

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ASPECTOS DA OTIMIZAÇÃO DA ESCALA DE  
GERAÇÃO EM SISTEMAS DE POTÊNCIA HIDROTÉRMICOS

Takaaki Ohishi

Orientador : Secundino Soares Filho

Tese de Mestrado apresentada à  
Faculdade de Engenharia de Cam  
pinas da Universidade Estadual  
de Campinas-

MARÇO / 1981

Ā meus pais  
Akio e Hiroko  
Ā Nā

### AGRADECIMENTOS

Aos colegas da FEC, especialmente ao Akebo, Raul, Ana, Christiano, França, Hermano, Mário, Geromel, Sérgio, Evandro, pela amizade e apoio.

Ao orientador e amigo Secundino, pela amizade e confiança.

Ao pessoal de casa, Goro, Nelsinho, Edu, Pessotta, Giuliano, por tudo.

## APRESENTAÇÃO

Um problema clássico em sistemas de potência é a alocação da geração entre as diversas unidades geradoras. Muitas abordagens tem sido sugeridas nos anos recentes, tais como os métodos variacionais, programação dinâmica, princípio de máximo de Pontryagin, técnicas de programação matemática em geral, e técnicas de decomposição e coordenação.

Na área de Sistema do Departamento de Engenharia Elétrica da FEC - UNICAMP tem-se pesquisado nos últimos anos a resolução deste utilizando-se técnicas de programação matemática, programação dinâmica e técnicas de decomposição e coordenação.

Este trabalho apresenta um estudo de uma proposta de resolução através de técnicas de decomposição e coordenação. Desenvolve-se um algoritmo para a sua implementação computacional e apresenta a resolução de três sistemas hidroelétricos hipotéticos. Faz-se também uma discussão da variação na configuração das usinas hidroelétricas a serem consideradas na otimização em função do horizonte de otimização.

Sist. de Eng. Elétrica

ALGORITMOS

Tombo Geral/Sigla Unidade: 3884-BC

1. CALCO 35 ( )

CPD:.....Nº Chamada CM:.....
Ficha recebida FGV: Sim ( ) Não ( )

2. COOPERAÇÃO ( )

CPD:.....Indicação Cutter:.....
Data Obra cooperada:.....Edição:.....CDD+Sigla(todos os #):.....
Pista:.....

vide verso ( )

3. IMPLANTAÇÃO (X)

A) Autor: Cadastro Autoridade ( ) Cadastro Autor/Título (X)
Oishi, Takaaki

B) Editor: Cadastro Autoridade ( ) Cadastro Autor/Título (X)
orient Soares Filho, Secundino

C) Entid. Coletiva: Cadast. Autor. ( ) Cadast. Autor/Título ( )
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia

Outra obra (X) Mesma obra ( ) Assunto correlato ( ) Título:.....
Campinas

Ind. Cutter:.....

Língua #:.....Data:.....Edição:.....Vol.:.....

CDD+Sigla (todos os #) Pista:.....

vide verso ( )

CATALOGO MATRIZES: Nada consta ( ) Duplicata ( ) Nº Tombo:.....

Fichas retrospectivas "antigas" ( ) Assunto correlato ( )

Título Ass. correlato:.....

Mesma obra ( ) Mesma língua ( ) Língua # ( ) edição:.....Data:.....

Vol.:.....Nº Chamada completo + pista:.....

vide verso ( )

1. Ficha manus. Autoridade elab. UNICAMP ( ) Outra obra CALCO ( )

Autor:.....

Editor:.....

Entidade Coletiva:.....

Assunto correlato/CALCO: ( ) Título:.....

Nº Chamada + Pista:.....

Rubrica/Data: Bel 12.10.92

## ÍNDICE

### Capítulo I - Introdução

1.1 - Introdução	1.1
1.2 - Modelo para um Sistema Produtor e Consumidor de Energia	1.1
1.2.1 - Sistema Produtor	1.1
1.2.1.1 - Subsistema Hidroelétrico	1.2
1.2.1.2 - Subsistema Termoelétrico	1.6
1.2.1.3 - Importação e Exportação de energia	1.8
1.2.1.4 - Corte de Carga	1.9
1.2.2 - Mercado Consumidor	1.9
1.2.2.1 - Mercado Primário	1.9
1.2.2.2 - Mercado Secundário	1.9
1.2.3 - Usinas Reversíveis	1.10
1.3 - Apresentação do Problema de operação de um Sistema Produtor	1.13
1.3.1 - Proposta de Política de Operação	1.13
1.4 - Comentários da Literatura	1.14

### Capítulo II - Formulação do Problema

2.1 - Formulação do Problema	2.1
2.2 - Decomposição por Dualidade	2.3
2.2.1 - Subproblema Termoelétrico	2.4
2.2.2 - Subproblema Hidroelétrico	2.5
2.3 - Estratégia de Resolução	2.5
2.4 - Interpretação Econômica	2.6
2.5 - Comentários	2.7

### Capítulo III - Resolução do Problema Hidroelétrico

3.1 - Decomposição do Sistema Hidroelétrico	3.3
3.1.1.- Decomposição Espacial	3.3
3.1.2 - Decomposição Temporal	3.5
3.1.3 - Relação entre a Decomposição Espacial e Decomposição Temporal	3.7
3.1.4 - Formulação Geral	3.9
3.1.5 - Estrutura Hierárquica de Cálculo e Decomposição Mista	3.13
3.1.5.1 - Decomposição Espacial	3.14
3.1.5.2 - Decomposição Temporal	3.15
3.1.5.3 - Decomposição Mista	3.17
3.2 - Resolução do (SH) por Decomposição Temporal	3.19
3.2.1 - Cálculo da Função Dual	3.22
3.2.2 - Busca Unidimensional	3.27

### Capítulo IV - Testes

4.1 - Testes	4.2
4.2 - Inicialização	4.24
4.3 - Comandabilidade do Método Dual Clássico	4.30
4.4 - Conclusões	4.35

### Capítulo V -

5.1 - Sistema hidroelétrico	5.1
5.2 - Função de Geração	5.3
5.3 - Horizonte de Otimização	5.6
5.3.1 - Planejamento de Médio Prazo	5.7
5.3.2 - Planejamento de Curto Prazo	5.8
5.3.2.1 - Otimização de Um Sistema	5.8
5.4 - Operação das Usinas Fio D'água	5.12

### Bibliografia

## I - INTRODUÇÃO

A utilização racional dos recursos naturais para a geração de Energia é um dos problemas fundamentais a serem solucionados para a sobrevivência e desenvolvimento da nossa sociedade. Principalmente hoje, quando os recursos utilizados nos meios convencionais de geração estão se escasseando.

Para a solução deste problema existem atualmente duas alternativas, não mutuamente exclusivas: A racionalização da exploração dos recursos e meios de produção energéticos convencionais e o desenvolvimento de novas fontes.

Para a efetivação da primeira alternativa é necessário que disponhamos de modelos e métodos eficientes para operar um parque produtor de energia já instalado, bem como de eficientes metodologias de planejamento para a implantação de novas unidades de produção.

Aumentar o rendimento de um sistema produtor já instalado significa geralmente a diminuição da quantidade de água, combustível e importação de energia para a operação do sistema, satisfazendo as necessidades do mercado consumidor.

Enquanto que na Fase do Planejamento, precisa-se determinar o tamanho e localização de novas unidades, avaliando os benefícios e custos correspondentes, bem como a ampliação das unidades já instaladas, de modo a otimizar a utilização de uma quantidade limitada de recursos.

### 1.2 - MODELO PARA UM SISTEMA PRODUTOR E CONSUMIDOR DE ENERGIA

Descreveremos a seguir os principais componentes e suas características de um sistema produtor e consumidor de energia.

#### 1.2.1 - SISTEMA PRODUTOR

O sistema produtor é em geral, constituído de três subsistemas: o subsistema hidroelétrico, o subsistema termoelétrico e a importação de energia.



### 1.2.1.1 - SUBSISTEMA HIDROELÉTRICO

As usinas hidroelétricas podem ser com reservatórios reguladores ou a fio d'água (sem reservatório). No caso mais geral, as usinas são constituídas com reservatórios, grupo turbina-gerador e subestação elétrica, de onde partem as linhas de transmissão para os pontos de carga.

Geograficamente, as usinas podem estar em rios separados (usinas em paralelo) ou em um mesmo rio (usinas em cascata).

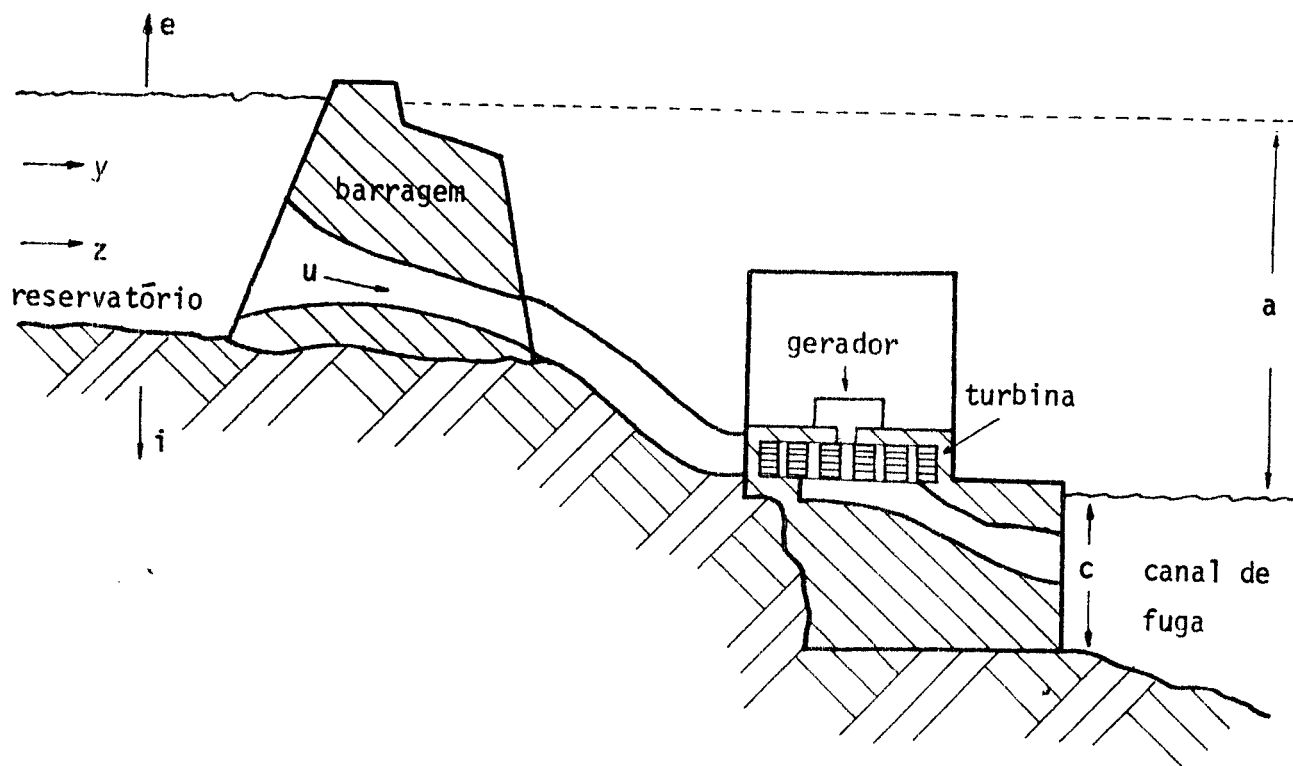


fig. 1

A figura 1 mostra as principais componentes de uma usina hidroelétrica. Mostra também as variáveis mais importantes no seu modelo matemático.

As variáveis mais importantes no modelo matemático de uma usina hidroelétrica são:

$y(t)$  - vazão independente afluente ao reservatório no instante  $t$ . Vazão independente é aquela que independe da operação de usinas ou reservatórios a montante. Esta vazão constitui um processo estocástico.

- $z(t)$  - vazão controlável afluente ao reservatório no instante  $t$ . Corresponde a água turbinada e vertida nas usinas a montante no mesmo instante, ou em instantes anteriores, quando existem retardos devidos aos tempos de viagem da água.
- $x(t)$  - volume d'água armazenado no reservatório no instante  $t$ . Este volume não pode exceder a capacidade máxima do reservatório ( $\bar{x}$ ) nem cair abaixo de um limite inferior ( $\underline{x}$ ).
- $a(t)$  - altura de queda entre o nível superior do reservatório e a turbina - pode-se descontar desta altura as perdas na tubulação e no grupo turbina-gerador. A altura é função do volume d'água armazenado no instante  $t$  e do nível do canal de fuga. Quando função apenas do volume, caracteriza o mesmo estado que este.
- $u(t)$  - vazão d'água turbinada para produzir energia no instante  $t$ . A vazão turbinada numa usina tem limite superior ( $\bar{u}$ ), devido a saturação da capacidade das turbinas, e inferior ( $\underline{u}$ ). O limite inferior pode ser maior do que zero, por restrições operativas.
- $v(t)$  - vazão d'água vertida no instante  $t$ . Como água vertida não produz energia elétrica, procura-se evitar vertimentos. Salvo motivos de segurança ou submotorização, havendo mercado para absorver toda a energia produzida, só deve haver vertimentos quando o reservatório estiver cheio ( $x(t) = \bar{x}$ ) e as vazões afluentes ( $y(t)$  e  $z(t)$ ) excederem o limite superior de turbinagem ( $\bar{u}$ ).
- $e(t)$  - vazão d'água evaporada (no reservatório) no instante  $t$ .
- $i(t)$  - vazão d'água perdida por infiltração no instante  $t$ .

A energia instantânea (potência) gerada pela usina é proporcional a energia potencial da água no reservatório e é dado por:

$$H(t) = \eta u(t) \cdot g \cdot a(x(t), c(t))$$

$g$  - aceleração da gravidade.

$c(t)$  - nível do canal de fuga.

$\eta$  - rendimento da usina, normalmente considerado cte na faixa de operação.

Na prática, esta potência é calculada através da seguinte fórmula:

$$h(t) = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot (h_1(x(t)) - h_2(u(t))) \cdot u(t) \quad (\text{MW})$$

$\rho$  - Peso específico

$h_1(x(t))$  - é um polinômio de 4.<sup>a</sup> ordem, que fornece a cota do reservatório correspondente ao volume  $x(t)$ .  
( $x(t)$  é dado em  $10^6 \text{ M}^3$ )

$h_2(u(t))$  - é um polinômio de 4.<sup>a</sup> ordem, que fornece a altura do canal de fuga correspondente a uma dada turbina gem  $u(t)$ .  
( $u(t)$  é dado  $\text{m}^3/\text{s}$ ).

A equação dinâmica que determina a evolução do volume d'água armazenado no reservatório satisfaz o princípio de conservação da massa. Este princípio pode ser traduzido na equação diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) + z(t) - u(t) - v(t) - e(t) - i(t) \quad (1.1)$$

Para trabalhar com problemas discretizados no tempo, toma-se a integral da equação (1.1) entre dois instantes consecutivos, ex tremos de um intervalo de discretização. Tem-se:

$$\int_{t^m}^{t^{m+1}} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{t^m}^{t^{m+1}} [y(t) + z(t) - u(t) - v(t) - e(t) - i(t)] dt$$

ou

$$x(t^{m+1}) - x(t^m) = \int_{t^m}^{t^{m+1}} y(t) dt + \int_{t^m}^{t^{m+1}} z(t) dt - \int_{t^m}^{t^{m+1}} u(t) dt - \int_{t^m}^{t^{m+1}} v(t) dt - \int_{t^m}^{t^{m+1}} e(t) dt - \int_{t^m}^{t^{m+1}} i(t) dt$$

Reescrevendo, obtêm-se a equação de evolução do volume armazenado para problemas discretizados no tempo:

$$x^{m+1} = x^m + y^m + z^m - u^m - v^m - e^m - i^m$$

onde

$$x^{m+1} = x(t^{m+1}) \quad - \text{volume d'água armazenado no reservatório no início do intervalo } m+1.$$

$$x^m = x(t^m) \quad - \text{volume d'água armazenado no reservatório no início do intervalo } m.$$

$$y^m = \int_{t^m}^{t^{m+1}} y(t) dt \quad - \text{volume d'água independente afluyente ao reservatório no intervalo } m.$$

$$z^m = \int_{t^m}^{t^{m+1}} z(t) dt \quad - \text{volume d'água dependente afluyente ao reservatório no intervalo } m.$$

$$u^m = \int_{t^m}^{t^{m+1}} u(t) dt \quad - \text{volume d'água turbinado no reservatório, no intervalo } m.$$

$$v^m = \int_{t^m}^{t^{m+1}} v(t) dt \quad - \text{volume d'água vertido no reservatório, no intervalo } m.$$

$$e^m = \int_{t^m}^{t^{m+1}} e(t) dt \quad - \text{volume d'água evaporado no reservatório, no intervalo } m.$$

$$i^m = \int_{t^m}^{t^{m+1}} i(t) dt - \text{volume d'água perdido por infiltração no reservatório, no intervalo } m.$$

É frequente encontrar-se na literatura, unidades de grandezas contínuas em problemas onde elas estão discretizadas. Quando isto acontece, deve-se entender que estão sendo considerados valores médios para estas grandezas no intervalo.

Por exemplo, é comum adotar-se unidades de potência para energia e de vazão para volume, referindo-se a energia correspondente àquela potência gerada (ou consumida) uniformemente e ao volume correspondente à vazão média durante o intervalo.

#### 1.2.1.2 - SUBSISTEMA TERMOELÉTRICO

Apesar das usinas termoelétricas diferirem muito quanto ao tipo de combustível que utilizam na geração (carvão, gás, óleo, etc), elas tem em comum algumas características: a mesma estrutura de funcionamento, função de custo de produção ( $\psi$ ) crescente com a energia gerada e custo incremental crescente ( $d\psi/dg$ ). Portanto, a função de custo de produção é convexa, e geralmente aproximada por uma função quadrática.

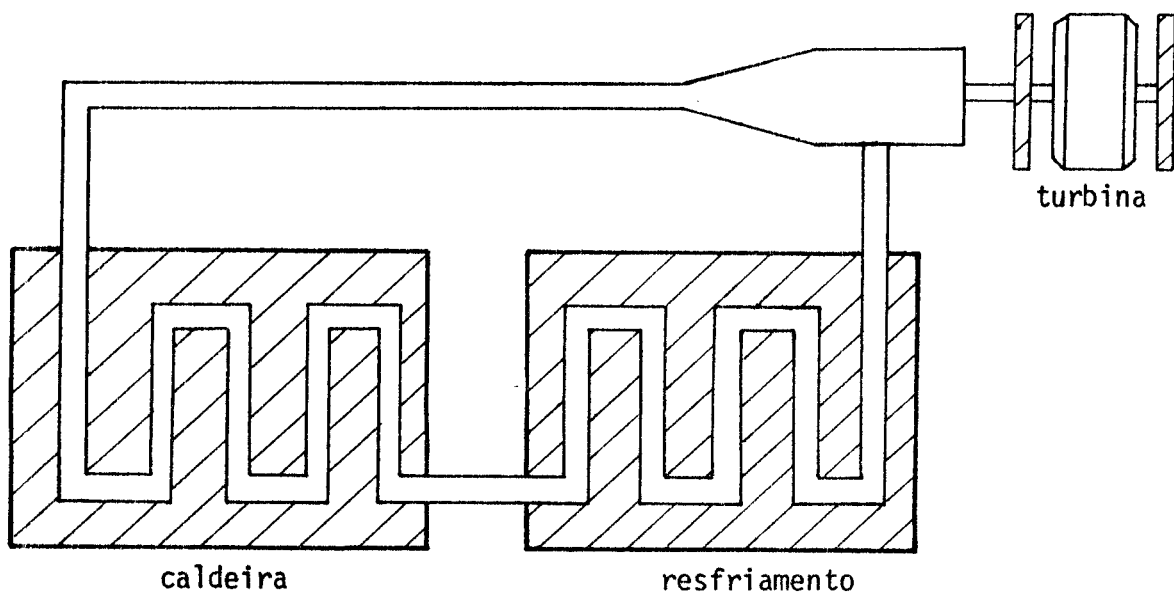


Fig. 2

As usinas termoelétricas tem uma limitação superior da sua produção dada pela sua capacidade máxima ( $\bar{g}$ ), e inferiormente, pela energia mínima que ela é obrigada a produzir. O limite inferior nem sempre é zero, devido a restrições operativas.

Uma outra característica importante é o custo de "partida". Este custo depende basicamente do intervalo de tempo em que a unidade fica desligada. Normalmente este custo é calculado pela expressão:

$$C = C_0 (1 - e^{-K \cdot \Delta t})$$

onde

$C_0$  - custo de partida "a frio"

$K$  - taxa de resfriamento

$\Delta t$  - intervalo de tempo em que a unidade fica desligada.

### OPERAÇÃO DE UM SISTEMA TERMOELÉTRICO

Suponhamos que temos  $n$  unidades térmicas a disposição, e em determinado instante  $m$ , devemos suprir um déficit de demanda  $G^m$  com o sistema térmico. O problema a ser resolvido é determinar com quais e a que nível cada unidade térmica deve operar.

Então, escolhida uma determinada configuração de unidades térmicas para operação, a solução do problema seria:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I_K} \psi_i (g_i^m)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i \in I_K} g_i^m = G^m$$

$$g_i \leq g_i^m \leq \bar{g}_i$$

Sem considerar as restrições da região de operação das usinas térmicas a solução seria:

$$\tilde{g}_i^m \text{ tal que } \left. \frac{d\psi_i(g_i^m)}{dg_i^m} \right|_{\tilde{g}_i^m} = \lambda \text{ (constante)}$$

A solução com restrição seria:

$$\text{Se } \underline{g}_i \leq \tilde{g}_i^m \leq \bar{g}_i \Rightarrow \hat{g}_i^m = \tilde{g}_i^m$$

$$\text{caso contrário} \Rightarrow \hat{g}_i^m = \text{Min} [\bar{g}_i, \text{Máx} (\underline{g}_i, \tilde{g}_i^m)]$$

Portanto temos que para um dado sistema térmico é conveniente atender a demanda  $G^m$ , operando todas as suas unidades com os custos incrementais iguais entre si, a menos de atingir seus limites de operação.

Quanto a configuração das unidades para operação, é conveniente operar com a configuração que apresente o menor custo incremental, pois como a função  $\psi$  é convexa e crescente, a minimização do custo incremental implica na minimização de custo de produção e vice-versa.

Como há uma grande variação da demanda durante um dia (v.l.2.2.2), seria conveniente escolher a cada período (por ex. a cada hora) uma configuração que apresentasse o menor custo incremental para a demanda deste período. Se, no entanto levarmos em conta o custo adicional de partida das unidades, essa mudança de configuração não seria sempre conveniente, pois, o lucro advindo da operação a um custo incremental menor, poderia ser menor que o custo adicional de partida nos períodos seguintes. Portanto, concluímos que em determinados sistemas térmicos a configuração tende a ser constante, ou pelo menos ser constante por períodos mais longos que a solução acima.

### 1.2.1.3 - IMPORTAÇÃO E EXPORTAÇÃO DE ENERGIA

Em geral um sistema tem linhas de transmissão que o interligam a sistemas vizinhos. Isto permite um comércio (importação e exportação) de energia entre os sistemas.

Tanto a importação quanto a exportação são determinados por

vários fatores, entre os quais: o excedente e/ou déficit de energia nos diversos sistemas, linhas de transmissões disponíveis, e o preço da energia em cada sistema.

#### 1.2.1.4 - CORTE DE CARGA

Quando a demanda de energia no mercado consumidor é maior que a energia total disponível no parque gerador e na importação, a única alternativa é interromper o fornecimento para parte do mercado.

Uma forma de representar o corte de carga em um modelo matemático é através de uma usina térmica de custo de produção muito alto. O custo de utilização desta usina térmica "fantasma" poderia ser interpretado como o "custo social" causado pelo corte de carga.

#### 1.2.2 - MERCADO CONSUMIDOR

O mercado consumidor é em geral, constituído de três mercados: mercado primário, mercado secundário, e exportação de energia.

##### 1.2.2.1 - MERCADO PRIMÁRIO

Denominamos de mercado primário ao mercado que, a priori o sistema produtor sempre deverá atender, como por exemplo: consumo domiciliar, comercial, alguns tipos de indústria, etc...

##### 1.2.2.2 - MERCADO SECUNDÁRIO

Quando existe energia em abundância, pode ser interessante incentivar o consumo por atividades que, de outra forma, não solicitariam energia do sistema. Este mercado adicional é chamado de Mercado Secundário. Consome energia a um preço mais barato e, havendo necessidade, pode ser eliminado sem maiores problemas.



A demanda de energia no mercado primário no instante  $t$ ,  $D(t)$  é uma função aleatória no tempo. A curva de demanda (FIG. 3) apresenta um certo perfil padrão de consumo durante o período de um dia útil.

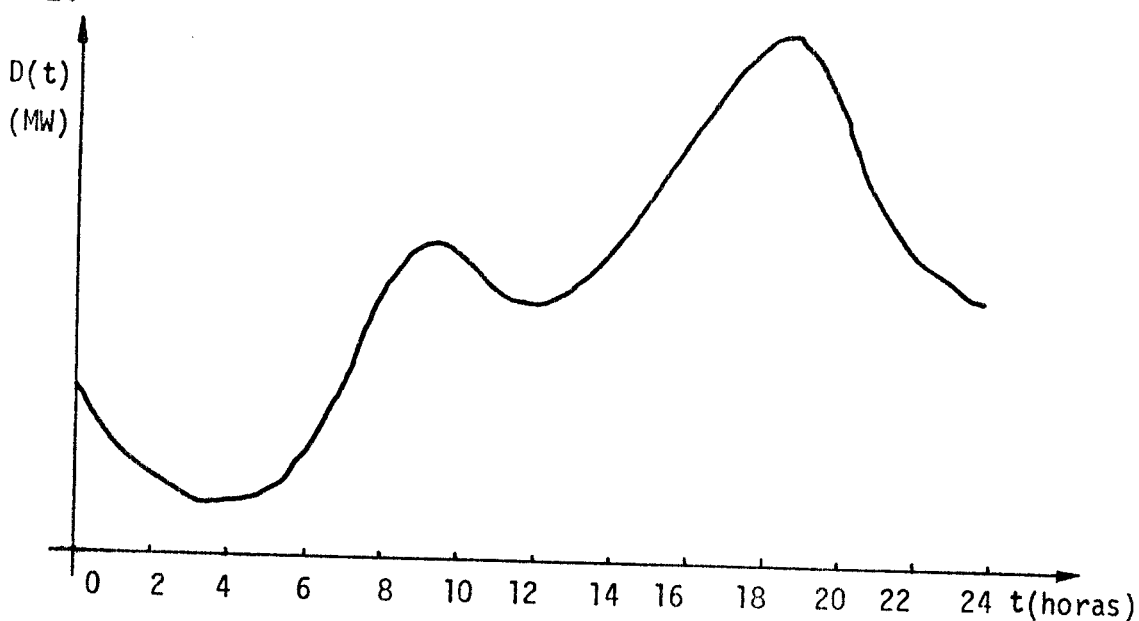


fig. 3

### 1.2.3 - USINAS REVERSÍVEIS

Uma unidade que apresenta uma função muito especial no sistema é a usina Reversível.

Uma usina reversível é basicamente a combinação de uma hidroelétrica e uma estação de bombeamento. Sua instalação compreende um par de reservatórios e uma casa de máquinas cujas unidades, no caso mais comum, podem funcionar ora como turbina-gerador ora como bomba-motor (FIG. 4), embora encontre-se instalações cujas unidades de bombeamento e geração sejam separados.

As usinas reversíveis distinguem-se das hidroelétricas convencionais principalmente pelo tipo de recurso utilizado na geração de energia. As hidroelétricas convencionais utilizam-se de um recurso natural, a energia potencial da água afluente ao reservatório; já as unidades reversíveis utilizam de energia elétrica do sistema, bombeando água para o reservatório superior, cuja energia potencial é utilizada posteriormente, devolvendo, à menos de perdas, a energia absorvida ao sistema. Assim, a implantação de uma usina reversível não acrescenta energia firme ao sistema, porém efetua um deslocamento de energia no tempo.

