $\tau = 1$ e $c = 0,0063$ e um período de amostragem de 0,0105seg, temos os modelos locais⁴ associados ao sistema LPV-LFT. Para exemplificar mostramos a seguir

⁴ Considere modelo local como uma realização (A, B, C, D) LTI em torno ao valor atual de δ_k

dois conjuntos de realizações, em torno de dois valores de $\delta_{m,k}$ (Na Figura 31 é apresentado o diagrama de Bode de um dos modelos locais discretizados): Para $\delta_m = -0,0076$ temos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9770 & -0,0107 \\ 1,9770 & 0,9893 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1,4014 \\ 1,4014 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0,0163 & 0,0075 \\ -1,3979 & 0,0075 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -0,9909 \\ -0,9909 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

e para $\delta_m = -0,0086$ temos:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,9770 & -0,0106 \\ 1,9770 & 0,9894 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1,3956 \\ 1,3956 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0,0163 & 0,0075 \\ -1,3980 & 0,0075 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0,9868 \\ -0,9868 \end{bmatrix}$$

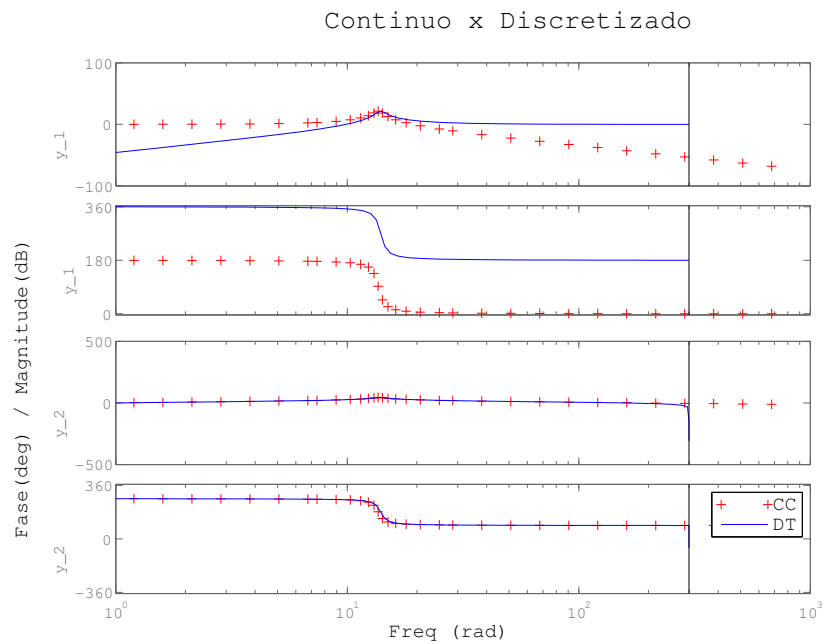


Figura 31 – Diagrama de Bode Modelo Local Discretizado para $\delta_m = -0,0086$.

Para múltiplos modelos locais discretizados em torno de cada δ_m , é apresentado o diagrama de Bode da Figura 32. Aspectos relacionados ao período de amostragem e à discretização exata podem ser vistos em [138], [132]

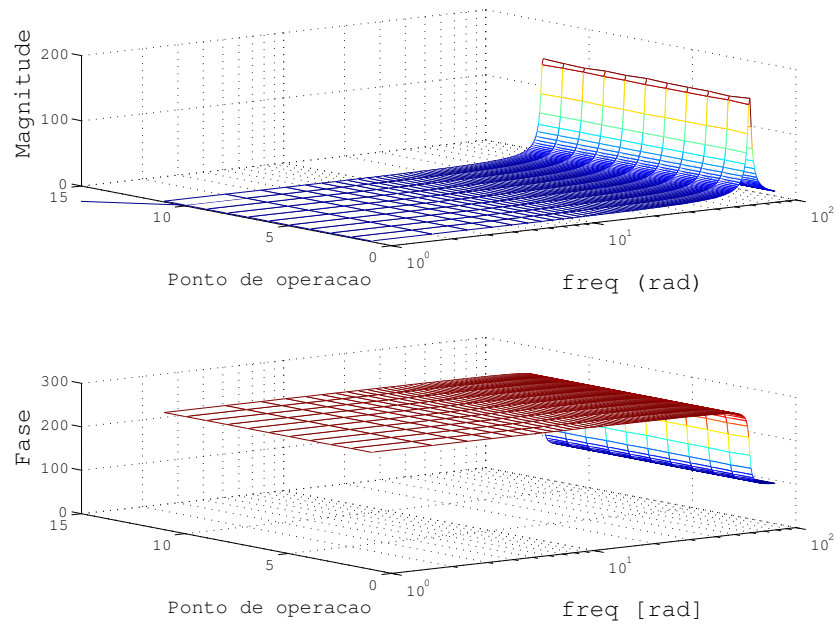


Figura 32 – Diagrama de Bode do Modelo Local Discretizado .

4.2.4 Procedimento 2.

Nesta seção, é apresentado o procedimento proposto para a discretização do modelo LFT-LPV contínuo em (4.1), para obter um modelo LFT-LPV discreto na forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 x_k + B_0 w_k + B_2 u_k \\ z_k &= C_0 x_k + D_{00} w_k + D_{01} u_k \\ y_k &= C_2 x_k + D_{10} w_k + D_{11} u_k \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

$$w_k = \Delta_k z_k \quad (4.21)$$

sendo

$$\Delta_k = \text{diagonal}(\delta_{1,k} I_{r_1}, \dots, \delta_{s,k} I_{r_s}) \quad (4.22)$$

com w_k e $z_k \in \mathbb{R}^r$, $r = r_1 + \dots + r_s$.

A partir da matriz N e z^{-1} da LFT superior em (4.7) implementar o sistema apresentado na Figura 33.

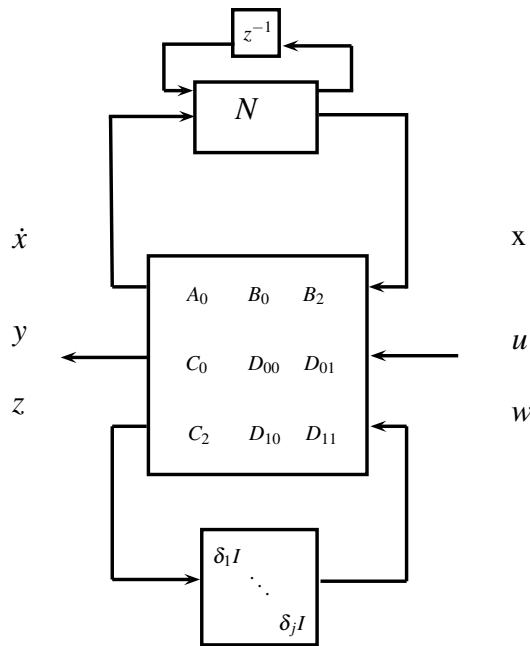


Figura 33 – Representação LPV-LFT a discretizar.

O sistema na Figura 33, pode ser expresso como se mostra na Figura 34. Na Figura 34, apresenta-se a conexão entre a matriz N e as matrizes da representação de estado da Figura 33.

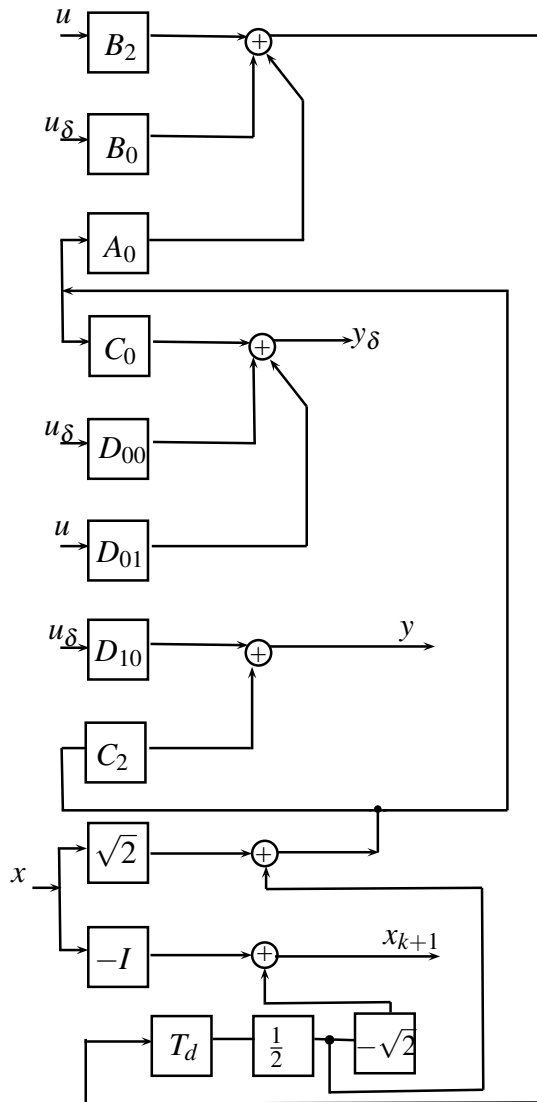


Figura 34 – Diagrama de blocos da representação LPV-LFT a discretizar.

Tendo a interconexão, pode-se aplicar o produto estrela entre as matrizes de estado e a matriz N , para obter o sistema discreto apresentado na Figura 35, que pode

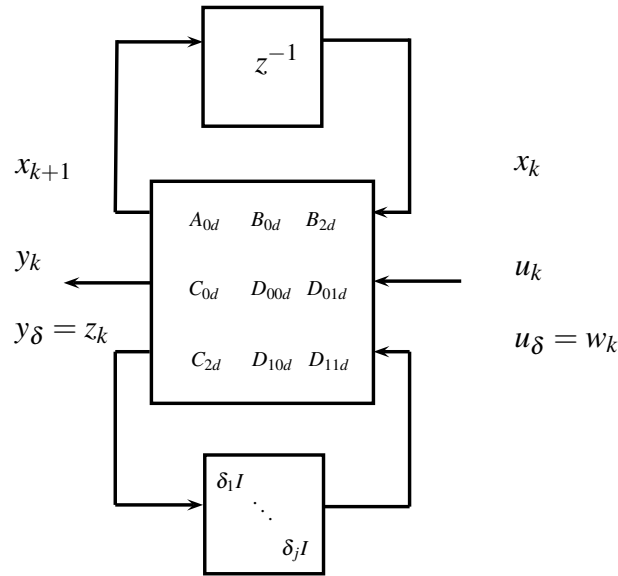


Figura 35 – Diagrama da representação LPV-LFT discretizada.

ser expresso também como:

$$\mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ N \star \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_2 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix}, \Delta \right\}, z^{-1} \right\}$$

onde $N \star \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_2 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix} = \tilde{M}$ é dado como:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} (I + \frac{T_d}{2}A_0)(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1} & \sqrt{2}\frac{T_d}{2}(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1}B_0 & \sqrt{2}\frac{T_d}{2}(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1}B_2 \\ \sqrt{2}C_0(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1} & C_0\frac{T_d}{2}(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1}B_0 + D_{00} & C_0\frac{T_d}{2}(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1}B_0 + D_{01} \\ \sqrt{2}C_2(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1} & C_2\frac{T_d}{2}(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1}B_2 + D_{10} & C_2\frac{T_d}{2}(I - \frac{T_d}{2}A_0)^{-1}B_2 + D_{11} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

portanto, $\mathcal{F}_u \{ \mathcal{F}_l \{ \tilde{M}, \Delta \}, z^{-1} \}$ contém as matrizes discretizadas do sistema LPV-LFT contínuo. O sistema em (4.20), com o termo $D_{11} = 0$ representa um sistema linear, porém, se $D_{11} \neq 0$ o sistema representado terá uma dependência fracionária e pode não ter associada uma representação afim. Se $D_{11} \neq 0$, então o tratamento do termo precisará linearizações ou aproximações lineares, assunto que não será tratado aqui; portanto recomenda-se ver [104, 34], para o tratamento nessa condição.

4.2.5 Exemplo: “F-16 VISTA Flight Model”

A seguir é retomado o modelo contínuo do F16 VISTA na Seção 4.2.2, e aplicado o procedimento 2 para o período de amostragem fixo. Os resultados deste procedimento são equivalentes ao procedimento 1; porém neste procedimento é possível a obtenção do modelo global afim aos parâmetros e posteriormente avaliar os pontos de operação para obter os modelos locais LTI.

Fazendo o produto estrela entre as matrizes N e (4.11), são obtidas as matrizes de estado LPV-LFT discretas:

$$A_{0d} = \begin{bmatrix} 1,0328 & 0,0505 \\ 0,8641 & 1,0101 \end{bmatrix}$$

$$B_{2d} = \begin{bmatrix} -0,0002 & -0,0000 & -0,1029 & -0,2890 & -0,0005 & -0,0010 & -0,0603 & 0,0003 \\ -0,0065 & -0,0000 & -2,0267 & -0,1155 & -0,0132 & -0,0004 & -2,4006 & 0,0138 \end{bmatrix}$$

$$C_{0d} = \begin{bmatrix} 0,2273 & 0,0056 \\ 0,0966 & 0,2247 \end{bmatrix}$$

$$C_{2d} = \begin{bmatrix} 0,0064 & 0,0001 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 1,7665 & 0,0967 \\ 0,1435 & -0,0060 \\ -0,0129 & -0,0005 \\ -0,0003 & 0,0000 \\ -1,1957 & -0,0297 \\ -0,0108 & -0,0003 \end{bmatrix}$$

$$D_{00d} = \begin{bmatrix} -0,0052 \\ -0,2050 \end{bmatrix}$$

$$D_{01d} = \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0000 & -0,0115 & -0,0323 & -0,0001 & -0,0001 & -0,0067 & 0,0000 \\ -0,0007 & -0,0000 & -0,2266 & -0,0129 & -0,0015 & -0,0000 & -0,2684 & 0,0015 \end{bmatrix}$$

$$D_{10d} = \begin{bmatrix} -0,0061 \\ -0,0000 \\ -4,6367 \\ 1,0991 \\ 0,0158 \\ -0,0045 \\ 9,3235 \\ 0,0395 \end{bmatrix}$$

com as quais pode-se construir o modelo como:

$$\tilde{G}_{\delta_k}(z) = \mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ \begin{bmatrix} A_{0d} & B_{0d} & B_{2d} \\ C_{0d} & D_{00d} & D_{01d} \\ C_{2d} & D_{10d} & D_{11d} \end{bmatrix}, \Delta_k \right\}, z^{-1} \right\} \quad (4.24)$$

4.2.6 Comparação de resultados

Nesta seção, usamos o exemplo de discretização do modelo LPV com dependência afim aos parâmetros⁵ apresentado no toolbox **IDv06** para comparar os resultados obtidos com a nossa proposta. Para tal fim, primeiramente expressamos o modelo LPV-LFT discretizado em (4.24) como um modelo LPV com dependência afim aos parâmetros.

O cálculo das matrizes afins aos parâmetros é desenvolvido realizando produtos entre as matrizes da representação LPV-LFT, como:

$$\begin{aligned} A_{d,i} &= B_{2d,i}C_{2d,i} & B_{d,i} &= B_{2d,i}D_{10d,i} \\ C_{d,i} &= D_{01d,i}C_{2d,i} & D_{d,i} &= D_{01d,i}D_{10d,i} \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo que o índice i indica o conjunto de matrizes associadas ao i -ésimo modelo afim aos parâmetros e d a notação usada nesta seção para representar a matriz discretizada \bullet_d . No caso aqui apresentado são contemplados cinco parâmetros, portanto $A_{d,i}$ estará composta pelas matrizes $A_{d,1}, \dots, A_{d,5}$ e matrizes $B_{d,i}, C_{d,i}, D_{d,i}$, com $i = 1, \dots, 5$.

A comparação gráfica dos polos associados aos modelos discretizados é apresentada na figura 36. Os polos marcados como “Tustin” e “Euler” correspondem com os

⁵ Exemplo 17 do toolbox “Predictor-based subspace identification toolbox version 0.6” [137]

polos dos modelos afim discretizados com o uso da ferramenta **IDv06**, e os polos marcados como “LFT” corresponde com o modelo discretizado através do procedimento 2. Cabe mencionar que os polos devidos ao modelo discretizado em **IDv06** marcados

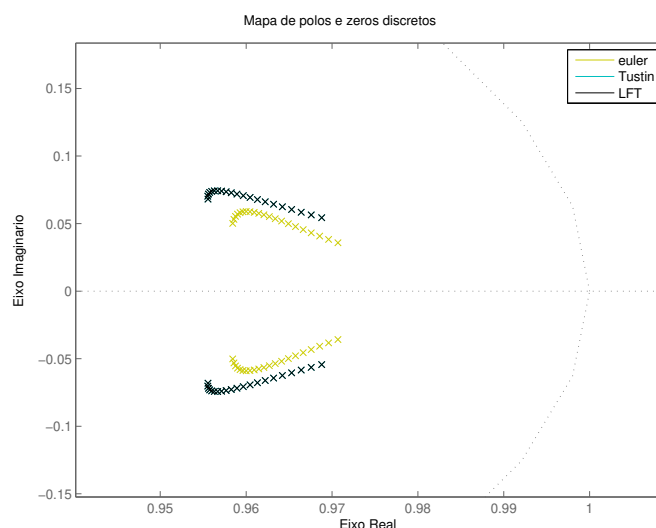


Figura 36 – Comparação dos resultados das discretizações em **IDv06** vs Procedimento 2.

como “Tustin” e os polos devidos ao procedimento 2⁶ coincidem, o que demonstra que o nosso procedimento fornece uma adequada discretização do modelo LPV.

4.2.7 Conclusões

A abordagem aqui apresentada tem uma interessante característica devido à forma LPV-LFT em espaço de estado: as matrizes de estado (A, B, C, D) e (A_i, B_i, C_i, D_i) no modelo LPV-LFT contínuo são inicialmente independentes dos parâmetros; já que a estrutura da LFT inclui os parâmetros como um ganho de realimentação. Dita característica do modelo, permite discretizar as realizações de forma aproximada, tendo por suposto que os parâmetros ao redor de um ponto de operação não mudam as condições de estabilidade dos modelos locais.

Outra vantagem do procedimento é que a discretização aproximada pode ser aplicada a modelos com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

⁶ a aproximação feita em (4.6) é conhecida como trapezoidal ou Tustin.

4.3 Discretização via LFT para Obtenção de Modelos LPV na Rede

Diferentes abordagens têm sido feitas para o problema de discretização de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV). Em [126, 133], são apresentados diferentes métodos para a obtenção de um modelo discreto LPV na representação LFT com período de amostragem constante. Em [33, 139], são apresentados procedimentos para encontrar os modelos discretos afins aos parâmetros do sistema LPV contínuo. Em [105, 140, 141], são tratados problemas com atrasos induzidos na rede. Nesses últimos trabalhos mencionados, é apresentada a discretização e o projeto de controle por realimentação de saída em tempo discreto de sistemas LPV na forma politópica. Em [129], uma versão inicial que contempla a discretização de sistemas LPV na representação LFT para períodos de amostragem fixo e variante no tempo é apresentada.

O sistema em (4.1), pode ser conectado para controle numa rede que atravessa um meio que produz atrasos nos instantes de transferência de informação como é apresentado na Figura 37

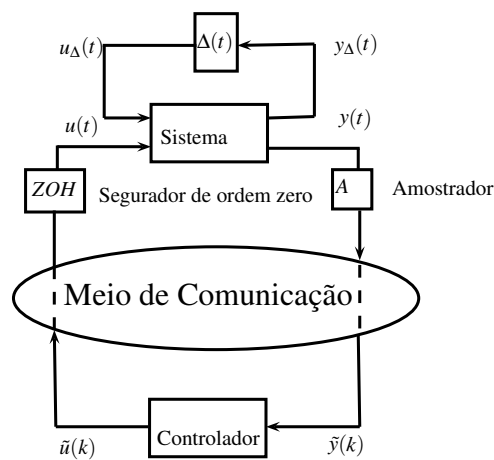


Figura 37 – Rede de Controle.

O projeto do sistema de controle baseado no modelo em (4.1), no contexto da rede apresentada na Figura 37, precisa do modelo discretizado do sistema contínuo, considerando as incertezas no período de discretização inseridas pelo meio.

Para este problema, o período de amostragem para a discretização pode ser considerado como variante em dependência de um parâmetro, e delimitado entre um tempo mínimo T_{min} e um tempo máximo T_{max} . O período de amostragem pode ser modelado por uma função variante no tempo dada por:

$$T_d(\delta_T(t)) = \bar{T}_d + \bar{T}_d \delta_T(t)$$

onde \bar{T}_d é o período médio e $\delta_T(t)$ é um parâmetro mensurável $\in [-1, 1]$.

Além das considerações anteriores podemos supor que o sistema é amostrado por eventos ou por um tempo máximo de espera dado por T_{max} , o qual pode ser arbitrariamente escolhido pelo projetista; assim $\delta_T(t)$ e $\Delta(t)$ podem ser considerados constantes por partes ou constantes entre eventos.

4.3.1 Discretização dos Modelos LPV afins aos Parâmetros

Considere a solução da equação diferencial no modelo LPV-LFT em (4.1) dada por:

$$x(t) = e^{A_0 t} x(0) + e^{A_0 t} g_1(t) + e^{A_0 t} g_2(t) \quad (4.26)$$

onde

$$g_1(t) = \int_0^t e^{-A_0 \tau} B_0 w(\tau) d\tau$$

e

$$g_2(t) = \int_0^t e^{-A_0 \tau} B_2 u(\tau) d\tau$$

Considerando:

$$\tau = (k+1)T(\delta_T(t)) - \lambda; \quad \lambda \in [0, T(\delta_T(t))]$$

e levando em consideração que $\delta_T(t) \approx \delta_T(k)$ entre dois instantes de amostragem $[kT(\delta_T(k)), (k+1)T(\delta_T(k))]$, as matrizes do sistema discretizado, seguindo a linha de [105, 140, 141], podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} A_d(T(\delta_T(k))) &= e^{A_0 T(\delta_T(k))} \\ B_{0d}(T(\delta_T(k))) &= \int_0^{T(\delta_T(k))} e^{A_0 \lambda} d\lambda B_0 \\ B_{2d}(T(\delta_T(k))) &= \int_0^{T(\delta_T(k))} e^{A_0 \lambda} d\lambda B_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

As equações em (4.27) podem ser aproximadas como:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_d(T(\delta_T(k))) &= A(\bar{T}_d)A(\bar{T}_d\delta_T) \\
&= e^{A_0\bar{T}_d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^j \bar{T}_d}{j!} \delta_T(k)^j \\
\tilde{B}_{0d}(T(\delta_T(k))) &= A(\bar{T}_d)B_0(\bar{T}_d\delta_T) + B_0(\bar{T}_d) \\
&= A(\bar{T}_d) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_0^{j-1} B_0}{j!} \delta_T(k)^j + B_0(\bar{T}_d) \\
\tilde{B}_{2d}(T(\delta_T(k))) &= B_2(\bar{T}_d)B_2(\bar{T}_d\delta_T) + B_2(\bar{T}_d) \\
&= A(\bar{T}_d) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_0^{j-1} B_2}{j!} \delta_T(k)^j + B_2(\bar{T}_d)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

As equações em (4.28) podem configurar o modelo discreto afim ao sistema LPV-LFT contínuo em (4.1), fazendo aproximações de ordem j , ou seja as equações em (4.28), podem ser expressas também como:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_d(T(\delta_T(k))) &\approx A_{d0} + \sum_{j=1}^l A_{d0j} \delta_T(k) \\
\tilde{B}_{0d}(T(\delta_T(k))) &\approx B_{d0} + \sum_{j=1}^l B_{d0j} \delta_T(k) \\
\tilde{B}_{2d}(T(\delta_T(k))) &\approx B_{d2} + \sum_{j=1}^l B_{d2j} \delta_T(k)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde l é um inteiro finito conhecido. Então, o modelo afim em (4.29), com $l = 1$, representa a discretização do modelo LFT-LPV contínuo com uma aproximação de primeira ordem.

4.3.2 Representação LFT para Obter Modelos Locais Afins aos Parâmetros

O modelo afim em (4.29), com $l = 1$, também pode ser expresso como uma LFT seguindo o procedimento de obtenção do modelo LPV apresentado em [33]. Portanto

o modelo LPV-LFT afim ao parâmetro δ_T , que pode ser obtido de diferentes formas, é aqui obtido como segue:

A matriz de transferência para representar o modelo afim em (4.29), pode ser dada por:

$$\tilde{G}_{\delta_T} = \mathcal{F}_u\{\{\mathcal{F}_l\left\{\begin{bmatrix} M_{11T} & M_{12T} \\ M_{21T} & \bar{D}_{22} \end{bmatrix}, \Delta_{\delta_T}\}\}, z^{-1}\} \quad (4.30)$$

a partir do modelo discretizado na forma afim dado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{A}_{d0}x_k + \mathcal{B}_{d0}w_k + \mathcal{B}_{d2}u_k \\ z_k &= \mathcal{C}_{d0}x_k + \mathcal{D}_{d00}w_k + \mathcal{D}_{d01}u_k \\ y_k &= \mathcal{C}_{d2}x_k + \mathcal{D}_{d10}w_k + \mathcal{D}_{d11}u_k \end{aligned} \quad (4.31)$$

com

$$w_k = \Delta(k)z_k$$

onde $\mathcal{A}_{d0} = [A_{d0} \mid A_{d1} \mid \dots \mid A_{dl}]$, $\mathcal{B}_{d0} = [B_{d0} \mid B_{d01} \mid \dots \mid B_{dol}]$ e de forma semelhante para as outras matrizes, em (4.31).

A representação LFT-LPV do sistema afim em (4.31), começa com a definição das matrizes m_\bullet que permitirão o cálculo das matrizes $M_{\bullet T}$ em (4.30).

