



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Sistemas de Energia Elétrica

Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão Usando os Modelos CC – CA e Técnicas de Programação Não – Linear

Autor: Marcos Julio Rider Flores

Orientador: Prof. Dr. Ariovaldo Verandio Garcia

Co-orientador: Prof. Dr. Rubén Augusto Romero Lázaro (FEIS – UNESP)

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Katia Campos de Almeida	DEE/UFSC
Prof. Dr. Djalma Mosqueira Falcão	COPPE/UFRJ
Prof. Dr. Secundino Soares Filho	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. André Luiz Morelato França	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Carlos Alberto de Castro Jr.	FEEC/UNICAMP

Campinas, Fevereiro de 2006.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R435p Rider Flores, Marcos Julio
Planejamento da expansão de sistemas de transmissão
usando os modelos CC – CA e técnicas de programação
não – linear / Marcos Julio Rider Flores. – Campinas, SP:
[s.n.], 2006.

Orientadores: Ariovaldo Verandio Garcia, Rubén
Augusto Romero Lázaro
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de energia elétrica - Planejamento. 2.
Energia elétrica - Transmissão. 3. Otimização
combinatória. 4. Programação não-linear. I. Garcia,
Ariovaldo Verandio. II. Romero Lázaro, Rubén Augusto.
III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Transmission systems expansion planning using DC–AC models and
non–linear programming techniques

Palavras-chave em Inglês: Power transmission planning, Branch and bound algorithm,
Higher order interior point method, Mixed integer nonlinear
programming, DC model

Área de concentração: Energia

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Katia Campos de Almeida, Djalma Mosqueira Falcão, Secundino
Soares Filho, André Luiz Morelato França, Carlos Alberto de
Castro Junior

Data da defesa: 22/02/2006

Resumo

Neste trabalho são propostos modelos matemáticos e técnicas de solução para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão através de três enfoques.

a) Usando o modelo de corrente alternada do sistema de transmissão e um algoritmo heurístico construtivo especializado para resolver o problema de planejamento, e, ainda, realiza-se uma primeira tentativa de alocação de fontes de potência reativas;

b) Usando o modelo de corrente contínua e técnicas de programação não-linear especializadas. Nesse caso emprega-se uma versão relaxada do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo de corrente contínua, onde a integralidade das variáveis de investimento é desprezada. Resolve-se o problema de programação não-linear, modelado de forma matricial com um algoritmo de otimização especializado e, além disso, um algoritmo heurístico construtivo especializado é utilizado para resolver o problema de planejamento.

c) Usando o modelo de corrente contínua e um algoritmo *Branch and Bound* (B&B) sem empregar técnicas de decomposição. Para isso foram redefinidos os chamados testes de sondagem no algoritmo B&B e em cada nó da árvore de B&B tem-se um problema de programação não-linear que são resolvidos usando a metodologia desenvolvida no item (b).

Os itens (a), (b) e (c) requerem a solução de problemas de programação não-linear diferenciados. Uma revisão das características principais da resolução iterativa dos métodos de pontos interiores é apresentada. Foi desenvolvida uma técnica baseada em uma combinação de métodos de pontos interiores de alta ordem (MPI-AO) para resolver os problemas de programação não-linear de forma rápida, eficiente e robusta. Essa combinação dos MPI-AO tem como objetivo colocar num único método as características particulares de cada um dos MPI-AO e melhorar o desempenho computacional comparado com os MPI-AO de forma individual.

Palavras-chave: Planejamento da expansão da transmissão; modelo CA do sistema de transmissão; modelo CC do sistema de transmissão; algoritmos heurísticos construtivos; algoritmo *Branch and Bound*; método de pontos interiores de alta ordem; programação não-linear inteira mista.

Abstract

In this work mathematical models and solution techniques are proposed to solve the power system transmission expansion planning problem through three approaches:

a) Using the nonlinear model of the transmission system (AC model) and a specialized constructive heuristic algorithm to solve the problem and, yet, a first attempt to allocate reactive power sources is also considered;

b) Using the direct-current (DC) model and specialized techniques of nonlinear programming. In this case a version of the power system transmission expansion planning problem using the DC model where the integrality of the investment variables is relaxed is used. The nonlinear programming problem is solved with a specialized optimization algorithm and, moreover, a constructive heuristic algorithm is employed to solve the planning problem.

c) Using the DC model and *Branch and Bound* (B&B) algorithm without the use of decomposition techniques. The so called fathoming tests of the B&B were redefined and at each node of the tree a nonlinear programming problem is solved using the method developed in b).

Items a), b) and c) require the solution of distinct problems of nonlinear programming. A revision of the main characteristics of the iterative solution of the interior points methods is presented. An optimization technique based on a combination of the higher order interior point methods (HO-IPM) had been developed to solve the nonlinear programming problems in a fast, efficient and robust way. This combination of the HO-IPM has as objective to explore the particular characteristics of each method in a single one and to improve the comparative computational performance with the HO-IPM of individual form.

Keywords: Power transmission planning; transmission system AC model; transmission system DC model; constructive heuristic algorithms; Branch and Bound algorithm; higher order interior point method; mixed integer nonlinear programming.

- Filho, para onde vais?
- *Para o pico.*
- Para qual pico?
- *O mais alto.*

Aos meus pais Marcos e Olinda

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha imensa gratidão a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Marcos Alejandro Rider Belleza e Olinda Inés Flores Calderón pela criação, incentivo, exemplo de determinação e todo o apoio no decorrer deste caminho. Minha eterna gratidão.

Ao Prof. Ariovaldo Verandio Garcia não só pelo trabalho de orientação, mas também pela paciência, amizade e estímulo.

Ao Prof. Rubén Augusto Romero Lázaro sou grato pela co-orientação, amizade, paciência, estímulo, críticas e sugestões no desenvolvimento desta tese.

Ao Prof. Vicente Leonardo Paucar Casas da Universidade Federal do Maranhão, obrigado pelo apoio, amizade, e confiança nos últimos anos.

Aos professores do Departamento de Sistemas de Energia Elétrica (DSEE): André L. Morelato França, Ariovaldo V. Garcia, Carlos Alberto Castro Jr., Carlos Alberto F. Murari e Fujio Sato por demonstrarem sempre disposição e respeito, sem os quais não existiria um ambiente tão propício para o desenvolvimento da pesquisa.

Aos meus amigos do DSEE: Adriana Scheffer, Ahda P. Grilo, Alberto Jiménez, Alexandre Mota, Ana Carolina Canoas, Camila Barreto, Diogo Correa, Duvier R. Bedoya, Eduardo Asada, Enrique Niño, Heloisa H. Müller, Irênio Júnior, João Bosco, José Carlos Vieira Jr, Lia Mota, Luis Zárate, Luiz de Faria, Madson Cortes, Marcos Guimarães e Walimir de Freitas, pela amizade e apoio brindado durante minha estadia em Campinas.

Aos “ratões” da pensão pela companhia.

À Edna Servidone por ser sempre prestativa e paciente.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Glossário	xvii
Lista de Símbolos	xix
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.2 Estrutura do Trabalho	5
2 Modelos Matemáticos e Técnicas de Otimização Usados em Planejamento de Sistemas de Transmissão	7
2.1 Modelagem Matemática	7
2.1.1 Modelo de Transportes	8
2.1.2 Modelos Híbridos	10
2.1.3 Modelo CC	12
2.1.4 Modelo Linear Disjuntivo	12
2.2 Técnicas de Otimização	13
2.2.1 Algoritmos heurísticos	14
2.2.2 Algoritmos de otimização clássica	15
2.2.3 Metaheurísticas	16
2.3 Sistemas Usados	16
2.4 Outros Aspectos Relevantes	17
3 O Modelo CA no Planejamento de Sistemas de Transmissão	21
3.1 Vantagens de Usar o Modelo CA	22
3.2 O Modelo Matemático	23
3.3 Dificuldades de Usar o Modelo CA	25

4	Um Método de Pontos Interiores para Resolver o Modelo CA	27
4.1	O Problema Original	27
4.2	Método de Pontos Interiores Primal-Dual	31
4.3	Método de Pontos Interiores de Alta Ordem	38
4.3.1	Método de Pontos Interiores Preditor – Corretor	39
4.3.2	Método de Pontos Interiores Preditor com Múltiplas Correções	42
4.3.3	Método de Pontos Interiores com Múltiplas Correções Centralizadas	44
4.3.4	Método de Pontos Interiores Preditor com Múltiplas Correções e Múltiplas Correções Centralizadas	46
5	Algoritmo Heurístico Construtivo para o Modelo CA	49
5.1	Algoritmo Heurístico Construtivo Para o Modelo CA	49
5.1.1	Algoritmo Geral do AHC para o modelo CA	51
5.2	Testes e Resultados	51
5.2.1	Sistema Garver de 06 barras	52
5.2.2	Sistema IEEE de 24 barras	72
5.2.3	Sistema Sul Brasileiro de 46 barras	75
5.2.4	Sistema Norte-Nordeste Brasileiro de 87 barras	75
5.3	Comentários dos Resultados	78
6	Algoritmo Heurístico Construtivo para o Modelo CC	81
6.1	Algoritmo Heurístico Construtivo para o Modelo CC	81
6.1.1	Algoritmo Geral do AHC para o modelo CC	82
6.2	MPI Aplicado na Resolução do Modelo CC Relaxado	83
6.2.1	Algoritmo Geral do MPI para o modelo CC	87
6.3	Testes e Resultados	89
6.3.1	Sistema Garver de 06 barras	89
6.3.2	Sistema IEEE de 24 barras	95
6.3.3	Sistema Sul Brasileiro de 46 barras	95
6.3.4	Sistema Colombiano de 93 barras	98
6.4	Comentários dos Resultados	98
7	Algoritmo <i>Branch and Bound</i> para o Modelo CC	101
7.1	Características do Algoritmo Branch and Bound para Problemas de Programação Não-Linear Inteiro Misto	101
7.2	Algoritmo Branch and Bound para o Modelo CC	103
7.3	Uso de Pseudocustos no Algoritmo Branch and Bound	106
7.4	MPI Aplicado na Resolução do Modelo de Corrente Contínua Relaxado	108
7.5	Testes e Resultados	110
7.5.1	Sistema Garver de 06 barras	110
7.5.2	Sistema IEEE de 24 barras	112
7.5.3	Sistema Sul Brasileiro de 46 barras	113
7.5.4	Sistema Colombiano de 93 barras	114
7.6	Comentários dos Resultados	118

8	Considerações Finais	121
8.1	Conclusões	121
8.2	Trabalhos Futuros	123
	Referências bibliográficas	125
A	Relações matemáticas do MPI	133
B	Dados dos Sistemas para o Modelo CA	145
B.1	Sistema Garver de 6 Barras	145
B.2	Sistema IEEE de 24 barras	147
B.3	Sistema Brasileiro Sul de 46 barras	149
B.4	Sistema Nordeste Brasileiro de 87 barras	153
C	Dados dos Sistemas para o Modelo CC	161
C.1	Sistema Garver de 6 Barras	161
C.2	Sistema IEEE de 24 barras	162
C.3	Sistema Brasileiro Sul de 46 barras	163
C.4	Sistema Colombiano de 93 barras	165
D	Resultados do Algoritmo B&B para o sistema Garver usando o Modelo CC	169
D.1	Caso 1: Considerando a topologia da base e com reprogramação da geração	169
D.2	Caso 2: Considerando a topologia da base e sem reprogramação da geração	186
E	Pesquisas Correlatas	201
E.1	Fluxo de Potência Ótimo	201
E.1.1	Minimização de Perdas Ativas	202
E.1.2	Máximo Carregamento do Sistema	203
E.1.3	Mínimo Corte de Carga	203
E.1.4	Testes e Resultados	204
E.2	Algoritmo Genético Especializado para o Planejamento da Expansão de Transmissão	208
E.2.1	Pseudo-Código do AG	213
E.2.2	Testes e Resultados	213

Lista de Figuras

5.1	Solução do sistema Garver para o Caso 1, considerando a topologia base e usando o modelo CA	52
5.2	Solução do sistema Garver para o Caso 1, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	54
5.3	Solução do sistema Garver para o Caso 2, considerando a topologia base e usando o modelo CA	55
5.4	Solução do sistema Garver para o Caso 2, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	57
5.5	Solução do sistema Garver para o Caso 3, considerando a topologia base e usando o modelo CA	58
5.6	Solução do sistema Garver para o Caso 3, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	60
5.7	Solução do sistema Garver para o Caso 4, considerando a topologia base e usando o modelo CA	61
5.8	Solução do sistema Garver para o Caso 4, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	62
5.9	Solução do sistema Garver para o Caso 5, considerando a topologia base e fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, e usando o modelo CA	65
5.10	Solução final do sistema Garver para o Caso 5, considerando a topologia base e fontes de potência reativa na barra 5, e usando o modelo CA	66
5.11	Solução final do sistema Garver para o Caso 5, sem considerar a topologia base e considerando fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, usando o modelo CA	69
5.12	Solução final do sistema Garver para o Caso 6, sem considerar a topologia base e considerando fontes de potência reativa nas barras 2 e 4, usando o modelo CA	71
5.13	Solução final do sistema IEEE 24 barras para o Caso 5 considerando fontes de potência reativa nas barras 3 e 9, usando o modelo CA. As linhas tracejadas representa circuitos candidatos	76
5.14	Solução final do sistema Brasileiro Sul de 46 barras considerando fontes de potência reativa nas barras 2, 20, 23, 42 e 45, usando o modelo CA. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos	77
5.15	Solução final do sistema Nordeste Brasileiro de 87 barras considerando fontes de potência reativa nas barras 1, 21, 25, 44 e 50, usando o modelo CA. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos	79

6.1	Solução do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	90
6.2	Solução do sistema Garver considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC	92
6.3	Solução do sistema Garver sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	94
6.4	Solução do sistema IEEE 24 barras considerando a topologia da base e com reprogramação da geração, e usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam novos circuitos candidatos	96
7.1	Não-convexidade do problema de planejamento de transmissão	105
7.2	Arvore <i>Branch and Bound</i> do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	111
7.3	Solução do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	112
7.4	Arvore <i>Branch and Bound</i> do sistema Garver considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC	113
7.5	Solução do sistema Sul Brasileiro de 46 barras considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos	115
7.6	Solução do sistema Sul Brasileiro de 46 barras considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos	116
7.7	Solução do sistema Colombiano de 93 barras considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos	117
7.8	Não-convexidade do problema de planejamento de transmissão para o sistema Garver	119
E.1	Convergência dos problemas de minimização de perdas ativas, minimização de corte de carga e maximização do carregamento do sistema.	207
E.2	Proposta de Codificação	209
E.3	Recombinação de um Ponto	211
E.4	Mutação	211
E.5	Pseudo-Código do AG de Chu-Beasley	214

Lista de Tabelas

5.1	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 1, considerando a topologia base e usando o modelo CA	53
5.2	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 1, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	53
5.3	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 2, considerando a topologia base e usando o modelo CA	55
5.4	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 2, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	56
5.5	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 3, considerando a topologia base e usando o modelo CA	58
5.6	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 3, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	59
5.7	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 4, considerando a topologia base e usando o modelo CA	62
5.8	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 4, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	63
5.9	Índice de Sensibilidade para alocar fontes de potência reativa do sistema Garver, considerando a topologia base e usando o modelo CA	64
5.10	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 5, considerando a topologia base e fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, e usando o modelo CA	66
5.11	Índice de Sensibilidade para alocar as fontes de potência reativa do sistema Garver, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA	68
5.12	Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 5, sem considerar a topologia base e considerando fontes de potência reativa nas barras 2, 4 e 5, usando o modelo CA . .	70
5.13	Processo do AHC do sistema IEEE 24 barras para o Caso 4, usando o modelo CA. Os custos são dados em $\times 10^6$ US\$	73
5.14	Índice de Sensibilidade para alocar as fontes de potência reativa do sistema IEEE 24 Barras usando o modelo CA	74
5.15	Processo do AHC do sistema IEEE 24 barras para o Caso 5 considerando fontes de potência reativa nas barras 3, 4 e 9, usando o modelo CA. Os custos são dados em $\times 10^6$ US\$	74
6.1	Processo do AHC do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	90

6.2	Processo do AHC do sistema Garver considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC	91
6.3	Processo do AHC do sistema Garver sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	93
6.4	Processo do AHC do sistema IEEE 24 barras considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	95
6.5	Processo do AHC do sistema Sul Brasileiro de 46 barras considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC	97
E.1	Características dos sistemas testados.	204
E.2	Resultados: minimização de perdas para os sistemas testados	205
E.3	Mínimo corte de carga.	205
E.4	Máximo carregamento.	205
E.5	CPU (% do tempo total) das tarefas principais.	206
E.6	Iterações e tempo CPU (s) para os seis sistemas testados	206

Glossário

AG - Algoritmo Genético

AGCB - Algoritmo Genético Proposto por Chu-Beasley

AHC - Algoritmo Heurístico Construtivo

B&B - *Branch and Bound*

CA - Corrente Alternada

CC - Corrente Contínua

CNOPO - Condições Necessárias de Otimalidade de Primeira Ordem

FACTS - Flexible AC Transmission Systems

FPO - Fluxo de Potência Ótimo

ID - Índice de Sensibilidade para Alocar Fontes de Potência Reativa

IS - Índice de Sensibilidade

KKT - Karush-Kuhn-Tucker

MA - Métodos Aproximados

MCC - Múltiplas Correções Centralizadas

ME - Métodos Exatos

MPI - Método de Pontos Interiores

MPI-AO - Método de Pontos Interiores de Alta Ordem

PC - Preditor - Corretor

PD - Método de Pontos Interiores Primal-Dual

PL - Programação Linear

PLC - Programação Linear Correspondente

PLIM - Programação Linear Inteiro Misto

PLK - Primeira Lei de Kirchhoff

PMC - Preditor com Múltiplas Correções

PMCC - Problema de Mínimo Corte de Carga

PMCMCC - Preditor com Múltiplas Correções e Múltiplas Correções Centralizadas

PMCS - Problema de Máximo Carregamento do Sistema

PMPA - Problema de Minimização de Perdas Ativas

PNL - Programação Não-Linear

PNLIM - Programação Não-Linear Inteiro Misto

SLK - Segunda Lei de Kirchhoff

TCSC - Compensador Capacitivo Serie Controlado por Tiristores

VGS - Villasana-Garver-Salon

Lista de Símbolos

ij	- Circuito entre as barras i e j
g_{ij}	- Condutância da linha no ramo ij
Ω_i	- Conjunto das barras vizinhas à barra i
I	- Conjunto das variáveis inteiras do problema P
N	- Conjunto de todas as barras
$\mathbf{d}_u^c, \mathbf{d}_l^c$ e $\mathbf{d}_h^c$	- Correções centralizadoras
β^k	- Decréscimo esperado de ρ^k
$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$	- Diferencia de ângulo de fase entre as barras i e j
ϵ_f	- Error da condição de factibilidade
ϵ_o	- Error da condição de otimalidade
ϵ_μ	- Error do parâmetro de barreira
γ	- Fator de segurança
l_μ	- Função Lagrangiana
v_{PNL}^{k-}	- Função objetivo do subproblema sucessor após impor a restrição $n_{ij} \leq [n_{ij}^*]$
v_{PNL}^{k+}	- Função objetivo do subproblema sucessor após impor a restrição $n_{ij} \geq [n_{ij}^*] + 1$
v_{PNL}^k	- Função objetivo ótimo do subproblema k
ρ^k	- Gap de complementaridade em cada iteração k
ρ^{af}	- Gap de complementaridade na direção <i>affine-scaling</i>
$\mathbf{c}$	- Gradiente da função objetivo
$\mathbf{H}_h(\mathbf{x}^k)$	- Hessiana das restrições de desigualdade
$\mathbf{H}_g(\mathbf{x}^k)$	- Hessiana das restrições de igualdade
IS	- Índice de sensibilidade
ID	- Índice de sensibilidade para alocar fontes de potência reativa
v	- Investimento devido às adições de circuitos no sistemas
$\mathbf{J}_h(\mathbf{x})$	- Jacobiano da restrição de desigualdade
$\mathbf{J}_g(\mathbf{x})$	- Jacobiano da restrição de igualdade
v_{est}^k	- Limitante inferior de uma solução inteira contida na região factível do subproblema k
$\mathbf{S}_2$	- Matriz de incidência ramo-nó do conjunto de circuitos correspondentes aos novos caminhos
$\mathbf{S}_1$	- Matriz de incidência ramo-nó do conjunto de circuitos existentes na configuração base
$\mathbf{S}$	- Matriz de incidência ramo-nó do sistema elétrico
$\mathbf{S}_b$	- Matriz de incidência ramo-nó dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias
$\mathbf{X}$	- Matriz diagonal contendo $\mathbf{x}$

$\mathbf{N}$	- Matriz diagonal contendo o vetor $\mathbf{n}$
$\mathbf{N}_1$	- Matriz diagonal contendo o vetor $\mathbf{n}_1$
$\mathbf{N}_2$	- Matriz diagonal contendo o vetor $\mathbf{n}_2$
$\mathbf{Y}$	- Matriz diagonal contendo o vetor $\mathbf{y}$
$\mathbf{M}$	- Matriz diagonal contendo o parâmetro M
Υ	- Matriz diagonal contendo as susceptâncias dos circuitos
$\mathbf{N}^0$	- Matriz diagonal contendo os circuitos existentes na configuração base
$\mathbf{N}_1^0$	- Matriz diagonal contendo os circuitos existentes para o conjunto de circuitos existentes na configuração base
Υ_b	- Matriz diagonal contendo os valores das susceptâncias dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias.
Υ_1	- Matriz diagonal contendo os valores das susceptâncias dos circuitos existentes na configuração base
$\mathbf{S}_h, \mathbf{S}_l$ e $\mathbf{S}_u$	- Matrizes diagonais definidas pelas componentes $\mathbf{s}_h, \mathbf{s}_l$ e $\mathbf{s}_u$, respectivamente
α_{af}	- Máximo tamanho de passo na direção <i>affine-scaling</i>
$\mathbf{x}^*$	- Mínimo local
λ_j^Q	- Multiplicador de Lagrange da parte reativa das restrições de igualdade
M	- Número máximo de passos de múltiplas correções
C	- Número máximo de passos de múltiplas correções centralizadas
$[\bar{\mathbf{f}}]$	- Operador que representa uma matriz diagonal com elementos $\bar{\mathbf{f}}$
μ^k	- Parâmetro de barreira
μ^{af}	- Parâmetro de barreira calculado no passo Preditor
M	- Parâmetro de valor muito grande
f_{ij}^k	- Parcela fracionaria de n_{ij}^*
P	- Problema correspondente
P_{ij}^-	- Pseudocustos inferior
P_{ij}^+	- Pseudocustos superior
i, j	- Representam barras
v_{PNL}	- Solução do problema de PNL do subproblema k
$\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x}$	- Sub vetor de $\mathbf{x}$ com elementos de $\mathbf{x}$ que tem limites $\mathbf{x}^u$ e $\mathbf{x}^l$ limites superiores e inferiores, respectivamente
b_{ij}	- Susceptância da linha no ramo ij
b_{ij}^{sh}	- Susceptância shunt da linha no ramo ij
b_i^{sh}	- Susceptância shunt na barra i
α_k	- Tamanho de passo em cada iteração k
$\mathbf{y}$	- Vetor com variáveis binárias; é igual a 1 se é adicionado um circuito, caso contrário é igual a 0
$\mathbf{V}$	- Vetor das magnitudes de tensão
$\mathbf{x}$	- Vetor das variáveis de decisão
$\boldsymbol{\theta}$	- Vetor de ângulos de fase
$\boldsymbol{\theta}_1$	- Vetor de ângulos de fase do conjunto de barras que fazem parte da configuração base
$\mathbf{n}$	- Vetor de circuitos adicionados
$\mathbf{n}_2$	- Vetor de circuitos adicionados do conjunto de circuitos correspondentes aos novos caminhos

$\mathbf{n}_1$	- Vetor de circuitos adicionados para o conjunto de circuitos existentes na configuração base
$\mathbf{c}_n$	- Vetor de custos dos circuitos que podem ser adicionados no sistema
$\mathbf{d}$	- Vetor de demanda para o Modelo CC
$\mathbf{P}_D$	- Vetor de demanda de potência ativa para o Modelo CA
$\mathbf{Q}_D$	- Vetor de demanda de potência reativa para o Modelo CA
$\mathbf{S}^{de}$	- Vetor de fluxos de potência aparente nos ramos na barra de ida
$\mathbf{S}^{para}$	- Vetor de fluxos de potência aparente nos ramos na barra de chegada
$\bar{\mathbf{f}}$	- Vetor de fluxos de potências máximas permitidas nos ramos
$\bar{\mathbf{f}}_2$	- Vetor de fluxos de potências máximas permitidas nos ramos do conjunto de circuitos correspondentes aos novos caminhos
$\bar{\mathbf{f}}_b$	- Vetor de fluxos de potências máximas permitidas nos ramos dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias
$\mathbf{f}$	- Vetor de fluxos de potências nos ramos
$\mathbf{f}_2$	- Vetor de fluxos de potências nos ramos do conjunto de circuitos correspondentes aos novos caminhos
$\mathbf{f}_b$	- Vetor de fluxos de potências nos ramos dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias
$\mathbf{r}$	- Vetor de geração artificial
$\mathbf{p}$	- Vetor de geração de potência ativa para o Modelo CC
$\mathbf{P}_G$	- Vetor de geração de potência ativa para o Modelo CA
$\mathbf{Q}_G$	- Vetor de geração de potência reativa para o Modelo CA
$\mathbf{n}^{inf}$	- Vetor de limite inferior de $\mathbf{n}$
$\bar{\mathbf{V}}$	- Vetor de limite máximo das magnitudes de tensões
$\bar{\mathbf{S}}$	- Vetor de limite máximo de fluxos de potência aparente nos ramos
$\bar{\mathbf{P}}_G$	- Vetor de limite máximo de geração de potência ativa
$\bar{\mathbf{Q}}_G$	- Vetor de limite máximo de geração de potência reativa
$\underline{\mathbf{V}}$	- Vetor de limite mínimo das magnitudes de tensões
$\underline{\mathbf{P}}_G$	- Vetor de limite mínimo de geração de potência ativa
$\underline{\mathbf{Q}}_G$	- Vetor de limite mínimo de geração de potência reativa
$\mathbf{n}^{sup}$	- Vetor de limite superior de $\mathbf{n}$
$\bar{\mathbf{p}}$	- Vetor de máxima geração de potência ativa
$\bar{\mathbf{n}}$	- Vetor de números máximo de circuitos que podem ser adicionados
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	- Vetor de restrições de igualdade
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	- Vetor de restrições de desigualdade
α_r	- Vetor de transformação ($US\$/MW$) com dimensão apropriada
$\mathbf{e}$	- Vetor de uns (1's) com dimensão apropriada
$\mathbf{f}_1$	- Vetor fluxos de potências nos ramos para o conjunto de circuitos existentes na configuração base
λ	- Vetor multiplicador de Lagrange das restrições de igualdade
$\mathbf{q}_u^c, \mathbf{q}_l^c$ e $\mathbf{q}_h^c$	- Vetores complementares
$\mathbf{s}_h, \mathbf{s}_l$ e $\mathbf{s}_u$	- Vetores das variáveis de folga não negativas
π_h, π_l e π_u	- Vetores multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade

Trabalhos Publicados Pelo Autor

Revistas Internacionais

1. I. G. Sánchez, R. Romero, J. R. S. Mantovani and M. J. RIDER. “Transmission – Expansion Planning Using the DC Model and Nonlinear – Programming Technique”. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, vol. 152, no. 6, pp. 763-769, November 2005.
2. I. J. Silva, M. J. RIDER, R. Romero, A. V. Garcia and C. A. Murari. “Transmission Network Expansion Planning with Security Constraints”. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, vol. 152, no. 6, pp. 828-836, November 2005.
3. M. J. RIDER, C. A. Castro, M. F. Bedriñana and A. V. Garcia. “Towards a Fast and Robust Interior Point Method for Power System Applications”. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, vol. 151, no. 5, pp. 575-581, September 2004.
4. M. J. RIDER, C. A. Castro, V. L. Paucar and A. V. Garcia. “Higher Order Interior – Point Method for Minimizing Load – Shedding in a Competitive Electric Power Market”. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, vol. 151, no. 4, pp. 433-440, July 2004.
5. M. J. RIDER, V. L. Paucar and A. V. Garcia. “Enhanced Higher – Order Interior – Point Method to Minimize Active Power Losses in Electric Energy Systems”. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, vol. 151, no. 4, pp. 517-525, July 2004.
6. M. J. RIDER and V. L. Paucar. “Application of a Nonlinear Reactive Power Pricing Model for Competitive Electric Markets”. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, vol. 151, no. 3, pp. 407-414, May 2004.
7. V. L. Paucar and M. J. RIDER. “Artificial Neural Networks for Solving the Power Flow Problem in Electric Power Systems”. *International Journal Electric Power Systems Research*, Elsevier Science S.A., vol. 62, no. 2, pp. 139-144, June 2002.

Revistas Nacionais

1. M. J. RIDER, V. L. Paucar, A. V. Garcia y M. F. Bedriñana. “Flujo de Potencia Óptimo Usando un Método de Puntos Interiores para Sistemas Eléctricos de Potencia”. *Revista Técnico-Científica Publicación de la Universidad Nacional de Ingeniería (Revista TECNIA)*, vol. 14, no. 1, pp. 59-72, Lima, Perú, Julio 2004. (Trabalho convidado)

2. M. J. RIDER, V. L. Paucar, A. V. Garcia y M. F. Bedriñana. “Minimización del Corte de Carga en Sistemas de Potencia Mediante un Método de Optimización de Puntos Interiores”. *Revista Técnico-Científica Publicación de la Universidad Nacional de Ingeniería (Revista TECNIA)*, vol. 14, no. 1, pp. 73-86, Lima, Perú, Julio 2004. (Trabalho convidado)
3. J. E. O. Pessanha, V. L. Paucar y M. J. RIDER. “Análisis en el Dominio del Tiempo de los Mecanismos Inherentes al Fenómeno de Estabilidad de Tensión en Sistemas de Potencia”. *Revista Técnico-Científica Publicación de la Universidad Nacional de Ingeniería (Revista TECNIA)*, vol. 12, no. 1, pp. 11-21, Lima, Perú, Julio 2002. (Trabalho convidado)
4. V. L. Paucar y M. J. RIDER. “Equivalentes Externos para Análisis de Seguridad de Sistemas de Potencia Interconectados”. *Revista Técnico-Científica Publicación de la Universidad Nacional de Ingeniería (Revista TECNIA)*, vol. 12, no. 1, pp. 31-42, Lima, Perú, Julio 2002. (Trabalho convidado)

Congressos Internacionais

1. I. J. Silva, M. J. RIDER, R. Romero and C. A. Murari. “Genetic Algorithm of Chu and Beasley for Static and Multistage Transmission Expansion Planning”. *(Paper accepted) Proceedings of the 2006 Power Engineering Society General Meeting*, paper 06GM0560, Montreal, Quebec, Canada, June 18-22, 2006.
2. M. J. RIDER, I. J. Silva, R. Romero, A. V. Garcia and C. A. Murari. “Transmission Network Expansion Planning in Full Open Market Considering Security Constraints”. *Proceedings of the International Conference 2005 IEEE St. Petersburg (PowerTech 2005)*, paper 270, St. Petersburg, Russia, June 27-30, 2005.
3. H. H. Müller, M. J. RIDER, C. A. Castro and V. L. Paucar. “Power Flow Model Based on Artificial Neural Networks”. *Proceedings of the International Conference 2005 IEEE St. Petersburg (PowerTech 2005)*, paper 382, St. Petersburg, Russia, June 27-30, 2005.
4. I. J. Silva, M. J. RIDER, R. Romero and C. A. Murari. “Transmission Network Expansion Planning Considering Uncertainty in Demand”. *Proceedings of the 2005 Power Engineering Society General Meeting*, paper PESGM2005-000405, pp. 1051-1056, San Francisco, California, USA, June 12-16, 2005.
5. V. L. Paucar, O. S. de Sousa Jr., I. O. Almeida, M. J. RIDER, M. F. Bedriñana and J. H. Santos. “Software Development with Compute Graphics, Distributed Data Base and OOP for Deregulated Power Systems Analysis”. *Proceedings of the IEEE 2004 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering (LESCOPE 2004)*, paper FP 4.2, pp. 198-202, Nova Scotian, Canada, July 28-31, 2004.

6. M. J. RIDER, A. V. Garcia and R. Romero. "A Constructive Heuristic Algorithm to Short Term Transmission Network Expansion Planning". *Proceedings of the 2004 Power Engineering Society General Meeting*, paper PESGM2004-000601, pp. 2107-2113, Denver, Colorado, USA, June 6-10, 2004.
7. M. J. RIDER, V. L. Paucar, A. V. Garcia and M. F. Bedriñana. "A Higher Order Interior Point Method to Minimize Active Power Loss in Electric Energy Systems". *Proceedings of the IEEE 2003 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering (LESCOPE 2003)*, paper FP 3.5, pp. 189-193, Montreal, Canada, May 07-09, 2003.
8. J. E. O. Pessanha, V. L. Paucar and M. J. RIDER. "A Review of Power System Voltage and Angular Stability Dynamics". *Proceedings of the IEEE-PES/CSEE International Conference on Power System Technology (PowerCon 2002)*, vol. 3, pp. 1669-1673, Kunming, China, October 13-17, 2002.
9. V. L. Paucar and M. J. RIDER. "Aspects of the generation and transmission services in the Peruvian power system under deregulation". *Proceedings of the 14th Power Systems Computation Conference (PSCC-2002)*, session 23, paper 5, Sevilla, Spain, June 24-28, 2002.

Congressos Nacionais

1. M. J. RIDER, A. V. Garcia and R. Romero. "Branch and Bound Algorithm for Transmission Network Expansion Planning Using the DC model". (*Abstract accepted*) *X Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning (X SEPOPE)*, Florianópolis, Santa Catarina, Brazil, May 21-25, 2006.
2. I. J. Silva, M. J. RIDER, R. Romero, A. V. Garcia e C. A. Murari. "Algoritmo Genético de Chu-Beasley para o Problema de Planejamento da Expansão de Sistema da Transmissão de Energia Elétrica". *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (VII SBAI)*, paper 9479, São Luís, Maranhão, Setembro 19-23, 2005.
3. H. H. Müller, M. J. RIDER, C. A. Castro e V. L. Paucar. "Cálculo de Fluxo de Carga por Redes Neurais Artificiais". *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (VII SBAI)*, paper 10220, São Luís, Maranhão, Setembro 19-23, 2005.
4. M. J. RIDER, R. M. Moreno, V. L. Paucar y A. V. Garcia. "Flujo de potencia óptimo considerando Controladores FACTS para sistemas eléctricos de potencia". *Memorias del XVI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Ramas Afines (XVI CONIMERA)*, paper A117, Lima, Perú, Setiembre 05-09, 2005.
5. M. J. RIDER, A. V. Garcia e R. Romero. "Um Algoritmo Heurístico Construtivo para o Planejamento a Curto Prazo da Expansão de Redes de Transmissão". *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004 (CBA 2004)*, paper 505, Centro de Convenções da UFRGS, Gramado, Rio Grande do Sul, Brasil, Setembro 21-24, 2004.

6. M. J. RIDER, C. A. Castro, M. F. Bedriñana e A. V. Garcia. “Um Método de Pontos Interiores para Aplicações em Otimização de Sistemas de Potência”. *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004* (CBA 2004), paper 574, Centro de Convenções da UFRGS, Gramado, Rio Grande do Sul, Brasil, Setembro 21-24, 2004.
7. M. J. RIDER, A. V. Garcia and R. Romero. “Short Term Transmission Network Expansion Planning Using an Interior Points Method”. *Proceedings of the IX Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning* (IX SEPOPE), paper SP-072, Rio de Janeiro, Brazil, May 23-27, 2004.
8. I. Sánchez, R. Romero, M. J. RIDER and A. V. Garcia. “Analysis of the Use of Interior Points in the Long Term Transmission Network Expansion Planning”. *Proceedings of the IX Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning* (IX SEPOPE), paper SP-073, Rio de Janeiro, Brazil, May 23-27, 2004.
9. M. J. RIDER, V. L. Paucar, A. V. Garcia y M. F. Bedriñana. “Flujo de Potencia Óptimo Usando un Método de Puntos Interiores para Sistemas Eléctricos de Potencia”. *Memorias del XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Ramas Afines* (XV CONIMERA), paper T448, Lima, Perú, Octubre 27-31, 2003. (Trabalho convidado para ser publicado na Revista TECNIA)
10. M. J. RIDER, V. L. Paucar, A. V. Garcia y M. F. Bedriñana. “Minimización del Corte de Carga en Sistemas de Potencia Mediante un Método de Optimización de Puntos Interiores”. *Memorias del XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Ramas Afines* (XV CONIMERA), paper T449, Lima, Perú, Octubre 27-31, 2003. (Trabalho convidado para ser publicado na Revista TECNIA)
11. M. J. RIDER e V. L. Paucar. “Aspects of the Competitive Electric Market of the Reactive Power”. *Proceedings of the VIII Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning* (VIII SEPOPE), paper IP-134, Brasília, Distrito Federal, Brazil, May 19-23, 2002.

Encontros

1. M. J. RIDER, A. V. Garcia e R. Romero. “Algoritmo Branch & Bound para o Planejamento da Expansão de Transmissão usando o modelo CC”. *Anais do V Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência* (SisPot 2005), pp. 47-48, FEEC, UNICAMP, Março 21-23, 2005.
2. I. J. Silva, M. J. RIDER, R. Romero, A. V. Garcia e C. A. Murari. “Planejamento da Expansão de Transmissão Considerando Restrições de Segurança”. *Anais do V Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência* (SisPot 2005), pp. 41-42, FEEC, UNICAMP, Março 21-23, 2005.
3. I. J. Silva, M. J. RIDER, R. Romero e C. A. Murari. “Planejamento da Expansão de Transmissão Considerando Incertezas na Demanda”. *Anais do V Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência* (SisPot 2005), pp. 67-68, FEEC, UNICAMP, Março 21-23, 2005.

4. H. H. Müller, M. J. RIDER e C. A. Castro. “Fluxo de Potência Baseado em Redes Neurais Artificiais”. *Anais do V Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência (SisPot 2005)*, pp. 73-74, FEEC, UNICAMP, Março 21-23, 2005.
5. M. J. RIDER, A. V. Garcia e R. Romero. “Um Algoritmo Construtivo Para o Planejamento a Curto Prazo da Expansão de Redes de Transmissão”. *Anais do IV Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência (SisPot 2004)*, pp. 10-11, FEEC, UNICAMP, Abril 05-07, 2004.
6. M. J. RIDER, C. A. Castro, M. F. Bedriñana e A. V. Garcia. “Um Método de Pontos Interiores para Aplicações em Otimização de Sistemas de Potência”. *Anais do IV Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência (SisPot 2004)*, pp. 32-33, FEEC, UNICAMP, Abril 05-07, 2004.
7. V. L. Paucar, O. S. de Sousa Jr., I. O. Almeida, M. J. RIDER e M. F. Bedriñana. “Software interativo para análise de sistemas elétricos usando computação gráfica e programação orientada a objetos”. *III Encontro Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação (III ENPPG)*, pp.48-48, Fortaleza, Brasil, Agosto 13-15, 2003.
8. M. J. RIDER, M. V. M. de Benedicto e C. A. Castro. “Redes Neurais Artificiais para a Solução do Problema de Fluxo de Potência”. *Anais do III Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência (SisPot 2003)*, pp. 13-14, FEEC, UNICAMP, Abril 14-15, 2003.
9. M. J. RIDER, C. A. Castro e A. V. Garcia. “Minimização do Corte de Carga Usando o Método de Pontos Interiores de Alta Ordem”. *Anais do III Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência (SisPot 2003)*, pp. 53-54, FEEC, UNICAMP, Abril 14-15, 2003.
10. V. L. Paucar, I. O. Almeida, O. S. de Sousa Jr. e M. J. RIDER. “Software para Análise Interativa Gráfica de Sistemas Elétricos de Potência Operando em Regime Permanente”. *Anais do 54a Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (54a SBPC)*, Goiânia, Brasil, Julho 7-12, 2002.

Capítulo 1

Introdução

O problema de planejamento da expansão de redes de transmissão a longo prazo é um problema clássico de sistemas de energia elétrica, e tem como objetivo encontrar o plano ótimo de expansão, ou seja, especificar os circuitos (linhas e/ou transformadores) que devem ser instalados na rede para permitir a operação viável num ano-horizonte pré-definido a um custo mínimo. Os dados desse problema geralmente são: a topologia atual (ano base), os circuitos candidatos, a geração e a demanda para o ano-horizonte, as restrições de investimento, etc. O plano ótimo de expansão deve definir *onde*, *quantos* e *quando* os novos circuitos devem ser instalados.

Para resolver o problema de planejamento a longo prazo, técnicas de síntese de redes são usadas de maneira geral. Modelos matemáticos relaxados do problema usando apenas a parte ativa (potência ativa e ângulos das tensões complexas) são utilizados. O modelo de transportes, o modelo de corrente contínua (CC), e um modelo híbrido são modelos simplificados usados para resolver o problema de planejamento da expansão da transmissão a longo prazo. O modelo CC ainda é considerado o modelo ideal para a área de planejamento da expansão da transmissão a longo prazo (Romero et al., 2002).

Quanto ao período de análise do problema de planejamento, o mesmo pode ser considerado como sendo apenas de um estágio, denominado planejamento estático, ou o horizonte de planejamento pode ser separado em vários estágios e, nesse caso, tem-se o problema de planejamento multiestágio da expansão de sistemas de transmissão.

Para resolver o problema de planejamento a longo prazo podem ser utilizadas diferentes metodologias (Latorre et al., 2003), e estas podem ser qualificadas em dois tipos: 1) métodos exatos (ME) e 2) métodos aproximados (MA). Os do primeiro tipo possuem uma prova de convergência finita e conseguem atingir soluções ótimas para sistemas de pequeno e médio porte, porém para sistemas de maior porte apresentam problemas de convergência e elevado esforço computacional. Entre os mais conhecidos tem-se: o algoritmo *Branch and Bound* (B&B) e o método de decomposição de Benders. Os métodos aproximados têm como características utilizar conceitos heurísticos com o ob-

jetivo de encontrar soluções de boa qualidade e sua convergência para uma solução ótima global não pode ser provada. Entre os mais utilizados estão os algoritmos heurísticos construtivos (AHC) e as metaheurísticas (algoritmos genéticos, busca tabu, *simulated annealing* entre outros).

Existem muitos AHC desenvolvidos com o objetivo de resolver o problema de planejamento quando se emprega o modelo CC, cabendo destacar as metodologias de mínimo esforço (Monticelli et al., 1982) e o método de mínimo corte de carga (Pereira and Pinto, 1985). Todos os AHC encontram uma solução de boa qualidade e não necessariamente a configuração ótima, mas têm a vantagem de ser de simples entendimento, robustos e muitos rápidos. Um AHC pode ser considerado uma procura passo a passo de uma solução de boa qualidade para um problema complexo. Neste caso, em cada passo do AHC um circuito é adicionado à rede. O circuito a ser adicionado é escolhido usando um índice de sensibilidade. (Garver, 1970)

Os AHC acima mencionados não resolvem diretamente o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando modelo CC (que é um problema de programação não-linear inteiro misto). Geralmente são feitas transformações e considerações com o objetivo de contornar a não linearidade do problema e resolver apenas problemas de programação linear (PL) em cada passo do AHC. Entretanto, é possível desenvolver um AHC que trabalhe diretamente com o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando modelo CC, mas para isso é necessário a utilização de ferramentas de programação não-linear (PNL) para resolver os problemas de PNL (resultantes após relaxar a integralidade das variáveis de investimento do problema de planejamento) em cada passo do AHC. As técnicas de PNL permitem o tratamento de outras não linearidades no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando modelo CC, como por exemplo a representação das perdas ativas da rede de transmissão. (de Oliveira et al., 2005; Sánchez et al., 2005)

Dentre os métodos exatos desenvolvidos para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, ainda não existe uma proposta de resolver diretamente o problema de planejamento com o modelo CC usando um algoritmo *Branch and Bound* sem o uso da decomposição de Benders. Em (Haffner et al., 2001) foi mostrado que um algoritmo B&B (utilizado para o modelo de transportes sem o uso da decomposição de Benders) é muito superior a um algoritmo que usa a decomposição de Benders para resolver o mesmo modelo, usando um algoritmo B&B apenas para resolver o subproblema mestre. Essa comparação é importante porque são dois algoritmos para resolver um problema de programação linear inteira mista com convergência garantida ao ótimo global para sistemas de médio porte. Assim, existem evidências de um desempenho superior do algoritmo B&B comparado com a decomposição de Benders para o problema de planejamento de sistemas de transmissão.

Um algoritmo B&B usado para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, usando diretamente o modelo CC, deve contornar três problemas cruciais: (1) a disponibilidade

de um algoritmo de programação não-linear eficiente e robusto para resolver cada subproblema da árvore de B&B; (2) o desenvolvimento de técnicas eficientes de escolha das variáveis para separação dos subproblemas e da ordem de escolha da resolução dos subproblemas da árvore de B&B e (3) redefinir os chamados testes de sondagem para contornar problemas de aparecimento de mínimos locais na resolução de problemas de PNL, impondo uma margem adicional de segurança para cada subproblema antes de serem sondados. O último ponto pode incrementar o número de PNLs que o algoritmo de B&B resolve, mas pode evitar a convergência a ótimos locais. Contornando os problemas mencionados acima, o algoritmo B&B para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando modelo CC poderá identificar as melhores soluções dos sistemas testes (encontradas na literatura especializada) para o problema de planejamento de transmissão, com um critério de parada claramente definida pelos testes de sondagem e a possibilidade de tratar outras não linearidades no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão.

Depois de resolver o problema de planejamento a longo prazo utilizando um modelo simplificado (como o modelo CC), é resolvido o problema de planejamento de reativos, onde os planos de expansão obtidos usando o modelo CC são avaliados quanto a restrições operativas. Nesta fase utilizam-se programas como fluxo de potência não-linear, análise de curto-circuito, análise nodal, análise de estabilidade transitória, entre outros. (Romero et al., 2002)

O uso do modelo não linear, ou de “corrente alternada” (CA) do sistema de transmissão para realizar o planejamento da expansão de transmissão é incipiente e praticamente não existe literatura especializada sobre o tema. Um planejamento integrado da expansão da transmissão usando o modelo CA da rede de transmissão não foi estudado ainda. No modelo CA, devem ser obedecidas as duas leis de Kirchhoff na forma exata, sem simplificações usadas para serem montados os modelos linearizados. Também podem ser incorporadas outras restrições operacionais como limites de tensão. Mais importante ainda, pode-se realizar o planejamento integrado de potência ativa e reativa, isto é, pode-se integrar o planejamento da expansão de sistemas de transmissão e de alocação de fontes de potência reativa. As perdas exatas do sistema são encontradas de forma trivial.

As metodologias utilizadas para resolver o problema de planejamento a longo prazo podem ser adaptadas para resolver o problema de planejamento a curto prazo. É por isso que um AHC pode ser utilizado para resolver o problema de planejamento usando o modelo de corrente alternada do sistema de transmissão. Uma das dificuldades que aparece quando se trabalha com o planejamento usando o modelo CA utilizando um AHC é a necessidade de tratar com problemas de programação não-linear. (Rider et al., 2004c)

O método de pontos interiores (MPI), desenvolvido originalmente para resolver problemas de programação linear (Karmarkar, 1984), pode ser reformulado e adaptado para resolver problemas de programação não-linear como pode ser visto em (Quintana et al., 2000) onde é aplicado com

sucesso na otimização da operação de sistemas de potência. Este método, ainda, tem sido utilizado para resolver o problema de fluxo de potência ótimo de grande porte (Torres and Quintana, 1998; Granville, 1996), estimação de estado (Wei et al., 1998), máximo carregamento do sistema (Irisarri et al., 1997), mínimo corte de carga (Granville et al., 1996; Rider et al., 2004b), análise de estabilidade de tensão (Wang et al., 1998), coordenação hidrotérmica (Medina et al., 1998) e despacho ótimo e seguro (Yan and Quintana, 1997). Resultados mostram que o MPI tem grande potencial para resolver problemas de sistemas de potência quando comparado com métodos tradicionais.

A idéia central dos métodos de pontos interiores de alta ordem (MPI-AO) é reduzir o número de fatorações (a um mínimo necessário), que é a tarefa que exige maior esforço computacional. O MPI-AO proposto em (Torres and Quintana, 1998), consegue melhores direções de busca pela solução de dois sistemas de equações lineares. Estes dois sistemas definem os passos preditor e corretor, gerando o MPI preditor - corretor (PC). Apesar da aceitação do MPI PC para o cálculo das direções de busca, melhores resultados podem ser obtidos adicionando outra etapa do corretor. O método resultante é chamado MPI preditor com múltiplas correções (PMC) (Torres and Quintana, 2000). Outro MPI-AO é o MPI com múltiplas correções centralizadas (MCC) desenvolvida em (Torres and Quintana, 2001; Wu, 2001), observando que as grandes discrepâncias entre os produtos de complementaridade reduzem em muito o desempenho do MPI por resultarem em tamanho de passo pequeno, resultando em uma lenta convergência. Todos os MPI-AO anteriores melhoram o desempenho do método de pontos interiores, resultando em um número menor de iterações e tempo de CPU (Torres et al., 2002). Mas uma combinação destes métodos pode melhorar o desempenho computacional do MPI, como foi sugerido na referência (Torres and Quintana, 2001) e uma primeira tentativa de implementação é sugerido na referência (Rider et al., 2004a).

1.1 Objetivos

Neste trabalho são propostos modelos matemáticos e técnicas de solução para:

1. Resolver o problema do planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo CA do sistema de transmissão para o planejamento estático. Um algoritmo heurístico construtivo especializado é utilizado para resolver o problema de planejamento. Um problema de programação não-linear é resolvido em cada iteração do AHC. Uma primeira tentativa de alocação de fontes de potência reativa também é considerada.
2. Resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando o modelo CC para o planejamento estático com técnicas de programação não-linear especializadas. O problema do planejamento usando o modelo CC relaxado (desprezando a integralidade das variáveis de

investimento) é um problema de programação não-linear, modelado de forma matricial, será solucionado de forma eficiente com um algoritmo de otimização especializado. Um algoritmo heurístico construtivo especializado é utilizado para resolver o problema de planejamento.

3. Resolver diretamente o problema de planejamento com o modelo CC para o planejamento estático usando um algoritmo B&B sem o uso da decomposição de Benders. São redefinidos os chamados testes de sondagem no algoritmo B&B, e é resolvido um problema de programação não-linear em cada nó da árvore de B&B e, ainda, usam-se pseudocustos para gerenciar o desenvolvimento da árvore de B&B. Os problemas de programação não-linear em cada nó da árvore de B&B são resolvidos usando a metodologia desenvolvida no item (b) dos objetivos.

Os três objetivos requerem a solução de problemas de programação não-linear diferenciados. São desenvolvidas técnicas de otimização com base em uma combinação de métodos de pontos interiores de alta ordem para resolver os problemas de PNL de forma rápida, eficiente e robusta.

1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado da forma descrita a seguir:

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão bibliográfica sobre os modelos matemáticos, técnicas de otimização e sistemas testes atualmente usados para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo. Outros aspectos relevantes referentes ao problema de planejamento de transmissão também são comentados.

No Capítulo 3 apresenta-se um modelo matemático para o problema de planejamento da expansão de transmissão usando o modelo de corrente alternada do sistema de transmissão para o planejamento estático, assim como as vantagens e desvantagens de utilizar o modelo CA e metodologias possíveis que podem ser utilizadas para resolvê-lo.

No Capítulo 4 apresenta-se uma breve revisão dos métodos de pontos interiores de alta ordem existentes, assim como é apresentada uma possível combinação deste MPI-AO. A combinação dos MPI-AO apresentada neste Capítulo será utilizada para resolver o problema de programação não-linear que aparece quando se quer resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão utilizando o modelo CA desprezando a integralidade das variáveis de investimento.

No Capítulo 5 apresenta-se um algoritmo heurístico construtivo especializado para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CA para o planejamento estático. O índice de sensibilidade do AHC, assim como o problema de PNL, são discutidos. Para resolver o problema de PNL é utilizada a metodologia apresentada no Capítulo 4. Uma primeira tentativa de alocação de fontes de potência reativa também é considerada.

No Capítulo 6 é apresentada a proposta de um AHC especializado para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CC para o planejamento estático. Este algoritmo representa uma mudança significativa em relação aos outros AHC devido à necessidade de resolver um problema de PNL em cada passo do AHC. O índice de sensibilidade do AHC, assim como um modelamento matricial do problema de PNL são discutidos. Para resolver o problema de PNL é utilizada a metodologia apresentada no Capítulo 4.

No Capítulo 7 apresenta-se um algoritmo B&B para resolver diretamente o problema de planejamento da expansão de transmissão com o modelo CC para o planejamento estático. Uma análise dos testes de sondagem no algoritmo B&B, dos pseudocustos para gerenciar o desenvolvimento da árvore de B&B e do problema de PNL que tem que ser resolvido em cada nó da árvore de B&B é feita nesse Capítulo. Os problemas de PNL são resolvidos usando a metodologia desenvolvida no Capítulo 4.

Finalmente, no Capítulo 8, são apresentadas algumas considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelos Matemáticos e Técnicas de Otimização Usados em Planejamento de Sistemas de Transmissão

O problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão é um problema cuja modelagem matemática assume uma forma muito complexa e de difícil solução e cuja solução compreende duas etapas consecutivas e claramente definidas: a modelagem matemática e a técnica de solução escolhida para resolver o modelo matemático. O problema também apresenta uma estrutura multimodal com um número elevado de ótimos locais, o que leva a maioria dos métodos aproximados a fornecer uma solução ótima local, às vezes de pobre qualidade.

Neste capítulo são apresentados os principais modelos utilizados no planejamento, assim como as técnicas de solução e sistemas testes utilizados até o momento. Outros aspectos, também relevantes ao problema de planejamento de transmissão, serão comentados.

2.1 Modelagem Matemática

A resolução de todo problema de engenharia compreende a implementação de dois processos consecutivos: a modelagem matemática e a técnica de solução escolhida para resolver esse modelo matemático. A modelagem matemática, além de representar adequadamente o problema real, deve permitir sua resolução por meio de técnicas de solução disponíveis. Normalmente, à medida que se implementam melhorias no modelo matemático do problema real, a técnica de solução se torna mais complexa. Assim, deve existir um compromisso entre a modelagem matemática adotada e a técnica de solução escolhida para que se possa utilizar recursos computacionais aceitáveis, isto é, dentro dos limites da máquina (Romero, 1999).

Com o desenvolvimento das pesquisas, das técnicas de solução e/ou computadores mais velozes é provável que modelos atualmente considerados complexos se tornem adequados no futuro.

Com relação ao planejamento de sistemas de transmissão, no problema real tem-se um sistema elétrico com uma topologia atual, para o qual busca-se encontrar o plano de expansão ótimo para um horizonte de planejamento definido, isto é, onde e que tipos de circuitos devem ser construídos para que o sistema opere adequadamente para um crescimento especificado da demanda. A modelagem matemática ideal teria que utilizar o fluxo de carga CA para descrever a operação real do problema, e atualmente são utilizados vários modelos matemáticos linearizados para realizar a modelagem do problema de planejamento de sistema de transmissão (geralmente esses modelos são versões relaxadas do modelo de CA), dentre os quais destacam-se: modelo de fluxo de carga CC (ou modelo CC), modelo de transportes e os modelos híbridos linear e não-linear.

No momento, o modelo CC é considerado ideal para representar o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão, e os principais motivos são :

- Testes experimentais exaustivos mostraram que os resultados obtidos usando o modelo CC apresentam resultados muito próximos aos resultados obtidos usando o fluxo de carga CA em relação à distribuição dos fluxos de potência ativa.
- Existem várias técnicas de otimização que resolvem de maneira adequada os problemas de planejamento que usam o modelo CC. (Romero, 1999)

O modelo CC considera as duas Leis de Kirchhoff para realizar a modelagem matemática do problema de planejamento. Neste contexto, os modelos de transportes e híbrido são versões relaxadas (aproximadas) do modelo CC. A seguir são realizados comentários breves sobre os diferentes modelos que podem ser usados, o aparecimento na bibliografia especializada, a importância do modelo no contexto atual e as perspectivas para o futuro.

2.1.1 Modelo de Transportes

O modelo de transportes foi inicialmente apresentado por Garver (Garver, 1970) e representou uma proposta fundamental na pesquisa em planejamento da expansão de sistemas de transmissão porque era a única forma de otimizar o problema com as técnicas de otimização disponíveis na época. Esses modelos relaxados, diferentes dos usados na análise de operação, foram chamados de modelos de síntese de sistemas de transmissão. O modelo de transportes, assim como todos os modelos de síntese, faz apenas o planejamento considerando o fluxo de potência ativa e, portanto, resolve apenas o problema de capacidade de transmissão.

No modelo de transportes é levada em conta apenas a Primeira Lei de Kirchhoff (PLK) e a capacidade de operação de circuitos e geradores. Neste contexto, a modelagem matemática é um problema de programação linear inteiro misto (PLIM). A modelagem matemática do problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo de transportes assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}^T \mathbf{f} + \mathbf{p} = \mathbf{d} \\
 & |\mathbf{f}| \leq (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \bar{\mathbf{f}} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq \bar{\mathbf{n}} \\
 & \mathbf{n} \text{ inteiro e } \mathbf{f} \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{c}_n$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{f}$ e $\bar{\mathbf{f}}$ representam, respectivamente, o vetor de custos dos circuitos que podem ser adicionados ao sistema, o vetor de circuitos adicionados, o vetor de fluxos de potências e o vetor fluxos de potências máximos permitidos nos ramos. $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}^0$ são matrizes diagonais contendo o vetor $\mathbf{n}$ e os circuitos existentes na configuração base, respectivamente. v é o investimento devido às adições de circuitos no sistemas. $\mathbf{S}$ é a matriz de incidência ramo-nó do sistema elétrico. $\mathbf{p}$ é o vetor de geração com seu valor máximo $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{n}}$ é o vetor contendo os números máximos de circuitos que podem ser adicionados. $\mathbf{d}$ é o vetor de demanda.

Neste modelo, a restrição $-\mathbf{S}^T \mathbf{f} + \mathbf{p} = \mathbf{d}$ representa as equações correspondentes à primeira lei de Kirchhoff, uma equação para o balanço de potência em cada barra do sistema; a restrição $|\mathbf{f}| \leq (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \bar{\mathbf{f}}$ representa os limites de capacidade de transmissão dos circuitos (linha e/ou transformadores); o uso do valor absoluto é necessário posto que os fluxos podem fluir nos dois sentidos. As demais restrições são triviais e representam apenas restrições de limite de geração e de circuitos adicionados em cada caminho. Os elementos do vetor $\mathbf{f}$ são irrestritos em valor e os elementos do vetor $\mathbf{n}$ devem ser inteiros representando a maior fonte de complexidade no problema.

A grande vantagem do modelo de transportes é a linearidade do modelo decorrente do fato de eliminar as restrições não lineares da Segunda Lei de Kirchhoff (SLK). Essa característica fez com que quase não exista diferença entre resolver problemas de sistemas conexos ou sistemas ilhados. A desvantagem principal é que a solução apresentada pelo modelo de transportes pode estar distante da solução correspondente ao modelo CC devido à não satisfação da segunda Lei de Kirchhoff.

O modelo de transportes, do ponto de vista de pesquisa operacional, é um problema de PLIM, cuja resolução é complexa devido à restrição $\mathbf{n}$ inteiro, especialmente para sistemas elétricos de grande porte. Se fossem permitidas adições fracionárias de circuitos (linhas de transmissão e/ou transformadores), isto é, que os elementos do vetor $\mathbf{n}$ assumam valores reais, então o problema se transformaria num simples problema de PL, fácil de resolver mesmo para o caso de sistemas de grande porte.

2.1.2 Modelos Híbridos

O modelo híbrido foi apresentado por vários autores, sendo uma das mais importantes a proposta apresentada em (Villasana et al., 1985). No modelo híbrido apenas uma parcela dos circuitos são obrigados a obedecer a SLK. A idéia de usar este tipo de modelo é tentar encontrar soluções ótimas que sejam mais próximas das soluções ótimas do modelo CC mas sem incrementar a complexidade do problema na medida do possível. Os modelos híbridos podem ser divididos em modelo híbrido não-linear e modelo híbrido linear.

Modelo Híbrido Não-Linear

Na formulação mais pura, a modelagem matemática do modelo híbrido não-linear especifica o seguinte: a parcela do sistema elétrico correspondente aos caminhos nos quais já existem circuitos na configuração base, assim como os que são adicionados em paralelo a esses circuitos devem satisfazer as duas leis de Kirchhoff, e a outra parcela correspondente aos caminhos novos deve satisfazer unicamente a primeira lei de Kirchhoff. Logo o modelo híbrido não-linear é uma mistura entre o modelo de transporte e o modelo CC.

O uso do modelo híbrido não-linear no problema de planejamento de sistemas de transmissão serve para contornar alguns problemas apresentados pelos modelos de transportes e CC. O modelo de transportes tem flexibilidade para trabalhar com redes não conexas, em contraposição as soluções encontradas podem ficar muito afastadas da solução ótima do modelo CC. Por sua parte o modelo CC tem problemas para trabalhar com redes não conexas. A modelagem matemática do problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo híbrido não-linear assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}_2^T \mathbf{f}_2 - \mathbf{S}_1^T (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^0) \Upsilon_1 \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{p} = \mathbf{d} \\
 & \Upsilon_1 |\mathbf{S}_1 \boldsymbol{\theta}_1| \leq \bar{\mathbf{f}}_1 \\
 & |\mathbf{f}_2| \leq \mathbf{N}_2 \bar{\mathbf{f}}_2 \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq \bar{\mathbf{n}} \\
 & \mathbf{n} : \mathbf{n}_1 \cup \mathbf{n}_2 \text{ inteiro, } \mathbf{f}_2 \text{ irrestrito e } \boldsymbol{\theta}_1 \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que $\mathbf{n}_1$ e $\bar{\mathbf{f}}_1$ representam, respectivamente, o vetor de circuitos ampliados, o vetor de fluxos de potência máximos permitidos nos ramos para o conjunto de circuitos existentes na configuração base. $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_1^0$ são matrizes diagonais contendo o vetor $\mathbf{n}_1$ e os circuitos existentes para o conjunto de circuitos existentes na configuração base, respectivamente. $\mathbf{S}_1$ é a matriz de incidência ramo-nó do conjunto de circuitos existentes na configuração base. Υ_1 é uma matriz diagonal contendo os valores

das susceptâncias dos circuitos existentes na configuração base. θ_1 é o vetor de ângulo de fase do conjunto de barras que fazem parte da configuração base. $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{f}_2$ e $\bar{\mathbf{f}}_2$ representam, respectivamente, o vetor de circuitos adicionados, o vetor de fluxos de potência e o vetor de fluxos de potência máximas permitidas nos ramos do conjunto de circuitos correspondentes aos novos caminhos. $\mathbf{N}_2$ é uma matriz diagonal contendo o vetor $\mathbf{n}_2$. $\mathbf{S}_2$ é a matriz de incidência ramo-nó do conjunto de circuitos correspondentes aos novos caminhos.

Esse modelo corresponde a um problema de programação não-linear inteiro misto (PNLIM), devido à não linearidade do problema além da integralidade nas variáveis $\mathbf{n}$, e com uma complexidade muito parecida com o modelo CC. Esse modelo foi pouco usado por pesquisadores em planejamento de sistemas de transmissão porque devem ser usadas as mesmas técnicas usadas para o modelo CC e, portanto, pode ser preferível trabalhar diretamente com o modelo CC, considerado ideal. Entretanto, deve-se observar que o modelo híbrido não-linear deve ser mais fácil de resolver que o modelo CC.

Modelo Híbrido Linear

Há uma forma alternativa de considerar a modelagem híbrida que pode ser mais fácil de resolver por que o problema resultante é um problema linear inteiro misto. Nesta modelagem, todas as novas adições de circuitos devem respeitar somente a primeira lei de Kirchhoff, isto é, os circuitos adicionados em caminhos onde já existem circuitos e onde não existem devem satisfazer somente a primeira lei de Kirchhoff. Esta modelagem é uma versão relaxada do modelo híbrido não-linear.