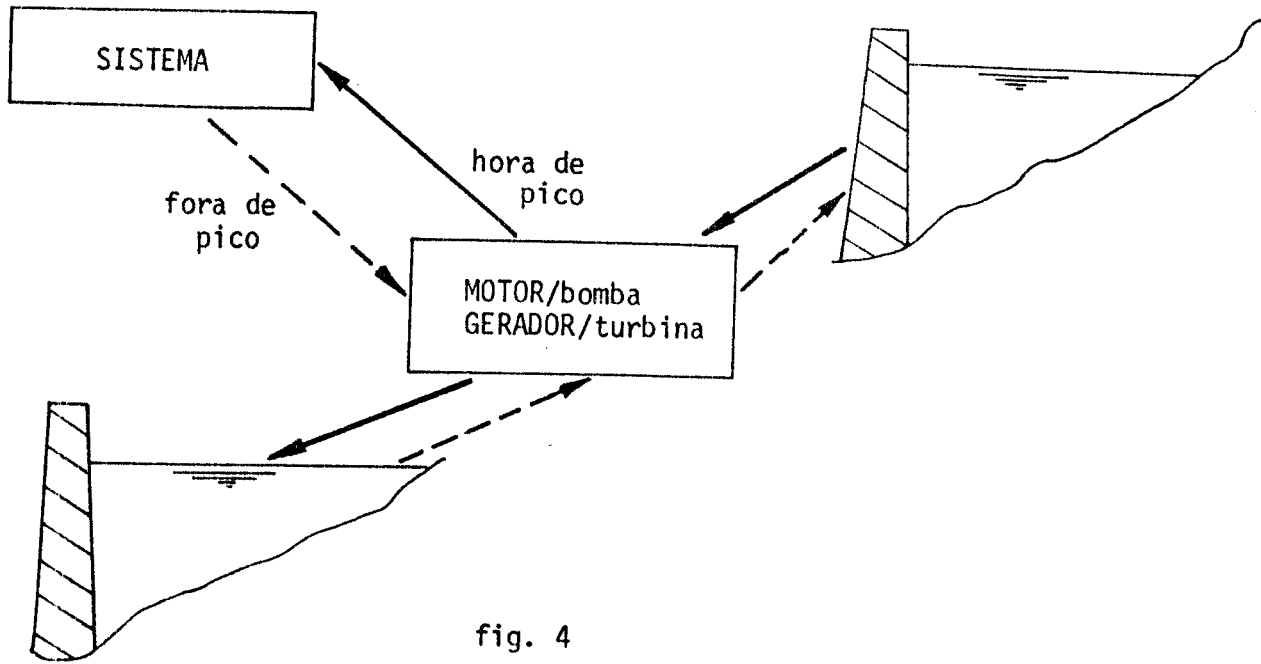


fig. 4

As usinas reversíveis são fundamentalmente usinas de geração de ponta e a filosofia básica de sua operação é: bombear nos instantes fora de "pico", quando há energia produzida a baixo custo, armazenando água no reservatório superior, cuja energia potencial será utilizada nas horas de "pico", quando o custo de produção da energia é alto.

A fig. 5 mostra na curva de demanda os prováveis instantes de geração e de bombeamento.

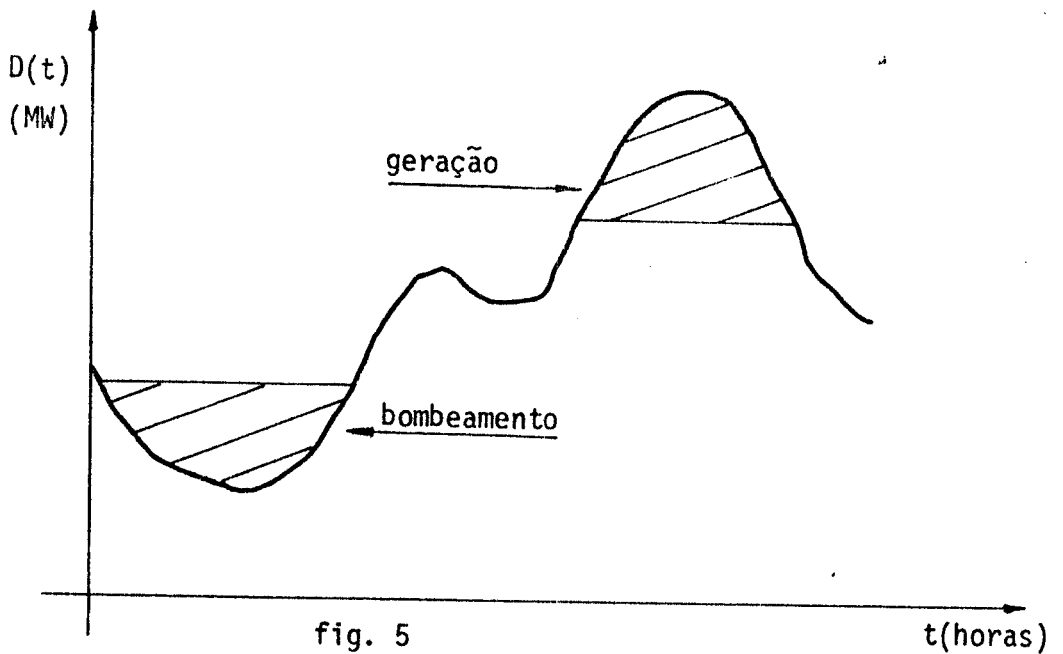
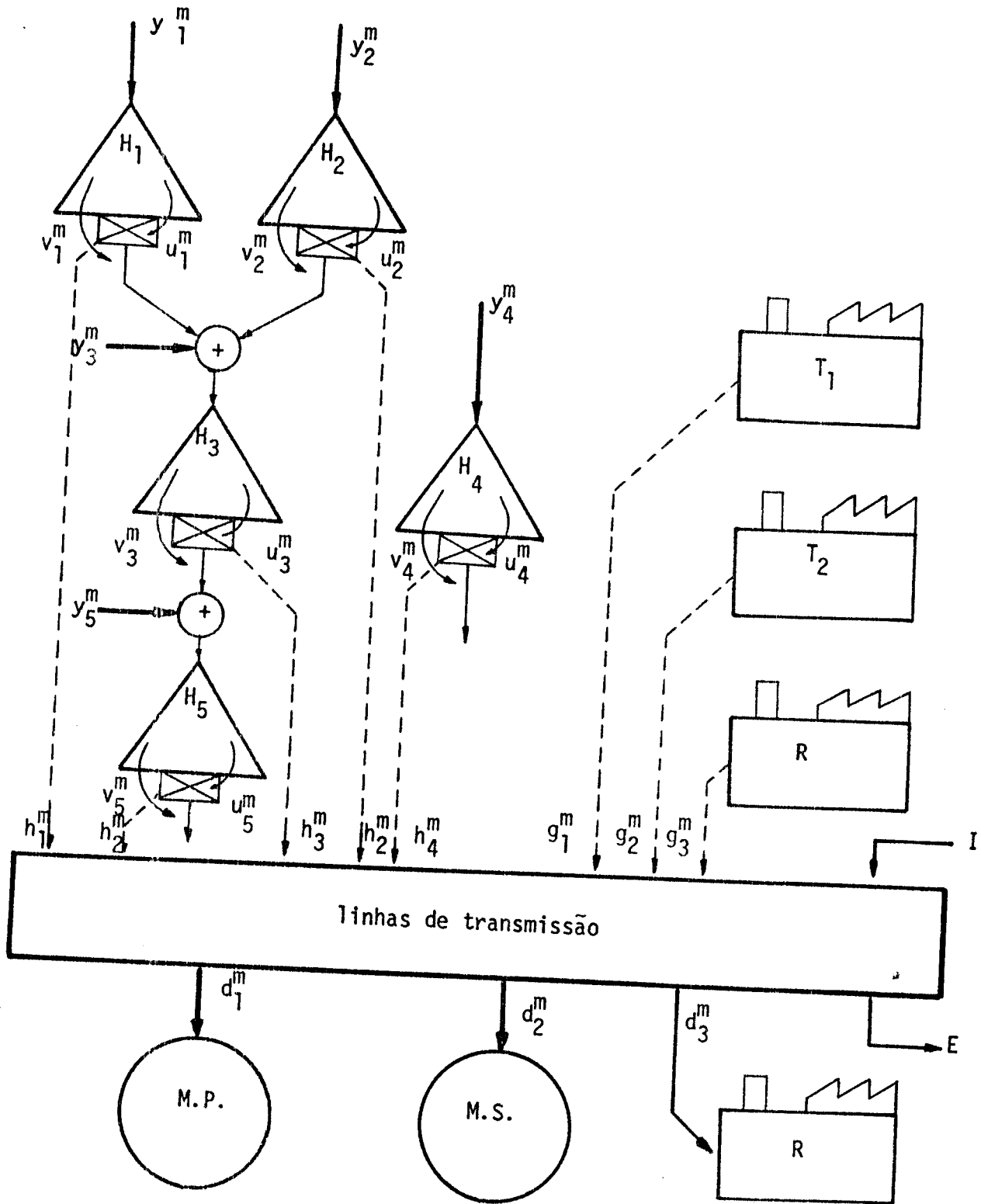


fig. 5



H - hidroelétrica  
 h - geração hidroelétrica  
 u - turbinagem  
 v - vertimento  
 T<sub>1</sub> - térmica  
 T<sub>2</sub> - corte de carga

R - u. reversível  
 d - demanda  
 I - importação de energia  
 E - exportação " "  
 MP - mercado primário  
 MS - mercado secundário

fig. 6

### 1.3 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE OPERAÇÃO DE UM SISTEMA PRODUTOR

A operação de um sistema produtor consiste basicamente na determinação de quanto e quando cada unidade deverá gerar.

Se para determinarmos esta política de operação levarmos em conta apenas as condições atuais, ou de um curto período de tempo (por exemplo um semana), estaremos correndo o risco de, após algum tempo, estarmos com os reservatórios vazios.

Por esse motivo, o planejamento da operação é feito em várias etapas, sendo a 1.<sup>a</sup> delas, o planejamento de médio prazo. Em geral o seu horizonte de otimização é de um ou dois anos e com intervalo de discretização mensal. As etapas seguintes são os de planejamento de curto prazo.

O planejamento de curto prazo pode, por sua vez ser subdividido em várias etapas com horizontes cada vez menores. As etapas poderiam, por exemplo ser divididas em: horizonte de um mês com discretização de um dia; horizonte de um dia com discretização de algumas horas; e assim por diante até o controle em tempo real.

A otimização para um determinado horizonte deve obedecer as condições de contorno (estado inicial e final dos reservatórios) determinados pela otimização de um horizonte maior.

A determinação desta política de operação, no entanto, não constitui uma tarefa simples. Requer um modelo acurado do sistema real e técnicas computacionais eficientes para a sua resolução.

As principais dificuldades para a representação matemática do sistema estão associadas à aleatoriedade de algumas variáveis (demanda e vazão dos rios); a dificuldade na representação matemática exata das diversas unidades e a grande dimensão que, em geral apresentam os sistemas reais.

#### 1.3.1 - PROPOSTA DE POLÍTICA DE OPERAÇÃO

Dentre os diversos tipos de usinas geradores a única que dispõe de combustível gratuito é a usina hidroelétrica. A operação de um sistema como o apresentado na (FIG. - 6), deveria portanto procurar distribuir convenientemente a geração hidroelétrica de modo a minimizar o custo de produção das usinas térmicas e de importação

num certo período de tempo, minimizando também o déficit de atendimento de carga.

#### 1.4 - COMENTÁRIOS SOBRE A LITERATURA

Nas últimas décadas, o estudo do problema de operação ótima de sistemas geradores de energia elétrica tem preocupado muitos pesquisadores. Indicaremos aqui as principais técnicas já utilizadas e alguns dos inúmeros trabalhos já publicados.

A programação dinâmica (PD) tem sido uma das técnicas mais utilizadas para a obtenção de políticas ótimas para operar sistemas hidrotérmicos de potência [8-10]. PD tem o atrativo de poder tratar restrições facilmente e admitir grande flexibilidade na função objetivo. No entanto, a PD tem requisitos de memória e tempo de processamento exponencialmente crescentes com o número de variáveis de estado. Isto motivou o uso de aproximações, onde se destaca o reservatório equivalente, e de métodos avançados de PD, [3], [11-12].

Cálculo de variações é uma técnica matemática clássica para solução de problemas envolvendo maximização (ou minimização) de funcionais. Muitos autores estudaram o problema de otimizar a operação de um sistema de potência por métodos variacionais [13-15]. A aplicação desta técnica apresenta dificuldades quando são consideradas as várias restrições do problema, como os limites de operação das unidades e capacidade dos reservatórios. Também não admite a consideração de características discretas de operação.

O princípio do máximo de Pontryagin foi usado por vários pesquisadores para resolver o problema [16-19]. Dahlin e Shen [16] mostram que o método pode considerar restrições e é aplicável a características contínuas e discretas de operação. Os mesmos autores mostram também que com o princípio do máximo podem ser considerados os tempos de percurso da água entre reservatórios em cascata (o que dificulta o tratamento por PD). No entanto, o caminho proposto por Dahlin e Shen para fazer esta consideração consome tempo demasiado para avaliação numérica em computadores. Em muitas circunstâncias isto o torna impraticável.

Técnicas de decomposição tem sido pesquisados nos últimos anos [1-4]. Esta técnica permite trabalhar com modelos matemáticos que levam em conta a aleatoriedade da demanda de energia e considera individualmente todas as unidades geradoras com as suas restrições e características operativas. Permitem também a consideração do tempo de percurso da água entre reservatórios em cascata e vertimento.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- m: índice de tempo
- i: índice termoelétrico
- j: índice hidroelétrico
- M: conjunto de índices de tempo
- I: conjunto de índices termoelétricos
- J: conjunto de índices hidroelétricos
- g: geração de potência termoelétrica
- $\underline{g}, \bar{g}$ : limites de geração de potência termoelétrica
- $\psi$ : função custo de operação termoelétrico
- h: geração de potência hidroelétrica
- $\phi$ : função geração de potência hidroelétrica
- x: estoque do reservatório
- $\underline{x}, \bar{x}$ : limites no estoque do reservatório
- y: entrada de água independente
- z: entrada de água dependente
- u: turbinagem
- $\underline{u}, \bar{u}$ : limites de turbinagem
- v: vertimento
- s: índice de hidroelétrica à montante
- $S_j$ : conjunto de índices das hidroelétricas imediatamente vizinhas rio acima à hidroelétrica j
- $R_j$ : conjunto de índices de todas as hidroelétricas rio acima à j, no mesmo vale
- $T_j$ : conjunto de índices de todas hidroelétricas rio abaixo à hidroelétrica j no mesmo vale
- k: índice de hidroelétrica à jusante

$t_{kj}$ : tempo de percurso da água da hidroelétrica  $k$  até sua vizinha a jusante de  $j$

$d$ : demanda de carga

$\lambda, \rho, \mu, \delta$ : multiplicadores de lagrange

II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo rerepresentaremos uma formulação desenvolvida por SOARES [1] , ao problema apresentado em 1.3.1.

No presente estudo consideramos um sistema simplificado, no qual o sistema produtor é constituído de um parque gerador hidroelétrico e um parque termoelétrico, e o sistema consumidor é constituído apenas de um mercado primário.

O parque hidroelétrico pode ser constituído de usinas em paralelo e em cascata, bem como podem estar acoplados a um reservatório ou não (fio d'água). É possível também considerar atraso no transporte da água de um reservatório a outro, e vertimento.

Consideramos o funcionamento de cada unidade térmica independente de outras. Consideramos também que as usinas térmicas não tem restrições na disponibilidade de combustível.

As vazões naturais nos rios, bem como a demanda de carga são considerados determinísticos.

2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O custo de operação térmico global é dada por:

$$J = \sum_{m \in M^*} \sum_{i \in I} \psi_i(g_i^m) \quad (1)$$

Vimos em 1.2.1.2 que a função  $\psi_i$  é uma função convexa, geralmente representada por uma quadrática.

O intervalo de operação das unidades térmicas é limitado por:

$$\underline{g}_i \leq g_i^m \leq \bar{g}_i \quad ; \quad i \in I, m \in M \quad (2)$$

A geração de potência hidroelétrica,  $h_j^m$  é função da altura de queda (que é função do volume do reservatório e da turbinagem, ver 1.2.1.1) e do volume de água turbinada.

$$h_j^m = \phi_j(x_j^m, u_j^m) \quad ; \quad j \in J, m \in M \quad (3)$$

(\*) Ver tabelas de símbolos.



A dinâmica dos reservatórios é descrita por equações à diferença:

$$x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m - v_j^m, \quad j \in J, \quad m \in M \quad (4)$$

A entrada de água dependente  $z_j^m$  é a variável de acoplamento, conectando unidades hidroelétricas em um mesmo vale hidráulico e é dado por:

$$z_j^m = \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t} s_j + v_s^{m-t} s_j); \quad j \in J, \quad m \in M \quad (5)$$

O volume dos reservatórios, a operação das turbinas e o vertimento estão sujeitos às seguintes restrições (restrições de "capacidade").

$$\begin{aligned} x_j^m \in X_j &= \{x_j^m / \underline{x}_j \leq x_j^m \leq \bar{x}_j\} \\ u_j^m \in U_j &= \{u_j^m / \underline{u}_j \leq u_j^m \leq \bar{u}_j\} \quad ; \quad j \in J, \quad m \in M \quad (6) \\ v_j^m &\geq 0 \end{aligned}$$

Quando o planejamento da operação é de curto prazo, supomos disponível as condições de contorno, determinados pelo planejamento de prazo maior. Para o planejamento de médio prazo, onde não dispomos destas condições, elas podem ser determinadas pelo conhecimento empírico do sistema, (por exemplo, reservatórios cheios no início do período seco). Quando o horizonte é de um ou dois anos (ciclo anual das águas) é razoável supor o volume final igual ao inicial.

$$\left. \begin{array}{l} x_j^O \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados } j \in J$$

O sistema produtor e consumidor estão sujeitas a uma equação de balanço de Potência.

$$\sum_{i \in I} g_i^m + \sum_{j \in J} h_j^m = d^m, \quad m \in M \quad (8)$$

Dentro da política de operação proposta em 1.3.1, podemos formular o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (1) \\ \text{S.a} \quad & (2) - (8) \end{aligned} \quad (9)$$

O problema (9) constitui um problema dinâmico de grande porte, com limites nas variáveis de estado e controle.

## 2.2 - DECOMPOSIÇÃO POR DUALIDADE

Para tornar possível a solução do problema em sistemas hidrotérmicos de grande porte, aplicaremos decomposição por dualidade para se obter subproblemas de tratamento mais simples. Uma estrutura hierárquica de cálculo fornecerá a solução ótima global.

No problema apresentado em (9), a única restrição que apresenta uma relação entre o sistema hidrotérmico e o termoelétrico é a equação de balanço de potência (8). Dualizando a função objetivo (1) em relação a (8), obtemos a função lagrangeana.

$$L = \sum_{m \in M} \left\{ \sum_{i \in I} \psi_i (g_i^m) + \lambda^m (d^m - \sum_{i \in I} g_i^m - \sum_{j \in J} h_j^m) \right\} \quad (10)$$

É possível provar [1], [2] que embora o problema (9) não seja um problema convexo, o tratamento por dualidade permanece válido uma vez que o problema físico elimina a possibilidade de ocorrência de "gap de dualidade". Para problemas convexos, um ponto de sela do lagrangeano restrito, é uma condição necessária e suficiente (sobre qualificação de restrição) para a otimalidade. Para o nosso caso o ponto de sela é dado por um mínimo de L relativamente às variáveis primais  $g_i^m$ ,  $u_j^m$ ,  $x_j^m$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $m \in M$  e sujeita às restrições (2) - (7); e um máximo relativo às variáveis duais,  $\lambda^m$ ,  $m \in M$ .

Um método dual clássico em dois níveis pode ser aplicado para determinar este ponto de sela.

No nível inferior minimiza-se  $L$  (10) para  $\hat{\lambda}^m$  fixo (avaliação da função dual).

$$H(\hat{\lambda}) = \min L \quad \text{S.a} \quad (2) - (7) \quad (11)$$

e no nível superior, modifica-se o multiplicador  $\hat{\lambda}^m$ , de modo a minimizar a função dual,  $H(\lambda)$ . Para isso usa-se o gradiente dado pelas componentes.

$$\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \hat{\lambda}^m} = d^m - \sum_{i \in I} g_i^m - \sum_{j \in J} h_j^m, \quad m \in M \quad (12)$$

mas o lagrangeano (10) é aditivamente separável para os multiplicadores fixos.

$$L = \sum_{m \in M} \left\{ \sum_{i \in I} \psi_i(g_i^m) - \hat{\lambda}^m \sum_{i \in I} g_i^m \right\} - \sum_{m \in M} \left\{ \hat{\lambda}^m \sum_{j \in J} h_j^m \right\} \quad (13)$$

Portanto, para os multiplicadores fixos, a minimização do lagrangeano (13) pode ser feita separadamente em dois subproblemas:

### 2.2.1 - SUBPROBLEMAS TÉRMICO

$$\text{Min} \quad \sum_{m \in M} \left\{ \sum_{i \in I} \psi_i(g_i^m) - \hat{\lambda}^m \sum_{i \in I} g_i^m \right\} \quad (14)$$

$$\text{S.a} \quad g_i \leq g_i^m \leq \bar{g}_i \quad ; \quad i \in I, \quad m \in M$$

Como as usinas térmicas tem um funcionamento independente entre si, a otimização deste subproblema pode por sua vez ser subdividido em otimizações independentes, um para cada unidade  $i \in I$ ,

$$\text{Min} \quad \sum_{m \in M} \psi_i(g_i^m) - \hat{\lambda}^m g_i^m \quad (15)$$

$$\text{S.a} \quad g_i \leq g_i^m \leq \bar{g}_i; \quad m \in M$$

A solução de (15) é dada por:

$$\hat{g}_i^m = \text{Min} \{ \bar{g}_i, \text{Máx} | \underline{g}_i, g_i^m | \} \quad (16)$$

onde

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\psi_i(g_i^m)}{dg_i^m} \\ \tilde{g}_i^m \end{array} \right| - \hat{\lambda}^m = 0 ; m \in M$$

### 2.2.2 - SUBPROBLEMA HIDROELÉTRICO

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \sum_{j \in J} h_j^m$$

$$\text{S.a} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m - v_j^m$$

$$z_j^m = \sum_{k \in S_j} (u_k^{m-t_{kj}} + v_k^{m-t_{kj}})$$

$$x_j^m \in X_j$$

$$u_j^m \in U_j$$

$$v_j^m \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$$

### 2.3 - ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO

Passo 1: Escolha dos multiplicadores iniciais ( $\lambda$ ).

Passo 2: Resolva o subproblema térmico de acordo com (16).

Passo 3: Resolver o subproblema hidroelétrico (Cap. III).

Passo 4: Se (12) é zero dentro de uma precisão estabelecida, pare. A presente solução  $\hat{g}_i^m$ ,  $\hat{x}_j^m$ ,  $\hat{u}_j^m$ ;  $i \in I$ ,  $m \in M$  é ótima

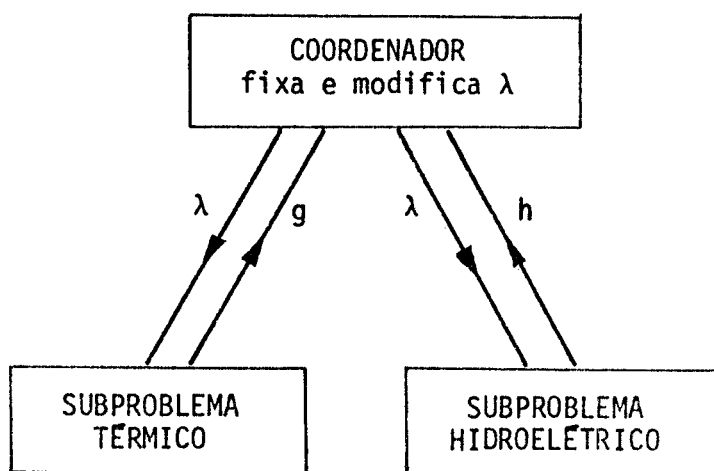
caso contrário determinar um novo  $\lambda^m$  usando, por exemplo, um método gradiente

$$\lambda^{m+1} = \lambda^m + \Sigma G^m$$

onde  $\Sigma > 0$  (pequeno) e  $G^m$  é o gradiente dado por (12).

Volte ao passo 2.

A estrutura hierárquica de cálculo se apresenta esquematizada na FIG. 1.



#### 2.4 - INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA

A decomposição do problema hidrotérmico, baseado na teoria de Lagrange generalizada, e a estrutura hierárquica de cálculo resultante apresenta uma interessante interpretação econômica. O acoplamento hidrotérmico, expressado pela equação (8), foi desfeito através da fixação dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^m$ , que podem ser interpretados como o preço da energia no tempo, para o sistema. Quando a equação (8) não é satisfeita, deve-se mudar este preço de mo-

do que no equilíbrio os subsistemas termoelétrico e hidrotérmico de sacoplados forneçam os requerimentos globais do sistema.

## 2. 5 - COMENTÁRIOS

Como veremos no CAP. III, o subproblema que apresenta maiores dificuldades computacionais na sua resolução é o subproblema hidroelétrico. O objetivo deste trabalho é a analisar e implementar algumas propostas de resolução deste subproblema.

O modelo hidrotérmico que utilizamos neste capítulo apresenta uma série de simplificações em relação a um sistema real, como por exemplo: a demanda determinística, a inexistência de interligação com sistemas vizinhos e mercado secundário.

Na realidade a demanda ( $d^m$ ) é uma variável aleatória, e portanto o problema (9) seria um problema dinâmico estocástico. SOARES [1] obtém a partir das características estocásticas da demanda, um problema equivalente determinístico, através de uma abordagem clássica para problemas de recursos aleatórios em programação estocástica, "o problema de dois estágios". É possível também aplicar a este problema equivalente uma decomposição por dualidade. Nesta nova formulação os subproblemas resultantes da decomposição seriam o subproblema térmico, o subproblema hidroelétrico e o subproblema estocástico. Os subproblemas térmicos e hidroelétricos são idênticos aos obtidos neste capítulo. Quanto ao subproblema estocástico, este pode ser solucionado independentemente dos demais subproblemas, e a sua solução é analítica e computacionalmente muito simples de implementar.

Uma outra formulação que leva em consideração a aleatoriedade da demanda, interligação com sistemas vizinhos e mercado secundário foi apresentado por LYRA [3]. Nesta formulação também é aplicado decomposição por dualidade, resultando em dois subproblemas; sendo um deles o subproblema hidroelétrico, que de forma idêntica aos aos modelos anteriores, é o subproblema que apresenta maiores dificuldades computacionais na sua resolução.

Uma formulação semelhante à apresentada neste capítulo, mas que leva em consideração usinas reversíveis foi apresentado por SOUZA [4]. Os subproblemas resultantes da decomposição são os mesmos apresentados neste capítulo mais o subproblema reversível, que

apresenta uma solução computacional bastante simples.

Outros fatores poderiam ser considerados na formulação do problema sem acarretar complicações teóricas ou computacionais, como por exemplo: perdas de transmissão na rede elétrica, evaporação nos reservatórios, decomposição do sistema baseado na topologia da rede de transmissão, restrições de navegação, etc...

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA HIDROELÉTRICO

No capítulo anterior vimos que a resolução do subproblema termoelétrico pode ser subdividido em otimizações independentes, uma para cada unidade térmica. E, em cada unidade, a resolução pode ser independente para cada período. Além disso, a solução do subproblema térmico para uma unidade, em um dado período pode ser facilmente obtido através de um cálculo analítico.

No caso do subproblema hidroelétrico, no entanto, temos uma situação exatamente oposta ao caso do subproblema térmico quanto ao funcionamento independente entre as unidades e entre os diferentes períodos. Isto porque, em um vale hidráulico onde exista mais de uma usina, o funcionamento de uma afeta o funcionamento de outra. Em relação ao tempo, a usina hidroelétrica também apresenta dependência, pois o funcionamento em um dado período depende do quanto de água ele disponha no final do período anterior.

Estas interligações entre as unidades e entre os períodos em um sistema hidroelétrico não permitem uma otimização independente, e muito menos uma solução analítica. A resolução do subproblema hidroelétrico só é possível através de um processo de cálculo bem mais complexo. Consequentemente o subproblema que apresenta maiores dificuldades de resolução é o subproblema hidroelétrico; não apenas devido ao fato de sua resolução ser através de um processo iterativo mas também devido a dimensão dos sistemas reais.

O objetivo deste capítulo é apresentar e analisar algumas propostas de Resolução do Subproblema Hidroelétrico.



SUBPROBLEMA HIDROELÉTRICO (SH)

$$\text{M\`ax} \quad \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j (x_j^m, u_j^m) \quad (1)$$

$$\text{S.a} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m - v_j^m \quad (2)$$

$$z_j^m = \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t} s_j + v_s^{m-t} s_j) \quad (3)$$

(SH)

;  $j \in J, m \in M$ 

$$x_j^m \in X_j$$

$$u_j^m \in U_j \quad (4)$$

$$v_j^m \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados} \quad (5)$$

Em um sistema hidroelétrico em que as usinas estão todas em paralelo, não temos a restrição de acoplamento (3). A eliminação desta restrição vem facilitar em muito a resolução do sistema hidroelétrico, pois neste sistema o funcionamento de uma usina não afeta o funcionamento de outra; o que permite uma otimização independente para cada unidade. Uma técnica de otimização aplicável nesta situação especial poderia ser por exemplo a programação dinâmica.

