

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

SETOR TELEMÁTICA

Este exemplar corresponde a redação final da tese  
defendida por Pedro Luis Dias Peres e aprovada pela  
comissão julgadora em 11/10/85

  
24/10/85

CONTROLE E ESTIMAÇÃO DESCENTRALIZADOS DE SISTEMAS  
DINÂMICOS: APLICAÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

PEDRO LUIS DIAS PERES

Orientador: PROF. DR. JOSÉ CLAUDIO GEROMEL

090/85

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
de Campinas, da Universidade Esta-  
dual de Campinas - UNICAMP, como parte  
dos requisitos exigidos para a obtenção  
do título de MESTRE EM CIÊNCIAS.

UNICAMP  
BIBLIOTECA

Aos

*meus pais*

Ao Geromel, pela convivência e curtição deste trabalho conjunto, e também pelos estímulos e pela excelente orientação.

Ao Akebo, Paulo e Alexandre pelos papos referentes a este trabalho e também pela convivência; ao Eduardo e Oscar pela herança computacional riccatiana.

Ao Ivaniã, pelos cafês e conversas inerentes a este e a todos os demais assuntos; ao José Pedro, Edson, Ting e Cassião pelo dia-a-dia na sala em comum.

Às musas inspiradoras e ao pessoal da Letras e do IEL, excelentes amigos e caras-metades; ao Silvío, Rose, Marco Túlio e Aloísio, amigos e companheiros de viagem.

A todos os amigos da Unicamp, em particular aos membros do Setor Telemática.

À Elza Aoki pelo difícil e impecável trabalho de datilografia, e ao Edson e Luis pelos excelentes desenhos.

Um imenso obrigado.

Da noite a tarda e taciturna trova  
soluça, numa trêmula dormência ...  
Na mais branda, mais leve florescência  
tudo em Visões e Imagens se renova.

Cruz e Souza

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO GERAL .....	1
------------------------	---

### CAPÍTULO I : CONTROLE E ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

<i>Introdução</i> .....	6
I.1. DECOMPOSIÇÃO EM MODOS RÁPIDOS E LENTOS .....	7
I.2. PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO (PLQ) .....	9
I.3. EQUAÇÃO DE RICCATI - ESTABILIDADE .....	12
I.4. OBSERVADORES DE ESTADO - FILTRO DE KALMAN-BUCY .....	18
I.5. RESTRIÇÕES ESTRUTURAIS NECESSÁRIAS PARA IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLOADORES E FILTROS (ESTIMADORES DE ESTADO) .....	24
I.5.1. Controladores .....	24
I.5.1.1. Realimentação de saída .....	26
I.5.1.2. Controle descentralizado .....	26
I.5.2. Filtro Descentralizado de Kalman - Estimadores de Estado .....	27
<i>Conclusões</i> .....	30

### CAPÍTULO II : SÍNTESE DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS

<i>Introdução</i> .....	32
II.1. CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS INTERCONECTADOS LINEARES .....	33
II.2. DETERMINAÇÃO DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS VIA MA- NIPULAÇÃO DO SISTEMA GLOBAL .....	33
II.3. DETERMINAÇÃO DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS VIA UMA PROPRIEDADE DA MATRIZ DE INTERCONEXÃO .....	39

II.4.	DETERMINAÇÃO DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS VIA DECOMPOSIÇÃO EM MODOS RÁPIDOS E LENTOS .....	42
II.5.	APLICAÇÃO AO CONTROLE CARGA-FREQÜÊNCIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA INTERLIGADOS .....	45
II.5.1.	Realimentação de Saída e Controle Descentralizado .....	47
II.5.2.	Decomposição em Modos Rápidos e Lentos .....	50
II.5.3.	Estimação de Demanda .....	55
II.5.3.1.	Comportamento do estimador proposto .....	58
II.5.3.2.	Determinação do ganho ótimo do estimador .....	59
II.5.3.3.	Comentários .....	62
II.6.	EXEMPLO: SISTEMA DE POTÊNCIA COM DUAS ÁREAS IGUAIS INTERLIGADAS .....	63
II.6.1.	Realimentação de Saída e Controle Descentralizado .....	64
II.6.2.	Decomposição em Modos Rápidos e Lentos .....	70
II.6.3.	Estimação de Demanda .....	75
	<i>Conclusões</i> .....	81

### CAPÍTULO III : SÍNTESE DE ESTIMADORES DE ESTADO DESCENTRALIZADOS

	<i>Introdução</i> .....	83
III.1.	DETERMINAÇÃO DE FILTROS DESCENTRALIZADOS VIA UMA NOVA PROPRIEDADE DA EQUAÇÃO DE RICCATI ESTACIONÁRIA .....	84
III.2.	APLICAÇÃO AO CONTROLE CARGA-FREQÜÊNCIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA INTERLIGADOS .....	88
III.3.	EXEMPLO: DUAS ÁREAS IGUAIS INTERLIGADAS .....	91
	<i>Conclusões</i> .....	95

	CONCLUSÃO GERAL .....	96
--	-----------------------	----

APÉNDICE : PROGRAMAS DESENVOLVIDOS ..... 98

BIBLIOGRAFIA ..... 118

## NOTAÇÃO

$\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$  Conjunto dos números complexos

$\mathbb{C}^-$  Conjunto dos números complexos com parte real negativa

$\mathbb{R}^n$  Espaço dos números reais de dimensão  $n$

Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$A = [a_{ij}]$  é a matriz formada pelos elementos  $a_{ij}$

$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$  é a matriz diagonal formada pelos elementos  $a_i$

$I$  é a matriz identidade

$A^t$  é a matriz transposta de  $A$

$A > 0$  indica que a matriz  $A$  é simétrica definida positiva

$A \geq 0$  indica que a matriz  $A$  é simétrica e semidefinida positiva



$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$\triangleq$  definição

$\approx$  aproximadamente

$\forall$  qualquer que seja

$\dot{p} = \frac{dp}{dt}$  é a derivada de p em relação ao tempo

$\Lambda(A)$  é o conjunto dos autovalores da matriz A

$\Gamma \subset \Omega$  indica que  $\Gamma$  está contido em  $\Omega$

Função de classe  $C^1$  : é uma função contínua que admite primeira derivada também contínua

Equações referenciadas sem o número do capítulo correspondem ao capítulo corrente.

## RESUMO

Este trabalho estuda o controle e a estimação descentralizados de sistemas dinâmicos. Primeiramente expomos alguns resultados clássicos tais como: decomposição em modos rápidos e lentos, problema linear quadrático, equação de Riccati e filtro de Kalman. Discutimos brevemente sobre as restrições estruturais necessárias para implementação de controladores e de filtros.

Propomos então um método de síntese de controladores descentralizados (envolvendo o sistema global) para sistemas dinâmicos interconectados, método depois generalizado para a obtenção de estimadores de estado descentralizados. Propomos também a decomposição de sistemas dinâmicos de grande porte em subsistemas lentos e rápidos, com a obtenção de controladores totalmente desacoplados (utilizando, para os subsistemas lentos, uma propriedade da interconexão; os subsistemas rápidos apresentam-se já desacoplados), descentralizando e particionando assim toda a resolução do problema de controle.

Como aplicação dos métodos propostos, analisamos o problema do controle carga-frequência em sistemas de potência interligados, resolvendo um exemplo (duas áreas iguais interconectadas) e fazendo a simulação do sistema global para o controle descentralizado.

INTRODUÇÃO GERAL

Nos últimos anos verificou-se um grande avanço nos procedimentos para análise de sistemas dinâmicos e síntese de controladores. Porém, esses procedimentos baseiam-se na pressuposição de centralização, tanto das informações sobre o sistema quanto dos cálculos baseados nessas informações.

Quando consideramos sistemas de grande porte, essa abordagem mostra-se falha, pois não conseguimos centralizar todas as informações nem realizar todo o trabalho computacional de maneira centralizada (a limitação é o tamanho do sistema). E há muitos exemplos de sistemas de grande porte, como sistemas de potência, redes de tráfego urbano, redes de comunicações digitais, sistemas ecológicos, sistemas econômicos, etc.. Tais sistemas físicos são frequentemente caracterizados por uma separação geográfica entre suas várias partes (subsistemas), e o custo e a segurança de suas interligações precisam ser considerados, encorajando assim uma abordagem dita descentralizada. O avanço tecnológico e o barateamento dos microprocessadores também contribuem no sentido de distribuir o trabalho computacional.

Este trabalho pretende contribuir na análise e síntese de controladores descentralizados para sistemas dinâmicos, e também na estimação de estado descentralizada. Os métodos apresentados caminham na direção de simplificação dos cálculos computacionais, permitindo a utilização de microcomputadores.

Primeiramente, baseados em alguns conceitos clássicos da teoria de controle, acrescidos de uma nova propriedade da equação de Riccati (Geromel and Peres [10]), formulamos um método de obtenção de controladores sujeitos a restrições estruturais, onde, embora ainda manipulemos o sistema global, obtemos uma lei de controle totalmente descentralizada.

Utilizando propriedades da interconexão (Geromel and Yamakami [12]) e a decomposição em modos lentos e rápidos (Chow and Kokotovic [3]) conseguimos "quebrar" o problema global de obtenção de uma lei de controle em vários subproblemas de pequena dimensão, de resolução simples ou mesmo imediata. Com esse método, os cálculos foram muito simplificados, e a dimensão de um sistema não precisa mais ser encarada como um fator complicante. Mesmo sistemas de enorme dimensão, com o método apresentado podem ser decompostos em subsistemas de pequena ordem.

A estrutura que se requer desses sistemas para a decomposição é quase regra geral dos sistemas reais: partes lentas (em geral, as partes

mecânicas) e rápidas (em geral, sistemas elétricos). A interconexão precisa ser relativamente fraca, satisfazendo a determinadas condições (a separação geográfica natural dos sistemas reais praticamente impõe essa estrutura de interconexão).

Para exemplificar os métodos desenvolvidos, tratamos o problema do controle carga-frequência num sistema de potência. Na literatura, encontramos basicamente duas classes de métodos para resolvê-lo. A primeira classe encara o controle carga-frequência como um Problema Linear Quadrático, onde resolve-se uma equação de Riccati para se obter a matriz de ganho de realimentação (Calovic [2], Fosha and Elgerd [6]). Porém, calculado dessa forma, o controle de cada área dependerá da totalidade do vetor de variáveis de estado, impondo uma estrutura centralizada de controle.

A segunda classe de métodos pode ser descrita como a que utiliza técnicas de Programação Matemática, onde um problema de otimização é formulado, podendo levar em conta restrições que impõem, por exemplo, controle descentralizado. Em geral, são empregados métodos diretos (Davison and Rau [4], Elgerd and Fosha [5]) ou métodos de gradiente (Geromel and Bernussou [9]). Porém, o procedimento de otimização pode se tornar demasiado lento, e em geral o controle obtido depende da perturbação na carga considerada. Portanto, as conclusões obtidas podem não ter validade para uma outra perturbação.

Com os procedimentos apresentados neste trabalho, acreditamos ter eliminado os problemas dessas duas classes de métodos, conseguindo cumprir as exigências clássicas de controle. A obtenção do controle e de estimadores descentralizados, tanto com o algoritmo (utilizando uma nova propriedade da equação de Riccati - Geromel and Peres [10]) que trabalha com o sistema global, como com a decomposição em modos lentos e rápidos e posterior resolução de subproblemas bem mais simples, contribui na teoria de controle e estimação de sistemas dinâmicos, simplificando os cálculos, viabilizando a utilização de microcomputadores em problemas de grande porte e ainda, pelo modo com que foi concebida, satisfaz algumas exigências antes não cumpridas pelos outros métodos.

Dividimos este trabalho em três capítulos. O primeiro expõe resultados clássicos importantes para o entendimento dos dois próximos, o segundo trata da síntese de controladores descentralizados e o terceiro da síntese de estimadores de estado descentralizados. Tanto no segundo como no terceiro capítulos, o exemplo apresentado (como já comentamos) foi o con-

trole carga-frequência num sistema de potência, e como resolução numérica escolhemos o caso de duas áreas iguais interligadas.

As equações, assim como lemas, teoremas, etc., foram numeradas por capítulo. Quando nos referimos a uma equação que não seja do capítulo corrente, colocamos explicitamente o número do capítulo a que ela pertence.

Como apêndice deste trabalho, apresentamos os programas computacionais (em FORTRAN 10 para computador PDP-10 e FORTRAN 80 para o microcomputador Prológica S-700) utilizados para a resolução dos algoritmos apresentados nos capítulos II e III (como os problemas de síntese de controladores e de estimadores de estado são duais, foi utilizado um único programa para ambos os casos) e para simulação de um sistema linear (método de integração numérica Runge-Kutta). Os programas foram desenvolvidos num microcomputador Prológica S-700, e os casos envolvendo resolução de sistemas maiores foram executados no computador PDP-10 da Unicamp, assim como os casos de simulação com ruído gaussiano.

CAPÍTULO I

CONTROLE E ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

## Introdução

Neste primeiro capítulo expomos de maneira suscinta alguns resultados importantes para a compreensão deste trabalho.

A decomposição em modos rápidos e lentos (item I.1), considerando-se um sistema singularmente perturbado, permite uma abordagem mais simples para a obtenção de uma lei de controle que estabilize globalmente o sistema.

No item I.2, tratamos o problema linear quadrático (PLQ), ou seja, o problema de minimização de um custo (critério) quadrático associado a um sistema com dinâmica linear. Se considerarmos um horizonte de tempo infinito, a solução do PLQ em malha fechada está associada à solução de uma equação de Riccati (item I.3); expomos ainda resultados clássicos de estabilidade com o controle ótimo assim determinado.

No item seguinte (I.4) abordamos o problema de estimação de estado, com o resultado clássico obtido por Kalman-Bucy.

Finalmente, encerrando o capítulo, tratamos das restrições estruturais necessárias à implementação de controladores e filtros (item I.5).



### I.1. DECOMPOSIÇÃO EM MODOS RÁPIDOS E LENTOS

Consideremos um sistema linear invariante no tempo singularmente perturbado (Chow and Kokotovic [3])

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad , \quad x_1(0) = x_{10} \quad (1)$$

$$\mu \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad , \quad x_2(0) = x_{20} \quad (2)$$

onde  $\mu$  é um escalar positivo suficientemente pequeno, o estado  $x$  é formado pelos vetores  $x_1 \in R^{n_1}$  e  $x_2 \in R^{n_2}$  e o controle  $u \in R^m$ .

O sistema acima possui duas escalas de tempo, isto é, apresenta  $n_1$  autovalores de pequena magnitude  $O(1)$  e  $n_2$  autovalores de grande magnitude  $O(1/\mu)$ . Assim, podemos fazer uma aproximação, decompondo o sistema em dois subsistemas: um lento e um rápido. Num sistema assintoticamente estável, os modos rápidos (correspondentes aos autovalores de maior parte real) são importantes apenas durante um breve período de tempo, inicial. Após esse período, os modos rápidos podem ser desprezados, e o comportamento do sistema é aproximadamente descrito pelos modos lentos.

Desprezar os modos rápidos equivale a assumi-los como infinitamente rápidos, ou seja, fazer  $\mu \rightarrow 0$ . Sem os modos rápidos, o sistema fica

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1\bar{u} \quad , \quad \bar{x}_1(0) = x_{10} \quad (3)$$

$$0 = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + B_2\bar{u} \quad (4)$$

onde a barra indica a solução de (1)-(2) com  $\mu = 0$ . Assumindo  $A_{22}$  não-singular, podemos expressar  $\bar{x}_2$  como

$$\bar{x}_2 = -A_{22}^{-1}(A_{21}\bar{x}_1 + B_2\bar{u}) \quad (5)$$

que substituindo em (3) fornece

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x}_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)\bar{u} \quad (6)$$

e podemos definir o subsistema lento como

$$\dot{\bar{x}}_s = A_s x_s + B_s u_s, \quad x_s(0) = x_{10} \quad (7)$$

onde  $\bar{x}_1 = x_s$ ,  $\bar{u} = u_s$  e  $\bar{x}_2$  são as partes lentas das respectivas variáveis do sistema, e

$$A_s \stackrel{\Delta}{=} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \quad (8)$$

$$B_s \stackrel{\Delta}{=} B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \quad (9)$$

Para obtermos o subsistema rápido, assumimos que as variáveis lentas permanecem constantes no decorrer das rápidas transitórias, ou seja:  $\dot{\bar{x}}_2 = 0$  e  $\bar{x}_1 = x_s = \text{constante}$ . De (2) e (4) obtemos

$$\mu(\dot{x}_2 - \dot{\bar{x}}_2) = A_{22}(x_2 - \bar{x}_2) + B_2(u - u_s) \quad (10)$$

e definimos o subsistema rápido, com  $x_f = x_2 - \bar{x}_2$ ,  $u_f = u - u_s$ ,  $A_f \stackrel{\Delta}{=} A_{22}$  e  $B_f \stackrel{\Delta}{=} B_2$ :

$$\mu \dot{x}_f = A_f x_f + B_f u_f, \quad x_f(0) = x_{20} - \bar{x}_2(0) \quad (11)$$

Supondo que, a partir de um determinado critério, determinemos leis de controle lineares:

$$u_s = -K_s x_s \quad (12)$$

$$u_f = -K_f x_f \quad (13)$$

Podemos então obter um controle composto

$$u = u_s + u_f = -K_s x_s - K_f x_f \quad (14)$$

e escrevê-lo em termos das variáveis originais do sistema,  $x_1$  e  $x_2$ ,

$$u = -K_s x_1 - K_f x_2 + K_f \left[ -A_{22}^{-1} (A_{21} x_1 - B_2 K_s x_1) \right] \quad (15)$$

ou seja

$$u = - \left[ (I - K_f A_{22}^{-1} B_2) K_s + K_f A_{22}^{-1} A_{21} \right] x_1 - K_f x_2 \quad (16)$$

O lema a seguir estabelece as propriedades para o sistema realimentado com o controle composto dado por (16).

LEMA 1 : Se os controles

$$u_s = -K_s x_s \quad (17)$$

$$u_f = -K_f x_f \quad (18)$$

$$u = - \left[ (I - K_f A_{22}^{-1} B_2) K_s + K_f A_{22}^{-1} A_{21} \right] x_1 - K_f x_2 \quad (19)$$

são aplicados respectivamente aos subsistemas lento (7), rápido (11) e ao sistema global (1)-(2), e se  $A_f - B_f K_f$  é estável, então

$$x_1(t) = x_s(t) + O(\mu) \quad (20)$$

$$x_2(t) = -A_{22}^{-1} (A_{21} - B_2 K_s) x_s(t) + x_f(t) + O(\mu) \quad (21)$$

$$u(t) = u_s(t) + u_f(t) + O(\mu) \quad (22)$$

valem para todo  $t$  finito,  $t \geq 0$ . Se  $A_s - B_s K_s$  também for estável, então (20), (21) e (22) valem para todo  $t \in [0, \infty)$ .

PROVA : (Chow and Kokotovic [3])

## 1.2. PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO (PLQ)

É o problema de controle ótimo com função objetivo (critério) quadrática e dinâmica linear. No caso geral, para sistemas invarian-

tes no tempo, temos

$$\text{Min } \frac{1}{2} \int_0^T (x'Qx + u'Ru)dt + \frac{1}{2} x(T)'Sx(T) \quad (23)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad T \text{ fixo} \quad (24)$$

onde  $x \in R^n$  é o vetor de variáveis de estado,  $u \in R^m$  é o vetor de variáveis de controle (sobre o qual não há restrições),  $Q = Q' \geq 0$ ,  $R = R' > 0$  e  $S = S' \geq 0$ . Por hipótese, assumimos que o par  $(A, B)$  é controlável e que o par  $(A, Q^{1/2})$  é observável.

Escrevendo o Hamiltoniano, temos

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2} (x'Qx + u'Ru) + p'(Ax + Bu) \quad (25)$$

e aplicando o princípio do mínimo de Pontryagin (Geromel [8]), obtemos

$$\frac{\partial H(x, u, p)}{\partial u} = 0 \quad (26)$$

e portanto

$$u = -R^{-1}B'p \quad (27)$$

Em relação ao estado

$$\frac{\partial H(x, u, p)}{\partial x} + \dot{p} = 0 \quad , \quad p(T) = \frac{dg}{dx(T)} \quad (28)$$

obtemos (lembrando que, no caso,  $g(x(T)) = \frac{1}{2} x(T)'Sx(T)$ )

$$Qx + A'p + \dot{p} = 0 \quad , \quad p(T) = Sx(T) \quad (29)$$

E finalmente, em relação ao co-estado

$$\frac{\partial H(x, u, p)}{\partial p} - \dot{x} = 0, \quad x(0) = x_0 \quad (30)$$

obtemos

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (31)$$

que é a equação dinâmica do sistema. Agrupando as equações (27), (29) e (31), chegamos ao seguinte sistema diferencial com  $2n$  variáveis

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (32)$$

e duas condições de contorno, inicial no estado e final no co-estado, que são:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ Sx(T) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Definindo  $z' \triangleq [x' ; p']$ , temos

$$z(T) = \Phi(T)z(0) \quad (34)$$

onde  $\Phi(T) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  é a matriz de transição de estado do sistema descrito por (32). Particionando  $\Phi(T)$  em  $\Phi_{i,j}(T)$ ,  $i, j = 1, 2$ , temos

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(T) & \Phi_{12}(T) \\ \Phi_{21}(T) & \Phi_{22}(T) \end{bmatrix} \quad (35)$$

com (33) e (34) obtemos

$$\begin{bmatrix} -S & I \end{bmatrix} \Phi(T) z(0) = 0 \quad (36)$$

e portanto

$$p(0) = \left[ \Phi_{22}(T) - S\Phi_{12}(T) \right]^{-1} \left[ S\Phi_{11}(T) - \Phi_{21}(T) \right] x(0) \quad (37)$$

Note que  $p(0)$  obtido em (37) é tal que  $p(T) = Sx(T)$ . Agora, em (32), temos condições iniciais para as duas variáveis, tornando-a uma equação de simples solução numérica. As trajetórias ótimas e o controle ótimo ficam

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$u^*(t) = -R^{-1}B'p^*(t) \quad (39)$$

### 1.3. EQUAÇÃO DE RICCATI - ESTABILIDADE

Neste item, analisamos a solução do PLQ (problema linear quadrático) em malha fechada. Antes porém, vamos colocar o problema de controle ótimo (Geromel [8])

$$\text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T f(x, u) dt + g(x(T)) \quad (40)$$

$$\dot{x} = F(x, u) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (41)$$

e definir a função  $v(\xi, \tau) : R^n \rightarrow R$  dada pelo valor ótimo da função objetivo, considerando-se o estado inicial  $x(\tau) = \xi$ , correspondente ao instante inicial  $t = \tau$ :

$$v(\xi, \tau) \triangleq \text{Min}_{u(\cdot)} \int_{\tau}^T f(x, u) dt + g(x(T)) \quad (42)$$

$$\dot{x} = F(x, u) \quad ; \quad x(\tau) = \xi \quad (43)$$

É claro que a solução ótima de (40)-(41) fornece um valor ótimo da função objetivo que corresponde exatamente a  $v(x(0), 0)$ .

*Princípio de Otimalidade* : Seja  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$  uma trajetória ótima qual quer de (42)-(43), com  $(\xi, \tau) = (x(0), 0)$ . Então, para qualquer  $\tau \in [0, T]$  com  $(\xi, \tau) = (x(\tau), \tau)$ , a trajetória "restante", ou seja,  $x(t)$  para  $t \in [\tau, T]$ , é ótima para o problema que define  $v(\xi, \tau)$ .

Em outras palavras, se uma certa trajetória é ótima para um certo problema dado, então qualquer parte final desta mesma trajetória é também ótima para o problema cuja origem dos tempos corresponde ao estado inicial fixado sobre esta mesma trajetória.

Podemos agora determinar o comportamento no tempo de  $v(\xi, \tau)$  para  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$  dado. Para tanto, considerando  $\delta t$  um incremento infinitesimal no tempo, temos

$$v(x(t), t) = \text{Min}_{u(\cdot)} \{f(x, u)\delta t + v(x(t+\delta t), t+\delta t)\} \quad (44)$$

onde o primeiro termo da minimização corresponde ao valor do critério entre  $t$  e  $t + \delta t$ , enquanto o segundo termo corresponde ao valor do critério entre  $t + \delta t$  e  $T$ , observado que a condição inicial mudou para  $\xi = x(t + \delta t)$ .

Considerando  $v(\cdot, \cdot)$  de classe  $C^1$  em relação às variáveis envolvidas e fazendo  $\delta t \rightarrow 0$ , temos que

$$v(x(t+\delta t), t+\delta t) \approx v(x(t), t) + \delta t F(x, u), t+\delta t \quad (45)$$

e portanto

$$v(x(t+\delta t), t+\delta t) \approx v(x, t) + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} F(x, u)\delta t + \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \delta t \quad (46)$$

que substituída em (44), retirando-se da minimização os termos que não dependem explicitamente de  $u$ , fornece

$$\text{Min}_{u(\cdot)} \left\{ f(x, u) \delta t + \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} F(x, u) \delta t \right\} + \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \delta t = 0 \quad (47)$$

Dividindo (47) por  $\delta t$ , chegamos à Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \text{Min}_{u(\cdot)} \left\{ f(x, u) + \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} F(x, u) \right\} = 0 \quad (48)$$

Esta é uma equação diferencial às derivadas parciais que geralmente não admite solução em forma fechada. É possível resolvê-la numericamente, discretizando-a e utilizando técnicas de programação dinâmica, com a condição de contorno

$$U(x(T), T) = g(x(T)) \quad (49)$$

A equação (48) pode ser reescrita em função do Hamiltoniano, ficando

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \text{Min}_{u(\cdot)} H(x, u, \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}) = 0 \quad (50)$$

Seja, por hipótese,  $U(x, t)$  da forma

$$U(x, t) = \frac{1}{2} x' P(t) x \quad (51)$$

onde  $P(t) \in R^n \times R^n$  é uma matriz simétrica a determinar. Tratando o PLQ descrito em (23)-(24), com o Hamiltoniano dado por (25), obtemos da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (equação (50))

$$\frac{1}{2} x' \dot{P} x + \text{Min}_{u(\cdot)} \left\{ \frac{1}{2} (x' Q x + u' R u) + x' P (A x + B u) \right\} = 0 \quad (52)$$

com a condição terminal

$$U(x, T) = g(x(T)) = \frac{1}{2} x(T)' S x(T) \quad (53)$$



Fazendo a minimização indicada em (52), obtemos

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B'P(t)x = -K(t)x \quad (54)$$

que substituída em (52) fornece

$$\frac{1}{2} x' \left[ \dot{P}(t) + A'P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B'P(t) + Q \right] x = 0 \quad (55)$$

e como (55) deve ser verificada para  $\forall x \in R^n$ , então  $P(t)$  satisfaz

$$-\dot{P}(t) = A'P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B'P(t) + Q \quad (56)$$

com (53) dando a condição de contorno

$$P(T) = S \quad (57)$$

Esta equação (56)-(57) é conhecida como a Equação Matricial de Riccati, e pode ser resolvida numericamente por integração, partindo-se de  $t = T$  e "retrocedendo" até  $t = 0$ .