Esta formulação híbrida deve satisfazer a primeira lei de Kirchhoff em todas as barras do sistema considerando todos os circuitos (existentes e adicionados) e deve respeitar a segunda lei de Kirchhoff somente nos laços existentes na configuração base, considerando apenas os circuitos existentes nesta. Então existem dois sistemas superpostos, a configuração base que deve satisfazer as duas leis de Kirchhoff e uma rede completa formada pelos circuitos candidatos à adição que deve satisfazer apenas a primeira lei de Kirchhoff. A modelagem matemática do problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo híbrido linear assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & -\mathbf{S}^T \mathbf{f} - \mathbf{S}_1^T \mathbf{N}_1^0 \Upsilon_1 \mathbf{S}_1 \theta_1 + \mathbf{p} = \mathbf{d} \\
 & \Upsilon_1 |\mathbf{S}_1 \theta_1| \leq \bar{\mathbf{f}}_1 \\
 & |\mathbf{f}| \leq \mathbf{N} \bar{\mathbf{f}} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq \bar{\mathbf{n}} \\
 & \mathbf{n} \text{ inteiro, } \mathbf{f} \text{ irrestrito e } \theta_1 \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nesse contexto, o modelo híbrido linear ainda é um problema PLIM com complexidade próxima do modelo de transportes e, portanto, ainda podem ser usadas as mesmas técnicas de otimização usadas para o modelo de transportes.

2.1.3 Modelo CC

O modelo CC é uma generalização do modelo de fluxo de carga CC e é o modelo mais explorado em planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Nesse tipo de modelo, todos os circuitos devem obedecer as duas leis de Kirchhoff. Assim, o modelo matemático é um problema de programação não-linear inteiro misto de elevada complexidade, havendo muitas técnicas de otimização propostas para resolvê-lo, sendo atualmente ainda objeto de estudos e publicações na área de pesquisa operacional e de planejamento.

Esse modelo é considerado, no momento, o ideal a ser utilizado e a maioria das novas técnicas de otimização são propostas para resolvê-lo. Entretanto, para sistemas complexos e de grande porte, ainda hoje, todas as técnicas de otimização encontram apenas soluções de boa qualidade. Assim, o desenvolvimento de técnicas de otimização eficientes para o modelo CC representa a parte mais ativa de pesquisas no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. A modelagem matemática do problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo CC assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}^T(\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \Upsilon \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{p} = \mathbf{d} \\
 & (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0)(\Upsilon |\mathbf{S} \boldsymbol{\theta}| - \bar{\mathbf{f}}) \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq \bar{\mathbf{n}} \\
 & \mathbf{n} \text{ inteiro e } \boldsymbol{\theta} \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que Υ é uma matriz diagonal contendo os valores de susceptância dos circuitos. $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de ângulo de fase.

2.1.4 Modelo Linear Disjuntivo

A modelagem matemática considerada como sendo ideal é o chamado modelo CC, que é um problema de PNLIM. Entretanto, é possível transformar o modelo CC não-linear num problema equivalente cuja modelagem matemática corresponde a um “modelo linear”. Em geral, sempre é possível transformar um problema não-linear quadrático com variáveis inteiras e reais num problema linear com variáveis binárias e reais usando uma transformação que permite “separar” os termos quadráticos em relações lineares. Este processo é obtido incorporando ao problema um parâmetro M de valor

muito grande. A modelagem matemática de problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo linear disjuntivo assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}_b^T \mathbf{f}_b - \mathbf{S}_1^T \mathbf{N}_1^0 \Upsilon_1 \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{p} = \mathbf{d} \\
 & \Upsilon_1 |\mathbf{S}_1 \boldsymbol{\theta}_1| \leq \bar{\mathbf{f}}_1 \\
 & |\mathbf{f}_b - \Upsilon_b \mathbf{S}_b \boldsymbol{\theta}| \leq \mathbf{M}(1 - \mathbf{y}) \\
 & |\mathbf{f}_b| \leq \mathbf{Y} \bar{\mathbf{f}}_b \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}} \\
 & \mathbf{y} \text{ binário, } \mathbf{f}_b \text{ irrestrito e } \boldsymbol{\theta}_1 \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

em que $\mathbf{y}$ representa um vetor com variáveis binárias iguais a 1 no caso de adição de um circuito e 0 no caso contrário. $\mathbf{S}_b$ é a matriz de incidência ramo-nó dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias. $\mathbf{f}_b$ e $\bar{\mathbf{f}}_b$ representam os vetores de fluxo de potência e seu respectivo valor máximo permitido nos ramos para os circuitos candidatos considerados como variáveis binárias. Υ_b é uma matriz diagonal contendo os valores das susceptâncias dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias. $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{M}$ são matrizes diagonais contendo o vetor $\mathbf{y}$ e o parâmetro $\mathbf{M}$, respectivamente.

O modelo linear disjuntivo apresenta algumas vantagens e desvantagens em relação ao modelo CC. A principal desvantagem está relacionada com o aumento da dimensão do problema com a introdução de variáveis binárias (no modelo CC são usadas as variáveis inteiras $\mathbf{n}$) e, principalmente, com a escolha ou determinação do parâmetro $\mathbf{M}$ grande para cada restrição que passa a representar o fator complicante na solução do modelo linear disjuntivo. A principal vantagem está relacionada com a modelagem linear e, eventualmente, podem ser desenvolvidos algoritmos adequados com propriedades de convergência interessantes do ponto de vista teórico. Um análise detalhada da utilização do modelo linear disjuntivo é apresentada em (Binato, 2000), onde foi empregada decomposição de Benders para resolver problemas de complexidade média.

2.2 Técnicas de Otimização

O problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo tem sido intensamente estudado nestes últimos anos. As técnicas de otimização usadas para resolver este tipo de problema podem ser classificadas nos seguintes grupos: (1) algoritmos exatos ou de otimização clássica e (2) algoritmos aproximados como as heurísticas e metaheurísticas.

2.2.1 Algoritmos heurísticos

O primeiro algoritmo heurístico importante usado em planejamento de sistemas de transmissão foi o algoritmo heurístico construtivo de Garver para o modelo de transportes. Além de ter sido um dos primeiros algoritmos apresentados em planejamento, a idéia básica do algoritmo apresentado por Garver ainda é de grande valor. Garver sugere resolver o próprio modelo de transportes após relaxar a integralidade, isto é, resolver o correspondente problema de programação linear para identificar o circuito mais atraente e que deve ser adicionado ao sistema elétrico. Portanto, em cada passo, é escolhido o novo circuito identificado pelo PL e que leva o maior fluxo de potência entre os circuitos identificados pelo PL.

A idéia de Garver pode ser usada em todos os outros modelos e é também generalizada para o planejamento multiestágio de sistemas de transmissão. Praticamente todos os algoritmos heurísticos foram propostos apenas para o planejamento estático. Em (Romero et al., 2003) foi estendido o algoritmo de Garver para o planejamento multiestágio de sistemas de transmissão. Essa linha de pesquisa está sendo retomada por vários grupos de pesquisa sob diferentes formas.

Não existem algoritmos heurísticos para o modelo híbrido linear. Entretanto, em (Villasana et al., 1985), os autores apresentam um algoritmo que usa o modelo híbrido linear para encontrar uma solução final factível e de boa qualidade para o modelo CC. Esse resultado é possível porque em cada passo se resolve o modelo híbrido linear com a integralidade relaxada para o topologia corrente para identificar o circuito mais interessante e que deve ser adicionado ao sistema com a mesma lógica do algoritmo de Garver. Entretanto, todo circuito adicionado ao sistema passa o obedecer a SLK junto com os circuitos da topologia base no seguinte PL correspondente ao novo modelo híbrido linear relaxado. Assim, a topologia final é viável para o modelo CC.

Existem muitos algoritmos heurísticos para o modelo CC como os apresentados em (Villasana et al., 1985; Monticelli et al., 1982; Pereira and Pinto, 1985; Levi and Calovic, 1991; Dechamps and Jamouille, 1980; Latorre-Bayona and Perez-Arriaga, 1994; Baldwin et al., 1960; Levi and Popovic, 1996; de Oliveira et al., 2005; Sánchez et al., 2005). Três desses algoritmos foram desenvolvidos por pesquisadores brasileiros. Em (Monticelli et al., 1982) foi apresentado o chamado algoritmo de mínimo esforço. Nesse caso o indicador de sensibilidade identifica o circuito que, uma vez adicionado ao sistema, produz uma maior redução de sobrecargas do sistema elétrico. A modelagem permite que os circuitos sejam sobrecarregados. Em (Pereira and Pinto, 1985) é apresentado o algoritmo de mínimo corte de carga. A filosofia é parecida com a apresentada em (Monticelli et al., 1982) mas neste caso os circuitos não podem ser sobrecarregados e os problemas de infactibilidade são traduzidos em cortes de carga. Assim, o indicador de sensibilidade identifica o circuito que, uma vez adicionado ao sistema, produz uma maior redução no corte de carga no sistema elétrico. Em (de Oliveira et al., 2005) foi utilizada função sigmóide para representar as variáveis de investimento inteiras do problema

de planejamento. O algoritmo utiliza técnicas de programação não-linear permitindo a inclusão de não linearidades no problema de planejamento, tais como as perdas ativas do sistema de transmissão.

Todos os algoritmos heurísticos encontram apenas soluções de boa qualidade para sistemas de grande porte e a qualidade dessas soluções pode ficar muito distante da solução ótima ou mesmo sub-ótimas. A vantagem dos algoritmos heurísticos é que são simples de entender, robustos e muito rápidos. No momento, os algoritmos heurísticos ainda representam um campo de pesquisa muito interessante e as soluções encontradas por esses algoritmos podem ser usadas como base para encontrar soluções melhores usando algoritmos que demandam maior esforço computacional, como é o caso das metaheurísticas.

2.2.2 Algoritmos de otimização clássica

A decomposição de Benders foi amplamente empregada para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão. As principais aplicações relacionadas com a utilização da decomposição de Benders para o problema de planejamento de sistemas de transmissão podem ser encontradas em (Binato, 2000; Romero and Monticelli, 1994; Granville and Pereira, 1985; Pereira et al., 1985, 1987; Haffner et al., 2000). Em (Romero and Monticelli, 1994) foi proposto o planejamento hierarquizado com decomposição de Benders para o modelo CC. O mérito desse trabalho foi ter encontrado soluções ótimas para sistemas pequenos e de médio porte que não eram conhecidas na literatura especializada.

Este fato gerou grandes expectativas com esse tipo de algoritmo, mas em sistemas de grande complexidade se mostraram totalmente ineficientes. As mesmas conclusões foram obtidas com a decomposição de Benders usada para o modelo de transportes apresentado em (Haffner et al., 2000). Em (Binato, 2000) foi apresentado um algoritmo de decomposição de Benders para o modelo linear disjuntivo que também encontrou as soluções ótimas encontradas para os sistemas elétricos analisados em (Romero and Monticelli, 1994).

Os algoritmos *Branch and Bound* foram pouco usados em planejamento da expansão de sistemas de transmissão, tendo sido empregados para resolver o problema mestre do método de decomposição de Benders. As pesquisas mais relevantes do uso do algoritmo B&B no problema de planejamento da transmissão foram apresentadas em (Haffner et al., 2001, 2000). Em ambos os casos foi usado o modelo de transportes. Nessas publicações ficou evidente que o algoritmo *Branch and Bound* que não usa a decomposição de Benders apresenta melhor desempenho. Outra aplicação de um algoritmo B&B é apresentada em (Oliveira et al., 2004) onde é usado o modelo linear disjuntivo para resolver o problema de planejamento de transmissão com aplicações a sistemas reais.

2.2.3 Metaheurísticas

Na década de 90 apareceram novos algoritmos heurísticos, diferentes dos tradicionais, no geral mais eficientes e com uma grande variedade de tempo de processamento que pode ser calibrado para cada tipo de aplicação. Pertence a esse tipo de algoritmo técnicas de otimização como: *simulated annealing*, algoritmos genéticos e evolutivos em geral, *tabu search*, GRASP, *particle swarm*, *ant colony*, etc.

As metaheurísticas apresentam a grande vantagem de que o estilo de resolver um problema varia muito pouco quando se altera a modelagem matemática do problema. Assim, por exemplo, em planejamento de sistemas de transmissão, o estilo usado para resolver os modelos de transporte, híbridos e o modelo CC é praticamente o mesmo. Em cada caso deve-se resolver apenas um problema de PL de diferente forma. Esse não é o caso quando se usa, por exemplo, a decomposição de Benders e os algoritmos *Branch and Bound*. Por esse motivo, todas as aplicações de metaheurísticas em planejamento de sistemas de transmissão foram aplicadas diretamente no modelo CC. As principais aplicações de metaheurísticas no problema de planejamento foram apresentadas em (Gallego et al., 2000, 1998a, 1997, 1998b; Romero et al., 1996; Silva et al., 2000, 2001; Binato et al., 2001; Silva et al., 2005a).

As pesquisas apresentadas usando metaheurísticas indicam que, no momento, esses algoritmos são os mais competitivos para encontrar soluções de excelente qualidade de sistemas complexos. Também não é fácil identificar o algoritmo mais competitivo da família das metaheurísticas para o problema de planejamento de sistemas de transmissão. Existe a evidência de que todos esses algoritmos são realmente competitivos desde que sejam adequadamente implementados.

As metaheurísticas apresentam a vantagem de que são relativamente fáceis de implementar e geralmente apresentam excelente desempenho para todo tipo de sistema elétrico. Apresentam a grande desvantagem de que geralmente requerem tempos de processamento elevados para encontrar soluções de excelente qualidade. Nos próximos anos deve continuar muito ativa a pesquisa em metaheurísticas aplicadas ao problema de planejamento de sistemas de transmissão, melhorando as existentes e/ou implementando-se novas. Praticamente todas as propostas de metaheurísticas apresentadas na literatura especializada foram aplicadas ao planejamento estático. Em (Escobar et al., 2004) foi apresentada a primeira metaheurística aplicada ao planejamento multiestágio de sistemas de transmissão.

2.3 Sistemas Usados

A literatura especializada apresenta alguns sistemas muito usados por pesquisadores em planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Esses sistemas apresentam tamanho e complexidade variados. São eles: (1) sistema de Garver de 6 barras e 15 circuitos, (2) sistema IEEE de 24 barras e 41 circuitos, (3) sistema Sul Brasileiro de 46 barras e 79 circuitos, (4) sistema Sudeste reduzido de

79 barras e 145 circuitos, (5) sistema Colombiano de 78 barras e 155 circuitos e (6) sistema Norte-Nordeste reduzido de 87 barras e 183 circuitos.

O sistema de Garver foi muito usado pelos pesquisadores em planejamento. Representa um sistema para fins acadêmicos, mas a alternativa com reprogramação da geração é difícil de resolver, isto é, não é fácil encontrar a solução ótima e muitos algoritmos não tem a capacidade de encontrar essa solução ótima. O sistema Garver permite trabalhar com e sem reprogramação da geração. (Garver, 1970)

Outro sistema de pequeno porte para fins acadêmicos é o sistema IEEE de 24 barras, criado como um sistema de teste para análise de confiabilidade, atualmente está sendo muito utilizado na área de planejamento. O sistema só pode ser utilizado com reprogramação da geração e para o planejamento estático. (Albrecht et al., 1979)

Os outros sistemas, exceto o sistema norte-nordeste brasileiro, apresentam complexidade média, isto é, poucos circuitos devem ser adicionados para encontrar as soluções ótimas ou sub-ótimas. No momento, muitos algoritmos trabalham adequadamente com esses sistemas. Os dados disponíveis do sistema Sul Brasileiro permitem que se trabalhe com e sem reprogramação da geração (Pereira et al., 1987). Por outro lado, os dados do sistema Colombiano permitem trabalhar também com o planejamento multiestágio com 3 estágios e somente sem reprogramação da geração (Escobar et al., 2004).

O sistema norte-nordeste brasileiro representa um verdadeiro sistema *benchmark* em planejamento de sistemas de transmissão. Para o Plano P2 devem ser adicionados mais de 100 circuitos para encontrar soluções de qualidade desse sistema, tornando esse sistema altamente complexo com um número elevado de soluções de qualidade. Nesse contexto a maioria dos algoritmos converge para ótimos locais e muitas vezes de pobre qualidade. Não se conhecem as soluções ótimas desse sistema. (Romero et al., 2002)

2.4 Outros Aspectos Relevantes

Existem outros tópicos de pesquisa relacionados com o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão em que é possível realizar trabalhos de pesquisa relevante. Uma breve análise desses tópicos é mostrada a seguir.

O planejamento da expansão usando dispositivos FACTS (*Flexible AC Transmission Systems*) é um tópico relevante de pesquisa em planejamento de sistemas de transmissão. Nessa proposta de planejamento, além de adicionar ao sistema apenas linhas de transmissão e transformadores convencionais podem ser adicionados dispositivos FACTS.

O planejamento da expansão de sistemas de transmissão considerando contingências é um tópico de pesquisa que foi amplamente sugerido desde o aparecimento das primeiras técnicas de otimização no problema de planejamento. Nesse tipo de planejamento, deve-se expandir de forma ótima o sistema com a exigência de que quando é simulada a retirada de um circuito (da topologia base ou adicionada no processo de planejamento) o sistema restante ainda opere adequadamente, isto é, sem corte de carga. Aparentemente, o novo problema parece ser uma simples extensão do planejamento convencional mas na verdade é muito mais complexo. Uma primeira proposta para resolver este tipo de problema pode ser encontrada em (Seifu et al., 1989). Em (Silva et al., 2005a) foi apresentada uma metaheurística com o objetivo de resolver este tipo de problema.

O planejamento da expansão de sistemas de transmissão em um ambiente de mercado elétrico aberto é outro tópico de pesquisa que ainda não atingiu um nível relevante. Nesse novo tipo de mercado de energia elétrica existem agentes diferentes na geração, na transmissão e na distribuição. Existem também novas restrições como os contratos em *pool*, os contratos bilaterais e a necessidade de que cada gerador tenha a possibilidade de gerar, a qualquer momento, a geração máxima do centro gerador. Nesse novo contexto, a fato marcante é que o sistema deve ser planejado para que seja possível sua operação com qualquer esquema de geração, isto é, a demanda pode ser satisfeita com qualquer forma possível de programação dos diferentes geradores (Rider et al., 2005). Nesse contexto, se for usada a estratégia de planejamento centralizado ou verticalizado considerando todo o sistema como sendo de um único agente, logicamente devem aparecer problemas de congestionamento e que nem todos os geradores possam gerar suas potências máximas por falta de linhas de transmissão (Gross, 2004; Shrestha and Fonseka, 2004; Wu et al., 2005).

O problema de planejamento em mercado aberto ainda não atingiu a maturidade porque nos últimos anos foram realizados muito discursos e poucas propostas consistentes. Assim, por exemplo, ainda não existe uma proposta consistente de modelagem matemática para esse tipo de problema. Entretanto, uma proposta inicial consistente foi realizada em (Fang and Hill, 2003) e essa pesquisa deve ser usada como base para caracterizar de forma adequada a modelagem matemática desse tipo de problema para depois identificar a proposta de otimização mais adequada. Esperam-se novas propostas eficientes e adequadas nessa linha de pesquisa.

Considerar incertezas na demanda no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão também é um tema que está sendo pesquisado nos últimos anos. Assim como no problema de planejamento em mercado aberto, ainda não existe uma proposta consistente de modelagem matemática para o problema de planejamento da transmissão considerando incertezas na demanda, mas uma primeira tentativa é analisada em (Silva et al., 2005b).

Em praticamente todas as técnicas de otimização usadas no problema de planejamento, o trabalho pesado em relação ao esforço computacional de processamento está relacionado com as rotinas que

devem resolver problemas de programação linear ou problemas de programação não-linear. Assim, é crucial para reduzir tempo de processamento formular e implementar computacionalmente algoritmos eficientes de PL e PNL. Para PL uma alternativa é desenvolver técnicas especializadas do Simplex como é apresentada em (Hashimoto et al., 2003; Stott and Marinho, 1979) para um tipo de aplicação do modelo CC. Outra alternativa para resolver problemas de PL e PNL é desenvolver algoritmos eficientes e especializados usando o método de pontos interiores como é apresentada em (de Oliveira et al., 2005; Sánchez et al., 2005).

Em (Latorre et al., 2003) pode-se encontrar uma bibliografia completa sobre o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão e em (Romero et al., 2002) uma análise detalhada de modelagem matemática. Finalmente, o desafio mais importante consiste em usar o modelo CA.

Capítulo 3

O Modelo CA no Planejamento de Sistemas de Transmissão

O uso do modelo de corrente alternada do sistema de transmissão no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão é incipiente, isto é, praticamente não existem publicações na literatura especializada em que seja usado esse modelo, que é usado em análise da operação de um sistema elétrico. Na verdade, a separação de modelos para trabalhos de operação e de planejamento de sistemas elétricos aconteceu na década de 1960 quando pesquisadores como L. L. Garver (Garver, 1970) verificaram que não era possível trabalhar com o modelo de corrente alternada em trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Assim, apareceram as técnicas de síntese de sistemas de transmissão com o uso de modelos relaxados de rede, sendo Garver um dos idealizadores dessa proposta. Desde então foram usados modelos relaxados de representação da rede elétrica (transportes, híbridos, CC, etc.) sendo finalmente o modelo CC considerado como modelo ideal para trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Assim, ainda hoje, a maioria dos pesquisadores concordam que o modelo CC (ou o modelo alternativo chamado de linear disjuntivo) é o modelo ideal para trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. O modelo de corrente alternada ficou restrito para trabalhos de análise de operação de sistemas de energia elétrica.

O uso do modelo CC tem as seguintes desvantagens: (1) o problema de planejamento da expansão da transmissão deve ser separado do problema da alocação de fontes de potência reativa; (2) frequentemente é necessário implementar uma fase de reforço de um plano de expansão obtido usando o modelo CC para que opere adequadamente com o modelo CA (devem ser adicionadas linhas); e (3) a dificuldade de trabalhar com valores das perdas do sistema de transmissão na fase inicial do planejamento. Entretanto é um modelo para o qual foram apresentadas muitas técnicas de otimização na literatura especializada. O uso do modelo CA foi adiado porque não existiam técnicas de otimização para trabalhar com esse modelo de forma eficiente. Adicionalmente, o fato de a topologia base ser

desconexa e, às vezes, altamente ilhada, desestimulou a utilização do modelo CA. Assim como a necessidade de considerar também o planejamento de reativos de forma simultânea com a expansão de sistemas de transmissão.

Este trabalho pretende iniciar trabalhos de pesquisa que, no futuro, permitam o uso do modelo CA em trabalhos de planejamento da mesma forma em que é usado em trabalhos de análise na operação do sistema elétrico. Nesse contexto, os modelos relaxados seriam usados apenas como modelos auxiliares no processo de planejamento e o modelo CA passaria a ser considerado o modelo ideal para trabalhos de planejamento da mesma forma como acontece na análise da operação dos sistemas de energia elétrica. Logicamente, a proposta também permitiria implementar de forma integrada o trabalho de planejamento da expansão de sistemas de transmissão e de alocação ótima de fontes de potência reativa, isto é, em um único processo de otimização encontram-se as linhas de transmissão que devem ser construídas no sistema elétrico, assim como a alocação de fontes de potência reativa. Atualmente, esses processos são realizados de forma separada, sendo que primeiro é realizado o planejamento da expansão de sistemas de transmissão considerando apenas os fluxos de potência ativa e, portanto, apenas valores de demanda ativa nas barras de demanda. Na sequência é realizada a alocação ótima de fontes de reativos em que o sistema conexo deve alocar fontes de potência reativa nas barras do sistema e apenas nessa fase de planejamento consideram-se a demanda ativa e reativa em cada barra de demanda.

Neste capítulo apresenta-se um modelo matemático para o problema de planejamento estático da expansão de transmissão usando o modelo de corrente alternada do sistema de transmissão. Também são mostradas as vantagens e dificuldades de utilizar o modelo CA na fase atual de desenvolvimento da pesquisa operacional, assim como as metodologias possíveis que podem ser utilizadas para resolvê-lo.

3.1 Vantagens de Usar o Modelo CA

O uso do modelo CA no planejamento da expansão da transmissão pode trazer as seguintes vantagens:

- Realizar de forma eficiente a fase de reforços dos planos de expansão quando se utiliza um modelo simplificado (por exemplo: o modelo de transporte, híbrido ou CC) no momento que é feita a fase de planejamento de reativos (onde é usado o modelo CA);
- Pode-se usar um modelo matemático integrado que permita realizar o planejamento da expansão de sistemas de transmissão e a alocação ótima de fontes de potência reativa simultaneamente, isto é, em fase única, dispensando o uso de modelos simplificados;

- Incorporar a determinação das perdas ativas exatas do sistema de transmissão de uma forma trivial e como um subproduto do processo de otimização;
- Considerar outras restrições operacionais do sistema de energia elétrica no problema de planejamento;
- Poder incorporar no processo de planejamento outros dispositivos com característica de operação não-linear, como por exemplo os controladores FACTS; e
- A possibilidade de fazer outros tipos de estudos como por exemplo: a estabilidade de tensão, análise nodal, análise de estabilidade transitória, etc.

3.2 O Modelo Matemático

O modelo matemático para o planejamento da expansão de redes de transmissão usando o modelo CA pode ser definido como uma extensão do modelo CC e pode ser escrito como:

$$\min \quad v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \quad (3.1)$$

s.a:

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) - \mathbf{P}_G + \mathbf{P}_D = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) - \mathbf{Q}_G + \mathbf{Q}_D = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \mathbf{S}^{de} \leq (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \bar{\mathbf{S}} \quad (3.4)$$

$$(\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \mathbf{S}^{para} \leq (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \bar{\mathbf{S}} \quad (3.5)$$

$$\underline{\mathbf{P}}_G \leq \mathbf{P}_G \leq \bar{\mathbf{P}}_G \quad (3.6)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}_G \leq \mathbf{Q}_G \leq \bar{\mathbf{Q}}_G \quad (3.7)$$

$$\underline{\mathbf{V}} \leq \mathbf{V} \leq \bar{\mathbf{V}} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq \bar{\mathbf{n}} \quad (3.9)$$

$\mathbf{n}$ inteiro e $\boldsymbol{\theta}$ irrestrito

em que $\mathbf{P}_G$ e $\mathbf{Q}_G$ são os vetores de geração de potência ativa e reativa. $\mathbf{P}_D$ e $\mathbf{Q}_D$ são os vetores de demandas de potência ativa e reativa; $\mathbf{V}$ é o vetor das magnitudes de tensão; $\bar{\mathbf{P}}_G$, $\bar{\mathbf{Q}}_G$ e $\bar{\mathbf{V}}$ são os vetores de limites máximo de geração de potência ativa, potência reativa e das magnitudes de tensões, respectivamente; $\underline{\mathbf{P}}_G$, $\underline{\mathbf{Q}}_G$ e $\underline{\mathbf{V}}$ são os vetores de limites mínimo de geração de potência ativa, potência reativa e das magnitudes de tensões, respectivamente; no caso dos limites máximo e mínimo das tensões é usado 105% e 95% do valor nominal, respectivamente; $\mathbf{S}^{de}$, $\mathbf{S}^{para}$ e $\bar{\mathbf{S}}$ são os vetores de

fluxos de potência aparente (MVA) nos ramos em ambos terminais e o seu limite.

Os limites de potência ativa e reativa nos geradores são representados por (3.6) e (3.7), respectivamente; e os das magnitudes de tensão por (3.8). Os limites (MVA) nos fluxos por (3.4) e (3.5). A restrição nas capacidades dos circuitos adicionados por (3.9).

As equações (3.2) e (3.3) representam as equações convencionais de fluxo de potência CA, considerando $\mathbf{n}$, o número de circuitos (linhas e transformadores), como variáveis. Os elementos dos vetores $\mathbf{P}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n})$ são calculados por (3.10) e (3.11), respectivamente.

$$P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) = V_i \sum_{j \in N} V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] \quad (3.10)$$

$$Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) = V_i \sum_{j \in N} V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] \quad (3.11)$$

em que, $i, j \in N$ representam barras e N é o conjunto de todas as barras, ij representa o circuito entre as barras i e j . $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ representa a diferença de ângulo de fase entre as barras i e j . Os elementos da matriz admitância ($\mathbf{G}$ e $\mathbf{B}$) são dadas em (3.12):

$$\mathbf{G} = \begin{cases} G_{ij}(\mathbf{n}) = -(n_{ij} g_{ij} + n_{ij}^0 g_{ij}^0) \\ G_{ii}(\mathbf{n}) = \sum_{j \in \Omega_i} (n_{ij} g_{ij} + n_{ij}^0 g_{ij}^0) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_{ij}(\mathbf{n}) = -(n_{ij} b_{ij} + n_{ij}^0 b_{ij}^0) \\ B_{ii}(\mathbf{n}) = b_i^{sh} + \sum_{j \in \Omega_i} [n_{ij} (b_{ij} + b_{ij}^{sh}) + n_{ij}^0 (b_{ij}^0 + (b_{ij}^{sh})^0)] \end{cases}$$

em que, Ω_i é o conjunto das barras vizinhas à barra i ; g_{ij} , b_{ij} e b_{ij}^{sh} representam a condutância, a susceptância e a susceptância shunt da linha no ramo ij (se ij é um transformador $b_{ij}^{sh} = 0$) e b_i^{sh} é a susceptância shunt na barra i . Note que em (3.12) existe a possibilidade de adicionar uma linha ou um transformador em paralelo diferente com uma existente (no caso base), embora os parâmetros do circuito equivalente possam ser diferentes. Deve-se notar que os taps fora do nominal dos transformadores não foram considerados e, neste caso as linhas de transmissão e os transformadores tem um mesmo circuito equivalente. As variáveis de decisão são as magnitudes e ângulos das tensões, o número de circuitos adicionados e as potências ativa e reativa geradas nas barras de geração.

O problema formulado nas Eqs (3.1) - (3.9) é um problema não-linear inteiro misto com um número grande de alternativas a serem analisadas. As metodologias utilizadas para resolver o problema de planejamento utilizando o modelo CC podem ser adaptadas para resolver o problema de planejamento utilizando o modelo CA.

3.3 Dificuldades de Usar o Modelo CA

As dificuldades que aparecem quando se trabalha com o planejamento usando o modelo CA são:

- Trabalhar com sistemas desconexos; uma situação comum na fase inicial do planejamento de transmissão quando as fontes de geração e as cargas não foram ainda conectadas eletricamente à rede. Este trabalho de pesquisa pretende desmistificar as dificuldades que aparecem em trabalhar com redes desconexas ou mesmo altamente ilhadas em planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Em um setor da comunidade de planejamento da expansão de sistemas de transmissão existe a certeza de que pode ser muito difícil ou até impossível trabalhar com sistemas elétricos não conexos em planejamento. Essa dificuldade não existiria apenas para o modelo de transportes. Assim, muitas propostas de otimização apresentadas na literatura especializada reconhecem explicitamente que não podem trabalhar com sistemas não conexos quando sugerem uma forma de eliminar esse problema. Assim, alguns trabalhos sugerem uma fase inicial na qual, deve-se encontrar um sistema conexo adicionando linhas de transmissão até que o sistema seja conexo, sendo que deve ser sugerida uma proposta, geralmente heurística, para encontrar um sistema conexo. Outras propostas sugerem usar uma rede fictícia que trabalha superposta com a rede real ou com uma rede fictícia que permite conectar de forma artificial o sistema elétrico originalmente desconexo.

Na verdade são as propostas de otimização apresentadas na literatura especializada que não permitem trabalhar com sistemas desconexos, isto é, não é o modelo matemático que impede trabalhar com sistemas desconexos. Neste trabalho apresenta-se uma técnica de otimização que trabalha sem problemas com o modelo CA para sistemas conexos e desconexos, sem necessidade de hipóteses ou simplificações adicionais em relação a sistemas desconexos. Este fato é ilustrado através de exemplos em que se realiza o planejamento de sistemas elétricos totalmente ilhados.

- Trabalhar com problemas de programação não-linear de grande porte. Considera-se que este assunto é crucial na tentativa de usar de forma eficiente o modelo CA em trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão.

No passado sempre foi difícil encontrar um algoritmo de programação não-linear que apresentasse um desempenho confiável na resolução de problemas de programação não-linear de grande porte. Geralmente, muitos métodos não convergem para determinados problemas não lineares e outros convergem para ótimos locais de pobre qualidade. Quando se pretende usar o modelo CA no problema de planejamento deve-se resolver problemas de programação não-linear em um número elevado de vezes. Em sistemas elétricos grandes e complexos e usando

técnicas de otimização tais como as metaheurísticas pode ser necessário resolver dezenas ou centenas de milhares de problemas de programação não-linear.

Os algoritmos de pontos interiores usados para resolver problemas de programação não-linear estão mostrando um desempenho superior a outras técnicas de programação não-linear especialmente na resolução de problemas de otimização de sistemas de energia elétrica. Assim, acredita-se que um algoritmo de pontos interiores de ordem superior seja a ferramenta esperada para viabilizar o uso do modelo CA no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo desse tipo especializado em resolver problemas de programação não-linear resultantes da aplicação de uma técnica de otimização para o problema de planejamento usando modelo CA.

A proposta e o desenvolvimento de um algoritmo de pontos interiores para resolver problemas de programação não-linear decorrentes da aplicação do modelo CA ao problema de planejamento de transmissão é uma das principais contribuições deste trabalho. Logicamente, outras técnicas eficientes de resolução de problemas de programação não-linear podem e devem ser pesquisadas.

- Desenvolver uma técnica de otimização eficiente. Este tópico é fundamental na tentativa de viabilizar o uso do modelo CA no planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Existe pouca informação sobre este assunto. Obviamente, podem ser viabilizadas as muitas técnicas de otimização existentes na literatura especializada desde os algoritmos exatos até os algoritmos aproximados.

Neste trabalho é apresentado um algoritmo heurístico construtivo para resolver o problema de planejamento usando o modelo CA. O AHC representa uma proposta inicial para viabilizar o uso do modelo CA em trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Entretanto, no futuro, pretende-se desenvolver algoritmos tais como o *branch and bound*, assim como os algoritmos da família das metaheurísticas (genéticos, *tabu search*, híbridos, etc.). Espera-se um desempenho superior com a utilização dessas técnicas mais poderosas e eficientes.

Capítulo 4

Um Método de Pontos Interiores para Resolver o Modelo CA

Os métodos de pontos interiores têm sido aplicados com sucesso na otimização da operação de sistemas de potência (Quintana et al., 2000). Resultados mostram que o MPI tem grande potencial para resolver problemas de sistemas de potência, quando comparado com os métodos tradicionais.

Uma revisão das características principais da resolução iterativa do método de pontos interiores primal-dual (PD) é apresentada. O algoritmo geral para o PD será utilizado como base para as versões do MPIAO: a) MPI preditor – corretor; b) MPI preditor com múltiplas correções; e c) MPI com múltiplas correções centralizadas. Uma combinação dos MPIAO descritos acima será utilizada para resolver o problema de programação não-linear do modelo AC.

4.1 O Problema Original

Se os elementos do vetor $\mathbf{n}$ forem considerados como variáveis contínuas, o problema (3.1) - (3.9) se reduz a um problema de PNL, e pode ser formulado como um problema de programação não-linear padrão dado pela expressão (4.1).

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{s.a.} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}^l \leq \hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^u \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nx}$ representa as variáveis de decisão, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{nx}$ é o gradiente da função objetivo, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{ndg}$ são as restrições de igualdade, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{ndh}$ são as restrições de desigualdade, $\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{ndx}$ é um sub vetor de $\mathbf{x}$ com elementos de $\mathbf{x}$ que tem limites $\mathbf{x}^u$ e $\mathbf{x}^l$, limites superiores

e inferiores, respectivamente. $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ são funções convexas lisas. O primeiro passo do MPI consiste em transformar todas as restrições de desigualdade de (4.1) em restrições de igualdade, usando variáveis de folga não negativas $\mathbf{s}_h$, $\mathbf{s}_l$ e $\mathbf{s}_u$ (ver (Torres and Quintana, 1998; Granville, 1996)), apresentada na expressão (4.2).

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 & \text{s.a.} \\
 & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \quad -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h = \mathbf{0} \\
 & \quad -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u = \mathbf{0} \\
 & \quad -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u = \mathbf{0} \\
 & \quad \mathbf{s}_h, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A adição das variáveis de folga modifica a dimensão do problema de otimização incrementando o número de variáveis. Entretanto, o problema original é transformado num problema de otimização restrito exclusivamente a restrições de igualdade. Com esta metodologia, a utilização de funções de penalidade e a determinação do conjunto de restrições de desigualdade ativas na solução deixam de ser necessárias. As condições de não negatividade ($\mathbf{s}_h, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u \geq \mathbf{0}$) da expressão (4.2) podem ser incorporadas na função objetivo original como termos de barreira logarítmica como é apresentado na expressão (4.3).

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu^k \sum_{j=1}^{ndh} \ln s_{hj} - \mu^k \sum_{j=1}^{ndx} (\ln s_{lj} + \ln s_{uj}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \quad -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h = \mathbf{0} \\
 & \quad -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u = \mathbf{0} \\
 & \quad -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

em que $\mu^k > 0$ é o parâmetro de barreira que decresce em forma monotônica para zero no processo iterativo. A seqüência de parâmetros $\{\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ gera uma seqüência de sub problemas dados por (4.3) e baseado no teorema de Fiacco e McCormick (Fiacco and McCormick, 1968), se $\mu^k \downarrow 0$ a seqüência $\{\mathbf{x}(\mu^k)\}_{k=0}^{\infty}$ de soluções de (4.3) tende à $\mathbf{x}^*$, um mínimo local de (4.2). A seqüência de subproblemas dados por (4.3) descreve uma trajetória, nos espaços primal e dual, conhecida como *Trajetoória Central* ou *Caminho Central*.

A função Lagrangeana l_μ do problema de programação não-linear com restrições de igualdade (4.3), é mostrada na expressão (4.4).

$$l_\mu = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu^k \sum_{j=1}^{ndh} \ln s_{hj} - \mu^k \sum_{j=1}^{ndx} (\ln s_{lj} + \ln s_{uj}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}_h^T (-\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h) - \boldsymbol{\pi}_l^T (-\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u) - \boldsymbol{\pi}_u^T (-\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u) \quad (4.4)$$

em que $\boldsymbol{\lambda} \in \Re^{ndg}$, $\boldsymbol{\pi}_h \in \Re^{ndh}$, $\boldsymbol{\pi}_l \in \Re^{ndx}$, $\boldsymbol{\pi}_u \in \Re^{ndx}$, são os vetores multiplicadores de Lagrange e são chamadas variáveis duais. Um ponto mínimo local $\mathbf{x}^*$ do problema (4.3) pode ser calculado em termos do ponto estacionário da função Lagrangeana, no qual deve satisfazer as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (CNOPO) de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), apresentada na expressão (4.5).

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} l_\mu &= \mathbf{c} - \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}_h + \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u = \mathbf{0} & (a) \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} l_\mu &= -\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & (b) \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_h} l_\mu &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_h = \mathbf{0} & (c) \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_u} l_\mu &= \hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} + \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^u = \mathbf{0} & (d) \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}_l} l_\mu &= \mathbf{s}_l + \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^l - \mathbf{x}^u = \mathbf{0} & (e) \\ \nabla_{\mathbf{s}_u} l_\mu &= -\mu^k \mathbf{e} + \mathbf{S}_u(\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) = \mathbf{0} & (f) \\ \nabla_{\mathbf{s}_l} l_\mu &= -\mu^k \mathbf{e} + \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l = \mathbf{0} & (g) \\ \nabla_{\mathbf{s}_h} l_\mu &= -\mu^k \mathbf{e} + \mathbf{S}_h \boldsymbol{\pi}_h = \mathbf{0} & (h) \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \in \Re^{ndg \times nx}$ é o jacobiano da restrição de igualdade $\mathbf{g}(\mathbf{x})$; $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \in \Re^{ndh \times nx}$ é o jacobiano da restrição de desigualdade de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$; $\mathbf{S}_h$, $\mathbf{S}_l$ e $\mathbf{S}_u$ são matrizes diagonais definidas pelas componentes $\mathbf{s}_h$, $\mathbf{s}_l$ e $\mathbf{s}_u$, respectivamente. $\mathbf{e}$ é um vetor de uns (1's) com dimensão apropriada. As equações (b)-(e) da expressão (4.5) junto com as condições de não negatividade ($\mathbf{s}_h, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u \geq 0$) assegura a factibilidade primal. A equação (a) da expressão (4.5) junto com as condições de não negatividade ($\boldsymbol{\pi}_h, \boldsymbol{\pi}_l, (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \geq 0$) assegura a factibilidade dual, enquanto as equações (f)-(h) da expressão (4.5) são as perturbações ($\mu^k \neq 0$) das condições de complementaridade ($\mu^k = 0$).

O sistema de equações (4.5) é não-linear e de grande porte. Por conseguinte, é utilizado o método de Newton de resolução de sistemas de equações não lineares para obter a sua solução. O método de Newton necessita de alguns valores iniciais:

- Parâmetro de barreira inicial : μ^0
- Ponto primal inicial : $\mathbf{x}^0, \mathbf{s}_i^0$; $i = h, l, u$
- Ponto dual inicial : $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\pi}_i^0$; $i = h, l, u$

O método de Newton consiste num processo iterativo no qual aproxima-se um ponto inicial $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}_i^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\pi}_i^0)$ ao ponto solução $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}_i^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}_i^*)$ através de uma sequência de pontos $(\mathbf{x}^k, \mathbf{s}_i^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\pi}_i^k)$. A sequência de pontos até a solução é a trajetória ou caminho percorrido durante o processo iterativo. Em cada iteração k do método de Newton o ponto de solução tem que respeitar as condições de não negatividade:

$$\mathbf{s}_h^k, \mathbf{s}_l^k, \mathbf{s}_u^k, \boldsymbol{\pi}_h^k, \boldsymbol{\pi}_l^k, (\boldsymbol{\pi}_l^k + \boldsymbol{\pi}_u^k) > \mathbf{0}$$

Por simplicidade na notação, sejam as equações a serem resolvidas (4.5) representadas como em (4.6).

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) - \mu^k \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

em que

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c} - \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}_h + \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_h \\ \hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} + \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^u \\ \mathbf{s}_l + \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^l - \mathbf{x}^u \\ \mathbf{S}_u(\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \\ \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ \mathbf{S}_h \boldsymbol{\pi}_h \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\pi}_h \\ \boldsymbol{\pi}_u \\ \boldsymbol{\pi}_l \\ \mathbf{s}_u \\ \mathbf{s}_l \\ \mathbf{s}_h \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

O método de Newton é um método de ascendência, com uma direção de busca $(\Delta \mathbf{w}^k)$ desde um ponto da trajetória $\mathbf{w}^k$ definida pela equação (4.7).

$$\Delta \mathbf{w}^k = -[\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k)]^{-1}(\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) - \mu^k \mathbf{u}) \quad (4.7)$$

em que $\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k)$ é o jacobiano de $\mathbf{F}(\mathbf{w}^k)$ e $\Delta \mathbf{w}^k$ é o vetor de direções de busca na iteração k .

$$\Delta \mathbf{w}^k = \left[\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \boldsymbol{\lambda}^k, \Delta \boldsymbol{\pi}_h^k, \Delta \boldsymbol{\pi}_u^k, \Delta \boldsymbol{\pi}_l^k, \Delta \mathbf{s}_u^k, \Delta \mathbf{s}_l^k, \Delta \mathbf{s}_h^k \right]^T$$

A resolução explícita da inversa de uma matriz não é computacionalmente eficiente. Geralmente, a direção de busca $\Delta \mathbf{w}^k$ é obtida pela resolução do sistema linear (4.8).

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k) \Delta \mathbf{w}^k = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) + \mu^k \mathbf{u} \quad (4.8)$$

Os elementos da matriz $\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k)$ são formados pelas derivadas parciais de segunda ordem da expressão (4.5). As condições necessárias para a utilização do método de Newton na solução de (4.5) são:

1. Existência de um ponto estacionario $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}_i^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}_i^*)$ que seja solução do sistema de (4.5) e que satisfaça as condições de KKT.
2. Existência e continuidade das segundas derivadas parciais locais no ponto estacionario.
3. O conjunto das restrições de igualdade e de desigualdade ativas no ponto estacionario devem ser linearmente independente.
4. A matriz Hessiana reduzida da função Lagrangiana $(\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu)$ deve ser definida positiva no ponto estacionario, $(\mathbf{N}^*)^T \nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu \mathbf{N}^* > 0$, em que $\mathbf{N}^*$ é uma base no espaço nulo das jacobianas das restrições de igualdade e de desigualdade, $\mathbf{J}_g(\mathbf{x})$ e $\mathbf{J}_h(\mathbf{x})$ respectivamente.
5. Existência da complementaridade estrita $(\mathbf{s}_h^T \boldsymbol{\pi}_h, \mathbf{s}_l^T \boldsymbol{\pi}_l, \mathbf{s}_u^T (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) = 0)$ no ponto estacionario.

As condições teóricas para a utilização do método de Newton geralmente não são avaliadas nas aplicações reais para sistemas de potência de grande porte devido à complexidade de cálculo. Assim, não é garantido que a solução obtida para (4.1) seja um ótimo global. Mesmo assim, o processo de otimização fornece, em geral, soluções melhores que os métodos clássicos. A fim de dar continuidade à análise teórica do MPI, são consideradas satisfeitas as condições para a aplicação do método de Newton para resolução iterativa de equações não lineares.

4.2 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Mesmo que o sistema de KKT (4.5) seja um sistema de equações não lineares, a sua solução é geralmente aproximada por uma única iteração do método de Newton (a direção de Newton é somente uma medida para seguir um trajeto de minimizar, parametrizada por μ^k). Aplicando o método de Newton para resolver o sistema (4.5), o sistema de equações lineares (4.9) indefinido é obtido. (ver (Wu et al., 1994))

$$\begin{bmatrix}
\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu & -\mathbf{J}_{\mathbf{g}}^T & \mathbf{J}_{\mathbf{h}}^T & \hat{\mathbf{I}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-\mathbf{J}_{\mathbf{g}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{h}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\
\hat{\mathbf{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_u & \mathbf{S}_u & \mathbf{\Pi}_l + \mathbf{\Pi}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_l & \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_l & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_h & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_h
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta \mathbf{x}^k \\
\Delta \lambda^k \\
\Delta \pi_h^k \\
\Delta \pi_u^k \\
\Delta \pi_l^k \\
\Delta \mathbf{s}_u^k \\
\Delta \mathbf{s}_l^k \\
\Delta \mathbf{s}_h^k
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\mathbf{c} + \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})^T \lambda - \mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})^T \pi_h - \hat{\mathbf{I}}^T \pi_u \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
-\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h \\
-\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u \\
-\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u \\
\mu^k \mathbf{e} - \mathbf{S}_u(\pi_l + \pi_u) \\
\mu^k \mathbf{e} - \mathbf{S}_l \pi_l \\
\mu^k \mathbf{e} - \mathbf{S}_h \pi_h
\end{bmatrix}
\quad (4.9)$$

em que

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu = - \sum_{j=1}^{ndg} \lambda_j^k \mathbf{H}_{\mathbf{g}j}(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^{ndh} \pi_{hj}^k \mathbf{H}_{\mathbf{h}j}(\mathbf{x}^k) \quad (4.10)$$

O cálculo de $\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu$ precisa da Hessiana das restrições de igualdade $\mathbf{H}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^k)$ e a Hessiana das restrições de desigualdade $\mathbf{H}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}^k)$.

A matriz do sistema linear (4.9) tem as seguintes propriedades: a) dimensões elevadas, 10 a 12 vezes a ordem do sistema elétrico; b) alta esparsidade, não só pela existência de numerosas submatrizes nulas, mas também pela esparsidade própria das matrizes não-nulas; c) matriz simétrica, tanto em estrutura como em elementos; e d) sistema indefinido.

Redução do sistema Linear

O sistema linear (4.9) pode ser reduzido em sua dimensão pela resolução externa de algumas das suas equações. As expressões extraídas do sistema linear são conhecidas como equações auxiliares.

O sistema linear reduzido é dado como (4.11) para calcular os vetores $\Delta \mathbf{x}^k$ e $\Delta \boldsymbol{\lambda}^k$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_r & -\mathbf{J}_g^T \\ -\mathbf{J}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

em que,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_r &= \nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}_h^{-1} \boldsymbol{\Pi}_h) \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{I}}^T (\mathbf{S}_l^{-1} \boldsymbol{\Pi}_l + \mathbf{S}_u^{-1} (\boldsymbol{\Pi}_l + \boldsymbol{\Pi}_u)) \hat{\mathbf{I}} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{c} - \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}_h + \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}_h^{-1} \boldsymbol{\Pi}_h \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mu^k \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{e}) + \\ &\quad \hat{\mathbf{I}}^T (\mathbf{S}_l^{-1} \boldsymbol{\Pi}_l (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) + \mathbf{S}_u^{-1} (\boldsymbol{\Pi}_l + \boldsymbol{\Pi}_u) (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^u) - \mu^k (\mathbf{S}_l^{-1} - \mathbf{S}_u^{-1}) \mathbf{e}) \end{aligned}$$

As equações auxiliares são:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{s}_h^k &= -\mathbf{s}_h - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \mathbf{s}_l^k &= -\mathbf{s}_l - \mathbf{x}^l + \hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{I}} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \mathbf{s}_u^k &= -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u - \mathbf{x}^l - \Delta \mathbf{s}_l^k \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^k &= \mu^k \mathbf{S}_l^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{S}_l^{-1} \boldsymbol{\Pi}_l (\mathbf{s}_l + \Delta \mathbf{s}_l^k) \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^k &= \mu^k \mathbf{S}_u^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{S}_u^{-1} (\boldsymbol{\Pi}_l + \boldsymbol{\Pi}_u) (\mathbf{s}_u + \Delta \mathbf{s}_u^k) - \Delta \boldsymbol{\pi}_l^k \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_h^k &= \mu^k \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{S}_h^{-1} \boldsymbol{\Pi}_h (\mathbf{s}_h + \Delta \mathbf{s}_h^k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

O sistema (4.11) é *esparso, simétrico e indefinido*, só tem $(nx + ndg)$ variáveis e pode ser resolvido diretamente utilizando a fatoração Bunch–Parlett. (Cheng and Higham, 1998; Bunch and Parlett, 1971; Arioli et al., 1989)

Em cada iteração k o sistema da equação (4.11) deve ser resolvido a fim de se obter o incremento nas variáveis de otimização $\mathbf{x}$ e nos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade $\boldsymbol{\lambda}$. Posteriormente, as equações auxiliares (4.12) são resolvidas para se determinar os incrementos nas variáveis de folga $\mathbf{s}_i$ e nos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade $\boldsymbol{\pi}_i$.

Equação Normal

O sistema (4.11) pode ser reduzido mais um pouco para chegar na chamada *Equação Normal*.

$$(\mathbf{J}_g \mathbf{J}_r^{-1} \mathbf{J}_g^T) \Delta \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{J}_g \mathbf{J}_r^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (4.13)$$

A matriz do sistema normal $\mathbf{A} = (\mathbf{J}_g \mathbf{J}_r^{-1} \mathbf{J}_g^T)$ é *esparsa, simétrica e definida positiva*. Tem somente ndg variáveis e normalmente é resolvido usando a fatoração de Cholesky.

Solução dos Sistemas Lineares

O maior esforço computacional dos MPI é a solução dos sistemas lineares (4.9), (4.11) ou (4.13) em cada iteração k . A solução dos sistemas lineares podem tomar cerca de 70% a 90% do tempo computacional total. A equação normal (4.13), em uma iteração k , pode ser re-escrita como :

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x}^k = \mathbf{b}^k \quad (4.14)$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{J} \mathbf{g} \mathbf{J}_r^{-1} \mathbf{J}^T, \quad \mathbf{x}^k = \Delta \boldsymbol{\lambda}^k, \quad \mathbf{b}^k = \mathbf{J} \mathbf{g} \mathbf{J}_r^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$$

A matriz $\mathbf{A}$ é quadrada ($ndg \times ndg$), esparsa, simétrica e definida positiva. Também tem uma estrutura fixa, mas os valores mudam em cada iteração. A dimensão de $\mathbf{x}^k$, $\mathbf{b}^k$ é ndg (número de restrições de igualdade), geralmente ndg é menor que nx .

A eficiência dos MPI depende da solução da Equação Normal. É recomendável usar um algoritmo para resolver um sistema de equações lineares com esparsidade e realizar uma atualização seletiva dos elementos de $\mathbf{J}_r$, se um elemento de $\mathbf{J}_r$ é muito pequeno não deve ser atualizado, deve ser igual a zero.

Para resolver a Equação Normal (4.13) podem ser utilizados: a) Métodos Diretos ou Não-Iterativos; b) Métodos Gradiente Conjugado ou Iterativos; ou c) uma combinação dos Métodos Diretos / Gradiente Conjugado. Com o uso dos métodos acima mencionados, um processamento paralelo pode ser utilizado. (Alves et al., 1999; Castronuovo, 2001)

Atualização das variáveis primais e duais

Depois de resolver a equação (4.9), em cada iteração k uma nova aproximação de todas as variáveis pode ser obtida como é mostrado em (4.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \gamma \alpha_k \Delta \mathbf{x}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \gamma \alpha_k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\pi}_i^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_i^k + \gamma \alpha_k \Delta \boldsymbol{\pi}_i^k \quad ; \quad i = h, l, u \\ \mathbf{s}_i^{k+1} &= \mathbf{s}_i^k + \gamma \alpha_k \Delta \mathbf{s}_i^k \quad ; \quad i = h, l, u \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que $\alpha_k \in (0, 1]$ é o máximo tamanho de passo em cada iteração k . O valor escalar $\gamma \in (0, 1)$ é um fator de segurança (*safety factor*) para assegurar que o próximo ponto satisfaça as condições de não negatividade; um valor típico é $\gamma = 0,9995$.

Máximo tamanho de passo

O máximo tamanho de passo em cada iteração k no método de Newton é determinada pela expressão (4.16).

$$\alpha_p = \min_{i,j} \left\{ 1, \min_{\Delta s_{hi}^k < 0} \left(\frac{-s_{hi}^k}{\Delta s_{hi}^k} \right), \min_{\Delta s_{lj}^k < 0} \left(\frac{-s_{lj}^k}{\Delta s_{lj}^k} \right), \min_{\Delta s_{uj}^k < 0} \left(\frac{-s_{uj}^k}{\Delta s_{uj}^k} \right) \right\}$$

$$\alpha_d = \min_{i,j} \left\{ 1, \min_{\Delta \pi_{hi}^k < 0} \left(\frac{-\pi_{hi}^k}{\Delta \pi_{hi}^k} \right), \min_{\Delta \pi_{lj}^k < 0} \left(\frac{-\pi_{lj}^k}{\Delta \pi_{lj}^k} \right), \min_{\Delta \pi_{lj}^k + \Delta \pi_{uj}^k < 0} \left(\frac{-(\pi_{lj}^k + \pi_{uj}^k)}{\Delta \pi_{lj}^k + \Delta \pi_{uj}^k} \right) \right\}$$

(4.16)

$$\alpha_k = \min\{\alpha_p, \alpha_d\}$$

Redução do parâmetro de barreira

O valor residual da condição de complementaridade é chamado *gap de complementaridade*, e é calculado em cada iteração k pela expressão (4.17):

$$\rho^k = (\pi_h^k)^T \mathbf{s}_h^k + (\pi_l^k)^T \mathbf{s}_l^k + (\pi_l^k + \pi_u^k)^T \mathbf{s}_u^k$$

(4.17)

A sequência $\{\rho^k\}_{k=0}^\infty$ deve convergir para zero, e a relação entre ρ^k e μ^k , implícito nas condições (f)-(h) da expressão (4.5), sugere que μ^k poderia ser reduzido em cada iteração k baseado no decréscimo do gap de complementaridade, dada pela expressão (4.18).

$$\mu^{k+1} = \beta^k \frac{\rho^k}{2ndx + ndh}$$

(4.18)

em que $\beta \in (0, 1)$ é o decréscimo esperado de ρ^k , mas não necessariamente realizado, e é chamado *centering parameter* e sua interpretação é: se $\beta^k = 1$, o sistema KKT (4.5) define uma direção central, um passo Newton para um ponto no trajeto da barreira. Caso contrário, se $\beta^k = 0$, dá um passo Newton puro, também conhecido como a direção *affine-scaling*. Para compensar os dois objetivos, de reduzir μ^k e melhorar a direção central, β^k é escolhido dinamicamente como foi proposto em (Torres and Quintana, 1998), $\beta^{k+1} = \max\{0, 95\beta^k; 0, 1\}$, com $\beta^0 = 0,2$.

Crítérios de convergência

O processo do método de Newton é repetido até que os critérios de convergência, apresentados na expressão (4.19) sejam atingidos.

- Factibilidade Primal

$$\max\{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)\|_\infty, \max\{\mathbf{x}^l - \mathbf{x}^k\}, \max\{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^u\}, \max\{\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)\}\} \leq \epsilon_f$$

- Factibilidade Dual

$$\frac{\|\mathbf{c} - \mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\pi}_h^k + \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u^k\|_\infty}{1 + \|\mathbf{x}^k\|_2} \leq \epsilon_f$$

- Condição de Optimalidade

$$\frac{\rho^k}{1 + \|\mathbf{x}^k\|_2} \leq \epsilon_o \quad (4.19)$$

$$\mu^k \leq \epsilon_\mu$$

- Desvio da Função Objetivo

$$\frac{|\mathbf{c}^T(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})|}{1 + |\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k|} \leq \epsilon_f$$

em que ϵ_f , ϵ_o e ϵ_μ são os erros das *condições de factibilidade, otimalidade e parâmetro de barreira*, respectivamente. Tipicamente $\epsilon_f = \epsilon_o = 10^{-5}$ e $\epsilon_\mu = 10^{-8}$.

Algoritmo Geral

O Método de Pontos Interiores Primal - Dual pode ser sintetizado no seguinte algoritmo :

1. Inicializar μ^0, β^0 e obter um ponto inicial $\mathbf{w}^0$ que cumpra com as condições de não-negatividade.
2. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$.
3. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.9).
4. Fazer $k = 0$.

Repetir

6. Calcular matriz $\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu$ usando (4.10).
7. Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.9).
8. Obter o máximo tamanho de passo usando (4.16).

9. Atualizar as variáveis usando (4.15).
10. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\mathbf{Jh}(\mathbf{x}^{k+1})$.
11. Calcular μ^{k+1} (4.18), ρ^{k+1} (4.17) e β^{k+1} .
12. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.9).
13. Fazer $k = k + 1$.

Até se obter a convergência.

As relações matemáticas do método de pontos interiores primal-dual, para resolver o problema relaxado de planejamento utilizando o modelo CA, são dadas no Apêndice A.

Ponto inicial

A solução do problema de otimização deve encontrar-se no interior ou na fronteira da região de convergência. O ponto inicial e a trajetória de convergência não possuem essa restrição. De fato, as condições de otimalidade são referidas ao ponto candidato ao ótimo, não sendo necessariamente satisfeitas durante o processo iterativo. A resolução iterativa determina uma seqüência de pontos que aproximam o ponto inicial à solução. Em particular, as equações que determinam a inclusão do ponto na região de convergência serão em geral satisfeitas apenas no final do processo iterativo. Esta é uma importante vantagem na utilização das versões dos MPI para PNL. Os algoritmos dos pontos interiores realizam uma trajetória interior à região formada pelas restrições de desigualdade. Por conseguinte, esses algoritmos necessitam da determinação de um ponto inicial interior a esta região (Castronuovo, 2001). Embora o ponto inicial somente precise manter as condições de não negatividade, o processo de convergência é sensível ao ponto inicial e o desempenho dos MPI podem melhorar se alguma iniciação heurística for usada (Torres and Quintana, 1998; Wu and Debs, 2001; Ramos et al., 2005). Uma iniciação heurística é dada a seguir.

1. A estimação do $\mathbf{x}^0$ é dado usando o ponto médio entre os limites superior e inferior para as variáveis com limites.
2. As variáveis de folga primais são logo inicializadas como

$$\begin{aligned} s_{hi}^0 &= |h_i(\mathbf{x}^0)| \\ s_{lj}^0 &= \min\{\max\{\tau x_j^\Delta, \hat{x}_j^0 - x_j^l\}, (1 - \tau)x_j^\Delta\} \\ s_{uj}^0 &= x_j^\Delta - s_{lj}^0 \end{aligned}$$

em que $\mathbf{x}^\Delta = \mathbf{x}^u - \mathbf{x}^l$, tipicamente $\tau = 0,25$.

3. As variáveis duais λ_i^0 são inicializados com -1 se é associada com a restrição (3.2), ou com 0 se é associada com a restrição (3.3).
4. As variáveis de folga duais são logo inicializadas como:

$$\begin{aligned}\pi_h^0 &= \mu^0 (\mathbf{S}_h^0)^{-1} \mathbf{e} \\ \pi_l^0 &= \mu^0 (\mathbf{S}_l^0)^{-1} \mathbf{e} \\ \pi_u^0 &= \mu^0 (\mathbf{S}_u^0)^{-1} \mathbf{e} - \pi_l^0\end{aligned}$$

em que $\mathbf{S}_h^0$, $\mathbf{S}_l^0$ e $\mathbf{S}_u^0$ são matrizes diagonais definidas pelos componentes s_h^0 , s_l^0 e s_u^0 , respectivamente. Tipicamente $\mu^0 = \{10; 1 \text{ ou } 0, 1\}$.

Tempo de Execução

O tempo de execução dos métodos de pontos interiores depende de vários fatores, como por exemplo: as características do computador utilizado, ou o esquema de pré-processamento e ordenamento utilizado. O número de iterações do MPI para conseguir a convergência depende principalmente de: a) o tipo de método de pontos interiores utilizado; b) da natureza não-linear do problema por resolver; c) do ponto e parâmetro de barreira inicial; d) da taxa de decrescimento esperado do parâmetro de barreira; e) do tamanho de passo na direção de busca; f) do critério de parada. Em (Dai et al., 2000) são analisados os fatores que influem na velocidade e convergência do MPI. O tempo de cálculo numa iteração do método de pontos interiores depende principalmente de: a) o método numérico utilizado para resolver (4.13); e b) da estrutura esparsa do problema.

4.3 Método de Pontos Interiores de Alta Ordem

O cálculo do $\Delta \mathbf{w}^k$ da equação (4.8) envolve a fatoração da matriz quadrada da equação (4.9) e a solução de dois sistemas triangulares (*forward / backward*) que seguem depois da fatoração. Esta é a tarefa mais custosa em cada iteração k do processo do MPI. Devido à fatoração ter maior custo computacional que a solução dos dois sistemas triangulares, o processo do MPI pode ser melhorado se o número de fatorações for reduzido ao mínimo necessário, assumindo o risco de um acréscimo no custo computacional em uma iteração. Essa é a idéia central dos métodos de pontos interiores de alta ordem: a) MPI preditor – corretor (Torres and Quintana, 1998; Wu et al., 1994); b) MPI preditor com múltiplas correções (Torres and Quintana, 2000); c) MPI com múltiplas correções centralizadas (Torres and Quintana, 2001; Wu, 2001); entre outros.

4.3.1 Método de Pontos Interiores Preditor – Corretor

O MPI Predictor – Corrector é uma variante do MPI Primal – Dual melhorando o cálculo das direções de busca para acelerar a convergência (Torres and Quintana, 1998; Wu et al., 1994). O MPI PC soluciona dois sistemas de equações lineares em cada iteração k , usando a mesma matriz quadrada de coeficientes de (4.8), apenas com dois diferentes vetores nos lados direitos da equação (4.8). Esses dois sistemas de equações lineares definem os passos preditor e corretor, respectivamente. Adicionando ao sistema Newton os termos de segunda ordem:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k)\Delta\mathbf{w}^k = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) + \mu^k\mathbf{u} - \Delta \quad (4.20)$$

em que, $\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \Delta\mathbf{S}_u(\Delta\pi_l + \Delta\pi_u), & \Delta\mathbf{S}_l\Delta\pi_l, & \Delta\mathbf{S}_h\Delta\pi_h \end{bmatrix}^T$ e assumindo o vetor Δ conhecido, a solução de (4.20) proporciona três componentes para a direção de busca:

$$\Delta\mathbf{w}^k = \Delta\mathbf{w}_{af}^k + \Delta\mathbf{w}_{ce}^k + \Delta\mathbf{w}_{co}^k$$

- $\Delta\mathbf{w}_{af}^k$ é a *direção preditor* ou *direção affine-scaling*, é uma direção Newton pura obtido pela solução de (4.20) só com o primeiro vetor do lado direito ($\mu^k = 0$ e $\Delta = 0$).
- $\Delta\mathbf{w}_{ce}^k$ é a *direção central* obtida pela solução de (4.20) só com o segundo vetor do lado direito (com um apropriado μ^k).
- $\Delta\mathbf{w}_{co}^k$ é a *direção corretor* e é obtida pela solução de (4.20) só com o terceiro vetor do lado direito.

