



Johanna Belen Tobar Quevedo

**PROPOSTAS PARA MODELAGEM COMPUTACIONAL DE
SERIES TEMPORAIS E DE SISTEMAS MULTIVARIAVEIS
VARIANTES NO TEMPO NO ESPAÇO DE ESTADO.**

Campinas

2013



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

**PROPOSTAS PARA MODELAGEM COMPUTACIONAL DE
SERIES TEMPORAIS E DE SISTEMAS MULTIVARIAVEIS
VARIANTES NO TEMPO NO ESPAÇO DE ESTADO.**

Johanna Belen Tobar Quevedo

Orientador: Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na área de Automação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA JOHANNA BELEN TOBAR QUEVEDO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. CELSO PASCOLI BOTTURA.

Campinas

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Q39p Quevedo, Johanna Belen Tobar
Propostas para modelagem computacional de series temporais e de sistemas multivariáveis variantes no tempo no espaço de estado / Johanna Belen Tobar Quevedo. –Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: Celso Pascoli Bottura.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Identificação de sistemas. 2. Espaço de estado. 3. Análise de séries temporais. 4. Modelos matemáticos. 5. Modelagem de dados. I. Bottura, Celso Pascoli, 1938-II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Proposals for computer modelling of multivariable non-stationary time series and systems in the state space.

Palavras-chave em Inglês: Systems identification, State space, Time series analysis, Mathematical models, Data modeling.

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestra em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Gilmar Barreto, Annabell Del Real Tamariz

Data da defesa: 04-04-2013

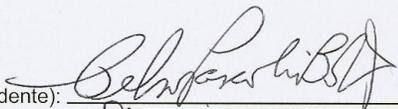
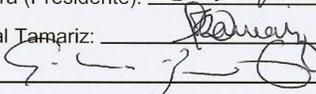
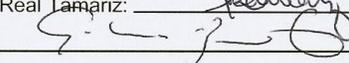
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidata: Johanna Belen Tobar Quevedo

Data da Defesa: 4 de abril de 2013

Título da Tese: "Propostas para Modelagem Computacional de Series Temporais e de Sistemas Multivariáveis Variantes no Tempo no Espaço de Estado"

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente): 
Prof. Dra. Annabell Del Real Tamariz: 
Prof. Dr. Gilmar Barreto: 

Á meu esposo Danni

Aos meus amados Pais

Á minha filinha Dannita

Ao minhas irmãs Dani e Cori

*“Seu trabalho vai ocupar uma grande parte da sua vida,
e a única maneira de estar verdadeiramente satisfeito é
fazendo aquilo que você acredita ser um ótimo trabalho.
E a única maneira de fazer um ótimo trabalho é fazendo
o que você ama fazer. Se você ainda não encontrou,
continue procurando.”*

Steve Jobs

Agradecimentos

Primeiro, quero agradecer a Deus que é o centro de minha vida, por todas as coisas que me tem agraciado.

Quero fazer um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Celso Pascoli Bottura, não só por fazer de mim uma profissional melhor, mas também pessoa melhor. Obrigada pela oportunidade de trabalharmos juntos, pelos conselhos e, sobretudo pela amizade e confiança.

Agradeço a meu amado esposo Danni, a minha filhinha Danna e a toda minha família pelo amor e a força com que me brindam dia a dia.

Ao Professor Gilmar Barreto pela guia e a ajuda ao longo do mestrado.

Aos meus queridos amigos Fabio, Marília e Maria Clara que foram a nossa família no Brasil.

Com carinho a meus amigos Paul, Laryssa, Murilo, Tarci, Andre, Gina, Alejo, Ariadne.

Finalmente à Unicamp.

Trabalhos publicados pelo autor

1. Tobar, J, Bottura, C. P., Giesbrecht, M., “Computational modeling of multivariable non-stationary time series in the state space by the AOKI_VAR algorithm”, IAENG International Journal of Computer Science 37, November 2010.

2. Tobar J., Bottura C. P., “Modelaje Computacional de Datos de Sistemas Lineares Ruidosos no Estacionarios por el Algoritmo MOESP_AOKI_VAR”, XIV CONGRESO LATINOAMERICANO DE CONTROL AUTOMATICO, ACCA SANTIAGO-CHILE, Agosto de 2010.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é propor algoritmos para identificação de series temporais e de sistemas lineares multivariáveis estocásticos variantes no tempo no espaço de estado. Para isto primeiramente investigamos fundamentos teóricos, apresentando alguns conceitos básicos de series temporais, sistemas, elementos de identificação, modelos no espaço de estado e identificação variante no tempo.

Dois algoritmos são propostos, analisados e implementados, o que chamamos MOESP-AOKI-VAR baseado no MOESP (Multivariable Output-Error State space) e o que chamamos AOKI-VAR baseado no algoritmo proposto por Masanao Aoki.

Os algoritmos são avaliados sobre “benchmarks”. Finalmente exemplos são apresentados bem como discussões sobre validação, previsão e modelagem de séries temporais e a modelagem de sistemas multivariáveis estocásticos variantes no tempo, esperando contribuir no estudo deste tipo de sinais e sistemas.

Palavras-chave: Algoritmo AOKI_VAR, Algoritmo MOESP_AOKI_VAR, métodos de subespaços, series temporais não estacionárias, sistemas lineares não estacionários estocásticos.

Abstract

The main objective of this work is to propose algorithms for identifying non-stationary time series and multivariable time-varying linear stochastic systems in the state space. In order first to do this we investigate theoretical foundations, presenting some basic concepts of time series, systems, identification elements, models in state space and time variant identification.

Two algorithms are proposed, analyzed and implemented, the one we called MOESP-AOKI-VAR based on the MOESP (Multivariable Output-Error State space) and the one we called AOKI-VAR based on the algorithm proposed by Masanao Aoki.

The algorithms are evaluated on "benchmarks". Finally examples are presented as well as discussions about validation, prediction and modeling of stochastic time series and modeling of stochastic time-varying multivariable systems, hoping to contribute to the study of this type of signals and systems.

Key words: Algorithm AOKI_VAR, Algorithm MOESP_AOKI_VAR, subspace methods, non-stationary time series, linear non-stationary stochastic systems.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Fundamentos teóricos.	5
2.1 Series temporais.	5
2.1.1 Modelagem de séries temporais vetoriais não estacionárias.	6
2.1.2 Modelagem das series temporais estocásticas estacionarias no espaço de estado.	7
2.1.3 Representação no espaço de estado do ruído não estacionário.	10
2.2 Sistema	10
2.2.1 Sistema linear determinístico estacionário.	11
2.2.2 Sistema linear estocástico estacionário.	12
2.2.3 Sistema linear determinístico não estacionário.	12
2.2.4 Sistema linear ruidoso não estacionário.	13
3 Algoritmo AOKI_VAR	14
3.1 Introdução	14
3.2 Algoritmo AOKI_VAR	14
3.3 Validação de Series Temporais.	17
3.4 Modelagem Computacional de Series Temporais	25
3.5 Previsão	29
4 Algoritmo MOESP_AOKI_VAR	34
4.1 Introdução	34
4.2 Algoritmo MOESP	35
4.3 Identificação de sistema variante no tempo.	38

<i>SUMÁRIO</i>	x
4.4 Algoritmo MOESP_VAR	40
4.5 Modelagem determinística estocástica no espaço de estado do sistema não estacionário.	42
4.6 Algoritmo MOESP_AOKI_VAR	44
4.7 Exemplo de aplicação do algoritmo MOESP_AOKI_VAR	45
5 Conclusões	53

Lista de Figuras

2.1	Sistema	11
3.1	Recursivo e Interativo	16
3.2	Validação do algoritmo AOKI_VAR	18
3.3	Ruido inovado	19
3.4	Sinal de Saída	20
3.5	Erro	20
3.6	Saída vs. Saída Identificada para $j = 10$ e $k = 1$	22
3.7	Erro para $j = 10$ e $k = 1$	22
3.8	Saída vs. Saída Identificada para $j = 10$ e $k = 10$	23
3.9	Erro para $j = 10$ e $k = 10$	23
3.10	Saída vs. Saída Identificada para $j = 15$ e $k = 1$	24
3.11	Erro para $j = 15$ e $k = 1$	24
3.12	Saída vs. Saída Identificada para $j = 32$ e $k = 5$	25
3.13	Erro para $j = 32$ e $k = 5$	25
3.14	Modelagem AOKI_VAR	26
3.15	Series Temporais para $j = 1$ e $k = 1$	27
3.16	Saída Identificada para $j = 1$ e $k = 2$	28
3.17	Saída Identificada para $j = 15$ e $k = 10$	28
3.18	Saída Identificada para $j = 26$ e $k = 1$	29
3.19	Previsão AOKI_VAR	29
3.20	Ruído	30
3.21	Predição de Series Temporais para $j = 1$ e $k = 1$	30
3.22	Predição de Séries Temporais para $j = 1$ e $k = 20$	31
3.23	Predição de Séries Temporais para $j = 13$ e $k = 2$	32
3.24	Predição de Séries Temporais para $j = 30$ e $k = 8$	32
3.25	Predição de Séries Temporais para $j = 32$ e $K = 5$	33

4.1	Saída do modelo determinístico	48
4.2	Saída do modelo Estocástico.	49
4.3	Superposição de sinais	49
4.4	Erro na modelagem.	50
4.5	Saída Identificada para $j = 1$ e $k = 2$	50
4.6	Erro para $j = 1$ e $k = 2$	51
4.7	Saída Identificada para $j = 5$ e $k = 10$	51
4.8	Erro para $j = 5$ e $k = 10$	52

Lista de Tabelas

3.1	Matrizes de Covariâncias para $j = 1$ e $k = 1$	21
3.2	Matriz de Covariâncias para $j = 1$ e $k = 1$	26
3.3	Matriz de Covariância	31

Capítulo 1

Introdução

Os métodos de subespaços nascem no final da década de 1980 inspirados nos trabalhos de Rudolph Kalman da década de 1960. Eles permitem a modelagem de séries temporais e a identificação de sistemas lineares no espaço de estado, que constituem motivações e objetivos importantes desta tese.

A modelagem computacional de dados é um problema central em processamento de sinais e em análise e projeto de sistemas de controle. Por modelagem computacional de dados entendemos a modelagem computacional de dados de séries temporais e de sistemas.

Se para uma variável de interesse, uma série temporal de observações estiver disponível e os dados passados contiverem informações sobre o desenvolvimento futuro da variável, a utilização de alguma função dos dados coletados para a predição de dados futuros da série é frequentemente utilizada por ser plausível, conveniente e mais simples.

A análise de múltiplas séries temporais é importante em muitas áreas, por exemplo: engenharias, economia, estatística, finanças, medicina, hidrologia, de entre outras.

Em economia, por exemplo, é frequente o emprego da metodologia autoregressiva vetorial (em inglês: Vector AutoRegressive (VAR)) para a análise de múltiplas series temporais.

Se observações de múltiplas séries temporais (entenda-se por múltiplas series temporais como um conjunto de series temporais monovariadas ou multivariadas) estão disponíveis, podemos modelar computacionalmente tais dados na forma acima, ou então, e isto será cada vez mais frequente empregando métodos de modelagem computacional de dados de séries temporais no espaço de estado. O entendimento e o estudo da teoria de sistemas dinâmicos e de processos estocásticos no espaço de estado são pré-requisitos essenciais e supostos conhecidos neste estudo para a modelagem e predição de séries temporais multivariáveis.

De forma análoga a identificação de sistemas multivariáveis pode ser realizada de múltiplas maneiras e será cada vez mais frequente através de metodologias de modelagem computacional de dados

de sistemas no espaço de estado.

Este problema é equivalente a encontrar uma realização para um sistema dinâmico que represente uma sequência de dados de entrada e saída no espaço de estado. Assim o problema principal tratado na identificação de sistemas no espaço de estado se resume na determinação de uma quádrupla de matrizes que pode representar dados de entrada e saída dentro de um intervalo de erro aceitável.

Diversas teses têm sido realizadas no Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes (LCSI) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) nestes tópicos: Annabell Tamariz (2005), Gilmar Barreto (2002), Angel Fernando Cáceres (2005), David Geraldo Clavijo (2008), Mateus Giesbrecht (2013) e elas constituem referências importantes para esta tese.

Pelo dito acima, é claro então que existem múltiplas razões para justificar a realização deste trabalho. Uma decorre da importância de entender as estruturas das séries temporais e de sistemas no espaço de estado. Esta compreensão é necessária em problemas de identificação de séries temporais e em problemas de identificação de sistemas. Outra razão é que estes desenvolvimentos estão se tornando importantes para as pessoas que estão envolvidas com séries temporais, sistemas, aprendizagem e controle inteligente.

Há outra razão muito importante pela qual este trabalho foi realizado que é o desenvolvimento da teoria e dos métodos para o caso em que as séries temporais e os sistemas são multivariáveis. Este vem sendo motivo de muitos estudos e pesquisas por causa das dificuldades na modelagem computacional de dados multivariados, embora a ênfase desta tese não seja no aspecto teórico e sim em métodos e algoritmos.

A estimação de parâmetros para determinar modelos via métodos clássicos, por exemplo, o método da predição de erro, não apresenta um alto grau de precisão e exige um elevado desempenho computacional. Nesta tese propomos dois algoritmos que permitem a determinação direta dos estados de sinais e de sistemas lineares estocásticos através de métodos de subespaços que tornam mais simples e confiável a modelagem multivariada de series temporais e de sistemas.

Outra razão importante para a realização deste trabalho é que os processos reais em sua maioria são variantes no tempo e/ou mostram um comportamento não linear. Nesta tese, tratamos dos problemas de identificação de séries temporais e de sistemas lineares multivariáveis estocásticos variantes no tempo. Sinais e sistemas ruidosos multivariáveis variantes no tempo lineares satisfazem o princípio da superposição, donde podemos descompô-los em suas partes determinísticas e estocásticas. Propomos estruturas que possam ser utilizadas para resolver os problemas de identificação de sinais e de sistemas estocásticos variantes no tempo a partir de algoritmos já propostos para sinais e sistemas invariantes no tempo. Consideramos conjuntos de modelos invariantes no tempo, que apresentam variações suficientemente pequenas para determinado intervalo de tempo.

A partir da conceituação acima citada, propomos então um algoritmo iterativo que chamamos

de AOKI_VAR para o tratamento das séries temporais variantes no tempo, com base na hipótese de cada conjunto de dados, em suas respectiva janela temporal, muda lenta e continuamente e nunca abruptamente; é importante notar que o nome do algoritmo combina a contribuição de Masanao Aoki (1987), que chamamos algoritmo AOKI, com a palavra VAR que vem de “variante no tempo”.

Com a finalidade de que a contribuição na modelagem de séries temporais não estacionárias seja mais realista, um modelo de ruído não estacionário no espaço de estado, baseado no ruído branco, também é proposto neste trabalho.

O algoritmo proposto AOKI_VAR é avaliado sob-benchmarks. Discussões sobre validação, modelagem e predição de series temporais são também apresentada e exemplificadas.

Uma segunda estrutura computacional é proposta para ser usada na resolução do problema de identificação de sistemas lineares multivariáveis estocásticos variantes no tempo, com base na conceituação já citada. Ela se fundamenta nos algoritmos MOESP_VAR, MOESP_AOKI e AOKI_VAR propostos em Tamariz, Annabell and Bottura, Celso (2007), Tamariz, Annabell and Bottura, Celso (2005) e Tobar, Johanna, Bottura, Celso and Giesbrecht, Mateus (2010) respectivamente e que o chamamos MOESP_AOKI_VAR, desenvolvidos a partir dos algoritmos MOESP e AOKI.

O algoritmo proposto MOESP_AOKI_VAR é validado sobre um benchmark e alguns exemplos com os resultados obtidos são apresentados.

Esta tese tem a seguinte estrutura:

- No capítulo 2 os principais fundamentos teóricos de séries temporais, sistemas, identificação no espaço de estado, modelagem computacional de dados são apresentados. Ele inclui tanto aspectos de realizações determinísticas como estocásticas, estacionarias como não estacionarias.
- Propostas e implementações dos algoritmos AOKI_VAR e MOESP_AOKI_VAR são realizadas, implementadas e exemplificadas respectivamente nos Capítulos 3 e 4.
- No Capítulo 5 as conclusões são apresentadas.