Consideremos agora um horizonte de tempo infinito ( $T \rightarrow \infty$ ), onde não temos custo terminal associado (não faz sentido teórico), e utilizemos novamente a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Seja  $U(x)$  dada por

$$U(x) = \frac{1}{2} x'Px \quad (58)$$

onde  $P \in R^n \times R^n$  é uma matriz simétrica a determinar, porém constante em relação ao tempo. A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman fornece (ver equações (50)-(54)):

$$u(t) = -R^{-1}B'P x(t) = -Kx(t) \quad (59)$$

e portanto

$$\frac{1}{2} x' \left[ A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q \right] x = 0 \quad (60)$$

Como (60) deve valer  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (61)$$

que é a Equação Estacionária de Riccati. A função  $U(x_0)$ , dada por (42) em termos da função objetivo, fica

$$U(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru) dt \quad (62)$$

onde  $u(t)$  é dado por (59), e o sistema realimentado é descrito por

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad x(0) = x_0 \quad (63)$$

Podemos então reescrever (62) como

$$U(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x_0' e^{(A-BK)'t} (Q + K'RK) e^{(A-BK)t} x_0 dt \quad (64)$$

LEMA 2 : Qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \neq 0$ , temos  $U(x_0) > 0$

PROVA : Por absurdo. Como  $U(x_0) \geq 0$ , suponhamos que  $\exists x_0 \neq 0$  tal que  $U(x_0) = 0$ . Por (64), então teríamos

$$K e^{(A-BK)t} x_0 = 0, \quad \forall t \quad (65)$$

e também

$$Q^{1/2} e^{(A-BK)t} x_0 = 0, \quad \forall t \quad (66)$$

Mas (65) implica que  $u(t) = 0 \quad \forall t$ , e portanto devemos ter

$$Q^{1/2} e^{At} x_0 = 0, \quad \forall t \quad (67)$$

Como por hipótese o par  $(A, Q^{1/2})$  é observável, (67) só é possível para  $x_0 = 0$ , o que contradiz a suposição inicial. Portanto,  $U(x_0) > 0 \quad \forall x_0 \neq 0$ .

Note que, como  $v(x)$  é dada por (58), temos

$$v(x_0) = \frac{1}{2} x_0' P x_0 > 0 \quad (68)$$

e portanto a matriz  $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , simétrica, solução da equação de Riccati dada por (61), é definida positiva.

TEOREMA 3 : Se a matriz de ganho  $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  satisfaz

$$K = R^{-1} B' P \quad (69)$$

onde  $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati

$$A' P + P A - P B R^{-1} B' P + Q = 0 \quad (70)$$

então o sistema dinâmico em malha fechada

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (71)$$

é assintoticamente estável.

PROVA : Consideremos como função de Lyapunov

$$v(x) = x' P x \quad (72)$$

e calculemos sua derivada temporal em relação a uma trajetória genérica do sistema em malha fechada

$$\dot{v} = x' [(A - BK)' P + P(A - BK)] x \quad (73)$$

que pode ser escrita como (usando (70))

$$\dot{v} = -x' [Q + K' R K] x \quad (74)$$

Como  $Q \geq 0$  e  $R > 0$ , temos

$$\dot{v} \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (75)$$

o que prova a estabilidade do sistema em malha fechada. Para provar sua estabilidade assintótica, basta notar que não existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \neq 0$ , tal que  $\dot{v}(x(t)) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , pois o par  $(A, Q^{1/2})$  é por hipótese observável (Geromel and Yamakami [12]). Concluindo,  $v(x)$  dado por (72) é uma função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada.

#### 1.4. OBSERVADORES DE ESTADO - FILTRO DE KALMAN-BUCY

Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (76)$$

$$y = Cx \quad (77)$$

onde  $x \in R^n$  é o vetor de variáveis de estado,  $u \in R^m$  é o vetor de variáveis de controle e  $y \in R^r$  é o vetor de variáveis de saída. O objetivo aqui é reconstruir o vetor de estado  $x$ , ou encontrar aproximações a partir da variável observada (Kwakernaak and Sivan [17]).

DEFINIÇÃO 1 : O sistema n-dimensional

$$\dot{\tilde{x}} = M \tilde{x} + N y + V u \quad (78)$$

é um observador de ordem completa do sistema n-dimensional (76)-(77) se  $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$  implica que

$$\tilde{x}(t) = x(t) \quad , \quad t \geq t_0 \quad (79)$$

para qualquer  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

TEOREMA 4 : O sistema dado pela equação (78) é um observador para o sistema (76)-(77) se e somente se

$$M = A - GC \quad (80)$$

$$N = G \quad (81)$$

$$V = B \quad (82)$$

onde  $G$  é uma matriz arbitrária. Como resultado, observadores de ordem completa têm a seguinte estrutura:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + G[y - C\tilde{x}] \quad (83)$$

PROVA : Subtraindo (78) de (76), e levando em conta (77), temos

$$\dot{\bar{x}} - \dot{\hat{x}} = [A - NC]x - M\hat{x} + [B - V]u \quad (84)$$

e imediatamente vemos que  $x(t) = \hat{x}(t)$  para  $t \geq t_0$ , para todo  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$  implica em (80)-(82).

Para provar a suficiência, vemos que, se (80)-(82) é satisfeito, então

$$\dot{\bar{x}} - \dot{\hat{x}} = [A - GC] (x - \hat{x}) \quad (85)$$

o que mostra que se  $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ , então  $x(t) = \hat{x}(t)$  para todo  $t \geq t_0$ , para  $\forall u(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

A expressão (83) é obtida substituindo-se (80)-(82) em (78).

Portanto, um observador de ordem completa consiste simplesmente de um modelo do sistema com uma variável extra que é um termo proporcional à diferença  $y - \hat{y}$ , onde  $\hat{y} = C\hat{x}$  é a reconstrução da variável observada. Definimos  $G$  como sendo a matriz de ganho do observador. Reescrevendo (83), temos

$$\dot{\hat{x}} = [A - GC]\hat{x} + Bu + Gy \quad (86)$$

e portanto a estabilidade do observador depende do comportamento de  $A - GC$ .

TEOREMA 5 : Considere o observador dado por (83) para o sistema (76)-(77). Então, o erro de reconstrução

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (87)$$

satisfaz a equação diferencial

$$\dot{e}(t) = [A - GC] e(t) \quad (88)$$

e tem a propriedade  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  para todo  $e(t_0)$ , se e somente se o observador for assintoticamente estável.

PROVA : A equação (88) segue imediatamente de (85). Comparando (88) e (86) vemos que a estabilidade do observador e o comportamento assintótico do erro são ambos determinados pelos pólos da matriz  $(A - GC)$ . Portanto, cla-

ramente vemos que o erro de reconstrução  $e(t)$  tende a zero, independente do seu valor inicial, se e somente se o observador for assintoticamente estável.

Assim, o projeto de um observador deve determinar a matriz de ganho  $G$  tal que a equação diferencial do erro de reconstrução  $e(t)$  seja assintoticamente estável. Para isso, temos que localizar adequadamente os valores característicos de  $(A - GC)$  (chamados pólos do observador).

Partiremos agora para uma abordagem estocástica do problema do observador, fornecendo métodos para a escolha do ganho ótimo  $G$ . Assumimos as equações do sistema como

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} + \omega_1 \quad (89)$$

$$y = C\bar{x} + \omega_2 \quad (90)$$

onde  $\omega_1$  é o ruído de excitação do estado e  $\omega_2$  é o ruído de observação (ou de medida). Assumimos  $\omega_1$  e  $\omega_2$  como ruídos brancos não-correlacionados com intensidades  $V_1$  e  $V_2$ , ou seja

$$E\{\omega_1 \omega_1^t\} = V_1 \geq 0 \quad (91)$$

$$E\{\omega_2 \omega_2^t\} = V_2 \geq 0 \quad (92)$$

onde  $V_2 > 0$  indica que todas as componentes da variável observada são afetadas pelo ruído branco (neste caso, dizemos que o problema de reconstrução de estado é não-singular).

Finalmente, denotamos

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0, \quad E\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^t\} = W_0 \quad (93)$$

e assumimos que o estado inicial  $x(t_0)$  é estatisticamente independente de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

Suponha agora que um observador de ordem completa da forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (94)$$

é associado ao sistema (89)-(90). O erro de reconstrução é dado por  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Então, o problema de determinar a matriz  $G$  e a condição inicial  $\hat{x}(t_0)$  de tal forma que se minimize (em qualquer instante de tempo)

$$E \{e(t)' Y e(t)\} \quad (95)$$

é chamado Problema do Observador Ótimo Não-Singular. A expressão (95) é o erro quadrático médio de reconstrução (é uma medida de quão bem o observador reconstrói o estado), e  $Y$  é uma dada matriz de ponderação, simétrica e definida positiva.

Este problema do observador ótimo não-singular, com ruídos de excitação de estado e de observação não correlacionados, foi resolvido pela primeira vez por Kalman e Bucy em 1961 [14].

A equação diferencial para o erro de reconstrução  $e(t)$  fica (subtraindo (94) de (89) e usando (90))

$$\dot{e}(t) = [A - GC]e(t) + w_1 - Gw_2 \quad (96)$$

$$e(t_0) = e_0 = x(t_0) - \hat{x}(t_0) \quad (97)$$

Definindo  $\tilde{W}(t)$  como sendo a matriz de co-variância de  $e(t)$ , e a média de  $e(t)$  como  $\bar{e}(t)$

$$E \{e(t)\} = \bar{e}(t) \quad (98)$$

$$E \{[e(t) - \bar{e}(t)][e(t) - \bar{e}(t)]'\} = \tilde{W}(t) \quad (99)$$

então

$$E \{e(t)e(t)'\} = \bar{e}(t) \bar{e}(t)' + \tilde{W}(t) \quad (100)$$

e podemos expressar o erro quadrático médio como

$$E \{e(t)' Y e(t)\} = \bar{e}(t)' Y \bar{e}(t) + \text{Tr}[\tilde{W}(t)Y] \quad (101)$$

Obviamente, o primeiro termo da equação (101) é mínimo quando  $\bar{e}(t) = 0$ ; isto pode ser conseguido fazendo-se  $\bar{e}(t_0) = 0$ , uma vez que  $\bar{e}(t)$  obedece à equação homogênea

$$\dot{\bar{e}}(t) = [A - GC] \bar{e}(t) \quad , \quad t \geq t_0 \quad (102)$$

e para fazer  $\bar{e}(t_0) = 0$  basta escolher  $\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$ .

Como o segundo termo da equação (101) não depende de  $\bar{e}(t)$ , pode então ser minimizado separadamente. Obtemos então a seguinte equação diferencial para  $\tilde{W}(t)$  (Kwakernaak and Sivan [17])

$$\dot{\tilde{W}}(t) = [A - GC]\tilde{W}(t) + \tilde{W}(t)[A - GC]' + v_1 + GV_2G' \quad (103)$$

$$\tilde{W}(t_0) = W_0 \quad (104)$$

associada ao problema de minimização

$$\text{Mín}_G \text{Tr} [\tilde{W}(t)Y] \quad (105)$$

No caso estacionário ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ), temos  $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \tilde{W}(t) = W$  que é constante no tempo, e a equação (103) fica com seu lado esquerdo igual a zero. Podemos então reescrever (105) na forma

$$\text{Mín}_G \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} e^{(A-GC)t} [v_1 + GV_2G'] e^{(A-GC)'t} dt Y \right\} \quad (106)$$

Este problema pode ainda ser rearranjado como um Problema Linear Quadrático (lembrando que o traço comuta com a integral, e também que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ) na forma:

$$\text{Mín}_G J(G) = \int_0^{\infty} \text{Tr}\{(v_1 + GV_2G')X(t)\}dt \quad (107)$$

$$\dot{X} = (A - GC)'X + X(A - GC) \quad , \quad X(0) = Y \quad (108)$$



Obs. : Note que em (107)-(108) trata-se de um problema de otimização matricial ( $X \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ).

Escrevendo o Hamiltoniano

$$H(X, W, G) = \text{Tr}\{(V_1 + GV_2G')X\} + \text{Tr}\{W'[(A - GC)'X + X(A - GC)]\} \quad (109)$$

e aplicando as condições de estacionariedade (Geromel and Bernussou [9]), obtemos

$$(A - GC)W + W(A - GC)' + V_1 + GV_2G' = 0 \quad (110)$$

$$(A - GC)'X + X(A - GC) - \dot{X} = 0, \quad X(0) = Y \quad (111)$$

$$\frac{dJ(G)}{dG} = 2 \int_0^{\infty} X[GV_2 - WC'] dt \quad (112)$$

Chamando  $\bar{X} \triangleq \int_0^{\infty} X(t) dt$ , e fazendo a estacionariedade de

(112), temos

$$2 \bar{X}[GV_2 - WC'] = 0 \quad (113)$$

onde  $\bar{X}$  é solução de

$$(A - GC)' \bar{X} + \bar{X}(A - GC) + Y = 0 \quad (114)$$

Como  $Y > 0$ , e com  $(A - GC)$  assintoticamente estável, podemos garantir que  $\bar{X}$  é definida positiva. Assim, (113) implica em

$$G = WC'V_2^{-1} \quad (115)$$

que substituída em (110) fornece a equação matricial de Riccati

$$AW + WA' + V_1 - WC'V_2^{-1}CW = 0 \quad (116)$$

Com o ganho  $G$  dado por (115) e  $W$  solução de (116), a matriz de co-variância do erro de reconstrução, fica (pela equação (100))

$$E\{e(t) e(t)'\} = W \quad (117)$$

e o erro quadrático médio

$$E\{e(t)'Y e(t)\} = \text{Tr}[W Y] \quad (118)$$

A solução estacionária  $W$  da equação de Riccati (116) independente de  $W_0$ , e é a única solução definida positiva.

O observador ótimo aqui obtido é conhecido como Filtro de Kalman-Bucy. Em seu trabalho ([14]), é provado que este filtro é o estimador linear de mínimo erro médio quadrático. Pode também ser provado (Jazwinski [13]) que se o estado inicial  $x(t_0)$  é gaussiano, e se o ruído de excitação de estado  $w_1$  e o de observação  $w_2$  são gaussianos, brancos e não correlatos então o filtro de Kalman-Bucy produz um estimador  $\hat{x}(t)$  que tem o mínimo erro médio quadrático entre qualquer estimador que possa ser obtido processando-se os dados  $y(t)$  e  $u(t)$ .

O observador ótimo promove um compromisso entre a velocidade de reconstrução do estado e a imunidade ao ruído de observação. Este balanço é determinado pelas magnitudes das intensidades dos ruídos brancos,  $V_1$  e  $V_2$ . Pode ser alterado, por exemplo, mantendo-se  $V_1$  constante e fazendo-se  $V_2 = \rho M$ , onde  $M$  é uma matriz constante simétrica definida positiva, e  $\rho$  é um escalar positivo que pode variar. Diminuindo-se  $\rho$ , aumentamos a velocidade de reconstrução do estado, pois menos atenção é dada à filtragem, e vice-versa.

## I.5. RESTRIÇÕES ESTRUTURAIS NECESSÁRIAS PARA IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES E FILTROS (ESTIMADORES DE ESTADO)

### I.5.1. Controladores

Consideremos um sistema dinâmico linear invariante no tem-

po

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (119)$$

$$y = Cx \quad (120)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o controle e  $y \in \mathbb{R}^r$  é a saída. Queremos determinar uma matriz constante de realimentação  $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  de forma que a lei de controle  $u = -Kx$  estabilize assintoticamente (119)-(120) e minimize a função objetivo

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru) dt \quad (121)$$

onde  $Q = Q' \geq 0$  e  $R = R' > 0$ . Assumimos que o par  $(A, B)$  é controlável e que o par  $(A, C)$  é observável. Como já vimos nos itens 1.2 e 1.3 deste capítulo, o PLQ (119)-(121) tem solução ótima dada por

$$u(t) = -K x(t) \quad (122)$$

onde a matriz de realimentação de estado ótima  $K$  satisfaz

$$K = R^{-1}B'P$$

e  $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (123)$$

Mas, por questões de implementação prática, é geralmente desejável que a matriz de ganho  $K$  satisfaça determinadas restrições, do tipo  $K \in \Omega$ , onde

$$\Omega \triangleq \{K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n / F(K) = 0\} \quad (124)$$

e  $F(K)$  é uma função matricial.

### I.5.1.1. Realimentação de saída

No caso em que temos acesso apenas a algumas saídas, e não a todas as variáveis de estado, precisaríamos obter um ganho  $K$  "projetado" no espaço das variáveis de saída. Teríamos, então (Geromel and Peres [11])

$$F(K) = K(I - C'(C C')^{-1}C) \quad (125)$$

e com  $K \in \Omega$  e  $F(K)$  dado por (125), temos

$$K = K C'(C C')^{-1}C = S C \quad (126)$$

com  $S \triangleq K C'(C C')^{-1}$ . Com o controle  $u(t)$  dado por (122), obtemos

$$u(t) = -S C x(t) = -S y(t) \quad (127)$$

ficando caracterizada  $S \in R^m \times R^r$  como matriz de realimentação de saída.

### I.5.1.2. Controle descentralizado

Quando desejamos obter um controle descentralizado, ou seja, obter uma matriz de ganho  $K$  do tipo bloco diagonal, de modo que o sistema global fique particionado em vários subsistemas, e o controle para cada um deles seja função apenas de suas próprias variáveis, devemos ter:

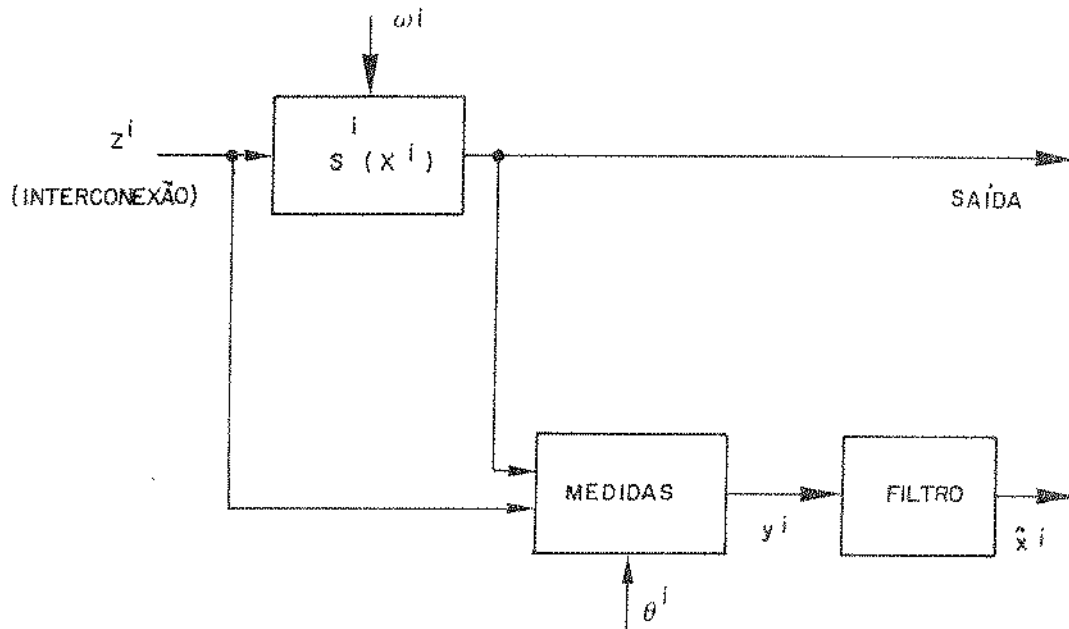
$$F(K) = K - \text{bloco diag} \{K^1, K^2, \dots, K^N\} \quad (128)$$

com  $K^i \in R^{m^i} \times R^{n^i}$ ,  $\sum_{i=1}^N m^i = m$  e  $\sum_{i=1}^N n^i = n$ . Então, com  $K \in \Omega$  e  $F(K)$  dado por (128), teríamos  $K$  necessariamente bloco diagonal, fornecendo

$$u^i(t) = -K^i x^i(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (129)$$

### I.5.2. Filtro Descentralizado de Kalman - Estimadores de Estado

Consideremos o problema de estimação de estado descentralizado de um sistema linear invariante no tempo (Geromel and Bernussou [9]).



*Fig. 1* - Esquema do  $i$ -ésimo subsistema e o filtro descentralizado.

O comportamento dinâmico dos subsistemas e suas saídas é descrito por

$$\dot{x}^i = A^i x^i + D^i z^i + \omega^i \quad (130)$$

$$\dot{z}^i = \phi^i x = \sum_{j=1}^N \phi^{ij} x^j \quad (131)$$

$$y^i = C^i x^i + E^i z^i + \theta^i \quad (132)$$

onde  $x^i \in R^{n^i}$ ,  $y^i \in R^{r^i}$ ,  $z^i \in R^{q^i}$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N n^i = n$ ,

$\sum_{i=1}^N r^i = r$ ,  $\sum_{i=1}^N q^i = q$  e o estado inicial é uma variável estocástica com média  $\bar{x}_0^i$  e matriz de co-variância  $X_0^i$ . Assumimos que  $x_0^i$  é estatisticamente independente dos ruídos brancos  $\omega^i$  e  $\theta^i$ , e estes ruídos são tais que

$$E\{\omega^i\} = E\{\theta^i\} = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (133)$$

$$E\{\omega^i \omega^{i'}\} = Q^i \geq 0, \quad E\{\theta^i \theta^{i'}\} = R^i > 0, \quad i=1, \dots, N \quad (134)$$

Considerando o  $i$ -ésimo filtro como sendo o filtro clássico (Kwakernaak and Sivan [17]; analisado no item I.4 deste mesmo capítulo), conectado ao subsistema  $i$ , temos

$$\dot{\hat{x}}^i = A^i \hat{x}^i + G^i (y^i - C^i \hat{x}^i), \quad \hat{x}^i(t_0) = \bar{x}_0^i \quad (135)$$

com o erro de reconstrução dado por

$$e^i(t) = x^i(t) - \hat{x}^i(t) \quad (136)$$

Com (130)-(132) e (135)-(136), podemos chegar a

$$\dot{e}^i(t) = (A^i - G^i C^i) e^i(t) + (D^i - G^i E^i) \phi^i \int_0^t x \, dt + \omega^i - G^i \theta^i \quad (137)$$

$$e^i(t_0) = x^i(t_0) - \bar{x}_0^i \quad (138)$$

Note que, a partir de (137), se exigirmos que o ganho  $G^i$  seja tal que

$$(D^i - G^i E^i) \phi^i = 0 \quad (139)$$

recuiremos no filtro clássico (item I.4) e não teremos mais acoplamento

entre os  $N$  subsistemas, podendo resolvê-los separadamente. Portanto, devemos exigir  $G^i \in \Omega^i$ , onde

$$\Omega^i \triangleq \left\{ G^i \in \mathbb{R}^{n^i} \times \mathbb{R}^{r^i} / (D^i - G^i E^i) \phi^i = 0 \right\} \quad (140)$$

e, analogamente aos controladores com restrições estruturais, teríamos as funções matriciais  $F^i(K^i) = 0$ , com

$$F^i(G^i) = (D^i - G^i E^i) \phi^i, \quad i=1, \dots, N \quad (141)$$

e  $G^i \in \Omega^i$  garantindo desacoplamento e estimadores não-polarizados.

## *Conclusões*

Procuramos apresentar de maneira simples e sucinta os conceitos e resultados clássicos necessários para a compreensão dos capítulos II e III.

Nos itens I.1 a I.4, expomos resultados teóricos consagrados como a decomposição em modos rápidos e lentos, a resolução do problema linear quadrático, a equação de Riccati, o filtro de Kalman. No item I.5, comentamos as restrições estruturais que se apresentam na implementação de controladores e filtros.

Podemos agora, nos próximos capítulos, partir para a abordagem de assuntos específicos deste trabalho, que são: síntese de controladores e estimadores de estado descentralizados.



CAPÍTULO II

SÍNTESE DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS

## *Introdução*

Neste capítulo, propomos um novo método para determinação de controladores descentralizados para sistemas dinâmicos interconectados.

No item II.1, caracterizamos os sistemas lineares interligados. No item seguinte (II.2), expomos o método de síntese de controle descentralizado desenvolvido, que manipula globalmente o sistema, e baseia-se numa propriedade da equação de Riccati.

Caminhando em direção a uma maior descentralização, expomos um método de obtenção de controle descentralizado que utiliza determinadas propriedades da interconexão (item II.3), e no item II.4 aplicamos esse método associado à decomposição em modos rápidos e lentos.

O item II.5 é a aplicação dos métodos apresentados no controle carga-frequência de sistemas de potência interligados. Damos uma atenção especial ao problema de estimação de demanda.