Primeiro definimos os l conjuntos de matrizes m_\bullet como:

$$m_1 = \begin{bmatrix} A_{d1} & B_{d01} & B_{d21} \\ C_{01} & D_{001} & D_{011} \\ C_{21} & D_{101} & D_{111} \end{bmatrix}, \quad \dots, m_l = \begin{bmatrix} A_{dl} & B_{d0l} & B_{d2l} \\ C_{0l} & D_{00l} & D_{01l} \\ C_{2l} & D_{10l} & D_{11l} \end{bmatrix}$$

Depois, são feitas l decomposições de posto cheio das matrizes m_l , com posto q_l para se obter:

$$\delta_T m_l = \begin{bmatrix} L_l \\ W_{0l} \\ W_{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_T I_{q_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_l \\ Z_{0l} \\ Z_{2l} \end{bmatrix}',$$

Com as $\delta_T m_l$ decomposições é descrito o conjunto de matrizes M_{δ_T} como:

$$M_{\delta_T} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_{d0} & B_{d0} & B_{d2} \\ C_{d0} & D_{d00} & D_{d01} \\ C_{d2} & D_{d10} & D_{d11} \end{bmatrix}}^{M_{11T}} + \overbrace{\begin{bmatrix} L_1 \dots L_l \\ W_{01} \dots W_{0l} \\ W_{21} \dots W_{2l} \end{bmatrix}}^{M_{12T}} \overbrace{\begin{bmatrix} R_1 \dots R_l \\ Z_{01} \dots Z_{0l} \\ Z_{21} \dots Z_{2l} \end{bmatrix}}^{M_{21T}} \overset{\Delta \delta_T}{\delta_T I_{ql}} \quad (4.32)$$

Com as matrizes em (4.32), a representação LFT do sistema LFT-afim pode ser calculada, com as matrizes:

$$\begin{aligned} [L_1 \dots L_l] &= \bar{B}_2 \\ [W_{01} \dots W_{0l}] &= \bar{D}_{01} \\ [W_{21} \dots W_{2l}] &= \bar{D}_{11} \\ [R_1 \dots R_l]' &= \bar{C}_2 \\ [Z_{01} \dots Z_{0l}]' &= \bar{D}_{20} \\ [Z_{21} \dots Z_{2l}]' &= \bar{D}_{21} \\ 0 &= \bar{D}_{22} \end{aligned} \quad (4.33)$$

e a matriz de transferência em (4.30) pode ser expressa em termos das entradas e saídas como:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z1_k \\ y1_k \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} x_k \\ w1_k \\ u1_k \end{bmatrix}, \quad \Delta = z^{-1} \quad (4.34)$$

onde

$$\tilde{M} = \left\{ \mathcal{F}_l \left[\begin{array}{ccc|c} A_{d0} & B_{d0} & B_{d2} & \bar{B}_2 \\ C_{d0} & D_{d00} & D_{d01} & \bar{D}_{01} \\ C_{d2} & D_{d10} & D_{d11} & \bar{D}_{11} \\ \hline \bar{C}_2 & \bar{D}_{20} & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{array} \right], \Delta \delta_T \right\} \quad (4.35)$$

O procedimento acima pode não ter (de acordo com o sistema) uma resolução simples, ou até não ter representação LFT-LPV a partir do modelo afim como é discutido em [104, 34]

O sistema LPV-LFT discretizado a partir das matrizes em (4.29), pode ser representado graficamente como na Figura 38.

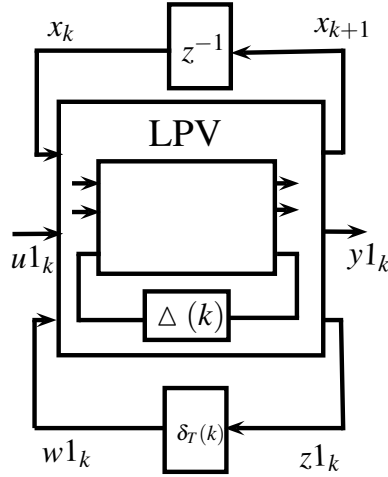


Figura 38 – Diagrama do modelo LPV-LFT a partir do modelo afim ao parâmetro $\delta_T(k)$.

4.3.3 Discretização para obter o Modelo Global LPV-LFT

Esta seção parte da descrição do modelo LPV-LFT dado na Figura 38, onde pode ser visto que o bloco de parâmetros dependentes do período de amostragem $T(\delta_T(k))$ pode ser separado do bloco diferenciador z^{-1} .

Primeiramente obtemos um modelo LFT para o período de amostragem, como:

$$\mathcal{F}_l(N_s, \Delta_{T_d})$$

onde

$$N_s = \left[\begin{array}{cc|cc} -I & \sqrt{2}\bar{T}_d & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\bar{T}_d & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & \bar{T}_d & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T}_d & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e $\Delta_{T_d} = \delta_T I_{2 \times 2}$.

Posteriormente, estabelecemos a relação entre a frequência complexa s e a frequência complexa z através da relação bilinear apresentada em [33, 129] para definir o mo-

delo LPV discreto que descreve a variação no período de amostragem do sistema LPV-LFT a ser discretizado. Isto é apresentado na Figura 39.

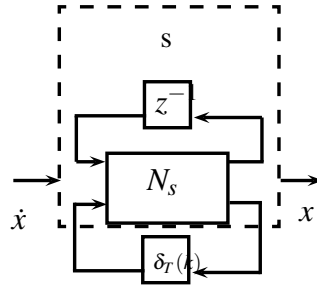


Figura 39 – Representação LPV do período de amostragem variante.

Tendo o modelo LFT do período de amostragem, podemos conectá-lo ao sistema em (4.1) como é apresentado na Figura 40.

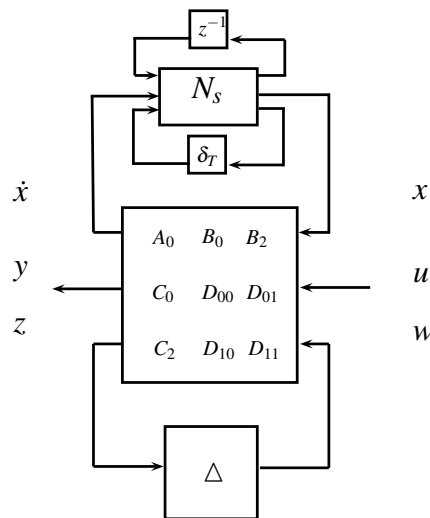


Figura 40 – Modelo a Discretizar conectado com o Modelo LPV-LFT do Período de Amostragem.

No esquema da Figura 40, pode-se ver que é possível usar uma propriedade da LFT que permite criar um único conjunto de parâmetros para o sistema (ver [34]); assim a matriz de parâmetros pode ser dada por:

$$\Delta(k, \delta_T) = \text{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_T\}$$

ou

$$\Delta(k, \delta_T) = \begin{bmatrix} \Delta(k) & 0 \\ 0 & \delta_T(k) \end{bmatrix}$$

mantendo as hipóteses de segurador de ordem zero (ZOH) e amostragem ideais, tratadas na seção anterior.

Fazendo o produto estrela entre N_s e as matrizes de estado do sistema LPV-LFT contínuo temos:

$$\mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ N_s \star \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_2 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix}, \Delta(k, \delta_T) \right\}, z^{-1} \right\} \quad (4.36)$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ \begin{bmatrix} A_{0d} & B_{0d} & B_{2d} \\ C_{0d} & D_{00d} & D_{01d} \\ C_{2d} & D_{10d} & D_{11d} \end{bmatrix}, \Delta(k, \delta_T) \right\}, z^{-1} \right\}$$

ou

$$\tilde{G}_{\delta_k}(z) = \mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ \tilde{M}_1, \Delta(k, \delta_T) \right\}, z^{-1} \right\} \quad (4.37)$$

sendo \tilde{M}_1 dado por:

$$\tilde{M}_1 = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

onde

$$R = \left(I - \frac{\tilde{T}_d}{2} A_0 \right)^{-1}$$

$$A_d = \left(I + \frac{\tilde{T}_d}{2} A_0 \right) R, \quad C_d = \begin{bmatrix} C_{0d} \\ C_{2d} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{bmatrix} C_{0d} \\ C_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} C_0 R \\ \sqrt{2} \tilde{T}_d R A_0 \\ \sqrt{2} C_2 R \end{bmatrix} \quad \text{e, } D_d = \begin{bmatrix} D_{00d} & D_{01d} \\ D_{10d} & D_{11d} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{00d} & D_{01d} \\ D_{10d} & D_{11d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \frac{\tilde{T}_d}{2} R B_0 + D_{00} & \frac{C_0}{2} R & C_0 \frac{\tilde{T}_d}{2} R B_0 + D_{01} \\ \tilde{T}_d R B_0 & \frac{\tilde{T}_d}{2} R A_0 & \tilde{T}_d R B_2 \\ C_2 \frac{\tilde{T}_d}{2} R B_2 + D_{10} & \frac{C_2}{2} R & C_2 \frac{\tilde{T}_d}{2} R B_2 + D_{11} \end{bmatrix}$$

$$B_d = \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{2} \frac{\bar{T}_d}{2} R B_0 & \frac{\sqrt{2}}{2} R \\ \hline & \sqrt{2} \frac{\bar{T}_d}{2} R B_2 \end{array} \right]$$

Nas figuras 41, 42 são apresentados os resumos das nossas propostas de discretização de sistemas contínuos LPV com período de amostragem variante.

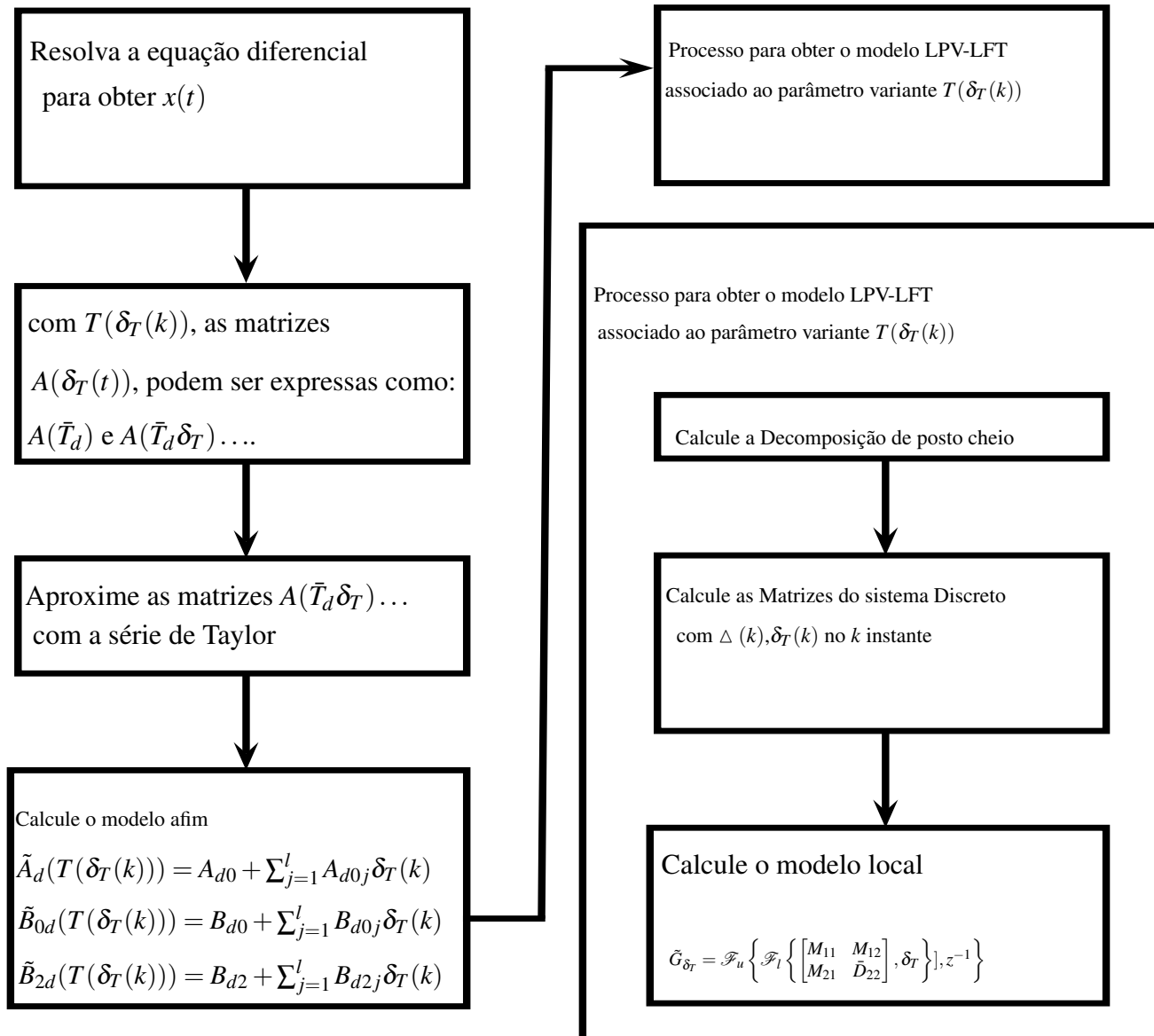


Figura 41 – Resumo da Proposta 1, para Período de Amostragem Variante.

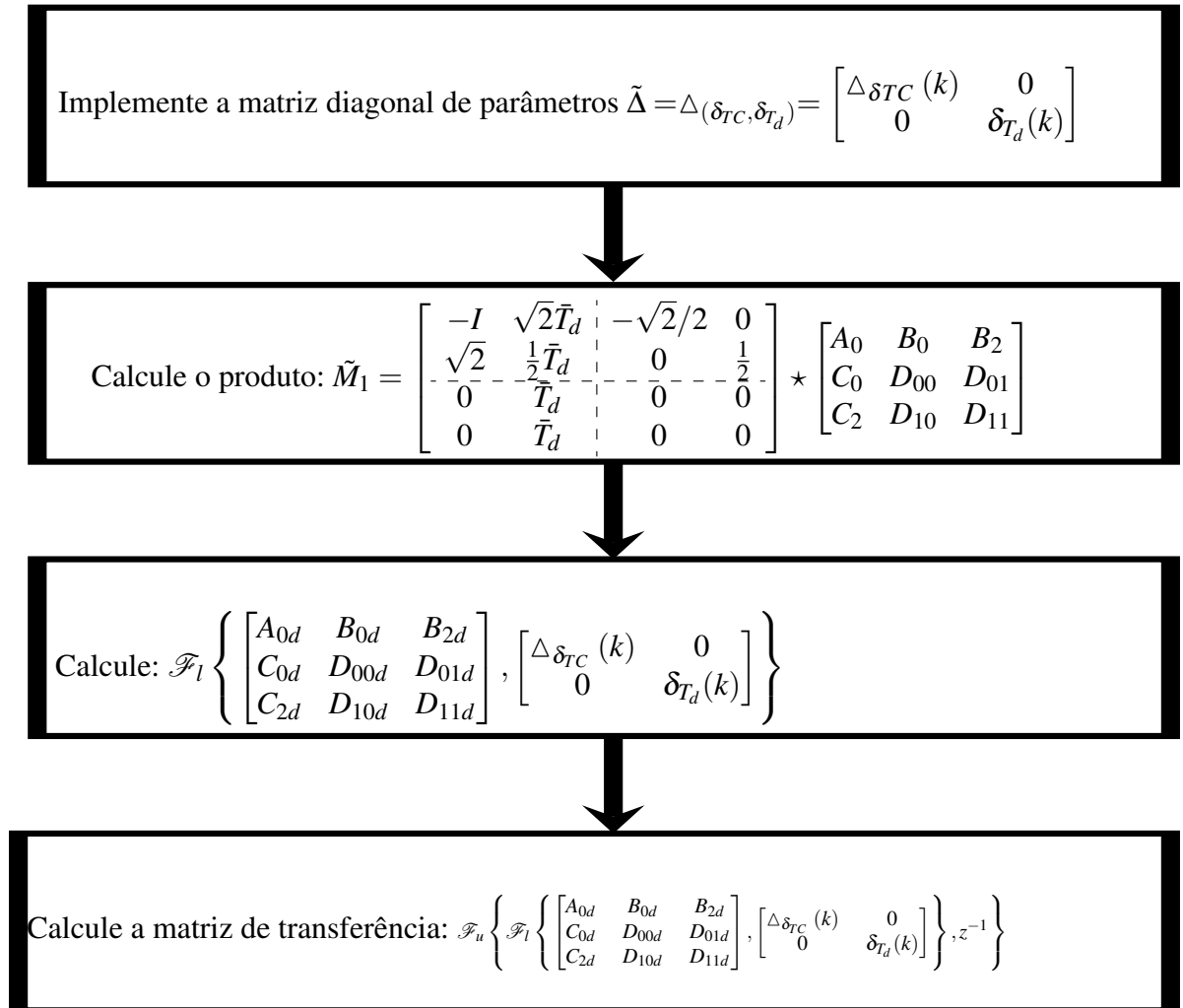


Figura 42 – Resumo da Proposta 2 para Período de Amostragem Variante.

4.3.4 Exemplo: “F-16 VISTA Flight Model” com Período de Amostragem Incerto

Neste exemplo apresentamos a aplicação do procedimento em 4.3.3 para o modelo F16 VISTA [134] da seção 4.2.2. O modelo aqui usado é apenas para o movimento longitudinal do aeroplano; as velocidades rotacionais e os ângulos de deslocamento lateral são considerados nulos. O modelo em [134] é dado por:

$$G(s) = \mathcal{F}_u \{ \mathcal{F}_l \{ F16, \Delta\delta_{TC} \}, s \}$$

A matriz de transferência contínua pode ser expressa como:

$$\mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_2 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix}}^{F16}, \overbrace{\begin{bmatrix} hI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MhI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^2I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^2hI \end{bmatrix}}^{\Delta\delta_{TC}} \end{array} \right\}, s \right\} \quad (4.39)$$

sendo

$$F16 = \begin{bmatrix} 0,2200 & 1,0000 & -0,0014 & -0,0000 & -0,0001 & -0,2312 & -1,2723 & -0,0008 & -0,0046 & 0 & 0 \\ 17,1000 & -0,2280 & -8,1600 & -0,0287 & 0,0000 & -8,9187 & 0,0330 & -0,0586 & 0,0001 & -10,6818 & 0,0616 \\ 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0281 & -0,0002 & -0,0060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0000 & 0,0001 & 0,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7,6717 & 0,2375 & -4,5482 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6497 & -0,0432 & 1,0936 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0565 & -0,0008 & 0,0153 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0012 & 0,0001 & -0,0044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5,2613 & 0 & 9,2962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0474 & 0 & 0,0393 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

As condições de voo podem ser vistas em [134, 136].

Neste caso é suposto que o período de amostragem $T(\delta_{T_d}(t))$ varia no intervalo $[T_{min}, T_{max}]$, e que a amostragem depende de um evento que é executado quando é atingido um instante máximo T_{max} de espera ou uma mudança significativa nos parâmetros

$\Delta(t)$ (mudança baseada no critério do projetista). Neste exemplo também consideramos a amostragem como ideal, ou seja: $T_d(t) \approx T_d(k)$. A notação é simplificada neste exemplo para o período de amostragem usado \bar{T}_d como $T_d(k) = T_d$ e como $\Delta(t) \approx \Delta_k$ os parâmetros associados com $\delta_{TC,i,k}$ no k -ésimo instante de tempo na matriz diagonal Δ_k .

A partir das equações (4.36), (4.37), (4.38), e das matrizes N_s e

$$\Delta(\delta_{TC}, \delta_{T_d}) = \begin{bmatrix} \delta_{TC,1,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{TC,2,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{TC,3,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{TC,4,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{TC,5,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{T_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MhI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^2I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^2hI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{T_d} \end{bmatrix}$$

obtemos a matriz

$$\tilde{M}_1 = N_s \star \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_2 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix}$$

e o sistema:

$$\tilde{G}_{\delta_k}(z) = \mathcal{F}_u \left\{ \mathcal{F}_l \left\{ \tilde{M}, \Delta(\delta_{TC}, \delta_{T_d}) \right\}, z^{-1} \right\} \quad (4.41)$$

onde as matrizes de estado discretas do modelo LPV-LFT estão contidas na matriz bloco:

$$\tilde{M}_1 = \begin{bmatrix} A_{0d} & B_{0d} & B_{0d1} & B_{2d} \\ C_{0d1} & D_{00d1} & D_{00d11} & D_{01d1} \\ C_{0d2} & D_{00d2} & D_{00d21} & D_{01d2} \\ C_{2d} & D_{10d1} & D_{10d2} & D_{11d} \end{bmatrix}$$

onde

$$A_{0d} = \begin{bmatrix} 1.0385 & 0.0557 \\ 0.9526 & 1.0136 \end{bmatrix}, \quad B_{0d} = \begin{bmatrix} 1.4415 & 0.0394 \\ 0.6736 & 1.4238 \end{bmatrix}, \quad B_{0d1} = \begin{bmatrix} -0.0089 \\ -0.3195 \end{bmatrix},$$

$$C_{0d1} = \begin{bmatrix} 1.4415 & 0.0394 \\ 0.6736 & 1.4238 \end{bmatrix}, \quad C_{0d2} = \begin{bmatrix} 0.0545 & 0.0788 \\ 1.3472 & 0.0192 \end{bmatrix}, \quad D_{00d1} = \begin{bmatrix} -0.0063 \\ -0.2259 \end{bmatrix},$$

$$D_{00d011} = \begin{bmatrix} 0.5096 & 0.0139 \\ 0.2382 & 0.5034 \end{bmatrix}, \quad D_{00d2} = \begin{bmatrix} -0.0126 \\ -0.4519 \end{bmatrix}, \quad D_{00d21} = \begin{bmatrix} 0.0193 & 0.0279 \\ 0.4763 & 0.0068 \end{bmatrix}, \quad D_{11d} = 0_{8 \times 8},$$

$$B_{2d} = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & -0.0188 & -0.0504 & -0.0001 & -0.0002 & -0.0116 & 0.0001 \\ -0.0011 & -0.0000 & -0.3535 & -0.0223 & -0.0023 & -0.0001 & -0.4182 & 0.0024 \end{bmatrix}$$

$$C_{2d} = \begin{bmatrix} 0.0403 & 0.0000 & 11.2184 & 0.9074 & -0.0820 & -0.0016 & -7.5839 & -0.0683 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.6404 & -0.0359 & -0.0034 & 0.0002 & -0.2073 & -0.0019 \end{bmatrix}^T$$

$$D_{01d1} = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & -0.0133 & -0.0356 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0082 & 0.0000 \\ -0.0008 & -0.0000 & -0.2500 & -0.0158 & -0.0016 & -0.0001 & -0.2957 & 0.0017 \end{bmatrix}$$

$$D_{01d2} = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & -0.0266 & -0.0713 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0164 & 0.0001 \\ -0.0016 & -0.0000 & -0.4999 & -0.0315 & -0.0033 & -0.0001 & -0.5915 & 0.0034 \end{bmatrix}$$

$$D_{10d1} = \begin{bmatrix} -0.0061 & -0.0000 & -4.6501 & 1.0992 & 0.0158 & -0.0045 & 9.3293 & 0.0396 \end{bmatrix}^T$$

$$D_{10d2} = \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.0000 & 3.9663 & 0.3208 & -0.0290 & -0.0006 & -2.6813 & -0.0242 \\ 0.0003 & 0.0000 & 0.2264 & -0.0127 & -0.0012 & 0.0001 & -0.0733 & -0.0007 \end{bmatrix}^T$$

(4.42)

4.3.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos duas novas propostas de discretização para sistemas LPV na forma LFT considerando o período de amostragem como variante no tempo. Na primeira proposta é obtida uma representação afim ao parâmetro período de amostragem que varia no tempo e sua respectiva transformação a um modelo LPV-LFT. Na segunda proposta é obtido um modelo LPV-LFT com um único conjunto de parâmetros variantes no tempo, que contém tanto os parâmetros do sistema, quanto o período de amostragem que também varia no tempo.

5 Método de Identificação ICCALPV

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o algoritmo iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlações canônicas: ICCALPV¹. O material contido neste capítulo está baseado no artigo [10], no qual propomos a extensão do método de identificação estocástica de sistemas LTI por subespaços CCA², para a identificação de sistemas estocásticos LPV com dependência afim aos parâmetros variantes no tempo.

Nossa proposta de método de identificação ICCALPV baseia-se na teoria de realização estocástica mínima proposta por Akaike [142], no método de correlação canônica condicional CCA [90, 142, 91, 40, 6] e no método de aproximações sucessivas [62].

O método ICCALPV está dividido em:

i) reformulação do modelo LPV afim aos parâmetros como um modelo inicial LTI de ruído não branco, *ii)* obtenção do preditor ótimo de saída e do vetor de estado \hat{x}_k associado ao modelo inicial usando unicamente o vetor de entradas u_k , o vetor de saídas y_k e o vetor de parâmetros $\delta_{i,k}$ ³, *iii)* segunda reformulação do modelo LPV afim aos parâmetros como um modelo LTI de ruído não branco em dependência dos vetores u_k , y_k , $\delta_{i,k}$, \hat{x}_k ; *iv)* Obtenção de uma nova estimativa do vetor de estado e aprimoramento da estimativa do vetor de estado iterativamente; finalmente *v)* extração das matrizes de estado e obtenção do modelo LPV na forma inovativa com dependência afim aos parâmetros.

Para a identificação dos modelos LTI com ruído não branco é necessário aumentar o número de entradas do sistema e o número de informações do passado associadas as medições das entradas, saídas, parâmetros, e estados estimados; para tanto, inserimos o produto de Kathri-Rao e a estrutura da matriz de Hankel como alternativa ao cálculo das matrizes de entrada aumentadas apresentado em [62], isto porque o uso do produto de Khatri-Rao e da matriz bloco de Hankel permitem um processamento em batelada, e

¹ Iterative Canonical Correlation LPV System Identification

² Canonical Correlation Analysis

³ Com o propósito de facilitar a notação chamaremos o vetor de parâmetros variantes no tempo simplesmente como parâmetros ou vetor de parâmetros

maior eficácia computacional (em termos de tempo de processamento). O procedimento aqui apresentado baseia-se na abordagem feita em [62], e se diferencia daquele trabalho por proceder em batelada e pelo uso do método CCA de identificação estocástica que permite uma melhor representação do modelo de ruído não branco que aproxima o sistema LPV.

