Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Controle Robusto por Alocação de Pólos via Análise Intervalar Modal

Autora: Márcia Lissandra Machado Prado

Orientador: Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Banca Examinadora

Paulo Augusto Valente Ferreira, Prof.Dr. . . . . (FEEC/Unicamp)
Ricardo Lüders, Prof.Dr. . . . . (CEFET/PR)
Ely Carneiro de Paiva, Prof.Dr. . . . . (CENPRA/MCT)
Basílio Ernesto de Almeida Milani, Prof.Dr. . . . . (FEEC/Unicamp)
Rafael Santos Mendes, Prof.Dr. . . . . (FEEC/Unicamp)

Campinas, SP

Fevereiro/2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Prado, Márcia Lissandra Machado Prado
P882c	Controle robusto por alocação de pólos via análise intervalar modal / Márcia Lissandra Machado Prado. – Campinas, SP: [s.n.], 2006.
	Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Teoria de controle. 2. Sistemas lineares invariantes no tempo. 3. Alocação de pólos. 4. Incerteza. 5. Análise de intervalos (Matemática). 6. Polinômios. 7. Otimização matemática. I. Ferreira, Paulo Augusto Valente. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Titulo em Inglês: Robust control by pole assignment using modal intervals analysis
Palavras-chave em Inglês: Uncertain linear systems, Pole assignment, Intervals, Polynomials, Numerical algorithms
Área de concentração: Automação
Titulação: Doutora em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: Ricardos Lürders, Ely Carneiro de Paiva, Basílio Ernesto de Almeida Milani e Rafael Santos Mendes
Data da defesa: 10/02/2006

Resumo

Uma abordagem baseada em análise intervalar para o projeto de controladores por realimentação de estados robusta é proposta. Demonstra-se que quando especificações para alocação de pólos são representadas por conjuntos espectrais de polinômios intervalares, o problema do projeto por realimentação de estados robusta pode ser completamente formulado e resolvido no contexto de conceitos e métodos de análise intervalar. Representações poliédricas convexas de uma classe de controladores por realimentação de estados robusta satisfazendo a uma equação de Ackerman intervalar são derivadas. Um procedimento de projeto baseado em programação não-linear que objetiva a maximização da não-fragilidade do controlador robusto resultante é introduzido. Para sistemas multivariáveis é proposta uma abordagem por alocação de pólos utilizando a equação de Sylvester intervalar e técnicas de resolução baseadas em intervalos modais. Exemplos numéricos ilustram o projeto de controladores por realimentação de estados obtidos a partir da abordagem por análise intervalar proposta.

Palavras-chave: sistemas lineares incertos, alocação de pólos, intervalos,polinômios, algoritmos numéricos.

Abstract

An interval analysis approach for the design of robust state feedback controllers is proposed. It is shown that when regional pole placement specifications are represented as spectral sets of interval polynomials, the robust state feedback design problem can be entirely formulated and solved in the context of the concepts and methods of interval analysis. Explicit convex polyhedral representations of a class of robust state feedback controllers satisfying an *interval Ackerman's equation* are derived. A design procedure based on nonlinear programming which aims at maximizing the non-fragility of the resulting robust controller is introduced. In the case multivariable systems is proposed an approach based on pole placement which employs an interval Sylvester equation and modal intervals techniques. Numerical examples illustrate the design of robust state feedback controllers through the interval analysis approaches proposed.

Keywords: uncertain linear systems, pole assignment, intervals, polynomials, numerical algorithms.

Dedico este trabalho à minha mãe Lili,
ao meu pai Remo (in memorian),
e ao meu querido amado Marcos.

"Os ideais são como as estrelas:
você não conseguirá tocá-las com suas mãos.
Mas como os marinheiros nas águas desertas,
elas podem guiá-lo e, seguindo as estrelas,
você chegará ao seu destino".

Carl Schurz

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por sua luz e imensa sabedoria.

Agradeço também a todos os santos e espíritos de luz que estiveram ao meu lado, em especial a Santa Terezinha do Menino Jesus.

À minha mãe Lili, por todo seu apoio e compreensão, e sua imensa generosidade. Ao meu pai Remo, que embora não esteja mais fisicamente entre nós, foi sempre um grande exemplo de profissional, e por ter investido na minha educação.

Ao meu querido amado Marcos, que sempre esteve ao meu lado, tantos nos melhores como nos piores momentos, sempre me incentivando com palavras e gestos carinhosos.

À minha família, meus irmãos Cristina, Sônia e Sávio, meus sobrinhos Daniel, Meriane, Louise, Rodrigo, Larissa, Giovana e Guilherme, meus cunhados Ivan e Denise, à Madinha, à Aparecida e à Baby, por sempre terem acreditado em mim, e por terem me passado motivação.

Em especial, gostaria de agradecer a minha irmã Sônia pelo imenso carinho e paciência em fazer a revisão do português.

Aos meus amigos Karina, Marcelo, Isabella, Breno, Tiago, Luciana, Juliana, Pascoal, Gracinha, Maristela, Martha, Joailton, Rose, Dona Lourdes, Cláudio e Guilherme por todo apoio durante esta jornada e consideração para comigo, principalmente nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Paulo Augusto Valente Ferreira, sou grata pela orientação, principalmente por ter acreditado em mim, e por ter compartilhado comigo uma parte de sua sabedoria, além de sua generosidade e amizade.

Aos Profs. Basílio, Rafael, Ricardo e Ely, pela ajuda com críticas, sugestões e comentários na correção da tese.

Aos colegas Alfredo, Edvaldo, Rúbia e Fábio pelo companheirismo e por terem compartilhado conhecimento.

Aos demais colegas de pós-graduação, pela convivência, ajuda, críticas e sugestões, especialmente aos colegas Vinícius e Ricardo pelo grande auxílio na entrega da versão final da tese.

À CAPES,ao CNPq, e à FAEPEX, pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$[a]'$	-	Número intervalar clássico
$[a]$	-	Número intervalar modal
$\underline{a}$	-	Limitante inferior de intervalo
$\overline{a}$	-	Limitante supeiror de intervalo
a_ω	-	Largura de intervalo
a_c	-	Centro de intervalo
δ	-	Raio de intervalo
$\|[a]\|$	-	Magnitude de intervalo
$*$	-	Símbolos $+, -, ., /$
$R(f([x]))$	-	Imagem de f sobre $[x]$
fR	-	Extensão intervalar racional
$\mathbf{A^T}$	-	Matriz transposta
$[\mathbf{A}]'$	-	Matriz intervalar clássica
$[a_{ij}]'$	-	Elementos da matriz intervalar clássica
$[\mathbf{A}]$	-	Matriz intervalar modal
$[a_{ij}]$	-	Elementos da matriz intervalar modal
$\mathbf{A}_\omega$	-	Largura de intervalo
$\mathbf{A_c}$	-	Centro de intervalo
$\boldsymbol{\Delta}$	-	Raio de intervalo
$\|[\mathbf{A}]\|$	-	Determinante da matriz intervalar
$[\mathbf{a}]'$	-	Vetor intervalar clássico
$[\mathbf{a}]$	-	Vetor intervalar modal
$[a_i]'$	-	Elemento do vetor intervalar clássico
$[a_i]$	-	Elementos do vetor intervalar modal
$\mathbb{R}$	-	Conjunto dos números reais
$I(\mathbb{R})$	-	Conjunto dos intervalos clássicos
$I(\mathbb{R}^n)$	-	Conjunto dos vetores intervalares clássicos
$I(\mathbb{R}^{m\times n})$	-	Conjunto das matrizes intervalares clássicas
$I^*(\mathbb{R})$	-	Conjunto dos intervalos modais
$I^*(\mathbb{R}^n)$	-	Conjunto dos vetores intervalares modais
$I^*(\mathbb{R}^{m\times n})$	-	Conjunto das matrizes intervalares modais

Capítulo 1

Introdução

O problema de projeto de controladores por realimentação de estados para sistemas lineares invariantes no tempo tem sido extensamente tratado na literatura de controle. Condições de estabilidade via realimentação de estados, assim como soluções baseadas no princípio de realimentação de estados para problemas de alocação de pólos sob a suposição de um sistema precisamente conhecido estão completamente caracterizadas (Chen, 1999). Contudo, modelos de sistemas reais podem incluir parâmetros desconhecidos, porém limitados a conjuntos compactos, freqüentemente descritos na forma de intervalos fechados. Neste caso, estabilização e desempenho via realimentação de estados devem ser tratados em um sentido robusto.

O problema de controle robusto consiste em encontrar um ganho de realimentação de estados que aloque todos os pólos do sistema em malha fechada no semiplano esquerdo do plano complexo (estabilização robusta) ou em alguma região predeterminada (desempenho robusto) para todos os possíveis conjuntos de parâmetros do sistema. O problema de estabilização robusta foi tratado na literatura através de duas abordagens distintas, o método da análise robusta e o método da síntese robusta (Wei, 1994). Na primeira, o sistema incerto é visto como um sistema nominal sujeito a perturbações. Constrói-se um controle realimentado para estabilizar o sistema nominal utilizando métodos clássicos de projeto de sistemas lineares, e prova-se que o sistema em malha fechada permanece estável na presença de todas as perturbações admissíveis. Métodos que se encaixam nesta categoria foram propostos em (Yedavali, 1985) e (Zhou e Khargonekar, 1987), por exemplo. De acordo com a segunda abordagem, a estabilizabilidade do sistema incerto é inicialmente verificada e então um controlador estabilizante é projetado. Condições de estabilidade para sistemas incertos e os seus respectivos métodos de projeto foram propostos em (Wei, 1994) e (Wei e Barmish, 1989), entre outros.

Nesta tese, abordagens por realimentação robusta de estados para sistemas intervalares lineares invariantes no tempo, que combinam algumas das características das metodologias acima, são propostas. Em um primeiro estudo, como em (Keel e Battacharyya, 1999), especificações de alocação regional de pólos são formuladas como conjuntos espectrais de polinômios intervalares que podem ser eficientemente descritos através do Teorema das Arestas (Bartlett et al., 1988). O projeto de controladores por realimentação robusta de estados é baseado na aplicação de conceitos e métodos de análise intervalar (Alefeld e Herzberger, 1983), dada uma representação matricial intervalar do sistema. Técnicas baseadas em análise intervalar estão se tornando importantes ferramentas em diversas áreas relacionadas ao projeto de sistema de controle, como amplamente discutido em (Jaulin et al., 2001).

A análise intervalar clássica leva à sobreestimação de intervalos resultantes das operações intervalares devido, principalmente, ao efeito de multiincidências de parâmetros intervalares. Técnicas baseadas em intervalos modais (Gardenes et al., 2001) são um complemento das técnicas de análise intervalar clássicas, e podem ser empregadas para contornar problemas resultantes de multiincidências, ao introduzirem interpretações mais completas aos intervalos resultantes. Através da análise intervalar modal, intervalos menores resultam de operações intervalares e de extensões intervalares para funções.

Nesta tese são abordados projetos para controladores robustos por alocação de pólos para sistemas intervalares. Numa primeira abordagem, a alocação de pólos robusta é obtida através da equação de Ackerman intervalar (Smagina e Brewer, 2002), associada à conhecida fórmula de Ackerman para alocação de pólos de sistemas determinísticos. A abordagem proposta estende resultados sobre soluções internas de equações intervalares lineares (Rohn, 1986) e o formalismo derivado em (Lordelo e Ferreira, 2002) para sistemas descritos por funções de transferência. De acordo com essas abordagens, controladores por alocação robusta de pólos são vistos como soluções internas de uma equação Diofantina Intervalar. Como a equação de Ackerman (intervalar) é basicamente utilizada em projetos de controladores para sistemas monovariáveis, para sistemas multivariáveis propõe-se uma segunda abordagem para alocação robusta de pólos centrada na utilização de uma equação de Sylvester intervalar, que estende o formalismo introduzido em (Battacharyya e de Souza, 1982) para sistemas determinísticos, e baseada em técnicas de análise intervalar modal (Gardenes et al., 2001).

A Tese está organizada como segue. No Capítulo 2, são introduzidos conceitos e resultados básicos de análise intervalar clássica e algumas caracterizações de soluções de equações intervalares lineares. No Capítulo 3, aborda-se análise intervalar modal em seus aspectos mais diretamente vinculados ao tema central do trabalho. No Capítulo 4, os princípios para alocação robusta de pólos usados em projetos dos controladores por realimentação de estados são apresentados para sistemas monovariáveis: o problema do projeto de controladores robustos assumindo completo acesso ao vetor de estado; a equação de Ackerman intervalar para alocação robusta de pólos; representações poliédricas convexas do conjunto de controladores robustos associados à equação de Ackerman intervalar; o projeto de controladores por realimentação de estados robusta não-frágil como um problema de centralização; uma condição suficiente para controlabilidade (observabilidade) de sistemas intervalares baseada no método da fatoração QR intervalar; e exemplos de projetos. No Capítulo 5, propõe-se uma técnica de projeto de controladores robustos multivariáveis baseada na equação de Sylvester intervalar. Finalmente, no Capítulo 6, conclusões gerais e propostas para trabalhos futuros são apresentadas.

Capítulo 2

Análise Intervalar Clássica

2.1 Introdução

No projeto de sistemas de controle, precisamos inicialmente de uma descrição matemática adequada para a planta a ser controlada. O modelo matemático da planta é normalmente obtido experimentalmente, sendo apenas uma estimativa do sistema, ou seja, o mesmo geralmente contém incertezas em sua descrição. Desta forma, é interessante utilizar não apenas valor estimado para os parâmetros do modelo, mas parametrizar também incertezas, levando em conta possíveis erros de medidas nos valores dos parâmetros. Os parâmetros do sistema, ao invés de valores fixos, passam a ser representados por intervalos reais, nos quais, garantidamente, estariam contidos os parâmetros (desconhecidos) da planta. Neste capítulo abordamos a análise intervalar clássica (Alefeld e Herzberger, 1983), (Alefeld e Mayer, 2000) e (Moore, 1979) com o objetivo de, futuramente, calcular limites de conjuntos de soluções referentes a problemas de projeto de controladores para planta intervalar.

2.2 Definição

Define-se um número intervalar como sendo um par ordenado de números reais $[a]' = [\underline{a}, \overline{a}]'$, com $\underline{a} \leq \overline{a}$. Os reais $\underline{a}$ e $\overline{a}$ são os pontos extremos do intervalo $[a]'$. Intervalos degenerados da forma $[a]'$, com $\underline{a} = \overline{a}$ são equivalentes a números reais (Moore, 1966).

O conjunto dos números intervalares é denotado por $I(\mathbb{R})$.

A *largura*, o *centro*, o *raio* e a *magnitude* de $[a]'$ são definidos como

- $a_\omega = \overline{a} - \underline{a}$,
- $a_c = \frac{1}{2}(\overline{a} + \underline{a})$,
- $\delta = \frac{1}{2}(\overline{a} - \underline{a})$,
- $|[a]'| = max(|\underline{a}|, |\overline{a}|)$

respectivamente.

2.3 Operações Intervalares

A aritmética intervalar é uma extensão da aritmética real. Se $*$ é um dos símbolos $+, -, ., /$, definem-se as operações aritméticas com intervalos por (Alefeld e Mayer, 2000)

$$[a]' * [b]' = \{x * y | \underline{a} \leq x \leq \overline{a}, \underline{b} \leq y \leq \overline{b}\}. \tag{2.1}$$

A divisão $[a]'/[b]'$ é definida somente se $0 \notin [b]'$.

As operações aritméticas assumem as seguintes formas explícitas:

$$[a]' + [b]' = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]', \tag{2.2}$$

$$[a]' - [b]' = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]', \tag{2.3}$$

$$[a]' \cdot [b]' = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b})]', \tag{2.4}$$

$$[a]'/[b]' = [\underline{a}, \overline{a}]' \frac{1}{[\underline{b}, \overline{b}]'}. \tag{2.5}$$

Diz-se ainda que $[a]' < [b]'$ se e somente se $\overline{a} < \underline{b}$; $[a]' = [b]'$ se e somente se $\underline{a} = \underline{b}$ e $\overline{a} = \overline{b}$.

Propriedades: Adição e multiplicação intervalares são ambas associativas e comutativas:

- $[a]' + ([b]' + [c]') = ([a]' + [b]') + [c]'$,
- $[a]' \cdot ([b]' \cdot [c]') = ([a]' \cdot [b]') \cdot [c]'$,
- $[a]' + [b]' = [b]' + [a]'$,
- $[a]' \cdot [b]' = [b]' \cdot [a]'$.

Os números reais 0 e 1 são identidades para adição e multiplicação intervalar, respectivamente:

- $0 + [a]' = [a]' + 0 = [a]'$,
- $1 \cdot [a]' = [a]' \cdot 1 = [a]'$,

Propriedade da subdistributividade:

- $[a]' \cdot ([b]' + [c]') \subseteq [a]' \cdot [b]' + [a]' \cdot [c]'$.

Da equação (2.1) segue imediatamente que as operações introduzidas para intervalos são inclusões monotônicas no seguinte sentido:

$$[a]' \subseteq [b]', [c]' \subseteq [d]' \Rightarrow [a]' \cdot [c]' \subseteq [b]' \cdot [d]'. \tag{2.6}$$

2.4 Extensões Intervalares

Extensões intervalares padrão $\varphi \in F = \{sen, cos, tan, arctan, exp, ln, abs, x^2, \sqrt{x}\}$ são funções definidas via suas imagens, isto é

$$\varphi([x]') = \{\varphi(x) | x \in [x]'\}, \tag{2.7}$$

levando em consideração seus pontos singulares.

Estas funções são extensões das correspondentes funções reais, e são inclusões monotônicas, satisfazendo

$$[x]' \subseteq [y]' \Rightarrow \varphi([x]') \subseteq \varphi([y]'). \tag{2.8}$$

Definição 2.1 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por uma expressão matemática $f(x)$ composta por várias operações elementares finitas $+, -, ., /$ e extensões intervalares padrão $\varphi \in F$. Se trocarmos a variável x por um intervalo $[x]' \subseteq D$, e se pudermos avaliar a expressão intervalar resultante seguindo as regras de (2.1) a (2.8), então conseguimos novamente um intervalo, que é denotado por $f([x]')$, chamado de *extensão natural* de f sobre $[x]'$. Assume-se que $f([x]')$ existe se satisfizer a inclusão monotônica

$$[x]' \subseteq [y]' \Rightarrow f([x]') \subseteq f([y]'). \tag{2.9}$$

Em particular, $f([x]')$ existe se $f([y]')$ existir para $[y]' \supseteq [x]'$. De (2.9) obtemos

$$x \in [x]' \Rightarrow f(x) \in f([x]'), \tag{2.10}$$

e neste caso

$$R(f([x]')) \subseteq f([x]'). \tag{2.11}$$

Aqui $R(f([x])')$ é a imagem de f sobre $[x]'$. A relação (2.11) é a propriedade fundamental na qual todas as aplicações de aritmética intervalar estão baseadas. $\square$

Exemplo 2.1 Para a função real contínua $f(x,y) = \dfrac{x}{(x+y)}$ no domínio $[\mathbf{a}]' = ([1,3]', [2,5]')$, sua extensão natural é

$$f([\mathbf{a}]') = [1,3]'/([1,3]' + [2,5]') = [1/8, 1]'.$$

Sua imagem pode ser calculada otimizando a função, ou seja, eliminando a multiincidência de x. Assim, dividindo tanto o numerador como o denominador por x, obtemos $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)}$, e aplicando a extensão natural para a função já otimizada, obtemos sua imagem como

$$R(f([\mathbf{a}])') = ([1/6, 3/5]').$$

E podemos verificar que $R(f([\mathbf{a}]')) \subset f([\mathbf{a}]')$. $\square$

Exemplo 2.2 Para a função real contínua $f(x) = x^2 + 2x + 1$ no domínio $[x]' = [-1, 1]$, sua extensão natural é

$$f([x]') = [-1,1]'^2 + 2[-1,1]' + 1 = [-1,3]'.$$

Sua imagem pode ser obtida utilizando $f(x) = (x+1)^2$, e o resultado no domínio em questão é

$$R(f([x])) = [0,4].$$

Também podemos verificar que $R(f([\mathbf{a}]')) \subset f([\mathbf{a}]')$. $\square$

Esta característica de sobreestimar os intervalos resultantes é uma grande desvantagem da aritmética intervalar clássica.

A aritmética intervalar clássica admite apenas uma interpretação semântica: se $Z = f([x_1]', ..., [x_n]')$,

$$(\forall x_1 \in [x_1]') \ ... \ (\forall x_n \in [x_n]') \ (\exists z \in Z) \ z = f(x_1, ..., x_n).$$

Algumas propriedades dos números reais são perdidas em $I(\mathbb{R})$. As operações de adição e multiplicação perdem algumas de suas propriedades.

Exemplo 2.3 Um cabo de bobina tem comprimento real dentro do intervalo $[a]' = [9,11]'m$ e outro dentro de $[b]' = [19,21]'m$, a conexão dos dois cabos resulta em $[c]' = [a]' + [b]' = [9,11]' + [19,21]' = [28,32]'$. Mas a única interpretação possível é

$$(\forall a \in [a]') \ (\forall b \in [b]') \ (\exists c \in [c]') \ c = a + b.$$

$\square$

O fato de não haver uma interpretação mais completa para os resultados intervalares é outra grande desvantagem da aritmética intervalar clássica.

