

Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos com Horizonte definido por uma Classe de Tempos de Parada

Tese a ser apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Cristiane Néspoli de Oliveira
Mestre em Matemática – UnB-Brasília

em 16 dezembro de 2004.

Orientador: **Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val**
FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa	POLI/USP
Prof. Dr. Eduardo Fontoura da Costa	ICMC/USP
Prof. Dr. José Cláudio Geromel	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val	FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

OL4e Oliveira, Cristiane Néspoli de
Estabilidade e controle de sistemas lineares com saltos
Markovianos com horizonte definido por uma classe de
tempos de parada
Cristiane Néspoli de Oliveira. -
Campinas,SP: [s.n.], 2004.

 João Bosco Ribeiro do Val.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação

 1. Markov, Processos de. 2. Sistemas lineares.
3. Sistemas estocásticos. 4. Teoria do controle.
I. Val, João Bosco Ribeiro do.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Título em Inglês: Stability and control of Markovian jump linear systems with horizon
defined by a class of stopping times

Palavras-chave em Inglês: Markov Process; Linear Systems; Stochastic Systems and
Control Theory

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Oswaldo Luiz do Valle Costa

Eduardo Fontoura da Costa

José Cláudio Geromel

Wagner Caradori do Amaral

Data de defesa: 16/12/2004

Resumo

Este trabalho aborda conceitos de estabilidade de segundo momento e um problema de controle ótimo envolvendo sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto. No modelo estudado, define-se como horizonte um tempo de parada τ que representa a ocorrência de um número fixo N de falhas ou reparos (T_N), ou a ocorrência de uma falha crucial (τ_Δ), após as quais o sistema é paralisado para manutenção. Considera-se ainda, um caso misto intermediário onde τ representa o mínimo entre T_N e τ_Δ . Estes tempos de parada coincidem com algum dos instantes de salto da cadeia de Markov e a informação disponível permite a reconfiguração da ação de controle em cada um destes instantes, na forma de um ganho de realimentação linear. Através do conceito denominado τ -estabilidade estocástica são obtidas condições necessárias e suficientes para a estabilidade estocástica do sistema até a ocorrência do tempo de parada τ_Δ . Estas condições conduzem a um teste que se beneficia da estrutura da cadeia para propor uma decomposição para a verificação de estabilidade em média quadrática, o que neste sentido, induz métodos algorítmicos mais simples. Adicionalmente, a equivalência entre conceitos de τ -estabilidade estocástica de segundo momento é estabelecida para os três tempos de parada discriminados. A solução ótima para o problema de controle linear quadrático (LQ) por realimentação de estado, com ou sem ruído Gaussiano, tendo como horizonte os tempos de parada T_N ou τ_Δ é apresentada. Esta solução é dada em termos de um conjunto de equações algébricas de Riccati recursivas ou um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas (EARA). Além disso, aborda-se o problema de controle LQG por realimentação dinâmica de saída via estimação de estado.

Abstract

This work deals with second order stability concepts and a stochastic optimal control problem involving discrete-time jump Markov linear systems. The jumps or changes between the system operation modes evolve according to an underlying Markov chain. In the model studied, the problem horizon is defined by a stopping time τ which represents either, the occurrence of a fixed number N of failures or repairs (T_N), or the occurrence of a crucial failure event (τ_Δ), after which the system is brought to a halt for maintenance. In addition, an intermediary mixed case for which τ represents the minimum between T_N and τ_Δ is also considered. These stopping times coincide with some of the jump times of the Markov state and the information available allows the reconfiguration of the control action at each jump time, in the form of a linear feedback gain. Using the concept named stochastic τ -stability, equivalent conditions to ensure the stochastic stability of the system until the occurrence of the stopping time τ_Δ is obtained. These conditions lead to a test that benefits from the chain structure for proposing a simpler decomposition algorithm for the mean square stability verification. The work also develops equivalences among second order τ -stability concepts, for all stopping times considered, that parallels the results for infinite horizon problems. Considering T_N and τ_Δ as horizon, the optimal control solution for the linear quadratic (LQ) problem for state feedback, with or without Gaussian noise, is presented. The solution is given in terms of recursions of a set of algebraic Riccati equations or a coupled set of algebraic Riccati equation (CARE). The LQG optimal control problem for dynamic output feedback using state estimation is also studied.

*... e o fim de nossa viagem será chegar
ao lugar de onde partimos. E conhecê-lo
então pela primeira vez.*

T.S. Eliot

Agradecimentos

Ao Prof. João Bosco Ribeiro de Val, meu profundo respeito por sua competência e seriedade, e gratidão pela forma generosa com que compartilha seus conhecimentos.

À FCT/Unesp e ao Programa PICDT/CAPES pelo suporte financeiro.

Aos professores Paulo Augusto Valente, Pedro Luis Dias Peres e Wagner Caradori do Amaral, pelos valorosos ensinamentos.

Ao parceiro e grande amigo Yusef Cáceres cuja generosidade e competência o tornam uma pessoa ímpar.

Aos amigos do Laboratório de Telemática, em especial, Alfredo, Alessandro, Valter, Edvaldo, Márcia, Edilson, Ricardo, Rúbia e Simone . Obrigada meus amigos, pela demonstração de que é sempre possível trabalhar em uma atmosfera agradável, de forma harmoniosa e cooperativa.

Ao meu companheiro Paulo França e minha filha Catarina, por possibilitarem a descoberta do amor verdadeiro e absoluto, nesta ordem.

À minha irmã Vanessa e minha mãe Nely, mulher de coragem que criou sozinha as duas filhas e a quem devo tudo que sou.

Ao ensino público gratuito e de boa qualidade, do qual tive a oportunidade de desfrutar.

Sumário

Resumo e Abstract	ii
Agradecimentos	v
Notação	x
1 Introdução	1
1.1 Os SLSMs	5
1.2 Estabilidade para Horizonte Infinito Padrão	6
1.3 Controle para Horizonte Infinito Padrão	8
1.4 Exemplo (ERA)	9
1.5 Panorama da Tese	11
2 Resultados Preliminares	14
2.1 Lemas auxiliares	14
2.2 Resultados Básicos	21
2.2.1 Cadeias de Markov	21
2.2.2 Equação Algébrica de Riccati	22
2.2.3 Outros Resultados	23
3 Estabilidade Estocástica	24
3.1 Condições para τ -Estabilidade	26
3.1.1 Caso $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$	26
3.1.2 Caso $\tau = \tau_\Delta$	27
3.2 Equivalência entre os Conceitos de τ -Estabilidade Estocástica	32
3.2.1 Caso $\tau = T_N$	32
3.2.2 Caso $\tau = T_N \wedge \tau_\Delta$	37
3.2.3 Caso $\tau = \tau_\Delta$	40
3.3 Decomposição para o teste da estabilidade na média quadrática	41
4 O Problema de Controle LQ	44
4.1 Controle com Realimentação Linear de Estado	46
4.1.1 O caso livre de ruído	47
4.1.2 O caso com ruído aditivo	53
4.2 Controle com Realimentação de Saída	58
4.2.1 Caso $\tau = T_N$	61

4.2.2	Caso $\tau = \tau_{\Delta}$	62
4.3	Exemplo Numérico	63
5	Conclusões	67
A	Dados do Exemplo ERA	69
	Artigos	71
	Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

1.1	Estrutura Básica de uma junta do ERA.	10
4.1	Trajetoórias típicas para $\tau = T_3$	65
4.2	Trajetoórias típicas para $\tau = \tau_\Delta$	66

Lista de Tabelas

1.1	Valores nominais dos parâmetros de um modelo de uma junta do ERA.	10
4.1	Ganho de controle ótimo para $\tau = \tau_{\Delta}$	63
4.2	Ganhos de controle ótimos para $\tau = T_3$	64

Notação

\mathbb{R}^n	Espaço real n -dimensional
\mathfrak{X}	Espaço de estados da cadeia de Markov
θ_k	Estado da cadeia de Markov
Δ	Estado absorvente da cadeia de Markov
$E[\cdot]$	Esperança matemática
T_n	Tempo de parada: $\min\{k > T_{n-1} : \theta_k \neq \theta_{T_{n-1}}\}$
τ_Δ	Tempo de parada: $\inf\{k \geq 1 : \theta_k = \Delta\}$ (tempo da primeira visita ao estado Δ)
\mathcal{T}^N	Sequência $\{T_n; n = 0, 1, \dots, N\}$ de tempos de parada
$U \geq 0$ ($U > 0$)	Matriz semidefinida positiva (definida positiva)
U'	Transposta de U
U^{-1}	Inversa de U
$\lambda(U)$	Autovalor de U
$\rho(U)$	Conjunto dos autovalores de U
$r_\sigma(U)$	Raio espectral de U
$tr(U)$	Traço de U
$\mathcal{N}\{U\}$	Espaço nulo de U
$\ \cdot\ $ ($\ U\ $)	Norma vetorial padrão em \mathbb{R}^n (correspondente norma induzida de U)
\mathbf{U}	Coleção de matrizes (U_1, \dots, U_r)
$\mathcal{M}^{m \times n}$ (\mathcal{M}^m)	Espaço linear normado de todas as matrizes reais $m \times n$ ($m \times m$)
\mathcal{M}^{m0} (\mathcal{M}^{m+})	$\mathcal{M}^{m0} \subset \mathcal{M}^m$ ($\mathcal{M}^{m+} \subset \mathcal{M}^m$) onde as matrizes $U_i \in \mathcal{M}^m$ são tais que $U_i = U_i' \geq 0$ ($U_i = U_i' > 0$) para todo $i = 1, \dots, r$
$Diag(U_i)$	Matriz $m \times m$ formada pelos elementos de $U_i \in \mathcal{M}^m$ na diagonal e zero caso contrário
$Diag(\mathbf{U})$	Matriz $rm \times rm$ formada por $U_i \in \mathcal{M}^m$ na diagonal e zero caso contrário
$\mathbb{M}^{m \times n}$ (\mathbb{M}^m)	Espaço linear das sequências \mathbf{U} onde $U_i \in \mathcal{M}^{m \times n}$ (\mathcal{M}^m) para $i = 1, \dots, r$

\mathbb{M}^{m0} (\mathbb{M}^{m+})	$\mathbb{M}^{m0} \subset \mathbb{M}^m$ ($\mathbb{M}^{m+} \subset \mathbb{M}^m$) onde a sequência $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^m$ é tal que $U_i \in \mathcal{M}^{m0}$ ($U_i \in \mathcal{M}^{m+}$) para $i = 1, \dots, r$
$\mathbf{U} \geq \mathbf{V}$ ($\mathbf{U} > \mathbf{V}$)	Matriz $(U_i - V_i) \in \mathcal{M}^m$ semidefinida positiva (definida positiva) para $i = 1, \dots, r$
I_n	Matriz identidade de ordem $n \times n$
$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$	Função delta de Dirac
$a \wedge b$	Mínimo entre a e b
$\mathcal{E}_i(\mathbf{U}) = \sum_{j \neq i} p_{ij} U_j$	Operador sobre a coleção \mathbf{U}
$\mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{U}) = \sum_{j \neq i, j \neq \Delta} p_{ij} U_j$	Operador sobre a coleção \mathbf{U}

Capítulo 1

Introdução

Estudos envolvendo os sistemas lineares com saltos Markovianos têm continuamente despertado o interesse de um grande número de pesquisadores, haja vista o crescente número de trabalhos nesta área.

Uma razão para este fato, baseia-se na idéia de que os sistemas de controle modernos devem manter um comportamento aceitável e respeitar exigências de desempenho em situações práticas qualificadas, como por exemplo, quando da ocorrência de alterações abruptas em seus parâmetros e estrutura. Quando tais alterações não são significativas, em geral é adequada a abordagem na qual se consideram intervalos ou regiões dentro dos quais tais parâmetros devam permanecer, ou variações paramétricas limitadas através de normas das matrizes do sistema. De outra forma, em sendo extensas as alterações causadas no comportamento do sistema, o conservadorismo inerente a estas abordagens torna frequentemente inadequada sua aplicação. Nestes casos, pode ser preferível a utilização de um modelo estocástico o qual descreva representativamente os vários possíveis cenários, como é o caso dos Sistemas Lineares com Saltos.

Uma outra razão, pode-se dizer que decorre da natureza prática à qual pertencem grande parte das alterações experimentadas por estes denominados sistemas dinâmicos sujeitos a falhas. Como o próprio termo sugere, estas alterações podem ser causadas por fenômenos como falhas ou reparos em componentes, por distúrbios ambientais súbitos, bem como efeitos econômicos repentinos, ou ainda, podem ser oriundas de variações do ponto de operação de um sistema não linear, etc. Neste sentido, podemos citar como exemplos, aplicações em receptores térmicos solares (Sworder e Rogers, 1983), em modelos macroeconômicos (do Val e Basar, 1999), em sistemas robóticos (Saridis, 1983) e em sistemas aeronáuticos (Athans et al., 1977), entre outros.

Assim sendo, considerando a natureza essencialmente aleatória das alterações, e

portanto a conseqüente impossibilidade de obtenção de um modelo determinístico que as descreva, a utilização de um modelo estocástico que permita incluir no modelo as incertezas geradas por tais alterações se reafirma.

Os sistemas acima mencionados podem ser modelados através dos sistemas lineares sujeitos a saltos aleatórios. Nestes casos, considera-se um certo número de “formas” lineares ou modos de operação, cada uma delas expressando uma combinação possível daqueles eventos, sendo as transições entre estas possíveis formas denominadas saltos. Cada um dos saltos leva o sistema a se comportar como um sistema linear discreto ou contínuo, dependendo do caso, diferente ou não daquele cujo comportamento o mesmo emulava antes do salto. Em outras palavras, os sistemas lineares com saltos constituem-se em sistemas estocásticos cuja dinâmica muda de forma abrupta e imprevisível em certos instantes e comportam-se como sistemas lineares nos demais. Os estudos pioneiros nesta linha nos remetem ao trabalho de Rosebloom (1954).

Em particular, quando as alterações na dinâmica do sistema (saltos), decorrentes das mudanças abruptas, ocorrem de acordo com uma cadeia de Markov¹ surgem os sistemas lineares com saltos Markovianos (SLSM). Neste caso, o salto em determinado instante ocorre com probabilidade dependente apenas do modo de operação no qual se encontra o sistema neste instante.

Para exemplificar, considere um sistema sujeito a variações abruptas que pode assumir três comportamentos distintos, denominados modos de operação, de acordo com a qualidade de operação, número de sensores ou atuadores confiáveis, etc. Cada um dos modos de operação, denotados por O_1, O_2, O_3 , é descrito por um conjunto de equações diferenciais ou a diferenças, em se considerando o sistema respectivamente a tempo contínuo ou tempo discreto. Assuma que a cada instante de tempo, o modo de operação que descreve o sistema seja conhecido e que as transições entre estes sejam dadas por uma cadeia de Markov. Assim, dado que o sistema se encontra em determinado modo, por exemplo O_1 , são conhecidas as probabilidades de que, no próximo instante de tempo o sistema continue no mesmo modo ou passe para qualquer modo dentre os demais, sendo tais taxas de transição (sistemas a tempo contínuo) ou probabilidades de transição (sistemas a tempo discreto), dependentes apenas do modo atual, neste caso dadas por t_{11}, t_{12}, t_{13} e assim analogamente para os demais modos.

Considerando a classe dos SLSMs, a contribuição pioneira deve-se a Krasovskii e

¹**Andrei Andreyevich Markov** (1865-1922). Matemático russo, aluno de Chebyshev, tornou-se professor da Universidade de Petesburgo.

Lidiskii (1961). No que se refere especificamente aos SLSMs a tempo discreto, estes por sua vez foram trazidos à literatura por Blair e Sworder (1975), como uma extensão de resultados referentes ao caso contínuo anteriormente apresentados. Desde então, muitos avanços têm sido obtidos nesta área, dentre os quais podemos citar (Chizeck et al., 1986; Mariton, 1988; Ji et al., 1991; Costa e Fragoso, 1993; Costa e Fragoso, 1995; do Val et al., 2003) como uma pequena amostra.

No que concerne a estabilidade de sistemas estocásticos, este assunto foi amplamente estudado por Kushner (1967) e Kozin (1969). Podemos afirmar que estabilidade, sob suas inúmeras definições, é uma das propriedades qualitativas desejáveis a todos os sistemas dinâmicos, sejam eles naturais ou não, daí o contínuo interesse em seu estudo. Com relação aos sistemas lineares com saltos, estudos pioneiros são devidos a Rosebloom (1954) e Bellman (1960), tendo sido este o primeiro a estudar a estabilidade de tais sistemas a tempo discreto. Mais recentemente, para cadeias de Markov com espaço de estados finito, condições necessárias e suficientes para estabilidade de segundo momento², dadas em termos da existência da solução de uma equação de Lyapunov³, foram obtidas em (Ji e Chizeck, 1990a) e (Ji et al., 1991), para SLSMs a tempo contínuo e discreto, respectivamente. Em (Costa e Fragoso, 1993), são obtidas condições necessárias e suficientes para a estabilidade em média quadrática de SLSMs a tempo discreto, em termos do raio espectral de um operador expresso na forma matricial.

Tendo em vista que os sistemas de controle moderno devem ser altamente confiáveis e seguros, a rapidez na detecção de falhas em componentes constitui uma forma efetiva de assegurar sua confiabilidade e segurança e conseqüente nível de desempenho mediante uma reconfiguração de controle aceitável. No que tange aos sistemas lineares com saltos, um grande número de resultados referentes a problemas de controle envolvendo a minimização de custos quadráticos é atualmente conhecida, vide (Sworder, 1969; Wonham, 1971; Blair e Sworder, 1975) e (Wonham, 1971; Mariton e Bertrand, 1985; Ji e Chizeck, 1990a; Ji e Chizeck, 1990b; Costa e Fragoso, 1995; Costa, 1996) para horizonte respectivamente finito e infinito, como uma pequena amostra.

Regra geral, pode-se dizer que os estudos envolvendo estabilidade de sistemas lineares com saltos referem-se a problemas cujo horizonte de interesse é puramente

²Este nome deve-se ao fato de que este conceito envolve valor esperado.

³**Aleksandr Mikhailovich Lyapunov**(1857-1918). Matemático russo, aluno de Chebyshev e colega de Markov, conhecido por suas contribuições para a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos.

infinito. O mesmo se pode dizer sobre o índice de desempenho associado ao problema de controle linear quadrático (LQ) envolvendo estes sistemas. Uma variação interessante surge ao se considerar problemas cujo horizonte envolve um evento aleatório, mais precisamente um tempo de parada τ associado ao processo. Este tempo de parada pode representar situações interessantes tendo em vista seu apelo à aplicações. Por exemplo, suponha que num sistema sujeito a falhas e/ou reparos, τ represente a ocorrência da n -ésima falha, após a qual o sistema é paralisado para manutenção. Em outra situação, τ pode representar a ocorrência de uma determinada *falha grave*, associada a entrada do processo em um estado de desgaste irremediável ou de degradação de operação, que também leva a paralização do sistema mas, que neste caso pode ocorrer após um número arbitrário de falhas. Ainda, τ pode representar a ocorrência, de um número fixo de falhas ou de uma falha grave, o que ocorrer primeiro.

Visto que os conceitos de estabilidade estocástica assim como os resultados encontrados na literatura são voltados à situação de horizonte infinito puro, fazem-se necessários conceitos de estabilidade num sentido apropriado, que envolvam o horizonte aleatório na forma de um tempo de parada. Neste sentido, faremos uso dos conceitos de τ -estabilidade estocástica de segundo momento formulados de forma a se adaptar um tempo de parada τ àqueles conceitos de estabilidade de segundo momento encontrados em (Ji et al., 1991), a saber, estabilidade estocástica (EE), estabilidade estocástica no sentido quadrático médio (EQM) e estabilidade estocástica no sentido exponencial quadrático médio (EEQM).

Em linhas gerais, com respeito aos SLSMs a tempo discreto com espaço de estados finito, este trabalho objetiva essencialmente o estudo da estabilidade e do problema LQ com observação completa dos estados da cadeia de Markov, tendo como horizonte os tempos de parada:

- (I) $\tau = T_N$ é a N -ésima falha do sistema;
- (II) $\tau = \tau_\Delta$ é a ocorrência de uma falha crucial;
- (III) $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$ caso misto.

Baseado em trabalhos anteriores voltados ao caso I, desenvolvemos a estabilidade para os casos II e III, notando-se a diferença entre o conceito adequado a II e aos demais. Em todos os casos se verifica a equivalência entre os conceitos de estabilidade quadrática mencionados acima, reproduzindo nestes contextos, o mesmo tipo de resultado encontrado no caso tradicional de horizonte infinito puro.

Além disso, com base nos resultados envolvendo o segundo tipo de tempo de parada acima citado, destacamos que obtivemos aqui um teste para estabilidade na média quadrática, mediante prévia caracterização e classificação dos estados da cadeia de Markov. Este teste se beneficia da estrutura da cadeia para propor uma decomposição para a verificação da estabilidade o que induz métodos algorítmicos mais simples, tanto para a verificação de estabilidade em média quadrática quanto para o controle LQ com horizonte infinito. A estrutura da cadeia de Markov leva a simplificações no critério e na determinação do controle.

1.1 Os SLSMs

Nesta seção, apresentam-se algumas notações utilizadas assim como a caracterização dos SLSMs.

Inicialmente, considera-se a cadeia de Markov homogênea $\{\theta_k; k \geq 0\}$ com espaço de estados $\mathfrak{X} = \{1, \dots, s\} \cup \Delta$, e matriz de probabilidade de transição $P = [p_{ij}]$ com

$$p_{ij} := P(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i), \forall i, j \in \mathfrak{X}, k \geq 0. \quad (1.1)$$

Definimos Δ como um estado absorvente, isto é $p_{\Delta\Delta} = 1$, ou ainda, uma coleção de estados absorventes.

Seja \mathbb{R}^n o espaço real n -dimensional e $\mathcal{M}^{m \times n}$ (\mathcal{M}^m) o espaço linear normado de todas as matrizes reais $m \times n$ ($m \times m$). A transposta da matriz U é indicada por U' e a matriz semidefinida positiva (definida positiva) é representada por $U \geq 0$ ($U > 0$). O cone fechado (aberto), formado pelas matrizes semidefinidas positivas (definidas positivas) em \mathcal{M}^m é denotado por $\mathcal{M}^{m0} = \{U \in \mathcal{M}^m : U = U' \geq 0\}$ (\mathcal{M}^{m+}). O espaço linear das sequências de r matrizes reais em $\mathcal{M}^{m \times n}$ (\mathcal{M}^m) é representado por $\mathbb{M}^{m \times n} = \{\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_r) : U_i \in \mathcal{M}^{m \times n}, i \in \mathfrak{X}\}$ (\mathbb{M}^m). Com vistas à simplificação notacional, analogamente escreve-se \mathbb{M}^{m0} quando $U_i \in \mathcal{M}^{m0}$, para todo $i \in \mathfrak{X}$ e \mathbb{M}^{m+} quando $U_i \in \mathcal{M}^{m+}$. A norma vetorial padrão em \mathbb{R}^n é indicada por $\|\cdot\|$ e a correspondente norma induzida da matriz U é indicada por $\|U\|$. Além disso, $r_\sigma(U)$ e $\mathcal{N}\{U\}$ indicam respectivamente, o raio espectral e o espaço nulo da matriz $U \in \mathcal{M}^m$. Sejam $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ a medida de Dirac e $a \wedge b$ o mínimo entre a e b .

Os SLSMs a tempo discreto abordados neste trabalho são definidos em um espaço

de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_k\}, P)$, e descritos por

$$S: \begin{cases} x_{k+1} = A_{\theta_k}x_k + B_{\theta_k}u_k + H_{\theta_k}w_k & x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ z_k = C_{\theta_k}x_k + D_{\theta_k}u_k & \theta_0 \sim \mu_0, \\ y_k = F_{\theta_k}x_k + G_{\theta_k}w_k & k \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

com $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$ o processo de estados tomando valores em $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$; μ_0 a distribuição inicial em θ_0 ; $\{u_k; k \geq 0\}$, $\{z_k; k \geq 0\}$ e $\{y_k; k \geq 0\}$ as sequências de controle, de saída e de saída medida, respectivamente. O processo estocástico $\{w_k; k \geq 0\}$ é uma sequência de segunda ordem de vetores aleatórios l -dimensionais i.i.d. normalmente distribuídos, com média zero e covariância $E(w_k w_k') = I_l$. Além disso, tem-se que $\{w_k; k \geq 0\}$ e $\{\theta_k; k \geq 0\}$ são independentes e em particular x_k e w_k são vetores aleatórios independentes. Quando $\theta_k = i$, o SLSM evolui de acordo como “ i -ésimo modo”, a saber, $A_{\theta_k} = A_i \in \mathbf{A} \in \mathbb{M}^n$, $B_{\theta_k} = B_i \in \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{n \times p}$, $H_{\theta_k} = H_i \in \mathbf{H} \in \mathbb{M}^{n \times l}$, $C_{\theta_k} = C_i \in \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{q \times n}$, $D_{\theta_k} = D_i \in \mathbf{D} \in \mathbb{M}^{q \times p}$, $F_{\theta_k} = F_i \in \mathbf{F} \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e $G_{\theta_k} = G_i \in \mathbf{G} \in \mathbb{M}^{m \times r}$. Adicionalmente considera-se $D_i' D_i, G_i' G_i \in \mathcal{M}^{q+}$ para todo $i \in \mathfrak{X}$. Os SLSMs como definidos acima constituem um processo forte de Markov, vide (Meyn e Tweedie, 1993, p. 72).

