

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

## Simulação Numérica de Linha de Transmissão Considerando o Efeito Pelicular

Autor: Omar Mohamed Omar Gatous

Orientador: Prof. Dr. Marcos André da Frota Mattos

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Omar Mohamed Omar Gatous e aprovada pela Comissão Julgadora em 25 / 10 / 1995

*marcos andré da frota mattos*  
Orientador

janeiro 1996

UNIDADE	BC
S. INSCRIÇÃO	T/UNICAMP
N.º	G226s
T.º DE B.	27700
PROG.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 14,00
DATA	23/05/96
N.º CPD	em.00090004-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G226s Gatous, Omar Mohamed Omar  
Simulação numérica de linha de transmissão  
considerando o efeito pelicular / Omar Mohamed Omar  
Gatous.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Marcos André da Frota Mattos.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Compatibilidade eletromagnética. 2. Linhas de  
transmissão. I. Mattos, Marcos André da Frota. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica. III. Título.

Em memória de meus pais.

# Agradecimentos

- A Deus
- Ao Prof. Dr. Marcos André da Frota Mattos.
- Ao CNPq.
- Aos meus amigos Abdalla Ibrahim Elusta, Almabruk Mansur Abugderah, Ali Milad Almugla, Muftah Mohamed Basheer e Ahmed Mohamed Abushaala.
- Aos meus colegas do departamento do sistema e controle de energia (DSCE).

## Resumo

- Foi desenvolvido um modelo computacional para estudo e análise do efeito pelicular em linhas de transmissão no domínio do tempo.
- A consideração do efeito pelicular é obtida a partir da solução da equação de Maxwell para o condutor da linha de transmissão.
- Utilizamos o método numérico de diferenças finitas para analisar as equações do modelo clássico (equações de telegrafista), e as equações do modelo desenvolvido. Nesta análise os valores da tensão ou da corrente do passo seguinte são calculados com base dos valores do passo anterior.
- Os resultados obtidos pelo modelo desenvolvido são comparados com os do modelo clássico, quando neste utilizamos os parâmetros da frequência resistência  $R_w$  e indutância  $L_w$ , e os da corrente contínua resistência  $R_{cc}$  e indutância  $L_{cc}$ .

# Índice

RESUMO	i
AGRADECIMENTOS	ii
ÍNDICE	iii
LISTA DE FIGURAS	vii
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 EFEITO PELICULAR</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução Histórica . . . . .	4
2.2 Distribuição de Densidade de Corrente no Condutor Sólido devido ao Efeito Pelicular . . . . .	6
2.3 Resistência e Indutância Interna de um Condutor Sólido devido ao Efeito Pelicular . . . . .	7
<b>3 MODELO CONTÍNUO CLÁSSICO DA LINHA DE TRANSMISSÃO</b>	<b>9</b>
3.1 Introdução . . . . .	9
3.2 Desenvolvimento das Equações do Modelo . . . . .	10
3.2.1 Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão Sem Perdas	16
3.2.2 Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão Com Perdas	17

<b>4</b>	<b>MODELO NUMÉRICO CLÁSSICO DA LINHA DE TRANSMISSÃO</b>	<b>19</b>
4.1	Introdução . . . . .	19
4.1.1	Primeira etapa . . . . .	19
4.1.2	Segunda etapa . . . . .	19
4.1.3	Terceira etapa . . . . .	20
4.2	Condições de Contorno à Esquerda . . . . .	20
4.2.1	Senoidal . . . . .	20
4.2.2	Pulso Trapezoidal . . . . .	21
4.2.3	Pulso Atmosférico . . . . .	22
4.3	Condições de contorno à direita . . . . .	23
4.4	Região do Meio . . . . .	23
4.5	Esquema de Discretização . . . . .	24
4.5.1	Discretização das Equações das Condições de Contorno à Esquerda .	26
4.5.2	Discretização das Equações das Condições de Contorno à Direita . .	27
4.5.3	Discretização das Equações da Região do Meio . . . . .	29
<b>5</b>	<b>MODELO CONTÍNUO DA LINHA DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO O EFEITO PELICULAR</b>	<b>32</b>
5.1	Introdução . . . . .	32
5.2	Excitação de Condutores Cilíndricos por um Campo Elétrico na Superfície	33
5.3	Solução da Equação de Onda para a Seção Transversal do Condutor Cilíndrico	35
5.3.1	Mudança de Variáveis . . . . .	35
5.3.2	Determinação das Novas Condições Iniciais e Contorno . . . . .	36
5.3.3	Determinação da Solução Parcial $E_1(r, t)$ . . . . .	38
5.3.4	Determinação da Função $g(r, t)$ . . . . .	38
5.3.5	Determinação da Solução Geral . . . . .	38
5.4	Cálculo da Corrente na Seção Transversal de Condutores Cilíndricos . . . .	39

5.5	Desenvolvimento das Equações do Modelo . . . . .	45
5.5.1	Determinação da Intensidade do Campo Elétrico na Superfície . . .	47
5.5.2	Calculo do k-ésimo raiz da função de Bessel $\xi_k$ . . . . .	53
<b>6</b>	<b>MODELO NUMÉRICO DA LINHA DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO O EFEITO PELICULAR</b>	<b>55</b>
6.1	Introdução . . . . .	55
6.1.1	Primeira etapa . . . . .	55
6.1.2	Segunda etapa . . . . .	56
6.1.3	Terceira etapa . . . . .	56
6.2	Condições de Contorno à Esquerda . . . . .	56
6.3	Condições de Contorno à Direita . . . . .	57
6.4	Região do Meio . . . . .	57
6.5	Esquema de Discretização . . . . .	58
6.5.1	Discretização das Equações das Condições de Contorno à Esquerda .	60
6.5.2	Discretização das Equações das Condições de Contorno à Direita: . .	64
6.5.3	Discretização das Equações da Região do Meio . . . . .	68
<b>7</b>	<b>CALCULO DA RESISTÊNCIA E INDUTÂNCIA INTERNA DO CONDUTOR SOLÍDO E CILÍNDRICO</b>	<b>76</b>
7.1	Introdução . . . . .	76
7.2	A Formulação . . . . .	76
7.3	Resultados . . . . .	80
7.4	Observações . . . . .	85
7.5	Conclusões . . . . .	85
<b>8</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>86</b>
8.1	Introdução . . . . .	86



8.2	Simulações . . . . .	88
8.2.1	Senoidal . . . . .	88
8.2.1.1	Caso I . . . . .	89
8.2.1.2	Caso II . . . . .	94
8.2.1.3	Caso III . . . . .	99
8.2.1.4	Caso IV . . . . .	105
8.2.1.5	CASO V . . . . .	110
8.2.1.6	CASO VI . . . . .	116
8.2.2	Pulso Trapezoidal . . . . .	121
8.2.2.1	Caso I . . . . .	121
8.2.2.2	Caso II . . . . .	127
8.2.2.3	Caso III . . . . .	132
8.2.3	Pulso Atmosférico . . . . .	134
8.2.3.1	Caso I . . . . .	134
8.2.3.2	Caso II . . . . .	140
8.2.3.3	Caso III . . . . .	145
8.3	Observações . . . . .	147
8.4	Conclusões . . . . .	148
8.5	Sugestões . . . . .	149

<b>A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA</b>	<b>150</b>
-------------------------------------	------------

<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>155</b>
--------------------	------------

# Lista de Figuras

2.1	<i>Distribuição de densidade de corrente na seção trans. do condutor cilíndrico.</i>	6
2.2	<i>Distribuição de densidade de corrente na seção trans. do condutor retangular.</i>	7
3.1	<i>Linha de Transmissão Ideal.</i>	10
3.2	<i>Configuração de Campo Eletromagnético estático.</i>	11
3.3	<i>Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão sem Perdas.</i>	16
3.4	<i>Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão com Perdas.</i>	17
4.1	<i>Forma do Sinal Senoidal.</i>	21
4.2	<i>Forma do Sinal de Pulso Trapezoidal.</i>	21
4.3	<i>Forma do Sinal de Pulso Atmosférico.</i>	22
4.4	<i>Esquema de Discretização.</i>	24
4.5	<i>Discretização do Condutor da Linha no Espaço.</i>	25
5.1	<i>Condutor Cilíndrico excitado por um campo elétrico na superfície.</i>	33
5.2	<i>Seção Transversal do Condutor Cilíndrico.</i>	40
5.3	<i>Linha de Transmissão Considerando o Efeito Pelicular.</i>	46
5.4	<i>Cofiguração de Campos Eletromagnéticos.</i>	47
6.1	<i>Rede de Esquema de Discretização.</i>	58
6.2	<i>Discretização do Condutor da Linha no Espaço.</i>	59

7.1	<i>Modelo de Admit. Interna Compleza da Seção Trans. do Condutor Cilíndrico.</i>	79
7.2	<i>Resistência devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.</i>	81
7.3	<i>Indutância Int. devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.</i>	81
7.4	<i>Resistência devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.</i>	82
7.5	<i>Indutância Int. devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.</i>	82
7.6	<i>Resistência devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.</i>	83
7.7	<i>Indutância Int. devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.</i>	83
7.8	<i>Resistência Devido ao E. P. de um Condutor Sólido e cilíndrico em 20°C.</i>	84
8.1	<i>Linha de Transmissão Unifilar.</i>	87
8.2	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	90
8.3	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	91
8.4	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	91
8.5	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	92
8.6	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	92
8.7	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	93
8.8	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	95
8.9	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	96
8.10	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	96
8.11	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	97
8.12	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	97
8.13	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	98
8.14	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	101
8.15	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	101
8.16	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	102
8.17	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	102
8.18	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	103

8.19	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	103
8.20	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	106
8.21	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	107
8.22	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	107
8.23	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	108
8.24	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	108
8.25	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	109
8.26	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	112
8.27	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	112
8.28	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	113
8.29	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	113
8.30	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	114
8.31	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	114
8.32	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	117
8.33	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	118
8.34	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	118
8.35	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	119
8.36	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	119
8.37	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	120
8.38	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	123
8.39	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	123
8.40	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	124
8.41	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	124
8.42	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	125
8.43	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	125
8.44	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	128

8.45	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	129
8.46	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	129
8.47	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	130
8.48	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	130
8.49	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	131
8.50	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio e no Final da Linha.</i>	132
8.51	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	133
8.52	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	133
8.53	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	134
8.54	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	136
8.55	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	136
8.56	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	137
8.57	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	137
8.58	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	138
8.59	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	138
8.60	<i>Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.</i>	141
8.61	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	142
8.62	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	142
8.63	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	143
8.64	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.</i>	143
8.65	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.</i>	144
8.66	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.</i>	145
8.67	<i>Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.</i>	146
8.68	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.</i>	146
8.69	<i>Perfil do Sinal de Corrente no Meio e no Final da Linha.</i>	147

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Os equipamentos que compõem os sistemas de energia elétrica e eletrônico, isto é, máquinas elétricas, linhas de transmissão, ligações elétricas e eletrônicas, aparelhos eletrônicos, ...etc, que operam com frequências múltiplas, estão sujeitos a um fenômeno conhecido por efeito pelicular. Este fenômeno, a medida que aumenta a frequência, provoca uma distribuição desuniforme para a densidade de corrente na seção transversal do condutor, causando assim aumento na resistência e diminuição na indutância interna. Para investigar, analisar e simular o efeito pelicular de uma maneira mais adequada, devem ser desenvolvidos modelos computacionais adequados. O objetivo destes modelos é determinar as perdas devido ao efeito pelicular para melhorar o desempenho dos sistemas elétricos e eletrônicos de um modo geral.

Há muitos anos o efeito pelicular atraiu o interesse de muitos pesquisadores. Neste tempo vários modelos e estudos foram apresentados. Em linhas de transmissão, em particular, o estudo do efeito pelicular pode ser considerado recente. Em 1957, R. L. Wigington e N. S. Nahman apresentaram um estudo das perdas devido ao efeito pelicular no domínio da frequência. Neste estudo foi utilizado o método da transformada de Laplace, onde as referidas perdas foram representadas pela raiz quadrada ideal da frequência [26]. Em 1964, C. L. Bertin apresentou um estudo para as linhas de transmissão no domínio da frequência através de computadores [27].

Em 1967, A. J. Miersch, A. E. Ruehli, A. J. Gruodis e C. W. Ho propuseram dois modelos. No primeiro, as perdas devido ao efeito pelicular de cada seção da linha de transmissão foram modeladas por uma série de combinações de circuitos as quais consistem de resistores e indutores [28]. No segundo modelo os indutores foram substituídos por curto circuitos, representando assim a linha de transmissão sem perdas [29].

Também, em 1967, F. H. Branin aplicou o método de características para ana-

lisar a linha de transmissão sem perdas no domínio do tempo [30]. Este método, posteriormente, foi estendido para as linhas de transmissão com perdas constantes e dependentes da frequência por H. W. Dommel em 1969 [31], e por A. J. Gruodis em 1979 [32].

Em 1980, A. J. Gruodis, C. S. Chang apresentaram uma análise transitória para as linhas de transmissão com as perdas devido ao efeito pelicular. Nesta análise foram comparadas as ondas observada e simulada no final da linha de transmissão [33].

Em 1982, C. S. Yen, Z. Fazarine e R. L. Wheeler apresentaram um estudo compreensivo para análise de linhas de transmissão no domínio do tempo. Nesta análise a linha de transmissão é dividida em várias seções, onde cada seção consiste em resistores e indutores derivados diretamente das equações diferenciais do efeito pelicular para simular as perdas devido ao efeito pelicular [7].

Neste trabalho apresentamos um modelo computacional com uma finalidade exclusiva para estudo e análise do efeito pelicular em linhas de transmissão no domínio do tempo. A consideração do efeito pelicular, para desenvolver este modelo, é obtida a partir da solução da equação de Maxwell para os condutores da linha de transmissão. Em consequência de desenvolvimento deste modelo, apresentamos também uma nova metodologia muito simples para calcular a resistência e a indutância interna de um condutor sólido e circular devido ao efeito pelicular. Esta metodologia apresentou resultados boas e semelhantes em comparação com a metodologia que está sendo utilizada para a mesma finalidade [25]. Também apresentamos o modelo clássico da linha de transmissão com a finalidade de comparação.

Por meio do método numérico, "Time-Domain Finite-Difference" (TD-FD), o conjunto das equações que formam o modelo desenvolvido é aproximado por discretizações de acordo com as condições de contorno da linha de transmissão. As equações discretizadas formam um algoritmo em Fortran. Este algoritmo é elaborado de um modo que possa ser utilizado para calcular, simultaneamente, as tensões e correntes induzidas ao longo da linha a partir de um dado sinal aplicado no início. Este mesmo procedimento é aplicado para o conjunto das equações do modelo clássico.

Com o objetivo de provar a eficiência e a validade do modelo desenvolvido, são realizadas várias simulações, usando vários tipos de sinais (senoidal, trapezoidal, pulso atmosférico ...etc). Com estas simulações, os resultados obtidos pelo modelo desenvolvido são comparados com os do modelo clássico, quando este último utiliza os parâmetros da frequência  $R_\omega$  e  $L_\omega$ , e os da corrente contínua  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ .

O capítulo 2 apresenta uma introdução histórica do efeito pelicular em linhas de transmissão, além disso, apresenta uma explicação sobre o seu significado físico e o seu efeito sobre a resistência e a indutância interna de condutor.

O capítulo 3 apresenta o desenvolvimento das equações do modelo clássico da linha de transmissão.

O capítulo 4 apresenta a solução numérica para as equações do modelo clássico da linha de transmissão desenvolvidas no capítulo anterior utilizando a técnica numérica "time-domain finite-difference" (TD-FD).

O capítulo 5 apresenta o desenvolvimento das equações do modelo da linha de transmissão considerando o efeito pelicular.

O capítulo 6 apresenta a solução numérica para as equações do modelo desenvolvidas no capítulo anterior utilizando a técnica numérica "time-domain finite-difference" (TD-FD).

O capítulo 7 apresenta uma metodologia simples para calcular a resistência e a indutância interna de um condutor sólido devido ao efeito pelicular.

O capítulo 8 apresenta os resultados e as observações, conclusões e sugestões a respeito destes resultados.



## Capítulo 2

# EFEITO PELICULAR

### 2.1 Introdução Histórica

Classicamente, existem dois tipos de problemas geralmente abordados no estudo do efeito pelicular:

- fio cilíndrico sólido ou tubo, de comprimento infinito e reto
- placa plana e infinita.

O problema do efeito pelicular tem sido, ao longo dos anos, um motivo de preocupação e estudo de vários pesquisadores. No caso de estudo do efeito pelicular nas linhas de transmissão, vários modelos e métodos foram desenvolvidos e apresentados conforme a referência [7].

Em 1957, o estudo das perdas do efeito pelicular nas linhas de transmissão no domínio da frequência foram analisadas por Wiginton e Nahman utilizando o método de transformada de Laplace. Foi considerado, neste estudo clássico, que as perdas do efeito pelicular dependiam da raiz quadrada ideal da frequência, além disso foi considerada a impedância característica como uma terminação da linha. Em 1964, o estudo das linhas de transmissão no domínio da frequência através de computadores foi feita por Bertin. Nesse método, inicialmente calcula-se o ganho e a mudança de fase para cada componente de frequência contida na onda de entrada, juntando-se esses componentes, em seguida, para formar a resposta no domínio do tempo. O método no domínio da frequência não é adequado para análise transitória, visto que este método fornece apenas respostas em regime permanente para formas de ondas repetitivas, além disso ele introduz ruído "ripple" na forma de onda de saída.

Uma aproximação diferente foi utilizada para análise no domínio do tempo, chamada método de características. Este método inicialmente foi aplicado para as linhas de transmissão sem perdas por Branin em 1967 e posteriormente foi estendido para as linhas de transmissão com perdas constantes no domínio da frequência por Dommel em 1969, e por Gruodis em 1979. A utilidade desse método está limitada às frequências baixas onde as perdas do efeito pelicular podem ser desprezadas.

Para análise transitória de linhas de transmissão com perdas do efeito pelicular, um método simples, freqüentemente usado, inclui a forma de onda no final da linha de transmissão sem perdas. A linha de transmissão sem perdas é usada para simular o atraso, e a forma de onda da rede é usada para gerar a forma de onda da saída. Quando a simulação for realizada, a rede pode produzir uma semelhança muito próxima entre as formas de onda simulada e observada, sob dadas condições. Todavia, este método para análise de linha de transmissão é limitado, pois ele não fornece informações sobre a forma de onda ao longo da linha, somente no final. Além disso, esse método não tem base formal para projetar a forma de onda de redes consideradas e não há definição clara na relação entre os elementos de circuito e a geometria da linha de transmissão.

Em 1967, dois modelos foram propostos por Miersch, Ruehi, Gruodis e Ho. No primeiro, as perdas do efeito pelicular de cada seção da linha de transmissão foram modeladas por uma série de combinações de circuitos que consistem de resistores e indutores. No segundo, os indutores foram substituídos por curto-circuitos, representando assim a linha de transmissão sem perdas. Estes modelos junto com o programa de análise de circuito são bastante adequados para análise transitória de linhas de transmissão curtas. Para as linhas de transmissão longas o número de nós pode passar de milhares, o que torna a aplicação dos dois modelos difícil.

Para análise transitória de linhas de transmissão no domínio do tempo com perdas do efeito pelicular foi apresentado um estudo conveniente para os computadores do tipo "desk-top" por Chu Sun Yen, Zvonko Fazarinc e Richard L. Wheeler, em 1982. Nesta análise, a linha de transmissão foi dividida em  $N$  seções, onde cada seção tem um circuito equivalente consistindo de  $M$  resistores e  $M - 1$  indutores para simular as perdas do efeito pelicular. Estes circuitos equivalentes e as equações da linha de transmissão foram resolvidos usando o método implícito de integração de Euler.

## 2.2 Distribuição de Densidade de Corrente no Condutor Sólido devido ao Efeito Pelicular

A distribuição uniforme da densidade de corrente na seção transversal de um condutor sólido de qualquer forma só ocorre quando este transporta uma corrente contínua. No caso de corrente alternada e com o aumento da frequência, a não uniformidade da distribuição da densidade de corrente torna-se mais acentuada aumentando a diferença entre as densidades nas diferentes regiões da seção transversal. Para o condutor sólido de geometria cilíndrica, a densidade de corrente sempre tem uma tendência de ficar mais acentuada nas partes da periferia longe do eixo do condutor. Nas frequências muito altas o efeito torna-se mais pronunciado e a densidade de corrente se concentra fora, nas partes externas (pele do condutor). Daí o termo "efeito pelicular". Figura 2.1 mostra a distribuição da densidade de corrente na seção transversal do condutor sólido e cilíndrico na corrente contínua e em frequência muito alta (milhões de Hz).

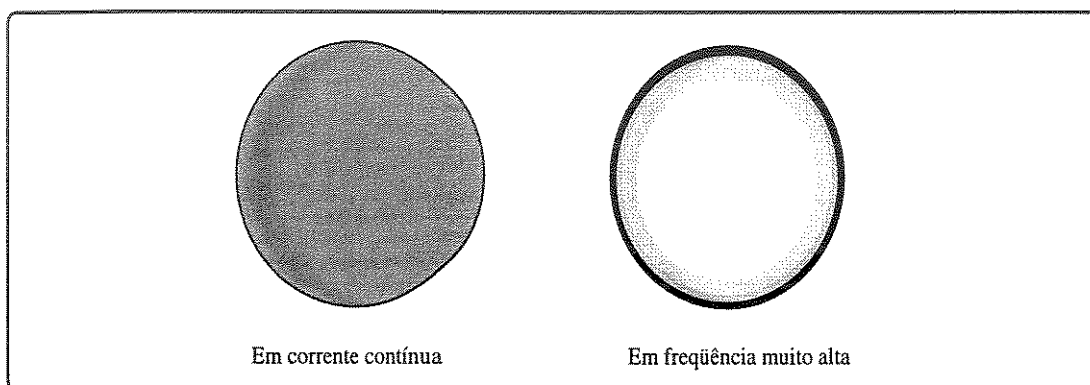


Figura 2.1: *Distribuição de densidade de corrente na seção trans. do condutor cilíndrico.*

Para o condutor retangular tipo "strap", a densidade de corrente é mais alta nas extremidades do condutor. Daí o termo "efeito de extremidade" ter sido sugerido. Entretanto, o termo genérico "efeito pelicular" sempre foi usado para todos os casos do fenômeno. Figura 2.2 mostra a distribuição da densidade de corrente na seção transversal do condutor sólido retangular na corrente contínua e em frequência muito alta (milhões de Hz).

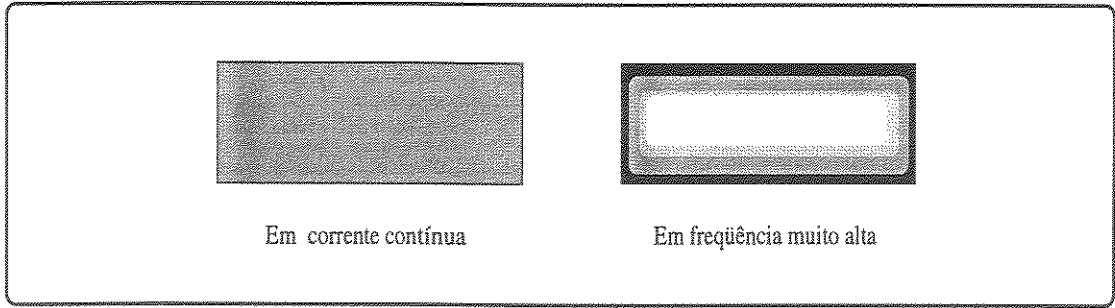


Figura 2.2: Distribuição de densidade de corrente na seção trans. do condutor retangular.

### 2.3 Resistência e Indutância Interna de um Condutor Sólido devido ao Efeito Pelicular

Um condutor de uma área de seção transversal  $A$  de geometria qualquer, feito de material isotrópico homogêneo de condutividade  $\sigma$  mhos por metro, apresenta uma resistência por unidade de comprimento na frequência zero (resistência em corrente contínua) dada por:

$$R_{cc} = \frac{1}{\sigma A} \quad \Omega/m. \quad (2.1)$$

O mesmo condutor, apresenta indutância total por unidade de comprimento definida como o fluxo magnético total  $\Psi$ , banhando a unidade de comprimento do condutor quando transporta a corrente unitária. A indutância interna, que faz parte da indutância total, é causada pela corrente com o fluxo magnético interno  $\psi_{in}$ , banhando a unidade de comprimento do interior do próprio condutor. Esta indutância, designada como  $L_{in}$  em unidades de Henries por metro, para um condutor transportando uma corrente contínua  $I$ , geralmente é dada por:

$$L_{in} = \frac{\psi_{in}}{I} \quad H/m. \quad (2.2)$$

Para um condutor cilíndrico sólido de seção transversal de raio  $R$  e transportando uma corrente contínua  $I$ , a indutância interna pode ser avaliada e sempre tem, independentemente do raio do condutor, o seguinte valor:

$$L_{cc} = \frac{\mu}{8\pi} = 5 \times 10^{-08} \quad H/m. \quad (2.3)$$

Onde ( $\mu$ ) é a permeabilidade, em henries por metro, do material.

A não uniformidade da distribuição da densidade de corrente que ocorre na seção transversal em frequências altas, como foi explicado no ítem anterior, é causada pelo efeito pelicular. Este fato faz com que, com aumento da frequência, a resistência do condutor de qualquer forma ou material aumente acentuada e continuamente, enquanto a indutância interna diminui continuamente.

## Capítulo 3

# MODELO CONTÍNUO CLÁSSICO DA LINHA DE TRANSMISSÃO

### 3.1 Introdução

Este capítulo apresenta o desenvolvimento do modelo clássico da linha de transmissão. Este é o modelo mais simples utilizado, no domínio do tempo, nos estudos e análises de linhas de transmissão. O principal responsável pelo desenvolvimento matemático contínuo das equações deste modelo foi o cientista **Oliver Heaviside**. Estas equações são conhecidas como equações de telegrafista.

Dos princípios básicos da teoria eletromagnético uma corrente que circula num determinado condutor de uma linha de transmissão gera um campo magnético ortogonal ao sentido desta corrente. E se o condutor for considerado uniforme e ideal, não existe campo elétrico propagando na direção da corrente, existindo apenas no sentido ortogonal. Com estas características, diz-se que a linha suporta uma onda modo **TEM (Transvers Eletromagnetic)**. Este tipo de onda eletromagnética é conhecido como a onda que não tem nem campo elétrico e nem campo magnético no sentido de propagação.

A partir da configuração dos campos eletromagnéticos estáticos gerados, e se o meio dielétrico (meio em que está o condutor) for considerado ideal, o conjunto das equações do modelo clássico ideal (modelo sem perdas) pode ser desenvolvido. A primeira equação deste modelo é desenvolvida a partir da relação entre o campo elétrico e a tensão, aplicando-se a lei de Farady. A segunda é desenvolvida a partir da relação entre o campo magnético e a corrente, aplicando-se a lei de Amper.

O modelo clássico com perdas pode ser obtido acrescentando-se ao conjunto das

equações do modelo clássico ideal a queda de tensão devido as perdas do condutor e a corrente de condução.

### 3.2 Desenvolvimento das Equações do Modelo

Seja uma linha de transmissão constituída de um condutor cilíndrico, uniforme e ideal, situado ao longo da coordenada  $z$  acima de uma terra ideal. A linha está ligada a uma fonte de um gerador de sinais de um lado e a uma carga no outro, como esta a figura 3.1 mostra.

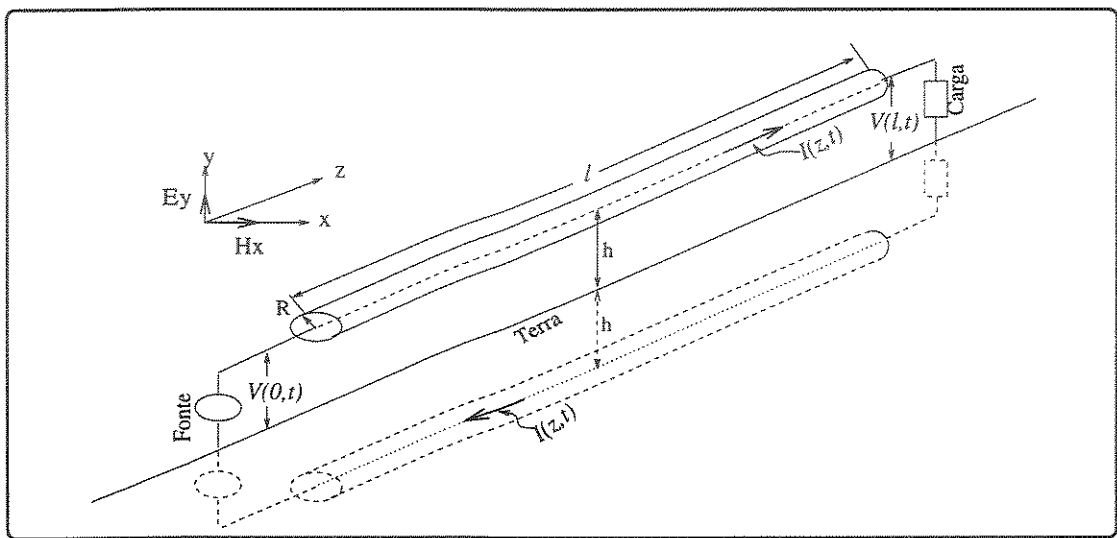


Figura 3.1: *Linha de Transmissão Ideal.*

Onde:

- $l$  é o comprimento da linha,
- $h$  é a altura da linha acima da terra,
- $R$  é o raio do condutor,
- $I(z, t)$  a corrente,
- $V(0, t)$  a tensão no início da linha,
- $V(l, t)$  a tensão no final da linha.

Dos estudos básicos do eletromagnetismo, o campo eletromagnético estático, gerado devido a circulação da corrente, esta distribuído como mostra a figura 3.2.

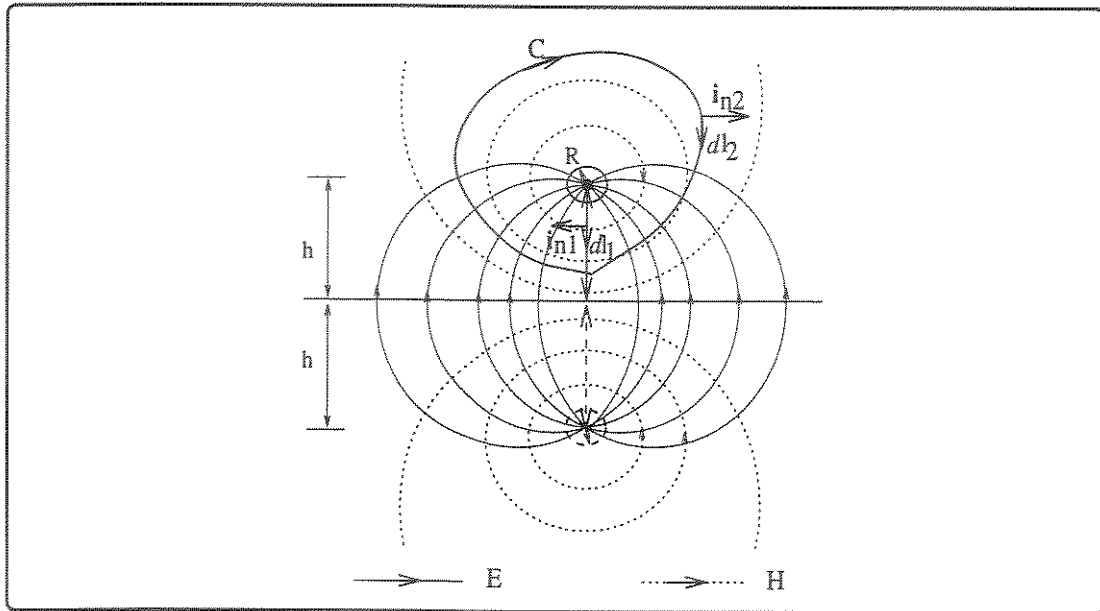


Figura 3.2: *Configuração de Campo Eletromagnético estático.*

Este campo eletromagnético estático pode ser definido pelas seguintes funções:

$$\mathbf{E} = E_x(x, y, z, t)\mathbf{i}_x + E_y(x, y, z, t)\mathbf{i}_y = \mathbf{E}_{xy}(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H} = H_x(x, y, z, t)\mathbf{i}_x + H_y(x, y, z, t)\mathbf{i}_y = \mathbf{H}_{xy}(x, y, z, t) \quad (3.2)$$

De acordo com a configuração mostrada na figura 3.2, o vetor Poynting  $S = E \times H$  é no sentido positivo  $z$  de modo que a potência flui no condutor no mesmo sentido (Assim, a possibilidade para transmitir a potência, por meio desta linha, existe). Portanto, a primeira equação do modelo representa a relação entre o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e a tensão aplicada. Esta relação pode ser deduzida a partir da equação de Maxwell para o rotacional de  $\mathbf{E}$  nas regiões interna e externa do condutor. Assim, esta equação, numa forma reduzida é dada por:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Em coordenadas retangulares a equação 3.3 toma a seguinte forma:



$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \\ & \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \mathbf{i}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \mathbf{i}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para uma onda se propagando na direção  $z$ , os componentes da equação 3.4 que poderão contribuir são:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{i}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{i}_y = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \mathbf{i}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \mathbf{i}_y \quad (3.5)$$

Tomando o produto vetorial com o vetor unitário  $\mathbf{i}_z$  para os dois lados desta equação 3.5, obtém-se a seguinte equação:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{i}_x = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times B_{xy}) \quad (3.6)$$

Ou:

$$\frac{\partial E_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times B_{xy}) \quad (3.7)$$

Realizando-se a integração da linha  $d\mathbf{l}_1$ , para os dois lados da equação 3.7, do ponto  $0$  no nível da terra até o ponto  $h$  no centro do condutor, teremos:

$$\int_0^h \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times B_{xy}) \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (3.8)$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_{xy} \cdot d\mathbf{l}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_{xy} \cdot (\mathbf{i}_z \times d\mathbf{l}_1) \quad (3.9)$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_{xy} dl_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_{xy} \cdot \mathbf{i}_{n_1} dl_1, \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{i}_{n_1}$  é o vetor unitário normal ao  $d\mathbf{l}_1$  conforme mostrado na figura 3.2. A integral no lado esquerdo desta equação 3.10 é simplesmente o negativo da tensão  $V(z, t)$  entre o condutor e a terra no plano em que a integral da linha  $d\mathbf{l}_1$  é avaliada desde que o campo magnético não tem o componente  $z$ . A integral no lado direito é interpretada como o fluxo magnético  $\Phi$  por unidade de comprimento na direção  $z$ , acoplado o condutor, se o condutor é considerado portador de uma corrente contínua  $I(z, t)$ , cruzando o plano que contenha o caminho entre o centro do condutor e a sua imagem. Assim, teremos:

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Este fluxo magnético  $\Phi$  é composto do fluxo magnético interno  $\phi_{in}$  para a região interna e o fluxo magnético externo  $\phi_{ex}$  para a região externa. Substituindo-se estes dois fluxos na equação 3.11 tem-se:

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{in} + \phi_{ex}). \quad (3.12)$$

Como foi mencionado, o condutor é percorrido por uma corrente contínua  $I(z, t)$ , portanto, de acordo com a definição da indutância, os fluxos magnéticos interno e externo são dados por:

$$\phi_{in} = L_{in}I(z, t) \quad (3.13)$$

$$\phi_{ex} = L_{ex}I(z, t) \quad (3.14)$$

Substituindo estas expressões na equação 3.12, obtém-se:

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = [L_{in} + L_{ex}] \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Introduzindo-se  $L_o$  como a soma das indutâncias interna  $L_{in}$  e externa  $L_{ex}$ , a equação 3.15 pode ser escrita na seguinte forma:

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = L_o \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Ou:

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = L_o \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Esta equação é uma das equações básicas do modelo da linha de transmissão sem perdas. A segunda equação do modelo representa a relação entre o campo magnético  $\mathbf{H}$  e a corrente que flui no centro do condutor no sentido positivo  $z$ . Esta relação pode ser deduzida a partir da equação de Maxwell para o rotacional de  $\mathbf{H}$  na região externa do condutor. Assim, esta equação, numa forma reduzida, é dada por:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.18)$$

A densidade de corrente de condução  $\mathbf{J}$  é nula, pois, nesta região ( $\sigma = 0$ ). Em coordenadas retangulares, a equação 3.18 toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \\ & \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z = \frac{\partial D_x}{\partial t} \mathbf{i}_x + \frac{\partial D_y}{\partial t} \mathbf{i}_y + \frac{\partial D_z}{\partial t} \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para uma onda propagando na direção  $z$ , os componentes desta equação 3.19, que poderão contribuir são:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{i}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{i}_y = \frac{\partial D_x}{\partial t} \mathbf{i}_x + \frac{\partial D_y}{\partial t} \mathbf{i}_y \quad (3.20)$$

Tomando o produto vetorial, para os dois lados desta equação 3.20, com o vetor unitário  $\mathbf{i}_z$ , tem-se:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times D_{xy}). \quad (3.21)$$

Ou:

$$-\frac{\partial H_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times D_{xy}). \quad (3.22)$$

Realizando-se a integração da linha  $d\mathbf{l}_2$ , para os dois lados da equação 3.22, em volta do caminho fechado  $C$  que circunda o condutor, teremos:

$$-\oint_C \frac{\partial H_{xy}}{\partial z} \cdot dl_2 = \oint_C \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times D_{xy}) \cdot dl_2. \quad (3.23)$$

Ou:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \oint_C H_{xy} \cdot dl_2 = \frac{\partial}{\partial t} \oint_C D_{xy} \cdot (dl_2 \times \mathbf{i}_z). \quad (3.24)$$

Ou:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \oint_C H_{xy} dl_2 = \frac{\partial}{\partial t} \oint_C D_{xy} \cdot \mathbf{i}_{n2} dl_2, \quad (3.25)$$

onde  $\mathbf{i}_{n2}$  é o vetor unitário normal ao  $dl_2$  do caminho fechado  $C$  como mostrado na figura 3.2. A integral no lado esquerdo desta equação 3.25 é simplesmente a corrente  $I(z, t)$  no sentido positivo  $z$  no condutor, ou a mesma corrente no sentido negativo  $z$  na sua imagem, cruzando o plano em que o caminho fechado  $C$  situado desde que o campo elétrico não tem a componente  $z$ . A integral no lado direito é interpretada como a carga  $Q$  por unidade de comprimento na superfície do condutor. Esta carga em magnitude é igual ao fluxo de deslocamento por unidade de comprimento na direção  $z$  do condutor, desde que a tensão entre o condutor e a terra é uma tensão contínua  $V(z, t)$  no plano que contenha o caminho  $C$ . Assim, teremos:

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.26)$$

De acordo com a definição de capacitância a carga é:

$$Q = C_o V(z, t) \quad (3.27)$$

Substituindo-se esta expressão na equação 3.26, teremos:

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = C_o \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (3.28)$$

Ou:

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (3.29)$$

Esta equação, junto com a equação 3.17 completam o conjunto das relações de tensão e corrente formando o modelo da linha de transmissão sem perdas (ideal). Nestas equações, as indutâncias (interna e externa) e a capacitância por unidade de comprimento são os parâmetros da linha de transmissão calculados em condições estáticas. Estes parâmetros dependem da geometria geral da linha de transmissão e do tipo do material do condutor usado.

### 3.2.1 Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão Sem Perdas

Nas equações do modelo da linha de transmissão sem perdas desenvolvidas no item anterior, as tensões e correntes ao longo da linha estão relacionadas pelos seguintes parâmetros distribuídos: indutância e capacitância por unidade de comprimento. Estas equações do modelo podem ser encontradas no circuito equivalente mostrado na figura 3.3, no qual foi considerado um comprimento  $dz$ . Este comprimento tem uma indutância  $L_o dz$  e uma capacitância  $C_o dz$ . Portanto, a queda de tensão para este comprimento é então igual ao produto dessa indutância pela taxa de variação de corrente no instante de tempo ( $t$ ). A corrente que passa por este comprimento é igual ao produto da capacitância pela taxa de variação de tensão no instante de tempo ( $t$ ).

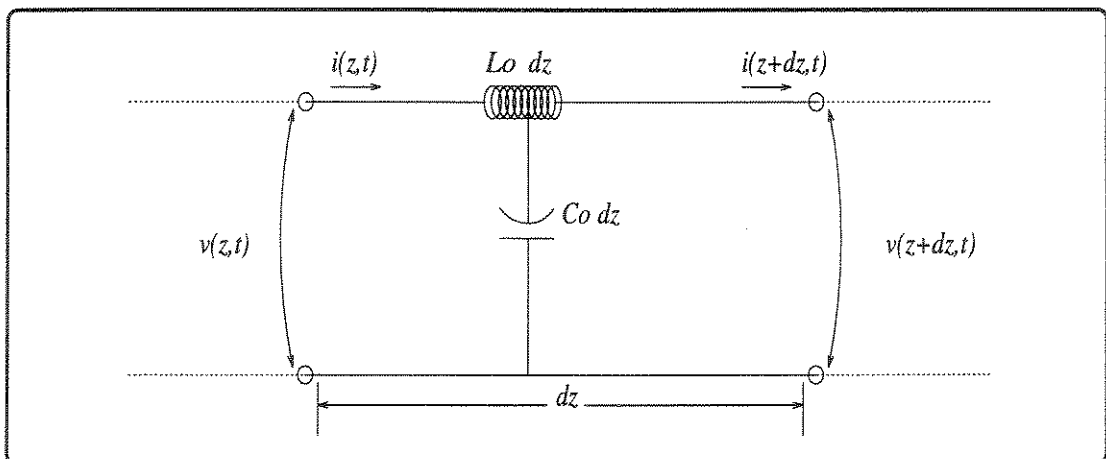


Figura 3.3: Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão sem Perdas.

### 3.2.2 Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão Com Perdas

Se a linha de transmissão não for ideal, mas seus condutores tiverem uma certa resistência  $R_o$  por unidade de comprimento, e o dielétrico tiver uma certa condutância  $G_o$  por unidade de comprimento, devem-se acrescentar estes parâmetros ao modelo da linha de transmissão sem perdas. Assim, de forma análoga, as equações do modelo da linha de transmissão com perdas podem ser desenvolvidas e serão encontradas na seguinte forma:

$$-\frac{\partial}{\partial z}v(z, t) = R_o i(z, t) + L_o \frac{\partial}{\partial t}i(z, t). \quad (3.30)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}i(z, t) = G_o v(z, t) + C_o \frac{\partial}{\partial t}v(z, t). \quad (3.31)$$

Nestas equações do modelo da linha de transmissão com perdas, as tensões e correntes ao longo da linha estão relacionadas pelos seguintes parâmetros distribuídos: resistência, indutância, condutância e capacitância, por unidade de comprimento. Essas equações do modelo podem ser encontradas no circuito equivalente mostrado na figura 3.4, no qual é considerado um comprimento  $dz$ . Este comprimento tem uma resistência  $R_o dz$ , uma indutância  $L_o dz$ , uma condutância  $G_o dz$  e uma capacitância  $C_o dz$ . Portanto, a queda de tensão para este comprimento é então igual ao produto da indutância pela taxa de variação de corrente no instante de tempo ( $t$ ), mais o produto da resistência corrente no mesmo instante de tempo. E a corrente que passa por este comprimento é igual ao produto da capacitância pela taxa de variação de tensão no instante de tempo ( $t$ ), mais o produto da condutância pela tensão no mesmo instante de tempo.

