



**UNICAMP**

Mariana Carolina de Assis

# REFLETORES PARABÓLICOS USADOS NA GERAÇÃO DE FEIXES NÃO DIFRATIVOS

Campinas  
2013

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Mariana Carolina de Assis

REFLETORES PARABÓLICOS USADOS NA GERAÇÃO DE FEIXES NÃO DIFRATIVOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de mestra em Engenharia Elétrica, na área de Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. Michel Zamboni Rached

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna, e orientada pelo Prof. Dr. Michel Zamboni Rached

---

Campinas  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

As76r Assis, Mariana Carolina de, 1983-  
Refletores parabólicos usados na geração de feixes não difrativos / Mariana Carolina de Assis. - Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Michel Zamboni Rached.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Difração. 2. Física ótica. 3. Eletromagnetismo. 4. Microondas. I. Rached, Michel Zamboni. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Parabolic reflectors used in generation of nondiffracting beams

**Palavras-chave em inglês:**

Diffraction

Optical physics

Electromagnetism

Microwaves

**Área de concentração:** Telecomunicações e Telemática

**Titulação:** Mestra em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

Michel Zamboni Rached [Orientador]

Antonio Manoel Ferreira Frasson

Cesar José Bonjuani Pagan

**Data de defesa:** 15-02-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidata:** Mariana Carolina de Assis

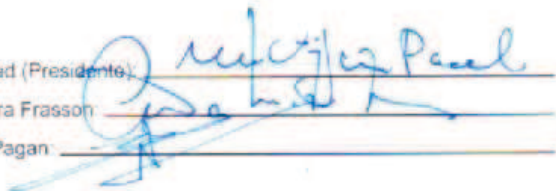
**Data da Defesa:** 15 de fevereiro de 2013

**Título da Tese:** "Refletores Parabólicos Usados na Geração de Feixes Não Difrativos"

Prof. Dr. Michel Zamboni Rached (Presidente)

Prof. Dr. Antonio Manoel Ferreira Frasson

Prof. Dr. Cesar José Bonjuani Pagan

Handwritten signatures in blue ink over horizontal lines. The top signature is clearly legible as 'Cesar José Pagan'. The middle signature is less legible but appears to be 'Antonio Manoel Ferreira Frasson'. The bottom signature is also less legible but appears to be 'Michel Zamboni Rached'.

À MAMÃE, QUE ME ENSINOU A ANDAR;  
A PAPAI, QUE ME ENSINOU A VOAR...

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Grande Deusa, pela beleza sedutora da Natureza que conduziu-me à Ciência.

À mãe, que me ensinou a ambicionar o conhecimento, e ao pai, que me ensinou a me deleitar com ele - e falta dele! São 29 anos de muito apoio, carinho, amor - e 11 de telefonemas diários!

Ao Guilherme, pelas madrugadas de apoio, chás, carinho, e intermitentes tentativas de ensinar-me a programar! Obrigada por ter estado ao meu lado!

Um agradecimento especial aos dois seres mais atuantes em minha vida, Petito e Norman, simplesmente por existirem - e me trazerem tanta alegria por isso. E mesmo que não possam ler este agradecimento, não poderia deixá-los de fora!

Aos meus amigos de laboratório, peruanos, cubanos e brasileiros. Em especial ao Iury - pela paciência em ensinar-me "engenhêrês", Roger - pela companhia ao trilharmos o mesmo caminho - e Aleixo, que me mostrou que dormir é algo totalmente dispensável!

Um grande Obrigada ao Léo Ambrósio, que com toda a paciência mostrou-me o mundo da programação, e todo o suporte computacional que possibilitou meu trabalho com simulações!

À minha melhor amiga Paula, pelas tantas conversas e discussões eletromagnéticas pela madrugada - e eternos conflitos existenciais compartilhados!

À minha amiga/madrinha Marlene, uma alma especial e abençoada, cuja companhia sempre me traz momentos de paz e felicidade. Obrigada por todo o apoio, amizade e ensinamentos!

Ao professor Hugo Figueroa, pela confiança em aceitar-me nessa empreitada e, posteriormente, professor Michel, meu orientador, pela confiança, paciência e orientação! Às secretárias Noêmia e Mazé, que tiveram tanta paciência e bondade com meus tantos tropeços no caminho! Muito obrigada pela compreensão e o bom humor, sempre recebendo a todos os alunos com extrema prestatividade!

Um agradecimento especial ao professor Erasmo Recami, cujos encontros, mesmo que raros, trazem-me sempre ensinamentos preciosos.

Sou grata também à CAPES, pelo suporte financeiro.

Obrigada a todos!

# Resumo

O fenômeno da difração gera o alargamento espacial gradativo de feixes e pulsos não guiados durante a propagação, sendo, portanto, um fator limitante para qualquer aplicação onde se deseja que a onda em questão mantenha sua localização transversal - como em Pinças Ópticas, Comunicações Ópticas do Espaço Livre (FSO), entre outros.

As chamadas ondas não difrativas são soluções especiais da equação de onda que se mostram resistentes ao fenômeno da difração por longas distâncias. Porém, as versões ideais destas ondas apresentam fluxo de potência infinito através do plano perpendicular à direção de propagação, portanto, impossibilitando sua geração. No entanto, é possível gerar as versões truncadas destes feixes que, apesar de não serem totalmente isentos da difração, eles se mostraram bem resistentes a este fenômeno, mantendo-se ao longo de distâncias consideráveis antes de perderem sua concentração transversal (por exemplo, quando comparados a um feixe gaussiano ordinário, podendo apresentar uma profundidade de campo dezenas de vezes maior).

Neste trabalho, propõe-se a geração de feixes não difrativos usando um refletor parabólico tendo uma fonte de ondas esféricas posicionada num ponto ligeiramente deslocado de seu foco ( no sentido de afastamento do refletor), a partir de uma abordagem escalar que se mostrou satisfatória como primeira aproximação. E apesar de serem analisados os regimes de infravermelho (comprimento de onda de 850nm) e limiar entre micro-ondas e ondas milimétricas (comprimento de onda de 1cm, 2cm e 3cm) - que, além da ampla aplicabilidade, propiciam uma montagem experimental relativamente simples dado que as dimensões apropriadas para o refletor podem ser encontradas em uma antena parabólica ordinária - os resultados obtidos também podem ser extrapolados para o espectro óptico.

Palavras-chave: Difração, Óptica Física, Eletromagnetismo, Micro-ondas.

# Abstract

The phenomenon of diffraction causes gradual spatial broadening of beams and pulses during propagation, and is characterized as a limiting factor for any application where it is desired that the wave maintains its transverse localization - as in Optical Tweezers, Freespace Optical Communications (FSO), among others.

The so called nondiffracting waves are special solutions of the wave equation able to resist the diffraction effects for long distances. But the ideal versions of these waves have an infinite power flow through the perpendicular plane to the propagation direction, so being impossible their generation. However, it is possible generate the truncated versions of these beams that, although not being completely free of diffraction, they proved be quite resistant to this phenomenon, sustaining themselves over considerable distances before losing their transverse concentration (for example, when compared to an ordinary gaussian beam, whose field depth can be dozens of times greater).

In this work, we propose the generation of nondiffracting beams using a parabolic reflector having a source of spherical waves positioned at a point slightly displaced from its focus (moving away from the reflector), from a scalar approach which has proven to be satisfactory as first approximation. And despite being analyzed infrared (wavelength of 850nm) and threshold between microwave and millimeter wave spectra (wavelength of 1cm, 2cm and 3cm) - that, besides the wide applicability, allow a relatively simple experimental setup since the proper dimensions to the reflector can be found in an ordinary parabolic antenna - the results can be extrapolated to the optical spectrum.

Key-words: Diffraction, Optical Physics, Eletromagnetism, Microwaves.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Glossário</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 A Difração : uma breve introdução histórica . . . . .	1
1.2 Motivação do Trabalho . . . . .	2
1.3 Organização da Dissertação . . . . .	3
1.4 Referências . . . . .	5
<b>2 Os Feixes Não Difrativos</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução . . . . .	6
2.2 A Equação de Onda . . . . .	7
2.3 O Feixe Gaussiano . . . . .	9
2.4 O Feixe de Bessel . . . . .	11
2.5 Resultados Numéricos . . . . .	14
2.5.1 Infravermelho . . . . .	14
2.5.2 Micro-ondas . . . . .	18
2.6 Conclusão . . . . .	21
2.7 Referências . . . . .	23
<b>3 Geração de Feixes Não Difrativos via Refletores Parabólicos: Uma Abordagem Escalar</b>	<b>24</b>
3.1 Introdução . . . . .	24
3.2 O Refletor Parabólico . . . . .	25
3.3 Geração do Foco Estendido . . . . .	26
3.4 Resultados . . . . .	29
3.4.1 Infravermelho . . . . .	30
3.4.2 Micro-Ondas . . . . .	33
3.5 Descrição Aproximada do Padrão Transversal do Feixe Resultante . . . . .	43
3.6 Conclusão . . . . .	47

3.7	Referências . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>49</b>
4.1	Trabalhos Futuros . . . . .	49
4.2	Referências . . . . .	51
<b>A</b>	<b>Cálculo de <math>\rho''</math> em função de <math>\rho'</math></b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo do Comprimento do Foco Estendido</b>	<b>56</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo do ângulo de áxicon variável</b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

1.1	Refletor parabólico com foco em $z_f$ e fonte de ondas esféricas em $z_p$ , cujos raios tendem a convergirem ao longo de uma distância focal, ou foco estendido. . . . .	3
2.1	Montagem experimental utilizada por Durnin et al. na geração do feixe de Bessel. Para tal, foi utilizado um laser como fonte de luz colimada de comprimento $\lambda$ que ilumina uma abertura anular de comprimento $\delta a$ , posicionada sobre o plano focal de uma lente convergente de comprimento focal $f$ e raio $R$ que, por sua vez, define a abertura finita que determina o truncamento do feixe de Bessel. . . . .	7
2.2	Esquema interpretativo da solução da equação de onda (2.10) com o espectro $S(\kappa_\rho, \omega)$ dado pela Eq. (2.11), como uma superposição de ondas planas, sendo que as mais intensas possuem componente longitudinal $\vec{\kappa}_z$ , do vetor de onda $\vec{\kappa} = \vec{\kappa}_\rho + \vec{\kappa}_z$ , como predominante. . . . .	10
2.3	O feixe de Bessel eixo-simétrico é gerado por uma superposição de ondas planas cujos vetores se localizam na superfície de um cone de ângulo de vértice igual a $2\theta$ , onde $\theta$ é algumas vezes chamado de ângulo de áxicon. . . . .	11
2.4	Truncamento do feixe de Bessel a partir de uma abertura circular finita de raio $R$ . Este truncamento limita seu número de anéis secundários de intensidade, o que, portanto, faz com que sua auto-reconstrução - ou seja, a capacidade que este feixe possui de recompor seu spot central a partir de seus anéis laterais - seja possível ao longo de uma distância finita; distância esta que determina a profundidade de campo do feixe de Bessel truncado. . . . .	13
2.5	(a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe de Bessel, em $\lambda = 850\text{nm}$ , truncado a partir de uma abertura de $2.0\text{mm}$ com ângulo de áxicon $\theta = 0.006\text{rad}$ , portanto, com raio de spot central, determinado a partir da Eq. (2.19), de $68\mu\text{m}$ . . . .	14
2.6	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.5. . . . .	15
2.7	Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig 2.5 e Fig 2.6. . . . .	15
2.8	(a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de $68\mu\text{m}$ , com $\lambda = 850\text{nm}$ . . . .	16
2.9	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.8. . . . .	16
2.10	Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig 2.8 e Fig 2.9. . . . .	17

2.11	"Cortes" transversais dos feixes de Bessel e gaussiano para três posições distintas: $z = 1\text{mm}$ , $z = 1\text{cm}$ e $z = 10\text{cm}$ . Nestas três posições de $z$ o feixe de Bessel mantém a distribuição de intensidade ao longo de seu pico central praticamente inalterada; enquanto que, para o feixe gaussiano, o decaimento da intensidade, seguido pela consequente abertura de seu spot, é bem evidente. Em especial, em $z = 10\text{cm}$ , enquanto o feixe de Bessel apresenta spot praticamente inalterado, o feixe gaussiano já se extinguiu. . . . .	17
2.12	(a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe de Bessel truncado a partir de uma abertura de $1.025\text{m}$ , em $\lambda = 1\text{cm}$ , com ângulo de áxicon $\theta = 0.0383\text{rad}$ , portanto, com raio de spot, determinado a partir da Eq. (2.19), de $10\text{cm}$ . . . . .	18
2.13	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.12. . . . .	18
2.14	Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig. 2.12 e Fig. 2.13. . . . .	19
2.15	(a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de $10\text{cm}$ , com $\lambda = 1\text{cm}$ . . . . .	19
2.16	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.15. . . . .	20
2.17	Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig. 2.15 e Fig 2.16. . . . .	20
2.18	"Cortes" transversais dos feixes de Bessel e gaussiano para três posições distintas: $z = 1\text{cm}$ , $z = 5\text{m}$ e $z = 10\text{m}$ . Nestas três posições de $z$ pode-se perceber que o feixe de Bessel mantém a distribuição de intensidade ao longo de seu pico central praticamente inalterada; enquanto que, para o feixe gaussiano, o decaimento da intensidade, seguido pela consequente abertura de seu spot, é bem evidente. . . . .	21
3.1	Lugar Geométrico dos pontos que definem uma parábola no plano $(z, \rho)$ que, no caso tridimensional, representa a superfície gerada a partir da rotação da parábola em torno de seu eixo, formando um <i>paraboloide de revolução</i> . . . . .	25
3.2	Refletor parabólico com foco em $(z_f, 0)$ com fonte de ondas esféricas posicionada sobre o eixo $z$ em $(z_p, 0)$ , sendo $z_p > z_f$ . . . . .	27
3.3	Propagação do padrão de intensidade de um feixe de $\lambda = 850\text{nm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do paraboloide") de $1.025\text{mm}$ de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de $25\mu\text{m}$ . . . . .	30
3.4	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.3. . . . .	30
3.5	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.3 e Fig. 3.4 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	31
3.6	Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de $\approx 12\mu\text{m}$ , com um $\lambda = 850\text{nm}$ . . . . .	32
3.7	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.6. . . . .	32
3.8	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.6 e Fig. 3.7 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	33

3.9	Propagação do padrão de intensidade de um feixe de $\lambda = 1\text{cm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do paraboloide") de 1.025m de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de 2.5cm. . . . .	34
3.10	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.9. . . . .	34
3.11	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.9 e Fig. 3.10 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	35
3.12	Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 10cm, com $\lambda = 1\text{cm}$ . . . . .	35
3.13	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.12. . . . .	36
3.14	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.12 e Fig. 3.13 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	36
3.15	Propagação do padrão de intensidade de um feixe de $\lambda = 2\text{cm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do paraboloide") de 1.025m de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de 2.5cm. . . . .	37
3.16	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.15. . . . .	37
3.17	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.15 e Fig. 3.16 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	38
3.18	(a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 20cm, com $\lambda = 2\text{cm}$ . . . . .	38
3.19	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.18. . . . .	39
3.20	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.18 e Fig. 3.19 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	39
3.21	Propagação do padrão de intensidade de um feixe de $\lambda = 3\text{cm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do paraboloide") de 1.025m de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de 2.5cm. . . . .	40
3.22	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.21. . . . .	40
3.23	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.21 e Fig. 3.22 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	41
3.24	Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 25cm, com $\lambda = 3\text{cm}$ . . . . .	41
3.25	Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.24. . . . .	42
3.26	Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.24 e Fig. 3.25 sobre o eixo de propagação $z$ . . . . .	42

3.27	Discretização do parabolóide em cinturões e discretização destes cinturões em elementos de plano cujas dimensões são tomadas como sendo muito superiores que do comprimento de onda da fonte. A "porção" de onda esférica incidente é refletida na superfície do refletor parabólico como uma "porção" de onda plana, não sofrendo difração considerável até cruzar com o eixo $z$ . . . . .	43
3.28	Campo emanado do refletor parabólico de raio 1.025m, com foco $z_f = 0.5m$ e fonte de ondas esféricas afastada a 2.5cm de $z_f$ , considerando $\lambda = 1cm$ . A projeção ortogonal foi obtida a partir da normalização do valor da intensidade ao longo do eixo $z$ ( $z, \rho = 0$ ), portanto, $\frac{\Psi(\rho,z)}{\Psi(\rho=0,z)}$ ; em que, portanto, tem-se apenas a informação acerca da evolução do padrão transversal do feixe, sem qualquer informação a respeito de sua intensidade. . . . .	45
3.29	Projeção ortogonal do feixe de Bessel $e^{-i\omega t} J_0(\frac{\omega}{c} \sin \theta \rho)$ de ângulo de áxicon variável $\theta$ , onde este último respeita a relação dada pela Eq. (3.15). . . . .	46
A.1	Esquema lateral do refletor parabólico a partir do qual se obtém as relações geométricas utilizadas na obtenção da variável $\rho''$ em função da variável $\rho'$ . . . . .	52
B.1	Esquema lateral do refletor parabólico a partir do qual se obtém as relações geométricas que possibilitarão o cálculo do comprimento do foco estendido. . . . .	56
B.2	Variação da distância alcançada pelo feixe refletido no parabolóide com relação à coordenada $\rho'$ referente aos pontos sobre este (azul tracejado). O gráfico também mostra como se dá a variação da amplitude na abertura do refletor (vermelho). Aqui, foi considerado o comprimento de onda de 1cm, e um refletor parabólico de raio 1, 025m, com foco em $z_f = 0, 5m$ e fonte afastada deste em 2, 5cm. . . . .	59
C.1	Esquema lateral do refletor parabólico a partir do qual se obtém as relações geométricas que possibilitarão o cálculo do ângulo variável $\theta$ . . . . .	60

# Lista de Símbolos

$c$	-	Velocidade da luz
$k_f$	-	Foco do refletor parabólico sobre o eixo de propagação $z$
$k_p$	-	Posição da fonte de ondas esféricas sobre o eixo de propagação $z$
$\theta$	-	ângulo de áxicon
$R$	-	Raio da abertura
$\rho'$	-	Coordenada espacial sobre a superfície do refletor parabólico
$\rho''$	-	Coordenada espacial sobre a abertura do refletor parabólico
$\kappa_\rho$	-	Número de onda transversal
$\kappa_z$	-	Número de onda longitudinal
$D_{min}$	-	Posição inicial do foco estendido
$D_{max}$	-	Posição final do foco estendido
$\lambda$	-	Comprimento de onda
$\Delta\rho$	-	raio do spot do feixe

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 A Difração : uma breve introdução histórica

A primeira menção à difração deu-se por Leonardo da Vinci (1452-1519) [1], no entanto, somente em 1665, através de um livro publicado pelo físico italiano Francesco Grimaldi, recebeu uma maior atenção - assim como sua atual denominação, originária da palavra latina *diffractio* que significa "rompimento", referindo-se à deflexão dos raios luminosos.

Em 1678, a partir da análise qualitativa do experimento de espalhamento da luz através de uma fenda, Christian Huygens deu os primeiros passos para a compreensão do fenômeno apoiando-se em uma teoria ondulatória da luz, indo contra a ideia vigente da época de uma teoria corpuscular, defendida por Isaac Newton. Para tal, Huygens considerava que *cada ponto da abertura ou frente de onda age como uma fonte pontual de ondas esféricas secundárias*, enunciando, assim, o que se chama hoje de Princípio de Huygens.

O apoio massivo à teoria corpuscular da luz impediu avanços no estudo da difração por mais de um século. Até que em 1804, o físico inglês Thomas Young, tratando de seu famoso experimento de duas fendas, introduziu o conceito de *interferência* através do qual ao se sobrepor raios de luz pode-se obter regiões de luminosidade ou escuridão [2]. Em 1818, Augustin Fresnel combinou o Princípio de Huygens com o conceito de interferência de Young, aplicando-os à propagação de ondas monocromáticas, acrescentando algumas suposições sobre as amplitudes e fases das supracitadas ondas secundárias de Huygens [3].

E, em 1882, as ideias de Huygens, Young e Fresnel obtiveram um embasamento matemático rigoroso através de Gustav Kirchhoff, cujas suposições iniciais foram posteriormente ajustadas por Sommerfeld e, mais tarde, recebendo um tratamento vetorial por Kotler [2].



## 1.2 Motivação do Trabalho

Feixes e Pulsos são construídos através de superposições de ondas planas que se propagam em diferentes direções, o que lhes acarreta um alargamento (deformação) espacial gradativo ao longo da propagação; a este fenômeno damos o nome de difração. Dessa forma, atualmente, o conceito da difração extrapolou a ideia original de onda espalhada mediante obstáculo e/ou fenda posicionados frente à sua direção de propagação, para a ideia de um fenômeno que está presente em todos os campos ondulatórios propagantes em meios não guiados.

Para compensar a difração, em geral, utiliza-se de meios guiados, como guias metálicos no domínio de micro-ondas e fibras ópticas no domínio óptico. Entretanto, no espaço livre, a difração é inerente a todos os campos ondulatórios, logo, uma maneira de compensá-la apresentou-se como um grande desafio quando surgiram aplicações em que se desejava que a onda mantivesse sua localização transversal. Neste contexto, surgiram as *Ondas Localizadas*, também chamadas de *Não Difractivas*<sup>1</sup>.

O exemplo mais trivial de onda não difrativa é a onda plana, que é solução monocromática da equação de onda em coordenadas cartesianas, e que, por muito tempo, acreditou-se ser a única solução isenta de difração. Entretanto, em 1941, em um trabalho de Stratton [4], foi demonstrada uma outra forma de solução monocromática no sistema de coordenadas cilíndrico circular, cujo padrão de intensidade, concentrado em torno de seu eixo de propagação, é representado por uma função de Bessel. No entanto, uma vez que as funções de Bessel não são quadraticamente integráveis, a solução do feixe de Bessel possui energia infinita; portanto, um fator limitante para a geração desses feixes ideais, fazendo com que estes feixes fossem deixados à margem de maior atenção por muitos anos.

Somente em 1987, Durnin et al [5] publicou uma metodologia experimental capaz de gerar estes feixes de Bessel ópticos truncados a partir de uma abertura circular que, mesmo sendo alternativas aproximadas aos feixes de Bessel ideais, apresentaram uma grande resistência à difração. Após esta demonstração, tais feixes tornaram-se foco de atenção de físicos e engenheiros, e uma variada gama de possíveis aplicações foram surgindo em diversas áreas. De imediato, tais feixes sugerem a aplicação em comunicações sem fio, surgindo como uma alternativa mais simples à curtas distâncias ao uso de cabos e fibras ópticas; entretanto, também encontram aplicabilidade em guiamento óptico de átomos, pinças ópticas, microlitografia, alinhamento óptico à longa distância, captação de imagem e cirurgia a laser na medicina, entre outras [6].