Um dos objetivos deste trabalho consiste em estudar o problema de controle LQ de SLSMs a tempo discreto, assumindo como horizonte do problema os tempos de parada τ definidos anteriormente. Mais especificamente, pretende-se minimizar o custo

$$J(x_0, \theta_0, u(\cdot)) := E \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \|z_k\|^2 + x_\tau' S x_\tau \mid x_0, \theta_0 \right],$$

no qual $S \in \mathbb{M}^{m0}$ é algum custo terminal, e x_0, θ_0 são as condições iniciais do processo de estados.

1.2 Estabilidade para Horizonte Infinito Padrão

No que segue, descrevemos alguns resultados de interesse comparativo encontrados na literatura para SLSMs para os quais se pretende estabelecer um paralelo quando se consideram os horizontes aleatórios τ aqui propostos. Em particular, considera-se o SLSM autônomo descrito pela equação estocástica

$$S_0: x_{k+1} = A_{\theta_k}x_k, \quad k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \theta_0 \sim \mu_0. \quad (1.3)$$

Dentre os conceitos de estabilidade estocástica encontrados, utilizamos como referência os conceitos de estabilidade estocástica de segundo momento apresentados

em (Ji et al., 1991). Destacamos que tais conceitos referem-se à problemas com horizonte infinito puro e portanto não são totalmente adequados para os problemas cujo horizonte consiste em eventos aleatórios, mais especificamente, tempos de parada. Desta forma, definimos conceitos de estabilidade mais fracos que estes e mais indicados para os problemas a serem tratados.

Definição 1.1 (Ji et al., 1991) *O SLSM S_0 é*

- i) **Estocasticamente Estável (EE)** se para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ_0

$$E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \right] < \infty; \quad (1.4)$$

- ii) **Estável no sentido Quadrático Médio (EQM)** se para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ_0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|x_k\|^2] = 0; \quad (1.5)$$

- iii) **Estável no sentido Exponencial Quadrático Médio (EEQM)** se existirem constantes $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$, tais que para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ_0

$$E [\|x_k\|^2] \leq \beta \alpha^k \|x_0\|^2, \quad k \geq 0. \quad (1.6)$$

O Teorema a seguir, devido a Chizeck et al. (1986), fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade estocástica de sistemas (1.1) e (1.2).

Teorema 1.1 (Ji e Chizeck, 1990b)

- i) *O sistema S_0 é EE, de acordo com a Definição 1.1, se somente se para qualquer conjunto de matrizes $\mathbf{W} \in \mathbb{M}^{n+}$, existe um conjunto de matrizes $\mathbf{M} \in \mathbb{M}^{n+}$, satisfazendo as equações matriciais acopladas⁴*

$$\sum_{j \in \mathfrak{X}} p_{ij} A_i' M_j A_i - M_i + W_i = 0. \quad (1.7)$$

- ii) *Se a matriz $p_{ii}^{1/2} A_i$ é instável para algum $i \in \mathfrak{X}$, então S_0 não é estocasticamente estável.*

⁴denominadas equações de Lyapunov acopladas.

Teorema 1.2 (Ji et al., 1991) Para sistemas (1.1) e (1.2), EE, EQM e EEQM são equivalentes.

Conforme dito anteriormente, em (Costa e Fragoso, 1993) obteve-se uma condição necessária e suficiente para a estabilidade em média quadrática⁵ de sistemas \mathcal{S}_0 com base no raio espectral de uma matriz aumentada envolvendo produto de Kronecker. O Teorema a seguir é uma adaptação deste resultado, ao tomarmos como base a Definição 1.1.

Teorema 1.3 O sistema \mathcal{S}_0 é EQM, de acordo com a Definição 1.1, se e somente se

$$r_{\sigma} [(P \otimes I_{r,2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'] < 1.$$

1.3 Controle para Horizonte Infinito Padrão

Considere inicialmente o problema de controle LQ para SLSMs na forma (1.1) e (1.2), voltado ao horizonte finito M , o qual consiste basicamente na obtenção de $\{u_k; k = 0, \dots, M-1\}$ de forma que minimize o seguinte funcional de custo associado ao sistema

$$J_M(x_0, \theta_0, u(\cdot)) = E \left[\sum_{k=0}^{M-1} (\|z_k\|^2 + x_M' S_{\theta_M} x_M \mid x_0, \theta_0) \right]. \quad (1.8)$$

Assumindo $D_i' D_i > 0$ para cada $i \in \mathfrak{X}$, pode-se mostrar que a lei de controle que minimiza o funcional acima é dada por

$$u_k = K_i^k x_k$$

para $k = 0, \dots, M-1$ e $i \in \mathfrak{X}$. Para cada possível forma $i \in \mathfrak{X}$ o ganho ótimo é dado por

$$K_i^k = -(B_i \mathcal{E}_i(L^{k-1}) B_i + D_i' D_i)^{-1} (B_i \mathcal{E}_i(L^{k-1}) A_i + D_i' C_i) \quad (1.9)$$

com L_i obtida recursivamente através das Equações Algébricas de Riccati Acopladas (EARA)

$$\begin{aligned} L_i^k &= \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{k-1}) A_i + C_i' C_i - (A_i' \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{k-1}) B_i + C_i' D_i) \\ &\cdot (B_i' \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{k-1}) B_i + D_i' D_i)^{-1} \cdot (B_i' \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{k-1}) A_i + D_i' C_i), \end{aligned} \quad (1.10)$$

⁵conforme definição adotada em (Costa e Fragoso, 1993) segundo a qual \mathcal{S}_0 é EQM se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E(x_k x_k')\| = 0$. (Compare com a Definição 1.1 (ii)).

para $k = 0 \dots, M - 1$ e cada $i \in \mathfrak{X}$. Por sua vez, quando o horizonte M tende ao infinito, sob certas condições é possível afirmar que existe uma solução de ponto fixo que estabiliza o sistema controlado no sentido da estabilidade em média quadrática. Particularmente, considerando

$$C_{\theta_k} = \begin{bmatrix} Q_{\theta_k}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{\theta_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{\theta_k}^{1/2} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

com $Q_i = Q'_i \geq 0$ e $R_i = R'_i > 0$ para cada $i \in \mathfrak{X}$, teremos

$$J_M(x_0, \theta_0, u(\cdot)) = E \left[\sum_{k=0}^{M-1} x'_k Q_{\theta_k} x_k + u'_k R_{\theta_k} u_k + x'_M S_{\theta_M} x_M \mid x_0, \theta_0 \right]$$

e, neste caso, em (Ji e Chizeck, 1990a) obteve-se uma condição baseada no conceito denominado controlabilidade absoluta do sistema, enquanto que em (Ji et al., 1991) obteve-se uma condição que recai sob a observabilidade do par $\{Q_{\theta_k}^{1/2}, A_{\theta_k}\}$. Mais especificamente, sob tais condições pode-se garantir que as soluções das EARA's acima definidas convergem quando $M \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} K_i^k = K_i, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} L_i^k = L_i,$$

com K_i^k e L_i^k obtidos como em (1.9) e (1.10).

Mais recentemente, em Costa e do Val (2002) obteve-se uma condição baseada no conceito denominado detectabilidade fraca ou W-detectabilidade ("W" do Inglês *weak*). No que se refere à caracterização de soluções para EARA's, mostrou-se que este conceito assegura estabilidade na média quadrática e, indiretamente, unicidade, sendo neste sentido, o mais geral encontrado na literatura.

1.4 Exemplo (ERA)

Para exemplificarmos o uso do problema de controle de SLSMs apresentado anteriormente, consideramos o modelo linear de uma junta do "European Robot Arm" (ERA), cujo esquema é mostrado na Figura 1.1, cf. (Kanev e Verhaegen, 1999).

As equações do movimento da junta do braço do robô com amortecimento são como segue:

$$N^2 I_m \ddot{\Omega} + I_{son} (\ddot{\Omega} + \ddot{\epsilon}) + \beta (\dot{\Omega} + \dot{\epsilon}) = T_j^{eff}$$

$$I_{son} (\dot{\Omega} + \dot{\epsilon}) + \beta (\Omega + \epsilon) = T_{def}$$

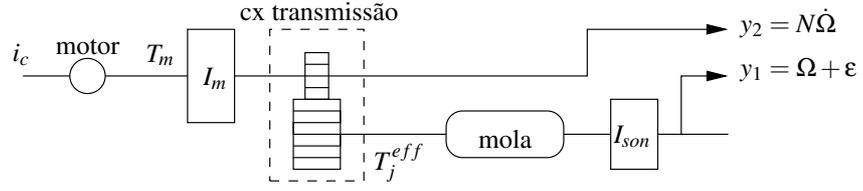


Figura 1.1: Estrutura Básica de uma junta do ERA.

Tabela 1.1: Valores nominais dos parâmetros de um modelo de uma junta do ERA.

Símbolo	Descrição
razão de transmissão	$N = -260,6$
ângulo da junta do eixo inercial	Ω
torque efetivo no eixo de movimento da junta	T_j^{eff}
constante de torque do motor	$g_m = 0,6$
coeficiente de atrito viscoso	$\beta = 0,4$
torque de deformação da transmissão	T_{def}
inércia do eixo de entrada	$I_m = 0,001$
inércia do sistema de saída	$I_{son} = 400$
ângulo da junta do eixo de saída	ε
corrente do motor	i_c
constante de mola	$c = 130000$

O modelo do atuador do motor e da caixa de transmissão é:

$$T_j^{eff} = NT_m, \quad T_m = g_m i_c$$

e o torque de deformação é descrito como

$$T_{def} = c\varepsilon.$$

Os parâmetros com a descrição e valores são apresentados na Tabela 1.1.

Denote $x = [\Omega \quad \dot{\Omega} \quad \varepsilon \quad \dot{\varepsilon}]$, $y = [\Omega + \varepsilon \quad N\dot{\Omega}]'$ e $u_p = i_c$. O modelo espaço-estados do sistema é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hw(t), & t \geq 0, \\ z(t) = Cx(t) + Du(t), \\ y(t) = Fx(t) + Gw(t), \end{cases}$$

no qual as matrizes do sistema têm a forma:

$$A =: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{N^2 I_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{I_{son}} & -\left(\frac{c}{N^2 I_m} + \frac{c}{I_{son}}\right) & -\frac{\beta}{I_{son}} \end{bmatrix}, \quad B =: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{N^2 I_m} & \frac{1}{N^2 I_m} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{N^2 I_m} & -\frac{1}{N^2 I_m} \end{bmatrix} N g_m,$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \end{bmatrix} e \quad D := \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

Além disso $H := 0,01I_4$, $F := [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ e $G := 0,01 [1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Vamos adotar o seguintes tipos de possíveis falhas no sistema, a saber, $g_m^f := \alpha^f g_m$ e $I_m^f := \beta^f I_m$ nas quais α^f e β^f representam o níveis de falha dos correspondentes parâmetros, assumindo os valores $\alpha^f \in \{1, 1,2, 0,12\}$ e $\beta^f \in \{1, 0,5\}$. Adotando as matrizes A e B com parâmetros I_m^f e g_m^f , os valores acima definem um conjunto de sistemas que serão oportunamente transformados em sistemas discretos para serem tratados apropriadamente através das técnicas deste trabalho.

A cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{1, 2, 3, 4, \Delta\}$ representa as falhas do sistema de acordo com os valores de (α^f, β^f) , a seguir

Estado i	(α^f, β^f)
1	(1, 1)
2	(1, 0,5)
3	(1,2, 1)
Δ	$\{(0,12, 1), (0,12, 0,5)\}$

Quando $\alpha^f = 0,12$ ocorre uma falha no atuador, o que explica os estados $(0,12, \cdot)$ serem considerados estados absorventes. A matriz de probabilidade de transição $P = [p_{ij}]$ a seguir é adotada

$$P = \begin{array}{cccc} & & & \text{estados} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,90 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,05 & 0,85 & 0,05 \\ 0,20 & 0,05 & 0,05 & 0,70 \end{bmatrix} & \Delta & 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

Considerando τ como o tempo de parada T_N ou τ_Δ anteriormente definido, deseja-se controlar este sistema de forma a minimizar o funcional

$$J = E \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \|z(k)\|^2 + z(\tau)' S_{\theta_\tau} z(\tau) \mid x_0, \theta_0 \right],$$

tendo como observação o estado da cadeia e a saída y a cada instante $k = 0, \dots, \tau$.

1.5 Panorama da Tese

Como foi dito anteriormente, a classe dos SLSMs é associada a sistemas sujeitos a falhas em componentes ou conexões, períodos de manutenção, etc. Assim, tendo

em vista que o instante no qual acontece a falha ou se inicia o reparo é determinado por uma transição ou salto da cadeia de Markov $\{\theta_k; k \geq 0\}$, considera-se a sequência $\mathcal{T}^N = \{T_n; n = 0, 1, \dots, N\}$ de $\{\mathfrak{T}_k\}$ -tempos de parada associada a tais instantes de saltos, assim definidos

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= \inf\{k > T_{n-1} : \theta_k \neq \theta_{T_{n-1}}\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Eventualmente, $T_n = \dots = T_N = +\infty$ para algum $n \geq 1$, com probabilidade não nula.

Considere agora o tempo de parada τ_Δ , definido como o *hitting-time* do estado Δ , isto é, o tempo da primeira visita a este estado,

$$\tau_\Delta = \inf\{n \geq 1 : \theta_n = \Delta\}.$$

Portanto, conforme as situações elencadas anteriormente, a abordagem desenvolvida neste trabalho leva em consideração os três tempos de parada τ a seguir: (I) $\tau = T_N$; (II) $\tau = \tau_\Delta$; e (III) $\tau = T_N \wedge \tau_\Delta$.

Frente ao contexto agora estabelecido, podemos discriminar com mais detalhes os resultados contidos neste trabalho. O Capítulo 2 contém alguns lemas auxiliares assim como alguns resultados para referência posterior. No Capítulo 3 apresentam-se condições necessárias e suficientes que asseguram a estabilidade estocástica dos SLSMs a tempo discreto, quando se consideram como horizontes os casos II e III anteriormente discriminados. Estas condições, então denominadas condições para τ -estabilidade, diferem daquelas encontradas na literatura para os SLSMs, como veremos adiante. Tais resultados, juntamente com aqueles apresentados em (Cáceres, 2001) para o caso I, completam o panorama acerca da avaliação da estabilidade com respeito aos tempos de parada aqui propostos. No que concerne a análise da EQM, encontramos testes na literatura envolvendo o raio espectral de uma matriz aumentada construída a partir da matriz de probabilidade associada ao sistema, vide (Costa e Fragoso, 1993), ou equações de Lyapunov acopladas, vide (Ji et al., 1991). Nesta direção, tendo como base as condições para estabilidade obtidas no caso II, que envolvem o raio espectral de uma matriz com propriedades contrativas mais interessantes do que aquelas do tipo mencionado acima, ou equações de Lyapunov que embora acopladas também diferem das anteriores, propõe-se um teste mais simples para verificação da EQM. Neste teste, considera-se a decomposição dos estados da cadeia de Markov, dados em sua forma geral, de modo a transformar esta análise de estabilidade em uma análise que envolva

o horizonte do caso II. Mais detalhadamente, a idéia consiste em se decompor o espaço de estados da cadeia em um subconjunto formado de estados transientes e subconjuntos formados de estados recorrentes, o que é possível, em se considerando o espaço de estados da cadeia finito. Assim, tendo em vista que os subconjuntos de estados recorrentes constituem conjuntos fechados, isto é uma vez que a cadeia ingressa em um destes conjuntos ela aí permanece com probabilidade um, pode-se associar este ingresso à ocorrência de determinada falha grave após a qual o sistema seria paralisado, o que caracteriza a definição do tempo de parada descrito no caso II. Além disso, mediante o fato que, partindo de um estado transiente, com probabilidade positiva a cadeia deixa este conjunto de estados, e portanto ingressa em um dos conjuntos recorrentes, ao proceder a análise da estabilidade podemos entender este problema como de τ -estabilidade para a classe transiente. Ainda neste capítulo, a equivalência entre conceitos de τ -estabilidade estocástica é estabelecida para os casos I, II e III.

No Capítulo 4, sob a hipótese de observação perfeita dos estados da cadeia, aborda-se o problema LQ, para os SLSMs a tempo discreto para cada um dos horizontes descritos anteriormente. Inicialmente estuda-se o problema com realimentação de estado, com ou sem ruído Gaussiano. Em seguida, trata-se o problema LQG (linear quadrático Gaussiano) com realimentação dinâmica de saída usando estimação de estado. Como aplicação numérica dos principais resultados apresentados neste capítulo, utiliza-se o exemplo do **ERA** descrito no Capítulo 1.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentam-se alguns lemas auxiliares desenvolvidos aqui com detalhes, assim como alguns resultados básicos encontrados na literatura que serão posteriormente referenciados.

2.1 Lemas auxiliares

Para $\mathbf{U} \in \mathbb{M}^{m0}$, definem-se os seguintes operadores

$$\mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{U}) = \sum_{j \neq i, j \neq \Delta} p_{ij} U_j \quad e \quad \mathcal{E}_i(\mathbf{U}) = \sum_{j \neq i} p_{ij} U_j.$$

Os operadores a seguir também serão utilizados. Escrevendo $H = [h_1 \dots h_n] \in \mathcal{M}^{m \times n}$ ($h_i \in \mathbb{R}^n$ são os vetores coluna de H) e $\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_s, H_\Delta) \in \mathbb{M}^{m \times n}$, define-se

$$\varphi(H) := \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}, \quad \hat{\varphi}(\mathbf{H}) := \begin{bmatrix} \varphi(H_1) \\ \vdots \\ \varphi(H_s) \\ \varphi(H_\Delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(s+1)mn}.$$

Para $t_i \in \mathbb{R}^{n^2}$, $i \in \mathcal{X}$, define-se

$$\hat{\varphi}_j^{-1} \left(\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_s \\ t_\Delta \end{bmatrix} \right) := \varphi^{-1}(t_j), \quad j \in \mathcal{X}.$$

Adotando o produto de Kronecker $L \otimes K \in \mathcal{M}^{n^2}$ usualmente definido, para quaisquer que sejam as matrizes $L, K, H \in \mathcal{M}^n$, as seguintes propriedades podem ser verificadas, vide (Brewer, 1978).

Observação 2.1 Para quaisquer $L, K, H \in \mathcal{M}^n$,

$$(L \otimes K)' = L' \otimes K', \quad (2.1)$$

$$(L \otimes K)(H \otimes R) = LH \otimes KR, \quad (2.2)$$

$$\varphi(LKH) = (H' \otimes L)\varphi(K). \quad (2.3)$$

O próximo lema, cuja prova é omitida, permite caracterizar a cadeia de Markov frente aos instantes de salto T_n , previamente definidos.

Lema 2.1 Quaisquer que sejam $m \geq 1$ e $i, j \in \mathfrak{X}$

$$P(T_1 = m, \theta_m = j \mid \theta_0 = i) = \begin{cases} p_{ij} \mathbb{1}_{\{m=1\}} & \text{se } p_{ii} = 0 \\ p_{ii}^{m-1} p_{ij} \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}} & \text{se } p_{ii} > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Note que os eventos $\{T_1 = k, \tau_\Delta \leq T_1\}$ e $\{T_1 = k, \tau_\Delta > T_1\}$ são equivalentes a $\{\theta_k = \Delta, \theta_k \neq \theta_{k-1} = \dots = \theta_1 = \theta_0\}$ e $\{\theta_k \neq \Delta, \theta_k \neq \theta_{k-1} = \dots = \theta_1 = \theta_0\}$ respectivamente. Desta forma, as probabilidades abaixo seguem imediatamente.

Lema 2.2 Para quaisquer que sejam $k \geq 1$ e $i, j \in \mathfrak{X}$

$$P(T_1 = k, \tau_\Delta \leq T_1 \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{k-1} p_{i\Delta} \quad (2.5)$$

$$P(\theta_k = j, T_1 = k, \tau_\Delta > T_1 \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{k-1} p_{ij} \mathbb{1}_{\{j \neq i, j \neq \Delta\}}. \quad (2.6)$$

É conveniente observar que τ_Δ coincide com algum dos instantes de salto T_n e assim, a expressão $\tau_\Delta \leq T_1$ implica em $\tau_\Delta \equiv T_1$.

No que segue, define-se o funcional

$$V^n(x, i) =: E \left[\sum_{k=T_n}^{\tau-1} \|x_k\|^2 + x'_\tau S_{\theta_\tau} x_\tau \mid x_{T_n} = x, \theta_{T_n} = i \right], \quad (2.7)$$

com $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$, fixando-se $V^n(x, \Delta) := x' S_\Delta x$ para todo n . Considere o sistema \mathcal{S}_0 .

Lema 2.3 Seja $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$ e $0 < p_{ii} < 1$. Assuma

$$E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] < \infty, \quad \forall x_0, \mu_0. \quad (2.8)$$

Então o funcional (2.7) pode ser equivalentemente expresso como

$$V^n(x, i) = x' S_i^n x, \quad \text{com } n = 0, \dots, N,$$

onde as matrizes $S_i^n \in \mathbb{M}^{n+}$ são obtidas recursivamente como

$$S_i^n - p_{ii} A_i' S_i^n A_i = I_n + A_i' \mathcal{E}_i^\Delta (S^{n+1}) A_i + A_i' p_{i\Delta} S_\Delta A_i, \quad S_i^N = S. \quad (2.9)$$

Prova: Nesta prova, utilizaremos o princípio de indução sobre n . Temos que

$$V^n(x, i) = E \left[\sum_{k=T_n}^{T_{n+1}-1} \|x_k\|^2 + V^{n+1}(x_{T_{n+1}}, \theta_{T_{n+1}}) \mid x_{T_n} = x, \theta_{T_n} = i \right].$$

Considerando

$$V^{n+1}(x_{T_{n+1}}, \theta_{T_{n+1}}) = V^{n+1}(x_{T_{n+1}}, \theta_{T_{n+1}}) \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_{n+1}\}} + V^{n+1}(x_{\tau_\Delta}, \Delta) \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \leq T_{n+1}\}},$$

e assumindo que o Lema seja verdadeiro para $n + 1$, escreve-se

$$V^n(x, i) = E \left[\sum_{k=T_n}^{T_{n+1}-1} \|x_k\|^2 + x'_{T_{n+1}} S_{\theta_{T_{n+1}}}^{n+1} x_{T_{n+1}} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_{n+1}\}} + x'_{T_{n+1}} S_{\Delta} x_{T_{n+1}} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \leq T_{n+1}\}} \mid x_{T_n} = x, \theta_{T_n} = i \right]. \quad (2.10)$$

Com base na propriedade de homogeneidade e com vistas à simplicidade notacional analisaremos a situação

$$V^n(x, i) = E \left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \|x_k\|^2 + x'_{T_1} S_{\theta_{T_1}}^{n+1} x_{T_1} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_1\}} + x'_{T_1} S_{\Delta} x_{T_1} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \leq T_1\}} \mid x_0 = x, \theta_0 = i \right].$$

Calculando os valores esperados, com respeito ao primeiro termo, mostra-se que

$$E_0 \left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \|x_k\|^2 \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \|A_i^k x\|^2 p_{ii}^k. \quad (2.11)$$

De fato, do Lema 2.1, como $P(T_1 = m \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{m-1} (1 - p_{ii}) \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}}$,

$$\begin{aligned} E_0 \left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \|x_k\|^2 \right] &= \sum_{m=1}^{\infty} E_0 \left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1=m\}} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} \|A_i^k x\|^2 p_{ii}^{m-1} (1 - p_{ii}) = \sum_{k=0}^{\infty} \|A_i^k x\|^2 p_{ii}^k \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}}. \end{aligned}$$

Aplicando (2.6), com respeito ao segundo termo segue que,

$$\begin{aligned} E_0 \left[x'_{T_1} S_{\theta_{T_1}}^{n+1} x_{T_1} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_1\}} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathfrak{X}} E_i \left[x'(k) S_j^{n+1} x(k) \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_1\}} \mathbb{1}_{\{\theta_k = j, T_1 = k\}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathfrak{X}} (A_i^k x)' S_j^{n+1} (A_i^k x) p_{ii}^{k-1} p_{ij} \mathbb{1}_{\{j \neq i, j \neq \Delta\}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \|(A_i^{k+1} \mathcal{E}_i^\Delta (\mathbf{S}^{n+1}) A_i^{k+1})^{1/2} x\|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por sua vez, aplicando (2.5) tem-se que

$$\begin{aligned}
E_0 \left[x'_{T_1} S_{\Delta} x_{T_1} \mathbb{1}_{\{\tau_{\Delta} \leq T_1\}} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} E_0 \left[(A_i^k x)' S_{\Delta} (A_i^k x) \mathbb{1}_{\{\tau_{\Delta} \leq T_1\}} \mathbb{1}_{\{T_1=k\}} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (A_i^k x)' S_{\Delta} (A_i^k x) p_{ii}^{k-1} p_{i\Delta} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \|(A_i^{k+1} p_{i\Delta} S_{\Delta} A_i^{k+1})^{1/2} x\|^2. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Note que (2.8) garante a convergência de (2.11), (2.12) e (2.13). Desta forma, conclui-se que

$$\begin{aligned}
V^n(x, i) &= \\
&\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \left(\|A_i^k x\|^2 + \|(A_i^{k+1} p_{i\Delta} S_{\Delta} A_i^{k+1})^{1/2} x\|^2 + \|(A_i^{k+1} \mathcal{E}_i^{\Delta}(\mathbf{S}^{n+1}) A_i^{k+1})^{1/2} x\|^2 \right),
\end{aligned}$$

donde, após desenvolvimento obtém-se

$$V^n(x, i) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k x' A_i^k \left(I_n + A_i' \mathcal{E}_i^{\Delta}(\mathbf{S}^{n+1}) A_i + A_i' p_{i\Delta} S_{\Delta} A_i \right) A_i^k x. \tag{2.14}$$

De (2.14) obtém-se

$$\begin{aligned}
V^n(x, i) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k x' A_i^k (S_i^n - p_{ii} A_i' S_i^n A_i) A_i^k x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k x' A_i^k S_i^n A_i^k x - \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{k+1} x' A_i^{k+1} S_i^n A_i^{k+1} x \\
&= x' S_i^n x + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^k A_i^k S_i^n A_i^k x - \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{k+1} x' A_i^{k+1} S_i^n A_i^{k+1} x \\
&= x' S_i^n x.
\end{aligned}$$

Resta então mostrar que o Lema é verdadeiro para $N - 1$. Neste sentido, se

$$S_i^{N-1} - p_{ii} A_i' S_i^{N-1} A_i = I_n + A_i' \mathcal{E}_i^{\Delta}(\mathbf{S}) A_i + A_i' p_{i\Delta} S_{\Delta} A_i,$$

de forma análoga ao desenvolvimento anterior podemos verificar que $V^{N-1}(x, i) = x S_i^{N-1} x$, o que completa a demonstração. ■

No restante desta seção, assumindo $\theta_0 = i$, considera-se o modelo

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= A_i x_k + B_i u_k + H_i w_k \\
z_k &= C_i x_k + D_i u_k \quad 0 \leq k < T_1, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

e define-se o funcional a seguir

$$V_{T_1}^m(x, i) =: E \left[\sum_{k=0}^{(T_1-1) \wedge m-1} \|z_k\|^2 + x'_{T_1 \wedge m} S_{\theta_{T_1 \wedge m}} x_{T_1 \wedge m} \mid x_0 = x, \theta_0 = i \right]. \quad (2.16)$$

Note que, $\theta_k = \theta_0 = i$ para $0 \leq k < T_1$. Considere a lei de controle $u_k = K_i^k x_k$, como em (1.9) e (1.10). Os resultados apresentados na sequência serão utilizados oportunamente.