Para o MPI primal – dual a direção $\Delta\mathbf{w}^k = \Delta\mathbf{w}_{af}^k + \Delta\mathbf{w}_{ce}^k$. No método de pontos interiores PC, a equação de Newton (4.20) é solucionada em dois passos (*Preditor* e *Corretor*):

$$\Delta\mathbf{w}^k = \underbrace{\Delta\mathbf{w}_{af}^k}_{\text{Preditor}} + \underbrace{\Delta\mathbf{w}_{ce}^k + \Delta\mathbf{w}_{co}^k}_{\text{Corretor}}$$

Passo Preditor

A direção *affine-scaling* ($\Delta \mathbf{w}^{af}$) é calculada solucionando (a partir de 4.9)

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_h^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_h^{af} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}_h - \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h \\ -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{S}_u(\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \\ -\mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ -\mathbf{S}_h \boldsymbol{\pi}_h \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

A direção *affine-scaling* é usada para aproximar os termos não-lineares Δ da parte direita de (4.20) e para estimar um valor do parâmetro de barreira μ^k , que serão usados no passo corretor. O máximo tamanho de passo na direção *affine-scaling*, α_{af} é calculado usando (4.22).

$$\begin{aligned} \alpha_p^{af} &= \min_{i,j} \left\{ 1, \min_{s_{hi}^{af} < 0} \left(\frac{-s_{hi}}{\Delta s_{hi}^{af}} \right), \min_{s_{lj}^{af} < 0} \left(\frac{-s_{lj}}{\Delta s_{lj}^{af}} \right), \min_{s_{uj}^{af} < 0} \left(\frac{-s_{uj}}{\Delta s_{uj}^{af}} \right) \right\} \\ \alpha_d^{af} &= \min_{i,j} \left\{ 1, \min_{\Delta \pi_{hi}^{af} < 0} \left(\frac{-\pi_{hi}}{\Delta \pi_{hi}^{af}} \right), \min_{\Delta \pi_{lj}^{af} < 0} \left(\frac{-\pi_{lj}}{\Delta \pi_{lj}^{af}} \right), \min_{\Delta \pi_{lj}^{af} + \Delta \pi_{uj}^{af} < 0} \left(\frac{-(\pi_{lj} + \pi_{uj})}{\Delta \pi_{lj}^{af} + \Delta \pi_{uj}^{af}} \right) \right\} \\ \alpha_{af} &= \min \{ \alpha_p^{af}, \alpha_d^{af} \} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Uma estimativa para o *gap* de complementaridade (ρ^{af}) é dada em (4.23)

$$\begin{aligned} \rho^{af} &= (\boldsymbol{\pi}_h + \gamma \alpha_{af} \Delta \boldsymbol{\pi}_h^{af})^T (\mathbf{s}_h + \gamma \alpha_{af} \Delta \mathbf{s}_h^{af}) + \\ & (\boldsymbol{\pi}_l + \gamma \alpha_{af} \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af})^T (\mathbf{s}_l + \gamma \alpha_{af} \Delta \mathbf{s}_l^{af}) + \\ & (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u + \gamma \alpha_{af} (\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af} + \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af}))^T (\mathbf{s}_u + \gamma \alpha_{af} \Delta \mathbf{s}_u^{af}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Uma estimativa para μ^{af} é obtida em (4.24)

$$\mu^{af} = \min \left\{ \left(\frac{\rho^{af}}{\rho^k} \right)^2; 0, 2 \right\} \frac{\rho^{af}}{2ndx + ndh} \quad (4.24)$$

A estratégia escolhida é: μ^{af} será pequeno quando a direção *affine-scaling* produz um grande decréscimo no *gap* de complementaridade; o μ^{af} será grande em caso contrário.

Passo Corretor

Com os resultados do *Passo Predictor* pode-se calcular a direção $\Delta \mathbf{w}^k$ usando (4.25).

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \pi_h^k \\ \Delta \pi_u^k \\ \Delta \pi_l^k \\ \Delta \mathbf{s}_u^k \\ \Delta \mathbf{s}_l^k \\ \Delta \mathbf{s}_h^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \lambda - \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \pi_h - \hat{\mathbf{I}}^T \pi_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h \\ -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{S}_u(\pi_l + \pi_u) + \mu^{af} \mathbf{e} - \alpha_{af}^2 \Delta \mathbf{S}_u^{af} (\Delta \pi_l^{af} + \Delta \pi_u^{af}) \\ -\mathbf{S}_l \pi_l + \mu^{af} \mathbf{e} - \alpha_{af}^2 \Delta \mathbf{S}_l^{af} \Delta \pi_l^{af} \\ -\mathbf{S}_h \pi_h + \mu^{af} \mathbf{e} - \alpha_{af}^2 \Delta \mathbf{S}_h^{af} \Delta \pi_h^{af} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

O Passo Corrector calcula simultaneamente as direções $\Delta \mathbf{w}_{ce}^k$ e $\Delta \mathbf{w}_{co}^k$. Os *Passos Predictor e Corretor* estão baseados nos mesmos elementos da fatoração da matriz de (4.20). O esforço adicional no MPI predictor – corretor é: a) a solução de um sistema linear para o cálculo de $\Delta \mathbf{w}_{af}^k$; e b) o cálculo dos tamanhos de passos α_p^{af} e α_d^{af} , e estimar μ^{af} . O MPI PC tem a vantagem de reduzir o número de iterações e o tempo computacional (Torres and Quintana, 1998; Wu et al., 1994).

Algoritmo Geral

O Método de Pontos Interiores Predictor – Corretor pode ser sintetizado no seguinte algoritmo:

1. Escolher um ponto inicial $\mathbf{w}^0$ que cumpra com as condições de não-negatividade .
2. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)$.
3. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
4. Fazer $k = 0$.

Repetir

6. Calcular matriz $\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu$ usando (4.10).
7. Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.21).
8. Calcular α_{af} , ρ^{af} , e μ^{af} usando respectivamente (4.22), (4.23) e (4.24).
9. Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.25).
10. Obter o máximo tamanho de passo usando (4.16).
11. Atualizar as variáveis usando (4.15).

12. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$.
13. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
14. Fazer $k = k + 1$.

Até se obter a convergência.

4.3.2 Método de Pontos Interiores Preditor com Múltiplas Correções

O método de pontos interiores PC é o método mais utilizado e aceito para o cálculo de melhores direções de busca no MPI, mas o MPI PC pode ser melhorado incluindo-se outros passos de correção no processo, o método resultante é chamado MPI preditor com múltiplas correções desenvolvido em (Torres and Quintana, 2000). O método de pontos interiores PMC melhora o tempo computacional diminuindo algumas iterações no processo de convergência. O cálculo do m -ésimo corretor é expressa na equação (4.26), usando a mesma matriz quadrada da equação (4.21).

$$\mathbf{J}_\mathbf{F}(\mathbf{w}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{m+1} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{m+1} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_h^{m+1} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{m+1} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{m+1} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{m+1} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{m+1} \\ \Delta \mathbf{s}_h^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} + \mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}_h - \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h \\ -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{S}_u(\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) + \mu^{af} \mathbf{e} - \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_u^m (\Delta \boldsymbol{\pi}_l^m + \Delta \boldsymbol{\pi}_u^m) \\ -\mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l + \mu^{af} \mathbf{e} - \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_l^m \Delta \boldsymbol{\pi}_l^m \\ -\mathbf{S}_h \boldsymbol{\pi}_h + \mu^{af} \mathbf{e} - \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_h^m \Delta \boldsymbol{\pi}_h^m \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

em que, se $m = 0$, $\Delta \mathbf{w}^0 = \Delta \mathbf{w}_{af}^k$. Depois de fazer a última correção, a direção de busca é $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^m$. Logo um novo ponto é obtido calculando os tamanhos de passos primal e dual e atualizando as variáveis primal e dual como no método de pontos interiores PD ou PC. O número de correções m para cada iteração k varia. No caso de $m = 1$, o MPI PMC corresponde ao MPI PC convencional. No caso em que $m > 1$ possa ter uma vantagem, dois casos podem ser considerados, ver (Torres and Quintana, 2000).

1. *Caso Factível*, o seguinte passo de correção ($m + 1$) é efetuado:

- Se for possível obter uma redução do gap de complementaridade ($\rho^m < \rho^{m-1}$) na iteração m ;
- Se m for menor que um número máximo de passos de correção M (o que é tipicamente igual a 5).

Se $\rho^m \geq \rho^{m-1}$ na iteração m , o processo é interrompido e a direção de busca $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{m-1}$ é usada.

2. *Caso Infactível*, tenta reduzir o gap de complementaridade e os resíduos da infactibilidade. O seguinte passo de correção ($m + 1$) é efetuado:

- Se for possível obter uma redução da infactibilidade ($\|\mathbf{F}(\mathbf{w}^m)\| < \|\mathbf{F}(\mathbf{w}^{m-1})\|$) na iteração m ;
- Se m for menor que um número máximo de passos de correção M (o que é tipicamente igual a 5).

Se $\|\mathbf{F}(\mathbf{w}^m)\| \geq \|\mathbf{F}(\mathbf{w}^{m-1})\|$ na iteração m , o processo é interrompido e a direção de busca $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{m-1}$ é usada.

Algoritmo Geral

O método de pontos interiores preditor com múltiplas correções pode ser sintetizado no seguinte algoritmo:

1. Iniciar M e escolher um ponto inicial $\mathbf{w}^0$ que cumpra com as condições de não-negatividade.
2. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{Jh}(\mathbf{x}^0)$.
3. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
4. Fazer $k = 0$.

Repetir

6. Calcular matriz $\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu$ usando (4.10).
7. Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.21).
8. Calcular α_{af} , ρ^{af} , e μ^{af} usando respectivamente (4.22), (4.23) e (4.24).
9. Fazer $m = 0$.

Repetir

- a) Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.26).
- b) Obter ρ^{m+1} . Fazer $m = m + 1$.

Até ($\rho^m \geq \rho^{m-1}$ ou $m > M$).

10. Fazer $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{m-1}$.

11. Obter o máximo tamanho de passo usando (4.16).
12. Atualizar as variáveis usando (4.15).
13. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$.
14. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
15. Fazer $k = k + 1$.

Até se obter a convergência.

4.3.3 Método de Pontos Interiores com Múltiplas Correções Centralizadas

A presença de grandes diferenças entre os produtos de complementaridade fazem que o desempenho do MPI seja afetado negativamente.

$$\begin{aligned} (\pi_{li} + \pi_{ui})s_{ui} &\lll (\pi_{lj} + \pi_{uj})s_{uj}, \\ \pi_{li}s_{li} &\lll \pi_{lj}s_{lj}, \\ \pi_{hi}s_{hi} &\lll \pi_{hj}s_{hj}, \end{aligned}$$

O método de Newton reduz os grandes produtos de complementaridade, mas devido aos menores produtos, tamanhos de passos pequenos são calculados o que ocasiona um atraso na convergência. Os produtos de complementaridade que são ou muitos pequenos ou muitos grandes, quando comparados com o parâmetro de barreira $\mu_{ave} = \rho/n$, são indesejáveis e para isso ser corrigido são definidas as correções centralizadas. (Torres and Quintana, 2001; Wu, 2001)

O primeiro passo do método de pontos interiores MCC é calcular a direção $\Delta \mathbf{w}_{af}^k$, o máximo tamanho de passo α_{af} ; e estimar μ^{af} como no passo predictor do PC. O c -ésimo passo de correção centralizada é obtido resolvendo-se (4.27).

$$\mathbf{J}_\mathbf{F}(\mathbf{w}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{c+1} \\ \Delta \lambda^{c+1} \\ \Delta \pi_h^{c+1} \\ \Delta \pi_u^{c+1} \\ \Delta \pi_l^{c+1} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{c+1} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{c+1} \\ \Delta \mathbf{s}_h^{c+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} + \mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda - \mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x})^T \pi_h - \hat{\mathbf{I}}^T \pi_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h \\ -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{S}_u(\pi_l + \pi_u) - \mathbf{d}_u^c \\ -\mathbf{S}_l\pi_l - \mathbf{d}_l^c \\ -\mathbf{S}_h\pi_h - \mathbf{d}_h^c \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Se $c = 0$, $\Delta \mathbf{w}^0 = \Delta \mathbf{w}^{af}$, usando a direção de busca $\Delta \mathbf{w}^c$ os passos primal e dual máximos (α_p^c e α_d^c) são obtidos por (4.16) e fazendo-se $\alpha_{ptrial} = o\alpha_p^c$ e $\alpha_{dttrial} = o\alpha_d^c$ onde $o > 1,0$ (valor típico de 1,2). Se $\alpha_{ptrial} > 1,0$ ou $\alpha_{dttrial} > 1,0$ então $\alpha_{ptrial} = 1,0$ ou $\alpha_{dttrial} = 1,0$, respectivamente. Os vetores complementares são calculados por:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_u^c &= (\mathbf{S}_u + \alpha_{ptrial}\Delta\mathbf{S}_u^c)(\boldsymbol{\pi}_l^k + \boldsymbol{\pi}_u^k + \alpha_{dttrial}(\Delta\boldsymbol{\pi}_l^c + \Delta\boldsymbol{\pi}_u^c)) \\ \mathbf{q}_l^c &= (\mathbf{S}_l + \alpha_{ptrial}\Delta\mathbf{S}_l^c)(\boldsymbol{\pi}_l^k + \alpha_{dttrial}\Delta\boldsymbol{\pi}_l^c) \\ \mathbf{q}_h^c &= (\mathbf{S}_h + \alpha_{ptrial}\Delta\mathbf{S}_h^c)(\boldsymbol{\pi}_h^k + \alpha_{dttrial}\Delta\boldsymbol{\pi}_h^c)\end{aligned}$$

em que, $\Delta\mathbf{S}_h^c$, $\Delta\mathbf{S}_l^c$ e $\Delta\mathbf{S}_u^c$ são matrizes diagonais dadas pelos componentes Δs_h^c , Δs_l^c e Δs_u^c , respectivamente. Cada elemento j dos vetores $\mathbf{q}_i^c$ é comparado com o parâmetro de barreira (μ^{af}) para calcular os elementos dos vetores $\mathbf{d}_i^c$, para $i = h, l$ e u , como mostrado em (4.28).

$$d_{ij}^c = \begin{cases} q_{ij}^c - \beta_{max}\mu^{af} & \text{se } q_{ij}^c > \beta_{max}\mu^{af}, \\ q_{ij}^c - \beta_{min}\mu^{af} & \text{se } q_{ij}^c < \beta_{min}\mu^{af}, \\ -(\beta_{min} + \beta_{min})\mu^{af} & \text{se } q_{ij}^c < -\beta_{max}\mu^{af}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.28)$$

em que, β_{max} e β_{min} são limiares relativos dados, com valores típicos de 10 e 0,1. O próximo passo de correção centralizada ($c + 1$) é calculado somente se for possível obter um aumento no máximo tamanho de passo na iteração c ($\alpha_c > \alpha_{c-1} + \Delta_{c-1}$), onde $\Delta_c = \zeta(1 - \alpha_c)/C$, ζ tem como valor típico 0,1 e C é o número máximo de iterações (tipicamente igual a 5). No caso de não atender a condição na iteração c , o processo é interrompido e a direção $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{c-1}$ é utilizada.

As múltiplas correções centralizadas têm um interesse prático se a redução do número de iterações se traduz num ganho no esforço computacional total. Um novo ponto é obtido calculando os tamanhos de passo primal e dual e atualizando as variáveis primais e duais como no método de pontos interiores PD ou PC.

Algoritmo Geral

O método de pontos interiores com múltiplas correções centralizadas pode ser sintetizado no seguinte algoritmo:

1. Iniciar C e escolher um ponto inicial $\mathbf{w}^0$ que cumpra com as condições de não-negatividade.
2. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)$.
3. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).

4. Fazer $k = 0$.

Repetir

6. Calcular matriz $\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu$ usando (4.10).
7. Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.21).
8. Calcular α_{af} , ρ^{af} , e μ^{af} usando respectivamente (4.22), (4.23) e (4.24).
9. Fazer $c = 0$.

Repetir

- a) Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.27).
- b) Obter α^{c+1} . Fazer $c = c + 1$.

Até $(\alpha_c \leq \alpha_{c-1} + \Delta_{c-1}$ ou $c > C)$.

10. Fazer $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{c-1}$.
11. Obter o máximo tamanho de passo usando (4.16).
12. Atualizar as variáveis usando (4.15).
13. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\mathbf{Jh}(\mathbf{x}^{k+1})$.
14. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
15. Fazer $k = k + 1$.

Até se obter a convergência.

4.3.4 Método de Pontos Interiores Preditor com Múltiplas Correções e Múltiplas Correções Centralizadas

Todos os MPI-AO anteriores melhoram o desempenho do MPI, resultando em um número menor de iterações e tempo computacional. Uma análise comparativa destes MPIAO é apresentada em (Torres et al., 2002). Uma combinação destes MPI-AO com o objetivo de colocar num único método todas as características particulares de cada um dos métodos e melhorar o desempenho computacional comparado com os MPI-AO de forma individual, foi sugerido nas referências (Torres and Quintana, 2001; Torres et al., 2002). Uma primeira tentativa de implementação é sugerida na referência (Rider et al., 2004a) e nesta subseção.

O primeiro passo é calcular o passo preditor do método de pontos interiores PC para estimar ρ^{af} e μ^{af} ; Segundo, realizar múltiplas correções do MPI preditor com múltiplas correções, com o objetivo de diminuir o gap de complementaridade com a ajuda das informações de segunda ordem; E

terceiro, realizar múltiplas correções centralizadas do MPI MCC, para corrigir as grandes diferenças que podem existir nos produtos de complementaridade comparados com o parâmetro de barreira. O método resultante é um MPI preditor com múltiplas correções e múltiplas correções centralizadas (PMCMCC).

Algoritmo Geral

O método de pontos interiores com múltiplas correções centralizadas pode ser sintetizado no seguinte algoritmo:

1. Iniciar M , C e escolher um ponto inicial $\mathbf{w}^0$ que cumpra com as condições de não-negatividade.
2. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{J}_\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{J}_\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$.
3. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
4. Fazer $k = 0$.

Repetir

6. Calcular matriz $\nabla_{\mathbf{x}}^2 l_\mu$ usando (4.10).
7. Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.21).
8. Calcular α_{af} , ρ^{af} , e μ^{af} usando respectivamente (4.22), (4.23) e (4.24).
9. Fazer $m = 0$.

Repetir

- a) Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.26).
- b) Obter ρ^{m+1} . Fazer $m = m + 1$.

Até ($\rho^m \geq \rho^{m-1}$ ou $m > M$).

Fazer $\Delta \mathbf{w}^m = \Delta \mathbf{w}^{m-1}$.

10. Fazer $c = 0$.

Repetir

- a) Montar e resolver no ponto atual o sistema (4.29).
- b) Obter α_{c+1} . Fazer $c = c + 1$.

Até ($\alpha_c \leq \alpha_{c-1} + \Delta_{c-1}$ ou $c > C$).

11. Fazer $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{c-1}$.

12. Obter o máximo tamanho de passo usando (4.16).

13. Atualizar as variáveis usando (4.15).
14. Calcular $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\mathbf{Jh}(\mathbf{x}^{k+1})$.
15. Calcular o vetor da parte direita da expressão (4.21).
16. Fazer $k = k + 1$.

Até se obter a convergência.

No passo 10 do algoritmo geral, o c -ésimo passo de correção centralizada é obtido resolvendo-se (4.29).

$$\mathbf{J_F}(\mathbf{w}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{c+1} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{c+1} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_h^{c+1} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{c+1} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{c+1} \\ \Delta \mathbf{S}_u^{c+1} \\ \Delta \mathbf{S}_l^{c+1} \\ \Delta \mathbf{S}_h^{c+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} + \mathbf{Jg}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Jh}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}_h - \hat{\mathbf{I}}^T \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_h \\ -\hat{\mathbf{I}}\mathbf{x} - \mathbf{s}_u + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_u - \mathbf{x}^l + \mathbf{x}^u \\ -\mathbf{S}_u(\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) - \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_u^m (\Delta \boldsymbol{\pi}_l^m + \Delta \boldsymbol{\pi}_u^m) - \mathbf{d}_u^c \\ -\mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l - \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_l^m \Delta \boldsymbol{\pi}_l^m - \mathbf{d}_l^c \\ -\mathbf{S}_h \boldsymbol{\pi}_h - \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_h^m \Delta \boldsymbol{\pi}_h^m - \mathbf{d}_h^c \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

em que as informações de segunda ordem obtidas do MPI preditor com múltiplas correções são incluídas no MPI múltiplas correções centralizadas. Se $c = 0$ então $\Delta \mathbf{w}^0 = \Delta \mathbf{w}^m$. Os vetores complementares são calculados usando (4.30).

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_u^c &= (\mathbf{S}_u + \alpha_{ptrial} \Delta \mathbf{S}_u^c) (\boldsymbol{\pi}_l^k + \boldsymbol{\pi}_u^k + \alpha_{dtrial} (\Delta \boldsymbol{\pi}_l^c + \Delta \boldsymbol{\pi}_u^c)) + \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_u^m (\Delta \boldsymbol{\pi}_l^m + \Delta \boldsymbol{\pi}_u^m) \\ \mathbf{q}_l^c &= (\mathbf{S}_l + \alpha_{ptrial} \Delta \mathbf{S}_l^c) (\boldsymbol{\pi}_l^k + \alpha_{dtrial} \Delta \boldsymbol{\pi}_l^c) + \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_l^m \Delta \boldsymbol{\pi}_l^m \\ \mathbf{q}_h^c &= (\mathbf{S}_h + \alpha_{ptrial} \Delta \mathbf{S}_h^c) (\boldsymbol{\pi}_h^k + \alpha_{dtrial} \Delta \boldsymbol{\pi}_h^c) + \alpha_m^2 \Delta \mathbf{S}_h^m \Delta \boldsymbol{\pi}_h^m \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os elementos dos vetores $\mathbf{d}_i^c$, para $i = h, l$ e u para o método de pontos interiores PMCMCC, são calculados da mesma forma que no MPI múltiplas correções centralizadas usando (4.28).

Capítulo 5

Algoritmo Heurístico Construtivo para o Modelo CA

Um algoritmo heurístico construtivo pode ser considerado como sendo uma procura passo a passo de uma solução de boa qualidade para um problema complexo. Os AHC encontram apenas uma solução de boa qualidade e não necessariamente a ótima, mas têm a vantagem de serem de simples compreensão, robustos e muitos rápidos. No caso do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, em cada passo do AHC um circuito, escolhido usando um índice de sensibilidade, é adicionado à rede.

Um algoritmo heurístico construtivo para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CA para o planejamento estático é apresentado neste capítulo juntamente com uma discussão sobre índice de sensibilidade do AHC e sobre o problema de PNL. Para resolver o problema de PNL é utilizada a metodologia apresentada no capítulo 4. Uma primeira tentativa de alocação de fontes de potência reativa também é apresentada.

5.1 Algoritmo Heurístico Construtivo Para o Modelo CA

Um AHC é um conjunto de passos que de forma sistemática encontra uma boa proposta de expansão do sistema elétrico, o que significa que, a partir de uma configuração inicial ou base, a cada passo é adicionado um ou vários circuitos até que o conjunto de adições realizadas faça com que o sistema opere de forma adequada. Uma vez modificado o sistema, a nova configuração é chamada de configuração corrente. O circuito mais atraente para ser adicionado na configuração corrente é determinado pelo chamado critério de sensibilidade, indicador de sensibilidade ou índice de desempenho. Baseado nos diferentes índices de sensibilidade, existem vários algoritmos heurísticos construtivos, assim também, o modelo escolhido define algumas diferenças nos algoritmos heurísticos.

Um indicador de sensibilidade é basicamente um parâmetro que de alguma maneira está relacionado com a variação da função objetivo devido a alguma variação dos parâmetros do sistema, considerando como sistema a configuração corrente. Este indicador possui as seguintes características:

- Identifica os caminhos mais atraentes para realizar adição de circuitos.
- É um indicador de caráter local, isto é, identifica a melhor estratégia para a configuração corrente em contraposição a um indicador de caráter global que identificaria a melhor estratégia para a configuração do sistema.
- Como os indicadores locais nem sempre coincidem com os indicadores globais então os algoritmos heurísticos construtivos, freqüentemente, não têm capacidade de encontrar as configurações ótimas globais de sistemas reais.

Um algoritmo heurístico construtivo nem sempre encontra a configuração ótima da expansão de um sistema elétrico. Na prática estes algoritmos encontram as soluções ótimas de sistema de pequeno porte e apenas configurações boas para sistemas elétricos de médio e grande porte.

Para calcular um índice de sensibilidade (IS), é possível usar a solução do modelo CA (Eqs (3.1) - (3.9)), após relaxar a integralidade das variáveis de investimento. Ou seja, caso se permita que os valores do vetor $\mathbf{n}$ sejam variáveis reais no problema de planejamento usando o modelo CA, este modelo se transforma num problema de PNL, conhecido como problema de programação não-linear correspondente. Embora a solução do problema correspondente seja inaceitável como proposta de solução para o problema do planejamento da expansão de sistemas de transmissão (número de linhas e/ou transformadores com valores fracionários), pode ser utilizada como uma estratégia para encontrar uma boa solução com variáveis de investimento inteiras. Este tipo de algoritmo foi usado por Garver usando o modelo de transportes (Garver, 1970). O índice de sensibilidade encontrado com a solução deste problema de PNL pode ser usado para identificar o circuito mais adequado que pode ser adicionado ao sistema. Assim, o circuito que deve ser adicionado ao sistema é aquele que tem o maior carregamento do fluxo de potência aparente entre as soluções do PNL. Então, o índice de sensibilidade é dado por:

$$IS = \max \{\mathbf{N}\bar{\mathbf{S}}\} \quad (5.1)$$

Em cada passo do AHC a topologia corrente deve ser atualizada. Os circuitos da topologia base, assim como os circuitos adicionados no processo iterativo, formam a topologia corrente. Uma característica principal do AHC proposto é que a estratégia identifica o circuito mais importante nos termos do investimento e de restrições operacionais e apenas a integralidade das propostas de expansão não é mantida para identificar os circuitos promissores. Finalmente, é possível que existam alguns circuitos

irrelevantes adicionados durante o processo anterior, devido a outras adições mais importantes realizadas posteriormente. Para poder saber que circuitos são irrelevantes, ordenam-se os circuitos em ordem decrescente de seus custos e podem ser eliminados aqueles que, uma vez simulada sua saída, produzem um investimento igual a zero ($v = 0$) e, caso contrário, o investimento for diferente de zero, o circuito deve permanecer como parte da solução. Caso exista mais de um circuito adicionado dentro em um ramo, procede-se a simular também sua saída.

5.1.1 Algoritmo Geral do AHC para o modelo CA

Desta maneira, pode-se usar a idéia proposta por Garver (Garver, 1970) para propor um algoritmo heurístico construtivo para o problema de planejamento usando o modelo CA:

1. Assumir a configuração base como configuração corrente.
2. Resolver o problema de PNL para o problema de planejamento usando o modelo CA relaxado e para a configuração corrente. Se a solução do problema de PNL indica que $v = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (uma configuração factível para o modelo CA foi encontrada) passe ao passo 4. Caso contrário, ir ao passo 3.
3. Usar o índice de sensibilidade (5.1) para identificar o circuito mais atraente. Atualizar a configuração corrente adicionando o circuito escolhido. Voltar ao passo 2.
4. Ordenar os circuitos adicionados em ordem decrescente de seus custos. Usando o problema de PNL, verificar se com a remoção de um circuito o sistema continua em condições operacionais adequadas. Caso afirmativo, remover o circuito, caso contrário, deve ser mantido. Repetir o processo simulando a remoção de cada circuito até analisar todos os circuitos. Os circuitos que não foram removidos formam a solução para o AHC.

No AHC apresentado acima é importante observar que os problemas de PNL nas etapas 2 e 4 foram resolvidos utilizando o PMCMCC apresentado no Capítulo 4.

5.2 Testes e Resultados

O algoritmo heurístico construtivo foi implementado em Matlab 6.0. Para os testes foram usados quatro sistemas: o sistema Garver de 6 barras, sistema IEEE de 24 barras, o sistema Sul Brasileiro de 46 barras e o sistema Norte-Nordeste Brasileiro de 87 barras.

Os dados elétricos dos sistemas usados para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CA para o planejamento estático estão no Apêndice B.

5.2.1 Sistema Garver de 06 barras

Caso 1: Considerando somente a demanda de potência ativa e sem restrições de tensão (desprezando a Eq. (3.8))

Considerando o sistema com a topologia base proposta por Garver, o AHC encontra um valor de $v = \text{US\$ } 110$ e uma topologia: $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 2$. A solução para este caso é mostrada na Fig. 5.1, onde as perdas de potência ativa e reativa do sistema são 12,57 MW e 125,69 Mvar, respectivamente. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{4-6} , n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} , e encontrou a solução após resolver 8 problemas de PNL (sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC). O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.1. Em que, IterIPM é o número de iterações feita pelo método de pontos interiores PMCMCC, v_{NLP} é o investimento fornecido pelo problema de PNL e v é o investimento parcial.

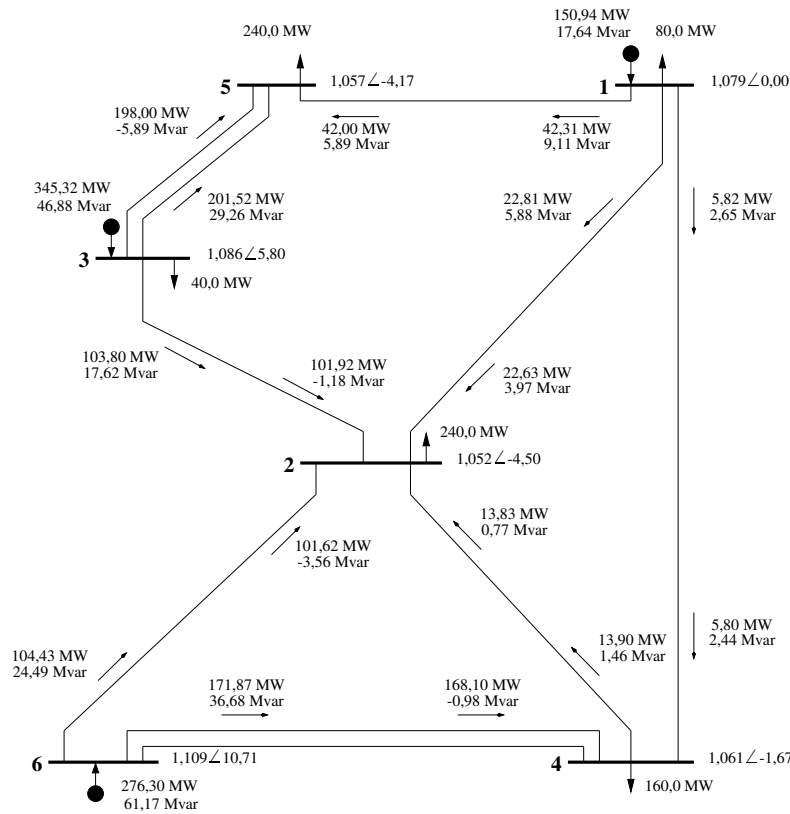


Fig. 5.1: Solução do sistema Garver para o Caso 1, considerando a topologia base e usando o modelo CA

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{2-3} = 0,1229$; $IS_{2-6} = 0,9448$; $IS_{3-5} = 0,8087$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,5124}$.	6	76,99	0,00
2	$IS_{2-3} = 0,1233$; $IS_{2-6} = \mathbf{0,9447}$; $IS_{3-5} = 0,8088$; $IS_{4-6} = 0,3121$.	8	46,96	30,00
3	$IS_{3-5} = \mathbf{0,8294}$; $IS_{4-6} = 0,2277$.	7	19,88	60,00
4	$IS_{4-6} = \mathbf{0,1784}$.	6	5,18	80,00
5		7	0,00	110,00

Tab. 5.1: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 1, considerando a topologia base e usando o modelo CA

Considerando o caso em que todos os circuitos existentes na topologia base do sistema Garver são removidos, o valor obtido pelo AHC para v é US\$ 190 e a topologia encontrada é: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 2$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. Um resumo, passo a passo, do resultado obtido pelo AHC encontra-se na Tab. 5.2.

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{1-5} = 0,8107$; $IS_{2-3} = 1,6936$; $IS_{2-6} = 0,8023$; $IS_{3-5} = 1,6656$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,6963}$.	9	132,18	0,00
2	$IS_{1-5} = 0,8108$; $IS_{2-3} = \mathbf{1,6937}$; $IS_{2-6} = 0,8021$; $IS_{3-5} = 1,6654$; $IS_{4-6} = 0,4963$.	10	102,12	30,00
3	$IS_{1-5} = 0,8109$; $IS_{2-3} = 0,4938$; $IS_{2-6} = 0,8020$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,6653}$; $IS_{4-6} = 0,4963$.	8	82,09	50,00
4	$IS_{1-5} = \mathbf{0,8111}$; $IS_{2-3} = 0,4940$; $IS_{2-6} = 0,8018$; $IS_{3-5} = 0,4650$; $IS_{4-6} = 0,4963$.	11	62,03	70,00
5	$IS_{2-3} = 0,4980$; $IS_{2-6} = \mathbf{0,7978}$; $IS_{3-5} = 0,4512$; $IS_{4-6} = 0,4963$.	9	48,26	90,00
6	$IS_{2-3} = 0,1082$; $IS_{3-5} = 0,4462$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,4963}$.	9	21,63	120,00
7	$IS_{2-3} = 0,1124$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,4433}$.	10	9,28	150,00
8	$IS_{2-3} = \mathbf{0,1063}$.	8	1,78	170,00
9		11	0,00	190,00

Tab. 5.2: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 1, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

O AHC convergiu após resolver 14 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A sequência de adições do AHC foi a seguinte: n_{4-6} , n_{2-3} , n_{3-5} , n_{1-5} , n_{2-6} , n_{4-6} , n_{3-5} e n_{2-3} . A solução do problema de planejamento é mostrada na Fig. 5.2 onde as perdas de potência ativa e reativa do sistema são 11,24 MW e 112,41 Mvar, respectivamente. Notar que neste caso o sistema inicial era totalmente desconexo. Portanto, a proposta apresentada trabalha sem problemas com sistemas inicialmente desconexos e ainda pode trabalhar com um sistema totalmente ilhado, como o exemplo apresentado.

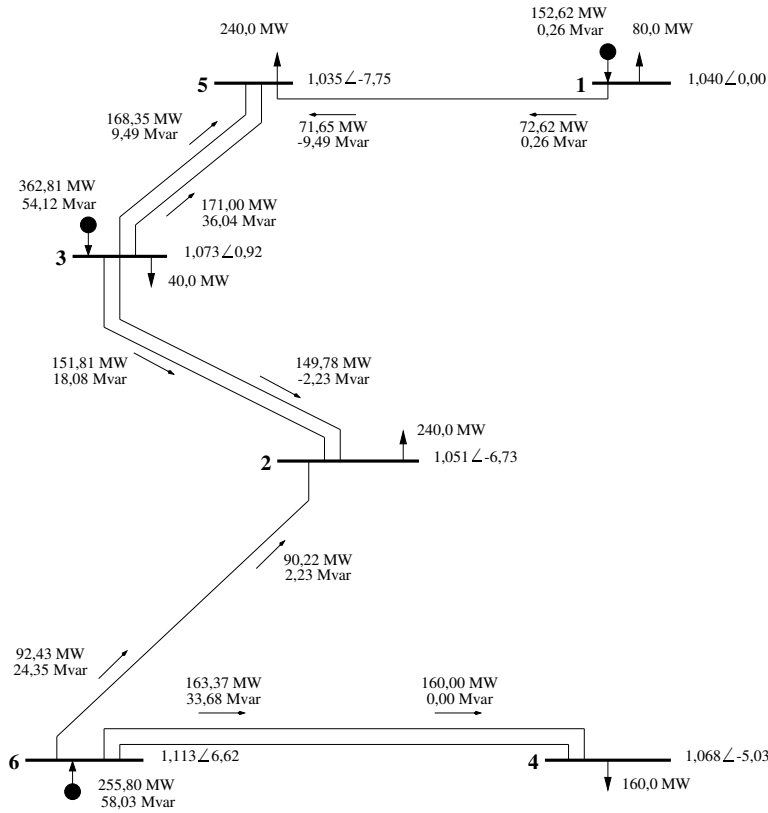


Fig. 5.2: Solução do sistema Garver para o Caso 1, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Caso 2: Considerando somente a demanda de potência ativa

Assim como no Caso 1, considerando o sistema com a topologia base proposta por Garver, o valor obtido para v é US\$ 110 e a topologia encontrada é: $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 2$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.3. O algoritmo convergiu após resolver 8 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A sequência de adições foi a seguinte: n_{4-6} , n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} . A solução é mostrada na Fig. 5.3. As perdas de potência ativa e reativa são 14,53 MW e 145,33 Mvar, respectivamente.

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{2-3} = 0,1285$; $IS_{2-6} = 0,9858$; $IS_{3-5} = 0,8330$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,5539}$.	6	79,66	0,00
2	$IS_{2-3} = 0,1283$; $IS_{2-6} = \mathbf{0,9857}$; $IS_{3-5} = 0,8329$; $IS_{4-6} = 0,3540$.	8	49,57	30,00
3	$IS_{3-5} = \mathbf{0,8459}$; $IS_{4-6} = 0,3000$.	7	21,64	60,00
4	$IS_{4-6} = \mathbf{0,2454}$.	6	6,15	80,00
5		7	0,00	110,00

Tab. 5.3: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 2, considerando a topologia base e usando o modelo CA

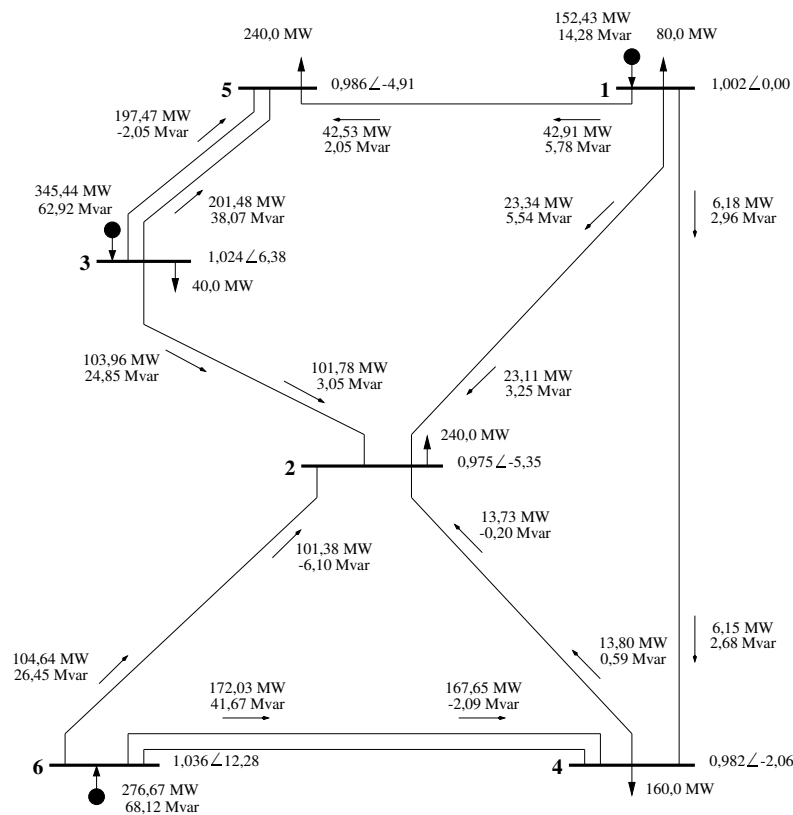


Fig. 5.3: Solução do sistema Garver para o Caso 2, considerando a topologia base e usando o modelo CA

Assim como no Caso 1, considerando que todos os circuitos existentes na topologia base são removidos (sistema inicial desconexo), o valor obtido pelo AHC para v é US\$ 190 e a topologia é: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 2$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. O resultado passo a passo do AHC é resumido na Tab. 5.4. O AHC convergiu após resolver 14 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A sequência de adições foi a seguinte: n_{4-6} , n_{2-3} , n_{3-5} , n_{2-6} , n_{1-5} , n_{4-6} , n_{3-5} e n_{2-3} . A solução é mostrada na Fig. 5.4. As perdas de potência ativa e reativa são 12,80 MW e 127,99 Mvar, respectivamente.

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{1-5} = 0,8190$; $IS_{2-3} = 1,7049$; $IS_{2-6} = 0,8437$; $IS_{3-5} = 1,6965$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,7534}$.	9	135,49	0,00
2	$IS_{1-5} = 0,8193$; $IS_{2-3} = \mathbf{1,7051}$; $IS_{2-6} = 0,8433$; $IS_{3-5} = 1,6960$; $IS_{4-6} = 0,5534$.	10	105,38	30,00
3	$IS_{1-5} = 0,8193$; $IS_{2-3} = 0,5051$; $IS_{2-6} = 0,8433$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,6960}$; $IS_{4-6} = 0,5534$.	8	85,38	50,00
4	$IS_{1-5} = 0,8194$; $IS_{2-3} = 0,5053$; $IS_{2-6} = \mathbf{0,8431}$; $IS_{3-5} = 0,4958$; $IS_{4-6} = 0,5534$.	11	65,32	70,00
5	$IS_{1-5} = \mathbf{0,6964}$; $IS_{2-3} = 0,1636$; $IS_{3-5} = 0,6188$; $IS_{4-6} = 0,5534$.	9	38,54	100,00
6	$IS_{2-3} = 0,1670$; $IS_{3-5} = 0,4708$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,5534}$.	9	24,47	120,00
7	$IS_{2-3} = 0,1701$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,4685}$.	10	10,69	150,00
8	$IS_{2-3} = \mathbf{0,1636}$.	8	2,73	170,00
9		11	0,00	190,00

Tab. 5.4: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 2, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

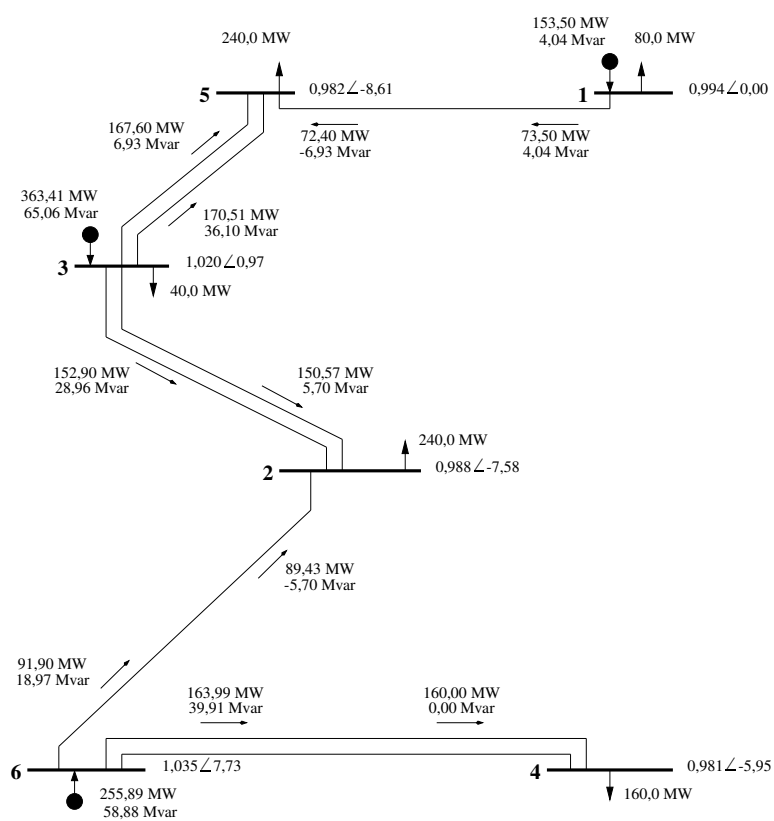


Fig. 5.4: Solução do sistema Garver para o Caso 2, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Caso 3: Sem Restrições de Tensão

Para o sistema com a topologia base proposta por Garver, o valor obtido para v é US\$ 110 e a topologia é: $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 2$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.5 e a solução é mostrada na Fig. 5.5.

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{2-3} = 0,1219$; $IS_{2-6} = 1,0871$; $IS_{3-5} = 0,9088$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,6263}$.	6	85,16	0,00
2	$IS_{2-3} = 0,1220$; $IS_{2-6} = \mathbf{1,0867}$; $IS_{3-5} = 0,9086$; $IS_{4-6} = 0,4263$.	8	55,06	30,00
3	$IS_{3-5} = \mathbf{0,9065}$; $IS_{4-6} = 0,4223$.	7	25,72	60,00
4	$IS_{4-6} = \mathbf{0,3717}$.	6	9,31	80,00
5		7	0,00	110,00

Tab. 5.5: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 3, considerando a topologia base e usando o modelo CA

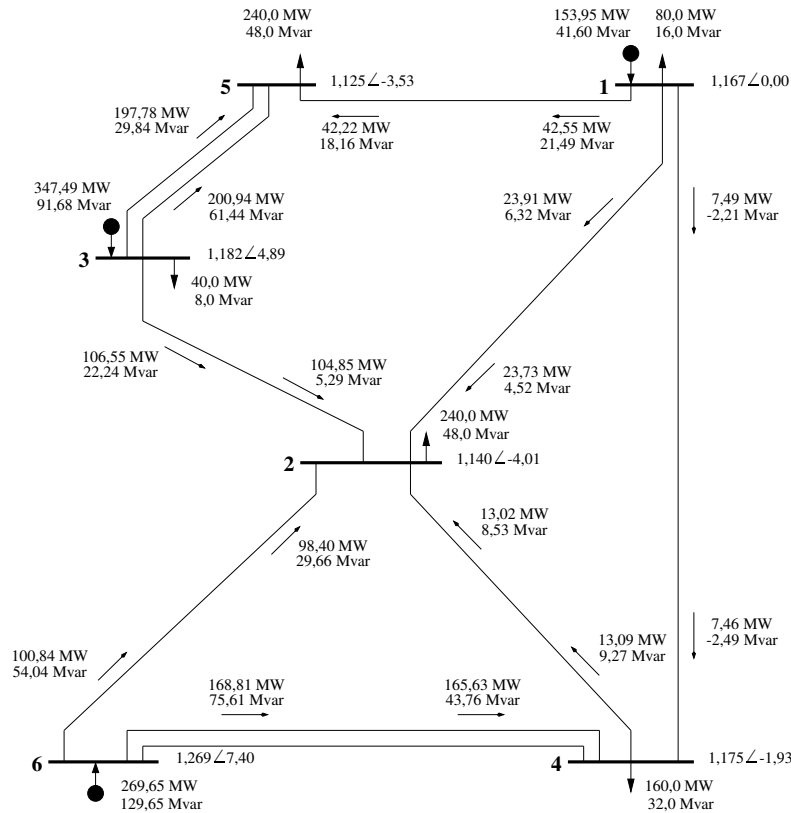


Fig. 5.5: Solução do sistema Garver para o Caso 3, considerando a topologia base e usando o modelo CA

O algoritmo AHC convergiu após resolver 8 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4. A seqüência de adições foi a seguinte: n_{4-6} , n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} . As perdas de potência ativa e reativa são 11,09 MW e 110,93 Mvar, respectivamente.

Considerando que todos os circuitos existentes na topologia base foram removidos, o valor obtido para v é US\$ 190 e a topologia é: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 2$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.6. O algoritmo convergiu após resolver 14 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A seqüência de adições foi a seguinte: n_{3-5} , n_{4-6} , n_{2-3} , n_{2-6} , n_{1-5} , n_{4-6} , n_{3-5} e n_{2-3} . A solução é mostrada na Fig. 5.6. As perdas de potência ativa e reativa são 9,57 MW e 95,69 Mvar, respectivamente.

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{1-5} = 0,7809$; $IS_{2-3} = 1,5057$; $IS_{2-6} = 1,1797$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,8321}$; $IS_{4-6} = 1,7810$.	9	142,81	0,00
2	$IS_{1-5} = 0,7808$; $IS_{2-3} = 1,5054$; $IS_{2-6} = 1,1799$; $IS_{3-5} = 0,6321$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,7810}$.	10	122,75	20,00
3	$IS_{1-5} = 0,7806$; $IS_{2-3} = \mathbf{1,5058}$; $IS_{2-6} = 1,1797$; $IS_{3-5} = 0,6324$; $IS_{4-6} = 0,5810$.	8	92,79	50,00
4	$IS_{1-5} = 0,7806$; $IS_{2-3} = 0,3059$; $IS_{2-6} = \mathbf{1,1795}$; $IS_{3-5} = 0,6323$; $IS_{4-6} = 0,5810$.	11	72,77	70,00
5	$IS_{1-5} = \mathbf{0,7907}$; $IS_{2-3} = 0,2776$; $IS_{3-5} = 0,6198$; $IS_{4-6} = 0,5810$.	9	42,72	100,00
6	$IS_{2-3} = 0,2497$; $IS_{3-5} = 0,5234$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,5810}$.	9	27,47	120,00
7	$IS_{2-3} = 0,2497$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,5233}$.	10	12,90	150,00
8	$IS_{2-3} = \mathbf{0,2238}$.	8	3,74	170,00
9		11	0,00	190,00

Tab. 5.6: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 3, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Considerando os resultados obtidos para os Casos 1, 2 e 3 (com e sem a topologia base), os valores de investimento (v) obtidos têm o mesmo valor para os três casos. Mas observando as Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 é possível ver que os pontos de operação de cada solução são diferentes.

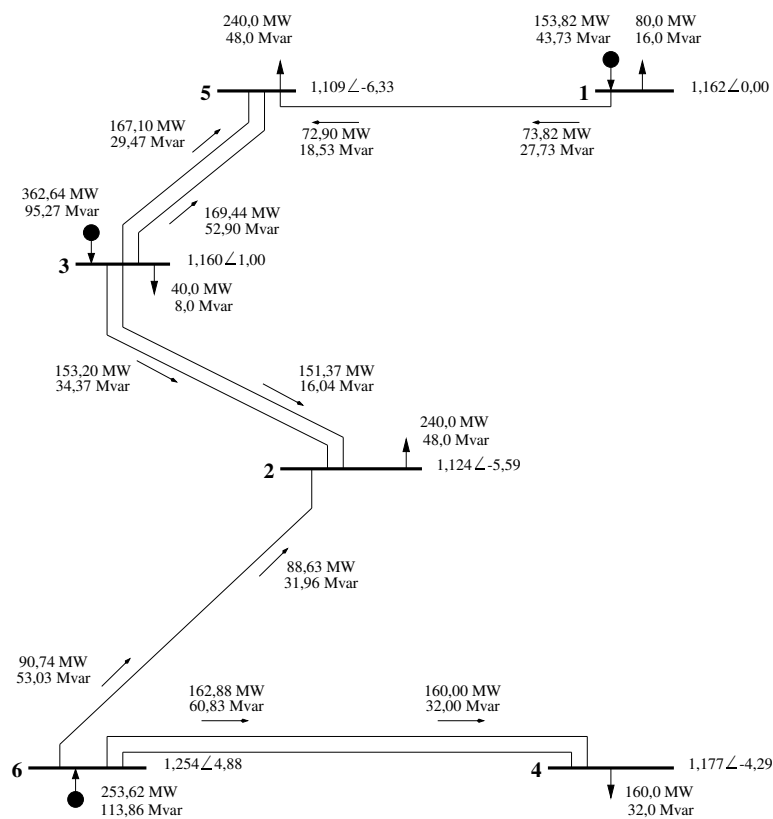


Fig. 5.6: Solução do sistema Garver para o Caso 3, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Caso 4: Completo

Para o sistema com a topologia base proposta por Garver, o valor obtido para v é US\$ 160 e a topologia é: $n_{2-6} = 2$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. A solução é mostrada na Fig. 5.7. As perdas de potência ativa e reativa são 12,17 MW e 121,68 Mvar, respectivamente. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.7. A seqüência de adições foi a seguinte: n_{2-6} , n_{4-6} , n_{3-5} , n_{2-6} , n_{4-6} , e n_{3-5} . O algoritmo convergiu após resolver 10 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC.

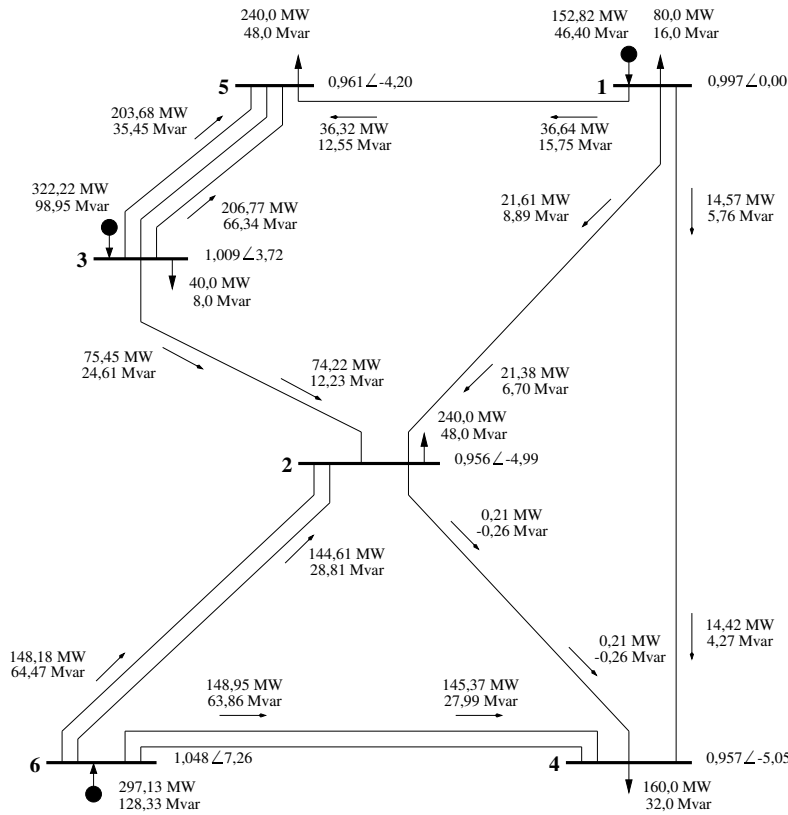


Fig. 5.7: Solução do sistema Garver para o Caso 4, considerando a topologia base e usando o modelo CA

Considerando que todos os circuitos existentes na topologia base são removidos, o valor obtido para v é US\$ 260 e a topologia é: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 1$, $n_{2-6} = 3$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 3$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.8. O algoritmo convergiu após resolver 16 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A seqüência de adições foi a seguinte: n_{2-6} , n_{4-6} , n_{2-6} , n_{3-5} , n_{4-6} , n_{1-5} , n_{3-5} , n_{2-3} , n_{4-6} , e n_{2-6} . A solução é mostrada na Fig. 5.8. As perdas de potência ativa e reativa são 11,40 MW e 113,96 Mvar, respectivamente.

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{2-6} = \mathbf{2,2622}$; $IS_{3-5} = 2,0259$; $IS_{4-6} = 2,2372$.	6	146,25	0,00
2	$IS_{2-6} = 1,0622$; $IS_{3-5} = 2,0258$; $IS_{4-6} = \mathbf{2,2372}$.	8	116,23	30,00
3	$IS_{2-6} = 1,0622$; $IS_{3-5} = \mathbf{2,0258}$; $IS_{4-6} = 1,0373$.	7	86,23	60,00
4	$IS_{2-6} = \mathbf{1,0622}$; $IS_{3-5} = 0,8258$; $IS_{4-6} = 1,0372$.	6	66,23	80,00
5	$IS_{3-5} = 0,7020$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,9935}$.	7	36,54	110,00
6	$IS_{3-5} = \mathbf{0,5625}$.	11	9,37	140,00
7		6	0,00	160,00

Tab. 5.7: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 4, considerando a topologia base e usando o modelo CA

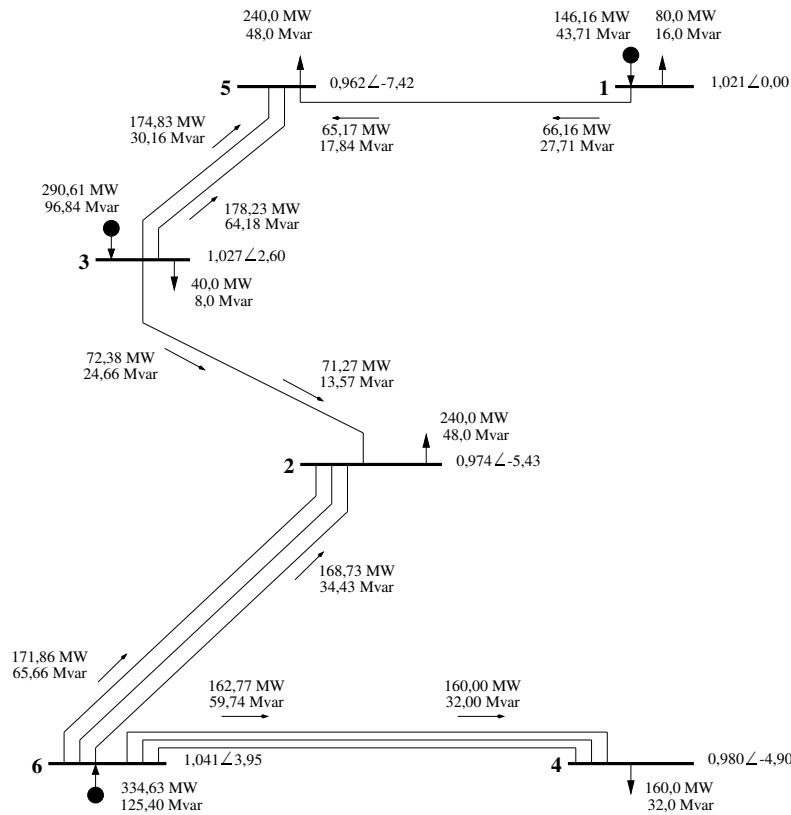


Fig. 5.8: Solução do sistema Garver para o Caso 4, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{1-5} = 0,8062$; $IS_{2-3} = 0,4376$; $IS_{2-6} = \mathbf{3,1005}$; $IS_{3-5} = 1,8721$; $IS_{4-6} = 2,5002$.	9	191,95	0,00
2	$IS_{1-5} = 0,8062$; $IS_{2-3} = 0,4376$; $IS_{2-6} = 1,9005$; $IS_{3-5} = 1,8721$; $IS_{4-6} = \mathbf{2,5002}$.	10	161,95	30,00
3	$IS_{1-5} = 0,8062$; $IS_{2-3} = 0,4376$; $IS_{2-6} = \mathbf{1,9005}$; $IS_{3-5} = 1,8721$; $IS_{4-6} = 1,3002$.	8	131,95	60,00
4	$IS_{1-5} = 0,8062$; $IS_{2-3} = 0,4376$; $IS_{2-6} = 0,7005$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,8721}$; $IS_{4-6} = 1,3002$.	9	101,95	90,00
5	$IS_{1-5} = 0,8062$; $IS_{2-3} = 0,4376$; $IS_{2-6} = 0,7005$; $IS_{3-5} = 0,6721$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,3002}$.	10	81,94	110,00
6	$IS_{1-5} = \mathbf{0,8062}$; $IS_{2-3} = 0,4376$; $IS_{2-6} = 0,7005$; $IS_{3-5} = 0,6721$; $IS_{4-6} = 0,1002$.	9	51,95	140,00
7	$IS_{2-3} = 0,5601$; $IS_{2-6} = 0,5184$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,5914}$; $IS_{4-6} = 0,1002$.	9	34,66	160,00
8	$IS_{2-3} = \mathbf{0,8987}$; $IS_{2-6} = 0,0839$; $IS_{4-6} = 0,1002$.	11	19,58	180,00
9	$IS_{2-6} = 0,0297$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,1002}$.	12	3,25	200,00
10	$IS_{2-6} = \mathbf{0,0297}$.	13	0,74	230,00
11		8	0,00	260,00

Tab. 5.8: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 4, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Em todos os casos testados as perdas ativas e reativas dos sistemas Garver foram calculadas de forma exata e os resultados mostram a capacidade do algoritmo para resolver sistemas isolados usando o modelo CA. Nos últimos dois resultados alguns circuitos tem sido adicionados para aliviar as restrições de limites de tensão nas barras. Fazendo uma análise superficial, ver Fig. 5.8, pode-se concluir que nos ramos 4-6 e 2-6 somente dois circuitos são suficientes se forem desprezadas as restrições de tensão, porque cada circuito tem um limite máximo de fluxo de potência de 120 MVA e o fluxo total no ramos é aproximadamente 173 e 184 MVA, respectivamente. Também pode ser feita a mesma análise no ramo 3-5 da Fig. 5.7, em que somente dois circuitos são suficientes porque cada circuito tem um limite máximo de fluxo de potência de 120 MVA e o fluxo total no ramo é aproximadamente 217 MVA.

Caso 5: Alocação de fontes de potência reativa

Para mostrar a vantagem de se usar o modelo CA, é possível construir um índice de sensibilidade para alocar fontes de potência reativa (ID). Este índice é obtido das variáveis duais na solução ótima dos problemas de PNL resolvidos no passo 4 do AHC (quando se tentou remover um circuito adicionado da etapa 3 do AHC) e é a derivada parcial da função objetivo (v) com respeito à demanda de potência reativa da barra, Eq. (5.2), como foi sugerido em (Almeida and Galiana, 1996).

$$ID_j = \frac{\partial v}{\partial Q_{Dj}} = \lambda_j^Q \quad (5.2)$$

em que, λ_j^Q é o multiplicador de Lagrange da parte reativa das restrições de igualdade $g(x)$ ($\lambda_j^Q \in \lambda$), e j representa a barra de carga. Matematicamente o índice ID_j é uma sensibilidade que indica a variação que deveria ocorrer na função objetivo quando é diminuída 1 Mvar de potência reativa de demanda na barra j . Assim como o índice de sensibilidade (IS) no AHC, o índice ID possui as seguintes características:

- Identifica as barras de carga mais atrativas para alocar fontes de potência reativa.
- É um indicador de caráter local e fortemente dependente das linhas previamente adicionadas pelo AHC, isto é, identifica a barra onde se pode alocar uma fonte de potência reativa com o objetivo de eliminar da solução final uma linha adicionada pelo AHC.

Para o sistema Garver considerando a topologia base, no passo 4 do AHC é simulada a saída das linhas adicionadas durante o processo iterativo (ramos n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} , ver Caso 3) e é possível calcular os valores de ID para as barras de carga 2, 4 e 5. Os resultados são mostrados na Tab. 5.9.

	n_{2-6}	n_{3-5}	n_{4-6}
ID_2	-0,4363	-0,2879	-0,1901
ID_4	-0,1736	-0,1526	-0,4347
ID_5	-0,4445	-0,7110	-0,2562

Tab. 5.9: Índice de Sensibilidade para alocar fontes de potência reativa do sistema Garver, considerando a topologia base e usando o modelo CA

Os ID mostrados na Tab. 5.9 encontram-se normalizados pelo valor da norma euclidiana do vetor de custos das linhas. Os resultados mostram que todas as barras de carga do sistema Garver podem ser candidatas para alocar fontes de potência reativa e eliminar uma linha nos ramos n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} , mas considerando o maior ID para cada ramo, as barras 4 e 5 são as melhores barras candidatas para alocar fontes de potência reativa. Instalando compensadores síncronos nas barras 4 e 5 com limites

de potência reativa igual a -10.0 Mvar e 40.0 Mvar para a barra 4 e -10,0 Mvar e 50,0 Mvar para a barra 5 e repetindo o AHC é encontrado um valor para $v = \text{US\$ } 110$ com a seguinte topologia: $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 2$. A solução é mostrada na Fig. 5.9. As perdas de potência ativa e reativa são 14,74 MW e 147,43 Mvar, respectivamente. A sequência de adições feita pelo AHC é a seguinte: n_{4-6} , n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} , e encontrou a solução após resolver 8 problemas de PNL (sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC). O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.10.

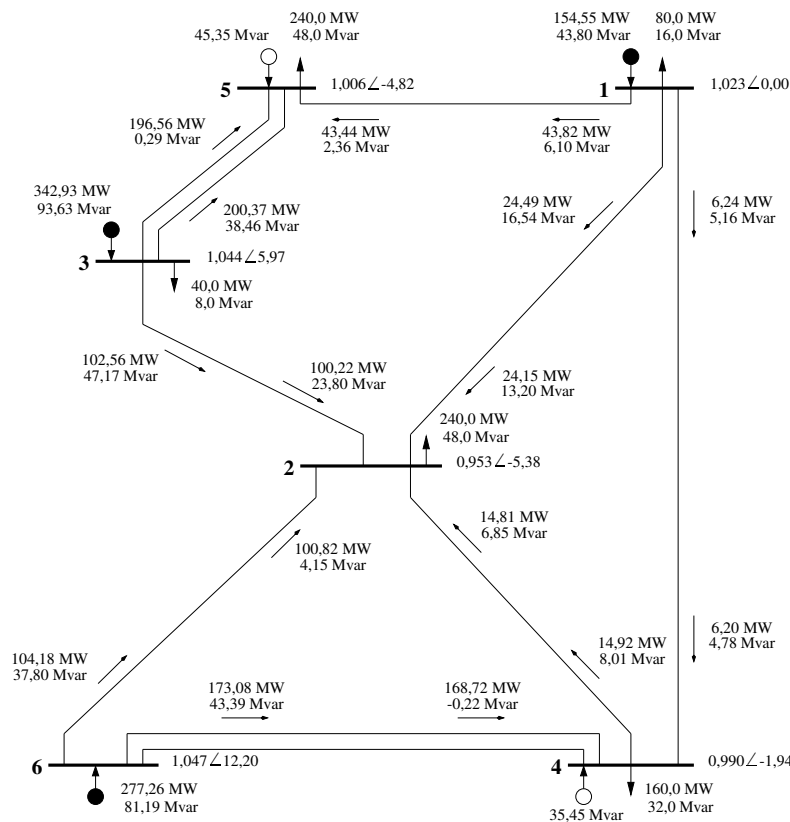


Fig. 5.9: Solução do sistema Garver para o Caso 5, considerando a topologia base e fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, e usando o modelo CA

Comparando a solução obtida, com a solução do Caso 4, duas linhas foram eliminadas, uma linha entre as barras 3 – 5 e outra entre as barras 2 – 6. Apesar da instalação de duas fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, respectivamente, é possível que existam algumas fontes de potência reativa que foram adicionadas de forma irrelevante, assim como no caso das linhas no passo 4 do AHC. Para poder saber que fontes de potência reativa são irrelevantes deve-se ordenar as fontes de potência reativa em forma decrescente de seus custos ou de seus ID e pode-se eliminar aquelas que, uma vez simulada sua saída, produzem um investimento igual a zero ($v = 0$). Se, ao contrário, o investimento é diferente de zero, a fonte de potência reativa deve permanecer dentro da solução.