O capítulo está organizado como segue: primeiro apresentamos brevemente o modelo LPV com dependência afim aos parâmetros e o modelo LPV na forma inovativa a ser identificado, posteriormente é mostrado como calcular o preditor ótimo das saídas, o espaço de estado e o vetor de estado inicial. Neste capítulo também propomos a alternativa de extensão das matrizes de entrada com o uso do produto de Khatri-Rao e da matriz bloco de Hankel. Imediatamente após, apresentamos a nossa proposta de estimação do modelo LPV em função da informação obtida na identificação inicial e no aprimoramento do vetor de estado estimado de forma iterativa. Finalmente comparações entre o método ICCALPV [10] e o método PSBID [48] são realizadas.

5.2 Modelo LPV

Considere o modelo LPV com dependência paramétrica dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \lambda_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \zeta_k \end{aligned} \quad (5.1)$$

com

$x_k \in \mathcal{R}^n$ estados, $u_k \in \mathcal{R}^m$ entradas, $y_k \in \mathcal{R}^p$ saídas, $\delta_k \in \mathcal{R}^s$ parâmetros variantes dependentes do tempo, $\begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n(s+1)}$, $\begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m(s+1)}$ vetores associados aos parâmetros, $\lambda_k \in \mathcal{R}^n$, $\zeta_k \in \mathcal{R}^m$ ruídos brancos de média zero, e matrizes de estado expressas como:

$A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $A_p = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_s \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times ns}$, $B_0 \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $B_p = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_s \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times ms}$, $C_0 \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $C_p = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_s \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{p \times ns}$, $D_0 \in \mathcal{R}^{p \times m}$, $D_p = \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_s \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{p \times ms}$. Em (5.1), $k = 1, 2, \dots, N$ representa o instante do tempo.

O problema a ser aqui resolvido consiste em identificar o modelo inovativo equivalente com (5.1), a partir das entradas u_k , das saídas y_k e dos parâmetros δ_k medidos em um único experimento. O modelo equivalente aqui considerado é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + K_0 e_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + e_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $e_k \in \mathcal{R}^p$ é o processo de inovação e $K_0 \in \mathcal{R}^{n \times p}$ o ganho estático de Kalman. Cabe salientar que o ganho de Kalman em (5.2) é dependente exclusivamente do modelo nominal do sistema LPV ou seja do conjunto de matrizes de estado ($\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$) independentes dos parâmetros no modelo da Equação (5.1).

5.3 Método ICCALPV

Modelagem, identificação e controle de sistemas LTI são amplamente investigadas e aplicadas há décadas em múltiplos trabalhos. A análise de correlação canônica como método de identificação também tem sido extensamente usada, por isto e pelo seu caráter estocástico, nesta proposta é usada para obter uma aproximação inicial do sistema LPV.

Primeiramente a realização estocástica mínima proposta por Akaike é estendida para calcular o vetor de estado inicial do sistema LPV. O modelo LPV afim aos parâmetros é primeiramente reescrito como um modelo LTI com ruído não branco, posteriormente o modelo LTI é identificado usando a correlação canônica condicional para calcular o preditor ótimo das saídas, dadas as entradas do sistema e realizar a expansão linear do preditor para obter o espaço de estado. O vetor de estado inicial é uma base ortonormal do espaço de estado. Posteriormente com o vetor de estado inicial e os sinais medidos no experimento reformula-se novamente o modelo LPV como um novo modelo LTI com ruído não branco. Este modelo corresponde a uma aproximação ao modelo LPV, então, obtendo um novo conjunto: preditor ótimo das saídas e espaço de estado, pode-se calcular um novo vetor de estado. O vetor de estado estimado é aprimorado iterativamente e a melhor aproximação ao vetor de estado do sistema LPV é usada para obter as matrizes do sistema LPV na forma inovativa.

5.3.1 Vetor de Estado Inicial

Nossa proposta inicia com a reformulação do modelo na Equação (5.1) como um modelo LTI com ruído não branco, isto é feito através da isolação do termo com dependência bilinear $A_p(\delta_k \otimes x_k)$ e do ruído branco λ_k devido à perturbação na medida. Então, os ruídos do sistema linear a reformular são dados como: $\lambda_k^0 = \hat{A}_p(\delta_k \otimes x_k) + \lambda_k$ e $\zeta_k^0 = \hat{C}_p(\delta_k \otimes x_k) + \zeta_k$.

Posteriormente, precisamos reformular as entradas exógenas do sistema LTI ($u_{e0|t,k}$) com as quais é feita a primeira aproximação ao sistema LPV, isto é:

$$u_{e0|t,k} = \begin{bmatrix} u_{t|t,k} \\ \delta_{t|t,k} \otimes u_{t-1|t-1,k} \end{bmatrix}$$

note que $u_{e0|0,k} \in \mathcal{R}^{m \times s}$ representa o vetor das entradas sem informação das medições do passado e que

$$u_{e0|t} \tag{5.3}$$

representa a matriz que contém medidas do passado, sendo que $t = 1, 2, \dots$ é o número de informações do passado inseridas na matriz de entradas aumentada como se mostra na seção 5.3.2.

A partir da vetor de entradas aumentado $u_{e0|t,k}$ o modelo LPV com dependência afim aos parâmetros (5.1), pode ser reformulado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 x_k + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} u_{e0|t,k} + \overbrace{A_p(\delta_k \otimes x_k) + \lambda_k}^{\lambda_k^0} \\ y_k &= C_0 x_k + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} u_{e0|t,k} + \underbrace{C_p(\delta_k \otimes x_k) + \zeta_k}_{\zeta_k^0} \end{aligned} \tag{5.4}$$

O modelo em (5.4), representa um sistema LTI com ruídos não brancos λ_k^0 e ζ_k^0 , e configura a primeira aproximação ao modelo LPV; então, identificando o vetor de estado estocástico associado ao modelo em (5.4) através da análise de correlação canônica devida a Akaike pode ser obtida a estimativa inicial do vetor de estado x_k .

A notação usada para a estimação do vetor de estado em (5.4) é convenientemente mudada para: $\hat{x}_k^0 = \hat{x}_k$. A seguir definimos o conjunto de matrizes e sub espaços usados para calcular o vetor de estado inicial \hat{x}_k e apresentamos os cálculos via CCA.

Sejam o vetor de entradas-saídas conjunto:

$$w_k^- = \left\{ \begin{bmatrix} u_{e0|t,k-l} \\ y_{k-l} \end{bmatrix} \mid l = 1, 2, \dots \right\},$$

o vetor de saídas do futuro $f_k = \{y_{k+l} \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$, o vetor das saídas do passado $y_k^- = \{y_{k-l} \mid l = 1, 2, \dots\}$, o vetor de entradas futuras $u_{e0|t,k}^+ = \{u_{e0|t,k+l} \mid l = 1, 2, \dots\}$ o vetor do passado/presente $u_{e0|t,k}^- = \{u_{e0|t,k-l} \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$; e finalmente sejam os subespaços gerados pelos vetores $u_{e0|t,k}$, y_k , δ_k e w_k , respectivamente $U_e = \overline{\text{span}}(u_{e0|t,k} \mid k = 1, 2, \dots)$, $Y = \overline{\text{span}}(y_k \mid k = 1, 2, \dots)$, $\Delta = \overline{\text{span}}(\delta_k \mid k = 1, 2, \dots)$, $W = \overline{\text{span}}(w_k \mid k = 1, 2, \dots)$.

Para facilitar a notação, os subespaços gerados são representados por:

$$U_e = \begin{bmatrix} U_e^- \\ U_e^+ \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y^- \\ Y^+ \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta^- \\ \Delta^+ \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e^- \\ Y^- \\ U_e^+ \\ Y^+ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^- \\ W^+ \end{bmatrix}$$

onde $\overline{\text{span}}(\dots)$ é um subespaço de Hilbert gerado pelo conjunto infinito de elementos (\dots) , os superíndices \bullet^- , \bullet^+ denotam o passado e o futuro respectivamente.

Pela teoria da realização estocástica de Akaike, pode se afirmar que toda a informação necessária para representar um sistema estocástico está contida no conjunto das saídas futuras em relação às entradas passadas e presentes. A representação matemática do conjunto de saídas futuras é definida por Akaike como o espaço preditor. O subespaço fechado de Hilbert gerado pelos infinitos elementos do espaço preditor ótimo é o espaço de estado da realização Markoviana mínima do sistema estocástico. Portanto, qualquer base ortonormal do espaço de estado pode ser considerada o vetor de estado \hat{x}_k^0 da representação Markoviana. O espaço preditor pode ser calculado através da interseção dos subespaços do passado e do futuro; interseção determinada com a correlação canônica. O Preditor ótimo das saídas [142, 90, 9, 6] para a realização estocástica com entradas exógenas é dado por:

$$\hat{f}_k = \hat{E}\{f_k \mid W^- \vee U_e^+\} \quad (5.5)$$

onde $\hat{E}\{\bullet | \bullet\}$ é o operador projeção ortogonal, \vee é o operador união, e \hat{f}_k a projeção ortogonal das saídas futuras no subespaço gerado pela união dos subespaços W^- e U_e^+ .

Como é sabido, a projeção ortogonal de um vetor na união de dois subespaços é dada como uma soma direta de duas projeções oblíquas, dadas por:

$$\hat{f}_k = \hat{E}\{f_k | W^- \vee U_e^+\} = \hat{E}_{||U_e^+}\{f_k | W^-\} + \hat{E}_{||W_e^-}\{f_k | U_e^+\} \quad (5.6)$$

onde $\hat{E}_{||U_e^+}\{f_k | W^-\}$ é a projeção oblíqua de f_k em W^- ao longo de U_e^+ e $\hat{E}_{||W_e^-}\{f_k | U_e^+\}$ é a projeção oblíqua de f_k em U_e^+ ao longo de W^- . Então, o espaço preditor pode ser expresso em função do preditor ótimo das saídas como:

$$X_{f|W} = \overline{\text{span}}(\hat{f}_{k+1} | l = 1, 2, \dots) \quad (5.7)$$

e qualquer base ortonormal de $X_{f|W}$ pode ser tomada como o vetor de estado inicial \hat{x}_k^0 .

O processo de obtenção do espaço de estado é baseado na projeção ortogonal, e pode ser calculado com o uso das matrizes de covariâncias e do vetor de saídas expresso como:

$$y_k = O_k x_k + \Psi_k u_{e0|t,k} \quad (5.8)$$

onde O_k é a matriz de observabilidade estendida e Ψ_k é a matriz bloco de Toeplitz. Então; o vetor de estado \hat{x}_k^0 é calculado como:

$$\begin{aligned} \hat{E}\{f_k | W^- \vee U_e^+\} &= E\{f_k \begin{bmatrix} w_k^{+'} & u_{e0|t,k}^{+'} \end{bmatrix}\} E \left\{ \begin{bmatrix} w_k^+ \\ u_{e0|t,k}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k^{+'} & u_{e0|t,k}^{+'} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} w_k^+ \\ u_{e0|t,k}^+ \end{bmatrix} \\ &= \Sigma_{fw|u_e} \Sigma_{ww|u_e}^{-1} w_k + \Sigma_{fu_e|w} \Sigma_{u_e u_e|w}^{-1} u_{e0|t,k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo que $\Sigma_{fw|u_e}$ é a matriz de covariância condicional de f e w dado u_e . Então, cada parcela da Equação em (5.9), pode ser expressa em função das matrizes de covariâncias como:

$$\begin{aligned} \Sigma_{fw|u_e} \Sigma_{ww|u_e}^{-1} w_k &= O_k x_k \\ \Sigma_{fu_e|w} \Sigma_{u_e u_e|w}^{-1} u_{e0|t,k} &= \Psi_k u_{e0|t,k} \end{aligned} \quad (5.10)$$

e o espaço preditor é calculado com as saídas futuras e o subespaço gerado por w_k^- , como se mostra a seguir:

$$X_{f|w} = \hat{E}_{||U_e^+}\{Y^+ | W^-\} \quad (5.11)$$

Então, pela obtenção de uma base ortonormal de $X_{f|w}$ obtemos o vetor de estado inicial x_k^0 .

5.3.2 Matrizes de Entrada Aumentadas

Nesta seção propomos uma forma alternativa de inserir informações do passado na matriz $u_{e0|t}$ com o propósito de melhorar a estimativa do vetor de estado inicial. Para a inserção de uma informação do passado em (5.1), o vetor de estado no instante $k-1$ ⁴, pode ser expresso como:

$$x_k = A_0 x_{k-1} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \delta_{k-1} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix} + A_p (\delta_{k-1} \otimes x_{k-1}) + \lambda_{k-1} \quad (5.12)$$

então, $(\delta_k \otimes x_k)$ ⁵ em (5.1) pode ser expressa como uma função de (5.12), e reescrita como:

$$\delta_k \otimes x_k = \delta_k \otimes \left(A_0 x_{k-1} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \delta_{k-1} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix} + A_p (\delta_{k-1} \otimes x_{k-1}) + \lambda_{k-1} \right) \quad (5.13)$$

Os vetores de entrada aumentados podem ser calculados recursivamente⁶ como em [62] ou em bloco com o uso do produto de Kathri-Rao

Produto Khatri-Rao dado por: $A \odot B = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B_{11} & \dots & A_{1n} \otimes B_{1n} \\ A_{21} \otimes B_{21} & \ddots & A_{2n} \otimes B_{2n} \\ A_{n1} \otimes B_{n1} & \dots & A_{nn} \otimes B_{nn} \end{bmatrix}$

como nós propomos a seguir.

Primeiro, construímos a matriz bloco finito de Hankel com j blocos, a partir do vetor de entradas como:

$$U_{0|M} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{N-M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_M & u_{M+1} & \dots & u_N \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

⁴ para simplificar a notação em (5.10) e (5.11), considere $u_e = u_{e0|t,k}$ no subíndice

⁵ a Equação (5.13) baseia-se em [62]

⁶ Sendo que o cálculo recursivo pode ter um custo computacional maior

e as matrizes bloco de Hankel $\Delta_{0|M}$

$$\Delta_{0|M} = \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_{N-M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_M & \delta_{M+1} & \cdots & \delta_N \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

posteriormente, definimos $\rho_{0|0} = \Delta_{0|0} \in \mathcal{R}^{s \times (N-j*i+1)}$ e redefinimos (5.3) $u_{e0|t}$ com $t = 0$, como uma função de $U_{0|M}$ e $\Delta_{0|M}$, ou seja:

$$u_{a0|0} = \begin{bmatrix} U_{0|0} \\ \rho_{0|0} \odot U_{0|0} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m(1+s) \times (N-j*i+1)}$$

sendo j o número de blocos usados para construir as matrizes de dados $U_{0|M}$ e $\Delta_{0|M}$; i o horizonte de dados e \odot é o produto Khatri-Rao. O vetor $u_{e0|0,k}$ pode ser substituído por $u_{a0|0,k}$, onde k é o tempo presente. Para a generalização do procedimento, a seguir apresentamos um exemplo com uma informação do passado inserida na matriz de entrada aumentada: Da Equação (5.14), podemos extrair uma informação do passado da entrada como: $U_{1|1} = [u_1 \ u_2 \ \cdots]$, a informação do presente da entrada: $U_{0|0} = [u_0 \ u_1 \ \cdots]$, uma informação do passado dos parâmetros $\Delta_{1|1}$ e do presente $\Delta_{0|0}$; para estender a nossa matriz de entrada como:

$$u_{a0|1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1|1} \\ \Delta_{1|1} \odot U_{1|1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta_{1|1} \\ \Delta_{1|1} \odot \Delta_{0|0} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} U_{0|0} \\ \rho_{0|0} \odot U_{0|0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ou na forma compacta como:

$$u_{a0|1} = \begin{bmatrix} u_{a1|1} \\ \rho_{0|1} \odot u_{a0|0} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(m(1+s)+(s+s^2)m(1+s)) \times (N-j*i+1)}$$

com

$$\rho_{0|1} = \begin{bmatrix} \Delta_{1|1} \\ \Delta_{1|1} \odot \Delta_{0|0} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(s+s^2) \times (N-j*i+1)}$$

A matriz de entradas estendida com $t = 1, 2, \dots, n$ informações do passado então pode ser expressa de maneira geral como: $u_{a0|t}$.

5.3.3 Reformulação do Modelo

Com o uso da matriz estendida $u_{a0|t}$ podemos reformular o modelo em (5.4) com informações do passado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 x_k + B_{a,t} u_{a0|t,k} + \lambda_{a,t,k}^1 \\ y_k &= C_0 x_k + C_{a,t} u_{a0|t,k} + \zeta_{a,t,k}^1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde o subíndice a denota a matriz ou vetor estendido com $t = 1, 2, \dots$ informações do passado, e $k = 1, 2, \dots$ o instante no tempo. Na Equação (5.16), $u_{a0|t,k}$ corresponde à entrada estendida no instante de tempo k ; As matrizes $B_{a,t}$, $C_{a,t}$, $\lambda_{a,t,k}^1$ e $\zeta_{a,t,k}^1$ são definidas por:

$$B_{a,t} = \begin{bmatrix} B_{a,t-1} & A_{p,t-1}(I_s \otimes B_{a,0}) \end{bmatrix}$$

com $B_{a,1} = \begin{bmatrix} B_{a,0} & A_p(I_s \otimes B_{a,0}) \end{bmatrix}$, $B_{a,0} = \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix}$, e $A_{p,1} = A_p \begin{bmatrix} (I_s \otimes A_0) & (I_s \otimes A_p) \end{bmatrix}$, e de forma semelhante são definidas as matrizes $C_{a,t}$. Os ruídos são definidos como:

$$\lambda_{a,t,k}^1 = \begin{bmatrix} I_n & A_{p,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{t-1,k} \\ \delta_{t-1,k} \otimes \lambda_{0,k-t} \end{bmatrix}$$

e $\zeta_{a,t,k}^1$ de forma semelhante com $\lambda_{a,t,k}^1$.

5.3.4 Vetor de Estado Calculado com Informações do Passado

A seguir listamos os passos para obter o vetor de estado a partir do modelo em (5.16):

1. Construa as matrizes bloco de Hankel das entradas aumentadas $U_{a0|M}$, $Y_{0|M}$ como em (5.14).

$$U_{a0|M} = \begin{bmatrix} u_{a0|t,0} & u_{a0|t,1} & \cdots & u_{a0|t,N-M+1} \\ u_{a0|t,1} & u_{a0|t,2} & \cdots & u_{a0|t,N-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{a0|t,M-1} & u_{a0|t,M} & \cdots & u_{a0|t,N-1} \\ u_{a0|t,M} & u_{a0|t,M+1} & \cdots & u_{a0|t,N} \end{bmatrix}$$

e

$$Y_{0|M} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{N-M+1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{M-1} & y_M & \cdots & y_{N-1} \\ y_M & y_{M+1} & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$

2. Calcule os subespaços do passado U_a^-, Y_a^- e do futuro U_a^+, Y_a^+ a partir das entradas estendidas e das saídas medidas para calcular o preditor ótimo das saídas.
3. Obtenha o espaço de estado $X_{f|w}$ gerado pelo preditor ótimo das saídas.
4. Calcule uma base ortonormal de $X_{f|w}$ para obter o vetor de estado inicial \hat{x}_k^0
5. inicialize $i = 1$

5.3.5 Estimação do Modelo MIMO LPV

Nesta seção apresentamos o processo para obter o modelo inovativo em (5.2) a partir do conjunto de dados u_k, y_k, δ_k e $\hat{x}_k^{(i-1)}$. Para isto inicialmente mostramos como dividir o vetor de estado em (5.1), como vetor de estado estimado \hat{x}_k e vetor de erro de estimação \tilde{x}_k , posteriormente expressamos a equação iterativa usada para o cálculo do vetor de estado. Mostra-se também, como usar a última estimativa do vetor de estado iterado para aproximar um novo modelo LTI com ruído não branco. Finalmente explicitamos os cálculos para obter as matrizes de estado do modelo MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros.

5.3.5.1 Vetor Estimado e Vetor de Erro de Estimação

Considere $x_k = \hat{x}_k + \tilde{x}_k$, Então, podemos expressar (5.1) como:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} + \tilde{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \\ \delta_k \otimes (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \lambda_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \\ \delta_k \otimes (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \zeta_k \end{aligned} \quad (5.17)$$

se isolarmos \hat{x}_k , então a Equação (5.17) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k+1} &= A_0 \hat{x}_k + \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \delta_k \otimes \tilde{x}_k \end{bmatrix}}^{Ke_k} + \lambda_k - \tilde{x}_{k+1} \\
 y_k &= C_0 \hat{x}_k + \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \delta_k \otimes \tilde{x}_k \end{bmatrix}}_{e_k} + \zeta_k \\
 e_k &= y_k - C_0 \hat{x}_k - \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Portanto podemos expressar (5.18) como um modelo inovativo com ganho de Kalman K e processo de inovação e_k . O processo de inovação e_k neste caso não corresponde a um ruído branco, então, o ganho de Kalman calculado não é necessariamente ótimo. Finalmente, o vetor de erro de estimação pode ser expresso em função da Equação (5.18) como:

$$\tilde{x}_{k+1} = A_0 \tilde{x}_k + \overbrace{A_p (\delta_k \otimes \tilde{x}_k)}^{\Lambda_k} + \lambda_k - K \begin{bmatrix} y_k - C_0 \hat{x}_k - \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Substituindo x_k por $x_k = \hat{x}_k + \tilde{x}_k$ na Equação (5.17), o modelo pode ser reformulado como:

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + Ke_k \tag{5.20}$$

5.3.5.2 Iteração da Estimação de Estado

Para deixar clara a equação iterativa associada ao vetor de estado estimado, considere o seguinte suposto:

Suposição 1: Para $x_k^{(i)} = \hat{x}_k^{(i)} + \tilde{x}_k^{(i)}$ com $\{i = 1, 2, \dots, N_i\}$ iterações⁷. Suponha que quando N_i for suficientemente grande, então $x_k^{(i)} \approx \hat{x}_k^{(N_i)}$ e $\tilde{x}_k^{(N_i)} \approx 0$.

⁷ sendo N_i a i -ésima iteração

Pela **Suposição 1** o erro de estimação na iteração $i = N_i$ é considerado $\tilde{x}_k^{(N_i)} \approx 0$, então, a Equação (5.1) pode ser expressa como um modelo LTI de ruído não branco dado como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1}^{(i)} + \tilde{x}_{k+1}^{(i)} \\ y_k \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \\ C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\hat{x}_{k+1}^{(i)} + \tilde{x}_{k+1}^{(i)} \right) \\ \delta_k \otimes \left(\hat{x}_k^{(i-1)} + \tilde{x}_k^{(i-1)} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \\ D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_k \\ \zeta_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

A equação (5.21) pode ser reformulada como:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^{(i)} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \left(\hat{x}_k^{(i-1)} + \tilde{x}_k^{(i-1)} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + A_0 \tilde{x}_k^{(i)} + \lambda_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \left(\hat{x}_k^{(i-1)} + \tilde{x}_k^{(i-1)} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + C_0 \tilde{x}_k^{(i)} + \zeta_k \end{aligned} \quad (5.22)$$

isolando $\tilde{x}_k^{(i)}$ e $\tilde{x}_k^{(i-1)}$ então (5.22) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^{(i)} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \tilde{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \lambda_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \tilde{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + \zeta_k \end{aligned} \quad (5.23)$$

e o modelo (5.23), pode ser reformulado como um modelo LTI com ruído não branco,

dado por:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}^{(i)} &= A_0 \hat{x}_k^{(i)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix}}_{u_{a0|t,k}^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix}}_{\lambda_k^{(i)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix}}_{\lambda_k^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_k^{(i)} \\ \delta_k \otimes \tilde{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix}}_{\lambda_k^{(i)}} + \lambda_k \\
 y_k &= C_0 \hat{x}_k^{(i)} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix}}_{u_{a0|t,k}^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix}}_{\zeta_k^{(i)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix}}_{\zeta_k^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_k^{(N_i)} \\ \delta_k \otimes \tilde{x}_k^{(i-1)} \end{bmatrix}}_{\zeta_k^{(i)}} + \zeta_k
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Então, para um $i = N_i$ suficientemente grande $x_k \approx \hat{x}_k^{(N_i)}$ e o modelo em (5.24) pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}^{(N_i)} &= A_0 \hat{x}_k^{(N_i)} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix} u_{a0|t,k}^{(N_i)} + \lambda_k^{(N_i)} \\
 y_k &= C_0 \hat{x}_k^{(N_i)} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} u_{a0|t,k}^{(N_i)} + \zeta_k^{(N_i)}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Note que a matriz de entrada $u_{a0|t,k}^{(N_i)} = \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes \hat{x}_k^{(N_i-1)} \end{bmatrix}$ em (5.25), é uma matriz estendida com a informação correspondente ao presente; porém, é possível inserir mais informação do passado como foi apresentado na Seção 5.3.4.

