

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

**Alocação de Potência
em Sistemas de Comunicações sem Fio:
Abordagens Estocástica via o CVaR e Robusta**

Autor: Yusef Rafael Cáceres Zúñiga

Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Banca examinadora

Prof. Dr. Francisco Rodrigo Porto Cavalcanti	UFC
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val	UNICAMP
Prof. Dr. Marcello Luiz Rodrigues de Campos	COPPE/UFRJ
Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub	UNICAMP
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	UNICAMP
Prof. Dr. Rafael Santos Mendes	UNICAMP

Campinas, SP
2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C113a Cáceres Zúñiga, Yusef Rafael
Alocação de potencia em sistemas de comunicações sem fio: abordagens estocástica via o CVaR e robusta / Yusef Rafael Cáceres Zúñiga. --Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Michel Daoud Yacoub
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de telecomunicações. 2. Sistema de comunicação sem fio. 3. Telefonia celular. 4. Programação convexa. 5. Programação estocástica. 6. Risco. I. Yacoub, Michel Daoud. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Power allocation in wireless communication systems: stochastic via CVaR and robust approaches

Palavras-chave em Inglês: Telecommunication systems, Transmitted power control problem for wireless communication systems, Convex optimization, Risk averse stochastic optimization, Robust optimization

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Francisco Rodrigo Porto Cavalcanti, João Bosco Ribeiro do Val, Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Paulo Augusto Valente Ferreira e Rafael Santos Mendes

Data da defesa: 28/11/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Yusef Rafael Cáceres Zúñiga

Data da Defesa: 28 de novembro de 2007

Título da Tese: "Alocação de Potência em Sistemas de Comunicações Sem Fio: Abordagens Estocástica Via o CVaR e Robusta"

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (Presidente): 

Prof. Dr. Francisco Rodrigo Porto Cavalcanti: 

Prof. Dr. Marcello Luiz Rodrigues de Campos: 

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val: 

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira: 

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes: 

Resumo

Nesta tese, estuda-se o problema da alocação de potência através de duas abordagens: estocástica e robusta, sendo os ganhos do canal, que descrevem o estado do sistema de comunicações sem fio, parcialmente observados pelo decisor. Na abordagem estocástica, considera-se que os ganhos do canal são variáveis aleatórias, que representam a variação rápida do sinal de rádio. Nesse contexto, reformula-se o índice de desempenho do sistema através do CVaR (*Conditional Value-at-Risk*). Na abordagem robusta, considera-se que os ganhos do canal e o ruído pertencem a um determinado conjunto convexo. Em ambas as abordagens, a solução ótima é obtida em termos de um problema de otimização convexa. Adicionalmente, na abordagem estocástica, apresenta-se um algoritmo recursivo e distribuído, que converge para uma solução subótima, quando o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada tanto superior como inferiormente. Também mostra-se que, em um sistema onde os ganhos do canal coincidem com o seu valor esperado, esse algoritmo converge para a solução ótima quando a qualidade do enlace é muito maior que a mínima requerida.

Palavras-chave: Controle de potência em sistemas de comunicações sem fio, Otimização convexa, Otimização estocástica com aversão ao risco, Otimização robusta.

Abstract

This thesis deals with the power allocation problem under the stochastic and robust approaches, where the channel gains describe the wireless communication system state and are partially known by the controller. The stochastic approach considers the channel gains as random variables which represent the fast fading of the radio signal. Under these settings, the system performance index is reformulated using CVaR (*Conditional Value-at-Risk*). The robust approach considers that the channels gains and noise belong to a determined convex set. In both approaches, the optimal solution is determined in terms of a convex optimization problem. Additionally, under the stochastic approach, a recursive and distributed algorithm is presented which converges to its suboptimal solution when noise is null and the transmitted power is upper and lower bounded. It is also show that this algorithm converges to its optimal solution when the link quality is much greater than the minimum required quality in a system where the channels gains match its expected value.

Keywords: Transmitted power control for wireless communications systems, Convex optimization, Risk averse stochastic optimization, Robust optimization.

À minha família

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub, ao Prof. Dr. Paulo A. Valente Ferreira (FEEC) e ao Prof. Dr. Roberto Andreani (IMEC) pelas valiosas contribuições realizadas ao longo do desenvolvimento desta tese.

Também agradeço aos meus pais, Nila e Antonio, e aos meus irmãos, Neil e Piero, por seu carinho e apoio constantes, e ao meu tio Agustin pelo inicial e freqüente incentivo.

Em especial, expresso meus agradecimentos a minha esposa Raquel, que através de suas críticas, correções, comentários e sugestões, auxiliou-me na escrita desta tese.

De modo geral, agradeço a todos meus amigos e colegas de estudo no Laboratório Wisstek que, de uma maneira ou de outra, tornaram agradável a minha estadia em Campinas.

Finalmente, gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Símbolos	xv
Lista de Siglas	xix
Trabalhos Publicados pelo Autor	xxi
1 Introdução	1
1.1 Estrutura da Tese	3
2 Modelo do Sistema de Comunicações sem Fio e Formulação do Problema de Controle da Potência Transmitida (CPT)	5
2.1 Modelo do Sistema de Comunicações sem Fio	5
2.2 O Problema de CPT	7
2.2.1 Abordagem Determinística	7
2.2.2 Abordagem Estocástica	11
2.2.3 Abordagem Robusta	16
3 O Problema de CPT via Otimização Estocástica com Aversão ao Risco	19
3.1 Preliminares	20
3.1.1 Medidas de Dispersão e de Risco	20
3.1.2 Relação entre as Medidas de Dispersão e de Risco	26
3.1.3 Conjunto de Aceitabilidade	28
3.1.4 Envoltória das Medidas de Dispersão e de Risco	31
3.1.5 Otimização Estocástica com Aversão ao Risco	34
3.1.6 Notas e Referências	36
3.2 Resultados Principais	37
3.2.1 Solução Ótima e Centralizada do Problema do CPT via o CVaR	38

3.2.2	Solução Subótima e Distribuída do Problema Restrito de CPT via o CVaR	46
3.2.3	Notas e Referências	50
3.3	Exemplos Ilustrativos	55
4	O Problema de CPT via Otimização Robusta	61
4.1	Preliminares	61
4.1.1	Notas e Referências	68
4.2	Resultados Principais	70
4.3	Exemplos Ilustrativos	73
5	Conclusão	83
	Referências Bibliográficas	86

Lista de Figuras

3.1	Relação entre o limitante superior e o limitante inferior da interferência efetiva no i -ésimo enlace.	49
3.2	Função de distribuição de probabilidade e valor esperado das variáveis aleatórias $\Gamma_i(p^*) \mid \Gamma_i(p^*) \leq -\text{VaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*))$ quando $p^* = p_{\text{CVaR}}^*$ e $p^* = p_{\text{VaR}}^*$ para $i = 1, 2$	57
3.3	Amostras do SINR no primeiro enlace via o CVaR (esquerda) e o VaR (direita).	58
3.4	Amostras do SINR no segundo enlace via o CVaR (esquerda) e o VaR (direita).	58
3.5	Distância normalizada entre $\hat{p}(k)$ e p_{CVaR}^* para cada iteração do algoritmo distribuído de CPT via o CVaR.	60
4.1	Valores das potências transmitidas nominal e robusta do Exemplo 3.	77
4.2	Valores das potências transmitidas nominal e robusta do Exemplo 4.	79
4.3	Elipses de volume mínimo que contêm a caixa convexa do conjunto amostral dos ganhos do canal.	81
4.4	Valores das potências transmitidas nominal e robusta do Exemplo 5.	82

Lista de Símbolos

\mathbb{Z}_+	-	Números inteiros positivos
\mathbb{R} (\mathbb{R}_+)	-	Números reais (não negativos)
\mathbb{R}^n	-	Espaço linear real n -dimensional
$\mathbb{R}^{n \times m}$	-	Espaço linear formado por todas as matrizes reais de dimensão $n \times m$
\mathbb{R}_+^n	-	Cone convexo e fechado que contém vetores de dimensão n com componentes não negativas
\mathbb{Q}_+^n	-	Cone convexo e fechado quadrático de dimensão n
\mathbb{S}_+^n	-	Cone convexo e fechado que contém matrizes reais, simétricas e semi-definidas positivas de dimensão $n \times n$
$\mathbb{R}_+^{n \times m}$	-	Matriz real de dimensão $n \times m$ com componentes não negativos
u	-	Vetor $u = [u_i] \in \mathbb{R}^n$
u^T	-	Transposta do vetor $u \in \mathbb{R}^n$
$\langle u, v \rangle$	-	Produto interno dos vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$
$\ u\ $	-	Norma do vetor $u \in \mathbb{R}^n$
$\ u\ ^D$	-	Norma dual do vetor $u \in \mathbb{R}^n$
U	-	Matrix $U = [u_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$
I	-	Matriz identidade de dimensão $n \times n$
U^T	-	Transposta da matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\text{tr}(U)$	-	Traço da matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\det(U)$	-	Determinante da matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$
U^{-1}	-	Inversa da matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$r_\sigma(U)$	-	Raio espectral da matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\succeq_{\mathcal{K}}$	-	Ordem parcial gerada pelo cone convexo e fechado \mathcal{K} , sendo $U \succeq_{\mathcal{K}} 0$ equivalente a $U \in \mathcal{K}$
$\text{conv } \mathcal{S}$	-	Casca convexa do conjunto \mathcal{S}
$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$	-	Função delta de Dirac

Na definição do problema de CPT

- n - Número de enlaces ativos no sistema de comunicações sem fio
- p_i - Potência transmitida no i -ésimo enlace
- g_{ij} - Ganho do canal entre o transmissor do j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace
- η_i - Ruído no receptor do i -ésimo enlace
- γ_i - SINR recebido no receptor do i -ésimo enlace
- $\underline{\gamma}_i$ - SINR requerido no receptor do i -ésimo enlace

Na abordagem estocástica do problema de CPT

- \underline{p}_i (\bar{p}_i) - Potência transmitida mínima (máxima) no i -ésimo enlace
- G_{ij} - Variável aleatória do ganho do canal entre transmissor do j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace
- Γ_i - Variável aleatória do SINR recebido no receptor do i -ésimo enlace
- $I(p), \bar{I}(p), \underline{I}(p)$ - Vetor de interferência normalizada e seus limitantes inferior e superior
- $\hat{\gamma}_i$ - CEM no receptor do i -ésimo enlace.

- (Ω, \mathcal{F}, P) - Espaço de probabilidade de uma variável aleatória X sendo $\Omega =$ espaço de estado, $\mathcal{F} = \sigma$ -álgebra de Ω e $P =$ medida de probabilidade em \mathcal{F}
- $F_X(x)$ - Função distribuição de probabilidade da variável aleatória X
- $E[X]$ - Valor esperado da variável aleatória X
- $\text{Covar}(X, X')$ - Covariância entre as variáveis aleatórias X e X'
- $\mathcal{D}(X)$ - Medida de dispersão da variável aleatória X
- $\mathcal{R}(X)$ - Medida de risco da variável aleatória X
- \mathcal{A} - Conjunto de aceitabilidade do risco
- Q - Monitores do risco
- \mathcal{Q} - Envoltória do risco
- Q^* - Identificadores do risco
- $\mathcal{E}_{a,b,p}(X)$ - Funcional de erro da variável aleatória X
- $\sigma(X)$ - Medida de dispersão padrão da variável aleatória X
- $\sigma_+(X)$ - Medida de semi-dispersão padrão superior da variável aleatória X
- $\sigma_-(X)$ - Medida de semi-dispersão padrão inferior da variável aleatória X

- $\text{VaR}_\alpha(X)$ - VaR (*Value-at-Risk*) da variável aleatória X com nível α
- $\text{CVaR}_\alpha(X)$ - CVaR (*Conditional Value-at-Risk*) da variável aleatória X com nível α
- $\text{Bernstein}_\alpha(X)$ - Medida de risco Bernstein da variável aleatória X com nível α
- $\text{VaR}_\alpha^\Delta(X)$ - Medida de dispersão associada ao $\text{VaR}_\alpha(X)$
- $\text{CVaR}_\alpha^\Delta(X)$ - Medida de dispersão associada ao $\text{CVaR}_\alpha(X)$

Na abordagem robusta do problema de CPT

- g_{ij}^0 - Ganho nominal do canal entre transmissor o j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace
- η_i^0 - Ruído nominal no receptor do i -ésimo enlace
- δg_i^k - k -ésima perturbação do ganho nominal do canal do i -ésimo enlace
- $\delta \eta_i^k$ - k -ésima perturbação do ruído nominal do i -ésimo enlace
- \mathcal{G}_i - Conjunto que descreve a incerteza existente nos parâmetros (g_i, η_i) do i -ésimo enlace
- Ω_i - Parâmetro de robustez do i -ésimo enlace

Lista de Siglas

CPT	-	Controle da Potência Transmitida
SINR	-	<i>Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio</i>
SIR	-	<i>Signal-to-Interference Ratio</i>
CVaR	-	<i>Conditional Value-at-Risk</i>
VaR	-	<i>Value-at-Risk</i>
CES	-	<i>Certainty-Equivalent System</i>
CEM	-	<i>Certainty-Equivalent Margin</i>
POC	-	Problema de Otimização Cônica
POCI	-	Problema de Otimização Cônica Incerta
POCR	-	Problema de Otimização Cônica Robusta
PODN	-	Problema de Otimização de Dois Níveis
POCL	-	Problema de Otimização Cônica Linear

Trabalhos Publicados pelo Autor

1. Y. R. C. ZÚÑIGA, E. L. ANDRADE NETO, M. D. YACOUB. “Prioritized Call Admission Control for Web Browsing Services in 3G networks”. *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT03)*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Outubro 2003.
2. Y. R. C. ZÚÑIGA, M. D. YACOUB. “Robust Probabilistic Constrained Power Control for 3G Networks”. *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT04)*, Belém, PA, Brasil, Setembro 2004.
3. Y. R. C. ZÚÑIGA, M. D. YACOUB. “Robust Power Control for Wireless Networks with Probabilistic Quality of Service Specifications”. *5th Conference on Telecommunications (ConfTele 2005)*, Tomar, Portugal, April 2005.
4. Y. R. C. ZÚÑIGA, M. D. YACOUB. “Controle Coerente da Potência Transmitida em Sistemas de Comunicações sem Fio”, *4th International Information and Telecommunication Technologies Symposium (I2TS 2005)*, Florianópolis, SC, Brasil, Dezembro 2005.

Capítulo 1

Introdução

As redes de comunicações sem fio de gerações 3G e superiores objetivam fornecer serviços multimídia a altas taxas de transmissão. Para prover esses serviços, é essencial que essas redes suportem múltiplas classes de tráfego, com diferentes características e rigorosos requisitos de qualidade de serviço, tais como o tempo médio de atraso, a taxa média de erro de bit, a taxa mínima de transmissão, etc. Entretanto, os recursos disponíveis na interface aérea (largura de faixa, potência, códigos, etc) são escassos. Para harmonizar esses dois pontos contraditórios (escassos recursos e rigorosos requisitos de qualidade de serviço), faz-se necessário desenvolver algoritmos eficientes de gestão dos recursos de rádio. Esses algoritmos devem ser capazes de estabelecer, reconfigurar e manter a qualidade do serviço requerido pelo usuário, em cada enlace.

Um dos algoritmos de gestão dos recursos de rádio é o algoritmo de controle da potência transmitida (CPT). Tradicionalmente, o objetivo do algoritmo de CPT é determinar o nível da potência a ser transmitida por cada terminal móvel, de maneira a compensar o efeito do desvanecimento do sinal de rádio e, assim, alcançar a qualidade de serviço pré-especificada, sem causar interferência desnecessária nos demais terminais. Entretanto, em [1, 2], apresentou-se o algoritmo de CPT como o componente central da alocação dos recursos de rádio do sistema, uma vez que, por meio desse algoritmo, cada usuário pode variar seu acesso a esses recursos, adaptando sua potência transmitida às variações do canal e às condições de interferência. Sendo assim, através da aplicação do algoritmo de CPT, diferentes e usualmente conflitantes requisitos de qualidade de serviço podem ser alcançados por diversos usuários. Além disso, o algoritmo de CPT pode ser utilizado como base para outros algoritmos de gestão de recursos de rádio, integrando, por exemplo, o problema de CPT ao problema de controle de admissão de chamadas [3] e ao problema de controle fluxo de dados [4, 5].

Por essas importantes características, o problema de CPT tem sido amplamente estudado. Veja, por exemplo, [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10], onde são apresentados alguns dos principais resultados

obtidos na área.

Em geral, a análise e o projeto de controladores para sistemas dinâmicos são realizados com base em modelos matemáticos, que descrevem o comportamento do sistema. No processo de modelagem do sistema, usualmente algumas hipóteses simplificadoras da descrição (linearidade, estacionariedade, etc) são inseridas, com o propósito de viabilizar a análise e o tratamento matemático. Além disso, interações complexas existentes no sistema (perturbações externas, efeitos dinâmicos desconhecidos, etc) podem não ser modeladas. Conseqüentemente, sempre haverá discrepâncias entre o sistema dinâmico e o modelo que o descreve, tornando-o impreciso e incompleto. Com o objetivo de obter um modelo que descreva com maior precisão o comportamento do sistema, é necessário caracterizar a incerteza introduzida no processo de modelagem e incorporar essa informação ao modelo. Desta maneira, quando o controlador desenvolvido com base no modelo incerto for aplicado ao sistema, as especificações do seu projeto serão cumpridas. As incertezas, que irão refletir a realidade física do sistema, podem ser caracterizadas através de diversas teorias (e.g. a Teoria de Probabilidade), fornecendo, ao decisor, diferentes medidas (e.g. valor esperado, variância, etc) ou caracterizadores (e.g. distribuição de probabilidade) da incerteza, a partir da informação proveniente do sistema.

Em particular, o problema de CPT foi abordado através de diversos modelos incertos, caracterizados, por exemplo, através da Teoria de Otimização Estocástica, em [11, 12, 13, 14, 15, 16]; Teoria dos Jogos, em [17, 18, 19, 20]; Teoria de Controle, em [21, 22, 23, 24, 25, 26]; Teoria de Otimização Convexa, em [27, 28, 29]; Teoria Fuzzy, em [30].

Nesta tese, também utiliza-se um modelo incerto, que incorpora o risco ou a imprecisão produzidas no processo de modelagem do sistema de comunicações sem fio. O risco é caracterizado por meio do espaço de probabilidade, composto pelos possíveis valores assumidos pelo ganho do canal de rádio e suas respectivas medidas de probabilidade. A imprecisão é representada através de um conjunto determinístico, o qual contém as possíveis perturbações no ganho nominal do canal de rádio. Com base nesses modelos, propõem-se problemas de CPT, os quais são abordados através da Teoria de Otimização Estocástica com Aversão ao Risco [31] e a Teoria de Otimização Robusta [32], respectivamente. Em particular na abordagem estocástica do problema de CPT proposto, adota-se uma medida de risco coerente para reformular o índice de desempenho do sistema. Especificamente, utiliza-se o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) para quantificar o risco da qualidade do enlace ao invés do *Value-at-Risk* (VaR), empregado no problema de CPT em [15]. Essas medidas de risco estão relacionadas, apesar de quantificarem diferentes características da função de distribuição subjacente. Em primeiro lugar, o problema de controle de potência via o CVaR é a melhor aproximação convexa para o problema não convexo de CPT baseado no VaR. Em segundo lugar, o CVaR, por definição, mede o risco

das perdas que ultrapassam o limiar determinado pelo VaR. Sendo assim, a solução fornecida pelo problema de CPT via o CVaR, além de garantir a factibilidade da qualidade do enlace, quantifica a severidade da sua degradação, ao penalizar as realizações da qualidade do enlace que transpõem o limiar determinado pelo VaR.

A solução ótima desses problemas é obtida em termos de um problema de otimização convexa [33, 34]. Sendo assim, algoritmos extremamente eficientes, como, por exemplo, o algoritmo baseado no método de pontos interiores, podem ser utilizados na solução numérica do problema. Adicionalmente, na abordagem estocástica, apresenta-se um algoritmo recursivo e distribuído, que converge para uma solução subótima do problema quando o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada superior e inferiormente. Entretanto, num sistema onde os ganhos do canal coincidem com o seu valor esperado, o algoritmo converge para a solução ótima do problema quando a qualidade do enlace é muito maior que a qualidade mínima requerida.

Finalmente, faz-se necessário ressaltar que os problemas de otimização convexa têm as seguintes características:

- **Análise local versus global:** Não se lida computacionalmente ou teoricamente com mínimos locais isolados, os quais não resolvem o problema;
- **Condições de otimalidade:** As condições que caracterizam a solução ótima do problema são necessárias e suficientes. Mesmo na ausência de diferenciabilidade, a propriedade de convexidade permite estabelecer essas condições em termos de subgradientes. Além disso, a propriedade de convexidade estrita é um critério de fácil verificação e garante a unicidade da solução do problema;
- **Convergência do algoritmo:** Garante-se que, a partir de um ponto inicial arbitrário, a seqüência gerada pelo algoritmo converge para a solução ótima do problema.

1.1 Estrutura da Tese

Esta tese está estruturada da seguinte maneira.

Capítulo 2: Apresenta o modelo do sistema de comunicações sem fio e estabelece precisamente os problemas de CPT propostos, bem como sua motivação. Além disso, mostram-se os trabalhos relacionados.

Capítulo 3: Aborda o problema de CPT definido em (2.29). Inicia-se apresentando, de maneira sucinta, as Teorias de Medidas de Risco [35] e de Dispersão [36] e sua aplicação em

problemas de otimização estocástica com aversão ao risco. Em seguida, a solução centralizada do problema proposto é apresentada em termos de um problema de otimização convexa. Finalmente, apresenta-se um algoritmo iterativo que utiliza somente informação local e converge para uma solução subótima do problema de CPT proposto.

Capítulo 4: Aborda o problema de CPT definido em (2.34). Inicia-se apresentando resumidamente a Teoria de Otimização Robusta [32, 37, 38, 39, 40, 41] na sua forma geral e, em seguida, restringe-se a abordagem, direcionando o enfoque para a solução o problema proposto. Finalmente, a solução centralizada do problema proposto é apresentada em termos de um problema de otimização convexa.

Capítulo 5: Apresenta as conclusões da tese bem como suas contribuições. Adicionalmente, são mencionadas algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelo do Sistema de Comunicações sem Fio e Formulação do Problema de Controle da Potência Transmitida (CPT)

O objetivo principal deste capítulo é apresentar precisamente os problemas de CPT propostos, bem como sua motivação.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2.1, apresenta-se o modelo do sistema de comunicações sem fio, define-se seu estado e caracteriza-se a qualidade do enlace através do SINR (*Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio*). Na Seção 2.2, apresenta-se uma revisão sucinta do problema de CPT, que minimiza a potência total transmitida, considerando que o estado do sistema é exata ou parcialmente conhecido pelo decisor. Em cada caso, apresentam-se as principais características desses problemas. Suas limitações motivam os problemas de CPT propostos nesta tese.

2.1 Modelo do Sistema de Comunicações sem Fio

Baseado em [8, 42], o sistema de comunicações sem fio será modelado como uma coleção de enlaces interferentes. Para tanto, assuma que existem n enlaces ativos no sistema e considere que g_{ij} representa o ganho da potência do canal a partir do transmissor do j -ésimo enlace ao receptor do i -ésimo enlace. Nesse contexto, o estado do sistema é descrito pela matriz de ganhos do canal

$$G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}. \quad (2.1)$$

Considera-se que o ganho do canal do transmissor do j -ésimo enlace ao receptor do i -ésimo enlace pode ser expresso como

$$g_{ij} = g_{ij}^d g_{ij}^l g_{ij}^r, \quad (2.2)$$

onde g_{ij}^d , g_{ij}^l e g_{ij}^r , representam a perda de percurso, o desvanecimento a longo prazo ou lento e o desvanecimento de curto prazo ou rápido, respectivamente. A perda de percurso é devida à atenuação do sinal de rádio ao longo do percurso entre o transmissor e receptor. O desvanecimento lento é resultado do efeito do sombreamento provocado por obstruções topográficas ou morfológicas de larga escala e acontece ao longo de dezenas de comprimentos de onda. O desvanecimento rápido é causado pela propagação por múltiplos percursos e ocorre em intervalos de aproximadamente frações de comprimentos de onda. Existem diversos modelos probabilísticos que caracterizam as flutuações lentas ou rápidas do sinal de rádio, entretanto usualmente utiliza-se a distribuição Lognormal ou Rayleigh, respectivamente.

Considere que a potência transmitida no i -ésimo enlace é dada por p_i . Sendo assim, a potência recebida no i -ésimo enlace é expressa por $g_{ii}p_i$ e a interferência gerada no receptor do j -ésimo enlace, para $j \neq i$, é dada por $g_{ji}p_j$. Considerando que, no receptor do i -ésimo enlace, η_i representa a potência do ruído e $I_i = \sum_{j \neq i} g_{ij}p_j$ denota a interferência total recebida, o correspondente SINR (*Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio*) é expresso por

$$\gamma_i(p, g_i) = \frac{g_{ii}p_i}{I_i + \eta_i} = \frac{g_{ii}p_i}{\sum_{j \neq i} g_{ij}p_j + \eta_i}, \quad (2.3)$$

onde $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$ e $g_i = [g_{ij}; j = 1, \dots, n] \in \mathbb{R}_+^n$ representam o vetor da potência transmitida e o vetor dos ganhos do canal no receptor do i -enlace, respectivamente. Quando o ruído é nulo, isto é, $\eta_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, o SINR, definido em (2.3), é chamado de SIR (*Signal-to-Interference Ratio*).

Usualmente, a qualidade de serviço nos sistemas de comunicações sem fio é especificada pela taxa média de erro de bit e pelo tempo médio de atraso. Devido ao fato de que esses parâmetros de qualidade do serviço são funções decrescentes do SINR observado no receptor, freqüentemente considera-se o SINR como um parâmetro que permite quantificar a qualidade do enlace [1]. Portanto, para garantir uma adequada operação do sistema, o seguinte conjunto de desigualdades

$$\gamma_i(p, g_i) = \frac{g_{ii}p_i}{\sum_{j \neq i} g_{ij}p_j + \eta_i} \geq \underline{\gamma}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

onde $\underline{\gamma}_i$ representa o SINR requerido no receptor do i -ésimo enlace, deve ser satisfeito.

2.2 O Problema de CPT

2.2.1 Abordagem Determinística

Suponha que o estado do sistema, caracterizado pela matriz de ganhos do canal G , é exatamente conhecido pelo decisor. Nesse contexto, o problema de CPT, que visa minimizar a potência total transmitida, pode ser estabelecido matematicamente como segue (cf. [8, 42])

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \gamma_i(p, g_i) = \frac{g_{ii}p_i}{\sum_{j \neq i} g_{ij}p_j + \eta_i} \geq \underline{\gamma}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde p_i representa a potência transmitida no i -ésimo enlace, g_{ij} denota o ganho do canal entre o transmissor do j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Finalmente, γ_i e $\underline{\gamma}_i$ são o SINR recebido e o limiar inferior do SINR requerido no i -ésimo enlace, respectivamente.

