



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO**

THIAGO BULHÕES DA SILVA COSTA

**SISTEMA DE COMUNICAÇÃO BASEADO EM
POTENCIAIS EVOCADOS VISUALMENTE**

**CAMPINAS
2020**



THIAGO BULHÕES DA SILVA COSTA

**SISTEMA DE COMUNICAÇÃO BASEADO EM
POTENCIAIS EVOCADOS VISUALMENTE**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO THIAGO BULHÕES DA SILVA COSTA
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ROMIS RIBEIRO DE FAISSOL ATTUX

**CAMPINAS
2020**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

C823s Costa, Thiago Bulhões da Silva, 1984-
Sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente /
Thiago Bulhões da Silva Costa. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Romis Ribeiro de Faissol Attux.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Interface cérebro-computador. 2. Potenciais evocados. 3. Capacidade
de canal. I. Attux, Romis Ribeiro de Faissol, 1978-. II. Universidade Estadual
de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Communication system based on visually evoked potentials

Palavras-chave em inglês:

Brain-computer interface

Evoked potentials

Channel capacity

Área de concentração: Engenharia de Computação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Romis Ribeiro de Faissol Attux [Orientador]

Ricardo Suyama

Cristiano Magalhães Panazio

Renato da Rocha Lopes

Levy Boccato

Data de defesa: 29-01-2020

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-1850-3530>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1761752784369606>

COMISSÃO JULGADORA – TESE DE DOUTORADO

Candidato: Thiago Bulhões da Silva Costa RA: 064699

Data da Defesa: 29/01/2020

Título da Tese: “Sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente”.

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux (Presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Ricardo Suyama (Universidade Federal do ABC)

Prof. Dr. Cristiano Magalhães Panazio (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Levy Boccato (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Tese) e na secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

Aos seres humanos de ciência, contra o obscurantismo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Também agradeço

À vida pela oportunidade

À família pelo apoio

Aos amigos pela força

À Gabi pelo estímulo

Ao Romis por tudo

À Sarah, a Luisa e o Diogo pela experiência

Ao Coradine pelas conversas

Ao Panazio, o Suyama, o Renato e o Levy pelas considerações

Ao CNPq, a Finep e a FAPESP pelo fomento

À UNICAMP pela estrutura

Ao DSPCom pela convivência

À Lilian pela cumplicidade

RESUMO

Uma interface cérebro-computador (BCI, do inglês *brain-computer interface*) representa, em neurociência, toda uma variedade de sistemas de comunicação que possibilitam a conexão de atividades cerebrais com instruções de máquina, de tal forma que essa ligação ocorra sem a intermediação dos nervos e dos músculos. Curiosamente, essa definição se atém mais à interação entre o cérebro e o computador do que à informação veiculada do primeiro para o segundo. Isso presumivelmente ocorre porque ela não abrange um modelo de sistema de comunicação propriamente dito e não especifica de que maneira a mencionada interação se configura nos elementos e limites de um tal modelo. Nesse sentido, esta tese busca desenvolver e caracterizar um sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente (VEPs, do inglês *visually evoked potentials*). Esses potenciais, em geral registrados com eletroencefalografia (EEG), são reações naturais do sistema visual suscitadas ao incidir – de forma controlada e precisa – estimulação fótica nos olhos. Em particular, os VEPs estacionários (SSVEPs, do inglês *steady-state VEPs*) ocorrem em resposta à incidência de estímulos periódicos – produzidos com intervalos de milissegundos (oscilações visuais) – e se manifestam, no sinal de EEG, como picos de ressonância no domínio espectral, identificados por suas frequências e fases casadas com as das estimulações que os geram. Isso indica que, em princípio, uma mensagem qualquer – se adequadamente modulada por esses estímulos visuais – pode ser enviada através do sistema visual e pode ser recuperada a partir do sinal de EEG, com técnicas de processamento e de identificação de SSVEPs. A partir da caracterização desse sistema, duas propostas conceituais são verificadas experimentalmente: a de que o sistema visual desempenha o papel de um canal de comunicação digital e a de que, por meio de um procedimento de avaliação desse canal, é possível descobrir as frequências mais adequadas para a transmissão de mensagens por ele.

Palavras-chave: interface cérebro-computador, potenciais evocados visualmente, capacidade de canal, taxa de transferência de informação.

ABSTRACT

A brain-computer interface (BCI) represents, in neuroscience, a variety of communication systems that allow to connect brain activities with machine instructions, in such a way that this connection occurs without the intermediation of nerves and muscles. Interestingly, this definition is more closely related to the interaction between brain and computer than to the information conveyed from the former to the latter. This presumably occurs because the BCI concept does not encompass itself a model of a communication system and does not specify how that interaction is configured within the elements and boundaries of such a model. In this sense, this thesis seeks to develop and characterize a communication system based on visually evoked potentials (VEPs). These potentials, usually recorded with electroencephalography (EEG), are natural reactions of the visual system that are generated by focusing - in a controlled and precise manner - photic stimulation in the eyes. In particular, steady-state VEPs (SSVEPs) occur from the incidence of periodic stimuli – produced at millisecond intervals (visual oscillations) – and manifest in the EEG signal as resonant peaks in the spectral domain, identified by their frequencies and phases matched with the stimulations that generate them. This indicates that in principle any message - if properly modulated by these visual stimuli - can be sent through the visual system and can be retrieved from the EEG signal using SSVEP identification techniques. From the characterization of this system, two conceptual proposals are experimentally verified: that the visual system plays the role of a digital communication channel and that, through a procedure of assessment of this channel, it is possible to uncover the most suitable frequencies for the transmission of messages through it.

Keywords: *brain-computer interface, visually evoked potentials, channel capacity, information transfer rate.*

Lista de Ilustrações

Fig. I.1: Comparação entre uma BCI (a) e um sistema de comunicação (b).....	16
Fig. I.2: Diagrama de blocos esquematizado por Vidal (1977) para ilustrar que a BCI proposta funcionava como um canal de comunicação. Mais especificamente, como um canal a partir de potenciais relacionados a eventos (ERP, do inglês <i>event related potentials</i>).....	19
Fig. 1.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação.....	21
Fig. 1.2: Exemplos de curvas de entropia para símbolos N -ários simétricos.....	26
Fig. 1.3: Ilustração da propriedade $\ln r \leq r - 1$	27
Fig. 1.4: Interpretações geométricas de (a) uma função convexa e de (b) uma função côncava, para $\lambda = 1/2$	32
Fig. 1.5: Canal de comunicação.....	35
Fig. 1.6: Exemplos de curvas de capacidade para o canal M -ário simétrico.....	39
Fig. 1.7: Etapas de codificação e de decodificação em um sistema de comunicação.	44
Fig. 1.8: Ilustração do funcionamento de um código de blocos linear.....	47
Fig. 2.1: Diagrama de blocos de um experimento com uma BCI genérica.....	51
Fig. 2.2: Entrada de uma BCI.....	53
Fig. 2.3: Ilustração das posições de eletrodos no sistema 10-20 (a) e no sistema 10-10 (b). Adaptado de (Jasper, 1958; Nuwer <i>et al.</i> , 1998).	55
Fig. 2.4: Exemplos de sinais de EEG no tempo. Registros simultâneos dos eletrodos O_z , PO_z , C_z e FC_z , a uma taxa de amostragem de 256 Hz	56
Fig. 2.5: Exemplos de sinais de EEG na frequência. Versão espectral dos registros simultâneos da figura anterior (ua , unidade arbitrária).	56
Fig. 2.6: Exemplos de SMRs contralaterais nas faixas alfa e beta durante imagética motora das mãos esquerda, em (a) e (c), e direita, em (b) e (d).....	58
Fig. 2.7: Exemplo de sessão para uma BCI de SMR.....	58
Fig. 2.8: Exemplo de P300. Sinal médio computado com 85 registros de C_z em janelas alvo e não alvo, capturados a uma taxa de amostragem de 240 Hz	59
Fig. 2.9: Exemplo de uma sequência aleatória de colunas e de linhas cintilantes utilizada ao longo de uma sessão para gerar dois P300, com base na seleção de um caractere.	60
Fig. 2.10: Exemplos de espectros de SSVEP. Registros simultâneos dos eletrodos O_z , PO_z , C_z e FC_z , a uma taxa de amostragem de 256 Hz . Estímulo de 12 Hz	61
Fig. 2.11: Exemplo de não linearidade em SSVEP. Registros do eletrodo O_z em diferentes	

tempos, a uma taxa de amostragem de 256 Hz. Estímulo de 12 Hz.	61
Fig. 2.12: Exemplo de alternância com uma figura simples (a) e um padrão reverso (b).....	63
Fig. 2.13: Amplificador de biosinais g [®] .USBamp (a) e sistema de eletrodos secos e ativos g [®] .SAHARAsys (b). Adaptado de (GmbH, 2011a; GmbH, 2016).	65
Fig. 2.14: Montagem com 16 eletrodos para aquisição de SSVEPs.	66
Fig. 2.15: Espectros dos sinais de oito eletrodos. Registros simultâneos, a uma taxa de amostragem de 256 Hz. Estímulo de 12 Hz.	69
Fig. 2.16: Espectros dos sinais mapeados pelos oito primeiros vetores de correlação canônicos. Registros simultâneos da figura anterior.	69
Fig. 2.17: Exemplos de extração a partir do módulo de uma FFT de 1024 pontos, ao considerar uma BCI de SSVEP com estímulos em 10 Hz e 12 Hz. Sinal pós-filtragem pelo 1.º vetor de correlação canônico. À esquerda, uma janela de um SSVEP de 10 Hz e, à direita, uma de um SSVEP de 12 Hz.	71
Fig. 3.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação baseado em SSVEP.	83
Fig. 3.2: Exemplo de um período de troca de estampas para gerar um EVR de 12 Hz, a uma taxa de atualização de 144 Hz.....	83
Fig. 3.3: Exemplo de um período de troca de estampas para gerar um EVR de 12 Hz modulado em 43 Hz, a uma taxa de atualização de 144 Hz.....	84
Fig. 3.4: Exemplos de sinais FSK correspondentes à palavra 0101, gerados em 10 Hz e 12 Hz (ilustração superior), e em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz (ilustração inferior), para exibir EVRs a uma taxa de atualização de 144 Hz. Nessa imagem, cada intervalo de símbolo equivale a 1 s.	84
Fig. 3.5: Exemplos de extração, ao considerar EVRs de FSK em 10 Hz (à esquerda) e 12 Hz (à direita). FFT de 512 pontos.....	90
Fig. 3.6: Exemplos de extração, ao considerar EVRs de FSK em 10 Hz (à esquerda) e 12 Hz (à direita) modulados em 43 Hz. FFT de 512 pontos.....	90
Fig. 3.7: Imagens dos algarismos numéricos.....	90
Fig. 3.8: Resultados de transmissão com a BCI de SSVEP configurada em modo MQ. Em cada célula, da direita para a esquerda, consta a imagem na entrada do canal, a imagem na saída do canal e a imagem recuperada após a etapa de decisão baseada na distância mínima de Hamming. “Ind.” é a abreviação de “indivíduo” e “Ima.” é a abreviação de “imagem”.	92
Fig. 3.9: Resultados de transmissão com a BCI configurada em modo SVM.	94
Fig. 3.10: Resultados de transmissão com a BCI configurada em modo ELM.....	95

Fig. 3.11: Resultados de transmissão com a BCI configurada em modo comitê.	96
Fig. 3.12: Distribuição do número de voluntários por quantidade de classes adequadas, conforme avaliação de d_k e C_2	101
Fig. 3.13: Taxa de acerto média e capacidades C_0 , C_1 e C_2 médias para os 10 melhores voluntários ao longo das inclusões de classe, uma a uma.	102
Fig. 3.14: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com um desempenho razoável ao longo das inclusões de classe, uma a uma.	102
Fig. 3.15: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com um desempenho razoável ao longo das inclusões de classe, uma a uma.	103
Fig. 3.16: Distribuição do número de voluntários por quantidade de classes adequadas, conforme avaliação de d_k e C_2 para o <i>wrapper</i> progressivo.	104
Fig. 3.17: Taxa de acerto média e capacidades C_0 , C_1 e C_2 médias para os 11 melhores voluntários ao longo das inclusões de classe, uma a uma, para o <i>wrapper</i> progressivo.	104
Fig. 3.18: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com o suposto desempenho razoável, depois do <i>wrapper</i> progressivo.	105
Fig. 3.19: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com o suposto desempenho fraco, depois do <i>wrapper</i> progressivo.	105
Fig. 3.20: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com um desempenho ruim ao longo da análise preliminar.	108
Fig. 3.21: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para os 4 voluntários com o suposto desempenho ruim, depois do <i>wrapper</i> progressivo.	108

Lista de Tabelas

Tabela 1.1: Exemplos de entropia para uma variável aleatória discreta.	25
Tabela 1.2: Resumo de propriedades das entropias.....	29
Tabela 1.3: Exemplos de canal simétrico.	37
Tabela 1.4: Exemplos de capacidade para um canal simétrico.	39
Tabela 2.1: Exemplos de extração do 1.º coeficiente de correlação canônico para quatro janelas de dados, cada uma com um SSVEP diferente, e os respectivos sinais sintetizados. ..	70
Tabela 3.1: Resultados de classificação com a BCI de SSVEP configurada em modo MQ. Na tabela, μ representa a média, σ o desvio padrão, A_1 a acurácia média durante o treinamento por validação cruzada, A_2 a acurácia pixel a pixel e A_3 a acurácia algoritmo a algoritmo após a etapa de decisão baseada na distância mínima de Hamming. “Ind.” é a abreviação de “indivíduo”.....	93
Tabela 3.2: Resultados de classificação com a BCI configurada em modo SVM.	94
Tabela 3.3: Resultados de classificação com a BCI configurada em modo ELM.....	95
Tabela 3.4: Resultados de classificação com a BCI configurada em modo comitê.	96
Tabela 3.5: Capacidades C_1 e C_2 , em bits por símbolo para o experimento de transmissão de imagens através do sistema visual, com a BCI de SSVEP configurada em modo MQ.	98
Tabela 3.6: Passo a passo do algoritmo <i>wrapper</i> com d_k e C_2	100
Tabela 3.7: Capacidades C_1 e C_2 , em bits por símbolo, de todos os voluntários (V.) antes e depois da seleção de classes. “Cl.” representa o número de classes associado à máxima C_2	106

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO	21
1.1 MODELO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO	21
1.2 MEDIDAS DE INCERTEZA E DE INFORMAÇÃO	23
1.2.1 Entropias	24
1.2.2 Três definições de informação	29
1.2.3 Minimização e maximização da informação	31
1.3 CANAL DISCRETO SEM MEMÓRIA	35
1.3.1 Canal simétrico	37
1.3.2 Cálculo teórico da capacidade	40
1.4 CODIFICAÇÃO E DECODIFICAÇÃO DE CANAL	43
1.4.1 Códigos corretores de erro	45
1.4.2 Códigos de Hamming	48
2 INTERFACE CÉREBRO-COMPUTADOR	50
2.1 MODELO DE UMA BCI	50
2.2 PARADIGMAS DE BCI BASEADOS EM ELETROENCEFALOGRAFIA	53
2.2.1 Registro eletroencefalográfico	54
2.2.2 Três paradigmas usuais	57
2.3 PARADIGMA DE SSVEP	62
2.3.1 Estimulação visual	62
2.3.2 Aparelhagem, montagem e aquisição	64
2.4 FILTRAGEM E EXTRAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS	67
2.4.1 Análise de correlação canônica	67
2.4.2 Análise de Fourier	70
2.5 CLASSIFICAÇÃO	72
2.5.1 Classificador linear de mínimos quadrados	73
2.5.2 Máquinas de vetores-suporte	74
2.5.3 Máquina de aprendizado extremo	78
2.5.4 Treinamento, validação e teste	80
3 UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO BASEADO EM POTENCIAIS	

EVOCADOS VISUALMENTE	82
3.1 MODELO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO BASEADO EM POTENCIAIS EVOCADOS VISUALMENTE	82
3.2 TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE INFORMAÇÃO	86
3.3 ENVIO DE MENSAGENS	89
3.3.1 Recuperação de mensagens	91
3.4 AVALIAÇÃO DE CANAL.....	98
3.4.1 Sem seleção de classes	101
3.4.2 Com seleção de classes	103
3.4.3 Inaptidão em BCI de SSVEP	107
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	110
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	112
REFERÊNCIAS	116

INTRODUÇÃO

Desde a sua primeira formulação consistente, a interface cérebro-computador (BCI, do inglês *brain-computer interface*) foi, de certa forma, concebida como um possível sistema de comunicação. Vidal (1973) sugeriu que essa interface, ao fornecer uma ligação direta entre os processos mentais indutivos e a capacidade dedutiva de manipulação de símbolos computacionais, seria o objetivo supremo na comunicação homem-máquina, ou seja, elevaria o computador à condição de genuína extensão prostética do cérebro. Quase três décadas depois, como um dos resultados do Primeiro Encontro Internacional de BCI, Wolpaw *et al.* (2000) propuseram mais concretamente que essa interface, ao possibilitar o desenvolvimento de tecnologias de comunicação aumentativa e alternativa para pessoas com insuficiências neuromusculares severas, não deveria depender das vias neuronais eferentes e da musculatura. Dois anos mais tarde, Wolpaw *et al.* (2002) acrescentaram que essa interface, ao estabelecer – nos moldes da proposta anterior – uma conexão entre o cérebro e um dispositivo externo, seria um sistema com o qual um usuário fosse capaz de enviar mensagens ou comandos diretamente para o ambiente. Ademais, em trabalhos recentes, as definições operacionais de BCI assimilam esse ou aquele aspecto já instaurado por alguma dessas três formulações.

Entretanto, essas definições de BCI se atêm mais à interação entre o cérebro e o computador do que à informação veiculada do primeiro para o segundo. Isso presumivelmente ocorre porque essas definições não abrangem um modelo de sistema de comunicação propriamente dito e não especificam de que maneira a mencionada interação se configura nos elementos e limites de um tal modelo. Afinal, de um lado, uma BCI se caracteriza por: um bloco de entrada, que converte os sinais do cérebro em sinais de máquina; um de processamento, que identifica a intenção do usuário; e um de saída, que fornece a mensagem ou o comando para a aplicação (Wolpaw *et al.*, 2002). De outro lado, um sistema de comunicação se caracteriza por: uma fonte, que produz a informação; um transmissor, que a codifica; um canal, que a conduz; um elemento de ruído, que a degrada; um receptor, que a decodifica; e um destino, que finalmente a interpreta (Shannon, 1948).

A Fig.* I.1 sintetiza essas duas descrições sumárias. Ao compará-las, uma sucessão de questionamentos naturalmente se coloca. Em um experimento de BCI, quem são a fonte, o transmissor, o canal, o ruído, o receptor e o destino? Uma vez que isso seja respondido, então qual é a capacidade do canal e qual é o melhor esquema de codificação e de decodifica-

* Fig.: abreviação adotada para as figuras.

ção, ou quais são os melhores? De que forma os referidos blocos de entrada, de processamento e de saída se encaixam nos moldes de um sistema de comunicação? Também nesse contexto, qual é o papel do cérebro e qual é o do computador? A informação, enquanto medida física, reflete alguma propriedade do sistema nervoso? Essas e outras questões semelhantes indicam a existência de toda uma gama de incertezas a respeito de um ramo científico que ainda foi pouco explorado e que, por isso, a presente tese se propõe a adentrar: a sinergia entre os campos da BCI, da comunicação digital e da teoria da informação.

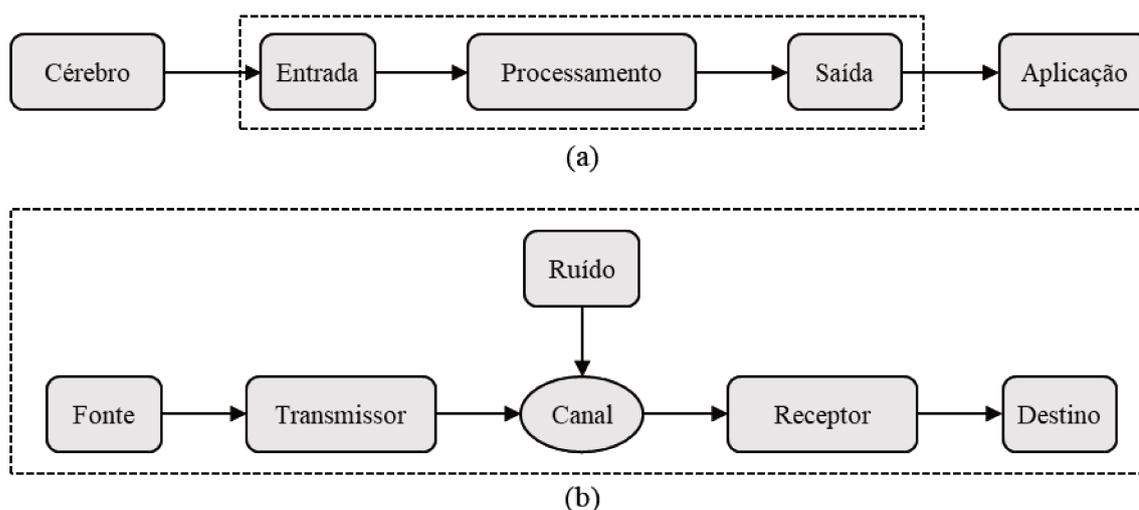


Fig. I.1: Comparação entre uma BCI (a) e um sistema de comunicação (b).

Nas ciências, as questões só ganham destaque se houver a possibilidade de respondê-las, mesmo que parcialmente às vezes. De fato, isso é o que lhes garante a legitimidade ou, dito de outro modo, é o que lhes assegura a capacidade de promover algum avanço nas disciplinas em que são formuladas. Guiado por esse princípio, e para que as perguntas levantadas adquiram alguma materialidade, é preciso escolher um objeto científico em particular para ser analisado e explorado com mais profundidade. Entre as diversas manifestações cerebrais conhecidas, os potenciais evocados visualmente (VEPs, do inglês *visually evoked potentials*) se enquadram como agentes admissíveis para este estudo.

Esses potenciais, em geral registrados com eletroencefalografia (EEG), são reações naturais do sistema visual suscitadas ao incidir – de forma controlada e precisa – estimulação fóptica nos olhos. Distinguem-se em duas categorias: os transitórios (TVEPs, do inglês *transient VEPs*) e os estacionários (SSVEPs, do inglês *steady-state VEPs*). Os anteriores ocorrem em resposta à incidência de estímulos súbitos, produzidos com intervalos de segundos (impulsos visuais), enquanto os posteriores ocorrem em resposta à incidência de estímulos periódicos, produzidos com intervalos de milissegundos (oscilações visuais). As particularidades dos seus protocolos de evocação levam os dois tipos de VEPs a ter aspectos díspares no

sinal de EEG. Os TVEPs constituem uma série de deflexões positivas e negativas no domínio temporal e são caracterizados por suas latências e amplitudes. Os SSVEPs, por sua vez, apresentam picos de ressonância no domínio espectral e são identificados por suas frequências e fases, casadas com as das estimulações que os geram (Regan, 1980; Vialatte *et al.*, 2010). Devido a essas características, os VEPs são largamente empregados como BCI (Wang *et al.*, 2008; Bin *et al.*, 2009), o que em parte revela – de acordo com a discussão inicial – a sua capacidade de transportar informação. Isso indica que, em princípio, uma mensagem qualquer – se adequadamente modulada por estímulos visuais – pode ser enviada através do sistema visual e – nesse caso, por gerar manifestações específicas no lobo occipital – pode ser recuperada a partir do sinal de EEG, com técnicas de processamento e de identificação de VEPs.

De forma independente uma da outra, existe uma vasta bibliografia no campo da teoria da informação, bem como nos campos da eletrofisiologia dos VEPs e da BCI baseada nestes. Porém, são poucos os estudos que explicitamente combinam os conceitos de ambos os campos. Como forma de introdução ao tema, segue um breve resumo dos trabalhos que são – acerca dos assuntos abordados nesta tese – historicamente importantes em cada campo e, na sequência, um breve resumo dos trabalhos que já estabeleceram algum tipo de associação entre BCI e sistema de comunicação. Evidentemente, no decorrer da tese, esses estudos e conceitos serão pouco a pouco apresentados com mais detalhes.

No campo da teoria da informação, Hartley (1928) mostrou que a função logarítmica é a escolha natural para determinar a quantidade de informação produzido na tarefa de selecionar uma mensagem dentre um conjunto finito de outras. Shannon (1948) estabeleceu o conceito de entropia e a interpretou com o formalismo de sequências típicas, também estabeleceu o conceito de informação e o associou ao anterior, demonstrou as principais propriedades de ambos e apresentou uma primeira versão dos teoremas da codificação de fonte e da capacidade de canal. Kraft (1949) demonstrou uma desigualdade que impõe certas exigências para construir um código instantâneo. Hamming (1950) introduziu os códigos corretores de erro baseados na verificação de paridade, bem como a interpretação geométrica do problema de codificação binária. Kullback e Leibler (1951) criaram o conceito de entropia relativa e mostraram que o mesmo configura uma espécie de medida de divergência entre duas distribuições de probabilidade. Huffman (1952) apresentou uma técnica para construir códigos nos quais o comprimento médio das palavras é mínimo. Fano (1952) provou uma desigualdade que relaciona a entropia condicional, associada à ideia de equivocação, com a probabilidade de erro de código. Muroga (1953) discutiu o problema da estimativa da capacidade do canal discreto sem memória – problema que em sua formulação geral envolve a solução de equa-

ções transcendentais, porém sob condições especiais resulta em uma expressão fechada. Feinstein (1954) forneceu uma demonstração do teorema da capacidade do canal, com base em implicação direta. Feinstein (1958) forneceu outra demonstração do mesmo teorema, mas com base em implicação reversa. Arimoto (1972) propôs um método iterativo para calcular a capacidade de qualquer canal discreto sem memória. Blahut (1972) sugeriu um método iterativo para os cálculos da capacidade de canal e da taxa de distorção, tanto no caso de alfabetos discretos quanto no de alfabetos contínuos. Costello e Forney (2007) organizaram uma revisão sobre a importância das estratégias de codificação e de decodificação para atingir a capacidade.

No campo da eletrofisiologia dos VEPs, Berger (1929) construiu o primeiro aparelho de EEG, bem como observou e caracterizou as primeiras derivações eletrofisiológicas obtidas a partir deste. Adrian e Matthews (1934) descobriram, com o uso desse aparelho, a existência de ondas rítmicas induzidas por estímulos luminosos repetitivos. Walter e Walter (1949) reportaram uma série de trabalhos que confirmavam a existência dessas ondas e que, além disso, anunciavam a presença de picos positivos causados, nesse caso, por estímulos luminosos súbitos. Regan (1966) formalizou as diferenças entre as respostas estacionária-média e transitória-inicial provocadas, respectivamente, pelas estimulações visuais repetitiva e súbita. Já no campo da BCI baseada em VEPs, Vidal (1973) cunhou a expressão “interface cérebro computador” ao se referir aos sistemas que empregavam potenciais e ritmos cerebrais para estabelecer um meio de comunicação direto entre o cérebro e a máquina. Vidal (1977) criou uma BCI com o uso de potenciais relacionados a eventos visuais e a submeteu a testes com voluntários saudáveis. Sutter (1992) propôs uma BCI de VEP codificado. Cheng e Gao (1999) desenvolveram uma BCI de SSVEP.

Dentre os estudos que explicitamente combinam teorias de BCI com teorias de sistema de comunicação, Vidal (1977) sugeriu um esquema (Fig. 1.2) no qual uma BCI é interpretada como um canal de comunicação e mostrou que, ao computar cumulativamente a entropia ao longo do tempo e ao traçar seu comportamento gráfico, obtém-se uma distribuição temporal da quantidade de informação transmitida pela interface. Wolpaw *et al.* (1998) alertaram que a acurácia (taca de acerto) na identificação das manifestações cerebrais não é a melhor forma de avaliar o desempenho de uma BCI e, por isso, recomendaram a taxa de transferência de informação (*ITR*, do inglês *information transfer rate*), cujo cálculo até leva em consideração o índice anterior, mas agrega os conceitos de entropia e de informação. Yuan *et al.* (2013) apontaram as incongruências dos vários trabalhos de BCI que não estimam corretamente a *ITR*. Kimura *et al.* (2013) utilizaram modulação por chaveamento de frequência

(FSK do inglês *frequency-shift keying*) para codificar estímulos visuais e ampliar os padrões detectáveis de SSVEPs. Chang *et al.* (2014) utilizaram, para o mesmo fim, modulação por amplitude (AM, do inglês *amplitude modulation*). Dreyer e Herrmann (2015) utilizaram, por sua vez, modulação por frequência (FM, do inglês *frequency modulation*). Tong e Zhu (2015) testaram em dados de SSVEPs um código corretor de erros baseado na distância de Hamming e com o uso dessa codificação propuseram a construção de estímulos com múltiplas fases e apenas uma frequência. Soriano *et al.* (2016) postularam que, em um experimento de BCI, o cérebro funciona como um canal de comunicação digital. Sadegui e Maleki (2019), por fim, sugeriram uma técnica para computar a ITR a partir da informação mútua, de forma a considerar a distribuição de probabilidade associada à ocorrência de todos os símbolos envolvidos no experimento de BCI.

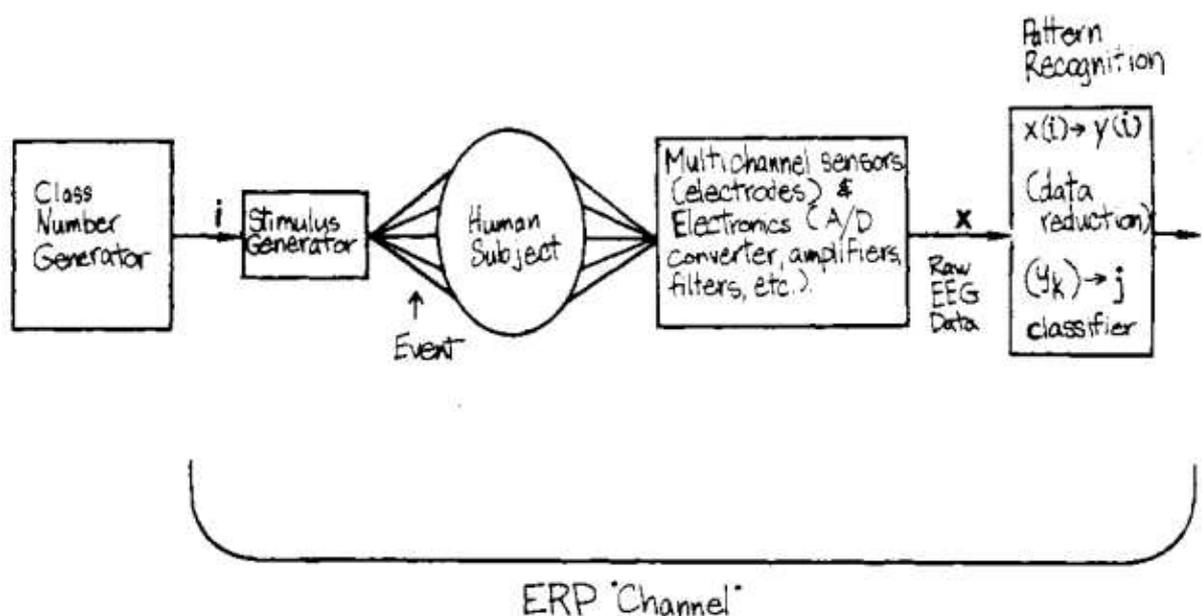


Fig. I.2: Diagrama de blocos esquematizado por Vidal (1977) para ilustrar que a BCI proposta funcionava como um canal de comunicação. Mais especificamente, como um canal a partir de potenciais relacionados a eventos (ERP, do inglês *event related potentials*).

Diante do conteúdo exposto até aqui, um primeiro objetivo desta tese é desenvolver e caracterizar um sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente. Um tal sistema, inspirado no funcionamento de uma BCI de SSVEP, é capaz de transmitir mensagens através do sistema visual de uma pessoa – obviamente, sem que esta saiba o conteúdo e o significado delas. Nesse experimento, o sistema visual desempenha o papel de canal de comunicação. Além do envio de mensagens, um segundo objetivo é propor uma metodologia de avaliação desse canal, ou seja, descobrir os símbolos mais adequados para transmitir através do sistema visual. Para desenvolver e justificar de maneira consistente essas duas idei-

as, a presente tese está dividida em três capítulos.

O primeiro trata das bases conceituais de teoria da informação necessárias à compreensão dos benefícios e dos limites de um sistema de comunicação. São apresentados um modelo para esse sistema, as medidas de incerteza e de informação, o canal discreto sem memória e uma estratégia de codificação e de decodificação. O segundo capítulo trata, por sua vez, dos fundamentos da BCI baseada em SSVEP. São apresentados um modelo de BCI, o paradigma de SSVEP e algumas estratégias de filtragem, de extração e de classificação em problemas de BCI de SSVEP. O terceiro e último capítulo apresenta um modelo de sistema comunicação baseado em potenciais evocados visualmente e uma proposta de generalização da ITR, bem como os procedimentos e os resultados de um experimento de envio de mensagens pelo sistema visual e de um experimento de avaliação de canal nesse contexto. Ao final, uma seção de conclusões e de perspectivas sintetiza os resultados mais importante deste trabalho e aponta novos caminhos de investigação.

1 UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO

A descrição dos dispositivos de comunicação possui uma linguagem própria dos campos da teoria de comunicação e da teoria de informação (Cover *et al.*, 2006; Proakis *et al.*, 2008): os conceitos de codificação e decodificação, de modulação e demodulação, de transmissão e recepção, de informação e entropia, de canal e capacidade, entre muitos outros, são importantes para julgar com que confiança se conduz uma mensagem de um certo ponto ao outro (Shannon, 1948). Este primeiro capítulo revisa esses conceitos clássicos com o intuito de auxiliar a apresentação do sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente e também de sustentar a proposta de avaliação do sistema visual como um canal de comunicação, ambos temas do terceiro capítulo.

1.1 MODELO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO

Um possível modelo de um sistema de comunicação apresenta os seguintes componentes: a fonte, o codificador de fonte, o codificador de canal, o modulador, o canal, o demodulador, o decodificador de canal, o decodificador de fonte e o destino. Além destes, normalmente se inclui o ruído devido à sua inevitável presença em sinais de qualquer natureza. O diagrama da Fig. 1.1 expressa esse modelo e destaca que, em alguns tratamentos, os codificadores de fonte e de canal e o modulador convenientemente formam um mesmo bloco denominado transmissor, bem como o demodulador e os decodificadores de canal e de fonte formam o receptor (Shannon, 1948; Fano, 1961; Ash, 1965; Proakis *et al.*, 2008).

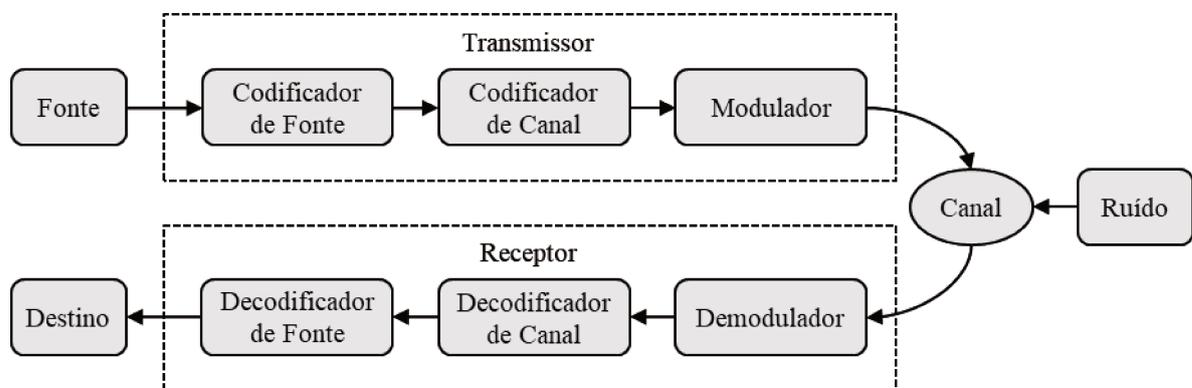


Fig. 1.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação.

A fonte, em geral uma pessoa ou uma máquina, produz a mensagem a ser comunicada (Shannon, 1948; Ash, 1965). Na prática, essa mensagem pode assumir uma grande

variedade de formas: uma sequência de símbolos, como em um texto ou uma expressão matemática; uma sequência de sons, como em uma música ou uma fala; uma sequência de imagens, como em um filme ou uma exibição fotográfica; uma sequência de instruções de máquina, como os comandos de uma unidade central de processamento (CPU, do inglês *central processing unit*) ou de uma unidade lógica e aritmética (ALU, do inglês *arithmetic logic unit*); entre tantos outros exemplos.

O transmissor prepara a mensagem para o processo de condução pelo canal (Shannon, 1948; Ash, 1965). Como mencionado há pouco, essa preparação ocorre em três etapas. Na primeira, o codificador de fonte associa a saída desta a uma sequência de símbolos, usualmente dígitos binários, concebida de forma a propiciar uma representação mais compacta da mensagem original. Na segunda, o codificador de canal associa essa versão reduzida da mensagem a outra sequência de símbolos, nesse caso, concebida de forma a estabelecer uma representação capaz de detectar e corrigir erros durante a condução pelo canal. Ambas as representações, ou ambos os códigos, são desejáveis pois tornam a transmissão eficiente e são viáveis uma vez que qualquer mensagem pode ser devidamente reproduzida por uma enumeração de conjuntos discretos. Por fim, na terceira etapa, o modulador produz uma correspondência biunívoca entre a sequência de símbolos, ou palavra de código, criada pelo codificador de canal e os eventos admissíveis na entrada do mesmo – eventos, inclusive, dependentes das características físicas relacionadas ao transporte da mensagem e, portanto, irremediavelmente abrangentes (Fano, 1961; Proakis *et al.*, 2008).

O canal é o meio que conduz a mensagem, do transmissor para o receptor (Shannon, 1948; Ash, 1965). Para isso, são necessárias uma extremidade apta a gerar sinais de alguma espécie e uma outra apta a observá-los. Em princípio, qualquer tipo de propagação de energia pode ser aproveitado para a comunicação. São exemplos de canal: um par de fios interconectado a um gerador de tensão e a um voltímetro; o espaço entre duas antenas de radio-frequência; e uma fibra óptica interligada a um emissor e a um receptor de luz. Nesses casos, o carregador da mensagem é a energia eletromagnética, conduzida por alguns meios ou irradiada por outros. Para todos os sistemas de comunicação conhecidos, a observação de sinais como os exemplificados está sujeita às incertezas provocadas por distúrbios aleatórios ou por imperfeições de projeto. Convencionalmente, o termo empregado para descrever essas perturbações é o ruído – elemento que, mesmo na ausência de falhas humanas, faz-se presente por traços naturais, como a agitação térmica dos átomos e das moléculas que compõem o canal. Essa onipresença leva a situações em que um mesmo registro na saída pode ser o resultado de um ou mais eventos na entrada, o que inextricavelmente limita as observações sobre o com-

portamento do canal a um metódico tratamento estatístico baseado em várias ocorrências (Fano, 1961; Proakis *et al.*, 2008).

O receptor extrai do canal a mensagem da fonte e a disponibiliza ao destino (Shannon, 1948; Ash, 1965). Como se trata da operação inversa à do transmissor, esse processo também ocorre em três etapas. Inicialmente, o demodulador avalia os sinais físicos na saída do canal e a partir destes reconstitui, pelos motivos vistos acima, apenas uma versão corrompida da sequência de símbolos gerada pelo codificador de canal. Em seguida, o decodificador de canal, ao detectar e corrigir os erros de transmissão, restaura aquela versão compactada pelo codificador de fonte. Por fim, o decodificador de fonte, ao descompactar essa última sequência de símbolos, recupera uma mensagem em princípio equivalente à da fonte. De maneira geral, o receptor, para executar essas três etapas, essencialmente se vale de conhecimento prévio sobre as características do transmissor e dos sinais de propagação presentes em todo o sistema (Proakis *et al.*, 2008).

O destino – como a fonte, em geral uma pessoa ou uma máquina – é a quem a mensagem interessa (Shannon, 1948). Logo, reproduzi-la de forma fidedigna é o propósito fundamental de um sistema de comunicação. Ao considerar criteriosamente esse objetivo, e em face da existência do ruído e de indesejáveis – mas possíveis – erros de projeto, um pouco de reflexão sugere que uma reprodução perfeita é algo praticamente inatingível. Na realidade, o que se espera é uma reprodução satisfatória, uma que cumpra algum critério de precisão e anuência (Proakis *et al.*, 2008). Por exemplo, em um sistema de comunicação por voz, deseje-se que a fala de um locutor seja reproduzida de modo que um interlocutor a entenda, identifique o falante e, se concebível, até mesmo reconheça as inflexões do discurso.

