



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação**

Lucas Porrelli Moreira da Silva

**Problema de estabilidade absoluta para  
sistemas a tempo contínuo com saltos  
markovianos: análise e controle por  
realimentação de estados**

Campinas

2017



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Engenharia de Computação e Au-  
tomação Industrial

Lucas Porrelli Moreira da Silva

**Problema de estabilidade absoluta para sistemas a tempo  
contínuo com saltos markovianos: análise e controle por  
realimentação de estados**

Dissertação apresentada à Faculdade de En-  
genharia Elétrica e de Computação da Uni-  
versidade Estadual de Campinas como parte  
dos requisitos exigidos para a obtenção do  
título de Mestre em Engenharia Elétrica, na  
Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves

Este exemplar corresponde à versão  
final da tese defendida pelo aluno  
Lucas Porrelli Moreira da Silva,  
e orientada pelo Prof. Dr. Alim  
Pedro de Castro Gonçalves

---

Campinas

2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Si38p Silva, Lucas Porrelli Moreira da, 1985-  
Problema de estabilidade absoluta para sistemas a tempo contínuo com saltos markovianos : análise e controle por realimentação de estados / Lucas Porrelli Moreira da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Alim Pedro de Castro Gonçalves.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas não lineares. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Sistemas estocásticos. I. Gonçalves, Alim Pedro de Castro, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Absolute stability problem for continuous-time systems with Markov jumps : analysis and state feedback control

**Palavras-chave em inglês:**

Nonlinear systems

Linear matrix inequalities

Stochastic system

**Área de concentração:** Automação

**Titulação:** Mestre em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

Alim Pedro de Castro Gonçalves [Orientador]

Eduardo Fontoura Costa

Romis Ribeiro de Faissol Attux

**Data de defesa:** 16-10-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

# COMISSÃO JULGADORA-DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Candidato:** Lucas Porrelli Moreira da Silva, **RA:** 180571.

**Data da Defesa:** 16 de outubro de 2017.

**Título da dissertação:** “Problema de estabilidade absoluta para sistemas a tempo contínuo com saltos markovianos: análise e controle por realimentação de estados”.

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (Presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa (ICMC/USP-São Carlos)

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Dedico esta dissertação à minha família  
e a meu orientador, Alim Gonçalves.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Prof. Alim Gonçalves, por ter me aceitado como seu aluno de mestrado, pela oportunidade de trabalhar com o assunto tratado nesta dissertação, como também pela confiança depositada em mim ao longo destes dois anos de trabalho, refletida na oportunidade de acompanhá-lo, como estagiário docente na disciplina de circuitos elétricos, e poder ver de perto seu comprometimento e amor pela docência.

Agradeço também à minha mãe, Maria de Fátima, meu pai, Paulo, e minha irmã Paula, por todo amor e atenção, ao longo de todos esses anos e também por todo o suporte que vocês me deram para que eu pudesse realizar este sonho.

Aos professores Eduardo F. Costa e Romis R. F. Attux, por terem aceitado participar da minha defesa, bem como pelas valiosas contribuições para a versão final do manuscrito.

Aos professores da FEEC agradeço pelos excelentes cursos ministrados.

Ao Prof. Marco Antonio, meu orientador de graduação e grande amigo, por ter me incentivado a entrar no mundo da pesquisa.

Ao Prof. Matheus Souza pelas valiosas discussões.

Ao Leonardo Carvalho por ter me ajudado no início do mestrado, com o pacote computacional *LMILab*, como também pelas inúmeras discussões a respeito do projeto.

Aos meus antigos e novos amigos de laboratório, Jonathan Olate, Leonardo Carvalho, Matheus Amorim, André M., Gabriela, Thiago, Gabrielle, Rafael M., Rafael, Vanessa e ao Guilherme, por toda ajuda prestada como também pelos momentos engraçados, que tornaram os dois anos de mestrado muito mais leves.

Ao “povão da Van” de Piracicaba pelos momentos de descontração.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À Noêmia, assistente técnico da pós-graduação da FEEC, por todo auxílio prestado desde a primeira matrícula, e também a todas as funcionárias que a auxiliam.

A todos, meu muito obrigado.

*“Seja você quem for, seja qual for a posição social  
que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa,  
tenha sempre como meta muita força, muita determinação  
e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus,  
que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.”*  
*(Ayrton Senna da Silva.)*

# Resumo

Este trabalho apresenta uma formulação LMI para a análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas tipo Lur'e a tempo contínuo com saltos markovianos. Adicionalmente, além do completo conhecimento dos modos da cadeia de Markov, bem como do sistema dinâmico, consideramos duas possibilidades para a função não linear  $\phi(\cdot)$ , que é desconhecida: ela pode ser determinística ou ela pode mudar de acordo com o modo  $i \in \mathbb{K}$  da cadeia de Markov. Com base nestas informações, propomos condições para o teste da estabilidade absoluta e para o projeto de controladores por realimentação de estados, ambos com custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . Os conceitos são ilustrados através de exemplos práticos.

**Palavras-chaves:** Cadeias de Markov de tempo contínuo; desigualdades matriciais lineares; critério do círculo.

# Abstract

This thesis presents an LMI formulation for stability analysis and control of Lur'e type Markov Jump Systems. In addition to the full knowledge of the Markov chain modes, as well as the dynamic system, we consider two possibilities for the unknown nonlinear function  $\phi(\cdot)$ : either it is deterministic or it changes with the Markov modes  $i \in \mathbb{K}$ . Based on these assumptions, we propose conditions for testing the system absolute stability and for designing state feedback controllers, both with guaranteed cost  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ . We illustrate our results with practical examples.

**Keywords:** Continuous-time Markov chain; linear matrix inequalities; circle criterion.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Cadeia de Markov com três modos. . . . .	13
Figura 2 – Sistema tipo Lur'e em diagrama de blocos. . . . .	16
Figura 3 – Função pertencente ao setor $[0, \kappa]$ . . . . .	16
Figura 4 – Em vermelho, círculo degenerado em uma reta, em azul temos uma representação do Diagrama de Nyquist da função de transferência $G(s)$ , de 3ª ordem. . . . .	18
Figura 5 – Diagrama de Nyquist e $\phi(q) \in [0, 9,38]$ . . . . .	19
Figura 6 – Diagrama de Popov. . . . .	20
Figura 7 – Hipótese (i), $\phi(\cdot) \in [0, \kappa]$ . . . . .	29
Figura 8 – Hipótese (ii), $\phi_i(\cdot) \in [0, \kappa]$ . . . . .	30
Figura 9 – Funções $\phi_{11}(q), \phi_{12}(q) \in [0, 7]$ . . . . .	33
Figura 10 – Funções $\phi_{21}(q), \phi_{22}(q) \in [0, 5]$ . . . . .	33
Figura 11 – Resposta temporal. . . . .	33
Figura 12 – Resposta temporal. . . . .	38
Figura 13 – Sistema tipo Lur'e em malha fechada. . . . .	39
Figura 14 – Circuito de Chua. . . . .	46
Figura 15 – Resposta temporal do circuito de Chua. . . . .	48
Figura 16 – Resposta temporal do circuito de Chua. . . . .	48
Figura 17 – Esforço de controle. . . . .	49
Figura 18 – Circuito Controlado. . . . .	49
Figura 19 – Esforço de controle. . . . .	50
Figura 20 – Custo $\times \xi$ , custo $\mathcal{H}_\infty$ em azul e o custo $\mathcal{H}_2$ em vermelho. . . . .	51
Figura 21 – Sistema mecânico com mola não linear. . . . .	51
Figura 22 – Resposta do sistema mecânico não linear. . . . .	52
Figura 23 – Resposta do sistema mecânico não linear. . . . .	53
Figura 24 – Esforço de Controle. . . . .	53
Figura 25 – Resposta do sistema. . . . .	54
Figura 26 – Resposta do sistema. . . . .	54
Figura 27 – Resposta do sistema. . . . .	55
Figura 28 – Esforço de Controle. . . . .	55
Figura 29 – Custo $\times \zeta$ , custo $\mathcal{H}_\infty$ em azul e o custo $\mathcal{H}_2$ em vermelho. . . . .	56

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>15</b>
2.1	Critério do Círculo	15
2.2	Sistemas Lineares com Saltos Markovianos	20
2.2.1	Estabilidade Estocástica	21
2.3	Norma $\mathcal{H}_2$	25
2.4	Norma $\mathcal{H}_\infty$	26
2.5	Considerações finais	28
<b>3</b>	<b>Análise de Estabilidade</b>	<b>29</b>
3.1	Estabilidade Estocástica de Sistemas tipo Lur'e	29
3.2	Estabilidade estocástica com garantia de desempenho	33
3.2.1	Custo Garantido $\mathcal{H}_2$	34
3.2.2	Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$	36
3.3	Considerações finais	38
<b>4</b>	<b>Síntese de Controladores por Realimentação de Estado</b>	<b>39</b>
4.1	Controle com custo garantido $\mathcal{H}_2$	40
4.2	Controle com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$	42
4.3	Considerações finais	44
<b>5</b>	<b>Exemplos práticos</b>	<b>45</b>
5.1	Simulação da Cadeia de Markov de Tempo Contínuo	45
5.2	Circuito de Chua	45
5.3	Sistema Mecânico com mola não linear	51
	<b>Conclusão</b>	<b>57</b>
	<b>Referências</b>	<b>59</b>

# 1 Introdução

Inúmeros sistemas físicos, biológicos, econômicos, químicos, entre outros, podem ser estudados, por meio de sistemas dinâmicos através de uma representação matemática que leva em consideração algumas de suas propriedades. Entre elas, destacamos, por exemplo, não linearidades, que são encontradas em diversos modelos biológicos que podem representar desde a dinâmica entre espécies animais até a disseminação de vírus. Também encontramos não linearidades em sistemas físicos, como nos osciladores eletrônicos e malhas de sincronismo de fase (PLL, da sigla em inglês para *Phase Locked Loop*) (MONTEIRO, 2011).

Mudanças abruptas nas características de tais sistemas podem tornar inviável uma abordagem determinística. Assim, o uso de processos estocásticos torna-se interessante por permitir que tais eventos sejam levados em consideração, baseando-se não mais em valores precisos para os parâmetros, mas em estatísticas que incluem probabilidades, esperança matemática, variância entre outros (GONÇALVES, 2009).

Uma das maneiras encontradas para modelar tais mudanças na dinâmica de sistemas é escrevê-los como um conjunto de diferentes subsistemas, cada um deles representando um modo de operação. Cada modo é descrito por um conjunto de equações lineares e a aleatoriedade a ser levada em conta é modelada como um salto entre os diferentes modos de operação. Tal modelagem recebeu o nome de sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS, da sigla em inglês para *Markov Jump Linear Systems*) e tem sido usada em diversos trabalhos na literatura. Podemos citar, por exemplo, os livros (COSTA *et al.*, 2006), (COSTA *et al.*, 2013), e suas referências.

Para auxiliar o leitor no melhor entendimento de sistemas com saltos markovianos, assumamos um sistema linear que admita a existência de três modos de operação, sendo que cada um dos modos é regido por um grupo de equações diferenciais lineares, as equações de estado. Tal sistema salta entre os diferentes modos de acordo com uma cadeia de Markov, como ilustrado na Figura 1, onde os círculos numerados representam cada modo de operação e as setas identificadas por  $p_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{K}$ , representam as probabilidades de transição entre cada um dos modos.

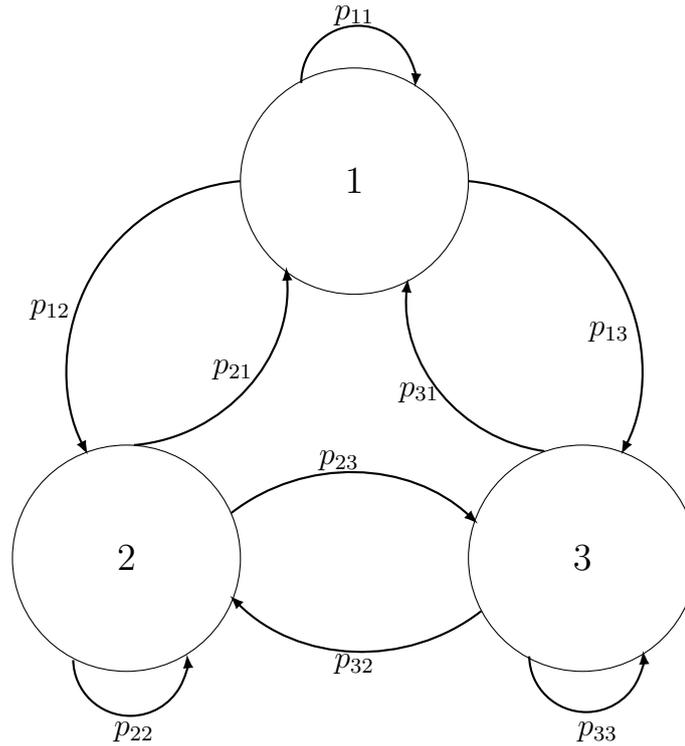


Figura 1 – Cadeia de Markov com três modos.

O principal objetivo deste trabalho, com base nas informações supracitadas, é definir com precisão o problema de estabilidade absoluta para sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo. As condições de estabilidade e de síntese de controladores por realimentação de estado, são descritas por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs, da sigla em inglês para *Linear Matrix Inequalities*), que incluem os critérios clássicos para sistemas do tipo Lur'e invariantes no tempo como casos particulares. Ademais, qualquer problema de otimização descrito por LMIs pode ser resolvido por rotinas numéricas eficientes. Nesta dissertação, usamos o *parser* Yalmip (LOFBERG, 2005) e o *solver* SeDuMi (STURM, 1999), mas vale lembrar que existem outras opções como o LMILab do MatLab.

O problema de estabilidade absoluta consiste em determinar uma condição para que o sistema não linear, descrito no formato Lur'e, seja estável para uma classe de funções não lineares. Note ainda que tais funções não lineares podem sequer ser perfeitamente conhecidas, desde que pertençam à classe em estudo. Neste trabalho, estendemos os resultados do clássico Critério do Círculo para o problema de estabilidade absoluta de sistemas com saltos markovianos.

Os próximos capítulos estão organizados da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** Conceitos básicos. Este capítulo apresenta a notação utilizada ao longo do texto, os critérios do círculo e de Popov, e introduz a formulação matemática para os sistemas lineares com saltos markovianos. Aqui destacamos as definições

de cadeias de Markov, de estabilidade estocástica e de normas de sistemas, e são apresentados exemplos numéricos para melhor ilustrar tais conceitos;

- **Capítulo 3:** Análise de Estabilidade. Nosso foco aqui está nos teoremas que propõem condições de teste para a estabilidade de sistemas tipo Lur'e com garantia de desempenho, através de custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Apresentamos exemplos que já foram publicados em alguns artigos relacionados com esta pesquisa;
- **Capítulo 4:** Síntese de Controladores. Este capítulo apresenta a síntese de controladores por realimentação de estados, tanto com custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , quanto com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ ;
- **Capítulo 5:** Exemplos. O objetivo aqui é mostrar, com o auxílio de exemplos práticos, a validade dos teoremas apresentados nos Capítulos 3 e 4;
- **Conclusões:** Conclusão do trabalho bem como perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 Conceitos Básicos

Este capítulo tem o objetivo de apresentar ao leitor os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho, bem como a notação que será encontrada ao longo do texto, a qual é enunciada a seguir.

Letras maiúsculas representam matrizes, letras minúsculas vetores e escalares, os super índices  $(\cdot)^T$  e  $(\cdot)^{-1}$  indicam a matriz transposta e a matriz inversa, respectivamente. Quando for conveniente, usaremos a seguinte definição para a soma de uma matriz  $A$  com a sua transposta,  $\text{He}(A) := A + A^T$ . A norma-2 para um sinal aleatório  $x$  é dada por,  $\|x\|_2 := \sqrt{\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty x(t)^T x(t) dt \right]}$ , vale ressaltar que o conjunto dos sinais com norma-2 limitada é  $\mathcal{L}_2$ . A lista a seguir indica alguns dos símbolos utilizados ao longo do texto:

$\mathcal{E} [\cdot]$	Esperança Matemática,
$\mathcal{E} [\cdot \cdot]$	Esperança Matemática Condicional,
$\mathbb{K}$	Conjunto dos $N$ modos da cadeia de Markov de tempo contínuo,
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais,
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos Números Reais Positivos,
$\text{Tr}(\cdot)$	Operador traço matricial,
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz Diagonal,
$\Phi$	Conjunto das funções não lineares $\phi(\cdot)$ , pertencentes ao setor $[0, \mathcal{K}]$ ,
$\star$	Bloco induzido por simetria em matrizes simétricas,
$\Re \{ \cdot \}$	Parte real de um número complexo,
$\Im \{ \cdot \}$	Parte imaginária de um número complexo.