Iter	Adição pelo PNL	Iter	v_{NLP} IPM US\$	v US\$
1	$IS_{2-3} = 0,1136$; $IS_{2-6} = 1,1372$; $IS_{3-5} = 0,8308$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,5770}$.	6	83,62	0,00
2	$IS_{2-3} = 0,1135$; $IS_{2-6} = \mathbf{1,1372}$; $IS_{3-5} = 0,8308$; $IS_{4-6} = 0,3770$.	8	53,61	30,00
3	$IS_{2-3} = 0,0548$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,8279}$; $IS_{4-6} = 0,3766$.	7	24,14	60,00
4	$IS_{2-3} = 0,1411$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,2555}$.	6	8,74	80,00
5		7	0,00	110,00

Tab. 5.10: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 5, considerando a topologia base e fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, e usando o modelo CA

Considerando este último passo, o resultado final é mostrado na Fig. 5.10. As perdas de potência ativa e reativa do sistema são 14,88 MW e 148,81 Mvar, respectivamente.

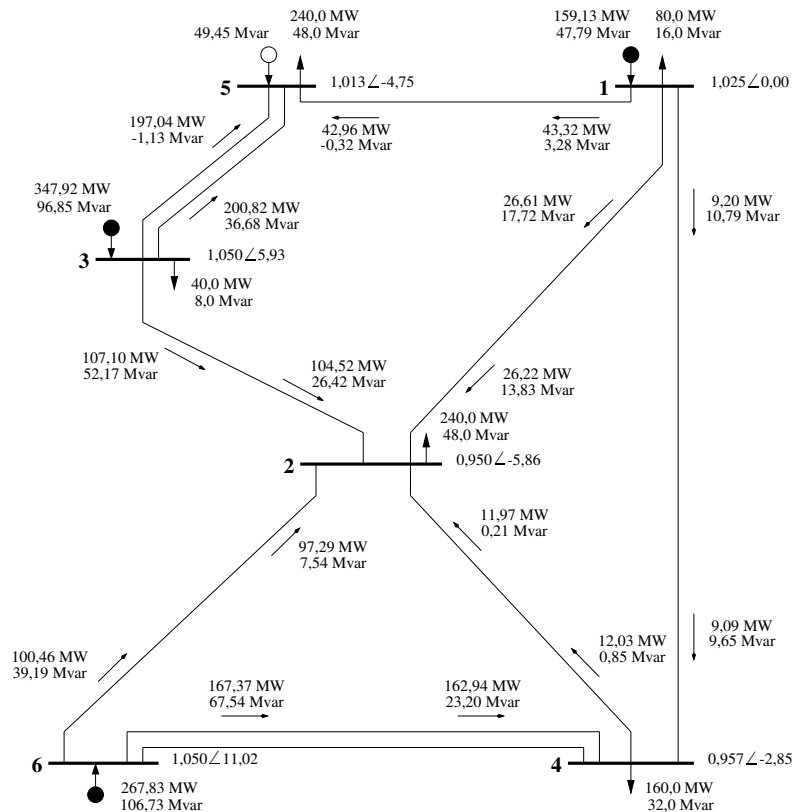


Fig. 5.10: Solução final do sistema Garver para o Caso 5, considerando a topologia base e fontes de potência reativa na barra 5, e usando o modelo CA

Algoritmo geral do AHC considerando alocação de fontes de potência reativa para o modelo CA

Adicionando os critérios mencionados acima para alocar fontes de potência reativa, a forma geral do AHC assume a seguinte forma:

1. Assumir a configuração base como configuração corrente.
2. Resolver o problema de PNL para a configuração corrente. Se $v = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (uma configuração factível foi encontrada) passe ao passo 4. Em caso contrário, ir ao passo 3.
3. Usar o índice de sensibilidade (5.1) para identificar o circuito mais atraente. Atualizar a configuração corrente adicionando o circuito escolhido. Voltar ao passo 2.
4. Ordenar os circuitos adicionados em ordem decrescente de seus custos e usando o problema de PNL, verificar a possibilidade de remoção desses circuitos (similar ao já apresentado anteriormente). Após analisar todos os circuitos adicionados calcular os ID para as barras de carga e ir ao passo 5.
5. Em função dos ID , identificar e instalar fontes de potência reativa nas barras de carga mais atrativas e assumir a configuração base como configuração corrente e ir ao passo 6.
6. Resolver o problema de PNL para a configuração corrente. Se $v = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (uma configuração factível foi encontrada) passe ao passo 8. Em caso contrário, ir ao passo 7.
7. Usar o índice de sensibilidade (5.1) para identificar o circuito mais atrativo. Atualizar a configuração corrente adicionando o circuito escolhido. Voltar ao passo 6.
8. Assim como no passo 4, verificar se a remoção de um circuito mantém o sistema em condições operacionais adequadas (similar ao já apresentado anteriormente). Ir ao passo 9.
9. Ordenar as fontes de potência reativa adicionadas em ordem decrescente de seus custos ou ID . Usando o problema de PNL, verifique, de maneira similar ao que foi feito com os circuitos, a possibilidade de remoção de fontes reativas adicionadas e o sistema ainda permanecer operando adequadamente. Após analisar todas as fontes tem-se a solução do AHC (formada pelos circuitos e fontes que foram mantidos).

Continuando com a análise, para o sistema Garver sem a topologia base, os valores de ID para as barras de carga 2, 4 e 5 são mostrados na Tab. 5.11.

	n_{1-5}	n_{2-3}	n_{2-6}	n_{3-5}	n_{4-6}
ID_2	-0,0466	-0,1846	-0,4104	-0,0879	0,0000
ID_4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,4154
ID_5	-0,1791	0,0000	-0,5524	-0,3634	0,0000

Tab. 5.11: Índice de Sensibilidade para alocar as fontes de potência reativa do sistema Garver, sem considerar a topologia base e usando o modelo CA

Assim como na Tab. 5.9, os ID mostrados na Tab. 5.11 encontram-se normalizados pelo valor da norma euclidiana do vetor de custos das linhas. Os resultados mostram que todas as barras de carga do sistema Garver podem ser candidatas para alocar fontes de potência reativa. Da Tab. 5.11, os casos n_{2-3} e n_{4-6} merecem uma atenção particular. Os dados mostram que para retirar uma linha da solução final no circuito 2 – 3 e 4 – 6 só é necessário alocar fontes de potência reativa nas barras 2 e 4, respectivamente, sem ter uma influência das outras barras. Como no caso anterior, considerando o maior ID de cada circuito, as barras 2, 4 e 5 são as melhores candidatas para alocação de fontes de potência reativa. Instalando compensadores síncronos com limites de potência reativa igual a -10,0 Mvar e 50,0 Mvar para a barra 2, -10,0 Mvar e 40,0 Mvar para a barra 4 e -10,0 Mvar e 50,0 Mvar para a barra 5 e continuando com o AHC com fontes de potência reativa, o valor obtido para v é US\$ 190 e a topologia seguinte: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 2$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. A solução é mostrada na Fig. 5.11. As perdas de potência ativa e reativa são 12,86 MW e 128,56 Mvar, respectivamente. Um resumo, passo a passo, do resultado obtido pelo AHC encontra-se na Tab. 5.12. O AHC convergiu após resolver 14 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A sequência de adições do AHC foi a seguinte: n_{4-6} , n_{2-3} , n_{3-5} , n_{2-6} , n_{1-5} , n_{4-6} , n_{3-5} e n_{2-3} .

A fonte de potência reativa (inicialmente considerada) na barra 2 foi eliminada por ser irrelevante. Comparando esta solução com a solução do Caso 4 três linhas foram eliminadas, duas linhas entre as barras 2 – 6 e outra entre as barras 4 – 6, e foram adicionadas ao sistema elétrico uma linha entre as barras 2 – 3 e duas fontes de potência reativa nas barras 4 e 5.

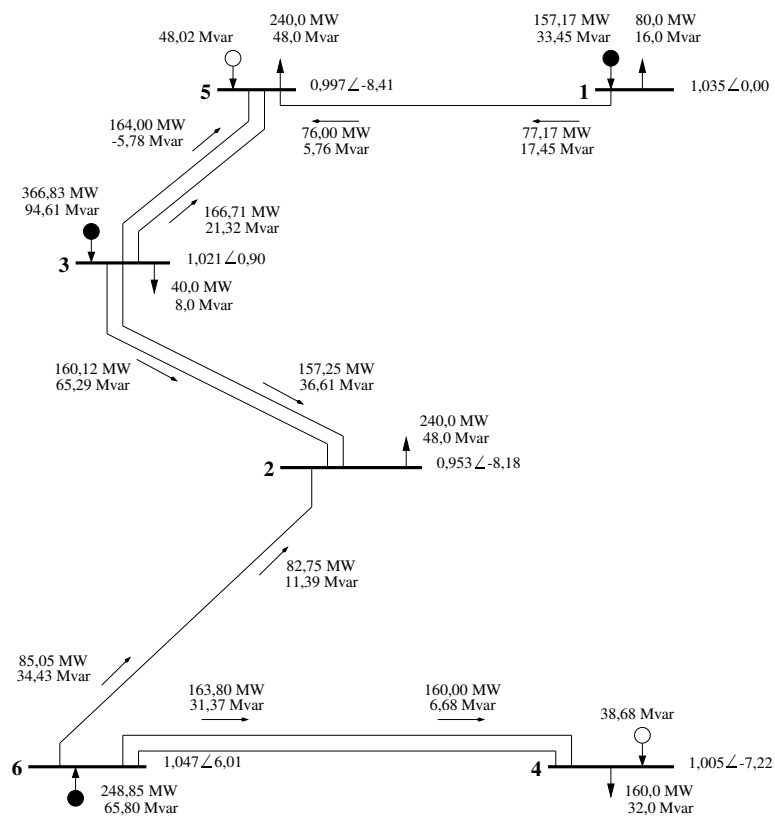


Fig. 5.11: Solução final do sistema Garver para o Caso 5, sem considerar a topologia base e considerando fontes de potência reativa nas barras 4 e 5, usando o modelo CA

Iter	Adição pelo PNL	Iter IPM	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{1-5} = 0,8181$; $IS_{2-3} = 1,7013$; $IS_{2-6} = 0,8415$; $IS_{3-5} = 1,6924$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,7254}$.	9	134,38	0,00
2	$IS_{1-5} = 0,8182$; $IS_{2-3} = \mathbf{1,7014}$; $IS_{2-6} = 0,8414$; $IS_{3-5} = 1,6923$; $IS_{4-6} = 0,5254$.	10	104,37	30,00
3	$IS_{1-5} = 0,8182$; $IS_{2-3} = 0,5013$; $IS_{2-6} = 0,8414$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,6923}$; $IS_{4-6} = 0,5254$.	8	84,38	50,00
4	$IS_{1-5} = 0,8182$; $IS_{2-3} = 0,5014$; $IS_{2-6} = \mathbf{0,8414}$; $IS_{3-5} = 0,4923$; $IS_{4-6} = 0,5254$.	11	64,37	70,00
5	$IS_{1-5} = \mathbf{0,7536}$; $IS_{2-3} = 0,1577$; $IS_{3-5} = 0,5569$; $IS_{4-6} = 0,5254$.	9	37,61	100,00
6	$IS_{2-3} = 0,1609$; $IS_{3-5} = 0,4691$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,5254}$.	9	23,64	120,00
7	$IS_{2-3} = 0,1561$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,4726}$.	10	10,48	150,00
8	$IS_{2-3} = \mathbf{0,1577}$.	8	2,63	170,00
9		11	0,00	190,00

Tab. 5.12: Processo do AHC do sistema Garver para o Caso 5, sem considerar a topologia base e considerando fontes de potência reativa nas barras 2, 4 e 5, usando o modelo CA

Caso 6: Sistema final desconexo

O último teste com o sistema Garver mostra a habilidade do algoritmo para tratar sistemas desconexos. Como foi dito no caso anterior, alocar fontes de potência reativa somente nas barras 2 e 4 pode ocasionar a saída de uma linha nos circuito 2 – 3 e 4 – 6, respectivamente. Instalando compensadores síncronos com limites de potência reativa igual a -10,0 Mvar e 50,0 Mvar para a barra 2, -10,0 Mvar e 40,0 Mvar para a barra 4, a solução encontrada pelo AHC é mostrada na Fig. 5.12. O custo total é igual a US\$ 210 e a topologia é a seguinte: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-6} = 3$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. A geração de potência reativa nas barras 2 e 4 são 24,05 Mvar e 14,86 Mvar, respectivamente. As perdas ativas e reativas do sistema são 14,78 MW e 147,87 Mvar.

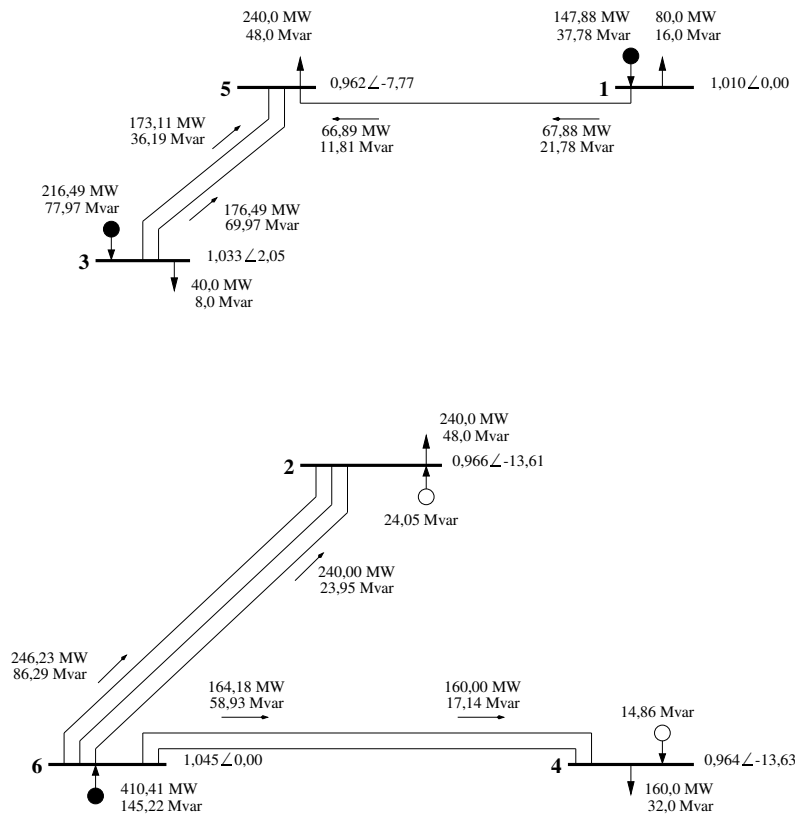


Fig. 5.12: Solução final do sistema Garver para o Caso 6, sem considerar a topologia base e considerando fontes de potência reativa nas barras 2 e 4, usando o modelo CA

Comparando a solução obtida com a solução do Caso 4 duas linhas foram eliminadas, uma linha entre as barras 2 – 3 e outra entre as barras 4 – 6 e foram instaladas duas fontes de potência reativa, uma na barra 2 e outra na barra 4. O resultado final é um sistema desconexo.

5.2.2 Sistema IEEE de 24 barras

Caso 1: Considerando somente a demanda de potência ativa e sem restrições de tensão (desprezando a Eq. (3.8))

O AHC encontrou um valor de $v = \text{US\$ } 86 \times 10^6$ e a topologia encontrada é a seguinte: $n_{6-10} = 1$, $n_{7-8} = 1$, $n_{14-16} = 1$. As perdas de potência ativa e reativa do sistema são 198,13 MW e 1015,53 Mvar, respectivamente. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{7-8} , n_{6-10} e n_{14-16} . O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 7 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC.

Caso 2: Considerando somente a demanda de potência ativa

Para este caso o AHC encontrou um valor de $v = \text{US\$ } 230 \times 10^6$ e a topologia seguinte: $n_{1-5} = 1$, $n_{3-24} = 1$, $n_{6-10} = 1$, $n_{7-8} = 1$, $n_{14-16} = 1$, $n_{15-24} = 1$. O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 13 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{3-24} , n_{7-8} , n_{6-10} , n_{15-24} , n_{14-16} e n_{1-5} . As perdas de potência ativa e reativa do sistema são 235,50 MW e 1369,73 Mvar, respectivamente.

Caso 3: Sem Restrições de Tensão

A topologia encontrada pelo AHC é a seguinte: $n_{6-10} = 1$, $n_{7-8} = 1$, $n_{14-16} = 1$, com um investimento $v = \text{US\$ } 86 \times 10^6$. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{7-8} , n_{6-10} e n_{14-16} . O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 7 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. As perdas de potência ativa e reativa do sistema são 223,38 MW e 1235,32 Mvar, respectivamente.

Caso 4: Completo

Partindo-se da topologia inicial, o AHC encontra um valor de $v = \text{US\$ } 515 \times 10^6$ e a topologia encontrada é a seguinte: $n_{1-3} = 2$, $n_{2-4} = 1$, $n_{3-24} = 1$, $n_{6-10} = 2$, $n_{7-8} = 1$, $n_{9-11} = 1$, $n_{11-13} = 1$, $n_{14-23} = 1$, $n_{15-24} = 1$. As perdas de potência ativa e reativa do sistema são 188,63 MW e 646,30 Mvar, respectivamente. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{9-11} , n_{1-3} , n_{3-24} , n_{6-10} , n_{1-3} , n_{7-8} , n_{15-24} , n_{6-10} , n_{11-13} , n_{14-23} , n_{2-4} . O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 21 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 5.13.

Iter	Adição pelo PNL	Iter _{IPM}	v_{NLP}	v
1	$IS_{01-03} = 6,1856; IS_{02-04} = 1,1024; IS_{03-24} = 4,6378;$ $IS_{06-10} = 4,0643; IS_{07-08} = 3,2874; IS_{09-11} = \mathbf{7,0076};$ $IS_{09-12} = 0,2715; IS_{10-12} = 1,3428; IS_{11-13} = 1,7433;$ $IS_{14-16} = 0,3240; IS_{14-23} = 0,5718; IS_{15-24} = 2,2279.$	19	392,77	0,00
2	$IS_{01-03} = \mathbf{6,1733}; IS_{02-04} = 1,1034; IS_{03-24} = 4,6477;$ $IS_{06-10} = 4,0641; IS_{07-08} = 3,2874; IS_{09-11} = 1,0072;$ $IS_{09-12} = 0,2726; IS_{10-12} = 1,3400; IS_{11-13} = 1,7391;$ $IS_{14-16} = 0,3087; IS_{14-23} = 0,6041; IS_{15-24} = 2,2344.$	23	342,99	50,00
3	$IS_{01-03} = 4,0083; IS_{02-04} = 1,0983; IS_{03-24} = \mathbf{4,6304};$ $IS_{06-10} = 4,0619; IS_{07-08} = 3,2875; IS_{09-11} = 0,9935;$ $IS_{09-12} = 0,2801; IS_{10-12} = 1,3430; IS_{11-13} = 1,7466;$ $IS_{14-16} = 0,1881; IS_{14-23} = 0,6318; IS_{15-24} = 2,2259.$	17	287,71	105,00
4	$IS_{01-03} = 3,4519; IS_{02-04} = 1,1066; IS_{06-10} = \mathbf{4,0072};$ $IS_{07-08} = 3,2882; IS_{09-11} = 0,8289; IS_{09-12} = 0,3703;$ $IS_{10-12} = 1,1392; IS_{11-13} = 1,7330; IS_{14-16} = 0,2703;$ $IS_{14-23} = 0,5062; IS_{15-24} = 2,7878.$	15	238,06	155,00
5	$IS_{01-03} = \mathbf{3,4473}; IS_{02-04} = 1,1071; IS_{06-10} = 2,0074;$ $IS_{07-08} = 3,2882; IS_{09-11} = 0,8298; IS_{09-12} = 0,3700;$ $IS_{10-12} = 1,1387; IS_{11-13} = 1,7313; IS_{14-16} = 0,2638;$ $IS_{14-23} = 0,5210; IS_{15-24} = 2,7890.$	20	222,06	171,00
6	$IS_{01-03} = 1,2995; IS_{02-04} = 1,1016; IS_{06-10} = 2,0053;$ $IS_{07-08} = \mathbf{3,2882}; IS_{09-11} = 0,8201; IS_{09-12} = 0,3728;$ $IS_{10-12} = 1,1445; IS_{11-13} = 1,7495; IS_{14-16} = 0,3700;$ $IS_{14-23} = 0,3339; IS_{15-24} = 2,7744.$	18	166,65	226,00
7	$IS_{01-03} = 1,2464; IS_{02-04} = 1,1072; IS_{06-10} = 2,0074;$ $IS_{07-08} = 1,0882; IS_{09-11} = 0,8299; IS_{09-12} = 0,3700;$ $IS_{10-12} = 1,1386; IS_{11-13} = 1,7311; IS_{14-16} = 0,2616;$ $IS_{14-23} = 0,5243; IS_{15-24} = \mathbf{2,7893}.$	29	151,12	242,00
8	$IS_{02-04} = 1,1505; IS_{03-24} = 0,6805; IS_{06-10} = \mathbf{1,9043};$ $IS_{07-08} = 1,0898; IS_{09-11} = 0,5278; IS_{09-12} = 0,5317;$ $IS_{10-12} = 0,6935; IS_{11-13} = 1,7386; IS_{14-16} = 0,1803;$ $IS_{14-23} = 0,3805.$	28	85,82	314,00
9	$IS_{02-04} = 1,1470; IS_{03-24} = 0,6966; IS_{07-08} = 1,0883;$ $IS_{09-11} = 0,4745; IS_{09-12} = 0,5549; IS_{10-12} = 0,7193;$ $IS_{11-13} = \mathbf{1,6794}; IS_{14-16} = 0,2663; IS_{14-23} = 0,3099.$	22	69,77	330,00
10	$IS_{01-05} = 0,0276; IS_{02-04} = 0,9217; IS_{07-08} = 1,0782;$ $IS_{14-23} = \mathbf{1,7482}.$	21	45,73	396,00
11	$IS_{02-04} = \mathbf{1,0266}; IS_{07-08} = 0,2659.$	10	17,36	482,00
12		9	0,00	515,00

Tab. 5.13: Processo do AHC do sistema IEEE 24 barras para o Caso 4, usando o modelo CA. Os custos são dados em $\times 10^6$ US\$

Caso 5: Alocação de Fonte de Potência Reativa

De forma similar ao caso 5 para o sistema Garver, os índices ID são calculados para todas as barras de carga do sistema IEEE-24 e são mostrados na Tab. 5.14.

	n_{01-03}	n_{02-04}	n_{03-24}	n_{06-10}	n_{07-08}	n_{09-11}	n_{11-13}	n_{14-23}	n_{15-24}
ID_{03}	-0,2829	-0,0141	-0,1722	-0,0155	-0,0111	-0,0418	-0,0825	-0,1176	-0,2681
ID_{04}	-0,0225	-0,0972	-0,0145	-0,0212	-0,0153	-0,0564	-0,0914	-0,0098	-0,0219
ID_{05}	-0,0035	-0,0038	-0,0051	-0,0125	-0,0033	-0,0068	-0,0149	-0,0023	-0,0036
ID_{08}	-0,0110	-0,0116	-0,0093	-0,0125	-0,0113	-0,0205	-0,0311	-0,0073	-0,0109
ID_{09}	-0,0585	-0,0518	-0,0377	-0,0559	-0,0404	-0,1485	-0,2407	-0,0251	-0,0567
ID_{10}	-0,0063	-0,0055	-0,0096	-0,0165	-0,0047	-0,0120	-0,0245	-0,0034	-0,0065
ID_{19}	-0,0130	-0,0007	-0,0063	-0,0007	-0,0005	-0,0020	-0,0040	-0,0060	-0,0103
ID_{20}	-0,0046	-0,0002	-0,0022	-0,0003	-0,0002	-0,0007	-0,0015	-0,0022	-0,0036

Tab. 5.14: Índice de Sensibilidade para alocar as fontes de potência reativa do sistema IEEE 24 Barras usando o modelo CA

em que, os ID mostrados na Tab. 5.14 encontram-se normalizados pelo valor da norma dois do vetor de custos das linhas. Os resultados mostram que o AHC não considera todas as barras de carga do sistema IEEE-24 para serem candidatas para alocação de fontes de potência reativa. Considerando o maior ID para cada ramo, as barras 3, 4 e 9 são as melhores barras candidatas para alocar fontes de potência reativa. Instalando compensadores síncronos nas barras 3, 4 e 9 com capacidade ilimitada de potência reativa e continuando com o AHC com fontes de potência reativa, o valor obtido para v é US\$ 86×10^6 e a topologia é: $n_{6-10} = 1$, $n_{7-8} = 1$, $n_{14-16} = 1$. Um resumo, passo a passo, do resultado obtido pelo AHC encontra-se na Tab. 5.15. O AHC convergiu após resolver 7 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A sequência de adições do AHC foi a seguinte:

n_{07-08} , n_{06-10} e n_{14-16} .

Iter	Adição pelo PNL	Iter _{IPM}	v_{NLP}	v
1	$IS_{01-05} = 0,1327$; $IS_{06-10} = 1,8258$; $IS_{07-08} = \mathbf{2,6422}$; $IS_{14-16} = 1,5413$; $IS_{14-23} = 0,0773$.	16	49,53	0,00
2	$IS_{01-05} = 0,1327$; $IS_{06-10} = \mathbf{1,8259}$; $IS_{07-08} = 0,4414$; $IS_{14-16} = 1,5422$; $IS_{14-23} = 0,0768$.	16	33,52	16,00
3	$IS_{01-05} = 0,1348$; $IS_{07-08} = 0,2135$; $IS_{14-16} = \mathbf{1,5375}$; $IS_{14-23} = 0,1874$.	14	18,76	32,00
4		13	0,00	86,00

Tab. 5.15: Processo do AHC do sistema IEEE 24 barras para o Caso 5 considerando fontes de potência reativa nas barras 3, 4 e 9, usando o modelo CA. Os custos são dados em $\times 10^6$ US\$

A fonte de potência reativa na barra 4 é irrelevante e foi eliminada, a geração de potência reativa dos compensadores síncronos nas barras 3 e 9 são 348,67 e 500,31 Mvar, respectivamente. As perdas de potência ativa e reativa são 272,90 MW e 1867,59 Mvar, respectivamente. A topologia inicial do sistema IEEE de 24 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 5.13.

Fazendo um teste considerando compensadores síncronos em todas as barras do sistema, o resultado final de planejamento foi o mesmo que o planejamento anterior. Com os resultados obtidos observa-se que não é preciso alocar fontes de potência reativa em todas as barras do sistema, porém somente em algumas barras identificadas pelo índice da *ID*.

5.2.3 Sistema Sul Brasileiro de 46 barras

Este sistema tem 46 barras, 79 ramos e uma demanda total de 6880 MW e 1032 Mvar. Realizando um planejamento de linha e fontes de potência reativa, o custo obtido é $v = \text{US\$ } 102,58 \times 10^6$ e as adições são as seguintes: $n_{05-06} = 2$, $n_{19-25} = 1$, $n_{20-21} = 1$, $n_{24-25} = 1$, $n_{42-43} = 1$, $n_{42-44} = 1$, $n_{46-06} = 1$. Instalando fontes de potência reativa nas barras 2, 20, 23, 42 e 45. As perdas ativas e reativas do sistema são 310,62 MW e 2569,90 Mvar. A solução é mostrada na Fig. 5.14. O AHC convergiu após resolver 59 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 e 8 do AHC.

5.2.4 Sistema Norte-Nordeste Brasileiro de 87 barras

Este sistema tem 87 barras, 183 ramos e existem dois cenários de demanda. No primeiro cenário, *plano P1*, a demanda total é de 20316 MW e 3049 Mvar. No segundo, *plano P2*, a demanda total é de 29748 MW e 4466 Mvar.

Para o *plano P1*, realizando o planejamento de linhas e fontes de potência reativa, o custo obtido é $v = \text{US\$ } 1211.631 \times 10^6$. Foram instaladas fontes de potência reativa nas barras 1, 21, 25, 44 e 50. As perdas ativas e reativas do sistema são 993.12 MW e 9906.91 Mvar. No passo 4 do AHC as linhas n_{18-74} e n_{11-53} foram removidas, e a solução final é a seguinte:

$$\begin{aligned} n_{05-56} = 1, & \quad n_{05-58} = 1, \quad n_{12-84} = 4, \quad n_{13-15} = 3, \quad n_{13-17} = 1, \quad n_{14-59} = 1, \quad n_{15-16} = 2, \\ n_{15-45} = 1, & \quad n_{16-44} = 3, \quad n_{16-61} = 2, \quad n_{16-77} = 2, \quad n_{18-50} = 6, \quad n_{18-74} = 2, \quad n_{20-56} = 1, \\ n_{21-57} = 1, & \quad n_{22-58} = 1, \quad n_{24-43} = 1, \quad n_{25-55} = 3, \quad n_{30-31} = 1, \quad n_{30-63} = 2, \quad n_{36-46} = 1, \\ n_{39-42} = 1, & \quad n_{40-45} = 1, \quad n_{41-64} = 2, \quad n_{42-44} = 1, \quad n_{43-55} = 1, \quad n_{49-50} = 3, \quad n_{52-59} = 1, \\ n_{53-54} = 2, & \quad n_{54-55} = 2, \quad n_{54-63} = 1, \quad n_{56-57} = 1, \quad n_{61-64} = 1, \quad n_{61-85} = 2, \quad n_{74-84} = 1, \\ n_{77-84} = 1. & \end{aligned}$$

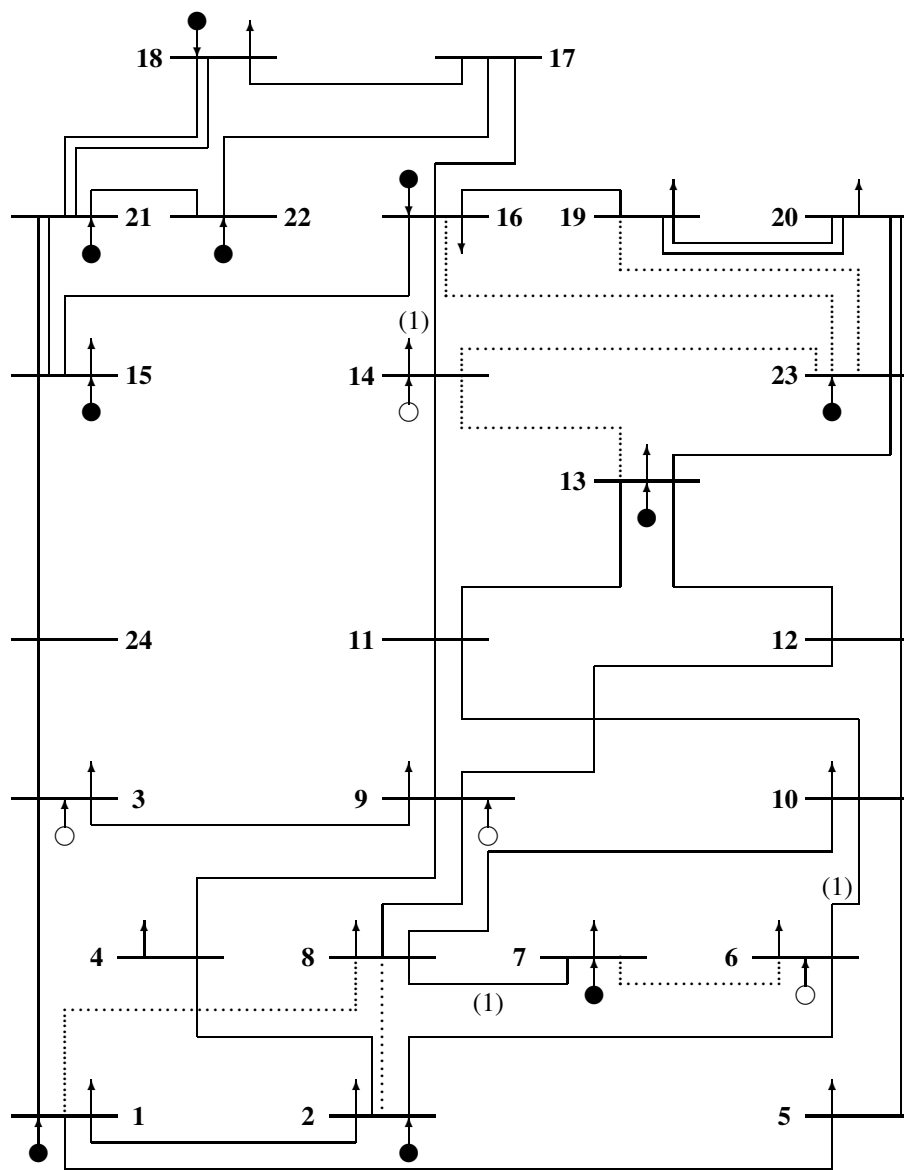


Fig. 5.13: Solução final do sistema IEEE 24 barras para o Caso 5 considerando fontes de potência reativa nas barras 3 e 9, usando o modelo CA. As linhas tracejadas representa circuitos candidatos

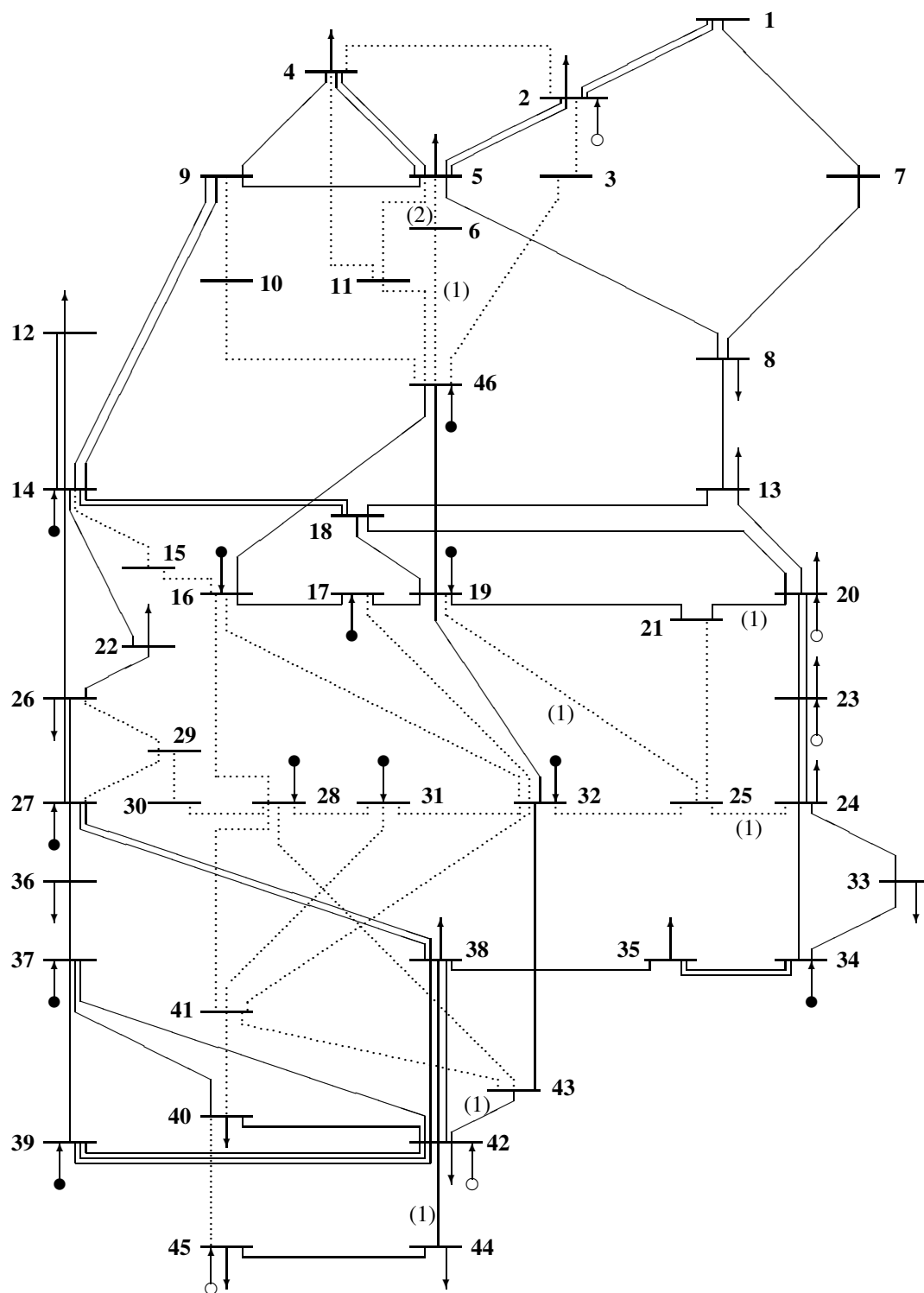


Fig. 5.14: Solução final do sistema Brasileiro Sul de 46 barras considerando fontes de potência reativa nas barras 2, 20, 23, 42 e 45, usando o modelo CA. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos

Para o *plano P2*, realizando o planejamento de linha e fontes de potência reativa, o custo obtido é $v = \text{US\$ } 2635.343 \times 10^6$. Foram instalados fontes de potência reativa nas barras 1, 21, 25, 44 e 50. As perdas ativas e reativas do sistema são 1593.69 MW e 15908.89 Mvar. No passo 4 do AHC as linhas n_{25-55} , n_{5-58} e n_{5-68} foram removidas. A solução é mostrada na Fig. 5.15 e a solução final é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 n_{01-02} &= 1, & n_{04-05} &= 2, & n_{05-56} &= 1, & n_{05-58} &= 2, & n_{05-80} &= 1, & n_{08-73} &= 1, & n_{12-17} &= 3, \\
 n_{12-84} &= 2, & n_{13-14} &= 1, & n_{13-15} &= 5, & n_{14-45} &= 1, & n_{14-59} &= 1, & n_{15-16} &= 5, & n_{15-45} &= 1, \\
 n_{16-44} &= 7, & n_{16-61} &= 2, & n_{17-18} &= 3, & n_{18-50} &= 10, & n_{18-74} &= 3, & n_{20-56} &= 1, & n_{21-57} &= 2, \\
 n_{22-58} &= 2, & n_{23-24} &= 1, & n_{24-43} &= 2, & n_{25-55} &= 5, & n_{30-31} &= 3, & n_{30-63} &= 3, & n_{35-51} &= 1, \\
 n_{36-46} &= 2, & n_{39-42} &= 3, & n_{40-45} &= 2, & n_{41-64} &= 3, & n_{42-44} &= 4, & n_{43-55} &= 4, & n_{43-58} &= 3, \\
 n_{49-50} &= 5, & n_{52-59} &= 1, & n_{53-54} &= 1, & n_{54-55} &= 2, & n_{54-63} &= 2, & n_{56-57} &= 1, & n_{58-78} &= 1, \\
 n_{61-64} &= 2, & n_{61-85} &= 2, & n_{67-71} &= 2, & n_{68-83} &= 1, & n_{71-72} &= 1, & n_{71-83} &= 1, & n_{72-73} &= 1, \\
 n_{73-74} &= 1, & n_{74-84} &= 1, & n_{78-80} &= 1, & n_{80-83} &= 1.
 \end{aligned}$$

5.3 Comentários dos Resultados

Um aspecto importante mostrado neste capítulo é a possibilidade de usar diretamente o modelo CA em substituição aos modelos relaxados nos trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Deve-se observar que o modelo CA exato ainda não foi usado em trabalhos de otimização do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão quando são usadas as técnicas de otimização formais. Acredita-se que o uso do modelo CA foi adiado por dois motivos fundamentais: 1) a falta de um algoritmo eficiente e robusto para resolver os problemas de PNL que aparecem no processo de otimização e 2) pela suposição, muito difundida entre engenheiros eletricitas, de que não seria possível trabalhar com sistemas ilhados e usando o modelo CA. Portanto, as dificuldades foram superadas com a implementação do algoritmo de pontos interiores para resolver de forma eficiente problemas de PNL.

O trabalho também mostra que é possível otimizar sistemas cujas topologias ótimas sejam ilhadas como foi mostrado na seção de testes. Do ponto de vista elétrico, significa que existem dois ou mais sistemas isolados operando de forma independente. Do ponto de vista matemático, significa que existem dois ou mais conjuntos de variáveis de decisão e de parâmetros relacionados de forma independente, mas no processo de otimização essas variáveis foram otimizadas de forma integrada. Generalizando essa idéia, pode-se concluir que é matematicamente possível realizar o trabalho de otimizar a expansão de sistemas elétricos ilhados. Portanto, as dificuldades que aparecem em al-

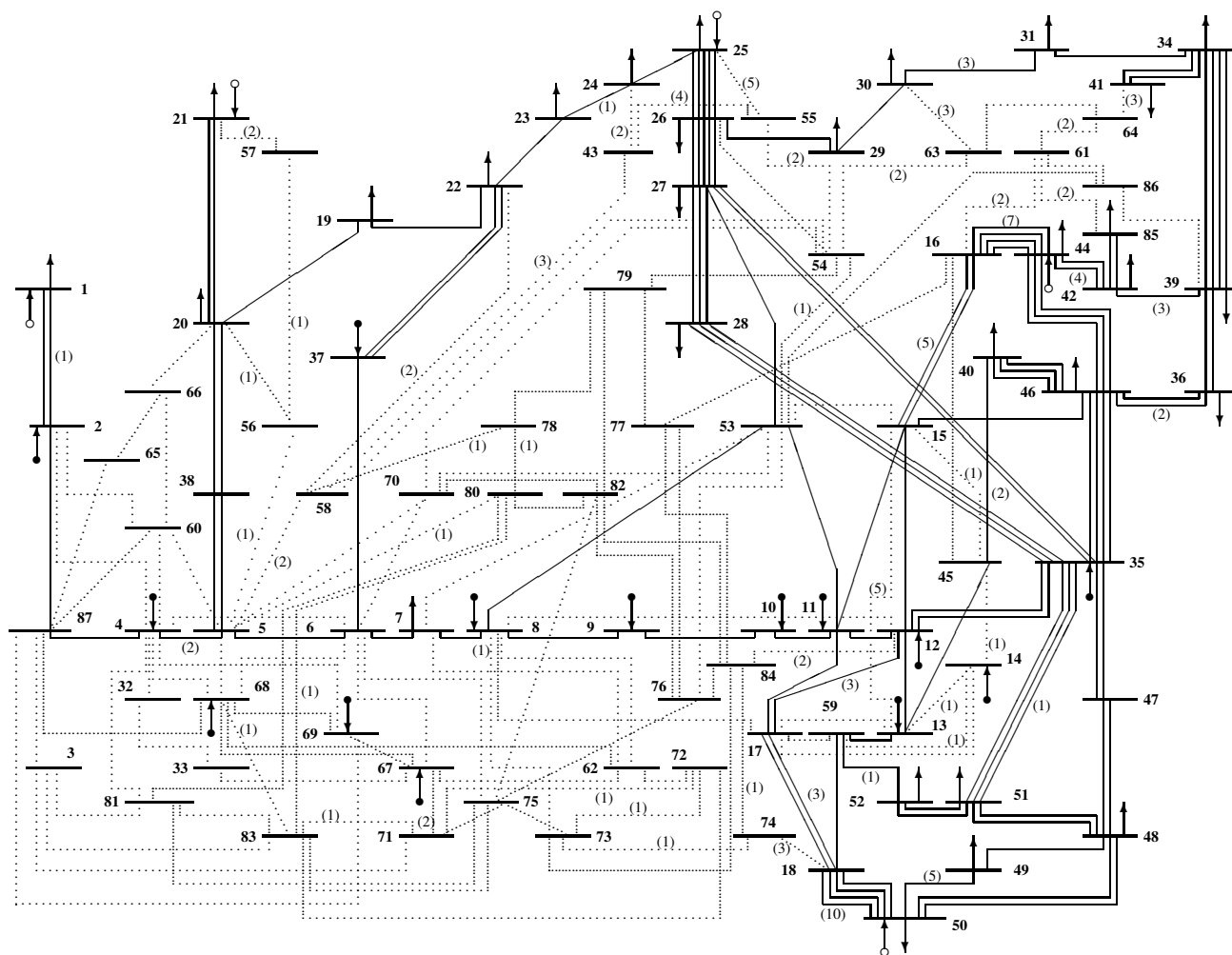


Fig. 5.15: Solução final do sistema Nordeste Brasileiro de 87 barras considerando fontes de potência reativa nas barras 1, 21, 25, 44 e 50, usando o modelo CA. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos

gumas propostas de otimização do problema de planejamento de trabalhar com sistemas ilhados são resultantes da lógica de otimização proposta (geralmente este problema aparece em alguns algoritmos heurísticos construtivos) e não da natureza do problema (otimização da expansão da transmissão de um sistema elétrico usando o modelo CA).

Neste capítulo também foi considerado o problema de alocação de fontes de potência reativa de forma preliminar em todos os sistemas testes apresentados. O objetivo foi conseguir planos de expansão usando o modelo CA, mas tentando minimizar a influência dos limites da tensão do sistema nos planos da expansão. Portanto, uma evolução natural do trabalho apresentado consiste em formular um modelo matemático que permita realizar de maneira formal o planejamento integrado da expansão de sistemas de transmissão e da alocação de fontes de potência reativa. Os próximos trabalhos de

pesquisa devem abordar esse assunto, assim como as técnicas de otimização.

Uma das possibilidades que a metodologia apresentada oferece é poder realizar de forma eficiente a fase de reforços (se for necessário) dos planos de expansão quando é utilizado inicialmente um modelo simplificado (por exemplo, o modelo CC), no momento que é feita a fase de planejamento de reativos. Por exemplo, para o sistema Garver sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração (ver caso 5 para o sistema Garver), a solução ótima usando o modelo CC (Romero et al., 2002), é a mesma solução encontrada pelo AHC com fontes de potência reativa para o modelo CA (ver na Fig. 5.11), com a alocação de uma fonte de potência reativa nas barras 4 e 5, respectivamente. Para este caso não foram necessários adicionar reforços. Para o sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, a solução ótima usando o modelo CC tem um investimento total $v = \text{US\$ } 110$ e com as adições das seguintes linhas na topologia base: $n_{3-5} = 1$, e $n_{4-6} = 3$ (Romero et al., 2002). Assumindo que todas as barras de carga tem uma compensação infinita, a solução ótima do modelo CC é infactível para o modelo CA, indicando que a solução ótima do modelo CC requer reforços de linhas. Considerando a solução ótima do modelo CC junto com a topologia base do sistema como topologia corrente, e executando o AHC com fontes de potência reativa para o modelo CA, a solução encontrada pelo AHC é a mesma apresentada no caso 5 para o sistema Garver mostrado na Fig. 5.10. Foi adicionada uma linha entre as barras 2-6, uma fonte de potência reativa na barra 5 e retirada da solução ótima do modelo CC uma linha no circuito 4-6. A mesma análise foi feita para os sistemas IEEE 24 barras e Sul Brasileiro 46 barras utilizando a solução ótima do modelo CC junto com a topologia base do sistema como topologia corrente e executando o AHC com fontes de potência reativa para o modelo CA, a solução encontrada pelo AHC é a mesma apresentada neste capítulo.

Os resultados encontrados usando vários tipos de testes permitem verificar o desempenho eficiente e robusto da proposta de otimização apresentada para o modelo CA. Os resultados encontrados também mostram que as topologias encontradas, assim como os valores de investimento, para os modelos CC e CA são diferentes. Entre os especialistas de planejamento existe a suposição de que essa diferença é pequena. Esta conclusão tem caráter preliminar porque as topologias conhecidas para o modelo CA foram encontradas usando um AHC. Assim, esse assunto deve ser analisado em detalhe quando forem encontradas topologias para o modelo CA usando algoritmos mais eficientes como as metaheurísticas. Finalmente, deve-se observar que o módulo menos eficiente da proposta apresentada é a técnica geral de otimização utilizada, isto é, o algoritmo heurístico construtivo usado para encontrar uma topologia de boa qualidade para o problema. Portanto, pretende-se desenvolver algoritmos de otimização mais eficientes como os algoritmos *Branch and Bound* e as metaheurísticas que aproveitem a modelagem apresentada (modelo CA), assim como o módulo fundamental de otimização, isto é, o algoritmo de pontos interiores para resolver um PNL.

Capítulo 6

Algoritmo Heurístico Construtivo para o Modelo CC

Um algoritmo heurístico construtivo especializado para resolver o problema do planejamento estático da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo CC é apresentado. A idéia básica vem da aplicação do trabalho de Garver para o modelo de transportes (Garver, 1970). O AHC proposto representa uma mudança significativa em relação aos outros AHC devido à necessidade de resolver um problema de PNL em cada passo do AHC. O índice de sensibilidade do AHC, assim como um modelo matricial do problema de PNL são discutidos.

6.1 Algoritmo Heurístico Construtivo para o Modelo CC

Assim como o AHC para o problema de planejamento usando o modelo CA analisado no Capítulo 5, é possível usar a solução do problema de planejamento usando o modelo CC, após relaxar a integralidade das variáveis de investimento, para calcular um índice de sensibilidade. Ou seja, se os elementos do vetor $\mathbf{n}$ forem considerados variáveis reais (não inteiras) no problema de planejamento usando modelo CC (ver Capítulo 2), este modelo se transforma num problema de PNL, conhecido como problema de programação não-linear correspondente. Tal como no modelo CA, a solução do problema correspondente é inaceitável como proposta de solução para o problema do planejamento da expansão de sistemas de transmissão (presença de linhas e/ou transformadores com valores fracionários), mas pode ser utilizado como uma estratégia para encontrar uma boa solução com variáveis de investimento inteiras. O índice de sensibilidade encontrado com a solução deste problema de PNL pode ser usado para identificar o circuito mais adequado para ser adicionado ao sistema. Assim, o circuito que deve ser adicionado ao sistema é aquele com o maior carregamento do fluxo de potência entre as soluções de PNL. Logo o índice de sensibilidade é dado por:

$$IS = \max \{N\bar{f}\} \quad (6.1)$$

Em cada passo do AHC a topologia corrente deve ser atualizada. Os circuitos da topologia base, assim como os circuitos adicionados no processo iterativo, formam a topologia corrente. Uma característica importante do AHC é a identificação do circuito mais importante nos termos do investimento e de restrições operacionais. Assim como o AHC para o problema de planejamento com o modelo CA, é possível a existência de circuitos irrelevantes adicionados durante o processo anterior, devido a adições realizadas posteriormente. Para verificar essa possibilidade, ordenam-se os circuitos em forma decrescente de seus custos e eliminam-se aqueles que, uma vez simulada sua saída, produzem um investimento igual a zero ($v = 0$). Caso exista mais de um circuito adicionado dentro em um ramo, procede-se a simular também sua saída.

6.1.1 Algoritmo Geral do AHC para o modelo CC

Se for usada a idéia de Garver (Garver, 1970) para propor um algoritmo heurístico construtivo para o problema de planejamento usando o modelo CC tem-se:

1. Assumir a configuração base como configuração corrente.
2. Resolver o problema de PNL para o problema de planejamento usando o modelo CC relaxado para a configuração corrente. Se a solução do problema de PNL indicar que $v = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (uma configuração viável para o modelo CC foi encontrada); ir ao passo 4. Caso contrário ir ao passo 3.
3. Usar o índice de sensibilidade (6.1) para identificar o circuito mais promissor. Adicionar o circuito à configuração corrente. Voltar ao passo 2.
4. Ordenar os circuitos adicionados em ordem decrescente de seus custos. Usando o problema de PNL, remover os circuitos adicionados cuja retirada ainda permite que o sistema opere em condições adequadas. A solução para o AHC é formada pelos circuitos que forem mantidos.

O problema de PNL que tem que ser resolvido na etapa 2 é mostrado em (6.2).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}^T(\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \Upsilon \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{p} = \mathbf{d} \\
 & (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0)(\Upsilon |\mathbf{S} \boldsymbol{\theta}| - \bar{\mathbf{f}}) \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq \bar{\mathbf{n}} \\
 & \boldsymbol{\theta} \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \quad (6.2)$$

É importante observar que os problemas de PNL resolvidos no passo 2 do AHC apresentam a mesma estrutura, variando somente os elementos de $\mathbf{N}^0$, que durante o processo iterativo são armazenados os circuitos da configuração base e os circuitos adicionados no processo iterativo.

A verificação do passo 4 foi feita resolvendo o mesmo problema de PNL do passo 2. Mas esta verificação pode ser feita facilmente e eficientemente resolvendo o seguinte problema de PL, como é mostrado em (6.3).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{e}^T \mathbf{r} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}^T \mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{p} + \mathbf{r} = \mathbf{d} \\
 & \mathbf{N}^0 (\Upsilon |\mathbf{S} \boldsymbol{\theta}| - \bar{\mathbf{f}}) \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{d} \\
 & \boldsymbol{\theta} \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

em que, $\mathbf{r}$ representa o vetor de geração artificial e $\mathbf{e}$ é um vetor de uns (1's) com dimensão apropriada.

6.2 MPI Aplicado na Resolução do Modelo CC Relaxado

O problema (6.2) pode ser escrito como um problema de PNL:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{D} \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{E} \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{F} \mathbf{x} - \mathbf{g} \leq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

em que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Upsilon \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{S}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}^T \mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} & -[\bar{\mathbf{f}}] & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} & -[\bar{\mathbf{f}}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^0 \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{N}^0 \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nx}$ representa as variáveis de decisão do problema de PNL e $\mathbf{X}$ é uma matriz diagonal contendo $\mathbf{x}$. $[\bar{\mathbf{f}}]$ é um operador que representa uma matriz diagonal com elementos $\bar{\mathbf{f}}$. As matrizes e vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{ng \times nx}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{ng}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{nx}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{nh \times nx}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{nh}$ e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$ foram formados em função dos dados de (6.2). Se $\mathbf{x}^*$ é uma solução local do problema (6.4), logo existem os multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{ng}$ e $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{ndx}$, que satisfazem as condições de otimalidade perturbadas de Karush-Kuhn-Tucker (Torres and Quintana, 1998).

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + (\mathbf{H}^T \mathbf{X} + [\mathbf{Hx}]) (\mathbf{E}^T \boldsymbol{\pi} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{DXHx} - \mathbf{Ax} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{EXHx} + \mathbf{Fx} - \mathbf{g} + \mathbf{s} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\pi} &= \mu^k \mathbf{e} \end{aligned} \tag{6.5}$$

em que $\mu^k > 0$ é o parâmetro de barreira que decresce em forma monotônica para zero (Fiacco and McCormick, 1968). $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{nh}$ é um vetor de variáveis de folga que transformam as restrições de desigualdade de (6.4) em restrições de igualdade; $\mathbf{S}$ é uma matriz diagonal contendo $\mathbf{s}$. $\mathbf{e}$ é um vetor de uns (1's) com dimensão apropriada. A Eq. (6.5) pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) - \mu^k \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6.6}$$

em que $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$ é o vetor de todas as variáveis, e $\mathbf{u}$ é um vetor de uns (1's) e zeros (0's) com dimensão apropriada. O sistema de equações não lineares (6.6) pode ser resolvido utilizando o método de Newton, sendo necessária a solução de um sistema de equações lineares em cada iteração k , como é mostrado na referência (Torres and Quintana, 1998), como é mostrado:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{w}^k) \Delta \mathbf{w}^k = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) + \mu^k \mathbf{u} \tag{6.7}$$

em que $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{w}^k)$ é o jacobiano de $\mathbf{F}(\mathbf{w}^k)$ mostrada em (6.6), e $\Delta \mathbf{w}^k = [\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \boldsymbol{\lambda}^k, \Delta \boldsymbol{\pi}^k, \Delta \mathbf{s}^k]^T$ é o vetor de direções do método de Newton.

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T[\mathbf{E}^T\boldsymbol{\pi} - \mathbf{D}^T\boldsymbol{\lambda}] + [\mathbf{E}^T\boldsymbol{\pi} - \mathbf{D}^T\boldsymbol{\lambda}]\mathbf{H} & -(\mathbf{H}^T\mathbf{X} + [\mathbf{H}\mathbf{x}])\mathbf{D}^T - \mathbf{A}^T & (\mathbf{H}^T\mathbf{X} + [\mathbf{H}\mathbf{x}])\mathbf{E}^T + \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}(\mathbf{X}\mathbf{H} + [\mathbf{H}\mathbf{x}]) - \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{H} + [\mathbf{H}\mathbf{x}]) + \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \boldsymbol{\Pi} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Depois de resolver (6.7) em cada iteração k , a atualização das variáveis é feita por (6.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha_k \Delta \mathbf{x}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha_k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\pi}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}^k + \alpha_k \Delta \boldsymbol{\pi}^k \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \alpha_k \Delta \mathbf{s}^k \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que $\alpha_k \in (0, 1]$ é o tamanho de passo em cada iteração k . A tamanho máximo de passo em cada iteração k é determinado pela expressão

$$\alpha_k = \min\left\{\gamma \min_{\Delta s_i^k < 0} \left(\frac{-s_i^k}{\Delta s_i^k}\right), \gamma \min_{\Delta \pi_i^k < 0} \left(\frac{-\pi_i^k}{\Delta \pi_i^k}\right); 1, 0\right\} \quad (6.10)$$

O valor escalar $\gamma \in (0; 1)$ é um fator de segurança para assegurar que o próximo ponto satisfaça as condições de não negatividade; um valor típico é $\gamma = 0,9995$. O valor residual da condição de complementaridade é calculado em cada iteração k pela expressão

$$\rho^k = (\mathbf{s}^k)^T \boldsymbol{\pi}^k \quad (6.11)$$

O critério de convergência do método Newton usado para esta implementação é a seguinte:

$$\begin{aligned} \max\{\|\mathbf{D}\mathbf{X}^k\mathbf{H}\mathbf{x}^k + \mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}\|_\infty, \|\mathbf{E}\mathbf{X}^k\mathbf{H}\mathbf{x}^k + \mathbf{F}\mathbf{x}^k - \mathbf{g}\|_\infty\} &\leq 10^{-4} \\ \frac{\|\mathbf{c} - (\mathbf{H}^T\mathbf{X}^k + [\mathbf{H}\mathbf{x}^k])(\mathbf{D}^T\boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{E}^T\boldsymbol{\pi}^k) + \mathbf{F}^T\boldsymbol{\pi}^k - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}^k\|_\infty}{1 + \|\mathbf{x}^k\|_2} &\leq 10^{-4} \\ \frac{\rho^k}{1 + \|\mathbf{x}^k\|_2} &\leq 10^{-4} \\ \frac{|\mathbf{c}^T(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})|}{1 + |\mathbf{c}^T\mathbf{x}^k|} &\leq 10^{-4} \end{aligned}$$

O métodos de pontos interiores PMCMCC analisado no capítulo 4 é utilizado para resolver eficientemente à Eq. (6.7). O primeiro passo é calcular a direção *affine-scaling* $\Delta \mathbf{w}^{af}$, como foi mostrado em (Torres and Quintana, 1998).

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k) \Delta \mathbf{w}^{af} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) \quad (6.12)$$

em que, $\Delta \mathbf{w}^{af}$ é usada para estimar o parâmetro de barreira μ^{af} .

$$\mu^{af} = \min\left\{\left(\frac{\rho_{af}}{\rho^k}\right)^2; 0, 2\right\} \frac{\rho_{af}}{nh} \quad (6.13)$$

em que $\rho^{af} = (\boldsymbol{\pi}^k + \alpha_{af} \Delta \boldsymbol{\pi}^{af})^T (\mathbf{s}^k + \alpha_{af} \Delta \mathbf{s}^{af})$ é o gap de complementaridade e o tamanho de passo na direção *affine-scaling* (α_{af}) é calculado usando (6.10). A equação (6.12) é o passo preditor do PC (Torres and Quintana, 1998). O m -ésimo passo corretor do método de pontos interiores PMC, como foi proposto em (Torres and Quintana, 2000) consiste em resolver:

$$\alpha_m^2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k) \Delta \mathbf{w}^{m+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) + \mu^{af} \mathbf{u} - \\ (\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{X}^m + [\mathbf{H} \Delta \mathbf{x}^m]) (\mathbf{E}^T \Delta \boldsymbol{\pi}^m - \mathbf{D}^T \Delta \boldsymbol{\lambda}^m) \\ - \mathbf{D} \Delta \mathbf{X}^m \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}^m \\ \mathbf{E} \Delta \mathbf{X}^m \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}^m \\ \Delta \mathbf{S}^m \Delta \boldsymbol{\pi}^m \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

em que, $\Delta \mathbf{w}^m$ é a m -ésima direção. $\Delta \mathbf{S}^m$ e $\Delta \mathbf{X}^m$ são matrizes diagonais contendo $\Delta \mathbf{s}^m$ e $\Delta \mathbf{x}^m$, respectivamente. Se $m = 0$, $\Delta \mathbf{w}^0 = \Delta \mathbf{w}_{af}^k$. Os termos de segunda ordem das equações quadráticas de (6.5) foram incluídos no m -th passo corretor, como foi sugerido em (Torres and Quintana, 1998). O número de correções m para cada iteração k varia; no caso de $m = 1$ o método de pontos interiores PMC corresponde ao MPI preditor – corretor convencional. O próximo passo corretor ($m + 1$) é calculado se for possível obter uma redução da infactibilidade ($\|\mathbf{F}(\mathbf{w}^m)\| < \|\mathbf{F}(\mathbf{w}^{m-1})\|$) na iteração m ; e se m for menor que um número máximo de passos de correção M (o que é tipicamente igual a 5). Se $\|\mathbf{F}(\mathbf{w}^m)\| \geq \|\mathbf{F}(\mathbf{w}^{m-1})\|$ na iteração m o processo é interrompido.

Baseado em (Torres and Quintana, 2001), os elementos do vetor $\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}$ que são demasiadamente grandes ou pequenos quando comparados ao parâmetro da barreira μ^{af} são indesejáveis, porque produzem convergência lenta. Este problema é resolvido usando correções de centralidade. O c -ésimo passo de correção de centralidade, como é mostrado em (Torres and Quintana, 2001), é feito resolvendo (6.15).

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{w}^k) \Delta \mathbf{w}^{c+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^k) - \Delta^m - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^c \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

em que $\Delta \mathbf{w}^c$ é a c -ésima direção de correção de centralidade. Δ^m é o vetor dos termos de correção na última iteração do método de pontos interiores MPC. Se $c = 0$, $\Delta \mathbf{w}^0 = \Delta \mathbf{w}^{m-1}$. Usando a direção de busca $\Delta \mathbf{w}^c$, o passo máximo α_c é obtido por (6.10) e fazendo-se $\alpha_{trial} = o \alpha_c$, onde $o > 1, 0$ (valor típico de 1,2). Se $\alpha_{trial} > 1, 0$ então $\alpha_{trial} = 1, 0$. O vetor complementar é calculado por:

$$\mathbf{q}^c = (\mathbf{S}^k + \alpha_{trial} \Delta \mathbf{S}^c)(\boldsymbol{\pi}^k + \alpha_{trial} \Delta \boldsymbol{\pi}^c) + \Delta \mathbf{S}^m \Delta \boldsymbol{\pi}^m \quad (6.16)$$

em que $\Delta \mathbf{S}^c$ é uma matriz diagonal contendo $\Delta \mathbf{s}^c$. Cada elemento i do vetor $\mathbf{q}^c$ é comparado com o parâmetro de barreira (μ^{af}) para calcular os elementos do vetor $\mathbf{d}^c$, como é mostrado em (6.17).

$$d_i^c = \begin{cases} q_i^c - \beta_{max} \mu^{af} & \text{se } q_i^c > \beta_{max} \mu^{af}, \\ q_i^c - \beta_{min} \mu^{af} & \text{se } q_i^c < \beta_{min} \mu^{af}, \\ -(\beta_{max} + \beta_{min}) \mu^{af} & \text{se } q_i^c < -\beta_{max} \mu^{af}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.17)$$

em que, β_{max} e β_{min} são limiares relativos dados, com valores típicos de 10 e 0,1, respectivamente. Como foi sugerido em (Torres and Quintana, 2001), o próximo passo de correção centralizada ($c + 1$) é calculado somente se for possível obter um aumento no máximo tamanho de passo na iteração c ($\alpha_c > \alpha_{c-1} + \Delta$) e c é menor que um número máximo pre-definido de iterações C (tipicamente igual a 5). Onde $\Delta = \zeta(1 - \alpha_{c-1})/C$, ζ tem como valor típico 0,1. No caso de não atender a condição na iteração c , o processo é interrompido e a direção $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{c-1}$ é utilizada.

