



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Matheus Fávero de Amorim

Controle de Sistemas Amostrados via
Realimentação de Saída

Uma Abordagem por Sistemas com Saltos

Campinas

2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Matheus Fávero de Amorim

Controle de Sistemas Amostrados via Realimentação de Saída

Uma Abordagem por Sistemas com Saltos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves

Co-orientador Prof. Dr. Matheus Souza

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Matheus Fávero de Amorim, e orientada pelo Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0635-2731>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Am68c Amorim, Matheus Fávero de, 1994-
Controle de sistemas amostrados via realimentação de saída : uma abordagem por sistemas com saltos / Matheus Fávero de Amorim. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Alim Pedro de Castro Gonçalves.
Coorientador: Matheus Souza.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de controle por realimentação. I. Gonçalves, Alim Pedro de Castro, 1977-. II. Souza, Matheus, 1990-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Sampled-data systems output-feedback control : a jump systems approach

Palavras-chave em inglês:

Feedback control systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Alim Pedro de Castro Gonçalves [Orientador]

Vilma Alves de Oliveira

Paulo Augusto Valente Ferreira

Data de defesa: 14-12-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA-DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Matheus Fávero de Amorim, **RA:** 137007.

Data da Defesa: 14 de dezembro de 2018.

Título da dissertação: “Controle de Sistemas Amostrados via Realimentação de Saída:
Uma abordagem por Sistemas com Saltos”.

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (Presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Vilma Alves de Oliveira (DEEC/USP-São Carlos)

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Aos meus pais que me apoiaram minha vida toda e me incentivaram muito a realizar este trabalho. Em especial à minha mãe por todas as vezes que me cobrou para me dedicar a ele e não deixá-lo pela metade.

A Tiemi que me incentivou muito sempre que precisei e teve muita paciência nas diversas vezes que não pude estar totalmente com ela, pois estava concentrado na execução deste trabalho.

Aos meus orientadores Alim e Matheus que me guiaram nesta jornada, sempre respeitando meus pensamentos e minhas outras obrigações.

Ao Lucas pela sua contribuição nos diversos momentos que discutimos este trabalho, além de sua companhia nos diversos almoços e pausas para café. Assim como aos demais colegas de laboratório por todas as suas contribuições, conversas e companhia.

A Fiolux pelo apoio e pela compreensão da minha ausência nos momentos em que precisei me dedicar a este trabalho.

A todos que me apoiaram direta ou indiretamente com ideias, motivação e compreensão.

*“A resposta à Grande Questão Da Vida, o Universo e Tudo o Mais é...
Quarenta e dois”
(Douglas Adams, O Guia do Mochileiro das Galáxias)*

Resumo

Este trabalho trata o problema de síntese de controladores via realimentação de saída com restrição na taxa de dados. Estas restrições na comunicação podem afetar a transmissão de sinais de controle ou de medição, dando origem a três diferentes estruturas: LSRA (sensor local – atuador remoto, na sigla em inglês), RSLA (sensor remoto – atuador local) e RSRA (sensor remoto – atuador remoto). A interconexão entre controlador e planta pode ser modelada como um Sistema com Saltos cuja estabilidade e desempenho \mathcal{H}_2 podem ser determinados em termos de Desigualdades Matriciais Lineares necessárias e suficientes. Entretanto, para o projeto dos ganhos de realimentação apropriados, estas condições se tornam não-convexas e propomos uma abordagem para obter soluções subótimas baseadas em um algoritmo de Complementariedade Cônica. Incluímos também exemplos numéricos.

Palavras-chaves: Sistemas Amostrados, Sistemas com Saltos, Linearização por Complementariedade Cônica, Controle por Realimentação dinâmica de saída.

Abstract

This work addresses the output feedback control design problem with limited data-rate constraints. These communication constraints may affect the transmission of control signals or measurements, giving rise to three different structures: LSRA (local sensor – remote actuator), RSLA (remote sensor – local actuator) and RSRA (remote sensor – remote actuator). The interconnection between plant and controller can be modelled as a Jump System whose stability and \mathcal{H}_2 performance can be determined in terms of necessary and sufficient Linear Matrix Inequalities. However, for the design of the appropriate feedback gains, those conditions become non-convex and we propose an approach to obtain suboptimal solutions based on a Cone Complementarity algorithm. Numerical examples are included.

Keywords: Sampled-data systems, Jump System, Cone Complementarity Linearisation, Dynamic Output-Feedback Control.

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Notação	15
2	Resultados Clássicos	17
2.1	Sistemas Dinâmicos	17
2.1.1	Sistemas a tempo contínuo	17
2.1.2	Sistemas a tempo discreto	18
2.1.3	Sistemas equivalentes	18
2.2	Estabilidade Interna	19
2.2.1	Pontos de equilíbrio	19
2.2.2	Estabilidade assintótica	19
2.2.3	Estabilidade exponencial	20
2.3	Controlabilidade	20
2.4	Observabilidade	22
2.5	Critérios de Desempenho	24
2.5.1	Custo Quadrático de Condição Inicial	24
2.5.2	Norma \mathcal{H}_2	25
2.5.2.1	Sistemas a tempo discreto	26
2.5.3	Relação entre Custo Quadrático e Norma \mathcal{H}_2	27
2.6	Controle via realimentação de estado \mathcal{H}_2	28
2.6.1	Tempo contínuo	28
2.6.2	Tempo Discreto	29
2.7	Controle via Realimentação Estática de Saída \mathcal{H}_2	30
2.7.1	Tempo Discreto	31
2.8	Filtragem \mathcal{H}_2	32

2.8.1	Sistemas a tempo contínuo	32
2.8.2	Sistemas a tempo discreto	34
2.9	Realimentação de Saída \mathcal{H}_2	35
2.9.1	Tempo Contínuo	35
2.9.2	Tempo Discreto	36
2.9.3	Considerações Finais	37
3	Sistemas Amostrados	38
3.1	Discretização Clássica	38
3.2	Discretização Equivalente	39
3.3	Amostragem Patológica: Controlabilidade	40
3.4	Controle via Realimentação de Estado	42
3.4.1	Estabilidade	42
3.5	Estimador de Estados	43
3.5.1	Estabilidade	43
3.5.2	Estimador ótimo \mathcal{H}_2 via Discretização Equivalente	44
3.6	Realimentação de Saída via Discretização Equivalente	45
3.6.1	LSRA	46
3.6.2	RSLA	49
3.6.3	RSRA	49
3.7	Considerações Finais	51
4	Controle \mathcal{H}_2 de Sistemas Amostrados – Uma Nova Abordagem	52
4.1	Sistemas com Saltos	52
4.1.1	Estabilidade e Desempenho	52
4.2	Estrutura do Controlador e Modelos com Saltos	54
4.2.1	Controle LSRA	55
4.2.2	Controle RSLA	55
4.2.3	Controle RSRA	55
4.3	Condições de projeto	56
4.4	Métodos Computacionais	58
4.4.1	Método K-W	58
4.4.2	Linearização por Complementariedade Cônica	59
4.5	Exemplo Numérico	60
4.6	Considerações Finais	62
5	Extensões e Problemas Relacionados	64
5.1	Controle Amostrado Robusto	64
5.2	Controle Amostrado por Realimentação Estática de Saída	65
5.3	Exemplos Numéricos	66

5.3.1	Constrole Amostrado Robusto	66
5.3.2	Controle por Realimentação Estática de Saída Amostrada	67
5.4	Considerações Finais	67
6	Conclusão	69
	Referências	71
	Apêndices	74
	APÊNDICE A Prova do Teorema 4.1	75
A.1	Resultados Preliminares	75
A.1.1	Dinâmica de Estado	75
A.1.2	Estabilidade	75
A.2	Prova do Teorema 4.1	76

1 Introdução

O termo *Controle* está amplamente presente em nossas vidas. Diariamente buscamos controlar o ambiente em que estamos, a opinião das demais pessoas sobre nós e o nosso futuro. Nesse contexto, Controle remete à capacidade de direcionar algo, ou alguém, de forma que fique alinhado ao nosso interesse. Para que possamos exercer esse controle, precisamos possuir três elementos (LEIGH, 2004):

- (i) Um *objetivo* relacionado ao objeto do controle: “*onde queremos chegar?*”;
- (ii) Um conjunto de *ações* que podemos executar para atingir esse objetivo: “*o que podemos fazer?*”;
- (iii) Um conjunto de *regras* que nos permita distinguir quais das ações de (ii) nos levarão a (i): “*por que fazendo isto chegaremos lá?*”.

Dados estes elementos, o que nos resta é escolher as ações (ii) que baseadas nas regras (iii) nos levam ao objetivo (i). Observe que uma limitação em qualquer um desses fatores limita nossa capacidade de controle.

No controle de sistemas dinâmicos, o mesmo raciocínio se aplica. Após definir um *objetivo* (ponto de operação, desempenho do sistema, etc.) vamos utilizar nosso conhecimento das *regras* (modelo, estado do sistema, presença de ruídos, etc.) para definir qual a melhor *ação* (sinal de controle) a ser executada sobre o sistema. Limitações nos elementos (presença de ruídos externos, falta de conhecimento do estado do sistema e limitações no sinal de controle, por exemplo), dificultam o projeto e/ou o desempenho do controlador.

O item (i) raramente impõe dificuldade ao projeto e não será tratado neste trabalho. Limitações sobre o item (iii) são cobertas pelo estudo em modelagem e identificação de sistemas e serão marginalmente incluídos neste trabalho. Nosso foco cairá sobre as limitações do item (ii) e nosso objetivo será encontrar as melhores técnicas de controle quando estas limitações estiverem presentes. Iremos revisar diversas técnicas para o estudo dos sistemas dinâmicos (*análise*) e estratégias de controle (*síntese*), iniciando por técnicas básicas e largamente difundidas e adentrando técnicas mais específicas, que consideram mais limitações nas *ações* possíveis ou nas *informações* disponíveis.

A suposição de que todo o estado do sistema pode ser medido perfeitamente nem sempre é válida (CHEN, 1999). Os casos em que isto acontece costumam ser tratados com

controladores de realimentação estática ou dinâmica de saída; projetar controladores de realimentação estática de saída é uma tarefa bem desafiadora, visto que ainda não foram propostas condições de síntese convexas necessárias e suficientes (FU, 2004; BLONDEL; TSITSIKLIS, 1997; SYRMOS *et al.*, 1997). Devido a esta dificuldade, controladores de realimentação dinâmica de saída são largamente utilizados como solução para este problema e, em sua maioria, utilizam observadores de estado devido à propriedade de separação para o caso \mathcal{H}_2 (ANDERSON; MOORE, 2007; COLANERI *et al.*, 1997).

A amostragem contínua de sinais de medição e atuação é outra hipótese que precisa ser relaxada em várias aplicações modernas, visto que sistemas inteiros estão inseridos em ambientes digitais e em rede (FADALI; VISIOLI, 2009; SOUZA; GEROMEL, 2014; WANG; LIU, 2008). Esta restrição na taxa de dados, quando negligenciada no projeto, pode induzir comportamentos inesperados no sistema em malha fechada (MATVEEV; SAVKIN, 2009; SERON *et al.*, 1997). A existência de períodos de amostragem patológicos é um destes fenômenos. A área de pesquisa de *sistemas amostrados* lida com a remoção da suposição de amostragem contínua e considera políticas de amostragem tanto periódica como aperiódica. De forma geral, um sistema amostrado (SOUZA, 2015) é qualquer sistema dinâmico cujos espaços das entradas ou saídas apresentam limitações na taxa de dados.

Problemas de síntese de controle amostrado e de filtragem vêm recebendo bastante atenção na literatura. Os livros (CHEN; FRANCIS, 1995; SERON *et al.*, 1997; WANG; LIU, 2008) e as pesquisas (HESPANHA *et al.*, 2007; ZHANG *et al.*, 2013) – com suas referências – fornecem uma ampla revisão de resultados clássicos e modernos em controle de sistemas amostrados e em redes. Neste trabalho, estamos especialmente interessados no desempenho \mathcal{H}_2 , devido à sua relação com os problemas de controle LQR/LQG (COLANERI *et al.*, 1997). O problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 de sistemas amostrados já foi resolvido para realimentação de estado utilizando um procedimento de discretização equivalente em (CHEN; FRANCIS, 1995; SOUZA *et al.*, 2014a) e utilizando sistemas com saltos em (BRIAT, 2013; SOUZA; GEROMEL, 2015); outras referências clássicas para este problema incluem (HARA *et al.*, 1994; ICHICAWA; KATAYAMA, 2001). Filtros lineares e estimadores de estado ótimos \mathcal{H}_2 para sistemas amostrados foram abordados em (SOUZA *et al.*, 2014b). Entretanto, as condições apresentadas nesta última referência são baseadas em conjuntos não-convexas e, portanto, só podem ser resolvidas por métodos aproximados.

O problema de realimentação de saída amostrado é consideravelmente mais difícil que os anteriores. De fato, dependendo de quais sinais são amostrados, três principais problemas de realimentação de saída amostrado podem ser considerados (SOUZA, 2015):

- LSRA (*local sensor – remote actuator*): Nesta configuração, os atuadores são conecta-

dos ao controlador através de um canal com taxa limitada enquanto os sensores são acoplados por canais ideais. Desta forma, vamos considerar que a entrada u é constante por partes.

- RSLA (*remote sensor – local actuator*): Este problema é complementar ao anterior, ou seja, os sensores são conectados ao controlador através de um canal com taxa limitada enquanto os atuadores não possuem nenhuma restrição de transmissão. Assim, impomos que somente a saída y é constante por partes.
- RSRA (*remote sensor – remote actuator*): Neste último caso, tanto os atuadores quanto os sensores possuem limitação na taxa de dados, ou seja, neste problema u e y são constante por partes.

Estes casos são ilustrados na Figura 1 em três diagramas, nos quais os canais limitados e ideais são representados por linhas pontilhadas e contínuas, respectivamente. A planta é denotada por \mathcal{S} e o controlador por \mathcal{C} ; $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ é a perturbação externa e $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada; $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle e $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida.

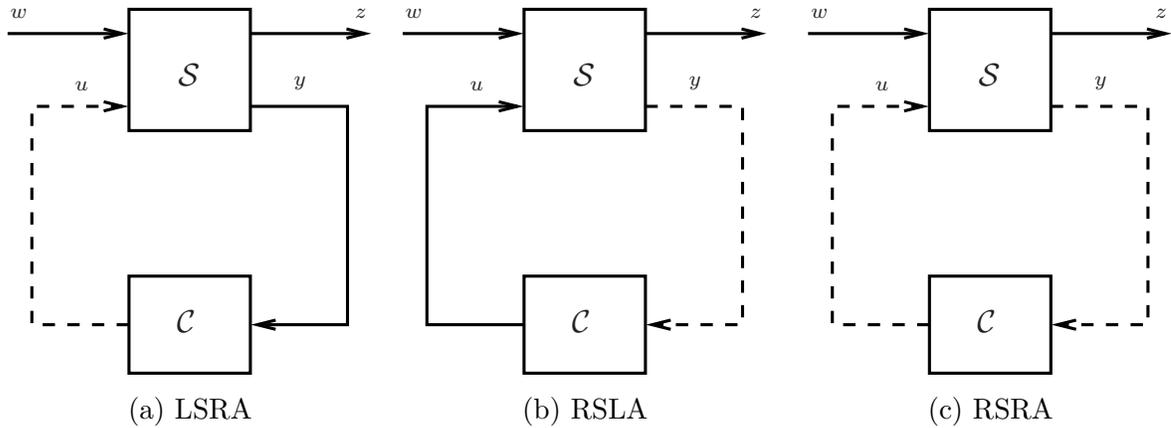


Figura 1 – Estrutura dos controladores.

O problema de controle \mathcal{H}_2 LSRA foi abordado em (SOUZA; GEROMEL, 2014) por discretização equivalente. Como as condições de projeto são não-convexas, nesta referência, uma solução subótima baseada em observador é proposta. Neste trabalho, abordaremos o problema de controle amostrado \mathcal{H}_2 ótimo utilizando sistemas com saltos. Nosso principal objetivo é revisar os conceitos e resultados existentes na literatura e fornecer técnicas computacionalmente viáveis para obter o controlador \mathcal{C} considerando cada uma das três estruturas mencionadas acima. Como as principais condições de projeto apresentadas neste trabalho são não-convexas, atingimos este objetivo ao propor procedimentos iterativos baseados em

otimização convexa, os quais podem ser eficientemente resolvidos com métodos disponíveis na literatura (BOYD *et al.*, 1994). Nossos resultados serão comparados aos apresentados em (SOUZA; GEROMEL, 2014) e em (SOUZA, 2015).

Este trabalho está estruturado em seis capítulos e um apêndice. Neste primeiro capítulo, contextualizamos o ambiente em que esse trabalho está inserido, apresentamos as principais referências e suas contribuições, a organização do trabalho e a notação adotada. Os demais capítulos se estruturam da seguinte forma:

- Capítulo 2 Analisamos os principais resultados de análise e síntese de sistemas lineares a tempo contínuo e discreto.
- Capítulo 3 Introduzimos os conceitos e técnicas de discretização e apresentamos as técnicas de controle existentes na literatura para sistemas amostrados.
- Capítulo 4 Apresentamos os sistemas com saltos e as principais condições de projeto deste trabalho. Incluímos também alguns exemplos que visam comparar os resultados obtidos às técnicas apresentadas no Capítulo 3.
- Capítulo 5 Estendemos os resultados do Capítulo 4 para outros problemas: um controlador robusto para controle aperiódico e a realimentação estática de saída para sistemas amostrados. Incluímos também exemplos para cada proposta.
- Capítulo 6 Finalizamos o trabalho descrevendo nossas principais contribuições e perspectivas futuras.
- Apêndice A Este apêndice é dedicado à prova do teorema principal com condições necessárias e suficientes para desempenho quadrático de sistemas com saltos. Optamos por mover a prova ao apêndice para manter a fluidez do texto, visto que ela é muito longa e técnica.

1.1 Notação

Neste trabalho buscamos padronizar a notação utilizada. A menos que indicado em contrário, letras maiúsculas denotam matrizes e letras minúsculas, vetores; escalares são representado por letras minúsculas do alfabeto latino ou grego; conjuntos são denotados por letras maiúsculas em *blackboard bold* e os principais operadores são representados por letras gregas maiúsculas; letras maiúsculas caligráficas denotam sistemas e matrizes aumentadas. Além disto, utilizaremos os seguintes símbolos e notações:

- a. \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} e \mathbb{C} representam os conjuntos de números naturais, inteiros, reais e complexos, respectivamente;

- b. \mathbb{R}_+ representa o conjunto dos números reais não-negativos;
- c. \mathbb{A}^* representa o conjunto \mathbb{A} desprovido do 0, ou seja, $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$;
- d. $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função que obtém a parte real de um número complexo;
- e. $\Im : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ obtém a parte imaginária;
- f. $\mathbb{R}^{m \times n}(\mathbb{C}^{m \times n})$ representa o conjunto de matrizes reais (complexas) com m linhas e n colunas;
- g. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ representa o conjunto de vetores com n componentes reais (complexas);
- h. \mathbb{S}^n representa o conjunto das matrizes simétricas de ordem n ;
- i. \mathbb{S}_+^n representa o conjunto das matrizes definidas positivas de ordem n ;
- j. A' representa a matriz transposta de A ;
- k. **rank**(A) retorna o *posto* da matriz $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})^{m \times n}$;
- l. **tr**(A) retorna o *traço* da matriz quadrada $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})^{n \times n}$;
- m. $\sigma(A)$ retorna os autovalores da matriz quadrada $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})^{n \times n}$;
- n. $\rho(A)$ retorna o raio espectral da matriz quadrada $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})^{n \times n}$;
- o. \triangleq – igual, por definição;
- p. $\|x\|$ denota a norma Euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, $\|x\| \triangleq \sqrt{x'x}$;
- q. $\|x\|_2 \triangleq \sqrt{\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt}$ denota a norma \mathcal{L}_2 do sinal a tempo contínuo $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- r. $\|x\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} \|x[k]\|^2}$ denota a norma l_2 do sinal a tempo discreto $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- s. $X > 0 (X \geq 0)$ denota que a matriz simétrica X é definida (semi-definida) positiva;
- t. \star denota blocos induzidos por simetria em matrizes simétricas;
- u. \mathbb{T} representa o domínio temporal; $\mathbb{T} \triangleq \mathbb{R}_+$ para sinais a tempo contínuo e $\mathbb{T} \triangleq \mathbb{N}$ para sistemas a tempo discreto;
- v. e_i representa o i -ésimo elemento da base canônica do \mathbb{R}^n ;
- w. o conjunto \mathbb{P}_h representa os sinais amostrados com período $h \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja

$$\mathbb{P}_h \triangleq \{s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid s(t) = s(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}\}, \quad (1.1)$$

onde $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a sequência $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k = h$;

2 Resultados Clássicos

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados fundamentais para o entendimento das ideias e das soluções propostas. Este capítulo foi largamente baseado em (CHEN, 1999; ANDERSON; MOORE, 2007; GEROMEL; KOROGUI, 2011; SOUZA, 2015). Por brevidade, vamos suprimir as demonstrações dos resultados enunciados neste aqui. Elas podem ser encontradas nestas referências.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Dentre todos os sistemas existentes, iremos tratar de uma subclasse composta pelos sistemas (ou modelos) lineares e invariantes no tempo (LTI, na sigla em inglês). Esta subclasse apresenta diversas propriedades interessantes e é possível obter modelos de sistemas consideravelmente complexos dentro dessas restrições. Os sistemas dinâmicos LTI a tempo contínuo (discreto) podem ser descritos por integrais (somas) de convolução, equações diferenciais (a diferenças), funções de transferência e equações no espaço de estados. Neste trabalho, iremos adotar a descrição por equações no espaço de estados.