### 2.1 Critério do Círculo

De acordo com (GAPSKI, 1994), o Problema de Estabilidade Absoluta teve seu início na década de 40 do século passado ao ser formulado por Lur'e e Postnikov. Seja o sistema dinâmico descrito pelas equações de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Ep(t), \quad (2.1a)$$

$$q(t) = C_q x(t), \quad (2.1b)$$

$$p(t) = -\phi(q(t)), \quad (2.1c)$$

representadas por diagrama de blocos na Figura 2, sendo que o sistema é composto por uma parte linear  $\mathcal{G}$ , dada pelas equações (2.1a)-(2.1b), e uma realimentação a partir de uma função  $\phi(\cdot)$ , possivelmente não linear, conforme equação (2.1c). Adicionalmente, consideramos que  $\phi$  é uma função com gráfico pertencente ao primeiro e terceiro quadrantes do plano  $q \times \phi$ , conforme a Figura 3.

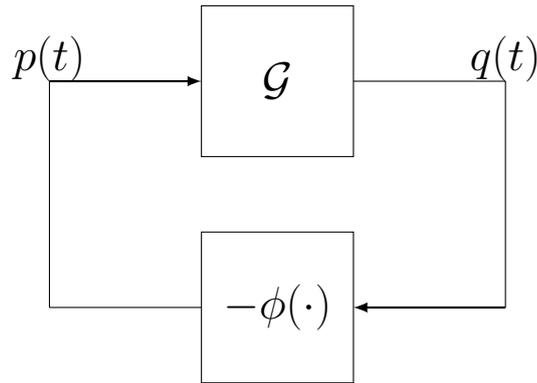


Figura 2 – Sistema tipo Lur’e em diagrama de blocos.

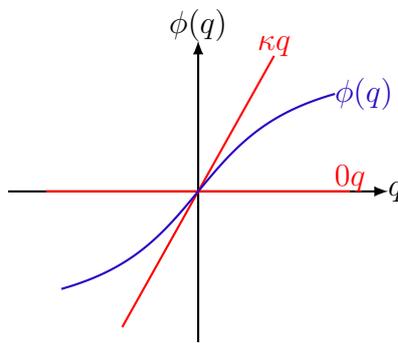


Figura 3 – Função pertencente ao setor  $[0, \kappa]$ .

Que exigências devem ser feitas às equações (2.1a)-(2.1b), parte linear do sistema, de sorte que o sistema realimentado seja estável para qualquer função pertencente ao setor  $[0, \kappa]$ , representado em vermelho na Figura 3?

Vale mencionar, que a determinação destas condições é o objetivo do Problema de Estabilidade Absoluta.

No artigo (LUR’E; POSTNIKOV, 1944), Lur’e e Postnikov propõem pela primeira vez uma função de Lyapunov do tipo:

$$v(x) = x^T P x + 2\beta \int_0^{C_q x} \phi(\zeta) d\zeta, \tag{2.2}$$

onde  $P = P^T > 0$ .

Como detalhado por (GAPSKI, 1994), tendo como base a função da equação (2.2), Lur’e apresentou em outros artigos um método de solução do problema utilizando a análise das raízes de um sistema de equações quadráticas. Posteriormente, Yakubovitch mostrou que tais equações podiam ser reduzidas a uma única equação, e mostrou que a existência de duas raízes reais desta equação é condição suficiente para atestar a estabilidade de (2.1).

Nas décadas seguintes, outros estudiosos tentaram propor formas de análise. Aizerman apresentou uma conjectura que, em linhas gerais, dizia que, se o sistema (2.1a)-

(2.1b) fosse estável com a lei de controle  $\phi(q) = Kq$  para quaisquer  $K \in [\kappa_1, \kappa_2]$ , então seria estável para quaisquer  $\phi(q) \in [\kappa_1, \kappa_2]$ , ou seja,  $\kappa_1 \leq \frac{\phi(q)}{q} \leq \kappa_2$ . Esta conjectura parecia promissora, porém, como apresentado em (PLISS, 1958), existe um contraexemplo mostrando que tal conjectura é falsa. Kalman (KALMAN, 1957) também apresentou uma conjectura, que impunha duas restrições à função  $\phi$ ,  $k_{\min} \leq \frac{\phi(q)}{q} \leq k_{\max}$  e  $k_{\min} \leq \frac{d}{dq}\phi(q) \leq k_{\max}$ , mas esta proposta também foi mostrada falsa através de contraexemplos.

O auge destes estudos ocorreu na década de 60, com uma enorme contribuição de trabalhos de diversos países. Dentre todas as contribuições encontra-se o trabalho de Popov. Em seu estudo, Popov investe numa análise frequencial das equações (2.1a)-(2.1b), análise que se aproxima do Critério de Nyquist. Vale ressaltar que o Critério de Popov é originalmente abordado na sua forma mais simples, ou seja, considera-se  $\phi(q) \in [0, \kappa]$ .

**Definição 2.1** (*Estabilidade Absoluta (KHALIL, 2002)*)– O sistema da Figura 2 é dito absolutamente estável, se a sua origem for assintoticamente estável para qualquer não linearidade  $\phi(q)$  pertencente a um dado setor.

A condição de setor será melhor estudada no Capítulo 3.

**Teorema 2.1** (*Critério de Popov abordagem entrada/saída (GEROMEL; KOROGUI, 2011)*)– O sistema representado pela Figura 2 é absolutamente estável no setor  $[0, \kappa]$  se  $A$  for Hurwitz e se existir  $\beta \geq 0$  tal que

$$\Re \left\{ \left( 1 + j\omega \frac{\beta}{\kappa} \right) G(j\omega) \right\} + \frac{1}{\kappa} > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (2.3)$$

onde  $G(j\omega) = C_q(j\omega I - A)^{-1} E$ .

Um critério que também assume uma linha frequencial, é o Critério do Círculo que, de acordo com (FRANKLIN *et al.*, 2013), é uma variação da Conjectura de Aizerman e foi proposto por Sandberg (1964) e por Zames (1966).

**Teorema 2.2** (*Critério do Círculo abordagem entrada/saída (GAPSKI, 1994), (KHALIL, 2002)*)– Seja o sistema tipo Lur'e da Figura 2, com uma não linearidade de setor  $\phi$  e  $G(s)$  racional, de fase mínima e estritamente própria. Então, o sistema realimentado é absolutamente estável se  $A$  for Hurwitz e se

$$\Re \{G(j\omega)\} + \frac{1}{\kappa} > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (2.4)$$

A condição apresentada, no Teorema 2.1, que é frequencial, pode ser descrita em termos de LMIs, conforme apresentado no teorema a seguir.

**Teorema 2.3** (*Critério do Círculo na forma de LMI*) (GEROMEL; KOROGUI, 2011)– O sistema (2.1), será estável, para qualquer  $\phi(q) \in [0, \kappa]$ , se existir uma matriz  $P = P^T > 0$ , que seja solução da LMI,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & \star \\ -E^T P + \kappa C_q & -2I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.5)$$

*Prova:* Inciamos multiplicando a LMI (2.5) à esquerda por  $\begin{bmatrix} x^T & \phi(q)^T \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} x \\ \phi(q) \end{bmatrix}$ , que resulta em

$$x^T (A^T P + PA) x + \phi(q)^T (-E^T P + \kappa C_q) x + x^T (-PE + \kappa C_q^T) \phi(q) + \phi(q)^T (-2I) \phi(q) < 0. \quad (2.6)$$

Agrupando os termos, e considerando a função de Lyapunov  $v(x) = x^T P x$ ,

$$\dot{v}(x) < \underbrace{(\phi(q) - \kappa q)^T \phi(q) + \phi(q)^T (\phi(q) - \kappa q)}_{\leq 0}, \quad (2.7)$$

onde o termo da direita é a condição de setor, que será melhor detalhada na Seção 3.1. Ademais, a desigualdade (2.7) garante a estabilidade do sistema tipo Lur'e pois a derivada da função de Lyapunov será estritamente negativa, concluindo a prova. ■

É importante enfatizar que a formulação LMI (2.5), como apresentada em (GEROMEL; KOROGUI, 2011), é idêntica a condição frequencial (2.4), esta análise pode ser encontrada na referência (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

A seguir temos uma representação gráfica para o Critério do Círculo

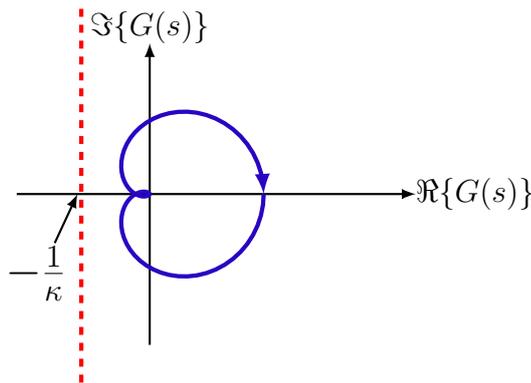


Figura 4 – Em vermelho, círculo degenerado em uma reta, em azul temos uma representação do Diagrama de Nyquist da função de transferência  $G(s)$ , de 3ª ordem.

**Exemplo 2.1:** ( (GEROMEL; KOROGUI, 2011), págs. 271 e 275) Considere o sistema não linear apresentado na Figura 2, cuja parte linear ( $\mathcal{G}$ ) tem função de transferência:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 14s + 6},$$

com polos em  $-1$ ,  $-3$ ,  $-1 \pm j$ . Trata-se, portanto de uma função de transferência assintoticamente estável.

### ► Critério do Círculo

Na Figura 5, o ponto em vermelho indica qual é o máximo  $\kappa > 0$  que garante a estabilidade do sistema realimentado por uma  $\phi(\cdot)$  não linear pertencente ao setor  $[0, \kappa]$ , ou seja para qualquer  $\phi(\cdot) \in [0, 9,38]$  a estabilidade é assegurada.

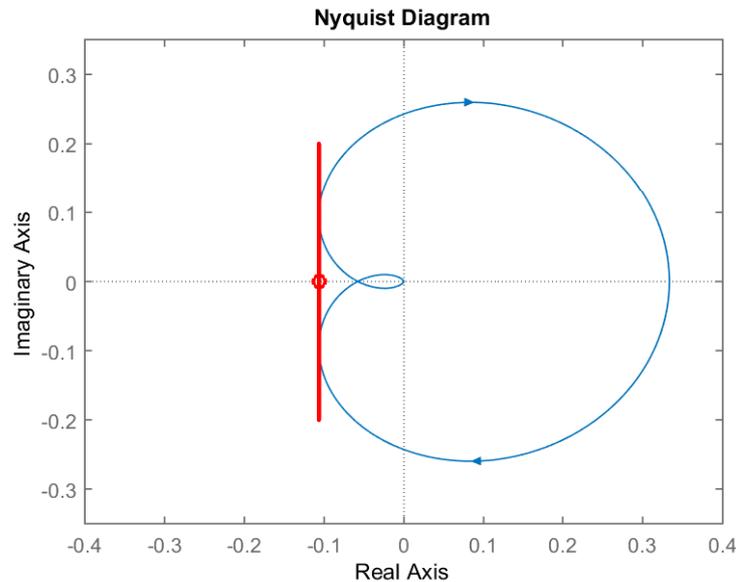


Figura 5 – Diagrama de Nyquist e  $\phi(q) \in [0, 9,38]$ .

### ► Critério de Popov

Na Figura 6 a linha vertical em vermelho refere-se à condição do Critério do Círculo, bastando fazer  $\beta = 0$  na equação (2.3) para obter  $\kappa = 9,38$ . Já a reta tracejada em verde corresponde ao Critério de Popov e foi obtida para os valores  $\beta = 12,47$  e  $\kappa = 17,36$ . Note-se ainda que a reta em verde é tangente ao diagrama de Popov de sorte que o valor do ganho do setor  $\kappa > 0$  seja o maior possível.

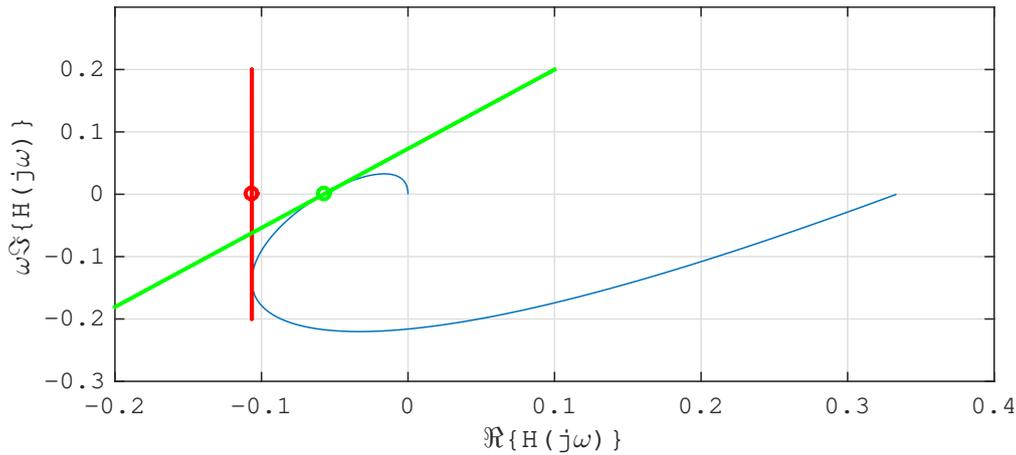


Figura 6 – Diagrama de Popov.

Conforme será apresentado nos próximos capítulos, este trabalho apresenta um estudo de sistemas tipo Lur'e com saltos markovianos, generalizando o critério do círculo. Mas o leitor poderá ficar com a seguinte dúvida: por que abordar o problema através do critério do círculo se o critério de Popov, aparentemente, é menos conservador?

De acordo com (SLOTINE *et al.*, 1991), o critério de Popov pode ser aplicado apenas a sistemas invariantes no tempo. Entretanto, sistemas com saltos são variantes no tempo, por conta da dependência das matrizes com o processo de Markov  $\theta_t$ , como será detalhado a seguir.

## 2.2 Sistemas Lineares com Saltos Markovianos

Assumimos um espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , onde  $\Omega$  é o espaço amostral,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$  e  $\mathcal{P}$  é uma medida de probabilidade.

**Definição 2.2**  $\sigma$ -álgebra (OKSENDAL, 2013)– Se  $\Omega$  for um conjunto dado, então uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$  é uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  com as seguintes propriedades:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
- (ii)  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$ , sendo  $F^C = \Omega \setminus F$  o complemento de  $F$  em  $\Omega$ ;
- (iii)  $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow F := \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$ .

O par  $(\Omega, \mathcal{F})$  é chamado de espaço mensurável. Uma medida de probabilidade  $\mathcal{P}$  num espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  é uma função  $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que

- (a)  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ ,  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ ;

(b) se  $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$  e  $\{F_i\}_{i=1}^\infty$  é disjunto (i.e.  $F_i \cap F_j = \emptyset, i \neq j$ ) então  $\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}(F_i)$ .

Considera-se também, um sistema linear com saltos markovianos  $\mathcal{T}$ :

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t) + J(\theta_t)w(t), \quad (2.8a)$$

$$z(t) = C_z(\theta_t)x(t) + D_z(\theta_t)w(t), \quad (2.8b)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  é um sinal de entrada,  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  é um sinal de saída e as matrizes  $A(\theta_t)$ ,  $C_z(\theta_t)$ ,  $J(\theta_t)$  e  $D_z(\theta_t)$  têm dimensões apropriadas.