O objetivo desta dissertação é, sobretudo, apresentar uma forma simples de geração de feixes com características não difrativas, comparando-os com uma classe de feixes não difrativos conhecidos, os feixes de Bessel, assim como com um feixe bastante comum, sem qualquer propriedade de resistência à difração, o feixe gaussiano; e, assim, analisando as vantagens e desvantagens desses novos feixes.

---

<sup>1</sup>Embora a difração permaneça agindo, evidenciando a propriedade de auto-reconstrução destas ondas perante este fenômeno.

Para tal, propõe-se a geração de feixes não difrativos usando um refletor parabólico tendo uma fonte de ondas esféricas posicionada num ponto ligeiramente deslocado de seu foco (no sentido de afastamento do refletor), a partir de uma abordagem escalar, que se mostrou satisfatória num regime de aproximação em que se considere as dimensões do refletor parabólico bem superiores à ordem de grandeza do comprimento de onda da fonte. Este regime de aproximação, permitiu-nos utilizar de geometria de raios, onde se sabe que todo raio que passar pelo foco do paraboloide será refletido com direção paralela ao eixo do refletor. Dessa forma, ao afastarmos a fonte de ondas esféricas do foco do paraboloide, os raios que incidem neste não sairão mais paralelos ao seu eixo. Na verdade, cada raio refletido cruzará o eixo do paraboloide em uma posição que dependerá, além da posição da fonte de ondas esféricas, do ponto de incidência do raio no refletor. Ou seja, não haverá um único ponto focal para todos os raios, mas sim, uma distância focal, ou, como chamaremos ao longo do trabalho, um *foco estendido*. Sendo esta uma característica básica dos feixes não difrativos, assumimos uma segunda abordagem investigando o campo emanado pelo refletor a partir de integrais de difração.

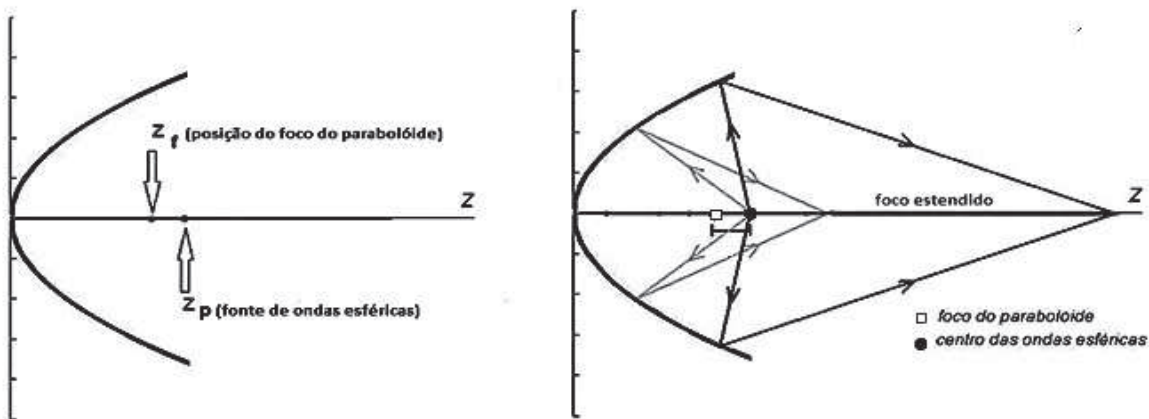


Fig. 1.1: Refletor parabólico com foco em  $z_f$  e fonte de ondas esféricas em  $z_p$ , cujos raios tendem a convergirem ao longo de uma distância focal, ou foco estendido.

### 1.3 Organização da Dissertação

A dissertação está dividida em três outros capítulos além desse.

No capítulo 2, são apresentadas as soluções do tipo feixes não difrativos de Bessel a partir da equação de onda homogênea, assim como do próprio feixe gaussiano, analisando as principais diferenças entre eles, ressaltando as propriedades que definem a não difratividade do primeiro.

No capítulo 3, propõe-se a geração de feixes não difrativos a partir de um refletor parabólico tendo uma fonte de ondas esféricas ligeiramente deslocada de seu foco, a partir de uma abordagem escalar que se mostrou satisfatória numa primeira aproximação. O estudo sobre o comportamento destes feixes, assim como de suas características que permitem classificá-los como não difrativos, foi realizado mediante geometria de raios e integral de difração de Fresnel; esta última possibilitando a simulação do padrão de propagação destes feixes.

No capítulo 4, são apresentadas as conclusões finais deste trabalho, assim como sugestões para futuros trabalhos.

Nesta dissertação, optou-se pela disposição das referências bibliográficas ao final de cada capítulo, no intuito de facilitar a consulta durante a leitura.

## 1.4 Referências

- [1] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light Principles of Optics, Cambridge Univ. Pr., Sexta edição (1998).
- [2] J. Goodman, Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill, Segunda Edição (1996).
- [3] M. Nussenzveig, Curso de Física Básica 4. Editora Edgard Blücher, Segunda Edição (2008).
- [4] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [5] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, "Diffraction-free beams," Phys. Rev. Lett., vol. 58 (1987).
- [6] E. Recami, M. Zamboni-Rached and H.E. Hernandez Figueroa, "Localized Waves: A historical and scientific introduction", In: Hugo E. H. Figueroa; Michel Zamboni-Rached; Erasmo Recami. Localized Waves. 1 ed. Hoboken, NJ: John Wiley, 2008.

# Capítulo 2

## Os Feixes Não Difrativos

### 2.1 Introdução

A difração gera alargamento espacial gradativo de feixes e pulsos não guiados durante a propagação, sendo, portanto, um fator limitante para qualquer aplicação onde se deseja que a onda em questão mantenha sua localização transversal - como em Pinças Ópticas, Comunicações Ópticas do Espaço Livre (FSO), entre outras. No intuito de contornar esse fenômeno, ou ao menos amenizá-lo, que as ondas não difrativas surgiram como uma interessante alternativa.

As ondas não difrativas, também conhecidas como ondas localizadas [1], são soluções especiais da equação de onda que se mostram resistentes ao fenômeno da difração. No caso eletromagnético, a onda plana, que é a solução monocromática da equação de onda em coordenadas cartesianas, é o exemplo mais trivial de onda não difrativa. No entanto, pode-se obter novas soluções não difrativas como, por exemplo, os feixes de Mathieu no sistema de coordenadas elíptico cilíndrico [2], e os feixes de Bessel no sistema cilíndrico circular [3]. Porém, para estas ondas não difrativas ideais o fluxo de potência através do plano perpendicular à direção de propagação destas é infinito, portanto, um fator limitante para a geração experimental. Entretanto, estas soluções, cada qual em seu respectivo sistema de coordenadas, formam uma base completa e ortogonal de funções de forma que qualquer solução pode ser representada como uma dada superposição destas ondas.

Mesmo que idealizadas, no caso do feixe de Bessel que será abordado aqui, obteve-se uma maneira experimental de construí-los de forma aproximada através de feixes truncados. Durnin et al [4], ao apresentar feixes de Bessel gerados a partir de uma abertura anular e uma lente convergente, pôde comparar a profundidade de campo destes feixes com as de feixes gaussianos. Seus resultados mostraram que estes feixes de Bessel truncados podiam propagar-se por uma distância até 28 vezes maior do que as dos feixes gaussianos e, ao longo desta distância, mantinham sua localização transversal praticamente intacta.

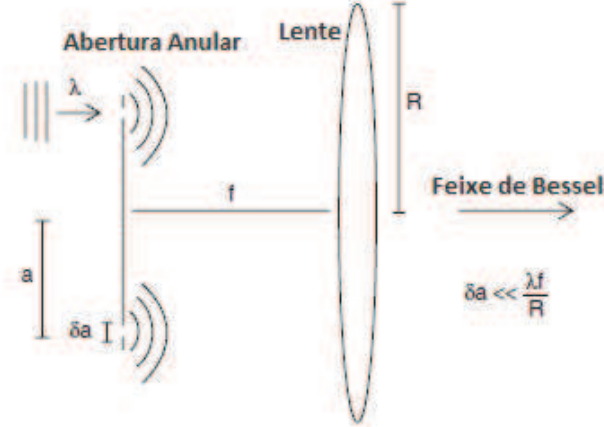


Fig. 2.1: Montagem experimental utilizada por Durnin et al. na geração do feixe de Bessel. Para tal, foi utilizado um laser como fonte de luz colimada de comprimento  $\lambda$  que ilumina uma abertura anular de comprimento  $\delta a$ , posicionada sobre o plano focal de uma lente convergente de comprimento focal  $f$  e raio  $R$  que, por sua vez, define a abertura finita que determina o truncamento do feixe de Bessel.

Ao invés de usarmos a abordagem adotada por Stratton[5], em que os feixes de Bessel foram apresentados como soluções não difrativas da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, aqui, obteremos estes feixes através de uma Transformada de Fourier-Bessel. E dessa forma, ao analisar as propriedades destes feixes, iremos compará-las com as de um feixe gaussiano ordinário, expondo, assim, as características responsáveis por sua resistência à difração.

## 2.2 A Equação de Onda

Por simplicidade, vamos nos ater à equação de onda homogênea de uma campo escalar  $\Psi(x, y, z; t)$  que, em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(x, y, z; t) = 0 \quad (2.1)$$

No entanto, para nossos propósitos, o sistema de coordenadas cilíndricas será mais apropriado. Neste sistema de coordenadas, por sua vez, considerando simetria azimutal no espaço livre, temos a equação de onda dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\rho, z; t) = 0 \quad (2.2)$$

Considerando soluções não evanescentes na direção positiva de  $z$ , podemos escrever a solução  $\Psi(\rho, z, t)$  em termos de uma transformada de Fourier-Bessel na variável  $\rho$  e duas transformadas de Fourier nas variáveis  $z$  e  $t$ :

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} J_0(\kappa_{\rho} \rho) e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \quad (2.3)$$

Na Eq. (2.3),  $\kappa_{\rho}$  e  $\kappa_z$  são, respectivamente, os números de onda transversal e longitudinal,  $J_n(\cdot)$  é a função de Bessel ordinária de ordem  $n$  e  $\bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega)$  é a transformada de  $\Psi(\rho, z, t)$ .

Ao substituirmos a Eq. (2.3) na Eq. (2.2), obteremos uma equação característica que estabelecerá uma relação entre  $\kappa_{\rho}$ ,  $\kappa_z$  e  $\omega$ . Para essa substituição, temos as seguintes derivadas parciais e temporal de  $\Psi(\rho, z; t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Psi(\rho, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [J_0(\kappa_{\rho} \rho)] e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} [-\kappa_{\rho}^2 J_0(\kappa_{\rho} \rho) - \frac{\kappa_{\rho}}{2\rho} (J_{-1}(\kappa_{\rho} \rho) - J_1(\kappa_{\rho} \rho))] \\ &\quad \cdot e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [J_0(\kappa_{\rho} \rho)] e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} \frac{\kappa_{\rho}}{2\rho} (J_{-1}(\kappa_{\rho} \rho) - J_1(\kappa_{\rho} \rho)) \\ &\quad \cdot e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\rho, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} [J_0(\kappa_{\rho} \rho)] \frac{\partial^2}{\partial z^2} [e^{ik_z z}] e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (-\kappa_z^2) \kappa_{\rho} [J_0(\kappa_{\rho} \rho)] e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\rho, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} [J_0(\kappa_{\rho} \rho)] e^{ik_z z} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{-i\omega t}] \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [-\frac{\omega^2}{c^2}] \kappa_{\rho} [J_0(\kappa_{\rho} \rho)] e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \\ &\quad \cdot \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dessa forma, da Eq. (2.4) a Eq. (2.7) na Eq. (2.2), e ainda, sabendo que  $J_{-1}(\cdot) = -J_1(\cdot)$ , temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [-\kappa_{\rho}^2 - \kappa_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}] \kappa_{\rho} [J_0(\kappa_{\rho}\rho)] e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\Psi}(\kappa_{\rho}, \kappa_z, \omega) d\kappa_{\rho} d\kappa_z d\omega = 0, \quad (2.8)$$

onde, a partir da Eq. (2.8), obtemos a seguinte equação característica:

$$\kappa_{\rho}^2 + \kappa_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.9)$$

Portanto, a Eq. (2.9) representa a condição necessária para que a Eq. (2.3) seja solução da Eq. (2.2). Agora, impondo a equação característica na solução (2.3), podemos escrever soluções *não evanescentes* (puramente propagantes) da equação de onda homogênea, mediante coordenadas cilíndricas, como:

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{\omega}{c}} \kappa_{\rho} J_0(\kappa_{\rho}\rho) e^{iz\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa_{\rho}^2}} e^{-i\omega t} \cdot S(\kappa_{\rho}, \omega) d\kappa_{\rho} d\omega \quad (2.10)$$

onde, por simplicidade, consideramos apenas o sinal positivo para  $\kappa_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa_{\rho}^2}$ , e  $S(\kappa_{\rho}, \omega)$  é a função espectral escolhida para  $\Psi(\rho, z, t)$ .

## 2.3 O Feixe Gaussiano

Uma solução bem comum é dada pelo feixe gaussiano, que é constituído por ondas planas, cujos vetores de onda se distribuem ao redor do eixo de propagação  $z$  e cujas amplitudes são moduladas por uma gaussiana (de acordo com o desvio que esses vetores de onda possuem com relação ao eixo  $z$ ). Esse feixe pode ser obtido através de um espectro  $S(\kappa_{\rho}, \omega)$  na Eq. (2.10) dado por uma função gaussiana, como a seguir:

$$S(\kappa_{\rho}, \omega) = 2a^2 e^{-a^2 k_{\rho}^2} \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.11)$$

Sendo o feixe uma solução monocromática da equação de onda, utilizamos acima a função delta  $\delta(\omega - \omega_0)$  para centrar a frequência num dado valor  $\omega_0$ , e  $a$  é uma constante positiva que regula a abertura da gaussiana em  $\kappa_{\rho}$ .

Assim, para o feixe gaussiano temos:

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_0^{\infty} \kappa_{\rho} J_0(\kappa_{\rho}\rho) e^{iz\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2} - \kappa_{\rho}^2}} e^{-i\omega_0 t} 2a^2 e^{-a^2 k_{\rho}^2} d\kappa_{\rho}$$



A equação integral acima não pode ser resolvida analiticamente. Porém, no caso de uma função espectral  $S(\kappa_\rho, \omega)$  fortemente concentrada ao redor de  $\kappa_\rho = 0$  - mais especificamente onde  $\Delta\kappa_\rho = \frac{1}{a} \ll \frac{\omega_0}{c}$  (sendo  $\Delta\kappa_\rho$  a largura da gaussiana) - poderemos fazer aproximações importantes que nos permitirão calcular de forma analítica, mesmo que aproximada, a equação em questão. Pensando em termos de ondas planas, a condição  $\Delta\kappa_\rho = 1/a \ll \omega_0/c$  implica que estamos superpondo ondas planas cujas amplitudes são maiores quando os vetores de onda desviam-se pouco da direção  $z$  positiva. Considerando o *regime paraxial*, onde apenas os valores de  $\kappa_\rho \ll \omega_0/c$  contribuem de forma substancial para a integral na Eq. (2.12), podemos realizar a seguinte aproximação:

$$\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2} - \kappa_\rho^2} = \frac{\omega_0}{c} \left[ 1 - \frac{\kappa_\rho^2}{\omega_0^2/c^2} \right] \approx \frac{\omega_0}{c} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa_\rho^2}{\omega_0^2/c^2} \right] \quad (2.12)$$

E ainda, como  $\Delta\kappa_\rho \ll \omega_0/c$ , podemos readequar o intervalo de integração com  $\omega_0/c \rightarrow \infty$ . Assim, na Eq. (2.12):

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, z; t) &= 2a^2 e^{-i\omega_0 t} e^{iz\frac{\omega_0}{c}} \int_0^\infty \kappa_\rho J_0(\kappa_\rho \rho) e^{-iz\frac{\omega_0}{c} \left[ \frac{1}{2} \frac{\kappa_\rho^2}{\omega_0^2/c^2} \right]} e^{-a^2 \kappa_\rho^2} d\kappa_\rho \\ &= 2a^2 e^{i\kappa_0(z-ct)} \int_0^\infty \kappa_\rho e^{-(a^2 + \frac{iz}{2\kappa_0} \kappa_\rho^2)} J_0(\kappa_\rho \rho) d\kappa_\rho \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde, na Eq. (2.13),  $\kappa_0 = \frac{\omega_0}{c}$ .

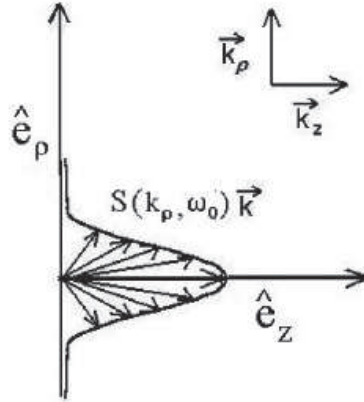


Fig. 2.2: Esquema interpretativo da solução da equação de onda (2.10) com o espectro  $S(\kappa_\rho, \omega)$  dado pela Eq. (2.11), como uma superposição de ondas planas, sendo que as mais intensas possuem componente longitudinal  $\vec{\kappa}_z$ , do vetor de onda  $\vec{\kappa} = \vec{\kappa}_\rho + \vec{\kappa}_z$ , como predominante.

Entretanto, de [6], sabe-se que:

$$\int_0^\infty x^{v+1} e^{-ax^2} J_v(x) dx = \frac{v}{(2a)^{v+1}} \exp\left[\frac{-\rho^2}{4(a^2 + \frac{iz}{2\kappa_0})}\right] \quad (2.14)$$

Fazendo  $v = 0$  na Eq. (2.14), e comparando com a Eq. (2.13), obtém-se:

$$\Psi(\rho, z, t) = \frac{2a^2 \exp\left[\frac{-\rho^2}{4(a^2 + iz/2\kappa_0)}\right]}{2(a^2 + iz/2\kappa_0)} e^{i\kappa_0(z-ct)} \quad (2.15)$$

Pode-se demonstrar que o feixe dado pela Eq. (2.15) dobra sua largura inicial  $\Delta\rho_0 = 2a$  quando  $z$  for dado por:

$$z = Z_{dif} = \sqrt{3}\Delta\rho_0^2\kappa_0/2 \quad (2.16)$$

A distância  $Z_{dif}$  na Eq. (2.16) é conhecida como *comprimento de difração*. A partir dela pode-se perceber que *quanto mais concentrado for um feixe gaussiano, portanto menor  $\Delta\rho_0$ , mais rapidamente ele vai se degradar* [1].

## 2.4 O Feixe de Bessel

O feixe de Bessel surge a partir de um acoplamento linear entre  $\omega$  e  $\kappa_\rho$  na função espectral  $S(\kappa_\rho, \omega)$  que, neste caso, pode ser escrita como:

$$S(\kappa_\rho, \omega) = \frac{\delta(\kappa_\rho - \frac{\omega}{c} \sin \theta)}{\kappa_\rho} \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.17)$$

Da Eq. (2.17) tem-se imediatamente que  $\kappa_\rho = (\frac{\omega}{c}) \sin \theta$ , e, a partir do vínculo dado pela Eq. (2.9), tem-se  $\kappa_z = (\frac{\omega}{c}) \cos \theta$ , sendo  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  uma constante.

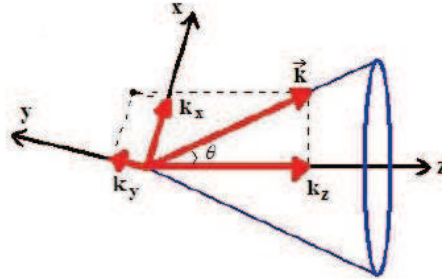


Fig. 2.3: O feixe de Bessel eixo-simétrico é gerado por uma superposição de ondas planas cujos vetores se localizam na superfície de um cone de ângulo de vértice igual a  $2\theta$ , onde  $\theta$  é algumas vezes chamado de ângulo de áxicon.

É possível mostrar que a solução integral na Eq. (2.10), com o espectro dado pela Eq (2.17), é equivalente a uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam sobre a superfície de um cone com semi-ângulo de vértice igual a  $\theta$ , sendo  $\theta$  algumas vezes chamado de *ângulo de áxicon*<sup>1</sup>.

Sem lançar mão de qualquer tipo de aproximação, obtém-se a solução para o feixe de Bessel a partir da Eq. (2.10), agora com o espectro da Eq. (2.17) :

$$\begin{aligned}\Psi(\rho, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{\omega}{c}} \kappa_{\rho} J_0(\kappa_{\rho} \rho) e^{iz \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa_{\rho}^2}} e^{-i\omega t} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\delta(\kappa_{\rho} - \frac{\omega}{c} \sin \theta)}{\kappa_{\rho}} \delta(\omega - \omega_0) d\kappa_{\rho} d\omega \\ &= J_0\left[\left(\frac{\omega_0}{c}\right) \sin \theta \rho\right] e^{[iz \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2} (1 - \sin^2 \theta)} - i\omega_0 t]}\end{aligned}$$

Então:

$$\Psi(\rho, z, t) = J_0\left[\left(\frac{\omega_0}{c}\right) \sin \theta \rho\right] e^{i \frac{\omega_0}{c} \cos \theta (z - \frac{c}{\cos \theta} t)} \quad (2.18)$$

Através da Eq. (2.18), observa-se que esse feixe possui velocidade de fase dada por  $\frac{c}{\cos \theta}$ , com um padrão transversal de campo dado por uma função de Bessel de ordem zero, possuindo concentração de campo ao redor do eixo de propagação  $z$ . E ainda, conforme variamos  $z$ , não alteramos o valor da função de Bessel que rege o padrão transversal, sendo dependente unicamente da variável  $\rho$ . Portanto, o feixe de Bessel não sofre abertura transversal enquanto se propaga.

Definindo o raio do spot<sup>2</sup> central do feixe, para qualquer  $z$ , como sendo dado a partir do primeiro zero da função de Bessel (os outros zeros caracterizam os raios dos *anéis de intensidade*), temos:

$$\Delta \rho = 2.405 \frac{c}{(\omega_0 \sin \theta)} \quad (2.19)$$

onde  $\omega_0$ ,  $c$  e  $\theta$  são constantes; portanto, o feixe de Bessel possui padrão transversal de intensidade invariante com um raio de spot central dado pela Eq. (2.19).

No entanto, conforme dito previamente, o feixe de Bessel possui fluxo de potência infinito através do plano perpendicular à sua direção de propagação, o que significa que seria necessário um quantidade de energia infinita para produzi-lo, portanto, impossibilitando a sua geração. Podemos,

<sup>1</sup>Apesar deste ângulo estar relacionado com o ângulo que caracteriza a lente áxicon, a partir da qual pode-se gerar feixes de Bessel truncados, eles não são iguais.