No caso geral, entretanto, os sistemas são constituídos de usinas em paralelo e em cascata; onde não é possível a otimização independente. A dimensionalidade nestes sistemas também tornam difíceis as abordagens globais.

### 3.1 - DECOMPOSIÇÃO DO SISTEMA HIDROELÉTRICO

A seguir apresentaremos três procedimentos para a resolução do sistema hidroelétrico, aplicando decomposição por dualidade.

Quando o sistema hidroelétrico, para um determinado horizonte de otimização, não apresenta vertimento, isto é, quando o volume de água afluente ao sistema não ultrapassar a sua capacidade de armazenamento, a formulação do subproblema hidroelétrico pode ser simplificada:

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) \quad (6)$$

$$\text{S.a} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m \quad (7)$$

$$\text{(SH1)} \quad z_j^m = \sum_{s \in S_j} (u_s^m - t_{sj}) \quad (8)$$

;  $j \in J$ ,  $m \in M$

$$x_j^m \in X_j \quad (9)$$

$$u_j^m \in U_j$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados} \quad (10)$$

#### 3.1.1 - DECOMPOSIÇÃO ESPACIAL (DE)

Dualizando a função objetiva (6) de (SH1) em relação a restri

ção (8), obtemos a função lagrangeano:

$$L' = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \rho_j^m \left[ \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - z_j^m \right] \quad (11)$$

Quando os multiplicadores  $\rho_j^m$  são fixos, o lagrangeano é aditivamente separável em sublagrangeanos, um para cada  $j \in J$ .

$$L'_j = \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \hat{\rho}_k^{m+t} s_{jk} u_j^m - \hat{\rho}_j^m z_j^m \quad (12)$$

onde  $k$  é o índice da usina imediatamente à jusante de  $j$ .

Podemos então aplicar um método dual clássico, que determinará uma sequência de multiplicadores, que minimizará a função dual  $h(\rho)$ :

$$(PH1) \quad h'(\rho) = \max \sum_{j \in J} L'_j \quad \text{s.a.} \quad (7), (9), (10) \quad (13)$$

A mudança de multiplicadores se fará através do vetor gradiente dado pelos componentes:

$$\frac{\partial h'(\rho)}{\partial \rho_j^m} = \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - z_j^m \quad ; \quad j \in J, m \in M \quad (14)$$

Quando dualizamos em relação a restrição (8), há a relaxação da restrição de acoplamento entre as usinas. Então a cada mudança dos multiplicadores, nós podemos resolver separadamente os seguintes subproblemas, um para cada  $j \in J$ .

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \left\{ \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \hat{\rho}_k^{m+t} \cdot u_j^m - \hat{\rho}_j^m z_j^m \right\}$$

$$\text{s.a} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m$$

$$x_j^m \in X_j$$

(SH2)

$$u_j^m \in U_j$$

;  $m \in M$ 

$$\left. \begin{array}{l} x_j^O \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$$

### 3.1.2 - DECOMPOSIÇÃO TEMPORAL (DT)

Na formulação do subproblema hidroelétrico como apresentado em (SH) e (SH1) existe uma variável "redundante",  $z_j^m$ . Eliminando esta variável em (SH1), a equação dinâmica fica:

$$x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - u_j^m \quad (15)$$

Dualizando em relação à restrição acima obtemos o lagrangeano:

$$L'' = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \rho_j^m (-x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - u_j^m) \quad (16)$$

que para os multiplicadores  $\rho_j^m$  fixos é aditivamente separável em  $j \in J, m \in M$ :

$$L''_{jm} = \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + (\hat{\rho}_j^m - \hat{\rho}_j^{m-1}) x_j^m + (\hat{\rho}_k^{m+t} \tau_{kj} - \hat{\rho}_j^m) u_j^m + \hat{\rho}_j^m y_j^m \quad (17)$$

Aqui também podemos aplicar um método dual clássico, que determinará uma sequência de multiplicadores que minimizará a função dual  $h''(\rho)$ :

$$(PH2) \quad h''(\rho) = \text{Máx} \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} L''_{jm} \quad \text{s.a. (9), (10)} \quad (18)$$

A mudança dos multiplicadores se fará através do vetor gradiente dados pelas componentes:

$$\frac{\partial h''(\rho)}{\partial \rho_j^m} = -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - u_j^m \quad (19)$$

A cada passo (a cada mudança dos multiplicadores) temos os seguintes subproblemas hidroelétricos, um para cada  $j \in J$  e a cada  $m \in M' = \{1, 2, \dots, T-1\}$ .

$$(SH3) \quad \begin{aligned} & \text{Máx} && L''_{jm} \\ & \text{s.a.} && x_j^m \in X_j \\ & && u_j^m \in U_j \end{aligned}$$

para  $m = 0$  temos:

$$\begin{aligned} & \text{Máx} && L''_{j0} \\ & \text{s.a.} && x_j^0 \text{ (dado)} \\ & && u_j^0 \in U_j \end{aligned}$$

### 3.1.3 - RELAÇÃO ENTRE DECOMPOSIÇÃO ESPACIAL E DECOMPOSIÇÃO TEMPORAL

Considerando o sistema sem vertimento, temos:

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j (x_j^m, u_j^m) \quad (6)$$

$$\text{s.a} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m \quad (\delta_j^m) \quad (7)$$

$$z_j^m = \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j \quad (\mu_j^m) \quad (8)$$

(SH1)

$$x_j^m \in X_j \quad ; \quad j \in J, m \in M \quad (9)$$

$$u_j^m \in U_j \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$$

e sejam as variáveis duais entre parenteses associadas às restrições indicadas.

Vimos em 3.1.1 que dualizando em relação a restrição (8), decomparamos espacialmente o subproblema hidroelétrico. A função dual resultante é dada por (13):

$$h'(\mu) = \text{Máx} \quad \sum_{j \in J} L'_j \quad \text{s.a} (7), (9), (10) \quad (20)$$

onde

$$L'_j = \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \hat{\mu}_k^{m+t} jk u_j^m - \hat{\mu}_j^m \cdot z_j^m \quad (21)$$

Porém a minimização indicada em (20) para um vetor multiplicador ( $\hat{\mu}$ ) fixo, pode ser colocado na seguinte forma: (Dualizando em relação à restrição dinâmica).

$$h''(\delta) = \text{Máx} \sum_{j \in J} L''_j \quad \text{S.a} \quad (9), (10) \quad (22)$$

onde

$$L''_j = \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \hat{\mu}_k^{m+t} jk u_j^m - \hat{\mu}_j^m z_j^m + \delta_j^m (-x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m) \quad (23)$$

ou ainda

$$L''_j = \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + (-\hat{\delta}_j^{m-1} + \hat{\delta}_j^m) x_j^m + (\hat{\mu}_k^{m+t} jk - \hat{\delta}_j^m) u_j^m + (\hat{\delta}_j^m - \hat{\mu}_j^m) z_j^m + \delta_j^m y_j^m \quad (24)$$

Portanto, a solução do problema indicado em (20), para um vetor multiplicador ( $\hat{\mu}$ ) fixo é dado por um ponto de sela do lagrangeano (24). Este ponto de sela é dado por um máximo em relação às variáveis primais  $x_j^m$ ,  $u_j^m$  e  $z_j^m$  e um mínimo em relação à variável dual  $\delta_j^m$ .

Como a variável primal  $z_j^m$  não apresenta restrições, o máximo em relação a esta variável é dado pela estacionaridade do Lagrangeano:

$$\frac{\partial L_j''}{\partial z_j^m} = 0 \Rightarrow \hat{\delta}_j^m - \hat{\mu}_j^m = 0 \Rightarrow \hat{\delta}_j^m = \hat{\mu}_j^m \quad (25)$$

Substituindo (25) em (22) e (24) temos:

$$h''(\mu) = \text{Máx}_{j \in J} \sum L_j'' \quad \text{S.a (9), (10)} \quad (26)$$

$$L_j'' = \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + (-\hat{\mu}_j^{m-1} + \hat{\mu}_j^m) x_j^m + (\hat{\mu}_k^{m+t} - \hat{\mu}_j^m) u_j^m + \hat{\mu}_j^m y_j^m \quad (27)$$

Como (26), (27) é idêntico ao problema resultante da decomposição temporal (17), (18), conclui-se que a decomposição espacial reduzida na decomposição temporal.

#### 3.1.4 - FORMULAÇÃO GERAL

Quando trabalhamos com a formulação geral (SH) podemos fazer a seguinte manipulação:

De (2) temos:

$$u_j^m + v_j^m = -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + z_j^m \quad (28)$$

Substituindo em (13)

$$z_j^m = \sum_{s \in S_j} (-x_s^{m-t} s_j^{+1} + x_s^{m-t} s_j + y_s^{m-t} s_j + z_s^{m-t} s_j) \quad (29)$$



continuando a substituição por  $z_s^{m-\tau} s_j$ , temos:

$$z_j^m = \sum_{s \in R_j} (-x_s^{m-\tau} s_j^{+1} + x_s^{m-\tau} s_j + y_s^{m-\tau} s_j) \quad (30)$$

onde  $\tau_{sj}$  é o tempo de percurso acumulado de  $s \in R_j$  à  $j$ .

Substituindo (30) em (2) e tornando implícita a restrição  $v_j^m \geq 0$ , podemos reescrever o (SH) da seguinte forma:

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \sum_{j \in J} \phi_j(x_j^m, u_j^m) \quad (31)$$

$$\text{S.a} \quad x_j^{m+1} \leq x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in R_j} (-x_s^{m-\tau} s_j^{+1} + x_s^{m-\tau} s_j + y_s^{m-\tau} s_j) - u_j^m$$

$$x_j^m \in X_j$$

$$u_j^m \in U_j$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$$

Dualizando em relação à restrição dinâmica de desigualdade temos o lagrangeano:

$$\begin{aligned} L^m = & \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \\ & + \sum_{j \in J} \rho_j^m \left[ -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in R_j} (-x_s^{m-\tau} s_j^{+1} + x_s^{m-\tau} s_j + y_s^{m-\tau} s_j) - u_j^m \right] \end{aligned} \quad (32)$$

Para os multiplicadores fixos, o lagrangeno é aditivamente se parável em  $m$  e  $j$ .

$$L''' = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} L'''_{jm} \quad (33)$$

onde

$$L'''_{jm} = \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \left[ -\hat{\rho}_j^{m-1} + \hat{\rho}_j^m + \sum_{k \in T_j} (-\rho_k^{m+\tau} jk^{-1} + \hat{\rho}_k^{m+\tau} jk) \right] x_j^m - \hat{\rho}_j^m \mu_j^m + (\hat{\rho}_j^m + \sum_{k \in T_j} \hat{\rho}_k^{m+\tau} jk) y_j^m \quad (34)$$

$T_j$  - é o conjunto de todas as hidroelétricas à jusante de  $j$ .

É importante observar que  $L'''_{jm}$  é da forma:

$$L'''_{jm} = \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \Delta \hat{\rho}_j^m x_j^m - \hat{\rho}_j^m \mu_j^m + \text{constante} \quad (35)$$

Quando o sistema não apresenta vertimento, a restrição dinâmica (31) é sempre satisfeita na igualdade. E da mesma forma que a formulação específica (sem vertimento), podemos aplicar um método dual clássico que determinará uma sequência de multiplicadores que minimizará a função dual:

$$h'''(\rho) = \text{Máx} \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} L'''_{jm} \quad (36)$$

A mudança dos multiplicadores se fará através do vetor gradiente dada pelas componentes:

$$\frac{\partial h'''(\rho)}{\partial \rho_j^m} = -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in R_j} (-x_s^{m-\tau} s_j^{-1} + x_s^{m-\tau} s_j + y_s^{m-\tau} s_j) - u_j^m \quad (37)$$

A cada passo (a cada mudança no vetor multiplicador) temos os seguintes subproblemas hidroelétricos, um para  $j \in J$  e  $m \in M$ .

$$p/ \quad m = \{1, 2, \dots, T-1\}$$

$$\text{Máx} \quad L_{jm}'''$$

$$\text{S.a} \quad x_j^m \in X_j$$

$$u_j^m \in U_j$$

para  $m = 0$

$$\text{Máx} \quad L_{jm}'''$$

$$\text{S.a} \quad u_j^m \in U_j$$

$$x_j^0 \text{ (dado)}$$

Quando, no entanto, o sistema apresenta vertimento, a restrição dinâmica (31) será passiva para todos os  $j \in J$  e  $m \in M$  em que  $v_j^m > 0$ , ou seja:

$$-x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in R_j} (-x_s^{m-\tau_{sj}-1} + x_s^{m-\tau_{sj}} + y_s^{m-\tau_{sj}}) - u_j^m > 0$$

e portanto a minimização da função dual está sujeita a seguinte restrição:

$$\text{Min} \quad h'''(\rho)$$

$$\text{S.a} \quad \rho \geq 0$$

### 3.1.5 - ESTRUTURA HIERÁRQUICA DE CÁLCULO E DECOMPOSIÇÃO MISTA

Reescrevendo (SH) para o caso sem vertimento, temos:

$$\text{Máx } \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \lambda^m \phi_j(x_j^m, u_j^m)$$

$$\text{s.a. } -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m = 0 \quad (\delta_j^m) \quad (38)$$

$$-z_j^m + \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t} s_j) = 0 \quad (u_j^m) \quad (39)$$

(SH1)

$$x_j^m \in X_j$$

;  $j \in J, m \in M$

$$u_j^m \in U_j$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$$

Dualizando em relação às restrições (38), (39) obtemos a seguinte função lagrangeana.

(40)

$$L = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \lambda^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \rho_j^m (-x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m) + u_j^m (-z_j^m + \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t} s_j))$$

A solução de (SH1) deve satisfazer as seguintes condições (CO<sub>1</sub>):

- i) estacionaridade do lagrangeano em relações as variáveis duais  $(\delta_j^m)$  e  $(u_j^m)$  e em relação a variável primal  $z_j^m$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_j^m} = -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j^m} = -z_j^m + \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t} s_j) = 0 \quad (42)$$

$$(CO_1) \quad \frac{\partial L}{\partial z_j^m} = \rho_j^m - \mu_j^m = 0 \quad (43)$$

ii) maximização do lagrangeano em relação as variáveis primais  $x_j^m$  e  $u_j^m$ :

Máx L

s.a  $x_j^m \in X_j$

$u_j^m \in U_j$

(44)

$\left. \begin{array}{l} x_j^O \\ x_j^T \end{array} \right\}$  dados

O processo de resolução de um (SH1) nada mais é do que a procura de um  $\hat{x}_j^m, \hat{u}_j^m, \hat{z}_j^m, \hat{\rho}_j^m, \hat{\mu}_j^m; j \in J, m \in M$  que satisfaça as condições (41-44)

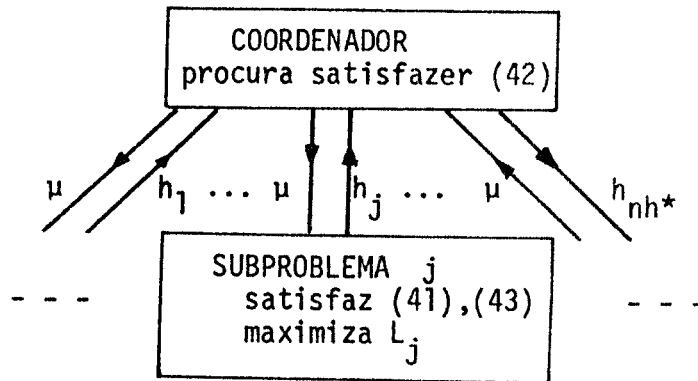
### 3.1.5.1 - Decomposição Espacial

A decomposição espacial de um (SH) e a sua resolução por um método dual clássico em dois níveis, pode ser interpretado como a divisão da "tarefa" de encontrar a solução acima indicada em dois níveis.

No nível superior (coordenador) procura, através da mudança dos

multiplizadores  $\mu_j^m$ , satisfazer a condição (42), enquanto que no nível inferior procura-se satisfazer as condições (41) e (43) e maximizar o lagrangeano em relação as variáveis primais  $x_j^m$  e  $u_j^m$ .

Como vimos em 3.1.1, a fixação dos multiplicadores  $\mu_j^m$  no nível superior permite que a resolução no nível inferior seja independente para cada unidade  $j \in J$ ; portanto podemos esquematizar a resolução (SH) por decomposição espacial da seguinte forma:



(\*)  $nh$  - nº de hidroelétricas

### 3.1.5.2 - Decomposição Temporal

Na decomposição temporal eliminamos a variável primal  $z_j^r$ :

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \lambda^m \phi_j(x_j^m, u_j^m)$$

$$\text{S.a} \quad -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} (u_s^{(m-t_s j)} - u_j^m) = 0 \quad (\rho_j^m) \quad (45)$$

$$x_j^m \in X_j \quad ; \quad j \in J, m \in M$$

$$u_j^m \in U_j$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^0 \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$$

Dualizando em relação a restrição (45) obtemos a função lagrangeana:

$$L' = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \lambda^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \rho_j^m (-x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t_{sj}}) - u_j^m) \quad (46)$$

a solução de (SH) deve satisfazer as seguintes condições (CO<sub>2</sub>):

i) estacionaridade em relação à variável dual ( $\rho_j^m$ )

$$\frac{\partial L'}{\partial \rho_j} = -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t_{sj}}) - u_j^m \quad (47)$$

ii) máximo em relação as variáveis primais  $x_j^m$ ,  $u_j^m$ :

Máx  $L'$

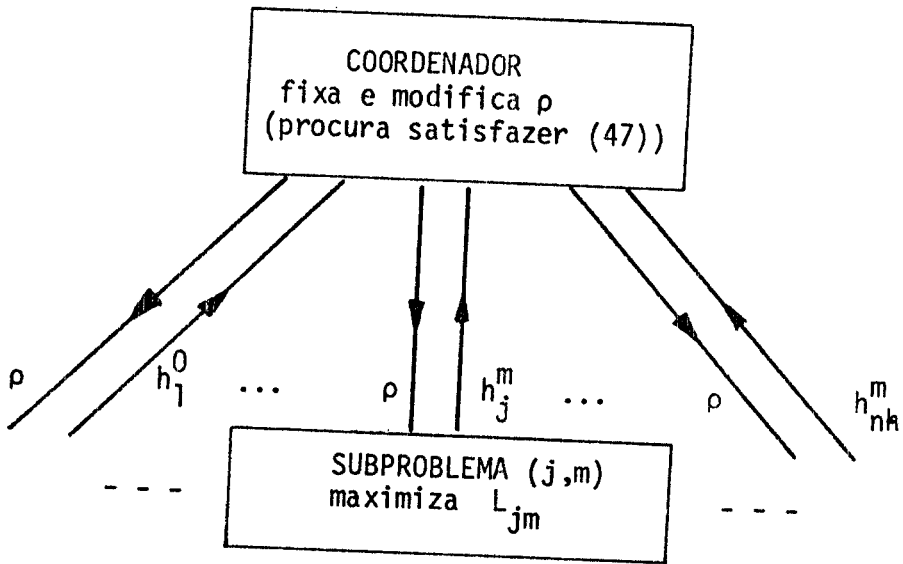
S.a  $x_j^m \in X_j$

$u_j^m \in U_j$

$\left. \begin{array}{l} x_j^O \\ x_j^T \end{array} \right\} \text{ dados}$

A decomposição temporal procura no nível superior satisfazer a condição (47) e no nível inferior maximizar o lagrangeano em relação às variáveis primais.

A fixação no nível superior dos multiplicadores ( $\rho_j^m$ ) permite que a maximização do lagrangeano no nível inferior seja feita independente para cada unidade;  $j \in J$ , e para cada intervalo de tempo,  $m \in M$ .

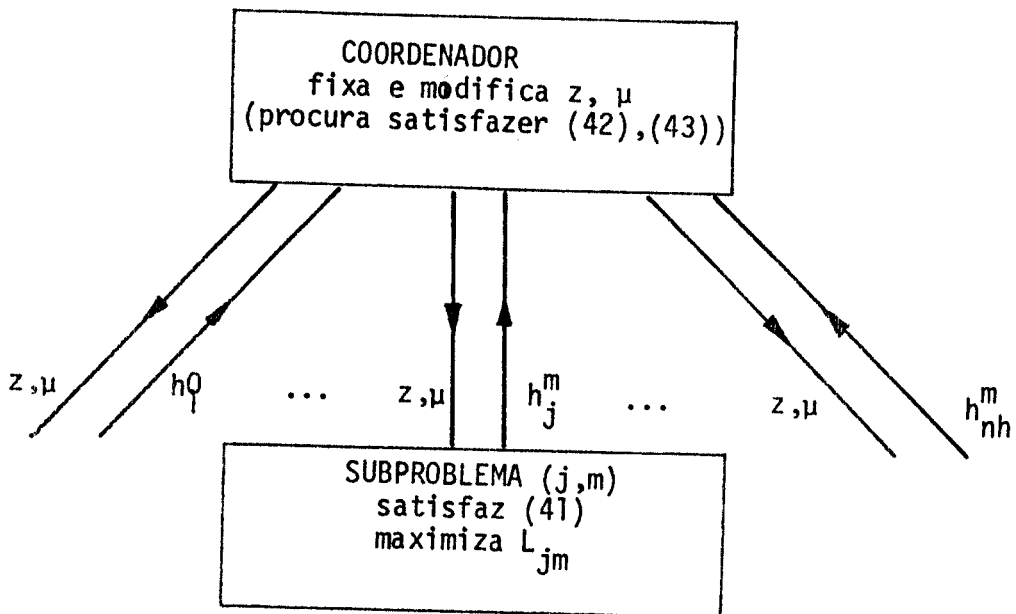


3.1.5.3 - Decomposição Mista

Podemos também resolver  $(CO_1)$  com a seguinte estrutura:

COORDENADOR - Satisfaz as condições (42), (43).

NÍVEL INFERIOR - Satisfaz a condição (41) e maximiza o lagrangeano.





A mudança de  $\mu_j^m$  e  $z_j^m$  no coordenador pode ser feita através de uma simples atualização:

$$z_j^m(t+1) \leftarrow \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j(t)$$

$$\mu_j^m(t+1) \leftarrow \rho_j^m(t)$$

onde a indexação  $(t)$  refere-se a iteração  $t$  do coordenador; ou através de um método tipo gradiente:

$$\mu_j^m(t+1) = \mu_j^m(t) - \epsilon_1 \frac{\partial L}{\partial \mu_j^m}$$

$$z_j^m(t+1) = z_j^m(t) + \epsilon_2 \frac{\partial L}{\partial z_j^m}$$

A convergência da decomposição mista não é garantida.

É importante destacar:

- A maximização do lagrangeano nos três métodos é sempre feita no nível inferior:
- a fixação dos parâmetros no nível superior permite que a maximização no nível inferior seja subdividida em maximizações independentes para cada unidade. (Na Decomposição Temporal a maximização é também independente em cada intervalo de tempo).

### 3.2 - RESOLUÇÃO DO (SH) POR DECOMPOSIÇÃO TEMPORAL

Vimos na seção 3.1.5 que a resolução da (DT) pode ser feita em dois níveis, onde no coordenador procurar-se anular o gradiente e no nível inferior calcula-se o valor da Função dual (VFD).

Apresentamos nesta seção um algoritmo para a resolução do sub problema hidroelétrico por decomposição temporal. Desenvolvemos um algoritmo para a resolução de um sistema sem vertimento. Para o ca so em que há vertimento, há uma pequena modificação no algoritmo do nível superior (Coordenador).

#### ALGORÍTMO DO COORDENADOR

Passo 1: Determina-se um valor inicial para o vetor multiplicador ( $\rho$ ).

Passo 2: Calcula-se, no nível inferior, o valor da função dual (36) e o seu gradiente (37) para este vetor multiplicador.

(Representamos o vetor gradiente por  $ER$  e  $ER_j^m$  é a componente  $m$  do vetor (gradiente)  $j$ ).

Passo 3\* Determina-se a direção de Busca  
- Faz-se a busca dimensional \*\*  
e determina-se o mínimo da função dual na direção da busca.

Passo 4: Testa-se se o gradiente no ponto de mínimo é nulo dentro de uma precisão estabelecida (teste de factibilidade).

- Se é nulo, então pare: A presente solução  $x_j^m$ ,  $u_j^m$ ;  $j \in J$  e  $m \in M$  é a solução do (SH).

Senão volta-se ao passo 3.

(\*) - Para o caso em que há vertimento, há uma modificação no passo 3 e 4:

Passo 3: Determina-se a direção de Busca:

(Direção do gradiente  $(-ER)$ , projetado no espaço dos multiplicadores positivos).

Faz-se a busca unidimensional e determina-se o mínimo da função dual na direção de busca.

Esta busca está sujeita à restrição  $\rho \geq 0$ .

Passo 4: O teste de parada é a satisfação das seguintes condições:

$$i) \quad ER_j^m \geq 0$$

$$ii) \quad \rho_j^m \cdot ER_j^m = 0$$

Senão volta-se ao passo 3.

(\*\*) - Na busca unidimensional há em geral várias avaliações do valor da função dual no nível inferior.

#### ALGORÍTIMO DO NÍVEL INFERIOR

Passo 1: A partir dos multiplicadores determinados no nível superior, maximiza-se o Lagrangeano (34) com restrições nas variáveis primais  $x_j^m$ ,  $u_j^m$   $j \in J$  e  $m \in M$ .

Passo 2: Calcula-se o gradiente  $(ER)$

Passo 3: Volta-se ao nível superior, com o vetor gradiente e o valor das variáveis primais.

A Fig. 3.1 esquematiza o algoritmo

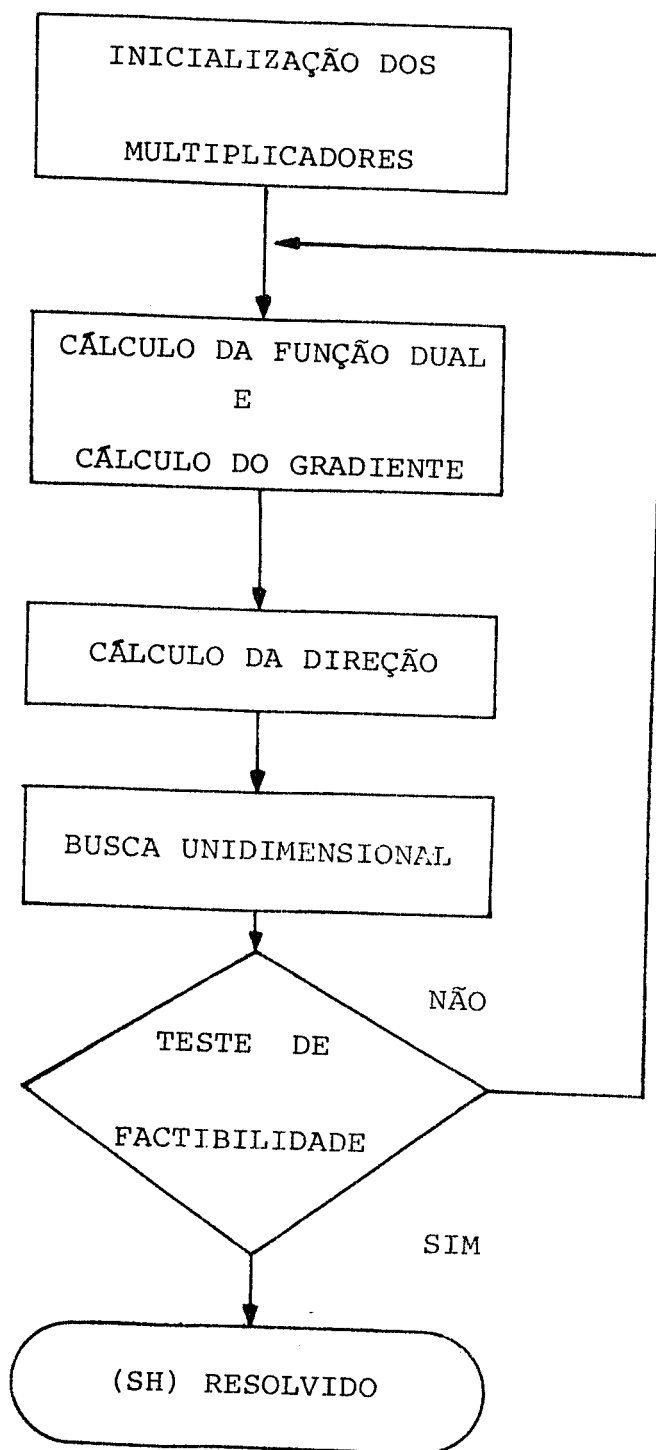


fig 3.1

A eficiência computacional deste algoritmo é determinado pela eficiência de resolução de três passos: Inicialização dos multiplicadores ( $\rho$ ), cálculo da função dual e a busca unidimensional.

### 3.2.1 - CÁLCULO DA FUNÇÃO DUAL

O cálculo da função dual é a maximização do lagrangeano (34) sujeitos às restrições (4) e (5), ou seja, é uma maximização de uma função objetivo não linear sujeito a restrições lineares.