A variável aleatória  $\theta_t \in \mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$  define uma cadeia de Markov de Tempo Contínuo (CTMC, da sigla em inglês para *Continuous Time Markov Chain*). O processo estocástico  $\{\theta_t, t \in [0, \infty)\}$  é tal que

$$p_{ij}(\delta) = \mathcal{P}(\theta_{t+\delta} = j | \theta_t = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}\delta + \mathcal{O}(\delta), & i \neq j, \\ 1 + \lambda_{ii}\delta + \mathcal{O}(\delta), & i = j, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde, de acordo com (LEON-GARCIA, 2008),  $\mathcal{O}(\delta)$  denota os termos que se tornam desprezíveis em relação a  $\delta$  à medida que  $\delta \rightarrow 0$ , onde  $\delta > 0$  e  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\delta)}{\delta} = 0$ . Os parâmetros  $\lambda_{ij}$  são as taxas de transição que têm as seguintes propriedades:  $\lambda_{ij} \geq 0, \forall j \neq i, \lambda_{ii} \leq 0$ , com

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0.$$

Com isso é possível construir a matriz

$$\Lambda = [\lambda_{ij}],$$

que contém as taxas de transição entre os modos da cadeia de Markov representada por  $\theta_t \in \mathbb{K}$ . Com o objetivo de simplificar a notação, escreveremos  $X(\theta_t = i) = X_i, \forall i \in \mathbb{K}$ . Para mais detalhes sobre esta formulação c.f. (COSTA *et al.*, 2013).

## 2.2.1 Estabilidade Estocástica

Aqui serão apresentadas algumas definições importantes com relação à estabilidade de sistemas lineares com saltos markovianos. Começamos com o operador gerador infinitesimal. O leitor pode encontrar maiores detalhes acerca dos resultados apresentados nesta subseção nas seguintes referências: (FARIAS, 1998) e (COSTA *et al.*, 2013).

**Definição 2.3** (*Gerador Infinitesimal*)- Seja um processo estocástico definido por  $\{X_t, t \in [0, +\infty)\}$ , e uma função do processo dada por  $f(X_t)$ . O gerador infinitesimal de  $X_t$  aplicado a  $f$  é dado por

$$\mathcal{L}f := \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathcal{E} \left[ \frac{f(X_{t+\Delta}) - f(X_t)}{\Delta} \right]. \quad (2.10)$$

**Definição 2.4** (*Estabilidade Estocástica*)– O sistema (2.8), com entrada nula, é dito estocasticamente estável quando existir  $M = M^T > 0$  tal que

$$\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty x(t)^T x(t) dt \middle| \theta_0 \right] \leq x_0^T M x_0. \quad (2.11)$$

A definição supracitada, de acordo com (FARIAS, 1998), implica que, dado um estado inicial  $(x_0, \theta_0)$ ,  $x(t)$  deve convergir assintoticamente para a origem em média quadrática. Neste caso, existirão  $a$  e  $b$  positivos de sorte que

$$\mathcal{E} [\|x(t)\|^2] \leq b \|x(0)\|^2 e^{-at}, \forall t \in [0, +\infty). \quad (2.12)$$

Como o sistema em questão é linear, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a origem,  $x = 0$ , é o ponto de equilíbrio. Assumindo ainda a hipótese de que a entrada de ruído é nula, podemos enunciar o seguinte teorema, que é um dos principais resultados de (JI; CHIZECK, 1990). Informamos ao leitor que a prova do teorema a seguir seguirá os mesmos passos da prova apresentada na referência (JI; CHIZECK, 1990).

**Teorema 2.4** O sistema (2.8) é estocasticamente estável se, e somente se, existirem matrizes definidas positivas  $P_i = P_i^T > 0, i \in \mathbb{K}$ , satisfazendo as seguintes LMIs simultaneamente,

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j < 0, \forall i \in \mathbb{K}. \quad (2.13)$$

*Prova:*

Assumindo a função estocástica de Lyapunov  $v(x(t), \theta_t) = x(t)^T P(\theta_t) x(t)$  e aplicando o operador gerador infinitesimal,  $\mathcal{L}$ , na função  $v(x(t), \theta_t)$ , temos a desigualdade (2.13) reescrita como,

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + Q_i = 0, \quad (2.14)$$

onde  $Q_i > 0, i \in \mathbb{K}$ . Vale ressaltar que estas matrizes são arbitrárias, nos permitindo reescrever a equação (2.14) como,

$$\begin{aligned} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j &= -Q_i \\ &< 0, \forall i \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

► **Suficiência:** Consideremos a função de Lyapunov estocástica  $v(x(t), \theta_t = i) = x(t)^T P(\theta_t) x(t)$ , como apresentada anteriormente, na qual aplicamos o operador gerador infinitesimal,

$$\mathcal{L}v(x(t), \theta_t = i) = \dot{x}(t)^T P(\theta_t) x(t) + x(t)^T P(\theta_t) \dot{x}(t) + x(t)^T \mathcal{L}P(\theta_t) x(t) \quad (2.15)$$

$$= x(t)^T \left( A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x(t) \quad (2.16)$$

$$= -x(t)^T Q_i x(t), \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}P(\theta_t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathcal{E} \left[ \frac{P(\theta_{t+\Delta}) - P(\theta_t)}{\Delta} \middle| \theta_t = i \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} P_j \Delta + (1 + \lambda_{ii} \Delta) P_i - P_i}{\Delta} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j.\end{aligned}$$

Dividindo os dois lados da igualdade (2.15) por  $v(x(t), \theta_t = i) = x(t)^T P_i x(t)$ , encontramos,

$$\frac{\mathcal{L}v(x(t), \theta_t = i)}{v(x(t), \theta_t = i)} = -\frac{x(t)^T Q_i x(t)}{x(t)^T P_i x(t)} \quad (2.18)$$

$$\leq -\min_{i \in \mathbb{K}} \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)}, \quad (2.19)$$

onde  $\lambda_{\min}(\cdot)$  e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  são, respectivamente, os autovalores mínimo e máximo do argumento  $(\cdot)$ , definimos,

$$\xi := \min_{i \in \mathbb{K}} \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} > 0. \quad (2.20)$$

Aplicando a definição (2.20), na desigualdade (2.18) temos

$$\mathcal{L}v(x(t), \theta_t = i) \leq -\xi v(x(t), \theta_t = i),$$

que implica em,

$$\mathcal{E}[v(x(t), \theta_t = i)] \leq \exp(-\xi t) v(x_0, \theta_0 = i).$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima, no intervalo de 0 a  $T$  e considerando  $T \rightarrow \infty$ , temos,

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left[ \int_0^T x(t)^T P(\theta_t) x(t) dt \middle| \theta_0 = i \right] &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\exp(-\xi t) dt] x_0^T P_i x_0 \\ &\leq \xi^{-1} x_0^T P_i x_0.\end{aligned}$$

Por fim, fazendo  $M \geq \frac{1}{\xi \lambda_{\min}(P_i)} P_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , assim chegamos no resultado desejado,

$$\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty x(t)^T x(t) dt \middle| \theta_0 \right] \leq x_0^T M x_0.$$

► **Necessidade:** Consideremos a função,

$$x(t)^T P(T - t, \theta_t) x(t) = \mathcal{E} \left[ \int_t^T x(\tau)^T Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t \right], \quad Q(\theta_t) > 0,$$

se  $x \neq 0$ , temos que  $x(t)^T P(T - t, \theta_t) x(t)$  cresce monotonicamente com o aumento de  $T$  ou aumenta monotonicamente até que  $\mathcal{E}[x(\tau)^T Q(\theta_\tau) x(\tau)] = 0$ , para qualquer  $\tau \geq t$ .

Como o sistema é estocasticamente estável, a segunda situação ocorre quando  $T \rightarrow \infty$  e o seguinte limite existe,

$$x(t)^T P_i x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left[ \int_t^T x(\tau)^T Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t = i \right]. \quad (2.21)$$

Como a igualdade (2.21) é válida para qualquer  $x(t)$ , temos,

$$P_i = \lim_{T \rightarrow \infty} P(T - t, \theta_t = i), \quad P_i > 0. \quad (2.22)$$

Agora considere,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left[ x(t)^T P(T - t, \theta_t = i) x(t) - x(t + \delta)^T P(T - t - \delta, \theta_{t+\delta}) x(t + \delta) \middle| x(t), \theta_t = i \right] = \\ & = \mathcal{E} \left[ \mathcal{E} \left[ \int_t^{t+\delta} x(\tau)^T Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t = i \right] \middle| x(t), \theta_t = i \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ignorando os termos  $\mathcal{O}(\delta)$  de ordem superior, a equação (2.23) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} & -x(t)^T \left[ A_i^T P(T - t, \theta_t = i) \delta - P(T - t, \theta_t = i) A_i \delta + \delta \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P(T - t - \delta, \theta_t = j) + \delta \dot{P}(T - t, \theta_t = i) \right] x(t) \\ & = \mathcal{E} \left[ \int_t^{t+\delta} x(\tau)^T Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t = i \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.24) por  $\delta$ , e tomando o limite  $\delta \rightarrow 0^+$ , teremos,

$$\begin{aligned} & -x(t)^T \left[ A_i^T P(T - t, \theta_t = i) + P(T - t, \theta_t = i) A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P(T - t, \theta_t = j) + \dot{P}(T - t, \theta_t = i) \right] x(t) \\ & = \mathcal{E} \left[ \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+\Delta} x(\tau)^T Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau \middle| x(t), \theta_t = i \right] \\ & = x(t)^T Q(\theta_t) x(t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Recordando que o limite (2.22) existe e uma vez que a expressão supracitada é válida para qualquer  $x(t)$ , então  $P_i > 0$ ,  $i \in \mathbb{K}$  resolvem as equações de Lyapunov acopladas,

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + Q_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}. \quad (2.26)$$

Notemos ainda que, a igualdade (2.26) é válida por conta do limite apresentado na igualdade (2.22), que é garantido pela estabilidade estocástica do sistema, pois nesse caso temos,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dot{P}(T - t, \theta_t = i) = 0.$$

Concluindo a prova do teorema proposto. ■

**Exemplo 2.2:** Seja o MJLS de dois modos, definido pelas matrizes

$$\left[ A_1 \mid A_2 \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0,7481 & 0,8886 & -1,4023 & 0,4882 \\ -0,1924 & -0,7648 & -1,4224 & -0,1774 \end{array} \right],$$

com matriz taxa de transição de estados

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}.$$

Ele é estocasticamente estável, pois, as LMIs acopladas do Teorema 2.4, são satisfeitas para,

$$\left[ P_1 \mid P_2 \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,7882 & \star & 1,2419 & \star \\ 0,7404 & 1,4573 & 0,4657 & 1,5266 \end{array} \right].$$

Ademais, o leitor deve notar que o modo 1 é instável e o modo 2 é Hurwitz estável. Com isso podemos ver que a estabilidade estocástica independe da estabilidade/instabilidade de cada modo.

As subseções que seguem referem-se às normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares com saltos markovianos. Estes resultados serão de extrema importância para os próximos capítulos por definirem as medidas de desempenho que serão perseguidas no projeto de controladores.

## 2.3 Norma $\mathcal{H}_2$

Aqui será apresentada a definição bem como o teorema que traz uma forma de determinar a norma  $\mathcal{H}_2$  de sistemas lineares com saltos markovianos. O teorema será importante nas Seções 3.2.1 e 4.1. A prova do teorema, segue os passos apresentados na referência (CARDELIQUIO, 2014).

**Definição 2.5** (Norma  $\mathcal{H}_2$  de sistemas lineares) (FARIAS, 1998)– O sistema (2.8), sendo estocasticamente estável, possui a seguinte norma  $\mathcal{H}_2$

$$\|\mathcal{T}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[ \int_0^\infty z_k(t)^T z_k(t) dt \right]}, \quad (2.27)$$

onde  $z_k(t)$  é a resposta do sistema à entrada impulsiva  $w(t) = e_k \delta(t)$ ,  $e_k$  é um vetor com todas as entradas nulas, exceto a  $k$ -ésima, que vale 1, e  $\delta(t)$  é o impulso de Dirac.

**Teorema 2.5** (CARDELIQUIO, 2014)– A norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (2.8) com condições iniciais nulas, pode ser calculada através do seguinte problema de otimização convexa,

$$\|\mathcal{T}\|_2 = \min \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{Tr}(J_i^T P_i J_i)}, \quad (2.28)$$

sujeito a,

$$P_i > 0; \quad A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_{zi}^T C_{zi} < 0, \quad (2.29)$$

onde  $\pi_{0i}$  é probabilidade inicial para cada modo de operação, ou seja,  $\forall i \in \mathbb{K}$ .

*Prova:* Como o sistema, (2.8) deve ser estocasticamente estável, existem matrizes simétricas  $P_i > 0$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , que satisfaçam (2.13), portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\|_2^2 &= \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[ \mathcal{E} \left[ \int_0^\infty z_k(t)^T z_k(t) dt \middle| \theta_0 = i \right] \right] \\ &= \mathcal{E} \left[ \sum_{k=1}^r \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^\delta e_k^T J_i^T \exp(A_i^T t) C_{zi}^T C_{zi} \exp(A_i t) J_i e_k dt \right] + \\ &\quad + \left\{ \sum_{j \in \mathbb{K}} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} p_{ij}(\delta) \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[ \int_\delta^\infty z_k(t)^T z_k(t) dt \middle| x(\delta) = \exp(A_i \delta) J_i e_k, \theta_\delta = j \right] \right\} \\ &= \mathcal{E} \left[ \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[ \int_{0^+}^\infty z_k(t)^T z_k(t) dt \middle| x(0^+) = J_i e_k, \theta_{0^+} = i \right] \right] \end{aligned}$$

Fazendo  $Q_i = C_{zi}^T C_{zi}$  na equação (2.21), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left[ \int_{0^+}^\infty z_k(t)^T z_k(t) dt \middle| x(0^+) = J_i e_k, \theta_{0^+} = i \right] &= \\ &= \mathcal{E} \left[ \int_{0^+}^\infty x(t)^T C_{zi}^T C_{zi} x(t) dt \middle| x(0^+) = J_i e_k, \theta_{0^+} = i \right] \\ &= e_k^T J_i^T P_i J_i e_k, \end{aligned}$$

onde  $P_i > 0$  é solução da desigualdade (2.29) e o operador esperança refere-se às probabilidades iniciais,  $\theta_0 = i$ . Portanto,

$$\|\mathcal{T}\|_2^2 = \mathcal{E} \left[ \sum_{k=1}^r (e_k^T J_i^T P_i J_i e_k) \right] \quad (2.30)$$

$$= \mathcal{E} \left[ \text{Tr} (J_i^T P_i J_i) \right] \quad (2.31)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{Tr} (J_i^T P_i J_i), \quad (2.32)$$

concluindo a prova. ■

## 2.4 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Na subseção 2.3 apresentamos a norma  $\mathcal{H}_2$ , para complementar os espaços de Hardy trazemos a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , para sistemas lineares com saltos markovianos. Para tratarmos desta norma assumiremos a hipótese de que a entrada exógena,  $w(t)$ , é um sinal estocástico pertencente a classe de sinais  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ , em outras palavras, um sinal de energia limitada, tal que

$$\|w\|_2 = \sqrt{\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right]} < \infty. \quad (2.33)$$

Ademais, de acordo com (CARDELIQUIO, 2014), esta norma pretende estabelecer um limitante para a influência da entrada  $w(t)$  na saída de desempenho  $z(t)$ , como apresentado pela definição a seguir.