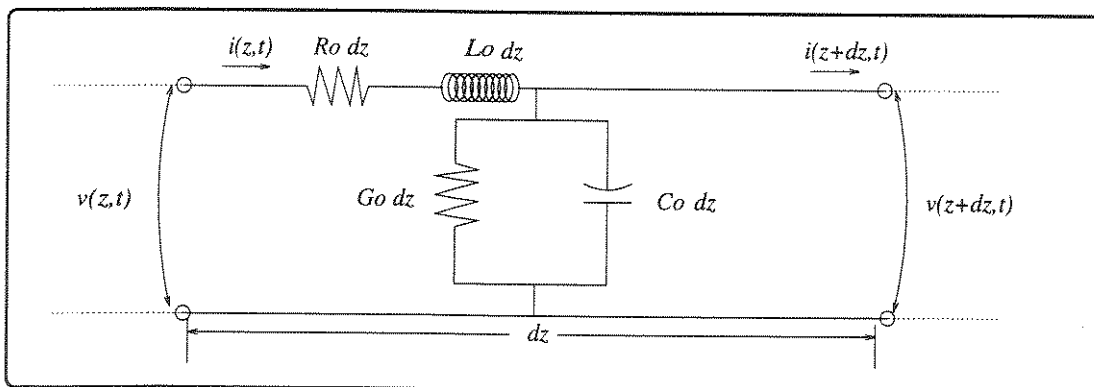


Figura 3.4: Circuito Equivalente do Modelo da Linha de Transmissão com Perdas.

As equações 3.30 e 3.31 podem ser escritas de uma outra forma mais conveniente como a seguir:

$$L_o \frac{\partial}{\partial t} i(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} v(z, t) + R_o i(z, t) = 0 \quad (3.32)$$

$$C_o \frac{\partial}{\partial t} v(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} i(z, t) + G_o v(z, t) = 0. \quad (3.33)$$

Nestas equações  $R_o$ ,  $L_o$ ,  $G_o$  e  $C_o$  são os parâmetros genéricos da linha de transmissão e são respectivamente: resistência, indutância, condutância e capacitância por unidade de comprimento. Estes parâmetros são, usualmente, determinados em condições estáticas pelos materiais e dimensões dos condutores da linha e do meio envolvente, e são invariáveis em relação ao tempo, as tensões e correntes da linha. No caso de uma linha de transmissão com perdas mínimas, diz-se que a linha suporta uma onda eletromagnética quase **TEM**.

A solução numérica simultânea das equações 3.32 e 3.33 permite fazer estudos e análises, no domínio do tempo, do comportamento de sinais de corrente ou tensão transmitidos ao longo de uma linha de transmissão. Estes estudos e análises podem ser feitos sob influência de quaisquer perdas, por exemplo, as perdas da corrente contínua. No próximo capítulo, apresenta-se o modelo numérico destes equações.

## Capítulo 4

# MODELO NUMÉRICO CLÁSSICO DA LINHA DE TRANSMISSÃO

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta o modelo numérico das equações do modelo clássico da linha de transmissão desenvolvidas no capítulo anterior. Estas são equações diferenciais, parciais, de primeira ordem. A sua solução numérica é muito simples, e pode ser obtida usando uma técnica relativa e fácil. Esta técnica conhecida por "time-domain finite-difference" (TD-FD). Assim, a solução pode ser feita nas seguintes etapas:

#### 4.1.1 Primeira etapa

Distribuir as equações do modelo ao longo da linha de transmissão em três partes da seguinte maneira:

- Condições de contorno à esquerda (transmissão);
- Condições de contorno à direita (recepção);
- Região do meio (a própria linha de transmissão).

#### 4.1.2 Segunda etapa

Usando-se um esquema de discretização baseado na técnica numérica mencionada anteriormente, as derivadas das equações das condições de contorno à esquerda, à



direita e a região do meio serão aproximadas por várias discretizações de diferenças finitas. O condutor da linha, também, é discretizado no espaço.

### 4.1.3 Terceira etapa

Baseando-se na forma final discretizada para as equações das condições de contorno à esquerda, à direita e da região do meio. Daíelaborado um programa computacional em Fortran.

## 4.2 Condições de Contorno à Esquerda

Como condições no início da linha, são consideradas como um sinal arbitrário de tensão instantânea  $v(0, t)$  aplicada e uma corrente instantânea  $i(0, t)$  induzida. Deste modo, estas condições de contorno podem ser formalizadas por equações, com base nas equações do modelo, para  $z = 0$  e o tempo  $t > 0$  como a seguir:

$$v(0, t) = v_s(t) \quad (4.1)$$

$$L_o \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(0, t)}{\partial z} + R_o i(0, t) = 0, \quad (4.2)$$

onde  $v_s(t)$  representa o sinal arbitrário fornecido pelo gerador de sinais ligado à linha. Nos itens à seguir serão apresentados os tipos de sinais que serão usados para as simulações.

### 4.2.1 Senoidal

Geralmente este sinal é aplicado nas linhas de potência com freqüências de 50 ou 60 Hertz. Nas linhas de telecomunicações com freqüências que variam de milhares a milhões de Hertz, e nas linhas de sinais que utilizam as freqüências muito altas, acima de milhões de Hertz. A forma deste sinal é mostrada na figura 4.1.

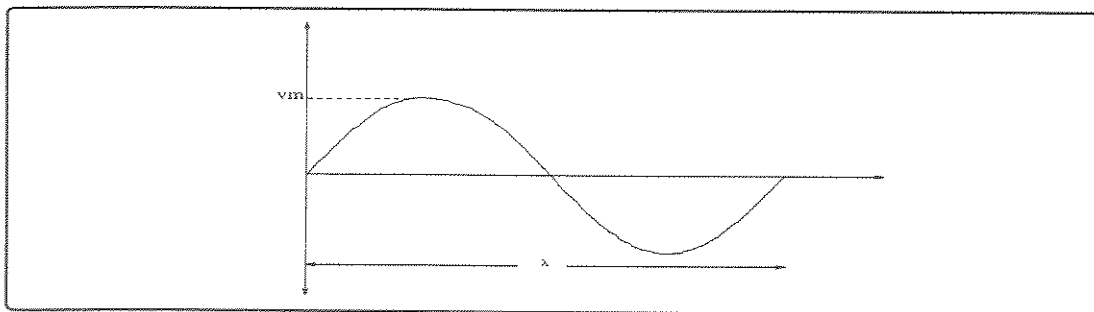


Figura 4.1: *Forma do Sinal Senoidal.*

Onde  $v_m$  e  $\lambda$  são, respectivamente, a amplitude e o comprimento que caracterizam este tipo de sinal, e é assim definido:

$$v_s(t) = v_m \text{sen}(\omega t). \quad (4.3)$$

- $\omega = 2\pi f$ ;
- $f$  é a frequência.

#### 4.2.2 Pulso Trapezoidal

Este sinal, geralmente encontrado nos computadores, tem a seguinte forma mostrada na figura 4.2.

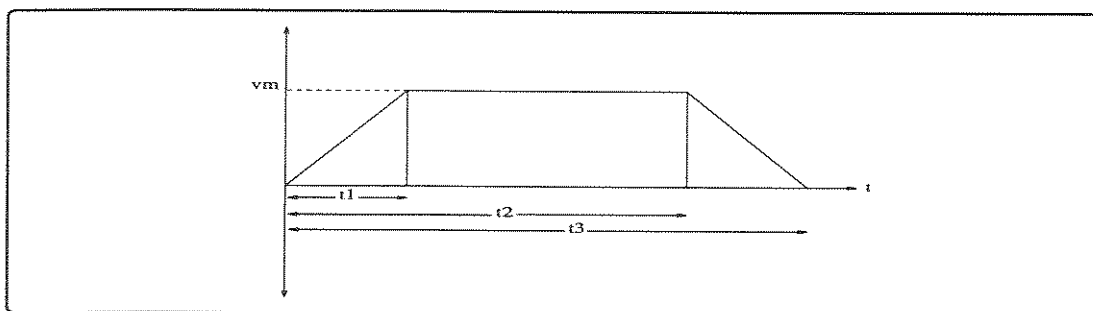


Figura 4.2: *Forma do Sinal de Pulso Trapezoidal.*

Onde,  $v_m$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  são, respectivamente, a amplitude e os tempos que caracterizam este tipo de sinal, e é definido pela seguinte função:



### 4.3 Condições de contorno à direita

Estas condições de contorno à direita, como condição de fim de linha, dependem do tipo de terminação da linha. Para análise e estudo da influência dos parâmetros da resistência e da indutância interna sobre o comportamento de um sinal viajando ao longo de uma linha de transmissão sem a influência do sinal refletido, não importa o tipo de terminação. Assim, será considerada uma terminação resistiva (linha casada). Com a influência do sinal refletido, a terminação será considerada como de circuito aberto ou de curto circuito. Deste modo, estas condições de contorno, no caso de linha casada ou de circuito aberto, podem ser formalizadas por equações que relacionam as tensões  $v(l, t)$  e correntes  $i(l, t)$ , induzidas no final da linha para  $z = l$ , e o tempo  $t > 0$ , com base nas equações do modelo como a seguir:

$$C_o \frac{\partial v(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial i(l, t)}{\partial z} + G_o v(l, t) = 0 \quad (4.6)$$

$$i(l, t) = v(l, t)/Z_c. \quad (4.7)$$

No caso de terminação com curto circuito, estas equações de contorno podem tomar a seguinte forma:

$$L_o \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} + R_o i(z, t) = 0 \quad (4.8)$$

$$v(l, t) = i(l, t) * Z_c \quad (4.9)$$

Onde:

$Z_c$  é a impedância da carga.

### 4.4 Região do Meio

Esta região é a própria linha de transmissão. Portanto, as equações desta região, que relacionam as tensões  $v(z, t)$  e correntes  $i(z, t)$  induzidas ao longo da linha para  $0 < z < l$  e o tempo  $t > 0$ , podem ser formalizadas com base nas equações do modelo como a seguir:

$$C_o \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + G_o v(z,t) = 0 \quad (4.10)$$

$$L_o \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + R_o i(z,t) = 0. \quad (4.11)$$

## 4.5 Esquema de Discretização

Este esquema de discretização como é mostrado na figura 4.4, é baseado em um plano composto de uma rede de pontos no espaço entrelaçados com pontos no tempo. Os pontos do espaço são representados pelo subíndice ( $j$ ) e os do tempo pelo subíndice ( $n$ ).

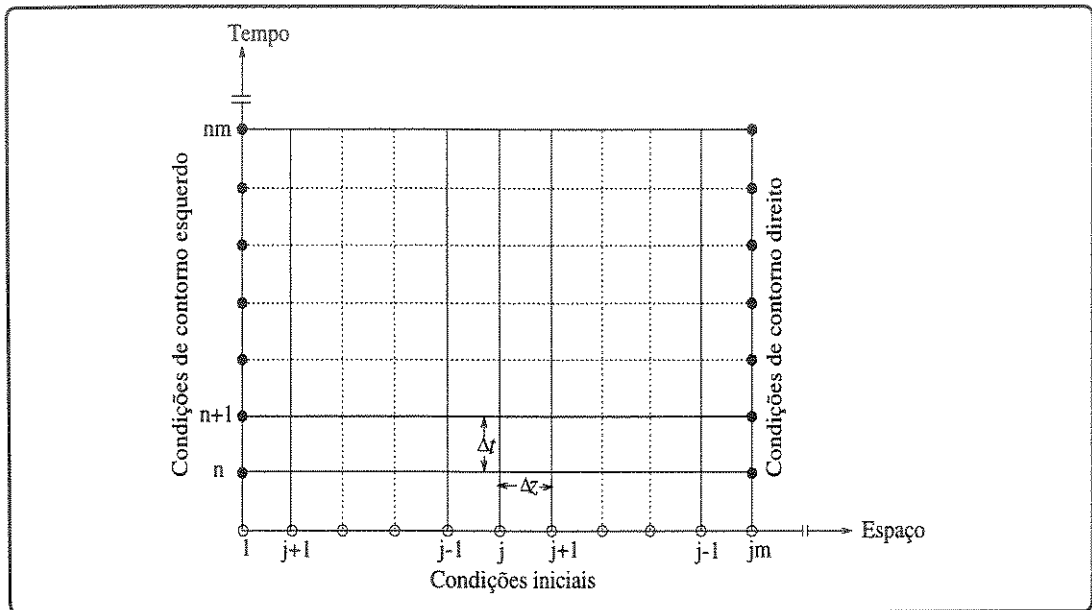


Figura 4.4: *Esquema de Discretização.*

Neste esquema, as correspondentes condições iniciais e de contorno à esquerda e à direita são mostradas.

De acordo com este esquema, o condutor da linha de transmissão é discretizado no espaço como está mostrado na figura 4.5.

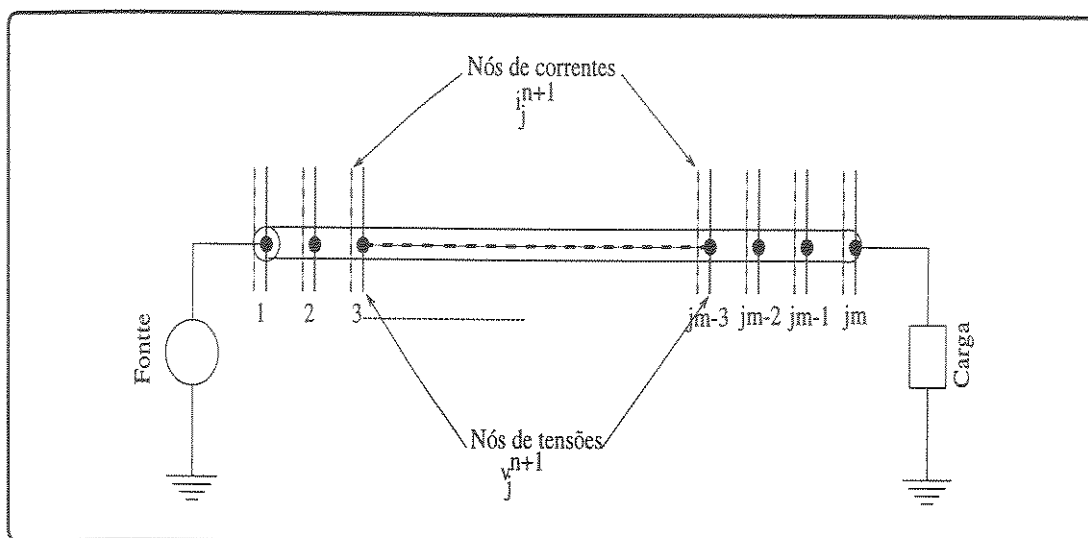


Figura 4.5: *Discretização do Condutor da Linha no Espaço.*

Nesta discretização dois grupos de nós são impostos:

- As tensões  $v_j^{n+1}$ ,
- As correntes  $i_j^{n+1}$ .

As posições destes nós são alteradas ao longo de comprimento do condutor da linha.

Usando-se as definições feitas anteriormente pelo esquema de discretização, e as seguintes notações:

$$z_j = j\Delta z \quad ; \quad t_n = n\Delta t \quad (4.12)$$

e

$$v(z, t) = v_j^{n+1} \quad ; \quad i(z, t) = i_j^{n+1}, \quad (4.13)$$

as aproximações das derivadas para a tensão e a corrente com discretização adiantada, central e atrasada em função do espaço, podem ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial z} \approx \frac{i_{j+1}^{n+1} - i_j^{n+1}}{\Delta z} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial z} \approx \frac{i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial z} \approx \frac{i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} \quad (4.16)$$

A aproximação da derivada adiantada para a tensão e a corrente em função do tempo pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial t} \approx \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \quad (4.17)$$

Assim, as equações que formam as condições de contorno à esquerda, à direita e da região do meio podem ser discretizadas como mostram os itens à seguir.

#### 4.5.1 Discretização das Equações das Condições de Contorno à Esquerda

As equações que formam estas condições serão as primeiras a serem discretizadas.

A equação 4.1 pode ser discretizada explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = 1$  como segue:

$$v_j^{n+1} = v_s^{n+1}. \quad (4.18)$$

A equação 4.2 pode ser discretizada por uma diferença adiantada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = 1$  da seguinte maneira:

$$L_o \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} + R_o \cdot i_j^{n+1} = 0. \quad (4.19)$$

Multiplicando por  $\Delta t$ , e evidenciando-se em  $i_j^{n+1}$  teremos:

$$(L_o + \Delta t R_o) \cdot i_j^{n+1} = L_o \cdot i_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot [v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}]. \quad (4.20)$$

Seja:

$$K2 = (L_o + \Delta t R_o)^{-1}. \quad (4.21)$$

Multiplicando a equação 4.20 por esta expressão teremos:

$$i_j^{n+1} = K2L_o.i_j^n - \frac{K2\Delta t}{\Delta z} [v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}]. \quad (4.22)$$

Agora sejam:

$$K1 = K2L_o; \quad (4.23)$$

$$R1 = \frac{K2\Delta t}{\Delta z}. \quad (4.24)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 4.22, obtemos:

$$i_j^{n+1} = K1.i_j^n - R1 [v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}]. \quad (4.25)$$

Assim, para estas condições de contorno, as equações 4.18 e 4.25 representam a forma final discretizada para o uso de programação.

#### 4.5.2 Discretização das Equações das Condições de Contorno à Direita

As equações que formam estas condições de contorno, no caso de uma terminação resistiva ou de uma terminação de circuito aberto, podem ser discretizadas da seguinte maneira.

A equação 4.6 pode ser discretizada com uma diferença atrasada explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = jm$  a seguinte maneira:

$$C_o \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} + G_o.v_j^{n+1} = 0. \quad (4.26)$$

Multiplicando por  $\Delta t$  e evidenciando-se em  $v_j^{n+1}$  teremos:

$$(C_o + \Delta t G_o).v_j^{n+1} = C_o.v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} [i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.27)$$

Seja:

$$M2 = (C_o + \Delta t G_o)^{-1}. \quad (4.28)$$



Multiplicando a equação 4.27 por esta expressão teremos:

$$v_j^{n+1} = M2C_o \cdot v_j^n - \frac{M2\Delta t}{\Delta z} [i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.29)$$

Agora sejam:

$$M1 = M2C_o; \quad (4.30)$$

$$L1 = \frac{M2\Delta t}{\Delta z}. \quad (4.31)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 4.29, teremos:

$$v_j^{n+1} = M1 \cdot v_j^n - L1 \cdot [i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.32)$$

A equação 4.7 pode ser discretizada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = jm$  como segue:

$$i_j^{n+1} = v_j^{n+1} / Z_c \quad (4.33)$$

As equações que formam estas condições de contorno, no caso de uma terminação com curto circuito, podem ser discretizadas da maneira que segue.

A equação 4.8 pode ser discretizada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = jm$  da seguinte maneira:

$$L_o \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} + R_o \cdot i_j^{n+1} = 0. \quad (4.34)$$

Multiplicando por  $\Delta t$  e evidenciando-se em  $i_j^{n+1}$  teremos:

$$(L_o + \Delta t R_o) \cdot i_j^{n+1} = L_o \cdot i_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot [v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.35)$$

Seja:

$$K2 = (L_o + \Delta t R_o)^{-1}; \quad (4.36)$$

Multiplicando a equação 4.35 por esta expressão teremos:

$$i_j^{n+1} = K2L_o.i_j^n - \frac{K2\Delta t}{\Delta z} [v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.37)$$

Agora seja:

$$K1 = K2L_o; \quad (4.38)$$

$$R1 = \frac{K2\Delta t}{\Delta z}. \quad (4.39)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 4.37, teremos:

$$i_j^{n+1} = K1.i_j^n - R1. [v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.40)$$

A equação 4.9 pode ser discretizada explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = jm$  como:

$$v_j^{n+1} = i_j^{n+1} * Z_o \quad (4.41)$$

Assim, para estas condições de contorno, as equações 4.32, 4.33, 4.40 e 4.41 representam a forma final discretizada para o uso de programação.

### 4.5.3 Discretização das Equações da Região do Meio

As equações que formam esta região podem ser discretizadas do seguinte modo.

A equação 4.10 pode ser discretizada com uma diferença central explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = 2, 3, ..jm - 1$  da seguinte maneira:

$$C_o \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + G_o.v_j^{n+1} = 0. \quad (4.42)$$

Multiplicando por  $\Delta t$  e evidenciando-se em  $v_j^{n+1}$  teremos:

$$(C_o + \Delta t G_o).v_j^{n+1} = C_o.v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta z} [i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.43)$$

Seja:

$$M2 = (C_o + \Delta t G_o)^{-1}. \quad (4.44)$$

Multiplicando a equação 4.43 por esta expressão teremos:

$$v_j^{n+1} = M2 C_o \cdot v_j^n - \frac{M2 \Delta t}{2 \Delta z} \cdot [i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.45)$$

Agora sejam:

$$M1 = M2 C_o; \quad (4.46)$$

$$L2 = \frac{M2 \Delta t}{2 \Delta z}. \quad (4.47)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 4.45, tem-se:

$$v_j^{n+1} = M1 \cdot v_j^n - L2 \cdot [i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.48)$$

A equação 4.11 pode ser discretizada por uma diferença central explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = 2, 3, \dots, j_m - 1$  da seguinte maneira:

$$L_o \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta z} + R_o \cdot i_j^{n+1} = 0. \quad (4.49)$$

Multiplicando por  $\Delta t$  e evidenciando-se em  $i_j^{n+1}$  teremos:

$$(L_o + \Delta t R_o) \cdot i_j^{n+1} = L_o \cdot i_j^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta z} \cdot [v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.50)$$

Seja:

$$K2 = (L_o + \Delta t R_o)^{-1}. \quad (4.51)$$

Multiplicando a equação 4.50 por esta expressão teremos:

$$i_j^{n+1} = K2 L_o \cdot i_j^n - \frac{K2 \Delta t}{2 \Delta z} \cdot [v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.52)$$

Agora sejam:

$$K1 = K2L_o; \quad (4.53)$$

$$R2 = \frac{K2\Delta t}{2\Delta z}. \quad (4.54)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 4.52, obtém-se:

$$i_j^{n+1} = K1.i_j^n - R2. [v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}]. \quad (4.55)$$

Assim, para a região do meio, as equações 4.48 e 4.55 representam a forma final para o uso de programação.

Tomando como base as equações das condições de contorno à esquerda, à direita e da região do meio na sua forma discretizada para o uso de programação foi elaborado um programa computacional com objetivo de simulações.

## Capítulo 5

# MODELO CONTÍNUO DA LINHA DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO O EFEITO PELICULAR

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de um novo modelo para a linha de transmissão considerando o efeito pelicular. Este modelo será utilizado nos estudos e análises do referido efeito, no domínio do tempo.

Como foi mencionado no capítulo 3, um dos princípios básicos da teoria eletromagnética é que uma corrente que circula num determinado condutor de uma linha de transmissão gera um campo magnético estático ortogonal ao sentido desta corrente. E se o condutor for considerado não ideal, além do campo elétrico gerado ortogonal a esta corrente, existe um campo elétrico na superfície do condutor propagando na mesma direção da corrente. Com estas características diz-se que a linha suporta uma onda modo quase **TEM** (**Transvers Electromagnetic**). Este tipo de onda é caracterizado por um campo elétrico fraco propagando no sentido positivo da corrente e não tem campo magnético no sentido de propagação.

A existência do campo elétrico na superfície do condutor permite formular a equação do Maxwell para o condutor em função deste campo elétrico. A solução desta equação, para a seção transversal, permite calcular a corrente levando em conta o efeito pelicular

A partir da configuração dos campos eletromagnéticos estáticos gerados e resultando a equação de Maxwell para o condutor considerando-se o meio dielétrico (meio em

que está o condutor) não ideal, o conjunto das equações deste modelo pode ser desenvolvido. A primeira equação será considerada a expressão da corrente obtida, em função do campo elétrico na superfície do condutor, pela solução da equação de Maxwell onde este campo elétrico pode ser determinado a partir da relação entre o campo elétrico e a tensão aplicando-se a lei de Farady. A segunda pode ser desenvolvida a partir da relação do campo magnético e a corrente aplicando-se a lei de Amper.

## 5.2 Excitação de Condutores Cilíndricos por um Campo Elétrico na Superfície

Considere-se um condutor de uma linha de transmissão, cilíndrico, uniforme e infinito, situado ao longo da coordenada  $z$  com uma corrente  $I(z, t)$  fluindo no sentido positivo  $z$ . Assumindo que este condutor não seja ideal:

A partir da consideração de um condutor não ideal, isto é, que apresente uma certa resistência, existe um campo elétrico na sua superfície propagando ao longo do condutor no mesmo sentido da corrente como é mostrado na figura 5.1.

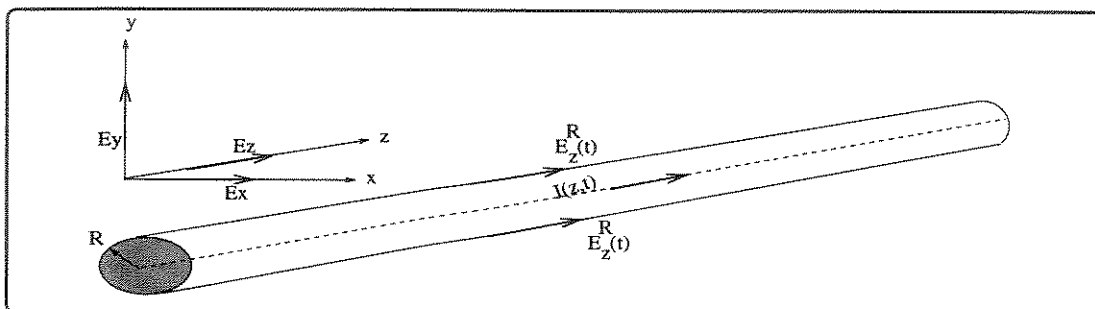


Figura 5.1: Condutor Cilíndrico excitado por um campo elétrico na superfície.

Assim, a formulação matemática da equação de onda em função deste campo elétrico torna-se possível. Lembrando-se que a equação geral de Maxwell para uma onda eletromagnética propagando no espaço livre é dada por:

$$\nabla^2 E = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

para esta onda eletromagnética, propagando num meio bom condutor onde a condutividade  $\sigma$  é muito maior do que a permissividade  $\epsilon$ , a equação 5.1 toma a seguinte forma:

$$\nabla^2 E = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (5.2)$$

Esta equação, dada na forma acima, é conhecida como a Equação de Difusão devido a sua semelhança formal com as equações que surgem em problemas de difusão de calor. Portanto, ela pode ser usada para determinar a distribuição de intensidade do campo elétrico na seção transversal de condutores de qualquer estrutura geométrica, e, conseqüentemente, a densidade de corrente pode ser determinada. Para a geometria cilíndrica, a formulação matemática da equação 5.2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, \phi, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi, z, t)}{\partial \phi^2} \\ + \frac{\partial^2 E_z(r, \phi, z, t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_z(r, \phi, z, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para determinar a intensidade do campo elétrico em qualquer ponto na seção transversal do condutor, a formulação matemática da equação 5.3 para a componente longitudinal do campo elétrico pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 E_z(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial t} = 0. \quad (5.4)$$

Onde:

$$\gamma^2 = \sqrt{\mu\sigma}. \quad (5.5)$$

Para os seguintes intervalos:

$$r \in (0, R) \quad ; \quad t \in (0, \infty). \quad (5.6)$$

As condições iniciais são:

$$E_z(r, 0) = 0, \quad (5.7)$$

As condições de contorno são:

$$E_z(R, t) = E_z^R(t), \quad (5.8)$$

onde  $E_z^R(t)$  é a componente no eixo  $\mathbf{z}$  da intensidade do campo elétrico na superfície.

### 5.3 Solução da Equação de Onda para a Seção Transversal do Condutor Cilíndrico

Supondo-se que  $E_z(r, t)$  é a solução geral da equação 5.4 definida pela seguinte função:

$$E_z(r, t) = E_z^R(t) + g(r, t). \quad (5.9)$$

Esta função é introduzida para fazer uma mudança de variáveis. Com esta mudança de variáveis é possível determinar as novas condições iniciais e de contorno para obter a solução parcial da equação 5.4.

#### 5.3.1 Mudança de Variáveis

Substituindo-se a função dada pela equação 5.9 na equação 5.4, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \{E_z^R(t) + g(r, t)\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{E_z^R(t) + g(r, t)\} - \\ \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} \{E_z^R(t) + g(r, t)\} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{\partial g(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t} \right\} = 0. \quad (5.11)$$

Rearranjando-se:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\} = -\frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t}. \quad (5.12)$$

Substituindo-se as condições iniciais e de contorno da equação 5.4 na função dada pela equação 5.9, teremos as condições iniciais e de contorno desta equação como segue:

As condições iniciais são:



$$g(r, 0) = 0, \quad (5.13)$$

As condições de Contorno são:

$$g(R, 0) = 0. \quad (5.14)$$

### 5.3.2 Determinação das Novas Condições Iniciais e Contorno

Supondo-se que a função  $g(r, t)$  é uma solução para a equação 5.12 que é definida por:

$$g(r, t) = \int_0^t E_1(r, t - \tau) \cdot \chi(\tau) d\tau. \quad (5.15)$$

onde a função  $E_1(r, t)$  é uma solução parcial da equação 5.4, e  $\chi(t)$  é defenida como uma função qualquer.

Portanto, se:

$$L(g_1) = \frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\}. \quad (5.16)$$

As derivadas desta equação podem ser escritas como:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} = E_1(r, 0) \cdot \chi(t) + \int_0^t \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial t} \cdot \chi(\tau) d\tau; \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial r} = \int_0^t \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \cdot \chi(\tau) d\tau; \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 E_1(r, t - \tau)}{\partial r^2} \cdot \chi(\tau) d\tau. \quad (5.19)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 5.16, obtém-se:

$$\begin{aligned}
L(g_1) &= E_1(r, 0) \cdot \chi(t) + \int_0^t \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \chi(\tau) d\tau - \\
&\int_0^t \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 E_1(r, t - \tau)}{\partial r^2} + \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \right\} \cdot \chi(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Logo:

$$L(g_1) = E_1(r, 0) \cdot \chi(t) + \int_0^t \left[ \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 E_1(r, t - \tau)}{\partial r^2} + \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \right\} \right] \cdot \chi(\tau) d\tau.$$

Como  $E_1(r, t)$  é a solução parcial da equação 5.4 definida anteriormente, então o valor da integral da equação 5.21 deve ser nulo para qualquer valor dos parâmetros. Assim, teremos:

$$L(g_1) = E_1(r, 0) \cdot \chi(t). \tag{5.21}$$

Substituindo-se a equação 5.16 nesta equação obtém-se:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\} = E_1(r, 0) \cdot \chi(t). \tag{5.22}$$

Selecionando-se:

$$E_1(r, 0) = -1 \quad ; \quad r \in [0, R]. \tag{5.23}$$

Então a equação 5.22 toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) \right\} = -\chi(t). \tag{5.24}$$

Assim, a equação 5.23 deve ser considerada como as novas condições iniciais que podem ser aceitas pela equação 5.4 para determinar a sua solução parcial  $E_1(r, t)$ . Logicamente, as novas condições de contorno que poderiam ser aceitas pela mesma equação devem ser dadas por:

$$E_1(R, t) = 0 \quad ; \quad t \in (0, \infty). \tag{5.25}$$

### 5.3.3 Determinação da Solução Parcial $E_1(r, t)$

A determinação da solução parcial  $E_1(r, t)$  da equação 5.4 com as novas condições iniciais 5.23 e de contorno 5.24 é escrita no apêndice [A], tendo como resultado final a seguinte equação:

$$E_1(r, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\frac{\xi_k}{R}r\right)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \exp\left(-\frac{\xi_k^2\gamma^2(t)}{R^2}\right). \quad (5.26)$$

### 5.3.4 Determinação da Função $g(r, t)$

Para determinar a função  $g(r, t)$ , é evidentemente de equações 5.12 e 5.24 que:

$$\chi(t) = \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t}. \quad (5.27)$$

Substituindo-se esta equação junto com a equação 5.26 na equação 5.15 teremos:

$$g(r, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\frac{\xi_k}{R}r\right)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2\gamma^2(t-\tau)}{R^2}\right) \cdot \frac{dE_z^R(t)}{dt} d\tau. \quad (5.28)$$

### 5.3.5 Determinação da Solução Geral

Finalmente, a solução geral da equação 5.4 pode ser determinada retomando-se a função introduzida dada pela equação 5.9, que pode ser reescrita como segue:

$$E_z(r, t) = E_z^R(t) + g(r, t). \quad (5.29)$$

Substituindo-se a equação 5.28 nesta equação teremos:

$$E_z(r, t) = E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\frac{\xi_k}{R}r\right)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2\gamma^2(t-\tau)}{R^2}\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t} d\tau. \quad (5.30)$$

Onde:

$$r \in (0, R) \quad ; \quad t \in (0, \infty). \quad (5.31)$$

Se:

$$x = \frac{r}{R}, \quad (5.32)$$

a equação 5.30, em função de  $x$ , toma a seguinte forma:

$$E_z(x, t) = E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0(\xi_k x)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 (t - \tau)}{R^2}\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t} d\tau. \quad (5.33)$$

Onde:

$$x \in [0, 1] \quad ; \quad t \in [0, \infty], \quad (5.34)$$

e  $\xi_k$  késima raiz da função de Bessel,  $J_0(x) = 0$ .

A equação 5.33, como solução geral da equação 5.4, representa a distribuição de intensidade do campo elétrico na seção transversal do condutor sólido de geometria cilíndrica.

## 5.4 Cálculo da Corrente na Seção Transversal de Condutores Cilíndricos

Considere-se a seção transversal do condutor cilíndrico como se mostra na figura 5.2. Se a frequência aplicada for considerada suficientemente baixa, a corrente fica uniformemente distribuída na área da seção transversal.

Nesta seção, seja um elemento de raio  $r$  e de espessura  $dr$ . A densidade de corrente neste elemento é  $J_z(r, t)$ . Assim, em termos de densidade, a corrente nas paredes do elemento é dada por:

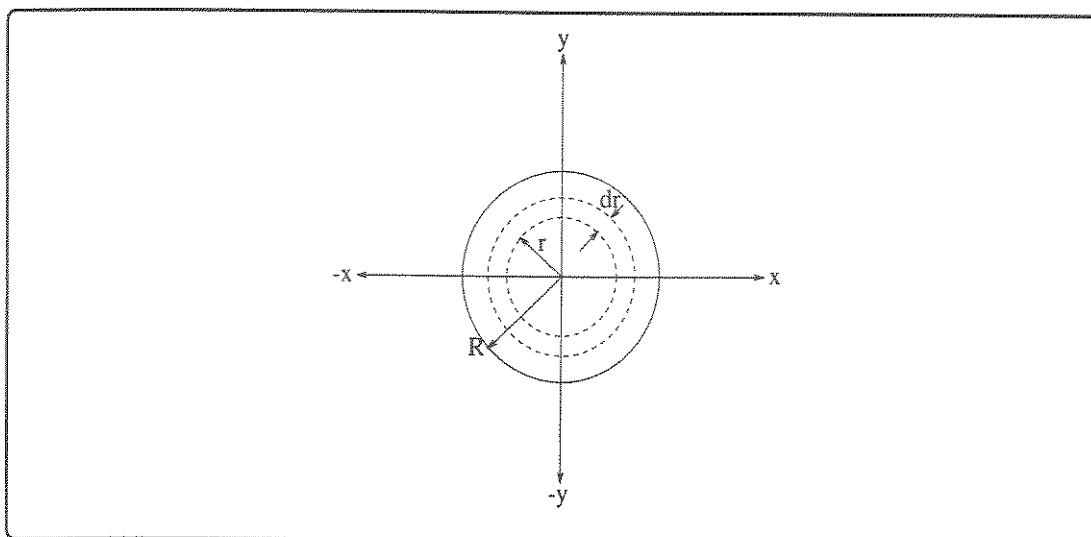


Figura 5.2: *Seção Transversal do Condutor Cilíndrico.*

$$i(t) = 2\pi r J_z(r, t) dr. \quad (5.35)$$

Para o cilindro  $r$  a corrente é dada por:

$$i(t) = 2\pi \int_0^r J_z(r, t) r dr. \quad (5.36)$$

E para o cilindro  $R$  (raio do condutor), a corrente é dada por:

$$i(t) = 2\pi \int_0^R J_z(r, t) r dr. \quad (5.37)$$

Como foi definido, se:

$$x = \frac{r}{R}, \quad (5.38)$$

as seguintes mudanças devem ser feitas:

- quando  $r = 0 \longrightarrow x = 0$ ;
- quando  $r = R \longrightarrow x = 1$ .

Assim, a equação 5.37 em função de  $x$  pode ser escrita como segue:

$$i(t) = 2\pi R^2 \int_0^1 J_z(x, t) x dx. \quad (5.39)$$

De acordo com a lei de Ohm, para um bom condutor com uma condutividade especificada  $\sigma$ , a relação entre a densidade da corrente  $\mathbf{J}$  e o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é, geralmente, dada por:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5.40)$$

Para o condutor considerado, esta relação pode ser escrita por:

$$J_z(x, t) = \sigma E_z(x, t). \quad (5.41)$$

Substituindo-se esta equação na equação 5.39, teremos:

$$i(t) = 2\pi R^2 \int_0^1 \sigma E_z(x, t) x dx. \quad (5.42)$$

Finalmente, a corrente na seção transversal de condutores cilíndricos pode ser obtida substituindo a equação 5.33 na equação 5.42 como a seguir:

$$i(t) = 2\pi\sigma R^2 \int_0^1 \left\{ E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_o(\xi_k x)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 (t-\tau)}{R^2}\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right\} x dx. \quad (5.43)$$

Logo:

$$i(t) = 2\pi\sigma R^2 \left[ \int_0^1 E_z^R(t) x dx - \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_o(\xi_k x)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 (t-\tau)}{R^2}\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right\} x dx \right]. \quad (5.44)$$

Evidentemente, a primeira parte de integral da equação 5.44 fornece o seguinte resultado:

$$\int_0^1 E_z^R(t) x dx = \frac{1}{2} E_z^R(t) \quad (5.45)$$

A segunda parte pode ser escrita na seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{J_1(\xi_k) \xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 (t-\tau)}{R^2}\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \times \int_0^1 x J_0(\xi_k x) dx. \quad (5.46)$$

Seja a seguinte propriedade da função de Bessel:

$$\int_0^x x J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) \} \quad (5.47)$$

A integral, em função de  $x$ , da equação 5.46 toma a seguinte forma:

$$\int_0^1 x J_0(\xi_k x) dx = \frac{J_1(\xi_k)}{\xi_k}. \quad (5.48)$$

Assim, a segunda parte pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\xi_k^2} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 (t-\tau)}{R^2}\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau. \quad (5.49)$$

Substituindo-se as expressões 5.48 e 5.49 na equação 5.44 obtém-se:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[ E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 (t-\tau)}{R^2}\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right]. \quad (5.50)$$

Esta equação representa o resultado final do cálculo da corrente na seção transversal de condutor cilíndrico de raio  $\mathbf{R}$ , obtida em função do campo elétrico  $E_z^R(t)$  na superfície.

Numa forma mais conveniente a equação 5.50 pode ser escrita como:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[ E_z^R(t) - \int_0^t h(t-\tau) \cdot \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right]. \quad (5.51)$$

Onde:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2(t)}{R^2}\right). \quad (5.52)$$

Aplicando-se o teorema de convolução, a equação 5.51 pode ser escrita na seguinte forma:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[ E_z^R(t) - h(t) * \frac{d}{dt} E_z^R(t) \right]. \quad (5.53)$$

Também pode ser escrita na seguinte forma:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[ E_z^R(t) - \left\{ \frac{d}{dt} h(t) \right\} * E_z^R(t) \right]. \quad (5.54)$$

Se:

$$h'(t) = \frac{d}{dt} h(t) \quad (5.55)$$

Então:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[ E_z^R(t) - h'(t) * E_z^R(t) \right]. \quad (5.56)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \pi \sigma R^2 \left[ \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} - \mathcal{L}\{h'(t)\} \cdot \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} \right]. \quad (5.57)$$

Logo:



$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \pi\sigma R^2 \left[ \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} - \{s\mathcal{L}\{h(t)\} - h(0)\} \cdot \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} \right]. \quad (5.58)$$

Como foi definido anteriormente:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2(t)}{R^2}\right). \quad (5.59)$$

Assim:

$$h(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2}. \quad (5.60)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 5.58, teremos:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \pi\sigma R^2 \left[ \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} - \left\{ s\mathcal{L}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2(t)}{R^2}\right) \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \right\} \cdot \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} \right]. \quad (5.61)$$

Portanto:

$$I(s) = \pi\sigma R^2 \left[ E_z^R(s) - \left\{ s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \right\} \cdot E_z^R(s) \right]. \quad (5.62)$$

Logo:

$$I(s) = \pi\sigma R^2 \left[ E_z^R(s) + \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + s} \cdot E_z^R(s) \right]. \quad (5.63)$$

Aplicando-se a inversa de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \pi\sigma R^2 \left[ \mathcal{L}^{-1}\{E_z^R(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + s}\right\} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{E_z^R(s)\} \right]. \quad (5.64)$$

Logo:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[ E_z^R(t) + \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right) * E_z^R(t) \right]. \quad (5.65)$$

Esta equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[ E_z^R(t) + f(t) * E_z^R(t) \right]. \quad (5.66)$$

Reconvoluindo-se:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[ E_z^R(t) + \int_0^t f(t-\tau) \cdot E_z^R(\tau) d\tau \right]. \quad (5.67)$$

Onde:

$$f(t) = \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right). \quad (5.68)$$

A equação 5.67 pode ser usada em vários tipos de análises elétricas e eletrônicas. Uma das possibilidades é o desenvolvimento de um modelo computacional para linha de transmissão. Este modelo poderá ser utilizado nos estudos e análises no domínio do tempo em linhas de transmissão levando em conta o efeito pelicular. O desenvolvimento das equações deste modelo será tratado nos próximos itens. Uma outra possibilidade, através da aplicação das transformadas de Laplace e Fourier, é a obtenção de uma expressão exata para a admitância complexa interna do condutor cilíndrico, por unidade de comprimento. Esta possibilidade será tratada no capítulo 7.