<sup>2</sup>concentração transversal de campo.

entretanto, considerar feixes de Bessel *truncados*, ou seja, gerados por aberturas finitas. Mesmo nestes casos, temos que estes feixes de Bessel ainda possuirão grande profundidade de campo, sendo assim, capazes de se propagarem por longas distâncias mantendo o padrão transversal praticamente inalterado. Demonstra-se que a profundidade de campo  $Z_{max}$  de um feixe de Bessel, gerado por uma abertura circular finita, na situação em que o raio da abertura de truncamento seja muito maior que o spot do feixe, é dada por:

$$Z_{max} = \frac{R}{\tan \theta} \quad (2.20)$$

onde  $R$  é o raio da abertura e  $\theta$  é o ângulo de áxicon.

No entanto, a expressão para o feixe de Bessel, Eq. (2.18), não representa esse feixe de Bessel truncado gerado a partir de uma abertura finita. Na verdade, para este último temos que utilizar teoria da difração - aqui, usamos a integral de difração de Fresnel [7], conforme se apresenta a seguir:

$$\Psi(\rho, z) = \frac{-jk}{z} e^{jk(z + \frac{\rho^2}{2z})} \int_0^R \Psi(\rho'') e^{\frac{jk\rho''^2}{2z}} J_0\left(\frac{k\rho\rho''}{z}\right) \rho'' d\rho'' \quad (2.21)$$

onde a abertura, de raio  $R$ , possui coordenada  $\rho''$ ,  $k$  é o número de onda,  $\Psi(\rho'')$  é dado fazendo-se  $z = 0$  na Eq. (2.18), isto é,  $\Psi(\rho'') = J_0(\frac{\omega_0}{c} \sin \theta \rho'')$ , e a dependência temporal harmônica  $e^{-i\omega t}$  está subentendida.

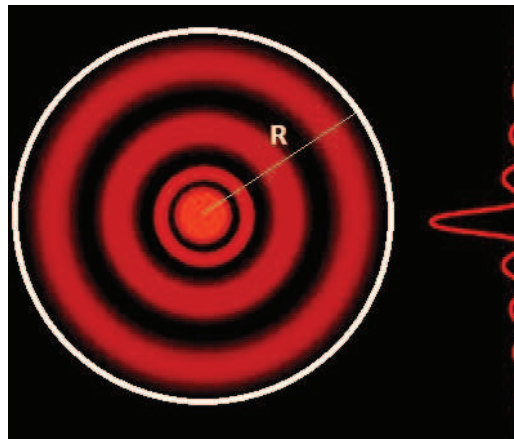


Fig. 2.4: Truncamento do feixe de Bessel a partir de uma abertura circular finita de raio  $R$ . Este truncamento limita seu número de anéis secundários de intensidade, o que, portanto, faz com que sua auto-reconstrução - ou seja, a capacidade que este feixe possui de recompor seu spot central a partir de seus anéis laterais - seja possível ao longo de uma distância finita; distância esta que determina a profundidade de campo do feixe de Bessel truncado.

## 2.5 Resultados Numéricos

Para analisar o quão superior pode ser a profundidade de campo de um feixe de Bessel em comparação com um feixe gaussiano, devemos partir, em ambos os casos, de um mesmo comprimento de onda assim como um mesmo spot central inicial. Para tal, primeiramente, vamos considerar o regime de infravermelho, para um comprimento de onda de 850nm, e então, micro-ondas, para um comprimento de onda de 1cm.

### 2.5.1 Infravermelho

A partir da integral de difração de Fresnel dada pela Eq. (2.21), pode-se calcular o campo emanado de um feixe de Bessel truncado a partir de uma abertura de raio  $R$ . Ao escolher o ângulo de áxicon  $\theta$  tem-se, a partir da Eq. (2.19), o raio do spot central deste feixe que, aqui, definimos como sendo a distância, ao longo do eixo de propagação  $\rho = 0$ , onde ocorre o primeiro zero da função de Bessel [1]. Portanto, para o feixe gaussiano, deve-se determinar  $a$  na Eq. (2.15) sabendo que  $\Delta\rho_0 = 2a$  onde  $\Delta\rho_0$  é o mesmo do feixe de Bessel. Nas Fig. 2.5 e Fig. 2.8 ambos os feixes foram obtidos a partir das mesmas condições, isto é, mesmo comprimento de onda e raio de spot inicial  $\Delta\rho_0$ .

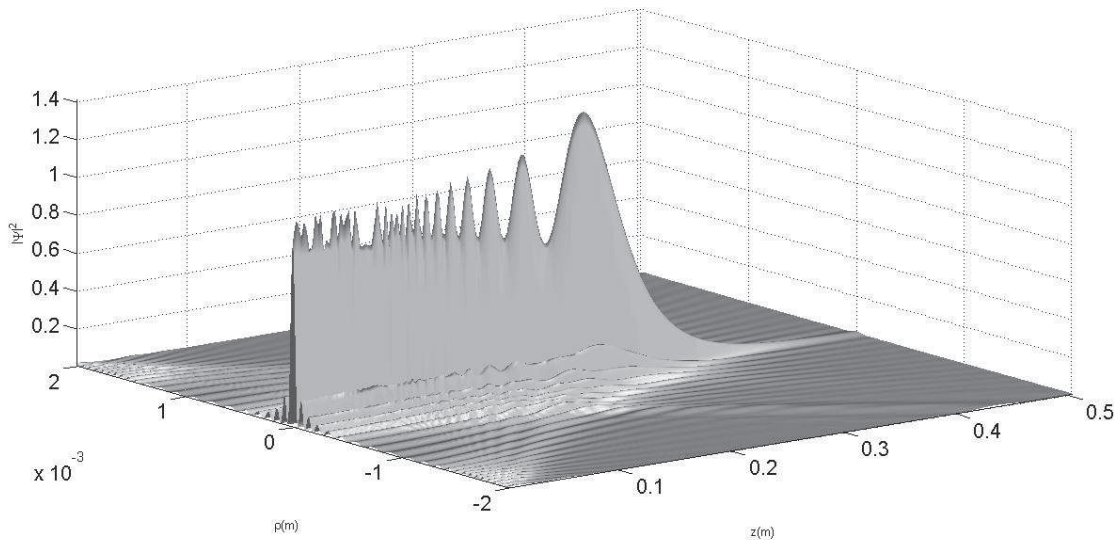


Fig. 2.5: (a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe de Bessel, em  $\lambda = 850\text{nm}$ , truncado a partir de uma abertura de 2.0mm com ângulo de áxicon  $\theta = 0.006\text{rad}$ , portanto, com raio de spot central, determinado a partir da Eq. (2.19), de  $68\mu\text{m}$ .

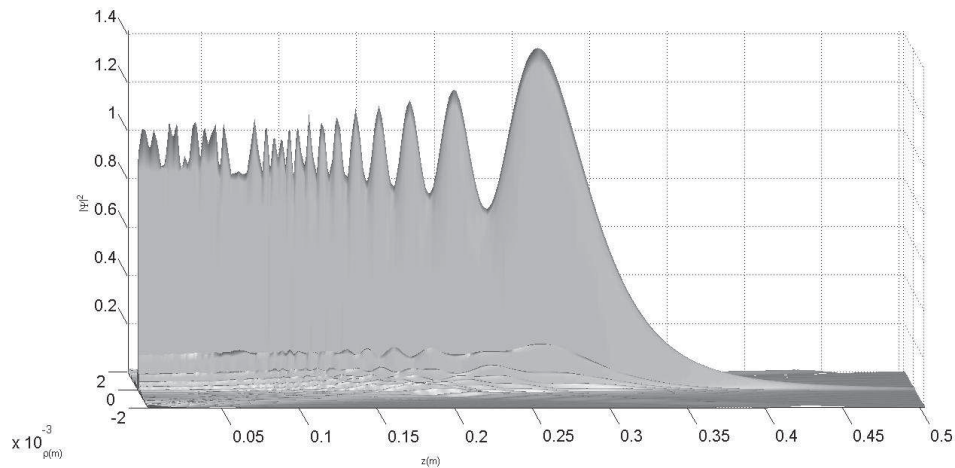


Fig. 2.6: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.5.

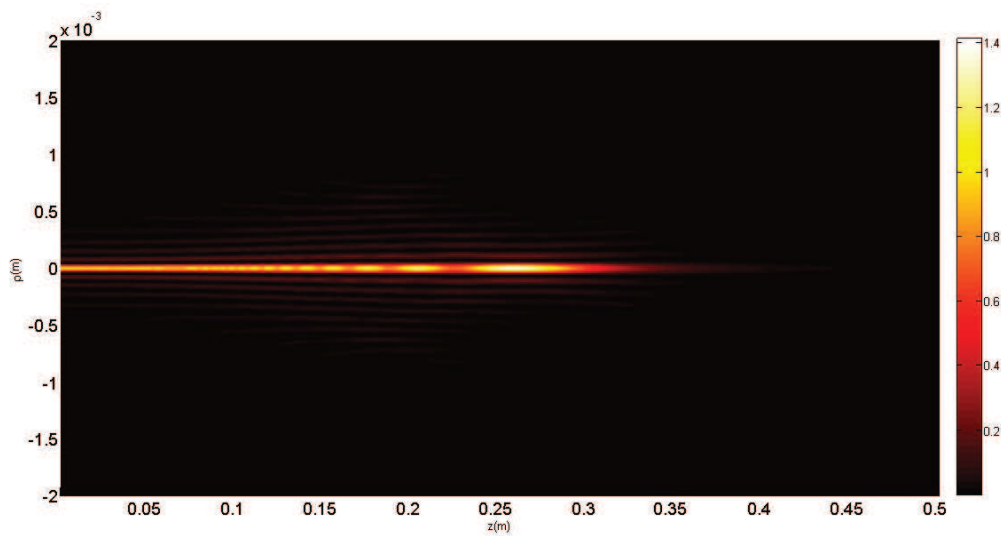


Fig. 2.7: Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig 2.5 e Fig 2.6.

Para o feixe de Bessel, truncado a partir de uma abertura de 2.0mm de raio, foi adotado um ângulo de áxicon  $\theta = 0.006\text{rad}$ , o que, da Eq. (2.19), determina um raio de spot central de  $68\mu\text{m}$ , que pode ser verificado através da Fig. 2.7.

Portanto, com esse mesmo comprimento de onda (850nm) e raio de spot central, obtém-se o feixe gaussiano. Os feixes de Bessel e gaussiano supracitados estão nas Fig 2.5 e Fig 2.8, respectivamente.

Pela Eq. (2.16), tem-se que o feixe gaussiano, em  $z = 3\text{cm}$ , já dobrou sua largura inicial, enquanto que o feixe de Bessel atinge uma profundidade de campo de mais de 30cm. Na Fig. 2.11, observa-se que, em  $z = 10\text{cm}$ , enquanto o feixe gaussiano já se extinguiu, a distribuição central de intensidade do feixe de Bessel apresenta-se praticamente a mesma da inicial.

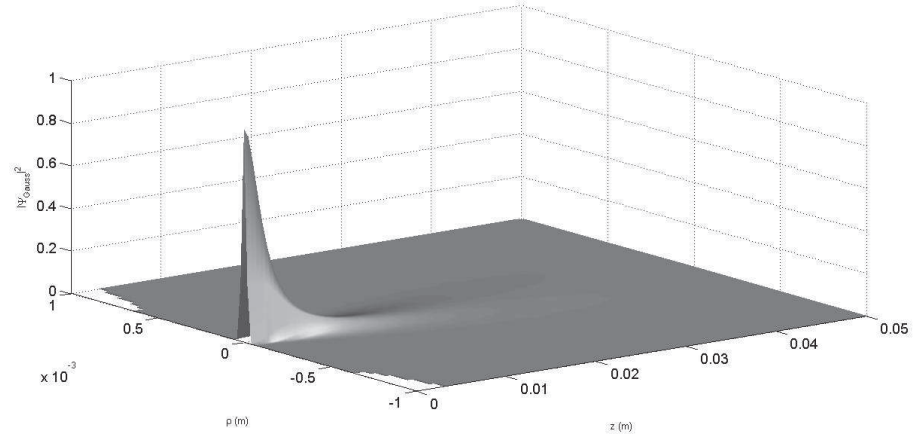


Fig. 2.8: (a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de  $68\mu\text{m}$ , com  $\lambda = 850\text{nm}$ .

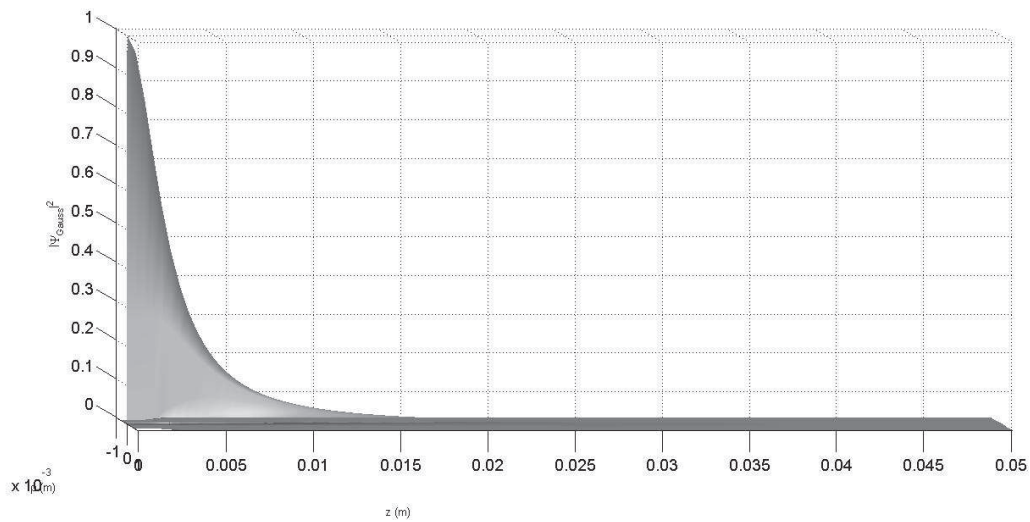


Fig. 2.9: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.8.

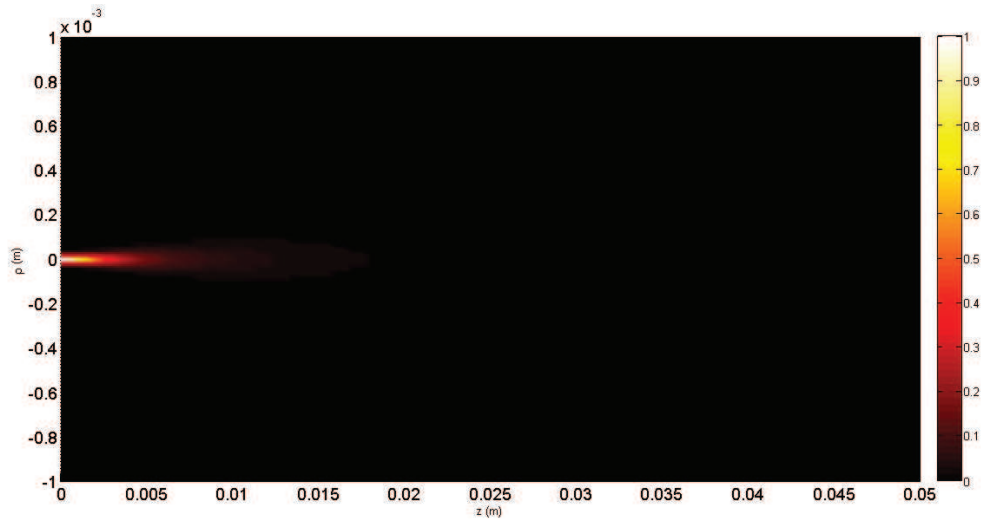


Fig. 2.10: Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig 2.8 e Fig 2.9.

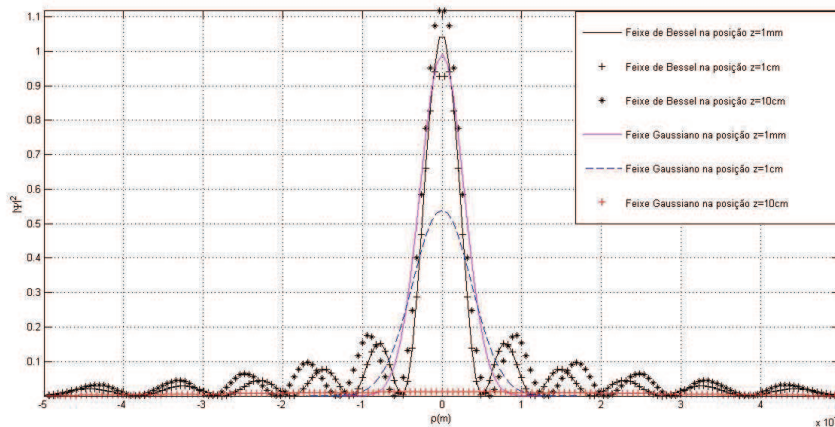


Fig. 2.11: "Cortes" transversais dos feixes de Bessel e gaussiano para três posições distintas:  $z = 1\text{mm}$ ,  $z = 1\text{cm}$  e  $z = 10\text{cm}$ . Nestas três posições de  $z$  o feixe de Bessel mantém a distribuição de intensidade ao longo de seu pico central praticamente inalterada; enquanto que, para o feixe gaussiano, o decaimento da intensidade, seguido pela consequente abertura de seu spot, é bem evidente. Em especial, em  $z = 10\text{cm}$ , enquanto o feixe de Bessel apresenta spot praticamente inalterado, o feixe gaussiano já se extinguiu.



## 2.5.2 Micro-ondas

Seguindo a mesma metodologia adotada no caso de infravermelho, agora, vamos partir de um comprimento de onda de 1cm, portanto, na região de micro-ondas.

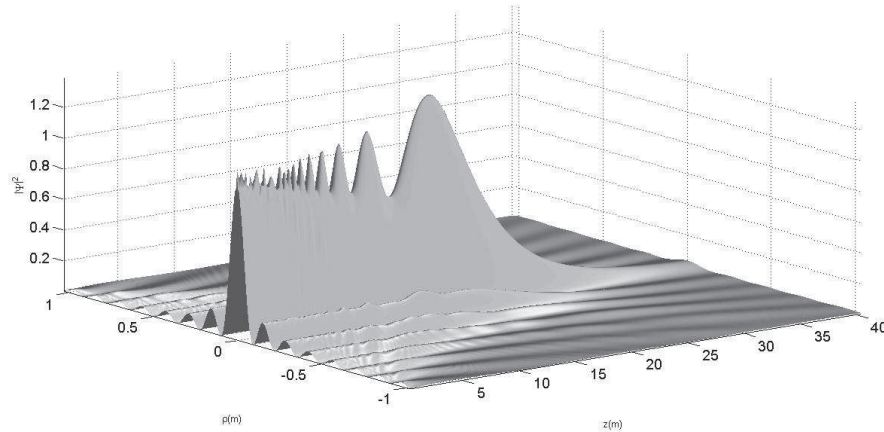


Fig. 2.12: (a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe de Bessel truncado a partir de uma abertura de 1.025m, em  $\lambda = 1$ cm, com ângulo de áxicon  $\theta = 0.0383$ rad, portanto, com raio de spot, determinado a partir da Eq. (2.19), de 10cm.

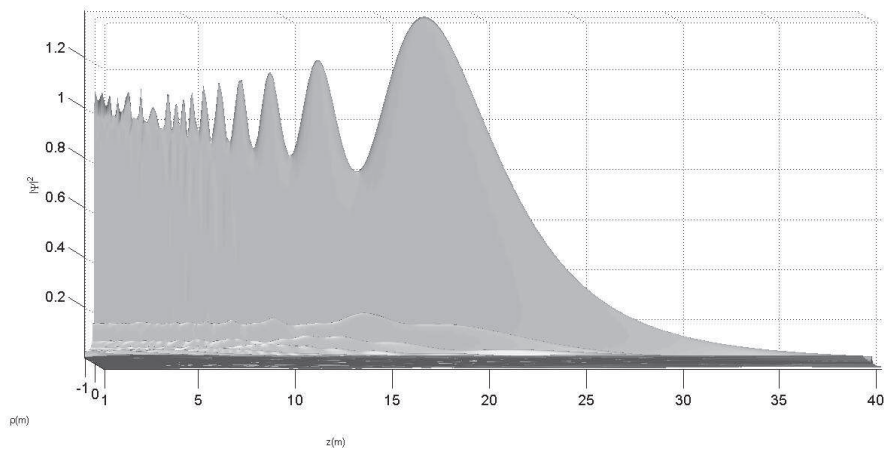


Fig. 2.13: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.12.

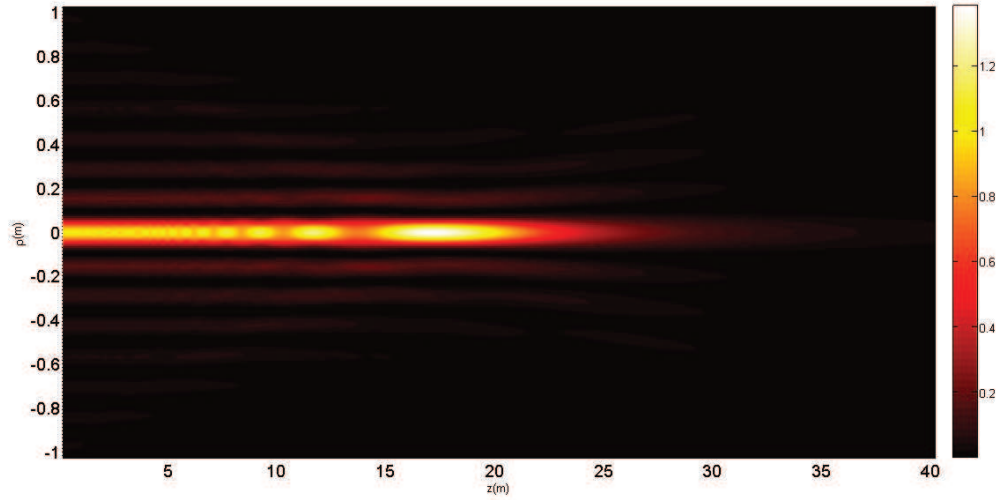


Fig. 2.14: Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig. 2.12 e Fig. 2.13.