5.3.5.3 Processo para Obter as Matrizes de Estado

Na Equação (5.25), é considerado que em N_i iterações o estado estimado é equivalente ao vetor de estado do sistema, então, o modelo pode ser reformulado como:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= A_0 x_k + \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + K e_k \\
 y_k &= C_0 x_k + \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + e_k
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

O modelo (5.26), é o resultado do processo de identificação iterativa do modelo em (5.24). Portanto para identificação em cada iteração primeiro calculamos os subespaços do futuro e do passado como: $U_a = \overline{\text{span}}(u_{a,k} | k = 1, 2, \dots)$, $Y = \overline{\text{span}}(y_k | k = 1, 2, \dots)$ e $W_a = \overline{\text{span}}(w_{a,k} | k = 1, 2, \dots)$ com $u_{a0|t,k} = \begin{bmatrix} u_k & \delta_k \otimes u_k & \delta_k \otimes \hat{x}_k^{(N_i)} \end{bmatrix}'$ e $w_a = \begin{bmatrix} u_{a0|t,k} & y_k \end{bmatrix}'$. Assim, o preditor ótimo é calculado como:

$$X_{f|w} = \hat{E}_{||U_a^+} \{Y^+ | W_a^-\} \quad (5.27)$$

e o vetor de estado x_k como uma base ortonormal de $X_{f|w}$.

As matrizes de estado do modelo LTI com ruído não branco são obtidas a partir da estimação do vetor de estado no modelo (5.26), como:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_a \\ C_0 & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} KE_k \\ E_k \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

onde \hat{X}_{k+1} é a sequência de estado no instante $k+1$, E_k a sequência do vetor de inovação, $B_a = \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix}$ e $D_a = \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix}$ as matrizes de estado aumentadas.

Como passo final, as matrizes do modelo LPV (5.2) com dependência afim aos parâmetros, podem ser extraídas da aproximação LTI em (6.7) como:

$B_0 = B(1 : n, 1 : m)$, $B_p = B(1 : m, 1 : m + ms)$, $A_p = B(1 : n, (m + ms) + 1 : m + ms + ns)$, $D_0 = D(1 : p, 1 : m)$, $D_p = (1 : p, m + 1 : m + ms)$, $C_p = D(1 : p, (m + ms) + 1 : m + ms + ns)$.

O ganho de Kalman do modelo MIMO LPV é dado por:

$$K_0 = (A_0 P C_0^T + S)(C_0 P C_0^T + R)^{-1} \quad (5.29)$$

e P é a solução da equação algébrica de Riccati:

$$P = A_0 P A_0^T - (A_0 P C_0^T + S)(C_0 P C_0^T + R)^{-1}(A_0 P C_0^T + S)^T + Q \quad (5.30)$$

5.3.6 Algoritmo ICCALPV

1. faça $i = 0$ e $u_{a0|t,k}, \{t = 0, 1, 2, \dots\}$ para obter o vetor de estado inicial $x_k^{(0)}$ a partir do modelo em (5.16) (inclua informações na matriz estendida como apresentado na Seção 5.3.2).

Os passos para a obtenção do vetor de estado são dados como:

- a) calcule as matrizes de dados e os subespaços do passado e futuro de acordo com a Seção 5.3.4 (passos 1 e 2).
- b) calcule a decomposição LQ de

$$\phi = \begin{bmatrix} U_{a,j|2l-1} \\ W_{0|j-1} \\ Y_{j|2j-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\phi = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} = \bar{L}Q^T \quad (5.31)$$

as matrizes $L_{11} \in \mathcal{R}^{jm \times jm}$, $L_{22} \in \mathcal{R}^{jd \times jd}$, $L_{33} \in \mathcal{R}^{jp \times jp}$ são matrizes bloco triangular, Q_i são matrizes ortogonais, e $Q_i^T Q_j = I \vartheta_{ij}$, onde ϑ_{ij} é o delta Kronecker definido por $\vartheta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

- c) calcule as matrizes de covariâncias a partir de (5.31), como:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & \Sigma_{up} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{pu} & \Sigma_{pp} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{fu} & \Sigma_{fp} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \phi \phi^T = \bar{L} \bar{L}^T \quad (5.32)$$

- d) A partir da Equação (5.31) e (5.32)) calcule cada uma das matrizes de covariâncias, como:

$$\begin{aligned} \Sigma_{uu} &= L_{11} L_{11}^T \\ \Sigma_{pu} &= L_{21} L_{11}^T, \quad \Sigma_{fu} = L_{31} L_{11}^T \end{aligned} \quad (5.33)$$

- e) assim, as matrizes de correlação condicional⁸ são dadas como:

$$\Sigma_{ff|u} = \Sigma_{ff} - \Sigma_{fu} \Sigma_{uu}^{-1} \Sigma_{uf} \quad (5.34)$$

$$\Sigma_{pp|u} = \Sigma_{pp} - \Sigma_{pu} \Sigma_{uu}^{-1} \Sigma_{up} \quad (5.35)$$

$$\Sigma_{fp|u} = \Sigma_{fp} - \Sigma_{fu} \Sigma_{uu}^{-1} \Sigma_{up} \quad (5.36)$$

⁸ para reduzir a notação das matrizes de correlação e de correlação condicional usamos os subíndices f , p e u como: futuro, passado e entradas futuras, respectivamente.

- f) dadas as correlações canônicas condicionais, calcule (5.11) e sua base ortogonal como vetor de estado $x_k^{(0)}$.
- g) faça $i = 1$
2. Calcule o modelo MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros usando o vetor de estado estimado $x_k^{(i-1)}$, e as medidas de u_k, y_k e δ_k , como é apresentado a seguir:

- a) Calcule as as matrizes de dados e os subespaços do passado $\hat{X}^-, U^-, Y^-, \Delta^-$ e do futuro $\hat{X}^+, U^+, Y^+, \Delta^+$ como na Seção 5.3.4 (passos 1 e 2) usando $\overline{\text{span}}\{\hat{x}^{i-1}\}$, $\overline{\text{span}}\{u_{a,0|0,k} \mid k = 1, 2, \dots\}$, $\overline{\text{span}}\{y_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ e $\overline{\text{span}}\{\delta_k \mid k = 1, 2, \dots\}$. perceba que a matriz $u_{a,0|0}$ é dada por:

$$u_{a,0|0} = \begin{bmatrix} U_{0|0} \\ \Delta_{0|0} \odot U_{0|0} \\ \Delta_{0|0} \odot \hat{X}_{0|0} \end{bmatrix}$$

onde \odot é o produto Khatri-Rao e $u_{0|0,k}$ é o vetor de entradas estendidas com informação do presente de u_k, y_k, δ_k e $\hat{x}_k^{(i-1)}$.

- b) calcule o espaço preditor e o vetor de estado em (5.24) usando as Equações (5.31), (5.32), (5.33), (5.34), (5.35), (5.36); calcule $\hat{x}_k^{(i)}$ até $\hat{x}_k^{(N_i)}$, com N_i grande o suficiente.
- c) faça $x_k \approx \hat{x}_k^{(N_i)}$
- d) tendo x_k , calcule as matrizes de estado (A,B,C,D) usando o método de mínimos quadrados como na na Equação (6.7) e extraia as matrizes de estado do modelo MIMO LPV.
- e) calcule o ganho de Kalman como na Equação (5.29) e a solução da ARE⁹ como apresentado na Equação (6.3).

⁹ Algebraic Riccati Equation

5.4 Simulações e Comparações entre os Métodos ICCALPV e PSBID

Esta seção é dividida em duas sub seções, na primeira apresentamos dois exemplos com o propósito de avaliar o desempenho da nossa proposta ICCALPV. Nesta subseção identificamos o modelo da dinâmica¹⁰ apresentada em [76]. O segundo exemplo é a identificação de um benchmark MIMO LPV [75]. Para os dois exemplos são apresentadas as melhores estimativas obtidas pelo método em termos da informação passada (**PI**) e o número de iterações (**IN**), apresentados em [10].

Na segunda subseção é apresentada a comparação do desempenho do nosso algoritmo ICCALPV com o bem conhecido método $PBSID_{opt}$ ¹¹ [76]. As comparações são feitas em termos da “Variance Accounted For” (VAF) e do tempo de execução do algoritmo.

5.4.1 Exemplos

Para a avaliar qual é a melhor estimativa fornecida pelo algoritmo ICCALPV, realizamos múltiplos testes com diferentes números de informações do passado na matriz de entradas estendida e diferentes números de iterações para obter o modelo MIMO LPV de acordo com:

$$VAF = \max\left(1 - \frac{\text{var}(y_k - \hat{y}_k)}{\text{var}(y_k)}, 0\right) 100\% \quad (5.37)$$

onde $\text{var}(\cdot)$ denota a variância, y_k e \hat{y}_k são as saídas medidas e as saídas estimadas, respectivamente.

5.4.1.1 Modelo da Dinâmica Tremulante “Flapping”

O modelo “flapping dynamics”¹² usado neste exemplo é o modelo “out-of-plane dynamics” de um rotor de lâmina flexível de uma turbina eólica de velocidade fixa usada por outros autores como em [144, 145]. A dinâmica do modelo é excitada usando vento

¹⁰ “flapping Dynamics”

¹¹ PSBID 6.0 Toolbox [137]

¹² Para uma descrição detalhada do modelo veja [143] e as suas referências

de velocidade constante modelado como um ruído branco u_k . O vetor de parâmetros de escalonamento (GSV)¹³ é dado por:

$$\delta_p = 0,4\cos(2\pi/10) + 0,2$$

E o modelo discreto LPV com dependência afim aos parâmetros é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_p \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_p \otimes u_k \end{bmatrix} \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_p \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_p \otimes u_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

com matrizes de estado:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.0734 \\ -6.5229 & -0.4997 \end{bmatrix} & A_1 &= \begin{bmatrix} -0.0021 & 0 \\ -0.0138 & 0.5196 \end{bmatrix} & A_{0|1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \end{bmatrix} \\ B_{0|1} &= \begin{bmatrix} -0.7221 & 0 \\ -9.6277 & 0 \end{bmatrix} & C_{0|1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{0|1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e período de amostragem $T_d = 1s$.

Múltiplos testes foram desenvolvidos para determinar o melhor VAF alcançado pelo método ICCALPV. Primeiramente, foi fixado o número de informações do passado em um, e combinado com um número de iterações entre um e vinte sendo obtido um VAF de 37%. Posteriormente, duas informações do passado foram usadas e realizou-se uma nova corrida com números de iterações entre um e vinte, em média; para um total de cem testes aleatórios obteve-se um VAF of 87.1270%, como é apresentado nas Figuras 43 e 44.

Portanto, a melhor média é alcançada quando o algoritmo é configurado com duas informações do passado e vinte iterações. Na Tabela 2 são apresentados o VAF médio e os valores da melhor configuração para o ICCALPV.

¹³ conhecido em inglês como “Gain Scheduling Vector”

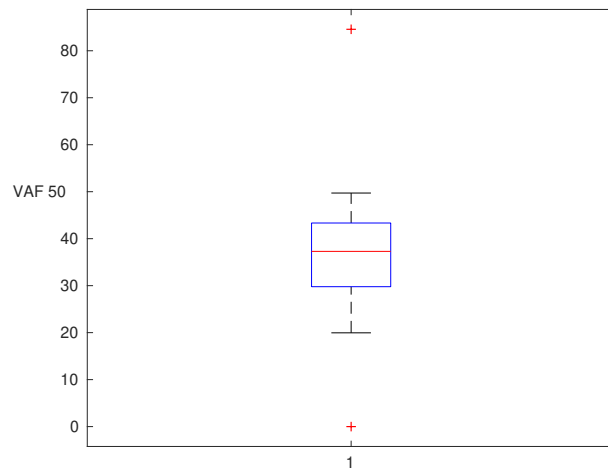


Figura 43 – Média{VAF}=37% com PI:1 e IN:1-20.

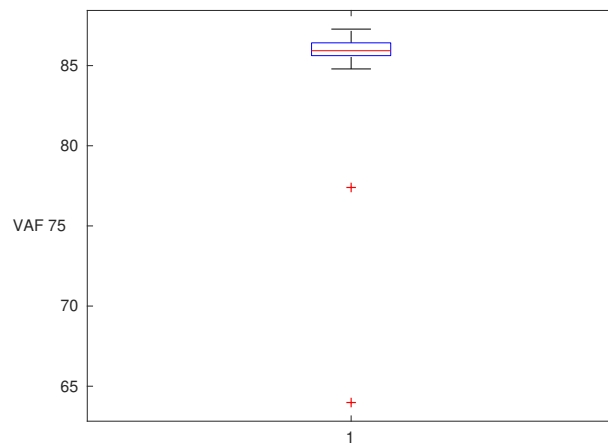


Figura 44 – Média{VAF}=87% com PI:2 e IN:1-20.

Tabela 2 – VAF da Identificação do Modelo “Flapping Dynamics”

# PI	# IN	$\bar{VAF} \%$
2	2	$\hat{y} = 87.1270$

5.4.1.2 Sistema MIMO LPV

Neste exemplo o ICCALPV é aplicado num sistema com duas entradas, três saídas e três parâmetros variantes no tempo [75]:

$$\begin{aligned}
 A0 &= \begin{bmatrix} -1.3 & -0.6325 & -0.1115 & 0.0596 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A1 &= \begin{bmatrix} -0.51 & -0.1075 & -0.007275 & -0.0000625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \\
 B2 = B3 = B1 & \quad C0 = I_{3 \times 4}, \quad D0 = 0_{3 \times 2} \\
 B0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{5.38}
 \end{aligned}$$

O vetor de parâmetros de escalonamento é dado por:

$$\delta_k = \begin{bmatrix} \delta_{1,k} \\ \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t/100) \delta_{1,k} \\ \frac{1}{2} \text{cos}(2\pi t/100) \delta_{1,k} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

onde $\delta_{1,k} = \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t/100) \psi$, e ψ é uma sequência de ruído branco. As entradas u_k são dadas por: $u_k = \begin{bmatrix} u_1 & \varphi_2 \end{bmatrix}'$ onde $u_k = Z^{-1}\{u_1(z)\}$, $u_1(z) = (0.75 + 1.05z^{-1} + 0.15z^{-2})\varphi_1(z)$, e φ_1, φ_2 são sequências de ruído branco.

Como no exemplo anterior, múltiplos testes foram realizados para determinar a melhor configuração do ICCALPV para obter o melhor VAF médio. Testes são apresentados em [10] e na Tabela 3 são apresentados os resultados da análise feita em [10]

Tabela 3 – VAF Médio do Sistema MIMO LPV identificado via ICCALPV.

# of PI	# IN	Saída/VAF %
2	20	$\hat{y}_1 = 95.44$
		$\hat{y}_2 = 91.76$
		$\hat{y}_3 = 87.41$

Neste exemplo é exposto um dos casos mais difíceis para o ICCALPV, devido à forma senoidal das sequências de parâmetros, à inserção de ruído nas entradas e nas saídas; mesmo com estas condições o algoritmo alcança um desempenho adequado como será mostrado na seguinte seção.

5.4.2 Comparação entre ICCALPV e $PBSID_{opt}$

Quando a partir das medidas de entradas e saídas de um sistema é calculado, via análise de correlação canônica, o espaço de estado e o vetor de estado associados à interseção dos subespaços do passado e do futuro, o conjunto de algoritmos que permite a obtenção da informação é chamado CCA ou CVA padrão [112]. O uso da análise de correlação canônica [146] para a identificação de sistemas é uma ideia originalmente baseada na realização mínima devida a Akaike [87, 88, 89] e posteriormente refinada por Larimore [147, 148].

Inspirado nos trabalhos de Akaike [87, 88, 89], Katayama [90, 40] desenvolve o método CCA para séries temporais e sistemas com entradas exógenas. O ICCALPV é uma extensão do método CCA baseado em [40] e na principal ideia de Akaike, e permite tratar sistemas MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros; portanto o

método ICCALPV aqui proposto pode ser incluído dentro do conjunto de algoritmos denominados CCA.

O PSBID é apresentado como uma “família” de algoritmos desenvolvidos por Chiuso, Ljung and Jansson [112, 149, 150] (e suas referências). Inicialmente o $PSBID_{opt}$ para sistemas lineares e sua relação com o CCA padrão é apresentada por [112]; posteriormente uma extensão do $PSBID_{opt}$ para sistemas LPV foi feita por van Wingerden e Verhaegen [76] e sua respectiva implementação no “PSBID Toolbox” do MATLAB foi feita por Houtzager [137].

O $PSBID_{opt}$ trabalha em tempo discreto e supõe dependência no vetor de parâmetros. Este método como vários outros, incluindo o ICCALPV, sofre da chamada maldição da dimensionalidade [144]. O ICCALPV apresentado ao longo desta seção e o $PSBID_{opt}$ (disponível em *PSBID Toolbox* [137]) são comparados em termos do VAF e do tempo de processamento. Para o último critério é difícil concluir, já que este depende em grande parte das características da implementação do algoritmo e da capacidade computacional com a qual se conta. Nos testes desenvolvidos nesta comparação é usado um computador com processador intel core i7-4700MQ CPU 2,4GHz X 8 e 7,7 GiB de RAM e MATLAB 2017 sob Ubuntu 14.04; Do *PSBID Toolbox 6.0* foram usados os comandos “lordvarx” e “lx2abck” na identificação $PSBID_{opt}$, com janelas do passado e do futuro de 5 e 3 respectivamente.

5.4.2.1 Comparação dos Métodos para Modelagem do “Flapping”

Na Tabela 4 apresentamos o VAF e o tempo de processamento resultante da comparação entre os dois métodos; nela pode-se observar uma ligeira diferença entre o VAF médio alcançado pelos dois métodos, isto em parte por que o modelo tem uma única dependência nos parâmetros e porque corresponde com um modelo SISO (SISO). A principal diferença presente neste caso é mostrada na Figura 46, onde o ICCALPV tem um tempo de processamento menor que o $PSBID_{opt}$. Nos experimentos aqui apresentados foram realizadas com simulações Monte Carlo; No caso do VAF médio podemos constatar uma média similar entre os métodos ICCALPV and $PSBID_{opt}$, porém o ICCALPV tem vários “outliers” que reduzem a acuidade em relação ao $PSBID_{opt}$. No entanto, o ICCALPV tem uma melhor performance em tempo, portanto podemos afirmar que o ICCALPV fornece um modelo inicial suficientemente adequado. Nosso

ponto é evidenciado diretamente no segundo exemplo como veremos posteriormente.

Tabela 4 – Comparação das identificações do modelo de Flapping Dynamics.

Método	# PI	# IN	Saídas/ \bar{VAF} %	Tempo de Execução
ICCALPV	2	2	$\hat{y} = 81.9262$	0.0899 s
$PSBID_{opt}$	$w_p = 5$ $w_f = 3$	NA	$\hat{y} = 87.9856$	0.0956 s

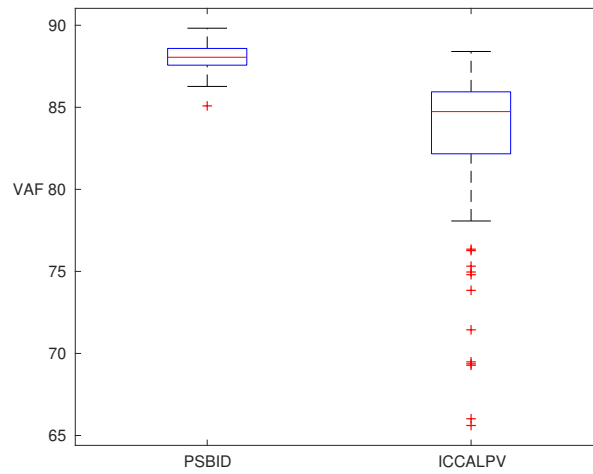


Figura 45 – Média{ VAF }

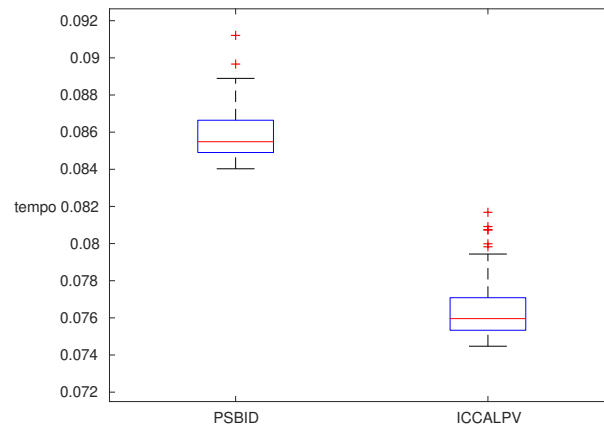


Figura 46 – Média{ Tempo }

5.4.2.2 Comparação das Identificações do sistema MIMO LPV

Na Tabela 6, é apresentado o VAF e o tempo de processamento dos métodos. O ICCALPV alcança uma performance adequada em relação ao $PSBID_{opt}$ Figura 49 e uma significativa diferença no tempo de processamento, figura 48. Esta diferença é diretamente relacionada à quantidade de entradas, saídas e parâmetros que determinam o tamanho das matrizes para calcular o espaço predictor ótimo de saída em cada algoritmo; neste caso as matrizes associadas com o cálculo das decomposições LQ e SVD ¹⁴ no ICCALPV crescem menos do que no PSBID.

Tabela 5 – Comparação dos Modelos MIMO LPV Identificados com ICCALPV e PSBID.

Método	# PI	# IN	Saídas/VAF %	Tempo de Execução
ICCALPV	2	20	$\hat{y}_1 = 95.3904$ $\hat{y}_2 = 91.6051$ $\hat{y}_3 = 87.5591$	2.6243 s
$PSBID_{opt}$	$w_p = 5$ $w_f = 3$	NA	$\hat{y}_1 = 99.9415$ $\hat{y}_2 = 99.9574$ $\hat{y}_3 = 99.9733$	132.5492 s

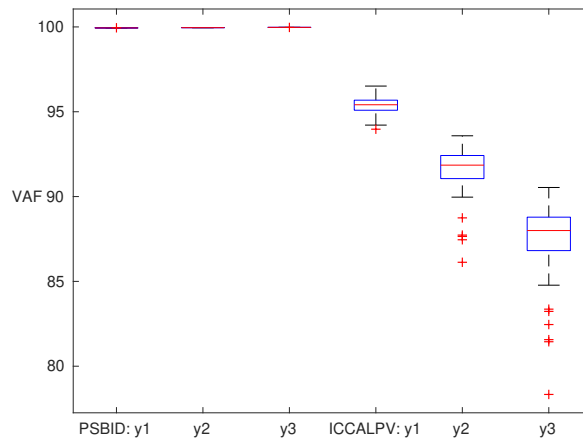


Figura 47 – Média {VAF}

¹⁴ do inglês: “Singular Value Decomposition”

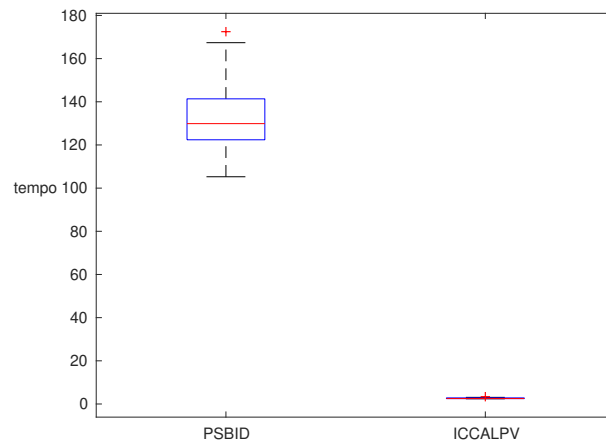


Figura 48 – Tempo transcorrido na execução do algoritmo

5.5 Conclusão

Neste capítulo foi proposto um novo método de identificação MIMO LPV usando a análise de correlação canônica condicional (ICCALPV) e seu respectivo algoritmo. O ICCALPV permite uma rápida e acurada identificação de sistemas MIMO LPV com múltipla dependência afim aos parâmetros. No ICCALPV uma forma mais eficiente de calcular as matrizes de entradas estendidas com o uso do produto Khatri-Rao e da matriz bloco de Hankel são utilizados. Em cada identificação obtemos modelos não únicos, portanto, a comparação com o modelo “real” não é uma tarefa trivial, que será tratada em trabalhos futuros.

6 Método de Identificação 3C2ILPV

6.1 Introdução

Neste capítulo é proposto um novo algoritmo iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlação canônica condicional, baseado no ICCALPV, que denominamos *3C2ILPV*¹. O Método e o algoritmo aqui apresentados baseiam-se em [151, 152]. O procedimento geral conserva a ideia do ICCALPV no sentido de encontrar um vetor de estado inicial e posteriormente usá-lo para aproximar iterativamente o modelo MIMO LPV através de um modelo LTI de ruído não branco. Por outra parte, no algoritmo *3C2ILPV* é usado o filtro de Kalman para aprimorar os estados estimados em cada iteração. Posteriormente formulamos uma alternativa ao método original para calcular as matrizes de estado e o ganho de Kalman do modelo inovativo com dependência paramétrica afim.

No capítulo anterior, na seção de aplicação do modelo ICCALPV pode-se apreciar o potencial do método e sua eficiência para fornecer modelos LPV iniciais. Porém, quando é preciso um modelo mais acurado, o *3C2ILPV* é uma melhor alternativa, porque ele tem uma menor variância que o ICCALPV.

O método é descrito como segue: Primeiramente apresentamos o problema a solucionar com a nossa proposta de algoritmo, a seguir mostramos como usar o filtro de Kalman para aprimorar o vetor de estado em cada iteração; posteriormente o algoritmo *3C2ILPV*, e finalmente comparações entre os métodos *3C2ILPV*, *ICCALPV* e *PSBID_{opt}*.

¹ Conditional Canonical Correlation Iterative Identification of MIMO Linear Parameter Varying Systems method

6.2 Modelo MIMO LPV Inovativo com Dependência Afim aos Parâmetros

A partir do modelo MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros apresentado na Equação (5.1) é obtido o modelo inovativo equivalente com dependência aos parâmetros no ganho de Kalman dado como:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} K_0 & K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \delta_k \otimes e_k \end{bmatrix} \\
 y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + e_k
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $e_k \in \mathcal{R}^p$ é o processo de inovação e $K_0 \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $K_p = \begin{bmatrix} K_1 & \dots & K_s \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times ps}$ as matrizes do ganho de Kalman. A diferença entre o modelo em (6.1) e o modelo em (5.2), encontra-se no tratamento do ganho de Kalman associado à forma inovativa, já que no modelo (5.2) o ganho depende exclusivamente do modelo inicial (A_0, B_0, C_0, D_0) .