Em síntese são contribuições deste trabalho:

- A proposta e a implementação do algoritmo AOKI_VAR para identificação no espaço de estado de series temporais variantes no tempo.
- A proposta e a implementação do algoritmo MOESP_AOKI_VAR para a identificação de sistemas lineares ruidosos estocásticos multivariáveis no espaço de estado.
- A proposta de modelo no espaço de estado de ruído variante no tempo baseado no ruído branco.

- Explicitação dos conceitos de validação, modelagem e predição de séries temporais baseada na modelagem computacional de dados no espaço de estado.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos.

Neste capítulo, são apresentados conceitos básicos de series temporais e sistemas, assim como de identificação e modelagem computacional no espaço de estado. Também é feita uma introdução sobre modelagem computacional de dados estocásticos variantes no tempo.

2.1 Series temporais.

A modelagem computacional de dados é um problema fundamental em quase todas as disciplinas científicas, particularmente em engenharia e economia. Dados multivariáveis de entrada e saída, são chamados de sinais ou séries temporais e sua análise, geralmente serve pelo menos para um de dois possíveis efeitos, dentre outros:

- Modelagem de sinais que precisam ser reconhecidos ou valorizados pelos procedimentos de análise, como em aplicações em comunicações; ou em previsões de série temporais econômicas.
- Como sinais armazenam informações pertinentes aos sistemas dinâmicos que os produziram, ou sistemas dinâmicos hipotéticos que os poderiam ter produzido, a análise de sinais proporciona determinar os parâmetros desconhecidos do modelo do sistema [3]

Em geral, a modelagem computacional de dados no espaço de estado para sistemas lineares dinâmicos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) parte de medições da entrada e da saída em ambientes ruidosos. Ela é um problema central na modelagem de series temporais, processamento de sinais, identificação, análise e projeto de sistemas de controle e análise e projeto de sistemas e controle inteligentes.

2.1.1 Modelagem de séries temporais vetoriais não estacionárias.

Ao fazer escolhas entre cursos alternativos de ação, tomadores de decisão em todos os níveis estruturais muitas vezes precisam de previsões de variáveis. Se as observações de séries temporais estão disponíveis para uma variável de interesse e os dados do passado contêm informações sobre o desenvolvimento futuro de uma variável, é plausível usar para prever o futuro, alguma função dos dados coletados no passado. Em alguns sistemas não temos acesso a nenhum sinal de entrada, então um conjunto de dados de saída ordenado no tempo é chamado de série temporal.

Uma série temporal então é um conjunto de observações y_k cada uma para cada momento específico k , normalmente a intervalos iguais, e o problema de modelagem de dados é o de descrever matematicamente as propriedades deste sinal.

As séries temporais podem ser vistas como geradas por sistemas dinâmicos estocásticos que transformam informações presentes e passadas dos sinais ruidosos exógenos em observações futuras. O estado recolhe a informação contida nos sinais e transmite-as através do modelo dinâmico da série para gerar nova informação sobre o sinal.

As séries podem ser contínuas ou discretas dependendo do tipo de amostragem efetuada. Uma série temporal discreta não estacionária pode ser representada por $Y^T = y_1, y_2, \dots, y_T$ sendo que cada observação discreta y_T é associada com um instante de tempo diferente, existindo uma relação de dependência entre essas observações.

Os objetivos da análise de séries temporais se resumem em investigar o mecanismo gerador da série temporal, fazer previsões de valores futuros da série, fazer revisões de valores passados da série, descrever apenas o comportamento da série, procurar periodicidades relevantes nos dados.

O problema da modelagem de dados de uma série temporal vetorial é o de descrever matematicamente as propriedades deste vetor estocástico não estacionário. Nesta tese, vamos considerar apenas as séries temporais discretas.

Podemos classificar os modelos para séries temporais em duas classes, segundo o número de parâmetros envolvidos:

- *modelos paramétricos*, para os quais este número de parâmetros é finito;
- *modelos não-paramétricos*, que envolvem um número infinito de parâmetros.

Uma clássica possibilidade para o tratamento deste tipo de sinais é através da decomposição desta série temporal, y_k , em seus movimentos básicos como: tendência, T ; movimento cíclico, C ; movimento sazonal, S e movimento irregular ou aleatório, I ; então y_k pode ser decomposto como:

$$y_k = (T + C + S + I)_k \quad \text{ou} \quad y_k = (TCSI)_k \quad (2.1)$$

A tendência pode ser estimada, por exemplo, através de um gráfico onde plotamos os pontos e traçamos uma curva, ou pelo método dos mínimos quadrados, ou pelos métodos de semi-médias, onde podemos separar os dados em duas partes e calcular a média para cada uma das partes. Uma linha de tendência é desenhada entre dois pontos. A seleção do método a ser usado dependerá da sua eficiência para o tipo de resultado desejado.

A natureza determinística das componentes de nível, tendência e sazonalidade do modelo de decomposição clássica é bastante indesejável do ponto de vista prático. Uma maneira natural de contornar esse problema é permitir uma variabilidade nessas componentes, considerando-se os modelos estruturais ou **modelos de espaço de estado**.

2.1.2 Modelagem das series temporais estocásticas estacionárias no espaço de estado.

Uma classe bastante geral de modelos, denominados modelos de espaço de estado (MEE) ou modelos lineares dinâmicos (MLD), foi introduzida por Kalman. Os métodos de subespaço têm como objetivos principais a modelagem de séries temporais e a identificação de sistemas lineares no espaço de estado, e se fundamentam nos trabalhos de Kalman.[14, 15]

Todo modelo linear de séries temporais q -dimensionais tem representação em espaço de estado, que relaciona o vetor de observações x_{k+1} e o vetor de ruídos v_k , através de um processo de Markov x_k , p dimensional, denominado vetor de estado. Assim o modelo de espaço de estado de uma série temporal multivariável estacionária pode ser descrito por um sistema linear multivariável discreto estocástico invariante no tempo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + v_k \\ y_k = Cx_k + w_k \end{cases} \quad (2.2)$$

onde os termos v_k, w_k são, respectivamente, os ruídos de estado e de saída da série temporal devido à sua natureza estocástica. Estes termos podem ser considerados como entradas para as quais ninguém tem qualquer controle.

No modelo linear dinâmico supõe-se que:

- O estado inicial X_0 tem média μ_0 e matriz de covariâncias Σ_0 ;
- Os vetores de ruídos v_k e w_k são não correlacionados entre si e não correlacionados com o estado inicial.

Os vetores de perturbação $v_k \in \mathbb{R}^n$ e $w_k \in \mathbb{R}^l$ são sequências de processos estocásticos de ruído

branco de media zero e matrizes de covariância, representadas por:

$$E \left[\begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} v_s^T \quad w_s^T \right] = \begin{cases} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} & k = s \\ 0 & k \neq s \end{cases} \quad (2.3)$$

onde E é o operador matemático esperança.

Definindo o vetor inovação e_k , com $E[e_k] = 0 \quad \forall k, e_k \in \mathcal{R}^l$ serialmente decorrelacionado, processo estocástico estacionário no sentido débil, com matriz de covariância $\Delta = E(e_k e_k^T)$, podemos também representar a série temporal no espaço de estado pela forma inovativa:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Ke_k \\ y_k = Cx_k + e_k \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $x_k \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estado do processo estocástico estacionário no sentido débil, e K é uma matriz constante.

O vetor de perturbação é $\begin{bmatrix} Ke_k \\ e_k \end{bmatrix}$ e sua matriz de covariância é:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} Ke_k \\ e_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k K^T & e_k^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} KE(e_k e_k^T)K^T & KE(e_k e_k^T) \\ E(e_k e_k^T)K^T & E(e_k e_k^T) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K\Delta K^T & K\Delta \\ \Delta K^T & \Delta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Por analogia (2.3) e (2.5) são iguais. Para o modelo descrito na equação (2.4), podemos definir a matriz de observabilidade estendida por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T & \dots \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

e a matriz de atingibilidade estendida por

$$\Omega = \begin{bmatrix} M & AM & (A)^2 M & \dots & (A)^{n-1} M & \dots \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde a matriz de covariância $M = E(x_{k+1} y_k^T)$ é dada por:

$$M = A\Pi C^T + K\Delta$$

onde

$$\Pi = E(x_k x_k^T)$$

$$\Pi = A\Pi A^T + K\Delta K^T$$

e Λ_o é a matriz de covariância da saída do processo estocástico $\{y_k\}$:

$$\Lambda_o = C\Pi_o C^T + \Delta$$

Supondo $\Delta > 0$, Δ e K podem ser expressas como:

$$\Delta = \Lambda_o - C\Pi_o C^T$$

$$K = (M - A\Pi C^T)\Delta^{-1}$$

A partir destas equações temos:

$$\Pi = A\Pi A^T + (M - A\Pi C^T)(\Lambda_o - C\Pi_o C^T)^{-1}(M - A\Pi C^T)^T \quad (2.8)$$

O problema de realização estocástica para séries temporais pode ser expresso nos seguintes passos:

1. Determinar as matrizes Λ_o , A , M e C que representam um modelo para a sequência de covariâncias Λ_i de um conjunto de saídas y_k , supondo que a matriz de Hankel das covariâncias pode ser fatoradas como $H = \mathcal{O}\Omega$.
2. Resolver a equação de Riccati (2.8), para a covariância Π .
3. Calcular Δ e K de Λ_o , A , M , C e Π .

Em termos de covariâncias, os parâmetros de Markov do sistema podem ser representados como:

$$\Lambda_i = \begin{cases} C\Pi_o C^T + R & i = 0 \\ G^T (A^T)^{-i-1} C^T & i < 0 \\ CA^{i-1}G & i \geq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Em outras palavras:

$$\begin{cases} R = \Lambda_0 - CPC^T \\ Q = P - APA^T \\ S = M - APC^T \end{cases} \quad (2.10)$$

Para melhor compreensão, ver [1, 2, 5, 10, 6].

2.1.3 Representação no espaço de estado do ruído não estacionário.

Procurando fazer nosso trabalho ficar o mais perto possível da realidade, propomos aqui um modelo de ruído não estacionário no espaço de estado baseado no ruído branco.

Considere $v(k)$ um processo estocástico com média zero e matriz de covariância:

$$E_v(k_2, k_1) = V(k_1)\delta(k_2 - k_1) \quad (2.11)$$

onde $V(k_1) \geq 0$ é a sua intensidade.

No caso onde $V(k_1)$ é uma constante V , o processo é estacionário.

Com base em um ruído branco e_k geramos um ruído não estacionário $e_{j,k}$ que chamamos de ruído inovado, por:

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_k z_k + K e_k \\ e_{j,k} = c_k z_k + e_k \end{cases} \quad (2.12)$$

onde A_k, C_k, K_k são variantes no tempo.

2.2 Sistema

Um sistema é uma combinação de componentes que atuam juntos e realizam um objetivo determinado; um sistema não necessariamente tem que ser físico. Temos diferentes tipos de sistemas, e, de fato, quase tudo com o que temos contato em nossa vida é um sistema ou forma parte de um sistema. Um sistema pode ser qualquer objeto no qual variáveis de diferentes tipos interagem e produzem sinais observáveis. Estes sinais observáveis são conhecidos como saídas; os estímulos externos que afetam o sistema, e que podem ser controlados, são chamados de entradas. Outros estímulos que afetam o sistema são as perturbações, que se apresentam de forma aleatória e incontrolada. Agora, adicionando a palavra dinâmico, temos que um sistema dinâmico é aquele cujo modelo matemático é constituído por equações diferenciais ou a diferenças, onde o tempo é uma variável independente; ou seja, é aquele em que alguns dos seus aspectos variam com o tempo; [4, 3, 2, 8].

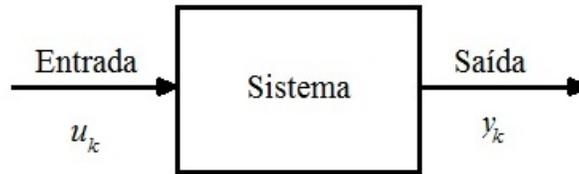


Figura 2.1: Sistema

O problema principal tratado na identificação de sistemas no espaço de estado pode ser definido como: *Dado um número de medidas de entradas, u_k , e de saídas y_k , geradas por um sistema desconhecido, determinar a ordem n do sistema e as matrizes A, B, C e D , a menos de uma transformação de similaridade e as matrizes de covariâncias do ruído Q, R e S .*

- **Estacionário ou não estacionário.**- Se os parâmetros de um sistema variam com o tempo (ex. massa de um foguete) o sistema é classificado como não estacionário ou variante no tempo; caso contrário ele é chamado estacionário ou invariante no tempo.
- **Determinístico ou aleatório.**- Se as variáveis são bem definidas a cada instante, por exemplo, com um degrau ou senoide o sistema é determinístico. Se o valor de cada variável é dado em uma base probabilística, o sistema é classificado como aleatório.
- **Contínuo ou amostrado.**- Usualmente as variáveis mudam continuamente no tempo e então o sistema é classificado como contínuo. Mas essas variáveis podem ser intermitentes ou amostradas e o sistema é considerado amostrado. As variáveis podem também apresentar qualquer valor ou podem variar por partes (quantizadas).

2.2.1 Sistema linear determinístico estacionário.

Seja S um sistema discreto linear multivariável invariante no tempo, e sejam $u_t \in \mathbb{R}^m$ a sua entrada no instante $t \in \mathbb{Z}$. É bem conhecido, ver [6], que este sistema possui uma representação entrada-saída definida a partir das matrizes resposta ao impulso denotadas por $h_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

A saída do sistema no instante t é dada por:

$$y_t = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_{t-r} u_r \quad (2.13)$$

Isto é, a resposta do sistema é a convolução discreta entre h_t e u_t . As matrizes h_t são também conhecidas como matrizes de ponderação e desempenham um papel importante na realização de

sistemas no espaço de estado, assim como também na identificação dos mesmos. Uma representação do sistema no espaço de estado tem a forma:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (2.14)$$

Onde $x_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vector de entrada e $y_k \in \mathfrak{R}^l$ é o vetor de saída, e as matrizes A, B, C e D são matrizes constantes para todo instante k de dimensões apropriadas.

2.2.2 Sistema linear estocástico estacionário.

Para quantificar a incerteza na modelagem e/ou as perturbações externas do sistema, adicionamos os termos v_k, w_k nas equações de estado. Estes termos podem ser considerados como entradas sem qualquer controle.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + w_k \end{cases} \quad (2.15)$$

onde os vetores de perturbação $v_k \in \mathfrak{R}^n$ e $w_k \in \mathfrak{R}^l$ são variáveis aleatórias de médias nulas com covariância:

$$\Delta = E \left[\begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s^T & w_s^T \end{pmatrix} \right] = \begin{cases} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} & k = s \\ 0 & k \neq s \end{cases} \quad (2.16)$$

e as sequências $(v_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ e $(w_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ são processos estocásticos de ruído gaussiano branco. Também pode-se representar um sistema linear estocástico, no espaço de estado pela forma inovativa:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ke_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + e_k \end{cases} \quad (2.17)$$

onde e_k com $E[e_k] = 0$, $\forall k$ é a inovação com sua matriz de covariância dada por $\Delta = E(e_k e_k^T)$ e K é o ganho de Kalman. [2, 21, 11, 4]

2.2.3 Sistema linear determinístico não estacionário.

Um sistema linear determinístico não estacionário ou variante no tempo esta representado pelas seguintes equações no espaço de estado:

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + B_{j,k}u_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + D_{j,k}u_{j,k} \end{cases} \quad (2.18)$$

Sendo $j \in [j_0, j_0 + N - 1]$ e $k \in [k_0, k_0 + T - 1]$ onde j_0 mostra o primeiro intervalo de experimentação, k_0 indica o primeiro instante do tempo do experimento, N mostra o numero total de experimentos simples e $T \geq N$.

Em outras palavras

$$y_H = O_k X_H + T_k U_H \quad (2.19)$$

consultar as matrizes Y_H, O_k, X_H, T_k e U_H em [21].