Diante da necessidade de assumir um critério de tolerância, e diante da grande diversidade dos sistemas de comunicação, a mensagem da fonte, independentemente de sua natureza e significação, carece de uma tradução para um objeto mensurável que se aplique nas diferentes situações. A resposta a essas exigências conduz a uma formulação matemática para as chamadas medidas de incerteza e de informação, fortemente apoiadas em conceitos de probabilidade.

1.2 MEDIDAS DE INCERTEZA E DE INFORMAÇÃO

Para construir formalmente as medidas de incerteza e de informação, existem duas abordagens factíveis. A primeira parte de um conjunto de axiomas que estabelece certas características sobre a concepção de incerteza e, com o uso de recursos matemáticos válidos,

chega a uma função, denomina entropia, que atende os requisitos. Então, a partir desta, deriva-se uma outra função para a medida de informação (Shannon, 1948). A segunda, por sua vez, também parte de um conjunto de axiomas, porém nesse caso, que estabelece as bases para a concepção de informação e conclui depois que a medida de incerteza é uma espécie de autoinformação. Ainda que adotem pontos de partida distintos, os dois procedimentos são equivalentes porque levam aos mesmos resultados gerais. Além disso, a importância das medidas de incerteza e de informação não decorre necessariamente dessas abordagens. Ela decorre, sim, dos seus significados operacionais e dos seus êxitos em fundamentar teoremas essenciais sobre os limites de funcionamento de um sistema de comunicação (Fano, 1961). Exatamente por isso, o presente trabalho não se atém a esses pormenores axiomáticos, busca apenas apresentá-las de maneira consistente. Ao longo da exposição, tão somente por uma questão de estilo, a medida de incerteza antecede a de informação.

1.2.1 Entropias

Os conceitos de entropia e de informação abordados ao longo deste capítulo se baseiam exclusivamente em distribuições de probabilidade discretas. Em geral, essas distribuições são suficientes para construir um modelo do canal discreto sem memória, um dos referenciais teóricos do experimento de comunicação deste trabalho, e também as são para determinar a quantidade máxima de informação que pode ser transmitida por esse canal.

Diante disso, considere uma variável aleatória discreta X que, de acordo com uma função massa de probabilidade $p(x) = \text{Prob}(X = x)$, assume os símbolos de um alfabeto \mathcal{X} . Então, a entropia $H(X)$ de uma variável aleatória discreta é definida como a média sobre todos os valores de $\log[1/p(x)]$ (Expr. * 1.1) (Shannon, 1948).

$$H(X) = E \left[\log \frac{1}{p(x)} \right] = \sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{1}{p(x_i)} \quad (1.1)$$

Todavia, assim posta, o que essa definição tem de especial? Em primeiro lugar, trata-se de uma quantidade não negativa ($H(X) \geq 0$), visto que $0 \leq p(x) \leq 1$, e por isso condizente com a concepção de incerteza, que não admite significado para valores negativos. Além disso, como intuitivamente se espera que um evento muito incerto tenha uma baixa probabilidade de ocorrer ($p(x) \sim 0$), e um evento quase certo tenha uma alta probabilidade ($p(x) \sim 1$), $\log[1/p(x)]$ exprime bem essa ideia já que varia de $+\infty$ conforme $p(x) \rightarrow 0$, o que denota

* Expr.: abreviação adotada para as expressões matemáticas.

grande incerteza, a 0 quando $p(x) = 1$, o que denota a ausência de incerteza – uma característica de eventos determinísticos (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

Em segundo lugar, a função logarítmica, por meio de sua base, concede à concepção de incerteza uma unidade de medida. Por exemplo, para dois eventos em que vale o produto $p(x)p(y)$, como $\log\{1/[p(x)p(y)]\} = \log[1/p(x)] + \log[1/p(y)]$, as incertezas se unem por um fator determinado pela base do logaritmo. Por convenção, na base 2, esse incremento é avaliado em “bits” (termo derivado da compactação de “dígitos binários”, “*binary digits*” em inglês), na base e em “nats” e na base 10 em “dits” (Hartley, 1928; Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018). Embora a primeira seja a mais comum, não há perda de generalidade ao adotar uma em detrimento da outra, dado que $\log_b a = (\log_c a)(\log_b c)$. Para algumas demonstrações, no entanto, a base e é mais conveniente (Ash, 1965).

E em terceiro lugar, o operador esperança $E[.]$ fixa um único valor (médio) de incerteza para uma mesma massa de probabilidade, ou seja, a entropia discreta é uma função determinística de $p(x)$ – cuja notação, $H(X)$, remete à variável aleatória ao invés da distribuição (o ideal seria $H[p(x)]$, provavelmente evitada por ser carregada). Inclusive, assim definida, essa entropia é invariante a distribuições equivalentes: se $Y = f(X)$ e $X = f^{-1}(Y)$, eventualmente estabelecidas em alfabetos \mathcal{X} e \mathcal{Y} diferentes, $H(X)$ e $H(Y)$ assumem exatamente o mesmo valor (Rioul, 2018) – aspecto essencial, em conjunto com as outras atribuições vistas, para torná-la uma medida coerente e apta a estabelecer comparações.

Tabela 1.1: Exemplos de entropia para uma variável aleatória discreta.

Símbolos	$Prob(X = x)$	$H(X)$	
N -ários equiprováveis	$\frac{1}{N} \quad [\forall x \in \mathcal{X}]$	$\log N$	(1.2)
Binários	$\begin{cases} p & [x = x_0] \\ 1 - p & [x = x_1] \end{cases}$	$p \log \frac{1}{p} + (1 - p) \log \frac{1}{(1 - p)}$	(1.3)
N -ários simétricos	$\begin{cases} p & [x = x_0] \\ \frac{1 - p}{N - 1} & [x \neq x_0] \end{cases}$	$p \log \frac{1}{p} + (1 - p) \log \frac{N - 1}{(1 - p)}$	(1.4)

Como exemplo de aplicação direta da Expr. 1.1, a Tabela 1.1 mostra os resultados do cálculo da entropia para os casos de símbolos N -ários equiprováveis (Expr. 1.2), de símbolos binários (Expr. 1.3) e de símbolos N -ários simétricos (Expr. 1.4). Além disso, o gráfico da Fig. 1.2, na sequência, exhibe algumas curvas de entropia do terceiro caso, para valores de p

entre 0 e 1. De fato, a medida de incerteza varia com a distribuição e retorna o valor máximo na circunstância mais incerta: quando os símbolos são equiprováveis (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

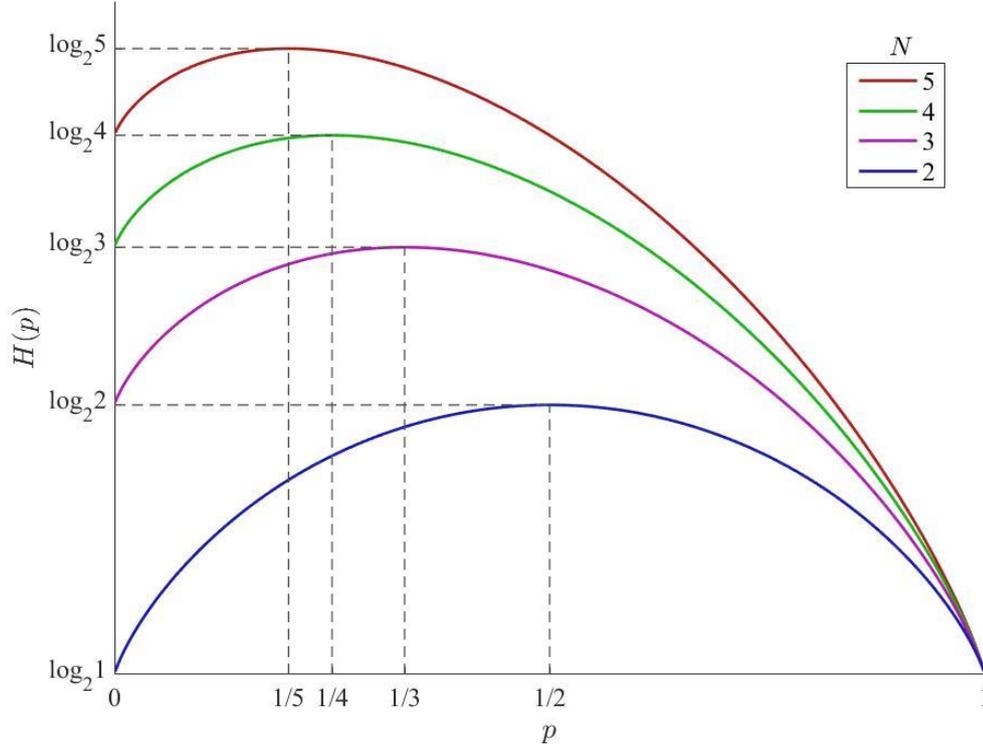


Fig. 1.2: Exemplos de curvas de entropia para símbolos N -ários simétricos.

O conceito de entropia, e por consequência o de incerteza, facilmente se estende para um cenário com duas variáveis aleatórias discretas X e Y . Logo, dada uma função massa de probabilidade conjunta $p(x, y) = \text{Prob}(X = x, Y = y)$, com $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, a entropia conjunta $H(X, Y)$ de um par de variáveis aleatórias discretas é definida como a média sobre todos os valores de $\log[1/p(x, y)]$ (Expr. 1.5) (Shannon, 1948). Evidentemente, essa definição pode ser expandida para conter um número arbitrário de variáveis (Cover *et al.*, 2006). Contudo, para fins deste estudo, lidar com até duas é suficiente.

$$H(X, Y) = E \left[\log \frac{1}{p(x, y)} \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{1}{p(x_i, y_j)} \quad (1.5)$$

De forma similar, o conceito de entropia se estende ao caso em que um dos símbolos (x_i , por exemplo) de uma das distribuições é afixado. Para isso, considere uma função massa de probabilidade $p(y|x_i) = \text{Prob}(Y = y|X = x_i)$, com $x_i \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$. Então, a entropia $H(Y|X = x_i)$ é definida como a média, ponderada por $p(y|x_i)$, sobre todos os valores de $\log[1/p(y|x_i)]$ (Expr. 1.6) (Ash, 1965).

$$H(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) \log \frac{1}{p(y_j|x_i)} \quad (1.6)$$

Por fim, o conceito de entropia também se estende a uma distribuição condicional. Para tanto, $H(Y|X)$ é definida como a média, em $p(x)$, sobre todos os valores de $H(Y|X = x_i)$ (Expr. 1.7), o que, de maneira equivalente, significa que, dada uma função massa de probabilidade condicional $p(y|x) = \text{Prob}(Y = y|X = x)$, como $p(x, y) = p(y|x)p(x)$, $H(Y|X)$ representa a média sobre todos os valores de $\log[1/p(y|x)]$ (Ash, 1965).

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) \log \frac{1}{p(y_j|x_i)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{1}{p(y_j|x_i)} = E \left[\log \frac{1}{p(y|x)} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Existem importantes relações de igualdade e desigualdade construídas com essas entropias. Por meio de manipulação algébrica, algumas dessas relações surgem diretamente das definições; porém outras subsistem devido a uma característica compartilhada por todas as fórmulas: a presença da função logarítmica. Essa função, em particular, subjaz sua tangente em qualquer ponto e assim, sem perda de generalidade, consubstancia a relação $\ln r \leq r - 1$, com igualdade se e somente se $r = 1$ (Fig. 1.3) (Ash, 1965).

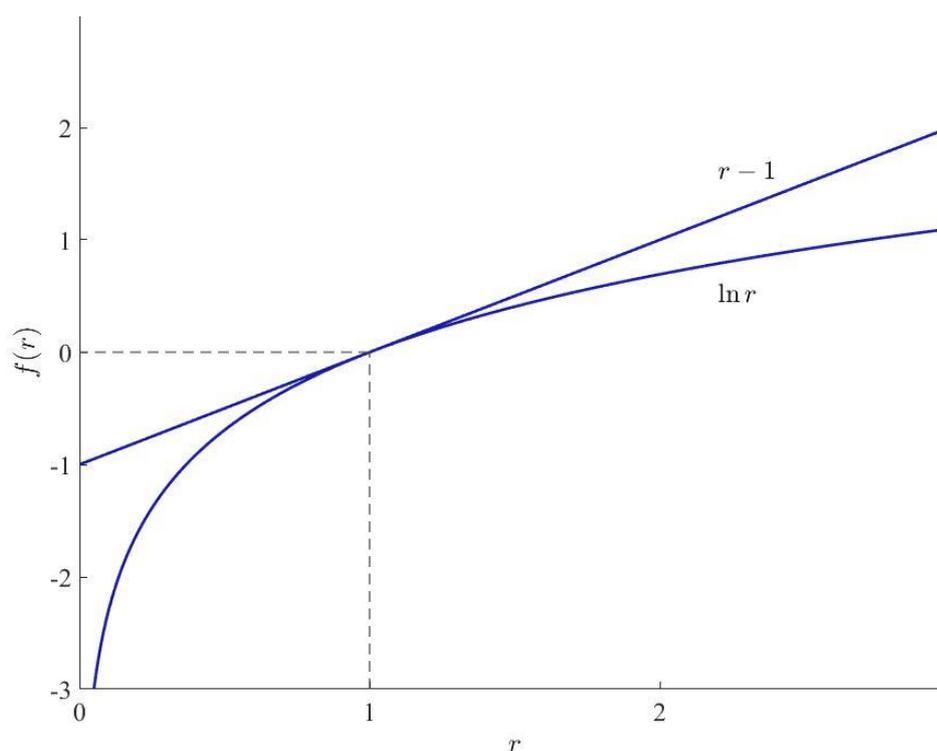


Fig. 1.3: Ilustração da propriedade $\ln r \leq r - 1$.

Agora, considere a_1, a_2, \dots, a_N e b_1, b_2, \dots, b_N números positivos de tal forma que $\sum a_i = \sum b_i = 1$. Com $r = b_i/a_i$, a multiplicação por a_i , e a soma de todos os termos, a relação logarítmica apresentada se torna a inequação da Expr. 1.8 (Ash, 1965).

$$\sum_{i=1}^N a_i \ln \frac{b_i}{a_i} \leq \sum_{i=1}^N a_i \frac{b_i}{a_i} - \sum_{i=1}^N a_i = 1 - 1 = 0 \quad (1.8)$$

Essa desigualdade é tão importante em teoria da informação que até recebe uma conotação especial: a concepção/medida de entropia relativa ou divergência (Kullback *et al.*, 1951). Nesse sentido, dadas duas distribuições de probabilidade p e q definidas sob um mesmo alfabeto, a entropia relativa $D(p, q)$ – ou divergência – é definida como a média, em p , sobre todos os valores de $\log(p/q)$ (Expr. 1.9). Essa medida corresponde a uma espécie de desvio entrópico, nesse caso de q , em relação à entropia $H(p)$, mantida como referência. Sua não negatividade decorre imediatamente da Expr. 1.8, com $D(p, q) = 0$ se e somente se $p = q$, situação em que as probabilidades não divergem (Rioul, 2018).

$$D(p, q) = \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{p_i}{q_i} = \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{1}{q_i} - \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{1}{p_i} \geq 0 \quad (1.9)$$

Um exemplo de aplicação da divergência é a demonstração da seguinte propriedade: $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, ou seja, a incerteza associada a uma distribuição conjunta jamais excede a soma das incertezas associadas às distribuições marginais. Para mostrar esse fato, coloque $p = p(x, y)$ e $q = p(x)p(y)$ em $D(p, q)$ e desenvolva até chegar à inequação requerida (Expr. 1.10). A igualdade só ocorre quando X e Y são independentes.

$$\begin{aligned} D(p, q) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{1}{p(x_i)p(y_j)} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{1}{p(x_i, y_j)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{1}{p(x_i)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{1}{p(y_j)} - H(X, Y) \\ &= \sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{1}{p(x_i)} + \sum_{j=1}^M p(y_j) \log \frac{1}{p(y_j)} - H(X, Y) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como mencionado há pouco, além desta, existem outras relações importantes. Suas demonstrações utilizam argumentos similares ao utilizado na Expr. 1.10 e, por isso, não são tratadas uma a uma. A Tabela 1.2 resume as principais. De todas, em especial, a Expr. 1.15, já intimamente ligada ao conceito de informação, denota que no geral o conhecimento reduz a

incerteza, exceto quando as variáveis envolvidas são independentes (Rioul, 2018).

Tabela 1.2: Resumo de propriedades das entropias.

Propriedades	
$H(X) \geq 0$ [com igualdade $\Leftrightarrow X$ for determinística]	(1.11)
$D(p, q) \geq 0$ [$D(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$]	(1.12)
$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ [com igualdade $\Leftrightarrow X$ e Y forem independentes]	(1.13)
$H(X, Y) = H(X) + H(Y X) = H(Y) + H(X Y) = H(Y, X)$	(1.14)
$H(Y X) \leq H(Y)$ [com igualdade $\Leftrightarrow X$ e Y forem independentes]	(1.15)

1.2.2 Três definições de informação

Motivada pela Expr. 1.15, a informação $I(X, Y)$ é definida como a diferença entre duas entropias: $H(Y)$ e $H(Y|X)$, a primeira, conforme visto anteriormente, uma incerteza média associada à variável aleatória Y , enquanto a segunda denota uma incerteza média que permanece em Y após o conhecimento da variável aleatória X (Expr. 1.16). Ou seja, essa primeira definição estabelece como medida de informação exatamente a parcela de redução na incerteza sobre Y causada pela revelação de X . Nitidamente, trata-se de uma quantidade não negativa ($I(X, Y) > 0$), dada em “bits” se a função logarítmica estiver na base 2, e que se anula apenas quando X e Y são independentes (Shannon, 1948).

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) \geq 0 \quad (1.16)$$

De acordo com a Expr. 1.14, $H(Y|X) = -H(X) + H(Y) + H(X|Y)$. Portanto, a informação que X carrega sobre Y é a mesma informação que Y carrega sobre X (Expr. 1.17). Nesse sentido, a medida de informação é simétrica (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(Y) - [-H(X) + H(Y) + H(X|Y)] \\ &= H(X) - H(X|Y) = I(Y, X) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Agora motivada pela Expr. 1.10, dadas as distribuições de probabilidade $p(x, y)$ e $p(x)p(y)$ definidas sob um mesmo alfabeto, a informação $I(X, Y)$ também é definida como a entropia relativa $D[p(x, y), p(x)p(y)]$ (Expr. 1.18). Ou seja, essa segunda definição estabelece como medida de informação o desvio entrópico, do produto das distribuições marginais, em

relação à entropia da distribuição conjunta (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018) – dito de outra forma, uma parcela do quanto o produto das marginais diverge da conjunta.

$$I(X, Y) = E \left[\log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right] = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \geq 0 \quad (1.18)$$

Embora não explícito à primeira vista, como mostrado pelo desenvolvimento seguinte (Expr. 1.19), as duas definições de informação dadas são equivalentes e, por isso, compartilham as mesmas propriedades (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= H(X) + H(Y) - [(H(X) + H(Y|X))] \\ &= H(Y) - H(Y|X) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por fim, motivada pela própria Expr. 1.18, como $p(x, y) = p(y|x)p(x)$, a informação $I(X, Y)$, em uma versão mais compacta, é definida simplesmente como a média sobre todos os valores de $\log[p(y|x)/p(y)]$ (Expr. 1.20).

$$I(X, Y) = E \left[\log \frac{p(y|x)}{p(y)} \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \quad (1.20)$$

Mas afinal, assim colocada, sem usar nenhum dos resultados obtidos até o momento, o que essa definição representa por si mesma? Em primeiro lugar, analogamente a argumentos já proferidos, trata-se de uma quantidade não negativa ($I(X, Y) \geq 0$), devido a um desenvolvimento feito a partir de $\ln r \leq r - 1$ (Fig. 1.3), e por isso coerente com a ideia de informação, que não tem nexos para valores negativos. Além disso, a razão entre $p(y|x)$ e $p(y)$ fornece uma certa proporção do quanto $p(y)$ se altera com a revelação de $p(x)$. Com essa conotação, se X diz muito sobre Y , em geral $p(y_j|x_i) > p(y_j)$ e a tal proporção cresce ponderada por $p(x_i, y_j)$. Entretanto, se por outro lado X não diz nada, então $p(y|x) = p(y)$ e $I(X, Y)$ prontamente se anula em concordância ao esperado para essa medida (Fano, 1961).

Em segundo lugar, a função logarítmica, ao fixar uma magnitude, de fato estabelece uma grandeza para a medida de informação. Na base 2, por exemplo, $\log[p(y|x)/p(y)]$ retorna um acréscimo unitário – em “bits” obviamente – sempre que, ao revelar X , as chances de Y dobram (Fano, 1961).

E em terceiro lugar, o operador esperança $E[.]$ atribui um único valor (médio) de informação para eventos cujas distribuições de probabilidade são conhecidas (Fano, 1961). Até porque, há pouco interesse em uma única realização de um experimento aleatório; no ge-

ral, há vantagem ao identificar regularidades ao longo de muitas realizações.

Em face dessas três definições, ao que tudo indica, como antecipado na introdução deste tópico, não existe uma abordagem canônica e definitiva para construir e sedimentar a medida de informação. Nesse sentido, a última definição vista (Expr. 1.20), bem como a discussão que se desdobra dela, também é ponto de partida para deduzir todas as propriedades e ponderações apresentadas. Nesse contexto, a entropia de uma variável aleatória é inteiramente definida como uma espécie de autoinformação, ou seja, $H(X) = I(X, X)$. De acordo com as considerações feitas, como um desenlace, a informação, dada, é tão ampla e etérea que escapa a uma única definição. Na prática, sua explicação enseja e requer todo um conjunto de formalismos; mas, lógico, sem esquecer que suas aplicações a justificam.

1.2.3 Minimização e maximização da informação

A entropia H e a informação I representam os objetos mensuráveis que possibilitam a comparação entre a grande diversidade dos sistemas de comunicação. Contudo, elas por si só não bastam porque, de forma geral, além de unidades de medida, toda comparação se apoia em técnicas e procedimentos. Nesse sentido, a questão se volta para a busca de um método de avaliação desses sistemas, com o uso das referidas medidas. De preferência, um que defina as extremidades de operação destes, de forma a estabelecer a extensão de uma comunicação confiável. A resposta a essas necessidades remete a uma formulação matemática associada a problemas de maximização e de minimização de funções – fortemente escorados, por sua vez, nos conceitos de convexidade e de concavidade.

Destarte, uma função f é considerada convexa em um intervalo $[a, b]$ se, para todo x e y desse intervalo e para todo $0 < \lambda < 1$, vale a desigualdade $f(z) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$, sempre que $z = \lambda y + (1 - \lambda)x$ (Apostol, 1967). A Fig. 1.4(a) fornece uma interpretação geométrica dessa propriedade. Como forma de generalização, uma função f é convexa se e somente se, para todo x_i do seu domínio e para todo $\lambda_i > 0$ tal que $\sum \lambda_i = 1$, vale a seguinte inequação (Expr. 1.21) (Rioul, 2018).

$$f\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(x_i) \quad (1.21)$$

Por outro lado, uma função f é considerada côncava em um intervalo $[a, b]$ se, dadas as mesmas condições, vale a desigualdade inversa: $f(z) \geq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$ (Apostol, 1967). Para essa outra propriedade, a Fig. 1.4(b) exhibe uma interpretação geométrica e a Expr.

1.22 indica a generalização. Das duas definições vistas, fica explícito que, se f é côncava, $-f$ é convexa e vice-versa (Rioul, 2018).

$$f\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(x_i) \tag{1.22}$$

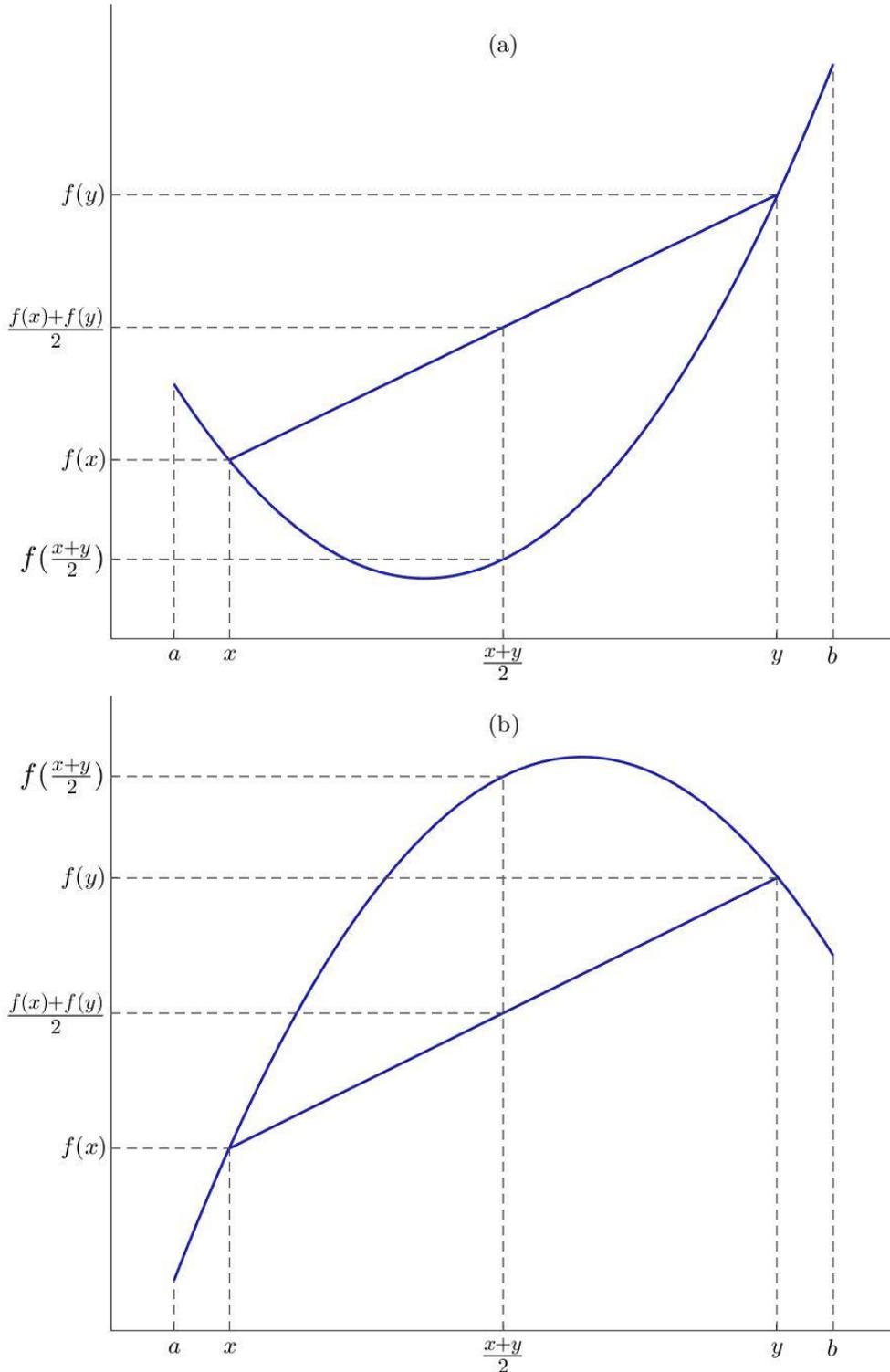


Fig. 1.4: Interpretações geométricas de (a) uma função convexa e de (b) uma função côncava, para $\lambda = 1/2$.

A convexidade e a concavidade são propriedades essenciais para buscar os respectivos pontos de mínimo e de máximo ao longo de todo o domínio – ou de um intervalo – de uma função. Isso porque, ainda que não certifiquem a existência desses pontos, ao menos justificam e orientam a busca deles. Dentro dessa perspectiva, é de extremo interesse saber se cada uma das funções apresentadas nas seções precedentes é convexa ou côncava.

Como primeiro fato, a entropia relativa $D(p, q)$ é convexa nas distribuições p e q . Para verificá-lo, considere duas funções massa de probabilidade p_1, p_2, \dots, p_N e q_1, q_2, \dots, q_N como as definidas na Expr. 1.23, de tal forma que a_1, a_2, \dots, a_N e b_1, b_2, \dots, b_N sejam números positivos quaisquer, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N > 0$ e $\sum \lambda_i = 1$.

$$\begin{cases} p_i = \frac{\lambda_i a_i}{a} & , a = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i \\ q_i = \frac{\lambda_i b_i}{b} & , b = \sum_{i=1}^N \lambda_i b_i \end{cases} \quad (1.23)$$

Agora, coloque $p = p_i$ e $q = q_i$ em $D(p, q)$ e desenvolva até a inequação associada a convexidade (Expr. 1.24) (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

$$\begin{aligned} D(p, q) &= \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i a_i}{a} \log \frac{\lambda_i a_i b}{a \lambda_i b_i} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i \log \frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{a} \log \frac{a}{b} \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i \log \frac{a_i}{b_i} - a \log \frac{a}{b} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Como segundo fato, a entropia $H(p)$ é côncava na distribuição p , um resultado direto da convexidade da divergência. Para constatá-lo, apenas faça $q = 1$ em $D(p, q)$ e veja que disso resulta $-H(p)$ (Expr. 1.25), que é convexa então. Logo, a entropia $H(p)$ é côncava. Aliás, como a sua segunda derivada é negativa, $H(p)$ é côncava no sentido estrito – ou seja, se apresenta um ponto de máximo, este é único (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

$$D(p, 1) = \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{p_i}{1} = - \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{1}{p_i} = -H(p) \quad (1.25)$$

Como terceiro fato, ao fixar $p(x)$, a informação $I(X, Y)$ é convexa na distribuição $p(y|x)$. Para mostrá-lo, rearranje a Expr. 1.20 de modo a obter uma formulação em termos de $p(x)$ e de $D[p(y|x), p(y)]$ (Expr. 1.26).

$$\begin{aligned}
I(X, Y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i)p(x_i) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \\
&= \sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \\
&= \sum_{i=1}^N p(x_i) D[p(y|x_i), p(y)]
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Nesta, por sua vez, perceba que, como $p(x)$ se mantém constante, $I(X, Y)$ é convexa nas distribuições $p(y|x)$ e $p(y)$. Mas $p(y) = \sum_x p(y|x)p(x)$ é linear em $p(y|x)$, o que torna $D[p(y|x), p(y)]$, e consequentemente $I(X, Y)$, convexa apenas na distribuição $p(y|x)$ (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

Como quarto e último fato, ao fixar $p(y|x)$, a informação $I(X, Y)$ é côncava na distribuição $p(x)$. Para confirmá-lo, reescreva a Expr. 1.16 de forma a explicitar sua dependência das distribuições de probabilidade.

$$I(X, Y) = \sum_{j=1}^M p(y_j) \log \frac{1}{p(y_j)} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i)p(x_i) \log \frac{1}{p(y_j|x_i)} \tag{1.27}$$

Agora, a partir desta, observe que, como $p(y|x)$ se conserva inalterado, e como $p(y) = \sum_x p(y|x)p(x)$ é linear em $p(x)$, o primeiro termo, $H(Y)$, é côncavo em $p(x)$ e o segundo, $H(Y|X)$, é claramente linear em $p(x)$. Portanto, $I(X, Y)$ é côncava na distribuição $p(x)$ (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

Em sistemas de comunicação, a convexidade da informação aparece de maneira natural em problemas associados à codificação e à decodificação de fonte. Nesse caso, $p(x)$ está fixa porque representa a distribuição de símbolos da fonte. Por conseguinte, o problema se resume a encontrar uma distribuição $p(y|x)$ que minimize a informação (Expr. 1.28) – para eliminar possíveis redundâncias – e que ao mesmo tempo recupere-a sem distorção, na decodificação de fonte (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018). Não é o foco do presente trabalho, mas é possível mostrar, de forma abrangente, que esse processo tem a entropia da fonte como limitante inferior – logo, para todos os sistemas de comunicação, operar a uma taxa abaixo dessa entropia incorre necessariamente em perda de informação (Shannon, 1948).

$$\min_{p(y|x)} I(X, Y) \quad [p(x) \text{ fixa}] \tag{1.28}$$

Já a concavidade da informação surge de maneira natural em problemas relacionados à codificação e à decodificação de canal. Nesse outro caso, $p(y|x)$ está fixa porque, ao

descrever a distribuição de erros e de acertos para cada símbolo utilizado durante a transmissão, representa o comportamento probabilístico do canal. Assim, o problema se resume a encontrar uma distribuição $p(x)$ que maximize a informação (Expr. 1.29) – para não desperdiçar símbolos enviados pelo canal – e que ao mesmo tempo recupere-a sem erro, na decodificação de canal (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018). Também não é o foco do presente trabalho, mas é possível mostrar, de forma abrangente, que esse processo tem a capacidade de canal como um limitante superior. Nesse sentido, para todos os sistemas de comunicação, operar a uma taxa acima dessa capacidade leva, igualmente, à perda de informação (Shannon, 1948).

$$\max_{p(x)} I(X, Y) \quad [p(y|x) \text{ fixa}] \quad (1.29)$$

Esses dois problemas são fundamentais em teoria de informação e, respectivamente, resultam em uma função taxa-distorção e uma função capacidade-custo. Esta tese, por um lado, não explora o primeiro porque, em princípio, considera o envio de mensagens de todo tipo e para todo o fim – ou seja, não se preocupa em descrever fontes e destinos. Por outro lado, explora de forma um pouco mais detalhada o segundo justamente porque, nos moldes da teoria de informação, caracteriza e testa um canal de comunicação.

1.3 CANAL DISCRETO SEM MEMÓRIA

Para enfatizar o experimento de transmissão, a Fig. 1.5 exhibe uma versão reduzida do diagrama da Fig. 1.1. Nesse modelo, a função massa de probabilidade de X , dada por $p(x)$, representa os símbolos na entrada do canal enquanto a de Y , dada por $p(y)$, representa os símbolos na saída. Ciente dos possíveis erros, testa-se o canal de comunicação, antes de utilizá-lo – procedimento conhecido como avaliação de canal. Nessa etapa preliminar, do ponto de vista de um observador privilegiado, ou seja, de um que conheça, para um grande número de realizações desse experimento, os símbolos enviados e recebidos, estima-se a distribuição $p(y|x)$, que se torna, por sua vez, a principal caracterização do canal. Então, em uma etapa posterior, a partir dessa estimativa, busca-se a $p(x)$ que atinge a capacidade.

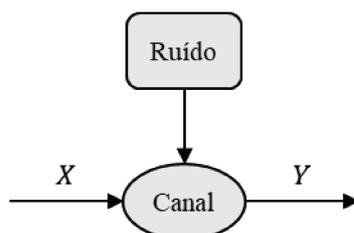


Fig. 1.5: Canal de comunicação.

Nesse contexto, um canal discreto, com o passar de um tempo n , discreto, essencialmente recebe uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de n símbolos na entrada, pertencentes a um alfabeto de entrada, e retorna uma sequência $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de n símbolos na saída, pertencentes a um alfabeto de saída. Via de regra, as sequências de entrada e de saída se relacionam por meio de processos aleatórios, inteiramente caracterizados com as distribuições de probabilidade condicionais $p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, que na prática denotam as chances de ocorrer uma sequência $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ na saída, dada uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ na entrada. Em particular, um canal discreto é considerado sem memória se, para qualquer instante i , sua saída só dependa de sua entrada no referido instante i (Expr. 1.30) (Ash, 1965; Rioul, 2018).

$$p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^n p(\beta_i | \alpha_i) \quad (1.30)$$

Para fins de análise, um canal discreto sem memória apresenta um alfabeto de entrada x_1, x_2, \dots, x_N , modelado por uma variável aleatória X de distribuição $p(x)$, um alfabeto de saída y_1, y_2, \dots, y_M , modelado por uma variável aleatória Y de distribuição $p(y)$, e uma matriz de transição $\mathbf{P} = [P_{ij}]$, em que $P_{ij}(Y = y_j | X = x_i) = p(y_j | x_i)$, com uma distribuição condicional $p(y|x)$ invariante no tempo (Expr. 1.30) (Fano, 1961; Ash, 1965).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & \cdots & p(y_M|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1|x_N) & \cdots & p(y_M|x_N) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Para um canal de comunicação com \mathbf{P} bem definida, de acordo com a Expr. 129, a informação transmitida depende apenas da distribuição de entrada. Em termos procedimentais, pode-se então variar $p(x)$ até que $I(X, Y)$ alcance um valor máximo, que representa a capacidade C do canal (Expr. 1.32) (Fano, 1961; Ash, 1965).

$$C = \max_{p(x)} I(X, Y) = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y|X)] \quad (1.32)$$

Embora não demonstrado aqui, a motivação para calcular essa capacidade se deve, como anunciado há pouco, a um dos resultados fundamentais da teoria de informação, o chamado teorema da codificação de canal. Esse teorema garante que, para um canal ruidoso e por isso susceptível a erros de transmissão, se a taxa R de uso do canal não excede a capacidade C , então existe uma codificação que permite a informação ser conduzida com uma probabilidade de erro tão pequena quanto se queira (Shannon, 1948; Fano, 1952). O resgate de um aspecto histórico ajuda a entender melhor a sua relevância. Antes de sua demonstração, acreditava-se que, para transmitir com cada vez mais confiança, ao incluir símbolos para verificar os poten-

ciais erros, a taxa R inevitavelmente tendia a zero. Após a sua demonstração, constatou-se que não é necessário sacrificá-la, somente reduzi-la a um valor menor ou igual à capacidade C (Shannon, 1948; Fano, 1961; Ash, 1965).

1.3.1 Canal simétrico

Para um canal discreto sem memória, o cálculo teórico da capacidade é relativamente simples, caso a matriz de transição \mathbf{P} exiba simetrias. Nesse sentido, um canal é considerado simétrico se cada linha de \mathbf{P} tem o mesmo conjunto de probabilidades p_1, p_2, \dots, p_M e cada coluna tem o mesmo conjunto de probabilidades q_1, q_2, \dots, q_N (Fano, 1961; Ash, 1965). Como exemplo, a Tabela 1.3 fornece a representação e a matriz \mathbf{P} de um canal binário simétrico (Expr. 1.33) e de um canal ternário simétrico (Expr. 1.34).

Tabela 1.3: Exemplos de canal simétrico.

Canal	Representação	\mathbf{P}
Binário simétrico		$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \quad (1.33)$
Ternário simétrico		$\begin{bmatrix} p & \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & p & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} & p \end{bmatrix} \quad (1.34)$

Para um canal com as características mencionadas, o cômputo de $H(Y)$ e $H(Y|X)$, da Expr. 1.32, provém direto das propriedades vistas. Quanto ao primeiro, coloque $p = p(y)$ e $q = 1/M$ em $D(p, q)$ e rearranje os termos até constatar que $H(Y) \leq \log M$ (Expr. 1.35). Logo, como já antecipado pelas curvas da Fig. 1.2, a entropia de uma variável aleatória é sempre menor ou igual à entropia da distribuição uniforme (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018).

$$\begin{aligned}
D(p, q) &= \sum_{j=1}^M p(y_j) \log \frac{1}{1/M} - \sum_{j=1}^M p(y_j) \log \frac{1}{p(y_j)} \\
&= \log M \sum_{j=1}^M p(y_j) - H(Y) \\
&= \log M - H(Y) \geq 0
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Para o cálculo da capacidade, $H(Y)$ deve ser o maior possível: idealmente $\log M$, nesse caso. Contudo, ainda é necessário verificar se existe uma distribuição $p(x)$ na entrada que torna $p(y)$ equiprovável na saída. Como mostra o desenvolvimento a seguir, para o canal simétrico, é a distribuição $p(x) = 1/N$ que realiza esse feito (Expr. 1.36) (Ash, 1965).

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^N p(y_j|x_i)p(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(y_j|x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i = \text{constante} \tag{1.36}$$

Observe que a penúltima simplificação da Expr. 1.36 ocorre porque as probabilidades q_i ao longo de qualquer coluna de \mathbf{P} são, por definição, iguais. Desse modo, e como $p(y_j)$ tem o mesmo valor constante para todo j , $p(y)$ é equiprovável (Ash, 1965).