Para o caso particular que nos interessa que é a resolução de sistemas hidroelétricos, a função  $\phi$  que representa a função da geração de uma usina hidroelétrica apresenta algumas características importantes dentro de seu intervalo de operação.

Uma função de geração deve ser:

- crescente e côncava em relação à turbinagem
- crescente e côncava em relação ao armazenamento de água no reservatório.

Uma função que satisfaz estas condições e que por sua simplicidade de tratamento será considerada a partir de agora como a função de geração é a função côncava quadrática.

Seja então a função de geração dada por:

$$\phi(x, u) = ax^2 + bxu + cu^2 + dx + eu + g. \quad (48)$$

A função quadrática  $\phi$  que representa a geração hidroelétrica deve apresentar as seguintes características:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{u = \text{cte.}} = 2ax + bu + d \quad (49)$$

(49) deve ser: - crescente em  $u \Rightarrow b > 0$

- decrescente em  $x \Rightarrow a < 0$

- positiva  $\Rightarrow 2a\bar{x} + b\bar{u} + d > 0$

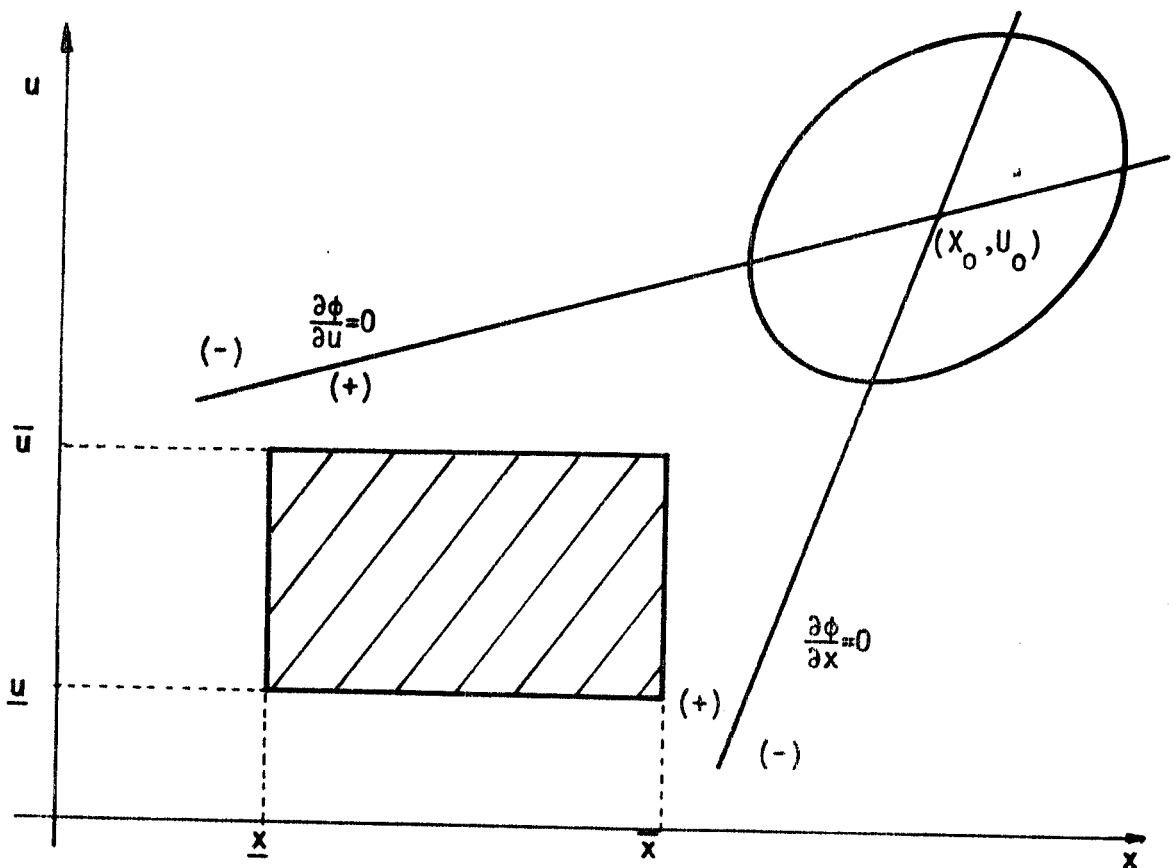
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial u} \right|_{x = \text{cte.}} = 2cu + bx + e \quad (50)$$

- (50) deve ser:
- crescente em  $x \Rightarrow b > 0$
  - decrescente em  $u \Rightarrow c < 0$
  - positiva  $\Rightarrow 2c\bar{u} + b\bar{x} + e > 0$

A concavidade de  $\phi$  exige que  $4ac - b^2 > 0$  donde temos que:

$$\left( \frac{-2a}{b} \right) > \left( \frac{b}{-2c} \right)$$

Inclinação de  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \right)$  Inclinação de  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial u} = 0 \right)$



O retângulo hachurado na Fig. 3.2 constitui o espaço de factibilidade. A elipse representa uma curva equipotencial (curva de nível) de  $\phi$ .

É fácil ver que na situação dada na figura, o ótimo restrito é:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{cases}$$

O ótimo irrestrito  $(x_0, u_0)$  é dado por:

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4ac - b^2} \begin{bmatrix} be - 2cd \\ bd - 2ae \end{bmatrix} \quad (51)$$

O máximo irrestrito do lagrangeano (25) para  $\phi$  quadrático e côncavo.

$$L = \phi(x, u) + \Delta\hat{\rho} \cdot x - \hat{\rho}u + \text{cte.}$$

é dado por:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \hat{\lambda}(2ax + bu + d) + \Delta\hat{\rho} = \hat{\lambda} \frac{\partial \phi(x, u)}{\partial x} + \Delta\hat{\rho} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \hat{\lambda}^m (2cu + bx + e) - \hat{\rho} = \hat{\lambda} \frac{\partial \phi(x, u)}{\partial u} - \hat{\rho} = 0 \quad (53)$$

Notamos nas duas equações acima que o acréscimo dos termos lineares em  $x$  e  $u$  vem apenas deslocar paralelamente as retas  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial u} = 0$ , ou seja, apenas desloca o ponto de ótimo irrestrito e as elipses equipotenciais mantêm a mesma forma.

O ótimo irrestrito é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4ac - b^2} \begin{bmatrix} b(e^{-\rho/\lambda}) - 2c(d + \Delta\rho/\lambda) \\ b(d + \Delta\rho/\lambda) - 2a(e^{-\rho/\lambda}) \end{bmatrix} \quad (54)$$

O algoritmo que usaremos para determinar o máximo restrito do lagrangeano será:

Passo 1: Calcula-se o ótimo irrestrito  $(x_0, u_0)$ .

Passo 2: Se o ponto  $(x_0, u_0)$  é interior ao retângulo da factibilidade (FIG. 3.3), então faz-se  $x = x_0$ ,  $u = u_0$ . Senão calcula-se o valor máximo da função dual em cada uma das 4 faces do retângulo e escolhe-se o maior valor.

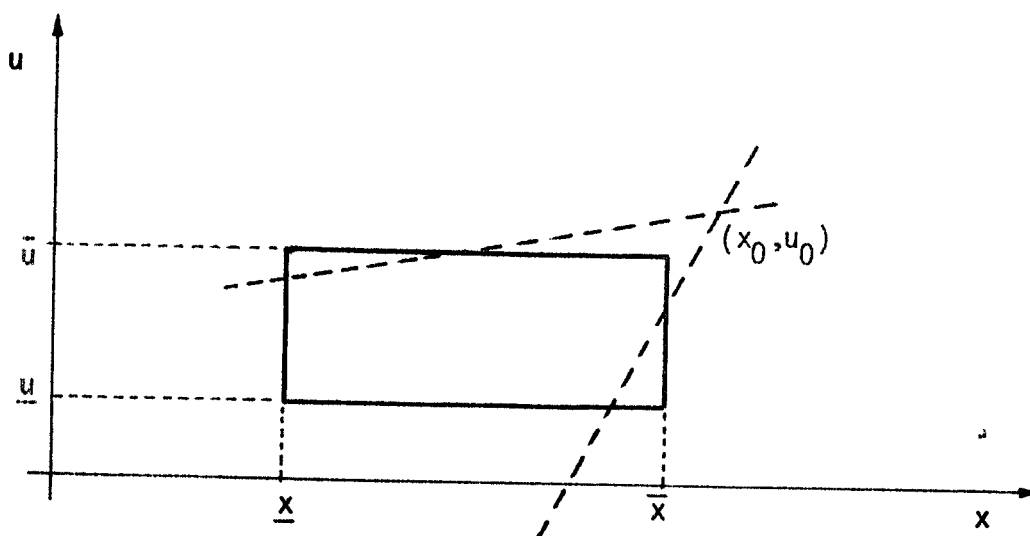


fig. 3.3

É importante notar em (54) que o ponto de ótimo irrestrito varia linearmente com  $\rho$ . Isto visto em termos deste algoritmo implica que existem intervalos contínuos de variação dos multiplicadores em que a solução ótima irrestrita se encontra sempre fora dos limites de "capacidade". E portanto a solução restrita é constante para todo este intervalo, e a função  $h(\rho) = \text{Máx } L$  é linear em  $\rho$ . Existe também um intervalo de variação em que o ótimo irrestrito se encontra dentro dos limites de "capacidade" e a solução restrita é a própria solução irrestrita. Neste intervalo a função  $h(\rho) = \text{Máx } L$  é quadrática, pois  $x$  e  $u$  são funções lineares de  $\rho$  e  $L$  é quadráti-



ca em relação a  $x$  e  $u$ .

Quando a função objetivo é a soma dos máximos restritos de vários lagrangeanos com diferentes intervalos (restrições) de "capacidade", como é o caso da função dual  $h(\rho)$  (36), a parte não linear da função dual não pode ser representada por uma única quadrática.

Suponhamos, então dois intervalos de variação dos multiplicadores  $A$  e  $B$ , tal que: Para a variação em  $A$  a solução restrita de maximização de  $L_{jm}''$ , para todo  $j \in J$ ,  $m \in M$  é rígida. A função dual é linear neste intervalo e tem portanto um gradiente constante.

Para a variação em  $B$ , a solução restrita de  $L_{jm}''$  é rígida para todo  $j \in J$  e  $m \in M$ , exceto para  $j = \hat{j}$  e  $m = \hat{m}$ . Portanto a única componente não linear na função dual neste intervalo é dada por  $\phi_{\hat{j}}(x_{\hat{j}}^{\hat{m}}, u_{\hat{j}}^{\hat{m}})$ . Como  $\phi_{\hat{j}}$  é quadrático e  $(x_{\hat{j}}^{\hat{m}}, u_{\hat{j}}^{\hat{m}})$  varia linearmente com  $\rho$ , temos que a função dual é quadrática neste intervalo.

Para um outro intervalo de variação que apresenta um novo conjunto de soluções rígidas e variáveis, podemos por um raciocínio análogo ao anterior mostrar que a função dual também é uma quadrática, embora com coeficientes diferentes.

Generalizando, temos que a função dual apresenta uma região (externa) linear e uma (intermediária) quadrática por partes.

É possível provar [1] que a função dual resultante da dualização de um problema primal de maximização é convexa.

A FIG. 3.4 apresenta um corte da função dual.

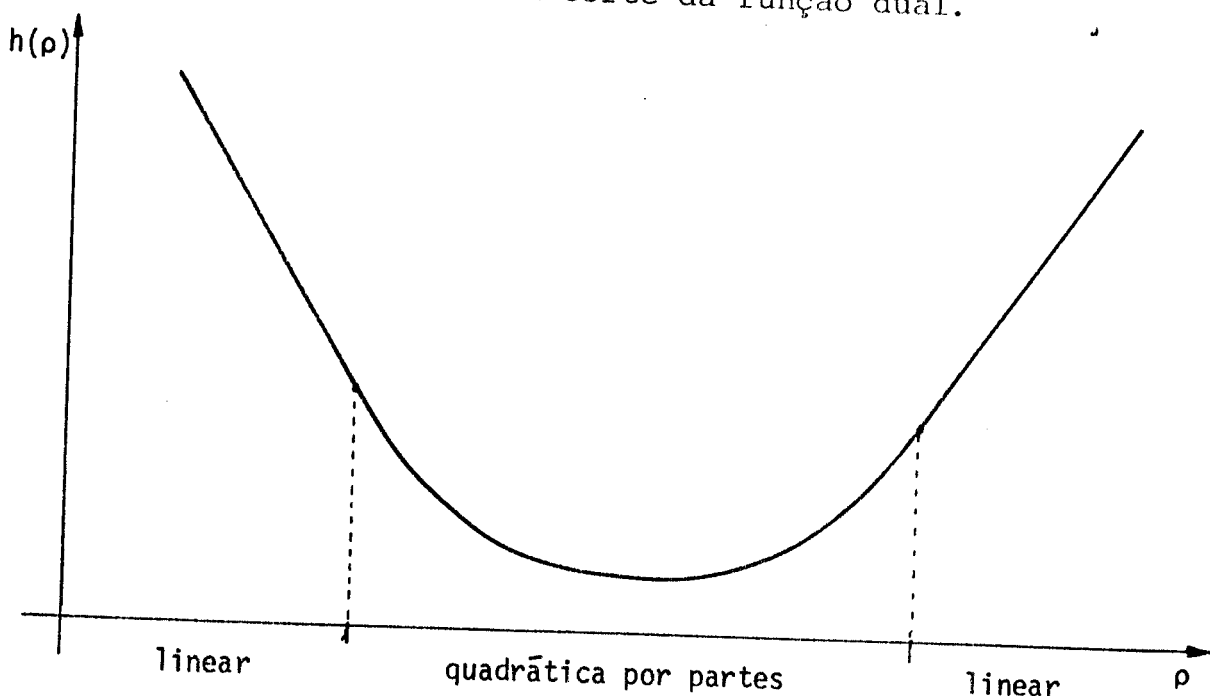


fig. 3.4

3.2.2 - BUSCA UNIDIMENSIONAL

Determinada uma direção de minimização da função dual necessitamos de técnicas eficientes para determinar o ponto de mínimo nesta direção. A seguir veremos algumas técnicas, aproveitando a característica da função dual (quadrática por partes).

Quando uma função é quadrática, uma técnica de minimização muito eficiente é a estimação quadrática. A FIG. 3.5 mostra um corte de uma função quadrática, na direção de busca  $\underline{d}$ .

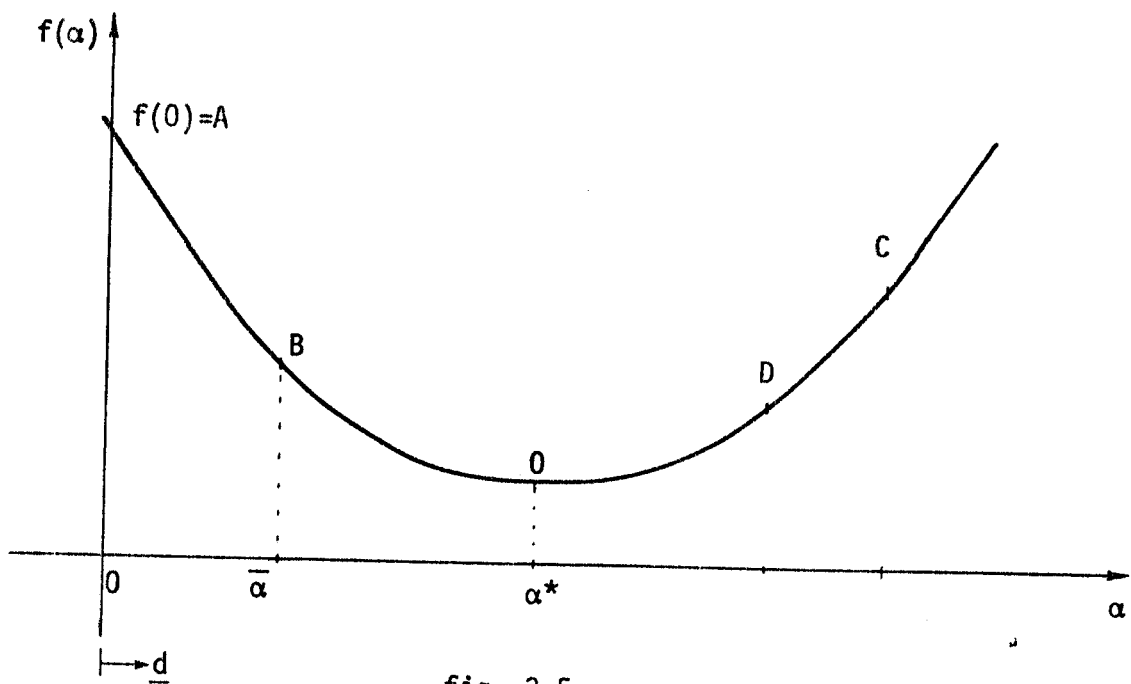


fig. 3.5

Dada uma direção de busca  $\underline{d}$ , podemos expressar  $\rho$  como função de uma variável simples (escalar)  $\alpha$ :

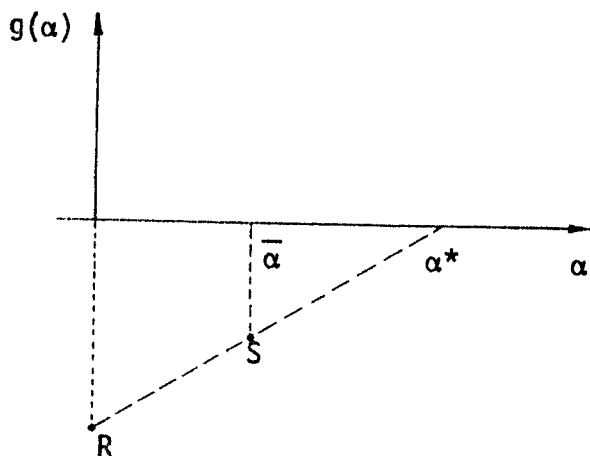
$$\rho(\alpha) = \rho(0) + \alpha \underline{d}$$

e conseqüentemente podemos expressar a função dual em função de  $\alpha$ , que representaremos por  $f(\alpha)$ .

Para determinar o passo ótimo  $\alpha^*$ , a partir do ponto A, usa-se o seguinte algoritmo.

Passo 1: Dã-se um passo  $\bar{\alpha}$  (pto B) e avalia-se o gradiente,  $g(\bar{\alpha}) = f'(\bar{\alpha})$ .

Passo 2: Faz-se a avaliação quadrática, calculando o passo ótimo  $\alpha^*$ , através da seguinte fórmula



$$\alpha^* = \frac{R}{R-S} \bar{\alpha} \quad (46)$$

Através deste algoritmo conseguimos determinar o mínimo com apenas 2 avaliações da função. Como a função dual é quadrática por partes, podemos aplicar este algoritmo com a seguinte alteração: Suponhamos na 1.<sup>a</sup> avaliação quadrática estimamos como o ponto ótimo o ponto C, (FIG.3.5). Então ao algoritmo anterior acrescentamos os seguintes passos:

Passo 3: Avalia-se se o novo ponto estimado é realmente o ponto ótimo.

- Se é ótimo, determina-se a nova direção de busca e volta-se para 1.
- Senão continue.

Passo 4: Com os dois últimos pontos (B e C no caso) faz-se nova avaliação quadrática (determinando D) e volta-se ao passo 3.

## CAP. IV

TESTES

Apresentamos e analisamos neste capítulo uma série de testes e seus resultados. O objetivo deste capítulo é a análise e a otimização da resolução de um problema de programação matemática onde a função objetivo é função quadrática e côncava sujeito a restrições lineares, através dos algoritmos apresentados no capítulo anterior. Portanto, para os sistemas adotados não existe a preocupação de aproximá-los dos sistemas hidroelétricos reais.

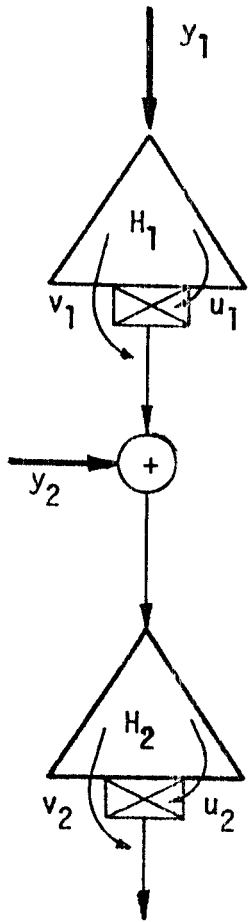
As considerações para a resolução de um sistema hidroelétrico real são feitas no próximo capítulo.

## 4.1 - TESTES

Os testes são aplicados em três sistemas, cada um com as seguintes características

SISTEMA 1: Duas usinas em cascata

coef. de  $\phi(x, u) = ax^2 + bxu + cu^2 + dx + eu + g$



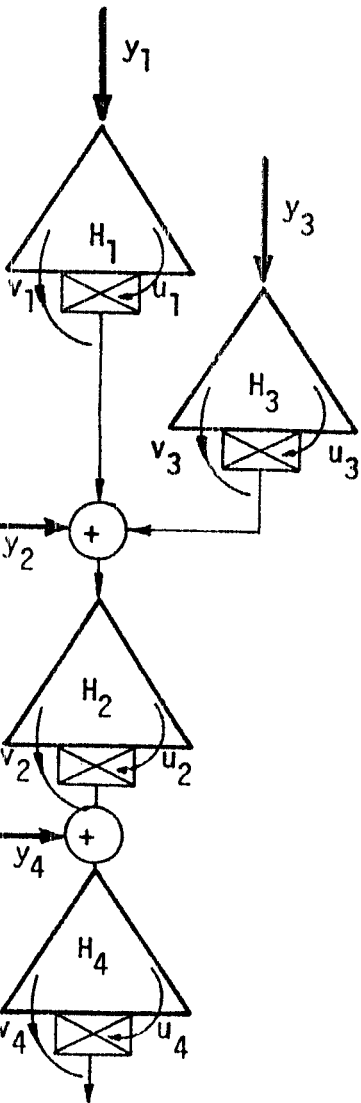
usina	a	b	c	d	e	g
1	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
2	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10

usina	$\underline{x}$	$\bar{x}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$x\phi$	$xT$
1	500	3.000	50	1.000	1.100	1.100
2	500	4.000	50	1.000	1.100	1.100

## VAZÃO INDEPENDENTE

usina	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	700	550	600	750	650	550	650	700	800	700	500	750
2	80	60	10	20	50	90	80	100	50	60	40	65

SISTEMA 2:



coeficientes

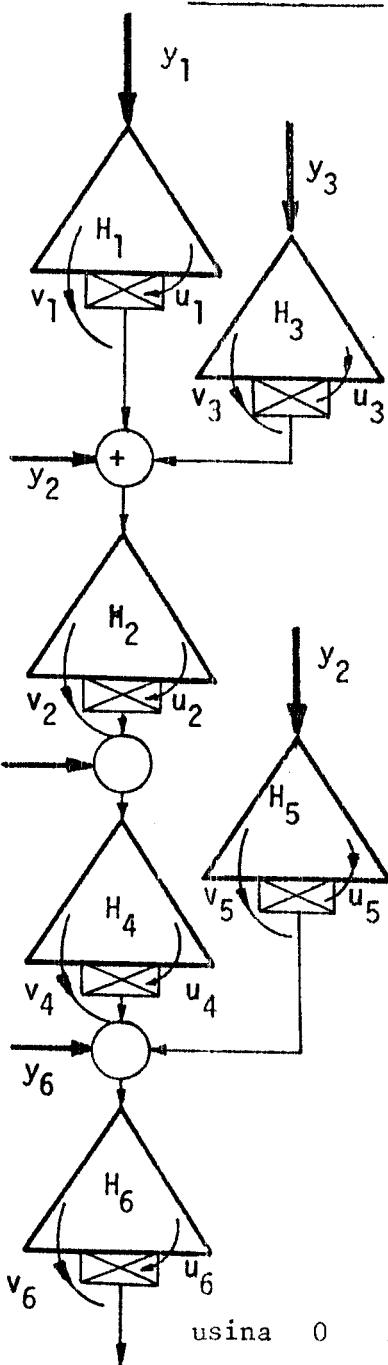
usina	a	b	c	d	e	g
1	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
2	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
3	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
4	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10

usina	$\underline{x}$	$\bar{x}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$x\phi$	$xI'$
1	500	3.000	50	1.000	1.100	1.100
2	500	4.000	50	1.000	2.000	2.000
3	500	3.000	50	1.000	1.100	1.100
4	500	4.000	50	1.000	2.000	2.000

VAZÃO INDEPENDENTE

usina	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	350	200	250	450	300	200	300	350	450	350	150	400
2	80	60	10	20	50	90	80	100	50	60	40	65
3	350	200	250	400	300	200	300	350	450	350	150	400
4	80	60	10	20	50	90	80	100	50	60	40	65

## SISTEMA 3:



## coeficientes

usina	a	b	c	d	e	g
1	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
2	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
3	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
4	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
5	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10
6	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0,07	0,13	-10

usina	$\underline{x}$	$\bar{x}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$x\phi$	$xT$
1	500	3.000	50	1.000	1.100	1.100
2	500	4.000	50	1.000	2.000	2.100
3	500	3.000	50	1.000	1.100	1.100
4	500	4.000	50	1.000	2.000	2.000
5	500	2.000	50	700	1.100	1.100
6	500	4.000	50	2.000	2.000	2.000

## VAZÃO INDEPENDENTE

usina	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	350	200	250	400	300	200	300	350	450	350	150	400
2	80	60	10	20	50	90	80	100	50	60	40	65
3	350	200	250	400	300	200	300	350	450	350	150	400
4	80	60	10	20	50	90	80	100	50	60	40	65
5	300	250	300	350	350	250	350	300	100	300	200	350
6	80	60	10	20	50	90	80	100	50	60	40	65

SISTEMA 1

ITER.	ERRO	VFD.	NAB
1	34683141.000	5721.800	1
2	47501738.000	5245.939	7
3	41009193.000	4995.350	7
4	43779122.000	4886.296	11
5	41544033.000	4792.990	5
6	37172883.000	4727.258	6
7	26934764.000	4662.072	3
8	17146135.000	4612.286	12
9	20229486.000	4581.534	4
10	19476027.000	4555.364	5
	***** LIMITACAO DO NAB *****		
11	15087559.000	4542.490	21
12	3499734.500	4502.844	4
13	789383.770	4491.017	4
14	549006.970	4488.476	3
15	570846.410	4486.009	2
16	617143.140	4483.442	4
17	669021.090	4481.454	3
18	358036.950	4479.876	2
19	251194.030	4479.016	2
20	122665.750	4478.428	2
21	58553.249	4478.180	2
22	45648.333	4478.037	2
23	73668.300	4477.877	2
24	169639.770	4477.518	2
25	189171.230	4476.917	2
26	150728.520	4476.420	3
27	99043.980	4476.048	2
28	62240.638	4475.826	2
29	31469.275	4475.688	2
30	21858.194	4475.621	2
31	29202.176	4475.547	2
32	27721.786	4475.464	2
33	20572.407	4475.391	2
34	13228.473	4475.346	2
35	10654.851	4475.310	2
36	3655.213	4475.289	2
37	1001.846	4475.283	2

NTA. = 143

tabela 1

SISTEMA 2

ITER.	ERRO	VFD.	NAB
1	200277120.000	11531.80	1
	***** LIMITACAO DO NAB *****		
2	194214940.000	10540.51	21
	***** LIMITACAO DO NAB *****		
3	31067449.000	9586.215	21
	***** LIMITACAO DO NAB *****		
4	48200239.000	9474.052	21



5	25689036.000	9379.740	12
6	89174285.000	8806.698	12
7	69395086.000	8462.962	6
8	72578192.000	8321.607	12
9	101763520.000	8198.770	17
	***** LIMITACAO DO NAB *****		
10	98346017.000	8099.005	21
11	23297588.000	7972.172	9
12	20530111.000	7852.683	7
13	22578495.000	7780.557	4
14	5904803.800	7737.303	6
15	4375643.000	7724.460	3
16	2458242.400	7715.118	3
17	2035384.600	7709.693	3
18	1683624.700	7705.956	6
19	1624589.000	7702.799	10
20	1442833.100	7700.058	3
21	1594164.400	7697.523	4
22	1663627.300	7694.528	3
23	823824.560	7692.345	4
24	512781.160	7691.313	4
25	395756.900	7690.478	3
26	186066.170	7689.938	3
27	178241.340	7689.592	3
28	95858.579	7689.305	5
29	73825.697	7689.170	2
30	76206.051	7689.030	2
31	68615.931	7688.904	2
32	65180.157	7688.781	2
33	54782.058	7688.675	3
34	52245.780	7688.578	3
35	35667.671	7688.495	2
36	19850.762	7688.448	2
37	15222.562	7688.417	2
38	8611.319	7688.395	2
39	6895.267	7688.383	2
40	8768.814	7688.368	2
41	8802.233	7688.353	2
42	9704.159	7688.335	2
43	8777.705	7688.320	2
44	13764.922	7688.300	2
45	11744.762	7688.275	2
46	13042.205	7688.255	2
47	18254.951	7688.226	2
48	20892.927	7688.191	2
49	22380.798	7688.151	2
50	18296.392	7688.114	2
51	14434.318	7688.085	2
52	10675.776	7688.062	2
53	6647.316	7688.047	2
54	5565.726	7688.037	2

NTA. = 281

tabela 2

TESTE 1

As tabelas 1 e 2 apresentam respectivamente a resolução do sistema 1 e 2, onde (em cada tabela)

- cada linha (iteração) é referente a uma busca unidimensional.
- o ERRO é o produto escalar do vetor gradiente por ele mesmo (ERRO na equação dinâmica).
- VFD - valor da função dual.
- NAB - número de avaliações da função dual por busca unidimensional.
- NTA - número total de avaliações da função dual na resolução total do sistema.