## 5.5 Desenvolvimento das Equações do Modelo

Considere uma linha de transmissão constituída de um condutor cilíndrico e uniforme, situado ao longo da coordenada  $z$  acima de uma terra considerada ideal. Assumindo-se que o condutor não seja ideal, e que a linha está ligada a uma fonte de um gerador de sinais de um lado e a uma carga no outro, como mostra a figura 5.3.

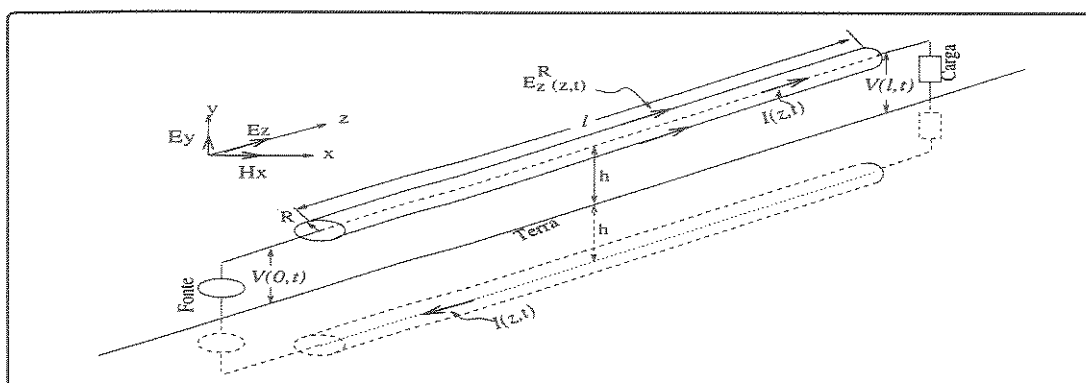


Figura 5.3: *Linha de Transmissão Considerando o Efeito Pelicular.*

Onde:

- $l$  é o comprimento da linha,
- $h$  é a altura da linha acima da terra,
- $R$  é o raio do condutor,
- $I(z, t)$  é a corrente no condutor,
- $V(0, t)$  é a tensão no início da linha,
- $V(l, t)$  é a tensão no final da linha,
- $E_z^R(z, t)$  é o campo elétrico na superfície do condutor.

Dos estudos básicos do eletromagnetismo, os campos eletromagnéticos estáticos gerados sobre esta linha de transmissão são distribuídos como mostra a Figura 5.4.

Estes campos eletromagnéticos estáticos podem ser definidos pelas seguintes funções:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x(x, y, z, t)\mathbf{i}_x + E_y(x, y, z, t)\mathbf{i}_y + E_z(x, y, z, t)\mathbf{i}_z \\ &= \mathbf{E}_{xy}(x, y, z, t) + E_z(z, t)\mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\mathbf{H} = H_x(x, y, z, t)\mathbf{i}_x + H_y(x, y, z, t)\mathbf{i}_y = \mathbf{H}_{xy}(x, y, z, t) \quad (5.70)$$

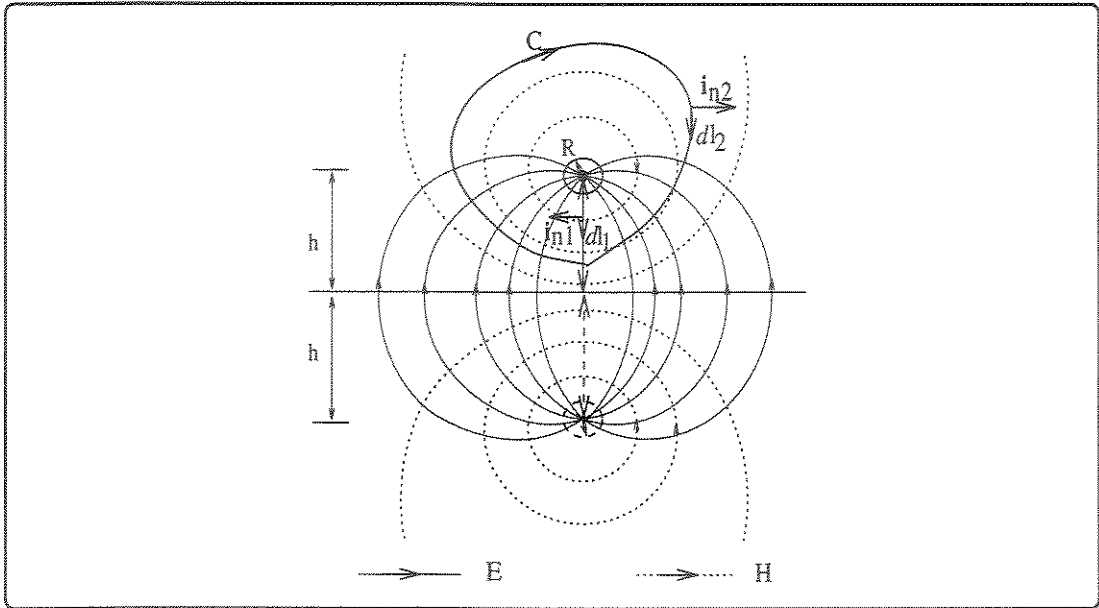


Figura 5.4: *Cofiguração de Campos Eletromagnéticos.*

De acordo com a configuração mostrada na Figura 5.4, o vetor Poynting ( $S = E \times H$ ) é no sentido positivo  $z$  de modo que a potência flui no condutor no mesmo sentido. Assim, a possibilidade para transmitir a potência, por meio desta linha, existe. Portanto, a primeira equação do modelo, com base da equação 5.67 obtida anteriormente pela solução da equação de onda para a seção transversal, pode ser escrita como a seguir:

$$E_z^R(z, t) - \frac{1}{\pi\sigma R^2} i(z, t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot E_z^R(z, \tau) d\tau = 0. \quad (5.71)$$

Onde  $E_z^R(z, t)$  é a intensidade do campo elétrico na superfície ao longo do condutor da linha de transmissão será determinada no próximo item.

### 5.5.1 Determinação da Intensidade do Campo Elétrico na Superfície

A intensidade do campo elétrico  $E_z^R(z, t)$  pode ser determinada a partir da equação de Maxwell para o rotacional de  $\mathbf{E}$  na região externa do condutor. Assim, a equação de Maxwell para o rotacional de  $\mathbf{E}$  numa forma reduzida é dada por:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.72)$$

Em coordenadas retangulares, esta equação toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \\ & \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \mathbf{i}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \mathbf{i}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (5.73)$$

Para uma onda se propagando na direção  $z$ , os componentes desta equação que poderão contribuir são:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i}_x - \frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{i}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{i}_y = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \mathbf{i}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \mathbf{i}_y \quad (5.74)$$

Tomando-se o produto vetorial, para os dois lados desta equação 5.74, com o vetor unitário  $\mathbf{i}_z$ , obtém-se:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i}_y - \frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{i}_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{i}_x = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times B_{xy}) \quad (5.75)$$

Ou:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{i}_x - \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times B_{xy}) \quad (5.76)$$

Realizando-se a integração da linha  $d\mathbf{l}_1$ , para os dois lados desta equação 5.76, do ponto  $0$  no nível da terra até o ponto  $h$  na superfície do condutor, teremos:

$$\int_0^h \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i}_y \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_0^h \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{i}_x \cdot d\mathbf{l}_1 - \int_0^h \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} \cdot d\mathbf{l}_1 = -\int_0^h \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times B_{xy}) \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (5.77)$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z \mathbf{i}_y \cdot d\mathbf{l}_1 + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h E_z \mathbf{i}_x \cdot d\mathbf{l}_1 - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_{xy} \cdot d\mathbf{l}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_{xy} \cdot (\mathbf{i}_z \times d\mathbf{l}_1) \quad (5.78)$$

Nesta equação, a segunda parte do lado esquerdo é nula, pois o produto escalar  $\mathbf{i}_x \cdot d\mathbf{l}_1$  é nulo (veja a Figura 5.4). Portanto, a equação 5.78 toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z \mathbf{i}_y \cdot d\mathbf{l}_1 - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_{xy} \cdot d\mathbf{l}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_{xy} \cdot (\mathbf{i}_z \times d\mathbf{l}_1) \quad (5.79)$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z dl_1 - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_{xy} dl_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_{xy} \cdot \mathbf{i}_{n_1} dl_1, \quad (5.80)$$

onde  $\mathbf{i}_{n_1}$  é o vetor unitário normal ao  $d\mathbf{l}_1$  como está mostrado na Figura 5.4. A primeira parte da integral no lado esquerdo da equação 5.80 representa a diferença entre os dois componentes paralelos do campo elétrico,  $E_z^h(z, t)$  ao longo do condutor, e  $E_z^0(z, t)$  ao longo da terra. A segunda parte da integral é simplesmente o negativo da tensão  $V(z, t)$  entre o condutor e a terra no plano em que a integral da linha é avaliada desde que o campo magnético não tem o componente  $z$ . A integral no lado direito é interpretada como o fluxo magnético  $\Phi$  por unidade de comprimento na direção  $z$ , acoplado o condutor, se o condutor for considerado portador de uma corrente contínua  $I(z, t)$  cruzando o plano que contenha o caminho entre o centro do condutor e a terra. Assim, teremos:

$$\left\{ E_z^h(z, t) - E_z^0(z, t) \right\} + \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5.81)$$

Nesta equação, o componente do campo elétrico  $E_z^h(z, t)$  é exatamente o campo elétrico  $E_z^R(z, t)$ , existente na superfície do condutor, e o componente do campo elétrico  $E_z^0(z, t)$  é considerado nulo, pois a terra foi considerada ideal. O fluxo magnético  $\Phi$  é simplesmente o fluxo magnético externo  $\phi_{ex}$  por ser considerado apenas a região externa do condutor. Assim, teremos:

$$E_z^R(z, t) = -\left\{ \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial t} \right\}. \quad (5.82)$$

De acordo com a definição da indutância, o fluxo magnético externo é dado por:

$$\phi_{ex} = L_{ex} I(z, t), \quad (5.83)$$

onde  $L_{ex}$  é a indutância externa. Com esta expressão a equação 5.81 toma a seguinte forma:

$$E_z^R(z, t) = -\left\{ \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} + L_{ex} \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \right\}. \quad (5.84)$$

Substituindo esta equação na equação (5.71), obtém-se:

$$-\left\{\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} + L_{ex}\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}\right\} - \frac{1}{\pi\sigma R^2}I(z,t) - \int_0^t f(t-\tau) \cdot \left\{\frac{\partial V(z,\tau)}{\partial z} + L_{ex}\frac{\partial I(z,\tau)}{\partial t}\right\} d\tau = 0. \quad (5.85)$$

Logo:

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} + L_{ex}\frac{\partial I(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi\sigma R^2}I(z,t) + \int_0^t f(t-\tau) \cdot \left\{\frac{\partial V(z,\tau)}{\partial z} + L_{ex}\frac{\partial I(z,\tau)}{\partial t}\right\} d\tau = 0. \quad (5.86)$$

Ou:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + L_{ex}\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi\sigma R^2}i(z,t) + \int_0^t f(t-\tau) \cdot \left\{\frac{\partial v(z,\tau)}{\partial z} + L_{ex}\frac{\partial i(z,\tau)}{\partial t}\right\} d\tau = 0. \quad (5.87)$$

Esta é uma das equações do modelo da linha de transmissão considerando o efeito pelicular. A segunda equação do modelo representa a relação entre o campo magnético  $\mathbf{H}$  e a corrente que flui no centro do condutor no sentido positivo  $\mathbf{z}$ . Esta relação pode ser deduzida a partir da equação de Maxwell para o rotacional de  $\mathbf{H}$  na região externa do condutor. Assim, esta equação numa forma reduzida é dada por:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.88)$$

Em coordenadas retangulares esta equação toma a seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) \mathbf{i}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \mathbf{i}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \mathbf{i}_z = \sigma(E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y + E_z \mathbf{i}_z) + \frac{\partial D_x}{\partial t} \mathbf{i}_x + \frac{\partial D_y}{\partial t} \mathbf{i}_y + \frac{\partial D_z}{\partial t} \mathbf{i}_z \quad (5.89)$$

Para uma onda se propagando na direção  $\mathbf{z}$ , os componentes desta equação que poderão contribuir são:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{i}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{i}_y = \sigma (E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y) + \frac{\partial D_x}{\partial t} \mathbf{i}_x + \frac{\partial D_y}{\partial t} \mathbf{i}_y \quad (5.90)$$

Tomando o produto vetorial para os dois lados desta equação com o vetor unitário  $\mathbf{i}_z$ , tem-se:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{i}_x = \sigma (\mathbf{i}_z \times E_{xy}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times D_{xy}). \quad (5.91)$$

Ou:

$$-\frac{\partial H_{xy}}{\partial z} = \sigma (\mathbf{i}_z \times E_{xy}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times D_{xy}). \quad (5.92)$$

Realizando-se a integração da linha  $d\mathbf{l}_2$ , para os dois lados desta equação, em volta do caminho fechado  $C$  que circunda o condutor (veja a Figura 5.4), obtém-se:

$$-\oint_C \frac{\partial H_{xy}}{\partial z} \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint_C \sigma (\mathbf{i}_z \times E_{xy}) \cdot d\mathbf{l}_2 + \oint_C \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_z \times D_{xy}) \cdot d\mathbf{l}_2. \quad (5.93)$$

Ou:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \oint_C H_{xy} \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint_C \sigma E_{xy} \cdot (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{i}_z) + \frac{\partial}{\partial t} \oint_C D_{xy} (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{i}_z). \quad (5.94)$$

Ou:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \oint_C H_{xy} \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint_C \sigma E_{xy} \cdot \mathbf{i}_{n2} dl_2 + \frac{\partial}{\partial t} \oint_C D_{xy} \cdot \mathbf{i}_{n2} dl_2, \quad (5.95)$$

onde  $\mathbf{i}_{n2}$  é o vetor unitário normal ao  $d\mathbf{l}_2$  do caminho fechado  $C$ , como está mostrado na Figura 5.4. A integral no lado esquerdo da equação 5.95 é simplesmente a corrente  $I(z, t)$  no sentido positivo  $\mathbf{z}$  no condutor, ou a mesma corrente no sentido negativo  $\mathbf{z}$  retornando pela terra, cruzando o plano em que o caminho fechado  $C$  situado desde que o campo elétrico na componente  $\mathbf{z}$  seja muito fraco. A primeira integral no lado direito é a corrente de condução, fluindo do condutor para a terra, desde que a tensão entre o condutor e



a terra for considerada uma tensão contínua  $V(z, t)$  no plano que contenha o caminho  $C$ . Esta corrente é igual a  $G_o V(z, t)$ , onde  $G_o$  é a condutância, por unidade de comprimento. A segunda integral no lado direito é interpretado como a carga  $Q$ , por unidade de comprimento, na superfície do condutor. Esta carga, em magnitude, é igual o fluxo de deslocamento, por unidade de comprimento na direção  $\mathbf{z}$ , se a tensão entre o condutor é uma tensão contínua  $V(z, t)$  no plano que contenha o caminho  $C$ . Assim, teremos:

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = G_o V(z, t) + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (5.96)$$

De acordo com a definição de capacitância, a carga pode ser expressada seguinte forma:

$$Q = C_o V(z, t) \quad (5.97)$$

Substituindo esta equação na equação 5.96, teremos:

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = G_o V(z, t) + C_o \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (5.98)$$

Ou:

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = G_o v(z, t) + C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (5.99)$$

Esta equação junto com a equação 5.87 completam o conjunto das relações de tensão e corrente formando o modelo da linha de transmissão considerando o efeito pelicular. Estas equações podem ser reescritas como conjunto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} + L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi \sigma R^2} i(z, t) + \\ & \int_0^t f(t - \tau) \cdot \left\{ \frac{\partial v(z, \tau)}{\partial z} + L_{ex} \frac{\partial i(z, \tau)}{\partial t} \right\} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + G_o v(z, t) = 0. \quad (5.101)$$

Onde:

$$f(t) = \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right). \quad (5.102)$$

Uma outra possibilidade para desenvolver as equações do modelo, é considerar a equação 5.51 junto com a função dada pela equação 5.52. Esta possibilidade pode ser feita seguindo o mesmo procedimento utilizado no desenvolvimento das equações 5.100, 5.101. Assim, as novas equações que completam o conjunto das relações de tensão e corrente e formam o modelo da linha de transmissão, considerando o efeito pelicular, podem ser escritas como segue:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + L_{ex} \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi\sigma R^2} i(z,t) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot \left\{ \frac{\partial^2 v(z,\tau)}{\partial z \partial t} + L_{ex} \frac{\partial^2 i(z,\tau)}{\partial t^2} \right\} d\tau = 0. \quad (5.103)$$

$$C_o \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + G_o v(z,t) = 0. \quad (5.104)$$

Onde:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right). \quad (5.105)$$

Nas equações 5.100, 5.101, 5.103 e 5.104, a indutância externa  $L_{ex}$ , a capacitância  $C_o$  e a condutância  $G_o$ , por unidade de comprimento, são os parâmetros calculados em condições estáticas. Estes parâmetros dependem da geometria geral da linha de transmissão e do tipo do material do condutor usado. As constantes  $\mu$  e  $\sigma$  são as especificações do material do condutor usado e  $R$  é o raio do condutor. O  $\xi_k$ , como foi definido, é o  $k$ -ésimo raiz da função de Bessel  $J_o(x) = 0$ .

### 5.5.2 Cálculo do $k$ -ésimo raiz da função de Bessel $\xi_k$

O cálculo é feito através o uso da aproximação de  $J_o(x) = 0$ . Esta aproximação pode ser representada pela seguinte equação:

$$J_o(x) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\frac{x}{2}\pi}} = 0. \quad (5.106)$$

Substituindo-se  $x$  pelo  $\xi_k$  tem-se:

$$J_o(\xi_k) = \frac{\cos(\xi_k - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\frac{x}{2}\pi}} = 0. \quad (5.107)$$

Assim, teremos:

$$\cos(\xi_k - \frac{\pi}{4}) = 0. \quad (5.108)$$

Para o cosseno zero pode ser representado pela seguinte série:

$$\cos(2k - 1)\frac{\pi}{2} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.109)$$

Portanto, comparando-se as equações 5.108 e 5.109 obtém-se:

$$\xi_k - \frac{\pi}{4} = (2k - 1)\frac{\pi}{2}. \quad (5.110)$$

Desta equação obtém-se:

$$\xi_k = \{(2k - 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.111)$$

Assim, as raízes da função de Bessel  $\xi_k$  podem ser calculadas.

O próximo capítulo apresenta o modelo numérico.

## Capítulo 6

# MODELO NUMÉRICO DA LINHA DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO O EFEITO PELICULAR

### 6.1 Introdução

Este capítulo apresenta o modelo numérico das equações do novo modelo desenvolvidas no capítulo anterior. Devido a forma integrodeferencial de uma das equações deste modelo, torna-se difícil a solução pelos métodos analíticos. Portanto, é necessário usar os métodos numéricos. A técnica relativa mais fácil para resolver este tipo de equações é a técnica numérica de "time-domain finite-difference" (TD-FD). Assim, como foi feito na solução das equações do modelo clássico, pode seguir as seguintes etapas.

#### 6.1.1 Primeira etapa

Distribuir as equações do modelo ao longo da linha de transmissão em três partes da seguinte maneira:

- Condições de contorno à esquerda (transmissão),
- Condições de contorno à direita (recepção),
- Região do meio (a própria linha de transmissão).

### 6.1.2 Segunda etapa

Usando-se um esquema de discretização baseado na técnica numérica mencionada anteriormente, as derivadas das equações das condições de contorno à esquerda, à direita e a região do meio serão aproximadas por várias discretizações de diferenças finitas. Além disso, o condutor da linha é discretizado no espaço.

### 6.1.3 Terceira etapa

Baseando-se na forma final discretizada das equações das condições de contorno à esquerda, à direita e da região do meio, é elaborado um programa computacional em Fortran.

## 6.2 Condições de Contorno à Esquerda

Como condições no início da linha, são consideradas um sinal arbitrário de tensão instantânea  $v(0, t)$  aplicado e uma corrente instantânea  $i(0, t)$  induzida. Deste modo, estas condições de contorno podem ser formalizadas por equações, com base nas equações do modelo, para  $z = 0$  e o tempo  $t > 0$  apresentadas como a seguir:

$$v(0, t) = v_s(t). \quad (6.1)$$

$$Lex \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi \sigma R^2} i(0, t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot \left\{ Lex \frac{\partial i(0, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial t} \right\} d\tau = 0. \quad (6.2)$$

Onde:

$v_s(t)$  representa o sinal arbitrário fornecido pelo gerador ligado à linha. Os tipos de sinais que serão usadas para as simulações são os mesmos apresentados no capítulo 4.

### 6.3 Condições de Contorno à Direita

As condições de contorno à direita, como condição de fim de linha, dependem do tipo de terminação da linha. Para análise e estudo da influência do efeito pelicular sobre o comportamento de um sinal viajando ao longo de uma linha de transmissão, sem a influência do sinal refletido, não importa o tipo de terminação. Assim, será considerada uma terminação resistiva (linha casada). Com a influência do sinal refletido, a terminação será considerada como de circuito aberto ou de curto circuito. Deste modo, estas condições de contorno, no caso de uma linha casada ou com terminação de circuito aberto, podem ser formalizadas por equações, que relacionam as tensões  $v(l, t)$  e correntes  $i(l, t)$  induzidas no final da linha para  $z = l$  e o tempo  $t > 0$ , com base nas equações do modelo como apresentado a seguir:

$$C_o \frac{\partial v(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial i(l, t)}{\partial z} + G_o v(l, t) = 0. \quad (6.3)$$

$$i(l, t) = v(l, t)/Z_c. \quad (6.4)$$

No caso de terminação com curto circuito, estas condições de contorno podem tomar a seguinte forma:

$$Lex \frac{\partial i(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(l, t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi \sigma R^2} i(l, t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot \left\{ Lex \frac{\partial i(l, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial v(l, \tau)}{\partial t} \right\} d\tau = 0. \quad (6.5)$$

$$v(l, t) = i(l, t) * Z_c. \quad (6.6)$$

Onde:

$Z_c$  é a impedância da carga.

### 6.4 Região do Meio

Esta região é a própria linha de transmissão. Portanto, as equações desta região, que relacionam as tensões  $v(z, t)$ , e correntes  $i(z, t)$  induzidas ao longo da linha para  $0 <$

$z < l$  e o tempo  $t > 0$ , podem ser formalizadas com base nas equações do modelo como apresentado a seguir:

$$C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + G_o v(z, t) = 0. \quad (6.7)$$

$$Lex \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\pi \sigma R^2} i(z, t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot \left\{ Lex \frac{\partial i(z, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial v(z, \tau)}{\partial t} \right\} d\tau = 0. \quad (6.8)$$

Onde:

$$f(t) = \frac{4}{\mu \sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 t}{\mu \sigma R^2}\right). \quad (6.9)$$

## 6.5 Esquema de Discretização

Este esquema de discretização, como é mostrado na figura 6.1, é o mesmo esquema que foi usado no capítulo 3. O esquema, como foi mencionado, é baseado em um plano composto de uma rede de pontos no espaço entrelaçados com pontos no tempo. Os pontos do espaço são representados pelo subíndice ( $j$ ) e do tempo pelo subíndice ( $n$ ).

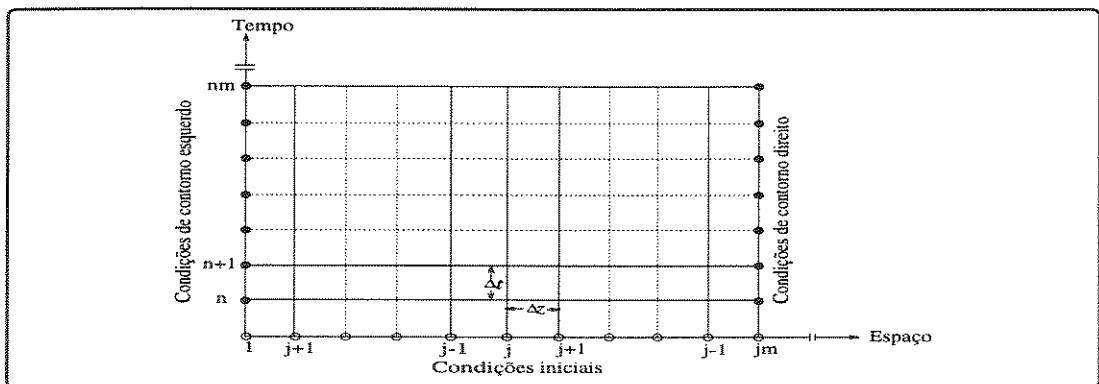


Figura 6.1: Rede de Esquema de Discretização.

Neste esquema, as correspondentes condições iniciais e de contorno à esquerda e à direita são mostradas.

De acordo com este esquema o condutor da linha de transmissão é discretizado no espaço como na figura 6.2.

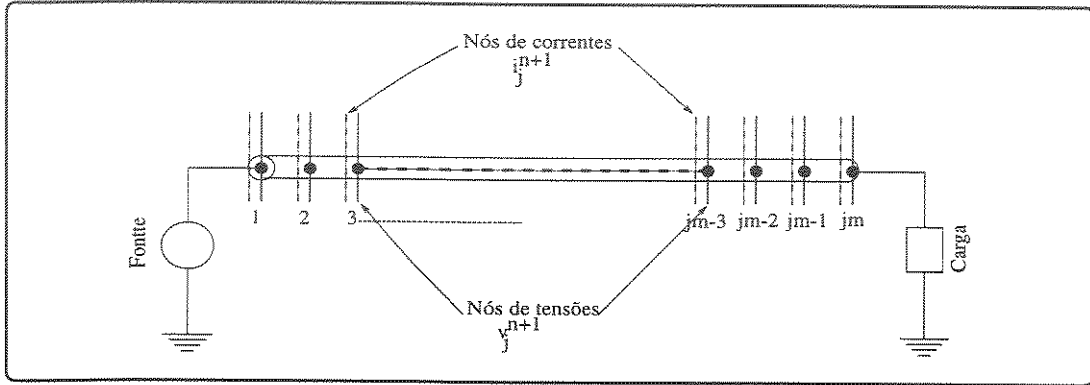


Figura 6.2: *Discretização do Condutor da Linha no Espaço.*

Nesta discretização, dois grupos de nós são impostos:

- As tensões  $v_j^{n+1}$ ;
- As correntes  $i_j^{n+1}$ .

As posições destes nós são alteradas ao longo de comprimento do condutor da linha.

Usando-se as definições feitas anteriormente pelo esquema de discretização, e as seguintes notações:

$$z_j = j \Delta z \quad ; \quad t_n = n \Delta t, \quad (6.10)$$

e

$$v(z, t) = v_j^{n+1} \quad ; \quad i(z, t) = i_j^{n+1}, \quad (6.11)$$

as aproximações das derivadas para a tensão e corrente com discretizações, em função do espaço, adiantada, central e atrasada podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial z} \approx \frac{i_{j+1}^{n+1} - i_j^{n+1}}{\Delta z}, \quad (6.12)$$



$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{-1j}^{n+1}}{2\Delta z} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial z} \approx \frac{i_{j+1}^{n+1} - i_{-1j}^{n+1}}{2\Delta z}, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial z} \approx \frac{i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{\Delta z}, \quad (6.14)$$

a aproximação das derivadas para a tensão e corrente com uma discretização, em função do tempo, adiantada pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \quad ; \quad \frac{\partial i}{\partial t} \approx \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t}. \quad (6.15)$$

Assim, as equações que formam as condições de contorno à direita, à esquerda e da região do meio podem ser discretizadas como mostram os itens a seguir.

### 6.5.1 Discretização das Equações das Condições de Contorno à Esquerda

As equações que formam estas condições serão as primeiras a serem discretizadas.

A equação 6.1 pode ser discretizada explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = 1$  como segue:

$$v_j^{n+1} = v_s^{n+1}. \quad (6.16)$$

Devido a integral, a equação 6.2 pode ser discretizada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = 1$  seguindo o seguinte procedimento.

Aplicando-se a regra Trapezoidal, que se define como a seguir:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right). \quad (6.17)$$

Onde:

$$h = \frac{b-a}{n} \quad ; \quad x_\lambda = a + \lambda h \quad ; \quad y_\lambda = f(x_\lambda) \quad (6.18)$$

e considerando as seguintes notações:

$$z_j = j\Delta z ; t_n = n\Delta t ; \tau_m = m\Delta\tau ; \Delta\tau = \Delta t \quad (6.19)$$

Assim, a equação 6.2 é discretizada como a seguir:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} + \frac{1}{\mu\sigma R^2} i_j^{n+1} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(n) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^1 - i_j^0}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^1 - v_j^1}{\Delta z} \right\} + f(n-1) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^2 - i_j^1}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^2 - v_j^2}{\Delta z} \right\} + \right. \\ & \left. \dots + f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}}{\Delta z} \right\} + \dots + f(1) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^n - i_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta z} \right\} + \frac{1}{2} f(0) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} \right\} \right] = 0. \quad (6.20) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} + \frac{1}{\mu\sigma R^2} i_j^{n+1} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(0) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} \right\} + \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}}{\Delta z} \right\} + \right] = 0. \quad (6.21) \end{aligned}$$

Seja:

$$K1 = \frac{1}{\mu\sigma R^2}. \quad (6.22)$$

Então:

$$\begin{aligned}
& Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} + K1.i_j^{n+1} + \\
& \Delta t \left[ \frac{1}{2}f(0). \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta z} \right\} + \right. \\
& \left. \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1-(m+1)). \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}}{\Delta z} \right\} + \right] = 0. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

multiplicando-se por  $\Delta t$  e agrupando teremos:

$$\begin{aligned}
& Lex.i_j^{n+1} - Lex.i_j^n + \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{2\Delta z} \right\} (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) + \\
& K1\Delta t.i_j^{n+1} + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2}i_j^{n+1} - \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2}i_j^n + \\
& \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1-(m+1)). \left\{ \Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}) \right\} = 0. \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Juntando-se os termos iguais e evidenciando-se em  $i_j^{n+1}$  obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left( Lex + K1.\Delta t + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) i_j^{n+1} = \left( Lex + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) i_j^n - \\
& \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{2\Delta z} \right\} (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) - \\
& \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1-(m+1)). \left\{ \Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}) \right\}. \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Seja:

$$K2 = \left( Lex + K1.\Delta t + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right)^{-1} \quad (6.26)$$

Multiplicando-se a equação 6.25 por esta expressão teremos:

$$i_j^{n+1} = K2 \left( Lex + \frac{f(0) \cdot \Delta t \cdot Lex}{2} \right) i_j^n - K2 \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0) \cdot \Delta t^2}{2\Delta z} \right\} (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ K2\Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{K2\Delta t^2}{\Delta z} (v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}) \right\}. \quad (6.27)$$

Agora sejam:

$$K3 = K2 \left( Lex + \frac{f(0) \cdot \Delta t \cdot Lex}{2} \right) \quad (6.28)$$

$$R1 = K2 \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0) \cdot \Delta t^2}{2\Delta z} \right\} \quad (6.29)$$

$$K4 = K2\Delta t Lex \quad (6.30)$$

$$R2 = \frac{K2\Delta t^2}{\Delta z} \quad (6.31)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 6.27 obtemos:

$$i_j^{n+1} = K3 \cdot i_j^n - R1 \cdot (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ K4 \cdot (i_j^{m+1} - i_j^m) + R2 \cdot (v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}) \right\}. \quad (6.32)$$

Portanto, para estas condições de contorno, as equações 6.16 e 6.32 representam a forma final discretizada para o uso de programação.

### 6.5.2 Discretização das Equações das Condições de Contorno à Direita:

As equações que formam estas condições de contorno, no caso de uma terminação resistiva (linha casada) ou uma terminação de circuito aberto, podem ser discretizadas como a seguir.

A equação 6.3 pode ser discretizada por uma diferença atrasada explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = jm$

$$C_o \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} + G_o \cdot v_j^{n+1} = 0. \quad (6.33)$$

Multiplicando por  $(\Delta t)$  e evidenciando-se em  $v_j^{n+1}$  teremos a seguinte equação:

$$(C_o + \Delta t G_o) \cdot v_j^{n+1} = C_o \cdot v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot [i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (6.34)$$

Seja:

$$M2 = (C_o + \Delta t G_o)^{-1} \quad (6.35)$$

multiplicando-se a equação 6.34 por esta expressão, teremos:

$$v_j^{n+1} = M2 C_o \cdot v_j^n - \frac{M2 \Delta t}{\Delta z} [i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (6.36)$$

Agora seja:

$$M1 = M2 C_o \quad (6.37)$$

$$L1 = \frac{M2 \Delta t}{\Delta z}. \quad (6.38)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 6.36, teremos:

$$v_j^{n+1} = M1 \cdot v_j^n - L1 \cdot [i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (6.39)$$

A equação 6.4 pode ser discretizada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = jm$  como a seguir:

$$i_j^{n+1} = v_j^{n+1}/Z_c \quad (6.40)$$

As equações que formam estas condições de contorno, no caso de uma terminação com curto circuito, podem ser discretizadas como a seguir.

Devido a integral, a equação 6.5 pode ser discretizada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = jm$  seguindo o mesmo procedimento feito, anteriormente, para discretizar a equação 6.2.

Assim, para esta equação teremos a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} + \frac{1}{\mu\sigma R^2} i_j^{n+1} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(n) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^1 - i_j^0}{\Delta t} + \frac{v_j^1 - v_{j-1}^1}{\Delta z} \right\} + f(n-1) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^2 - i_j^1}{\Delta t} + \frac{v_j^2 - v_{j-1}^2}{\Delta z} \right\} + \right. \\ & \left. \dots + f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{\Delta z} \right\} + \dots + f(1) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^n - i_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta z} \right\} + \frac{1}{2} f(0) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} \right\} \right] = 0. \quad (6.41) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} + \frac{1}{\mu\sigma R^2} i_j^{n+1} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(0) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} \right\} + \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \right. \\ & \left. \left. \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{\Delta z} \right\} \right] = 0. \quad (6.42) \end{aligned}$$

Seja:

$$K1 = \frac{1}{\mu\sigma R^2}. \quad (6.43)$$

Então:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} + K1 \cdot i_j^{n+1} + \\ & \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(0) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta z} \right\} + \right. \\ & \left. \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{\Delta z} \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

multiplicando-se por  $\Delta t$  e agrupando teremos:

$$\begin{aligned} & Lex \cdot i_j^{n+1} - Lex \cdot i_j^n + \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0) \cdot \Delta t^2}{2\Delta z} \right\} (v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) + \\ & K1 \Delta t \cdot i_j^{n+1} + \frac{f(0) \cdot \Delta t \cdot Lex}{2} i_j^{n+1} - \frac{f(0) \cdot \Delta t \cdot Lex}{2} i_j^n + \\ & \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ \Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Juntando-se os termos iguais e evidenciando-se em  $i_j^{n+1}$  obtemos:

$$\begin{aligned} & \left( Lex + K1 \cdot \Delta t + \frac{f(0) \cdot \Delta t \cdot Lex}{2} \right) i_j^{n+1} = \left( Lex + \frac{f(0) \cdot \Delta t \cdot Lex}{2} \right) i_j^n - \\ & \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0) \cdot \Delta t^2}{2\Delta z} \right\} (v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \\ & \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ \Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Seja:

$$K2 = \left( Lex + K1.\Delta t + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right)^{-1} \quad (6.47)$$

Multiplicando-se a equação 6.46 por esta expressão teremos:

$$i_j^{n+1} = K2 \left( Lex + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) i_j^n - K2 \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{2\Delta z} \right\} (v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ K2\Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{K2\Delta t^2}{\Delta z} (v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\}. \quad (6.48)$$

Agora sejam:

$$K3 = K2 \left( Lex + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) \quad (6.49)$$

$$R1 = K2 \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{2\Delta z} \right\} \quad (6.50)$$

$$K4 = K2\Delta t Lex \quad (6.51)$$

$$R2 = \frac{K2\Delta t^2}{\Delta z} \quad (6.52)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 6.48 obtemos:

$$i_j^{n+1} = K3.i_j^n - R1.(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ K4.(i_j^{m+1} - i_j^m) + R2.(v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\}. \quad (6.53)$$

A equação 6.6 pode ser discretizada explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = jm$  como a seguir:



$$v_j^{n+1} = i_j^{n+1} * Z_c \quad (6.54)$$

Assim, para estas condições de contorno, as equações 6.39, 6.40, 6.53 e 6.54 representam a forma final discretizada para o uso de programação.

### 6.5.3 Discretização das Equações da Região do Meio

As equações que formam esta região podem ser discretizadas como a seguir.

A equação 6.7 pode ser discretizada com uma diferença central explicitamente em  $v_j^{n+1}$  para  $j = 1, 2, \dots, j_m - 1$  da seguinte maneira:

$$C_o \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + G_o \cdot v_j^{n+1} = 0. \quad (6.55)$$

Multiplicando por  $(\Delta t)$  e evidenciando-se em  $v_j^{n+1}$  teremos:

$$(C_o + \Delta t \cdot G_o) \cdot v_j^{n+1} = C_o \cdot v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta z} [i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (6.56)$$

Seja:

$$M2 = (C_o + \Delta t G_o)^{-1}. \quad (6.57)$$

Multiplicando-se a a equação 6.56 por esta expressão teremos:

$$v_j^{n+1} = M2 C_o \cdot v_j^n + \frac{M2 \Delta t}{2\Delta z} [i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (6.58)$$

Agora seja:

$$M1 = M2 C_o. \quad (6.59)$$

$$L2 = \frac{M2 \Delta t}{2\Delta z}. \quad (6.60)$$

Substituindo estas expressões na equação 6.58, tem-se:

$$v_j^{n+1} = M1.v_j^n - L2. [i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}]. \quad (6.61)$$

Devido a integral, a equação (6.8) pode ser discretizada explicitamente em  $i_j^{n+1}$  para  $j = 2, 3, \dots, jm - 1$  seguindo o mesmo procedimento feito, anteriormente, para discretizar a equação 6.2.

Assim, para esta equação teremos a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + \frac{1}{\mu\sigma R^2} i_j^{n+1} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(n) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^1 - i_j^0}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^1 - v_{j-1}^1}{2\Delta z} \right\} + f(n-1) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^2 - i_j^1}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^2 - v_{j-1}^2}{2\Delta z} \right\} + \right. \\ & \left. \dots + f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{2\Delta z} \right\} + \dots + f(1) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^n - i_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta z} \right\} + \frac{1}{2} f(0) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right\} \right] = 0. \quad (6.62) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} & Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + \frac{1}{\mu\sigma R^2} i_j^{n+1} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(0) \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right\} + \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \right. \\ & \left. \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{2\Delta z} \right\} \right] = 0. \quad (6.63) \end{aligned}$$

Seja:

$$K1 = \frac{1}{\mu\sigma R^2}. \quad (6.64)$$

Então:

$$\begin{aligned}
& Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + K1.i_j^{n+1} + \\
& \Delta t \left[ \frac{1}{2} f(0) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right\} + \right. \\
& \left. \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ Lex \frac{i_j^{m+1} - i_j^m}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{2\Delta z} \right\} \right] = 0. \quad (6.65)
\end{aligned}$$

multiplicando-se por  $\Delta t$  e agrupando teremos:

$$\begin{aligned}
& Lex.i_j^{n+1} - Lex.i_j^n + \left\{ \frac{\Delta t}{2\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{4\Delta z} \right\} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) + \\
& K1\Delta t.i_j^{n+1} + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} i_j^{n+1} - \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} i_j^n + \\
& \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ \Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{\Delta t}{2\Delta z} (v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\} = 0. \quad (6.66)
\end{aligned}$$

Juntando-se os termos iguais e evidenciando-se em  $i_j^{n+1}$  obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left( Lex + K1.\Delta t + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) i_j^{n+1} = \left( Lex + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) i_j^n - \\
& \left\{ \frac{\Delta t}{2\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{4\Delta z} \right\} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \\
& \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1 - (m+1)) \cdot \left\{ \Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{\Delta t}{2\Delta z} (v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\}. \quad (6.67)
\end{aligned}$$

Seja:

$$K2 = \left( Lex + K1.\Delta t + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right)^{-1} \quad (6.68)$$

Multiplicando-se a equação 6.67 por esta expressão teremos:

$$i_j^{n+1} = K2 \left( Lex + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) i_j^n - K2 \left\{ \frac{\Delta t}{2\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{4\Delta z} \right\} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1-(m+1)) \cdot \left\{ K2\Delta t Lex (i_j^{m+1} - i_j^m) + \frac{K2\Delta t^2}{2\Delta z} (v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\}. \quad (6.69)$$

Agora sejam:

$$K3 = K2 \left( Lex + \frac{f(0).\Delta t.Lex}{2} \right) \quad (6.70)$$

$$R3 = K2 \left\{ \frac{\Delta t}{2\Delta z} + \frac{f(0).\Delta t^2}{4\Delta z} \right\} \quad (6.71)$$

$$K4 = K2\Delta t Lex \quad (6.72)$$

$$R4 = \frac{K2\Delta t^2}{2\Delta z} \quad (6.73)$$

Substituindo-se estas expressões na equação 6.69 obtemos:

$$i_j^{n+1} = K3.i_j^n - R3. (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} f(n+1-(m+1)) \cdot \left\{ K4. (i_j^{m+1} - i_j^m) + R4. (v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) \right\}. \quad (6.74)$$

Assim, para a região do meio, as equações 6.61 e 6.74 representam a forma final para o uso de programação.

Note-se que:

$$f(0) = \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \Delta t(0)}{\mu\sigma R^2}\right) \quad (6.75)$$

$$f(n+1(m+1)) = \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \Delta t(n+1-(m+1))}{\mu\sigma R^2}\right) \quad (6.76)$$

Tomando como base as equações das condições de contorno à esquerda, à direita e da região do meio na forma discretizada para o uso de programação foi elaborado um programa computacional com objetivo de simulação.

As equações 5.103 e 5.104, junto com a função dada pela equação 5.105 mostradas no final do capítulo 5, também foram distribuídas ao longo da linha de transmissão em três partes. Estas partes foram discretizadas usando o mesmo esquema de discretização e o mesmo procedimento feitos anteriormente, apresentando a seguir apenas a forma final para o uso de programação.