Lema 2.4 *Considere z_k como no modelo em (2.15). O funcional (2.16) pode ser equivalentemente expresso como*

$$V_{T_1}^m(x, i) = E_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k (\|z_k\|^2 + x'_{k+1} \mathcal{E}_i(S) x_{k+1}) + p_{ii}^m x'_m S_i x_m \right]. \quad (2.17)$$

Prova: *Os seguintes cálculos serão necessários. Podemos escrever*

$$\begin{aligned} & E_0 \left[\sum_{k=0}^{(T_1-1) \wedge m-1} \|z_k\|^2 \right] = \\ & E_0 \left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \|z_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1-1 \leq m-1\}} \right] + E \left[\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1-1 > m-1\}} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Utilizando o Lema 2.1, como $P(T_1 = n \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}}$, com respeito ao primeiro termo de (2.18) temos

$$\begin{aligned} E_0 \left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \|z_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \leq m\}} \right] &= E_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \|z_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1=n, T_1 \leq m\}} \right] \\ &= E_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=k+1}^m \|z_k\|^2 p_{ii}^{n-1} (1 - p_{ii}) \right] \\ &= E_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} (p_{ii}^k - p_{ii}^m) \|z_k\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por sua vez, para o segundo termo, tendo em vista que $P(T_1 > n \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^n$ segue que

$$E_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 > m\}} \right] = E_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^m \|z_k\|^2 \right]. \quad (2.20)$$

Logo, de (2.19) e (2.20) tem-se

$$E_0 \left[\sum_{k=0}^{(T_1-1) \wedge m-1} \|z_k\|^2 \right] = E_0 \left[\sum_{k=0}^m p_{ii}^k \|z_k\|^2 \right]. \quad (2.21)$$

Por outro lado, escrevemos

$$E_0[x'_{T_1 \wedge m} S_{\theta_{T_1 \wedge m}} x_{T_1 \wedge m}] = E_0[x'_{T_1} S_{\theta_{T_1}} x_{T_1} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq m\}}] + E_0[x'_m S_{\theta_m} x_m \mathbb{1}_{\{T_1 > m\}}].$$

Procedendo aos cálculos dos valores esperados obtemos

$$\begin{aligned} E_0[x'_{T_1} S_{\theta_{T_1}} x_{T_1} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq m\}}] &= E_0\left[\sum_{k=1}^m \sum_{j \in \mathfrak{X}} x'_k S_j x_k \mathbb{1}_{\{\theta_k = j, T_1 = k, T_1 \leq m\}}\right] \\ &= E_0\left[\sum_{k=1}^m \sum_{j \in \mathfrak{X}} x'_k S_j x_k p_{ii}^{k-1} p_{ij} \mathbb{1}_{\{j \neq i\}}\right] \\ &= E_0\left[\sum_{k=1}^m p_{ii}^{k-1} x'_k \mathcal{E}_i(S) x_k\right], \end{aligned}$$

e

$$E_0[x'_m S_{\theta_m} x_m \mathbb{1}_{\{T_1 > m\}}] = E_0[p_{ii}^m x'_m S_i x_m].$$

Assim

$$E_0[x'_{T_1 \wedge m} S_{\theta_{T_1 \wedge m}} x_{T_1 \wedge m}] = E_0\left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k x'_{k+1} \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) x_{k+1} + p_{ii}^m x'_m S_i x_m\right]. \quad (2.22)$$

Desta forma, juntando (2.21) e (2.22), obtemos (2.17) como anunciado. \blacksquare

Lema 2.5 O funcional (2.17) pode ser equivalentemente expresso como

$$V_{T_1}^m(x, i) = x' L_i^{0,m} x + l_i^0 \quad (2.23)$$

com $L_i^{0,m}$ e l_i^0 obtidos recursivamente através do seguinte conjunto de equações matriciais acopladas

$$\begin{aligned} L_i^{t,m} &= p_{ii} \hat{A}_i^{t'} L_i^{t+1,m} \hat{A}_i^t + \hat{C}_i^{t'} \hat{C}_i^t + \hat{A}_i^{t'} \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) \hat{A}_i^t, \quad L_i^{m,m} = S, \\ l_i^t &= \sum_{k=t}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr}\{H_i(p_{ii} L_i^{k+1,m} + \mathcal{E}_i(\mathbf{S})) H_i^t\}, \quad l_i^m = 0, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, s$ e $t = m-1, \dots, 0$, com

$$\hat{A}_i^t = A_i + B_i K_i^t \quad e \quad \hat{C}_i^t = C_i + D_i K_i^t.$$

Prova: Nos cálculos que se seguem, utilizaremos o fato de que o ruído w_k tem média 0 e covariância I , i.e., $E[w_k] = 0$ e $E[w'_k w_k] = I$, e além disso x_k e w_k são independentes. Adotando $\hat{Q}_i^k = \hat{C}_i^{k'} \hat{C}_i^k + \hat{A}_i^{k'} \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) \hat{A}_i^k$, após alguns cálculos temos que (2.17) é equivalente a

$$V_{T_1}^m(x, i) = E_0\left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k x'_k \hat{Q}_i^k x_k + p_{ii}^m x'_m S_i x_m\right] + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr}\{H_i \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) H_i^t\}. \quad (2.24)$$

Com o intuito de obter (2.23) definimos

$$V_{T_1}^{t,m}(x_t, \theta_t) =: E_t \left[\sum_{k=t}^{m-1} p_{ii}^k x'_k \hat{Q}_i^k x_k + p_{ii}^m x'_m S_i x_m \right] + \sum_{k=t}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr} \{ H_i \mathcal{E}_i(\mathbf{S}) H_i' \}.$$

Pretende-se mostrar que

$$V_{T_1}^{t,m}(x_t, \theta_t) = x'_t L_i^{t,m} x_t + l_i^t, \quad \forall t = m-1, \dots, 0. \quad (2.25)$$

Tomando $t = m-1$, temos que

$$\begin{aligned} & E_{m-1} [p_{ii}^{m-1} x'_{m-1} \hat{Q}_i^{m-1} x_{m-1} + p_{ii}^m x'_m S_i x_m] \\ &= p_{ii}^{m-1} x'_{m-1} \hat{Q}_i^{m-1} x_{m-1} + p_{ii}^m (x'_{m-1} \hat{A}_i^{m-1'} S_i \hat{A}_i^{m-1} x_{m-1} + \text{tr} \{ H_i S_i H_i' \}) \\ &= p_{ii}^{m-1} x'_{m-1} (\hat{Q}_i^{m-1} + p_{ii} \hat{A}_i^{m-1'} S_i \hat{A}_i^{m-1}) x_{m-1} + p_{ii}^m \text{tr} \{ H_i S_i H_i' \}. \end{aligned}$$

Logo, assumindo

$$\begin{aligned} L_i^{m-1} &= \hat{Q}_i^{m-1} + p_{ii} \hat{A}_i^{m-1'} L_i^{m,m} \hat{A}_i^{m-1} \\ l_i^{m-1} &= p_{ii}^{m-1} \text{tr} \{ H_i (p_{ii} S_i + \mathcal{E}_i^\Delta) H_i' \}, \end{aligned}$$

segue que

$$V_{T_1}^{m-1,m}(x_{m-1}, \theta_{m-1}) = p_{ii}^{m-1} x'_{m-1} L_i^{m-1,m} x_{m-1} + l_i^{m-1}$$

e portanto (2.25) se verifica. Para provar o mesmo para $t < m-1$, baseado em argumento de indução supõe-se que (2.25) seja válida para $t = n+1$, ou seja

$$V_{T_1}^{n+1,m}(x_n, \theta_n) = p_{ii}^{n+1} x'_{n+1} L_i^{n+1,m} x_{n+1} + l_i^{n+1}. \quad (2.26)$$

Agora, tendo em vista que

$$V_{T_1}^{n,m}(x_n, \theta_n) = E_n [p_{ii}^n x'_n \hat{Q}_i^n x_n + V_{T_1}^{n+1,m}],$$

como

$$\begin{aligned} E [V_{T_1}^{n+1,m}(x_n, \theta_n) | x_n, \theta_n] &= E_n [p_{ii}^{n+1} x'_{n+1} L_i^{n+1,m} x_{n+1} + l_i^{n+1}] \\ &= p_{ii}^{n+1} E_n [x'_n \hat{A}_i^{n'} L_i^{n+1,m} \hat{A}_i^n x_n + w_n' H_i' L_i^{n+1,m} H_i w_n + l_i^{n+1,m}] \\ &= p_{ii}^{n+1} [x'_n \hat{A}_i^{n'} L_i^{n+1,m} \hat{A}_i^n x_n + \text{tr} \{ H_i L_i^{n+1,m} H_i' \}] + l_i^{n+1} \\ &= p_{ii}^{n+1} x'_n \hat{A}_i^{n'} L_i^{n+1,m} \hat{A}_i^n x_n + l_i^n, \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$V_{T_1}^{n,m}(x_n, \theta_n) = p_{ii}^n x_n' (\hat{Q}_i^n + p_{ii} \hat{A}_i^{n'} L_i^{n+1,m} \hat{A}_i^n) x_n + l_i^n,$$

donde, reconhecendo $L_i^{n,m}$ entre parênteses na expressão acima, obtém-se

$$V_{T_1}^{n,m}(x_n, \theta_t) = p_{ii}^n x_n' L_i^{n,m} x_n + l_i^n.$$

Portanto, podemos concluir que (2.25) é verdadeira para todo $t \leq m - 1$ e assim $V_{T_1}^m(x, i) \equiv V_{T_1}^{0,m}(x, i) = x' L_i^{0,m} x + l_i^0$, finalizando a demonstração. ■

2.2 Resultados Básicos

2.2.1 Cadeias de Markov

Na sequência, descrevemos algumas terminologias e também um resultado pertinente às cadeias de Markov com espaço de estados finito, cf. (Çinlar, 1975, pg.125-132).

Considere a cadeia de Markov $\{\theta_k; k \geq 0\}$ com espaço de estados finito $\mathfrak{X} = \{1, \dots, L\}$ e matriz de probabilidade de transição P . Seja V_j o tempo da primeira visita ao estado j .

Definição 2.1 a) O estado j é chamado recorrente se $P(V_j < \infty \mid \theta_0 = j) = 1$;

b) O estado j é chamado transiente se $P(V_j = +\infty \mid \theta_0 = j) > 0$;

c) O estado j é acessível a partir do estado i se para algum $m \geq 0$; $P(\theta_{n+m} = j \mid \theta_n = i) \geq 0$, com $n \geq 0$;

d) Um conjunto de estados é fechado se nenhum estado fora do conjunto é acessível a partir de algum estado de dentro dele;

e) Um único estado formando um conjunto fechado é chamado estado absorvente, i.e., quando $p_{jj} = 1$.

Proposição 2.1 O espaço de estados \mathfrak{X} pode ser dividido em subconjuntos disjuntos $\mathcal{T}, R_1, \dots, R_l$, entre os quais \mathcal{T} contém os estados transientes e R_1, \dots, R_l são conjuntos fechados de estados recorrentes.

Desta forma, tendo em vista que os conjuntos de estados recorrentes representam conjuntos fechados, a matriz de probabilidade de transição P pode ser escrita como

$$P = \begin{bmatrix} P_{R_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_{R_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{R_l} & 0 \\ P_{T_1} & P_{T_2} & \cdots & P_{T_l} & P_T \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

com P_{R_j} (ela própria uma matriz estocástica), para cada $j = 1, \dots, l$, e P_T representando as probabilidades de transição dentro dos subconjuntos R_j e T respectivamente, e P_{T_j} representando as probabilidades de transição de T para R_j .

2.2.2 Equação Algébrica de Riccati

Considere A, B, C, D e F matrizes de dimensões apropriadas, com $F'F > 0$, e defina

$$\begin{aligned} \hat{A} &:= A - B(F'F)^{-1}F'D, \\ \hat{D} &:= [I - F(F'F)^{-1}]D. \end{aligned}$$

Definição 2.2 O par (C, A) é detectável quando existe uma matriz M tal que $\rho(A + MC)$ pertence ao disco unitário aberto.

Sejam $S(N-1), S(N-2), \dots$, as matrizes geradas através das equações de Riccati a tempo discreto

$$\begin{aligned} S(k) &= A'S(k+1)A + D'D - (A'S(k+1)B + D'F) \\ &\quad \cdot (B'S(k+1)B + F'F)^{-1}(B'S(k+1)A + F'D), \end{aligned} \quad (2.28)$$

com condição terminal $S(N)$. Considere a equação algébrica de Riccati

$$S = A'SA + D'D - (A'SB + D'F)(B'SB + F'F)^{-1}(B'SA + F'D), \quad (2.29)$$

com $S = S'$ e $S \geq 0$.

Teorema 2.1 (Davis e Vinter, 1985, Apêndice) Suponha que (A, B) é estabilizável e que $S(-1), S(-2), \dots$ é a sequência de matrizes definidas por (2.28) com $S(0) = 0$. Então, quando $n \rightarrow -\infty$, $S(n) \rightarrow S$ com S uma matriz simétrica semidefinida positiva satisfazendo (2.29). Suponha agora que (\hat{D}, \hat{A}) seja detectável. Então $(A + BK)$ é estável, com

$$K = -(B'SB + F'F)^{-1}(B'SA + F'D),$$

e S a única solução semidefinida de (2.29). Além disso, $S(n) \rightarrow S$ quando $n \rightarrow -\infty$, onde $S(n)$ é a sequência definida por (2.28) com $S(0)$ uma matriz simétrica semidefinida positiva arbitrária.

2.2.3 Outros Resultados

Teorema 2.2 (Zhou et al., 1996, pg.538). Seja Q uma matriz simétrica e suponha que X é a solução da equação de Lyapunov $AXA' - X + Q = 0$. Então $X > 0$ e $Q > 0$ implicam $|\lambda(A)| < 1$.

Teorema 2.3 (Golub e Loan, 1996, Teorema 10.1.1) Sejam $b \in \mathbb{R}^n$ e a matriz $A = (M - N) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular. Se M é não-singular e $r_\sigma(M - N) < 1$, então as iterações $x^{(k)}$ definidas por $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ convergem para $x = A^{-1}b$ para qualquer que seja $x^{(0)}$.

Capítulo 3

Estabilidade Estocástica

O estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos estocásticos figura como uma das mais ativas áreas de pesquisa em teoria de Sistemas e Controle, haja vista a estabilidade ser uma das mais importantes especificações que um sistema de controle deve satisfazer. Em particular, em se tratando dos SLSM, um grande número de resultados podem ser encontrados na literatura. Propriedades de estabilidade para SLSM a tempo discreto foram tratadas por exemplo em (Ji et al., 1991) e (Costa e Fragoso, 1993) para cadeias de Markov com espaço de estados finito e, em (Costa e Fragoso, 1995) para cadeias de Markov com espaço de estados enumerável. Ji e Chizeck (1990b), obtiveram condições necessárias e suficientes que garantem a EE de SLSM através de um conjunto de equações matriciais algébricas acopladas (vide Teorema 1.1), conhecidas como equações de Lyapunov acopladas, equações estas que generalizam as equações de Lyapunov para sistemas determinísticos. Por sua vez, Ji et al. (1991) estabeleceram a equivalência entre os vários conceitos de estabilidade estocástica de segundo momento (vide Teorema 1.2) e as relações destas com a estabilidade quase certa. Utilizando produto de Kronecker, Costa e Fragoso (1993) obtiveram condições necessárias e suficientes para EQM destes sistemas (vide Teorema 1.3). Tais condições estão associadas ao raio espectral de um operador linear finito. Condições semelhantes, expressas em termos da parte real máxima dos autovalores de um operador linear sendo menor que zero, haviam sido obtidas em (Morozan, 1983; Mariton, 1988) para o caso contínuo.

Pode-se afirmar que um grande número de resultados referentes a problemas com horizonte infinito são atualmente conhecidos. O mesmo não se pode afirmar quanto a problemas cujo horizonte corresponde a um evento aleatório, mais precisamente um tempo de parada do processo, não obstante seu apelo à aplicações.

Este capítulo destina-se inicialmente ao estudo da estabilidade estocástica de SLSM para os quais o horizonte consiste em um tempo de parada τ do processo conjunto modelado por (1.1) e (1.2). Mais especificamente, pretende-se traçar um paralelo frente aos resultados mencionados na Seção 1.2, abordando os seguintes casos:

Caso $\tau = \tau_\Delta$: Neste caso, τ representa a entrada do processo no estado absorvente Δ , associada a ocorrência de uma falha grave que conduz à paralização do sistema, em se considerando que Δ é um estado absorvente da cadeia.

Caso $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$, com N fixo: Neste caso, denominado *caso misto*, τ representa ou o salto para o estado absorvente Δ , ou o N -ésimo salto livre da cadeia de Markov, aquilo que ocorrer primeiro.

A análise deste último se propõe como estratégia para estudar o caso anterior, que figura aqui como um dos nossos principais objetivos.

A equivalência entre os conceitos de estabilidade estocástica de segundo momento é estabelecida, não só para os casos acima mas também para o caso abaixo descrito:

Caso $\tau = T_N$, no qual τ representa a ocorrência de um número fixo N de falhas ou reparos.

Faremos uso dos conceitos de τ -estabilidade de segundo momento a seguir.

Definição 3.1 *Considere um tempo de parada τ , com respeito a $\{\mathfrak{F}_k\}$. Então, o SLSM \mathcal{S}_0 é*

i) τ -Estocasticamente Estável (τ -EE) se para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ_0

$$E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] < \infty; \quad (3.1)$$

ii) τ -Estável no sentido Quadrático Médio (τ -EQM) se para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ_0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] = 0; \quad (3.2)$$

iii) τ -Estável no sentido Exponencial Quadrático Médio (τ -EEQM) se existirem constantes $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$, tais que para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ_0

$$E \left[\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] \leq \beta \alpha^k \|x_0\|^2, \quad k \geq 0. \quad (3.3)$$

Na sequência, passaremos a considerar separadamente os casos anteriormente descritos. Destacamos que o caso $\tau = T_N$, com N fixo, foi estudado em (Cáceres, 2001) e no que concerne às condições para estabilidade o seguinte resultado foi obtido.

Teorema 3.1 *Para $\tau = T^N$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *O SLSM S_0 é τ -EE.*

ii) *Para qualquer conjunto de matrizes $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n+}$, existe um conjunto de matrizes $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$, satisfazendo as equações de Lyapunov*

$$p_{ii}A_i^L L_i A_i - L_i + Q_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, s. \quad (3.4)$$

iii) *$r_\sigma(p_{ii}^{1/2}A_i) < 1$, para todo $i = 1, \dots, s$.*

Em (Ji e Chizeck, 1990b), mostrou-se que a estabilidade de $p_{ii}^{1/2}A_i$ para cada i é uma condição necessária para assegurar a estabilidade estocástica de sistemas da forma (1.1) e (1.3), vide Teorema 1.1 na Seção 1.2. Entretanto, como se pode notar acima, a condição (iii) de τ -estabilidade no Teorema 3.1, é menos restritiva. De fato, para tais sistemas, mostrou-se que estabilidade estocástica, tal como estabelecida em (Chizeck et al., 1986) implica em τ -estabilidade estocástica, sem que no entanto, a recíproca seja verdadeira.

3.1 Condições para τ -Estabilidade

3.1.1 Caso $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$

Considerando-se que

$$\{\tau \geq k\} = \{\tau_\Delta \wedge T_N \geq k\} \subset \{T_N \geq k\},$$

pode-se concluir, através do Teorema da Convergência Dominada, que o conceito de τ -stabilidade é aplicável ao caso misto e que as equivalências apresentadas no Teorema 3.1 podem ser empregadas para estudá-lo.

O seguinte corolário do Teorema 3.1, em cuja prova se emprega o Lema 2.3 do Capítulo 2, fornece as condições necessárias e suficientes para a τ -estabilidade quando $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$.

Corolário 3.1 *Considere $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$. Condições necessárias e suficientes para τ -estabilidade são dadas pelo Teorema 3.1.*

Prova: A suficiência segue diretamente do fato que $\tau \leq T_N$. Para tanto, basta observar que τ_Δ coincide com um instante de salto T_n para algum $n > 0$.

A necessidade, por sua vez, baseia-se no Lema 2.3. Uma vez que (2.8) coincide com a definição de τ -EE, fixando-se $S \equiv I_n$ no funcional (2.7) conclui-se que

$$V^n(x_0, \theta_0) = E_0 \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \right],$$

e graças àquele Lema,

$$S_i^n - p_{ii} A_i' S_i^n A_i > 0$$

é válida para cada $n \leq N$. Portanto, o resultado segue da teoria padrão de estabilidade de Lyapunov. ■

Sabe-se que, embora a estabilidade de cada matriz A_i não seja condição necessária nem suficiente para a estabilidade estocástica dos sistemas (1.1) e (1.3), a estabilidade das matrizes $p_{ii}^{1/2} A_i$ para cada i é uma condição necessária para tanto, como apontou Ji e Chizeck (1990b), vide Teorema 1.1 na Seção 1.2 (veja também (Costa e Fragoso, 1993)). Entretanto, o Corolário 3.1 mostra que a estabilidade de $p_{ii}^{1/2} A_i$ para cada i é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade em se considerando o caso misto.

3.1.2 Caso $\tau = \tau_\Delta$

Tendo em vista que a entrada do processo no estado Δ pode ocorrer em qualquer dos instantes de salto T_n , as condições para a estabilidade neste caso são obtidas fixando-se $\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_\Delta \wedge T_N$ no caso misto, e então remetendo-nos ao Teorema da Convergência Dominada, como veremos adiante.

No que segue, $Diag(\mathbf{U})$ indica a matriz $sm \times sm$ formada pelas matrizes $U_i \in \mathcal{M}^m$, $i = 1, \dots, s$, na diagonal e zero caso contrário. Por sua vez $Diag(U_i)$ indica a matriz $m \times m$ formada pelos elementos de $U_i \in \mathcal{M}^m$ na diagonal e zero caso contrário. Para simplificar considera-se apenas um estado absorvente. Primeiramente, para a análise deste caso considera-se a matriz de probabilidade P , bloco-particionada como segue:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{B} & \mathcal{Q} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathcal{B} := \begin{bmatrix} p_{1\Delta} \\ p_{2\Delta} \\ \vdots \\ p_{s\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} := \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s1} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Esta forma deve-se ao fato de que o estado absorvente forma uma “classe de comunicação fechada”, isto é, a partir de um estado absorvente não se pode atingir qualquer outro estado da cadeia.