As resoluções apresentadas nas tabelas foram obtidas a partir da inicialização nula dos multiplicadores ( $\rho=0$ ) e  $\lambda^m=1$ . A técnica de busca unidimensional usada é a aproximação quadrática. A direção de busca unidimensional é a direção do gradiente conjugado (Fletcher-Reeves).

Dada uma direção de busca, o ponto de mínimo é caracterizado pela inclinação nula na direção da busca. Para o nosso caso não avaliamos exatamente o ponto de inclinação nula, mas admitimos como ponto com inclinação (em módulo) menor que 0.1. Portanto NAB é o número de avaliações necessárias para se atingir este ponto (região).

Para atingir o ponto de mínimo podemos em alguns casos necessitar de muitas avaliações. Para evitar esses casos, impomos uma limitação na busca ("limitação do NAB"). Para o nosso programa, o número máximo do NAB é 20. Quando há esta limitação, consideramos o ponto de mínimo o ponto de menor VFD. A partir deste ponto iniciamos um "novo ciclo" de busca. (Teste 4).

Um fato muito interessante a ser considerado nas tabelas 1 e 2\* é que o NAB é relativamente maior nas primeiras interações; o que quer dizer que a aproximação quadrática é ruim no começo do proces-

---

(\*) - O sistema 3 também apresenta um comportamento semelhante com 59 iterações, 5 limitações do NAB e um número total de avaliações (NTA) de 359.

Nas tabelas que apresentamos a seguir fazemos um estudo da variação do tamanho do passo  $\alpha$  na fase I, bem como a variação do número de iterações da fase I.

Em cada tabela:

- cada linha corresponde a uma resolução do sistema.
- as três primeiras colunas correspondem respectivamente ao número de iterações da fase I, número total de avaliações na fase I e o VFD no final da fase I.
- As colunas 4 e 5 apresentam respectivamente o número total de iterações e o número total de avaliações na resolução do sistema.
- A última coluna indica o número de limitações de busca, "limitação do NAB".
- Na resolução do (SH) por decomposição temporal de acordo com o algoritmo apresentado em 3.2, o passo que requer maior tempo computacional é a avaliação da função dual. (Com exceção da busca unidimensional, onde há em geral várias avaliações da função dual). Portanto, avaliamos a eficiência computacional da resolução de um sistema em termos de número total de avaliações da função dual (NTA).
- o asterisco à direita da última coluna indica a resolução que apresenta menor NTA.

SISTEMA 1

PASSO  $\alpha = 10^{-6}$

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	5.721	37	142	1
5	5	5.563	41	162	1
10	10	5.425	41	151	2
15	15	5.304	51	190	1
20	20	5.199	57	155	1
25	25	5.106	58	138	1
30	30	5.022	58	156	2
35	35	4.953	76	171	1
40	40	4.898	79	151	
45	45	4.856	78	133	
50	50	4.821	89	193	

\*

Tabela 3.a

PASSO  $\alpha = 10^{-5}$

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	5.721	37	143	1
5	5	4.840	38	105	
10	13	4.658	39	101	1
15	23	4.572	36	71	
20	32	4.523	47	109	1
25	42	4.497	43	80	
30	52	4.487	44	101	1
35	62	4.483	48	108	1
40	72	4.481	51	95	
45	83	4.480	55	103	
50	92	4.479	60	113	

Tabela 3.b

PASSO  $\alpha = 10^{-4}$

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	5.721	37	143	1
5	18	4.633	31	104	1
10	44	4.529	36	101	
15	69	4.491	33	106	
20	94	4.483	34	122	
25	120	4.480,9	36	142	
30	146	4.497,7	41	168	
35	170	4.479,0	42	184	
40	196	4.478,4	48	212	
45	220	4.478,0	51	232	
50	245	4.477,5	55	255	

Tabela 3.c

SISTEMA 2PASSO  $\alpha = 10^{-5}$ 

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	11.531	54	281	4
10	16	8.708	48	193	2
20	37	8.218	54	169	1
30	58	7.902	65	166	1
40	80	7.799	70	162	
50	104	7.742	73	161	
60	127	7.717	80	172	
70	151	7.702	89	189	
80	175	7.695	98	212	
90	198	7.692	108	234	
100	222	7.690	109	238	

Tabela 4.a

PASSO  $\alpha = 10^{-6}$ 

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	11.531	54	281	4
10	11	9.687	52	268	7
20	20	9.417	49	176	2
30	30	9.253	67	272	1
40	40	9.105	68	252	6
50	50	8.971	92	212	1
60	60	8.848	96	188	1
70	70	8.731	107	241	3
80	80	8.620	127	239	
90	90	8.516	136	261	1
100	100	8.421	137	243	2

Tabela 4.b

## SISTEMA 3

PASSO  $\alpha = 10^{-5}$ 

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	17.554	59	359	5
10	15	13.580	66	299	2
20	35	13.180	61	255	3
30	55	12.864	65	238	3
40	75	12.671	79	244	2
50	98	12.296	83	191	
60	120	12.235	92	211	
70	144	12.206	98	222	
80	128	12.188	104	235	
90	191	12.178	113	258	
100	216	12.171	121	273	

Tabela 5.a

PASSO  $\alpha = 10^{-6}$ 

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	17.554	59	359	5
10	10	15.458	65	409	9
20	20	14.993	82	321	1
30	30	14.647	101	418	3
40	40	14.347	86	316	3
50	50	14.099	118	416	1
60	60	13.875	121	383	2
70	70	13.685	113	322	2
80	80	13.529	131	323	2
90	90	13.398	133	273	1
100	100	13.282	145	292	1

Tabela 5.b

so de resolução e eficiente no final.

Para superar as dificuldades de "busca" no começo do processo, dividimos a resolução em duas fases onde na Fase I usamos técnicas mais eficientes para se atingir a região onde a aproximação quadrática é mais eficaz. Na Fase II usamos a aproximação quadrática.

### TESTE 2

A fase I deste teste usa uma técnica de gradiente "passo fixo". Dada uma direção de busca (direção do gradiente), aplica-se o seguinte algoritmo:

Passo 1: Dã-se um passo  $\alpha$  na direção do gradiente.

Passo 2: Avalia-se o VFD no novo ponto (pto. B, Fig. 4.1)

Passo 3: Se houve decréscimo no VFD, calcula-se nova direção de busca e volta-se ao passo 1.

- Senão dã-se um passo  $\alpha = \alpha/2$  a partir do ponto inicial (pto A) e volta-se ao passo 2.

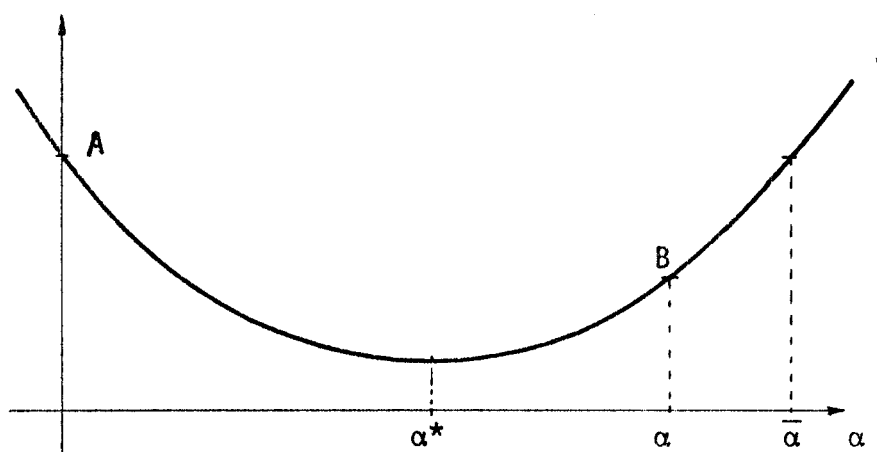


fig. 4.1

- Para qualquer passo maior que  $\bar{\alpha}$  o algoritmo será obrigado a fazer mais de uma avaliação da função dual.
- o passo  $\alpha^*$  é o passo ótimo.

É importante destacar alguns resultados dos testes apresentados:

- Para passos muito pequenos, o NTA da Fase I é igual ao número de iterações da Fase I, ou seja, há apenas uma avaliação por iteração na Fase I, e portanto o passo  $\alpha$  é sempre menor que  $\bar{\alpha}$  (Fig. 4.1).
- Para passos pequenos há pouco descréscimo do VFD no final da Fase I relativamente aos passos maiores, para o mesmo número de iterações da fase I.
- Para passos pequenos há, em geral, mais limitações de busca na Fase II.
- Para passos maiores o NTA da Fase I é, em geral, bem maior que o ITER. da Fase I; o que indica que há mais de uma avaliação do VFD por iteração.
- Para passos maiores há menos limitação de busca na Fase II.

### TESTE 3

Uma das dificuldades apresentadas no teste anterior é a determinação do tamanho do passo ótimo da Fase I. Neste teste, o passo da Fase I é variável de acordo com a seguinte regra:

- 1- Faz-se uma busca idêntica ao teste anterior.
  - 2- Se o número de avaliações for igual a 1 (passo pequeno), aumenta-se o tamanho do passo para a busca seguinte (por exemplo, um aumento em 10%).
- Senão diminui-se o tamanho do passo proporcionalmente ao número de avaliações na busca, (por ex., dividir o passo: por  $2^{N-1}$ , onde N é o número de avaliação por busca).



SISTEMA 1

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	5.721	37	143	1
5	15	4.625	45	123	
10	21	4.543	39	89	
15	27	4.501	35	68	
20	33	4.487	35	63	
25	38	4.483	38	64	
30	45	4.481	40	65	
35	50	4.480	45	70	
40	56	4.479,5	49	74	
45	62	4.479	52	76	
50	67	4.478	58	83	

Tabela 6

SISTEMA 2

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	11.531	54	281	4
10	22	8.576	51	197	2
20	33	8.204	73	251	1
30	45	7.966	67	174	1
40	57	7.844	71	130	
50	69	7.774	79	135	
60	80	7.740	83	153	
70	92	7.713	90	134	
80	103	7.703	100	162	1
90	115	7.696	111	159	
100	127	7.693	118	164	

Tabela 7

SISTEMA 3

FASE I			PROCESSO TOTAL		
ITER.	NTA	VFD	ITER.	NTA	LIMITAÇÃO NAB
0	0	17.554	59	359	5
10	22	13.468	84	400	1
20	33	13.000	61	209	1
30	45	12.662	70	202	
40	57	12.469	75	199	2
50	68	12.352	81	165	
60	80	12.276	92	178	
70	92	12.232	102	200	
80	104	12.205	108	174	
90	116	12.189	116	197	
100	126	12.178	121	179	

Tabela 8

Comparando os resultados deste teste com o anterior, notamos que no teste 3, temos em média, um menor NTA na Fase I com um VFD mais ou menos próximo ao obtido na Fase I do teste 2. Notamos também que em média o NTA do processo total é menor.

Uma dificuldade presente nos dois testes é a determinação do número de iterações ótimo da Fase I. Entretanto parece que no teste de passo automático o NTA é mais homogêneo (sofre menos oscilações em função do ITER. da Fase I).

TESTE 4

A tabela 9 apresenta a resolução dos sistemas 1,2 e 3 através de duas técnicas: gradiente ótimo e gradiente conjugado (com busca unidimensional por aproximação quadrática).

ALGORITMO GRADIENTE CONJUGADO

Passo 1: Dado  $\rho^0$ , calcula-se  $g^0 = \frac{\partial L}{\partial \rho^0}$  e faz-se  $d^0 = -g^0$

Passo 2: Para  $K = 0, 1, \dots, N-1$  (\*)

a) faz-se  $\rho^{k+1} = \rho^k + \alpha_k d^k$ , onde  $\alpha_k$  minimiza  $f(\rho^k + \alpha d^k)$ .

b) calcula-se  $g^{k+1} = \frac{\partial L}{\partial \rho^{k+1}}$

c) Se  $K \leq N-1$  faz-se  $d^{k+1} = -g^{k+1} + \beta_k d^k$

$$\text{onde } \beta_k = \frac{g^{k+1} \cdot g^{k+1}}{g^k \cdot g^k}$$

Senão substitui-se  $\rho^0$  por  $\rho^N$  e volta-se ao passo 1.

(\*) No nosso caso  $N = (N\text{º de usinas}) \times (n\text{º de intervalos de discretização})$ .

(\*\*) Cada vez que volta-se ao passo 1 (busca na direção do gradiente) começa-se um "novo ciclo" de busca.

G. CONJUGADO			G. ÓTIMO	
SISTEMA	ITER.	NTA	ITER.	NTA
1	37	143	103	182
2	54	281	417	1.374
3	59	359	669	3.606

tabela 9

Nos resultados apresentados na tabela acima podemos destacar:

- Na resolução por Gradiente Conjugado (G.C.) o número de iterações não apresenta grandes variações de um sistema para outro. O NTA apresenta uma variação aproximadamente linear à variação do número de usinas de um sistema para outro.
- A resolução por Gradiente Ótimo requer um número de iterações e NTA bem superior ao G.C.. A variação do ITER como o do NTA de um sistema para outro é também superior ao G.C..

TESTE 5

No capítulo 3 apresentamos duas formulações, uma geral que considera vertimento e outras específica (sem vertimento). A diferença básica entre as duas formulações se encontra na equação dinâmica e na equação de acoplamento.

Formulação Geral:

$$x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m - v_j^m$$

$$z_j^m = \sum_{s \in S_j} (u_s^{m-t_{sj}} + v_s^{m-t_{sj}})$$

o lagrangeano resultante da decomposição temporal é da forma:

$$L_{jm} = \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \Delta \hat{\rho}_j^m x_j^m + \tau \hat{\rho}_j^m u_j^m + \underline{cte.}$$

onde  $\Delta \hat{\rho}_j^m$  é uma combinação linear entre  $\rho_j^m, \rho_j^{m-1}$

$$\text{e } \rho_k^{m+\tau_{jk}}, k \in T_j$$

$$\tau \hat{\rho}_j^m = - \hat{\rho}_j^m$$

Formulação Específica:

$$x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + z_j^m - u_j^m$$

$$z_j^m = \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t_{sj}}$$

$$L_j^m = \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \Delta \hat{\rho}_j^m x_j^m + \tau \hat{\rho}_j^m u_j^m + \underline{cte}$$

onde  $\Delta \hat{\rho}_j^m = \hat{\rho}_j^m - \hat{\rho}_j^{m-1}$

$$\tau \hat{\rho}_j^m = \hat{\rho}_k^{m+t_{kj}} - \rho_j^m$$

Embora as diferenças nos algoritmos de resolução por (DT) das duas formulações estejam em apenas três pontos: cálculo de  $\Delta \hat{\rho}_j^m$ ,  $\tau \hat{\rho}_j^m$  e cálculo do gradiente, as duas formulações apresentam, em geral grandes variações no seu tempo computacional, como mostra a tabela

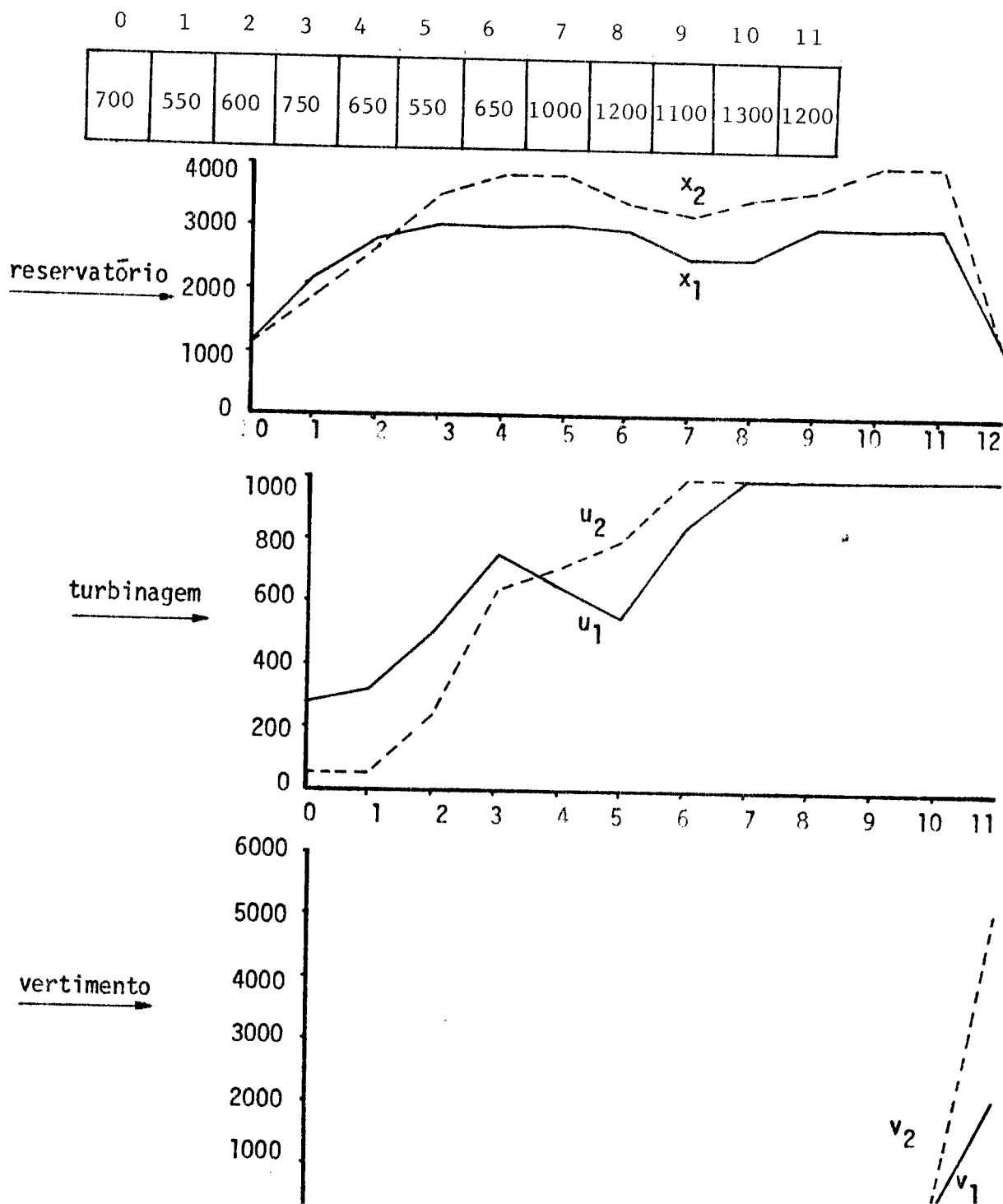
FORMULAÇÃO GERAL			FORMULAÇÃO ESPECÍFICA	
SISTEMA	ITER.	NTA	ITER.	NTA
1	35	185	37	143
2	49	408	54	281
3	79	769	59	359

TESTE 6

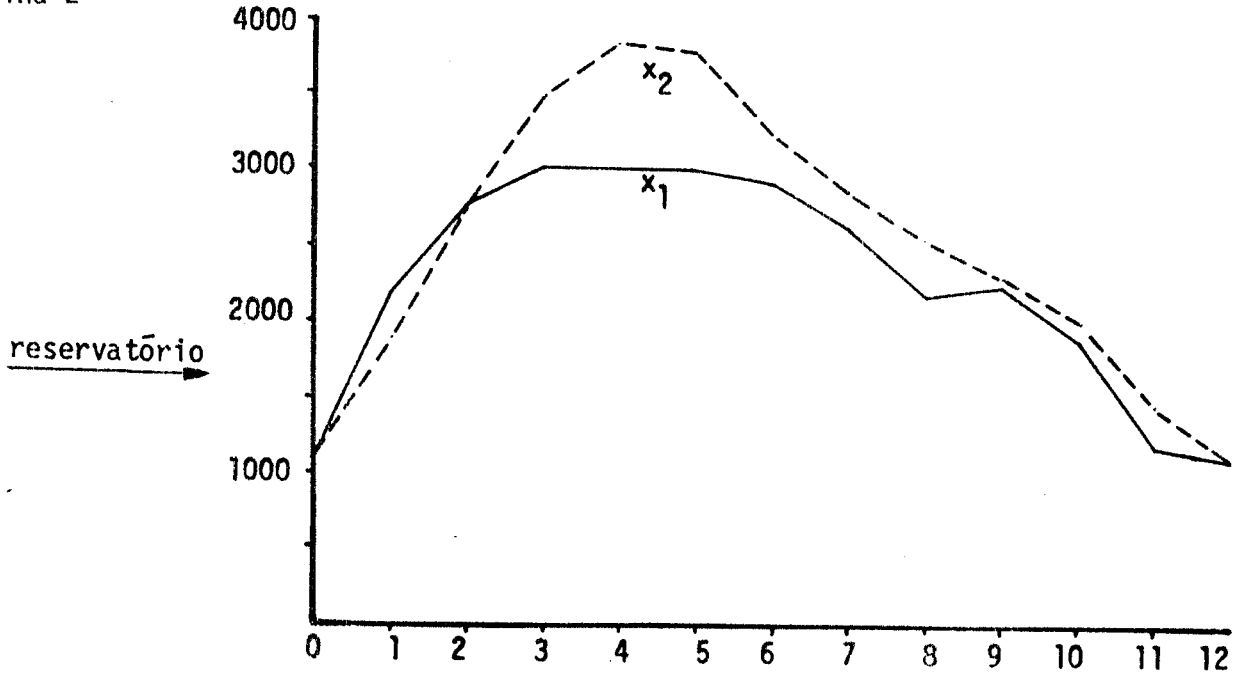
Resolução de um sistema que apresenta vertimento diferente de zero.

O sistema é idêntico ao sistema 1, com a alteração na vazão independente da usina 1:

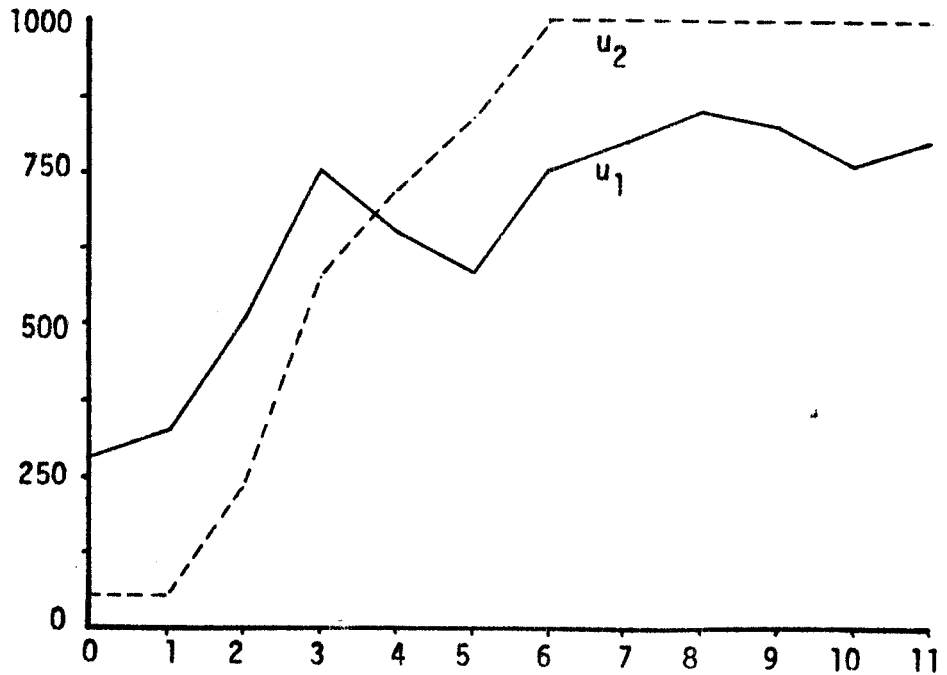
Vazão independente = usina 1



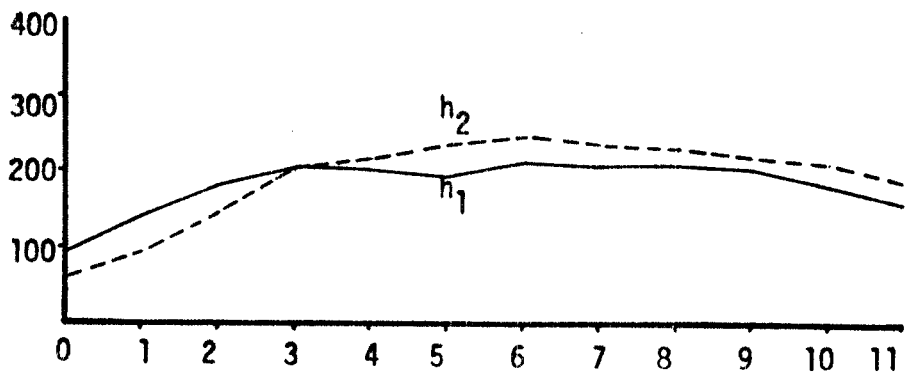
usina 1 ———  
usina 2 - - - -



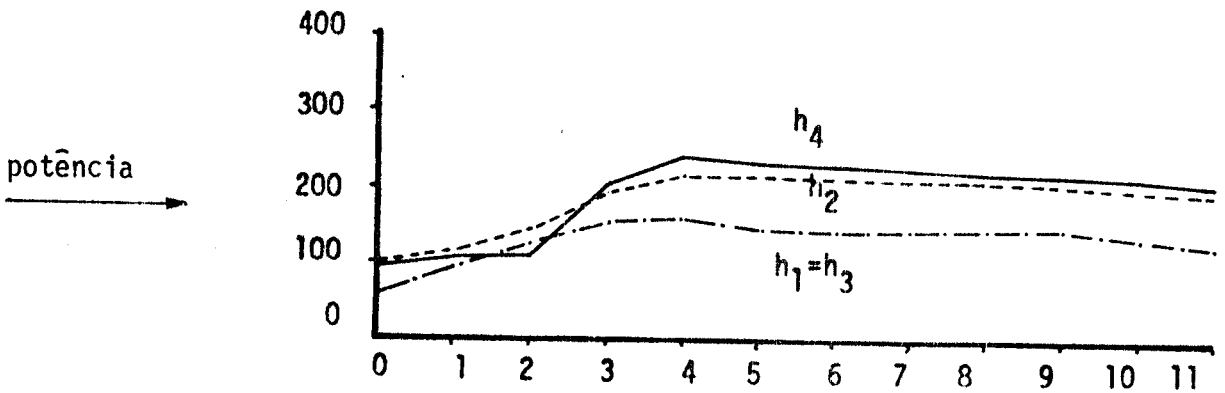
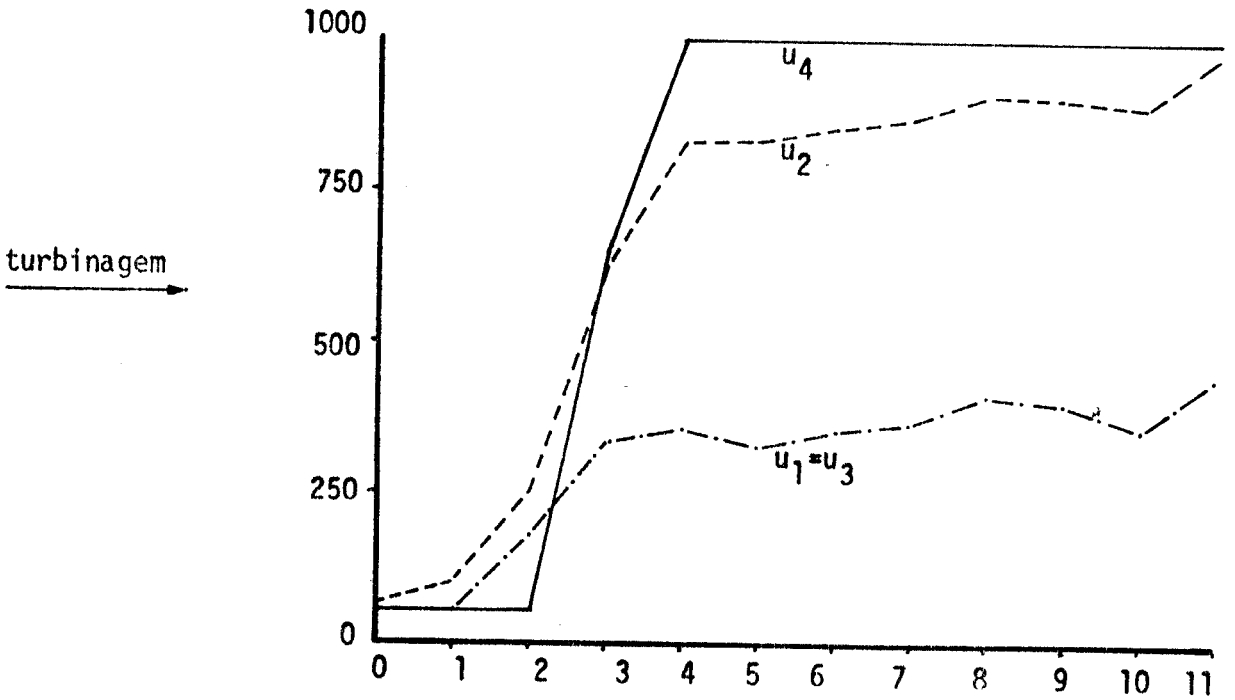
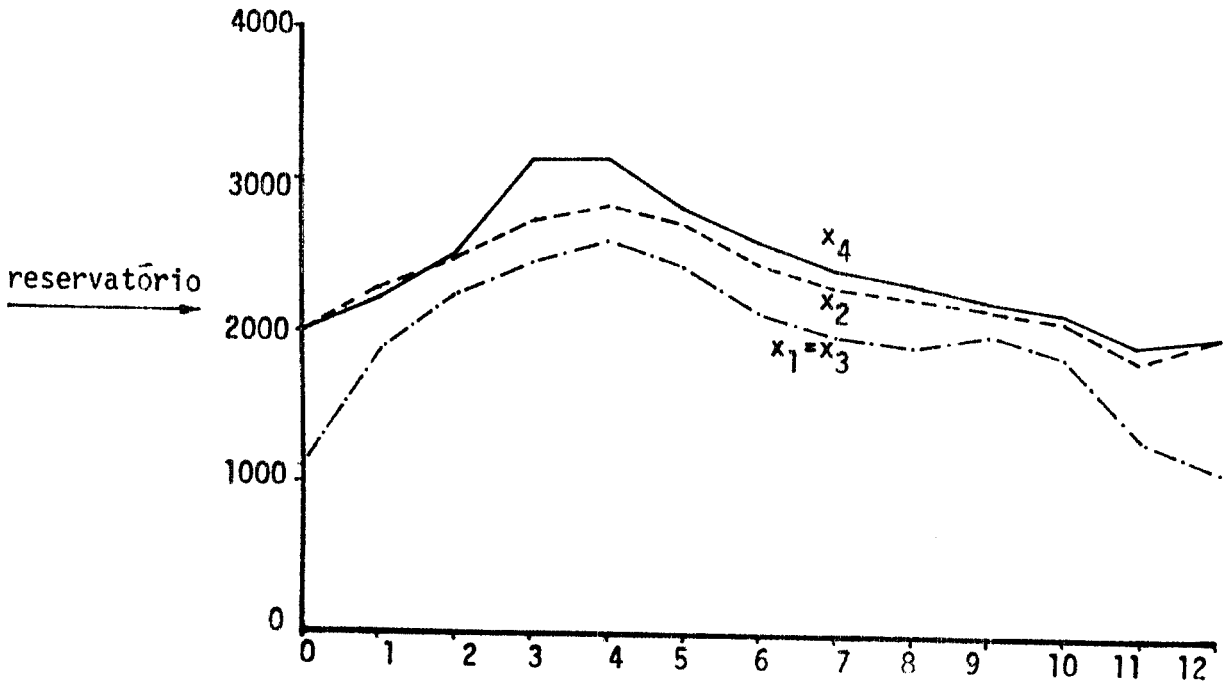
turbinagem →