Em [8, 42], apresenta-se a condição que permite verificar se o conjunto factível do problema (2.5) não é vazio e determina-se explicitamente a expressão que permite calcular a solução ótima desse problema. Para obter esse resultado, inicia-se expressando o problema (2.5), de forma equivalente, como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}p_j - g_{ii}p_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Em seguida, denotando a solução ótima do problema (2.5) por $p^* \in \mathbb{R}_+^n$, demonstra-se que cada uma das restrições de desigualdade do problema de otimização linear (2.6) está ativa no ponto p^* , isto é,

$$(I - B)p^* = u, \quad (2.7)$$

onde

$$I \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = [\underline{\gamma}_i \frac{g_{ij}}{g_{ii}} \mathbb{1}_{\{i \neq j\}}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \text{e} \quad u = [\underline{\gamma}_i \frac{\eta_i}{g_{ii}}] \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.8)$$

denotam a matriz identidade, a matriz de interferência normalizada e o vetor de ruído norma-

lizado, respectivamente e $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ representa a função delta de Dirac. Finalmente, assumindo que a matriz B é irredutível e $r_\sigma(B)$ denota seu raio espectral, aplicam-se o Teorema de Perron-Frobenius e a Teoria de Matrizes Não Negativas (cf. [43, 44]) para concluir que, se $r_\sigma(B) < 1$, então, para qualquer vetor $u > 0$, existe um vetor $p^* > 0$ satisfazendo a equação (2.7). Nesse caso, a solução única dessa equação é dada por

$$p^* = (I - B)^{-1}u. \quad (2.9)$$

Note que o decisor tem observação completa do estado do sistema, uma vez que o cálculo da potência ótima transmitida p^* , via a equação (2.9), requer que cada componente da matriz de ganhos do canal $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ seja conhecido. Essa classe de decisores é denominada de centralizada. As limitações desse decisor são:

- Os ganhos do canal g_{ij} , para $j \neq i$, são difíceis de ser estimados; e
- O nível da potência transmitida, calculada de forma centralizada, precisa ser enviado a cada um dos transmissores, o qual pode resultar num excessivo fluxo de controle.

Com o objetivo de superar algumas dessas limitações, em [45], apresenta-se um algoritmo de CPT, que utiliza somente a informação local: o ganho g_{ii} e a interferência total recebida mais ruído $I_i + \eta_i$. Essa classe de decisores é denominada de distribuída. Para obter esse resultado, inicia-se definindo a seguinte equação a diferenças

$$p(k+1) = Bp(k) + u, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Em seguida, considerando que (cf. [43, 44])

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k, \quad \text{quando } r_\sigma(B) < 1, \quad (2.11)$$

pode-se demonstrar que a seqüência $\{p(k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge linearmente para p^* (solução do problema (2.5)), com uma taxa de convergência: $r_\sigma(B) < 1$. Finalmente, observe que a equação a diferenças, definida em (2.10), pode ser expressa da seguinte forma

$$p_i(k+1) = \frac{\gamma_i}{\gamma_i(k)} p_i(k), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.12)$$

onde

$$\gamma_i(k) = \frac{g_{ii}p_i(k)}{\sum_{j \neq i} g_{ij}p_j(k) + \eta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

A partir desse resultado, o desenvolvimento de algoritmos distribuídos de CPT tem sido uma área de pesquisa de intensa atividade. Por exemplo:

- Em [46], apresenta-se o algoritmo distribuído padrão de CPT, que unifica os algoritmos distribuídos associados a diferentes variações desse problema, como, por exemplo, o problema de CPT considerando que: (i) a potência transmitida é limitada superior e inferiormente [47], (ii) o receptor elimina parte da interferência gerada, minimizando o erro quadrático médio [48], (iii) o receptor utiliza macro diversidade [49] e o problema de CPT integrado ao problema de alocação da estação base [50, 51]. Para obter esse resultado, observa-se que os requisitos de qualidade do enlace, para a maioria dos sistemas de controle de potência, podem ser expressos como

$$p \geq I(p), \quad (2.14)$$

onde $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$ denota o vetor de potências transmitidas e $I(p) = [I_i(p)] \in \mathbb{R}_+^n$ representa o vetor de interferência efetiva. Nesse contexto, introduz-se o algoritmo padrão de CPT que converge para p^* , solução da restrição de igualdade em (2.14), quando o vetor de interferência efetiva é padrão, o qual é definido a seguir.

Definição 1. [46] Um vetor de interferência $I(p)$ é padrão se, para todo $p \geq 0$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) Positividade: $I(p) > 0$;
- (ii) Monotonicidade: $I(p) \geq I(p')$, quando $p \geq p'$;
- (iii) Escalabilidade: $\lambda I(p) \geq I(\lambda p)$, para todo $\lambda > 1$.

No seguinte teorema, reproduz-se o principal resultado mostrado em [46].

Teorema 1. [46] Seja $I(p)$ um vetor de interferência padrão. Se existe um vetor de potências factível, então, para qualquer vetor de potências inicial $p(0)$, o algoritmo padrão para o CPT

$$p(k+1) = I(p(k)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.15)$$

converge para p^* .

Baseado na Definição 1, o próximo teorema permite estender os resultados obtidos no Teorema 1 para o caso onde a potência transmitida, em cada enlace, é limitada inferior e superiormente.

Teorema 2. [46] Se $I(p) = [I_i(p)]$ é um vetor de interferência padrão, $\bar{p} = [\bar{p}_i] \in \mathbb{R}_+^n$ e $\underline{p} = [\underline{p}_i] \in \mathbb{R}_+^n$, onde \underline{p}_i e \bar{p}_i denotam as potências mínima e máxima de transmissão no i -ésimo enlace, respectivamente, então

$$I'(p) = [\min\{\bar{p}_i, I_i(p)\}] \quad \text{e} \quad I''(p) = [\max\{\underline{p}_i, I_i(p)\}] \quad (2.16)$$

também são vetores de interferência padrão.

Sendo assim, de posse do conceito de função de interferência padrão, o algoritmo distribuído de CPT, considerando que a potência transmitida é limitada inferior e superiormente, é dado por

$$p_i(k+1) = \min\{\bar{p}_i, \max\{\underline{p}_i, \frac{\gamma_i}{\gamma_i(k)} p_i(k)\}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

- Em [52], demonstra-se a convergência assíncrona do algoritmo (2.12). Esse resultado permite que a potência transmitida em cada enlace seja atualizada em diferentes instantes de tempo, baseada na informação anterior relativa à interferência gerada pelos outros enlaces.
- Em [53], considera-se que a velocidade de convergência da seqüência, gerada por um algoritmo distribuído de CPT, torna-se um critério importante no seu projeto, pois, no modelo do sistema de comunicações sem fio, assume-se que os ganhos do canal são invariantes. Sendo assim, apresenta-se um algoritmo distribuído de CPT, baseado no método de Gauss-Seidel, o qual, através de técnicas de aceleração da taxa de convergência, permite obter uma velocidade de convergência duas vezes maior que aquela obtida pelo algoritmo de Jacobi. Note que esse último algoritmo coincide com aquele apresentado em (2.12). É importante destacar que os métodos antes mencionados são utilizados para calcular iterativamente a solução do sistema de equações lineares em (2.7).

Finalmente, note que a solução do problema de CPT foi determinada supondo-se que a matriz de ganhos do canal $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ e a potência do ruído $\eta = [\eta_i] \in \mathbb{R}_+^n$ são precisamente conhecidos pelo decisor. Entretanto, em aplicações práticas, esses parâmetros são resultados de algum processo de medição ou estimação; conseqüentemente, nunca são conhecidas com

certeza. De fato, como indicado em [54, 55], a incerteza é inevitável durante o processo de modelagem do problema. Sendo assim, descrever a incerteza e incluí-la no processo de decisão é a maneira adequada de abordar problemas de otimização sujeito a incertezas.

2.2.2 Abordagem Estocástica

Uma maneira tradicional de quantificar a incerteza é usando modelos probabilísticos. Neste cenário, considera-se que o estado do sistema, representado pela matriz de ganhos do canal G , é descrito por um conjunto de variáveis aleatórias. Desta forma, em particular, o problema de CPT pode ser modelado como um problema estocástico com restrições probabilísticas (cf. [31]), o qual é estabelecido como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & P(\Gamma_i = \frac{G_{ii}p_i}{\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j + \eta_i} < \underline{\gamma}_i) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde p_i representa a potência transmitida no i -ésimo enlace, G_{ij} denota uma variável aleatória que descreve o ganho do canal do transmissor do j -ésimo enlace ao receptor do i -ésimo enlace e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Adicionalmente, Γ_i e $\underline{\gamma}_i$ representam a variável aleatória do SINR recebido e o limiar do SINR requerido no i -ésimo enlace, respectivamente. Finalmente, P é uma medida de probabilidade e $\alpha = [\alpha_i] \in \mathbb{R}^n$ com $\alpha_i \in (0,1)$ denota o vetor de risco.

Em particular, considera-se que o ganho do canal do transmissor entre o j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace é dado por

$$G_{ij} = g_{ij}^d g_{ij}^l G_{ij}^r, \quad (2.19)$$

onde g_{ij}^d denota uma constante que caracteriza a perda de percurso, g_{ij}^l denota uma constante que representa a variação lenta do sinal de rádio e G_{ij}^r denota uma variável aleatória que descreve a variação rápida do sinal de rádio. Neste caso, observe que a solução do problema (2.18) fornece os valores da potência transmitida, considerando explicitamente as flutuações estatísticas do SINR devido ao desvanecimento rápido do sinal em cada enlace. Sendo assim, os níveis da potência transmitida são alterados na escala de tempo determinada pela variação lenta do sinal de rádio, diferentemente do que acontece na abordagem determinística do problema, onde essa alteração é realizada na escala de tempo determinada pela variação rápida do sinal.

Note que o problema (2.18) pode ser escrito de forma equivalente como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & P(Z_i = G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i < 0) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Com respeito ao problema acima apresentado, pode-se fazer os seguintes comentários:

- Em [31], apresentam-se as condições, que permitem estabelecer se o conjunto de soluções factíveis do problema (2.20) é convexo, as quais são reproduzidas a seguir.

Teorema 3. (Convexidade de conjuntos com restrições probabilísticas, [31, 56]) Seja ξ uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade (Ξ, \mathcal{F}, P) , onde Ξ representa o espaço de estado, \mathcal{F} denota uma σ -álgebra de Ξ e P é uma medida de probabilidade em \mathcal{F} . Se a medida de probabilidade P é quase-côncava¹ e a função $f(x, \xi): \mathcal{X} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e côncava conjuntamente em x e ξ , então, para qualquer valor de $\alpha \in [0, 1]$, o conjunto $\{x \mid P(f(x, \xi) < 0) \leq \alpha\}$ é convexo e fechado.

Com base no resultado anteriormente apresentado, conclui-se que o problema (2.20) não é convexo, uma vez que a variável aleatória

$$Z_i(p, G_i) = G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i \quad (2.21)$$

é uma função bi-afim em $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$ e $G_i = [G_{ij}; j = 1 \dots, n] \in \mathbb{R}_+^n$ e, conseqüentemente, não é côncava conjuntamente nessas variáveis. Note que essa característica independe do modelo probabilístico utilizado na descrição do ganho do canal.

- Observe que, em geral, para um valor fixo de i , a restrição de probabilidade

$$P(Z_i = G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i < 0) \leq \alpha_i \quad (2.22)$$

não é capaz de distinguir entre situações onde a degradação da qualidade do enlace, descrita pela variável aleatória Z_i , é severa ou branda, o que acontece com probabilidade α_i .

¹Uma medida de probabilidade é quase-côncava se, para quaisquer conjuntos convexos $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{B}$, tem-se que $P((1 - \lambda)\Xi_1 + \lambda\Xi_2) \geq \min\{P(\Xi_1), P(\Xi_2)\}$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, onde $(1 - \lambda)\Xi_1 + \lambda\Xi_2 = \{(1 - \lambda)\xi_1 + \lambda\xi_2 \mid \xi_1 \in \Xi_1, \xi_2 \in \Xi_2\}$.

Em [11, 13, 15, 57, 58], superam-se parcialmente as limitações anteriormente mencionadas, ao restringir o modelo do sistema de comunicações sem fio. Em particular, em [15], considera-se que, no ganho do canal G_{ij} , definido em (2.19), $\mu_{ij} = g_{ij}^d g_{ij}^l$ e G_{ij}^r é uma variável aleatória com distribuição exponencial e valor médio igual a 1. Além disso, considera-se que essas variáveis aleatórias são mutuamente independentes. Isto é,

(H1) A variável aleatória G_{ij} caracteriza o desvanecimento rápido do sinal de rádio num ambiente Rayleigh. Logo, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a potência do sinal recebida G_{ij} é descrita por uma variável aleatória exponencialmente distribuída,

$$F_{G_{ij}}(g_{ij}) = P(G_{ij} \leq g_{ij}) = 1 - \exp\left(-\frac{g_{ij}}{\mu_{ij}}\right), \quad (2.23)$$

onde $\mu_{ij} = E[G_{ij}]$ denota o valor esperado de G_{ij} .

(H2) As variáveis aleatórias G_{ij} , para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, são mutuamente independentes.

Nesse cenário, demonstra-se que

$$P(Z_i = G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i < 0) = 1 - \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i}{\mu_{ii}p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)^{-1}. \quad (2.24)$$

Baseado na equação (2.24), as restrições probabilísticas do problema (2.20) podem ser expressas pelo conjunto não convexo de desigualdades

$$(1 - \alpha_i) \exp\left(\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Considerando que o ruído no receptor é nulo, isto é, $\eta_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$, e a potência transmitida é limitada inferior e superiormente, ou seja, $\underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i$, para $i = 1, \dots, n$, onde \underline{p}_i e \bar{p}_i denotam as potências mínima e máxima de transmissão no i -ésimo enlace, respectivamente, o problema (2.20) pode ser expresso em termos de um Problema de Otimização Geométrica (veja [33]). Esse problema não convexo pode ser transformado em um problema convexo, através de uma mudança de variáveis e transformações na função objetivo e nas funções que definem as restrições de desigualdade. Nesse contexto, a solução ótima do problema (2.20) é apresentada em [15]. Quando o ruído no receptor não é nulo, o problema (2.20) pode ser expresso como um Problema de Otimização Signomial [59]. Em [58], uma solução subótima desse problema não convexo é obtida através de um algoritmo iterativo baseado em Problemas de Otimização Geométrica. Outra solução para esse problema é obtida em [13], baseada no algoritmo iterativo padrão apresentado em [46]. Finalmente, em [11], apresenta-se uma solução

subótima do problema (2.20), quando o desvanecimento rápido do canal de rádio é descrito por outras distribuições de probabilidade como, por exemplo, a distribuição Nakagami- m com o fator de desvanecimento m restrito aos valores $0,5 \leq m \leq 1$.

Antes de introduzir o problema proposto e com a finalidade de alcançar o enfoque apropriado, apresenta-se o problema (2.20) de forma equivalente, como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde o VaR com nível α_i é caracterizado na Definição 7 do Capítulo 3 e reproduzido a seguir

$$\text{VaR}_{\alpha}(X) = -\min\{x \mid P(X \leq x) > \alpha\}. \quad (2.27)$$

Sob essa perspectiva, reapresenta-se os comentários anteriormente realizados com base nas seguintes características dessa medida de risco:

- O VaR (*Value-at-Risk*) é uma medida de risco que não satisfaz a propriedade de sub-linearidade (veja o item R2 na Definição 6 do Capítulo 3). Conseqüentemente, essa medida de risco não é convexa. Sendo assim, o conjunto de soluções factíveis do problema (2.26), expresso por

$$\mathcal{A}_{\text{VaR}_{\alpha}} = \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (2.28)$$

não é convexo.

- O VaR não é capaz de distinguir entre situações onde as realizações da variável aleatória Z_i , a qual representa a qualidade do i -ésimo enlace, ultrapassam moderada ou excessivamente o valor determinado por essa medida. Logo, o VaR fornece um limitante inferior para quantificar o risco da degradação da qualidade do enlace, sendo otimista ao invés de ser conservador. Esta última característica deve prevalecer na gestão do risco.

Em [60], em resposta a essas limitações, introduzem-se as medidas de risco coerente e estabelecem-se as características fundamentais que uma medida de risco deve satisfazer. Nesse contexto, o problema de CPT pode ser reformulado considerando que o risco da qualidade do i -ésimo enlace, representada pela variável aleatória Z_i em (2.21), é quantificado mediante uma medida de risco coerente (veja a Definição 6 do Capítulo 3). Sendo assim, o problema de CPT,

que minimiza a potência total transmitida, pode ser estabelecido como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{CVaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde p_i representa a potência transmitida no i -ésimo enlace, G_{ij} denota o ganho do canal do transmissor do j -ésimo enlace ao receptor do i -ésimo enlace e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Adicionalmente, $\underline{\gamma}_i$ denota o limiar do SINR requerido no i -ésimo enlace. Finalmente, para cada enlace, CVaR_{α_i} representa o CVaR (*Conditional Value-at-Risk*) com nível α_i o qual é caracterizado na Definição 8 do Capítulo 3 e reproduzido a seguir

$$\text{CVaR}_{\alpha}(X) = -E[X \mid X \leq -\text{VaR}_{\alpha}(X)]. \quad (2.30)$$

Essa medida de risco satisfaz as seguintes propriedades:

- O CVaR é uma medida de risco coerente. Conseqüentemente, o conjunto de soluções factíveis do problema (2.29), expresso por

$$\mathcal{A}_{\text{CVaR}_{\alpha}} = \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \text{CVaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (2.31)$$

é convexo. Além disso, o CVaR é a menor medida de risco coerente e invariante que domina o VaR (veja a Definição 11 e o Teorema 6 do Capítulo 3). Sendo assim,

$$\mathcal{A}_{\text{CVaR}_{\alpha}} \subset \mathcal{A}_{\text{VaR}_{\alpha}} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{\text{CVaR}_{\alpha}} \supset \mathcal{A}_{\mathcal{R}} \quad (2.32)$$

para todo conjunto de aceitabilidade $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, associado a uma medida de risco coerente e invariante \mathcal{R} (veja o Teorema 5 do Capítulo 3). Logo, quando $\mathcal{R} = \text{CVaR}_{\alpha}$, o problema (2.29) é a melhor aproximação convexa para o problema (2.26).

- O CVaR mede o risco das realizações da variável aleatória que transpõem o limiar determinado pelo VaR. Especificamente, essa medida de risco coerente quantifica a severidade da degradação da qualidade do enlace, ao fornecer o valor esperado da variável aleatória Z_i , definida em (2.21), quando a mesma transpõe o limiar determinado pelo $\text{VaR}_{\alpha_i}(Z_i)$.

Nesta tese, apresenta-se a solução do problema (2.29), assumindo que os ganhos do canal G_{ij} satisfazem as hipóteses H1 e H2. Além disso, mostra-se um algoritmo distribuído que converge

para uma solução subótima do problema antes mencionado, considerando que o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada inferior e superiormente.

2.2.3 Abordagem Robusta

Na abordagem determinística do CPT, assume-se que os dados do problema (2.5), determinados pelo ganho do canal $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ e pelo ruído $\eta = [\eta_i] \in \mathbb{R}_+^n$, são precisamente conhecidos pelo decisor. Entretanto, em aplicações práticas,

- O decisor tem informação parcial sobre os dados do problema, uma vez que eles provêm de algum processo de medição ou estimação;
- A solução ótima do problema (2.5), mesmo que calculada com bastante precisão, dificilmente poderá ser implementada de maneira exata, resultando na incerteza da factibilidade da solução implementada; e
- A solução ótima do problema (2.5) pode tornar-se severamente infactível, quando os dados nominais do problema sofrem perturbações relativamente pequenas.

Com o objetivo de superar essas limitações, nesta tese, reformula-se o problema de CPT utilizando a Teoria de Otimização Robusta, desenvolvida em [32, 37, 38, 39, 40, 41]. Nesse contexto, considera-se que os ganhos do canal $g_i = [g_{ij}; j = 1 \dots, n] \in \mathbb{R}_+^n$ e o ruído $\eta_i \in \mathbb{R}_+$ não são exatamente conhecidos pelo decisor, mas pertencem a um determinado conjunto convexo \mathcal{G}_i . Especificamente, define-se o conjunto \mathcal{G}_i , o qual descreve a incerteza existente nos parâmetros (g_i, η_i) , como

$$\mathcal{G}_i = \left\{ (g_i, \eta_i) = (g_i^0, \eta_i^0) + \sum_{k=1}^n (\delta g_i^k, \delta \eta_i^k) u_k : \|u\| < \Omega_i \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.33)$$

onde $g_i^0 \in \mathbb{R}_+^n$ ($\eta_i^0 \in \mathbb{R}_+$) representa o valor nominal do ganho do canal g_i (do ruído η_i) e $\delta g_i^k \in \mathbb{R}_+^n$ ($\delta \eta_i^k \in \mathbb{R}_+$), para $k = 1, \dots, n$, denota o conjunto de vetores que caracterizam a perturbação do ganho nominal do canal g_i (do ruído nominal η_i , respectivamente). Finalmente, Ω_i denota o parâmetro de robustez do problema e $\|\cdot\|$ representa uma norma vetorial absoluta, isto é, uma norma que satisfaz a propriedade $\|u\| = \|\|u\|\|$.

Nesse cenário, o problema de CPT é estabelecido matematicamente como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \gamma_i(g_i, \eta_i) = \frac{g_{ii} p_i}{\sum_{j \neq i} g_{ij} p_j + \eta_i} \geq \underline{\gamma}_i, \quad \forall (g_i, \eta_i) \in \mathcal{G}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde p_i representa a potência transmitida no i -ésimo enlace, g_{ij} denota o ganho do canal entre o transmissor do j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Considera-se que $(g_i, \eta_i) \in \mathcal{G}_i$, onde o conjunto \mathcal{G}_i , que descreve a incerteza existente nos parâmetros (g_i, η_i) , é definido em (2.33). Finalmente, γ_i e $\underline{\gamma}_i$ são o SINR recebido e o limiar do SINR requerido no i -ésimo enlace, respectivamente.

Capítulo 3

O Problema de CPT via Otimização Estocástica com Aversão ao Risco

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a solução ótima do problema de otimização estocástica (2.29).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 3.1, apresentam-se os principais conceitos da Teoria de Medidas de Dispersão [36] e da Teoria de Medidas de Risco Coerente [35]. Inicia-se apresentando as propriedades que devem ser satisfeitas por medidas de dispersão e de risco. Em seguida, as condições, que permitem estabelecer uma relação biunívoca entre esses dois conceitos, são apresentadas. Depois, introduzem-se o conceito de conjunto de aceitabilidade e medida de risco coerente e invariante, com o propósito de mostrar as relações existentes entre os conjuntos de aceitabilidade associados ao VaR e ao CVaR. Logo, mostra-se a caracterização dual das medidas de dispersão e de risco, e define-se seu conjunto de identificadores de risco. Finalmente, apresentam-se as propriedades dos problemas de otimização estocástica, que envolvem medidas de risco coerente. Na Seção 3.2, apresenta-se a solução do problema de CPT, proposto em (2.29), em termos de um problema de otimização convexa, considerando que os ganhos do canal satisfazem as condições H1 e H2, apresentadas no Capítulo 2. Sendo assim, algoritmos altamente eficientes podem ser utilizados para obter a solução numérica desse problema. Adicionalmente, apresenta-se um algoritmo distribuído que converge para uma solução subótima do problema proposto, quando o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada inferior e superiormente. Finalmente, com o propósito de ilustrar os resultados obtidos na Seção 3.2, são apresentados alguns exemplos na Seção 3.3.

3.1 Preliminares

Considere que (Ω, \mathcal{F}, P) é um espaço de probabilidade, onde Ω representa o espaço de estado (cujos elementos são denotados por ω), \mathcal{F} denota uma σ -álgebra de Ω e P é uma medida de probabilidade em \mathcal{F} . Assuma que esse espaço é essencialmente infinito, isto é, a medida de probabilidade P pode assumir infinitos valores distintos sobre os conjuntos em \mathcal{F} , ou, equivalentemente, existem subconjuntos em \mathcal{F} tendo uma probabilidade arbitrariamente pequena. Além disso, considere que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória pertencente ao espaço de Banach $\mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com norma

$$\|X\|_p = \begin{cases} (E[|X|^p])^{1/p}, & \text{quando } p \in [1, \infty), \\ \sup |X|, & \text{quando } p = \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $E[X]$ denota o valor esperado de X . Em particular, se $p = 2$, então $\mathcal{L}^2(\Omega)$ é o espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle X, Y \rangle = E[XY] = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)dP(\omega) \quad (3.2)$$

e com norma $\|X\|_2$. Note que, pela desigualdade de Hölder, $\mathcal{L}^p(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ para quaisquer $p \geq q \geq 1$. Logo, $\mathcal{L}^2(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega)$ e portanto, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, $E[X] < +\infty$, $E[Y] < +\infty$ e a covariância dessas variáveis aleatórias, definida como $\text{Covar}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$, existe. Sendo assim, note que $\langle X, Y \rangle = \text{Covar}(X, Y) + E[X]E[Y]$.

Finalmente, define-se o seguinte operador

$$\text{ess inf } X = \begin{cases} \sup\{C \mid C \leq X\}, & \text{se } \{C \mid C \leq X\} \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde \emptyset representa o conjunto vazio.

3.1.1 Medidas de Dispersão e de Risco

Esta subseção inicia apresentando a definição de medidas de dispersão e de risco, assim como também alguns exemplos que satisfazem essas definições. Considera-se que as funções que quantificam a dispersão e o risco de uma variável aleatória são semi-contínuas inferiormente¹. Além disso, por simplicidade, suponha que $\mathcal{X} = \mathcal{L}^p(\Omega)$.

¹A função $\mathcal{G} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente se e somente se o conjunto $\{X \in \mathcal{X} \mid \mathcal{G}(X) \leq C\}$, para todo $C \in \mathbb{R}$ é fechado.

Definição 2. (Medida de Dispersão, [36]) Uma função $\mathcal{D} : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$ representa uma medida de dispersão se satisfaz as seguintes propriedades:

(D1) Invariância na translação: $\mathcal{D}(X + C) = \mathcal{D}(X)$, para todo X e constante C ;

(D2) Sublinearidade:

(D2.1) Homogeneidade positiva: $\mathcal{D}(0) = 0$ e $\mathcal{D}(\lambda X) = \lambda \mathcal{D}(X)$, para todo X quando $\lambda > 0$;

(D2.2) Subaditividade: $\mathcal{D}(X + X') \leq \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(X')$, para todo X e X' ;

(D3) Não-negatividade e positividade: $\mathcal{D}(X) \geq 0$, para todo X e $\mathcal{D}(X) > 0$, quando X não é constante.

Baseado na Definição 2, pode-se concluir que:

- A medida de dispersão $\mathcal{D}(X)$ depende de $X - E[X]$ (por D1) e seu valor é nulo quando $X - E[X] = 0$ (por D2.1). Conseqüentemente, a função $\mathcal{D}(X)$ descreve o grau de dispersão da variável aleatória X com respeito a seu valor esperado $E[X]$. Note também que a medida de dispersão $\mathcal{D}(X)$, por definição, atua como uma norma no subespaço de \mathcal{X} , que contém as variáveis aleatórias X tal que $E[X] = 0$. Entretanto, a propriedade de simetria, requerida na definição de uma norma, isto é, $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(-X)$ para todo X , pode não ser satisfeita.
- A medida de dispersão $\mathcal{D}(X)$ é convexa, ou seja,

$$\mathcal{D}(\lambda X + (1 - \lambda)X') \leq \lambda \mathcal{D}(X) + (1 - \lambda)\mathcal{D}(X'), \text{ para todo } X, X' \text{ e } \lambda \in [0, 1], \quad (3.4)$$

uma vez que $\mathcal{D}(X)$ satisfaz D2 (propriedade de Sublinearidade).

- Se $\mathcal{D}(X)$ é uma medida de dispersão, então sua reflexão, $\tilde{\mathcal{D}}(X)$, e simetrização, $\hat{\mathcal{D}}(X)$, definidas respectivamente como

$$\tilde{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D}(-X) \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{D}}(X) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(-X)), \quad (3.5)$$

satisfazem as propriedades D1, D2 e D3 da Definição 2. Logo, esses funcionais também são medidas de dispersão.