Quanto ao segundo cômputo, perceba que $H(Y|X)$ na prática não depende da distribuição $p(x)$, apenas de p_1, p_2, \dots, p_M , exatamente o conjunto de probabilidades contido em cada linha de \mathbf{P} (Expr. 137) (Ash, 1965).

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i)p(x_i) \log \frac{1}{p(y_j|x_i)} \\
&= \sum_{j=1}^M p_j \log \frac{1}{p_j} \sum_{i=1}^N p(x_i) \\
&= \sum_{j=1}^M p_j \log \frac{1}{p_j}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Portanto, como conclusão desses argumentos, a capacidade de um canal simétrico chega a uma fórmula fechada (Expr. 1.38).

$$C = \log M - \sum_{j=1}^M p_j \log \frac{1}{p_j} \tag{1.38}$$

Como exemplo de aplicação da Expr. 1.38, a Tabela 1.4 mostra as distribuições de probabilidade e os resultados do cálculo teórico da capacidade para os canais determinístico

(Expr. 1.39), binário simétrico (Expr. 1.40) e M -ário simétrico (Expr. 1.41). Ademais, o gráfico da Fig. 1.6, na sequência, exibe algumas curvas de capacidade do terceiro caso, para valores de p entre 0 e 1. Ao contrário das entropias da Fig. 1.2, a capacidade retorna o valor mínimo na situação mais incerta, quando os símbolos são equiprováveis, bem como o valor máximo na situação menos incerta, quando $p = 1$ (Fano, 1961).

Tabela 1.4: Exemplos de capacidade para um canal simétrico.

Canal	$p(y_j x_i)$	C	
Determinístico	$\begin{cases} 1 & [i = j] \\ 0 & [i \neq j] \end{cases}$	$\log M$	(1.39)
Binário simétrico	$\begin{cases} p & [i = j] \\ 1 - p & [i \neq j] \end{cases}$	$1 + p \log p + (1 - p) \log(1 - p)$	(1.40)
M -ário simétrico	$\begin{cases} p & [i = j] \\ \frac{1 - p}{M - 1} & [i \neq j] \end{cases}$	$\log M + p \log p + (1 - p) \log \frac{(1 - p)}{M - 1}$	(1.41)

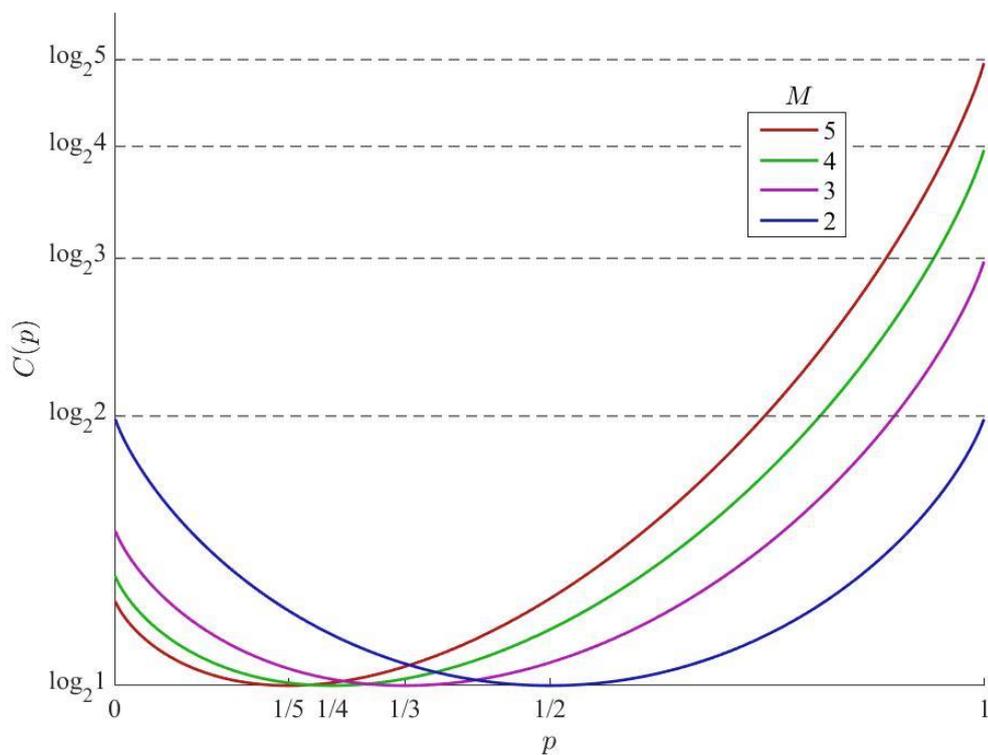


Fig. 1.6: Exemplos de curvas de capacidade para o canal M -ário simétrico.

Por fim, ainda que a capacidade de um canal simétrico tenha uma solução fechada, isso não reflete o caso mais geral do problema da capacidade de um canal discreto sem

memória, cuja resolução leva a um sistema de equações transcendentais e, por isso, depende de métodos iterativos (Meister *et al.*, 1967; Arimoto, 1972).

1.3.2 Cálculo teórico da capacidade

Com o uso do método dos multiplicadores de Lagrange (λ), existe uma formulação mais geral para encontrar a capacidade de um canal discreto sem memória. Embora esse método não permita a inclusão da restrição $p(x_i) \geq 0$, ele busca, sujeito apenas a $\sum p(x_i) = 1$, maximizar a informação $I(X, Y)$, ao tomar as $k = 1, 2, \dots, N$ derivadas parciais com respeito a $p(x_i)$ e igualá-las a zero (Expr. 1.42), na expectativa de que o resultado não incorpore valores negativos para $p(x_i)$ (Ash, 1965). Contudo, ao final, como não imposta pelo método, essa condição deve ser verificada para garantir a consistência do cálculo.

$$\frac{\partial}{\partial p(x_k)} \left[I(X, Y) + \lambda \sum_{i=1}^N p(x_i) \right] = 0 \quad (1.42)$$

Na Expr. 1.42, como $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$, há basicamente três termos para derivar: $H(Y)$, $H(Y|X)$ e $\sum p(x_i)$. As derivadas parciais do último são imediatas (Expr. 1.43) (Fano, 1961; Ash, 1965).

$$\frac{\partial}{\partial p(x_k)} \sum_{i=1}^N p(x_i) = 1 \quad (1.43)$$

Para os outros dois termos, devido ao vínculo que a entropia tem com a função logarítmica, por uma questão de simplicidade, e sem perda de generalidade, todo o desenvolvimento ocorre em logaritmo neperiano. Como discutido em seção pretérita, uma vez que $\log_b a = (\log_c a)(\log_b c)$, a expressão final admite mudança de base. Com essas considerações feitas, e retomando o cálculo, cada derivada parcial de $H(Y|X)$ resulta em uma entropia com o correspondente símbolo de entrada fixo (Expr. 1.44) (Fano, 1961; Ash, 1965).

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(Y|X)}{\partial p(x_k)} &= \frac{\partial}{\partial p(x_k)} \left[\sum_{i=1}^N p(x_i) H(Y|X = x_i) \right] \\ &= H(Y|X = x_k) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Por sua vez, como não há dependência explícita de $p(x)$, cada derivada parcial de $H(Y)$ leva em conta a regra da cadeia e o fato de que $p(y) = \sum_x p(y|x)p(x)$, para chegar a uma expressão reduzida em função de $p(y|x_k)$ e $p(y)$ (Expr. 1.45) (Fano, 1961; Ash, 1965).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(Y)}{\partial p(x_k)} &= \frac{\partial}{\partial p(x_k)} \left[\sum_{j=1}^M p(y_j) \ln \frac{1}{p(y_j)} \right] \\
&= \sum_{j=1}^M \frac{\partial H(Y)}{\partial p(y_j)} \frac{\partial p(y_j)}{\partial p(x_k)} \\
&= \sum_{j=1}^M [-\ln p(y_j) - 1] \left[\frac{\partial}{\partial p(x_k)} \sum_{i=1}^N p(y_j|x_i)p(x_i) \right] \\
&= \sum_{j=1}^M [-\ln p(y_j) - 1] p(y_j|x_k) \\
&= - \left[1 + \sum_{j=1}^M p(y_j|x_k) \ln p(y_j) \right]
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Antes de continuar com o cômputo da capacidade C , é conveniente determinar a constante λ , ou melhor, como ela se relaciona com C . Para isso, primeiramente, substitua os resultados das Expr. 1.43, 1.44 e 1.45 na Expr. 1.42 e rearranje os termos de forma a constatar que $1 - \lambda = I(x_k, Y)$ (Expr. 1.46) (Fano, 1961).

$$\begin{aligned}
1 - \lambda &= -H(Y|X = x_k) - \sum_{j=1}^M p(y_j|x_k) \ln p(y_j) \\
&= - \sum_{j=1}^M p(y_j|x_k) \ln \frac{1}{p(y_j|x_k)} - \sum_{j=1}^M p(y_j|x_k) \ln p(y_j) \\
&= \sum_{j=1}^M p(y_j|x_k) \ln \frac{p(y_j|x_k)}{p(y_j)} = I(x_k, Y)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

$I(x_k, Y)$ denota uma certa quantidade de informação que atravessa o canal, para um símbolo x_k específico. Nesse sentido, a distribuição $p(x)$ associada à capacidade é justamente aquela em que a informação $I(x_k, Y)$ tem o mesmo valor $1 - \lambda$ para todo símbolo x_k de entrada. Ou seja, é precisamente esse valor constante que representa a informação máxima do canal discreto sem memória (Expr. 1.47) (Fano, 1961).

$$1 - \lambda = \sum_{k=1}^N p(x_k)(1 - \lambda) = \sum_{k=1}^N p(x_k)I(x_k, Y) = I(X, Y) = C \tag{1.47}$$

Estabelecida essa associação entre C e λ , agora, para encontrar a capacidade e a distribuição que atinge a capacidade, o conjunto de equações da Expr. 146 pode ser reescrita para explicitar a relação de C e \mathbf{P} com $H(Y|X = x_k)$, tanto na forma linear (Expr. 1.48):

$$\sum_{j=1}^M p(y_j|x_k)[C + \ln p(y_j)] = -H(Y|X = x_k) \quad (1.48)$$

quanto na forma matricial (Expr. 1.49):

$$\begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & \cdots & p(y_M|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1|x_N) & \cdots & p(y_M|x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C + \ln p(y_1) \\ \vdots \\ C + \ln p(y_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H(Y|X = x_1) \\ \vdots \\ -H(Y|X = x_N) \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

No caso mais geral, a Expr. 1.49 só tem solução através de métodos numéricos que fornecem um intervalo, tão pequeno quanto se queira, para o valor de C , ou seja, um limitante superior e um limitante inferior (Meister *et al.*, 1967; Arimoto, 1972; Blahut, 1972). Contudo, se $N = M$ e se \mathbf{P} for não singular, existe uma matriz inversa $\mathbf{P}^{-1} = [r_{ji}]$ que torna possível isolar C (Expr. 1.50) (Muroga, 1953):

$$\begin{aligned} C + \ln p(y_j) &= -\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \\ p(y_j) \exp C &= \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \\ \sum_{j=1}^M p(y_j) \exp C &= \sum_{j=1}^M \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \\ \exp C &= \sum_{j=1}^M \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \\ C &= \ln \sum_{j=1}^M \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \end{aligned} \quad (1.50)$$

e isolar $p(x_k)$ (Expr. 1.51), uma vez que $p(x_k) = \sum_j r_{jk}p(y_j)$:

$$\begin{aligned} p(y_j) \exp C &= \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \\ \sum_{j=1}^M r_{jk}p(y_j) \exp C &= \sum_{j=1}^M r_{jk} \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \\ p(x_k) \exp C &= \sum_{j=1}^M r_{jk} \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \\ p(x_k) &= \exp(-C) \left\{ \sum_{j=1}^M r_{jk} \exp \left[-\sum_{i=1}^M r_{ji}H(Y|X = x_i) \right] \right\} \\ p(x_k) &= \exp(-C) d_k. \end{aligned} \quad (1.51)$$

A Expr. 1.50 é válida apenas se, para todo $k = 1, 2, \dots, N$ da Expr. 1.51, $p(x_k) > 0$, restrição (lembre-se) não imposta pelo método de Lagrange e, por isso, sujeita à verificação. Como $e^{-c} > 0$, então necessariamente $d_k > 0$ para que $p(x_k)$ represente uma massa de probabilidade dos símbolos de entrada. Nesse caso, o valor de $I(X, Y)$ obtido é igual à capacidade do canal. Caso algum $d_k < 0$, a solução, quando existe, evidentemente não é aceitável. Nesse caso, o maior valor de $I(X, Y)$ ocorre na interseção entre o hiperplano definido por $\sum p(x_i) = 1$ e um dos $p(x_k) = 0$, o que indica que ao menos um dos símbolos deve ser removido para reavaliar a capacidade (Fano, 1961; Ash, 1965).

Por fim, como a capacidade C obtida está em “nats por símbolo”, com o uso da mencionada propriedade dos logaritmos, não é difícil mostrar que existe uma expressão similar em “bits por símbolo” (Expr. 1.52) (Fano, 1961; Ash, 1965):

$$C = \log \sum_{j=1}^M 2^{-\sum_{i=1}^M r_{ji} H(Y|X=x_i)} \quad (1.52)$$

cuja distribuição é dada por (Expr. 1.53):

$$p(x_k) = 2^{-c} d_k \quad (1.53)$$

com a condição de que (Expr. 1.54):

$$d_k = \sum_{j=1}^M r_{jk} 2^{-\sum_{i=1}^M r_{ji} H(Y|X=x_i)} > 0. \quad (1.54)$$

1.4 CODIFICAÇÃO E DECODIFICAÇÃO DE CANAL

O caminho para atingir a capacidade de canal não é outro senão a elaboração de um código corretor de erros apropriado, o que geralmente envolve o processamento de blocos de informação e não o de segmentos isolados (Costello *et al.*, 2007). Nesse sentido, para enfatizar a etapa de codificação e de decodificação, a Fig. 1.7 exhibe uma versão reduzida do diagrama da Fig. 1.1. Nesse modelo, o vetor de variáveis aleatórias discretas $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_m)$, descrito por $p(\mathbf{u})$, representa uma palavra de fonte com m símbolos U_i , na entrada do codificador. Já os vetores de variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, vinculados através de $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$, representam respectivamente as palavras de código transmitida e recebida pelo canal. Por fim, o vetor de variáveis aleatórias discretas $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, idealmente uma versão aproximada ou exata de \mathbf{U} , representa uma palavra com m símbolos V_i , na saída

do decodificador, reconstruída a partir de \mathbf{Y} . De maneira geral, em um sistema de comunicação, a realização de uma codificação e de uma decodificação de canal é o mesmo que conceber uma distribuição $p(\mathbf{x})$ a partir de $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$, previamente conhecida, e a realização de uma codificação e de uma decodificação de fonte é o mesmo que conceber uma distribuição $p(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ a partir de $p(\mathbf{u})$, também previamente conhecida (Rioul, 2018).

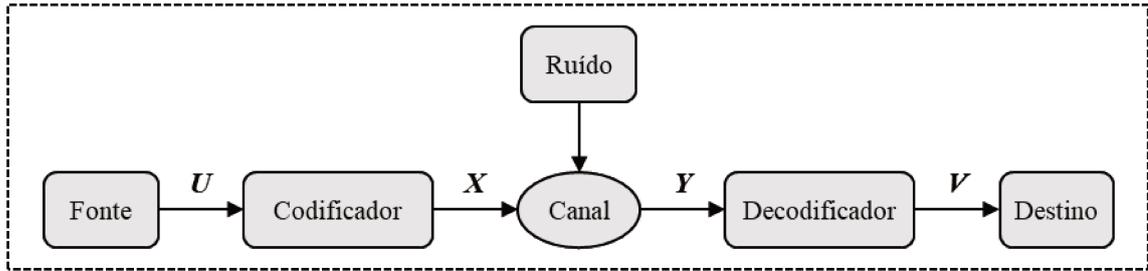


Fig. 1.7: Etapas de codificação e de decodificação em um sistema de comunicação.

Como a codificação e a decodificação, seja de fonte ou de canal, depende de vetores de variáveis aleatórias, existe uma relação entre a informação $I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ definida para esses vetores e a soma das informações $I(X_i, Y_i)$ definidas para cada componente desses vetores (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018). Primeiramente, note que a diferença entre essas duas quantidades pode ser rearranjada para agrupar as distribuições similares (Expr. 1.55).

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \sum_{i=1}^n I(X_i, Y_i) &= E \left[\log \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \right] - \sum_{i=1}^n E \left[\log \frac{p(y_i|x_i)}{p(y_i)} \right] \\
 &= E \left[\log \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \right] - E \left[\log \frac{\prod_{i=1}^n p(y_i|x_i)}{\prod_{i=1}^n p(y_i)} \right] \\
 &= E \left[\log \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{\prod_{i=1}^n p(y_i|x_i)} \right] - E \left[\log \frac{p(\mathbf{y})}{\prod_{i=1}^n p(y_i)} \right] \\
 &= E \left[\log \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\prod_{i=1}^n p(x_i|y_i)} \right] - E \left[\log \frac{p(\mathbf{x})}{\prod_{i=1}^n p(x_i)} \right]
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Em dois casos particulares, essa diferença assume uma desigualdade: quando as variáveis X_i são independentes, ou seja, quando $p(\mathbf{x}) = \prod_i p(x_i)$, com igualdade se e somente se $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \prod_i p(x_i|y_i)$ (Expr. 1.56):

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geq \sum_{i=1}^n I(X_i, Y_i) \tag{1.56}$$

e quando $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_i p(y_i|x_i)$, com igualdade se e somente se as variáveis Y_i forem independentes, ou seja, quando $p(\mathbf{y}) = \prod_i p(y_i)$ (Expr. 157):

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq \sum_{i=1}^n I(X_i, Y_i). \quad (1.57)$$

O primeiro caso corresponde a uma fonte discreta sem memória e o segundo a um canal discreto sem memória. Ao satisfazer as duas condições, $I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_i I(X_i, Y_i)$. Nesse caso, o modelo do sistema de comunicação corresponde a uma fonte discreta sem memória na entrada de um canal discreto sem memória (Cover *et al.*, 2006; Rioul, 2018). Se além disso esse sistema for estacionário, ou seja, se as distribuições de probabilidade envolvidas no problema forem invariantes por translação temporal, então $I(X_i, Y_i) = I(X, Y)$. Isso indica que a informação de ordem 1, transmitida símbolo por símbolo, é $I_1 = I(X, Y)$ e que a informação de ordem n , transmitida palavra por palavra, é $I_n = I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})/n$ (Rioul, 2018).

Em particular, no problema da codificação de canal para esse sistema, cada palavra de fonte – representada em binário – assume uma dentre M sequências equiprováveis e, portanto, carrega $\log M$ bits de informação. Então, o codificador de canal transforma cada palavra U em uma palavra de código X com n símbolos; e o decodificador de canal transforma cada palavra de código recuperada Y em uma palavra V , equivalente à U . O que avalia a eficácia dessa operação é a taxa de codificação de canal, definida como o número médio de bits de informação por símbolo codificado (Expr. 1.58).

$$R = \frac{\log M}{n} \quad (1.58)$$

Em geral, quanto maior for R , maior é a eficiência do sistema quanto ao procedimento de codificação e de decodificação de canal. Nesse sentido, essa taxa equivale exatamente ao rendimento de um código corretor de erro (Rioul, 2018).

1.4.1 Códigos corretores de erro

Os códigos de bloco lineares estão entre os primeiros métodos de codificação e de decodificação para atingir de maneira eficiente a capacidade de canal. Essencialmente, um código de bloco consiste em um conjunto de M vetores de comprimento n construídos para favorecer a identificação e a correção de erros durante a transmissão. Designados como palavras de código, esses vetores são representado por $\mathbf{c}_m = (c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn})$, $1 \leq m \leq M$, cujos elementos pertencem a um alfabeto de símbolos bem definido – no caso de um alfabeto binário, então o código de bloco é dito binário. Nesse caso, embora existam 2^n sequências binárias admissíveis, apenas $M = 2^k$ destas, $k < n$, são na prática selecionadas para compor um código

(n, k) com taxa de rendimento $R = k/n$, de acordo com a Expr. 1.58 (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009).

Uma categoria especial de códigos de bloco reúne os chamados códigos de bloco lineares. Ao considerar um alfabeto binário, um código de bloco linear (n, k) – construído como um subespaço k -dimensional a partir de um espaço n -dimensional – consiste em um conjunto de 2^k palavras binárias de comprimento n , de tal forma que, para quaisquer duas \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 pertencentes ao código, a soma $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, dada em aritmética de módulo-2, também pertença ao código. Nesse caso, o mapeamento das $M = 2^k$ sequências de informação \mathbf{u}_m , de comprimento $1 \times k$, nas 2^k respectivas palavras de código \mathbf{c}_m , de comprimento $1 \times n$, pode ser expresso com o uso de uma matriz geradora \mathbf{G} , de dimensão $k \times n$ (Expr. 1.59) (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009).

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{u}_m \mathbf{G} \quad (1.59)$$

Dessa forma, as palavras de código \mathbf{c}_m basicamente compõem um conjunto de combinações lineares entre as sequências de informação \mathbf{u}_m e as linhas da matriz geradora \mathbf{G} . Inclusive, nos códigos de bloco lineares, essa matriz pode ser arranjada de um modo sistemático (Expr. 1.60), em que \mathbf{I}_k é uma matriz identidade de dimensão $k \times k$ e \mathbf{P} é uma matriz de dimensão $k \times (n - k)$.

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}] \quad (1.60)$$

Em códigos de bloco com esse arranjo, os k elementos da palavra de código servem para codificar a sequência de informação e os $(n - k)$ elementos adicionais – denominados bits de verificação de paridade – servem para introduzir uma espécie de redundância contra erros de transmissão (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009).

Devido à complementariedade das sequências binárias, todo código (n, k) linear k -dimensional – concebido como um subespaço de um conjunto n -dimensional de sequências desse tipo – apresenta um código dual $(n, n - k)$ linear $(n - k)$ -dimensional, cujas palavras são ortogonais ao código original. A matriz geradora desse código dual, ante a designação \mathbf{H} , recebe o nome de matriz de verificação de paridade. Note que, por construção, as linhas de \mathbf{G} são ortogonais às linhas de \mathbf{H} , ou seja, $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, bem como $\mathbf{c}_m \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ dado que toda palavra gerada por \mathbf{G} é igualmente ortogonal à \mathbf{H} . Ademais, em códigos de bloco lineares binários, \mathbf{H} também admite uma representação sistemática (Expr. 1.61) (Proakis *et al.*, 2008).

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T | \mathbf{I}_{n-k}]. \quad (1.61)$$

Além da taxa de rendimento R apresentada há pouco, os códigos de bloco lineares têm outras duas propriedades que os caracterizam. A primeira é o peso $w(\mathbf{c})$ da palavra de código, definido como o número de elementos não nulos nessa palavra. A segunda é a distância de Hamming $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ entre duas palavras de código, definida como o número de elementos diferentes entre quaisquer duas dessas palavras. Essas propriedades, por sua vez, fornecem as bases para formular o conceito de peso mínimo, o menor peso ao considerar todas as palavras não nulas (Expr. 1.62):

$$w_{min} = \min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} w(\mathbf{c}) \quad (1.62)$$

e para formular o conceito de distância mínima, a menor distância de Hamming ao considerar todas as combinações de palavras distintas (Expr. 1.63):

$$d_{min} = \min_{\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_2} d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2). \quad (1.63)$$

Para os códigos de bloco lineares binários, $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = w(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)$ e, como consequência disso, $d_{min} = w_{min}$. Como $\mathbf{c}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, ao substituir nessa relação a palavra de código com o peso mínimo, percebe-se que existem $w_{min} = d_{min}$ colunas linearmente dependentes em \mathbf{H} . Ou seja, dado que não há palavra de código com menor peso, o espaço vetorial formado pelas colunas de \mathbf{H} tem necessariamente dimensão $d_{min} - 1$ (Proakis *et al.*, 2008).

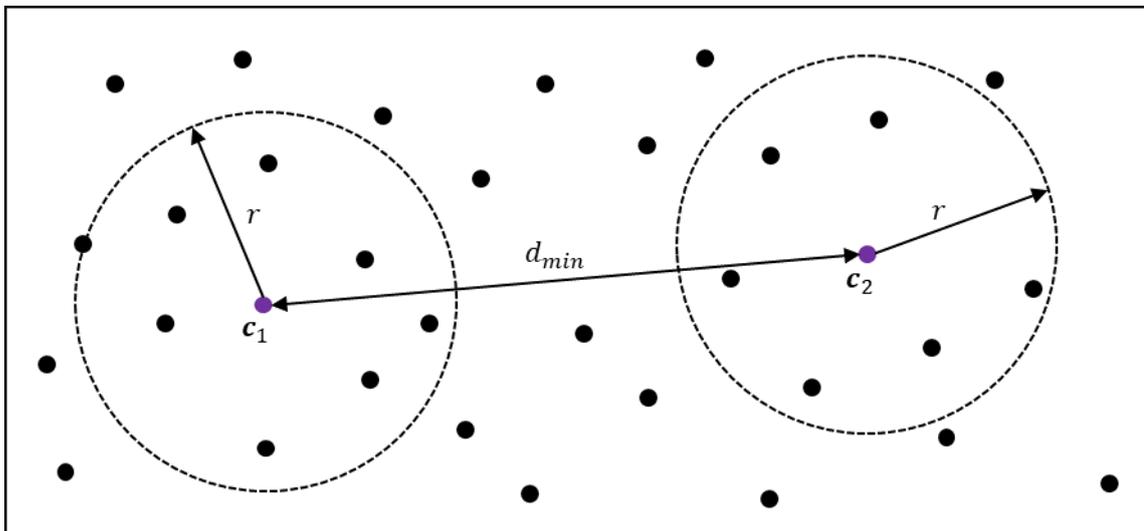


Fig. 1.8: Ilustração do funcionamento de um código de blocos linear.

Esse espaço vetorial está diretamente associado à capacidade desses códigos em detectar e corrigir erros. Isso porque d_{min} , ao estabelecer a menor separação entre duas palavras válidas, determina um limite a partir do qual ao menos uma delas pode ser convertida em outra. Ou seja, quando d_{min} ou mais erros acontecem ao longo da transmissão, o código não é

capaz de detectá-los. Porém, quando no máximo $d_{min} - 1$ erros acontecem, a palavra na saída do canal é inválida e a presença deles fica explícita. Além disso, em um espaço formado por 2^n seqüências binárias, as 2^k palavras de código podem ser interpretadas como os centros de n -esferas de raio r , dado pela distância de Hamming. Nesse sentido, o maior valor de r sem que haja a intersecção, ou a tangência, entre quaisquer duas n -esferas é $r = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor$, em que $\lfloor x \rfloor$ indica o maior número inteiro contido em x . Dessa forma, as seqüências binárias presentes no interior de cada n -esfera são decodificadas nas respectivas palavras de cada centro. Portanto, o código é capaz de corrigir $\lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor$ erros (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009). A Fig.1.8 ilustra essa situação.

Durante as etapas de codificação e de decodificação de canal, enquanto a primeira ocorre com o uso de \mathbf{G} , por meio da Expr. 1.59, a segunda ocorre com o uso de \mathbf{H} . De fato, ao transmitir uma palavra \mathbf{c}_m , o canal retorna uma seqüência $\mathbf{y} = \mathbf{c}_m + \mathbf{e}$, na qual \mathbf{e} representa o vetor de erro. Nesse caso, a verificação dessa seqüência é feita através do produto $\mathbf{s} = \mathbf{yH}^T$ (Expr. 1.64), que resulta em um vetor $(n - k)$ -dimensional.

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{yH}^T \\ &= \mathbf{c}_m\mathbf{H}^T + \mathbf{eH}^T \\ &= \mathbf{eH}^T \end{aligned} \tag{1.64}$$

Esse vetor \mathbf{s} , usualmente denominado síndrome, exhibe, a cada transmissão, um padrão que permite a detecção e a correção de erros – ou seja, um padrão de falhas apontadas pela verificação de paridade. Em geral, um valor de síndrome zero pode indicar uma palavra sem alterações na saída do canal, embora sempre exista a possibilidade de que o vetor de erro assuma a configuração de uma palavra de código. A despeito disso, um valor diferente de zero denota uma palavra com alterações e, em geral, uma forma de contorná-las. Como se espera que a probabilidade de erro seja pequena, tende-se a associar as síndromes aos vetores de erro de menor peso (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009).

1.4.2 Códigos de Hamming

Uma categoria especial dos códigos de bloco lineares binários é a família (n, k) dos códigos de Hamming. Os parâmetros que os definem são: $n = 2^m - 1$, $k = 2^m - m - 1$ e $m \geq 3$, nos quais m indica a quantidade de bits de paridade. Para $m = 3$, o código em questão é o $(7, 4)$; para $m = 4$, é o $(15, 11)$; $m = 5$, $(31, 26)$; e assim por diante. A taxa de rendimento desses códigos é dada pela substituição desses parâmetros em $R = k/n$ (Expr. 1.65), que tende

a 1 conforme m aumenta (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009).

$$R = \frac{2^m - m - 1}{2^m - 1} \quad (1.65)$$

De maneira geral, um código de Hamming é bem descrito por sua matriz de verificação de paridade: as $2^m - 1$ colunas de \mathbf{H} reúnem todas as sequências binárias de comprimento m , com exceção da sequência nula. A Expr. 1.66 fornece essa matriz, já organizada de modo sistemático, para o caso do código (7, 4):

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T | \mathbf{I}_{n-k}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

enquanto a Expr. 1.67 fornece a matriz geradora desse mesmo código:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.67)$$

Note que, como as colunas de \mathbf{H} sempre incluem todas as sequências binárias diferentes de zero, a soma de quaisquer duas dessas sequências resulta em uma terceira delas. Ou seja, independentemente de m , sempre existem três colunas linearmente dependentes em \mathbf{H} . Portanto, os códigos de Hamming apresentam $d_{min} = 3$ e, por isso, são capazes de identificar até $d_{min} - 1 = 2$ ou de corrigir até $\lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor = 1$ erros de transmissão (Proakis *et al.*, 2008; Haykin *et al.*, 2009).

2 INTERFACE CÉREBRO-COMPUTADOR

As interfaces cérebro-computador (BCIs, do inglês *brain-computer interfaces*) representam toda uma variedade de sistemas que possibilitam a conexão de atividades e manifestações cerebrais com mensagens e comandos de máquina, de tal forma que essa conexão ocorra sem a intermediação dos nervos e dos músculos (Vidal, 1973; Wolpaw *et al.*, 2002; Kübler *et al.*, 2007; Abiri *et al.*, 2019). Por viabilizar essa comunicação direta, ainda que sejam testadas com propósitos militares, corporativos e até recreativos (Ahn *et al.*, 2014; Miranda *et al.*, 2015; Bajwa *et al.*, 2016), grande parte do incentivo e do desenvolvimento desse tipo de sistema visa aplicações destinadas às pessoas com insuficiências neuromusculares severas, como a paralisia e a tetraplegia (Lebedev *et al.*, 2006; Mak *et al.*, 2009).

De maneira geral, a descrição das BCIs possui uma linguagem própria dos campos do aprendizado de máquina e do reconhecimento de padrões (Fukunaga, 1990; Duda *et al.*, 2001; Bishop, 2006): os conceitos de atributo e classe, de extração e classificação e de capacidade de generalização, entre muitos outros, são relevantes para discriminar as regularidades de uma amostra. Além disso, a descrição das BCIs utiliza uma linguagem própria dos campos do processamento digital de sinais (Lyons, 2004; Oppenheim *et al.*, 2010), uma vez que, os conceitos de amostragem, de filtragem e de transformação são essenciais para lidar com sinais de qualquer natureza. Este segundo capítulo, de forma similar ao primeiro, revisa esses conceitos clássicos para dar sustentação aos dois temas principais da tese: o sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente e a proposta de avaliação do sistema visual como um canal de comunicação.

2.1 MODELO DE UMA BCI

Um possível modelo de uma interface-cérebro computador apresenta os seguintes componentes: o transdutor, o amplificador, o conversor analógico-digital (ou conversor A/D), os filtros, o extrator de características, o classificador e a saída. Já um paradigma, ou um modelo de experimento, que incorpora essas interfaces também considera: a aplicação, a realimentação, o usuário e o campo de iteração. Além destes e daqueles, inclui-se o ruído devido a sua onipresença em sinais e sistemas. O diagrama da Fig. 2.1 delinea esse paradigma e evidencia que, em alguns tratamentos, o transdutor, o amplificador e o conversor A/D convenientemente formam um mesmo bloco, denominado entrada, bem como os filtros, o extrator de

características e o classificador formam o processamento (Wolpaw *et al.*, 2002).

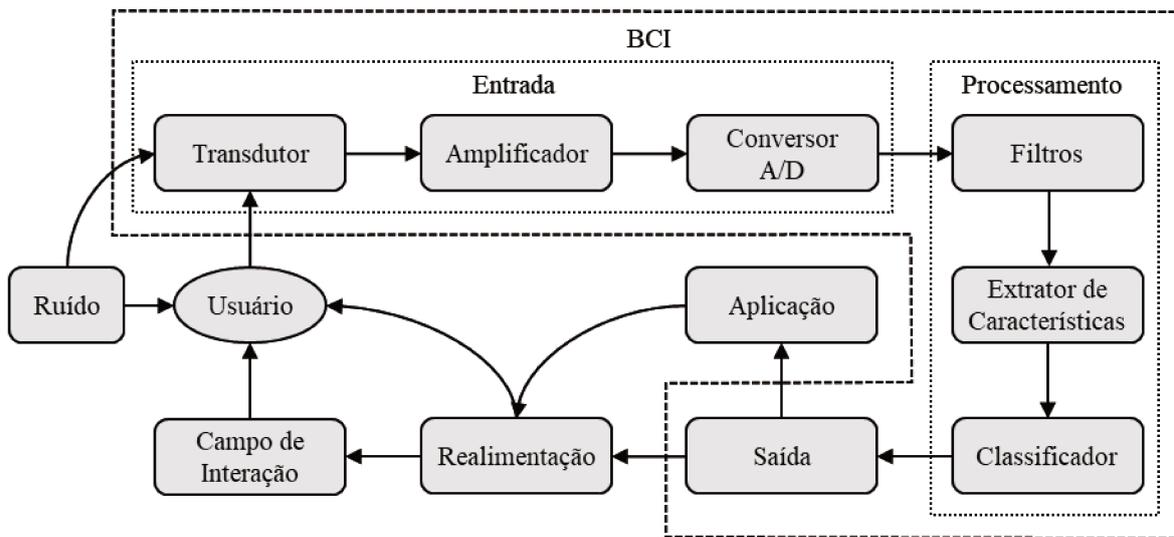


Fig. 2.1: Diagrama de blocos de um experimento com uma BCI genérica.

O usuário não faz parte do sistema, mas é o elemento central do experimento. Até porque, em princípio, uma BCI é planejada e construída para identificar a intenção dele (Wolpaw *et al.*, 2002). Evidentemente, essa identificação não ocorre em qualquer contexto, somente em algum em que seja factível estabelecer uma associação entre as instruções de uma aplicação e os ritmos e os potenciais do cérebro realçáveis com protocolos de realimentação sensorial. Em situações assim, “reconhecer uma intenção” remete simplesmente a ações como “ir para essa ou aquela direção” (frente, atrás, direita, esquerda, entre outras) ou “selecionar esse ou aquele caractere”. Não existe, por enquanto, espaço para improviso ou criatividade, ainda que um grande esforço venha sendo feito pela comunidade acadêmica para tornar isso uma realidade. Mesmo com tais limitações, a BCI atende, sempre que possível, as necessidades do usuário e lhe fornece algum controle para que ele atue no ambiente.

A entrada captura sinais do cérebro e os torna computacionalmente manipuláveis (Wolpaw *et al.*, 2002). Como dito há pouco, essa captura ocorre em três etapas. Na primeira, o transdutor transforma algum aspecto da atividade eletrofisiológica cerebral em sinais eletromagnéticos, mecânicos, ópticos, entre outros. Em essência, ele basicamente converte algum tipo de energia em outro, de forma a torná-la quantitativamente tratável. Na segunda, o amplificador, como o próprio nome expressa, fornece um ganho de magnitude, idealmente com uma distorção mínima, aos registros recém coletados. Como a atividade cerebral se manifesta em pequenas escalas de energia, esses registros seriam intratáveis sem essa amplificação. Na terceira, por fim, o conversor A/D, a uma taxa fixa, amostra os sinais amplificados e gera as representações digitais destes. Embora apresentadas em separado, essas três etapas, unidas em

torno de um mesmo aparelho de medida, na prática compõem uma só técnica de aquisição.

O processamento relaciona os sinais capturados do cérebro com as categorias de ação/intenção do usuário (Wolpaw *et al.*, 2002), sendo também constituído por três etapas. Na primeira, os filtros procuram reduzir o ruído e eliminar os interferentes de origem conhecida. Como os aparelhos que medem alguma atividade cerebral contêm em seus sinais um conjunto próprio de artefatos razoavelmente bem tipificados, esses filtros são geralmente customizados para cada contexto. Na segunda, o extrator de características transforma os dados filtrados em representações que ajudam a reconhecer padrões cerebrais. Tecnicamente, ele recebe as amostras de um espaço de origem e as projeta em um novo, o chamado espaço de atributos. Na terceira, por fim, com o auxílio de funções que estabelecem superfícies de separação nesse espaço de atributos, o classificador relaciona as representações de padrões cerebrais com classes compatíveis às diferentes ações/intenções do usuário.

A saída converte a decisão do classificador em comandos para uma aplicação e, adicionalmente, para uma realimentação voltada a aperfeiçoar a experiência volitiva do usuário (Wolpaw *et al.*, 2002). De maneira geral, essa saída vincula cada decisão tomada pelo classificador ao envio de instruções, por meio de protocolos de transmissão, para um dispositivo, ou um programa, no qual se deseja atuar – que aliás pode ou não compartilhar do mesmo ambiente computacional da BCI. Evidentemente, as instruções de saída variam conforme o tipo de atuação.

A aplicação é a quem e para que a intenção do usuário deve chegar. Entre as mais notáveis estão as aplicações que dão suporte para pessoas comprometidas por alguma lesão ou doença neuromuscular prevalente (Millán *et al.*, 2010). Alguns exemplos são a cadeira de rodas assistiva e o exoesqueleto, que fornecem mobilidade, e o teclado virtual, que fornece um meio de escrita (Müller *et al.*, 2011; Yin *et al.*, 2014; Kwak *et al.*, 2015). Por outro lado, há bastante interesse no desenvolvimento de aplicações de BCI direcionadas a um público maior – um que inclua as pessoas saudáveis. O interesse da indústria de jogos eletrônicos em projetar plataformas baseadas em BCIs talvez seja o exemplo mais incisivo dentro dessa perspectiva (Ahn *et al.*, 2014).

A realimentação indica ao usuário a efetividade e a diligência das tarefas executadas pela aplicação. Notavelmente, enquanto produz funções sensoriais, motoras e cognitivas, o sistema nervoso sempre faz pequenos ajustes sequenciais de acordo com os resultados intermediários obtidos ao longo dessa produção (Ghez *et al.*, 2000). A partir dessa habilidade, um usuário, durante um experimento com uma BCI, ao receber sinais de realimentação, é até certo ponto capaz de reforçar os ritmos e os potenciais cerebrais necessários ao funcionamen-

to da interface (Wolpaw *et al.*, 2002).

Por fim, o campo de interação guia o usuário ao longo da realização de um experimento com uma BCI. A depender dos requisitos de um paradigma, esse campo pode fornecer estímulos, sinais de realimentação e todo um conjunto de instruções visuais, auditivas ou tácteis para, literalmente, estimulá-lo, orientá-lo e até mesmo incentivá-lo durante o protocolo experimental. Via de regra, para que um ensaio funcione, as atualizações desse campo devem estar em sincronia com a captura do registro cerebral.

A especificação de cada um desses constituintes e a definição de um protocolo experimental calcado na detecção de ritmos ou de potenciais do cérebro dão origem a uma série de paradigmas de BCI. Em particular, a definição da entrada – mais especificamente, da técnica de aquisição – já reúne uma família deles. Por exemplo, os paradigmas baseados em eletroencefalografia se limitam aos ritmos e aos potenciais detectáveis por essa técnica e, dentro dessa perspectiva, têm etapas de processamento – filtragem, extração e classificação – específicas para cada tipo de detecção. O presente trabalho, ainda que sugira alguns métodos aplicáveis a todos, utiliza como base experimental o paradigma dos potenciais evocados visualmente em regime estacionário, detalhado em momento oportuno.