potência →

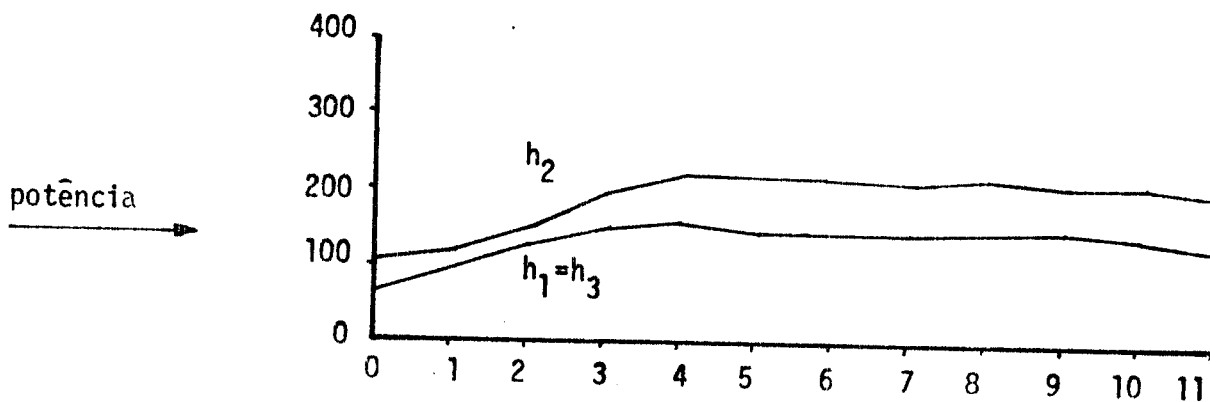
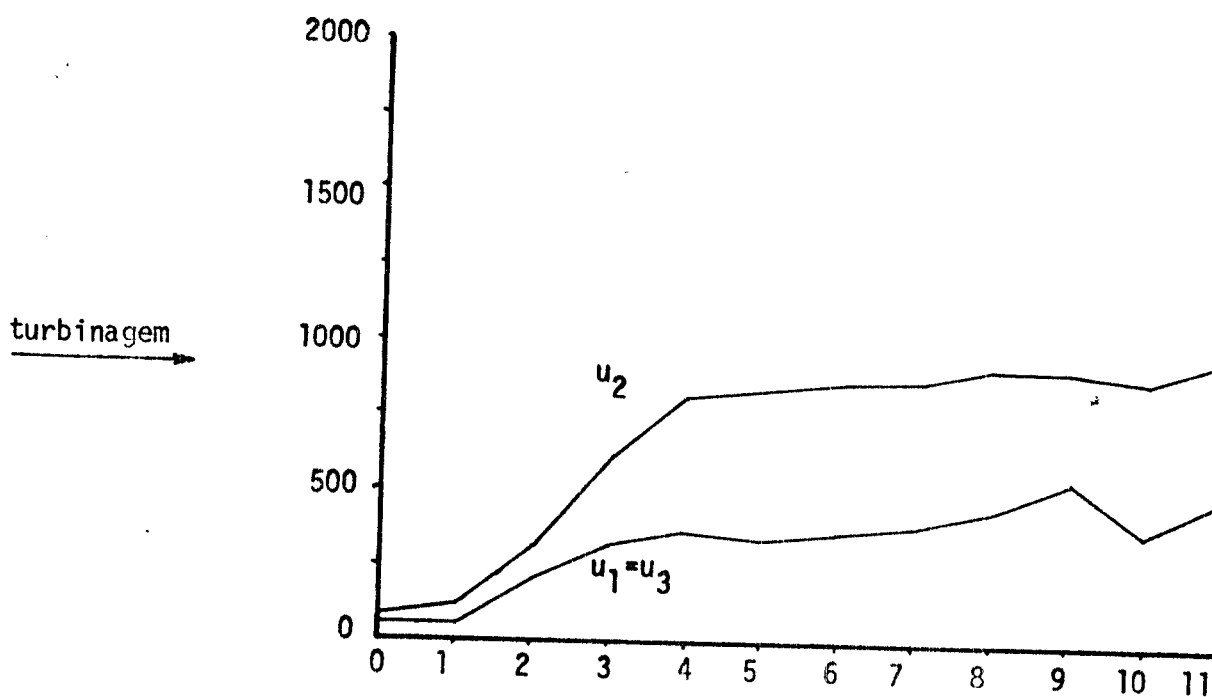
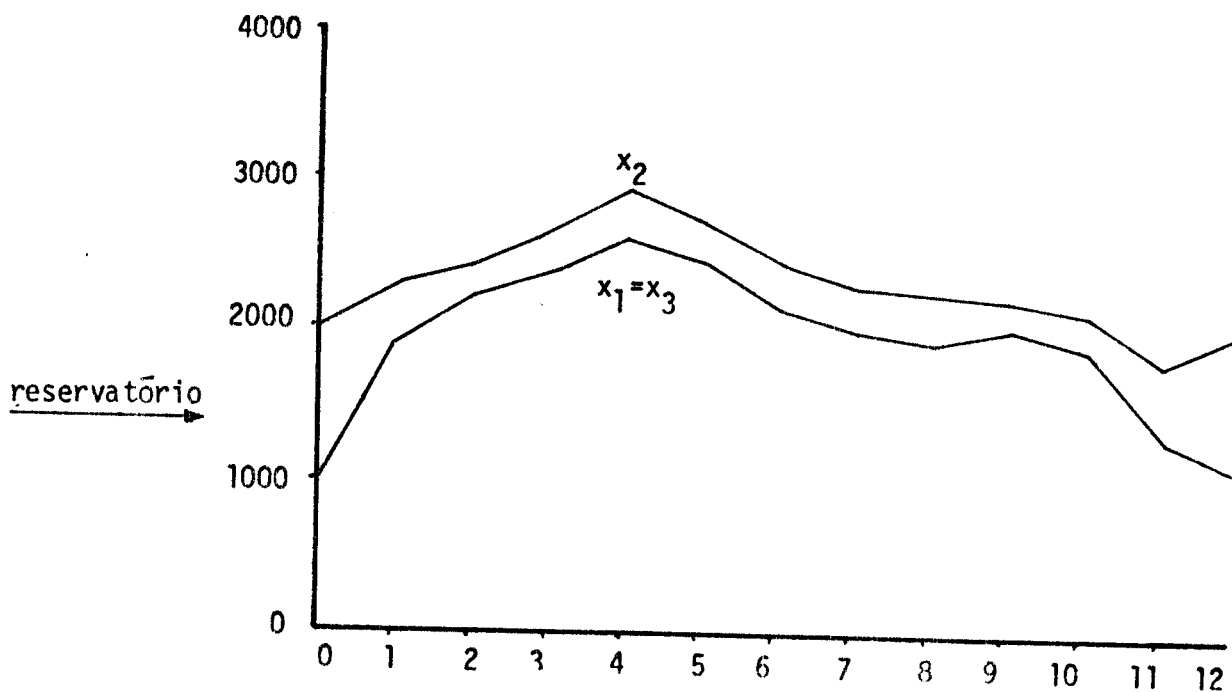


usinas 1,3 - ·····  
 usina 2 - - - - -  
 usina 4 - ———



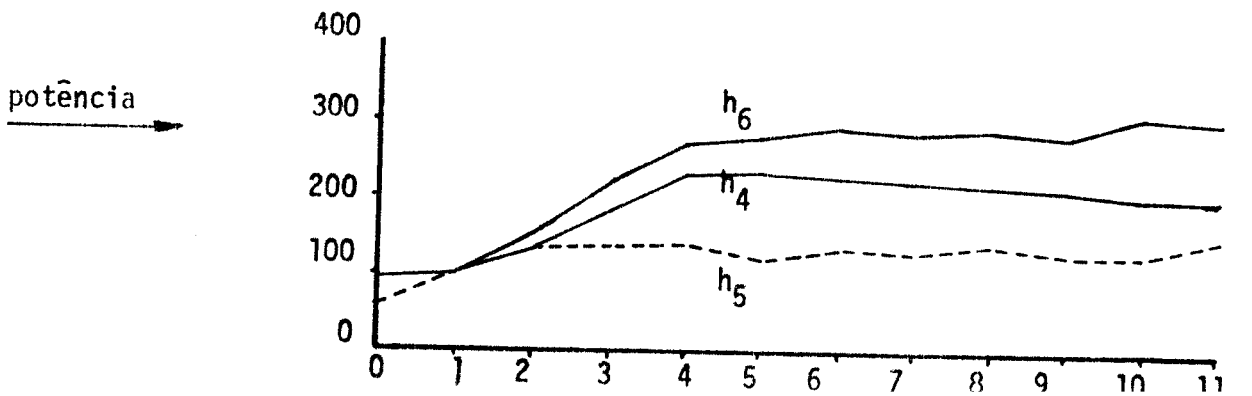
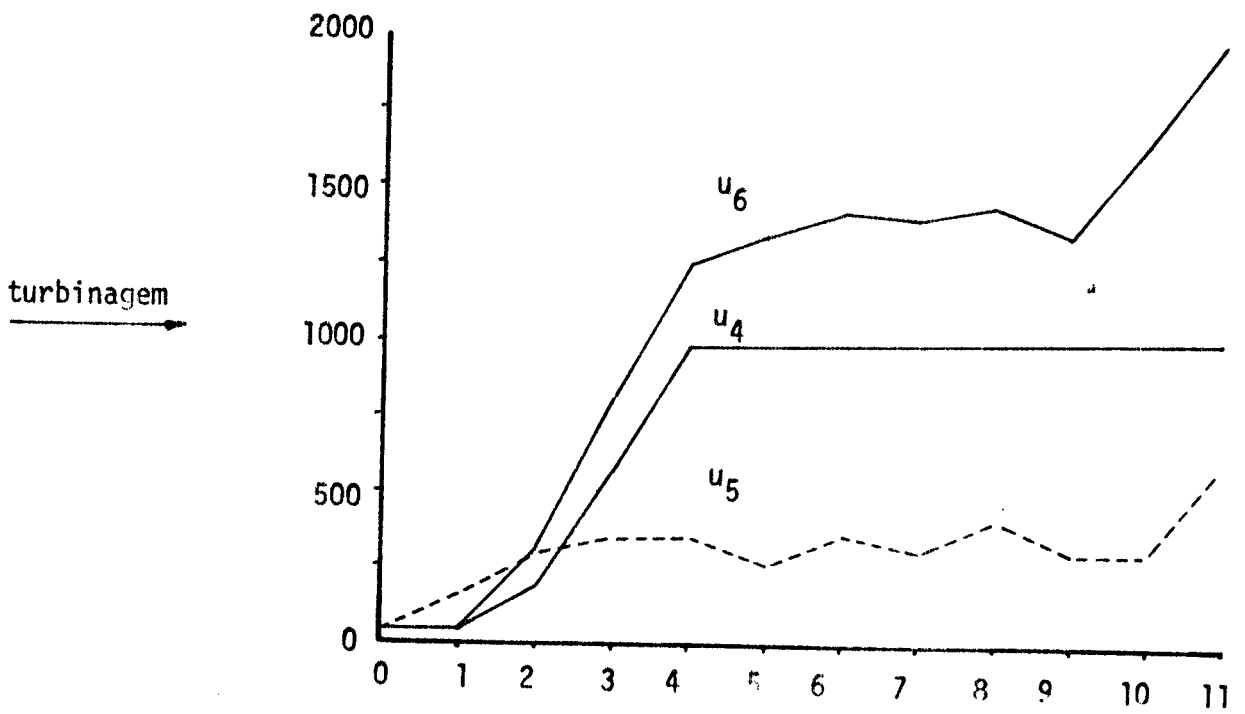
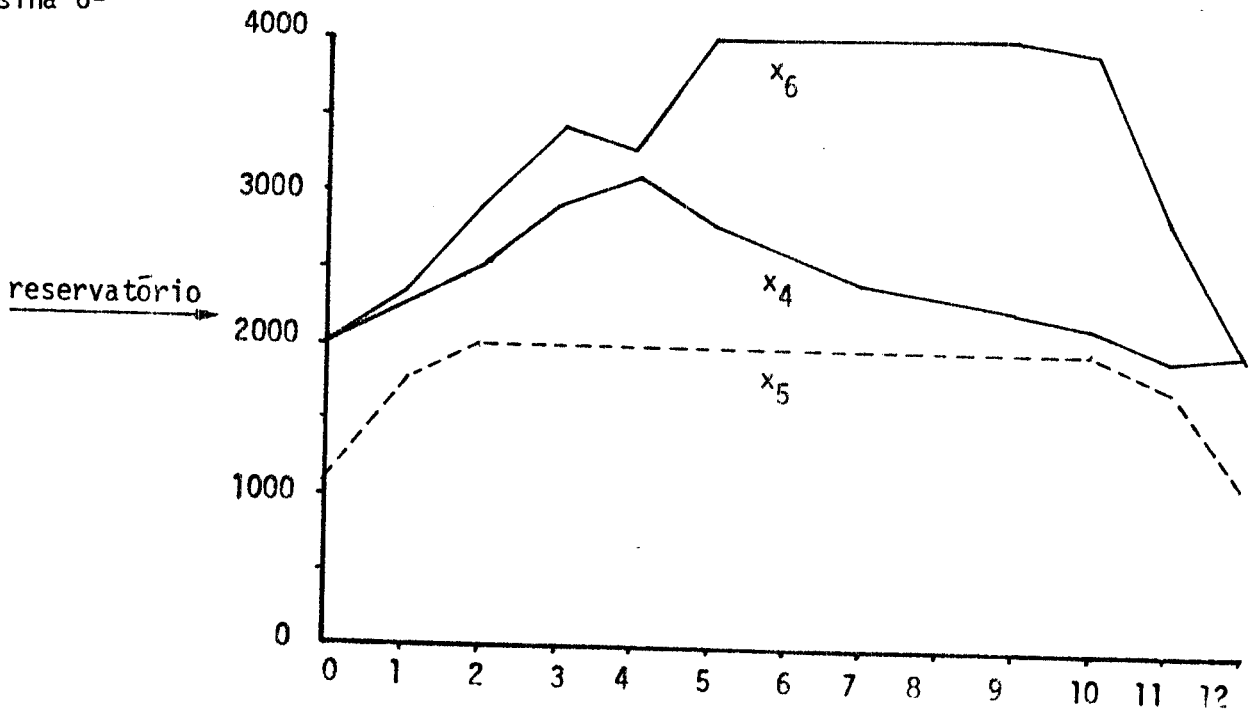


usinas 1,3-  
usina 2 -



SISTEMA 3 : usinas 4,5,6

usina 4-  
usina 5-  
usina 6-



4.2 - INICIALIZAÇÃO

Reescrevendo o subproblema hidroelétrico para um sistema sem vertimento, temos:

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m)$$

$$\text{s.a} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - u_j^m \quad (\rho_j^m)$$

$$x_j^m \in X_j$$

;  $j \in J, m \in M$

$$u_j^m \in U_j$$

$$x_j^0, x_j^T - \text{dados}$$

A função lagrangeano é dada por:

$$L(x, u, \rho) = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \left\{ \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) + \rho_j^m \left( -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t} s_j - u_j^m \right) \right\} \quad (1)$$

É fácil provar [1] [2] que se o ponto  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\rho})$  constitui um ponto de sela do lagrangeano, a solução  $(\hat{x}, \hat{u})$  é a solução ótima do subproblema acima e o ponto  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\rho})$  satisfaz as condições Kuhn-Tucker (KT):

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_j^m} \\ \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ se } \hat{x}_j^m = \underline{x}_j \\ = 0 \text{ se } \underline{x}_j < \hat{x}_j^m < \bar{x}_j \\ \geq 0 \text{ se } \hat{x}_j^m = \bar{x}_j \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j^m} \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ se } \hat{u}_j^m = \underline{u}_j \\ = 0 \text{ se } \underline{u}_j < \hat{u}_j^m < \bar{u}_j \\ \geq 0 \text{ se } \hat{u}_j^m = \bar{u}_j \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, \dots, T-1 \\ j \in J \end{array} \quad (3)$$

$$b) \quad \frac{\partial L}{\partial \rho_j^m} = -x_j^{m+1} + x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t_{sj}} - u_j^m = 0 \quad (4)$$

$$c) \quad \hat{\rho}_j^m \text{ irrestrito} \quad (5)$$

Para  $m = 0$  não temos a derivada  $\frac{\partial L}{\partial x_j^0}$ , pois  $x_j^0$  é cte. (dado).

Desenvolvendo a condição (a), temos:

$$m = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j^0} = \hat{\lambda}^0 (2c_j \hat{u}_j^0 + b_j x_j + d_j) + \hat{\rho}_k^t - \hat{\rho}_j^0 \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ se } \hat{u}_j^0 = \underline{u}_j \\ = 0 \text{ se } \underline{u}_j \leq \hat{u}_j^0 < \bar{u}_j \\ \geq 0 \text{ se } \hat{u}_j^0 = \bar{u}_j \end{array} \right. \quad (6)$$

$$m = 1, 2, \dots, T-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j^m} = \hat{\lambda}_j^m (2a_j \hat{x}_j^m + b_j \hat{u}_j + d_j) - \hat{\rho}_j^{m-1} + \hat{\rho}_j^m \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ se } \hat{x}_j^m = \underline{x}_j \\ = 0 \text{ se } \underline{x}_j < \hat{x}_j^m < \bar{x}_j \\ \geq 0 \text{ se } \hat{x}_j^m = \bar{x}_j \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j^m} = \hat{\lambda} (2c_j \hat{u}_j^m + b \hat{x}_j^m + e_j) + \hat{\rho}_k^{m+t} - \hat{\rho}_j^m \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ se } \hat{u}_j^m = \underline{u}_j \\ = 0 \text{ se } \underline{u}_j < \hat{u}_j^m < \bar{u}_j \\ \geq 0 \text{ se } \hat{u}_j^m = \bar{u}_j \end{array} \right. \quad (8)$$

Quando  $\hat{x}_j^m$  e  $\hat{u}_j^m$  são iguais aos seus valores extremos as relações (6), (7), (8) garantem apenas uma relação de desigualdade.

Supondo que a solução ótima não seja saturada, as relações acima são sempre satisfeitas na igualdade, portanto:

$$\text{De (6), } \hat{\rho}_j^0 = \hat{\rho}_k^t + \hat{\lambda}^0 (2c_j \hat{u}_j^0 + b_j \hat{x}_j^0 + e_j) \quad (9)$$

$$\text{De (7), } \hat{\rho}_j^m = \hat{\rho}_j^{m-1} - \hat{\lambda}^m (2a_j \hat{x}_j^m + b_j \hat{u}_j^m + d_j) \quad (10)$$

$$\text{De (8), } \hat{\rho}_j^m = \hat{\rho}_k^{m+t} + \hat{\lambda}^m (2c_j \hat{u}_j^m + b_j \hat{x}_j^m + e_j) \quad (11)$$

Se iniciarmos o processo de resolução a partir de multiplicadores com valores próximos aos valores dos multiplicadores ótimos, possivelmente atingiremos o ótimo com menos iterações. Esta inicialização possibilitará eliminar a fase I.

Eliminado a variável  $x_j^m$  das equações (10), (11), obtemos:

$$\rho_j^m = \underbrace{\frac{b_j}{2a_j + b_j}}_{K1} \left[ \underbrace{\rho_j^{m-1}}_{K2} + \frac{2a_j}{b_j} \cdot \rho_k^{m+t} + \hat{\lambda}^m \cdot \left( \frac{4a_j c_j - b_j^2}{b_j} \right) u_j^m + \hat{\lambda}^m \cdot \left( \frac{2a_j e_j - b_j d_j}{b_j} \right) \right] \quad (12)$$

K3 K4

Quando  $j$  é uma usina de foz (sem usina à jusante) as equações (9) e (12) ficam:

$$m = 0$$

$$\hat{\rho}_j^0 = \hat{\lambda}^0 (2c_j u_j^0 + b x_j^0 + e_j) \quad (13)$$

$m = 1, \dots, T-1$

$$\rho_j^m = K1 \left( \rho_j^{m-1} + K3.u_j^m + K4 \right) \quad (14)$$

Para usina  $j$  que apresenta usina  $\tilde{a}$  jusante:

$m = 0$

$$\rho_j^0 = \hat{\rho}_{jk}^t + \hat{\lambda}^0 \cdot (2c_j u_j^0 + b x_j^0 + e_j) \quad (15)$$

$m = 1, \dots, T-1$

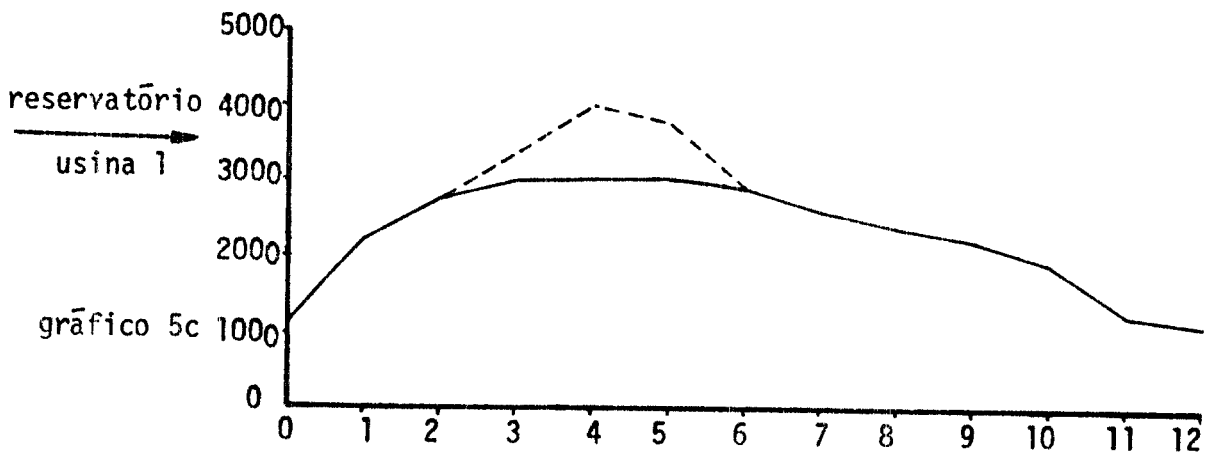
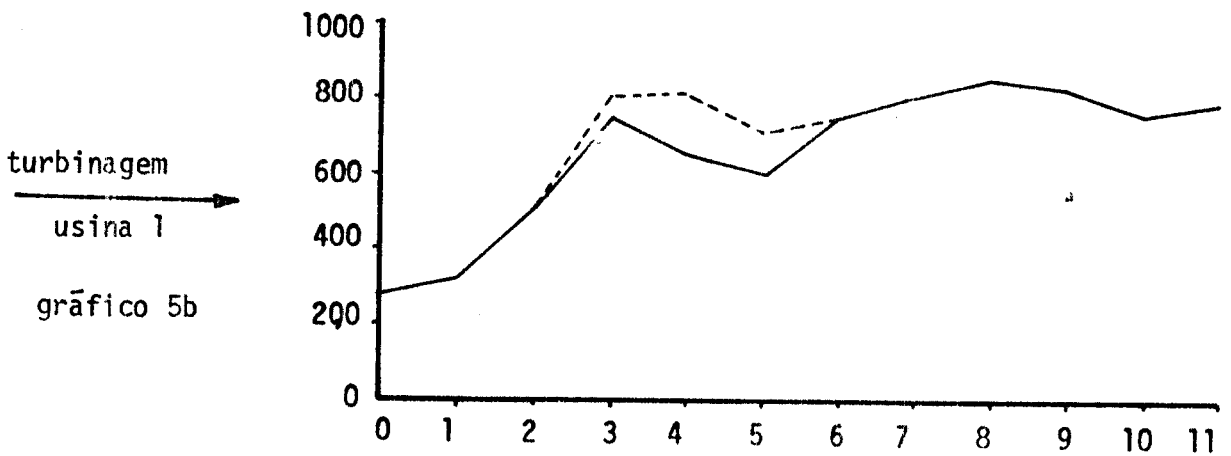
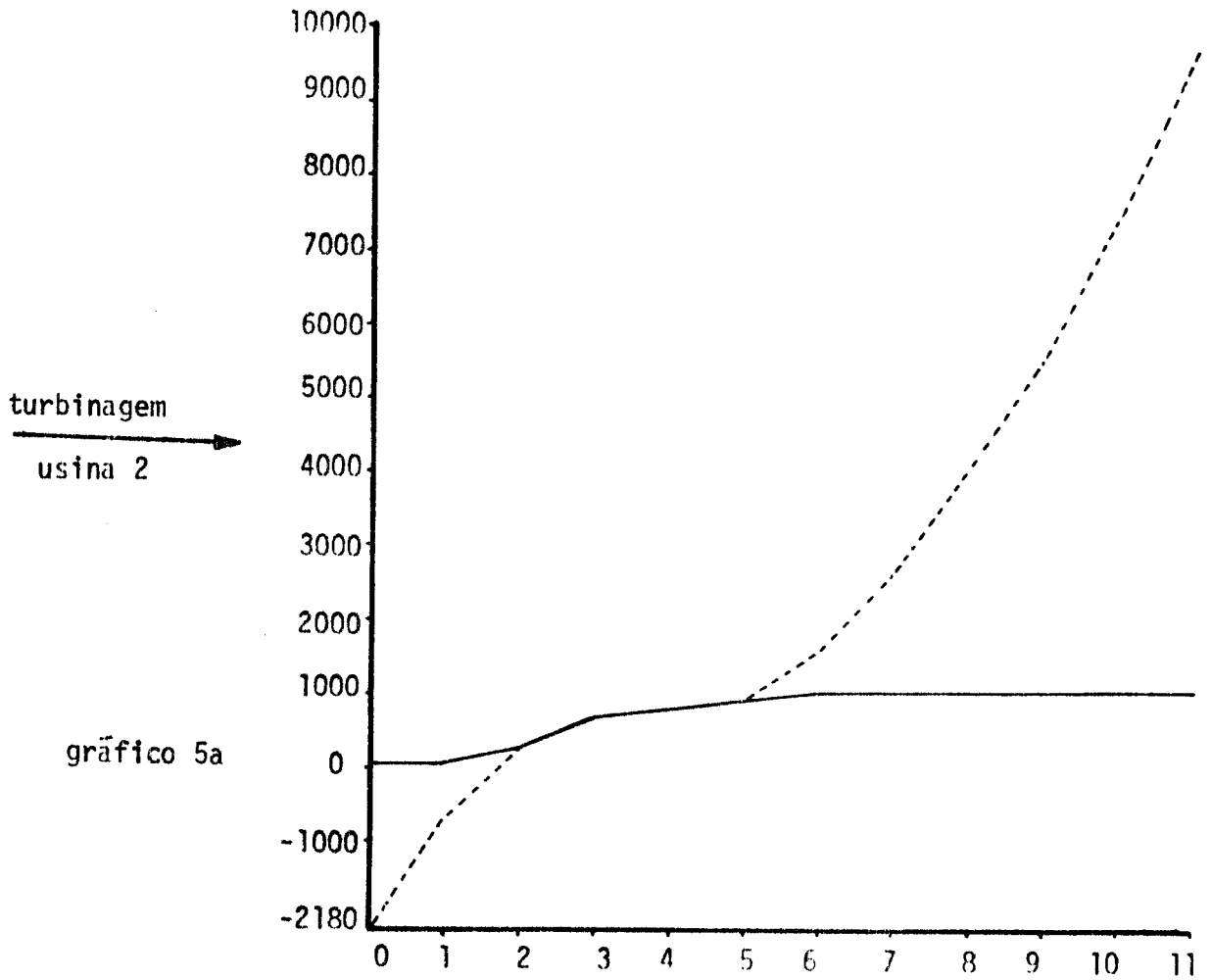
$$\rho_j^m = K1 \left( \rho_j^{m-1} + K2.\rho_k^{m-t} + K3.u_j^m + K4 \right) \quad (16)$$