6.3 Método 3C2ILPV

Nesta abordagem o vetor de estado inicial é calculado como na seção 5.3.1, inserindo informações do passado como na seção 5.3.2. Posteriormente é aprimorado o vetor de estado estimado como na seção 6.3.1. Com o novo conjunto de dados $u_k, y_k, \delta_k, \hat{x}_k^0$ é calculado o novo vetor de estado iterativamente, como na seção 5.3.5 e as matrizes de estado do modelo inovativo com dependência afim aos parâmetros como na seção 6.3.2.

6.3.1 Filtro de Kalman

Como é amplamente conhecido a realização estocástica mínima devida a Akaike, trata o problema estocástico com ruído branco através da obtenção do espaço preditor ótimo das saídas, com o qual é calculado o espaço de estado e posteriormente a base ortonormal de dito espaço para obter o vetor de estado estimado. Como o modelo a

estimar nesta abordagem é um modelo LTI com ruído colorido como é apresentado na seção 5.3.3 e na seção 5.3.5.2 consideramos que a estimação do vetor de estado como um vetor estocástico é melhor do que a estimação através de um vetor de estado determinístico, pois o método de estimação estocástico multivariado, contínua nesta seção, sendo o CCA.

O método CCA permite calcular as matrizes de covariâncias, a matriz de erro de estimação e o ganho de Kalman, com os quais posteriormente é inicializado o filtro de Kalman [116] usado no aprimoramento do vetor de estado em cada iteração. O filtro então, pode ser usado como:

- No modelo em (5.16), $\lambda_{a|t,k}^1$ pode ser considerado como:

$$\lambda_{a|t,k}^1 = Ke_k$$

e

$$K = E\{\lambda_{a|t,k}^1 e_k\}(\text{cov}\{e_k\})^{-1}$$

A prova pode ser vista em [40]. Portanto, as matrizes de covariância do erro de predição podem ser computadas como:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Ke_k)(Ke_k)' & (Ke_k)(e_k)' \\ (e_k)(Ke_k)' & (e_k)(e_k)' \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

e resolvendo a equação algébrica de Riccati (ARE²), temos:

$$P = A_0 P A_0^T - (A_0 P C_0^T + S)(C_0 P C_0^T + R)^{-1}(A_0 P C_0^T + S)^T + Q \quad (6.3)$$

- com R , S e Q em (6.2) e P em (6.3) como valores iniciais, podemos usar o filtro de Kalman como:

Filtro de um passo a frente:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^0 &= A_0 \hat{x}_k^0 + B_{a,t} u_{a0|t,k} + Ke_k \\ \hat{x}_{k|k}^0 &= \hat{x}_k^0 + K_f e_k \\ e_k &= y_k - C_0 x_k - D_{a,t} u_{a0|t,k} \end{aligned} \quad (6.4)$$

² do inglês: “Riccati algebraic equation”

Ganho:

$$\begin{aligned} K &= (A_0 P C_0' + S)(C_0 P C_0' + R)^{-1} \\ K_f &= P C_0'(C_0 P C_0' + R)^{-1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Matrizes de covariância do erro:

$$\begin{aligned} P_k &= A_0 P_k A_0' \\ &\quad - K(C_0 P_k C_0' + R)K' + Q \\ P_{k|k} &= P_k \\ &\quad - P_k C_0'[C_0 P_k C_0' + R]^{-1} C_0 P_k \end{aligned} \quad (6.6)$$

e aprimorar a estimativa do vetor de estado \hat{x}_k^i onde $i = 0, 1, 2, \dots$

6.3.2 Processo de Obtenção das Matrizes do Modelo LPV na Forma Inovativa

Na equação (5.25) é adicionado o termo $(\delta_k \otimes \hat{x}^{(N_i)})$ como uma entrada exógena do sistema em (5.26). Com o propósito de identificar o modelo em (5.26) criamos os subespaços do passado e do futuro para obter o preditor ótimo como em (5.27) e o vetor de estado x_k^i .

Para aprimorar a estimativa do vetor de estado usamos o filtro de Kalman como na seção 6.3.1 e para extrair as matrizes de estado do modelo LPV a partir da aproximação LTI com ruído não branco calculamos:

- As Matrizes de dados e a matriz de inovação como:

$$\begin{aligned} X_{k|k} &= \begin{bmatrix} X_k \\ \Delta_k \odot X_k \end{bmatrix} & U_{k|k} &= \begin{bmatrix} U_k \\ \Delta_k \odot U_k \end{bmatrix} & V_{k|k} &= \begin{bmatrix} E_k \\ \Delta_k \odot E_k \end{bmatrix} \\ E_k &= Y_k - \begin{bmatrix} C_0 & C_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ \Delta_k \odot X_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_0 & D_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ \Delta_k \odot U_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- A Matriz ABK , usando Quadrados Mínimos³:

$$[ABK] = X_{k+1} \left(\begin{bmatrix} X'_{k|k} & U'_{k|k} & V'_{k|k} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} X_{k|k} \\ U_{k|k} \\ V_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{k|k} & U'_{k|k} & V'_{k|k} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (6.7)$$

- As matrizes associadas ao ganho de Kalman no modelo LPV em (5.2), como:

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} = ABK(:, 1 : n(s+1))$$

$$\begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} = ABK(:, n(s+1) + 1 : (n(s+1) + m) + (sm))$$

$$\begin{bmatrix} K_0 & K_p \end{bmatrix} = ABK(:, ((n(s+1) + m) + sm) + 1 : end);$$

$$D_0 = D(1 : p, 1 : m), D_p = (1 : p, m + 1 : m + ms), C_p = D(1 : p, (m + ms) + 1 : m + ms + ns).$$

6.3.3 Algoritmo 3C2ILPV

1. Faça $i = 0$ e $u_{a0|t,k}, \{t = 0, 1, 2, \dots\}$ na estimação do vetor de estado inicial $x_k^{(0)}$ a partir do modelo em (5.16) com o uso da informação do passado apresentado na seção 5.3.2.

Os passos para obter o vetor de estado inicial são:

- a) calcule as matrizes de dados e os subespaços do passado e futuro como na seção 5.3.4 (passos 1 and 2).
- b) calcule a decomposição LQ como em (5.31)
- c) A partir da equação (5.31), calcule as matrizes de covariância como em (5.32)
- d) com a equação (5.31) e a equação (5.32) isole as matrizes de covariâncias como em (5.33)
- e) calcule as matrizes de covariância condicional como em (5.34)
- f) calcule o preditor ótimo e o espaço de estado (5.11) e posteriormente determine uma base ortonormal como vetor de estado inicial $x_k^{(0)}$.

³ “Least squares”

- g) calcule o filtro de Kalman como na seção 6.3.1 e a solução da ARE.
- h) faça $i = 1$
2. Calcule o sistema MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros usando o estado estimado $x_k^{(i-1)}$, e as medidas de u_k , y_k e δ_k como apresentado a seguir:
- a) Calcule as matrizes de dados, os subespaços do passados \hat{X}^- , U^- , Y^- , Δ^- e os subespaços do futuro \hat{X}^+ , U^+ , Y^+ , Δ^+ , como na seção 5.3.4 use $\overline{\text{span}}\{\hat{x}^{i-1}\}$, $\overline{\text{span}}\{u_{a,0|0,k} \mid k = 1, 2, \dots\}$, $\overline{\text{span}}\{y_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ e $\overline{\text{span}}\{\delta_k \mid k = 1, 2, \dots\}$. Note que a matriz $u_{a,0|0}$ é dada por:

$$u_{a,0|0} = \begin{bmatrix} U_{0|0} \\ \Delta_{0|0} \odot U_{0|0} \\ \Delta_{0|0} \odot \hat{X}_{0|0} \end{bmatrix}$$

onde \odot é o produto Khatri-Rao e $u_{0|0,k}$ é o vetor de entradas estendido com informação sobre u_k , y_k , δ_k e $\hat{x}_k^{(i-1)}$.

- b) calcule $\hat{x}_k^{(i)}$ em (5.20) até $\hat{x}_k^{(N_i)}$, com N_i suficientemente grande.
- c) calcule o espaço preditor e o vetor de espaço \hat{x}_k em (5.26) usando as equações (5.31), (5.32), (5.33), (5.34), (5.35), (5.36);
- d) calcule o filtro de Kalman como é apresentado na seção 6.3.1 e a solução da ARE.
- e) dado \hat{x}_k , calcule as matrizes (A,B,C,D,K) usando quadrados mínimos como apresentado na seção (6.7).

6.4 Simulação e comparação dos métodos 3C2ILPV, ICCALPV e PSBID

Nesta seção o desempenho do algoritmo é apresentado comparativamente usando um benchmark MIMO LPV de [75]. As comparações entre o ICCALPV e PSBID_{pt} realizadas na seção 5.4 são contrastadas com o algoritmo 3C2ILPV. As melhores identificações obtidas no ICCALPV e no 3C2ILPV em termos do tempo de processamento, informação do passado inserida (PI) e número de iterações (IN) são comparadas com as

Tabela 6 – Comparações dos Algoritmos.

Método	# PI	# IN	Saídas/ \bar{VAF} %	Tempo
<i>ICCALPV</i>	2	20	$\hat{y}_1 = 95.3904$ $\hat{y}_2 = 91.6051$ $\hat{y}_3 = 87.5591$	2.7367 s
<i>3C2ILPV</i>	2	5	$\hat{y}_1 = 99.9792$ $\hat{y}_2 = 99.9775$ $\hat{y}_3 = 99.9790$	4.2877 s
<i>PSBID_{opt}</i>	$w_p = 5$ $w_f = 3$	NA	$\hat{y}_1 = 99.9799$ $\hat{y}_2 = 99.9797$ $\hat{y}_3 = 99.9813$	99.7209 s

identificações obtidas no método *PSBID_{opt}*⁴ Para a avaliação do desempenho de cada algoritmo é usado o VAF (5.37) em 50 simulações tipo Monte Carlo

O modelo a ser testado é apresentado na seção 5.4.1.2. As características do computador apresentadas na seção anterior são mantidas assim como o uso das funções “lordvarx” e “lx2abck” do toolbox *PSBID_{opt}* [137] e a configuração de 5 janelas do passado e 3 do futuro. As melhores identificações são obtidas com o *ICCALPV* [10].

Na tabela 6 e na figura 49 são apresentados os resultados comparativos entre os três métodos. Nesta tabela pode-se apreciar numericamente o bom desempenho do nosso método *3C2ILPV* em relação ao *PSBID_{opt}* usando o critério VAF; além disso o tempo de processamento é significativamente menor do que o apresentado pelo *PSBID_{opt}*; o tempo em relação ao *ICCALPV* é maior em razão dos processos de filtragem e da inserção do critério de parada; ainda na tabela pode-se ver que o número de iterações necessárias pelo *3C2ILPV* é significativamente menor do que o do *ICCALPV*. O tempo de processamento está relacionado com o tamanho das matrizes associadas aos cálculos das decomposições SVD e LQ; isto é evidenciado pela proximidade das medidas de tempo de processamento entre o *ICCALPV* e o *3C2ILPV*, onde o aumento de tempo de processamento no segundo algoritmo nomeado é causado pela recursão no filtro de Kalman em cada iteração.

⁴ PSBID 6.0 Toolbox [137, 76]

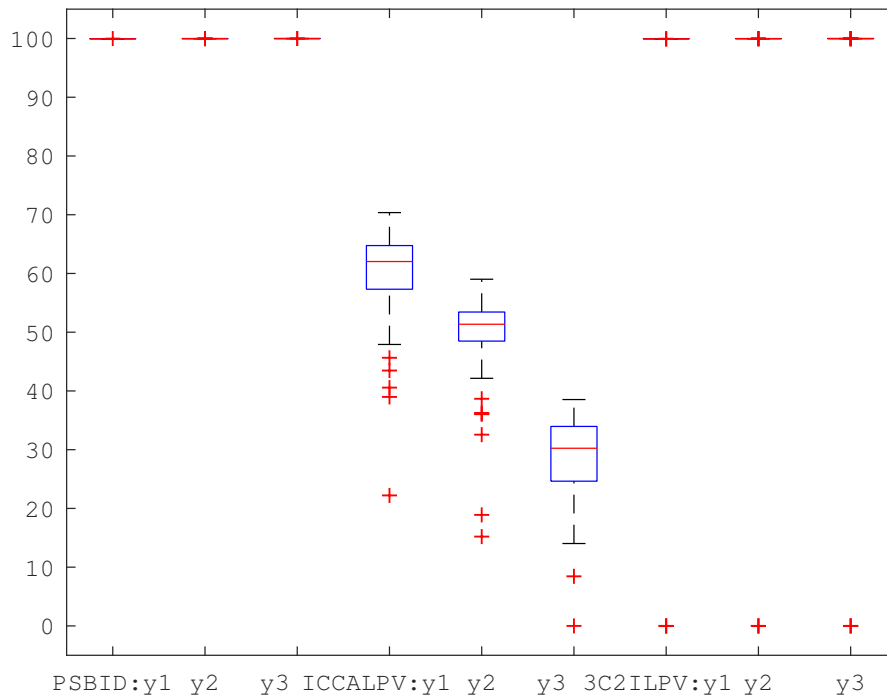


Figura 49 – Média{VAF}

6.5 Conclusão

Nesta seção propusemos um novo método para identificação de sistemas estocásticos MIMO LPV, o 3C2ILPV e seu respectivo algoritmo. O 3C2ILPV pode ser considerado como um ICCALPV modificado, dado que as bases destas propostas são compartilhadas; porém, o 3C2ILPV representa uma identificação muito mais acurada e com uma variância muito reduzida em relação ao algoritmo original. Além disto, o 3C2ILPV insere o cálculo do ganho de Kalman dependente dos parâmetros, o que permite uma melhor representação do modelo inovativo.

A eficácia do método é confirmada via comparação com um dos algoritmos de identificação LPV mais usados: o PSBID, apresentando uma clara vantagem no tempo de processamento e uma margem de acuidade muito próxima à do PSBID.

7 Realização e Métodos de Identificação por KCCA

7.1 Introdução

O método de análise de correlação canônica (CCA) é amplamente usado em diferentes áreas do conhecimento e amplamente empregado em análise de sinais e identificação de séries temporais; porém, muitas destas abordagens são limitadas a sistemas lineares. Recentemente encontra-se na literatura o uso do CCA para sistemas não lineares através do uso do conhecido “Kernel trick”. Em análise de sistemas são resolvidos diferentes problemas com análise de correlação canônica [153, 154, 155, 156, 157].

No entorno de nosso problema de identificação LPV, têm sido apresentados métodos que usam kernel de diferentes formas; por exemplo em [158] é apresentado o uso de Kernel para computar a SVD, para as matrizes de dados dos métodos de identificação em [75], crescem exponencialmente e requerem tratar o problema de dimensão para que haja menor tempo de processamento e melhor desempenho. Posteriormente e na mesma linha de Verdult e Verhaegen, J. van Wingerden usa o kernel regularizado para viabilizar o tratamento das matrizes de dados. Mais recentemente Tóth [159] usam o CCA para estimar o vetor de estado de um sistema LPV a partir das medições das entradas e saídas. Outros usos do método kernel em identificação por subespaços de sistemas são associados à identificação de sistemas não lineares como os sistemas de Wiener e de Hammerstein [160].

Neste capítulo apresentamos uma nova proposta que envolve o uso da análise de correlação canônica, a análise de correlação canônica condicional e o truque de kernel para a identificação de sistemas MIMO LPV estocástico.

A proposta aqui apresentada baseia-se na teoria estocástica da realização mínima de Akaike para séries temporais [142], no método CCA [90, 6, 9, 116] e na decomposição incompleta de Cholesky [153] aplicada na resolução de problemas estocásticos multivariados de correlação canônica [153].

Semelhante com o *ICCALPVI* e o *3C2ILPV* apresentados nos capítulos 5, 6, o propósito é encontrar um vetor de estado inicial e posteriormente refiná-lo para encontrar o modelo inovativo MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros. Com este propósito supomos que as saídas medidas contêm toda a informação das entradas, e dos parâmetros, de forma que estimando o modelo de estado associado ao sinal de saída medido obtemos uma estimativa inicial do estado. A estimativa, é obtida por meio da análise por correlação canônica kernelizada, que será apresentada posteriormente neste capítulo.

7.2 Análise de Correlação Canônica Kernelizada

O propósito nesta abordagem é o de maximizar a correlação canônica entre os dados observados que são projetados no espaço característico \mathcal{F} [153, 161, 162, 163]. Considere duas variáveis aleatórias $v_1 = [v_1^1 \dots v_1^N]$, $v_2 = [v_2^1 \dots v_2^N]$ e suas respectivas imagens no espaço característico dadas como: $\phi(v_1) = [\phi(v_1^1) \dots \phi(v_1^N)]$, $\phi(v_2) = [\phi(v_2^1) \dots \phi(v_2^N)]$; sendo N o número de observações de v_1 e v_2 .

O espaço característico \mathcal{F} contém a expansão ($span(\cdot)$) dos dados observados, suponha dois valores fixos pertencentes ao espaço característico \mathcal{F} dados pelas funções f_1 e f_2 :

$$f_1 = \sum_{i=1}^N \alpha_1^i \phi_1(v_1^i)$$

e

$$f_2 = \sum_{i=1}^N \alpha_2^i \phi_2(v_2^i)$$

onde α_1 e α_2 são os vetores de coeficientes associados a estas projeções.

Considere a propriedade de “kernel reproduzidor”¹(RKHS) [164, 165, 166] aplicada aos valores fixos f_1 e f_2 como:

$$f_1(v_1) = \langle \phi_1(v_1), f_1 \rangle, \quad f_2(v_2) = \langle \phi_2(v_2), f_2 \rangle$$

e a correlação entre f_1 e f_2 como:

$$\text{corr}\{f_1(v_1), f_2(v_2)\} = \text{corr}\{\langle \phi_1(v_1), f_1 \rangle, \langle \phi_2(v_2), f_2 \rangle\} \quad (7.1)$$

¹ Reproducing Kernel Hilbert Space

sendo $\langle \bullet_1, \bullet_2 \rangle$ o produto interno entre \bullet_1 e \bullet_2 .

Para resolver (7.1) é necessário calcular as matrizes de covariâncias ($cov\{\bullet_i, \bullet_j\}$) e auto-covariância ($cov\{\bullet_i, \bullet_i\}$) como:

$$cov(\langle \phi(v_1), f_1 \rangle \langle \phi(v_2), f_2 \rangle) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \phi(v_1^k), f_1 \rangle \langle \phi(v_2^k), f_2 \rangle \quad (7.2)$$

aplicando a propriedade RKHS em (7.2) temos que:

$$cov(\langle \phi(v_1), f_1 \rangle \langle \phi(v_2), f_2 \rangle) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_1^i \phi_1(v_1^i) \phi_1(v_1^k) \phi_2(v_1^j) \phi_2(v_2^k) \alpha_2^j \quad (7.3)$$

definindo

$$\sum_{i=1}^N \alpha_1^i k_1(v_1^i, v_1^k) = \sum_{i=1}^N \alpha_1^i \sum_{k=1}^N \phi_1(v_1^i) \phi_1(v_1^k) \text{ e } \sum_{i=1}^N \alpha_2^i k_2(v_2^i, v_2^k) = \sum_{i=1}^N \alpha_2^i \sum_{k=1}^N \phi_2(v_2^i) \phi_2(v_2^k) \quad (7.4)$$

então as matrizes de Gram podem ser dadas como:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_1^i k_1(v_1^i, v_1^1) & \dots & \sum_{i=1}^N \alpha_1^i k_1(v_1^i, v_1^m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N \alpha_1^i k_1(v_1^i, v_1^m) & \dots & \sum_{i=1}^N \alpha_1^i k_1(v_1^i, v_1^m) \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

e

$$K_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N k_2(v_2^j, v_2^1) \alpha_2^j & \dots & \sum_{j=1}^N \alpha_2^j k_1(v_1^j, v_1^m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N k_2(v_2^j, v_2^m) \alpha_2^j & \dots & \sum_{j=1}^N \alpha_2^j k_1(v_1^j, v_1^m) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

e a covariância kernelizada é dada como:

$$cov(\langle \phi(v_1), f_1 \rangle, \langle \phi(v_2), f_2 \rangle) = \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 \quad (7.7)$$

sendo $\alpha_1 = [\alpha_1^1 \dots \alpha_1^N]$ e $\alpha_2 = [\alpha_2^1 \dots \alpha_2^N]$.

Considerando as matrizes de variâncias iguais às matrizes de auto-covariâncias [153] ou seja: $cov\{v_1^i, v_1^i\} = var\{v_1^i\}$ e $cov\{v_2^j, v_2^j\} = var\{v_2^j\}$, as variâncias kernelizadas em termos das matrizes K_1 e K_2 podem ser expressas como:

$$var(\langle \phi(v_1), f_1 \rangle) = \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1 K_1 \alpha_1 \quad (7.8)$$

e

$$\text{var}(\langle \phi(v_2), f_2 \rangle) = \frac{1}{N} \alpha_2^T K_2 K_2 \alpha_2 \quad (7.9)$$

A partir das expressões em (7.7), (7.8) e (7.9) a correlação canônica entre f_1 e f_2 pode ser formulada em termos das matrizes K_1, K_2 como:

$$\rho_{\mathcal{F}}(K_1, K_2) = \frac{\alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^T K_1^2 \alpha_1} \sqrt{\alpha_2^T K_2^2 \alpha_2}} \quad (7.10)$$

e os valores ótimos de α_1 e α_2 que maximizam $\rho_{\mathcal{F}}$ podem ser calculados usando o método de Lagrange [167]; isto é:

$$\mathcal{L} = \alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 (1 - \alpha_1^T K_1^2 \alpha_1) + \frac{1}{2} \lambda_2 (1 - \alpha_2^T K_2^2 \alpha_2) \quad (7.11)$$

sendo que em (7.11), é considerada a variância como:

$$\alpha_1^T K_1^2 \alpha_1 = \alpha_2^T K_2^2 \alpha_2 = 1$$

as derivadas parciais de (7.11) são dadas como:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha_1} = K_1 K_2 \alpha_2 - \lambda_1 K_1^2 \alpha_1, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha_2} = (K_1 K_2)^T \alpha_1 - \lambda_2 K_2^2 \alpha_2 \quad (7.12)$$

igualando com zero as derivadas parciais em (7.12), supomos como satisfeitas as condições de otimalidade. Pré-multiplicando à parte esquerda de (7.12) por α_1^T temos:

$$\alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1^T K_1^2 \alpha_1 = 0$$

e à parte direita por α_2^T

$$\alpha_2^T (K_1 K_2)^T \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2^T K_2^2 \alpha_2 = 0$$

considerando a variância $\alpha_1^T K_1^2 \alpha_1 = \alpha_2^T K_2^2 \alpha_2 = 1$, então:

$$\alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 + \lambda_1 = 0$$

e

$$\alpha_2^T (K_1 K_2)^T \alpha_1 + \lambda_2 = 0$$

supondo que $\lambda_1 = \lambda_2 = \rho$ temos que

$$\alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 = \alpha_2^T (K_1 K_2)^T \alpha_1 = \rho$$

e (7.12) pode ser expressa como

$$K_1 K_2 \alpha_2 - \rho K_1^2 \alpha_1 = 0, \quad (K_1 K_2)^T \alpha_1 - \rho K_2^2 \alpha_2 = 0 \quad (7.13)$$

o termo α_2 à direita pode ser expresso como:

$$\alpha_2 = \rho^{-1} (K_2^2)^{-1} (K_1 K_2)^T \alpha_1$$

substituindo α_2 à esquerda de (7.13) pode ser expressa equação em termos de α_1 e ρ como:

$$(K_1 K_2 (K_2^2)^{-1} (K_1 K_2)^T - \rho^2 K_1^2) \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0 \text{ e } (K_2^2)^{-1} > 0$$

Sendo α_1 uma solução não trivial, então:

$$\det(K_1 K_2 (K_2^2)^{-1} (K_1 K_2)^T - \rho^2 K_1^2) = 0 \quad (7.14)$$

Substituindo as matrizes K_1^2 e K_2^2 em (7.14) pela raiz quadrada que satisfaz:

$$K_1^2 = (K_1^2)^{1/2} (K_1^2)^{T/2}, \quad (K_2^2) = ((K_2^2))^{1/2} ((K_1^2))^{T/2}$$

e definindo $\Upsilon := ((K_1^2))^{-1/2} ((K_2^2))^{-T/2}$, temos:

$$\det(\Upsilon \Upsilon^T - \rho^2 I_k) = 0 \quad (7.15)$$

o qual implica que ρ_i^2 com $i = 1, 2, \dots$ são os autovalores de $\Upsilon \Upsilon^T$ e que α_1^i os correspondentes autovetores.

De forma semelhante são calculados os autovalores associados aos autovetores α_2^i . Os autovalores e autovetores encontrados correspondem com a maximização das variáveis canônicas.

O problema de encontrar os α_1, α_2 que maximizem a correlação entre v_1 e v_2 pode ser solucionado por diferentes abordagens; as mais usadas são: a de Hotelling [146], a decomposição incompleta de Cholesky [153] e a de projeções ortogonais [142, 91]. Neste capítulo usamos as últimas duas abordagens citadas, a primeira para calcular a interseção entre os subespaços do passado e do futuro da série temporal; e a segunda para determinar a correlação canônica condicional entre os subespaços do passado e do futuro do sistema.