O último item deste capítulo (II.6) é um exemplo numérico, com duas áreas iguais interligadas, e sua simulação.

## II.1. CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS INTERCONECTADOS LINEARES

Consideraremos sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, definidos por N subsistemas interligados, descritos por

$$\dot{x}^i = A^i x^i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N A^{ij} x^j + B^i u^i \quad (1)$$

$$y^i = C^i x^i, \quad i=1, \dots, N \quad (2)$$

onde  $x^i \in \mathbb{R}^{n^i}$  são os vetores de estado,  $u^i \in \mathbb{R}^{m^i}$  são os vetores de controle e  $y^i \in \mathbb{R}^{r^i}$  são os vetores de saída. Ainda:  $\sum_{i=1}^N n^i = n$ ,  $\sum_{i=1}^N m^i = m$  e

$$\sum_{i=1}^N r^i = r.$$

Por hipótese, os pares  $(A^i, B^i)$  são controláveis e os pares  $(A^i, C^i)$  são observáveis. As matrizes  $A^{ij}$  definem a interconexão dos subsistemas  $i$  com os demais subsistemas.

## II.2. DETERMINAÇÃO DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS VIA MANIPULAÇÃO DO SISTEMA GLOBAL

Consideremos o PLQ com horizonte de tempo infinito, já descrito e analisado nos itens I.2 e I.3:

$$\text{Min } J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , os pares  $(A, B)$  controlável e  $(A, Q^{1/2})$  observável. O

controle ótimo é dado por

$$u^*(t) = -K^* x(t) \quad , \quad K^* = R^{-1} B' P^* \quad (5)$$

onde  $P^*$  é a solução simétrica definida positiva da equação estacionária de Riccati

$$A'P^* + P^*A - P^*BR^{-1}B'P^* + Q = 0 \quad (6)$$

e a trajetória ótima é a solução do sistema homogêneo invariante no tempo

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B'P^*)x = A_c x \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

com  $\Lambda(A_c) \subset C^-$ . O valor ótimo do critério fica

$$J^* = \frac{1}{2} x_0' P^* x_0 \quad (8)$$

O próximo teorema resume uma importante propriedade da equação de Riccati (Geromel and Peres [10]).

TEOREMA 1 : Se a matriz de ganho  $K \in R^m \times R^n$  satisfaz

$$K + L = R^{-1} B' P \quad (9)$$

onde  $L \in R^m \times R^n$  é uma matriz arbitrária e  $P \in R^n \times R^n$  é a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q + L'RL = 0 \quad (10)$$

então a matriz  $(A - BK)$  é assintoticamente estável.

PROVA : Dado que  $P$  é simétrica e definida positiva, vamos considerar como função de Lyapunov

$$v(x) = x'Px \quad (11)$$

Sua derivada no tempo ao longo de qualquer trajetória do sistema em malha fechada é dada por

$$\dot{v}(x) = x' \{ (A - BK)'P + P(A - BK) \} x \quad (12)$$

que, usando-se (9), fornece

$$\dot{v}(x) = x' \{ A'P + PA - PBR^{-1}B'P - PBR^{-1}B'P + L'B'P + PBL \} x \quad (13)$$

que, com (10), fica

$$\dot{v}(x) = x' \{ -Q - L'EL - PBR^{-1}B'P + L'B'P + PBL \} x \quad (14)$$

que pode ser escrita na forma

$$\dot{v}(x) = x' \{ -Q - (R^{-1}B'P - L)'R(R^{-1}B'P - L) \} x \quad (15)$$

Novamente usando (10) chegamos a

$$\dot{v}(x) = -x' \{ Q + K'RK \} x \leq -x'Qx \quad (16)$$

e portanto  $\dot{v}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Isto prova a estabilidade do sistema em malha fechada. Para provar sua estabilidade assintótica, basta notar que *não existe*  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\dot{v}(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$ , pois assumimos o par  $(A, Q^{1/2})$  como observável.

Como podemos notar, este teorema generaliza a já conhecida (itens I.2 e I.3) propriedade de estabilidade da solução ótima do PLQ. Como a matriz  $L$  pode ser qualquer, escolhendo-a adequadamente podemos fazer com que o ganho  $K$  satisfaça restrições do tipo  $F(K) = 0$  (discutidas no item I.5), e assim obtermos, por exemplo, controladores descentralizados, realimentação de saída, etc.

**TEOREMA 2** : Suponha que  $K \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  satisfaça as condições do Teorema 1. Então, o índice de desempenho, resultado da minimização expressa na equação (3), é dado por

$$J = \frac{1}{2} x(0)'Px(0) \geq \frac{1}{2} x(0)'P^*x(0) = J^* \quad (17)$$

**PROVA** : Primeiramente, vamos provar que  $J = \frac{1}{2} x(0)'Px(0)$  onde  $J$  é o índice

de desempenho, resultado da minimização expressa em (3). Com a lei de controle  $u = -Kx$ , temos

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x'(Q + K'RK)x dt \quad (18)$$

que com a equação (16) fica

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{v}(x(t)) dt \quad (19)$$

e portanto

$$J = \frac{1}{2} v(x(0)) = \frac{1}{2} x(0)'Px(0) \quad (20)$$

Para provar que  $J \geq J^*$ ,  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , consideremos a equação de Riccati

$$A'W(\eta) + W(\eta)A - W(\eta)BR^{-1}B'W(\eta) + Q + \eta L'RL = 0 \quad (21)$$

onde  $\eta \in [0, 1]$ . É claro que  $P = W(1)$  e  $P^* = W(0)$ . Tomando a derivada da equação (21) com respeito a  $\eta$ , obtemos

$$(A - BR^{-1}B'W(\eta))' \frac{dW(\eta)}{d\eta} + \frac{dW(\eta)}{d\eta} (A - BR^{-1}B'W(\eta)) + L'RL = 0 \quad (22)$$

Como  $L'RL \geq 0$ , e a matriz  $(A - BR^{-1}B'W(\eta))$  é assintoticamente estável, o resultado garante que

$$\frac{dW(\eta)}{d\eta} \geq 0 \quad (23)$$

Conseqüentemente,  $W(\eta_1) \geq W(\eta_2)$  sempre que  $\eta_1 \geq \eta_2$ . Escolhendo  $\eta_1 = 1$  e  $\eta_2 = 0$ , temos

$$P = W(1) \geq W(0) = P^* \quad (24)$$

e fica provado o teorema.

É importante frisar que a matriz de ganho  $K$  não depende da condição inicial  $x(0)$ . Pelo Teorema 2, vemos que o valor do critério  $J$  depende de  $x(0)$ ; se considerarmos a condição inicial como uma variável aleatória gaussiana, com média zero e matriz de co-variância igual à identidade,

obtemos

$$J \triangleq \frac{1}{2} \text{Tr}(P) \quad (25)$$

Como um caso especial, o controle ótimo centralizado  $K^*$  é obtido fazendo-se  $L = 0$  nas equações (9) e (10), e, usando o Teorema 2 podemos concluir que

$$J \geq J^* \quad , \quad \forall L \neq 0 \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \quad (26)$$

Definimos o grau de sub-otimalidade por

$$\gamma \triangleq \frac{\text{Tr}(P) - \text{Tr}(P^*)}{\text{Tr}(P^*)} \geq 0 \quad (27)$$

Podemos agora apresentar o procedimento numérico utilizado para resolver os problemas de controle descentralizado (item I.5.1.2) e de realimentação de saída (item I.5.1.1).

#### ALGORITMO 1

*PASSO 1* : Fixe o índice de iterações  $\ell = 0$  e faça  $L_\ell = 0$

*PASSO 2* : Resolva a equação de Riccati para  $P_\ell$

$$A'P_\ell + P_\ell A - P_\ell B R^{-1} B' P_\ell + Q + L_\ell' R L_\ell = 0$$

$$\text{Se } \ell = 0, \text{ calcule } J^* = \frac{1}{2} \text{Tr}(P_0)$$

*PASSO 3* : Calcule  $L_{\ell+1} = F(R^{-1} B' P_\ell)$  onde

$$F(K) = K(I - C'(C C')^{-1} C)$$

para Realimentação de Saída ou

$$F(K) = K - \text{bloc diag} \{K^1, K^2, \dots, K^N\}$$

no caso de Controle Descentralizado.

*PASSO 4* : Se  $\|L_{\ell+1} - L_{\ell}\| < \epsilon$ , sendo  $\epsilon$  real positivo suficientemente pequeno, vá para o *PASSO 5*. Caso contrário, faça  $\ell = \ell + 1$  e volte ao *PASSO 2*.

*PASSO 5* : Calcule  $J = \frac{1}{2} \text{Tr}(P_{\ell})$  e  $K \in \Omega$  ( $\Omega$  definido na equação I.(124))

fazendo

$$K = R^{-1}B'P_{\ell} - L_{\ell+1}$$

O grau de sub-otimalidade é dado por

$$\gamma = \frac{J - J^*}{J^*}$$

### Comentários

- (1) A eficiência do algoritmo depende principalmente do desempenho do método usado para resolver a equação de Riccati do *PASSO 2*. Utilizamos o método que julgamos ser o melhor da literatura (Kleinman [16]).
- (2) É esperado que o procedimento iterativo convirja, uma vez que todas as funções são "bem comportadas" (os exemplos tratados atestam essa convergência). Na convergência, temos

$$A'P_{\ell} + P_{\ell}A - P_{\ell}BR^{-1}B'P_{\ell} + Q_{\ell} = 0 \quad (28)$$

onde  $Q_{\ell} \triangleq Q + L_{\ell}'RL_{\ell}$  é uma matriz simétrica semi-definida positiva. Nesse sentido, podemos enxergar o método como um procedimento linear-quadrático que realiza iterações com vistas a obter uma matriz de ponderação de estado tal que  $K \in \Omega$ . Porém, é claro que  $Q_{\ell} \geq Q$  e, do Teorema 2,  $J \geq J^*$ . É o "preço" a ser pago para se obter o controle ótimo com a estrutura desejada.

- (3) Lembremos que a matriz de realimentação  $K$ , calculada no *PASSO 5*, é factível e independente da condição inicial  $x(0)$ . Lembremos também que



o sistema em malha fechada é assintoticamente estável (Teorema 1).

### II.3. DETERMINAÇÃO DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS VIA UMA PROPRIEDADE DA MATRIZ DE INTERCONEXÃO

Consideremos o sistema interconectado descrito no item II.1. Nosso objetivo é determinar controladores locais (para cada subsistema) da forma

$$u^i = -K^i x^i, \quad i=1, \dots, N \quad (29)$$

que estabilizem assintoticamente o sistema global. Apesar das hipóteses de controlabilidade e observabilidade dos pares  $(A^i, B^i)$  e  $(A^i, C^i)$ , nem sempre é possível encontrar os ganhos  $K^i$  que realizem esse objetivo (podemos constatar isso por alguns contra-exemplos: Aoki [1], Geromel [7]). Assim, é necessário estabelecer algumas hipóteses adicionais sobre as matrizes de interconexão  $A^{ij}$  da equação (1) (Geromel and Yamakami [12]). É preciso que, para quaisquer  $i$  e  $j$  subsistemas, a matriz  $A^{ij}$  seja fatorada na forma:

$$A^{ij} = B^i \Psi^{ij} C^j, \quad i \neq j=1, \dots, N \quad (30)$$

Assim, o sistema global em malha fechada fica

$$\dot{x}(t) = (A + B \Psi C - BK)x(t) \quad (31)$$

onde

$$A = \text{bloc diag} \{A^1, \dots, A^N\}, \quad B = \text{bloc diag} \{B^1, \dots, B^N\},$$

$$C = \text{bloc diag} \{C^1, \dots, C^N\}, \quad K = \text{bloc diag} \{K^1, \dots, K^N\}$$

e a matriz de interconexão  $\Psi \in R^m \times R^r$  é definida como

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & \psi^{12} & \dots & \psi^{1N} \\ \psi^{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \psi^{N1} & \dots & & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \psi^1 & \vdots & & \vdots \\ \psi^2 & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & \vdots \\ \psi^N & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (32)$$

O teorema a seguir prova que sistemas com esta propriedade (equação (30)) podem ser estabilizados por uma estrutura descentralizada de controle. É importante notar que nesta classe de sistemas lineares, a observabilidade e a controlabilidade dos pares  $(A, C)$  e  $(A, B)$  garantem a observabilidade e a controlabilidade dos pares  $(A + B\Psi C, C)$  e  $(A + B\Psi C, B)$  para qualquer matriz de interconexão  $\Psi$  (Wonham [19]).

TEOREMA 3 : Sejam  $Q$  e  $R$  matrizes simétricas definidas positivas ( $Q = Q' > 0$ ,  $R = R' > 0$ ). Então

$$K = R^{-1}B'P \quad (33)$$

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'QC = 0 \quad (34)$$

fornecem-nos um sistema global assintoticamente estável (equação (31)) se  $Q$  e  $R$  satisfizerem a restrição matricial

$$Q - \Psi'R\Psi > 0 \quad (35)$$

PROVA : Por hipótese o par  $(A, B)$  é controlável e o par  $(A, C)$  é observável. Então, a equação de Riccati (34) nos dá a função de Lyapunov  $v(x) = x'Px$ . Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{v}(x(t)) = x' \left[ (A + B\Psi C - BR^{-1}B'P)'P + P(A + B\Psi C - BR^{-1}B'P) \right] x \quad (36)$$

que rearranjada fornece

$$\dot{v}(x(t)) = x' \left[ -C'QC - PBR^{-1}B'P + C'\Psi'B'P + PB\Psi C \right] x \quad (37)$$

Somando e subtraindo  $C'\Psi'R\Psi C$ , temos

$$\dot{v}(x(t)) = -x' \left[ C'QC - C'\Psi'R\Psi C + (\Psi C - R^{-1}B'P)'R(\Psi C - R^{-1}B'P) \right] x \quad (38)$$

Definindo  $Z \triangleq \Psi C - R^{-1}B'P$ , e levando em conta que  $y = Cx$ , segue

$$\dot{v}(x(t)) = -y'(Q - \Psi'R\Psi)y - x'Z'RZx \quad (39)$$

e portanto

$$\dot{v}(x(t)) \leq -y'(Q - \Psi'R\Psi)y \quad (40)$$

Finalmente, devido à condição (35),  $\dot{v}(x(t)) \leq 0$ . Isto prova a estabilidade global do sistema. Para provar sua estabilidade assintótica, é suficiente lembrar que a solução da equação (31) é dada por

$$x(t) = e^{(A+BZ)t} x_0 \quad (41)$$

e não pode existir  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\dot{v}(x(t)) = 0$ ,  $\forall t > 0$ , pois nesse caso teríamos

$$x_0' e^{(A+BZ)'t} (Z'RZ) e^{(A+BZ)t} x_0 = 0 \quad (42)$$

e também

$$x_0' e^{(A+BZ)'t} [C'(Q - \Psi'R\Psi)C] e^{(A+BZ)t} x_0 = 0 \quad (43)$$

para  $\forall t \geq 0$ , implicando que

$$C e^{At} x_0 = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (44)$$

o que é impossível, uma vez que o par  $(A, C)$  é observável. Com isso, concluímos a prova do teorema.

Este teorema prova a existência de um conjunto de ganhos  $K$  que estabilizam o sistema global; estes ganhos são obtidos pelas equações (33) e (34), fazendo-se as matrizes  $Q$  e  $R$  (definidas positivas) obedecerem à inequação (35), para uma dada matriz  $\Psi$ . É claro que podemos escolher  $Q$  e  $R$  de forma a, além de obedecer à inequação (35), obtermos também um ganho  $K$  que obedeça a uma determinada estrutura pré-especificada.

O próximo corolário fornece uma maneira de se escolher  $Q$  e  $R$  no caso de controle descentralizado.

COROLÁRIO 4 : O sistema global (equação (31)) é assintoticamente estável com o controle descentralizado

$$K^i = B^{i'} P^i \quad (45)$$

$$A^{i'} P^i + P^i A^i - P^i B^i B^{i'} P^i + C^{i'} Q^i C^i = 0 \quad (46)$$

onde  $Q^i \geq \sigma^i I^i$ , com  $\sigma^i > N \|\Psi^i\|^2$ ,  $i=1, \dots, N$ . As submatrizes  $\Psi^i$  são definidas na equação (32).

PROVA : (Geromel and Yamakami [12])

Note que, mesmo para sistemas de grande porte, é fácil calcular os parâmetros  $\sigma^i$  a partir de  $\|\Psi^i\|$ , e assim conseguir o controle descentralizado.

#### II.4. DETERMINAÇÃO DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS VIA DECOMPOSIÇÃO EM MODOS RÁPIDOS E LENTOS

Consideremos o sistema global configurado por  $N$  subsistemas (item II.1); visando uma decomposição em modos rápidos e lentos, vamos separar o vetor de estado  $x^i$ , para cada subsistema, em  $x_1^i$  e  $x_2^i$ , e assim também as matrizes  $A^i$  e  $B^i$ , colocando o sistema na forma padrão tratada no item I.1. Vamos também assumir as hipóteses, bastante razoáveis em sistemas físicos reais, de que a interconexão se faça apenas através das variáveis "lentas" do processo, e também de que o controle influa diretamente apenas nas variáveis "rápidas". Temos então:

$$\dot{x}_1^i = A_{11}^i x_1^i + A_{12}^i x_2^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A^{ij} x_1^j \quad (47)$$

$$u^i x_2^i = A_{21}^i x_1^i + A_{22}^i x_2^i + B_2^i u^i, \quad i=1, \dots, N \quad (48)$$

sendo  $\mu^i \in \mathbb{R}$  o parâmetro de perturbações singulares. Seguindo o procedimento do item I.1, podemos facilmente chegar aos modos rápidos e lentos para o subsistema  $i$ . A equação para o modo lento ( $\mu^i \rightarrow 0$ ) fornece (com  $A_{22}^i$  não-singular)

$$\dot{x}_s^i = A_s^i x_s^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A^{ij} x_s^j + B_s^i u_s^i \quad (49)$$

onde

$$\begin{aligned} x_s^i &\Delta x_1^i, & u_s^i &\Delta u^i, & A_s^i &\Delta A_{11}^i - A_{12}^i (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i, \\ B_s^i &\Delta -A_{12}^i (A_{22}^i)^{-1} B_2^i, & & & \text{com } & i=1, \dots, N. \end{aligned}$$

Para o modo rápido, obtemos

$$\mu^i \dot{x}_f^i = A_f^i x_f^i + B_f^i u_f^i \quad (50)$$

onde

$$\begin{aligned} x_f^i &\Delta x_2^i + (A_{22}^i)^{-1} (A_{21}^i x_s^i + B_2^i u_s^i), & u_f^i &\Delta u^i - u_s^i, \\ A_f^i &\Delta A_{22}^i & \text{e } & B_f^i &\Delta B_2^i, & i=1, \dots, N. \end{aligned}$$

Como podemos notar pela equação (50), em sistemas do tipo descrito em (47)-(48) obtemos os modos rápidos do subsistema  $i$  totalmente desacoplados em relação aos demais subsistemas. Assim, a resolução dos subsistemas rápidos pode ser realizada separadamente, para cada índice  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ . A partir de um determinado critério, podemos obter a lei de controle linear

$$u_f^i = -K_f^i x_f^i, \quad i=1, \dots, N \quad (51)$$

Consideremos os subsistemas lentos, os quais pela equação

(49) podemos ver que são acoplados. Porém, assumiremos que a interconexão se faz de maneira que as matrizes  $A^{ij}$  possam ser decompostas na forma

$$A^{ij} = B_s^i \Psi^{ij}, \quad i \neq j = 1, \dots, N \quad (52)$$

ou seja, como foi descrito no item II.3. Note porém que, em relação à equação (30), assumimos  $C^j = I$ . Adiantamos também que o controle carga-freqüência, que trataremos como exemplo, encaixa-se adequadamente nestas hipóteses.

Queremos então determinar controladores lentos locais de modo a obter a estabilidade de todo o subsistema lento, ou seja, leis de controle lineares do tipo

$$u_s^i = -K_s^i x_s^i \quad (53)$$

que estabilizem globalmente o modo lento. Com (52)-(53), podemos escrever o sistema lento global (juntando os  $N$  subsistemas) como:

$$\dot{x}_s = (A_s + B_s \Psi - B_s K_s) x_s \quad (54)$$

onde

$$x_s \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} x_s^1 & \dots & x_s^N \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$A_s \stackrel{\Delta}{=} \text{bloc diag} \{ A_s^1, \dots, A_s^N \} \quad (56)$$

$$B_s \stackrel{\Delta}{=} \text{bloc diag} \{ B_s^1, \dots, B_s^N \} \quad (57)$$

$$K_s \stackrel{\Delta}{=} \text{bloc diag} \{ K_s^1, \dots, K_s^N \} \quad (58)$$

e a matriz  $\Psi$  é dada pela equação (32). Aplicando então o Teorema 3 e o Corolário 4 deste capítulo, podemos obter a estabilidade assintótica do sistema descrito pela equação (54) com leis de controle  $u_s^i = -K_s^i x_s^i$ , onde

$$K_s^i = B_s^{i^T} P^i \quad (59)$$

$$A_s^{i'} P^i + P^i A_s^i - P^i B_s^i B_s^{i'} P^i + Q^i = 0 \quad (60)$$

$$e \quad Q^i \geq \sigma^i I^i, \quad \text{com } \sigma^i > N \| \psi^i \|^2$$

Assim, a decomposição em modos rápidos e lentos de um sistema de grande porte (onde os subsistemas lentos obedecem a uma determinada estrutura de interconexão) permite o total desacoplamento do problema de controle desse sistema em vários subproblemas de pequena dimensão.

## II.5. APLICAÇÃO AO CONTROLE CARGA-FREQÜÊNCIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA INTERLIGADOS

Estudaremos o controle carga-freqüência de um sistema de potência com várias áreas interconectadas. Para uma dada perturbação na carga, tipo degrau, o sistema deve ser controlado segundo especificações clássicas (Elgerd and Fosha [5]):

- (a) Desvio na freqüência e intercâmbio de potência entre áreas devem ser nulos em regime permanente
- (b) Comportamento ótimo do transitório
- (c) Em regime permanente, os níveis de geração devem satisfazer as condições de ótimo despacho

Com vistas à diminuição dos custos de implementação do controle, é importante impor algumas exigências adicionais sobre sua estrutura:

- (d) Cada área deve ser controlada apenas com medidas locais, sem a necessidade de informações das outras áreas
- (e) A lei de controle deve ser independente da perturbação na carga, pois o sistema em malha fechada precisa atender às especificações clássicas mesmo com alterações na carga

Consideremos o modelo linearizado para a área  $i$ , que na vizinhança de um ponto de operação fornece como equações do balanço incremental de potência (Fosha and Elgerd [6]):

$$\frac{2H^i}{f^*} \Delta \dot{f}^i + D^i \Delta f^i + \Delta P_{tie}^i = \Delta P_g^i - \Delta P_d^i \quad (61)$$

$$T_t^i \Delta \dot{P}_g^i = -\Delta P_g^i + \Delta X_g^i \quad (62)$$

$$T_g^i \Delta \dot{X}_g^i = -\Delta X_g^i - \frac{1}{R^i} \Delta f^i + \Delta P_c^i \quad (63)$$

$$\Delta P_{tie}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} \left( \int \Delta f^i dt - \int \Delta f^j dt \right) \quad (64)$$

onde  $\Delta f^i$  é a variação na frequência,  $\Delta P_{tie}^i$  é a variação na potência das linhas de interconexão,  $\Delta P_g^i$  é a variação na potência gerada,  $\Delta P_d^i$  é a variação na demanda,  $\Delta X_g^i$  é a variação na posição da válvula governadora da turbina e  $\Delta P_c^i$  é a variação no sinal do mecanismo controlador de velocidade. Temos ainda os parâmetros do sistema, a saber:  $H^i$  é a constante de inércia,  $f^*$  é a frequência nominal,  $D^i$  é a razão na qual se altera a carga do sistema com a frequência nominal,  $T_t^i$  é a constante de tempo associada à turbina,  $T_g^i$  é a constante de tempo associada ao mecanismo de controle de velocidade,  $R^i$  é a auto-regulação do gerador, e  $T^{ij}$  é o coeficiente de ligação da área  $i$  com a área  $j$ . Finalmente, podemos definir  $T^i \triangleq 2H^i/f^*D^i$  como a constante de tempo associada à equação (16) (inércia do sistema).

Nossa preocupação estará centrada em atender às exigências de controle, com exceção da especificação (c) (ótimo desempenho econômico), deixada para uma próxima fase.

Às equações (61)-(63) podemos juntar a condição

$$\sum_{i=1}^N P_r^i \Delta P_{tie}^i = 0 \quad (65)$$

onde  $P_r^i$  é a taxa de potência por área, condição esta que equaciona o balanço total de potência circulando pelas linhas de ligação ("tie lines").

Antes de abordar as estratégias empregadas, vamos definir os



chamados "area frequency response characteristic" ( $\beta^i$ ) e o "area control error" ( $ACE^i$ ):

$$\beta^i \Delta D^i + \frac{1}{R^i} ; \quad ACE^i \Delta \approx \Delta P_{tie}^i + \beta^i \Delta f^i \quad (66)$$

Obs. : Para maiores esclarecimentos sobre os parâmetros e as equações que descrevem o problema do controle carga-frequência, consultar as referências [5] e [6].

### II.5.1. Realimentação de Saída e Controle Descentralizado

Neste item, nossa preocupação será atender às especificações de controle, com a lei de controle sujeita a restrições do tipo "realimentação de saída" ou "controle descentralizado" (item I.5.1). Os controladores serão determinados via manipulação do sistema global (item II.2), através do Algoritmo 1.

É importante ressaltar que a lei de controle obtida não depende da perturbação na carga (para perturbação tipo degrau), e dessa forma fica satisfeita a especificação (e).