Adicionalmente, escreve-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})' \text{Diag}(Q \otimes I_{n^2}), \\ \mathcal{A}_2 &:= \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})' (\tilde{Q} \otimes I_{n^2}), \quad \text{e} \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})' (Q \otimes I_{n^2}).\end{aligned}$$

A matriz \tilde{Q} é obtida anulando-se a diagonal da matriz Q .

Teorema 3.2 *Considere $\tau = \tau_\Delta$. As condições a seguir são equivalentes:*

- i) *O SLSM \mathcal{S}_0 é τ -EE.*
- ii) *$r_\sigma(\mathcal{A}) < 1$.*
- iii) *$r_\sigma(\mathcal{A}_1) < 1$ e $r_\sigma([I_{sn^2} - \mathcal{A}_1]^{-1} \mathcal{A}_2) < 1$.*
- iv) *Para qualquer que seja o conjunto de matrizes $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n^+}$, existe um único conjunto de matrizes $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n^+}$, satisfazendo as equações de Lyapunov acopladas*

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} A_i' L_j A_i - L_i + Q_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, s \quad (3.6)$$

ou, equivalentemente

$$L_i = \hat{\Phi}_i^{-1} ([I_{sn^2} - \mathcal{A}]^{-1} \hat{\Phi}(\mathbf{Q})). \quad (3.7)$$

Prova: Inicialmente, consideram-se as seguintes relações

$$\begin{aligned}E_0 \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}} \right] &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} E_0 \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \tau_\Delta \wedge T_N\}} \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} x_0 \mathbf{S}_{\theta_0}^0 x_0,\end{aligned} \quad (3.8)$$

para cada (x_0, θ_0) , nas quais a primeira identidade segue do Teorema da Convergência Dominada e a segunda é válida para \mathbf{S}^0 em (2.9) com $\mathbf{S}^N = \mathbf{I}_n$, conforme o Lema 2.3. Note que a hipótese (2.8), empregada no Lema 2.3, coincide com a definição de τ -EE. Usando-se o operador φ definido na Seção 2, a expressão (2.9) pode ser escrita como

$$\varphi(S_i^n) - \varphi(p_{ii} A_i' S_i^n A_i) = \varphi(\hat{Q}_i) + \varphi(A_i' \mathcal{E}_i^\Delta (\mathbf{S}^{n-1}) A_i)$$

na qual, por simplicidade escreve-se $\hat{Q}_i = I_n + A'_i p_{i\Delta} S_\Delta A_i$. Aplicando as propriedades (2.1) e (2.3), tem-se que

$$[I_{n^2} - p_{ii} I_{n^2} (A'_i \otimes A'_i)] \varphi(S_i^n) = \varphi(\hat{Q}_i) + \sum_{j \neq i, j \neq \Delta} p_{ij} I_{n^2} (A'_i \otimes A'_j) \varphi(S_j^{n-1}) \quad (3.9)$$

para todo $i = 1, \dots, s$. Introduzindo as matrizes \tilde{Q} , Q e o operador $\hat{\varphi}$, a equação (3.9) torna-se equivalente a

$$[I_{sn^2} - \mathcal{A}_1] \hat{\varphi}(\mathbf{S}^n) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{Q}}) + \mathcal{A}_2 \hat{\varphi}(\mathbf{S}^{n-1}). \quad (3.10)$$

(iii) \Rightarrow (i) Uma condição necessária que (3.10) seja convergente é que $I_{sn^2} - \mathcal{A}_1$ seja não-singular e que $r_\sigma([I_{sn^2} - \mathcal{A}_1]^{-1} \mathcal{A}_2) < 1$, vide (Golub e Loan, 1996, Teorema 10.1.1). Logo, (iii) implica na convergência da equação recursiva (3.10), e assim a τ -estabilidade segue de (3.8).

(i) \Rightarrow (iv) Da hipótese e de (3.8), nota-se que existe $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n^+}$ tal que

$$E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}} \right] = x'_0 L_{\theta_0} x_0, \quad (3.11)$$

e \mathbf{L} satisfaz (2.9), ou equivalentemente (3.10):

$$[I_{sn^2} - \mathcal{A}_1] \hat{\varphi}(\mathbf{L}) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{Q}}) + \mathcal{A}_2 \hat{\varphi}(\mathbf{L}).$$

De acordo com a definição da matriz \mathcal{A} , a equação anterior pode ser reescrita como

$$[I_{sn^2} - \mathcal{A}] \hat{\varphi}(\mathbf{L}) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{Q}}), \quad (3.12)$$

a qual provê (3.6) por inspeção. A unicidade de \mathbf{L} implica que $I_{sn^2} - \mathcal{A}$ é uma matriz inversível, completando assim esta parte da prova.

(iv) \Rightarrow (ii) Uma vez que as expressões em (iv) são equivalentes à (3.12), a unicidade de \mathbf{L} implica que $\text{Eig}(\mathcal{A}) \neq 1$. O fato de $r_\sigma(\mathcal{A}) < 1$ deriva da propriedade que $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n^+}$ para qualquer $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n^+}$, vide Teorema 2.2 do Capítulo 2, cf. (Zhou et al., 1996, pg. 538).

(ii) \Rightarrow (iii) Se (ii) se verifica, então (3.7) define $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n^+}$ unicamente. Do fato de (3.6) e (3.7) serem expressões equivalentes, tem-se que para qualquer $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{M}^{n^+}$,

$$p_{ii} A'_i R_i A_i - R_i + \tilde{Q}_i = 0,$$

$$\text{ou} \quad [I_{sn^2} - \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})' \text{Diag}(Q \otimes I_{n^2})] \hat{\varphi}(\mathbf{R}) = \hat{\varphi}(\tilde{\mathbf{Q}})$$

é satisfeita por uma única $\mathbf{R} \in \mathbb{M}^{n^+}$. A última expressão implica que $r_\sigma(\mathcal{A}_1) < 1$. Agora, de (3.7), escreve-se

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\mathbf{L}) &= [I_{sn^2} - \mathcal{A}]^{-1} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) = [I_{sn^2} - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2]^{-1} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) \\ &= [(I_{sn^2} - \mathcal{A}_1)(I_{sn^2} - (I_{sn^2} - \mathcal{A}_1)^{-1} \mathcal{A}_2)]^{-1} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) \\ &= [I_{sn^2} - (I_{sn^2} - \mathcal{A}_1)^{-1} \mathcal{A}_2]^{-1} (I_{sn^2} - \mathcal{A}_1)^{-1} \hat{\phi}(\mathbf{Q})\end{aligned}$$

portanto, $Eig((I_{sn^2} - \mathcal{A}_1)^{-1} \mathcal{A}_2) \neq 1$, afirmação a qual juntamente com o fato de que $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n^+}$ para qualquer $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n^+}$, implicam a segunda condição sobre o raio espectral em (iii). ■

Destaca-se aqui, que embora as condições para τ -estabilidade obtidas no Teorema 3.2 sejam dadas em termos de equações de Lyapunov acopladas, estas diferem daquelas dadas pelo critério para horizonte puramente infinito de interesse comparativo (vide condição (i) do Teorema 1.1), uma vez que $\sum_j^s p_{ij} \leq 1$. O mesmo vale para a condição (ii) sobre o raio espectral da matriz \mathcal{A} , uma vez que esta envolve a matriz Q que não é uma matriz de probabilidade, o que lhe confere propriedades contrativas mais favoráveis do que uma matriz envolvendo a matriz de probabilidade P associada ao sistema conforme prevê o Teorema 1.3. Isto pode ser evidenciado através do próximo exemplo.

Exemplo 3.1 *Sejam $\{\alpha_k; k \geq 0\}$ e $\{\gamma_k; k \geq 0\}$ cadeias de Markov independentes entre si, com espaço de estados $\bar{S} = \{1, \dots, s\}$ e $S' = \{g, f\}$, e matrizes de probabilidade de transição, respectivamente, $\bar{P} := [\bar{p}_{ij}]$ e $Q := [q_{ij}]$, com $q_{gg} = \rho < 1$ e $q_{ff} = 1$. Considere a cadeia composta $\{\theta_k = (\alpha_k, \gamma_k); k \geq 0\}$ com espaço de estados $S = \{(i, f), (j, g), i, j = 1, \dots, s\}$, no qual $\Delta = \{(i, f), i = 1, \dots, s\}$, e matriz de probabilidade P com*

$$\begin{aligned}P(\theta_{k+1} = (j, g) \mid \theta_k = (i, g)) &= \bar{p}_{ij} \rho \\ P(\theta_{k+1} = \Delta \mid \theta_k = (i, g)) &= \bar{p}_{ij} (1 - \rho) \\ P(\theta_{k+1} = \Delta \mid \theta_k = \Delta) &= 1.\end{aligned}$$

A matriz P pode ser escrita como

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hat{B} & \hat{Q} \end{bmatrix},$$

com

$$\hat{\mathbf{B}} =: \begin{bmatrix} \bar{p}_{11}(1-\rho) & \cdots & \bar{p}_{1s}(1-\rho) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{p}_{s1}(1-\rho) & \cdots & \bar{p}_{ss}(1-\rho) \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{\mathbf{Q}} =: \begin{bmatrix} \bar{p}_{11}\rho & \cdots & \bar{p}_{1s}\rho \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{p}_{s1}\rho & \cdots & \bar{p}_{ss}\rho \end{bmatrix}.$$

Adicionalmente, fixe $A_{(i,g)} = A_i$ e $A_{(i,f)} = A_\Delta$. Logo, com o propósito de investigar a τ -estabilidade do sistema, devemos calcular

$$E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \mid \theta_0 = (i_0, g)],$$

o que envolve a seguinte probabilidade

$$\begin{aligned} P(\tau \geq k, \theta_1 = (i_1, \cdot), \dots, \theta_{k-1} = (i_{k-1}, \cdot) \mid \theta_0 = (i_0, g)) &= \\ P(\theta_{k-1} = (i_{k-1}, g), \dots, \theta_1 = (i_1, g) \mid \theta_0 = (i_0, g)) &= \\ \rho^{k-1} \bar{p}_{i_0 i_1} \bar{p}_{i_1 i_2} \cdots \bar{p}_{i_{k-2} i_{k-1}}. & \end{aligned} \quad (3.13)$$

Desta forma, denotando $c = \bar{p}_{i_0 i_1} \bar{p}_{i_1 i_2} \cdots \bar{p}_{i_{k-2} i_{k-1}}$, de (3.13) segue que

$$\begin{aligned} E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \mid \theta_0 = (i_0, g)] &= \\ x_0' \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \neq \Delta} \rho^{k-1} c A_{i_0}' A_{i_1}' \cdots A_{i_{k-1}}' I_n A_{i_{k-1}} \cdots A_{i_1} A_{i_0} \right) x_0. \end{aligned}$$

Assim, usando (2.1), (2.2), (2.3) e o operador Φ definido na Seção 2 temos

$$\begin{aligned} E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \mid \theta_0 = (i_0, g)] &= \\ = x_0' \Phi^{-1} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \neq \Delta} \rho^{k-1} c \Phi(A_{i_0}' A_{i_1}' \cdots A_{i_{k-1}}' I_n A_{i_{k-1}} \cdots A_{i_0}) \right) x_0 &= \\ = x_0' \Phi^{-1} \left((A_{i_0} \otimes A_{i_0})' \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \neq \Delta} \rho^{k-1} c I_{n^2} (A_{i_1} \otimes A_{i_1})' \cdots (A_{i_{k-1}} \otimes A_{i_{k-1}})' \right) x_0 &= \\ = x_0' \Phi^{-1} (F G^{k-1} D) x_0, & \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $F \in \mathcal{M}^{n^2 \times sn^2}$ é a matriz com o i_0 -ésimo bloco submatriz não nulo, a saber, $F := [0 : 0 : \cdots : (A_{i_0} \otimes A_{i_0})' : \cdots : 0]$, $G \in \mathcal{M}^{sn^2 \times sn^2}$ e $D \in \mathcal{M}^{sn^2 \times 1}$ são definidas como

$$G := (\hat{\mathbf{Q}} \otimes I_{n^2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})' \quad e \quad D := \begin{bmatrix} \Phi(I_n) \\ \vdots \\ \Phi(I_n) \end{bmatrix}.$$

Note que $G \equiv \rho(\mathbb{P} \otimes I_{n^2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'$ uma vez que a matriz $\hat{\mathbf{Q}}$ coincide com $\rho\mathbb{P}$. Além disso, como $\rho < 1$, segue que $\hat{\mathbf{Q}}$ não é matriz de probabilidade enquanto \mathbb{P} é. Fica portanto evidenciada a contratividade característica de G . Mais especificamente, note que G^k é uma matriz do tipo $(\rho M)^k$, que pode convergir enquanto M^k não converge.

3.2 Equivalência entre os Conceitos de τ -Estabilidade Estocástica

Nesta seção, a equivalência entre os conceitos de τ -estabilidade de segundo momento previamente definidos é estabelecida .

3.2.1 Caso $\tau = T_N$

A equivalência é inicialmente provada no Lema 3.2 assumindo-se $p_{ii} > 0$ para todo $i \in \mathfrak{X}$, sendo o resultado geral dado pelo Teorema 4.3. No que segue, apresenta-se um resultado preliminar. Considere

$$X_i^n := E[x_{T_n} x'_{T_n} \mathbb{1}_{\{\phi_n=i\}}], \quad \forall i \in \mathfrak{X}, \quad (3.15)$$

com $\phi_n = \theta_{T_n}$, para $n = 1, \dots, N$.

Lema 3.1 *Suponha S_0 τ -EE. Uma forma equivalente de expressar $X_j^n \in \mathcal{M}^{n_0}$ para $j \in \mathfrak{X}$, é dada por*

$$X_j^n = \sum_{i \neq j} p_{ij} W_i^{n-1},$$

na qual as matrizes $W_i^n \in \mathcal{M}^n$ são obtidas como solução da equação matricial recursiva

$$W_i^{k-1} = p_{ii} A_i W_i^{k-1} A_i' + A_i X_i^{k-1} A_i', \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (3.16)$$

para cada $i \in \mathfrak{X}$. Além disso,

$$E[\|x_{T_n}\|^2] = \sum_{j \in \mathfrak{X}} \text{tr}\{X_j^n\} \leq \left(\frac{\gamma}{1 - \alpha^2} \right)^n \|x_0\|^2 \quad (3.17)$$

com $\alpha := \max\{\lambda_{\max}(p_{ll}^{1/2} A_l)\}$ e $\gamma := \max\{\|A_l\|^2\}$, $l = 1, \dots, s$.

Prova: O resultado é provado mediante indução sobre n . Seja $n = 1$.

Caso $p_{ii} > 0$: Usando o Lema 2.1, segue que

$$X_j^1 = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \sum_{k \geq 1} E[x_k x_k' \mathbb{1}_{\{\theta_k=j, T_1=k, \theta_0=i\}}] = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \sum_{k \geq 1} A_i^k x_0 x_0' A_i'^k p_{ii}^{k-1} p_{ij} \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}}.$$

Identificando X_i^0 , a última expressão é equivalente a

$$X_j^1 = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \left(\sum_{k \geq 1} A_i^k X_i^0 A_i'^k p_{ii}^{k-1} p_{ij} \right) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} p_{ij} W_i^0$$

com $W_i^0 = \sum_{k \geq 1} A_i^k X_i^0 A_i'^k p_{ii}^{k-1}$.

Aplicando a hipótese de indução juntamente com o fato de que o sistema é τ -EE, tem-se que

$$W_i^0 = A_i X_i^0 A_i' + \sum_{k \geq 2} A_i^k X_i^0 A_i'^k p_{ii}^{k-1} = A_i X_i^0 A_i' + p_{ii} A_i \left(\sum_{k \geq 1} A_i^k X_i^0 A_i'^k p_{ii}^{k-1} \right) A_i'.$$

Note que a matriz W_i^0 pode ser reconhecida entre parêntesis acima, e portanto a equação (3.16) está verificada.

Caso $p_{ii} = 0$: Equivalentemente, usando o Lema 2.1, uma vez que $P(T_1 = 1 \mid \theta_0 = 1) = 1$,

$$X_j^1 = \sum_{i \in \mathfrak{X}} A_i x_0 x_0' A_i' p_{ij}.$$

Nesta situação, é suficiente fixar $W_i^0 = A_i X_i^0 A_i'$. Para $n > 1$, basta usar a propriedade de Markov para concluir que (3.16) é válida. Para a segunda parte do Lema, observa-se que

$$E[\|x_{T_n}\|^2] = \text{tr} \left\{ \sum_{j \in \mathfrak{X}} X_j^n \right\} = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr} \{ W_i^{n-1} \} (1 - p_{ii}). \quad (3.18)$$

Além disso,

$$W_i^{n-1} = \sum_{k \geq 1} A_i^k X_i^{n-1} A_i'^k p_{ii}^{k-1} \leq \sum_{k \geq 1} \lambda_{\max}^{2(k-1)} (p_{ii} A_i) A_i' X_i^{n-1} A_i.$$

Fixando-se α e γ como no Lema, (3.18) permite que se escreva

$$E[\|x_{T_n}\|^2] \leq \left(\frac{\gamma}{1 - \alpha^2} \right) \sum_{i \in \mathfrak{X}} \text{tr} \{ X_i^{n-1} \} \leq \left(\frac{\gamma}{1 - \alpha^2} \right) E[\|x_{T_{n-1}}\|^2].$$

Finalmente, a inequação (3.17) é obtida iterando-se a relação acima. \blacksquare

A inequação a seguir se faz útil. Seja $c > 0$ uma constante; então para qualquer $d_0 \geq -1/(ec^4 \ln c) > 0$ tem-se que

$$kc^{2(k-2)} \leq d_0 c^k, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.19)$$

Lema 3.2 Para sistemas S_0 com $0 < p_{ii} \leq 1$ para todo $i \in \mathfrak{X}$, τ -EE, τ -EQM e τ -EEQM são equivalentes.

Prova: Comparando (3.1), (3.2) e (3.3) fica claro que as implicações τ -EE \Rightarrow τ -EQM e τ -EEQM \Rightarrow τ -EQM são imediatamente válidas. Resta então mostrar que τ -EE \Rightarrow τ -EEQM e τ -EQM \Rightarrow τ -EE.

τ -EE \Rightarrow τ -EEQM : A prova baseia-se num argumento de indução sobre n . Seja $\hat{A}_i := p_{ii}^{1/2} A_i$. Considere primeiro $\tau = T_1$. Neste caso, pode ser mostrado que

$$E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] = \|\hat{A}_i^{k-1} x_0\|^2 \|A_i\|^2. \quad (3.20)$$

De fato, do Lema 2.1 tem-se que $P(T_1 = m \mid \theta_0 = i) = p_{ii}^{m-1} (1 - p_{ii}) \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}}$. Logo

$$\begin{aligned} E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] &= E_0 [\|A_i^k x_0\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] \\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} \|A_i^k x_0\|^2 P(T_1 = m \mid \theta_0 = i) \\ &= \|\hat{A}_i^{k-1} x_0\|^2 \|A_i\|^2 \mathbb{1}_{\{p_{ii} < 1\}}. \end{aligned}$$

Quando $p_{ii} = 1$, uma vez que $P(T_1 \geq k \mid \theta_0 = i) = 1$ para qualquer $k > 0$, tem-se que $E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] = \|A_i^k x_0\|^2$ e (3.20) permanece válida. De (3.20) e Teorema 3.1 (iii), segue que

$$\begin{aligned} E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] &= \|\hat{A}_i^{k-1} x_0\|^2 \|A_i\|^2 \\ &\leq \lambda_{\max}^{2(k-1)}(\hat{A}_i) \|A_i\|^2 \|x_0\|^2 \leq \lambda_{\max}^{k-1}(\hat{A}_i) \|A_i\|^2 \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

Retomando $\alpha = \max\{\lambda_{\max}(\hat{A}_i)\}$ e $\gamma = \max\{\|A_i\|^2\}$, e fixando $c_1 = \alpha^{-1}$ pode-se escrever

$$E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] \leq \gamma \alpha^{k-1} \|x_0\|^2 = c_1 \gamma \alpha^k \|x_0\|^2. \quad (3.21)$$

Adotando $\beta = c_1 \gamma > 0$ tem-se que (3.3) vale para $\tau = T_1$.

Agora, para o caso $\tau = T_{n+2}$, note primeiro que

$$\begin{aligned} &E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+2} \geq k\}}] \\ &= E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}}] + E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}}]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fazendo uso da hipótese de indução (vide (3.21)), pode-se afirmar que existe uma única constante $c_{n+1} > 0$ tal que

$$E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}}] \leq c_{n+1} \gamma^{n+1} \alpha^k \|x_0\|^2. \quad (3.23)$$

Com respeito ao segundo termo do lado direito de (3.22), aplicando a propriedade forte de Markov e a propriedade da homogeneidade (vide (3.20)), este pode ser escrito da

forma

$$\begin{aligned}
& E \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \right] \\
&= E \left[E_{T_{n+1}} \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \right] \right] \\
&= E \left[\|\hat{A}_{\phi_{n+1}}^{k-T_{n+1}-1} x_{T_{n+1}}\|^2 \|A_{\phi_{n+1}}\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k\}} \right] \\
&= E \left[\sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j \in \mathfrak{X}} E_{T_n} \left[\|\hat{A}_j^{k-m-1} A_{\phi_n}^{m-T_n} x_{T_n}\|^2 \|A_j\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta_m=j, T_{n+1}=m\}} \right] \right]. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1 para $0 < p_{\phi_n \phi_n} < 1$, (3.24) é equivalente a

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j \neq \phi_n} \|\hat{A}_j^{k-m-1} A_{\phi_n}^{m-T_n} x_{T_n}\|^2 \|A_j\|^2 p_{\phi_n \phi_n}^{m-1-T_n} p_{\phi_n j} \mathbf{1}_{\{p_{\phi_n \phi_n} < 1\}} \right] = \\
& \sum_{m=1}^{k-1} E \left[\sum_{j \neq \phi_n} \|\hat{A}_j^{k-m-1}\|^2 \|\hat{A}_{\phi_n}^{m-T_n-1} x_{T_n}\|^2 \|A_j\|^2 \|A_{\phi_n}\|^2 p_{\phi_n j} \mathbf{1}_{\{p_{\phi_n \phi_n} < 1\}} \right]. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $0 < E[\alpha^{-2T_n}] \leq E[\alpha^{-2T_N}] := \rho$ para $0 < \alpha < 1$ e considerando a inequação (3.19) para $c = \alpha$, de (3.24) e (3.25) tem-se que

$$\begin{aligned}
& E \left[E_{T_{n+1}} \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \right] \right] \\
& \leq \sum_{m=1}^{k-1} E \left[\sum_{j \neq \phi_n} \lambda_{\max}^{2(k-m-1)} (\hat{A}_j) \lambda_{\max}^{2(m-T_n-1)} (\hat{A}_{\phi_n}) \|x_{T_n}\|^2 \|A_j\|^2 \|A_{\phi_n}\|^2 p_{\phi_n j} \right] \\
& \leq \sum_{m=1}^{k-1} \alpha^{2(k-2)} \gamma^2 E \left[\sum_{j \neq \phi_n} \alpha^{-2T_n} \|x_{T_n}\|^2 p_{\phi_n j} \right] \\
& \leq k \alpha^{2(k-2)} \gamma^2 E \left[\alpha^{-2T_N} \right] E \left[\|x_{T_n}\|^2 \right] \\
& \leq d_0 \rho \gamma^2 \alpha^k E \left[\|x_{T_n}\|^2 \right].
\end{aligned}$$

Fixando $d_1 = (1/1 - \alpha^2)^n > 0$ e aplicando (3.17) segue que

$$E \left[E_{T_{n+1}} \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \right] \right] \leq d_0 d_1 \rho \gamma^{n+2} \alpha^k \|x_0\|^2. \quad (3.26)$$

Finalmente, substituindo (3.23) e (3.26) em (3.22) e fixando $c_{n+2} = c_{n+1} \gamma^{-1} + d_0 d_1 \rho$, temos que

$$E \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+2} \geq k\}} \right] \leq c_{n+2} \gamma^{n+2} \alpha^k \|x_0\|^2 \quad (3.27)$$

para todo $k > 0$ e $0 \leq n \leq N-2$. Portanto, adotando $\beta = c_{n+2} \gamma^{n+2} > 0$, (3.3) é também válida para $\tau = T_{n+2}$. Por outro lado, sempre que $p_{\phi_n \phi_n} = 1$, o segundo termo do lado direito de (3.22) é nulo, visto que $P(T_{n+1} = +\infty \mid \theta_{T_n}) = 1$ e, conseqüentemente o

resultado segue diretamente de (3.23) com $\beta = c_{n+1}\gamma^{n+1} > 0$, completando esta parte da prova.