6.2.1 Algoritmo Geral do MPI para o modelo CC

O método de pontos interiores pode ser sintetizado no seguinte algoritmo:

1. Iniciar M , C e escolher um ponto inicial $\mathbf{w}^0$ que cumpra com as condições de não-negatividade.
2. Calcular o vetor da parte direita da expressão (6.12).

3. Fazer $k = 0$.

Repetir

4. Montar e resolver no ponto atual o sistema (6.12).

5. Calcular μ^{af} usando (6.13).

6. Fazer $m = 0$,

Repetir

a) Montar e resolver no ponto atual o sistema (6.14).

b) Obter ρ^{m+1} . Fazer $m = m + 1$.

Até ($\|\mathbf{F}(\mathbf{w}^m)\| \geq \|\mathbf{F}(\mathbf{w}^{m-1})\|$ ou $m > M$).

Fazer $\Delta \mathbf{w}^m = \Delta \mathbf{w}^{m-1}$.

7. Fazer $c = 0$,

Repetir

a) Montar e resolver no ponto atual o sistema (6.15).

b) Obter α_{c+1} . Fazer $c = c + 1$.

Até ($\alpha_c \leq \alpha_{c-1} + \Delta_{c-1}$ ou $c > C$).

8. Fazer $\Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^{c-1}$.

9. Obter o máximo tamanho de passo usando (6.10).

10. Atualizar as variáveis usando (6.9).

11. Calcular o vetor da parte direita da expressão (6.12).

12. Fazer $k = k + 1$.

Até se obter a convergência.

Ponto inicial

Assim como no Capítulo 4, o ponto inicial somente precisa manter as condições de não negatividade. O processo de convergência é sensível ao ponto inicial e o desempenho dos MPI podem melhorar se alguma iniciação heurística for usada. Uma iniciação heurística é dada a seguir.

1. A determinação de $\mathbf{x}^0$ é dado usando o ponto médio entre os limites superior é inferior para as variáveis com limites.

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{n}}/2 \\ \bar{\mathbf{p}}/2 \end{bmatrix}$$

2. As variáveis de folga primal são logo inicializadas como

$$\mathbf{s}^0 = |\mathbf{E}\mathbf{X}^0\mathbf{H}\mathbf{x}^0 + \mathbf{F}\mathbf{x}^0 - \mathbf{g}|$$

em que $\mathbf{X}^0$ é uma matriz diagonal contendo $\mathbf{x}^0$.

3. A variável dual $\boldsymbol{\lambda}^0$ é inicializada com -1 .

4. As variáveis de folga dual são logo inicializadas como:

$$\boldsymbol{\pi}^0 = \mu^0 (\mathbf{S}^0)^{-1} \mathbf{e}$$

em que $\mathbf{S}^0$ é uma matriz diagonal contendo $\mathbf{s}^0$. Tipicamente $\mu^0 = \{10; 1 \text{ ou } 0, 1\}$.

6.3 Testes e Resultados

O algoritmo heurístico construtivo foi implementado em Matlab 6.0. Para os testes foram usados quatro sistemas: o sistema Garver de 6 barras, sistema IEEE de 24 barras, o sistema Sul Brasileiro de 46 barras e o sistema Colombiano de 93 barras. Os dados elétricos dos sistemas usados para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CC, só para o planejamento estático, estão no Apêndice C.

6.3.1 Sistema Garver de 06 barras

Caso 1: Considerando a topologia base e com reprogramação da geração

O AHC encontra um valor de $v = \text{US\$ } 130$ e a topologia encontrada é a seguinte: $n_{2-3} = 1$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 2$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 6.1, onde v_{NLP} é o investimento fornecido pelo problema de PNL e v é o investimento parcial. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{4-6} , n_{2-6} , n_{3-5} e n_{4-6} . O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 10 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A solução é mostrada na Fig. 6.1.

Caso 2: Considerando a topologia base e sem reprogramação da geração

O valor obtido pelo AHC para v é $\text{US\$ } 200$ e a topologia é a seguinte: $n_{2-6} = 4$, $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 2$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 6.2.

Iter	Adição pelo PNL	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{2-3} = 0,182$; $IS_{2-6} = 1,027$; $IS_{3-5} = 1,018$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,473}$.	99,00	0,00
2	$IS_{2-3} = 0,182$; $IS_{2-6} = \mathbf{1,027}$; $IS_{3-5} = 1,018$; $IS_{4-6} = 0,473$.	69,00	30,00
3	$IS_{2-3} = 0,182$; $IS_{2-6} = 0,027$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,018}$; $IS_{4-6} = 0,473$.	39,00	60,00
4	$IS_{2-3} = 0,182$; $IS_{2-6} = 0,027$; $IS_{3-5} = 0,018$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,473}$.	19,00	80,00
5	$IS_{2-3} = \mathbf{0,058}$.	1,151	110,00
6		0,00	130,00

Tab. 6.1: Processo do AHC do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

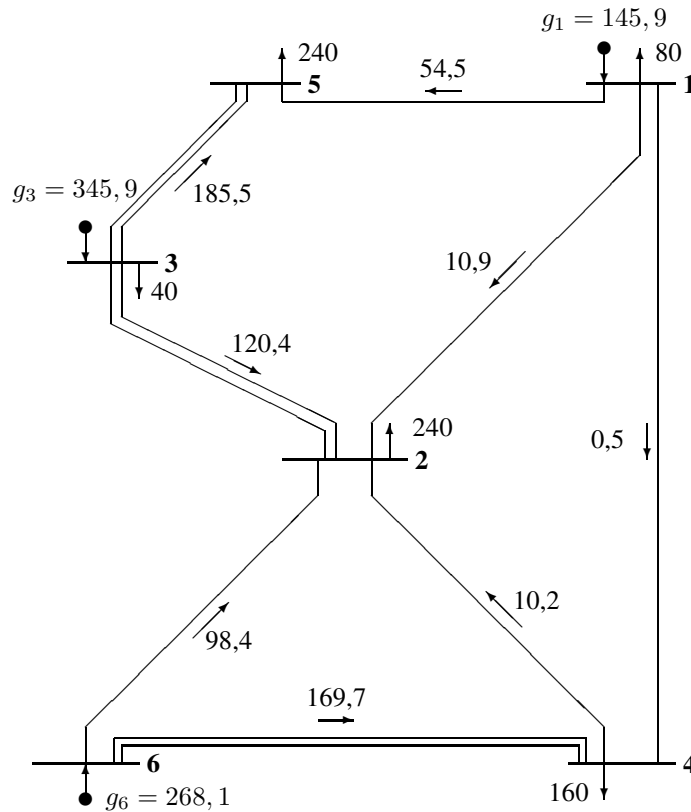


Fig. 6.1: Solução do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

Iter	Adição pelo PNL	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{2-6} = \mathbf{3,505}$; $IS_{3-5} = 0,841$; $IS_{4-6} = 1,943$.	180,25	0,00
2	$IS_{2-6} = \mathbf{2,505}$; $IS_{3-5} = 0,841$; $IS_{4-6} = 1,943$.	150,25	30,00
3	$IS_{2-6} = 1,505$; $IS_{3-5} = 0,841$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,943}$.	120,25	60,00
4	$IS_{2-6} = \mathbf{1,505}$; $IS_{3-5} = 0,841$; $IS_{4-6} = 0,943$.	90,25	90,00
5	$IS_{2-6} = 0,505$; $IS_{3-5} = 0,841$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,943}$.	60,25	120,00
6	$IS_{2-6} = 0,484$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,837}$.	31,27	150,00
7	$IS_{2-6} = \mathbf{0,490}$.	14,69	170,00
8		0,00	200,00

Tab. 6.2: Processo do AHC do sistema Garver considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC

O algoritmo convergiu após resolver 12 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A seqüência de adições foi a seguinte: n_{2-6} , n_{2-6} , n_{4-6} , n_{2-6} , n_{4-6} , n_{3-5} e n_{2-6} . A solução é mostrada na Fig. 6.2.

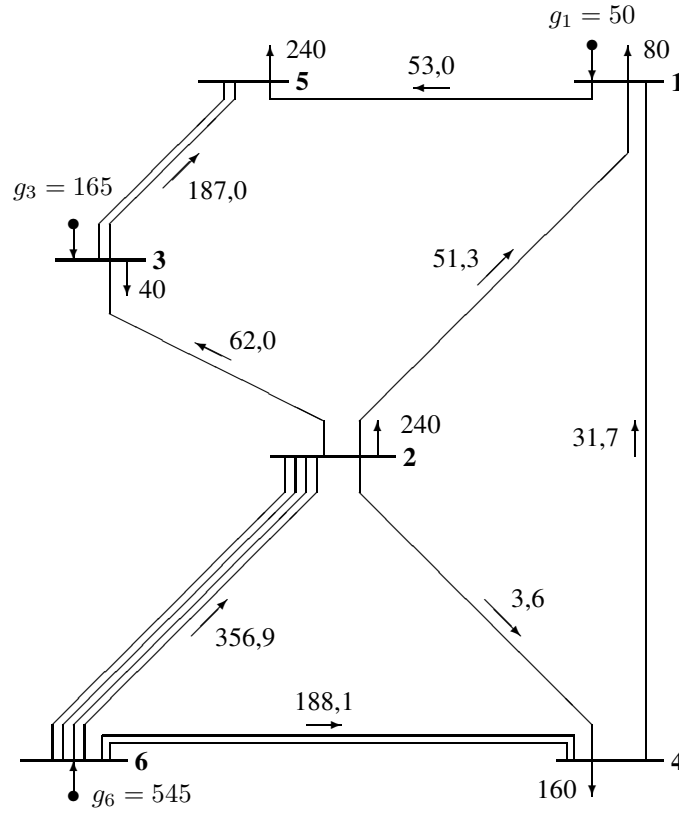


Fig. 6.2: Solução do sistema Garver considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC

Caso 3: Sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração

O valor obtido pelo AHC para v é US\$ 190 e a topologia é a seguinte: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 2$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 6.3. O algoritmo convergiu após resolver 15 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. A seqüência de adições foi a seguinte: n_{3-5} , n_{4-6} , n_{2-3} , n_{2-6} , n_{3-5} , n_{4-6} , n_{1-5} e n_{2-3} . A solução é mostrada na Fig. 6.3.

Iter	Adição pelo PNL	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{1-5} = 0,700$; $IS_{2-3} = 1,500$; $IS_{2-6} = 0,900$; $IS_{3-5} = \mathbf{1,700}$; $IS_{4-6} = 1,600$.	153,00	0,00
2	$IS_{1-5} = 0,700$; $IS_{2-3} = 1,500$; $IS_{2-6} = 0,900$; $IS_{3-5} = 0,700$; $IS_{4-6} = \mathbf{1,600}$.	133,00	20,00
3	$IS_{1-5} = 0,700$; $IS_{2-3} = \mathbf{1,500}$; $IS_{2-6} = 0,900$; $IS_{3-5} = 0,700$; $IS_{4-6} = 0,600$.	103,00	50,00
4	$IS_{1-5} = 0,700$; $IS_{2-3} = 0,500$; $IS_{2-6} = \mathbf{0,900}$; $IS_{3-5} = 0,700$; $IS_{4-6} = 0,600$.	83,00	70,00
5	$IS_{1-5} = 0,646$; $IS_{2-3} = 0,400$; $IS_{3-5} = \mathbf{0,754}$; $IS_{4-6} = 0,600$.	54,00	100,00
6	$IS_{1-5} = 0,400$; $IS_{2-3} = 0,400$; $IS_{2-6} = 0,200$; $IS_{4-6} = \mathbf{0,600}$.	36,00	120,00
7	$IS_{1-5} = \mathbf{0,400}$; $IS_{2-3} = 0,200$; $IS_{2-6} = 0,200$.	18,00	150,00
8	$IS_{2-3} = \mathbf{0,400}$.	8,00	170,00
9		0,00	190,00

Tab. 6.3: Processo do AHC do sistema Garver sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

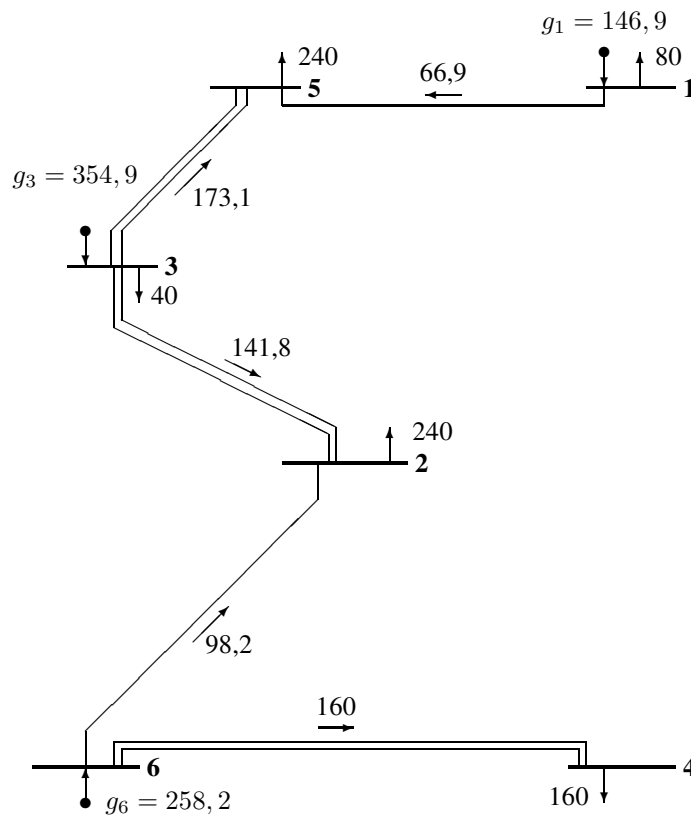


Fig. 6.3: Solução do sistema Garver sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

6.3.2 Sistema IEEE de 24 barras

Partindo-se da topologia inicial, o AHC encontra um valor de $v = \text{US\$ } 152 \times 10^6$ e a topologia encontrada é a seguinte: $n_{6-10} = 1$, $n_{7-8} = 2$, $n_{10-12} = 1$, $n_{14-16} = 1$. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{7-8} , n_{7-8} , n_{14-16} , n_{10-12} , n_{6-10} . O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 12 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 6.4. A topologia inicial do sistema IEEE de 24 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na figura 6.4.

Iter	Adição pelo PNL	v_{NLP} US\$	v US\$
1	$IS_{01-05} = 0,305$; $IS_{03-24} = 0,412$; $IS_{06-10} = 1,031$; $IS_{07-08} = \mathbf{3,500}$; $IS_{10-12} = 0,684$; $IS_{11-13} = 1,115$; $IS_{13-14} = 0,280$; $IS_{14-16} = 1,380$; $IS_{14-23} = 0,045$.	87,23	0,00
2	$IS_{01-05} = 0,305$; $IS_{03-24} = 0,412$; $IS_{06-10} = 1,031$; $IS_{07-08} = \mathbf{1,750}$; $IS_{10-12} = 0,684$; $IS_{11-13} = 1,115$; $IS_{13-14} = 0,280$; $IS_{14-16} = 1,380$; $IS_{14-23} = 0,045$.	76,91	16,00
3	$IS_{01-05} = 0,306$; $IS_{03-24} = 0,416$; $IS_{06-10} = 1,031$; $IS_{10-12} = 0,684$; $IS_{11-13} = 1,105$; $IS_{14-16} = \mathbf{1,375}$; $IS_{13-14} = 0,305$.	60,84	32,00
4	$IS_{01-05} = 0,194$; $IS_{03-24} = 0,080$; $IS_{06-10} = 1,080$; $IS_{10-12} = \mathbf{1,120}$.	27,34	86,00
5	$IS_{06-10} = \mathbf{1,173}$.	10,72	136,00
6		0,00	152,00

Tab. 6.4: Processo do AHC do sistema IEEE 24 barras considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

6.3.3 Sistema Sul Brasileiro de 46 barras

Caso 1: Com reprogramação da geração

Com redespacho da geração o custo obtido é $v = \text{US\$ } 102,82 \times 10^6$ e as adições são $n_{05-06} = 2$, $n_{19-25} = 1$, $n_{20-21} = 1$, $n_{24-25} = 2$, $n_{42-43} = 1$, $n_{46-06} = 1$. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{46-06} , n_{05-06} , n_{20-21} , n_{42-43} , n_{24-25} , n_{19-25} , n_{05-06} , n_{24-25} .

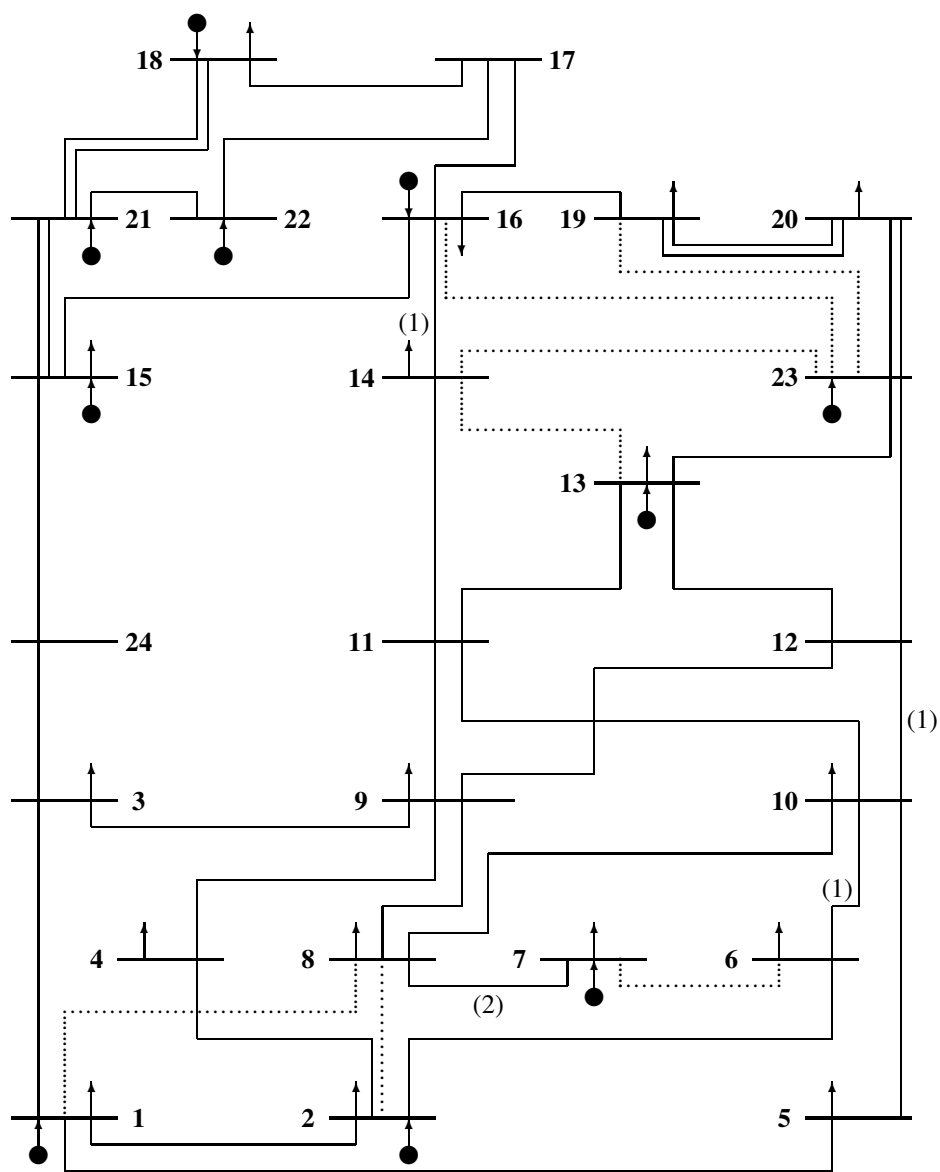


Fig. 6.4: Solução do sistema IEEE 24 barras considerando a topologia da base e com reprogramação da geração, e usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam novos circuitos candidatos

O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 18 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC. O resultado obtido pelo AHC é resumido, passo a passo, na Tab. 6.5.

Iter	Adição pelo PNL	v_{NLP} $\times 10^6$ US\$	v $\times 10^6$ US\$
1	$IS_{20-21} = 6,342$; $IS_{42-43} = 4,758$; $IS_{05-11} = 0,022$; $IS_{46-06} = \mathbf{7,700}$; $IS_{19-25} = 3,934$; $IS_{46-11} = 0,024$; $IS_{24-25} = 3,942$; $IS_{05-06} = 7,392$.	47,45	0,00
2	$IS_{20-21} = 6,132$; $IS_{42-43} = 4,626$; $IS_{19-25} = 3,836$; $IS_{24-25} = 3,846$; $IS_{05-06} = \mathbf{8,424}$.	41,78	16,00
3	$IS_{20-21} = \mathbf{6,132}$; $IS_{42-43} = 4,632$; $IS_{19-25} = 3,850$; $IS_{24-25} = 3,846$; $IS_{05-06} = 2,424$.	33,58	24,18
4	$IS_{20-21} = 0,132$; $IS_{42-43} = \mathbf{4,632}$; $IS_{19-25} = 3,850$; $IS_{24-25} = 3,846$; $IS_{05-06} = 2,430$.	25,41	32,36
5	$IS_{20-21} = 0,132$; $IS_{19-25} = 3,822$; $IS_{24-25} = \mathbf{3,828}$; $IS_{05-06} = 2,418$.	19,01	40,54
6	$IS_{19-25} = \mathbf{4,102}$; $IS_{05-06} = 2,400$.	14,35	48,72
7	$IS_{24-25} = 0,600$; $IS_{05-06} = \mathbf{2,256}$.	3,90	86,47
8	$IS_{24-25} = \mathbf{0,510}$.	0,70	94,64
9		0,00	102,82

Tab. 6.5: Processo do AHC do sistema Sul Brasileiro de 46 barras considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

Caso 2: Sem reprogramação da geração

Sem reprogramação da geração o custo obtido é $v = \text{US\$ } 183,56 \times 10^6$ e as adições são as seguintes: $n_{05-06} = 2$, $n_{14-15} = 1$, $n_{15-16} = 1$, $n_{19-25} = 1$, $n_{20-21} = 1$, $n_{24-25} = 2$, $n_{28-31} = 1$, $n_{31-32} = 1$, $n_{31-41} = 1$, $n_{40-41} = 1$, $n_{40-45} = 1$, $n_{42-43} = 2$, $n_{46-06} = 1$. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{31-32} , n_{42-43} , n_{46-06} , n_{05-06} , n_{24-25} , n_{19-25} , n_{28-31} , n_{20-21} , n_{05-06} , n_{24-25} , n_{42-43} , n_{31-41} , n_{40-41} , n_{15-16} , n_{14-15} , n_{40-45} . O AHC encontra a solução do planejamento após resolver 30 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC.

6.3.4 Sistema Colombiano de 93 barras

Considerando o sistema com a topologia base, o AHC encontra um valor de $v = \text{US\$ } 739,99 \times 10^6$ e a topologia encontrada é a seguinte: $n_{15-18} = 1$, $n_{19-82} = 2$, $n_{27-89} = 2$, $n_{43-88} = 1$, $n_{45-81} = 1$, $n_{52-88} = 1$, $n_{55-57} = 1$, $n_{55-62} = 2$, $n_{55-84} = 1$, $n_{57-81} = 2$, $n_{62-73} = 1$, $n_{68-86} = 1$, $n_{73-74} = 1$, $n_{74-89} = 2$, $n_{82-85} = 1$. A sequência de adições encontrada pelo AHC é a seguinte: n_{57-81} , n_{55-62} , n_{62-73} , n_{82-85} , n_{19-82} , n_{55-84} , n_{74-89} , n_{27-89} , n_{68-86} , n_{45-81} , n_{55-57} , n_{52-88} , n_{57-81} , n_{55-62} , n_{73-74} , n_{27-89} , n_{74-89} , n_{43-88} , n_{19-82} e n_{15-18} . O AHC encontrou a solução do planejamento após resolver 36 problemas de PNL e sem a remoção de circuitos na fase 4 do AHC.

6.4 Comentários dos Resultados

Uma característica deste AHC é que segue as idéias do AHC de Garver usando o Modelo de Transportes (Garver, 1970), onde se despreza a integralidade do vetor $\mathbf{n}$ diretamente do problema de planejamento com o Modelo CC para identificar o circuito mais atraente, com informações técnicas (respeitar as restrições operativas) e econômicas (mínimo investimento), que deve ser adicionado no sistema corrente. Esta característica não aparece nos AHC propostos em (Monticelli et al., 1982; Pereira and Pinto, 1985) onde o circuito mais promissor é calculado somente com informações técnicas (minimizar o carregamento do sistema ou minimizar o corte de carga), as informações econômicas são incluídas de forma separada e aproximada no cálculo do IS .

A melhor solução conhecida para o Caso 1 do Sistema Garver é de $v = \text{US\$ } 110$ com uma topologia: $n_{3-5} = 1$, $n_{4-6} = 3$ (Romero et al., 2002). Para este caso o AHC encontrou só uma boa solução. Comparando as configurações finais do AHC com a melhor solução conhecida, pode-se verificar que o AHC adicionou 3 linhas que também estão na melhor solução.

Para os Casos 2 e 3 do Sistema Garver e para o Sistema IEEE de 24 barras, as melhores soluções conhecidas são: $v = \text{US\$ } 200,0$, $v = \text{US\$ } 190,0$ e $v = \text{US\$ } 152,0$, respectivamente (Romero et al., 2002). Neste caso o AHC encontrou as mesmas melhores soluções para os três casos.

A melhor solução conhecida para o Sistema Sul Brasileiro de 46 barras com reprogramação da geração é de $v = \text{US\$ } 72,78 \times 10^6$ com uma topologia: $n_{02-05} = 1$, $n_{05-06} = 2$, $n_{13-20} = 1$, $n_{20-21} = 2$, $n_{20-23} = 1$, $n_{42-43} = 1$, $n_{46-06} = 1$ (Romero et al., 2002). Para este caso o AHC encontrou uma solução pobre. Comparando as configurações finais do AHC com a melhor solução conhecida pode-se verificar que o AHC adicionou 5 linhas que também estão na melhor solução, das quais 4 foram adicionadas nas primeiras iterações do AHC (ver Tab. 6.5). Pode-se verificar que neste caso o grande “desvio” do AHC acontece com a adição do circuito 24 – 25 na iteração 5 do AHC.

Para o Sistema Sul Brasileiro de 46 barras sem reprogramação da geração, a melhor solução conhecida é de $v = \text{US\$ } 154,42 \times 10^6$ com a seguinte topologia: $n_{05-06} = 2$, $n_{19-25} = 1$, $n_{20-21} =$

1, $n_{24-25} = 2$, $n_{26-29} = 3$, $n_{28-30} = 1$, $n_{29-30} = 2$, $n_{31-32} = 1$, $n_{42-43} = 2$, $n_{46-06} = 1$ (Romero et al., 2002). Para a condição sem reprogramação o sistema sul brasileiro aumenta o valor da sua função objetivo devido ao fato do problema tornar-se mais restrito. Comparando as configurações finais do AHC com a melhor solução conhecida pode-se verificar que o AHC adicionou 10 linhas que também estão na melhor solução.

A melhor solução conhecida para o Sistema Colombiano de 93 barras é de $v = \text{US\$ } 560,00$ com a seguinte topologia: $n_{43-88} = 2$, $n_{15-18} = 1$, $n_{30-65} = 1$, $n_{30-72} = 1$, $n_{55-57} = 1$, $n_{55-84} = 1$, $n_{56-57} = 1$, $n_{55-62} = 1$, $n_{27-29} = 1$, $n_{29-64} = 1$, $n_{50-54} = 1$, $n_{62-73} = 1$, $n_{54-56} = 1$, $n_{72-73} = 1$, $n_{19-82} = 2$, $n_{82-85} = 1$, $n_{68-86} = 1$ (Romero et al., 2002). Para este caso o AHC encontrou uma pobre solução. Comparando as configurações finais do AHC com a melhor solução conhecida pode-se verificar que o AHC adicionou 11 linhas que também estão na melhor solução.

A utilização do AHC para a solução do problema mostrou ser eficiente, embora tenham algumas desvantagens nas fases finais quando os valores dos n são pequenos. O índice de sensibilidade utilizado apresenta um excelente desempenho nas primeiras iterações do algoritmo. Entretanto, nas iterações finais do processo o índice fica menos eficaz na escolha dos circuitos a serem adicionados.

Assim como para o Capítulo 5, o módulo menos eficiente da proposta apresentada é a técnica geral de otimização usada, isto é, o algoritmo heurístico construtivo usado para encontrar uma topologia de boa qualidade para o problema. Portanto, desenvolveu-se um algoritmo de otimização mais eficiente como o algoritmo *Branch and Bound*.

Capítulo 7

Algoritmo *Branch and Bound* para o Modelo CC

O B&B é um algoritmo que usa a estratégia de relaxação e separação para resolver um problema complexo e tem sido mais estudado e analisado para resolver problemas de programação linear inteiro misto com espaço de busca geralmente muito grande.

Um algoritmo B&B para resolver diretamente o problema de planejamento estático da expansão de transmissão com o modelo CC é apresentado neste capítulo. Uma análise dos testes de sondagem no algoritmo B&B, dos pseudocustos para gerenciar o desenvolvimento da árvore de B&B e do problema de PNL resolvido em cada nó da árvore de B&B também são apresentados. Os problemas de PNL são resolvidos usando a metodologia desenvolvida no Capítulo 6.

7.1 Características do Algoritmo Branch and Bound para Problemas de Programação Não-Linear Inteiro Misto

O algoritmo de Branch and Bound convencional tem a capacidade para encontrar o ótimo global de um problema PLIM. Esse algoritmo é representado por uma árvore enumerada nos vértices de cada ramo, e cada vértice pode ser subdividido em mais dois ramos, ou seja, subdividir o problema desse vértice em dois novos subproblemas. Cada ramo representa possíveis decisões do vértice que gera, e cada vértice é a solução de um PL. Quando são gerados dois nós, geralmente um deles é armazenado na lista para posterior análise, e o outro é resolvido. O método é iniciado com o problema original após relaxar a integralidade das variáveis inteiras, isto é, resolver o problema de programação linear correspondente (PLC). Se a solução do problema PLC é inteiro então foi encontrado o ótimo global. Caso contrário, é escolhida uma variável que é forçada a assumir seus valores inteiros mais próximos

da solução atual, assim têm-se dois ramos, correspondentes às decisões de a variável assumir o valor de um de seus limites. Depende do método de solução escolher qual destas duas opções é analisada primeiro, mas ambas possibilidades têm de ser avaliadas. Assim, a região factível do problema PLC foi separada em duas parcelas independentes. O algoritmo é aplicado recursivamente aos subproblemas gerando ramos e vértices para análise. A solução do problema termina após a sondagem de todos os nós possíveis de serem gerados, isto é, quando todas as soluções do espaço de busca forem analisadas, implicitamente ou explicitamente, e encontrada uma solução com todas as variáveis do problema sendo inteiras, caso exista. A solução ótima global é a incumbente armazenada no final do processo. Este algoritmo foi utilizado no problema do planejamento tendo bons resultados para sistemas de médio e grande porte, para o modelo de transportes. (Haffner et al., 2001)

Pode-se verificar que o algoritmo B&B para problemas de tipo PLIM é conceitualmente muito simples. Entretanto, um algoritmo B&B apresenta dificuldades na aplicação em problemas reais por vários motivos tais como:

1. Se o problema for muito complexo o algoritmo B&B não converge por restrições de tempo de processamento.
2. Problemas de memória para armazenar a informação dos subproblemas não sondados.
3. Exige um elevado nível de programação para implementar um software eficiente; e
4. Para o problema de planejamento da expansão de transmissão com o modelo CC, devem ser resolvidos problemas de PNL em cada nó da árvore de B&B, gerando um fator complicante adicional. O problema de PNL a ser resolvido é:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & v = \mathbf{c}_n^T \mathbf{n} + \alpha_r^T \mathbf{r} \\
 \text{s.a.} \quad & -\mathbf{S}^T (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) \Upsilon \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{p} + \mathbf{r} = \mathbf{d} \\
 & (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0) (\Upsilon |\mathbf{S} \boldsymbol{\theta}| - \bar{\mathbf{f}}) \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{n}^{inf} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{sup} \leq \bar{\mathbf{n}} \\
 & \boldsymbol{\theta} \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

em que, $\mathbf{r}$ representa o vetor de geração artificial e α_r é um vetor de transformação ($US\$/MW$) com dimensão apropriada. $\mathbf{n}^{inf}$ e $\mathbf{n}^{sup}$ representam vetores limites inferiores e superiores nas variáveis $\mathbf{n}$ que caracteriza ou identifica o nó da árvore de B&B. Deve-se observar que os problemas de PNL em cada nó da árvore de B&B diferem apenas nas variáveis dos vetores $\mathbf{n}^{inf}$ e $\mathbf{n}^{sup}$, isto é, nos limitantes inferior e superior das variáveis $\mathbf{n}$. As variáveis de decisão

do problema (7.1) são os vetores de ângulos, de circuitos adicionados, de geração e de geração artificial.

Existem quatro tópicos relacionados com os algoritmos B&B para problemas de programação não-linear inteiro misto que devem ser analisados separadamente: (1) os testes de sondagem, (2) a escolha da variável para separação dos subproblemas, (3) a escolha do próximo subproblema a ser resolvido e (4) a forma de trabalhar com problemas de programação não-linear.

Os testes de sondagem permitem verificar que na região factível de um subproblema já não existem soluções melhores que as já conhecidas (a atual incumbente) e, portanto, devem ser eliminados do processo de busca. No algoritmo *Branch and Bound* para problemas PLIM existem 3 testes de sondagem, assim um subproblema é sondado nos seguintes casos: (1) se a solução do subproblema é inteiro, indicando que essa solução inteira é a melhor dessa região factível, (2) se a solução do subproblema é maior que a incumbente corrente, indicando que se na região factível existem soluções inteiras, a melhor solução inteira deve ser maior que a incumbente corrente, e (3) se a solução do subproblema é não factível, indicando que não existem soluções inteiras na região factível do subproblema.

A escolha da variável para separação e o próximo subproblema que deve ser resolvido são estratégias de decisão muito importantes porque determinam o tamanho da árvore de B&B, assim como do esforço de processamento. Não existe uma forma exata para determinar a variável que deve ser usada para separar um subproblema e o próximo subproblema que deve ser escolhido para análise. Entretanto, a estratégia que se mostrou mais eficiente é usar pseudocustos para identificar a variável mais promissora e encontrar a melhor estimativa (limitante inferior) de cada subproblema. Nesse caso, o subproblema escolhido para análise é o subproblema que tem menor estimativa porque existe maior probabilidade de encontrar excelentes soluções inteiras nessa região do espaço de busca (Haffner et al., 2001).

7.2 Algoritmo Branch and Bound para o Modelo CC

Um algoritmo B&B básico para o problema de planejamento da transmissão usando o modelo CC, que é uma adaptação da proposta apresentada em (Haffner et al., 2001) para levar em conta o caráter não-linear do problema de planejamento, é apresentado a seguir:

1. Inicialização: Fazer $k = 0$ (número de subproblemas gerados), definir a incumbente inicial v^* e inicializar a lista dos subproblemas candidatos com a solução do problema de PNL correspondente (P).

2. Teste de convergência: Se a lista dos candidatos é vazia então o processo terminou e a solução incumbente atual é a solução ótima do problema (P). Caso contrário prossiga.
3. Seleção do subproblema candidato para ser examinado: Dentre os subproblemas candidatos da lista ainda não sondados, escolher qual é o próximo a ser examinado, usando uma das estratégias discutidas a seguir, e retirá-lo da lista. Resolver o problema de PNL relativo ao problema selecionado relaxado (PC_R^k) e armazenar a solução ótima como limitante inferior para todos os seus descendentes, $v_{inf}^k = v_{PC_R^k}^*$.
4. Testes de sondagem: O subproblema candidato (PC^k) pode ser sondado se satisfizer uma das seguintes condições:
 - (a) Se (PC_R^k) não tem solução factível, existe corte de carga.
 - (b) Se $v_{inf}^k > v^* + \epsilon$. Em que v^* é o valor da incumbente atual.
 - (c) Se a solução ótima do problema relaxado (PC_R^k) satisfizer as restrições de integralidade, isto é, for uma solução viável do problema original, também em (PC^k). Ainda, se o valor ótimo obtido for menor do que a incumbente, então $v^* = v_{inf}^k$ e deve-se aplicar o teste (4b) para todos os subproblemas candidatos ainda não sondados.

Se o subproblema candidato (PC^k) foi sondado, então retornar para o passo 2.

5. Seleção da variável de separação: A partir do subproblema (PC^k), selecionar uma variável para separação, dentre aquelas que são inteiras e ainda apresentam valor contínuo usando uma das estratégias descritas a seguir. Para a variável escolhida n_{ij} , cujo valor atual é n_{ij}^* , gerar dois novos subproblemas descendentes e adicioná-los à lista de candidatos. Os problemas são gerados acrescentando-se as seguintes restrições

$$\begin{aligned} \text{Primeiro descendente } (PC^{k+1}): & \implies n_{ij} \leq \lfloor n_{ij}^* \rfloor \\ \text{Segundo descendente } (PC^{k+2}): & \implies n_{ij} \geq \lfloor n_{ij}^* \rfloor + 1 \end{aligned}$$

em que, $\lfloor n_{ij}^* \rfloor$ é o maior inteiro de n_{ij}^* . Fazer $k = k + 2$ e retornar ao passo 3.

Em relação ao algoritmo apresentado em (Haffner et al., 2001) existem duas mudanças introduzidas no algoritmo básico. A primeira mudança está relacionada com a necessidade de resolver problemas de PNL no passo 1 e 3 do algoritmo B&B, e a segunda mudança está relacionada com o teste de sondagem 4(b). Nesse caso foi introduzido o fator de segurança ϵ para contornar possíveis

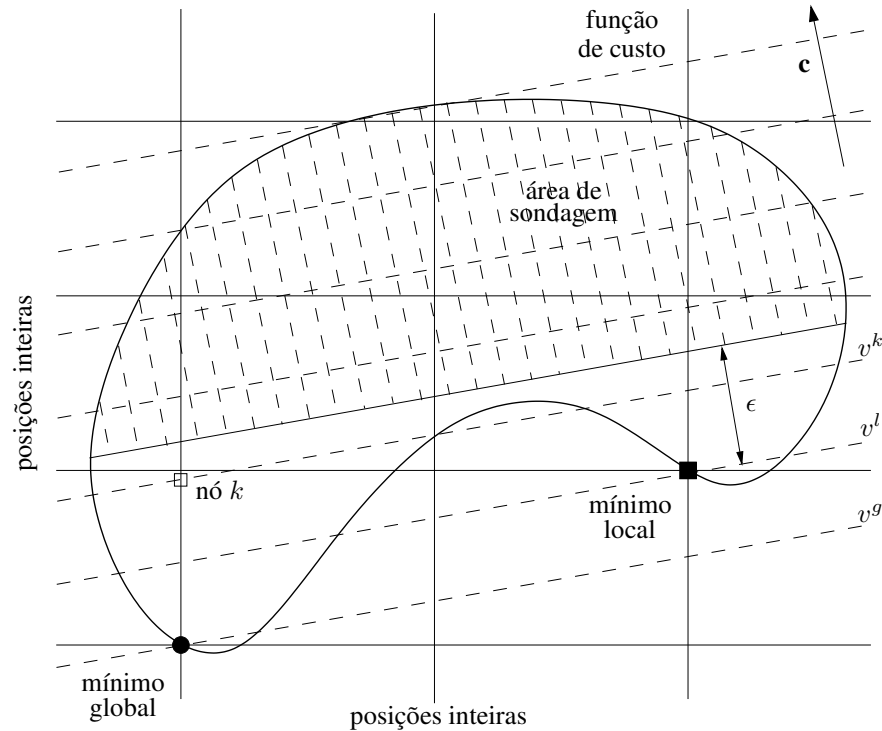


Fig. 7.1: Não-convexidade do problema de planejamento de transmissão

problemas com o aparecimento de ótimos locais na resolução dos problemas de PNL. Assim, para que um subproblema seja sondado, deve ter um limite inferior maior que a incumbente acrescido de um valor adicional de segurança. Deve-se observar que no algoritmo B&B para problemas de PLIM a função objetivo de um subproblema sucessor sempre é maior ou igual a função objetivo do antecessor. Entretanto, para modelos não lineares, como o problema de planejamento da expansão de transmissão usando o modelo CC, essa propriedade não está garantida e o fator de segurança ϵ tenta contornar esse problema.

A Fig. 7.1 pretende explicar melhor o significado do fator segurança ϵ . Pela característica não-linear do problema, é possível que o mínimo local (nó l) possa fazer a sondagem (sem fator de segurança ϵ) dos nós que possam ajudar a encontrar o mínimo global (nó g), como por exemplo o nó k ($v^k > v^l$). O valor de segurança ϵ garante que o nó k não seja sondado ($v^k < \epsilon + v^l$), e ajude ao algoritmo B&B na convergência para o mínimo global.

Assim, a proposta apresentada aumenta a probabilidade de encontrar o mínimo global, mas é possível resolver um número adicional de problemas de programação não-linear. Neste trabalho assume-se um valor de ϵ igual a uma porcentagem do v^* e é calculado de forma heurística a partir das simulações dos sistemas testados.

Uma questão de fundamental importância na eficiência do algoritmo branch and bound está relacionada com duas decisões que são realizadas no decorrer do processo:

- Seleção do subproblema candidato: No passo 3, deve-se escolher, dentre uma lista de subproblemas candidatos, o próximo a ser examinado.
- Seleção da variável de separação: No passo 5, deve-se escolher, dentre um grupo de variáveis inteiras que possuem parte fracionária, qual será empregada para realizar a separação.

A maneira pela qual são realizadas estas escolhas influencia diretamente o número de nós a serem examinados e, portanto, determina o esforço computacional que será empregado para resolver o problema.

7.3 Uso de Pseudocustos no Algoritmo Branch and Bound

Várias estratégias podem ser adotadas para melhorar o desempenho de um algoritmo B&B. Neste trabalho foram adotadas as estratégias propostas em (Haffner et al., 2001) com as adaptações necessárias para levar em conta a não linearidade do problema. O tópico fundamental é a estratégia de pseudocustos.

Os pseudocustos foram propostos em (Gauthier and Ribiere, 1977) e usados em (Linderoth and Savelsbergh, 1999) para melhorar o desempenho dos algoritmos B&B. Assim, para cada variável, deve-se calcular dois tipos de valores de pseudocustos. Portanto, associado a cada variável inteira n_{ij} , devem ser armazenados os valores de pseudocustos definidos da seguinte forma:

$$P_{ij}^- = \frac{v_{PNL}^{k-} - v_{PNL}^k}{f_{ij}^k} \quad \text{e} \quad P_{ij}^+ = \frac{v_{PNL}^{k+} - v_{PNL}^k}{1 - f_{ij}^k} \quad (7.2)$$

em que v_{PNL}^k é a função objetivo ótima do subproblema k , v_{PNL}^{k-} é a função objetivo do subproblema sucessor após impor a restrição $n_{ij} \leq [n_{ij}^*]$, v_{PNL}^{k+} é a função objetivo do subproblema sucessor após impor a restrição $n_{ij} \geq [n_{ij}^*] + 1$ e f_{ij}^k é a parcela fracionária de n_{ij}^* na solução do problema de PNL do subproblema k . Devido à não linearidade do problema, podem aparecer pseudocustos negativos, indicando que uma variável inteira com valor fracionário n_{ij} , quando é forçada a assumir um valor inteiro, vai diminuir a função objetivo do subproblema k .

Os valores de pseudocustos devem ser calculados para todas as variáveis que tem valor não inteiro na solução do primeiro problema correspondente (subproblema P), assim como também de todas as novas variáveis inteiras (que têm valor não inteiro) que aparecem na solução problema correspondente

(PC^k) no nó k . Para cada variável devem ser resolvidos dois problemas de PNL para encontrar os dois pseudocustos associados com cada variável inteira. Esta estratégia melhora a convergência do algoritmo B&B, ocasionando um aumento na solução de problemas de PNL. Neste trabalho, o cálculo dos pseudocustos das novas variáveis inteiras que tem valor não inteiro é feito somente se a função objetivo do nó descendente não for maior que 20 % da função objetivo do nó antecessor; caso contrário, os pseudocustos são iguais ao valor de custo da linha correspondente, esta estratégia evita o cálculo de pseudocustos não necessários e diminui o número de soluções de problemas de PNL. Se no nó k existe um pseudocusto negativo, também tem que ser calculado novamente.

Os valores de pseudocustos são atualizados sempre que se resolve um subproblema da árvore de B&B, geralmente calculando o valor médio de todos os valores de pseudocustos associados com cada variável inteira. Esses valores de pseudocustos são usados para a escolha da variável para separação e para a escolha do próximo subproblema que deve ser resolvido.

Escolha da variável para separação

Se um subproblema k não é sondado, então deve-se escolher uma variável para separação (variável inteira que tem valor não inteiro). De acordo com a teoria de pseudocustos, a variável mais adequada para separar um subproblema em dois subproblemas sucessores deve ser obtida usando a seguinte relação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{ij} \{ \min [P_{ij}^- f_{ij}^k; P_{ij}^+ (1 - f_{ij}^k)] \} \\ \quad \text{se } \min_{ij} \{ \min [P_{ij}^- f_{ij}^k; P_{ij}^+ (1 - f_{ij}^k)] \} \geq 0 ; \\ \min_{ij} \{ \min [P_{ij}^- f_{ij}^k; P_{ij}^+ (1 - f_{ij}^k)] \} \\ \quad \text{caso contrário.} \end{array} \right. \quad (7.3)$$

O critério anterior escolhe uma variável que aumenta a probabilidade de que os dois subproblemas sejam sondados. Caso contrário, escolhe a variável que consegue uma maior diminuição da função objetivo do subproblema k .

Escolha do subproblema

Após analisar um subproblema, que pode ser sondado ou separado em dois novos subproblemas, deve-se escolher o próximo subproblema para análise. A teoria de pseudocustos sugere escolher o novo subproblema para análise usando o conceito de melhor valor estimado.

O valor estimado de um subproblema é uma medida aproximada da função objetivo da melhor solução inteira que existe na região factível de um subproblema. Assim, o subproblema com menor valor estimado é provavelmente o subproblema que tem a melhor solução inteira na sua região factível

e, portanto, deve ser analisado primeiro com a pretensão de encontrar rapidamente uma excelente incumbente. O valor estimado associado com cada subproblema assume a seguinte forma:

$$v_{est}^k = \begin{cases} v_{PNL}^k + \sum_{ij \in I} \min [P_{ij}^- f_{ij}^k; P_{ij}^+ (1 - f_{ij}^k)] \\ \quad \text{se } \min_{ij} \{ \min [P_{ij}^- f_{ij}^k; P_{ij}^+ (1 - f_{ij}^k)] \} \geq 0 ; \\ v_{PNL}^k + \min_{ij} \{ \min [P_{ij}^- f_{ij}^k; P_{ij}^+ (1 - f_{ij}^k)] \} \\ \quad \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7.4)$$

em que v_{est}^k é uma limitante inferior de uma solução inteira contida na região factível do subproblema k e v_{PNL} é a solução do problema de PNL do subproblema k ou uma limitante inferior desse subproblema obtida ao resolver o subproblema antecessor e I é o conjunto das variáveis inteiras do problema P . Pode-se observar que os pseudocustos são usados para encontrar os valores estimados. Também, na proposta anterior, deve-se resolver o subproblema antes de armazená-lo para que seja possível calcular v_{est}^k .

7.4 MPI Aplicado na Resolução do Modelo de Corrente Contínua Relaxado

O problema (7.1) pode ser escrito como um problema de PNL:

$$\begin{aligned} \min \quad & v = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{DXHx} + \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{EXHx} + \mathbf{Fx} - \mathbf{g} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.5)$$

em que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_n \\ \mathbf{0} \\ \alpha_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Upsilon \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{S}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}^T \mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} & -[\bar{\mathbf{f}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}^0 \Upsilon \mathbf{S} & -[\bar{\mathbf{f}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^0 \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{N}^0 \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{n}^{sup} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{d}} \\ -\mathbf{n}^{inf} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

em que $\mathbf{x} \in \Re^{nx}$ representa as variáveis de decisão do problema de PNL e $\mathbf{X}$ é uma matriz diagonal contendo $\mathbf{x}$. As matrizes e vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D} \in \Re^{ng \times nx}$, $\mathbf{b} \in \Re^{ng}$, $\mathbf{c} \in \Re^{nx}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F} \in \Re^{nh \times nx}$, $\mathbf{g} \in \Re^{nh}$ e $\mathbf{H} \in \Re^{nx \times nx}$ foram formadas em função dos dados de (7.1). O método de pontos interiores PMCMCC descrito na seção 6.2 é utilizado para resolver eficientemente o problema de programação não linear (7.5).

Ponto inicial

Assim como no Capítulo 6, o ponto inicial somente precisa manter as condições de não negatividade. O processo de convergência é sensível ao ponto inicial e o desempenho dos MPI pode melhorar se alguma iniciação heurística for usada. Uma possível iniciação heurística é dada a seguir.

1. A estimação do $\mathbf{x}^0$ é dada usando o ponto médio entre os limites superior e inferior para as variáveis com limites.

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{n}^{inf} + \tau(\mathbf{n}^{sup} - \mathbf{n}^{inf}) \\ \bar{\mathbf{p}}/2 \\ \bar{\mathbf{d}}/2 \end{bmatrix}$$

em que, tipicamente $\tau = \{0.25, 0.5 \text{ ou } 0.75\}$.

2. As variáveis de folga primal são logo inicializadas como

$$\mathbf{s}^0 = |\mathbf{E}\mathbf{X}^0\mathbf{H}\mathbf{x}^0 + \mathbf{F}\mathbf{x}^0 - \mathbf{g}|$$

em que $\mathbf{X}^0$ é uma matriz diagonal contendo $\mathbf{x}^0$.

3. A variável dual λ^0 é inicializada com -1 .
4. As variáveis de folga dual são logo inicializadas como:

$$\pi^0 = \mu^0 (\mathbf{S}^0)^{-1} \mathbf{e}$$

em que $\mathbf{S}^0$ é uma matriz diagonal contendo s^0 . Tipicamente $\mu^0 = \{10; 1 \text{ ou } 0, 1\}$.

7.5 Testes e Resultados

O algoritmo *Branch and Bound* foi implementado em Matlab 6.0. Para os testes foram utilizados quatro sistemas: o sistema Garver de 6 barras, sistema IEEE de 24 barras, o sistema Sul Brasileiro de 46 barras e o sistema Colombiano de 93 barras. Os dados elétricos dos sistemas usados para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CC, só para o planejamento estático, estão no Apêndice C.

7.5.1 Sistema Garver de 06 barras

Caso 1: Considerando a topologia base e com reprogramação da geração

Para este caso foi considerado um valor de ϵ igual a 2% do v^* . O algoritmo B&B encontrou a melhor solução do problema de planejamento com um investimento $v = \text{US } \$ 110$ após resolver 25 problemas de PNL e a adição das seguintes linhas na topologia base: $n_{3-5} = 1$, e $n_{4-6} = 3$. Na Fig. 7.2 é mostrada a árvore de B&B gerada pelo algoritmo para o sistema de Garver com esta configuração. Na árvore pode-se observar que encontrou-se a solução no nó 14. Um resumo (passo a passo) dos resultados é mostrado no Apêndice D.1. A solução é mostrada na Fig. 7.3.

Caso 2: Considerando a topologia base e sem reprogramação da geração

Para este caso foi considerado um valor de ϵ igual a 2% do v^* . A solução ótima encontrada tem um investimento igual a $v = \text{US\$ } 200$ e apresenta a seguinte topologia: $n_{2-6} = 4$, $n_{3-5} = 1$ e $n_{4-6} = 2$. A solução ótima foi obtida resolvendo 19 problemas de PNL. Na Fig. 7.4 é mostrada a árvore de B&B gerada onde pode-se observar que a solução se deu no nó 8. Os resultados resumidos passo a passo estão no Apêndice D.2. A solução é mostrada na Fig. 6.2.

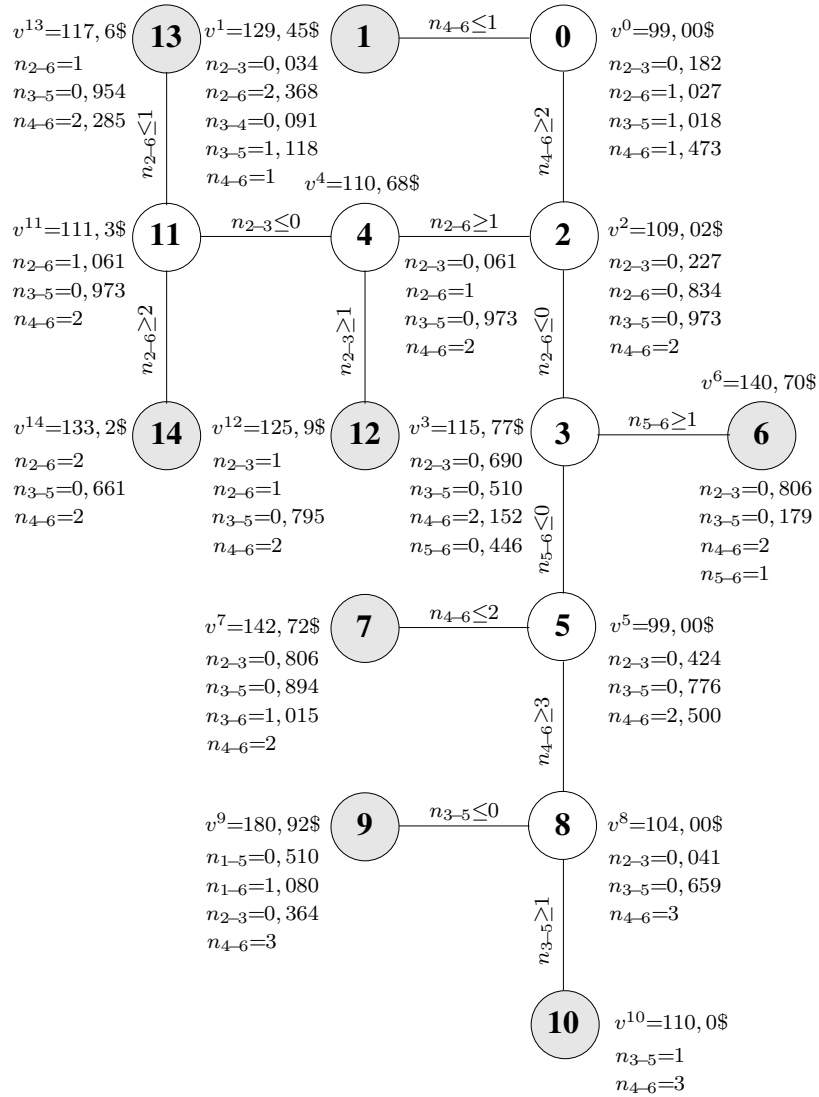


Fig. 7.2: Arvore *Branch and Bound* do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

Caso 3: Sem considerar a topologia base e com reprogramação da geração

Para este caso foi considerado um valor de ϵ igual a 2% do v^* . Neste caso considerou-se o sistema de Garver ilhado, isto é, retirando todos os circuitos da topologia base. Foi testado apenas o caso com reprogramação da geração. A solução ótima encontrada tem $v = \text{US\$ } 190$ e com a seguinte topologia: $n_{1-5} = 1$, $n_{2-3} = 2$, $n_{2-6} = 1$, $n_{3-5} = 2$, $n_{4-6} = 2$, após resolver 56 problemas de PNL. A árvore de B&B gerada pela algoritmo tem um total de 30 nós e a solução é encontrada no nó 10. O algoritmo também encontrou outras 5 soluções sub-ótimas. A solução é mostrada na Fig. 6.3.

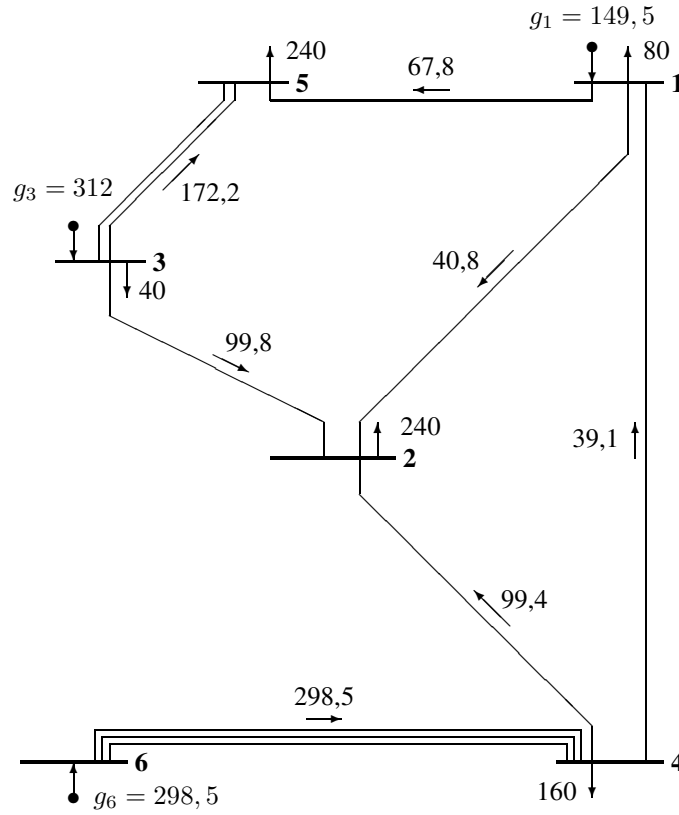


Fig. 7.3: Solução do sistema Garver considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC

7.5.2 Sistema IEEE de 24 barras

Para este sistema foi considerado um valor de ϵ igual a 2% do v^* . O algoritmo B&B encontrou um investimento necessário para o problema de planejamento de $v = \text{US\$ } 152.000.000$, após resolver 76 problemas de PNL, com a seguinte topologia:

$$n_{06-10} = 1; \quad n_{07-08} = 2; \quad n_{10-12} = 1; \quad n_{14-16} = 1.$$

A árvore de B&B para o sistema de IEEE-24 tem um total de 44 nós e a metodologia encontra a melhor solução do sistema no nó 12. A topologia inicial do sistema IEEE de 24 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 6.4.

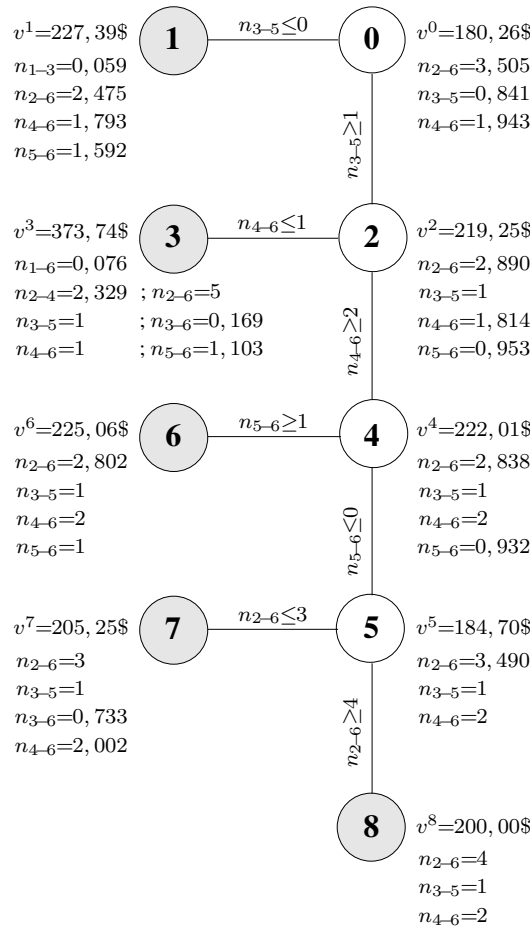


Fig. 7.4: Arvore Branch and Bound do sistema Garver considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC

7.5.3 Sistema Sul Brasileiro de 46 barras

Caso 1: Com reprogramação da geração

Para este caso foi considerado um valor de ϵ igual a 2% do v^* . Após resolver 379 problemas de PNL a solução encontrada teve investimento de $v = \text{US\$ } 72.870.000$, com a seguinte topologia:

$$\begin{aligned}
 n_{02-05} &= 1; & n_{05-06} &= 2; & n_{13-20} &= 1; & n_{20-21} &= 2; \\
 n_{20-23} &= 1; & n_{42-43} &= 1; & n_{46-06} &= 1.
 \end{aligned}$$

A árvore de B&B para este caso tem um total de 268 nós e a metodologia encontra a melhor solução do sistema no nó 76. O algoritmo também encontrou outras 29 soluções sub-ótimas.

A topologia inicial do sistema Sul Brasileiro de 46 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 7.5.

Caso 2: Sem reprogramação da geração

Para este caso foi considerado um valor de ϵ igual a 2% do v^* . A solução ótima encontrada pelo algoritmo B&B tem um investimento igual à $v = \text{US\$ } 154.420.000$ e apresenta a seguinte topologia:

$$\begin{aligned} n_{05-06} &= 2; & n_{19-25} &= 1; & n_{20-21} &= 1; & n_{24-25} &= 2; \\ n_{26-29} &= 3; & n_{28-30} &= 1; & n_{29-30} &= 2; & n_{31-32} &= 1; \\ n_{42-43} &= 2; & n_{46-06} &= 1. \end{aligned}$$

O algoritmo encontrou a solução ótima após resolver 8081 problemas de PNL. A árvore de B&B para este caso tem um total de 7484 nós e a metodologia encontra a melhor solução do sistema no nó 2375. O algoritmo também encontrou outras 15 soluções sub-ótimas. A topologia inicial do sistema Sul Brasileiro de 46 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 7.6.

7.5.4 Sistema Colombiano de 93 barras

Para este sistema foi considerado um valor de ϵ igual a 1% do v^* . O algoritmo B&B encontrou um investimento necessário para o problema de planejamento de $v = \text{US\$ } 560.002.000$, após resolver 40797 problemas de PNL, com a seguinte topologia:

$$\begin{aligned} n_{15-18} &= 1; & n_{19-82} &= 2; & n_{27-29} &= 1; & n_{29-64} &= 1; \\ n_{30-65} &= 1; & n_{30-72} &= 1; & n_{43-88} &= 2; & n_{50-54} &= 1; \\ n_{54-56} &= 1; & n_{55-57} &= 1; & n_{55-62} &= 1; & n_{55-84} &= 1; \\ n_{56-57} &= 1; & n_{62-73} &= 1; & n_{68-86} &= 1; & n_{72-73} &= 1; \\ n_{82-85} &= 1. \end{aligned}$$

A árvore de B&B para este caso tem um total de 40432 nós e a metodologia encontra a melhor solução do sistema no nó 25964. O algoritmo também encontrou outras 209 soluções sub-ótimas. A topologia inicial do sistema Colombiano de 93 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 7.7.