A partir do modelo dinâmico dado pelas equações (61)-(64), para cada área  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , definimos

$$x^i \Delta \approx \begin{bmatrix} \int \Delta P_{tie}^i dt \\ \int \Delta f^i dt \\ \Delta f^i \\ \Delta P_E^i \\ \Delta X_E^i \end{bmatrix} ; \quad u^i \Delta \approx \begin{bmatrix} \Delta P_C^i \\ \Delta P_D^i \end{bmatrix} ; \quad d^i = \begin{bmatrix} \Delta P_D^i \end{bmatrix} \quad (67)$$

e podemos escrever o modelo do sistema global como

$$\dot{x}^i = A^i x^i + \sum_{j=1}^N A^{ij} x^j + B^i u^i + \Pi^i d^i \quad (68)$$

$$x^i(0) = x_0^i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (69)$$

onde as matrizes, obtidas das equações (61)-(64), são dadas por

$$A^i = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f^*}{2H^i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} & \frac{-f^* D^i}{2H^i} & \frac{f^*}{2H^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_t^i} & \frac{1}{T_t^i} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_g^i R^i} & 0 & \frac{-1}{T_g^i} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$B^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_g^i} \end{bmatrix} \quad ; \quad \Pi^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-f^*}{2H^i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\Delta^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F^*}{2H^i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Finalmente, as variáveis de saída são definidas por:

$$y^i = C^i x^i, \quad i=1, \dots, N \quad (73)$$

onde  $C^i \in R^{r^i} \times R^5$ , com  $1 \leq r^i \leq 5$ . As matrizes  $C^i$  dependem da definição das variáveis de saída de cada área. No caso particular aqui tratado, o vetor de saída  $y^i$  é definido por

$$y^i = \begin{bmatrix} \int ACE^i dt \\ \Delta P_g^i \end{bmatrix}, \quad (74)$$

e a matriz  $C^i$  conseqüentemente fica

$$C^i = \begin{bmatrix} 1 & g^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

O sistema global é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Pi d \\ y = Cx \end{cases} ; \quad x(0) = x_0 \quad (76)$$

$$(77)$$

sendo que a equação (65) permite que uma das equações dinâmicas descritas por (76)-(77) seja desprezada.

### II.5.2. Decomposição em Modos Rápidos e Lentos

Para atender às especificações clássicas de controle, consideraremos neste item a variação na demanda como um valor conhecido *a priori*. No próximo item, construímos um estimador de demanda, criando condições de controlar um sistema de potência independentemente de variações na carga (e ainda continuar atendendo aos outros requisitos).

Para efetuar a decomposição em modos rápidos e lentos, a partir das equações (61)-(64), primeiramente vamos definir o parâmetro de perturbações singulares  $\mu^i$  como (Khalil and Kokotovic [15])

$$\mu^i \triangleq \frac{\max(T_g^i, T_t^i)}{T^i} = \frac{T_t^i}{T^i} \quad (78)$$

Lembrando que  $T^i = \frac{2H^i}{f^*D^i}$ , e definindo

$$x_1^i \triangleq \begin{bmatrix} \int \Delta f^i dt \\ \Delta f^i \end{bmatrix} ; \quad x_2^i \triangleq \begin{bmatrix} \Delta P_g^i \\ \Delta X_g^i \end{bmatrix} \quad (79)$$

podemos colocar as equações (61)-(64) na forma:

$$\dot{x}_1^i = A_{11}^i x_1^i + A_{12}^i x_2^i + \Gamma^i d^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A^{ij} x^j \quad (80)$$

$$\mu^i x_2^i = A_{21}^i x_1^i + A_{22}^i x_2^i + B_2^i u^i \quad (81)$$

Podemos notar que o exemplo tratado aqui satisfaz plenamente as hipóteses estabelecidas no item II.4, sendo as equações (80)-(81) idênticas às equações (47)-(48) a menos da perturbação na carga.

Com relação às equações (80)-(81), as matrizes são dadas por (partindo de (61)-(64)):

$$A_{11}^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-f^*}{2H^i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} & \frac{-1}{T^i} \end{bmatrix} ; \quad A_{12}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{f^*}{2H^i} & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$A_{21}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-T_t^i}{T_E^i T^i R^i} \end{bmatrix} ; \quad A_{22}^i = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T^i} & \frac{1}{T^i} \\ 0 & \frac{-T_t^i}{T_E^i T^i} \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$A^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{f^* T^{ij}}{2H^i} & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Gamma^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-f^*}{2H^i} \end{bmatrix} ; \quad B_2^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_t^i}{T_E^i T^i} \end{bmatrix} \quad (84)$$

e, por fim,  $d^i \stackrel{\Delta}{=} \Delta P_d^i$  e  $u^i \stackrel{\Delta}{=} \Delta P_c^i$ . Aplicando a decomposição (item II.4), obtemos como subsistema lento para a área  $i$  (lembrando que  $x_s^i \stackrel{\Delta}{=} x_1^i$ ,  $u_s^i \stackrel{\Delta}{=} u^i$ ):

$$x_s^i = A_s^i x_s^i + B_s^i (u_s^i - d^i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A^{ij} x_s^j \quad (85)$$

com

$$A_s^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-f^*}{2H^i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} & \frac{-f^*}{2H^i} \beta^i \end{bmatrix} ; \quad B_s^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f^*}{2H^i} \end{bmatrix} \quad (86)$$

e, o que é mais importante,  $A^{ij}$  pode ser fatorada na forma

$$A^{ij} = B_s^i \psi^{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f^*}{2H^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{ij} & 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

ficando então verificada, para o problema de controle carga-frequência aqui tratado, a hipótese assumida no item II.4 sobre a estrutura da interconexão dos modos lentos. Reescrevendo a equação (85), temos:

$$\dot{x}_s^i = A_s^i x_s^i + B_s^i (u_s^i - d^i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N B_s^i \psi^{ij} x^j \quad (88)$$

Os subsistemas rápidos obtidos são dados por

$$u_f^i \dot{x}_f^i = A_f^i x_f^i + B_f^i u_f^i \quad (89)$$

com  $A_f^i \triangleq A_{22}^i$  (dado por (83)) e  $B_f^i \triangleq B_2^i$  (dado por (84)), e, lembrando,  $x_f^i = x_2^i - \bar{x}_2^i$  e  $u_f^i = u^i - u_s^i$ .

A obtenção do controle dos subsistemas rápidos

$$u_f^i = -K_f^i x_f^i \quad (90)$$

é trivial, podendo ser feita por alocação de pólos. Se definirmos

$$K_f^i \triangleq \begin{bmatrix} k_{f1}^i & k_{f2}^i \end{bmatrix} \quad (91)$$

o subsistema rápido em malha fechada pode ser descrito por

$$\dot{x}_f^i = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_t^i} & \frac{1}{T_t^i} \\ -\frac{k_{f1}^i}{T_g^i} & \frac{-1}{T_g^i}(1 + k_{f2}^i) \end{bmatrix} x_f^i \quad (92)$$

Basta definir onde queremos que se localizem os pólos, que trivialmente obtêm-se  $k_{f1}^i$  e  $k_{f2}^i$ .

Para se obter o controle dos subsistemas lentos

$$u_s^i - d^i = -K_s^i x_s^i \quad (93)$$

devemos utilizar as equações (59)-(60), com o parâmetro  $\sigma^i > N \|\Psi^i\|^2$ . No caso, temos (com  $\Psi^i$  definida pela equação (32)):

$$\sigma^i > N \|\Psi^i\|^2 = N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (T^{ij})^2 \quad (94)$$

Portanto, resolvendo  $N$  equações de Riccati (59)-(60) das áreas desacopladas dos subsistemas lentos e obtendo suas leis de controle  $u_s^i$ , controlamos todo o sistema lento.

O controle composto obtido, fica (item I.1):

$$u^i = u_f^i + u_s^i + d^i = -K_f^i x_f^i - K_s^i x_s^i + d^i \quad (95)$$

Com as definições de  $x_f^i$  e  $x_s^i$ , obtemos

$$u^i = - \left[ K_s^i - K_f^i (A_{22}^i)^{-1} B_2^i K_s^i + K_f^i (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i \right] x_1^i - K_f^i x_2^i - \left[ K_f^i (A_{22}^i)^{-1} B_2^i - 1 \right] d^i \quad (96)$$

ou, finalmente,

$$u^i = -K_1^i x_1^i - K_2^i x_2^i - K_d^i d^i \quad (97)$$

com  $K_1^i$ ,  $K_2^i$  e  $K_d^i$  obtidos facilmente por comparação. A equação (97) nos fornece, portanto, o controle composto em termos das variáveis de estado e das matrizes do sistema original (uma vez que os ganhos lentos e rápidos já foram determinados separadamente).

Se, pela estratégia adotada, obtivermos controles  $u_f^i$  e  $u_s^i$  que estabilizem os subsistemas rápidos e lentos, respectivamente, o controle composto  $u^i$  também estabilizará o sistema global (cap. I, Lema 1). Temos, então:

$$x_1^i(t) = x_s^i(t) + O(\mu^i) \quad (98)$$

$$x_2^i(t) = -(A_{22}^i)^{-1} (A_{21}^i - B_2^i K_s^i) x_s^i(t) + x_f^i(t) - (A_{22}^i)^{-1} B_2^i d^i + O(\mu^i) \quad (99)$$

$$u^i(t) = u_s^i(t) + u_f^i(t) + O(\mu^i) \quad (100)$$

para todo  $t \in [0, \infty)$ .

Note que, neste item, consideramos a demanda  $d^i$  como um valor conhecido *a priori*. No caso real, não podemos antecipar a variação de demanda numa determinada área, e portanto, se a potência gerada não atender o valor exato exigido, o intercâmbio de potência entre áreas não se extinguirá. Só garantimos que  $\Delta P_{tie}^i$  tenderá para zero se soubermos *a priori* o valor da variação na demanda. Com isso, podemos concluir que, sendo os subsistemas lentos e rápidos assintoticamente estáveis, então



$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_s^i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_f^i(t) = 0 \quad (101)$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1^i(t) = 0(\mu^i) \quad (102)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2^i(t) = \begin{bmatrix} \hat{d}^i \\ \hat{d}^i \end{bmatrix} + 0(\mu^i) \quad (103)$$

que é exatamente o resultado desejado (veja a definição de  $x_2^i$ , equação (79), e veja também as equações do balanço incremental de potência, (61)-(64)).

No próximo item, construímos um estimador de demanda, e garantimos assim o atendimento às exigências de controle.

### II.5.3. Estimação de Demanda

Considerando as equações (61)-(64) que descrevem o comportamento dinâmico incremental da área  $i$ , e sendo  $\hat{d}^i$  a estimativa da variação de demanda para a área  $i$ , propomos um estimador na forma

$$\dot{\hat{d}}^i = -k^i \Delta P_{tie}^i, \quad k^i \geq 0, \quad i=1, \dots, N \quad (104)$$

onde, por convenção,  $\Delta P_{tie}^i$  positivo indica potência saindo da área  $i$  (Elgerd and Fosha [5]). Note que  $\Delta P_{tie}^i = 0$  implica que a demanda da área  $i$  está sendo atendida pela sua própria geração, e portanto o valor estimado não se altera.

Para a análise do estimador e determinação dos ganhos  $k^i$  leva remos em conta apenas os modos lentos do sistema, uma vez que os rápidos (já posicionados com constantes de tempo bem menores) não influenciam a dinâmica do sistema e com o estimador (que introduz um pólo na origem, para o sistema em malha aberta) estamos tornando o sistema ainda mais lento.

As equações para o subsistema lento e seu controle (já introduzindo-se  $\tilde{d}^i$  no lugar de  $d^i$ ) são dados por

$$\Delta P_c^i = -k_{s1}^i \int \Delta f^i dt - k_{s2}^i \Delta f^i + \tilde{d}^i \quad (105)$$

$$J^i \Delta f^i + \beta^i \Delta f^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} \left( \int \Delta f^i dt - \int \Delta f^j dt \right) = \Delta P_c^i - \Delta P_d^i \quad (106)$$

onde  $J^i \triangleq \frac{2H^i}{f}$ . Fazendo a transformada de Laplace em (104)-(106), e agrupando as equações, para  $N$  áreas, temos

$$M(s) \Delta F(s) = s\tilde{D}(s) - s\Delta P_D(s) \quad (107)$$

com

$$\begin{aligned} \Delta F(s)^T &\triangleq \begin{bmatrix} \Delta f^1(s) & \dots & \Delta f^N(s) \end{bmatrix} \\ \tilde{D}(s)^T &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{d}^1(s) & \dots & \tilde{d}^N(s) \end{bmatrix} \\ \Delta P_D(s)^T &\triangleq \begin{bmatrix} \Delta P_d^1(s) & \dots & \Delta P_d^N(s) \end{bmatrix} \\ M(s) &\triangleq \begin{bmatrix} m^1(s) & & & \\ & & -T^{1j} & \\ & & \cdot & \\ -T^{ij} & & & \\ & & & m^N(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (108)$$

$$m^i(s) \triangleq J^i s^2 + (\beta^i + k_{s2}^i)s + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} + k_{s1}^i$$

e também

$$s \hat{D}(s) = -K T \frac{\Delta F(s)}{s} + \hat{D}(0) \quad (109)$$

onde  $K \triangleq \text{diag}\{k^1 \dots k^N\}$ ,  $T$  é definida por

$$T \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{1j} & & -T^{ij} \\ & \ddots & \\ -T^{ij} & & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{Nj} \end{bmatrix} \quad (110)$$

e  $\hat{D}(0)$  é a condição inicial do estimador. Podemos agora fazer algumas observações:

- (1) Note que a matriz de acoplamento  $T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é simétrica. Podemos então calcular a matriz  $W \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  com as propriedades:

$$W^T W = \text{diag}\{\lambda^1 \dots \lambda^N\} = \Lambda \quad (111)$$

$$W^T W = I \quad (112)$$

Cada coluna  $W^j$  de  $W$  é um autovetor normalizado de  $T$ , sendo  $\lambda^j$  o autovalor associado ( $\lambda^j \in \mathbb{R}_+$ , pois  $T$  é semi-definida positiva).

- (2) A matriz de ganhos  $K$  impõe uma estrutura de controle descentralizado. Os ganhos  $k^i$  são constantes reais não-negativas a determinar.

- (3) A matriz  $M(s)$  pode ser escrita na forma

$$M(s) = \phi(s) + T \quad (113)$$

onde  $\phi(s) \triangleq \text{diag} \{ \phi^1(s) \dots \phi^N(s) \}$ , com  $\phi^i(s)$  sendo polinômios de segundo grau em  $s$  e que dependem do controle lento já obtido, dados por

$$\phi^i(s) = J^i s^2 + (\beta^i + k_{s2}^i)s + k_{s1}^i \quad (114)$$

(4) A perturbação de demanda será considerada em degrau, na forma

$$\Delta P_D(s) = \frac{1}{s} \Delta P_d \quad (115)$$

#### II.5.3.1. Comportamento do estimador proposto

Podemos calcular duas importantes relações. Primeiramente, analisemos a influência da variação de demanda na frequência. De (107) e (109), obtemos:

$$[s M(s) + KT] \Delta F(s) = -s \Delta P_d + s \hat{D}(0) \quad (116)$$

Supondo que, para um determinado valor de  $K$ , as raízes da equação característica

$$\det [s M(s) + KT] = 0 \quad (117)$$

estejam no semiplano esquerdo complexo, podemos então aplicar em (116) o teorema do valor final, obtendo  $\Delta f_\infty = 0$ .

Estudaremos agora a outra relação, a influência da variação de demanda no estimador. De (107) e (109), obtemos

$$[s M(s) + KT] \Delta Z(s) = KT M(s)^{-1} \Delta P_D(s) + \hat{D}(0) \quad (118)$$

com  $\hat{D}(s) = M(s) \Delta Z(s)$ . Se novamente escolhermos  $K$  de modo a garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (raízes da equação (117)

no semi-plano complexo de parte real negativa), podemos então usar o teorema do valor final na equação (118), obtendo

$$\tilde{D}_{\infty} = \Delta Pd + \alpha \phi(0)W^N \quad (119)$$

onde  $\alpha$  é um escalar arbitrário e  $W^N$  é o autovetor de T associado ao autovalor  $\lambda^N = 0$ ; isto é:

$$W^N = \frac{1}{\sqrt{N}} [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad (120)$$

Como podemos notar pela equação (119), o estimador de demanda proposto apresenta "bias", ou seja, para  $\alpha \neq 0$  teremos  $\tilde{D}_{\infty} \neq \Delta Pd$ . Entretanto, este fato não altera o controle do sistema, pois o valor do desvio na frequência não varia com  $\alpha$  ( $\Delta f_{\infty} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ).

Enfim, o problema que se coloca é determinar K de forma que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Devido à não unicidade de solução, atacaremos o problema "determinação do ganho K" de forma a garantir o maior grau de estabilidade do sistema em malha fechada.

#### II.5.3.2. Determinação do ganho ótimo do estimador

Devemos então estudar as raízes da equação característica (117), que chamaremos  $\Lambda(s) = 0$ . Vamos considerar  $K = kI$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , pois a matriz de acoplamento T já pondera adequadamente a importância relativa das ligações entre as áreas. Como  $\det(W^T W) = 1$ , podemos reescrever a equação (117) na forma

$$\Lambda(s) = \det[W^T (sM(s) + kT)W] \stackrel{\Delta}{=} \det[\Omega(s)] \quad (121)$$

e a matriz  $\Omega(s)$  é assim determinada:

$$\Omega^{ii}(s) = W^{i^T} \left[ s \phi(s) + \lambda^i (s + k) \right] W^i \quad (122)$$

$$\Omega^{ij}(s) = W^{i'} [s \phi(s)] W^j \quad (123)$$

Lembrando que  $W^{i'} W^j = 1$  se  $i = j$  e  $W^{i'} W^j = 0$  se  $i \neq j$ , podemos ainda escrever

$$\Omega^{ii}(s) = W^{i'} [s \phi(s)] W^i + \lambda^i (s + k) \quad (124)$$

e finalmente, podemos tirar algumas conclusões:

- (1) Se os polinômios característicos das áreas  $(\phi^i(s))$  forem idênticos, então  $\Omega^{ij} = 0$ , implicando em

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^N \Omega^{ii}(s) \quad (125)$$

- (2) Os polinômios  $\Omega^{ij}(s)$ ,  $i \neq j$ , fora da diagonal principal de  $\Omega(s)$ , não são afetados pelo ganho  $k$  do estimador. Alterando  $k$ , variamos somente o posicionamento dos pólos de  $\Omega^{ii}(s)$ .

- (3) Em sistemas reais, as áreas não são extremamente diferentes, e portanto os coeficientes de  $\Omega^{ij}(s)$ , para  $i \neq j$ , são pequenos (de ordem  $\epsilon$ ). Podemos então escrever  $\Omega(s)$  como a soma de duas matrizes, uma diagonal ( $\Omega_d(s)$ ) e outra não-diagonal ( $\Omega_n(s)$ ):

$$\Omega(s) = \Omega_d(s) + \epsilon \Omega_n(s) \quad (126)$$

Assim, podemos reescrever  $\Omega(s)$  como

$$\Delta(s) = \det[\Omega(s)] = \det[\Omega_d(s) + \epsilon \Omega_n(s)] \quad (127)$$

que, desenvolvida em série de Taylor, fica

$$\Delta(s) = \det[\Omega_d(s)] \left[ 1 + \epsilon \text{Tr} \left\{ \Omega_d(s)^{-1} \Omega_n(s) \right\} + \dots \right] \quad (128)$$

onde, devido às estruturas de  $\Omega_d(s)$  e  $\Omega_n(s)$ , é fácil verificar que

o traço indicado é nulo, e conseqüentemente

$$\Delta(s) = \det[\tilde{\Omega}_d(s)] + O(\epsilon^2) \quad (129)$$

Feitas estas conclusões, vamos então estudar a equação característica aproximada, dada pela equação (125). Definindo

$$\begin{aligned} W^i &\triangleq [w^{i1} \quad w^{i2} \quad \dots \quad w^{iN}] \\ \gamma^i &\triangleq \sum_{j=1}^N J^j (w^{ij})^2 \\ \theta^i &\triangleq \sum_{j=1}^N (\beta^j + k_{s2}^j) (w^{ij})^2 \\ \delta^i &\triangleq \sum_{j=1}^N k_{s1}^j (w^{ij})^2 \end{aligned} \quad (130)$$

podemos escrever  $\tilde{\Omega}^{ii}(s)$  na forma

$$\tilde{\Omega}^{ii}(s) = \gamma^i s^3 + \theta^i s^2 + (\delta^i + \lambda^i)s + \lambda^i k \quad (131)$$

Aplicando o critério de Routh, podemos determinar o máximo valor de  $k$  para o qual a estabilidade do sistema está assegurada. Devemos ter

$$k < \frac{\theta^i}{\gamma^i} \left( 1 + \frac{\delta^i}{\lambda^i} \right) \quad (132)$$

Como todos os parâmetros são positivos, temos

$$k_{\max} = \min_i \frac{\theta^i}{\gamma^i} \left( 1 + \frac{\delta^i}{\lambda^i} \right) \quad (133)$$

e ao índice  $i = i^*$  da minimização indicada (133) chamamos de *índice crítico*. Propomos então que as raízes de  $\Omega^{i^*i^*}(s)$  sejam impostas (através do lugar das raízes) de modo a maximizar seu grau de estabilidade para  $k \in [0, k_{\max}]$ . Com certeza, a estabilidade dos polinômios  $\Omega^{ii}(s)$  estará assegurada para  $\forall i \neq i^*$ .

Para o estudo do lugar das raízes, basta escrever (131) na forma

$$1 + k \frac{\lambda^{i^*}}{s \left[ Y^{i^*} s^2 + \theta^{i^*} s + (\delta^{i^*} + \lambda^{i^*}) \right]} = 0 \quad (134)$$

### II.5.3.3. Comentários

Devemos frisar que, se a dinâmica interna das várias áreas for idêntica, a equação característica aproximada (125) se torna exata, e o índice crítico (resultado da minimização indicada em (133)) corresponderá ao índice do maior autovalor de  $T$ . Note que o índice crítico nunca corresponde ao índice do menor autovalor possível de  $T$  (isto é,  $\lambda^N = 0$ ).

Assim que o valor de  $k$  for determinado, podemos verificar que, definindo

$$\checkmark(t) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^N \hat{d}^i(t) = e' \tilde{D}(t) \quad (135)$$

onde  $e' \stackrel{\Delta}{=} [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^N$ , temos

$$\dot{\checkmark}(t) = e' \dot{\tilde{D}}(t) = -k e' T \Delta F(t) = 0 \quad (136)$$

pois  $e' T = 0$ . Portanto,  $\checkmark(t) = \text{cte.} \ \forall t \geq 0$ . Assim, se estabelecermos as condições iniciais, em  $\hat{d}^i(t=0)$ , de tal forma que



$$\sum (\tau = 0) = \sum_{i=1}^N \Delta P_d^i \quad (137)$$

teremos, na equação (119)  $\alpha = 0$ , e o "bias" do estimador estará eliminado, restando (ainda da equação (119))  $\tilde{D}_\infty = \Delta P_d$ . Ou seja, cada estimador  $\tilde{d}^i$  atingirá, em regime, o valor exato da demanda  $\Delta P_d^i$  da sua área. Portanto, basta conhecer a meta de geração global do sistema (montante total da variação da demanda) que eliminaremos o "bias" do estimador.

Mas é importante lembrar que, conheçamos ou não *a priori* a soma total da demanda real, o controle garantirá desvio nulo na frequência, intercâmbio de potência entre áreas também nulo e que a demanda de cada área será atendida pela sua própria geração.

## II.6. EXEMPLO: SISTEMA DE POTÊNCIA COM DUAS ÁREAS IGUAIS INTERLIGADAS

Como exemplo, trataremos o problema do controle carga-freqüência para um sistema composto de duas áreas iguais e interligadas (Elgerd and Fosha [5], Fosha and Elgerd [6]). Os parâmetros do sistema são dados por

$$H^1 = H^2 = 5 \text{ s}$$

$$D^1 = D^2 = 8.33 \times 10^{-3} \text{ pu MW/Hz}$$

$$T_t^1 = T_t^2 = 0.3 \text{ s}$$

$$T_g^1 = T_g^2 = 0.08 \text{ s} \quad (138)$$

$$R^1 = R^2 = 2.4 \text{ Hz/pu MW}$$

$$T^{12} = T^{21} = 0.545 \text{ pu MW/Hz}$$

$$f^* = 60.0 \text{ Hz}$$

$$T^1 = T^2 = 20.01 \text{ s}$$

$$\mu^1 = \mu^2 = 0.015$$

$$\beta^1 = \beta^2 = 0.425 \text{ pu MW/Hz}$$

(138)

### II.6.1. Realimentação de Saída e Controle Descentralizado

Definindo, segundo a equação (67), os vetores de estado, controle e perturbação, levando em conta que uma equação do sistema global dado por (76)-(77) pode ser desprezada (veja equação (65)), temos:

$$x \triangleq \begin{bmatrix} \int \Delta P_{tie}^1 dt \\ \int \Delta f^1 dt \\ \Delta f^1 \\ \Delta P_g^1 \\ \Delta X_g^1 \\ \int \Delta f^2 dt \\ \Delta f^2 \\ \Delta P_g^2 \\ \Delta X_g^2 \end{bmatrix}; \quad u \triangleq \begin{bmatrix} \Delta P_c^1 \\ \Delta P_c^2 \end{bmatrix}; \quad d \triangleq \begin{bmatrix} \Delta P_d^1 \\ \Delta P_d^2 \end{bmatrix} \quad (139)$$

As matrizes  $A \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9$ ,  $B \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^2$ ,  $Q \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9$  e  $R \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , ficam (Q e R tiradas das referências [5], [6]):

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.545 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.545 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.27 & -0.05 & 6.0 & 0.0 & 3.27 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.33 & 3.33 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.21 & 0.0 & -12.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.27 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.27 & -0.05 & 6.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.33 & 3.33 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.21 & 0.0 & -12.5 \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 12.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 12.5 \end{bmatrix} \quad (141)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (143)$$

Para o vetor de saída, como definido em (74), temos:

$$y = \begin{bmatrix} \int ACE^1 dt \\ \Delta P_B^1 \\ \int ACE^2 dt \\ \Delta P_B^2 \end{bmatrix}$$

(144)

$$C = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.425 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.425 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Foram considerados três casos; para a convergência do algoritmo foi usada a precisão  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ , e para a simulação do sistema global em malha fechada consideramos uma perturbação na carga de 0,01 pu na área 1 (ou seja,  $d' = [0.01 \quad 0.0]$ ). A condição inicial considerada foi  $x(0) = 0$ .