τ -EQM \Rightarrow τ -EE: Considere $\tau = T_N$. Podemos escrever

$$E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_N \geq k\}}] = E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_1 \geq k\}}] + E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_1 < k \leq T_N\}}].$$

Assumindo que $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_N \geq k\}}] = 0$, pode-se afirmar que

$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_1 \geq k\}}] = 0$. De (3.20) segue que $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}A_i) < 1, \forall i \in \mathfrak{X}$, o que implica que \mathcal{S}_0 é τ -EE pelo Teorema 3.1 (iii). \blacksquare

Teorema 3.3 Para sistemas \mathcal{S}_0 , τ -EE, τ -EQM e τ -EEQM são equivalentes.

Prova: Em vista do Lema 3.2, resta provar que o resultado é válido quando $p_{ii} = 0$ para algum $i \in \mathfrak{X}$.

τ -EE \Rightarrow τ -EEQM : Considere $\tau = T_1$. Se $p_{ii} = 0$ então $P(T_1 = 1 \mid \theta_0 = i) = 1$ e

$$E_0[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_1 \geq k\}}] = \begin{cases} \|x_0\|^2 & \text{se } k = 0 \\ \|A_i x_0\|^2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Consequentemente,

$$E_0[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_1 \geq k\}}] \leq \alpha^{k-1} \gamma \|x_0\|^2 \quad (3.29)$$

vale para todo $k \geq 0$ e $0 < \alpha < 1$ arbitrário. Assumindo $\beta = \gamma \alpha^{-1}$, (3.3) torna-se verdadeiro.

Agora, para $\tau = T_{n+2}$, supõe-se que $p_{\phi_{n+1}\phi_{n+1}} = 0$. Isto implica em $P(T_{n+2} = T_{n+1} + 1) = 1$, e aplicando ambos, a propriedade de Markov e a propriedade da homogeneidade (vide (3.29)), tem-se que

$$\begin{aligned} E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}}] &= E[E_{T_{n+1}}[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+1} + 1\}}]] \\ &\leq E[\alpha^{k-1} \gamma \|x_{T_{n+1}}\|^2]. \end{aligned}$$

Aqui, fixando $d_1 = (1/1 - \alpha^2)^{n+1} > 0$ e aplicando (3.17) podemos escrever

$$E[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}}] \leq \alpha^{k-1} d_1 \gamma^{n+2} \|x_0\|^2. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.23) e (3.30) em (3.22) e fixando $c_{n+2} = c_{n+1}\gamma^{-1} + d_1\alpha^{-1}$, (3.27) é válida. Portanto, a prova está completa uma vez adotando $\beta = c_{n+2}\gamma^{n+2} > 0$.

τ -EQM \Rightarrow τ -EE: Considere $\tau = T_1$ e suponha $p_{ii} = 0$. A τ -EE é obtida por definição (vide (3.1)), posto que, de (3.28) $E[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{T_1 \geq k\}}] < \infty$.

Para o caso $\tau = T_{n+2}$, considere $p_{\phi_{n+1}\phi_{n+1}} = 0$. Fazendo uso da hipótese de indução, suponha que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}}] = 0 \Rightarrow E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} \geq k\}} \right] < \infty.$$

Suponha ainda que $\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+2} \geq k\}}] = 0$. Como objetivo pretende-se mostrar que

$$E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+2} \geq k\}} \right] < \infty,$$

e desta forma concluir, baseado em (3.1), pela τ -EE do sistema. Entretanto, usando (3.22), resta mostrar que $E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \right] < \infty$. No entanto, tal resultado segue imediatamente do fato de

$$E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+1}+1\}}] = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq T_{n+1} + 1 \\ \|A_{\phi_{n+1}, x_{T_{n+1}}}\|^2 & \text{se } k = T_{n+1} + 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Está estabelecida portanto, a equivalência entre τ -EE, τ -EQM e τ -EEQM como inicialmente proposta. ■

3.2.2 Caso $\tau = T_N \wedge \tau_\Delta$

Nesta seção, os resultados acerca da equivalência entre os conceitos de τ -estabilidade têm suas demonstrações similares àquelas propostas na seção imediatamente precedente. Na verdade, é suficiente considerar alguns resultados decorrentes da Teoria de Conjuntos. Neste contexto, seguem alguns resultados preliminares.

Lema 3.3 *O conjunto $\{\tau_\Delta \wedge T_n \geq k\}$ pode ser escrito como*

$$\{\tau_\Delta \wedge T_n \geq k\} = \bigcup_{l=0}^{n-1} [\{T_l < k \leq T_{l+1}\} \cap \{\tau_\Delta > T_l\}] \quad (3.32)$$

Prova: Primeiramente, observa-se que

$$\begin{aligned} & \{\tau_\Delta \wedge T_n \geq k\} \\ &= [\{\tau_\Delta \wedge T_n \geq k\} \cap \{\tau_\Delta > T_n\}] \cup [\{\tau_\Delta \wedge T_n \geq k\} \cap \{\tau_\Delta \leq T_n\}] \\ &= [\{T_n \geq k\} \cap \{\tau_\Delta > T_n\}] \cup [\{\tau_\Delta \geq k\} \cap \{\tau_\Delta \leq T_n\}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para $m \geq 1$ dado arbitrariamente, podemos escrever

$$\{\tau_\Delta \leq T_m\} = \bigcup_{l=0}^{m-1} \{T_l < \tau_\Delta \leq T_{l+1}\}, \quad (3.34)$$

$$\{T_m \geq k\} = \bigcup_{l=0}^{m-1} \{T_l < k \leq T_{l+1}\}. \quad (3.35)$$

Considerando a expressão do lado esquerdo de (3.33), aplicando (3.35) obtém-se

$$\{T_n \geq k\} \cap \{\tau_\Delta > T_n\} = \bigcup_{l=0}^{n-1} [\{T_l < k \leq T_{l+1}\} \cap \{\tau_\Delta > T_n\}]. \quad (3.36)$$

Observe a seguir que $\{T_m < \tau_\Delta \leq T_{m+1}\}$ implica em $\tau_\Delta \equiv T_{m+1}$.

Com respeito à expressão do lado direito de (3.33), usando (3.34) e (3.35) segue que

$$\begin{aligned} & \{\tau_\Delta \geq k\} \cap \{\tau_\Delta \leq T_n\} \\ &= \bigcup_{m=0}^{n-1} [\{\tau_\Delta \geq k\} \cap \{T_m < \tau_\Delta \leq T_{m+1}\}] \\ &= \bigcup_{m=0}^{n-1} [\{T_{m+1} \geq k\} \cap \{T_m < \tau_\Delta \leq T_{m+1}\}] = \\ &= \bigcup_{m=0}^{n-1} \left[\left(\bigcup_{l=0}^m \{T_l < k \leq T_{l+1}\} \right) \cap \{T_m < \tau_\Delta \leq T_{m+1}\} \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

No entanto, da Teoria de Conjuntos pode-se concluir que (3.37) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \bigcup_{l=0}^{n-1} \left[\{T_l < k \leq T_{l+1}\} \cap \left(\bigcup_{m=l}^{n-1} \{T_m < \tau_\Delta \leq T_{m+1}\} \right) \right] \\ &= \bigcup_{l=0}^{n-1} [\{T_l < k \leq T_{l+1}\} \cap \{T_l < \tau_\Delta \leq T_n\}]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Finalmente, substituindo (3.36) e (3.38) em (3.33), obtém-se

$$\{\tau_\Delta \geq k\} = \left[\bigcup_{l=0}^{n-1} \{T_l < k \leq T_{l+1}\} \right] \cap [\{\tau_\Delta > T_n\} \cup \{T_l < \tau_\Delta \leq T_n\}]$$

e a prova está completa. ■

Lema 3.4 Para sistemas S_0 com $0 < p_{ii} \leq 1$ para todo $i \in \mathfrak{X}$, τ -EE, τ -EMQ e τ -EEQM são equivalentes.

Prova: Como no Lema 3.2, basta mostrar as implicações: τ -EE \Rightarrow τ -EEQM e τ -EQM \Rightarrow τ -EE.

τ -EE \Rightarrow τ -EEQM : Para o caso $\tau_\Delta \wedge T_1$, de (3.32) observa-se que $\{\tau_\Delta \wedge T_1 \geq k\} = \{T_1 \geq k\}$ e analogamente ao Lema 3.2, é possível mostrar que

$$E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \wedge T_1 \geq k\}}] = \|\hat{A}_i^{k-1} x_0\|^2 \|A_i\|^2. \quad (3.39)$$

Para $\tau_\Delta \wedge T_{n+2}$, note que a partir de (3.32) pode-se escrever

$$\{\tau_\Delta \wedge T_{n+2} \geq k\} = \{\tau_\Delta \wedge T_{n+1} \geq k\} \cup [\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\} \cap \{\tau_\Delta > T_{n+1}\}].$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \wedge T_{n+2} \geq k\}}] &= \\ E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \wedge T_{n+1} \geq k\}}] &+ E_0 [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_{n+1}\}}]. \end{aligned}$$

No que resta, a prova é uma adaptação direta da prova do Lema 3.2. Note apenas que,

$$\begin{aligned} E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_{n+1} < k \leq T_{n+2}\}} \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta > T_{n+1}\}}] &= \\ = E \left[\sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j \in \mathfrak{X}} E_{T_n} [\|\hat{A}_j^{k-m-1} A_{\phi_n}^{m-T_n} x_{T_n}\|^2 \|A_j\|^2 \mathbb{1}_{\{\theta_m=j, T_{n+1}=m, \tau_\Delta > T_n\}}] \right] &= \\ = \sum_{m=1}^{k-1} E \left[\sum_{j \neq \phi_n, j \neq \Delta} \|\hat{A}_j^{k-m-1}\|^2 \|\hat{A}_{\phi_n}^{m-T_n-1} x_{T_n}\|^2 \|A_j\|^2 \|A_{\phi_n}\|^2 p_{\phi_n j} \mathbb{1}_{\{p_{\phi_n \phi_n} < 1\}} \right]. \end{aligned}$$

τ -EQM \Rightarrow τ -EE: Considere $\tau_\Delta \wedge T_N$. De (3.32), agora escreve-se

$$\{\tau_\Delta \wedge T_n \geq k\} = [\{T_1 \geq k\}] \cup \left[\bigcup_{l=1}^{n-1} [\{T_l < k \leq T_{l+1}\} \cap \{\tau_\Delta > T_l\}] \right]. \quad (3.40)$$

Fixando $B = \bigcup_{l=1}^{N-1} [\{T_l < k \leq T_{l+1}\} \cap \{\tau_\Delta > T_l\}]$ em (3.40), segue que

$$E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \wedge T_N\}}] = E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{T_1 \geq k\}}] + E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{B\}}].$$

Assumindo $\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|x_k\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau_\Delta \wedge T_N\}}] = 0$, tem-se que a primeiro termo da expressão acima é nulo. De (3.39) segue então que $r_\sigma(p_{ii}^{1/2} A_i) < 1, \forall i \in \mathfrak{X}$, o que implica na τ -EE de S_0 pelo Corolário 3.1. \blacksquare

O Teorema a seguir, cuja prova é omitida uma vez que segue raciocínio idêntico àquele desenvolvido no Teorema 4.3, estabelece a equivalência entre os conceitos de estabilidade estocástica de segundo momento, qualquer que seja p_{ii} .

Teorema 3.4 *Seja $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$. Para sistemas S_0 , τ -EE, τ -EQM e τ -EEQM são equivalentes.*

3.2.3 Caso $\tau = \tau_\Delta$

Teorema 3.5 *Seja $\tau = \tau_\Delta$. Para sistemas S_0 , τ -EE, τ -EQM e τ -EEQM são equivalentes.*

Prova: Para estabelecer a equivalência, como já foi dito anteriormente, resta mostrar que τ -EE \Rightarrow τ -EEQM e τ -EQM \Rightarrow τ -EE. Entretanto, a prova da primeira implicação é uma modificação direta daquela apresentada em (Ji et al., 1991). De fato, a condição (iv) no Teorema 3.2 para τ -estabilidade assemelha-se à condição para estabilidade estocástica estabelecida naquele trabalho, exceto pelo fato de que $\sum_{j=1}^s p_{ij} \leq 1$.

Com relação a implicação τ -EQM \Rightarrow τ -EE, a prova baseia-se no uso do Lema 1 proposto em (Ji et al., 1991), segundo o qual, para matrizes F, G e D de dimensões apropriadas, $\lim_{k \rightarrow \infty} F G^{k-1} D = 0$ implica $\sum_{k=1}^{\infty} F G^{k-1} D < \infty$.

Para x_0 qualquer e $\theta_0 = i_0 \neq \Delta$, temos que

$$\begin{aligned} & E \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \mid x_0, \theta_0 = i_0 \right] \\ &= E \left[\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} x'_0 A'_{\theta_0} A'_{\theta_1} \cdots A'_{\theta_{k-1}} A_{\theta_{k-1}} \cdots A_{\theta_0} \mathbf{1}_{\{\tau \geq k, \theta_1 = i_1, \dots, \theta_{k-1} = i_{k-1}\}} \mid \theta_0 = i_0 \right] \\ &= x'_0 \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \neq \Delta} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-2} i_{k-1}} A'_{i_0} A'_{i_1} \cdots A'_{i_{k-1}} A_{i_{k-1}} \cdots A_{i_0} \right) x_0. \end{aligned}$$

O cálculo do valor esperado acima envolve a seguinte probabilidade:

$$\begin{aligned} & P(\tau \geq k, \theta_1 = i_1, \dots, \theta_{k-2} = i_{k-2}, \theta_{k-1} = i_{k-1} \mid \theta_0 = i_0) = \\ & P(\theta_{k-1} = i_{k-1} \neq \Delta, \theta_{k-2} = i_{k-2} \neq \Delta, \dots, \theta_1 = i_1 \neq \Delta \mid \theta_0 = i_0), \end{aligned}$$

que é equivalente a $p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-2} i_{k-1}}$, com $i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \neq \Delta$, com base na propriedade de Markov. Usando (2.1), (2.2), (2.3) e o operador φ definido na Seção 2, mostra-se que

$$E \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \mid x_0, \theta_0 = i_0 \right] = x'_0 (\varphi^{-1}(F G^{k-1} D)) x_0, \quad (3.41)$$

na qual $F \in \mathcal{M}^{n^2 \times sn^2}$ é a matriz com o i_0 -ésimo bloco submatriz não nulo, a saber, $F := [0 : 0 : \cdots : (A_{i_0} \otimes A_{i_0})' : \cdots : 0]$, $G \in \mathcal{M}^{sn^2 \times sn^2}$ $D \in \mathcal{M}^{sn^2 \times 1}$ são definidas como com

$$G := (Q \otimes I_{n^2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})' \quad e \quad D := \begin{bmatrix} \varphi(I_n) \\ \vdots \\ \varphi(I_n) \end{bmatrix}.$$

Portanto, para o conceito de τ -EE temos

$$E \left[\sum_{k \geq 0} \|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] = x_0' \Phi^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} F G^{k-1} D \right) x_0 + x_0' x_0.$$

Por outro lado, de (3.41) segue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\|x_k\|^2 \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \right] = x_0' \left(\Phi^{-1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} F G^{k-1} D \right) \right) x_0. \quad (3.42)$$

Assim, aplicando o Lema 1 previamente mencionado, (3.2) se verifica e portanto τ -EQM \Rightarrow τ -EE. \blacksquare

Conforme evidencia a demonstração do Teorema 3.5, a condição suficiente para τ -EQM é dada em termos do raio espectral da matriz $G = (Q \otimes I_{n^2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'$, condição esta, similar àquela obtida em termos da matriz \mathcal{A} no Teorema 3.2 (ii). Em (Costa e Fragoso, 1993), por sua vez, mostrou-se que uma condição necessária e suficiente para a estabilidade estocástica de SLSM,s (vide Teorema 1.3), recai sobre uma matriz aumentada semelhante, no entanto, envolvendo a matriz de probabilidade P . Vale lembrar, que Q não é uma matriz de probabilidade.

3.3 Decomposição para o teste da estabilidade na média quadrática

As condições para τ_{Δ} -estabilidade obtidas neste capítulo envolvem SLSM nos quais se considera o espaço de estados \mathfrak{X} da cadeia de Markov, da forma $\mathfrak{X} = \{1, \dots, s\} \cup \{\Delta\}$. Como se pôde observar, estas condições são dadas em termos de uma matriz aumentada, ou de equações de Lyapunov acopladas, as quais não envolvem o conjunto fechado $\{\Delta\}$. Este fato permite-nos propor uma decomposição para o teste da estabilidade estocástica na média quadrática (EQM) para os SLSM quando o espaço de estados \mathfrak{X} , finito, é dado em sua forma geral. Pode-se afirmar antecipadamente, que tal teste é mais simples do ponto de vista do esforço computacional, embora pressuponha prévia classificação dos estados da cadeia. Para maiores detalhes, façamos as seguintes considerações.

Suponha que estejamos interessados na EQM de sistemas na forma (1.1) e (1.3), com $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, L\}$ e matriz de probabilidade de transição P . Conforme Seção 2.2.1 do Capítulo 2, \mathfrak{X} pode ser decomposto em subconjuntos $\mathcal{T}, R_1, \dots, R_l$, entre os quais \mathcal{T} contém os estados transientes (quando, partindo do estado, existe uma probabilidade positiva de nunca retornar a ele) e R_1, \dots, R_l são conjuntos disjuntos de estados

recorrentes (quando, partindo do estado, a probabilidade de retorno é igual a 1), que representam conjuntos fechados. Além disso, a matriz P pode ser bloco particionada como em (2.27). A estrutura da cadeia foi considerada no estudo do problema LQ de SLSM a tempo discreto, conforme apresentado por Chizeck et al. (1986), ver também (Ji e Chizeck, 1988; Ji e Chizeck, 1990a).

Conforme Teorema 1.3 adaptado de (Costa e Fragoso, 1993), uma condição necessária e suficiente para a EMQ, é dada em termos do raio espectral de uma matriz da forma $\mathcal{G} = (P \otimes I_{n^2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'$, a qual envolve a matriz de probabilidade P associada ao sistema. Mais especificamente, deve-se obter $r_\sigma(\mathcal{G}) < 1$.

Por outro lado, uma condição necessária e suficiente para a τ_Δ -EQM do sistema foi obtida no Capítulo 2, em termos de uma matriz do tipo $\mathcal{G}_\Delta = \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'(P_{\mathcal{T}} \otimes I_{n^2})$.

Desta forma, no que concerne à análise da EQM, considerando que o processo parte de algum estado $i \in \mathcal{T}$, pode-se fazer uso dos resultados para τ_Δ -estabilidade, uma vez que com probabilidade não-nula o processo será absorvido por alguma das classes recorrentes. Neste sentido, é suficiente examinar-se simultaneamente o raio espectral de uma matriz do tipo \mathcal{G}_Δ envolvendo a matriz $P_{\mathcal{T}}$ (que não é uma matriz de probabilidade) e os raios espectrais de algumas matrizes do tipo \mathcal{G} , envolvendo P_{R_1}, \dots, P_{R_l} . Em outras palavras, uma verificação de EQM pode ser decomposta na verificação de τ_Δ -EQM para os estados transientes e algumas verificações de EQM, envolvendo um problema de menor ordem evidentemente. Do contrário, considerando que o processo parte de algum $j \in R_j$, uma vez que esta é uma classe de comunicação fechada, bastaria aplicar o teste de EQM envolvendo P_{R_j} .

O exemplo abaixo tem como objetivo ilustrar as afirmações acima.

Exemplo 3.2 *Considere o espaço de estados \mathfrak{X} mediante a decomposição $\mathfrak{X} = \{1, 3\} \cup \{2, 7, 9\} \cup \{6\} \cup \{4, 5, 8, 10\}$, no qual $\mathcal{T} = \{4, 5, 8, 10\}$ é o conjunto de estados transi-*

entes e $R_1 = \{1, 3\}$, $R_2 = \{2, 7, 9\}$ e $R_6 = \{6\}$ são conjuntos recorrentes. Adota-se

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} & \begin{array}{l} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

Os seguintes casos são analisados.

Caso 1: Considere a dimensão dos sistemas $n = 5$ e

$$A_i = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/3 & 1/8 & 1/4 \\ 1/5 & 1/3 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{bmatrix},$$

com $i = 1, \dots, 10$.

Caso 2: Considere $n = 10$ e as matrizes A_i , $i = 1, \dots, 10$, geradas pela rotina `rand` do Matlab.

Adotando-se o teste para EMQ conforme proposto no Teorema 1.3, deve-se examinar o raio espectral da matriz $\mathcal{G} = (P \otimes I_{n^2}) \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'$, com dimensão $10n^2 \times 10n^2$, ou seja, 250×250 e 1000×1000 , respectivamente para os Casos 1 e 2. Utilizando a rotina "cputime" do Matlab, para o Caso 1 o tempo médio empregado neste cálculo foi aproximadamente 0,575s sendo $r_\sigma(\mathcal{G}) = 0,9613$ (o sistema é EQM), enquanto que para o Caso 2 foi de aproximadamente 38,95s.

De outra forma, em se adotando o teste de τ -EQM proposto aqui, basta analisar o raio espectral da matriz $\mathcal{G}_\Delta = \text{Diag}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})'(P_T \otimes I_{n^2})$ com dimensão $4n^2 \times 4n^2$, e simultaneamente, deve-se aplicar o teste de EQM, como acima para os demais estados. Este teste envolve as matrizes de probabilidade P_{R_1} , P_{R_2} e P_{R_6} , no qual calcula-se o raio espectral de matrizes do tipo \mathcal{G} com dimensão $3n^2 \times 3n^2$, $2n^2 \times 2n^2$ e $n^2 \times n^2$, respectivamente. Com relação ao tempo médio envolvendo estes cálculos, este foi de aproximadamente 0,0531s para o Caso 1 e de 4,375s para o Caso 2.

Capítulo 4

O Problema de Controle LQ

No cenário dos problemas de controle envolvendo a minimização de custos quadráticos com horizonte infinito e sistemas lineares com saltos, um número bastante expressivo de resultados pode ser encontrado na literatura. Como um breve histórico podemos citar Wonham (1971), como o primeiro a resolver este problema de controle e Mariton e Bertrand (1985), os quais derivaram condições necessárias de otimalidade para o problema LQ com realimentação direta de saída. Em (Ji e Chizeck, 1990a; Ji e Chizeck, 1990b), baseado em definições de estabilizabilidade (na média quadrática), observabilidade e controlabilidade, foram desenvolvidas condições necessárias e suficientes para sistemas a tempo contínuo e discreto respectivamente, incluindo ruído aditivo Gaussiano tanto como entrada quanto como ruído de observação na saída. Na sequência, Costa e Fragoso (1995) e Costa (1996), estenderam as condições para a estabilização a tempo discreto, sob a hipótese de enumerabilidade do conjunto de estados da cadeia de Markov. Mais recentemente, em (Costa e do Val, 2001a; Costa e do Val, 2001b) foi introduzido o conceito de detetabilidade fraca, o qual é menos restritivo do que o conceito de detetabilidade na média quadrática utilizado nos artigos anteriormente citados e além disso, substitui a condição suficiente de detetabilidade na média quadrática na obtenção de soluções de Riccati estabilizantes, tornando supérflua aquela condição.

Por sua vez, na literatura de SLSM também encontra-se um grande número de resultados acerca do problema LQ com custo quadrático e horizonte finito. Uma versão a tempo discreto sob a hipótese de observação completa é encontrada em (Blair e Sworder, 1975). Por sua vez, a solução do problema LQ Gaussiano (LQG) com realimentação de estado e observação completa, na versão a tempo contínuo, pode ser encontrada em (Sworder, 1969).

Neste Capítulo, pretende-se abordar os problemas de controle LQG, com realimentação linear de estado ou com realimentação dinâmica de saída, envolvendo os SLSMs \mathcal{S} , a saber

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\theta_k} x_k + B_{\theta_k} u_k + H_{\theta_k} w_k & x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ z_k = C_{\theta_k} x_k + D_{\theta_k} u_k & \theta_0 \sim \mu_0, \\ y_k = F_{\theta_k} x_k + G_{\theta_k} w_k & k \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Neste modelo, adotou-se um único ruído w_k , no entanto, sem prejuízo do exposto, ruídos distintos podem ser adotados.

Os tempos de parada τ descritos no Capítulo 3 são definidos como horizonte dos problemas. Assumimos $0 \leq p_{ii} < 1$, $i = 1, \dots, s$. Quando $p_{ii} = 1$, o problema proposto coincide com o problema LQG padrão encontrado na literatura, vide (Davis e Vinter, 1985) como exemplo.

Antes de abordarmos os problemas, faremos algumas considerações preliminares. Para alguma matriz $Y_i \in \mathcal{M}^n$, considere a equação algébrica de Riccati (**EAR**) na variável X_i ,

$$\begin{aligned} X_i &= C_i' C_i + A_i' (p_{ii} X_i + Y_i) A_i - [A_i' (p_{ii} X_i + Y_i) B_i + C_i' D_i] \cdot \\ &\quad [B_i' (p_{ii} X_i + Y_i) B_i + D_i' D_i]^{-1} \cdot [B_i' (p_{ii} X_i + Y_i) A_i + D_i' C_i]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Assumindo em (4.2) $Y_i = \mathcal{E}_i(\mathbf{X})$, tem-se a equação algébrica de Riccati acoplada (**EARA**) na variável X_i ,

$$\begin{aligned} X_i &= C_i' C_i + A_i' (p_{ii} X_i + \mathcal{E}_i(\mathbf{X})) A_i - [A_i' (p_{ii} X_i + \mathcal{E}_i(\mathbf{X})) B_i + C_i' D_i] \cdot \\ &\quad [B_i' (p_{ii} X_i + \mathcal{E}_i(\mathbf{X})) B_i + D_i' D_i]^{-1} \cdot [B_i' (p_{ii} X_i + \mathcal{E}_i(\mathbf{X})) A_i + D_i' C_i]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

O resultado a seguir, foi apresentado em (do Val et al., 1998) e soluciona as equações do tipo (4.2).