7.2.1 Regularização

Em geral a equação (7.10) pode não fornece uma estimativa adequada das correlações canônicas kernelizadas, isto devido a que as matrizes de Gram podem não ter posto cheio o que faz que a correlação entre as variáveis seja sempre um. A solução a este problema pode ser a inserção de um termo de regularização constante e positivo κ [153]. Então a equação (7.10) pode ser regularizada como:

$$\rho_{\mathcal{F}}^{\kappa}(K_1, K_2) = \max_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^T (K_1 + \frac{N\kappa}{2}I) \alpha_1} \sqrt{\alpha_2^T (K_2 + \frac{N\kappa}{2}I) \alpha_2}} \quad (7.16)$$

sendo que a variância pode ser expressa em termos de κ como:

$$\text{var}(f_1(v_1)) + \kappa \|f_1\|_{\mathcal{F}}^2 = \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1^2 \alpha_1 + \kappa \alpha_1^T K_1 \alpha_1 \approx \alpha_1^T \left(K_1 + \frac{N\kappa}{2}I \right)^2 \alpha_1$$

7.2.2 Análise de Correlação Canônica Condicional Kernelizada

Nesta seção apresentamos definição da análise de correlação canônica condicional a partir das matrizes de covariâncias condicionais. Isto devido a que o sistema tratado é um sistema estocástico com entradas exógenas. Aqui realizamos uma extensão do método CCA [40, 6] LTI para tratar sistemas não lineares através da análise de correlação canônica condicional kernelizada. Em princípio supomos que o sistema não contém realimentação entre as entradas e as saídas.

Definição: Para três vetores aleatórios $a, b, c \in \mathcal{H}$ é definida a matriz de covariância condicional [40] como:

$$\text{cov}(ab | c) = E\{\hat{E}(a | b^\perp) \hat{E}(b | c^\perp)^T\} \quad (7.17)$$

que em termos das matrizes de covariâncias e autocovariâncias, pode ser expressa como:

$$\text{cov}(ab | c) = \text{cov}(a, b) - \text{cov}(a, c)(\text{cov}(c, c))^{-1} \text{cov}(c, b) \quad (7.18)$$

supondo que $(\text{cov}(c, c))^{-1}$ existe. A prova pode ser vista em [40]. A partir de (7.17), as matrizes de covariância condicional associadas às variáveis a, b, c podem ser expressas

como:

$$\begin{aligned}
cov(bb | c) &= E\{\hat{E}(b | c^\perp)\hat{E}(b | c^\perp)^T\} \\
cov(ab | c) &= E\{\hat{E}(a | c^\perp)\hat{E}(b | c^\perp)^T\} \\
cov(ac | b) &= E\{\hat{E}(a | b^\perp)\hat{E}(c | b^\perp)^T\} \\
cov(cc | b) &= E\{\hat{E}(c | b^\perp)\hat{E}(c | b^\perp)^T\}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

A partir das matrizes de covariâncias para duas variáveis aleatórias em (7.7), (7.8) e (7.9), podem ser expressadas as matrizes de covariâncias condicionais de três variáveis aleatórias; para isto primeiro definimos as matrizes de covariâncias kernelizadas de a, b, c como:

$$\begin{aligned}
cov(b, c) &= \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 \\
cov(b, b) &= \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1^2 \alpha_1 \\
cov(c, c) &= \frac{1}{N} \alpha_2^T K_2^2 \alpha_2 \\
cov(b, a) &= \frac{1}{N} \alpha_3^T K_3 K_4 \alpha_4 \\
cov(a, a) &= \frac{1}{N} \alpha_4^T K_4^2 \alpha_4 \\
cov(c, a) &= \frac{1}{N} \alpha_5^T K_5 K_6 \alpha_6 \\
cov(c, b) &= cov(b, c)^T \\
cov(a, b) &= cov(b, a)^T \\
cov(a, c) &= cov(c, a)^T
\end{aligned} \tag{7.20}$$

sendo que as matrizes K_1, \dots, K_6 representam as matrizes de Gram na forma apresentada em (7.5) e $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ os coeficientes associados às expansões lineares das funções f_1, \dots, f_6 na forma $f_l = \sum_{i=1}^N \alpha_l^i \phi_1(x_l^i)$ para $l = 1, \dots, 6$. Finalmente pela definição em (7.18), as matrizes de covariâncias condicionais kernelizadas podem ser expressas como em (7.19) com o uso de (7.20).

7.3 Identificação LPV via Correlação Canônica Kernelizada

Nesta seção apresentaremos duas novas propostas baseadas nos métodos IC-CALPV e 3C2LPV para identificar sistemas LPV: *i*). Método de identificação de siste-

mas MIMO LPV via correlação canônica kernelizada de dois passos-K2SIDLPV² *ii*). Método de identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica condicional kernelizada-3C2ILPV³. Nossa proposta consiste em dois passos, no primeiro é efetuada a obtenção do vetor de estado inicial e no segundo o modelo LPV. No primeiro passo é usada a teoria da realização estocástica mínima de Akaike (versão kernelizada-KCCA) para obter uma primeira aproximação do vetor de estado; isto é alcançado supondo que a saída y_k do sistema LPV contém toda a informação dos estados, entradas e parâmetros variantes no tempo. Isto permite obter uma primeira aproximação do vetor de estado usando somente y_k . Outra alternativa para determinar o vetor de estado inicial é usar a correlação canônica condicional kernelizada (K3CA), inserindo as entradas exógenas na identificação. Posteriormente no segundo passo é usada nossa proposta de kernelização (K3CA) para obter uma nova estimativa do estado e identificar o sistema LPV.

7.3.1 Método K2SIDLPV

O método K2SIDLPV é dividido em dois passos, *i*). obtenção da estimação do vetor de estado inicial x_k^0 a partir da saída y_k , e *ii*) obtenção do modelo LPV a partir do conjunto de dados $\{u_k, y_k, \delta_k, x_k^0\}$.

7.3.2 Passo 1: Estimação do vetor de estado inicial via KCCA

A partir da teoria de realização mínima de Akaike [142], toda a informação necessária para representar um sistema estocástico está contida nas saídas futuras em relação as entradas passadas e presentes do sistema. A representação matemática disto é definida por Akaike como o espaço preditor; que por sua vez é gerado pelo preditor ótimo das saídas. O espaço preditor pode ser calculado via correlação canônica, o que em outras palavras corresponde ao cálculo da interseção entre os subespaços gerados pelo passado e pelo futuro das saídas do sistema.

O sistema

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{A}x_k + \mathcal{B}u_k \\ y_k &= \mathcal{C}x_k + \mathcal{D}u_k \end{aligned} \tag{7.21}$$

² Kernel Canonical Correlation Two Steps System Identification of LPV Systems

³ Conditional Canonical Correlation Kernelized for MIMO LPV System Identification

é expresso como uma somatória de matrizes dependentes do parâmetro no instante k , como:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum_{j=0}^s A_j \delta_{k,j} & \mathcal{B} &= \sum_{j=0}^s B_j \delta_{k,j} \\ \mathcal{C} &= \sum_{j=0}^s C_j \delta_{k,j} & \mathcal{D} &= \sum_{j=0}^s D_j \delta_{k,j}\end{aligned}$$

sendo $\delta_{k,0} = 0$. Supondo que a interface do sistema LPV afim aos parâmetros mantém a estrutura de um sistema linear, a saída do sistema dependente do conjunto de entradas e parâmetros pode ser expressa como:

$$\begin{array}{l} y_k = \mathcal{C}x_k + \mathcal{D}u_k \\ y_{k+1} = \mathcal{C}x_{k+1} + \mathcal{D}u_{k+1} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{k+1} = \mathcal{A}x_k + \mathcal{B}u_k \\ x_{k+2} = \mathcal{A}(\mathcal{A}x_k + \mathcal{B}u_k) + \mathcal{B}u_{k+1} \\ \vdots \end{array}$$

Assim, o vetor de saídas pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}\mathcal{A} \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^2 \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\Theta(\delta_k)} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{B} & \mathcal{D} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B} & \dots & \mathcal{D} & 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^2\mathcal{B} & \dots & \dots & \mathcal{D} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\Psi(\delta_k)} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ u_{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

A equação em (7.22), representa as saídas do sistema a partir do modelo de estado afim aos parâmetros, representações semelhantes podem ser vistas em [159, 29, 168].

O espaço preditor é o espaço gerado pelos preditores ótimos das saídas futuras baseado nas saídas passadas y_{k-l} . As saídas futuras y_{k+l} são projetadas ortogonalmente no espaço gerado pelas saídas do passado Y_k^- . O erro de estimação $\tilde{y}_{f|p}$ pode ser expresso por meio do projetor ótimo $\hat{y}_{f|p}$ ⁴ como:

$$\tilde{y}_{f|p} = y_{k+l} - \hat{y}_{f|p}$$

o que permite especificar a condição de otimalidade para o preditor ótimo [1, 6] como:

$$J = E\{\|\tilde{y}_{f|p}\|^2\} \quad (7.23)$$

⁴ f, p , representam o futuro e o passado respectivamente

o espaço preditor através da expansão linear do preditor ótimo é:

$$X = \overline{\text{span}}\{\hat{y}_{f|p,k+l} \mid l = 1, 2, \dots\}$$

onde $\overline{\text{span}}\{\cdot\}$ é um espaço fechado de Hilbert gerado pelos elementos finitos de $\{\cdot\}$. Na teoria desenvolvida por Akaike é possível determinar os espaços preditores do futuro no passado $X_{f|p}$ e do passado no futuro $X_{p|f}$ através da projeção ortogonal; cada um destes espaços têm associadas bases ortogonais; no caso do preditor do futuro no passado a base é: $x^f = \{x_1^f, x_2^f, x_3^f, \dots, x_r^f\}$ e no caso do preditor do passado no futuro a base ortogonal é: $x^p = \{x_1^p, x_2^p, x_3^p, \dots, x_r^p\}$. Cabe salientar que cada uma destas bases leva a uma realização diferente, isto pode ser aprofundado em [6, 169, 142]. No caso de nosso interesse, pretendemos obter uma estimativa do vetor de estado e não a realização Markoviana do sistema; portanto obter uma base ortonormal a partir do preditor do futuro no passado das saídas é suficiente.

Como mencionado anteriormente, se o erro da predição for zero o estimador ótimo das saídas $\hat{y}_{f|p}$ será equivalente às saídas futuras y_{k+l} e então as matrizes de correlação poderão ser calculadas através da covariância das saídas do passado com o preditor ótimo do futuro dado o passado, ou seja:

$$\Lambda_{l+m} = E\{\hat{y}_{f|p,K+l} u_{K+m}^T\} \quad l, m = 0, 1, \dots$$

então as matrizes de covariâncias entre o passado e o futuro das saídas [4, 6, 1], pode ser expressa como:

$$\Lambda(l) = CA^{l-1}(AE\{x_k x_k^T\}C^T + E\{\lambda_k \sigma_k\})$$

e a matriz de Hankel, de forma similar com o caso determinístico, pode ser expressa como:

$$H = E\{f_k p_k^T\} = \begin{bmatrix} \Lambda(0) & \Lambda(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda(M) & \Lambda(M+1) & \dots \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Na matriz de Hankel em (7.24) estão contidas as matrizes de covariâncias do futuro e do passado das saídas e nas matrizes bloco de Toeplitz estão contidas as auto-covariâncias do futuro e do passado, isto é:

$$\Psi_+ = E\{f_k f_k^T\} \quad \Psi_- = E\{p_k p_k^T\} \quad (7.25)$$

As matrizes em (7.25) podem ser decompostas como:

$$\Psi_+ = \Psi_+^{1/2} \Psi_+^{T/2} = LL^T \quad \Psi_- = \Psi_-^{1/2} \Psi_-^{T/2} = MM^T \quad (7.26)$$

Neste passo em [40, 6, 4] e nas referências associadas a esses trabalhos calculam-se as matrizes de covariâncias e de autocovariâncias via decomposição LQ, a qual tem-se demonstrado eficaz em numerosos trabalhos de identificação. Neste trabalho usamos o cálculo de ditas matrizes de covariância kernelizadas como apresentado na seção 7.2, isto porque partimos do suposto que o sistema LPV fornece uma saída não linear como discutido anteriormente. Assim, as matrizes de Toeplitz e de Hankel são descritas como:

$$\Psi_+ = (\alpha_1 K_1^2 \alpha_1)^{1/2} (\alpha_1 K_1^2 \alpha_1)^{T/2} = LL^T \quad \Psi_- = (\alpha_2 K_2^2 \alpha_2)^{1/2} (\alpha_2 K_2^2 \alpha_2)^{T/2} = MM^T \quad (7.27)$$

$$H = \alpha_1 K_1 K_2 \alpha_2 \quad (7.28)$$

e a decomposição em valores singulares é dada como:

$$L^{-1} \alpha_1 K_1 K_2 \alpha_2 M^{-T} = U \Sigma V^T$$

Resolvendo o problema de autovalor generalizado (GEP⁵) associado à análise de correlação canônica kernelizada e regularizada são obtidos os autovetores α_1 e α_2 e os respectivos autovalores com os quais podemos formular o vetor de estado inicial como:

$$x_k^0 = V^T M^{-1} \alpha_2 \quad (7.29)$$

7.3.2.1 GEP Kernelizado e Regularização

Para duas variáveis, o GEP (Problema de Autovalor Generalizado) é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K_1 K_2 \\ K_2 K_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}_\kappa} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} (K_1 + \frac{N\kappa}{2}I)^2 & 0 \\ 0 & (K_2 + \frac{N\kappa}{2}I)^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{D}_\kappa} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

e para mais de duas variáveis vide [153]. O mínimo autovalor deste problema pode ser denotado como

$$\lambda_{\mathcal{F}}^\kappa(K_1, \dots, K_m)$$

⁵ do inglês: “Generalized Eigenvalue Problem”

e pode ser referido como a primeira correlação canônica kernelizada. A resolução do problema de autovalor generalizado pode ser expressa através da busca da matriz \mathbb{C} tal que $\mathbb{D}_\kappa = \mathbb{C}^T \mathbb{C}$ onde $\beta = \mathbb{C}\alpha$ e posteriormente transformando-o em $\mathbb{C}^{-T} \tilde{\mathbb{K}}_\kappa \mathbb{C}^{-1} \beta = \lambda \beta$ o problema do KCCA se converte em buscar o menor autovalor da matriz:

$$\tilde{\mathbb{K}}_\kappa = \mathbb{D}_\kappa^{-1/2} \mathbb{K}_\kappa \mathbb{D}_\kappa^{-1/2} = \begin{bmatrix} I & r_\kappa(K_1)r_\kappa(K_2) & \dots & r_\kappa(K_1)r_\kappa(K_m) \\ r_\kappa(K_2)r_\kappa(K_1) & I & \dots & r_\kappa(K_2)r_\kappa(K_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_\kappa(K_m)r_\kappa(K_1) & r_\kappa(K_m)r_\kappa(K_2) & \dots & I \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

onde $r_\kappa(K_i) = K_i(K_i + \frac{N\kappa}{2}I)^{-1} = (K_i + \frac{N\kappa}{2}I)^{-1}K_i$; se temos o autovetor $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{\mathbb{K}}_\kappa$ então podemos calcular o autovetor generalizado como: $\alpha_i = (K_i + \frac{N\kappa}{2}I)^{-1} \tilde{\alpha}_i$. Decompondo $r_\kappa(K_1)$ como:

$$r_\kappa(K_i) = (K_i + \frac{N\kappa}{2}I)^{-1}K_i = \begin{bmatrix} U_i & V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i & V_i \end{bmatrix}^T = U_i R_\kappa U_i^T$$

então $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U} R_\kappa \mathbb{U}^T + \mathbb{V} \mathbb{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{V} \end{bmatrix}^T$, sendo

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_m \end{bmatrix} \quad \mathbb{V} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_m \end{bmatrix} \quad R_\kappa = \begin{bmatrix} I & R_1 U_1^T U_2 R_2 & \dots & R_1 U_1^T U_m R_m \\ R_2 U_2^T U_1 R_1 & I & \dots & R_2 U_2^T U_m R_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_m U_m^T U_1 R_1 & R_m U_m^T U_2 R_2 & \dots & I \end{bmatrix}$$

então o menor autovalor de $\tilde{\mathbb{K}}_\kappa$ é igual ao menor autovalor de R_κ . O vetor de estado inicial em (7.29), pode ser expresso como

$$x_k^0 = r_\kappa(K_2)^{1/2} \alpha_2 \quad (7.32)$$

7.3.3 Passo 2: Estimação do Sistema LPV

Neste passo é estimado o vetor de estado a partir da mínima interface entre os subespaços do passado e do futuro gerados pelas matrizes estendidas como na seção 5.3.2 e nas saídas do sistema. Para este propósito é usada a análise de correlação canônica como na seção 7.3.2 para encontrar o vetor de estado a partir do novo conjunto de dados y_k, u_k, x_k^0 , seguindo os passos:

1. **Matrizes de Dados** Os dados usados como entradas geram uma matriz estendida $u_{a0|t}$ como a na seção 5.3.2 e sua respectiva expansão linear $U_{a0|M}$:

$$U_{a0|M} = \begin{bmatrix} u_{a0|t,0} & u_{a0|t,1} & \cdots & u_{a0|t,N-M+1} \\ u_{a0|t,1} & u_{a0|t,2} & \cdots & u_{a0|t,N-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{a0|t,M} & u_{a0|t,M+1} & \cdots & u_{a0|t,N} \end{bmatrix}$$

As saídas y_k medidas geram sua respectiva expansão linear $Y_{0|M}$ como:

$$Y_{0|M} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{N-M+1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_M & y_{M+1} & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$

2. Determine os subespaços do passado U_a^- , Y_a^- e do futuro U_a^+ , Y_a^+ para calcular as matrizes de Gram K_1 e K_2 .
3. Obtenha a solução do problema em (7.16) e calcule o vetor de estado $x_k^{(*)}$ como no passo 1.

O modelo LPV identificado tem a estrutura:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + K_0 e_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \delta_k \otimes x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \delta_k \otimes u_k \end{bmatrix} + e_k \end{aligned}$$

após os dois passos enumerados acima. O algoritmo associado ao método K2SIDLPV é apresentado a seguir.

7.3.4 Algoritmo K2SIDLPV

Os estágios compreendidos no passo 1 são:

1. Obtenha a estimação do vetor de estado inicial $x_k^{(0)}$ como no passo 1 da seção 7.3.2. Calcule a interface mínima entre o subespaço do passado das saídas

$Y_{0|M}^-$ e o subespaço do futuro das saídas $Y_{0|M}^+$, usando a análise de correlação canônica Kernelizada (KCCA⁶).

2. obtenha a estimação do vetor de estado $x_k^{(*)}$ como no passo 2 da seção 7.3.3. Calcule a interface mínima entre o subespaço do passado $Wp = \begin{bmatrix} U_{a0|M}^- & Y_{0|M}^- \end{bmatrix}^T$ e o subespaço do futuro $Wf = \begin{bmatrix} U_{a0|M}^+ & Y_{0|M}^+ \end{bmatrix}^T$, usando KCCA.
3. Calcule o sistema MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros usando a estimativa $x_k^{(*)}$, e as medidas de u_k, y_k e δ_k , como segue:
 - a) Dado $\hat{x}_k = x_k^{(*)}$, compute as matrizes (A,B,C,D) como em (6.7). Então, calcule as matrizes do modelo MIMO LPV como: $B_0 = B(1 : n, 1 : m)$, $B_p = B(1 : m, 1 : m + ms)$, $A_p = B(1 : n, (m + ms) + 1 : m + ms + ns)$, $D_0 = D(1 : p, 1 : m)$, $D_p = (1 : p, m + 1 : m + ms)$, $C_p = D(1 : p, (m + ms) + 1 : m + ms + ns)$.
 - b) Finalmente determine o ganho de Kalman (5.29) e a solução da ARE⁷ como em (6.3).

7.4 Método 3CKLPV

O método 3CKLPV usa a análise de correlação canônica condicional kernelizada (K3CA) para calcular a mínima interface entre os subespaços do passado e do futuro dos conjuntos de dados de entrada e saída. Neste caso diferentemente do método K2SIDLPV, é considerado o sistema com entradas exógenas e calculadas as projeções com as covariâncias condicionais kernelizadas. O método é dividido em dois passos, o primeiro permite encontrar o vetor de estado inicial x_k^0 a partir do conjunto de dados y_k, u_k, δ_k . No segundo passo usamos a estimativa do vetor de estado e os dados medidos para estimar o novo vetor de estado e o modelo do sistema LPV.

⁶ do inglês: “Kernelized Canonical Correlation Analysis”

⁷ Algebraic Riccati Equation

7.4.1 Passo 1: Vetor de Estado Inicial

A estimação do vetor de estado inicial nesta seção estende a sistemas não lineares os conceitos apresentados na seção 3.3.2.

7.4.1.1 Matrizes de Covariâncias Condicionais Kernelizadas

O propósito é calcular a interface mínima entre os subespaços do passado e do futuro do sistema com entradas exógenas; para isto definimos os subespaços do passado a partir do conjunto w_k dado por: $w = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix}$ como $W_p = \{s\bar{p}an(w_{k-l}) \mid l = 1, 2, \dots\}$, e os subespaços do futuro das entradas $U^+ = \{s\bar{p}an(u_{k+l}) \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$ e do futuro das saídas $Y^+ = \{s\bar{p}an(y_{k+l}) \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$ a partir da matriz de covariâncias dada como:

$$\frac{1}{N} \begin{bmatrix} U_{s|2s-1} \\ \check{W}_{0|s-1} \\ Y_{s|2s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{s|2s-1} \\ \check{W}_{0|s-1} \\ Y_{s|2s-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & \Sigma_{up} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{p,u} & \Sigma_{pp} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{fu} & \Sigma_{fp} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cov(u, u) & cov(u, p) & cov(u, f) \\ cov(p, u) & cov(p, p) & cov(p, f) \\ cov(f, u) & cov(f, p) & cov(f, f) \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

As notações $U_{s|2s-1}$, $Y_{s|2s-1}$ e $\check{W}_{0|s-1}$ em (7.33), correspondem as matrizes de Hankel apresentadas nas equações (3.39), (3.40) e (3.41) é a matriz de Toeplitz. Para simplificar a notação em (7.33), as matrizes de covariâncias $\Sigma_{**} = cov(*, *)$ contêm os sub índices u, f, p que representam os subespaços: $U^+ = u$, $Y^+ = f$ e $W_p = p$.

As matrizes de covariâncias e autocovariâncias em (7.33), são calculadas através do método kernelizado apresentado na seção 7.2, usando as equações em (7.16). A correção canônica condicional baseia-se no cálculo da covariância condicional como em (7.19), e (7.20). Então as matrizes de covariância condicionais para o sistema contemplado nesta seção são dadas como em (7.18), isto é:

$$cov(up \mid f) = cov(u, p) - cov(u, f)(cov(f, f))^{-1}cov(f, p)$$

e de forma similar para as covariâncias condicionais:

$$\begin{aligned} cov(pp \mid f) &= E\{\hat{E}(p \mid f^\perp)\hat{E}(p \mid f^\perp)^T\} \\ cov(up \mid f) &= E\{\hat{E}(u \mid f^\perp)\hat{E}(p \mid f^\perp)^T\} \\ cov(uf \mid p) &= E\{\hat{E}(u \mid p^\perp)\hat{E}(f \mid p^\perp)^T\} \\ cov(ff \mid p) &= E\{\hat{E}(f \mid p^\perp)\hat{E}(f \mid p^\perp)^T\} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
cov(p, f) &= \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1 K_2 \alpha_2 \\
cov(p, p) &= \frac{1}{N} \alpha_1^T K_1^2 \alpha_1 \\
cov(f, f) &= \frac{1}{N} \alpha_2^T K_2^2 \alpha_2 \\
cov(p, u) &= \frac{1}{N} \alpha_3^T K_3 K_4 \alpha_4 \\
cov(u, u) &= \frac{1}{N} \alpha_4^T K_4^2 \alpha_4 \\
cov(f, u) &= \frac{1}{N} \alpha_5^T K_5 K_6 \alpha_6 \\
cov(f, p) &= cov(b, c)^T \\
cov(u, p) &= cov(b, a)^T \\
cov(u, f) &= cov(c, a)^T
\end{aligned}$$

7.4.1.2 Matrizes de \mathcal{C} , \mathcal{O} Estendidas e Vetor de Estado

As matrizes de controlabilidade e observabilidade estendidas são calculadas usando as decomposições em valores singulares dadas por:

$$\begin{aligned}
cov(ff | u) &= U_{ff|u} \Sigma_{ff|u} V_{ff|u}^T & e & \quad cov(pp | u) = U_{pp|u} \Sigma_{pp|u} V_{pp|u}^T \\
S_f &= \sqrt{\Sigma_{ff|u}} & e & \quad S_p = \sqrt{\Sigma_{pp|u}} \\
L_f &= V_{ff|u} S_f^{-1} U_{ff|u}^T & e & \quad L_p = V_{pp|u} S_p^{-1} U_{pp|u}^T
\end{aligned}$$

O produto das matrizes de observabilidade e de controlabilidade é dado por:

$$\mathcal{O}\mathcal{C} = L_f^{-1} cov(fp | u) L_p^{-T}$$

sendo a observabilidade e a controlabilidade estendidas expressas como:

$$\begin{aligned}
L_f^{-1} cov(fp | u) L_p^{-T} &= U \Sigma V^T, \\
\mathcal{O} &= L_f U \Sigma^{1/2} & \mathcal{C} &= \Sigma^{1/2} V^T L_p^T
\end{aligned} \tag{7.34}$$

e a sequência de estado inicial pode ser calculado como:

$$\hat{X}_k^0 = \mathcal{C} cov(pp|u)^{-1} W_p$$

A base de \hat{X}_k^0 corresponde ao vetor de estado inicial x_k^0 .