Exemplo 2.4 Considere as seguintes quatro sentenças intervalares referentes à relação $a + x = b$ no $\mathbb{R}$ e aos dados $a \in [1, 2]',\ b \in [3, 7]'$

(1) $\forall(a \in [1, 2]')\ \forall(x \in [2, 5]')\ \exists(b \in [3, 7]')\ a + x = b$

(2) $\forall(a \in [1, 2]')\ \forall(b \in [3, 7]')\ \exists(x \in [1, 6]')\ a + x = b$

(3) $\forall(x \in [1, 6]')\ \exists(a \in [1, 2]')\ \exists(b \in [3, 7]')\ a + x = b$

(4) $\forall(b \in [3, 7]')\ \exists(a \in [1, 2]')\ \exists(x \in [2, 5]')\ a + x = b$

As sentenças (1) e (4) são verdadeiras dado que $[x]' = [2, 5]'$ é a solução da equação intervalar clássica $[1, 2]' + [x]' = [3, 7]'$. As sentenças (2) e (3), apesar de serem verdadeiras, a interpretação adotada não confere com a única interpretação possível para intervalos clássicos. □

2.5 Caso Multidimensional

Para o caso multidimensional, são introduzidas matrizes $m \times n$ com elementos $[a_{ij}]'$ intervalares $[\mathbf{A}]' = ([a_{ij}]')$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, e vetores intervalares $[\mathbf{x}]' = ([x_i]')$ de n componentes e intervalos $[x_i]'$, $i = 1, ..., n$.

Denotamos os conjuntos de matrizes e vetores intervalares correspondentes por $I(\mathbb{R}^{m \times n})$ e $I(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

Em termos de matrizes extremas,

$$[\mathbf{A}]' = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]' = \{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n} | \underline{\mathbf{A}} \leq \mathbf{B} \leq \overline{\mathbf{A}}\},$$

com $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{a_{ij}}), \overline{\mathbf{A}} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ significa $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo i, j.

Operações entre matrizes intervalares e vetores intervalares são definidas da maneira usual, em analogia com (2.1)-(2.5).

As matrizes *largura*, *centro* e *raio* de $[\mathbf{A}]'$ são definidas, respectivamente, como

- $\mathbf{A}_\omega = \overline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}}$,
- $\mathbf{A_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}})$,
- $\mathbf{\Delta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}})$.

2.6 Sistemas de Equações Lineares Intervalares

Nesta seção são considerados sistemas de equações lineares na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, na qual $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ podem variar dentro de limites representados por matrizes intervalares $[\mathbf{A}]'$ e $[\mathbf{b}]'$, respectivamente.

Definição 2.2 Dadas $[\mathbf{A}]' \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$, $[\mathbf{b}]' \in I(\mathbb{R}^n)$ define-se o conjunto-solução (Alefeld e Mayer, 2000) de $[\mathbf{A}]'\mathbf{x} = [\mathbf{b}]'$ como

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \text{para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}]',\ \text{e algum } \mathbf{b} \in [\mathbf{b}]'\} \tag{2.12}$$

□

O conjunto $\mathcal{S}$ é poliedral não-convexo.

2.6.1 Caracterizações da Solução

Pode-se utilizar a seguinte relação para evitar o uso de valores absolutos (Lordelo, 2004):

Definição 2.3 Considere

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_i = +1 \text{ ou } x_i = -1, i = 1, 2, ..., n\} \tag{2.13}$$

composto de 2^n vetores, de maneira que para cada $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$,

$$\mathbf{T_z} := \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = diag(z_1, z_2, ..., z_n)$$

e para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$sign(x_i) = \begin{cases} +1 \text{ se } x_i \geq 0, \\ -1 \text{ se } x_i < 0. \end{cases}$$

Assim, $sign(\mathbf{x}) \in \mathcal{Z}$ qualquer que seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathbf{z} = sign(\mathbf{x})$, então $\mathbf{T_z x} = |\mathbf{x}|$. □

Teorema 2.1 (Desigualdade de Oettli-Prager) Considere a equação intervalar $[\mathbf{A}]'\mathbf{x} = [\mathbf{b}]'$, na qual $[\mathbf{A}]' = [\mathbf{A_c} - \mathbf{\Delta}, \mathbf{A_c} + \mathbf{\Delta}]'$ e $[\mathbf{b}]' = [\mathbf{b_c} - \delta, \mathbf{b_c} + \delta]'$. Então, o conjunto-solução $\mathcal{S}$ é dado por

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ |\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| - \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \delta\}. \tag{2.14}$$

Prova: Em (Oettli e Prager, 1964) e (Oettli, 1965) é calculado o vetor residual

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c},$$

e demonstrado que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ se e somente se $\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta \geq |\mathbf{r}(\mathbf{x})|$.

A demonstração a seguir é baseada em (Rohn, 1989).

Necessidade: Se $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, então $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para alguma $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]'$ e algum $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]'$. Como

$$\mathbf{0} = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b},$$

o módulo do vetor residual pode ser escrito como

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| = |\mathbf{A_c x} - \mathbf{Ax} + \mathbf{b} - \mathbf{b_c}|,$$

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| = |(\mathbf{A_c} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{b_c}| \leq \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta.$$

Suficiência: Considere

$$[\mathbf{A}]' = [\mathbf{A_c} - \mathbf{\Delta}, \mathbf{A_c} + \mathbf{\Delta}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$$

uma matriz intervalar e

$$[\mathbf{b}]' = [\mathbf{b_c} - \delta, \mathbf{b_c} + \delta] \in I(\mathbb{R}^{n})$$

um vetor intervalar. Defina, para quaisquer vetores $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$

$$\mathbf{A_{yz}} = \mathbf{A_c} - \mathbf{T_y}\mathbf{\Delta}\mathbf{T_z}$$

$$\mathbf{b_y} = \mathbf{b_c} + \mathbf{T_y}\delta$$

Assim, para cada i e $j = 1, 2, ..., n$, defina

$$(A_{yz})_{ij} := \begin{cases} (A_c - \Delta)_{ij} \text{ se } y_i z_j = 1, \\ (A_c + \Delta)_{ij} \text{ se } y_i z_j = -1, \end{cases}$$

$$(b_y)_i := \begin{cases} (b_c - \delta)_i \text{ se } y_i = 1, \\ (b_c + \delta)_i \text{ se } y_i = -1 \end{cases}$$

de maneira que $\mathbf{A_{yz}} \in [\mathbf{A}]'$ e $\mathbf{b_y} \in [\mathbf{b}]'$. Considere

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| \leq \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta, \tag{2.15}$$

para algum $\mathbf{x}$ e defina $\mathbf{y} = sign(\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c})$, então $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$ e

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| = \mathbf{T_y}(\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}) = \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta.$$

Como $\mathbf{T_y^{-1}} = \mathbf{T_y}$, tem-se que

$$\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} = \mathbf{T_y}(\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta). \tag{2.16}$$

Do mesmo modo, se $\mathbf{x}$ satisfaz a equação (2.16), para algum $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$, então, tomando o valor absoluto da equação (2.16) em ambos os lados, tem-se que $\mathbf{x}$ soluciona a desigualdade (2.15).

Defina um $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, para cada $i = 1, 2, ..., n$ por

$$y_i := \begin{cases} (A_c x - b_c)_i/(\Delta|x| + \delta)_i \text{ se } (\Delta|x| + \delta)_i > 0 \\ 1 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

então $|\mathbf{y}| \leq e$ e $\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} = \mathbf{T_y}(\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta)$. Definindo $\mathbf{z} = sign(\mathbf{x})$ e substituindo $|\mathbf{x}| = \mathbf{T_z x}$ na desigualdade (2.16), obtém-se

$$\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} = \mathbf{T_y}(\mathbf{\Delta T_z x} + \delta)$$

ou seja,

$$\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} = \mathbf{T_y \Delta T_z x} + \mathbf{T_y}\delta$$

que implica em

$$\mathbf{A_c x} - \mathbf{T_y \Delta T_z x} = \mathbf{b_c} + \mathbf{T_y}\delta.$$

Colocando $\mathbf{x}$ em evidência, tem-se que

$$(\mathbf{A_c} - \mathbf{T_y \Delta T_z})\mathbf{x} = \mathbf{b_c} + \mathbf{T_y}\delta.$$

e portanto, é verdadeiro que

$$\mathbf{A_{yz} x} = \mathbf{b_y}.$$

Desde que $|\mathbf{T_y \Delta T_z}| \leq \Delta$ e $|\mathbf{T_y}\delta| \leq \delta$, de maneira que $\mathbf{A_{yz}} \in [\mathbf{A}]'$ e $\mathbf{b_y} \in [\mathbf{b}]'$, tem-se que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. $\square$

Como $\mathcal{S}$ é um conjunto poliedral não-convexo (Rohn, 1989), busca-se caracterizar a *casca* de $\mathcal{S}$.

Definição 2.4 *(Neumaier, 1990)* A casca intervalar de $\mathcal{S}$ é o vetor intervalar com o menor raio contendo $\mathcal{S}$, definido como

$$\mathcal{S}_c := \{\mathbf{x} | \min \mathcal{S} \leq \mathbf{x} \leq \max \mathcal{S}\},$$

na qual $\min$ e $\max$ denotam o mínimo e o máximo componente a componente sobre todos os vetores de $\mathcal{S}$. $\square$

Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é chamado de *solução interna* de um sistema de equações lineares intervalares se $\mathbf{Ax} \in [\mathbf{b}]'$ para toda $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]'$.

Definição 2.5 O conjunto de todas as soluções internas de $[\mathbf{A}]'\mathbf{x} = [\mathbf{b}]'$ é dado por

$$\mathcal{S}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n} | \mathbf{Ax} \in [\mathbf{b}]' \text{ para toda } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}]'\}.$$

□

Temos a seguinte caracterização (Rohn, 1986):

Teorema 2.2: $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}$, no qual $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ é uma solução para o sistemas de desigualdades lineares

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x_1} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x_2} \leq \overline{\mathbf{b}} \\ &-\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x_1} + \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x_2} \leq -\underline{\mathbf{b}} \\ &\mathbf{x_1} \geq 0 \\ &\mathbf{x_2} \geq 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Prova: Veja (Rohn, 1986). □

Como conseqüência do Teorema 2.2, obtemos:

- $\mathcal{S}_0$ é um politopo convexo.
- cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$ satisfaz $\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \delta$
- $\mathcal{S}_0$ é limitado se para cada j existir um k com $\Delta_{kj} > 0$
- $\mathcal{S}_0 \neq 0$ se e somente se o sistema (2.17) de desigualdades lineares possuir solução, o que pode ser testado pela Fase I do algoritmo Simplex
- para $\underline{x}_j = \min\{x_j | x \in \mathcal{S}_0\}$ temos $\underline{x}_j = \min\{(x_1 - x_2)_j\} | \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ resolve (2.17), que é um problema de programação linear (similarmente para $\overline{x}_j = \max ...$),

- soluções internas não-negativas são descritas por $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{b}}$, $-\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq -\underline{\mathbf{b}}$, $\mathbf{x} \geq 0$,

- além disso, $\mathcal{S}_0 = \{\mathbf{x} | |\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| \leq -\boldsymbol{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta\}$ (observe a similaridade com o resultado de Oettli-Prager).

Teorema 2.3 (**Representações de** $\mathcal{S}_0$) (Rohn, 1986) Considere $\mathcal{S}_0$ o conjunto de todas as soluções internas da equação linear intervalar $[\mathbf{A}]'\mathbf{x} = [\mathbf{b}]'$, na qual $[\mathbf{A}]' = [\mathbf{A_c} - \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{A_c} + \boldsymbol{\Delta}]'$ e $[\mathbf{b}]' = [\mathbf{b_c} - \delta, \mathbf{b_c} + \delta]'$. Defina

$$\mathcal{S}_1 := \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| + \boldsymbol{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \delta\};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 := \{\mathbf{x} \mid \quad & \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}, \\ & \underline{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z} \geq \underline{\mathbf{b}}, \\ & \overline{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{z} \leq \overline{\mathbf{b}}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\,\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \quad & \mathbf{A_c x} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} \geq \underline{\mathbf{b}}, \\ & \mathbf{A_c x} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} \leq \overline{\mathbf{b}}, \\ & -\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}\}. \end{aligned}$$

Então $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$ se e somente se existir um $\mathbf{y}$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}_3$.

Prova:

Equivalência entre $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}_1$ (Rohn, 1986)

Tem-se que $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$, como esperado da definição de $\mathcal{S}_1$ (ou seja, $\mathcal{S}_0$) como o conjunto das soluções internas de $\mathcal{S}$ (observe a semelhança com o Teorema 2.1).

Equivalência entre $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}_2$ (Rohn, 1986)

Necessidade: Considere $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$ e $|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \delta$. Assim,

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| \leq -\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta$$

ou seja,

$$\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| - \delta \leq \mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} \leq -\mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| + \delta.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \mathbf{A_c x} + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \mathbf{b_c} + \delta \\ \mathbf{A_c x} - \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \geq \mathbf{b_c} - \delta \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} \mathbf{A_c x} + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A_c x} - \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \geq \underline{\mathbf{b}}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Definindo $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ e $|\mathbf{x}| = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ e substituindo em (2.18), verifica-se que

$$\begin{cases} \mathbf{A_c}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) + \mathbf{\Delta}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A_c}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) - \mathbf{\Delta}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{A_c y} - \mathbf{A_c z} + \mathbf{\Delta y} + \mathbf{\Delta z} \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A_c y} - \mathbf{A_c z} - \mathbf{\Delta y} - \mathbf{\Delta z} \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

resultando em

$$\begin{cases} (\mathbf{A_c} + \mathbf{\Delta})\mathbf{y} - (\mathbf{A_c} - \mathbf{\Delta})\mathbf{z} \leq \overline{\mathbf{b}} \\ (\mathbf{A_c} - \mathbf{\Delta})\mathbf{y} - (\mathbf{A_c} + \mathbf{\Delta})\mathbf{z} \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{z} \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z} \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

e $\mathcal{S}_2$ é verificado.

Suficiência: Considere $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ soluções para $\mathcal{S}_2$ e defina um $\alpha \in \mathbb{R}^n$ por $\alpha_i = min\{y_i, z_i\}$, para $i = 1, 2, ..., n$. Então $\alpha \geq 0$ para $\mathbf{x} = (\mathbf{y} - \alpha) - (\mathbf{z} - \alpha) = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ e $|\mathbf{x}| = (\mathbf{y} - \alpha) + (\mathbf{z} - \alpha) = \mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{2}\alpha$. Assim,

$$\begin{cases} \mathbf{A_c}\mathbf{x} + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| = \mathbf{A_c}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) + \mathbf{\Delta}(\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{2}\alpha) \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A_c}\mathbf{x} - \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| = \mathbf{A_c}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) - \mathbf{\Delta}(\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{2}\alpha) \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} \mathbf{A_c}\mathbf{y} - \mathbf{A_c}\mathbf{z} + \mathbf{\Delta}\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{2\Delta}\alpha \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A_c}\mathbf{y} - \mathbf{A_c}\mathbf{z} - \mathbf{\Delta}\mathbf{y} - \mathbf{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{2\Delta}\alpha \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{cases} (\mathbf{A_c} + \mathbf{\Delta})\mathbf{y} - (\mathbf{A_c} - \mathbf{\Delta})\mathbf{z} - \mathbf{2\Delta}\alpha \leq \overline{\mathbf{b}} \\ (\mathbf{A_c} - \mathbf{\Delta})\mathbf{y} - (\mathbf{A_c} + \mathbf{\Delta})\mathbf{z} + \mathbf{2\Delta}\alpha \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

resultando em

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{z} - \mathbf{2\Delta}\alpha \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{A}}\mathbf{y} - \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{2\Delta}\alpha \geq \underline{\mathbf{b}}. \end{cases}$$

Assim, $[\mathbf{A_c}\mathbf{x} - \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}|, \mathbf{A_c}\mathbf{x} + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}|]' \subset [\mathbf{b}]'$, implicando que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$.

Equivalência entre $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}_3$ (Kelling, 1994)

Necessidade: Considere $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$, de maneira que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$ se e somente se $|\mathbf{A_c}\mathbf{x} - \mathbf{b_c}| + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \delta$.

Se $\mathbf{y} = |\mathbf{x}|$, então

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}| \leq \delta$$

ou seja,

$$|\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| \leq \delta - \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}|$$

e portanto,

$$-\delta + \mathbf{\Delta y} \leq \mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} \leq \delta - \mathbf{\Delta y}.$$

Desta forma,

$$\begin{cases} \mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} \leq \delta - \mathbf{\Delta y} \\ \mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c} \geq -\delta + \mathbf{\Delta y} \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} \mathbf{A_c x} - \overline{\mathbf{b}} + \delta \leq \delta - \mathbf{\Delta y} \\ \mathbf{A_c x} - \underline{\mathbf{b}} - \delta \geq -\delta + \mathbf{\Delta y}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \mathbf{A_c x} + \mathbf{\Delta y} \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A_c x} - \mathbf{\Delta y} \geq \underline{\mathbf{b}} \end{cases}$$

e $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}_3$.

Suficiência: Considere $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}_3$ e, portanto, $|\mathbf{x}| \leq \mathbf{y} \Rightarrow -\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Então,

$$\delta \geq |\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| + \mathbf{\Delta y} \geq |\mathbf{A_c x} - \mathbf{b_c}| + \mathbf{\Delta}|\mathbf{x}|$$

e $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$.

$\square$

2.7 Conclusões

Neste capítulo abordamos a aritmética intervalar clássica, principal fundamento sobre o qual os métodos de análise e projeto de controladores propostos nesta tese estão baseados, e caracterizações de soluções de sistemas de equações intervalares lineares. A aritmética intervalar clássica, quando utilizada para obter a extensão natural de funções que tenham elementos multiincidentes em sua descrição, pode tornar o resultado final um intervalo bastante sobreestimado. Além disso, os resultados intervalares não possuem um significado suficientemente claro. Por estas razões, no próximo capítulo abordamos a análise intervalar modal, uma metodologia que pode contornar estas dificuldades.

Capítulo 3

Análise Intervalar Modal

3.1 Introdução

Este capítulo resume os resultados e características mais importantes da análise intervalar modal. A idéia básica da matemática intervalar é que intervalos clássicos (intervalos definidos a partir de conjuntos) são o contexto consistente para computação numérica. Contudo, este contexto intervalar apresenta estrutura básica e rigidez semântica devido ao seu fundamento em conjuntos. Para corrigir esta situação, na análise intervalar modal definem-se intervalos a partir da identificação dos números reais com os conjuntos de predicados que os intervalos aceitam ou rejeitam. Um intervalo modal é definido como um par formado por um intervalo clássico (isto é, um conjunto de números) e um quantificador, de forma análoga a reta real em que números reais são associados em pares, tendo o mesmo valor absoluto, mas sinais opostos. Duas diferentes extensões para funções contínuas (chamadas extensões semânticas, já que ambas terão um significado devido a importantes teoremas semânticos) são definidas e suas propriedades são estabelecidas. A definição de extensão intervalar racional, e suas relações com as extensões intervalares semânticas, torna possível calcular as extensões intervalares semânticas e dar um significado lógico aos resultados intervalares dos cálculos racionais.

Para algumas funções, as extensões semânticas são iguais, por exemplo, para operadores aritméticos que podem ser obtidos através de cálculos com os limites intervalares, obtendo-se as definições da aritmética intervalar completa de Kaucher (Kaucher, 1980).

Com intervalos modais é possível resolver equações do tipo $[a] + [x] = [b]$ ou $[a] \cdot [x] = [b]$, com uma diferença muito importante. Encontrar a solução algébrica destas equações quando $[a]$, $[x]$ e $[b]$ são intervalos clássicos torna-se um problema único: encontrar o intervalo $[x]$ que substituído na correspondente equação, satisfaça a igualdade. A análise intervalar modal não apenas resolve este problema, mas também dá um significado lógico para a solução.

A diferença mais importante entre análise intervalar modal e análise intervalar clássica + aritmética completa de Kaucher é a base semântica lógica dos intervalos modais e o significado dos resultados intervalares nos cálculos funcionais ou na solução de uma equação linear, fornecido pelos teoremas semânticos (Gardenes et al., 2001).

Como comentado no Capítulo 2, a análise intervalar clássica apreseta resultados sobreestimados e rigidez semântica na interpretação dos resultados dos cálculos intervalares. Para contornar estas dificuldades, abordaremos o aspecto da interpretação dos cálculos de técnicas modais e alguns teoremas que otimizam os resultados dos cálculos intervalares.

3.2 Definição

Um intervalo modal é definido como um par formado por um intervalo clássico $[x]'$ e um quantificador $Q[x]$:

$$[x] := ([x]', Q[x]).$$

Os quantificadores são operadores que indicam a modalidade de um intervalo. A modalidade de um intervalo pode ser:

- existencial, existe um $x \in [x]'$, com $Q[x] = E$

- universal, para todo $x \in [x]'$, com $Q[x] = U$.

Predicados são condições que podem ser relacionadas a um intervalo, por exemplo,

$$y = \{x \in [x]' | x \geq 0\}.$$

O predicado desta sentença é a condição $x \geq 0$.

Usaremos uma notação especial para relacionar os quantificadores aos predicados:

$E(x, [a]')P(x)$ significa: Existe um $x \in [a]'$ tal que o predicado $P(x)$ é satisfeito.

$U(x, [a]')P(x)$ significa: Para todo $x \in [a]'$ o predicado $P(x)$ é satisfeito.

Análogo a reta real em que os números reais são associados em pares, de mesmo valor absoluto, mas sinais opostos, intervalos modais também são associados em pares, cada membro correspondendo ao mesmo intervalo fechado da reta real, e modalidades de seleção opostas, existencial (E) ou universal (U).

O conjunto dos intervalos modais será representado por

$$I^*(\mathbb{R}) := \{([x]', \{E, U\}) | [x]' \in I(\mathbb{R})\}.$$

As coordenadas modais de um intervalo modal são seu intervalo clássico e sua modalidade.