Como iremos tratar exclusivamente de sistemas invariantes no tempo, vamos considerar que o instante inicial é sempre 0, visto que por uma simples mudança de variável podemos alterar o instante inicial sem alterar o comportamento do sistema.

2.1.1 Sistemas a tempo contínuo

Os sistemas a tempo contínuo são aqueles em que o domínio da variável temporal é contínuo, ou seja, $t \in \mathbb{R}_+$. Um modelo básico de um sistema LTI a tempo contínuo na sua representação de estado é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Aqui, $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída do sistema. As matrizes A, B, C e D têm dimensões compatíveis. Conhecidas as matrizes do sistema e a condição inicial x_0 , podemos determinar o estado para qualquer instante de tempo $t \in \mathbb{T}$. De fato,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.\tag{2.2}$$

A partir de (2.2) é imediata a obtenção de $z(t), \forall t \in \mathbb{T}$.

2.1.2 Sistemas a tempo discreto

Nos sistemas a tempo discreto o comportamento do sistema só está definido para alguns instantes específicos. Usualmente, define-se $k \in \mathbb{N}$ como a variável temporal. Uma representação no espaço de estados para um sistema LTI a tempo discreto pode ser escrita como

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], & x(0) &= x_0 \\z[k] &= Cx[k] + Du[k].\end{aligned}\tag{2.3}$$

Assim, como no caso contínuo, dadas as matrizes do sistema e a condição inicial x_0 , podemos mostrar que o valor do estado x em qualquer tempo $k \in \mathbb{T}$ é dado por

$$x[k] = A^k x_0 + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} Bu[m].\tag{2.4}$$

A partir de $x[k]$ é imediata a obtenção de $z[k]$, $\forall k \in \mathbb{T}$.

2.1.3 Sistemas equivalentes

O modelo de sistemas via equação de estado é um tanto quanto amplo. A existência de uma variável interna (o estado) abre espaço para questionarmos a existência de diferentes modelos para um mesmo comportamento entrada-saída. Desse questionamento, surge a definição a seguir.

Definição 2.1. *Dois sistemas são ditos equivalentes se geram a mesma saída z sempre que sujeitos à mesma entrada u e condições iniciais equivalentes.*

Ou seja, dois sistemas equivalentes representam, na verdade, um único sistema físico, porém apresentam modelos diferentes. Observe que a definição de sistemas equivalentes é a mesma tanto para sistemas a tempo contínuo como a tempo discreto. O resultado a seguir nos permite verificar um tipo de equivalência entre sistemas de mesma ordem.

Teorema 2.1. *O sistema $(\bar{x}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ é equivalente a (x, A, B, C, D) se existir $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ não-singular tal que*

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D.\tag{2.5}$$

Neste caso, $\bar{x} = Tx$.

Este teorema nos mostra que podemos obter infinitos sistemas equivalentes a um sistema inicial, basta fazermos uma mudança de variáveis parametrizada por uma matriz invertível. De fato, esta técnica é largamente utilizada, pois em diversas aplicações a escolha de um sistema equivalente com certas características pode simplificar, ou até tornar possíveis, inúmeros resultados.

2.2 Estabilidade Interna

De modo geral, o objetivo para se controlar um sistema é mantê-lo regulado em um ponto de equilíbrio ou seguindo um sinal de entrada. Em ambos os casos, é possível reescrever o modelo do sistema de modo que teremos o comportamento desejado quando o novo modelo atingir seu *ponto de equilíbrio*. Desta forma, podemos simplificar o sistema, sem perda de generalidade, e considerar somente sistemas autônomos, sem entradas externas. A *estabilidade interna* trata justamente da característica do sistema atingir seu ponto de equilíbrio.

2.2.1 Pontos de equilíbrio

Vamos, primeiramente, definir o que é um ponto de equilíbrio.

Definição 2.2 (LUENBERGER, 1979). *Um ponto $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ é um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico se, uma vez que o vetor de estado do sistema assume o valor x_e , este permanece com o valor x_e em todo tempo futuro.*

Para sistemas lineares no espaço de estado, como apresentados em (2.1) e (2.3), $x_e = 0$ é sempre um ponto de equilíbrio do sistema.

2.2.2 Estabilidade assintótica

O conceito de estabilidade apresenta diversas definições e variações, esta primeira versão é apresentada em (CHEN, 1999).

Definição 2.3 (Estabilidade assintótica). *A origem de um sistema é dita assintoticamente estável se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.6)$$

Desta forma, sempre que falarmos em estabilidade de um sistema, estaremos nos referindo à propriedade do estado do sistema aproximar-se de seu ponto de equilíbrio, ou ainda, que o seu estado tenda a zero. Os resultados a seguir fornecem condições de teste para a estabilidade de sistemas LTI.

Teorema 2.2. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *A origem do sistema a tempo contínuo (2.1) é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A tiverem parte real negativa. Neste caso, diremos que a matriz A é Hurwitz.*

(ii) A origem do sistema a tempo discreto (2.3) é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A tiverem módulo menor que 1. Neste caso, diremos que a matriz A é Schur.

2.2.3 Estabilidade exponencial

Uma outra definição de estabilidade é apresentada em (RUGH, 1996; ICHICAWA; KATAYAMA, 2001).

Definição 2.4 (Estabilidade exponencial). *Um sistema linear a tempo contínuo é dito uniformemente exponencialmente estável se existirem constantes positivas e finitas κ e α tais que para qualquer $t_1 \in \mathbb{T}$ e $x(t_1) \in \mathbb{R}^{n_x}$, a correspondente solução $x(\cdot)$ satisfizer*

$$\|x(t)\| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_1)} \|x(t_1)\|, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \quad (2.7)$$

Um sistema a tempo discreto é dito uniformemente exponencialmente estável se existir uma constante positiva e finita κ e uma constante $\epsilon \in (0, 1)$ tais que para qualquer $k_1 \in \mathbb{T}$ e $x[k_1] \in \mathbb{R}^{n_x}$, a correspondente solução $x[\cdot]$ satisfizer

$$\|x[k]\| \leq \kappa \epsilon^{(k-k_1)} \|x[k_1]\|, \quad \forall k \in \mathbb{T}. \quad (2.8)$$

É interessante estudarmos como a estabilidade exponencial se relaciona à estabilidade assintótica. O teorema a seguir traz um resultado neste sentido.

Teorema 2.3. *Para os sistemas (2.1) e (2.3) as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O sistema é assintoticamente estável;*
2. *O sistema é uniformemente exponencialmente estável.*

Não vamos detalhar aqui, mas é possível verificar que as soluções dos sistemas (2.1) e (2.3) satisfazem (2.7) e (2.8), respectivamente, se, e somente se, os sistemas satisfizerem as condições do Teorema 2.2.

2.3 Controlabilidade

Nosso objetivo neste trabalho é encontrar a melhor forma de exercer o controle sobre sistemas LTI, porém, antes de nos perguntarmos qual a melhor forma de controlá-los, precisamos saber se isto é possível. A seguir, definimos o conceito de controlabilidade.

Definição 2.5. Um sistema (a tempo contínuo ou discreto), ou o par (A, B) , é dito controlável se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e qualquer estado final x_1 , existir uma entrada que leve o estado de x_0 para x_1 em tempo finito. Caso contrário, o sistema ou o par (A, B) é dito não-controlável.

Baseado nesta definição, podemos afirmar que se um sistema for controlável poderemos levar o seu estado para qualquer ponto. Ou seja, se o sistema de interesse for controlável, podemos seguir adiante para escolher a melhor forma de atuação. Os teoremas a seguir contêm alguns resultados importantes para a verificação da controlabilidade em sistemas a tempo contínuo e discreto, respectivamente.

Teorema 2.4 (CHEN, 1999). As seguintes afirmações são equivalentes para sistemas a tempo contínuo.

(i) O par (A, B) de dimensão n_x é controlável.

(ii) A matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n_x-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x n_u} \quad (2.9)$$

tem posto completo ($\text{rank}(\mathcal{C}) = n_x$).

(iii) A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo para cada autovalor λ de A .

(iv) O Gramiano de controlabilidade

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau \quad (2.10)$$

é não singular para qualquer $t > 0$.

(v) Se, adicionalmente, A for estável, então a solução única de

$$A W_c + W_c A' + B B' = 0 \quad (2.11)$$

é definida positiva e dada por (2.10) com $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.5 (CHEN, 1999). As seguintes afirmações são equivalentes para sistemas a tempo discreto.

(i) O par (A, B) de dimensão n_x é controlável.

(ii) A matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n_x-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x n_u} \quad (2.12)$$

tem posto completo ($\text{rank}(\mathcal{C}) = n_x$).

(iii) A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo para cada autovalor λ de A .

(iv) O Gramiano de controlabilidade discreto

$$W_{dc}[k-1] = \sum_{m=0}^{k-1} A^m B B' A'^m \quad (2.13)$$

é não singular.

(v) Se, adicionalmente, A for estável, então a solução única de

$$W_{dc} - A W_{dc} A' - B B' = 0 \quad (2.14)$$

é definida positiva e dada por (2.13) com $k \rightarrow \infty$.

2.4 Observabilidade

Análoga ao conceito de controlabilidade, a observabilidade nos permite afirmar se é possível estimar o estado do sistema observando somente sua entrada e saída. Mais adiante, veremos que o conhecimento do estado é muito importante para adotarmos estratégias de controle mais eficientes.

Definição 2.6. Um sistema ou o par (A, C) é dito observável se, para qualquer estado inicial desconhecido $x(0)$, existir $t_1 > 0$ finito, tal que o conhecimento da entrada u e da saída z em $[0, t_1]$ seja suficiente para determinar unicamente o estado inicial. Caso contrário, o sistema é dito não-observável.

Os teoremas a seguir apresentam resultados para a verificação da observabilidade de sistemas a tempo contínuo e discreto.

Teorema 2.6 (Teorema da Dualidade).

O par (A, C) é observável se, e somente se, o par (A', C') for controlável.

A partir da aplicação do Teorema 2.6 aos Teoremas 2.4 e 2.5 é imediata a obtenção dos teoremas a seguir.

Teorema 2.7 (CHEN, 1999). As seguintes afirmações são equivalentes para sistemas a tempo contínuo.

(i) O par (A, C) de dimensão n_x é observável.

(ii) A matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x n_z \times n_x} \quad (2.15)$$

tem posto completo ($\mathbf{rank}(\mathcal{O}) = n_x$).

(iii) A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo para cada autovalor λ de A .

(iv) O Gramiano de observabilidade

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau \quad (2.16)$$

é não singular para qualquer $t > 0$.

(v) Se, adicionalmente, A for estável, então a solução única de

$$A'W_o + W_oA + C'C = 0 \quad (2.17)$$

é positiva definida e dada por (2.16) com $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.8 (CHEN, 1999). *As seguintes afirmações são equivalentes para sistemas a tempo discreto.*

(i) O par (A, C) de dimensão n_x é observável.

(ii) A matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x n_z \times n_x} \quad (2.18)$$

tem posto completo ($\mathbf{rank}(\mathcal{O}) = n_x$).

(iii) A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo para cada autovalor λ de A .

(iv) O Gramiano de observabilidade discreto

$$W_{dc}[k-1] = \sum_{m=0}^{k-1} A^m C' C A^m \quad (2.19)$$

é não singular.

(v) Se, adicionalmente, A for estável, então a solução única de

$$W_{do} - A' W_{do} A - C' C = 0 \quad (2.20)$$

é positiva definida e dada por (2.19) com $k \rightarrow \infty$.

2.5 Critérios de Desempenho

Antes de falarmos nas diferentes técnicas de controle, precisamos definir medidas para comparar controladores. Nesta seção iremos apresentar duas dessas medidas: o *custo quadrático de condição inicial* é uma métrica baseada no conceito de energia do sistema, medindo a energia presente no sistema até sua estabilização; já a *norma \mathcal{H}_2* é um conceito mais abstrato, baseado na resposta ao impulso do sistema.

2.5.1 Custo Quadrático de Condição Inicial

Para um sistema como (2.1) com entrada nula, definimos seu *custo quadrático de condição inicial* como

$$J(x_0) \triangleq \int_0^{\infty} x'(t) Q x(t) dt, \quad x(0) = x_0 \quad (2.21)$$

com $Q \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e x_0 conhecidos. Desta forma, ao considerar a solução de (2.1), obtemos

$$J(x_0) = x_0' \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt x_0, \quad (2.22)$$

que pelo Teorema 2.4 pode ser calculada por

$$J(x_0) = x_0' P x_0, \quad (2.23)$$

onde P é a solução da equação de *Lyapunov*

$$A' P + P A + Q = 0. \quad (2.24)$$

Para os sistemas a tempo discreto, o custo é definido de forma similar. Considere o sistema (2.3) com entrada nula, o custo será definido como

$$J(x_0) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} x'[k] Q x[k], \quad x[0] = x_0 \quad (2.25)$$

com $Q \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e x_0 conhecidos. Desta forma, ao considerar a solução de (2.3), obtemos

$$J(x_0) = x_0' \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)' Q A^k x_0, \quad (2.26)$$

que pelo Teorema 2.5 pode ser calculada por

$$J(x_0) = x_0' P x_0, \quad (2.27)$$

onde P é a solução da equação de *Lyapunov*

$$A' P A - P + Q = 0. \quad (2.28)$$

2.5.2 Norma \mathcal{H}_2

O conceito de norma \mathcal{H}_2 que será definido a seguir está atrelado ao efeito de uma perturbação impulsiva sobre o sistema. Os resultados aqui apresentados estão mais detalhados em (SOUZA, 2015). Desta forma, precisamos estender o sistema (2.1) para considerar uma entrada de perturbação

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Ew(t) \\ z(t) = Cx(t) + Fw(t), \end{cases} \quad (2.29)$$

onde $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ representa a entrada de perturbação. Para o sistema \mathcal{H} definido em (2.29) com condições iniciais nulas, sua norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada por

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \int_0^{\infty} \mathbf{tr} \left(m(t)' m(t) \right) dt, \quad (2.30)$$

onde a i -ésima coluna de $m(t)$ contém resposta do sistema a uma entrada $w = \delta(t)e_i$ e $\delta(\cdot)$ a *função delta de Dirac*, ou *impulso unitário*. A norma \mathcal{H}_2 só pode ser calculada se a integral convergir, o que ocorre se, e somente se, \mathcal{H} for estável e estritamente próprio ($F = 0$). Podemos obter o valor da norma \mathcal{H}_2 utilizando as identidades

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \mathbf{tr} (E' W_o E) = \mathbf{tr} (C W_c C'), \quad (2.31)$$

W_o e W_c são os gramianos dados, respectivamente, pelas soluções de (2.17) e (2.11).

Ainda, é possível calcular a norma \mathcal{H}_2 utilizando técnicas de otimização convexa, como apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.9. *Considere o sistema \mathcal{H} (2.29) e $x_0 = 0$, e um escalar $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(i) \quad \|\mathcal{H}\|_2^2 < \mu.$$

(ii) Existe $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que

$$A'P + PA + C'C < 0 \quad (2.32)$$

$$\mathbf{tr}(E'PE) < \mu \quad (2.33)$$

(iii) Existe $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que

$$AP + PA' + EE' < 0 \quad (2.34)$$

$$\mathbf{tr}(CPC') < \mu \quad (2.35)$$

Assim, pelas condições do Teorema 2.9, a norma \mathcal{H}_2 de \mathcal{H} pode ser calculada resolvendo-se o problema de otimização

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \inf_{\mu \in \mathbb{R}_+^*, P \in \mathbb{S}_+^{n_x}} \left\{ \mu : (2.32) - (2.33) \right\} \quad (2.36)$$

2.5.2.1 Sistemas a tempo discreto

Iremos aplicar o mesmo raciocínio no caso discreto, isto é, para o sistema (2.3) na forma

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Ew[k] \\ z[k] = Cx[k] + Fw[k], \end{cases} \quad (2.37)$$

onde $w[k]$ representa a entrada de perturbação. Para o sistema \mathcal{H} definido em (2.37) com condições iniciais nulas, sua norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada pela expressão

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{tr} \left(m[k]' m[k] \right). \quad (2.38)$$

Assim como no caso a tempo contínuo, a i -ésima coluna de $m[k]$ contém resposta do sistema a uma entrada $w = \delta[k]e_i$, sendo $\delta[\cdot]$ o *impulso unitário discreto*, ou seja, $\delta[0] = 1$ e $\delta[k] = 0, \forall k \neq 0$. A norma \mathcal{H}_2 só pode ser calculada se o somatório convergir e, neste caso, a estabilidade do sistema é condição necessária e suficiente para isso. Podemos obter o valor da norma \mathcal{H}_2 utilizando as identidades

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \mathbf{tr} (E'W_{do}E + F'F) = \mathbf{tr} (CW_{dc}C' + FF'), \quad (2.39)$$

W_{do} e W_{dc} são os gramianos dados, respectivamente, pelas soluções de (2.20) e (2.14).

Ainda, é possível calcular a norma \mathcal{H}_2 utilizando técnicas de otimização convexa, como apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.10. *Considere o sistema \mathcal{H} com realização (2.29) e $x_0 = 0$, e um escalar $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(i) \|\mathcal{H}\|_2^2 < \mu.$$

(ii) Existe $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que

$$A'PA - P + C'C < 0 \quad (2.40)$$

$$\text{tr}(E'PE + F'F) < \mu \quad (2.41)$$

(iii) Existe $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que

$$APA' - P + EE' < 0 \quad (2.42)$$

$$\text{tr}(CPC' + FF') < \mu \quad (2.43)$$

Assim, pelas condições do Teorema 2.10, a norma \mathcal{H}_2 de \mathcal{H} pode ser calculada resolvendo-se o problema de otimização

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \inf_{\mu \in \mathbb{R}_+^*, P \in \mathbb{S}_+^{n_x}} \{\mu : (2.40) - (2.41)\} \quad (2.44)$$

2.5.3 Relação entre Custo Quadrático e Norma \mathcal{H}_2

Observe que, tanto para sistemas a tempo contínuo como discreto, a norma \mathcal{H}_2 recupera o custo quadrático quando

$$\begin{aligned} E &= x_0, \\ C'C &= Q, \\ F'F &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Observando este fato, vamos desenvolver as estratégias de controle considerando somente o custo \mathcal{H}_2 , pois podemos recuperar o custo quadrático ao fazermos as substituições indicadas em (2.45).