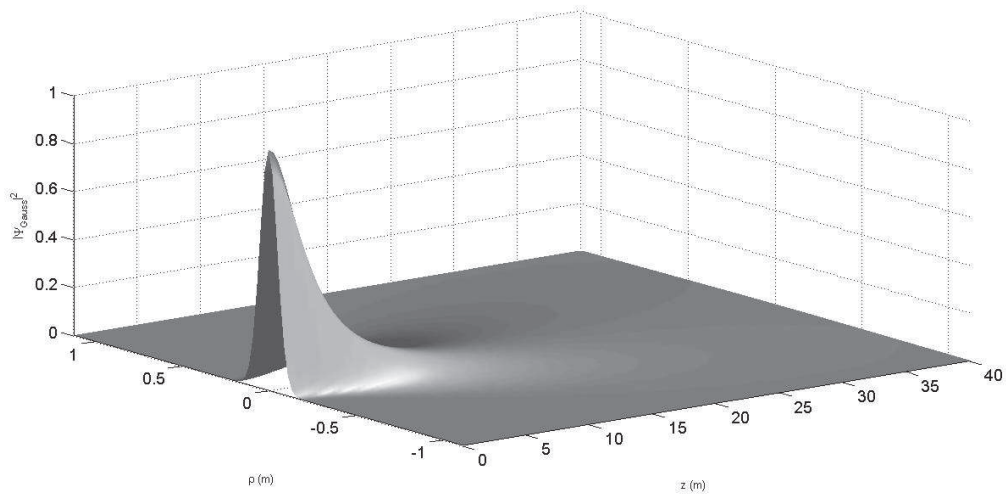


Fig. 2.15: (a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 10cm, com  $\lambda = 1\text{cm}$ .

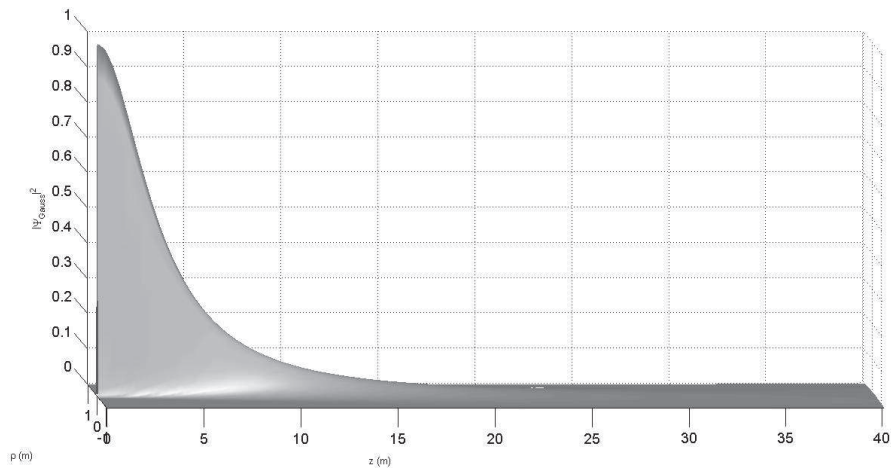


Fig. 2.16: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig 2.15.

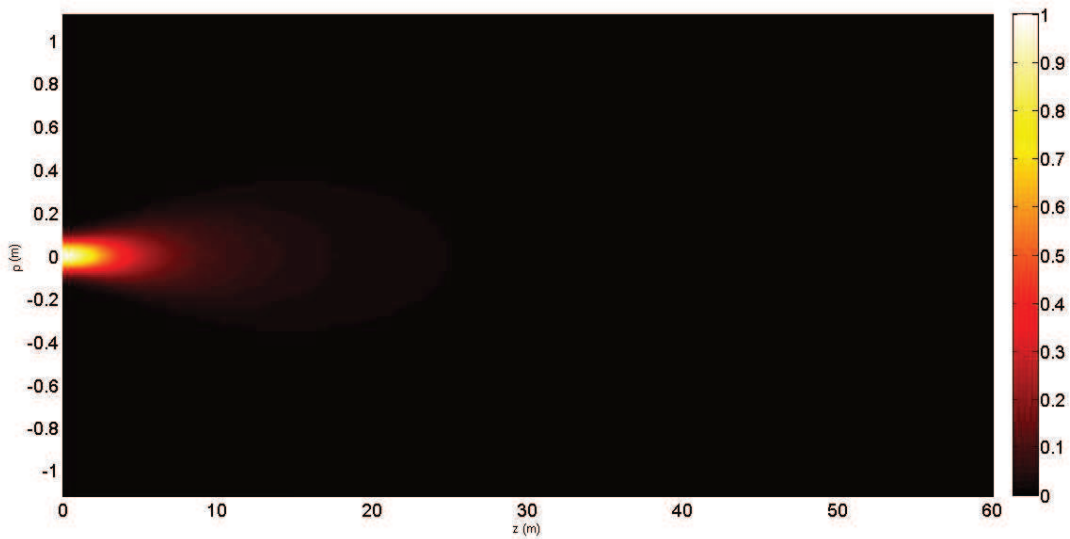


Fig. 2.17: Projeção Ortogonal do Padrão de Intensidade das Fig. 2.15 e Fig 2.16.

Pelas Fig. 2.15 e Fig 2.16, tem-se que o feixe gaussiano, para aproximadamente  $z = 3\text{m}$ , já dobrou sua largura inicial e, após cerca de 10m, observa-se que a intensidade do feixe gaussiano já decaiu a menos de 10% de seu valor inicial, enquanto que, através das Fig. 2.12 e Fig 2.13, tem-se que o feixe de Bessel atinge uma profundidade de campo de mais de 25m. Esta relação comparativa pode ser melhor visualizada na Fig. 2.18, em que foram obtidos "cortes" transversais dos feixes de Bessel e gaussiano nas posições de  $z = 1\text{cm}$ ,  $z = 5\text{m}$  e  $z = 10\text{m}$ .

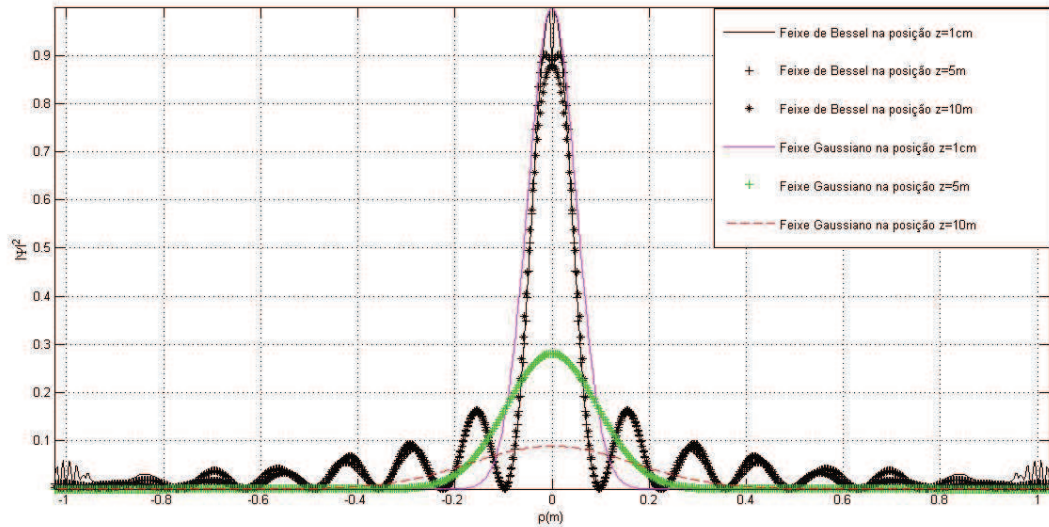


Fig. 2.18: "Cortes" transversais dos feixes de Bessel e gaussiano para três posições distintas:  $z = 1\text{cm}$ ,  $z = 5\text{m}$  e  $z = 10\text{m}$ . Nestas três posições de  $z$  pode-se perceber que o feixe de Bessel mantém a distribuição de intensidade ao longo de seu pico central praticamente inalterada; enquanto que, para o feixe gaussiano, o decaimento da intensidade, seguido pela consequente abertura de seu spot, é bem evidente.

Um estudo detalhado do caso óptico ( $\lambda = 630\text{nm}$ ), seguindo uma metodologia análoga a feita aqui, pode ser encontrado em [1] e [4].

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado o conceito de feixes não difrativos, em especial, os feixes de Bessel, cujo fluxo de potência, através do plano perpendicular à direção de propagação, é infinito, portanto, um fator limitante para a geração destes feixes ideais. No entanto, encontrou-se uma maneira experimental aproximada de construí-los, de maneira que estes feixes de Bessel, ditos truncados, apesar de não serem imunes à difração, apresentam uma profundidade de campo muito maior que a de um feixe comum, como um feixe gaussiano.

A resistência à difração apresentada pelo feixe de Bessel truncado é explicada pela capacidade de auto-reconstrução destes. Dessa forma, apesar da difração estar sempre atuando, há um fornecimento de energia das regiões laterais, os "anéis" laterais de Bessel, para o spot central. Portanto, no caso ideal, este fornecimento acaba sendo constante pois há infinitos anéis laterais, enquanto que, no caso truncado, a capacidade de auto-reconstrução está diretamente ligada ao raio da abertura (assim como ao ângulo de áxicon), pois esta determina a quantidade de anéis laterais e, conseqüentemente, a

profundidade de campo.

A partir de simulações numéricas, para os comprimentos de onda de 850nm, portanto, infravermelho, e de 1cm, micro-ondas, pôde-se comparar a propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano com a de um feixe de Bessel - ambos obtidos a partir de um mesmo raio de spot central. No primeiro caso, o feixe de Bessel manteve seu spot central praticamente intacto ao longo de uma distância de mais de dez vezes à propagada pelo feixe gaussiano; este último, sofrendo um decaimento da amplitude e, conseqüente abertura de seu largura transversal, constantemente ao longo da propagação. Já no segundo caso, o feixe de Bessel apresenta profundidade de campo cerca de oito vezes maior que a do feixe gaussiano. Portanto, a maior discrepância entre as profundidades de campo torna-se ainda mais acentuada na região do infravermelho (e mais ainda no caso óptico, conforme exposto em [1] e [4], pois, dado que podemos analisar a profundidade de campo através do comprimento de difração dado pela Eq. (2.16), a partir do qual quanto menor a razão  $\frac{\Delta\rho_0^2}{\lambda}$ , menor será a distância em que o feixe gaussiano irá se propagar antes de dobrar sua largura inicial, que caracteriza o spot inicial deste feixe <sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Para os casos óptico e infravermelho, é possível usar refletores proporcionalmente maiores em relação ao comprimento de onda utilizado, o que nos garante também uma maior profundidade de campo.

## 2.7 Referências

- [1] E. Recami, M. Zamboni-Rached and H.E. Hernandez Figueroa, "Localized Waves: A historical and scientific introduction", In: Hugo E. H. Figueroa; Michel Zamboni-Rached; Erasmo Recami. Localized Waves. 1 ed. Hoboken, NJ: John Wiley, 2008
- [2] C. A. Dartora, dissertação de mestrado: "Estudo de Ondas Localizadas do Tipo Mathieu", UNICAMP, 2002.
- [3] M. Zamboni-Rached, tese de doutorado: "Ondas Localizadas Aplicadas aos Meios Difrati-vos/Dispersivos", UNICAMP, 2004.
- [4] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, "Diffraction-free beams,"Phys. Rev. Lett., vol. 58 (1987).
- [5] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [6] G. Ryzhik, Table of Integrals Series and Products, Quinta Edição, Academic Press (1996).
- [7] J. Goodman, Introduction to Fourier Optics.McGraw-Hill, Segunda Edição (1996).

## Capítulo 3

# Geração de Feixes Não Difrativos via Refletores Parabólicos: Uma Abordagem Escalar

### 3.1 Introdução

Baseando-nos na propriedade fundamental dos refletores parabólicos, tomamos uma antena composta por um refletor parabólico e uma fonte de ondas esféricas situada sobre um ponto ligeiramente deslocado do foco do refletor. Sabe-se da óptica geométrica, que todo raio que passar pelo foco do parabolóide será refletido com direção paralela ao eixo do refletor [1]. Dessa forma, ao deslocarmos a fonte em questão ligeiramente do foco do parabolóide, na direção de afastamento deste (na direção de aproximação, os feixes refletidos irão divergir, afastando-se do eixo), os raios que incidem no refletor não sairão mais paralelos ao seu eixo. Na verdade, cada raio refletido cruzará o eixo do parabolóide em uma posição que dependerá, além da posição da fonte de ondas esféricas, do ponto de incidência do raio no refletor. Ou seja, não haverá um único ponto focal para todos os raios, mas sim, uma *distância focal*, ou, como chamaremos ao longo do trabalho, um *foco estendido*.

Dessa forma, partindo da ideia de que os feixes não difrativos caracterizam-se por possuírem um foco estendido, analisaremos nossa configuração refletor parabólico - fonte de ondas esféricas deslocada do foco avaliando as propriedades do foco estendido obtido, comparando-o com um feixe gaussiano, além de um feixe não difrativo, a saber, o feixe de Bessel.

A abordagem realizada aqui trata de uma primeira aproximação em que toda a análise limitou-se ao âmbito escalar, portanto, desconsiderando qualquer influência de polarização. Primeiramente, utilizamos óptica geométrica, a partir da qual pode-se prever o surgimento do foco estendido, o que, por sua vez, conduziu-nos a uma segunda análise em que investigamos o campo emanado pelo refletor

a partir de uma integral de difração.

## 3.2 O Refletor Parabólico

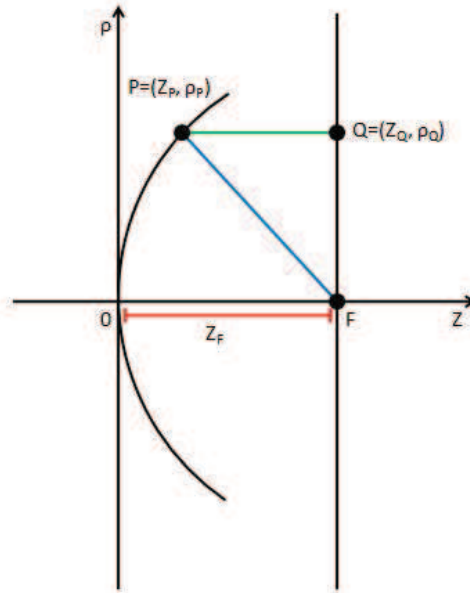


Fig. 3.1: Lugar Geométrico dos pontos que definem uma parábola no plano  $(z, \rho)$  que, no caso tridimensional, representa a superfície gerada a partir da rotação da parábola em torno de seu eixo, formando um *paraboloide de revolução*.

Considere o sistema de coordenadas  $(z, \rho)$  conforme esboçado na Fig. 3.1. Seja  $F$  um ponto sobre o eixo  $z$  que dista  $z_F$  da origem  $O$ . Se traçarmos uma reta paralela ao eixo  $\rho$  que passe por  $F$ , ao escolhermos um ponto  $Q$  sobre essa reta, teremos, então,  $Q = (z_Q = z_F, \rho_Q)$ . A partir disso, pode-se definir a *parábola* como sendo o lugar geométrico dos pontos  $P = (z_P, \rho_P)$  em que a soma da distância do ponto  $P$  (Fig. 3.1) ao ponto  $F$ ,  $\overline{PF}$ , e a distância do ponto  $P$  ao  $Q$ ,  $\overline{PQ}$ , é constante, sendo o dobro da distância de  $F$  à origem  $O$ :

$$\overline{QP} + \overline{PF} = \overline{FO} + \overline{OF} = 2z_F \quad (3.1)$$

Pela Fig. 3.1, tem-se:

$$\overline{PF}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{PQ}^2 = (z_F - z_P)^2 + \rho_P^2 \quad (3.2)$$

A partir das Eq. (3.1) e Eq. (3.2), obtém-se:



$$\overline{FP} + \overline{PQ} = \sqrt{\rho_P^2 + (z_F - z_P)^2} + z_F - z_P = 2z_F \quad (3.3)$$

Dessa forma, para todo o lugar geométrico, portanto,  $z_P$  e  $\rho_P$  arbitrários, tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + (z_F - z)^2} + z_F - z &= 2z_F \\ \sqrt{\rho^2 + (z_F - z)^2} &= (z_F + z) \\ \rho^2 + (z_F - z)^2 &= (z_F + z)^2 \\ \rho^2 &= 4z_F z \end{aligned}$$

Portanto:

$$z = a\rho^2 \quad (3.4)$$

onde  $a = \frac{1}{4z_F}$  é uma constante relacionada ao foco  $F = (z_F, 0)$ .

A Eq. (3.4) representa a parábola nas coordenadas do plano  $(z, \rho)$ ; e, no caso tridimensional em coordenadas cilíndricas, por sua vez, representa a superfície gerada a partir da rotação da parábola em torno de seu eixo, formando o que se chama de *paraboloide de revolução* [2].

### 3.3 Geração do Foco Estendido

Vamos considerar um refletor parabólico, conforme representado pela Eq. (3.4), e uma fonte de ondas esféricas que pode ser escrita como:

$$\Psi_{esf} = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.5)$$

Para um refletor parabólico, sabe-se, da óptica geométrica, que *todo raio que passa pelo foco do paraboloide será refletido com direção paralela ao eixo do refletor*. Então, ao se colocar uma fonte de ondas esféricas no foco do refletor, tem-se que a onda refletida será, aproximadamente, uma onda plana se propagando na direção e sentido de  $+z$ .

Se deslocarmos a fonte de ondas esféricas da Eq (3.5) do foco, no sentido de afastamento do paraboloide (direção positiva de  $z$ ), teremos que esses novos raios incidentes no refletor não mais sairão paralelos a  $z$ . Agora, cada raio refletido irá cruzar com o eixo  $z$ , de forma que cada respectivo local de cruzamento dependerá, para uma dada posição da fonte, do ponto de incidência do raio no refletor. Portanto, não haverá um único ponto focal para todos os raios, e sim, um *foco estendido*.

Para analisar o comportamento deste foco estendido devemos adentrar na teoria da difração, de forma a se poder calcular o campo sobre a superfície do paraboloide. No entanto, ao tomarmos um refletor parabólico de dimensões bem superiores em comparação ao comprimento de onda utilizado na fonte, poderemos trabalhar diretamente com o campo sobre a abertura do refletor ("boca do paraboloide"). Portanto, como no estudo do feixe de Bessel truncado, podemos, em nossa abordagem escalar, utilizar a integral de difração de Fresnel.

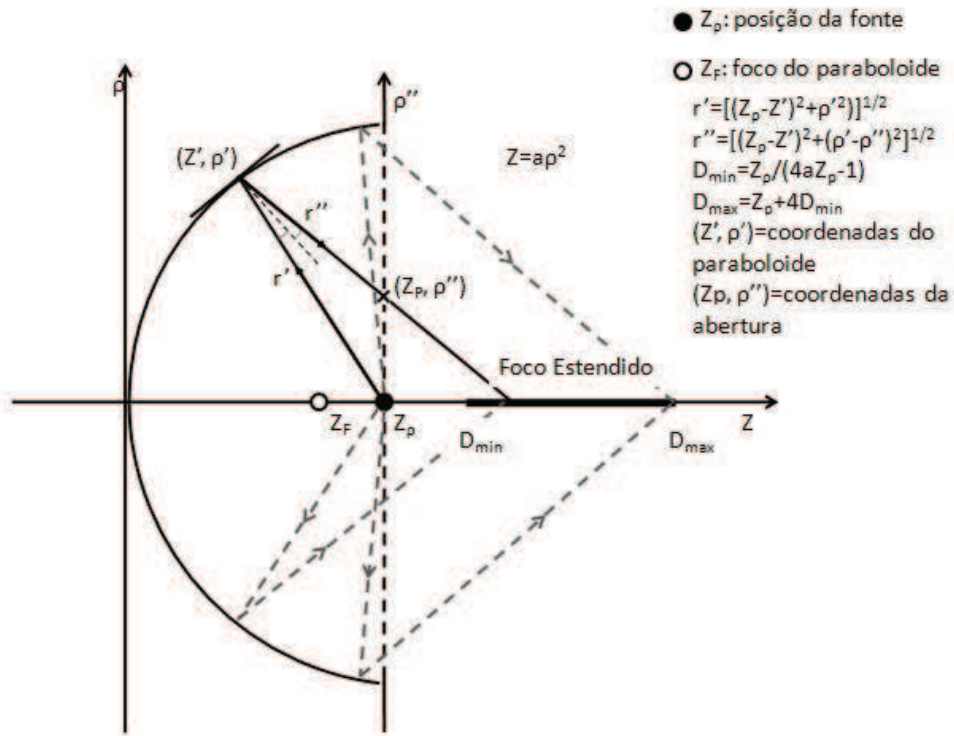


Fig. 3.2: Refletor parabólico com foco em  $(z_f, 0)$  com fonte de ondas esféricas posicionada sobre o eixo z em  $(z_p, 0)$ , sendo  $z_p > z_f$ .

Na Fig. 3.2, temos  $(z', \rho')$  sendo as coordenadas do paraboloide, e  $(z_p, \rho'')$  sendo as coordenadas da abertura <sup>2</sup>. E ainda:

$$r' = \sqrt{(z_p - z')^2 + \rho'^2} \quad (3.6)$$

é a distância percorrida pelo raio que sai da fonte em  $(z_p, 0)$  e chega no paraboloide em  $(a\rho'^2, \rho')$ , portanto, dado por:

<sup>2</sup> $z = z_p$  é fixo, pois refere-se à "boca do paraboloide", enquanto que a variável  $\rho''$  indica a altura em que determinado ponto se encontra.

$$\Psi_i = \frac{e^{ikr'}}{r'} \quad (3.7)$$

E:

$$r'' = \sqrt{(z_p - z')^2 + (\rho' - \rho'')^2} \quad (3.8)$$

é a distância percorrida pelo raio que foi refletido no paraboloide em  $(a\rho'^2, \rho')$ , chegando na abertura em  $(z_p, \rho'')$ . Como estamos considerando um refletor parabólico de dimensões bem superiores às do comprimento de onda utilizado, podemos considerar que o raio que atinge o paraboloide em  $(a\rho'^2, \rho')$  refletirá como uma onda plana, o que, então, nos permite escrever o feixe que parte da abertura - que, portanto, irá gerar o foco estendido -, como:

$$\Psi_{abertura} = \Psi_i e^{ikr''} = \frac{e^{ik(r'+r'')}}{r'} \quad (3.9)$$

Portanto, nosso objetivo é gerar um foco estendido representando o feixe que, ao partir da fonte dada pela Eq. (3.5) e refletir no paraboloide, Eq. (3.4), passará pela "boca" do refletor. Nesta abertura, integra-se o campo da Eq. (3.9) resultante a partir da integral de difração de Fresnel dada pela Eq. (2.21), obtendo, assim, o campo que irá se propagar.

Porém, da Eq. (3.8), pode-se notar que o campo a ser integrado mantém dependência de duas variáveis,  $\rho'$  e  $\rho''$ . No entanto, conforme discutido anteriormente, ao se utilizar da integral de Fresnel, estamos partindo da integração realizada sobre a abertura, de 0 a  $R$  (raio da abertura), portanto, na coordenada  $\rho''$ . Contudo, desde que seja realizada a devida mudança de variável no integrando, é possível fazer essa integração na coordenada  $\rho'$ , mantendo o mesmo intervalo de 0 a  $R$ .