**Definição 2.6** O sistema (2.8), sendo estocasticamente estável, terá sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  definida como o menor valor de  $\gamma > 0$ , tal que,

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2. \quad (2.34)$$

Como enunciado por (CARDELIQUIO, 2014), a entrada  $w(t)$  é arbitrária e pertencente a classe  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ , ou seja, de energia finita, o mesmo ocorre com a saída  $z(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ , pois o sistema é estocasticamente estável, fornecendo a identidade,

$$\gamma = \sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_2 \\ w \neq 0}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (2.35)$$

Esta igualdade nos mostra que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é o ganho  $\mathcal{L}_2$  de **pior caso**. O teorema que segue apresenta a formulação LMI para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Teorema 2.6** (CARDELIQUIO, 2014) A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (2.8), satisfaz, para um dado escalar  $\gamma > 0$ , a condição,

$$\|\mathcal{T}\|_\infty^2 < \gamma^2, \quad (2.36)$$

se, e somente se, existirem matrizes  $P_i > 0$ , tais que as desigualdades,

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star & \star \\ J_i^T P_i & -\gamma^2 I & \star \\ C_{zi} & D_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.37)$$

sejam válidas para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

*Prova:* Seja a LMI (2.37). Aplicando o *Complemento de Schur*, temos

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_{zi}^T C_{zi} & \star \\ J_i^T P_i & -\gamma^2 I + D_{zi}^T D_{zi} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.38)$$

Multiplicando a LMI (2.38) à esquerda pelo vetor  $\begin{bmatrix} x(t)^T & w(t)^T \end{bmatrix}$  e à direita pelo vetor  $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$  que fornece,

$$\begin{aligned} x(t)^T \left( A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_{zi}^T C_{zi} \right) x(t) + w(t)^T \left( -\gamma^2 I + D_{zi}^T D_{zi} \right) w(t) + \\ + w(t)^T \left( J_i^T P_i \right) x(t) + x(t)^T \left( P_i J_i \right) w(t) < 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Agrupando os termos da desigualdade (2.39) e elegendo como função estocástica de Lyapunov  $v(x(t), \theta_t = i) = x(t)^T P(\theta_t) x(t)$ ,

$$\mathcal{L}v(x(t), \theta_t = i) + z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0. \quad (2.40)$$

Integrando a desigualdade (2.40), de 0 ao  $\infty$  e aplicando o operador esperança matemática, lembrando que  $v(x(0) = 0) = 0$ , temos,

$$\underbrace{\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty \mathcal{L}v(x(t), \theta_t = i) dt \right]}_{=\mathcal{E}[v(\infty)-v(0)]=0} + \mathcal{E} \left[ \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \right] - \gamma^2 \mathcal{E} \left[ \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right] < 0, \quad (2.41)$$

ou seja,

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2, \quad (2.42)$$

o que finaliza a prova da suficiência. Omitiremos a prova da necessidade por ser extensa: o leitor pode encontrá-la em (COSTA *et al.*, 2013). ■

## 2.5 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos os critérios do Círculo e de Popov para sistemas LTI, bem como os fundamentos da teoria de MJLS. Deste último destacamos a definição de cadeias de Markov de tempo contínuo, estabilidade estocástica e normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Ademais, mostramos que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é uma medida da influência, que queremos minimizar, da perturbação para saída do sistema, já a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser vista como a energia gasta pelo sistema, que também queremos minimizar, para ir de uma condição inicial  $x_0$  para uma condição final  $x_f$ . Estas normas serão utilizadas exaustivamente neste texto.

### 3 Análise de Estabilidade

Este capítulo é dedicado à análise de estabilidade de sistemas tipo Lur'e com saltos markovianos. Iniciamos apresentando a estabilidade de sistemas sem entrada exógena na Seção 3.1 e em seguida tratamos o caso com entrada na Seção 3.2. Vale ressaltar que esta dissertação acompanha a formulação apresentada na literatura referente a estabilidade absoluta, ou seja, apresentamos resultados para o critério do círculo no setor  $[0, \mathcal{K}]$ . Antes da formulação do problema, vamos apresentar duas hipóteses, independentes, quanto à função não linear  $\phi(\cdot)$ :

- (i)  $\phi(\cdot)$  é determinística, ou seja, independente do que ocorra com a variável aleatória  $\theta_t = i \in \mathbb{K}$  que define o modo da planta, a não linearidade permanecerá a mesma,
- (ii)  $\phi(\cdot)$  é estocástica, ou seja, para cada modo  $i \in \mathbb{K}$ , uma não linearidade diferente  $\phi_i(\cdot)$  é selecionada.

Temos as representações gráficas, Figura 7 e Figura 8, que retratam as hipóteses (i) e (ii), para o caso de uma entrada e uma saída. Note ainda, que tal função  $\phi(\cdot)$  deve ficar limitada ao setor de interesse.

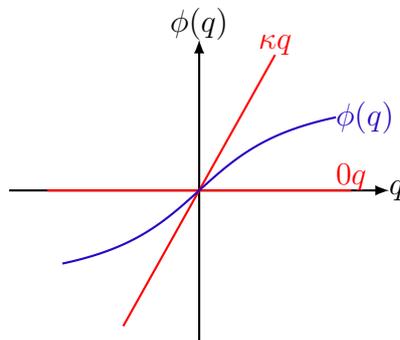


Figura 7 – Hipótese (i),  $\phi(\cdot) \in [0, \kappa]$ .

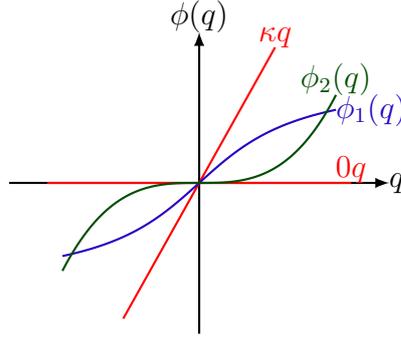
#### 3.1 Estabilidade Estocástica de Sistemas tipo Lur'e

Considere o seguinte sistema tipo Lur'e com saltos markovianos, e o espaço de probabilidades apresentado na Seção 2.2,

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t) + E(\theta_t)p(t), \quad (3.1a)$$

$$q(t) = C_q(\theta_t)x(t), \quad (3.1b)$$

$$p(t) = -\phi(q(t), \theta_t), \quad (3.1c)$$


 Figura 8 – Hipótese (ii),  $\phi_i(\cdot) \in [0, \kappa]$ .

com  $x(0) = x_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$  e matrizes,  $A(\theta_t)$ ,  $C_q(\theta_t)$  e  $E(\theta_t)$  de dimensões apropriadas. No sistema (3.1),  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $p(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada da parte linear do sistema,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de saída e  $\phi(\cdot, \theta_t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , é uma não linearidade entre a saída  $q$  e a entrada  $p$ , que pode ou não depender da cadeia de Markov  $\theta_t \in \mathbb{K}$ , como descrito a cima. A função  $\phi(\cdot)$  é tal que  $\phi(0) = 0$ , o que assegura que a origem  $x = 0$  seja um ponto de equilíbrio estável. Como é comum no tratamento de sistemas passivos e/ou positivos reais, é necessário que as dimensões dos vetores de entrada e de saída sejam iguais.

Adicionalmente, dizemos que  $\phi(\cdot)$  pertence ao setor  $[0, \mathcal{K}]$ , com  $\mathcal{K} := \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ ,  $\kappa_j > 0$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , se

$$(\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) \leq 0. \quad (3.2)$$

O Teorema a seguir refere-se à hipótese (i), ou seja, trataremos do caso com não linearidade determinística.

**Teorema 3.1** *O sistema (3.1) é estável, para qualquer função não linear  $\phi(\cdot)$  pertencente ao setor  $[0, \mathcal{K}]$ , se existirem matrizes  $P_i > 0$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , que satisfaçam as LMIs*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.3)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

*Prova:* Começamos multiplicando a desigualdade (3.3), à esquerda e à direita pelos vetores  $\begin{bmatrix} x^T & \phi(q)^T \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} x \\ \phi(q) \end{bmatrix}$ , respectivamente, o que resulta na desigualdade,

$$\begin{aligned} x^T \left( A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x + \phi(q)^T (-2I) \phi(q) + \\ + \phi(q)^T \left( -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} \right) x + x^T \left( -P_i E_i + C_{qi}^T \mathcal{K}^T \right) \phi(q) < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Recordando a função estocástica de Lyapunov,  $v(x, \theta_t) = x^T P(\theta_t)x$ , e o gerador infinitesimal aplicado à função  $v(x, \theta_t)$ ,

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) = \dot{x}^T P(\theta_t)x + x^T P(\theta_t)\dot{x} + x^T \mathcal{L}P(\theta_t)x, \quad (3.5)$$

podemos reorganizar a desigualdade (3.4), que fornece,

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) < \underbrace{(\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) + \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q)}_{\leq 0}. \quad (3.6)$$

A desigualdade (3.6) garante a estabilidade estocástica de sistemas tipo Lur'e, pois temos que  $\mathcal{L}v(x, \theta_t)$ , será negativo para **toda** função não linear,  $\phi(\cdot)$ , que pertença ao setor  $[0, \mathcal{K}]$ . ■

Na literatura de sistemas não lineares, o Critério do Círculo costuma ser abordado no estudo de sistemas com uma entrada e uma saída (SISO, da sigla em inglês para *Single-Input, Single-Output*): neste caso basta, reduzir a matriz diagonal  $\mathcal{K}$ , que possui as aberturas de setor para cada uma das  $m$  saídas, ao escalar  $\kappa > 0$ . Caso o leitor queira mais informações, indicamos o livro (GEROMEL; KOROGUI, 2011) e suas referências.

Para a hipótese (ii), referente à função não linear estocástica, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.2** *O sistema (3.1) é estável, para  $\phi_i(\cdot) \in [0, \mathcal{K}]$ , se existirem matrizes  $P_i > 0$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , que satisfaçam as LMIs*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.7)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

*Prova:* Iniciamos multiplicando a LMI (3.7) à esquerda por  $\begin{bmatrix} x^T & \phi_i(q)^T \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} x \\ \phi_i(q) \end{bmatrix}$ , que resulta em,

$$\begin{aligned} x^T \left( A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x + \phi_i(q)^T (-2I) \phi_i(q) + \\ + \phi_i(q)^T (-E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi}) x + x^T (-P_i E_i + C_{qi}^T \mathcal{K}^T) \phi_i(q) < 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sabemos que, por hipótese, para cada modo  $i \in \mathbb{K}$ , a função  $\phi_i(q)$  pertence ao setor, em outras palavras

$$(\phi_i(q) - \mathcal{K}q)^T \phi_i(q) \leq 0, \quad (3.9)$$

esta desigualdade, refere-se a condição de setor para cada um dos  $N$  modos de operação do sistema.

Agora, agrupando os termos da desigualdade (3.8),

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) < \underbrace{(\phi_i(q) - \mathcal{K}q)^T \phi_i(q) + \phi_i(q)^T (\phi_i(q) - \mathcal{K}q)}_{\leq 0}, \quad (3.10)$$

que garante a estabilidade estocástica do sistema tipo Lur'e, pois, como indicado em (3.9), cada uma das  $N$  funções  $\phi_i(q)$  pertencem ao setor  $[0, \mathcal{K}]$ , logo, podemos dizer que o gerador infinitesimal aplicado a  $v(t, \theta_t)$  é estritamente menor que (3.9), que é uma desigualdade não estrita ( $\leq 0$ ), concluindo a prova. ■

O exemplo a seguir foi retirado da referência (SILVA; GONÇALVES, 2017).

**Exemplo 3.1:** Considere um MJLS com duas entradas e duas saídas, uma cadeia de Markov de dois modos, estado inicial da dinâmica  $x_0 = [0,3 \ 0,05]^T$ , e matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}; \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix};$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,35 \end{bmatrix}; \quad C_{q1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad C_{q2} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,95 \\ 0,3 & 5 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de taxas de transição de estados e a da condição de setor são dadas por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Checamos a factibilidade da LMI (3.3) com o parser Yalmip e o solver SeDuMi, que fornecem, como solução

$$\left[ P_1 \mid P_2 \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 32,6064 & \star & 23,4344 & \star \\ -12,5438 & 38,2149 & -12,3039 & 55,5966 \end{array} \right].$$

Logo, pode-se concluir pelo Teorema 3.1, que o sistema (3.11) é estocasticamente estável para qualquer não linearidade no setor  $[0, \mathcal{K}]$ . Para ilustrar tal fato, fizemos 2500 realizações de Monte Carlo, cada uma com duração de 12[s], com distribuição inicial de probabilidade,  $\pi_0 = [0,6 \ 0,4]^T$ . Vamos considerar a hipótese (ii), ou seja, não linearidade estocástica,

$$\begin{aligned} \phi_{11}(q) &= \arctan(q(1)); & \phi_{12}(q) &= 0,7(\arcsin(q(2)) + \arctan(q(2))); \\ \phi_{21}(q) &= \arctan(q(1)); & \phi_{22}(q) &= 0,7 \left( \frac{1}{1 + \exp(-q(2))} - 0,5 \right), \end{aligned}$$

que claramente pertencem ao setor  $[0, \mathcal{K}]$ . As funções  $\phi_{1j}(\cdot)$ ,  $\phi_{2j}(\cdot)$ ,  $\forall j \in \{1, 2\}$ , correspondem respectivamente, aos modos  $i = 1$  e  $i = 2$ .

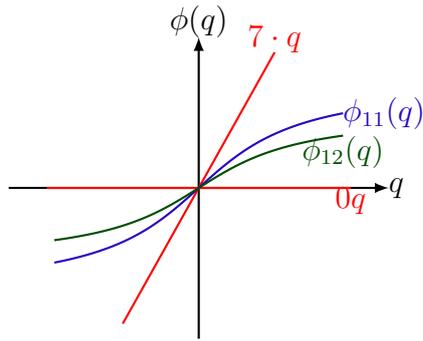


Figura 9 – Funções  $\phi_{11}(q), \phi_{12}(q) \in [0, 7]$ .

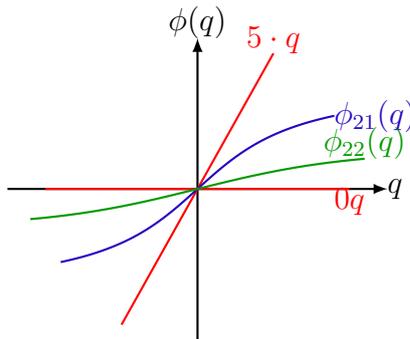


Figura 10 – Funções  $\phi_{21}(q), \phi_{22}(q) \in [0, 5]$ .

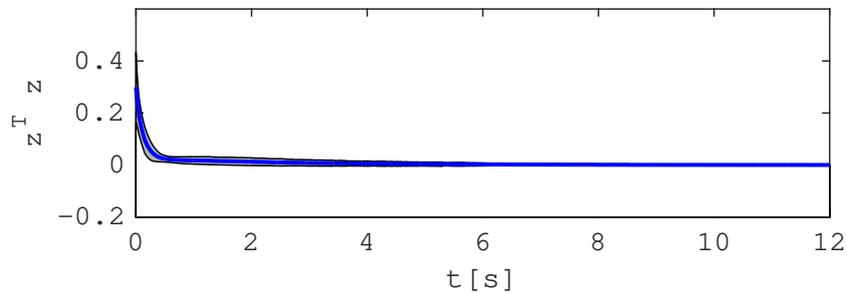


Figura 11 – Resposta temporal.

A linha contínua é o valor esperado de  $z^T z$ , a região acinzentada refere-se a  $\mathcal{E}(z^T z) \pm \sigma(z^T z)$ .

### 3.2 Estabilidade estocástica com garantia de desempenho

Nesta seção nosso foco é propor LMIs que testem a estabilidade estocástica de sistemas tipo Lur'e, com limitantes para o custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , bem como para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Devemos ressaltar que supomos conhecimento completo dos parâmetros do sistema dinâmico, bem como da cadeia de Markov.

Ademais, considere o seguinte sistema tipo Lur'e com saltos markovianos,

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t) + E(\theta_t)p(t) + J(\theta_t)w(t), \quad (3.11a)$$

$$z(t) = C_z(\theta_t)x(t) + D_w(\theta_t)w(t), \quad (3.11b)$$

$$q(t) = C_q(\theta_t)x(t), \quad (3.11c)$$

$$p(t) = -\phi(q(t), \theta_t), \quad (3.11d)$$

$w(t)$  é uma entrada exógena,  $A(\theta_t)$ ,  $E(\theta_t)$ ,  $J(\theta_t)$ ,  $C_q(\theta_t)$ ,  $C_z(\theta_t)$ , e  $D_w(\theta_t)$  matrizes de dimensões apropriadas. O sinal  $z(t)$  é a saída de desempenho.

### 3.2.1 Custo Garantido $\mathcal{H}_2$

Seja o sistema dinâmico (3.11), para garantir que o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  seja limitado devemos ter  $D_w(\theta_t) = 0$ ,  $\forall \theta_t = i \in \mathbb{K}$  (CARDELIQUIO, 2014).