CASO 1 (Realimentação de Estado Centralizada) : Cada controlador tem informações de todo o vetor de estado. Neste caso, é claro que  $\Omega \equiv R^m \times R^n$  ( $\Omega$  foi definido na equação 1.(124)), e a matriz de realimentação  $K^*$  encontrada foi

$$K^* = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.30 & 0.93 & 1.30 & 0.30 & 0.70 & 0.064 & 0.030 & 0.0063 \\ -0.71 & 0.70 & 0.064 & 0.030 & 0.0063 & 0.30 & 0.93 & 1.30 & 0.30 \end{bmatrix} \quad (145)$$

que é a mesma obtida na referência [6]. Na fig. 1, mostramos a simula-

ção.

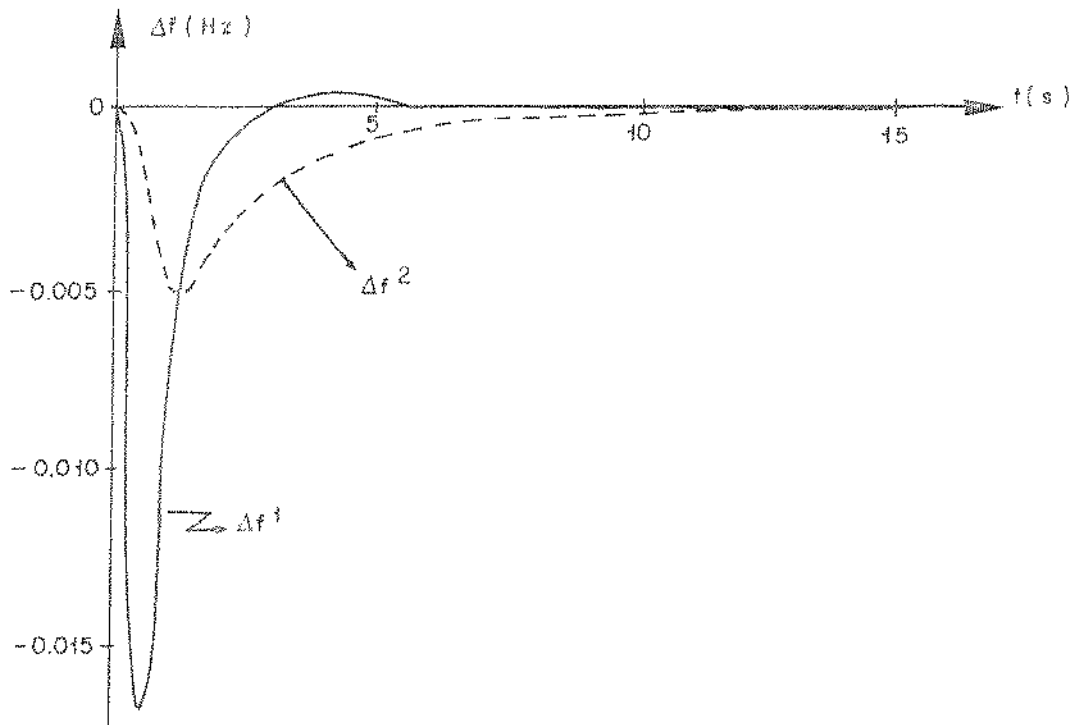


Fig. 1 - Desvio na frequência - CASO 1.

CASO 2 (Realimentação de Estado Descentralizada) : Cada controlador tem informações apenas do vetor de estado de sua própria área. A matriz de ganho  $K$  e  $\Omega$  encontrada foi

$$K = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.49 & 1.0 & 1.30 & 0.31 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.71 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.49 & 1.0 & 1.30 & 0.31 \end{bmatrix} \quad (146)$$

os ganhos descentralizados  $K^i$  tais que  $u^i = -K^i x^i$ ,  $i = 1, 2$  são dados por

$$K^1 = K^2 = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.49 & 1.0 & 1.30 & 0.31 \end{bmatrix} \quad (147)$$

e a simulação é mostrada na fig. 2.

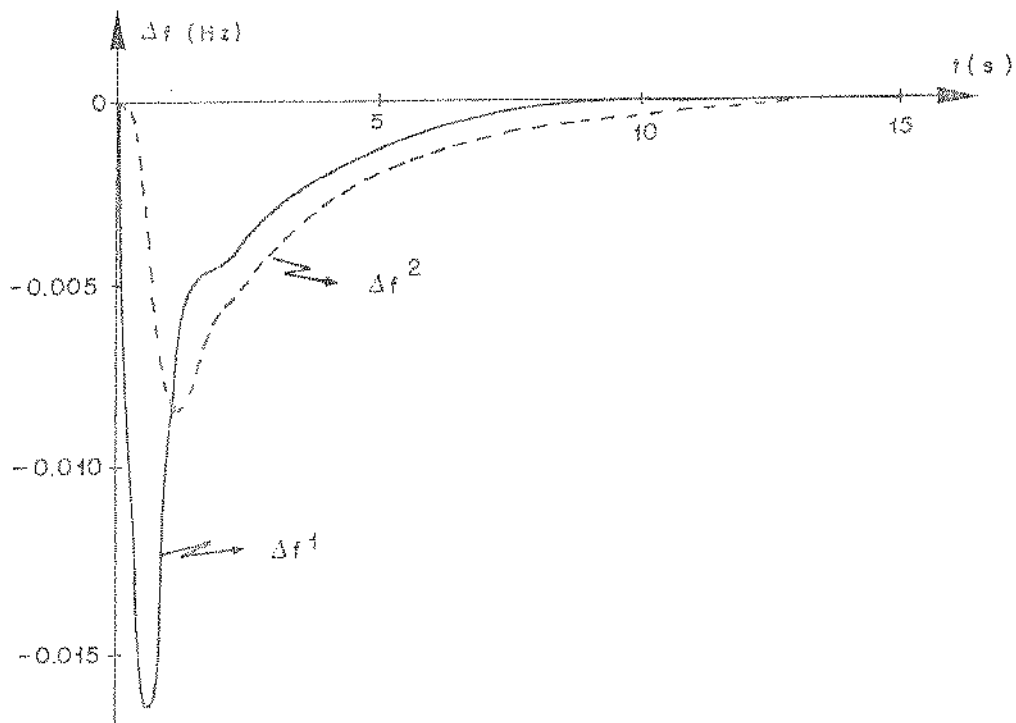


Fig. 2 - Desvio na frequência - CASO 2.

CASO 3 (Realimentação de Saída) : Cada controlador tem informações de todo o vetor de saída (definido em (144)). Após a convergência, a matriz de realimentação  $\tilde{K}$  e  $\tilde{B}$  obtida foi

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.60 & 0.0 & 2.0 & 0.0 & 0.40 & 0.0 & 0.11 & 0.0 \\ -0.49 & 0.40 & 0.0 & 0.11 & 0.0 & 0.60 & 0.0 & 2.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (148)$$

Como  $\tilde{K}$  satisfaz a equação I.(126), podemos determinar o ganho  $\tilde{S}$  de realimentação de saída tal que  $\tilde{K} = \tilde{S}\tilde{C}$ , que é dado por

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 1.40 & 2.0 & 0.93 & 0.11 \\ 0.93 & 0.11 & 1.40 & 2.0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

e a fig. 3 mostra a simulação

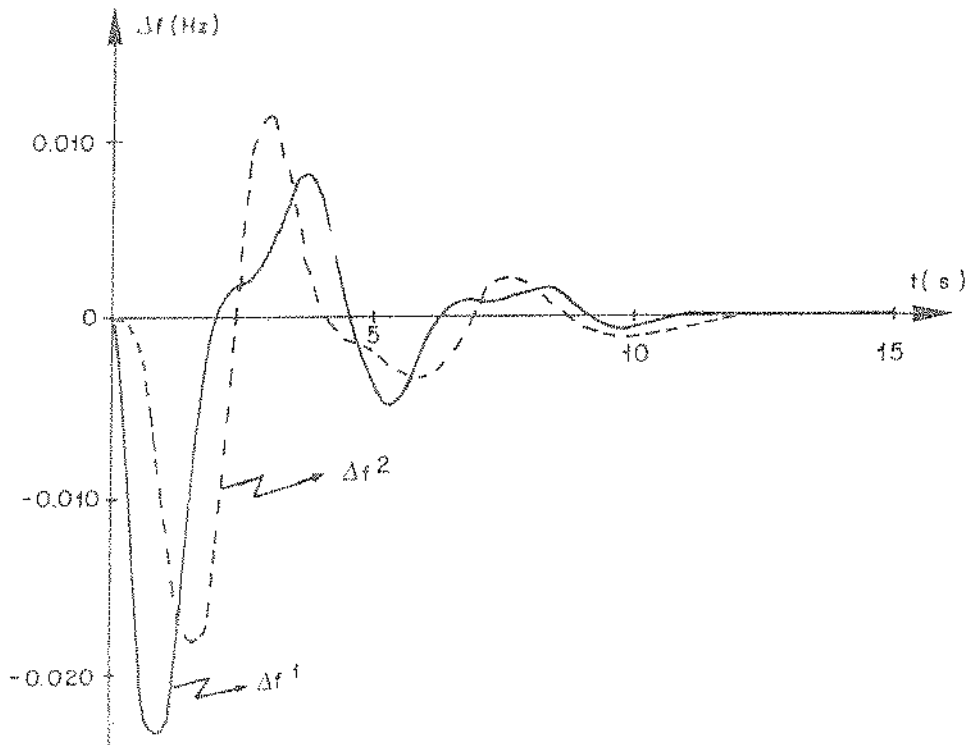


Fig. 3 - Desvio na frequência - CASO 3.

Para efeito de comparação, a fig. 4 a seguir apresenta um quadro com avaliações do critério  $J$ , o grau de otimalidade  $\gamma$  e também o grau de estabilidade de cada exemplo.

Casos	$J$	$\gamma$	Grau de Estabilidade
1	4.40	0.00	-0.49
2	4.88	0.11	-0.27
3	8.95	1.03	-0.17

Fig. 4 - Índice de desempenho e estabilidade do sistema em malha fechada.

### Comentários

- (1) O desempenho global do sistema com realimentação de estado centralizada (caso 1) ou descentralizada (caso 2) foi basicamente o mesmo (diferença de 11%), com os valores do ganho K de realimentação muito próximos. Isto devido à fragilidade do acoplamento entre as áreas 1 e 2. Porém, é claro que o algoritmo apresentado pode também ser usado em casos onde os subsistemas estejam fortemente acoplados.
- (2) Quando o controle fica restrito a depender do ACE, podemos esperar, como no caso 3, uma queda acentuada no desempenho.

#### II.6.2. Decomposição em Modos Rápidos e Lentos

Para duas áreas iguais interligadas, cujos parâmetros são dados por (138), obtemos as matrizes que descrevem o sistema global das equações (82)-(84):

$$A_{11}^1 = A_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -3.27 & -0.05 \end{bmatrix} ; \quad A_{12}^1 = A_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 6.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$A_{21}^1 = A_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.078 \end{bmatrix} ; \quad A_{22}^1 = A_{22}^2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 \\ 0.0 & -0.187 \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$A^{12} = A^{21} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 3.27 & 0.0 \end{bmatrix} ; \quad \Gamma^1 = \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -6.0 \end{bmatrix} ; \quad B_2^1 = B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.187 \end{bmatrix} \quad (152)$$

As matrizes para os subsistemas rápidos e lentos ficam:



$$A_S^1 = A_S^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -3.27 & -2.55 \end{bmatrix} ; \quad B_S^1 = B_S^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 6.0 \end{bmatrix} \quad (153)$$

$$\psi^{12} = \psi^{21} = \begin{bmatrix} 0.545 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

sendo  $A_f^1 = A_f^2 = A_{22}^1 = A_{22}^2$ , e  $B_f^1 = B_f^2 = B_2^1 = B_2^2$ . O parâmetro  $\sigma^i$  (equação (94)), para ponderação da equação de Riccati (59)-(60), fica

$$\sigma^1 = \sigma^2 > 0.594 \quad \rightarrow \quad \sigma^1 = \sigma^2 = 0.594 + 0.001 \quad (155)$$

e portanto a matriz  $Q^i$  fica

$$Q^1 = Q^2 = \begin{bmatrix} 0.595 & 0.0 \\ 0.0 & 0.595 \end{bmatrix} \quad (156)$$

Em relação aos subsistemas rápidos, alocando os pólos em  $(-8.0, -12.0)$  (Khalil and Rokotovic [15]) obtemos

$$K_f^1 = K_f^2 = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.33 \end{bmatrix} \quad (157)$$

Resolvendo a equação de Riccati (59)-(60), obtemos para os subsistemas lentos, com  $Q^1 = Q^2$  dada por (156)

$$K_S^1 = K_S^2 = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.53 \end{bmatrix} \quad (158)$$

Finalmente, podemos calcular o controle composto (equações (96)-(97)), obtendo

$$\begin{aligned}
 K_1^1 = K_1^2 &= [0.924 \quad 1.77] \\
 K_2^1 = K_2^2 &= [0.98 \quad 0.33] \\
 K_d^1 = K_d^2 &= [-2.31]
 \end{aligned}
 \tag{159}$$

e definindo

$$x' \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_1^2 & x_2^2 \end{bmatrix} ; \quad d' \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} d^1 & d^2 \end{bmatrix}
 \tag{160}$$

podemos representar o sistema global em malha fechada como

$$\dot{\tilde{x}} = A_c x + \Pi d
 \tag{161}$$

Obs. : Note que aqui ainda estamos supondo a demanda como um valor conhecido *a priori*, e portanto a informação  $\tilde{d}^i$ ,  $i=1, 2$ , que vai para o controle (equação (97)) é o valor real da perturbação na carga. Assim, agrupamos os termos que se relacionam com o vetor  $d$  na matriz  $\Pi$ .

As matrizes  $A_c$  e  $\Pi$  ficam

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.27 & -0.05 & 6.0 & 0.0 & 3.27 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -3.33 & 3.33 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -11.47 & -27.27 & -12.22 & -16.58 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 3.27 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.27 & -0.05 & 6.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.33 & 3.33 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -11.47 & -27.27 & -12.22 & -16.58 \end{bmatrix}
 \tag{162}$$

$$\Pi' = \begin{bmatrix} 0.0 & -6.0 & 0.0 & 28.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -6.0 & 0.0 & 28.8 \end{bmatrix}
 \tag{163}$$

e as figuras a seguir representam a simulação do sistema (161), para a con-

dição inicial  $x(0) = 0$ .

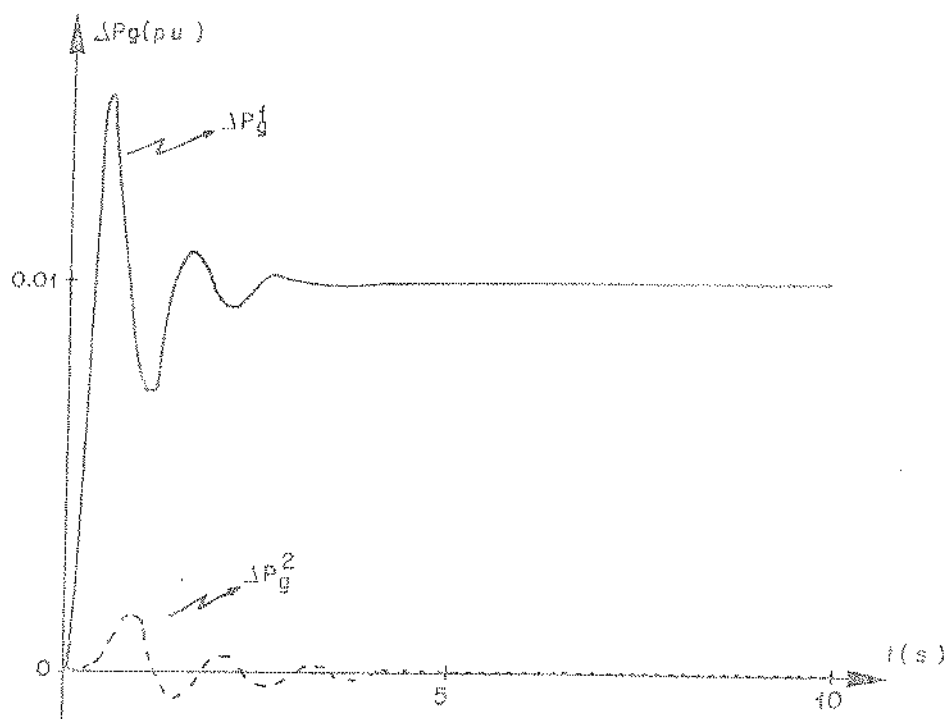
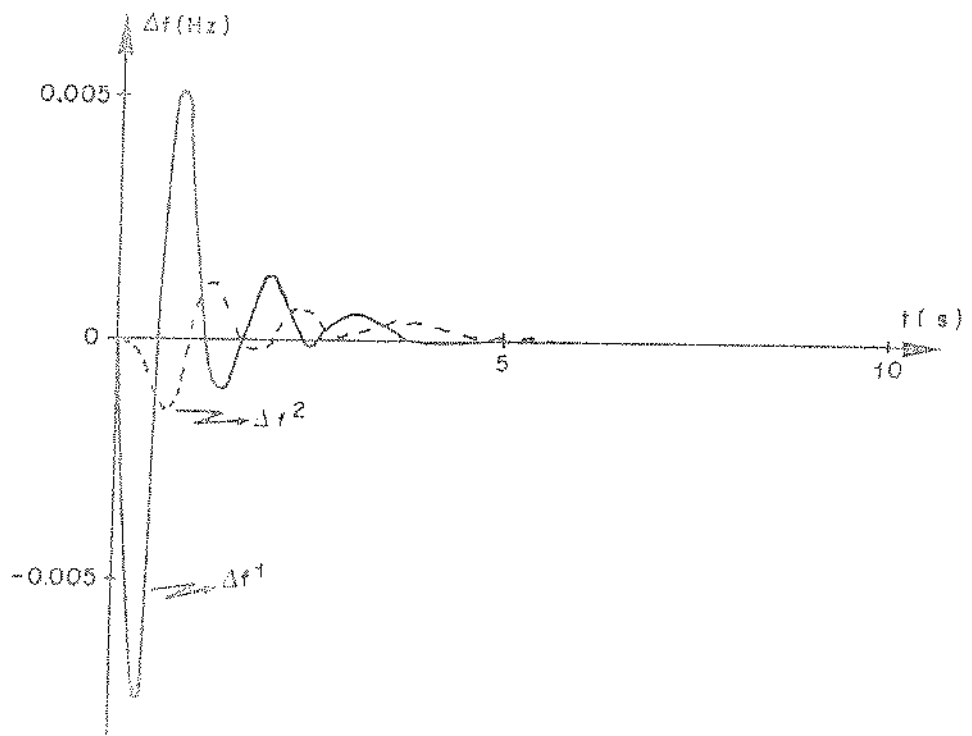


Fig. 5 - Desvio na frequência e na potência gerada para uma perturbação  $d' = [0.01 \quad 0.0]$ .

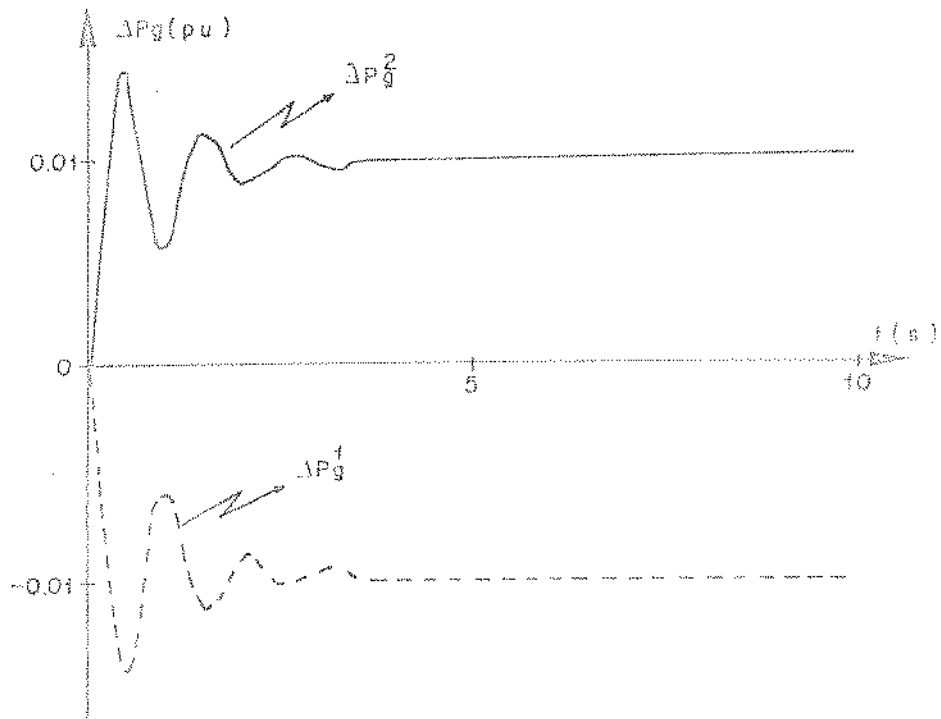
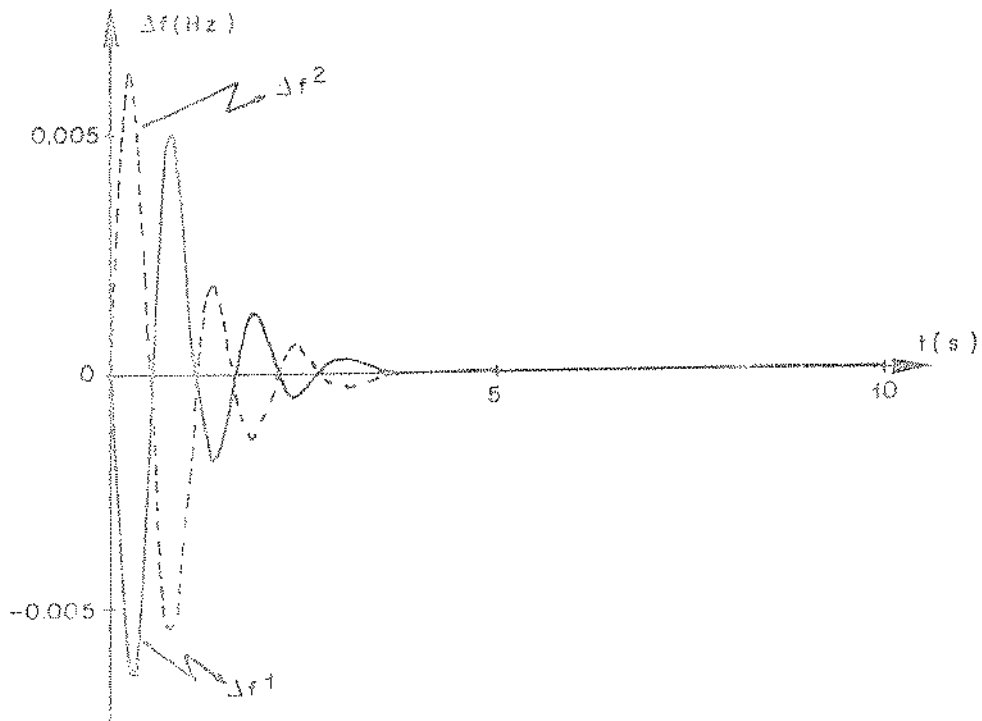


Fig. 6 - Desvio na frequência e na potência gerada para uma perturbação  $d^1 = [0.01 \quad -0.01]$ .

## Comentários

- (1) Podemos concluir que é possível determinar uma lei de controle descentralizada que estabiliza, dentro de limites práticos considerados aceitáveis (tempo de estabilização da ordem de 10 segundos) um sistema de potência interligado. A utilização do conceito de perturbações singulares, que permitiu a decomposição em modos rápidos e lentos, acrescido de técnicas de estabilidade baseadas na equação de Riccati, permitiu a decomposição total do cálculo dos ganhos de realimentação.
- (2) Desenvolvemos, portanto, um novo procedimento de síntese que poderá ser usado com sucesso em sistemas reais de grande porte.

II.6.3. Estimação de Demanda

Para duas áreas, a matriz T (equação (110)) fica

$$T = \begin{bmatrix} 0.545 & -0.545 \\ -0.545 & 0.545 \end{bmatrix} \quad (164)$$

e seus autovalores são  $\lambda^1 = 1.09$  e  $\lambda^2 = 0.0$ , e portanto o índice crítico é dado por  $i^* = 1$ . O autovetor normalizado associado é dado por (equações (130)-(134))

$$w^1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (165)$$

e os parâmetros  $\gamma^1$ ,  $\theta^1$  e  $\delta^1$  ficam

$$\gamma^1 = 0.167 \quad ; \quad \theta^1 = 0.955 \quad ; \quad \delta^1 = 0.40 \quad (166)$$

e portanto  $k_{\text{MAX}} = 7.83$ . Finalmente, a equação característica, para cálculo do lugar das raízes, fica

$$1 + k \frac{1.09}{s(0.167 s^2 + 0.955 s + 1.49)} = 0 \quad (167)$$

As figuras a seguir mostram o lugar das raízes para o subsistema lento com o estimador de demanda, e também como se comporta o grau de estabilidade, em módulo, para  $k \in [0.0, 7.83]$ .