Dessa forma, obtemos  $\rho''$  em função de  $\rho'^3$  e, conseqüentemente, um integrando dependente de uma única variável,  $\rho'$  (ApêndiceA):

$$\rho'' = \frac{(4az_p - 1)\rho'(z_p - a\rho'^2)}{(a\rho'^2 - z_p)(4a^2\rho'^2 - 1) + 4a'^2} + \rho' \quad (3.10)$$

onde  $a = \frac{1}{4z_F}$  sendo  $z_F$  o foco do refletor parabólico e  $z_p$  é a posição da fonte de ondas esféricas sobre o eixo de propagação  $z$ .

---

<sup>3</sup>o contrário, ou seja,  $\rho'$  em função de  $\rho''$  também poderia ser feito, porém, a função obtida seria mais complicada de se trabalhar.

### Comprimento do Foco Estendido

Por fim, pode-se ainda calcular o comprimento do foco estendido (ApêndiceB), que é dado por:

$$D = \frac{(4az'^2 + 2z' + z_p)}{(4az_p - 1)} \quad (3.11)$$

A partir da Eq. (3.11) podemos obter, em função de  $z'$ , o menor e o maior valores possíveis para  $D$ . Supondo  $0 \leq z' \leq z_p$ , ou seja, a curvatura do paraboloide no plano  $z\rho$  indo dos pontos  $(z_p, -R)$  a  $(z_p, R)$ , teremos, para  $z' = 0$ :

$$D_{min} = \frac{z_p}{(4az_p - 1)} \quad (3.12)$$

Enquanto que, para  $z' = z_p$ :

$$D_{max} = \frac{4az_p^2 + 3z_p}{(4az_p - 1)} = z_p + 4D_{min} \quad (3.13)$$

onde, como já se pode perceber,  $D_{min}$  é o menor valor possível para  $D$ , enquanto que, por sua vez,  $D_{max}$  é seu maior valor. Portanto, o comprimento do foco estendido  $Z_{focaldistance} = Z_{fd}$  será dado por:

$$Z_{fd} = D_{max} - D_{min} = z_p + 3D_{min} \quad (3.14)$$

## 3.4 Resultados

Em nossa simulação, realizaremos a integração do campo representado pela Eq. (3.9) na abertura - intervalo de 0 a  $R$  (raio da "boca" do refletor)- mediante integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), o que gerará o padrão de propagação deste feixe ao longo do eixo  $z$  (eixo de propagação do feixe/eixo de simetria do paraboloide de revolução).

Para a nossa análise, serão considerados dois regimes espectrais, a saber: infravermelho ( $\lambda = 850\text{nm}$ ) e micro-ondas ( $\lambda = 1\text{cm}$ ,  $\lambda = 2\text{cm}$  e  $\lambda = 3\text{cm}$ ); nos quais serão comparados o feixe proveniente do arranjo do refletor parabólico tendo uma fonte de ondas esféricas ligeiramente deslocada de seu foco, com um feixe ordinário sem qualquer característica de resistência à difração, representado pelo feixe gaussiano, com mesmo comprimento de onda e raio de spot do primeiro.

Por fim, a partir das características de feixe não difrativo observadas no foco estendido gerado a partir do paraboloide, confrontar-se-ão tais resultados à de um feixe não difrativo conhecido, o feixe de Bessel.

### 3.4.1 Infravermelho

Neste regime espectral foi considerado um comprimento de onda de 850nm, com o refletor parabólico dado pela Eq. (3.4) com foco  $z_f$  em 0.5mm, portanto, com  $a = 1/4z_f = 0.5\text{mm}^{-1}$ . Para a fonte de ondas esféricas será considerado  $z_p = 0.525\text{mm}$ , portanto, distando  $25\mu\text{m}$  do foco. E ainda, assumindo que para o paraboloide  $0 \leq z \leq z_p$ , portanto,  $z_p = aR^2$ , temos que o raio de sua abertura será de 1.025mm.

Com essa configuração, a partir das Eq. (3.12) e Eq. (3.13), espera-se que no intervalo  $D_{min} = 10.5\text{mm} \leq D \leq D_{max} = 42.5\text{mm}$  se forme um feixe não difrativo.

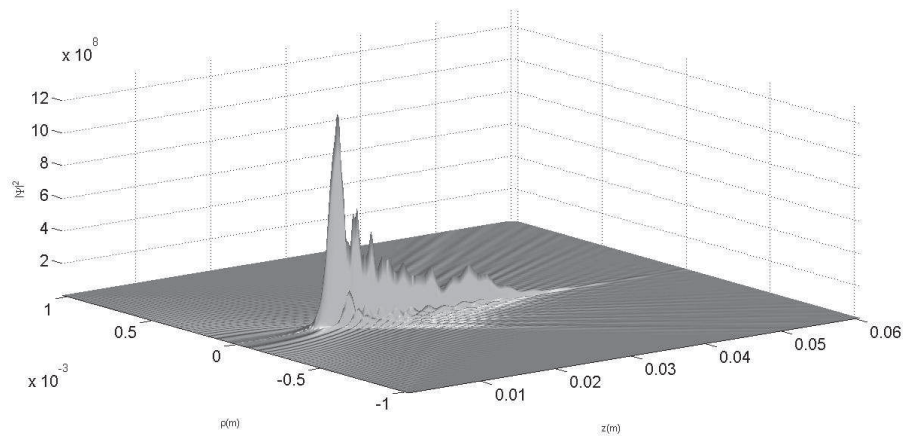


Fig. 3.3: Propagação do padrão de intensidade de um feixe de  $\lambda = 850\text{nm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do paraboloide") de 1.025mm de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de  $25\mu\text{m}$ .

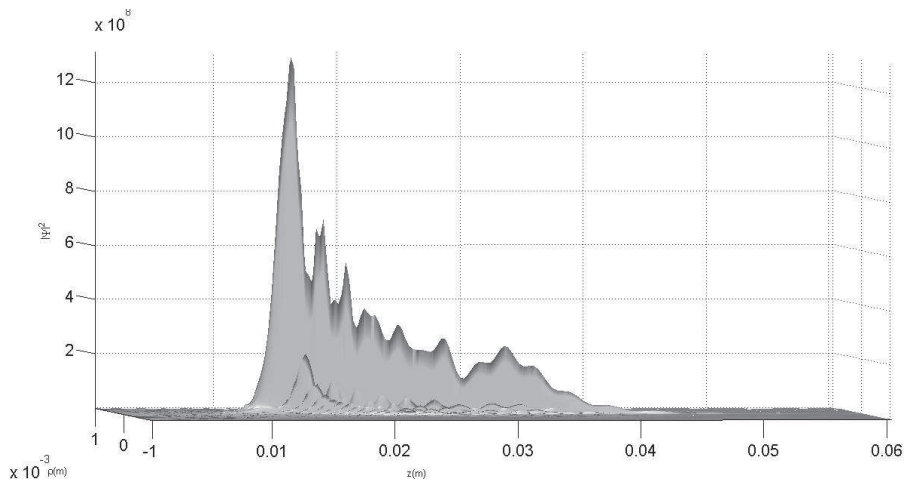


Fig. 3.4: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.3.

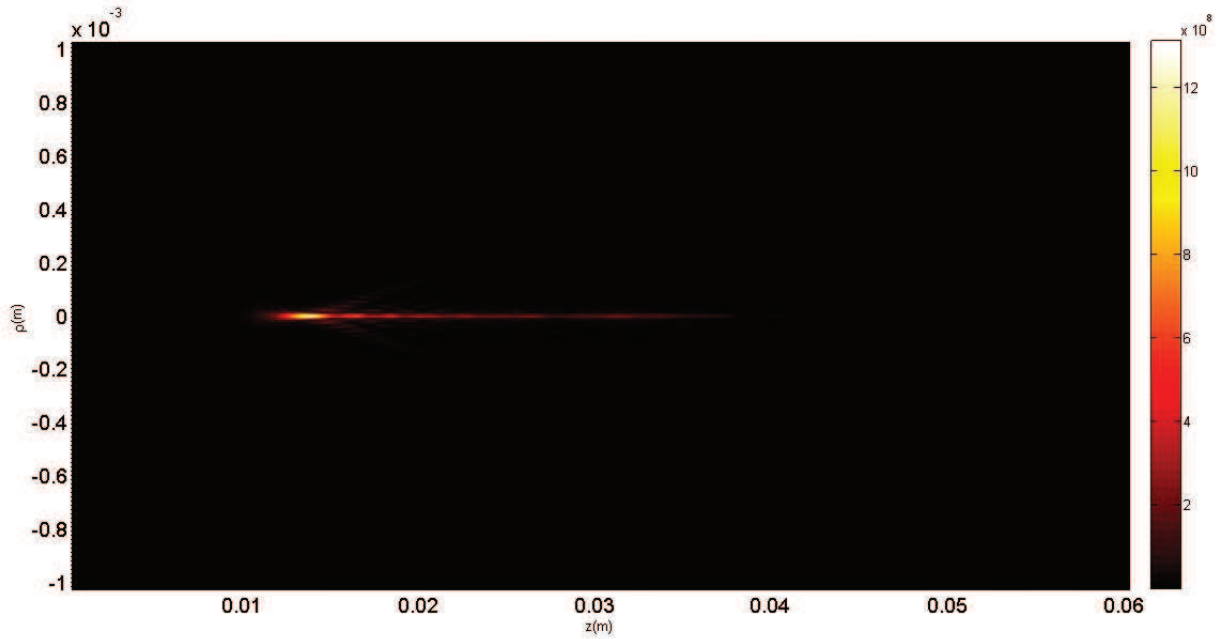


Fig. 3.5: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.3 e Fig. 3.4 sobre o eixo de propagação  $z$ .

Pelas Fig. 3.4 e Fig. 3.5 tem-se que  $D_{min} \approx 10\text{mm}$  e  $D_{max} \approx 40\text{mm}$ , encontram-se, portanto, bem próximos dos valores esperados de  $10.5\text{mm}$  e  $42.5\text{mm}$ , determinados a partir das Eq. (3.12) e Eq. (3.13), respectivamente. Pela Fig. 3.5, pode-se determinar o raio do spot inicial do feixe, a saber:  $\Delta\rho_0 \approx 12\mu\text{m}$ .

Para comparar a profundidade de campo do feixe proveniente da abertura do paraboloide, conforme exposto na Fig. 3.3, com a de um feixe gaussiano, é necessário construir este último a partir do mesmo comprimento de onda e raio de spot inicial do primeiro. Este feixe gaussiano encontra-se nas Fig. 3.6 - Fig. 3.8. Dessa forma, para ambos os feixes obtidos sob as mesmas condições, observa-se que, enquanto a intensidade do feixe gaussiano, ao percorrer uma distância de  $5\text{mm}$  já dobrou sua largura transversal, ou seja,  $\Delta\rho = 24\mu\text{m}$  e, ainda, ao atingir  $10\text{mm}$  já decaiu a menos de  $5\%$  de sua intensidade inicial, o feixe que parte do refletor parabólico sustenta sua intensidade, assim como seu spot pouco variante, ao longo de uma distância quatro vezes maior.

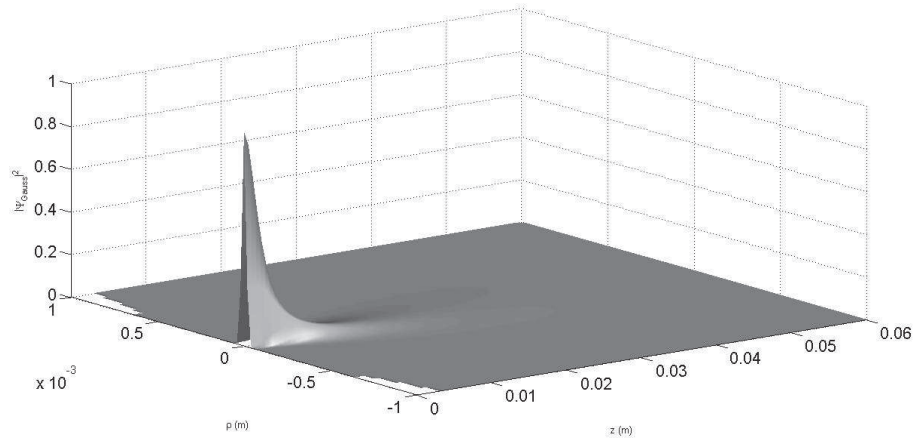


Fig. 3.6: Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de  $\approx 12\mu\text{m}$ , com um  $\lambda = 850\text{nm}$ .

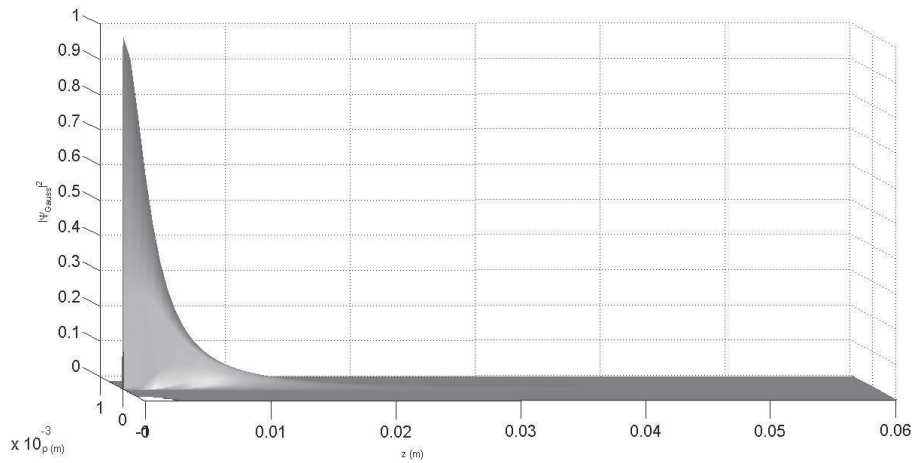


Fig. 3.7: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.6.

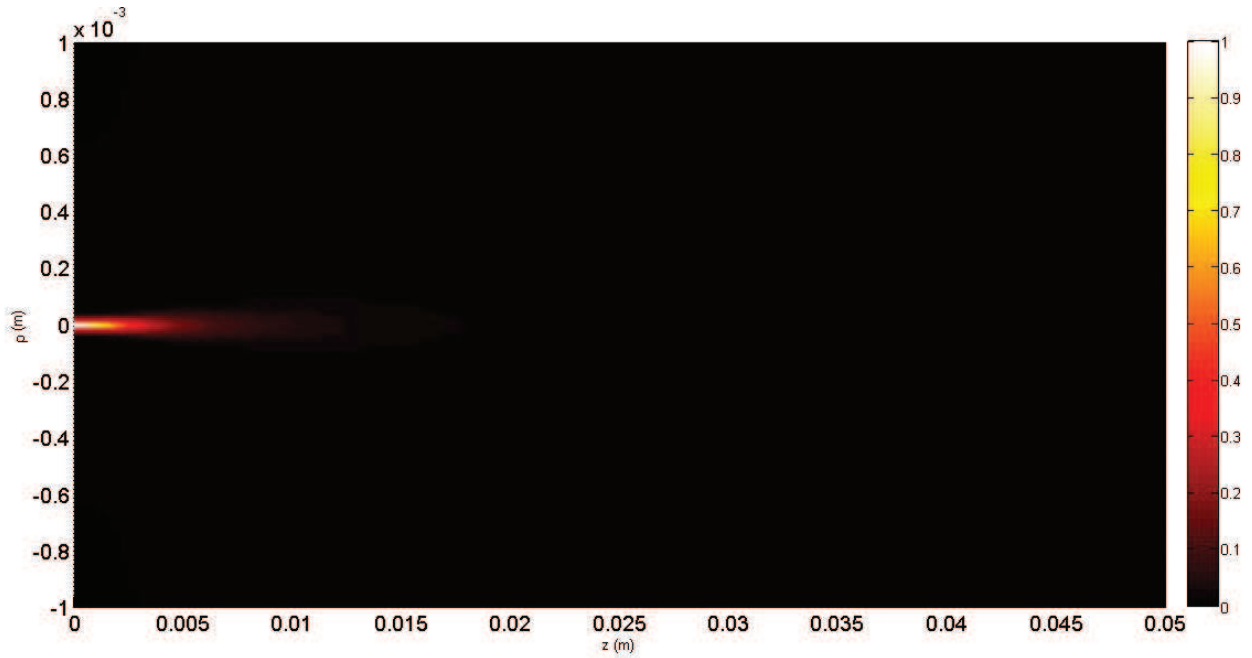


Fig. 3.8: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.6 e Fig. 3.7 sobre o eixo de propagação  $z$ .

### 3.4.2 Micro-Ondas

Neste regime espectral foram considerados três comprimentos de onda distintos, a saber:  $\lambda = 1\text{cm}$ ,  $\lambda = 2\text{cm}$  e  $\lambda = 3\text{cm}$ . Para ambos os comprimentos de onda, foi considerado um foco  $z_f$  em  $0.5\text{m}$ , portanto, com  $a = 1/4z_f = 0.5\text{m}^{-1}$  e  $z_p$ , que determina a posição relativa da fonte de ondas esféricas, em  $0.525\text{m}$ , portanto, distando  $2.5\text{cm}$  do foco.

Analogamente ao regime infravermelho, estamos assumindo que, no paraboloide,  $0 \leq z \leq z_p$  e, como  $z_p = aR^2$ , o raio de abertura considerado será de  $1.025\text{m}$ . Dessa forma, nesta configuração, a partir das Eq. (3.12) e Eq. (3.13) tem-se, respectivamente,  $D_{min} = 10.5\text{m}$  e  $D_{max} = 42.5\text{m}$ .



### Comprimento de onda de 1cm

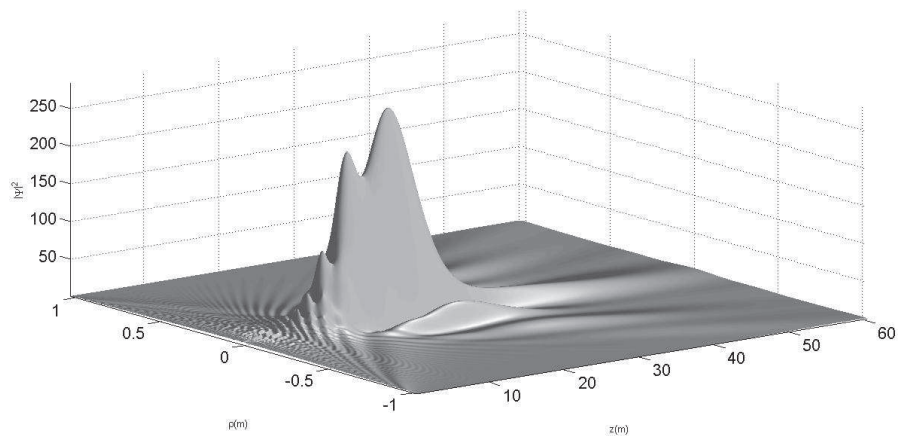


Fig. 3.9: Propagação do padrão de intensidade de um feixe de  $\lambda = 1\text{cm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do parabolóide") de 1.025m de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de 2.5cm.

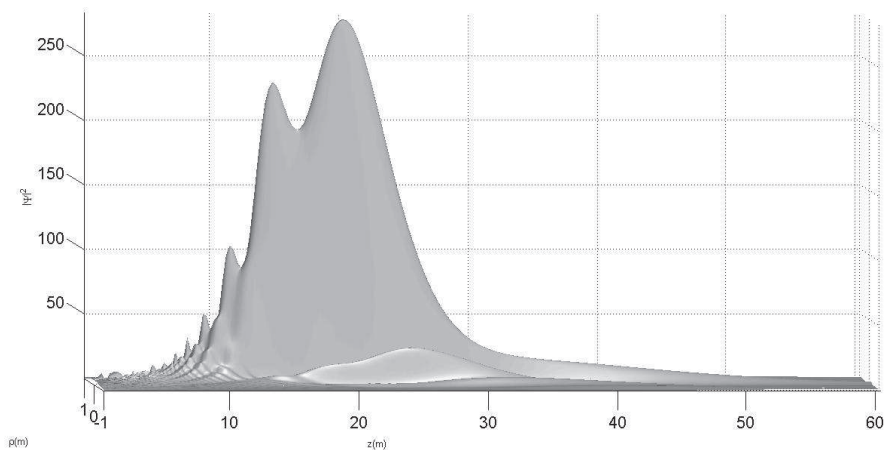


Fig. 3.10: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.9.

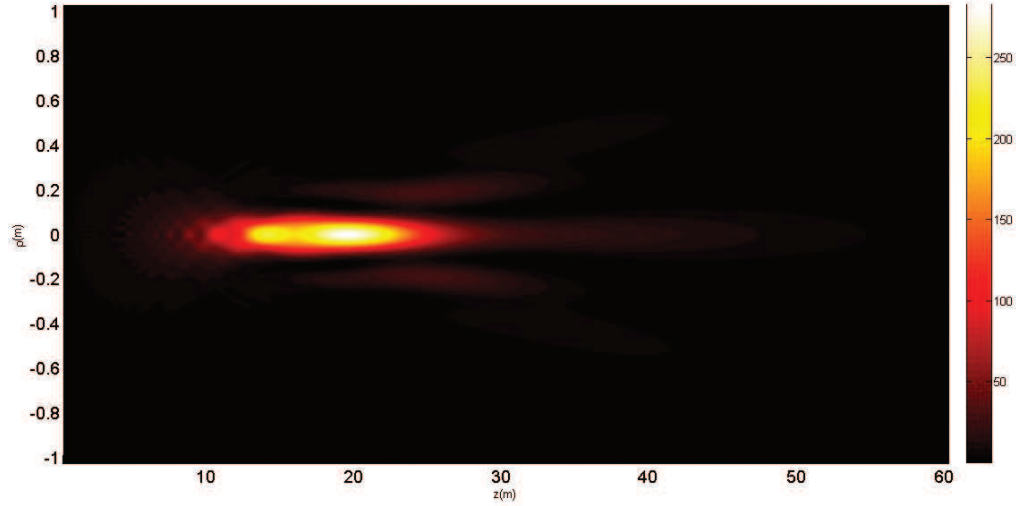


Fig. 3.11: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.9 e Fig. 3.10 sobre o eixo de propagação  $z$ .

Pelas Fig. 3.10 e Fig. 3.11 temos que o foco estendido nesta configuração é de aproximadamente 30m, pois através destes mesmos gráficos temos que  $D_{min} \approx 10\text{m}$  e  $D_{max} \approx 35\text{m}$ , portanto, próximos dos valores esperados obtidos, 10.5m e 42.5m.