2.2.4 Sistema linear ruidoso não estacionário.

Um sistema linear ruidoso não estacionário está representado pelas seguintes equações do espaço de estado:

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + B_{j,k}u_{j,k} + v_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + D_{j,k}u_{j,k} + w_{j,k} \end{cases} \quad (2.20)$$

Sendo $j \in [j_0, j_0 + N - 1]$ e $k \in [k_0, k_0 + T - 1]$ onde j_0 mostra o primeiro intervalo de experimentação, k_0 indica o primeiro instante do tempo do experimento, N mostra o numero total de experimentos simples $T \geq N$ e $v_{j,k} \in \mathbb{R}^n \wedge w_{j,k} \in \mathbb{R}^l$ são variáveis aleatórias de media nula, e as sequências $(v_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \wedge (w_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ são processos estocásticos não estacionários gerados pelo sistema estocástico não estacionário representado no espaço de estado por:

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + K_{j,k}e_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + e_{j,k} \end{cases} \quad (2.21)$$

onde e_k é um processo estocástico de ruído branco.

Capítulo 3

Algoritmo AOKI_VAR

3.1 Introdução

As séries temporais multivariáveis variantes no tempo podem ser modeladas computacionalmente usando vários métodos, mas neste trabalho faremos uso dos métodos de modelagem no espaço de estado. Nesta seção apresentamos um algoritmo iterativo supondo pequenas variações no conjunto de matrizes do sistema que descreve a série temporal num intervalo determinado de operação, para este tipo de modelagem, com base nas propostas de Masanáo Aoki [1] sobre a modelagem de séries temporais e no aporte de Annabell Tamariz [21] para variações temporais de parâmetros.

A validação de um modelo matemático é importante no momento de falar de precisão, nesta seção apresentamos uma discussão sobre validação da série temporal. Um benchmark é tomado para a validação e apresentação de exemplos.

Também é apresentada uma discussão sobre modelagem e previsão da série temporal, em que é principalmente importante determinar a ordem e a estrutura do modelo. Uma vez que o modelo é validado, ele pode ser usado para previsão. Exemplos são apresentados.

3.2 Algoritmo AOKI_VAR

O algoritmo que propomos é definido inicialmente para um número de N intervalos de experimentação para a identificação de sinal. Assim, o algoritmo AOKI_VAR aqui proposto será avaliado um número N de vezes com T amostras para uma janela, para determinar N conjuntos de sistemas de matrizes para cada experimento j . Seja L_j um inteiro específico para o j th intervalo de experimentação I_j dado por:

$$I_j = [k_j - L_j\Delta, \quad k_j + L_j\Delta] \quad (3.1)$$

com $L_j = v * \nabla$ e $\nabla = S * \nabla_j$ onde v e S são inteiros adequadamente fixados e ∇_j é o j^{th} período de amostragem. O algoritmo proposto irá tratar o modelo inovativo das séries temporais não-estacionárias como um conjunto de modelos inovativos invariantes no tempo. Portanto, a modelagem das séries temporais não-estacionárias consistirá em um conjunto de N modelos estacionários que descreverá o sistema pelo algoritmo proposto. Como a matriz de covariância do vetor inovativo é variante no tempo $cov e_k = \Delta_k$.

Para interpretar a identificação dos parâmetros do problema, temos um conjunto de índices j, k para contarem os dados da serie temporal não estacionaria para o k^{th} instante de tempo para o j^{th} intervalo experimental para o sistema.

Portanto, nós podemos ver que $j \in [j_0, j_0 + N - 1]$ e $k \in [k_0, k_0 + T - 1]$, onde j_0 é o primeiro intervalo de experimentação, k_0 é o primeiro instante de tempo, n é o numero total de experimentos ou provas e T é o numero de amostras para um experimento simples.

Um sistema linear ruidoso não-estacionário é representado pelas seguintes equações de espaço de estado:

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + K e_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + e_{j,k} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $T \geq N$ e $e_{j,k}$ é uma processo estocástico variante ao longo do tempo gerado pelo ruído branco. O problema é determinar a descrição de espaço de estado

$$\begin{bmatrix} x_{j,k+1} \\ y_{j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{j,k} & k_{j,k} \\ C_{j,k} & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j,k} \\ e_{j,k} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

com base nas seguintes sequências de dados de saída associados:

$$Y_{j,k} = \begin{bmatrix} y_{j_0,k_0} & y_{j_0,k_0+1} & \cdots & y_{j_0,k_0+T-1} \\ y_{j_0+1,k_0} & y_{j_0+1,k_0+1} & \cdots & y_{j_0+1,k_0+T-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{j_0+n-1,k_0} & y_{j_0+n-1,k_0+1} & \cdots & y_{j_0+n-1,k_0+T-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

bem como na respectiva sequências de dados de entrada associados $U_{j,k}$ para a mesma série de experimentos, e o mesmo de horizonte de tempo de experimentação.

A matriz $Y_{j,k}$ representa o conjunto de N intervalos de experimentação, permitindo desenvolver expressões gerais capazes de relacionar as entradas e saídas a partir de um instante inicial k_0 e estabelecendo uma experiência adequada na janela j , para um sistema discreto variante no tempo. Para alcançar nosso objetivo, nós utilizamos uma estrutura de algoritmo iterativo. Esse tipo de estrutura é descrito na Figura 1 e é baseado em [20], onde representações para estruturas iterativa e recursiva de

processamento de dados são apresentadas. O algoritmo recursivo é obtido trabalhando com os dados serialmente, uma amostra de cada vez, usando uma recursão. Por outro lado, o algoritmo iterativo utiliza o método de análise "en bloc", onde uma única estimativa é obtida ao operar sobre todo o conjunto de dados em uma única operação. Uma sequência destas operações "en bloc" caracteriza o processo iterativo; a solução "en bloc" ou "batch" pode ser considerada como uma única iteração sobre os dados.

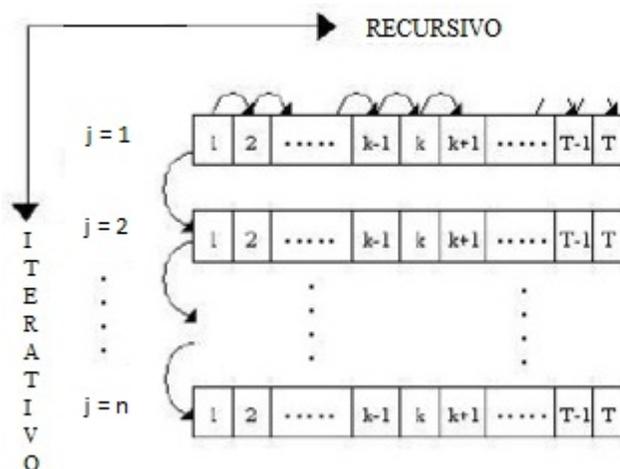


Figure 3.1: Recursivo e Iterativo

Para modelar as séries temporais variantes no espaço de estado aplicamos um algoritmo iterativo supondo pequenas variações nas matrizes do modelo num intervalo pré-determinado de operação. Aos dados aplicamos este esquema iterativo que chamamos algoritmo AOKI_VAR, que é aqui resumido e onde as seguintes operações são executadas:

1. A partir de $y_{j;k}$ gerar as matrizes $H_j^A, H_j^M, H_j^C, H_j, Y_j^-, Y_j^+$

$$Y_j^- = \begin{bmatrix} y_{j,1} & y_{j,2} & y_{j,3} & \cdots & y_{j,T-1} \\ 0 & y_{j,1} & y_{j,2} & \cdots & y_{j,T-2} \\ 0 & 0 & y_{j,1} & \cdots & y_{j,T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{j,T-k-1} & y_{j,T-k} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$Y_j^+ = \begin{bmatrix} y_{j,2} & y_{j,3} & y_{j,4} & \cdots & y_{j,T} \\ y_{j,3} & y_{j,4} & y_{j,5} & \cdots & 0 \\ y_{j,4} & y_{j,5} & y_{j,6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{j,N+1} & y_{j,N+2} & y_{j,N+3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$H_j = \frac{Y_j^+ Y_j^{-T}}{T} = \begin{bmatrix} \Lambda_{j,1} & \Lambda_{j,2} & \cdots & \Lambda_{j,T} \\ \Lambda_{j,2} & \Lambda_{j,3} & \cdots & \Lambda_{j,T+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{j,N} & \Lambda_{j,N+1} & \cdots & \Lambda_{j,N+T+k} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$H_j^A = \begin{bmatrix} \Lambda_{j,2} & \Lambda_{j,3} & \cdots & \Lambda_{j,k+1} \\ \Lambda_{j,3} & \Lambda_{j,4} & \cdots & \Lambda_{j,k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{j,N+1} & \Lambda_{j,N+2} & \cdots & \Lambda_{j,N+k+1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$H_j^M = \begin{bmatrix} \Lambda_{j,1} \\ \Lambda_{j,2} \\ \vdots \\ \Lambda_{j,N} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$H_j^C = \begin{bmatrix} \Lambda_{j,1} & \Lambda_{j,2} & \cdots & \Lambda_{j,T} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

2. Determine os valores singulares decompondo a matriz de Hankel das covariâncias

$$H_j = U_j \Sigma_j^{1/2} \Sigma_j^{1/2} V_j^t \quad (3.11)$$

3. Calcule as matrizes $A_{j,k}^e$, $C_{j,k}^e$, $K_{j,k}^e$ e $\Delta_{j,k}$.

4. Atualize: itere no algoritmo como descrito acima, para obter o estado e as matrizes de covariâncias para $y_{j,k}$ para cada instante k de tempo e intervalo j de tempo.

5. Validar.

3.3 Validação de Series Temporais.

A validação de um modelo matemático pode ser definida como a demonstração da sua acuidade: "proximidade da verdade", para uma aplicação particular. Neste sentido, acuidade é a ausência de

erros aleatórios e sistemáticos naquela aplicação. A validação do modelo de serie temporal requer:

- A confirmação do modelo (ou seja, que prova que ele é digno de crédito e admissível)
- A verificação do modelo (ou seja, que prova que ele é verdadeiro).

Nossa proposta de validação para o algoritmo AOKI_VAR tem o seguinte esquema, Figura 2:

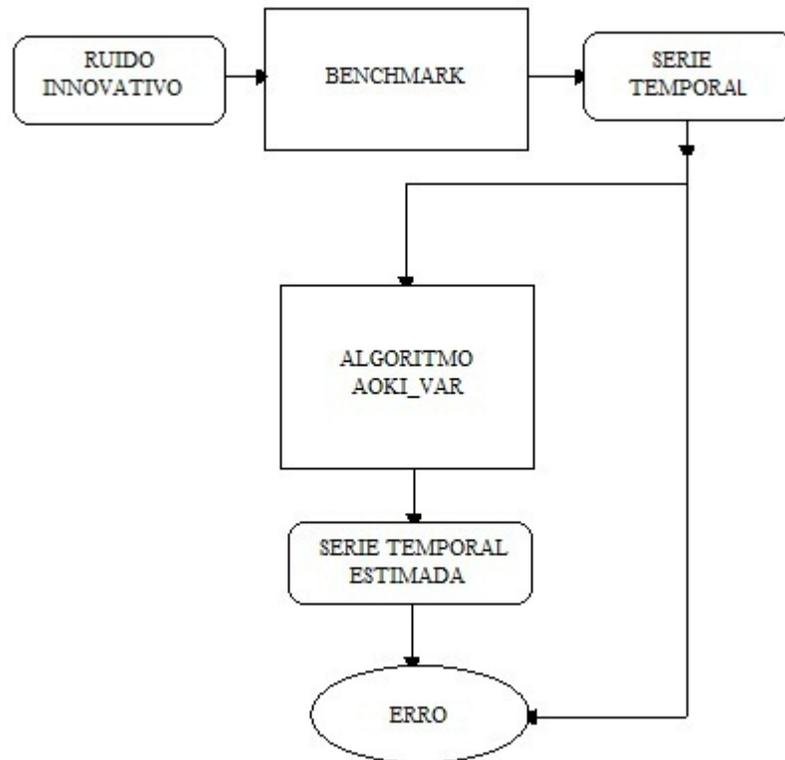


Figure 3.2: Validação do algoritmo AOKI_VAR

Para confirmar e verificar a qualidade do algoritmo AOKI_VAR proposto implementamos o seguinte benchmark para sistemas variantes no tempo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + K_k e_k \\ y_k = C_k x_k + e_k \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$A_k = \begin{bmatrix} -0,3 & 0 \\ 0 & a_k \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

com

$$a_k = -\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \sin\left(\frac{2\pi k}{400}\right) \quad (3.14)$$

As matrizes restantes são consideradas constantes:

$$K_k = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}; \quad C_k = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{7}{10} \\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Usando o procedimento apresentado no início deste capítulo, a entrada para o sistema

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + K e_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + e_{j,k} \end{cases} \quad (3.16)$$

é um sinal aleatório que muda para cada iteração do algoritmo de acordo com

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_k z_k + k_k e_k \\ e_{j,k} = C_k z_k + e_k \end{cases} \quad (3.17)$$

Para $j = 1$, os resultados da fase de validação do algoritmo AOKI_VAR proposto são apresentadas nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.5 para $k = 1$.

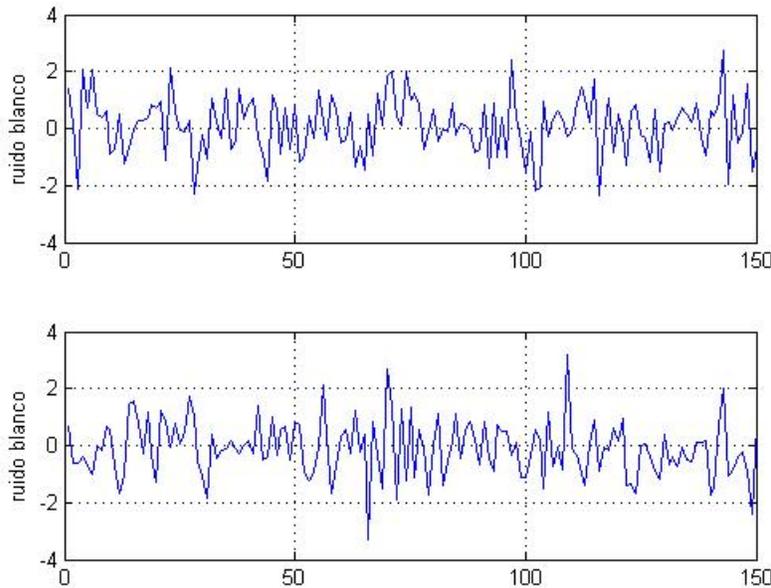


Figure 3.3: Ruído inovado

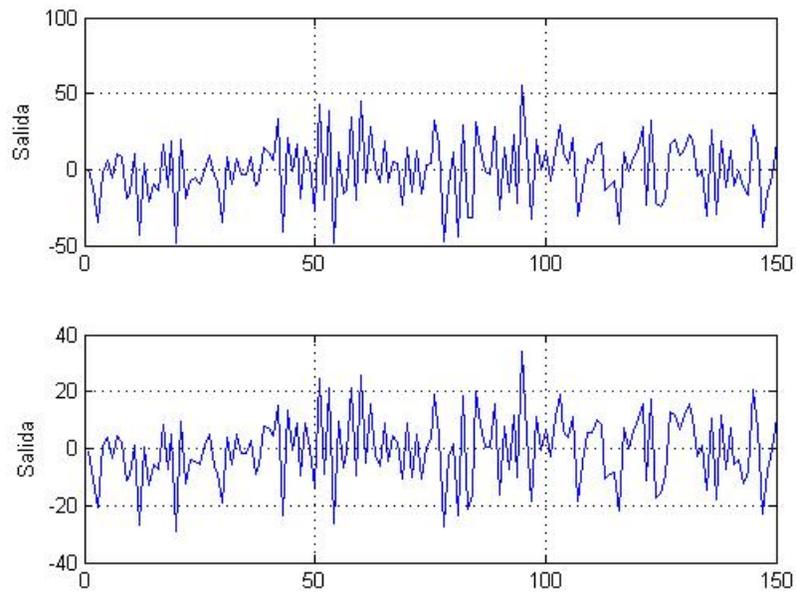


Figure 3.4: Sinal de Saida

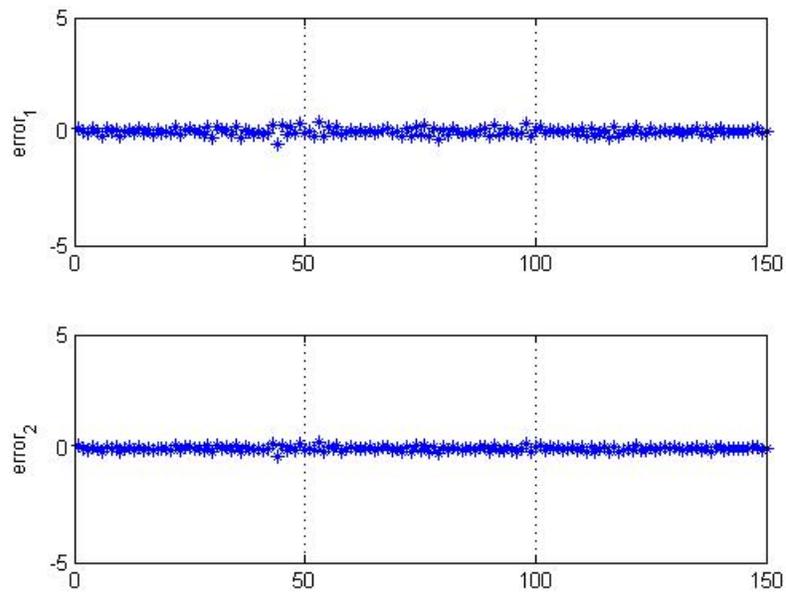


Figure 3.5: Erro

As matrizes \hat{A} , \hat{B} , \hat{K} , e \hat{M} , e os parâmetros de Markov são também apresentados na Tabela 3.1, bem como são mostrados, Δ (matriz de covariâncias do ruído) e $\hat{\Delta}$ (a matriz de covariâncias estimada do ruído), para este caso.