2.2 PARADIGMAS DE BCI BASEADOS EM ELETROENCEFALOGRAFIA

Para enfatizar o procedimento de aquisição, a Fig. 2.2 exibe uma versão reduzida do diagrama da Fig. 2.1. Nesse modelo, o conjunto de sinais X representa a captura de algum aspecto da atividade do cérebro e, por isso, depende das características eletrofisiológicas do mesmo. Trata-se apenas de “algum aspecto” porque os transdutores não são capazes de monitorar toda a enorme complexidade dos sistemas vivos. Na verdade, esses dispositivos de medição exploram propriedades específicas desses sistemas e, desse modo, só fornecem vestígios sobre a ampla atividade do tecido em questão – limitação que obviamente se estende àqueles que capturam as manifestações do sistema nervoso (Costa, 2015).

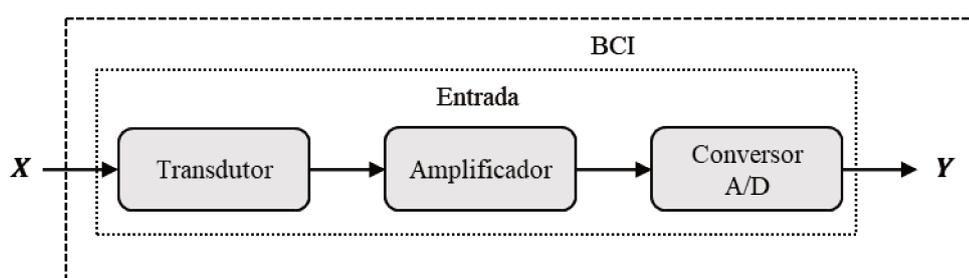


Fig. 2.2: Entrada de uma BCI.

Nesse sentido, o conjunto de sinais Y representa os dados – já amplificados e digitalizados – obtidos com algum aparelho que monitora certas regiões e características do cérebro. Para realizar esse monitoramento, existem técnicas invasivas, em que os sensores permanecem dentro do crânio, e técnicas não invasivas, em que os sensores permanecem fora. Dentre as invasivas, as mais conhecidas são: a eletrocorticografia (ECoG); e a captura com eletrodos intra-corticais. Dentre as não invasivas, por sua vez, as mais conhecidas são: o imageamento por ressonância magnética funcional (fMRI, do inglês *functional magnetic resonance imaging*); a espectroscopia de infravermelho próximo (NIRS, do inglês *near infrared spectroscopy*); a tomografia computadorizada por emissão de pósitrons (PET, do inglês *positron emission tomography*); a magnetoencefalografia (MEG); e a eletroencefalografia (EEG). Por razões de custo e de praticidade, a eletroencefalografia é a técnica de aquisição mais comum na entrada de uma BCI (Kübler *et al.*, 2007).

2.2.1 Registro eletroencefalográfico

Com o uso de eletrodos posicionados no escalpo, a eletroencefalografia é uma técnica que possibilita fazer registros da atividade eletrofisiológica de uma porção superficial do cérebro – as chamadas derivações eletrofisiológicas. Cada sinal desse corresponde a uma sobreposição da atividade de muitos neurônios, sobretudo dos localizados na vizinhança dos eletrodos. Ou seja, estruturas encefálicas profundas como o hipocampo e o tálamo contribuem pouco. Na prática, são milhares a milhões de neurônios piramidais geometricamente alinhados, com dendritos apicais que se prolongam em direção à superfície do córtex cerebral, que contribuem diretamente para a formação de fluxos de corrente extracelulares, por meio dos potenciais pós-sinápticos desses dendritos. Grande parte do que os sinais de EEG registram reflete essencialmente esses fluxos (Speckmann *et al.*, 2005; Cohen, 2017).

Algumas recomendações para o posicionamento de eletrodos no escalpo possibilitam a comparação de registros provenientes de diferentes aquisições. Duas dessas recomendações são amplamente conhecidas, o sistema 10-20 e o sistema 10-10 (Fig. 2.3). A primeira define a localização de cada eletrodo a partir de pontos de referência anatômicos longitudinais e laterais específicos e sempre em variações de 10% ou 20% desses pontos (Jasper, 1958). A segunda – também denominada sistema 10-20 estendido – considera a adição de eletrodos nos pontos médios das posições do sistema 10-20 (Nuwer *et al.*, 1998). Ademais, a comparação de registros também exige uma montagem baseada nessas recomendações, ou seja, exige um arranjo de eletrodos que favoreça a identificação de ritmos e de potenciais cerebrais de inte-

ções de 8 Hz a 13 Hz, registradas em eletrodos posicionados acima do lobo occipital, que ocorrem em resposta à diminuição da estimulação fótica nos olhos (Mulholland, 1972).

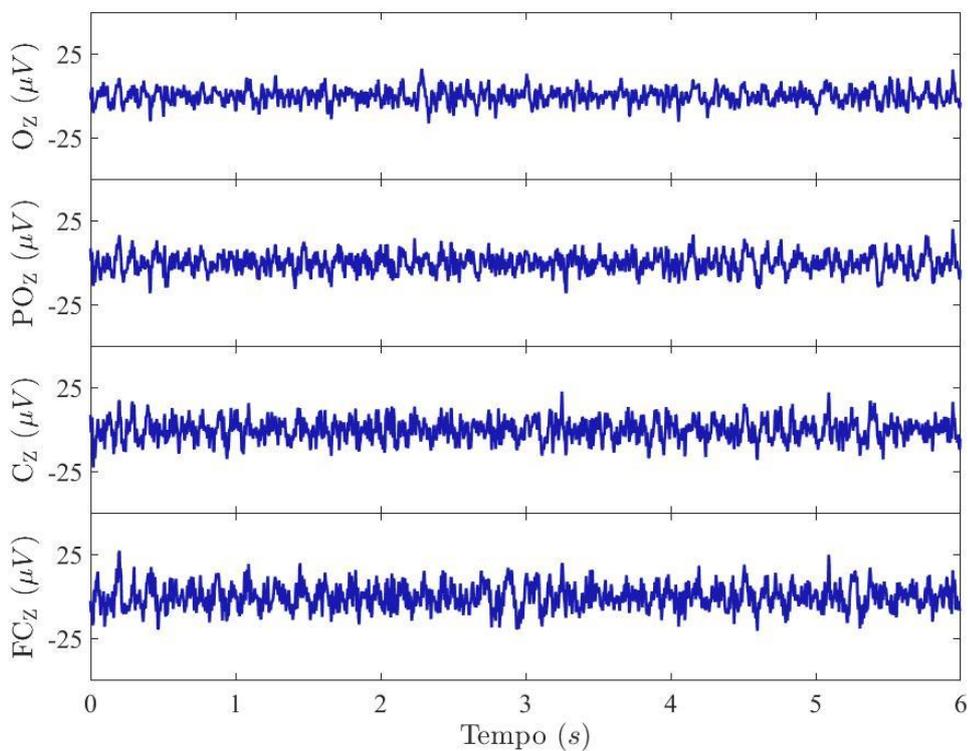


Fig. 2.4: Exemplos de sinais de EEG no tempo. Registros simultâneos dos eletrodos Oz, POz, Cz e FCz, a uma taxa de amostragem de 256 Hz.

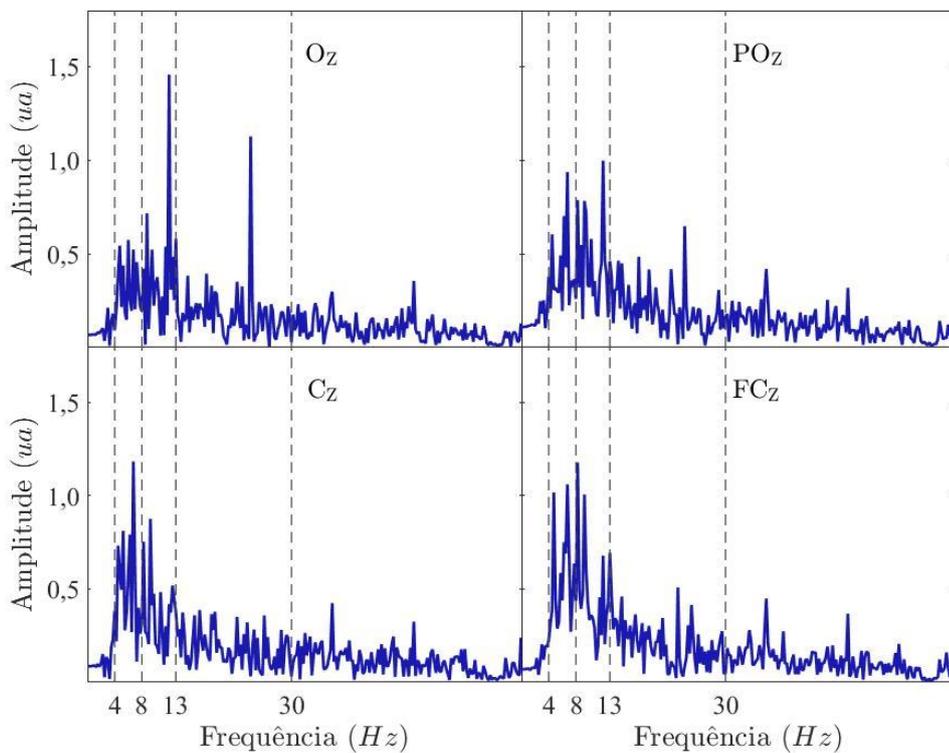


Fig. 2.5: Exemplos de sinais de EEG na frequência. Versão espectral dos registros simultâneos da figura anterior (ua, unidade arbitrária).

Por fim, além de conteúdo de interesse, o registro está cheio de artefatos – distúrbios na linha de base do sinal – oriundos de fontes diversas. Descartados aqueles relacionados ao mau funcionamento ou ao mau acoplamento do eletrodo, os artefatos têm origem tanto em interferentes eletromagnéticos, tais como as oscilações da rede de energia elétrica (50 Hz ou 60 Hz, a depender do país) e as fontes chaveadas ligadas a essa rede, quanto em interferentes eletromecânicos, tais como a agitação de membros e de articulações, a contração da musculatura facial, as pulsações cardíacas e os movimentos oculares. Artefatos que extrapolam a linha de base geralmente inviabilizam a análise do trecho no qual se manifestam (Reilly, 2005). Nesse caso, ainda que alguns pesquisadores experientes consigam identificá-los por inspeção visual para depois removê-los manualmente, em uma BCI, esse procedimento deve ocorrer de maneira automática e de preferência sem perda de sinal (Blankertz *et al.*, 2008).

2.2.2 Três paradigmas usuais

Três paradigmas baseados em eletroencefalografia são usuais em BCI: o de ritmos sensório-motores (SMR, do inglês *sensorimotor rhythm*), o de P300 e o de potencial evocado visualmente em regime estacionário (SSVEP, do inglês *steady-state visually evoked potential*). A BCI de SMR se baseia em alterações rítmicas nas faixas alfa e beta de eletrodos centrais (C₃ e C₄, por exemplo). Em resposta a estratégias de imagética motora, essas alterações se manifestam como uma dessincronização relacionada a evento (ERD, do inglês *event-related desynchronization*) seguida de uma sincronização relacionada a evento (ERS, do inglês *event-related synchronization*) – perceptíveis no sinal de EEG, respectivamente, por uma diminuição relativa e por um aumento relativo na potência do sinal, em comparação com os registros de instantes anteriores ao início da tarefa (Pfurtscheller *et al.*, 1999), como a Fig. 2.6 mostra. Embora a ERD e a ERS sejam manifestações predominantemente associadas ao planejamento e a efetuação de movimento, a imagética motora, depois de algum treino, produz uma reação similar (Jeannerod, 1995). Dessa forma, mesmo que com uma intensidade menor se comparada àquela relacionada ao movimento efetivo, a ERD e a ERS dessa imagética são detectáveis e, por isso, utilizadas em experimentos de BCI (Pfurtscheller *et al.*, 2001).

Uma BCI de SMR baseada na imagética motora das mãos direita e esquerda, por exemplo, apresenta o seguinte protocolo experimental: acomodado em uma cadeira confortável e diante de um monitor que serve como campo de interação, um usuário realiza várias sessões de aquisição durante as quais ora ele imagina a mão direita e ora a mão esquerda; a imagética motora é guiada por indicações dadas no monitor; cada sessão em geral dura de 5 s a

10 s e inicia com um sinal de atenção, para que o usuário se concentre; depois, segue com um sinal de execução, para que ele imagine por alguns segundos o movimento da mão direita ou o da mão esquerda (Fig. 2.7); nesse ínterim, o monitor devolve um sinal de realimentação, para que o usuário reforce seu controle volitivo. Um ensaio experimental completo totaliza de 40 a 80 sessões, em ordem aleatória, para cada tipo de imagética (Pfurtscheller *et al.*, 2001). Etapas de processamento, de extração e de classificação bem ajustadas permitem a identificação satisfatória das mãos direita e esquerda e, assim, proporcionam uma realimentação convincente (Aggarwal *et al.*, 2019).

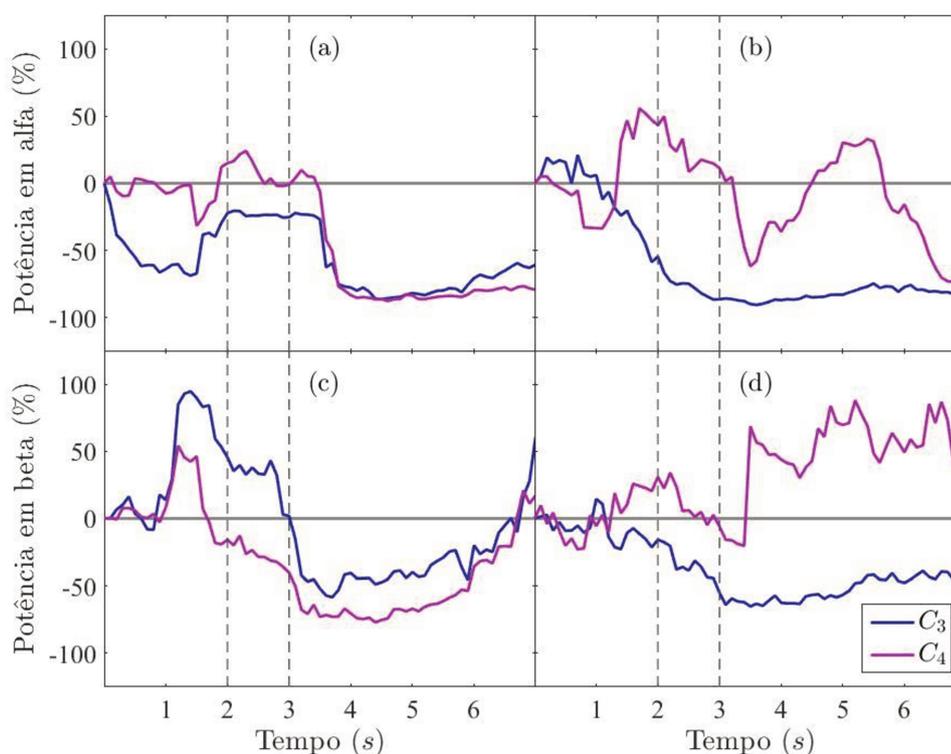


Fig. 2.6: Exemplos de SMRs* contralaterais nas faixas alfa e beta durante imagética motora das mãos esquerda, em (a) e (c), e direita, em (b) e (d).

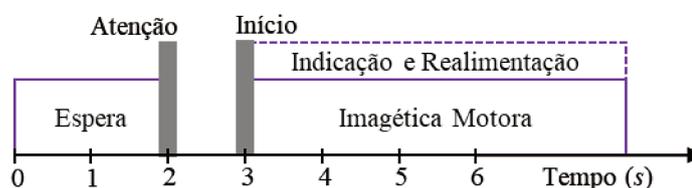


Fig. 2.7: Exemplo de sessão para uma BCI de SMR.

A BCI de P300, por sua vez, baseia-se em um dado potencial relacionado a evento (ERP, do inglês *event-related potential*), o P300. Geralmente um reflexo da atividade cerebral relacionada à codificação, à seleção, à memorização e à tomada de decisão, o P300 se mani-

* Gráfico confeccionado com o uso da base de dados IIIa (*motor imagery, multiclass*) do *BCI competition III*, disponível em <http://www.bbci.de/competition/iii/>. Esse material é de autoria do *Laboratory of Brain-Computer Interface, Graz University of Technology*, sob responsabilidade de Gert Pfurtscheller e Alois Schlögl.

feita por uma deflexão positiva (P) com uma latência de 300 ms (Fig. 2.8) em eletrodos rotulados com “Z” (FCz, Cz e Pz, por exemplo). Esse ERP ocorre em resposta a um protocolo denominado *oddball* – tarefa na qual um usuário se engaja na percepção de um evento pré-estabelecido, ocasional e exclusivo em meio a vários outros intercalados. De acordo com a experiência, a cada certeza no reconhecimento de um evento esperado, o usuário manifesta o P300 (Fabiani *et al.*, 1987; Picton, 1992), fato que pode ser convenientemente aproveitado em aplicações de BCI (Farwell *et al.*, 1988).

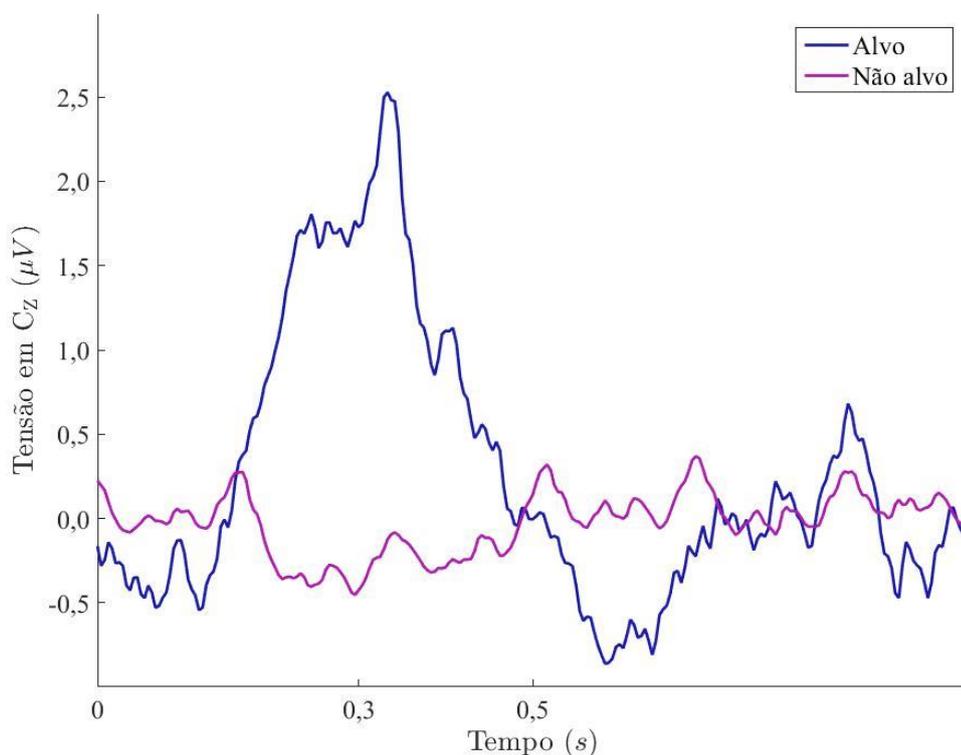


Fig. 2.8: Exemplo de P300*. Sinal médio computado com 85 registros de Cz em janelas alvo e não alvo, capturados a uma taxa de amostragem de 240 Hz.

Uma BCI de P300 usada para a produção textual, por exemplo, apresenta o seguinte protocolo experimental: também acomodado em uma cadeira confortável, e diante de um monitor que exhibe caracteres alfanuméricos dispostos matricialmente, um usuário realiza várias sessões de aquisição durante as quais, em conformidade ao protocolo *oddball*, uma sequência aleatória de linhas e depois uma sequência aleatória de colunas cintilam repetidas vezes, de forma intercalada (Fig. 2.9); a partir desses eventos, para selecionar um símbolo da matriz, o usuário tem que contar o número de vezes que ele vê esse símbolo piscar no monitor. Como cada reconhecimento correto suscita um P300, e como cada célula da matriz ex-

* Gráfico confeccionado a partir de uma adaptação de um código fonte disponível, em <http://www.bbc.de/competition/iii/>, com a base de dados II (*P300 speller paradigm*) do *BCI competition III*. Esse material é de autoria do *Wadsworth Center, New York State Department of Health*, sob responsabilidade de Jonathan R. Wolpaw, Gerwin Schalk e Dean Krusienski.

pressa uma sequência de cintilação única, o sinal de EEG retém uma assinatura temporal específica a partir da qual o caractere escolhido pode ser detectado. O grande desafio desse paradigma é que essa identificação ocorra em um número mínimo de sessões. O ideal é que apenas uma fosse necessária (Farwell *et al.*, 1988; Krusienski *et al.*, 2008).

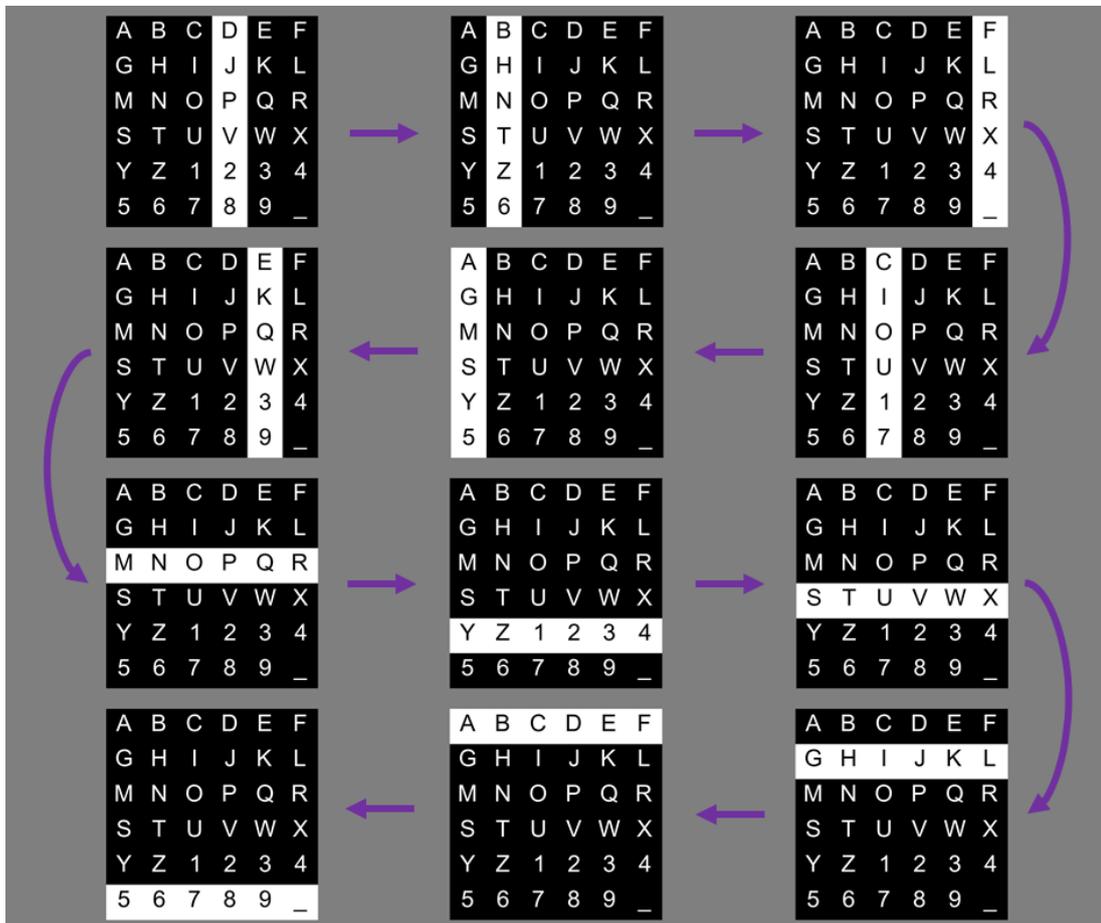


Fig. 2.9: Exemplo de uma sequência aleatória de colunas e de linhas cintilantes utilizada ao longo de uma sessão para gerar dois P300, com base na seleção de um caractere.

A BCI de SSVEP, por fim, baseia-se em reações naturais do sistema visual, geralmente na faixa de 1 Hz a 100 Hz, evocadas ao incidir nos olhos – controladamente e precisamente – estimulação fótica na forma de oscilações visuais, com intervalos de milissegundos (Regan, 1980; Herrmann, 2001). Os SSVEPs têm frequências casadas com as das estimulações que os geram e, por conta disso, manifestam-se no sinal de EEG como picos de ressonância no domínio espectral (Fig. 2.10), sobretudo em eletrodos posicionados acima do lobo occipital (O_1 , O_z e O_2 , por exemplo). Uma característica importante dos SSVEPs é a relação altamente não linear entre a sua frequência principal, igual à do estímulo, e suas frequências harmônicas (Fig. 2.11) – aspecto que, se bem explorado, possibilita seu uso em BCIs (Wang *et al.*, 2008; Vialatte *et al.*, 2010).

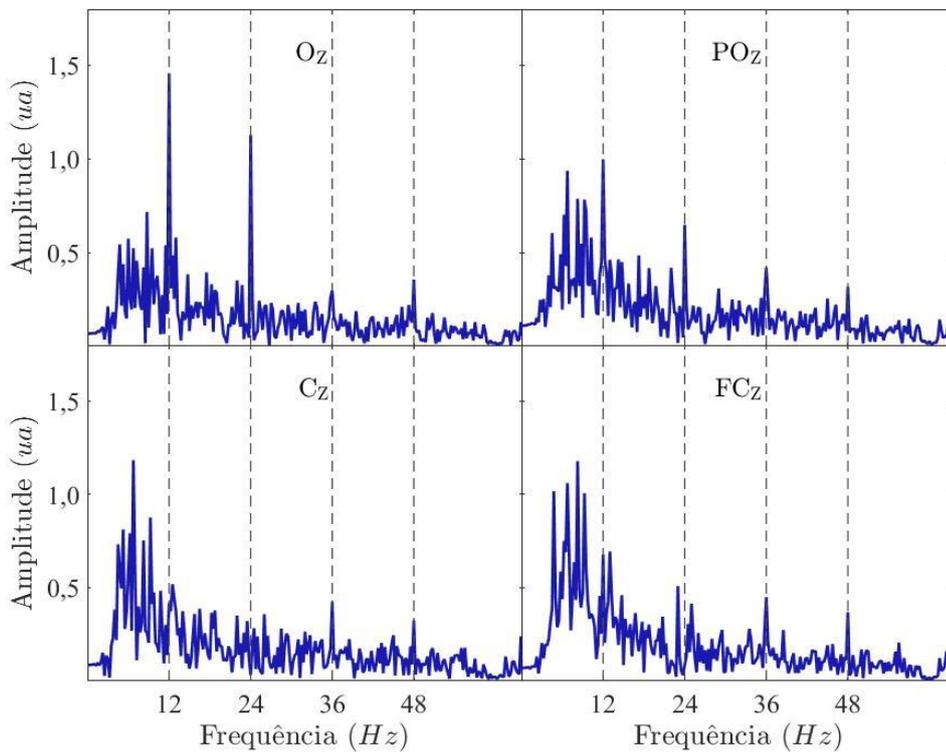


Fig. 2.10: Exemplos de espectros de SSVEP. Registros simultâneos dos eletrodos O_z , PO_z , C_z e FC_z , a uma taxa de amostragem de 256 Hz. Estímulo de 12 Hz.

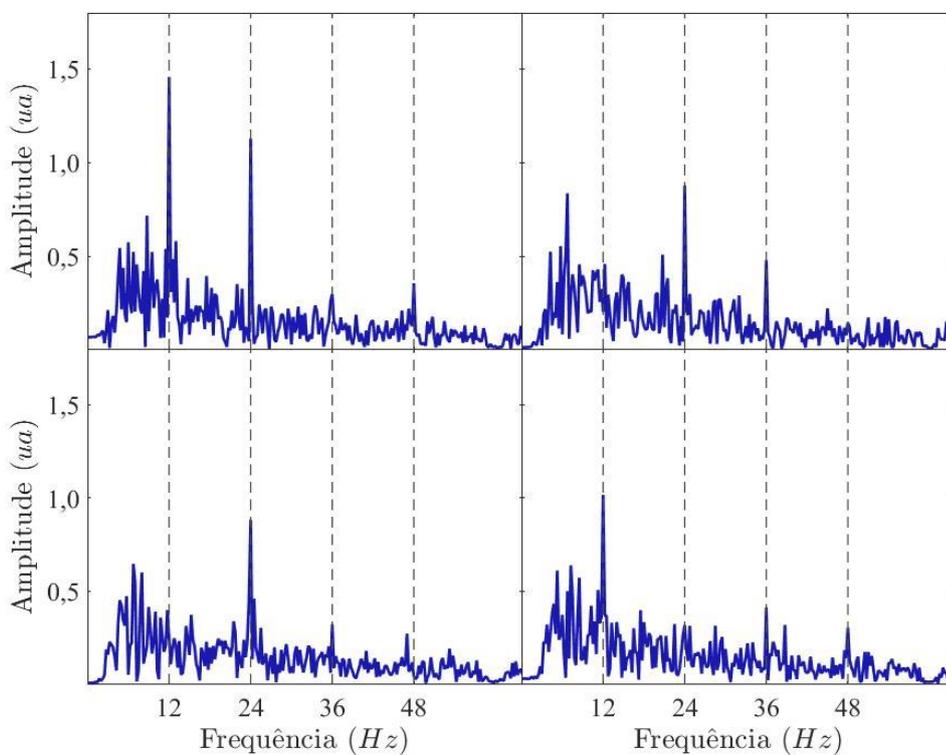


Fig. 2.11: Exemplo de não linearidade em SSVEP. Registros do eletrodo O_z em diferentes tempos, a uma taxa de amostragem de 256 Hz. Estímulo de 12 Hz.

Uma BCI de SSVEP usada para controlar os movimento de um cursor de tela, por exemplo, apresenta o seguinte protocolo experimental: diante de um monitor que exibe quatro

estímulos visuais repetitivos em frequências específicas – um em cada borda (esquerda, direita, superior e inferior) – e um cursor no centro, um usuário realiza várias sessões de aquisição durante as quais ele olha fixamente ora para algum dos estímulos ora para um outro, conforme ele queira mover o cursor na direção de cada um deles. Em cada período de visualização fixa, o sinal de EEG mantém um padrão de SSVEP relacionado ao estímulo escolhido. Como meio de realimentação, cada período desse, da ordem de segundos, gera um sinal para mover o cursor um passo na direção do estímulo detectado (Cheng *et al.*, 1999; Cheng *et al.*, 2002).

De certa forma, os três exemplos anteriores revelam que cada paradigma de BCI corresponde a um universo próprio, com um determinado protocolo experimental e com um determinado procedimento de análise e de identificação do ritmo ou do potencial cerebral em questão. Em virtude das propostas e dos objetivos deste trabalho, o paradigma de SSVEP recebe maior destaque na sequência.

2.3 PARADIGMA DE SSVEP

As particularidades da estimulação visual, da aparelhagem, da montagem e do protocolo de aquisição são fundamentais para a realização de um ensaio experimental com uma BCI de SSVEP. Até porque, de certa forma, elas definem os limites do paradigma, bem como as técnicas de processamento e de extração de atributos posteriormente utilizadas para a identificação desses potenciais (Costa, 2015).

2.3.1 Estimulação visual

Para suscitar SSVEPs, o campo de interação da BCI exhibe estímulos visuais repetitivos (EVRs). Há dois tipos aplicáveis: os luminosos, criados a partir de diodos emissores de luz (LEDs, do inglês *light emitting diodes*) ou de lâmpadas fluorescentes; e os padronizados, criados a partir de figuras contrastantes exibidas em um monitor.

Os EVRs luminosos são projetados de modo a flexibilizar a reprodução de sequências de iluminação. Para isso, eles são normalmente controlados por um circuito dedicado que gera com precisão e simultaneidade uma ampla variedade de formas de onda. Isso possibilita o acionamento de vários desses EVRs, com uma grande diversidade de frequências, de fases e de modulações. Nesse sentido, aplicações e estudos de BCI que demandam muitos comandos – sobretudo em altas frequências – inevitavelmente empregam esses estímulos. Por outro lado, eles causam fadiga nos olhos, se a intensidade das luzes não estiver bem regulada,

e são fontes de interferência persistentes, se a blindagem do circuito que os controla não for adequada (Odom *et al.*, 2010; Zhu *et al.*, 2010).

Já os EVRs padronizados são projetados de modo a facilitar a reprodução de sequências de figuras. Para isso, eles são concebidos com o uso de um computador que permite a criação e a projeção de uma ampla variedade de estampas. Dividem-se em duas categorias: as figuras simples e os padrões reversos. A primeira engloba os estímulos produzidos com formas geométricas – retângulos, quadrados, círculos, setas, entre outras – cujas áreas são preenchidas com uma única cor. Nesse caso, os EVRs consistem na intercalação periódica dessas formas com um plano de fundo destoante. A segunda, por sua vez, engloba aqueles produzidos com estampas invertidas de alto contraste. Nesse outro caso, os EVRs consistem na intercalação periódica dessas estampas (Odom *et al.*, 2010; Zhu *et al.*, 2010). A Figura 2.12 fornece um exemplo de cada.

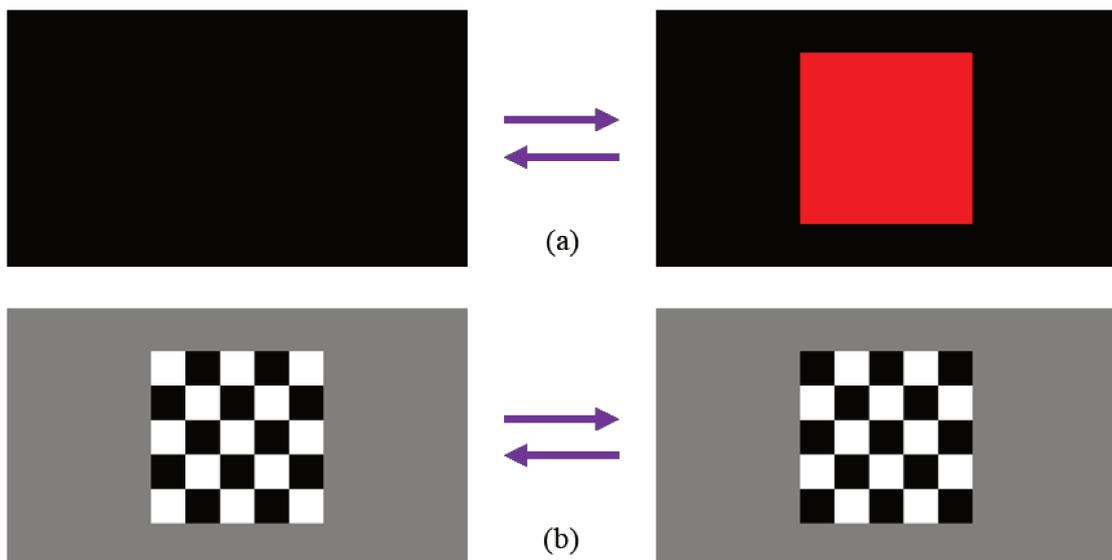


Fig. 2.12: Exemplo de alternância com uma figura simples (a) e um padrão reverso (b).

Como os EVRs padronizados são criados diretamente em um computador, a carga do monitor já oferece uma blindagem eletromagnética e, por isso, reduz eventuais interferentes associados às frequências de oscilação dos estímulos. Por outro lado, esses EVRs requerem que a alternância das figuras esteja em sincronia com a taxa de atualização do monitor. Além disso, de acordo com o teorema da amostragem, essa taxa limita superiormente as frequências de estímulo possíveis – por exemplo, em um monitor de 60 Hz, a maior dessas frequências tem que ser menor do que 30 Hz (Zhu *et al.*, 2010). Ademais, uma sobrecarga na rotina de processos do sistema operacional que controla a atualização dos estímulos causa atrasos ínfimos, mas imprevisíveis, na temporização da sequência de figuras – atrasos que

deturpam, sim, a precisão necessária à reprodução das mesmas.

Embora em última instância a reprodução de EVRs padronizados dependa de linguagens de programação de baixo nível para sincronizar com a taxa de atualização do monitor, algumas ferramentas computacionais como a Psychophysics Toolbox Version 3 – ou simplesmente Psychtoolbox-3 – facilitam consideravelmente esse trabalho. Adaptada para funcionar em MATLAB® e GNU Octave – ambas linguagens de computação matemática e científica –, a Psychtoolbox-3 reúne funções dedicadas à síntese e à exibição de estímulos sonoros e visuais – com rigor e precisão – para o estabelecimento de protocolos de estudo e de aplicação voltados às pesquisas neurocientíficas (Kleiner *et al.*, s.d.). Nesse sentido, ela já tem rotinas internas que possibilitam a sincronização de eventos com a taxa de atualização do monitor, o que particularmente auxilia a reprodução de EVIs para a geração de SSVEPs.

O monitor em si e a placa de vídeo também influenciam a qualidade na reprodução da sequência de figuras – sobretudo para arranjos de tela com vários estímulos e para arranjos com estímulos de alta frequência. Em situações como essas, a sobrecarga na rotina de processos do sistema operacional e o consequente atraso na referida reprodução são problemas em potencial para a exibição das EVRs. Para o presente estudo, o monitor disponível é o AOC® G2460PF de 144 Hz e a placa de vídeo é a NVIDIA GeForce GTX 1060.

Enfim, independentemente se luminosos ou padronizados, os EVRs em frequências de 5 Hz a 25 Hz são em geral mais irritantes e fatigantes. Somado a isso, esses estímulos, principalmente aqueles de 15 Hz a 25 Hz, podem provocar crises epiléticas em indivíduos fotossensíveis e com histórico de epilepsia (Fisher *et al.*, 2005). Além de tudo, as frequências de 1 Hz a 15 Hz estão sujeitas a um volume considerável de artefatos e de atividades cerebrais súbitas não relacionadas com a estimulação. Para evitar esses infortúnios, os EVRs em frequências elevadas – acima de 30 Hz – até podem ser utilizados. Contudo, seus SSVEPs têm intensidade menor e seu uso efetivo em BCIs está condicionado a um aprimoramento das técnicas de processamento e de identificação desses potenciais (Zhu *et al.*, 2010).

2.3.2 Aparelhagem, montagem e aquisição

No âmbito deste trabalho, os aparelhos disponíveis para efetuar as aquisições de EEG são o g®.USBamp e o g®.SAHARAsys. O g®.USBamp consiste em um amplificador de sinais biológicos – ou amplificador de biosinais – que possibilita a gravação simultânea de até 16 canais de informação. Esse aparelho tem taxas de amostragem configuráveis que vão de 64 Hz a 38 kHz, dispõe de uma rotina para verificar a impedância de contato do eletrodo com

a pele, apresenta uma série de filtros passa-banda e *notch* pré-ajustáveis e se comunica com o ambiente do MATLAB[®] por meio de uma interface de programação de aplicação (API, do inglês *application programming interface*) (GmbH, 2011a). O g[®].SAHARAsys, que funciona em conjunto com o g[®].USBamp, consiste em um sistema de eletrodos secos e ativos que possibilita a aquisição simultânea de até 16 derivações eletrofisiológicas não invasivas. Além dos eletrodos mencionados, esse aparelho apresenta um eletrodo de terra e um de referência, ambos com gel eletrolítico, que são, por recomendação do fabricante, posicionados nos processos mastoideais. Também vem com uma pulseira antiestática que ajuda a reduzir o acúmulo de cargas na pele do usuário (GmbH, 2011b). A Fig. 2.13 exibe as ilustrações dos dois.