Proposição 4.1 *Suponha $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ detectável.*

i) *Existe uma única $X_i \in \mathcal{M}^{r_0}$ solução de (4.2) quando $Y_i \in \mathcal{M}^{r_0}$.*

ii) *Sejam \hat{X}_i e $\tilde{X}_i \in \mathcal{M}^{r_0}$ as correspondentes soluções de (4.2) quando $Y_i = \hat{Y}_i$ e $Y_i = \tilde{Y}_i$, respectivamente. Se $\hat{Y}_i \geq \tilde{Y}_i$ então $\hat{X}_i \geq \tilde{X}_i$.*

As seguintes matrizes serão utilizadas:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &:= A_i - [B_i (D_i' D_i)^{-1} D_i'] C_i, & \tilde{C}_i &:= [I - D_i (D_i' D_i)^{-1} D_i'] C_i, \\ \tilde{A}_i &:= A_i - [H_i (G_i' G_i)^{-1} G_i'] H_i, & \tilde{H}_i &:= [I - G_i (G_i' G_i)^{-1} G_i'] G_i, \\ \hat{A}_i &:= A_i + B_i K_i, & \hat{C}_i &:= C_i + D_i K_i. \end{aligned}$$

4.1 Controle com Realimentação Linear de Estado

Nesta seção, assumindo que em cada instante k , o estado linear x_k assim como o estado θ_k da cadeia de Markov são precisamente conhecidos, pretende-se abordar o problema de controle LQ envolvendo os SLSM \mathcal{S} no qual o horizonte é dado pelos tempos de parada τ definidos no Capítulo 2, a saber

caso $\tau = T_N$: A lei de controle adotada é a lei de realimentação linear

$$u_k = \left(\sum_{n=0}^{N-1} K_{\theta_k}^n \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}\}} \right) x_k, \quad k \geq 0. \quad (4.4)$$

Os ganhos de controle são denotados por $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ com $\mathbf{K}^n = (K_1^n, \dots, K_s^n)$ e $K_i \in \mathcal{M}^{p \times n}$.

caso $\tau = \tau_\Delta$: A lei de controle adotada neste caso é

$$u_k = K_{\theta_k} x_k, \quad k \geq 0. \quad (4.5)$$

Os ganhos de controle são denotados por $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_s)$ e $K_i \in \mathcal{M}^{p \times r}$.

Finalmente, o custo de operação associado ao problema é definido por

$$J(x_0, \theta_0, u(\cdot)) := E \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \|z_k\|^2 + x_\tau' S_{\theta_\tau} x_\tau \mid x_0, \theta_0 \right], \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{S} \in \mathbb{M}^{m_0}$ é um custo terminal.

Concluindo, a proposta consiste em obter uma sequência de ganhos de realimentação linear $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ (uma única coleção de ganhos de realimentação linear \mathbf{K}), que produz uma ação τ -estabilizável na forma (4.4) ((4.5)), e que minimiza o critério de custo em (4.6).

O caso intermediário $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$ é também estudado. Apesar de seu interesse próprio, ele é também usado aqui como estratégia na criação de conexões entre os casos $\tau = T_N$ e $\tau = \tau_\Delta$. O primeiro pode ser considerado um caso particular de $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$, uma vez adotando $T_N \equiv \tau_\Delta \wedge T_N$ e, com relação ao último, basta se estudar $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\tau_\Delta \wedge T_N\}$.

Destaca-se que as condições para τ -estabilidade apresentadas no Teorema 3.1 e Corolário 3.1, respectivamente para os casos onde $\tau = T_N$ e $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$, são dadas em termos de equações de Lyapunov desacopladas. Por outro lado, para o caso onde

$\tau = \tau_\Delta$, as condições do Teorema 3.2 são dadas em termos de equações de Lyapunov acopladas. Desta forma, para futura referência serão considerados os dois tipos de τ -estabilidade a saber, a T_N -estabilidade dada pelo Teorema 3.1 e Corolário 3.1, e a τ_Δ -estabilidade dada pelo Teorema 3.2.

4.1.1 O caso livre de ruído

Nesta seção trataremos o caso livre de ruído com observação completa de estados, ou seja, os SLSMs dados por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{\theta_k} x_k + B_{\theta_k} u_k & x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta_0 \sim \mu_0 \\ z_k &= C_{\theta_k} x_k + D_{\theta_k} u_k & k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A seguir avalia-se o custo quadrático dado em (4.6) quando o horizonte corresponde aos tempos de parada $\tau = T_N$ e $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$.

Defina

$$J(x, i) :=$$

$$J(x_0 = x, \theta_0 = i, u(\cdot) \equiv 0) = E \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \|z_k\|^2 + x'_\tau S_{\theta_\tau} x_\tau \mid x_0 = x, \theta_0 = i \right], \quad (4.8)$$

como o custo de controle em malha aberta, para $x_0 = x$ e $\theta_0 = i$. Supõe-se que $\theta_0 = i$ com probabilidade 1, para algum estado $i = 1, \dots, s$.

A proposição apresentada abaixo segue diretamente do Lema 2.3 na Seção 2, tendo em vista que $J(x, i)$ coincide com o funcional $V^0(x, i)$ definido naquela Seção, ao trocar-se x_k por $z_k = C_i x_k$.

Proposição 4.2 *Seja $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$ e S_0 τ -EE. Uma forma equivalente de expressar $J(x, i)$ é dada por*

$$J(x, i) = x' L_i^0 x, \quad (4.9)$$

onde as matrizes $L_i^n \in \mathcal{M}^{n+}$ são obtidas recursivamente como

$$L_i^n - p_{ii} A_i' L_i^n A_i = C_i' C_i + A_i' \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) A_i + p_{i\Delta} A_i' S_\Delta A_i, \quad (4.10)$$

para $n = N - 1, \dots, 0$, com $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$.

Para se recuperar o caso $\tau = T_N$, basta considerar a cadeia de Markov com espaço de estados dado por $\mathfrak{X} = \{1, \dots, s\}$. Consequentemente, o termo $p_{i\Delta} A_i' S_\Delta A_i$ é nulo e de (4.10) obtém-se $J(x, i)$ no caso $\tau = T_N$, como indica o corolário a seguir.

Corolário 4.1 *Seja $\tau = T_N$ e S_0 τ -EE. O custo $J(x, i)$ pode ser expresso como*

$$J(x, i) = x' L_i^0 x,$$

onde as matrizes $L_i^n \in \mathcal{M}^{n+}$ são obtidas recursivamente como

$$L_i^n - p_{ii} A_i' L_i^n A_i = C_i' C_i + A_i' \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{n+1}) A_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (4.11)$$

para $n = N - 1, \dots, 0$ e $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$.

Caso $\tau = T_N$

O Teorema a seguir nos permite determinar a sequência de ganhos de realimentação linear $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ que produz uma ação τ -estabilizável da forma (4.4) e minimiza o critério de custo em (4.6) quando $\tau = T_N$. Aplicando o Corolário 3.1(ii), note que o problema de T_N -estabilizabilidade equivale à estabilizabilidade do par $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ para cada $i \in \mathcal{X}$, no sentido determinístico.

Inicialmente, defina o custo de continuação

$$J^{n,N}(x, i) := E \left[\sum_{k=T_n}^{T_N-1} \|z_k\|^2 + x_{\tau}^{\prime} S_{\theta_{\tau}} x_{\tau} \mid x_{T_n} = x, \phi_n = i \right],$$

com $\phi_n = \theta_{T_n}$.

Teorema 4.1 *Assuma $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ detectável, para cada $i = 1, \dots, s$. Para $n = N - 1, \dots, 0$, e $i = 1, \dots, s$, considere a solução da EAR (4.2) na variável L_i^n , com $Y_i = \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{n+1})$, obtida recursivamente com $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$. A sequência ótima de ganhos $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ é estabilizante e obtida recursivamente como*

$$K_i^n = -[B_i'(p_{ii} L_i^n + Y_i) B_i + D_i' D_i]^{-1} [B_i'(p_{ii} L_i^n + Y_i) A_i + D_i' C_i]. \quad (4.12)$$

O custo mínimo é dado por $x' L_i^0 x$.

Prova: Definimos

$$V_{n,N}(x, i) = \min_{\mathbf{K}^n, \dots, \mathbf{K}^{N-1}} E \left[\sum_{k=T_n}^{(T_N-1)} \|z_k\|^2 + z_N^{\prime} S_{\phi_N} z_N \mid x_{T_n} = x, \phi_n = i \right]. \quad (4.13)$$

Adotando $\hat{A}_i^1 = A_i + B_i G_i$ T_n -estável com $n = N - 1$, considere

$$P_i^{N-1} - p_{ii} \hat{A}_i^{1'} P_i^{N-1} \hat{A}_i^1 = \hat{C}_i' \hat{C}_i + \hat{A}_i^{1'} \mathcal{E}_i(P_i^{N-1}) \hat{A}_i^1.$$

Subtraindo

$$\begin{aligned} P_i^{N-1} - L_i^{N-1} p_{ii} \left((A_i + B_i G_i)' P_i^{N-1} (A_i + B_i G_i) - (A_i + B_i K_i)' L_i^{N-1} (A_i + B_i K_i) \right) = \\ (C_i + D_i G_i)' (C_i + D_i G_i) - (C_i + D_i K_i)' (C_i + D_i K_i) \\ + (A_i + B_i G_i)' \mathcal{E}_i(P_i^{N-1}) (A_i + B_i G_i) = \\ (A_i + B_i K_i)' \mathcal{E}_i(L_i^{N-1}) (A_i + B_i K_i), \end{aligned}$$

e tomando $L^N = P^N$, segue que

$$\begin{aligned} P_i^{N-1} - L_i^{N-1} - p_{ii} \left((A_i + B_i G_i)' (P_i^{N-1} - L_i^{N-1}) (A_i + B_i G_i) \right) = \\ p_{ii} \left((A_i + B_i G_i)' L_i^{N-1} (A_i + B_i G_i) - (A_i + B_i K_i)' L_i^{N-1} (A_i + B_i K_i) \right) \\ + G_i' D_i' C_i + C_i D_i G_i + G_i' D_i' D_i G_i - K_i' D_i' C_i - C_i D_i K_i - K_i' D_i' D_i K_i \\ + (A_i + B_i G_i)' \mathcal{E}_i(P_i^N) (A_i + B_i G_i) - (A_i + B_i K_i)' \mathcal{E}_i(L_i^N) (A_i + B_i K_i). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Denotando $\bar{\mathcal{E}}_i(L) = p_{ii} L_i^{N-1} + \mathcal{E}_i(L_i^N)$, a expressão (4.14) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G_i' D_i' C_i + C_i' D_i G_i + G_i' D_i' D_i G_i - K_i' D_i' C_i - C_i D_i K_i - K_i' D_i' D_i K_i \\ + G_i' B_i' \bar{\mathcal{E}}_i(L) A_i + A_i' \bar{\mathcal{E}}_i(L) B_i G_i + G_i' B_i' \bar{\mathcal{E}}_i(L) B_i G_i \\ - K_i' B_i' \bar{\mathcal{E}}_i(L) A_i - A_i' \bar{\mathcal{E}}_i(L) B_i K_i - K_i' B_i' \bar{\mathcal{E}}_i(L) B_i K_i. \end{aligned}$$

Usando $\Lambda_i = D_i' D_i + B_i' \bar{\mathcal{E}}_i(P) B_i$ e K_i^n como em (4.12), podemos escrever

$$\begin{aligned} P_i^{N-1} - L_i^{N-1} - p_{ii} \left((A_i + B_i G_i)' (P_i^{N-1} - L_i^{N-1}) (A_i + B_i G_i) \right) = \\ - G_i' \Lambda_i K_i^n + G_i' \Lambda_i G_i - K_i^{n'} \Lambda_i G_i + K_i' \Lambda_i K_i^n + K_i^{n'} \Lambda_i K_i - K_i' \Lambda_i K_i = \\ (G_i - K_i^n)' \Lambda_i (G_i - K_i^n) - (K_i - K_i^n)' \Lambda_i (K_i - K_i^n). \end{aligned}$$

Logo, fazendo $K_i \equiv K_i^n$, temos que

$$\begin{aligned} P_i^{N-1} - L_i^{N-1} - p_{ii} \left((A_i + B_i G_i)' (P_i^{N-1} - L_i^{N-1}) (A_i + B_i G_i) \right) = \\ (G_i - K_i^n)' \Lambda_i (G_i - K_i^n) \geq 0. \end{aligned}$$

Desta forma, uma vez que $A_i + B_i G_i$ é T_n -estável então $P_i^{N-1} - L_i^{N-1} \geq 0$, o que implica que

$$x' P_i^{N-1} x = J_{N-1,N}(x, i) \geq V_{N-1,N}(x, i) = x' L_i^{N-1} x$$

para todo x . Logo, $V_{N-1,N}(x, i)$ é o custo mínimo dentre as soluções T_n -estabilizantes. Note que L_i^{N-1} é solução de uma EAR (4.2) com $Y_i = \mathcal{E}_i(L^N)$, equação esta, semelhante à EAR padrão apresentada na Seção 2.2. Assim, a detectabilidade do par

$(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ garante que a solução ótima deve ser necessariamente T_n -estabilizante. Portanto $V_{n,N}(x, i)$ é o custo mínimo e K_i^n é ótimo, para cada $i = 1, \dots, s$ e $n = N - 1, \dots, 0$, vide Teorema 2.1. ■

Observação 4.1 Considerando o Teorema 4.1 e o Corolário 4.1 aplicado ao sistema controlado S , o problema de controle no caso $\tau = T_N$ pode ser resumido como segue

$$\inf_{K_i \in \mathcal{M}} \text{tr}\{L_i^n\}$$

$$\text{s.a: } L_i^n - \hat{A}_i'(p_{ii}L_i^n + Y_i)\hat{A}_i - \hat{C}_i'\hat{C}_i = 0,$$

com $Y_i = \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{n+1})$, para cada $n = N - 1, \dots, 0$ e $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$.

Caso $\tau = \tau_\Delta$

Em vista do Teorema 3.2 (iv), podemos anunciar que a τ_Δ -estabilizabilidade do par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é equivalente a existência de um conjunto de matrizes $\mathbf{M} \in \mathbb{M}^{n+}$ para alguma $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n+}$ tal que

$$(A_i + B_i K_i)' \mathcal{E}_i(\mathbf{M})(A_i + B_i K_i) - M_i + Q_i = 0, \quad (4.15)$$

vale para cada $i = 1, \dots, s$, e alguma $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_s)$.

Observação 4.2 Note que, se \mathbf{K} τ_Δ -estabiliza o sistema em malha fechada, então K_i estabiliza $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ para cada $i = 1, \dots, s$, pois de (4.15),

$$p_{ii}(A_i + B_i K_i)' M_i (A_i + B_i K_i) - M_i + Q_i \leq 0.$$

O objetivo aqui consiste em determinar uma única coleção de ganhos de realimentação linear \mathbf{K} o qual produz uma ação τ_Δ -estabilizável da forma (4.5), com o propósito de minimizar o critério de custo em (4.6). Como estratégia adotada, trataremos a situação limite envolvendo $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$, com $N \rightarrow \infty$ ou equivalentemente $n \rightarrow -\infty$, uma vez que a solução para o problema intermediário é obtida recursivamente com $N - 1, \dots, 0$. Neste sentido, de acordo com a Proposição 4.2, para o sistema em malha fechada é necessário considerarmos o problema

$$\inf_{K_i \in \mathcal{M}} \text{tr}\{L_i^n\}$$

$$\text{s.a: } L_i^n - \hat{A}_i'(p_{ii}L_i^n + Y_i)\hat{A}_i - \hat{C}_i'\hat{C}_i = 0,$$

com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta} S_\Delta$, para $i = 1, \dots, s$ e $n = N - 1, \dots, 0$ e $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$. Mais detalhadamente, analogamente ao caso $\tau = T_N$, a sequência ótima de ganhos para o caso $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$ pode ser obtida como abaixo.

Teorema 4.2 *Seja $\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$. Assuma $(p_{ii}^{1/2}A_i, p_{ii}^{1/2}B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2}\tilde{A}_i)$ detectável, para cada $i = 1, \dots, s$. Para $n = N - 1, \dots, 0$, e $i = 1, \dots, s$, considere a solução da EAR (4.2) na variável L_i^n , com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta}S_\Delta$ obtida recursivamente com $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$. A sequência ótima de ganhos $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ é estabilizante e obtida recursivamente como*

$$K_i^n = -[B_i'(p_{ii}L_i^n + Y_i)B_i + D_i'D_i]^{-1}[B_i'(p_{ii}L_i^n + Y_i)A_i + D_i'C_i]. \quad (4.16)$$

Conforme o Teorema anterior, a proposta consiste em estudar a situação limite envolvendo EAR's (4.2) na variável L_i^n , com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta}S_\Delta$, motivo pelo qual faz-se necessária condição que garanta a convergência das soluções L_i^n . Neste sentido pretende-se empregar o conceito de W-detectabilidade introduzido por Costa e do Val (2002). Mais especificamente, supõe-se que o par $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ seja W-detectável, o que vale destacar, não implica na detectabilidade de $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2}\tilde{A}_i)$ para cada $i = 1, \dots, s$, embora a recíproca seja verdadeira, como apontou Costa e do Val (2002). Desta forma, esta condição não garante a unicidade das soluções L_i^n destas EAR's. No entanto, a hipótese de W-detectabilidade é mais fraca que a hipótese de detectabilidade na média quadrática, no sentido de assegurar que a solução para a EARA é única e estabilizante no sentido da média quadrática.

No que segue, descrevemos o conceito de W-detectabilidade, assim como o teste para W-detectabilidade para SLSM a tempo discreto introduzidos por Costa e do Val (2002). Inicialmente, considera-se o conjunto de matrizes de observabilidade $\mathbf{O} \in \mathbb{M}^{r(r^2s) \times n}$, onde cada uma das matrizes $O_i \in \mathcal{M}^r$ é assim definida

$$O_i := [W_i(0) \vdots W_i(1) \vdots \dots \vdots W_i(r^2s - 1)]'$$

para $i \in \{1, \dots, s\}$, onde $W_i(k)$ é definida recursivamente como $W_i(k) := \tilde{A}_i' \mathcal{E}_i(\mathbf{W}(k - 1)) \tilde{A}_i$, com $W_i(0) := \tilde{C}_i' \tilde{C}_i$.

Definição 4.1 *O par $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ é W-detectável se e somente se $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|x_k\|\}^2 = 0$ sempre que $x_0 \in \mathcal{N}(O_{\theta_0})$.*

Proposição 4.3 *O par $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ é W-detectável se e somente se existe um conjunto de matrizes $\mathbf{M} \in \mathbb{M}^{n+}$ para alguma $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{n+}$ tal que*

$$(\tilde{A}_i + H_i O_i)' \mathcal{E}_i(\mathbf{M})(\tilde{A}_i + H_i O_i) - M_i + Q_i = 0, \quad (4.17)$$

vale para cada $i = 1, \dots, s$, e alguma $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_s)$.

A proposição a seguir é uma modificação direta de um resultado provado em (Costa e do Val, 2002).

Proposição 4.4 *Assuma que $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ é W -detectável. Então, existe uma solução $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{r_0}$ para (4.3) se e somente se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é τ_Δ -estabilizável.*

Voltando ao problema inicial que consiste em determinar o controle ótimo na forma de um conjunto de ganhos \mathbf{K} , passaremos a analisar a situação limite envolvendo os resultados obtidos no Teorema 4.2, quando $N \rightarrow \infty$. Uma vez que a hipótese de W -detectabilidade é empregada, com o propósito de garantir a convergência das soluções L_i^n das EAR's (4.2), com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta}S_\Delta$, se faz necessário o seguinte ajuste: substituir o termo $p_{ii}L_i^n$ por $p_{ii}L_i^n = \kappa p_{ii}L_i^n + (1 - \kappa)p_{ii}L_i^{n+1}$ com $0 < \kappa < 1$. O resultado a seguir, adaptado de (Costa e do Val, 2002), pode ser empregado.

Proposição 4.5 *Assuma que $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ é W -detectável e considere as soluções das seguintes EAR's, com $0 < \kappa < 1$*

$$\begin{aligned} L_i^n = & A_i'(\kappa p_{ii}L_i^n + \mathcal{L}_i(\mathbf{L}^{n+1}))A_i + C_i' C_i \\ & - [A_i'(\kappa p_{ii}L_i^n + \mathcal{L}_i(\mathbf{L}^{n+1}))B_i + C_i' D_i] \\ & \cdot [B_i'(\kappa p_{ii}L_i^n + \mathcal{L}_i(\mathbf{L}^{n+1}))B_i + D_i' D_i]^{-1} \\ & \cdot [B_i'(\kappa p_{ii}L_i^n + \mathcal{L}_i(\mathbf{L}^{n+1}))A_i + D_i' C_i], \quad (4.18) \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{L}^{n+1}) = \mathcal{E}_i(\mathbf{L}^{n+1}) + (1 - \kappa)p_{ii}L_i^{n+1} + p_{i\Delta}S_\Delta,$$

para $n = 0, -1, \dots$, $i = 1, \dots, s$ e L_i^0 fixado arbitrariamente. Então (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é estabilizável na média quadrática se e somente se a sequência \mathbf{L}^n converge para $\mathbf{P} \in \mathbb{M}^{n_0}$ quando $n \rightarrow -\infty$, onde \mathbf{P} é solução da EARA (4.3).

Finalmente, o Teorema 4.3 abaixo nos permite encontrar o ganho de controle ótimo \mathbf{K} como desejado.

Teorema 4.3 *Suponha que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é τ_Δ -estabilizável e o par $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ é W -detectável. Considere as soluções $L_i^n \in \mathcal{M}^{n_0}$ das EAR's (4.18). Então $L_i^n \rightarrow L_i$ quando $n \rightarrow -\infty$, onde $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n_0}$ é a solução de (4.3). Além disso, o ganho ótimo K_i é dado por*

$$K_i = -[B_i'(p_{ii}L_i + Y_i)B_i + D_i' D_i]^{-1}[B_i'(p_{ii}L_i + Y_i)A_i + D_i' C_i],$$

com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}) + p_{i\Delta}S_\Delta$, para $n = 0, -1, \dots$ e $i = 1, \dots, s$. O custo mínimo é dado por $x' L_i x$.

4.1.2 O caso com ruído aditivo

Trataremos inicialmente o problema de um salto, isto é, o caso onde o horizonte do problema coincide com $\tau = T_1$. Mais especificamente, resolveremos o problema associado ao horizonte $\tau = T_1 \wedge m$, $m > 1$, para o modelo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_i x_k + B_i u_k + H_i w_k \\ z_k &= C_i x_k + D_i u_k, \quad 0 \leq k < T_1 \wedge m. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Supõe-se que $\theta_0 = i$ com probabilidade um. Note que, $\theta_k = \theta_0 = i$ para $0 \leq k < T_1 \wedge m$.

Definindo $J_{T_1}^m(x, i, u(\cdot))$, $m > 1$, como o funcional em (4.6) quando $\tau = T_1 \wedge m$, ou seja,

$$\begin{aligned} J_{T_1}^m(x, i, u(\cdot)) &:= \\ E \left[\sum_{k=0}^{(T_1-1) \wedge m-1} \|z_k\|^2 + x'_{T_1 \wedge m} S_{\theta_{T_1 \wedge m}} x_{T_1 \wedge m} \mid x_0 = x, \theta_0 = i \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

o funcional custo associado ao horizonte T_1 pode ser recuperado ao tomarmos o limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_{T_1}^m(x, i, u(\cdot)).$$

Uma vez que (4.20) coincide com o funcional (2.16) definido na Seção 2, com base em (2.24), para o sistema em malha fechada (4.19) podemos escrever

$$\begin{aligned} J_{T_1}^m(x, i, u(\cdot)) &= \\ E_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k x'_k \hat{Q}_i^k x_k + p_{ii}^m x'_m S_i x_m \right] + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr} \{ H_i \mathcal{E}_i(S) H_i' \}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $\hat{Q}_i^k = \hat{C}_i^{k'} \hat{C}_i^k + \hat{A}_i^{k'} \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S}) A_i^k$, $\hat{A}_i^k = A_i + B_i K_i^k$ e $\hat{C}_i^k = C_i + D_i K_i^k$. Ainda pelo Lema 2.5 tem-se que

$$J_{T_1}^m(x, i, u(\cdot)) = x' L_i^{0,m} x + l_i^0 \quad (4.22)$$

onde $L_i^{0,m}$ e l_i^0 são obtidos recursivamente através do seguinte conjunto de equações matriciais acopladas

$$\begin{aligned} L_i^{k,m} &= p_{ii} A_i^{k'} L_i^{k+1,m} \hat{A}_i^k + \hat{C}_i^{k'} \hat{C}_i^k + \hat{A}_i^{k'} \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S}) \hat{A}_i^k, \quad L_i^{m,m} = S, \\ l_i^k &= \sum_{t=k}^{m-1} p_{ii}^t \text{tr} \{ H_i (p_{ii} L_i^{t+1,m} + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S})) H_i' \}, \quad l_i^m = 0, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, s$ e $k = m-1, \dots, 0$.