Table 3.1: Matrizes de Covariâncias para $j = 1$ e $k = 1$

Δ	0.9633	-0.0856
	-0.0856	1.0092
$\hat{\Delta}$	0.9176	-0.0801
	-0.0799	1.2387

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0,174 & -0,21 \\ 0,216 & -1,02 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -1,02 & -0,93 \\ 0,17 & -0,18 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -1,10 & -0,05 \\ -1,15 & -0,04 \end{bmatrix}$$

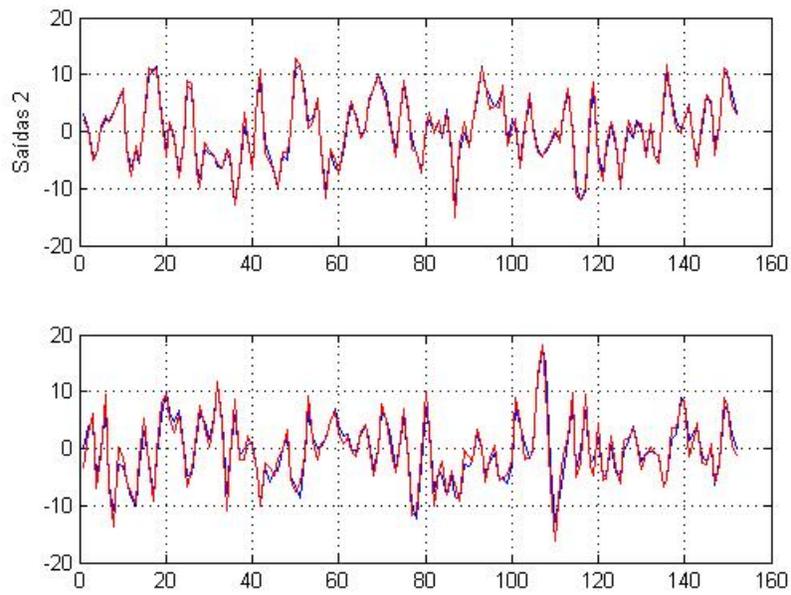
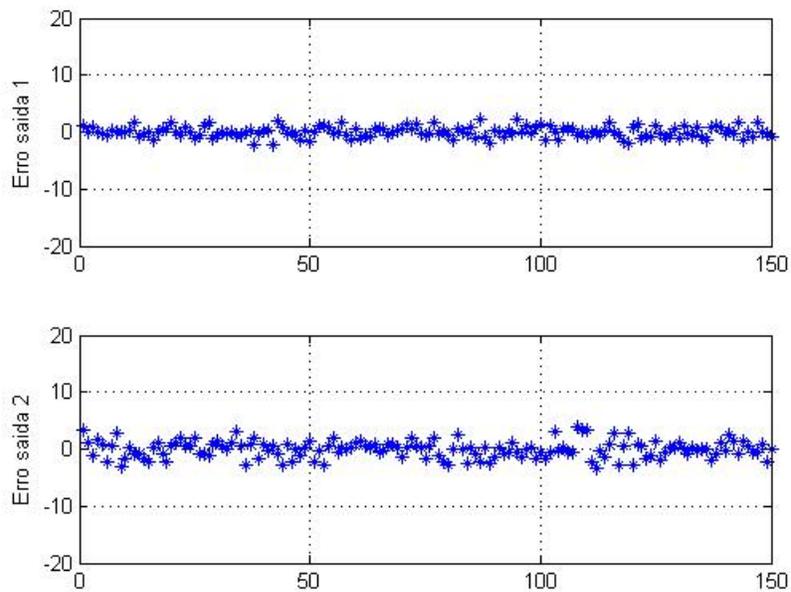
$$\hat{M} = \begin{bmatrix} -1,1 & -1,15 \\ 0,05 & -0,045 \end{bmatrix}$$

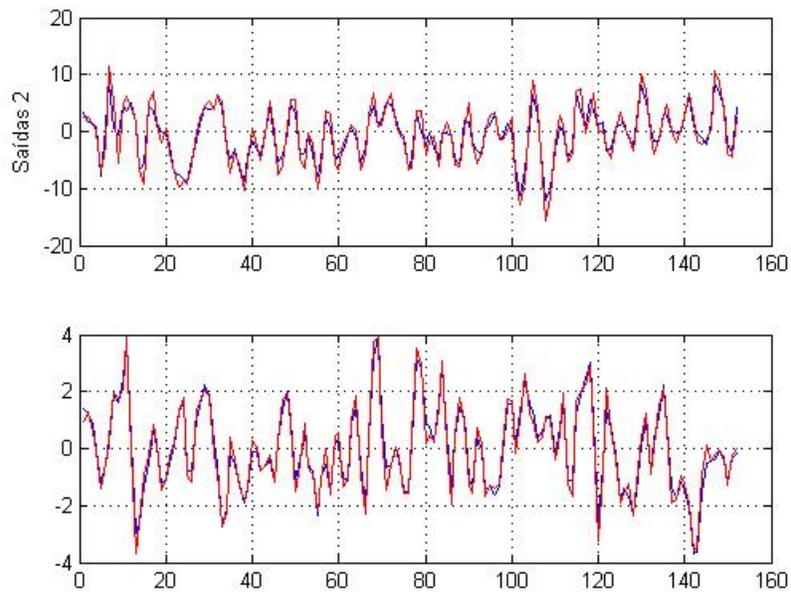
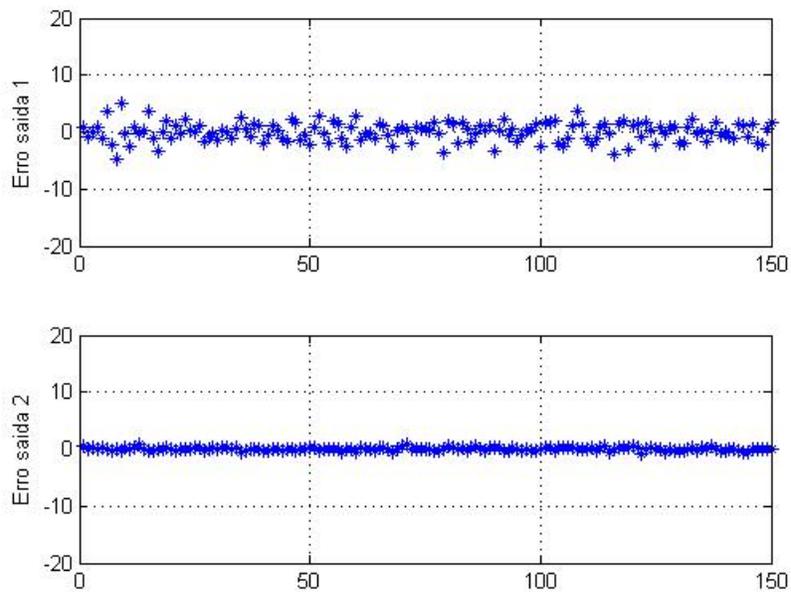
Para $j = 10$, os resultados da fase de validação do algoritmo AOKI_VAR proposto são apresentadas nas Figuras 3.6 e 3.7 para $k = 1$.

Para $j = 10$, os resultados da fase de validação do algoritmo AOKI_VAR proposto são apresentadas nas Figuras 3.8 e 3.9 para $k = 10$.

Para $j = 15$, os resultados da fase de validação do algoritmo AOKI_VAR proposto são apresentadas nas Figuras 3.10 e 3.11 para $k = 1$.

Para $j = 32$, os resultados da fase de validação do algoritmo AOKI_VAR proposto são apresentadas nas Figuras 3.12 e 3.13 para $k = 5$.

Figure 3.6: Saída vs. Saída Identificada para $j = 10$ e $k = 1$ Figure 3.7: Erro para $j = 10$ e $k = 1$

Figure 3.8: Saída vs. Saída Identificada para $j = 10$ e $k = 10$ Figure 3.9: Erro para $j = 10$ e $k = 10$

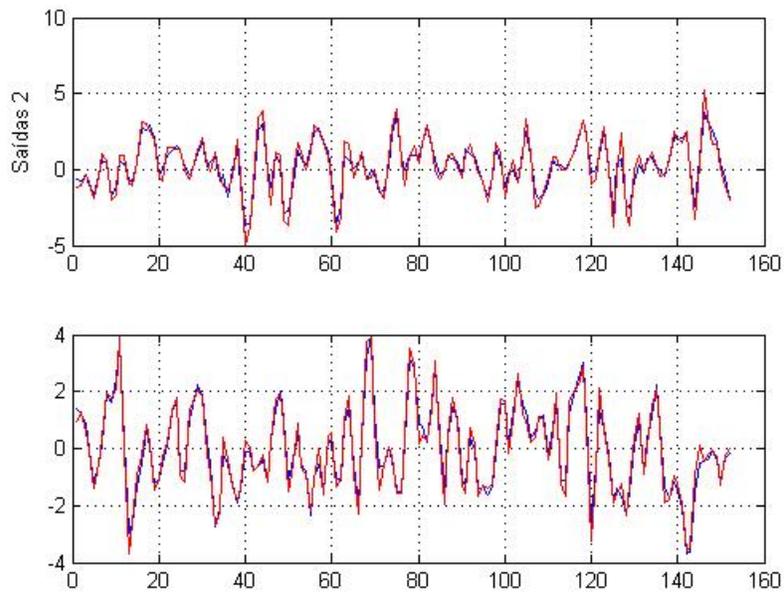


Figure 3.10: Saída vs. Saída Identificada para $j = 15$ e $k = 1$

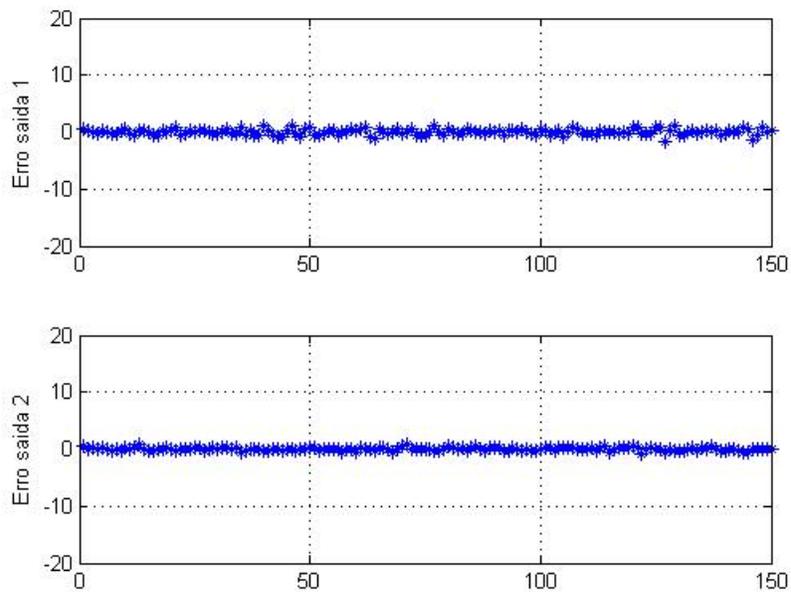
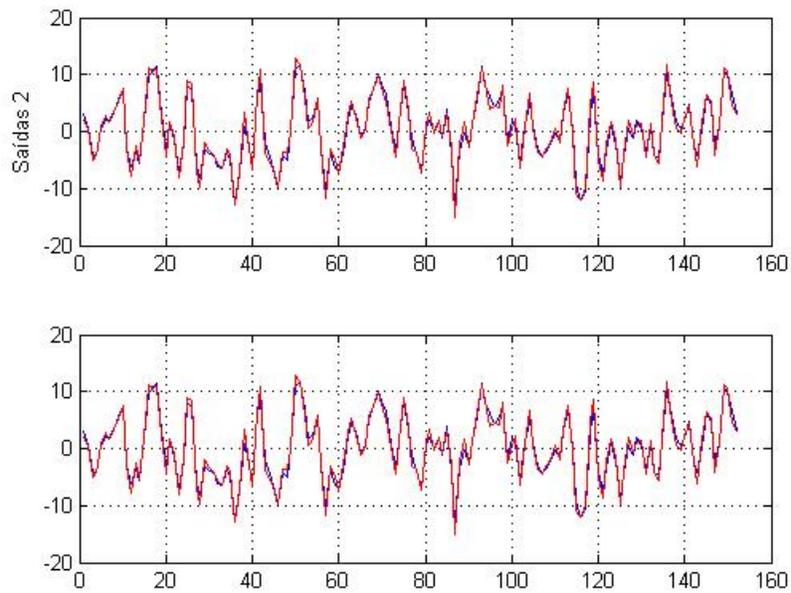
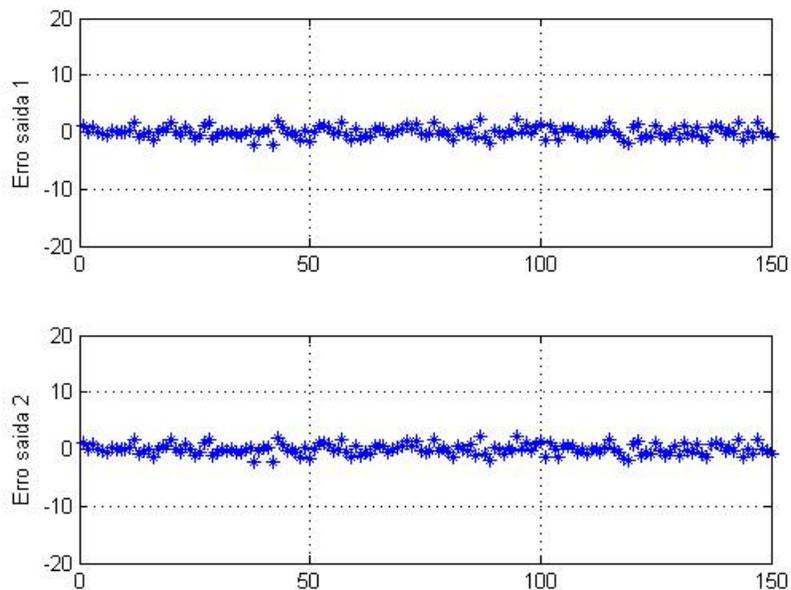


Figure 3.11: Erro para $j = 15$ e $k = 1$

Figure 3.12: Saída vs. Saída Identificada para $j = 32$ e $k = 5$ Figure 3.13: Erro para $j = 32$ e $k = 5$

3.4 Modelagem Computacional de Series Temporais

Duas maneiras de estudar séries temporais aqui são brevemente consideradas: modelagem computacional no espaço de estado e previsão. Em nosso contexto, analisar séries temporais é princi-

palmente determinar a ordem e a estrutura do modelo (matrizes do sistema e de covariâncias) que gerou a série temporal. Assim, a modelagem de séries temporais, ou modelagem computacional de séries temporais, ou identificação de série temporais no espaço de estado envolve encontrar um modelo de série temporal que representa as suas características: ordem e estrutura, através de algoritmo computacional.