7.4.2 Passo 2: Modelo MIMO LPV

Neste passo, com o uso da análise de correlação canônica condicional kernelizada é identificado o modelo dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(N_i)} &= A_0 \hat{x}_k^{(N_i)} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix} u_{a0|t,k}^{(N_i)} + \lambda_k^{(N_i)} \\ y_k &= C_0 \hat{x}_k^{(N_i)} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} u_{a0|t,k}^{(N_i)} + \zeta_k^{(N_i)} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Para isto, são definidos os subespaços do passado, e do futuro como: w_k dado por: $w_k = \begin{bmatrix} u_{a0|t,k}^{(N_i)} \\ y_k \end{bmatrix}$ como $W_p = \{sp\bar{a}n(w_{k-l}) \mid l = 1, 2, \dots\}$, e os subespaços do futuro das entradas $U^+ = \{sp\bar{a}n(u_{a0|t,k+l}^{(N_i)}) \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$ e do futuro das saídas $Y^+ = \{sp\bar{a}n(y_{k+l}) \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$; posteriormente são calculadas as matrizes de covariâncias condicionais kernelizadas e o vetor de estado $x_{k+1}^{(N_i)}$.

As matrizes de estado do modelo em (7.35) com ruído não branco são obtidas a partir da estimação do vetor de estado $x_{k+1}^{(N_i)}$, como:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_a \\ C_0 & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} KE_k \\ E_k \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

onde \hat{X}_{k+1} é a sequência de estado no instante $k+1$, E_k a sequência do vetor de inovação, $B_a = \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix}$ e $D_a = \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix}$ as matrizes de estado aumentadas.

Como passo final as matrizes do modelo LPV (5.2) com dependência afim aos parâmetros, podem ser extraídas da aproximação LTI em (7.36) como:

$B_0 = B_a(1 : n, 1 : m)$, $B_p = B_a(1 : m, 1 : m + ms)$, $A_p = B_a(1 : n, (m + ms) + 1 : m + ms + ns)$, $D_0 = D_a(1 : p, 1 : m)$, $D_p = D_a(1 : p, m + 1 : m + ms)$, $C_p = D_a(1 : p, (m + ms) + 1 : m + ms + ns)$.

O ganho de Kalman do modelo MIMO LPV é dado por:

$$K_0 = (A_0 P C_0^T + S)(C_0 P C_0^T + R)^{-1}$$

onde P é a solução da equação algébrica de Riccati:

$$P = A_0 P A_0^T - (A_0 P C_0^T + S)(C_0 P C_0^T + R)^{-1}(A_0 P C_0^T + S)^T + Q$$

7.4.3 Algoritmo 3CKLPV

1. Calcule o vetor de estado inicial a partir do conjunto de dados $\{y_k, u_k\}$ usando correlação canônica condicional kernelizada como no passo 1 seção 7.4.1.
2. Calcule o vetor de estado do modelo em (7.35), a partir do conjunto de dados $\{y_k, u_k, \delta_k, x_k^0\}$ usando correlação canônica condicional kernelizada como no passo 2 seção 7.4.2.
3. Determine as matrizes de estado do modelo em (7.35) e as matrizes de estado do modelo MIMO LPV como na seção 7.4.2.

7.5 Aplicação

Nesta seção aplicamos os métodos K2SIDLPV e 3CKLPV para a identificação do modelo em [62], dado por:

$$\begin{aligned}
 A0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, \\
 A1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,4276 & -0,51 \end{bmatrix} \\
 B0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \\
 B1 &= \begin{bmatrix} 1,073 \\ 1,075 \end{bmatrix} \\
 C &= [0,443 \quad 0,06 \quad 0 \quad 0] \\
 D &= [0,5 \quad 0]
 \end{aligned}$$

O vetor de parâmetros de escalonamento é dado por:

$$\delta_k = \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t/100) \quad (7.37)$$

A entrada u_k é um sinal periódico com perturbação aleatória ruído branco. O critério de avaliação é o VAF em (5.37). Realizamos 100 testes Monte Carlo para determinar a variância do método e sua eficácia.

7.5.1 K2SIDLPV

Nas figuras 50 e 51 são apresentadas as médias da VAF e do tempo de processamento respectivamente. A configuração do algoritmo é dada na tabela 7.

Tabela 7 – Configuração do Algoritmo K2SIDLPV1

Tipo de Kernel	κ	# PI	# IN	$\bar{VAF} \%$	$\bar{T}empo \%$
Gaussiano	1×10^{-5}	2	1	$\hat{y} = 87$	0.15 s

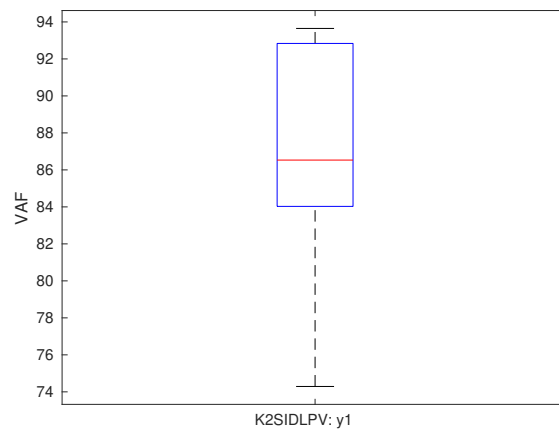


Figura 50 – Média{ VAF }

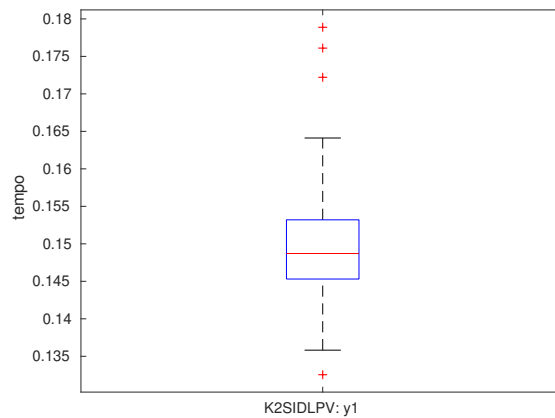


Figura 51 – Tempo transcorrido na execução do algoritmo

Pode se dizer que o desempenho do método é adequado e o tempo de processamento é bem baixo, em média 0,15 segundos.

Na figura 52, é apresentada uma comparação gráfica da saída do sistema LPV com a de um dos modelos estimados (7.38) nas 100 simulações

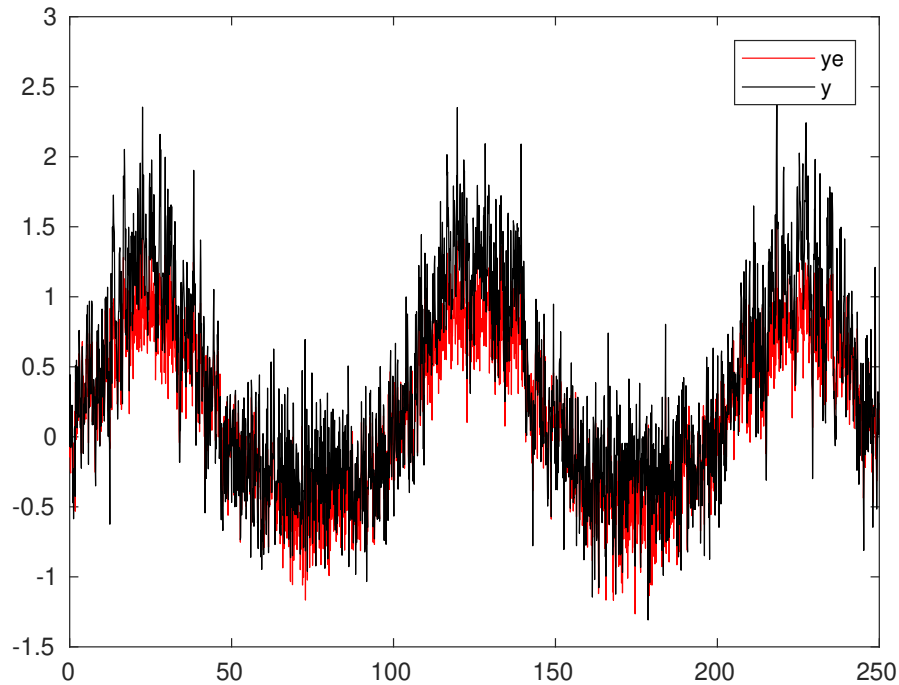


Figura 52 – Saída Comparada no Tempo.

$$A0 = \begin{bmatrix} 0.7493 & 0.0288 \\ -0.0857 & 0.6535 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$$A1 = \begin{bmatrix} -0.0867 & -0.1403 \\ -0.0168 & -0.2293 \end{bmatrix}, \quad B0 = \begin{bmatrix} -0.0220 \\ -0.0055 \end{bmatrix}, \quad B1 = \begin{bmatrix} -0.0403 \\ -0.0231 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5.5149 & -1.6062 & -6.0343 & -8.4713 \end{bmatrix}$$

$$D0 = \begin{bmatrix} 0.9397 & 0.1691 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.0035 & 0 \\ 0.0059 & 0 \end{bmatrix}$$

7.5.2 3CKLPV

Nas figuras 53 e 54 são apresentadas as médias da VAF e do tempo de processamento respectivamente. A configuração do algoritmo é dada na tabela 8.

Tabela 8 – Configuração do Algoritmo 3CKLPV

Tipo de Kernel	κ	# PI	# IN	VAF %	Tempo %
Gaussiano	1×10^{-5}	0	1	$\hat{y} = 89$	0.92 s

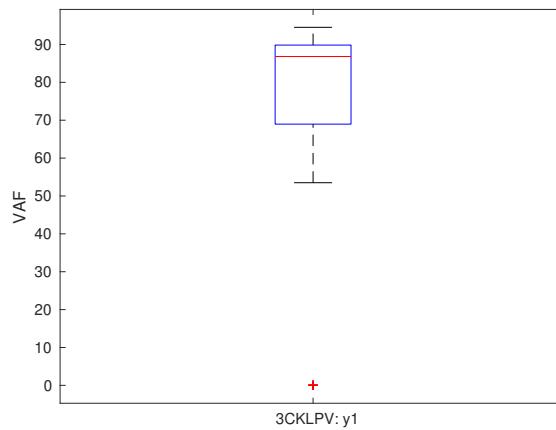


Figura 53 – Média{ VAF }

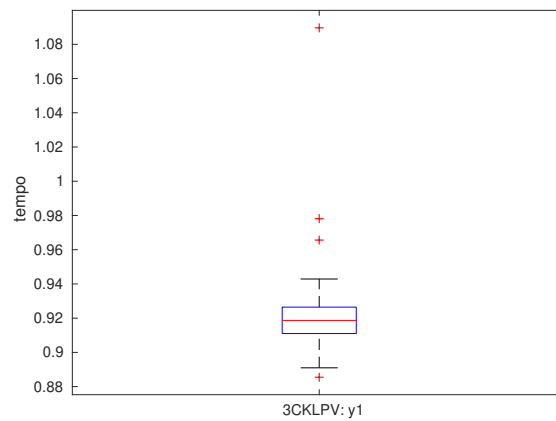


Figura 54 – Tempo transcorrido na execução do algoritmo

Pode se dizer que o desempenho do método é adequado e o tempo de processamento em média é 0,92 segundos, devido ao cálculo das matrizes de covariância condi-

cionais em função das matrizes de Gram.

7.6 Conclusão

Neste capítulo propomos duas nova abordagem para o problema de realização estocástica não linear baseada na teoria de análise de correlação canônica kernelizada aqui apresentada e fundamentada no trabalho de Akaike. Nossa primeira proposta usa tal teoria de realização estocástica e a análise de correlação canônica kernelizada para propor uma teoria de realização não linear de sistemas em espaço de estado. Esta proposta permite que o método kernelizado de identificação de sistemas MIMO LPV de dois passos **K2SIDLPV** seja por nós proposto. Ele usa a idéia básica de realização de série temporal estocástica kernelizada para estimar um vetor de estado inicial do modelo MIMO LPV. Posteriormente o vetor de estado inicial é refinado iterativamente para que o modelo de estado MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros seja obtido.

Nossa segunda proposta usa o conceito de correlação canônica condicional kernelizada para desenvolver método e algoritmo para identificação de sistemas com entradas exógenas, o que gera uma realização discreta de sistemas não lineares. Com esta segunda proposta criamos o método de identificação estocástica MIMO LPV **3CKLPV**, o qual permite o uso das entradas exógenas para a estimação de um vetor de estado inicial, e a estimação do modelo MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros em apenas dois passos.

A introdução do kernel nestes métodos permite tratar a não linearidade do sistema LPV e permite uma redução no tamanho das matrizes associadas ao cálculo da SVD. O uso da regularização do KCCA nos dois métodos reduz a variância nas identificações aumentando a confiabilidade do modelo, como se depreende dos exemplos.

Conclusão

Neste trabalho propomos métodos e algoritmos de identificação de sistemas LPV através de extensões da teoria de realização estocástica de Akaike. Também validamos e comparamos nossas propostas com método de identificação LPV existente, obtendo resultados satisfatórios, tanto em tempos de processamento como em acuidade do modelo identificado.

Nos capítulos 5 e 6 desenvolvemos nossas propostas de métodos e algoritmos de identificação de sistemas dinâmicos multivariáveis estocásticos LPV inspirados no método de identificação determinística por aproximações sucessivas.

No caso do método e algoritmo iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlações canônicas ICCALPV, o ganho de Kalman para o modelo inovativo identificado depende exclusivamente do sistema nominal do modelo LPV com dependência afim aos parâmetros.

No método e algoritmo iterativo de identificação de sistemas MIMO LPV por análise de correlação canônica condicional 3C2ILPV, identificamos um modelo inovativo com ganhos de Kalman com dependência afim aos parâmetros, o que melhora a acuidade da identificação.

No capítulo 7, fundamentados em teoria de realização kernelizada que elaboramos a partir da análise de correlação canônica kernelizada e regularizada, dois novos métodos e algoritmos de identificação de sistemas dinâmicos multivariáveis estocásticos LPV são propostos:

Método de identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica kernelizada de dois passos-K2SIDLPV e Método de identificação de sistemas MIMO LPV via correlação canônica condicional kernelizada-3C2ILPV

O K2SIDLPV usa a análise de correlação canônica kernelizada e regularizada para determinar o preditor ótimo das saídas e o vetor de estado.

O 3CKLPV usa nossa proposta de kernelização da análise de correlação canônica condicional, para determinar o vetor de estado do sistema com entradas exógenas

e o modelo LPV estocástico na forma inovativa.

Uma estrutura generalizada que permite a representação de diversos sistemas: LTI, LVT, LPV e não lineares, é explicitada no capítulo 2 de forma que também consideramos contribuição desta tese.

No capítulo 4 exploramos a estrutura generalizada do sistema dinâmico do capítulo 2 e as propriedades da LFT, para propor procedimentos de discretização de sistemas LPV contínuos, onde salientamos a discretização com períodos de amostragem variantes ou incertos, acionados por eventos, no controle em rede.

7.7 Trabalhos Futuros

Consideramos importante para a continuação das pesquisas aqui realizadas e dos resultados obtidos:

1. Estender para sistemas de malha fechada os métodos e algoritmos ICCALPV, 3CKLPV, K2SIDLPV e 3CKLPV aqui propostos para sistemas de malha aberta e de certa forma já preparados implicitamente no capítulo 2, para tal fim.
2. Estender a análise de correlação canônica kernelizada elaborada neste trabalho à identificação de outros tipos de sistemas não lineares.
3. Validar em sistemas reais experimentais os métodos ICCALPV, 3CKLPV, K2SIDLPV e 3CKLPV, a fim de comprovar suas eficácias.
4. Aplicar aos modelos discretizados LPV, métodos de controle para avaliar seu comportamento na rede. Idem em modelos LPV identificados.

Referências

- 1 BARRETO, G. *Modelagem Computacional Distribuída e Paralela de Sistemas e de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estado*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 24, 61, 167 e 168.
- 2 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Identificação por subespaços de sistemas MIMO com erros em variáveis. In: *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON*. [s.n.], 2017. Disponível em: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/DINCON2017-0081.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 61 e 68.
- 3 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Modelagem computacional de sistemas em malha fechada com erros em variáveis. In: *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON*. [s.n.], 2017. Disponível em: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/DINCON2017-0080.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 61 e 68.
- 4 Cáceres Torrico , A. F. *Identificação e Controle Estocásticos Descentralizados de Sistemas Interconectados Multivariáveis no Espaço de Estado*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 24, 61, 168 e 169.
- 5 GIESBRECHT, M. *Propostas Imuno Inspiradas para Identificação Sistemas e Realização de Séries Multivariáveis no Espaço de Estado*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2013. Citado na página 24.
- 6 FORERO, A. *Identificação no espaço de estado de séries temporais e de sistemas de malha fechada estocásticos multivariáveis utilizando análise de correlação canônica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2016. Citado 9 vezes nas páginas 24, 61, 126, 130, 159, 164, 167, 168 e 169.
- 7 Charagua Javier, M. A. *Modelagem Computacional de Dados Estocásticos Multivariáveis no Espaço de Estado de Séries Temporais e de Sistemas Dinâmicos por Decomposição Ortogonal*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2015. Citado na página 24.
- 8 Jara Alegria, E. O. *Estimação On-Line de parâmetros dependentes do estado em modelos de regressão não lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2015. Citado na página 24.

- 9 FORERO, A. J.; Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Identificação no espaço de estado de um sistema eletro mecânico usando os métodos MOESP e CCA. *XII Simposio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, Outubro 2015. Disponível em: <<http://swge.inf.br/SBAI2015/anais/422.PDF>>. Citado 4 vezes nas páginas 24, 61, 130 e 159.
- 10 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Identificação iterativa por correlação canônica de sistemas MIMO LPV. In: *XXII Congresso Brasileiro de Automática - CBA*. [s.n.], 2018. Disponível em: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-0111.pdf>>. Citado 7 vezes nas páginas 24, 35, 126, 127, 142, 146 e 157.
- 11 SERRA, G. L. de O. *Propostas de Metodologias para Identificação e Controle Inteligente*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2004. Citado na página 24.
- 12 Del Real Tamariz, A. *Modelagem Computacional de Dados e Controle Inteligente no Espaço de Estado*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2005. Citado na página 24.
- 13 Tobar Quevedo, J. B. *Propostas para Modelagem Computacional de Séries Temporais e de Sistemas Multivariáveis Variantes no Tempo no Espaço de Estado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2013. Citado na página 24.
- 14 SHAMMA, J. Gain-scheduling. In: *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*. [S.l.]: J.G. Webster (ed), John Wiley & Sons, Inc., 1998. Citado na página 27.
- 15 SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 12, n. 3, p. 101–107, 1992. Citado na página 27.
- 16 SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 8, p. 898–907, 1990. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/58498>>. Citado na página 27.
- 17 LEITH, D. J.; LEITHEAD, W. E. Survey of gain-scheduling analysis and design. *Int. J. Control*, v. 73(11), p. 1001–1025, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 31.
- 18 RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, v. 36, n. 10, p. 1401 – 1425, 2000. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109800000583>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 31.

- 19 LOVERA, M.; BERGAMASCO, M.; CASELLA, F. LPV modelling and identification: An overview. In: _____. *Robust Control and Linear Parameter Varying Approaches: Application to Vehicle Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. cap. 1, p. 3–24. ISBN 978-3-642-36110-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-36110-4_1>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 31 e 32.
- 20 SCHERER, J. M. C. W. (Ed.). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer US, 2012. Disponível em: <[10.1007/978-1-4614-1833-7](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-1833-7)>. Citado na página 27.
- 21 PELLANDA, P. C. *Comande de Systèmes Instationnaires, Séquencement de Compensateurs et Commande LPV*. Tese (Doutorado) — L'École National Supérieure de L'Aéronautique et de L'Espace, 2001. Citado na página 28.
- 22 ROSA, T. E.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F. New robust LMI synthesis conditions for mixed H_2/H_∞ gain-scheduled reduced-order dof control of discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 28, n. 18, p. 1–24, Oct 2018. Citado na página 28.
- 23 LEE, L. H.; POOLLA, K. Identification of linear parameter-varying systems via lfts. In: *35th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 2, p. 1545–1550. ISSN 0191-2216. Citado 3 vezes nas páginas 28, 32 e 34.
- 24 NEMANI, M.; RAVIKANTH, R.; BAMIEH, B. A. Identification of linear parametrically varying systems. In: *34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 3, p. 2990–2995 vol.3. ISSN 0191-2216. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 34.
- 25 CASELLA, F.; LOVERA, M. LPV lft modelling and identification: overview, synergies and a case study. In: *2008 IEEE International Conference on Computer-Aided Control Systems*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 852–857. ISSN 2165-3011. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 34.
- 26 VERDULT, V.; VERHAEGEN, M. Subspace identification of multivariable linear parameter-varying systems. *Automatica*, v. 38, n. 5, p. 805 – 814, 2002. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109801002680>>. Citado 5 vezes nas páginas 28, 29, 32, 34 e 36.
- 27 VERDULT, V.; LOVERA, M.; VERHAEGEN, M. Identification of linear parameter-varying state-space models with application to helicopter rotor dynamics. *International Journal of Control*, v. 77, n. 13, p. 1149–1159, SEP 2004. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 35.

- 28 MARCOS, A.; BALAS, G. J. Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 27, n. 2, p. 218–228, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.
- 29 TÓTH, R. *Modeling and identification of linear parameter-varying systems*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 33 e 167.
- 30 SANTOS, P. L. dos; PERDICOÚLIS, T. P. A.; NOVARA, C.; RAMOS, J. A.; RIVERA, D. E. *Linear parameter-varying system identification: new developments and trends*. [S.l.]: World Scientific, 2011. Citado na página 28.
- 31 SHAMMA, J. S. An overview of LPV systems. In: _____. *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Boston, MA: Springer US, 2012. p. 3–26. ISBN 978-1-4614-1833-7. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-1833-7_1>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 94.
- 32 SHAMMA, J. S. *Analysis and Design of Gain Scheduled Control Systems*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, MIT, May, 1988. Citado na página 29.
- 33 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Discretização de modelo afim em espaço de estado de sistemas lineares com parâmetros variantes via lft. In: *XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA2016*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 7 vezes nas páginas 29, 32, 93, 94, 113, 115 e 118.
- 34 ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996. (Feher/Prentice Hall Digital and). ISBN 9780134565675. Disponível em: <<https://books.google.co.uk/books?id=RPSOQgAACAAJ>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 93, 109, 117 e 119.
- 35 LOVERA, M.; MERCERE, G. Identification for gain-scheduling: a balanced subspace approach. In: NEW NEW YORK, USA. *Proceedings of the American control conference*. [S.l.], 2007. p. 858–863. Citado na página 32.
- 36 LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. [S.l.]: Prentice Hall, 1999. Citado na página 32.
- 37 PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. *System Identification: A Frequency Domain Approach*. [S.l.]: IEEE Press, 2001. ISBN 078360001. Citado na página 32.
- 38 VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification. Part I: the output-error state space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*, v. 56, n. 1, p. 1187–1210, 1992. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00207179208934363>>. Citado 5 vezes nas páginas 32, 61, 62, 68 e 71.

- 39 VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification. Part II: analysis of the elementary output-error state space model identification algorithm. *International Journal of Control*, v. 56, n. 1, p. 1187–1210, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 32, 61, 62 e 71.
- 40 KATAYAMA, T. *Subspace Methods for System Identification*. [S.l.]: Springer, 2005. (Communications and Control Engineering). ISBN 9781852339814. Citado 7 vezes nas páginas 32, 36, 126, 146, 153, 164 e 169.
- 41 WASSINK, M. G.; WAL, M. van de; SCHERER, C.; BOSGRA, O. LPV control for a wafer stage: beyond the theoretical solution. *Control Engineering Practice*, v. 13, n. 2, p. 231 – 245, 2005. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066104000565>>. Citado na página 32.
- 42 WANG, S.; PFIFER, H.; SEILER, P. Robust synthesis for linear parameter varying systems using integral quadratic constraints. *Automatica*, 2016. Disponível em: <[/2016/WangEtAl_16Aut_RobustSynthesisForLPVSystemsUsingIQCs.pdf](#)>. Citado na página 32.
- 43 CAIGNY, J. D.; CAMINO, J. F.; SWEVER, J. Interpolating model identification for SISO linear parameter-varying systems. *Mech. Syst. Signal Pr.*, v. 23(8), Nov 2009. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 94.
- 44 CAIGNY, J. D.; CAMINO, J. F.; SWEVER, J. Interpolation-based modelling of mimo LPV systems. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, v. 19(1), p. 46–63, 2011. Citado na página 32.
- 45 LEE, L. H.; POOLLA, K. Identification of linear parameter-varying systems using nonlinear programming. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 1, n. 121, p. 71–78, 1999. Citado na página 32.
- 46 LOVERA, M.; VERHAEGEN, M.; CHOU, C. State space identification of mimo linear parameter varying models. In: *Proceedings of the international symposium on the mathematical theory of networks and systems*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 839–842. Citado na página 32.
- 47 VERDULT, V.; LOVERA, M.; VERHAEGEN, M. Identification of linear parameter-varying state-space models with application to helicopter rotor dynamics. *International Journal of Control*, v. 77, n. 13, p. 1149–1159, 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/0020717042000274527>>. Citado na página 32.
- 48 WINGERDEN, J. van; VERHAEGEN, M. Subspace identification of MIMO LPV systems: The PBSID approach. In: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE*

Conference on. [S.l.: s.n.], 2008. p. 4516–4521. ISSN 0191-2216. Citado 4 vezes nas páginas 32, 35, 36 e 127.

49 BAMIEH, B.; GIARRÉ, L. Identification of linear parameter varying models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 12, n. 9, p. 841–853, 2002. ISSN 1099-1239. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/rnc.706>>. Citado na página 33.

50 BAMIEH, B.; L.GIARRÉ. Identification of linear parameter varying models. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 12(9), p. 841–852, 2002. Citado na página 33.

51 FELICI, F.; WINGERDEN, J.-W. van; VERHAEGEN, M. Subspace identification of MIMO LPV systems using a periodic scheduling sequence. *Automatica*, v. 43, n. 10, p. 1684 – 1697, 2007. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000510980700194X>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

52 MERCÈRE, G.; LOVERA, M.; LAROCHE, E. Identification of a flexible robot manipulator using a linear parameter-varying descriptor state-space structure. In: *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 818–823. ISSN 0191-2216. Citado na página 33.