Para as condições de contorno à esquerda  $j = 1$  e  $t > 0$ .

$$v_j^{n+1} = v_s^{n+1}, \quad (6.77)$$

e

$$\begin{aligned} i_j^{n+1} = & Q8.i_j^{n-1} - Q9.i_j^n - P4.(v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) - P5.(v_{j+1}^n - v_j^n) + \\ & \sum_{m=1}^{n-1} h(n+1-(m+1)). \{P6.(v_{j+1}^{m+1} - v_j^{m+1}) + Q10.(i_j^{m+1} - i_j^m) - \\ & P6.(v_{j+1}^m - v_j^m) - Q10.(i_j^m - i_j^{m-1})\}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Para as condições de contorno à direita  $j = jm$  e  $t > 0$ , no caso de terminação resistiva (linha casada) e uma terminação de circuito aberto.

$$v_j^{n+1} = M1.v_j^n - L1.[i_j^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}], \quad (6.79)$$

e

$$i_j^{n+1} = v_s^{n+1}/Z_c. \quad (6.80)$$

No caso de terminação de curto circuito.

$$\begin{aligned} i_j^{n+1} = & Q8.i_j^{n-1} - Q9.i_j^n - P4.(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - P5.(v_j^n - v_{j-1}^n) + \\ & \sum_{m=1}^{n-1} h(n+1-(m+1)). \{ P6.(v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) + Q10.(i_j^{m+1} - i_j^m) - \\ & P6.(v_j^m - v_{j-1}^m) - Q10.(i_j^m - i_j^{m-1}) \}, \end{aligned} \quad (6.81)$$

e

$$v_j^{n+1} = i_j^{n+1} * Z_c. \quad (6.82)$$

Para a região do meio  $j = 1, 2, \dots, j_{m-1}$  e  $t > 0$ .

$$v_j^{n+1} = M1.v_j^n - L2.[i_{j+1}^{n+1} - i_{j-1}^{n+1}], \quad (6.83)$$

e

$$\begin{aligned} i_j^{n+1} = & Q8.i_j^{n-1} - Q9.i_j^n - P7.(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - P8.(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \\ & \sum_{m=1}^{n-1} h(n+1-(m+1)). \{ P9.(v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}) + Q10.(i_j^{m+1} - i_j^m) - \\ & P9.(v_{j+1}^m - v_{j-1}^m) - Q10.(i_j^m - i_j^{m-1}) \}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Onde:

$$h(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \Delta t(0)}{\mu \sigma R^2}\right), \quad (6.85)$$

$$h(n+1(m+1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \Delta t (n+1 - (m+1))}{\mu \sigma R^2}\right), \quad (6.86)$$

e

$$M1 = M2.C_o; \quad (6.87)$$

$$L1 = \frac{M2.\Delta t}{\Delta z}; \quad (6.88)$$

$$L2 = \frac{M2.\Delta t}{2\Delta z}; \quad (6.89)$$

$$M2 = (C_o + \Delta t G_o)^{-1}; \quad (6.90)$$

$$Q8 = \frac{Q7}{Q5}; \quad (6.91)$$

$$Q9 = \frac{Q6}{Q5}; \quad (6.92)$$

$$Q10 = \frac{Q4}{Q5}; \quad (6.93)$$

$$P4 = \frac{P2}{Q5}; \quad (6.94)$$

$$P7 = \frac{P4}{2}; \quad (6.95)$$

$$P5 = \frac{P3}{Q5}; \quad (6.96)$$

$$P8 = \frac{P5}{2}; \quad (6.97)$$

$$P6 = \frac{P1}{Q5}; \quad (6.98)$$

$$P9 = \frac{P6}{2}; \quad (6.99)$$

$$P2 = P1 * Q3; \quad (6.100)$$

$$P3 = P1 * Q2; \quad (6.101)$$

$$Q5 = (Q3 * Q4 + Q1); \quad (6.102)$$

$$Q6 = Q4 * (Q2 - Q3); \quad (6.103)$$

$$Q7 = Q2 * Q4; \quad (6.104)$$

$$P1 = \frac{1}{\Delta z}; \quad (6.105)$$

$$Q4 = \frac{L_{ex}}{\Delta t}; \quad (6.106)$$

$$Q2 = \frac{1}{2}h(o); \quad (6.107)$$

$$Q3 = 1 - Q2; \quad (6.108)$$

$$Q1 = \frac{1}{\pi \sigma R^2}. \quad (6.109)$$



## Capítulo 7

# CALCULO DA RESISTÊNCIA E INDUTÂNCIA INTERNA DO CONDUTOR SÓLIDO E CILÍNDRICO

### 7.1 Introdução

Com o objetivo de melhorar os projetos e, como consequência, o desempenho de sistemas elétricos e de equipamentos eletrônicos de forma geral, o efeito pelicular deve ser simulado. Uma outra justificativa para a simulação do efeito pelicular é a necessidade de melhorar os modelos matemáticos dos componentes elétricos da forma mais realística possível. Assim, o cálculo da resistência e indutância torna-se necessário.

A metodologia consiste em aplicar o teorema de convolução e o método de transformada de Fourier na expressão de corrente obtida anteriormente para a seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico, formulando, assim, a expressão da admitância complexa interna do condutor em unidade de comprimento, e conseqüentemente, a inversa dessa dá a impedância complexa interna.

### 7.2 A Formulação

A expressão da soma de corrente obtida no capítulo 5 dada pela equação (5.67) é reescrita a seguir:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[ E_z^R(t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot E_z^R(\tau) d\tau \right]. \quad (7.1)$$

Onde:

$$f(t) = \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right). \quad (7.2)$$

Para uma forma mais conveniente e com o objetivo de calcular a admitância complexa, a equação (7.1) pode ser escrita como segue:

$$i(t) = \int_0^t y(t-\tau) \cdot E_z^R(\tau) d\tau \quad (7.3)$$

Onde a função  $y(t)$  pode ser obtida da equação (7.1) fazendo-se:

$$E_z^R(t) \equiv \delta(t), \quad (7.4)$$

e usando-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x) dx = f(x). \quad (7.5)$$

Assim:

$$y(t) = \pi\sigma R^2 \left[ \delta(t) + \int_0^t f(t-\tau) \cdot \delta(\tau) d\tau \right]. \quad (7.6)$$

Logo:

$$y(t) = \pi\sigma R^2 [\delta(t) + f(t)]. \quad (7.7)$$

Portanto:

$$y(t) = \pi\sigma R^2 f(t). \quad (7.8)$$

Substituindo-se a função  $f(t)$  dada anteriormente nesta equação:

$$y(t) = \frac{4}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right) \quad ; \quad t > 0. \quad (7.9)$$

Aplicando-se a teorema de convolução para a expressão (7.3), obtém-se:

$$i(t) = y(t) * E_z^R(t). \quad (7.10)$$

Aplicando-se o método de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{i(t)\} = \mathcal{F}\{y(t)\} * \mathcal{F}\{E_z^R(t)\}. \quad (7.11)$$

Logo:

$$I(\omega) = Y(\omega) \cdot E_z^R(\omega). \quad (7.12)$$

Essa equação mostra que  $Y(\omega)$  representa uma admitância. Portanto, a admitância complexa interna do condutor cilíndrico pode ser obtida do seguinte modo:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}. \quad (7.13)$$

Substituindo-se a função  $y(t)$  dada pela (7.9) nesta equação:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{4\pi}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2(t)}{\mu\sigma R^2}\right)\right\}. \quad (7.14)$$

Usando-se a seguinte propriedade de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{e^{-at}\} = \frac{1}{a + j\omega}. \quad (7.15)$$

Assim, a equação (7.14) pode ser escrita na seguinte forma:

$$Y(\omega) = \frac{4\pi}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + j\omega}. \quad (7.16)$$

Simplificando-se:

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k + j\omega L}. \quad (7.17)$$

Onde:

$$R_k = \frac{\xi_k^2}{4\pi\sigma R^2}. \quad (7.18)$$

$$L = \frac{\mu}{4\pi}. \quad (7.19)$$

$$\omega = 2\pi f. \quad (7.20)$$

Onde  $\xi_k$ , é k-ésimo raiz da função de Bessel  $J_0(x) = 0$ . Os constantes  $\sigma$ ,  $\mu$  e  $R$  são respectivamente condutividade, permeabilidade do material e o raio do condutor.

As equações (7.17)-(7.20) indicam que  $\xi_k$  é proporcional ao  $k$ , embora, o termo  $y_k$  da soma da equação (7.17), k-ésimo circuito da admitância complexa interna, seja proporcional ao  $\frac{1}{\xi_k^2}$ , o que significa que essa soma da equação (7.17) converge e pode ser considerada como uma boa maneira para determinar os valores exatos da admitância complexa interna  $Y(\omega)$  de um condutor cilíndrico em qualquer frequência. Além disso, estas equações geram uma interpretação interessante para a admitância complexa interna de uma seção transversal de um condutor cilíndrico. Portanto, o lado direito da equação (7.17) pode ser considerado como um modelo de admitância complexa interna de uma seção transversal do condutor cilíndrico conforme mostrado na Figura (7.1).

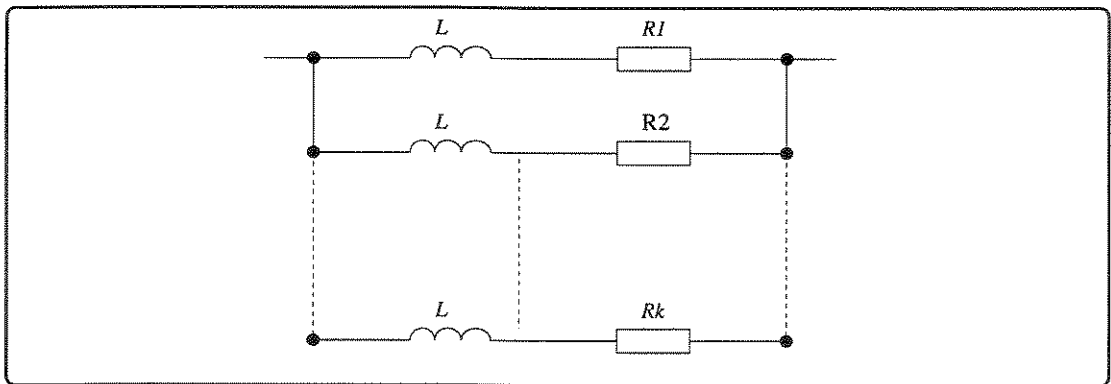


Figura 7.1: *Modelo de Admit. Interna Complexa da Seção Trans. do Condutor Cilíndrico.*

Este modelo consiste em uma rede de circuitos composta de resistência ( $R$ ) e indutância ( $L$ ) em paralelo, onde o k-ésimo circuito da admitância complexa é dada por:

$$y_k(\omega) = \frac{1}{R_k + j\omega L}. \quad (7.21)$$

Logicamente, o inverso da equação (7.17) representa uma impedância por unidade de comprimento. Assim, a impedância complexa interna do condutor cilíndrico pode ser escrita como a seguir:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} \quad (7.22)$$

Substituindo-se o equivalente de  $Y(\omega)$  teremos:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k + j\omega L}} \quad (7.23)$$

Onde  $R_k$ ,  $L$  e  $\omega$  são os mesmos variáveis dados pelas equações (7.18) a (7.20).

A parte real do lado direito da equação (7.23) representa a resistência  $R_\omega$  por unidade de comprimento, e a parte imaginária representa, portanto, a reatância interna  $XL_\omega$  por unidade de comprimento. Conseqüentemente, a indutância interna  $L_\omega$  por unidade de comprimento simplesmente é definida por:

$$L_\omega = \frac{XL_\omega}{\omega}. \quad (7.24)$$

### 7.3 Resultados

Através de um programa computacional elaborado em Furtran para a equação (7.23), a resistência e a indutância interna por unidade de comprimento de um condutor sólido e cilíndrico de qualquer raio e material podem ser calculadas. A seguir são apresentados os resultados obtidos.

Curvas de resistência e indutância interna devido ao efeito pelicular, obtidas pela equação (7.23) de condutores de puro cobre como função de frequências baixas a muito altas são mostradas nas Figuras (7.2) e (7.3) para condutores de vários raios.

Curvas de resistência e indutância interna devido ao efeito pelicular, também obtidas pela equação (7.23), de um condutor de puro cobre (condutividade  $\sigma = 5,8 \times 10^{07}$ ) e um outro de puro chumbo (condutividade  $\sigma = 0,48 \times 10^{07}$ ) como função de frequências baixas a muito altas são mostradas nas Figuras (7.4) e (7.5) para um raio de 0,1mm, e nas Figuras (7.6) e (7.7) para um raio de 15mm.

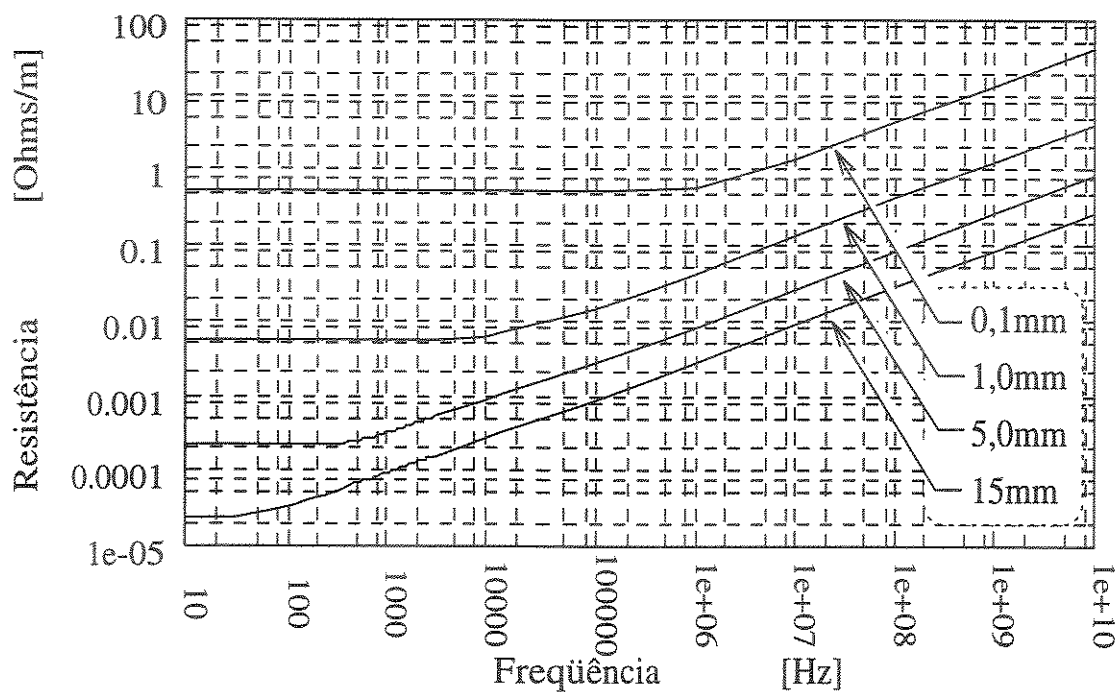


Figura 7.2: Resistência devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em  $20^{\circ}\text{C}$ .

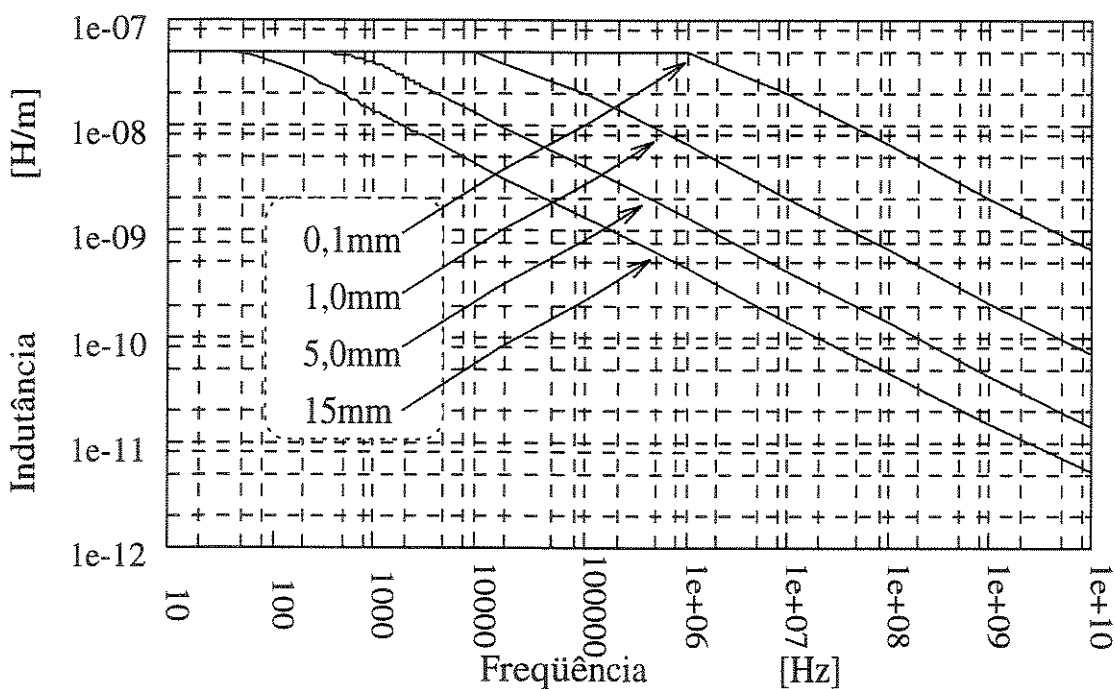


Figura 7.3: Indutância Int. devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em  $20^{\circ}\text{C}$ .

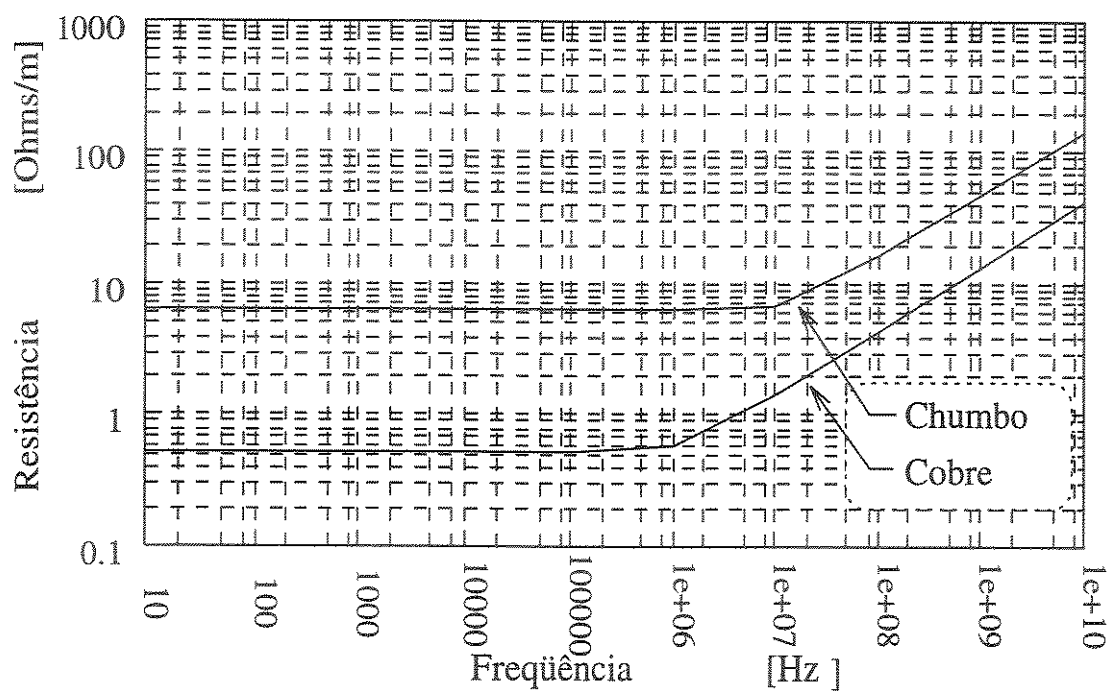


Figura 7.4: Resistência devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.

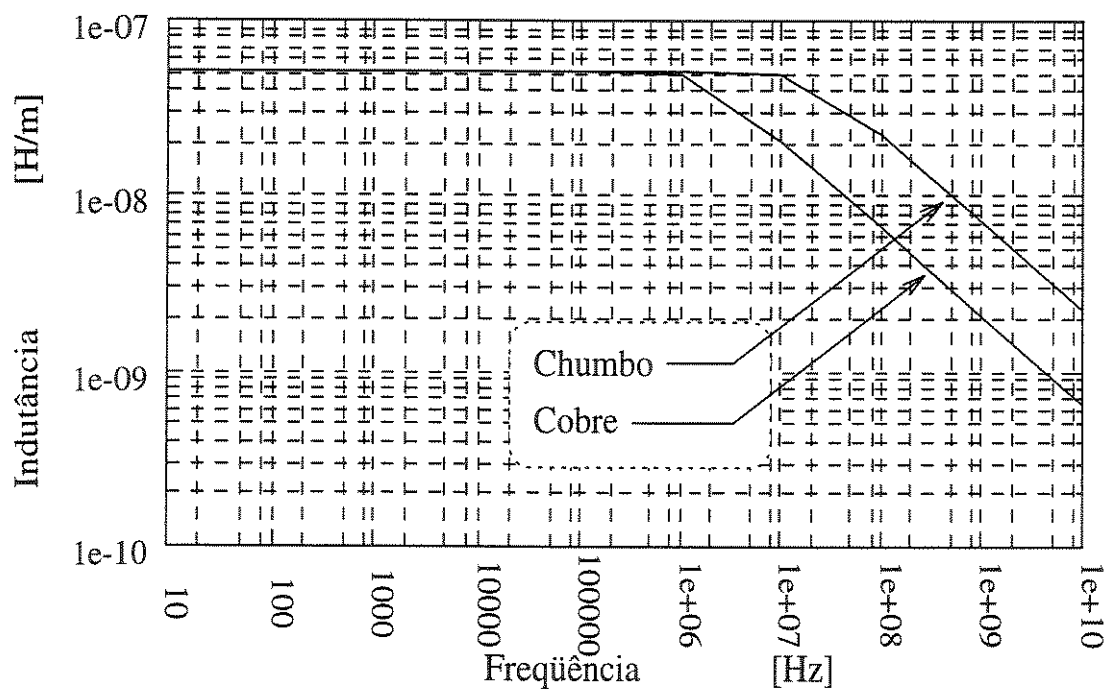


Figura 7.5: Indutância Int. devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em 20°C.

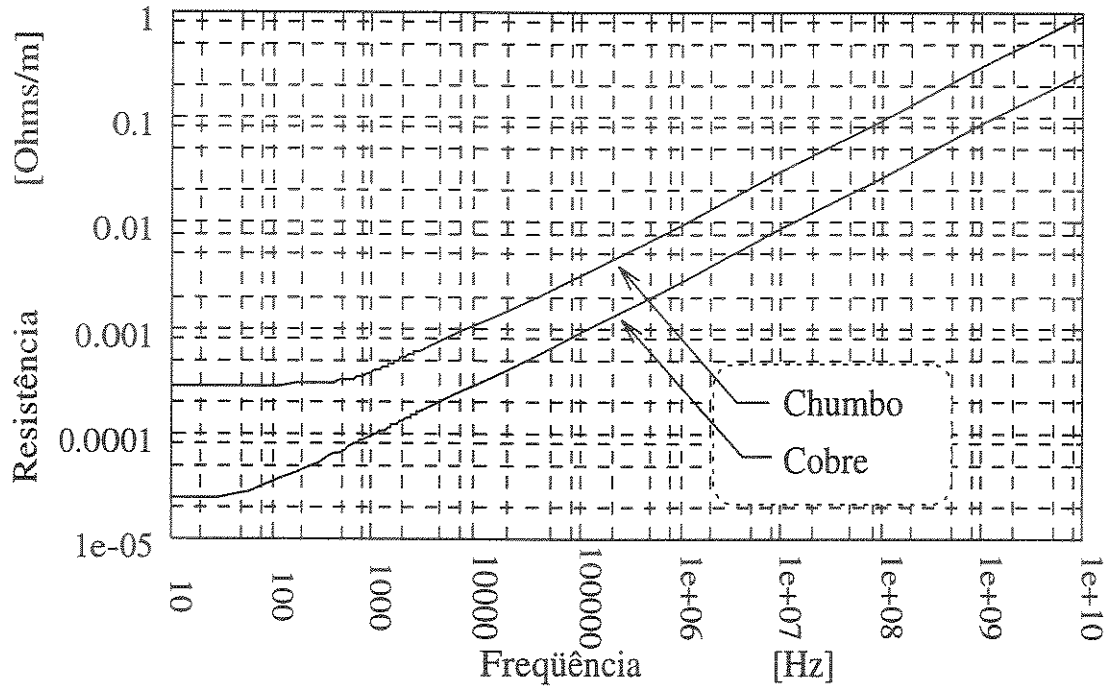


Figura 7.6: Resistência devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em  $20^{\circ}\text{C}$ .

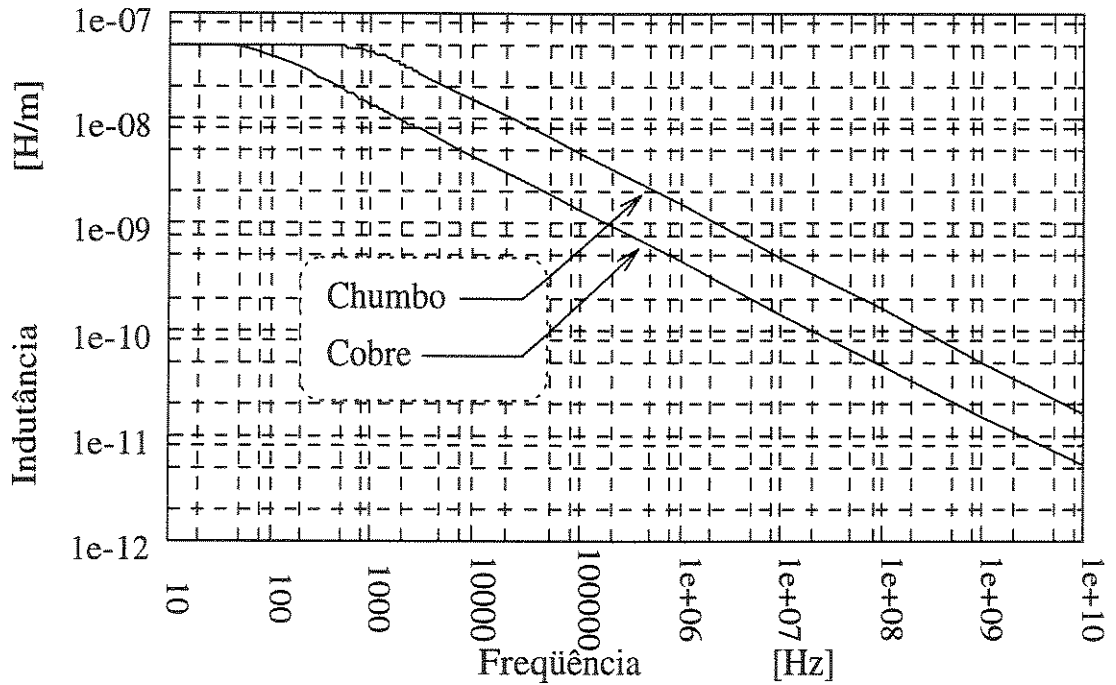


Figura 7.7: Indutância Int. devido ao E. P. de um Condutor Sólido e Cilíndrico em  $20^{\circ}\text{C}$ .



A seguir, a figura (7.8) mostra as curvas da resistência devido ao efeito pelicular em função da frequência, obtidas para vários raios de condutores (sólidos e cilíndricos de puro cobre de condutividade de  $5,8 \times 10^{07} em 20^{\circ}C$ ) usando a equação (7.23). Os dados utilizados na simulação, isto é, condutividade, raio,...etc, são os mesmos utilizados na referência [25]. Os resultados obtidos são idênticos quando comparados com a metodologia desenvolvida na mesma referência. Isto demonstra que a metodologia desenvolvida aqui serve como uma alternativa simples para calcular tanto a resistência quanto a indutância interna devido ao efeito pelicular para um condutor sólido e cilíndrico.

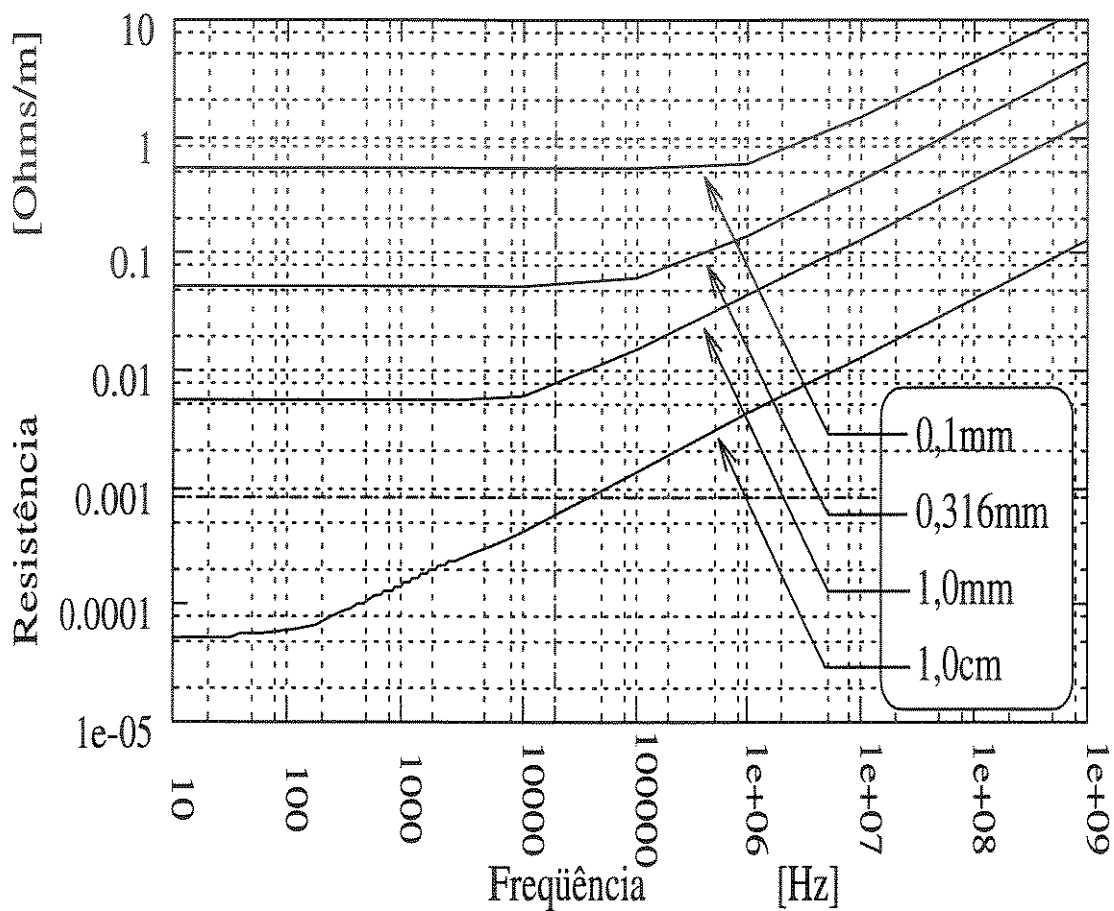


Figura 7.8: Resistência Devido ao E. P. de um Condutor Sólido e cilíndrico em  $20^{\circ}C$ .

## 7.4 Observações

1. Tanto para a resistência quanto para a indutância interna devido ao efeito pelicular, as Figuras (7.2) e (7.3) mostram que os condutores de raios menores são menos afetados na baixa frequência.
2. As Figuras (7.4) a (7.7) mostram que a resistência e indutância interna devido ao efeito pelicular de condutores de baixa condutividade e de qualquer raio são menos afetados em qualquer frequência.
3. Nas frequências baixas, principalmente as frequências harmônicas, as variações da resistência e a indutância interna do efeito pelicular como função da frequência são bastante significativas.

## 7.5 Conclusões

1. Os resultados obtidos provam que o efeito pelicular causa aumento acentuado na resistência e diminuição na indutância interna.
2. Estes parâmetros, resistência e indutância interna, podem ser utilizados em análises de linhas de transmissão usando o modelo clássico para determinar a impedância característica, velocidade de propagação, atenuação e outras propriedades.
3. Para melhorar os projetos e desenvolver modelos adequados, estes parâmetros podem ser utilizados principalmente nas frequências harmônicas.
4. Sem prejudicar as características, em um projeto qualquer, um material de uma condutividade menor pode ser usado para diminuir as perdas do efeito pelicular, relativa as perdas em corrente contínua.

# Capítulo 8

## RESULTADOS

### 8.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através das simulações realizadas como modelo de linha de transmissão desenvolvido considerando o efeito pelicular e as equações do telegrafista (modelo clássico). Com este último usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$  e  $R_w$  e  $L_w$ .

Vários tipos de sinais podem ser usados. Como foi apresentado no capítulo 3, os sinais aplicados foram:

- Senoidal;
- Pulso trapezoidal;
- Pulso atmosférico.

Para realizar as simulações usando estes sinais, foi considerada uma linha de transmissão constituída de um condutor de cobre de comprimento ( $l$ ) em metros e de raio ( $R$ ) também em metros. Esta linha, como mostra a Figura 8.1, é ligada a um gerador de sinais de um lado e a uma carga de outro e está numa altura ( $h$ ), em metros, acima de uma terra considerada ideal. O meio dielétrico em que está o condutor foi considerado ideal.

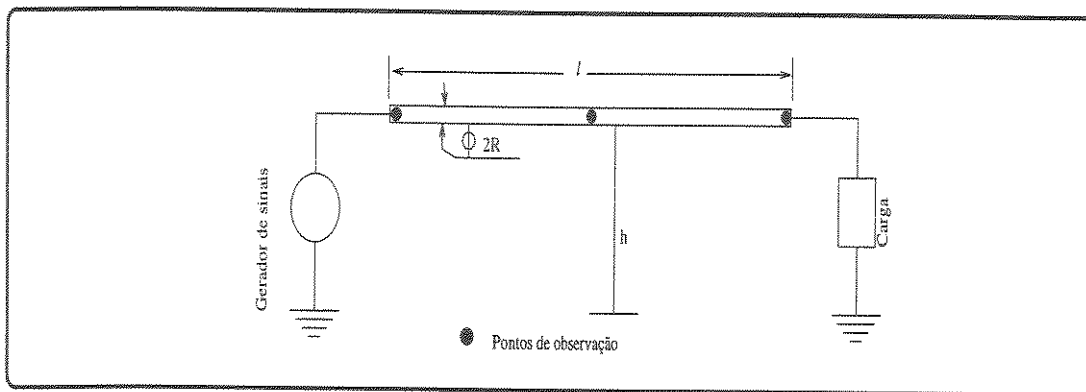


Figura 8.1: *Linha de Transmissão Unifilar.*

As especificações do material do condutor (cobre), meio dielétrico (ar) e da terra, são definidas por:

- condutividade do cobre ( $\sigma_c$ ) é  $5,8 \times 10^{07} \Omega/\text{m}^2$ ;
- permeabilidade do cobre ( $\mu$ ) é  $4\pi \times 10^{-07} \text{ H/m}$ ;
- permissividade do ar ( $\epsilon_o$ ) é  $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ;
- condutividade da terra ( $\sigma_g$ ) é nula.

Os parâmetros resistência  $R_{cc}$ , indutância interna  $L_{cc}$ , indutância externa  $L_{ex}$  e capacitância  $C_o$  são calculados em condições estáticas (corrente contínua) usando as seguintes expressões.

$$R_{cc} = \frac{1}{\sigma \pi R^2} \quad [\Omega]. \quad (8.1)$$

$$L_{cc} = \frac{\mu}{8\pi} \quad [H]. \quad (8.2)$$

$$L_{ex} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{R} \quad [H]. \quad (8.3)$$

$$C_{cc} = C_o = \frac{2\pi \epsilon_o}{\ln \frac{2h}{R}}. \quad [F]. \quad (8.4)$$

Os parâmetros que variam com a frequência, resistência  $R_\omega$  e indutância interna  $L_\omega$  são calculados, para cada frequência, usando uma expressão que calcula a impedância complexa interna. Esta expressão é dada no capítulo 7.

A velocidade de propagação  $v_p$  e a impedância característica  $Z_o$  são calculadas usando as seguintes expressões:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L_o \cdot C_o}} \quad (8.5)$$

$$Z_o = \sqrt{L_o / C_o} \quad (8.6)$$

Onde  $L_o$  representa a indutância total, foi considerada a soma das indutâncias externa  $L_{ex}$  e interna  $L_{cc}$  para as simulações do modelo clássico quando se utiliza os parâmetros da corrente contínua, e foi considerada a soma das indutâncias externa  $L_{ex}$  e interna  $L_\omega$  para as simulações do modelo clássico quando se utiliza os parâmetros da frequência e as simulações do modelo desenvolvido.

Para a convergência dos programas computacionais, tanto para o modelo clássico quanto para o modelo desenvolvido, é necessário adotar-se os seguintes critérios:

- Definir um  $\Delta z$ ;
- Escolher um  $\Delta t$ .

Estes critérios são aplicados em cada caso de simulação tomando em conta a seguinte relação:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \gg v_p. \quad (8.7)$$

## 8.2 Simulações

A seguir são apresentadas os resultados das simulações dos tipos de sinais senoidal, trapezoidal e atmosférico.

### 8.2.1 Senoidal

Para este tipo de sinal, considere-se os seguintes casos.

### 8.2.1.1 Caso I

Este caso apresenta uma simulação de um sinal senoidal de tensão que tem as seguintes características:

- A frequência ( $f$ ) 60 Hz;
- A amplitude da tensão ( $v_m$ ) 1000 Volts.

O sinal com estas características foi aplicado na entrada de uma linha de transmissão com os seguintes dados gerais:

- $l = 1000 \times 10^3$  m;
- $h = 30$  m;
- $R = 15 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,2439 \times 10^{-04} \Omega/\text{m}$ ;
- $R_{\omega} = 0,2804115 \times 10^{-04} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07}$  H/m;
- $L_{\omega} = 0,4648269 \times 10^{-07}$  H/m;
- $L_{ex} = 1,659 \times 10^{-06}$  H/m;
- $C_o = 0,6707 \times 10^{-11}$  F/m.

A velocidade de propagação, a impedância característica e indutância total  $L_o$  foram calculadas para cada modelo. Para o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,954 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 504,7 \Omega$ ;

- $L_o = 1,709 \times 10^{-06}$  H/m.

Para o modelo desenvolvido e o modelo clássico usando  $R_\omega$  e  $L_{\omega\text{omega}}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,957 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 504,27\Omega$ ;
- $L_o = 1,70548 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 140 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 7143 m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $9,785 \times 10^{-06}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.2 a 8.7.

As tabelas 8.1 e 8.2 mostram alguns pontos selecionados das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.4 e 8.7. A tabela 8.3 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.1 e 8.2.

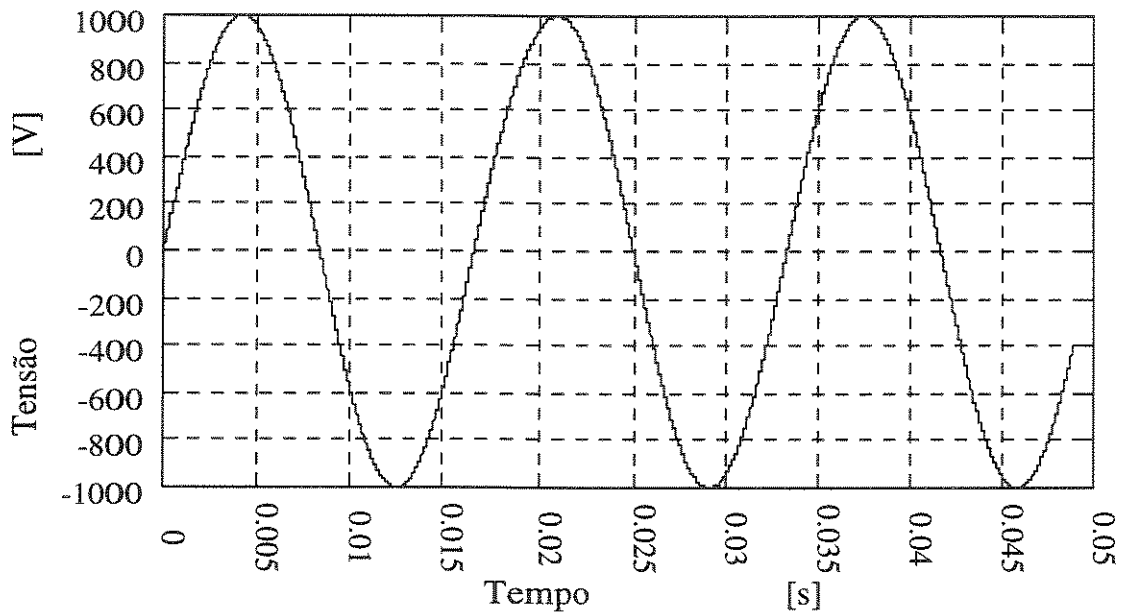


Figura 8.2: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

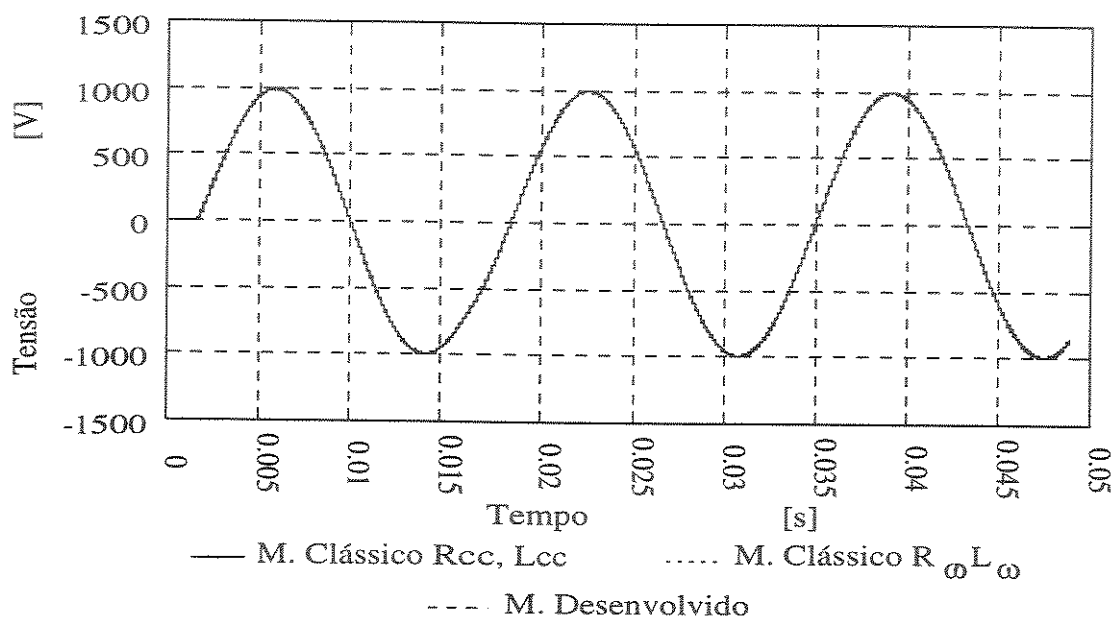


Figura 8.3: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

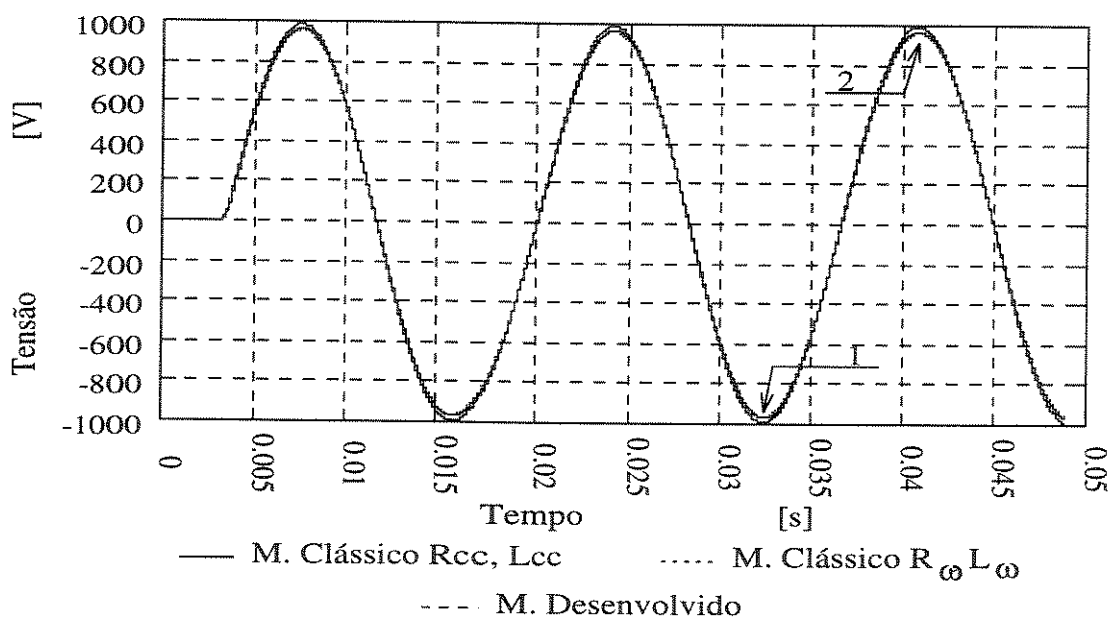


Figura 8.4: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.