**Teorema 3.3** *O sistema (3.11), será estocasticamente estável, com limitante superior do custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , se existirem matrizes  $P_i > 0$  que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I & \star \\ C_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.12)$$

garantindo,

$$\max_{\phi(q) \in \Phi} \sum_{k=1}^{\dim(w)} \|z\|_2^2 < \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{Tr}(J_i^T P_i J_i), \quad (3.13)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ ,  $\Phi := \{\phi(q) \in [0, \mathcal{K}]\}$  e  $\pi_{0i} = \mathcal{P}(\theta_0 = i)$

*Prova:* Seja a desigualdade (3.12), aplicando o *Complemento de Schur*,

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_{zi}^T C_{zi} & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.14)$$

multiplicamos à esquerda pelo vetor  $[x^T \ \phi(q)^T]$  e à direita pelo vetor  $\begin{bmatrix} x \\ \phi(q) \end{bmatrix}$ , que fornece a desigualdade,

$$\begin{aligned} x^T \left( A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_{zi}^T C_{zi} \right) x + \phi(q)^T (-2I) \phi(q) + \\ + \phi(q)^T \left( -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} \right) x + x^T \left( -P_i E_i + C_{qi}^T \mathcal{K}^T \right) \phi(q) < 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que após um pouco de álgebra,

$$z^T z < - \left( \mathcal{L}v(x, \theta_t) - (\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) - \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q) \right), \quad (3.16)$$

onde  $v(x, \theta_t) = x(t)^T P(\theta_t)x(t)$ , é a função estocástica de Lyapunov. Para obtermos a condição dada pela desigualdade (3.13), devemos integrar ambos os lados de,

$$z^T z < -\mathcal{L}v(x, \theta_0 = i), \quad (3.17)$$

a desigualdade (3.17) pode ser obtida através da hipótese  $(\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) \leq 0$ , aplicada à desigualdade (3.16)

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) + z^T z < \underbrace{(\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) + \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q)}_{\leq 0}. \quad (3.18)$$

Com isso, temos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left[ \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \right] &< -\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty \mathcal{L}v(x(t), \theta_0 = i) dt \right] \Rightarrow \\ \|z\|_2^2 &< x_0^T P_i x_0 \Rightarrow \\ \max_{\phi(q) \in \Phi} \|z\|_2^2 &< x_0^T P_i x_0. \end{aligned} \quad (3.19a)$$

Na desigualdade (3.19a) temos que o custo garantido da saída é considerado para a pior não linearidade  $\phi(q) \in \Phi$ , onde

$$\Phi := \{\phi(q) \in [0, \mathcal{K}]\}, \quad (3.20)$$

e considerando que  $\mathcal{E}[v(x(\infty))] \rightarrow 0$ , pois o sistema é estocasticamente estável. Ademais, é possível considerar a condição inicial  $x_0 := J_i e_k$ , que é equivalente à entrada impulsiva da Definição 2.4. Sabendo que  $P_i$  é solução de (3.14), temos que,

$$\begin{aligned} \max_{\phi(q) \in \Phi} \sum_{l=1}^{\dim(w)} \|z_l\|_2^2 &< \mathcal{E} \left[ \sum_{k=1}^{\dim(w)} (e_k^T J_i^T P_i J_i e_k) \right] \Rightarrow \\ \max_{\phi(q) \in \Phi} \sum_{l=1}^{\dim(w)} \|z_l\|_2^2 &< \mathcal{E} \left[ \text{Tr} (J_i^T P_i J_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.21a)$$

Considerando que o operador esperança refere-se às probabilidades iniciais para cada modo  $i \in \mathbb{K}$ , obtemos

$$\max_{\phi(q) \in \Phi} \sum_{l=1}^{\dim(w)} \|z_l\|_2^2 < \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{Tr} (J_i^T P_i J_i), \quad (3.22)$$

concluindo a prova. ■

É importante notar que, é possível minimizar o lado direito da desigualdade (3.13), obtendo assim um melhor custo garantido.

Para a hipótese (ii),  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , referente à função não linear estocástica, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.4** *O sistema (3.11), será estocasticamente estável, para  $\phi_i(q) \in [0, \mathcal{K}]$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , com limitante superior do custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , se existirem matrizes  $P_i > 0$  que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I & \star \\ C_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.23)$$

garantindo,

$$\max_{\phi_i(q) \in \Phi} \sum_{k=1}^{\dim(w)} \|z\|_2^2 < \sum_{i=1}^N \pi_{0i} \text{Tr}(J_i^T P_i J_i), \quad (3.24)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ ,  $\Phi := \{\phi_i(q) \in [0, \mathcal{K}]\}$  e  $\pi_{0i} = \mathcal{P}(\theta_0 = i)$

*Prova:* Conforme apresentado no Teorema 3.2, as LMIs que testam a estabilidade para um sistema com  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , são as mesmas que testam a estabilidade de sistemas com  $\phi(\cdot)$ . Portanto a prova do Teorema 3.4 segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.2, com a notação apresentada no Teorema 3.3. ■

Assim como no Teorema 3.3, é possível minimizar o lado direito da desigualdade (3.24), obtendo assim um melhor custo garantido.

### 3.2.2 Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$

Seja o sistema (3.11) com matrizes  $D_w(\theta_t)$ , quaisquer, e entrada exógena  $w(t) \in \mathcal{L}_2$ . Tal sistema admite um limitante para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  dado pelo seguinte teorema.

**Teorema 3.5** *O sistema (3.11) com condição inicial nula será estocasticamente estável com um dado  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , se existirem matrizes  $P_i > 0$  que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i^T P_i) + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star & \star & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I & \star & \star \\ J_i^T P_i + D_{wi}^T C_{zi} & 0 & -\gamma^2 I + D_{wi}^T D_{wi} & \star \\ C_{zi} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.25)$$

Em caso afirmativo, é possível garantir

$$\max_{\phi(q) \in \Phi} \|z\|_2 < \gamma \|w\|_2, \quad \Phi = \{\phi(q) \in [0, \mathcal{K}]\}. \quad (3.26)$$

*Prova:* Primeiramente multiplicamos a LMI (3.25), à esquerda por  $\begin{bmatrix} x^T \\ \phi(q)^T \\ 0^T \\ 0^T \end{bmatrix}$  e à direita pelo vetor  $\begin{bmatrix} x & \phi(q) & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , o que fornece,

$$x^T \left( \text{He}(A_i^T P_i) + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \right) x + \phi(q)^T (-2I) \phi(q) + \phi(q)^T (-E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi}) x + x^T (-P_i E_i + C_{qi}^T \mathcal{K}^T) \phi(q) < 0. \quad (3.27)$$

Após um pouco de álgebra, (3.27) resulta em

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) - (\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) - \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q) < 0, \quad (3.28)$$

Da Seção 3.1, sabemos que a desigualdade (3.28), representa a estabilidade estocástica de sistemas tipo Lur'e. Para obter a restrição (3.26), aplicamos o *complemento de Schur* na

desigualdade (3.25), e multiplicamos à esquerda pelo vetor  $\begin{bmatrix} x^T \\ \phi(q)^T \\ w^T \end{bmatrix}$  e à direita pelo vetor  $\begin{bmatrix} x & \phi(q) & w \end{bmatrix}$ , resultando em

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) - (\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) - \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q) + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0. \quad (3.29)$$

Integrando e aplicando o operador esperança,

$$\underbrace{\mathcal{E} \left[ \int_0^\infty \mathcal{L}v(x(t), \theta_t) dt \right]}_{\mathcal{E}[v(\infty) - v(0)] = 0} + \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 < \underbrace{(\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) + \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q)}_{\leq 0}, \quad (3.30)$$

com isso temos a restrição (3.26), concluindo a prova.  $\blacksquare$

Analogamente às seções anteriores, para a hipótese (ii)  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , referente à função não linear estocástica, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.6** *O sistema (3.11) com condição inicial nula será estocasticamente estável, para  $\phi_i(q)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , com um dado  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , se existirem matrizes  $P_i > 0$  que satisfaçam,*

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i^T P_i) + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & * & * & * \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I & * & * \\ J_i^T P_i + D_{wi}^T C_{zi} & 0 & -\gamma^2 I + D_{wi}^T D_{wi} & * \\ C_{zi} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.31)$$

e que garantam

$$\max_{\phi_i(q) \in \Phi} \|z\|_2 < \gamma \|w\|_2, \quad \Phi = \{\phi_i(q) \in [0, \mathcal{K}]\}. \quad (3.32)$$

*Prova:* Conforme apresentado nos teoremas anteriores, com relação a  $\phi_i(q)$ , as LMIs que testam a estabilidade para um sistema com  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , são as mesmas que testam a estabilidade de sistemas com  $\phi(\cdot)$ . Portanto, a prova deste teorema segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.2. ■

**Exemplo 3.2:** Daremos continuidade ao **Exemplo 3.1**, com as seguintes matrizes,

$$\left[ C_{zi} \mid J_i \mid D_{wi} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right], i \in \mathbb{K},$$

faremos análise com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Portanto, resolvendo o problema proposto no Teorema 3.5, temos 14,9545 como limitante para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ , e matrizes,

$$\left[ P_1 \mid P_2 \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 30,1344 & \star & 21,4748 & \star \\ -11,6990 & 33,5813 & -11,4541 & 49,8455 \end{array} \right].$$

Para a simulação temporal, iremos considerar  $w(t) = \exp(-0,5t) \cdot \sin(2\pi t)$ , e as realizações de Monte Carlo seguem as condições do **Exemplo 3.1**.

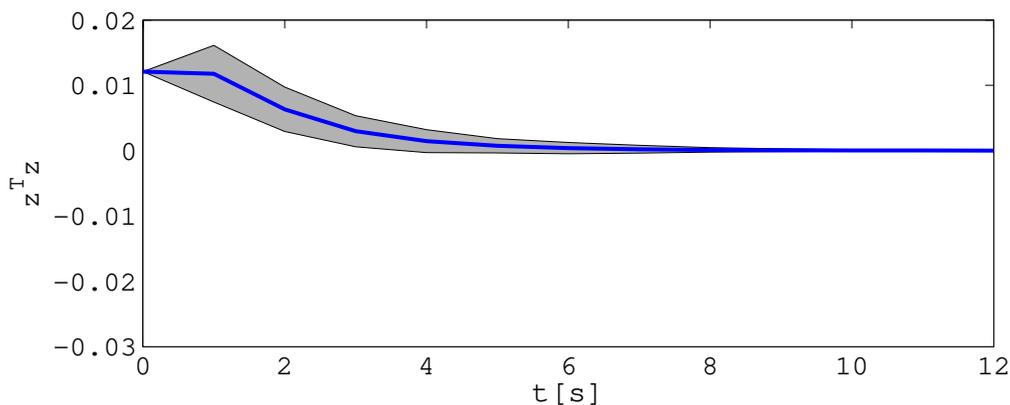


Figura 12 – Resposta temporal.

### 3.3 Considerações finais

Este capítulo abordou o teste de estabilidade estocástica, para sistemas tipo Lur'e. As LMIs propostas são condições apenas suficientes de teste, em outras palavras, a LMI sendo factível, o sistema será estável para **qualquer** não linearidade pertencente ao setor. Caso a LMI **não seja factível, não podemos afirmar** nada quanto a estabilidade ou instabilidade do sistema, logo, só poderemos afirmar algo sobre o sistema, após simularmos o mesmo através de realizações de Monte Carlo. Também apresentamos os casos SISO, bem como a forma mais simples para o setor que contém a não linearidade no critério do círculo. Outro ponto importante é notar que é possível recuperar a LMI (2.5), sistema determinístico apresentada também em (GEROMEL; KOROGUI, 2011), através da LMI (3.3).

## 4 Síntese de Controladores por Realimentação de Estado

O objetivo deste capítulo é a síntese de controladores que garantam um limitante para o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ . Vale ressaltar que a síntese de controladores, de modo geral, serve para estabilizar sistemas que sejam instáveis, bem como para diminuir o limitante de um determinado custo garantido. Com isso, propomos LMIs que sintetizem ganhos  $K(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{K}$ , que atendam algum critério de desempenho.

Portanto consideremos o seguinte sistema tipo Lur'e, em malha fechada,

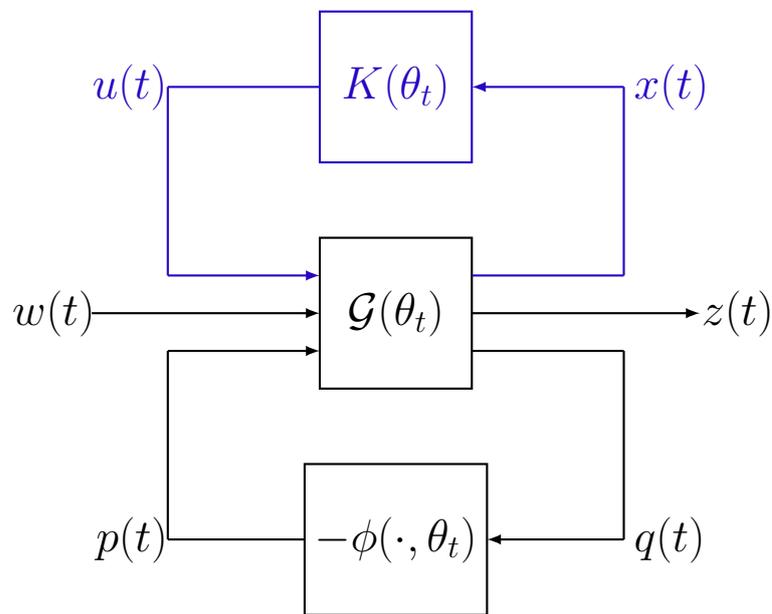


Figura 13 – Sistema tipo Lur'e em malha fechada.

onde  $\mathcal{G}(\theta_t = i)$  tem representação de estado dada pelas seguintes matrizes

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_i & B_i & E_i & J_i \\ \hline C_{zi} & D_{wi} & 0 & D_{wi} \\ \hline C_{qi} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

com isso temos a seguinte realização em malha fechada no espaço de estados,

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(\theta_t)x(t) + E(\theta_t)p(t) + J(\theta_t)w(t), \quad (4.1a)$$

$$z(t) = \tilde{C}_z(\theta_t)x(t) + D_w(\theta_t)w(t), \quad (4.1b)$$

$$q(t) = C_q(\theta_t)x(t), \quad (4.1c)$$

$$p(t) = -\phi(q(t)). \quad (4.1d)$$

Sendo as matrizes de Malha Fechada:  $\tilde{A}(\theta_t) = A(\theta_t) + B(\theta_t)K(\theta_t)$ ,  $\tilde{C}_z(\theta_t) = C_z(\theta_t) + D_u(\theta_t)K(\theta_t)$ , onde  $K(\theta_t)$  é o ganho de realimentação a ser projetado, em outras palavras, deseja-se obter o seguinte sinal de controle  $u(t) = K(\theta_t)x(t)$ .

## 4.1 Controle com custo garantido $\mathcal{H}_2$

Considere o sistema tipo Lur'e (4.1), com  $D_{wi} = 0, i \in \mathbb{K}$  e  $w(t)$  uma entrada exógena. Nosso objetivo, agora, é sintetizar o ganho  $K_i, i \in \mathbb{K}$  que estabilize o sistema em malha fechada.

**Teorema 4.1** *O sistema (4.1) é estocasticamente estável com custo garantido mínimo  $\mathcal{H}_2$  se existir solução para o seguinte problema de otimização convexa*

$$\max_{\phi(q) \in \Phi} \sum_{k=1}^{\dim(w)} \|z\|_2^2 < \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{Tr}(W_i) \quad (4.2)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} W_i & \star \\ J_i & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i X_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} X_i & \star & \star & \star \\ -E_i^T + \mathcal{K}C_{qi} X_i & -2I & \star & \star \\ R_i(X)^T & 0 & S_i(X) & \star \\ C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.4)$$

onde,

$$\begin{aligned} R_i(X) &= [\sqrt{\lambda_{1i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{(i-1)i}} X_i \quad \sqrt{\lambda_{(i+1)i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{Ni}} X_i], \\ S_i(X) &= -\text{diag}(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_N), \\ \pi_{0i} &= \mathcal{P}(\theta_0 = i). \end{aligned}$$

Em caso afirmativo,  $K_i = Y_i X_i^{-1}$ .

*Prova:* Inicialmente aplicamos o *Complemento de Schur* à desigualdade (4.4),

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i X_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} X_i + (C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i)^T (C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i) & \star & \star \\ -E_i^T + \mathcal{K}C_{qi} X_i & -2I & \star \\ R_i(X)^T & 0 & S_i(X) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.5)$$

multiplicamos a LMI (4.5) à esquerda por  $[X_i^{-1} \quad I \quad I]$  e à direita por  $[X_i^{-1} \quad I \quad I]^T$ , e temos,

$$\begin{aligned} & X_i^{-1} \left( \text{He}(A_i X_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} X_i + (C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i)^T (C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i) \right) X_i^{-1} + \\ & + \left( -E_i^T + \mathcal{K}C_{qi} X_i \right) X_i^{-1} + R_i(X)^T X_i^{-1} + X_i^{-1} \left( -E_i^T + \mathcal{K}C_{qi} X_i \right)^T + X_i^{-1} R_i(X) + \\ & + S_i(X) - 2I < 0. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Aplicando os produtos indicados em (4.6), introduzindo as variáveis  $P_i = X_i^{-1}$ ,  $K_i = Y_i X_i^{-1}$  e rearranjando os termos,

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\tilde{A}_i^T P_i) + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \star & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I & \star \\ \tilde{C}_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.7)$$

Ao multiplicar a LMI (4.7) à esquerda por  $\begin{bmatrix} x^T & \phi(q)^T & 0^T \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} x \\ \phi(q) \\ 0 \end{bmatrix}$ , garantimos a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada, conforme demonstrado na Seção 3.1. Aplicando o *Complemento de Schur* à desigualdade (4.3) temos,

$$W_i > J_i^T X_i^{-1} J_i, \quad (4.8)$$

que é uma restrição feita ao argumento do traço matricial da equação (2.28), garantindo desta forma, o limitante apresentado na desigualdade (4.2), completando a prova. ■

Assim como nas seções anteriores, o Teorema a seguir apresenta o resultado para a hipótese (ii), logo,  $\phi_i(\cdot)$   $i \in \mathbb{K}$ .

**Teorema 4.2** *O sistema (4.1) é estocasticamente estável, para  $\phi_i(q) \in [0, \mathcal{K}]$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , com custo garantido mínimo  $\mathcal{H}_2$ , caso exista solução para o seguinte problema de otimização convexa*

$$\max_{\phi_i(q) \in \Phi} \sum_{k=1}^{\dim(w)} \|z\|_2^2 < \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{Tr}(W_i) \quad (4.9)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} W_i & \star \\ J_i & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i X_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} X_i & \star & \star & \star \\ -E_i^T + \mathcal{K} C_{qi} X_i & -2I & \star & \star \\ R_i(X)^T & 0 & S_i(X) & \star \\ C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.11)$$

onde,

$$\begin{aligned} R_i(X) &= [\sqrt{\lambda_{1i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{(i-1)i}} X_i \quad \sqrt{\lambda_{(i+1)i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{Ni}} X_i], \\ S_i(X) &= -\text{diag}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N). \\ \pi_{0i} &= \mathcal{P}(\theta_0 = i). \end{aligned}$$

Em caso afirmativo,  $K_i = Y_i X_i^{-1}$ .

*Prova:* Conforme apresentado nos Teoremas anteriores, referentes a  $\phi_i(q)$ , as LMIs que testam a estabilidade para um sistema com  $\phi_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , são as mesmas que testam a estabilidade de sistemas com  $\phi(\cdot)$ . Portanto a prova deste Teorema, segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.2. ■

## 4.2 Controle com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Considere a dinâmica representada por (4.1), com  $D_{wi} \neq 0$ ,  $i \in \mathbb{K}$  e  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  uma entrada exógena. Nosso objetivo é sintetizar ganhos  $K_i$ ,  $i \in \mathbb{K}$  que estabilizem o sistema em malha fechada.

**Teorema 4.3** *O sistema (4.1) será estocasticamente estável, para um dado  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , caso exista solução para as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i X_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} X_i & \star & \star & \star & \star \\ -E_i^T + \mathcal{K} C_{qi} X_i & -2I & \star & \star & \star \\ J_i^T + D_{wi}^T (C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i) & 0 & -\gamma^2 I + D_{wi}^T D_{wi} & \star & \star \\ C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i & 0 & 0 & -I & \star \\ R_i(X)^T & 0 & 0 & 0 & S_i(X) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.12)$$

onde

$$R_i(X) = [\sqrt{\lambda_{1i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{(i-1)i}} X_i \quad \sqrt{\lambda_{(i+1)i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{Ni}} X_i],$$

$$S_i(X) = -\text{diag}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N).$$

Em caso afirmativo,  $K_i = Y_i X_i^{-1}$ , e temos o seguinte limite para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$\max_{\phi(q) \in \Phi} \sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_2 \\ w \neq 0}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma, \quad \Phi := \{\phi(q) \in [0, \mathcal{K}]\} \quad (4.13)$$

*Prova:* Iniciamos multiplicando a LMI (4.12) à esquerda e à direita por  $\text{diag}(X_i^{-1}, I, I, I, I)$ . Tomemos as variáveis  $X_i = P_i^{-1}$ ,  $Y_i = K_i X_i$ , e, aplicando o *Complemento de Schur*,

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + \tilde{C}_{zi}^T \tilde{C}_{zi} & \star & \star \\ -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} & -2I & \star \\ J_i^T P_i + D_{wi}^T \tilde{C}_{zi} & 0 & -\gamma^2 I + D_{wi}^T D_{wi} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.14)$$

Multiplicando a desigualdade (4.14) à esquerda por  $\begin{bmatrix} x^T & \phi(q)^T & w^T \end{bmatrix}$  e à direita por

$$\begin{bmatrix} x \\ \phi(q) \\ w \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} x^T & \left( \tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + \tilde{C}_{zi}^T \tilde{C}_{zi} \right) x + \phi(q)^T \left( -E_i^T P_i + \mathcal{K} C_{qi} \right) x + \phi(q)^T (-2I) \phi(q) + \\ & + x^T \left( -P_i E_i + C_{qi}^T \mathcal{K}^T \right) \phi(q) + w^T \left( J_i^T P_i + D_{wi}^T \tilde{C}_{zi} \right) x + x^T \left( J_i^T P_i + D_{wi}^T \tilde{C}_{zi} \right)^T w + \\ & + w^T \left( -\gamma^2 I + D_{wi}^T D_{wi} \right) w < 0. \end{aligned}$$

Reagrupando a desigualdade a cima e considerando ainda  $w(t) = 0, \forall t \geq 0$ ,

$$\mathcal{L}v(x, \theta_t) - (\phi(q) - \mathcal{K}q)^T \phi(q) - \phi(q)^T (\phi(q) - \mathcal{K}q) < -z^T z. \quad (4.15)$$

Como apresentado na prova do Teorema 3.1, o lado esquerdo da desigualdade (4.15) é estritamente negativo. Para obter a desigualdade (4.13), partimos de (3.30), simplificando,

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 < 0, \quad (4.16)$$

considerando a não linearidade de pior caso para o sistema, dentre um conjunto que contém todas as  $\phi(q) \in \Phi$ , como indicado em (4.13), concluindo a prova. ■

O Teorema a seguir apresenta o resultado para a hipótese (ii), portanto,  $\phi_i(\cdot) \in \mathbb{K}$ .

**Teorema 4.4** *O sistema (4.1), para  $\phi_i(\cdot) \in [0, \mathcal{K}]$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , será estocasticamente estável para um dado  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , caso exista solução para as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A_i X_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} X_i & \star & \star & \star & \star \\ -E_i^T + \mathcal{K} C_{qi} X_i & -2I & \star & \star & \star \\ J_i^T + D_{wi}^T (C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i) & 0 & -\gamma^2 I + D_{wi}^T D_{wi} & \star & \star \\ C_{zi} X_i + D_{ui} Y_i & 0 & 0 & -I & \star \\ R_i(X)^T & 0 & 0 & 0 & S_i(X) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.17)$$

onde,

$$\begin{aligned} R_i(X) &= \left[ \sqrt{\lambda_{1i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{(i-1)i}} X_i \quad \sqrt{\lambda_{(i+1)i}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{Ni}} X_i \right], \\ S_i(X) &= -\text{diag}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N). \end{aligned}$$

Em caso afirmativo,  $K_i = Y_i X_i^{-1}$  e temos o seguinte limite para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$\max_{\phi_i(q) \in \Phi} \sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_2 \\ w \neq 0}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma, \quad \Phi := \{\phi_i(q) \in [0, \mathcal{K}]\}, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (4.18)$$

*Prova:* Conforme apresentado nos Teoremas anteriores, as LMIs que testam a estabilidade para um sistema com  $\phi_i(\cdot), i \in \mathbb{K}$ , são as mesmas que testam a estabilidade de sistemas com  $\phi(\cdot)$ . Portanto a prova deste Teorema, segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.2, com a notação apresentada no Teorema 4.3. ■

### 4.3 Considerações finais

Este capítulo trouxe o projeto de síntese de controladores por realimentação de estados que garantem um limitante superior, seja para o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  seja para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ . Mostramos também, com base nos resultados apresentados no Capítulo 3, que as LMIs para a hipótese (ii),  $\phi_i(q)$  pertencente ao setor, são as iguais as LMIs para  $\phi(q)$  pertencente ao setor, hipótese (i).

## 5 Exemplos práticos

Este capítulo se dedica a apresentar os resultados numéricos obtidos através de simulações de sistemas práticos. A saber

- Circuito de Chua, adaptado de (RODRIGUES *et al.*, 2010) e (MATSUMOTO, 1984),
- Sistema Mecânico com mola não linear (KHALIL, 2002) e (ARANHA *et al.*, 2016).

Antes de apresentarmos os resultados, é importante fazer alguns comentários em relação à simulação do processo de Markov de tempo contínuo.

### 5.1 Simulação da Cadeia de Markov de Tempo Contínuo

A simulação do processo de Markov é baseada na referência (LEON-GARCIA, 2008). Como visto anteriormente na equação (2.9), a probabilidade do processo estocástico não tem memória, ou seja, a probabilidade condicional independe do passado. Assim, definindo  $T_i$  como o tempo de permanência no modo  $i$  da cadeia, temos

$$\mathcal{P}[T_i > t + s | T_i > s] = \mathcal{P}[T_i > t]. \quad (5.1)$$

Podemos afirmar que a variável  $T_i$  obedece a uma distribuição exponencial, logo

$$\mathcal{P}[T_i > t] = e^{-\nu_i t}, \nu_i = -\lambda_{ii}. \quad (5.2)$$

Portanto o tempo médio de ocupação do modo  $i \in \mathbb{K}$  é

$$\mathcal{E}[T_i] = \frac{1}{|\lambda_{ii}|}, \quad (5.3)$$

e como é de se esperar, esta quantidade é, em geral, diferente para cada modo  $i \in \mathbb{K}$ .

Após o término deste tempo  $T_i$  uma cadeia de Markov *embedded*, “embutida”,  $Q_\lambda$  seleciona o próximo modo. A lei de formação da cadeia *embedded* é dada por

$$Q_\lambda = \begin{cases} \tilde{q}_{ii} & = & 0, \\ \tilde{q}_{ij} & = & \frac{\lambda_{ij}}{|\lambda_{ii}|}, \quad \forall j \neq i. \end{cases} \quad (5.4)$$

### 5.2 Circuito de Chua

Na referência (MATSUMOTO, 1984) é apresentado o circuito de Chua,

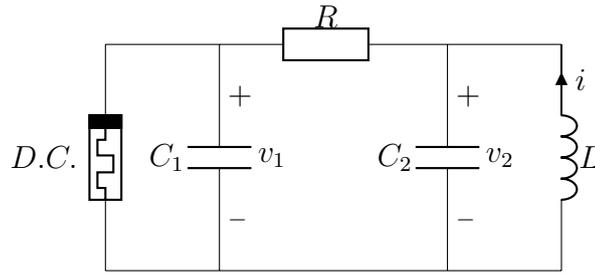


Figura 14 – Circuito de Chua.

A sigla *D.C.* significa *Diodo de Chua*, e o circuito da Figura 14 tem a seguinte realização, no formato determinístico (MATSUMOTO, 1984),

$$\dot{x}_1(t) = \alpha(x_2(t) - \phi(x_1(t))), \quad (5.5a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \quad (5.5b)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\beta x_2(t), \quad (5.5c)$$

onde  $\phi(x_1(t)) = m_1 x_1(t) + 0,5(m_0 - m_1)(|x_1(t) + c| - |x_1(t) - c|)$ , as variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são, respectivamente, proporcionais às tensões dos capacitores,  $v_1$  e  $v_2$ , e à corrente da bobina  $i$ .

Como este trabalho trata de sistemas com saltos Markovianos, é necessário representar o sistema (5.5), numa realização mais adequada,

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t) + E(\theta_t)p(t) + J(\theta_t)w(t), \quad (5.6a)$$

$$z(t) = C_z(\theta_t)x(t), \quad (5.6b)$$

$$q(t) = C_q(\theta_t)x(t), \quad (5.6c)$$

$$p(t) = -\phi(q(t)). \quad (5.6d)$$

Nossa hipótese é que os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  do sistema (5.5) possam mudar, ou saltar, entre determinados valores, o que pode levar ao mau funcionamento do sistema. Os possíveis saltos que iremos considerar ocorrerão entre três subsistemas, a saber: Modo 1 é estável; Modo 2 é instável e Modo 3 é caótico. Consideramos ainda que o sistema possui a seguinte matriz de transição:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}.$$

Com base nas informações da subseção 5.1, o tempo médio de permanência para

cada modo de Markov pode ser calculado como,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[T_1] &= \frac{1}{|-0,2|} = 5,0000[s], \\ \mathcal{E}[T_2] &= \frac{1}{|-0,6|} = 1,6667[s], \\ \mathcal{E}[T_3] &= \frac{1}{|-0,2|} = 5,0000[s].\end{aligned}$$

Podemos notar que o sistema permanece, em média, o mesmo tempo nos modos estável e caótico.

A modelagem adotada para a cadeia de Markov assume que os modos 1 e 3 não se comunicam, ou seja, é impossível que, neste modelo, o sistema salte do modo estável para o modo caótico e vice-versa, porém do modo instável o circuito pode saltar tanto para o modo caótico quanto para o modo estável.

Para o estudo, assumiremos os parâmetros  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 12$ ,  $\alpha_3 = 16$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 14$ ,  $\beta_3 = 28$ ,  $m_0 = -1,1430$ ,  $m_1 = -0,7140$ , condições iniciais  $x(0) = [0,7; 0; 0]$  e  $\pi_0 = [1 \ 0 \ 0]$ . As matrizes para cada um dos três modos de operação são dadas por

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_i & B_i & J_i & E_i \\ \hline C_{zi} & D_{ui} & D_{wi} & 0 \\ \hline C_{qi} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|cc|c} -\alpha_i m_1 & \alpha_i & 0 & 3 & 1 & -\alpha_i(m_0 - m_1) \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_i & 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & D_{ui} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], i \in \mathbb{K}.$$

Com relação às matrizes supracitadas e à representação determinística, temos que as matrizes  $A_1, E_1$ , e  $C_{q1}$  referem-se ao sistema determinístico; já os grupos de matrizes  $C_z$  e  $J$  referem-se, respectivamente, à saída de desempenho  $z(t)$  e à entrada exógena  $w(t)$ . Como o sistema é SISO, assumimos  $\kappa = 5$ , com não linearidade de setor  $\phi(q) = 0,5(m_0 - m_1)(|q + c| - |q - c|)$ ,  $c = 1$ .

Vamos considerar primeiramente, (i) análise visando o custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , em seguida (ii) custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Todas as LMIs foram programadas no *parser* Yalmip, (LOFBERG, 2005), e resolvidas pelo *solver* SeDuMi, (STURM, 1999).

- (i) Foram programadas as LMIs do Teorema 3.3 no *parser* supracitado. O *solver* não encontrou matrizes simétricas  $P_i > 0$ , portanto não podemos concluir nada a respeito da estabilidade estocástica.

Para a simulação temporal fizemos 2500 realizações de Monte Carlo, cada uma com duração de 15[s] e a entrada exógena  $w(t)$  é o sinal pulso com amplitude 1, período  $T = 15[s]$  e largura do pulso 30%T.

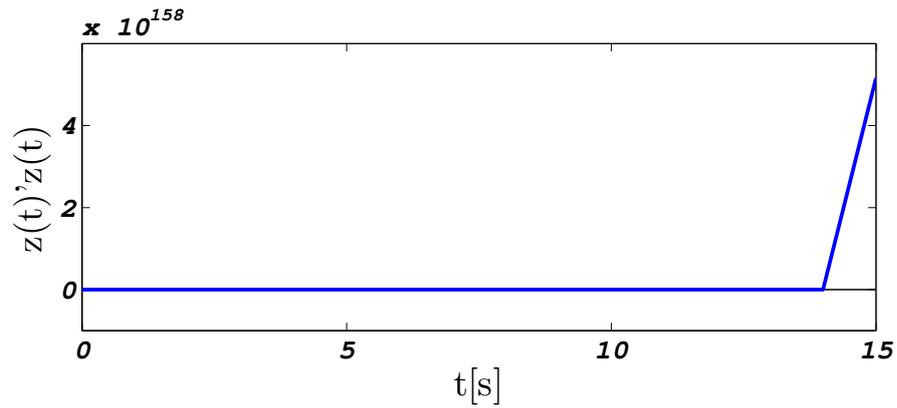


Figura 15 – Resposta temporal do circuito de Chua.

A Figura 15 ilustra a instabilidade do circuito de Chua, sugerindo assim propor um controle por realimentação de estados.

Portanto, precisamos resolver o problema apresentado no Teorema 4.1, com matriz  $D_{ui} = 1, i \in \mathbb{K}$ , que apresenta 0,7251 como limitante superior do custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , (4.2), e controlador

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,7230 & -0,0509 & 0,1370 \\ -3,6362 & -0,3017 & 0,2036 \\ -4,2364 & -0,2825 & 0,1080 \end{bmatrix}.$$

Para a simulação temporal, mantivemos as especificações das realizações de Monte Carlo, bem como da entrada exógena  $w(t)$ . A Figura 16 mostra a média quadrática da saída de desempenho  $z(t)$ , que converge para zero, já na Figura 17 temos o esforço de controle, que também converge para zero, garantindo assim, a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada.

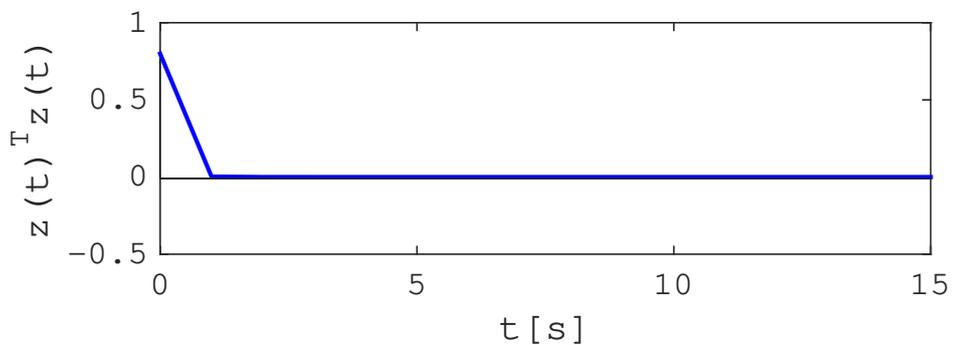


Figura 16 – Resposta temporal do circuito de Chua.

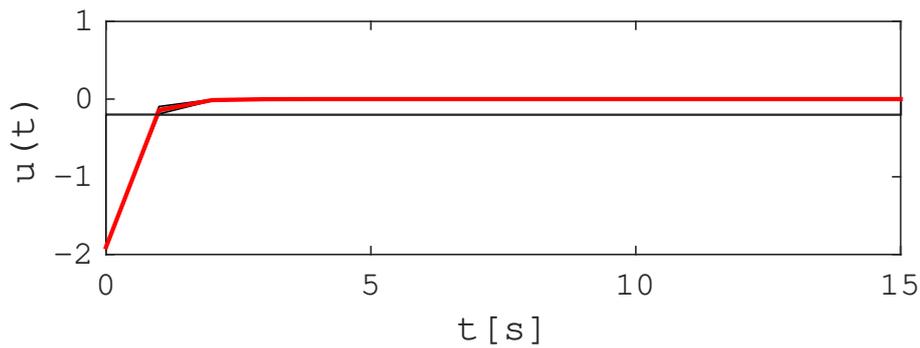


Figura 17 – Esforço de controle.

- (ii) Consideramos  $D_{ui} = 0,7$ ,  $i \in K$ , e resolvemos as LMIs do Teorema 3.5, novamente o *solver* não encontrou matrizes  $P_i > 0$  que resolvem as LMIs. Para a simulação temporal fizemos 2500 realizações de Monte Carlo, cada uma com período  $T = 15[s]$  e entrada exógena  $w(t)$  é um sinal  $\mathcal{L}_2$ ,  $w(t) = \exp(-0,5 t) \cdot \sin(6\pi t)$ ,  $t \in [0, T]$

Assim como no item (i) o circuito de Chua é instável em malha aberta, tornando desejável, a síntese do controladores com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Portanto, ao resolver o problema apresentado no Teorema 4.3 encontramos,

$$\begin{aligned} & \text{custo garantido } \mathcal{H}_\infty : 0,1938; \\ & \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,0019 & -0,7257 & -0,0040 \\ -7,8949 & -2,2678 & 0,0129 \\ -8,2352 & -4,1757 & 0,1164 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para a simulação temporal, mantivemos as especificações supracitadas e encontramos os gráficos da Figura (18) e (19),

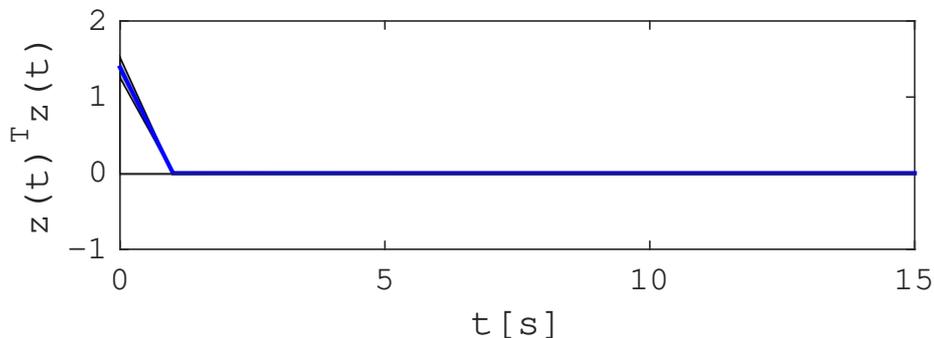


Figura 18 – Circuito Controlado.

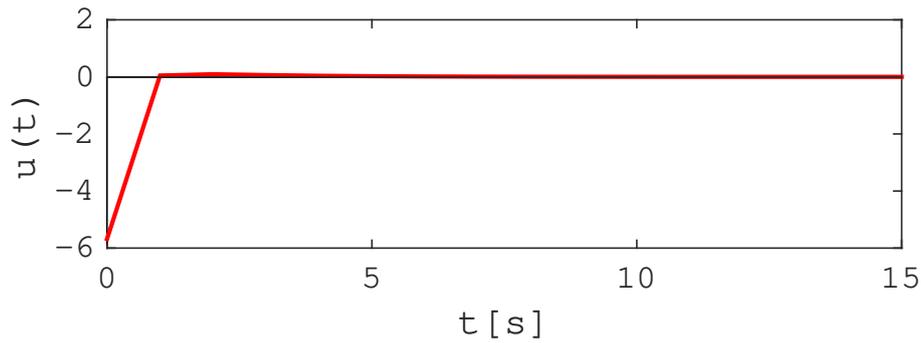


Figura 19 – Esforço de controle.

Assim como no item (i) esta simulação atesta a estabilidade do sistema em malha fechada.

Assuma agora, que a matriz taxa de transição de estados tenha a seguinte estrutura,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2} & \frac{\xi}{2} & 0 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0 & \frac{\xi}{3} & -\frac{\xi}{3} \end{bmatrix},$$

onde  $\xi \in [10^{-4}, 10^4]$ .

Pensando no tempo médio de permanência em cada modo  $i \in \mathbb{K}$ , temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[T_1] &= \frac{2}{|-\xi|} = \begin{cases} 2 \cdot 10^4, & \xi = 10^{-4}, \\ 2 \cdot 10^{-4}, & \xi = 10^4, \end{cases} \\ \mathcal{E}[T_2] &= \frac{1}{|-0,6|} = 1,6667, \quad \forall \xi, \\ \mathcal{E}[T_3] &= \frac{3}{|-\xi|} = \begin{cases} 3 \cdot 10^4, & \xi = 10^{-4}, \\ 3 \cdot 10^{-4}, & \xi = 10^4. \end{cases} \end{aligned}$$

Em outras palavras, para  $\xi$  pequeno o sistema permanece mais tempo no modo caótico, já para  $\xi$  grande o sistema permanece mais tempo no modo instável.

Iremos analisar o comportamento do custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , bem como do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ , Figura 20, do sistema em malha fechada, para cada valor que  $\xi$  assuma dentro da base logarítmica supracitada.

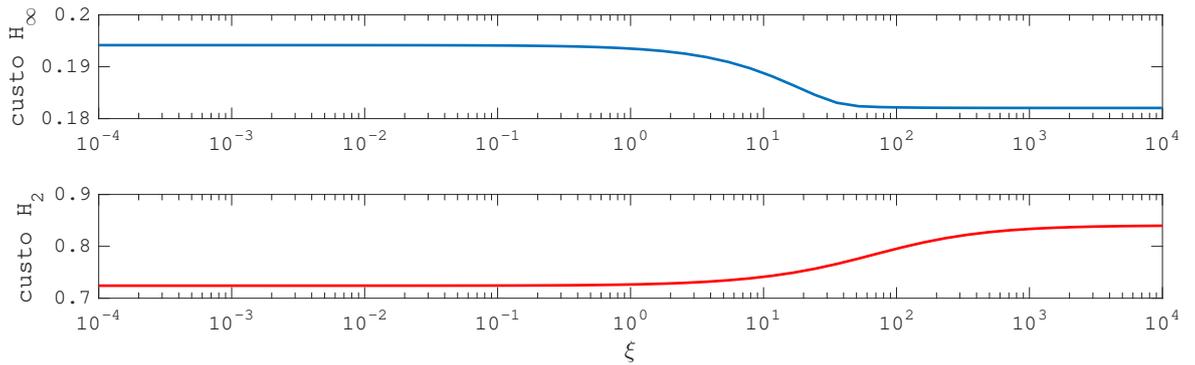


Figura 20 – Custo  $\times \xi$ , custo  $\mathcal{H}_\infty$  em azul e o custo  $\mathcal{H}_2$  em vermelho.

Da Figura 20, podemos ver que é possível sintetizarmos controladores por realimentação de estados para o circuito de Chua, ainda que algum caso extremo ocorra. Notemos ainda que, o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  diminui conforme o escalar  $\xi$  aumenta, porém com relação ao custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , o custo aumenta conforme o escalar  $\xi$  aumenta.

### 5.3 Sistema Mecânico com mola não linear

Este exemplo foi extraído da referência (KHALIL, 2002), sendo que o sistema é apresentado no formato determinístico,

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) + \frac{ka^2}{m}x^3(t) = \frac{F}{m}w(t), \quad (5.7)$$

onde,  $m[kg]$  é a massa do bloco,  $c[Ns/m]$  é o coeficiente de atrito viscoso do amortecedor,  $k[N/m]$  é o coeficiente elástico da mola,  $ka^2$  é o coeficiente da parte não linear da mola,  $F$  é a amplitude do sinal de entrada, por fim  $w(t)$  é a entrada exógena do sistema, lembrando que no problema original  $w(t) = \cos(\omega t)$ . Graficamente, temos a Figura 21.

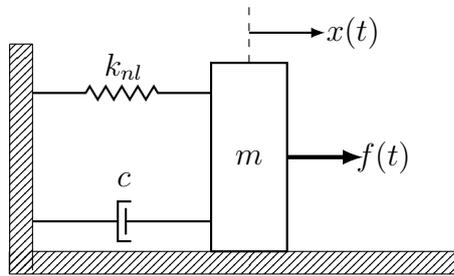


Figura 21 – Sistema mecânico com mola não linear.

É importante ressaltar que a EDO não linear (5.7) apresenta a mesma estrutura da equação do oscilador de Duffin,

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (5.8)$$

Para que ocorra caos na equação (5.8) precisamos que,  $\delta > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\gamma > 0$  (OLIVEIRA, 2006). Nossa hipótese será que os parâmetros  $c$  e  $a$  possam saltar entre determinados valores, de acordo com uma cadeia de Markov. Logo, os parâmetros do sistema são,  $m = 12[kg]$ ,  $k = 0,2[N/m]$ ,  $c_1 = 0,1[Ns/m]$ ,  $c_2 = 0,5[Ns/m]$ ,  $a_1 = 0,3$ ,  $a_2 = 3$  e abertura de setor  $[0, 11]$ . Seja a matriz taxa de transição de estados,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,16 & 0,16 \\ 0,8 & -0,8 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

que nos fornece,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[T_1] &= \frac{1}{0,16} = 6,2500[s]; \\ \mathcal{E}[T_2] &= \frac{1}{0,8} = 1,2500[s]. \end{aligned}$$

Vemos, sem grandes dificuldades, que o sistema (5.7) pode ser transformado num sistema tipo Lur'e, onde  $\phi(\cdot) = (\cdot)^3$  e a entrada exógena  $w(t)$ . Portanto, as matrizes que definem o sistema são

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_i & B_i & J_i & E_i \\ \hline C_{zi} & D_{ui} & D_{wi} & 0 \\ \hline C_{qi} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c_i}{m} & 4 & \frac{1}{m} & \frac{ka_i^2}{m} \\ \hline 1 & 0 & 1 & D_{wi} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], i \in \mathbb{K}.$$

Assim como no exemplo anterior, vamos analisar primeiramente (i) custo  $\mathcal{H}_2$ , em seguida (ii) custo  $\mathcal{H}_\infty$ .

- (i) Iniciamos com a análise, logo, as LMIs que serão resolvidas são as do Teorema 3.3. O *solver* não encontrou matrizes  $P_i > 0$ , não permitindo uma conclusão sobre a estabilidade estocástica do sistema.

Para a simulação temporal faremos 2500 realizações de Monte Carlo, cada uma com duração de 100[s] e probabilidade inicial de cada modo  $\pi_0 = [0,25 \ 0,75]$ . Como nosso objetivo é o custo garantido  $\mathcal{H}_2$ ,  $D_{wi} = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  e  $w(t)$  é uma entrada impulsiva.

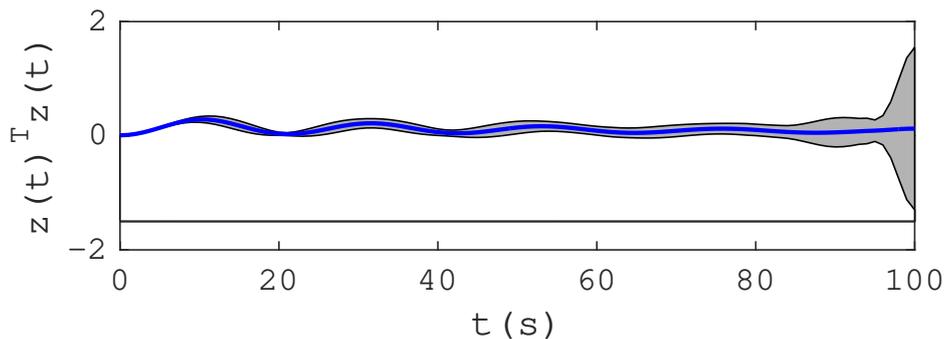


Figura 22 – Resposta do sistema mecânico não linear.

A Figura 22 ilustra a instabilidade do sistema em malha aberta, viabilizando a síntese de um controle por realimentação de estados. Ao resolver o problema apresentado no Teorema 4.1, obtemos como limitante superior do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  de 0,0325 e controlador

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,4959 & -0,2548 \\ -3,5120 & -0,2489 \end{bmatrix}.$$

A única mudança na simulação temporal é no tempo de duração de cada realização de Monte Carlo: adotamos agora 25[s]. Conforme visto a seguir, o controlador projetado conseguiu estabilizar o sistema em média quadrática.