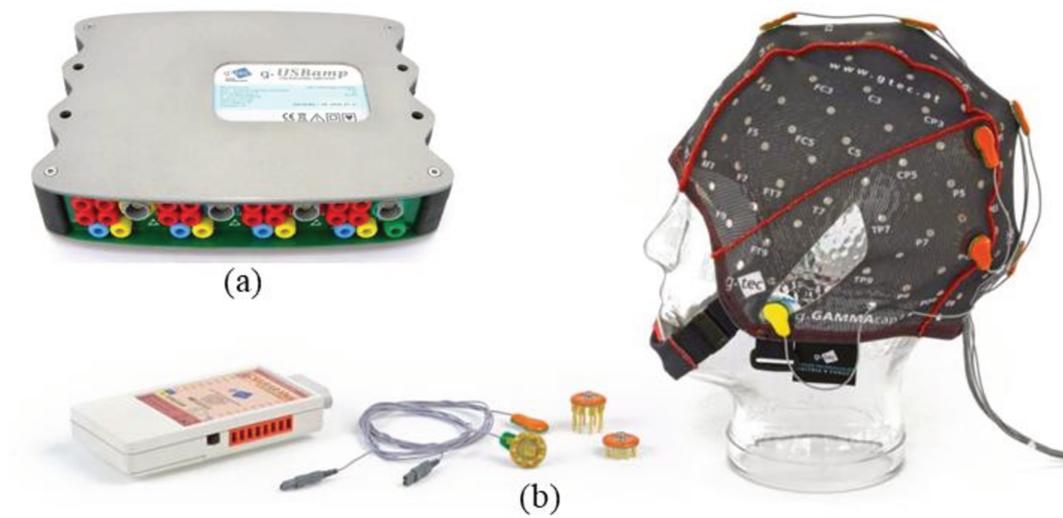


Fig. 2.13: Amplificador de biosinais g[®].USBamp (a) e sistema de eletrodos secos e ativos g[®].SAHARAsys (b). Adaptado de (GmbH, 2011a; GmbH, 2016).

A montagem para o registro de SSVEPs obviamente privilegia posições do escalpo em áreas acima do lobo occipital. Além dos obrigatórios O₁, O_Z e O₂, com o limite de 16 posições, os outros eletrodos são posicionados de forma a abranger uma boa porção do córtex cerebral. Nesse sentido, além daqueles, o arranjo inclui PO₃, PO_Z, PO₄, P₁, P_Z, P₂, CP₁, CP_Z, CP₂, C_Z, FC₁, FC_Z, FC₂. A Fig. 2.14 mostra uma ilustração dessa montagem. Apesar disso, para defini-la não existe uma regra geral. Idealmente, ainda que tenha um custo de processamento, um número maior de eletrodos significa o monitoramento de mais áreas do cérebro e, nesse caso, mais informação para a detecção de ritmos e de potenciais, bem como para a rejeição de artefatos (Reilly, 2005). Entretanto, quando não se dispõe de um número considerável deles para cobrir de maneira uniforme o escalpo, cada grupo de pesquisa em geral define esse posicionamento segundo a própria experiência.

Definidas a aparelhagem e a montagem para uma BCI de SSVEP, um possível

protocolo experimental tem os seguintes passos: um voluntário se acomoda em uma cadeira confortável a cerca de meio metro de um monitor que exibe EVRs e veste uma par de pulseiras antiestáticas; depois, os eletrodos são montados cuidadosamente e suas impedâncias de contato com a pele são verificadas – valores muito superiores a $10\text{ k}\Omega$ não são admitidos porque prejudicam a qualidade dos registros (Kappenman *et al.*, 2010); só então que o usuário realiza de 8 a 12 sessões nas quais ele intercala períodos de repouso com períodos de 6 s a 12 s para a focalização em cada um dos EVRs (Carvalho *et al.*, 2015). Com o intuito de levantar um banco de dados para estudos posteriores, a ordem de visualização dos estímulos costuma ser aleatória e cerca de 10 a 30 voluntários participam.

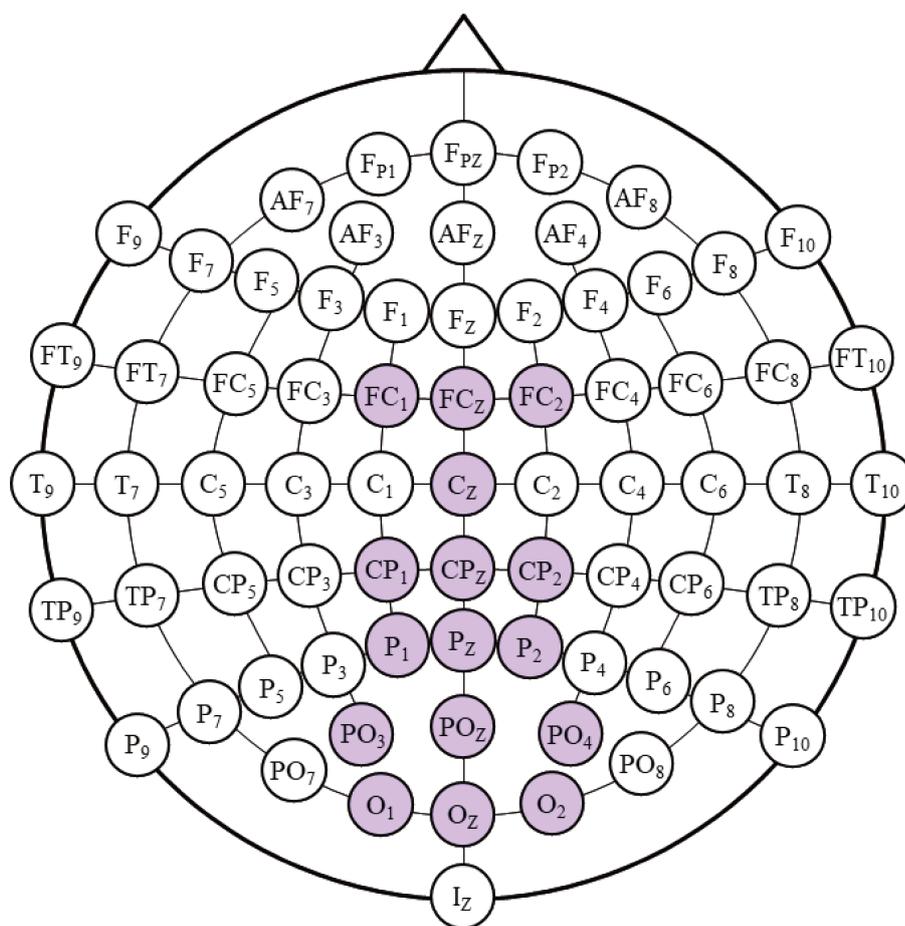


Fig. 2.14: Montagem com 16 eletrodos para aquisição de SSVEPs.

Esse tipo de protocolo experimental é posto em prática somente após cada voluntário estar ciente dos seus direitos e dos riscos do procedimento ao qual está sujeito. Feitas às devidas explicações e afastadas eventuais dúvidas por parte dos usuários, cada um deles então assina um “termo de consentimento livre e esclarecido”, caso realmente queira participar do experimento. Em consonância com essas ressalvas, o presente trabalho se insere como um dos desdobramentos de um projeto denominado XTReMe (Experiências de Tecnologias para Re-

abilitação em Medicina), aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Unicamp, parecer 1.715.175, CAAE 58592916.9.1001.5404. O principal objetivo desse projeto é desenvolver e testar tecnologias assistivas e de reabilitação voltadas a pacientes com deficiências motoras severas. O termo de consentimento está disponível em anexo.

2.4 FILTRAGEM E EXTRAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS

Para compor o bloco de processamento de uma BCI de SSVEP, há um universo crescente de filtros temporais, espaciais e espaço-temporais – todos projetados para concomitantemente remover os artefatos e destacar os potenciais em questão. Alguns exemplos são os filtros passa-banda e *notch*, a referência média comum, a combinação de mínima energia, a combinação de máximo contraste, a resposta sem distorção de variância mínima, a análise de correlação canônica, entre outros, bem como as diversas variações dessas técnicas (Garcia-Molina *et al.*, 2011; Liu *et al.*, 2014; Carvalho, 2016).

Equivalentemente, há vários extratores de características para suprimir os potenciais espúrios e realçar os quase-estacionários de interesse. Alguns exemplos são a análise de Fourier, a densidade espectral de potência, a análise de correlação canônica (embora citada anteriormente para a filtragem espacial, essa análise também funciona para a extração de características), entre outros, bem como as diversas variações (Liu *et al.*, 2014; Carvalho *et al.*, 2015; Zerafa *et al.*, 2018). Dentre as muitas possibilidades, este estudo não se propõe a fazer uma comparação de técnicas, apenas opta pela utilização da análise de correlação canônica, ora como filtro e ora como extrator, e da análise de Fourier também como extrator.

2.4.1 Análise de correlação canônica

De forma ampla, a análise de correlação canônica (CCA, do inglês *canonical correlation analysis*) é um método estatístico multivariado para inferir uma medida conjunta de duas fontes de dados descritas por variáveis aleatórias multidimensionais. Originalmente testada com índices acerca das habilidades de aritmética e de leitura em crianças com idade escolar (Hotelling, 1936), essa análise ganhou aplicações em diversas áreas do conhecimento e, dentro desse perspectiva, passou a ter utilidade no processamento de sinais de EEG: (1) para a remoção de artefatos musculares (De Clercq *et al.*, 2006), (2) para o estudo combinado de sinais de EEG com técnicas de imageamento (Correa *et al.*, 2010) e (3), especificamente no contexto de BCIs, para a identificação de SSVEPs e de P300 (Lin *et al.*, 2006; Spüler *et al.*,

2014). Segue uma visão geral sobre seu uso em BCI de SSVEP.

Considere duas variáveis aleatórias multidimensionais, \mathbf{X} e \mathbf{Y} , e \mathbf{R}_{XX} , \mathbf{R}_{YY} e \mathbf{R}_{XY} os respectivos valores esperados de $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$, $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$ e $\mathbf{X}\mathbf{Y}^T$. Diante disso, a CCA tem como objetivo encontrar os vetores de coeficientes \mathbf{w} e \mathbf{v} que maximizam a correlação ρ entre as combinações lineares das projeções $\mathbf{w}^T\mathbf{X}$ e $\mathbf{v}^T\mathbf{Y}$, como a Expr. 2.1 mostra. Essas projeções representam as variáveis de correlação canônicas (Härdle *et al.*, 2007).

$$\max_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \rho(\mathbf{w}^T\mathbf{X}, \mathbf{v}^T\mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \left[\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{XY} \mathbf{v}}{(\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{XX} \mathbf{w})^{1/2} (\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{YY} \mathbf{v})^{1/2}} \right] \quad (2.1)$$

Como a correlação é invariante a transformações lineares, a CCA pode ser reescalada para um problema de maximização com restrições, o que facilita a busca de uma solução (Härdle *et al.*, 2007). Por essa abordagem, a CCA tem como objetivo a solução do problema expresso na Expr. 2.2:

$$\max_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{XY} \mathbf{v} \quad (2.2)$$

sujeito às condições dadas pela Expr. 2.3:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{XX} \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{YY} \mathbf{v} = 1. \quad (2.3)$$

A partir dessa formulação, o resultado da CCA decorre da definição de uma matriz $\mathcal{K} = \mathbf{R}_{XX}^{-1/2} \mathbf{R}_{XY} \mathbf{R}_{YY}^{-1/2}$, cuja decomposição em valores singulares, $\mathcal{K} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Delta}^T$, leva às matrizes $\mathbf{\Gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_k)$, $\mathbf{\Delta} = (\boldsymbol{\delta}_1, \dots, \boldsymbol{\delta}_k)$ e $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_k^{1/2})$, com $k = \text{rank}(\mathcal{K})$. Nessa configuração, os vetores singulares à esquerda e à direita, $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$, fornecem, por meio da Expr. 2.4, os vetores de correlação canônicos, que estabelecem um mapeamento do espaço de variáveis aleatórias para o espaço de variáveis canônicas; e os valores singulares $\rho_i = \lambda_i^{1/2}$, para $i = 1, \dots, k$, fornecem diretamente os coeficientes de correlação canônicos, que de certa forma ranqueiam as variáveis canônicas (Härdle *et al.*, 2007).

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{R}_{XX}^{-1/2} \boldsymbol{\gamma}_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{R}_{YY}^{-1/2} \boldsymbol{\delta}_i \quad (2.4)$$

Em uma BCI de SSVEP, a CCA pode ser usada como um filtro espaço-temporal ou como um extrator de características. Quanto à primeira aplicação, a variável multidimensional \mathbf{X} corresponde a uma única matriz com todos os registros de EEG e a variável multidimensional \mathbf{Y} corresponde a uma única matriz com sinais sintetizados a partir das funções seno e cosseno em frequências e fases casadas com os períodos de estimulação. Nesse caso, o pri-

meiro vetor canônico, associado ao maior coeficiente canônico, atua como uma espécie de filtro que correlaciona os registros de EEG com as frequências e as fases dos estímulos e que, assim, aumenta a relação sinal-ruído (Spüler *et al.*, 2014).

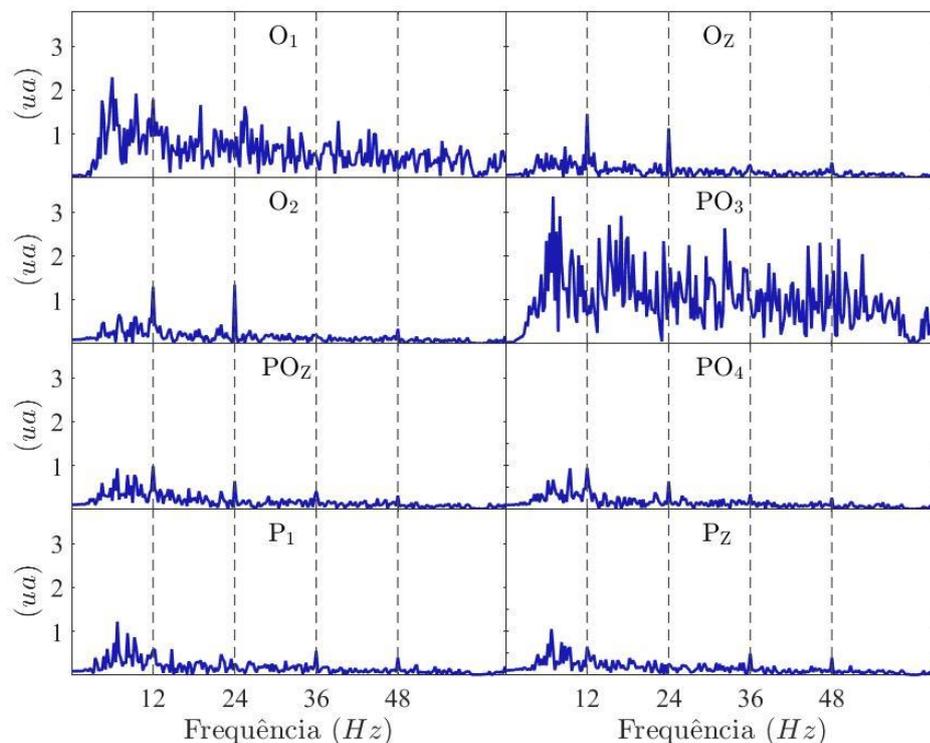


Fig. 2.15: Espectros dos sinais de oito eletrodos. Registros simultâneos, a uma taxa de amostragem de 256 Hz. Estímulo de 12 Hz.

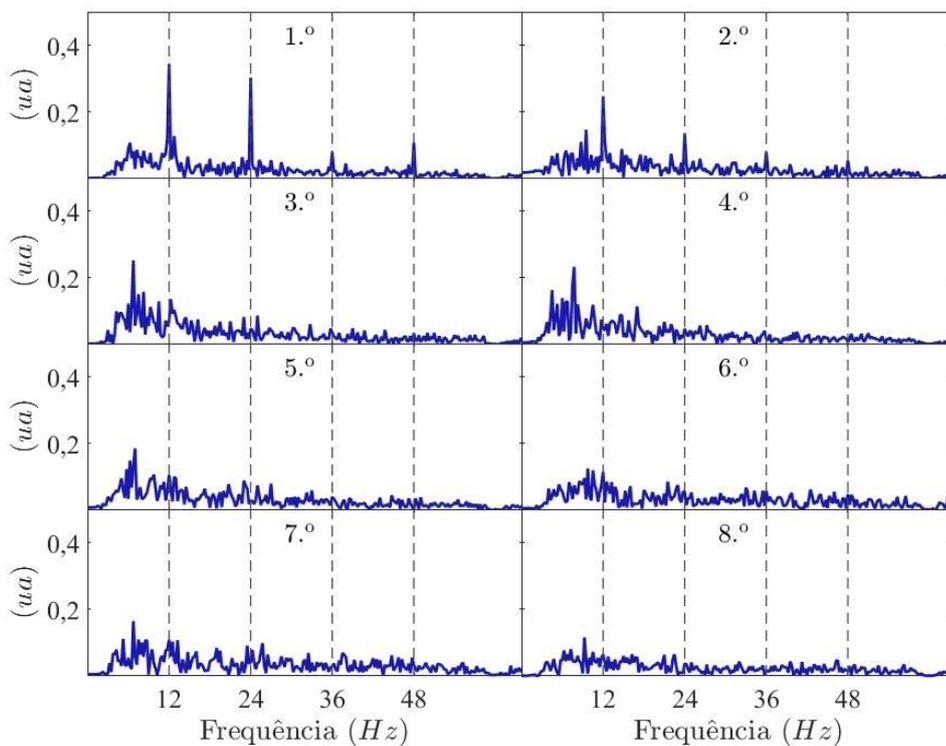


Fig. 2.16: Espectros dos sinais mapeados pelos oito primeiros vetores de correlação canônicos. Registros simultâneos da figura anterior.

O mapeamento realizado pelos oito primeiros vetores canônicos (Fig. 2.15 e Fig. 2.16) dá uma ideia do comportamento da CCA como filtro. Note que, nesse exemplo, um SSVEP de 12 Hz, anterior à filtragem, distribui-se com diferentes intensidades nas frequências principal e harmônicas dos eletrodos O_1 , O_z , O_2 , PO_z , PO_4 , P_1 e P_z ; e, posterior à filtragem, concentra-se nas saídas dadas pelos 1.º e 2.º vetores canônicos.

Quanto à segunda aplicação, os registros de EEG são primeiramente segmentados de forma a criar várias matrizes X de dados para a extração. Então, estas se combinam uma a uma com as matrizes Y de sinais sintetizados a partir das funções seno e cosseno em frequências e fases para cada estímulo. Nesse caso, o maior coeficiente de correlação canônico de cada combinação dessas é o atributo de interesse (Lin *et al.*, 2006).

Tabela 2.1: Exemplos de extração do 1.º coeficiente de correlação canônico para quatro janelas de dados, cada uma com um SSVEP diferente, e os respectivos sinais sintetizados.

		SSVEPs (X)			
		10 Hz	11 Hz	12 Hz	13 Hz
Sinais sintetizados (Y)	10 Hz	0,79	0,47	0,43	0,40
	11 Hz	0,45	0,79	0,54	0,40
	12 Hz	0,46	0,62	0,73	0,48
	13 Hz	0,48	0,44	0,41	0,75

A Tabela 2.1 dá uma ideia do comportamento da CCA como extrator. Note que, nesse exemplo, a diagonal principal estabelece uma correspondência dos SSVEPs com os sinais sintéticos de frequência equivalente. Em uma extração bem-sucedida, os elementos dessa diagonal sempre apresentam os maiores coeficientes dentre as colunas.

2.4.2 Análise de Fourier

De maneira geral, a análise de Fourier é um conjunto de métodos e de propriedades utilizado para calcular o conteúdo espectral de sinais representados em algum domínio. Para um sinal dependente do tempo, essa análise retorna um sinal dependente da frequência.

Porém, os métodos e as propriedades em questão não se restringem a esse caso. Estendem-se, por exemplo, perfeitamente a sinais dependentes do espaço, como aqueles que compõem uma imagem. Nesse outro caso, a análise retorna um sinal dependente de regularidades/frequências espaciais (Oppenheim *et al.*, 1996).

Inicialmente proposta no contexto da teoria de condução do calor em corpos sólidos (Pifer *et al.*, 2015), e posteriormente acrescida de várias contribuições e refinamentos, essa análise talvez seja uma das técnicas com o maior número de aplicações práticas nas ciências exatas e nas engenharias e, evidentemente, tem ampla aplicação no estudo de EEG e de BCI. Segue uma visão geral sobre seu uso em BCI de SSVEP.

Para um sinal representado por uma sequência $x[n]$ com N números, o modo de efetuar a análise de Fourier é através da transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*), dada pela Expr. 2.5 (Lyons, 2004; Oppenheim *et al.*, 2010).

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

No caso de um registro de EEG, $x[n]$ denota uma sequência com N amostras igualmente espaçadas em tempos discretos e $X[k]$ denota uma sequência também com N amostras igualmente espaçadas, mas em frequências discretas. Por se tratar de uma transformação que recebe e devolve números complexos, tanto o valor absoluto quanto a fase de cada amostra são representativos.

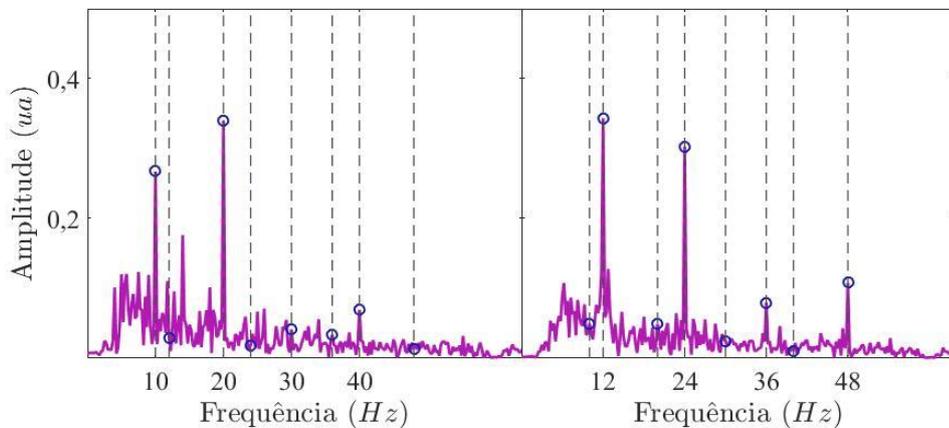


Fig. 2.17: Exemplos de extração a partir do módulo de uma FFT de 1024 pontos, ao considerar uma BCI de SSVEP com estímulos em 10 Hz e 12 Hz. Sinal pós-filtragem pelo 1.º vetor de correlação canônico. À esquerda, uma janela de um SSVEP de 10 Hz e, à direita, uma de um SSVEP de 12 Hz.

Em linhas gerais, a DFT até é um procedimento simples para avaliar o conteúdo espectral de uma sequência, contudo é computacionalmente ineficiente. Ou seja, com um aumento da quantidade de amostras, seus cálculos se tornam excessivos: N^2 operações. Apesar disso, a transformada rápida de Fourier (FFT, do inglês *fast Fourier transform*) representa um algoritmo – ou melhor, uma família de algoritmos – que computa com $N \log N$ operações exatamente os mesmos valores da DFT (Cooley *et al.*, 1965, Lyons, 2004; Oppenheim *et al.*, 2010). Devido a essa eficiência e equidade, a FFT é o procedimento utilizado na prática, em substituição à DFT.

Em uma BCI de SSVEP, a FFT pode ser usada como um extrator de características. Para isso, como no caso da CCA, os registros de EEG são primeiramente segmentados de forma a criar várias janelas de extração. Então, os atributos de interesse são justamente os valores absolutos das amplitudes complexas nas frequências principal e harmônicas associadas aos estímulos, como a Fig 2.17 mostra. Nos casos em que há sincronia entre a estimulação e aquisição, as fases também podem ser exploradas (Wang *et al.*, 2008).

2.5 CLASSIFICAÇÃO

O classificador é o constituinte final do bloco de processamento de uma BCI de SSVEP. Ele é quem de fato, a partir dos atributos extraídos do sinal de EEG, distingue as frequências de estimulação (Costa, 2015; Carvalho, 2016). Isso porque, após a etapa de extração, os dados nem sempre dão origem a padrões evidentes por inspeção direta. Nesse sentido, o classificador é o grande responsável pela identificação de regularidades no espaço de atributos. Para isso, em uma etapa prévia de treinamento, ele estabelece e configura uma combinação de funções discriminantes, de forma a segmentar o referido espaço com superfícies de decisão e a agrupar os dados em classes previamente conhecidas. Como cada subdivisão desse espaço cria regiões rotuladas, em uma etapa posterior de uso, essa combinação de funções é, até certo ponto, capaz de reconhecer dados novos (Duda *et al.*, 2001; Bishop, 2006).

Existe uma variedade crescente de métodos para projetar um classificador – ou melhor, um sistema de classificação. Inclusive, algumas estratégias, ao invés de recorrer a métodos isolados, buscam uma combinação destes como forma de aprimorar o desempenho em um dado problema. A ideia por trás dessas estratégias – denominada comitê de máquinas – é treinar um conjunto de diferentes modelos discriminantes e, depois, compor uma combinação de resultados a partir da saída de cada um deles, para só então tomar uma decisão (Tresp, 2001; Bishop, 2006). No âmbito da presente tese, são testados – tanto isoladamente

quanto unidos por um comitê – três modelos de classificação: (1) um classificador linear de mínimos quadrados, (2) uma máquina de vetores de suporte com núcleo gaussiano e (3) uma combinação de máquinas de aprendizado extremo.

2.5.1 Classificador linear de mínimos quadrados

O modelo linear compõe o acervo de métodos básicos em problemas de classificação e de reconhecimento de padrões. Nesse modelo, cada classe C_k , $k = 1, 2, \dots, K$, é descrita por uma função linear $g_k(\mathbf{x})$ (Expr. 2.6), em que $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$ representa um vetor de M atributos e $\mathbf{w}_k = [w_{k1} \ w_{k2} \ \dots \ w_{kM}]^T$ e w_{k0} representam, respectivamente, o vetor de coeficientes e o parâmetro de ajuste, ambos associados à identificação da classe C_k (Duda *et al.*, 2001; Bishop, 2006).

$$g_k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x} + w_{k0} \quad (2.6)$$

Cada função linear dessa estabelece um mapeamento do espaço de atributos para o espaço de representação da classe correspondente. Como K classes pressupõem K funções, para evitar resultados de classificação ambíguos, uma possível regra de decisão é considerar a entrada \mathbf{x} pertencente à classe C_k se $g_k(\mathbf{x}) > g_l(\mathbf{x})$ para todo $k \neq l$, ou seja, decidir pelo maior valor dentre todas as saídas. Com essa regra, a fronteira de decisão entre quaisquer duas classes C_k e C_l é dada por $g_k(\mathbf{x}) = g_l(\mathbf{x})$, igualdade que, conforme a Expr. 2.7 indica, define um hiperplano de separação entre as mesmas.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_l^T \mathbf{x} + w_{l0} &= \mathbf{w}_k^T \mathbf{x} + w_{k0} \\ 0 &= (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_l)^T \mathbf{x} + (w_{k0} - w_{l0}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Em problemas de classificação, o modelo linear exige a configuração dos coeficientes \mathbf{w}_k e w_{k0} de maneira apropriada. Uma técnica usual para realizar essa configuração é a dos mínimos quadrados (MQ). Nesse caso, considere N amostras do vetor de atributos, todas dispostas em uma matriz de treinamento \mathbf{X} , já com a inclusão de uma coluna de 1's associada aos termos de ajuste (Expr. 2.8). Também considere que essas $i = 1, 2, \dots, N$ amostras estejam rotuladas da seguinte forma: $r_k^{(i)} = +1 \ \forall \mathbf{x}^{(i)} \in C_k$ e $r_k^{(i)} = -1 \ \forall \mathbf{x}^{(i)} \notin C_k$.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_M^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_M^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \dots & x_M^{(N)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A partir da matriz \mathbf{X} , o equacionamento do problema assume uma notação vetorial (Expr. 2.9), em que $\mathbf{g}_k = [g_k^{(1)} \ g_k^{(2)} \ \dots \ g_k^{(N)}]^T$ e $\bar{\mathbf{w}}_k = [\mathbf{w}_k^T \ w_{k0}]^T$.

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k \quad (2.9)$$

Quando o número de amostras é maior do que o número de atributos (situação prática desejável em grande parte dos casos), esse arranjo de equações é considerado sobre-determinado – ou seja, tem mais dados do que parâmetros a determinar – e pode ser resolvido através da minimização do erro quadrático (Expr. 2.10).

$$\min_{\bar{\mathbf{w}}_k} J(\bar{\mathbf{w}}_k) = \min_{\bar{\mathbf{w}}_k} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_k^{(i)} - g_k^{(i)})^2 = \min_{\bar{\mathbf{w}}_k} \frac{1}{N} \|\mathbf{r}_k - \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k\|^2 \quad (2.10)$$

Para achar a solução, basta calcular a derivada do erro quadrático com respeito a cada $\bar{\mathbf{w}}_k$ e igualá-la a zero (Expr. 2.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{w}}_k} \|\mathbf{r}_k - \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k\|^2 &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{w}}_k} [(\mathbf{r}_k - \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k)^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k)] \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{w}}_k} [\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k^T \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k - \bar{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{X}^T \mathbf{r}_k + \bar{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k] \\ &= 2\bar{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} - 2\mathbf{r}_k^T \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X}\bar{\mathbf{w}}_k - \mathbf{X}^T \mathbf{r}_k = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

e depois isolar $\bar{\mathbf{w}}_k$ (Expr. 2.12):

$$\bar{\mathbf{w}}_k = [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \mathbf{r}_k = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{r}_k. \quad (2.12)$$

A solução em questão é dada em termos da pseudo-inversa \mathbf{X}^\dagger (Expr. 2.12), uma espécie de generalização do procedimento de inversão de matrizes. Mas note que a validade dessa expressão está condicionada à existência de $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$, o que indica que as colunas de \mathbf{X} , e conseqüentemente os atributos do problema, sejam linearmente independentes (Penrose, 1955). No caso de uma BCI de SSVEP, em que a CCA representa o filtro espacial e a FFT o extrator de características, essa condição é de certa forma atendida uma vez que, por princípio, ambos os processamentos utilizam autofunções para mapear os dados.

2.5.2 Máquinas de vetores-suporte

Outro modelo importante em problemas de classificação e de reconhecimento de padrões é o das máquinas de vetores-suporte (SVMs, *support vector machines*). Nesse mode-

lo, ao assumir dados linearmente separáveis, a distinção entre duas classes quaisquer também é definida por uma função $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0$. Contudo, o hiperplano ótimo não é computado com todos os vetores de treinamento distribuídos no espaço de atributos, mas só com alguns deles: os chamados vetores-suporte, que estabelecem, por sua vez, um hiperplano de margem máxima. Nesse sentido, durante o cálculo dos coeficientes \mathbf{w} e w_0 desse classificador, o principal objetivo é buscar uma espécie de folga entre os pontos de maior proximidade pertencentes às duas distribuições de classe, de tal forma que a superfície de decisão mantenha uma certa distância de tolerância desses pontos (Cortes e Vapnik, 1995; Bishop, 2006).

Para isso, considere as entradas \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, dadas pelos vetores de treino, e as saídas g_i , rotuladas por $d_i = +1$, se relativas a uma classe, e $d_i = -1$, se relativas à outra classe (Expr. 2.13):

$$\begin{cases} \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + w_0 \geq +1 \Rightarrow d_i = +1 \\ \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + w_0 \leq -1 \Rightarrow d_i = -1 \end{cases} \quad (2.13)$$

propriedade, inclusive, redutível a uma única inequação (Expr. 2.14):

$$d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + w_0) - 1 \geq 0. \quad (2.14)$$

A partir disso, a obtenção do hiperplano de margem máxima ocorre ao tomar os valores limítrofes de cada classe e ao maximizar a distância entre estes. Em linguagem matemática, isso quer dizer: tomar as projeções de classe e maximizar a distância $\rho(\mathbf{w}, w_0)$ entre estas (Expr. 2.15). Note que as projeções estão normalizadas para evitar efeitos de escala.

$$\rho(\mathbf{w}, w_0) = \min_{\{x:d=+1\}} \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{w}\|} - \max_{\{x:d=-1\}} \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{w}\|} \quad (2.15)$$

Na situação ideal, ou seja, naquela em que os dados do problema são linearmente separáveis, a Expr. 2.14 se torna uma igualdade, $d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + w_0) - 1 = 0$, bem como as condições limítrofes das classes $+1$ e -1 se resumem, respectivamente, a $\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 = +1$ e a $\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 = -1$. Nessa situação, a separação máxima é dada pela Expr. 2.16:

$$\rho(\mathbf{w}^*, w_0^*) = \frac{2}{\|\mathbf{w}^*\|} \quad (2.16)$$

que advém da substituição de ambas as condições anteriores na Expr. 2.15.

Logo, a margem máxima é obtida através da minimização de $\|\mathbf{w}\|$, o denominador da Expr. 2.16. Sem perda de generalidade, e para tornar o problema tratável, essa margem é

na prática obtida através da minimização de $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$, com a construção e a resolução do seguinte lagrangiano (Expr. 2.17), em que $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_M]^T$ representa um vetor dos multiplicadores de Lagrange.

$$L(\mathbf{w}, w_0, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \lambda_i [d_i(w_0 + \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) - 1] \quad (2.17)$$

Embora a Expr. 2.17 seja um problema de minimização com respeito aos coeficientes \mathbf{w} e w_0 , ela também é um problema de maximização com respeito aos multiplicadores λ_i , uma vez que a restrição original é a desigualdade $d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + w_0) - 1 \geq 0$, fato que justifica a presença do sinal negativo nos termos de restrição. Para achar a solução, comece pelo cálculo da derivada parcial de L com respeito a \mathbf{w} e a force a zero:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.18)$$

e da derivada de L com respeito a w_0 e também a iguale a zero:

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i = 0. \quad (2.19)$$

Da primeira derivação, obtém-se o vetor de pesos ótimos \mathbf{w}^* , uma combinação linear dos vetores de atributo ponderada pelos padrões de classe e pelos multiplicadores de Lagrange não-nulos (Expr. 2.20).

$$\mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{x}_i \quad (2.20)$$

Ao considerar a Expr. 2.19 e a Expr. 2.20 no lagrangiano da Expr. 2.17, obtém-se a representação dual do problema de margem máxima (Expr. 2.21):

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j d_i d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \quad (2.21)$$

sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De maneira geral, a solução desse último problema de otimização, que satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), leva à solução do problema de margem máxima. Em particular, uma condição importante é que $\lambda_i[d_i(\mathbf{w}_0^* + \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x}_i) - 1] = 0$ valha para todos os termos. Isso sugere que ou $\lambda_i = 0$, solução trivial, ou $d_i(\mathbf{w}_0^* + \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x}_i) - 1 = 0$, solução que leva ao conjunto de vetores-suporte. Esses pontos são justamente aqueles que importam para a definição dos coeficientes do classificador. Contudo, todo esse formalismo vigora a partir da hipótese de que os dados são linearmente separáveis. Embora não tratada aqui, a extensão para um caso mais geral é possível por meio da inclusão de variáveis de relaxação ξ_i nos termos de restrição (Expr. 2.23).

$$d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + w_0) + \xi_i - 1 \geq 0. \quad (2.23)$$

Além disso, todo esse formalismo admite uma extensão a problemas de classificação não lineares. Isso porque o problema de margem máxima depende, tão somente, de uma solução linear no espaço de atributos. Nesse caso, dado um mapeamento não linear $\phi(\mathbf{x})$ que traduz os pontos do espaço original para o espaço de atributos, a função $g(\mathbf{x})$, ainda que considere um tal mapeamento, continua a ser uma função linear nos parâmetros (Expr. 2.24):

$$g(\mathbf{x}) = w_0 + \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

com um vetor de coeficientes ótimo também linear (Expr. 2.25):

$$\mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \phi(\mathbf{x}_i) \quad (2.25)$$

de modo que a expressão do classificador pode ser reescrita como:

$$g(\mathbf{x}) = w_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i [\phi^T(\mathbf{x}_i) \phi(\mathbf{x})] = w_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}). \quad (2.26)$$

Nesse sentido, a operação do classificador depende apenas da realização de produtos internos $\phi^T(\mathbf{x}_i) \phi(\mathbf{x})$, geralmente em um espaço de dimensão elevada. Para facilitar essa manipulação e reduzir o custo computacional, o artifício utilizado na prática para realizar esse mapeamento não linear é a chamada função de *kernel* $\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$ (Boser *et al.*, 1992; Cortes e Vapnik, 1995), que satisfaz a definição de produto interno e que contorna a necessidade de executar o mapeamento direto dos dados. No âmbito da presente tese, a função de *kernel* escolhida é a função de base radial (RBF, do inglês *radial base function*), também conhecida como núcleo gaussiano (Expr. 2.27), em que γ representa um hiperparâmetro associado à

abertura da RBF – que deve, por sua vez, ser adequadamente ajustado através de um procedimento de validação cruzada combinado com uma busca em grade.

$$\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = \exp(-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|^2) \quad (2.27)$$

Por fim, com o uso de $\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$, a construção do classificador linear de margem máxima ocorre de forma equivalente àquela a partir de $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$, mesmo no caso de problemas sujeitos às condições de relaxação. Devido à grande popularidade da SVM, existe uma diversidade de pacotes numéricos que resolvem esse problema, de maneira prática e eficiente. Para a presente tese, optou-se por um pacote desenvolvido para o ambiente do MATLAB.

2.5.3 Máquina de aprendizado extremo

Diferentemente dos dois antecedentes, a máquina de aprendizado extremo (ELM, do inglês *extreme learning machine*) é um modelo – utilizado em problemas de classificação e de regressão – baseado em uma rede neural artificial. Esta, por sua vez, como a própria denominação sugere, é um arranjo matemático inspirado na descrição de um sistema biológico – mais especificamente, na estrutura do sistema nervoso (McCulloch *et al.*, 1943; Rosenblatt, 1961). Essa rede é composta por uma determinada quantidade e disposição de neurônios artificiais, interconectados entre si, para realizar o processamento de informação. Similar ao biológico, um neurônio artificial é um elemento que – por intermédio de sua eficiência sináptica, de seus pesos e de sua função de ativação – busca integrar a informação de entrada, a ponto de estabelecer o comportamento altamente não linear que o caracteriza: disparar ou não disparar, em resposta a um certo estímulo.

Em particular, a ELM consiste de uma rede *feedforward* (isto é, sem realimentação) contendo: (1) uma camada de entrada, que recebe os atributos dos dados do problema, (2) uma camada intermediária, que processa os dados por meio de transformações não-lineares, e (3) uma camada de saída, que combina as ativações dos neurônios da camada intermediária a fim de gerar as respostas da rede. Uma característica particular às ELMs é a de que os pesos sinápticos da camada intermediária são aleatoriamente fixados, não participando do processo de treinamento. Desta forma, a única parte da rede sujeita à adaptação é a camada de saída, a qual usualmente (embora não exclusivamente) corresponde a um combinador linear, configurável através do critério de mínimos quadrados. Essa estratégia de atribuição arbitrária dos pesos torna extremamente ágil a construção dessas redes, e não interfere na capacidade das mesmas em aproximar qualquer função com um erro tão pequeno quanto se queira,

ainda que a um custo de muitos neurônios (Huang *et al.*, 2011).

Para a construção desse modelo, considere o vetor $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$, com M atributos, que alimenta os L neurônios da camada intermediária e retorna o respectivo vetor de saída dessa camada $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}) \ h_2(\mathbf{x}) \ \dots \ h_L(\mathbf{x})]^T$. A saída $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ dessa rede é dada por uma combinação linear entre $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ e o vetor de coeficientes $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_L]^T$ mais um parâmetro de ajuste v_0 (Expr. 2.28).

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = v_0 + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) = v_0 + \sum_{i=1}^L v_i h_i(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

Existem algumas opções para mapear o vetor de entradas em um espaço de atributos não linear. Na presente tese, esse mapeamento é realizado pela função tangente hiperbólica (Expr. 2.29):

$$h_i(\mathbf{x}) = \frac{1 - \exp[-(w_{i0} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{x})]}{1 + \exp[-(w_{i0} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{x})]} \quad (2.29)$$

na qual $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_M]^T$ e w_0 representam justamente os pesos da camada intermediária definidos aleatoriamente.