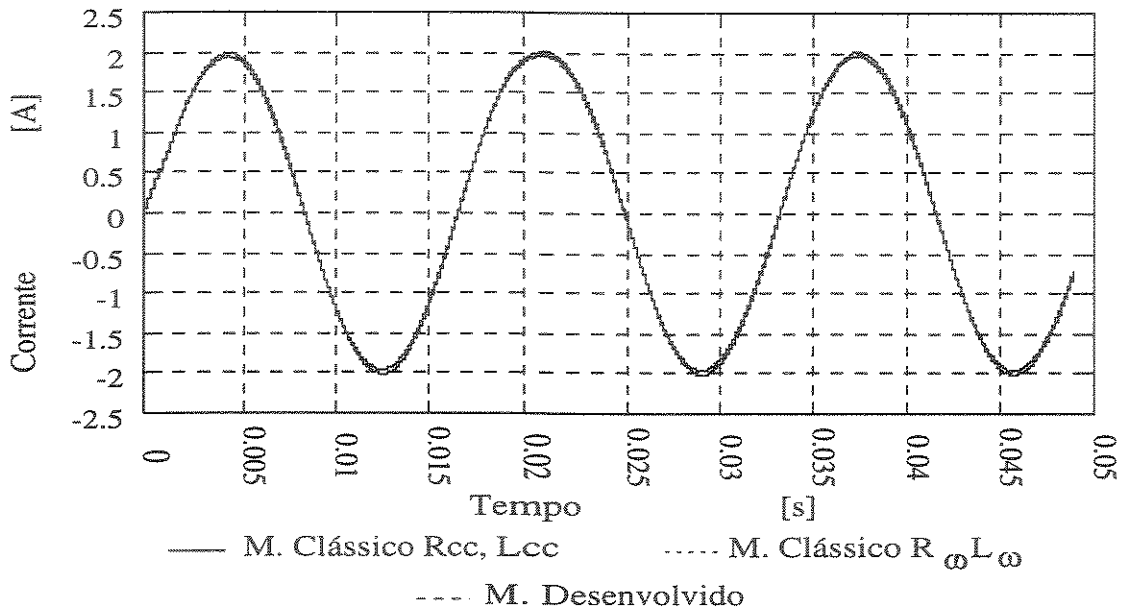


Figura 8.5: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

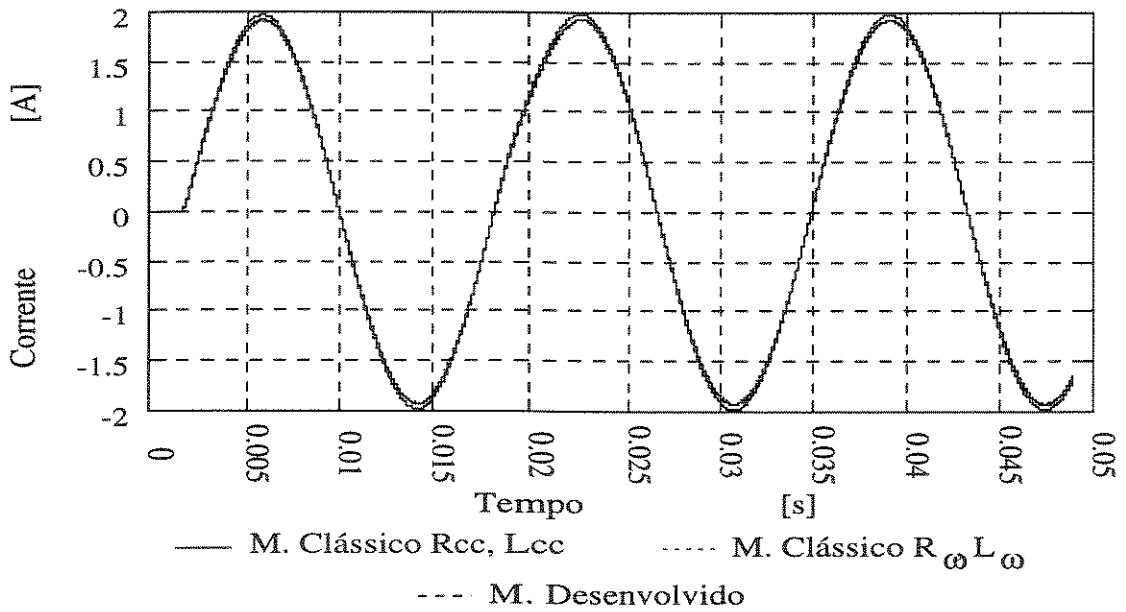


Figura 8.6: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

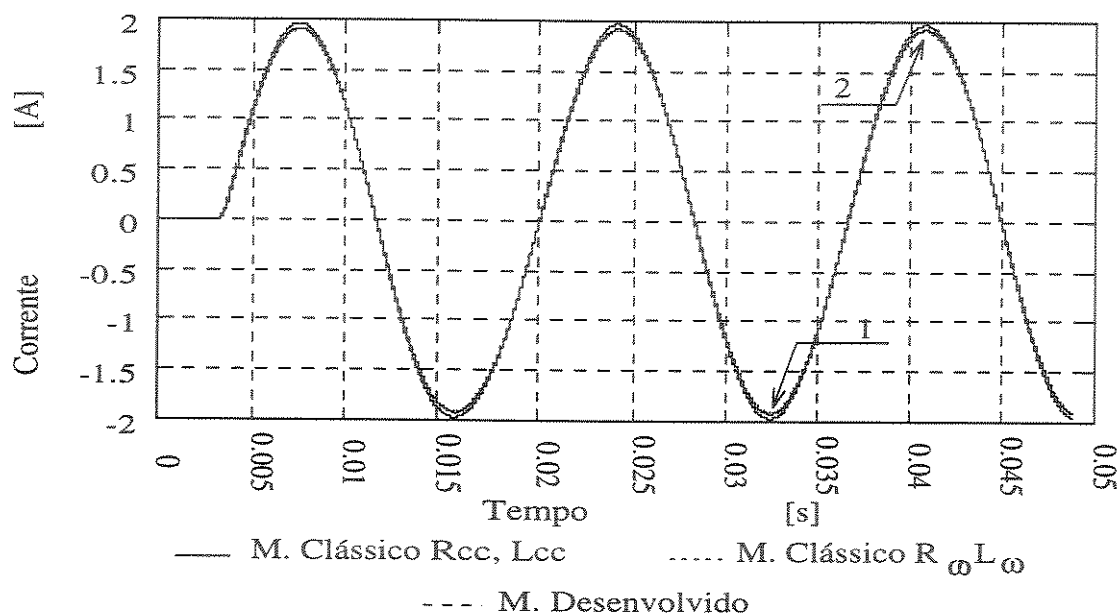


Figura 8.7: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,325E-01	-0,992E+03	-0,969E+03	2,374	-0,964E+03	2,905
2	0,408E-01	0,992E+03	0,969E+03	2,374	0,964E+03	2,905

Tabela 8.1:

Corrente [A]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,325E-01	-0,197E+01	-0,192E+01	2,604	-0,191E+01	3,141
2	0,408E-01	0,197E+01	0,192E+01	2,604	0,191E+01	3,141

Tabela 8.2:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]	
	Ponto 1	Ponto 2
Desenvolvido	503,55	503,55
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	504,69	504,69
Clássico $R_\omega, L_\omega$	504,71	504,71

Tabela 8.3:

### 8.2.1.2 Caso II

Este caso apresenta os resultados da simulação de um sinal senoidal de tensão com as características dadas no caso anterior.

Com estas características, o sinal aplicado na entrada de uma linha de transmissão tem os mesmos dados gerais do caso anterior e com a seguinte modificação:

- $R = 50 \times 10^{-03}$  m.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,2195 \times 10^{-05} \Omega/\text{m}$ ;
- $R_\omega = 0,7003955 \times 10^{-05} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07}$  H/m;
- $L_\omega = 0,1698242 \times 10^{-07}$  H/m;
- $L_{ex} = 1,418 \times 10^{-06}$  H/m;
- $C_o = 0,7846 \times 10^{-11}$  F/m.

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para cada modelo. Para o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,946 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 432,5 \Omega$ ;

- $L_o = 1,468 \times 10^{-06}$  H/m.

Para o modelo desenvolvido e o modelo clássico usando  $R_\omega$  e  $L_{\omega\text{mega}}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,998 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 425,1\Omega$ ;
- $L_o = 1,434982 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 140 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 7143 m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $9,785 \times 10^{-06}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.8 a 8.13.

As tabelas 8.4 e 8.5 mostram alguns pontos selecionados das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.10 e 8.13. A tabela 8.6 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.4 e 8.5.

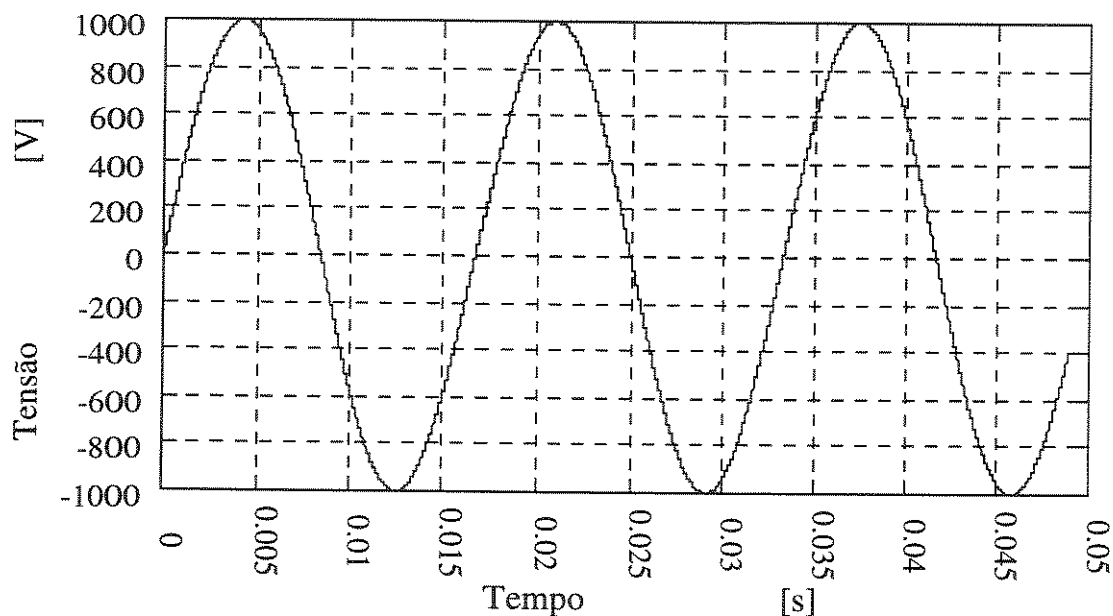


Figura 8.8: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

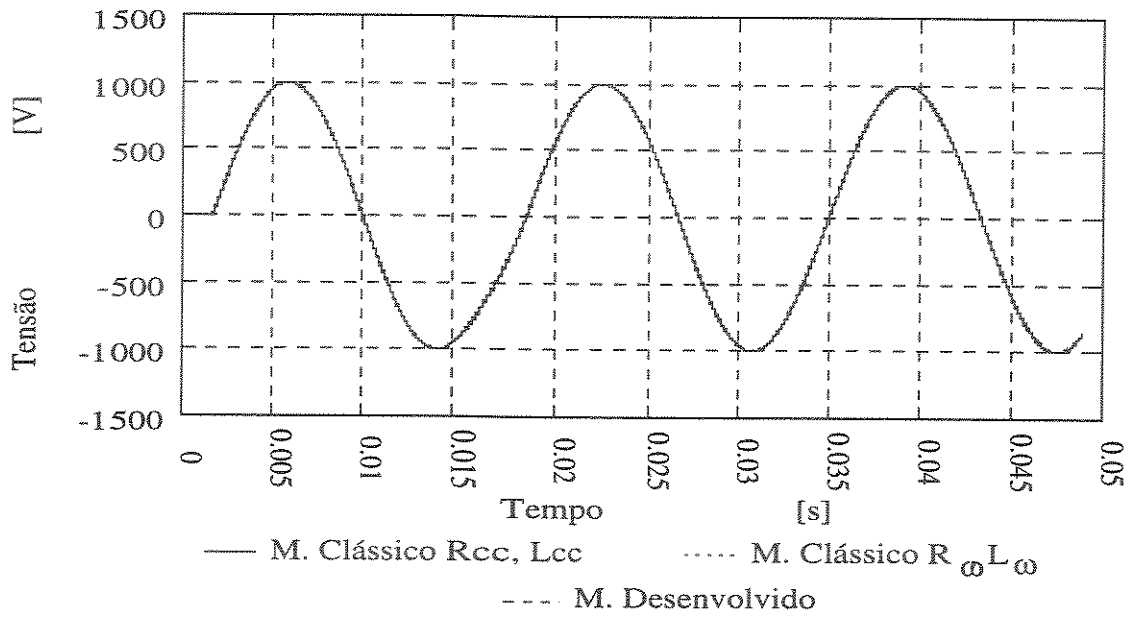


Figura 8.9: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

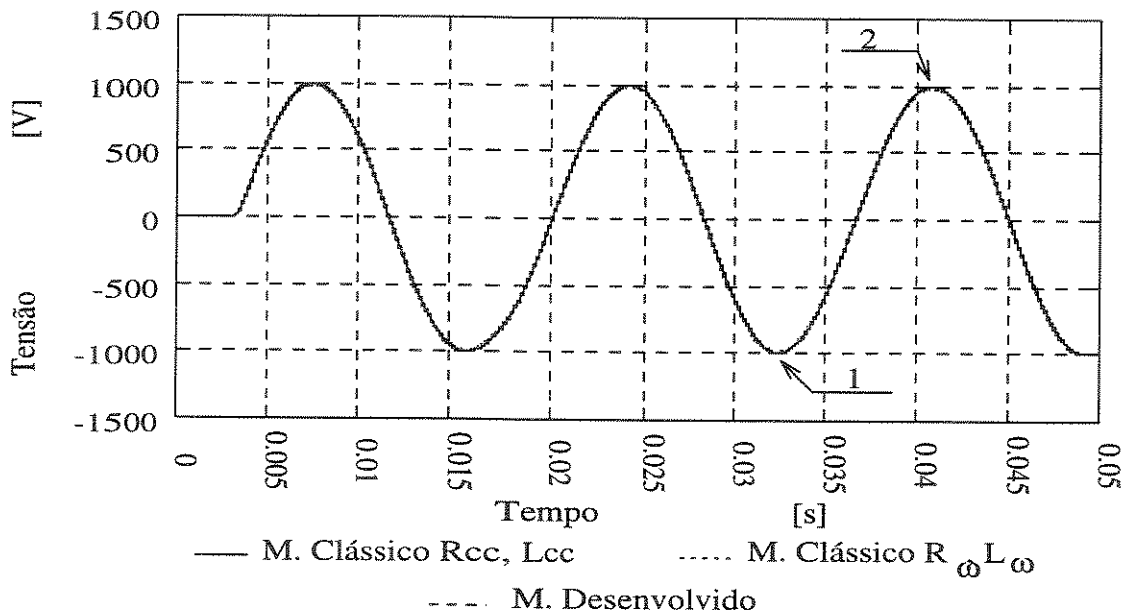


Figura 8.10: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

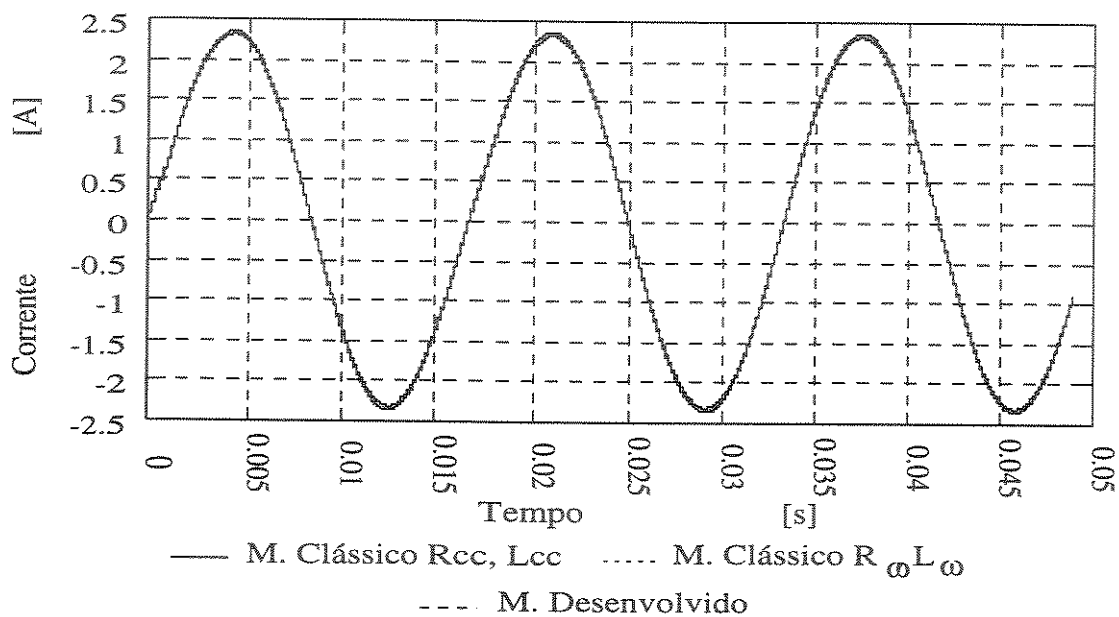


Figura 8.11: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

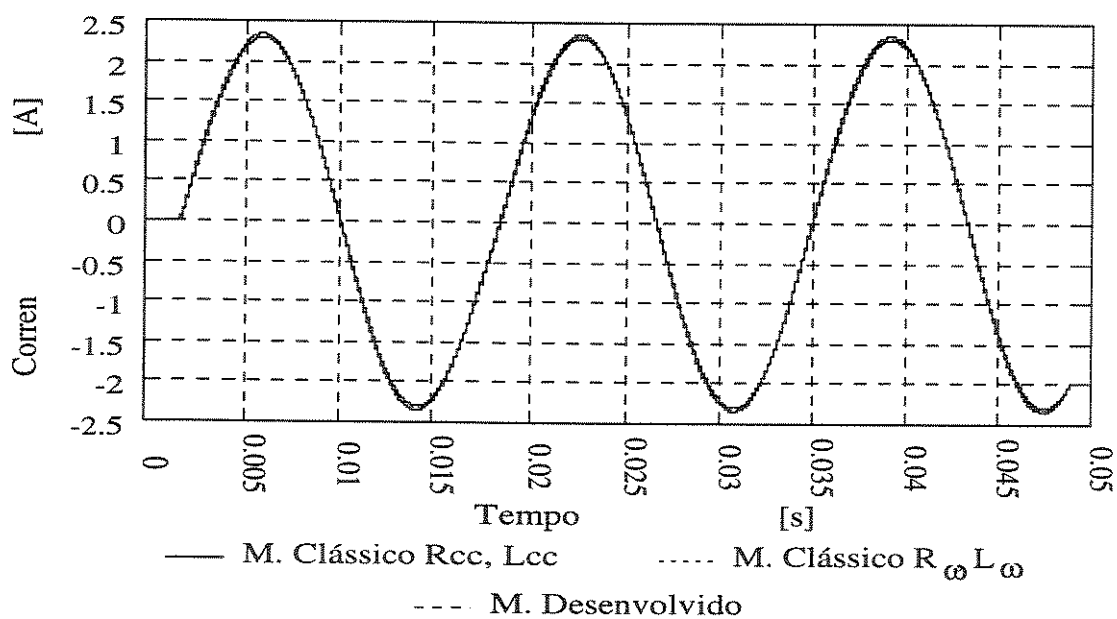


Figura 8.12: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

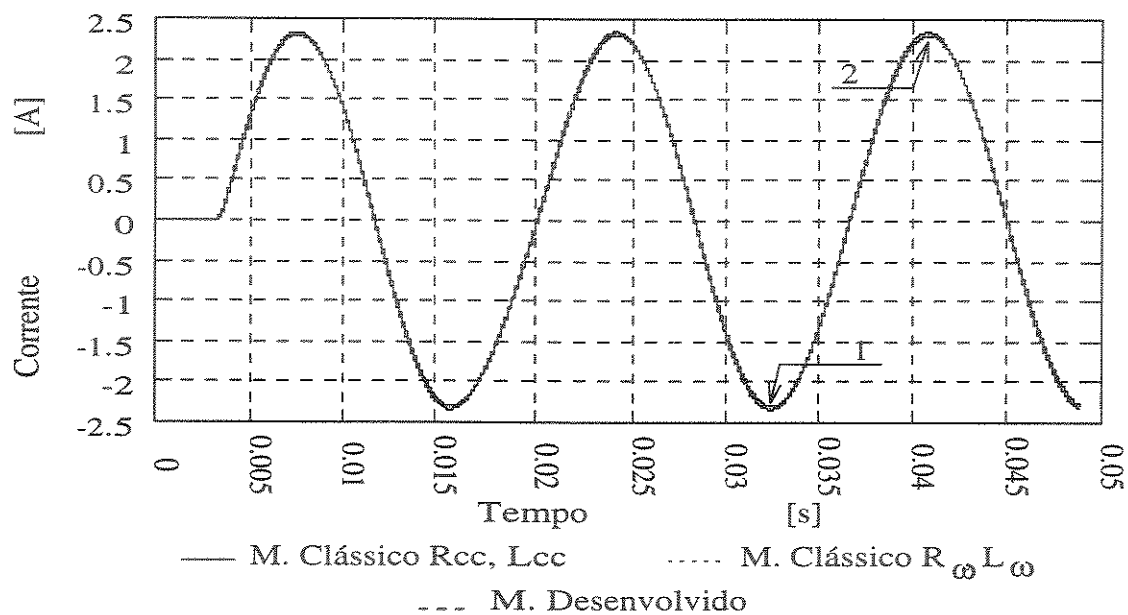


Figura 8.13: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,325E-01	-0,100E+04	-0,994E+03	0,604	-0,988E+03	1,215
2	0,408E-01	0,100E+04	0,994E+03	0,604	0,988E+03	1,215

Tabela 8.4:

Corrente [A]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,325E-01	-0,234E+01	-0,230E+01	1,739	-0,231E+01	1,299
2	0,408E-01	0,234E+01	0,230E+01	1,739	0,231E+01	1,299

Tabela 8.5:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]	
	Ponto 1	Ponto 2
Desenvolvido	427,35	427,35
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	432,17	432,17
Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	427,71	427,71

Tabela 8.6:

### 8.2.1.3 Caso III

Este caso apresenta os resultados da simulação de um sinal senoidal de tensão com as seguintes características:

- A frequência ( $f$ ) 100 KHz;
- A amplitude da tensão ( $v_m$ ) 100 Volts.

O sinal com estas características foi aplicado na entrada de uma linha de transmissão com os seguintes dados gerais:

- $l = 9000$  m;
- $h = 11,5$  m;
- $R = 4 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,343 \times 10^{-03} \Omega/\text{m}$ ;
- $R_{\omega} = 0,3369541 \times 10^{-02} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07}$  H/m;



- $L_\omega = 0,5223401 \times 10^{-08}$  H/m;
- $L_{ex} = 1,731 \times 10^{-06}$  H/m;
- $C_o = 0,6426 \times 10^{-11}$  F/m.

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para cada modelo. Para o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,956 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 526,5\Omega$ ;
- $L_o = 1,781 \times 10^{-06}$  H/m.

Para o modelo desenvolvido e o modelo clássico usando  $R_\omega$  e  $L_{omega}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,993 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 519,8\Omega$ ;
- $L_o = 1,736223 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 120 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 75 m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um ótimo  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,0274 \times 10^{-07}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.14 a 8.19.

As tabelas 8.7 e 8.8 mostram alguns pontos selecionados das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.16 e 8.19. A tabela 8.9 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.7 e 8.8.

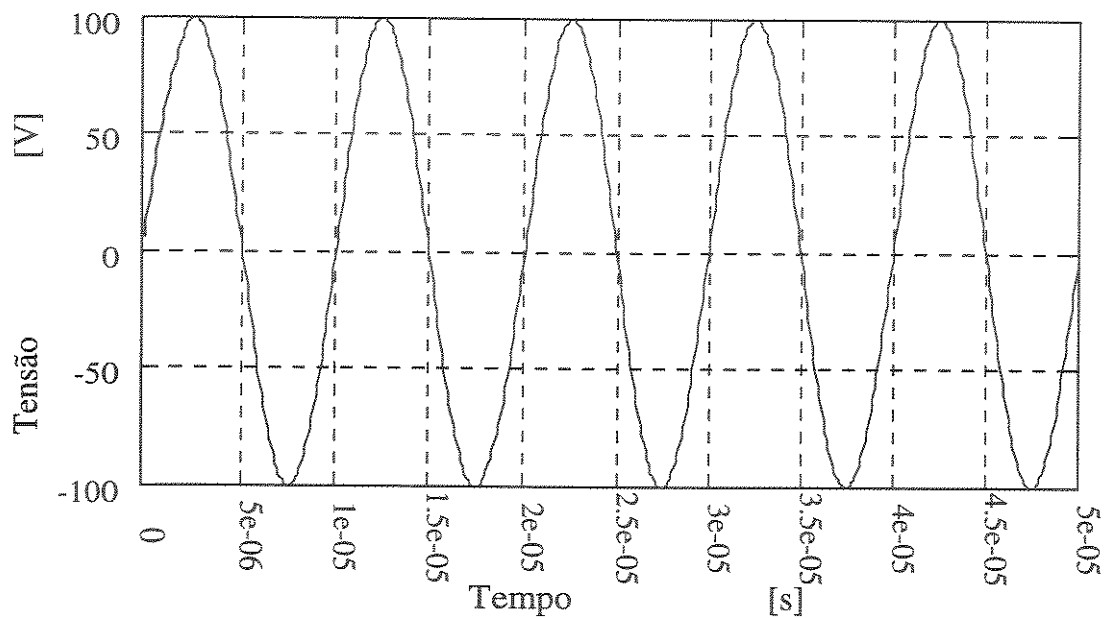


Figura 8.14: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

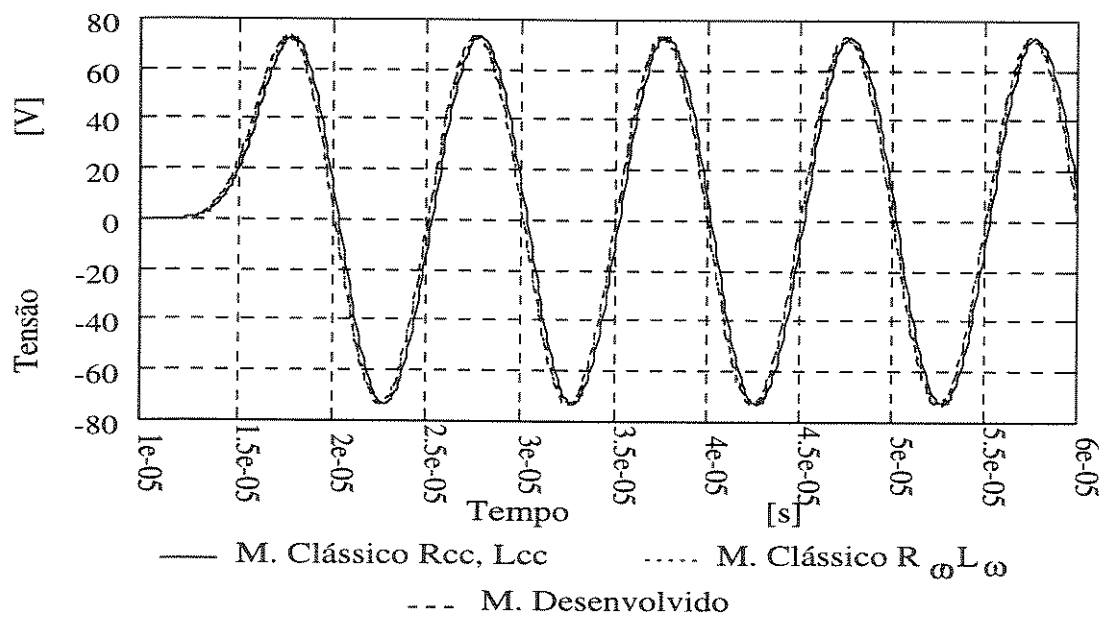


Figura 8.15: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

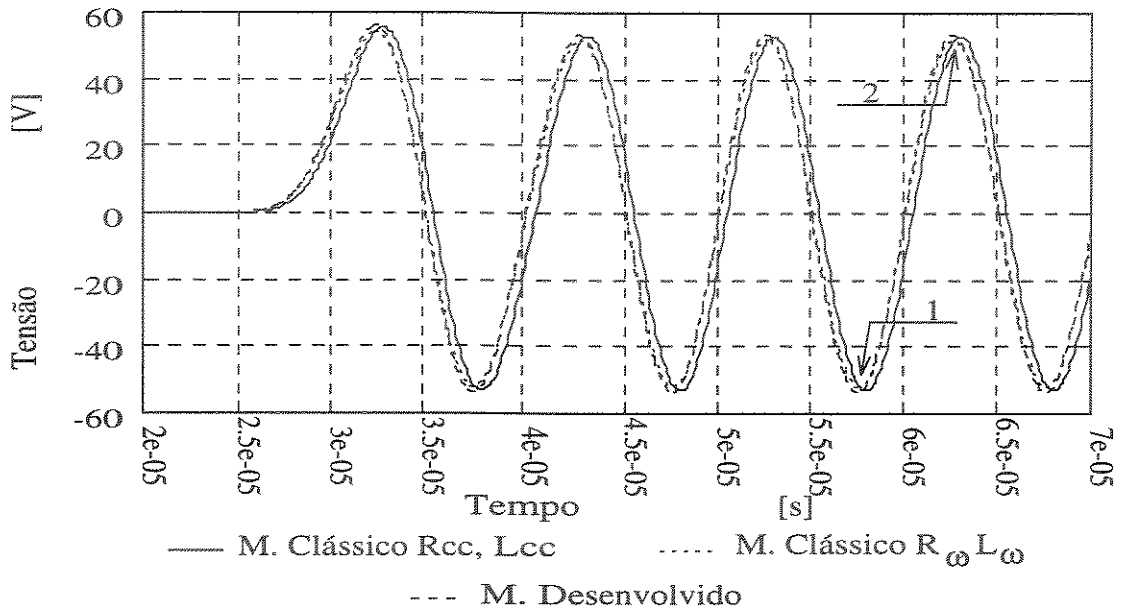


Figura 8.16: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

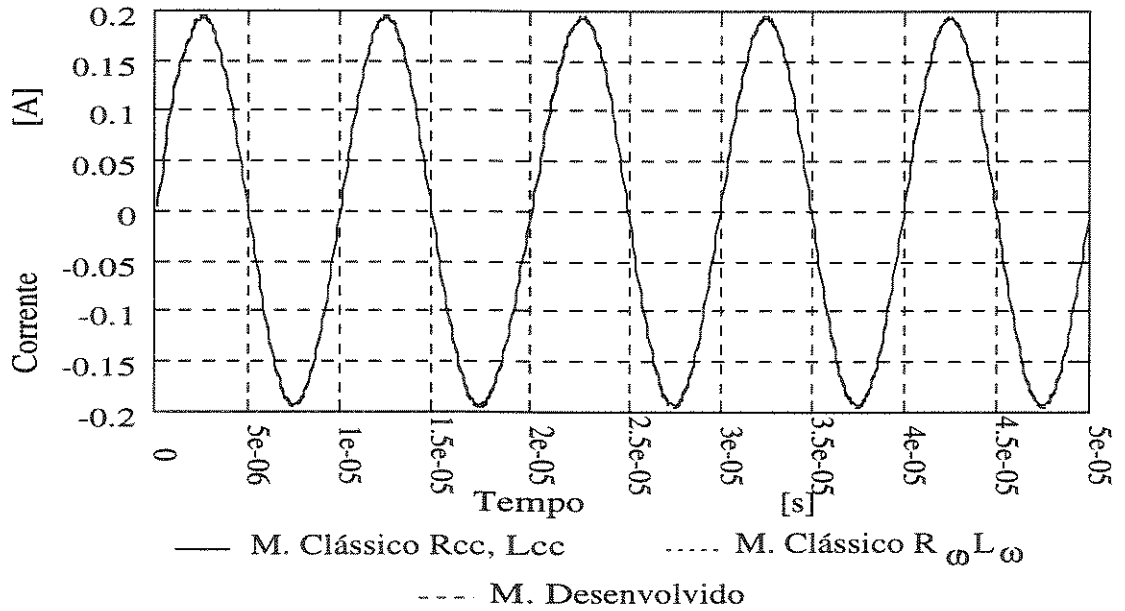


Figura 8.17: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

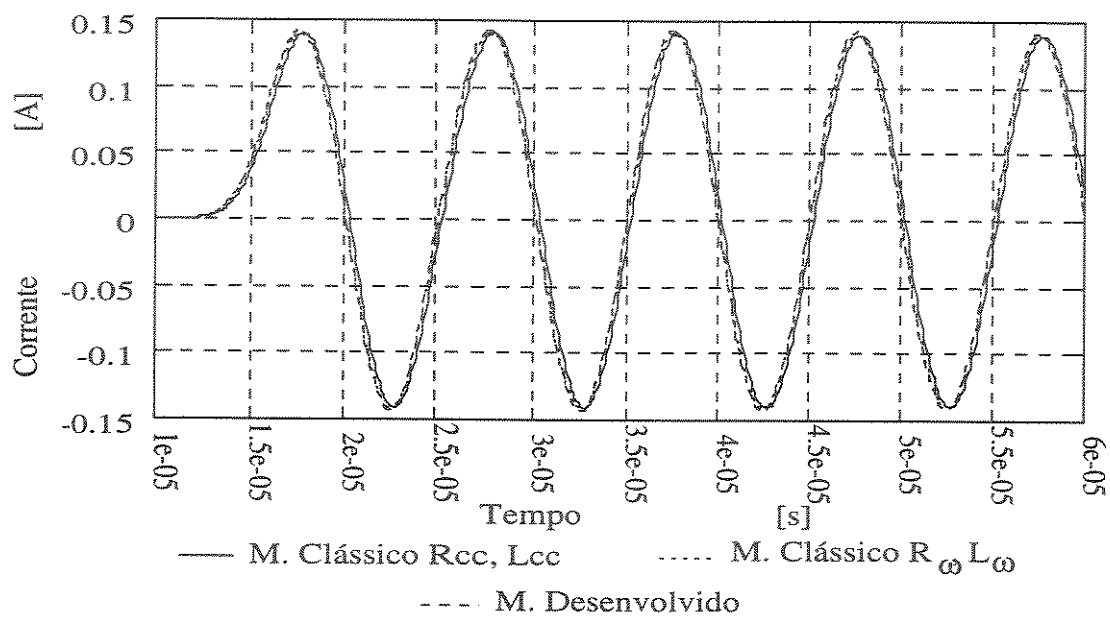


Figura 8.18: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

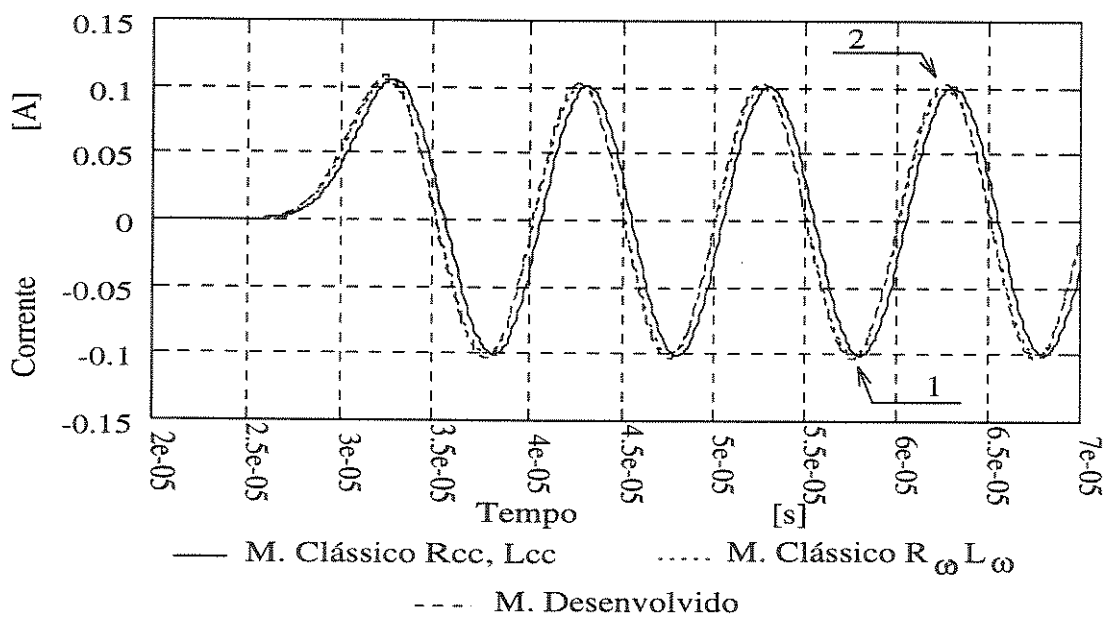


Figura 8.19: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]						
Pontos	Tempo [s]	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,576E-04	-0,536E+02	-0,512E+02	4,688	-0,521E+02	2,879
2	0,627E-04	0,535E+02	0,514E+02	4,086	0,520E+02	2,885

Tabela 8.7:

Corrente [A]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,576E-04	-0,103E+00	-0,972E-01	5,967	-0,100E+00	3,000
2	0,627E-04	0,103E+00	0,977E-01	5,425	0,100E+00	3,000

Tabela 8.8:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]	
	Ponto 1	Ponto 2
Desenvolvido	520,39	519,42
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	526,75	526,10
Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	521,00	520,00

Tabela 8.9:

#### 8.2.1.4 Caso IV

Este caso apresenta os resultados da simulação de um sinal senoidal de tensão com as características dadas no caso anterior.

Com estas características, o sinal aplicado na entrada de uma linha de transmissão tem os mesmos dados gerais do caso anterior e com a seguinte modificação:

- $R = 12 \times 10^{-03} \text{ m}$ .

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,3811 \times 10^{-04} \Omega/\text{m}$ ;
- $R_{\omega} = 0,1103793 \times 10^{-02} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07} \text{ H/m}$ ;
- $L_{\omega} = 0,1742255 \times 10^{-08} \text{ H/m}$ ;
- $L_{ex} = 1,512 \times 10^{-06} \text{ H/m}$ ;
- $C_o = 0,6360 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ .

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para cada modelo. Para o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,950 \times 10^{08} \text{ m/s}$ ;
- $Z_o = 460,6 \Omega$ ;
- $L_o = 1,562 \times 10^{-06} \text{ H/m}$ .

Para o modelo desenvolvido e o modelo clássico usando  $R_{\omega}$  e  $L_{\omega}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,996 \times 10^{08} \text{ m/s}$ ;

- $Z_o = 453,5\Omega$ ;
- $L_o = 1,513 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 120 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 75 m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,0274 \times 10^{-07}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.20 a 8.25.

As tabelas 8.10 e 8.11 mostram alguns pontos selecionados das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.22 e 8.25. A tabela 8.12 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.10 e 8.11.

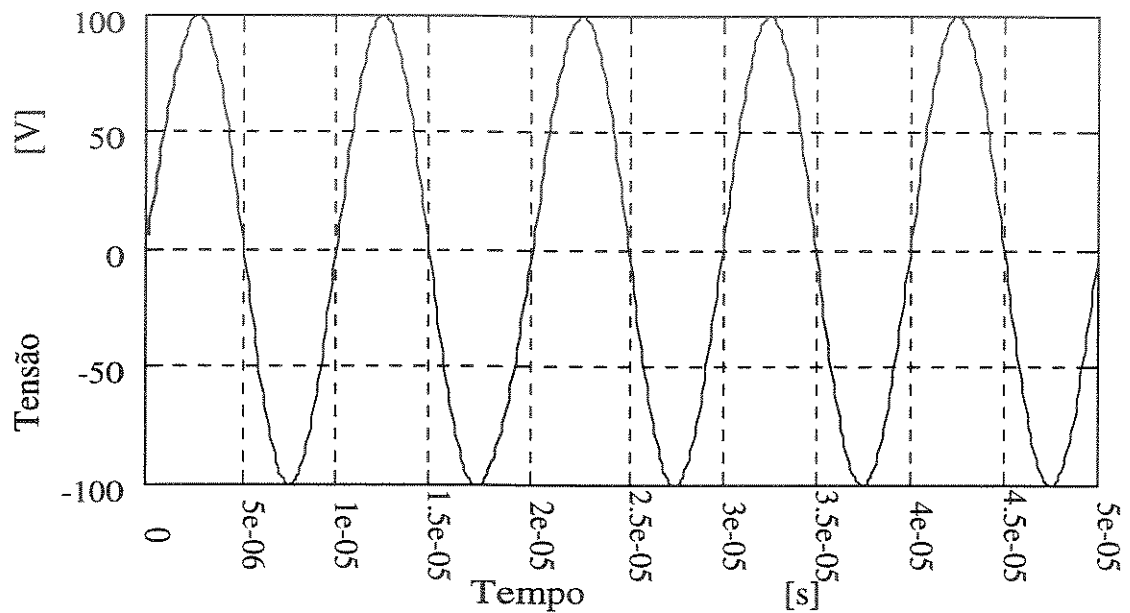


Figura 8.20: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

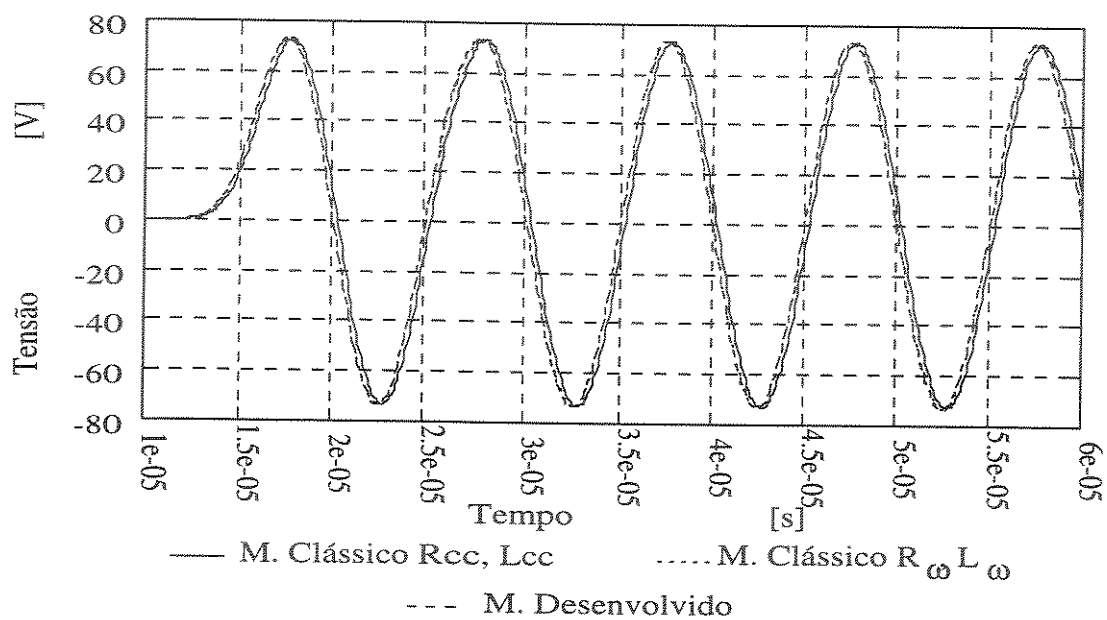


Figura 8.21: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

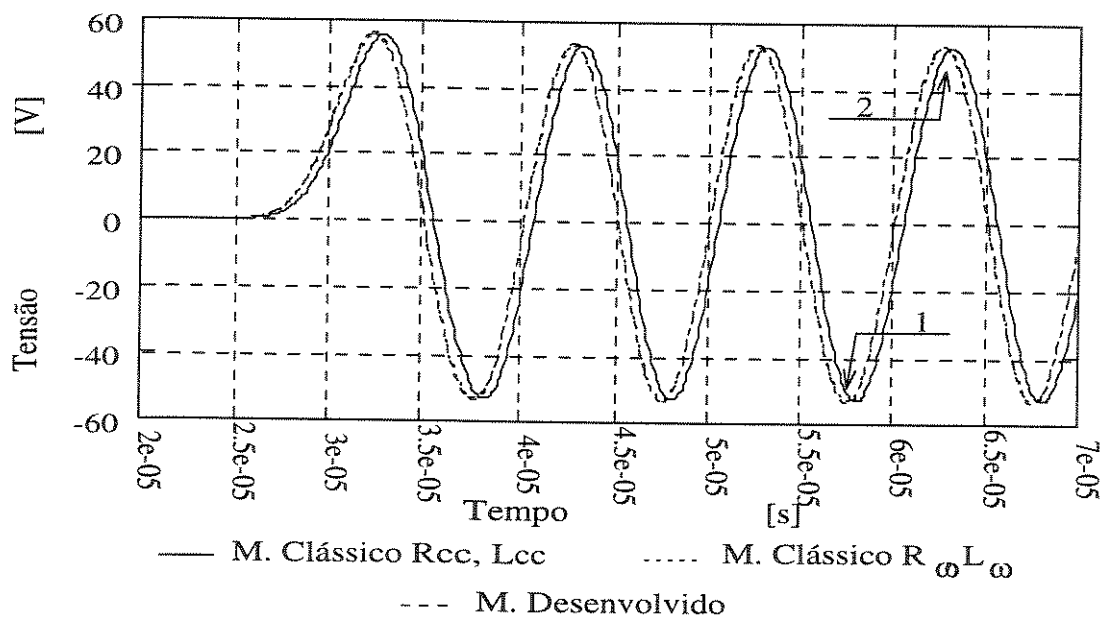


Figura 8.22: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.



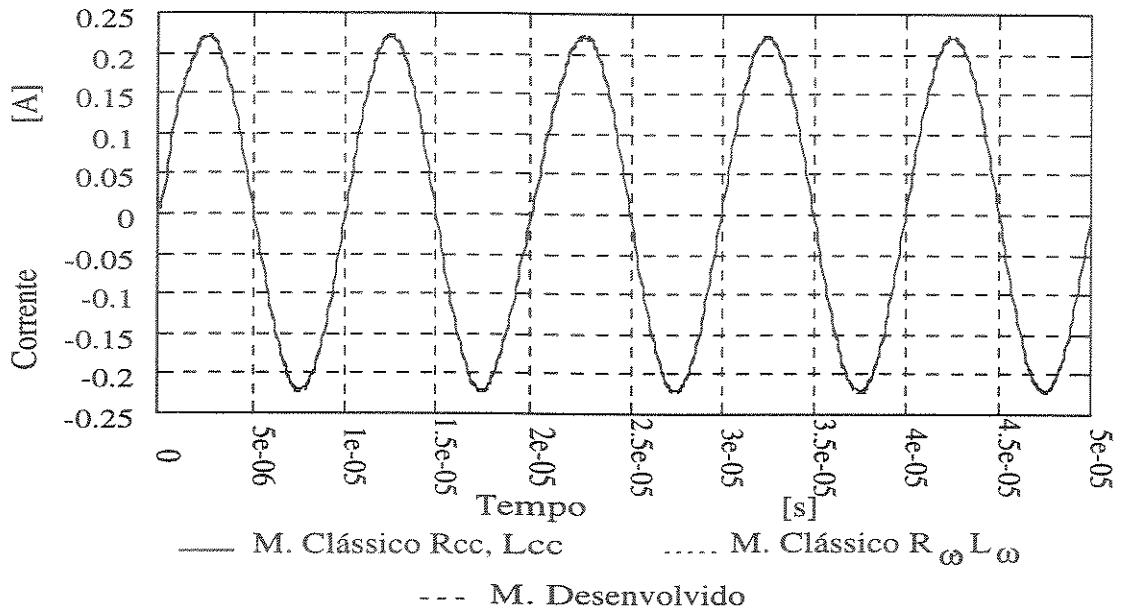


Figura 8.23: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

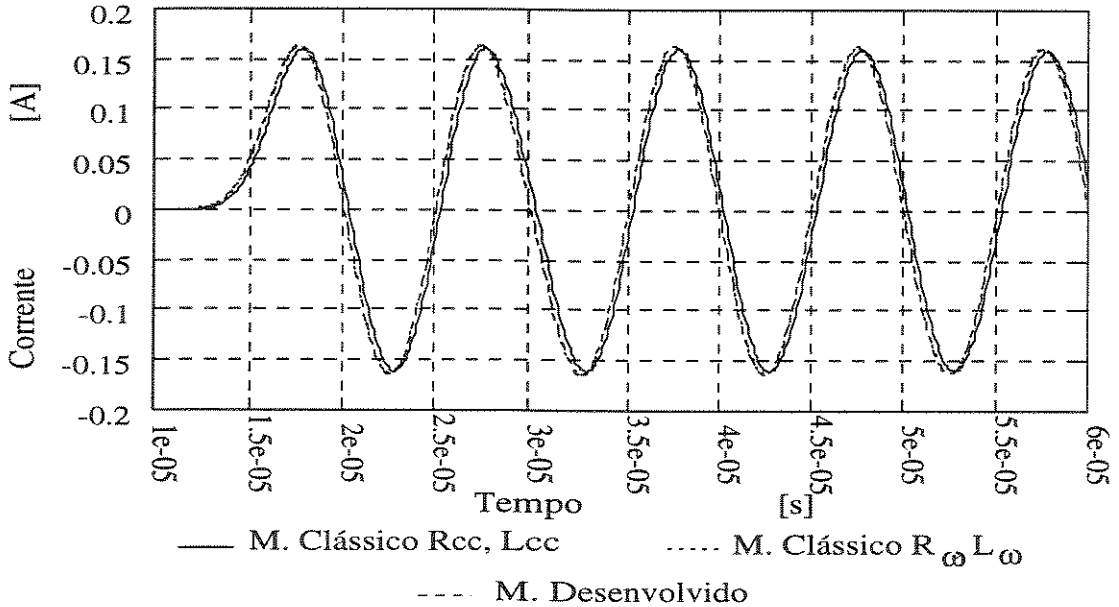


Figura 8.24: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

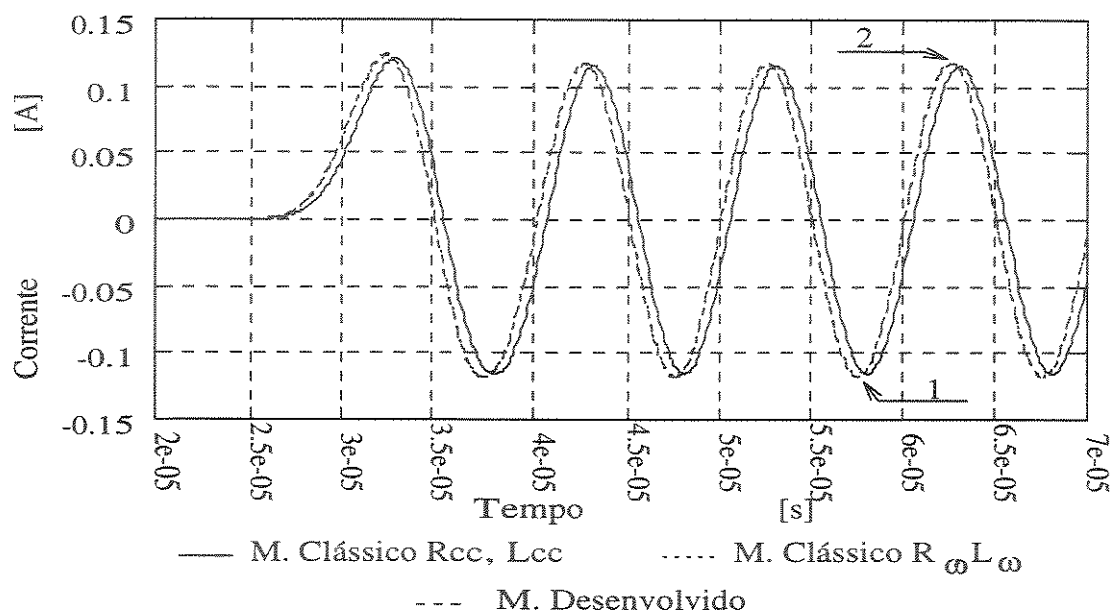


Figura 8.25: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,576E-04	-0,537E+02	-0,507E+02	5,917	-0,531E+02	1,130
2	0,627E-04	0,536E+02	0,510E+02	5,098	0,530E+02	1,132

Tabela 8.10:

Corrente [A]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,576E-04	-0,118E+00	-0,110E+00	7,273	-0,117E+00	0,855
2	0,627E-04	0,118E+00	0,111E+00	6,306	0,117E+00	0,855

Tabela 8.11:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]	
	Ponto 1	Ponto 2
Desenvolvido	455,08	454,24
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	460,91	459,46
Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	453,85	452,99

Tabela 8.12:

### 8.2.1.5 CASO V

Este caso apresenta os resultados da simulação utilizando um sinal senoidal de tensão com as seguintes características:

- A frequência (f) 50 MHz;
- A amplitude da tensão ( $v_m$ ) 10 Volts.

Com estas características, o sinal aplicado na entrada de uma linha de transmissão com os seguintes dados gerais:

- $l = 18$  m;
- $h = 7,5$  m;
- $R = 2 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,1372 \times 10^{-02} \Omega/\text{m}$ ;
- $R_{\omega} = 0,1471487 \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07}$  H/m;

- $L_\omega = 0,4681069 \times 10^{-09}$  H/m;
- $L_{ex} = 1,78453 \times 10^{-06}$  H/m;
- $C_o = 0,6235 \times 10^{-11}$  F/m.

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para cada modelo. Para o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,957 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 542,5\Omega$ ;
- $L_o = 1,835 \times 10^{-06}$  H/m.

Para o modelo desenvolvido e o modelo clássico usando  $R_\omega$  e  $L_{\omega}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,998 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 535,1$   $\Omega$ ;
- $L_o = 1,785 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 160 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 0,1125 m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um ótimo  $\Delta t$  aproximadamente de  $2,055 \times 10^{-10}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.26 a 8.31.

As tabelas 8.13 e 8.14 mostram alguns pontos selecionados das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.28 e 8.31. A tabela 8.15 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.13 e 8.14.

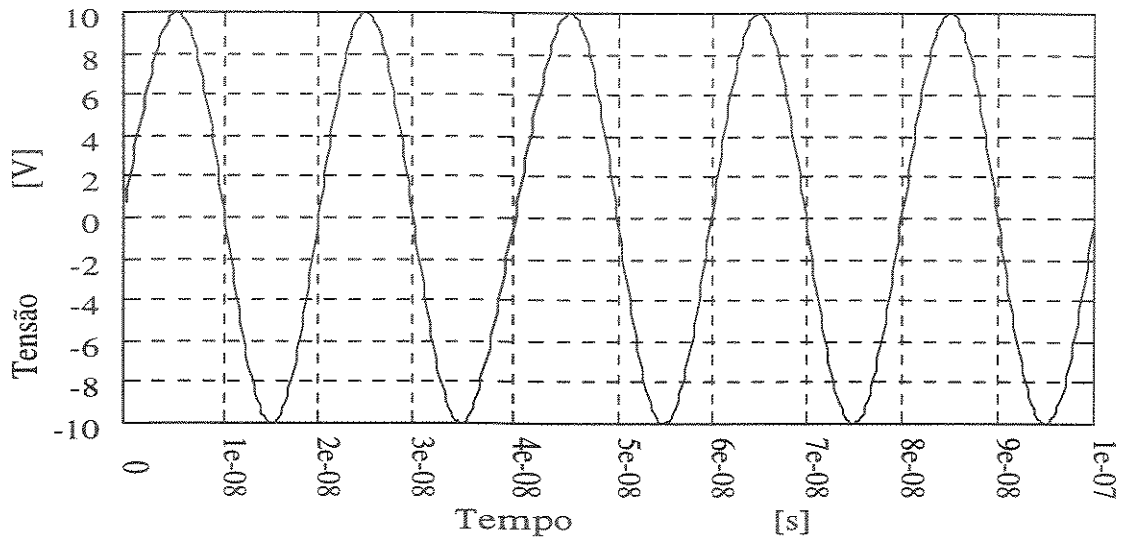


Figura 8.26: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

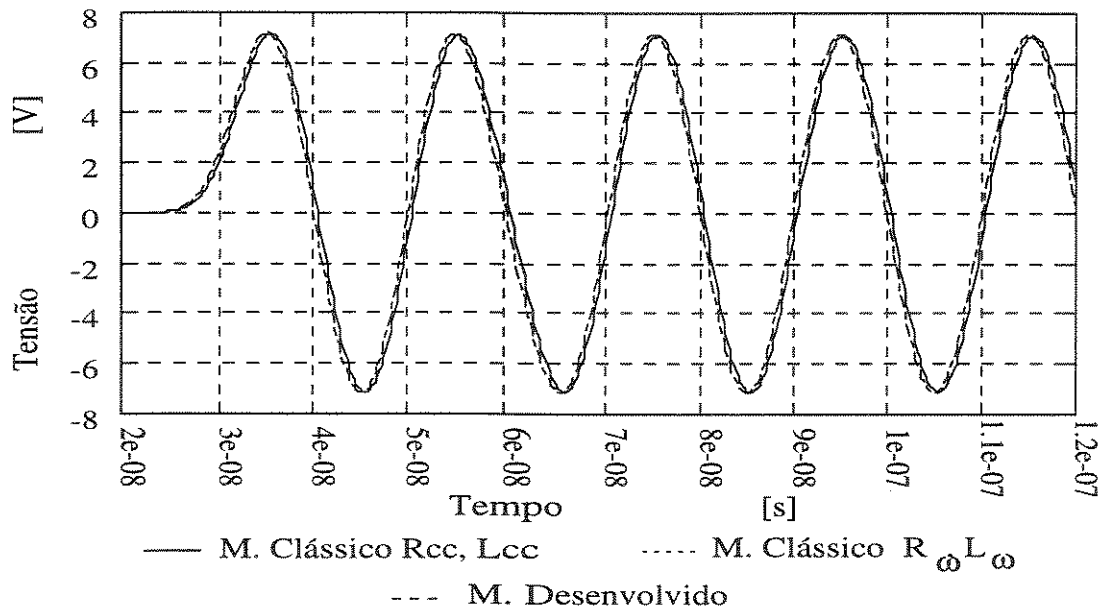


Figura 8.27: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

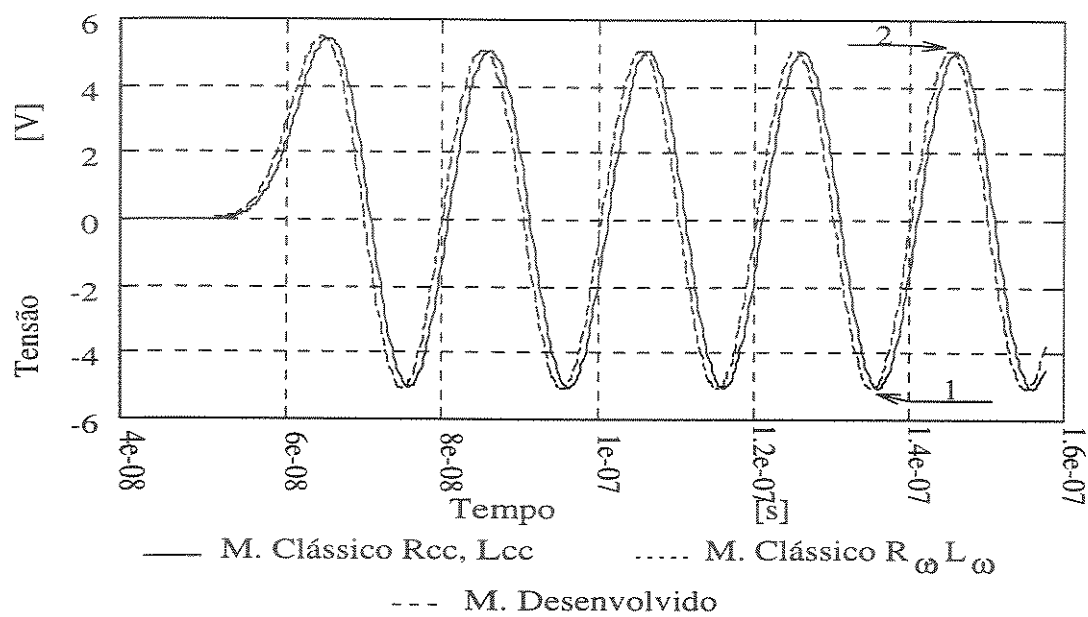


Figura 8.28: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

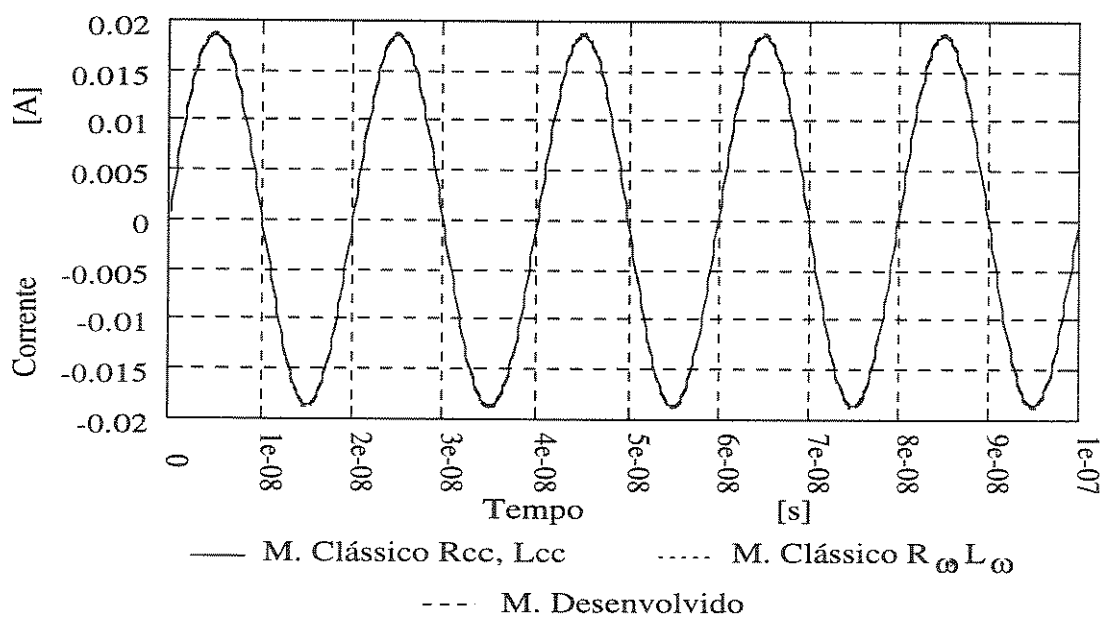


Figura 8.29: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

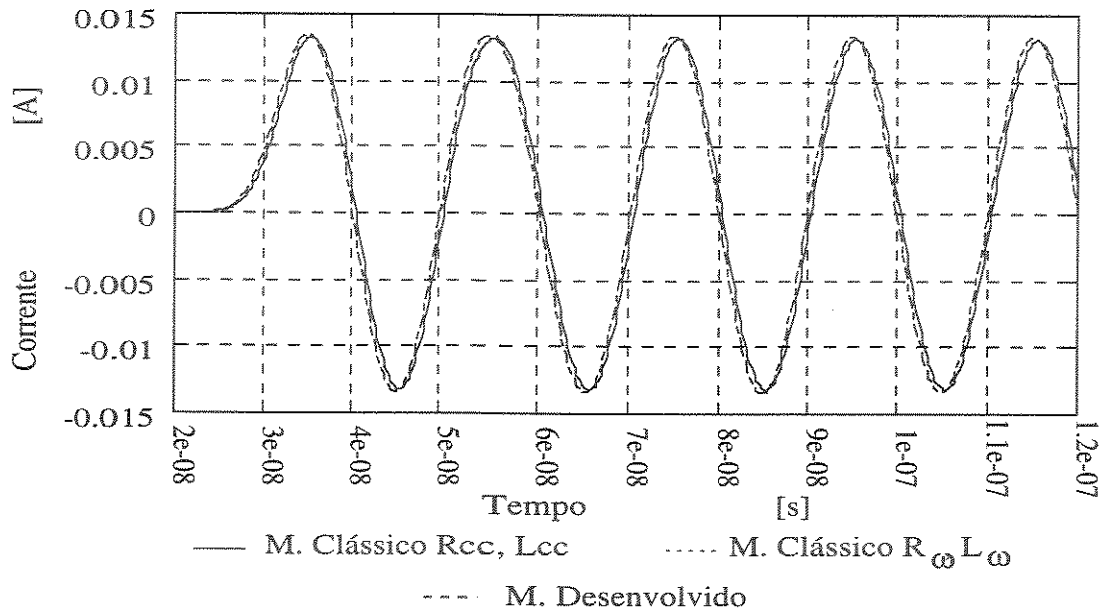


Figura 8.30: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

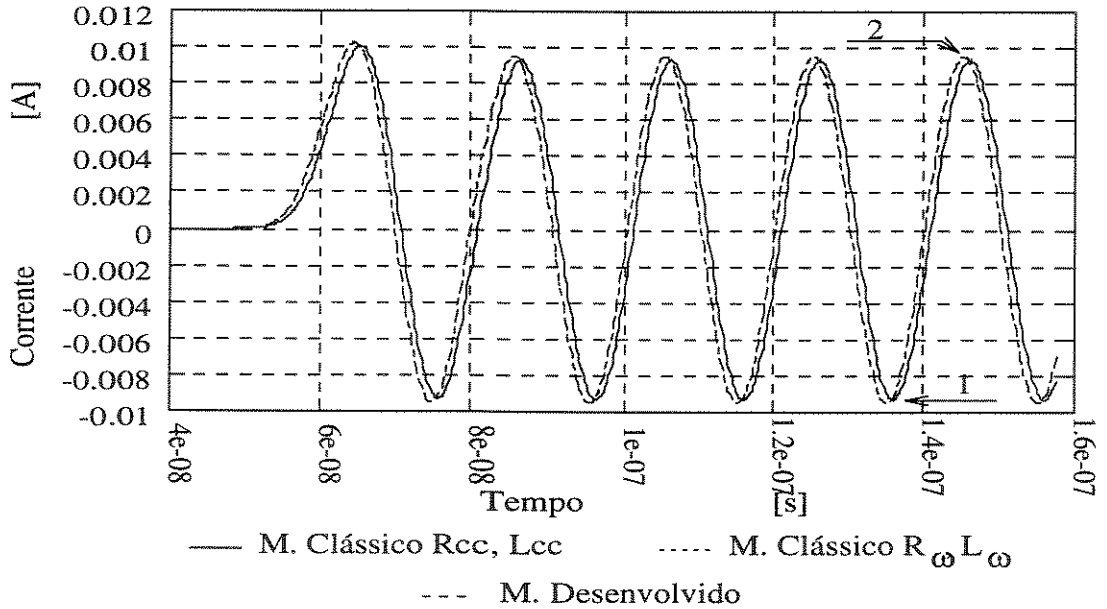


Figura 8.31: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,135E-06	-0,509E+01	-0,491E+01	3,666	-0,508E+01	0,197
2	0,145E-06	0,509E+01	0,487E+01	4,517	0,508E+01	0,197

Tabela 8.13:

Corrente [A]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,135E-06	-0,952E-02	-0,905E-02	5,193	-0,949E-02	0,316
2	0,145E-06	0,952E-02	0,898E-02	6,013	0,950E-02	0,211

Tabela 8.14:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]	
	Ponto 1	Ponto 2
Desenvolvido	534,66	534,66
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	542,54	542,32
Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	535,30	534,74

Tabela 8.15:



### 8.2.1.6 CASO VI

Este caso apresenta os resultados da simulação de um sinal senoidal de tensão com as características dadas e mostradas no caso anterior.

Com estas características, o sinal aplicado na entrada de uma linha de transmissão tem os mesmos dados gerais do caso anterior, e com a seguinte modificação:

- $R = 10 \times 10^{-03} \text{ m}$ .

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,5488 \times 10^{-04} \Omega/\text{m}$ ;
- $R_{\omega} = 0,2937372 \times 10^{-01} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07} \text{ H/m}$ ;
- $L_{\omega} = 0,9427345 \times 10^{-10} \text{ H/m}$ ;
- $L_{ex} = 1,463 \times 10^{-06} \text{ H/m}$ ;
- $C_o = 0,7607 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ .

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para cada modelo. Para o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,948 \times 10^{08} \text{ m/s}$ ;
- $Z_o = 445,977 \Omega$ ;
- $L_o = 1,513 \times 10^{-06} \text{ H/m}$ .

Para o modelo desenvolvido e o modelo clássico usando  $R_{\omega}$  e  $L_{\omega}$ , os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,998 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 438,5\Omega$ ;
- $L_o = 1,463 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 160 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 0,1125 m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $2,5 \times 10^{-10}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.32 a 8.37.

As tabelas 8.16 e 8.17 mostram alguns pontos selecionados das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.34 e 8.37. A tabela 8.18 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.16 e 8.17.

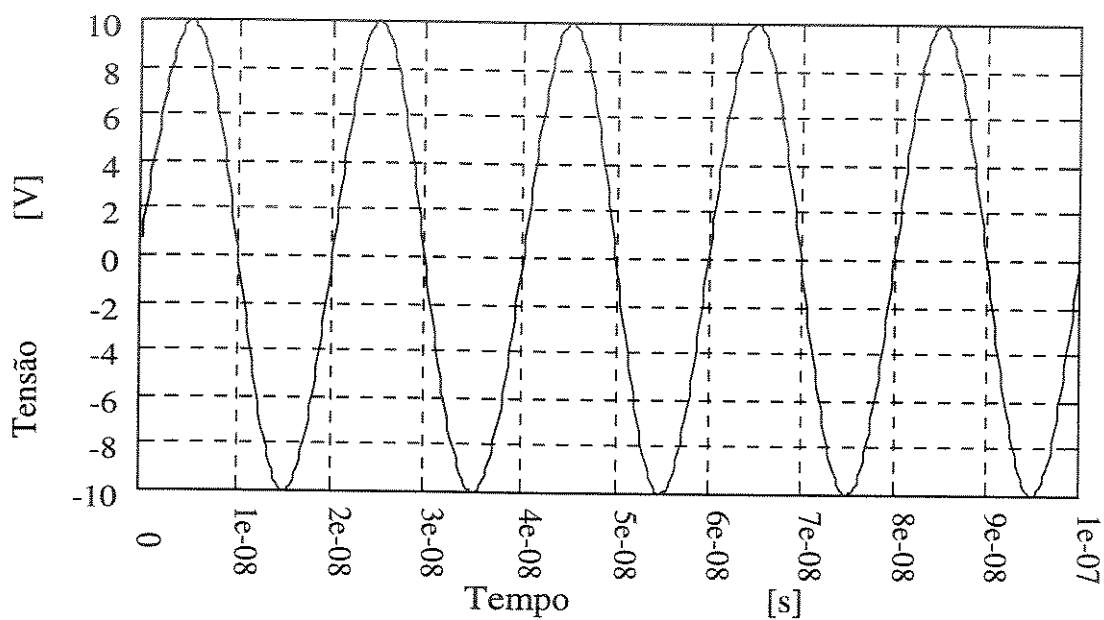


Figura 8.32: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

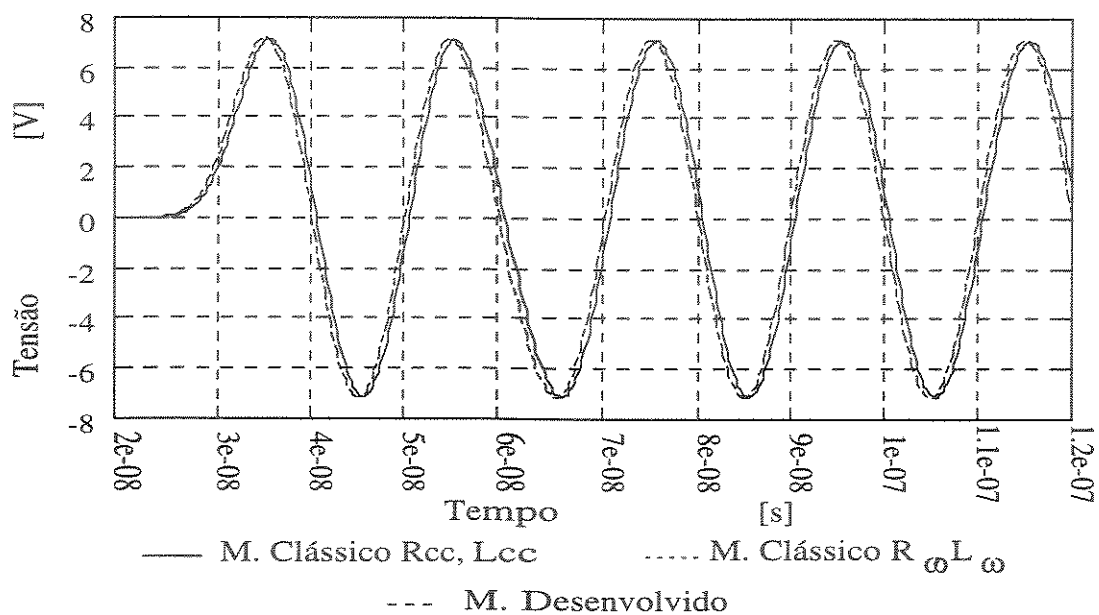


Figura 8.33: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

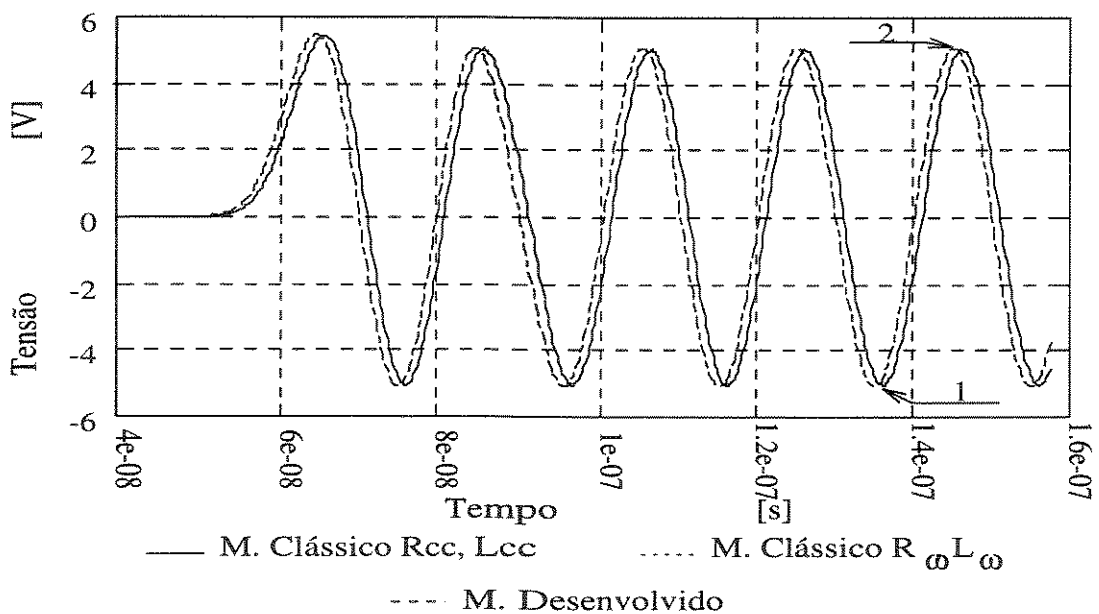


Figura 8.34: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

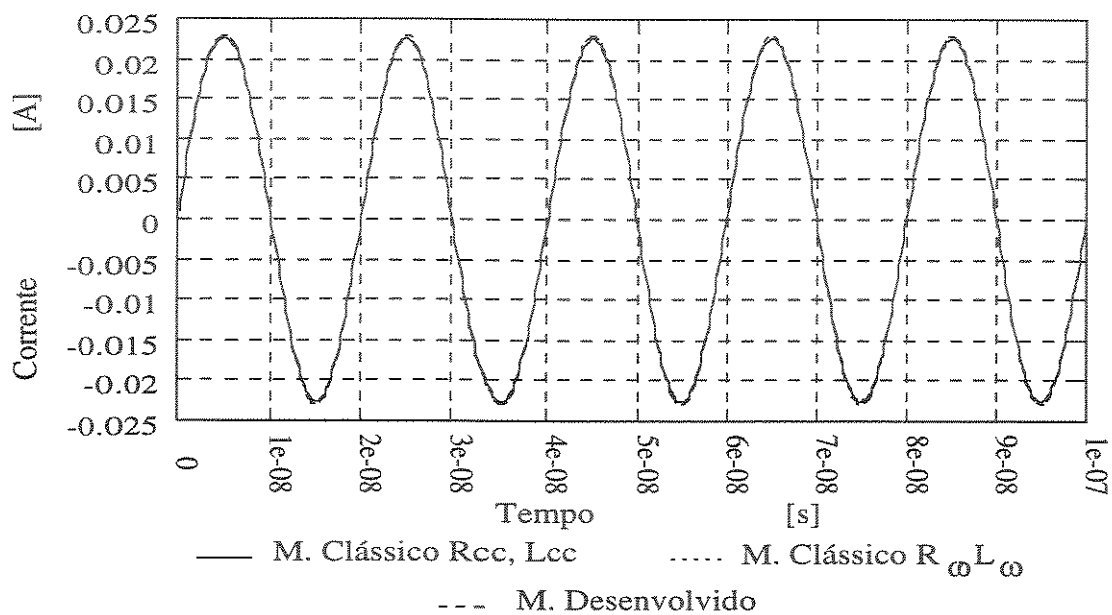


Figura 8.35: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

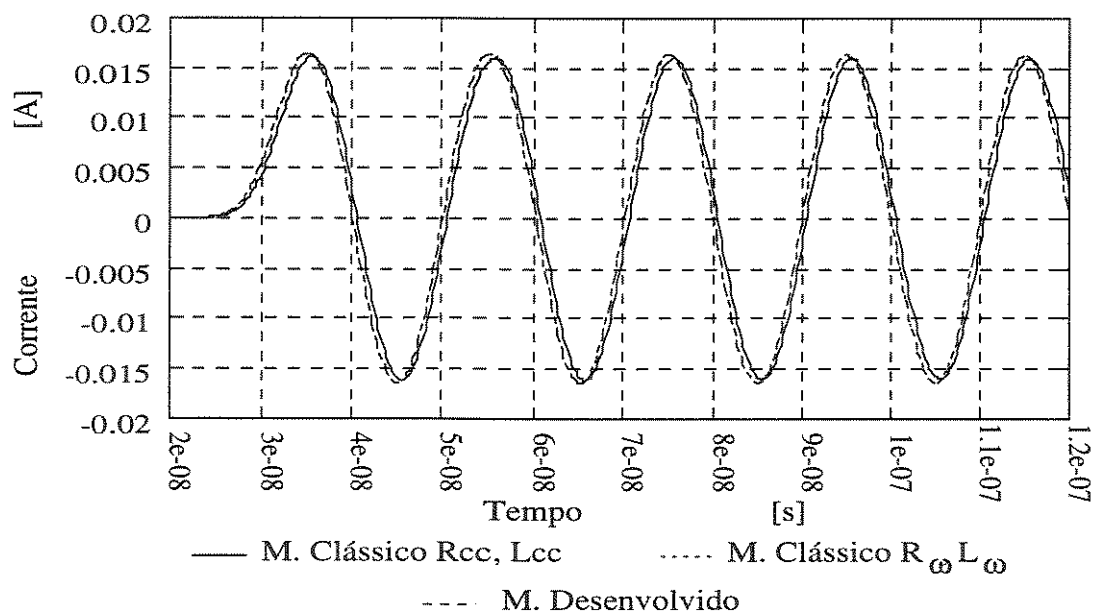


Figura 8.36: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

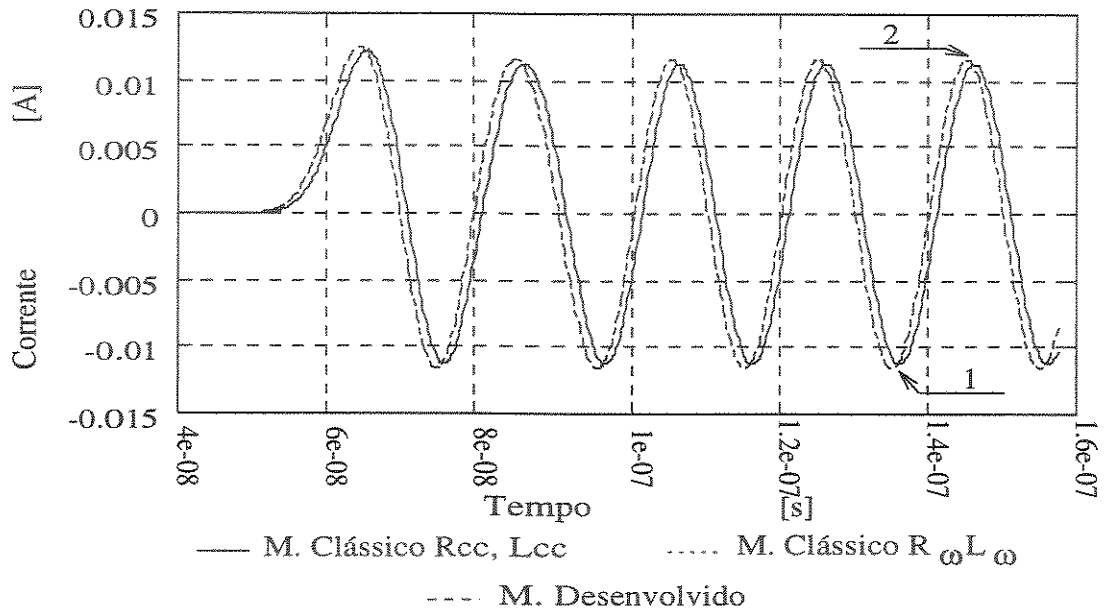


Figura 8.37: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,135E-06	-0,509E+01	-0,482E+01	5,602	-0,509E+01	0,000
2	0,145E-06	0,509E+01	0,477E+01	6,709	0,509E+01	0,000

Tabela 8.16:

Corrente [A]						
Pontos	Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%	Modelo Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	%
1	0,135E-06	-0,116E-01	-0,108E-01	7,407	-0,116E-01	0,000
2	0,145E-06	0,116E-01	0,107E-01	8,411	0,116E-01	0,000

Tabela 8.17:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]	
	Ponto 1	Ponto 2
Desenvolvido	438,79	438,79
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	446,30	445,79
Clássico $R_{\omega}, L_{\omega}$	438,79	438,79

Tabela 8.18:

## 8.2.2 Pulso Trapezoidal

Para o sinal de pulso trapezoidal, considere-se os seguintes casos:

### 8.2.2.1 Caso I

Este caso apresenta os resultados da simulação utilizando um sinal de pulso trapezoidal de tensão representada por uma função com as seguintes características:

- $v_m = 1$  Volt,
- $t_1 = 5 \times 10^{-09}$  s;
- $t_2 = 25 \times 10^{-09}$  s;
- $t_3 = 30 \times 10^{-09}$  s.