O problema que consiste em minimizar o funcional (4.20) sujeito à dinâmica (4.19), se insere no contexto LQG padrão encontrado na literatura, com horizonte finito e fator de desconto p_{ii} , vide (Davis e Vinter, 1985). Considere o conjunto de matrizes $L_i^{k,m}$ solução para a EAR

$$L_i^{k,m} = C_i' C_i + A_i' (p_{ii} L_i^{k+1,m} + Y_i) A_i - [A_i' (p_{ii} L_i^{k+1,m} + Y_i) B_i + C_i' D_i] \cdot [B_i' (p_{ii} L_i^{k+1,m} + Y_i) B_i + D_i' D_i]^{-1} [B_i' (p_{ii} L_i^{k+1,m} + Y_i) A_i + D_i' C_i], \quad (4.23)$$

com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S})$, para $k = m-1, \dots, 0$ e $\mathbf{L}^{m,m} = \mathbf{S}$. Com o propósito de determinar a lei de controle ótima para este problema, considera-se $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ detectável. Podemos afirmar, que a lei de controle ótima é dada por $u_k = K_i^k x_k$ com

$$K_i^k = -[B_i' (p_{ii} L_i^{k+1,m} + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S})) B_i + D_i' D_i]^{-1} [B_i' (p_{ii} L_i^{k+1,m} + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S})) A_i + D_i' C_i]. \quad (4.24)$$

Além disso, o custo mínimo é dado por

$$x' L_i^{0,m} x + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr}\{H_i (p_{ii} L_i^{k+1,m} + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S})) H_i'\}. \quad (4.25)$$

O caso $\tau = T_1$ é recuperado tomando-se o limite $\lim_{m \rightarrow \infty} J_{T_1}^m(x, i, u)$, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.6 *Seja $\tau = T_1$. Assuma $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ detectável, para cada $i = 1, \dots, s$. Então, a matriz $L_i = \lim_{m \rightarrow \infty} L_i^{0,m}$, com $L_i^{0,m}$ obtida como em (4.23), é a única solução para a EARA (4.3). A lei de controle ótima é $u_k = K_i x_k$, com*

$$K_i = -[B_i' (p_{ii} L_i + Y_i) B_i + D_i' D_i]^{-1} [B_i' (p_{ii} L_i + Y_i) A_i + D_i' C_i], \quad (4.26)$$

com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S})$. Além disso, o custo mínimo é dado por $x' L_i x + l_i$ onde

$$l_i = \frac{1}{1 - p_{ii}} \text{tr}\{H_i (p_{ii} L_i + Y_i) H_i'\}. \quad (4.27)$$

Com respeito ao custo mínimo anteriormente apresentado, este é obtido através do limite de (4.25) quando $m \rightarrow \infty$, utilizando o fato que $0 \leq p_{ii} < 1$.

Comparando a proposição anterior com o Teorema 4.2 (com $N = 1$), que fornece o ganho ótimo e o custo mínimo para o caso livre de ruído quando $\tau = T_1$, concluímos que o ganho ótimo encontrado aqui é o mesmo, ou seja, o ganho ótimo independe do ruído. Por sua vez, quando inclui-se o ruído observa-se que o custo mínimo é acrescido do termo (4.27).

Caso $\tau = T_N$

Considere a função valor $V(z_n, \phi_n)$, definida como o custo mínimo para o problema partindo-se do instante de salto T_n a saber,

$$V_{n,N}(z_n, \phi_n) = \min_{\mathbf{K}^n, \dots, \mathbf{K}^{N-1}} E \left[\sum_{k=T_n}^{(T_N-1)} \|z_k\|^2 + z'_N \mathbf{S}_{\phi_N} z_N \mid z_n, \phi_n \right], \quad (4.28)$$

$n = N - 1, \dots, 0$, com $z_n = x_{T_n}$ e $\phi_n = \theta_{T_n}$. O lema abaixo fornece uma expressão para $V(z_n, \phi_n)$.

Lema 4.1 *A função valor (4.28) pode ser expressa equivalentemente da forma*

$$\begin{aligned} V_{n,N}(x, i) &= \min_{\mathbf{K}^n} E \left[\sum_{k=T_n}^{(T_{n+1}-1)} \|z_k\|^2 + V_{n+1,N}(z_{n+1}, \phi_{n+1}) \mid z_n = x, \phi_n = i \right] \\ &= z'_n L_i^n z_n + l_i^n, \end{aligned} \quad (4.29)$$

para $n = N - 1, \dots, 0$, com L_i^n , K_i^n e l_i^n são obtidos recursivamente como

$$\begin{aligned} L_i^n &= C_i' C_i + A_i' (p_{ii} L_i^n + Y_i) A_i - [A_i' (p_{ii} L_i^n + Y_i) B_i + C_i' D_i] \\ &\quad \cdot [B_i' (p_{ii} L_i^n + Y_i) B_i + D_i' D_i]^{-1} [B_i' (p_{ii} L_i^n + Y_i) A_i + D_i' C_i], \\ K_i^n &= -[B_i' (p_{ii} L_i^n + Y_i) B_i + D_i' D_i]^{-1} [B_i' (p_{ii} L_i^n + Y_i) A_i + D_i' C_i], \\ l_i^n &= \frac{1}{1 - p_{ii}} \text{tr} \{ H_i (p_{ii} L_i^n + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1})) H_{\phi_n}' \} + E [l_{\phi_{n+1}}^{n+1} \mid \phi_n = i], \end{aligned} \quad (4.30)$$

com $l_i^N = 0$, $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$ e $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1})$.

Prova: Faremos uso da propriedade forte de Markov, do princípio de otimalidade e dos resultados obtidos para o problema de um salto. A prova baseia-se em argumento de indução sobre n . Para $n = N - 1$, conforme Proposição 4.6 tem-se que

$$V_{N-1,N}(z_{N-1}, \phi_{N-1}) = z'_{N-1} L_{\phi_{N-1}}^{N-1} z_{N-1} + \frac{1}{1 - p_{\phi_{N-1}\phi_{N-1}}} \text{tr} \{ H_{\phi_{N-1}} (p_{\phi_{N-1}\phi_{N-1}} L_{\phi_{N-1}}^{N-1} + \mathcal{E}_{\phi_{N-1}}^\Delta(\mathbf{S})) H_{\phi_{N-1}}' \}.$$

Reconhecendo $l_{\phi_{N-1}}^{N-1}$ na expressão acima, segue que

$$V_{N-1,N}(z_{N-1}, \phi_{N-1}) = z'_{N-1} L_{\phi_{N-1}}^{N-1} z_{N-1} + l_{\phi_{N-1}}^{N-1},$$

e portanto (4.29) se verifica. Suponha agora que (4.29) seja válida para $n = m + 1$, isto é

$$V_{m+1,N}(z_{m+1}, \phi_{m+1}) = z'_{m+1} L_{\phi_{m+1}}^{m+1} z_{m+1} + l_{\phi_{m+1}}^{m+1}.$$

Assim, para $n = m$, através da propriedade forte de Markov e do princípio da otimalidade temos

$$\begin{aligned}
V_{m,N}(z_m, \phi_m) &= \\
&= \min_{\mathbf{K}^m} E \left[\sum_{k=T_m}^{T_{m+1}-1} \|z_k\|^2 + V_{m+1,N}(z_{m+1}, \phi_{m+1}) \mid z_m, \phi_m \right] \\
&= \min_{\mathbf{K}^m} E \left[\sum_{k=T_m}^{T_{m+1}-1} \|z_k\|^2 + z'_{m+1} L_{\phi_{m+1}}^{m+1} z_{m+1} \mid z_m, \phi_m \right] + E [l_{\phi_{m+1}}^{m+1} \mid z_m, \phi_m] \\
&= z'_m L_{\phi_m}^m z_m + \frac{1}{1 - p_{\phi_m \phi_m}} \text{tr} \{ H_{\phi_m} (p_{\phi_m \phi_m} L_{\phi_m}^m + \mathcal{E}_{\phi_m}^{\Delta}(\mathbf{L}^{m+1})) H'_{\phi_m} \} + E [l_{\phi_{m+1}}^{m+1} \mid z_m, \phi_m] \\
&= z'_m L_{\phi_m}^m z_m + l_{\phi_m}^m.
\end{aligned}$$

Note que a segunda igualdade acima corresponde ao problema de um salto a partir de T_m com custo final \mathbf{L}^{m+1} . ■

Com base nos resultados anteriores apresentamos o teorema que permite calcular a sequência ótima de ganhos de controle $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ para o problema com múltiplos saltos.

Teorema 4.4 *Assuma $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ detectável para cada $i = 1, \dots, s$. Para $n = N - 1, \dots, 0$, e $i = 1, \dots, s$, considere a solução da EAR (4.2) na variável L_i^n com $Y_i = \mathcal{E}_i^{\Delta}(\mathbf{L}^{n+1})$, obtida recursivamente com $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$. A sequência ótima de ganhos $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ é dada por*

$$K_i^n = -[B'_i(p_{ii} L_i^n + Y_i) B_i + D'_i D_i]^{-1} [B'_i(p_{ii} L_i^n + Y_i) A_i + D'_i C_i], \quad (4.31)$$

para cada $i = 1, \dots, s$ e $n = N - 1, \dots, 0$. Além disso, o custo mínimo é dado por $x' L_i^0 x + l_i^0$, com l_i^0 obtido recursivamente por (4.30), para cada $i = 1, \dots, s$ e $n = N - 1, \dots, 0$.

Como se pode observar, o ganho ótimo obtido acima coincide com o ganho ótimo obtido no caso livre de ruído, enquanto o custo mínimo foi acrescido do termo l_i^0 .

Caso $\tau = \tau_{\Delta}$

A análise do caso $\tau = \tau_{\Delta}$ pressupõe a análise da situação limite envolvendo $\tau_{\Delta} \wedge T_N$, com $N \rightarrow \infty$. Neste sentido, conforme resultados obtidos para o caso livre de ruído, mediante inspeção, podemos afirmar que a sequência ótima de ganhos $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ para o caso intermediário $\tau_{\Delta} \wedge T_N$ é obtida exatamente como no Teorema anterior,

ressalvando-se que as EAR's envolvem $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta}S_\Delta$. Com respeito ao custo mínimo para o caso intermediário $\tau_\Delta \wedge T_N$, com a inclusão do ruído, além do termo $x'L_i x$ (vide Teorema 4.3), este por sua vez agora envolve o termo α_i^0 , obtido recursivamente como

$$\alpha_i^n = \frac{1}{1 - p_{ii}} \text{tr}\{H_i(p_{ii}L_i^n + Y_i)H_i'\} + E[\alpha_{\phi_{n+1}}^{n+1} | \phi_n = i], \quad (4.32)$$

para cada $i = 1, \dots, s$ e $n = N - 1, \dots, 0$, com $Y_i = \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1})$, $\alpha_i^N = 0$ e $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$.

Tendo em vista as considerações anteriores, o Teorema a seguir nos permite encontrar o ganho de controle ótimo \mathbf{K} assim como o custo mínimo para o caso τ_Δ .

Inicialmente consideramos a matriz $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{M}^{s \times 1}$ tal que $\tilde{H}_i^n = H_i(p_{ii}L_i^n + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}))H_i'$ com $i = 1, \dots, s$, as matrizes Q e \tilde{Q} tais que

$$Q := \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix},$$

e \tilde{Q} é obtida anulando-se a diagonal principal de Q . Adicionalmente escrevemos $\alpha = [\alpha_1 \cdots \alpha_s]'$.

Teorema 4.5 *Assuma (\mathbf{A}, \mathbf{B}) τ_Δ -estabilizável e $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ W -detectável. Considere as soluções $L_i^n \in \mathcal{M}^{r_0}$ das EAR's modificadas (4.18). Então $L_i^n \rightarrow L_i$ quando $n \rightarrow -\infty$, onde $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n_0}$ é a solução da EARA (4.3). Além disso, o ganho ótimo K_i é dado por*

$$K_i = -[B_i'(p_{ii}L_i + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}) + p_{i\Delta}S_\Delta)B_i + D_i'D_i]^{-1} \cdot [B_i'(p_{ii}P_i + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}) + p_{i\Delta}S_\Delta)A_i + D_i'C_i], \quad (4.33)$$

para cada $i = 1, \dots, s$ e o custo mínimo é $x'L_i x + \alpha_i$, com

$$\alpha = (I_s - Q)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}. \quad (4.34)$$

Prova: A convergência $L_i^n \rightarrow L_i$ quando $n \rightarrow -\infty$ segue diretamente das hipóteses, conforme a Proposição 4.5. Por sua vez, analisando o limite $\tau_\Delta \wedge T_N$, quando $N \rightarrow \infty$ (equivalentemente $n \rightarrow -\infty$, uma vez que a solução para este caso é obtida recursivamente para $N - 1, \dots, 0$), podemos afirmar que de fato K_i é dado por (4.33). Com base nos resultados para o caso intermediário, o custo mínimo correspondente tem a forma $x'L_i x + \lim_{n \rightarrow -\infty} \alpha_i^n$. Neste sentido, primeiramente note que

$$\alpha_i^n = \frac{1}{1 - p_{ii}} \text{tr}\{H_i(p_{ii}L_i^n + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta}S_\Delta)H_i'\} + \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} \alpha_j^{n+1}. \quad (4.35)$$

Introduzindo as matrizes acima definidas, a equação (4.35) torna-se equivalente a

$$(I_s - \text{Diag}(Q))\alpha^n = \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{Q}\alpha^{n+1}. \quad (4.36)$$

Uma vez que $0 \leq p_{ii} < 1$ então $(I_s - \text{Diag}(Q))$ é não singular e $r_\sigma((I_s - \text{Diag}(Q))^{-1}\tilde{Q}) < 1$, cf. Teorema 2.3, conseqüentemente (4.36) converge e escreve-se α como em (4.34). Desta forma, obtém-se o custo mínimo como anunciado. ■

4.2 Controle com Realimentação de Saída

Nesta seção consideramos o problema de controle associado ao SLSM \mathcal{S} definido em (4.1). O estado x_k não pode ser medido diretamente, podendo ser apenas estimado através das saídas medidas $y^{k-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$. O processo $\{w_k\}$ é uma sequência de vetores aleatórios i.i.d. normalmente distribuídos, com média 0 e covariância I , i.e., $E[w_k] = 0$ e $E[w_k'w_k] = I$. Adicionalmente assume-se que x_0 é um vetor aleatório independente de w_k , normalmente distribuído com média m_0 e covariância P_0 .

Estudaremos inicialmente o problema de um salto associado ao modelo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_i x_k + B_i u_k + H_i w_k \\ y_k &= F_i x_k + G_i w_k, \quad 0 \leq k < T_1 \wedge m. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Supõe-se que $\theta_0 = i$ com probabilidade um. Este problema é tratado, utilizando a correspondente *representação de inovação* de (4.37), vide (Davis e Vinter, 1985, p.118), a qual fornece um modelo equivalente na forma

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A_i \hat{x}_{k|k-1} + B_i u_k + Z_i^k v_k \\ \hat{x}_{0|-1} &= m_0, \quad 0 \leq k < T_1 \wedge m. \end{aligned} \quad (4.38)$$

O processo de inovação v_k , satisfazendo

$$v_k = y_k - F_i \hat{x}_{k|k-1}, \quad (4.39)$$

é um processo de ruído-branco com média 0 e função de covariância $E[v_k, v_k'] = F_i P_i^k F_i' + G_i G_i'$, onde P_i^k é a covariância do erro $\tilde{x}_{k|k-1}$ satisfazendo a equação EAR recursiva

$$\begin{aligned} P_i^{k+1} &= A_i P_i^k A_i' + H_i H_i' - [A_i P_i^k F_i' + H_i G_i'] \\ &\quad \cdot [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i']^{-1} \cdot [A_i P_i^k F_i' + H_i G_i']', \\ P^0 &= P_0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A matriz de ganho de Kalman Z_i^k é dada por

$$Z_i^k = [A_i P_i^k F_i' + H_i G_i'] [F_i' P_i^k F_i' + G_i G_i']^{-1}. \quad (4.41)$$

Mediante as hipóteses acima adotadas o novo estado $\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k | y^{k-1}]$ é o melhor estimador de x_k dado y^{k-1} .

Defina o funcional $J_{T_1}^m(i, u(\cdot))$ como em (4.20), condicionando o valor esperado apenas ao estado θ_0 . Introduzindo em (4.21), o valor esperado condicionado como segue

$$E \left[\sum_{k=0}^{m-1} E[p_{ii}^k x_k' \hat{Q}_i^k x_k | y^{k-1}] + E[p_{ii}^m x_m' S_i x_m | y^{m-1}] \right],$$

e procedendo aos cálculos com $x_k = \hat{x}_{k|k-1} + \tilde{x}_{k|k-1}$ e $E[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}'] = P_i^k$, o custo $J_{T_1}^m(i, u(\cdot))$ pode agora ser dado em termos do estado $\hat{x}_{k|k-1}$, da forma

$$\begin{aligned} J_{T_1}^m(i, u(\cdot)) = & E \left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \hat{x}_{k|k-1}' \hat{Q}_i^k \hat{x}_{k|k-1} + p_{ii}^m \hat{x}_{m|m-1}' S_i \hat{x}_{m|m-1} \right] \\ & + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr} \{ H_i \mathcal{E}_i(S) H_i' \} + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr} \{ P_i^k \hat{Q}_i^k \} + p_{ii}^m \text{tr} \{ P^m S_i \}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Como se pode observar, na expressão anterior reconhecemos o custo dado em (4.21) na variável $\hat{x}_{k|k-1}$, acrescido de dois termos constantes que não dependem da escolha de u_k . Portanto, minimizar (4.42) equivale a minimizar

$$E \left[\sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \hat{x}_{k|k-1}' \hat{Q}_i^k \hat{x}_{k|k-1} + p_{ii}^m \hat{x}_{m|m-1}' S_i \hat{x}_{m|m-1} \right]$$

sujeito à dinâmica (4.38).

Nesta seção, pretende-se empregar os resultados obtidos para o problema com realimentação de estado, ao novo sistema (4.38) e (4.39). Com este objetivo, define-se

$$\tilde{\mathbf{v}}_k = [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i']^{-1/2} \mathbf{v}_k.$$

Consequentemente, (4.38) pode ser reescrita como

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_i \hat{x}_{k|k-1} + B_i u_k + Z_i^k [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i']^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_k. \quad (4.43)$$

Uma vez que $E[\tilde{\mathbf{v}}_k \tilde{\mathbf{v}}_k'] = I$, $\tilde{\mathbf{v}}_k$ é um processo de ruído branco normalizado e portanto a equação acima está na forma padrão dada em (4.37) com $Z_i^k [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i']^{1/2}$ no lugar de H_i . Desta forma, expressão análoga àquela apresentada em (4.25) pode ser obtida

em termos da variável $\hat{x}_{k|k-1}$ trocando-se a matriz H_i pela matriz $Z_i^k[F_i P_i^k F_i' + G_i G_i']^{1/2}$ e incluindo os termos constantes. Entretanto, é importante observar que o custo mínimo obtido em (4.25) é o custo mínimo condicional dado que o processo parte de $x_0 = x$. Logo, tomando o valor esperado sobre a distribuição de x_0 e usando o fato de que para qualquer matriz $M \in \mathcal{M}^{n \times n}$, tem-se $E[x_0' M x_0] = m_0' M m_0 + \text{tr}\{M P_0\}$, de (4.25) teríamos

$$m_0' L_i^{0,m} m_0 + \text{tr}\{L_i^{0,m} P_0\} + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr}\{H_i(p_{ii} L_i^{k+1,m} + \mathcal{E}_i^\Delta(\mathbf{S}))H_i'\}.$$

Ou seja, o custo mínimo na variável $\hat{x}_{k|k-1}$ para o caso $T_1 \wedge m$ é dado por

$$\begin{aligned} & \hat{x}_{0|-1}' L_i^{0,m} \hat{x}_{0|-1} + \text{tr}\{L_i^{0,m} \hat{P}_0\} \\ & + \sum_{k=0}^{m-1} p_{ii}^k \text{tr}\{Z_i^k [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i'] Z_i^{k'} [p_{ii} L_i^{k+1,m} + \mathcal{E}_i^\Delta(S)] + P_i^k \hat{Q}_i^k\} + p_{ii}^m \text{tr}\{P^m S_i\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde $L_i^{0,m}$ é obtida como em (4.23) e \hat{P}_0 é a covariância de $\hat{x}_{0|-1}$. Note que $\hat{x}_{0|-1} = m_0$.

Finalmente, a solução do problema com realimentação de saída e horizonte T_1 pode ser obtida analogamente à Proposição 4.6. Relembrando que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= A_i - [B_i(D_i' D_i)^{-1} D_i'] C_i, & \tilde{C}_i &= [I - D_i(D_i' D_i)^{-1} D_i'] C_i, \\ \check{A}_i &= A_i - [H_i(G_i' G_i)^{-1} G_i'] H_i, & \check{H}_i &= [I - G_i(G_i' G_i)^{-1} G_i'] G_i. \end{aligned}$$

As seguintes condições são requeridas para todo $i = 1, \dots, s$:

$$\left. \begin{array}{l} (p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i) \\ (\check{A}_i, \check{H}_i) \end{array} \right\} \text{estabilizáveis}, \quad \left. \begin{array}{l} (\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i) \\ (F_i, p_{ii}^{1/2} A_i) \end{array} \right\} \text{detectáveis}; \quad (4.45)$$

com o propósito de garantir a existência e unicidade das soluções para as EAR's (4.23) e (4.40), e a convergência destas para L_i e P_i , respectivamente, onde L_i é a única solução da EAR (4.2) e P_i é a única solução da EAR

$$P_i = A_i P_i A_i' + H_i H_i' - [A_i P_i F_i' + H_i G_i'] [F_i P_i F_i' + G_i G_i']^{-1} [A_i P_i F_i' + H_i G_i']'. \quad (4.46)$$

Proposição 4.7 *Considere o modelo em (4.37) e assuma válidas as condições (4.45) para cada $i = 1, \dots, s$. Então, as matrizes $L_i = \lim_{m \rightarrow \infty} L_i^{0,m}$ e P_i são as únicas soluções para a EARA (4.2) e (4.46), respectivamente. A lei de controle ótima é dada por $\hat{u}_k = K_i \hat{x}_{k|k-1}$, onde K_i é obtida como em (4.26). A dinâmica do filtro é dada por*

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_i \hat{x}_{k|k-1} + B_i u_k + Z_i^k (y_k - F_i \hat{x}_{k|k-1}), \quad (4.47)$$

onde os ganhos de Kalman Z_i^k , para cada $i = 1, \dots, s$, são obtidos como em (4.40) e (4.41). Além disso, o custo mínimo é dado por

$$m_0' L_i m_0 + \text{tr}\{L_i \hat{P}_0\} + \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \text{tr}\{Z_i^k [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i'] Z_i^{k'} [p_{ii} L_i + \mathcal{E}_i^\Delta(S)] + P_i^k \hat{Q}_i^k\}.$$

Note que a convergência de P_i^k para P_i quando $k \rightarrow \infty$, assegurada pela hipótese, garante que a soma final acima seja finita, vide (Davis e Vinter, 1985). Podemos observar que o ganho de realimentação K_i é o mesmo obtido no caso com observação completa de x_k , de forma que o denominado *princípio da equivalente-certeza* se verifica para o caso $\tau = T_1$.

Na sequência, os resultados referentes ao problema de um salto anteriormente obtidos permitem a análise do problema com múltiplos saltos.

4.2.1 Caso $\tau = T_N$

Algumas considerações iniciais se fazem oportunas. O lema abaixo fornece uma expressão para a função valor $V(\hat{z}_n, \phi_n)$ associada ao problema com observação parcial, definida como o custo mínimo a partir do instante de salto T_n , a saber,

$$V(\hat{x}_{T_n}, \phi_n) = \min_{\mathbf{K}^n, \dots, \mathbf{K}^{N-1}} E \left[\sum_{k=T_n}^{T_N-1} \|z_k\|^2 + z_N' S_{\phi_n} z_N \mid \phi_n \right], \quad (4.48)$$

$n = N - 1, \dots, 0$, com $\phi_n = \theta_{T_n}$ e $\hat{x}_{T_n} = E[x_{T_n} \mid y_0, \dots, y_{T_n-1}, T_n = k]$.

Tendo em vista que o princípio da equivalente-certeza se verifica para o problema de um salto, o mesmo procedimento empregado para se determinar a sequência de ganhos de controle $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ para o problema com observação completa de x_k pode ser usado aqui. Quanto ao custo mínimo, este por sua vez agora é obtido através da dinâmica dada em (4.49).