Mesmo que a camada intermediária seja definida de forma aleatória, a saída linear requer a configuração dos coeficientes \mathbf{v} e v_0 . Como mencionado anteriormente, a técnica de MQ é usual para realizar essa configuração. Para isso, em um problema de duas classes, considere N amostras do vetor de atributos, todas mapeadas pela função de ativação e já dispostas em uma matriz de treinamento \mathbf{H} , com a inclusão de uma coluna de 1's associada aos termos de ajuste (Expr. 2.30). Também considere que essas $i = 1, 2, \dots, N$ amostras estejam rotuladas da seguinte forma: $r^{(i)} = +1 \ \forall \mathbf{x}^{(i)} \in C_1$ e $r^{(i)} = -1 \ \forall \mathbf{x}^{(i)} \in C_2$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \dots & h_L^{(1)} & 1 \\ h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & \dots & h_L^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_1^{(N)} & h_2^{(N)} & \dots & h_L^{(N)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A partir da matriz \mathbf{H} , o equacionamento do problema, similar ao caso do classificador linear, assume a notação vetorial (Expr. 2.31):

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{v}} \quad (2.31)$$

em que $\mathbf{g} = [g^{(1)} \ g^{(2)} \ \dots \ g^{(N)}]^T$ e $\bar{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T \ v]^T$, de tal forma que, quando o número de amostras é maior do que o número de atributos, a resolução por meio de MQ leva a um con-

junto de coeficientes em termos da pseudo-inversa (2.32):

$$\bar{\mathbf{v}} = [(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T] \mathbf{r} = \mathbf{H}^+ \mathbf{r} \quad (2.32)$$

Como os pesos da camada intermediária são definidos aleatoriamente na ELM, para reduzir a influência de uma máquina gerada com coeficientes ineficazes, em vez de configurar uma única função discriminante por classe, optou-se por configurar sete funções por classe, ou seja, uma combinação de ELMs. Nesse caso, a saída é dada por voto majoritário.

2.5.4 Treinamento, validação e teste

Nos três modelos vistos, a configuração do classificador tem que passar por um teste com amostras desconhecidas, antes de ser colocado em uso. Diferente dos modelos dinâmicos tradicionais, que geralmente envolvem a estimativa de parâmetros com uma natureza física bem estabelecida, os modelos de aprendizado de máquina em geral não têm qualquer relação de similaridade com o fenômeno de interesse. Inclusive, se, nos mencionados modelos dinâmicos, as constantes e as variáveis costumam admitir um significado físico explícito, nos modelos de aprendizado de máquina, por sua vez, os coeficientes, os parâmetros e até mesmo os dados provenientes do espaço em que se dá a classificação não precisam desse significado para funcionar e, além de tudo, não guardam relação entre si. Por exemplo, nos modelos apresentados, ainda que todos sejam utilizados para resolver um problema de BCI de SSVEP, não existe uma relação direta entre os coeficientes do classificador linear MQ, da SVM com núcleo gaussiano e da combinação de ELMs. Nesse sentido, a escolha de um modelo de classificação também está sujeita à avaliação. Nesse caso, não faz sentido falar em acurácia dos coeficientes, como em um modelo dinâmico. Faz sentido, sim, falar em capacidade de generalização, que representa a propriedade do modelo retornar boas estimativas para dados diferentes dos que foram utilizados durante o treinamento (Dreyfus *et al.*, 2006).

Como os coeficientes e os hiperparâmetros de cada modelo precisam ser ajustados para alcançar um resultado satisfatório, é comum a utilização de aprendizado supervisionado: abordagem em que dados de treino – vetores de atributos identificados com seus correspondentes valores alvos – servem de exemplos para projetar os modelos (Bishop, 2006). Nesse caso, para evitar o sobreajuste e a baixa capacidade de generalização, o problema de classificação em geral envolve três conjuntos de amostras: o de treino, usado para definir os coeficientes e os parâmetros; o de validação, usado para selecionar os coeficientes e os parâmetros com melhor resultado; e o de teste, para avaliar a configuração final do modelo (Dreyfus *et*

al., 2006). No caso do classificador linear MQ, basta o uso de um conjunto de treino e um de teste para definir o modelo final. No caso da SVM com núcleo gaussiano, o conjunto de validação é importante para definir o parâmetro do *kernel* gaussiano e, no caso da combinação da ELM, o número de neurônios da rede.

3 UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO BASEADO EM POTENCIAIS EVOCADOS VISUALMENTE

Ao longo deste capítulo, duas propostas conceituais serão apresentadas e avaliadas experimentalmente. A primeira é a de que o sistema visual se comporta como um canal de comunicação, nos moldes preconizados pelas teorias da informação e da comunicação digital trabalhadas no capítulo 1. Nesse sentido, mensagens de qualquer natureza, se digitalmente codificadas por estímulos visuais, podem ser transmitidas pelo sistema visual e recuperadas através de eletrodos posicionados sobre o lobo occipital, como sugerem as técnicas de BCI de SSVEP trabalhadas no capítulo 2. A segunda é a de que a capacidade de canal associada a esse experimento só é computável por meio de um procedimento de avaliação sistemática dos possíveis símbolos que podem ser transmitidos através do sistema visual. Nesse sentido, cada indivíduo apresenta um conjunto ótimo de frequências que pode ser utilizado para a comunicação digital. O amplo desenvolvimento dessas duas propostas se fundamenta em um modelo de sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente.

3.1 MODELO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO BASEADO EM POTENCIAIS EVOCADOS VISUALMENTE

Um possível modelo de um sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente tem exatamente os mesmos componentes do modelo apresentado na seção 1.1 do capítulo 1. Por um lado, as descrições da fonte e do destino, bem como as dos pares codificador-decodificador de fonte e de canal, não requerem mais detalhes do que aqueles já discutidos sumariamente; afinal, em princípio, esse sistema deve transmitir mensagens de todo tipo e para todo fim e também deve ser receptível a uma ampla variedade de técnicas usualmente empregadas em sistemas de comunicação. Por outro lado, o modulador e o demodulador merecem um destaque maior porque combinam as suas especificações gerais com as dos elementos de uma BCI de VEP – em particular, para os fins da presente tese, as de uma BCI de SSVEP. O diagrama da Fig. 3.1 exhibe esse modelo e já realça que, em um experimento de comunicação com esse sistema, o gerador de EVRs traduz os símbolos das palavras de código em sinais adequados à transmissão pelo canal, a condução das mensagens ocorre predominantemente ao longo do sistema visual e a BCI de SSVEP recupera as sequências binárias na saída do canal.

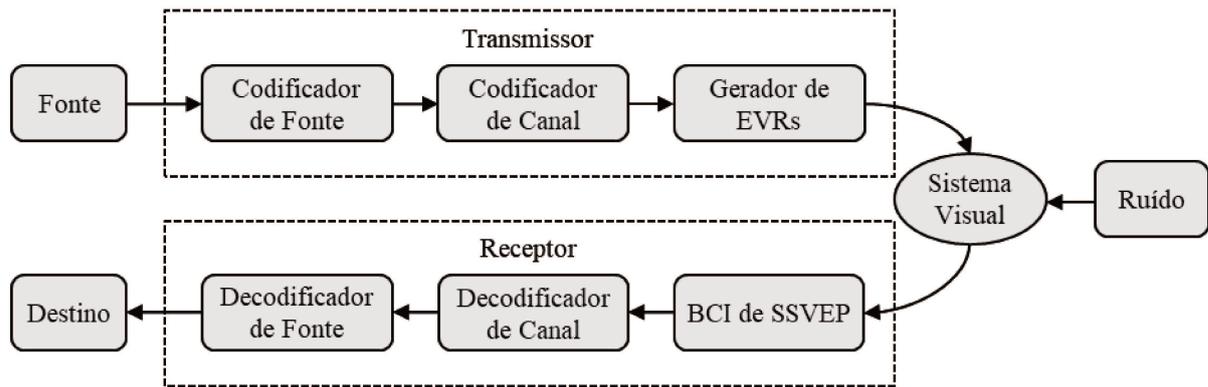


Fig. 3.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação baseado em SSVEP.

O gerador de EVRs representa o modulador. Especificamente com o uso de EVRs padronizados, as palavras de código podem ser moduladas por chaveamento de frequência (FSK, do inglês *frequency-shift keying*). Essa técnica lida com sinais senoidais de mesma amplitude, mas de frequências distintas, para representar os zeros e os uns do código, ao longo de intervalos pré-estabelecidos (Kimura *et al.*, 2013). Como a faixa espectral mais indicada para a geração de EVRs vai de 8 Hz a 12 Hz, duas escolhas pertinentes são as frequências 10 Hz e 12 Hz, para representar os dígitos 0 e 1, respectivamente. Além disso, como essas frequências causam desconforto visual, o sinal FSK resultante ainda pode ser modulado em outro sinal de frequência mais elevada (43 Hz, por exemplo), para tornar as oscilações visuais menos perceptíveis e cansativas (Chang *et al.*, 2014).

As Fig. 3.2, Fig. 3.3 e Fig. 3.4 exemplificam as etapas de modulação para converter palavras de código em EVRs de FSK voltados à exibição em um monitor. As duas primeiras realçam como estabelecer um período de troca de estampas, de maneira a obter uma correspondência entre um sinal senoidal de frequência específica e os padrões de cinza em uma escala de cores RGB (do inglês, *red-green-blue*) normalizada.

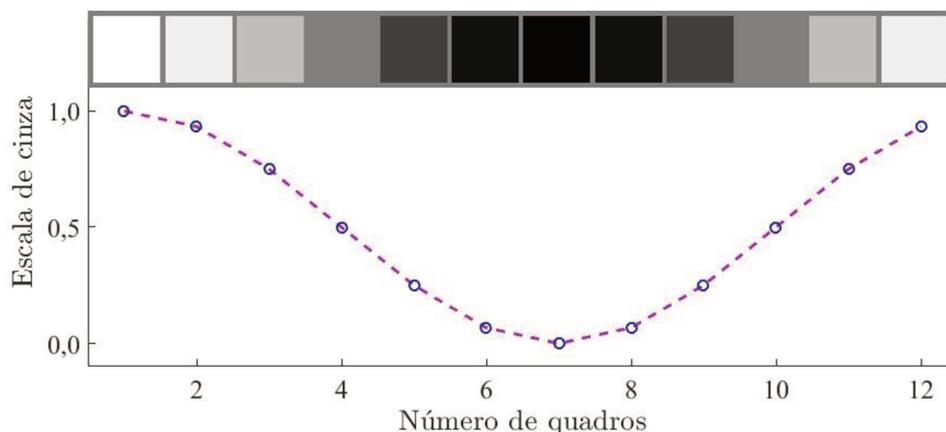


Fig. 3.2: Exemplo de um período de troca de estampas para gerar um EVR de 12 Hz, a uma taxa de atualização de 144 Hz.

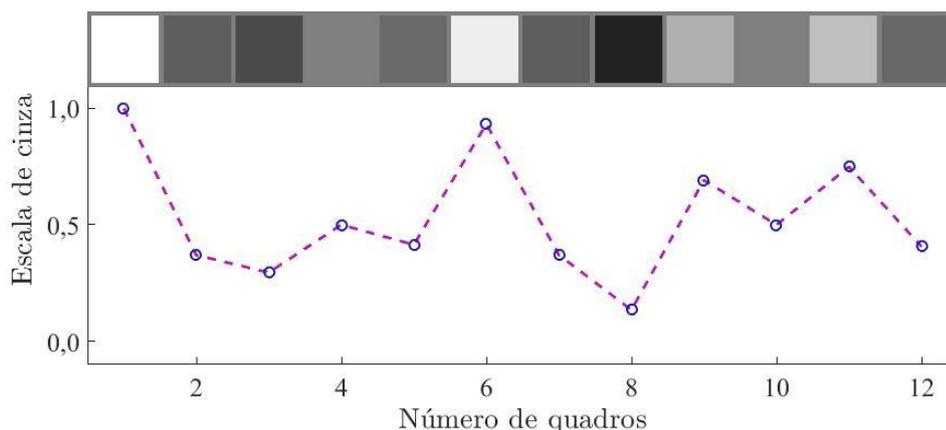


Fig. 3.3: Exemplo de um período de troca de estampas para gerar um EVR de 12 Hz modulado em 43 Hz, a uma taxa de atualização de 144 Hz.

Obviamente, a taxa de atualização do monitor – 144 Hz, nesse caso – limita a aproximação da forma de onda e, nesse sentido, interfere na suavidade de exibição do estímulo. Ou seja, ainda que o teorema da amostragem garanta a reprodução de sinais em frequências até o limite de Nyquist, as trocas de estampas se tornam cada vez mais descontínuas conforme o aumento da frequência. Por exemplo, a troca exibida na Fig. 3.2, para um EVR de 12 Hz, é bem mais suave do que a exibida na Fig. 3.3, para um EVR de 12 Hz modulado em 43 Hz. Por fim, com o uso desses períodos de troca de estampas, a Fig. 3.4 traz duas ilustrações de sinais cujas variações RGB, sincronizadas com a taxa de atualização do monitor, geram EVRs de FSK associado à palavra 0101.

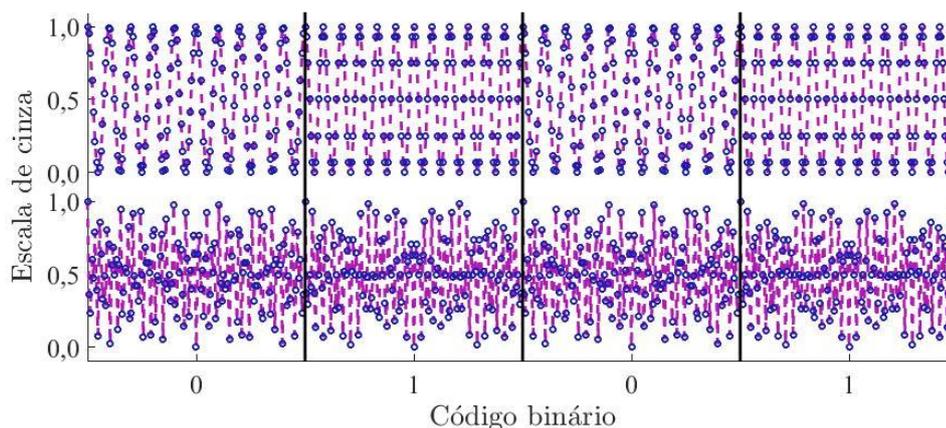


Fig. 3.4: Exemplos de sinais FSK correspondentes à palavra 0101, gerados em 10 Hz e 12 Hz (ilustração superior), e em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz (ilustração inferior), para exibir EVRs a uma taxa de atualização de 144 Hz. Nessa imagem, cada intervalo de símbolo equivale a 1 s.

Retomando a apresentação inicial, o sistema visual representa o canal. No ser humano, esse sistema consiste de vários caminhos neuronais que transmitem informações sobre aspectos do que é possível enxergar: a forma, o movimento, a cor, o contraste, entre outros.

De forma simplificada, o fluxo de informação ocorre em duas etapas: da retina para o mesencéfalo e o tálamo e, depois, do último para o córtex visual primário. Na primeira delas, os axônios das células ganglionares retinianas de cada olho convergem em direção aos correspondentes discos ópticos e, juntos, dão origem aos nervos ópticos bilaterais. Estes se projetam para o quiasma, no qual as fibras provenientes do campo visual esquerdo se reagrupam para compor uma representação completa desse campo no trato óptico direito e de modo recíproco as do direito se reagrupam para compor uma no esquerdo. Ambos tratos, por sua vez, estendem-se para estruturas localizadas no mesencéfalo – os colículos superiores e a área pré-tectal – e no tálamo – os núcleos geniculados laterais. Estes, dentre os mencionados, merecem destaque porque recebem cerca de noventa por cento dos terminais axônicos das células ganglionares retinianas e os redirecionam para o córtex visual primário. Esse redirecionamento ocorre sobretudo por meio de dois canais, o magnocelular – com maior sensibilidade ao contraste luminoso e à frequência temporal dos objetos – e o parvocelular – com maior sensibilidade ao contraste de cor e à frequência espacial dos mesmos (Wurtz *et al.*, 2000). Além destes, há teorias não conclusivas sobre a existência de um terceiro canal, o *koniocellular*, que supostamente transporta uma parcela do contraste de cor e reage a estímulos espectrais (Vialatte *et al.*, 2010). Independentemente disso, todas essas informações convergem para o córtex visual primário, no qual desencadeiam uma série de processos para integrar a imagem do campo visual e também no qual suscitam SSVEPs monitoráveis com EEG.

A BCI de SSVEP representa o demodulador. Portanto, após a captura dos registros de EEG, todos os métodos de processamento de sinais, de reconhecimento de padrões e de aprendizado de máquina tratados no capítulo 2 – bem como muitos outros não explorados neste texto, mas reconhecidamente úteis em BCI de SSVEP (Lotte *et al.*, 2018; Zerafa *et al.*, 2018) – são válidos para realizar a demodulação dos ERVs de FSK, com o intuito de reconstruir a palavra de código transmitida através do sistema visual. A presente tese optou pela seguinte configuração: aquisição de sinais cerebrais com o amplificador g[®].USBamp – taxa de amostragem de 256 Hz, filtro passa-banda de 5 Hz a 100 Hz e filtro *notch* em 60 Hz – em conjunto com o sistema de eletrodos secos g[®].SAHARAsys – montagem de acordo com a da Fig. 2.14; filtragem espacial com o primeiro vetor canônico da CCA; extração de atributos com a FFT, considerando a componente principal e os três primeiros harmônicos das frequências de estimulação; e classificação com um comitê de máquinas composto por um classificador linear MQ, uma SVM com núcleo gaussiano e uma combinação de ELMs.

Nesse modelo de sistema de comunicação baseado em SSVEP, o sistema visual se comporta essencialmente como um canal discreto sem memória. Logo, para avaliar a eficiên-

cia e as limitações desse sistema, a capacidade de canal, em bits por símbolo, sem dúvida merece destaque. Entretanto, diferente dos sistemas convencionais, a taxa de detecção dos símbolos – vinculada ao tempo necessário para identificá-los na saída do canal – não é flexível nesse caso. Ou seja, com uma BCI de SSVEP como demodulador, essa taxa opera com erros muito diferentes conforme varia o comprimento da janela de dados, até porque a porcentagem de acerto na classificação dos símbolos tende a diminuir com a redução desse comprimento. Logo, a taxa máxima de transferência de informação precisa considerar esse aspecto.

3.2 TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE INFORMAÇÃO

Dado que – no modelo proposto – o sistema visual representa um canal discreto sem memória para o qual o número de símbolos de entrada e de saída é igual ($N = M$), as fórmulas de capacidade vistas no capítulo 1 são prontamente aplicáveis para avaliar a transferência de informação por esse canal. Ao considerar uma transmissão perfeita, ou seja, uma transmissão sem erros ($p(y_j|x_i) = 1$ se $i = j$ e $p(y_j|x_i) = 0$ se $i \neq j$), a capacidade é dada pelo limite C_0 (Expr. 3.1), associado ao canal determinístico (Expr. 1.39):

$$C_0 = \log M. \quad (3.1)$$

Ao considerar uma transmissão em que os símbolos têm a mesma probabilidade de acerto ($p(y_j|x_i) = p$ se $i = j$) e os erros são uniformemente distribuídos ($p(y_j|x_i) = (1 - p)/(M - 1)$ se $i \neq j$), a capacidade é dada pelo limite C_1 (Expr. 3.2), associado ao canal M -ário simétrico (Expr. 1.41). Evidentemente, para o alfabeto de 0 e 1, essa capacidade se reduz ao caso do canal binário simétrico (Expr. 1.40):

$$C_1 = \log M + p \log p + (1 - p) \log \frac{(1 - p)}{M - 1}. \quad (3.2)$$

Por fim, ao considerar uma transmissão em que a matriz de canal admite inversa (\mathbf{P}^{-1}) e existe a garantia de uma distribuição dos símbolos de envio ($p(x_k) = 2^{-C} d_k$), a capacidade é dada pelo limite C_2 (Expr. 3.3), associado à melhor estimativa em forma fechada para a capacidade do canal discreto sem memória (Expr. 1.52):

$$C_2 = \log \sum_{j=1}^M 2^{-\sum_{i=1}^M r_{ji} H(Y|X=x_i)}. \quad (3.3)$$

Para o sistema de comunicação proposto, essas capacidades, em bits por símbolo, não são por si só índices de avaliação suficientes porque, diferente dos sistemas de comunica-

ção tradicionais, em que a taxa de detecção dos símbolos geralmente é flexível e atrelada à taxa de transmissão, o desempenho de uma BCI de SSVEP no papel de demodulador – ao menos no atual estágio científico e tecnológico – irremediavelmente depende dessa taxa de detecção, ou seja, do tamanho da janela de processamento T . Por exemplo, a identificação de um ritmo ou de um potencial evocado em janelas de 3, 4 ou 5 segundos é reconhecidamente menos complicada do que em janelas de 300, 400 ou 500 milissegundos – fato que altera as probabilidades de acerto e as distribuições de erro. Logo, a matriz de confusão não é igual para qualquer T , o que influencia a precisão na detecção dos símbolos.

Por conta dessa dificuldade, vários índices de avaliação foram propostos no contexto das BCIs (Schlögl *et al.*, 2007; Thompson *et al.*, 2014). O mais comum deles é a taxa de transferência de informação (*ITR*, do inglês *information transfer rate*) (Farwell *et al.*, 1988; Wolpaw *et al.*, 1998; Kronegg *et al.*, 2005; Yuan *et al.*, 2013; Sadeghi *et al.*, 2019). Desde que foi sugerida, muitos trabalhos de fato já a utilizaram para avaliar as suas contribuições na área, inclusive os mais recentes (Yin *et al.*, 2015; Xu *et al.*, 2016; Cao *et al.*, 2017; Eggers *et al.*, 2018; He *et al.*, 2018; Shin *et al.*, 2018; Han *et al.*, 2019; Ingel *et al.*, 2019). Em teoria, a *ITR* representa simplesmente uma medida da quantidade de informação, em bits por unidade de tempo, conduzida por um canal durante um protocolo de transmissão de dados. Na prática, a *ITR* está sendo utilizada como um índice de avaliação dos experimentos de BCIs – índice formado por uma taxa de transmissão, em classes por unidade de tempo (geralmente em minutos ou segundos), multiplicada pela capacidade de um canal discreto sem memória, em bits por classe. Posta dessa forma, a *ITR* basicamente define o limite para a comunicação sem perdas em um ensaio experimental com uma BCI.

Uma primeira versão da *ITR*, inspirada no canal determinístico, está relacionada ao caso ideal em que, supostamente, não há erros durante o experimento (Expr. 3.4). Nessa expressão, M denota o número de classes e T o tamanho da janela de tempo necessária para transmitir cada decisão do classificador (Farwell *et al.*, 1988).

$$ITR_0 = \frac{1}{T} C_0 = \frac{1}{T} \log M \quad (3.4)$$

Uma segunda versão da *ITR*, inspirada no canal M -ário simétrico, está relacionada ao caso em que, supostamente, as classes têm a mesma probabilidade de acerto e os erros de classificação são uniformemente distribuídos (Expr. 3.5). Ou seja, trata-se do caso em que a entropia do erro é máxima. Nessa expressão, M e T têm a mesma conotação anterior e p indica o valor médio associado à precisão do classificador (Wolpaw *et al.*, 1998).

$$ITR_1 = \frac{1}{T} C_1 = \frac{1}{T} \left[\log M + p \log p + (1-p) \log \frac{(1-p)}{M-1} \right]. \quad (3.5)$$

Entretanto, mesmo considerando o modelo de um canal discreto sem memória, uma hipótese limitante por si mesma, a Expr. 3.5 só é válida sob condições ainda mais restritivas porque pressupõe um canal duplamente simétrico – ou duplamente uniforme – cuja entropia do erro, como dito há pouco, é máxima (Fano, 1952; Ash, 1965). Ao adotar esse modelo, toda a informação da matriz de confusão (raramente simétrica, aliás) – o principal descritor do comportamento de classificação em problemas de aprendizado de máquina (Fukunaga, 1990; Congalton, 1991) – não é levada em consideração para avaliar a BCI.

Nesse sentido, uma terceira versão possível da *ITR*, inspirada na melhor estimativa em forma fechada para a capacidade do canal discreto sem memória, está relacionada ao caso em que, supostamente, a matriz de confusão admite inversa e existe a garantia de uma distribuição de classes separáveis no experimento de BCI (Expr. 3.6). Nessa expressão, M e T permanecem com a mesma conotação de antes, r_{ji} são os elementos da inversa da matriz de confusão e $H(Y|X = x_i)$ denota uma certa entropia associada ao problema de classificação dado que a classe em questão é x_i .

$$ITR_2 = \frac{1}{T} C_2 = \frac{1}{T} \log \sum_{j=1}^M 2^{-\sum_{i=1}^M r_{ji} H(Y|X=x_i)} \quad (3.6)$$

Ao considerar essas três fórmulas de *ITR*, as três respectivas fórmulas de capacidade que as embasam, de certa forma, sugerem aportes conceituais para os experimentos de BCI. Assim, C_0 indica um limite superior relacionado ao experimento ideal sem erro; C_1 um limite inferior relacionado à entropia máxima do erro, geralmente o pior caso; e C_2 um valor intermediário relacionado à melhor estimativa. Essas três interpretações são facilmente resumidas em uma única fórmula geral para a *ITR* (Expr. 3.7):

$$ITR_k = \frac{1}{T} C_k \quad k = 0, 1, 2. \quad (3.7)$$

Em relação ao sistema de comunicação baseado em SSVEP, a *ITR* se configura como uma medida para avaliar não só o desempenho da BCI de SSVEP no papel de demodulador de canal, mas também para avaliar a quantidade máxima de informação que efetivamente atravessa o sistema visual durante um certo experimento de transmissão, e que idealmente é recuperável com um erro tão pequeno quanto se queira. Dito de outra forma, o limite imposto pela capacidade, e naturalmente conferido à *ITR*, indica que em princípio existe um código –

ou melhor, todo um esquema que envolva as etapas de codificação, de modulação, de demodulação e de decodificação – para realizar um experimento de transmissão pelo sistema visual, de forma a restaurar a informação praticamente sem perdas.

3.3 ENVIO DE MENSAGENS

Para o experimento de comunicação via sistema visual, dez voluntários saudáveis – 2 do sexo feminino e 8 do masculino, entre 22 e 38 anos – consentiram em participar de dois protocolos de modulação: um para testar envios por código binário simples e por código de Hamming (7,4), a partir de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz; e outro para testar envios com essas mesmas estratégias de codificação, a partir de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz. Em ambos os casos, o intervalo para transmitir um símbolo durava 2 s, ou seja, a transmissão de uma palavra com 10 símbolos, por exemplo, levava precisamente 20 s. Cada voluntário se acomodava em uma cadeira confortável a cerca de meio metro de um monitor – que exibia ao centro uma área de 500 × 500 pixels para a reprodução das palavras de código – e vestia um par de pulseiras antiestáticas. Na sequência, os eletrodos eram cuidadosamente montados no escalpo e suas impedâncias de contato eram verificadas.

Em cada protocolo, os voluntários primeiramente adquiriam 20 blocos de dados durante o envio de sequências binárias aleatórias de 5 bits, intervaladas por ao menos 10 s, para calibrar a BCI de SSVEP. Nessa etapa, a única diferença entre os dois protocolos era o conjunto das frequências de extração: para os EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz, esse conjunto era formado por {10, 20, 30, 40, 12, 24, 36, 48}, a componente fundamental e os três primeiros harmônicos das duas frequências de estimulação; e para os EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz, esse conjunto era formado por {10, 20, 23, 33, 12, 19, 24, 31}, a componente fundamental e o primeiro harmônico das duas frequências de estimulação, bem como as componentes deslocadas inferiormente $f = f_p - f_m$ e $f = f_p - 2f_m$, em que f_m denota uma componente fundamental (10 Hz ou 12 Hz) e f_p denota a frequência portadora (43 Hz). As Fig. 3.5 e Fig. 3.6 fornecem exemplos para esses dois conjuntos de extração.

As mensagens escolhidas para a transmissão pelo sistema visual foram 10 imagens de 4 × 7 pixels, uma para cada algarismo numérico (Fig. 3.7). Após a etapa de calibração da BCI de SSVEP, dois desses algarismos eram selecionados aleatoriamente, para realizar o experimento com cada uma das quatro combinações de codificação e de modulação: código binário (ou código de Hamming) mais FSK em 10 Hz e 12 Hz; e código binário (ou código de Hamming) mais FSK em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz.

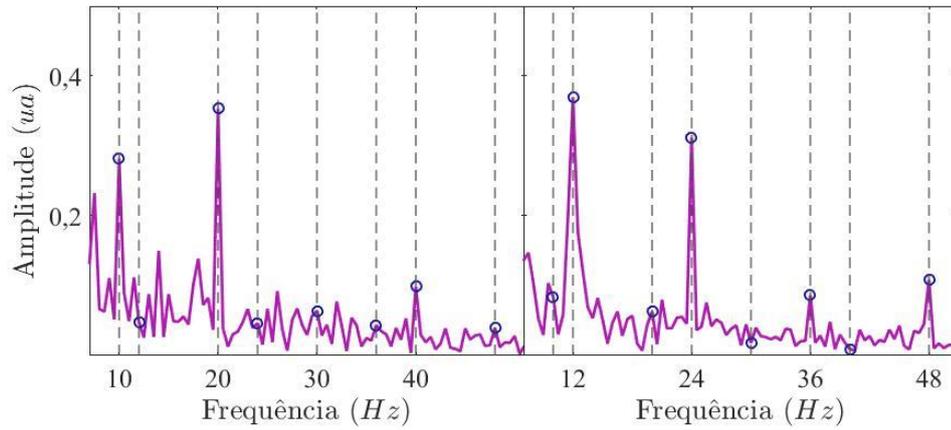


Fig. 3.5: Exemplos de extração, ao considerar EVRs de FSK em 10 Hz (à esquerda) e 12 Hz (à direita). FFT de 512 pontos.

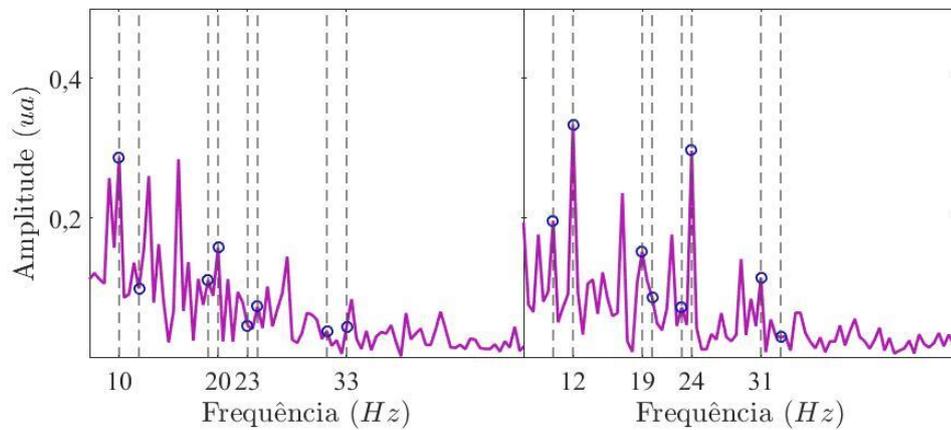


Fig. 3.6: Exemplos de extração, ao considerar EVRs de FSK em 10 Hz (à esquerda) e 12 Hz (à direita) modulados em 43 Hz. FFT de 512 pontos.

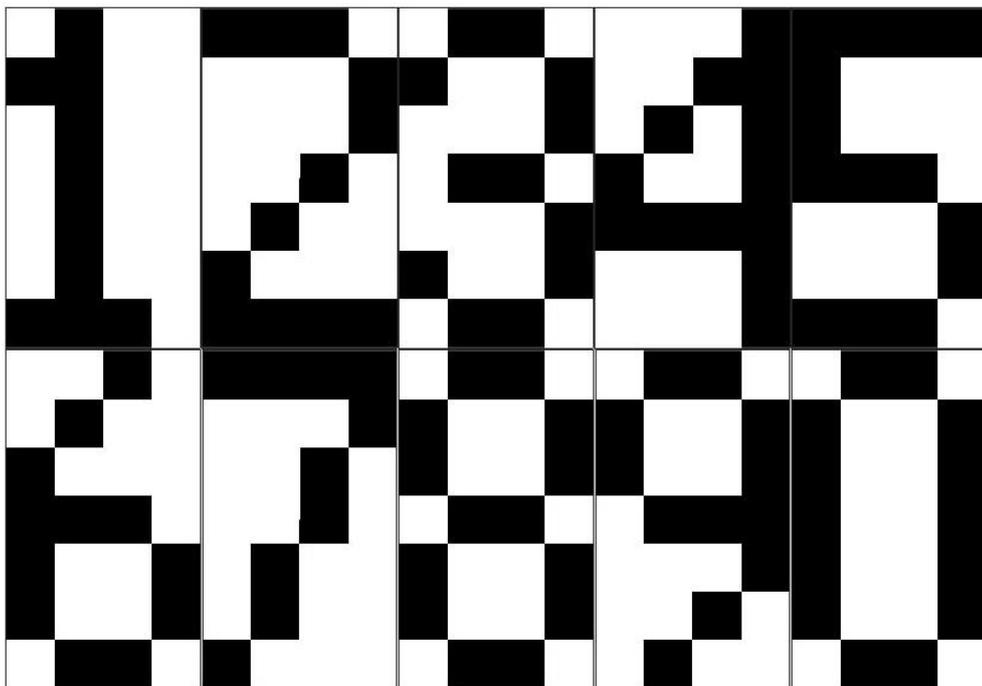


Fig. 3.7: Imagens dos algarismos numéricos.

Por código binário, qualquer uma das imagens de 28 pixels levava ao todo 56 s para ser transmitida e, por código de Hamming (7,4), qualquer uma delas levava 98 s. Essa diferença ocorria porque, no segundo caso, cada linha de 4 pixels era mapeada em uma palavra de código com 7 bits. Devido à necessidade do voluntário olhar fixamente por um tempo duradouro para os EVRs de FSK, e como tentativa de minimizar a fadiga visual resultante dessa exposição, entre uma transmissão e outra, o tempo de espera foi de ao menos 1 minuto. Em resumo, todo o procedimento – montagem, preparação, aquisição de 20 blocos de treino, transmissão de 4 imagens, nova aquisição de 20 blocos de treino e, por fim, transmissão de mais 4 imagens – durava cerca de 45 minutos. As combinações de codificação e de modulação associadas aos dois protocolos de envio ocorreram em ordem aleatória. Durante o experimento, os voluntários não receberam nenhum tipo de realimentação, apenas uma instrução sonora como forma de preparação antes do início de cada período de estimulação.

Esse ensaio experimental só foi posto em prática depois que cada voluntário estivesse inteiramente ciente dos seus direitos e dos efeitos adversos (ainda que mínimos) do procedimento ao qual estaria sujeito. Os dois protocolos de envio poderiam provocar desconforto no couro cabeludo, devido à utilização dos eletrodos de EEG, e desconforto visual, devido à exposição prolongada aos EVRs. Além disso, o ensaio também podia causar sonolência e fadiga mental. Dadas as devidas explicações e afastadas as eventuais dúvidas, cada um deles então assinava um “termo de consentimento livre e esclarecido” (modelo em anexo), caso realmente quisesse participar do experimento.

3.3.1 Recuperação de mensagens

Como estratégia de demodulação das imagens enviadas pelo sistema visual, a implementação da BCI de SSVEP, tratada no capítulo 2, admitiu quatro diferentes configurações de classificadores: um comitê de máquinas composto por (a) um classificador linear MQ, (b) uma SVM com núcleo gaussiano e (c) uma combinação de ELMs; bem como as versões de (a), (b) e (c) isoladas. Por representar o modelo mais simples, o classificador linear MQ de certa forma serviu como referencial para a comparação entre as demais técnicas – que são computacionalmente mais flexíveis e poderosas e, por isso, capazes de identificar no espaço de atributos padrões de separabilidade não lineares.

Coube ao processo de demodulação bit a bit (de dois em dois segundos) a recuperação das palavras de código. No caso do código binário, os 28 bits obtidos na saída do demodulador foram diretamente utilizados para reconstruir uma versão da imagem enviada. No

caso do código de Hamming (7,4), por sua vez, os 49 bits obtidos foram primeiramente inspecionados a cada 7 bits pela matriz de paridade, de forma a possibilitar a identificação e a correção de um possível erro de transmissão. Após essa etapa, as palavras de código foram, então, reconvertidas uma a uma em sequências binárias de 4 bits, para só depois servirem para a reconstrução da imagem enviada. Ao final, todas as mensagens recuperadas ainda foram submetidas a um decisor baseado na distância mínima de Hamming – a menor distância dentre as distâncias de Hamming calculadas entre uma sequência recuperada e cada possível sequência original. A Fig. 3.8 mostra uma síntese dos resultados obtidos com esses procedimentos, para o caso em que o classificador linear MQ compôs a BCI de SSVEP.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz				Com modulação em 43 Hz			
	Binário		Hamming		Binário		Hamming	
	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2
1	333	888	999	888	222	555	777	444
2	555	666	444	888	666	111	000	999
3	333	888	999	800	111	888	555	999
4	000	777	555	000	555	666	555	666
5	777	111	666	444	666	999	222	111
6	777	666	444	999	777	999	444	222
7	333	444	222	666	999	444	555	999
8	666	444	111	999	333	444	777	000
9	888	999	333	555	666	444	333	444
10	666	333	555	999	777	666	777	333

Fig. 3.8: Resultados de transmissão com a BCI de SSVEP configurada em modo MQ. Em cada célula, da esquerda para a direita, consta a imagem na entrada do canal, a imagem na saída do canal e a imagem recuperada após a etapa de decisão baseada na distância mínima de Hamming. “Ind.” é a abreviação de “indivíduo” e “Ima.” é a abreviação de “imagem”.

Como forma de complementar essa informação, a Tabela 3.1 apresenta, para o mesmo cenário da Fig. 3.8, a acurácia média A_1 obtida durante o procedimento de validação

cruzada que definiu os parâmetros do classificador, a acurácia pixel a pixel A_2 das duas imagens reconstruídas em cada uma das combinações de codificação e de modulação propostas e, por fim, a acurácia algarismo a algarismo A_3 dessas mesmas duas imagens após a etapa de decisão baseada na distância mínima de Hamming.

Tabela 3.1: Resultados de classificação com a BCI de SSVEP configurada em modo MQ. Na tabela, μ representa a média, σ o desvio padrão, A_1 a acurácia média durante o treinamento por validação cruzada, A_2 a acurácia pixel a pixel e A_3 a acurácia algarismo a algarismo após a etapa de decisão baseada na distância mínima de Hamming. “Ind.” é a abreviação de “indivíduo”.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz					Com modulação em 43 Hz				
	Binário			Hamming		Binário			Hamming	
	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,91	0,93	1,00	0,87	1,00
2	0,99	0,92	1,00	0,89	0,50	0,63	0,62	0,50	0,57	0,00
3	0,83	0,84	0,50	0,81	0,00	0,49	0,54	0,00	0,50	0,00
4	0,95	0,79	0,50	0,77	0,50	0,62	0,70	0,50	0,69	0,50
5	0,97	0,92	1,00	0,89	1,00	0,71	0,77	0,50	0,64	0,50
6	0,85	0,93	1,00	0,89	1,00	0,52	0,60	0,00	0,59	0,00
7	0,88	0,77	1,00	0,84	1,00	0,49	0,48	0,00	0,69	1,00
8	0,89	0,84	1,00	0,84	1,00	0,50	0,55	0,00	0,45	0,00
9	0,79	0,79	0,50	0,85	1,00	0,49	0,63	0,50	0,52	0,00
10	0,79	0,72	0,00	0,68	0,50	0,56	0,66	0,50	0,79	0,50
μ	0,90	0,85	0,75	0,84	0,75	0,59	0,65	0,35	0,63	0,35
σ	0,08	0,08	0,34	0,08	0,34	0,13	0,12	0,32	0,13	0,39

A Fig. 3.8 e a Tabela 3.1 fornecem uma visão preliminar das dificuldades gerais relacionadas ao problema de transmissão de informação através do sistema visual. Ao considerar exclusivamente o envio e a recepção dos algarismos, uma primeira observação é que nenhum dos métodos foi 100 % efetivo – ou seja, todos apresentaram ao menos dois ou mais erros de recuperação. Uma segunda observação é que o protocolo de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz funcionou bem melhor do que o protocolo de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz. De fato, enquanto as acurácias A_2 e A_3 do primeiro ficaram, respectivamente, em torno de 0,85 e 0,75; as do segundo ficaram em torno de 0,65 e 0,35. Por fim, uma terceira observação, a partir dessas mesmas acurácias, é que os envios por código binário e por código de Hamming (7, 4) apresentaram semelhança em ambos os protocolos. À primeira vista, a ocorrência de um bit errado dificilmente não esteve acompanhada de um outro na mesma palavra de 7 bits, o que tornou o emprego do código de Hamming (7, 4) ineficiente nesse caso.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz				Com modulação em 43 Hz			
	Binário		Hamming		Binário		Hamming	
	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2
1	333	888	999	888	222	555	777	444
2	555	666	444	888	666	111	000	999
3	333	888	999	888	111	888	555	999
4	000	777	555	000	555	666	555	666
5	777	111	666	444	666	999	222	111
6	777	666	444	999	777	999	444	000
7	333	444	222	666	999	888	555	999
8	666	444	111	999	333	444	777	000
9	888	999	333	555	666	444	333	888
10	666	333	555	999	777	666	777	333

Fig. 3.9: Resultados de transmissão com a BCI configurada em modo SVM.