Especificamente, dado $[a] = ([a]', Q[a]) \in I^*(\mathbb{R})$, então

$$\text{ext}([a]', Q[a]) := [a]'$$

$$\text{mod}([a]', Q[a]) := Q[a]$$

As coordenadas canônicas dos intervalos modais são intervalos definidos por

$$\inf([a]) = \begin{cases} \min(\text{ext}([a])) \text{ se } \text{mod}([a]) = E \\ \max(\text{ext}([a])) \text{ se } \text{mod}([a]) = U \end{cases}$$

$$\sup([a]) = \begin{cases} \max(\text{ext}([a])) \text{ se } \text{mod}([a]) = E \\ \min(\text{ext}([a])) \text{ se } \text{mod}([a]) = U \end{cases}$$

A notação canônica de intervalos modais é introduzida pela definição

$$[a] = \begin{cases} ([\underline{a}, \overline{a}]', E) \text{ se } \underline{a} \leq \overline{a} \\ ([\overline{a}, \underline{a}]', U) \text{ se } \underline{a} \geq \overline{a} \end{cases}$$

Exemplo 3.1:Considere [3,2]. Então

$$\text{ext}([2,3]', U) := [2,3]' \text{ e } \text{mod}([2,3]', U) := U$$

$$\inf([2,3]', U) = 3 \text{ e} \sup([2,3]', U) = 2$$

$\square$

Os conjuntos "naturais" dos intervalos modais são:

$$Ie(\mathbb{R}) = \{[a] \in I^*(\mathbb{R}) | \underline{a} \leq \overline{a}\},$$

$$Iu(\mathbb{R}) = \{[a] \in I^*(\mathbb{R}) | \underline{a} \geq \overline{a}\},$$

$$Ip(\mathbb{R}) = \{[a] \in I^*(\mathbb{R}) | \underline{a} = \overline{a}\},$$

Um intervalo $[a] \in Ie(\mathbb{R})$ é qualificado como um "intervalo próprio"; um intervalo $[a] \in Iu(\mathbb{R})$, como "impróprio"; um intervalo $[a] \in Ip(\mathbb{R})$, como "pontual".

O quantificador Q associa cada predicado real $P(x)$ a um único predicado intervalar $P^*([x])$: para uma variável x em $\mathbb{R}$ e $[a] \in I^*(\mathbb{R})$

$$P^*([x]) = Q(x, ([a]))P(x) := Q[a](x, [a]')P(x).$$

Exemplo 3.2: $Q(x, ([-3, 1]', E))x \geq 0 := E(x, [-3, 1]')x \geq 0$, isto é, existe x no intervalo clássico $[-3, 1]$ tal que $x \geq 0$. $\square$

Usando a notação canônica, a operação do quantificador Q é

$$Q(x, [a]) = \begin{cases} E(x, [\underline{a}, \overline{a}]') \text{ se } \underline{a} \leq \overline{a} \\ U(x, [\overline{a}, \underline{a}]') \text{ se } \underline{a} \geq \overline{a} \end{cases}$$

3.3 Aritmética Intervalar Modal

Seja $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ uma operação aritmética em $\mathbb{R}$, $[a],\ [b] \in I^*(\mathbb{R})$, $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}, \overline{b}, r \in \mathbb{R}$. A extensão de $*$ em $I^*(\mathbb{R})$ se define como uma extensão intervalar da função real contínua $*(x, y) = x{*}y$ sobre os intervalos (Group, 1998).

As operações assumem as seguintes formas:

$$[a] + [b] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]; \tag{3.1}$$

$$[a] - [b] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]; \tag{3.2}$$

$$[a]\cdot[b] = \begin{cases} [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\max(\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}), \min(\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b})] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} < 0 \\ [0,0] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [0,0] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\min(\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b})] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \end{cases} ; \tag{3.3}$$

Um caso particular do produto de intervalos é o produto de um intervalo por um escalar:

$$r[a] = \begin{cases} [r\underline{a}, r\overline{a}] \text{ se } r \geq 0 \\ [r\overline{a}, r\underline{a}] \text{ senão} \end{cases} ; \tag{3.4}$$

$$[a]/[b] = \begin{cases} [\underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\underline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\overline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\underline{b}] \text{ se } \underline{a} \geq 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\underline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\overline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} \geq 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \\ [\underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} \geq 0\,, \overline{b} \geq 0 \\ [\overline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\overline{b}] \text{ se } \underline{a} < 0\,, \overline{a} < 0\,, \underline{b} < 0\,, \overline{b} < 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Para intervalos modais define-se o operador dualidade como

$$dual([\underline{a}, \overline{a}]) = [\overline{a}, \underline{a}].$$

3.3.1 Propriedades

Soma

- 1. $[a] + [b] = [b] + [a]$
- 2. $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$
- 3. $[a] \subseteq [b],\ [c] \subseteq [d] \Rightarrow [a] + [b] \subseteq [b] + [c]$
- 4. $[a] \leq [b],\ [c] \leq [d] \Rightarrow [a] + [c] \leq [b] + [d]$
- 5. $dual([a] + [b]) = dual([a]) + dual([b])$
- 6. $[a] + [0, 0] = [a]$

Diferença

- 1. $[a] \subseteq [b],\ [c] \subseteq [d] \Rightarrow [a] - [c] \subseteq [b] - [d]$
- 2. A equação $[a] + [x] = [b]$ tem como solução única $[x] = [b] - dual([a])$

Produto por um escalar

- 1. Se $\phi \in \{dual, -\}$, então $\phi(r[a]) = r\phi([a])$
- 2. $[a] \subseteq [b] \Rightarrow r[a] \subseteq r[b]$
- 3. $[a] \leq [b] \Rightarrow \begin{cases} r[a] \leq r[b] \text{ se } r \geq 0 \\ r[a] \geq r[b] \text{ se } r < 0 \end{cases}$

- 4. $r([a]+[b]) = r[a]+r[b]$
- 5. $r(s[a]) = (rs)[a]$
- 6. Se $rs \geq 0$ então $(r+s)[a] = r[a]+s[a]$

Produto

- 1. $[a]\cdot[b] = [b]\cdot[a]$
- 2. $[a]\cdot([b]\cdot[c]) = ([a]\cdot[b])\cdot[c]$
- 3. $r([a]\cdot[b]) = (r[a])\cdot[b] = [a]\cdot(r[b])$
- 4. $(-[a])\cdot(-[b]) = [a]\cdot[b]$
- 5. $dual([a])\cdot dual([b]) = dual([a]\cdot[b])$
- 6. $r[a] = [r,r]\cdot[a]$
- 7. $[1,1]\cdot[a] = [a]$
- 8. $([a]\subseteq[b],[c]\subseteq[d]) \Leftrightarrow [a]\cdot[c]\subseteq[b]\cdot[d]$
- 9. $([0,0]\leq[a]\leq[b],[0,0]\leq[c]\leq[d]) \Leftrightarrow [a]\cdot[c]\leq[b]\cdot[d]$
- 10. Subdistributividade:

  $[a]$ próprio $\Leftrightarrow [a]\cdot([b]+[c]) \subseteq [a]\cdot[b]+[a]\cdot[c]$

  $[a]$ impróprio $\Leftrightarrow [a]\cdot([b]+[c]) \supseteq [a]\cdot[b]+[a]\cdot[c]$
- 11. Se $0 \notin [a]'$ existe inverso e é $\dfrac{1}{[a]} = \left[\dfrac{1}{\overline{a}}, \dfrac{1}{\underline{a}}\right]$

- 12. Se existem inversos, então
  $[a] \subseteq [b] \Leftrightarrow \frac{1}{[a]} \subseteq \frac{1}{[b]}$
  $[a] \leq [b] \Leftrightarrow \frac{1}{[a]} \geq \frac{1}{[b]}$
  $dual\left(\frac{1}{[a]}\right) = \frac{1}{dual([a])}$

Quociente

- 1. $\frac{[a]}{[b]} = [a] \cdot \frac{1}{[b]}$
- 2. $([a] \subseteq [b],\ [c] \subseteq [d]) \Leftrightarrow \frac{[a]}{[c]} \subseteq \frac{[b]}{[d]}$
- 3. $dual\left(\frac{[a]}{[b]}\right) = \frac{dual([a])}{dual([b])}$
- 4. A equação $[a] \cdot [x] = [b]$ tem solução única se $0 \notin [a]$ e é $[x] = \frac{[b]}{dual([a])}$

As demonstrações destas propriedades são, em geral, imediatas, exceto para as de subdistributividade do produto, que são resultados análogos aos do caso da análise intervalar clássica (Trepat, 1982).

3.3.2 Caso Multidimensional

Para o caso multidimensional, são introduzidas matrizes intervalares $m \times n$ $[\mathbf{A}] = ([a_{ij}])$ com elementos $[a_{ij}]$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, e vetores intervalares $[\mathbf{x}] = ([x_i])$ com n componentes $[x_i]$, $i = 1, ..., n$.

Denotamos os conjuntos correspondentes por $I^*(\mathbb{R}^{m\times n})$ e $I^*(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

$$[\mathbf{A}] = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}],$$

com $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{a_{ij}}), \overline{\mathbf{A}} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ significa $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo i, j

Operações com matrizes intervalares e com vetores intervalares são definidas analogamente a (3.1)-(3.5).

A extensão das operações intervalares para o caso multidimensional permite então generalizar as propriedades apresentadas na subseção 3.4.1; algumas encontram-se no Apêndice A.

3.4 Extensões Intervalares Modais para Funções Contínuas

Definição 3.1 Seja $P(x)$ um predicado, $P^*([x]) = Q(x,[x])P(x)$ é o predicado intervalar modal correspondente ao intervalo $[x]$, tal que $x \in [x]$. □

No contexto de intervalos modais espera-se que, como o predicado $P(x)$ conduz a um predicado intervalar modal $P^*([x]) = Q(x,[x])P(x)$, uma relação $z = f(x_1, ..., x_n)$ deva similarmente tornar-se algum tipo de relação intervalar $Z = F(f)([x_1], ..., [x_n])$ garantindo alguma classe de predicados de dimensão $(n+1)$ da forma

$$Q_1(x_1,[x_1])...Q_n(x_n,[x_n])Q_z(z,F(f)([x_1],...,[x_n]))z = f(x_1,...,x_n),$$

Dada uma função f do $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, temos que estendê-la para uma função do $I^*(\mathbb{R}^n)$ para o $I^*(\mathbb{R})$ verificando algumas condições.

Definição 3.2 Se f for uma função contínua de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, chamamos de *extensão intervalar modal* de f sobre o intervalo $[a]$ a qualquer função F de $I^*(\mathbb{R}^n)$ para o $I^*(\mathbb{R})$ que satisfaça a propriedade

$$U([x]', I(\mathbb{R}^n))\,((x \in [x]') \in P^*([a])) \Rightarrow (f(x) \in f([x]')) \in P^*(F([a]))$$

□

3.4.1 Extensões Intervalares Semânticas Modais

Definição 3.3 Considere a função f contínua de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $[\mathbf{a}] \in I^*(\mathbb{R}^n)$, e $(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i})$ componentes de separação de $[\mathbf{a}] = ([\mathbf{a_p}], [\mathbf{a_i}])$, com $[\mathbf{a_p}]$ um subvetor contendo as componentes próprias de $[\mathbf{a}]$ e $[\mathbf{a_i}]$ um subvetor contendo as componentes impróprias de $[\mathbf{a}]$. Definem-se as extensões intervalares semânticas modais f^* e f^{**} pelas equações abaixo

$$f^*([\mathbf{a}]) = [\min_{\mathbf{a_p} \in [\mathbf{a_p}]'} (\max_{\mathbf{a_i} \in [\mathbf{a_i}]'} (f(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i})), \max_{\mathbf{a_p} \in [\mathbf{a_p}]'} (\min_{\mathbf{a_i} \in [\mathbf{a_i}]'} (f(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i}))] \tag{3.6}$$

e

$$f^{**}([\mathbf{a}]) = [\max_{\mathbf{a_i} \in [\mathbf{a_i}]'} (\min_{\mathbf{a_p} \in [\mathbf{a_p}]'} (f(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i})), \min_{\mathbf{a_i} \in [\mathbf{a_i}]'} (\max_{\mathbf{a_p} \in [\mathbf{a_p}]'} (f(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i}))] \tag{3.7}$$

□

Definição 3.4 Uma função f é dita *unimodal* em um intervalo $[x]$ se f for totalmente monótona em todo o intervalo $[x]$, ou seja, se f for totalmente crescente ou decrescente em $[x]$. □

Quando a função é unimodal para o intervalo $[\mathbf{a}]$, as extensões são iguais. Além disso, se $[\mathbf{a}]$ é um intervalo próprio, f^* é a imagem de f no domínio $[\mathbf{a}]'$.

Nem sempre as extensões intervalares semânticas f^* e f^{**} podem ser calculadas diretamente. Normalmente, as mesmas só são calculáveis se f for descrita por operações aritméticas e funções simples.

Exemplo3.3 Para a função contínua real $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, o cálculo das funções semânticas $*$ e $**$ para $[x_1] = [-1, 1]$ e $[x_2] = [1, -1]$ produz os seguintes resultados:

$\mathbf{x_p} = x_1$ e $\mathbf{x_i} = x_2$,

$f^*([x_1],[x_2]) = [\min_{x_1 \in [x_1]'} (\max_{x_2 \in [x_2]'} (x_1^2 + x_2^2)), \max_{x_1 \in [x_1]'} (\min_{x_2 \in [x_2]'} (x_1^2 + x_2^2))]$,

$f^*([x_1],[x_2]) = [\min_{x_1 \in [x_1]'} (x_1^2 + 1), \max_{x_1 \in [x_1]'} (x_1^2)] = [1, 1]$,

$f^{**}([x_1],[x_2]) = [\max_{x_2 \in [x_2]'} (\min_{x_1 \in [x_1]'} (x_1^2 + x_2^2)), \min_{x_2 \in [x_2]'} (\max_{x_1 \in [x_1]'} (x_1^2 + x_2^2))]$,

$f^{**}([x_1],[x_2]) = [\max_{x_2 \in [x_2]'} (x_2^2), \min_{x_2 \in [x_2]'} (1 + x_2^2)] = [1, 1]$. □

Exemplo 3.4 Para a função contínua real $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$, as correspondentes funções semânticas $*$ e $**$ para $[x_1] = [-1, 1]$ e $[x_2] = [1, -1]$ não têm valores coincidentes:

$\mathbf{x_p} = x_1$ e $\mathbf{x_i} = x_2$,

$g^*([x_1],[x_2]) = [\min_{x_1 \in [x_1]'} (\max_{x_2 \in [x_2]'} (x_1 + x_2)^2)), \max_{x_1 \in [x_1]'} (\min_{x_2 \in [x_2]'} (x_1 + x_2)^2))]$,

$g^*([x_1],[x_2]) = [\min_{x_1 \in [x_1]'} (\text{se } x_1 \leq 0, (x_1 - 1)^2; \text{senão, } (x_1 + 1)^2))), 0] = [1, 0]$,

$g^{**}([x_1],[x_2]) = [\max_{x_2 \in [x_2]'} (\min_{x_1 \in [x_1]'} (x_1 + x_2)^2)), \min_{x_2 \in [x_2]'} (\max_{x_1 \in [x_1]'} (x_1 + x_2)^2))]$,

$g^{**}([x_1],[x_2]) = [0, \min_{x_2 \in [x_2]'} (\text{se } x_1 \leq 0, (x_1 - 1)^2, \text{senão, } (x_1 + 1)^2))] = [0, 1]$. □

3.4.2 Teoremas Semânticos

Para utilizarmos as extensões intervalares semânticas f^* e f^{**} com o objetivo de se obter um significado claro com relação aos resultados dos cálculos intervalares e a imagem de f, precisamos de dois teoremas-chave, chamados teoremas semânticos. Estes teoremas fornecem um completo significado aos cálculos intervalares. Considere $F : I^*(\mathbb{R}^n) \to I^*(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1 (**Teorema Semântico para** f^* Group, 1998). Se $[\mathbf{a}] \in I^*(\mathbb{R}^n)$, f é contínua em $[\mathbf{a}]'$ e $F([\mathbf{a}]) \in I^*(\mathbb{R})$, então $f^*([\mathbf{a}]) \subseteq F([\mathbf{a}])$ se e somente se

$$U(\mathbf{a_p}, [\mathbf{a_p}]')Q(z, F([\mathbf{a}]))E(\mathbf{a_i}, [\mathbf{a_i}]')(z = f(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i})). \tag{3.8}$$

□

Teorema 3.2 (**Teorema Semântico para** f^{**} Group, 1998). Se $[\mathbf{a}] \in I^*(\mathbb{R}^n)$, f é contínua em $[\mathbf{a}]'$ e $F([\mathbf{a}]) \in I^*(\mathbb{R})$, então $f^{**}([\mathbf{a}]) \supseteq F([\mathbf{a}])$ se e somente se

$$U(\mathbf{a_i}, [\mathbf{a_i}]')Q(z, Dual(F([\mathbf{a}])))E(\mathbf{a_p}, [\mathbf{a_p}]')(z = f(\mathbf{a_p}, \mathbf{a_i})). \tag{3.9}$$

□

Exemplo 3.5 Para a função real $f(x, y) = x + y$, temos

$$[1, 3] + [4, 8] = [5, 11],$$

que significa, em termos do Teorema 3.1

$$U(x, [1, 3]')U(y, [4, 8]')E(z, [5, 11]')z = x + y,$$

e, pelo Teorema 3.2,

$$U(z, [5, 11]')E(x, [1, 3]')E(y, [4, 8]')z = x + y.$$

Se quisermos a semântica

$$U(x, [1, 3]')U(z, ?)E(y, [4, 8]')z = x + y,$$

esta deve ser

$$[1,3]+[8,4]=[9,7],$$

que significa

$$U(x,[1,3]')U(z,[7,9]')E(y,[4,8]')z=x+y.$$

Podemos conseguir outras semânticas manuseando as modalidades dos operandos.

$$[3,1]+[4,8]=[7,9],$$

que significa

$$U(y,[4,8]')E(x,[1,3]')E(z,[7,9]')z=x+y,$$

ou

$$[3,1]+[8,4]=[11,5],$$

que significa

$$U(z,[5,11]')E(x,[1,3]')E(y,[4,8]')z=x+y.$$

Exemplo 3.6 Suponha dois cabos com comprimento total de $a = 10$ e $b = 20$ unidades de comprimento. Ambos conectados podem cobrir um comprimento total $c = 30$. Esta situação elementar pode ser expressa como $c = a+b$. Considere a situação intervalar mais realística na qual o primeiro cabo tem comprimento conhecido pertencente ao intervalo $[a]' = [9,20]'$, isto é, $a \in [9,20]'$; sobre o segundo cabo sabemos que $b \in [b]' = [10,25]'$. Vamos considerar a conexão dos cabos e aplicar o teorema semântico para f^* restrito a $f(a,b) = a+b$.

Caso 1: $[9,20]+[25,10]=[34,30]$ significa

$$U(a,[9,20]')U(c,[30,34]')E(b,[10,25]')c=a+b,$$

isto é, um comprimento particular no intervalo $[25, 10]$ pode ser selecionado para "regular" algum comprimento específico c dentro do intervalo impróprio $[c] = [34, 30]$, a despeito do fato do valor de a pertencer ao operando próprio $[a] = [9, 20]$. O valor de $a \in [a]$ pode ser resultante de algum processo aleatório de seleção.

Caso 2: $[9, 20] + [20, 15] = [29, 35]$ significa

$$U(a, [9, 20]')E(c, [29, 35]')E(b, [15, 20]')c = a + b,$$

isto é, com o mesmo intervalo autônomo $[a] = [9, 20]$ e um intervalo de regulação mais estreito $[b] = [20, 15]$, um determinado comprimento $b \in [b]' = [15, 20]'$ deve ser selecionado (uma operação de regulação) para se conseguir apenas um comprimento c na faixa limitada pelo intervalo próprio $[c] = [29, 35]$.

Caso 3: $[9, 20] + [10, 25] = [19, 45]$ significa

$$U(a, [9, 20]')U(b, [10, 25]')E(c, [19, 45]')c = a + b.$$

de forma que c refletirá a indeterminação completa resultante da união de a e b.

Caso 4: $[20, 9] + [25, 10] = [45, 19]$ significa

$$U(c, [19, 45]')E(a, [9, 20]')E(b, [10, 25]')c = a + b.$$

$\square$

Observação 3.1 O teorema semântico para f^* permite a interpretação de intervalos universais como "faixas de regulação ou de realimentação"; e intervalos existenciais como "faixas de flutuação ou autônomas". $\square$

3.4.3 Propriedades das Extensões Intervalares Semânticas

Importantes relações de inclusões entre $f^*([x])$ e $f^{**}([x])$ são:

- $f^*([x]) \subseteq f^{**}([x])$,
- $[x] \subseteq [y] \Rightarrow f^*([x]) \subseteq f^*([y]), f^{**}([x]) \subseteq f^{**}([y])$.

Os teoremas semânticos mostram que $f^*([x])$ e $f^{**}([x])$ são ótimas em termos semânticos, e esclarecem qual sentido $\subseteq$ correto deve ser adotado às extensões intervalares semânticas f^* e f^{**}. Os teoremas fornecem, portanto, a regra geral em que extensões calculáveis F devem satisfazer para serem consistentes com as semânticas $f^*([x])$ ou $f^{**}([x])$. Porém, estes teoremas não apresentam ainda um procedimento geral de calcular as extensões intervalares. Estes procedimentos serão fornecidos por extensões racionais modais de funções contínuas racionais, sempre que estas obedeçam certas condições sintáticas que as qualifiquem como cálculos arredondados internos e externos das funções $f^*([x])$ e $f^{**}([x])$ associadas.

3.4.4 Extensões Racionais Modais

Como o cálculo das extensões intervalares semânticas f^* e f^{**} é, em geral, difícil, o procedimento usual é determinar aproximações externas de f^* e internas de f^{**} que mantenham as interpretações semânticas.

Definição 3.5 Seja a função f, contínua e racional no domínio $[x]'$. A extensão definida pela seqüência de operações indicada pela sintaxe de f é chamada de *extensão racional modal*, $fR([x])$. $\square$

O problema de interpretação de uma função racional modal consiste em relacioná-la a funções semânticas correspondentes, que tenham um significado padrão definido pelos teoremas semânticos.