Com estas características, o sinal aplicado na entrada de uma linha de transmissão com as seguintes dados gerais:

- $l = 10$  m;
- $h = 1$  m;
- $R = 1 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,5488 \times 10^{-02} \Omega/\text{m};$
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07} \text{ H/m};$
- $L_{ex} = 1,520 \times 10^{-06} \text{ H/m};$
- $C_o = 0,7319 \times 10^{-11} \text{ F/m}.$

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para o modelo clássico com os parâmetros da corrente contínua, e com os do modelo desenvolvido. Assim, os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,950 \times 10^{08} \text{ m/s};$
- $Z_o = 463,2 \Omega;$
- $L_o = 1,570 \times 10^{-06} \text{ H/m}.$

A linha foi dividida em 120 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em  $0,08333 \times 10^{-01} \text{ m}$ . Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,142 \times 10^{-10} \text{ s}$ . Estes resultados são mostrados nas figuras 8.39 a 8.43.

As tabelas 8.19 e 8.20 mostram um ponto selecionado das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.40 e 8.43. A tabela 8.21 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.19 e 8.20.

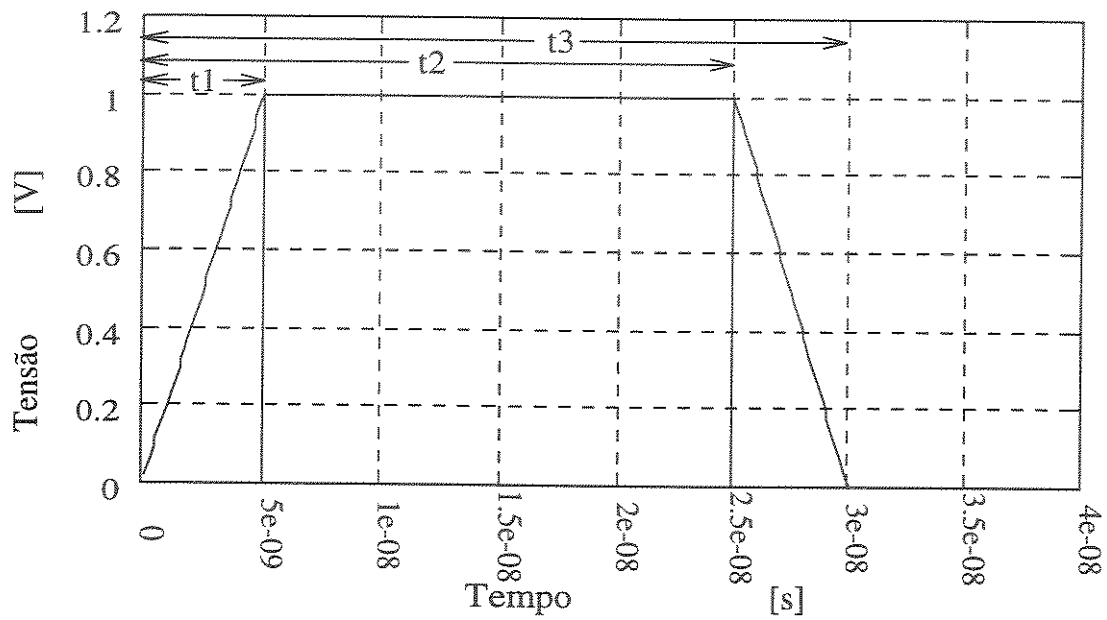


Figura 8.38: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

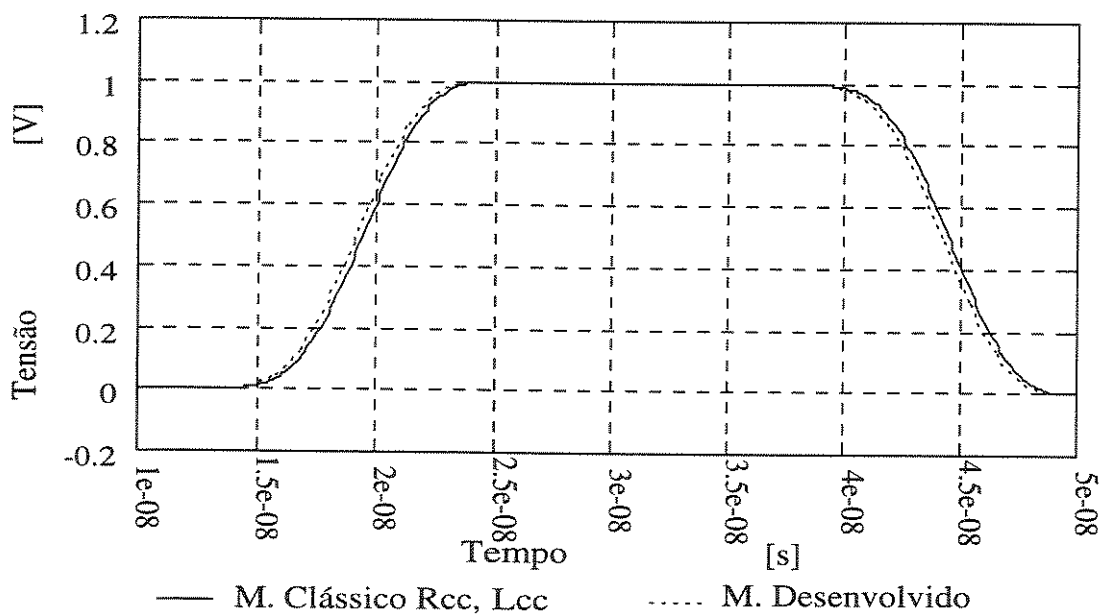


Figura 8.39: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.



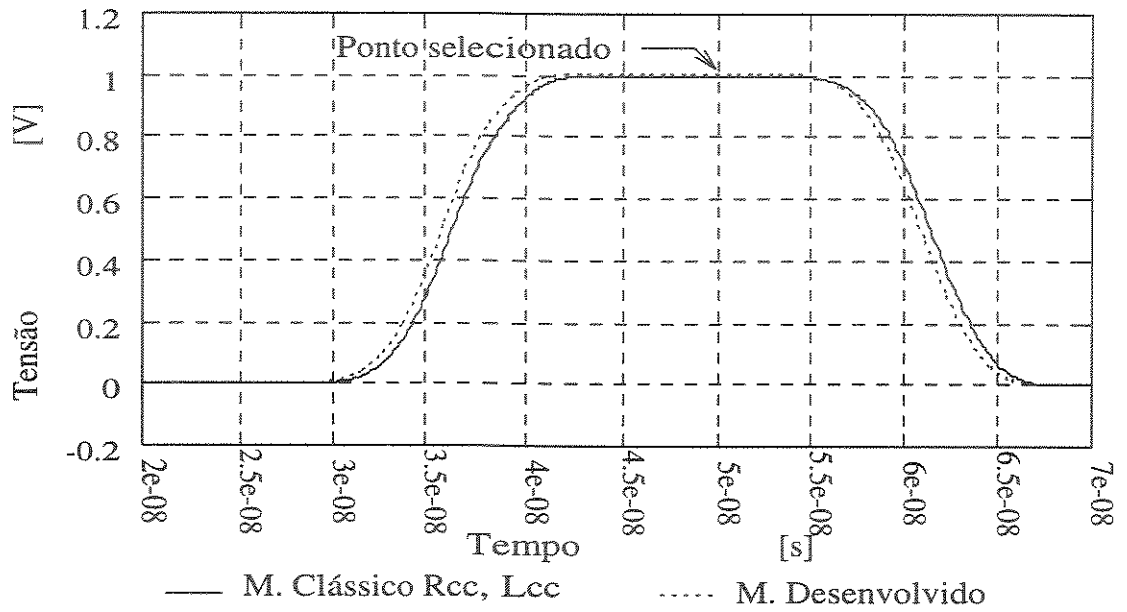


Figura 8.40: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

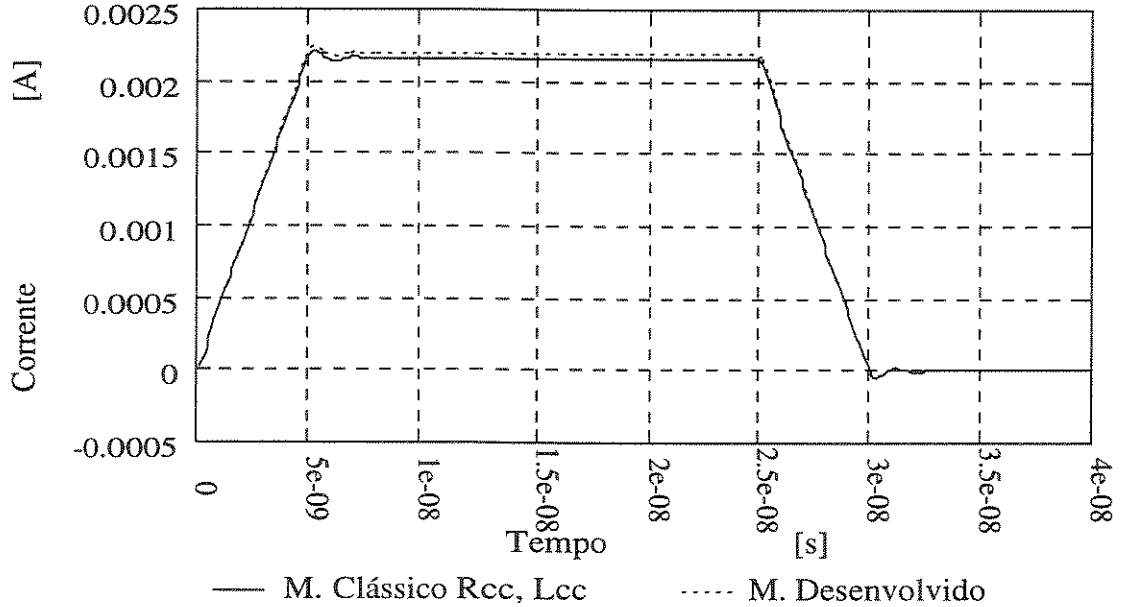


Figura 8.41: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

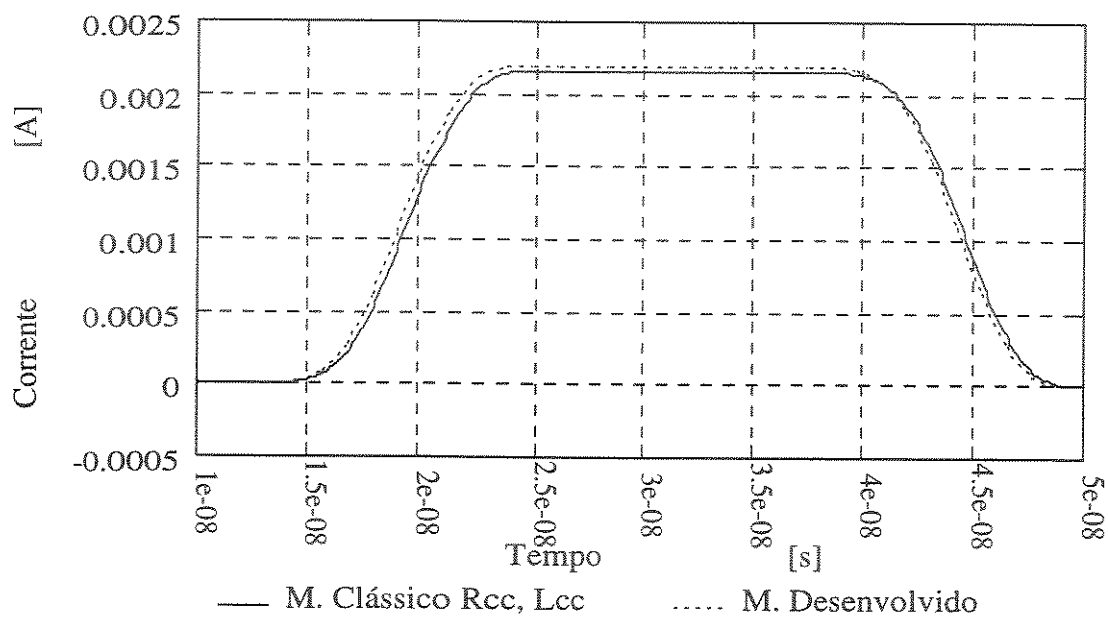


Figura 8.42: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

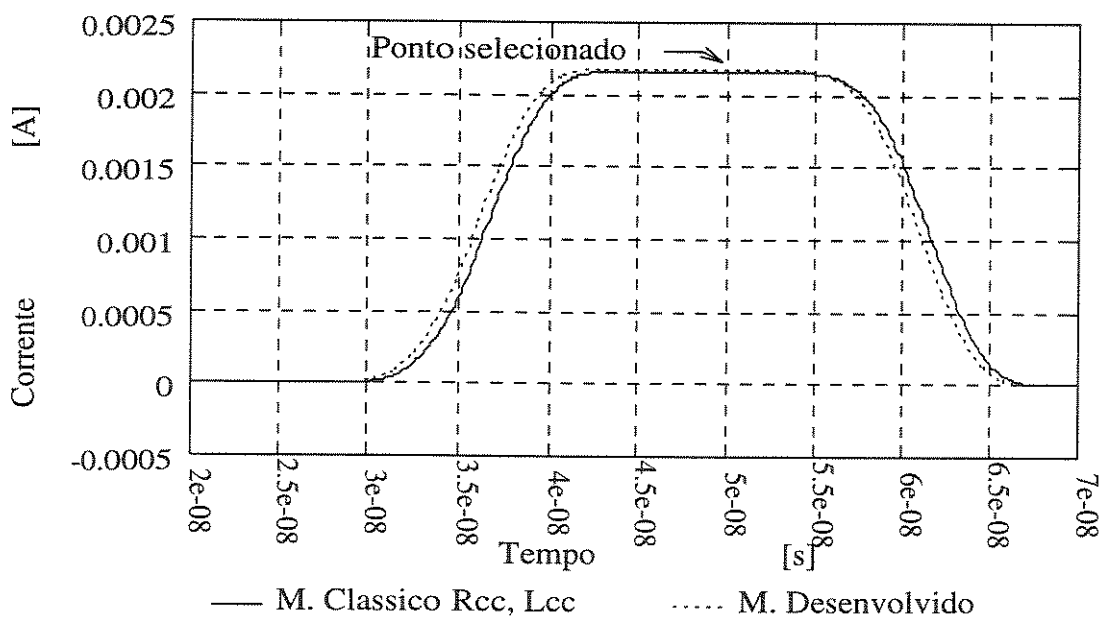


Figura 8.43: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%
0,500E-07	0,101E+01	0,100E+01	1,000

Tabela 8.19:

Corrente [A]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%
0,500E-07	0,218E-02	0,216E-02	0,926

Tabela 8.20:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]
Desenvolvido	463,31
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	462,96

Tabela 8.21:

### 8.2.2.2 Caso II

Este caso apresenta os resultados da simulação utilizando um sinal de pulso trapezoidal de tensão representada por uma função com as seguintes características:

- $v_m = 1$  Volt;
- $t_1 = 5 \times 10^{-09}$  s;
- $t_2 = 25 \times 10^{-09}$  s;
- $t_3 = 30 \times 10^{-09}$  s.

Com estas características, o sinal aplicado na entrada de uma linha de transmissão com os seguintes dados gerais:

- $l = 10$  m;
- $h = 1$  m;
- $R = 14 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,28 \times 10^{-04} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07}$  H/m;
- $L_{ex} = 0,9924 \times 10^{-06}$  H/m;
- $C_o = 1,121 \times 10^{-11}$  F/m.

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para o modelo clássico com os parâmetros da corrente contínua, e com os do modelo desenvolvido. Assim, os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,925 \times 10^8$  m/s;
- $Z_o = 304,9\Omega$ ;
- $L_o = 1,042 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 120 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em  $0,08333 \times 10^{-01}$  m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,142 \times 10^{-10}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.45 a 8.49.

As tabelas 8.22 e 8.23 mostram um ponto selecionado das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.46 e 8.49. A tabela 8.24 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.22 e 8.23.

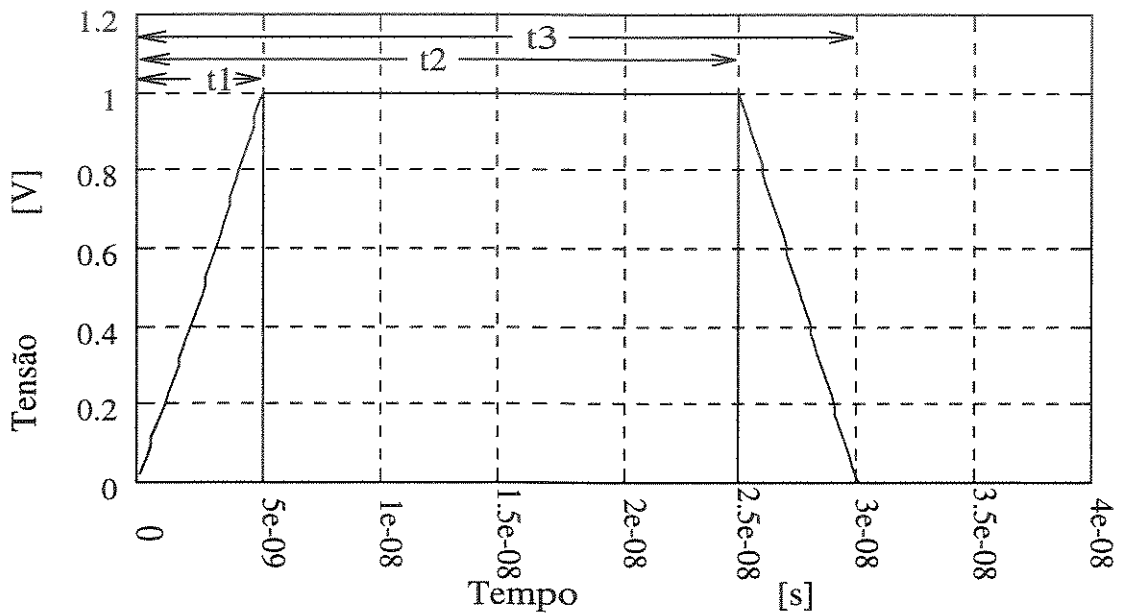


Figura 8.44: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

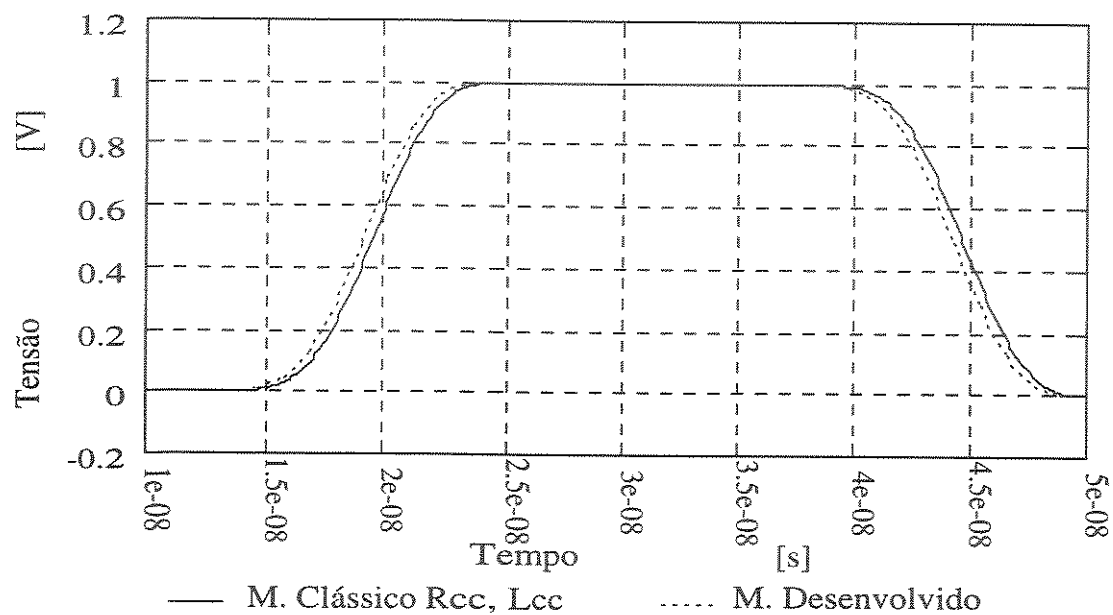


Figura 8.45: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

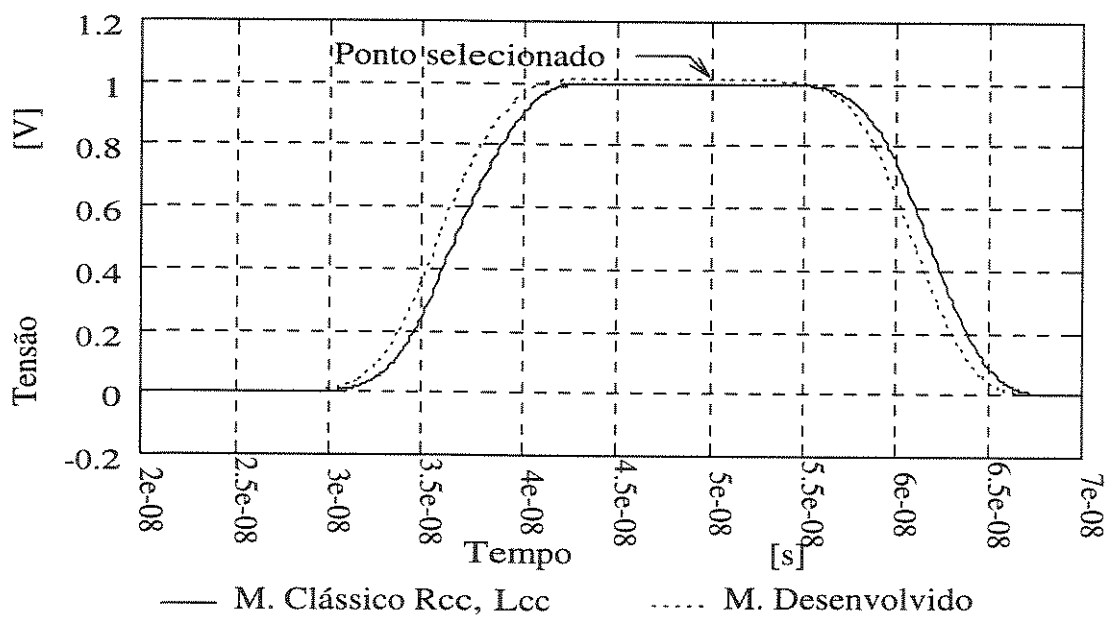


Figura 8.46: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

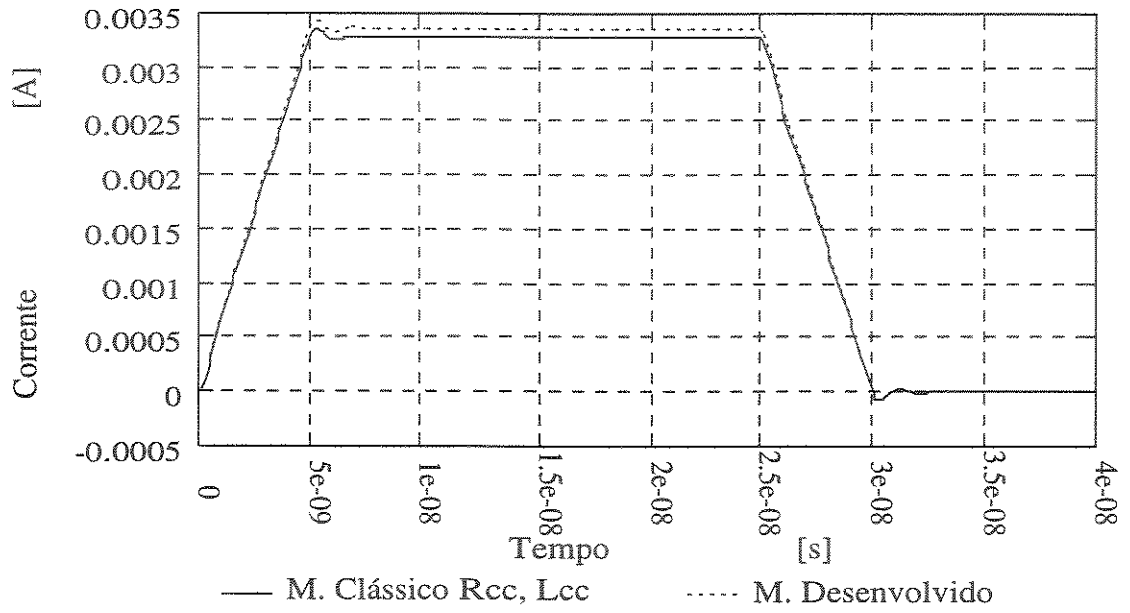


Figura 8.47: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

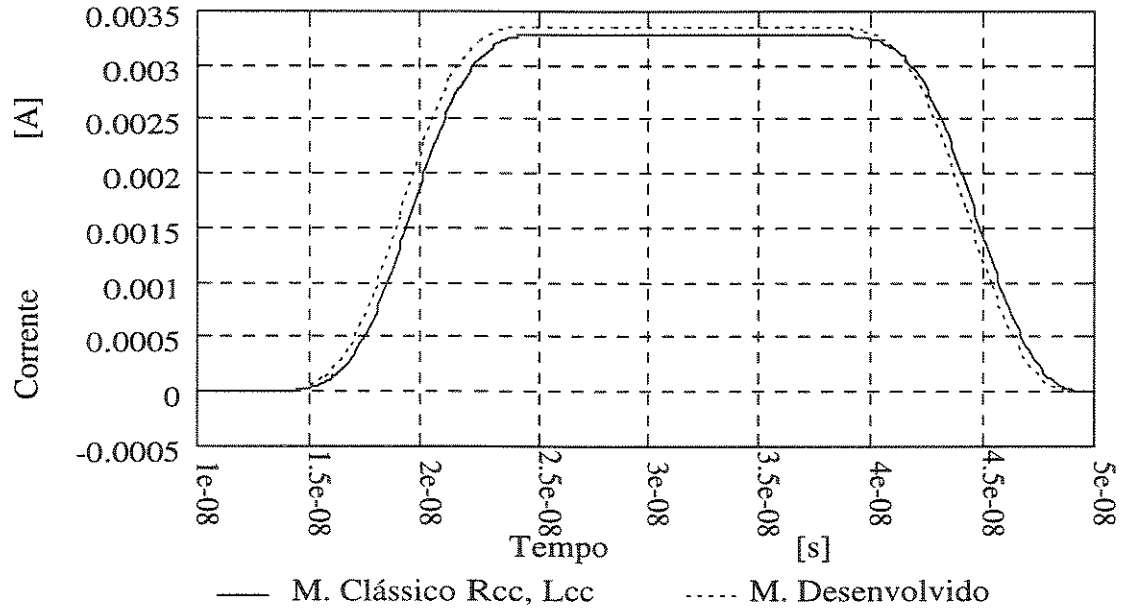


Figura 8.48: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

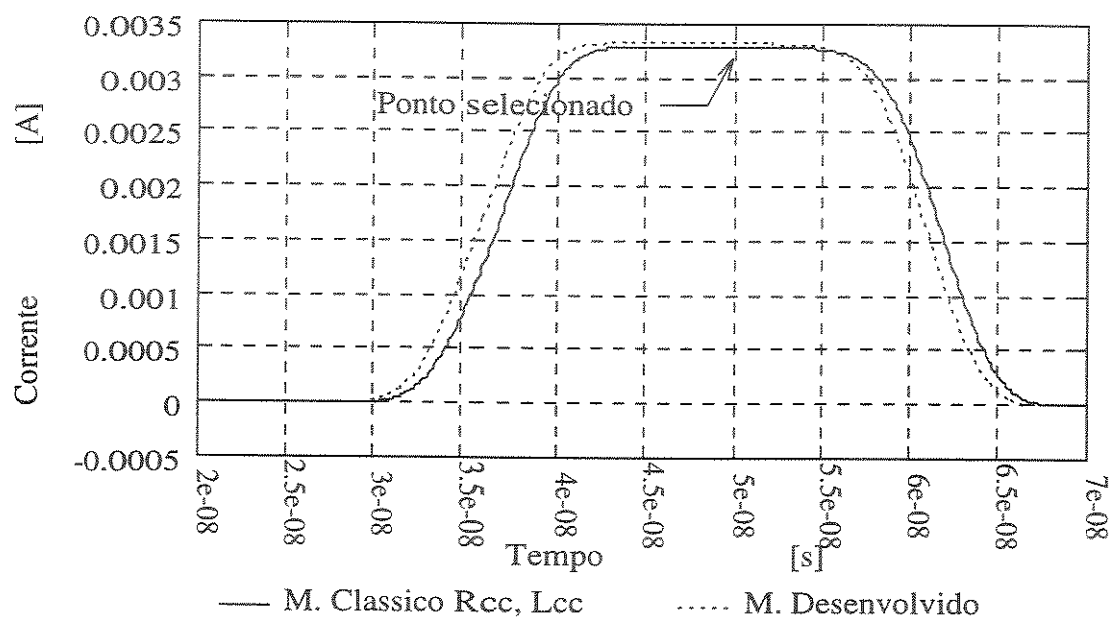


Figura 8.49: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%
0,500E-07	0,101E+01	0,100E+01	1,000

Tabela 8.22:

Corrente [A]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%
0,500E-07	0,332E-02	0,328E-02	1,220

Tabela 8.23:



Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$	$[\Omega]$
Desenvolvido	304,22	
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	304,88	

Tabela 8.24:

### 8.2.2.3 Caso III

Este caso apresenta os resultados da simulação realizada utilizando os mesmos dados usados no caso anterior. Neste caso a linha foi considerada com uma terminação de curto circuito. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,142 \times 10^{-10}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.50 a 8.52.

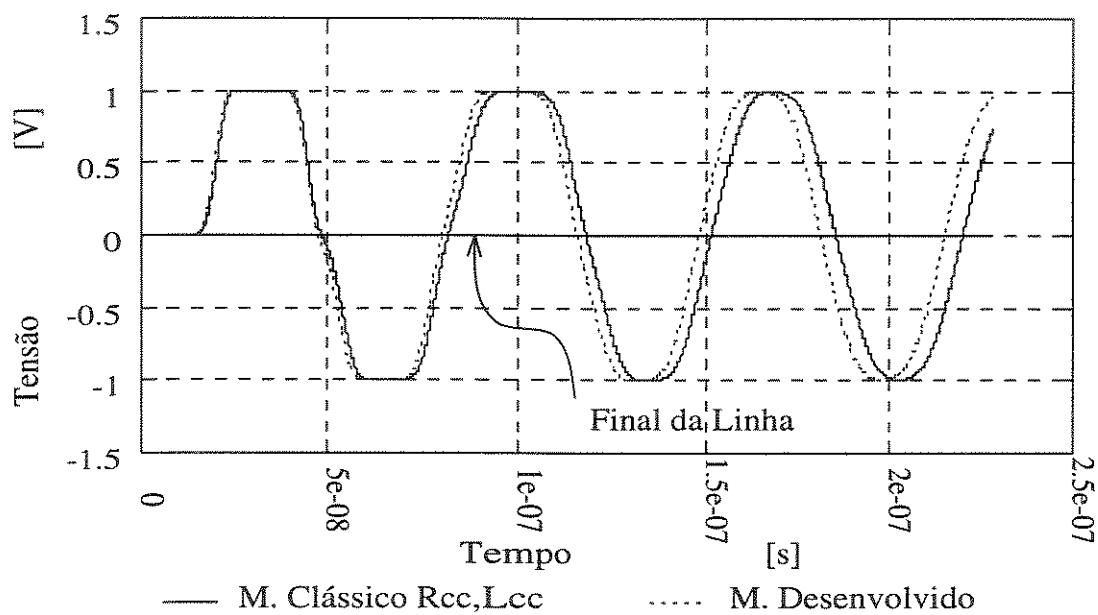


Figura 8.50: Perfil do Sinal de Tensão no Meio e no Final da Linha.

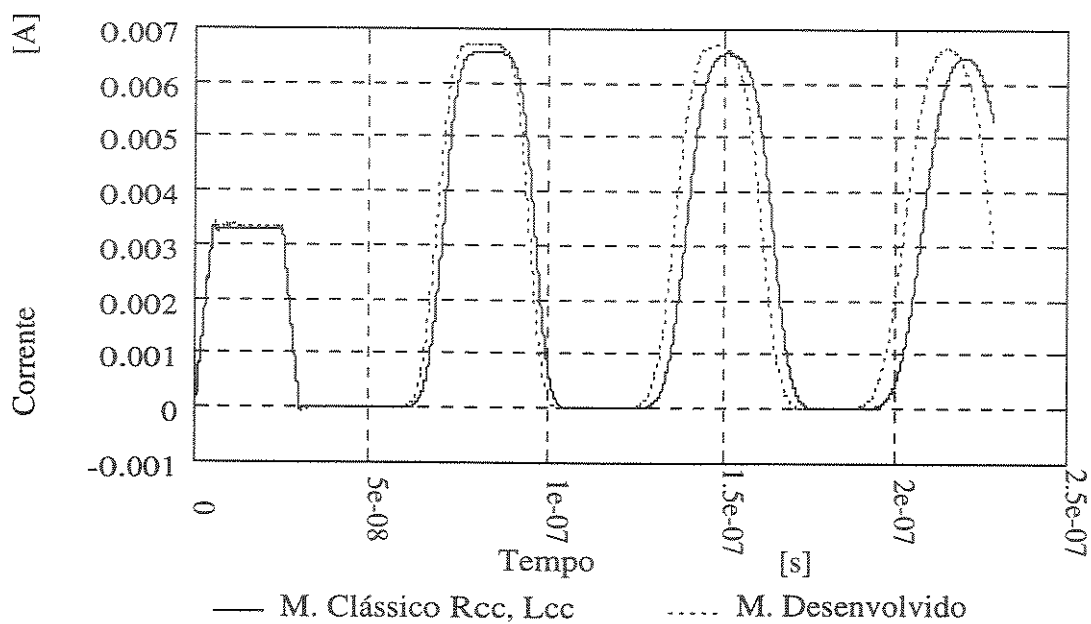


Figura 8.51: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

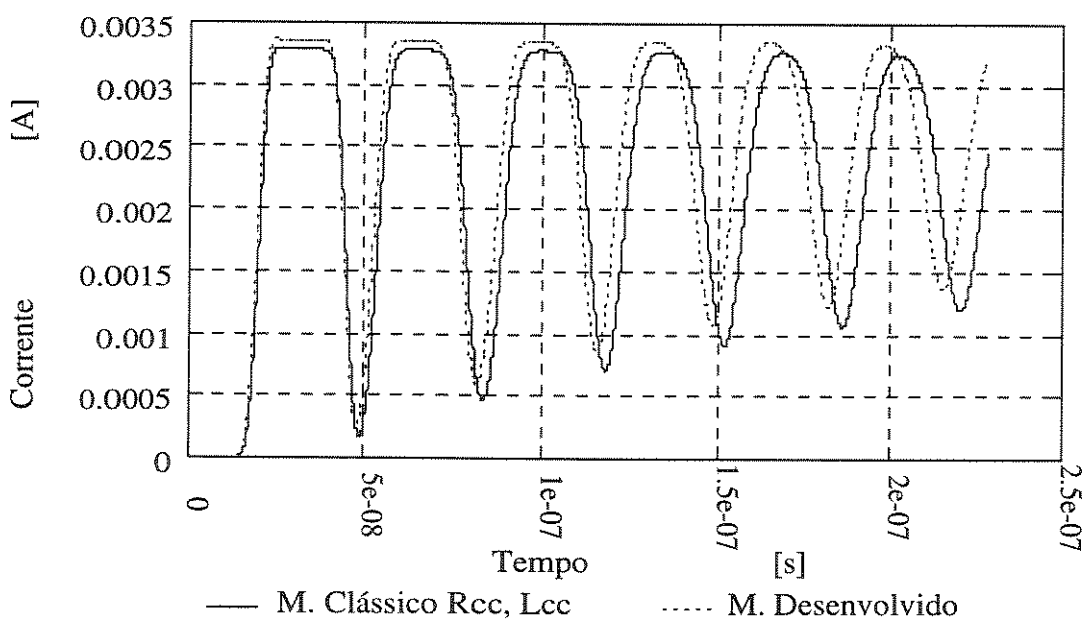


Figura 8.52: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

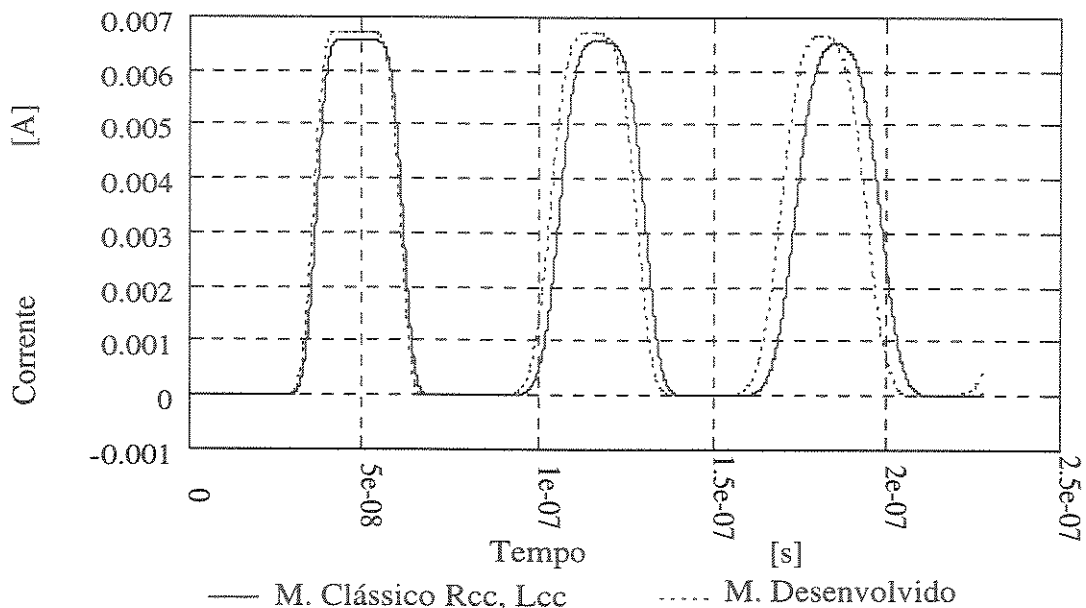


Figura 8.53: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

### 8.2.3 Pulso Atmosférico

Para este sinal de pulso atmosférico, considere-se o seguinte caso:

#### 8.2.3.1 Caso I

Este caso apresenta os resultados da simulação realizada utilizando um sinal de pulso atmosférico de tensão representada por uma função com as seguintes características:

- $v_m = 1$  Volts;
- $t_1 = 1 \times 10^{-09}$  s;
- $t_2 = 5 \times 10^{-09}$  s.

De acordo com estas características as constantes (E, a, b) podem ser calculadas segundo uma tabela dada na referência [21]. Portanto, estas constantes foram calculadas obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $E = 1,298$ ;

- $a = 1,925 \times 10^{08}$ ;
- $b = 2,8875 \times 10^{09}$ .

Este sinal foi aplicado na entrada de uma linha de transmissão com os seguintes dados gerais:

- $l = 1$  m;
- $h = 1 \times 10^{-02}$  m;
- $R = 1 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estes dados, isto é, as características do sinal aplicado, e os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,5488 \times 10^{-02} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07} \text{H}/\text{m}$ ;
- $L_{ex} = 0,5991 \times 10^{-06} \text{H}/\text{m}$ ;
- $C_o = C_{cc} = 1,857 \times 10^{-11} \text{F}/\text{m}$ .

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para o modelo clássico com os parâmetros da corrente contínua, e com os do modelo desenvolvido. Assim, os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,880 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 187 \Omega$ ;
- $L_o = 0,6491 \times 10^{-06} \text{H}/\text{m}$ .

A linha foi dividida em 140 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em  $0,7143 \times 10^{-02}$  m. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,2987 \times 10^{-11}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.55 a 8.59.

As tabelas 8.25 e 8.26 mostram um ponto selecionado das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.56 e 8.59. A tabela 8.27 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.25 e 8.26.