Como podemos notar pelas figuras 7 e 8, para o ganho  $k^* = 0.65$  obtemos o maior grau de estabilidade. Fica assim determinado o ganho do estimador, ou seja,

$$\dot{\hat{d}}^i = -0.65 AP_{tie}^i, \quad i = 1, 2 \quad (168)$$

Este valor estimado  $\hat{e}$  então acoplado ao sinal de controle (equação (97)). Para a simulação, consideremos o vetor de estado dado por (160) acrescido do vetor  $\hat{d}' = [\hat{d}^1 \quad \hat{d}^2]$ , ou seja,

$$z \triangleq \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_1^2 & x_2^2 & \hat{d}^1 & \hat{d}^2 \end{bmatrix} \quad (169)$$

e o sistema assim composto pode ser descrito por

$$\dot{z} = A_c z + \Gamma d \quad (170)$$

onde  $d' = \begin{bmatrix} AP_d^1 & AP_d^2 \end{bmatrix}$  e as matrizes  $A$  e  $\Gamma$  são dadas por

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.27 & -0.05 & 6.0 & 0.0 & 3.27 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -3.33 & 3.33 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -11.47 & -27.27 & -12.22 & -16.58 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 28.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 3.27 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.27 & -0.05 & 6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.33 & 3.33 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -11.47 & -27.27 & -12.22 & -16.58 & 0.0 & 28.8 \\ -0.354 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.354 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.354 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.354 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (172)$$

Para evitar o aparecimento de "b\u00fas" no estimador, inicializa mos  $\tilde{d}^i(0)$ ,  $i = 1, 2$  de modo a satisfazermos a condi\u00e7\u00e3o (137). As figuras a seguir apresentam a simula\u00e7\u00e3o do sistema global (dado por (170)), para um vetor condi\u00e7\u00e3o inicial  $z(0) = 0$ , e uma perturba\u00e7\u00e3o real  $d^* = [0.01 \quad -0.01]$ . (Note que  $\tilde{d}^1(0) + \tilde{d}^2(0) = 0$ , assim como  $\Delta P_d^1 + \Delta P_d^2 = 0$ ).

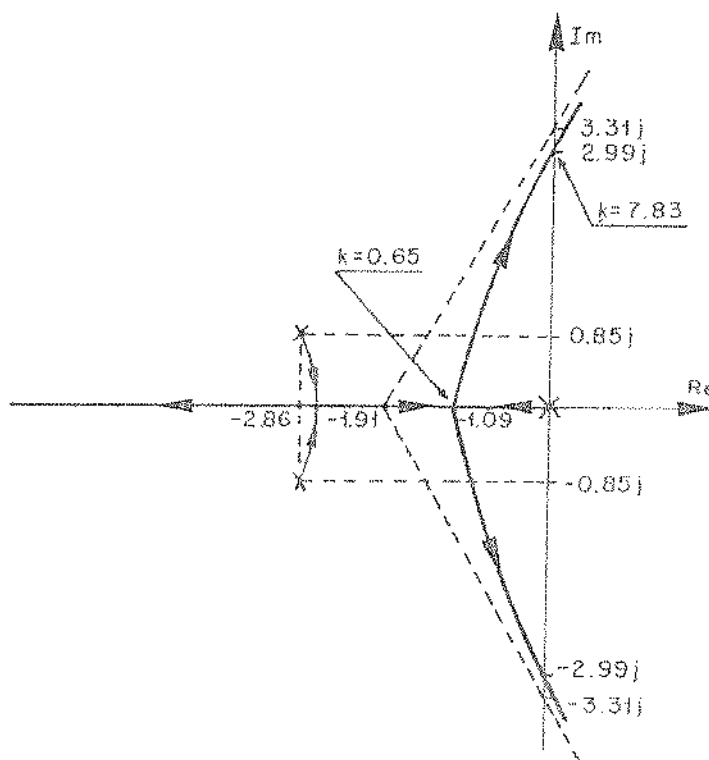


Fig. 7 - Lugar das ra\u00edzes.

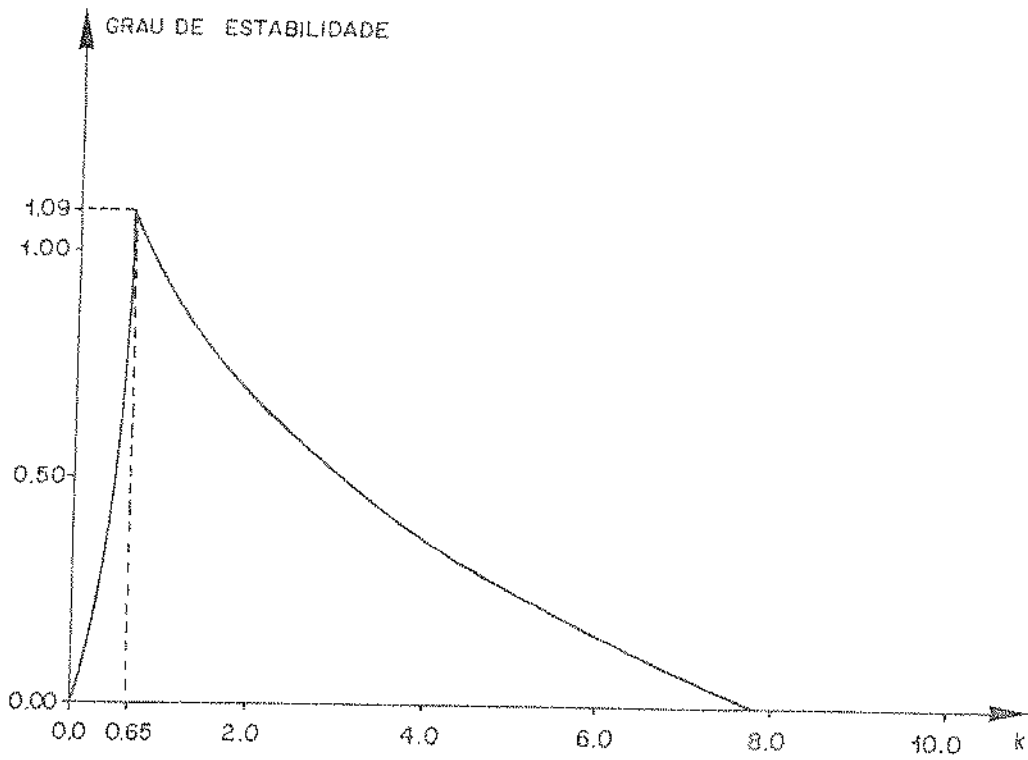


Fig. 8 - Grau de estabilidade em função do ganho  $k$ .

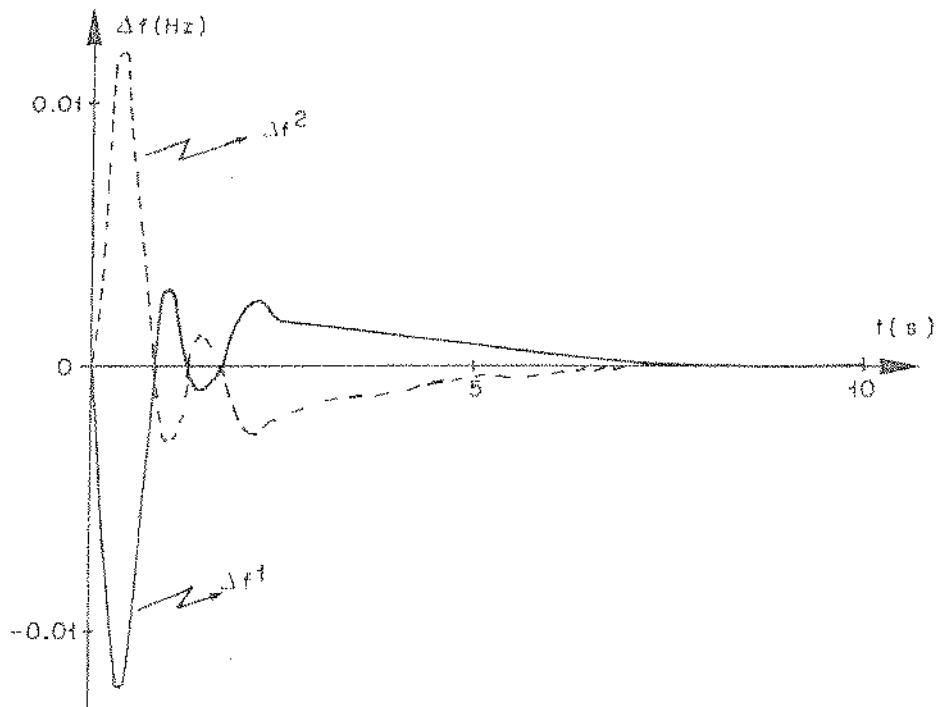


Fig. 9a - Desvio na frequência para  $d' = [0.01 \quad -0.01]$ .



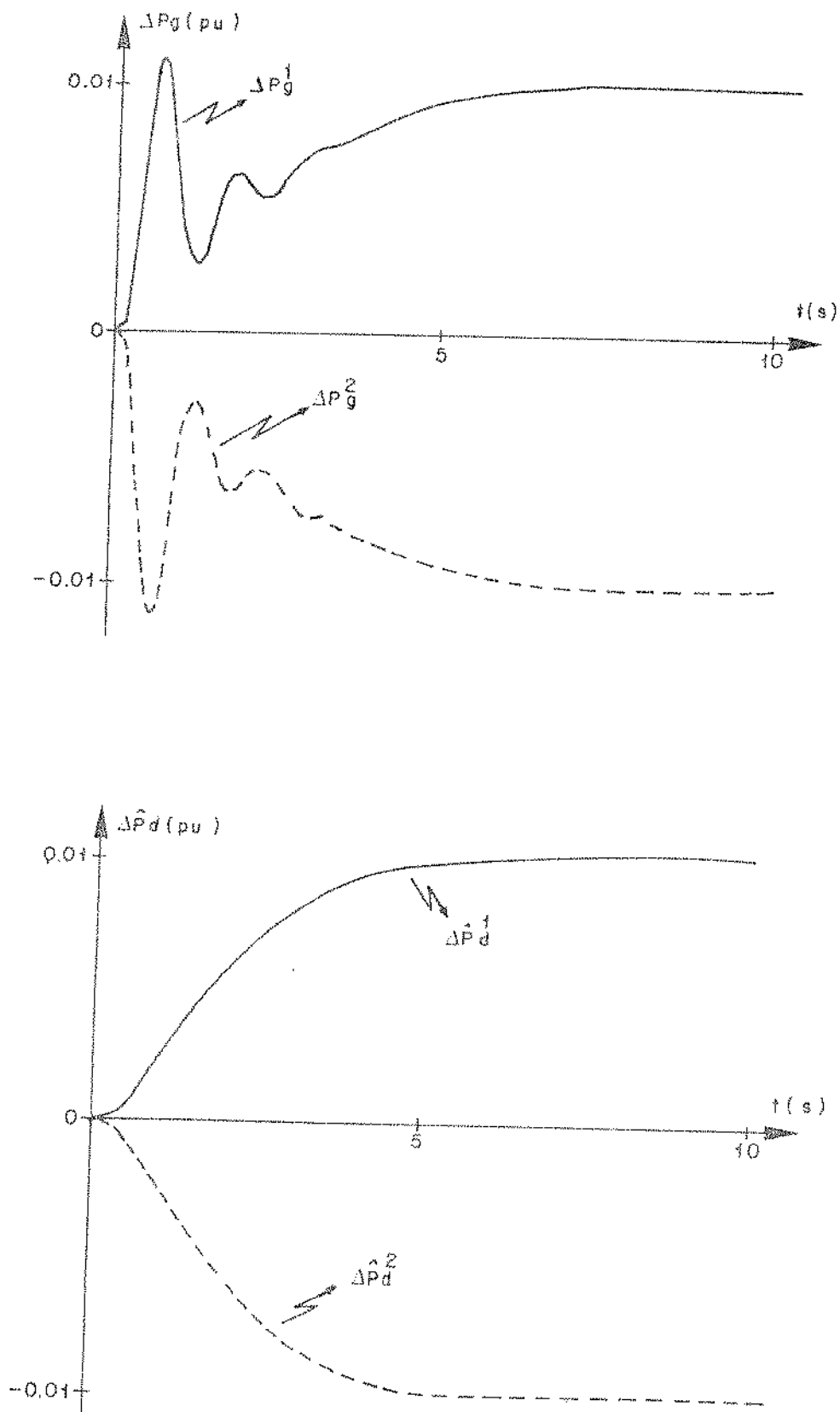


Fig. 9b - Desvio na potência gerada e comportamento do estimador para  $d' = [0.01 \quad -0.01]$ .

*Comentários*

- (1) Com a estimação, atendemos a todos os requisitos de controle, sem a necessidade do conhecimento *a priori* da variação na carga de cada área.
  
- (2) Com a inicialização feita, eliminamos o "bias" do estimador. Para isso, porém, precisamos saber *a priori* o valor da soma das demandas reais individuais. Em, mesmo com um estimador com "bias", todas as especificações clássicas de controle são atendidas.

### Conclusões

Inicialmente, apresentamos o método de obtenção de controladores descentralizados com a manipulação do sistema global. Conseguimos obter resultados melhores que os da literatura, mas ainda dependendo de um sistema centralizado de computação e enfrentando limitações para sistemas de ordem elevada. Com a decomposição em modos rápidos e lentos, mais a utilização de algumas propriedades da interconexão, conseguimos particionar sistemas grandes em subsistemas de pequena dimensão, desacoplados. Dessa forma, o cálculo do controle se torna extremamente simples, e a dimensão elevada dos sistemas pode ser encarada sem preocupações.

O exemplo apresentado mostra que os métodos desenvolvidos neste trabalho fornecem excelentes resultados (com tempos de estabilização da ordem de 10 segundos, bastante aceitáveis), com a lei de controle obtida de uma maneira totalmente descentralizada.

Enfim, a utilização do conceito de perturbações singulares, aliado a técnicas de estabilidade baseadas na equação de Riccati, permitiu um elevado nível de decomposição dos cálculos do ganho de realimentação; em consequência, desenvolvemos um novo procedimento de síntese de controladores que poderá ser usado com sucesso em vários sistemas reais de grande porte.

No caso específico do controle carga-frequência, com a construção do estimador de demanda (utilizando o lugar das raízes para determinação do ganho ótimo), conseguimos controlar todo o sistema de potência, sem a necessidade do conhecimento *a priori* do valor da demanda, atendendo às exigências clássicas de controle.

As simulações ilustram bem os resultados obtidos, com tempos de estabilização da ordem de 10 segundos e com os valores de regime no ponto desejado.

CAPÍTULO III

SÍNTESE DE ESTIMADORES DE ESTADO DESCENTRALIZADOS

## *Introdução*

Neste terceiro capítulo, mostramos que a técnica desenvolvida no item II.2 pode ser generalizada para a determinação de estimadores de estado descentralizados, em sistemas dinâmicos interconectados.

No item III.1, mostramos como obter os filtros descentralizados utilizando a mesma propriedade da equação de Riccati estudada no capítulo anterior.

Aplicamos então o método ao problema de estimação descentralizada no controle carga-frequência de sistemas de potência interligados (item III.2); finalmente, fazemos a simulação do estimador para um exemplo com duas áreas iguais interconectadas.

III.1. DETERMINAÇÃO DE FILTROS DESCENTRALIZADOS VIA UMA NOVA PROPRIEDADE DA EQUAÇÃO DE RICCATI ESTACIONÁRIA

Consideremos o problema do filtro descentralizado de Kalman (item I.5.2), e coloquemos a determinação de seu ganho ótimo  $G^i$ ,  $i=1, \dots, N$  como um problema linear quadrático (item I.4, equações (107)-(108)). Temos então:

$$\text{Min}_{G^i \in \Omega^i} \int_0^{\infty} \text{Tr} \left\{ (Q^i + G^i R^i G^{i'}) X^i(t) \right\} dt \quad (1)$$

$$\dot{X}^i = (A^i - G^i C^i)' X^i + X^i (A^i - G^i C^i) \quad (2)$$

$$X^i(0) = Y^i \quad ; \quad i=1, \dots, N \quad (3)$$

O conjunto de restrições sobre o ganho  $G^i$  é definido por

$$\Omega^i \triangleq \left\{ G^i \in \mathbb{R}^{n^i \times r^i} / (D^i - G^i E^i) \phi^i = 0 \right\} \quad (4)$$

porém, para efeito de cálculo de  $G^i \in \Omega^i$ , consideraremos a condição expressa por

$$D^i - G^i E^i = 0 \quad (5)$$

que embora não seja condição necessária, é mais simples e garante o desacoplamento dos  $N$  problemas lineares quadráticos para qualquer matriz  $\phi^i$  de interligação, facilitando a implementação do algoritmo.

O comportamento dinâmico dos subsistemas é dado por

$$\dot{x}^i = A^i x^i + D^i z^i + B^i u^i + w^i \quad (6)$$

$$z^i = \phi^i x = \sum_{j=1}^N \phi^{ij} x^j \quad (7)$$

$$y^i = C^i x^i + E^i z^i + \theta^i \quad (8)$$

e o  $i$ -ésimo filtro  $\bar{e}$  é dado por

$$\dot{\bar{x}}^i = A^i \bar{x}^i + G^i (y^i - C^i \bar{x}^i) + B^i u^i \quad ; \quad \bar{x}^i(t_0) = \bar{x}_0^i \quad (9)$$

Em relação aos subsistemas, temos  $x^i \in R^{n^i}$ ,  $y^i \in R^{r^i}$ ,  $u^i \in R^{m^i}$  e  $z^i \in R^{q^i}$ ,  $i=1, \dots, N$ . Ainda

$$\sum_{i=1}^N n^i = n \quad ; \quad \sum_{i=1}^N m^i = m \quad ; \quad \sum_{i=1}^N r^i = r \quad ; \quad \sum_{i=1}^N q^i = q \quad (10)$$

e o estado inicial  $\bar{e}$  é uma variável aleatória com média  $\bar{x}_0^i$  e matriz de covariância  $X_0^i$ . Assumimos que  $x_0^i$  é estatisticamente independente de  $\omega^i$  e  $\theta^i$ ,  $ru^i$  dos brancos tais que

$$E\{\omega^i\} = E\{\theta^i\} = 0 \quad (11)$$

$$E\{\omega^i \omega^{i' \prime}\} = Q^i > 0 \quad ; \quad E\{\theta^i \theta^{i' \prime}\} = R^i > 0 \quad ; \quad i=1, \dots, N \quad (12)$$

e assumimos também que os pares  $(A^i, C^i)$  são observáveis e os pares  $(A^i, Q^{i1/2})$  são controláveis,  $i=1, \dots, N$ .

A solução irrestrita do problema (1)-(3) (considerando-se  $\Omega^i \equiv R^{n^i} \times R^{r^i}$ ) é dada por

$$G^i = W^i C^{i \prime} (R^i)^{-1} \quad (13)$$

onde  $W^i$  é a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati

$$A^i W^i + W^i A^{i \prime} - W^i C^{i \prime} (R^i)^{-1} C^i W^i + Q^i = 0 \quad (14)$$

Obs. : Note que o problema do observador de estado é dual em relação ao problema do controlador. As hipóteses de observabilidade dos pares  $(A^i, C^i)$  e

controlabilidade dos pares  $(A^i, Q^{i1/2})$  são equivalentes à controlabilidade dos pares  $(A^{i'}, C^{i'})$  e observabilidade dos pares  $(A^{i'}, Q^{i1/2})$ .

Para obtermos o ganho  $G^i \in \Omega^i$ , podemos usar um procedimento análogo ao utilizado para determinação do ganho  $K^i$  do controlador. Expomos, portanto, o seguinte teorema (abstendo-nos do índice  $i$ , uma vez que  $G^i \in \Omega^i$  garante o desacoplamento entre os  $N$  subsistemas):

TEOREMA 1 : Se a matriz de ganho  $G \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  satisfaz

$$G + H = WC'R^{-1} \quad (15)$$

onde  $H \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  é uma matriz arbitrária, e  $W \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati

$$AW + WA' - WC'R^{-1}CW + Q + HRH' = 0 \quad (16)$$

então a matriz  $(A - GC)$  é assintoticamente estável.

PROVA : Utilizaremos o fato de que uma matriz e a sua transposta possuem os mesmos autovalores. Vamos então analisar o sistema dado por

$$\dot{\xi}(t) = (A' - C'G')\xi(t) \quad (17)$$

Consideremos como função de Lyapunov

$$v(\xi(t)) = \xi'W\xi \quad (18)$$

e calculemos sua derivada no tempo

$$\dot{v}(\xi(t)) = \xi'[(A - GC)W + W(A' - C'G')] \xi \quad (19)$$

que, com (15), fica

$$\dot{v}(\xi(t)) = \xi'[AW + WA' - WC'R^{-1}CW + HCW - WC'R^{-1}CW + WC'H'] \xi \quad (20)$$

e, usando-se (16), obtemos

$$\dot{v}(\xi(t)) = \xi'[-Q - HRH' + HCW - WC'R^{-1}CW + WC'H'] \xi \quad (21)$$

que pode ser escrita como

$$\dot{v}(\xi(t)) = \xi'[-Q - (WC'R^{-1} - H)R(WC'R^{-1} - H)'] \xi \quad (22)$$



e finalmente

$$\dot{v}(\xi(t)) = -\xi'(Q + GRG')\xi \quad (23)$$

$$\dot{v}(\xi(t)) \leq -\xi' Q \xi \leq 0 \quad (24)$$

ficando provada a estabilidade do sistema (equação (17)). Para provar sua estabilidade assintótica, basta notar que não existe  $\xi(0) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $v(\xi(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$ , pois assumimos o par  $(A', Q^{1/2})$  como observável.

Portanto, através da escolha de  $R^i$  (que pode ser qualquer) devemos obter  $G^i$  tal que a restrição dada pela equação (5) seja satisfeita. Escolhendo  $H^i$  como

$$H^i = \left[ W^i C^{i'} (R^i)^{-1} E^i - D^i \right] (E^{i'} E^i)^{-1} E^{i'} \quad (25)$$

facilmente podemos verificar que  $G^i = W^i C^{i'} (R^i)^{-1} - H^i$  satisfaz a restrição dada por (5).

Podemos então agora apresentar o procedimento numérico para a determinação do ganho ótimo do estimador de estado descentralizado.

#### ALGORITMO 1

*PASSO 1* : Fixe o índice de iterações  $\ell = 0$  e faça  $H_\ell^i = 0$

*PASSO 2* : Resolva a equação de Riccati para  $W_\ell^i$

$$A^i W_\ell^i + W_\ell^i A^{i'} - W_\ell^i C^{i'} (R^i)^{-1} C^i W_\ell^i + Q^i + H_\ell^i R^i H_\ell^{i'} = 0$$

*PASSO 3* : Calcule

$$H_{\ell+1}^i = \left[ W_\ell^i C^{i'} (R^i)^{-1} E^i - D^i \right] (E^{i'} E^i)^{-1} E^{i'}$$

*PASSO 4* : Se  $\|H_{\ell+1}^i - H_\ell^i\| < \epsilon$ , sendo  $\epsilon$  real positivo suficientemente pe-

queno, vá para o PASSO 5. Caso contrário, faça  $l = l + 1$  e volte para o PASSO 2.

PASSO 5 : Calcule  $G^i$  e  $\Omega^i$  fazendo

$$G^i = W_{\ell}^i C^{i'} (R^i)^{-1} - H_{\ell+1}^i$$

Repita a seqüência de passos para todo  $i$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Obs. : Note que, para resolução numérica do problema de estimação de estado, podemos utilizar o mesmo algoritmo usado no cálculo do ganho do controlador sujeito à restrições estruturais, tomando o cuidado de transpor todas as matrizes em questão e também de alterar adequadamente o PASSO 3.

### III.2. APLICAÇÃO AO CONTROLE CARGA FREQUÊNCIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA INTERLIGADOS

Considerando as mesmas equações, já tratadas no item II.5, que descrevem o balanço incremental de potência para a área  $i$  (Fosha and Elgerd [6]):

$$\frac{2H^i}{f^*} \Delta f^i + D^i \Delta f^i + \Delta P_{tie}^i = \Delta P_g^i - \Delta P_d^i \quad (26)$$

$$T_t^i \dot{\Delta P}_g^i = -\Delta P_g^i + \Delta X_g^i \quad (27)$$

$$T_g^i \dot{\Delta X}_g^i = -\Delta X_g^i - \frac{1}{R^i} \Delta f^i + \Delta P_c^i \quad (28)$$

$$\Delta P_{tie}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} \left( \int \Delta f^i dt - \int \Delta f^j dt \right) \quad (29)$$

Podemos definir, para efeito de estimação de estado, os vetores de estado, de controle e de interconexão como:

$$x^i \triangleq \begin{bmatrix} \Delta f^i \\ \Delta P_{\text{g}}^i \\ \Delta X_{\text{g}}^i \end{bmatrix} ; \quad u^i \triangleq \begin{bmatrix} \Delta P_{\text{c}}^i \\ c \end{bmatrix} ; \quad z^i \triangleq \begin{bmatrix} \Delta P_{\text{tie}}^i \end{bmatrix} \quad (30)$$

Então, o comportamento dinâmico em termos de variáveis de estado fica

$$\begin{aligned} \dot{x}^i = & \begin{bmatrix} \frac{-f^* D^i}{2H^i} & \frac{f^*}{2H^i} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T_{\text{t}}^i} & \frac{1}{T_{\text{t}}^i} \\ \frac{1}{T_{\text{g}}^i R^i} & 0 & \frac{-1}{T_{\text{g}}^i} \end{bmatrix} x^i + \begin{bmatrix} \frac{-f^*}{2H^i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z^i + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{\text{g}}^i} \end{bmatrix} u^i + \begin{bmatrix} \frac{-f^*}{2H^i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta P_{\text{d}}^i \end{aligned} \quad (31)$$

$$\dot{z}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N T^{ij} (\Delta f^i - \Delta f^j) \triangleq \phi^i x \quad (32)$$

Comparando (31)-(32) com (6)-(7) obtemos facilmente as matrizes  $A^i$ ,  $D^i$ ,  $B^i$  e o vetor ruído de excitação de estado  $w^i$ . Neste caso, estamos considerando  $\Delta P_d^i$  como variável aleatória (que é na verdade a situação que acontece nos sistemas reais). A estimação de estado é utilizada em casos onde temos algumas variáveis de saída facilmente mensuráveis e variáveis de estado que não são medidas diretamente, e portanto precisam ser estimadas. Trataremos dois casos neste item, imaginando dois diferentes vetores de saída. Como variável de saída facilmente detectada, tomamos a variação na frequência  $\Delta f^i$ . No CASO 1, consideramos também como saída a variação na potência pelas linhas de ligação  $\Delta P_{tie}^i$ , e no CASO 2, consideramos, além da frequência, o ACE<sup>i</sup> como a outra variável de saída (o ACE é definido na equação II.(66)). Temos então:

#### CASO 1 : Definindo

$$y^i \triangleq \begin{bmatrix} \Delta f^i \\ \Delta P_{tie}^i \end{bmatrix} \quad (33)$$

podemos escrever

$$y^i = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x^i + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} z^i + \theta^i \quad (34)$$

onde  $\theta^i$  é o ruído de observação e, por comparação com a equação (8), podemos obter  $C^i$  e  $E^i$ .