Supondo que o algoritmo AOKI_VAR já foi validado, ele pode ser usado para a modelagem de qualquer série temporal, como amostra a Figura 3.14.

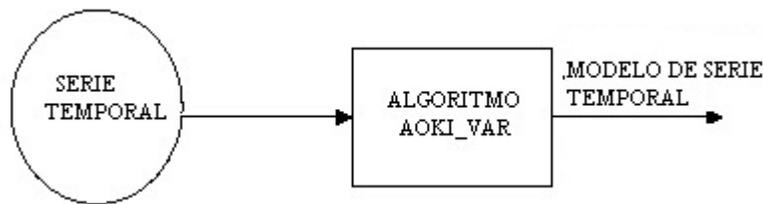


Figure 3.14: Modelagem AOKI_VAR

Com base neste esquema, modelamos a série temporal não-estacionária apresentada na Figura 3.15 e obtivemos as matrizes \hat{A} , \hat{B} , \hat{K} , e \hat{M} , para $j = 1$ e $k = 1$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0,0337 & -0,1260 \\ -0,1260 & -0,5975 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -0,3476 & -1,0199 \\ 1,0102 & -0,0278 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -8,6150 & -0,0367 \\ 0,0234 & -0,0475 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} -4,1824 & -1,1741 \\ 0,0418 & -0,0501 \end{bmatrix}$$

Na tabela 3.2 a matriz de covariância do ruído estimada para $j = 1$ e $k = 1$ é apresentado

Table 3.2: Matriz de Covariâncias para $j = 1$ e $k = 1$

$\hat{\Delta}$	14.0581	-0.3927
	-0.3835	1.0264

Para $j = 1$, os resultados da modelagem da série temporal multivariada pelo algoritmo AOKI_VAR proposto são apresentados na Figura 3.16 para $k = 2$.

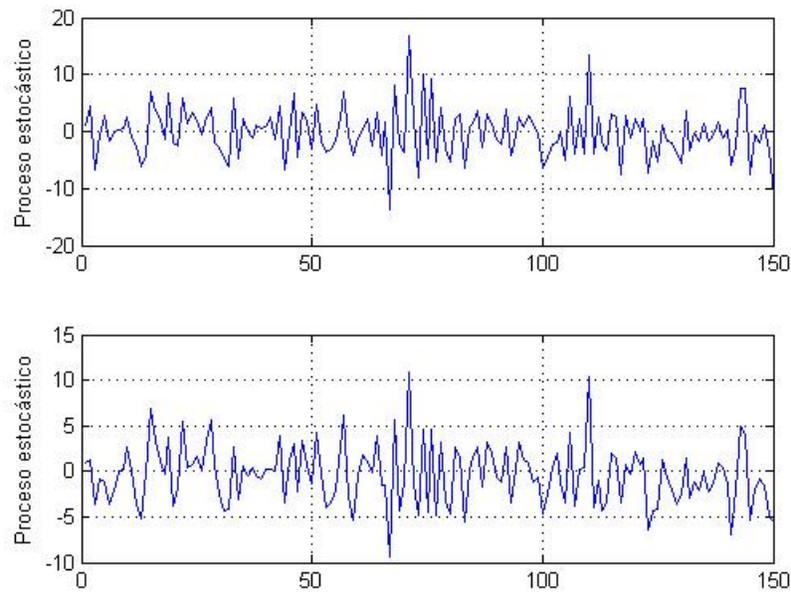
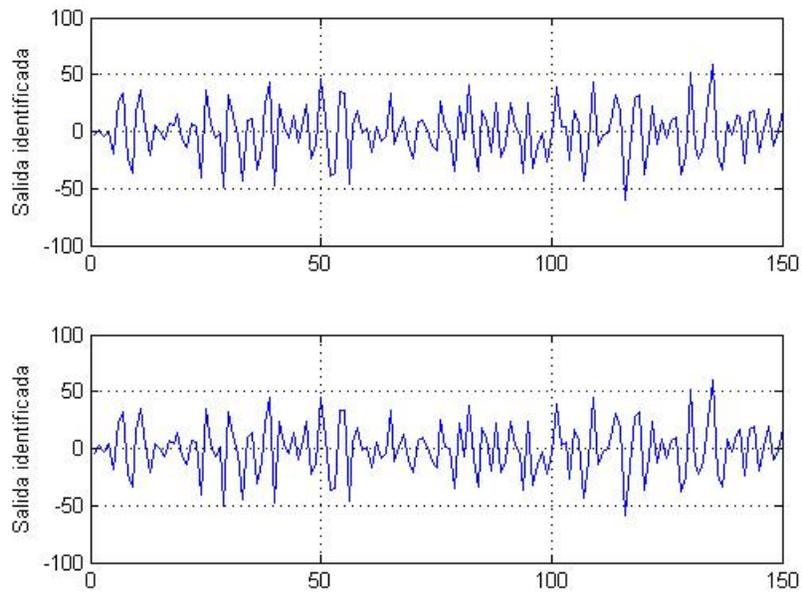
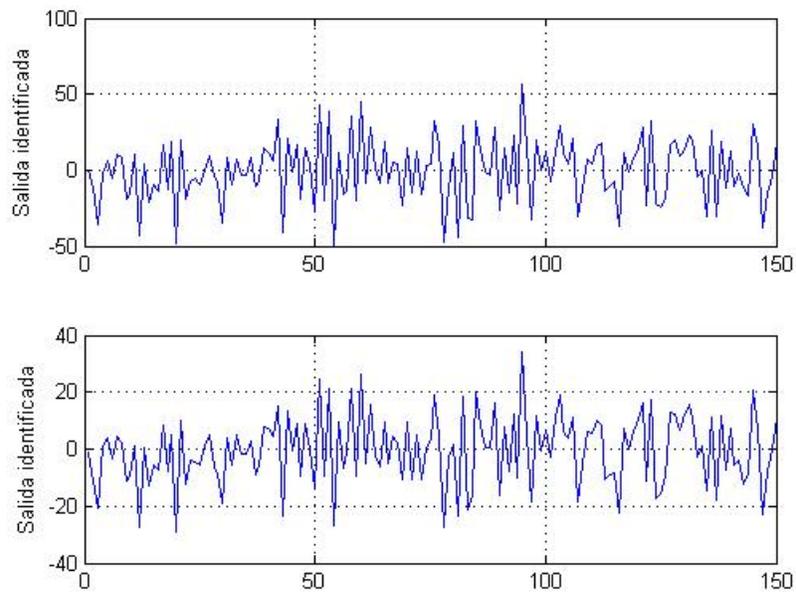


Figure 3.15: Series Temporais para $j = 1$ e $k = 1$

Para $j = 15$, os resultados de modelagem pelo algoritmo AOKI_VAR são apresentados na Figura 3.17 para $k = 10$.

Para $j = 26$, os resultados de modelagem do algoritmo AOKI_VAR são apresentados na Figura 3.18 para $k = 1$.

Figure 3.16: Saída Identificada para $j = 1$ e $k = 2$ Figure 3.17: Saída Identificada para $j = 15$ e $k = 10$

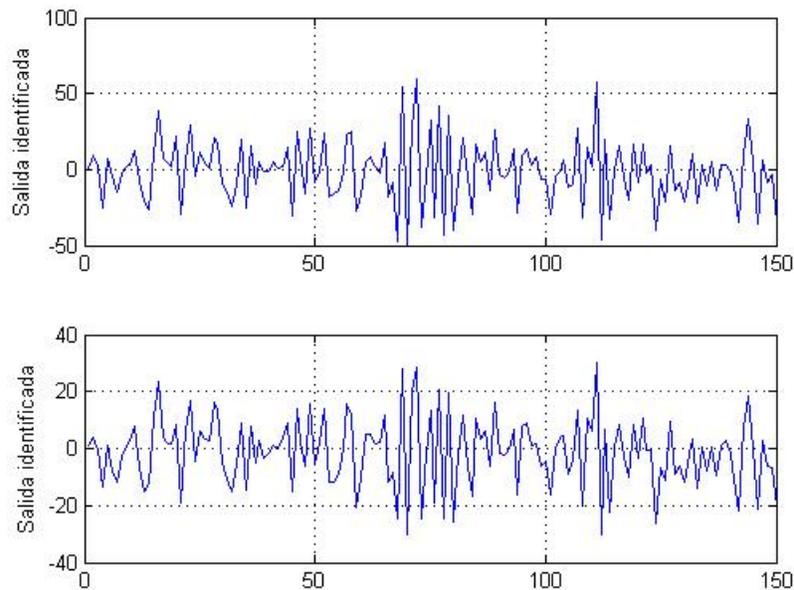


Figure 3.18: Saída Identificada para $j = 26$ e $k = 1$

3.5 Previsão

Uma vez que o modelo no espaço de estado de uma série temporal é validado, ele pode ser usado para previsão. Na figura 3.19 apresentamos uma proposta para previsão de valores futuros da série temporal com base no modelo obtido pelo algoritmo AOKI_VAR.

Os resultados da previsão pelo algoritmo AOKI_VAR são apresentados na Figura 3.21, e na tabela 3.3. Na Figura 3.20 o vetor de ruído inovativo para o modelo validado, para $j = 1$ e $k = 1$ são apresentados.



Figure 3.19: Previsão AOKI_VAR

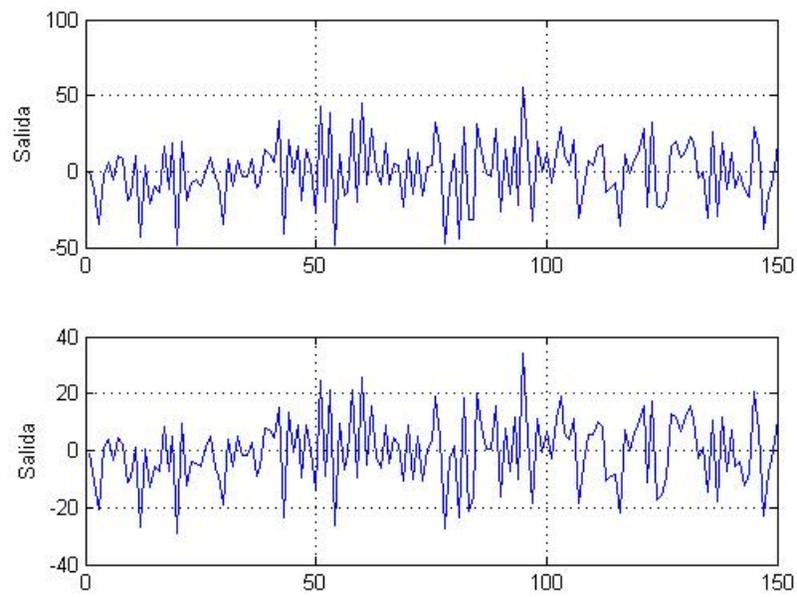


Figure 3.20: Ruído

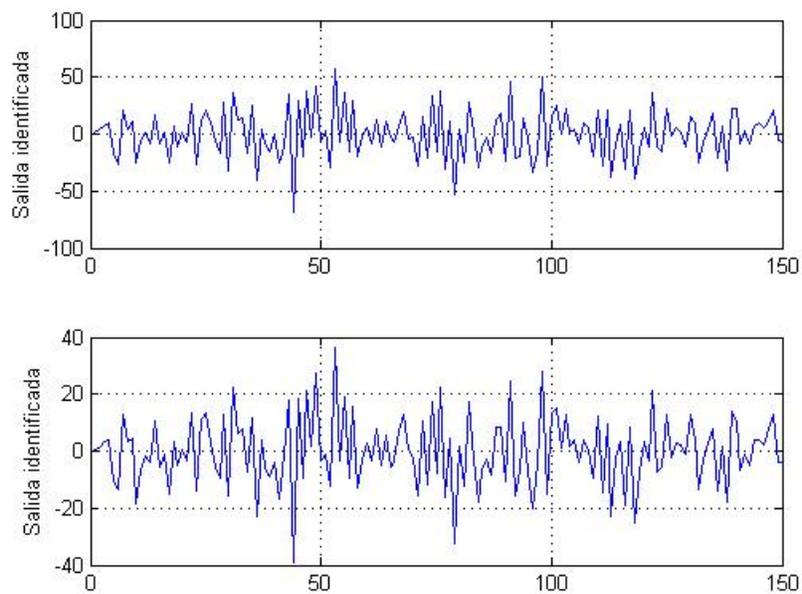
Figure 3.21: Predição de Series Temporais para $j = 1$ e $k = 1$

Table 3.3: Matriz de Covariância

Δ	1.1097	0.8081
	0.8081	15.6649

As previsões para $j = 1$ e $k = 20$ são apresentadas na Figura 3.22

As previsões para $j = 13$ e $k = 2$ são apresentadas na Figura 3.23

As previsões para $j = 30$ e $k = 8$ são apresentadas na Figura 3.24

As previsões para $j = 32$ e $k = 5$ são apresentadas na Figura 3.25

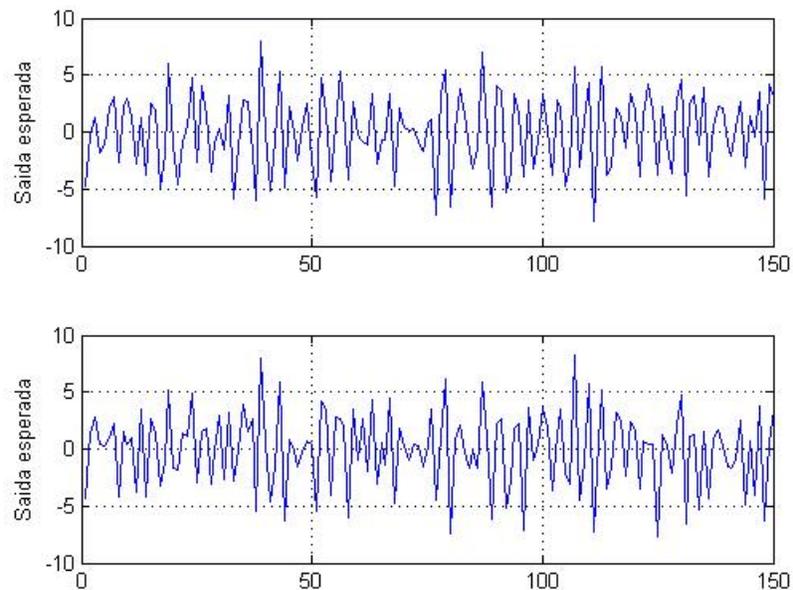
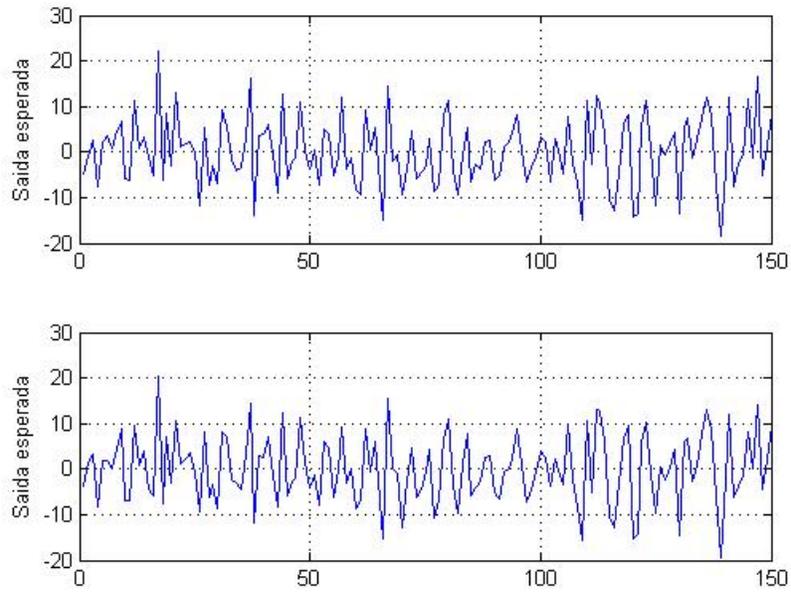
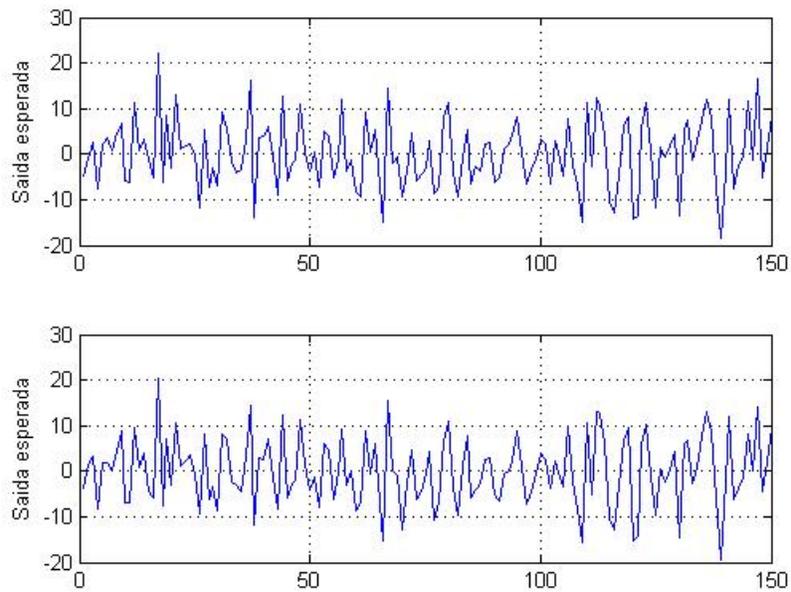