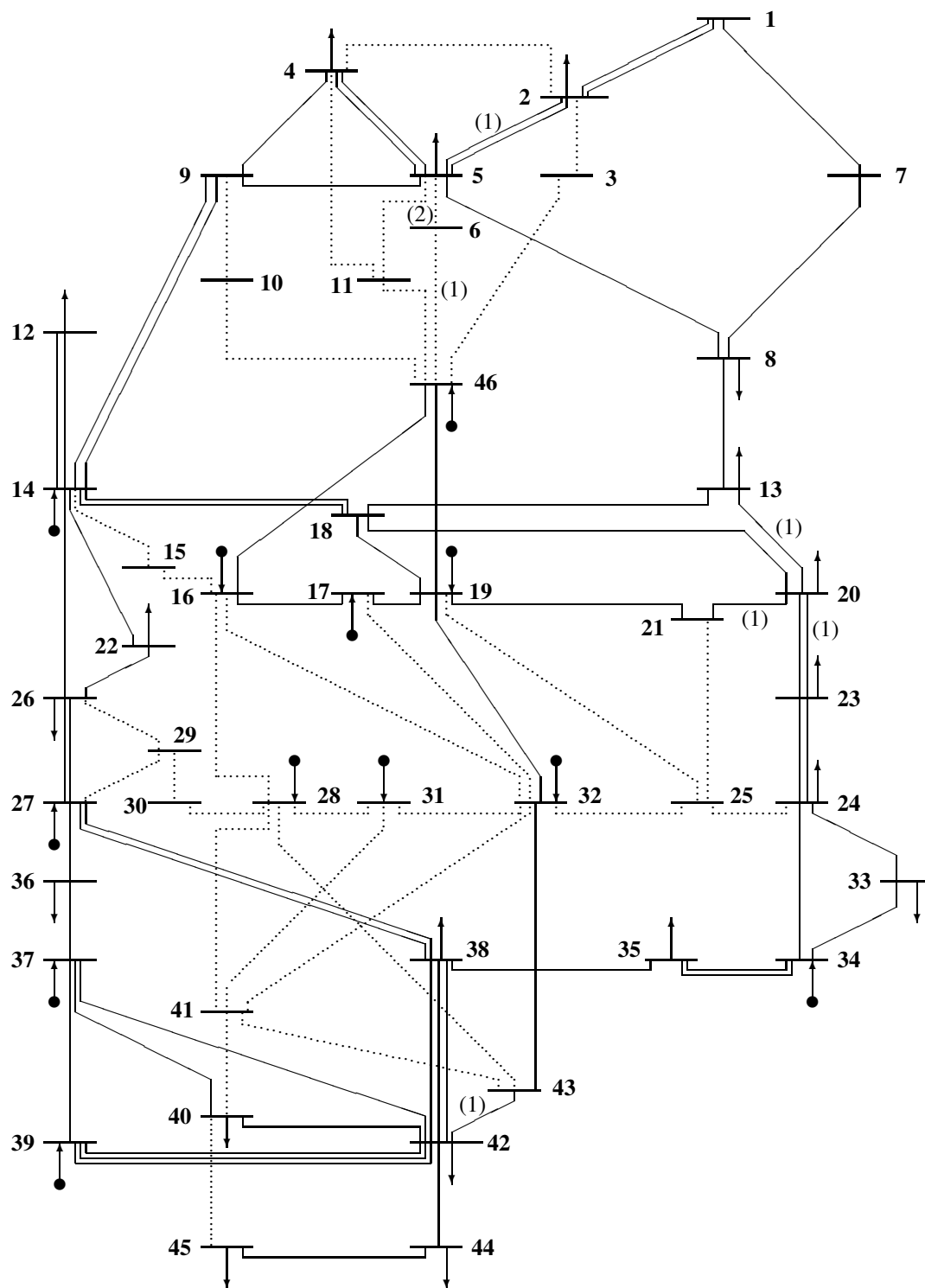


Fig. 7.5: Solução do sistema Sul Brasileiro de 46 barras considerando a topologia base e com reprogramação da geração, usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos

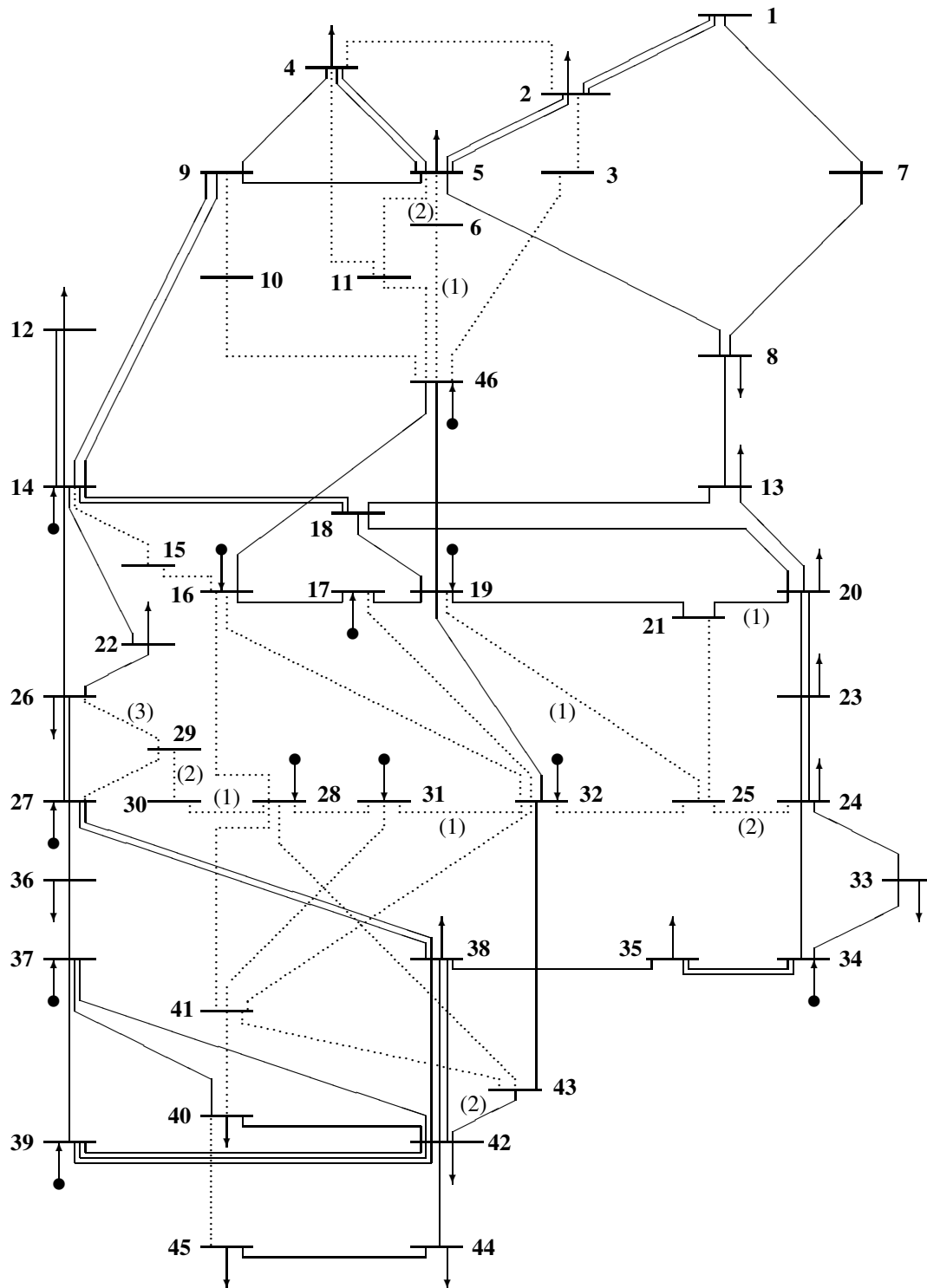


Fig. 7.6: Solução do sistema Sul Brasileiro de 46 barras considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos

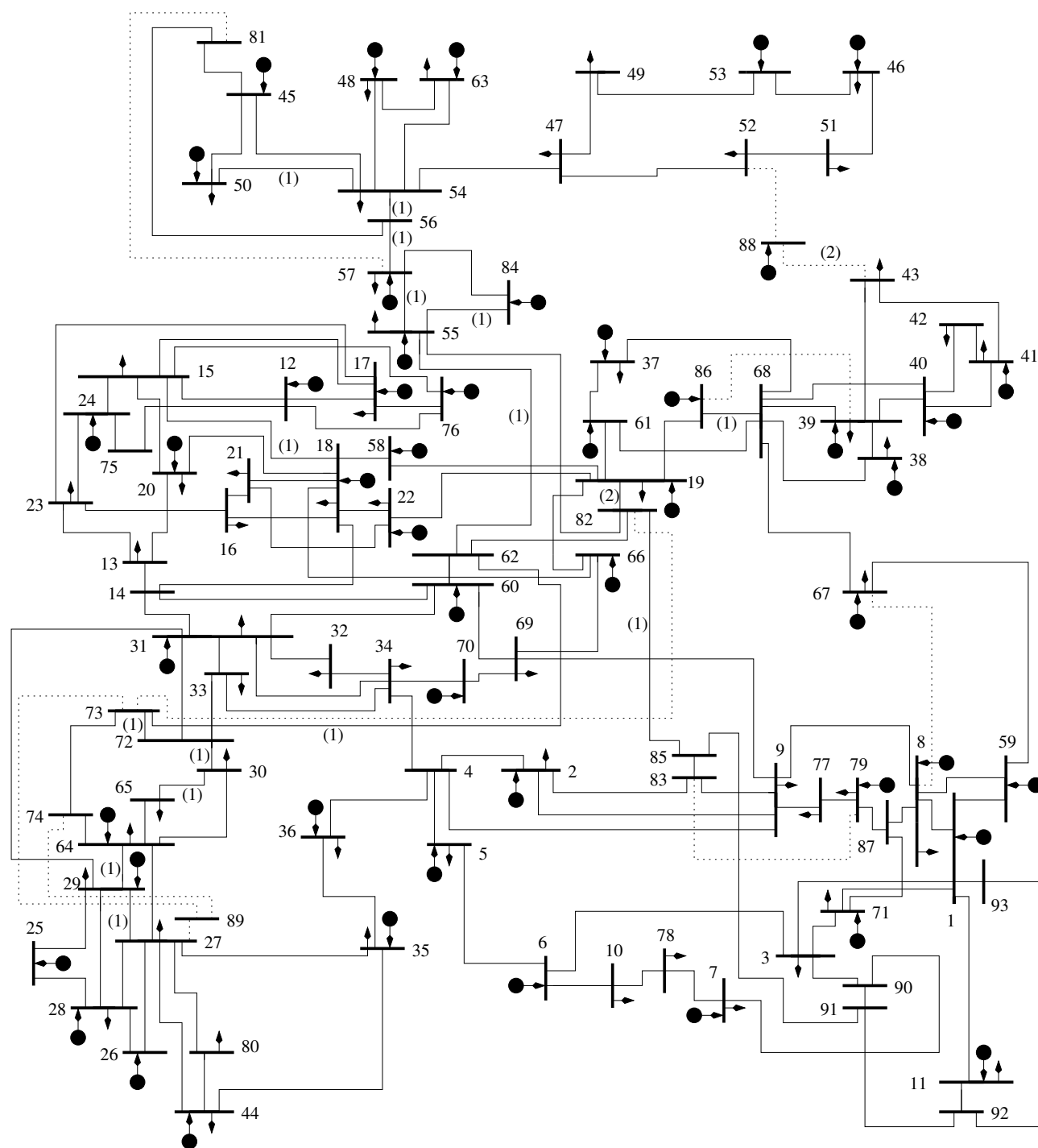


Fig. 7.7: Solução do sistema Colombiano de 93 barras considerando a topologia base e sem reprogramação da geração, usando o modelo CC. As linhas tracejadas representam circuitos candidatos

7.6 Comentários dos Resultados

O aspecto relevante do proposto neste capítulo é que foi resolvido diretamente o problema de planejamento da expansão de transmissão com o modelo CC e para o planejamento estático usando um algoritmo *Branch and Bound* sem o uso da decomposição de Benders. Acredita-se que o uso do algoritmo B&B para resolver o problema do planejamento da expansão da rede da transmissão usando diretamente o modelo CC foi adiado devido à falta de um algoritmo eficiente e robusto para resolver problemas de programação não-linear, que deve ser usado no problema. Acredita-se que este ponto foi superado com o uso do método de pontos interiores.

As soluções encontradas pelo algoritmo B&B para todos os sistemas testados são as mesmas encontradas na bibliografia especializada utilizando metaheurísticas, que são os métodos mas confiáveis para encontrar excelentes soluções. A vantagem do algoritmo B&B, em relação as metaheurísticas, é que converge com um esforço de processamento menor porque resolve um número reduzido de problemas PNLs, no caso dos sistemas testados. O algoritmo também apresenta uma convergência rápida depois de fazer a sondagem de todos os nós da árvore de B&B, garantindo que não existe uma solução melhor que a incumbente. No caso das metaheurísticas, geralmente é mais complicado especificar o critério de parada, e assim usa-se, normalmente, como critério de parada, um número máximo de iterações, um número máximo de chamadas de PLs ou PNLs, ou um número especificado de iterações em que a melhor solução não muda. Nenhum dos critérios anteriores garante que a solução encontrada seja a solução ótima.

Devido à não linearidade do problema de planejamento, o valor de investimento v na árvore B&B não tem um comportamento sempre ascendente (como acontece na árvore B&B quando é resolvido um PLIM), e isso pode ser observado nas Figuras 7.2 e 7.4. A presença desta não linearidade pode afetar o desempenho do algoritmo B&B e é contornado pelo fator de segurança ϵ .

Na Fig. 7.8 é mostrado o valor de investimento v dos nós 3, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, para o sistema Garver com a configuração base e com reprogramação da geração. Assim, mostra-se a evolução do valor de investimento a partir do nó 3 variando em forma contínua n_{5-6} no intervalo $[0 \text{ a } 1]$, fixando os outros valores do vetor n no valor obtido no nó 3, para conseguir os nós 5 e 6. Também foi feito o mesmo gráfico para os nós 5 e 8, variando de forma contínua n_{4-6} e n_{3-5} no intervalo $[2 \text{ a } 3]$ e $[0 \text{ a } 1]$, respectivamente.

O valor de ϵ foi calculado de forma empírica, depois da realização de testes. Com valores menores de ϵ , o algoritmo B&B teria uma convergência muito mais rápida e com um menor esforço computacional, mas com um alto risco de encontrar apenas uma solução ótima local, devido à não linearidade do problema de planejamento. Valores maiores de ϵ teriam uma maior oportunidade de encontrar uma excelente solução, assim como também a possibilidade de encontrar outras soluções sub-ótimas, mas com um maior tempo e esforço computacional. Recomenda-se que o valor de ϵ fique

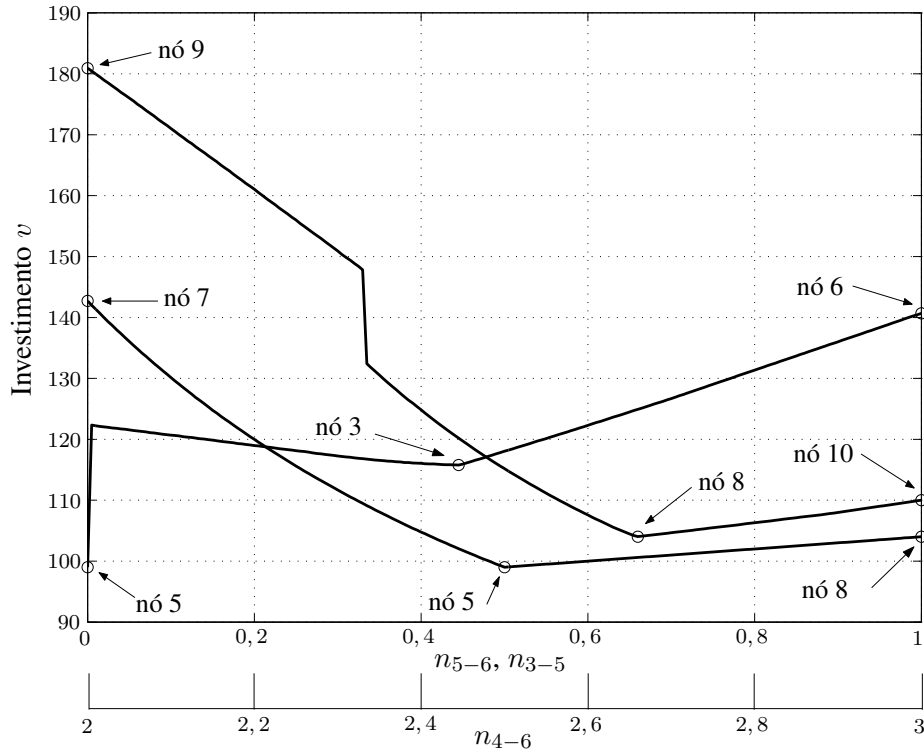


Fig. 7.8: Não-convexidade do problema de planejamento de transmissão para o sistema Garver

entre $[1 \text{ a } 3]\%$ do valor da solução incumbente (v^*).

Recomenda-se o cálculo dos pseudocustos das novas variáveis inteiras (com valor não inteiro) que aparecem em cada nó da árvore B&B e que não foram calculados anteriormente, assim como também é importante calcular novamente os pseudocustos quando estes são negativos. Esta estratégia aumenta a rapidez da convergência, mas aumenta o número de problemas de PNLs a serem resolvidos.

O esforço computacional do algoritmo *Branch and Bound* pode ser melhorado analisando a utilização de outros pseudocustos que utilizem as informações obtidas das variáveis duais dos problemas de PNL ou também com a ajuda de um algoritmo heurístico construtivo, com o propósito de encontrar de forma mais rápida uma solução incumbente inicial para realizar o processo de sondagem. Para sistemas de grande porte seria recomendável a utilização de ferramentas de processamento paralelo.

O algoritmo B&B mostrou-se consistente, apresentando excelentes perspectivas de utilização em aplicações mais complexas. Assim, por exemplo, no futuro pretende-se implementar algoritmos B&B para resolver o problema de planejamento usando modelo CC considerando as perdas e dispositivos com características não lineares como os controladores FACTS.

Capítulo 8

Considerações Finais

8.1 Conclusões

Como parte deste trabalho, foi apresentado um modelo matemático para resolver o problema de planejamento estático da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo de corrente alternada. As principais vantagens de utilizar o modelo CA no problema de planejamento são: a) incorporar o valor das perdas ativas do sistema de transmissão; b) realizar um planejamento da expansão de sistemas de transmissão e a alocação ótima de fontes de potência reativa simultaneamente; c) realizar de forma eficiente a fase de reforços dos planos de expansão quando se utiliza um modelo simplificado e, d) a possibilidade da realização de outros tipos de estudos como por exemplo: a estabilidade de tensão, análise nodal, análise de estabilidade transitória, etc. Entretanto, uma das maiores dificuldades de se trabalhar com o problema de planejamento usando o modelo CA é a necessidade de tratar com problemas de programação não-linear de grande porte.

Para viabilizar o uso do modelo CA no planejamento da expansão de sistemas de transmissão, pode-se utilizar as muitas técnicas de otimização existentes na literatura especializada para o problema de planejamento usando o modelo CC, desde os algoritmos aproximados até os algoritmos exatos. Entretanto, um algoritmo heurístico construtivo foi utilizado como uma proposta inicial de técnica de solução para viabilizar o uso do modelo CA em trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Os resultados do AHC mostram que é possível usar diretamente o modelo CA em substituição aos modelos relaxados nos trabalhos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão, assim como os resultados encontrados mostram que as topologias encontradas, bem como os valores de investimento, para os modelos CC e CA, são diferentes.

Uma primeira tentativa de alocação de fontes de potência reativa também é considerada, utilizando as informações obtidas pelo AHC e pelos problemas de PNL. O objetivo foi conseguir planos de expansão usando o modelo CA tentando minimizar a influência dos limites da tensão do sistema nos

planos da expansão. Portanto, uma evolução natural do trabalho apresentado consiste em formular um modelo matemático que permita realizar de maneira formal o planejamento integrado da expansão de sistemas de transmissão e a alocação de fontes de potência reativa. Uma análise e uma metodologia para realizar a fase de reforços dos planos de expansão quando é utilizado inicialmente um modelo simplificado também foi apresentado.

Um algoritmo heurístico construtivo especializado foi utilizado para resolver o problema do planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando diretamente o modelo CC para o planejamento estático. Este algoritmo representa uma mudança significativa em relação aos outros AHC devido a necessidade de resolver um problema de PNL em cada passo do AHC, com o objetivo de identificar o circuito mais promissor, com informações técnicas (respeitar as restrições operativas) e econômicas (mínimo investimento) que devem ser adicionados ao sistema corrente.

A utilização do AHC para a solução do problema mostrou ser eficiente, embora existam algumas desvantagens nas fases finais do algoritmo. O índice de sensibilidade utilizado apresenta um excelente desempenho nas primeiras iterações do algoritmo ou ainda quando a topologia encontrada pelo PNL apresenta propostas de investimento próximas a valores inteiros na expansão. Entretanto, nas iterações finais e especialmente em sistemas grandes e complexos, geralmente aparecem propostas de investimento com valores de n_{ij} muito pequenos e, nesse caso, o índice usado perde eficiência na escolha dos circuitos a serem adicionados.

Deve-se observar que a qualidade da solução encontrada no problema de planejamento depende do AHC usado e em menor medida do algoritmo para resolver o problema de PNL. Em outras palavras, pode-se formular um AHC mais eficiente que melhore a qualidade da solução final e que ainda use o algoritmo de MPI como módulo básico ou sub-rotina. Portanto, a responsabilidade do algoritmo de MPI está apenas restrito a sua capacidade de encontrar um ótimo local ou global do PNL e sua convergência adequada.

Um algoritmo B&B para resolver diretamente o problema de planejamento da expansão de transmissão com o modelo CC para o planejamento estático, sem o uso da decomposição de Benders, foi apresentado. Foram redefinidos os chamados testes de sondagem no algoritmo B&B, assim como foi usado pseudocustos para gerenciar o desenvolvimento da árvore de B&B. Os problemas de programação não-linear em cada nó da árvore de B&B foram resolvidos usando a metodologia desenvolvida no AHC para o problema de planejamento usando o modelo CC. As soluções encontradas pelo algoritmo B&B para todos os sistemas testados são as mesmas soluções encontradas na bibliografia especializada utilizando metaheurísticas, que são os métodos mais confiáveis para encontrar excelentes soluções.

A vantagem do algoritmo B&B, em relação às metaheurísticas, é que converge com um esforço de processamento menor porque resolve um número reduzido de problemas PNL no caso dos sistemas

testados. O algoritmo também apresenta uma convergência rápida depois de fazer a sondagem de todos os nós da árvore de B&B, garantindo que não existe uma melhor solução que a incumbente. Para as metaheurísticas, geralmente é mais complicado especificar o critério de parada que garanta que a solução encontrada seja a solução ótima.

A utilização de técnicas de programação não-linear dentro das metodologias para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo CC traz como vantagem a possibilidade de inclusão de restrições ou dispositivos com características não-lineares, tais como as perdas do sistema de transmissão ou os controladores FACTS. Estas características não são fáceis ou, mais precisamente, não podem ser consideradas nas metodologias existentes na literatura especializada sem a necessidade de usar um algoritmo de programação não-linear.

O AHC utilizado para viabilizar o uso do modelo CA no planejamento da expansão de sistemas de transmissão, assim como o AHC e o algoritmo B&B para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo CC, requerem a solução de problemas de programação não-lineares diferenciados. Uma técnica de otimização com base em uma combinação de métodos de pontos interiores de alta ordem para resolver os problemas de PNL foi desenvolvida.

8.2 Trabalhos Futuros

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram feitas algumas anotações que seriam relevantes se considerar em trabalhos futuros. Destacam-se, basicamente, as seguintes extensões futuras:

- Incluir no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo CC uma representação das perdas elétricas do sistema de transmissão e modelar dispositivos com características não-lineares, como o compensador capacitivo série controlado por tiristores (TCSC).
- Implementar um algoritmo B&B para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando o modelo CC para representar o modelo de rede elétrica mas, adicionalmente, considerar formas de operação mais próximas da realidade tais como incorporar o modelo de expansão para planejamento multiestágio, o modelo de expansão para operação do sistema elétrico em mercado competitivo e o modelo de operação com restrições de segurança.
- Modelar a integralidade das variáveis de investimento do problema de planejamento para os modelos CC – CA usando funções não-lineares com o objetivo de melhorar o desempenho dos algoritmos heurísticos construtivos.

- Considerar o custo de instalação das fontes de potência reativa na função objetivo do problema de PNL e desenvolver um AHC que permita realizar o planejamento integrado da expansão de sistemas de transmissão e a alocação ótima de fontes de potência reativa.
- Desenvolver algoritmos de otimização mais eficientes como: os algoritmos *Branch and Bound* e as Metaheurísticas para o problema de planejamento da expansão de transmissão usando o modelo CA.
- Continuar desenvolvendo técnicas de otimização eficientes para resolver problemas de programação não-linear com o objetivo de aumentar a robustez na resolução de problemas de PNL especialmente para resolver problemas mais complexos que o modelo CA do planejamento estático. Deve-se observar que se se incorporam novas restrições, como as relacionadas com o planejamento multiestágio e/ou o planejamento com restrições de segurança, o problema de PNL a ser resolvido em cada passo do AHC se torna muito maior e mais complexo.

Referências Bibliográficas

- P. F. Albrecht, M. P. Bhavaraju, B. E. Biggerstaff, R. Billinton, G. E. Jorgensen, N. D. Reppen, and P. B. Shortley. Ieee reliability test system. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-98(6):2047–2054, November/December 1979.
- K. C. Almeida and F. D. Galiana. Critical cases in the optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3):1509–1518, August 1996.
- O. Alsac, J. Bright, M. Prais, and B. Stott. Further developments in lp-based optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(3):697–711, August 1990.
- A. B. Alves, E. N. Asada, and A. Monticelli. Critical evaluation of direct and iterative methods for solving $Ax=b$ systems in power flow calculations and contingency analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(2):702–708, May 1999.
- M. Arioli, I. S. Duff, and P. P. de Rijk. On the augmented system approach to sparse least-squares problems. *Numerische Mathematik*, 55:667–684, 1989.
- C. J. Baldwin, C. A. De Salvo, C. H. Hoffman, and W. S. Ku. A model for transmission planning by logic. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-78(2):1638–1645, February 1960.
- S. Binato. Expansão ótima de sistemas de transmissão através de decomposição de benders e técnicas de planos cortantes. Tese de doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Abril 2000.
- S. Binato, G. C. de Oliveira, and de J. L. Araujo. A greedy randomized adaptive search procedure for transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(2):247 – 253, May 2001.
- J. R. Bunch and B. N. Parlett. Direct methods for solving symmetric indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 8:639–655, 1971.

- R. C. Burchett, H. H. Happ, and D. R. Vierath. Quadratically convergent optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103(11):3267–3275, November 1984.
- J. Carpentier. Contribution to the economic dispatch problem, (in french). *Bulletin Society Française Electriciens*, 3(8):431–447, August 1962.
- E. D. Castronuovo. Aplicação de métodos de pontos interiores no fluxo de potência ótimo não-linear com utilização de processamento de alto desempenho. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica - Centro Tecnológico, UFSC, Maio 2001.
- S. H. Cheng and N. J. Higham. A modified cholesky algorithm based on a symmetric indefinite factorization. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(4):1097–1110, October 1998.
- P. C. Chu and J. E. Beasley. A genetic algorithm for the generalized assignment problem. *Computers Operations Research*, 24(1):17–23, 1997.
- Y. Dai, J. D. McCalley, and V. Vittal. Simplification, expansion and enhancement of direct interior point algorithm for power system maximum loadability. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(3):1014–1021, August 2000.
- E. J. de Oliveira, I. C. da Silva Jr., J. L. R. Pereira, and S. Carneiro Jr. Transmission system expansion planning using a sigmoid function to handle integer investment variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(3):1616–1621, August 2005.
- C. Dechamps and E. Jamouille. Interactive computer program for planning the expansion of meshed transmission networks. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2(2):103–108, April 1980.
- H. W. Dommel and W. F. Tinney. Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-87(10):1866–1876, October 1968.
- A. Escobar, R. A. Gallego, and R. Romero. Multi-stage and coordinated planning of the expansion of transmission systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(2):735–744, May 2004.
- R. Fang and D. J. Hill. A new strategy for transmission expansion in competitive electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(1):374–380, February 2003.
- A.V. Fiacco and G.P. McCormick. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1968.

- R. A. Gallego, A. B. Alves, A. Monticelli, and R. Romero. Parallel simulated annealing applied to long term transmission network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(1): 181–188, February 1997.
- R. A. Gallego, A. Monticelli, and R. Romero. Comparative studies of non-convex optimization methods for transmission network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(3):822–828, August 1998a.
- R. A. Gallego, A. Monticelli, and R. Romero. Transmission system expansion planning by extended genetic algorithm. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 145(3):329–335, May 1998b.
- R. A. Gallego, A. Monticelli, and R. Romero. Tabu search algorithm for network synthesis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(2):490–495, May 2000.
- L. L. Garver. Transmission network estimation using linear programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(7):1688–1697, September/October 1970.
- J. M. Gauthier and G. Ribiere. Experiments in mixed-integer linear programming using pseudo-costs. *Mathematical Programming*, 12:26–47, 1977.
- T. C. Giras and S. N. Talukdar. Quasi-newton method for optimal power flows. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 3(2):59–64, April 1981.
- D. E. Goldberg. *Genetics algorithms in search, optimization and machine Learning*. Addison - Wesley, Massachusetts, 1989.
- S. Granville. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):136–146, February 1996.
- S. Granville and M. V. F. Pereira. Analysis of the linearized power flow model in benders decomposition. Epri-report, research project 2473-6, Stanford University, February 1985.
- S. Granville, J. C. O. Mello, and A. C. G. Melo. Application of interior point methods to power flow unsolvability. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(2):1096–1103, May 1996.
- G. Gross. Assessment of transmission congestion impacts on electricity markets. In *University Of New South Wales*, pages 01–68, Kensington, Australia, 23 September 2004.
- S. Haffner, A. Monticelli, A. Garcia, J.R.S. Mantovani, and R. Romero. Branch and bound algorithm for transmission system expansion planning using a transportation model. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 147(3):149–156, May 2000.

- S. Haffner, A. Monticelli, A. V. Garcia, and R. Romero. Specialized branch and bound algorithm for transmission network expansion planning. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 148(5):482–488, September 2001.
- S. H. M. Hashimoto, R. Romero, and J. R. S. Mantovani. Efficient linear programming algorithm for the transmission network expansion planning problem. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 150(5):536–542, September 2003.
- J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. The University of Michigan Press, 1975.
- G. D. Irisarri, X. Wang, J. Tong, and S. Mokhtari. Maximum loadability of power systems using interior point method nonlinear optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(1):162–172, February 1997.
- N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *IEEE Transactions on Education*, 4:373–395, 1984.
- G. Latorre, R. D. Cruz, J. M. Areiza, and A. Villegas. Classification of publications and models on transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(2):938–946, May 2003.
- G. Latorre-Bayona and J. I. Perez-Arriaga. Chopin, a heuristic model for long term transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(4):1886–1894, November 1994.
- V. A. Levi and M. S. Calovic. A new decomposition based method for optimal expansion planning of large transmission networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(3):937–943, August 1991.
- V. A. Levi and D. S. Popovic. Integrated methodology for transmission and reactive power planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1):370–375, February 1996.
- J. T. Linderoth and M. W. P. Savelsbergh. A computational study of search strategies for mixed integer programming. *INFORMS Journal on Computing*, pages 173–187, 1999.
- J. Medina, V. H. Quintana, A. J. Conejo, and F. P. Thoden. A comparison of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(3):836–843, August 1998.
- Z. Michalewicz. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. Springer - Verlag, 1996.

- A. Monticelli, A. Santos Jr., M.V.F. Pereira, S.H. Cunha, B.J. Parker, and J.C.G. Praça. Interactive transmission network planning using a least-effort criterion. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101(10):3919–3925, October 1982.
- G. C. Oliveira, S. Binato, M. V. F. Pereira, and L. M. Thomé. Multi-stage transmission expansion planning considering multiple dispatches and contingency criterion. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2004)*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Gramado, Brasil, 21-24 Setembro 2004.
- M. V. F. Pereira and L. M. V. G. Pinto. Application of sensitivity analysis of load supplying capability to interactive transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104(2):381–389, February 1985.
- M. V. F. Pereira, L. M. V. G. Pinto, S. H. F. Cunha, and G.C. Oliveira. A decomposition approach to automated generation/transmission expansion planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104(11):3074–3081, November 1985.
- M. V. F. Pereira, L. M. V. G. Pinto, G. C. Oliveira, and S. H. F. Cunha. Composite generation transmission expansion planning. Epri-report, research project 2473-9, Stanford University, February 1987.
- V. H. Quintana, G. L. Torres, and J. Medina-Palomo. Interior-point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):170–176, February 2000.
- J. L. M. Ramos, A. G. Exposito, and V. H. Quintana. Transmission power loss reduction by interior-point methods: implementation issues and practical experience. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 152(1):90–98, January 2005.
- M. J. Rider, C. A. Castro, M. F. Bedriñana, and A. V. Garcia. Towards a fast and robust interior point method for power system applications. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 151(5):575–581, September 2004a.
- M. J. Rider, C. A. Castro, V. L. Paucar, and A. V. Garcia. Higher order interior-point method for minimising load-shedding in a competitive electric power market. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 151(4):433–440, July 2004b.
- M. J. Rider, A. V. Garcia, and R. Romero. A constructive heuristic algorithm to short term transmission network expansion planning. In *Proceedings of the 2004 Power Engineering Society General*

- Meeting*, number PESGM2004-000601, pages 2107–2113, Denver, Colorado, USA, 6-10 June 2004c.
- M. J. Rider, I. J. Silva, R. Romero, A. V. Garcia, and C. A. Murari. Transmission network expansion planning in full open market considering security constraints. In *Proceedings of the International Conference 2005 IEEE St. Petersburg*, number 270, pages 01–06, St. Petersburg, Russia, 27-30 June 2005.
- R. Romero. Planejamento a longo prazo da expansão de sistemas de transmissão de energia elétrica. Tese de livre-docência, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP - Campus de Ilha Solteira, Novembro 1999.
- R. Romero and A. Monticelli. A hierarchical decomposition approach for transmission network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):373–380, February 1994.
- R. Romero, R. A. Gallego, and A. Monticelli. Transmission system expansion planning by simulated annealing. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1):364–369, February 1996.
- R. Romero, A. Monticelli, A. Garcia, and S. Haffner. Test systems and mathematical models for transmission network expansion planning. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 149(1):27–36, January 2002.
- R. Romero, C. Rocha, M. Mantovani, and J. R. S. Mantovani. Analysis of heuristic algorithms for the transportation model in static and multistage planning in network expansion systems. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 150(5):521–526, September 2003.
- A. Seifu, S. Salon, and G. List. Optimization of transmission line planning including security constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, 4(4):1507–1513, November 1989.
- G. B. Shrestha and P. A. J. Fonseka. Congestion-driven transmission expansion in competitive power markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(3):1658–1665, August 2004.
- E. L. Da Silva, H. A. Gil, and J. M. Areiza. Transmission network expansion planning under an improved genetic algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(4):1168–1175, August 2000.
- E. L. Da Silva, J. M. Areiza, G. C. De Oliveira, and S. Binato. Transmission network expansion planning under a tabu search approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(1):62–68, February 2001.

- I. J. Silva, M. J. Rider, R. Romero, A. V. Garcia, and C. A. Murari. Transmission network expansion planning with security constraints. *IEEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 152(6):828–836, November 2005a.
- I. J. Silva, M. J. Rider, R. Romero, and C. A. Murari. Transmission network expansion planning considering uncertainty in demand. In *Proceedings of the 2004 Power Engineering Society General Meeting*, number PESGM2005-000405, pages 1051–1056, San Francisco, California, USA, 12-16 June 2005b.
- I. G. Sánchez, R. Romero, J. R. S. Mantovani, and M. J. Rider. Transmission- expansion planning using the dc model and nonlinear-programming technique. *IEEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 152(6):763–769, November 2005.
- B. Stott and J. L. Marinho. Linear programming for power-system network security applications. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-98(3):837–848, May/June 1979.
- D. I. Sun, B. Ashley, B. Brewer, A. Hughes, and W. F. Tinney. Optimal power flow by newton approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103(10):2864–2880, October 1984.
- G. L. Torres and V. H. Quintana. On a nonlinear multiple-centrality-corrections interior-point method for optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(2):222–228, May 2001.
- G. L. Torres and V. H. Quintana. An interior-point method for non-linear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(4):1211–1218, November 1998.
- G. L. Torres and V. H. Quintana. Higher-order interior-point methods for nonlinear opf solution. In *Proceedings of the 32nd North American Power Symposium*, volume I, pages 45–51, University of Waterloo, Ontario, Canada, 23-24 October 2000.
- G. L. Torres, V. H. Quintana, and M. A. de Carvalho. Higher-order interior-point methods for computing minimum load shedding and maximum loadability of power systems. In *Proceedings of the VIII Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning (VIII SEPOPE)*, number IP-057, Brasilia (DF), Brasil, 19-23 May 2002.
- R. Villasana, L. L. Garver, and S. J. Salon. Transmission network planning using linear programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104(2):349–356, February 1985.

- X. Wang, G. C. Ejebe, J. Tong, and J. G. Waight. Preventive/corrective control for voltage stability using direct interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(3):878–883, August 1998.
- H. Wei, H. Sasaki, J. Kubokawa, and R. Yohoyama. An interior point methods for power systems weighted nonlinear L1 norm static state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(2): 617–623, May 1998.
- F. F. Wu, F. Zheng, and F. Wen. Transmission planning in restructured electric power systems. In *Proceedings of the International Conference 2005 IEEE St. Petersburg*, number 715, pages 01–04, St. Petersburg, Russia, 27-30 June 2005.
- Y. Wu. Fuzzy second correction on complementarity condition for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(3):360–366, August 2001.
- Y. Wu and A. S. Debs. Initialisation, decoupling, hot start, and warm start in direct nonlinear interior point algorithm for optimal power flows. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 148(1):67–75, January 2001.
- Y. Wu, A. S. Debs, and R. E. Marsten. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883, May 1994.
- X. Yan and V. H. Quintana. An efficient predictor - corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(2):803–810, May 1997.
- K. Zollenkopf. Bi-factorisation - basic computational algorithm and programing techniques. *Conference on Large Sets of Sparce Linear Equations*, pages 75–96, 1970.

Apêndice A

Relações matemáticas do MPI

No problema de planejamento da transmissão utilizando o modelo CA as funções $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ e as variáveis de decisão, assim como alguns vetores e matrizes constantes, são dadas por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix}; \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_F \\ \mathbf{R}_T \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{P}_G \\ \mathbf{Q}_G \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_n \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \mathbf{x}^l = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}} \\ \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{P}}_G \\ \underline{\mathbf{Q}}_G \end{bmatrix}; \mathbf{x}^u = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}} \\ \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{P}}_G \\ \bar{\mathbf{Q}}_G \end{bmatrix};$$

em que os vetores $\Delta \mathbf{P}$, $\Delta \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}_F$ e $\mathbf{R}_T$ são dados por:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) - \mathbf{I}_P \mathbf{P}_G + \mathbf{P}_D \\ \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) - \mathbf{I}_Q \mathbf{Q}_G + \mathbf{Q}_D \\ \mathbf{R}_F &= (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0)(\mathbf{S}^{de} - \bar{\mathbf{S}}) \\ \mathbf{R}_T &= (\mathbf{N} + \mathbf{N}^0)(\mathbf{S}^{para} - \bar{\mathbf{S}}) \end{aligned}$$

em que os elementos (ij) dos vetores $\mathbf{S}^{de}$ e $\mathbf{S}^{para}$ são calculados por:

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^{de} &= \sqrt{(P_{ij}^{de})^2 + (Q_{ij}^{de})^2} \\
 P_{ij}^{de} &= V_i^2 g_{ij} - V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\
 Q_{ij}^{de} &= -V_i^2 (b_{ij}^{sh} + b_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \\
 S_{ij}^{para} &= \sqrt{(P_{ij}^{para})^2 + (Q_{ij}^{para})^2} \\
 P_{ij}^{para} &= V_j^2 g_{ij} - V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} - b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\
 Q_{ij}^{para} &= -V_j^2 (b_{ij}^{sh} + b_{ij}) + V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij})
 \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana das restrições de igualdade é calculada usando:

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} & \mathbf{I}_P & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_Q \end{bmatrix}$$

em que os elementos (i, j) de cada sub-matriz de $\mathbf{Jg}(\mathbf{x})$ são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} &\begin{cases} \frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_i} = V_i G_{ii}(\mathbf{n}) + \frac{P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n})}{V_i} \\ \frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_j} = V_i [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] \end{cases} \\
 \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\theta}} &\begin{cases} \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_i} = -V_i^2 B_{ii}(\mathbf{n}) - Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) \\ \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] \end{cases} \\
 \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} &\begin{cases} \frac{\partial \Delta P_i}{\partial n_{ij}} = P_{ij}^{de} \end{cases} \\
 \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}} &\begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_i} = -V_i B_{ii}(\mathbf{n}) + \frac{Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n})}{V_i} \\ \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_j} = V_i [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_i} = -V_i^2 G_{ii}(\mathbf{n}) + P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) \\ \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_j} = -V_i V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{n}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial n_{ij}} = Q_{ij}^{de} \end{array} \right.$$

A matriz Hessiana da i -ésima restrição de igualdade do vetor $\Delta \mathbf{P}$ é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{H}_{\Delta \mathbf{P}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial^2 \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que os elementos (i, j) de cada sub-matriz de $\mathbf{H}_{\Delta \mathbf{P}_i}$ é dado por:

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial^2 \mathbf{V}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial^2 V_i} = 2G_{ii}(\mathbf{n}) \\ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_j \partial V_i} = G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_i \partial \theta_i} = -V_i B_{ii}(\mathbf{n}) - \frac{Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n})}{V_i} \\ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_j \partial \theta_i} = -V_i [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] = -\frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_j \partial \theta_j} \\ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_i \partial \theta_j} = V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_i \partial n_{ij}} &= 2V_i g_{ij} - V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial V_j \partial n_{ij}} &= -V_i (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \end{aligned} \right. \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial^2 \theta_i} &= V_i^2 G_{ii}(\mathbf{n}) - P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) \\ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = V_i V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] \\ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial^2 \theta_j} &= -V_i V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] \end{aligned} \right. \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial \theta_i \partial n_{ij}} = V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) = -\frac{\partial^2 \Delta P_i}{\partial \theta_j \partial n_{ij}} \right. \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} &= \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}}^T ; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}}^T ; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{P}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}}^T
\end{aligned}$$

A matriz Hessiana da i -ésima restrição de igualdade do vetor $\Delta \mathbf{Q}$ é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{H}_{\Delta \mathbf{Q}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial^2 \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que os elementos (i, j) de cada sub-matriz de $\mathbf{H}_{\Delta \mathbf{Q}_i}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial^2 \mathbf{V}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial^2 V_i} = -2B_{ii}(\mathbf{n}) \\ \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_j \partial V_i} = G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} \end{array} \right. \\
 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_i \partial \theta_i} = -V_i G_{ii}(\mathbf{n}) + \frac{P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n})}{V_i} \\ \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_j \partial \theta_i} = V_i [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] = -\frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_j \partial \theta_j} \\ \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_i \partial \theta_j} = -V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij} + B_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij}] \end{array} \right. \\
 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_i \partial n_{ij}} = -2V_i(b_{ij} + b_{ij}^{sh}) - V_j(g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \\ \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial V_j \partial n_{ij}} = -V_i(g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \end{array} \right. \\
 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial^2 \theta_i} = -V_i^2 B_{ii}(\mathbf{n}) - Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) \\ \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = V_i V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] \\ \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial^2 \theta_j} = -V_i V_j [G_{ij}(\mathbf{n}) \sin \theta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{n}) \cos \theta_{ij}] \end{array} \right. \\
 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial \theta_i \partial n_{ij}} = -V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) = -\frac{\partial^2 \Delta Q_i}{\partial \theta_j \partial n_{ij}} \end{array} \right. \\
 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} & = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}}^T ; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}}^T ; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}}^T
 \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana das restrições de desigualdade é calculada usando:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que, os elementos (i, j) de cada sub-matriz de $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \mathbf{V}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_F}{\partial V_i} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial R_F}{\partial V_j} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_j} \end{array} \right. \\ \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_F}{\partial \theta_i} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial R_F}{\partial \theta_j} \end{array} \right. \\ \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_F}{\partial n_{ij}} = S_{ij}^{de} - \bar{S}_{ij} \end{array} \right. \\ \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{V}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_T}{\partial V_i} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial R_T}{\partial V_j} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_j} \end{array} \right. \\ \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_T}{\partial \theta_i} = (n_{ij} + n_{ij}^0) \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial R_T}{\partial \theta_j} \end{array} \right. \\ \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_T}{\partial n_{ij}} = S_{ij}^{para} - \bar{S}_{ij} \end{array} \right. \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_i} &= \frac{1}{S_{ij}^{de}} [P_{ij}^{de} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_i} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_i}] \\
\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_j} &= \frac{1}{S_{ij}^{de}} [P_{ij}^{de} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_j} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_j}] \\
\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{S_{ij}^{de}} [P_{ij}^{de} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i}] = -\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} \\
\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_i} &= 2V_i g_{ij} - V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\
\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_i} &= -2V_i (b_{ij}^{sh} + b_{ij}) - V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \\
\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} &= V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) = -V_j \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_j} = -\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} \\
\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} &= -V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) = V_j \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_j} = -\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} \\
\\
\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_i} &= \frac{1}{S_{ij}^{para}} [P_{ij}^{para} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_i} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_i}] \\
\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_j} &= \frac{1}{S_{ij}^{para}} [P_{ij}^{para} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_j} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_j}] \\
\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{S_{ij}^{para}} [P_{ij}^{para} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i}] = -\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} \\
\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_j} &= 2V_j g_{ij} - V_i (g_{ij} \cos \theta_{ij} - b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\
\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_j} &= -2V_j (b_{ij}^{sh} + b_{ij}) + V_i (g_{ij} \sin \theta_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij}) \\
\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} &= V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij}) = V_i \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_i} = -\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} \\
\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} &= V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} - b_{ij} \sin \theta_{ij}) = -V_i \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_i} = -\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_j}
\end{aligned}$$

A matriz Hessiana da i -ésima restrição de desigualdade do vetor $\mathbf{R}_F$ é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{R}_{F_i}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial^2 \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que os elementos (i, j) de cada sub-matriz de $\mathbf{H}_{\mathbf{R}_{F_i}}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial^2 \mathbf{V}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial^2 V_i} &= \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} \left[P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial^2 V_i} + \left(\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_i} \right)^2 + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial^2 V_i} + \left(\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_i} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_i \partial V_j} &= \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_j \partial V_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} \left[P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial V_j} + \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_i} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_j} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial V_j} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_j} - \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_i} \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_j} \right] \\ \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial^2 V_j} &= \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} \left[\left(\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_j} \right)^2 \right] \end{aligned} \right. \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_i \partial \theta_i} &= -\frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_i \partial \theta_j} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} \left[P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial \theta_i} + \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_i} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial \theta_i} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_i} \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \right] \\ \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_j \partial \theta_j} &= -\frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_j \partial \theta_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} \left[P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial V_j \partial \theta_j} + \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_j} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial V_j \partial \theta_j} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_j} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_j} \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} \right] \end{aligned} \right. \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{F_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_i \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial^2 R_{F_i}}{\partial V_j \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial V_j} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{R}_{Fi}}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{Fi}}{\partial^2 \theta_i} &= \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} [P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_i} + (\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i})^2 + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_i} + (\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i})^2 - (\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_i})^2] \\ \frac{\partial^2 R_{Fi}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 R_{Fi}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} [P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \\ &\quad \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_j}] \\ \frac{\partial^2 R_{Fi}}{\partial^2 \theta_j} &= \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} [P_{ij}^{de} \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_j} + (\frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_j})^2 + Q_{ij}^{de} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_j} + (\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_j})^2 - (\frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_j})^2] \end{aligned} \right. \\
\frac{\partial^2 \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{Fi}}{\partial \theta_i \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial^2 R_{Fi}}{\partial \theta_j \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{de}}{\partial \theta_j} \end{aligned} \right. \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} &= \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}}^T; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}}^T; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Fi}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}}^T
\end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial^2 V_i} &= 2g_{ij}; \quad \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial^2 V_i} = -2(b_{ij}^{sh} + b_{ij}); \quad \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{1}{V_i} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial V_j} \\
\frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial V_j} &= \frac{1}{V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial V_j}; \quad \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial \theta_i} = \frac{1}{V_i} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i}; \quad \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial V_i \partial \theta_i} = \frac{1}{V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \\
\frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial V_j \partial \theta_j} &= -\frac{1}{V_j} \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i}; \quad \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial V_j \partial \theta_j} = -\frac{1}{V_j} \frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \\
\frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_i} &= \frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_j} = -\frac{\partial^2 P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{\partial Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i} \\
\frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_i} &= \frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial^2 \theta_j} = -\frac{\partial^2 Q_{ij}^{de}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial P_{ij}^{de}}{\partial \theta_i}
\end{aligned}$$

A matriz Hessiana da i -ésima restrição de desigualdade do vetor $\mathbf{R}_T$ é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{R}_{T_i}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial^2 \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} & \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que os elementos (i, j) de cada sub-matriz de $\mathbf{H}_{\mathbf{R}_{T_i}}$ é dado por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial^2 \mathbf{V}} \right\} & \begin{cases} \frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial^2 V_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} \left[\left(\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_i} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{\partial^2 R_T}{\partial V_j \partial V_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} \left[P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial V_j} + \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_i} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_j} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial V_j} + \right. \\ \left. \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_j} - \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_i} \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_j} \right] \\ \frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial^2 V_j} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} \left[P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial^2 V_j} + \left(\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_j} \right)^2 + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial^2 V_j} + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_j} \right)^2 \right] \end{cases} \\ \left. \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{T_i}}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}} \right\} & \begin{cases} \frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial V_i \partial \theta_i} = -\frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial V_i \partial \theta_j} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{de}} \left[P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial \theta_i} + \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_i} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial \theta_i} + \right. \\ \left. \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_i} \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} \right] \\ \frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial V_j \partial \theta_j} = -\frac{\partial^2 R_{T_i}}{\partial V_j \partial \theta_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} \left[P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial V_j \partial \theta_j} + \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_j} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial V_j \partial \theta_j} + \right. \\ \left. \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_j} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_j} \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial V_i \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial V_j \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial V_j} \end{aligned} \right. \\
\frac{\partial^2 \mathbf{R}_{Ti}}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial^2 \theta_i} &= \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} [P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_i} + (\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i})^2 + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_i} + \\ & \quad (\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i})^2 - (\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_i})^2] \\ \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} [P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \\ & \quad \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_j}] \\ \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial^2 \theta_j} &= \frac{(n_{ij} + n_{ij}^0)}{S_{ij}^{para}} [P_{ij}^{para} \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_j} + (\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_j})^2 + Q_{ij}^{para} \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_j} + \\ & \quad (\frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_j})^2 - (\frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_j})^2] \end{aligned} \right. \\
\frac{\partial^2 \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial \theta_i \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial^2 R_{Ti}}{\partial \theta_j \partial n_{ij}} &= \frac{\partial S_{ij}^{para}}{\partial \theta_j} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{V}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \mathbf{V} \partial \boldsymbol{\theta}}^T; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{V}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{n}}^T; \quad \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{R}_{Ti}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{n}}^T$$

em que,

$$\frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial^2 V_j} = 2g_{ij} ; \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial^2 V_j} = -2(b_{ij}^{sh} + b_{ij}) ; \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{1}{V_j} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial V_i}$$

$$\frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{1}{V_j} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial V_i} ; \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial \theta_i} = \frac{1}{V_i} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} ; \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial V_i \partial \theta_i} = \frac{1}{V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial V_j \partial \theta_j} = -\frac{1}{V_i} \frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i} ; \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial V_j \partial \theta_j} = -\frac{1}{V_i} \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_i} = \frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_j} = -\frac{\partial^2 P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_i} = \frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial^2 \theta_j} = -\frac{\partial^2 Q_{ij}^{para}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{\partial P_{ij}^{para}}{\partial \theta_i}$$

Apêndice B

Dados dos Sistemas para o Modelo CA

B.1 Sistema Garver de 6 Barras

Dados de Barra							
Barra	Tipo	P_D MW	Q_D MVar	P_G^{max} MW	P_G^{min} MW	Q_G^{max} MVar	Q_G^{min} MVar
1	V θ	80	16	160	0	48	-10
2	PQ	240	48	–	–	–	–
3	PV	40	8	370	0	101	-10
4	PQ	160	32	–	–	–	–
5	PQ	240	48	–	–	–	–
6	PV	0	0	610	0	183	-10

Dados de Ramos

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
1	2	0,040	0,400	0,00	120	40	1	5
1	3	0,038	0,380	0,00	120	38	0	5
1	4	0,060	0,600	0,00	100	60	1	5
1	5	0,020	0,200	0,00	120	20	1	5
1	6	0,068	0,680	0,00	90	68	0	5
2	3	0,020	0,200	0,00	120	20	1	5
2	4	0,040	0,400	0,00	120	40	1	5
2	5	0,031	0,310	0,00	120	31	0	5
2	6	0,030	0,300	0,00	120	30	0	5
3	4	0,059	0,590	0,00	102	59	0	5
3	5	0,020	0,200	0,00	120	20	1	5
3	6	0,048	0,480	0,00	120	48	0	5
4	5	0,063	0,630	0,00	95	63	0	5
4	6	0,030	0,300	0,00	120	30	0	5
5	6	0,061	0,610	0,00	98	61	0	5

B.2 Sistema IEEE de 24 barras

Dados de Barra

Barra	Tipo	P_D MW	Q_D MVA _r	P_G^{max} MW	P_G^{min} MW	Q_G^{max} MVA _r	Q_G^{min} MVA _r
1	V θ	324,0	66,0	576,0	0,0	240,0	-150,0
2	PV	291,0	60,0	576,0	0,0	240,0	-150,0
3	PQ	540,0	111,0	—	—	—	—
4	PQ	222,0	45,0	—	—	—	—
5	PQ	213,0	42,0	—	—	—	—
6	PV	408,0	84,0	—	—	0,0	-300,0
7	PV	375,0	75,0	900,0	0,0	540,0	0,0
8	PQ	513,0	105,0	—	—	—	—
9	PQ	525,0	108,0	—	—	—	—
10	PQ	585,0	120,0	—	—	—	—
11	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
12	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
13	PV	795,0	162,0	1773,0	0,0	720,0	0,0
14	PV	582,0	117,0	—	—	600,0	-150,0
15	PV	951,0	192,0	645,0	0,0	330,0	-150,0
16	PV	300,0	60,0	465,0	0,0	240,0	-150,0
17	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
18	PV	999,0	204,0	1200,0	0,0	600,0	-150,0
19	PQ	543,0	111,0	—	—	—	—
20	PQ	384,0	78,0	—	—	—	—
21	PV	0,0	0,0	1200,0	0,0	600,0	-150,0
22	PV	0,0	0,0	900,0	0,0	288,0	-180,0
23	PV	0,0	0,0	1980,0	0,0	930,0	-375,0
24	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—

Dados de Ramos								
Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} $\times 10^6 \text{US\$}$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
1	2	0,0026	0,0139	0,4611	200,0	3	1	3
1	3	0,0546	0,2112	0,0572	220,0	55	1	3
1	5	0,0218	0,0845	0,0229	220,0	22	1	3
1	8	0,0348	0,1344	0,0000	220,0	35	0	3
2	4	0,0328	0,1267	0,0343	220,0	33	1	3
2	6	0,0497	0,1920	0,0520	220,0	50	1	3
2	8	0,0328	0,1267	0,0000	220,0	33	0	3
3	9	0,0308	0,1190	0,0322	220,0	31	1	3
3	24	0,0023	0,0839	0,0000	600,0	50	1	3
4	9	0,0268	0,1037	0,0281	220,0	27	1	3
5	10	0,0228	0,0883	0,0239	220,0	23	1	3
6	7	0,0497	0,1920	0,0000	220,0	50	0	3
6	10	0,0139	0,0605	2,4590	200,0	16	1	3
7	8	0,0159	0,0614	0,0166	220,0	16	1	3
8	9	0,0427	0,1651	0,0447	220,0	43	1	3
8	10	0,0427	0,1651	0,0447	220,0	43	1	3
9	11	0,0023	0,0839	0,0000	600,0	50	1	3
9	12	0,0023	0,0839	0,0000	600,0	50	1	3
10	11	0,0023	0,0839	0,0000	600,0	50	1	3
10	12	0,0023	0,0839	0,0000	600,0	50	1	3
11	13	0,0061	0,0476	0,0999	625,0	66	1	3
11	14	0,0054	0,0418	0,0879	625,0	58	1	3
12	13	0,0061	0,0476	0,0999	625,0	66	1	3
12	23	0,0124	0,0966	0,2030	625,0	134	1	3
13	14	0,0057	0,0447	0,0000	625,0	62	0	3
13	23	0,0111	0,0865	0,1818	625,0	120	1	3
14	16	0,0050	0,0389	0,0818	625,0	54	1	3
14	23	0,0080	0,0620	0,0000	625,0	86	0	3
15	16	0,0022	0,0173	0,0364	625,0	24	1	3
15	21	0,0063	0,0490	0,1030	625,0	68	2	3
15	24	0,0067	0,0519	0,1091	625,0	72	1	3
16	17	0,0033	0,0259	0,0545	625,0	36	1	3
16	19	0,0030	0,0231	0,0485	625,0	32	1	3
16	23	0,0105	0,0822	0,0000	625,0	114	0	3
17	18	0,0018	0,0144	0,0303	625,0	20	1	3
17	22	0,0135	0,1053	0,2212	625,0	146	1	3
18	21	0,0033	0,0259	0,0545	625,0	36	2	3
19	20	0,0051	0,0396	0,0833	625,0	55	2	3
19	23	0,0078	0,0606	0,0000	625,0	84	0	3
20	23	0,0028	0,0216	0,0455	625,0	30	2	3
21	22	0,0087	0,0678	0,1424	625,0	94	1	3

B.3 Sistema Brasileiro Sul de 46 barras

Dados de Barra							
Barra	Tipo	P_D	Q_D	P_G^{max}	P_G^{min}	Q_G^{max}	Q_G^{min}
		MW	MVAr	MW	MW	MVAr	MVAr
1	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
2	PQ	443,1	66,5	—	—	—	—
3	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
4	PQ	300,7	45,1	—	—	—	—
5	PQ	238,0	35,7	—	—	—	—
6	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
7	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
8	PQ	72,2	10,8	—	—	—	—
9	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
10	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
11	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
12	PQ	511,9	76,8	—	—	—	—
13	PQ	185,8	27,9	—	—	—	—
14	V θ	0,0	0,0	2000,0	0,0	600,0	-200,0
15	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
16	PV	0,0	0,0	2000,0	0,0	600,0	-200,0
17	PV	0,0	0,0	1050,0	0,0	315,0	-105,0
18	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
19	PV	0,0	0,0	1670,0	0,0	501,0	-167,0
20	PQ	1091,2	163,7	—	—	—	—
21	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
22	PQ	81,9	12,3	—	—	—	—
23	PQ	458,1	68,7	—	—	—	—
24	PQ	478,2	71,7	—	—	—	—
25	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
26	PQ	231,9	34,8	—	—	—	—
27	PV	0,0	0,0	220,0	0,0	66,0	-22,0
28	PV	0,0	0,0	800,0	0,0	240,0	-80,0
29	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
30	PQ	0,0	0,0	—	—	—	—
31	PV	0,0	0,0	700,0	0,0	210,0	-70,0
32	PV	0,0	0,0	500,0	0,0	150,0	-50,0
33	PQ	229,1	34,4	—	—	—	—
34	PV	0,0	0,0	748,0	0,0	224,4	-74,8
35	PQ	216,0	32,4	—	—	—	—

Dados de Barra (continuação)

Barra	Tipo	P_D MW	Q_D MVAr	P_G^{max} MW	P_G^{min} MW	Q_G^{max} MVAr	Q_G^{min} MVAr
36	PQ	90,1	13,5	–	–	–	–
37	PV	0,0	0,0	300,0	0,0	90,0	-30,0
38	PQ	216,0	32,4	–	–	–	–
39	PV	0,0	0,0	600,0	0,0	180,0	-60,0
40	PQ	262,1	39,3	–	–	–	–
41	PQ	0,0	0,0	–	–	–	–
42	PQ	1607,9	241,2	–	–	–	–
43	PQ	0,0	0,0	–	–	–	–
44	PQ	79,1	11,9	–	–	–	–
45	PQ	86,7	13,0	–	–	–	–
46	PV	0,0	0,0	700,0	0,0	210,0	-70,0

Dados de Ramos

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
1	7	0,0060	0,0616	0,0006	324,0	4349,0	1	5
1	2	0,0104	0,1065	0,0011	324,0	7076,0	2	5
4	9	0,0091	0,0924	0,0009	324,0	6217,0	1	5
5	9	0,0115	0,1173	0,0012	324,0	7732,0	1	5
5	8	0,0111	0,1132	0,0011	324,0	7480,0	1	5
7	8	0,0100	0,1023	0,0010	324,0	6823,0	1	5
4	5	0,0056	0,0566	0,0006	324,0	4046,0	2	5
2	5	0,0032	0,0324	0,0003	324,0	2581,0	2	5
8	13	0,0132	0,1348	0,0013	288,0	8793,0	1	5
9	14	0,0172	0,1756	0,0018	264,0	11267,0	2	5
12	14	0,0072	0,0740	0,0007	324,0	5106,0	2	5
14	18	0,0149	0,1514	0,0015	288,0	9803,0	2	5
13	18	0,0177	0,1805	0,0018	264,0	11570,0	1	5
13	20	0,0105	0,1073	0,0011	324,0	7126,0	1	5
18	20	0,0196	0,1997	0,0020	240,0	12732,0	1	5
19	21	0,0010	0,0278	0,0003	1800,0	32632,0	1	5
16	17	0,0003	0,0078	0,0001	2400,0	10505,0	1	5
17	19	0,0002	0,0061	0,0001	2400,0	8715,0	1	5
14	26	0,0158	0,1614	0,0016	264,0	10409,0	1	5
14	22	0,0083	0,0840	0,0008	324,0	5712,0	1	5
22	26	0,0078	0,0790	0,0008	324,0	5409,0	1	5
20	23	0,0092	0,0932	0,0009	324,0	6268,0	2	5
23	24	0,0076	0,0774	0,0008	324,0	5308,0	2	5
26	27	0,0081	0,0832	0,0008	324,0	5662,0	2	5

Dados de Ramos (continuação)

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
24	34	0,0162	0,1647	0,0016	264,0	10611,0	1	5
24	33	0,0142	0,1448	0,0014	288,0	9399,0	1	5
33	34	0,0124	0,1265	0,0013	324,0	8288,0	1	5
27	36	0,0089	0,0915	0,0009	324,0	6167,0	1	5
27	38	0,0204	0,2080	0,0021	240,0	13237,0	2	5
36	37	0,0104	0,1057	0,0011	324,0	7025,0	1	5
34	35	0,0048	0,0491	0,0005	324,0	3591,0	2	5
35	38	0,0194	0,1980	0,0020	240,0	12631,0	1	5
37	39	0,0028	0,0283	0,0003	324,0	2329,0	1	5
37	40	0,0125	0,1281	0,0013	324,0	8389,0	1	5
37	42	0,0206	0,2105	0,0021	240,0	13388,0	1	5
39	42	0,0199	0,2030	0,0020	240,0	12934,0	3	5
40	42	0,0092	0,0932	0,0009	324,0	6268,0	1	5
38	42	0,0089	0,0907	0,0009	324,0	6116,0	3	5
32	43	0,0010	0,0309	0,0003	1680,0	35957,0	1	5
42	44	0,0118	0,1206	0,0012	324,0	7934,0	1	5
44	45	0,0182	0,1864	0,0019	240,0	11924,0	1	5
19	32	0,0007	0,0195	0,0002	2160,0	23423,0	1	5
46	19	0,0008	0,0222	0,0002	2160,0	26365,0	1	5
46	16	0,0007	0,0203	0,0002	2160,0	24319,0	1	5
18	19	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	1	5
20	21	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	1	5
42	43	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	1	5
2	4	0,0086	0,0882	0,0009	324,0	5965,0	0	5
14	15	0,0037	0,0374	0,0004	324,0	2884,0	0	5
46	10	0,0003	0,0081	0,0001	2400,0	10889,0	0	5
4	11	0,0220	0,2246	0,0022	288,0	14247,0	0	5
5	11	0,0089	0,0915	0,0009	324,0	6167,0	0	5
46	6	0,0004	0,0128	0,0001	2400,0	16005,0	0	5
46	3	0,0007	0,0203	0,0002	2160,0	24319,0	0	5
16	28	0,0008	0,0222	0,0002	2160,0	26365,0	0	5
16	32	0,0010	0,0311	0,0003	1680,0	36213,0	0	5
17	32	0,0008	0,0232	0,0002	2040,0	27516,0	0	5
19	25	0,0011	0,0325	0,0003	1680,0	37748,0	0	5
21	25	0,0006	0,0174	0,0002	2400,0	21121,0	0	5
25	32	0,0011	0,0319	0,0003	1680,0	37109,0	0	5
31	32	0,0001	0,0046	0,0000	2400,0	7052,0	0	5
28	31	0,0002	0,0053	0,0001	2400,0	7819,0	0	5
28	30	0,0002	0,0058	0,0001	2400,0	8331,0	0	5
27	29	0,0098	0,0998	0,0010	324,0	6672,0	0	5

Dados de Ramos (continuação)

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
26	29	0,0053	0,0541	0,0005	324,0	3894,0	0	5
28	41	0,0012	0,0339	0,0003	1560,0	39283,0	0	5
28	43	0,0014	0,0406	0,0004	1440,0	46701,0	0	5
31	41	0,0010	0,0278	0,0003	1800,0	32632,0	0	5
32	41	0,0010	0,0309	0,0003	1680,0	35957,0	0	5
41	43	0,0005	0,0139	0,0001	2400,0	17284,0	0	5
40	45	0,0216	0,2205	0,0022	216,0	13994,0	0	5
15	16	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
46	11	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
24	25	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
29	30	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
40	41	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
2	3	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
5	6	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5
9	10	0,0000	0,0125	0,0001	720,0	8178,0	0	5