#### CASO 2 : Definindo

$$y^i \triangleq \begin{bmatrix} \Delta f^i \\ ACE^i \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde  $ACE^i = \Delta P_{tie}^i + \beta^i \Delta f^i$  e  $\beta^i = D^i + \frac{1}{R^i}$  (dados pela equação II-(66)).

Neste caso, temos

$$y^i = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ \beta^i & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} x^i + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} z^i + \theta^i \quad (36)$$

### III.3. EXEMPLO: DUAS ÁREAS IGUAIS INTERLIGADAS

Vamos aplicar a técnica apresentada de estimação de estado descentralizada no mesmo exemplo tratado no item II.6. Com os dados da equação II.(138), obtemos

$$A^1 = A^2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 6.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.33 & 3.33 \\ -5.21 & 0.0 & -12.5 \end{bmatrix} ; \quad D^1 = D^2 = \begin{bmatrix} -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B^1 = B^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 12.5 \end{bmatrix} ; \quad \phi^1 = \phi^2 = [0.545 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad -0.545 \quad 0.0 \quad 0.0] \quad (38)$$

Para as matrizes  $Q^i$  e  $R^i$ , temos (Geromel [7])

$$Q^1 = Q^2 = \begin{bmatrix} 3.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} ; \quad R^1 = R^2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Para o CASO 1,  $C^i$  e  $E^i$  são dadas por

$$C^1 = C^2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} ; \quad E^1 = E^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

e para o CASO 2,  $E^1 = E^2$  são os mesmos de (40) e  $C^i$  fica

$$C^1 = C^2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.425 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Obs. : É interessante notar que, no CASO 1, o algoritmo proposto converge na primeira iteração. Isto porque, com as matrizes dadas por (37)-(40), o primeiro termo no cálculo de  $H_{\ell+1}^i$  é igual a zero, ou seja

$$\left[ W_{\ell}^i C^{i'} (R^i)^{-1} E^i \right] (E^{i'} E^i)^{-1} E^{i'} = 0 \quad (42)$$

e portanto temos, independente da iteração  $\ell$

$$H_{\ell+1}^i = -D^i (E^{i'} E^i)^{-1} E^{i'} \quad (43)$$

garantindo a convergência do algoritmo para  $\ell = 1$ .

Como condições iniciais (valores médios), utilizamos

$$\bar{x}(0)^1 = [0.0 \quad 0.01 \quad 0.01]^T ; \quad \bar{x}(0)^2 = [0.0 \quad 0.0 \quad 0.0]^T \quad (44)$$

e na inicialização do estimador, com a finalidade de observar a evolução do erro médio quadrático, colocamos propositalmente uma condição inicial diferente da expressa pela equação (44):

$$\bar{x}(0)^1 = \bar{x}(0)^2 = [0.0 \quad 0.0 \quad 0.0]^T \quad (45)$$

Obtivemos, após a convergência do algoritmo (com  $\epsilon = 1.0 \cdot 10^{-3}$ ), para o CASO 1 (com uma única iteração)

$$G^1 = G^2 = \begin{bmatrix} 5.80 & -6.0 \\ -0.45 & 0.0 \\ -1.58 & 0.0 \end{bmatrix} ; \quad W^1 = W^2 = \begin{bmatrix} 5.80 & -0.45 & -1.58 \\ -0.45 & 0.19 & 0.22 \\ -1.58 & 0.22 & 0.56 \end{bmatrix} \quad (46)$$

e, escolhendo como matriz de ponderação  $Y^1 = Y^2 = I$ , temos como resultado da minimização do erro quadrático médio (no caso estacionário):

$$\text{Tr}(W^1) = \text{Tr}(W^2) = 6.55 \quad (47)$$

Para o CASO 2 foram necessárias 8 iterações, fornecendo

$$G^1 = G^2 = \begin{bmatrix} 8.63 & -6.0 \\ -0.68 & 0.0 \\ -2.32 & 0.0 \end{bmatrix} ; \quad W^1 = W^2 = \begin{bmatrix} 8.63 & -0.68 & -2.32 \\ -0.68 & 0.21 & 0.28 \\ -2.32 & 0.28 & 0.75 \end{bmatrix} \quad (48)$$

e o resultado da minimização (com a matriz de ponderação igual à matriz identidade) fica

$$\text{Tr}(W^1) = \text{Tr}(W^2) = 9.59 \quad (49)$$

As figuras a seguir ilustram resultados da simulação do filtro com os ganhos ótimos obtidos; representam a evolução no tempo do erro de estimação para a variável  $\Delta P_{\xi}^1$ .

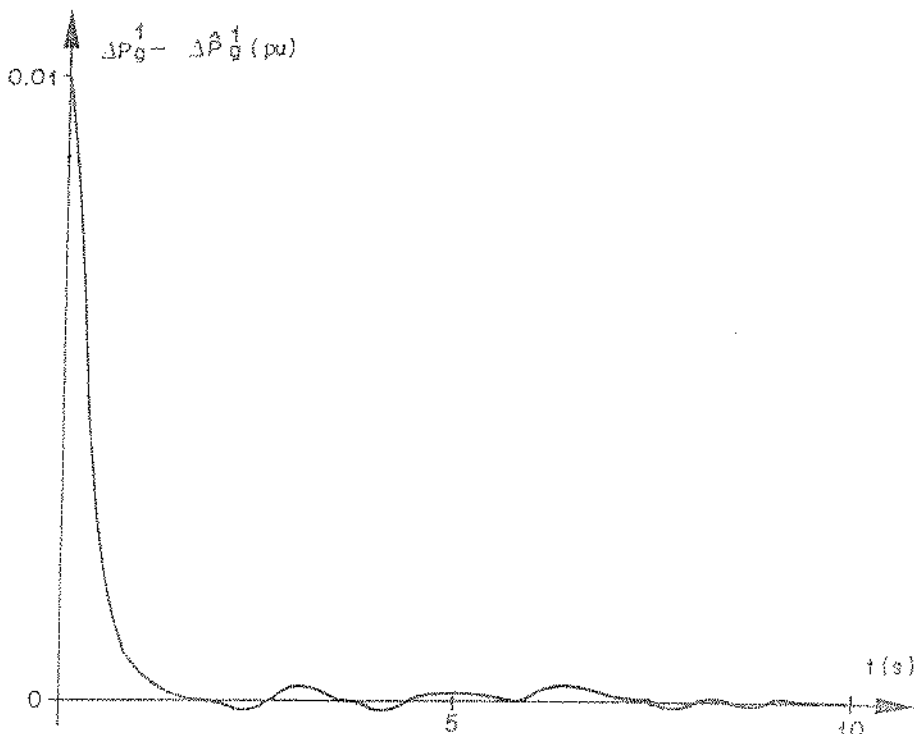


Fig. 1 -  $\Delta P_{\xi}^1 - \Delta \hat{P}_{\xi}^1$  para o CASO 1.

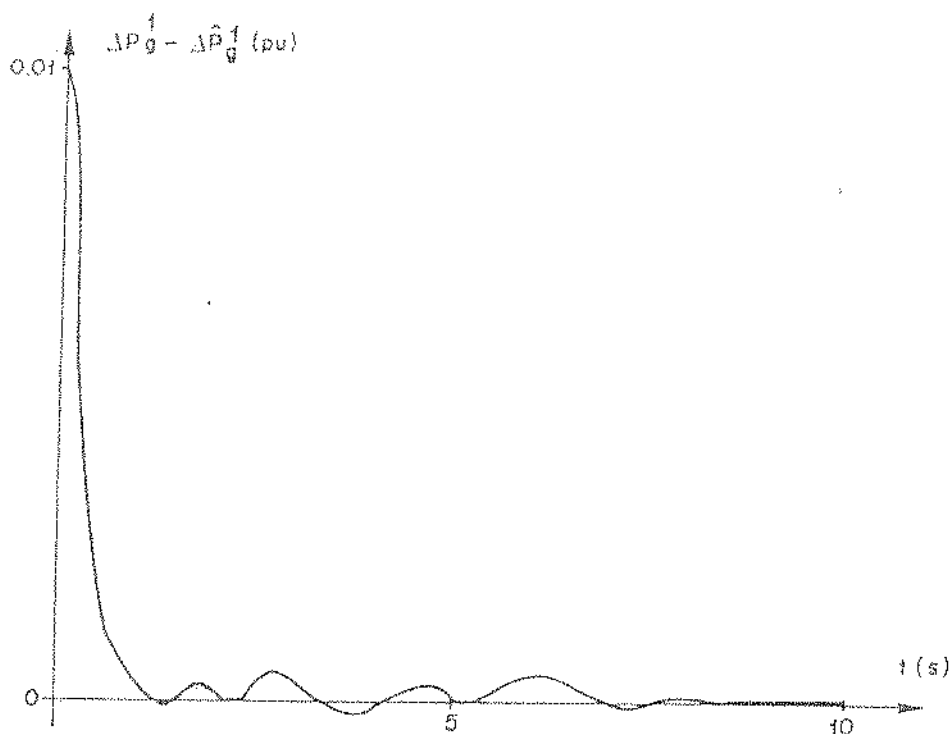


Fig. 2 -  $\Delta P_g^1 - \Delta \hat{P}_g^1$  para o CASO 2.

### Comentários

- (1) Em ambos os casos vemos que o erro médio tende rapidamente para zero, e portanto em regime a variável estimada "segue" a variável real com erro mínimo.
- (2) Podemos concluir que com as medidas de  $\Delta f^i$  e  $\Delta P_{tie}^i$  (CASO 1) conseguimos um resultado melhor do que com as medidas de  $\Delta f^i$  e  $\Delta CE^i$  (CASO 2). O resultado das minimizações (equações (47) e (49)) expressa a diferença de desempenho para as duas saídas estudadas.
- (3) A utilização do algoritmo desenvolvido para determinação do ganho ótimo dos estimadores de estado descentralizados se mostrou bem satisfatória, comparada a técnicas como a de gradiente projetado (Ceronel [7]), onde o número de iterações era bem maior.



### *Conclusões*

A técnica desenvolvida no capítulo II, aplicada à determinação de estimadores descentralizados, mostrou-se bem satisfatória, como podemos observar pela simulação. Comparada a outros métodos da literatura (como gradiente projetado) mostrou-se mais eficaz e rápida.

Para a simulação, de um sistema de potência composto por duas áreas iguais interligadas, acrescentamos ao programa a geração de ruídos gaussianos de excitação de estado e de observação, e o executamos num computador PDP-10, garantindo um melhor desempenho na geração aleatória dos ruídos.

Creemos, com o método apresentado, ter contribuído com a teoria de estimadores de estado descentralizados.

CONCLUSÃO GERAL

Este trabalho abordou principalmente dois assuntos: a síntese de controladores descentralizados e a síntese de estimadores de estado descentralizados.

A síntese de controladores foi considerada primeiramente sob um ponto de vista onde, manipulando-se globalmente o sistema, obtém-se o controle sujeito a determinadas restrições. Depois, partimos para a decomposição do sistema em modos rápidos e lentos, visando simplificar a determinação do controle. Usamos ainda, para desacoplar os modos lentos, uma propriedade da interconexão. Os modos rápidos, como era de se esperar, são desacoplados.

Para a síntese de estimadores de estado descentralizados, utilizamos a mesma técnica usada na determinação de controladores descentralizados com manipulação do sistema global, obtendo os ganhos ótimos dos estimadores com um algoritmo dual ao proposto no capítulo II.

Contribuímos, portanto, para a teoria de estimação de estado e de controle de sistemas dinâmicos, adequando uma nova técnica de síntese à tendência para a descentralização e utilização de microcomputadores. Outros sistemas de grande porte, além dos sistemas de potência, podem perfeitamente receber o mesmo tratamento, tornando-se seus problemas de síntese de controladores e de estimadores de estado bem mais simples, reduzidos a uma dimensão bem menor.

Em particular, contribuímos para o controle carga-frequência de sistemas de potência, tanto no aspecto de descentralização do tratamento do problema e dos cálculos (permitindo a abordagem de sistemas de dimensão muito maior) quanto no atendimento às exigências clássicas de controle carga-frequência, obtendo uma lei de controle independente da variação na carga e da condição inicial.

Como continuação deste trabalho, podemos prever por exemplo o tratamento de sistemas não-lineares passíveis de decomposição (o próprio controle carga-frequência, com a interconexão entre áreas não-linear, é um caso a ser estudado), ou ainda sistemas discretos, ou sistemas com outros tipos de restrições estruturais impostas aos controladores e estimadores acoplados.

APÉNDICE

PROGRAMAS DESARROLLADOS

```

P
P *****
C
C
C   Programa:  RESOLUÇÃO DO PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO.
C
C               COM RESTRIÇÕES  ESTRUTURAIS SOBRE O
C               GANHO DE REALIMENTAÇÃO K , VIA UMA NOVA
C               PROPRIEDADE DA EQUAÇÃO DE RICCATI
C               (MANIPULAÇÃO DO SISTEMA GLOBAL)
C               ESTA MESMA PROPRIEDADE PERMITE A
C               RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO FILTRO DE
C               KALMAN (ESTIMADORES DE ESTADO).
C *****
C
C   Caso 1: Realimentação de Saída
C
C           
$$F(k) = k [ I - C'(C C')^{-1} C ]$$

C
C   Caso 2: Controle Descentralizado
C
C           
$$F(k) = k - \text{bloc diag } [ P_1, P_2, \dots, P_N ]$$

C
C   Caso 3: Filtro de Kalman - Estimadores de Estado
C
C           
$$F(k) = E D - G E ]$$

C
C   Obs.: Para o caso 3, o arquivo de dados deve
C   ser estruturado com algumas matrizes
C   transpostas; os resultados do mesmo caso
C   também apresentarão algumas matrizes
C   transpostas, pois a Equação de Riccati
C   resultante do problema de estimação de
C   estado é transposta em relação aos
C   casos 1 e 2.
C *****
C
C
C

```

```

C
REAL IOPT,LAMBDA
REAL K(40),I(40),LN(40),LAIK(40)
DIMENSION A(40),B(40),B(40),R(40),DAUX(40),RI(40)
DIMENSION C(40),CT(40),CAUX(40),D(40),DT(40),DES(40)
DIMENSION H(40),HTH(40),HAUX(40),FKN(40),PEST(40)
DIMENSION RRJ(10),RII(10),RRAB(10),RIAB(10),XO(10)
DIMENSION MN(10),LW(10)

C
C   Arquivo de entrada
C
10  WRITE(1,11)
11  *  FORMAT(1H1,///15X,'* DADOS *',///10X,'ENTRADA',//8X,
        'TELA : 1',//8X,'ARQUIVO : 2',//10X,'# ')
        READ(1,12) NIN
12  *  FORMAT(I2)
        IF(NIN.NE.1.AND.NIN.NE.2) GO TO 10
        IF(NIN.EQ.1) IR=1
        IF(NIN.EQ.2) IR=6
        IF(NIN.EQ.2) CALL ABRE(IR)

C
C   Arquivo de saida
C
13  WRITE(1,14)
14  *  FORMAT(///10X,'SAIDA',//8X,'TELA : 1',//8X,'IMPRESSORA
        : 2',//8X,'ARQUIVO : 3',//10X,'# ')
        READ(1,12) NOUT
        IF(NOUT.EQ.1) IW=1
        IF(NOUT.EQ.2) IW=2
        IF(NOUT.NE.1.AND.NOUT.NE.2.AND.NOUT.NE.3) GO TO 13
        IF(NOUT.EQ.3) IW=2
        IF(NOUT.EQ.3) CALL ABRE(IW)

C
C   Escolha da opcao
C
15  WRITE(1,16)
16  *  FORMAT(1H1,///10X,'OPCAD',//8X,'REALIMENTACAO DE SAIDA : 1',
        //8X,'CONTROLE DESCENTRALIZADO : 2',//8X,'FILTRO DE KALMAN
        : 3',//10X,'# ')
        READ(1,17) NOPCAD
        IF(NOPCAD.NE.1.AND.NOPCAD.NE.2.AND.NOPCAD.NE.3) GO TO 15

C
C   Leitura dos dados
C
17  *  IF(IR.EQ.1) WRITE(1,17)
        FORMAT(1H1,///10X,'ESCREVA :',//10X,'N',4X,'M',4X,'R',4X,'EPS'
        //5X)
        READ(IR,18) N,M,NR,EPS
18  *  FORMAT(3I4,F8.6)
        IF(IR.EQ.1) WRITE(1,19)
19  *  FORMAT(///10X,'ESCREVA XO (TRANSPOSTO)',//5X)
        READ(IR,20) (XO(I),I=1,N)
20  *  FORMAT(10F9.4)
        IF(IR.EQ.1.AND.(NOPCAD.EQ.1.OR.NOPCAD.EQ.2)) WRITE(1,21)
21  *  FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ A',/)

```

```

22 IF (IR.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.3) WRITE(1,22)
   FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ A (TRANSPOSTA)',/)
   CALL ALER(A,N,N,IR)
   IF (IR.EQ.1.AND.(NOPCAD.EQ.1.OR.NOPCAD.EQ.2)) WRITE(1,23)
23 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ B',/)
   IF (IR.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.3) WRITE(1,24)
24 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ C (TRANSPOSTA)',/)
   CALL ALER(B,N,M,IR)
   IF (IR.EQ.1) WRITE(1,25)
25 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ D',/)
   CALL ALER(D,N,N,IR)
   IF (IR.EQ.1) WRITE(1,26)
26 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ R',/)
   CALL ALER(R,M,M,IR)
   IF (IR.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.1) WRITE(1,27)
27 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ C',/)
   IF (NOPCAD.EQ.1) CALL ALER(C,NR,N,IR)
   IF (IR.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.2) WRITE(1,28)
28 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ DES',/)
   IF (NOPCAD.EQ.2) CALL ALER(DES,M,NR,IR)
   IF (IR.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.3) WRITE(1,29)
29 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ D',/)
   IF (NOPCAD.EQ.3) CALL ALER(D,N,NR,IR)
   IF (IR.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.3) WRITE(1,30)
30 FORMAT(///10X,'ESCREVA A MATRIZ H',/)
   IF (NOPCAD.EQ.3) CALL ALER(H,N,NR,IR)

C
C Impressao dos dados
C
   WRITE(IW,31)
31 FORMAT(1H1,6X,'ESTADO INICIAL',/)
   DO 32 I=1,N
32 WRITE(IW,33) X0(I)
33 FORMAT(4X,E9.3)
   IF (IW.EQ.1) CALL PAGE
   IF (NOPCAD.EQ.1.OR.NOPCAD.EQ.2) WRITE(IW,34)
34 FORMAT(///6X,'MATRIZ *A*',/)
   IF (NOPCAD.EQ.3) WRITE(IW,35)
35 FORMAT(///6X,'MATRIZ *A* (Transposta)',/)
   CALL ATMP(A,N,N,IW)
   IF (IW.EQ.1) CALL PAGE
   IF (NOPCAD.EQ.1.OR.NOPCAD.EQ.2) WRITE(IW,36)
36 FORMAT(///6X,'MATRIZ *B*',/)
   IF (NOPCAD.EQ.3) WRITE(IW,37)
37 FORMAT(///6X,'MATRIZ *C* (Transposta)',/)
   CALL ATMP(B,N,M,IW)
   IF (IW.EQ.1) CALL PAGE
   WRITE(IW,38)
38 FORMAT(///6X,'MATRIZ *D*',/)
   CALL ATMP(D,N,N,IW)
   IF (IW.EQ.1) CALL PAGE
   WRITE(IW,39)
39 FORMAT(///6X,'MATRIZ *R*',/)
   CALL ATMP(R,M,M,IW)
   IF (IW.EQ.1) CALL PAGE

```

```

IF(NOPCAD.EQ.1) WRITE(IW,40)
40 FORMAT(///6X,'MATRIZ *C*',/)
IF(NOPCAD.EQ.1) CALL AIMP(C,NR,N,IW)
IF(IW.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.1) CALL PAGE
IF(NOPCAD.EQ.2) WRITE(IW,41)
41 FORMAT(///6X,'MATRIZ *DES*',/)
IF(NOPCAD.EQ.2) CALL AIMP(DES,N,NR,IW)
IF(IW.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.2) CALL PAGE
IF(NOPCAD.EQ.3) WRITE(IW,42)
42 FORMAT(///6X,'MATRIZ *D*',/)
IF(NOPCAD.EQ.3) CALL AIMP(D,N,NR,IW)
IF(IW.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.3) CALL PAGE
IF(NOPCAD.EQ.3) WRITE(IW,43)
43 FORMAT(///6X,'MATRIZ *E*',/)
IF(NOPCAD.EQ.3) CALL AIMP(H,N,NR,IW)
IF(IW.EQ.1.AND.NOPCAD.EQ.3) CALL PAGE
C
C Definicao do numero maximo de iteracoes no algoritmo proposto
C
WRITE(1,44)
44 FORMAT(///10X,'NUMERO MAXIMO DE ITERACOES : ')
READ(1,45) NITMAX
45 FORMAT(I3)
IF(IW.EQ.1) WRITE(1,46)
46 FORMAT(1H1)
C
C Inicio dos calculos
C
NM=N*M
DO 47 I=1,NM
47 L(I)=0.0
CALL MCPY(G,GAUX,N,N,0)
CALL FACIL(A,E,K,N,N)
CALL MCPY(R,RI,M,M,0)
CALL MINU(RI,M,XY,LU,MU)
IF(NOPCAD.NE.1) GO TO 48
CALL GMTRA(C,CT,N,N)
CALL GMPRD(C,CT,CAUX,NR,N,NR)
CALL MINV(CAUX,NE,XYA,LU,MU)
CALL GTPRD(C,CAUX,CT,NR,N,NR)
CALL GMPRD(CT,C,CAUX,N,NR,N)
48 IF(NOPCAD.NE.3) GO TO 49
CALL GTPRD(H,H,HTH,M,NR,NR)
CALL MINV(HTH,NR,XYA,LU,MU)
CALL GMPRD(H,HTH,HAUX,M,NR,NR)
CALL GMTRA(D,DT,N,NR)
49 DO 52 TRICAT=1,NITMAX
CALL MCPY(L,LN,N,N,0)
CALL LIND(A,B,GAUX,R,RI,PKN,K,EPS,N,N)
IF(IRICAT.EQ.1) CALL MCPY(PKN,PEST,N,N,0)
IF(NOPCAD.EQ.1) CALL REASAI(K,CAUX,L,N,M)
IF(NOPCAD.EQ.2) CALL DESCEN(DES,K,L,N,M)
IF(NOPCAD.EQ.3) CALL FILKAL(K,N,HAUX,DT,L,N,M,NR)
CALL GTPRD(L,R,LAUX,M,N,N)
CALL GMPRD(LAUX,L,GAUX,N,M,N)

```



```

CALL GMADD(O,GAUX,GAUX,N,N)
CALL TESTE(L,LN,M,N,EPS,LOGIC,TNORMA)
IF(IRICAT.EQ.1) WRITE(IW,50)
50  FORMAT(///14X,'ITERACOES',10X,'*NORMA*')
    WRITE(IW,51) IRICAT,TNORMA
51  FORMAT(17X,12,12X,E9.2)
    IF(LOGIC.EQ.1) GO TO 53
52  CONTINUE
C
C   Fim dos calculos - Impressao dos resultados
C
53  IF(IW.EQ.1) CALL PAGE
    IF(NOPCAO.EQ.1.OR.NOPCAO.EQ.2) WRITE(IW,54)
54  FORMAT(///6X,'MATRIZ *L*'/)
    IF(NOPCAO.EQ.3) WRITE(IW,55)
55  FORMAT(///6X,'MATRIZ *H* (Transposta)'/)
    CALL AIMP(L,M,N,IW)
    CALL GMSUE(K,L,K,M,N)
    IF(IW.EQ.1) CALL PAGE
    IF(NOPCAO.EQ.1.OR.NOPCAO.EQ.2) WRITE(IW,56)
56  *  FORMAT(///6X,'GANHO OTIMO *K* - REALIMENTACAO '
    *  'DE ESTADO'/)
    IF(NOPCAO.EQ.3) WRITE(IW,57)
57  *  FORMAT(///6X,'GANHO OTIMO *G* (Transposta)'/)
    CALL AIMP(K,M,N,IW)
    IF(IW.EQ.1) CALL PAGE
    IF(NOPCAO.NE.1) GO TO 59
    CALL GMFRD(K,CT,GAUX,M,N,NR)
    WRITE(IW,58)
58  *  FORMAT(///6X,'REALIMENTACAO DE SAIDA'/)
    CALL AIMP(GAUX-M,NR,IW)
    IF(IW.EQ.1) CALL PAGE
59  *  WRITE(IW,60)
60  *  FORMAT(///6X,'SOLUCAO DA EQ. DE RICCATI'/)
    CALL AIMP(PEN,N,N,IW)
C
C   Calculo dos auto-valores em malha aberta
C
    CALL HCFY(A,LAUX,N,N,0)
    CALL HSEG(N,LAUX,N)
    CALL ATEIG(N,LAUX,RRJ,RIJ,LW,N)
C
C   Calculo dos auto-valores em malha fechada
C
    CALL GMFRD(B,K,LAUX,M,M,N)
    CALL GMSUE(A,LAUX-LAUX,N,N)
    CALL HSEG(N,LAUX,N)
    CALL ATEIG(N,LAUX,BRAB,RIAB,LM,N)
    IF(IW.EQ.1) CALL PAGE
C
C   Impressao dos auto-valores
C
    WRITE(IW,61)
61  *  FORMAT(///12X,'MALHA ABERTA',13X,'MALHA FECHADA',/
    *  12X,13(' '),13X,'*GANHO OTIMO*',//13X,'REAL IMAG',