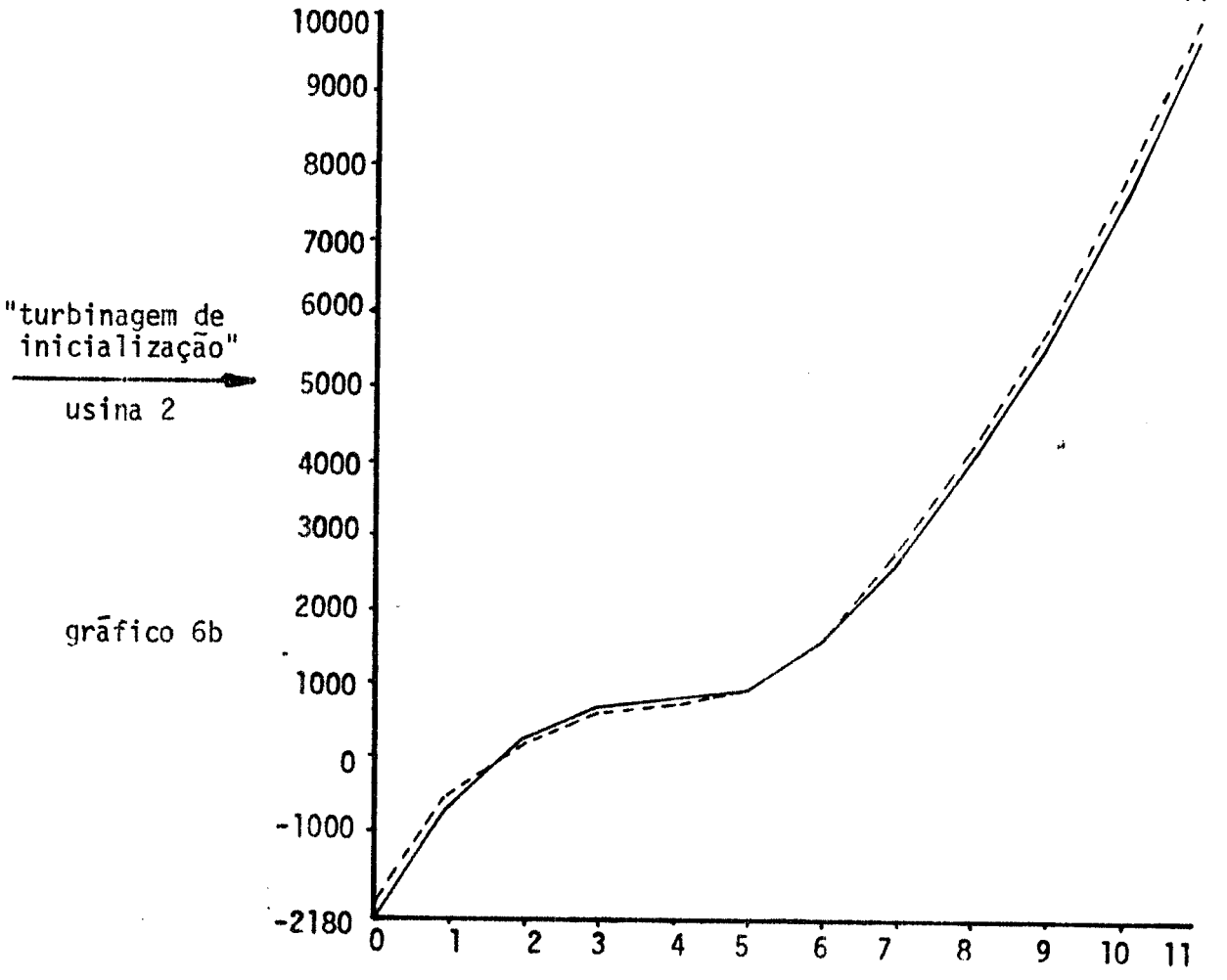
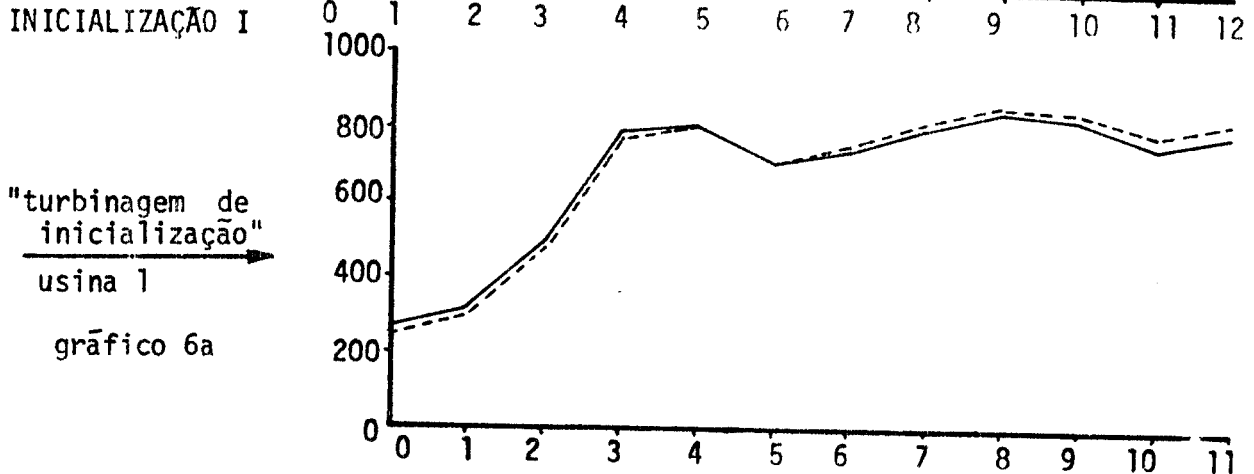
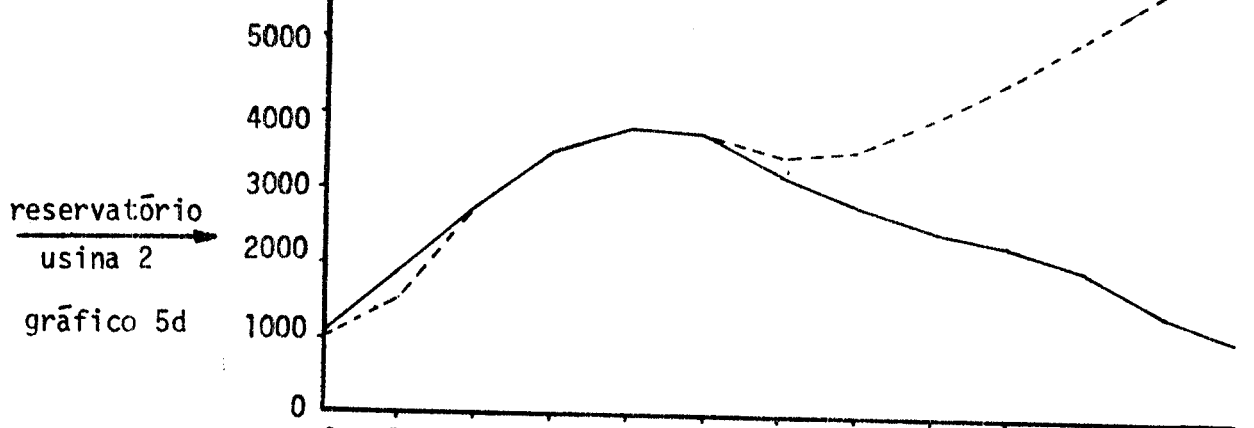
As equações (13) - (16) são as relações entre os multiplicadores ótimos e as trajetórias de  $u_j^m$ .

Uma política de inicialização dos multiplicadores possíveis seria supor uma série de trajetórias  $u_j^m$ ;  $j \in J$ ,  $m \in M$  como trajetórias ótimas, determinar os multiplicadores associados a elas através das relações acima, e iniciar a resolução do subproblema a partir destes multiplicadores.

Suponha, então, que as trajetórias  $u_j^m$ ;  $j \in J$ ,  $m \in M$  sejam as trajetórias "ótimas". O cálculo dos multiplicadores associados a estas trajetórias poderia ser feito através do seguinte algoritmo:

1. Iniciar o cálculo de "baixo para cima", isto é, iniciar o cálculo dos multiplicadores a partir da usina de foz.
  - E para esta usina calcula-se da "esquerda para a direita", ou seja, de  $m=0$  até  $m=T-1$
  - Para a usina de foz calcula-se os multiplicadores de acordo com as relações (13), (14).
2. Calculado os multiplicadores da usina  $j$ , calcula-se os multiplicadores das usinas imediatamente a montante de  $j$ .
  - O cálculo para estas usinas também deve ser da "esquerda para a direita".





inicialização	ITER.	NTA-
I	4	8
II	39	114

tabela 10



- Para as usinas que apresentam usinas a jusante o cálculo é feito através das relações (15), (16).

Esta política de inicialização apresenta duas dificuldades:

1. As trajetórias ótimas de  $u_j^m$ ;  $j \in J$ ,  $m \in M$ , apresentam em geral saturações, e conseqüentemente as relações (13) - (16) não são sempre satisfeitas em igualdade.
2. A dificuldade de se estimar qual é a trajetória ótima de  $u_j^m$ .

O gráfico (5) mostra as trajetórias ótimas restritas (linhas contínuas) e irrestritas (linhas pontilhadas) de  $u_j^m$ ;  $j \in J$ ,  $m \in M$ .

A tabela (10) apresenta a resolução de (SH) a partir de duas inicializações: A inicialização I parte de uma trajetória de  $u_j^m$  muito próxima do ótimo irrestrito, como mostra o gráfico (6). (Inicialização I = linha pontilhada). A inicialização II parte de uma trajetória de  $u_j^m$  que é a própria trajetória ótima restrita.

Notamos, que se a trajetória ótima de  $u_j^m$  é muito saturada, mesmo que se parta da "solução ótima restrita", a inicialização é pouco eficiente.

#### 4.3 - COMANDABILIDADE DO MÉTODO DUAL CLÁSSICO

Apresentamos nesta seção um estudo da comandabilidade do método dual clássico em função do "grau de concavidade" da função objetivo.

Suponhamos o seguinte problema ilustrativo:

$$\text{Máx } f(x) = -kx^2 + 3x$$

(P)

$$\text{Sa } x = 3$$

$$0 \leq x \leq 6$$

onde  $k \geq 0$ .

Dualizando em relação a primeira restrição temos a função lagrangeana:

$$L = -kx^2 + 3x + \rho(x-3) = -kx^2 + (3+\rho)x - 3\rho.$$

a função dual é dada por:

$$h(\rho) = \max L.$$

$$\text{S.a } 0 \leq x \leq 6.$$

O máximo irrestrito do lagrangeano em relação a  $x$  é dado pela estacionaridade do lagrangeano em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx + 3 + \tilde{\rho} = 0 \quad x = \frac{\tilde{\rho}+3}{2k}$$

A solução restrita é dada por:

$$\hat{x} = 0 \quad \text{se } x \leq 0$$

$$\hat{x} = 0 \quad \text{se } \tilde{\rho} \leq -3$$

$$\hat{x} = x \quad \text{se } 0 < x < 6 \quad \text{ou seja,} \quad \hat{x} = x \quad \text{se } -3 < \tilde{\rho} < 12k-3$$

$$\hat{x} = 6 \quad \text{se } x \geq 6$$

$$\hat{x} = 6 \quad \text{se } \tilde{\rho} \geq 12k-3$$

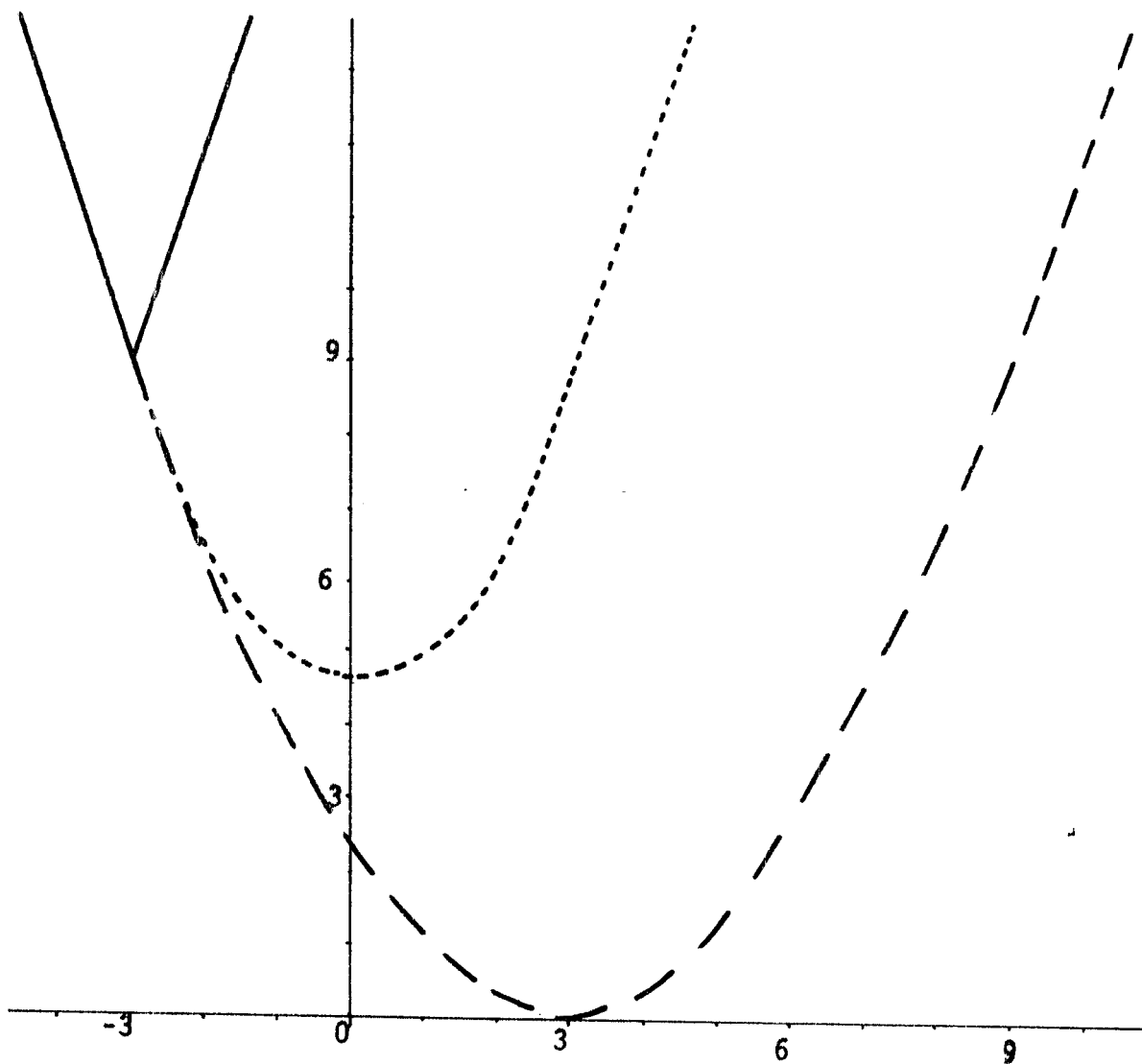
Portanto podemos expressar a função dual por:

$$h(\tilde{\rho}) = \begin{cases} -3\tilde{\rho} & \text{se } \tilde{\rho} \leq -3 \\ \frac{(\tilde{\rho}+3)^2}{4k} - 3\tilde{\rho} & \text{se } -3 < \tilde{\rho} < 12k-3 \\ 3\tilde{\rho} - 36k + 18 & \text{se } \tilde{\rho} \geq 12k-3 \end{cases}$$

A fig. abaixo mostra a função dual para três valores diferentes de  $k$ :  $k_0 = 0$  - linha contínua

$k_1 = 0,5$  - linha pontilhada

$k_2 = 1,0$  - linha tracejada



- Quanto menor o valor de  $k$ , menor é o intervalo de variação de  $\rho$  ( $-3 \leq \rho \leq 12k-3$ ) para o qual o máximo restrito do lagrangeano é igual ao máximo irrestrito.

- O gradiente da função dual é dada por:

$$g = \begin{cases} -3 & \text{se } \tilde{\rho} \leq -3 \\ \frac{\tilde{\rho}+3}{2k} & \text{se } -3 < \tilde{\rho} < 12k-3 \\ 3 & \text{se } \tilde{\rho} \geq 12k-3. \end{cases}$$

portanto, para qualquer  $\tilde{\rho}$  fora do intervalo  $-3 < \tilde{\rho} < 12k-3$  o gradiente é constante.

Quanto a solução de (P) temos:

- a solução ótima de (P):  $\hat{x} = 3$ .
- o multiplicador ótimo:  $\tilde{\rho} = 6k$ .
- a inclinação do hiperplano suporte à função objetivo no ponto de solução é dado por:

$$\frac{df}{dx} = -6k$$

que é igual (com sinal invertido) ao multiplicador ótimo.

Quando resolve-se este problema por um método dual clássico em dois níveis, o coordenador procura através da determinação de uma sequência de multiplicadores  $\rho$  "deslocar" o ótimo irrestrito do lagrangeano até o ponto  $x = 3$ .

Sabemos que para o ótimo irrestrito do lagrangeano fora do intervalo  $0 \leq x \leq 6$ , o gradiente do lagrangeano restrito é constante, e portanto a informação fornecida por este gradiente sobre a posição do ponto ótimo irrestrito é "incompleto". Sendo a mudança dos multiplicadores no coordenador feita a partir de informações deste gradiente, a coordenação do "deslocamento" do ponto ótimo ao ponto  $x=3$  será, possivelmente, menos eficiente quando o ponto ótimo se encontra fora do intervalo.

Quando o coeficiente  $k$  se aproxima de zero, o mesmo ocorre com o intervalo  $-3 \leq \rho \leq 12k-3$ , dificultando ao coordenador deslocar o ótimo irrestrito para  $x=3$ . Ou seja, quanto maior a proximidade da função objetivo à uma função linear, menos eficiente é a comandabilidade do método dual clássico.

### TESTES

A tabela (11) apresenta a resolução de três sistemas. onde o sistema A é idêntico ao sistema 1; o sistema B e C são idênticos ao sistema 1, exceto uma modificação na função objetivo. As novas fun-

ções objetivos apresentam coeficientes não lineares (a,b,c) menores (em módulo), mas com a mesma relação entre os autovalores e o mesmo ótimo irrestrito ( $x_0, u_0$ ).

SISTEMA	a	b	c	d	e	f	ITER	NTA	LIMITAÇÃO "NAB"
A	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-2}$	-10	37	143	1
B	$-10^{-6}$	$10^{-6}$	$-3 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$13 \cdot 10^{-3}$	-10	39	253	5
C	$-10^{-7}$	$10^{-7}$	$-3 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$13 \cdot 10^{-4}$	-10	42	575	20

tabela 11

Na tabela (12), o sistema I é idêntico ao sistema 1; o sistema II apresenta uma modificação na função objetivo. A diferença entre dois sistemas está na posição do ponto ótimo irrestrito.

$$\text{Sistema I} - (x_0, u_0) = (5.000, 3.000)$$

$$\text{Sistema II} - (x_0, u_0) = (50.000, 30.000)$$

SISTEMA	a	b	c	d	e	ITER	NTA	LIMITAÇÃO "NAB"
I	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-2}$	37	143	1
II	$-10^{-5}$	$10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$13 \cdot 10^{-1}$	169	2.306	81

Tabela 12

- No teste apresentado na tabela (11) notamos que quanto menor são os coeficientes não lineares (a,b,c), e portanto mais "lineares" as funções objetivos, maior é o tempo para a resolução do sistema.

- Embora os coeficientes não lineares dos dois sistemas apresentados na tabela (12) sejam iguais, é fácil ver que o sistema II opera em uma região em que a função objetivo é mais linear. Daí a dificuldade de comandabilidade do sistema II.

#### 4.4 - CONCLUSÕES

- A tabela abaixo fornece os tempos de processamento (CPU) da resolução dos sistemas 1, 2 e 3. A primeira coluna fornece os tempos de resolução sem a fase I; a 2.<sup>a</sup> coluna, com a fase I. A inicialização dos multiplicadores é nula.

SISTEMA	S/FASE I	C/FASE I
1	6.45 S	2.85 S
2	17.65 S	9.35 S
3	48.25 S	17.86 S

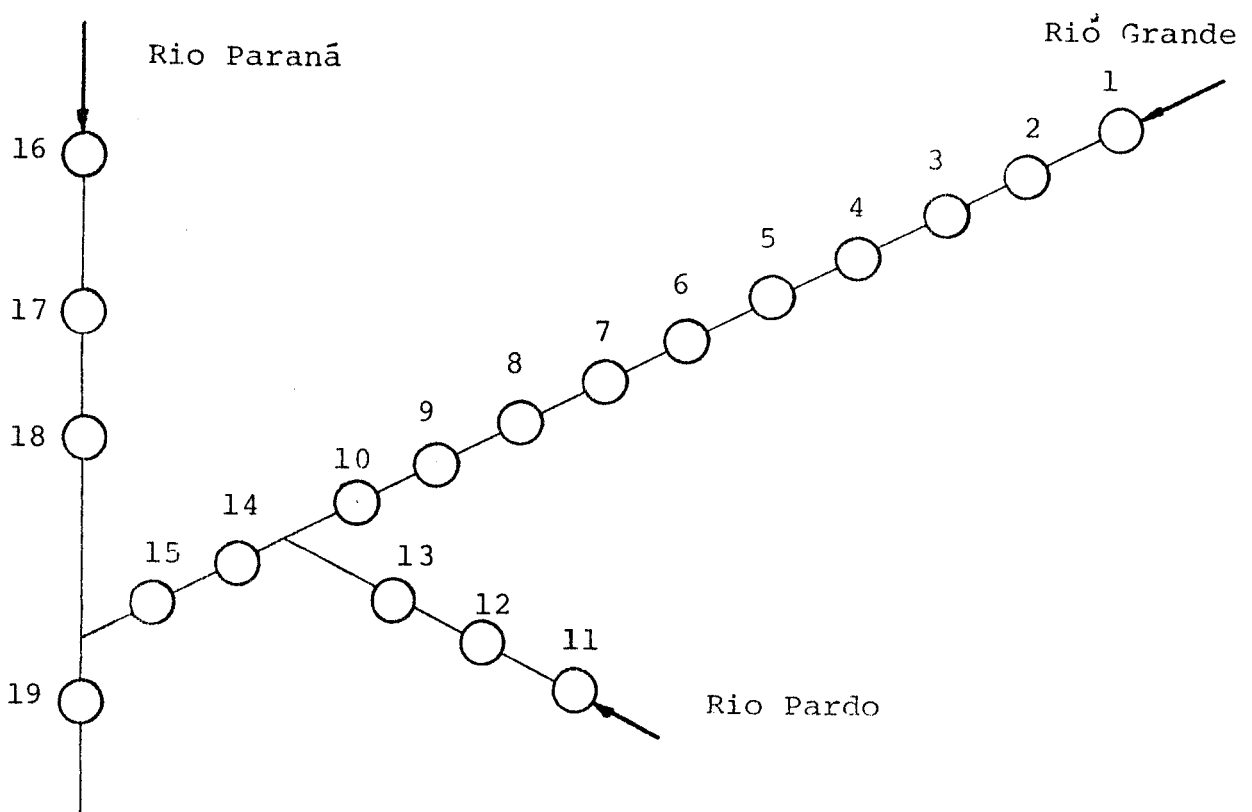
Notamos que a variação no tempo de resolução de um sistema para outro é relativamente grande, porém, mesmo a resolução do maior sistema (sistema 3) é ainda bastante rápida; o que parece indicar que a resolução de sistemas maiores não é proibitivo sob o aspecto do tempo computacional.

- A resolução por decomposição temporal requer relativamente poucas posições de memórias.
- A comandabilidade do método dual clássico é limitado pela "linearidade" da função objetivo.
- Quando a função objetivo é dada por uma função quadrática e côncava, o cálculo da função dual pode ser feito através de uma "árvore de decisão" bastante simples. Caso contrário, este cálculo será, certamente, muito mais complexo, implicando em um acréscimo no tempo computacional.

Fazemos neste capítulo algumas considerações sobre a otimização de um sistema hidroelétrico real, discutimos alguns critérios para a escolha das usinas a serem consideradas no processo de otimização, em função do horizonte de otimização. Fazemos também uma discussão sobre a função de geração de uma hidroelétrica e sua aproximação por uma função quadrática.

### 5.1 - SISTEMA HIDROELÉTRICO

Consideramos neste estudo um sistema hidroelétrico constituído das seguintes usinas.



NOME	XI (milhões de Ms.cúbicos)	XS (milhões de Ms.cúbicos)	POT. (MW)	V. ÚTIL (milhões de Ms.cúbicos)	T.ENCH. (dias)	V.MENSAL (milhões de Ms.cúbicos)
1 CAMARGOS	120.0	792.0	45.0	672.0	58.0	347.0
2 ITUTINGA	12.0	12.0	49.0	0.0	0.0	347.0
3 FUNIL	0.0	0.0	164.0	0.0	0.0	775.0
4 FURNAS	6170.0	20860.0	1280.0	14690.0	186.4	2363.9
5 PEIXOTO	1875.0	4080.0	477.0	2205.0	25.2	2623.1
6 ESTREITO	0.0	0.0	1104.0	0.0	0.0	2677.5
7 JAGUARA	0.0	0.0	680.0	0.0	0.0	2706.0
8 IGARAPAVA	480.0	480.0	240.0	0.0	0.0	2791.0
9 VOLTA GRANDE	750.0	2150.0	400.0	1400.0	14.4	2923.8
10 PORTO COLOMBIA	1450.0	1450.0	320.0	0.0	0.0	3258.1
11 GRAMINHA	51.0	555.0	80.0	504.0	114.4	132.2
12 EUCLIDES DA CUNHA	14.0	14.0	108.0	0.0	0.0	220.3
13 LIMOEIRO	25.0	25.0	28.0	0.0	0.0	220.3
14 MARIMBONDO	900.0	6150.0	1440.0	5250.0	35.5	4442.7
15 ÁGUA VERMELHA	4400.0	11000.0	1380.0	6600.0	39.6	5000.0
16 ITUMBIÁRA	3350.0	17027.0	2100.0	13677.0	104.5	3926.0
17 CACHOEIRA DOURADA	660.0	660.0	443.0	0.0	0.0	4095.0
18 SÃO SIMÃO	7000.0	12500.0	2680.0	5500.0	28.4	5808.7
19 ILHA SOLTEIRA	12743.0	21166.0	3230.0	8423.0	19.6	12861.5

tabela 5.1



A tabela 5.1 apresenta os seguintes dados:

XI - volume mínimo do reservatório.