Figure 3.22: Predição de Séries Temporais para $j = 1$ e $k = 20$

Figure 3.23: Predição de Séries Temporais para $j = 13$ e $k = 2$ Figure 3.24: Predição de Séries Temporais para $j = 30$ e $k = 8$

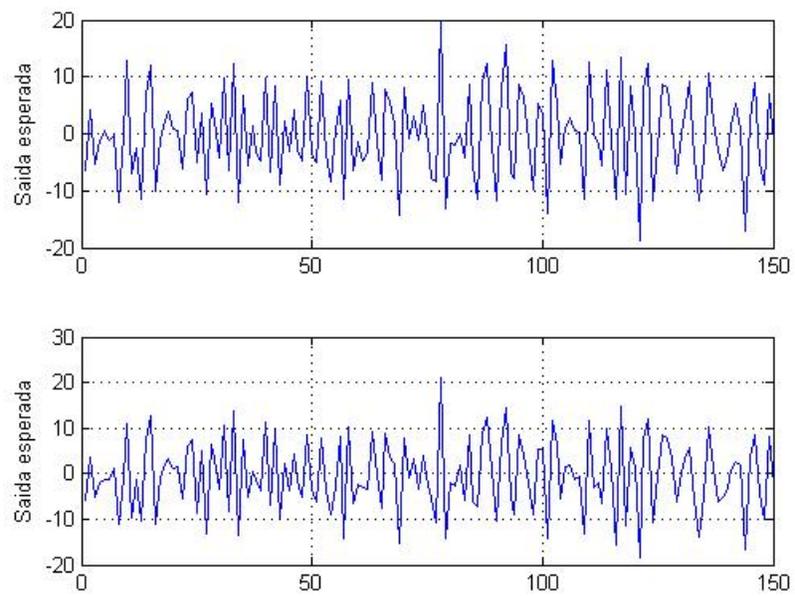


Figure 3.25: Predição de Séries Temporais para $j = 32$ e $K = 5$

Capítulo 4

Algoritmo MOESP_AOKI_VAR

4.1 Introdução

As necessidades do homem nas ultimas décadas levaram de aumento a produtividade de alguns setores e com elas à automação dos processos industriais, obrigando a indústria a adaptar-se às demandas do mercado e a aumentar sua competitividade. Para alcançar tal objetivo é necessário aperfeiçoar os processos para maximizar a eficiência dos mesmos, conseqüentemente é necessário implantar controladores robustos e confiáveis. Para isso é imprescindível conhecer o comportamento dinâmico do processo.

Os métodos de identificação de sistemas têm evoluído de uma maneira enorme, procurando atender esse crescimento com modelos cada vez mais simples e precisos, por estas razões os estudos e pesquisas são cada vez de maior interesse.

A obtenção dos modelos é muito complexa para o caso de sistemas multivariáveis, e a confiabilidade numérica pode ser pouco aceitável em problemas de sistemas de grandes dimensões, com grande número de entradas - saídas. No caso destes sistemas complexos, os Métodos de Subespaços surgem como uma alternativa muito útil na identificação dos mesmos. Para sistemas multivariáveis estes métodos provêm modelos confiáveis no espaço de estado diretamente a partir dos dados de entrada e saída. Os algoritmos envolvidos são numericamente robustos e não usam técnicas de otimização não lineares, o que significa que os algoritmos são rápidos (não iterativos) e precisos (não existem problemas de mínimos locais).[4]

Neste capítulo propomos um algoritmo para a modelagem de dados de sistemas lineares ruidosos multivariáveis não estacionário no espaço de estado. Nosso algoritmo proposto MOESP_AOKI_VAR fundamenta-se no algoritmo MOESP_VAR proposto A.D.R. Tamariz, C.P. Bottura, G. Barreto (2005) e no algoritmo MOESP_AOKI proposto em Cáceres, Angel Fernando Torrico (2005), Tamariz, Annabell (2005), Tamariz, Annabell and Bottura, C.P (2007).

4.2 Algoritmo MOESP

Os Métodos de Subespaços foram desenvolvidos a partir do final dos anos 1980. O termo "Método de Subespaço para Identificação" foi introduzido por Verhaegen e Deprettere (1991). Na atualidade existem muitas versões de Métodos de Subespaços: Canonical Variate Analysis (CVA) devido a Larimore (1990), Multivariable Output-Error State-Space (MOESP) devido a Verhaegen e Dewilde (1992), Numerical Algorithm for Subspace State-Space System Identification (N4SID) devido a Van Overschee e De Moor (1994), entre outros.

Os Métodos de identificação por Subespaços em tempo discreto referem-se a uma classe de algoritmos cuja principal característica é trabalhar com os subespaços gerados pelas linhas ou colunas das matrizes bloco de Hankel formadas pelos dados de entrada - saída, para calcular um modelo confiável no espaço de estado. Os modelos no espaço de estado são descritos matematicamente pelas equações:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

Os passos para construção do algoritmo são dados por:

1. *Construção da matriz de Hankel Y_N e U_N*

$$Y_N = O_k X_N + \tau_k U_N \quad (4.1)$$

$Y_N = Y_{jk}$ no caso variante no tempo.

A matriz U_N contém os vetores de entrada $u_{j,k}$.

2. *Fatoração QR*

Para o entendimento da fatoração QR é recomendável entender a projeção ortogonal.

Partindo de (4.1) podemos fazer a projeção de cada termo da equação no complemento ortogonal U_N^\perp . [2]

$$Y_N | U_N^\perp = O_k X_N^\perp + \tau_k U_N | U_N^\perp \quad (4.2)$$

consequentemente

$$Y_N | U_N^\perp = O_k X_N | U_N^\perp \quad (4.3)$$

permitindo a obtenção da matriz de estado X_k e da matriz de observabilidade O_k .

Outra forma de encontrar estas matrizes é mediante o uso da decomposição em valores singulares (SVD) e/ou da decomposição QR.

Então:

$$Y_N | U_N^\perp = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$U_1 \Sigma_1^{1/2} \Sigma_1^{1/2} V_1^T = RQ \quad (4.5)$$

onde podemos encontrar

$$\mathcal{O}_k = U_1 \Sigma_1^{1/2} \quad (4.6)$$

e deduzir que o espaço coluna \mathcal{O}_k é igual ao espaço coluna de V_1 e que

$$\mathcal{X}_N | U_N^\perp = \Sigma_1^{1/2} V_1^T \quad (4.7)$$

Uma vez calculada a extensão do espaço coluna \mathcal{O}_k podemos calcular a matriz do sistema A_{k_0} .

Supondo que a matriz U_N tem a mesma dimensão que \mathcal{O}_k então existe uma matriz quadrada regular T_1 que satisfaz:

$$U_N = \mathcal{O}_k T_1 \quad (4.8)$$

como

$$\mathcal{O}_k^{(1)} A_{k_0} = \begin{bmatrix} C_{k_0} \\ C_{k_0+1} A_{k_0} \\ C_{k_0+2} A_{k_0+1} \\ \vdots \\ C_{k_0+T-1} A_{k_0+T-2} \end{bmatrix} A_{k_0} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{O}_k^2 = \begin{bmatrix} C_{k_0} A_{k_0} \\ C_{k_0+1} A_{k_0+1} \\ C_{k_0+2} A_{k_0+2} \\ \vdots \\ C_{k_0+T-1} A_{k_0+T-1} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Supondo que existe uma matriz X_N , existe uma matriz quadrada regular T_2 que satisfaz:

$$X_K = T_2 X_N \quad (4.11)$$

X_N é invariante. Então

$$\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_N \\ Y_1 & \cdots & Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_{N-1} \\ U_1 & \cdots & U_{N-1} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{N-1} \\ U_1 & U_2 & \cdots & U_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{N-1} \\ U_{N-1} \end{bmatrix}$$

e concluímos que:

$$\begin{bmatrix} X_{N-1} \\ U_{N-1} \end{bmatrix}$$

tem o posto completo.

Finalmente podemos calcular as matrizes do sistema (AT_2, BT_2, CT_2, D) . Quando a entrada $U_{j_0,k}$ é arbitrária e os parâmetros de Markov em \mathcal{T}_K são conhecidos de (4.1), podemos escrever:

$$\mathcal{O}_k \mathcal{X}_N = Y_N - \mathcal{T}_K U_N$$

e usando a fatoração QR temos:

$$\mathcal{O}_k \mathcal{X}_N = [R_{21} - T_k R_{11} \mid R_{22}] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Se o posto de R_{22} é n , podemos calcular a SVD da matriz como:

$$R_{22} = U_n S_n V_n^T \quad (4.13)$$

3. Determinação das matrizes A e C

$$\mathcal{O}_k T = U_N$$

$$U_N^{(1)} \hat{A} = U_N^{(2)}$$

$$\hat{C} = U_N(1 : L; :)$$

4. Determinação das matrizes B e D

$$U_N = R_{11} Q_1$$

$$Y_N = \mathcal{O}_k X_N + T_k U_N = R_{21} Q_1 + R_{22} Q_2$$

$$R_{22} = U_N S_N V_N^T$$

$$U_N = \mathcal{O}_k T_k$$

$$U_N T^{-1} X_N + T_k R_{11} Q_{11} = R_{21} Q_1 + U_N S_N V_N^T Q_2$$

$$(U_N^\perp)^T T_k R_{11} = (U_N^\perp)^T R_{21}$$

como R_{11} é regular, podemos calcular as matrizes B e D do sistema. Finalmente o modelo no espaço de estado está completo.

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + BU_k \\ Y_k = CX_k + DU_k \end{cases}$$

4.3 Identificação de sistema variante no tempo.

Nosso algoritmo de identificação trabalha sob a hipótese de que os sistemas variantes no tempo podem ser considerados como um conjunto de modelos invariantes no tempo para um determinado intervalo no tempo. Assim a identificação de sistemas variantes no tempo consistirá num conjunto de n modelos invariantes no tempo, que descreverão o sistema para o experimento definido.

Uma expressão que relaciona as entradas ao vetor de estado de um sistema linear variante no tempo no instante k^{th} é:

$$x_k = A_{(k-1)} x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} A^{(k-l-1)} B_l u_l \quad (4.14)$$

onde $A(n)$ e $A^{(n)}$ representam as matrizes de transição satisfazendo:

$$\begin{cases} A_{(0)} = A_0 \\ A^{(0)} = I \\ A_{(n)} = A_n A_{(n-1)} = A_n \dots A_2 A_1 A_0 \\ A^{(n)} = A_n A^{(n-1)} = A_n \dots A_2 A_1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Para interpretar a identificação dos parâmetros do problema, temos um conjunto de índices j, k em $u_{j,k}$ que indica a entrada da amostra para o instante k^{th} do tempo real para o intervalo j^{th} de experimentação do sistema (8). Por tanto podemos notar que $j \in [j_0, j_0 + n - 1]$ e $k \in [k_0, k_0 + T - 1]$ onde j_0 é o primeiro intervalo de experimentação, k_0 é o primeiro instante de tempo, n é o numero total de experimentos ou ensaios e T é o tempo necessario para um experimento simples.

O problema que temos é estabelecer a descrição do espaço de estado.

$$\begin{bmatrix} x_{j,k+1} \\ y_{j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j,k} \\ u_{j,k} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

baseados nas seguintes seqüências de dados de saídas associados como:

$$Y_{j,k} = \begin{bmatrix} y_{j_0,k_0} & y_{j_0,k_0+1} & \cdots & y_{j_0,k_0+T-1} \\ y_{j_0+1,k_0} & y_{j_0+1,k_0+1} & \cdots & y_{j_0+1,k_0+T-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{j_0+n-1,k_0} & y_{j_0+n-1,k_0+1} & \cdots & y_{j_0+n-1,k_0+T-1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

assim como nas respectivas seqüências de entrada $U_{j,k}$ para as mesmas series de experimentos e sobre o mesmo intervalo de tempo. A matriz $Y_{j,k}$ representa o conjunto de $(n - 1)$ intervalos de experimentação. Ele permite-nos desenvolver expressões gerais capazes de se relacionar com entradas e saídas a partir de um tempo inicial k_0 e estabelecer um intervalo de experimentação correto j , para um sistema discreto variante no tempo representado no espaço de estado por:

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_k x_{j,k} + B_k u_{j,k} \\ y_{j,k} = C_k x_{j,k} + D_k u_{j,k} \end{cases} \quad (4.18)$$

Para o instante seguinte temos:

$$\begin{cases} x_{j,k+2} = A_{k+1} x_{j,k+1} + B_{k+1} u_{j,k+1} \\ y_{j,k+1} = C_{k+1} x_{j,k+1} + D_{k+1} u_{j,k+1} \end{cases} \quad (4.19)$$

Substituindo 4.19 em 4.18 temos que:

$$\begin{cases} x_{j,k+2} = A_{k+1} A_k x_{j,k} + A_{k+1} B_k u_{j,k} + B_{k+1} u_{j,k+1} \\ y_{j,k+1} = C_{k+1} A_k x_{j,k} + C_{k+1} B_k u_{j,k} + D_{k+1} u_{j,k+1} \end{cases} \quad (4.20)$$

e assim por diante.

A solução de 4.18 para qualquer instante no tempo $k_0 \geq 0$ pode ser escrita como:

$$y_{j,l} = \begin{cases} C_{l,j} + D_l u_{j,l} & l = 0 \\ C_l A^{(l-1)} x_{j,l} + \\ + \sum_{i=0}^{l-1} C_l A^{(l-i-1)} B_i u_{j,i} + D_l u_{j,l} & l > k_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

A equação 4.18 pode ser descrita em forma compacta pelo modelo estendido:

$$Y_H = O_k X_H + T_k U_H \quad (4.22)$$

onde

$$Y_H = \begin{bmatrix} y_{j_0, k_0}^+ & y_{j_0, k_0+1}^+ & \cdots & y_{j_0, k_0+T-1}^+ \\ y_{j_0+1, k_0}^+ & y_{j_0+1, k_0+1}^+ & \cdots & y_{j_0+1, k_0+T-1}^+ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{j_0+n-1, k_0}^+ & y_{j_0+n-1, k_0+1}^+ & \cdots & y_{j_0+n-1, k_0+T-1}^+ \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e

$$U_H = \begin{bmatrix} u_{j_0, k_0}^+ & u_{j_0, k_0+1}^+ & \cdots & u_{j_0, k_0+T-1}^+ \\ u_{j_0+1, k_0}^+ & u_{j_0+1, k_0+1}^+ & \cdots & u_{j_0+1, k_0+T-1}^+ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{j_0+n-1, k_0}^+ & u_{j_0+n-1, k_0+1}^+ & \cdots & u_{j_0+n-1, k_0+T-1}^+ \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$X_H = \begin{bmatrix} x_{j_0, k_0}^+ & x_{j_0+1, k_0}^+ & \cdots & x_{j_0+n-1, k_0}^+ \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

\mathcal{O}_k é uma matriz com estrutura semelhante à da matriz de observabilidade, dada por:

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} C_{k_0} \\ C_{k_0+1}A_{(k_0)} \\ C_{k_0+2}A_{(k_0+1)} \\ C_{k_0+3}A_{(k_0+2)} \\ \vdots \\ C_{k_0+T-1}A_{(k_0+T-2)} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Estas matrizes propiciam uma representação muito importante para estudar-se as propriedades de uma realização no espaço de estado a partir das seqüências multivariadas de entrada-saída, bem como para o desenvolvimento de algoritmos de identificação multivariável recursivos no espaço de estado, como o exposto neste trabalho. [21]

Algoritmo recursivo para a parte estocástica: ver em [24, 25] e no capítulo 3.