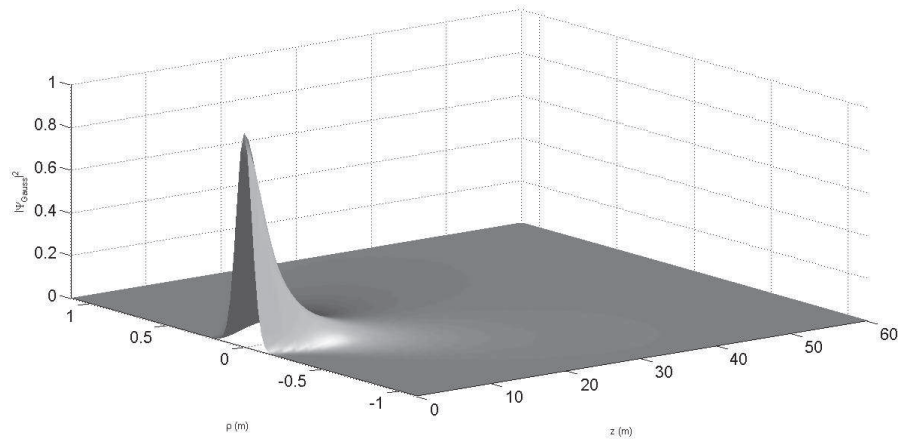


Fig. 3.12: Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 10cm, com  $\lambda = 1\text{cm}$ .

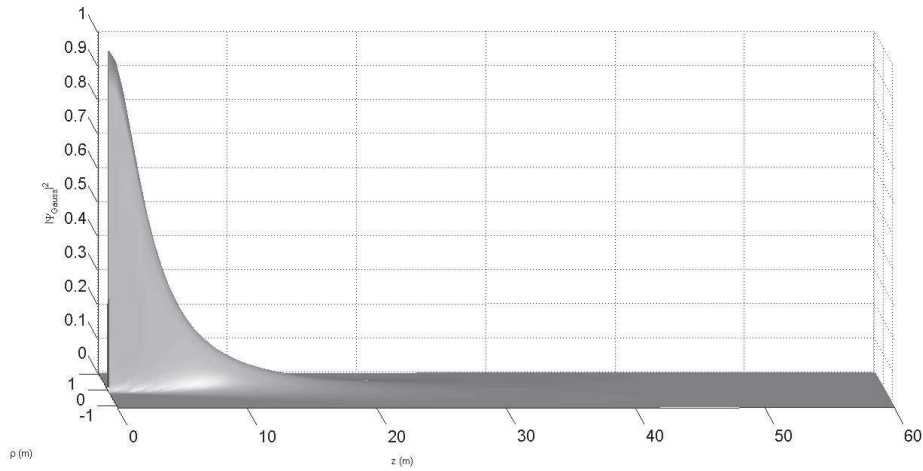


Fig. 3.13: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.12.

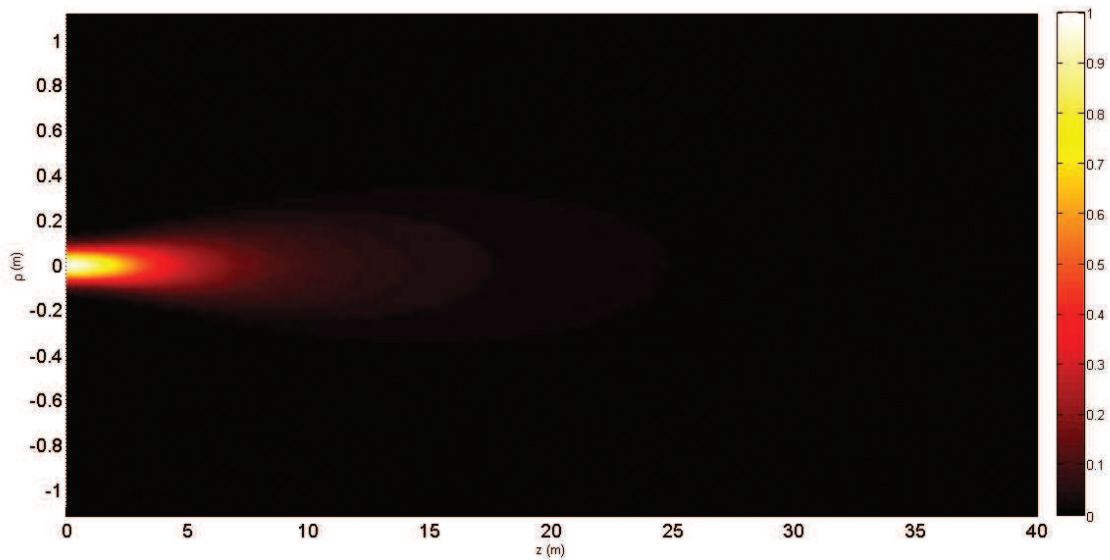


Fig. 3.14: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.12 e Fig. 3.13 sobre o eixo de propagação  $z$ .

Conforme feito no regime infravermelho, para que se possa realizar uma comparação entre as profundidades de campo deste foco estendido com a de um feixe gaussiano, temos que construir este último a partir de um mesmo comprimento de onda ( $\lambda = 1\text{cm}$ ) e raio de spot (aqui, medido a partir da Fig. 3.11, sendo de  $\Delta\rho_0 \approx 10\text{cm}$ ). O feixe gaussiano obtido através desta configuração encontra-se nas Fig. 3.12 - Fig. 3.14. Pode-se perceber que, enquanto o feixe gaussiano, em torno de  $z = 5\text{m}$ , já dobrou sua largura inicial, o feixe que parte do refletor parabólico propaga-se ao longo de uma distância cinco vezes maior; e ainda, análogo ao que ocorre com um feixe não difrativo, este último mantém seu spot pouco variante ao longo desta distância.

### Comprimento de onda de 2cm

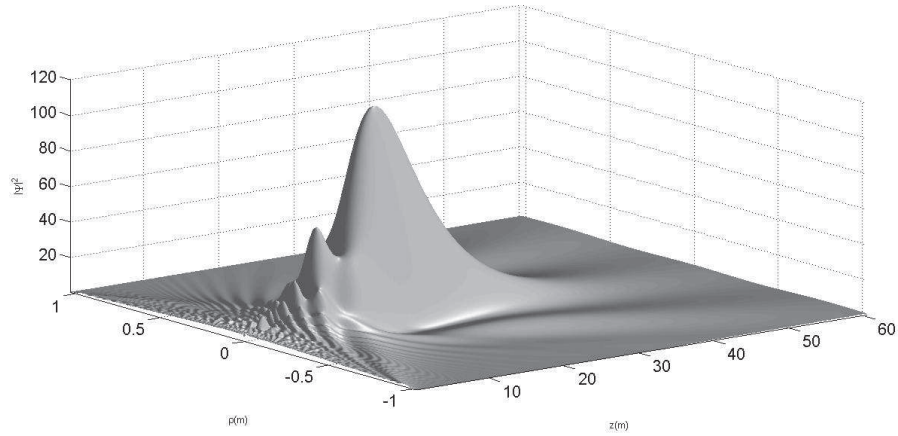


Fig. 3.15: Propagação do padrão de intensidade de um feixe de  $\lambda = 2\text{cm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do parabolóide") de 1.025m de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de 2.5cm.

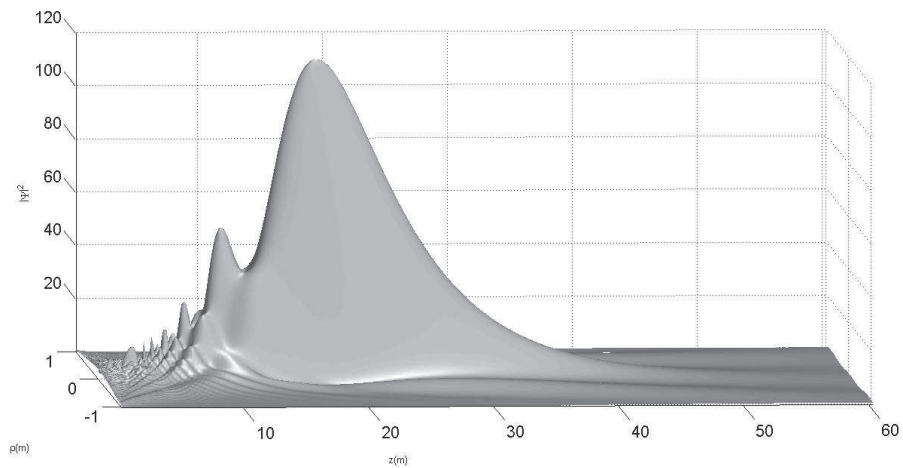


Fig. 3.16: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.15.

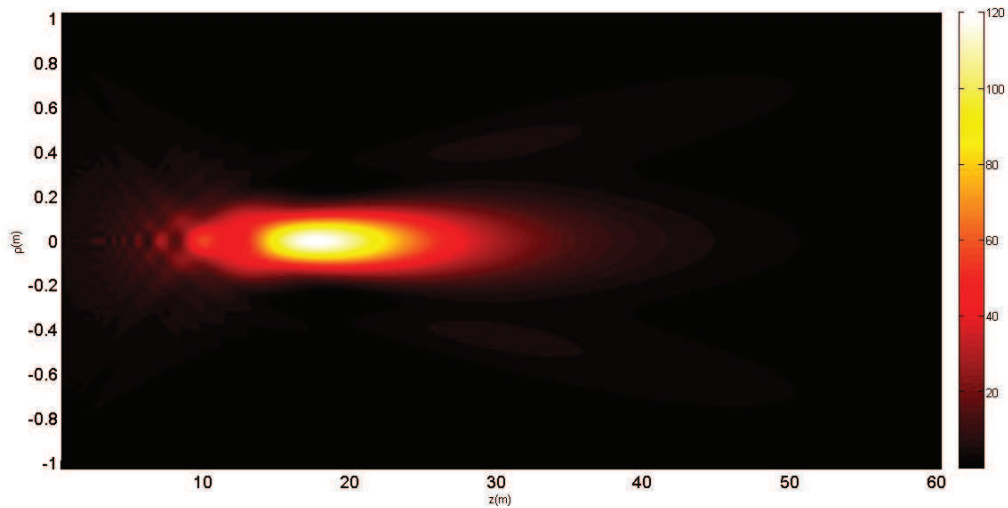


Fig. 3.17: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.15 e Fig. 3.16 sobre o eixo de propagação  $z$ .

Para o feixe gaussiano deve-se considerar um comprimento de onda de 2cm e um raio de spot - medido a partir do gráfico na Fig. 3.17 de  $\Delta\rho_0 \approx 20\text{cm}$ . O feixe gaussiano obtido através desta configuração encontra-se nas Fig. 3.18 - Fig. 3.20. Aqui, enquanto o feixe gaussiano, em torno de  $z = 7\text{m}$ , já dobrou sua largura, e em  $z = 15\text{m}$  a intensidade do feixe já decaiu a cerca de 10% de seu valor inicial, o feixe que parte do refletor parabólico propaga-se ao longo de uma distância em torno de três vezes maior ( $D_{min} \approx 9.5\text{m}$  e  $D_{max} \approx 40\text{m}$ , a partir da Fig. 3.17).

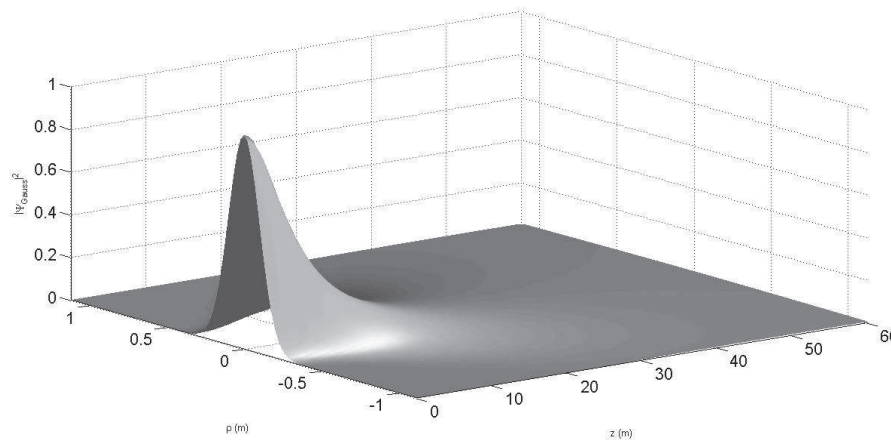


Fig. 3.18: (a) Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 20cm, com  $\lambda = 2\text{cm}$ .

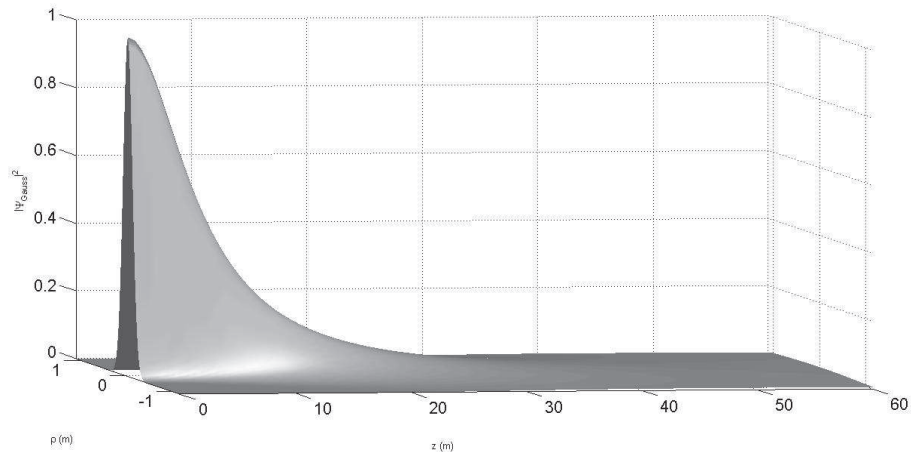


Fig. 3.19: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.18.

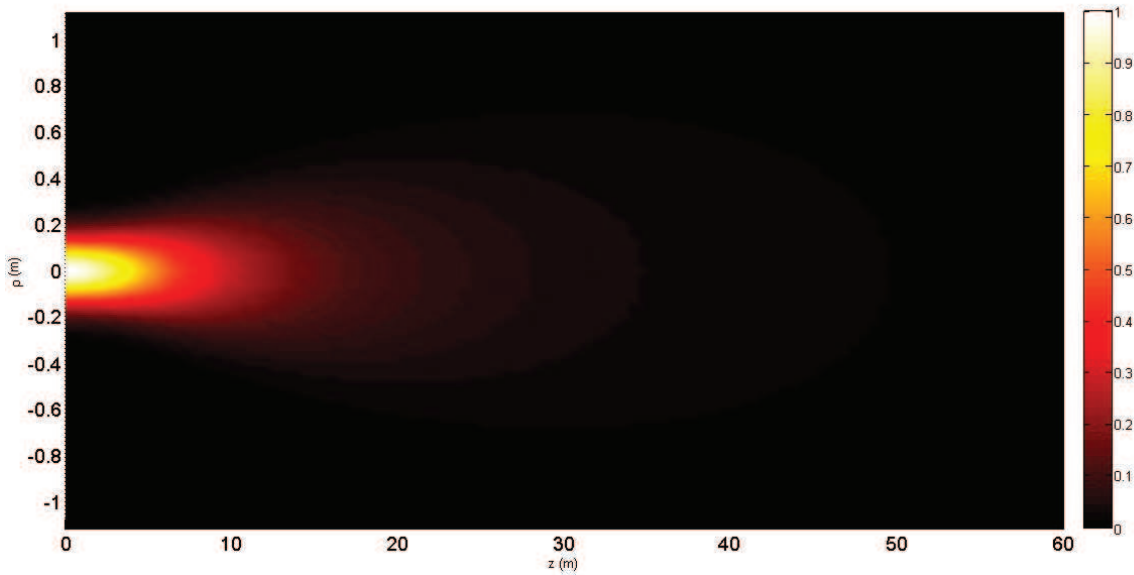


Fig. 3.20: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.18 e Fig. 3.19 sobre o eixo de propagação  $z$ .

### Comprimento de onda de 3cm

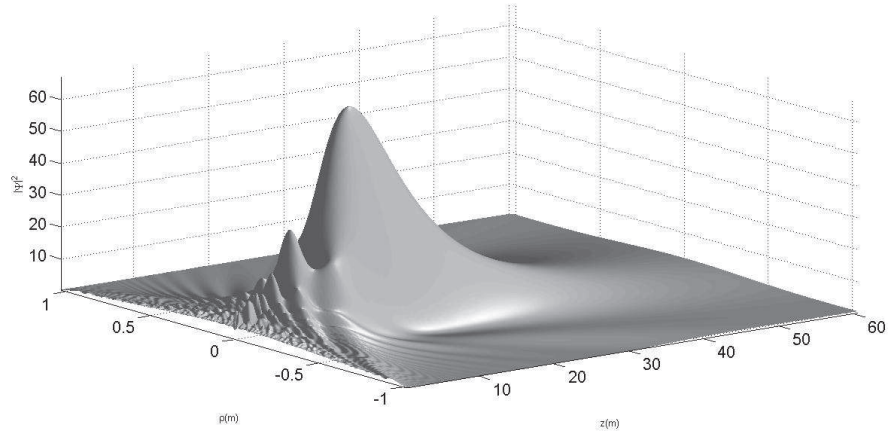


Fig. 3.21: Propagação do padrão de intensidade de um feixe de  $\lambda = 3\text{cm}$ , a partir da integral de difração de Fresnel, Eq. (2.21), que parte de uma abertura ("boca do parabolóide") de 1.025m de raio, após, originalmente, ter sido gerado em uma fonte de ondas esféricas deslocada de 2.5cm.

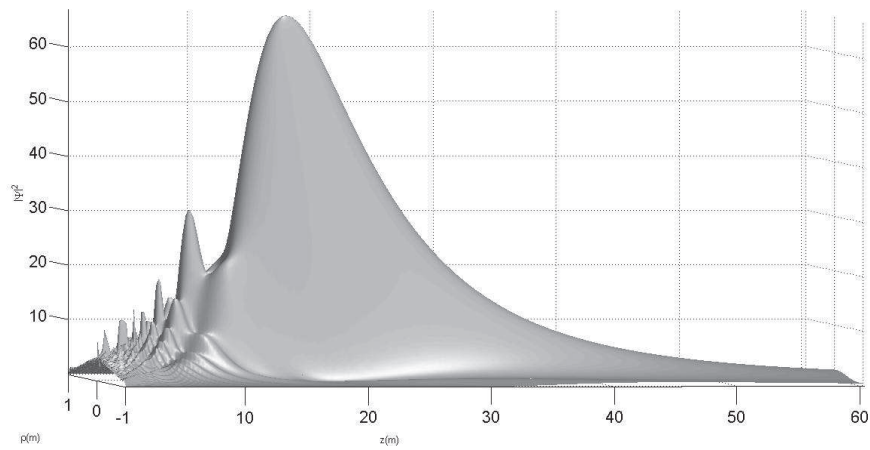


Fig. 3.22: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.21.

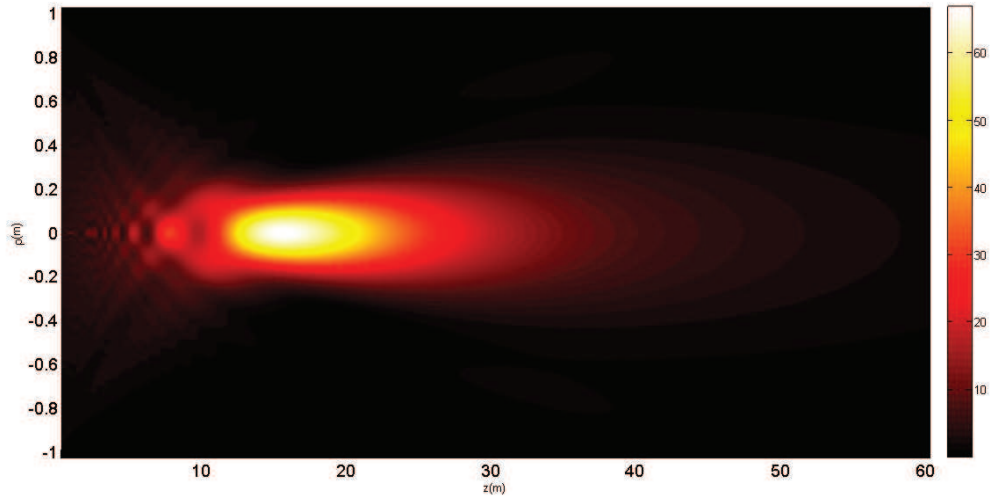


Fig. 3.23: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.21 e Fig. 3.22 sobre o eixo de propagação  $z$ .

Finalmente, agora, deve-se considerar um comprimento de onda de 3cm e um raio de spot - medido a partir do gráfico na Fig. 3.23 - de  $\Delta\rho_0 \approx 25\text{cm}$  na geração do feixe gaussiano a se comparar. Este feixe, nesta configuração, encontra-se nas Fig. 3.24 - Fig. 3.26. Aqui, enquanto o feixe gaussiano, em torno de  $z = 10\text{m}$ , já dobrou sua largura inicial, e em  $z = 25\text{m}$  a intensidade do feixe já decaiu a cerca de 10% de seu valor inicial, o feixe que parte do refletor parabólico propaga-se ao longo de uma distância em torno de quatro vezes maior ( $D_{min} \approx 9.0\text{m}$  e  $D_{max} \approx 47\text{m}$ , a partir da Fig. 3.26).

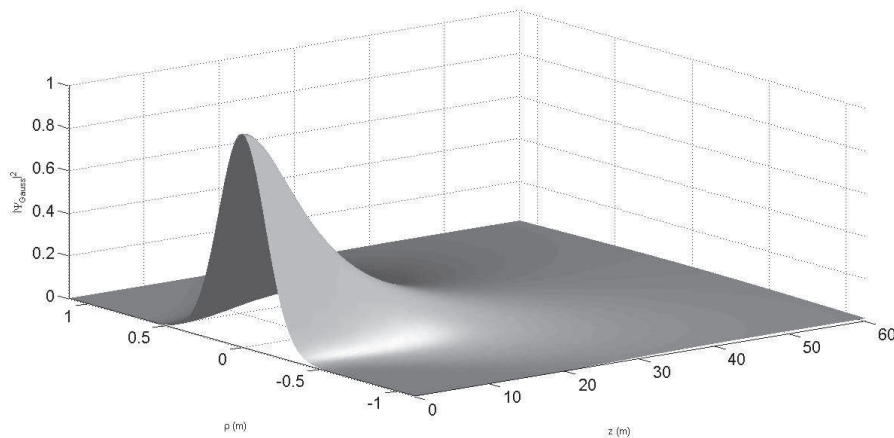


Fig. 3.24: Propagação do padrão de intensidade de um feixe gaussiano determinado a partir da Eq. (2.15), considerando um raio de spot central de 25cm, com  $\lambda = 3\text{cm}$ .