53 TAN, X.; TANAKA, H.; OHTA, Y. 16th ifac symposium on system identification grey-box modeling of rotary type pendulum system with position-variable load*. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 16, p. 1263 – 1268, 2012. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015381271>>. Citado na página 33.

54 HARA, S. Keynote address i: Glocal control: Realization of global functions by local measurement and control. In: *8th Asian Control Conference (ASCC)*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 10–12. Citado na página 33.

55 LOVERA, M.; FIACCHINI, M.; SENAME, O.; DUGARD, L.; KARCANIAS, N.; VISSER, M.; NAVALKAR, S.; WINGERDEN, J. van. LPV model identification for flutter prediction: A comparison methods. *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPV*, v. 48, n. 26, p. 121 – 126, 2015. ISSN 2405-8963. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315023824>>. Citado na página 33.

56 ZHAO, Y.; TURK, D.; PIPELEERS, G.; SWEVERS, J. A combined global and local identification approach for LPV systems. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 28, p. 184 – 189, 2015. ISSN 2405-8963. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315027469>>. Citado na página 33.

- 57 TÓTH, R.; LAURAIN, V.; GILSON, M.; GARNIER, H. Instrumental variable scheme for closed-loop LPV model identification. *Automatica*, v. 48, n. 9, p. 2314 – 2320, 2012. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109812002920>>. Citado na página 33.
- 58 LAURAIN, V.; GILSON, M.; TÓTH, R.; GARNIER, H. Refined instrumental variable methods for identification of LPV Box and Jenkins models. *Automatica*, v. 46, n. 6, p. 959 – 967, 2010. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109810000981>>. Citado na página 33.
- 59 ABBAS, H.; WERNER, H. An instrumental variable technique for open-loop and closed-loop identification of input-output LPV models. In: *European Control Conference (ECC), 2009*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2646–2651. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- 60 BUTCHER, M.; KARIMI, A.; LONGCHAMP, R. On the consistency of certain identification methods for linear parameter varying systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 41, n. 2, p. 4018 – 4023, 2008. ISSN 1474-6670. 17th IFAC World Congress. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S147466701639574X>>. Citado na página 33.
- 61 SANTOS, P. L. dos; RAMOS, J. A.; CARVALHO, J. L. M. de. Identification of linear parameter varying systems using an iterative deterministic-stochastic subspace approach. In: *European Control Conference (ECC), 2007*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 4867–4873. Citado na página 33.
- 62 SANTOS, P. Lopes dos; RAMOS, J.; CARVALHO, J. de. Identification of LPV systems using successive approximations. In: *47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008. CDC 2008*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 4509–4515. ISSN 0191-2216. Citado 6 vezes nas páginas 33, 35, 126, 127, 132 e 176.
- 63 SANTOS, P. L. dos; RAMOS, J. A.; CARVALHO, J. L. M. de. Identification of bilinear systems using an iterative deterministic-stochastic subspace approach. In: *44th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 7120–7126. ISSN 0191-2216. Citado na página 33.
- 64 RIZVI, S. Z.; MOHAMMADPOUR, J.; TÓTH, R.; MESKIN, N. An IV-SVM-based approach for identification of state-space LPV models under generic noise conditions. In: *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 7380–7385. Citado na página 34.
- 65 RIZVI, S. Z.; MOHAMMADPOUR, J.; TÓTH, R.; MESKIN, N. A kernel-based approach to MIMO LPV state-space identification and application to a nonlinear

- process system. *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPV*, v. 48, n. 26, p. 85 – 90, 2015. ISSN 2405-8963. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315023769>>. Citado na página 34.
- 66 ANGELIS, G. Z. *System Analysis, Modelling and Control with Polytopic Linear Models*. Tese (Doutorado) — Eindhoven University of Technology, 2001. Citado na página 34.
- 67 GASPAR, P.; SZABO, Z.; BOKOR, J. Gray-box continuous-time parameter identification for lpv models with vehicle dynamics applications. In: *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. [S.l.: s.n.]. p. 393–398. ISSN 2158-9860. Citado na página 34.
- 68 GASPAR, P.; SZABO, Z.; BOKOR, J. A grey-box identification of an LPV vehicle model for observer-based side slip angle estimation. In: *American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 2961–2966. ISSN 0743-1619. Citado na página 34.
- 69 WILLS, A.; NINNESS, B. *System identification of linear parameter varying state-space models, Chapter 4*. [S.l.]: World Scientific, 2011. Linear Parameter-Varying System Identification. ISBN 9789814355445. Citado na página 34.
- 70 MCKELVEY, T.; HELMERSSON, A.; RIBARITS, T. Data driven local coordinates for multivariable linear systems and their application to system identification. *Automatica*, v. 40, n. 9, p. 1629 – 1635, 2004. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109804001414>>. Citado na página 34.
- 71 VERDULT, V.; BERGBOER, N.; VERHAEGEN, M. Identification of fully parameterized linear and nonlinear state-space systems by projected gradient search. *13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, v. 36, n. 16, p. 711 – 716, 2003. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017348450>>. Citado na página 34.
- 72 WILLS, A.; NINNESS, B. On gradient-based search for multivariable system estimates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 53, n. 1, p. 298–306, Feb 2008. ISSN 0018-9286. Citado na página 34.
- 73 SZNAIER, M.; MAZZARO, M. C. An lmi approach to control-oriented identification and model (in) validation of LPV systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 9, p. 1619–1624, Sept 2003. ISSN 0018-9286. Citado na página 34.
- 74 BIANCHI, F. D.; Sánchez-Peña, R. S. Robust identification/invalidation in an LPV framework. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 20, n. 3, p.

301–312. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/rnc.1430>>. Citado na página 34.

75 VERDULT, V. *Nonlinear System Identification: A State-Space Approach*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 35, 36, 142, 145, 156 e 159.

76 WINGERDEN, J.-W. van; VERHAEGEN, M. Subspace identification of bilinear and LPV systems for open- and closed-loop data. *Automatica*, v. 45, n. 2, p. 372 – 381, 2009. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109808004743>>. Citado 6 vezes nas páginas 35, 36, 102, 142, 147 e 157.

77 TOTH, R.; ABBAS, H. S.; WERNER, H. On the state-space realization of LPV input-output models: Practical approaches. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 20, n. 1, p. 139–153, Jan 2012. ISSN 1063-6536. Citado na página 35.

78 LARIMORE, W. E. Identification of nonlinear parameter-varying systems via canonical variate analysis. In: *2013 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 2247–2262. ISSN 0743-1619. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

79 COX, P. B.; TÓTH, R.; PETRECZKY, M. Towards efficient maximum likelihood estimation of LPV-ss models. *Automatica*, v. 97, p. 392 – 403, 2018. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109818304205>>. Citado na página 35.

80 HO, B.; KALMAN, R. Effective construction of linear, state-variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, v. 14, p. 545–548, 1966. Citado 3 vezes nas páginas 35, 61 e 62.

81 KALMAN, R. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, v. 4, n. 3, p. 110–110, December 1959. ISSN 0096-199X. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 45.

82 CHIUSO, A.; PICCI, G. Consistency analysis of some closed-loop subspace identification methods. *Automatica*, v. 41, n. 3, p. 377 – 391, 2005. ISSN 0005-1098. Citado na página 35.

83 GEBRAAD, P. M. O.; WINGERDEN, J. W. van; VEEN, G. J. van der; VERHAEGEN, M. LPV subspace identification using a novel nuclear norm regularization method. In: *Proceedings of the 2011 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 165–170. ISSN 2378-5861. Citado na página 36.

84 GEBRAAD, P. M. O.; WINGERDEN, J.-W. van; VERHAEGEN, M. Sparse estimation for predictor-based subspace identification of LPV systems. *16th IFAC Symposium on System Identification*, 2012. Citado na página 36.

- 85 GUNES, B.; WINGERDEN, J.-W. van; VERHAEGEN, M. Predictor-based tensor regression (pbtr) for LPV subspace identification. *Automatica*, v. 79, p. 235 – 243, 2017. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109817300493>>. Citado na página 36.
- 86 LARIMORE, W. E. System identification, reduced-order filtering and modeling via canonical variate analysis. In: *American Control Conference, 1983*. [S.l.: s.n.], 1983. p. 445–451. Citado 3 vezes nas páginas 36, 61 e 75.
- 87 AKAIKE, H. Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Trans. Automatic control*, AC-19, p. 667–674, 1974. Citado 4 vezes nas páginas 36, 61, 75 e 146.
- 88 AKAIKE, H. Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. *SIAM J. control*, v. 13, p. 162–173, 1975. Citado 4 vezes nas páginas 36, 61, 75 e 146.
- 89 AKAIKE, H. Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion. *System identification: Advances and case studies (R. Mehra and D.Lainiotis, eds)*, p. 27–96, 1976. Citado 5 vezes nas páginas 36, 61, 75, 79 e 146.
- 90 KATAYAMA, T.; PICCI, G. Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods. *Automatica*, v. 35, n. 10, p. 1635 – 1652, 1999. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109899000722>>. Citado 7 vezes nas páginas 36, 77, 83, 126, 130, 146 e 159.
- 91 PICCI, G.; KATAYAMA, T. Stochastic realization with exogenous inputs and subspace methods identification. *Signal Processing*, v. 52, p. 145–160, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 36, 61, 75, 126 e 163.
- 92 DOYLE, J. C. *Matrix Interpolation Theory and Optimal Control*. Tese (Doutorado) — University of California, Berkeley, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 48.
- 93 BOTTURA, C. P. Controle robusto multivariável. Notas de Aula de Minicurso, I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional da SBMAC. Agosto, 7–9, 1996. Citado na página 42.
- 94 GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. G. B. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*. [S.l.]: Edgard Blucher Ltda, 2011. ISBN 9788521205890. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- 95 GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. *Controle de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*. [S.l.]: Edgard Blucher Ltda, 2011. ISBN 9788521205906. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

- 96 ROSENWASSER, E. N.; LAMPE, B. P. *Multivariable Computer-controlled Systems*. [S.l.]: Springer, 2006. ISBN 978-1-84628-431-1. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 49.
- 97 BOTTURA, C. P. *Análise Linear de Sistemas*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 87.
- 98 BOTTURA, C. P. *Princípios de Controle e Servomecanismos*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 87.
- 99 ZADEH, L. A. Frequency analysis of variable networks. *Proceedings of the IRE*, v. 38, n. 3, p. 291–299, March 1950. ISSN 0096-8390. Citado na página 46.
- 100 Zadeh, L. A. On stability of linear varying-parameter systems. *Journal of Applied Physics*, v. 22, p. 402–405, apr 1951. Citado na página 46.
- 101 LUI, L. M.; WANG, Y.; CHAN, T. F.; THOMPSON, P. Landmark constrained genus zero surface conformal mapping and its application to brain mapping research. *Applied Numerical Mathematics*, v. 57, n. 5, p. 847 – 858, 2007. ISSN 0168-9274. Special Issue for the International Conference on Scientific Computing. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927406001619>>. Citado na página 48.
- 102 NEHARI, Z. *Conformal mapping*. [S.l.]: Dover Publications Inc New York, 1952. Citado na página 48.
- 103 COHN, H. *Conformal mapping on Riemann surfaces*. [S.l.]: Dover Publications Inc New York, 1967. Citado na página 48.
- 104 DOYLE, J.; PACKARD, A.; ZHOU, K. Review of LFTs, LMIs, and mu;. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 1227–1232 vol.2. Citado 6 vezes nas páginas 48, 93, 95, 99, 109 e 117.
- 105 BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L.; PERES, P. L. D. Discretização acionada por eventos e controle digital por realimentação de estado de sistemas LPV. In: *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 3 vezes nas páginas 49, 113 e 114.
- 106 VERHAEGEN, M. Application of a subspace model identification technique to identify lti systems operating in closed-loop. *Automatica*, v. 29, n. 4, p. 1027 – 1040, 1993. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109893901042>>. Citado na página 49.

- 107 VEEN, G. van der; WINGERDEN, J. w. van; BERGAMASCO, M.; LOVERA, M.; VERHAEGEN, M. Closed-loop subspace identification methods: an overview. *IET Control Theory Applications*, v. 7, n. 10, p. 1339–1358, July 2013. ISSN 1751-8644. Citado na página 49.
- 108 REDHEFFER, R. M. On a certain linear fractional transformation. *Journal of Mathematics and Physics*, v. 39, n. 1-4, p. 269–286, 1960. ISSN 1467-9590. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/sapm1960391269>>. Citado na página 58.
- 109 VERHAEGEN, M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, v. 30, n. 1, p. 61 – 74, 1994. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109894902291>>. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 68.
- 110 LARIMORE, W. Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptive control. In: *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 596–604 vol.2. Citado na página 61.
- 111 KATAYAMA, T.; PICCI, G. Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods. *Automatica*, v. 35, n. 10, p. 1635 – 1652, 1999. ISSN 0005-1098. Citado na página 61.
- 112 CHIUSO, A. On the relation between cca and predictor-based subspace identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 10, p. 1795–1812, Oct 2007. ISSN 0018-9286. Citado 4 vezes nas páginas 61, 75, 146 e 147.
- 113 OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D. N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, v. 30, n. 1, p. 75 – 93, 1994. ISSN 0005-1098. Special issue on statistical signal processing and control. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109894902305>>. Citado na página 61.
- 114 MOORE, B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, p. 17–32, Feb 1981. ISSN 0018-9286. Citado na página 61.
- 115 CHOU, C.; VERHAEGEN, M. Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models. *Automatica*, v. 33, n. 10, p. 1857 – 1869, 1997. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109897000927>>. Citado 7 vezes nas páginas 61, 68, 69, 70, 71, 72 e 81.
- 116 FORERO, A. J.; Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Identificação estocástica no espaço de estado por análise de correlações canônicas: Teoria, aplicação e validação.

In: *XXII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2018*. [S.l.: s.n.], 2018. Citado 4 vezes nas páginas 61, 87, 153 e 159.

117 SÖDERSTRÖM, T. Identification of stochastic linear systems in presence of input noise. *Automatica*, v. 17, n. 5, p. 713 – 725, 1981. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109881900182>>. Citado na página 67.

118 SÖDERSTRÖM, T. Errors-in-variables methods in system identification. *Automatica*, v. 43, n. 6, p. 939 – 958, 2007. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109807000714>>. Citado na página 67.

119 SÖDERSTRÖM, T. System identification for the errors-in-variables problem. *UKACC International Conference on Control*, 2010. Citado na página 67.

120 SÖDERSTRÖM, T.; WANG, L.; PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. Can errors-in-variables systems be identified from closed-loop experiments? *Automatica*, v. 49, n. 2, p. 681 – 684, 2013. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109812005535>>. Citado na página 67.

121 WANG, J.; GUO, Y.; JUAN. Closed-loop subspace identification algorithm of eiv model based on orthogonal decomposition and pca. In: _____. *AsiaSim 2012: Asia Simulation Conference 2012, Shanghai, China, October 27-30, 2012. Proceedings, Part I*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 55–65. ISBN 978-3-642-34384-1. Citado na página 68.

122 VERHAEGEN, M.; VERDULT, V. *Filtering and System Identification*. Cambridge University Press, 2007. Cambridge Books Online. ISBN 9780511618888. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511618888>>. Citado na página 73.

123 LINDQUIST, A.; PICCI, G. Canonical correlation analysis, approximate covariance extension, and identification of stationary time series. *Automatica*, v. 32, n. 5, p. 709–733, 1996. Citado na página 75.

124 Puerto Acosta, J. A. *Aplicação de técnicas de identificação paramétricas e não paramétricas em uma bancada de vibração torcional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas UNICAMP, Dez 2013. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 88.

125 PINTELON, R.; BARBÉ, K.; VANDERSTEEN, G.; J., S. Improved (non-)parametric identification of dynamics systems excited by periodic signals. *Mechanical*

systems and Signal Processing, Elsevier, v. 25, p. 2683–2704, Nov 2011. Citado na página 88.

126 TÓTH, R.; HEUBERGER, P.; HOF, P. V. D.; FELICI, F. Crucial aspects of zero-order hold LPV state-space system discretization. In: . [S.l.: s.n.], 2008. v. 17. Citado 4 vezes nas páginas 92, 93, 94 e 113.

127 van Wingerden, J.-W. *Control of Wind Turbines with "Smart" Rotors: Proof of Concept and LPV Subspace Identification*. Tese (Doutorado) — Technische Universiteit Delft, 2008. Citado na página 93.

128 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Discretization of linear parameter varying systems in the LFT representation with parameter dependent sampling rates. In: *2017 9th Computer Science and Electronic Engineering Conference (CEECE)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 139–144. Citado na página 93.

129 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Discretization of linear parameter varying systems in the linear fractional representation with constant and with parameter dependent sampling rates. In: *III Colombian Conference on Automatic Control, CCAC*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 3 vezes nas páginas 93, 113 e 118.

130 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. A procedure to generate discrete MIMO closed-loop benchmark via LFT with application to state space identification. In: *15th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics-ICINCO*. [s.n.], 2018. Disponível em: <<http://insticc.org/node/TechnicalProgram/icinco/presentationDetails/68649>>. Citado na página 93.

131 CAIGNY, J.; PINTELON, R.; CAMINO, J.; SWEVER, J. Interpolated modeling of LPV systems based on observability and controllability. *Proc. 16th IFAC Symposium on System Identification, Brussels, Belgium*, p. 1773–1778, 2013. Citado na página 94.

132 APKARIAN, P. On the discretization of lmi-synthesized linear parameter-varying controllers. *Automatica*, v. 33, n. 4, p. 655 – 661, 1997. ISSN 0005-1098. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 106.

133 TÓTH, R.; LOVERA, M.; HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. V. den. Discretization of linear fractional representations of LPV systems. In: *48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 7424–7429. ISSN 0191-2216. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 113.

134 SPILLMAN, M. S.; BLUE, P. A.; BANDA, S. S. *A Robust Gain-Scheduling Example User Linear Parameter-Varying Feedback*. [S.l.], 1996. Citado 4 vezes nas páginas 96, 97, 99 e 123.

- 135 BLAKELOCK, J. H. *Automatic control of aircraft and missiles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. Citado na página 97.
- 136 ADAMS, R. J.; BANDA, S. S. Robust flight control design using dynamic inversion and structured singular value synthesis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 1, n. 2, p. 80–92, Jun 1993. ISSN 1063-6536. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 123.
- 137 HOUTZAGER, I.; GEBRAAD, P.; WINGERDEN, J. V.; VERHAEGEN, M. Predictor-based subspace identification toolbox version 0.6. available online. Disponível em: <http://www.dcsc.tudelft.nl/~jwvanwingerden/pbsid/pbsidtoolbox_product_page.html,2012>. Citado 5 vezes nas páginas 102, 111, 142, 147 e 157.
- 138 TOTH, R.; LOVERA, M.; HEUBERGER, P. S. C.; CORNO, M.; HOF, P. M. J. V. den. On the discretization of linear fractional representations of LPV systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 20, n. 6, p. 1473–1489, Nov 2012. ISSN 1063-6536. Citado na página 106.
- 139 RAMEZANIFAR, A.; MOHAMMADPOUR, J.; GRIGORIADIS, K. M. Sampled-data filtering for linear parameter varying systems. *International Journal of Systems Science*, v. 46, n. 3, p. 474–487, 2015. Citado na página 113.
- 140 BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems. In: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 6397–6402. ISSN 0191-2216. Citado 2 vezes nas páginas 113 e 114.
- 141 BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretization and discrete-time output feedback control of linear parameter varying continuous-time systems. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 4765–4771. ISSN 0191-2216. Citado 2 vezes nas páginas 113 e 114.
- 142 AKAIKE, H. Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. *SIAM Journal on Control*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 13, n. 1, p. 162–173, Jan 1975. ISSN 0036-1402. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/0313010>>. Citado 6 vezes nas páginas 126, 130, 159, 163, 166 e 168.
- 143 EGGLESTON, D. M.; STODDARD, F. S. *Wind turbine engineering design*. [S.l.]: New York: Van Nostrand Reinhold, 1987. Citado na página 142.
- 144 PROIMADIS, I.; BIJL, H.; WINGERDEN, J. van. A kernel based approach for LPV subspace identification. *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPV*, v. 48, n. 26, p. 97 – 102, 2015. ISSN 2405-8963. Disponível em: <<http://>>

www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315023782>. Citado 2 vezes nas páginas 142 e 147.

145 ROMANO, R. A.; SANTOS, P. L. dos; PAIT, F.; PERDICOÚLIS, T. P. State space LPV model identification using ls-svm: A case-study with dynamic dependence. In: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 995–1000. Citado na página 142.

146 HOTELLING, H. Relation between two sets of variates. *Biometrika*, v. 28, p. 322–377, 1936. Citado 2 vezes nas páginas 146 e 163.

147 LARIMORE, W. E. System identification, reduced-order filtering and modeling via canonical variate analysis. In: *American Control Conference, 1983*. [S.l.: s.n.], 1983. p. 445–451. Citado na página 146.

148 LARIMORE, W. E. Identification of nonlinear systems using canonical variance analysis. In: *26th IEEE Conference on Decision and Control, 1987*. [s.n.], 1987. v. 26, p. 1694–1699. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=4049587>>. Citado na página 146.

149 QIN, S. J.; LJUNG, L. Closed-loop subspace identification with innovation estimation. *13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, v. 36, n. 16, p. 861 – 866, 2003. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017348681>>. Citado na página 147.

150 JANSSON, M. Subspace identification and arx modeling. In: . [s.n.], 2003. v. 36, n. 16, p. 1585 – 1590. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017349868>>. Citado na página 147.

151 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. 3C2ILPV: Conditional canonical correlation iterative identification of linear parameter varying systems algorithm. Submetido, 2018. Citado na página 151.

152 Puerto Acosta, J. A.; BOTTURA, C. P. Proposal for state space identification of MIMO LPV stochastic systems: ICCALPV. Submetido, 2019. Citado na página 151.

153 BACH, F. R.; JORDAN, M. I. Kernel independent component analysis. *J. Mach. Learn. Res.*, JMLR.org, v. 3, p. 1–48, March 2003. ISSN 1532-4435. Citado 6 vezes nas páginas 159, 160, 161, 163, 164 e 169.

154 WITTEN, D. M.; TIBSHIRANI, R.; HASTIE, T. A penalized matrix decomposition, with applications to sparse principal components and canonical correlation analysis. *Biostatistics*, v. 10, n. 3, p. 515–534, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/biostatistics/kxp008>>. Citado na página 159.

- 155 CHAUDHURI, K.; KAKADE, S. M.; LIVESCU, K.; SRIDHARAN, K. Multi-view clustering via canonical correlation analysis. In: *Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning*. New York, NY, USA: ACM, 2009. (ICML '09), p. 129–136. ISBN 978-1-60558-516-1. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1553374.1553391>>. Citado na página 159.
- 156 HARDOON, D. R.; SZEDMAK, S.; SHAWE-TAYLOR, J. Canonical correlation analysis: An overview with application to learning methods. *Neural Computation*, v. 16, n. 12, p. 2639–2664, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1162/0899766042321814>>. Citado na página 159.
- 157 WITTEN, D.; TIBSHIRANI, R. Extensions of sparse canonical correlation analysis with applications to genomic data. *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, v. 8, n. 1, p. 1–27, 2009. Citado na página 159.
- 158 VERDULT, V.; VERHAEGEN, M. Kernel methods for subspace identification of multivariable LPV and bilinear systems. *Automatica*, v. 41, n. 9, p. 1557 – 1565, 2005. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109805001214>>. Citado na página 159.
- 159 RIZVI, S. Z.; VELNI, J. M.; ABBASI, F.; TÓTH, R.; MESKIN, N. State-space LPV model identification using kernelized machine learning. *Automatica*, v. 88, p. 38 – 47, 2018. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109817305368>>. Citado 2 vezes nas páginas 159 e 167.
- 160 VAERENBERGH, S. V.; VÍA, J.; SANTAMARÍA, I. Adaptive kernel canonical correlation analysis algorithms for nonparametric identification of wiener and hammerstein systems. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2008, n. 1, p. 875351, Feb 2008. ISSN 1687-6180. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2008/875351>>. Citado na página 159.
- 161 MELZER, T.; REITER, M.; BISCHOF, H. Nonlinear feature extraction using generalized canonical correlation analysis. *Artificial Neural Networks ICANN 2001*, v. 2130, Springer. Citado na página 160.
- 162 AKAHO, S. A kernel method for canonical correlation analysis. *CoRR*, abs/cs/0609071, 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/cs/0609071>>. Citado na página 160.
- 163 FYFE, C.; LAI, P. L. Ica using kernel canonical correlation analysis. In: *In Proc. Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 279–284. Citado na página 160.

- 164 SCHÖLKOPF, B.; SMOLA, A. J. *Learning with Kernels Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. [S.l.]: MITpress, 2000. Citado na página 160.
- 165 SAITOH, S.; SAWANO, Y. *Theory of Reproducing Kernels and Applications*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado na página 160.
- 166 CRISTIANINI, N.; Shawe Taylor, J. *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 160.
- 167 LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. [S.l.]: Springer, 2008. Citado na página 162.
- 168 GEBRAAD, P. M. O.; WINGERDEN, J. W. van; FLEMING, P. A.; WRIGHT, A. D. LPV identification of wind turbine rotor vibrational dynamics using periodic disturbance basis functions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 21, n. 4, p. 1183–1190, July 2013. ISSN 1063-6536. Citado na página 167.
- 169 FAURRE, P. L. Stochastic realization algorithms. In: MEHRA, R. K.; LAINIOTIS, D. G. (Ed.). *System Identification Advances and Case Studies*. Elsevier, 1976, (Mathematics in Science and Engineering, v. 126). p. 1 – 25. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0076539208608681>. Citado na página 168.