4.4 Algoritmo MOESP_VAR

Uma característica básica das diferentes abordagens MOESP é a utilização da fatoração QR, nesta teses utilizamos a fatoração QR de uma matriz composta $\begin{bmatrix} U_H \\ Y_H \end{bmatrix}$ e uma outra matriz com linhas ortogonais, para recuperar uma matriz com espaço coluna igual ao espaço coluna de \mathcal{O}_k .

Um algoritmo recursivo para o problema MOESP com matrizes variantes no tempo é apresentado. Variações no algoritmo MOESP podem resultar da forma de realizar os cálculos na fatoração QR,

ou seja, quando um novo par amostrado de entrada/saída $u_{j,k}, y_{j,k}$ é dado, uma atualização parcial da fatoração QR poderia, por exemplo, ser executada. Este novo par entrada/saída determina uma coluna adicional não processada, nas matrizes de Hankel U_H e Y_H . Nossa proposta de algoritmo de identificação trata um sistema variante no tempo como um conjunto de modelos invariantes no tempo. Desta forma a identificação do sistema variante no tempo consistirá de um conjunto de N modelos invariantes no tempo, que descreverão o sistema para o experimento definido.[22]

Passos do Algoritmo

Cálculo da matriz do sistema A_k .

Para seqüências de entradas $[u_{k0} \ u_{k0+1} \ \dots \ u_{k0+T-1}]$ e saídas $[y_{k0} \ y_{k0+1} \ \dots \ y_{k0+T-1}]$:

1. Construir as matrizes Hankel Y_H e U_H
2. Executar a compressão dos dados via fatoração QR:

$$\begin{bmatrix} U_H \\ Y_H \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & 0 \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

3. Calcular a SVD de R_{22} dada por:

$$R_{22} = [U_H \ | \ U_H^\perp] \begin{bmatrix} \sum_n & 0 \\ 0 & \sum_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ (V_n^\perp)^T \end{bmatrix}$$

4. Resolver o conjunto de equações

$$U_H^{(1)} A_k = U_H^{(2)}$$

Atualização da fatoração QR:

Seja a fatoração obtida denotada como:

$$\begin{bmatrix} R_{j_0,11} & 0 \\ R_{j_0,21} & R_{j_0,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{R_{j_0,1}} \\ Q_{R_{j_0,2}} \end{bmatrix}$$

onde o índice j_0 representa o conjunto de medidas de entrada-saída processado no experimento simples mais recente.

Suponhamos que durante este intervalo de tempo $[j_0, j_0 + n - 1]$ o modelo no espaço de estado é invariante e igual à

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{j_0} x_k + B_{j_0} u_k \\ y_k = C_{j_0} x_k + D_{j_0} u_k \end{cases}$$

Logo a equação em forma compactada que relaciona as diferentes matrizes de dados, pode ser representada por:

$$Y_H = \mathcal{O}_k X_H + \mathcal{T}_{j_0,k} U_H$$

4.5 Modelagem determinística estocástica no espaço de estado do sistema não estacionário.

Uma forma de representar sistemas lineares discretos multivariáveis ruidosos com entradas exógenas variante no tempo no espaço de estado é dada por:

$$\begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + B_{j,k}u_{j,k} + v_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + D_{j,k}u_{j,k} + w_{j,k} \end{cases} \quad (4.27)$$

com

$$E \left[\begin{pmatrix} v_{j,k} \\ w_{j,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j,s}^T & w_{j,s}^T \end{pmatrix} \right] = \begin{cases} \begin{bmatrix} Q_j & S_j \\ S_j^T & R_j \end{bmatrix} & k = s \\ 0 & k \neq s \end{cases} \quad (4.28)$$

A seguir propomos um teorema sobre a decomposição por superposição de sistemas lineares ruidosos variantes no tempo.

Teorema 1. Por superposição, o modelo linear ruidoso variante no tempo S na forma inovativa, dado por:

$$S : \begin{cases} x_{j,k+1} = A_{j,k}x_{j,k} + B_{j,k}u_{j,k} + K_{j,k}e_{j,k} \\ y_{j,k} = C_{j,k}x_{j,k} + D_{j,k}u_{j,k} + e_{j,k} \end{cases} \quad (4.29)$$

pode ser descomposto nos subsistemas seguintes:

$$S_d : \begin{cases} x_{j,k+1}^d = A_{j,k}x_{j,k}^d + B_{j,k}u_{j,k} \\ y_{j,k}^d = C_{j,k}x_{j,k}^d + D_{j,k}u_{j,k} \end{cases} \quad (4.30)$$

e

$$S_e : \begin{cases} x_{j,k+1}^e = A_{j,k}x_{j,k}^e + K_{j,k}e_{j,k} \\ y_{j,k}^e = C_{j,k}x_{j,k}^e + e_{j,k} \end{cases} \quad (4.31)$$

onde o superescrito d se refere ao determinístico e o superescrito e ao estocástico e

$$y_{j,k} = y_{j,k}^d + y_{j,k}^e$$

O estado do sinal ruidoso é

$$x_{j,k} = \begin{bmatrix} x_{j,k}^d \\ x_{j,k}^e \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} A_{j,k}^d & 0 \\ 0 & A_{j,k}^e \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{j,k}^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_{j,k}^d \ C_{j,k}^e]$$

$$D = D_{j,k}^d, K = K_{j,k}^e$$

Prova. Aplicando o princípio de superposição pode se escrever o modelo linear na forma:

$$y_{j,k} = y_{j,k}^d + y_{j,k}^e = C_{j,k}^d x_{j,k}^d + C_{j,k}^e x_{j,k}^e + D_{j,k}^d u_{j,k} + K_{j,k}^e e_{j,k} + e_{j,k}$$

com

$$y_{j,k}^d = C_{j,k}^d x_{j,k}^d + D_{j,k}^d u_{j,k}$$

$$y_{j,k}^e = C_{j,k}^e x_{j,k}^e + e_{j,k}$$

onde

$$y_{j,k} = y_{j,k}^d + y_{j,k}^e = \begin{bmatrix} C_{j,k}^d & C_{j,k}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j,k}^d \\ x_{j,k}^e \end{bmatrix} + D_{j,k}^d u_{j,k} + K_{j,k}^e e_{j,k} + e_{j,k}$$

Como o estado do sinal ruidoso é

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^d \\ x_k^e \end{bmatrix},$$

Então

$$\begin{aligned} x_{j,k+1} &= \begin{bmatrix} x_{k+1}^d \\ x_{k+1}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{j,k}^d x_{j,k}^d + D_{j,k}^d u_{j,k} \\ A_{j,k}^e x_{j,k}^e + K_{j,k}^e e_{j,k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{j,k}^d & 0 \\ 0 & A_{j,k}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j,k}^d \\ x_{j,k}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{j,k}^d \\ 0 \end{bmatrix} u_{j,k} + e_{j,k} \end{aligned}$$

donde resulta o sistema 4.29

4.6 Algoritmo MOESP_AOKI_VAR

O objetivo principal do algoritmo é conseguir determinar as matrizes do sistema com espaços linha ou coluna especialmente estruturados. Um algoritmo recursivo para o problema determinístico e um algoritmo iterativo para o problema estocástico com matrizes variantes no tempo são apresentados. Uma das vantagens deste algoritmo é não fazer uso de nenhuma técnica de atualização da SVD, apenas uma atualização parcial da fatoração QR por cada novo par amostrado de entrada/saída é feito, pois esta demandaria um elevado esforço computacional neste processo.

Desta forma a identificação do sistema variante no tempo consistirá de um conjunto de N modelos invariantes no tempo, que descreverão o sistema para o experimento definido.

Assim o procedimento para o algoritmo MOESP_AOKI_VAR é resumido como segue:

1. Montar as matrizes de Hankel Y_N e U_N .
2. Executar compressão de dados através da decomposição QR

$$\begin{bmatrix} U_N \\ Y_N \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & 0 \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Sendo R_{11} e R_{22} matrizes quadradas invertíveis .

3. Calcular SVR de R_{22} como:

$$R_{22} = \left[\begin{array}{c|c} U_N & U_N^\perp \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \sum_n & 0 \\ \hline 0 & \sum_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_n^T \\ (V_n)^T \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

4. Resolver o sistema de equações:

$$U_N^{(1)} A_T = U_N^{(2)} \quad (4.34)$$

5. Atualização: Nós aplicamos o algoritmo recursivo mostrado na Seção 1.4.2. Obtendo assim as matrizes $A_{j,k}^d, B_{j,k}^d, C_{j,k}^d, D_{j,k}^d$, de $y_{j,k}^d$ para instantes de tempo k e intervalos de tempo j .

6. Determinar o sinal $y_{j;k}^c \equiv \bar{y}$ gerando as matrizes $H^A, H^M, H^C, H, Y_-, Y_+$

$$Y_- = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \cdots & y_{N-1}^- \\ 0 & \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & y_{N-2}^- \\ 0 & 0 & \bar{y}_1 & \cdots & y_{N-3}^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{N-k-1}^- & y_{N-k}^- \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$Y_+ = \begin{bmatrix} \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 & \cdots & \bar{y}_N \\ \bar{y}_3 & \bar{y}_4 & \bar{y}_5 & \cdots & 0 \\ \bar{y}_4 & \bar{y}_5 & \bar{y}_6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{j+1}^- & y_{j+2}^- & y_{j+3}^- & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$H = \frac{Y_+ Y_+^T}{N} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \cdots & \Lambda_k \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \cdots & \Lambda_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_j & \Lambda_{j+1} & \cdots & \Lambda_{j+k} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$H^A = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & \Lambda_3 & \cdots & \Lambda_{k+1} \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 & \cdots & \Lambda_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{j+1} & \Lambda_{j+2} & \cdots & \Lambda_{j+k+1} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$H^M = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_j \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$H^C = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \cdots & \Lambda_k \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

7. Obter a decomposição em valores singulares da matriz de Hankel de covariâncias.

$$H = U \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2} V^T \quad (4.41)$$

8. Calcular as matrizes $A_{j,k}^e$, $C_{j,k}^e$, $K_{j,k}^e$ e $\Delta_{j,k}$.

9. Actualização: iterar o algoritmo como descrito acima, para obter os estados e as matrizes de covariâncias para $y_{j,k}$ para cada instantes de tempo k e intervalo de tempo j .

10. Validar.

4.7 Exemplo de aplicação do algoritmo MOESP_AOKI_VAR

Numericamente, o algoritmo proposto é inicialmente definido por um certo número T de intervalos de experimentação conseguindo identificar as matrizes do sistema. Assim, o algoritmo aqui

proposto MOESP AOKI VAR vai ser avaliado T vezes para determinar T conjuntos de matrizes do sistema para cada experimento.

Se ∇ é um incremento pequeno, L_j é um numero inteiro especificado para cada intervalo I_j e o $j - \text{esimo}$ intervalo I_j é dado por:

$$I_j = [k_j - L_j \nabla, \quad k_j + L_j \nabla] \quad (4.42)$$

Para mostrar a eficácia do algoritmo proposto montamos um benchmark adaptado a partir de um exemplo de Ohsumi, T. Akira e Kawano (2002). A identificação no instante de tempo k_j (sendo este o ponto médio de cada intervalo I_j) é determinada como $k_{j+1} = k_j + v \nabla$, onde v é fixado como um valor inteiro, ∇ é um incremento de tempo de simulação dado por $\nabla = M \nabla t$ onde M é fixado como um valor inteiro; para nosso caso definimos $L_j = 500$ para todo j .

O sistema exemplificado é descrito a seguir:

A parte determinística é dada pelas seguintes matrizes de estado.

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.3 & a_k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

onde

$$a_k = -\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \text{sen}\left(\frac{2\pi k}{400}\right)$$

As matrizes restantes são consideradas constantes:

$$B_k = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C_k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_k = 0$$

A entrada do sistema é randômica mudando para cada iteração do algoritmo. O algoritmo proposto apresenta os seguintes resultados para $k = 1$:

$$A_{j,k} = \begin{bmatrix} -0.3000 & 0 \\ 0 & -0.4040 \end{bmatrix}$$

$$B_{j,k} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k}B_{j,k} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k}A_{j,k}B_{j,k} = \begin{bmatrix} -0.6121 & -1.5121 \\ -0.2081 & -1.1081 \end{bmatrix}$$

Nós fazemos a identificação determinística-estocástica do sistema sujeito ao ruído. Os resultados obtidos através da execução da primeira parte do algoritmo MOESP AOKI VAR são apresentados a seguir:

$$A_{j,k}^d = \begin{bmatrix} -0.3000 & 0 \\ -0.0000 & -0.4077 \end{bmatrix}$$

$$B_{j,k}^d = \begin{bmatrix} 4.1559 & 3.7636 \\ -3.1924 & 1.5997 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k}^d = \begin{bmatrix} 0.7705 & 0.6867 \\ 0.5137 & 0.6677 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k}^d B_{j,k}^d = \begin{bmatrix} 1.0098 & 3.9984 \\ 0.0031 & 3.0014 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k}^d A_{j,k}^d B_{j,k}^d = \begin{bmatrix} -0.6478 & -1.5118 \\ -0.2308 & -1.1086 \end{bmatrix}$$

Na figura 4.1 apresentamos a saída do modelo determinístico.

A seguir estão os resultados da execução da segunda parte do algoritmo MOESP_AOKI_VAR:

$$\Delta = [1.6092]$$

$$A_{j,k}^e = \begin{bmatrix} -0.2092 & -0.7319 \\ 0.7319 & 0.1218 \end{bmatrix}$$

$$K_{j,k} = \begin{bmatrix} -0.2582 \\ 1.1257 \end{bmatrix}$$

$$C_{j,k}^e = \begin{bmatrix} -2.7437 & 1.0369 \end{bmatrix}$$

onde Δ é a matriz da covariância do ruído.

Na figura 4.2 apresentamos o sinal modelado, usando a segunda parte do algoritmo MOESP_AOKI_VAR.

Na Figura 4.3, apresentamos a saída do sinal resultante da superposição dos sinais determinístico e estocástico $y_{j,k}^d$ e $y_{j,k}^e$. Finalmente fazemos uma verificação para validar o algoritmo combinado proposto MOESP_AOKI_VAR e observamos na Figura 4.4 que para um conjunto de dados de entrada e saída, com ruído branco, o algoritmo MOESP_AOKI_VAR consegue descrever satisfatoriamente um sinal ruidoso.