A seguir, alguns exemplos de medidas de dispersão são apresentados. Para tanto, define-se o funcional $\mathcal{E}_{a,b,p}(X)$, o qual penaliza a forma com que as realizações da variável aleatória X difere da variável aleatória constante 0.

Definição 3. (Funcional de erro) Considere que $p \in [1, \infty]$ e $a \geq 0$, $b \geq 0$. Então, o funcional de erro $\mathcal{E}_{a,b,p}(X)$ é definido como

$$\mathcal{E}_{a,b,p}(X) = \left(E[|a \max\{X, 0\} + b \max\{-X, 0\}|^p] \right)^{1/p}. \quad (3.6)$$

Em [36], demonstra-se que o funcional de erro $\mathcal{E}_{a,b,p}(X)$ é não negativo ($\mathcal{E}_{a,b,p}(X) \geq 0$ para todo X) e sublinear ($\mathcal{E}_{a,b,p}(0) = 0$, $\mathcal{E}_{a,b,p}(\lambda X) = \lambda \mathcal{E}_{a,b,p}(X)$, para todo X quando $\lambda > 0$ e $\mathcal{E}_{a,b,p}(X + X') \leq \mathcal{E}_{a,b,p}(X) + \mathcal{E}_{a,b,p}(X')$, para todo X e X'). Além disso, note que $\mathcal{E}_{a,b,p}(X) > 0$, para todo $X \neq 0$ quando $a > 0$ e $b > 0$. Sendo assim, o funcional de erro $\mathcal{E}_{a,b,p}(X)$ comporta-se como uma norma em \mathcal{X} . Porém, a condição de simetria pode não ser satisfeita, exceto no caso $a = b$. Adicionalmente, pode acontecer que $\mathcal{E}_{a,b,p}(X) = 0$ para $X \neq 0$, exceto no caso em que $a > 0$ e $b > 0$.

Definição 4. (Medida de dispersão a partir de penalidades relativas ao valor esperado) Considere $p \in [1, \infty]$ e $a \geq 0$, $b \geq 0$ tais que $a + b > 0$. Então, a medida de dispersão a partir de penalidades relativas ao valor esperado é definida como

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X]) = \left(E[|a \max\{X - E[X], 0\} + b \max\{E[X] - X, 0\}|^p] \right)^{1/p}. \quad (3.7)$$

Esse funcional satisfaz as condições D1, D2 e D3 da Definição 2. Sendo assim, $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$ é uma medida de dispersão. Observe que $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$ contém outras medidas de dispersão. Por exemplo, quando

- (i) $a = b = 1$ e $p = 2$, tem-se que $\mathcal{D}(X) = \sigma(X) = \left(E[|X - E[X]|^2] \right)^{1/2}$. Neste caso, $\mathcal{D}(X)$ representa a medida de dispersão padrão, a qual é simétrica, isto é, $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(-X)$ para todo X .
- (ii) $a = 1$, $b = 0$ e $p = 2$, tem-se que $\mathcal{D}(X) = \sigma_+(X) = \left(E[|\max\{X - E[X], 0\}|^2] \right)^{1/2}$. Logo, $\mathcal{D}(X)$ descreve a medida de semidispersão padrão superior. Entretanto, essa medida de dispersão é assimétrica. Note que, a medida de semidispersão padrão inferior, definida como $\mathcal{D}(X) = \sigma_-(X) = \left(E[|\max\{E[X] - X, 0\}|^2] \right)^{1/2}$, é a reflexão de $\mathcal{D}(X) = \sigma_+(X)$.
- (iii) $a = 0$, $b = 1$ e $p = \infty$, tem-se que $\mathcal{D}(X) = \sup |E[X] - X|$. Então, $\mathcal{D}(X)$ descreve a medida de dispersão que quantifica o range inferior de X .

Definição 5. (Medida de dispersão a partir de penalidades relativas a uma constante) Considere $p \in [1, \infty]$ e $a \geq 0$, $b \geq 0$. Então, a medida de dispersão a partir de penalidades relativas

a uma constante é definida como

$$\mathcal{D}(X) = \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X - C) = \inf_C (E[|a \max\{X - C, 0\} + b \max\{C - X, 0\}|^p])^{1/p}. \quad (3.8)$$

Esse funcional satisfaz todas as condições da Definição 2. Logo, $\mathcal{D}(X) = \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X - C)$ é uma medida de dispersão.

Apesar das medidas de dispersão terem sido projetadas para serem utilizadas em problemas estocásticos com aversão ao risco, não são medidas de risco no sentido proposto em [35]. A medida de risco coerente, definida em [35], quantifica a incerteza de uma variável aleatória com respeito à variável aleatória constante 0. Entretanto, em [36], determinam-se as condições que permitem estabelecer uma correspondência biunívoca entre esses dois conceitos. Com o objetivo de mostrar esse resultado, inicia-se definindo as medidas de risco coerentes, considerando que as realizações negativas de uma variável aleatória representam perdas e que $X \leq X'$ é equivalente a $X(\omega) \leq X'(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definição 6. (Medida de risco, [35]) Uma função $\mathcal{R}: \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, \infty]$ representa uma medida de risco coerente se satisfaz as seguintes propriedades:

(R1) Equivariância na translação: $\mathcal{R}(X + C) = \mathcal{R}(X) - C$, para todo X e constante C ;

(R2) Sublinearidade:

(R2.1) Homogeneidade positiva: $\mathcal{R}(0) = 0$ e $\mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \mathcal{R}(X)$, para todo X e todo $\lambda > 0$;

(R2.2) Subaditividade: $\mathcal{R}(X + X') \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(X')$, para todo X e X' ;

(R3) Monotonicidade: $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(X')$, quando $X \geq X'$.

As justificativas de cada um dessas propriedades são brevemente apresentadas a seguir.

- A propriedade R1, em particular, estabelece que $\mathcal{R}(X + \mathcal{R}(X)) = \mathcal{R}(X) - \mathcal{R}(X) = 0$. Isto é, adicionando $\mathcal{R}(X)$ a uma variável aleatória X , a medida do risco da variável aleatória resultante é zero.
- A propriedade R2 implica que a função $\mathcal{R}(X)$ é convexa em \mathcal{X} , ou seja,

$$\mathcal{R}(\lambda X + (1 - \lambda)X') \leq \lambda \mathcal{R}(X) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(X'), \text{ para todo } X, X' \text{ e } \lambda \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Note que a propriedade de convexidade permite reduzir o risco através da diversificação, ou seja, o risco da média ponderada das variáveis aleatórias X e X' é menor ou igual à média ponderada dos riscos dessas variáveis aleatórias.

- A propriedade R2.1 pode ser melhor justificada em conjunção com a propriedade R2.2. A propriedade de subaditividade estabelece que $\mathcal{R}(nX) = \mathcal{R}(X + \dots + X) \leq n\mathcal{R}(X)$. Uma vez que não existe diversificação, a igualdade deve ser satisfeita, conduzindo à propriedade de homogeneidade positiva.
- A propriedade R2.2 possibilita a gestão distribuída do risco. Por exemplo, assuma que X_1 e X_2 representam as possíveis perdas que podem acontecer em dois subsistemas. Considere que o decisor queira garantir que o risco da perda total $X = X_1 + X_2$ seja menor que um certo limiar l , i.e., $\mathcal{R}(X_1 + X_2) \leq l$. Nesse contexto, ao utilizar uma medida de risco \mathcal{R} , que satisfaz a propriedade de subaditividade, pode-se escolher limiares l_1 e l_2 tais que $l_1 + l_2 \leq l$ e impor as seguintes restrições $\mathcal{R}(X_i) \leq l_i$ para $i = 1, 2$. Assim sendo, a propriedade de subaditividade garante que $\mathcal{R}(X_1 + X_2) \leq \mathcal{R}(X_1) + \mathcal{R}(X_2) \leq l_1 + l_2 \leq l$.
- A propriedade R3 estabelece que, quanto menores forem as perdas, menor é o risco medido. Note também que, quando a propriedade de monotonicidade é satisfeita, a função \mathcal{R} não é simétrica.

Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de funcionais que satisfazem completa ou parcialmente as propriedades estabelecidas na Definição 6.

Definição 7. (VaR, *Value-at-Risk*) O VaR com nível $\alpha \in (0,1)$, é definido como

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\min\{x \mid P(X \leq x) > \alpha\}. \quad (3.10)$$

Esse funcional satisfaz R1 (Equivariância na translação), R2.1 (Homogeneidade positiva) e R3 (Monotonicidade), mas geralmente não satisfaz R2.2 (Subaditividade). Conseqüentemente, o VaR não é uma medida coerente de risco. Portanto, um problema de otimização estocástica, que utiliza o VaR como medida de risco, pode não ser convexo. Adicionalmente, a solução desse problema não é estável para altos valores do nível de confiança α (cf. [61, 62]). Outra limitação do uso do VaR como medida de risco é que essa medida, em geral, não pode quantificar as perdas que transpõem o limiar determinado pela mesma, isto é, o VaR não é capaz de distinguir entre situações onde as perdas ultrapassam severa ou brandamente o valor determinado por essa medida. Logo, sob uma perspectiva otimista, porém não conservadora, o VaR fornece um limitante inferior para quantificar o risco das perdas. É importante enfatizar que a perspectiva conservadora deve prevalecer na gestão de risco.

Definição 8. (CVaR, *Conditional Value-at-Risk*) O CVaR com o nível $\alpha \in (0,1)$ é definido

como

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\beta(X) d\beta, \quad (3.11)$$

onde o $\text{VaR}_\alpha(X)$ é caracterizado na Definição 7. Em particular, quando a medida de probabilidade é contínua em $X = -\text{VaR}_\alpha(X)$, o CVaR, definido em (3.11), pode ser expresso como

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = -E[X \mid X \leq -\text{VaR}_\alpha(X)]. \quad (3.12)$$

Esse funcional satisfaz completamente os axiomas apresentados na Definição 6. Então, o CVaR é uma medida coerente de risco. Note que o CVaR quantifica as perdas que podem acontecer quando $X \leq -\text{VaR}_\alpha(X)$, ao fornecer o valor esperado de X quando essa variável aleatória transpõe o limiar determinado pelo $\text{VaR}_\alpha(X)$. Algumas de suas propriedades foram apresentadas em [63, 64] e são reproduzidas a seguir:

- O CVaR_α é um funcional finito, contínuo e não decrescente com respeito a α . Além disso, tem-se que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{CVaR}_\alpha(X) = -\text{ess inf } X, \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{CVaR}_\alpha(X) = E[-X]; \quad (3.13)$$

- O CVaR_α é um funcional assimétrico, que satisfaz a seguinte expressão

$$E[-X] = \alpha \text{CVaR}_\alpha(X) - (1 - \alpha) \text{CVaR}_{1-\alpha}(-X); \quad (3.14)$$

- O CVaR domina o VaR, isto é,

$$\text{CVaR}_\alpha(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X). \quad (3.15)$$

Em [61, 62], mostra-se que o CVaR pode ser calculado através de um problema de otimização convexa. Esse resultado é apresentado a seguir.

Proposição 1. (Formula fundamental de minimização, [61]) Seja $F_\alpha(t)$ uma função finita e convexa, caracterizada por

$$F_\alpha(t) = t + \alpha^{-1} E[\max\{-X - t, 0\}]. \quad (3.16)$$

Então, o CVaR com nível $\alpha \in (0,1)$ é dado por

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_\alpha(t). \quad (3.17)$$

Adicionalmente, o intervalo $\{t \mid t \in \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F_\alpha(t)\}$ é não vazio, fechado e limitado e

$$\text{VaR}_\alpha(X) \in \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F_\alpha(t). \quad (3.18)$$

3.1.2 Relação entre as Medidas de Dispersão e de Risco

Note que a condição D2, para medidas de dispersão, coincide com a condição R2, para medidas de risco coerente. Entretanto, as condições D1 e R1 são completamente diferentes e mutuamente incompatíveis, ou seja, não existe uma função que satisfaça as propriedades D1 e R1 simultaneamente. Porém, no seguinte teorema, mostra-se que existe uma relação biunívoca entre as medidas de dispersão e de risco. Para apresentar esse resultado, estabelecem-se as seguintes definições.

Definição 9. (Medida de dispersão dominada no range inferior) Uma medida de dispersão $\mathcal{D}(X)$, caracterizada na Definição 2, será chamada de dominada no range inferior quando satisfaz a seguinte propriedade:

(D4) Dominância no range inferior: $\mathcal{D}(X) \leq E[X] - \operatorname{ess\,inf} X$, para todo X .

Observe que na Definição 9, assume-se que o foco de estudo são as medidas de dispersão que penalizam as realizações da variável aleatória X , quando essas são menores que seu valor esperado $E[X]$.

Definição 10. (Medida de risco limitada estritamente pelo valor esperado) A função $\mathcal{R}(X)$ é uma medida de risco limitada estritamente pelo valor esperado quando satisfaz as propriedades R1 (Equivariância na translação), R2 (Sublinearidade), mas não necessariamente R3 (Monotonicidade), da Definição 6, e adicionalmente é

(R4) Limitada estritamente pelo valor esperado: $\mathcal{R}(X) > E[-X]$, para todo X não constante.

Quando todas as propriedades R1, R2, R3, R4 são satisfeitas, $\mathcal{R}(X)$ é denominada uma medida de risco coerente e limitada estritamente pelo valor esperado.

Teorema 4. (Medida de dispersão versus Medida de risco, [36]) A correspondência biunívoca entre uma medida de dispersão e uma medida de risco limitada estritamente pelo valor esperado é dada através das seguintes expressões:

$$(i) \mathcal{D}(X) = \mathcal{R}(X - E[X]);$$

$$(ii) \mathcal{R}(X) = \mathcal{D}(X) - E[X].$$

Especificamente, se $\mathcal{R}(X)$ é uma medida de risco limitada estritamente pelo valor esperado e $\mathcal{D}(X)$ é definida através de (i), então $\mathcal{D}(X)$ é uma medida de dispersão, que está associada a $\mathcal{R}(X)$ através de (ii). Por outro lado, se $\mathcal{D}(X)$ é uma medida de dispersão e $\mathcal{R}(X)$ é definida através de (ii), então $\mathcal{R}(X)$ é uma medida de risco limitada estritamente pelo valor esperado, que está associada a $\mathcal{D}(X)$ através de (i). Além disso, $\mathcal{R}(X)$ é uma medida de risco coerente se e somente se $\mathcal{D}(X)$ é uma medida de dispersão dominada no range inferior.

A seguir, mostram-se exemplos de medidas de dispersão e de risco que satisfazem as condições D4 e R4, respectivamente.

Proposição 2. [36] A medida de dispersão $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$, definida em (3.7), é dominada no range inferior quando $a = 0$ e $b \leq 1$ ou quando $a + b \leq 1$ se $p = 1$. Nesse contexto, a medida de risco coerente e limitada estritamente pelo valor esperado associada a essa medida de dispersão é dada por

$$\mathcal{R}(X) = E[-X] + \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X]). \quad (3.19)$$

Proposição 3. [36] A medida de dispersão $\mathcal{D}(X) = \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X - C)$, definida em (3.8), é dominada no range inferior quando $a \leq 1$ e $p = 1$. Associada a essa medida de dispersão, tem-se uma medida de risco coerente e limitada estritamente pelo valor esperado, expressa como

$$\mathcal{R}(X) = E[-X] + \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X - C). \quad (3.20)$$

Proposição 4. [36] A medida de risco coerente $\mathcal{R}(X) = \text{CVaR}_\alpha(X)$, definida em (3.12), satisfaz a propriedade R4. Logo, o $\text{CVaR}_\alpha(X)$ é uma medida de risco coerente e limitada estritamente pelo valor esperado. A medida de dispersão dominada no range inferior, associada a essa medida de risco, é dada por

$$\mathcal{D}(X) = \text{CVaR}_\alpha^\Delta(X) = \text{CVaR}_\alpha(X - E[X]). \quad (3.21)$$

Essa medida de dispersão pode ser expressa como $\text{CVaR}_\alpha^\Delta(X) = \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X - C)$ quando $a = 1$, $b = \alpha^{-1} - 1$ e $p = 1$, ou seja,

$$\text{CVaR}_\alpha^\Delta(X) = \inf_C \{E[\max\{X - C, 0\}] + (\alpha^{-1} - 1)E[\max\{-X + C, 0\}]\}. \quad (3.22)$$

Note que, os limites do $\text{CVaR}_\alpha^\Delta$ com respeito a α podem ser expressos como

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{CVaR}_\alpha^\Delta(X) = E[X] - \text{ess inf } X, \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{CVaR}_\alpha^\Delta(X) = 0. \quad (3.23)$$

Como comentário final, a medida de risco $\mathcal{R}(X) = \text{VaR}_\alpha(X)$, além de não satisfazer a propriedade R2.2, não satisfaz a propriedade R4 ou, equivalentemente, a medida de dispersão $\mathcal{D}(X) = \text{VaR}_\alpha^\Delta(X) = \text{VaR}_\alpha^\Delta(X - E[X])$ não satisfaz as propriedades D2.2 e D4.

3.1.3 Conjunto de Aceitabilidade

Nesta subseção, apresenta-se um dos conceitos fundamentais da Teoria de Risco. Esse conceito captura a idéia de aceitabilidade do risco associado a uma variável aleatória X . Aceitabilidade, no sentido proposto em [35], significa que as perdas de X são depreciáveis e não requerem atenção. É importante ressaltar que esse conceito não é absoluto, dado que depende da escolha da medida de risco \mathcal{R} .

O próximo teorema apresenta a definição de um conjunto de aceitabilidade, as propriedades que o mesmo satisfaz, e sua relação com uma medida de risco.

Teorema 5. (Conjunto de aceitabilidade versus Medida de risco, [35]) As expressões

- (i) $\mathcal{A} = \{X \mid \mathcal{R}(X) \leq 0\}$,
- (ii) $\mathcal{R}(X) = \min\{C \mid X + C \in \mathcal{A}\}$,

estabelecem uma correspondência biunívoca entre uma medida de risco limitada estritamente pelo seu valor esperado \mathcal{R} e um conjunto de aceitabilidade \mathcal{A} , o qual satisfaz as seguintes propriedades:

- (A1) \mathcal{A} é um conjunto fechado, que contém as constantes positivas C ;
- (A2) $0 \in \mathcal{A}$ e $\lambda X \in \mathcal{A}$, quando $X \in \mathcal{A}$ e $\lambda > 0$;
- (A3) $X + X' \in \mathcal{A}$, para quaisquer $X \in \mathcal{A}$ e $X' \in \mathcal{A}$;
- (A4) $E[X] > 0$, para todo $X \in \mathcal{A}$ tal que $X \neq 0$.

Além disso, $\mathcal{R}(X)$ verifica a propriedade R3 (Monotonicidade) se e somente se

- (A5) \mathcal{A} contém todo $X \geq 0$.

Logo, \mathcal{R} é uma medida de risco coerente e limitada estritamente pelo valor esperado se e somente se \mathcal{A} satisfaz as condições A1, A2, A3, A4 e A5.

De posse da definição e das propriedades dos conjuntos de aceitabilidade, pode-se concluir que:

- O risco da variável aleatória X , dado por $\mathcal{R}(X)$, é o menor valor que deve ser adicionado a cada realização dessa variável aleatória, para garantir que as possíveis perdas sejam aceitáveis;
- O conjunto de aceitabilidade \mathcal{A} é um cone não vazio, convexo e fechado, uma vez que satisfaz as condições A1, A2 e A3. Sendo assim, \mathcal{A} permite definir uma desigualdade generalizada, ou seja, uma ordem parcial² em \mathbb{R}^n . Logo, para $X \in \mathcal{X}$ e um conjunto de aceitabilidade \mathcal{A} , a desigualdade $X \succeq_{\mathcal{A}} 0$, que denota a condição $X \in \mathcal{A}$, significa que X é aceitável, enquanto que a desigualdade $X \geq 0$, significa que X é aceitável no sentido quase certo.

A seguir, mostram-se alguns exemplos dos conjuntos de aceitabilidade associados às medidas de risco anteriormente apresentadas.

- Conjunto de aceitabilidade de uma medida de dispersão a partir de penalidades relativas ao valor esperado:
 - O conjunto de aceitabilidade associado à medida de dispersão $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$, quando $a = 0$, $b = 1$ e $p = \infty$, ou equivalentemente, associado à medida de risco $\mathcal{R}(X) = -\text{ess inf } X$, é dado por

$$\mathcal{A} = \{X \mid X \geq 0\}. \quad (3.24)$$

Logo, a variável aleatória X é aceitável se e somente se X é aceitável no sentido quase certo.

- O conjunto de aceitabilidade associado à medida de dispersão $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$, quando $a = 1$, $b = 1$ e $p = 2$, ou equivalentemente, associado à medida de risco $\mathcal{R}(X) = E[-X] + \sigma(X)$, é dado por

$$\mathcal{A} = \{X \mid \sigma(X) \leq E[X]\} \quad (3.25)$$

Logo, a variável aleatória X é aceitável, quando não existem perdas maiores que a diferença entre seu valor esperado e sua dispersão padrão. Note que o \mathcal{A} não satisfaz

²Uma relação binária \succeq em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é chamada de ordem parcial se satisfaz as seguintes propriedades: (i) Reflexividade: $x \succeq x$ para todo x em \mathbb{R}^n , (ii) Transitividade: Se $x \succeq y$ e $y \succeq z$ então $x \succeq z$, (iii) Anti-simetria: Se $x \succeq y$ e $y \succeq x$, então $x = y$.

a propriedade A5, conseqüentemente se $X \geq 0$, essa desigualdade não garante que $X \succeq_{\mathcal{A}} 0$, ou seja, X pode não ser aceitável, entretanto, pode ser aceitável no sentido quase certo.

- Conjunto de aceitabilidade do VaR: O conjunto de aceitabilidade associado ao VaR com nível α é dado por

$$\mathcal{A}_{\text{VaR}_\alpha} = \{X \mid \text{VaR}_\alpha(X) \leq 0\} = \{X \mid P(X < 0) \leq \alpha\}. \quad (3.26)$$

Para obter esse resultado, note que a restrição $\text{VaR}_\alpha(X) \leq 0$ é equivalente a $\min\{x \mid P(X \leq x) > \alpha\} \geq 0$. Logo, $P(X \leq x) > \alpha$ implica que $x \geq 0$ ou equivalentemente $x < 0$ implica que $P(X \leq x) \leq \alpha$. Então, $P(X < 0) \leq \alpha$.

Sendo assim, a variável aleatória X é aceitável se e somente se a probabilidade de acontecer uma perda não é maior que α . Entretanto, o $\mathcal{A}_{\text{VaR}_\alpha}$ não é convexo, uma vez que o VaR não é uma medida de risco coerente.

- Conjunto de aceitabilidade do CVaR: Considerando que $\mathcal{R}(X) = \text{CVaR}_\alpha(X)$, o conjunto de aceitabilidade associado a essa medida de risco é dado por

$$\mathcal{A}_{\text{CVaR}_\alpha} = \{X \mid \text{CVaR}_\alpha(X) \leq 0\} = \{X \mid E[X \mid X \leq -\text{VaR}_\alpha(X)] \geq 0\}. \quad (3.27)$$

Logo, a variável aleatória X é aceitável, quando os ganhos são suficientes para compensar as perdas que acontecem por realizações dessa variável aleatória, que ultrapassam o VaR com nível α . Observe que o $\mathcal{A}_{\text{CVaR}_\alpha}$ é um conjunto cônico convexo, dado que o CVaR é uma medida de risco coerente e limitada estritamente pelo valor esperado.

Apesar de o VaR e o CVaR medirem diferentes propriedades da função de distribuição subjacente, existem algumas relações entre essas medidas, as quais são mostradas a seguir.

Definição 11. (Medida de risco invariante) Uma medida de risco \mathcal{R} é denominada de invariante se $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$ quando X e Y têm a mesma distribuição.

Teorema 6. (Relação entre os conjuntos de aceitabilidade do VaR e CVaR, [35]) O CVaR é a menor medida de risco coerente e invariante que domina o VaR, isto é,

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \min\{\mathcal{R}(X) \mid \mathcal{R}(X) \text{ é uma medida de risco coerente e invariante}\} \geq \text{VaR}_\alpha(X). \quad (3.28)$$

Conseqüentemente, o conjunto de aceitabilidade associado ao CVaR é o maior cone convexo incluído no conjunto de aceitabilidade associado ao VaR, o qual não é convexo. Ou seja,

$$\mathcal{A}_{\text{CVaR}_\alpha} \subset \mathcal{A}_{\text{VaR}_\alpha} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{A}_{\text{CVaR}_\alpha}, \quad (3.29)$$

para todo conjunto de aceitabilidade $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ associado a uma medida de risco coerente e invariante \mathcal{R} .

3.1.4 Envoltória das Medidas de Dispersão e de Risco

Nesta subseção, apresenta-se a caracterização dual das medidas de dispersão e de risco.

Teorema 7. (Envoltória das medidas de dispersão e de risco, [35, 36]) As relações:

- (i) $\mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{L}^q(\Omega) \mid E[X] - E[XQ] \leq \mathcal{D}(X), \text{ para todo } X \in \mathcal{L}^p(\Omega)\} =$
 $\{Q \in \mathcal{L}^q(\Omega) \mid E[-XQ] \leq \mathcal{R}(X), \text{ para todo } X \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$ sendo $p^{-1} + q^{-1} = 1$,
- (ii) $\mathcal{D}(X) = E[X] - \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E[XQ]$,
- (iii) $\mathcal{R}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[-XQ]$,
- (iv) $\mathcal{A} = \{X \mid E[XQ] \geq 0, \text{ para todo } Q \in \mathcal{Q}\}$,

estabelecem uma correspondência biunívoca entre uma medida de dispersão $\mathcal{D}(X)$, uma medida de risco limitada estritamente pelo seu valor esperado $\mathcal{R}(X)$ associada a $\mathcal{D}(X)$, o seu conjunto de aceitabilidade \mathcal{A} , e o conjunto \mathcal{Q} , denominado de envoltória do risco, que satisfaz as seguintes propriedades

(Q1) \mathcal{Q} é um conjunto convexo e fechado contendo a constante 1;

(Q2) $E[Q] = 1$, para todo $Q \in \mathcal{Q}$; e

(Q3) Para todo X não constante, existe algum $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $E[XQ] \leq E[X]$.

Além disso, $\mathcal{D}(X)$ é uma medida de dispersão dominada no range inferior ou $\mathcal{R}(X)$ é uma medida de risco coerente se e somente se o conjunto \mathcal{Q} satisfaz o seguinte axioma adicional:

(Q4) $Q \geq 0$, para todo $Q \in \mathcal{Q}$.

Baseado no Teorema 7 e considerando que a envoltória do risco \mathcal{Q} está associada a uma medida de dispersão dominada no range inferior \mathcal{D} , ou equivalentemente, associada a uma medida de risco coerente \mathcal{R} , pode-se fazer os seguintes comentários:

- Uma vez que $Q \in \mathcal{Q}$, denominado de monitor do risco, satisfaz as condições Q2 e Q4 no Teorema 7, ele pode ser considerado como uma densidade relativa a P de alguma medida de probabilidade P' definida no espaço (Ω, \mathcal{F}) , isto é

$$Q = \frac{dP'}{dP}. \quad (3.30)$$

Além disso, observe que o valor esperado de X com respeito à medida de probabilidade P' , denotado por $E_{P'}[X]$, é dado por

$$E_{P'}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP'(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) Q(\omega) dP(\omega) = E[XQ]. \quad (3.31)$$

Nesse contexto, considerando P' como uma medida de probabilidade alternativa, ou perturbada, da medida de probabilidade de referência P , tem-se que:

- $E[X] - E_{P'}[X] = E[X] - E[XQ]$ representa a diferença entre os valores esperados de X , calculados sob a medida de probabilidade de referência P e a medida de probabilidade alternativa P' . Conseqüentemente, a medida de dispersão $\mathcal{D}(X)$, no item (ii), realiza uma análise de pior caso sob todas as medidas de probabilidades alternativas P' , na vizinhança de P , selecionadas pelos monitores Q que pertencem à envoltória \mathcal{Q} .
- $E_{P'}[-X] = E[-XQ]$ descreve o valor esperado da perda de X , calculado sob a medida de probabilidade alternativa P' . Portanto, a medida de risco $\mathcal{R}(X)$, no item (iii), uma vez mais, realiza uma análise de pior caso sob todas as medidas de probabilidades alternativas P' , na vizinhança de P , selecionadas pelos monitores Q que pertencem à envoltória \mathcal{Q} .
- Note que a envoltória do risco \mathcal{Q} é um conjunto convexo e fechado (por Q1), que está contido no hiperplano fechado $\mathcal{H} = \{Q \mid E[Q] = 1\}$ (por Q2). Ele contém o elemento 1 (por Q1), o qual representa a medida de probabilidade P (pela equação (3.30)). Além disso, nenhum hiperplano fechado, exceto \mathcal{H} , passa pelo ponto 1, sem ter elementos do conjunto \mathcal{Q} em ambos lados dos seus semi-espacos abertos associados (por Q3).
- Observe que a caracterização dual de uma medida de dispersão também pode ser expressa, de forma equivalente, como

$$\mathcal{D}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[(E[X] - X)Q] = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \text{Covar}(E[X] - X, Q) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \text{Covar}(-X, Q). \quad (3.32)$$

Em seguida, mostra-se a envoltória associada a diversas medidas de dispersão.

Proposição 5. [35, 36] Considere que

$$\mathcal{Y}_{a,b,q} = \begin{cases} \{Y \mid \|a^{-1} \max\{Y,0\} + b^{-1} \max\{-Y,0\}\|_q \leq 1\}, & \text{quando } a > 0 \text{ e } b > 0, \\ \{Y \mid Y \geq 0, \|Y\|_q \leq a\}, & \text{quando } a > 0 \text{ e } b = 0, \\ \{Y \mid Y \geq 0, \|Y\|_q \leq b\}, & \text{quando } a = 0 \text{ e } b > 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Então a envoltória da medida de dispersão

(i) $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$ é dada por

$$\mathcal{Q} = \{Q = 1 + E[Y] - Y \mid Y \in \mathcal{Y}_{a,b,q}, \text{ onde } p^{-1} + q^{-1} = 1\}, \quad (3.34)$$

(ii) $\mathcal{D}(X) = \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X - C)$ é dada por

$$\mathcal{Q} = \{Q = 1 - Y \mid E[Y] = 0, Y \in \mathcal{Y}_{a,b,q}, \text{ onde } p^{-1} + q^{-1} = 1\}. \quad (3.35)$$

Em particular, baseado na Proposição 5, a envoltória da medida de dispersão

- $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$ quando $a = 0$, $b = 1$ e $p = \infty$, isto é, $\mathcal{D}(X) = \sup |E[X] - X|$, é dada por

$$\mathcal{Q} = \{Q \mid Q \geq 0, E[Q] = 1\}. \quad (3.36)$$

Note que a medida de dispersão realiza a análise de pior caso de $E[X] - E_{P'}[X]$ considerando todas as possíveis medidas de probabilidade alternativas P' associadas a P .

- $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}_{a,b,p}(X - E[X])$ quando $a = b = 1$ e $p = 2$, isto é, $\mathcal{D}(X) = \sigma(X) = (E[|X - E[X]|^2])^{1/2}$, é dada por

$$\mathcal{Q} = \{Q \mid \sigma(Q) \leq 1, E[Q] = 1\}. \quad (3.37)$$

Observe que o monitor de risco Q não representa uma densidade relativa a P de alguma medida de probabilidade P' , uma vez que Q pode assumir valores negativos. Assim sendo, $\sigma(X)$ não é uma medida de dispersão dominada no range inferior.

- $\mathcal{D}(X) = \inf_C \mathcal{E}_{a,b,p}(X-C)$ quando $a = 1$, $b = \alpha^{-1} - 1$ e $p = 1$, isto é, $\mathcal{D}(X) = \text{CVaR}_\alpha^\Delta(X)$, é dada por

$$\mathcal{Q} = \{Q \mid 0 \leq Q \leq \alpha^{-1}, E[Q] = 1\}. \quad (3.38)$$

Note que, (i) quando $\alpha \rightarrow 0$ então \mathcal{Q} coincide com a envoltória associada a $\mathcal{D}(X) = \sup |E[X] - X|$, e (ii) quando $\alpha \rightarrow 1$ então $\mathcal{Q} = \{1\}$.

Finalmente, apresenta-se a definição dos identificadores de risco introduzida em [65].

Definição 12. (Identificadores do risco, [65]) Os identificadores do risco de X com respeito a \mathcal{D} são os elementos do seguinte conjunto

$$\mathcal{Q}^* = \operatorname{argmin}_{Q \in \mathcal{Q}} E[XQ], \quad (3.39a)$$

$$= \operatorname{argmax}_{Q \in \mathcal{Q}} \operatorname{Covar}(-X, Q), \quad (3.39b)$$

$$= \{Q \in \mathcal{Q} \mid \mathcal{D}(X) = E[X] - E[XQ]\}. \quad (3.39c)$$

Baseado na Definição 12, os identificadores do risco são as densidades Q das medidas de probabilidade P' , alternativas a P , que fornecem o menor valor esperado de XQ , ou equivalentemente o maior valor da covariância de $-X$ e Q . Baseado na última interpretação dos identificadores de risco, os mesmos seguem as variações de $-X$ da maneira mais rápida possível.

A seguinte proposição mostra os identificadores de risco associados à medida de dispersão $\mathcal{D} = \text{CVaR}_\alpha^\Delta$.

Proposição 6. [65] Os identificadores do risco de X associado à medida de dispersão $\mathcal{D}(X) = \text{CVaR}_\alpha^\Delta(X)$ são os elementos do conjunto

$$\mathcal{Q}^* = \{Q \mid 0 \leq Q \leq \alpha^{-1}, E[Q] = 1, Q(\omega) = \alpha^{-1} \mathbb{1}_{\{X(\omega) < -\text{VaR}_\alpha(X)\}}\} \quad (3.40)$$

3.1.5 Otimização Estocástica com Aversão ao Risco

Nesta subseção, apresentam-se as características dos problemas de otimização estocástica, que envolvem medidas de risco coerente ou medidas de dispersão dominadas no range inferior. Para tal, seja ξ uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade (Ξ, \mathcal{F}, P) . Além disso, considere que essa variável aleatória é independente dos valores assumidos pela variável de decisão x .

Teorema 8. (Convexidade dos problemas de otimização estocástica envolvendo medidas de risco e de dispersão, [66, 67]) Se a função $f(x, \xi)$ é convexa em x para todo $\xi \in \Xi$, então os problemas de otimização estocástica

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x & \text{e} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x + \mathcal{D}(f(x, \xi)) \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathcal{R}(f(x, \xi)) \leq 0 & & \text{sujeito a:} \quad & E[f(x, \xi)] \geq 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

são convexos quando \mathcal{R} é uma medida de risco coerente e \mathcal{D} é uma medida de dispersão dominada no range inferior, respectivamente.

Em particular, em [61, 62, 66] estudam-se os problemas de otimização convexa definidos em (3.41) quando $\mathcal{R} = \text{CVaR}_\alpha$. Os resultados principais desses trabalhos são mostrados a seguir.

Teorema 9. (Relação entre o problema de otimização estocástica envolvendo o CVaR e o VaR, [62]) Considerando que a função $f(x, \xi)$ é convexa em x para todo $\xi \in \Xi$, o problema de otimização estocástica

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{CVaR}_\alpha(f(x, \xi)) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

é a melhor aproximação convexa do problema de otimização não convexo

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{VaR}_\alpha(f(x, \xi)) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Teorema 10. (Formulação equivalente do problema de otimização estocástica envolvendo o CVaR, [62]) Os problemas de otimização convexa

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{CVaR}_\alpha(f(x, \xi)) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

e

$$\begin{aligned} \min_{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a:} \quad & F_\alpha(x, t) = t + \alpha^{-1} E[\max\{-f(x, \xi) - t, 0\}] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

são equivalentes no sentido que suas funções objetivo atingem o mesmo valor mínimo. Além

disso, se, na solução ótima, a restrição no problema (3.44) estiver ativa, então o par (x^*, t^*) alcança o valor mínimo do problema (3.45) se e somente se x^* atinge o valor mínimo do problema (3.44) e $t^* \in \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F_\alpha(x^*, t)$. Em particular, quando o intervalo $\{t \mid t \in \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F_\alpha(x^*, t)\}$ reduz-se a um único ponto, o problema (3.45) fornece o par (x^*, t^*) tal que x^* é a solução ótima do problema (3.44) e t^* corresponde ao $\operatorname{VaR}_\alpha(f(x^*, \xi))$.

3.1.6 Notas e Referências

A partir da introdução das medidas de risco coerentes, ou medidas de risco sublineares, em [60, 35, 68], a Teoria de Risco tem se desenvolvido rapidamente. Nesses trabalhos, apresentam-se as características fundamentais de uma medida de risco, motivado principalmente pelas limitações existentes na medida de risco tradicional, o VaR. Além disso, mostra-se a caracterização dual dessas medidas de risco. Em particular, a relação entre o CVaR e o VaR foi abordada em [63, 64] e o estudo de problemas de otimização estocástica, envolvendo o CVaR, foi realizado em [61, 67, 69]. Seguindo a linha de pesquisa, na qual se caracteriza axiomáticamente uma medida de risco, em [70, 71, 72], apresentam-se as medidas de risco convexas, onde se substitui o axioma de sublinearidade pelo axioma de convexidade e estabelece-se a caracterização dual dessas medidas de risco. Em [73], aplica-se a Teoria de Risco Convexas ao o problema de otimização estocástica com aversão ao risco. Recentemente, em [36], introduziram-se as medidas de dispersão generalizadas e mostrou-se sua relação com as medidas de risco coerentes. O estudo de problemas de otimização estocástica, via essas medidas de dispersão, foi realizado em [67]. A análise das medidas de risco convexas e dinâmicas e seu aplicação a problemas de otimização estocástica foram realizadas em [74] e [75], respectivamente. Outra linha de pesquisa importante na Teoria de Risco é o estudo de geradores de medidas de risco coerente e convexas. Alguns desses resultados podem ser encontrados em [76] e [77].

Finalmente, é importante mencionar o estudo da relação existente entre a Teoria de Risco e a Teoria de Jogos [78], a Teoria de Probabilidades Ambíguas [79, 80], a Teoria Dual de Utilidade Esperada [36], a Teoria de Dominância Estocástica [81, 82, 83], a Teoria de Informação [84] e a Teoria de Otimização Robusta [85].

3.2 Resultados Principais

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a solução ótima do seguinte problema de otimização estocástica

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathcal{R}_i(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde

- o vetor de decisão do problema é dado por $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$ (vetor de potências transmitidas);
- os dados do problema são representados através do conjunto $\{\eta, G, \underline{\gamma}\}$, sendo
 - $\eta = [\eta_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor que contém o ruído no receptor de cada enlace;
 - $G = [G_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, a matriz de ganhos do canal; e
 - $\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor que contém os limiares inferiores de recepção do SINR para cada enlace.

Considera-se que

- (H1) o ganho do canal G_{ij} descreve o desvanecimento rápido do sinal de rádio num ambiente Rayleigh. Sendo assim, a potência do sinal recebido G_{ij} é uma variável aleatória, definida no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , a qual é exponencialmente distribuída. Logo,

$$F_{G_{ij}}(g_{ij}) = P(G_{ij} \leq g_{ij}) = 1 - \exp\left(-\frac{g_{ij}}{\mu_{ij}}\right), \quad (3.47)$$

onde $\mu_{ij} = E[G_{ij}]$ denota o valor esperado de G_{ij} ;

- (H2) as variáveis aleatórias $\{G_{ij}; \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ são mutuamente independentes;
- os elementos estruturais do problema são descritos pelo conjunto $\{n, \mathcal{R}_i, \leq\}$, sendo
 - $n \in \mathbb{Z}_+$, o número de enlaces ativos;
 - \mathcal{R}_i , uma medida de risco coerente. Especificamente, $\mathcal{R}_i = \text{CVaR}_{\alpha_i}$;
 - \leq representa $\preceq_{\mathbb{R}_+}$, a ordem parcial associada ao conjunto cônico convexo e fechado \mathbb{R}_+ .

3.2.1 Solução Ótima e Centralizada do Problema do CPT via o CVaR

O seguinte lema será utilizado como suporte.

Lema 1. [83] Seja X uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Então,

$$\int_{-\infty}^t (t-x)dF_X(x) = \int_{-\infty}^t F_X(x)dx, \quad (3.48)$$

onde $F_X(x) = P(X \leq x)$ representa a função de distribuição de X .

Proposição 7. Considere que as variáveis aleatórias $\{G_{ij}; i, j = 1, \dots, n\}$ satisfazem as condições H1 e H2. Então,

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] = \underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)^{-1}. \quad (3.49)$$

Demonstração. Dado que o conjunto de variáveis aleatórias $\{G_{ij}; i, j = 1, \dots, n\}$ são mutuamente independentes, o valor esperado no lado esquerdo da equação (3.49) pode ser expresso como

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] \prod_{j \neq i} dF_{G_{ij}}(g_{ij}). \quad (3.50)$$

Calculando o valor esperado no lado direito da equação (3.50), tem-se que

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] = p_i \int_0^{\frac{1}{p_i}(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - t)} \left(\frac{1}{p_i}(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - t) - g_{ii}\right) dF_{G_{ii}}(g_{ii}). \quad (3.51)$$

Aplicando o Lema 1 na equação (3.51), obtém-se

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] = p_i \int_0^{\frac{1}{p_i}(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - t)} F_{G_{ii}}(g_{ii}) dg_{ii} =$$

$$\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - t}{\mu_{ii} p_i}\right). \quad (3.52)$$

Substituindo a equação (3.52) em (3.50), tem-se que

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] =$$

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \right) \prod_{j \neq i} dF_{G_{ij}}(g_{ij}). \quad (3.53)$$

Uma vez que as variáveis aleatórias G_{ij} são exponencialmente distribuídas, a equação (3.53) pode ser expressa como

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] = \underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t +$$

$$\mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \frac{1}{\mu_{ij}} \exp\left(-\frac{g_{ij}}{\mu_{ij}}\right) dg_{ij}. \quad (3.54)$$

Finalmente, operações algébricas permitem expressar a equação (3.54) como

$$E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}] =$$

$$\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \int_0^\infty \frac{1}{\mu_{ij}} \exp\left(-\left(\frac{\underline{\gamma}_i p_j}{\mu_{ii} p_i} + \frac{1}{\mu_{ij}}\right) g_{ij}\right) dg_{ij} =$$

$$\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)^{-1}, \quad (3.55)$$

encerrando esta demonstração. \square

Baseado no Teorema 10 e na Proposição 7, o seguinte teorema apresenta a solução do problema proposto em termos de um problema de otimização convexa.

Teorema 11. Considere uma rede sem fio, onde o desvanecimento rápido de cada canal de

rádio é caracterizado através de um ambiente Rayleigh. Além disso, considere que esses canais são mutuamente independentes. Sendo assim, as condições H1 e H2 são válidas. Então, o problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \min_{(t,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{sujeito a:} \\ & t_i + \frac{1}{\alpha_i} \left(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t_i + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t_i}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)^{-1} \right) \leq 0, \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.56}$$

fornece a solução ótima do problema (3.46).

A solução do problema proposto, apresentado no Teorema 11, pode ser calculada sem o uso da variável auxiliar t . Para tanto, por simplicidade, denote

$$\text{CVaR}_{\alpha_i}(p) = \text{CVaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \tag{3.57}$$

e

$$\text{VaR}_{\alpha_i}(p) = \text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i). \tag{3.58}$$

Proposição 8. Considere que as variáveis aleatórias $\{G_{ij}; i, j = 1, \dots, n\}$ satisfazem as condições H1 e H2. Então, o $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p)$ e o $\text{VaR}_{\alpha_i}(p)$ podem ser expressos como

$$\text{CVaR}_{\alpha_i}(p) = \underline{\gamma}_i \eta_i + \frac{1}{\alpha_i} \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii} p_i \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln\left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \right) \tag{3.59}$$

e

$$\text{VaR}_{\alpha_i}(p) = \underline{\gamma}_i \eta_i + \mu_{ii} p_i \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln\left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \right), \tag{3.60}$$

respectivamente.

Demonstração. Baseado na Proposição 1, o valor do $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p)$ pode ser determinado através

do problema de otimização convexa

$$\text{CVaR}_{\alpha_i}(p) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_{\alpha_i}(p, t), \quad (3.61)$$

onde

$$F_{\alpha_i}(p, t) = t + \frac{1}{\alpha_i} E[\max\{\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - G_{ii} p_i - t, 0\}]. \quad (3.62)$$

Substituindo a equação (3.56) no lado direito da equação (3.62), tem-se que

$$F_{\alpha_i}(p, t) = t + \frac{1}{\alpha_i} \left(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - t + \mu_{ii} p_i \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)^{-1} \right). \quad (3.63)$$

Para obter a solução ótima do problema (3.61), aplica-se a condição de otimalidade de primeira ordem para problemas convexos e irrestritos (veja [33, 34]). Sendo assim, a condição necessária e suficiente, que caracteriza seus pontos críticos, é dada por

$$\frac{\partial F_{\alpha_i}(p, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i - t}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)^{-1} = 0. \quad (3.64)$$

Logo,

$$t = \underline{\gamma}_i \eta_i + \mu_{ii} p_i \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln\left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \right). \quad (3.65)$$

Baseado na Proposição 1, $\text{VaR}_{\alpha_i}(p) = t$, justificando a expressão (3.60). Finalmente, substituindo o valor de t da equação (3.65) em (3.63), obtém-se a expressão (3.59). \square

Comentário 1. No Capítulo 2, foi estabelecida a seguinte identidade

$$\{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii} p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0\} \equiv \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid P(G_{ii} p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i > 0) \leq \alpha_i\}. \quad (3.66)$$

Na seqüência, essa equivalência será verificada para o caso onde as hipóteses H1 e H2 são

válidas. Sendo assim, baseado na Proposição 8, tem-se que

$$\begin{aligned} \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \text{VaR}_{\alpha_i}(\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - g_{ii} p_i) \leq 0\} &\equiv \\ \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \underline{\gamma}_i \eta_i + \mu_{ii} p_i \ln\left((1 - \alpha_i) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right)\right) \leq 0\} &\equiv \\ \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid (1 - \alpha_i) \exp\left(\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i}{\mu_{ii} p_i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \leq 1\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Logo, pela desigualdade (2.25), a equivalência está justificada.

Com base no Teorema 10, outra forma de calcular a solução do problema proposto é apresentada a seguir.

Teorema 12. Considere uma rede sem fio, onde o desvanecimento rápido de cada canal de rádio é caracterizado através de um ambiente Rayleigh. Além disso, considere que esses canais são mutuamente independentes. Sendo assim, as condições H1 e H2 são válidas. Então, o problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \underline{\gamma}_i \eta_i + \frac{1}{\alpha_i} \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii} p_i \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln\left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \right) \leq 0, \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.68)$$

fornece a solução ótima do problema (3.46).

Comentário 2. Note que quando $\alpha_i \rightarrow 1$ para $i = 1, \dots, n$, o problema (3.68) reduz-se ao problema de CPT determinístico (2.6) considerando que cada ganho do canal é substituído pelo seu valor esperado.

A seguir, no Teorema 13, mostra-se que cada uma das restrições de desigualdade do problema (3.68) está ativa no ponto p^* , solução ótima desse problema. Para obter esse resultado, na proposição a seguir, apresentam-se as características de monotonicidade do CVaR.

Proposição 9. A função $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p)$ para $p > 0$ e $0 < \alpha < 1$ é

(i) decrescente em p_i , isto é,

$$\text{CVaR}_{\alpha_i}(p = [p_1, \dots, p_i, \dots, p_n]) < \text{CVaR}_{\alpha_i}(p' = [p_1, \dots, p'_i, \dots, p_n]) \text{ quando } p_i \geq p'_i; \quad (3.69)$$

(ii) crescente em p_j para $j \neq i$, isto é,

$$\text{CVaR}_{\alpha_i}(p = [p_1, \dots, p_i, \dots, p_n]) > \text{CVaR}_{\alpha_i}(p' = [p'_1, \dots, p_i, \dots, p'_n]) \text{ quando } p_j \geq p'_j. \quad (3.70)$$

Demonstração. Antes de provar as características de monotonicidade do CVaR_{α_i} , note que

$$\frac{\partial \text{CVaR}_{\alpha_i}(p)}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\mu_{ii} p_i - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii} p_i (\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln(1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i})) \right) \quad (3.71)$$

$$= -\mu_{ii} \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \ln(1 - \alpha_i) \right) - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii} \sum_{j \neq i} \left(\ln(1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}) - \frac{\frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}}{1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}} \right) \quad (3.72)$$

e

$$\frac{\partial \text{CVaR}_{\alpha_i}(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\gamma_i \mu_{ij} p_j - (1 - \alpha_i) \mu_{ii} p_i \ln(1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}) \right) \quad (3.73)$$

$$= \gamma_i \mu_{ij} \left(1 - \frac{1 - \alpha_i}{1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}} \right). \quad (3.74)$$

Para demonstrar o item (i), a desigualdade $\partial \text{CVaR}_{\alpha_i}(p) / \partial p_i < 0$ deve ser satisfeita para cada i . Baseado na equação (3.72), essa desigualdade é cumprida, uma vez que

$$\ln(1 + x_{ij}) > \frac{x_{ij}}{1 + x_{ij}}, \text{ para todo } x_{ij} = \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i} > 0. \quad (3.75)$$

Para demonstrar o item (ii), a desigualdade $\partial \text{CVaR}_{\alpha_i}(p) / \partial p_j > 0$ deve ser verificada para cada $j \neq i$. Baseado na equação (3.74), essa desigualdade pode ser expressa equivalentemente como

$$\alpha_i \mu_{ii} p_i + \gamma_i \mu_{ij} p_j > 0, \quad (3.76)$$

a qual evidentemente é válida. \square

Teorema 13. Considere que o conjunto factível do problema (3.68) não é vazio e sua solução ótima é $p^* = [p_i^*] \in \mathbb{R}_+^n$. Então, cada uma das restrições de desigualdade, que definem o conjunto factível do problema (3.68), está ativa no ponto p^* , isto é,

$$\text{CVaR}_{\alpha_i}(p^*) = \text{CVaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j^* - \underline{\gamma}_i \eta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.77)$$

ou equivalentemente

$$\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j^* - \mu_{ii} p_i^* + \text{CVaR}_{\alpha_i}^\Delta(G_{ii}p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.78)$$

Logo, o problema de otimização convexa (3.56) fornece o par $(p^*, t^*) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_-$ onde p^* é a solução ótima do problema (3.68) e

$$t_i^* = \text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j^* - \underline{\gamma}_i \eta_i). \quad (3.79)$$

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, observe que, pela Proposição 9, a função $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p)$ é monótona crescente em p_j , para $j \neq i$, e monótona decrescente em p_i . Considere que nem todos os valores de $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p^*)$ são iguais e escolha o índice j para o qual $\text{CVaR}_{\alpha_j}(p^*) < 0$. Se o valor de p_j^* é decrementado, o valor de $\text{CVaR}_{\alpha_j}(p^*)$ cresce e todos os outros valores de $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p^*)$ decrescem. Entretanto, essa afirmação contradiz a hipótese de que o $\text{CVaR}_{\alpha_i}(p^*)$ está ativo em p^* . A equivalência entre (3.77) e (3.78) decorre da aplicação do Teorema 4 e da condição D1 da Definição 2. Finalmente, pelo Teorema 10, a segunda parte desse teorema está justificada. \square

A seguir, a caracterização dual das medidas de dispersão é utilizada para apresentar, de outra forma, a solução centralizada do problema de CPT via o CVaR, mostrada no Teorema 13. Essa forma tem a mesma estrutura da solução centralizada associada ao problema determinístico do CPT, caracterizada em (2.9) e (2.8). Entretanto a definição da matriz de interferência normalizada e do vetor de ruído normalizado são diferentes.

Teorema 14. Seja

$$\mathcal{Q}_i^* = \{Q_i \mid 0 \leq Q_i \leq \alpha_i^{-1}, E[Q_i] = 1, \\ Q_i(\omega) = \alpha_i^{-1} \mathbb{1}_{\{G_{ii}(\omega)p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}(\omega)p_j^* < -\text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j^*)\}}\} \quad (3.80)$$

o conjunto de identificadores de risco associado ao $\text{CVaR}_{\alpha_i}^\Delta(G_{ii}p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j^*)$. Então, a

solução ótima do problema de CPT via o CVaR pode ser expressa como

$$p^* = (I - B)^{-1}u, \quad \text{quando } r_\sigma(B) < 1, \quad (3.81)$$

onde

$$I \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = [\underline{\gamma}_i \frac{\mu_{ij} + \text{Covar}(G_{ij}, Q_i^*)}{\mu_{ii} + \text{Covar}(G_{ii}, Q_i^*)} \mathbb{1}_{\{i \neq j\}}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad (3.82)$$

$$u = [\underline{\gamma}_i \frac{\eta_i}{\mu_{ii} + \text{Covar}(G_{ii}, Q_i^*)}] \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{e} \quad Q_i^* \in \mathcal{Q}_i^*, \quad (3.83)$$

denotam a matriz identidade, a matriz de interferência normalizada via o CVaR e o vetor de ruído normalizado via o CVaR, respectivamente e $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ representa a função delta de Dirac.

Demonstração. Pelo Teorema 13, a solução ótima do problema de CPT via o CVaR satisfaz o conjunto de equações em (3.78).

Por outro lado, baseado na caracterização dual de uma medida de dispersão, apresentada na equação (3.32), e no conjunto de identificadores de risco \mathcal{Q}^* , definido na equação (3.39), uma medida de dispersão pode ser expressa como

$$\mathcal{D}(X) = \text{Covar}(-X, Q^*), \quad Q^* \in \mathcal{Q}^*. \quad (3.84)$$

Aplicando esse resultado ao conjunto de equações em (3.78), o mesmo pode ser escrito como

$$\underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j^* - \mu_{ii} p_i^* + \text{Covar}(\underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j^* - G_{ii} p_i^*, Q_i^*) = 0, \quad (3.85a)$$

$$Q_i^* \in \mathcal{Q}_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.85b)$$

onde \mathcal{Q}_i^* é o conjunto de identificadores de risco associado ao $\text{CVaR}_{\alpha_i}^\Delta(G_{ii} p_i^* - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j^*)$, definido em (3.80).

A equação (3.81) é justificada aplicando as propriedades básicas da função covariância e o Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não negativas ao conjunto de equações em (3.85) (cf. [43, 44]). \square

Comentário 3. Note que, se $\alpha_i \rightarrow 1$ para $i = 1, \dots, n$, então $\mathcal{Q}_i^* = \{1\}$ e $\text{Covar}(G_{ij}, Q_i^*) = 0$. Sendo assim, a matriz de interferência normalizada e o vetor de ruído normalizado via o CVaR coincidem com aqueles apresentados em (2.8) quando cada ganho do canal é substituído pelo seu valor esperado.

3.2.2 Solução Subótima e Distribuída do Problema Restrito de CPT via o CVaR

Considerando que, no problema proposto em (3.46), o ruído é nulo e a potência transmitida em cada enlace é limitada inferior e superiormente, nesta subseção, apresenta-se um algoritmo que utiliza somente informação local e que converge para uma solução subótima do problema centralizado de CPT via o CVaR.

Nesse contexto, o problema de CPT é dado por

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{CVaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j) \leq 0, \quad \underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.86)$$

onde p_i representa a potência transmitida no i -ésimo enlace, sendo \underline{p}_i e \bar{p}_i seus valores mínimo e máximo, respectivamente. Além disso, G_{ij} denota o ganho do canal entre o transmissor do j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace, satisfazendo as condições H1 e H2, e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Adicionalmente, $\underline{\gamma}_i$ denota o limiar do SIR (*Signal-to-Interference Ratio*) requerido no i -ésimo enlace. Finalmente, o risco da qualidade do enlace é quantificado via o CVaR com nível α_i , caracterizado na Definição 8.

Com base no Teorema 12 no próximo corolário, apresenta-se a solução centralizada do problema acima estabelecido.

Corolário 1. Considere uma rede sem fio, onde o desvanecimento rápido de cada canal de rádio é caracterizado através de um ambiente Rayleigh e esses canais são mutuamente independentes, isto é, as condições H1 e H2 são válidas. Além disso, o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada inferior e superiormente. Então, o problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \frac{1}{\alpha_i} \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii} p_i (\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i})) \leq 0, \quad (3.87) \\ & \underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

fornece a solução ótima do problema (3.86).

As restrições de desigualdade no problema (3.87), que quantificam o risco da qualidade do

enlace no sistema através do CVaR, podem ser expressas como

$$\mu_{ii}p_i \left(1 + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \ln \left(1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i} \right) \right) \right) \geq \frac{1}{\alpha_i} \gamma_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.88)$$

Utilizando uma notação vetorial, o conjunto de desigualdades em (3.88) pode ser reescrito como

$$p \geq I(p), \quad (3.89)$$

onde $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$ e $I(p) = [I_i(p)] \in \mathbb{R}_+^n$ sendo

$$I_i(p) = \frac{\gamma_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} \left(\alpha_i + (1 - \alpha_i) \ln(1 - \alpha_i) + (1 - \alpha_i) \sum_{j \neq i} \ln \left(1 + \frac{\gamma_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i} \right) \right)}. \quad (3.90)$$

Pode-se provar que o funcional $I_i(p)$ não é uma função de interferência padrão (veja a Definição 1). Entretanto, na Proposição 11, mostra-se que o limitante superior do $I_i(p)$ satisfaz as propriedades que caracterizam uma função de interferência padrão. Sendo assim, no Teorema 15, obtém-se um algoritmo distribuído que converge para uma solução subótima do problema (3.87), aplicando o Teorema 1 e 2. Para demonstrar esse resultado, define-se o CES (*Certainty-Equivalent System*), apresentado em [15], e determina-se o limitante superior e inferior da função $I_i(p)$, baseado no Lema 2.

Definição 13. O CES é o sistema no qual a variação estatística do sinal de rádio é completamente ignorada, sendo essas variáveis aleatórias substituídas por seus respectivos valores esperados. Sendo assim, considerando que o ruído é nulo, isto é, $\eta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, no CES, as seguintes restrições

$$\underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.91)$$

garantem uma adequada operação desse sistema. As desigualdades antes mencionadas podem ser reescritas equivalentemente como

$$\hat{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\underline{\gamma}_i} = \frac{\mu_{ii} p_i}{\underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j} \geq 1, \quad (3.92)$$

onde $\hat{\gamma}_i$ denota o CEM (*Certainty-Equivalent Margin*) para o i -ésimo enlace.

Lema 2. As desigualdades

$$\ln\left(1 + \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \ln(1 + x_k) \leq \sum_{k=1}^n x_k \quad (3.93)$$

são válidas.

Proposição 10. Os limitantes inferior e superior da função $I_i(p)$ são dados por

$$\begin{aligned} \underline{I}_i(p) &= \frac{p_i}{(1 - \alpha_i) + (\alpha_i + (1 - \alpha_i) \ln(1 - \alpha_i)) \hat{\gamma}_i} \leq I_i(p) \leq \\ \bar{I}_i(p) &= \frac{p_i}{(\alpha_i + (1 - \alpha_i) \ln(1 - \alpha_i) + (1 - \alpha_i) \ln(1 + \frac{1}{\hat{\gamma}_i})) \hat{\gamma}_i}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde $\hat{\gamma}_i$ é definido em (3.92).

A partir do resultado obtido na Proposição 10, pode-se observar que os limitantes inferior e superior do $I_i(p)$ coincidem quando $\alpha_i \rightarrow 1$ ou $\hat{\gamma}_i \rightarrow \infty$. No primeiro caso, $\underline{I}_i(p) = I_i(p) = \bar{I}_i(p) = p_i \hat{\gamma}_i^{-1}$ e no segundo caso $\underline{I}_i(p) = I_i(p) = \bar{I}_i(p) = 0$.

Na Figura 3.1, apresenta-se o gráfico da relação entre o limitante superior do $I_i(p)$ e o limitante inferior do mesmo, em função do $\hat{\gamma}_i$ e de α_i . Observa-se que essa relação (i) tende a 1 quando $\alpha_i \rightarrow 1$ ou $\hat{\gamma}_i \rightarrow \infty$ e (ii) é monótona decrescente com respeito a α_i ($\hat{\gamma}_i$), para valores fixos de $\hat{\gamma}_i$ (α_i , respectivamente).

Proposição 11. $\bar{I}_i(p)$ é uma função de interferência padrão.

Demonstração. (i) Positividade: É imediata.

(ii) Monotonicidade: Para $p_i \geq 0$, é imediata. Para $p_j \geq 0$ quando $j \neq i$, a monotonicidade de $\bar{I}_i(p)$ é justificada se, para cada $p_j \geq 0$, tem-se que

$$\frac{\partial \bar{I}_i(p)}{\partial p_j} \geq 0. \quad (3.95)$$

A desigualdade acima é equivalente a

$$\ln\left(1 + \frac{\gamma_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) - \frac{\gamma_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i + \gamma_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j} \geq 0. \quad (3.96)$$

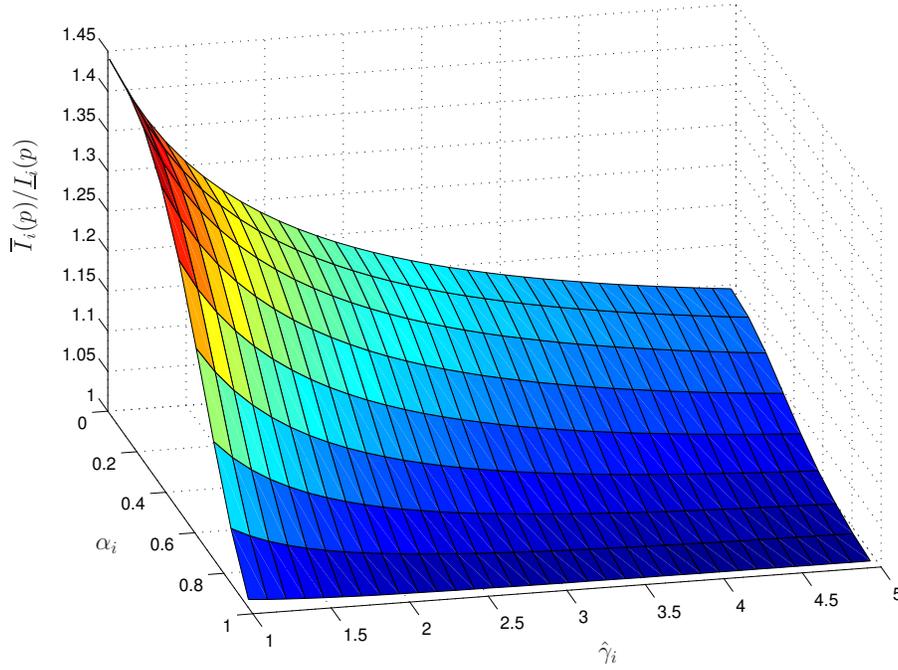


Fig. 3.1: Relação entre o limitante superior e o limitante inferior da interferência efetiva no i -ésimo enlace.

Definindo $x_i = \frac{\gamma_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}$ e substituindo-o em (3.96), tem-se que

$$\ln(1 + x_i) - \frac{x_i}{1 + x_i} \geq 0. \quad (3.97)$$

A desigualdade (3.97) é válida para todo $x_i \geq 0$.

(iii) Escalabilidade: É imediata.

Assim, finaliza-se a demonstração do teorema. \square

Baseado na Proposição 11 e nos Teoremas 1 e 2, a seguir apresenta-se um algoritmo sub-ótimo para o CPT, que utiliza apenas a informação local ($\hat{\gamma}_i$).

Teorema 15. Considere que p^* é a solução ótima do problema (3.86). Então, o algoritmo sub-ótimo e distribuído associado a esse problema é dado por

$$\hat{p}_i(k+1) = \min\{\bar{p}_i, \max\{\underline{p}_i, \frac{1}{(\alpha_i + (1 - \alpha_i) \ln(1 - \alpha_i) + (1 - \alpha_i) \ln(1 + \frac{1}{\hat{\gamma}_i(k)})) \hat{\gamma}_i(k)} \hat{p}_i(k)\}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.98)$$

onde

$$\hat{\gamma}_i(k) = \frac{\gamma_i(k)}{\underline{\gamma}_i} = \frac{\mu_{ii}\hat{p}_i(k)}{\underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij}\hat{p}_j(k)}. \quad (3.99)$$

O algoritmo converge para $\hat{p}^* \geq p^*$. Entretanto, $\hat{p}^* \rightarrow p^*$ quando $\alpha_i \rightarrow 1$ ou $\hat{\gamma}_i \rightarrow \infty$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Comentário 4. Note que quando $\alpha_i = 1$ para $i = 1, \dots, n$, o algoritmo (3.98) reduz-se ao algoritmo (2.17), isto é, ao algoritmo determinístico, quando cada ganho do canal é substituído pelo seu valor esperado.

3.2.3 Notas e Referências

1. A seguir, apresenta-se um algoritmo que gera uma seqüência $\{p(k)\}_{k=1}^{\infty}$, a qual converge para a solução ótima do problema não convexo de CPT via o VaR com nível $\alpha = [\alpha_i]$, definido em (2.26) como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{VaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.100)$$

onde p_i representa a potência transmitida no i -ésimo enlace, G_{ij} denota o ganho do canal do transmissor do j -ésimo enlace ao receptor do i -ésimo enlace considerando que as condições H1 e H2 são satisfeitas e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Finalmente, para o i -ésimo enlace, $\underline{\gamma}_i$ denota o limiar inferior do SINR requerido e o VaR_{α_i} representa o VaR com nível α_i , caracterizado na Definição 7.

O algoritmo utiliza a propriedade da dominância do CVaR sobre o VaR, isto é, $\text{CVaR}_{\alpha}(X) \geq \text{VaR}_{\alpha}(X)$ e considera-se que existe um valor de α^0 tal que $\text{CVaR}_{\alpha^0} = \text{VaR}_{\alpha}$ (cf. [86]). Sendo assim, a cada iteração, o algoritmo determina a solução do problema convexo de CPT via o CVaR com nível $\alpha(k)$. Essa solução aproxima-se da solução do problema de CPT via o VaR quando $\alpha(k) \rightarrow \alpha^0$.

Algoritmo que calcula uma solução do problema de CPT via o VaR com nível α :

Passo 1: Considere $\delta_i = 0,001$ e $\epsilon_i = 0,001$ para $i = 1, \dots, n$ e faça $k = 1$ e $\alpha(k) = \alpha$;

Passo 2: Resolva o problema convexo

$$\min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{sujeito a:}$$

$$\underline{\gamma}_i \eta_i + \frac{1}{\alpha_i(k)} \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij} p_j - \mu_{ii} p_i - \frac{1 - \alpha_i(k)}{\alpha_i(k)} \mu_{ii} p_i (\ln(1 - \alpha_i(k)) + \sum_{j \neq i} \ln(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i})) \leq 0,$$

$$i = 1, \dots, n,$$

e faça $p(k) = p$;

Passo 3: Para cada enlace, calcule

$$P(\Gamma_i(k) = \frac{G_{ii} p_i(k)}{\sum_{j \neq i} G_{ij} p_j(k) + \eta_i} < \underline{\gamma}_i) = 1 - \exp\left(-\frac{\underline{\gamma}_i \eta_i}{\mu_{ii} p_i(k)}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j(k)}{\mu_{ii} p_i(k)}\right)^{-1}.$$

Se $P(\Gamma_i(k) < \underline{\gamma}_i) < \alpha_i$, faça $\alpha_i(k+1) = \alpha_i(k) - \delta_i$; caso contrário, faça $\alpha_i(k+1) = \alpha_i(k) + \delta_i$;

Passo 4: Para cada enlace, verifique se o seguinte critério de parada do algoritmo é satisfeito:

$\|P(\Gamma_i(k) < \underline{\gamma}_i) - \alpha_i\| \leq \epsilon_i$. Em caso negativo, adote $k = k + 1$ e retorne ao Passo 2.

2. Em [69], define-se a medida de risco Bernstein com nível $\alpha \in (0,1)$ como

$$\text{Bernstein}_\alpha(X) = \inf_{t>0} t \log(\alpha^{-1} E[\exp(-t^{-1} X)]). \quad (3.101)$$

O conjunto de aceitabilidade, associado a essa medida de risco, é dado por

$$\mathcal{A}_{\text{Bernstein}_\alpha}(X) = \{X \mid \text{Bernstein}_\alpha(X) = \inf_{t>0} t \log(\alpha^{-1} E[\exp(-t^{-1} X)]) \leq 0\}. \quad (3.102)$$

Pode-se demonstrar que esse conjunto é um conjunto convexo e está contido no conjunto de aceitabilidade não convexo associado ao VaR, ou seja,

$$\mathcal{A}_{\text{Bernstein}_\alpha} \subset \mathcal{A}_{\text{VaR}_\alpha}. \quad (3.103)$$

Sendo assim, uma aproximação convexa para o problema de CPT via o VaR pode ser

estabelecida como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \text{Bernstein}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.104)$$

onde p_i denota a potência transmitida no i -ésimo enlace, G_{ij} é uma variável aleatória que representa o ganho do canal entre o transmissor do j -ésimo enlace e o receptor do i -ésimo enlace e η_i descreve o ruído no receptor do i -ésimo enlace. Além disso, $\underline{\gamma}_i$ denota o limiar do SINR requerido no i -ésimo enlace. Finalmente, para cada enlace, $\text{Bernstein}_{\alpha_i}$ denota a medida de risco Bernstein com nível $\alpha_i \in (0,1)$, definida em (3.101).

Considerando que as variáveis aleatórias $\{G_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$, as quais descrevem o estado do sistema de comunicações sem fio, são mutuamente independentes, isto é, a condição H2 é satisfeita, a solução do problema (3.104) pode ser obtida em termos do seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \inf_{t > 0} \{ \underline{\gamma}_i \eta_i + \sum_{j \neq i} t \Lambda_{G_{ij}}(t^{-1} \underline{\gamma}_i p_j) + t \Lambda_{G_{ii}}(-t^{-1} p_i) - t \log \alpha_i \} \leq 0, \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde $\Lambda_{G_{ij}}(t) = \log M_{G_{ij}}(t)$ representa o logaritmo da função geradora de momentos $M_{G_{ij}}(t) = E[\exp(tG_{ij})]$.

Observe que, no problema (3.105), podem ser utilizados diversos modelos probabilísticos para descrever o desvanecimento rápido do sinal de rádio. Por exemplo, num ambiente Nakagami- m , a potência do sinal recebido G_{ij} , para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, é descrita por uma variável aleatória com distribuição Gamma

$$F_{G_{ij}}(g_{ij}) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m_{ij})} \Gamma(m_{ij}, \frac{m_{ij} g_{ij}}{\mu_{ij}}), \quad (3.106)$$

onde $\Gamma(a, b) = \int_b^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx$ representa a função Gamma incompleta, $\Gamma(a) = \Gamma(a, 0)$ denota a função Gamma, $\mu_{ij} = E[G_{ij}]$ denota o valor esperado de G_{ij} e $m_{ij} \geq 0,5$ é o fator de desvanecimento de G_{ij} . Para valores de $m_{ij} \geq 1$, tem-se um desvanecimento brando e, para valores de $m_{ij} \leq 1$, tem-se um desvanecimento severo. Em particular, quando $m_{ij} = 1$, o ganho do canal representa o desvanecimento rápido do sinal de rádio num ambiente Rayleigh.

A função geradora de momentos associada a uma variável aleatória com distribuição Gamma é dada por

$$M_{G_{ij}}(t) = \left(\frac{m_{ij}}{m_{ij} - \mu_{ij}t} \right)^{m_{ij}}, \quad m_{ij} - \mu_{ij}t > 0. \quad (3.107)$$

Considerando que, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, o ganho G_{ij} satisfaz a hipótese H1, ou seja, $m_{ij} = 1$ e, substituindo a função geradora de momentos $M_{G_{ij}}(t)$, apresentada em (3.107), nas restrições de desigualdade do problema de otimização convexa (3.105), o mesmo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \inf_{t>0} \left\{ \underline{\gamma}_i \eta_i + \sum_{j \neq i} t \log \left(\frac{t}{t - \underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j} \right) + t \log \left(\frac{t}{t + \mu_{ii} p_i} \right) - t \log \alpha_i \right\} \leq 0, \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.108)$$

3. O problema de CPT com aversão ao risco pode ser formulado como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i + \mathcal{D}_i(G_{ii} p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) \\ \text{sujeito a:} \quad & E[G_{ii} p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i] \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde

- o vetor de decisão do problema é dado por $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$ (vetor de potências transmitidas);
- os dados do problema são representados através do conjunto $\{\eta, G, \underline{\gamma}\}$, sendo
 - $\eta = [\eta_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor que contém o ruído no receptor de cada enlace;
 - $G = [G_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, a matriz de ganhos do canal; e
 - $\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor que contém os limiares inferiores de recepção do SINR para cada enlace.

Considera-se que

- (H1) o ganho do canal G_{ij} descreve o desvanecimento rápido do sinal de rádio num ambiente Rayleigh. Sendo assim, a amplitude do sinal recebido G_{ij} é uma variável

aleatória, definida no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , a qual é exponencialmente distribuída. Logo,

$$F_{G_{ij}}(g_{ij}) = P(G_{ij} \leq g_{ij}) = 1 - \exp\left(-\frac{g_{ij}}{\mu_{ij}}\right), \quad (3.110)$$

onde $\mu_{ij} = E[G_{ij}]$ denota o valor esperado de G_{ij} ;

(H2) as variáveis aleatórias $\{G_{ij}; \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ são mutuamente independentes;

- os elementos estruturais do problema são descritos pelo conjunto $\{n, \mathcal{D}_i, \leq\}$, sendo
 - $n \in \mathbb{Z}_+$, o número de enlaces ativos;
 - \mathcal{D}_i , uma medida de dispersão limitada no range inferior. Especificamente, $\mathcal{D}_i = \text{CVaR}_{\alpha_i}^\Delta$;
 - \leq representa $\preceq_{\mathbb{R}_+}$, a ordem parcial associada ao conjunto cônico convexo e fechado \mathbb{R}_+ .

Aplicando o Teorema 4 e a Proposição 8, o $\text{CVaR}_{\alpha_i}^\Delta(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i)$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\alpha_i}^\Delta(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) &= \\ E[G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i] + \text{CVaR}_{\alpha_i}(G_{ii}p_i - \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j - \underline{\gamma}_i \eta_i) &= \\ \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij}p_j - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii}p_i \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \left(\ln\left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Logo, baseado no Teorema 8, a solução do problema (3.109) pode ser expressa em termos do seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij}p_j - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \mu_{ii}p_i \left(\ln(1 - \alpha_i) + \sum_{j \neq i} \left(\ln\left(1 + \frac{\underline{\gamma}_i \mu_{ij} p_j}{\mu_{ii} p_i}\right) \right) \right) \\ \text{sujeito a:} \quad & \underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \mu_{ij}p_j - \mu_{ii}p_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.112)$$

3.3 Exemplos Ilustrativos

A seguir, apresentam-se exemplos numéricos que ilustram os resultados obtidos na Seção 3.2. Utilizam-se funções do MATLAB que permitem determinar a solução de problemas de otimização não linear. Considere um sistema de comunicações sem fio com dois enlaces ativos ($n = 2$). O limiar do SINR requerido e o ruído no receptor são

$$\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_1 \quad \underline{\gamma}_2] = [6\text{dB} \quad 5,5\text{dB}] \quad \text{e} \quad \eta = [\eta_1 \quad \eta_2] = [0,001 \quad 0,002], \quad (3.113)$$

respectivamente. Seja o desvanecimento rápido de cada canal de rádio caracterizado através de um ambiente Rayleigh com parâmetros

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,56880 & 0,00374 \\ 0,00402 & 0,38260 \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

No primeiro exemplo, com o propósito de apresentar as diferenças entre as soluções do problema de CPT via o CVaR e o VaR, denotadas por p_{CVaR}^* e p_{VaR}^* respectivamente, calcula-se a degradação média da qualidade do i -ésimo enlace, definida como

$$\tilde{\gamma}_i = \underline{\gamma}_i - \text{CVaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*)), \quad (3.115)$$

onde $\Gamma_i(p^*)$ representa o SINR no i -ésimo enlace quando $p^* = p_{\text{CVaR}}^*$ ou $p^* = p_{\text{VaR}}^*$. Mostra-se que $\tilde{\gamma}_i$ é menor quando a solução do problema de CPT é obtida via o CVaR do que aquele obtido via o VaR. Finalmente, verifica-se que a solução do problema de CPT via o Bernstein, denotada por $p_{\text{Bernstein}}^*$, é mais conservativa, dado que a potência total transmitida é maior.

No segundo exemplo, considerando que o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada inferior e superiormente, determina-se a solução do problema de CPT via o CVaR, por meio de um algoritmo subótimo e distribuído. A convergência da seqüência de valores gerada pelo algoritmo, denotada por $\{\hat{p}(k)\}$, para uma solução subótima do problema é comprovada através do cálculo da distância normalizada entre $\hat{p}(k)$ e p_{CVaR}^* , definida como

$$d(\hat{p}(k), p_{\text{CVaR}}^*) = \frac{\|\hat{p}(k) - p_{\text{CVaR}}^*\|_\infty}{\|\hat{p}(0) - p_{\text{CVaR}}^*\|_\infty}. \quad (3.116)$$

Considere que o critério de parada do algoritmo é dado por

$$\frac{\|\hat{p}(k+1) - \hat{p}(k)\|_\infty}{\|\hat{p}(k)\|_\infty} \leq 1 \times 10^{-4}. \quad (3.117)$$

Exemplo 1. Aplicando o Teorema 11, ou equivalentemente, o Teorema 12, a solução ótima do problema de CPT, que minimiza a potência total transmitida, considerando que o risco da qualidade de cada enlace é quantificado mediante o CVaR com nível $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2] = [0,10 \ 0,15]$, é dada por

$$p_{\text{CVaR}}^* = \begin{bmatrix} p_{1,\text{CVaR}}^* & p_{2,\text{CVaR}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3817 & 0,4310 \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Além disso, tem-se que

$$\text{VaR}_{\alpha_1}(Z_1^*) = -0,012569, \quad \text{VaR}_{\alpha_2}(Z_2^*) = -0,014351, \quad (3.119)$$

$$\text{CVaR}_{\alpha_1}(Z_1^*) = 1,3878 \times 10^{-16} \quad \text{e} \quad \text{CVaR}_{\alpha_2}(Z_2^*) = 4.1633 \times 10^{-17}, \quad (3.120)$$

onde

$$Z_1^* = G_{11}p_{1,\text{CVaR}}^* - \underline{\gamma}_1 G_{12}p_{2,\text{CVaR}}^* - \underline{\gamma}_1 \eta_1, \quad \text{e} \quad Z_2^* = G_{22}p_{2,\text{CVaR}}^* - \underline{\gamma}_2 G_{21}p_{1,\text{CVaR}}^* - \underline{\gamma}_2 \eta_2.$$

Na equação (3.120), note que as restrições de desigualdade do problema de CPT via o CVaR estão ativas na sua solução ótima p_{CVaR}^* , verificando o resultado apresentado no Teorema 13.

Por outro lado, aplicando o algoritmo definido na Subseção 3.2.3, a solução do problema de CPT via o VaR com nível $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2] = [0,10 \ 0,15]$, é dada por

$$p_{\text{VaR}}^* = \begin{bmatrix} p_{1,\text{VaR}}^* & p_{2,\text{VaR}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0992 & 0,1369 \end{bmatrix}. \quad (3.121)$$

Com o objetivo de determinar a degradação média da qualidade do enlace, definida em (3.115), gera-se realizações das variáveis aleatórias $\Gamma_i(p^*)$ para $i = 1,2$ quando a potência transmitida p^* é a solução dos problemas de otimização estocástica via CVaR e VaR. De posse dessa informação, calcula-se a função de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias $\Gamma_i(p^*) \mid \Gamma_i(p^*) \leq -\text{VaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*))$ para $i = 1,2$, a qual é mostrada na Figura 3.2. Sendo assim, os valores médios dessas variáveis aleatórias, isto é, $\text{CVaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*)) = E[\Gamma_i(p) \mid \Gamma_i(p^*) \leq -\text{VaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*))]$, verificam as seguintes desigualdades

$$\text{CVaR}_{\alpha_1}(\Gamma_1(p_{\text{CVaR}}^*)) = 6,4849 \text{ dB} \geq \text{CVaR}_{\alpha_1}(\Gamma_1(p_{\text{VaR}}^*)) = 2,9805 \text{ dB}, \quad (3.122)$$

$$\text{CVaR}_{\alpha_2}(\Gamma_2(p_{\text{CVaR}}^*)) = 5,7484 \text{ dB} \geq \text{CVaR}_{\alpha_2}(\Gamma_2(p_{\text{VaR}}^*)) = 2,4129 \text{ dB}. \quad (3.123)$$

Logo, a solução fornecida pelo problema de CPT via o CVaR tem uma degradação na qualidade do enlace menor do que aquela obtida através da solução do problema de CPT via o VaR.

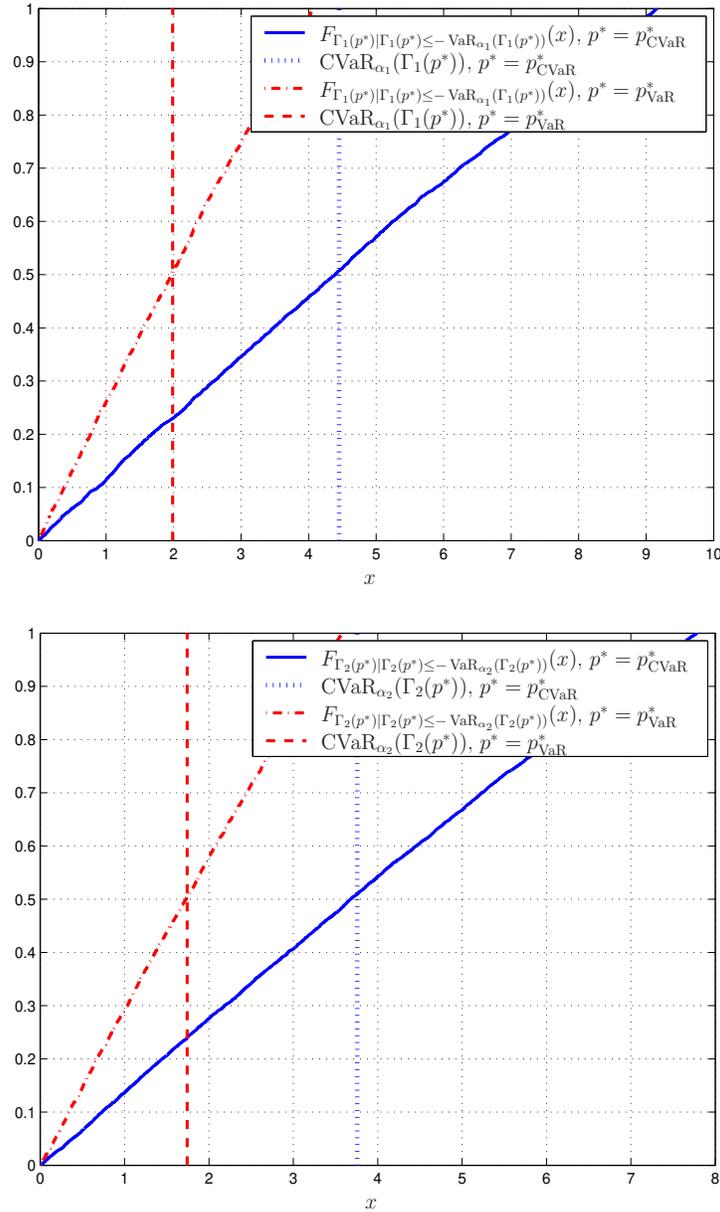


Fig. 3.2: Função de distribuição de probabilidade e valor esperado das variáveis aleatórias $\Gamma_i(p^*) \mid \Gamma_i(p^*) \leq -\text{VaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*))$ quando $p^* = p_{CVaR}^*$ e $p^* = p_{VaR}^*$ para $i = 1, 2$.

O gráfico das realizações das variáveis aleatórias $\Gamma_i(p^*)$, denotado como $\gamma_i(p^*, k)$, assim como também os valores do $\underline{\gamma}_i$ e $\text{CVaR}_{\alpha_i}(\Gamma_i(p^*))$ são apresentadas nas Figuras 3.3 e 3.4.

Finalmente, a solução do problema de otimização convexa (3.108), a qual fornece a potência transmitida ótima que minimiza a potência total transmitida quando o risco da qualidade do enlace é medido através da medida de risco Bernstein com nível $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2] = [0,10 \ 0,15]$, é

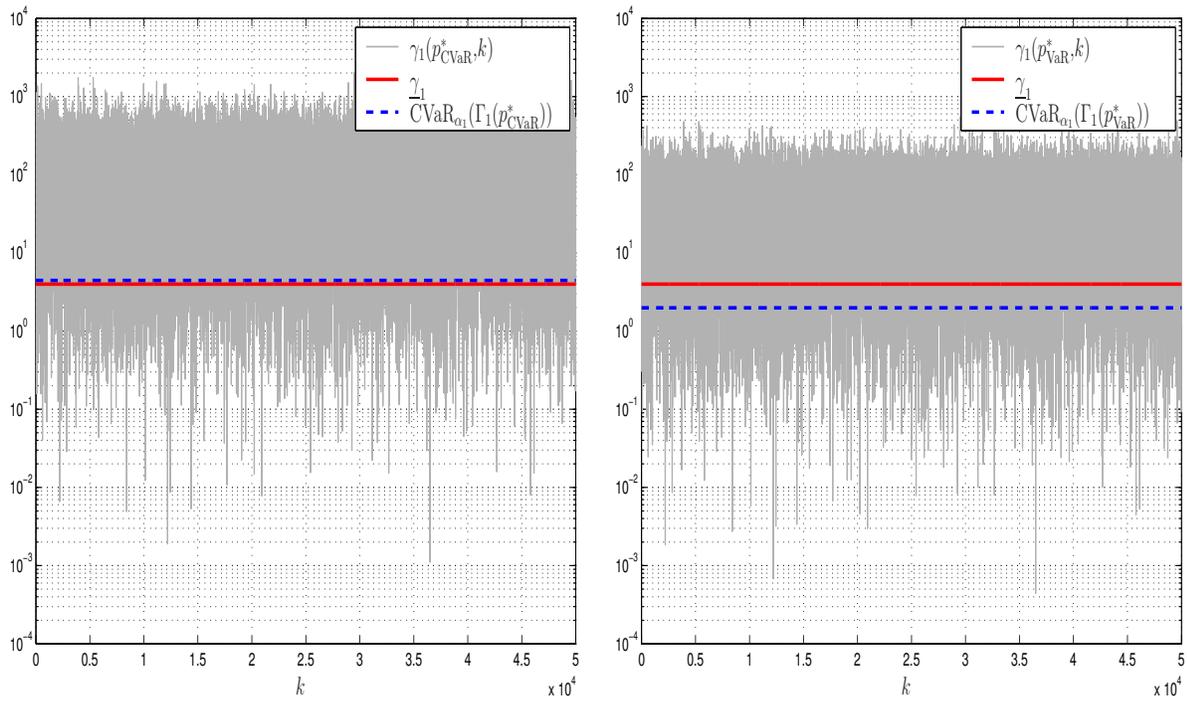


Fig. 3.3: Amostras do SINR no primeiro enlace via o CVaR (esquerda) e o VaR (direita).

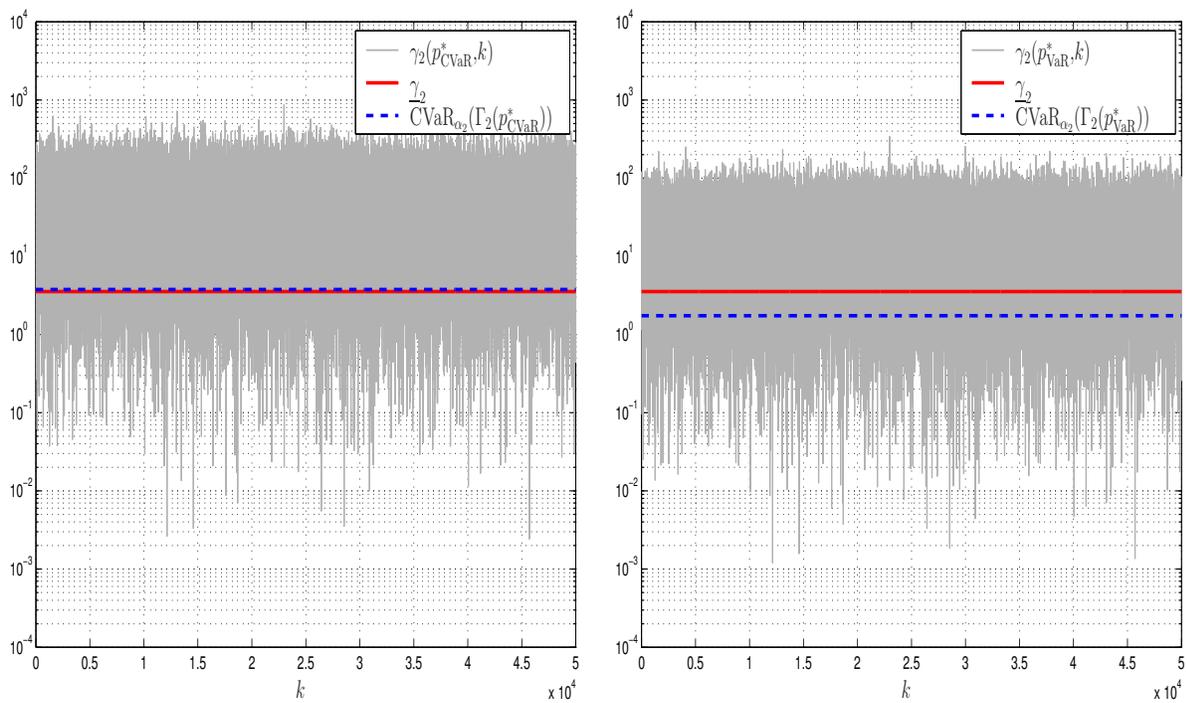


Fig. 3.4: Amostras do SINR no segundo enlace via o CVaR (esquerda) e o VaR (direita).

dada por

$$p_{\text{Bernstein}}^* = \begin{bmatrix} p_{1, \text{Bernstein}}^* & p_{2, \text{Bernstein}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,3148 & 4,2022 \end{bmatrix}. \quad (3.124)$$

Note que a solução fornecida pelo problema de otimização estocástica via o CVaR é menos conservativa, uma vez que a potência total transmitida é menor.

Exemplo 2. Considere que, no sistema de comunicações sem fio antes descrito, os limiares do SIR requerido são $\underline{\gamma}_1 = 6\text{dB}$ e $\underline{\gamma}_2 = 5.5\text{dB}$, o ruído é nulo, isto é, $\eta_1 = \eta_2 = 0$ e os valores da potência transmitida são limitados superior e inferiormente pelos seguintes valores $\underline{p}_1 = 0,1$, $\underline{p}_2 = 0,05$ e $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 6$.

Nesse contexto, aplicando o Corolário 1, a solução ótima do problema de CPT que minimiza a potência total transmitida, considerando que o risco da qualidade de cada enlace é quantificado mediante o CVaR com nível $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2] = [0,10 \ 0,15]$, é dada por

$$p_{\text{CVaR}}^* = \begin{bmatrix} p_{1, \text{CVaR}}^* & p_{2, \text{CVaR}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,055715 \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema 15, o algoritmo distribuído do problema de CPT via o CVaR, baseado somente em informação local, gera uma seqüência de valores da potência transmitida, denotada por $\{\hat{p}(k)\}$, que converge para a seguinte solução subótima do problema

$$\hat{p}_{\text{CVaR}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_{1, \text{CVaR}} & \hat{p}_{2, \text{CVaR}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,055758 \end{bmatrix}. \quad (3.126)$$

Na Figura 3.5, apresentam-se os valores da distância normalizada entre $\hat{p}(k)$ e p_{CVaR}^* calculados através da equação (3.116). Essa figura mostra a convergência desse algoritmo para um ponto próximo do ótimo e observa-se que sua taxa de convergência é linear.

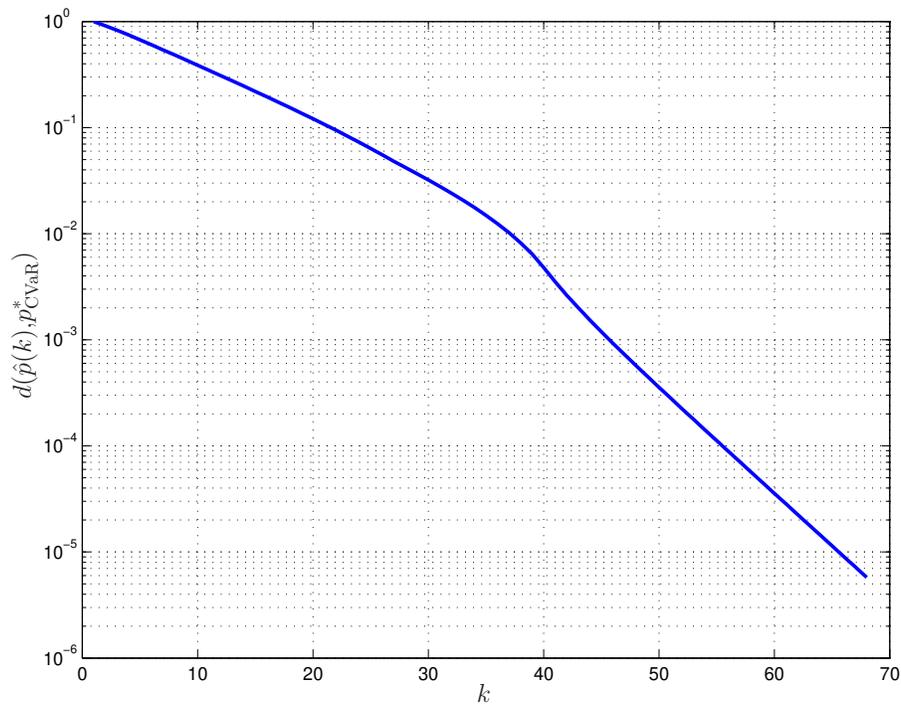


Fig. 3.5: Distância normalizada entre $\hat{p}(k)$ e p_{CVaR}^* para cada iteração do algoritmo distribuído de CPT via o CVaR.

Capítulo 4

O Problema de CPT via Otimização Robusta

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a solução ótima do problema de otimização robusta definido em (2.34).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 4.1, apresentam-se algumas definições e conceitos da Teoria de Otimização Robusta que foram utilizadas na Seção 4.2. Para maiores detalhes, consulte [32, 34, 87] e suas referências. Na Seção 4.2, apresenta-se a solução do problema de CPT considerando que os ganhos do canal e o ruído no receptor são incertos. Especificamente, supõe que esses parâmetros são desconhecidos, mas pertencem a um determinado conjunto convexo. Nessas condições, a solução do problema robusto de CPT é apresentada em termos de um problema de otimização convexa. Portanto, para obter a solução numérica desse problema, algoritmos altamente eficientes podem ser utilizados. Finalmente, com o propósito de ilustrar os resultados obtidos na Seção 4.2, são apresentados alguns exemplos numéricos na última seção deste capítulo (Seção 4.3).

4.1 Preliminares

Considere o seguinte problema de otimização cônica (POC) (cf. [33, 34])

$$(POC) \quad \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} \{c^T x : f(x, y) \preceq_{\mathbb{K}} 0\},$$

onde:

- o vetor de decisão do problema é representado por x , o qual assume valores no conjunto convexo e fechado $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$;

- o vetor de dados do problema é representado por $y = [y_1; \dots; y_m] \in \mathbb{R}^m$; e
- os elementos estruturais do problema são descritos pelo conjunto $\{n, m, f(\cdot, \cdot), \preceq_{\mathbb{K}}\}$, onde n e m denotam as dimensões dos vetores x e y respectivamente, $f(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa uma função \mathbb{K} -convexa em x , isto é,

$$\forall (x, x' \in \mathcal{X}, y \in \mathbb{R}^m) \text{ e } \forall \lambda \in [0, 1]: f(\lambda x + (1 - \lambda)x', y) \preceq_{\mathbb{K}} \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(x', y)$$

e $\preceq_{\mathbb{K}}$ denota a ordem parcial associada ao conjunto cônico convexo e fechado \mathbb{K} .

No POC, implicitamente considera-se que o vetor de dados, no momento de determinar a solução do problema, é exatamente conhecido pelo decisor. Entretanto, em aplicações práticas, o ambiente de decisão pode ser caracterizado pelas seguintes condições (cf. [41, 87]):

- (i) Os dados do problema podem ser parcialmente conhecidos pelo decisor, uma vez que esses parâmetros provêm de algum processo de medição ou estimação;
- (ii) A solução ótima do problema, mesmo que calculada com bastante precisão, dificilmente poderá ser implementada de maneira exata, resultando na incerteza da factibilidade da solução implementada;
- (iii) As restrições do problema devem permanecer factíveis, para todos os possíveis valores assumidos pelo vetor de dados;
- (iv) Usualmente, a solução ótima torna-se severamente infactível quando os dados nominais do problema sofrem perturbações relativamente pequenas.

As condições (i) e (ii) implicam que o ambiente de decisão define um problema de otimização cônica incerto (POCI). Esse problema é caracterizado por um conjunto de POC com a mesma estrutura $\{n, m, f(\cdot, \cdot), \mathbb{K}\}$, porém o vetor de dados y pertence ao conjunto incerto $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$, isto é,

$$(POCI) \quad \left\{ \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} \{c^T x : f(x, y) \preceq_{\mathbb{K}} 0\} \mid y \in \mathcal{Y} \right\}.$$

O POC, para um determinado valor do vetor de dados y no conjunto incerto \mathcal{Y} , define uma realização do POCI.

A condição (iii) implica que o vetor de decisão x do POCI deve satisfazer a seguinte restrição

$$f(x, y) \preceq_{\mathbb{K}} 0, \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Note que essa condição de factibilidade também é utilizada na Teoria de Controle Robusto (cf. [54]).

A condição (iv) implica que, em aplicações práticas, não se pode ignorar que pequenas perturbações nos dados podem tornar infactível a solução ótima do POC.

Com o objetivo de obter um controlador que atue no ambiente de decisão descrito anteriormente, em [32, 37, 38, 39, 40, 41] foi desenvolvida a Teoria de Otimização Robusta. Essa teoria associa ao POCI um único problema de otimização cônica, denominado de contrapartida robusta associada ao POCI, definido como

$$(POCR) \quad \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} \{c^T x : f(x, y) \preceq_{\mathbb{K}} 0, \forall y \in \mathcal{Y}\}.$$

Observe que uma solução factível para o POOCR, por definição, deve satisfazer as restrições do problema para qualquer valor assumido pelo vetor de dados y no conjunto incerto \mathcal{Y} . Essa solução é denominada de solução factível robusta do POCI e a solução ótima do POOCR é denominada de solução ótima robusta do POCI.

É importante notar que o POOCR é um problema de otimização semi-infinita, uma vez que esse problema tem infinitas restrições parametrizadas pelo vetor de dados $y \in \mathcal{Y}$. Conseqüentemente, para determinar a solução do POOCR através de algoritmos altamente eficientes, como, por exemplo, o algoritmo baseado no método de pontos interiores, deve-se restringir a estrutura da função f e do conjunto incerto \mathcal{Y} . A seguir, apresentam-se as proposições, estabelecidas em [32], que determinam essas restrições e que permitem reescrever, de forma equivalente, as desigualdades semi-infinitas como restrições cônicas, na forma padrão.

Considere que

(H1) O POCI tem incerteza convexa, isto é, a função $f(x, y)$ é \mathbb{K} -convexa em y para cada $x \in \mathcal{X}$. Logo,

$$\forall (x \in \mathcal{X}, y, y' \in \mathcal{Y}) \text{ e } \forall \lambda \in [0, 1]: f(x, \lambda y + (1 - \lambda)y') \preceq_{\mathbb{K}} \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(x, y').$$

Proposição 12. [32] Sejam P um POCI que satisfaz a condição (H1) e P' um POCI obtido a partir de P , ao substituir o conjunto incerto \mathcal{Y} pela sua caixa convexa fechada ($\mathcal{Y}' = \text{conv } \mathcal{Y}$). Então, as contrapartidas robustas de P e P' são idênticas.

Baseado na Proposição 12, sem perda de generalidade, supõe-se que

(H2) O conjunto incerto \mathcal{Y} é convexo e fechado.

A seguinte proposição é uma conseqüência direta das condições (H1) e (H2).

Proposição 13. [32] Considere um POCI que satisfaz as condições (H1) e (H2) e suponha que o conjunto factível da contrapartida robusta do POCI (ou seja, o PO CR) não é vazio. Então, todas as realizações do POCI são factíveis. Além disso, o valor ótimo do PO CR é maior ou igual ao ótimo valor de cada realização do POCI.

A partir da Proposição 13, conclui-se que geralmente existe uma diferença entre as propriedades da solução de cada uma das realizações do POCI e do PO CR. Por exemplo, pode acontecer que todas as realizações de um POCI sejam factíveis, mas que o PO CR não seja factível. Outro caso possível é que o valor ótimo do PO CR seja maior que os valores ótimos de todas as realizações do POCI. Em [32], estabeleceram-se condições necessárias e suficientes, que garantem que os dois cenários exemplificados anteriormente não aconteçam. Essas condições são reproduzidas a seguir, considerando que $y = [y_1; \dots; y_n] \in \mathbb{R}^m$, onde $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ com $\sum_{i=1}^n m_i = m$ e $f(x, y) = [f_1(x, y); \dots; f_n(x, y)]$.

(H3) O cone \mathbb{K} define o espaço n -dimensional dos reais não-negativos, i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^n$;

(H4) A i -ésima componente da função $f(\cdot, \cdot)$ depende do vetor de decisão (x) e da i -ésima componente do vetor de dados (y_i), a qual assume valores no conjunto convexo e fechado $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$. Sendo assim, o conjunto incerto \mathcal{Y} é definido pelo produto cartesiano dos conjuntos \mathcal{Y}_i para $i = 1, \dots, n$. Ou seja, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_n \subseteq \mathbb{R}^m$;

(H5) O POCI tem incerteza afim, isto é, a função $f(x, y)$ é afim em y para cada $x \in \mathcal{X}$. Especificamente, para um valor fixo de i , a função $f_i(\cdot, \cdot): \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathbb{R}$, denominada de função convexa perturbada de forma afim, é definida como

$$f_i(x, y_i) = f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} f_{ji}(x),$$

onde $f_{0i}(\cdot)$ representa uma função convexa. Além disso, para cada valor de $j = 1, \dots, m_i$, $f_{ji}(\cdot)$ denota uma função convexa se $y_{ij} \geq 0$. Por outro lado, $f_{ji}(\cdot)$ denota uma função afim se $y_{ij} < 0$.

Proposição 14. [32] Considere que o POCI satisfaz as condições (H2), (H3), (H4) e (H5). Então, a contrapartida robusta do POCI (isto é, o PO CR) é factível se e somente se todas as realizações do POCI são factíveis. Além disso, o valor ótimo do PO CR é o supremo de todos os valores ótimos das realizações do POCI.

A partir deste ponto, restringe-se a análise do POCR associado ao POCI, que satisfaz as condições impostas pela Proposição 14, denotado por

$$(POCR) \quad \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} \{c^T x : f_i(x, y_i) \leq 0, \forall y_i \in \mathcal{Y}_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Observando o POCR a partir de uma perspectiva diferente, a seguinte equivalência

$$f_i(x, y_i) \leq 0, \forall y_i \in \mathcal{Y}_i \quad \Leftrightarrow \quad \max_{y_i \in \mathcal{Y}_i} f_i(x, y_i) \leq 0$$

permite expressar o POCR como o seguinte caso particular de um problema de otimização de dois níveis (PODN) (cf. [88])

$$(PODN) \quad \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} \{c^T x : w_i(x) \leq 0, w_i(x) = \max_{y_i \in \mathcal{Y}_i} f_i(x, y_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Observe que, para calcular a solução do PODN, considera-se o valor assumido pela a função $w_i(x)$ no seu pior caso. Ou seja, se existe $y_i^* \in \mathcal{Y}_i$ tal que $f_i(x, y_i^*) \geq f_i(x, y_i)$ para todo $y_i \in \mathcal{Y}_i$, então a desigualdade $w_i(x) = f_i(x, y_i^*) \leq 0$ implica que $f_i(x, y_i) \leq 0$ para todo $y_i \in \mathcal{Y}_i$.

Para determinar explicitamente a solução do problema de otimização interna no PODN, é necessário restringir a estrutura do conjunto incerto \mathcal{Y} . Logo, considere que

(H6) O conjunto incerto \mathcal{Y}_i é dado por

$$\mathcal{Y}_i = \left\{ y_i = y_i^0 + \sum_{k=1}^{m_i} \delta y_i^k u_k : \|u\| \leq \Omega_i \right\},$$

onde y_i^0 representa o valor nominal do parâmetro incerto y_i e δy_i^k para $k = 1, \dots, m_i$, denota o conjunto de vetores que caracterizam a perturbação do vetor y_i . Finalmente, Ω_i denota o parâmetro de robustez do problema e $\|\cdot\|$ representa uma norma vetorial absoluta, isto é, uma norma que satisfaz a propriedade $\|u\| = \|\|u\|\|$.

Note que, se as condições (H5) e (H6) são válidas, então o problema de otimização nominal, isto é, o problema onde não existe incerteza nos dados ($\Omega_i = 0, i = 1, \dots, n$), é expresso por

$$\min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} \{c^T x : f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) \leq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Na próxima proposição, determina-se explicitamente a solução do problema de otimização interna no PODN, de forma similar ao determinado em [89]. Para tanto, apresenta-se a seguinte definição.

Definição 14. Seja $\|x\|$ a norma do vetor x em \mathbb{R}^n . Então, a função

$$\|y\|^D = \max_{\|x\| \leq 1} y^T x$$

é denominada de norma dual.

Proposição 15. Seja $w_i(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa caracterizada por

$$w_i(x) = \max_{y_i \in \mathcal{Y}_i} f_i(x, y_i),$$

onde a função $f_i(x, y_i)$ e o conjunto \mathcal{Y}_i satisfazem as condições (H5) e (H6), respectivamente. Então, a função $w_i(x)$ pode ser equivalentemente expressa como

$$w_i(x) = f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^1 f_{ji}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^n f_{ji}(x) \end{bmatrix} \right\|^D. \quad (4.1)$$

Demonstração. Baseado nas condições (H5) e (H6), tem-se que

$$w_i(x) = \max_{y_i \in \mathcal{Y}_i} f_i(x, y_i) = f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \max_{\|u\| \leq \Omega_i} u^T \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^1 f_{ji}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^n f_{ji}(x) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Definindo $u_i = \Omega_i s_i$ e aplicando a Definição 14 no lado direito da equação (4.2), a expressão (4.1) está justificada. \square

No seguinte teorema, é apresentada a solução do POQR em termos de um problema de otimização cônica.

Teorema 16. Considere que o POCI satisfaz as condições (H5) e (H6). Então, a contrapartida robusta associada ao POCI é equivalente ao seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} c^T x \\ & \text{sujeito a: } f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^1 f_{ji}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^n f_{ji}(x) \end{bmatrix} \right\|^D \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sendo assim, o problema (4.3) fornece a solução ótima robusta do POCI.

Comentário 5. Em relação ao problema (4.3), se

- (i) $\Omega = 0$, isto é, quando não existe incerteza nos parâmetros do POCl, recupera-se a solução ótima do problema nominal associado ao POCl;
- (ii) $\Omega \neq 0$, evidentemente seu conjunto factível está contido no conjunto factível do problema nominal.

Observe que, nas restrições de desigualdade do problema (4.3), o termo não-negativo representa a margem de segurança, que torna robusta a restrição de desigualdade do problema nominal. Essa margem de segurança é função (i) do parâmetro de robustez (Ω), (ii) do conjunto de vetores de perturbação dos dados ($\{\delta y^k, k = 1, \dots, n\}$) e (iii) da norma utilizada na definição do conjunto incerto \mathcal{Y} . Na proposição a seguir, obtêm-se desigualdades cônicas que são equivalentes às restrições de desigualdade do problema (4.3) para vários tipos de normas absolutas, aplicando o seguinte lema.

Lema 3. Sejam l_2 , l_∞ e $l_{2\cap\infty}$ normas vetoriais em \mathbb{R}^n , definidas como

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad e$$

$$\|x\|_{2\cap\infty} = \max\{\|x\|_2, \Upsilon \|x\|_\infty\}, \quad \text{onde } \Upsilon > 0$$

respectivamente. Então, as seguintes expressões

- (i) $\|x\|_2^D \leq y \Leftrightarrow \|x\|_2 \leq y$;
- (ii) $\|x\|_\infty^D \leq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n z_i \leq y, \quad -z \leq x \leq z$;
- (iii) $\|x\|_{2\cap\infty}^D \leq y \Leftrightarrow \|x - z\|_2 + \frac{1}{\Upsilon} \sum_{i=1}^n z_i \leq y, \quad z \geq 0$;

são válidas.

Proposição 16. A desigualdade

$$f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \Omega \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^1 f_{ji}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^n f_{ji}(x) \end{bmatrix} \right\|^D \leq 0$$

é equivalente

(i) à restrição cônica de segunda ordem

$$f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^1 f_{ji}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^n f_{ji}(x) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq 0,$$

quando o conjunto incerto \mathcal{Y}_i é definido utilizando a norma $l_2 = \|\cdot\|_2$;

(ii) às restrições lineares

$$f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \Omega_i \sum_{k=1}^n z_{ki} \leq 0, \quad -z_{ki} \leq \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^k f_{ji}(x) \leq z_{ki}, \quad k = 1, \dots, n,$$

quando o conjunto incerto \mathcal{Y}_i é definido utilizando a norma $l_\infty = \|\cdot\|_\infty$;

(iii) às restrições cônicas de segunda ordem

$$f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^0 f_{ji}(x) + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^1 f_{ji}(x) - z_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_i} \delta y_{ij}^n f_{ji}(x) - z_{ni} \end{bmatrix} \right\|_2 + \frac{\Omega_i}{\Upsilon_i} \sum_{k=1}^n z_{ki} \leq 0, \quad z_i \geq 0,$$

quando o conjunto incerto \mathcal{Y}_i é definido utilizando a norma $l_{2 \cap \infty} = \max\{\|\cdot\|_2, \Upsilon_i \|\cdot\|_\infty\}$ onde $\Upsilon_i > 0$.

Em particular, note que, para tornar robustas as restrições do problema nominal, o custo associado é o incremento da complexidade do problema. No item (i), onde o conjunto incerto é definido através de uma elipse, mantém-se o número de variáveis, mas tem-se uma desigualdade cônica de segunda ordem. No item (ii), onde o conjunto incerto é definido por uma caixa, a desigualdade é linear, porém incrementa-se o número de variáveis em n . Finalmente, no item (iii), tem-se uma combinação desses efeitos.

4.1.1 Notas e Referências

1. Considere que o POC é definido utilizando a função $f(x,y) = Ax - b$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, isto é, o POC é um problema de otimização cônica linear (POCL). Além disso, suponha que esse POCL é definido no cone

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^n$, ou seja, o POCL é um problema de otimização linear. Neste caso, em [39] e [90], foi mostrado que, para uma classe abrangente de conjuntos incertos \mathcal{Y} , a contrapartida robusta associada ao problema de otimização linear incerto, apesar de apresentar

geralmente um aumento na sua complexidade, é computacionalmente viável. Em outras palavras, esse problema pode ser resolvido em um período de tempo polinomial, o qual é função das dimensões n e m do problema de otimização linear. Além disso, dependendo da classe de conjunto incerto \mathcal{Y} escolhida para representar a imprecisão do vetor de dados y , a complexidade do problema nominal incrementa-se de diferentes formas. Por exemplo, quando o conjunto \mathcal{Y} é definido utilizando a norma l_2 , a contrapartida robusta do problema de otimização linear pode ser expressa em termos de um problema de otimização cônica de segunda ordem. Entretanto, se o conjunto \mathcal{Y} é definido através da norma l_1 , l_∞ ou $l_{1 \cap \infty}$, a contrapartida robusta do problema de otimização linear continua sendo linear, mas a dimensão desse problema é incrementada.

- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_+^n$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{S}_+^n$, isto é, o POCL é um problema de otimização cônica de segunda ordem ou semi-definida, respectivamente. Neste caso, a contrapartida robusta associada a esses problemas de otimização incerto torna-se inviável computacionalmente. Sendo assim, em [38], foram apresentados limitantes superiores para a contrapartida robusta e uma análise do grau de conservadorismo dessas aproximações.

2. Em [87], estudou-se o caso onde o POC é definido no cone $\mathbb{K} = \mathbb{S}_+^n$ e a função $f(x,y)$ é afim em x para cada y , e é racional em y para cada x . Além disso, considera-se que o conjunto incerto \mathcal{Y} descreve uma elipse. Esse modelo, apesar de parecer particular, pode ser usado para descrever o POCL apresentado neste capítulo.

4.2 Resultados Principais

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a solução ótima do seguinte problema de otimização robusta

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & f_i(p, g_i, \eta_i) = \underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - g_{ii} p_i \leq 0, \quad \forall (g_i, \eta_i) \in \mathcal{G}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

- o vetor de decisão do problema é dado por $p = [p_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor de potências de transmissão;
- os dados do problema são representados através do conjunto $\{\eta, G, \underline{\gamma}\}$, sendo
 - $\eta = [\eta_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor que contém o ruído no receptor de cada enlace;
 - $G = [g_i] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, a matriz de ganhos do canal;
 - $\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_i] \in \mathbb{R}_+^n$, o vetor que contém os limiares de recepção do SINR para cada enlace.

Considera-se que

$$(g_i, \eta_i) \in \mathcal{G}_i, \quad (4.5)$$

sendo o conjunto \mathcal{G}_i , que descreve a incerteza existente nos parâmetros (g_i, η_i) , definido como

$$\mathcal{G}_i = \left\{ (g_i, \eta_i) = (g_i^0, \eta_i^0) + \sum_{k=1}^n (\delta g_i^k, \delta \eta_i^k) u_k : \|u\| \leq \Omega_i \right\}, \quad (4.6)$$

onde $g_i^0 \in \mathbb{R}_+^n$ ($\eta_i^0 \in \mathbb{R}_+$) representa o valor nominal do ganho do canal g_i (do ruído η_i) e $\delta g_i^k \in \mathbb{R}_+^n$ ($\delta \eta_i^k \in \mathbb{R}_+$), para $k = 1, \dots, n$, denota o conjunto de vetores que caracterizam a perturbação do ganho nominal do canal g_i (do ruído nominal η_i , respectivamente). Finalmente, Ω_i denota o parâmetro de robustez do problema e $\|\cdot\|$ representa uma norma vetorial absoluta, isto é, uma norma que satisfaz a propriedade $\|u\| = \|\|u\|\|$.

- os elementos estruturais do problema são descritos pelo conjunto $\{n, f_i, \leq\}$, sendo
 - $n \in \mathbb{Z}_+$, o número de enlaces ativos;

- $f_i(p, g_i, \eta_i) = \underline{\gamma}_i \eta_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - g_{ii} p_i$, uma função afim em p para todo (g_i, η_i) ;
- \leq representa $\preceq_{\mathbb{R}_+}$, a ordem parcial associada ao conjunto cônico convexo e fechado \mathbb{R}_+ .

A seguir, com base no Teorema 16, apresenta-se a solução do problema de controle robusto da potência, em termos de um problema de otimização convexa.

Teorema 17. O problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \inf_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a: } & \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 p_j - g_{ii}^0 p_i + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^1 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^1 p_j - \delta g_{ii}^1 p_i \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^n + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^n p_j - \delta g_{ii}^n p_i \end{bmatrix} \right\|^D \leq 0, \quad (4.7) \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

fornece a solução ótima robusta para o problema de CPT definido em (4.4).

Demonstração. O problema de otimização robusta, definido em (4.4), pode ser expresso em termos do POCR quando: o vetor de decisão é dado por $x = [x_i] \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, onde $x_i = p_i \mathbb{1}_{\{i \leq n\}} + \mathbb{1}_{\{i=n+1\}}$, o vetor que caracteriza a função objetivo é dado por $c = [c_i] \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $c_i = \mathbb{1}_{\{i \leq n\}}$, as funções que definem as restrições de desigualdade são dadas por $f_i(x, y) = f_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} f_{ji}(x)$, onde $f_{ji}(x) = \underline{\gamma}_i p_j \mathbb{1}_{\{i \neq j, 1 \leq j \leq n\}} - p_i \mathbb{1}_{\{i=j \text{ e } 1 \leq j \leq n\}} + \underline{\gamma}_i \mathbb{1}_{\{j=n+1\}}$ e $y_{ij} = g_{ij} \mathbb{1}_{\{j \leq n\}} + \eta_i \mathbb{1}_{\{j=n+1\}}$, e o conjunto \mathcal{G}_i , que descreve a incerteza existente nos parâmetros (g_i, η_i) , é definido através do vetor $y_i^0 = (g_i^0, \eta_i^0)$, que representa o valor nominal dos dados, e dos vetores $\delta y_i^k = (\delta g_i^k, \delta \eta_i^k)$, que caracterizam a perturbação dos dados nominais. Nessas condições, ao aplicar o Teorema 16, obtém-se o problema de otimização convexa (4.7). \square

Baseado na Proposição 16, o seguinte corolário apresenta soluções particulares para o problema robusto de controle da potência transmitida, determinado no Teorema 17, considerando que todos os conjuntos incertos \mathcal{G}_i , para $i = 1, \dots, n$, são definidos utilizando o mesmo tipo de norma. Note que, em geral, pode-se utilizar conjuntos incertos \mathcal{G}_i para diversos tipos de norma.

Corolário 2. A potência de transmissão ótima robusta, definida pelo problema (4.7), pode ser determinada através da solução do

(i) problema de otimização cônica de segunda ordem

$$\begin{aligned} & \inf_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n p_i \\ & \text{sujeito a: } \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 p_j - g_{ii}^0 p_i + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^1 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^1 p_j - \delta g_{ii}^1 p_i \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^n + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^n p_j - \delta g_{ii}^n p_i \end{bmatrix} \right\|_2 \leq 0, \\ & \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.8}$$

quando os conjuntos incertos \mathcal{G}_i , para $i = 1, \dots, n$, são definidos usando a norma $l_2 = \|\cdot\|_2$;

(ii) problema de otimização linear

$$\begin{aligned} & \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n p_i \\ & \text{sujeito a: } \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 p_j - g_{ii}^0 p_i + \Omega_i \sum_{k=1}^n q_{ki} \leq 0, \\ & \quad -q_{ki} \leq \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^k + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^k p_j - \delta g_{ii}^k p_i \leq q_{ki}, \quad i, k = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.9}$$

quando os conjuntos incertos \mathcal{G}_i , para $i = 1, \dots, n$, são definidos usando a norma $l_\infty = \|\cdot\|_\infty$;

(iii) problema de otimização cônica de segunda ordem

$$\begin{aligned} & \inf_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{sujeito a:} \\ & \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 p_j - g_{ii}^0 p_i + \Omega_i \left\| \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^1 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^1 p_j - \delta g_{ii}^1 p_i - z_{1i} \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_i \delta \eta_i^n + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^n p_j - \delta g_{ii}^n p_i - z_{ni} \end{bmatrix} \right\|_2 + \frac{\Omega_i}{\Upsilon_i} \sum_{k=1}^n z_{ki} \leq 0, \\ & \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.10}$$

quando os conjuntos incertos \mathcal{G}_i , para $i = 1, \dots, n$, são definidos usando a norma $l_{2 \cap \infty} = \max\{\|\cdot\|_2, \Upsilon_i \|\cdot\|_\infty\}$ onde $\Upsilon_i > 0$.

4.3 Exemplos Ilustrativos

A seguir, apresentam-se alguns exemplos numéricos que ilustram os resultados obtidos na Seção 4.2. Utilizam-se funções do programa *CVX* [91], implementadas em MATLAB, que permitem determinar a solução ótima de problemas de otimização convexa.

Considere um sistema de comunicações sem fio com $n = 2$ usuários ativos. O limiar requerido do SINR e o ruído nominal no receptor assumem os seguintes valores

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\text{dB} & 6\text{dB} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \eta^0 = \begin{bmatrix} \eta_1^0 & \eta_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Adicionalmente, a matriz de ganhos nominais do canal é dada por

$$G^0 = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 \\ g_{21}^0 & g_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3288 & 0,1200 \\ 0,0602 & 0,3826 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Nesse cenário, o problema de otimização linear (2.6) quando $\eta_i = \eta_i^0$ e $g_{ij} = g_{ij}^0$ para $i, j = 1 \dots, n$, expresso como

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 p_j - g_{ii}^0 p_i \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

provê o nível de potência transmitida nominal, o qual é dado por

$$p_{\text{nominal}}^* = \begin{bmatrix} p_{1, \text{nominal}}^* & p_{2, \text{nominal}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,0293 & 2,0016 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Uma vez que os ganhos do canal provêm de algum processo de medição ou estimação, esses parâmetros não são exatamente conhecidos. Em particular, considera-se que os ganhos nominais do canal sofrem a seguinte perturbação

$$g_{ij} = (1 + \epsilon_{ij}) g_{ij}^0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.15)$$

onde ϵ_{ij} assume valores em $[-0,01 \ 0,01]$.

Nesse contexto, o problema de otimização linear incerto, associado ao problema (4.13), é

dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \text{ sujeito a:} \right. \\ \left. \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij} p_j - g_{ii} p_i \leq 0, \ i \in \mathcal{I} \right\} \Big| g_{ij} = (1 + \epsilon_{ij}) g_{ij}^0, \ i, j \in \mathcal{I}, \forall \epsilon_{ij} \in [-0,01 \ 0,01] \end{array} \right\}. \quad (4.16)$$

Com o objetivo de avaliar o efeito dos ganhos incertos g_{ij} na solução nominal do problema (4.16), define-se sua variação normalizada como

$$\Delta p_{\text{nominal}}^* = \frac{\|p_{\text{nominal}}^* - p^*\|}{\|p_{\text{nominal}}^*\|} \times 100\%, \quad (4.17)$$

onde p^* denota a solução ótima de uma realização do problema de otimização linear incerto (4.16).

Considerando que ϵ_{ij} é uma variável aleatória uniforme, o valor máximo da seqüência $\{\Delta p_{\text{nominal}}^*(k)\}_{k=1}^N$ é 74,10%. Conseqüentemente, pode-se observar que perturbações relativamente pequenas nos ganhos do canal (1%) podem tornar a solução nominal do problema de CPT severamente infactível.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos onde o nível da potência transmitida é insensível às variações desses parâmetros. Nos dois primeiros exemplos, mostra-se que o problema de CPT, quando os ganhos do canal são exatamente conhecidos pelo decisor mas existem erros na implementação da potência transmitida, é equivalente ao problema de CPT considerando que os ganhos do canal assumem valores num determinado conjunto incerto. No último exemplo, considera-se que a informação disponível ao decisor é um conjunto de amostras do vetor de ganhos $g_i \in \mathbb{R}_+^n$, dado por

$$\hat{\mathcal{G}}_i = \{\hat{g}_i^1, \dots, \hat{g}_i^m\}. \quad (4.18)$$

Nesse contexto, calcula-se a elipse de volume mínimo $\mathcal{E}_i = \{g_i : \|Ag_i + b\|_2 \leq 1\}$, que contém a casca convexa do conjunto $\hat{\mathcal{G}}_i$, ou seja, $\text{conv } \mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{E}_i$, através do problema de otimização convexa

$$\begin{array}{ll} \inf & \log \det A^{-1} \\ \text{sujeito a:} & \|A\hat{g}_i^k + b\|_2 \leq 1, \quad k = 1, \dots, m, \\ & A = A^T \succeq_{\mathbb{S}_+^n} 0, \end{array} \quad (4.19)$$

onde as variáveis do problema são a matriz A (simétrica e definida positiva) e o vetor b (cf. [33]).

Essa elipse pode ser expressa equivalentemente como

$$\mathcal{E}_i = \{g_i = g_i^0 + \Delta G_i u : \|u\|_2 \leq 1\}, \quad (4.20)$$

onde a matriz $\Delta G_i = A^{-1}$ e o vetor $g_i^0 = -A^{-1}b$. Em seguida, considerando que a elipse define o conjunto incerto de ganhos do canal, isto é, $\mathcal{E}_i \equiv \mathcal{G}_i$, determina-se a solução robusta ótima do problema de CPT.

Exemplo 3. Considere que os ganhos do canal são exatamente conhecidos pelo decisor, porém o valor da potência transmitida no i -ésimo enlace contém um ruído multiplicativo, isto é, $\hat{p}_i = (1 + \epsilon_i)p_i$, onde $\epsilon_i \in [-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i]$. Nesse cenário, a contrapartida robusta do problema de CPT proposto é dada por

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n (1 + \epsilon_i)p_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 (1 + \epsilon_j)p_j - g_{ii}^0 (1 + \epsilon_i)p_i \leq 0, \quad \forall \epsilon_i \in [-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Introduzindo uma variável auxiliar, o problema (4.21) pode ser expresso equivalentemente como

$$\begin{aligned} \min_{p_{n+1} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & p_{n+1} \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n (1 + \epsilon_i)p_i \leq p_{n+1}, \quad \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} (g_{ij}^0 + g_{ij}^0 \epsilon_j)p_j - (g_{ii}^0 + g_{ii}^0 \epsilon_i)p_i \leq 0, \\ & \forall \epsilon_i \in [-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Definindo as seguintes variáveis como

$$\hat{g}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} g_i^T & 1 \end{bmatrix}^T, & i \leq n, \\ \begin{bmatrix} 0_{n \times 1}^T & 1 \end{bmatrix}^T, & i = n + 1, \end{cases}, \quad \hat{\eta}_i = \begin{cases} \eta_i, & i \leq n, \\ 0, & i = n + 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}_i = \begin{cases} \underline{\gamma}_i, & i \leq n, \\ 1, & i = n + 1, \end{cases}, \quad (4.23)$$

o problema de otimização semi-infinita antes mencionado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min_{p_{n+1} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & p_{n+1} \\ \text{sujeito a:} \quad & \hat{\gamma}_i \hat{\eta}_i + \hat{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \hat{g}_{ij} p_j - \hat{g}_{ii} p_i \leq 0, \quad \forall (\hat{\eta}_i, \hat{g}_i) \in \hat{\mathcal{G}}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde o conjunto $\hat{\mathcal{G}}_i$, que descreve a imprecisão dos dados do problema, é dado por

$$\hat{\mathcal{G}}_i = \{(\hat{g}_i, \hat{\eta}_i) = (\hat{g}_i^0, \hat{\eta}_i^0) + \sum_{k=1}^{n+1} (\delta g_i^k, \delta \eta_i^k) u_k : \|u\| \leq \Omega_i\}, \quad (4.25)$$

sendo

$$\delta g_{ij}^k = g_{ij}^0 \mathbb{1}_{\{i=k \neq n+1\}}, \quad \delta \eta_i^k = \mathbb{1}_{\{i \neq k = n+1\}}, \quad \Omega_i = \bar{\epsilon}_i \mathbb{1}_{\{i \neq n+1\}} \quad \text{e} \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty. \quad (4.26)$$

Aplicando o Teorema 16 e a Proposição 16, o problema (4.24) pode ser expresso em termos do seguinte problema de otimização linear

$$\begin{aligned} & \min_{p_{n+1} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^n} p_{n+1} \\ \text{sujeito a:} \quad & \hat{\underline{g}}_i \hat{\eta}_i^0 + \hat{\underline{g}}_i \sum_{j \neq i} \hat{g}_{ij}^0 p_j - \hat{g}_{ii}^0 p_i + \Omega_i \sum_{k=1}^{n+1} q_{ki} \leq 0, \\ & -q_{ki} \leq \hat{\underline{g}}_i \delta \eta_i^k + \hat{\underline{g}}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^k p_j - \delta g_{ii}^k p_i \leq q_{ki}, \quad i, k = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Supondo que $\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_2 = 0,01$, a solução do problema (4.27), que fornece a potência transmitida robusta ótima, é dada por

$$p_{\text{robusto}}^* = \begin{bmatrix} p_{1, \text{robusto}}^* & p_{2, \text{robusto}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,2739 & 3,4754 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Na Figura 4.1, apresentam-se os níveis da potência transmitida que são as soluções nominal e robusta do problema de CPT proposto, assim como também as soluções de algumas realizações do problema de otimização linear incerto associado, incluindo sua solução no pior caso, considerando que ϵ_i é uma variável aleatória uniforme assumindo valores em $[-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i]$. Observe que todas as soluções das realizações são menores que a solução robusta, exceto a solução obtida no pior caso a qual coincide com a última, verificando a validade da Proposição 14.

Finalmente, ao aplicar sucessivamente o Teorema 16 e a Proposição 16 ao problema de otimização semi-infinita (4.24) quando o conjunto incerto \mathcal{G}_i é definido através da norma l_2 ou $l_{2 \cap \infty}$ ($\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = 2,2$), obtém-se as soluções robustas do problema, dadas por

$$p_{\text{robusto}}^* = \begin{bmatrix} 4,3347 & 2,8587 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad p_{\text{robusto}}^* = \begin{bmatrix} 4,2581 & 2,8085 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

respectivamente. Note que essas soluções geram uma potência transmitida total menor que aquela apresentada em (4.28), uma vez que seus conjuntos incertos \mathcal{G}_i são menores.

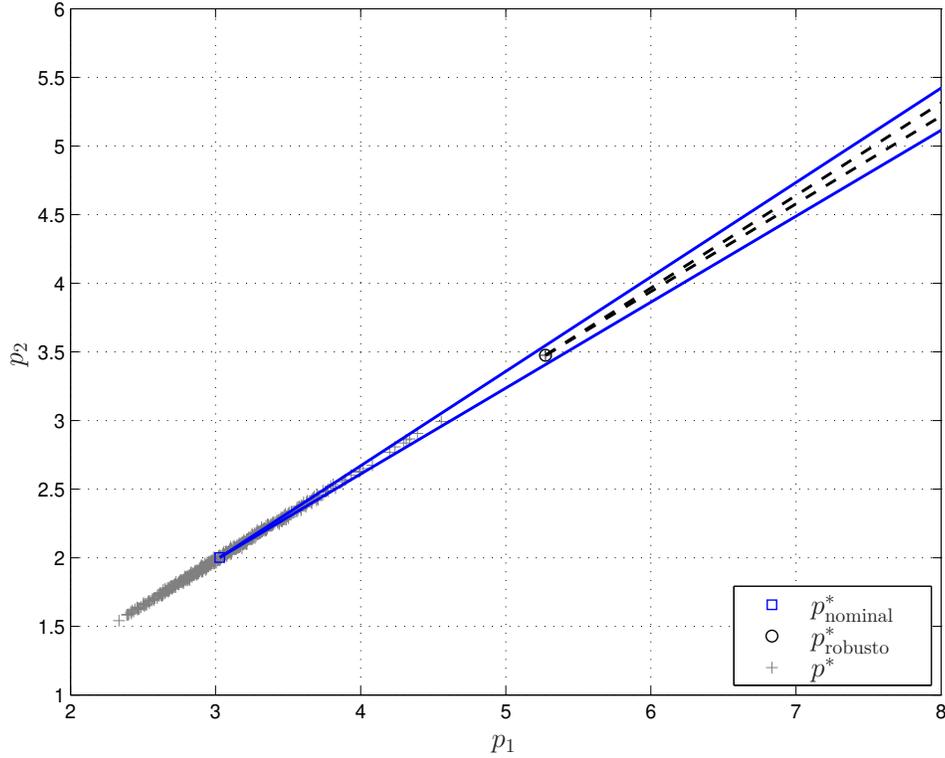


Fig. 4.1: Valores das potências transmitidas nominal e robusta do Exemplo 3.

Exemplo 4. Considere que os ganhos do canal são exatamente conhecidos ao decisor, entretanto a potência transmitida, no i -ésimo enlace, contém um ruído aditivo, isto é, $\hat{p}_i = p_i + \epsilon_i$, onde $\epsilon_i \in [-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i]$.

Nesse contexto, a contrapartida robusta do problema de CPT é dada por

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & \sum_{i=1}^n p_i + \epsilon_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 (p_j + \epsilon_j) - g_{ii}^0 (p_i + \epsilon_i) \leq 0, \quad \forall \epsilon_i \in [-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilizando uma variável auxiliar, o problema (4.30) pode ser expresso equivalentemente como

$$\begin{aligned} \inf_{p_{n+1} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^n} \quad & p_{n+1} \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n p_i + \epsilon_i \leq p_{n+1}, \quad \underline{\gamma}_i \eta_i^0 + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 \epsilon_j - g_{ii}^0 \epsilon_i + \underline{\gamma}_i \sum_{j \neq i} g_{ij}^0 p_j - g_{ii}^0 p_i \leq 0, \\ & \forall \epsilon_i \in [-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Definindo as seguintes variáveis como

$$\hat{g}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} g_i^T & 1 \end{bmatrix}^T, & i \leq n, \\ \begin{bmatrix} 0_{n \times 1}^T & 1 \end{bmatrix}^T, & i = n + 1, \end{cases}, \quad \hat{\eta}_i = \begin{cases} \eta_i, & i \leq n, \\ 0, & i = n + 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}_i = \begin{cases} \gamma_i, & i \leq n, \\ 1, & i = n + 1, \end{cases}, \quad (4.32)$$

o problema de otimização antes mencionado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \min_{p_{n+1} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^n} p_{n+1} \\ \text{sujeito a:} \quad & \hat{\gamma}_i \hat{\eta}_i + \hat{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \hat{g}_{ij} p_j - \hat{g}_{ii} p_i \leq 0, \quad \forall (\hat{\eta}_i, \hat{g}_i) \in \hat{\mathcal{G}}_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde o conjunto $\hat{\mathcal{G}}_i$, que descreve a imprecisão dos dados do problema, é dado por

$$\hat{\mathcal{G}}_i = \{(\hat{g}_i, \hat{\eta}_i) = (\hat{g}_i^0, \hat{\eta}_i^0) + \sum_{k=1}^{n+1} (\delta g_i^k, \delta \eta_i^k) u_k : \|u\| \leq \Omega_i\}, \quad (4.34)$$

sendo

$$\delta g_{ij}^k = 0, \quad \delta \eta_i^k = \begin{cases} -\frac{g_i^0}{\gamma_i} \mathbb{1}_{\{k \neq n+1\}}, & k = i, \\ g_{ij}^0 \mathbb{1}_{\{k \neq i\}} + \mathbb{1}_{\{i=n+1\}} & k \neq i, \end{cases}, \quad \Omega_i = \begin{cases} \bar{\epsilon}_i, & i \leq n, \\ 0 & i = n + 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty. \quad (4.35)$$

Novamente, aplicando o Teorema 16 e a Proposição 16, o problema de otimização semi-infinita (4.33) pode ser expresso em termos do seguinte problema de otimização linear

$$\begin{aligned} & \min_{p_{n+1} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+^n} p_{n+1} \\ \text{sujeito a:} \quad & \hat{\gamma}_i \hat{\eta}_i^0 + \hat{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \hat{g}_{ij}^0 p_j - \hat{g}_{ii}^0 p_i + \Omega_i \sum_{k=1}^{n+1} q_{ki} \leq 0, \\ & -q_{ki} \leq \hat{\gamma}_i \delta \eta_i^k + \hat{\gamma}_i \sum_{j \neq i} \delta g_{ij}^k p_j - \delta g_{ii}^k p_i \leq q_{ki}, \quad i, k = 1, \dots, n + 1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Supondo que $\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_2 = 0,01$, a solução do problema (4.36), que fornece a potência transmitida robusta ótima, é dada por

$$p_{\text{robusto}}^* = \begin{bmatrix} p_{1, \text{robusto}}^* & p_{2, \text{robusto}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5652 & 2,3536 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Uma vez mais, considerando que ϵ_i é uma variável aleatória uniforme assumindo valores em

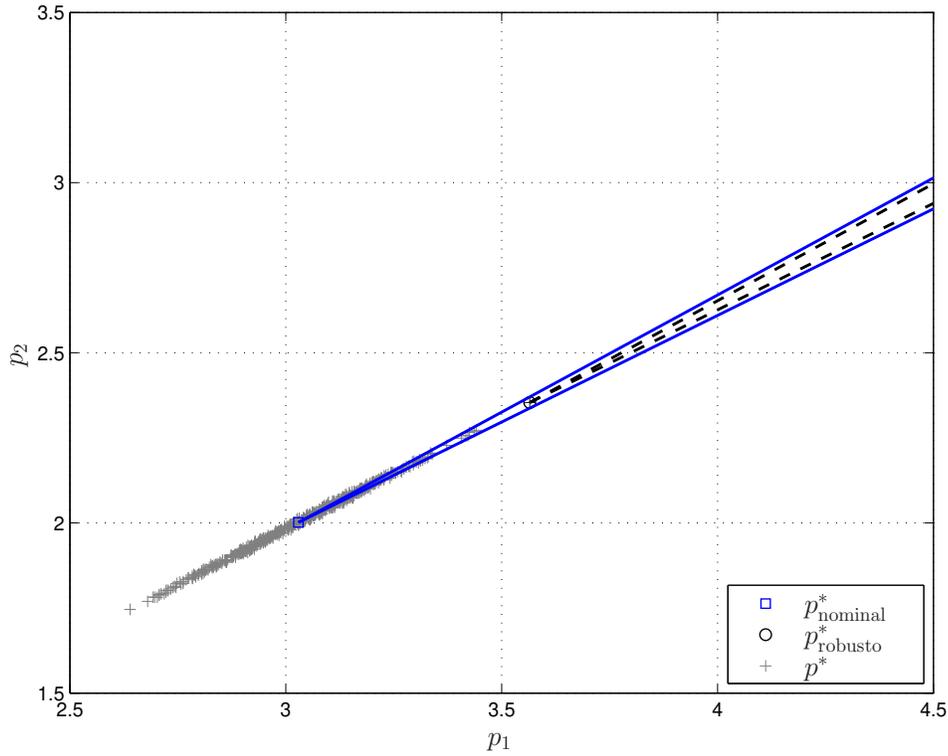


Fig. 4.2: Valores das potências transmitidas nominal e robusta do Exemplo 4.

$[-\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i]$, na Figura 4.2, apresentam-se os níveis da potência transmitida que são as soluções nominal e robusta do problema de CPT proposto, assim como também as soluções de algumas realizações do problema de otimização linear incerto associado, incluindo a solução no pior caso. Novamente, verifica-se a validade da Proposição 14, dado que a solução robusta é a maior solução dentre todas as soluções das realizações do problema de otimização incerta.

Exemplo 5. Considere que o conjunto amostral $\hat{\mathcal{G}}_i = \{\hat{g}_i^1, \dots, \hat{g}_i^{100}\}$ do vetor de ganhos g_i para $i = 1, 2$ pode ser gerado como

$$\hat{g}_{ij}^k = g_{ij}^0 + \delta \hat{g}_{ij}^k, \quad k = 1, \dots, 100 \quad (4.38)$$

onde $\delta \hat{g}_{ij}^k$, que representa a perturbação do ganho nominal do canal g_{ij}^0 , é uma variável aleatória normal com média nula e dispersão padrão igual a 0,001 quando $i = j$ e igual a 0,01 quando $i \neq j$.

De posse dessa informação, a solução do problema de otimização convexa (4.19) fornece as

elipses $\mathcal{E}_i = \{g_i = g_i^0 + \Delta G_i u : \|u\|_2 \leq 1\}$ para $i = 1, 2$, onde

$$g_1^0 = [0,3287 \quad 0,1199], \quad \Delta G_1 = \begin{bmatrix} 2,3372 \times 10^{-4} & 4,13182 \times 10^{-5} \\ 4,1318 \times 10^{-5} & 2,4915 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$g_2^0 = [0,0601 \quad 0,3826], \quad \Delta G_2 = \begin{bmatrix} 2,3995 \times 10^{-3} & -6,4786 \times 10^{-5} \\ -6,4786 \times 10^{-5} & 2,6693 \times 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Na Figura 4.3, mostram-se o gráfico de cada elipse e os pontos que pertencem ao conjunto amostral do vetor de ganhos. Como esperado, cada elipse é a elipse de volume mínimo que contém a casca convexa do conjunto amostral do vetor de ganhos.

Quando cada conjunto \mathcal{G}_i , que descreve as incertezas no vetor de ganhos do canal g_i , é definido utilizando a norma l_2 e $\Omega_i = 1$ pode-se considerar que $\mathcal{G}_i \equiv \mathcal{E}_i$. Nesse contexto, o valor ótimo robusto da potência transmitida, obtido através do problema convexo (4.8), é dado por

$$p_{\text{robusto}}^* = [p_{1,\text{robusto}}^* \quad p_{2,\text{robusto}}^*] = [7,8040 \quad 5,1812]. \quad (4.41)$$

As soluções de algumas realizações do problema de otimização linear incerto, assim como também as soluções nominal e robusta do problema, são mostradas na Figura 4.4. Finalmente, verifica-se a validade da Proposição 14, uma vez que as soluções do problema de otimização incerta são menores que a solução robusta.

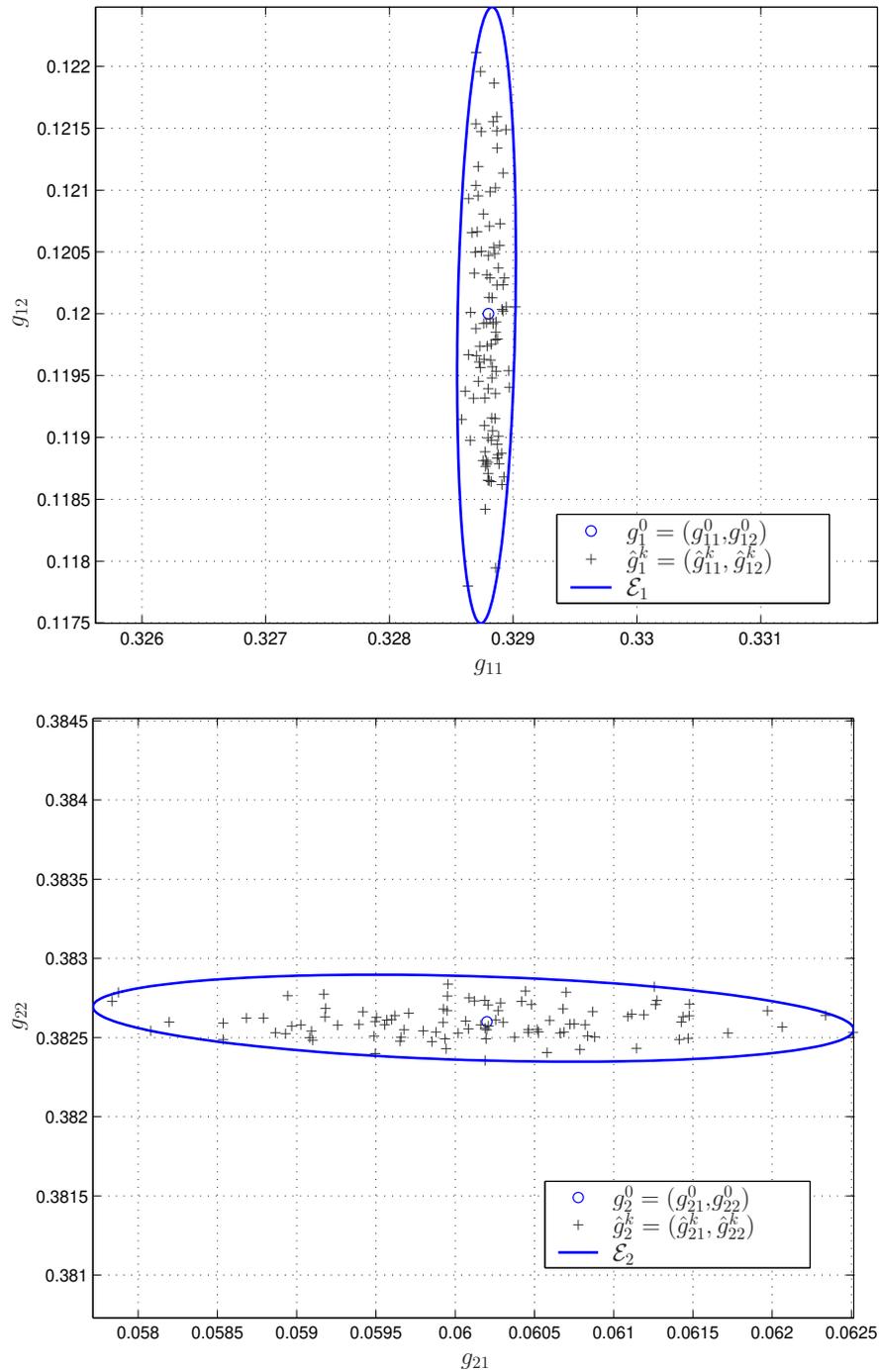


Fig. 4.3: Elipses de volume mínimo que contêm a caixa convexa do conjunto amostral dos ganhos do canal.

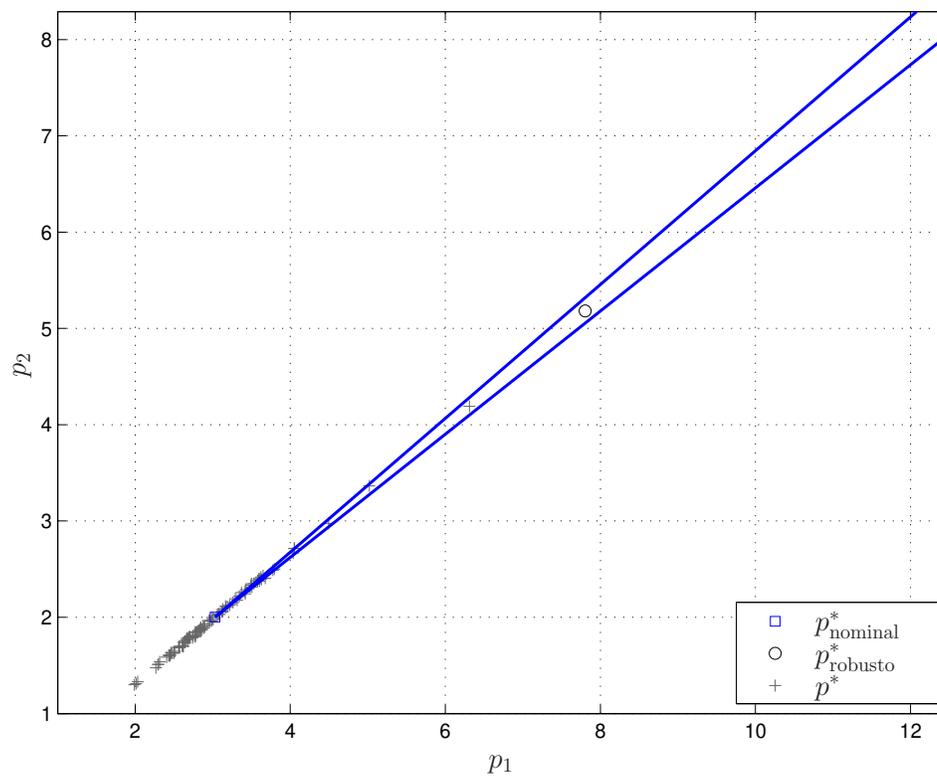


Fig. 4.4: Valores das potências transmitidas nominal e robusta do Exemplo 5.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta tese, estuda-se o problema de CPT quando o estado do sistema de comunicações sem fio é parcialmente conhecido pelo decisor. As principais contribuições da tese são descritas a seguir:

- No Capítulo 3, considera-se que os ganhos do canal, que descrevem o estado do sistema, são variáveis aleatórias que representam a variação rápida do sinal de rádio. Nesse cenário, reformula-se o índice de desempenho do sistema, utilizando uma medida de risco coerente. Especificamente, utiliza-se o CVaR para quantificar o risco da qualidade do enlace ao invés do VaR, tradicionalmente empregado nos problemas de otimização estocástica com aversão ao risco. Apesar de essas medidas de risco quantificarem diferentes características da função de distribuição subjacente, elas estão relacionadas. Em primeiro lugar, o CVaR é a menor medida de risco coerente e invariante que domina o VaR. Essa propriedade do CVaR permite que o problema de controle de potência proposto seja a melhor aproximação convexa para o problema de CPT baseado no VaR, o qual é não convexo. Em segundo lugar, o CVaR, por definição, mede o risco das perdas que transpõem o limiar determinado pelo VaR. Sendo assim, a solução fornecida pelo problema proposto, além de garantir a factibilidade da qualidade do enlace, quantifica a severidade da sua degradação, ao penalizar as realizações da qualidade do enlace que transpõe o limiar determinado pelo VaR. A solução do problema de CPT via o CVaR foi determinado em termos de um problema de otimização convexa. Adicionalmente, um algoritmo distribuído, que converge para uma solução subótima do problema proposto, considerando que o ruído é nulo e a potência transmitida é limitada inferior e superiormente, foi desenvolvido. Entretanto, num sistema onde os ganhos do canal coincidem com o seu valor esperado, o algoritmo converge para a solução ótima do problema quando a qualidade do enlace, expressa pelo SIR, é maior que a qualidade mínima requerida. Finalizando esse

capítulo, outros resultados foram obtidos:

- Mostrou-se que a solução centralizada dos problemas de CPT determinístico e estocástico via o CVaR têm a mesma estrutura, mas a matriz de interferência e o vetor de ruído normalizado são diferentes;
 - Obteve-se a solução do problema de CPT via o VaR, através de um procedimento iterativo baseado em problemas de otimização convexa quando o ruído no receptor não é nulo;
 - Determinou-se a solução ótima do problema de CPT quando o risco da qualidade do enlace é quantificado por meio do Bernstein com nível α e o desvanecimento rápido do canal de rádio é caracterizado através de um ambiente Nakagami- m . Esse problema também é uma aproximação convexa do problema de CPT via o VaR.
- No Capítulo 4, considera-se que os ganhos do canal e o ruído não são exatamente conhecidos pelo decisor, mas pertencem a um determinado conjunto convexo. Esse modelo é motivado principalmente porque a solução ótima do problema de CPT determinístico pode tornar-se severamente ineficaz quando os dados nominais do problema, descritos pelo ganho do canal e pelo ruído, sofrem perturbações relativamente pequenas. A solução do problema de CPT proposto foi estabelecida em termos de um problema de otimização cônica.

Conseqüentemente, para ambos problemas de CPT propostos, a solução foi alcançada incrementando-se a complexidade e/ou o número de variáveis do problema inicial. Entretanto, por ser um problema de otimização convexa, existem algoritmos altamente eficientes, como, por exemplo, o algoritmo baseado no método dos pontos interiores, que permitem determinar a solução numérica desse problema.

Encerrando este capítulo, como futuros trabalhos nesta linha de pesquisa, propõem-se:

- Analisar o problema de otimização dual associado ao problema de CPT via o CVaR; note que o problema primal pertence à classe de problemas de otimização semi-infinita linear (veja [92]);
- Obter um algoritmo iterativo e distribuído, que converge para a solução ótima do problema de CPT via o CVaR, considerando que o ruído no receptor não é nulo;
- Solucionar o problema de CPT robusto considerando que os conjuntos, que descrevem a imprecisão nos seus dados, são assimétricos;

- Abordar outras variações do problema de CPT, como, por exemplo, o problema de CPT integrado ao problema de alocação da estação base;
- Estudar o problema de CPT integrado a outros problemas de gestão dos recursos de rádio, como, por exemplo, ao problema de Controle de Admissão de Chamadas.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Bambos. Toward power-sensitive networks architectures in wireless communications: Concepts, issues, and design aspects. *IEEE Personal Communications*, 5(3):50–59, 1998.
- [2] S. V. Hanly and D.-N. Tse. Power control and capacity of spread spectrum wireless networks. *Automatica*, 35:1987–2012, 1999.
- [3] M. Xiao, N. B. Shroff, and E. K. P. Chong. Distributed connection admission control for power-controlled cellular wireless systems. In *Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing*, pages 495–504, 1999.
- [4] R. Cruz Y.-H. Lin. Power control and scheduling for interfering links. In *IEEE Information Theory Workshop*, pages 288–291, 2004.
- [5] S. Kandukuri and S. Boyd. Simultaneous rate and power control in multirate multimedia CDMA systems. In *IEEE International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, pages 570–574, 2000.
- [6] S. Koskie and Z. Gajic. Signal-to-interference-based power control algorithms for wireless CDMA networks: A survey, 1992-2005. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, 13b(1):187–220, 2006.
- [7] J. Rohwer, Ch. T Abdallah, and A. El-Osery. Power control algorithms in wireless communications. Technical report, Department of Electrical and Computer Engineering - University of New Mexico, 2000.
- [8] C. W. Sung and W. S. Wong. Mathematical aspects of the power control problem in mobile communications systems. In L. Guo and S. S.-T Yau, editors, *Lectures on Systems, Control, and Information: Lectures at the Morningside Center of Mathematics*, volume 17 of *Studies in Advanced Mathematics*, pages 131–175. American Mathematical Society and International Press, 2000.

-
- [9] D. M. Novakovic and M. L. Dukic. Evolution of the power control techniques for DS-CDMA towards 3G wireless communications systems. *IEEE Communications Surveys*, 4:2–15, 2000.
- [10] Z. Rosberg and J. Zander. Toward a framework for power control in cellular systems. *Wireless Networks*, 4:215–222, 1998.
- [11] J. Papandriopoulos, J. Evans, and S. Dey. Outage-based optimal power control for generalized multiuser fading channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 54(4):693–703, 2006.
- [12] M. M. Olama, S. M. Shajaat, S. M. Djouadi, and Ch. D. Charalambous. Stochastic power control for time-varying Log-normal fading wireless channels. In *American Control Conference*, pages 1817–1822, 2005.
- [13] J. Papandriopoulos, J. Evans, and S. Dey. Optimal power control for Rayleigh-faded multiuser systems with outage constraints. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(6):2705–2715, 2005.
- [14] T. Heikkinen. Power allocation in a wireless network using scheduling and stochastic programming with penalty functions. *Optimization and Engineering*, 5:431–459, 2004.
- [15] S. Kandukuri and S. Boyd. Optimal power control in interference-limited fading wireless channel with outage-probability specifications. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 1(1):46–55, 2002.
- [16] T. Heikkinen. A model for stochastic power control under Log-normal distribution. Technical report, Siemens AG, Berlin, Germany, 2001.
- [17] T. Alpcan, T. Basar, and S. Dey. A power control game based on outage probabilities for multicell wireless data networks. In *American Control Conference*, pages 1661–1666, 2004.
- [18] E. Altman and Z. Altman. S-modular games and power control in wireless networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5):839–842, 2003.
- [19] T. Alpcan, T. Basar, R. Srikant, and E. Altman. CDMA uplink power control as a noncooperative game. *Wireless Networks*, 8:659–669, 2002.
- [20] A. B Mackenzie and S. B. Wicker. Game theory in communications: motivation, explanation, and application to power control. In *IEEE Global Telecommunications Conference*, pages 821–826, 2001.

- [21] M. Huang, P. E. Caines, and R. P. Malhamé. Uplink power adjustment in wireless communication systems: A stochastic control analysis. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(10):1693–1708, 2004.
- [22] A. Paul, M. Akar, M. G. Safonov, and U. Mitra. Power control for wireless networks using multiple controllers and switching. In *Americam Control Conference*, pages 3339–3344, 2004.
- [23] M. D. Anderson and S. Perreau. Robust power control for CDMA networks subject to modelisation errors. In *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, pages 161–164, 2003.
- [24] L. Qian and Z. Gajic. Variance minimization stochastic power control in CDMA systems. In *IEEE International Conference on Communications*, pages 1763–1767, 2002.
- [25] M. Rintamäki, K. Zenger, and H. Koivo. Self-tuning adaptive algorithms in the power control of WCDMA systems. In *Nordic Signal Processing Symposium*, 2002.
- [26] Z. Uykan, R. Jantti, and H. N. Koivo. A PI-power control algorithm for cellular radio systems. In *IEEE International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, pages 782–785, 2000.
- [27] K.-L. Hsiung, S.-J. Kim, and S. Boyd. Power control in Log-normal fading wireless channels with uptime probability specifications via robust geometric programming. Technical report, Information Systems Laboratory, Department of Electrical Engineering, Stanford University, 2005.
- [28] D. Julian, M. Chiang, D. O’Neill, and S. Boyd. QoS and fairness constrained convex optimization of resource allocation for wireless cellular and ad hoc networks. In *IEEE INFOCOM*, pages 477–486, 2002.
- [29] D. Julian, M. Chiang, and D. O’Neill. Robust and QoS constrained optimization of power control in wireless cellular networks. In *IEEE Vehicular Technology Conference*, pages 1932–1936, 2001.
- [30] P.-R Chang and B.-C Wang. Adaptive fuzzy power control for CDMA mobile radio networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 45(2):225–236, 1996.
- [31] P. Kall and S. W. Wallace. *Stochastic Programming*. John Wiley and Sons, 1995.

- [32] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4):769–805, 1998.
- [33] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [34] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. MPS/SIAM Series on Optimization, 2001.
- [35] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.
- [36] R. T. Rockafellar, S. P. Uryasev, and M. Zabarankin. Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastic*, 10(1):51–74, 2006.
- [37] L. El Ghaoui and H. Lebret. Robust solutions to least-square problems with uncertain data. *SIAM Journal of Matrix Analise and Applications*, 18(4):1035–1064, 1997.
- [38] L. El Ghaoui and H. Lebret. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal of Optimization*, 9(1):33–52, 1999.
- [39] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1):1–13, 1999.
- [40] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming Series A*, 88(3):411–424, 2000.
- [41] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust optimization - methodology and applications. *Mathematical Programming Series B*, 92(3):453–480, 2002.
- [42] J. Zander and S. Kim. *Radio Resource Management for Wireless Networks*. Artech House Mobile Communications Series. Artech House Publishers, 2001.
- [43] H. Minc. *Nonnegative Matrices*. John Wiley and Sons, 1988.
- [44] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [45] G. J. Foschini and Z. Miljanic. A simple distributed autonomous power control algorithm and its convergence. *IEEE Transactions on Vehicular Technnology*, 42(11):641–646, 1993.
- [46] R. D. Yates. A framework for uplink power control in cellular radio systems. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 44(3):638–644, 1995.

- [47] S. A. Grandhi, J. Zander, and R. D. Yates. Constrained power control. *Wireless Personal Communications*, 1(4):275–270, 1994.
- [48] S. Ulukus and R. D. Yates. Adaptive power control and MMSE interference suppression. *ACM Wireless Networks*, 4(6):489–496, 1998.
- [49] H. Yanikomeroglu and E. Sousa. SIR-balanced macro power control for the reverse link of CDMA sectorized distributed antenna systems. In *IEEE International symposium on personal, indoor and mobile radio communications*, pages 915–920, 1998.
- [50] S. V. Hanly. An algorithm for combined cell-site selection and power control to maximize cellular spread spectrum capacity. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 3(7):1332–1440, 1995.
- [51] R. D. Yates and C. Y. Huang. Integrated power control and base station assignment. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 44(3):638–644, 1995.
- [52] D. Mitra. An asynchronous distributed algorithm for power control in cellular radio systems. In *4th Winlab Workshop Third Generation Wireless Information Network*, pages 249–257, 1993.
- [53] R. Jäntti and S.-L. Kim. Second-order power control with asymptotically fast convergence. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 18(3):447–457, 2000.
- [54] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [55] H.-J. Zimmermann. An application-oriented view of modeling uncertainty. *European Journal of Operational Research*, pages 190–198, 2000.
- [56] R. J.-B. Wets. Stochastic programming. In G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J. Todd, editors, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, volume 1, chapter 8, pages 573–629. Elsevier Science Publisher, 1989.
- [57] M. Chiang, C. Wei Tan, D. P. Palomar, D. O’Neill, and D. Julian. Power control by geometric programming. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(7):2640–2651, 2007.
- [58] C. Wei Tan, D.P. Palomar, and M. Chiang. Solving nonconvex power control problems in wireless networks: Low SIR regime and distributed algorithms. In *IEEE Global Telecommunications Conference*, 2005.

- [59] C. S. Beightler and D. T. Philips. *Applied Geometric Programming*. John Wiley & Sons Inc, 1976.
- [60] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Thinking coherently. *Risk*, 10:68–71, 1997.
- [61] R. T. Rockafellar and S. P. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000.
- [62] R. T. Rockafellar and S. P. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26(7):1443–1471, 2002.
- [63] G. Pflug. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In S. Uryasev, editor, *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, pages 272–282. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [64] A. Kibzun and E. A. Kuznetsov. Analysis of criteria VaR and CVaR. *Journal of Banking and Finance*, 30:779–796, 2006.
- [65] R. T. Rockafellar, S. P. Uryasev, and M. Zabarankin. Optimality conditions in portfolio analysis with general deviation measures. Research Report 2004-7, Risk Management and Financial Lab, Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, 2005.
- [66] P. Krokmal, J. Palmquist, and S. P. Uryasev. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *The Journal of Risk*, 4(2), 2001.
- [67] R. T. Rockafellar, S. P. Uryasev, and M. Zabarankin. Deviations measures in risk analysis and optimization. Research Report 2002-7, Risk Management and Financial Lab, Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, 2002.
- [68] F. Delbaen. Coherent risk measures on general probability spaces. In *Advances in Finance and Stochastics*, pages 1–37. Springer Verlag, 2002.
- [69] A. Nemirovski and A. Shapiro. Convex approximations of chance constrained programs. Technical report, Israel Institute of Technology, Georgia Institute of Technology, 2004.
- [70] H. Föllmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastic*, 4(6):429–447, 2002.

- [71] H. Föllmer and A. Schied. Robust preferences and convex measures of risk. In *Advances in Finance and Stochastics*, pages 39–56. Springer Verlag, 2002.
- [72] M. Frittelli and E. R. Gianin. Putting order in risk measures. *Journal of Banking and Finance*, 26:1473–1486, 2002.
- [73] A. Ruszczyński and A. Shapiro. Optimization of convex risk functions. Research report, Rutgers University – Georgia Institute of Technology, 2004.
- [74] A. Ruszczyński and A. Shapiro. Conditional risk mappings. Research report, Rutgers University – Georgia Institute of Technology, 2004.
- [75] A. Ruszczyński and A. Shapiro. Optimization of risk measures. Research report, Rutgers University – Georgia Institute of Technology, 2004.
- [76] P. Krokmal and R. Murphey. On risk measures in stochastic programs. Research Report 2004-5, Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, 2004.
- [77] A. Ben-Tal and M. Teboulle. An old-new concept of convex risk measures: The optimized certainty equivalent. Technical report, Faculty of Industrial Engineering and Management - Israel Institute of Technology, School of Mathematical Sciences - Tel-Aviv University, 2005.
- [78] A. Schied. Risk measures and robust optimization problems. Technical report, Institut für Mathematik - Berlin - Germany, 2004.
- [79] R. Pelesoni and P. Vicig. Convex imprecise previsions for risk measurement. Technical report, University of Trieste, 2002.
- [80] R. Pelesoni and P. Vicig. Convex imprecise previsions: Basic issues and applications. Technical report, University of Trieste, 2002.
- [81] W. Ogryczak and A. Ruszczyński. From stochastic dominance to mean-risk models: Semidesviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, 116(1):33–50, 1999.
- [82] W. Ogryczak and A. Ruszczyński. On the consistency of stochastic dominance and mean-semidesviations models. *Mathematical Programming Series B*, 89(2):217–232, 2001.
- [83] W. Ogryczak and A. Ruszczyński. Dual stochastic dominance and related mean-risk models. *SIAM Journal on Optimization*, 13(1):60–78, 2003.

- [84] E. Baker. Increasing risk and increasing informativeness: Equivalence theorems. Technical report, University of Massachusetts, 2002.
- [85] D. Bertsimas and D. Brown. Robust linear optimization and coherent risk measures. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [86] S. P. Uryasev. Introduction to the theory of probabilistic functions and percentiles (value-at-risk). In S. Uryasev, editor, *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, pages 1–25. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [87] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski. Robustness. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms and Applications*, chapter 6, pages 139–162. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [88] K. Shimizu, Y. Ishizuka, and J. F. Bard. *Nondifferentiable and two-level mathematical programming*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [89] D. Bertsimas, D. Pachamanova, and M. Sim. Robust linear optimization under general norms. *Operations Research Letters*, 32(6):510–516, 2004.
- [90] D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. *Operations Research*, 52(1):35–53, 2004.
- [91] M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye. CVX users’ guide. Technical report, Department of Electrical Engineering - Stanford University, 2006. <http://stanford.edu/~boyd/cvx>.
- [92] M. López and G. Still. Semi-infinite programming. *European Journal of Operational Research*, (180):491–518, 2007.