```



```

TF(MODO.NE.2) GO TO 72
STOP
END

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

```

SUBROUTINE FACIL(A,B,K,N,M)

```

Determina o ganho  $k$  inicial que garanta estabilidade assintótica para  $(A-Bk)$  nos casos 1 e 2, e para  $(A' - C'k')$  no caso 3

```

REAL K(1)
DIMENSION A(1),B(1)
DIMENSION REA(10),RIM(10),AUX(40),AUX1(40),AUX2(40)
DIMENSION MW(10),LW(10)
CALL MCPY(A,AUX,N,N,0)
CALL HSBG(N,AUX,N)
CALL ATEIG(N,AUX,REA,RIM,MW,N)
DO 10 I=1,N
TF(REA(I).GE.-0.001) GO TO 30
CONTINUE
N2=N*M
DO 20 I=1,N2
30 K(I)=0.0
GO TO 60
40 AUTO=REA(I)
DO 40 I=2,N
TF(REA(I).LT.AUTO) AUTO=REA(I)
CONTINUE
AUTO=ABS(AUTO)
BET=AUTO+0.001
CALL GNTRA(B,AUX,N,N)
CALL GMPRD(B-AUX,AUX2,N,M,N)
CALL MCPY(A,AUX,N,N,0)
DO 50 I=1,M
J=(I-1)*N+1
50 AUX(J)=AUX(J)+BET
CALL GNTRA(AUX,AUX1,N,N)
CALL SMPY(AUX1,-1.0,AUX1,N,N,0)
CALL LYAP(AUX1,AUX2,AUX,N)
CALL HINQ(AUX,N,XTF,LW,MW)
CALL BTFRD(B,AUX,K,N,M,N)
60 RETURN
END

```

```

C
C
C
SUBROUTINE LIND(A,B,Q,R,RI,PKN,K,EPG,M,N)

```

Resolve o Problema Linear Quadrático (Equação de Riccati) pelo método iterativo de Kleimman (Newton-Raphson)

$$(A - BK_i)' P_i + P_i (A - BK_i) + K_i' R K_i + Q = 0$$

C  
C

```

C          -1
C          Ki+1 = R B' Pi
C
REAL K(1)
DIMENSION A(1),B(1),Q(1),R(1),RI(1),PKN(1)
DIMENSION AUX(40),AUX1(40),AUX2(40)
ILD=1
10 CALL BTFRD(K,R,AUX,M,N,M)
CALL GMFRD(AUX,K,AUX1,N,M,N)
CALL GMADD(AUX1,Q,AUX1,N,N)
CALL GMFRD(B,K,AUX,N,M,N)
CALL GMSUB(A,AUX,AUX,N,N)
CALL LYAP(AUX,AUX1,PKN,N)
CALL BTFRD(B,PKN,AUX,N,M,N)
CALL GMFRD(RI,AUX,K,M,M,N)
IF(ILD.EQ.1) GO TO 20
CALL TESTE(PKN,AUX2,N,N,EPS,LOGIC,TNORNA)
IF(LOGIC.EQ.1) GO TO 30
20 CALL MCPY(PKN,AUX2,N,N,0)
ILD=ILD+1
GO TO 10
30 RETURN
END

```

```

C
C
SUBROUTINE LYAP(AL,CL,PKL,N)
C
C Resolve a Equacao de Lyapunov: AL'PKL + PKL A + CL = 0
C
C (Metodo de Newton)
C
DIMENSION AL(1),CL(1),PKL(1)
DIMENSION RC(40),AUX(40),AUX1(40),ALK(40)
DIMENSION MW(10),LW(10)
CALL SMPY(CL,-1.,CL,N,N,0)
CALL MCPY(AL,ALK,N,N,0)
10 CALL MCPY(ALK,AUX,N,N,0)
CALL MINV(AUX,N,XCF,LW,MW)
CALL SMPY(AUX,0.5,RC,N,N,0)
CALL GMTRA(AUX,AUX1,N,N)
CALL MCPY(AUX1,AUX,N,N,0)
CALL GMFRD(AUX,CL,AUX1,N,N,N)
CALL GMFRD(AUX1,RC,AUX,N,N,N)
CALL SMPY(ALK,0.5,ALK,N,N,0)
CALL GMADD(ALK,RC,ALK,N,N)
CALL SMPY(CL,0.5,CL,N,N,0)
CALL GMADD(CL,AUX,CL,N,N)
CALL MCPY(ALK,AUX,N,N,0)
DO 20 IL2=1,N
IL3=(IL2-1)*N+IL2
20 AUX(IL3)=ABS(AUX(IL3))-1.
NN=N**2
DO 30 IL4=1,NN
AUX(IL4)=ABS(AUX(IL4))
IF(AUX(IL4).GE.0.001) GO TO 10

```

```

30      CONTINUE
        CALL SMPY(CI,-0.5,PKL,N,N,0)
        RETURN
        END

C
C
C
        SUBROUTINE TESTE(BTST,CTST,M,N,EPS,LOGIC,TNORMA)
C
C      Compara a diferença entre as normas de BTST e CTST.
C      Se a raiz quadrada da somatoria das diferenças ao quadrado
C      dos elementos de BTST e CTST for menor que EPS, a variavel
C      LOGIC retorna com o valor 1
C
        DIMENSION BTST(1),CTST(1)
        LOGIC=0
        TRA=0.0
        NM=N*M
        DO 10 J=1,NM
10      TRA=TRA+(BTST(J)-CTST(J))**2
        TNORMA=SQRT(TRA)
        IF(TNORMA.LE.EPS) LOGIC=1
        RETURN
        END

C
C
C
        SUBROUTINE REASAI(K,CAUX,L,N,M)
C
C      Devolve o valor de L para o caso de realimentação de saída
C
        REAL K(1),L(1)
        DIMENSION CAUX(1)
        DIMENSION AUX(40)
        CALL GMPRO(K,CAUX,AUX,M,N,N)
        CALL GMSUB(K,AUX,L,M,N)
        RETURN
        END

C
C
C
        SUBROUTINE DUSDER(DES,K,L,N,M)
C
C      Devolve o valor de L para o caso de controle descentralizado
C
        REAL K(1),L(1)
        DIMENSION DES(1)
        NM=N*M
        DO 1 I=1,NM
1      L(I)=K(I)-DES(I)*K(I)
        RETURN
        END

C
C
C

```

```

SUBROUTINE FTKAL(K,H,HAUX,DT,L,N,M,NR)
C
C   Devolve o valor de L para o caso do filtro de Kalman
C
REAL K(1),L(1)
DIMENSION H(1),DT(1),HAUX(1)
DIMENSION AUX(40)
CALL STPRD(H,K,AUX,M,NR,N)
CALL GMSUB(AUX,DT,AUX,NR,N)
CALL GMPRD(HAUX,AUX,L,M,NR,N)
RETURN
END

C
C
C
SUBROUTINE PAGE
C
C   Aguarda um < cr > para mudar a pagina (saida video)
C
READ(1,10) FANTA
10  FORMAT(F0.4)
WRITE(1,20)
20  FORMAT(1H)
RETURN
END

C
C
C
SUBROUTINE ABRE(N)
C
C   Abre um arquivo com extensao .DAT
C
LOGICAL ARD(11)
WRITE(1,10)
10  FORMAT(///10X,'NOME DO ARQUIVO (S/ EXTENSÃO) : ')
READ(1,20) (ARD(I),I=1,8)
20  FORMAT(8A1)
ARD(9)='D'
ARD(10)='A'
ARD(11)='T'
CALL OPEN(N,ARD,0)
RETURN
END

C
C
C
SUBROUTINE ALER(A,I,J,IR)
C
C   Le matriz, colocando-a na forma vetorial por colunas (padrao 55)
C
DIMENSION A(1)
NI=I*K
DO 10 I K=1,I
10  READ(IR,20) (A(LN),LN=LR,NI,I)
20  FORMAT(10F9.4)

```

```
        RETURN
        END

C
C
C
        SUBROUTINE AIMP(A,I,J,IM)
C
C      Imprime matriz
C
        DIMENSION A(3)
        NI=I*J
        DO 10 LK=1,I
10      WRITE(IM,20) (A(LM),LM=LK,NI,I)
20      FORMAT(1X,9(E10.3,1X))
        RETURN
        END
```





```

      NX0=N-M
      IF(NR.EQ.1) WRITE(1,8)
8      FORMAT(//10X,'ESCREVA X0 (TRANSPOSTO)')
      READ(NR,9) (X0(I),I=1,NX0)
9      FORMAT(20F9.4)
      IF(NR.EQ.1) WRITE(1,10)
10     FORMAT(//10X,'ESCREVA Ac E PI')
      CALL ALER(AF,N,N,NR)
      CALL ALER(PI,N,M,NR)

C
C      Leitura da condicao inicial do estimador de demanda
C
      WRITE(1,11)
11     FORMAT(//10X,'CONDICAO INICIAL (Vetor y)')
      READ(1,12) (Y0(I),I=1,M)
12     FORMAT(10F9.4)
      DO 13 I=1,M
          IX=NX0+I
13     X0(IX)=Y0(I)
C
C      Leitura do ganho do estimador
C
      WRITE(1,14)
14     FORMAT(//10X,'ESCREVA O GANHO DO ESTIMADOR')
      DO 15 I=1,M
          WRITE(1,15) I
15     FORMAT(//15X,'AREA ',I1,' : ')
16     READ(1,17) GANHO(I)
17     FORMAT(F9.4)
      DO 18 T=1,M
          DO 18 IA=1,M
              IB=40*(IA-1)+8
              IW=IB+T
18     AF(IW)=AF(IW)*GANHO(I)
C
C      Leitura do vetor de plotagem : coloca-se 1 na
C      posicao correspondente a das variaveis a serem
C      plotadas, e 0 nas demais posicoes.
C
19     WRITE(1,20)
20     FORMAT(//10X,'ESCREVA AGORA O VETOR DE PLOTAGEM')
      READ(1,21) (IVET(IF),IF=1-M)
21     FORMAT(20I2)
      NCUR=0
      DO 22 T=1,M
          NCUR=NCUR+IVET(T)
          IF(NCUR.LE.3) GO TO 24
          WRITE(1,23)
23     FORMAT(//10X,'*** NUMERO MAXIMO DE CURVAS = 3 ***')
          GO TO 19
C
C      Leitura do espacamento entre os pontos para a simulacao
C
24     WRITE(1,25)
25     FORMAT(//10X,'ESPACAMENTO ENTRE PONTOS = ')

```

```

      READ(1,17) E
C
C      Leitura do tempo total de simulacao
C
      WRITE(1,26)
26  FORMAT(///10X,'TEMPO TOTAL = ')
      READ(1,17) T
      XKT=T/F
      KT=IFIX(XKT)
      IF(KT.LE.300) GO TO 28
      WRITE(1,27)
27  FORMAT(//10X,'*** NUMERO MAXIMO DE FONTOS = 300 ***',//)
      GO TO 24
C
C      Leitura do numero do grafico
C
28  WRITE(1,29)
29  FORMAT(///10X,'NUMERO DO GRAFICO : ')
      READ(1,3) NUMGRA
C
C      Leitura das perturbacoes
C
      WRITE(1,30)
30  FORMAT(///10X,'ESCREVA O VETOR PERTURBACAO (-//)')
      READ(1,12) (PERT(I),I=1,M)
C
C      Inicio dos calculos
C
      CALL GMPRD(PI,PERT,DD,N,N,1)
      CALL RUNGE(XDET,AF,DD,XO,IVET,T,E,NCUR,N)
C
C      Fim da integracao numerica - construcao do grafico
C
      NC=NCUR*2
      II=1
      DO 31 I=1,NC,2
      II=II+1
      IVET(I)=1
31  IVET(I+1)=II
      IF(NM.LE.1.OR.NM.EQ.2) WRITE(NM,32)
32  FORMAT(1H1)
C
C      Impressao do grafico
C
      CALL UPLOT(XDET,IVET,KT,KT,NCUR,0,XL,XU,YL,YH,0,NM)
      WRITE(NM,33) NUMGRA
33  FORMAT(//10X,'GRAFICO NUMERO : ',I2,/)
C
C      Fechamento dos arquivos e consulta ao usuario
C
      ENDEFI E NR
      ENDFI F NM
34  WRITE(1,35)
35  FORMAT(1H1,///15X,'FIM DE EXECUCAO : 1',//15X,'NOVO ',
*  'GRAFICO : 2',//25X,'N ')

```

```

READ(1,3) NES
IF(NES.EQ.1) GO TO 36
IF(NES.EQ.2) GO TO 1
GO TO 34
36 STOP
END

C
C
C
SUBROUTINE RUNGE(XDET,AF,DD,X0,IVET,T,E,NCUR,N)
C
C Realiza a integraçao numerica - Runge-Kutta de 4ª ordem
C
C DIMENSION AF(1),X0(1),DD(1),XDET(1)
C DIMENSION CTE1(20),CTE2(20),CTE3(20),CTE4(20)
C DIMENSION X0AUX(20),XAUX(20)
C DIMENSION IVET(1)
C XKT=T/E
C KT=IFIX(XKT)
C DO 1 I=1,KT
C XI=FLOAT(T)
1 XDET(I)=(XI-1)*E
I=1
2 INDAUX=1
DO 3 IND=1,N
IF(IVET(IND).EQ.0) GO TO 3
X0AUX(INDAUX)=X0(IND)
INDAUX=INDAUX+1
3 CONTINUE
DO 4 K=1,NCUR
J=KT*K+I
4 XDET(I)=X0AUX(K)
DO 5 K=1,N
5 XAUX(K)=X0(K)
CALL RK(XAUX,CTE1,AF,DD,N,E)
DO 6 K=1,N
6 XAUX(K)=X0(K)+0.5*CTE1(K)
CALL RK(XAUX,CTE2,AF,DD,N,E)
DO 7 K=1,N
7 XAUX(K)=X0(K)+0.5*CTE2(K)
CALL RK(XAUX,CTE3,AF,DD,N,E)
DO 8 K=1,N
8 XAUX(K)=X0(K)+CTE3(K)
CALL RK(XAUX,CTE4,AF,DD,N,E)
IF(I.EQ.KT) GO TO 11
DO 9 K=1,N
9 CTE4(K)=CTE1(K)+2.0*CTE2(K)+2.0*CTE3(K)+CTE4(K)
XAUX(K)=X0(K)+(1.0/6.0)*CTE4(K)
DO 10 K=1,N
10 X0(K)=XAUX(K)
T=T+1
GO TO 2
11 RETURN
END
C

```

```

C
C
SUBROUTINE RK(XAUX,CTE,AF,DD,N,E)
C
C   Calcula as constantes do metodo de Runge-Kutta
C
C   DIMENSION XAUX(1),AF(1),DD(1),CTE(10)
C   DO 1 J=1,N
C     CTE(J)=0.0
C   DO 1 I=1,N
C     K=(I-1)*N+1
1    CTE(J)=CTE(J)+AF(K)*XAUX(I)
C   DO 2 I=1,N
C     CTE(I)=CTE(I)+DD(I)
2    CTE(I)=E*CTE(I)
C   RETURN
C   FND
C
C
C
SUBROUTINE UPLOT(XY,JXY,N,NDIM,NCUR,ISCALE,XL,XU,YL,YU,NT,NW)
C
C   Executa a plotagem das curvas
C
C   DIMENSION IGRID(101),XS(11),YS(13),ICHAR(7),XY(1),JXY(1)
C   DATA ICHAR/'+', 'K', 'Q', 'R', 'K', 'L', 'L' /
C   XS(1)=XL
C   XMAX=XU
C   YMIN=YL
C   YS(1)=YU
C   IF(ISCALE.NE.0) GO TO 32
C   XMAX=-1.0E20
C   XS(1)=-XMAX
C   YS(1)=XMAX
C   YMIN=XS(1)
C   J2=0
C   DO 31 J=1,NCUR
C     J2=J2+2
C     J1X=(JXY(J2)-1)*NDIM
C     J1Y=(JXY(J2)-1)*NDIM
C     DO 31 I=1,N
C       I1X=J1X+I
C       I1Y=J1Y+I
C       IF(XY(I1X).GT.XMAX) XMAX=XY(I1X)
C       IF(XY(I1X).LT.XS(1)) XS(1)=XY(I1X)
C       IF(XY(I1Y).GT.YS(1)) YS(1)=XY(I1Y)
C       IF(XY(I1Y).LT.YMIN) YMIN=XY(I1Y)
31    CONTINUE
C   IF(NW.EQ.1) GO TO 32
C   NI=10
C   NC=101
C   NX=10
C   NY=17
C   GO TO 38
32    NI=17

```

```

NC=41
NX=6
NY=4
38  XR=XMAX-XS(1)
    IF(XR.EQ.0.) XR=1.0E-20
    YR=YS(1)-YMIN
    IF(YR.EQ.0.) YR=1.0E-20
    XT=XMAX*XS(1)
    YT=YMIN*YS(1)
    IF(XT.LT.0.) IYAX=(NC-1)*(-XS(1))/XR+1.5
    IF(YT.LE.0.) IXAX=(NL-1)*YS(1)/YR+1.5
    XMAX=XR/NX
    NX1=NX+1
    DO 46 I=2,NX1
46   XS(I)=XS(I-1)+XMAX
    XMAX=YR/NY
    NY1=NY+1
    DO 47 I=2,NY1
47   YS(I)=YS(I-1)-XMAX
    IF(NM.EB.1) GO TO 48
    WRITE(NM,10) (XS(I),I=1,NX1)
    GO TO 49
48   WRITE(NM,50)
49   IT=1
    KK=0
    KT=0
    DO 146 LINE=1,NL
    IF(KT.NE.0) GO TO 102
    DO 101 J=1,NC
101  IGRID(J)=ICHAR(7)
    IF(NT.NE.0) KT=1
102  IF(YT.GT.0.) GO TO 109
    IF(LINE.NE.IXAX) GO TO 109
    DO 105 J=1,NC
105  IGRID(J)=ICHAR(6)
109  IF(XT.LT.0.) IGRID(IYAX)=ICHAR(6)
    J2=0
    DO 125 J=1,NCUR
    J2=J2+2
    IJX=(JXY(J2-1)-1)*NDIM
    IJY=(JXY(J2)-1)*NDIM
    JC=MOD(J,5)
    DO 125 T=1,N
    IJX=IJX+1
    IJY=IJY+1
    IPTY=(NL-1)*(YS(1)-XY(IJY))/YR+1.5
    IF(IPTY.GT.NL) IPTY=NL
    IF(IPTY.LT.1) IPTY=1
    IF(IPTY.NE.LINE) GO TO 125
    IPTX=(NC-1)*(XY(IJX)-XS(1))/XR+1.5
    IF(IPTX.LT.1) IPTX=1
    IF(IPTX.GT.NC) IPTX=NC
    IF(JC.NE.0) GO TO 119
    IGRID(IPTX)=ICHAR(5)
    GO TO 125

```

```

119   IGRID(IPTX)=ICHAR(JC)
125   CONTINUE
      IF(KK.GT.0) GO TO 134
      IF(NW.EQ.1) GO TO 126
      WRITE(NW,20) YS(II), (IGRID(I), I=1,NC), YS(II)
      GO TO 127
126   WRITE(NW,60) YS(II), (IGRID(I), I=1,NC)
127   II=II+1
      GO TO 135
134   IF(NW.EQ.1) GO TO 133
      WRITE(NW,30) (IGRID(I), I=1,NC)
      GO TO 135
133   WRITE(NW,70) (IGRID(I), I=1,NC)
135   KK=KK+1
      IF(KK.NE.4) GO TO 146
      KK=0
146   CONTINUE
      IF(NW.EQ.1) GO TO 155
      WRITE(NW,40) (XS(I), I=1,NX1)
      GO TO 156
155   WRITE(NW,90) (XS(I), I=1,NX1)
      READ(1,99) XXX
99    FORMAT(F7.3)
156   CONTINUE
10   FORMAT(5X,1PE15.2,10E10.2/15X,'-',20('+-----'),'+-')
20   FORMAT(5X,1PE10.2,'+',101A1,'+',E9.2)
30   FORMAT(15X,'I',101A1,'I')
40   FORMAT(15X,'-',20('+-----'),'+-',/5X,1PE16.2,10E10.2)
50   FORMAT(101, /9X,'-',12('+-----'),'+-')
60   FORMAT(E9.2,'+',61A1,'+')
70   FORMAT(9X,'I',61A1,'I')
80   FORMAT(9X,'-',12('+-----'),'+-',/9X,7E10.2)
      RETURN
      END

```

C  
C  
C

SUBROUTINE ABRE(N)

C  
C  
C

Abre um arquivo com extensao .DAT

C

LOGICAL ARQ(11)

WRITE(1,1)

1

FORMAT(///10X,'NOHE DO ARQUIVO (S/ EXTENSAO) :')

READ(1,2) (ARQ(I), I=1,8)

2

FORMAT(BA1)

ARQ(9)='D'

ARQ(10)='A'

ARQ(11)='T'

CALL OPEN(N,ARQ,0)

RETURN

END

C  
C  
C

```
SUBROUTINE A1ER(A,I,J,IR)
```

```
C  
C  
C
```

```
!a matriz, colocando-a na forma vetorial por coluna (padrao S
```

```
DIMENSION A(1)
```

```
NI=I*.J
```

```
DO 1 LK=1,I
```

```
1 READ(IR,2) (A(LM),LM=LK,NI,I)
```

```
2 FORNAT(20F9.4)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C  
C  
C
```

```
SUBROUTINE GMFRD(A,B,R,N,M,L)
```

```
C  
C  
C
```

```
Faz o produto matricial A x B e coloca o resultado em R
```

```
DIMENSION A(1),B(1),R(1)
```

```
IR=0
```

```
IK=-M
```

```
DO 10 K=1,L
```

```
IK=IK+1
```

```
DO 10 J=1,N
```

```
IR=IR+1
```

```
JT=J-M
```

```
IB=IK
```

```
R(IR)=0.
```

```
DO 10 I=1,M
```

```
JT=JT+N
```

```
IB=IB+1
```

```
10 R(IR)=R(IR)+A(JT)*B(IB)
```

```
RETURN
```

```
END
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aoki, M. - On Feedback Stabilizability of Decentralized Dynamic Systems, *Automatica*, 1972, vol. 8, Nº 2, pp. 163-173.
- [2] Calovic, M. - Linear Regulator Design for Load and Frequency Control, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1972, PAS-91, pp. 2271-2285.
- [3] Chow, J.H. and Kokotovic, P.V. - A Decomposition of Near-Optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, AC-76, pp. 701-705.
- [4] Davison, E.J. and Rau, N.S. - The Optimal Output Feedback Control of a Synchronous Machine, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1971, PAS-90, pp. 2123-2134.
- [5] Elgerd, O.I. and Fosha Jr., C.E. - Optimum Megawatt-Frequency Control of Multiarea Electric Energy Systems, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1970, PAS-89, pp. 556-563.
- [6] Fosha Jr., C.E. and Elgerd, O.I. - The Megawatt-Frequency Control Problem: A New Approach Via Optimal Control Theory, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1970, PAS-89, pp. 563-577.
- [7] Geromel, J.C. - Contribution a l'Etude des Systemes Dynamiques Interconnectes: Aspects de Decentralisation, Thèse d'Etat, Universidade Paul Sebatier, Toulouse, França, 1979.
- [8] Geromel, J.C. - Controle Ótimo Determinístico, Apostila fornecida no mini-curso da IV Escola de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.
- [9] Geromel, J.C. and Bernussou, J. - Optimal Decentralized Control of Dynamic Systems, *Automatica*, 1982, vol. 18, Nº 5, pp. 545-557.



- [10] Geromel, J.C. and Peres, P.L.D. - A New Stability Property of the Riccati Equation - IEEE Congress on Decision and Control, Orlando, Florida, 1982, pp. 254-255.
- [11] Geromel, J.C. and Peres, P.L.D. - Decentralized Load-Frequency Control, IEE Proceedings - Part D (Control), 1985, vol. 132, No 5, pp. 225-230.
- [12] Geromel, J.C. and Yamakami, A. - Stabilization of Continuous and Discrete Linear Systems Subjected to Control Structure Constraints, International Journal of Control, 1982, vol. 63, No 3, pp. 429-444.
- [13] Jazwinski, A.H. - Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York, 1970.
- [14] Kalman, R.E. and Bucy, R.S. - New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, J. Basic Eng., Transactions ASME, 1961, vol. 83, pp. 95-108.
- [15] Khalil, H.K. and Kokotovic, P.V. - Control Strategies for Decision Makers Using Different Models of the Same System, IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, AC-23, pp. 289-298.
- [16] Kleinman, D.L. - On An Iterative Technique for Riccati Equation Computations, IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, AC-13, pp. 114-115.
- [17] Kwakernaak, H.W. and Sivan, R. - Linear Optimal Control Systems, John Wiley, New York, 1972.
- [18] Sandell, N.R., Varaiya, P., Athans, M. and Safonov, M.G. - Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, AC-23, pp. 108-128.
- [19] Wonham, W.M. - Linear Multivariable Control, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 101, Springer Verlag, 1974.