XS - volume máximo do reservatório.

POT - potência instalada (MW)

V.UTIL - volume útil (XS-SI).

T-ENCH - tempo necessário para encher o volume útil, sem que haja turbinagem nem vertimento.

V.MENSAL - volume médio de água afluente no reservatório durante um mês.

## 5.2 - FUNÇÃO DE GERAÇÃO

Nesta secção fazemos uma discussão sobre a função de geração de uma usina real, e a sua aproximação por uma função quadrática.

Consideramos como exemplo a função de geração da usina de Ilha Solteira.

Vimos no cap. 1 que a função de geração é dada por uma função do tipo:

$$\phi_p(x,u) = K. (h_1(x) - h_2(u))u$$

onde  $K$  - cte

$$h_1(x) = c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$$

$$h_2(u) = d_1 u^4 + d_2 u^3 + d_3 u^2 + d_4 u + d_5.$$

Para o caso de Ilha Solteira estes coeficientes são:

$$C_1 = -5.3945E - 17$$

$$C_2 = 4.4839E - 12$$

$$C_3 = -1.5156E - 07$$

$$C_4 = 3.2761E - 03$$

$$C_5 = 2.9494E + 02$$

$$d_1 = 2.6898E - 17$$

$$d_2 = -1.2232E - 12$$

$$d_3 = 1.4529E - 08$$

$$d_4 = 1.5932E - 04$$

$$d_5 = 2.7991E + 02$$

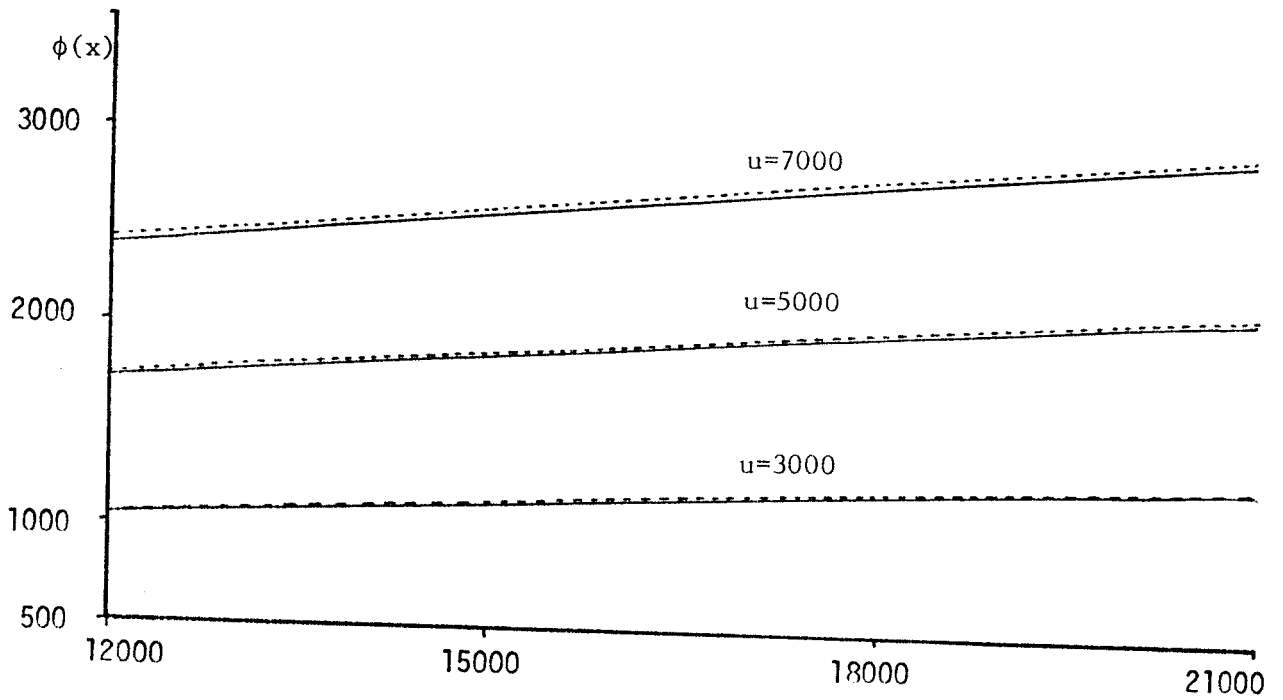


Gráfico 5.1

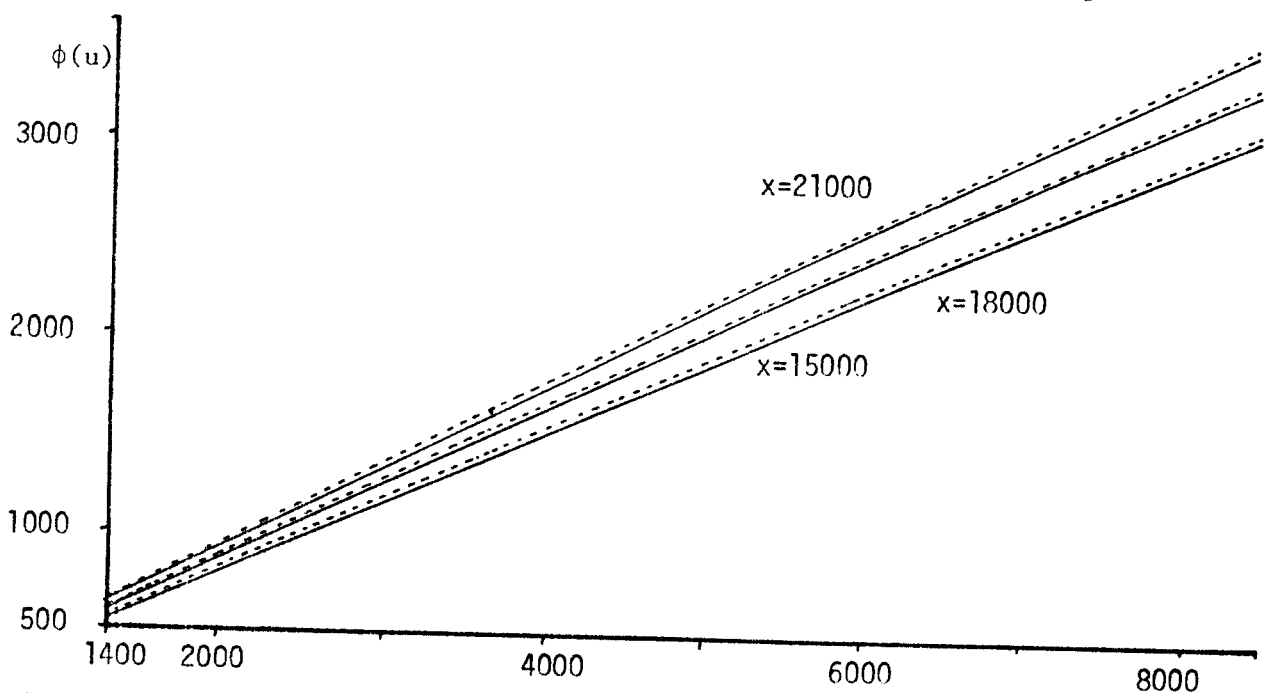
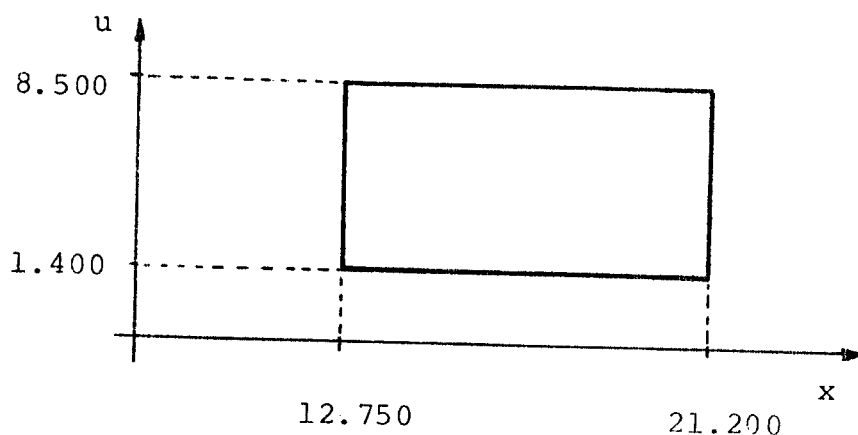


gráfico 5.2

"O retângulo de factibilidade" para Ilha Solteira é dada por:



Os gráficos 5.1 e 5.2 dão respectivamente  $\phi_p(x)$  e  $\phi_p(u)$ . (linhas contínuas), onde:

$$\phi_p(x) = \phi_p(x, u) \Big|_{u=\text{cte}} \qquad \phi_p(u) = \phi_p(x, u) \Big|_{x=\text{cte}}.$$

Através de um programa de "fitagem" determinou-se os seguintes coeficientes de uma função quadrática (para o caso de "Ilha Solteira"):

$$\begin{aligned} a &= -7,718 \cdot 10^{-7} & d &= 2,61 \cdot 10^{-2} \\ b &= 8,57 \cdot 10^{-6} & e &= 2,49 \cdot 10^{-1} \\ c &= -1,96 \cdot 10^{-6} & g &= -216,01 \end{aligned}$$

Esta função quadrática minimiza o erro quadrático em relação a função  $\phi_p(x, u)$  no retângulo de factibilidade.

A função quadrática dada por estes coeficientes não constitui uma função côncava, pois:  $4ac < b^2$ .

As curvas pontilhadas nos gráficos 5.1 e 5.2 representam respectivamente  $\phi(x)$  e  $\phi(u)$ , onde  $\phi(x, u) = ax^2 + bx + cu^2 + dx + eu + g$ .

Se  $\phi(x, u)$  é a quadrática que mais se aproxima da função  $\phi_p(x, u)$  e não é côncava, então a hipótese de que podemos representar a função real por uma quadrática "côncava" (cap.3) poderia incorrer em erros significativos. Entretanto, os coeficientes não lineares ( $a, b, c$ ) de  $\phi(x, u)$  são bastante próximos de zero; o que implica em um

comportamento muito próximo de uma função linear. Portanto, a representação da função de geração por uma quadrática côncava com um comportamento também próximo desta função linear, estaria, possivelmente, sujeito a erros pouco significativos.

Porém, como vimos em 4.3, a resolução de (SH) por decomposição temporal usando um método dual clássico é dificultado pela "linearidade" da função de geração. Donde concluímos que a resolução de um sistema hidroelétrico real por decomposição temporal é fortemente dificultado pela "linearidade" das funções de geração reais.

Este estudo foi realizado em outras usinas (Itumbiãra, São Simão, Água Vermelha e Marimbondo) e todas apresentaram as mesmas características: não concavidade na função de geração e "linearidade".

### 5.3 - HORIZONTE DE OTIMIZAÇÃO

A otimização da escala de geração de um sistema hidroelétrico, durante um certo horizonte de tempo, é basicamente uma distribuição no espaço (em que reservatório) e no tempo (em que instante) de uma quantidade limitada de água, de modo a maximizar (ou minimizar) uma dada função objetivo.

É obvio que para ser possível esta distribuição necessitamos de reservatórios capazes de fazer este "deslocamento" da água no tempo, isto é, acumular em determinados períodos para usá-la em outros. Por conseguinte, as usinas "fio d'água" não contribuem para a otimização, podendo portanto ser "eliminadas" da otimização.

Entretanto, a capacidade de "deslocamento" de um reservatório não é determinado unicamente pela sua capacidade de armazenamento, mas depende da relação entre a sua capacidade de armazenamento e o volume da vazão afluente a ele. Esta relação pode também ser interpretada como o tempo necessário para o enchimento do volume útil (T.ENCH), sem que haja vertimento nem turbinagens neste período.

Uma diferença fundamental entre a otimização de médio prazo (por ex. 1 ano) e a de curto prazo (por ex. 15 dias) está na variação das vazões dos rios. Enquanto que no horizonte de médio prazo a variação nas vazões é muito grande; para o horizonte de curto prazo a variação é, em geral, pouco significativa.

A otimização de médio prazo requer, portanto, um "deslocamento" de água dos períodos chuvosos para os períodos secos. E, os reservatórios que mais contribuem para isto são os reservatórios de Regularização Plurimensal (R.P.). Por outro lado, para um horizonte de curto prazo, a variação na cota dos reservatórios de R.P., devido ao volume de água afluente a ele, é desprezível.

Como os reservatórios de R.P. tem funções variadas de acordo com o horizonte de otimização, é conveniente que as formulações para o problema de planejamento de operação sejam diferentes para diferentes horizontes de otimização.

### 5.3.1 - PLANEJAMENTO DE MÉDIO PRAZO

A priori todas as usinas com reservatórios de RP devem ser consideradas na otimização do planejamento de operação em um horizonte de médio prazo, e todas as usinas com tempo de enchimento relativamente curtos (por exemplo, menos que 1 mês) devem ser eliminadas.

Porém, se o critério de escolha de usinas para o processo de otimização for apenas o tempo de enchimento, por exemplo na otimização do sistema apresentado na tabela 5.1 consideraremos apenas as usinas, 1,4,11,14,15,16. Vemos, no entanto, que embora os tempos de enchimento das usinas de "Camargo" e de "Graminha" sejam longos, as suas contribuições ao sistema em termos de potência gerada são desprezíveis. Por outro lado, temos usinas como "Ilha Solteira" e "São Simão" que embora tenham tempos de enchimento relativamente curtos, apresentam contribuições significativas em termos de potência.

A princípio consideramos todas as usinas com tempo de enchimento maior que um mês no planejamento de médio prazo. Entretanto, para a escolha deste tempo "básico" de referência (1 mês para o nosso caso) deve-se fazer um estudo mais detalhado em função de cada sistema real. Porém, para qualquer que seja este tempo "básico" de referência, os fatores que devem ser levados em conta na escolha das usinas a serem consideradas no processo de otimização, são:

- 1 - tempo de enchimento
- 2 - capacidade de geração de potência.

### 5.3.2 - PLANEJAMENTO DE CURTO PRAZO

A cota de um reservatório de RP. é praticamente constante durante um horizonte de curto prazo, conseqüentemente, a geração de potência da usina acoplada a este reservatório é função exclusivamente do volume de água turbinada. É fácil ver também que a política de operação desta usina independe da política de operação das usinas à montante. Ou seja, os reservatórios de RP. permitem que consideremos os subsistemas inferiores e superiores a ele como subsistemas independentes. Portanto, para um horizonte de curto prazo, é possível dividir o sistema hidroelétrico em vários subsistemas independentes, sendo os "pontos de divisão" os reservatórios de RP.

#### 5.3.2.1 - OTIMIZAÇÃO DE UM SISTEMA

A fig. 5.2 esquematiza um subsistema k:

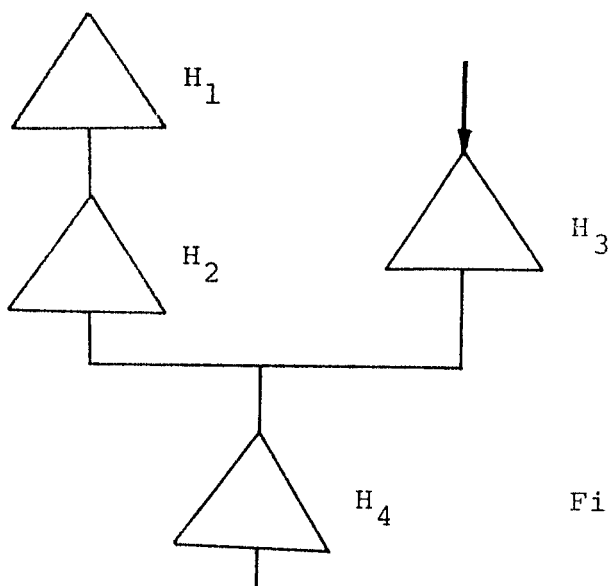


Fig. 5.2

onde a usina 1 é a usina com reservatório de RP.

Como é desprezível a variação no volume de um reservatório de RP, as restrições dinâmicas e  $x_j^m \in X_j$  são sempre satisfeitas. Portanto, o problema de maximização da geração de um subsistema pode ser formulada da seguinte forma:

$$\text{Máx} \quad \sum_{m \in M} \left\{ \hat{\lambda}^m \phi_k(\bar{x}_k^m, u_k^m) + \sum_{j \in A_k} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) \right\} \quad (1)$$

$$\text{S.a } \hat{x}_k = \frac{x_k^O + x_k^T}{2}$$

$$x_k^O, x_k^T \text{ dados}$$

$$\sum_{m \in M} u_k^m = x_k^T - x_k^O$$

$$u_k^m \in U_k$$

(PSS)

$$x_\ell^{m+1} = x_\ell^m + Y_\ell^m + u_k^{m-t_{k\ell}} - u_\ell^m \quad (\rho_\ell^m) \quad (2)$$

$$x_j^{m+1} = x_j^m + Y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t_{sj}} - u_j^m; \quad j \in A_k - \{ \ell \} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^m \in X_j \\ u_j^m \in U_j \end{array} \right\} ; j \in A_k$$

$$x_j^O, x_j^T \text{ dados}$$

onde  $k$  - índice da usina de RP.

$\ell$  - índice da usina imediatamente à jusante de  $k$ .

$A_k$  - conjunto dos índices de todas as hidroelétricas do sistema  $k$ , com exceção da usina de RP.

A interconexão entre a usina de RP. e as usinas a jusante é feita através da variável  $u_k$ ; portanto, se fixarmos esta variável podemos separar o problema da maximização das usinas a jusante de  $k$  no seguinte subproblema:

$$v(u_k) = \text{Máx} \sum_{m \in M} \sum_{j \in A_k} \hat{\lambda}^m \phi_j(x_j^m, u_j^m) \quad (4)$$

$$\text{S.a } x_{\ell}^{m+1} = x_{\ell}^m + y_{\ell}^m + u_k^{m-t_{k\ell}} - u_{\ell}^m \quad (\rho_{\ell}^m) \quad (5)$$

$$\text{(SP)} \quad x_j^{m+1} = x_j^m + y_j^m + \sum_{s \in S_j} u_s^{m-t_{sj}} - u_j^m \quad ; \quad j \in A_k - \{ \ell \} \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j^m \in X_j \\ u_j^m \in U_j \end{array} \right\} \quad ; \quad j \in A_k$$

$$x_j^0, x_j^T \text{ dados.}$$

A solução deste subproblema (SP) para diferentes valores de  $u_k$  constitui o valor da função de perturbação  $v(u_k)$ . Portanto, podemos representar o problema original (PSS) por um problema equivalente, projetado no espaço dos  $u_k^m$ ;  $m \in M$ , da seguinte forma:

$$\text{M\`ax} \quad \sum_{m \in M} \hat{\lambda}^m \phi_k(\hat{x}_k, u_k^m) + v(u_k) \quad (7)$$

$$\text{S.a} \quad \hat{x}_k = \frac{x_k^0 + x_k^T}{2}$$

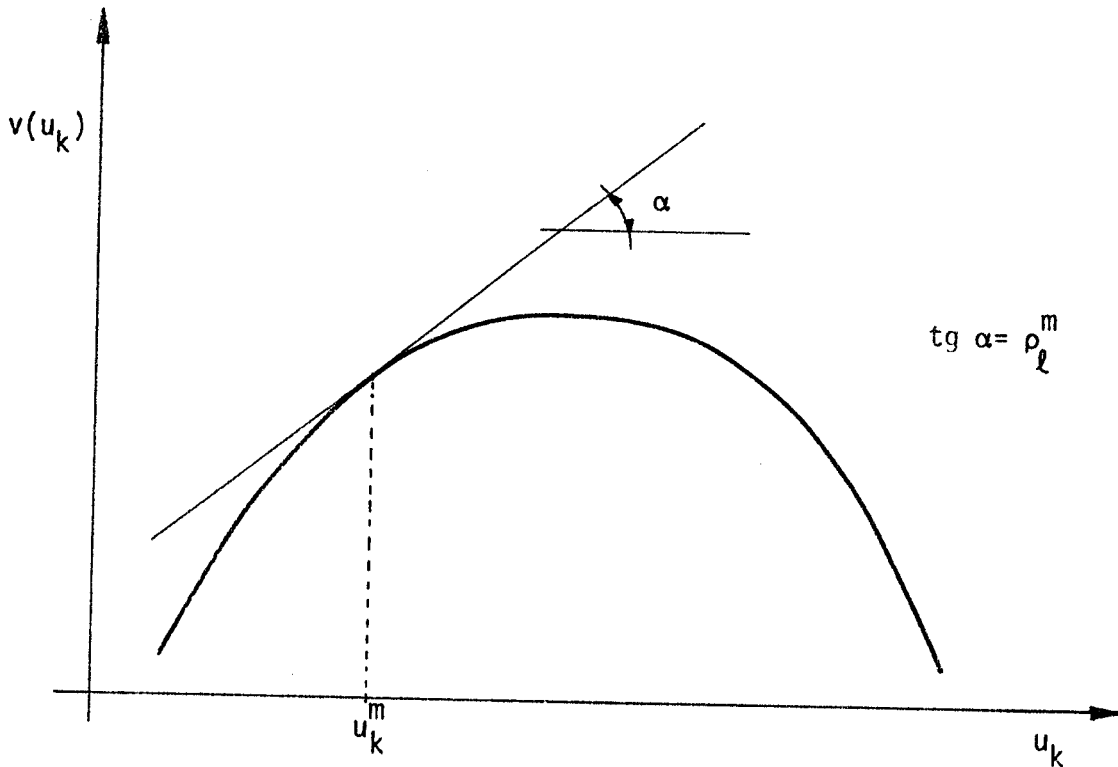
$$\text{(PM)} \quad \sum_{m \in M} u_k^m = x_k^T - x_k^0$$

$$u_k^m \in U_k$$

Como não dispomos da expressão analítica de  $v(u_k)$ , não podemos resolver diretamente o problema (PM). No entanto, é fácil provar [5] que o gradiente da função de perturbação  $v(u_k)$  (Fig. 5.3) é dado pelo multiplicador ótimo  $\rho_{\ell}$  associado à restrição (5) do subproblema (SP). Isso possibilita o cálculo do gradiente no (PM), que é dado pelas componentes:

$$g^m = \hat{\lambda}^m \frac{\partial \phi_k(\hat{x}_k, u_k^m)}{\partial u_k^m} + \rho_{\ell}^{m+t_{k\ell}} \quad (8)$$

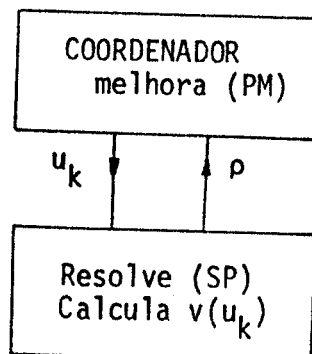




Através da informação deste gradiente podemos calcular um novo valor para  $u_k^m$ ;  $m \in M$ . Para efetuar este cálculo podemos usar, por exemplo, um método primal tipo gradiente projetado ou de direções factíveis.

Com o novo valor de  $u_k^m$ ;  $m \in M$ , repete-se o processo até que se satisfaça as condições de Kuhn-Tucker em (PM).

A fig. 5.4 esquematiza a resolução de (PSS)



A análise e a comparação entre os diversos métodos (o Gradien

te Conjugado, direções factíveis, etc...) de resolução desta proposta, bem como a sua implementação computacional não foram realizadas. Esta constitui uma das linhas de pesquisa a ser explorada futuramente.

#### 5.4 - OPERAÇÃO DAS USINAS FIO D'ÁGUA

Devido a incapacidade de acumular água, as usinas fio d'água são obrigadas a turbinar e/ou verter toda água que recebem. Consequentemente, estas usinas são obrigadas a operar de acordo com a política de operação da usina a montante. Isto permite um "acoplamento", somando à função de geração da usina a montante a função da usina fio d'água.

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] - S. SOARES, "Programação Matemática de Grande Porte - Uma aplicação à Sistemas Hidrotérmicos de Potência", tese de Doutora - mento apresentado à Faculdade de Engenharia de Campinas, outubro de 1978.
- [ 2 ] - S. SOARES, C. LYRA, H. TAVARES, "Optimal Generation Scheduling of Hydrothermal Power Systems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-99, nº 3, may/june-1980.
- [ 3 ] - C. LYRA, "Otimização da Escala de Geração em Sistemas de Potência Hidrotérmicos", tese de mestrado apresentado à Faculdade de Engenharia de Campinas, julho de 1979.
- [ 4 ] - A.S. SOUZA, "Operação Econômica de Usinas Reversíveis", tese de mestrado apresentado à Faculdade de Engenharia de Campinas, dezembro de 1980.
- [ 5 ] - L.S. LASDON, "Optimization Theory for Large Scale Systems", Macmillan, 1970.
- [ 6 ] - D.G. LUENBERGER, "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wisley Publishing Company, 1973.
- [ 7 ] - A. TITLI, "Commande Hiérarchisée et Optimisation des processus complexes", Dunod Automatique, 1975.
- [ 8 ] - J.D.C. LITTLE, "The use of Storage Water in a Hydroelectric Systems", ORSA, 1955.
- [ 9 ] - B. BERNHOLTZ, L.V. GRAHAN, "Hydrothermal Economic Scheduling - Part. I: Solutions by Incremental Dynamic Programming", AIEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-79, dezembro, 1960.
- [ 10 ] - E.B. Dahlin, D.N.C. SHEN, "Application of Dynamic Programming to Optimization of Hydroelectric/Steam Power System Operation", Proc. IEE, vol. 112, nº 12, dezembro, 1965.

- [ 11 ] - F.J. REES, R.E. LARSON, "Computer-Aided Dispatching and Operations Planning for an Electric Utility with Multiple Types of Generation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-90, março/abril, 1971.
- [ 12 ] - M. HEIDARI, Y.T. CHOW, P.K. KOKOTOVIĆ e D.D. MEREDITH, "The Discrete Differential Dynamic Programming Approach to the water Resources Systems Optimization", water Resources Res.7, 1971.
- [ 13 ] - L.K. KIRCHMAYER, "Economic Operation of Power Systems", John Wiley & Sons, 1958.
- [ 14 ] - A.F. GLIM e L.K. KIRCHMAYER, "Economic Operation of Variable Head Hydroelectric Plants", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 77, dezembro, 1958.
- [ 15 ] - J.H. DRAKE, L.K. KIRCHMAYER, R.B. MAYALL e W. WOOD, "Optimum Operation of a Hydrothermal Systems", AIEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol. 80, 1962.
- [ 16 ] - E.B. DAHLIN e D.W.C. SHEN, "Optimal Solution to the Hydro-Steam Dispatch Problem for Certain Practical Systems", IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-85, maio, 1966.
- [ 17 ] - S. NARITA, "The Application of the Maximum Principle to the Calculation of the Most Economical Operation of Power Systems", Electrical Engineering in Japan, vol. 85, novembro, 1965.
- [ 18 ] - I. HANO, Y. TAMURA e S. NARITA, "An Applications of the Maximum Principle to the Most Economical Operation of Power Systems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-85, maio, 1966.
- [ 19 ] - A. TURGEON, "Optimal Operation of a Hydro-Steam Power Systems", Ph. D. Thesis, Cornell University, 1975.

- [ 20 ] - M. RAMAMOORTY e J. GAPOLA RAO, "Load Scheduling of Hydroelectric Thermal Generating Systems using Nonlinear Programming Techniques", Proc. IEE, vol. 117, abril, 1970.
- [ 21 ] - A.P. BONAERT, A.H. EL-ABIAD e A.J. KOIVO, "Optimal Scheduling of Hydrothermal Power Systems", PICA Conference, Boston, maio, 1971.
- [ 22 ] - S.K. AGARWALL e I.J. NAGRATH, "Optimal Scheduling of Hydrothermal Systems", Proc. IEE, vol. 119, fevereiro, 1972.
- [ 23 ] - T.N. SAHA e S.A. KHAPARDE, "An Application of a Direct Method to the Optimal Scheduling of Hydrothermal Systems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-97, maio/junho, 1978.
- [ 24 ] - J.C. GEROMEL e L.F.B. BAPTISTELLA, "A Feasible Direction Method for Large Scale Nonconvex Programs - A Decomposition Approach", Rapport interne, LAAS - CNRS, Toulouse, 1978.
- [ 25 ] - J.C. GEROMEL e H.P.L. LUNA, "Operação Ótima de Sistemas Hidrotérmicos - um Método Primal de Solução", XIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SOBRAPO - Rio de Janeiro, outubro, 1980.
- [ 26 ] - M.A. HASCOM, L. LAFOND, L. LASDON, G. PRONOVOST, "Modeling and Resolution of the Medium term Energy generation planning problem for a Large Hydroelectric System", Institut de Recherches d'Hydro-Québec.