Tabela 3.2: Resultados de classificação com a BCI configurada em modo SVM.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz					Com modulação em 43 Hz				
	Binário			Hamming		Binário			Hamming	
	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,92	0,88	1,00	0,90	1,00
2	0,99	0,94	1,00	0,88	0,50	0,66	0,66	1,00	0,59	0,00
3	0,83	0,83	1,00	0,71	0,00	0,52	0,41	0,00	0,49	0,00
4	0,96	0,74	0,50	0,79	0,50	0,63	0,62	0,50	0,68	0,50
5	0,97	0,90	1,00	0,94	1,00	0,67	0,70	0,50	0,65	0,50
6	0,87	0,95	1,00	0,82	1,00	0,50	0,64	0,50	0,71	0,50
7	0,91	0,77	1,00	0,80	1,00	0,54	0,50	0,00	0,70	1,00
8	0,88	0,74	1,00	0,82	1,00	0,52	0,63	0,50	0,53	0,00
9	0,76	0,81	0,50	0,81	1,00	0,46	0,47	0,00	0,37	0,00
10	0,77	0,70	0,50	0,63	0,50	0,55	0,61	0,50	0,82	1,00
μ	0,89	0,84	0,85	0,82	0,75	0,60	0,61	0,45	0,64	0,45
σ	0,09	0,10	0,23	0,10	0,34	0,13	0,13	0,35	0,15	0,42

Ind.	Sem modulação em 43 Hz				Com modulação em 43 Hz			
	Binário		Hamming		Binário		Hamming	
	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2
1	333	888	999	888	222	555	777	444
2	555	666	444	888	666	111	000	999
3	333	888	999	888	111	888	555	999
4	000	777	555	000	555	666	555	666
5	777	111	666	444	666	999	222	111
6	777	666	444	999	777	999	444	000
7	333	444	222	666	999	888	555	999
8	666	444	111	999	333	444	777	000
9	888	999	333	555	666	444	333	888
10	666	333	555	999	777	666	777	333

Fig. 3.10: Resultados de transmissão com a BCI configurada em modo ELM.

Tabela 3.3: Resultados de classificação com a BCI configurada em modo ELM.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz					Com modulação em 43 Hz				
	Binário			Hamming		Binário			Hamming	
	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,90	0,90	1,00	0,88	1,00
2	0,98	0,94	1,00	0,88	0,50	0,61	0,68	0,50	0,57	0,00
3	0,81	0,84	1,00	0,76	0,00	0,49	0,52	0,00	0,53	0,00
4	0,95	0,74	0,50	0,89	1,00	0,61	0,77	0,50	0,69	0,00
5	0,96	0,93	1,00	0,94	1,00	0,69	0,77	1,00	0,66	0,00
6	0,86	0,91	1,00	0,85	1,00	0,53	0,64	0,50	0,64	0,50
7	0,88	0,77	1,00	0,78	1,00	0,52	0,50	0,00	0,72	1,00
8	0,89	0,81	1,00	0,81	1,00	0,51	0,56	0,00	0,49	0,00
9	0,77	0,74	0,50	0,81	1,00	0,49	0,61	0,50	0,59	0,00
10	0,77	0,67	0,00	0,69	1,00	0,54	0,69	0,50	0,75	0,50
μ	0,89	0,84	0,80	0,84	0,85	0,59	0,66	0,45	0,65	0,30
σ	0,08	0,10	0,33	0,09	0,32	0,13	0,12	0,35	0,11	0,40

Ind.	Sem modulação em 43 Hz				Com modulação em 43 Hz			
	Binário		Hamming		Binário		Hamming	
	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 2	Ima. 1	Ima. 2
1	333	888	999	888	222	555	777	444
2	555	666	444	888	666	111	000	999
3	333	888	999	888	111	555	888	999
4	000	777	555	000	555	666	555	666
5	777	111	666	444	666	999	222	111
6	777	666	444	999	777	999	444	000
7	333	444	222	666	999	888	555	999
8	666	444	111	999	333	444	777	000
9	888	999	333	555	666	444	333	888
10	666	333	555	999	777	666	777	333

Fig. 3.11: Resultados de transmissão com a BCI configurada em modo comitê.

Tabela 3.4: Resultados de classificação com a BCI configurada em modo comitê.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz					Com modulação em 43 Hz				
	Binário			Hamming		Binário			Hamming	
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₂	A ₃	A ₁	A ₂	A ₃	A ₂	A ₃
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,92	0,90	1,00	0,86	1,00
2	0,99	0,92	1,00	0,88	0,50	0,62	0,66	1,00	0,55	0,00
3	0,82	0,84	0,50	0,77	0,50	0,49	0,52	0,00	0,50	0,00
4	0,96	0,77	0,50	0,79	0,50	0,63	0,75	1,00	0,71	0,50
5	0,96	0,94	1,00	0,94	1,00	0,71	0,75	0,50	0,64	0,00
6	0,87	0,93	1,00	0,89	1,00	0,51	0,62	0,50	0,55	0,00
7	0,89	0,79	1,00	0,81	1,00	0,49	0,48	0,00	0,67	1,00
8	0,90	0,85	1,00	0,86	1,00	0,51	0,58	0,50	0,51	0,00
9	0,76	0,83	0,50	0,81	1,00	0,48	0,58	0,00	0,63	0,50
10	0,75	0,69	0,50	0,71	1,00	0,56	0,67	0,50	0,76	0,50
μ	0,89	0,86	0,80	0,84	0,85	0,59	0,65	0,50	0,64	0,35
σ	0,09	0,09	0,24	0,08	0,23	0,14	0,12	0,39	0,11	0,39

Como forma de estender a análise para além do classificador linear MQ, as Fig. 3.9, Fig. 3.10 e Fig. 3.11, bem como as Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4, apresentam os resultados de transmissão dos mesmos algoritmos, mas no contexto em que as demais estratégias de classificação compuseram a BCI de SSVEP. Apesar da flexibilidade e da capacidade de reconhecer padrões não lineares, a SVM com núcleo gaussiano, a combinação de ELMs e o comitê de máquinas não apresentaram um desempenho superior, e nem inferior, ao obtido com o classificador linear MQ. Embora até seja possível observar ligeiras alterações na transmissão bit a bit de um ou outro algoritmo, e, portanto, nas acurácias individuais, todos os resultados parecem estatisticamente equivalentes, sobretudo ao comparar as acurácias das tabelas. Aparentemente, nenhuma estratégia se sobrepôs a outra e o classificador linear MQ, a despeito de sua simplicidade, conseguiu atingir um resultado comparável aos modelos de classificação mais elaborados. Contudo, convém ressaltar que essas conclusões partem de uma amostra com apenas 10 voluntários saudáveis e, nesse sentido, provavelmente não refletem a estatística de uma população maior e mais diversa.

De maneira alguma isso significa que a solução desse problema de transmissão seja inteiramente linear. Na verdade, sugere apenas que a cadeia de processamento até a etapa antecedente à classificação privilegiou a extração de atributos linearmente separáveis. Em particular, a CCA – usual em problemas de BCI de SSVEP – provavelmente teve um papel decisivo nesse aspecto. Basta notar que, para o cálculo dos coeficientes desse filtro espacial, somente as medidas estatísticas de primeira e de segunda ordem são exploradas, característica que de certa forma restringe as informações não lineares – geralmente associadas às estatísticas de ordem superior – e que, por conseguinte, não conduz a um mapeamento oportuno à capacidade plena dos classificadores não lineares. Ademais, a FFT notoriamente tem sua parcela de contribuição por ser um combinador linear de exponenciais complexas. Em resumo, para que os classificadores não lineares se destaquem nesse problema de transmissão, eles talvez requeiram um amplo acesso a dados brutos ou, ao menos, a dados mapeados em um espaço que preserve as não linearidades do espaço original.

Tal como o desempenho das diferentes configurações de BCI de SSVEP testadas para a demodulação das imagens, as medidas da teoria de informação também trazem uma percepção sobre as dificuldades associadas ao experimento de condução através do sistema visual. Nesse âmbito, a Tabela 3.5 apresenta – apenas para o cenário do classificador linear MQ, uma vez que para os demais é muito similar – as capacidades C_1 e C_2 , em bits por símbolo, resultantes das quatro combinações de codificação e de modulação propostas. As capacidades foram estimadas a partir da média das duas matrizes de confusão obtidas na avaliação

bit a bit dos dois algoritmos recuperados em cada combinação.

Tabela 3.5: Capacidades C_1 e C_2 , em bits por símbolo para o experimento de transmissão de imagens através do sistema visual, com a BCI de SSVEP configurada em modo MQ.

Ind.	Sem modulação em 43 Hz				Com modulação em 43 Hz			
	Binário		Hamming		Binário		Hamming	
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
1	1,00	1,00	1,00	1,00	0,64	0,65	0,45	0,45
2	0,60	0,61	0,51	0,52	0,04	0,05	0,01	0,01
3	0,37	0,38	0,29	0,30	0,01	0,01	0,00	0,00
4	0,25	0,26	0,22	0,26	0,11	0,11	0,11	0,11
5	0,59	0,61	0,50	0,50	0,21	0,23	0,06	0,07
6	0,62	0,62	0,49	0,50	0,03	0,03	0,02	0,02
7	0,23	0,29	0,21	0,26	0,00	0,00	0,10	0,10
8	0,35	0,41	0,36	0,38	0,01	0,01	0,01	0,01
9	0,26	0,26	0,38	0,40	0,05	0,05	0,00	0,00
10	0,14	0,14	0,09	0,10	0,07	0,07	0,26	0,26
μ	0,44	0,46	0,41	0,42	0,12	0,12	0,10	0,10
σ	0,25	0,24	0,24	0,23	0,18	0,19	0,14	0,14

As capacidades reforçam as observações anteriores: o protocolo de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz funcionou melhor do que aquele em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz; e os envios por código binário e por Hamming (7, 4), em média, não exibiram muita diferença. Elas também confirmam o que pela inspeção visual de alguns algoritmos já fica evidente: em algumas realizações, a informação praticamente não atravessou o sistema visual.

3.4 AVALIAÇÃO DE CANAL

As frequências escolhidas para realizar o envio de mensagens através do sistema visual, ainda que pertencentes a uma faixa experimentalmente ideal para suscitar SSVEPs (Wang *et al.*, 2006; Chang *et al.*, 2014), não foram customizadas para cada indivíduo. Nesse sentido, um melhor desempenho de transmissão só é viável com a adoção de uma estratégia para identificar e selecionar aquelas mais adequadas para a modulação das palavras de código. Por meio de uma estratégia de inclusão de símbolos para testar o canal, os índices d_k e a capacidade C_2 , amparados por uma sólida interpretação em termos da distribuição de probabilidade $p(x_k) = 2^{-C_2} d_k$, convenientemente sugerem uma maneira para efetuar essa avaliação. Até porque, como amplamente discutido no capítulo 1, se algum d_k for negativo durante a

inspeção de um conjunto dos possíveis símbolos de transmissão, então não existe uma distribuição dos mesmos que atinja a capacidade (Fano, 1961; Ash, 1965).

Embora não exista um método direto para distinguir um subconjunto ótimo a partir de um conjunto amplo de símbolos, uma escolha razoável e eficiente é o *wrapper* progressivo – algoritmo que executa uma busca gulosa baseada na combinação e no teste de um símbolo por vez (Kohavi *et al.*, 1997). Em geral, esse método incorpora o conhecimento de uma função de avaliação, como a de um classificador, sem armazenar a sua estrutura e os seus coeficientes (Lal *et al.*, 2006). De forma similar, d_k e C_2 podem conjuntamente desempenhar esse papel, para auxiliar a identificação das frequências mais adequadas à transmissão de mensagens pelo sistema visual.

Para testar essa hipótese, bem como ampliar a discussão sobre a utilidade e a relevância das fórmulas de capacidade vistas, optou-se por fazer uso de um banco de dados público com 40 frequências de estimulação aplicadas em 35 voluntários saudáveis (Wang *et al.*, 2017). Comparado a outros bancos de dados, o selecionado permite a variação e o teste de um bom número de classes (frequências) – razão pela qual foi escolhido. As 40 frequências de estimulação variaram de 8 Hz a 15,8 Hz, espaçadas de 0,2 Hz. Para cada estímulo, 6 blocos de 5 s foram registrados com um aparelho de EEG de 64 eletrodos, em posições de acordo com o sistema 10-20 estendido. Durante as aquisições, os dados foram amostrados a uma taxa de 1 kHz e filtrados na faixa de 0,15 Hz a 200 Hz (filtro passa-banda) e em 50 Hz (filtro *notch*) – enquanto as impedâncias de contato com a pele não excederam 10 k Ω . Depois das aquisições, os dados foram subamostrados a uma taxa 250 Hz. O trabalho original apresenta mais detalhes desse experimento (Wang *et al.*, 2017).

Para a presente tese, dois procedimentos adicionais foram incluídos: (1) a concatenação dos 6 blocos em uma única batelada, para a posterior segmentação em trechos de 2 s com a sobreposição de 1 s – equivalente à simulação de uma BCI de SSVEP *online* com atraso de propagação; e (2) a classificação direta de todos esses trechos, baseada simplesmente no maior coeficiente canônico dentre aqueles obtidos com a CCA nas frequências principal e harmônicas associadas a cada estímulo, para a composição de uma matriz de confusão – equivalente à matriz do canal em um problema de transmissão de símbolos.

Após a execução *offline* desses procedimentos e a decorrente composição da matriz de confusão, os índices d_k e a capacidade C_2 podem servir de função de avaliação para o algoritmo *wrapper*, de forma a distinguir as classes mais convenientes a uma posterior execução *online* da BCI de SSVEP – ou seja, no contexto de um sistema de comunicação, realizar uma avaliação de canal antes de transmitir novos símbolos.

Tabela 3.6: Passo a passo do algoritmo *wrapper* com d_k e C_2 .

Seleção progressiva a partir de um conjunto de M classes	
1:	Inicialize um subconjunto $S = \{1\}$ e um subconjunto $T = \{2, 3, \dots, M\}$
2:	Repita
3:	Combine S com cada elemento de T
4:	Para cada combinação
5:	Realize a classificação
6:	Componha a matriz de confusão
7:	Compute d_k
8:	Se $d_k > 0$ compute C_2 Caso contrário faça $C_2 = -1$
9:	Armazene C_2
10:	Fim
11:	Identifique a combinação com o maior C_2
12:	Extraia o elemento de T associado a essa combinação
13:	Transfira esse elemento para S
14:	Armazene o maior C_2
15:	Até $T = \emptyset$
16:	Identifique o subconjunto com o maior dentre os maiores C_2 's
17:	Escolha esse subconjunto para ser o conjunto das classes ótimas

No campo do reconhecimento de padrões, um algoritmo *wrapper* usualmente realiza a seleção de atributos a partir do desempenho de alguma função discriminante (Kohavi *et al.*, 1997; Lal *et al.*, 2006; Carvalho *et al.*, 2015). Nesta tese, o conceito é utilizado de forma similar, mas em termos de seleção de classes a partir do valor da capacidade de canal. A implementação desse algoritmo requer a definição de três etapas: uma estratégia de busca, um critério de parada e uma função de avaliação. A primeira consiste em realizar uma busca eficiente no espaço formado por todas as possíveis combinações com ao menos duas classes. Devido ao grande número de subespaços, a heurística gulosa baseada em seleção progressiva, em comparação com a eliminação regressiva (outra estratégia comum), acelera o processo de busca, apesar de não garantir a convergência global. A segunda indica com que extensão esse espaço deve ser inspecionado. Embora na maior parte das vezes a seleção completa consuma tempo, ela é essencial neste estudo para revelar o comportamento integral de todos os passos do algoritmo. Finalmente, durante as iterações, a terceira avalia os resultados de cada combinação de classes, retorna as decisões de valor máximo e, com isso, gera o subespaço final. Como já anunciado, os índices d_k e a capacidade C_2 desempenham essa função. A Tabela 3.6 fornece um pseudocódigo para esse algoritmo de seleção de classes.

3.4.1 Sem seleção de classes

Para estabelecer um referencial de análise, o banco de dados com 40 frequências foi primeiramente inspecionado na ordem original dos rótulos fornecida pelos distribuidores do pacote. Convém ressaltar que não há nada de especial nessa ordem, qualquer outra escolhida ao acaso também poderia guiar esse diagnóstico preliminar. Enfim, partindo das duas primeiras classes e incorporando as demais uma a uma em um conjunto de inspeção para calcular a matriz de confusão e os valores de d_k e C_2 , a maioria dos voluntários, após uma certa inclusão, começa a apresentar valores negativos para d_k e inconsistentes para C_2 . De fato, como a Fig. 3.12 mostra, todos os indivíduos têm as três primeiras combinações de classe adequadas, mas da quarta em diante pelo menos um deles não mantém mais o conjunto completo. No final, apenas 10 voluntários alcançam essa marca.

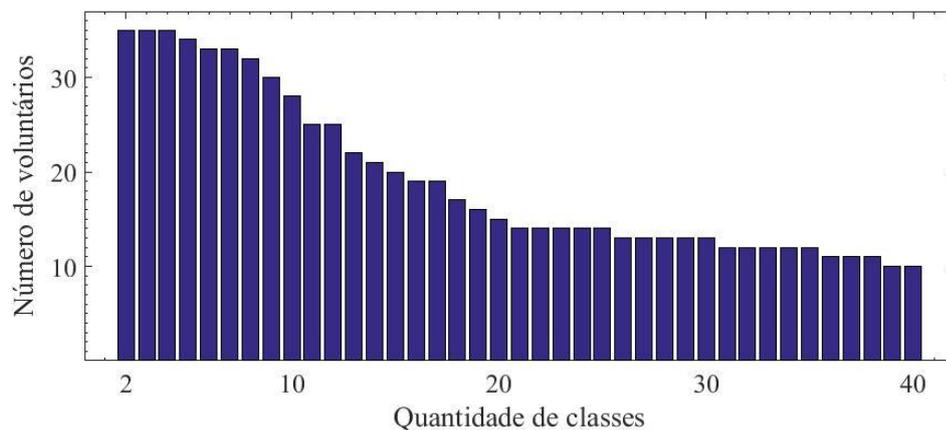


Fig. 3.12: Distribuição do número de voluntários por quantidade de classes adequadas, conforme avaliação de d_k e C_2 .

Para os 10 melhores voluntários, as curvas médias de capacidade calculadas com C_0 , C_1 e C_2 apresentam pouca diferença (Fig. 3.13), uma vez que as acurácias ao longo das inclusões de classe se mantêm acima de 90 %. Ainda assim, como previsto: $C_0 > C_2 > C_1$. Essa observação inicial confirma C_0 como uma aproximação razoável para a capacidade do experimento com uma BCI de SSVEP quando os voluntários mantêm taxas de acerto elevadas – e, a despeito de sua simplicidade, justifica o seu uso em trabalhos iniciais (Farwell *et al.*, 1988). Em tais circunstâncias, C_1 e C_2 não revelam informações adicionais.

Para os demais voluntários, porém, as curvas de capacidade são mais diversificadas, como mostram as Fig. 3.14 e Fig. 3.15 em 8 casos representativos – 4 razoáveis e 4 fracos, de acordo a inspeção preliminar de d_k e C_2 . Nesse cenário, C_0 continua a ser o limite ideal sem perdas porque todos os sistemas, em certo sentido, são criados para funcionar com o me-

nor erro possível. Mas C_1 e C_2 são, de fato, as medidas mais expressivas, dado que os erros de um sistema prático em geral não são desprezíveis.

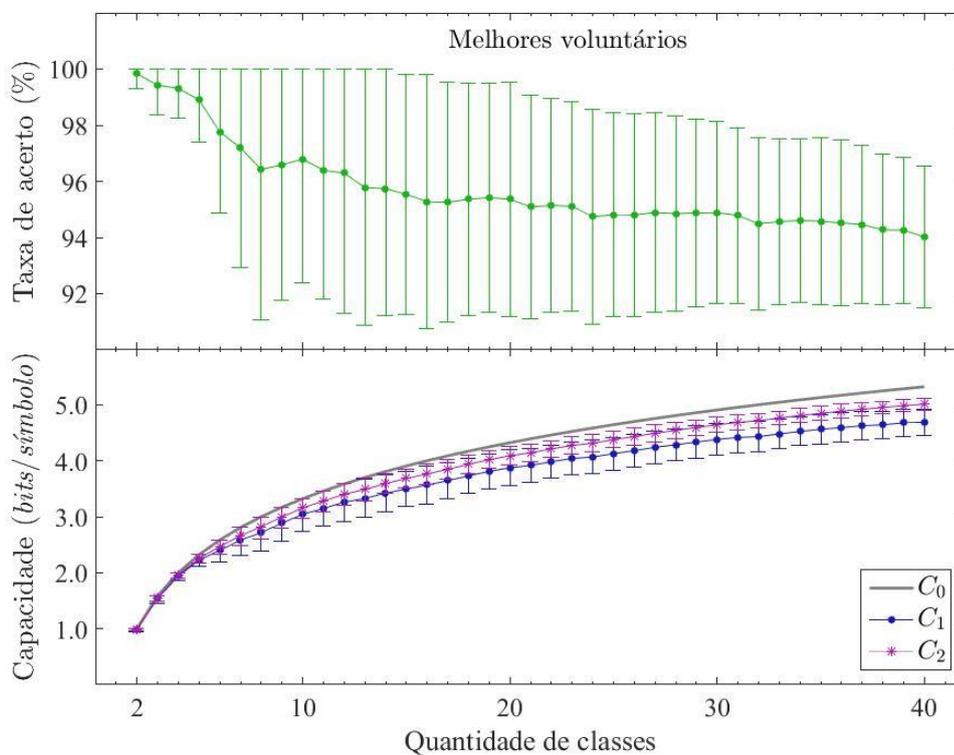


Fig. 3.13: Taxa de acerto média e capacidades C_0 , C_1 e C_2 médias para os 10 melhores voluntários ao longo das inclusões de classe, uma a uma.

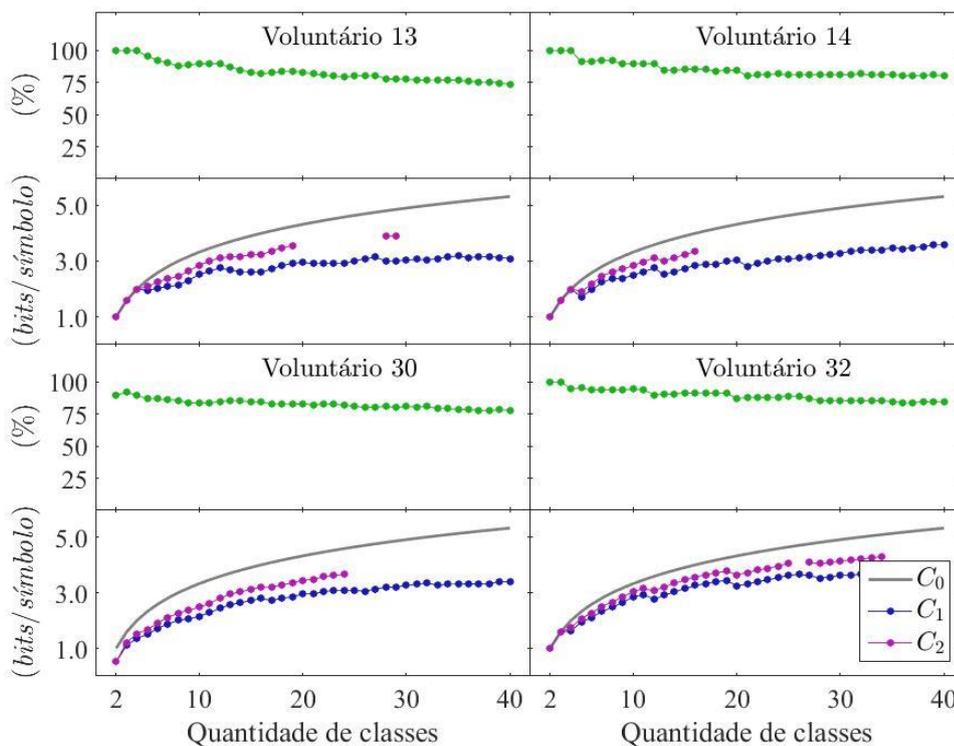


Fig. 3.14: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com um desempenho razoável ao longo das inclusões de classe, uma a uma.

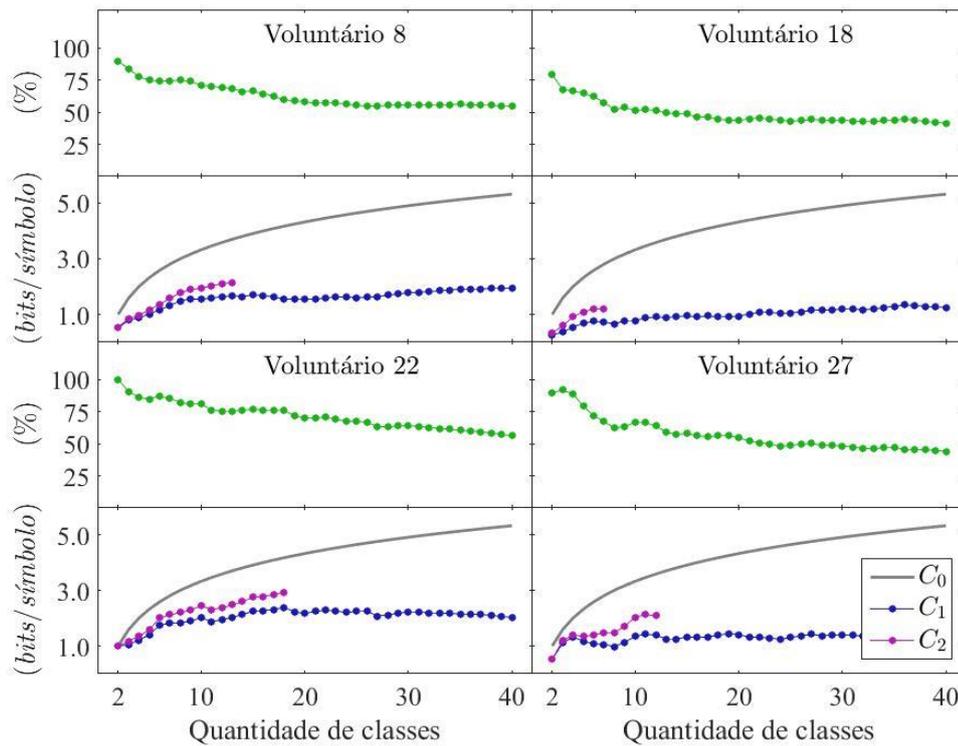


Fig. 3.15: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com um desempenho razoável ao longo das inclusões de classe, uma a uma.

Desses gráficos, uma primeira observação é que C_1 tende a saturar, conforme o número de classes aumenta e a precisão diminui – como ilustrado nas curvas dos voluntários 8, 13, 18 e 32. Embora algumas curvas até exibam aclives ou declives suaves (voluntários 22, 27, 30 e 32), após uma determinada inclusão, C_1 parece não exceder um limiar. Uma segunda observação é que C_2 tende a parar próximo ou exatamente no ponto desse limiar, o que denota uma quantidade máxima (7 classes para o voluntário 18, 12 classes para o voluntário 27, 13 para o 8 e assim por diante) a partir da qual a capacidade não aumenta substancialmente – fato inclusive confirmado por C_1 . Lembre-se que, para além dessa quantia, como cada nova inclusão de classe torna pelo menos um d_k negativo, em teoria não existe uma distribuição de probabilidade que atinja a capacidade. Uma terceira e última observação (evidenciada particularmente pelos voluntários 13 e 32) é que, mesmo depois de inclusões que desestabilizam a referida distribuição, C_2 pode voltar a ser computável, o que reforça a ideia de que existem certas classes que contribuem e outras que deterioram o desempenho.

3.4.2 Com seleção de classes

Apesar desses resultados preliminares apresentarem aspectos importantes sobre o uso de C_0 , C_1 e C_2 , apenas uma avaliação de canal pode indicar a capacidade real de um expe-

rimento com uma BCI de SSVEP. Nesse sentido, ao empregar o algoritmo *wrapper* com d_k e C_2 como função de avaliação conjunta para selecionar um subconjunto adequado de classes, a progressão e a forma final da capacidade denotam um ponto de operação bem mais favorável do que aquele apresentado há pouco.

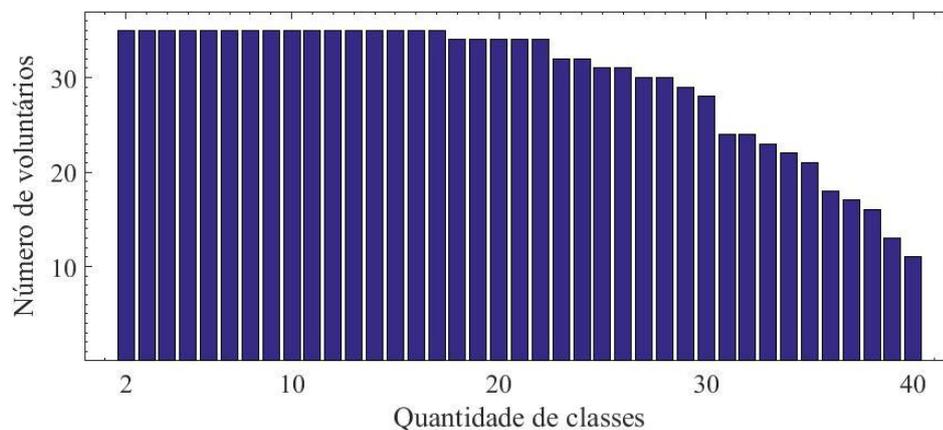


Fig. 3.16: Distribuição do número de voluntários por quantidade de classes adequadas, conforme avaliação de d_k e C_2 para o *wrapper* progressivo.

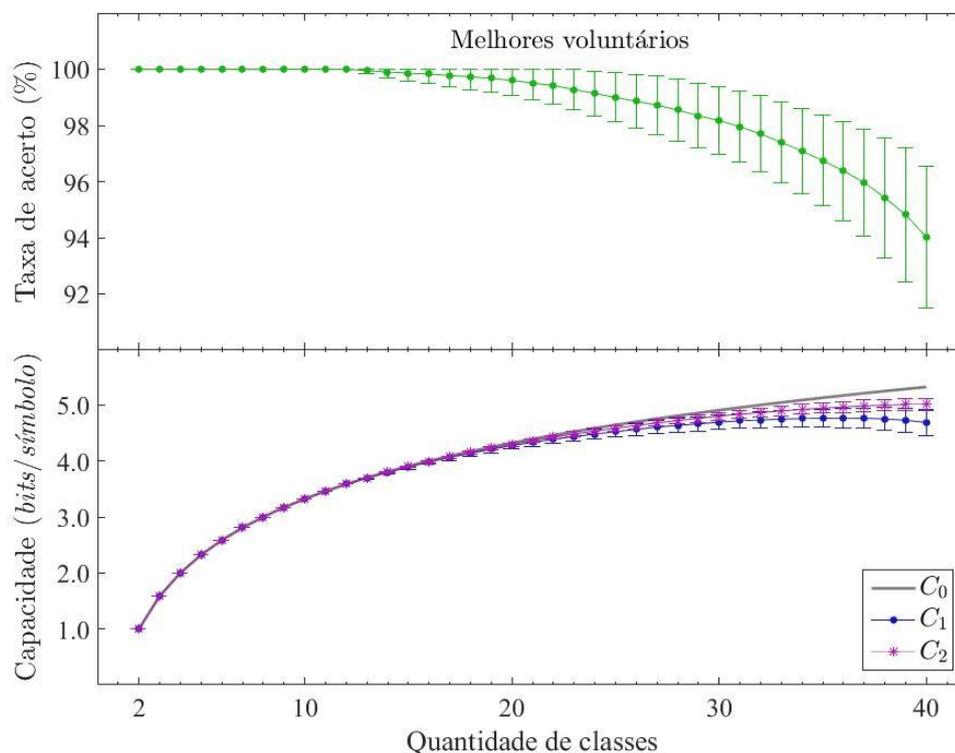


Fig. 3.17: Taxa de acerto média e capacidades C_0 , C_1 e C_2 médias para os 11 melhores voluntários ao longo das inclusões de classe, uma a uma, para o *wrapper* progressivo.

De fato, como a Fig. 3.16 e a Fig. 3.17 respectivamente mostram, o número de combinações de classe que mantêm o conjunto completo para todos os voluntários salta de três para dezesseis e a acurácia média dos melhores permanece acima de 98 % durante as vin-

te primeiras combinações. Ainda assim, a maioria deles, após uma certa inclusão, começa a apresentar valores negativos para d_k e inconsistentes para C_2 .

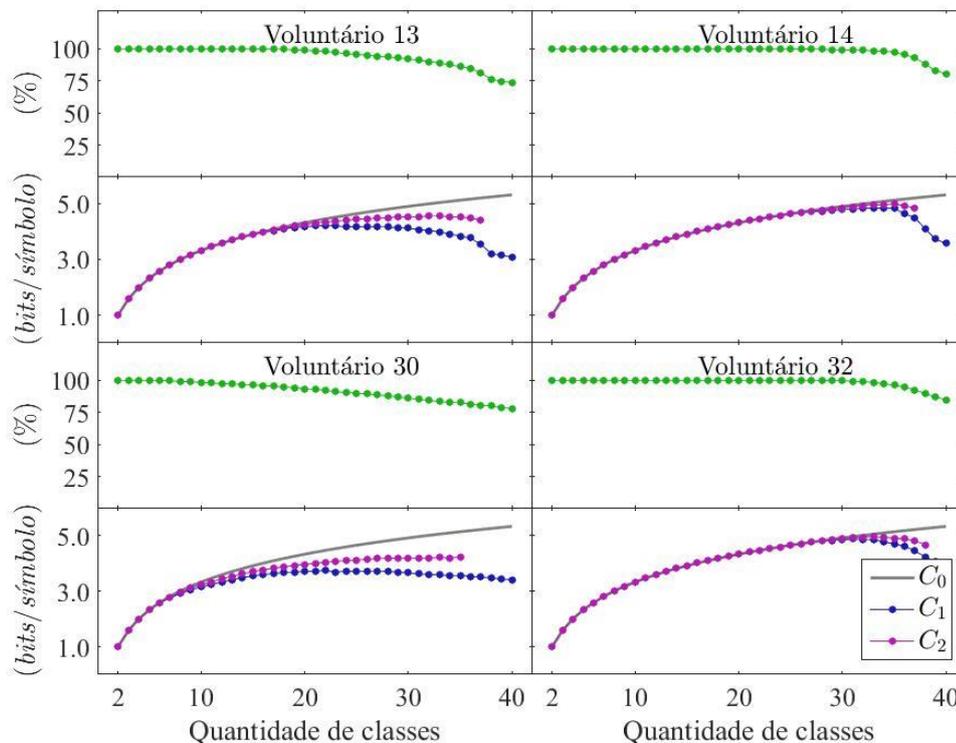


Fig. 3.18: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com o suposto desempenho razoável, depois do *wrapper* progressivo.

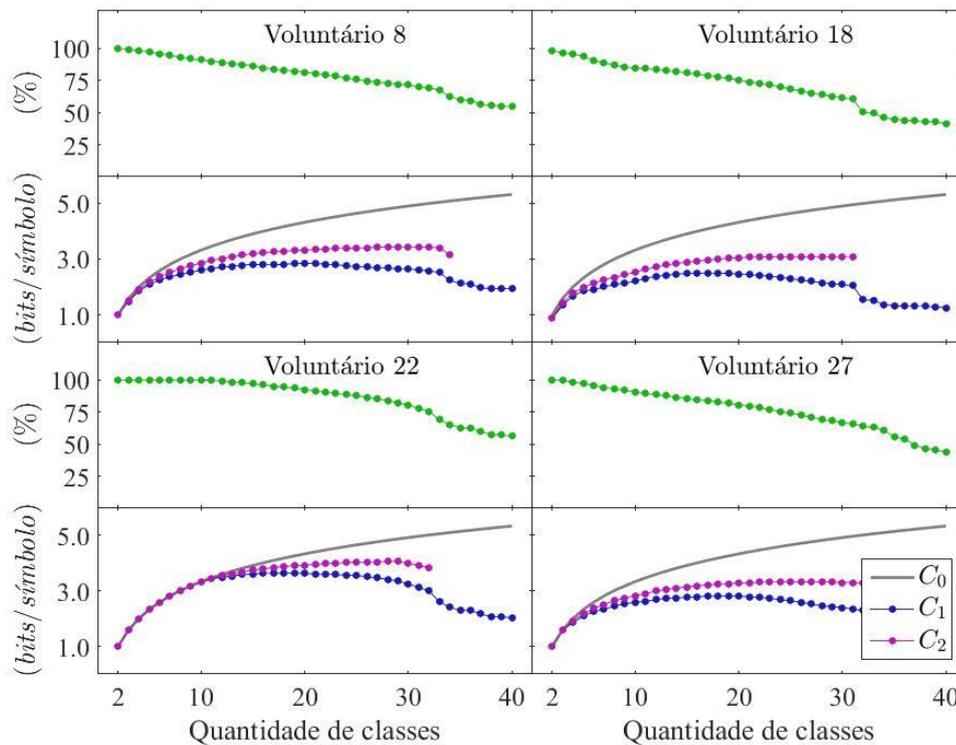


Fig. 3.19: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com o suposto desempenho fraco, depois do *wrapper* progressivo.

Nesse novo cenário, uma primeira observação é que, para os voluntários tidos como razoáveis, as capacidades C_0 , C_1 e C_2 se sobrepõem ao menos nas dez primeiras iterações do algoritmo *wrapper*. Para aqueles tidos como fracos, elas se sobrepõem ao menos nas três primeiras. Como a seleção de classe tende a formar subconjuntos ótimos, as acurácias são maiores ao longo dessas iterações e, portanto, os valores de C_1 e de C_2 ficam muito próximos do ideal C_0 . Logo após essa fase de sobreposição das capacidades, até que C_2 cesse, as curvas se desenlaçam suavemente uma da outra. A partir disso, por dispor de toda a informação presente na matriz de confusão, C_2 fornece uma estimativa da capacidade de canal nas proximidades do máximo melhor do que C_1 .

Tabela 3.7: Capacidades C_1 e C_2 , em bits por símbolo, de todos os voluntários (V.) antes e depois da seleção de classes. “Cl.” representa o número de classes associado à máxima C_2 .

V.	Antes			Depois			V.	Antes			Depois		
	C_1	C_2	Cl.	C_1	C_2	Cl.		C_1	C_2	Cl.	C_1	C_2	Cl.
1	1,68	2,99	17	2,33	3,45	25	19	0,89	1,27	14	1,48	2,21	23
2	1,31	3,26	11	1,42	3,61	22	20	2,76	3,77	18	3,07	4,15	31
3	4,78	4,80	40	5,03	5,03	40	21	0,87	3,01	3	0,99	3,46	26
4	4,15	4,52	40	4,79	4,79	40	22	2,39	3,63	18	2,94	4,04	29
5	4,56	4,65	40	4,92	4,92	40	23	2,89	3,53	11	2,10	3,97	32
6	4,60	4,62	40	4,92	4,92	40	24	1,40	3,76	3	1,47	4,04	23
7	1,66	3,32	9	1,96	3,81	26	25	4,86	4,88	40	5,08	5,08	40
8	1,96	2,85	13	2,14	3,44	30	26	5,01	5,03	40	5,18	5,18	40
9	1,66	2,55	9	1,60	3,13	25	27	1,44	2,81	11	2,12	3,31	28
10	3,54	3,97	16	3,26	4,39	33	28	1,44	2,59	8	1,83	3,12	25
11	1,59	2,99	7	1,43	3,63	28	29	0,87	1,57	9	1,23	2,10	18
12	4,61	4,68	40	4,96	4,96	40	30	3,41	3,73	24	3,65	4,22	35
13	3,18	4,23	29	3,91	4,55	33	31	4,71	4,91	40	5,03	5,08	38
14	3,57	4,85	16	3,36	4,99	35	32	3,90	4,86	34	4,30	4,95	33
15	3,46	3,67	37	4,16	4,20	38	33	0,18	0,21	3	0,21	1,94	16
16	0,87	2,18	8	1,27	2,57	18	34	4,71	4,84	40	5,05	5,05	40
17	2,18	3,93	11	2,18	4,23	27	35	4,98	4,98	40	5,15	5,15	40
18	1,33	2,50	7	1,21	3,09	31							
							μ	2,78	3,61	21	3,02	4,02	31
							σ	1,52	1,15	14	1,57	0,94	7

Uma segunda observação é que, para além do ponto de parada de C_2 , a capacidade C_1 começa a decair até o limiar encontrado na análise anterior, ou seja, o mesmo resultado final ao usar todo o conjunto de classes. Esse comportamento de queda, embora não explora-

do nesta tese, indica que o ponto de parada de C_2 pode ser usado como um critério de parada do algoritmo de seleção proposto e, além disso, sugere evitar como primeira abordagem o uso de todas as classes, principalmente em indivíduos com desempenho longe do ideal.