Esta relação entre o custo quadrático e a norma \mathcal{H}_2 vai muito além de uma coincidência matemática. Observe que ao aplicarmos a entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)\Theta$, para algum $\Theta \in \mathbb{R}^{n_w}$, ao sistema (2.29) com condições iniciais nulas, obtemos

$$x(0^+) = E\Theta, \quad (2.46)$$

ou seja, a entrada impulsiva w induz uma condição inicial $x(0) = E\Theta$ no sistema. Desta forma, avaliar o custo \mathcal{H}_2 de um sistema é equivalente a considerar o custo quadrático de um sistema com uma condição inicial equivalente. Este fato será largamente explorado quando tratarmos de sistemas amostrados, visto que definir o efeito de uma entrada impulsiva em um sistema amostrado não é uma tarefa simples pois não é possível amostrar o impulso. Desta forma, vamos considerar que este impulso induz uma condição inicial no sistema e obter o custo quadrático gerado por esta condição inicial.

2.6 Controle via realimentação de estado \mathcal{H}_2

A partir do conceito de norma \mathcal{H}_2 podemos utilizar uma estratégia de controle que visa minimizar a norma \mathcal{H}_2 do sistema controlado. Inicialmente, vamos supor que a medida do estado está sempre disponível.

2.6.1 Tempo contínuo

Para este controle, vamos considerar um sistema com realização

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), & x(0) = x_0 \\ z(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.47)$$

onde $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada de perturbação e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho.

Teorema 2.11 (Controle Ótimo \mathcal{H}_2 – SOUZA, 2015). *Considere um sistema com realização (2.47) e condição inicial $x_0 = 0$. Seja ainda μ um escalar dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe um ganho K tal que a entrada de controle*

$$u(t) = Kx(t) \quad (2.48)$$

estabiliza o sistema e assegura $\|\mathcal{H}\|_2^2 < \mu$.

(ii) *Existem matrizes simétricas $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e $W \in \mathbb{S}_+^{n_w}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + BZ + Z'B' & \star \\ CX + DZ & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.49)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ E & X \end{bmatrix} > 0, \quad (2.50)$$

$$\text{tr}(W) < \mu. \quad (2.51)$$

O ganho é dado por $K = ZX^{-1}$.

O Teorema 2.11 fornece condições convexas para a existência de um ganho de realimentação de estado com desempenho \mathcal{H}_2 garantido. Desta forma, podemos encontrar o ganho ótimo resolvendo o problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \inf_{\mu \in \mathbb{R}_+^*, W \in \mathbb{S}_+^{n_w}, X \in \mathbb{S}_+^{n_x}, Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}} \{\mu : (2.49 - 2.51)\}. \quad (2.52)$$

Pode-se também mostrar que o ganho ótimo é obtido pela fórmula clássica

$$K_\star = -(D'D)^{-1}(B'P_\star + D'C), \quad (2.53)$$

onde $P_\star \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ é a solução da *equação algébrica de Riccati*

$$A'P_\star + P_\star A - (P_\star B + C'D)(D'D)^{-1}(P_\star B + C'D)' + C'C = 0. \quad (2.54)$$

Embora não detalhado aqui, é possível mostrar que a utilização da lei de controle (2.48) não precisa ser uma imposição de projeto, mas o resultado de um problema de otimização. Ou seja, a lei de controle (2.48) é o sinal que, entre todas as funções $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$, fornece o menor custo \mathcal{H}_2 para o sistema em malha fechada.

2.6.2 Tempo Discreto

Como no caso contínuo, vamos considerar um sistema com realização

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Ew[k], & x[0] = x_0 \\ z[k] = Cx[k] + Du[k], \end{cases} \quad (2.55)$$

onde $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada de perturbação e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho.

Teorema 2.12 (Controle Ótimo \mathcal{H}_2 : Tempo Discreto – SOUZA, 2015). *Considere um sistema com realização (2.55) e condição inicial $x_0 = 0$. Seja ainda μ um escalar dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe um ganho K tal que a entrada de controle*

$$u[k] = Kx[k] \quad (2.56)$$

estabiliza o sistema e assegura $\|\mathcal{H}\|_2^2 < \mu$.

(ii) *Existem matrizes simétricas $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e $W \in \mathbb{S}_+^{n_w}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ AX + BZ & X & \star \\ CX + DZ & 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ E & X \end{bmatrix} > 0, \quad (2.58)$$

$$\text{tr}(W) < \mu. \quad (2.59)$$

O ganho é dado por $K = ZX^{-1}$.

O Teorema 2.12 fornece condições convexas para a existência de um ganho de realimentação de estado com desempenho \mathcal{H}_2 garantido. Desta forma, podemos encontrar o ganho ótimo resolvendo o problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \inf_{\mu \in \mathbb{R}_+^*, W \in \mathbb{S}_+^{nw}, X \in \mathbb{S}_+^{nx}, Z \in \mathbb{R}^{nu \times nx}} \{\mu : (2.57 - 2.59)\}. \quad (2.60)$$

Pode-se também mostrar que o ganho ótimo é obtido pela fórmula clássica

$$K_\star = -(B'P_\star B + D'D)^{-1}(B'P_\star A + D'C), \quad (2.61)$$

onde $P_\star \in \mathbb{S}_+^{nx}$ é a solução estabilizante da *equação algébrica de Riccati*

$$A'P_\star A - P_\star - (A'P_\star B + C'D)(B'P_\star B + D'D)^{-1}(A'P_\star B + C'D)' + C'C = 0. \quad (2.62)$$

2.7 Controle via Realimentação Estática de Saída \mathcal{H}_2

O controle via realimentação de estado nos permite controlar o sistema de forma ótima. Porém, a suposição de que todo o estado esteja disponível raramente é válida. Nas mais diversas aplicações da teoria de controle, frequentemente encontramos alguma dificuldade na obtenção da medida do estado. Desta forma, podemos tentar aplicar uma realimentação baseada na saída medida, na mesma forma que foi realizado para a realimentação de estado. Para isto, vamos dividir a saída do sistema em duas partes, obtendo a seguinte realização

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = G(x), \\ z(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.63)$$

onde $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{ny}$ é a saída medida e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{nz}$ é a saída de desempenho.

Nos baseando no resultado obtido para a realimentação de estado, vamos utilizar a estratégia de controle

$$u = Ky, \quad (2.64)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{nu \times ny}$.

Substituindo a lei de controle na dinâmica do sistema, obtemos

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BKG)x(t) + Ew(t), & x(0) = x_0 \\ z(t) = (C + DKG)x(t). \end{cases} \quad (2.65)$$

A norma \mathcal{H}_2 desta dinâmica pode ser encontrada utilizando o resultado apresentado no teorema a seguir

Teorema 2.13. *Considere um sistema com realização (2.63) e condição inicial $x_0 = 0$. Seja ainda um escalar μ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existe um ganho $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ tal que a entrada de controle (2.64) estabiliza o sistema e assegura $\|\mathcal{H}\|_2^2 < \mu$.*
- (ii) *Existe uma matriz simétrica $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que*

$$(A + BKG)'P + P'(A + BKG) + (C + DKG)'(C + DKG) < 0, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{tr}(E'PE) > \mu. \quad (2.67)$$

A partir do resultado deste teorema, podemos obter o ganho ótimo através do seguinte problema de otimização

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \inf_{P \in \mathbb{S}_+^{n_x}, K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}} \left\{ \mathbf{tr}(E'PE) : (2.66) \right\}. \quad (2.68)$$

Porém, este problema é não-convexo e as técnicas existentes para sua solução fornecem soluções bastante conservadoras. Veja (SYRMOS *et al.*, 1997) para mais detalhes.

2.7.1 Tempo Discreto

Para o sistema a tempo discreto, teremos uma construção bastante parecida. Seja o sistema

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Ew[k], & x[0] = x_0 \\ y[k] = G[k], \\ z[k] = Cx[k] + Du[k], \end{cases} \quad (2.69)$$

onde $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho.

Substituindo a lei de controle (2.64) na dinâmica do sistema, obtemos

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x[k+1] = (A + BKG)x[k] + Ew[k], & x[0] = x_0 \\ z[k] = (C + DKG)x[k]. \end{cases} \quad (2.70)$$

O teorema a seguir traz um importante resultado para a obtenção da norma \mathcal{H}_2 deste sistema

Teorema 2.14. *Considere um sistema com realização (2.69) e condição inicial $x_0 = 0$. Seja ainda um escalar μ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existe um ganho $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ tal que a entrada de controle (2.64) estabiliza o sistema e assegura $\|\mathcal{H}\|_2^2 < \mu$.*

(ii) Existe uma matriz simétrica $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que

$$(A + BKG)'P(A + BKG) - P + (C + DKG)'(C + DKG) < 0, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{tr}(E'PE) > \mu. \quad (2.72)$$

Este teorema nos permite obter a ganho ótimo através do seguinte problema de otimização

$$\|\mathcal{H}\|_2^2 = \inf_{P \in \mathbb{S}_+^{n_x}, K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}} \left\{ \mathbf{tr}(E'PE) : (2.71) \right\}. \quad (2.73)$$

Porém, este problema também é não-convexo e as técnicas existentes para sua solução fornecem soluções bastante conservadoras.

2.8 Filtragem \mathcal{H}_2

A ausência de um método para obter a solução ótima para o problema de controle via realimentação de estática de saída, nos leva a buscar uma forma de obtermos uma estimativa para o estado do sistema. O problema de *filtragem* consiste em obter uma estimativa do estado (ou qualquer outro sinal) com base em alguns sinais que podem ser medidos. Vamos inicialmente considerar somente o problema de obtenção do estado e a seguir utilizar esta informação para realizar o controle.

2.8.1 Sistemas a tempo contínuo

Para podermos abordar este problema, vamos dividir a saída em duas partes, obtendo a realização

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Gx(t) + Fw(t), \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.74)$$

aqui $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida (ou observada) e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída a ser estimada. Como nesta situação não iremos atuar no sistema, removemos a entrada u . A fim de obter a estimativa, utilizaremos um *filtro linear de ordem completa*, baseado no *modelo interno da planta*. Esse filtro possui realização

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) = Ax_f(t) - L(y(t) - y_f(t)), & x_f(0) = 0, \\ y_f(t) = Gx_f(t), \\ z_f(t) = Cx_f(t), \end{cases} \quad (2.75)$$

onde x_f, y_f e z_f correspondem, respectivamente, ao *estado estimado*, à *estimativa da saída medida* e à *saída estimada*. O ganho do filtro $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ é a variável a ser projetada. Como

o estado inicial do sistema costuma ser desconhecido, é usual adotar $x_f(0) = 0$. A intenção aqui é obter um ganho L de forma a garantir que o erro de estimativa $\zeta \triangleq z - z_f$ convirja para zero. Como o estimador é baseado no modelo da planta, para que isso ocorra, basta que $\eta \triangleq x - x_f$ vá para zero. A dinâmica do erro é descrita pela realização

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \dot{\eta}(t) = (A + LG)\eta(t) + (E + LF)w(t), & \eta(0) = x(0), \\ \zeta(t) = C\eta(t). \end{cases} \quad (2.76)$$

Podemos observar que o problema de filtragem se resume à estabilidade do sistema (2.76) e, portanto, basta que a matriz da dinâmica do erro de estimativa $A_L = A + LG$ seja assintoticamente estável. A existência de L que torne A_L estável está relacionada com a observabilidade do par (A, G) .

O problema de filtragem ótima \mathcal{H}_2 se resume a obter o ganho L que minimiza a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.76). O teorema a seguir fornece condições para este projeto.

Teorema 2.15 (Filtro Ótimo \mathcal{H}_2 – SOUZA, 2015). *Considere o sistema \mathcal{H} com realização (2.74), sujeito à condição inicial $x(0) = 0$, o filtro \mathcal{F} com realização (2.75) e um escalar μ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe um ganho L que assegura a estabilidade do sistema \mathcal{E} com $\|\mathcal{E}\|_2^2 < \mu$*

(ii) *Existem matrizes simétricas $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e $W \in \mathbb{S}_+^{n_w}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + G'Z' + ZG & \star \\ C & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.77)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ XE + ZF & X \end{bmatrix} > 0, \quad (2.78)$$

$$\text{tr}(W) < \mu. \quad (2.79)$$

O ganho é dado por $L = X^{-1}Z$.

O valor mínimo da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimativa \mathcal{E} pode ser encontrado resolvendo-se o problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{E}\|_2^2 = \inf_{\mu \in \mathbb{R}_+^*, W \in \mathbb{S}_+^{n_w}, X \in \mathbb{S}_+^{n_x}, Z \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}} \{\mu : (2.77 - 2.79)\}. \quad (2.80)$$

Pode-se também mostrar que o ganho ótimo é obtido pela fórmula clássica

$$L_\star = -(P_\star G' + EF')(FF')^{-1}, \quad (2.81)$$

onde $P_\star \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ é a solução da equação algébrica de Riccati

$$AP_\star + P_\star A' - (P_\star G' + EF')(FF')^{-1}(P_\star G' + EF')' + EE' = 0. \quad (2.82)$$

2.8.2 Sistemas a tempo discreto

Assim como no tempo contínuo, vamos dividir a saída em duas partes, obtendo a realização

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Ew[k] \\ y[k] &= Gx[k] + Fw[k], \\ z[k] &= Cx[k], \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida (ou observada) e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída a ser estimada. Aqui, também utilizaremos um *filtro linear de ordem completa*, baseado no *modelo interno da planta*. Esse filtro possui realização

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x_f[k+1] = Ax_f[k] - L(y[k] - y_f[k]), & x_f[0] = 0, \\ y_f[k] = Gx_f[k], \\ z_f[k] = Cx_f[k], \end{cases} \quad (2.84)$$

onde x_f, y_f e z_f correspondem, respectivamente, ao *estado estimado*, à *estimativa da saída medida* e à *saída estimada*. O ganho do filtro $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ é a variável a ser projetada. Como o estado inicial do sistema costuma ser desconhecido, é usual adotar $x_f[0] = 0$. A intenção aqui é obter um ganho L de forma a garantir que o erro de estimativa $\zeta \triangleq z - z_f$ convirja para zero. Como o estimador é baseado no modelo da planta, para que isso ocorra, basta que $\eta \triangleq x - x_f$ vá para zero. A dinâmica do erro é descrita pela realização

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \eta[k+1] = (A + LG)\eta[k] + (E + LF)w[k], & \eta[0] = x[0], \\ \zeta[k] = C\eta[k]. \end{cases} \quad (2.85)$$

Podemos observar que o problema de filtragem se resume à estabilidade do sistema (2.85) e, portanto, basta que a matriz da dinâmica do erro de estimativa $A_L = A + LG$ seja assintoticamente estável. Novamente, a existência de L que torne A_L estável está relacionado com a observabilidade do par (A, G) .

O problema de filtragem ótima \mathcal{H}_2 se resume a obter o ganho L que minimiza a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.85). O teorema a seguir fornece condições para este projeto.

Teorema 2.16 (Filtro Ótimo \mathcal{H}_2 : Tempo Discreto – SOUZA, 2015). *Considere o sistema \mathcal{H} com realização (2.83), sujeito à condição inicial $x(0) = 0$, o filtro \mathcal{F} com realização (2.84) e um escalar μ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existe um ganho L que assegura a estabilidade do sistema \mathcal{E} e $\|\mathcal{E}\|_2^2 < \mu$*

(ii) Existem matrizes simétricas $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e $W \in \mathbb{S}_+^{n_w}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ tais que

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ XA + ZG & X & \star \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.86)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ XE + ZF & X \end{bmatrix} > 0, \quad (2.87)$$

$$\text{tr}(W) < \mu. \quad (2.88)$$

O ganho é dado por $L = X^{-1}Z$.

O valor mínimo da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimativa \mathcal{E} pode ser encontrado resolvendo-se o problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{E}\|_2^2 = \inf_{\mu \in \mathbb{R}_+^*, W \in \mathbb{S}_+^{n_w}, X \in \mathbb{S}_+^{n_x}, Z \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}} \{\mu : (2.86 - 2.88)\}. \quad (2.89)$$

Pode-se também mostrar que o ganho ótimo é obtido pela fórmula clássica

$$L_\star = -(AP_\star G' + EF')(GP_\star G' + FF')^{-1}, \quad (2.90)$$

onde $P_\star \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ é a solução da equação algébrica de Riccati

$$AP_\star A' - P_\star - (AP_\star G' + EF')(GP_\star G' + FF')^{-1}(AP_\star G' + EF')' + EE' = 0. \quad (2.91)$$

2.9 Realimentação de Saída \mathcal{H}_2

Para finalizar este capítulo, vamos unir a ideia de realimentação de estado com a ideia de filtragem de modo a implementar um controle a partir de qualquer saída medida do sistema.

2.9.1 Tempo Contínuo

Para isso, vamos reescrever o sistema de modo a incluir todas as partições apresentadas nas duas últimas seções. Desta forma, obtemos a realização

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) &= Gx(t) + Fw(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.92)$$

Como antes, $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o *estado*, $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é a *entrada de controle*, $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ é a *perturbação externa*, $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a *saída medida* e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a *saída controlada*. Ao definirmos uma saída medida genérica, podemos aplicar esta técnica a qualquer sistema real. Porém, para que possamos garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado é necessário que o par (A, G) seja observável.

A ideia então será combinar os resultados das Seções 2.6 e 2.8 para obter uma estimativa do estado do sistema e a partir desta estimativa aplicar uma realimentação de estado. Desta forma, o controlador a ser projetado tem realização dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dot{x}_c(t) = Ax_c(t) + Bu(t) - L(y(t) - y_c(t)), & x_c(0) = 0 \\ y_c(t) = Gx_c(t), \\ u(t) = Kx_c(t), \end{cases} \quad (2.93)$$

onde $x_c : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o *estado interno do controlador* e serve como estimativa do estado x da planta. A dinâmica em malha fechada tem realização

$$\mathcal{S}_f : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathcal{A}_f \xi(t) + \mathcal{E}_f w(t), \\ z(t) = \mathcal{C}_f \xi(t), \end{cases} \quad (2.94)$$

em que $\xi = [x' \quad x' - x'_c]'$ é o estado aumentado do sistema e

$$\mathcal{A}_f = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LG \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_f = \begin{bmatrix} E \\ E + LF \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_f = [C + DK \quad -DK]. \quad (2.95)$$

Observe que $\sigma(\mathcal{A}_f) = \sigma(A + BK) \cup \sigma(A + LG)$, o que implica que a existência de um controlador capaz de estabilizar o sistema em malha fechada depende exclusivamente da controlabilidade do par (A, B) e da observabilidade do par (A, G) . De fato, essa característica vai além e é possível mostrar (ANDERSON; MOORE, 2007) que um controlador ótimo \mathcal{H}_2 para o problema de realimentação de saída é obtido utilizando os ganhos ótimos dos problemas de realimentação de estado (2.53) e de filtragem (2.81). Essa propriedade é chamada de *separação* e permite o projeto independente de K e L .

2.9.2 Tempo Discreto

Como no tempo contínuo, vamos reescrever o sistema de modo a incluir todas as partições apresentadas nas duas últimas seções. Desta forma, obtemos a realização

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x[k+1] & = Ax[k] + Bu[k] + Ew[k], & x[0] = x_0 \\ y[k] & = Gx[k] + Fw[k], \\ z[k] & = Cx[k] + Du[k]. \end{cases} \quad (2.96)$$

Como antes, $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o *estado*, $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é a *entrada de controle*, $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ é a *perturbação externa*, $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a *saída medida* e $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ é a *saída controlada*. Ao definirmos uma saída medida genérica, podemos aplicar esta técnica a qualquer sistema real. Porém, para que possamos garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado é necessário garantir a observabilidade do par (A, G) .

A ideia então será combinar os resultados das Seções 2.6 e 2.8 para obter uma estimativa do estado do sistema e a partir desta estimativa aplicar uma realimentação de estado. Desta forma, o controlador a ser projetado tem realização dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_c[k+1] = Ax_c[k] + Bu[k] - L(y[k] - y_c[k]), & x_c[0] = 0 \\ y_c[k] = Gx_c[k], \\ u[k] = Kx_c[k], \end{cases} \quad (2.97)$$

onde $x_c : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o *estado interno do controlador* e serve como estimativa do estado x da planta. A dinâmica em malha fechada tem realização

$$\mathcal{S}_f : \begin{cases} \xi[k+1] = \mathcal{A}_f \xi[k] + \mathcal{E}_f w[k], \\ z[k] = \mathcal{C}_f \xi[k], \end{cases} \quad (2.98)$$

em que $\xi = [x' \quad x' - x'_c]'$ é o estado aumentado do sistema e

$$\mathcal{A}_f = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LG \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_f = \begin{bmatrix} E \\ E + LF \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_f = [C + DK \quad -DK]. \quad (2.99)$$

Como no caso contínuo, observe que $\sigma(\mathcal{A}_f) = \sigma(A + BK) \cup \sigma(A + LG)$, o que implica que a existência de um controlador capaz de estabilizar o sistema em malha fechada depende exclusivamente da controlabilidade do par (A, B) e da observabilidade do par (A, G) . Além disso, é possível mostrar que um controlador ótimo \mathcal{H}_2 para o problema de realimentação de saída é obtido utilizando os ganhos ótimos dos problemas de realimentação de estado (2.61) e filtragem (2.90).

2.9.3 Considerações Finais

Neste capítulo introduzimos os modelos básicos para sistemas LTI a tempo contínuo e discreto no espaço de estados. Apresentamos também os conceitos de estabilidade, controlabilidade e observabilidade, além de definir os critérios de desempenho que serão adotados neste texto. Para concluir o capítulo, incluímos os resultados de controle para estes sistemas. Esses resultados serão estendidos nos próximos capítulos para abordar sistemas amostrados. Um ponto importante é a definição dos critérios de desempenhos que serão adotados, especialmente a equivalência entre o custo quadrático e a norma \mathcal{H}_2 , esta equivalência será largamente explorada nos Capítulos 3 e 4.

3 Sistemas Amostrados

Agora que já falamos dos sistemas a tempo contínuo e discreto, vamos introduzir o conceito de amostragem. A grande maioria dos sistemas físicos de interesse são contínuos no tempo, porém, a evolução da computação digital favorece a utilização de controladores digitais devido à flexibilidade e maior facilidade de implementação. Esse arranjo traz um grande problema: como fazer a interface entre o sistema (tempo contínuo) e o controlador (tempo discreto)? A partir deste problema, surge o estudo de sistemas amostrados.

A ideia básica é simples, vamos *discretizar* o sistema. Ou seja, em vez de medirmos (e atuarmos) no sistema continuamente vamos medir (e atuar) em alguns instantes (t_1, t_2, t_3, \dots) . Assim, veremos o sistema como se ele produzisse uma sequência de saída e recebesse um sequência de entrada, ou seja, podemos vê-lo como um sistema discreto. Porém, para implementar esta ideia, precisamos saber como se comporta esta *versão discreta* do sistema. Este capítulo abordará esta questão, assim como resultados de estabilidade, de desempenho e técnicas de controle existentes na literatura.

3.1 Discretização Clássica

A primeira ideia de discretização é bem imediata. Sabendo o estado do sistema para qualquer tempo, basta determinar os instantes de interesse, obter a sequência de estados e obter uma realização em tempo discreto que recupere esta sequência. Vamos considerar uma amostragem periódica, ou seja, os instantes de interesse serão tais que $t_{k+1} - t_k = h$, $t_0 = 0$, onde h é o período de amostragem (os resultados podem ser estendidos para amostragem não-periódica). Considere então o sistema contínuo

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada e $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída. Além disso, sua solução é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.2)$$

Como já discutido anteriormente, vamos considerar que a entrada será amostrada, ou seja, $u \in \mathbb{P}_h$, \mathbb{P}_h definido em (1.1). Desta forma,

$$u(t) = u(t_k) = u[k], \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (3.3)$$

Assim, o sinal u em (3.2) será constante por partes e podemos reescrever (3.2) como

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \left(\int_0^{t-t_k} e^{A\tau} B d\tau \right) u[k], \quad (3.4)$$

para $t_k \leq t < t_{k+1}$. Considerando somente os instantes de interesse, obtemos

$$x(t_{k+1}^-) = e^{Ah}x(t_k) + \left(\int_0^h e^{A\tau} B d\tau \right) u[k]. \quad (3.5)$$

Definindo a sequência $x[k] = x(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, e observando que o sinal x é contínuo no tempo, ou seja, $x(t_k^-) = x(t_k)$, (3.5) nos fornece o sistema a tempo discreto

$$x[k+1] = \left(e^{Ah} \right) x[k] + \left(\int_0^h e^{A\tau} B d\tau \right) u[k]. \quad (3.6)$$

Ainda, a saída será dada por

$$y[k] = y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k) = Cx[k] + Du[k]. \quad (3.7)$$

Portanto, a realização do sistema amostrado será

$$\mathcal{S}_h : \begin{cases} x[k+1] = A_h x[k] + B_h u[k], \\ y_h[k] = C_h x[k] + D_h u[k], \end{cases} \quad (3.8)$$

com

$$(A_h, B_h) = \left(e^{Ah}, \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \right). \quad (3.9)$$

e

$$(C_h, D_h) = (C, D). \quad (3.10)$$

Nota 3.1. A obtenção das matrizes do sistema amostrado é imediata em qualquer sistema computacional; uma forma interessante de se obter estas matrizes é utilizando a igualdade

$$\exp \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h \right\} = \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

3.2 Discretização Equivalente

Embora a discretização clássica recupere as medidas da saída nos instantes de interesse, ela despreza tudo que ocorre no intervalo entre dois instantes. Desta forma, ela distorce, por exemplo, a norma 2 da saída. Definindo as matrizes

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

podemos observar que

$$y(t) = \mathcal{C} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \mathcal{C} e^{(t-t_k)\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \int_0^\infty \|y(t)\|_2^2 dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)y(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^h \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}' e^{\tau\mathcal{A}'} \mathcal{C}' \mathcal{C} e^{\tau\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix} dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Já a norma da saída do sistema amostrado é dada por

$$\sum_{k=0}^\infty \|y_h[k]\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'_h \\ D'_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_h \\ D'_h \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

É imediato concluir que o sistema amostrado que conserva a norma da saída, que chamaremos de *sistema amostrado equivalente* é dado por (3.8)-(3.9) com

$$\begin{bmatrix} C'_h \\ D'_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_h & D_h \end{bmatrix} = \int_0^h e^{\tau\mathcal{A}'} \mathcal{C}' \mathcal{C} e^{\tau\mathcal{A}} dt. \quad (3.16)$$

A obtenção de C_h e D_h pode ser feita pela decomposição em valores singulares da integral em (3.16).

Nota 3.2. *É importante observar que, pela definição de C_h e D_h , dada em (3.16), as dimensões de $y(t)$ e $y_h[k]$ não são necessariamente iguais. Como detalhado em (SOUZA, 2015), podemos concluir que $C_h \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times n_x}$ e $D_h \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times n_u}$. Também é válido notar que D_h pode ser não-nula, mesmo que o sistema original seja estritamente próprio.*

Para sintetizar os resultados desta seção, definimos a função de discretização equivalente

$$\Delta(h, A, B, C, D) = (A_h, B_h, C_h, D_h), \quad (3.17)$$

onde A_h, B_h, C_h, D_h são dados por (3.9) e (3.16).

3.3 Amostragem Patológica: Controlabilidade

Nesta seção, vamos analisar o efeito que o período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$ pode ter na controlabilidade do sistema. Para isso, precisamos definir os *períodos de amostragem patológicos* associados à matriz A .

Definição 3.1. Um período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$ é patológico em relação ao sistema \mathcal{S} se existir um par (λ, μ) de autovalores de A tais que

$$(i) \Re(\lambda - \mu) = 0,$$

$$(ii) \Im(\lambda - \mu) = n \cdot \frac{2\pi}{h}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, h é não-patológico.

Definido o conceito de amostragem patológica, os teoremas a seguir trazem resultados importantes sobre a controlabilidade de sistemas amostrados.

Teorema 3.1. Dado um par (A, B) controlável, o par (A_h, B_h) é controlável sempre que o período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$ for não-patológico.

Demonstração. A prova deste teorema é baseada na aplicação da condição (iii) do Teorema 2.5 sobre o par (A_h, B_h) e está detalhada em (SOUZA, 2015) \square

Esse teorema traz um resultado muito importante: podemos perder a controlabilidade do sistema dependendo do período de amostragem escolhido e, portanto, é necessário ter cuidado ao escolher o período para o projeto. Além disso, como será mostrado nos exemplos, o desempenho do sistema em malha fechada tende a piorar quando nos aproximamos destes períodos, sendo assim muito importante a escolha da taxa de amostragem.

Teorema 3.2. Se o par (A, B) for não-controlável, o par (A_h, B_h) também será não-controlável independentemente da escolha do período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração. Veja (SOUZA, 2015) \square

O segundo teorema confirma que não é possível criar controlabilidade através da amostragem. Este resultado já é de certa forma esperado, visto que para um sistema não-controlável não existe *nenhuma* entrada capaz de levar o sistema para um estado arbitrário, não há motivo para esperarmos que uma entrada em \mathbb{P}_h seja capaz de fazê-lo.

Finalmente, podemos estender esses resultados para a observabilidade e concluir que os períodos em que o sistema pode perder a observabilidade também são os períodos patológicos, tornando ainda mais importante a análise dos períodos patológicos quando utilizarmos a realimentação de saída.

3.4 Controle via Realimentação de Estado

Nesta seção, vamos discutir o controle de sistemas amostrados. O sistema \mathcal{S} de interesse possui realização

$$\mathcal{S} : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.18)$$

onde $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado e $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle. Nosso objetivo, é determinar uma lei de controle $u \in \mathbb{P}_h$ de forma que o sistema (3.18) minimize alguma função de desempenho. Ainda, dado os resultados da Seção 2.6, vamos supor

$$u(t) = Kx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (3.19)$$

3.4.1 Estabilidade

Vamos, inicialmente, analisar a estabilidade do sistema \mathcal{S} através do estudo do sistema discretizado

$$\mathcal{S}_h : x[k+1] = A_h x[k] + B_h u[k], \quad x[0] = x_0. \quad (3.20)$$

Visto que $u[k] = Kx[k]$, podemos reescrever a dinâmica como

$$\mathcal{S}_h : x[k+1] = (A_h + B_h K)x[k], \quad x[0] = x_0, \quad (3.21)$$

desta forma, a estabilidade do sistema está relacionada com a matriz $A_h + B_h K$ conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 3.3. *Para um dado período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$, o ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ torna a lei de controle $u \in \mathbb{P}_h$ definida em (3.6) globalmente estabilizante para o sistema \mathcal{S} se, e somente se, a matriz $A_h + B_h K$ for Schur.*

Demonstração. O resultado é imediato a partir do Teorema 2.2. □

A possibilidade da alocação dos polos de $A_h + B_h K$, relacionada à controlabilidade do par (A_h, B_h) nos permite garantir a estabilidade e algum desempenho para o sistema controlado. Porém, de forma geral, é interessante construir um controlador ótimo que minimize algum critério de desempenho. Como a dinâmica do sistema amostrado é equivalente a de um sistema a tempo discreto, basta aplicar as técnicas discutidas na Seção 2.6.2 para encontrar tal controlador.

3.5 Estimador de Estados

Vamos agora analisar a estimação de estados de sistemas amostrados. Considere o sistema \mathcal{S} com realização

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Gx(t), \end{cases} \quad (3.22)$$

onde $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado e $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida. Nosso objetivo é projetar o filtro linear de ordem completa \mathcal{F} , baseado no modelo interno da planta, com realização

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) = Ax_f(t) + L(y_f(t) - y(t)), & x_f(0) = 0, \\ y_f(t) = Gx_f(t), \end{cases} \quad (3.23)$$

onde $x_f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado estimado e $y_f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída do filtro, considerando a restrição $y, y_f \in \mathbb{P}_h$, ou seja, a saída e sua estimação são amostradas periodicamente. Essa restrição limita a quantidade de informação disponível para o filtro. Estamos interessados na dinâmica do erro de estimativa $\eta(t) \triangleq x(t) - x_f(t)$, dada por

$$\mathcal{E} : \dot{\eta}(t) = A\eta(t) + LG\eta(t_k), \quad \eta(0) = x_0, \quad (3.24)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$.

3.5.1 Estabilidade

Inicialmente, iremos analisar a estabilidade do estimador em função do ganho $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$. Com base nos resultados anteriores temos que

$$\mathcal{E}_h : \eta[k+1] = (A_h + J_h LG)\eta[k], \quad \eta[0] = x_0, \quad (3.25)$$

em que $J_h = \int_0^h e^{A\tau} d\tau$. Desta forma, podemos enunciar o teorema a seguir.

Teorema 3.4. *Para um dado período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$, o ganho matricial $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ torna a dinâmica do erro de estimativa \mathcal{E} , para $y, y_f \in \mathbb{P}_h$, globalmente assintoticamente estável se, e somente se, a matriz $A_h + J_h LG$ for Schur.*

Demonstração. O resultado é imediato a partir do Teorema 2.2. □

Para um ganho L conhecido, verificar a estabilidade de \mathcal{E}_h é uma tarefa simples. Essa característica é garantida pela existência de uma matriz $P \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ tal que

$$(A_h + J_h LG)'P(A_h + J_h LG) - P < 0. \quad (3.26)$$

A estrutura da matriz de malha fechada torna a obtenção de condições convexas equivalentes à (3.26), quando L e P são as variáveis de decisão, uma tarefa não tão imediata. Porém, se observarmos que J_h é não-singular para qualquer período de amostragem não-patológico, podemos definir $Y \triangleq J_h L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e analisar a estabilidade da matriz $A_h + YG$. Projetado o ganho Y , recuperamos $L = J_h^{-1}Y$. Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *Para um dado período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$, existe um ganho matricial $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ que torna a dinâmica do erro de estimativa \mathcal{E} globalmente assintoticamente estável, para $y, y_f \in \mathbb{P}_h$, se, e somente se, existirem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ satisfazendo a desigualdade matricial linear*

$$\begin{bmatrix} X & \star \\ XA_h + ZG & X \end{bmatrix} > 0. \quad (3.27)$$

No caso afirmativo, $L = J_h^{-1}X^{-1}Z$.

Demonstração. Veja (SOUZA, 2015) □

Desta forma, a determinação de uma solução estabilizante L pode ser feita por meio de um problema convexo de factibilidade.

3.5.2 Estimador ótimo \mathcal{H}_2 via Discretização Equivalente

Diferentemente do controlador, a obtenção de um estimador que minimize um critério de desempenho não decorre imediatamente da aplicação das técnicas para sistemas a tempo discreto. Isto ocorre pois a dinâmica de erro do sistema amostrado (3.25) é distinta da dinâmica de sistemas a tempo discreto (2.85).

Para este problema, vamos considerar a planta e o filtro definidos em (2.74–2.75), com a restrição adicional $y, y_f \in \mathbb{P}_h$. Como no caso clássico, a variável de projeto é o ganho $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$, $x_f(0) = 0$ e $\eta = x - x_f$. Com a condição de amostragem da saída medida, a dinâmica do erro de estimativa é descrita pela realização

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \dot{\eta}(t) = A\eta(t) + LG\eta(t_k) + (E + LF)w(t), & \eta(0) = x(0), \\ \zeta(t) = C\eta(t), \end{cases} \quad (3.28)$$

para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Como discutido na Seção 2.5.3, a perturbação impulsiva $w(t) = \delta(t)\Theta$ “emula” o efeito da condição inicial $\eta(0) = (E + LF)\Theta$.

Ao considerar uma discretização equivalente, definindo $v(t) = LG\eta(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, podemos reescrever a dinâmica (3.28) como

$$\mathcal{E}_h : \begin{cases} \eta[k+1] = A_h\eta[k] + J_h v[k], & \eta[0] = (E + LF)\Theta, \\ \zeta_h[k] = C_h\eta[k] + D_h v[k], \end{cases} \quad (3.29)$$

com $(A_h, J_h, C_h, D_h) = \Delta(h, A, I, C, 0)$, de forma que $\|\zeta_h\| = \|\zeta\|$.

A partir da dinâmica do erro \mathcal{E}_h , podemos buscar o ganho que minimiza sua norma \mathcal{H}_2 utilizando a equação (2.44) em (3.29). Desta forma, obtemos o seguinte problema de otimização

$$\inf_{L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}} \|\mathcal{E}_h\|_2^2 = \inf_{L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}, P \in \mathbb{S}_+^{n_x}} \left\{ \text{tr}(E'_L P E_L) : A'_L P A_L - P + C'_L C_L < 0 \right\}, \quad (3.30)$$

com $E_L = E + LF, A_L = A_h + J_h LG$ e $C_L = C_h + D_h LG$. Este problema é em geral não convexo. Em (SOUZA, 2015) é apresentado um método computacional para obtenção de uma solução subótima para este problema.

3.6 Realimentação de Saída via Discretização Equivalente

Em uma primeira abordagem do problema de realimentação de saída para sistemas amostrados, vamos considerar a planta (2.92) e o controlador (2.93). Vamos abordar três configurações de sistemas amostrados para este problema:

- LSRA (*local sensor – remote actuator*): Nesta configuração, os atuadores são conectados ao controlador através de um canal com taxa limitada enquanto os sensores são acoplados por canais ideais. Desta forma, vamos considerar que $u \in \mathbb{P}_h$.
- RSLA (*remote sensor – local actuator*): Este problema é complementar ao anterior, ou seja, os sensores são conectados ao controlador através de um canal com taxa limitada enquanto os atuadores não possuem nenhuma restrição de transmissão. Assim, impomos $y, y_h \in \mathbb{P}_h$.
- RSRA (*remote sensor – remote actuator*): Neste último caso, tanto os atuadores quanto os sensores possuem limitação na taxa de dados, ou seja, este problema apresenta a restrição $u, y, y_h \in \mathbb{P}_h$.

Estes casos são ilustrados na Figura 2 em três diagramas, nos quais os canais limitados e ideais são representados por linhas pontilhadas e contínuas, respectivamente. É essencial notar que, devido ao fato de os controladores exibirem estruturas distintas, cada

um dos problemas de controle ótimo \mathcal{H}_2 apresenta uma formulação específica. Todavia, observe que os três problemas de controle ótimo também possuem importantes semelhanças. No que diz respeito ao critério de desempenho, por exemplo, a entrada exógena w é suposta impulsiva, como é usual no problema \mathcal{H}_2 , e, adicionalmente, iremos supor que a saída medida é transmitida perfeitamente até que o impulso atue sobre o sistema, conforme discutido na Seção 2.5.3.

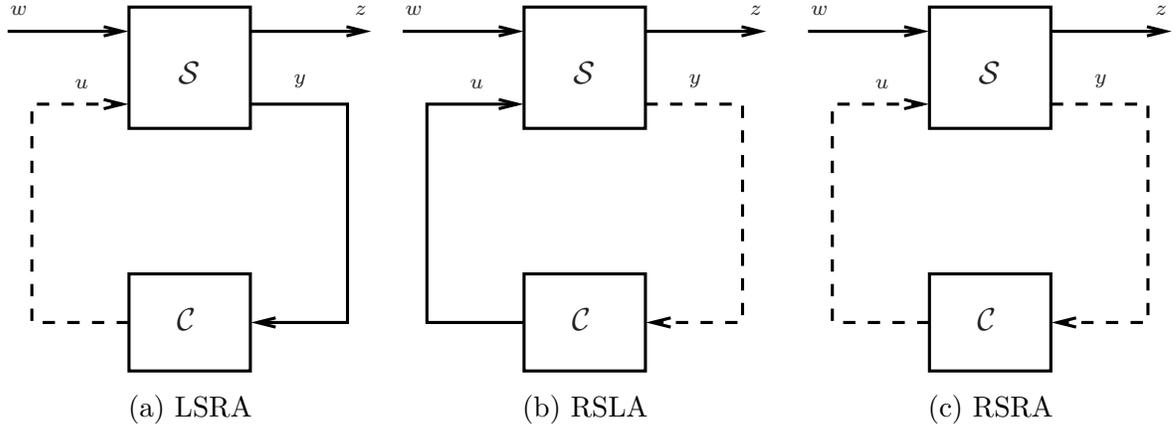


Figura 2 – Estrutura dos controladores.

Vamos agora introduzir os resultados presentes na literatura para cada uma das configurações apresentadas. Os resultados aqui apresentados foram retirados de (SOUZA, 2015).

3.6.1 LSRA

Neste problema, temos uma restrição de comunicação sobre o sinal de controle u , ou seja, $u \in \mathbb{P}_h$ para algum $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado. Vamos considerar uma entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)\Theta$, para algum $\Theta \in \mathbb{R}^{n_w}$. Novamente, podemos recriar o efeito desta entrada considerando a condição inicial $x(0) = E\Theta$ para a planta e $x_c(0) = -LF\Theta$ para o controlador, supondo que a entrada passa a ser nula ($w \equiv 0$). Desta forma, definindo o sinal de erro de estimativa $\eta \triangleq x - x_c$, podemos concluir que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k) - BK\eta(t_k), \quad (3.31)$$

$$\dot{\eta}(t) = (A + LG)\eta(t), \quad (3.32)$$

sendo ambas as equações válidas para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Mais ainda, estas equações evoluem a partir das condições iniciais $x(0) = E\Theta$ e $\eta(0) = (E + LF)\Theta$. Agora, como a entrada de controle está sujeita à restrição $u \in \mathbb{P}_h$, os instantes de amostragem $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são tais que $t_{k+1} - t_k = h \in \mathbb{R}_+^*$, $t_0 = 0$. Definindo os sinais a tempo discreto $x[k] = x(t_k)$ e

$\eta[k] = \eta(t_k)$, para $k \in \mathbb{N}$, podemos concluir que (3.31–3.32) podem ser representadas pelas equações a tempo discreto

$$x[k+1] = (A_h + B_h K)x[k] - B_h K \eta[k], \quad (3.33)$$

$$\eta[k+1] = A_{Lh} \eta[k], \quad (3.34)$$

as quais partem das mesmas condições iniciais que (3.31–3.32) e nas quais A_h e B_h são dadas por (3.9) com $A_{Lh} = e^{(A+LG)h}$. Observamos ainda que, considerando apenas as características amostradas da transformação de u para z , podemos determinar uma saída equivalente

$$z_h[k] = C_h x[k] + D_h u[k] = (C_h + D_h K)x[k] - D_h K \eta[k], \quad (3.35)$$

válida para todo $k \in \mathbb{N}$, na qual C_h e D_h são obtidas da transformação $(A_h, B_h, C_h, D_h) = \Delta(h, A, B, C, D)$. Utilizando as matrizes aumentadas

$$\mathcal{A}_h = \begin{bmatrix} A_h + B_h K & -B_h K \\ 0 & A_{Lh} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} E \\ E + LF \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_h = \begin{bmatrix} C_h + D_h K & -D_h K \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

podemos concluir que o sistema dinâmico a tempo discreto

$$\mathcal{S}_h : \begin{cases} \tilde{x}[k+1] = \mathcal{A}_h \tilde{x}[k] + \mathcal{E} w[k], & \tilde{x}[0] = 0 \\ z_h[k] = \mathcal{C}_h \tilde{x}[k], \end{cases} \quad (3.37)$$

é a discretização equivalente (para o problema \mathcal{H}_2) do sistema em malha fechada composto por \mathcal{S} e \mathcal{C} , sob a hipótese $u \in \mathbb{P}_h$.

A formulação equivalente (3.37) nos permite avaliar exatamente o desempenho \mathcal{H}_2 de um sistema de controle amostrado do tipo LSRA para um dado par de ganhos estabilizantes $(K, L) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$. Desta forma, é de interesse determinar a solução ótima do problema

$$\inf_{K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}} \|\mathcal{S}_h\|_2^2, \quad (3.38)$$

cujas soluções não são triviais. Note que existe uma dependência não linear da matriz \mathcal{A}_h em relação à variável de projeto L , embora todas as matrizes dependam linearmente da variável K . Desta forma, essa característica nos faz buscar uma solução subótima, que pode ser facilmente determinada e que apresenta propriedades interessantes. Nesse sentido, uma primeira observação está enunciada no teorema a seguir.

Teorema 3.5 (Separação I – LSRA). *Seja o par de ganhos $(K, L) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e o escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ dados. A matriz \mathcal{A}_h é Schur se, e somente se, as matrizes $A_h + B_h K$ e $A + LG$ forem Schur e Hurwitz, respectivamente.*

Demonstração. Veja (SOUZA, 2015). □

É inesperado que a propriedade de separação continue válida para o caso amostrado. Vamos explorar este fato para propor uma solução subótima; considerando que o *link* de medição é contínuo, uma escolha canônica é utilizar o ganho L_* do problema de filtragem \mathcal{H}_2 , definido por (2.81) e escolher um ganho de realimentação que considere a estrutura do problema. O teorema a seguir traz um resultado nesse sentido.

Teorema 3.6 (Separação II – LSRA). *Considere o sistema dinâmico linear \mathcal{S} e o controlador de ordem completa \mathcal{C} , com realizações dadas em (2.92-2.93) e seja o escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado. Defina as matrizes $(A_h, B_h, C_h, D_h) = \Delta(h, A, B, C, D)$. Para um sinal de controle $u \in \mathbb{P}_h$, a adoção*

(i) *de um ganho de realimentação $K = K_* \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ dado por*

$$K_* = -(B_h' X B_h + D_h' D_h)^{-1} (B_h' X A_h + D_h' C_h), \quad (3.39)$$

em que $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ é a solução estabilizante da equação algébrica de Riccati

$$A_h' X A_h - X + C_h' C_h - K_*' (B_h' X B_h + D_h' D_h) K_* = 0, \quad (3.40)$$

(ii) *e de um ganho matricial L , arbitrário, tal que $A + LG$ seja Hurwitz estável, o que assegura a existência de uma solução definida positiva $\hat{X} \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ para a equação de Lyapunov*

$$A_{Lh}' \hat{X} A_{Lh} - \hat{X} + K_*' (B_h' X B_h + D_h' D_h) K_* = 0, \quad (3.41)$$

produz um sistema em malha fechada globalmente assintoticamente estável com o desempenho

$$\|\mathcal{S}_h\|_2^2 = \mathbf{tr}(E' X E) + \mathbf{tr}((E + LF)' \hat{X} (E + LF)). \quad (3.42)$$

Demonstração. Veja (SOUZA, 2015). □

Vamos lembrar que as condições apresentadas no Teorema 3.6 são independentes do ganho de estimativa L , o qual apenas precisa ser estabilizante para $A + LG$. Além disso, a escolha particular do ganho de realimentação $K = K_*$ reforça a ideia de *separação*, que agora também pode ser observada nas duas parcelas do desempenho: a primeira seria responsável pelo custo obtido pelo “controle via realimentação de estado” e a segunda, pelo “estimador de estado”. Finalmente, enfatizamos que a importância dos resultados anteriores está centrada nas propriedades de separação fornecidas por esta solução e, além disso, na possibilidade de avaliação exata do desempenho \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Note, porém que a solução enunciada no Teorema 3.6 não assegura otimalidade.

3.6.2 RSLA

Vamos analisar agora a configuração ilustrada na Figura 2b. Visto que temos restrições no canal que liga os sensores ao controlador, vamos assumir que $y, y_c \in \mathbb{P}_h$, para algum período de amostragem $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado. Seguindo o que foi realizado para a estrutura anterior, é possível mostrar que o sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, o par de ganhos (K, L) for tal que as matrizes $A + BK$ e $A_h + J_h LG$ sejam Hurwitz e Schur, respectivamente.

Porém, em (SOUZA, 2015) não é apresentado um resultado de separação que envolva o custo do sistema em malha fechada. Em vista disso, a obtenção do sistema a tempo discreto equivalente não fornece resultados tão interessantes e não será detalhada aqui.

3.6.3 RSRA

Nesta última subseção vamos tratar a terceira estrutura de controle apresentada. Esta estrutura supõe restrições em ambos os canais de comunicação com os sensores e atuadores. Desta forma, assumimos $u, y, y_c \in \mathbb{P}_h$, para algum $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado e, além disso, como de costume no caso \mathcal{H}_2 , consideramos uma entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)\Theta$, para algum $\Theta \in \mathbb{R}^{n_w}$. Como já discutido anteriormente, o efeito causado por esta perturbação é o mesmo causado pelas condições iniciais $x(0) = E\Theta$ e $x_c(0) = -LF\Theta$ com entrada nula ($w \equiv 0$). Usando-se o sinal de erro de estimativa do estado $\eta \triangleq x - x_c$, as dinâmicas de \mathcal{S} e \mathcal{C} fornecem a dinâmica dos sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BLx(t_k) - BK\eta(t_k), \quad (3.43)$$

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) + LG\eta(t_k), \quad (3.44)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Note ainda que estas equações evoluem a partir das condições iniciais $x(0) = E\Theta$ e $\eta(0) = (E + LF)\Theta$. Agora, como a amostragem de todos os sinais é periódica, a sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que $t_{k+1} - t_k = h \in \mathbb{R}_+^*$, $t_0 = 0$ e definindo-se os sinais a tempo discreto $x[k] = x(t_k)$ e $\eta[k] = \eta(t_k)$, as equações (3.43–3.44) implicam que

$$x[k+1] = (A_h + B_h K)x[k] - B_h K\eta[k], \quad (3.45)$$

$$\eta[k+1] = (A_h + J_h LG)\eta[k], \quad (3.46)$$

com as mesmas condições iniciais que (3.43–3.44). Além disso, podemos obter a saída a tempo discreto equivalente

$$z_h[k] = C_h x[k] + D_h u[k] = (C_h + D_h K)x[k] - D_h K\eta[k], \quad (3.47)$$

onde $(A_h, B_h, C_h, D_h) = \Delta(h, A, B, C, D)$. Portanto, definindo-se as matrizes aumentadas

$$\mathcal{A}_h = \begin{bmatrix} A_h + B_h K & -B_h K \\ 0 & A_h + J_h L G \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} E \\ E + L F \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_h = [C_h + D_h K \quad -D_h K], \quad (3.48)$$

podemos concluir que o sistema dinâmico a tempo discreto

$$\mathcal{S}'_h : \begin{cases} \tilde{x}[k+1] = \mathcal{A}_h \tilde{x}[k] + \mathcal{E} w[k], & \tilde{x}[0] = 0 \\ z_h[k] = \mathcal{C}_h \tilde{x}[k], \end{cases} \quad (3.49)$$

é a discretização equivalente (para o problema \mathcal{H}_2) do sistema em malha fechada composto por \mathcal{S} e \mathcal{C} , sob a hipótese $u, y, y_c \in \mathbb{P}_h$.

Note que a formulação equivalente a tempo discreto (3.49) fornece uma maneira de avaliar exatamente o desempenho \mathcal{H}_2 de um sistema de controle amostrado do tipo RSRA para um dado par de ganhos estabilizantes $(K, L) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$. Mais ainda, nosso principal objetivo é determinar a solução do problema de otimização

$$\inf_{K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}} \|\mathcal{S}_h\|_2^2, \quad (3.50)$$

que, por ser não-convexo, é de difícil solução. De fato, podemos imediatamente notar a presença da matriz de malha fechada $A_h + J_h L G$, que apresenta a mesma estrutura do problema de filtragem. Logo, buscamos a determinação de uma solução subótima para este problema, que será baseada em propriedades interessantes apresentadas pelo sistema \mathcal{S}_h , como a enunciada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.7 (Separação I – RSRA). *Sejam o par de ganhos $(K, L) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e o escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ dados. A matriz \mathcal{A}_h é Schur estável se, e somente se, as matrizes $A_h + B_h K$ e $A + J_h L G$ também o forem.*

Demonstração. Veja (SOUZA, 2015). □

Novamente, é surpreendente que a amostragem de ambos os canais no caso RSRA não afete a propriedade de *separação* das dinâmicas do estado da planta x e do erro de estimativa η . Esta característica é explorada para a determinação de uma solução subótima, enunciada no teorema a seguir.

Teorema 3.8 (Separação II – RSRA). *Considere o sistema dinâmico linear \mathcal{S} e o controlador de ordem completa \mathcal{C} , com realizações dadas em (2.92–2.93) e seja o escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado. Defina as matrizes $(A_h, B_h, C_h, D_h) = \Delta(h, A, B, C, D)$. Sob as restrições $u, y, y_c \in \mathbb{P}_h$, a adoção*

(i) de um ganho de realimentação $K = K_\star \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ dado por

$$K_\star = -(B'_h X B_h + D'_h D_h)^{-1} (B'_h X A_h + D'_h C_h), \quad (3.51)$$

em que $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ é a solução estabilizante da equação algébrica de Riccati

$$A'_h X A_h - X + C'_h C_h - K'_\star (B'_h X B_h + D'_h D_h) K_\star = 0, \quad (3.52)$$

(ii) e de um ganho matricial L , arbitrário, tal que $A + J_h L G$ seja Schur estável, o que assegura a existência de uma solução definida positiva $\hat{X} \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ para a equação de Lyapunov

$$(A_h + J_h L G)' \hat{X} (A_h + J_h L G) - \hat{X} + K'_\star (B'_h X B_h + D'_h D_h) K_\star = 0, \quad (3.53)$$

produz um sistema em malha fechada globalmente assintoticamente estável com o desempenho

$$\|\mathcal{S}_h\|_2^2 = \mathbf{tr}(E' X E) + \mathbf{tr}\left((E + L F)' \hat{X} (E + L F)\right). \quad (3.54)$$

Demonstração. Veja (SOUZA, 2015). □

O resultado apresentado pelo Teorema 3.8 fornece um ganho de realimentação subótimo $K = K_\star \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ que é independente do ganho matricial L . Porém, podemos observar que, assim como no problema clássico de realimentação dinâmica de saída, o ganho L tem papel importante no desempenho do sistema em malha fechada. Desta forma, tomando-se como base o item (ii) do Teorema 3.8, podemos concluir que a melhor escolha do ganho L pode ser obtida resolvendo-se o problema de otimização

$$\inf_{\substack{L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}, \\ \hat{X} \in \mathbb{S}_+^{n_x}}} \left\{ \mathbf{tr}\left((E + L F)' \hat{X} (E + L F)\right) : (A_h + J_h L G)' \hat{X} (A_h + J_h L G) - \hat{X} + K'_\star (B'_h X B_h + D'_h D_h) K_\star < 0 \right\}, \quad (3.55)$$

o qual, apesar de não-convexo, pode ser resolvido com as técnicas apresentadas em (SOUZA, 2015).

3.7 Considerações Finais

Neste capítulo introduzimos e exploramos o conceito de amostragem de sistemas dinâmicos, definindo as técnicas de *discretização clássica* e *discretização equivalente*. Apresentamos então diversas técnicas presentes na literatura (SOUZA, 2015) para o controle desses sistemas baseadas na *discretização equivalente* e observamos que, com exceção da *realimentação de estado*, a obtenção de controladores ótimos é um problema não-convexo e as soluções obtidas são subótimas. Os controladores apresentados neste capítulo servem como base de comparação para os controladores que serão apresentados no próximo capítulo.

4 Controle \mathcal{H}_2 de Sistemas Amostrados – Uma Nova Abordagem

Visando contornar as limitações das técnicas apresentadas no capítulo anterior para o controle de sistemas amostrados, neste capítulo iremos utilizar outra abordagem para a resolução destes problemas. Depois, através de exemplos, iremos comparar a complexidade e a qualidade dos resultados fornecidos por ambas as técnicas.

4.1 Sistemas com Saltos

Vamos introduzir agora uma outra forma de modelar sistemas dinâmicos lineares que consegue abranger naturalmente mais sistemas. A formulação por *Sistemas com Saltos* mistura dinâmicas a tempo contínuo e a tempo discreto e permite modelar naturalmente sistemas com comutação, com saltos Markovianos e sistemas amostrados.

Um sistema linear com saltos \mathcal{H} tem realização de estado dada por

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathcal{A}\xi(t) + \mathcal{E}w(t), & \xi(0^-) = \xi_0 \\ \zeta(t) = \mathcal{C}\xi(t), \\ \xi(t_k) = \mathcal{K}\xi(t_k^-), \end{cases} \quad (4.1)$$

válida para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Os sinais a tempo contínuo $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$, $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\zeta}$ e $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ são o estado, a saída e a entrada externa, respectivamente. A quádrupla de matrizes $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$ é composta de matrizes reais de dimensões compatíveis. A *sequência de instantes de salto* $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.

Os sistemas de interesse deste trabalho podem ser modelados como sistemas com saltos da forma de \mathcal{H} e, sendo assim, é importante analisarmos a estabilidade e o desempenho de \mathcal{H} .

4.1.1 Estabilidade e Desempenho

Para analisar a estabilidade do sistema \mathcal{H} , vamos obter a sequência dos valores do estado nos instantes de salto. Considere o sistema \mathcal{H} com $w(t) \equiv 0$, $t \in [0, \infty)$ e $t_{k+1} - t_k = h$, em que o escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ determina a *taxa de saltos* do sistema. Podemos observar que

$$\xi(t_{k+1}) = \mathcal{K}\xi(t_{k+1}^-) = \mathcal{K}e^{Ah}\xi(t_k) \quad (4.2)$$

e, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi(t_k) = 0 \iff \mathcal{K}e^{A_h} \text{ for Schur} \quad (4.3)$$

Existem diversas condições para o desempenho de sistemas com saltos como \mathcal{H} , porém estamos particularmente interessados nas condições necessárias e suficientes baseadas em desigualdade matriciais apresentadas em (BRIAT, 2013) e (GEROMEL; SOUZA, 2015).

Teorema 4.1. *Considere o sistema híbrido \mathcal{H} com realização (4.1) e um escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado. Assumindo que o sistema evolua de uma condição inicial $\xi(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Para $w \equiv 0$ e $t_{k+1} - t_k = h, \forall k \in \mathbb{N}$, \mathcal{H} é exponencialmente estável e existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\int_0^\infty \|\zeta(t)\|^2 dt < \mu. \quad (4.4)$$

(ii) *Existe $S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ de modo que a desigualdade matricial*

$$\mathcal{A}'_h \mathcal{K}' S \mathcal{K} \mathcal{A}_h - S + \mathcal{C}'_h \mathcal{C}_h < 0 \quad (4.5)$$

seja satisfeita, onde o par matricial $(\mathcal{A}_h, \mathcal{C}_h)$ é tal que

$$\mathcal{A}_h = e^{A_h}, \quad \mathcal{C}'_h \mathcal{C}_h = \int_0^h e^{A't} \mathcal{C}' \mathcal{C} e^{A_t} dt. \quad (4.6)$$

Demonstração. Ver apêndice A. □

Nota 4.1. *O item (ii) é particularmente importante, pois ele fornece uma descrição convexa do conjunto de matrizes $S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ para as quais o problema de contorno é factível. Esta caracterização é analisada a fundo em (SOUZA; GEROMEL, 2015) e estendida ao problema de projeto de controle por realimentação de estado amostrado em (GEROMEL; SOUZA, 2015).*

Note que, como (4.5) é uma desigualdade matricial linear, ela define um conjunto convexo na variável $S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ e, portanto, pode-se resolver um problema convexo de factibilidade para verificar se o sistema híbrido \mathcal{H} é exponencialmente estável ou não. Por sua similaridade com a desigualdade de Lyapunov a tempo discreto para sistemas LTI (BOYD *et al.*, 1994), podemos afirmar que (4.5) é verificada para algum $S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ se e somente se $\rho(\mathcal{K} \mathcal{A}_h) < 1$. Portanto, da prova do Teorema 4.1, qualquer $\mu \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mu \geq \xi(0)' S \xi(0)$ verifica (4.4). Assim, o custo quadrático $\|\zeta\|_2^2$ pode ser avaliado ao resolver o problema de otimização convexa

$$\inf_{S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}} \left\{ \xi(0)' S \xi(0) : (4.5) \right\}. \quad (4.7)$$

Baseado nesse índice de desempenho quadrático, (GEROMEL; SOUZA, 2015) também consideram um índice \mathcal{H}_2 associado à \mathcal{H} . Esta métrica é definida como

$$\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) \triangleq \sum_{i=1}^{n_w} \int_{t_0}^{\infty} \|\zeta_i(t)\|^2 dt, \quad (4.8)$$

onde ζ_i é a saída associada à entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)e_i$, $t \in \mathbb{R}_+$. Como já discutido anteriormente, o efeito de uma entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)\Theta$, $t \in \mathbb{R}_+$ e $\Theta \in \mathbb{R}^{n_w}$, é o mesmo que o induzido por uma condição inicial $\xi(t_0^-) = \mathcal{E}\Theta$, o que implica que a factibilidade de (4.5) no Teorema 4.1 garante que o limite

$$\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) < \mathbf{tr}(\mathcal{E}'\mathcal{K}'S\mathcal{K}\mathcal{E}) \quad (4.9)$$

seja verificado. Assim, a solução para o problema de otimização convexa

$$\inf_{S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}} \left\{ \mathbf{tr}(\mathcal{E}'\mathcal{K}'S\mathcal{K}\mathcal{E}) : (4.5) \right\} \quad (4.10)$$

fornece o custo \mathcal{H}_2 de \mathcal{H} . Estes resultados serão utilizados a seguir. O leitor deve consultar (GEROMEL; SOUZA, 2015) para maiores detalhes.

4.2 Estrutura do Controlador e Modelos com Saltos

Antes de nos concentrarmos nos resultados principais, vamos introduzir as estruturas da planta e dos controladores. Neste trabalho, a planta \mathcal{S} é descrita pelo modelo LTI

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \\ y(t) &= Gx(t) + Fw(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (4.11)$$

onde o estado $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, a entrada de controle $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$, a saída controlada $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$, a saída medida $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ e o ruído externo $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ são sinais a tempo contínuo. O sistema é conectado, na forma clássica de realimentação, a um controlador LTI de ordem completa

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dot{x}_c(t) &= Ax_c(t) + Bu(t) + L(y_c(t) - y(t)), \\ y_c(t) &= Gx_c(t), \\ u(t) &= Kx_c(t), \end{cases} \quad (4.12)$$

baseado em seu modelo interno. O estado interno do controlador é o sinal $x_c : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$.

Como no problema de controle via realimentação clássico (ANDERSON; MOORE, 2007), nosso principal objetivo é determinar ambos os ganhos $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$

de forma a estabilizar o sistema em malha fechada e minimizar um índice de desempenho \mathcal{H}_2 . Claramente, esta solução deve seguir uma das restrições de amostragem apresentadas anteriormente; isto é, a solução deve levar em conta que $u \in \mathbb{P}_h$ no caso LSRA, que $y, y_c \in \mathbb{P}_h$ no caso RSLA e, finalmente, que $u, y, y_c \in \mathbb{P}_h$ para a estrutura RSRA. Nas subseções a seguir, vamos mostrar como estes problemas podem ser formulados em termos dos sistemas híbridos apresentados neste capítulo.

4.2.1 Controle LSRA

Primeiramente, vamos analisar a configuração LSRA. Definimos o erro de estimativa do controlador $\eta \triangleq x - x_c$ e o vetor de estados aumentado $\xi(t) = [x(t)' \eta(t)' u(t)']'$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Com isto em mente, pode-se verificar que podemos escrever o sistema em malha fechada obtido pela interconexão de \mathcal{S} e \mathcal{C} , com a restrição $u \in \mathbb{P}_h$, como o sistema híbrido \mathcal{H} com realização (4.1), onde a quádrupla de matrizes $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$ é dada por

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} A & 0 & B \\ 0 & A + LG & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} E \\ E + LF \\ 0 \end{array} \right], [C \ 0 \ D], \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ K & -K & 0 \end{array} \right] \end{array} \right). \quad (4.13)$$

4.2.2 Controle RSLA

O modelo para o caso RSLA também pode ser obtido por simples manipulações. De fato, considerando que $y, y_c \in \mathbb{P}_h$ e escolhendo o estado aumentado $\xi(t) = [x_c(t)' \eta(t)' v(t)']'$, onde $v(t) = LG\eta(t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, podemos novamente formular o sistema em malha fechada como um sistema com saltos \mathcal{H} , dado em (4.1), no qual a quádrupla de matrizes $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$ é dada por

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} A + BK & 0 & -I \\ 0 & A & I \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -LF \\ E + LF \\ 0 \end{array} \right], [C + DK \ C \ 0], \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & LG & 0 \end{array} \right] \end{array} \right). \quad (4.14)$$

4.2.3 Controle RSRA

Para o último caso, $u, y, y_c \in \mathbb{P}_h$. Definindo o estado aumentado $\xi(t) = [x(t)' \eta(t)' u(t)' v(t)']'$, podemos formular o sistema em malha fechada com a estrutura RSRA como sistema com saltos e realização (4.1), onde $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$ é dada por

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} A & 0 & B & 0 \\ 0 & A & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} E \\ E + LF \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], [C \ 0 \ D \ 0], \left[\begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ K & -K & 0 & 0 \\ 0 & LG & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right). \quad (4.15)$$

4.3 Condições de projeto

As principais condições de projeto apresentadas neste trabalho podem ser obtidas a partir de (4.10). Para isto, devemos introduzir uma nova variável de otimização, que nos permite reescrever tal problema de forma particularmente interessante.

Teorema 4.2. *Considere o sistema linear híbrido \mathcal{H} , cuja realização é dada por (4.1), e um escalar $h \in \mathbb{R}_+^*$ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Para $t_{k+1} - t_k = h, \forall k \in \mathbb{N}$, \mathcal{H} é exponencialmente estável e existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) < \mu. \quad (4.16)$$

(ii) *Existem matrizes $R \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$, $W \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ e $M \in \mathbb{S}_+^{n_w}$ tais que as desigualdades matriciais lineares*

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathcal{K}W & R \end{bmatrix} > 0, \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_h \\ \mathcal{C}_h \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} \mathcal{A}_h \\ \mathcal{C}_h \end{bmatrix}' > 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} M & \star \\ \mathcal{E} & W \end{bmatrix} > 0 \quad (4.19)$$

sejam verificadas. O par de matrizes $(\mathcal{A}_h, \mathcal{C}_h)$ é dado em (4.6).

Demonstração. Primeiramente, assuma que (ii) vale. Usando complemento de Schur, (4.17) implica que $W^{-1} > \mathcal{K}'R^{-1}\mathcal{K}$ e (4.18) implica que

$$R^{-1} > \mathcal{A}_h'W^{-1}\mathcal{A}_h + \mathcal{C}_h'\mathcal{C}_h. \quad (4.20)$$

Portanto, estas desigualdades implicam que (4.5) é verificada para $S = R^{-1}$, o que, pelo Teorema 4.1, garante que \mathcal{H} é exponencialmente estável. Além disto, observando que (4.19) implica que $M > \mathcal{E}'W^{-1}\mathcal{E}$, segue de (4.9) que

$$\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) < \mathbf{tr} \left(\mathcal{E}'\mathcal{K}'R^{-1}\mathcal{K}'\mathcal{E} \right) < \mathbf{tr}(M), \quad (4.21)$$

o que garante que (4.16) é verificada para qualquer $\mu \geq \mathbf{tr}(M)$. Portanto, (i) vale.

Agora, assuma que (i) vale. Pelo Teorema 4.1, existe $S \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ tal que (4.5) é verificada e $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) < \mathbf{tr} \left(\mathcal{E}'\mathcal{K}'S\mathcal{K}'\mathcal{E} \right)$. Pegue $R = S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ e $W \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ tal que $X(h) > W^{-1} > \mathcal{K}'S\mathcal{K} = \mathcal{K}'R^{-1}\mathcal{K}$; o que é possível dado que $X(h) > \mathcal{K}'X(0)\mathcal{K}$ como provado no Teorema 4.1. Esta

escolha particular implica que (4.17) é satisfeita. Adicionalmente, considerando (A.11), segue que

$$\mathcal{A}'_h W^{-1} \mathcal{A}_h - R^{-1} + \mathcal{C}'_h \mathcal{C}_h < 0, \quad (4.22)$$

que é equivalente, por complemento de Schur, a (4.18). Finalmente, podemos pegar qualquer matriz $M \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ tal que $M > \mathcal{E}' W^{-1} \mathcal{E}$, visto que esta condição é equivalente a (4.19). A prova está, portanto, completa. \square

Com os resultados do Teorema 4.2 podemos obter o custo \mathcal{H}_2 resolvendo o problema de otimização convexa

$$\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) = \inf_{R, W \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}, M \in \mathbb{S}_+^{n_w}} \left\{ \text{tr}(M) : (4.17) - (4.19) \right\}, \quad (4.23)$$

o qual é uma formulação alternativa para (4.10). Estas condições apresentam uma estrutura que é particularmente importante de uma perspectiva de projeto de controladores. De fato, em todos os três casos apresentados, o sistema em malha fechada pode ser modelado como um sistema híbrido com realização (4.1), e podemos usar (4.23) para projetar os ganhos K e L de forma a minimizar o custo \mathcal{H}_2 associado $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$. Resolver estas condições, entretanto, ainda apresenta alguns desafios.

O primeiro aspecto desafiador no projeto dos ganhos matriciais $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ está centrado na computação da exponencial matricial $e^{h\mathcal{A}}$, exigida em (4.18). De fato, nos casos LSRA e RSLA, \mathcal{A} depende de L e K , respectivamente, implicando que estas variáveis estão inseridas na exponencial que aparece nas desigualdades da condição (4.18), o que significa que seu projeto é virtualmente impossível em um ambiente de otimização. Este problema é contornado em (SOUZA; GEROMEL, 2014; SOUZA, 2015) ao atribuir o ganho do filtro ótimo \mathcal{H}_2 a tempo contínuo L_\star (2.81) e o ganho de realimentação de regulador ótimo \mathcal{H}_2 a tempo contínuo K_\star (2.53), respectivamente, a estas variáveis, otimizando somente o ganho restante. A estrutura RSRA não apresenta este problema.

A segunda dificuldade vem do fato das matrizes \mathcal{E} e \mathcal{K} conterem as variáveis de projeto K e L . As restrições (4.23) são, portanto, desigualdades matriciais bilineares, implicando que este problema de otimização é não-convexo. Até onde sabemos, este problema não pode ser facilmente convexificado por transformações biunívocas. Portanto, neste trabalho, exploramos a estrutura apresentada por estas condições para obter dois métodos computacionais baseados em otimização convexa sequencial, que estão detalhados a seguir.

4.4 Métodos Computacionais

Vamos agora discutir como resolver os principais problemas de controle definidos até aqui. Apresentamos dois procedimentos de otimização convexa sequencial que garantidamente convergem para uma solução subótima, pois cada iteração provê uma solução factível para a próxima. Observe que a otimalidade do ponto limite não é garantida. Mesmo assim, como indicado pelos nossos exemplos, as soluções obtidas por estes procedimentos têm bom desempenho quando comparadas a soluções apresentadas anteriormente.

4.4.1 Método K-W

O primeiro método é baseado na seguinte observação. Pela sua estrutura bilinear, se fixarmos as variáveis do controlador em \mathcal{K} e \mathcal{E} ou a variável matricial W , então o problema (4.23) torna-se convexo, pois todas suas restrições se reduzem a LMIs. Com isso em mente, vamos descrever o método para o caso LSRA, onde apenas K é a variável a ser otimizada; o mesmo raciocínio pode ser aplicado para os outros casos. Este método é baseado em programação multi-convexa e ideias de descida bloco coordenadas; veja (WARGA, 1963; SHEN *et al.*, 2016) para detalhes. As técnicas de otimização biconvexa também podem ser aplicadas aqui, (GORSKI *et al.*, 2007) discute amplamente esta classe de problemas.

Assumindo que um ganho estabilizante K_0 seja fornecido, resolvemos a sequência de problemas de otimização convexa de duas fases

$$\mathcal{P}_k : (R_{k+1}, W_{k+1}, M_{k+1}) = \arg \inf_{R, W, M} \left\{ \text{tr}(M) : (4.17) - (4.19), K = K_k \right\} \quad (4.24)$$

e

$$\mathcal{Q}_k : K_{k+1} = \arg \inf_{R, M, K} \left\{ \text{tr}(M) : (4.17) - (4.19), W = W_{k+1} \right\}, \quad (4.25)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como a factibilidade é garantida a cada iteração, a sequência de custos ótimos é bem definida e não-crescente, convergindo para um valor limite; estas observações nos permitem enunciar o seguinte lema.

Lema 4.1. *Seja $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})_k$ a sequência de problemas de otimização convexos definidos em (4.24–4.25). Para um ganho inicial factível K_0 , a sequência $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de valores ótimos para (4.24) é não-crescente e converge para algum valor $\mu^* \geq 0$.*

Vamos agora discutir como encontrar valores iniciais para K e L de forma a aplicar este método. Como apresentado no capítulo anterior, existe uma fraca propriedade de separação para este projeto, e portanto, os ganhos podem ser inicializados separadamente. Então, no caso LSRA, inicializamos K_0 com a solução apresentada no Teorema 3.6; esta

mesma solução de K também pode ser adotada para o caso RSRA. A aproximação inicial para L , em ambos os problemas RSLA e RSRA, pode ser encontrada utilizando o resultado do Corolário 3.1. Desta forma, escolhemos $L_0 = J_h^{-1}X^{-1}Z$, onde $X \in \mathbb{S}_+^{n_x}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ satisfazem a desigualdade matricial linear (3.27)

4.4.2 Linearização por Complementariedade Cônica

O segundo método é baseado no bem estabelecido e largamente adotado algoritmo de *linearização por complementariedade cônica* (CCL, na sigla em inglês) apresentado em (El Ghaoui *et al.*, 1997). No seu caso mais simples, um problema de *complementariedade cônica* apresenta uma restrição da forma

$$\Phi(X, X^{-1}) > 0, \quad (4.26)$$

onde $\Phi(\cdot, \cdot)$ depende linearmente de $X \in \mathbb{S}_+^n$ e $X^{-1} \in \mathbb{S}_+^n$; isto é, X^{-1} é a única “fonte” de não-convexidade em (4.26). El Ghaoui *et al.* mostram que

$$\inf_{X, S \in \mathbb{S}_+^n} \left\{ \text{tr}(XS) : \Phi(X, S) > 0, \begin{bmatrix} X & \star \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \right\} = n \quad (4.27)$$

se, e somente se, $S = X^{-1}$ no ótimo. Portanto, encontrar uma solução factível para (4.26) é equivalente a resolver o problema de otimização em (4.27), que apresenta um conjunto factível convexo. Observe, no entanto, que a função objetivo ainda é não-convexa. Para resolver (4.27), El Ghaoui *et al.* adotam um procedimento iterativo baseado em linearização. A função objetivo em (4.27) é inicialmente linearizada na vizinhança de um ponto dado (X_0, S_0) por

$$\text{tr}(XS) \approx \text{tr}(X_0S_0) + \text{tr}(X_0\delta S + S_0\delta X). \quad (4.28)$$

Então, para um ponto inicial (X_0, S_0) , pode-se definir a sequência de problemas de otimização convexa

$$\mathcal{P}_k : \inf_{X, S \in \mathbb{S}_+^n} \left\{ \text{tr}(X_kS + S_kX) : \Phi(X, S) > 0, \begin{bmatrix} X & \star \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \quad (4.29)$$

cujos argumentos, para cada $k \in \mathbb{N}$, são (X_{k+1}, S_{k+1}) . O lema a seguir apresenta uma propriedade interessante deste método.

Lema 4.2. *Seja \mathcal{P}_k a sequência de problemas de otimização convexos definidos em (4.29). Para um ponto inicial factível (X_0, S_0) , defina a sequência $(X_{k+1}, S_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ de soluções ótimas para \mathcal{P}_k e, para cada k , defina $t_k \triangleq \text{tr}(S_kX_{k+1} + X_kS_{k+1})$. A sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para algum valor $t^* \geq 2n$ e $t^* = 2n$ se, e somente se, $X^*S^* = I$ no ótimo.*

Podemos agora explorar a estrutura apresentada pelas nossas condições de projeto e reescrevê-las como um problema de complementariedade cônica. De fato, com as condições apresentadas no Teorema 4.2, podemos dizer que $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) < \mu$ se, e somente se,

$$\inf \left\{ \text{tr}(UW) : \text{tr}(M) < \mu, \begin{bmatrix} U & \star \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} U & \star \\ \mathcal{K} & R \end{bmatrix} > 0, (4.18), (4.19) \right\} = n_\xi. \quad (4.30)$$

Baseado nas nossas considerações anteriores, este problema pode ser resolvido pelo algoritmo CCL e, portanto, para encontrar o controle ótimo, devemos tentar minimizar μ enquanto ainda garantimos a convergência do algoritmo para algum ponto no qual $U = W^{-1}$. Este procedimento é descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Método de otimização convexa sequencial

Dados: Intervalo de busca $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, máximo número de iterações N e tolerâncias

$$\epsilon_I, \epsilon_\mu > 0$$

Resultado: Custo garantido \mathcal{H}_2 : μ^*

Inicialize: $\underline{\mu} \leftarrow \mu_{\min}, \bar{\mu} \leftarrow \mu_{\max}$;

enquanto $\bar{\mu} - \underline{\mu} > \epsilon_\mu$ **faça**

$$\mu \leftarrow (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2;$$

$$k \leftarrow 0, U_0 \leftarrow I, W_0 \leftarrow I;$$

repita

Resolva (4.29);

$$k \leftarrow k + 1;$$

$$W_k \leftarrow W, U_k \leftarrow U;$$

até $\|U_k W_k - I\| < \epsilon_I$ **ou** $k > N$;

se $k > N$ **então**

Atualize $\underline{\mu} \leftarrow \mu$;

senão

Atualize $\bar{\mu} \leftarrow \mu$ e **salve** as variáveis de decisão;

fim

fim

se $\bar{\mu} < \mu_{\max}$ **então**

Retorne $\mu^* \leftarrow \bar{\mu}$ e o último conjunto de variáveis salvas;

senão

 O método falhou;

fim

4.5 Exemplo Numérico

Para validar nossos resultados, consideramos o exemplo apresentado em (SOUZA; GEROMEL, 2014; SOUZA, 2015), que utiliza a planta \mathcal{S} definida como em (4.11) com ma-

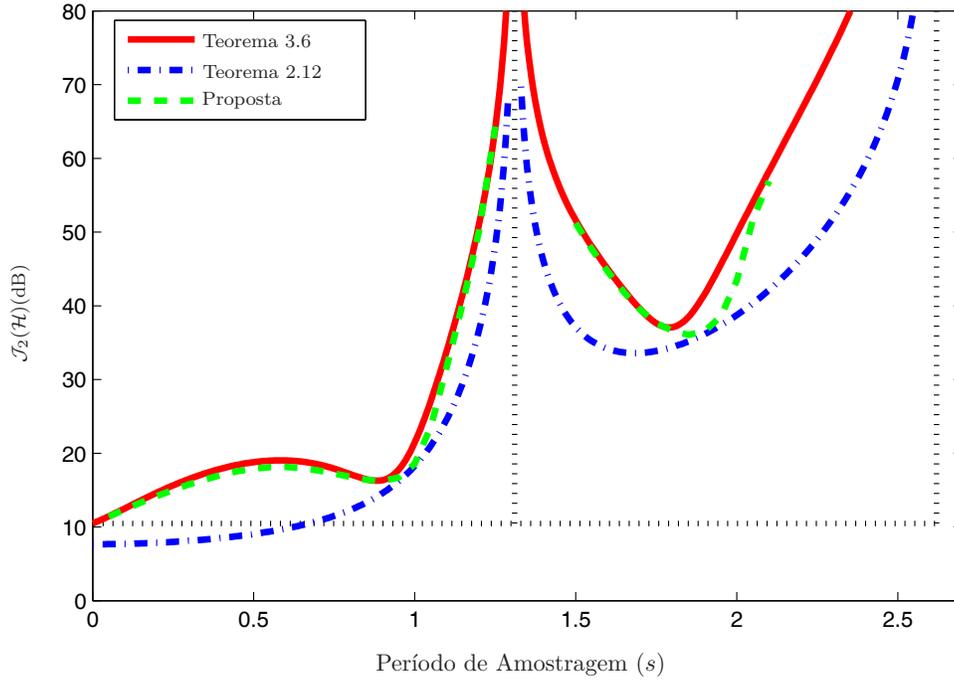


Figura 3 – Comparação Teorema 3.6 vs Algoritmo 1 para LSRA.

trizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0,01 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos primeiro considerar o problema LSRA. A Figura 3 mostra o comportamento do custo quadrático $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ para três estratégias de controle: a realimentação de estado periódica ótima, como apresentada na Seção 3.4 e em (SOUZA *et al.*, 2014a), é representada pela linha azul pontilhada; a solução baseada na discretização equivalente apresentada na Seção 3.6.1 e em (SOUZA; GEROMEL, 2014) é representada pela linha vermelha sólida e nossa solução, obtida com o algoritmo CCL, é representada pela linha tracejada verde. Comparando ambas estratégias de realimentação de saída, fica claro que nossa solução melhora aquela apresentada em (SOUZA; GEROMEL, 2014), mas vale ressaltar que isso vem com maior custo computacional. A mesma análise pode ser feita para o caso RSRA. A realimentação de estado supõe que todo o estado está disponível para realimentação e, com sua otimalidade, provê um limitante inferior para o desempenho em malha fechada.

A Figura 4 também mostra o comportamento do custo quadrático $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ para três estratégias de controle; note que, agora, a linha vermelha sólida representa a solução proposta em (SOUZA, 2015) e apresentada na Seção 3.6.3. Finalmente, a Figura 5 compara o desempenho obtido pelos três controladores estudados nesse trabalho. A estrutura LSRA é

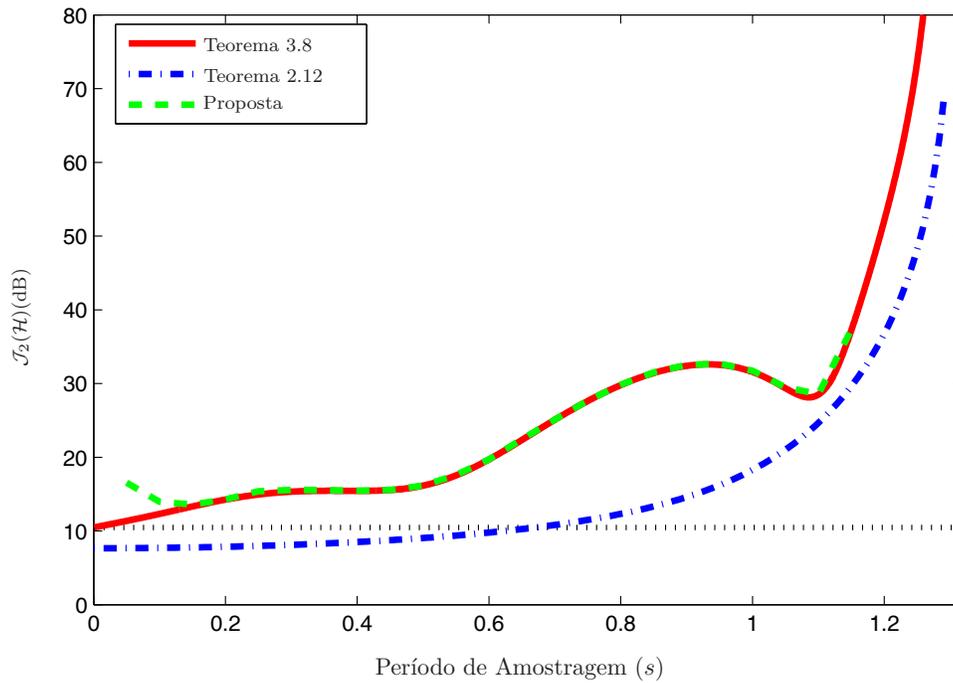


Figura 4 – Comparação Teorema 3.8 vs Algoritmo 1 para RSRA.

mostrada pela linha azul sólida, o caso RSLA pela linha verde tracejada e o problema RSRA corresponde a linha vermelha ponto-traço. Note que, apesar de ser mais restritivo, o controle RSRA obtém melhor desempenho em relação aos demais para alguns valores do período de amostragem h ; um comportamento similar também foi observado no problema de filtragem \mathcal{H}_2 (SOUZA *et al.*, 2014b).

4.6 Considerações Finais

Neste capítulo introduzimos os sistemas com saltos e apresentamos resultados de estabilidade e desempenho. Dispondo dessa nova ferramenta, revimos a abordagem ao problema de realimentação de saída e propusemos novas técnicas de solução. Os resultados obtidos ainda são não-convexos, mas através de exemplos pudemos mostrar que eles melhoram as técnicas propostas anteriormente embora apresentem um maior custo computacional.

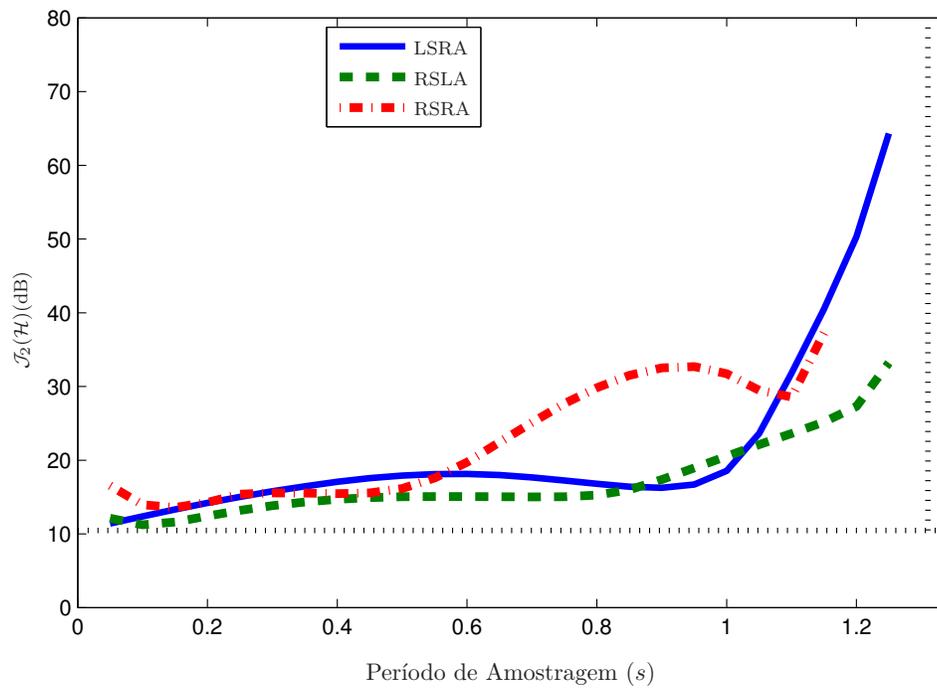


Figura 5 – solução CCL para LSRA, RSLA e RSRA.

5 Extensões e Problemas Relacionados

Neste capítulo, iremos discutir dois problemas de controle que estão associados com as técnicas de projetos apresentadas neste trabalho. Primeiro, apresentamos um procedimento de projeto para um controlador amostrado que é robusto com respeito ao período de amostragem. Depois, tratamos do problema de realimentação de saída estática, que é um caso particular do problema RSRA.

5.1 Controle Amostrado Robusto

Sistemas amostrados podem estar inseridos em um ambiente em rede, o que naturalmente causa flutuação na taxa de dados, isto é, o período de amostragem para o controlador pode ser incerto e até mesmo variante no tempo. Desta forma, nosso principal objetivo nesta seção é mostrar como projetar um controlador que seja robusto a variações no período de amostragem. Vamos assumir que, se $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a sequência de instantes de amostragem, então existem um limite superior e inferior para o período de amostragem, isto é, $\underline{h} \leq t_{k+1} - t_k \leq \bar{h}$ é verificado para todo $k \in \mathbb{N}$, para alguns $\underline{h}, \bar{h} \in \mathbb{R}_+^*$. Observe que não estamos impondo que o tempo decorrido entre duas amostragens é sempre o mesmo, ou seja, $h_k = t_{k+1} - t_k$ pode ser variante no tempo. Tipicamente, \underline{h} modela as restrições de comunicação existentes na rede e \bar{h} impõe uma qualidade de serviço desejada. Para simplicidade, a notação $\mathbb{H} \triangleq [\underline{h}, \bar{h}]$ será utilizada ao longo desta seção.

Está claro que, numa primeira abordagem ao projeto de um controlador robusto ótimo pode-se resolver (4.23), impondo que (4.18) deve valer para todo $h \in \mathbb{H}$. Esta formulação, entretanto, não pode ser resolvida numericamente. Ainda numa proposta ingênua, podemos definir um conjunto $\Omega \triangleq \{h_0, \dots, h_{n_\Omega}\} \subset \mathbb{H}$ tal que a validação de (4.18) para todo $h \in \Omega$ garante que (4.18) também vale para todo $h \in \mathbb{H}$. A maneira mais simples de encontrar tal Ω é aproximar \mathbb{H} por um *grid* igualmente espaçado com um número suficientemente grande de períodos de amostragem.

Um ponto negativo desta abordagem é a necessidade que Ω seja muito grande, exigindo a solução de um problema de otimização com muitas restrições, sendo que várias delas podem não ser necessárias. Visto isso, vamos seguir o método apresentado em (SOUZA, 2015) para construir o conjunto Ω de forma incremental, resultando em um conjunto muito menor quando comparado às ideias anteriores. Seguindo o procedimento descrito no Algoritmo 2, produzimos uma sequência crescente de limitantes superiores para o custo garantido $(\mu_l)_{l \in \mathbb{N}}$.

Ainda, sempre que (4.17)-(4.19) forem factíveis, estaremos convergindo para seu custo ótimo. Desta forma, o procedimento tende a encontrar uma solução subótima robusta ao período de amostragem.

Nota 5.1. *Observe que no passo 2 do algoritmo, precisamos encontrar a solução de (4.23). Esta solução está sujeita às mesmas dificuldades apresentadas anteriormente sendo necessário utilizar artifícios, como as técnicas da Seção 4.4, para contorná-las.*

Nota 5.2. *Técnicas de otimização semi-infinita também podem ser aplicadas à este problema, um estudo mais completo sobre o assunto pode ser encontrado em (HETTICH; KORTANEK, 1993; LÓPEZ; STILL, 2007)*

Algoritmo 2: Projeto de Controlador Robusto

Dados: Intervalo $\mathbb{H} = [\underline{h}, \bar{h}]$, sistema \mathcal{S}

Resultado: Custo \mathcal{H}_2 garantido μ^* ; ganhos do controlador robusto

1. Inicialize: $\ell \leftarrow 0$, $\Omega \leftarrow \{\bar{h}\}$;

2. Otimização: determine uma solução para o problema de otimização

$$\mu_\ell = \inf_{R, W \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}, M \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}} \left\{ \text{tr}(M) : (4.17) - (4.19), \forall h \in \Omega \right\}.$$

Se nenhuma solução for encontrada, o método não consegue encontrar um controlador robusto para todo $h \in \mathbb{H}$; **pare**;

3. Incrementando Ω : usando uma busca linear, calcule

$$h_\ell \in \arg \min_{h \in \mathbb{H}} \min \sigma \left(\begin{bmatrix} W_\ell & \star \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_h \\ \mathcal{C}_h \end{bmatrix} R_\ell \begin{bmatrix} \mathcal{A}_h \\ \mathcal{C}_h \end{bmatrix}^T \right)$$

Se o mínimo for positivo, **pare**; os ganhos encontrados garantem a estabilidade para todo $h \in \mathbb{H}$;

4. Passo de atualização: $\ell \leftarrow \ell + 1$ e $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{h_\ell\}$; volte ao passo 2;

5.2 Controle Amostrado por Realimentação Estática de Saída

Outro importante problema de controle amostrado consiste em encontrar $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ tal que a entrada de controle constante por partes

$$u(t) = Ky(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (5.1)$$

estabilize o sistema linear \mathcal{S} e forneça um desempenho \mathcal{H}_2 garantido para o sistema em malha fechada. É importante lembrar que este controle ótimo é desafiador mesmo no caso clássico e irrestrito (SYRMOS *et al.*, 1997).

Como antes, nossa abordagem foca em modelar o sistema em malha fechada como um sistema com saltos. De fato, se escolhermos o estado aumentado $\xi(t) = [x(t)' \ u(t)']'$ e assumirmos $F = 0$, podemos modelar o sistema em malha fechada como um sistema com saltos \mathcal{H} com matrizes da realização dadas por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = [C \ D], \mathcal{K} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ KC & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Portanto, este problema de controle está contido no ambiente teórico deste trabalho e os mesmos métodos computacionais apresentados podem ser aplicados para resolver (4.23) com K como a principal variável de interesse.

5.3 Exemplos Numéricos

5.3.1 Controle Amostrado Robusto

Neste exemplo, consideramos a planta \mathcal{S} definida como em (4.11) com matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}', F = 1, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Nosso objetivo é projetar um controlador LSRA robusto cujo período de amostragem é desconhecido e possivelmente variante no tempo; o conjunto admissível para o período de amostragem é $\mathbb{H} = [400, 700]$ ms. Como no caso periódico, escolhemos $L = L_*$ de acordo com (2.81), obtendo

$$L_* = - \begin{bmatrix} 1,6569 \\ 2,3726 \end{bmatrix}.$$

Usando o Algoritmo 2 com o procedimento K-W descrito anteriormente, projetamos o ganho de realimentação robusto

$$K_* = [-7,1544 \quad -1,5760],$$

que fornece o custo garantido associado $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) = 19,7583$. Estes resultados foram validados por 2000 simulações temporais, onde os intervalos entre amostras $t_{k+1} - t_k \in \mathbb{H}, k \in \mathbb{N}$ foram aleatoriamente gerados, seguindo uma distribuição uniforme. Estas simulações forneceram o custo \mathcal{H}_2 médio 14,6653 e o pior caso de 19,4394. Quando comparando estes resultados com os apresentados em (SOUZA; GEROMEL, 2014), nosso custo garantido é 10,5% menor e o custo médio 5,5% menor.

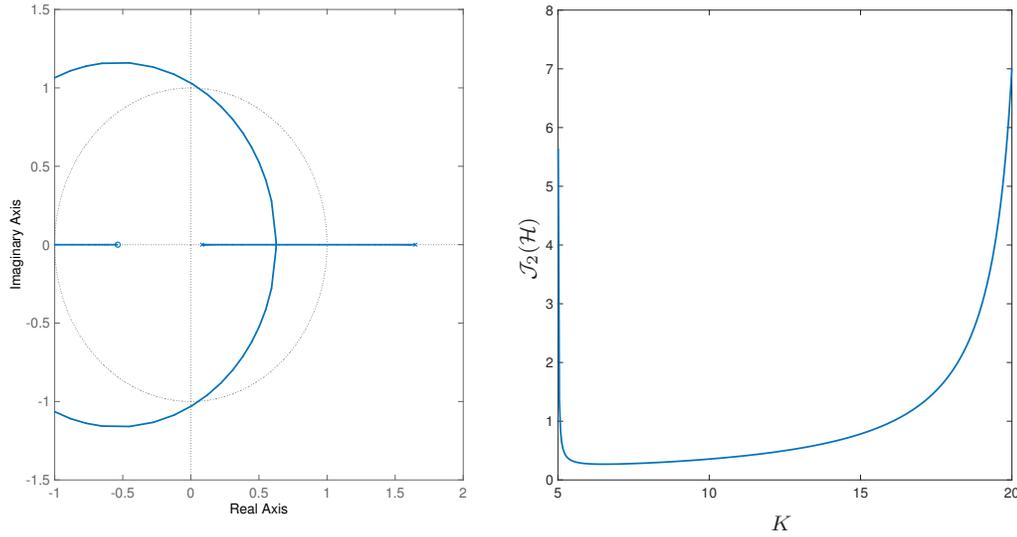


Figura 6 – Lugar das raízes e custo quadrático em relação a $K > 0$.

5.3.2 Controle por Realimentação Estática de Saída Amostrada

Neste exemplo, vamos considerar novamente a planta \mathcal{S} definida em (4.11) com as matrizes definidas acima, exceto por F , que agora assume $F = 0$. Nosso principal objetivo é projetar o escalar $K > 0$ tal que a lei de controle de realimentação estática

$$u(t) = -Ky(t_k) = -KGx(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N},$$

estabiliza o sistema em malha fechada e otimiza seu desempenho \mathcal{H}_2 . Assumimos para este projeto que $h = 0,5$ s. Aplicando os métodos de projeto apresentados neste trabalho, utilizando a abordagem por CCL, obtemos o ganho $K_* = 6,5110$, que fornece o custo quadrático $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) = 0,2683$. Agora, para validar nossos resultados, vamos estudar um gráfico de lugar das raízes (metade esquerda da Figura 6) do sistema discretizado, do qual podemos concluir que o intervalo de valores estabilizantes para K é $K \in (5, 20.8)$, aproximadamente. Agora, para este intervalo de K , vamos calcular o custo quadrático associado e obter o gráfico da direita da Figura 6. Esta análise nos permite verificar que o ganho obtido neste exemplo é ótimo.

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo aplicamos as técnicas apresentadas neste trabalho a outros problemas. Inicialmente, relaxamos a premissa de termos um período de amostragem preciso e conhecido, supondo um projeto robusto cujo período de amostragem está somente limitado a um

intervalo e pode ser, inclusive, variante no tempo. Comparamos o controlador proposto ao apresentado em (SOUZA, 2015) obtendo uma grande melhora no desempenho.

Além disso, resolvemos também o desafiante problema de realimentação estática de saída amostrado que embora possa ser facilmente modelado como um sistema discreto no tempo, não possui um método para se obter uma solução ótima geral. Para o sistema de uma entrada e uma saída apresentado no exemplo, o método conseguiu obter o controlador ótimo.

6 Conclusão

Neste trabalho revisamos os resultados existentes na literatura para sistemas LTI a tempo contínuo e discreto, assim como técnicas de controle para estes sistemas. Aplicamos estes resultados aos sistemas amostrados, compilando o estado da arte em síntese de controladores para sistemas amostrados. A seguir, apresentamos os sistemas lineares com saltos, juntamente com as suas condições, necessárias e suficientes, de estabilidade e de análise de desempenho. Usamos essa classe de sistemas para modelar o sistema de controle amostrado em malha fechada e buscamos reformular as condições de análise para a síntese de controladores. No entanto, estas condições se tornam não-convexas neste problema de projeto. Utilizando técnicas iterativas, obtivemos algoritmos computacionalmente viáveis para a síntese de controladores subótimos para realimentação dinâmica de saída em sistemas amostrados.

Através de exemplos comparamos os resultados obtidos às técnicas já existentes na literatura e fomos capazes de obter controladores para a configuração LSRA melhores que os controladores baseados em discretização equivalente apresentados em (SOUZA, 2015) e na Seção 3.6. Para a configuração RSRA, obtivemos controladores com desempenho semelhante aos obtidos pelas técnicas existentes na literatura; é importante ressaltar que os nossos resultados permitem o projeto de controladores em casos em que as técnicas atuais não conseguem. Além disso, propusemos uma solução para a configuração RSLA, até então não abordada na literatura. Ainda, utilizamos um único algoritmo para a síntese dos três controladores, alterando apenas a estrutura das matrizes do modelo, enquanto (SOUZA, 2015) utiliza métodos distintos para cada configuração.

Também estendemos os resultados para projetar um controlador robusto ao período de amostragem e um controlador amostrado via realimentação estática de saída. Para o exemplo apresentado, nosso controlador robusto supera os resultados de (SOUZA, 2015). Em outro exemplo, com apenas uma entrada e uma saída, recuperamos, com as nossas técnicas, o controlador ótimo para realimentação estática de saída. O controlador estático de saída também utiliza o mesmo algoritmo dos controladores dinâmicos, alterando-se somente o modelo. Este mesmo procedimento pode ser realizado para outros tipos de controladores que possam ser modelados como sistemas com saltos. Finalmente, vale salientar que os métodos apresentados possuem custos computacionais relativamente maiores quando comparados às técnicas anteriores.

Uma sequência natural para esse trabalho seria considerar também um desempenho \mathcal{H}_∞ . Poderiam ser tratados problemas de controle e de filtragem amostrados. Outras exten-

sões dos métodos desenvolvidos aqui para classes de problemas mais gerais também podem ser investigadas.

Referências

- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Mineola, NY: Dover Publications, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 13, 17, 36 e 54.
- BLONDEL, V.; TSITSIKLIS, J. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, v. 35, n. 6, p. 2118–2127, nov. 1997. Citado na página 13.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 53.
- BRIAT, C. Convex conditions for robust stability analysis and stabilization of linear aperiodic impulsive and sampled-data systems under dwell-time constraints. *Automatica*, v. 49, n. 11, p. 3449–3457, Nov 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.
- BRIAT, C.; SEURET, A. A looped-functional approach for robust stability analysis of linear impulsive systems. *Systems & Control Letters*, v. 61, p. 980–988, 2012. Citado na página 79.
- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. New York, NY: Oxford University Press, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 12, 17, 19, 21, 22 e 23.
- CHEN, T.; FRANCIS, B. A. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. London, UK: Springer-Verlag, 1995. Citado na página 13.
- COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; LOCATELLI, A. *Control Theory and Design: An RH_2 / RH_∞ Viewpoint*. London, UK: Academic Press, 1997. Citado na página 13.
- El Ghaoui, L.; OUSTRY, F.; AITRAMI, M. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, v. 42, n. 8, p. 1171–1176, August 1997. Citado na página 59.
- FADALI, M. S.; VISIOLI, A. *Digital Control Engineering: Analysis and Design*. Burlington, MA: Academic Press, 2009. Citado na página 13.
- FU, M. Pole placement via static output feedback is np-hard. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 5, p. 855–857, May 2004. ISSN 0018-9286. Citado na página 13.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 2011. Citado na página 17.
- GEROMEL, J. C.; SOUZA, M. On an LMI approach to optimal sampled-data state feedback control design. *International Journal of Control*, v. 88, n. 11, p. 2369–2379, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 79.

- GORSKI, J.; PFEUFFER, F.; KLAMROTH, K. Biconvex sets and optimization with biconvex functions: a survey and extensions. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 66, n. 3, p. 373–407, Dec 2007. ISSN 1432-5217. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00186-007-0161-1>>. Citado na página 58.
- HARA, S.; FUJIOKA, H.; KABAMBA, P. T. A Hybrid State-Space Approach to Sampled-data Feedback Control. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 205–206, p. 675–712, July 1994. Citado na página 13.
- HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. *Proc. of the IEEE — Special Issue on Technology of Networked Control Systems*, v. 95, n. 1, p. 138–162, 2007. Citado na página 13.
- HETTICH, R.; KORTANEK, K. Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications. *SIAM Review*, v. 35, n. 3, p. 380–429, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1035089>>. Citado na página 65.
- ICHICAWA, A.; KATAYAMA, H. *Linear Time Varying Systems and Sampled-data Systems*. London, UK: Springer, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 13, 20, 75, 78 e 79.
- LEIGH, J. *Control Theory*. 2nd edition. ed. London, UK: The Institution of Electrical Engineers, 2004. Citado na página 12.
- LÓPEZ, M.; STILL, G. Semi-infinite programming. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 180, n. 2, p. 491–518, 2007. Citado na página 65.
- LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1979. Citado na página 19.
- MATVEEV, A. S.; SAVKIN, A. V. *Estimation and Control over Communication Networks*. Boston, MA: Birkhäuser, 2009. Citado na página 13.
- RUGH, W. J. *Linear System Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996. (Information and System Sciences Series). Citado 2 vezes nas páginas 20 e 76.
- SERON, M. M.; BRASLAVSKY, J. H.; GOODWIN, G. C. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. London, UK.: Springer-Verlag, 1997. Citado na página 13.
- SHEN, X.; STEVEN, D.; UDELL, M.; GU, Y.; BOYD, S. *Disciplined Multi-Convex Programming*. 2016. ArXiv:1609.03285v2. Citado na página 58.
- SOUZA, M. *Contribuição à Teoria de Sistemas Amostrados*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de Campinas, 2015. Citado 23 vezes nas páginas 13, 15, 17, 25, 28, 29, 33, 34, 40, 41, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 57, 60, 61, 64, 68 e 69.
- SOUZA, M.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Self-triggered linear quadratic networked control. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 35, n. 5, p. 524–538, Sep/Oct 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 61.

- SOUZA, M.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 Sampled-Data Filtering of Linear Systems. *IEEE Trans. on Sign. Proc.*, v. 62, n. 18, p. 4839–4846, Sep 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 62.
- SOUZA, M.; FIORAVANTI, A. R.; GONÇALVES, A. P. C. \mathcal{H}_∞ Analysis of Linear Systems with Jumps: Applications to Sampled-Data Control. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, n. 30, p. 138–143, 2016. Citado na página 79.
- SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 dynamic output feedback for local sensor – remote actuator networks. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2014. Doi: 10.1093/imamci/dnu036. Citado 7 vezes nas páginas 13, 14, 15, 57, 60, 61 e 66.
- SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. On a Convex Characterisation of Stability and Performance for Hybrid Linear Systems. In: *Proceedings of the IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control*. Osaka, Japan: [s.n.], 2015. p. 6623–6628. Citado 3 vezes nas páginas 13, 53 e 79.
- SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback — A survey. *Automatica*, v. 33, n. 2, p. 125–137, February 1997. Citado 3 vezes nas páginas 13, 31 e 65.
- WANG, F.-Y.; LIU, D. *Networked Control Systems: Theory and Applications*. London, UK: Springer-Verlag, 2008. Citado na página 13.
- WARGA, J. Minimizing certain convex functions. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 11, n. 3, p. 588–593, set. 1963. Citado na página 58.
- ZHANG, L.; GAO, H.; KAYNAK, O. Network-induced constraints in networked control systems – a survey. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 9, n. 1, p. 403–416, Feb 2013. Citado na página 13.

Apêndices

APÊNDICE A – Prova do Teorema 4.1

A.1 Resultados Preliminares

Para provar o teorema, precisamos de alguns resultados preliminares.

A.1.1 Dinâmica de Estado

Assim como em qualquer sistema linear, é suficiente encontrar uma *matriz de transição de estados* associada a (4.1) para descrever completamente seu comportamento. Como apresentado em (ICHICAWA; KATAYAMA, 2001), $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ é uma matriz de transição de estado associada a (4.1) se, e somente se, ϕ satisfizer

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, s) = \mathcal{A} \phi(t, s), \quad \forall t \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.1})$$

$$\phi(t_k, s) = \mathcal{K} \phi(t_k^-, s), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.2})$$

$$\phi(t, t) = I. \quad (\text{A.3})$$

Neste caso, segue que qualquer trajetória $\xi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$ de \mathcal{H} satisfaz $\xi(t) = \phi(t, s)\xi(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{T}$. Além disso, outras propriedades como $\phi(t_k, t_k^-) = \mathcal{K}$ e $\phi(t, t_k^-) = \phi(t, t_k)\mathcal{K}$, para todo $t \geq t_k$, $k \in \mathbb{N}$, podem ser verificadas. No caso particular, mas importante, no qual a sequência de instantes de salto é tal que $t_{k+1} - t_k = h > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a matriz de transição de estados também satisfaz $\phi(t+h, s+h) = \phi(t, s)$, para todo $t, s \in \mathbb{T}$; veja (ICHICAWA; KATAYAMA, 2001).

A.1.2 Estabilidade

Lema A.1. *O sistema linear com saltos \mathcal{H} , com $w \equiv 0$, é uniformemente exponencialmente estável se, e somente se, existirem constantes finitas e positivas κ e α tais que*

$$\|\phi(t, s)\| \leq \kappa e^{-\alpha(t-s)} \quad (\text{A.4})$$

para todo $t, s \in \mathbb{T}$ tais que $t \geq s$.

Demonstração. Primeiro, assuma que existam escalares positivos κ e α tais que (A.4) vale. Então, para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\xi(t_0) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, qualquer trajetória de (4.1) satisfaz

$$\|\xi(t)\| \leq \|\phi(t, t_0)\| \|\xi(t_0)\| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, \mathcal{H} é uniformemente exponencialmente estável. Pelo outro lado, assuma que \mathcal{H} é uniformemente exponencialmente estável. Então, existem constantes positivas κ e α tais que (2.7) vale para qualquer t_0 e $\xi(t_0)$. Dado s e $t \geq s$ em \mathbb{T} arbitrários, a definição de norma induzida de matrizes implica que

$$\|\phi(t, s)\| = \max_{\xi(s) \neq 0} \frac{\|\phi(t, s)\xi(s)\|}{\|\xi(s)\|} = \max_{\xi(s) \neq 0} \frac{\|\xi(t)\|}{\|\xi(s)\|}. \quad (\text{A.6})$$

Pegando $t_0 = s$, podemos usar (2.7) para concluir que

$$\|\phi(t, t_0)\| \leq \max_{\xi(t_0) \neq 0} \frac{\kappa e^{-\alpha(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|}{\|\xi(t_0)\|} \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (\text{A.7})$$

que é (A.4). A prova está completa. \square

A.2 Prova do Teorema 4.1

Demonstração. Para provar a equivalência, precisamos definir a função $X : [0, h] \rightarrow \mathbb{S}_+^{n\xi}$, solução de

$$\frac{d}{dt}X(t) + \mathcal{A}^T X(t) + X(t)\mathcal{A} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 0, \quad (\text{A.8})$$

para alguma condição inicial $X(0) \in \mathbb{S}_+^{n\xi}$. Esta solução, que sempre existe e é única (RUGH, 1996), será utilizada para definir a função quadrática

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \xi(t)^T P(t) \xi(t), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde $P : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^{n\xi}$ é tal que $P(t) = X(t - t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$; tal função é uma *extensão periódica* de X e, portanto, $P(t_k) = X(0)$ e $P(t_{k+1}^-) = X(h)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Vamos inicialmente assumir que (ii) vale e obter a solução de (A.8) com $X(0) = S$, isto é,

$$X(t) = e^{-\mathcal{A}^T t} S e^{-\mathcal{A} t} - \int_0^t e^{\mathcal{A}^T(\tau-t)} \mathcal{C}^T \mathcal{C} e^{\mathcal{A}(\tau-t)} d\tau, \quad (\text{A.10})$$

para $t \in [0, h]$. De (A.10) e (4.5), concluimos que

$$\mathcal{A}_h^T X(h) \mathcal{A}_h = S - \mathcal{C}_h^T \mathcal{C}_h > \mathcal{A}_h^T \mathcal{K}^T S \mathcal{K} \mathcal{A}_h, \quad (\text{A.11})$$

o que implica que $X(h) > \mathcal{K}^T S \mathcal{K} \geq 0$ para esta condição inicial. Logo,

$$X(t) = e^{(h-t)\mathcal{A}^T} X(h) e^{(h-t)\mathcal{A}} + \int_t^h e^{(\tau-t)\mathcal{A}^T} \mathcal{C}^T \mathcal{C} e^{(\tau-t)\mathcal{A}} d\tau \geq e^{(h-t)\mathcal{A}^T} X(h) e^{(h-t)\mathcal{A}} > 0, \quad (\text{A.12})$$

vale para todo $t \in [0, h]$. Note ainda que, com esta solução de X , a função quadrática v definida em (A.9) é positiva para todo t . Ainda, (4.5) também implica que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_h^T \mathcal{K}^T S \mathcal{K} \mathcal{A}_h \leq e^{-2\alpha h} S. \quad (\text{A.13})$$

Esta inequação, com (4.1) e (A.9), implica que

$$v(t_{k+1}) \leq e^{-2\alpha(t_{k+1}-t_k)} v(t_k) \quad (\text{A.14})$$

vale para todo $k \in \mathbb{N}$. Ainda, pegue qualquer $c_0 \geq 1$ que satisfaça

$$e^{(\mathcal{A}+\alpha I)^T t} X(t) e^{(\mathcal{A}+\alpha I)t} \leq c_0 X(0), \quad \forall t \in [0, h], \quad (\text{A.15})$$

o qual sempre existe, visto que a solução definida positiva X existe e é limitada. Usando esta inequação, podemos concluir que

$$\begin{aligned} v(t) &= \xi(t)^T P(t) \xi(t) \\ &= \xi(t_k)^T e^{\mathcal{A}^T(t-t_k)} X(t-t_k) e^{\mathcal{A}(t-t_k)} \xi(t_k) \\ &\leq c_0 e^{-2\alpha(t-t_k)} \xi(t_k)^T P(t_k) \xi(t_k) \\ &= c_0 e^{-2\alpha(t-t_k)} v(t_k) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

vale para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Como $P(t_k^-) = X(h) > \mathcal{K}^T X(0) \mathcal{K} = P(t_k)$, também temos que $v(t_k) < v(t_k^-)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos aplicar as inequações acima recursivamente para concluir que

$$v(t) \leq c_0 e^{-2\alpha t} v(0) \quad (\text{A.17})$$

é verificado para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Note que existem constantes positivas $\beta_1, \beta_2 > 0$ tais que $\beta_1 \|\xi(t)\|^2 \leq v(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ e $v(0) \leq \beta_2 \|\xi(0)\|^2$, fica claro que (A.17) implica

$$\|\xi(t)\| \leq \kappa e^{-\alpha t} \|\xi(0)\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A.18})$$

é verificado para $\kappa := \sqrt{c_0 \beta_2 / \beta_1}$; \mathcal{H} é exponencialmente estável.

Agora, para mostrar que existe $\mu > 0$ tal que (4.4) é verificado, utilizamos o fato que P satisfaz (A.8) e concluímos

$$\frac{d}{dt} v(t) = \xi(t)^T \left(\dot{P}(t) + \mathcal{A}^T P(t) + P(t) \mathcal{A} \right) \xi(t) = -\|\zeta(t)\|^2 \quad (\text{A.19})$$

vale para todo $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. A simples integração de (A.19) implica

$$v(t_k) - v(t_{k+1}^-) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\zeta(t)\|^2 dt, \quad (\text{A.20})$$

por v ser descontínua somente no limite superior do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Agora, lembrando que $v(t_k) < v(t_k^-)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$v(t_k) - v(t_{k+1}) > \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\zeta(t)\|^2 dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.21})$$

Portanto, como \mathcal{H} é exponencialmente estável, segue que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\tau} \|\zeta(t)\|^2 dt < v(t_0). \quad (\text{A.22})$$

Como $\tau \mapsto \int_{t_0}^{\tau} \|\zeta(t)\|^2 dt$ é limitada e não-decrescente, o limite indicado acima existe. Então, (4.4) é verificado para qualquer $\mu \geq v(t_0) = \xi(t_0)^T S \xi(t_0) = \xi(t_0^-)^T \mathcal{K}^T S \mathcal{K} \xi(t_0^-)$, implicando que (i) vale.

Pelo outro lado, vamos assumir que (i) vale. Seguindo (ICHICAWA; KATAYAMA, 2001), vamos definir $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^{n_\xi}$ como

$$P(t) = \int_t^\infty \phi(r, t)^T \mathcal{C}^T \mathcal{C} \phi(r, t) dr + \epsilon \sum_{t_\ell^- \geq t} \phi(t_\ell^-, t)^T \phi(t_\ell^-, t), \quad (\text{A.23})$$

para algum ϵ positivo; tal função é limitada e bem definida pois \mathcal{H} é exponencialmente estável, pelo Lema A.1. Note que podemos computar a derivada de P em $t \in (t_k, t_{k+1})$ e obter

$$\dot{P}(t) = -\mathcal{C}^T \mathcal{C} - \mathcal{A}^T P(t) - P(t) \mathcal{A}, \quad (\text{A.24})$$

o que implica que P satisfaz (A.8). Além disto, pode-se mostrar (ICHICAWA; KATAYAMA, 2001) que P é periódico com período $h > 0$, isto é, $P(t+h) = P(t)$ vale para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Então, $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^{n_\xi}$ é uma extensão periódica da solução $X : [0, h] \rightarrow \mathbb{S}^{n_\xi}$ de (A.8). Adicionalmente, é importante ver que outra propriedade da matriz de transição de estados nos permite concluir que

$$\begin{aligned} P(t_k^-) &= \int_{t_k^-}^\infty \phi(r, t_k^-)^T \mathcal{C}^T \mathcal{C} \phi(r, t_k^-) dr + \epsilon \sum_{t_\ell^- \geq t_k^-} \phi(t_\ell^-, t_k^-)^T \phi(t_\ell^-, t_k^-) \\ &= \mathcal{K}^T \left[\int_{t_k}^\infty \phi(r, t_k)^T \mathcal{C}^T \mathcal{C} \phi(r, t_k) dr + \epsilon \sum_{t_\ell^- \geq t_k} \phi(t_\ell^-, t_k)^T \phi(t_\ell^-, t_k) \right] \mathcal{K} + \\ &\quad + \epsilon \phi(t_k^-, t_k^-)^T \phi(t_k^-, t_k^-) \\ &= \mathcal{K}^T P(t_k) \mathcal{K} + \epsilon I > \mathcal{K}^T P(t_k) \mathcal{K} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

vale para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto implica, utilizando argumentos similares aos em (A.12), que $P(t) \in \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Pegando, como sugerido pelo argumento anterior, $X : [0, h] \rightarrow \mathbb{S}_+^{n_\xi}$ como $X(t) = P(t - t_0)$ para todo $t \in [0, h]$ e $X(h) = P(t_1^-)$, segue de (A.25) que

$X(h) > \mathcal{K}^T X(0) \mathcal{K}$. Considerando esta desigualdade e lembrando que a solução para (A.8) verifica

$$\mathcal{A}_h^T X(h) \mathcal{A}_h = X(0) - \mathcal{C}_h^T \mathcal{C}_h, \quad (\text{A.26})$$

concluimos que (4.5) vale para $S = X(0) > 0$ e a prova está completa. \square

Nota A.1. *Aqui, apresentamos uma prova alternativa à apresentada em (GEROMEL; SOUZA, 2015; SOUZA; GEROMEL, 2015); uma versão preliminar foi apresentada em (SOUZA et al., 2016); uma outra abordagem para a demonstração de resultados similares pode ser vista em (ICHICAWA; KATAYAMA, 2001; BRIAT; SEURET, 2012).*