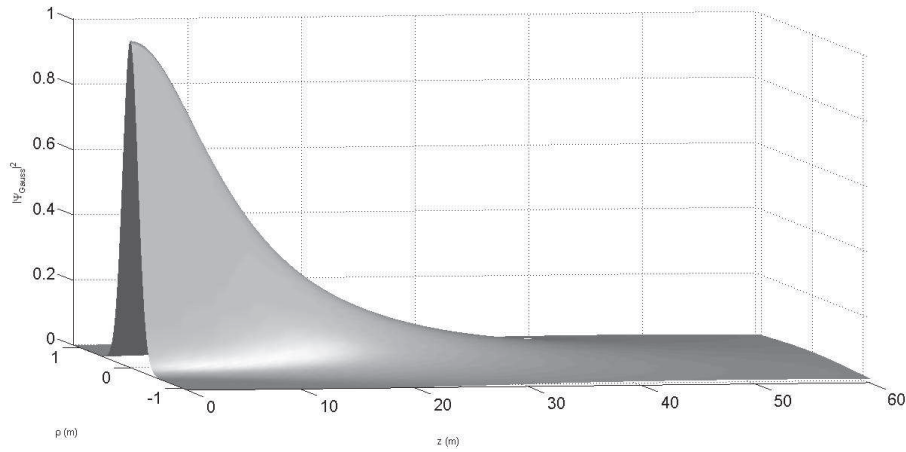


Fig. 3.25: Vista lateral do padrão de intensidade da Fig. 3.24.

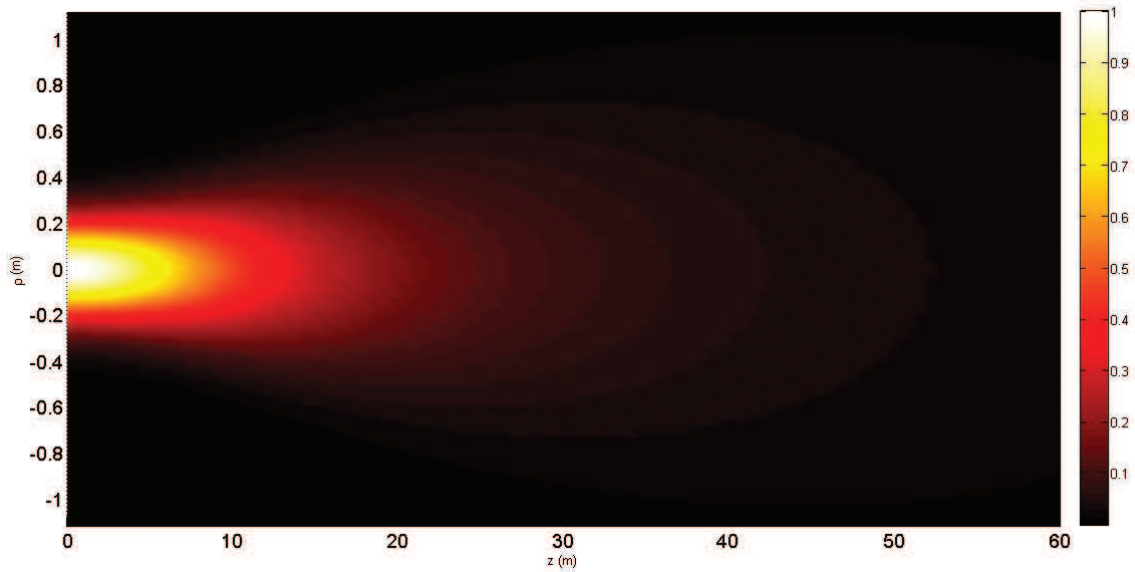


Fig. 3.26: Projeção Ortogonal do padrão de intensidade obtido nas Fig. 3.24 e Fig. 3.25 sobre o eixo de propagação  $z$ .

Portanto, neste regime espectral, a menor profundidade de campo observada para o feixe gaussiano ocorreu em  $\lambda = 1\text{cm}$ . Este resultado é esperado, dado que podemos analisar a profundidade de campo através do comprimento de difração dado pela Eq. (2.16), a partir do qual quanto menor a razão  $\frac{\Delta\rho_0^2}{\lambda}$ , menor será a distância em que o feixe gaussiano irá se propagar antes de dobrar sua largura inicial, que caracteriza o spot inicial deste feixe.

Para o feixe gerado a partir do refletor parabólico, obteve-se profundidades de campo maiores conforme se aumentou o comprimento de onda, tendo, portanto, o seu máximo em  $\lambda = 3\text{cm}$ . No

entanto, a concentração transversal do campo - característica fundamental dos feixes não difrativos - foi perdida, a ponto de se ter um raio de spot três vezes maior em  $\lambda = 3\text{cm}$  quando comparado a  $\lambda = 1\text{cm}$ . Esta discrepância deve-se ao fato de termos mantido as mesmas dimensões para o refletor parabólico em ambos os casos. Assim, conforme se aumenta o comprimento de onda, menor a diferença com relação ao tamanho do refletor, e menos satisfatório torna-se o regime de aproximação que foi considerado para a geração do foco estendido.

### 3.5 Descrição Aproximada do Padrão Transversal do Feixe Resultante

Em nosso regime de aproximação, vamos considerar a discretização do parabolóide em cinturões de larguras suficientemente pequenas e estes, por sua vez, discretizados por elementos de plano com dimensões muito superiores ao comprimento de onda da fonte de ondas esféricas.

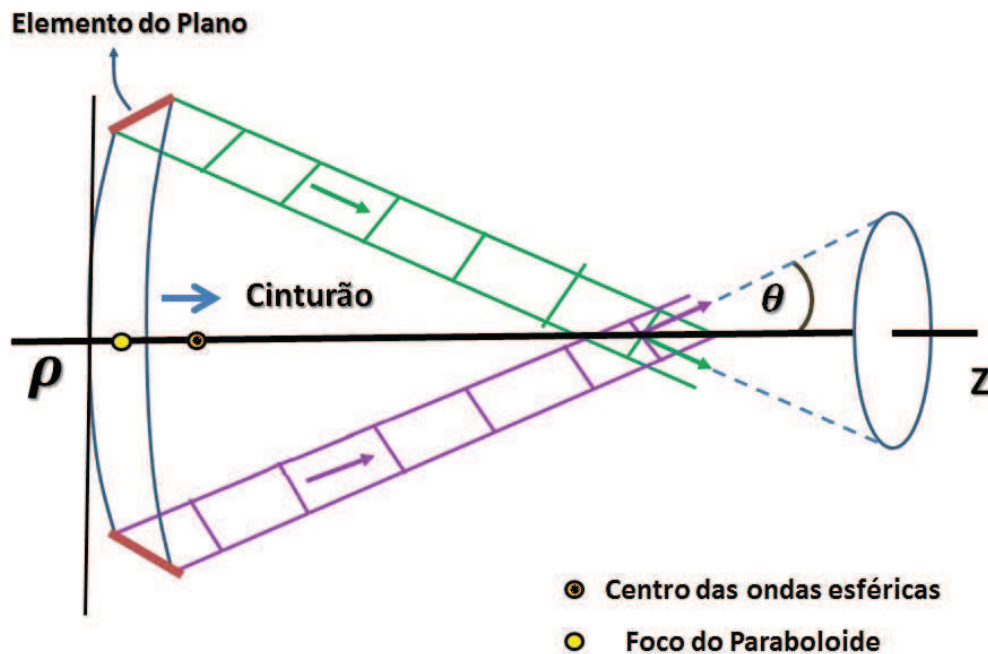


Fig. 3.27: Discretização do parabolóide em cinturões e discretização destes cinturões em elementos de plano cujas dimensões são tomadas como sendo muito superiores que do comprimento de onda da fonte. A "porção" de onda esférica incidente é refletida na superfície do refletor parabólico como uma "porção" de onda plana, não sofrendo difração considerável até cruzar com o eixo  $z$ .

Dessa maneira, pode-se intuir que a porção da onda esférica originada em  $(\rho = 0, z = z_p)$  - "centro de ondas esféricas" na Fig. 3.27 - que incide em cada um desses planos será refletida como uma

onda plana com as dimensões respectivas do elemento de plano em questão, conforme considerado na Eq. (3.9). Assim, em cada ponto do eixo  $z$  chegará um conjunto de "porções" de ondas planas provenientes do cinturão correspondente a esse ponto  $z$ <sup>4</sup>. Por simetria, os vetores de onda do conjunto de "porções" de ondas planas estarão sobre a superfície de um cone cujo ângulo é dado por  $2\theta$  (vide Fig. 3.27). Essa superposição dará origem a um feixe de Bessel de ângulo de áxicon  $\theta$ , que se propagará por um pequeno intervalo em  $z$  sendo, então, "substituído" pelo feixe de Bessel do próximo cinturão, e assim sucessivamente, até que a posição  $D_{max}$ , que marca o fim do foco estendido, seja atingida.

Pode-se mostrar (Apêndice C) que:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z - a\eta^2}{\eta}\right)^2 + 1}} \quad (3.15)$$

onde:

$$\eta = \sqrt{-\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} \sqrt{1 - 4a(z_p - (4az_p - 1)z)}} \quad (3.16)$$

Dessa forma, intuitivamente, dentro das condições de aproximação consideradas, espera-se que no intervalo do foco estendido, e para pontos próximos do eixo  $z$ , o campo será proporcional à uma função de Bessel de ângulo de áxicon variável  $\theta$ . Ou seja:

$$\Psi(\rho, z, t) \propto e^{-i\omega t} J_0\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \rho\right) \quad (3.17)$$

onde, agora,  $\theta$  não é fixo, e sim, dependente de  $z$  conforme visto na Eq. (3.15).

Na Eq. (3.17), o símbolo de proporcionalidade não deve ser entendido como "a menos de uma constante multiplicativa", mas sim como "a menos de uma função multiplicativa que depende de  $z$  e  $\rho$ ", sendo essa função responsável pela magnitude da onda. Sendo assim, a expressão aproximada na Eq. (3.17) não fornece a variação de intensidade do feixe, mas apenas o comportamento transversal deste ao longo de sua propagação.

Dessa forma, a comparação gráfica entre o feixe proveniente do refletor parabólico com o feixe de Bessel de ângulo de áxicon variável  $\theta$ , deverá ser realizada desconsiderando a informação a respeito da intensidade dos respectivos feixes. Para isso, normalizamos o campo emanado do paraboloide a partir do valor da intensidade ao longo do eixo  $z$  ( $z, \rho = 0$ ), portanto,  $\frac{\Psi(\rho, z)}{\Psi(\rho=0, z)}$ . Com isso, teremos apenas a informação acerca da evolução do padrão transversal do feixe, sem qualquer informação a respeito de sua intensidade.

---

<sup>4</sup>Cada ponto  $\rho'$  do refletor corresponde a um ponto  $z$  sobre o eixo, e essa correspondência é feita pelo raio que reflete no ponto do paraboloide e cruza o eixo  $z$ .

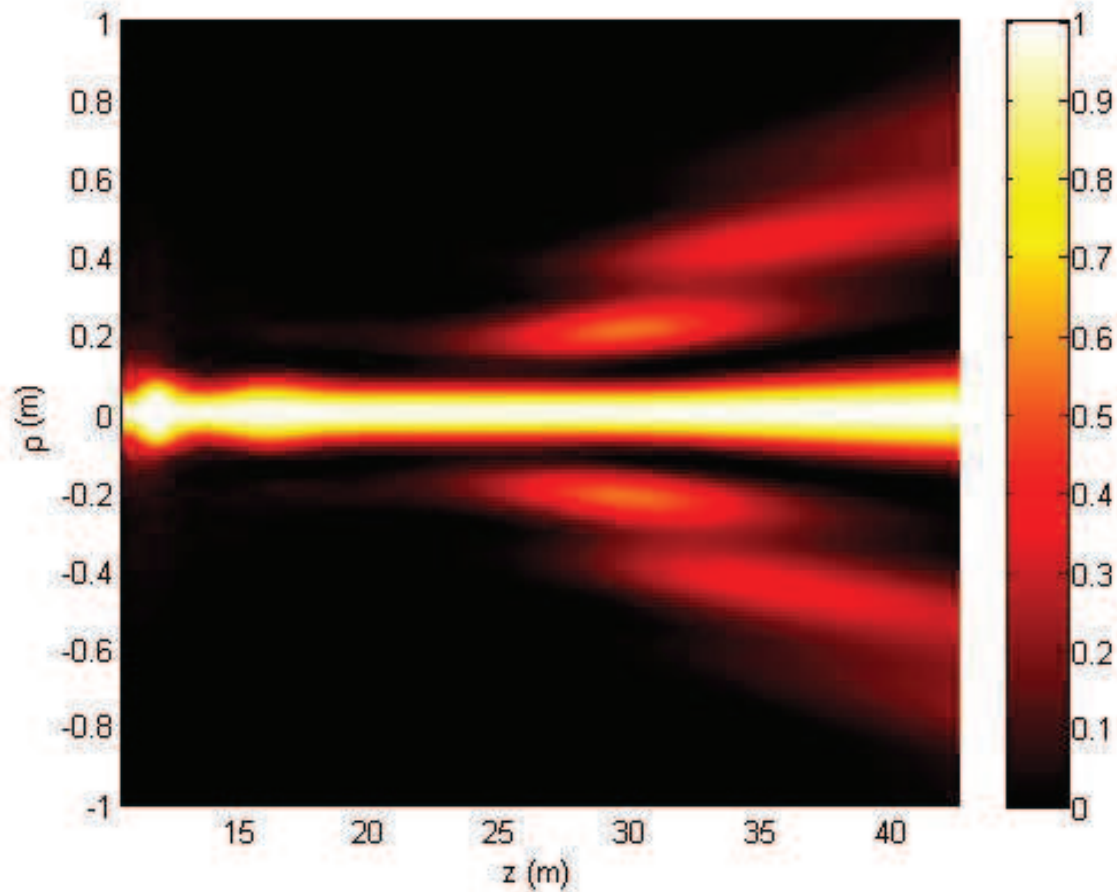


Fig. 3.28: Campo emanado do refletor parabólico de raio 1.025m, com foco  $z_f = 0.5\text{m}$  e fonte de ondas esféricas afastada a 2.5cm de  $z_f$ , considerando  $\lambda = 1\text{cm}$ . A projeção ortogonal foi obtida a partir da normalização do valor da intensidade ao longo do eixo  $z$  ( $z, \rho = 0$ ), portanto,  $\frac{\Psi(\rho,z)}{\Psi(\rho=0,z)}$ ; em que, portanto, tem-se apenas a informação acerca da evolução do padrão transversal do feixe, sem qualquer informação a respeito de sua intensidade.

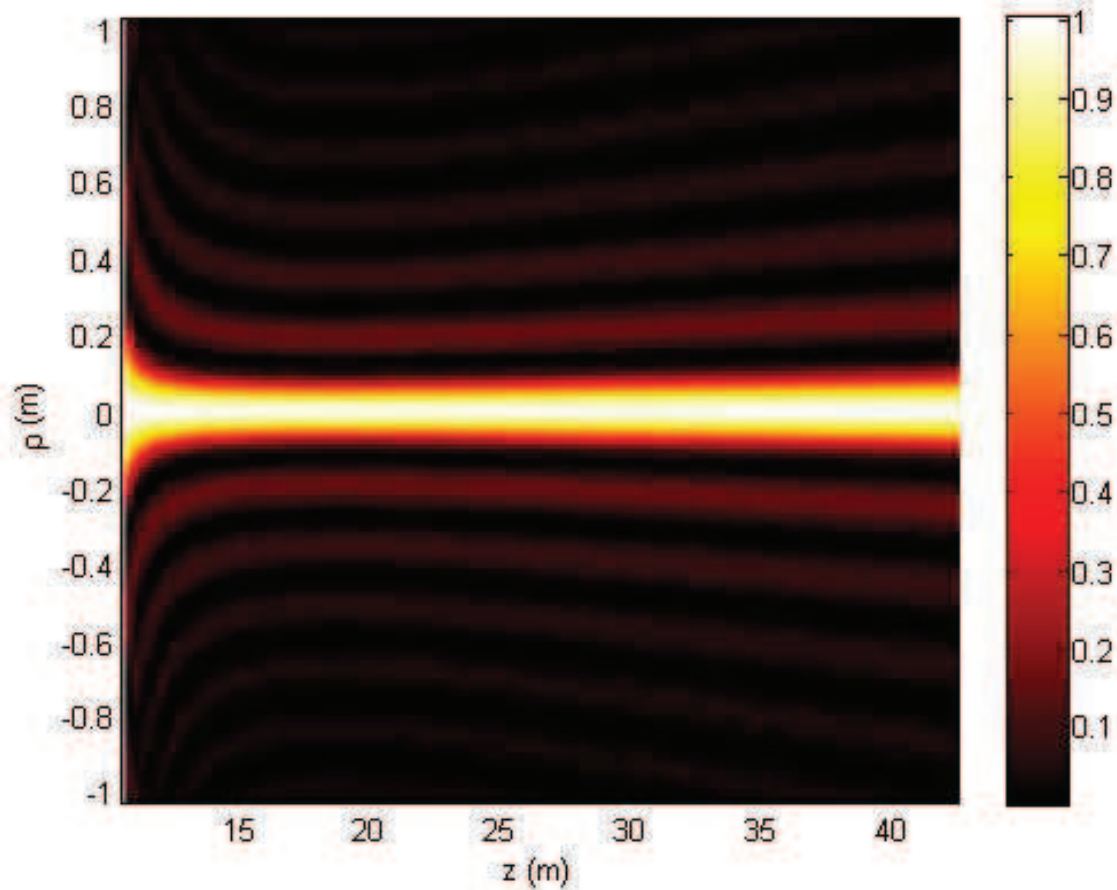


Fig. 3.29: Projeção ortogonal do feixe de Bessel  $e^{-i\omega t} J_0(\frac{\omega}{c} \sin \theta \rho)$  de ângulo de áxicon variável  $\theta$ , onde este último respeita a relação dada pela Eq. (3.15).

Das Fig. 3.28 e Fig. 3.29, percebe-se a semelhança na projeção ortogonal do feixe de Bessel de ângulo variável e do feixe normalizado proveniente do paraboloide, no regime espectral considerado, a saber,  $\lambda = 1\text{cm}$ . Podemos perceber que a abertura dos feixes acentua-se em torno de  $z = 25\text{m}$ , sendo visível que os raios de spot do feixe normalizado do paraboloide e do feixe de Bessel de ângulo de áxicon variável coincidem.

## 3.6 Conclusão

Tendo como base os feixes não difrativos já conhecidos, foi apresentado neste capítulo uma maneira mais simples de gerar este tipo de feixe a partir de um refletor parabólico e uma fonte de ondas esféricas. Para tal, é necessário um regime de aproximação - que também permitiu o tratamento do modelo através de geometria de raios - a partir do qual as dimensões do parabolóide sejam bem superiores ao comprimento de onda produzido na fonte e, ainda, que esta esteja ligeiramente deslocada do foco, na direção de afastamento do refletor; o que, conforme analisou-se, tende a produzir um foco estendido. A partir de simulações numéricas, pôde-se observar o comportamento deste foco estendido, assim como seu padrão de intensidade que tende a se manter ao longo de uma distância ( $D_{max} - D_{min}$ ) - que caracteriza o comprimento do foco estendido -, enquanto que, para o respectivo feixe gaussiano gerado através de mesmas condições (comprimento de onda e raio de spot), para essa mesma distância, o padrão de intensidade tende a sofrer um rápido decaimento. A propriedade essencial apresentada pelo feixe proveniente do refletor parabólico que tende a caracterizá-lo, nas condições adequadas, como um feixe não difrativo é, além de sua profundidade de campo relativamente extensa - quando comparada com um feixe gaussiano gerado mediante as mesmas condições - a sustentação do spot pouco variante ao longo desta distância.

Por fim, apesar de partirmos de um regime de micro-ondas/ondas milimétricas e infravermelho, os resultados obtidos podem ser extrapolados para o espectro óptico, em que as condições de aproximação ( $\lambda \ll$  raio do parabolóide) são facilmente obtidas.

## 3.7 Referências

- [1] M. Nussenzveig, Curso de Física Básica 4. Editora Edgard Blücher, Segunda Edição (2008).
- [2] J. W. M. Baars, The Paraboloidal Reflector Antenna in Radio Astronomy and Communication, Springer (2007).
- [3] E. Recami, M. Zamboni-Rached and H.E. Hernandez Figueroa, "Localized Waves: A historical and scientific introduction", In: Hugo E. H. Figueroa; Michel Zamboni-Rached; Erasmo Recami. Localized Waves. 1 ed. Hoboken, NJ: John Wiley, 2008

# Capítulo 4

## Conclusão

Com base nos feixes não difrativos já conhecidos, foi apresentado neste trabalho uma maneira mais simples de gerar este tipo de feixe a partir de um refletor parabólico e uma fonte de ondas esféricas. Para tal, é necessário um regime de aproximação - que também permitiu o tratamento do modelo através de geometria de raios - a partir do qual as dimensões do parabolóide sejam bem superiores às do comprimento de onda produzido na fonte e, ainda, que esta esteja ligeiramente deslocada do foco, na direção de afastamento do refletor; o que, conforme analisou-se, tende a produzir um foco estendido.

A partir de simulações numéricas, pôde-se observar o comportamento deste foco estendido que, nos casos analisados aqui, observou-se que o padrão de intensidade tende a se manter ao longo de uma distância ( $D_{max} - D_{min}$ ) - que caracteriza o comprimento do foco estendido-, enquanto que, para o respectivo feixe gaussiano gerado através de mesmas condições (comprimento de onda e raio de spot), para essa mesma distância, o padrão de intensidade tende a sofrer um rápido decaimento.

Portanto, um foco estendido produzido mediante estas condições apresenta características de um feixe não difrativo, e em especial, para o regime de micro-ondas - cuja construção de feixes não difrativos comuns é mais difícil de ser realizada -, a montagem tratada aqui, especificamente, torna-se simples pois as dimensões do refletor podem ser encontradas em uma antena parabólica comum.

### 4.1 Trabalhos Futuros

O estudo realizado nesta dissertação, manteve-se no âmbito escalar que, mesmo satisfatório em primeira aproximação, desconsiderou características importantes da radiação eletromagnética, como a polarização. Dessa forma, como perspectiva futura, numa segunda aproximação, pretendemos analisar a montagem *refletor parabólico + fonte de ondas esféricas* levando em conta as correntes superficiais induzidas no refletor pela onda eletromagnética incidente. Assim, a intensidade do campo



em qualquer ponto na região externa ao paraboloide poderá ser obtida a partir da integração destas correntes superficiais na superfície iluminada do refletor. Como, em nossa primeira aproximação, utilizaremos a integração do campo sobre a abertura ("boca" do paraboloide), no entanto, agora, utilizando-nos de uma integral de difração vetorial num regime de aproximação chamado de *Método de Integração na Abertura*, a partir da integral de Kirchoff-Helmholtz [1]. Por meio desta integração na abertura, obtém-se as características da radiação para pontos no campo, tanto nas regiões de campo próximo (Fresnel) como de campo distante (Fraunhofer) do refletor.