Testamos o algoritmo MOESP_AOKI_VAR para otros instantes de tempo:

Para $j = 1$ e $k = 2$ são apresentadas na Figura 4.5

Para $j = 5$ e $k = 10$ são apresentadas na Figura 4.6

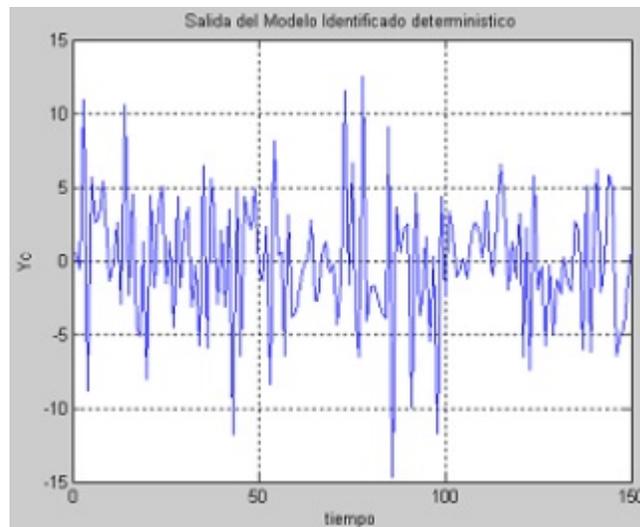


Figure 4.1: Saída do modelo determinístico

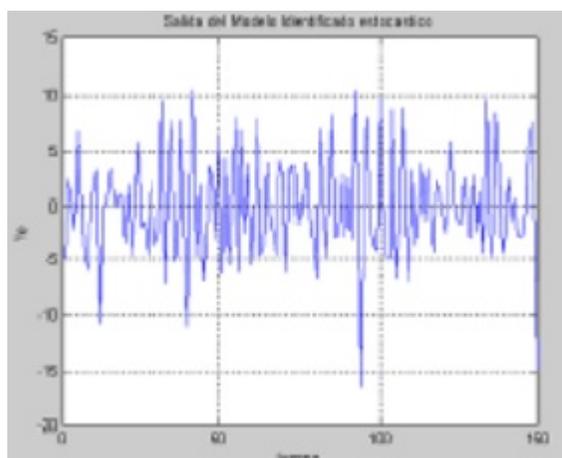


Figure 4.2: Saída do modelo Estocástico.

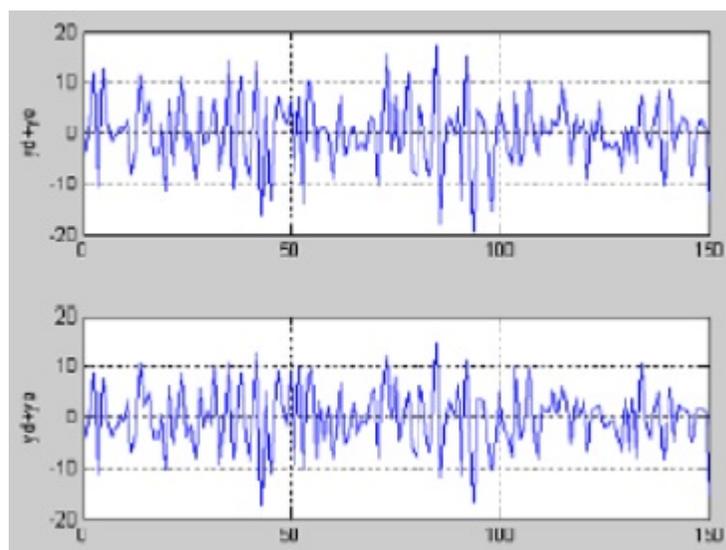


Figure 4.3: Superposição de sinais

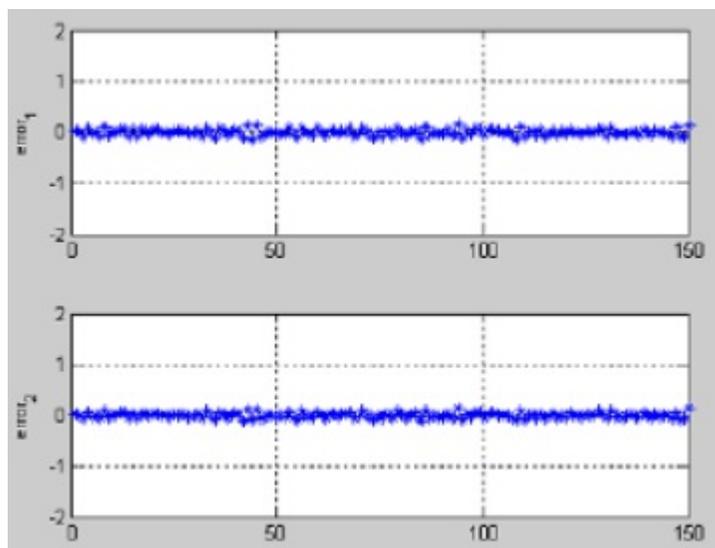
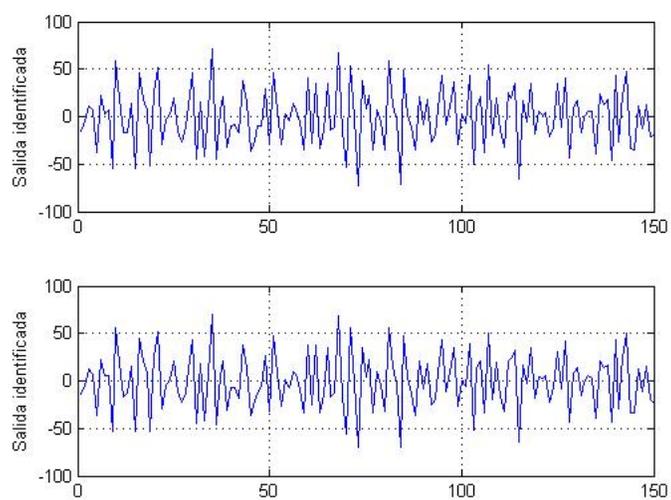
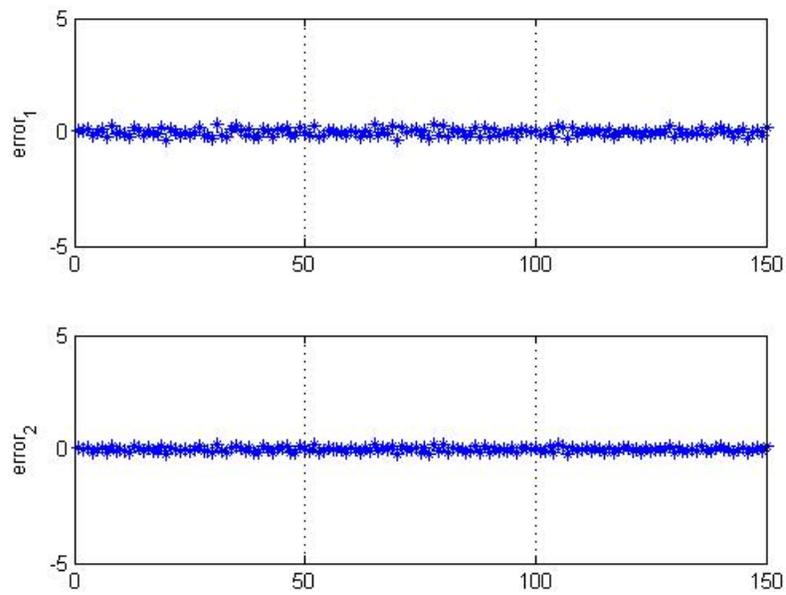
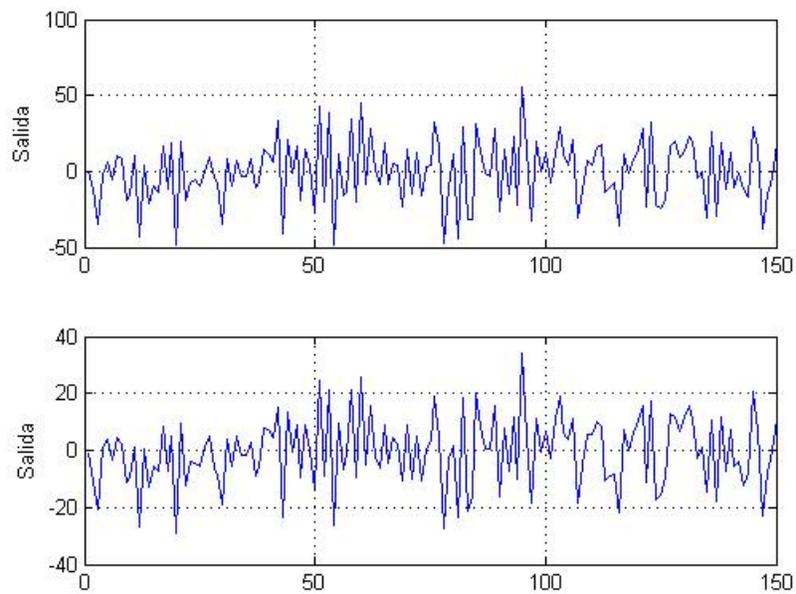
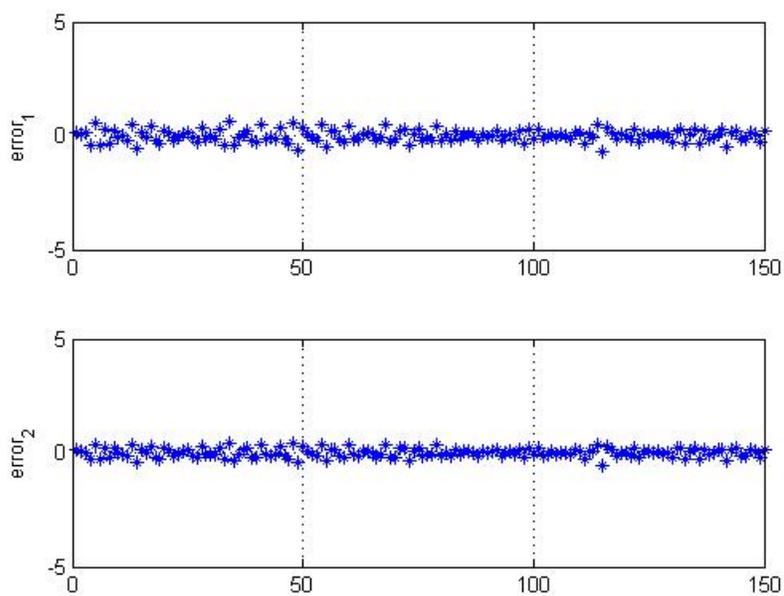


Figure 4.4: Erro na modelagem.

Figure 4.5: Saída Identificada para $j = 1$ e $k = 2$

Figure 4.6: Erro para $j = 1$ e $k = 2$ Figure 4.7: Saída Identificada para $j = 5$ e $k = 10$

Figure 4.8: Erro para $j = 5$ e $k = 10$

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese nós propomos procedimentos computacionais para modelagem em contexto estocástico no espaço de estado de séries temporais não estacionárias multivariáveis que chamamos algoritmo AOKI_VAR, baseado no algoritmo AOKI e para a identificação no espaço de estado de sistemas lineares variantes no tempo multivariáveis discretos no tempo, que chamamos MOESP_AOKI_VAR baseado nos algoritmos AOKI_VAR e MOESP_VAR, e dado pela superposição destes.

Nos apoiamos na hipótese de que as variações no tempo são suficientemente lentas para assegurar a eficácia do método de identificação de subespaços tipo MOESP para sistemas dinâmicos lineares ruidosos não estacionários e do método de identificação de AOKI no espaço de estado para series temporais.

Discutimos também os procedimentos de validação, modelagem e previsão de séries temporais não estacionárias multivariáveis pelo algoritmo AOKI_VAR e apresentamos exemplos usando um benchmark proposto.

Os resultados mostraram que os algoritmos propostos e implementados em MATLAB garantem bons desempenhos para as modelagens de séries temporais e de sistemas. A nosso conhecimento, estas propostas são originais. Seus resultados podem ser considerados bons e as propostas úteis sob as hipóteses consideradas, mas nossos estudos, análises e resultados ainda podem ser considerados como preliminares e passíveis de aprimoramentos, devido às complexidades dos problemas tratados.

Referências Bibliográficas

- [1] Aoki, M., State Space Modelling of Time Series, Springer-Verlang, second edition, 1990.
- [2] Barreto, G., "Modelagem Computacional Distribuída e Paralela de Sistemas e de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estado", Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2002.
- [3] Bottura, C. P., Análise Linear de Sistemas, Editora Guanabara Dois, 1982.
- [4] Cáceres, A. F. T., "Identificação e Controle Estocásticos Decentralizados de Sistemas Interconectados Multivariáveis no Espaço de Estado", Tese de Doutorado, FEEC, UNICAMP, 2005.
- [5] Clavijo D. G., Metodos de Subespaço para Identificação de Sistemas: Propostas de alterações, implementações e avaliações, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Eletrica e de Computação, UNICAMP, 2008.
- [6] Chen, C.T. Linear Systems Theory and Design. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [7] Dewilde, P. and Van der V., Alle-Jan, "Time-Varying Systems and Computations", Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] De Moor, B. and Van Overschee P., "Numerical Algorithms for State Space Subspace Systems Identification", Editado por alberto Isidori em Trends in Control - A European Perspective, 385-422, springer-Verlag, 1995.
- [9] De Moor, B. and Van Overschee, P. and Favoreel, W. Numerical Algorithms for Subspace State-Space System Identification - An Overview. Applied and Computational Control, Signals and Circuits, Boston, 1(6):385–422, 1998.
- [10] Giesbrecht, M., Propostas Imuno-Inspiradas para Identificação de Sistemas e Realização de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estado, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Eletrica e de Computação, UNICAMP, 2013.

- [11] Katayama, T., Subspace Methods for System Identification. Springer, 2005.
- [12] Katayama, T., and Picci, G. Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods. *Automatica*, 35:1635–1652, 1999.
- [13] Katayama, T., and Picci, G. Stochastic realization with exogenous inputs and subspace-methods identification. *Signal Processing*, 52:145–160, 1996.
- [14] Kalman, R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, J. Basic Eng. Series 82D*, pages 35–45, March 1960.
- [15] Kalman, R.E., "On the General Theory of Control Systems", IFAC, International and Remote Control, Vol.1, pp.481-492, 1960.
- [16] Lütkepohl, H., Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer-Verlag, 1993.
- [17] Morettin, P. A., Toloi, C. M., Análise de séries temporais, São Paulo: Edgard Blucher, 2006.
- [18] Ohsumi, A. and Kawano T., "Subspace Identification for a Class of Time-Varying Continuous-Time Stochastic Systems Via Distribution Based Approach", Proceedings 15th IFAC World Congress, Barcelona, July 2002.
- [19] Shokoohi, S. and Silverman, L.M., "Identification and Model Reduction of Time-Varying Discrete-Time Systems", *Automatica* 23, pp. 509-522, 1987.
- [20] Tamariz, A. D. R., Bottura C. P., Barreto G., "Iterative MOESP Type Algorithm for Discrete Time Variant System Identification", Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, (MED'2005), Limassol, Cyprus, June 27-29, 2005.
- [21] Tamariz, A. D. R., "Modelagem Computacional de Dados e Controle Inteligente no Espaço de Estado". Tese Doutorado, FEEC, UNICAMP, Campinas SP, Brasil, 2005.
- [22] Tamariz, A. D. R. and Bottura C.P., "Propuesta para identificação de sistemas ruidosos multivariáveis no espaço de estado", Dincon, 2007.
- [23] Tamariz A.D.R., Bottura C.P. and Barreto G., "Algoritmo Iterativo do tipo MOESP para Identificação de sistemas discretos variantes no tempo - Parte I: Formulação", DINCON, 2003.
- [24] Tobar, J., Bottura, C. P., Giesbrecht, M., "Computational modeling of multivariable non-stationary time series in the state space by the AOKI_VAR algorithm", *IAENG International Journal of Computer Science* 37, November 2010.

- [25] Tobar, J., Bottura C. P., “Modelaje Computacional de Datos de Sistemas Lineares Ruidosos no Estacionarios por el Algoritmo MOESP_AOKI_VAR”, XIV CONGRESO LATINOAMERICANO DE CONTROL AUTOMATICO, ACCA SANTIAGO-CHILE, Agosto de 2010.
- [26] Verhaegen, M. and Deprettere, E., “A fast recursive MIMO State Space model Identification Algorithm”, Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, December 1991.
- [27] Verhaegen, M. and Dewilde, P., “Subspace Model Identification - Part 1 : The output error state-space model identification class of algorithms”, International Journal of Control, Volume 56, Number 5, 1187-1210, November, 1992.
- [28] Verhaegen, M. and Yu X., "A Class of Subspace Model Identification Algorithms to Identify Periodically and Arbitrarily Time-varying Systems", Automatica, Vol. 31, N0. 2, pp. 201-216, 1995.
- [29] Young, D. M., Iterative Solution Of Large Linear System, Academic Press, 1971.
- [30] Young, N.J., The Singular-Value Descomposition of an Infinite Hankel Matriz. Linear Algebra and Its Applications, April 1983.
- [31] Young P., Parameter Estimation for Continuos-Time Models - A Survey, Automatica, January 1981.