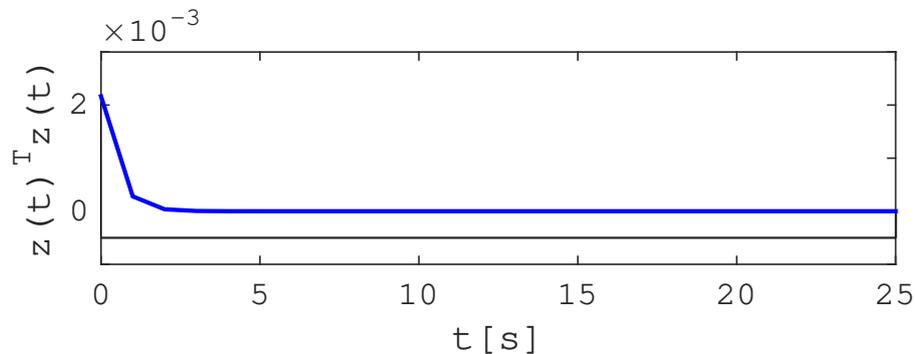


Figura 23 – Resposta do sistema mecânico não linear.

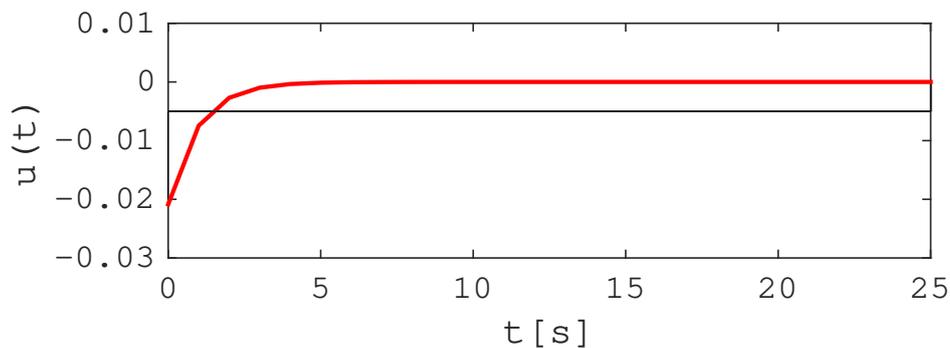


Figura 24 – Esforço de Controle.

- (ii) Consideramos  $D_{wi} = [2 \ 2]^T$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , e resolvemos as LMIs do Teorema 3.5, novamente o *solver* não encontrou matrizes  $P_i > 0$  que resolvem as LMIs. Para a simulação temporal fizemos 2500 realizações de Monte Carlo, cada uma com período  $T = 30[s]$ , a entrada exógena  $w(t)$  é um sinal  $\mathcal{L}_2$ ,  $w(t) = \exp(-0,2 t) \cdot \cos(6\pi t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Testamos para duas condições iniciais, a saber, Figura 25 com  $x_0 = [0 \ 0]^T$  e Figura 26 com  $x_0 = [1 \ 0]^T$ .

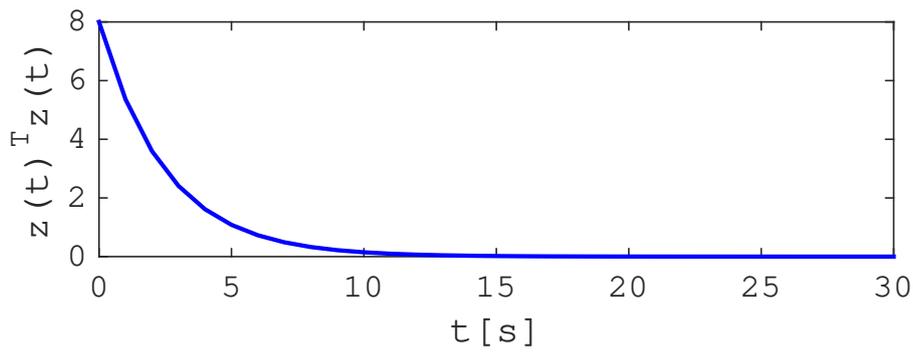


Figura 25 – Resposta do sistema.

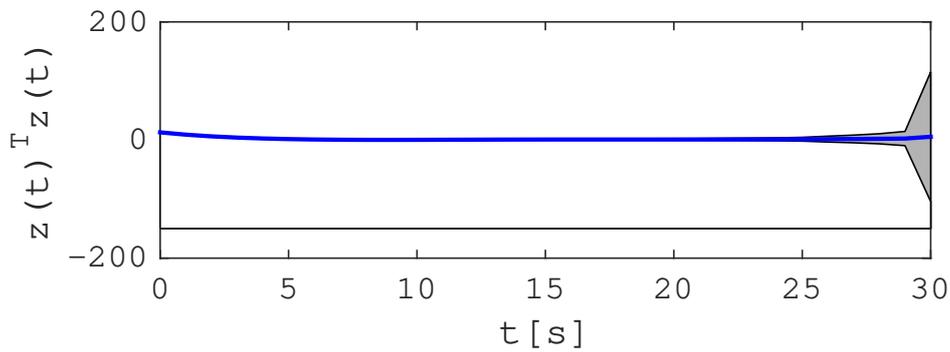


Figura 26 – Resposta do sistema.

Para condições iniciais nulas o sistema se mostra estável em média quadrática, porém se considerarmos que o sistema inicia de um outro ponto  $x_0$ , este se mostrará instável. Portanto, neste segundo cenário, torna-se interessante a síntese de um controlador, através da solução do problema apresentado no Teorema 4.3. Fornecendo como limitante para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty : 2,8335$  e ganhos de controle,

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3168 & -0,3511 \\ -0,3021 & -0,3544 \end{bmatrix}.$$

As realizações de Monte Carlo são feitas da mesma forma, com uma ressalva, cada realização dura 25[s] e a condição inicial é  $x_0 = [1 \ 0]^T$ .

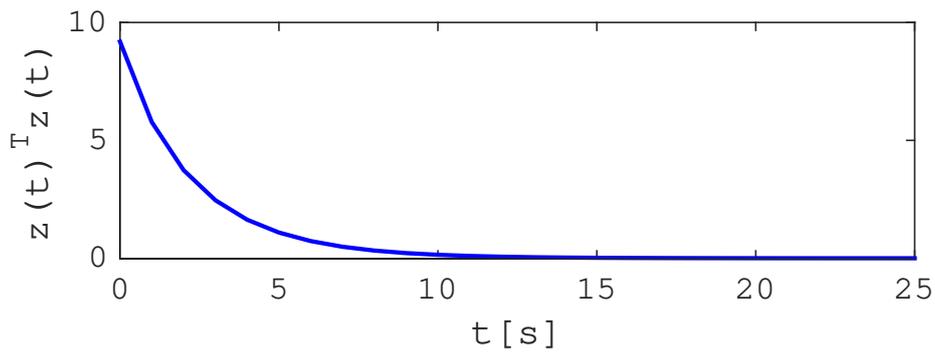


Figura 27 – Resposta do sistema.

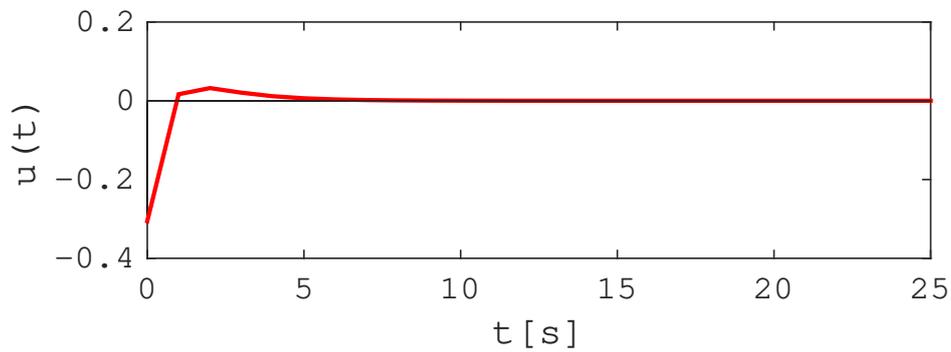


Figura 28 – Esforço de Controle.

Considere agora a seguinte matriz taxa de transição de estados,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{\zeta}{3} & \frac{\zeta}{3} \\ 0,25 & -0,25 \end{bmatrix},$$

onde  $\zeta \in [10^{-3}, 10^3]$ . Pensando no tempo médio de permanência em cada modo  $i \in \mathbb{K}$ , temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[T_1] &= \frac{3}{|-\zeta|} = \begin{cases} 3 \cdot 10^3, & \zeta = 10^{-3}, \\ 3 \cdot 10^{-3}, & \zeta = 10^3, \end{cases} \\ \mathcal{E}[T_2] &= 4, \forall \zeta. \end{aligned}$$

Assim como no exemplo anterior, vamos analisar o comportamento dos custo em função do parâmetro  $\zeta$ , que pertence a base logarítmica supracitada.

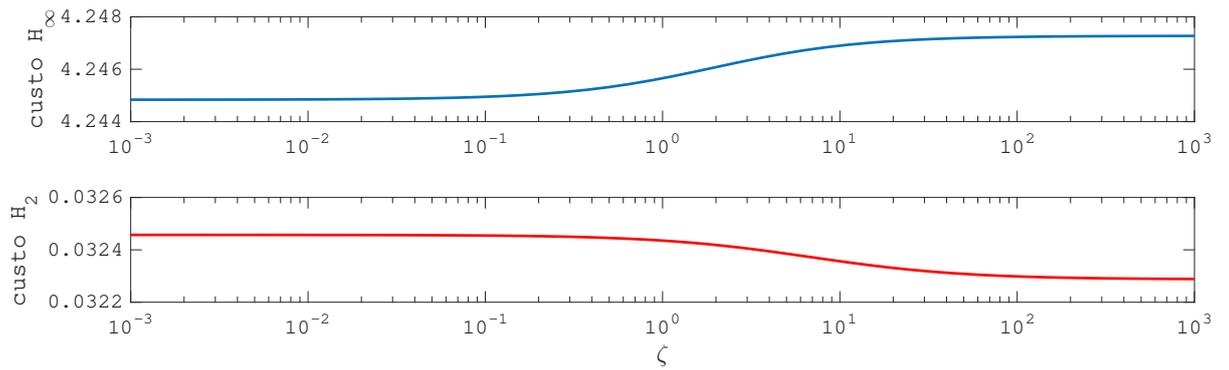


Figura 29 – Custo  $\times \zeta$ , custo  $\mathcal{H}_\infty$  em azul e o custo  $\mathcal{H}_2$  em vermelho.

O comportamento dos custos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são opostos, no que concerne a evolução do escalar  $\zeta$ , já no que concerne o custo  $\mathcal{H}_\infty$ , o limitante do custo diminui conforme o parâmetro  $\zeta$  cresce. Portanto é possível controlar o sistema mecânico com mola não linear, independentemente do comportamento da cadeia de Markov, tanto com custo  $\mathcal{H}_2$  quanto com custo  $\mathcal{H}_\infty$ .

# Conclusão

Nesta dissertação, estendemos o Critério do Círculo, para sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo, passando pela análise de estabilidade e pela síntese de controladores por realimentação de estados, onde a não linearidade  $\phi(\cdot)$ , pode depender, ou não, dos modos da cadeia de Markov. Mostramos ainda, no problema de análise e síntese, que a dependência da função não linear com a cadeia de Markov não altera as condições para a estabilidade estocástica do sistema.

Ao longo do texto, propusemos condições LMIs tanto para a análise, quanto para a síntese de controladores. Ressaltando que o problema de análise fora abordado inicialmente, para o caso de entrada exógena nula,  $w(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ , em seguida tratamos do caso com entrada, ou seja, análise com custo garantido. Por fim, tratamos o problema de síntese, com desempenho limitado pelos custos  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ .

A teoria aqui desenvolvida foi apresentada, numericamente, através de dois exemplos práticos, o circuito de Chua, muito conhecido na literatura de sistemas não lineares, e o sistema massa-mola-amortecedor, com mola não linear. Em ambos os casos, a análise e a síntese foram tratadas sob a óptica dos custos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

Os resultados apresentados neste documento geraram um trabalho apresentado em evento do departamento e dois artigos para congresso,

- Silva, L.P.M.da, Carvalho, L.D.P. & Gonçalves, A.P.C.(2016), “Critério do Círculo para Sistemas a Tempo Contínuo com Saltos Markovianos”, IX EADCA - FEEC -UNICAMP. (Apresentado)
- Silva, L.P.M.da & Gonçalves, A.P.C.(2017), “Circle Criterion for Continuous-Time Markov Jump MIMO Systems”, IFAC 2017 - The 20th World Congress, Toulouse, France, pág. 3857 – 3861. (Apresentado)
- Silva, L.P.M.da & Gonçalves, A.P.C.(2017), “Análise de Estabilidade e Síntese de Controladores para Sistemas do Tipo Lur’e com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos”, SBAI 2017 - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Porto Alegre, Brasil, pág. 251 – 256. (Apresentado)

Por fim, queremos levantar alguns pontos para futuras pesquisas, bem como pontos que já estão em discussão,

- Estender os resultados de análise e síntese, para sistemas politópicos.
- Formular a análise, bem como a síntese para o setor completo, ou seja,  $[\kappa_1, \kappa_2]$ .

- Obter condições em forma de LMIs para o projeto de controladores por realimentação dinâmica da saída e filtros.

# Referências

- ARANHA, N.; JR, J. M. de O.; BELLIO, L. O.; JR, W. B. A lei de Hooke e as molas não-lineares, um estudo de caso. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 4, p. e4305–1 – e4305–10, 2016. Citado na página 45.
- CARDELIQUIO, C. d. B. *Controle de Sistemas Markovianos a Tempo Contínuo com taxas de transição incertas*. Dissertação (Mestrado) — FEEC - UNICAMP, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 27 e 34.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-time Markov jump linear systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 12.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. *Continuous-time Markov jump linear systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 12, 21 e 28.
- FARIAS, D. P. de. *Otimização e controle de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos*. Dissertação (Mestrado) — FEEC - UNICAMP, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas de controle para engenharia*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado na página 17.
- GAPSKI, P. B. *Análise convexa do problema da estabilidade absoluta de sistemas tipo Lur'e*. Dissertação (Mestrado) — FEEC - UNICAMP, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 17.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. [S.l.]: Editora Blucher, São Paulo, SP, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 31 e 38.
- GONÇALVES, A. P. C. *Controle dinâmico de saída para sistemas discretos com saltos markovianos*. Tese (Doutorado) — FEEC - UNICAMP, 2009. Citado na página 12.
- JI, Y.; CHIZECK, H. J. Controllability, stabilizability, and continuous-time markovian jump linear quadratic control. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 35, n. 7, p. 777–788, 1990. Citado na página 22.
- KALMAN, R. E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. *Trans. ASME*, v. 79, n. 3, p. 553–566, 1957. Citado na página 17.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, New Jersey, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 17, 45 e 51.
- LEON-GARCIA, A. *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering*. [S.l.]: Pearson/Prentice Hall 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.
- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MatLab. In: IEEE. *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*. [S.l.], 2005. p. 284–289. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.

- LUR'E, A.; POSTNIKOV, V. On the theory of stability of control systems. *Applied mathematics and mechanics*, v. 8, n. 3, p. 246–248, 1944. Citado na página 16.
- MATSUMOTO, T. A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, IEEE, v. 31, n. 12, p. 1055–1058, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. Citado na página 12.
- OKSENDAL, B. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 20.
- OLIVEIRA, E. L. de. Análise da dinâmica de um pêndulo elástico com excitação vertical no suporte. *São José do Rio Preto: UNESP*, 2006. Citado na página 52.
- PLISS, V. Certain problems in the theory of stability in the whole. *Publisher: Leningrad State University (LUG)*, 1958. Citado na página 17.
- RODRIGUES, G. F.; SOUZA, F. O.; PALHARES, R. M. Sincronização de sistemas contínuos do tipo Lur'e usando controladores discretos. *XVIII CBA*, 2010. Citado na página 45.
- SILVA, L. P. M. da; GONÇALVES, A. P. C. Circle criterion for continuous-time markov jump mimo systems. IFAC, The 20th World Congress, Toulouse, France, 2017. Citado na página 32.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *et al. Applied nonlinear control*. [S.l.]: prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199. Citado na página 20.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a MatLab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.