Há diversos resultados relacionando a extensão intervalar racional modal $fR([x])$ a extensões semânticas f^* e f^{**}.

Teorema 3.3 (Gardenes et al., 2001) Se em $fR([x])$ todos os argumentos forem uniincidentes, então,

$$f^*([x]) \subseteq fR([x]) \subseteq f^{**}([x]).$$

Em particular, se todos os componentes além de uniincidentes também tiverem a mesma modalidade,

$$f^*([x]) = fR([x]) = f^{**}([x]).$$

Neste caso, dizemos que $fR([x])$ é ótima para o intervalo $[x]$. $\square$

É muito importante obter critérios para caracterizar cálculos intervalares racionais em que $fR([x])$, com um cálculo ideal, seja ótima. Há diversos resultados, teoremas de coerção que caracterizam esta otimalidade de acordo com a monotonicidade das variáveis.

Teorema 3.4 (Gardenes et al., 2001) Seja $[\mathbf{x}]$ um vetor intervalar, fR definida no domínio de $[\mathbf{x}]'$ e totalmente monótona para todos os seus componentes multiincidentes. Seja $[\mathbf{xd}]$ o vetor estendido de $[\mathbf{x}]$, tal que cada incidência de todo componente multiincidente seja incluído em $[\mathbf{xd}]$ como um componente independente, mas transformado em seu dual se o correspondente ponto incidente tiver monotonicidade no sentido contrário ao seu global do correspondente componente de $[\mathbf{x}]$. Então,

$$f^*([\mathbf{x}]) = fR([\mathbf{xd}]) = f^{**}([\mathbf{x}]) \tag{3.10}$$

□

Definição 3.6 Uma incidência de uma variável com relação a uma função é considerada isotônica, se sua derivada parcial por positiva. Caso contrário, a incidência é considerada anti-tônica. □

Exemplo 3.7 Seguindo o Exemplo 2.1 da extensão da função real ($\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ para o vetor intervalar $[\mathbf{a}] = ([1,3],[2,5])$, a derivada parcial de f com relação a x é positiva no domínio de $[\mathbf{a}]'$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} > 0 \text{ para } [\mathbf{a}]$$

a derivada parcial de f com relação a primeira incidência de x é positiva no domínio de $[\mathbf{a}]'$ (definindo x_1 como a primeira incidência de x, e x_2 como a segunda incidência de x),

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_1} = \frac{1}{x+y} > 0 \text{ para } [\mathbf{a}]$$

e a derivada parcial de f com relação a segunda incidência de x é negativa no domínio de $[\mathbf{a}]'$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_2} = \frac{-x}{(x+y)^2} < 0 \text{ para } [\mathbf{a}]$$

Portanto, f é isotônica com relação a x, isotônica com relação a primeira incidência de x, e anti-tônica com relação a segunda incidência de x.

O Teorema 3.4 pode ser aplicado para obter:

$fR([\mathbf{ad}]) = [1,3]/([3,1] + [2,5]) = [1/6, 3/5]$

e

$R(f([\mathbf{a}])) = f^*([\mathbf{a}]) = fR([\mathbf{ad}]) = [1/6, 3/5].$ □

Se uma função não é totalmente monótona com relação a todas as suas variáveis multiincidentes, outros resultados fornecem significado semântico aos cálculos racionais.

Teorema 3.5 (Gardenes et al., 2001) Se em $fR([\mathbf{x}])$ houver componentes impróprias multiincidentes e se $[\mathbf{xt}]^*$ é o vetor intervalar obtido de $[\mathbf{x}]$ através da transformação de todas as suas incidências, exceto uma, nas suas duais, para todas as componentes impróprias, então

$$f^*([\mathbf{x}]) \subseteq fR([\mathbf{xt}]^*).$$

Se todas as componentes de $[\mathbf{x}]$ forem próprias, então $[\mathbf{xt}]^* = [\mathbf{x}]$ e $f^*([\mathbf{x}]) \subseteq fR([\mathbf{x}])$. □

Teorema 3.6 (Gardenes et al., 2001) Se em $fR([\mathbf{x}])$ houver componentes multiincidentes próprias e se $[\mathbf{xt}]^*$ é o vetor intervalar obtido de $[\mathbf{x}]$ através da transformação de todas as suas incidências, exceto uma, nas suas duais, para toda componente própria multiincidente, então

$$f^*([\mathbf{x}]) \supseteq fR([\mathbf{xt}]^{**}).$$

Se todas as componentes de $[x]$ forem impróprias, então $[\mathbf{xt}]^{**} = [\mathbf{x}]$ e $f^{**}([\mathbf{x}]) \supseteq fR([\mathbf{x}])$. $\square$

Exemplo 3.8 Para a função do exemplo 3.7 $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ estendida para o novo vetor intervalar $[\mathbf{a}] = ([3,8],[-1,3])$, a imagem é $[1/2, 3/2]$ e sua extensão intervalar racional modal é

$$fR([\mathbf{a}]) = [3,8]/([3,8]+[-1,3]) = [3/11, 4].$$

A derivada parcial de f com relação a x contém 0, então no domínio de $[\mathbf{a}]'$ a função f não é monótona com relação a x. O Teorema 3.6 é aplicável e

$$fR([\mathbf{at}]^*) = [3,8]/([8,3]+[-1,3]) = [1/2, 8/7]$$

ou

$$fR([\mathbf{at}]^{**}) = [8,3]/([3,8]+[-1,3]) = [18/11, 3/2]$$

que são estimativas melhores da imagem de f que a extensão intervalar racional modal $fR([\mathbf{a}])$. $\square$

3.5 Conclusões

Neste capítulo abordamos os intervalos modais com o objetivo de não só de otimizar funções intervalares com elementos multiincidentes para a obtenção das suas imagens, mas principalmente fornecer um significado semântico mais completo aos resultados dos cálculos intervalares. Foram mostradas operações intervalares, propriedades e teoremas para auxiliar na aplicação da análise intervalar. Nos próximos capítulos serão apresentados projetos de controladores robustos utilizando técnicas de análise intervalar clássica e modal.

Capítulo 4

Controle Robusto SISO por Alocação de Pólos

4.1 Introdução

Modelos matemáticos geralmente incorporam incertezas paramétricas relacionadas aos sistemas modelados, e como forma de garantirem estabilidade e desempenho sob controle desses sistemas em malha fechada, faz-se necessária a utilização de métodos de projeto de controladores que levem em conta as incertezas presentes nos modelos. Quando as incertezas estão parametrizadas e os parâmetros são descritos por intervalos fechados, o sistema pode ser visto como um sistema dinâmico intervalar. Diversos métodos de projeto de controladores robustos para sistemas lineares invariantes no tempo formulados depois do aparecimento do Teorema de Kharitonov (Kharitonov, 1978) utilizam a função de transferência intervalar do modelo do sistema. Outra possibilidade é adotar uma representação por variáveis de estado, quando então o sistema passa a ser descrito por matrizes intervalares. Do ponto de vista de alocação de pólos, o problema de controle robusto consistiria em determinar um ganho de realimentação de estados de forma a alocar todos os pólos do sistema em malha fechada no semiplano esquerdo aberto do plano s (estabilização robusta) ou numa região predeterminada do semiplano esquerdo (desempenho robusto), independentemente dos valores que os parâmetros do sistema possam assumir dentro dos seus respectivos intervalos.

Neste capítulo propomos uma abordagem para o projeto de controladores visando o desempenho robusto do sistema em malha fechada (Prado et al., 2005) e (Prado e Ferreira, 2004). A abordagem proposta baseia-se na combinação de conceitos e métodos de análise intervalar clássica (Moore, 1979) e modal (Gardenes et al., 2001) com uma técnica para alocação robusta de pólos introduzida em (Soh et al., 1987) e reeditada em (Keel e Battacharyya, 1999), através da qual conjuntos espectrais de polinômios intervalares fazem o papel de regiões de alocação. A abordagem proposta é similar à adotada recentemente em (Smagina e Brewer, 2002) para o problema de estabilização robusta. Como em (Smagina e Brewer, 2002), um ganho de realimentação robusto é sintetizado a partir de uma *fórmula de Ackermann intervalar*, porém avançamos no sentido de obter condições necessárias e suficientes para a existência de ganhos robustos via fórmula de Ackermann. Do ponto de vista da utilização de conceitos e métodos de análise intervalar, os resultados apresentados são análogos aos empregados em (Lordelo e Ferreira, 2002), no qual controladores robustos por alocação de pólos são caracterizados e obtidos através de uma *equação Diofantina intervalar*.

4.2 Alocação Robusta de Pólos

Considere o sistema linear invariante no tempo representado no espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x} + [\mathbf{b}]\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = [\mathbf{c}]\mathbf{x}, \tag{4.1}$$

no qual $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}$ é a entrada e $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}$ a saída do sistema. A matriz de estados intervalar $[\mathbf{A}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ e os vetores de controle e saída $[\mathbf{b}] \in I(\mathbb{R}^{n\times 1})$ e $[\mathbf{c}] \in I(\mathbb{R}^{1\times n})$ são introduzidos para modelar incertezas estruturadas na forma de parâmetros do sistema, nos quais seus valores são desconhecidos, porém limitados. Neste capítulo o princípio de projeto de alocação robusta de pólos introduzido em (Soh et al., 1987) é adotado. De acordo com este princípio, devem-se alocar robustamente polinômios característicos de malha fechada em uma família intervalar de polinômios característicos:

$$[p(s)] := s^n + [p_{n-1}]s^{n-1} + \cdots + [p_0],$$

nos quais $[p_i] := [\underline{p_i}, \overline{p_i}]$, $i = 0, 1, .., n-1$ são coeficientes intervalares. Representações explícitas para $[p(s)]$ quando os pólos de malha fechada assumem formas simples são discutidas em (Soh et al., 1987). Um procedimento de projeto por alocação de pólos alternativo é proposto em (Keel e Battacharyya, 1999) via o conceito de *conjunto espectral* de um polinômio intervalar, definido como

$$\mathcal{S}([p(s)]) := \{s \in \mathbb{C} \mid p(s) = 0, p_i \in [\underline{p_i}, \overline{p_i}],\ i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

A idéia básica em (Keel e Battacharyya, 1999) é criar uma especificação de alocação de pólos regional na forma de um conjunto espectral de um polinômio intervalar, tirando vantagem do fato de que os conjuntos espectrais de polinômios intervalares podem ser efetivamente descritos através do *Teorema das Arestas* (Bartlett et al., 1988).

Teorema 4.1 (**Teorema das Arestas**) O espaço de raízes $\mathcal{S}([p(s)])$ de um polinômio intervalar $[p(s)]$ é limitado pelas raízes das arestas do hiper-retângulo determinado por seus coeficientes $[\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}]$.

Prova: Veja (Bhattacharyya et al., 1995) □

Considerando que $0 \notin [p_1]$, o teorema 4.1 estabelece que $\mathcal{S}([p(s)])$ é limitado pelo espectro das arestas expostas do politopo de polinômios $[p(s)]$.

Assumindo que polinômios característicos de malha fechada adequados tenham sido previamente especificados, o seguinte problema de projeto de sistema de controle robusto pode ser formulado.

PROJETO DO CONTROLADOR. Dado $[p(s)]$, encontre um ganho de realimentação de estados constante $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tal que

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bk}) \in [p(s)]$$

para toda $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$.

É evidente que a existência de um controlador robusto alocando pólos de malha fechada em localizações arbitrárias do plano complexo requeira controlabilidade (observabilidade) em um sentido robusto. O sistema intervalar $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$ é dito ser controlável se o rank da *matriz de controlabilidade* $n \times n$

$$\mathbf{M} := \left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b} & \vdots & \mathbf{Ab} & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{A^{n-1}b} \end{array}\right]$$

for igual a n para todo par $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in ([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$. O *par* $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é então dito ser controlável. Invocando o *princípio de dualidade* em projetos de sistemas de controle (Chen, 1999), conclui-se que o sistema intervalar $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$ é observável se e somente se o par $([\mathbf{A}]^{\mathbf{T}}, [\mathbf{c}]^{\mathbf{T}})$ for controlável.

A *extensão intervalar* da matriz de controlabilidade é dada por

$$[\mathbf{M}] = \left[\begin{array}{ccccccc} [\mathbf{b}] & \vdots & [\mathbf{A}]\,[\mathbf{b}] & \vdots & \cdots & \vdots & [\mathbf{A}]^{\mathbf{n-1}}\,[\mathbf{b}] \end{array}\right].$$

Deve-se observar que $[\mathbf{M}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ contém todas as possíveis matrizes de controlabilidade do sistema intervalar, mas nem todas as matrizes em $[\mathbf{M}]$ são matrizes de controlabilidade. Contudo, se $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = n$ para toda $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$, então o par $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é controlável. Denotando como $[\det([\mathbf{M}])]$ a extensão intervalar de $\det(\mathbf{M}),\ \mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$, segue que $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é controlável se $0 \notin [\det([\mathbf{M}])]$. Obter a extensão intervalar de $[\det([\mathbf{M}])]$ é, contudo, computacionalmente caro. Na Seção 4.4 é proposto um procedimento numérico para testar controlabilidade (observabilidade) baseado na extensão intervalar do método da fatoração QR (Bentbib, 2002).

4.3 Projeto do Controlador

Nesta seção apresentamos uma extensão da técnica clássica de projeto de realimentação de estados para sistemas intervalares. No caso não-intervalar, dado o polinômio característico de $\mathbf{A}$,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

e o polinômio característico de malha fechada desejado,

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 + p_0,$$

deve-se determinar um ganho de realimentação de estados constante $\mathbf{k} := [k_0 \;\; k_1 \;\; \cdots \;\; k_{n-1}]$, e a lei de controle correspondente

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}\mathbf{x}, \tag{4.2}$$

tal que $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ satisfaça

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) = p(s). \tag{4.3}$$

A alocação de $p(s)$ pode ser obtida pela equação de Ackermann (Ogata, 1997)

$$\mathbf{k}\mathbf{M}\mathbf{W} + \alpha = \mathbf{p}, \tag{4.4}$$

na qual

$$\mathbf{p} := \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \end{bmatrix},\; \alpha := \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{W} := \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3.1 Caso Intervalar

Como os coeficientes do polinômio característico de $\mathbf{A}$ são funções multilineares dos seus elementos, as extensões intervalares destes coeficientes, chamadas $[\alpha_i],\ i = 0, 1, \ldots, n-1$, podem ser calculadas, assim como $[\mathbf{W}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$, a extensão intervalar de $\mathbf{W}$ considerando que $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$. A extensão intervalar da equação de Ackermann é dada por

$$\mathbf{k}[\mathbf{M}][\mathbf{W}] + [\alpha] = [\mathbf{p}], \tag{4.5}$$

na qual $[\mathbf{p}] \in I(\mathbb{R}^{1\times n})$ representa um polinômio característico de malha fechada intervalar. Utilizando a segunda propriedade da diferença da aritmética intervalar modal e isolando a parcela relativa ao controlador, a equação fica

$$\mathbf{k}[\mathbf{M}][\mathbf{W}] = [\mathbf{p}] - dual([\alpha]). \tag{4.6}$$

Para que o lado direito da equação intervalar seja um intervalo próprio, ou seja, para que o sistema linear (4.6) possua solução no âmbito da aritmética intervalar clássica, uma condição necessária é que $\mathbf{p_w} \geq \alpha_{\mathbf{w}}$, significando que a largura de $[\mathbf{p}]$ deve ser maior ou igual a largura de $[\alpha]$.

$$[\mathbf{p}] - dual([\alpha]) := [\underline{\mathbf{p}} - \underline{\alpha}, \overline{\mathbf{p}} - \overline{\alpha}],$$

A equação (4.6) pode então ser substituída por

$$\mathbf{k}[\mathbf{T}] = [\mathbf{f}], \tag{4.7}$$

na qual $[\mathbf{T}] := [\mathbf{M}][\mathbf{W}]$ e $[\mathbf{f}] := [\mathbf{p}] - dual([\alpha])$. Como acontece no caso não-intervalar, o projeto do controlador tem uma solução simples quando a equação de estado está na *forma controlável intervalar*:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -[\alpha_0] & -[\alpha_1] & -[\alpha_2] & \cdots & -[\alpha_{n-1}] \end{bmatrix}$$

e

$$[\mathbf{b}]^{\mathbf{T}} = \mathbf{b}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que o par intervalar $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é sempre controlável. Representações controláveis intervalares são facilmente obtidas a partir de sistemas representados por funções de transferências intervalares.

Teorema 4.2 Seja $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$ um sistema intervalar invariante no tempo na forma controlável intervalar. Então

$$\mathbf{k} \in [\mathbf{f}] = [\mathbf{p}] - dual([\alpha]). \tag{4.8}$$

resolve o problema de alocação robusta de pólos.

Prova: Dadas as estruturas de $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{b}]$, segue que

$$\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + [\mathbf{b}]\mathbf{k}) = s^n + ([\alpha_{n-1}] + k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + ([\alpha_1] + k_1) + ([\alpha_0] + k_0), \tag{4.9}$$

e a solução (4.8) de $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + [\mathbf{b}]\mathbf{k}) = [p(s)]$ por uso de análise intervalar modal. $\square$

Claramente, (4.8) generaliza a solução do problema de projeto do controlador baseado em alocação de pólos, no sentido que se $\underline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$ e $\underline{\alpha} = \overline{\alpha} = \alpha$, então $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \alpha$. Embora qualquer ganho de realimentação satisfazendo (4.8) resolva o problema de alocação de pólos, o *controlador central* $\mathbf{k} = \mathbf{f_c} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{f}})$ possui a vantagem de máxima *não-fragilidade* com relação às variações de ganhos. A variação máxima permitida nos coeficientes de $\mathbf{f_c}$, isto é, o *raio* do vetor intervalar centrado em $\mathbf{f_c}$, referenciado como θ, é facilmente calculado.

Exemplo 4.1 Considere a forma controlável associada à função de transferência de terceira ordem intervalar discutida em (Jaulin et al., 2001):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -[\alpha_0] & -[\alpha_1] & -[\alpha_2] \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c^T} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

na qual

$$\alpha_0 = \frac{\beta_3^2}{\beta_2},\ \alpha_1 = \beta_3^2 + \frac{\beta_3}{\beta_2},\ \alpha_2 = \beta_3 + \frac{1}{\beta_2},\ \gamma = \frac{\beta_1\beta_3^2}{\beta_2}.$$

Assumindo $[\beta_1] = [\beta_2] = [\beta_3] = [0.97, 1.03]$ e usando aritmética intervalar, obtemos o sistema intervalar $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$ caracterizado por

$$[\alpha_0] = [0.9134, 1.0937],\ [\alpha_1] = [1.8826, 2.1227],$$

$$[\alpha_2] = [1.9408, 2.0609],\ [\gamma] = [0.8860, 1.1265].$$

O polinômio característico intervalar

$$[p(s)] = s^3 + [7.469, 8.536]s^2 + [20.89, 27.32]s + [25.98, 38.87], \tag{4.10}$$

envolve o polinômio característico *nominal* $p(s) = s^3 + 8s^2 + 24s + 32$ (pólos em -4, $-2 \pm j2$). O conjunto espectral de $[p(s)]$ é ilustrado na Figura 4.1 em cinza claro. Desde que o sistema esteja na forma controlável intervalar, uma solução possível para o problema de alocação robusta de pólos é o controlador central $\mathbf{k} = \mathbf{f_c} = [31.42\ \ 22.10\ \ 6.001]$. O conjunto espectral de det$(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{b}[\mathbf{k}])$ é ilustrado na Figura 4.1 em cinza escuro. Os pólos de malha fechada permanecem no interior do conjunto espectral de $[p(s)]$ para todas as possíveis $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{k} \in [\mathbf{k}]$, no qual $[\mathbf{k}]$ é o vetor intervalar com centro em $\mathbf{f_c}$ e raio $\theta = 0.0793$. O conjunto espectral do sistema com o controlador central $\mathbf{k_c}$ é mostrado na Figura 4.1 em linhas pretas. □

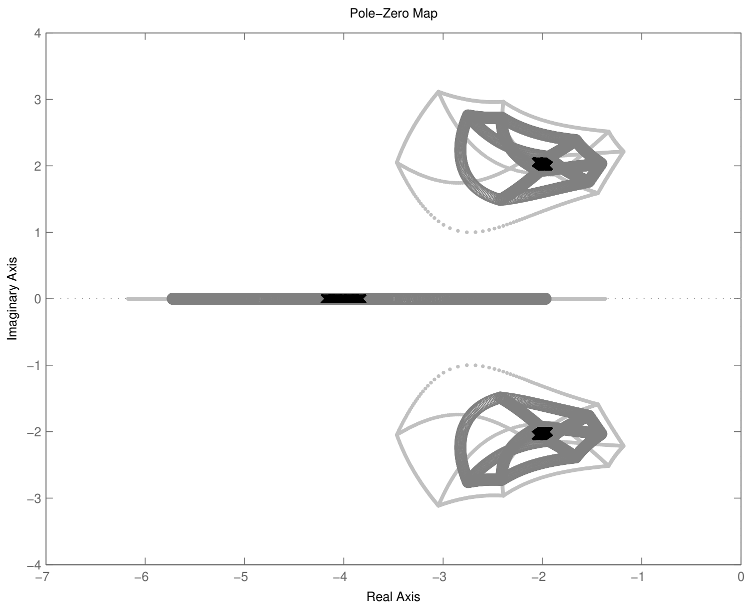

Fig. 4.1: Conjuntos espectrais: $[p(s)]$, em cinza claro, $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + [\mathbf{b}][\mathbf{k}])$, em cinza escuro e $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + [\mathbf{b}]\mathbf{k_c})$ em preto.

Exemplo 4.2 Considere o modelo da planta do equipamento ECP Sistema Retilíneo (massa-mola-carrinho) do Laboratório de Sistemas de Controle da FEEC/Unicamp:

$$G_p(s) = \frac{khw}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1},$$

no qual os valores centrais são: $m_1 = 2.778kg$, $c_1 = 2.94N/m/seg$, $k_1 = 338.6N/m$ e $khw = 14732N/m$. Considerando os valores com incertezas de 20% do valor central, obtemos os seguintes intervalos para cada parâmetro: $m_1 = [2.2224, 3.3336]kg$, $c_1 = [2.352, 3.528]$, $k_1 = [270.88, 406.32]$ e $khw = [11785.6, 17678.4]$. O sistema na forma controlável é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{c}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix},$$

no qual

$$\alpha_0 = \frac{k_1}{m_1}, \; \alpha_1 = \frac{c_1}{m_1}, \; \gamma = \frac{k_h w}{m_1}.$$

Os coeficientes intervalares associados à representação são

$$[\alpha_0] = [81.2575, 182.8294], \; [\alpha_1] = [0.7055, 1.5875], \; [\gamma] = [3535.3972, 7954.6436].$$

Considere as seguintes especificações de projeto: máxima sobrelevação $M_p = 0.2$, tempo de estabelecimento $t_s = 0.2s$ e tempo de subida $t_r = 0.1s$. Com isto, obtemos o coeficiente de amortecimento ξ variando entre 0.5 e 0.7 (sobrelevação entre 5 e 20 %) e a frequência natural amortecida ω_n variando entre 27 e 33 rad/seg. A família de polinômios intervalares é caracterizada por

$$[p(s)] = s^2 + [27, 46.2]s + [729, 1089],$$

que possui raízes satisfazendo às especificações regionais relativas ao coeficiente de amortecimento e frequência natural amortecida. O controlador central obtido é $\mathbf{k} = [776.9565 \;\; 35.4535]$. A Figura 4.2 ilustra os conjuntos espectrais resultantes.

Em (Smagina e Brewer, 2002) demonstra-se que o problema de estabilização robusta pode ter uma solução da forma $\mathbf{k} = \mathbf{f_c}(\mathbf{T_c})^{-1}$ se $\mathbf{f_c}(\mathbf{T_c})^{-1}[\mathbf{T}] \in [\mathbf{f}]$ e $[p(s)]$ é um polinômio intervalar Hurwitz satisfazendo $\mathbf{p}_\omega > \alpha_\omega$. Aqui, usando conceitos e resultados de análise intervalar aplicada a sistemas de equações lineares intervalares, o conjunto completo de controladores por alocação de pólos que podem ser derivados da equação de Ackermann é caracterizado. Como discutido no Capítulo 2, o

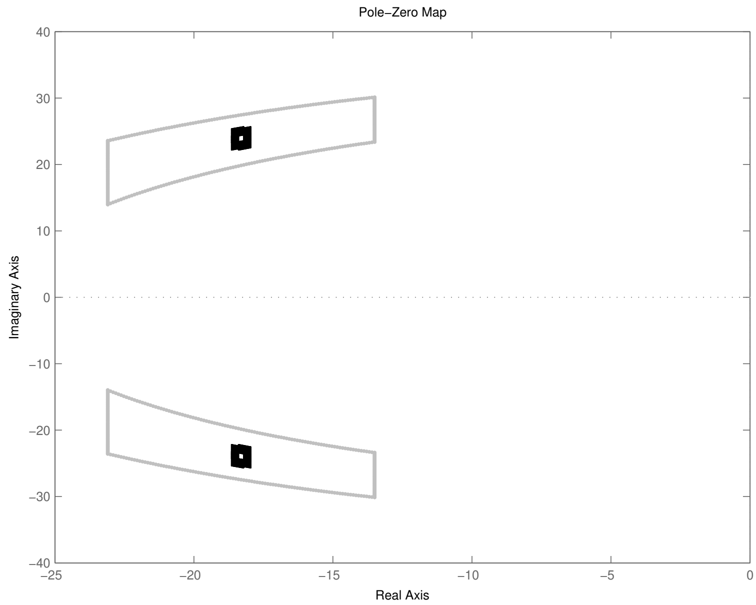

Fig. 4.2: Conjuntos espectrais: $[p(s)]$, em linhas claras e $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + [\mathbf{b}]\mathbf{k})$, em linhas mais escuras.

conjunto-solução de (4.5) é definido por

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{k} \ : \ \mathbf{kT} = \mathbf{f} \ \text{ para alguma } \mathbf{T} \in [\mathbf{T}] \text{ e } \mathbf{f} \in [\mathbf{f}]\}.$$

O subconjunto das *soluções internas* de $\mathcal{K}$ é dado por

$$\mathcal{K}_0 := \{\mathbf{k} \ : \ \mathbf{kT} \in [\mathbf{f}], \quad \mathbf{T} \in [\mathbf{T}]\},$$

e caracteriza todos os controladores por realimentação de estados robustos associados a (4.5). As seguintes representações de $\mathcal{K}_0$ são conseqüências da aplicação de resultados de análise intervalar de acordo com o Teorema 2.2, fazendo algumas substituições, como $\mathbf{x}$ por $\mathbf{k}$, a matriz $\mathbf{A}$ pela $\mathbf{T}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ por $\mathbf{k^1}$ e $\mathbf{k^2}$, respectivamente.

Teorema 4.3 (**Representações de** $\mathcal{K}_0$) Seja $\mathcal{K}_0$ o conjunto de todas as soluções internas da equação intervalar de Ackermann $\mathbf{k}[\mathbf{T}] = [\mathbf{f}]$ e defina

$$\mathcal{K}_1 := \{\mathbf{k} \ : \ |\mathbf{k}\mathbf{T_c} - \mathbf{f_c}| + |\mathbf{k}|\,\mathbf{T}_\delta \leq \mathbf{f}_\delta\};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2 := \{\mathbf{k} \ : \qquad & \mathbf{k} = \mathbf{k^1} - \mathbf{k^2},\\ & \mathbf{k^1}\mathbf{T}^- - \mathbf{k^2}\mathbf{T}^+ \geq \underline{\mathbf{f}},\\ & \mathbf{k^1}\mathbf{T}^+ - \mathbf{k^2}\mathbf{T}^- \leq \overline{\mathbf{f}},\\ & \mathbf{k^1} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{k^2} \geq \mathbf{0}\,\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3 := \{(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \ : \quad & \mathbf{k}\mathbf{T_c} - \tilde{\mathbf{k}}\mathbf{T}_\delta \geq \underline{\mathbf{f}},\\ & \mathbf{k}\mathbf{T_c} + \tilde{\mathbf{k}}\mathbf{T}_\delta \leq \overline{\mathbf{f}},\\ & -\tilde{\mathbf{k}} \leq \mathbf{k} \leq \tilde{\mathbf{k}}\,\}.\end{aligned}$$

Então $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ e $k \in \mathcal{K}_0 =$ se e somente se existir $\tilde{\mathbf{k}}$ tal que $(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \in \mathcal{K}_3$.

Prova: Este teorema é uma aplicação de (Rohn, 1986) em controle robusto. As provas envolvendo as equivalências entre $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ são derivadas dos resultados de (Rohn, 1989). A correspondência entre $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_3$ é baseada em (Kelling, 1994). Veja a prova do Teorema 2.3. $\square$

A primeira equivalência no Teorema 4.3, $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1$, pode ser vista como uma demonstração da condição necessária e suficiente para alocação robusta de pólos, baseada em Análise Intervalar, estabelecida em (Soh et al., 1987). Uma diferença sutil é que em (Soh et al., 1987), as notações equivalentes para $\mathbf{\Delta}$ e δ descrevem os desvios de uma *planta nominal* representada por $\mathbf{T_c}$ e um *vetor nominal* $\mathbf{f_c}$, enquanto no Teorema 4.3, $\mathbf{\Delta}$ e δ são simplesmente quantidades calculáveis a partir de $\underline{\mathbf{T}}$, $\overline{\mathbf{T}}$, $\underline{\mathbf{f}}$ e $\overline{\mathbf{f}}$. De fato, a segunda equivalência do Teorema 4.3, $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_2$, mostra que valores nominais não são necessários para descrever controladores robustos. Note finalmente que a equivalência $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_2$ e a correspondência entre $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_3$ são especialmente adequadas para manipulações numéricas.

Muitas propriedades geométricas úteis relacionadas a $\mathcal{K}_0$ e suas representações equivalentes podem ser analisadas e interpretadas em termos de projeto por alocação robusta de pólos. As proposições seguintes são conseqüências imediatas do Teorema 4.3.

Proposição 4.1 (Convexidade) $\mathcal{K}_0$ é um conjunto convexo poliedral. $\square$

A natureza convexa poliedral de $\mathcal{K}_0$ (como o conjunto de soluções internas) é evidenciada em (Rohn, 1986) através da equivalência $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_2$. A convexidade de $\mathcal{K}_0$ (como o conjunto de controladores robustos) também é citada em (Soh et al., 1987).

Proposição 4.2 (Existência) $\mathcal{K}_0$ é um conjunto não-vazio se e somente se os sistemas de inequações lineares indicados em $\mathcal{K}_2$ ou $\mathcal{K}_3$ têm uma solução. $\square$

A existência de controladores robustos pode ser testada pela Fase I do Algoritmo Simplex quando aplicada às desigualdades lineares em $\mathcal{K}_2$ ou $\mathcal{K}_3$. Quando $\mathcal{K}_0$ é não-vazio, uma forma de selecionar um controlador robusto, pode ser, por exemplo, fazendo com que o mesmo satisfaça a um dado critério. A infactibilidade de $\mathcal{K}_0$ é causada por uma incompatibilidade entre a descrição intervalar da planta, $[\mathbf{T}] = [\mathbf{T_c} - \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{T_c} + \boldsymbol{\Delta}]$, obtida através do vetor intervalar $[\alpha]$, e a especificação intervalar do polinômio característico através do vetor intervalar $[\mathbf{p}]$. Ou seja, pode-se alterar os vetores intervalares $[\alpha]$ ou $[\mathbf{p}]$, de forma que o sistema intervalar possua menos incerteza, através da diminuição de α_ω, ou de forma que a especificação seja menos restritiva, isto é, que $\mathbf{p}_\omega$ seja maior. Assumindo que exista um $\mathbf{k}$ de maneira que $\mathbf{T_c k} \in [\mathbf{f}]$ e que $\boldsymbol{\Delta}$ é escalonado por um fator não-negativo σ, a seguinte relação entre a magnitude da incerteza da planta e a existência de controladores robustos pode ser estabelecida.

Proposição 4.3 (Máxima Incerteza) Considere o problema de Programação Não-Linear:

$$\begin{aligned} \max_{\sigma,\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}} \quad & \sigma \\ s.a. \quad & \mathbf{k}\mathbf{T_c} - \tilde{\mathbf{k}}(\sigma\boldsymbol{\Delta}) \geq \underline{\mathbf{f_c}} \\ & \mathbf{k}\mathbf{T_c} + \tilde{\mathbf{k}}(\sigma\boldsymbol{\Delta}) \leq \overline{\mathbf{f_c}} \\ & -\tilde{\mathbf{k}} \leq \mathbf{k} \leq \tilde{\mathbf{k}} \\ & \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

Considere σ^* o valor ótimo de σ. Então $\mathcal{K}_0$ é não-vazio se e somente se $\sigma^* \geq 1$ e o máximo intervalo de incertezas contendo um controlador robusto é $[\mathbf{T_c} - \sigma^*\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{T_c} + \sigma^*\boldsymbol{\Delta}]$. $\square$

Proposição 4.4 (Limites sobre $\mathcal{K}_0$) Suponha que $\mathcal{K}_0$ é um conjunto limitado não-vazio. Para cada $i = 1, 2, ..., q$, defina $\underline{k_i}$ como o valor mínimo do problema linear

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{k}} \quad & k_i \\ s.a. \quad & \mathbf{k} \in \mathcal{K}_2. \end{aligned}$$

Defina $\overline{k_i}$, $i = 1, 2, ..., q$ de maneira semelhante, substituindo minimizar por maximizar. Então o menor vetor intervalar $[\mathbf{k}]$ contendo $\mathcal{K}_0$ é dado por $[\mathbf{k}] := [\underline{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{k}}]$. $\square$

4.3.2 Obtenção dos Controladores

Quando o sistema não se encontra na forma controlável intervalar é geralmente necessário recorrer às representações do Teorema 4.3 para obter controladores robustos. Nesta seção, controladores robustos são obtidos como soluções de problemas de programação linear na forma conhecida como *Programação Alvo* (Yu, 1985). A idéia básica é introduzir variáveis de desvio negativas $(\underline{\eta}, \overline{\eta})$ e positivas $(\underline{\rho}, \overline{\rho})$ nas desigualdades que representam as soluções internas do sistema, e então minimizar o desvio total em relação ao alvo intervalar $[f]$, que pode ou não ser atingido por um controlador. Ou seja, a especificação, representada pelo vetor intervalar $[\mathbf{p}]$, dado nas desigualdades pelo vetor intervalar $[\mathbf{f}]$, seria atingida se o desvio total for nulo. Uma condição necessária e suficiente para a existência de um controlador que aloque o polinômio característico em $[p(s)]$ é estabelecida em termos do seguinte problema de programação alvo intervalar (Ignizio, 1982):

Teorema 4.4 Considere o problema de programação linear nas variáveis não-negativas $\mathbf{k^1}$, $\mathbf{k^2}$, $\underline{\eta}$, $\underline{\rho}$, $\overline{\eta}$ e $\overline{\rho}$:

$$(\mathrm{P1}) \quad \min \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} (\underline{\eta_{\mathbf{i}}} + \overline{\rho_{\mathbf{i}}})$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & \mathbf{k^1}\underline{\mathbf{T}} - \mathbf{k^2}\overline{\mathbf{T}} + \underline{\eta} - \underline{\rho} = \underline{\mathbf{f}}, \\ & \mathbf{k^1}\overline{\mathbf{T}} - \mathbf{k^2}\underline{\mathbf{T}} + \overline{\eta} - \overline{\rho} = \overline{\mathbf{f}}, \\ & \mathbf{k^{1*}} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{k^{2*}} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Seja v^* o valor ótimo da função objetivo do problema (P1) e $\mathbf{k}^* = \mathbf{k^{1*}} - \mathbf{k^{2*}}$ o ganho de realimentação correspondente. Então $\mathbf{k}^* \in \mathcal{K}_0$ se e somente se $v^* = 0$.

Prova: Considere $(\mathbf{k^{1*}}, \mathbf{k^{2*}}, \underline{\eta}^*, \underline{\rho}^*, \overline{\eta}^*, \overline{\rho}^*)$ uma solução ótima para o problema P1.

(Suficiência) Se $v^* = 0$, então $\underline{\eta}^* = \overline{\rho}^* = 0$, portanto

$$\mathbf{k^{1*}}\underline{\mathbf{T}} - \mathbf{k^{2*}}\overline{\mathbf{T}} \geq \underline{\mathbf{f}}$$

$$\mathbf{k^{1*}}\overline{\mathbf{T}} - \mathbf{k^{2*}}\underline{\mathbf{T}} \leq \overline{\mathbf{f}}$$

$$\mathbf{k^{1*}} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{k^{2*}} \geq \mathbf{0}.$$

As desigualdades acima possuem uma solução $(\mathbf{k^{1*}}, \mathbf{k^{2*}})$ e, de acordo com o Teorema 4.3, $\mathbf{k}^* \in \mathcal{K}_0$.

(Necessidade) Qualquer solução ótima para o problema do Teorema 4.4 é tal que somente um dos $\underline{\eta_i}^*$ e $\underline{\rho_i}^*$ ($\overline{\eta_i}^*$ e $\overline{\rho_i}^*$) é positivo (Yu, 1985). Se $v^* > 0$, então pelo menos uma componente de $\underline{\eta}^*$ ou $\overline{\rho}^*$ é positiva e a componente associada a $\underline{\rho}^*$ ou $\overline{\eta}^*$ é nula. Como conseqüência, pelo menos uma das desigualdades acima é violada e, novamente pelo Teorema 4.3, $\mathbf{k}^* \notin \mathcal{K}_0$. $\square$

Se a solução do problema (P1) for $v^* > 0$, então $\underline{\eta}^*$ e $\overline{\rho}^*$ indicam quais componentes do alvo intervalar $[\mathbf{f}]$ não podem ser alcançadas. Quando $v^* = 0$ ($\underline{\eta}^* = \overline{\rho}^* = 0$), as variáveis de desvio $\overline{\eta}^*$ e $\underline{\rho}^*$ atuam como variáveis de folga e excesso para as desigualdades que descrevem os controladores robustos.

Exemplo 4.3 Considere o sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{c^T} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

discutido em (Chen, 1999), a partir do qual consideramos a_{11} e a_{21} variando 10% em torno dos seus valores centrais. Assim, $[a_{11}] = [-2.1, -1.9]$ e $[a_{21}] = [0.9, 1.1]$. A região de alocação envolve o mesmo polinômio característico nominal do Exemplo 4.1, $p(s) = s^3 + 8s^2 + 24s + 32$ (pólos em -4, $-2 \pm j2$); a família de polinômios intervalares é dada por

$$[p(s)] = s^3 + [7.232, 8.768]s^2 + [19.6132, 28.8292] + [23.6404, 42.129]$$

O controlador obtido resolvendo-se (P1) ($v^* = 0$) é dado por $\mathbf{k} = [3.3163 \;\; 5.5766 \;\; 0.0266]$. A Figura 4.3 representa a região de alocação (linhas claras) e os pólos do sistema em malha fechada obtidos com o controlador (linhas escuras).

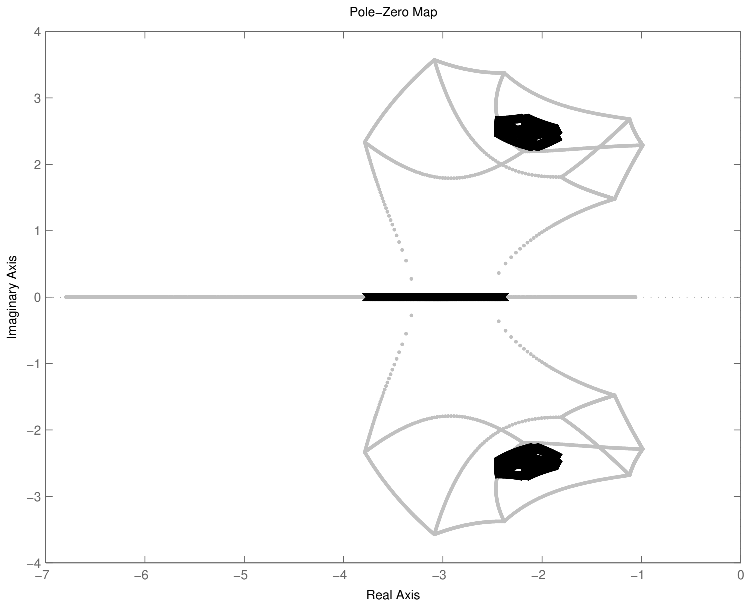

Fig. 4.3: Conjuntos espectrais: $[p(s)]$, em linhas claras e $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] - [\mathbf{b}]\mathbf{k})$, em linhas mais escuras.

4.3.3 Projetos não Frágeis

Uma grande preocupação ao se projetar controladores é evitar que pequenas variações nos coeficientes do controlador, devidas a questões de implementação, por exemplo, deteriorem o desempenho do sistema em malha fechada significativamente (Keel e Battacharyya, 1999). Para evitar a chamada fragilidade do controlador, um procedimento de projeto baseado na resolução de um problema de centralização, um problema clássico em programação não-linear, é proposto. A idéia é encontrar o centro $\mathbf{k}$ e o maior raio $\theta \geq 0$ tal que

$$\mathbf{k} + \theta\mathcal{C} \in \mathcal{K}_0,$$

no qual $\mathcal{C}$ é um conjunto dado especificando como os coeficientes do controlador podem variar e $\mathbf{k} + \theta\mathcal{C} := \{\mathbf{k} + \theta\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}\}$. O raio θ representa uma medida de fragilidade do controlador robusto $\mathbf{k}$ quando seus coeficientes variam como especificado por $\mathcal{C}$. Assumindo que $\mathcal{C}$ é um hiper-retângulo (isto é, um vetor intervalar), o problema do projeto não-frágil assume a forma

$$(\mathbf{P}_\theta) \left| \begin{array}{ll} \max\ \theta & \\ \text{s.a.} & (\mathbf{I_n} \pm \theta\mathbf{V})\mathbf{k}\mathbf{T_c} - \bar{\mathbf{k}}\mathbf{T}_\delta \geq \underline{\mathbf{f}}, \\ & (\mathbf{I_n} \pm \theta\mathbf{V})\mathbf{k}\mathbf{T_c} + \bar{\mathbf{k}}\mathbf{T}_\delta \leq \bar{\mathbf{f}}, \\ & -\tilde{\mathbf{k}} \leq (\mathbf{I_n} \pm \theta\mathbf{V})\mathbf{k} \leq \tilde{\mathbf{k}}, \\ & \theta \geq 0, \end{array} \right.$$

no qual $\pm$ denota duas desigualdades (uma para $+$, e outra para $-$), $\mathbf{I_n}$ denota a matriz identidade de ordem n, $\mathbf{V} := diag(v_1, v_2, ..., v_n)$, e $v_i \geq 0$ representa o peso relativo atribuído ao ganho i: quanto maior o valor de v_i relativamente a v_j, $j \neq i$, menor será a variação permitida em k_i. O problema não-linear (P_θ) pode ser resolvido através do MATLAB, Toolbox de Otimização.

4.4 Sistemas Multivariáveis

O projeto de controladores por realimentação de estados para sistemas MIMO reduz-se ao projeto de sistemas SISO ao se assumir que $\mathbf{A}$ é cíclica, isto é, que o polinômio característico de $\mathbf{A}$ é igual ao seu polinômio mínimo. Se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ for controlável e $\mathbf{A}$ for cíclica, então o par $(\mathbf{A}, \mathbf{Bq})$ é controlável para quase todo vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, sendo m o número de entradas do sistema (colunas de $\mathbf{B}$)

(Chen, 1999).

Se adotarmos a extensão intervalar do princípio de projeto acima, o ganho de realimentação de estados robusto para sistemas MIMO intervalares assume a forma $\mathbf{K} = \mathbf{qk}$, na qual $\mathbf{k}$ pode ser obtida fazendo-se $[\mathbf{b}] := [\mathbf{B}]\mathbf{q}$, e então aplicando-se o procedimento de projeto discutido na Seção 4.3. Podemos aplicar este procedimento de projeto e tentar obter um controlador robusto sem um teste prévio de controlabilidade. Para o projeto ficar completo, um teste de controlabilidade (observabilidade) baseado em uma extensão intervalar do método de fatoração QR (Bentbib, 2002) é proposto e encontra-se descrito em maiores detalhes no Apêndice B. Um resumo do procedimento é apresentado a seguir

Dada uma matriz intervalar $[\mathbf{N}] \in I(\mathbb{R}^{m\times n})$ com $m \geq n$, obtemos uma matriz $[\mathbf{Q}]$ intervalar ortogonal $m \times m$, uma matriz $[\mathbf{R}]$ intervalar trapezoidal superior $m \times n$, e então uma fatoração da forma $[\mathbf{N}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$, significando que para todo $\mathbf{N} \in [\mathbf{N}]$ existe uma matriz $\mathbf{Q} \in [\mathbf{Q}]$ e $\mathbf{R} \in [\mathbf{R}]$ tal que $\mathbf{N} = \mathbf{QR}$. Então $rank([\mathbf{N}]) = n$ se $rank([\mathbf{R}]) = n$. Já que $[\mathbf{R}]$ exibe a forma intervalar trapezoidal superior

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \left[\widetilde{\mathbf{R}}\right] \\ \cdots \\ \left[\mathbf{0}\right] \end{bmatrix},$$

no qual $[\widetilde{\mathbf{R}}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ é uma matriz intervalar triangular superior. Assim, $rank([\mathbf{R}]) = n$ se e somente se $0 \notin [\widetilde{r_{ii}}]$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 4.4 Considere a equação de estado linearizada para a velocidade longitudinal de um helicóptero, discutida em (Smagina e Brewer, 2002):

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [a_1] & [a_2] & -9.8 \\ [a_3] & [a_4] & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [b_1] & 0 \\ 0 & [b_2] \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $[a_1] = [-0.031, -0.0128]$, $[a_2] = [-3.4, -0.1]$, $[a_3] = [-0.00077, -0.0007]$, $[a_4] = [-0.32, -0.31]$, $[b_1] = [-18, -15]$ e $[b_2] = [-3.3, -3]$. O método de fatoração QR intervalar foi utilizado para checar a controlabilidade de $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$. Por conveniência o algoritmo foi aplicado a $[\mathbf{M}]^{\mathbf{T}} \in I(\mathbb{R}^{6\times 3})$. A matriz intervalar relevante para a análise é

$$[\widetilde{\mathbf{R}}] = \begin{bmatrix} [29.7, 38.7] & [-0.40, 0.24] & [-0.73, 1.21] \\ [0, 0] & [3.11, 3.52] & [-1.55, -0.47] \\ [0, 0] & [0, 0] & [-3.81, -2.43] \end{bmatrix}.$$

Como $0 \notin [\widetilde{r_{ii}}]$, $i = 1, 2, 3$, concluímos que $rank([\mathbf{R}]) = n$, e que portanto o par $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ é controlável.

Em (Smagina e Brewer, 2002), dada uma família intervalar de polinômios Hurwitz

$$[p(s)] = s^3 + [3, 4]s^2 + [2, 8]s + [0.5, 5.5],$$

deve-se encontrar o ganho de realimentação de estados $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que $det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \in [p(s)]$ para toda $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{B} \in [\mathbf{B}]$, de forma a garantir estabilidade robusta do sistema em malha fechada. Adotando $\mathbf{q}^{\mathbf{T}} = [0.8\ 1.2]$ e resolvendo o problema $(\mathbf{P}_\theta)$ com $\mathbf{V} = diag(1, 1, 1)$, o ganho de realimentação de estados robusto $\mathbf{k}^* = [0.0266 - 0.9297 - 0.7028]$ é obtido, e então produz

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{q}\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} 0.0213 & -0.7438 & -0.5622 \\ 0.0319 & -1.1157 & -0.8433 \end{bmatrix}.$$

O valor ótimo de θ foi $\theta^* = 0.0852$, significando que o ganho de realimentação de estados pode variar até $8,5\%$ sem violar a especificação do sistema em malha fechada. A Figura 4.4 representa os conjuntos do sistema em malha fechada em preto e a região de alocação em cinza.

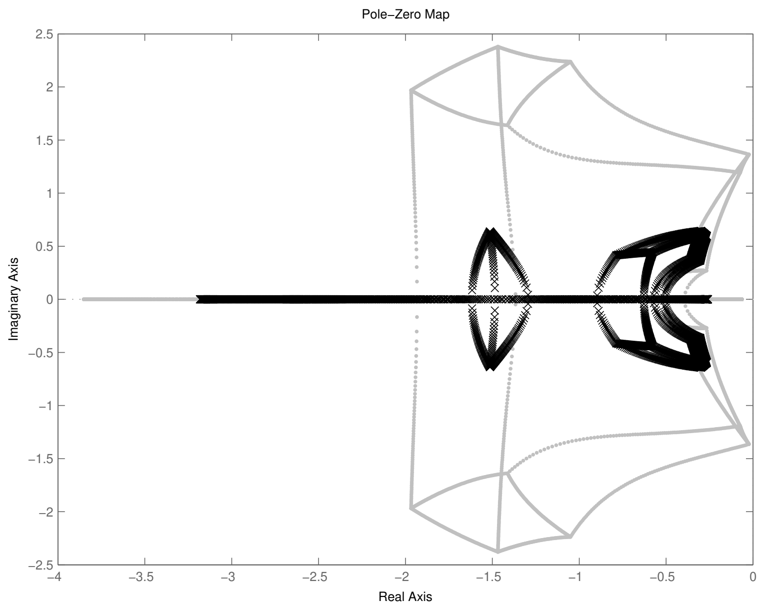

Fig. 4.4: Conjuntos espectrais: $[p(s)]$, em linhas claras e $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + [\mathbf{b}]\mathbf{k})$, em linhas mais escuras.

4.5 Conclusões

Neste capítulo introduzimos caracterizações de controladores para sistemas intervalares baseados em alocação robusta de pólos derivados a partir da equação de Ackermann intervalar. As técnicas de projeto propostas visam inicialmente sistemas SISO. Os procedimentos de projeto envolvem a resolução de problemas de programação alvo intervalares, e a resolução de problemas de centralização que têm por objetivo maximizar não-fragilidade dos controladores obtidos. Foram ainda considerados projetos para sistemas MIMO, realizados a partir de uma representação SISO do sistema, possível quando a matriz $[\mathbf{A}]$ é cíclica. No próximo capítulo será discutida a alocação robusta de pólos para sistemas MIMO através da equação de Sylvester intervalar.

Capítulo 5

Controle Robusto MIMO por Alocação de Pólos

5.1 Introdução

Pode-se obter um ganho de realimentação de estados para alocação de pólos através de um método conhecido, que consiste em resolver uma equação do tipo Sylvester. Como estamos interessados em alocação robusta para sistemas intervalares, a extensão do método proposto envolverá a resolução de uma equação de Sylvester intervalar. A utilização de análise intervalar clássica leva à sobreestimação de resultados devido às possíveis multiincidências, e portanto não é adequada para se obter ganhos de realimentação para alocação robusta de pólos. Para superar esta dificuldade, neste capítulo será proposto um método para obtenção de ganhos de realimentação que utiliza a equação de Sylvester intervalar modal.

5.2 Alocação de Pólos via Equação de Sylvester

Considere o par controlável $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$. O problema de calcular uma matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ para que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ adquira um espectro predeterminado $\mathbf{\Lambda}$, está presente em diversos métodos de síntese em Teoria de Controle (Wonham, 1979). A solução para o problema de alocação de pólos consiste em obter $\mathbf{K}$ através da resolução das equações matriciais

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PF} = \mathbf{BG}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{KP} = \mathbf{G}, \tag{5.2}$$

para uma $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ fixa, cujo espectro coincide com o espectro desejado $\mathbf{\Lambda}$, e quase qualquer $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{r\times n}$. A demonstração deste resultado, que conta com uma prova construtiva do teorema de alocação de pólos, depende do cálculo do rank genérico de $\mathbf{P}$ com relação a $\mathbf{G}$ como um parâmetro. O procedimento de alocação de pólos resultante é extremamente simples e computacionalmente atrativo. A equação (5.1) é chamada de equação de Sylvester.

Considere a equação (5.1) com $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{F}$ fixas e satisfazendo as condições

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \text{ controlável}, \tag{5.3}$$

$$\rho(\mathbf{A}) \cap \rho(\mathbf{F}) = \emptyset, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{F} \text{ cíclica}. \tag{5.5}$$

Em (5.4) $\rho(\mathbf{A}) = \{\lambda_i(\mathbf{A}), i = 1, ..., n\}$ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$; a matriz $\mathbf{G}$ é vista como um parâmetro.

Teorema 5.1 Se as hipóteses (5.3)-(5.5) são válidas, a solução única $\mathbf{P}$ de (5.1) é genericamente não-singular com relação ao parâmetro $\mathbf{G}$. De forma equivalente, se $\mathbf{P}(\mathbf{G})$ denota a solução de (5.1) para uma $\mathbf{G}$ fixa, segue que

$$rank(\mathbf{P}(\mathbf{G})) = n \tag{5.6}$$

para toda $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{r\times n}$, exceto possivelmente para aquelas pertencentes a uma variedade algébrica própria. Para toda $\mathbf{G}$ não pertencente a esta variedade,

$$\rho(\mathbf{A} + \mathbf{BGP^{-1}}) = \rho(\mathbf{F}). \tag{5.7}$$

Prova: A prova deste teorema encontra-se em (Battacharyya e de Souza, 1982). □

5.3 Equação de Sylvester Intervalar

Quando os elementos das matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{G}$ possuem incertezas nos seus elementos, estas incertezas podem ser representadas na forma intervalar. Então obtemos uma equação de Sylvester intervalar

$$[\mathbf{A}][\mathbf{P}] + [\mathbf{P}][\mathbf{F}] = [\mathbf{B}][\mathbf{G}]. \tag{5.8}$$

Define-se

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{B}][\mathbf{G}] \tag{5.9}$$

com $[\mathbf{A}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$, $[\mathbf{B}] \in I(\mathbb{R}^{n\times m})$, $[\mathbf{F}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ e $[\mathbf{G}] \in I(\mathbb{R}^{m\times n})$.

A solução de (5.8) é representada como uma matriz intervalar, na qual seu conjunto solução é definido como

$$[\mathbf{P}] = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}} | \mathbf{AP} + \mathbf{PF} = \mathbf{BG}, \text{para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \mathbf{B} \in [\mathbf{B}], \mathbf{F} \in [\mathbf{F}], \mathbf{G} \in [\mathbf{G}]\} \tag{5.10}$$

5.3.1 Existência e Caracterização da Solução

Teorema 5.2 Uma condição necessária e suficiente para que a equação de Sylvester intervalar (5.8) tenha solução para toda $[\mathbf{C}]$ é que $\rho([\mathbf{A}]) \cap \rho([\mathbf{F}]) = \emptyset$, definindo-se $\rho([\mathbf{A}]) = \{\rho(\mathbf{A}) | \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \rho(\mathbf{A}) = \{\lambda_i(\mathbf{A}), i = 1, ..., n\}\}$ como o espectro de $[\mathbf{A}]$.

Prova: A prova se encontra em (Seif et al., 1994). □

Em (Seif et al., 1994) são apresentados alguns métodos clássicos para a resolução de equações de Sylvester intervalares: métodos diretos baseados em simulação, como o método de Monte Carlo; algoritmos de programação linear, baseados na representação da equação pelo produto de Kronecker (Bellman, 1970); métodos diretos ou iterativos de Rohn (Rohn, 1989); e abordagens baseadas em análise de sensibilidade (Deif, 1986). Contudo, independente do método utilizado, as operações algébricas intervalares clássicas introduzem sobreestimações nos intervalos resultantes, devido ao efeito de multiincidências. Para contornar esta dificuldade e ao mesmo tempo fornecer um significado semântico claro para a solução, propomos a resolução de uma equação de Sylvester intervalar que utiliza técnicas de intervalos modais.

Em (Shashikhin, 2002) é apresentado um procedimento de alocação de pólos através de realimentação de estados utilizando a equação de Sylvester intervalar através da aritmética de Kaucher (Kaucher, 1980). No entanto, o controlador obtido não resolve o problema de alocação robusta para plantas incertas levando em conta toda a variação das incertezas do sistema. Obtém-se uma matriz intervalar de ganho de realimentação $[\mathbf{K}]$ na qual existirá uma $\mathbf{K} \in [\mathbf{K}]$ que resolve o problema para uma $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e uma $\mathbf{B} \in [\mathbf{B}]$. Na nossa proposta vamos obter uma matriz intervalar de ganho de realimentação de estados $[\mathbf{K}]$ na qual toda $\mathbf{K} \in [\mathbf{K}]$ resolve o problema para toda $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e toda $\mathbf{B} \in [\mathbf{B}]$, garantindo assim uma alocação robusta para toda matriz de ganho intervalar do controlador.

5.4 Equação de Sylvester Intervalar Modal

Define-se a equação matricial de Sylvester Intervalar Modal como

$$[\mathbf{A}][\mathbf{P}] + [\mathbf{P}]dual([\mathbf{F}]) = dual([\mathbf{B}][\mathbf{G}]), \tag{5.11}$$

na qual $[\mathbf{G}] \in I^*(\mathbb{R}^{m\times n})$ é uma matriz arbitrária e $[\mathbf{F}] \in I^*(\mathbb{R}^{n\times n})$ descreve a dinâmica desejável do sistema em malha fechada e satisfaz a condição

$$\rho([\mathbf{A}]) \cap \rho([\mathbf{F}]) = \emptyset. \tag{5.12}$$

A intersecção (5.12) é entendida no sentido de componente a componente.

$$[\lambda_i([\mathbf{A}])] \cap [\lambda_i([\mathbf{F}])] = \emptyset, \forall i = 1, ..., n$$

para autovalores das matrizes $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{F}]$.

A equação intervalar modal (5.11) é entendida como um conjunto de equações de estrutura similar a

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PF} = \mathbf{BG} \tag{5.13}$$

em que as matrizes reais $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ assumem todos os possíveis valores em $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{F}]$, sendo que todos os elementos intervalares destas matrizes são considerados próprios. A equação intervalar modal

$$[\mathbf{A}][\mathbf{P}] + [\mathbf{P}]dual([\mathbf{F}]) = dual([\mathbf{B}][\mathbf{G}]) \tag{5.14}$$

possui o significado semântico

$$U(\mathbf{A}, [\mathbf{A}])\ U(\mathbf{B}, [\mathbf{B}])\ U(\mathbf{G}, [\mathbf{G}])\ E(\mathbf{F}, [\mathbf{F}])\ U(\mathbf{P}, [\mathbf{P}])\ \mathbf{AP} + \mathbf{PF} = \mathbf{BG}.$$

O ganho intervalar robusto $[\mathbf{K}] \in I^*(\mathbb{R}^{m\times n})$ que implementa a realimentação de estados

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{K}]\mathbf{x} \tag{5.15}$$

é obtido da equação

$$[\mathbf{K}]\mathbf{P} = [\mathbf{G}], \tag{5.16}$$

selecionando-se apenas uma $\mathbf{P} \in [\mathbf{P}]$. A equação (5.16) possui o significado semântico

$$U(\mathbf{K}, [\mathbf{K}])\ E(\mathbf{G}, [\mathbf{G}])\ \mathbf{KP} = \mathbf{G}.$$

O sistema realimentado pelo controlador (5.15) com o ganho intervalar $[\mathbf{K}]$ toma a forma

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{x}(\mathbf{t}) = [\mathbf{A_c}]\mathbf{x}(\mathbf{t}),\ \mathbf{x}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{x_0}. \tag{5.17}$$

As propriedades são definidas pelo seguinte teorema.

Teorema 5.3 Assuma que

- (1) O par de matrizes intervalares $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ é controlável;
- (2) O par de matrizes intervalares $([\mathbf{G}], [\mathbf{F}])$ é observável;
- (3) A condição (5.12) é satisfeita;
- (4) Todos os elementos intervalares de $[\mathbf{P}]$ e $[\mathbf{K}]$ são próprios.

Então o controlador (5.15) com ganho $[\mathbf{K}]$ garante que o espectro da matriz $[\mathbf{A_c}]$ do sistema em malha fechada (5.17) pertence ao espectro da matriz de referência $-[\mathbf{F}]$ para toda $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e toda $\mathbf{B} \in [\mathbf{B}]$.

Prova: Da definição da equação de Sylvester intervalar modal e usando o fato que $\mathbf{P}$ é pontual

$$[\mathbf{A}]\mathbf{P} + \mathbf{P}dual([\mathbf{F}]) \quad = dual([\mathbf{B}][\mathbf{G}]),\ [\mathbf{K}]\mathbf{P} = [\mathbf{G}]$$

$$= dual([\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P}.$$

Logo,

$$[\mathbf{A}]\mathbf{P} - [\mathbf{B}][\mathbf{K}]\mathbf{P} = -\mathbf{P}[\mathbf{F}].$$

Isolando P,

$$([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} = -\mathbf{P}[\mathbf{F}].$$

Pré-multiplicando por $([\mathbf{P}]^{-\mathbf{1}})$,

$$\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} = -\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}\mathbf{P}dual([\mathbf{F}]),$$

obtém-se finalmente

$$\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} = -[\mathbf{F}].$$

Agora precisamos provar que os autovalores de $([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])$ são os mesmos da transformação de similaridade intervalar $\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P}$. Utilizando a extensão intervalar do determinante de uma matriz e as suas propriedades apresentadas no Apêndice A, temos que o espectro de

$$\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P}$$

é dado por

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| \quad &= |\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}\mathbf{P}| \\
&= |\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}\mathbf{P}| \\
&= |\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}(([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{P})| \\
&= |\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}(([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}]) - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}| \\
&\subseteq |\mathbf{P}^{-\mathbf{1}}||([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}]) - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{P}|
\end{aligned}$$

$$\subseteq |(([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}]) - \lambda\mathbf{I}|,$$

ou seja $\rho(([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])) \supseteq \rho(-[\mathbf{F}])$.

Mas da equação

$$\mathbf{P^{-1}}([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])\mathbf{P} = -[\mathbf{F}],$$

se pré-multiplicarmos por $\mathbf{P}$ e pós-multiplicarmos por $\mathbf{P^{-1}}$, obtemos

$$[\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}] = -\mathbf{P}[\mathbf{F}]\mathbf{P^{-1}}.$$

Agora precisamos provar que os autovalores de $-[\mathbf{F}]$ são os mesmos da transformação de similaridade intervalar $-\mathbf{P^{-1}}[\mathbf{F}]\mathbf{P}$. Assim, utilizando novamente a extensão intervalar do determinante,

$$\begin{aligned}
|-\mathbf{P^{-1}}[\mathbf{F}]\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| \quad &= |-\mathbf{P^{-1}}[\mathbf{F}]\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{P^{-1}}\mathbf{P}| \\
&= |-\mathbf{P^{-1}}[\mathbf{F}]\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{P^{-1}}\mathbf{P}| \\
&= |\mathbf{P^{-1}}(-[\mathbf{F}]\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{P})| \\
&= |\mathbf{P^{-1}}(-[\mathbf{F}] - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}| \\
&\subseteq |\mathbf{P^{-1}}||-[\mathbf{F}] - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{P}| \\
&\subseteq |-[\mathbf{F}] - \lambda\mathbf{I}|,
\end{aligned}$$

ou seja, $\rho(([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])) \subseteq \rho(-[\mathbf{F}])$.

Da teoria de conjuntos, e considerando os conjuntos M e N, se $M \subseteq N$ e $M \supseteq N$, conclui-se que $M = N$. Assim, podemos afirmar que

$$\rho(([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])) = \rho(-[\mathbf{F}]).$$

Isto é, o espectro de $([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])$ coincide com o espectro de $-[\mathbf{F}]$. $\square$

5.4.1 Solução da Equação de Sylvester Intervalar Modal

Como discutido no Capítulo 3, as operações intervalares para intervalos modais apresentam diferenças em relação àquelas dos intervalos clássicos. No caso da multiplicação, por exemplo, deve-se levar em conta os sinais dos valores dos extremos dos intervalos para se definir o resultado da multiplicação. Como a multiplicação de intervalos modais não é feita de forma direta, não podemos utilizar os métodos mencionados na Seção 5.3 para resolver a equação de Sylvester modal. Apresentamos a seguir uma metodologia de resolução baseada em hipóteses sobre os sinais dos elementos de $[\mathbf{P}]$. Montamos uma equação matricial em função destas hipóteses, e em seguida a representamos por um sistema de equações lineares.

Dada a equação (5.11), montamos as matrizes de acordo com a ordem do sistema

$$\begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & ... & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & ... & [a_{2n}] \\ ... & ... & \ddots & ... \\ [a_{n1}] & [a_{n2}] & ... & [a_{nn}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [p_{11}] & [p_{12}] & ... & [p_{1n}] \\ [p_{21}] & [p_{22}] & ... & [p_{2n}] \\ ... & ... & \ddots & ... \\ [p_{n1}] & [p_{n2}] & ... & [p_{nn}] \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} [p_{11}] & [p_{12}] & ... & [p_{1n}] \\ [p_{21}] & [p_{22}] & ... & [p_{2n}] \\ ... & ... & \ddots & ... \\ [p_{n1}] & [p_{n2}] & ... & [p_{nn}] \end{bmatrix} \cdot dual \left(\begin{bmatrix} [f_{11}] & [f_{12}] & ... & [f_{1n}] \\ [f_{21}] & [f_{22}] & ... & [f_{2n}] \\ ... & ... & \ddots & ... \\ [f_{n1}] & [f_{n2}] & ... & [f_{nn}] \end{bmatrix} \right)$$

$$= dual \left(\begin{bmatrix} [b_{11}] & [b_{12}] & ... & [b_{1m}] \\ [b_{21}] & [b_{22}] & ... & [b_{2m}] \\ ... & ... & \ddots & ... \\ [b_{n1}] & [b_{n2}] & ... & [b_{nm}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [g_{11}] & [g_{12}] & ... & [g_{1n}] \\ [g_{21}] & [g_{22}] & ... & [g_{2n}] \\ ... & ... & \ddots & ... \\ [g_{m1}] & [g_{m2}] & ... & [g_{mn}] \end{bmatrix} \right).$$

Como a matriz intervalar $[\mathbf{P}]$ é genérica, todos os seus elementos intervalares são incógnitas. Como mostrado no Capítulo 3, o resultado da multiplicação intervalar modal segue regras em função dos extremos intervalares, a depender dos sinais dos valores. Por exemplo $[a] \cdot [b]$, no qual $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$, terá um resultado diferente dependendo da combinação dos sinais de $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$ e $\overline{b}$. Neste caso, precisamos formular hipóteses sobre os sinais dos valores dos elementos intervalares de $[\mathbf{P}]$. Exemplo: todos os valores em $[\mathbf{P}]$ são positivos.

Com uma dada suposição, podemos resolver a equação matricial (5.11) em função dos elementos intervalares de $[\mathbf{P}]$ através de um sistema linear do tipo

$$\mathbf{A_p p} = \mathbf{b_p}, \tag{5.18}$$

no qual $\mathbf{A_p} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\mathbf{b_p} \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2n}$ é representado por,

$$\begin{bmatrix} \underline{p_{11}} \\ \overline{p_{11}} \\ \underline{p_{12}} \\ \overline{p_{12}} \\ \cdots \\ \underline{p_{1n}} \\ \overline{p_{1n}} \\ \cdots \\ \underline{p_{nn}} \\ \overline{p_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Resolve-se então o sistema linear através do MATLAB, por exemplo. Se os sinais dos valores de $\mathbf{p}$ obtidos forem compatíveis com os da suposição, então a matriz $[\mathbf{P}]$ pode ser formada pelos elementos do vetor $\mathbf{p}$ e a equação (5.11) está resolvida. Senão, faz-se uma nova suposição para os sinais dos valores extremos dos elementos intervalares da matriz $[\mathbf{P}]$, resolve-se o sistema linear (5.18), e verifica-se se o resultado é compatível com a suposição, até que uma matriz própria $[\mathbf{P}]$ seja obtida, ou que se esgotem as hipóteses possíveis.

Se nenhuma suposição resultar em $[\mathbf{P}]$ própria, $[\mathbf{P}]$ resolverá a equação de Sylvester, mas não poderá gerar um controlador robusto por alocação de pólos. Como o número de combinações possíveis de sinais de elementos de $[\mathbf{P}]$ é 2^{2n}, o procedimento proposto fica limitado a sistemas de ordens relativamente baixas.

Com $[\mathbf{P}]$ satisfazendo o Teorema 5.3, devemos obter $[\mathbf{K}]$ resolvendo a equação matricial intervalar (5.16) a partir do sistema de equações lineares resultante:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & \dots & [k_{1n}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & \dots & [k_{2n}] \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ [k_{m1}] & [k_{m2}] & \dots & [k_{nn}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [p_{11}] & [p_{12}] & \dots & [p_{1n}] \\ [p_{21}] & [p_{22}] & \dots & [p_{2n}] \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ [p_{n1}] & [p_{n2}] & \dots & [p_{nn}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [g_{11}] & [g_{12}] & \dots & [g_{1n}] \\ [g_{21}] & [g_{22}] & \dots & [g_{2n}] \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ [g_{m1}] & [g_{m2}] & \dots & [g_{mn}] \end{bmatrix}.$$

O procedimento anterior de supor sinais para os valores extremos dos elementos da matriz $[\mathbf{K}]$, obter um sistema linear do tipo

$$\mathbf{A_k k} = \mathbf{b_k}, \tag{5.19}$$

e então resolvê-lo através do MATLAB é repetido.

Se a matriz $[\mathbf{K}]$, além de resolver a equação (5.16), satisfizer o Teorema 5.3, ou seja, todos os seus elementos intervalares forem próprios, $[\mathbf{P}]$ e $[\mathbf{K}]$ resolvem as equações (5.14) e (5.16), e $[\mathbf{K}]$ pode ser utilizada como matriz de ganho de realimentação de estados, uma vez que o espectro de $([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}][\mathbf{K}])$ será igual ao espectro de $(-[\mathbf{F}])$.

Exemplo 5.1 Seja o sistema linear de segunda ordem invariante no tempo com parâmetros intervalares apresentado em (Shashikhin, 2002),

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [4,5] & 2 \\ 2 & [4,5] \end{bmatrix}, [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} [19,26] & 0 \\ 0 & [19,26] \end{bmatrix}, [\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} [12,15] & 1 \\ 1 & [12,15] \end{bmatrix},$$

De acordo com o Teorema 5.3, devemos verificar primeiro se o par $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ é controlável. A matriz de controlabilidade é dada por

$$[\mathbf{M_c}] = \begin{bmatrix} [2,4] & 0 & [8,20] & [4,8] \\ 0 & [2,4] & [4,8] & [8,20] \end{bmatrix}.$$

Para utilizarmos a fatoração QR, devemos tomar o transposto da matriz $[\mathbf{M_c}]$, já que sua dimensão é 2×4, e o método da fatoração QR só pode ser aplicado a matrizes $m \times n$ com $m \geq n$. Desta forma, aplicando o algoritmo apresentado no Apêndice B, obtemos a seguinte matriz

$$[\mathbf{R_c}] = \begin{bmatrix} [-21.9090, -9.1651] & [-32.0386, -1.9349] \\ 0 & [-28.8043, -2] \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como nenhum dos elementos intervalares das duas primeiras colunas contém o zero, concluímos que a matriz de controlabilidade $[\mathbf{M_c}]$ possui rank completo, e o sistema é controlável.

Em seguida devemos verificar se o par $([\mathbf{G}], [\mathbf{F}])$ é observável. A matriz de observabilidade é dada por

$$[\mathbf{M_o}] = \begin{bmatrix} [12,15] & 1 & [240,375] & [20,25] \\ 1 & [12,15] & [20,25] & [240,375] \end{bmatrix},$$

pelo mesmo motivo relacionado à matriz $[\mathbf{M_c}]$, devemos aplicar o algoritmo da fatoração QR ao transposto da matriz $[\mathbf{M_o}]$. No caso, obtemos a seguinte matriz trapezoidal

$$[\mathbf{R_o}] = \begin{bmatrix} [-376.1330, -241.1327] & [-81.4321, -21.2083] \\ 0 & [-377.5160, -234.7524] \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificamos que os elementos intervalares das duas primeiras colunas não contêm o zero, portanto a matriz de observabilidade possui rank completo, e o par em questão é observável.

O próximo passo é verificar se a condição (5.12) é satisfeita, ou seja, se não há intersecção entre os espectros de $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{F}]$. O espectro de $[\mathbf{A}]$ é ilustrado pelo teorema das arestas na figura 5.1. Como sabemos que o espectro de $-[\mathbf{F}]$ é a reta real de -26 a -19, os dois espectros não coincidem, e portanto podemos prosseguir com a resolução da equação de Sylvester intervalar modal.

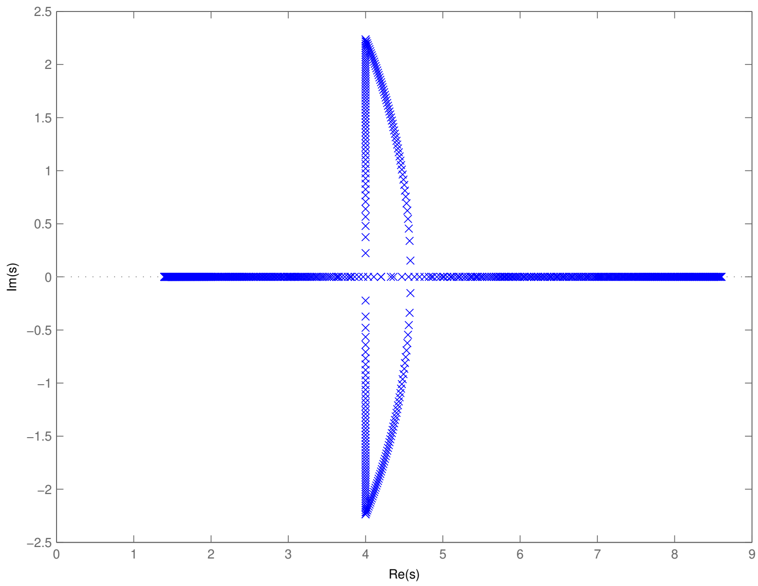

Fig. 5.1: Conjunto espectral de $[\mathbf{A}]$

Por último, resolvemos a equação de Sylvester para obter $[\mathbf{P}]$ e a equação associada $[\mathbf{K}]\mathbf{P} = [\mathbf{G}]$ para obter $[\mathbf{K}]$, considerando o resultado se $[\mathbf{P}]$ e $[\mathbf{K}]$ contiverem apenas elementos intervalares próprios.

Resolvendo a equação de Sylvester (5.14), com a hipótese inicial de que todos os elementos de $[\mathbf{P}]$ são maiores ou iguais a zero, obtemos a seguinte matriz e vetor para resolução do primeiro sistema linear

$$\mathbf{A_p} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b_p} = \begin{bmatrix} 45 \\ 36 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 45 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

Como resultado, obtemos a matriz

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz pontual, e os sinais dos seus elementos já conferem com a primeira hipótese. Da equação (5.16), e fazendo a primeira hipótese para o elementos de $[\mathbf{K}]$ como sendo também todos positivos ou iguais a zero, obtemos a seguinte matriz e vetor do sistema linear

$$\mathbf{A_k} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b_k} = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O resultado determina os parâmetros do controlador,

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [8, 10] & 0.6667 \\ 0.6667 & [8, 10] \end{bmatrix},$$

O sistema realimentado pelo controlador obtido leva à matriz de malha fechada

$$[\mathbf{A_c}] = \begin{bmatrix} [-26, -19] & 0 \\ 0 & [-26, -19] \end{bmatrix},$$

que confere com a especificação desejada.

5.5 Conclusões

Neste capítulo propomos uma abordagem para o projeto de controladores por alocação de pólos para sistemas multivariáveis com incertezas paramétricas representadas por elementos intervalares nas matrizes que descrevem o sistema. Como a solução da equação de Sylvester intervalar por meio de aritmética intervalar clássica e de Kaucher não resolve o problema de alocação robusta, propomos a solução de uma equação de Sylvester intervalar baseada em intervalos modais que garante a robustez do sistema em malha fechada. O procedimento aqui descrito para resolver a equação de Sylvester intervalar modal também pode ser aplicado à equação de Ackermann intervalar, $\mathbf{K}[\mathbf{T}] = [\mathbf{f}]$. Para tanto, basta substituir a matriz $\mathbf{K}$ por uma matriz intervalar $[\mathbf{K}]$ e encontrar uma família de controladores para alocação robusta de pólos do sistema.

Capítulo 6

Conclusões Gerais

6.1 Conclusões

Nesta tese abordaram-se problemas de controle robusto por alocação de pólos de sistemas incertos através de técnicas de análise intervalar clássica e modal. A análise intervalar clássica é uma forma de se calcular limites para operações que envolvam intervalos; tem sido bastante utilizada em projetos de engenharia sujeitos a erros ou incertezas em valores de parâmetros. A análise intervalar é particularmente atrativa na área de sistemas de controle, já que a maioria dos sistemas a serem controlados são modelados em forma de funções de transferência ou matrizes de estados, e os parâmetros destes modelos são quase sempre estimativas, possuindo valores centrais com faixas de tolerância. A aplicação de análise intervalar em controle robusto torna-se, portanto, bastante natural.

Operações intervalares clássicas podem resultar em sobreestimação dos intervalos resultantes devido ao efeito de elementos multiincidentes, que ocorre quando um dado elemento aparece mais de uma vez na árvore de cálculo da função. Em análise intervalar clássica, este tipo de elemento é considerado nos cálculos como independente em cada uma de suas incidências.

A análise intervalar modal é um complemento da análise intervalar clássica. Apresenta técnicas para se contornar o problema das multiincidências e proporciona interpretações semânticas aos resultados de operações intervalares. Além de conseguir minimizar o problema de sobreestimação de resultados, é muito interessante em Controle Robusto, já que de acordo com as modalidades dos elementos envolvidos, podemos verificar se existe um, ou se qualquer elemento pertencente ao intervalo resultante satisfaz a uma dada proposição. Em Controle Robusto é necessário que qualquer elemento pertencente ao intervalo resultante satisfaça, por exemplo, à proposição de que os pólos em malha fechada estejam contidos numa determinada região, qualquer que sejam os parâmetros da planta.

Duas abordagens para o projeto de controladores por realimentação de estados baseadas em conceitos de controle robusto e métodos de análise intervalar clássica e modal foram propostas. A primeira abordagem combina uma técnica para alocação robusta de pólos de sistemas monovariáveis, formulada em termos de conjuntos espectrais de polinômios intervalares, com propriedades derivadas da fórmula de Ackerman intervalar. O uso de análise intervalar permitiu a caracterização de uma classe de controladores robustos a partir de soluções internas de sistemas lineares intervalares. A abordagem se mostrou bastante eficiente para a determinação de ganhos de controladores robustos. Foram desenvolvidos dois algoritmos, o primeiro baseado em programação alvo (linear) e o segundo baseado em um problema de centralização e programação não-linear, com a finalidade de se obter um controlador com máxima não fragilidade. A máxima não fragilidade é uma propriedade importante, pois assegura que os parâmetros do controlador podem variar significativamente sem que este perca a sua robustez. Uma dificuldade desta abordagem é obter uma especificação de pólos a serem alocados, ou seja, um polinômio intervalar $[p(s)]$ que descreva a região de alocação desejada.

A segunda abordagem combina uma técnica para alocação robusta de pólos para sistemas multivariáveis com propriedades derivadas da equação de Sylvester intervalar modal. O procedimento envolve a especificação de pólos através do conjunto espectral de uma matriz intervalar.

Uma dificuldade de implementação desta abordagem é obter soluções próprias para as equações matriciais intervalares envolvidas. Apesar de precisarmos fazer suposições com relação aos sinais dos elementos da matriz $[\mathbf{P}]$, solução da equação de Sylvester, a partir dos exemplos analisados percebeu-se que uma solução própria geralmente é encontrada após poucas suposições, já que é possível aproveitar os resultados de suposições anteriores. No entanto, se ao final do procedimento algum elemento de $[\mathbf{P}]$ ou $[\mathbf{K}]$ for impróprio, não poderemos garantir a robustez do controlador. Experiências numéricas têm mostrado que a escolha das matrizes $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{F}]$ são determinantes para a obtenção de resultados próprios, isto é, controladores robustos.

Os procedimentos de projeto propostos envolvem determinar se um dado sistema intervalar é controlável e/ou observável em um sentido robusto. Nesta tese propomos uma condição suficiente para controlabilidade/observabilidade robusta baseada numa extensão intervalar do método da fatoração QR.

Estudos foram realizados no sentido de se obter procedimentos de fatoração QR e decomposição em valores singulares aplicáveis a matrizes intervalares. Uma técnica de fatoração QR baseada em análise intervalar clássica (Bentbib, 2002) (Apêndice B) foi utilizada para a verificação de rank de matrizes intervalares. Contudo, se os resultados da fatoração são sobreestimados, não se obtém uma matriz intervalar com a propriedade de ortogonalidade, e a condição de rank completo é apenas suficiente.

Tanto o método da fatoração QR como a decomposição SVD (decomposição em valores singulares) utilizam multiplicações sucessivas de matrizes do tipo Householder, que apresentam as peculiares características de ortogonalidade e simetria. Tentamos então obter matrizes de Householder através de análise intervalar modal, sem sucesso. Mesmo a aplicação de análise intervalar modal ao procedimento de fatoração QR adotado (Bentbib, 2002) não foi vantajoso no tratamento de multiincidências, pois certas funções com multiincidências apresentavam derivadas com muito mais multiincidências tornando a utilização de análise modal muito pouco vantajosa. Também não obtivemos resultados satisfatórios na linha de decomposição em valores singulares. Ambas as análises (clássica e modal) apresentaram excessiva sobreestimação de resultados.

Concluímos que as abordagens baseadas em análise intervalar propostas podem representar alternativas reais para o projeto de controladores por realimentação de estados robusta. Algumas propostas para trabalhos futuros são mencionadas na próxima seção.

6.2 Propostas Futuras

Como uma primeira sugestão, propomos a extensão da idéia de projeto de controladores robustos com técnicas de análise intervalar clássica e modal ao projeto de observadores de estados.

Uma segunda sugestão seria a aplicação dos conceitos de análise intervalar modal para resolver a equação de Riccati intervalar, já estudada em (Shashikhin, 2001) com a aplicação de análise intervalar clássica. Isto seria muito útil em diversos contextos nos quais a equação de Riccati surge como a obtenção de controladores do tipo H_2 e H_∞. Nossa motivação inicial ao estudar decomposição em valores singulares de matrizes intervalares foi tratar problemas de redução de modelos dinâmicos intervalares. Investigar, por exemplo, quando é possível desconsiderar um modo do sistema porque este está associado a um valor regular intervalar pequeno, comparativamente aos demais. O estudo iniciado pode servir de base para trabalhos futuros nesta linha.

Uma última proposta seria considerar problemas envolvendo alocação regional de pólos (Yedavalli, 1993). Realizamos um estudo preliminar sobre alocação regional através de equações de Lyapunov generalizadas, mas um aprofundamento no tema seria necessário para concluir pela sua viabilidade.

Referências Bibliográficas

Alefeld, G. e Herzberger, J. (1983). *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York.

Alefeld, G. e Mayer, G. (2000). Interval analysis: Theory and applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **121**: 421–464.

Bartlett, C. V., Hollot, C. V. e Huang, L. (1988). Root locations of an entire polytope of polynomial: It suffices to check the edges, *Mathematics of Controls, Signals and Systems* **1**: 61–71.

Battacharyya, S. P. e de Souza, E. (1982). Pole assignment via sylvester's equation, *Systems & Control Letters* **1**(4).

Bellman, R. (1970). *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York.

Bentbib, A. H. (2002). Solving the full rank interval least squares problem, *Applied Numerical Mathematics* **41**: 283–294.

Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. e Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, New York.

Deif, A. S. (1986). *Sensitivity analysis in linear systems*, Springer, New York.

Gardenes, E., Sainz, M. ., Jorba, L., Calm, R., Estela, R., Mielgo, H. e Trepat, A. (2001). Modal intervals, *Reliable Computing* **7**: 77–111.

Group, S. (1998). *Extensiones de las funciones continuas*, Report IMA 98-04-RR, Dept. de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Girona, Spain.

Ignizio, J. P. (1982). *Linear Programming in Single and Multiple-Objective Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. e Walter, E. (2001). *Applied Interval Analysis*, Springer-Verlag, London.

Kaucher, E. (1980). Interval analysis in the extended interval space ir, *Comput. Suppl.* **2**: 33–49.

Keel, L. H. e Battacharyya, S. P. (1999). Robust stability and performance with fixed-order controllers, *Automatica* **35**: 1717–1724.

Kelling, B. (1994). Geometric analysis of bounded solution of systems of linear interval equations, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **74**: 625–628.

Kharitonov, V. L. (1978). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Differential'nye Uravneniya* **14**: 2086–2088.

Lordelo, A. D. S. (2004). *Análise e projeto de controladores robustos por alocação de pólos via análise intervalar*, Tese-Unicamp, Campinas.

Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2002). Interval analysis and design of robust pole assignment controllers, *41st IEEE CDC* **1**: 1461–1467.

Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice-Hall, N. J.

Moore, R. E. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia.

Neumaier, A. (1990). *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Oettli, W. (1965). On the solution of a linear system with inaccurate coefficients, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **2**: 115–118.

Oettli, W. e Prager, W. (1964). Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.* **6**: 405–409.

Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.

Prado, M. L. M. e Ferreira, P. A. V. (2004). Realimentação de estados robusta para sistemas com incertezas estruturadas via análise intervalar, *Congresso Brasileiro de Automatica* .

Prado, M. L. M., Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2005). Robust pole assignment by state feedback control using interval analysis, *16 World IFAC* .

Rohn, J. (1986). Inner solutions of linear interval equations, *Lecture Notes in Computer Science* **212**: 157–158.

Rohn, J. (1989). Systems of linear interval equations, *Linear Algebra and Applications* **126**: 39–78.

Seif, N. P., Hussein, S. A. e Deif, A. S. (1994). The interval sylvester equation, *Computing* **52**: 233–244.

Shashikhin, V. N. (2001). Robust control using interval analysis, *Reliable Computing* **7**: 219–230.

Shashikhin, V. N. (2002). Robust stabilization of linear interval systems, *J. Appl. Maths. Mechs.* **66**(3).

Shokranian, S. (2004). *Introdução à álgebra linear*, UnB, Brasília.

Smagina, Y. e Brewer, I. (2002). Using interval arithmetic for robust state feedback design, *Systems & Control Letters* **46**: 187–194.

Soh, Y. C., Evans, R. J., Petersen, I. e Betz, R. E. (1987). Robust pole assignment, *Automatica* **23**: 601–610.

Trepat, A. (1982). *Completacion reticular del espacio de intervalos*, Tesina de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, Universidad de Barcelona.

Wei, K. (1994). Stabilization of linear time-invariant interval systems via constant state feedback control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**: 22–32.

Wei, K. e Barmish, B. R. (1989). Making a polynomial hurwitz-invariant by choice of feedback gains, *International Journal of Control* **50**: 1025–1038.

Wonham, W. M. (1979). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer, New York.

Yedavali, R. K. (1985). Perturbation bounds for robust stability in linear state space models, *International Journal of Control* **42**: 1507–1517.

Yedavalli, R. K. (1993). Robust root clustering for linear uncertain systems using generalized lyapunov theory, *Automatica* **1**: 237–240.

Yu, P. L. (1985). *Multiple Criteria Decision Making-Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum Press, New York.

Zhou, K. e Khargonekar, P. P. (1987). Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control* **32**: 621–623.

Apêndice A

Algumas Propriedades de Matrizes Intervalares Modais

A.0.1 Propriedades

As propriedades a seguir são demonstráveis a partir da definição de matrizes modais. (Por simplicidade, as demonstrações são omitidas.)

Soma

1. $[\mathbf{A}] + [\mathbf{B}] = [\mathbf{B}] + [\mathbf{A}]$.

2. $([\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]) + [\mathbf{C}] = [\mathbf{A}] + ([\mathbf{B}] + [\mathbf{C}])$.

3. $dual([\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]) = dual([\mathbf{A}]) + dual([\mathbf{B}])$.

Diferença

1. A equação $[\mathbf{A}] + [\mathbf{X}] = [\mathbf{B}]$ tem por solução única $[\mathbf{X}] = [\mathbf{B}] - dual([\mathbf{A}]) = [\mathbf{B}] + opp([\mathbf{A}])$.

Produto

1. $dual([\mathbf{A}]) \cdot dual([\mathbf{B}]) = dual([\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}])$.

2. $[\mathbf{I}, \mathbf{I}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{A}]$.

3. $[\mathbf{A}]$ própria $\Leftrightarrow [\mathbf{A}] \cdot ([\mathbf{B}] + [\mathbf{C}]) \subseteq [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}] + [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{C}]$.

4. $[\mathbf{A}]$ imprópria $\Leftrightarrow [\mathbf{A}] \cdot ([\mathbf{B}] + [\mathbf{C}]) \supseteq [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}] + [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{C}]$.

5. Se toda $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ for não-singular, existe a inversa e $[\mathbf{A}]^{-1} = [\overline{\mathbf{A}}^{-1}, \underline{\mathbf{A}}^{-1}]$, tal que

$$[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{dual}([\mathbf{A}]^{-1}) = \mathbf{I}.$$

Quociente

1. A equação $[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{X}] = [\mathbf{B}]$ tem solução única se cada $A \in [\mathbf{A}]$ for não-singular, igual a

$$[\mathbf{X}] = dual([\mathbf{A}]^{-1})[\mathbf{B}].$$

Determinante (Shokranian, 2004)

Seja $N = \{1, 2, ..., n\}$ o conjunto de n números de 1 até n.

Definição A.1 Uma *permutação de nível* n é uma função bijetora de N no N. As permutações podem ser representadas por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

O número de permutações de ordem n é igual a $n!$. □

Para aplicar a noção de permutação na definição de determinante, precisaremos do conceito de sinal para permutações.

Considere o polinômio de n variáveis

$$g = g(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j),$$

nos quais $1 \leq i < j \leq n$, e suponha que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ é uma permutação de nível n. A essa permutação associaremos o seguinte polinômio σg de n variáveis:

$$\sigma g = \sigma g(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i<j}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}),$$

chamado de *ação* de σ sobre g.

Definição A.2 Uma permutação $\sigma \in \mathcal{S}_n$ é *par* se $\sigma g = g$. Caso contrário, ela é *ímpar*. E nesse caso teremos $\sigma g = -g$. Dizemos que o *sinal* de uma permutação par é positivo "$+$"e o sinal de uma permutação ímpar é negativo "$-$". □

Definição A.3 O determinante de uma matriz quadrada intervalar $[\mathbf{A}] \in I^*(\mathbb{R}^{n\times n})$ pode ser definido como

$$|[\mathbf{A}]| = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(sinal\sigma)[a_{1\sigma(1)}]\cdot[a_{2\sigma(2)}]\cdots[a_{n\sigma(n)}],$$

Chamaremos os produtos $[a_{1\sigma(1)}]\cdot[a_2\sigma(2)]\cdots[a_{n\sigma(n)}]$ de *monômios de determinante*. □

Como podemos ver, o determinante de uma matriz $n \times n$ consiste da soma de $n!$ monômios. Em cada monômio, quando surge um elemento, ele só aparece uma vez, e cada elemento da matriz aparece pelo menos num monômio. Isso é a conseqüência das permutações serem funções injetoras.

Uma outra fórmula para determinantes pode ser

$$|[\mathbf{A}]| = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (sinal\sigma)[a_{\sigma(k_1)k_1}] \cdot [a_{\sigma(k_2k_2)}] \cdots [a_{\sigma(k_nk_n)}],$$

nos quais, $k_1, k_2, ..., k_n$ são números distintos entre 1 e n.

Teorema A.1 Se $[\mathbf{C}]$ é a matriz obtida pela multiplicação de uma linha (respectivamente uma coluna) de $[\mathbf{A}]$ por um escalar α, então

$$|[\mathbf{C}]| = \alpha|[\mathbf{A}]|.$$

Prova: Como pela própria definição do determinante, estão sempre presentes pelo menos um elemento de cada linha (respectivamente de cada coluna) em algum monômio. Além disso, um elemento dado da matriz nunca aparece mais de uma vez num monômio do determinante, mas sempre aparece em pelo menos um monômio. Portanto, todos os monômios da matriz $[\mathbf{C}]$ têm um fator α. Assim, considere o determinante da matriz $[\mathbf{A}]$ dado pela soma dos monômios já considerando o sinal de cada produto de cada monômio. Considere cada monômio representado por $[m_i]$ e o determinante de $[\mathbf{A}]$ dado pela soma dos $n!$ monômios

$$|[\mathbf{A}]| = \sum_{j=1}^{n!}[m_j]$$

O determinante da matriz $[\mathbf{C}]$ em questão é então dado por

$$|[\mathbf{C}]| = \sum_{j=1}^{n!}\alpha[m_j]$$

como α não é um intervalo, podemos utilizar a propriedade da distributividade,

$$|[\mathbf{C}]| = \sum_{j=1}^{n!} \alpha[m_j] = \alpha \sum_{j=1}^{n!} [m_j]$$

logo,

$$|[\mathbf{C}]| = \alpha|[\mathbf{A}]|$$

$\square$

Teorema A.2 Seja $[\mathbf{A}]$ uma matriz intervalar quadrada. Se a j-ésima coluna de $[\mathbf{A}]$ é da forma $[a_{ij}] = [b_{ij}] + [c_{ij}]$, e $[\mathbf{B}]$ é a matriz obtida de $[\mathbf{A}]$ por meio de substituição da sua j-ésima coluna por $[b_{ij}]$ e a matriz $[\mathbf{C}]$ obtida de $[\mathbf{A}]$ por meio de substituição da sua j-ésima coluna por $[c_{ij}]$, então,

$$|[\mathbf{A}]| \subseteq |[\mathbf{B}]| + |[\mathbf{C}]|.$$

Prova: Se aplicarmos a definição de determinante para $[\mathbf{A}]$, teremos que na coluna j, todos os elementos serão $[a_{ij}] = [b_{ij}] + [c_{ij}]$. Quando σ_k, para algum k for igual a j, na fórmula do determinante, teremos os elementos $[a_{i\sigma_k(i)}] = [b_{i\sigma_k(i)}] + [c_{i\sigma_k(i)}]$ em cada um dos monômios do determinante, de acordo com sua própria definição. Assim, pela propriedade 11 do produto de intervalos modais, o resultado será

$$|[\mathbf{A}]| \subseteq |[\mathbf{B}]| + |[\mathbf{C}]|.$$

$\square$

Observação A.1 Os dois teoremas acima também são válidos para consideração de linhas ao invés de colunas. $\square$

Teorema A.3 Para quaisquer duas matrizes $[\mathbf{A}]$ intervalar e $\mathbf{B}$ quadradas temos que

$$|[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{B} \cdot [\mathbf{A}]| \subseteq |[\mathbf{A}]| \cdot |\mathbf{B}|$$

Prova: Queremos provar que

$$|[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}| = \left| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}[a_{1j}]b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}[a_{1j}]b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}[a_{1j}]b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n}[a_{2j}]b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}[a_{2j}]b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}[a_{2j}]b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}[a_{nj}]b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}[a_{nj}]b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}[a_{nj}]b_{jn} \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \cdots & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \cdots & [a_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}] & [a_{n2}] & \cdots & [a_{nn}] \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right|.$$

Após aplicar o teorema A.2 n vezes e a propriedade 11 do produto de intervalos modais, a equação pode ser escrita da seguinte forma

$$|[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}| \subseteq \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} \left| \begin{bmatrix} [a_{1j_1}]\, b_{j_1 1} & [a_{1j_2}]\, b_{j_2 2} & \cdots & [a_{1j_n}]\, b_{j_n n} \\ [a_{2j_1}]\, b_{j_1 1} & [a_{2j_2}]\, b_{j_2 2} & \cdots & [a_{2j_n}]\, b_{j_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{nj_1}]\, b_{j_1 1} & [a_{nj_2}]\, b_{j_2 2} & \cdots & [a_{nj_n}]\, b_{j_n n} \end{bmatrix} \right|.$$

Aplicando o Teorema A.1 ao lado direito da equação

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} \left| \begin{bmatrix} [a_{1j_1}] & [a_{1j_2}] & \cdots & [a_{1j_n}] \\ [a_{2j_1}] & [a_{2j_2}] & \cdots & [a_{2j_n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{nj_1}] & [a_{nj_2}] & \cdots & [a_{nj_n}] \end{bmatrix} \right| \cdot b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}.$$

Considerando o índice j_k como uma permutação, podemos transformar a expressão em

$$|[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}| \subseteq |[\mathbf{A}]| \cdot \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} sinal \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \cdot b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} = |[\mathbf{A}]|.|\mathbf{B}|.$$

Agora precisamos provar que $|\mathbf{B}\cdot[\mathbf{A}]| \subseteq |[\mathbf{A}]|\cdot|\mathbf{B}|$

$$|\mathbf{B}\cdot[\mathbf{A}]| = \left|\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}[a_{j1}] & \sum_{j=1}^n b_{1j}[a_{j2}] & \cdots & \sum_{j=1}^n b_{1j}[a_{jn}] \\ \sum_{j=1}^n b_{2j}[a_{j1}] & \sum_{j=1}^n b_{2j}[a_{j2}] & \cdots & \sum_{j=1}^n b_{2j}[a_{jn}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj}[a_{j1}] & \sum_{j=1}^n b_{nj}[a_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n b_{nj}[a_{jn}] \end{bmatrix}\right| =$$

$$\left|\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\right| \cdot = \left|\begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \cdots & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \cdots & [a_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}] & [a_{n2}] & \cdots & [a_{nn}] \end{bmatrix}\right|$$

Após aplicar o teorema A.2 n vezes e a propriedade 11 do produto de intervalos modais, a equação pode ser escrita da seguinte forma

$$|\mathbf{B}\cdot[\mathbf{A}]| \subseteq \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{n} \left|\begin{bmatrix} b_{1j_1}[a_{j_11}] & b_{1j_1}[a_{j_12}] & \cdots & b_{1j_1}[a_{j_1n}] \\ b_{2j_2}[a_{j_21}] & b_{2j_2}[a_{j_22}] & \cdots & b_{2j_2}[a_{j_2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nj_n}[a_{j_n1}] & b_{nj_n}[a_{j_n2}] & \cdots & b_{nj_n}[a_{j_nn}] \end{bmatrix}\right|.$$

Aplicando o Teorema A.1 ao lado direito da equação

$$= \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{n} \left|\begin{bmatrix} [a_{j_11}] & [a_{j_12}] & \cdots & [a_{j_1n}] \\ [a_{j_21}] & [a_{j_22}] & \cdots & [a_{j_2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{j_n1}] & [a_{j_n2}] & \cdots & [a_{j_nn}] \end{bmatrix}\right| \cdot b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}.$$

Considerando o índice j_k como uma permutação, podemos transformar a expressão em

$$|\mathbf{B}\cdot[\mathbf{A}]| \subseteq |[\mathbf{A}]| \cdot \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{n} sinal \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \cdot b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = |[\mathbf{A}]|.|\mathbf{B}|.$$

$\square$

Apêndice B

Método da Fatoração QR

B.0.1 Fatoração QR Intervalar

Considere uma matriz ortogonal $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, de maneira que, $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{A} = \mathbf{R}$, na qual $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é uma matriz trapezoidal superior na forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma matriz triangular superior. Como $\tilde{\mathbf{Q}}$ opera nas linhas de $\mathbf{A}$, a independência linear das colunas de $\mathbf{A}$ é preservada nas colunas de $\mathbf{R}$, ou seja, se uma coluna de $\mathbf{R}$ é linearmente dependente das colunas à sua esquerda, então a coluna correspondente em $\mathbf{A}$ também é linearmente dependente. Como $\mathbf{R}$ é uma matriz trapezoidal superior, a sua i-ésima coluna, para $i = 1, 2, ..., m$, é linearmente independente das suas colunas à esquerda se e somente se o i-ésimo elemento da diagonal de $\tilde{\mathbf{R}}$ é diferente se zero. Portanto, através de $\mathbf{R}$, as colunas linearmente independentes de $\mathbf{A}$ podem ser obtidas por inspeção. Como $\tilde{\mathbf{Q}}$ é ortogonal, $\tilde{\mathbf{Q}}^{\mathbf{-1}} = \tilde{\mathbf{Q}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}$ e portanto, $\tilde{\mathbf{Q}}^{\mathbf{-1}}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{Q}}^{\mathbf{-1}}\mathbf{R}$, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ e obtém-se a chamada fatoração $\mathbf{QR}$ de $\mathbf{A}$.

A seguir, é apresentada uma condição suficiente para a análise da não-singularidade de uma matriz intervalar $[\mathbf{A}] \in I(\mathbb{R}^{n\times m})$, sendo $n \geq m$.

Considere uma matriz ortogonal intervalar $[\mathbf{Q}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ e uma matriz trapezoidal superior intervalar $[\mathbf{R}] \in I(\mathbb{R}^{n\times m})$, de maneira que $[\mathbf{A}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$, significando que para cada $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ existem matrizes $\mathbf{Q} \in [\mathbf{Q}]$ e $\mathbf{R} \in [\mathbf{R}]$, de maneira que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Assim, o $rank([\mathbf{A}]) = m$ se o $rank([\mathbf{R}]) = m$. Desde que $[\mathbf{R}]$ apresenta a forma trapezoidal superior intervalar

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{R}}] \\ \dots \\ [\mathbf{0}] \end{bmatrix},$$

no qual $[\tilde{\mathbf{R}}] \in I(\mathbb{R}^{m\times m})$ é uma matriz triangular superior intervalar, o $rank([\mathbf{R}]) = m$ se e somente se $0 \notin [\tilde{r}_{ii}]$, para $i = 1, 2, ..., m$.

Note que esta condição é apenas suficiente, pois o método da decomposição $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$ intervalar envolve expressões intervalares, de maneira que o elemento nulo pode pertencer a algum intervalo na diagonal de $[\tilde{\mathbf{R}}]$ sem que, necessariamente, $[\mathbf{A}]$ tenha $rank$ incompleto para alguma $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$.

O método apresentado a seguir para a fatoração $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$ intervalar é baseado em sucessivas *transformações de Householder* (Bentbib, 2002), (Lordelo, 2004).

Definição B.1 Considere o vetor intervalar $[\mathbf{v}] \in I(\mathbb{R}^n)$ e a sua norma

$$||[\mathbf{v}]|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} [v_k]^2},$$

de maneira que para um intervalo $[x]$, $[x]^2 = \{x^2 | x \in [x]\}$, e se $[x] \geq 0$, ou seja, $x \geq 0$ para qualquer $x \in [x]$, então $\sqrt{[x]} = \{\sqrt{x} | x \in [x]\}$. Assim, a raiz quadrada da norma de $[\mathbf{v}]$ é definida por

$$||[\mathbf{v}]||^2 = \sum [v_k]^2.$$

Define-se o vetor intervalar da norma 2 unitária na direção de $[\mathbf{v}]$ como

$$[w_i] = \begin{cases} \dfrac{[v_i]}{||[\mathbf{v}]||} & \text{se } \ 0 \in [v_i] \\ \text{sign}(v_{ci}) \left[1 + \dfrac{\sum [v_j]^2}{[v_i]^2}\right]^{-\frac{1}{2}} & \text{se } \ 0 \notin [v_i] \end{cases}$$

para $i = 1, 2, ..., n$, sendo $\mathbf{v_c} \in \mathbb{R}^n$ o vetor com os valores centrais de $[\mathbf{v}]$.

Definição B.2 Considere um vetor intervalar $[\mathbf{v}] \in I(\mathbb{R})^n$ tal que $0 \notin [\mathbf{v}]$. Define-se a matriz de Householder intervalar associada a $[\mathbf{v}]$ como $[\mathbf{H}] = \mathbf{I_n} - 2([\mathbf{w}][\mathbf{w}]^\mathbf{T}) \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$, em que a diagonal da matriz simétrica intervalar $[\mathbf{w}][\mathbf{w}]^\mathbf{T}$ é calculada como $[w_i]^2 = [(w)(w)^T]_{i,i}$, ao invés de $[w]_i[w]_i^T$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Assim, $[\mathbf{H}]$ é simétrica e contém matrizes simétricas e ortogonais reais $\mathbf{H}$, associadas a quaisquer vetores reais $\mathbf{v} \in [\mathbf{v}]$.

Considere uma matriz intervalar de *rank* completo $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A^{(1)}}] = [[\mathbf{a_1^{(1)}}][\mathbf{a_2^{(1)}}]...[\mathbf{a_m^{(1)}}]] \in I(\mathbb{R}^{n\times m})$, na qual $n \geq m$ e defina $\mathbf{e_1^{(p)}} = [1\ 0\ ...\ 0]^T \in \mathbb{R}^p$. Supondo que $\mathbf{0} \notin [\mathbf{a_1^{(1)}}]$ e considerando $[\mathbf{H}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ a matriz de Householder intervalar associada a

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{a_1^{(1)}}] + (sign([a_{11}^{(1)}])||[\mathbf{a_1^{(1)}}]||)\mathbf{e_1^{(n)}},$$

obtém-se

$$[\mathbf{A^{(1)}}] \subseteq [\mathbf{H}]((\alpha\mathbf{e_1^{(n)}})[g_2^{(1)}]...[g_m^{(1)}]),$$

na qual $\alpha = -sign(a_{c11}^{(1)})||[\mathbf{a_1^{(1)}}]||$ e $[g_i^{(1)}] = [\mathbf{H}][a_i^{(1)}]$, para $i = 1, 2, ..., m$.

A primeira linha de $[\mathbf{R}^*]$ é calculada como

$$[R_{11}^*] = -sign(a_{c11}^{(1)})||[\mathbf{a_1^{(1)}}]||,$$

$$[\mathbf{R_{1j}^*}] = [\mathbf{w_{1j}^{(1)}}],$$

para $j = 2, 3, ..., m$. Em seguida, define-se $[\mathbf{H^{(1)}}] = [\mathbf{H}]$ e na próxima iteração, define-se a matriz intervalar $[\mathbf{A^{(2)}}] \in I(\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)})$,

$$[\mathbf{A^{(2)}}] = \begin{bmatrix} [w_{22}^{(1)}] & [w_{23}^{(1)}] & \dots & [w_{2m}^{(1)}] \\ [w_{32}^{(1)}] & [w_{33}^{(1)}] & \dots & [w_{3m}^{(1)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [w_{n2}^{(1)}] & [w_{n3}^{(1)}] & \dots & [w_{nm}^{(1)}] \end{bmatrix}$$

cujos elementos são denotados por $[a_{ij}^{(2)}]$, para $i = 1, 2, ..., n-1$ e $j = 1, 2, ..., m-1$.

Supondo que $\mathbf{0} \notin [\mathbf{a_1^{(2)}}]$ e que $[\mathbf{H}] \in I(\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)})$ é a matriz de Householder intervalar associada a

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{a_2^{(1)}}] + (sign([a_{11}^{(2)}])||[\mathbf{a_1^{(2)}}]||)\mathbf{e_1^{(n-1)}},$$

obtém-se

$$[\mathbf{A^{(2)}}] \subseteq [\mathbf{H}]((\alpha e_1^{(n-1)})[g_2^{(2)}]...[g_m^{(2)}]),$$

sendo que $\alpha = -sign(a_{c11}^{(2)})||[\mathbf{a_1^{(2)}}]||$ e $[g_i^{(2)}] = [\mathbf{H}][a_i^{(2)}]$, para $i = 2, 3, ..., m-1$.

A segunda linha de $[\mathbf{R}^*]$ é calculada como

$$[R_{22}^*] = -sign(a_{c11}^{(2)})||[\mathbf{a_1^{(2)}}]||,$$

$$[\mathbf{R^*_{2(j+1)}}] = [\mathbf{w_{1j}^{(2)}}],$$

para $j = 2, 3, ..., m-1$. Em seguida, define-se

$$[\mathbf{H^{(2)}}] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}.$$

O procedimento deve ser repetido até a obtenção da matriz triangular superior intervalar $[\mathbf{R}^*] \in I(\mathbb{R}^{n\times m})$ e a matriz intervalar $[\mathbf{Q}^*] \in I(\mathbb{R}^{n\times n})$ calculada como

$$[\mathbf{Q}^*] = [\mathbf{H^{(1)}}]([\mathbf{H^{(2)}}](...([\mathbf{H^{(m-1)}}]))).$$