B.4 Sistema Nordeste Brasileiro de 87 barras

Dados de Barra									
Barra	Tipo	P_{D1}	Q_{D1}	P_{D2}	Q_{D2}	P_G^{max}	P_G^{min}	Q_G^{max}	Q_G^{min}
		MW	MVAr	MW	MVAr	MW	MW	MVAr	MVAr
1	PQ	1857,0	279,0	2747,0	412,0	—	—	—	—
2	V θ	0,0	0,0	0,0	0,0	6478,0	0,0	1943,0	-648,0
3	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
4	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	827,0	0,0	249,0	-83,0
5	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
6	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
7	PQ	31,0	5,0	31,0	5,0	—	—	—	—
8	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	645,0	0,0	193,0	-64,0
9	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	745,0	0,0	224,0	-74,0
10	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	862,0	0,0	259,0	-86,0
11	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	3520,0	0,0	1056,0	-352,0
12	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	3612,0	0,0	1084,0	-361,0
13	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	7219,0	0,0	2166,0	-722,0
14	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	868,0	0,0	261,0	-87,0
15	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
16	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
17	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
18	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
19	PQ	86,0	13,0	125,0	19,0	—	—	—	—
20	PQ	125,0	19,0	181,0	27,0	—	—	—	—
21	PQ	722,0	108,0	1044,0	157,0	—	—	—	—
22	PQ	291,0	44,0	446,0	67,0	—	—	—	—
23	PQ	58,0	9,0	84,0	13,0	—	—	—	—
24	PQ	159,0	24,0	230,0	35,0	—	—	—	—
25	PQ	1502,0	225,0	2273,0	341,0	—	—	—	—
26	PQ	47,0	7,0	68,0	10,0	—	—	—	—
27	PQ	378,0	57,0	546,0	82,0	—	—	—	—
28	PQ	189,0	28,0	273,0	41,0	—	—	—	—
29	PQ	47,0	7,0	68,0	10,0	—	—	—	—
30	PQ	189,0	28,0	273,0	41,0	—	—	—	—
31	PQ	110,0	17,0	225,0	34,0	—	—	—	—
32	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
33	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
34	PQ	28,0	4,0	107,0	16,0	—	—	—	—
35	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	2622,0	0,0	788,0	-262,0
36	PQ	225,0	34,0	325,0	49,0	—	—	—	—
37	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	271,0	0,0	81,0	-27,0

Dados de Barra (continuação)

Barra	Tipo	P_{D1} MW	Q_{D1} MVAr	P_{D2} MW	Q_{D2} MVAr	P_G^{max} MW	P_G^{min} MW	Q_G^{max} MVAr	Q_G^{min} MVAr
38	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
39	PQ	186,0	28,0	269,0	40,0	—	—	—	—
40	PQ	1201,0	180,0	1738,0	261,0	—	—	—	—
41	PQ	520,0	78,0	752,0	113,0	—	—	—	—
42	PQ	341,0	51,0	494,0	74,0	—	—	—	—
43	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
44	PQ	4022,0	603,0	5819,0	873,0	—	—	—	—
45	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
46	PQ	205,0	31,0	297,0	45,0	—	—	—	—
47	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
48	PQ	347,0	52,0	432,0	65,0	—	—	—	—
49	PQ	777,0	117,0	1124,0	169,0	—	—	—	—
50	PQ	5189,0	778,0	7628,0	1144,0	—	—	—	—
51	PQ	290,0	44,0	420,0	63,0	—	—	—	—
52	PQ	707,0	106,0	1024,0	154,0	—	—	—	—
53	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
54	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
55	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
56	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
57	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
58	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
59	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
60	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
61	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
62	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
63	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
64	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
65	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
66	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
67	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	1988,0	0,0	597,0	-199,0
68	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	1422,0	0,0	427,0	-142,0
69	PV	0,0	0,0	0,0	0,0	1446,0	0,0	435,0	-145,0
70	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
71	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
72	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
73	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
74	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
75	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
76	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
77	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—

Dados de Barra (continuação)

Barra	Tipo	P_{D1} MW	Q_{D1} MVar	P_{D2} MW	Q_{D2} MVar	P_G^{max} MW	P_G^{min} MW	Q_G^{max} MVar	Q_G^{min} MVar
78	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
79	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
80	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
81	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
82	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
83	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
84	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
85	PQ	487,0	73,0	705,0	106,0	—	—	—	—
86	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—
87	PQ	0,0	0,0	0,0	0,0	—	—	—	—

Dados de Ramos

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
1	2	0,0037	0,0374	0,0004	1500,0	44056,0	2	20
2	4	0,0041	0,0406	0,0004	1500,0	48880,0	0	20
2	60	0,0043	0,0435	0,0004	1500,0	52230,0	0	20
2	87	0,0026	0,0259	0,0003	1500,0	31192,0	1	20
3	71	0,0008	0,0078	0,0001	4800,0	92253,0	0	20
3	81	0,0005	0,0049	0,0000	4800,0	60153,0	0	20
3	83	0,0004	0,0043	0,0000	4800,0	53253,0	0	20
3	87	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
4	5	0,0043	0,0435	0,0004	1500,0	52230,0	1	20
4	6	0,0049	0,0487	0,0005	1500,0	58260,0	0	20
4	32	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
4	60	0,0022	0,0215	0,0002	1500,0	26770,0	0	20
4	68	0,0007	0,0070	0,0001	1500,0	10020,0	0	20
4	69	0,0016	0,0162	0,0002	1500,0	20740,0	0	20
4	81	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
4	87	0,0022	0,0218	0,0002	1500,0	26502,0	1	20
5	6	0,0024	0,0241	0,0002	1500,0	29852,0	1	20
5	38	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	2	20
5	56	0,0024	0,0235	0,0002	1500,0	29182,0	0	20
5	58	0,0022	0,0220	0,0002	1500,0	27440,0	0	20
5	60	0,0026	0,0261	0,0003	1500,0	32130,0	0	20
5	68	0,0041	0,0406	0,0004	1500,0	48880,0	0	20
5	70	0,0046	0,0464	0,0005	1500,0	55580,0	0	20
5	80	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20

Dados de Ramos (continuação)

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
6	7	0,0029	0,0288	0,0003	1500,0	35212,0	1	20
6	37	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	1	20
6	67	0,0046	0,0464	0,0005	1500,0	55580,0	0	20
6	68	0,0048	0,0476	0,0005	1500,0	56920,0	0	20
6	70	0,0037	0,0371	0,0004	1500,0	44860,0	0	20
6	75	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
7	8	0,0023	0,0234	0,0002	1500,0	29048,0	1	20
7	53	0,0045	0,0452	0,0005	1500,0	54240,0	0	20
7	62	0,0026	0,0255	0,0003	1500,0	31460,0	0	20
8	9	0,0019	0,0186	0,0002	1500,0	23420,0	1	20
8	12	0,0039	0,0394	0,0004	1500,0	47540,0	0	20
8	17	0,0045	0,0447	0,0004	1500,0	53570,0	0	20
8	53	0,0037	0,0365	0,0004	1800,0	44190,0	1	20
8	62	0,0043	0,0429	0,0004	1500,0	51560,0	0	20
8	73	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
9	10	0,0005	0,0046	0,0000	1500,0	7340,0	1	20
10	11	0,0013	0,0133	0,0001	1500,0	17390,0	1	20
11	12	0,0004	0,0041	0,0000	1800,0	6670,0	1	20
11	15	0,0030	0,0297	0,0003	1800,0	36284,0	1	20
11	17	0,0029	0,0286	0,0003	1800,0	35078,0	1	20
11	53	0,0025	0,0254	0,0003	1500,0	31326,0	1	20
12	13	0,0005	0,0046	0,0000	1800,0	7340,0	1	20
12	15	0,0026	0,0256	0,0003	1800,0	31594,0	1	20
12	17	0,0025	0,0246	0,0002	1800,0	30388,0	1	20
12	35	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	2	20
12	84	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
13	14	0,0008	0,0075	0,0001	1800,0	10690,0	0	20
13	15	0,0022	0,0215	0,0002	1800,0	26770,0	0	20
13	17	0,0023	0,0232	0,0002	1800,0	28780,0	0	20
13	45	0,0029	0,0290	0,0003	1800,0	35480,0	1	20
13	59	0,0023	0,0232	0,0002	1800,0	28780,0	1	20
14	17	0,0023	0,0232	0,0002	1800,0	28780,0	0	20
14	45	0,0023	0,0232	0,0002	1800,0	28780,0	0	20
14	59	0,0016	0,0157	0,0002	1800,0	20070,0	0	20
15	16	0,0020	0,0197	0,0002	1800,0	24760,0	2	20
15	45	0,0010	0,0103	0,0001	1800,0	13906,0	0	20
15	46	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	1	20
15	53	0,0042	0,0423	0,0004	1500,0	50890,0	0	20
16	44	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	4	20
16	45	0,0022	0,0220	0,0002	1800,0	27440,0	0	20

Dados de Ramos (continuação)

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
16	61	0,0013	0,0128	0,0001	1500,0	16720,0	0	20
16	77	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
17	18	0,0017	0,0170	0,0002	1800,0	21678,0	2	20
17	59	0,0017	0,0170	0,0002	1800,0	21678,0	0	20
18	50	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	4	20
18	59	0,0033	0,0331	0,0003	1800,0	40170,0	1	20
18	74	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
19	20	0,0093	0,0934	0,0009	255,0	5885,0	1	20
19	22	0,0188	0,1877	0,0019	255,0	11165,0	1	20
20	21	0,0072	0,0715	0,0007	450,0	6960,0	1	20
20	21	0,0103	0,1032	0,0010	255,0	6435,0	1	20
20	38	0,0138	0,1382	0,0014	450,0	12840,0	2	20
20	56	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	0	20
20	66	0,0206	0,2064	0,0021	255,0	12210,0	0	20
21	57	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	0	20
22	23	0,0151	0,1514	0,0015	255,0	9130,0	1	20
22	37	0,0202	0,2015	0,0020	255,0	11935,0	2	20
22	58	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
23	24	0,0165	0,1651	0,0017	255,0	9900,0	1	20
24	25	0,0215	0,2153	0,0022	255,0	12705,0	1	20
24	43	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
25	26	0,0107	0,1073	0,0011	450,0	29636,0	2	20
25	26	0,0169	0,1691	0,0017	255,0	10120,0	3	20
25	55	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	0	20
26	27	0,0140	0,1404	0,0014	450,0	25500,0	2	20
26	27	0,0221	0,2212	0,0022	255,0	12760,0	3	20
26	29	0,0108	0,1081	0,0011	255,0	6710,0	1	20
26	54	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	0	20
27	28	0,0083	0,0826	0,0008	255,0	5335,0	3	20
27	35	0,0137	0,1367	0,0014	450,0	25000,0	2	20
27	53	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	1	20
28	35	0,0167	0,1671	0,0017	255,0	9900,0	3	20
29	30	0,0069	0,0688	0,0007	255,0	4510,0	1	20
30	31	0,0064	0,0639	0,0006	255,0	4235,0	1	20
30	63	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
31	34	0,0141	0,1406	0,0014	255,0	8525,0	1	20
32	33	0,0197	0,1966	0,0020	255,0	11660,0	0	20
33	67	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
34	39	0,0116	0,1160	0,0012	255,0	7150,0	2	20
34	39	0,0297	0,2968	0,0030	120,0	6335,0	2	20

Dados de Ramos (continuação)

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
34	41	0,0099	0,0993	0,0010	255,0	6215,0	2	20
35	46	0,0217	0,2172	0,0022	255,0	12705,0	4	20
35	47	0,0133	0,1327	0,0013	255,0	8085,0	2	20
35	51	0,0160	0,1602	0,0016	255,0	9625,0	3	20
36	39	0,0119	0,1189	0,0012	255,0	7315,0	2	20
36	46	0,0064	0,0639	0,0006	255,0	4235,0	2	20
39	42	0,0097	0,0973	0,0010	255,0	6105,0	1	20
39	86	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
40	45	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	1	20
40	46	0,0088	0,0875	0,0009	255,0	5500,0	3	20
41	64	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
42	44	0,0070	0,0698	0,0007	255,0	4565,0	2	20
42	85	0,0050	0,0501	0,0005	255,0	3465,0	2	20
43	55	0,0025	0,0254	0,0003	1500,0	31326,0	0	20
43	58	0,0031	0,0313	0,0003	1500,0	38160,0	0	20
44	46	0,0167	0,1671	0,0017	255,0	10010,0	3	20
47	48	0,0197	0,1966	0,0020	255,0	11660,0	2	20
48	49	0,0076	0,0757	0,0008	255,0	4895,0	1	20
48	50	0,0026	0,0256	0,0003	255,0	2090,0	2	20
48	51	0,0216	0,2163	0,0022	255,0	12760,0	2	20
49	50	0,0083	0,0835	0,0008	255,0	5335,0	1	20
51	52	0,0056	0,0560	0,0006	255,0	3795,0	2	20
52	59	0,0012	0,0117	0,0001	900,0	8926,0	1	20
53	54	0,0027	0,0270	0,0003	1500,0	32120,0	0	20
53	70	0,0037	0,0371	0,0004	1500,0	44860,0	0	20
53	76	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
53	86	0,0039	0,0389	0,0004	1500,0	46870,0	0	20
54	55	0,0021	0,0206	0,0002	1500,0	25028,0	0	20
54	58	0,0051	0,0510	0,0005	1500,0	60940,0	0	20
54	63	0,0020	0,0203	0,0002	1500,0	25430,0	0	20
54	70	0,0036	0,0360	0,0004	1500,0	43520,0	0	20
54	79	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
56	57	0,0012	0,0122	0,0001	1500,0	16050,0	0	20
58	78	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
60	66	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
60	87	0,0038	0,0377	0,0004	1500,0	45530,0	0	20
61	64	0,0019	0,0186	0,0002	1500,0	23420,0	0	20
61	85	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
61	86	0,0014	0,0139	0,0001	1500,0	18060,0	0	20
62	67	0,0046	0,0464	0,0005	1500,0	55580,0	0	20

Dados de Ramos (continuação)

Barra De	Barra Para	r_{ij} pu	x_{ij} pu	b_{ij}^{sh} pu	S_{ij}^{max} MVA	c_{ij} US\$	n_{ij}^0	n_{ij}^{max}
62	68	0,0056	0,0557	0,0006	1500,0	66300,0	0	20
62	72	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
63	64	0,0029	0,0290	0,0003	1500,0	35480,0	0	20
65	66	0,0315	0,3146	0,0031	255,0	18260,0	0	20
65	87	0,0023	0,0233	0,0002	450,0	7510,0	0	20
67	68	0,0029	0,0290	0,0003	1500,0	35480,0	0	20
67	69	0,0021	0,0209	0,0002	1500,0	26100,0	0	20
67	71	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
68	69	0,0014	0,0139	0,0001	1500,0	18060,0	0	20
68	83	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
68	87	0,0019	0,0186	0,0002	1500,0	23240,0	0	20
69	87	0,0014	0,0139	0,0001	1500,0	18060,0	0	20
70	82	0,0006	0,0058	0,0001	1800,0	21232,0	0	20
71	72	0,0011	0,0108	0,0001	4800,0	125253,0	0	20
71	75	0,0011	0,0108	0,0001	4800,0	125253,0	0	20
71	83	0,0007	0,0067	0,0001	4800,0	80253,0	0	20
72	73	0,0010	0,0100	0,0001	4800,0	116253,0	0	20
72	83	0,0013	0,0130	0,0001	4800,0	149253,0	0	20
73	74	0,0013	0,0130	0,0001	4800,0	149253,0	0	20
73	75	0,0013	0,0130	0,0001	4800,0	149253,0	0	20
73	84	0,0009	0,0092	0,0001	4800,0	107253,0	0	20
74	84	0,0011	0,0108	0,0001	4800,0	125253,0	0	20
75	76	0,0016	0,0162	0,0002	4800,0	185253,0	0	20
75	81	0,0011	0,0113	0,0001	4800,0	131253,0	0	20
75	82	0,0009	0,0086	0,0001	4800,0	101253,0	0	20
75	83	0,0011	0,0111	0,0001	4800,0	128253,0	0	20
76	77	0,0013	0,0130	0,0001	4800,0	149253,0	0	20
76	82	0,0009	0,0086	0,0001	4800,0	101253,0	0	20
76	84	0,0006	0,0059	0,0001	4800,0	70953,0	0	20
77	79	0,0015	0,0151	0,0002	4800,0	173253,0	0	20
77	84	0,0012	0,0115	0,0001	4800,0	132753,0	0	20
78	79	0,0012	0,0119	0,0001	4800,0	137253,0	0	20
78	80	0,0005	0,0051	0,0001	4800,0	62253,0	0	20
79	82	0,0008	0,0084	0,0001	4800,0	98253,0	0	20
80	81	0,0010	0,0101	0,0001	4800,0	117753,0	0	20
80	82	0,0011	0,0108	0,0001	4800,0	125253,0	0	20
80	83	0,0009	0,0094	0,0001	4800,0	110253,0	0	20
81	83	0,0002	0,0016	0,0000	4800,0	23253,0	0	20
82	84	0,0014	0,0135	0,0001	4800,0	155253,0	0	20

Apêndice C

Dados dos Sistemas para o Modelo CC

C.1 Sistema Garver de 6 Barras

Dados de Barra

Barra #	Geração [MW]		Carga [MW]	Barra #	Geração [MW]		Carga [MW]
	Máxima	Nível Ger.			Máxima	Nível Ger.	
1	150	50	80	4	0	0	160
2	0	0	240	5	0	0	240
3	360	165	40	6	600	545	0

Dados de Ramos

De-Para	n^0	Reat. [pu]	$\bar{f}$ [MW]	Custo [10 ³ US\$]	De-Para	n^0	Reat. [pu]	$\bar{f}$ [MW]	Custo [10 ³ US\$]
1-2	1	0,40	100	40	2-6	0	0,30	100	30
1-3	0	0,38	100	38	3-4	0	0,59	82	59
1-4	1	0,60	80	60	3-5	1	0,20	100	20
1-5	1	0,20	100	20	3-6	0	0,48	100	48
1-6	0	0,68	70	68	4-5	0	0,63	75	63
2-3	1	0,20	100	20	4-6	0	0,30	100	30
2-4	1	0,40	100	40	5-6	0	0,61	78	61
2-5	0	0,31	100	31					

C.2 Sistema IEEE de 24 barras

Dados de Barra

Barra #	Geração Máxima [MW]	Carga [MW]	Barra #	Geração Máxima [MW]	Carga [MW]
01	576	324	13	1773	795
02	576	291	14	0	582
03	0	540	15	645	951
04	0	222	16	465	300
05	0	213	17	0	0
06	0	408	18	1200	999
07	900	375	19	0	543
08	0	523	20	0	384
09	0	525	21	1200	0
10	0	585	22	900	0
11	0	0	23	1980	0
12	0	0	24	0	0

Dados de Ramos

De-Para	n^0	Reat. [pu]	$\bar{f}$ [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]	De-Para	n^0	Reat. [pu]	$\bar{f}$ [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]
01-02	1	0,0139	175	3	13-23	1	0,0865	500	120
01-03	1	0,2112	175	55	14-16	1	0,0389	500	54
01-05	1	0,0845	175	22	15-16	1	0,0173	500	24
02-04	1	0,1267	175	33	15-21	2	0,0490	500	68
02-06	1	0,1920	175	50	15-24	1	0,0519	500	72
03-09	1	0,1190	175	31	16-17	1	0,0259	500	36
03-24	1	0,0839	400	50	16-19	1	0,0231	500	32
04-09	1	0,1037	175	27	17-18	1	0,0144	500	20
05-10	1	0,0883	175	23	17-22	1	0,1053	500	146
06-10	1	0,0605	175	16	18-21	2	0,0259	500	36
07-08	1	0,0614	175	16	19-20	2	0,0396	500	55
08-09	1	0,1651	175	43	20-23	2	0,0216	500	30
08-10	1	0,1651	175	43	21-22	1	0,0678	500	94
09-11	1	0,0839	400	50	01-08	0	0,1344	500	35
09-12	1	0,0839	400	50	02-08	0	0,1267	500	33
10-11	1	0,0839	400	50	06-07	0	0,1920	500	50
10-12	1	0,0839	400	50	13-14	0	0,0447	500	62
11-13	1	0,0476	500	66	14-23	0	0,0620	500	86
11-14	1	0,0418	500	58	16-23	0	0,0822	500	114
12-13	1	0,0476	500	66	19-23	0	0,0606	500	84
12-23	1	0,0966	500	134					

C.3 Sistema Brasileiro Sul de 46 barras

Dados de Barra

Barra #	Geração [MW]		Carga [MW]	Barra #	Geração [MW]		Carga [MW]
	Máxima	Nível Ger.			Máxima	Nível Ger.	
01	0,0	0,0	0,0	27	220,0	54,0	0,0
02	0,0	0,0	443,1	28	800,0	730,0	0,0
04	0,0	0,0	300,7	31	700,0	310,0	0,0
05	0,0	0,0	238,0	32	500,0	450,0	0,0
08	0,0	0,0	72,2	33	0,0	0,0	229,1
12	0,0	0,0	511,9	34	748,0	221,0	0,0
13	0,0	0,0	185,8	35	0,0	0,0	216,0
14	1257,0	944,0	0,0	36	0,0	0,0	90,1
16	2000,0	1366,0	0,0	37	300,0	212,0	0,0
17	1050,0	1000,0	0,0	38	0,0	0,0	216,0
19	1670,0	773,0	0,0	39	600,0	221,0	0,0
20	0,0	0,0	1091,2	40	0,0	0,0	262,1
22	0,0	0,0	81,9	42	0,0	0,0	1607,9
23	0,0	0,0	458,1	44	0,0	0,0	79,1
24	0,0	0,0	478,2	45	0,0	0,0	86,7
26	0,0	0,0	231,9	46	700,0	599,0	0,0

Dados de Ramos									
De-Para	n ⁰	Reat. [pu]	f [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]	De-Para	n ⁰	Reat. [pu]	f [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]
01-07	1	0,0616	270	4,349	44-45	1	0,1864	200	11,924
01-02	2	0,1065	270	7,076	19-32	1	0,0195	1800	23,423
04-09	1	0,0924	270	6,217	46-19	1	0,0222	1800	26,365
05-09	1	0,1173	270	7,732	46-16	1	0,0203	1800	24,319
05-08	1	0,1132	270	7,480	18-19	1	0,0125	600	8,178
07-08	1	0,1023	270	6,823	20-21	1	0,0125	600	8,178
04-05	2	0,0566	270	4,046	42-43	1	0,0125	600	8,178
02-05	2	0,0324	270	2,581	02-04	0	0,0882	270	5,965
08-13	1	0,1348	240	8,793	14-15	0	0,0374	270	2,884
09-14	2	0,1756	220	11,267	46-10	0	0,0081	2000	10,889
12-14	2	0,0740	270	5,106	04-11	0	0,2246	240	14,247
14-18	2	0,1514	240	9,803	05-11	0	0,0915	270	6,167
13-18	1	0,1805	220	11,570	46-06	0	0,0128	2000	16,005
13-20	1	0,1073	270	7,126	46-03	0	0,0203	1800	24,319
18-20	1	0,1997	200	12,732	16-28	0	0,0222	1800	26,365
19-21	1	0,0278	1500	32,632	16-32	0	0,0311	1400	36,213
16-17	1	0,0078	2000	10,505	17-32	0	0,0232	1700	27,516
17-19	1	0,0061	2000	8,715	19-25	0	0,0325	1400	37,748
14-26	1	0,1614	220	10,409	21-25	0	0,0174	2000	21,121
14-22	1	0,0840	270	5,712	25-32	0	0,0319	1400	37,109
22-26	1	0,0790	270	5,409	31-32	0	0,0046	2000	7,052
20-23	2	0,0932	270	6,268	28-31	0	0,0053	2000	7,819
23-24	2	0,0774	270	5,308	28-30	0	0,0058	2000	8,331
26-27	2	0,0832	270	5,662	27-29	0	0,0998	270	6,672
24-34	1	0,1647	220	10,611	26-29	0	0,0541	270	3,894
24-33	1	0,1448	240	9,399	28-41	0	0,0339	1300	39,283
33-34	1	0,1265	270	8,288	28-43	0	0,0406	1200	46,701
27-36	1	0,0915	270	6,167	31-41	0	0,0278	1500	32,632
27-38	2	0,2080	200	13,237	32-41	0	0,0309	1400	35,957
36-37	1	0,1057	270	7,025	41-43	0	0,0139	2000	17,284
34-35	2	0,0491	270	3,591	40-45	0	0,2205	180	13,994
35-38	1	0,1980	200	12,631	15-16	0	0,0125	600	8,178
37-39	1	0,0283	270	2,329	46-11	0	0,0125	600	8,178
37-40	1	0,1281	270	8,389	24-25	0	0,0125	600	8,178
37-42	1	0,2105	200	13,388	29-30	0	0,0125	600	8,178
39-42	3	0,2030	200	12,934	40-41	0	0,0125	600	8,178
40-42	1	0,0932	270	6,268	02-03	0	0,0125	600	8,178
38-42	3	0,0907	270	6,116	05-06	0	0,0125	600	8,178
32-43	1	0,0309	1400	35,957	09-10	0	0,0125	600	8,178
42-44	1	0,1206	270	7,934					

C.4 Sistema Colombiano de 93 barras

Dados de Barra

Barra #	Geração Máxima [MW]	Carga [MW]	Barra #	Geração Máxima [MW]	Carga [MW]
01	240	0	38	15	129,72
02	165	486,66	39	15	268,19
03	0	587,08	40	305	0
04	0	0	41	100	81,85
05	40	351,42	42	0	152,39
06	34	0	43	0	52,90
07	136	448,03	44	23	384,64
08	230	505,87	45	1208	0
09	0	519,69	46	150	181,62
10	0	88,84	47	0	61,60
11	108	220,15	48	885	896,26
12	47	0	49	0	193,27
13	0	260,08	50	240	632,75
14	0	0	51	0	190,45
15	0	562,84	52	0	55,60
16	0	351,90	53	320	0
17	35	203	54	0	114,19
18	540	54,10	55	40	333,59
19	1340	29,28	56	0	0
20	45	302,27	57	130	336,94
21	0	227,44	58	190	0
22	200	79,17	59	160	0
23	0	302,27	60	1216	0
24	150	0	61	155	0
25	86	0	62	0	0
26	70	0	63	1090	52,77
27	0	396,71	64	280	132,35
28	14	486,39	65	0	197,58
29	618	505,96	66	300	0
30	0	199,55	67	474	397,98
31	189	391,88	68	0	0
32	0	188,33	69	0	106,61
33	0	247,24	70	180	0
34	0	115,81	71	424	471,21
35	200	256,86	72	0	0
36	44	167,29	73	0	0
37	138	176,30	74	0	0

Dados de Barra (Continuação)

Barra #	Geração Máxima [MW]	Carga [MW]	Barra #	Geração Máxima [MW]	Carga [MW]
75	0	0	85	0	0
76	40	0	86	850	0
77	0	82,85	87	0	0
78	0	54,07	88	300	0
79	300	146,87	89	0	0
80	0	88,34	90	0	0
81	0	0	91	0	0
82	0	0	92	0	0
83	0	0	93	0	0
84	500	0			

Dados de Ramos

De-Para	n ⁰	Reat. [pu]	f [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]	De-Para	n ⁰	Reat. [pu]	f [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]
52-88	0	0,0980	300	34,190	31-34	1	0,0792	250	12,412
43-88	0	0,1816	250	39,560	31-33	2	0,0248	350	6,432
57-81	0	0,0219	550	58,890	31-60	2	0,1944	250	25,982
73-82	0	0,0374	550	97,960	31-72	2	0,0244	350	6,317
27-89	0	0,0267	450	13,270	47-54	2	0,1003	250	14,252
74-89	0	0,0034	550	14,570	47-49	2	0,0942	250	13,562
73-89	0	0,0246	550	66,650	18-58	2	0,0212	350	5,742
79-83	0	0,0457	350	15,400	18-20	1	0,0504	350	9,537
08-67	0	0,2240	250	29,200	18-66	2	0,0664	350	11,377
39-86	0	0,0545	350	9,880	18-21	1	0,0348	350	7,467
25-28	1	0,0565	320	9,767	18-22	1	0,0209	350	6,432
25-29	1	0,0570	320	9,882	19-22	1	0,0691	350	11,722
13-14	2	0,0009	350	3,902	04-05	3	0,0049	350	4,247
13-20	1	0,0178	350	5,742	05-06	2	0,0074	350	4,477
13-23	1	0,0277	350	7,007	17-23	1	0,0913	250	12,987
14-31	2	0,1307	250	18,662	17-76	1	0,0020	350	3,902
14-18	2	0,1494	250	20,232	12-17	1	0,0086	350	4,707
11-60	2	0,1067	300	15,977	01-71	2	0,0841	250	14,367
02-04	2	0,0271	350	6,662	01-08	1	0,0810	250	13,217
02-09	1	0,0122	350	5,282	01-11	1	0,0799	250	12,527
02-83	1	0,0200	570	5,972	04-36	2	0,0850	250	13,562
09-83	1	0,0200	400	5,972	19-58	1	0,0826	320	11,722

Dados de Ramos (Continuação)

De-Para	n ⁰	Reat. [pu]	f [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]	De-Para	n ⁰	Reat. [pu]	f [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]
15-18	1	0,0365	450	7,927	27-64	1	0,0280	350	6,777
15-17	1	0,0483	320	9,422	27-28	1	0,0238	350	6,202
15-20	1	0,0513	320	9,652	27-44	1	0,0893	250	16,322
15-76	1	0,0414	320	9,882	26-27	1	0,0657	350	10,917
15-24	1	0,0145	350	5,282	27-29	1	0,0166	350	5,052
37-61	1	0,0139	350	4,937	19-66	1	0,0516	350	9,307
19-61	2	0,1105	250	16,092	74-74	1	0,0214	600	58,278
61-68	1	0,0789	250	12,412	64-65	1	0,0741	350	11,837
37-68	1	0,0544	320	9,652	29-64	1	0,0063	350	4,362
40-68	1	0,1320	320	18,162	04-34	2	0,1016	270	14,942
12-75	1	0,0641	320	11,492	34-70	2	0,0415	350	8,272
24-75	1	0,0161	350	5,512	33-34	1	0,1139	320	16,322
35-36	1	0,2074	250	27,362	08-71	1	0,0075	400	4,477
27-35	1	0,1498	250	22,072	54-63	3	0,0495	320	9,077
35-44	2	0,1358	250	20,347	48-63	1	0,0238	350	6,317
38-68	1	0,0389	350	7,927	67-68	2	0,1660	250	22,072
38-39	1	0,0300	350	6,317	39-68	1	0,0145	350	5,282
27-80	1	0,0242	350	7,007	08-09	1	0,0168	350	5,972
44-80	1	0,1014	250	17,587	79-87	1	0,0071	350	4,477
56-81	1	0,0114	550	32,858	08-87	1	0,0132	350	5,167
45-54	1	0,0946	320	13,562	39-43	1	0,1163	250	16,552
45-50	2	0,0070	350	4,362	41-43	1	0,1142	250	16,322
10-78	1	0,0102	350	4,937	23-24	1	0,0255	350	6,317
07-78	1	0,0043	350	4,132	21-22	1	0,0549	350	9,882
30-64	1	0,1533	250	20,577	26-28	1	0,0512	350	9,307
30-65	1	0,0910	250	13,677	28-29	1	0,0281	350	6,777
30-72	2	0,0173	350	5,512	06-10	1	0,0337	350	7,582
55-57	1	0,0174	600	46,808	33-72	1	0,0228	350	6,202
57-84	1	0,0087	600	26,658	39-40	2	0,1020	250	16,207
55-84	1	0,0087	600	26,658	12-76	1	0,0081	350	4,707
56-57	2	0,0240	600	62,618	48-54	3	0,0396	350	8,042
09-77	1	0,0190	350	5,857	50-54	2	0,0876	250	12,872
77-79	1	0,0097	350	5,167	62-73	1	0,0272	750	73,158
01-59	2	0,0232	350	6,202	49-53	2	0,1008	250	14,252
59-67	2	0,1180	250	16,667	40-41	1	0,0186	350	5,742
08-59	2	0,1056	250	15,402	45-81	1	0,0267	450	13,270
01-03	1	0,1040	250	15,862	64-74	1	0,0267	500	13,270
03-71	1	0,0136	450	5,167	54-56	3	0,0267	450	13,270
03-06	1	0,0497	350	9,422	60-62	3	0,0257	450	13,270

Dados de Ramos (Continuação)

De-Para	n^0	Reat. [pu]	$\bar{f}$ [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]	De-Para	n^0	Reat. [pu]	$\bar{f}$ [MW]	Custo [10 ⁶ US\$]
55-62	1	0,0281	550	70,988	72-73	2	0,0267	500	13,270
47-52	1	0,0644	350	10,572	19-82	1	0,0267	450	13,270
51-52	1	0,0859	250	12,872	55-82	1	0,0290	550	77,498
29-31	2	0,1042	250	32,981	62-82	1	0,0101	600	30,998
41-42	1	0,0094	350	4,707	83-85	2	0,0267	450	13,270
40-42	1	0,0153	350	5,167	82-85	1	0,0341	700	89,898
46-53	2	0,1041	250	14,597	19-86	1	0,1513	300	20,922
46-51	1	0,1141	250	16,322	68-86	1	0,0404	350	8,272
69-70	2	0,0228	350	6,202	07-90	2	0,0050	350	4,247
66-69	2	0,1217	250	17,127	03-90	1	0,0074	350	4,592
09-69	2	0,1098	350	15,747	90-91	1	0,0267	550	13,270
60-69	2	0,0906	350	13,677	85-91	1	0,0139	600	40,298
31-32	1	0,0259	350	6,547	11-92	1	0,0267	450	13,270
32-34	1	0,0540	350	9,767	01-93	1	0,0267	450	13,270
16-18	1	0,0625	350	10,917	92-93	1	0,0097	600	30,068
16-23	1	0,0238	350	6,892	91-92	1	0,0088	600	27,588
16-21	1	0,0282	350	6,892					

Apêndice D

Resultados do Algoritmo B&B para o sistema Garver usando o Modelo CC

D.1 Caso 1: Considerando a topologia da base e com reprogramação da geração

**** INÍCIO DO ALGORITMO BRANCH AND BOUND ****

NÓ 0

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.6268E+000	9.3940E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	5.5710E-002	1.0907E-003	3.2549E+000	3.1039E-002				
2	1.00000	1.9816E-001	3.2274E-003	2.0899E-001	4.0404E+000				
3	1.00000	2.1789E-002	3.1794E-003	4.8717E-003	8.8573E-001				
4	0.99636	8.6231E-005	1.1087E-005	3.9299E-005	2.3910E-002				
5	0.95290	4.0616E-006	6.7195E-007	1.8666E-006	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^0 = 99.00\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.182	0.182	20.00	20.00
n_{2-6}	1.027	0.027	30.00	30.00
n_{3-5}	1.018	0.018	20.00	20.00
n_{4-6}	1.473	0.473	30.00	30.00

Início do cálculo dos pseudocustos

Cálculo dos pseudocustos P_{2-3}^+ e P_{2-3}^-

$$P_{2-3}^-(n_{2-3} \leq 0)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.6595E+000	9.3319E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	7.6513E-002	4.0099E-003	3.2910E+000	2.7464E-002			
2	1.00000	1.2133E-001	4.0727E-003	2.2239E-001	3.7321E+000			
3	1.00000	1.0795E-002	1.0302E-002	9.6832E-003	8.5564E-001			
4	0.99522	5.1295E-005	4.6948E-005	5.8651E-005	5.0000E-002			
5	0.96282	1.9071E-006	1.9628E-006	2.2191E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{2-3}^- = 100.82\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{2-3}^- = (100.82 - 99.00)/(0.182) = 10.000$$

$$P_{2-3}^+(n_{2-3} \geq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.6025E+000	9.2540E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	5.5430E-002	1.2561E-003	3.2518E+000	2.9997E-002			
2	1.00000	1.8846E-001	2.8050E-003	2.0724E-001	3.7452E+000			
3	1.00000	8.6571E-004	1.3170E-004	6.4165E-003	7.8327E-001			
4	0.99460	4.5828E-006	5.6990E-007	3.4670E-005	2.4396E-002			
5	0.94302	2.6108E-007	2.2041E-007	1.9876E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{2-3}^+ = 112.34\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{2-3}^+ = (112.34 - 99.00)/(1 - 0.182) = 16.308$$

Cálculo dos pseudocustos P_{2-6}^+ e P_{2-6}^-

$$P_{2-6}^-(n_{2-6} \leq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	5.0111E+000	9.5623E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	6.4306E-002	3.6663E-003	4.4214E+000	6.6066E-002			
2	1.00000	1.7762E-001	9.4801E-003	3.0573E-001	2.8988E+000			
3	1.00000	3.2593E-002	1.6049E-003	1.2033E-002	1.3589E+000			
4	1.00000	2.7929E-007	2.7293E-006	2.3646E-004	5.1355E-002			
5	0.98799	2.5153E-009	1.2012E-007	2.8409E-006	1.9786E-004			
6	1.00000	3.7415E-014	1.1406E-008	2.5465E-007	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{2-6}^- = 100.08\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{2-6}^- = (100.08 - 99.00)/(0.027) = 40.000$$

$$P_{2-6}^+(n_{2-6} \geq 2)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores							
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.5730E+000	9.0833E+001	0.0000E+000		
1	1.00000	3.0320E-002	2.9091E-003	2.8085E+000	4.4427E-003		
2	1.00000	1.5420E-001	5.4361E-003	2.0499E-001	3.6628E+000		
3	1.00000	8.0788E-003	1.0459E-003	7.9668E-003	7.3057E-001		
4	1.00000	5.0891E-004	7.8932E-005	9.4428E-004	2.5841E-002		
5	0.99289	3.9028E-006	7.4774E-007	6.7245E-006	4.7485E-003		
6	0.99684	1.2356E-008	4.2137E-007	1.6914E-007	0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{2-6}^+ = 116.51\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{2-6}^+ = (116.51 - 99.00)/(1 - 0.027) = 17.996$$

Cálculo dos pseudocustos P_{3-5}^+ e P_{3-5}^-

$$P_{3-5}^-(n_{3-5} \leq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores							
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.6632E+000	9.5623E+001	0.0000E+000		
1	1.00000	5.5902E-002	1.4167E-003	3.2649E+000	2.9738E-002		
2	1.00000	1.0296E-001	8.5511E-003	2.2055E-001	3.6785E+000		
3	1.00000	8.2661E-003	2.6447E-003	1.3152E-002	9.1490E-001		
4	1.00000	1.8673E-003	2.9527E-003	1.8990E-003	4.2461E-002		
5	0.99508	9.1537E-006	1.4354E-005	1.0539E-005	8.5050E-003		
6	0.96102	3.5685E-007	6.6012E-007	4.8501E-007	0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{3-5}^- = 100.00\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{3-5}^- = (100.00 - 99.00)/(0.018) = 55.556$$

$$P_{3-5}^+(n_{3-5} \geq 2)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores							
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.5730E+000	9.0833E+001	0.0000E+000		
1	1.00000	5.5761E-002	1.1056E-003	3.1922E+000	2.8156E-002		
2	1.00000	1.3899E-001	4.4125E-003	1.9789E-001	3.6259E+000		
3	1.00000	1.5799E-002	1.0418E-003	6.1398E-003	7.8944E-001		
4	1.00000	2.0234E-004	2.7565E-004	7.9003E-004	1.9069E-002		
5	0.99256	1.4401E-006	2.0281E-006	5.8829E-006	3.4768E-003		
6	0.99732	3.8503E-009	5.3101E-008	1.7312E-007	0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{3-5}^+ = 116.06\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{3-5}^+ = (116.06 - 99.00)/(1 - 0.018) = 17.373$$

Cálculo dos pseudocustos P_{4-6}^+ e P_{4-6}^-

$$P_{4-6}^-(n_{4-6} \leq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	3.0000E+000	5.0111E+000	9.5623E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	6.7818E-002	1.2368E-001	4.8612E+000	4.3270E-002				
2	1.00000	1.5745E-001	3.1253E-002	3.6973E-001	2.0509E+000				
3	1.00000	1.2371E-002	3.9485E-003	1.2880E-002	1.3158E+000				
4	1.00000	3.1776E-004	6.3148E-004	1.4909E-003	3.0251E-002				
5	0.99409	2.1453E-006	3.7701E-006	8.8182E-006	4.9981E-003				
6	0.93495	1.3962E-007	2.4574E-007	5.9941E-007	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{4-6}^- = 129.45\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{4-6}^- = (129.45 - 99.00)/(0.473) = 64.374$$

$$P_{4-6}^+(n_{4-6} \geq 2)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	3.0000E+000	1.5730E+000	9.0833E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	3.2584E-002	3.2281E-003	2.8817E+000	6.6533E-003				
2	1.00000	1.7784E-001	3.2101E-003	2.0783E-001	3.7001E+000				
3	1.00000	1.2398E-002	1.4677E-003	6.2034E-003	8.4433E-001				
4	0.99561	5.5980E-005	6.6275E-006	3.8499E-005	2.7050E-002				
5	0.95003	2.7973E-006	4.8409E-007	1.9418E-006	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{4-6}^+ = 109.02\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{4-6}^+ = (109.02 - 99.00)/(1 - 0.473) = 19.013$$

Fim do cálculo dos pseudocustos

nó 0

$$v^0 = 99.00\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.182	0.182	10.00	16.31	1.82	13.34	1.82
n_{2-6}	1.027	0.027	40.00	18.00	1.08	17.51	1.08
n_{3-5}	1.018	0.018	55.56	17.37	1.00	17.06	1.00
n_{4-6}	1.473	0.473	64.37	19.01	30.45	10.02	10.02

Variável de separação n_{4-6}

NÓ 1 ($n_{4-6} \leq 1$)

Iterações do Método de Pontos Interiores						
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj
0	0.00000	3.0000E+000	5.0111E+000	9.5623E+001	0.0000E+000	
1	1.00000	6.7818E-002	1.2368E-001	4.8612E+000	4.3270E-002	
2	1.00000	1.5745E-001	3.1253E-002	3.6973E-001	2.0509E+000	
3	1.00000	1.2371E-002	3.9485E-003	1.2880E-002	1.3158E+000	
4	1.00000	3.1776E-004	6.3148E-004	1.4909E-003	3.0251E-002	
5	0.99409	2.1453E-006	3.7701E-006	8.8182E-006	4.9981E-003	
6	0.93495	1.3962E-007	2.4574E-007	5.9941E-007	0.0000E+000	

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^1 = 129.45\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.034	0.034	10.00	16.31
n_{2-6}	2.368	0.368	40.00	18.00
n_{3-4}	0.091	0.091	59.00	59.00
n_{3-5}	1.118	0.118	55.56	17.37
n_{4-6}	1.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos ($v^1 > 1.2 v^0$)**Novos pseudocustos iguais aos custos das linhas****nó 1**

$$v^1 = 129.45\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^1 = 129.45 + 23.64 = 153.09\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.034	0.034	10.00	16.31	0.34	15.75	0.34
n_{2-6}	2.368	0.368	40.00	18.00	14.72	11.37	11.37
n_{3-4}	0.091	0.091	59.00	59.00	5.37	53.63	5.37
n_{3-5}	1.118	0.118	55.56	17.37	6.56	15.32	6.56
n_{4-6}	1.000	--	--	--	--	--	--

 $\Sigma 23.64$ Variável de separação n_{2-6}

NÓ 2 ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	5.0111E+000	9.5623E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	6.7818E-002	1.2368E-001	4.8612E+000	4.3270E-002			
2	1.00000	1.5745E-001	3.1253E-002	3.6973E-001	2.0509E+000			
3	1.00000	1.2371E-002	3.9485E-003	1.2880E-002	1.3158E+000			
4	1.00000	3.1776E-004	6.3148E-004	1.4909E-003	3.0251E-002			
5	0.99409	2.1453E-006	3.7701E-006	8.8182E-006	4.9981E-003			
6	0.93495	1.3962E-007	2.4574E-007	5.9941E-007	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^2 = 109.02\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.227	0.227	10.00	16.31
n_{2-6}	0.834	0.834	40.00	18.00
n_{3-5}	0.973	0.973	55.56	17.37
n_{4-6}	2.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos**nó 2**

$$v^2 = 109.02\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^2 = 109.02 + 5.73 = 114.75\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.227	0.227	10.00	16.31	2.27	12.61	2.27
n_{2-6}	0.834	0.834	40.00	18.00	33.36	2.99	2.99
n_{3-5}	0.973	0.973	55.56	17.37	54.06	0.47	0.47
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--

$\Sigma 5.73$

Variável de separação n_{2-6}

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
1	129.45	153.09
2	109.02	114.75

Subproblema escolhido: nó 2

NÓ 3($n_{2-6} \leq 0$)($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.6015E+000	8.7669E+001		0.0000E+000		
1	1.00000	2.0078E-002	1.2723E-003	2.9666E+000		1.6070E-002		
2	1.00000	1.7844E-001	1.3065E-002	2.0903E-001		3.7274E+000		
3	1.00000	4.5315E-002	1.6237E-002	3.4517E-002		5.4355E-001		
4	0.98815	9.6100E-003	2.9754E-002	1.3215E-003		1.0155E-001		
5	0.99627	9.1125E-005	6.8369E-005	1.0572E-005		4.8901E-003		
6	0.99690	2.7969E-007	4.9806E-007	2.0909E-007		0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^3 = 115.77\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.690	0.690	10.00	16.31
n_{3-5}	0.510	0.510	55.56	17.37
n_{4-6}	2.152	0.152	64.37	19.01
n_{5-6}	0.446	0.446	61.00	61.00

Início do cálculo dos pseudocustos

Cálculo dos pseudocustos P_{5-6}^+ e P_{5-6}^-

$$P_{5-6}^-(n_{5-6} \leq 0)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.6313E+000	8.4420E+001		0.0000E+000		
1	1.00000	2.3089E-002	2.1691E-003	3.2366E+000		2.2017E-002		
2	1.00000	1.6919E-001	1.2092E-002	2.0064E-001		3.5851E+000		
3	1.00000	3.7712E-003	4.2696E-003	1.8289E-002		7.3557E-001		
4	0.99875	7.7855E-006	1.8933E-005	2.5750E-004		7.4840E-002		
5	0.96533	2.6946E-007	3.5059E-006	8.8885E-006		0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{5-6}^- = 99.00\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{5-6}^- = (99.00 - 115.77)/(0.446) = -37.592$$

$$P_{5-6}^+(n_{5-6} \geq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.5784E+000	8.6404E+001		0.0000E+000		
1	1.00000	1.8145E-002	1.1743E-003	2.7265E+000		5.0717E-003		
2	1.00000	1.5757E-001	1.0614E-002	1.9839E-001		3.2359E+000		
3	1.00000	7.0052E-003	4.9122E-004	1.2772E-002		5.4959E-001		
4	1.00000	6.6593E-005	4.9076E-005	2.2509E-004		3.5495E-002		
5	0.99119	5.8944E-007	2.8999E-005	2.6808E-006		4.2349E-004		
6	1.00000	5.6796E-011	2.7685E-006	3.1559E-007		1.4114E-004		
7	1.00000	1.4433E-015	9.6364E-011	1.5725E-008		0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{5-6}^+ = 140.70\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{5-6}^+ = (140.70 - 115.77)/(1 - 0.446) = 45.01$$

Fim do cálculo dos pseudocustos

nó 3

$$v^3 = 115.77\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^3 = 115.77 - 16.77 = 99.00\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.690	0.690	10.00	16.31	6.90	5.06	5.06
n_{3-5}	0.510	0.510	55.56	17.37	28.33	8.51	8.51
n_{4-6}	2.152	0.152	64.37	19.01	9.79	16.12	9.79
n_{5-6}	0.446	0.446	-37.59	45.01	-16.77	24.93	-16.77

Variável de separação n_{5-6}

NÓ 4($n_{2-6} \geq 1$)($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	3.0000E+000	1.5504E+000	8.9572E+001		0.0000E+000		
1	1.00000	1.6518E-002	6.8354E-004	2.6105E+000		5.5243E-003		
2	1.00000	1.4766E-001	3.8597E-003	2.0476E-001		3.6524E+000		
3	1.00000	1.4877E-002	3.0292E-003	5.5186E-003		8.4641E-001		
4	0.99693	4.5085E-005	8.0817E-006	4.8597E-005		2.4194E-002		
5	0.95803	1.8923E-006	5.2430E-007	2.0558E-006		0.0000E+000		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^4 = 110.68\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.061	0.061	10.00	16.31
n_{2-6}	1.000	--	--	--
n_{3-5}	0.973	0.973	55.56	17.37
n_{4-6}	2.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos

nó 4

$$v^4 = 110.68\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^4 = 110.68 + 1.08 = 111.76\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.061	0.061	10.00	16.31	0.610	15.31	0.61
n_{2-6}	1.000	--	--	--	--	--	--
n_{3-5}	0.973	0.973	55.56	17.37	54.06	0.47	0.47
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--

$\Sigma 1.08$

Variável de separação n_{2-3}

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
1	129.45	153.09
3	115.77	99.00
4	110.68	111.76

Subproblema escolhido: nó 3

NÓ 5 ($n_{5-6} \leq 0$) ($n_{2-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.6313E+000	8.4420E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	2.3089E-002	2.1691E-003	3.2366E+000	2.2017E-002			
2	1.00000	1.6919E-001	1.2092E-002	2.0064E-001	3.5851E+000			
3	1.00000	3.7712E-003	4.2696E-003	1.8289E-002	7.3557E-001			
4	0.99875	7.7855E-006	1.8933E-005	2.5750E-004	7.4840E-002			
5	0.96533	2.6946E-007	3.5059E-006	8.8885E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^5 = 99.00\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.424	0.424	10.00	16.31
n_{3-5}	0.776	0.776	55.56	17.37
n_{4-6}	2.500	0.500	64.37	19.01

Sem cálculo de pseudocustos

nó 5

$$v^4 = 99.00\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^4 = 99.00 + 17.64 = 116.64\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.424	0.424	10.00	16.31	4.24	9.39	4.24
n_{3-5}	0.776	0.776	55.56	17.37	43.11	3.89	3.89
n_{4-6}	2.500	0.500	64.37	19.01	32.19	9.51	9.51

$\Sigma 17.64$

Variável de separação n_{4-6}

NÓ 6 ($n_{5-6} \geq 1$) ($n_{2-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	3.0000E+000	1.5784E+000	8.6404E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	1.8145E-002	1.1743E-003	2.7265E+000	5.0717E-003				
2	1.00000	1.5757E-001	1.0614E-002	1.9839E-001	3.2359E+000				
3	1.00000	7.0052E-003	4.9122E-004	1.2772E-002	5.4959E-001				
4	1.00000	6.6593E-005	4.9076E-005	2.2509E-004	3.5495E-002				
5	0.99119	5.8944E-007	2.8999E-005	2.6808E-006	4.2349E-004				
6	1.00000	5.6796E-011	2.7685E-006	3.1559E-007	1.4114E-004				
7	1.00000	1.4433E-015	9.6364E-011	1.5725E-008	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^6 = 140.70\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.806	0.806	10.00	16.31
n_{3-5}	0.179	0.179	55.56	17.37
n_{4-6}	2.000	—	—	—
n_{5-6}	1.000	—	—	—

Sem cálculo de pseudocustos

nó 6

$$v^6 = 140.70\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^6 = 140.70 + 13.11 = 153.81\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.806	0.806	10.00	16.31	8.06	3.16	3.16
n_{3-5}	0.179	0.179	55.56	17.37	9.94	14.26	9.94
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--
n_{5-6}	1.000	--	--	--	--	--	--
							$\Sigma 13.11$

Variável de separação n_{3-5}

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
1	129.45	153.09
4	110.68	111.76
5	99.00	116.64
6	140.70	153.81

Subproblema escolhido: nó 5

NÓ 7 ($n_{4-6} \leq 2$) ($n_{5-6} \leq 0$) ($n_{2-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.7291E+000	8.6875E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	7.0831E-002	1.0054E-002	5.9100E+000	1.1677E-002				
2	1.00000	3.6732E-002	4.0732E-003	5.0481E-001	1.3214E+000				
3	1.00000	1.0456E-001	3.3428E-002	4.6560E-002	1.3655E+000				
4	1.00000	4.4665E-004	5.4503E-004	1.0678E-003	5.0853E-002				
5	0.99413	2.0765E-006	2.4551E-006	6.3604E-006	2.2474E-003				
6	0.99721	5.6890E-009	1.4298E-007	1.2455E-007	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^7 = 142.72\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.806	0.806	10.00	16.31
n_{3-5}	0.894	0.894	55.56	17.37
n_{3-6}	1.015	0.015	48.00	48.00
n_{4-6}	2.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos ($v^7 > 1.2 v^5$)

Novos pseudocustos iguais aos custos das linhas

nó 7

$$v^7 = 142.72\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^7 = 142.72 + 5.73 = 148.45\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.806	0.806	10.00	16.31	8.06	3.16	3.16
n_{3-5}	0.894	0.894	55.56	17.37	49.67	1.84	1.84
n_{3-6}	1.015	0.015	48.00	48.00	0.72	47.28	0.72
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--

 $\Sigma 5.73$

Variável de separação n_{2-3}

NÓ 8 ($n_{4-6} \geq 3$) ($n_{5-6} \leq 0$) ($n_{2-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores

Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj
0	0.00000	2.9607E+000	1.7926E+000	8.7220E+001	1.6369E-002	
1	0.69644	8.8235E-001	5.8010E-001	3.4823E+001	3.4762E-002	
2	0.70517	2.5797E-001	1.7550E-001	1.1462E+001	1.3594E-002	
3	0.70365	7.6030E-002	5.2255E-002	3.6500E+000	5.0251E-003	
4	0.69971	2.2688E-002	1.5712E-002	1.1842E+000	5.3395E-003	
5	0.69852	4.3220E-003	4.8817E-003	3.9733E-001	6.9152E-002	
6	0.69944	7.1412E-003	1.5840E-003	1.4126E-001	2.5668E-001	
7	0.68386	3.7059E-002	5.1921E-004	5.6364E-002	3.8776E-001	
8	0.70318	2.3217E-002	1.5404E-004	2.1904E-002	7.9053E-001	
9	0.64330	1.8831E-002	1.4343E-004	9.2766E-003	4.9481E-001	
10	0.63527	1.5372E-002	1.5566E-004	4.0926E-003	2.6931E-001	
11	0.51591	1.2645E-002	4.2866E-004	2.3279E-003	1.3167E-001	
12	0.68577	1.1923E-002	5.0644E-004	1.1441E-003	7.3849E-002	
13	0.64166	5.0732E-003	2.1504E-004	4.9286E-004	5.0979E-002	
14	0.68989	1.6278E-003	6.9557E-005	1.7658E-004	2.2869E-002	
15	0.69155	5.1134E-004	2.0975E-005	6.1421E-005	7.7836E-003	
16	0.68810	1.6033E-004	6.2242E-006	2.0839E-005	3.7016E-003	
17	0.67765	5.1766E-005	1.8533E-006	7.1487E-006	6.5702E-004	
18	0.65199	1.8023E-005	7.2932E-007	2.6378E-006	1.9048E-004	
19	0.55712	7.9832E-006	2.7041E-007	1.2751E-006	0.0000E+000	

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^8 = 104.00\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	0.041	0.041	10.00	16.31
n_{3-5}	0.659	0.659	55.56	17.37
n_{4-6}	3.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos

nó 8

$$v^8 = 104.00\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^8 = 104.00 + 6.33 = 110.33\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-3}	0.041	0.041	10.00	16.31	0.41	15.64	0.41
n_{3-5}	0.659	0.659	55.56	17.37	36.61	5.92	5.92
n_{4-6}	3.000	--	--	--	--	--	--

 $\Sigma 6.33$

Variável de separação n_{3-5}

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
1	129.45	153.09
4	110.68	111.76
6	140.70	153.81
7	142.72	148.45
8	104.00	110.33

Subproblema escolhido: nó 8

NÓ 9 ($n_{3-5} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 3$) ($n_{5-6} \leq 0$) ($n_{2-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.7691E+000	8.6203E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	1.6358E-002	5.4573E-003	3.0265E+000	7.2759E-003				
2	0.99837	3.6063E-002	1.2955E-001	2.5823E-001	2.5314E+000				
3	1.00000	8.1413E-002	5.7445E-002	4.4761E-002	1.8397E-001				
4	0.99782	6.3742E-004	8.5753E-004	1.2300E-003	8.6010E-002				
5	0.99184	3.1767E-005	3.7151E-005	1.1590E-005	2.0454E-003				
6	0.63913	1.1427E-005	4.7828E-005	4.7966E-006	4.8361E-004				
7	0.93505	7.2412E-007	7.1012E-005	1.1584E-006	3.4634E-004				
8	0.99904	6.4850E-010	2.4124E-007	6.5539E-008	1.0994E-004				
9	1.00000	1.1804E-012	6.5604E-009	6.9372E-009	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^9 = 180.92\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{1-5}	0.510	0.510	20.00	20.00
n_{1-6}	1.080	0.080	68.00	68.00
n_{2-3}	0.364	0.364	10.00	16.31
n_{4-6}	3.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos ($v^9 > 1.2 v^8$)

Novos pseudocustos iguais aos custos das linhas**nó 9**

$$v^9 = 180.92\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^9 = 180.92 + 18.88 = 199.80\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{1-5}	0.510	0.510	20.00	20.00	10.20	9.80	9.80
n_{1-6}	1.080	0.080	68.00	68.00	5.44	62.56	5.44
n_{2-3}	0.364	0.364	10.00	16.31	3.64	10.37	3.64
n_{4-6}	3.000	--	--	--	--	--	--

$\Sigma 18.88$

Variável de separação n_{1-5}

NÓ 10 ($n_{3-5} \geq 1$) ($n_{4-6} \geq 3$) ($n_{5-6} \leq 0$) ($n_{2-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores

Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj
0	0.00000	2.9621E+000	1.7623E+000	8.5666E+001	1.6747E-002	
1	0.69666	8.8185E-001	5.6898E-001	3.4177E+001	3.3128E-002	
2	0.70510	2.5787E-001	1.7217E-001	1.1257E+001	1.3173E-002	
3	0.70368	7.5989E-002	5.1264E-002	3.5855E+000	4.8288E-003	
4	0.69965	2.2677E-002	1.5417E-002	1.1636E+000	5.3651E-003	
5	0.69893	4.2760E-003	4.7810E-003	3.9007E-001	6.9383E-002	
6	0.69929	7.1409E-003	1.5486E-003	1.3855E-001	2.5466E-001	
7	0.68273	3.6243E-002	5.0870E-004	5.5243E-002	3.7911E-001	
8	0.70591	2.2980E-002	1.5156E-004	2.1358E-002	7.7292E-001	
9	0.64830	1.9697E-002	1.2118E-004	8.9514E-003	5.0130E-001	
10	0.63755	1.6228E-002	9.9724E-005	3.9097E-003	2.5741E-001	
11	0.64772	8.7288E-003	4.2617E-004	1.7268E-003	1.4873E-001	
12	0.75034	6.9335E-003	3.1158E-004	7.0459E-004	6.7818E-002	
13	0.62797	2.8307E-003	1.3621E-004	2.9609E-004	3.0607E-002	
14	0.68485	9.1118E-004	4.2575E-005	1.1405E-004	1.2404E-002	
15	0.68698	2.8953E-004	1.2354E-005	4.3157E-005	5.3507E-003	
16	0.67961	9.3123E-005	3.5307E-006	1.5610E-005	3.3057E-003	
17	0.66056	3.1640E-005	1.0679E-006	5.6827E-006	1.8018E-004	
18	0.60387	1.2534E-005	3.7225E-007	2.4325E-006	0.0000E+000	

Solução do Método de Pontos Interiores

**** SOLUÇÃO INTEIRA ENCONTRADA ****

$$v^{10} = 110.00\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}
n_{3-5}	1
n_{4-6}	3

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
-----	-------	-------------

4	110.68	111.76
---	--------	---------------

Subproblema escolhido: nó 4

NÓ 11($n_{2-3} \leq 0$)($n_{2-6} \geq 1$)($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	3.0000E+000	1.5786E+000	8.8804E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	1.5119E-002	1.7869E-003	2.4171E+000	1.3603E-002				
2	1.00000	8.9304E-002	6.3127E-003	2.0871E-001	3.4509E+000				
3	0.99972	4.4925E-003	4.9936E-003	7.3392E-003	8.4212E-001				
4	1.00000	9.5121E-007	3.5693E-006	2.7955E-004	2.6574E-002				
5	0.98707	1.2121E-008	1.7183E-007	3.6152E-006	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^{11} = 111.29\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	1.061	0.061	24.04	14.00
n_{3-5}	0.973	0.973	86.14	17.48
n_{4-6}	2.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos**nó 11**

$$v^{11} = 111.29\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^{11} = 111.29 + 1.94 = 113.23\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	1.061	0.061	24.04	14.00	1.47	13.14	1.467
n_{3-5}	0.973	0.973	86.14	17.48	83.81	0.47	0.472
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--

 $\Sigma 1.94$ Variável de separação n_{2-6}

NÓ 12 ($n_{2-3} \geq 1$) ($n_{2-6} \geq 1$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.5295E+000	8.8364E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	1.5903E-002	7.1066E-004	2.6113E+000	5.4575E-003			
2	1.00000	1.4152E-001	3.1552E-003	2.0309E-001	3.3900E+000			
3	1.00000	6.0130E-003	1.5426E-003	7.8492E-003	7.3101E-001			
4	0.99713	1.7074E-005	4.5505E-006	8.5854E-005	2.9291E-002			
5	0.95557	7.5824E-007	6.0558E-007	3.8271E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^{12} = 125.90\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-3}	1.000	--	--	--
n_{2-6}	1.000	--	--	--
n_{3-5}	0.795	0.795	86.14	17.48
n_{4-6}	2.000	--	--	--

- nó sondado

- $v^{12} > 1.02 \ v^*$

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
11	111.29	113.23

Subproblema escolhido: nó 11

NÓ 13 ($n_{2-6} \leq 1$) ($n_{2-3} \leq 0$) ($n_{2-6} \geq 1$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	3.0000E+000	1.6327E+000	8.9386E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	2.2512E-002	3.5297E-003	3.0651E+000	6.9992E-003			
2	1.00000	7.3801E-002	1.2336E-002	2.0653E-001	3.4888E+000			
3	1.00000	8.2160E-003	1.4119E-002	1.2950E-002	6.7796E-001			
4	1.00000	2.6867E-004	6.0139E-005	2.2050E-004	4.5987E-002			
5	0.98401	4.9207E-006	1.8506E-006	3.5904E-006	2.5284E-004			
6	1.00000	5.3269E-009	3.9920E-006	3.9761E-007	1.6859E-004			
7	1.00000	1.0014E-011	1.4841E-008	3.5520E-008	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^{13} = 117.63\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	1.000	--	--	--
n_{3-5}	0.954	0.954	86.14	17.48
n_{4-6}	2.285	0.285	75.91	14.51

– nó sondado

$$- v^{13} > 1.02 \ v^*$$

NÓ 14 ($n_{2-6} \geq 2$) ($n_{2-3} \leq 0$) ($n_{2-6} \geq 1$) ($n_{4-6} \geq 2$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	3.0000E+000	1.5503E+000	8.7215E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	1.2393E-002	1.5131E-003	2.1963E+000	2.2978E-002				
2	1.00000	8.2581E-002	3.6633E-003	1.9103E-001	3.2414E+000				
3	0.99927	3.1956E-002	5.8916E-003	8.9507E-003	5.8112E-001				
4	1.00000	1.5618E-003	5.4688E-003	1.8252E-003	4.6244E-002				
5	1.00000	5.0814E-004	4.4727E-003	6.4966E-004	8.0457E-003				
6	0.96132	1.8501E-005	1.3088E-004	2.3567E-005	1.7953E-003				
7	0.95818	7.7659E-007	9.9072E-006	9.4867E-007	1.4901E-004				
8	1.00000	2.4299E-011	2.5511E-006	2.0519E-007	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^{14} = 133.22\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	2.000	--	--	--
n_{3-5}	0.661	0.661	86.14	17.48
n_{4-6}	2.000	--	--	--

– nó sondado

$$- v^{14} > 1.02 \ v^*$$

Todos os nós foram sondados

**** FIM DO ALGORITMO BRANCH AND BOUND ****

D.2 Caso 2: Considerando a topologia da base e sem reprogramação da geração

**** INÍCIO DO ALGORITMO BRANCH AND BOUND ****

NÓ 0

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	3.1429E+000	3.6937E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	2.2666E-001	1.0271E-003	3.4432E+000	3.1210E-001				
2	1.00000	3.3934E-001	2.4142E-003	6.4729E-001	2.5394E+000				
3	1.00000	1.7982E-001	1.6106E-002	7.2305E-002	1.9358E+000				
4	0.01487	1.7754E-001	1.5312E-002	6.8656E-002	4.7098E-002				
5	0.92658	7.7168E-003	1.8525E-002	1.5874E-002	1.3812E-001				
6	0.00187	7.9754E-003	2.5369E-002	1.5255E-002	1.7714E-002				
7	0.00964	7.7455E-003	9.1440E-002	1.4183E-002	2.0015E-002				
8	0.22319	2.1922E-001	7.8883E-002	1.4061E-002	2.6728E-002				
9	0.99760	2.6821E-003	2.2106E-002	5.3564E-003	9.8638E-002				
10	0.27509	1.3080E-003	2.1989E-002	2.5321E-003	2.1125E-002				
11	0.99220	2.7712E-004	1.4085E-003	3.8078E-004	8.3483E-003				
12	1.00000	8.7499E-008	1.1212E-005	6.4677E-007	8.7522E-004				
13	1.00000	3.2725E-012	4.3514E-008	8.7922E-008	1.2463E-006				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^0 = 180.26\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	3.505	0.505	30.00	30.00
n_{3-5}	0.841	0.841	20.00	20.00
n_{4-6}	1.943	0.943	30.00	30.00