Lema 4.2 *A função valor (4.48) pode ser expressa equivalentemente como*

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_{T_n}, \phi_n) &= \min_{\mathbf{K}^n} E \left[\sum_{k=T_n}^{(T_{n+1}-1)} \|y_k\|^2 + V(\hat{x}_{T_{n+1}}, \phi_{n+1}) \mid \phi_n \right] \\ &= \hat{x}_{T_n}' L_{\phi_n}^n \hat{x}_{T_n} + \text{tr}\{L_{\phi_n}^n \hat{P}_{T_n}\} + \hat{l}_{\phi_n}^n, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde \hat{x}_{T_n} e \hat{P}_{T_n} indicam o valor esperado $E[x_{T_n} \mid y_0, \dots, y_{T_n-1}, T_n = k]$ e a covariância

$\text{cov}[x_{T_n} \mid y_0, \dots, y_{T_n-1}, T_n = k]$. Além disso,

$$\begin{aligned} \hat{l}_{\phi_n}^n = & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} p_{\phi_n \phi_n}^k \text{tr} \{ Z_{\phi_n}^k [F_{\phi_n} P_{\phi_n}^k F_{\phi_n}' + G_{\phi_n} G_{\phi_n}'] Z_{\phi_n}^{k'} [p_{\phi_n \phi_n} L_{\phi_n}^n + \mathcal{E}_{\phi_n}^{\Delta}(\mathbf{L}^{n+1})] + P_{\phi_n}^k \hat{Q}_{\phi_n}^k \} \\ & + E[\hat{l}_{\phi_{n+1}}^{n+1} \mid \phi_n], \end{aligned}$$

com $\hat{l}_{\phi_N}^N = 0$.

Teorema 4.6 Assuma $(p_{ii}^{1/2} A_i, p_{ii}^{1/2} B_i)$ estabilizável e $(\tilde{C}_i, p_{ii}^{1/2} \tilde{A}_i)$ detectável, para cada $i = 1, \dots, s$. Então, o conjunto de matrizes $\{\mathbf{L}^0, \dots, \mathbf{L}^{N-1}\}$ é a única solução definida positiva da EAR (4.2) com $Y_i = \mathcal{E}_i^{\Delta}(\mathbf{L})$, para cada $i = 1, \dots, s$ e $n = N-1, \dots, 0$ com $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$. O controle ótimo é dado pela lei de realimentação linear

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} K_{\theta_k}^n \hat{x}_{k|k-1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq k < T_{n+1}\}}, \quad k \geq 0, \quad (4.50)$$

onde a sequência ótima de ganhos $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^{N-1}\}$ é dada por (4.31) para cada $i = 1, \dots, s$ e $n = N-1, \dots, 0$. A dinâmica do filtro é dada por (4.47) onde os ganhos de Kalman Z_i^k para cada $i = 1, \dots, s$ são obtidos como em (4.40) e (4.41).

4.2.2 Caso $\tau = \tau_{\Delta}$

Nesta seção, o ganho de controle ótimo \mathbf{K} é obtido exatamente como no caso de observação completa. Quanto ao custo mínimo, determina-se por inspeção o custo para caso $\tau_{\Delta} \wedge T_N$ e então procede-se a análise da situação limite. Neste sentido, embora não se pretenda determiná-lo, trocando-se a matriz H_i pela matriz $Z_i^k [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i']$ em (4.35), tem-se que o custo mínimo para o problema intermediário agora envolve o termo $\hat{\alpha}_i^0$, obtido recursivamente como

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i^n = & \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \text{tr} \{ Z_i^k [F_i P_i^k F_i' + G_i G_i'] Z_i^{k'} [p_{ii} L_i^n + \mathcal{E}_i^{\Delta}(\mathbf{L}^{n+1}) + p_{i\Delta} S_{\Delta}] + P_i^k \hat{Q}_i^k \} \\ & + E[\hat{\alpha}_{\phi_{n+1}}^{n+1} \mid \phi_n = i], \end{aligned} \quad (4.51)$$

para todo $i = 1, \dots, s$, com $n = N-1, \dots, 0$, $\alpha_i^N = 0$ e $\mathbf{L}^N = \mathbf{S}$.

Teorema 4.7 Assuma (\mathbf{A}, \mathbf{B}) τ_{Δ} -estabilizável e $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{A}})$ W -detectável. Então, existe um único conjunto de matrizes \mathbf{L} solução definida positiva da EARA (4.3). O ganho ótimo \mathbf{K} é determinado por (4.33) e τ_{Δ} -estabiliza o sistema. A dinâmica do filtro é dada por (4.47) onde os ganhos de Kalman Z_i^k para cada $i = 1, \dots, s$ são obtidos como em (4.40) e (4.41).

Tabela 4.1: Ganho de controle ótimo para $\tau = \tau_\Delta$

Ganhos de controle				
$K_1 =$	0.4758	130.0280	0.2659	-0.2178
	-0.5242	-130.5720	-0.7341	-0.2178
$K_2 =$	0.4779	130.0505	0.6317	-0.2234
	-0.5221	-130.5495	-0.3683	-0.2234
$K_3 =$	0.4781	130.0649	0.2511	-0.1937
	-0.5219	-130.5351	-0.7489	-0.1937

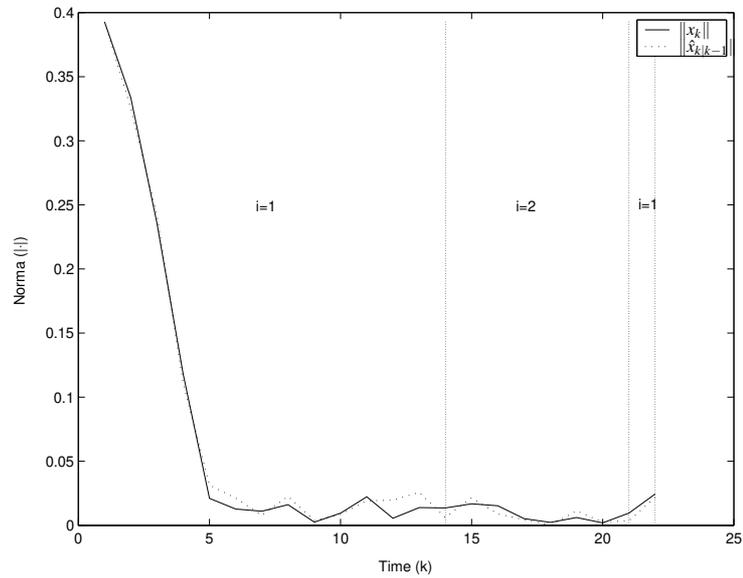
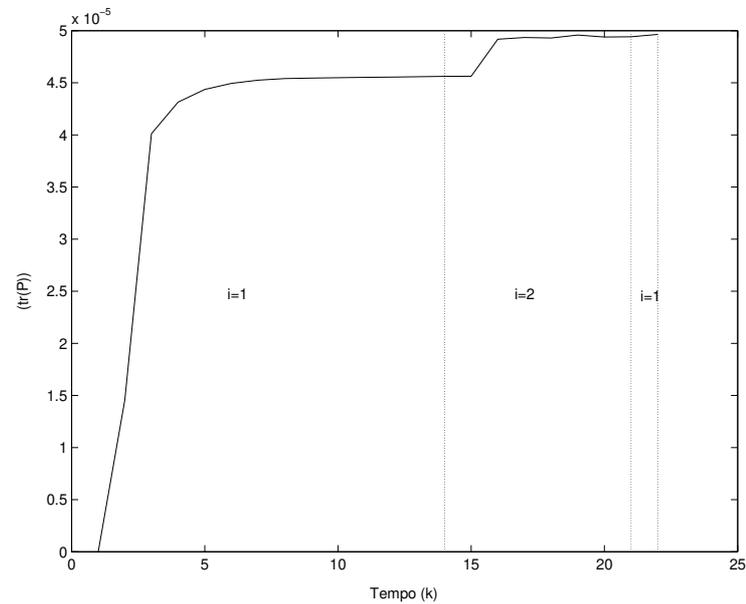
4.3 Exemplo Numérico

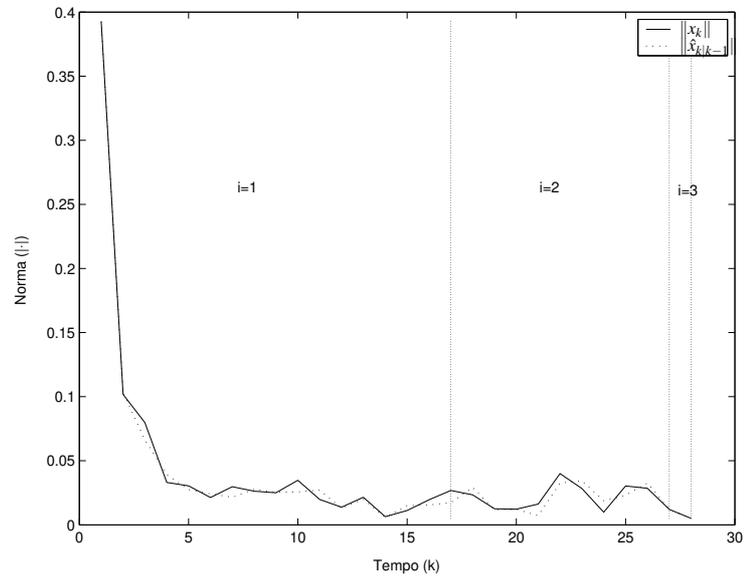
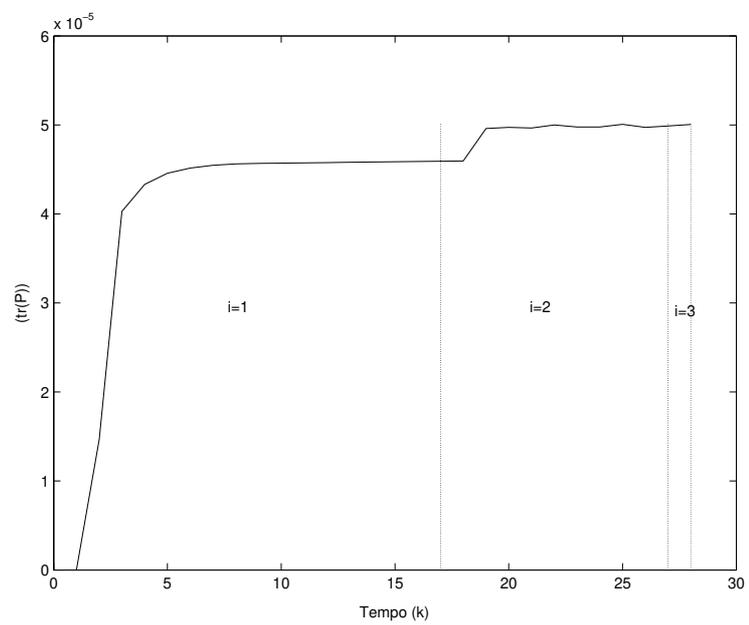
Nesta seção pretende-se mostrar uma aplicação numérica para os principais teoremas apresentados neste capítulo. Para a implementação computacional o software Matlab foi utilizado e o exemplo de uma junta do braço do *European Robot Arm (ERA)* (e.g. (Kanev e Verhaegen, 1999)) descrito na Seção (1.4) foi considerado. Destacamos que o referido exemplo foi discretizado, com período de discretização $T = 10s$, uma vez que este trabalho aborda os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a tempo-discreto. As matrizes dos sistema a tempo contínuo, oportunamente discretizadas, encontram-se no Apêndice.

Os ganhos de controle para o caso $\tau = T_N$ são apresentados na Tabela 4.2, assumindo $m_0 = [\pi/8 \ 0 \ 0 \ 0]$, $S_i = 100I$ para $i = 1, 2, 3$ e $N = 3$. Por sua vez, a Tabela 4.1 apresenta o ganho para caso $\tau = \tau_\Delta$. As Figuras 4.1 e 4.2 trazem algumas trajetórias para $\|x_k\|$ e $\|\hat{x}_{k|k-1}\|$ assim como para $tr(P^k)$.

Tabela 4.2: Ganhos de controle ótimos para $\tau = T_3$

Intervalos	Ganhos de Controle				
$[0, T_1)$	$K_1^0 =$	-0.0050	-0.1193	-10.8276	3.0058
	$K_2^0 =$	-0.0051	-0.1454	-10.8277	3.0058
	$K_3^0 =$	-0.0057	-0.1326	62.1058	1.7550
$[T_1, T_2)$	$K_1^1 =$	-0.0058	-0.1586	62.1057	1.6320
	$K_2^1 =$	-0.0026	-0.0692	-63.1985	1.6320
	$K_3^1 =$	-0.0027	-0.0953	-63.1986	1.6320
$[T_2, T_3)$	$K_1^2 =$	-0.0145	-0.2086	0.8923	0.0214
	$K_2^2 =$	-0.0146	-0.2347	0.8922	0.0214
	$K_3^2 =$	-0.0085	-0.1794	148.3138	0.7306
$[T_3, T_4)$	$K_1^3 =$	-0.0086	-0.2054	148.3137	0.7306
	$K_2^3 =$	-0.0053	-0.1100	-14.1831	1.7818
	$K_3^3 =$	-0.0054	-0.1360	-14.1832	1.7818
$[T_4, T_5)$	$K_1^4 =$	-0.0254	-0.2651	-0.1348	-0.2260
	$K_2^4 =$	-0.0255	-0.2912	-0.1349	-0.2260
	$K_3^4 =$	-0.0235	-0.2438	0.0863	-0.2320
$[T_5, T_6)$	$K_1^5 =$	-0.0236	-0.2698	0.0862	-0.2320
	$K_2^5 =$	-0.0123	-0.1735	0.4648	-0.0494
	$K_3^5 =$	-0.0124	-0.1995	0.4647	-0.0494

(a) Trajetórias de $\|x_k\|$ e $\|\hat{x}_k|_{k-1}\|$.(b) Evolução de $tr(P)$.Figura 4.1: Trajetórias típicas para $\tau = T_3$.

(a) Trajetórias de $\|x_k\|$ e $\|\hat{x}_{k|k-1}\|$.(b) Evolução de $tr(P)$.Figura 4.2: Trajetórias típicas para $\tau = \tau_\Delta$.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho aborda conceitos de estabilidade estocástica de segundo momento para SLSM a tempo discreto. No modelo proposto, o horizonte é definido como um tempo de parada τ do processo. Neste cenário, os conceitos usuais de estabilidade encontrados na literatura não são adequados, uma vez que são indicados para problemas com horizonte infinito puro. Desta forma, utilizam-se os conceitos de τ -estabilidade estocástica de segundo momento mencionados no Capítulo 1. Os tempos de paradas especificamente considerados são assim definidos:

Caso 1. ($\tau = T_N$): τ representa a ocorrência de um número fixo N de saltos da cadeia de Markov;

Caso 2. ($\tau = \tau_\Delta$): τ representa o tempo da primeira visita ao estado absorvente Δ , associado a ocorrência de uma falha grave que conduz à paralização do sistema;

Caso 3. ($\tau = \tau_\Delta \wedge T_N$, com N fixo): τ representa ou o salto para o estado absorvente Δ , ou o N -ésimo salto livre da cadeia de Markov, aquilo que ocorrer primeiro.

No que diz respeito à análise da τ -estabilidade estocástica, condições necessárias e suficientes são obtidas para os Casos 2 e 3, as quais juntamente com aquelas obtidas em (Cáceres, 2001) para o Caso 1, fecham o panorama acerca desta análise. Destaca-se que as condições obtidas nos Casos 1 e 3 recaem sobre equações de Lyapunov desacopladas enquanto no Caso 2, a condição recai sobre equações de Lyapunov acopladas ou sobre o raio espectral de uma matriz aumentada relacionada ao sistema. É conveniente ressaltar que neste último caso, os resultados apresentados diferem daqueles indicados para horizonte infinito uma vez que não envolvem todos os estados da cadeia de Markov.

Com o intuito de estabelecer um paralelo entre resultados relacionados à situação de horizonte infinito puro, estabelecemos a equivalência entre os conceitos de τ -estabilidade acima descritos, para os três tempos de parada propostos.

Frente a esta conjuntura, a solução para o problema LQ com observação completa dos estados da cadeia é apresentada. Esta solução é dada em termos de um conjunto de equações algébricas de Riccati recursivas ou um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas.

Além disso, as condições de τ_Δ -estabilidade estocástica (condições obtidas para o Caso 2) permitem-nos a proposição de um teste para estabilidade na média quadrática de SLSM em geral. Ou seja, considerando o SLSM a tempo discreto com espaço de estados finito, mediante prévia classificação destes, o problema da estabilidade pode ser decomposto em um problema de τ_Δ -estabilidade e de alguns problemas de estabilidade, de menor ordem. Mais especificamente, segundo resultados de interesse comparativo encontrados na literatura, a análise da estabilidade em média quadrática pressupõe a resolução de equações de Lyapunov acopladas ou o cálculo do raio espectral de uma matriz aumentada, ambos envolvendo a matriz de probabilidade cheia associada ao sistema. Por sua vez, as condições de τ_Δ estabilidade, baseadas em resultados semelhantes, não envolvem o estado absorvente Δ . No teste proposto, o espaço de estados da cadeia é decomposto em um conjunto de estados transientes e conjuntos de estados recorrentes, os quais representam conjuntos fechados e portanto podem ser, sem perda de generalidade, admitidos como estados absorventes. Desta forma, a análise da estabilidade em média quadrática pode ser decomposta em um problema de τ_Δ -estabilidade, envolvendo os estados transientes, e problemas de estabilidade, envolvendo cada conjunto de estados recorrentes. Destacamos que mediante tal decomposição o esforço computacional empregado nos referidos cálculos é expressivamente menor.

Uma questão que permanece em aberto é a demonstração da equivalência entre os conceitos de τ -estabilidade acima discriminados, para os tempos de parada τ gerais do processo.

Apêndice A

Dados do Exemplo ERA

Espaço de estados da cadeia de Markov $S = \{1, 2, 3, \Delta\}$ e correspondentes matrizes do sistema.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 9.9580 & 1.2370 & 8.3745 \\ 0 & 0.9916 & 33.8369 & 1.2287 \\ 0 & -0.0000 & -0.4665 & 0.0194 \\ 0 & -0.0000 & -40.1560 & -0.4665 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -16.4243 & 16.4243 \\ -3.3143 & -3.3143 \\ 0.0015 & 0.0015 \\ 0.0407 & 0.0407 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0050 & 0.0008 & 0.0042 \\ 0 & 0.0010 & 0.0001 & 0.0008 \\ 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0.0100 & 0 \\ 0 & -2.6060 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 9.9544 & 0.5243 & 9.0909 \\ 0 & 0.9909 & 50.9765 & 0.5153 \\ 0 & -0.0000 & 0.4275 & 0.0146 \\ 0 & -0.0000 & -55.7367 & 0.4275 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -17.8220 & -17.8220 \\ -3.6149 & -3.6149 \\ 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0613 & 0.0613 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0050 & 0.0009 & 0.0046 \\ 0 & 0.0010 & 0.0001 & 0.0009 \\ 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 9.9580 & 1.2370 & 8.3745 \\ 0 & 0.9916 & 33.8369 & 1.2287 \\ 0 & -0.0000 & -0.4665 & 0.0194 \\ 0 & -0.0000 & -40.1560 & -0.4665 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -19.7092 & -19.7092 \\ -3.9772 & -3.9772 \\ 0.0018 & 0.0018 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0050 & 0.0008 & 0.0042 \\ 0 & 0.0010 & 0.0001 & 0.0008 \\ 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Artigos originados deste trabalho

1. J.B.R. do Val, C.Nespoli Y.R.Z. Cáceres. "Stochastic Stochastic stability for Markovian jump linear systems associated with a finite number of jump times". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 185(2), pp. 551 - 563, 2002.
2. J.B.R. do Val, C.Nespoli Y.R.Z. Cáceres. "Stochastic Stability for Markovian Jump Linear Systems associated with a Finite Number of Jump Times". *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 334–339, 2002. (Versão preliminar do artigo 1).
3. J.B.R. do Val e C. Nespoli. "Stochastic Stability for Markovian Jump Linear Systems subject to a Crucial Failure Event". *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4249–4253, 2003.
4. C. Nespoli, J.B.R. do Val e Y.R.Z. Cáceres. "The LQ Control Problem for Markovian Jumps Linear Systems with Horizon defined by Stopping Times". *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 703–707, 2004.
4. C. Nespoli e J.B.R. do Val. "Estabilidade Estocástica para sistemas Lineares com Saltos Markovianos associada aos instantes de Salto da Cadeia". *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática*, 2002. (Versão em português do artigo 2).
5. C. Nespoli e J.B.R. do Val. "Um teste para Estabilidade em Média Quadrática de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos". *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, 2004.
6. C. Nespoli, J.B.R. do Val e Y.R.Z. Cáceres. "O Problema de Controle LQ para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos com Horizonte definido por Tempos de Parada". *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, 2004. (Versão em português do artigo 4).
7. C. Nespoli, J.B.R. do Val and Y.R.Z. Cáceres. "State and Output Gaussian Control of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems with Horizon Defined by Stopping Times". *aceito no IFAC*, 2005.

Bibliografia

- Athans, M., Castanon, D., Dunn, K., Greene, C. S., W. H. Lee, N. R. S. e Willsky, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptative control (mmac) method - part i: Equilibrium flight, *Transactions on Automatic Control* **AC-22**: 768–780.
- Bellman, R. (1960). Limiting theorems for noncommutative operators, *Duke Math. Journal* **21**: 456.
- Blair, W. P. e Sworder, D. D. (1975). Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria, *International Journal of Control* **21**(5): 833–841.
- Brewer, J. W. (1978). Kronecker products and matrix calculus in system theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-25**(9): 772–781.
- Cáceres, Y. Z. (2001). *Controle de sistemas lineares com saltos markovianos com custo e informação associada aos instantes de salto*, Master's thesis, FEEC, Unicamp.
- Chizeck, H. J., Willsky, A. S. e Castano, D. (1986). Discrete-time Markovian jump linear quadratic optimal control, *International Journal of Control* **43**(1): 213–231.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2001a). On the detectability and observability of discrete-time Markov jump linear systems, *Systems and Control Letters* **44**: 135–145.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2001b). On the detectability and observability of continuous-time Markov jump linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **41**(4): 1295–1314.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2002). Weak detectability and the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems, *International Journal of Control* **75**(16/17): 1282–1292.
- Costa, O. L. V. (1996). Mean-square stabilizing solutions for discrete-time coupled algebraic Riccati equations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-41**(4): 593–598.

- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**: 154–178.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1995). Discrete-time lq-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-40**(12): 2076–2088.
- Davis, M. H. A. e Vinter, R. B. (1985). *Stochastic Modelling and Control*, Chapman and Hall, London.
- do Val, J. B. R. e Basar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economic Dynamics & Control* **6**(3): 1099–1131.
- do Val, J. B. R., Nespoli, C. e Cáceres, Y. R. Z. (2003). Stochastic stability for Markovian jump linear systems associated with a finite number of jump times, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **285**(2): 551–563.
- do Val, J., Geromel, J. e Costa, O. (1998). Uncoupled Riccati iterations for the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **43**(12): 1727–1733.
- Golub, G. H. e Loan, C. F. V. (1996). *Matrix Computation*, John Hopkins Univ. Press.
- Çinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1988). Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control, *International Journal of Control* **48**(2): 481–498.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990a). Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7): 777–788.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990b). Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions, *Control Theory and Advanced Technology* **6**(3): 289–319.
- Ji, Y., Chizeck, H. J. e Loparo, K. A. (1991). Stability and control of discrete-time jump linear systems, *Control Theory and Advanced Technology* **7**(2): 247–270.
- Kanev, S. e Verhaegen, M. (1999). Controller reconfiguration for non-linear systems, *Control Engineering Practise* .
- Kozin, F. (1969). A survey of stability of stochastic systems, *Automatica* **5**: 95–112.
- Krasovskii, N. N. e Lidiskii, E. A. (1961). Analytical design of controllers in systems with random attributes i,ii, iii, *Automation Remote Control* **22**: 1021–1025, 1141–1146, 1289–1294.

- Kushner, H. (1967). *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, NY.
- Mariton, M. (1988). Almost sure and moments stability of jump linear systems, *System & Control Letters* **11**: 393–397.
- Mariton, M. e Bertrand, P. (1985). Output feedback for a class of linear systems with jump parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**: 898–990.
- Meyn, S. P. e Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag.
- Morozan, T. (1983). Optimal stationary control for dynamic systems with Markov perturbations, *Stochastic Anal. and Applications* **1**: 219–325.
- Rosebloom, A. (1954). Analysis of linear systems with randomly time-varying parameters, *Proceedings of the Symposium on Information Nets, Polytechnic Institute Brooklyn*.
- Saridis, G. N. (1983). Intelligent robotic control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**: 547–557.
- Sworder, D. D. (1969). Feedback control of a class of linear systems with jump parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-14**(1): 9–14.
- Sworder, D. D. e Rogers, R. (1983). An lq-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**(10): 971–978.
- Wonham, W. H. (1971). *Random differential equations in control theory*. A.T. Bharucha-Reid (ed), Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Academic Press, NY.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall.