

---

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computacional  
Departamento de Engenharia de Sistemas

---



Mayk Vieira Coelho

**Método de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Fluxo de  
Potência Ótimo com Restrições de Reserva de Potência  
Operacional**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Engenharia de Computação.

Orientador: Secundino Soares Filho

Co-orientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Campinas, SP  
2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C65m Mayk Vieira Coelho  
Métodos de pontos interiores aplicados ao  
problema de fluxo de potência ótimo com  
restrições de reserva de potência operacional /  
Mayk Vieira Coelho. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientadores: Secundino Soares Filho, Aurelio  
Ribeiro Leite de Oliveira.

Dissertação de Mestrado - Universidade  
Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia  
Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de Potência. 2. Métodos de Pontos  
Interiores. 3. Programação Linear. 4. Segurança.  
5. Eletricidade. I. Soares Filho, Secundino. II.  
Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de. III. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia  
Elétrica e de Computação. IV. Título.

**Título em Inglês:** *Interior point methods applied to the problem of power flow optimum with restrictions reserve operational power*

**Palavras-chave em Inglês:** *Power System, Interior point methods, Linear Program, Security, Electricity*

**Área de concentração:** Energia Elétrica

**Titulação:** Mestre em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:** Marcius Fabius Henrique de Carvalho, Anésio dos Santos Júnior

**Data da defesa:** 29/08/2008

**Programa de Pós Graduação:** Engenharia Elétrica

**COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO**

**Candidato:** Mayk Vieira Coelho

**Data da Defesa:** 29 de agosto de 2008

**Título da Tese:** "Métodos de Pontos Internos Aplicados ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Restrições de Reserva de Potência Operacional"

Prof. Dr. Secundino Soares Filho (Presidente):



Dr. Marcio Fabius Henrique de Carvalho:



Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior:



# Resumo

Na eventualidade de uma contingência, com a perda de unidades de geração em um sistema de potência, podem ser verificados desequilíbrios no conjunto carga-geração. Nestas situações torna-se necessário o emprego de medidas corretivas que eliminem estas violações operativas, reconduzindo o sistema a um ponto de operação seguro. Visando obter este nível de segurança, o método de pontos interiores primal-dual é desenvolvido para o problema de minimização das perdas na geração e transmissão do fluxo de potência ótimo CC de um sistema de potência hidrotérmico considerando restrições de reserva de potência operacional. Em outras palavras, o serviço anciliar de reserva será provido por geradores conectados à rede elétrica e sincronizados com o sistema, com objetivo de disponibilizar uma quantidade extra de potência ativa, que pode ser imediatamente utilizada durante uma situação de contingência para restabelecer o equilíbrio no conjunto carga-geração. É feita também uma comparação com o modelo sem tais restrições de reserva.

**Palavras-chave:** Sistemas de Potência, Método de Pontos Interiores, Reserva de Potência

# Abstract

In the eventuality of a contingency, with the loss of units of generation in a power system, unbalances can be verified in the group load-generation. In such situations, corrective measures that eliminate these operative violations are necessary in order to lead the system to a safe operation point. Seeking to obtain this level of safety, the primal-dual interior point method is developed for the problem of minimization of the losses in the generation and transmission DC power flow of a hydrotermic power system considering operational reserve restrictions. In other words, the service reserve anciliar will be provided by connected generators to the electric network and synchronized with the system, with the goal of making available an extra amount of active power, that can be immediately used during a contingency situation to reestablish the balance in the group load-generation. A comparison with the model without such reserve restrictions is also performed.

**Keywords:** Power System, Interior Points Methods, Power Reserve

# Agradecimentos

A Deus por tudo.

Ao Professor Secundino Soares Filho pela paciência em esclarecer conceitos fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao Professor e amigo Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira pelo apoio conceitual e incentivos tremendos em momentos difíceis ao longo desses dois anos de caminhada, que sem os quais com certeza este trabalho não teria se realizado.

A meus pais queridos Neusa e Delzuito pelo carinho que sempre tiveram, por compreenderem minhas faltas em algumas datas especiais, ou mesmo pelas vezes que me esqueci de ligar, por estar concentrado neste trabalho. Agradeço também pelo apoio e palavras de incentivo, por deixarem de lado alguns de seus sonhos para me ajudar a buscar os meus e pelas orações e conselhos.

A minha irmãzinha querida pelo carinho e pelos momentos de bate-papo.

A minha amiga-irmã Silvia pelo apoio, pelas correções e dicas, pelos cafés para me deixar acordado, pela companhia, pelos momentos engraçados, pelas discussões e conselhos que sempre me enriquecem e pela paciência em vários e vários momentos quando eu insistia em mostrar meus resultados numéricos.

Aos amigos do COSE que de uma forma ou de outra contribuíram com esse processo de aprendizagem.

Aos Professores da FEEC pela paciência e disposição em tirar dúvidas.

Ao café, um VIVA ao café.

Aos amigos não citados, mas que estiveram presentes em momentos diversos, sejam eles em churrascos, sejam no futebol, no vôlei ou nas disputas no video-game, contribuindo assim para meu descanso e entretenimento.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*A meus pais Delzuito e Neusa*

*"Se Deus houvesse isentado do trabalho do corpo o homem, seus membros se teriam atrofiado; se o houvesse isentado do trabalho da inteligência, seu espírito teria permanecido na infância, no estado de instinto animal. Por isso é que Ihe fez do trabalho uma necessidade e Ihe disse:*

*Procura e acharás; trabalha e produzirás.*

*Dessa maneira serás filho das tuas obras, terás delas o mérito e serás recompensado de acordo com o que hajas feito."*

*Allan Kardec*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estrutura do trabalho . . . . .	1
<b>2 Programação Matemática</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução . . . . .	3
2.2 Programação Linear . . . . .	3
2.3 Programação Quadrática . . . . .	6
2.3.1 Programação Quadrática Convexa . . . . .	7
2.3.2 Programação Quadrática Convexa com Variáveis Canalizadas . . . . .	9
<b>3 Método de Pontos Interiores Primal-Dual</b>	<b>11</b>
3.1 Introdução . . . . .	11
3.2 Método Primal-Dual Afim Escala . . . . .	11
3.3 Método Primal-Dual Seguidor de Caminhos . . . . .	12
3.4 Direções de Newton . . . . .	13
3.5 Problemas Quadráticos com Variáveis Canalizadas . . . . .	14
3.6 Critério de Convergência e Ponto Inicial . . . . .	15
3.7 Resumo do Método . . . . .	17
<b>4 Fluxo de Potência Ótimo (CC)</b>	<b>18</b>
4.1 Introdução . . . . .	18
4.2 Modelando o Problema . . . . .	18
<b>5 Fluxo de Potência Ótimo (CC) com Reserva de Potência Operacional</b>	<b>24</b>
5.1 Introdução . . . . .	24
5.2 Formulação Matemática . . . . .	25
5.3 Aplicando o Método de Pontos Interiores Primal-Dual ao Fluxo de Potência Ótimo Com Reserva de Potência Operacional . . . . .	26

---

<b>6</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>32</b>
6.1	Estudos de Casos . . . . .	32
6.1.1	O Sistema IEEE30 . . . . .	33
6.1.2	O Sistema IEEE118 . . . . .	40
6.1.3	Sistemas Equivalentes Sul/Sudeste/Centro-Oeste . . . . .	44
6.1.4	O Sistema BRASIL . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>51</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>O Método de Newton</b>	<b>56</b>
A.1	Introdução . . . . .	56
A.2	O Método de Newton Unidimensional . . . . .	56
A.3	O Método de Newton Multidimensional . . . . .	58
<b>B</b>	<b>Capacidades dos Sistemas Estudados</b>	<b>59</b>

# Lista de Figuras

2.1	Conjuntos convexos e não-convexos . . . . .	7
2.2	Exemplo de $f$ convexa. . . . .	8
6.1	Diagrama unifilar do Sistema IEEE30. . . . .	33
6.2	Despachos de potências sem exigência de Reserva. . . . .	34
6.3	Despachos de potências com exigência de 70MW de Reserva (a.1). . . . .	36
6.4	Despachos de potências com exigência de 70MW de Reserva (a.2). . . . .	36
6.5	IEEE30-Despacho de potência para $\Gamma_0$ . . . . .	37
6.6	IEEE30-Despachos de potência. . . . .	38
6.7	Diagrama Unifilar - IEEE 118 . . . . .	40
6.8	IEEE118-Despacho de potência para $\Gamma_0$ . . . . .	41
6.9	IEEE118 - Despachos de potência. . . . .	42
6.10	SSECO1654-Despacho de potência para $\Gamma_0$ . . . . .	44
6.11	SSECO1654 - Despachos de potência A. . . . .	45
6.12	SSECO1654 - Despachos de potência B. . . . .	46
6.13	SSECO1732-Despacho de potência para $\Gamma_0$ . . . . .	47
6.14	SSECO1732 - Despachos de potência. . . . .	48
6.15	BRASIL-Despacho de potência para $\Gamma_0$ . . . . .	49
6.16	BRASIL - Despachos de potência. . . . .	50
A.1	Ilustração do Método de Newton . . . . .	57
B.1	Capacidades - Sistemas IEEE30 e IEEE118 . . . . .	60
B.2	Capacidades - Sistema SSECO1654 . . . . .	61
B.3	Capacidades - Sistema SSECO1732 . . . . .	62
B.4	Capacidades - Sistema BRASIL . . . . .	63

# Lista de Tabelas

6.1	Sistemas Estudados . . . . .	32
6.2	Limites de geração de potência nos geradores do sistema IEEE 30 . . . . .	35
6.3	Conjuntos $\Gamma$ - IEEE 30 A . . . . .	35
6.4	Dados Obtidos 1: Testes com IEEE30 . . . . .	37
6.5	Conjuntos $\Gamma$ - IEEE 30 B . . . . .	37
6.6	Dados Obtidos 2: Testes com IEEE30 . . . . .	39
6.7	Conjuntos $\Gamma$ - IEEE 118 . . . . .	41
6.8	Dados Obtidos: Testes com IEEE118 . . . . .	43
6.9	Conjuntos $\Gamma$ - SSECO1654 . . . . .	45
6.10	Dados Obtidos: Testes com SSECO1654 . . . . .	46
6.11	Conjuntos $\Gamma$ - SSECO1732 . . . . .	47
6.12	Dados Obtidos: Testes com SSECO1732 . . . . .	48
6.13	Conjuntos $\Gamma$ - BRASIL . . . . .	49
6.14	Dados Obtidos: Testes com BRASIL . . . . .	50

# Capítulo 1

## Introdução

Desde o surgimento dos métodos de pontos interiores para programação linear, códigos computacionais baseados nessas idéias vêm se apresentando como alternativas para resolução de problemas de grande porte [1, 2, 3, 4].

Na área de sistemas de potência o advento dos métodos de pontos interiores trouxe à tona uma nova linha de pesquisa. Estes métodos são reconhecidos atualmente por sua robustez [5, 6] principalmente devido ao tratamento eficiente de desigualdades.

Neste trabalho será desenvolvido o método de pontos interiores primal-dual para o problema de minimização das perdas na geração e transmissão do fluxo de potência ótimo de um sistema de potência hidrotérmico considerando restrições de reserva de potência em corrente contínua.

A reserva de potência é feita em um subconjunto de geradores e é necessária para atender demandas imprevistas ou algumas contingências, esta reserva é provida por geradores conectados à rede elétrica e sincronizados com o sistema de potência.

### 1.1 Estrutura do trabalho

No capítulo 2 é dada uma introdução à programação matemática, que passa pela programação linear, chega à programação quadrática para enfim apresentar a programação quadrática convexa.

No capítulo 3 tem-se a formulação do método de pontos interiores primal-dual seguidor de caminhos para problemas lineares, é apresentado também um critério de convergência do método e mesmo sem a necessidade de ponto inicial factível apresenta-se ainda uma sugestão para um ponto inicial. Como o um dos objetivos deste trabalho é aplicar o método de pontos interiores primal-dual para resolução de fluxo de potência ótimo que tem como função objetivo uma função quadrática separável, o capítulo é finalizado com a formulação para problemas desta classe.

O capítulo 4 se dedica à formulação do problema de fluxo de potência ótimo (CC) aplicando o método exposto no capítulo 3.

O capítulo 5 trás enfim o principal objetivo deste trabalho que é a formulação do problema de fluxo de potência ótimo (CC) considerando restrições de reserva de potência operacional, sendo o problema resolvido através do método exibido no capítulo 3.

O capítulo 6 apresenta os resultados computacionais obtidos com a aplicação dos métodos obtidos nos capítulos 4 e 5 em sistemas IEEE e em sistemas reais brasileiros. Comparações entre os resultados

obtidos para cada sistema são realizadas.

O capítulo 7 fecha este trabalho com as conclusões gerais obtidas a partir dos testes feitos no capítulo 6.

No Apêndice A é apresentado o método de Newton para variáveis unidimensionais e em seguida é estendido o conceito para variáveis multidimensionais, este capítulo é de grande importância para a formulação dos métodos de pontos interiores.

O Apêndice B trás tabelas contendo as capacidade de produção dos geradores dos sistemas usados para testes com o modelos desenvolvidos.

# Capítulo 2

## Programação Matemática

### 2.1 Introdução

Problemas de programação aos quais eventualmente se incorporam restrições de integralidade das variáveis de decisão são os mais utilizados em planejamento. Quando do surgimento do método Simplex para programação linear, argumentava-se que modelos lineares não seriam adequados para representar problemas reais, uma vez que quase todos os problemas de interesse possuíam características não-lineares. Entretanto, a partir do método Simplex tornou-se possível resolver problemas relativamente grandes (em termos de número de variáveis e restrições). Desenvolvimentos mais recentes em programação linear permite aplicações da modelagem linear envolvendo bilhões de variáveis [2] e centenas de milhares de restrições.

Um problema real deve ser quantificado, se possível, por um modelo matemático composto por uma função objetivo e quase sempre por restrições, ou seja, matematicamente o problema deve ser formulado como se segue:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a} & x \in M \end{array}$$

onde  $f : M \rightarrow R$  e  $M$  é conhecido por região factível do problema.

O problema a ser estudado neste trabalho tem função objetivo quadrática separável e suas restrições são lineares.

Este capítulo trata brevemente de programação linear, apresentando uma visão geral sobre o assunto, a seção seguinte introduz a programação quadrática e enfim a programação quadrática convexa que é usada neste trabalho para resolução dos problemas em questão.

### 2.2 Programação Linear

Os modelos de otimização linear se caracterizam por apresentar variáveis de decisão que podem assumir quaisquer valores reais, em geral não-negativos, e funções lineares das variáveis de decisão, esta linearidade decorre de duas suposições básicas: proporcionalidade e aditividade.

Para esses modelos é possível estabelecer uma formulação matemática geral conhecida como forma padrão, qualquer problema de programação linear pode ser convenientemente modelado e co-

locado nesta forma. A partir de uma forma padrão torna-se mais fácil desenvolver e implementar métodos como o Simplex e de Pontos Interiores. A forma padrão de um problema de programação linear é a seguinte:

**Definição 2.2.1** *Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  com  $m \leq n$ . Define-se a forma padrão de um problema linear como sendo:*

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \quad (\text{Primal}) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

E o dual associado a forma padrão como sendo:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^t y \\ \text{s.a} \quad & A^t y + z = c \quad (\text{Dual}) \\ & y, z \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os problemas de programação linear em geral não estão na forma definida em 2.1 mas sim envolvendo também desigualdades, ou seja, da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & A'x' \leq b' \\ & A''x'' \geq b'' \\ & (x', x'') \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Neste ponto faz-se necessário a introdução de conceitos de variáveis de folga e de excesso e também de variáveis livres:

- **Variáveis de excesso** Suponha que o problema linear original apresenta uma restrição de desigualdade do tipo

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j \quad (2.4)$$

A restrição de desigualdade pode ser substituída por uma restrição de igualdade introduzindo-se uma variável adicional  $x_{n+1}$ , não-negativa, conhecida como variável de excesso:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j$$

Introduz-se tantas variáveis de excesso quantas forem as restrições do tipo 2.4 presentes no modelo original. Um novo conjunto de variáveis será formado pelas de decisão originais mais as de excesso.

- **Variáveis de folga** Suponha agora que o problema linear original apresenta uma restrição de desigualdade do tipo

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j \quad (2.5)$$

A restrição de desigualdade pode ser substituída por uma restrição de igualdade introduzindo-se uma variável adicional  $x_{n+1}$ , não-negativa, conhecida como variável de folga:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n + x_{n+1} = b_j$$

Do mesmo modo, introduz-se tantas variáveis de folga quantas forem as restrições do tipo 2.5 presentes no modelo original. O novo conjunto de variáveis será formado pelas variáveis de decisão originais mais as eventuais variáveis de excesso e de folga.

- **Variáveis livres** Pode ocorrer da formulação original do problema apresentar uma ou mais variáveis de decisão irrestritas ou livres, isto é, sem sinal definido. Entretanto, a forma padrão exige variáveis não-negativas. Essa dificuldade pode ser contornada reescrevendo-se cada variável livre  $x_j$  como a diferença de duas outras variáveis não-negativas,  $x_{j1}$  e  $x_{j2}$ , ou seja

$$x_j = x_{j1} - x_{j2}$$

A idéia é que qualquer quantidade (positiva, nula ou negativa) possa ser representada como a diferença de duas quantidades não-negativas. Faz-se então a substituição de cada variável livre por uma diferença de variáveis não-negativas incorporando-as á lista de variáveis de decisão do problema.

Assim, como dito antes, os problemas da forma 2.3 podem ser facilmente colocados na forma padrão acrescentando uma variável de folga  $s'$  (ou de excesso  $s''$ ) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x + 0s \\ \text{s.a} \quad & A'x' + Is' = b' \\ & A''x'' - Is'' = b'' \\ & (x', x'') \geq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Uma propriedade interessante a se destacar é que as restrições da forma  $Ax = b$  ou  $A^t y + z = c$ , chamadas regiões factíveis, descrevem um conjunto poliedral.

**Definição 2.2.2** *Define-se os seguintes conceitos:*

- Um ponto  $\bar{x}$  é dito ser uma solução factível de um problema linear se satisfaz o conjunto de restrições do problema.
- O gap de dualidade é a diferença entre os valores das funções objetivos para as formulações primal e dual do mesmo problema, ou seja:

$$\gamma = c^t x - b^t y \tag{2.7}$$

$\gamma$  é chamado de gap.

Com a definição 2.2.2 tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.1** *Sejam  $(x, y, z)$  factíveis tem-se então  $\gamma = x^t z$ .*

**Prova:**  $\gamma = c^t x - b^t y$  como  $x$  é factível  $\Rightarrow b = Ax \Rightarrow \gamma = c^t x - x^t A^t y = x^t (c - A^t y)$  como  $z$  é factível segue que  $z = c - A^t y$  logo  $\gamma = x^t z$ . ■

Tendo formulado os problemas primal e dual, pode-se agora enunciar as condições de complementaridade que terão de ser satisfeitas pelas soluções primal e dual ótimas. As condições de complementaridade podem ser enunciadas como:

**Teorema 2.2.2 (Condições de Complementaridade)** *Sejam  $x$  e  $(y, z)$  soluções factíveis para os problemas primal e dual respectivamente, uma condição necessária e suficiente para que ambas soluções sejam ótimas é que:*

*i Se  $x_j > 0$  então  $z_j = 0$ ;*

*ii Se  $z_j > 0$  então  $x_j = 0$ ;*

**Prova:** ( $\Leftarrow$ ) Se (i) e (ii) são verdadeiras, tem-se

$$z^t x = 0 \Rightarrow (c^t - y^t A)x = 0 \Rightarrow c^t x - y^t A x = 0 \xrightarrow{Ax=b} c^t x - y^t b = 0 \Rightarrow c^t x - b^t y = 0$$

$\Rightarrow y$  solução ótima do dual e  $x$  solução ótima do primal.

( $\Rightarrow$ ) Sendo agora  $x$  e  $(y, z)$  soluções ótimas dos problemas primal e dual respectivamente, tem-se

$$c^t x - b^t y = 0 \Rightarrow c^t x - y^t b = 0 \Rightarrow c^t x - y^t A x = 0 \Rightarrow (c^t - y^t A)x = 0 \Rightarrow z^t x = 0$$

mas como  $z \geq 0$  e  $x \geq 0$  temos que (i) ou (ii) deve ser satisfeita para  $j = 1 \dots m$ , ou seja,

$$x_j z_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots m.$$

■

Agora sim pode-se enunciar as condições de otimalidade de um problema linear como se segue:

**Corolário 2.2.2.1 (Condições de Otimalidade 1)** *Tem-se que  $(x, y, z)$  é solução ótima primal e dual de um problema linear se e somente se satisfazer*

- *Factibilidade Primal:*  $\begin{cases} Ax = b \\ x \leq 0 \end{cases};$
- *Factibilidade Dual:*  $\begin{cases} A^t y + z = c \\ z \leq 0 \end{cases};$
- *Complementaridade:*  $\{ X Z e = 0$

onde  $X = \text{diag}(x)$ ,  $Z = \text{diag}(z)$  e  $e = (1, \dots, 1)^t$ .

O Corolário 2.2.2.1 pode ser considerado como o resultado mais importante dessa seção, já que este define as condições para se saber se um ponto é ótimo ou não do problema.

## 2.3 Programação Quadrática

A programação quadrática é uma extensão natural da programação linear. A região factível, assim como na programação linear, é poliedral, mudando apenas a função objetivo, que deixa de ser linear e passa a assumir a forma quadrática

$$f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \quad (2.8)$$

onde  $Q$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

Deste modo, a programação linear é um caso particular da programação quadrática, considerando  $Q = 0$ .

**Definição 2.3.1** Um ponto  $x^*$  é mínimo local de  $f$  sobre  $\Omega$  se  $\exists \epsilon \geq 0 \mid f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega \cap B(x^*, \epsilon)$  onde  $B(x^*, \epsilon) = \{x, \|x - x^*\| < \epsilon\}$  é a bola aberta de centro em  $x^*$  e raio  $\epsilon$ .

Em programação quadrática geral pode ocorrer a presença de mínimos locais que não são mínimos globais, o que é um complicador quando se compara com a programação linear, em geral esses problemas são muito difíceis de se resolver, entretanto existe uma subclasse conhecida como programação quadrática convexa, para a qual é possível calcular um mínimo global de forma eficiente [7].

### 2.3.1 Programação Quadrática Convexa

Essa subclasse de programação quadrática se caracteriza pela função objetivo que vem a ser convexa.

**Definição 2.3.2** Um conjunto  $\Omega$  é convexo se o segmento de reta que liga qualquer par de pontos do conjunto está inteiramente no conjunto, ou seja, se  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega \quad \forall x, y \in \Omega$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .

Exemplos de conjuntos convexos e não-convexos são apresentados na Figura 2.1.

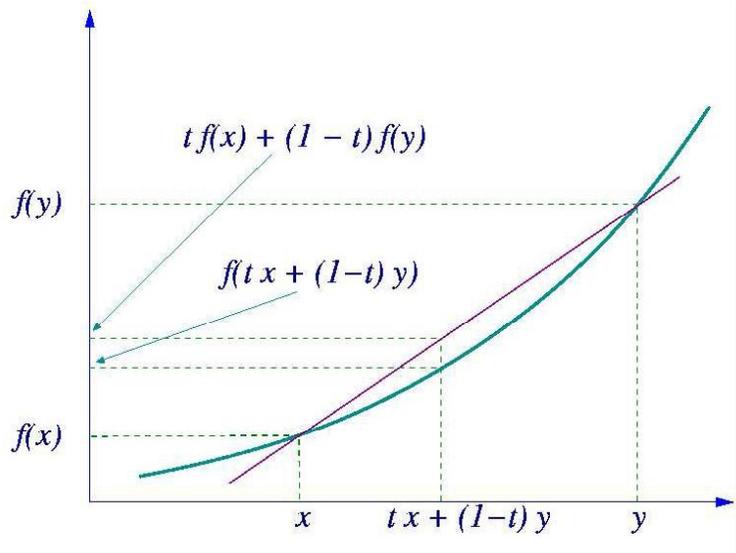


Fig. 2.1: Conjuntos convexos e não-convexos

**Definição 2.3.3** Uma função  $f(x)$  definida sobre um conjunto convexo  $\Omega$  é uma função convexa se

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad \forall x, y \in \Omega \text{ e } \alpha \in [0, 1].$$

Um exemplo de função convexa é dado na Figura 2.2.

Fig. 2.2: Exemplo de  $f$  convexa.

A fim de caracterizar o mínimo global de problema de programação quadrática convexa tem-se o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.1** *Seja  $f$  uma função convexa definida em  $\Omega$  convexo. Então todo  $x^*$  mínimo local de  $f$  em  $\Omega$  é mínimo global de  $f$  em  $\Omega$ .*

Assim, tanto em programação quadrática como em programação linear a região factível é poliedral, ou seja, é convexa. Logo, pelo teorema 2.3.1 todo mínimo local de um problema de programação quadrática convexa é também um ponto de mínimo global do problema.

Deste modo, será usado esse tipo de programação para a resolução do problema de fluxo de potência ótimo, ou seja, minimiza-se uma função objetivo quadrática convexa sujeita a restrições lineares. Mas não basta ser quadrática para ser convexa, assim segue o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.2** *Seja  $f : R^n \rightarrow R$  duplamente diferenciável em  $\Omega \subset R^n$ . Então se  $\nabla^2 f(x)$  é definida positiva  $\forall x \in \Omega$  então  $f$  é estritamente convexa em  $\Omega$ .*

O que sugere o seguinte corolário:

**Corolário 2.3.2.1** *Seja  $f : R^n \rightarrow R$  definida da seguinte forma:*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x$$

onde  $Q$  é uma matriz  $n \times n$  simétrica definida positiva. Então  $f$  é uma função convexa.

**Prova:** Tem-se que  $f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x \Rightarrow \nabla f(x) = Qx \Rightarrow \nabla^2 f(x) = Q \Rightarrow \nabla^2 f(x)$  definida positiva  $\Rightarrow f$  função convexa. ■

A formulação de um problema de fluxo de potência ótimo primal na forma padrão é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $Q$  é uma matriz  $n \times n$  simétrica definida positiva.

Note que pelo Teorema 2.3.2.1 a função objetivo de 2.9 é uma função convexa.

Para o problema de fluxo de potência ótimo  $Q$  é uma matriz diagonal, que será assumido a partir deste momento.

Tendo a formulação primal 2.9 obtém-se a formulação dual:

$$\begin{aligned} \text{Max } & b^t y - \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a } & A^t y - Qx + z = c \\ & (x, z) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim, com as formulações 2.9 e 2.10 pode-se enunciar o seguinte corolário:

**Corolário 2.3.2.2 (Condições de Otimalidade 2)** *Tem-se que  $(x, y, z)$  é solução ótima primal e dual de um problema quadrático se e somente se satisfazer*

- *Factibilidade Primal:*  $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases};$
- *Factibilidade Dual:*  $\begin{cases} A^t y - Qx + z = c \\ (x, z) \geq 0 \end{cases};$
- *Complementaridade:*  $\{ X Z e = 0 \}.$

onde  $e = (1, \dots, 1)^t$ .

O Corolário 2.3.2.2 fornece o critério para avaliar se uma determinada solução é ou não ótima do problema.

### 2.3.2 Programação Quadrática Convexa com Variáveis Canalizadas

A grande maioria dos problemas reais tais como de áreas típicas da Engenharia Elétrica, como a transmissão de energia elétrica das fontes de produção para o mercado consumidor, possui naturalmente restrições canalizadas ou variáveis canalizadas, o que indica que estruturas de canalização sejam bastante úteis. Neste trabalho esta visão não é diferente, a canalização de variáveis aproxima ainda mais o modelo do problema real.

A formulação primal para um problema com variáveis canalizadas é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{min } & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a } & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned} \quad (2.11)$$

O problema 2.11 pode ser reescrito na forma padrão, para isso é feita a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - l \\ \tilde{u} &= u - l\end{aligned}$$

essa mudança tem por objetivo anular o limitante inferior de  $x$ . Acrescentando também uma variável de folga  $v$  e desconsiderado a notação com tils para simplificar tem-se a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x + v \leq u \\ & (x, v) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

A formulação 2.12 tem como dual associado o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^t y - \mu^t w - \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a} \quad & A^t y - w + z - Qx = c \\ & (w, z) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Desta forma obtém-se as seguintes condições de otimalidade

**Corolário 2.3.2.3 (Condições de Otimalidade 3)** *Tem-se que  $(x, y, z)$  é solução ótima primal e dual de um problema linear canalizado se e somente se satisfazer*

- *Factibilidade Primal:* 
$$\begin{cases} Ax = b \\ x + v = u ; \\ (x, v) \geq 0 \end{cases}$$
- *Factibilidade Dual:* 
$$\begin{cases} A^t y - w + z - Qx = c \\ (w, z) \geq 0 ; \end{cases}$$
- *Complementaridade:* 
$$\begin{cases} XZe = 0 \\ VW e = 0 \end{cases}$$

onde  $e = (1, \dots, 1)^t$ .

O Corolário 2.3.2.3 além de fornecer o critério para avaliar se uma determinada solução é ou não ótima do problema com variáveis canalizadas, é o resultado mais importante dessa seção, pois com base nele pretende-se chegar na otimalidade do problema de fluxo de potência ótimo.

Na próxima seção será desenvolvido o método primal dual de pontos interiores que será utilizado na resolução dos problemas apresentados nas seções posteriores.

# Capítulo 3

## Método de Pontos Interiores Primal-Dual

### 3.1 Introdução

Os métodos de pontos interiores vem sendo uma interessante área de pesquisa em otimização desde o surgimento do método simplex, seus estudos mudaram a paisagem na teoria de computação e de programação matemática.

O primeiro estudo de pontos interiores aplicados ao sistema de potência foi feito em 1991 [8].

A idéia deste método consiste em encontrar uma solução ótima de um problema de programação linear, caminhando pelo interior do ortante positivo [9, 10].

O método de pontos interiores baseado na formulação primal-dual, que pode ser visto como a aplicação do método de Newton (Apêndice A) às condições de otimalidade do problema, é muito competitivo com o simplex para problemas de grande porte. Sua teoria é também de grande importância para a otimização de problemas convexos de programação não-linear.

**Definição 3.1.1** *Um ponto de um problema linear é chamado de ponto interior se todas as suas componentes se encontram estritamente dentro de seus limites.*

#### Exemplos:

- $x > 0$  com  $Ax = b$  é um ponto interior e factível para o problema primal na forma padrão;
- $z > 0$  com  $A^t y + z = c$  é um ponto interior e factível para o problema dual na forma padrão;

### 3.2 Método Primal-Dual Afim Escala

Este método consiste em aplicar o método de Newton às condições de otimalidade do problema linear e garantir que os pontos ainda sejam interiores, assim para o problema, tem-se que achar o zero para a seguinte função  $f$ :

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^t y + z - c \\ XZe \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para isso, basta obter o jacobiano  $J_f$  de  $f$ , ou seja:

$$J_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Dado o ponto inicial  $(x^0, y^0, z^0)$  tem-se

$$f(x^0, y^0, z^0) = \begin{bmatrix} Ax^0 - b \\ A^t y^0 + z^0 - c \\ X^0 Z^0 e \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Logo por (A.5) tem-se

$$(x^1, y^1, z^1) = (x^0, y^0, z^0) + \alpha J_f^{-1}(x^0, y^0, z^0) \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } r_p &= Ax^0 - b \\ r_d &= A^t y^0 + z^0 - c \\ r_a &= X^0 Z^0 e \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x, y, z) \leftarrow (x, y, z) + \alpha(d_x, d_y, d_z). \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix} \Rightarrow d = J_f^{-1} r \quad (3.6)$$

Assim tem-se que resolver o sistema  $J_f d = r$ . Se  $(x, z) > 0$  e  $A$  tem posto completo então  $J_f$  é inversível.

Partindo de  $(x, z) > 0$  e escolhendo  $\alpha$  tal que na próxima iteração  $(x, z)$  seja interior, obtemos o método de pontos interiores primal-dual afim escala.

### 3.3 Método Primal-Dual Seguidor de Caminhos

Na prática, o método primal-dual afim escala não obtém bons resultados pois não converge ou converge muito lentamente para diversos problemas pois os produtos  $x_i z_i$  se aproximam de zero com velocidades muito distintas.

Desta forma, para o cálculo do tamanho do passo  $\alpha$  pode ser feito como segue:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p &= \tau \min \left( \frac{-x_i}{dx_i}, dx_i < 0 \right) \\ \alpha_d &= \tau \min \left( \frac{-z_i}{dz_i}, dz_i < 0 \right) \end{aligned} \right\} \alpha = \min(\alpha_p, \alpha_d), \quad \tau \in (0, 1) \quad (3.7)$$

Na prática usa-se  $\alpha_p = \min(\alpha_p, 1)$   
 $\alpha_d = \min(\alpha_d, 1)$  por reduzir o número de iterações.

Antes de apresentar uma alteração que corrija o método primal-dual afim escala, note que segundo o Teorema 2.2.1 o *gap*  $\gamma$  pode ser visto como [10]

$$\gamma = x^t z = \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

definindo  $\mu = \frac{\gamma}{n}$  tem-se que  $\mu$  é o valor ideal para  $x_i z_i \Rightarrow XZe = \mu e$ .

Assim, uma solução para o problema do método de pontos interiores primal-dual afim escala consiste em perturbar o lado direito das restrições  $XZe = 0$ , como o valor médio dos pares  $x_i z_i$  é  $\frac{\gamma}{n}$  a perturbação deve ser em função desse valor. Simultaneamente esse valor médio é diminuído multiplicando-o por um valor  $\sigma \in (0, 1)$ .

Desta forma tem-se a perturbação  $\mu^k = \sigma \frac{\gamma^k}{n}$  com  $\{\mu^k\} \rightarrow 0$  obtendo assim a solução do problema original. Essa solução é chamada de método de pontos interiores primal-dual seguidor de caminhos.

### 3.4 Direções de Newton

Escolhido  $\alpha$  apropriado, e acrescentando a perturbação  $\mu$ , resta agora obter, de forma eficiente, as direções a serem seguidas, assim, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a - \mu e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Ad_x = r_p \\ A^t d_y + d_z = r_d \\ Zd_x + X d_z = r_a - \mu e \end{cases} \quad (3.8)$$

Pode-se reduzir o sistema (3.8) isolando  $d_z$  na terceira equação obtendo

$$d_z = X^{-1}(r_a - \mu e - Zd_x)$$

substituindo no sistema tem-se:

$$\begin{cases} Ad_x = r_p \\ A^t d_y - D d_x = r_d - X^{-1} r_c \end{cases} \quad (3.9)$$

onde  $D = X^{-1}Z$  e  $r_c = r_a - \mu e$ .

Isolando  $d_x$  na segunda equação do sistema (3.9) obtém-se

$$d_x = -D^{-1}(r_d - A^t d_y - X^{-1} r_c)$$

substituindo no sistema tem-se o seguinte:

$$(AD^{-1}A^t)d_y = \tilde{r}_p \quad (3.10)$$

onde  $\tilde{r}_p = r_p + AD^{-1}r_d - AZ^{-1}r_c$ .

Deste modo o sistema 3.10 é resolvido como da seguinte forma:

$$d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}\tilde{r}_p \quad (3.11)$$

No sistema (3.10) a matriz  $AD^{-1}A^t$  é simétrica definida positiva, logo pode ser escrita da forma

$$AD^{-1}A^t = LL^t$$

ou seja, pode-se calcular a decomposição de Cholesky [11] de  $ADA^t$ . A ordem de escolha dos pivôs da diagonal não altera a estabilidade numérica e a estrutura esparsa de  $ADA^t$  não varia com as iterações, assim pode-se utilizar a mesma seqüência de pivôs obtida inicialmente por alguma heurística em todas as iterações reduzindo o enchimento da matriz na decomposição de Cholesky. A matriz  $ADA^t$  é permutada uma única vez antes de iniciar as iterações.

### 3.5 Problemas Quadráticos com Variáveis Canalizadas

Nesta seção será aplicado o método de pontos interiores primal-dual seguidor de caminhos no problema apresentado na seção 2.3.2.

Aplicando o Método de Newton às condições de otimalidade 2.3.2.3 obtém-se as seguintes direções:

$$\begin{cases} Ad_x & = r_p \\ d_x + d_v & = u \\ A^t d_y - d_w + d_z - Qd_x & = r_d \\ Zd_x + Xd_z & = r_a \\ Vd_w + Wd_v & = r_b \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned} r_p &= b - Ax \\ r_u &= u - x - v \\ r_d &= c - A^t d_y + w - z + Qx \\ r_a &= \mu e - XZe \\ r_b &= \mu e - VWe \end{aligned}$$

Isolado as direções referentes as variáveis de folga primal e dual  $v$  e  $w$  respectivamente tem-se:

$$\begin{aligned} d_v &= r_u - d_x \\ d_w &= V^{-1}(r_b - Wd_v) \Rightarrow d_w = V^{-1}(r_b - Wr_u + Wd_x) \end{aligned}$$

Substituindo essas variáveis no sistema 3.12 tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ad_x & = r_p \\ A^t d_y - (V^{-1}W + Q)d_w + d_z & = \bar{r}_d \\ Zd_x + Xd_z & = r_a \end{cases} \quad (3.13)$$

onde  $\bar{r}_d = r_d + V^{-1}(r_b - Wr_u)$

Isolando agora a variável  $d_z$  tem-se o seguinte:

$$d_z = X^{-1}(r_a - Zd_x)$$

Substituindo no sistema 3.13 resulta-se em:

$$\begin{cases} Ad_x & = r_p \\ A^t d_y - Dd_w + d_z & = \tilde{r}_d \end{cases} \quad (3.14)$$

onde  $D = (V^{-1}W + X^{-1}Z + Q)$  e  $\tilde{r}_d = \bar{r}_d - X^{-1}r_a$ .

Note que  $D$  é formada por soma de matrizes diagonais, portanto  $D$  é uma matriz diagonal e sua inversa é facilmente obtida, assim pode-se isolar a variável  $d_x$  sem problema algum como se segue:

$$d_x = -D^{-1}(\tilde{r}_d - A^t d_y)$$

Agora substituindo no sistema 3.14 chega-se no sistema:

$$AD^{-1}A^t d_y = \bar{r}_p \quad (3.15)$$

onde  $\bar{r}_p = r_p + AD^{-1}\tilde{r}_d$ .

Observe que o sistema 3.15 é semelhante ao sistema 3.10, ou seja, pode ser resolvido como em 3.11 da seguinte maneira:

$$d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}\bar{r}_p \quad (3.16)$$

A matriz  $AD^{-1}A^t$  em 3.16 assim como em 3.11 também é simétrica definida positiva.

## 3.6 Critério de Convergência e Ponto Inicial

Com o método desenvolvido, falta ainda estabelecer um critério de convergência que será baseado nas condições de otimalidade, assim pode-se definir o seguinte:

**Definição 3.6.1 (Condições de Convergência)** Diz-se que o Método convergiu se são satisfeitas as seguintes condições:

*i Primal Factível*

$$\frac{\|b - Ax\|}{\|b\| + 1} < \epsilon$$

*ii Dual Factível*

$$\frac{\|c - A^t y + z\|}{\|c\| + 1} < \epsilon$$

*iii Complementaridade*

$$\frac{\|c^t x - b^t y\|}{\|c^t x\| + \|b^t y\| + 1} < \epsilon$$

Tendo um critério de convergência, falta apenas definir um ponto inicial. Um fator importante desse método é que não é necessário um ponto inicial factível, apenas que sejam interiores e que  $x_i$  e  $z_i$  não sejam "pequenos".

Mas pode-se considerar os seguintes pontos iniciais [12]:

- Ponto Inicial Primal:

$$\text{Sejam } \tilde{x} = A^t(AA^t)^{-1}b, \epsilon_1 = 100 \text{ e } \epsilon_2 = \max \left\{ -\min \tilde{x}_i, \epsilon_1, \frac{\|b\|_1}{\epsilon_1 \|A\|_1} \right\}$$

como  $A\tilde{x} = b$ , tome

$$x_i^0 = \max\{\tilde{x}_i, \epsilon_2\} \quad (3.17)$$

- Ponto Inicial Dual:

Seja  $\epsilon_3 = 1 + \|c\|_1$  então tome

$$y^0 = 0 \quad (3.18)$$

$$z_i^0 = \begin{cases} c_i + \epsilon_3 & \text{se } c_i \geq 0 \\ -c_i & \text{se } c_i \leq -\epsilon_3 \\ \epsilon_3 & \text{se } -\epsilon \leq c_i \leq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Estes pontos iniciais tomados dessa maneira costumam diminuir o número de iterações necessárias para a convergência do método.

**OBS:** Usando  $\sigma = 0$  obtém-se o método afim escala e  $\sigma = 1$  obtém-se a direção de centragem.

Combinações de  $\sigma^k$  e  $\tau^k$  levam a propriedades diferentes, tais como:

- Convergência Super Linear;
- Complexidade Polinomial;
- Ambos.

Na prática usa-se  $\tau$  entre 0.995 e 0.99995 e  $\sigma = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{para problemas pequenos} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{para problemas grandes} \end{cases}$

Se  $\gamma < 1$  utiliza-se  $\sigma_k = \frac{\gamma_k}{n}$ , ou seja,  $\mu_k = \left(\frac{\gamma_k}{n}\right)^2$  e o método converge mais rapidamente (1 ou 2 iterações a menos).

Existem razões teóricas que mostram que quando estamos próximos de uma solução o método converge mais rápido quando  $\{\mu_k\} \rightarrow 0$  mais rápido.

## 3.7 Resumo do Método

O método primal-dual seguidor de caminhos para problemas quadráticos canalizados pode ser resumido da seguinte forma:

```

input :  $(x_0, y_0, z_0)$  com  $(x_0, z_0) > 0, \sigma$  e  $\tau \in (0, 1)$ 
output:  $(x^*, y^*, z^*)$ 

1  $k=0$ ;
2 while Não satisfaz as condições de convergência 3.6.1 do
3   if  $k > \max$  then
4     return Máximo de iterações;
5   end
6    $k = k + 1$ ;
7    $r_p = b - Ax$ ;
8    $r_u = u - x - v$ ;
9    $r_d = c - A^t y + w - z + Qx$ ;
10   $\mu = \sigma \frac{\gamma}{n}$ ;
11   $r_a = \mu e - XZe$ ;
12   $r_b = \mu e - VWe$ ;
13   $D = (V^{-1}W + X^{-1}Z + Q)$ ;
14   $\tilde{r}_d = r_d + V^{-1}(r_b - Wr_u) - X^{-1}r_a$ 
15   $d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}(r_p + AD^{-1}\tilde{r}_d)$ ;
16   $d_x = -D^{-1}(\tilde{r}_d - A^t d_y)$ ;
17   $d_z = X^{-1}(r_a - Zd_x)$ ;
18   $d_v = r_u - d_x$ ;
19   $d_w = V^{-1}(r_b - Wd_v)$ ;
20   $\alpha_p = \min(1, \tau \min_{dx_i < 0} \{-\frac{x_i}{dx_i}\}, \tau \min_{dv_i < 0} \{-\frac{v_i}{dv_i}\})$ ;
21   $\alpha_d = \min(1, \tau \min_{dz_i < 0} \{-\frac{z_i}{dz_i}\}, \tau \min_{dw_i < 0} \{-\frac{w_i}{dw_i}\})$ ;
22   $x = x + \alpha_p dx$ ;
23   $v = v + \alpha_p dv$ ;
24   $y = y + \alpha_d dy$ ;
25   $z = z + \alpha_d dz$ ;
26   $w = w + \alpha_d dw$ ;
27 end

```

**Algorithm 1:** Resumo MPI Primal-Dual Seguidor de Caminhos Para Problemas Quadráticos Canalizados

Assim conclui-se a seção. Na próxima seção este método será usado para resolver o problema de fluxo de potência ótimo CC.

# Capítulo 4

## Fluxo de Potência Ótimo (CC)

### 4.1 Introdução

O problema de fluxo de potência ótimo tem aplicação em diversos problemas de análise e operação de sistemas de potência, tais como despacho econômico, análise de confiabilidade de geração e transmissão, análise de segurança, programação da geração a curto prazo e planejamento da expansão da geração e transmissão. A representação linearizada (CC) do fluxo de potência tem sido adotada, em grande maioria dessas aplicações, devido a sua maior simplicidade e ao grau de precisão satisfatório dos seus resultados.

O despacho ótimo de potência ativa através de modelo CC pode ser formulado como um modelo de fluxo em redes com restrições adicionais [13, 14]. Uma vantagem dessa abordagem é que, com representação independente das leis de Kirchhoff, os fluxos de potência são representados explicitamente permitindo a consideração direta dos limites de transmissão como restrições e das perdas de transmissão como um critério de desempenho.

Por sua vez, técnicas de pontos interiores tem sido estudadas e utilizadas em diversas áreas de aplicação, entre elas sistemas de potência. Em particular, têm sido sugeridas para a resolução de problemas de fluxo de potência ótimo com representação AC [15], obtendo excelente desempenho tanto em termos de eficiência como de robustez [5, 6].

Na seção seguinte será apresentado um modelo de despacho de potência ativa com critério quadrático separável usando métodos de pontos interiores. A abordagem utilizada combina as vantagens da formulação do modelo CC por fluxo em redes com a eficiência e robustez dos métodos de pontos interiores. Será explorada também a estrutura matricial do problema, reduzindo o sistema linear a ser resolvido à dimensão do número de barras [16, 17, 18, 19].

### 4.2 Modelando o Problema

O problema de FPO pode ser modelado como um problema de programação linear da seguinte forma:

$$\min \quad \frac{\alpha}{2} f^t R f + \frac{\beta}{2} (p^t Q p + c^t p)$$

s.a

$$Af = Ep - l \quad (4.1)$$

$$Xf = 0 \quad (4.2)$$

$$f_l \leq f \leq f_u \quad (4.3)$$

$$p_l \leq p \leq p_u \quad (4.4)$$

onde:

- $m, n$  e  $g$  são os números de barras, linhas de transmissão e de geradores respectivamente;
- $Q$ : Matriz diagonal  $g \times g$  da componente quadrática do custo de geração;
- $R$ : Matriz diagonal  $n \times n$  de resistência das linhas;
- $c$ : Vetor  $g \times 1$  da componente linear do custo de geração;
- $A$ : Matriz  $m \times n$  de incidência da rede de transmissão;
- $X$ : Matriz  $(n - m + 1) \times n$  de reatância das linhas;
- $f$ : Vetor  $n \times 1$  de fluxo de potência ativa;
- $p$ : Vetor  $g \times 1$  de geração de potência ativa;
- $l$ : Vetor  $m \times 1$  de demanda de potência ativa;
- $E$ : matriz de ordem  $m \times g$  com cada coluna contendo exatamente um elemento igual a 1, correspondendo às barras de geração, e os demais elementos nulos;
- $f_u, f_l, p_u$  e  $p_l$ : limites de fluxo e de geração de potência ativa respectivamente;
- $\alpha$  e  $\beta$ : ponderações dos objetivos a minimizar.

O sistema de transmissão é representado por um fluxo de carga CC com limites no fluxo das linhas. Para que as variáveis de geração e transmissão possam ser expressas simultaneamente no modelo, as leis de Kirchhoff para nós e ramos 4.1 e 4.2 são apresentadas separadamente [13]. Portanto, o conjunto de restrições para este problema é linear onde, as equações 4.1 e 4.2 representam a rede de geração/transmissão e as equações 4.3 e 4.4 representam as capacidades de transmissão e de geração do sistema. No modelo utilizado as duas componentes da função objetivo são quadráticas com variáveis separáveis, a primeira representando o valor econômico das perdas de transmissão e a segunda representando o custo de geração das usinas tanto térmicas quanto hidrelétricas [20].

A função de perdas na geração hidráulica ( $p^t Q p + c^t p$ ) com  $Q$  matriz diagonal [20] modela as três formas mais importantes de perda:

- variações na cota de jusante;
- perdas na tubulação de adução da unidade geradora;

- perdas associadas à eficiência do par turbina-gerador.

O custo de geração associado às termoeletricas também é uma função quadrática independente para cada gerador. Portanto, utilizando o modelo descrito para minimizar as perdas na geração hidráulica e custos na geração térmica, as duas componentes da função objetivo são quadráticas com variáveis separáveis, uma vez que a matriz  $R$  também é diagonal.

Vale ressaltar que os métodos de pontos interiores para problemas com esta característica apresentam desempenho similar ao obtido para problemas lineares. Em particular, o esforço por iteração é virtualmente o mesmo em ambas as situações [9, 10].

Para deixar o problema na forma padrão, com os limites inferiores iguais a zero, nas duas últimas equações acima é feita uma mudança de variáveis da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= f - f_l \\ \tilde{p} &= p - p_l\end{aligned}$$

Fazendo as substituições acima resulta-se na seguinte formulação:

$$\min \quad \alpha(\frac{1}{2}\tilde{f}^t R \tilde{f} + c_f^t \tilde{f}) + \beta(\frac{1}{2}\tilde{p}^t Q \tilde{p} + c_p^t \tilde{p})$$

s.a

$$\begin{aligned}A\tilde{f} - E\tilde{p} &= l^a \\ X\tilde{f} &= l^b \\ 0 &\leq \tilde{f} \leq \tilde{f}_u \\ 0 &\leq \tilde{p} \leq \tilde{p}_u\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}l^a &= E p_l - A f_l - l \\ l^b &= -X f_l \\ c_f &= R f_l \\ c_p &= c + Q p_l \\ \tilde{f}_u &= f_u - f_l \\ \tilde{p}_u &= p_u - p_l\end{aligned}$$

Agora, acrescenta-se as variáveis de folga e elimina-se os tios, tem-se:

$$\min \quad \alpha(\frac{1}{2}f^t R f + c_f^t f) + \beta(\frac{1}{2}p^t Q p + c_p^t p)$$

s.a

$$\begin{aligned}Bf - \hat{E}p &= \hat{l} \\ f + s_f &= f_u \\ p + s_p &= p_u \\ (f, p, s_f, s_p) &\geq 0\end{aligned}$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{l} = \begin{bmatrix} l^a \\ l^b \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema acima na forma matricial tem-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} B & -\widehat{E} & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \\ p \\ s_f \\ s_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ f_u \\ p_u \end{bmatrix}$$

Desta forma, o problema dual associado é o seguinte:

$$\max \widehat{l}^t y + f_u^t w_f + p_u^t w_p - \frac{\alpha}{2} f^t R f - \frac{\beta}{2} p^t Q p$$

s.a

$$\begin{bmatrix} B^t & I & 0 \\ -\widehat{E} & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ w_f \\ w_p \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_f + R f \\ c_p + Q p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\max \widehat{l}^t y + f_u^t w_f + p_u^t w_p - \frac{\alpha}{2} f^t R f - \frac{\beta}{2} p^t Q p$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & B^t y + w_f - \alpha R f \leq \alpha c_f \\ & -\widehat{E}^t y + w_p - \beta Q p \leq \beta c_p \\ & (w_f, w_p, z_f, z_p) \geq 0 \end{aligned}$$

Acrescentando as variáveis de folga e fazendo as mudanças de variáveis:

$$w_f := -w_f \text{ e } w_p := -w_p$$

tem-se

$$\max \widehat{l}^t y - f_u^t w_f - p_u^t w_p - \frac{\alpha}{2} f^t R f - \frac{\beta}{2} p^t Q p$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & B^t y - w_f + z_f - \alpha R f = \alpha c_f \\ & -\widehat{E}^t y - w_p + z_p - \beta Q p = \beta c_p \\ & (w_f, w_p, z_f, z_p) \geq 0 \end{aligned}$$

Logo tem-se as condições de otimalidade:

$$\begin{aligned} (P) &= \begin{cases} B f - \widehat{E} p = \widehat{l} \\ f + s_f = f_u \\ p + s_p = p_u \end{cases} \\ (D) &= \begin{cases} B^t y - w_f + z_f - \alpha R f = \alpha c_f \\ -\widehat{E}^t y - w_p + z_p - \beta Q p = \beta c_p \end{cases} \\ (C) &= \begin{cases} F Z_f e = \mu e \\ P Z_p e = \mu e \\ S_f W_f e = \mu e \\ S_p W_p e = \mu e \end{cases} \end{aligned}$$

onde as variáveis  $F, P, S_f, S_p, Z_f, Z_p, W_f$  e  $W_p$  são da forma  $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ .

Aplicando o Método de Newton às condições de otimalidade tem-se as direções de Newton:

$$\left\{ \begin{array}{l} B\Delta f - \widehat{E}\Delta p = r_{fp} \\ \Delta f + \Delta s_f = r_f \\ \Delta p + \Delta s_p = r_p \\ B^t\Delta y - \Delta w_f + \Delta z_f - \alpha R\Delta f = r_{yf} \\ -\widehat{E}^t\Delta y - \Delta w_p + \Delta z_p - \beta Q\Delta p = r_{yp} \\ F\Delta z_f + Z_f\Delta f = r_{zf} \\ P\Delta z_p + Z_p\Delta p = r_{zp} \\ S_f\Delta w_f + W_f\Delta s_f = r_{wf} \\ S_p\Delta w_p + W_p\Delta s_p = r_{wp} \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned} r_{fp} &= \widehat{l} - Bf + \widehat{E}p \\ r_f &= f_u - f - s_f \\ r_p &= p_u - p - s_p \\ r_{yf} &= \alpha(c_f + Rf) - B^ty + w_f - z_f \\ r_{yp} &= \beta(c_p + Qp) + \widehat{E}^ty + w_p - z_p \\ r_{zf} &= \mu e - FZ_f e \\ r_{zp} &= \mu e - PZ_p e \\ r_{wf} &= \mu e - S_f W_f e \\ r_{wp} &= \mu e - S_p W_p e \end{aligned}$$

No sistema anterior vamos isolar as direções referentes as “variáveis de folga”, primais e duais:

$$\begin{aligned} \Delta z_f &= F^{-1}(r_{zf} - Z_f\Delta f) \\ \Delta z_p &= P^{-1}(r_{zp} - Z_p\Delta p) \\ \Delta w_f &= S_f^{-1}(r_{wf} - W_f\Delta s_f) \\ \Delta w_p &= S_p^{-1}(r_{wp} - W_p\Delta s_p) \\ \Delta s_f &= r_f - \Delta f \\ \Delta s_p &= r_p - \Delta p \end{aligned}$$

Substituindo esses valores nas direções de Newton obtidas acima chega-se ao seguinte sistema reduzido:

$$\left\{ \begin{array}{l} B\Delta f - \widehat{E}\Delta p = r_{fp} \\ B^t\Delta y - D_f\Delta f = \bar{r}_{yf} \\ -\widehat{E}^t\Delta y - D_p\Delta p = \bar{r}_{yp} \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned} D_f &= S_f^{-1}W_f + F^{-1}Z_f + \alpha R \\ D_p &= S_p^{-1}W_p + P^{-1}Z_p + \beta Q \\ \bar{r}_{yf} &= r_{yf} + S_f^{-1}r_{wf} - S_f^{-1}W_f r_f - F^{-1}r_{zf} \\ \bar{r}_{yp} &= r_{yp} - P^{-1}r_{zp} + S_p^{-1}(r_{wp} - W_p r_p) \end{aligned}$$

observe que  $D_f$  e  $D_p$  são matrizes diagonais.

Isolando as direções relacionadas as variáveis primais do sistema anterior:

$$\Delta f = -D_f^{-1}(\bar{r}_{yf} - B^t \Delta y)$$

$$\Delta p = -D_p^{-1}(\bar{r}_{yp} + \widehat{E}^t \Delta y)$$

Agora substituindo no sistema reduzido acima tem-se o seguinte:

$$\{ M \Delta y = \bar{r}_{fp}$$

onde

$$M = BD_f^{-1}B^t + \widehat{E}D_p^{-1}\widehat{E}^t$$

$$\bar{r}_{fp} = r_{fp} + BD_f^{-1}\bar{r}_{yf} - \widehat{E}D_p^{-1}\bar{r}_{yp}$$

A Matriz  $M$  é simétrica definida positiva, assim o sistema pode ser resolvido aplicando-se a decomposição de Cholesky, ou seja, pode-se resolver o sistema:

$$\Delta y = M^{-1}\bar{r}_{fp} \quad (4.5)$$

Observe que a resolução do sistema inicial foi reduzida a resolução do sistema 4.5, cuja dimensão é o número de barras do problema.

A resolução deste sistema é o passo mais caro de cada iteração do método de pontos interiores, porém pode ser resolvido sem complicações.

Na próxima seção as restrições referentes à definição de reserva de potência e seus limites serão inseridas a esse modelo e então será aplicado o método primal-dual de pontos interiores conforme feito nessa seção.

# Capítulo 5

## Fluxo de Potência Ótimo (CC) com Reserva de Potência Operacional

### 5.1 Introdução

Nestes últimos anos, os sistemas elétricos de potência têm experimentado mudanças estruturais importantes, passando de um ambiente regulado de estrutura vertical para um ambiente desregulado e descentralizado. Em qualquer um dos ambientes citados, o principal objetivo é a garantia de um sistema de potência operando em forma eficiente e dentro de níveis adequados de confiabilidade[21].

Quando um sistema de potência sofre uma contingência, como a perda de unidades de transmissão ou de geração, podem ser verificados desequilíbrios no conjunto carga-geração ou extrapolações nos limites de capacidade dos circuitos de transmissão. Nestas situações torna-se necessário o emprego de medidas corretivas que eliminem estas violações operativas, reconduzindo o sistema a um ponto de operação seguro.

Dentre o conjunto de medidas corretivas disponíveis, destacam-se o redespacho de potência ativa, reservando ou não potência, o controle de tensão e o corte de carga.

O serviço ancilar<sup>1</sup> [22] de reserva de potência é provido por geradores conectados à rede elétrica e sincronizados com o sistema de potência. Este serviço ancilar visa disponibilizar uma quantidade extra de potência ativa, que pode ser imediatamente utilizada durante uma situação de contingência para restabelecer o equilíbrio no conjunto carga-geração.

Para que esta reserva de potência seja disponibilizada, torna-se necessário que os geradores reduzam a geração de potência ativa durante a operação normal do sistema, com objetivo de reservar uma parcela de sua capacidade de geração para situações de contingência. Contudo, é possível que a receita de venda de energia destes geradores seja reduzida devido à restrição imposta a sua geração de potência ativa durante a operação normal do sistema. Isto faz com que estes geradores incorram em um custo ao prover o serviço ancilar [23, 24, 25, 26], que deve ser remunerado de alguma forma.

A reserva de potência é um produto fundamentalmente diferente da energia. Enquanto que para a energia negociada sua utilização é programada antecipadamente, a reserva de potência deve estar

---

<sup>1</sup>serviços ancilares são aqueles que complementam os serviços principais que, na segmentação brasileira, são caracterizados pela geração, transmissão, distribuição e comercialização. Estes serviços, em um sistema integrado como o brasileiro, se caracterizam por relações causa-efeito que afetam os sistema como um todo e que ultrapassam as fronteiras da área de abrangência das empresas e/ou dos serviços principais.

disponível para ser usada imediatamente, caso ocorra uma contingência no sistema. A oferta para a reserva de potência é feita por geradores, que também atendem o mercado de energia [27, 23, 28]. A quantidade da reserva de potência disponível depende do nível de confiabilidade e de segurança que se quer.

No Brasil, OIS (Operador Independente do Sistema) pode requisitar, para garantir uma operação eficiente e segura do sistema, o redespacho de um gerador reduzindo sua potência ativa a fim de permitir que o mesmo forneça mais reserva de potência[21].

## 5.2 Formulação Matemática

Será apresentado agora o modelo de fluxo de potência ótimo (CC) com reserva de potência operacional:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{\alpha}{2} f^t R f \quad + \quad \frac{\beta}{2} (p^t Q p + c^t p) \\
 \text{s.a} \quad & A f \quad = \quad E p - l \\
 & X f \quad = \quad 0 \\
 & p + r_e \quad = \quad p_u \\
 & v^t r_e \quad \geq \quad \tau \\
 & 0 \quad \leq r_e \leq r_{eu} \\
 & f_l \quad \leq f \leq f_u \\
 & p_l \quad \leq p \leq p_u
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde:

- $m, n$  e  $g$  são os números de barras, linhas de transmissão e de geradores respectivamente;
- $f$ : Vetor  $n \times 1$  de fluxo de potência ativa;
- $p$ : Vetor  $g \times 1$  de geração de potência ativa;
- $r_e$ : Vetor  $g \times 1$  de reserva de potência ativa;
- $\Gamma$ : Conjunto dos geradores com reserva de potência;
- $\tau$ : mínimo de reserva de potência exigida em um subconjunto  $\Gamma$  de geradores;
- $Q$ : Matriz diagonal  $g \times g$  da componente quadrática do custo de geração;
- $R$ : Matriz diagonal  $n \times n$  de resistência das linhas;
- $l$ : Vetor  $m \times 1$  de demanda de potência ativa;
- $X$ : Matriz  $(n - m + 1) \times n$  de reatância das linhas;
- $E$ : matriz de ordem  $m \times g$  com cada coluna contendo exatamente um elemento igual a 1, correspondendo às barras de geração, e os demais elementos nulos;

- $c$ : Vetor  $g \times 1$  da componente linear do custo de geração;
- $A$ : Matriz  $m \times n$  de incidência da rede de transmissão;
- $f_u, f_l, p_u, p_l$  e  $r_{eu}$ : Vetores de limites de fluxo, de geração de potência ativa e de reserva de potência requisitada respectivamente;
- $\alpha$  e  $\beta$ : ponderações dos objetivos a minimizar.
- $v$  é um vetor  $g \times 1$  tal que  $v_i = \begin{cases} 1 & \text{se o gerador } i \in \Gamma \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

A terceira e quarta equações representam a definição e a restrição de reserva de potência respectivamente, a quinta equação representa o limite de reserva de potência e as demais equações já foram definidas no Capítulo 4.

Note que a inclusão de reserva de potência torna redundante o limite superior da capacidade de geração das usinas que participam da reserva.

### 5.3 Aplicando o Método de Pontos Interiores Primal-Dual ao Fluxo de Potência Ótimo Com Reserva de Potência Operacional

Colocando o problema (5.1) na forma padrão, com ajuda de algumas mudanças de variáveis e o acréscimo de variáveis de folga, obtém-se a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \left( \frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \left( \frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right) \\ \text{s.a} \quad & B f - \hat{E} p = \hat{l} \\ & p + r_e = p_u \\ & v^t r_e - s = \tau \\ & f + s_f = f_u \\ & p + s_p = p_u \\ & r_e + s_{re} = r_{eu} \\ & (f, p, r_e, s, s_f, s_p, s_{re}) \geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c_f = R f_l, \quad c_p = c + Q p_l, \quad l^a = E p_l - A f_l - l \quad \text{e} \quad l^b = -X f_l \\ B = \begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{l} = \begin{bmatrix} l^a \\ l^b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Reescrevendo as restrições na forma matricial tem-se:

$$T q = b$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} B & -\widehat{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^t & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} f \\ p \\ r_e \\ s \\ s_f \\ s_p \\ s_{re} \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ p_u \\ \tau \\ f_u \\ p_u \\ r_{eu} \end{bmatrix}.$$

O que resulta no seguinte problema dual associado:

$$\begin{aligned} \max \quad & \widehat{l}^t y + p_u^t y_r + \tau^t w + f_u^t w_f + p_u^t w_p + r_{eu}^t w_{re} - \frac{\alpha}{2} f^t R f - \frac{\beta}{2} p^t Q p \\ \text{s.a} \quad & T^t \bar{y} \leq C \end{aligned}$$

onde

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y \\ y_r \\ w \\ w_f \\ w_p \\ w_{re} \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} \alpha(c_f + Rf) \\ \beta(c_p + Qp) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acrescentando as variáveis de folga e fazendo as mudanças de variáveis:

$$w_f := -w_f, w_p := w_p, e w_{re} := -w_{re}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \max \quad & \widehat{l}^t y + p_u^t y_r + \tau^t w - f_u^t w_f - p_u^t w_p - r_{eu}^t w_{re} - \frac{\alpha}{2} f^t R f - \frac{\beta}{2} p^t Q p \\ \text{sa} \quad & B^t y - w_f + z_f - \alpha R f = \alpha c_f \\ & -\widehat{E}^t y + y_r - w_p + z_p - \beta Q p = \beta c_p \\ & y_r + w \tau - w_{re} + z_{re} = 0 \\ & (w, w_f, w_p, w_{re}, z_f, z_p, z_{re}) \geq 0 \end{aligned}$$

Logo tem-se as condições de otimalidade:

$$(P) = \begin{cases} Bf - \widehat{E}p = \widehat{l} \\ p + r_e = p_u \\ v^t r_e - s = \tau \\ f + s_f = f_u \\ p + s_p = p_u \\ r_e + s_{re} = r_{eu} \end{cases}$$

$$(D) = \begin{cases} B^t y - w_f + z_f - \alpha R f = \alpha c_f \\ -\widehat{E}^t y + y_r - w_p + z_p - \beta Q p = \beta c_p \\ y_r + w\tau - w_{re} + z_{re} = 0 \end{cases}$$

$$(C) = \begin{cases} F Z_f e = \mu e \\ P Z_p e = \mu e \\ R_e Z_{re} e = \mu e \\ s w = \mu \\ S_f W_f e = \mu e \\ S_p W_p e = \mu e \\ S_{re} W_{re} e = \mu e \end{cases}$$

onde as variáveis  $F, P, R_e, S_f, S_p, S_{re}, Z_f, Z_p, Z_{re}, W_f, W_p$  e  $W_{re}$  são da forma  $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$  e  $e$  é um vetor de uns.

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade tem-se as direções de Newton:

$$\left\{ \begin{array}{l} B\Delta f - \widehat{E}\Delta p = r_{fp} \\ \Delta p + \Delta r_e = r_{pres} \\ v^t \Delta r_e - \Delta s = r_{res} \\ \Delta f + \Delta s_f = r_f \\ \Delta p + \Delta s_p = r_p \\ \Delta r_e + \Delta s_{re} = r_{re} \\ B^t \Delta y - \Delta w_f + \Delta z_f - \alpha R \Delta f = r_{yf} \\ -\widehat{E}^t \Delta y + \Delta y_r - \Delta w_p + \Delta z_p - \beta Q \Delta p = r_{yp} \\ \Delta y_r + v \Delta w - \Delta w_{re} + \Delta z_{re} = r_{wz} \\ F \Delta z_f + Z_f \Delta f = r_{zf} \\ P \Delta z_p + Z_p \Delta p = r_{zp} \\ R_e \Delta z_{re} + Z_{re} \Delta r_e = r_{zre} \\ s \Delta w + w \Delta s = r_{sw} \\ S_f \Delta w_f + W_f \Delta s_f = r_{swf} \\ S_p \Delta w_p + W_p \Delta s_p = r_{swp} \\ S_{re} \Delta w_{re} + W_{re} \Delta s_{re} = r_{sure} \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned}
 r_{fp} &= \hat{l} - Bf + \hat{E}p \\
 r_{\tau} &= \tau - v^t r_e + s \\
 r_{pres} &= p_u - p - r_e \\
 r_f &= f_u - f - s_f \\
 r_p &= p_u - p - s_p \\
 r_{sre} &= r_{eu} - r_e - s_{re} \\
 r_{yf} &= \alpha(c_f + Rf) - B^t y + w_f - z_f \\
 r_{yp} &= \beta(c_f + Qp) + \hat{E}^t y + w_p - z_p \\
 r_{wz} &= -y_r - vw + w_{re} - z_{re} \\
 r_{zf} &= \mu e - FZ_f e \\
 r_{zp} &= \mu e - PZ_p e \\
 r_{zre} &= \mu e - R_e Z_{re} e \\
 r_{sw} &= \mu - sw \\
 r_{swf} &= \mu e - S_f W_f e \\
 r_{swp} &= \mu e - S_p W_p e \\
 r_{swre} &= \mu e - S_{re} W_{re} e
 \end{aligned}$$

No sistema anterior vamos isolar as direções referentes as “variáveis de folga”, primais e duais, exceto  $\Delta w$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta z_f &= F^{-1}(r_{zf} - Z_f \Delta f) \\
 \Delta z_p &= P^{-1}(r_{zp} - Z_p \Delta p) \\
 \Delta z_{re} &= R_e^{-1}(r_{zre} - Z_{re} \Delta r_e) \\
 \Delta w_f &= S_f^{-1}(r_{swf} - W_f \Delta s_f) \\
 \Delta w_p &= S_p^{-1}(r_{swp} - W_p \Delta s_p) \\
 \Delta w_{re} &= S_{re}^{-1}(r_{swre} - W_{re} \Delta s_{re}) \\
 \Delta s &= v^t \Delta r_e - r_{res} \\
 \Delta s_f &= r_f - \Delta f \\
 \Delta s_p &= r_p - \Delta p \\
 \Delta s_{re} &= r_{re} - \Delta r_e
 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores nas direções de Newton obtidas acima chega-se ao seguinte sistema reduzido:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B\Delta f - \hat{E}\Delta p = r_{fp} \\
 \Delta p + \Delta r_e = r_{pres} \\
 B^t \Delta y - D_f \Delta f = \tilde{r}_{yf} \\
 -\hat{E}^t \Delta y + \Delta y_r - D_p \Delta p = \tilde{r}_{yp} \\
 \Delta y_r + v\Delta w - D_{re} \Delta r_e = \tilde{r}_{wz} \\
 s\Delta w + w\tau^t \Delta r_e = \tilde{r}_{sw}
 \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned}
 D_f &= S_f^{-1}W_f + F^{-1}Z_f + \alpha R \\
 D_p &= S_p^{-1}W_p + P^{-1}Z_p + \beta Q \\
 D_{re} &= S_{re}^{-1}W_{re} + R_e^{-1}Z_{re} \\
 \tilde{r}_{yf} &= r_{yf} + S_f^{-1}r_{swf} - S_f^{-1}W_f r_f - F^{-1}r_{zf} \\
 \tilde{r}_{yp} &= r_{yp} - P^{-1}r_{zp} + S_p^{-1}(r_{swp} - W_p r_p) \\
 \tilde{r}_{wz} &= r_{wz} + S_{re}^{-1}(r_{swre} - W_{re} r_{re}) - R_e^{-1}r_{zr} \\
 \tilde{r}_{sw} &= r_{sw} + w r_{es}
 \end{aligned}$$

observe que  $D_f$ ,  $D_p$  e  $D_{re}$  são matrizes diagonais.

Isolando as direções relacionadas as variáveis primais do sistema anterior:

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= -D_f^{-1}(\tilde{r}_{yf} - B^t \Delta y) \\
 \Delta p &= -D_p^{-1}(\tilde{r}_{yp} + \hat{E}^t \Delta y - \Delta y_r) \\
 \Delta r_e &= -D_{re}^{-1}(\tilde{r}_{wz} - v \Delta w - \Delta y_r)
 \end{aligned}$$

Agora substituindo no sistema reduzido acima tem-se o seguinte:

$$\begin{cases}
 \bar{M} \Delta y - \hat{E} D_p^{-1} \Delta y_r &= \tilde{r}_{fp} \\
 -D_p^{-1} \hat{E}^t \Delta y + D_{yr} \Delta y_r + D_{re}^{-1} v \Delta w &= \tilde{r}_{pres} \\
 w v^t D_{re}^{-1} \Delta y_r + (s + w v^t D_{re}^{-1} v) \Delta w &= \hat{r}_{sw}
 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{M} &= B D_f^{-1} B^t + \hat{E} D_p^{-1} \hat{E}^t \\
 D_{yr} &= D_{re}^{-1} + D_p^{-1} \\
 \tilde{r}_{fp} &= r_{fp} + B D_f^{-1} \tilde{r}_{yf} - \hat{E} D_p^{-1} \tilde{r}_{yp} \\
 \tilde{r}_{pres} &= r_{pres} + D_p^{-1} \tilde{r}_{yp} + D_{re}^{-1} \tilde{r}_{wz} \\
 \hat{r}_{sw} &= \tilde{r}_{sw} + w \tau^t D_{re}^{-1} \tilde{r}_{wz}
 \end{aligned}$$

Da segunda equação do sistema acima obtém-se

$$\Delta y_r = D_{yr}^{-1}(\tilde{r}_{pres} + D_p^{-1} \hat{E}^t \Delta y - D_{re}^{-1} v \Delta w)$$

Substituindo  $\Delta y_r$  nas equações restantes tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
 M \Delta y + u \Delta w &= \hat{r}_{fp} \\
 w u^t \Delta y + h \Delta w &= \tilde{r}_{sw}
 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned}
 M &= \bar{M} - \hat{E} D_p^{-1} D_{yr}^{-1} D_p^{-1} \hat{E}^t \\
 u &= \hat{E} D_p^{-1} D_{yr}^{-1} D_{re}^{-1} v \\
 h &= s + w \tau^t D_{re}^{-1} v - w v^t D_{re}^{-1} D_{yr}^{-1} D_{re}^{-1} v \\
 \hat{r}_{fp} &= \tilde{r}_{fp} + \hat{E} D_p^{-1} D_{yr}^{-1} r_{pre} \\
 \tilde{r}_{sw} &= \hat{r}_{sw} - w \tau^t D_{re}^{-1} D_{yr}^{-1} \tilde{r}_{pres}
 \end{aligned}$$

O sistema obtido acima pode ser resolvido como em [29] da seguinte forma:

$$\begin{cases} \Delta w = \frac{\bar{r}_{sw} - wV^t y_0}{h + wU^t y_1} \\ \Delta y = y_0 + y_1 \Delta w \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} y_0 &= M^{-1} \hat{r}_{fp} \\ y_1 &= -M^{-1} U \end{aligned}$$

Observe que a resolução do sistema inicial foi reduzida a resolução dos dois sistemas em 5.3, onde cada um tem a dimensão do número de barras do problema e envolve a mesma matriz  $M$ .

A matriz  $M$  dos sistemas em 5.3 é simétrica e definida positiva, portanto pode ser decomposta usando a fatoração de Cholesky e esta fatoração pode ser usada para resolver os dois sistemas, reduzindo o custo computacional exigido.

Deste modo, a inserção de restrições de reserva de potência ao problema de fluxo de potência ótimo leva à resolução de não apenas um sistema linear com a dimensão do número de barras como obtido no Capítulo anterior, mas sim a resolução de dois sistemas lineares de mesma dimensão, mas com custo computacional relativamente equivalente a resolver apenas um sistema linear.

Assim o fluxo de potência ótimo com restrições de reserva de potência operacional pode ser resolvido aplicando-se o método de pontos interiores primal-dual com a mesma eficiência obtida no problema sem essas restrições.

A seguir a seção de resultados onde o método desenvolvido aqui será aplicado à sistemas elétricos de diversas dimensões

# Capítulo 6

## Resultados Computacionais

### 6.1 Estudos de Casos

Os estudos foram feitos nos seguintes sistemas:

Sistemas	Barras	Geradores	Carga (MW)
<b>IEEE30</b>	30	6	283,4
<b>IEEE118</b>	118	53	4242
<b>SSECO1654</b>	1654	124	32326,3
<b>SSECO1732</b>	1732	115	35658,1
<b>BRASIL</b>	1993	151	40155,2

Tab. 6.1: Sistemas Estudados

As capacidades dos geradores de cada sistema estão no Apêndice B.

A linguagem de programação utilizada foi *MATLAB 6.5* em um processador Intel®Core™2 CPU 6600 2,4GHz com 2GB de memória RAM.

Nos sistemas estudados, foi dada mais ênfase ao sistema IEEE 30 devido a sua dimensão, facilitando a observação dos resultados, mas as mesmas análises podem ser aplicadas aos demais sistemas.

Inicialmente serão feitos estudos de análise de sensibilidade do modelo básico, apenas para o sistema IEEE 30, não exigindo uma reserva de potência. Esses estudos consistem em alterações nos valores de  $\alpha$  e de  $\beta$  na função objetivo, no custo de alguns geradores e do limite de fluxo de potência em algumas linhas de transmissão do sistema.

Em seguida serão feitos estudos de casos exigindo reserva de potência. A fim de comparar resultados, a mesma reserva será exigida para diversos subconjuntos de geradores. Será feita ainda uma comparação com os resultados obtidos utilizando o modelo sem restrições de reserva de potência.

Para a convergência do método foi utilizada uma precisão na ordem de  $10^{-8}$ .

### 6.1.1 O Sistema IEEE30

O sistema IEEE 30 possui 30 barras sendo 6 delas geradores, com uma demanda de 283,4MW. Este sistema representa uma porção do sistema elétrico americano (Meio Oeste) a partir de dezembro 1961 [30]. Na Figura 6.1 pode-se observar seu diagrama unifilar.

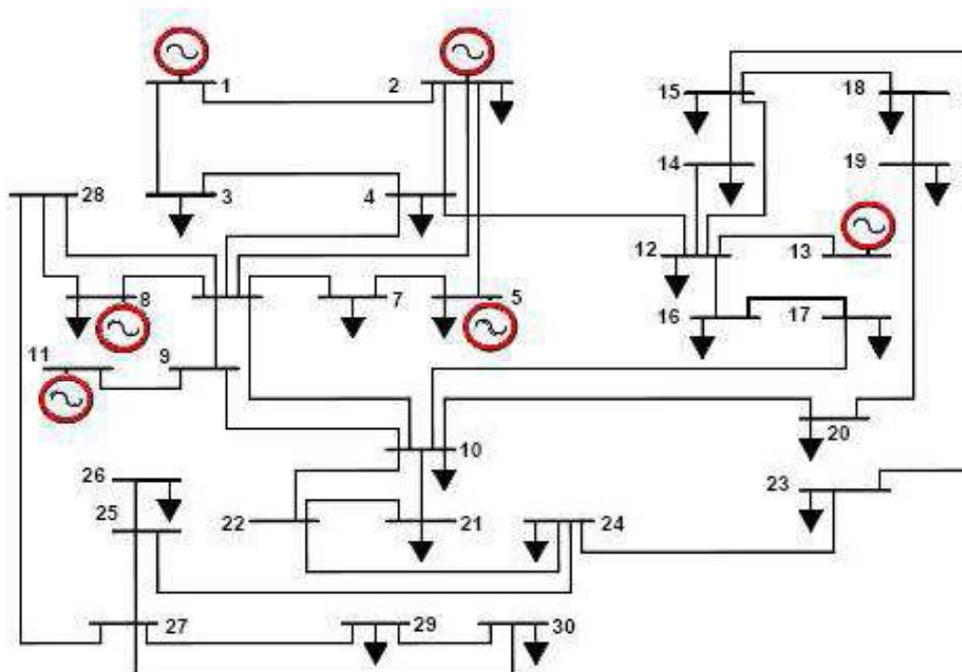


Fig. 6.1: Diagrama unifilar do Sistema IEEE30.

#### Análise de Sensibilidade do Modelo Básico

A fim de simplificar a interpretação dos resultados, serão considerados os seguintes dados iniciais:

- A potência mínima de cada gerador será considerada com sendo 0MW, ou seja,  $p_l = 0$ ;
- Função de custo quadrático pura, isto é, no Capítulo 5, no sistema 5.1, a função objetivo com  $c_p = 0$
- Geradores inicialmente de custos iguais, ou seja, matriz  $Q = I$ ;
- Limite de Fluxo  $f_u = 200MW$  nas linhas de transmissão e  $f_l = -f_u$ ;
- Geradores inicialmente sem limites de produção;

Iniciando os estudos de casos, minimizando apenas perdas nas linhas de transmissão ( $T$ ) ( $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ ) faz com que os geradores mais próximos das cargas produzam maior potência, visto que não há limites para a produção de cada gerador, o despacho obtido produz a menor perda por resistência.

Como a matriz  $Q = I$ , minimizar apenas o custo na geração ( $G$ ) ( $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ ) faz com que o despacho de potência ótimo distribua de forma uniforme a potência entre os geradores do sistema, já que ainda não é imposto um limite de geração entre eles que impessa essa uniformidade.

Mantendo a configuração anterior e reduzindo o custo do gerador 1 pela metade e dobrando o do gerador 5 ( $Gc$ ) é de se esperar que este último produza metade da potência obtida pelos que não tiveram seus custos alterados, da mesma forma, espera-se que o primeiro, por ser mais barato, produza o dobro da potência obtida por estes geradores. Esses despachos podem ser observados na Figura 6.2 ítems ( $T$ ), ( $G$ ) e ( $Gc$ ).

Impondo os limites de produção ( $Gcl$ ) da Tabela 6.2 o gerador 1 no estudo ( $Gc$ ) é o único que violaria seu limite, desta forma, este gerador atinge sua produção máxima, fazendo com que a potência excedente seja distribuída proporcionalmente entre os demais geradores.

A partir deste ponto, quando não mencionado, os limites de produção dos geradores do sistema *IEEE30* serão os da tabela 6.2.

O limite de fluxo máximo de potência na linha de transmissão 9-11 ( $Gclf$ ) foi reduzido para 25MW. Como esta é a única linha de transmissão do gerador 11 (ver Figura 6.1) é de se esperar que sua produção diminua para 25MW, fazendo com que a potência restante seja distribuída entre os demais geradores ainda com capacidade de produção disponível.

Fazendo com que o modelo minimize as perdas nas linhas de transmissão e o custo na geração ( $T\&Gclf$ ), ou seja, considerando  $\alpha = c_m$  e  $\beta = 1$ , onde  $c_m$  é o custo marginal dos geradores no estudo anterior, obtém-se o despacho ótimo englobando todos os casos estudados. Os despachos para esses estudos podem ser observados na Figura 6.2 ítems ( $Gcl$ ), ( $Gclf$ ) e ( $T\&Gclf$ ).

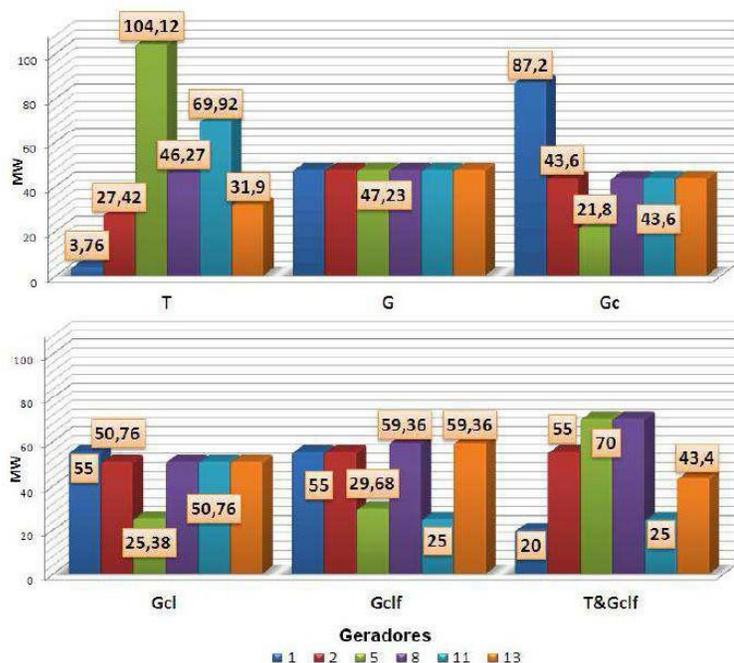


Fig. 6.2: Despachos de potências sem exigência de Reserva.

Gerador	1	2	5	8	11	13
Limite(MW)	55	55	70	70	60	60

Tab. 6.2: Limites de geração de potência nos geradores do sistema IEEE 30

Observe que mesmo o gerador 5 sendo mais caro que os demais, este atingiu seu limite de produção, já o gerador 1, o mais barato, teve menor produção. Isso se dá devido a proximidade dos geradores das cargas do sistema.

Assim, os testes feitos até o momento asseguram a funcionabilidade do modelo sem exigência de reserva de potência.

Antes de iniciar os próximos estudos será feita a seguinte definição:

**Definição 6.1.1 (Reserva natural)** *Define-se reserva natural de potência como sendo a diferença entre a capacidade máxima do gerador e a potência gerada por ele em um despacho sem exigência de reserva de potência.*

### Reserva de Potência no sistema IEEE 30

Inicialmente, para melhor observação dos efeitos provocados pela inserção de restrições de reserva ao modelo 5.1, os testes a seguir serão feitos para minimizar apenas os custos na geração, utilizando os limites de produção da Tabela 6.2 e com custos de geradores iguais, ou seja,  $Q = I$ . Será exigido  $70MW$  de reserva de potência em cada conjunto  $\Gamma_n$  especificados na tabela 6.3.

Conjuntos	Geradores
$\Gamma_1$	5 - 8
$\Gamma_2$	2 - 5 - 8
$\Gamma_3$	1 - 2 - 5 - 8
$\Gamma_4$	8 - 11

Tab. 6.3: Conjuntos  $\Gamma$  - IEEE 30 A

Assim, iniciando os estudos de reserva com  $\Gamma_1$ , é de se esperar que a produção neste conjunto diminua uniformemente afim de satisfazer a reserva exigida, aumentando assim a produção dos demais geradores.

Aumentando o número de geradores com exigência de reserva, a produção nesses geradores deve aumentar, já que precisam também ajudar a satisfazer a demanda do sistema, além de continuar mantendo uma uniformidade na produção, o que é observado tanto para  $\Gamma_2$  quanto para  $\Gamma_3$ . A Figura 6.3 ilustra esses despachos, onde  $\Gamma_0$  representa o despacho com a mesma configuração mas sem restrições de reserva de potência.

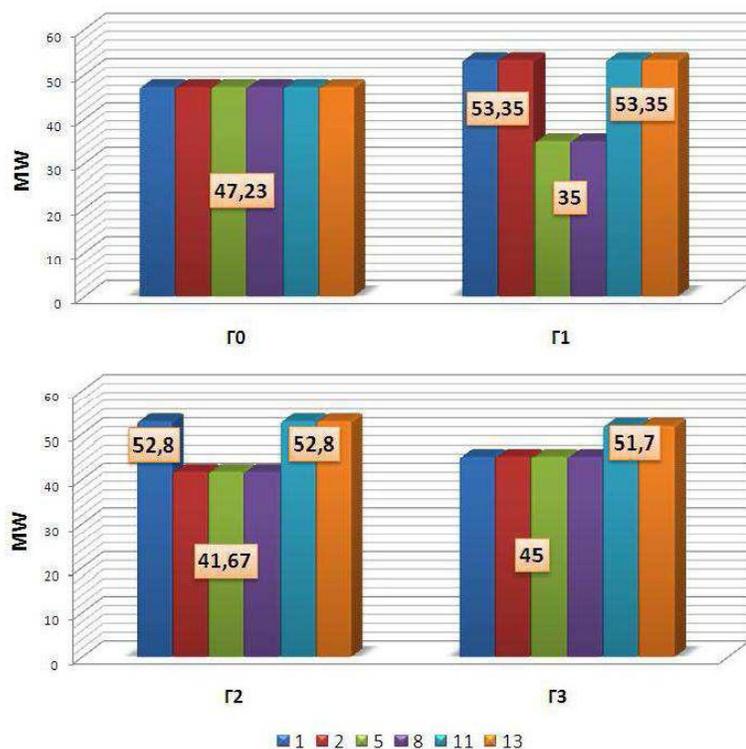


Fig. 6.3: Despatches de potências com exigência de 70MW de Reserva (a.1).

Observe na Figura 6.3 que nenhum dos geradores do sistema, em nenhum dos casos, atingiu seu limite de produção, caso isso acontecesse, esta distribuição se uniformizaria nos demais geradores ainda com capacidade de produção, isso pode ser observado na Figura 6.4 com o gráfico de despacho de potência para a reserva  $\Gamma_4$ .

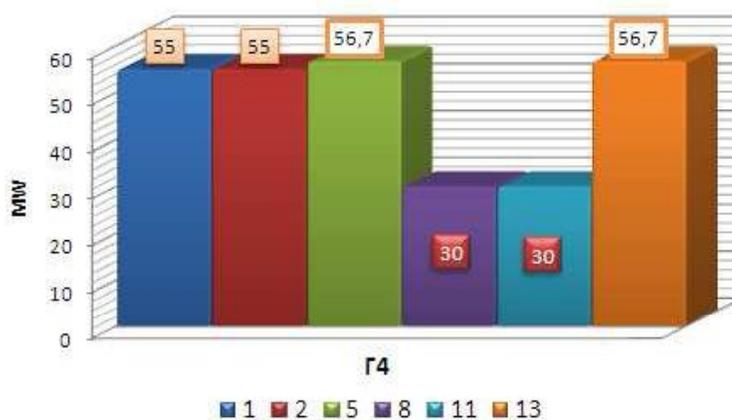


Fig. 6.4: Despatches de potências com exigência de 70MW de Reserva (a.2).

A tabela 6.4 resume os resultados obtidos até então para o sistema IEEE30:

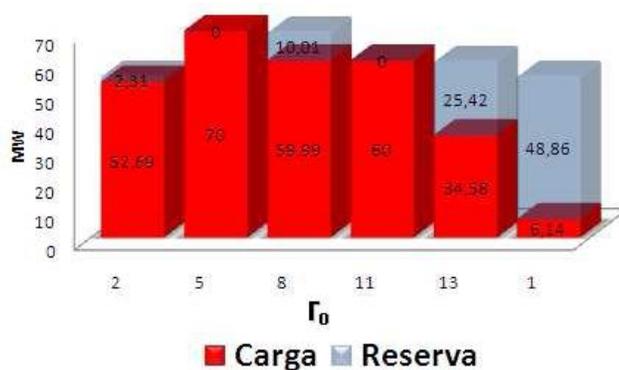
Conjuntos	Iterações	Tempo(s)	Reserva(MW)		Redução(%) de Geração em $\Gamma$	Aumento Relativo de $f_{obj}$
			Natural	Obtida		
$\Gamma_0$	8	0,010	86,60	-	-	-
$\Gamma_1$	11	0,018	45,54	70	25,91	0,176
$\Gamma_2$	9	0,014	53,31	70	11,79	0,078
$\Gamma_3$	9	0,014	61,08	70	4,73	0,012
$\Gamma_4$	11	0,08	35,54	70	31,2	0,098

Tab. 6.4: Dados Obtidos 1: Testes com IEEE30

Note que apesar de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_4$  terem o mesmo número de geradores na reserva, o custo relativo obtido com  $\Gamma_4$  foi metade, isso se dá devido a proximidade do gerador 5 em  $\Gamma_1$  das cargas. Como este não pertence a  $\Gamma_4$ , não é necessário reduzir a sua geração, fazendo com que o custo diminua.

Desta forma, há diversos fatores a serem analisados antes de escolher quais e quantos geradores devem participar da reserva de potência no sistema, como por exemplo a sua localização e a porcentagem a ser reduzida.

Agora, considerando um caso mais geral, onde minimiza-se as perdas na transmissão e o custo na geração ( $\alpha = c_m$  e  $\beta = 1$ ) tem-se o seguinte despacho ótimo sem restrição de reserva na Figura 6.5.

Fig. 6.5: IEEE30-Despacho de potência para  $\Gamma_0$ 

Observe que os geradores 5 e 11 estão em suas capacidades máximas. Com o objetivo de garantir a funcionalidade do sistema, será reservado novamente 70MW de potência para a prevenção de uma contingência no gerador 5 por exemplo. Os novos conjuntos de geradores com restrições de reserva estão listados na Tabela 6.5.

Conjuntos	Geradores
$\Gamma_1$	8
$\Gamma_2$	2 - 8
$\Gamma_3$	2 - 8 - 13
$\Gamma_4$	2 - 8 - 13

Tab. 6.5: Conjuntos  $\Gamma$  - IEEE 30 B

Iniciando os estudos para esse caso mais geral, note que  $\Gamma_1$  contém apenas um gerador, ou seja, este terá que ajudar a manter o sistema caso haja uma eventual quebra de qualquer gerador. Como sua capacidade máxima de produção é de  $70MW$ , é de se esperar que este gerador pare de produzir, fazendo com que os demais assumam este trabalho.

Para  $\Gamma_2$  haverá uma competição por quem gera mais potência para o sistema, já que agora não há mais uma distribuição uniforme de geração, tenderá a ganhar essa disputa quem estiver mais próximo da carga. Apesar de o gerador 2 estar mais próximo do maior consumidor (gerador 5) este sofrerá uma maior redução em sua produção, fazendo com que o gerador 1 assuma a produção de potência tanto para o gerador 2 quanto para o que falta no gerador 5. O gerador 8 por sua vez, possui uma demanda de  $30MW$ , assim, ele mesmo se satisfaz, já que não há nenhum gerador próximo ainda com capacidade para produção.

Em  $\Gamma_3$  o mesmo pode ser observado, pelos mesmos motivos o gerador 8 é o que menos contribui para reserva de potência. O gerador 13 não tem uma demanda a ser atendida, mas é mais barato reduzir pouco a sua produção ao invés de fazer isso com 2, já que há mais cargas a serem atendidas em sua proximidade.

Observe que o conjunto  $\Gamma_4$  é igual ao conjunto  $\Gamma_3$ , foi dado outro nome apenas para simplificar a exposição dos resultados, pois nele será exigido a reserva natural do sistema,  $86,6MW$ , para forçar ainda mais o modelo, estes despachos estão ilustrados nos gráficos da Figura 6.6.

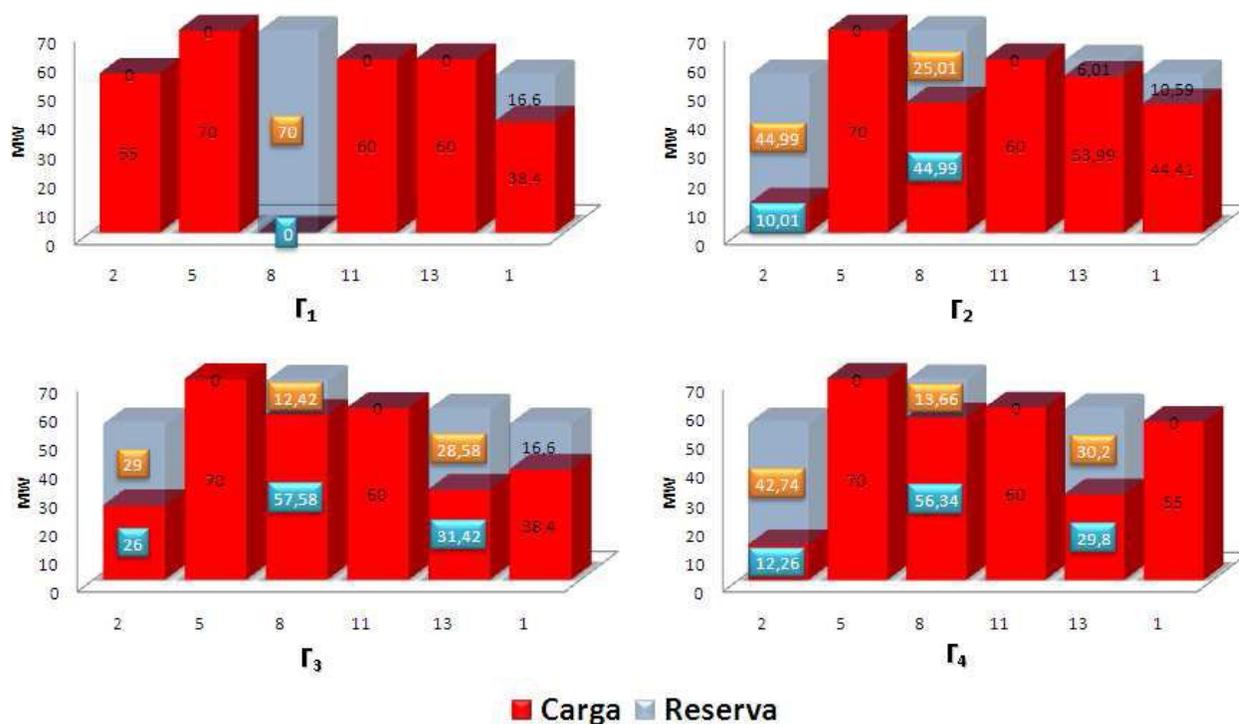


Fig. 6.6: IEEE30-Despachos de potência.

A Tabela 6.6 trás alguns resultados adicionais.

Conjuntos	Iterações	Tempo(s)	Reserva(MW)		Redução(%) de Geração em $\Gamma$	Aumento Relativo de $f_{obj}$
			Natural	Obtida		
$\Gamma_0$	6	0,001	86,6	-	-	-
$\Gamma_1$	14	0,031	10,01	70	100	0,314
$\Gamma_2$	8	0,018	12,32	70	48,81	0,099
$\Gamma_3$	7	0,015	37,74	70	21,91	0,015
$\Gamma_4$	10	0,02	37,74	86,6	33,18	0,103

Tab. 6.6: Dados Obtidos 2: Testes com IEEE30

O teste feito em  $\Gamma_1$  provocou o mesmo efeito que desligar o gerador 8 do sistema, por isso o número de iterações elevado se comparado com os demais.

Observando as Tabelas 6.6 e 6.4 pode-se ver que o número de geradores participantes da reserva e a diferença entre a reserva natural de  $\Gamma$  e a reserva desejada influência bastante tanto no número de iterações quanto no aumento relativo da função objetivo, mas vale salientar também que as propriedades dos geradores que participam da reserva em  $\Gamma$ , tais como distâncias das cargas, capacidade e demanda, devem ser exploradas, afim de minimizar o valor da função objetivo e também o número de iterações.

Outra propriedade que também deve ser observada é o limite nas linhas de transmissão, pois em alguns casos, algumas dessas linhas podem saturar, deixando assim o problema infactível.

### 6.1.2 O Sistema IEEE118

O sistema IEEE 118 possui 118 barras sendo 53 delas geradores, com uma demanda de  $4242MW$ . Este sistema representa uma porção do Sistema Elétrico Americano (no EUA do Meio Oeste) a partir de dezembro 1962 [30].

A Figura 6.7 trás o diagrama unifilar deste sistema.

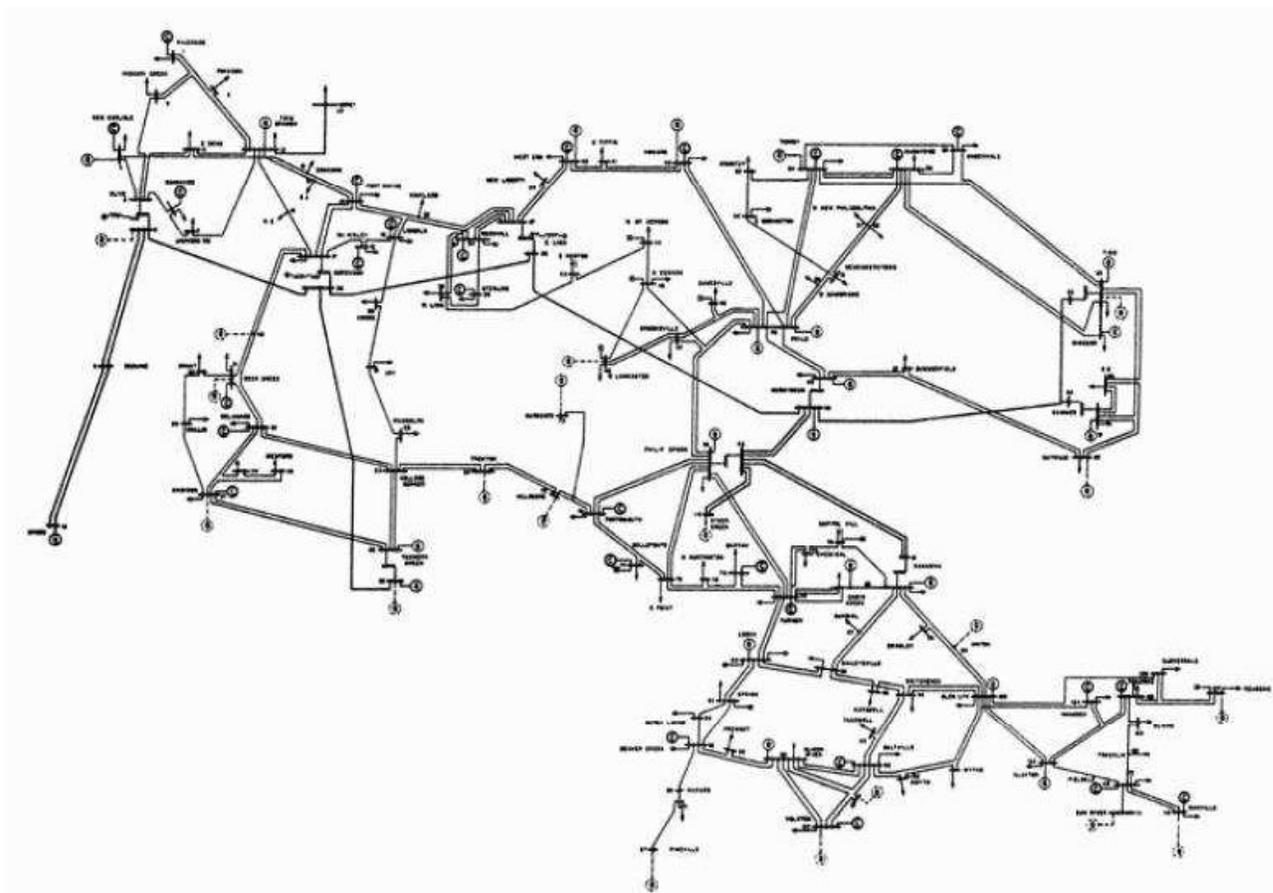


Fig. 6.7: Diagrama Unifilar - IEEE 118

A Figura 6.8 mostra o despacho de potência ótimo sem considerar reserva no sistema IEEE118. Este despacho servirá como base de comparação para os despachos obtidos considerando reserva de potência.



Fig. 6.8: IEEE118-Despacho de potência para  $\Gamma_0$ .

A Tabela 6.7 mostra os conjuntos de geradores escolhidos para participarem da reserva de potência no sistema IEEE118.

Conjuntos	Geradores
$\Gamma_1$	4 - 6 - 8
$\Gamma_2$	4 - 6 - 8 - 18 - 19
$\Gamma_3$	49 - 54 - 55 - 56 - 59 - 61 - 62 - 65
$\Gamma_4$	70 - 72 - 73 - 74 - 76 - 77 - 85 - 87 - 89 - 90 - 91

Tab. 6.7: Conjuntos  $\Gamma$  - IEEE 118

Observe que o conjunto  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ , os testes com esses conjuntos foram feitos para verificar a influência de acréscimo de geradores em um conjunto  $\Gamma$ .

A maior capacidade de produção entre os geradores deste sistema é de  $130MW$ , assim esta será a reserva exigida para os conjuntos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

Os conjuntos  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  foram escolhidos para obter toda a reserva natural do sistema, ou seja,  $358MW$ . Os testes para esses conjuntos servem para comparar a influência de cada  $\Gamma$ .

Assim, seguem os despachos obtidos a partir da reserva exigida nos conjuntos de geradores da Tabela 6.7.

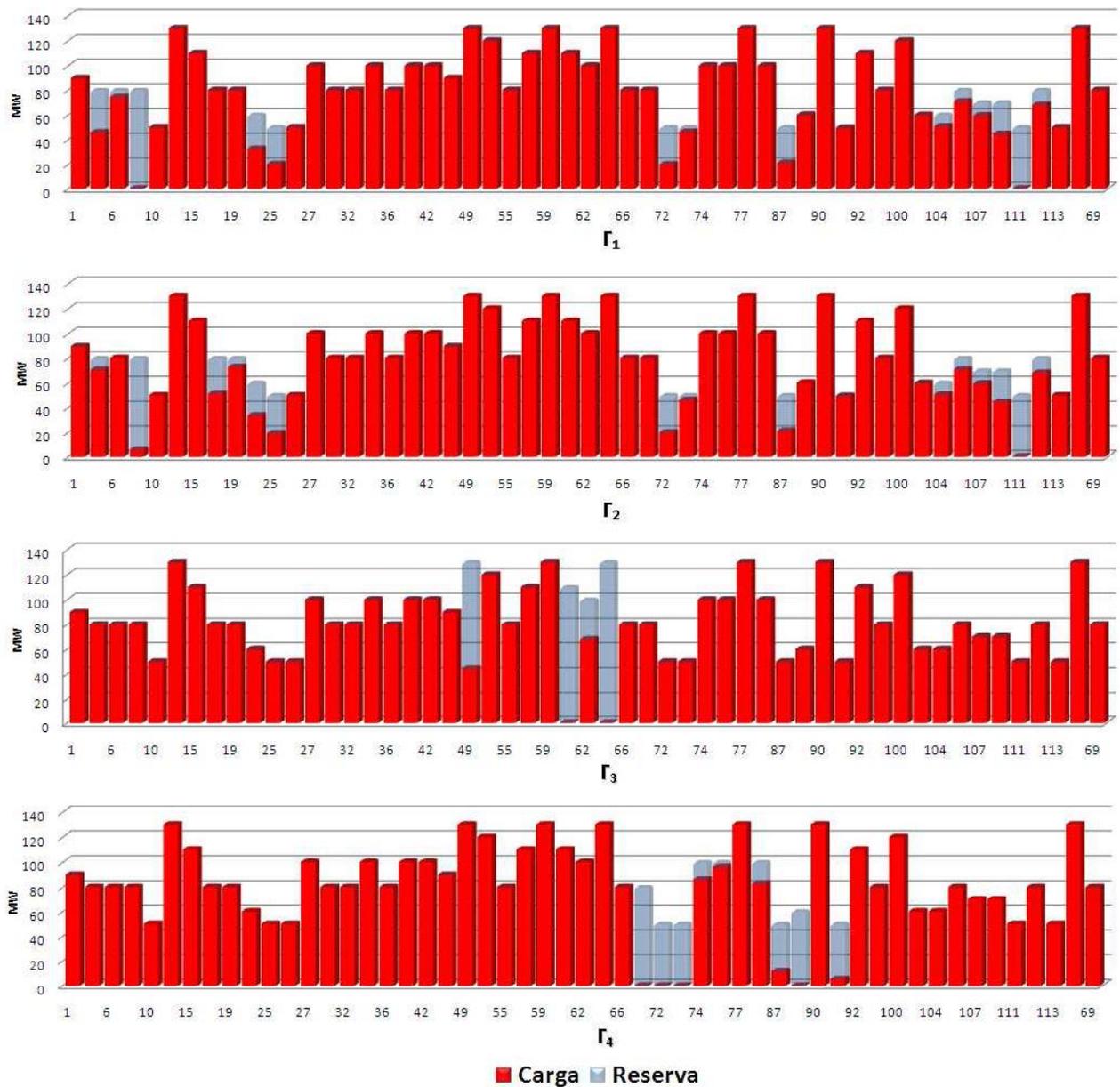


Fig. 6.9: IEEE118 - Despachos de potência.

Observe que os geradores acrescentados a  $\Gamma_1$  formando  $\Gamma_2$  contribuíram com a reserva, mas o número de iterações aumentou .

Por apresentar uma reserva natural de potência o conjunto  $\Gamma_4$  leva vantagens sobre o conjunto  $\Gamma_3$  obtendo o ótimo em menos iterações(ver Tabela 6.8).

A tabela 6.8 resume os resultados obtidos para o sistema IEEE-118.

Conjuntos	Iterações	Tempo(s)	Reserva(MW)		Redução(%) de Geração em $\Gamma$	Aumento Relativo de $f_{obj}$
			Natural	Obtida		
$\Gamma_0$	30	0,078	358	-	-	-
$\Gamma_1$	27	0,109	0	130	50	0,059
$\Gamma_2$	30	0,018	0	130	30	0,034
$\Gamma_3$	47	0,015	0	358	41,15	1,99
$\Gamma_4$	43	0,02	71,58	358	39,55	0,91

Tab. 6.8: Dados Obtidos: Testes com IEEE118

As conclusões obtidas foram as mesmas apresentadas na seção 6.1.1.

### 6.1.3 Sistemas Equivalentes Sul/Sudeste/Centro-Oeste

Nas regiões Sul/Sudeste/Centro-Oeste habitam 64% dos brasileiros, são em média importadoras de eletricidade já que produzem cerca de 75% e consomem cerca de 79% da energia elétrica do país [31].

Algumas das causas para o alto consumo de energia elétrica na região são os elevados índices de atendimento e de eletrificação rural e também da intensa atividade econômica.

Nestas regiões estão localizadas as principais usinas hidrelétricas do país. A maioria dos aproveitamentos hidrelétricos importantes foram transformados em usinas, assim, restam poucas possibilidades de expansão da hidrogeração.

Nos últimos anos os baixos investimentos em geração e transmissão de energia têm limitado o atendimento do mercado.

Devido a importância dessa região, a seguir serão apresentados resultados numéricos para dois sistemas equivalentes, o sistema SSECO1654 e o sistema SSECO1732.

#### O Sistema SSECO1654

O sistema SSECO1654 possui 1654 barras sendo 124 delas geradores, com uma demanda de 32326,3MW.

A Figura 6.10 mostra o despacho de potência ótimo sem considerar reserva no sistema SSECO1654. Este despacho servirá como base de comparação para os despachos obtidos considerando reserva de potência.

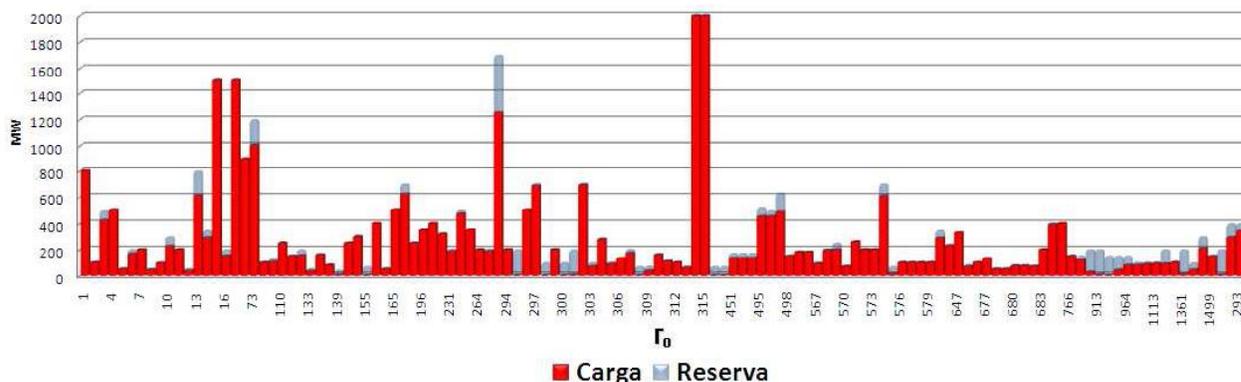


Fig. 6.10: SSECO1654-Despacho de potência para  $\Gamma_0$ .

A Tabela 6.9 mostra os conjuntos de geradores escolhidos para participarem da reserva de potência.

Conjuntos	Geradores
$\Gamma_1$	156 157 165 189 195 196 219 230 231 232 233 264 280
$\Gamma_2$	680 681 682 683 685 686 766 767 768 913 914 915 964 965 1072 1113 1115 1203 1361 1466 1498 1499 1500 1501 293
$\Gamma_3$	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 37 73 101
$\Gamma_4$	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 37 73 101

Tab. 6.9: Conjuntos  $\Gamma$  - SSECO1654

Os conjuntos  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  são propositalmente iguais, mas a reserva exigida em cada caso é diferente, enquanto em  $\Gamma_3$  exige-se a mesma reserva dos conjuntos anteriores 2200MW, em  $\Gamma_4$  exige-se a reserva total do sistema.

Assim, segue os despachos obtidos a partir da reserva exigida nos conjuntos de geradores da Tabela 6.9 nas figuras 6.11 e 6.12.

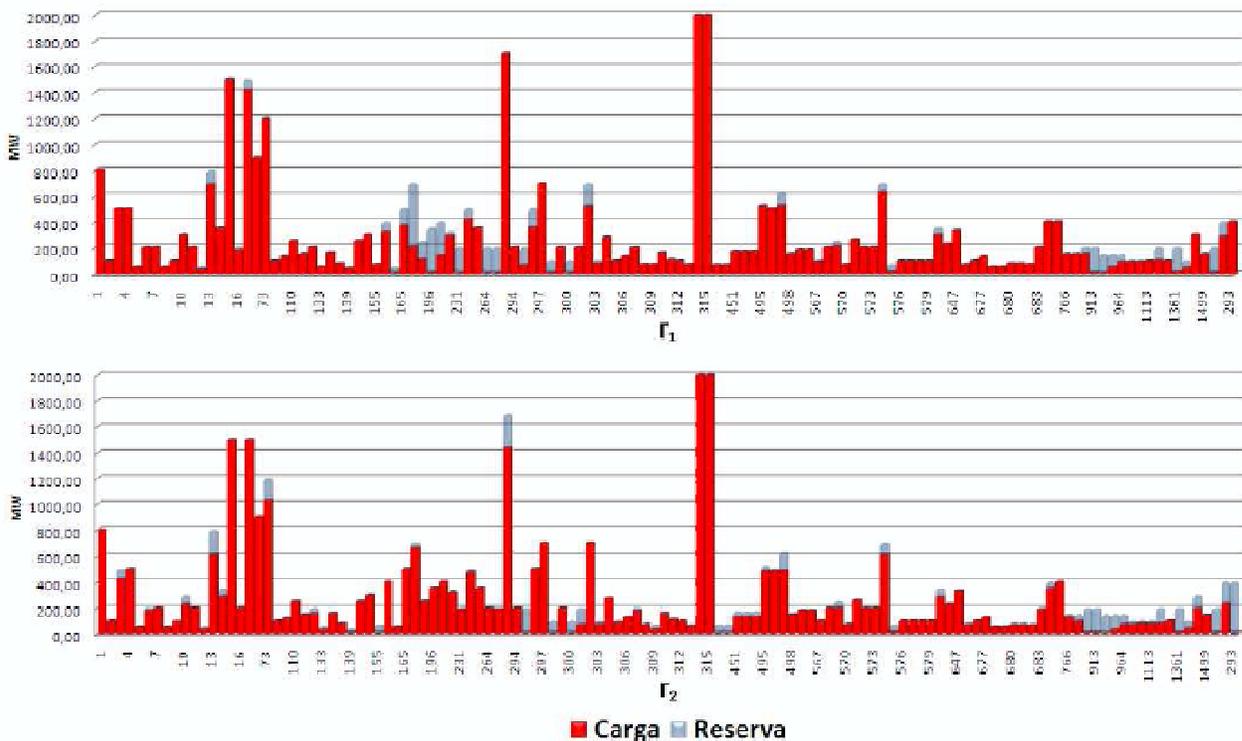


Fig. 6.11: SSECO1654 - Despachos de potência A.

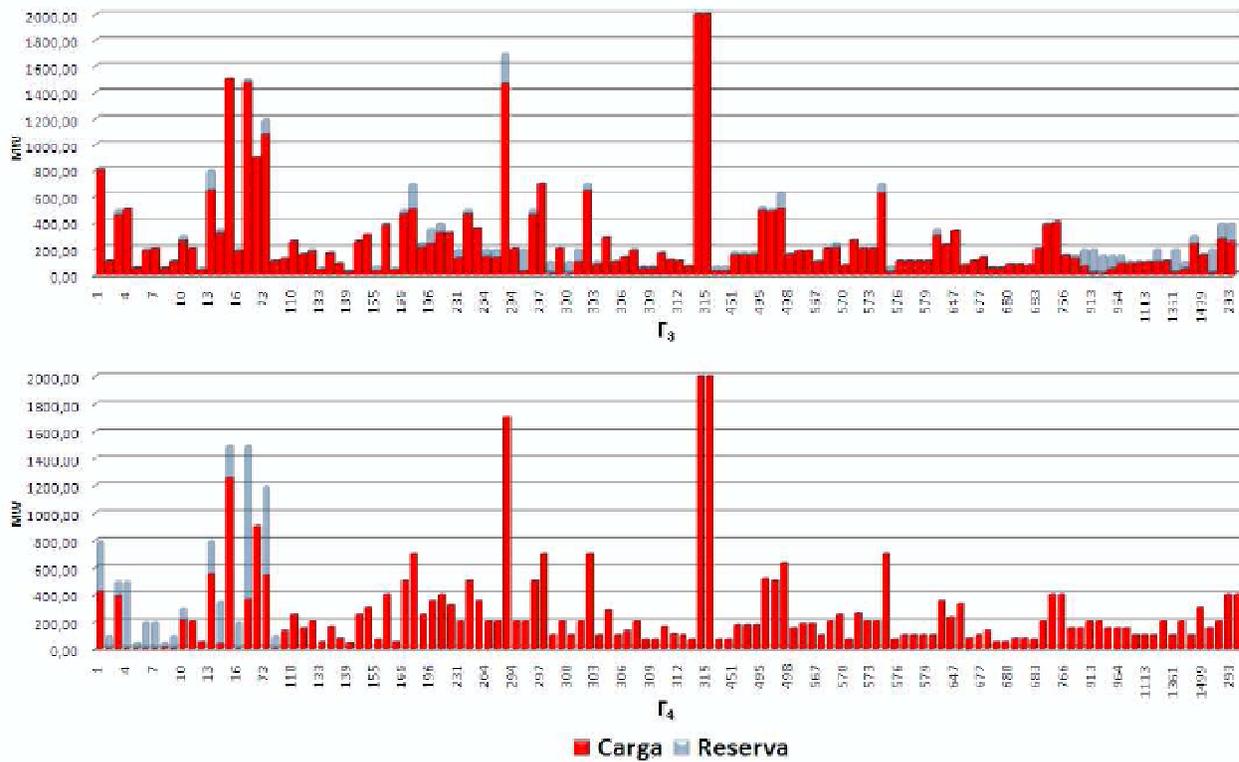


Fig. 6.12: SESCO1654 - Despachos de potência B.

Na Tabela 6.10 resumem-se os resultados obtidos:

Conjuntos	Iterações	Tempo(s)	Reserva(MW)		Redução(%) de Geração em $\Gamma$	Aumento Relativo de $f_{obj}$
			Natural	Obtida		
$\Gamma_0$	42	11,516	4673,73	-	-	-
$\Gamma_1$	57	15,53	133,02	2200	48,22	0,052
$\Gamma_2$	48	13,17	1602,3	2200	19,11	0,016
$\Gamma_3$	57	15,63	697,41	2200	16,88	0,012
$\Gamma_4$	79	21,57	697,41	4673,73	44,66	0,15

Tab. 6.10: Dados Obtidos: Testes com SESCO1654

### O Sistema SSECO1732

O sistema equivalente *SSECO1732* possui 1732 sendo 115 delas geradores com uma demanda de 35658,1MW. A Figura 6.13 mostra o despacho de potência sem considerar restrições de reserva.

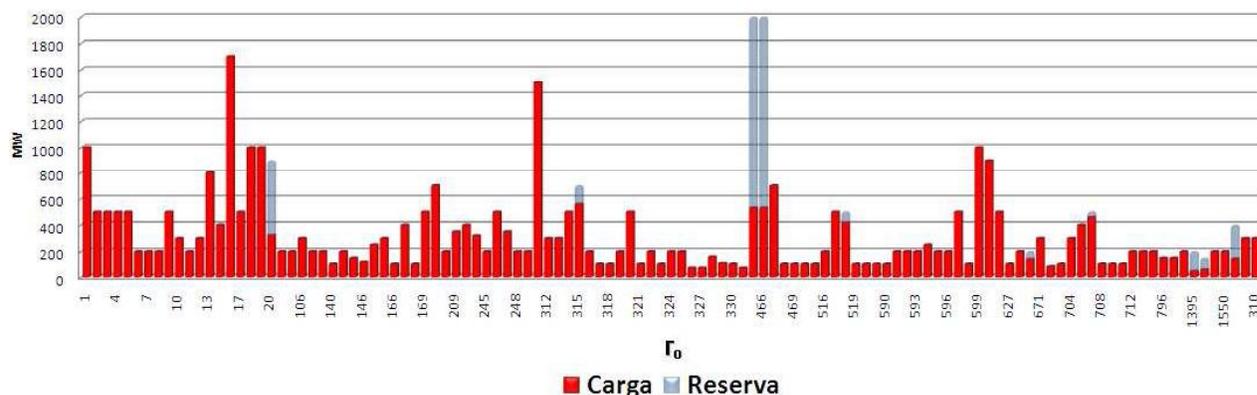


Fig. 6.13: SSECO1732-Despacho de potência para  $\Gamma_0$ .

A Tabela 6.11 mostra os conjuntos de geradores que participarão da reserva de potência.

Conjuntos	Geradores
$\Gamma_1$	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
$\Gamma_2$	$\Gamma_1 \cup$ 13 14 16 17 18
$\Gamma_3$	$\Gamma_2 \cup$ 11 12 19 20

Tab. 6.11: Conjuntos  $\Gamma$  - SSECO1732

A figura 6.14 trás os despachos obtidos com os geradores em  $\Gamma_n$  participando da reserva de potência.

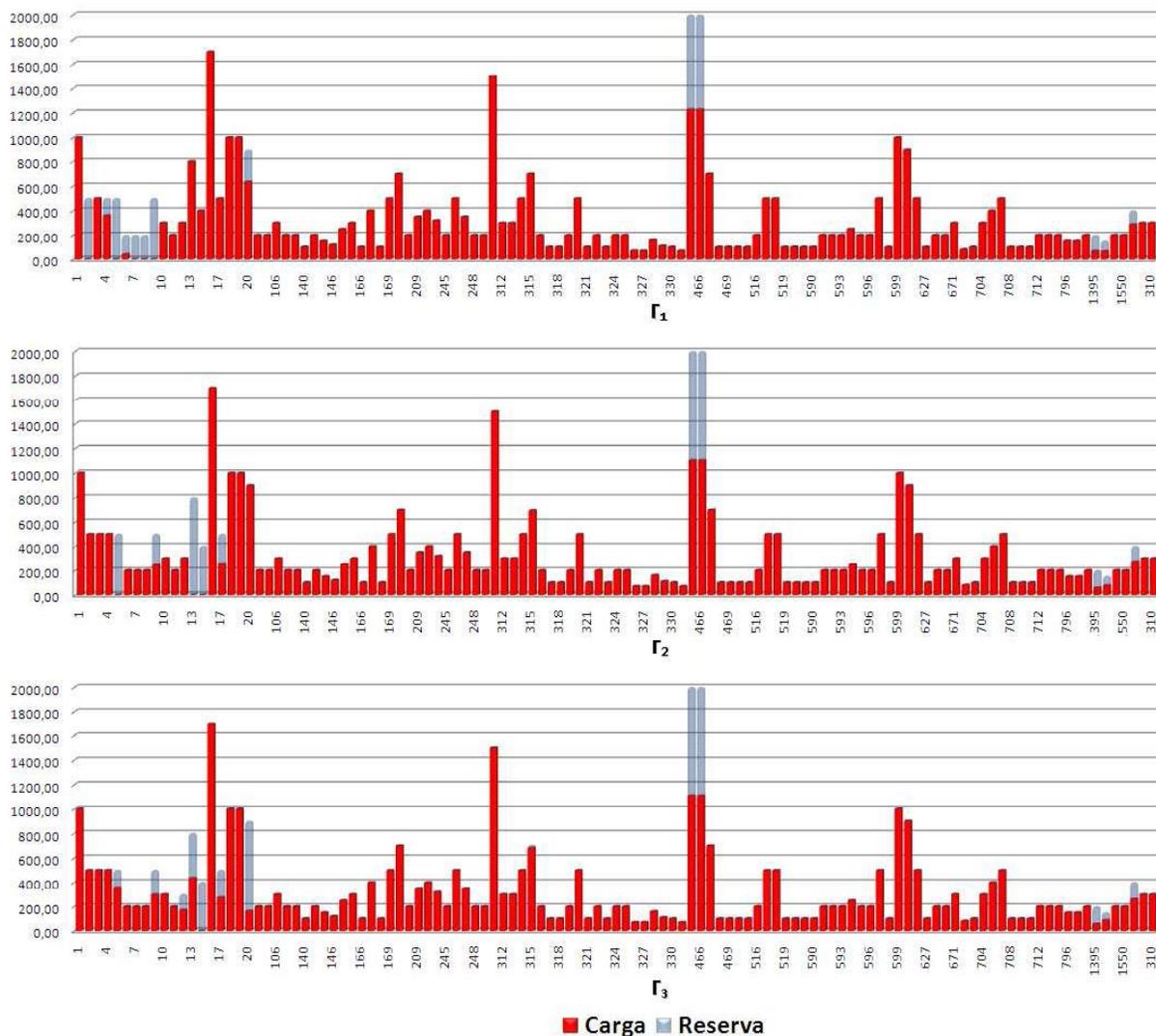


Fig. 6.14: SESCO1732 - Despachos de potência.

Na Tabela 6.12 resumem-se os resultados obtidos para esse sistema.

Conjuntos	Iterações	Tempo(s)	Reserva(MW)		Redução(%) de Geração em $\Gamma$	Aumento Relativo de $f$
			Natural	Obtida		
$\Gamma_0$	56	12,3	4341,89	-	-	-
$\Gamma_1$	61	18,04	0	2200	50	0,267
$\Gamma_2$	59	17,76	0	2200	25	0,165
$\Gamma_3$	57	16,85	576,91	2200	15,28	0,128

Tab. 6.12: Dados Obtidos: Testes com SESCO1732

### 6.1.4 O Sistema BRASIL

O sistema equivalente BRASIL é um sistema de 1993 barras sendo 151 delas geradores, este sistema possui uma demanda de 40155,2MW

A Figura 6.15 ilustra o despacho de potência sem considerar restrições de reserva:

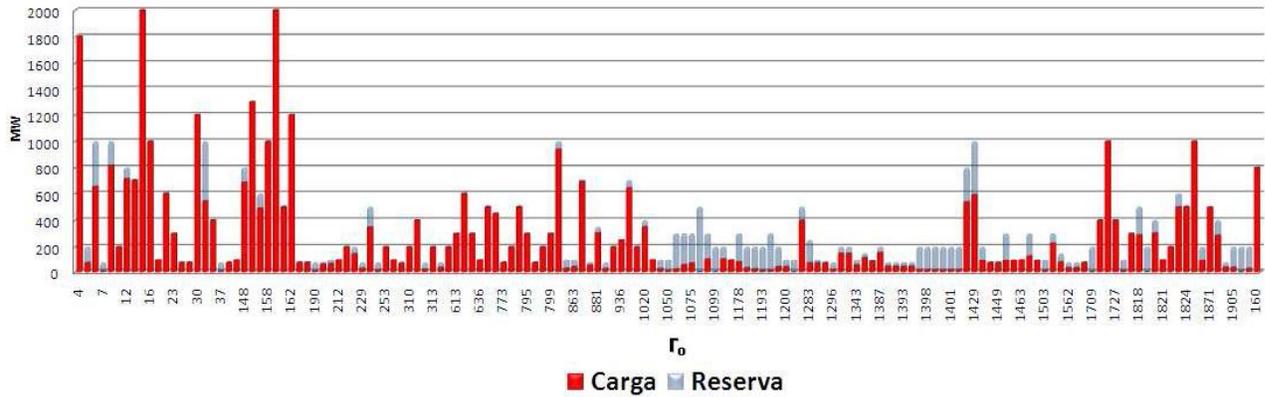


Fig. 6.15: BRASIL-Despacho de potência para  $\Gamma_0$ .

A Tabela 6.13 mostra os conjuntos de geradores que irão participar da reserva:

Conjuntos	Geradores
$\Gamma_1$	4 5 6 7 8 11 12 13
$\Gamma_2$	$\Gamma_1 \cup$ 1822 1823 1824 1825 1859 1871
$\Gamma_3$	$\Gamma_2 \cup$ 773 788 793 795 796 797

Tab. 6.13: Conjuntos  $\Gamma$  - BRASIL

A Figura 6.16 mostra os despachos obtidos com a inserção de restrições de reserva nos conjuntos  $\Gamma_n$ .

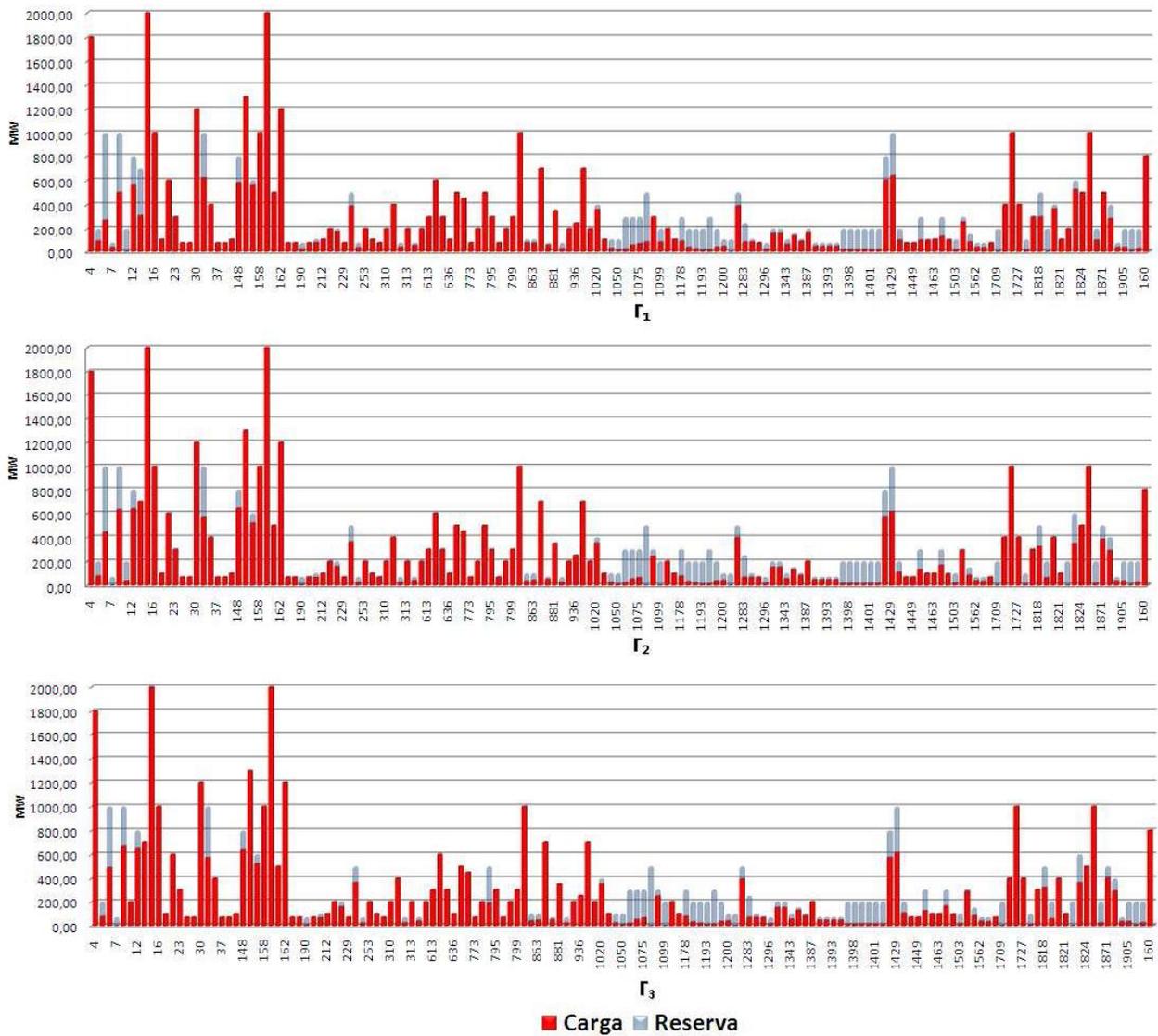


Fig. 6.16: BRASIL - Despachos de potência.