Início do cálculo dos pseudocustos

Cálculo dos pseudocustos P_{2-6}^+ e P_{2-6}^-

$$P_{2-6}^-(n_{2-6} \leq 3)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	3.2073E+000	3.7694E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	2.1688E-001	5.2844E-003	3.4594E+000	3.1153E-001			
2	1.00000	2.7154E-001	3.3658E-003	6.6570E-001	2.4501E+000			
3	1.00000	1.2542E-001	1.2935E-002	7.8143E-002	1.8737E+000			
4	0.57416	4.1589E-002	8.5134E-003	3.7683E-002	2.3546E-002			
5	0.01209	4.1377E-002	6.9877E-002	3.5304E-002	1.0486E-002			
6	0.06658	3.8526E-002	6.6082E-002	3.3237E-002	2.6994E-003			
7	0.59846	1.5307E-002	2.9863E-002	1.0599E-002	3.5138E-002			
8	1.00000	2.6359E-003	2.1958E-003	1.8036E-003	1.4916E-002			
9	1.00000	7.6111E-009	2.0662E-006	2.1114E-006	3.6157E-003			
10	1.00000	6.1590E-013	1.1580E-008	1.4601E-007	3.5936E-006			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{2-6}^- = 215.67\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{2-6}^- = (215.67 - 180.26)/(0.505) = 70.12$$

$$P_{2-6}^+(n_{2-6} \geq 4)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300e + 000	3.1429e + 000	3.6937e + 001	0.0000E + 000			
1	1.00000	1.4717e - 001	2.2397e - 002	3.3597e + 000	2.9788e - 001			
2	1.00000	2.6819e - 001	5.6933e - 003	6.0990e - 001	2.4728e + 000			
3	1.00000	1.2571e - 001	1.2855e - 002	6.4102e - 002	1.9245e + 000			
4	0.23738	9.2626e - 002	8.4688e - 003	5.4367e - 002	6.7923e - 002			
5	0.98292	3.6696e - 003	8.6184e - 003	8.9813e - 003	1.1683e - 001			
6	0.91272	3.9616e - 003	7.3202e - 003	2.9527e - 003	1.8202e - 002			
7	0.07368	1.3295e - 003	5.1683e - 002	1.8248e - 003	8.1286e - 003			
8	0.02959	1.2522e - 003	2.9427e - 002	1.6776e - 003	2.9401e - 003			
9	0.97791	7.5953e - 005	5.0317e - 002	3.5044e - 004	2.8507e - 003			
10	0.68886	9.2271e - 005	3.1647e - 002	1.2247e - 004	1.3564e - 003			
11	1.00000	1.2939e - 005	5.8210e - 002	8.2947e - 006	1.2547e - 003			
12	1.00000	5.7249e - 007	2.4097e - 002	7.7248e - 007	4.7910e - 004			
13	1.00000	1.0621e - 011	1.6118e - 008	8.0657e - 008	2.8751e - 005			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{2-6}^+ = 192.23\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{2-6}^+ = (192.23 - 180.26)/(1 - 0.505) = 24.18$$

Cálculo dos pseudocustos P_{3-5}^+ e P_{3-5}^-

$$P_{3-5}^-(n_{3-5} \leq 0)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	3.2453E+000	3.7137E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	2.2583E-001	1.1417E-001	3.4539E+000	3.1181E-001			
2	1.00000	3.4295E-001	6.2383E-003	6.5421E-001	2.5399E+000			
3	0.80080	2.2078E-001	8.5576E-002	2.0620E-001	9.2152E-001			
4	0.97154	6.3213E-003	4.9277E-003	1.0979E-002	4.5551E-001			
5	1.00000	8.5802E-005	6.5729E-005	2.4020E-004	2.5028E-002			
6	0.99010	7.9165E-007	1.3694E-006	2.3702E-006	4.1531E-004			
7	1.00000	1.4672E-010	8.6458E-008	3.3205E-007	2.4591E-006			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{3-5}^- = 227.39\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{3-5}^- = (227.39 - 180.26)/(0.841) = 56.05$$

$$P_{3-5}^+(n_{3-5} \geq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	3.1429E+000	3.6937E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	2.2666E-001	2.1967E-003	3.4164E+000	3.0982E-001			
2	1.00000	3.3897E-001	2.6884E-003	6.3824E-001	2.5162E+000			
3	1.00000	6.7612E-002	1.3346E-002	6.6160E-002	1.9585E+000			
4	0.00146	6.9365E-002	1.3527E-002	6.4285E-002	4.6426E-002			
5	0.09963	5.6838E-002	1.1378E-001	5.5179E-002	3.3039E-002			
6	0.62460	4.9052E-001	5.7392E-002	2.8125E-002	1.1712E-001			
7	0.50339	2.8251E-001	2.7717E-002	2.0058E-002	7.7066E-002			
8	1.00000	1.8189E-003	4.4109E-004	4.4305E-004	1.2451E-001			
9	1.00000	5.8454E-009	4.5041E-006	3.9489E-006	1.8321E-003			
10	1.00000	4.0783E-011	2.2352E-007	4.7713E-007	8.9090E-006			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{3-5}^+ = 219.25\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{3-5}^+ = (219.25 - 180.26)/(1 - 0.841) = 245.24$$

Cálculo dos pseudocustos P_{4-6}^+ e P_{4-6}^-

$$P_{4-6}^-(n_{4-6} \leq 0)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	2.7300E+000	3.2410E+000	3.8090E+001		0.0000E+000		
1	1.00000	1.9994E-001	5.2282E-002	3.4186E+000		3.1026E-001		
2	1.00000	3.5654E-001	8.6240E-002	7.2557E-001		2.0573E+000		
3	0.77617	4.5809E-001	4.7620E-002	2.1735E-001		7.1620E-001		
4	1.00000	5.4378E-002	2.0530E-002	3.2216E-002		1.5657E-001		
5	1.00000	5.3931E-003	1.9899E-003	3.0097E-003		5.3836E-002		
6	1.00000	7.5591E-006	6.4598E-006	3.0600E-006		4.7661E-003		
7	1.00000	6.2685E-012	3.5410E-008	2.5567E-007		3.9450E-006		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{4-6}^- = 357.84\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{4-6}^- = (357.84 - 180.26)/(0.943) = 188.31$$

$$P_{4-6}^+(n_{4-6} \geq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	2.7300E+000	3.1429E+000	3.6937E+001		0.0000E+000		
1	1.00000	1.9153E-001	5.3589E-003	3.3987E+000		3.0564E-001		
2	1.00000	3.3096E-001	2.3788E-003	6.3610E-001		2.5140E+000		
3	1.00000	2.1638E-001	1.7081E-002	7.1935E-002		1.9525E+000		
4	0.01971	2.1428E-001	4.0595E-002	6.7952E-002		5.4947E-002		
5	0.95809	6.4315E-003	2.2318E-002	1.2227E-002		1.4162E-001		
6	0.03031	6.0288E-003	2.6318E-002	1.1501E-002		1.9076E-002		
7	0.00002	6.0899E-003	9.1027E-002	1.0912E-002		1.2562E-002		
8	0.14542	1.4562E-001	8.4163E-002	1.1882E-002		1.5756E-002		
9	0.08820	1.1100E-001	7.8603E-002	1.3578E-002		6.8386E-002		
10	0.79607	2.1671E-001	2.2115E-002	2.4682E-002		6.0075E-002		
11	0.96548	7.9076E-004	4.6591E-003	7.0914E-004		2.5256E-001		
12	0.93272	9.7731E-005	7.3272E-004	2.0167E-004		3.8220E-003		
13	0.93318	6.3617E-006	5.6037E-005	1.4575E-005		7.3338E-004		
14	0.03178	6.1609E-006	5.4053E-005	1.4202E-005		1.4017E-006		

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{4-6}^+ = 181.26\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{4-6}^+ = (181.26 - 180.26)/(1 - 0.943) = 17.54$$

Fim do cálculo dos pseudocustos

nó 0

$$v^0 = 180.26\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	3.505	0.505	70.12	24.18	35.41	11.97	11.97
n_{3-5}	0.841	0.841	56.05	245.24	47.13	38.99	38.99
n_{4-6}	1.943	0.943	188.31	17.54	177.58	1.00	1.00

Variável de separação n_{3-5}

NÓ 1 ($n_{3-5} \leq 0$)

Iterações do Método de Pontos Interiores

Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj
0	0.00000	2.7300E+000	3.2453E+000	3.7137E+001	0.0000E+000	
1	1.00000	2.2583E-001	1.1417E-001	3.4539E+000	3.1181E-001	
2	1.00000	3.4295E-001	6.2383E-003	6.5421E-001	2.5399E+000	
3	0.80080	2.2078E-001	8.5576E-002	2.0620E-001	9.2152E-001	
4	0.97154	6.3213E-003	4.9277E-003	1.0979E-002	4.5551E-001	
5	1.00000	8.5802E-005	6.5729E-005	2.4020E-004	2.5028E-002	
6	0.99010	7.9165E-007	1.3694E-006	2.3702E-006	4.1531E-004	
7	1.00000	1.4672E-010	8.6458E-008	3.3205E-007	2.4591E-006	

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^1 = 227.39\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{1-3}	0.059	0.059	38.00	38.00
n_{2-6}	2.475	0.475	70.12	24.18
n_{4-6}	1.793	0.793	188.31	17.54
n_{5-6}	1.592	0.592	61.00	61.00

Sem cálculo de pseudocustos ($v^1 > 1.2 v^0$)

Novos pseudocustos iguais aos custos das linhas

nó 1

$$v^1 = 227.39\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^1 = 227.39 + 43.46 = 270.85\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{1-3}	0.059	0.059	38.00	38.00	2.24	35.76	2.24
n_{2-6}	2.475	0.475	70.12	24.18	33.31	12.70	12.70
n_{4-6}	1.793	0.793	188.31	17.54	149.33	3.62	3.63
n_{5-6}	1.592	0.592	61.00	61.00	36.11	24.89	24.89

$\Sigma 43.46$

Variável de separação n_{5-6}

NÓ 2 ($n_{3-5} \geq 1$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	3.1429E+000	3.6937E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	2.2666E-001	2.1967E-003	3.4164E+000	3.0982E-001			
2	1.00000	3.3897E-001	2.6884E-003	6.3824E-001	2.5162E+000			
3	1.00000	6.7612E-002	1.3346E-002	6.6160E-002	1.9585E+000			
4	0.00146	6.9365E-002	1.3527E-002	6.4285E-002	4.6426E-002			
5	0.09963	5.6838E-002	1.1378E-001	5.5179E-002	3.3039E-002			
6	0.62460	4.9052E-001	5.7392E-002	2.8125E-002	1.1712E-001			
7	0.50339	2.8251E-001	2.7717E-002	2.0058E-002	7.7066E-002			
8	1.00000	1.8189E-003	4.4109E-004	4.4305E-004	1.2451E-001			
9	1.00000	5.8454E-009	4.5041E-006	3.9489E-006	1.8321E-003			
10	1.00000	4.0783E-011	2.2352E-007	4.7713E-007	8.9090E-006			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^2 = 219.25\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	2.890	0.890	70.12	24.18
n_{3-5}	1.000	--	--	--
n_{4-6}	1.814	0.814	188.31	17.54
n_{5-6}	0.953	0.953	61.00	61.00

Sem cálculo de pseudocustos ($v^2 > 1.2 v^0$)**Novos pseudocustos iguais aos custos das linhas****nó 2**

$$v^2 = 219.25\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^2 = 219.25 + 8.79 = 228.04\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	2.890	0.890	70.12	24.18	62.40	2.66	2.66
n_{3-5}	1.000	--	--	--	--	--	--
n_{4-6}	1.814	0.814	188.31	17.54	153.28	3.26	3.26
n_{5-6}	0.953	0.953	61.00	61.00	58.13	2.87	2.87

 $\Sigma 8.79$ Variável de separação n_{4-6} **Escolha do próximo subproblema**

k	v^k	v_{est}^k
1	227.39	270.85
2	219.25	228.04

Subproblema escolhido: nó 2

NÓ 3 ($n_{4-6} \leq 1$) ($n_{3-5} \geq 1$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	2.7300E+000	3.3539E+000	3.8380E+001	0.0000E+000				
1	1.00000	1.1703E-001	9.6430E-002	3.3881E+000	2.9563E-001				
2	1.00000	2.3056E-001	7.2720E-002	6.4340E-001	2.3114E+000				
3	0.91684	4.3245E-001	2.2968E-001	1.3249E-001	5.7959E-001				
4	1.00000	5.1400E-002	9.4051E-003	1.6817E-002	1.6732E-001				
5	1.00000	1.8310E-004	1.1057E-004	5.1493E-004	2.8303E-002				
6	0.99689	4.6247E-007	3.0434E-007	1.5919E-006	6.9539E-004				
7	1.00000	8.5850E-011	3.4026E-008	2.7119E-007	1.3462E-006				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^3 = 373.74\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{1-6}	0.076	0.076	68.00	68.00
n_{2-4}	2.329	0.329	40.00	40.00
n_{2-6}	5.000	—	—	—
n_{3-5}	1.000	—	—	—
n_{3-6}	0.169	0.169	48.00	48.00
n_{4-6}	1.000	—	—	—
n_{5-6}	1.103	0.103	61.00	61.00

Sem cálculo de pseudocustos ($v^3 > 1.2 v^2$)

Novos pseudocustos iguais aos custos das linhas

nó 3

$$v^3 = 373.74\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^3 = 373.74 + 32.72 = 406.46\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{1-6}	0.076	0.076	68.00	68.00	5.17	62.83	5.17
n_{2-4}	2.329	0.329	40.00	40.00	13.16	26.84	13.16
n_{2-6}	5.000	—	—	—	—	—	—
n_{3-5}	1.000	—	—	—	—	—	—
n_{3-6}	0.169	0.169	48.00	48.00	8.11	39.89	8.11
n_{4-6}	1.000	—	—	—	—	—	—
n_{5-6}	1.103	0.103	61.00	61.00	6.28	54.72	6.28

$\Sigma 32.72$

Variável de separação n_{2-4}

NÓ 4 ($n_{4-6} \geq 2$) ($n_{3-5} \geq 1$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	2.7300E+000	3.2453E+000	3.7137E+001	0.0000E+000			
1	1.00000	1.1738E-001	9.7097E-002	3.3265E+000	2.9103E-001			
2	1.00000	2.5400E-001	4.1388E-003	6.0317E-001	2.5090E+000			
3	1.00000	1.0255E-001	1.4148E-002	6.4350E-002	1.7599E+000			
4	0.37770	4.7160E-002	2.0731E-002	5.0197E-002	9.2315E-002			
5	0.99235	2.5416E-003	9.4067E-003	6.4537E-003	9.4074E-002			
6	0.93715	1.8504E-003	3.9680E-003	1.6031E-003	1.6963E-002			
7	0.03400	5.3776E-004	5.8031E-002	9.9827E-004	5.8925E-003			
8	0.01596	5.3175E-004	4.8006E-002	9.5345E-004	1.5964E-003			
9	1.00000	1.2812E-003	5.8823E-002	2.1412E-004	5.2203E-003			
10	1.00000	2.8905E-004	7.8359E-002	2.6098E-005	2.8330E-003			
11	0.99468	3.7395E-005	6.5416E-002	5.7980E-006	1.0840E-003			
12	0.83045	5.1439E-006	2.5636E-003	2.6253E-007	2.3618E-004			
13	1.00000	9.1153E-011	2.2100E-009	6.7796E-009	5.5407E-005			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^4 = 222.01\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	2.838	0.838	70.12	24.18
n_{3-5}	1.000	--	--	--
n_{4-6}	2.000	--	--	--
n_{5-6}	0.932	0.932	61.00	61.00

Início do cálculo dos pseudocustos

Cálculo dos pseudocustos P_{5-6}^+ e P_{5-6}^-

$$P_{5-6}^-(n_{5-6} \leq 0)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj	
0	0.00000	2.7300E+000	2.4507E-001	3.5957E+001	0.0000E+000			
1	0.81191	4.3184E-001	5.5121E-002	8.2875E+000	2.1864E-001			
2	0.78004	9.5194E-002	1.2601E-002	1.9563E+000	4.6965E-002			
3	0.76028	3.3831E-002	3.1381E-003	5.3307E-001	7.2978E-002			
4	0.77065	4.2506E-002	9.7444E-004	2.0769E-001	8.4785E-001			
5	0.68207	1.5314E-001	4.3939E-004	9.3262E-002	8.1999E-001			
6	0.66102	2.8079E-001	5.4891E-004	4.3304E-002	7.8552E-001			
7	0.78432	2.0827E-002	2.9825E-004	1.2649E-002	4.6276E-001			
8	0.71373	1.1254E-002	3.2978E-004	4.4918E-003	1.6433E-001			
9	0.80478	5.2307E-003	1.0953E-004	1.1323E-003	6.5487E-002			
10	0.68319	1.8110E-003	3.6500E-005	3.7663E-004	1.5268E-002			
11	0.78700	3.9181E-004	5.8275E-006	9.3376E-005	6.4876E-003			
12	0.77942	8.7056E-005	9.5296E-007	2.1657E-005	1.8686E-003			
13	0.71797	2.4590E-005	1.9056E-007	6.4048E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{5-6}^- = 184.70\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{5-6}^- = (184.70 - 222.01)/(0.932) = -40.032$$

$$P_{5-6}^+(n_{5-6} \geq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj			
0	0.00000	2.7300E+000	2.3735E-001	3.6768E+001	0.0000E+000				
1	0.81188	4.3321E-001	5.3288E-002	8.4592E+000	2.1480E-001				
2	0.77993	9.5614E-002	1.2182E-002	1.9977E+000	4.5827E-002				
3	0.76375	3.4216E-002	2.9859E-003	5.3662E-001	6.8180E-002				
4	0.76620	2.8827E-002	9.5042E-004	2.1086E-001	8.0373E-001				
5	0.68232	2.3382E-001	3.7091E-004	9.5822E-002	8.0713E-001				
6	0.76042	1.1071E-001	2.5966E-004	3.6098E-002	8.3340E-001				
7	0.74977	3.8641E-002	2.0137E-004	1.0774E-002	4.3036E-001				
8	0.82070	9.0649E-003	3.1569E-005	2.3855E-003	1.4596E-001				
9	0.76867	2.3844E-003	9.0850E-006	5.7351E-004	3.3234E-002				
10	0.82895	4.1710E-004	2.1698E-006	1.2247E-004	8.9387E-003				
11	0.80550	8.1815E-005	4.6396E-007	2.5520E-005	2.6276E-003				
12	0.78230	1.7840E-005	9.9544E-008	5.7826E-006	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{5-6}^+ = 225.06\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{5-6}^+ = (225.06 - 222.01)/(1 - 0.932) = 44.85$$

Fim do cálculo dos pseudocustos

nó 4

$$v^3 = 222.01\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^3 = 222.01 - 37.31 = 184.70\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+(1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+(f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	2.838	0.838	70.11	24.18	58.75	3.92	3.92
n_{3-5}	1.000	--	--	--	--	--	--
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--
n_{5-6}	0.932	0.932	-40.03	44.85	-37.31	3.05	-37.31

Variável de separação n_{5-6}

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
1	227.39	270.85
3	373.74	406.46
4	222.01	184.70

Subproblema escolhido: nó 4

NÓ 5 $(n_{5-6} \leq 0)(n_{4-6} \geq 2)(n_{3-5} \geq 1)$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	2.4507E-001	3.5957E+001	0.0000E+000			
1	0.81191	4.3184E-001	5.5121E-002	8.2875E+000	2.1864E-001			
2	0.78004	9.5194E-002	1.2601E-002	1.9563E+000	4.6965E-002			
3	0.76028	3.3831E-002	3.1381E-003	5.3307E-001	7.2978E-002			
4	0.77065	4.2506E-002	9.7444E-004	2.0769E-001	8.4785E-001			
5	0.68207	1.5314E-001	4.3939E-004	9.3262E-002	8.1999E-001			
6	0.66102	2.8079E-001	5.4891E-004	4.3304E-002	7.8552E-001			
7	0.78432	2.0827E-002	2.9825E-004	1.2649E-002	4.6276E-001			
8	0.71373	1.1254E-002	3.2978E-004	4.4918E-003	1.6433E-001			
9	0.80478	5.2307E-003	1.0953E-004	1.1323E-003	6.5487E-002			
10	0.68319	1.8110E-003	3.6500E-005	3.7663E-004	1.5268E-002			
11	0.78700	3.9181E-004	5.8275E-006	9.3376E-005	6.4876E-003			
12	0.77942	8.7056E-005	9.5296E-007	2.1657E-005	1.8686E-003			
13	0.71797	2.4590E-005	1.9056E-007	6.4048E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^5 = 184.70\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	3.490	0.490	70.12	24.18
n_{3-5}	1.000	--	--	--
n_{4-6}	2.000	--	--	--

Sem cálculo de pseudocustos

nó 5

$$v^5 = 184.70\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^5 = 184.70 + 12.33 = 197.03\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	3.490	0.490	70.12	24.18	34.36	12.33	12.33
n_{3-5}	1.000	--	--	--	--	--	--
n_{4-6}	2.000	--	--	--	--	--	--

$\Sigma 12.33$

Variável de separação n_{2-4}

NÓ 6 ($n_{5-6} \geq 1$)($n_{4-6} \geq 2$)($n_{3-5} \geq 1$)

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	2.3735E-001	3.6768E+001	0.0000E+000			
1	0.81188	4.3321E-001	5.3288E-002	8.4592E+000	2.1480E-001			
2	0.77993	9.5614E-002	1.2182E-002	1.9977E+000	4.5827E-002			
3	0.76375	3.4216E-002	2.9859E-003	5.3662E-001	6.8180E-002			
4	0.76620	2.8827E-002	9.5042E-004	2.1086E-001	8.0373E-001			
5	0.68232	2.3382E-001	3.7091E-004	9.5822E-002	8.0713E-001			
6	0.76042	1.1071E-001	2.5966E-004	3.6098E-002	8.3340E-001			
7	0.74977	3.8641E-002	2.0137E-004	1.0774E-002	4.3036E-001			
8	0.82070	9.0649E-003	3.1569E-005	2.3855E-003	1.4596E-001			
9	0.76867	2.3844E-003	9.0850E-006	5.7351E-004	3.3234E-002			
10	0.82895	4.1710E-004	2.1698E-006	1.2247E-004	8.9387E-003			
11	0.80550	8.1815E-005	4.6396E-007	2.5520E-005	2.6276E-003			
12	0.78230	1.7840E-005	9.9544E-008	5.7826E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^6 = 225.06\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	2.802	0.802	70.12	24.18
n_{3-5}	1.000	---	---	---
n_{4-6}	2.000	---	---	---
n_{5-6}	1.000	---	---	---

Sem cálculo de pseudocustos

nó 6

$$v^6 = 225.06\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^6 = 225.06 + 4.79 = 229.85\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	2.802	0.802	70.12	24.18	56.23	4.79	4.79
n_{3-5}	1.000	---	---	---	---	---	---
n_{4-6}	2.000	---	---	---	---	---	---
n_{5-6}	1.000	---	---	---	---	---	---

$\Sigma 4.79$

Variável de separação n_{2-6}

Escolha do próximo subproblema

k	v^k	v_{est}^k
1	227.39	270.85
3	373.74	406.46
5	184.70	197.03
6	225.06	229.85

Subproblema escolhido: nó 5

NÓ 7 $(n_{2-6} \leq 3)(n_{5-6} \leq 0)(n_{4-6} \geq 2)(n_{3-5} \geq 1)$

Iterações do Método de Pontos Interiores

Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj
0	0.00000	2.7300E+000	3.2073E+000	3.7694E+001	0.0000E+000	
1	1.00000	2.1688E-001	5.2844E-003	3.4594E+000	3.1153E-001	
2	1.00000	2.7154E-001	3.3658E-003	6.6570E-001	2.4501E+000	
3	1.00000	1.2542E-001	1.2935E-002	7.8143E-002	1.8737E+000	
4	0.57416	4.1589E-002	8.5134E-003	3.7683E-002	2.3546E-002	
5	0.01209	4.1377E-002	6.9877E-002	3.5304E-002	1.0486E-002	
6	0.06658	3.8526E-002	6.6082E-002	3.3237E-002	2.6994E-003	
7	0.59846	1.5307E-002	2.9863E-002	1.0599E-002	3.5138E-002	
8	1.00000	2.6359E-003	2.1958E-003	1.8036E-003	1.4916E-002	
9	1.00000	7.6111E-009	2.0662E-006	2.1114E-006	3.6157E-003	
10	1.00000	6.1590E-013	1.1580E-008	1.4601E-007	3.5936E-006	

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v^7 = 205.25\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+
n_{2-6}	3.000	--	--	--
n_{3-5}	1.000	--	--	--
n_{3-6}	0.733	0.733	48.00	48.00
n_{4-6}	2.002	0.002	189.05	16.18

Início do cálculo dos pseudocustos

Cálculo dos pseudocustos P_{3-6}^+ e P_{3-6}^-

$$P_{3-6}^-(n_{3-6} \leq 0)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	2.5950E-001	3.5952E+001	0.0000E+000			
1	0.81693	4.1907E-001	5.7208E-002	8.3389E+000	2.2205E-001			
2	0.78097	9.1653E-002	1.3042E-002	1.9545E+000	4.6035E-002			
3	0.75750	2.9193E-002	3.2853E-003	5.3764E-001	7.5686E-002			
4	0.77445	5.1735E-002	9.7884E-004	2.0467E-001	8.4324E-001			
5	0.68342	1.3952E-001	2.7076E-003	8.8961E-002	7.2189E-001			
6	0.64411	2.5654E-001	1.4636E-003	4.1766E-002	6.6964E-001			
7	0.72164	2.1456E-002	3.9556E-004	1.4692E-002	2.7643E-001			
8	0.84339	1.6468E-002	2.0227E-004	3.5658E-003	1.2701E-001			
9	0.78099	4.3743E-003	9.1015E-005	8.7153E-004	3.5659E-002			
10	0.79891	9.5046E-004	2.0586E-005	1.8512E-004	9.5465E-003			
11	0.80183	1.9297E-004	4.1273E-006	3.8027E-005	2.3261E-003			
12	0.79770	3.9258E-005	8.0880E-007	7.9563E-006	6.1548E-004			
13	0.77943	8.6697E-006	1.5509E-007	1.8226E-006	1.6468E-004			
14	0.70497	2.5585E-006	2.6931E-008	5.7213E-007	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{3-6}^- = 229.75\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{3-6}^- = (229.75 - 205.25)/(0.733) = 33.43$$

$$P_{3-6}^+(n_{3-6} \geq 1)$$

Iterações do Método de Pontos Interiores								
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	2.5039E-001	3.6737E+001	0.0000E+000			
1	0.81335	4.3344E-001	5.6006E-002	8.4858E+000	2.1536E-001			
2	0.78006	9.5339E-002	1.2801E-002	1.9977E+000	4.5640E-002			
3	0.76030	3.1740E-002	3.1823E-003	5.4338E-001	7.0625E-002			
4	0.77054	3.9376E-002	9.7349E-004	2.0935E-001	8.0528E-001			
5	0.68343	1.1084E-001	1.1658E-003	9.3191E-002	7.6556E-001			
6	0.67381	2.7900E-001	1.6776E-003	4.2249E-002	7.4882E-001			
7	0.79777	1.7570E-002	2.1924E-004	1.1231E-002	4.3247E-001			
8	0.74112	1.1144E-002	8.2107E-005	3.4007E-003	1.2367E-001			
9	0.83293	2.0805E-003	2.7256E-005	8.5410E-004	3.7782E-002			
10	0.70114	6.6963E-004	4.8355E-006	2.6757E-004	1.0556E-002			
11	0.81100	1.3058E-004	6.5104E-007	5.8623E-005	4.0424E-003			
12	0.78812	2.7802E-005	3.2202E-007	1.3013E-005	8.4345E-004			
13	0.73179	7.4640E-006	2.2375E-007	3.6867E-006	0.0000E+000			

Solução do Método de Pontos Interiores

$$v_{3-6}^+ = 214.78\$ (cc = 0.00)$$

$$P_{3-6}^+ = (214.78 - 205.25)/(1 - 0.733) = 35.69$$

Fim do cálculo dos pseudocustos**nó 7**

$$v^7 = 205.25\$ (cc = 0.00)$$

$$v_{est}^7 = 205.25 + 9.91 = 215.16\$$$

ramo	n_{ij}	f_{ij}	P_{ij}^-	P_{ij}^+	$P_{ij}^- f_{ij}$	$P_{ij}^+ (1 - f_{ij})$	$\min[P_{ij}^- f_{ij}; P_{ij}^+ (f_{ij} - 1)]$
n_{2-6}	3.000	--	--	--	--	--	--
n_{3-5}	1.000	--	--	--	--	--	--
n_{3-6}	0.733	0.733	33.43	35.69	24.50	9.53	9.53
n_{4-6}	2.002	0.002	189.05	16.18	0.38	16.15	0.38

$$\Sigma 9.91$$
Variável de separação n_{3-6} **NÓ 8** ($n_{2-6} \geq 4$) ($n_{5-6} \leq 0$) ($n_{4-6} \geq 2$) ($n_{3-5} \geq 1$)

Iterações do Método de Pontos Interiores									
Iter	alpha	Erro Primal	Erro Dual	Gap	Comp.	Diff.	fobj		
0	0.00000	2.7300E+000	1.1329E+000	3.5957E+001	0.0000E+000				
1	0.81464	4.5144E-001	2.4876E-001	8.6669E+000	2.1036E-001				
2	0.78106	9.8907E-002	5.6411E-002	2.0306E+000	4.4001E-002				
3	0.76206	3.1313E-002	1.3888E-002	5.4573E-001	6.7855E-002				
4	0.76861	3.4412E-002	4.2031E-003	2.0479E-001	7.7630E-001				
5	0.67963	1.2276E-001	1.5992E-003	8.9261E-002	7.4760E-001				
6	0.67235	2.9737E-001	6.0832E-004	4.0866E-002	8.3707E-001				
7	0.77254	2.6253E-002	2.3050E-004	1.2814E-002	4.4260E-001				
8	0.69859	1.2520E-002	2.4897E-004	4.8131E-003	1.5914E-001				
9	0.82199	5.3299E-003	1.0534E-004	1.1913E-003	7.0974E-002				
10	0.79889	1.1470E-003	2.3013E-005	2.6138E-004	1.8469E-002				
11	0.79657	2.3839E-004	4.6124E-006	5.5459E-005	4.4041E-003				
12	0.78018	5.2625E-005	9.0588E-007	1.2639E-005	8.8060E-004				
13	0.70914	1.5321E-005	1.9604E-007	3.8759E-006	0.0000E+000				

Solução do Método de Pontos Interiores

**** SOLUÇÃO INTEIRA ENCONTRADA ****

$$v^8 = 200.00\$ (cc = 0.00)$$

ramo	n_{ij}
n_{2-6}	4
n_{3-5}	1
n_{4-6}	2

Todos os nós foram sondados

**** FIM DO ALGORITMO BRANCH AND BOUND ****

Apêndice E

Pesquisas Correlatas

Nesta seção são apresentadas pesquisas correlatas que foram desenvolvidas durante o trabalho de doutorado e geraram publicações.

E.1 Fluxo de Potência Ótimo

O problema de fluxo de potência ótimo (FPO, proposto por Carpentier na década de 1960, baseado em um problema de despacho econômico) tem como objetivo principal determinar o ponto ótimo de operação de um sistema em regime permanente, e pode ser modelado como um problema de programação não linear onde se minimiza uma função objetivo, sujeita a restrições técnicas e econômicas (Carpentier, 1962). Dentre as diversas abordagens clássicas propostas para resolver o FPO podem ser citados o método do gradiente (Carpentier, 1962; Dommel and Tinney, 1968), a programação quadrática sucessiva (Giras and Talukdar, 1981; Burchett et al., 1984), os métodos do tipo Newton (Sun et al., 1984), a programação linear sucessiva (Stott and Marinho, 1979; Alsac et al., 1990) e, mais recentemente, o método de pontos interiores (Quintana et al., 2000). Este último, desenvolvido originalmente para resolver problemas de programação linear (Karmarkar, 1984), apresenta melhor desempenho para problemas de grande porte quando comparado com métodos tradicionais, como o simplex. Este método foi reformulado e adaptado para resolver problemas de programação não-linear, como pode ser visto em (Torres and Quintana, 1998) onde é aplicado, com sucesso, na otimização da operação de sistemas de potência. Ainda tem sido utilizado para resolver o problema de fluxo de potência ótimo de grande porte (Torres and Quintana, 1998; Granville, 1996), estimação de estados (Wei et al., 1998), máximo carregamento do sistema (Irisarri et al., 1997), mínimo corte de carga (Granville et al., 1996; Rider et al., 2004b), análise de estabilidade de tensão (Wang et al., 1998), coordenação hidrotérmica (Medina et al., 1998) e despacho ótimo e seguro (Yan and Quintana, 1997). Resultados mostram que o MPI tem grande potencial para resolver problemas de sistemas de potên-

cia, quando comparado com métodos tradicionais. Os problemas de minimização das perdas ativas, de mínimo corte de carga e de máximo carregamento serão formulados como um problema de FPO e serão resolvidos utilizando os MPI-AO descritos no capítulo 4.

E.1.1 Minimização de Perdas Ativas

O problema de minimização de perdas ativas (PMPA) pode ser formulado como um FPO definido por:

$$\min V_{ns} \sum_{j \in N} V_j Y_{nsj} \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_{ns}) + P_{Dns} \quad (\text{E.1})$$

s.a.:

$$V_i \sum_{j \in N} V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) - P_{Gi} + P_{Di} = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$V_i \sum_{j \in N} V_j Y_{ij} \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) - Q_{Gi} + Q_{Di} = 0 \quad (\text{E.3})$$

$$Q_{Gk}^{\min} \leq Q_{Gk} \leq Q_{Gk}^{\max} \quad (\text{E.4})$$

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max} \quad (\text{E.5})$$

$$QSh_l^{\min} \leq QSh_l \leq QSh_l^{\max} \quad (\text{E.6})$$

$$Tap_m^{\min} \leq Tap_m \leq Tap_m^{\max} \quad (\text{E.7})$$

$$i \in N, k \in \Gamma, l \in \Psi, m \in \Omega$$

em que ns é a barra de referência. P_{Gi} e Q_{Gi} são as potências geradas ativa e reativa da barra i . P_{Di} e Q_{Di} são as demandas ativas e reativas da barra i . V_i e δ_i são a magnitude e ângulo da tensão na barra i , respectivamente. Y_{ij} e θ_{ij} são a magnitude e fase do elemento ij da matriz admitância, respectivamente. $Q_{Gk}^{\max}$ e $Q_{Gk}^{\min}$ são a máxima e mínima capacidade de geração de potência reativa do gerador k , respectivamente. $V_i^{\max}$, $V_i^{\min}$ são a máxima e mínima tensão da barra i (usamos 105% e 95% do valor nominal), respectivamente; $QSh_l^{\max}$, QSh_l , $QSh_l^{\min}$ são as máxima, atual e mínima capacidade de potência reativa do compensador *shunt* l , respectivamente; $Tap_m^{\max}$, Tap_m , $Tap_m^{\min}$ são a máxima, atual e mínimo valor do tap no transformador m . N é o conjunto de todas as barras e Γ é o conjunto de barras de geração, Ψ é o conjunto das barras com compensadores *shunt* e Ω é o conjunto de todos os transformadores.

As Eqs. (E.2) e (E.3) representam as equações de fluxo de carga. Os limites de potência reativa nos geradores são representados por (E.4) e os das magnitudes de tensão por (E.5). O limite de potência reativa dos compensadores estáticos são considerados em (E.6). A Eq. (E.7) representa o limite da posição dos tap. A capacidade de geração de potência ativa dos geradores não foram incluídos na formulação do problema (E.1) – (E.7)

E.1.2 Máximo Carregamento do Sistema

O problema de máximo carregamento do sistema (PMCS) pode ser formulado como um FPO definido por:

$$\max \lambda \quad (\text{E.8})$$

s.a.:

$$\begin{aligned} V_i \sum_{j \in N} V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) - P_{Gi} + (1 + \lambda) P_{Di} &= 0 \\ V_i \sum_{j \in N} V_j Y_{ij} \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) - Q_{Gi} + (1 + \lambda) Q_{Di} &= 0 \\ Q_{Gk}^{min} \leq Q_{Gk} \leq Q_{Gk}^{max} \\ V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \\ QSh_l^{min} \leq QSh_l \leq QSh_l^{max} \\ Tap_m^{min} \leq Tap_m \leq Tap_m^{max} \\ i \in N, k \in \Gamma, l \in \Psi, m \in \Omega \end{aligned}$$

em que, λ representa o fator de carga

E.1.3 Mínimo Corte de Carga

O problema de mínimo corte de carga (PMCC) pode ser formulado como um FPO definido por (Granville, 1996):

$$\min \lambda \quad (\text{E.9})$$

s.a.:

$$\begin{aligned} V_i \sum_{j \in N} V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) - P_{Gi} + (1 - \lambda) P_{Di} &= 0 \\ V_i \sum_{j \in N} V_j Y_{ij} \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) - Q_{Gi} + (1 - \lambda) Q_{Di} &= 0 \\ Q_{Gk}^{min} \leq Q_{Gk} \leq Q_{Gk}^{max} \\ V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \\ QSh_l^{min} \leq QSh_l \leq QSh_l^{max} \\ Tap_m^{min} \leq Tap_m \leq Tap_m^{max} \\ i \in N, k \in \Gamma, l \in \Psi, m \in \Omega \end{aligned}$$

Para todos os FPO, as variáveis de decisão são a magnitude e ângulo das tensões, os taps dos transformadores, a potência reativa dos compensadores *shunt* e o fator de carga.

E.1.4 Testes e Resultados

Os sistemas teste do IEEE de 30, 57, 118 e 300 barras, assim como dois sistemas reais, o sistema interligado peruano de 464 barras e um sistema de 2256 barras que corresponde ao sistema interligado Sul-Sudeste Brasileiro, foram usados nas simulações. As características dos sistemas usados estão na Tabela E.1 onde *nb* é o número de barras, *ng* o número de geradores, *nsh* o de elementos *shunt*, *nl* é o de linhas de transmissão, e *nt* é o de transformadores com controle da posição de *taps*. Ainda, a demanda total ativa (*Pload*) e reativa (*Qload*) em MW e MVar, e o total de perdas (MW) iniciais são também mostradas na tabela.

Data	IEEE30	IEEE57	IEEE118	IEEE300	PE464	BR2256
<i>nb</i>	30	57	118	300	464	2256
<i>ng</i>	6	7	54	69	90	201
<i>nsh</i>	4	2	2	4	50	76
<i>nl</i>	41	80	186	411	565	3508
<i>nt</i>	4	15	9	50	118	490
<i>Pload</i>	283,4	1250,8	3668,0	23247,1	2448,1	48055,4
<i>Qload</i>	126,2	336,4	1438,0	7788,0	999,6	15368,8
<i>Ploss</i>	17,90	27,65	132,82	413,05	142,15	2543,34

Tab. E.1: Características dos sistemas testados.

Todos os MPI-AO foram escritos em C++ e todas as simulações feitas em um Pentium III 800 MHz com 128 Mbytes de RAM. Todos os sistemas lineares foram resolvidos usando o esquema de esparsidade proposto por K. Zollenkopf (Zollenkopf, 1970).

Um resumo dos resultados para o problema de minimização de perdas, usando o PMCMC, está apresentado na Tabela E.2, onde *x* é o número de variáveis primais, *xlu* é o número de variáveis primais como limites superiores e inferiores, *g* é o número de restrições de igualdade e *h* o de desigualdade. São mostrados também o número de iterações e o tempo CPU (não inclui tempos de entrada e saída de dados) e a perda mínima (*Ploss*) em MW.

Para os problemas de mínimo corte de carga e de máximo carregamento do sistema, o número de variáveis primais é acrescido de uma unidade devido a presença do fator de carga λ . As cargas foram aumentadas em 50% para o primeiro problema (mantendo-se o fator de potência de cada barra) para se obter uma situação de inviabilidade para todos os sistemas.

O número de iterações e o tempo CPU e o percentual de corte de carga (%ls) ou de carregamento

Data	IEEE30	IEEE57	IEEE118	IEEE300	PE464	BR2256
<i>x</i>	63	128	244	649	1045	5001
<i>xlu</i>	34	72	127	350	582	2746
<i>g</i>	49	104	179	526	787	4234
<i>h</i>	10	9	56	73	140	277
<i>Ploss</i>	16,53	24,71	122,90	385,70	122,81	2248,02
<i>niter</i>	6	5	6	8	13	18
<i>CPU</i>	0,020	0,040	0,130	0,782	2,052	51,284

Tab. E.2: Resultados: minimização de perdas para os sistemas testados

(%la) em função da carga total do caso base, usando o PMCMC, são mostrados nas Tabelas E.3 e E.4. Na Fig. E.1 a convergência obtida para os problemas tratados, usando-se os seis sistemas-teste é apresentada. Na Tabela E.5 os tempos (CPU) gastos pelas principais tarefas do PMCMC é apresentado. Deve-se observar que a maior parte do tempo é gasto na montagem e fatoração da matriz J_F .

Data	IEEE30	IEEE57	IEEE118	IEEE300	PE464	BR2256
<i>%ls</i>	24,4	59,3	34,0	52,8	12,9	26,9
<i>niter</i>	5	9	8	13	14	33
<i>CPU</i>	0,020	0,060	0,170	1,282	2,364	110,279

Tab. E.3: Mínimo corte de carga.

Data	IEEE30	IEEE57	IEEE118	IEEE300	PE464	BR2256
<i>%la</i>	68,0	41,9	63,7	2,2	40,9	10,76
<i>niter</i>	6	8	9	15	7	30
<i>CPU</i>	0,020	0,070	0,190	1,432	1,142	102,448

Tab. E.4: Máximo carregamento.

Na tabela E.6 são mostrados o número de iterações e o tempo CPU (s) obtidos com cada MPI-AO e sistema.

Tarefas	Tempo
Inicialização	0,00
Cálculo de f , ∇f , g , h , Jg e Jh	1,99
Formação sistema Newton	2,55
Fatoração de J_F	78,67
Preditor – corretor múltiplo	9,69
Múltiplas correções centralizadas	4,98
Solução sistema Newton	1,99
Outras tarefas	0,13

Tab. E.5: CPU (% do tempo total) das tarefas principais.

		Iterações/CPU(s)					
		IEEE30	IEEE57	IEEE118	IEEE300	PE464	BR2256
P M P A	PC	8	7	10	13	15	23
		0,02	0,04	0,17	0,88	1,95	73,68
	PMC	8	5	7	10	13	21
		0,04	0,04	0,13	0,84	1,88	61,46
	MCC	7	6	7	10	14	24
		0,03	0,05	0,13	0,87	1,97	62,08
	PMCMCC	6	5	6	8	13	18
		0,02	0,04	0,13	0,78	2,05	51,28
P M C C	PC	8	10	13	NC	17	NC
		0,03	0,07	0,22	NC	2,24	NC
	PMC	6	9	10	18	18	NC
		0,02	0,06	0,19	1,46	2,65	NC
	MCC	7	9	11	16	15	NC
		0,02	0,06	0,17	1,37	2,25	NC
	PMCMCC	5	9	8	13	14	33
		0,02	0,06	0,17	1,28	2,36	111,28
P M C S	PC	9	9	15	23	8	NC
		0,04	0,08	0,29	1,67	1,06	NC
	PMC	6	8	10	17	8	37
		0,02	0,05	0,19	1,45	1,17	117,81
	MCC	7	8	11	16	8	NC
		0,03	0,05	0,20	1,43	1,15	NC
	PMCMCC	6	8	9	15	7	30
		0,02	0,07	0,19	1,43	1,14	102,45

Tab. E.6: Iterações e tempo CPU (s) para os seis sistemas testados

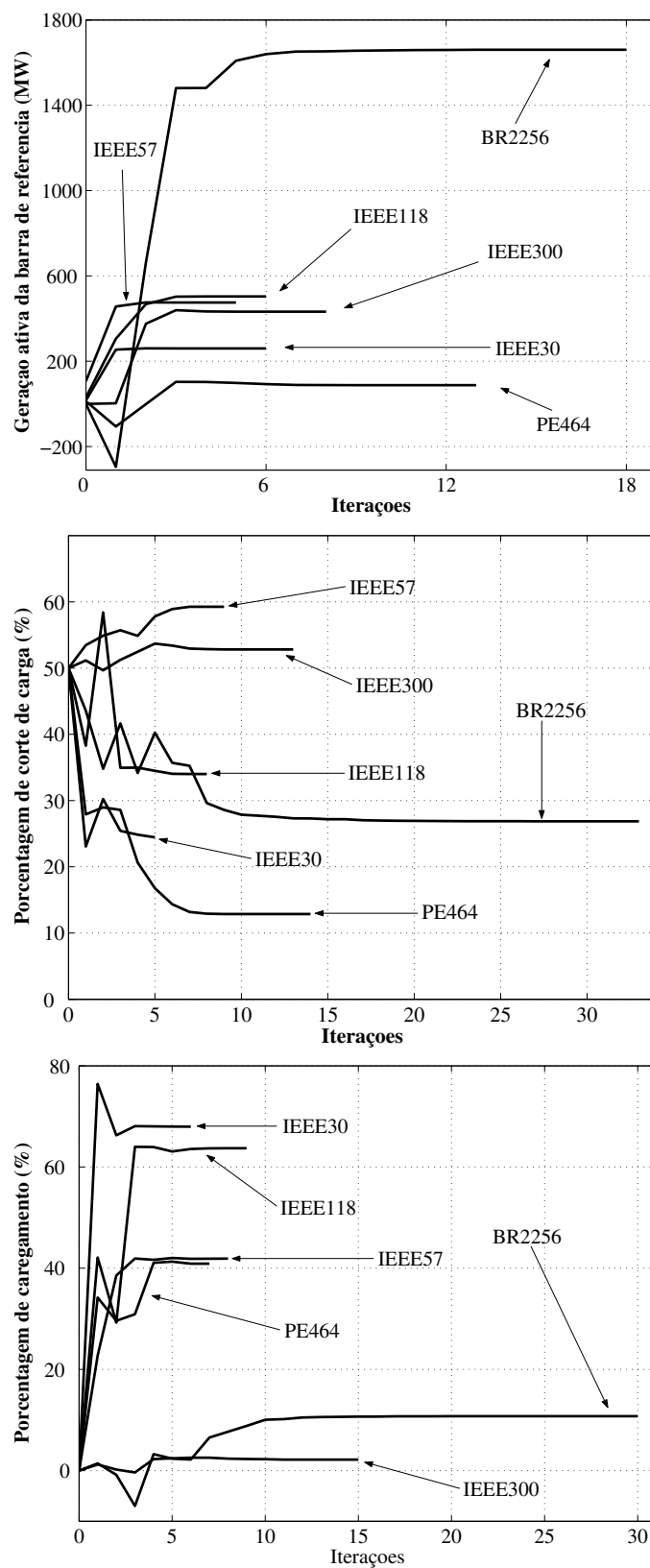


Fig. E.1: Convergência dos problemas de minimização de perdas ativas, minimização de corte de carga e maximização do carregamento do sistema.

E.2 Algoritmo Genético Especializado para o Planejamento da Expansão de Transmissão

O Algoritmo Genético (AG) foi inicialmente formulado por Holland (Holland, 1975) baseado no princípio de seleção natural que acontece na natureza, onde os indivíduos mais aptos têm maior probabilidade de sobreviverem e conseqüentemente de transmitirem seu código genético aos seus descendentes. Matematicamente, pode-se considerar o AG como sendo parte da família das metaheurísticas que possui uma alta probabilidade de encontrar a solução ótima global de problemas grandes e complexos que apresentam muitas soluções ótimas locais. A teoria básica de AG é apresentada em (Goldberg, 1989; Michalewicz, 1996).

O AG proposto por Chu-Beasley (AGCB), inicialmente desenvolvido para resolver o problema generalizado de atribuição (Chu and Beasley, 1997), é utilizado para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão com o modelo CC e para o planejamento estático. O AGB foi escolhido pelo fato do mesmo possuir em sua formulação básica algumas características que se assemelham e se enquadram no problema da expansão da transmissão, e de fato, através dele obteve-se bons resultados quando comparado com outras metaheurísticas que foram utilizadas anteriormente para solucionar o mesmo problema.

De forma geral, as principais características do AGB que o tornam apropriado para solucionar o problema do planejamento da expansão da transmissão são:

- O uso de uma função *fitness* para identificar o valor da função objetivo (custo total da construção dos circuitos de uma proposta de expansão) e uma função *unfitness* que quantifica a infactibilidade da solução testada (corte de carga provocado por uma proposta de expansão);
- Difere da maioria do AG's pelo fato de substituir na população apenas um indivíduo em cada iteração, e não toda ou quase toda a população;
- Armazena na população apenas indivíduos diferentes, o que corresponde a propostas de expansão diferentes. Isso mantém a diversidade genética da população e evita a convergência prematura.
- Realiza uma estratégia eficiente de melhoria local para cada indivíduo testado.

A seguir são apresentadas em detalhes as alterações realizadas no AGB apresentada em (Chu and Beasley, 1997), para a sua adaptação ao problema da expansão de sistemas de transmissão, para que este seja resolvido de forma mais eficiente através deste algoritmo.

Codificação do Problema

A proposta de codificação (forma de representar uma proposta de solução) em geral é o aspecto mais importante da estrutura de um AG. A codificação pode facilitar ou complicar a implementação dos mecanismos de um AG. Neste trabalho é utilizada uma codificação decimal para uma proposta de solução, ou seja, o número de linhas a serem construídas.

Para o problema estático da expansão de sistemas de transmissão, um indivíduo do AGCB (proposta de solução) é representado por um vetor de tamanho nl (número de ramos candidatos nos quais podem ser acrescentados novos circuitos), onde cada elemento deste vetor corresponde a um ramo do sistema em análise onde podem ser construídas novas linhas. O valor de cada elemento pode variar de 0 até o número máximo de linhas que podem ser acrescentadas no respectivo ramo. Exemplificando, na codificação mostrada na Fig. E.2, o ramo 2 – 3 tem 2 novas linhas, o ramo 4 – 7 tem 3 novas linhas, etc.

1 – 5	2 – 3	2 – 7	3 – 1	3 – 5	3 – 8	4 – 7	5 – 2
1	2	0	0	0	1	3	0

Fig. E.2: Proposta de Codificação

O número de indivíduos da população no AGCB para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão varia em função da dimensão do sistema testado.

População Inicial

Se para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando AG, a população inicial for gerada aleatoriamente, pode ser necessário um maior esforço computacional especialmente para sistemas de médio e grande porte. Portanto, uma forma de melhorar o desempenho do AG é gerar de maneira eficiente esta população inicial (Gallego et al., 1998b). Sendo assim, utiliza-se o AHC de VGS (Villasana-Garver-Salon) para se obter uma solução aproximada do problema, circuitos a serem construídos (Villasana et al., 1985). E a partir desta solução aproximada faz-se "perturbações" aleatórias em sua vizinhança até que uma quantidade pré-determinada de soluções aproximadas seja atingida, formando-se assim a população inicial do AG.

Também pode-se gerar a população inicial a partir de uma solução inicial obtida quando se resolve de maneira aproximada uma versão relaxada do modelo DC, como o modelo de transportes (Garver, 1970).

Função Objetivo e Infactibilidades

Para cada indivíduo da população tanto pode ser calculada a função objetivo (*fitness*), que representa o custo total do planejamento das linhas a serem construídas, como também pode ser calculada a infactibilidade do indivíduo (*unfitness*) que representa o corte de carga provocado pelo indivíduo.

Na maioria dos AG's aplicados a problemas restritos, as infactibilidades são penalizadas na função objetivo ou as propostas de solução infactíveis são descartadas. No AGCB a função objetivo e a infactibilidade de cada indivíduo da população são calculadas e armazenadas separadamente e utilizadas para fins diferentes.

A função objetivo é usada para implementar a seleção e também na substituição de um elemento na população quando todos os elementos da população são factíveis. A infactibilidade é usada para substituir um elemento da população quando existem propostas de solução infactíveis na população.

Uma das vantagens do AGCB é que não precisa se ter a preocupação de escolher o valor de α por que o custo da expansão $\sum \mathbf{c}_n^T \mathbf{n}$ é armazenado separadamente do custo do corte de carga $\alpha_r^T \mathbf{r}$. Sendo assim, α_r pode ser eliminado por que aparece multiplicando apenas o corte de carga, e os valores de corte de carga aparecem apenas no vetor do *unfitness*.

Seleção

A seleção usada é aquela baseada em torneio na qual, em cada jogo, participam dois ou três indivíduos da população corrente. O processo se dá da seguinte forma: são sorteados aleatoriamente dois ou três indivíduos da população e aquele que possuir melhor *fitness* será o pai número 1 e, após isso o processo é realizado novamente para que seja determinado o pai número 2, sendo este diferente do primeiro. Selecionados os dois pais, ambos passam para a fase de recombinação.

Para problemas de grande porte pode ser mais eficiente usar um tamanho de população maior, e nesse caso uma população maior significa maior diversidade topológica. Entretanto, um incremento na população deve ser acompanhado de um aumento de jogadores na seleção por torneio.

Recombinação

A troca de material genético ou recombinação usada é a de um ponto, na qual escolhe-se aleatoriamente um ponto de recombinação e geram-se dois descendentes com uma parcela de cada uma das topologias geradoras separadas pelo ponto de recombinação.

Enquanto no AG tradicional os dois descendentes gerados podem fazer parte da população na próxima geração, no AGCB apenas um dos descendentes pode fazer parte da população. Assim, aleatoriamente e com a mesma probabilidade é escolhido apenas um descendente, sendo o outro eliminado.

Na Fig. E.3 tem-se um exemplo de recombinação entre duas codificações estáticas, em que o segundo descendente é eliminado.

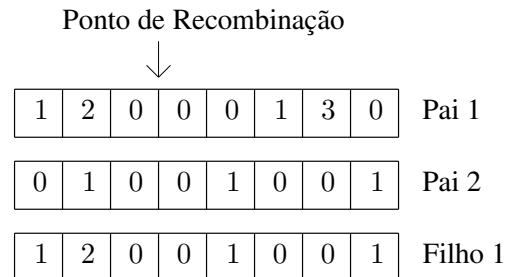


Fig. E.3: Recombinação de um Ponto

Mutação

No processo de mutação toma-se o filho escolhido após o processo de recombinação; e é escolhido de forma aleatória um ponto de mutação desse filho, a decisão para aumentar ou diminuir o número de linhas em uma unidade deve ser feita também de forma aleatória com a mesma probabilidade. Se o número de linhas do filho no ponto do mutação é igual a zero, então a decisão é de adicionar uma linha, e se o número de linhas está no máximo permitido, então a decisão consiste em eliminar uma linha. Na Fig. E.4 tem-se um exemplo de mutação.



Fig. E.4: Mutação

Melhoria Local de um Indivíduo

A melhoria local de um indivíduo é uma das maiores contribuições do AGCB, e é composta por dois tipos de melhorias: da infactibilidade e da função objetivo.

Eliminando a Infactibilidade

Se o descendente gerado é infactível, isto é, apresenta corte de carga, então elimina-se a infactibilidade com o auxílio de um algoritmo heurístico construtivo proposto por Villasana-Garver-Salon (Villasana et al., 1985).

No algoritmo VGS dois conceitos fundamentais são considerados: 1) quando as restrições de integralidade das variáveis de investimento no AHC são relaxadas, o modelo VGS transforma-se em um problema de programação linear que é usado para identificar o circuito mais adequado a ser adicionado ao sistema durante o processo iterativo do AHC; e 2) cada circuito adicionado cumpre as duas leis de Kirchhoff, e assim a solução final é factível para o modelo DC, em comparação com outros AHC que usam modelos relaxados (por exemplo o modelo de transportes) em que a solução final só cumpre a primeira lei de Kirchhoff (Garver, 1970).

Considerando que o principal objetivo deste passo é eliminar a infactibilidade do indivíduo, o AHC proposto por VGS acrescentará linhas ao indivíduo para eliminar a infactibilidade, resolvendo apenas problemas de PL's em cada passo do AHC, sendo o resultado factível para o modelo DC.

Melhorando a Função Objetivo

Após a execução do AHC de Villasana-Garver-Salon comentado anteriormente, algumas linhas são acrescentadas ao indivíduo que está no processo de melhoria local. Sendo o AHC de VGS um modelo aproximado, algumas linhas acrescentadas são desnecessárias e devem ser retiradas para que o indivíduo (proposta de solução) não fique muito caro. Sendo assim, faz-se uma ordenação de todas as linhas da proposta de solução por ordem decrescente de custos e faz-se a retirada uma a uma de todas as linhas. Aquela que quando simulada sua retirada do indivíduo não apresenta corte de carga é uma linha desnecessária e, conseqüentemente, é eliminada do mesmo. O processo é repetido para todas as linhas até não haver mais linhas desnecessárias. Permanecerão no indivíduo aquelas linhas que quando simulada a sua retirada, a proposta de solução resultante apresenta corte de carga.

Substituição da População

No AG implementado neste trabalho não existe a estratégia de substituição geracional da população como acontece nos AG's convencionais onde a cada iteração, toda ou quase toda a população é substituída por uma outra. A proposta do AGCB consiste em substituir, em cada passo, apenas um indivíduo da população. O descendente gerado e candidato a substituir um elemento da população é incorporado na mesma seguindo o procedimento:

- O descendente deverá substituir o elemento da população de pior qualidade (maior custo) desde que o descendente seja de melhor qualidade (menor custo).
- O descendente gerado deve ser diferente de todos os elementos da população para fazer parte da mesma ou seja, deve apresentar uma configuração de construção de circuitos que não exista na população. Se ele for igual a um membro pertencente à população automaticamente será descartado.

Esta proposta apresenta mudanças conceitualmente muito simples quando comparada com o AG tradicional. O que torna tal proposta mais eficiente são os seguintes motivos:

- Todas as soluções armazenadas na população corrente são diferentes evitando assim a convergência prematura muito comum em AG's convencionais em que não se faz uma análise das topologias geradas para evitar a repetição de topologias armazenadas.
- A fase de melhoria local, eliminação da infactibilidade do descendente gerado assim como da qualidade da função objetivo, fornece uma estratégia interessante que permite uma evolução mais eficiente do AG.
- A lógica de substituição da população corrente preserva as melhores topologias geradas, isto é, a incumbente, assim como as melhores soluções existentes na população corrente não estão sujeitas à eliminação por decisões de caráter aleatório como pode acontecer com o AG tradicional. Portanto, melhores topologias somente são descartadas quando aparecem descendentes de melhor qualidade. Essa estratégia é mais eficiente que a proposta de elitismo usada para preservar as melhores topologias da população corrente.

E.2.1 Pseudo-Código do AG

O AG de Chu-Beasley é apresentado na Fig. E.5. O processo é interrompido se a incumbente (melhor solução encontrada no processo) não melhora após um número especificado de iterações ou se foi atingido um número máximo de PL's. Para cada sistema analisado o primeiro critério escolhido variou de 200 a 1000 iterações (descendentes gerados). O segundo critério é apresentado para cada caso.

E.2.2 Testes e Resultados

O algoritmo genético proposto foi implementado em Matlab 6.0. Para os testes foram usados quatro sistemas de prova: o sistema Garver de 6 barras, sistema IEEE de 24 barras e o sistema Sul Brasileiro de 46 barras. Os dados elétricos dos sistemas usados para resolver o problema do planejamento da expansão de transmissão usando diretamente o modelo CC, só para o planejamento estático, estão no Apêndice C.

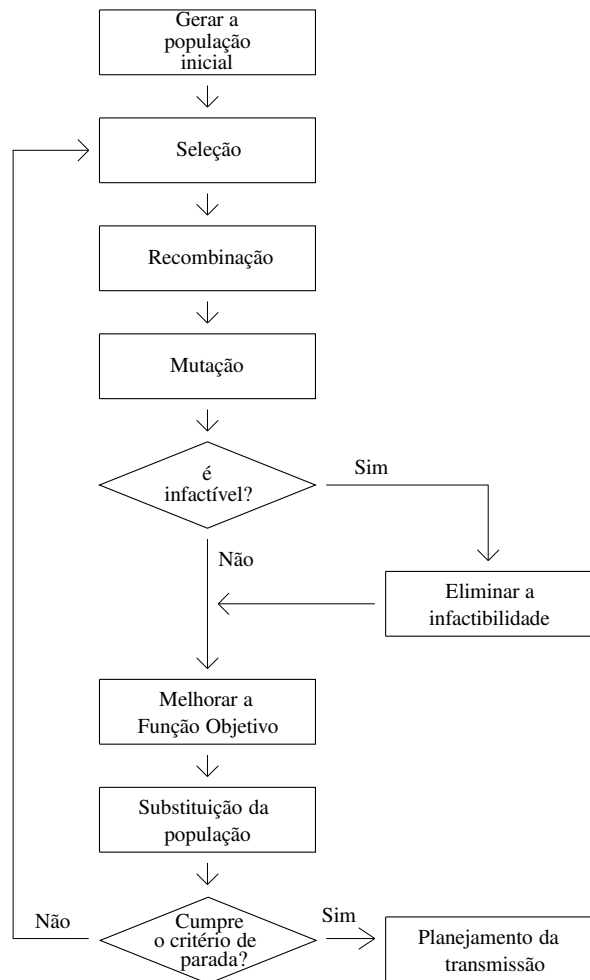


Fig. E.5: Pseudo-Código do AG de Chu-Beasley

Sistema Garver de 06 barras

Caso 1: Considerando a topologia base e com reprograma o da gera o

Quando   possível reprogramar a gera o, a melhor soluço do problema de planejamento tem um investimento de $v = 110.000$ US\$ e apresenta a adi o das seguintes linhas   topologia base: $n_{3-5} = 1$ e $n_{4-6} = 3$. O AGCB encontrou a soluço anterior depois de 117 execu es de PPL's, em média, com uma popula o de 30 indivíduos e sele o de pais por torneio com $k = 2$. Em uma das inicializa es, a soluço ótima foi obtida com apenas 41 execu es de PL's. A soluço   mostrada na Fig. 7.3.

Caso 2: Considerando a topologia base e sem reprogramação da geração

A melhor solução para o problema de planejamento da expansão sem reprogramação da geração é igual a $v = 200.000$ US\$ e apresenta a adição das seguintes linhas: $n_{2-6} = 4$, $n_{3-5} = 1$ e $n_{4-6} = 2$. O AGCB encontrou a solução anterior após 51 execuções de PL's, em média, com uma população de 30 indivíduos e seleção de pais por torneio com $k = 2$. Em uma das inicializações, a solução ótima foi obtida com apenas 47 execuções de PL's. A solução é mostrada na Fig. 6.2.

Sistema IEEE de 24 barras

O investimento necessário para resolver o problema de planejamento para o sistema IEEE 24 barras é de $v = 152.000$ US\$, com a adição das seguintes linhas à topologia base:

$$n_{06-10} = 1; \quad n_{07-08} = 2; \quad n_{10-12} = 1; \quad n_{14-16} = 1.$$

O AGCB encontrou a solução anterior depois de 80 execuções de PL's, em média, com uma população de 50 indivíduos e seleção de pais por torneio com $k = 2$. Em uma das inicializações a solução ótima foi obtida com apenas 59 execuções de PL's. A topologia inicial do sistema IEEE de 24 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 6.4.

Sistema Sul Brasileiro de 46 barras**Caso 1: Com reprogramação da geração**

O investimento necessário para resolver o problema de planejamento para o Sistema Sul Brasileiro é de $v = 72.870.000$ US\$, com a adição das seguintes linhas:

$$\begin{aligned} n_{02-05} = 1; \quad n_{05-06} = 2; \quad n_{13-20} = 1; \quad n_{20-21} = 2; \\ n_{20-23} = 1; \quad n_{42-43} = 1; \quad n_{46-06} = 1. \end{aligned}$$

O AGCB encontrou a solução anterior depois de 900 execuções de PL's, em média, com uma população de 40 indivíduos e seleção de pais por torneio com $k = 2$. Em uma das inicializações a solução ótima foi obtida com apenas 63 execuções de PL's. A topologia inicial do sistema Sul Brasileiro de 46 barras e as adições feitas pelo algoritmo (apresentadas entre parênteses) são mostradas na Fig. 7.5.