Ao comparar as curvas do procedimento sem seleção com as do com seleção, uma última e decisiva observação é que existe uma grande melhora no número de classes adequadas e, portanto, no valor das capacidades, principalmente ao observar os voluntários tidos como fracos. O voluntário 18, por exemplo, saltou de 7 para 31 classes, enquanto sua capacidade variou de 2,50 a 3,09 bits por símbolo.

Além disso, ao considerar os 35 voluntários, antes e depois da seleção de classe (Tabela 3.7), a média de C_1 passa de 2,78 para 3,02 bits por símbolo e a média de C_2 passa de 3,61 para 4,02 bits por símbolo, ambos com valor de $p < 0,01$ no teste- T de hipótese. Curiosamente, essa melhora não significa necessariamente um aumento no número de classes adequadas em todos os casos. Os voluntários 31 e 32, por exemplo, atingem a capacidade após uma ligeira redução nesse número – ocasionalmente, uma economia de símbolos parece ser a melhor opção. Essencialmente, essas evidências só enfatizam a necessidade de realizar a avaliação de canal antes de prosseguir para uma operação *online*.

3.4.3 Inaptidão em BCI de SSVEP

A última discussão também permite abordar uma questão muito importante, a dos usuários com inaptidão em BCI de SSVEP. Em termos gerais, eles são pessoas com desempenho muito baixo, ou inexistente, quando participam como voluntários de um experimento de BCI (Allison *et al.*, 2010a; Allison *et al.*, 2010b). Em indivíduos que a partir daquela análise preliminar sem seleção apresentam essas características (Fig. 3.20), ao aplicar o algoritmo *wrapper*, suas curvas de capacidade, em alguns casos, evidenciam desempenhos de transmissão bem mais consistentes e adequados (Fig. 3.21).

O voluntário 33, por exemplo, de acordo com a análise preliminar, apresenta apenas 3 classes e uma capacidade de 0,21 bits por símbolo – ou seja, em princípio, ele seria incapaz de usar apropriadamente uma BCI de SSVEP. Entretanto, após a seleção de classes, esse mesmo voluntário atinge uma marca de 16 classes e uma capacidade de 1,94 bits por símbolo. Evidentemente, ele não tem um excelente desempenho, mas tem um ponto de operação bem melhor. Isso mostra que uma pessoa não pode ser rotulada como inapta em BCI de SSVEP, sem antes passar por um procedimento que descubra as frequências mais indicadas ao seu envolvimento pleno no experimento.

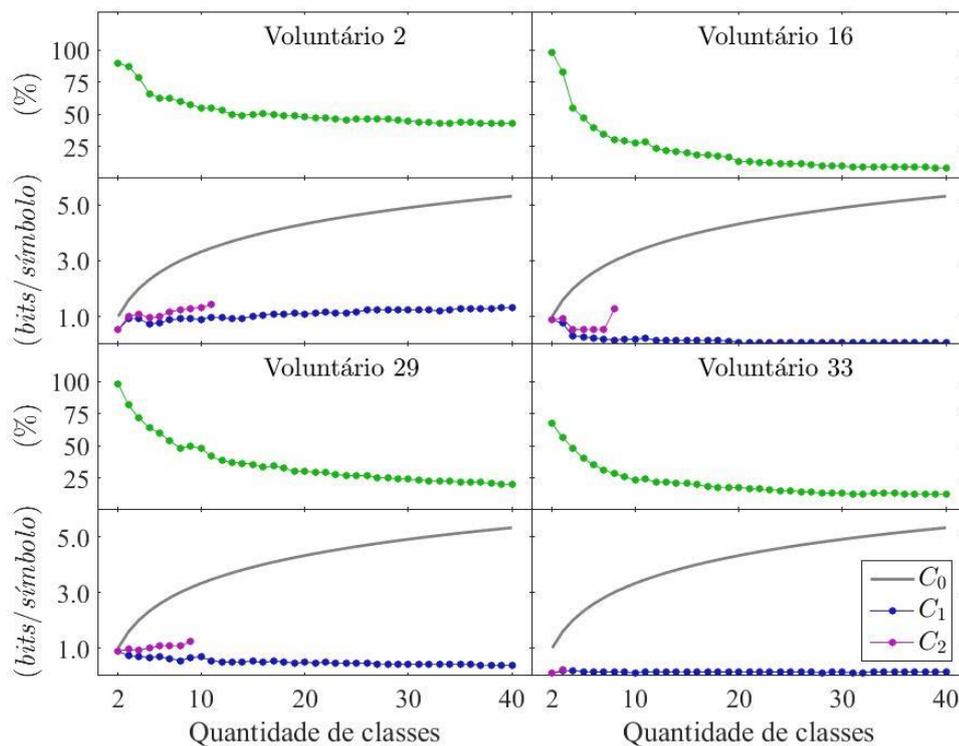


Fig. 3.20: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para 4 voluntários com um desempenho ruim ao longo da análise preliminar.

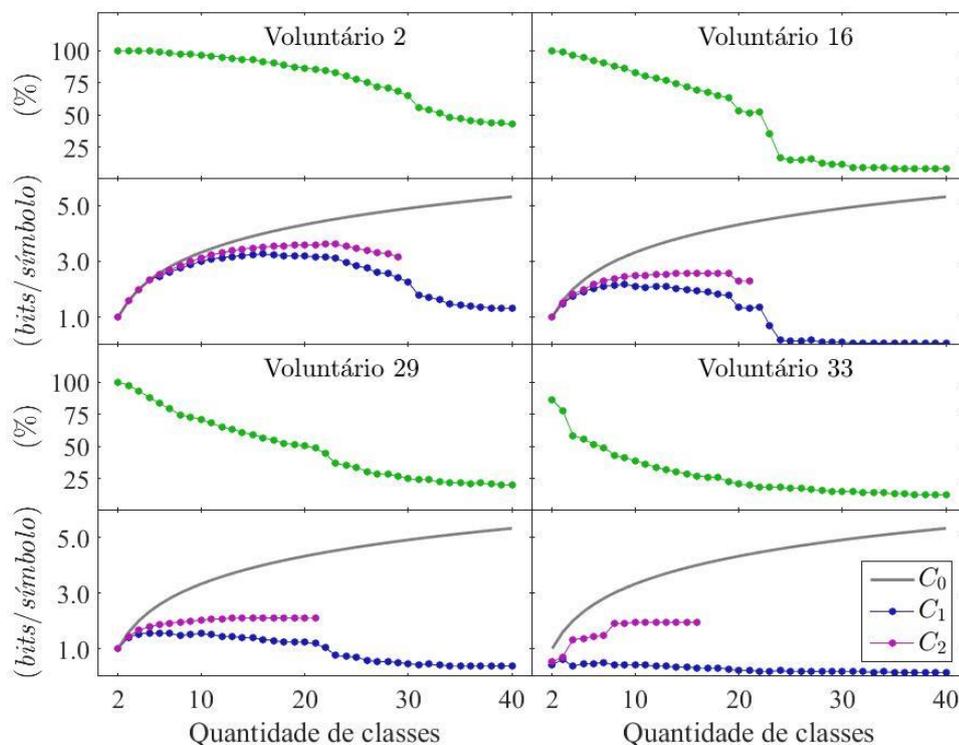


Fig. 3.21: Taxa de acerto e capacidades C_0 , C_1 e C_2 para os 4 voluntários com o suposto desempenho ruim, depois do *wrapper* progressivo.

Finalmente, apesar do fato da *ITR* ser tradicionalmente computada com o uso de C_1 , esses últimos resultados, em conjunto com os demais obtidos durante a tese, também con-

solidam C_2 a esse propósito. Afinal, esta fornece uma expressão em forma fechada mais geral para a capacidade de um canal discreto sem memória, possui uma sólida interpretação em que associa as classes mais convenientes para um experimento de BCI à existência de uma distribuição de probabilidade para os símbolos a serem transmitidos pelo canal, auxilia algoritmos de busca para realizar a avaliação de canal, e ainda retorna uma estimativa mais precisa nas proximidades do ponto de máximo na curva de capacidade. Por tais razões, C_2 é de fato uma medida consistente para avaliar a eficácia de um experimento de BCI e pode ser igualmente utilizada para calcular a *ITR*, mesmo que a fórmula final (Expr. 3.6) não seja tão simples quanto a fórmula tradicional (Expr. 3.5).

Ademais, de uma perspectiva ampla, C_2 de certa forma representa uma medida de desempenho para problemas multiobjetivos que possuem o mesmo número de variáveis de entrada e de saída. Até porque, C_2 retorna um único valor, mesmo após todo um conjunto de processamentos mais gerais, se a matriz de confusão for conhecida. Particularmente em problemas de BCI, essa medida, em última análise, transfere o conceito de avaliação para uma base conceitual comum e, nesse sentido, compara as realizações de diferentes usuários expostos ao mesmo sistema, conforme realizado ao longo desta tese, ou de diferentes voluntários expostos a sistemas distintos, deixado como proposta de trabalhos futuros.

Por fim, convém ressaltar que uma versão desse estudo de avaliação de canal, no contexto de uma BCI de SSVEP como demodulador do sistema visual, já foi previamente publicada por (Costa *et al.*, 2020).

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A presente tese buscou desenvolver e caracterizar um sistema de comunicação baseado em potenciais evocados visualmente, inspirado no funcionamento de uma BCI de SSVEP. Para isso, duas propostas conceituais foram apresentadas e verificadas experimentalmente. A primeira analisou como o sistema visual se comporta como um canal de comunicação, nos moldes preconizados pelas teorias da informação e da comunicação digital. Nesse sentido, mensagens foram digitalmente codificadas por estímulos visuais, depois transmitidas pelo sistema visual e, por fim, recuperadas a partir de EEG e de técnicas de BCI de SSVEP. A segunda analisou a capacidade do sistema visual e propôs um meio de avaliar sistematicamente os símbolos transmissíveis por esse sistema, uma vez que cada indivíduo apresenta um conjunto ótimo de frequências voltado para a comunicação digital.

No primeiro experimento, a BCI de SSVEP funcionou como um demodulador. Nesse caso, após a captura dos registros de EEG, os métodos de processamento úteis em BCI de SSVEP serviram para realizar a demodulação de ERVs de FSK para reconstruir uma palavra de código transmitida através do sistema visual. Nesse caso, a tese utilizou os seguintes procedimentos: aquisição de sinais cerebrais com o amplificador g[®].USBamp em conjunto com o sistema de eletrodos secos g[®].SAHARAsys, filtragem espacial com o primeiro vetor canônico da CCA; extração de atributos com a FFT; e classificação com um discriminante linear MQ, uma SVM com núcleo gaussiano e uma combinação de ELMs. Tal experimento contou com dez voluntários saudáveis – 2 do sexo feminino e 8 do masculino, entre 22 e 38 anos – que participaram de dois protocolos de modulação: um para testar envios por código binário simples e por código de Hamming (7, 4), a partir de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz; e outro para testar envios com essas mesmas estratégias de codificação, a partir de EVRs de FSK em 10 Hz e 12 Hz modulados em 43 Hz.

Embora a SVM com núcleo gaussiano, a combinação de ELMs e o comitê de máquinas possuam capacidade para reconhecer padrões não lineares, todos tiveram um desempenho similar ao do classificador linear MQ. Contudo, isso não significa que a solução de tal problema de transmissão seja linear. Na realidade, indica simplesmente que a cadeia de processamento até a etapa antecedente à classificação privilegiou a extração de atributos linearmente separáveis, uma vez que o processamento ocorreu com a CCA e a FFT. Em suma, para que os classificadores não lineares se destaquem nesse problema de transmissão, eles talvez requeiram acesso a dados mapeados em um espaço que preserve as não linearidades do espa-

ço original.

Em relação ao experimento de avaliação de canal, considerando os 35 voluntários saudáveis a média de C_1 passou de 2,78 para 3,02 bits por símbolo e a média de C_2 passou de 3,61 para 4,02 bits por símbolo, ambos com valor de $p < 0,01$ no teste- T de hipótese. Essencialmente, essa constatação geral trouxe evidências sobre a necessidade de realizar a avaliação das melhores frequências de estímulos antes de prosseguir para uma operação *online*. Uma última questão a destacar sobre assunto diz respeito aos usuários com suposta inaptidão em BCI de SSVEP. Para esses casos, ao aplicar o algoritmo *wrapper*, as curvas de capacidade evidenciaram desempenhos de transmissão bem mais consistentes.

De modo geral, ainda que incompleta, essa investida inicial já abriu caminho para responder algumas das questões formuladas na introdução. Entre as mais significativas estão o reconhecimento de que o cérebro (ou parte de suas redes neuronais) age como um canal de comunicação digital e a constatação de que a BCI age como um demodulador desse canal. Essa nova associação de conceitos tem implicações interessantes. Por exemplo, grande parte dos saberes a respeito do sistema visual humano derivam dos experimentos visuais. Ademais, estes permitem identificar princípios gerais responsáveis pela transformação e propagação da informação no cérebro e, dessa forma, elucidar características da organização e do funcionamento do mesmo. Não seria então a medida $I(X, Y)$ uma grandeza adequada para quantificar esse transporte ao longo das vias cerebrais? Supostamente, qualquer protocolo experimental em que se controla a distribuição dos estímulos e que se decodifica as manifestações causadas por estes, é concebível calcular a medida de informação, usá-la para monitorar esse fluxo e, quem sabe monitorar algum aspecto básico da fisiologia do sistema nervoso.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Projeto XTReMe: Experiências de Tecnologias para Reabilitação em Medicina

Subprojeto: Estudo e desenvolvimento de interfaces cérebro-computador

Pesquisadores Responsáveis: Dra. Gabriela Castellano / Dr. Rickson Coelho Mesquita /

Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux

CAAE: 58592916.9.1001.5404

Você está sendo convidado a participar como voluntário da pesquisa “Estudo e desenvolvimento de interfaces cérebro-computador”. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A pesquisa tem como objetivo geral desenvolver sistemas de interface cérebro-computador (BCIs, do inglês *brain-computer interfaces*). BCIs são sistemas que permitem a uma pessoa controlar um dispositivo externo (por exemplo, um teclado de computador, ou uma cadeira de rodas) utilizando apenas sinais cerebrais. Esse tipo de sistema pode ser útil para pessoas que perderam a mobilidade e não conseguem manipular um *joystick* ou dar um comando de voz.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a testar uma BCI. Para isso, poderá ser requerido que: você olhe para um monitor de computador com imagens piscando com diferentes frequências; ou que você olhe para LEDs, cada um piscando com uma frequência; ou que você imagine o movimento das suas mãos, dos seus pés, ou da sua língua; ou que você imagine uma música; ou que faça cálculos mentais; ou que imagine se locomover em algum espaço conhecido (por exemplo, sua casa). Você poderá ser convidado mais de uma

vez para realizar esses testes a fim de analisarmos a sua evolução no uso das BCIs. Tempo estimado total: Não superior a 1 hora e 40 minutos.

Você deverá fazer alguma das tarefas descritas acima enquanto seus sinais cerebrais são medidos. Estes poderão ser medidos por meio de três técnicas: eletroencefalografia (EEG), espectroscopia óptica na faixa do infravermelho próximo (NIRS, do inglês *near-infrared spectroscopy*), ou ressonância magnética (RM). Nenhuma dessas técnicas é invasiva, e nenhuma delas utiliza radiação ionizante.

No caso da RM, você entrará na máquina de RM e lá permanecerá, deitado e imóvel, por volta de 30 a 60 minutos. Durante esse tempo a máquina medirá sinais provenientes do seu cérebro e fará imagens do mesmo. O exame não causa nenhuma dor e também não possui nenhum efeito nocivo para o corpo humano – em particular, nesta pesquisa não será feito nenhum exame de RM usando contraste. No entanto, você poderá sentir desconforto devido ao grande barulho que a máquina faz (para isso lhe serão fornecidos tampões de ouvido), e ao fato de que você deverá permanecer o mais imóvel possível dentro da máquina, para que os sinais possam ser medidos de forma correta. Além disso, devido a que o campo magnético usado na máquina de RM é alto (como um forte ímã), caso você possua algum metal dentro do seu corpo (como pinos, marcapassos, próteses metálicas, balas de revólver), não poderá, de nenhuma maneira, realizar o exame, e **NÃO DEVE DEIXAR DE AVISAR** o pesquisador responsável (que estiver realizando os exames). Por esse motivo também, antes de entrar na sala da RM, você deverá remover do corpo qualquer objeto metálico, como anéis, brincos, pulseiras e óculos, etc. Também é importante que você remova objetos magnetizados como cartões de crédito, pois eles podem ser apagados ou danificados pelo campo magnético.

No caso das técnicas de EEG e NIRS, uma touca com vários sensores será colocada sobre sua cabeça, para a medida dos seus sinais cerebrais. Esses exames também não possuem nenhum efeito nocivo para o corpo humano, mas você poderá sentir dor e desconforto devido ao contato apertado e prolongado dos sensores sobre o couro cabeludo, devido a que a touca deve ser colocada bem apertada para poder medir bem o sinal. Para evitar ou minimizar esse desconforto, é importante que você avise a pessoa que estiver colocando a touca em você, sobre qualquer desconforto que sentir no momento da colocação da mesma. Você também poderá, se quiser, interromper a aquisição em qualquer momento que deseje e os sensores serão retirados, sem que isso acarrete nenhum prejuízo para sua pessoa.

Desconfortos e riscos:

Os riscos possíveis são relacionados aos procedimentos descritos acima, você po-

derá sentir dor e desconforto devido ao contato apertado e prolongado dos eletrodos sobre o couro cabeludo.

Benefícios:

A sua participação nesta pesquisa não implicará em nenhum benefício pessoal e não é obrigatória.

Acompanhamento e assistência:

Caso queira, você poderá desistir da sua participação a qualquer momento, sem que isso lhe cause nenhum prejuízo. Você será acompanhado e assistido pelo pesquisador responsável e a sua equipe durante esses procedimentos, podendo fazer perguntas sobre qualquer dúvida que apareça durante todo o estudo.

Sigilo e privacidade:

Os dados coletados estarão sob o resguardo científico e o sigilo profissional, e contribuirão para o alcance dos objetivos deste trabalho e para posteriores publicações dos dados.

Ressarcimento e indenização:

Você não receberá nenhum pagamento por sua participação nesta pesquisa, mas caso venha a ter despesas de transporte ou alimentação para participar na pesquisa, será ressarcido.

Métodos alternativos:

Não há métodos alternativos.

Contato:

Para quaisquer dúvidas, você pode contatar os pesquisadores responsáveis: Gabriela Castellano e Rickson C. Mesquita (tels: (19) 3521-5519, (19) 3521-0137, emails: gabriela@ifi.unicamp.br, rickson@ifi.unicamp.br, endereço: Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia, Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP, Rua Sérgio Buarque de Holanda, 777, CEP 13083-859, Cidade Universitária, Campinas, SP), Romis R. F. Attux (tel: (19) 3521-3857, email: attux@dca.fee.unicamp.br, endereço: Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação – Av. Albert Einstein, 400, UNICAMP, CEP 13083-859, Cidade Universitária).

ria, Campinas, SP).

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICAMP das 08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs as 17:00hs na Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126; CEP 13083-887 Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; email: cep@fcm.unicamp.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do (a) participante: _____

Contato telefônico: _____

e-mail (opcional): _____

_____ Data: ____/____/____.

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguo ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguo, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

_____ Data: ____/____/____.

(Assinatura do pesquisador)

REFERÊNCIAS

- Abiri, R. et al., 2019. A comprehensive review of EEG-based brain–computer interface paradigms. *Journal of Neural Engineering*, 16(1), pp. 1-21.
- Adrian, E. D. & Matthews, B. H. C., 1934. The Berger rhythm: potential changes from the occipital lobes in man. *Brain*, 57(4), pp. 355-385.
- Aggarwal, S. & Chugh, N., 2019. Signal processing techniques for motor imagery brain computer interface: a review. *Array*, 1-2(1), pp. 1-12.
- Ahn, M., Lee, M., Choi, J. & Jun, S. C., 2014. A review of brain-computer interface games and an opinion survey from researchers, developers and users. *Sensors*, 14(8), pp. 14601-14633.
- Allison, B. Z. et al., 2010. How many (and what kinds of) people can use an SSVEP BCI?. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 18(2), pp. 107-116.
- Allison, B. Z. & Neuper, C., 2010. Could anyone use a BCI?. Em: D. S. Tan & A. Nijholt, eds. *Brain-computer interfaces*. 1 ed. London: Springer, pp. 35-54.
- Apostol, T. M., 1967. *Calculus: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, Inc..
- Arimoto, S., 1972. An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(1), pp. 14-20.
- Ash, R. B., 1965. *Information theory*. 1 ed. New York: Interscience Publishers.
- Bajwa, G. & Dantu, R., 2016. Neurokey: Towards a new paradigm of cancelable biometrics-based key generation using electroencephalograms. *Computers & Security*, 62(1), pp. 95-113.
- Berger, H., 1929. Über das elektroencephalogramm des menschen. *European Archives of Psychiatry and Clinical Neuroscience*, 87(1), pp. 527-570.
- Bin, G. et al., 2009. VEP-based brain-computer interfaces: time, frequency, and code modulations. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 4(4), pp. 22-26.
- Bishop, C. M., 2006. *Pattern Recognition and Machine Learning*. 1 ed. New York: Springer.
- Blahut, R., 1972. Computation of channel capacity and rate-distortion functions. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-18(4), pp. 460-473.
- Blankertz, B. et al., 2008. Optimizing spatial filters for robust EEG single-trial analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(1), pp. 41-56.
- Boser, B., Guyon, I. M. & Vapnik, V. N., 1992. *A training algorithm for optimal margin classifiers*. Pennsylvania, s.n., pp. 144-152.
- Cao, L. et al., 2017. A synchronous motor imagery based neural physiological paradigm for

brain computer interface speller. *Frontiers in Human Neuroscience*, 11(1), pp. 1-9.

Carvalho, S. N., 2016. *Contribuições ao desenvolvimento de interfaces cérebro-computador baseadas em potenciais evocados visualmente em regime estacionário*, Campinas: Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Universidade Estadual de Campinas.

Carvalho, S. N. et al., 2015. Comparative analysis of strategies for feature extraction and classification in SSVEP BCIs. *Biomedical Signal Processing and Control*, 21(1), pp. 34-42.

Chang, M. H., Baek, H. J., Lee, S. M. & Park, K. S., 2014. An amplitude-modulated visual stimulation for reducing eye fatigue in SSVEP-based brain-computer interfaces. *Clinical Neurophysiology*, 125(7), pp. 1380-1391.

Cheng, M. & Gao, S., 1999. *An EEG-based cursor control system*. Atlanta, s.n., p. 669.

Cheng, M., Gao, X. & Gao, S., 2002. Design and implementation of a brain-computer interface with high transfer rates. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 49(10), pp. 1181-1186.

Cohen, M. X., 2017. Where does EEG come from and what does it mean?. *Trends in Neurosciences*, 40(4), pp. 208-218.

Congalton, R. G., 1991. A review of assessing the accuracy of classifications of remotely sensed data. *Remote Sensing of Environment*, 37(1), pp. 35-46.

Cooley, J. W. & Tukey, J. W., 1965. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), pp. 297-301.

Correa, N. M., Adalı, T., Li, Y.-O. & Calhoun, V. D., 2010. Canonical correlation analysis for data fusion and group inferences. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27(4), pp. 39-50.

Cortes, C. & Vapnik, V., 1995. Support vector networks. *Machine Learning*, 20(3), pp. 273-297.

Costa, T. B. S., 2015. *Desenvolvimento de interface cérebro-computador baseada em potenciais evocados visualmente em regime estacionário*, Campinas: s.n.

Costa, T. B. S. et al., 2020. Channel capacity in brain-computer interfaces. *Journal of Neural Engineering*, 17(1), pp. 1-10.

Costello, D. J. & Forney, D., 2007. Channel coding: the road to channel capacity. *Proceedings of the IEEE*, 95(6), pp. 1150-1177.

Cover, T. M. & Thomas, J. A., 2006. *Elements of Information Theory*. 2 ed. New Jersey: John Wiley & Sons.

De Clercq, W. et al., 2006. Canonical correlation analysis to remove muscle artifacts from electroencephalogram. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 44(5), pp. 2583-2587.

Dreyer, A. M. & Herrmann, C. S., 2015. Frequency-modulated steady-state visual evoked potentials: a new stimulation method for brain-computer interfaces. *Journal of Neuroscience*

Methods, 241(1), pp. 1-9.

Dreyfus, G. & Guyon, I., 2006. Assessment methods. Em: I. Guyon, S. Gunn, M. Nikravesh & L. A. Zadeh, eds. *Feature Extraction: Foundations and Applications*. 1 ed. New York: Springer, pp. 65-88.

Duda, R., Hart, P. E. & Stork, D. G., 2001. *Pattern Classification*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons.

Eggers, T. E., Dweiri, Y. M., McCallum, G. A. & Durand, D. M., 2018. Recovering motor activation with chronic peripheral nerve computer interface. *Scientific Reports*, 8(1), pp. 1-10.

Fabiani, M., Gratton, G., Karis, D. & Donchin, E., 1987. Definition, identification and reliability of the P300 component of the event related brain potential. Em: *Advances in Psychophysiology*. s.l.:s.n., pp. 1-78.

Fano, R. M., 1952. *Lecture notes on statistical theory of information*, Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.

Fano, R. M., 1961. *Transmission of information*. 1 ed. Cambridge: The MIT Press.

Farwell, L. A. & Donchin, E., 1988. Talking off the top of your head: toward a mental prosthesis utilizing event-related brain potentials. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 70(6), pp. 510-523.

Feinstein, A., 1954. *A new basic theorem of information theory*, Cambridge: Thesis (Doctor of Philosophy). Department of Physics. Massachusetts Institute of Technology.

Feinstein, A., 1958. *Foundations of information theory*. New York: McGraw-Hill.

Fisher, R. S. et al., 2005. Photic-and pattern-induced seizures: a review for the Epilepsy Foundation of America Working Group. *Epilepsia*, 46(9), pp. 1426-1441.

Fukunaga, K., 1990. *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. 2 ed. San Diego: Academic Press.

Garcia-Molina, G. & Zhu, D., 2011. *Optimal spatial filtering for the steady state visual evoked potential: BCI application*. Cancun, s.n., pp. 156-160.

Ghez, C. & Krakauer, J., 2000. The organization of movement. Em: *Principles of Neural Science*. 4 ed. New York: McGraw-Hill, pp. 653-673.

GmbH, g. m. e., 2011. *g.SAHARAsys, active dry electrode system: instructions for use V1.11.01*. Schiedlberg: s.n.

GmbH, g. m. e., 2011. *g.USBamp, USB biosignal amplifier: instruction for use V2.11.03*. Schiedlberg: s.n.

GmbH, g. m. e., 2016. *Product Catalogue*. Schiedlberg: s.n.

Hamming, R. W., 1950. Error detecting and error correcting codes. *The Bell System Technical Journal*, 29(2), p. 147-160.

- Han, X., Lin, K., Gao, S. & Gao, X., 2019. A novel system of SSVEP-based human-robot coordination. *Journal of Neural Engineering*, 16(1), pp. 1-15.
- Härdle, W. K. & Simar, L., 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 2 ed. New York: Springer.
- Hartley, R. V. L., 1928. Transmission of information. *The Bell System Technical Journal*, 7(3), pp. 535-563.
- Haykin, S. & Moher, M., 2009. *Communication systems*. 5 ed. Danvers: John Wiley & Sons.
- Herrmann, C. S., 2001. Human EEG responses to 1-100 Hz flicker: resonance phenomena in visual cortex and their potential correlation to cognitive phenomena. *Experimental Brain Research*, 137(3-4), pp. 346-353.
- He, Y. et al., 2018. Brain-machine interfaces for controlling lower-limb powered robotic systems. *Journal of Neural Engineering*, 15(2), pp. 1-15.
- Hotelling, H., 1936. Relations between two sets of variates. *Biometrika*, 28(3-4), pp. 321-377.
- Huang, G. B., Wang, D. H. & Lan, Y., 2011. Extreme learning machines: a survey. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2(2), pp. 107-122.
- Huffman, D. A., 1952. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9), pp. 1098-1101.
- Ingel, A., Kuzovkin, I. & Vicente, R., 2019. Direct information transfer rate optimisation for SSVEP-based BCI. *Journal of Neural Engineering*, 16(1), pp. 1-13.
- Jasper, H. H., 1958. The ten-twenty electrode system of the International Federation. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 10(1), pp. 371-375.
- Jeannerod, M., 1995. Mental imagery in the motor context. *Neuropsychologia*, 33(11), pp. 1419-1432.
- Kappenman, E. S. & Luck, S. J., 2010. The effects of electrode impedance on data quality and statistical significance in ERP recordings. *Psychophysiology*, 47(5), pp. 888-904.
- Kimura, Y., Tanaka, T., Higashi, H. & Morikawa, N., 2013. SSVEP-Based brain-computer interfaces using FSK-modulated visual stimuli. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 60(10), pp. 2831-2838.
- Kleiner, M. et al., s.d. *Overview*. [Online] Available at: <http://psychtoolbox.org/overview> [Acesso em 03 10 2019].
- Kohavi, R. & John, G. H., 1997. Wrappers for feature subset selection. *Artificial intelligence*, 97(1), pp. 273-324.
- Kraft, L. G., 1949. *A device for quantizing, grouping, and coding amplitude-modulated pulses*, Cambridge: Dissertation (Master of Sciences). Department of Electrical Engineering. Massachusetts Institute of Technology.

- Kronegg, J., Voloshynovskiy, S. & Pun, T., 2005. *Analysis of bit-rate definitions for brain-computer interfaces*. Las Vegas, s.n.
- Krusienski, D. J. et al., 2008. Toward enhanced P300 speller performance. *Journal of Neuroscience Methods*, 167(1), pp. 12-21.
- Kübler, A. & Müller, K.-R., 2007. An introduction to brain-computer interfacing. In: G. Dornhege, et al. eds. *Toward Brain-Computer Interfacing*. 1 ed. Cambridge: The MIT Press, pp. 1-25.
- Kullback, S. & Leibler, R. A., 1951. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1), pp. 79-86.
- Kwak, N.-S., Müller, K.-R. & Lee, S.-W., 2015. A lower limb exoskeleton control system based on steady state visual evoked potentials. *Journal of Neural Engineering*, 12(5), pp. 1-14.
- Lal, T. N., Chapelle, O., Weston, J. & Elisseeff, . A., 2006. Embedded methods. In: *Feature Extraction: Foundations and Applications*. New York: Springer, pp. 137-165.
- Lebedev, M. A. & Nicolelis, M. A. L., 2006. Brain-machine interfaces: past, present and future. *Trends in Neurosciences*, 29(9), pp. 536-546.
- Lin, Z., Zhang, C., Wu, W. & Gao, X., 2006. Frequency recognition based on canonical correlation analysis for SSVEP-based BCIs. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 53(12), pp. 2610-2614.
- Liu, Q., Chen, K., Ai, Q. & Xie, S. Q., 2014. Review: recent development of signal processing algorithms for SSVEP-based brain computer interfaces. *Journal of Medical and Biological Engineering*, 34(4), pp. 299-309.
- Lotte, F. et al., 2018. A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces: a 10 year update. *Journal of Neural Engineering*, 15(3), pp. 1-28.
- Lotte, F. et al., 2007. A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces. *Journal of Neural Engineering*, 4(2), pp. 1-13.
- Lyons, R. G., 2004. *Understanding Digital Signal Processing*. 2 ed. New Jersey: Prentice Hall.
- Mak, J. N. & Wolpaw, J. R., 2009. Clinical applications of brain-computer interfaces: current state and future prospects. *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, 2(1), pp. 187-199.
- McCulloch, W. S. & Pitts, W., 1943. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, 5(1), p. 115–133.
- Meister, B. & Oettli, W., 1967. On the capacity of a discrete, constant channel. *Information and Control*, 11(3), pp. 341-351.
- Millán, J. d. R. et al., 2010. Combining brain-computer interfaces and assistive technologies: state-of-the-art and challenges. *Frontiers in Neuroscience*, 4(1), pp. 1-15.

- Miranda, R. A. et al., 2015. DARPA-funded efforts in the development of novel brain-computer interface technologies. *Journal of Neuroscience Methods*, 244(1), pp. 52-67.
- Mulholland, T. B., 1972. Occipital alpha revisited. *Psychological Bulletin*, 78(3), pp. 176-182.
- Müller, S. M. T., Bastos-Filho, T. F. & Sarcinelli-Filho, M., 2011. *Using a SSVEP-BCI to command a robotic wheelchair*. Gdansk, s.n.
- Muroga, S., 1953. On the capacity of a discrete channel. I. *Journal of the Physical Society of Japan*, 8(4), pp. 484-494.
- Niedermeyer, E., 2005. The normal EEG of the waking adult. Em: E. Niedermeyer & F. Lopes da Silva, eds. *Electroencephalography : basic principles, clinical applications, and related fields*. 5 ed. Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, pp. 167-192.
- Nuwer, M. R. et al., 1998. IFCN standards for digital recording of clinical EEG. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 106(3), pp. 259-261.
- Odom, J. V. et al., 2010. ISCEV standard for clinical visual evoked potentials (2009 update). *Documenta Ophthalmologica*, 120(1), pp. 111-119.
- Oppenheim, A. V. & Schafer, R. W., 2010. *Discrete-Time Signal Processing*. 3 ed. Upper Saddle River: Pearson Higher Education, Inc..
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. & Nawab, S. H., 1996. *Signals & Systems*. 2 ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3), pp. 406-413.
- Pfurtscheller, G. & Lopes da Silva, F. H., 1999. Event-related EEG/MEG synchronization and desynchronization: basic principles. *Clinical Neurophysiology*, 110(11), pp. 1842-1857.
- Pfurtscheller, G. & Neuper, C., 2001. Motor imagery and direct brain-computer communication.. *Proceedings of the IEEE*, 89(7), pp. 1123-1134.
- Picton, T. W., 1992. The P300 wave of the human event-related potential. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 9(4), pp. 456-479.
- Pifer, A. & Aurani, K. M., 2015. A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(1), pp. 1603-1609.
- Proakis, J. G. & Salehi, M., 2008. *Digital Communications*. 5 ed. New York: McGraw-Hill.
- Regan, D., 1980. Comparison of transient and steady-state methods. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 338(1), pp. 45-71.
- Reilly, E. L., 2005. EEG recording and operation of the apparatus. Em: E. Niedermeyer & F. Lopes da Silva, eds. *Electroencephalography : basic principles, clinical applications, and related fields*. 5 ed. Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, pp. 139-159.

Rioul, O., 2018. *Teoria da Informação e da Codificação*. Campinas e Brasília: Unicamp e UnB.

Rosenblatt, F., 1961. *Principles of neurodynamics: perceptrons and the theory of brain mechanisms*, Ithaca: Cornell University.

Sadeghi, S. & Maleki, A., 2019. Accurate estimation of information transfer rate based on symbol occurrence probability in brain-computer interfaces. *Biomedical Signal Processing and Control*, 54(1), pp. 1-10.

Schlögl, A., Kronegg, J., Huggins, J. E. & Mason, S. G., 2007. Evaluation criteria for BCI research. In: *Toward Brain-Computer Interfacing*. Cambridge: MIT Press, pp. 327-490.

Shannon, C. E., 1948. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(1), pp. 379-423, 623-656.

Shin, J., Kwon, J. & Im, C.-H., 2018. A ternary hybrid EEG-NIRS brain-computer interface for the classification of brain activation patterns during mental arithmetic, motor imagery, and idle state. *Frontiers in Neuroinformatics*, 12(1), pp. 1-9.

Soriano, D. C. et al., 2016. SSVEP-based BCIs: the brain as a digital communication channel. *Journal of Epilepsy and Clinical Neurophysiology*, 22(3), pp. 113-114.

Speckmann, E. J. & Elger, C. E., 2005. Introduction to the neurophysiological basis of the EEG and DC potentials. Em: E. Niedermeyer & F. Lopes da Silva, eds. *Electroencephalography : basic principles, clinical applications, and related fields*. 5 ed. Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, pp. 17-29.

Spüler, M., Walter, A., Wolfgang, R. & Bogdan, M., 2014. Spatial filtering based on canonical correlation analysis for classification of evoked or event-related potentials in EEG data. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 22(6), pp. 1097-1103.

Thompson, D. E. et al., 2014. Performance measurement for brain-computer or brain-machine interfaces: a tutorial. *Journal of Neural Engineering*, 11(3), pp. 1-12.

Tong, J. & Zhu, D., 2015. Multi-phase cycle coding for SSVEP based brain-computer interfaces. *BioMedical Engineering OnLine* , 14(5), pp. 1-13.

Tresp, V., 2001. Committee machines. Em: Y. H. Hu & J. Hwang, eds. *Handbook of Neural Network Signal Processing*. Boca Raton: CRC Press, pp. 1-21.

Vialatte, F.-B., Maurice, M., Dauwels, J. & Cichocki, A., 2010. Steady-state visually evoked potentials: focus on essential paradigms and future perspectives. *Progress in Neurobiology*, 90(4), pp. 418-438.

Vidal, J. J., 1973. Toward direct brain-computer communication. *Annual Review of Biophysics and Bioengineering*, 2(1), pp. 157-180.

Vidal, J. J., 1977. Real-time detection of brain events in EEG. *Proceedings of the IEEE*, 65(5), pp. 633-641.

- Walter, V. J. & Grey Walter, W., 1949. The central effects of rhythmic sensory stimulation. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 1(1), pp. 57-86.
- Wang, Y., Chen, X., Gao, X. & Gao, S., 2017. A benchmark dataset for SSVEP-based brain-computer interfaces. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 25(10), pp. 1746-1752.
- Wang, Y. et al., 2008. Brain-computer interfaces based on visual evoked potentials. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 27(5), pp. 64-71.
- Wang, Y. et al., 2006. A practical VEP-based brain-computer interface. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 14(2), pp. 234-239.
- Wolpaw, J. R. et al., 2000. Brain-computer interface technology: a review of the first international meeting. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 8(2), pp. 164-173.
- Wolpaw, J. R. et al., 2002. Brain-computer interfaces for communication and control. *Clinical Neurophysiology*, 113(6), pp. 767-791.
- Wolpaw, J. R., Ramoser, H., McFarland, D. J. & Pfurtscheller, G., 1998. EEG-based communication: improved accuracy by response verification. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 6(3), pp. 326-333.
- Wurtz, R. H. & Kandel, R. E., 2000. Central visual pathways. Em: *Principles of Neural Science*. 4 ed. New York: McGraw-Hill, pp. 523-545.
- Xu, R. et al., 2016. Endogenous sensory discrimination and selection by a fast brain switch for a high transfer rate brain-computer interface. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 24(8), pp. 901-910.
- Yin, E. et al., 2015. A hybrid brain-computer interface based on the fusion of P300 and SSVEP scores. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 23(4), pp. 693-701.
- Yin, E. et al., 2014. A dynamically optimized SSVEP brain-computer interface (BCI) speller. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 62(6), pp. 1447-1456.
- Yuan, P. et al., 2013. A study of the existing problems of estimating the information transfer rate in online brain-computer interfaces. *Journal of Neural Engineering*, 10(2), pp. 1-11.
- Zerafa, R., Camilleri, T., Falzon, O. & Camilleri, K. P., 2018. To train or not to train? A survey on training of feature extraction methods for SSVEP-based BCIs. *Journal of Neural Engineering*, 15(5), pp. 1-24.
- Zhu, D., Bieger, J., Molina, G. G. & Aarts, R. M., 2010. A survey of stimulation methods used in SSVEP-based BCIs. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 210(1), pp. 1-12.