Na Tabela 6.14 resumem-se os dados obtidos:

Conjuntos	Iterações	Tempo(s)	Reserva(MW)		Redução(%) de Geração em $\Gamma$	Aumento Relativo de $f_{obj}$
			Natural	Obtida		
$\Gamma_0$	55	13,33	10844,8	-	-	-
$\Gamma_1$	63	19,11	817,98	2200	27,91	0,0002
$\Gamma_2$	60	18,33	1031,22	2200	15,10	0,0002
$\Gamma_3$	63	19,95	1031,22	2200	12,57	0,0001

Tab. 6.14: Dados Obtidos: Testes com BRASIL

Para finalizar este trabalho tem-se a próxima seção com as conclusões obtidas.

# Capítulo 7

## Conclusões

Os testes feitos na Seção 6 mostraram que o modelo se comporta como o esperado, reservando a quantidade exigida de potência em um subconjunto  $\Gamma$  de geradores e fazendo com que os demais assumam a responsabilidade de gerar esta potência que não foi produzida em  $\Gamma$  e de forma otimizada, satisfazendo assim a demanda do sistema.

Quando não foi exigido reserva de potência, ou seja  $\tau = 0$ , a implementação do modelo com restrições de reserva apresentou o mesmo comportamento que o modelo sem tais restrições.

A convergência do método está diretamente ligada ao quanto se exige de reserva de potência no subconjunto  $\Gamma$  de geradores. A não convergência se deu apenas em casos em que houve um saturamento de algumas linhas de transmissão, levando a um problema infactível.

Outro fato importante observado nos testes feitos na Seção 6 foi que quanto maior for a diferença entre a reserva exigida para  $\Gamma$  e sua reserva natural, maior será o número de iterações necessárias para a convergência, o que era de se esperar já que assim há maior mudança na alocação de potência entre os demais geradores, forçando ainda mais o modelo.

O número de iterações também é influenciado pelo número de geradores em  $\Gamma$ , podendo, com a mesma reserva natural, reduzir uma ou duas iterações com o simples acréscimo de um gerador em  $\Gamma$ .

Vale salientar também que as propriedades dos geradores em  $\Gamma$ , tais como distâncias das cargas, capacidade e demanda, devem ser exploradas, a fim de minimizar o valor da função objetivo e também o número de iterações.

O valor da função objetivo esperado aumento com a inserção de restrições de reserva, mas este

valor pode ser reduzido com o estudo das propriedades dos geradores a serem inseridos em  $\Gamma$ . A quantidade de geradores utilizados também é um fator importante para minimizar a função objetivo, mas vale destacar que não faz sentido algum deixar todos os geradores do sistema participando da operação de reserva, pois isso levaria ao modelo sem tais restrições, não auxiliando o sistema em uma eventual contingência como a queda de um gerador.

Os tempos para convergência dos testes com o modelo com restrições de reserva de potência foram satisfatórios e próximos aos obtidos com o modelo sem tais restrições, assim pode-se dizer que as restrições não influenciam muito nesse fator apesar de aumentarem as dimensões do sistema a ser resolvido.

De um modo geral, mesmo obtendo número de iterações e tempo superiores ao obtido pelo modelo sem restrições de reserva, este modelo se mostrou eficiente já que para este problema é necessária a resolução de dois sistemas lineares, ambos com a dimensão do número de barras, diferentemente do problema sem considerar reserva de potência, que é necessária a resolução de apenas um sistema linear com a dimensão do número de barras.

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Adler, Mauricio G. C. Resende, G. Veiga, and N. Karmarkar. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297–335, 1989.
- [2] J. Gondzio. Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming. *Computational Optimization and Applications*, 6:137–156, 1996.
- [3] I. J. Lustig, R. E. Marsten, and D. F. Shanno. On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior point method for linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 2:435–449, 1992.
- [4] A. R. L. Oliveira and D. C. Sorensen. A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming. *Linear Algebra and Its Applications*, 394:1–24, 2005.
- [5] J. A. Momoh, M. E. El-Hawary, and R. Adapa. A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II Newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):105–111, 1999.
- [6] V. H. Quintana, G. L. Torres, and J. Medina-Palomo. Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):170–176, 2000.
- [7] G. Sporre. On some properties of interior methods for optimization, 2003.
- [8] P. Davis K. Clements and K.D. Frey. An interior point algorithm for weighted least absolute value power system state estimation. *IEEE/PES Winter Meeting*, 1991.
- [9] R. J. Vanderbei. *Linear Programming – Foundations and Extensions*. Kluwer Academics Publishers, Boston, USA, 1996.
- [10] S. J. Wright. *Primal–Dual Interior–Point Methods*. SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1996.
- [11] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MA, 1996.
- [12] S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4):575–601, 1992.

- [13] M. F. Carvalho, S. Soares, and T. Ohishi. Optimal active power dispatch by network flow approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(3):1640–1647, 1988.
- [14] A. R. L. Oliveira, S. Soares, and L. Nepomuceno. Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4):1235–1240, November 2003.
- [15] S. Granville. Optimal reactive power dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):136–146, 1994.
- [16] L. M. R. Carvalho. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados Pré-Despacho de um Sistema Hidroelétrico Usando o Princípio de Mínimo Esforço – Comparação com o Modelo de Fluxo em Redes*. PhD thesis, ICMC – USP, São Carlos SP, Novembro, 2005. <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-06072006-153856/>.
- [17] A. T. Azevedo. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados em Sistemas de Potência Modelados por Fluxo em Redes*. PhD thesis, FEEC – UNICAMP, Campinas SP, Março, 2006. <http://libdigi.unicamp.br/document/?view=vtls000377599>.
- [18] R. W. Probst. Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico, Março, 2006. <http://libdigi.unicamp.br/document/?view=vtls000378249>.
- [19] S. M. S. Carvalho. Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidroelétrico com manobras programadas, Agosto, 2007.
- [20] S. Soares and Clóvis T. Salmazo. Minimum loss predispach model for hydroelectric systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(3):1220–1228, 1997.
- [21] Y. M. Rodrigues and O. R. Saavedra. Minimização dos custos do serviço de potência reativa fornecida pelos geradores com reserva de potência: Uma abordagem evolutiva. *Revista Controle & Automação*, 18, 2007.
- [22] INEE. Contribuição do instituto nacional de eficiência energética inee à audiência pública nº 010/2006 para alterar a resolução normativa nº 265/03 da aneel sobre os serviços ancilares. 2006. [http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/audiencia/arquivo/2006/010/contribuicao/inee\\_-\\_instituto\\_nacional\\_de\\_efici%C3%Aancia\\_energetica.pdf](http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/audiencia/arquivo/2006/010/contribuicao/inee_-_instituto_nacional_de_efici%C3%Aancia_energetica.pdf).
- [23] ONS. Administração dos serviços ancilares. 2007. <http://www.ons.org.br>.
- [24] M.Th.Schilling R.N.Foutoura.F P.Gomes, J.C.F.Luz and M.Groetaers S. Subsídios para distribuição de custos de serviços ancilares para gestão da rede. *XIV SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, 1997.
- [25] D.Shinmohommoadi and A.Vojdani. An overview of ancillary services. *V Simpósio de Especialistas em Planejamento Operacional de Expansão Elétrica*, 2006.
- [26] ONS. Apuração dos serviços ancilares. 2007. <http://www.ons.org.br>.

- 
- [27] E. Allen and M. Ilic. Reserve markets for power systems reliability. *IEEE Transactions on Power Systems* 15, pages 228 – 233, 2000.
- [28] ONS. Arranjos comerciais para serviços ancilares prestados pelos agentes de operação. 2007. <http://www.ons.org.br>.
- [29] A. R. L Oliveira and C. Lyra. Interior point methods for the polynomial  $L_\infty$  fitting problem. *International Transactions in Operational Research*, 11(3):309–322, 2004.
- [30] <http://www.ee.washington.edu/research/pstca>.
- [31] <http://www.abrasil.gov.br/infra/energia/sul.htm>.
- [32] D.G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programing*. Addison - Wesley, 1989.
- [33] H.D Sherali M.S. Bazaraa and C.M. Shetty. *Nonlinear Programing - Theory and Algorithms*. SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1979.

# Apêndice A

## O Método de Newton

### A.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada uma introdução sobre o método de Newton, iniciando com a sua aplicação unidimensional e estendendo-a para uma aplicação multidimensional, pois constitui uma ferramenta fundamental para a teoria de métodos de pontos interiores, já que este pode ser visto como uma aplicação do método de Newton às condições de otimalidade.

### A.2 O Método de Newton Unidimensional

O método de Newton para funções de uma variável tem o objetivo de estimar os zeros de uma função diferenciável  $f$ . O zero da tangente a curva é próximo ao zero da curva e é utilizado como ponto para a nova tangente e assim sucessivamente até encontrar o zero da função. Para isso, toma-se um ponto qualquer da função, calcula-se sua derivada nesse ponto, o intercepto da tangente ao eixo das abcissas e o valor da função nesse ponto, e repete-se o processo, que deve convergir a um dos zeros da função rapidamente, embora em alguns casos pode-se não obter convergência. Em notação matemática este procedimento se escreveria assim:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (\text{A.1})$$

onde  $k$  indica a  $k$ -ésima iteração do algoritmo (A.1) e  $f'(x_k)$  é a derivada da função  $f$  em  $x_k$ . A Figura A.1 ilustra graficamente o procedimento descrito em A.1.

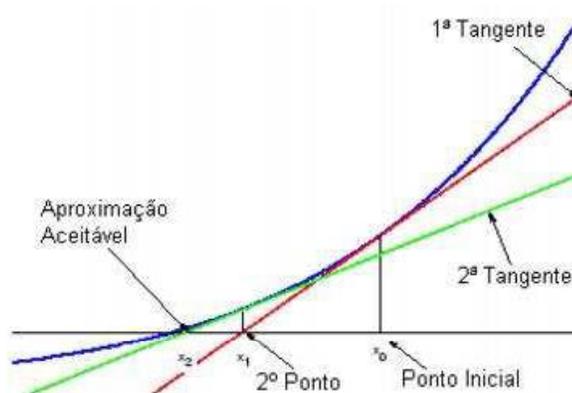


Fig. A.1: Ilustração do Método de Newton

Para que se obtenha sucesso na iteração deve-se primeiramente delimitar um intervalo, a fim de escolher um valor inicial adequado, para que a convergência de " $x_k$ " seja propícia. Para tanto existem condições a serem satisfeitas, assim:

**Teorema A.2.1 (Condições Suficientes)** *Seja  $f \in C^2[a, b]$ . Se as seguintes condições:*

- i)  $f(a)f(b) \leq 0$ ;
- ii)  $f'(x) \neq 0$ ;
- iii)  $f^{(2)}(x) \geq 0$  ou  $f^{(2)}(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  ;
- iv)  $f(x_0)f^{(2)}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

*forem satisfeitas o método de Newton converge.*

Uma vez delimitado um intervalo que cumpra tais exigências, escolhe-se para o valor-inicial o ponto mais à esquerda se o produto da primeira pela segunda derivada for negativo, ou escolhe-se o ponto mais à direita se ocorrer o contrário, se o produto for positivo.

O método(A.1) pode ser deduzido utilizando a expansão da função  $f$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_0$ , ou seja:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f^{(2)} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)} + \dots \quad (\text{A.2})$$

Aqui será utilizado apenas os dois primeiros termos da série:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) \quad (\text{A.3})$$

Esta é a equação de uma reta que passa pelo ponto  $f(x_0)$  com inclinação  $f^{(1)}(x_0)$ , isto é, ela é tangente à curva no ponto  $x_0$ .

Supondo que a função  $f(x)$  seja bem aproximada por uma reta, o ponto que essa reta cruza o eixo  $x$ , está próximo ao ponto que anula  $f$ .

Este ponto  $x$  no qual se anula  $f$  será:

$$0 = f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) \Rightarrow -f(x_0) = (x - x_0)f^{(1)}(x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{(1)}(x_0)}$$

Esse ponto  $x$  é então usado no lugar de  $x_0$  como um novo valor inicial melhorando assim a aproximação, obtendo o método (A.1).

### A.3 O Método de Newton Multidimensional

Na seção anterior foi apresentado o método de Newton para funções de uma variável, assim, nada mais natural que generalizá-lo para funções de várias variáveis.

A função  $f$  passa a ser uma função vetorial da forma:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, f_i \in \mathcal{C}^1 \forall i = 1 \dots m.$$

Obter  $x$  que anule  $f$  é o mesmo que obter  $x$  que anule simultaneamente cada  $f_i, i = 1 \dots m$ . Assim, usando a formula de Taylor em torno de  $x_0$  e fazendo  $f_i(x) = 0, i = 1 \dots m$  tem-se:

$$f_i(x) \approx f_i(x_0) + \nabla f_i(x)^t(x - x_0) \quad i = 1 \dots m \quad (\text{A.4})$$

o que leva a

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f_1(x)^t(x - x_0) = -f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x)^t(x - x_0) = -f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^t(x - x_0) = -f_m(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow J(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

onde  $J(x_0)$  é a matriz jacobiana de  $f$  em  $x_0$ .

Sendo assim, o método de Newton para funções de várias variáveis é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}f(x_k) \quad (\text{A.5})$$

Ao invés de uma aproximação linear da função  $f$  poderia ser feita uma aproximação local por uma função quadrática, essas aproximações ganham importância à medida em que se aproximam do ponto ótimo do problema, sendo melhores do que as lineares, mas para os objetivos desse trabalho esta aproximação linear é suficiente.

Assim conclui-se o que se necessita saber sobre o método de Newton unidimensional e multidimensional para uso na teoria de métodos de pontos interiores.

Para mais detalhes sobre o método de Newton e suas características ver [32, 33].



## Apêndice B

### Capacidades dos Sistemas Estudados

IEEE 30	
Gerador	Capacidade
2	55
5	70
8	70
11	60
13	60
1	55

IEEE 118			
Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade
1	90	65	130
4	80	66	80
6	80	70	80
8	80	72	50
10	50	73	50
12	130	74	100
15	110	76	100
18	80	77	130
19	80	85	100
24	60	87	50
25	50	89	60
26	50	90	130
27	100	91	50
31	80	92	110
32	80	99	80
34	100	100	120
36	80	103	60
40	100	104	60
42	100	105	80
46	90	107	70
49	130	110	70
54	120	111	50
55	80	112	80
56	110	113	50
59	130	116	130
61	110	69	80
62	100	-	-

Fig. B.1: Capacidades - Sistemas IEEE30 e IEEE118

SSECO 1654					
Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade
1	800	264	200	573	200
2	100	280	200	574	700
3	500	292	1700	575	70
4	500	294	200	576	100
5	50	295	200	577	100
6	200	296	500	578	100
7	200	297	700	579	100
8	50	298	100	605	350
9	100	299	200	606	230
10	300	300	100	647	330
11	200	301	200	652	80
12	50	302	700	676	100
13	800	303	100	677	130
14	350	304	280	678	50
15	1500	305	100	679	50
16	200	306	130	680	80
17	1500	307	200	681	80
37	900	308	70	682	70
73	1200	309	70	683	200
101	100	310	160	685	400
103	130	311	110	686	400
110	250	312	100	766	150
128	150	313	70	767	150
131	200	314	2000	768	200
133	50	315	2000	913	200
135	160	449	70	914	150
137	80	450	70	915	150
139	40	451	170	964	150
153	250	452	170	965	100
154	300	453	170	1072	100
155	70	495	520	1113	100
156	400	496	500	1115	200
157	50	497	630	1203	100
165	500	498	150	1361	200
189	700	499	180	1466	100
195	250	500	180	1498	300
196	350	567	100	1499	150
219	400	568	200	1500	200
230	320	569	250	1501	400
231	200	570	70	293	400
232	500	571	260	-	-
233	350	572	200	-	-

Fig. B.2: Capacidades - Sistema SSECO1654

SSECO 1732							
Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade
1	1000	165	300	325	200	599	1000
2	500	166	100	326	70	600	900
3	500	167	400	327	70	601	500
4	500	168	100	328	160	627	100
5	500	169	500	329	110	628	200
6	200	177	700	330	100	657	200
7	200	203	200	331	70	671	300
8	200	209	350	465	2000	676	80
9	500	210	400	466	2000	703	100
10	300	234	320	467	700	704	300
11	200	245	200	468	100	705	400
12	300	246	500	469	100	706	500
13	800	247	350	514	100	708	100
14	400	248	200	515	100	709	100
16	1700	309	200	516	200	710	100
17	500	311	1500	517	500	712	200
18	1000	312	300	518	500	713	200
19	1000	313	300	519	100	795	200
20	900	314	500	520	100	796	150
40	200	315	700	589	100	797	150
104	200	316	200	590	100	1109	200
106	300	317	100	591	200	1395	200
135	200	318	100	592	200	1516	150
138	200	319	200	593	200	1549	200
140	100	320	500	594	250	1550	200
142	200	321	100	595	200	1551	400
144	150	322	200	596	200	1552	300
146	120	323	100	597	500	310	300
164	250	324	200	598	100	-	-

Fig. B.3: Capacidades - Sistema SSECO1732

BRASIL							
Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade	Gerador	Capacidade
4	1800	252	70	1053	300	1429	1000
5	200	253	200	1068	300	1447	200
6	1000	284	100	1075	300	1448	70
7	70	290	70	1097	500	1449	70
8	1000	310	200	1098	300	1454	300
11	200	311	400	1099	200	1455	100
12	800	312	70	1100	200	1463	100
13	700	313	200	1102	100	1484	300
14	2000	314	70	1178	300	1488	100
16	1000	611	200	1184	200	1503	100
17	100	613	300	1185	200	1509	300
21	600	616	600	1193	200	1553	150
23	300	635	300	1194	300	1562	70
24	70	636	100	1197	200	1569	70
25	70	765	500	1200	100	1700	70
30	1200	767	450	1202	100	1709	200
33	1000	773	70	1264	500	1717	400
36	400	788	200	1283	250	1723	1000
37	70	793	500	1284	100	1727	400
38	70	795	300	1285	70	1732	100
40	100	796	70	1296	70	1800	300
148	800	797	200	1303	200	1818	500
150	1300	799	300	1304	200	1819	200
156	600	834	1000	1343	100	1820	400
158	1000	857	100	1357	150	1821	100
159	2000	863	100	1364	100	1822	200
161	500	872	700	1387	200	1823	600
162	1200	878	70	1391	70	1824	500
163	70	881	350	1392	70	1825	1000
164	70	885	70	1393	70	1859	200
190	70	901	200	1394	70	1871	500
191	70	936	250	1397	200	1900	400
192	100	955	700	1398	200	1904	70
212	100	983	200	1399	200	1905	200
227	200	1020	400	1400	200	1957	200
228	200	1028	100	1401	200	1962	200
229	70	1048	100	1402	200	160	800
230	500	1050	100	1424	800	-	-

Fig. B.4: Capacidades - Sistema BRASIL