Apesar desta ser uma abordagem mais precisa do que a abordada neste trabalho, ela ainda se apóia na condição de que as dimensões do paraboloide sejam bem superiores à grandeza do comprimento de onda utilizado na fonte. A análise vetorial permite se levar em conta aspectos de polarização, portanto, essencial para firmar o método de geração de feixes não difrativos proposto neste mestrado.

Por fim, visa-se o uso do software CST como recurso computacional nesta etapa vetorial, com o intuito de simular fontes aproximadas à fonte de ondas esféricas ideal considerada neste trabalho - arranjo de dipolo de meia onda cruzado em contra-fase, arranjos do tipo Cassegrain, entre outros a se discutir -, efeitos de polarização na continuidade do feixe, assim como possíveis alterações na superfície do refletor - como rugosidades - verificando a influência sobre a formação do foco estendido.

## 4.2 Referências

[1] J. W. M. Baars, *The Paraboloidal Reflector Antenna in Radio Astronomy and Communication*, Springer (2007).

# Apêndice A

## Cálculo de $\rho''$ em função de $\rho'$

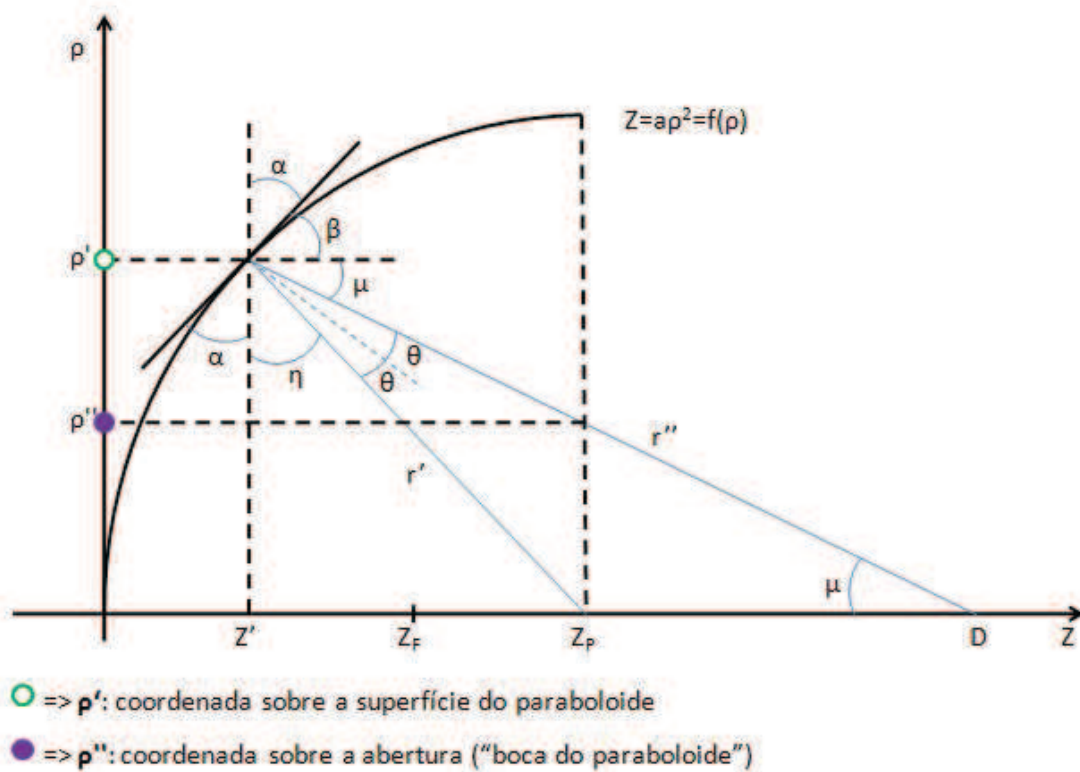


Fig. A.1: Esquema lateral do refletor parabólico a partir do qual se obtém as relações geométricas utilizadas na obtenção da variável  $\rho''$  em função da variável  $\rho'$ .

Consideramos um refletor parabólico com equação dada por:

$$z = z(\rho) = a\rho^2 \Rightarrow \rho = \rho(z) = +\left[\frac{z}{a}\right]^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

onde  $a = \frac{1}{4z_F}$  é uma constante relacionada ao foco  $F = (z_F, 0)$ . Na segunda expressão, em que  $\rho$  é obtido em função de  $z$ , o sinal positivo indica que estamos trabalhando com a região superior do parabolóide ( $\rho \geq 0$ ), conforme pode ser visto na Fig. A.1.

Da Fig. A.1, obtém-se as seguintes relações:

$$\frac{d[z(\rho)]}{d\rho} = 2a\rho' = \tan(\alpha) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d[\rho(z)]}{dz} = \frac{1}{2a\rho'} = \tan(\beta) \quad (\text{A.3})$$

$$\tan(\eta) = \frac{z_p - z'}{\rho'} \quad (\text{A.4})$$

E ainda, pela equação da reta  $r''$ , temos:

$$(\rho - \rho') = \tan(\mu)(z_p - z') \Rightarrow \rho'' = \tan(\mu)(z_p - a\rho'^2) + \rho' \quad (\text{A.5})$$

Precisamos achar  $\mu$  a partir das derivadas dadas pelas Eq. (A.2) e Eq. (A.3) para que não haja redundância dos caminhos geométricos:

$$\begin{aligned} \theta + \mu + \beta &= \frac{\pi}{2} = \theta + \eta + \alpha \Rightarrow \mu + 2\theta + \eta + \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \\ \mu + 2\theta + \eta &= \frac{\pi}{2} = \theta + \mu + \beta \\ \theta + \eta &= \beta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

E:

$$\theta + \mu + \beta = \frac{\pi}{2} = \alpha + \beta \Rightarrow \theta + \mu = \alpha \quad (\text{A.7})$$

Mas, de relações trigonométricas, temos para soma de dois arcos:

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad (\text{A.8})$$

Utilizando a relação de tangente de soma de dois arcos da Eq. (A.8) na Eq. (A.7), obtemos:

$$\tan(\mu) = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(-\theta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(-\theta)} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\theta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\theta)} \quad (\text{A.9})$$

onde  $\tan(\alpha)$  é dado pela Eq. (A.2).

Para obter  $\tan(\theta)$ , usaremos a relação de tangente de soma de dois arcos da Eq. (A.8) na Eq. (A.6):

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \eta) = \frac{\tan(\beta) + \tan(-\eta)}{1 - \tan(\beta)\tan(-\eta)} = \frac{\tan(\beta) - \tan(\eta)}{1 + \tan(\beta)\tan(\eta)} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as Eq. (A.3) e Eq. (A.4) na Eq. (A.10), temos:

$$\tan(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{2a\rho'}\right) - \left(\frac{z_p - a\rho'^2}{\rho'}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2a\rho'}\right)\left(\frac{z_p - a\rho'^2}{\rho'}\right)} = \frac{\left(\frac{1 - 2az_p + 2a^2\rho'^2}{2a\rho'}\right)}{\left(\frac{2a\rho'^2 + z_p - a\rho'^2}{2a\rho'^2}\right)} = \frac{\rho'(1 - 2az_p + 2a^2\rho'^2)}{(a\rho'^2 + z_p)} \quad (\text{A.11})$$

Das Eq. (A.2) e Eq. (A.11) na Eq. (A.9):

$$\begin{aligned} \tan(\mu) &= \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\theta)} = \frac{[2a\rho' - \frac{\rho'(1 - 2az_p + 2a^2\rho'^2)}{(a\rho'^2 + z_p)}]}{[1 + \frac{(2a\rho')\rho'(1 - 2az_p + 2a^2\rho'^2)}{(a\rho'^2 + z_p)}]} \\ &= \frac{[2a\rho'(a\rho'^2 + z_p) - \rho'(1 - 2az_p + 2a^2\rho'^2)]}{[(a\rho'^2 + z_p) + (2a\rho')\rho'(1 - 2az_p + 2a^2\rho'^2)]} \\ &= \frac{4a\rho'z_p - \rho'}{3a\rho'^2 + z_p - 4a^2\rho'^2z_p + 4a^3\rho'^4} \\ &= \frac{\rho'(4az_p - 1)}{a\rho'^2(3 + 4a^2\rho'^2) + z_p(1 - 4a^2\rho'^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Somando e subtraindo  $4a\rho'^2$  no denominador da Eq. (A.12), obtemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho'(4az_p - 1)}{a\rho'^2(3 - 4 + 4a^2\rho'^2) + z_p(1 - 4a^2\rho'^2) + 4a\rho'^2} \\ \tan(\mu) &= \frac{\rho'(4az_p - 1)}{(a\rho'^2 - z_p)(4a^2\rho'^2 - 1) + 4a\rho'^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo a Eq. (A.13) na Eq. (A.5):

$$\rho'' = \frac{(4az_p - 1)\rho'(z_p - a\rho'^2)}{(a\rho'^2 - z_p)(4a^2\rho'^2 - 1) + 4a\rho'^2} + \rho' \quad (\text{A.14})$$

A Eq. (A.14) apresenta a variável  $\rho''$ , que representa a coordenada da abertura do refletor parabólico, em função da coordenada  $\rho'$ , que, por sua vez, representa a coordenada sobre o refletor.

## Apêndice B

### Cálculo do Comprimento do Foco Estendido

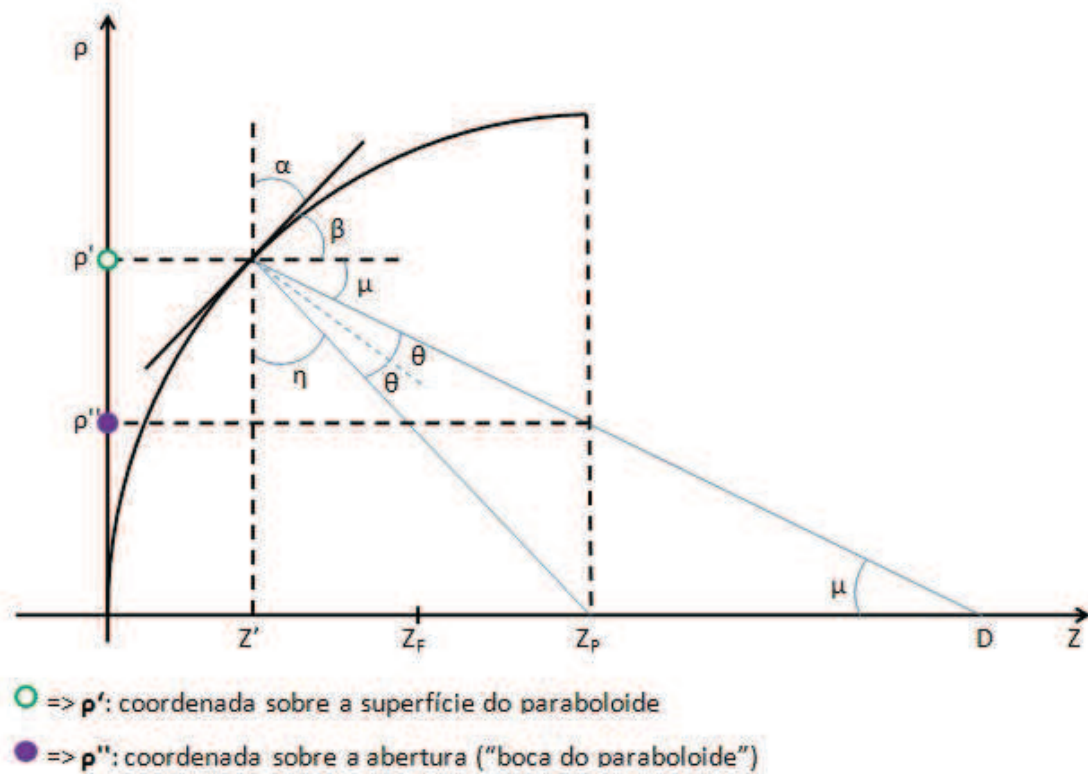


Fig. B.1: Esquema lateral do refletor parabólico a partir do qual se obtém as relações geométricas que possibilitarão o cálculo do comprimento do foco estendido.

Pela Fig. B.1, temos:

$$\tan(\eta + 2\theta) = \frac{D - z'}{\rho'} \quad (\text{B.1})$$

Podemos abrir o primeiro termo da Eq. (B.1) a partir da Eq. (A.8), aplicando a relação de tangente de soma de dois arcos:

$$\begin{aligned} \tan(\eta + 2\theta) &= \tan(\beta + \theta) = \frac{\sin(\beta + \theta)}{\cos(\beta + \theta)} \\ &= \frac{\sin(\beta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\beta)}{\cos(\beta) \cos(\theta) - \sin(\beta) \sin(\theta)} \\ &= \frac{\tan(\beta) + \tan(\theta)}{1 - \tan(\beta) \tan(\theta)} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde  $\tan(\beta)$  é dado pela Eq. (A.3), e  $\tan(\theta)$  será calculado a seguir.

Da Eq. (A.5):

$$\theta = (\beta - \eta) \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\eta)}{1 + \tan(\beta) \tan(\eta)} \quad (\text{B.3})$$

Das Eq. (A.3) e Eq. (A.4) temos:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{\left(\frac{1}{2a\rho'}\right) - \left(\frac{z_p - z'}{\rho'}\right)}{1 + \frac{1}{2a\rho'} \frac{(z_p - z')}{\rho'}} \\ &= \frac{(1 - 2az_p + 2az')\rho'}{(z' + z_p)} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a Eq. (B.4) na Eq. (B.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} \tan(\eta + 2\theta) &= \frac{\frac{1}{2a\rho'} + \frac{(1-2az_p+2az')\rho'}{(z'+z_p)}}{1 - \frac{1}{2a\rho'} \frac{(1-2az_p+2az')\rho'}{(z'+z_p)}} \\ &= \frac{z' + z_p + 2a\rho'^2(1 - 2az_p + 2az')}{2a\rho'(z' + z_p) - \rho'(1 - 2az_p + 2az')} \\ &= \frac{z' + z_p + 2z' - 4az'z_p + 4az'^2}{\rho'(4az_p - 1)} \\ &= \frac{(4az'^2 + 2z' + z_p) - z'(4az_p - 1)}{\rho'(4az_p - 1)} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$



Substituindo a Eq. (B.5) na Eq. (B.1):

$$\begin{aligned} \frac{(4az'^2 + 2z' + z_p) - z'(4az_p)}{\rho'(4az_p - 1)} &= \frac{D - z'}{\rho'} \\ \frac{4az'^2 + 2z' + z_p - z'(4az_p - 1) + z'(4az_p - 1)}{(4az_p - 1)} &= D \\ \Rightarrow D &= \frac{(4az'^2 + 2z' + z_p)}{(4az_p - 1)} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A partir da Eq. (B.6) podemos obter, em função de  $z'$ , o menor e o maior valores possíveis para  $D$ . Supondo  $0 \leq z' \leq z_p$ , ou seja, a curvatura do paraboloide, no plano  $z\rho$ , vai dos pontos  $(z_p, -R)$  a  $(z_p, R)$ , teremos, para  $z' = 0$ :

$$D_{min} = \frac{z_p}{(4az_p - 1)} \quad (\text{B.7})$$

Enquanto que, para  $z' = z_p$ :

$$D_{max} = \frac{4az_p^2 + 3z_p}{(4az_p - 1)} = z_p + 4D_{min} \quad (\text{B.8})$$

onde, como já se pode perceber,  $D_{min}$  é o menor valor possível para  $D$ , enquanto que, por sua vez,  $D_{max}$  é seu maior valor. Portanto, a distância focal  $Z_{focaldistance} = Z_{fd}$ , que representa o comprimento do foco estendido, será dada por:

$$Z_{fd} = D_{max} - D_{min} = z_p + 3D_{min} \quad (\text{B.9})$$

Na Fig. B.2 tem-se a variação da distância  $D$  lançada pelo feixe proveniente do paraboloide, com relação à variável  $\rho'$  (coordenada do paraboloide), indicando a origem dos raios que geram  $D_{max}$  e  $D_{min}$ .

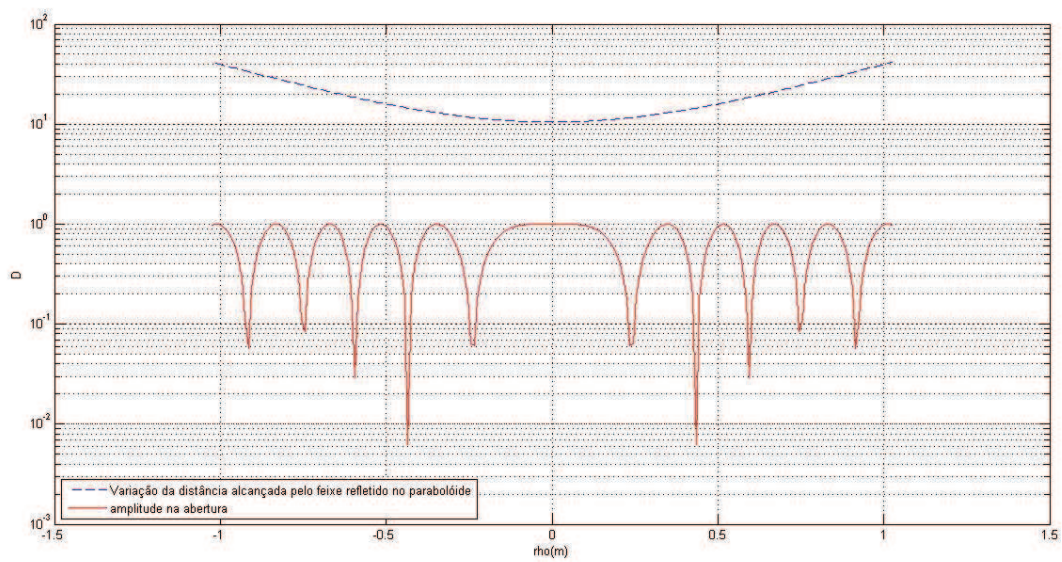


Fig. B.2: Variação da distância alcançada pelo feixe refletido no parabolóide com relação à coordenada  $\rho'$  referente aos pontos sobre este (azul tracejado). O gráfico também mostra como se dá a variação da amplitude na abertura do refletor (vermelho). Aqui, foi considerado o comprimento de onda de 1cm, e um refletor parabólico de raio 1,025m, com foco em  $z_f = 0,5$ m e fonte afastada deste em 2,5cm.

## Apêndice C

### Cálculo do ângulo de áxicon variável

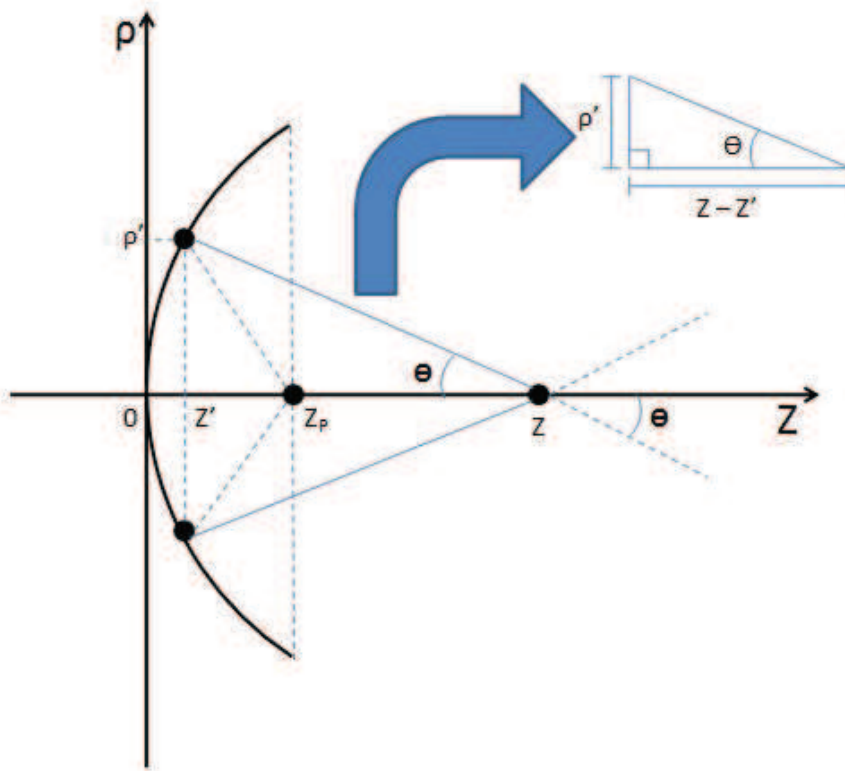


Fig. C.1: Esquema lateral do refletor parabólico a partir do qual se obtém as relações geométricas que possibilitarão o cálculo do ângulo variável  $\theta$ .

Da Fig. C.1, obtemos a seguinte relação:

$$\sin(\theta) = \frac{\rho'}{[(z - z')^2 + \rho'^2]^{1/2}} \quad (\text{C.1})$$

Obtendo  $z'$  a partir da Eq. (B.6):

$$4az'^2 + 2z' + z_p = D(4az_p - 1) \quad (\text{C.2})$$

onde  $D$  é a posição sobre o eixo  $z$  em que incide o feixe que parte da fonte de ondas esféricas em  $z_p$ , refletido no ponto  $(z', \rho')$  sobre o parabolóide. Vamos chamá-lo de  $z$ , dado que representa a posição sobre este mesmo eixo. Assim:

$$4az'^2 + 2z' + [z_p - z(4az_p - 1)] = 0 \quad (\text{C.3})$$

Na Eq. (C.3), temos uma equação de segundo grau com variável  $z'$ , portanto, com solução dada por:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{-2 \pm [4 - 16a[z_p - z(4az_p - 1)]]^{1/2}}{8a} \\ &= \frac{-2 \pm 2[1 - 4a[z_p - z(4az_p - 1)]]^{1/2}}{8a} \\ z' &= \frac{-1 \pm [1 - 4a[z_p - z(4az_p - 1)]]^{1/2}}{4a} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Da Eq. (A.1), obtemos:

$$\rho' = \left(\frac{z'}{a}\right)^{1/2} \quad (\text{C.5})$$

Substituindo a Eq. (C.4) na Eq. (C.5):

$$\rho' = \left(\frac{z'}{a}\right)^{1/2} = \frac{-1 \pm [1 - 4a[z_p - z(4az_p - 1)]]^{1/2}}{4a^2} \quad (\text{C.6})$$

Portanto, a Eq. (C.1) pode ser escrita como:

$$\sin(\theta) = \frac{1}{\left[\frac{(z-z')^2}{\rho'^2} + 1\right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z-a\rho'^2}{\rho'}\right)^2 + 1}} \quad (\text{C.7})$$

onde  $\rho'$  é dado pela Eq. (C.6).