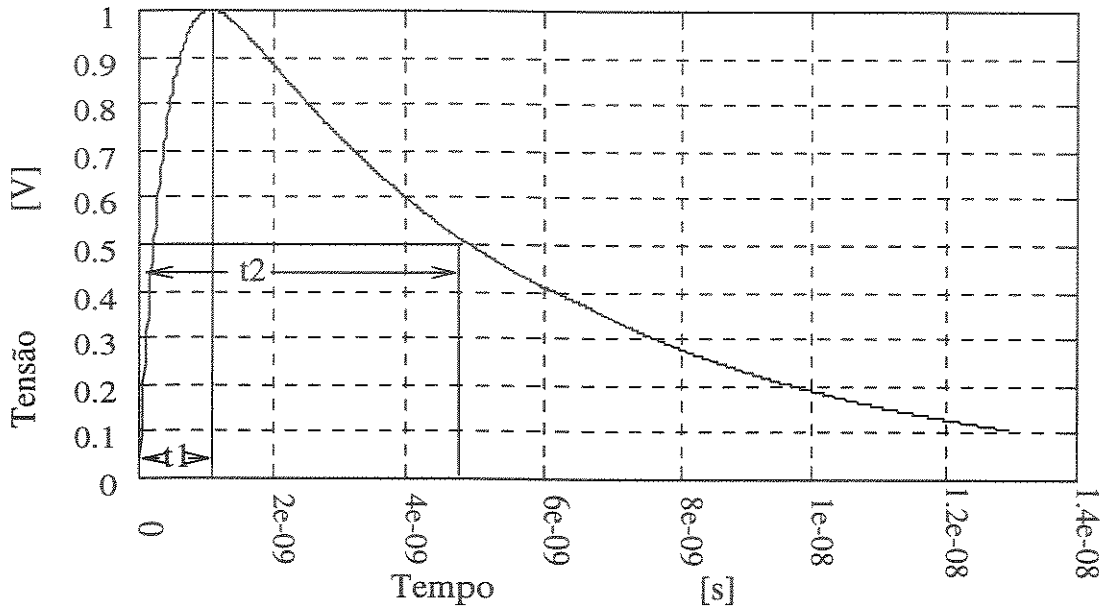


Figura 8.54: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

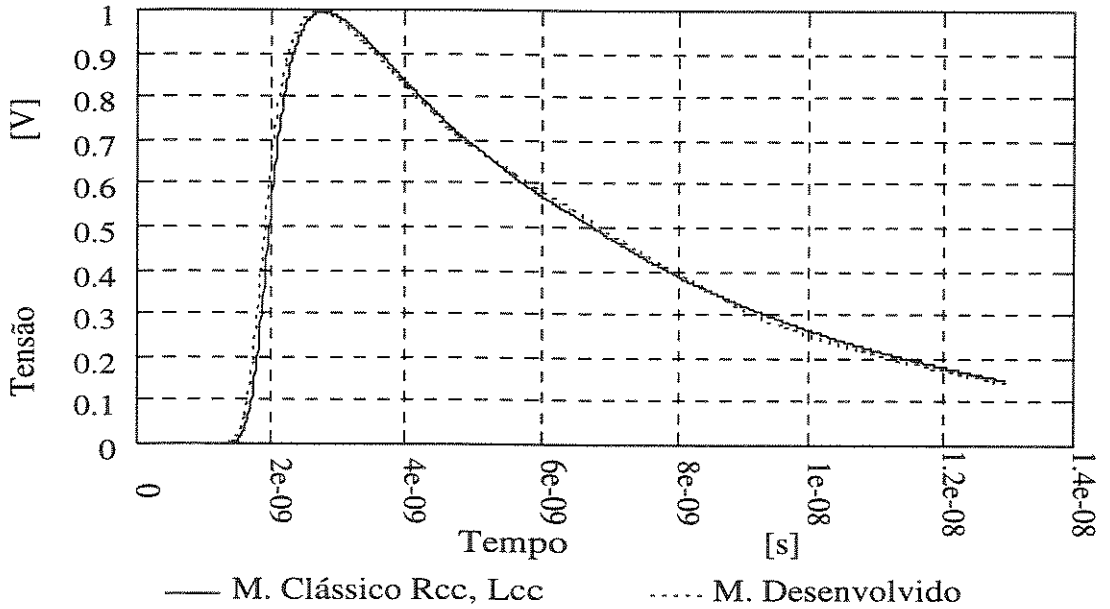


Figura 8.55: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

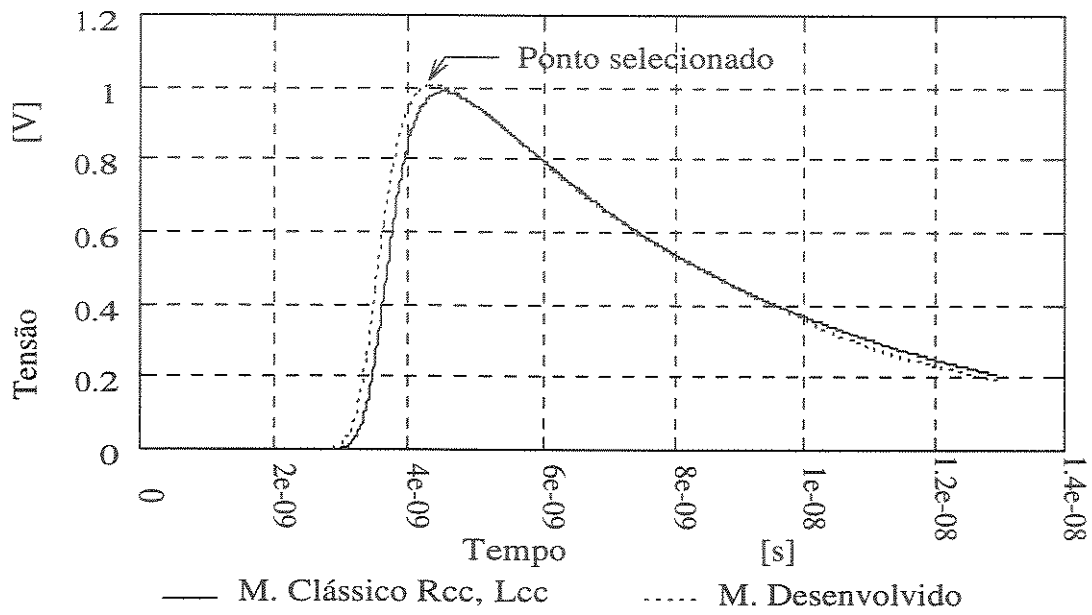


Figura 8.56: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

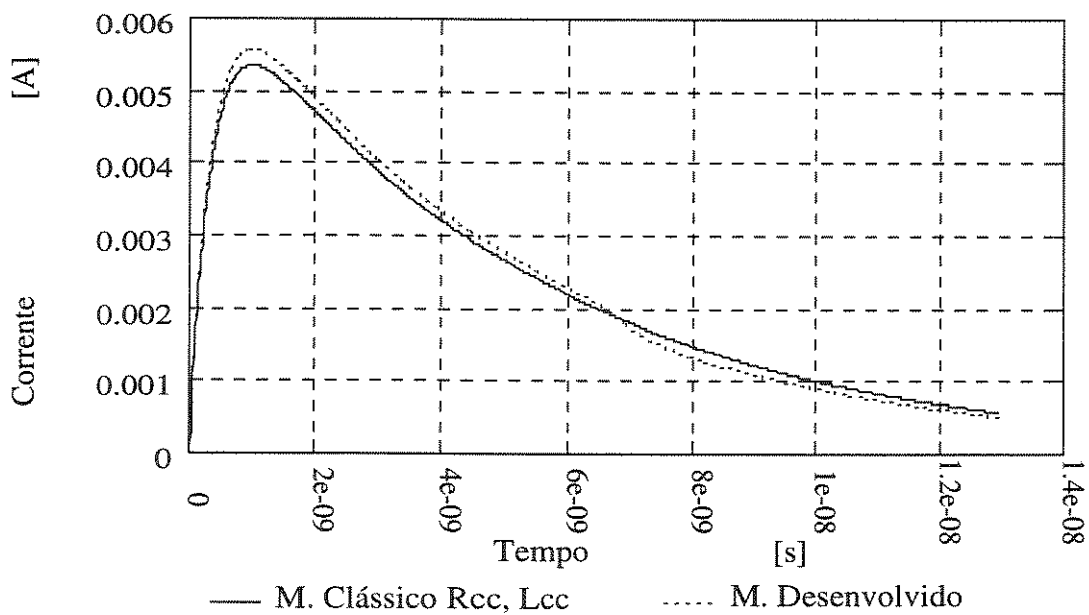


Figura 8.57: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

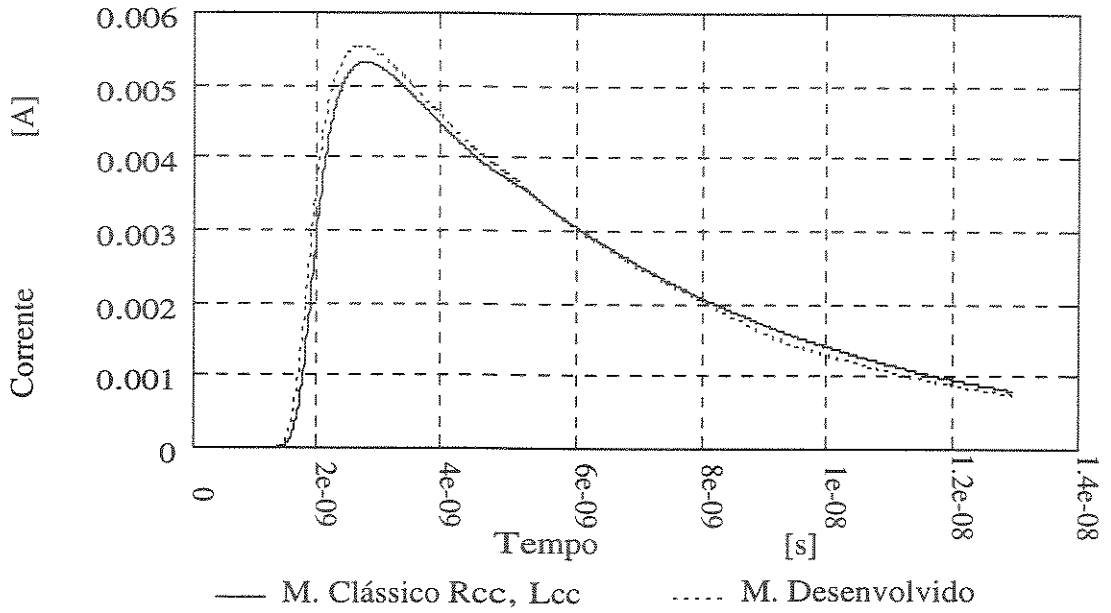


Figura 8.58: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

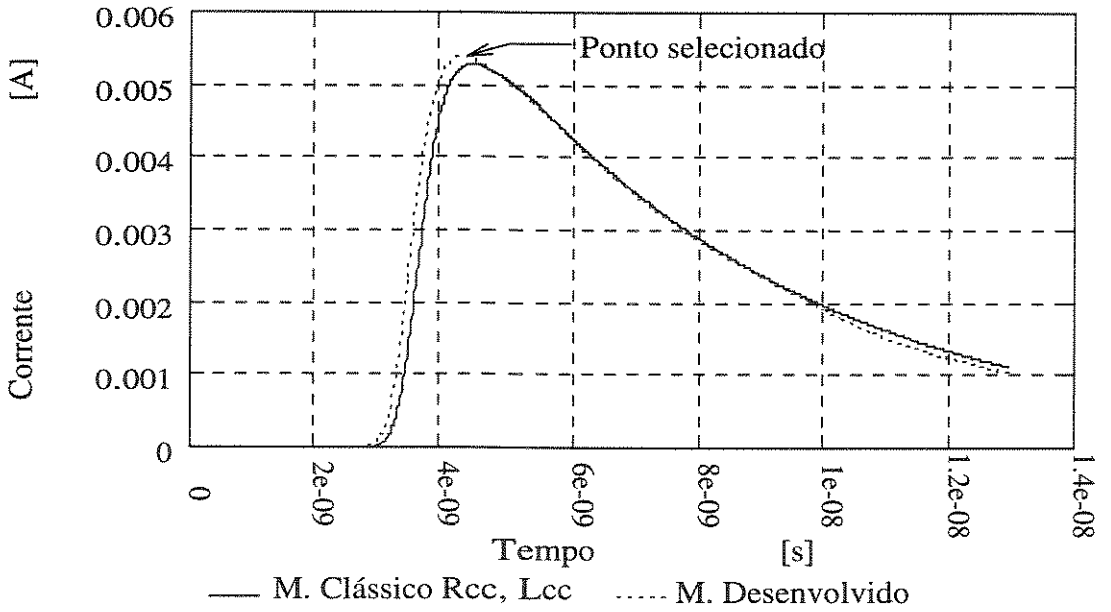


Figura 8.59: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%
0,439E-08	0,101E+01	0,980E+00	3,061

Tabela 8.25:

Corrente [A]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	%
0,439E-08	0,539E-02	0,524E-02	2,863

Tabela 8.26:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$ [Ω]
Desenvolvido	187,38
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	187,02

Tabela 8.27:



### 8.2.3.2 Caso II

Este caso apresenta os resultados da simulação realizada utilizando um sinal de pulso atmosférico de tensão representada por uma função com as seguintes características.

- $v_m = 10$  Volts;
- $t_1 = 5 \times 10^{-09}$  s;
- $t_2 = 30 \times 10^{-09}$  s.

De acordo com estas características as constantes ( $E$ ,  $a$ ,  $b$ ) podem ser calculadas segundo uma tabela dada na referencia [21]. Portanto, estas constantes foram calculadas obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $E = 12,187$ ;
- $a = 3 \times 10^{07}$ ;
- $b = 6,43 \times 10^{08}$ .

Este sinal foi aplicado na entrada de uma linha de transmissão com os seguintes dados gerais:

- $l = 12$  m;
- $h = 1$  m;
- $R = 4 \times 10^{-03}$  m;
- A linha é casada.

Com estas dados, isto é, as características do sinal aplicado, e com os dados gerais da linha e as especificações do material do condutor e do meio dielétrico foram calculados todos os parâmetros obtendo-se os seguintes valores numéricos:

- $R_{cc} = 0,343 \times 10^{-03} \Omega/\text{m}$ ;
- $L_{cc} = 0,5 \times 10^{-07} \text{H}/\text{m}$ ;
- $L_{ex} = 1,243 \times 10^{-06} \text{H}/\text{m}$ ;
- $C_o = C_{cc} = 0,8952 \times 10^{-11} \text{F}/\text{m}$ .

A velocidade de propagação, a impedância característica e a indutância total  $L_o$  foram calculadas para o modelo clássico com os parâmetros da corrente contínua, e com os do modelo desenvolvido. Assim, os seguintes valores numéricos foram obtidos:

- $v_p = 2,939 \times 10^{08}$  m/s;
- $Z_o = 380\Omega$ ;
- $L_o = 1,293 \times 10^{-06}$  H/m.

A linha foi dividida em 120 trechos onde  $\Delta z$  foi fixado aproximadamente em 0,1 m e as simulações foram obtidas para uma terminação resistiva com um a impedância característica (linha casada). Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $1,36986 \times 10^{-10}$  s. Estes resultados são mostrados nas figuras 8.61 a 8.65.

As tabelas 8.28 e 8.29 mostram um ponto selecionado das curvas de tensão e corrente referentes às figuras 8.62 e 8.65. A tabela 8.30 mostra, por sua vez, a impedância característica referente aos valores de tensão e corrente das tabelas 8.28 e 8.29.

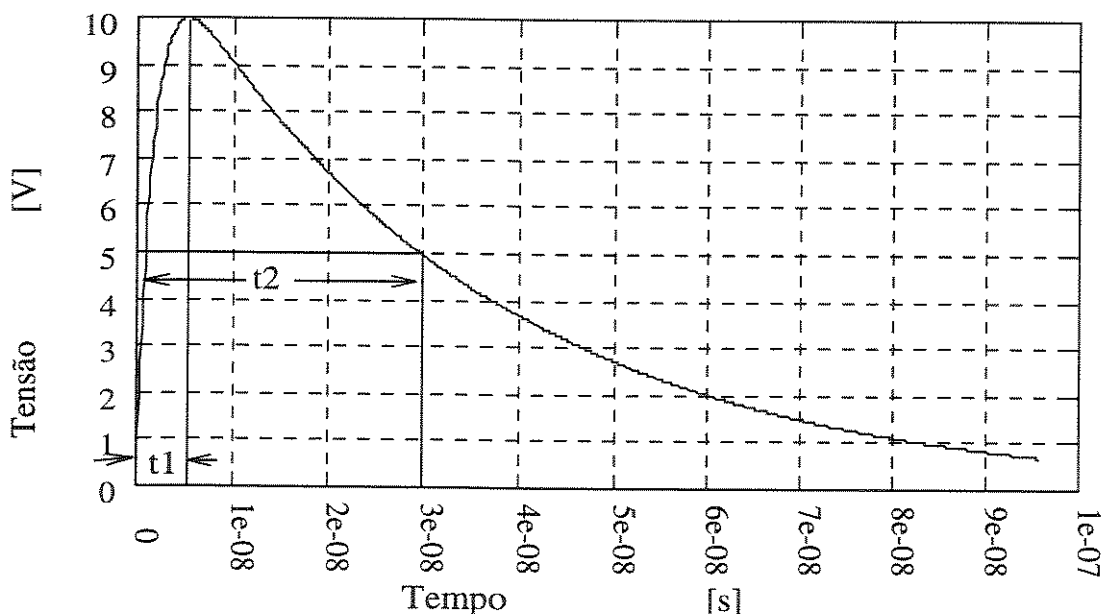


Figura 8.60: Perfil do Sinal de Tensão Aplicado na Entrada da Linha.

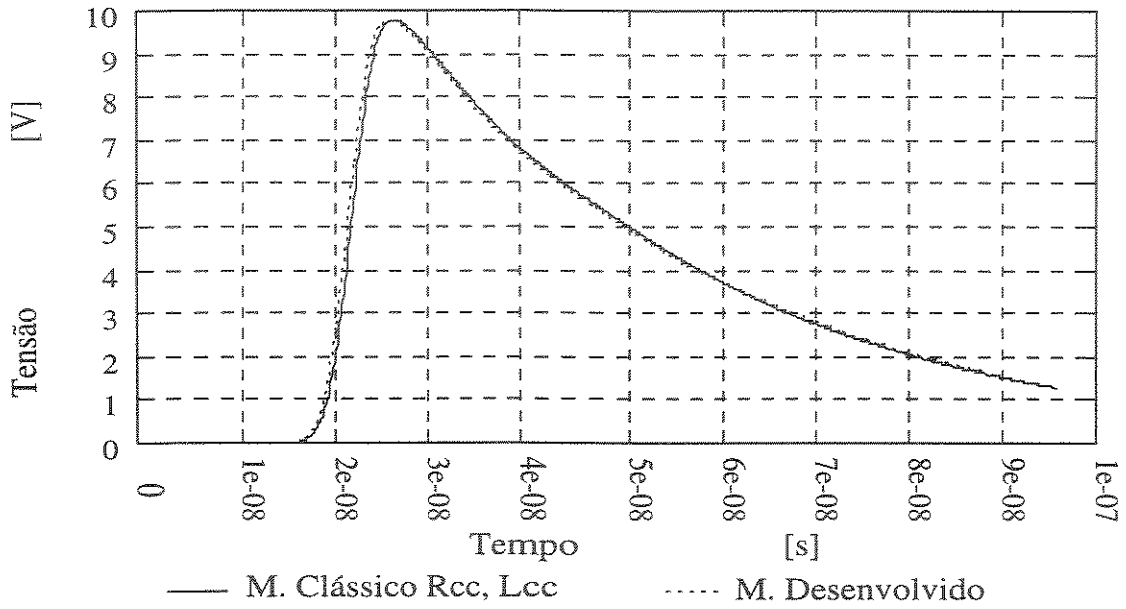


Figura 8.61: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

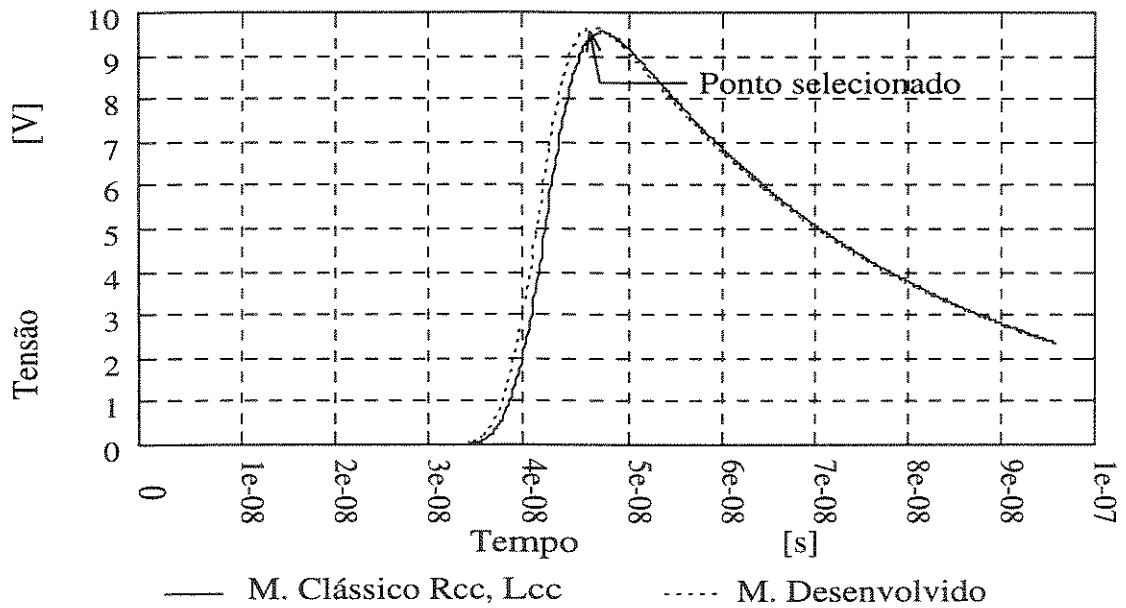


Figura 8.62: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

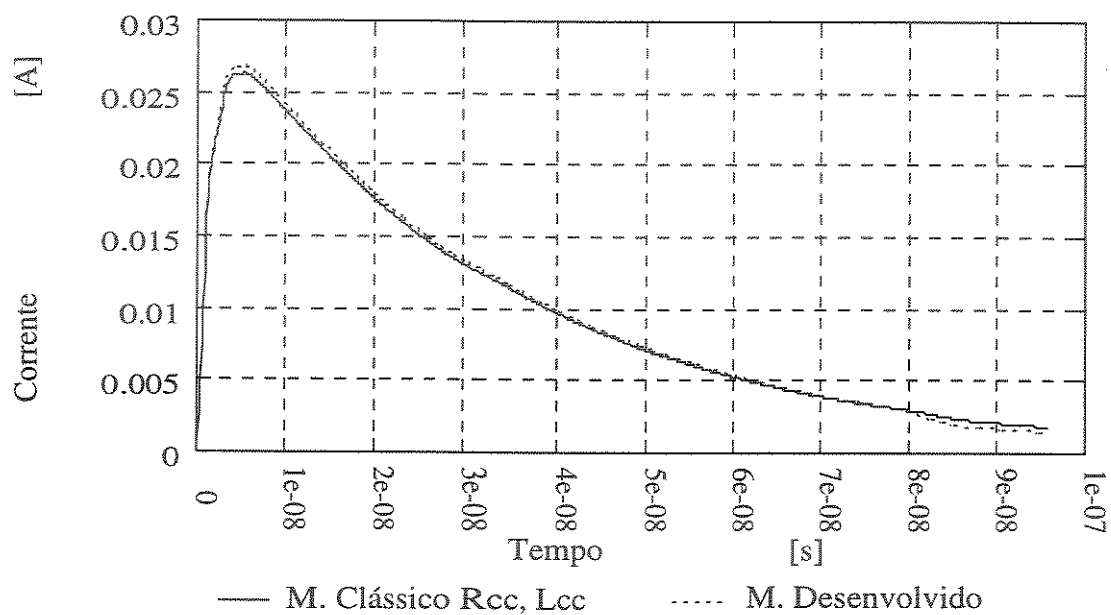


Figura 8.63: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

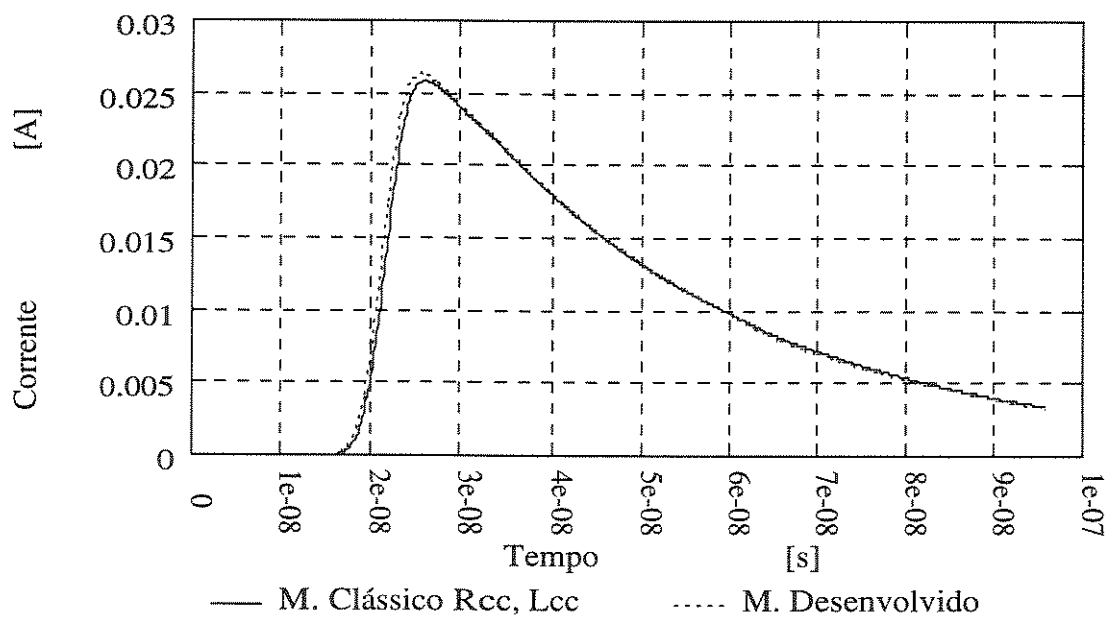


Figura 8.64: Perfil do Sinal de Corrente no Meio da Linha.

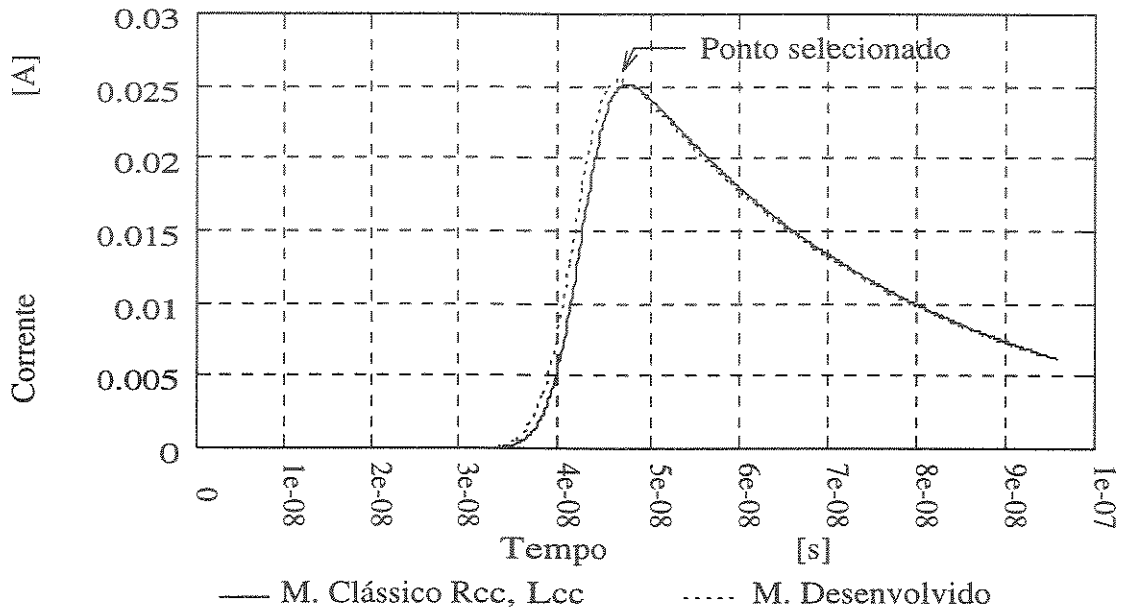


Figura 8.65: Perfil do Sinal de Corrente no Final da Linha.

Tensão [V]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}$ , $L_{cc}$	%
0,466E-07	0,966E+01	0,946E+01	2,114

Tabela 8.28:

Corrente [A]			
Tempo s	Modelo Desenvolvido	Modelo Clássico $R_{cc}$ , $L_{cc}$	%
0,466E-07	0,254E-01	0,249E-01	2,008

Tabela 8.29:

Modelos	$Z_o = \frac{V}{I}$	[ $\Omega$ ]
Desenvolvido	380,31	
Clássico $R_{cc}, L_{cc}$	379,92	

Tabela 8.30:

### 8.2.3.3 Caso III

Este caso apresenta os resultados da simulação realizada utilizando os mesmos dados usados no caso anterior. Neste caso a linha foi considerada com uma terminação de circuito aberto. Os melhores resultados foram obtidos com a escolha de um  $\Delta t$  aproximadamente de  $2,5 \times 10^{-10}$  segundos. Estes resultados estão mostrados nas figuras 8.66 a 8.69.

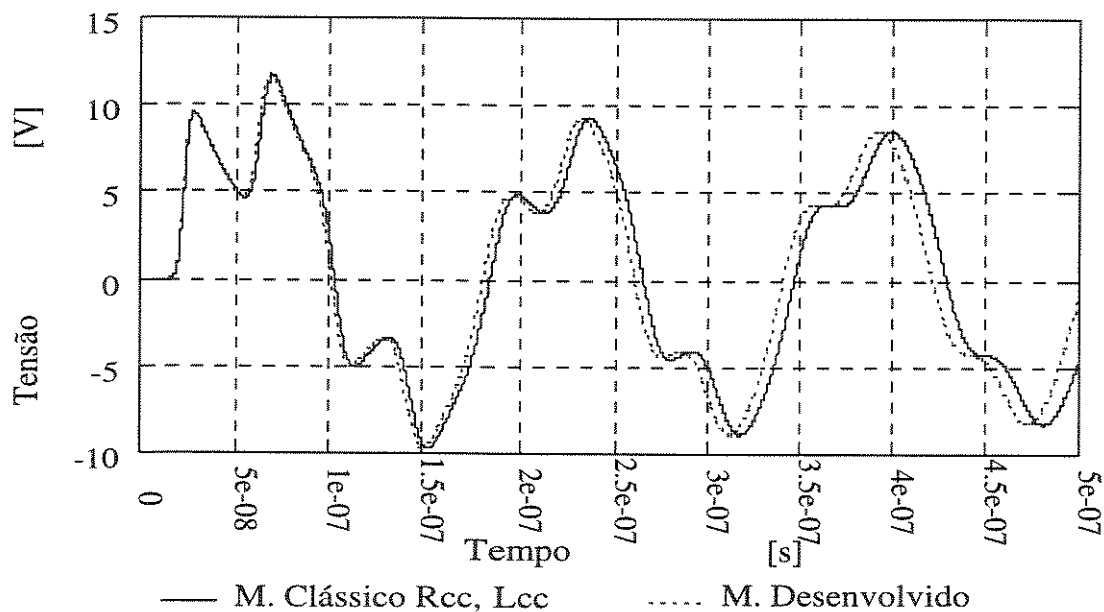


Figura 8.66: Perfil do Sinal de Tensão no Meio da Linha.

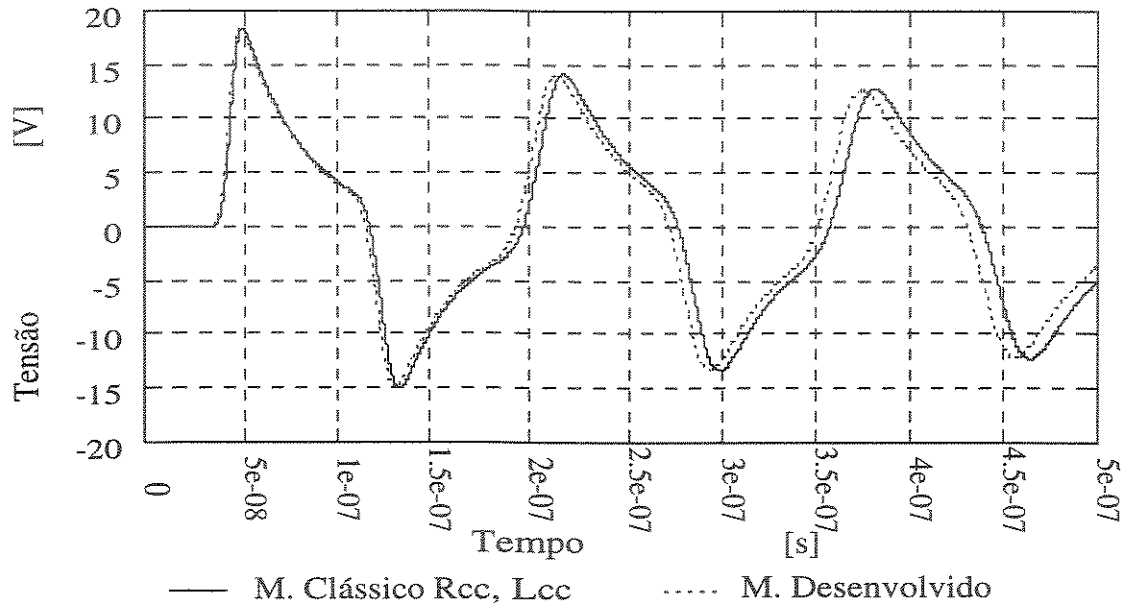


Figura 8.67: Perfil do Sinal de Tensão no Final da Linha.

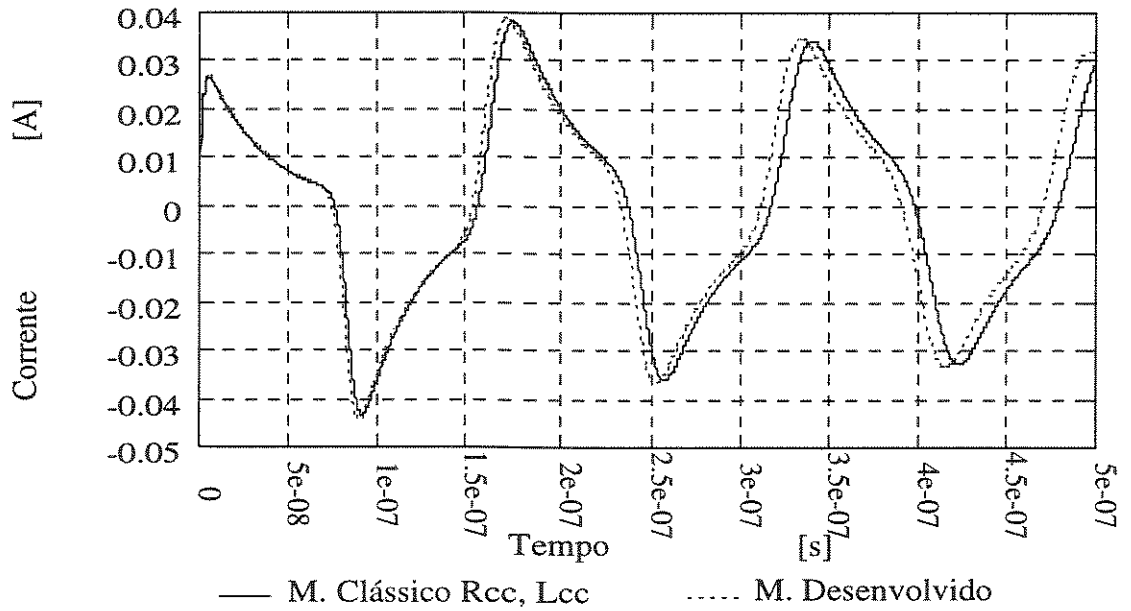


Figura 8.68: Perfil do Sinal de Corrente no Início da Linha.

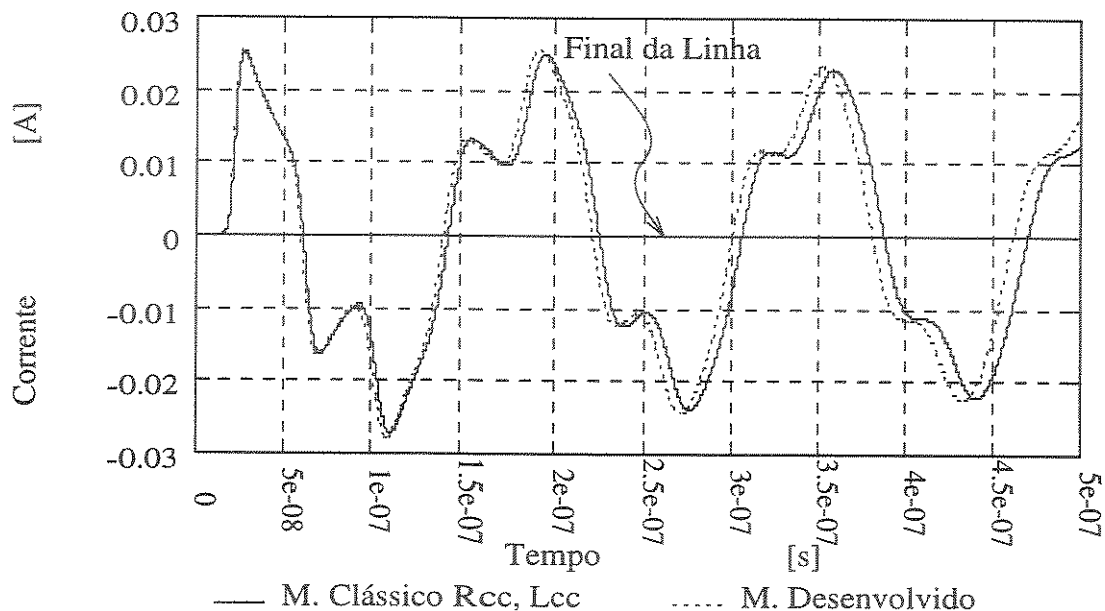


Figura 8.69: Perfil do Sinal de Corrente no Meio e no Final da Linha.

### 8.3 Observações

Olhando para os gráficos das simulações em que se utilizou o sinal senoidal (item 8.2.1), em todos os casos apresentados nos itens 8.2.1.1 a 8.2.1.6 observa-se que os perfis de tensão e corrente induzidos nos pontos de observação (início, meio e final da linha) são praticamente iguais, isto é:

- A velocidade de propagação;
- A queda tanto na tensão quanto na corrente.

são praticamente idênticas, comparando o modelo desenvolvido com o modelo clássico usando  $R_{\omega}$  e  $L_{\omega}$ .

Se for comparado o modelo desenvolvido com o modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$ , observa-se que os perfis são diferentes, isto é, o modelo desenvolvido apresenta:

- Uma velocidade de propagação maior, como era esperado teoricamente;
- Uma queda, tanto na tensão quanto na corrente também, menor como era esperado teoricamente.



As tabelas 8.1, 8.2, 8.4, 8.5, 8.7, 8.8, 8.10, 8.11, 8.13, 8.14, 8.16 e 8.17, reforçam as observações feitas anteriormente e quantificam as diferenças entre os modelos nos pontos selecionados. As tabelas 8.3, 8.6, 8.9, 8.12, 8.15 e 8.18, apresentam os valores das impedâncias características calculadas para todos os casos referentes aos pontos selecionados. Observa-se que as impedâncias características calculadas para o modelo desenvolvido possuem valores menores quando comparadas com as do modelo clássico usando  $R_{cc}$  e  $L_{cc}$  e praticamente produzem o mesmo valor quando comparadas com os do modelo clássico usando  $R_{\omega}$  e  $L_{\omega}$ . Estas diferenças crescem à medida que a frequência e o raio do condutor escolhido aumentam.

Olhando para os gráficos das simulações em que se utilizou tanto o sinal trapezoidal (item 8.2.2) quanto o sinal atmosférico (item 8.2.3), em todos os casos apresentados nos itens 8.2.2.1 a 8.2.2.3 e nos itens 8.2.3.1 a 8.2.3.3, observa-se que os perfis de tensão e corrente induzidos nos pontos de observação (início, meio e final da linha) são diferentes, isto é, o modelo desenvolvido apresenta:

- Uma velocidade de propagação maior, como era esperado teoricamente;
- Uma queda, tanto na tensão quanto na corrente também, menor como era esperado;

As tabelas 8.19, 8.20, 8.22, 8.23, 8.25, 8.26, 8.28 e 8.29, reforçam as observações feita anteriormente e quantificam as diferenças entre os modelos nos pontos selecionados. As tabelas 8.21, 8.24, 8.27 e 8.30, apresentam os valores das impedância características calculados para todos os casos referentes aos pontos selecionados.

## 8.4 Conclusões

A partir das observções feitas, pode se tirar as seguintes conclusões:

1. O modelo desenvolvido pode substituir o modelo clássico nos estudos e análises do problema do efeito pelicular, no domínio do tempo, em linhas de transmissão.
2. Nas frequências baixas, principalmente, as frequências harmônicas, o efeito pelicular tem uma influência muito pequena, mas não pode ser desprezado.
3. As simulações com os sinais trapezoidal e atmosférico mostram que o efeito pelicular tem uma influência significativa e não pode ser desprezado.

## 8.5 Sugestões

Como uma continuação deste trabalho em estudos no futuro as seguintes propostas poderão ser consideradas:

1. Adicionar ao modelo desenvolvido o efeito da condutividade da terra.
2. Considerar o caso de multicondutores para estudo do problema do efeito pelicular.
3. Considerar o problema do efeito pelicular na linha de transmissão levando em conta todos os tipos de harmônicas.

## Apêndice A

# SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (\text{A.1})$$

Para,

$$u(r, t) \quad ; \quad r \in (0, R) \quad ; \quad t \in (0, \infty) \quad (\text{A.2})$$

Com as seguintes condições iniciais:

$$u(r, 0) = \phi(r) \quad ; \quad r \in (0, R) \quad (\text{A.3})$$

E as seguintes condições de contorno:

$$u(R, 0) = 0 \quad ; \quad t \in (0, \infty) \quad (\text{A.4})$$

Usando o método de separação de variáveis a solução pode ser feita da seguinte maneira:

$$u(r, t) = U(r).T(t) \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a expressão ( A.5) na equação ( A.1) teremos o seguinte:

$$U(r).T'(t) = \gamma^2 T(t). \left( U''(r) + \frac{1}{r}.U'(r) \right) \quad (\text{A.6})$$

Depois de uma modificação teremos a seguinte expressão:

$$\frac{T'(t)}{\gamma^2 \cdot T(t)} = \frac{U''(r) + \frac{1}{r}U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2 \quad (\text{A.7})$$

Onde  $(\lambda)$  é uma constante positiva. O sinal na frente de  $(\lambda^2)$  é escolhido para obter a solução periódica no tempo. Assim, temos:

$$\frac{T'(t)}{\gamma^2 \cdot T(t)} = -\lambda^2 \quad (\text{A.8})$$

e

$$\frac{U''(r) + \frac{1}{r}U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2. \quad (\text{A.9})$$

A solução  $T(t)$  da equação ( A.8) é dada por:

$$T(t) = C \cdot \exp(-\lambda^2 \gamma^2 t) \quad (\text{A.10})$$

Em seguida é necessário determinar a solução  $U(r)$  da equação ( A.9) da seguinte maneira:

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \lambda^2 \cdot U(r) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Essa equação ( A.11) é conhecida como a equação de Bessel, cuja solução toma a seguinte forma:

$$U(r) = J_0(\lambda \cdot r). \quad (\text{A.12})$$

onde,  $J_0(x)$  é a função de Bessel de ordem zero.

Se a expressão ( A.12) satisfaz as condições de contorno ( A.4), deve satisfazer também a seguinte expressão:

$$J_0(\lambda \cdot R) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Nessa expressão ( A.13)  $\lambda$  é definida pela seguinte série:

$$\lambda_k = \frac{\xi_k}{R} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.14})$$

Onde  $(\xi_k)$  são as raízes da função de Bessel  $J_o(x) = 0$ .

Assim, para satisfazer as condições de contorno (A.4) a solução para  $u(r, t)$  consiste de uma série infinita de funções  $u_k(r, t)$ , onde para cada função corresponde a sua raiz  $(\xi_k)$ . Então, substituindo-se (A.10), (A.12), (A.14) em (A.5) tem-se o seguinte:

$$u_k(r, t) = C_k \cdot \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \cdot \gamma^2 \cdot t}{R^2}\right) J_o\left(\frac{\xi_k^2}{R^2} \cdot r\right) \quad (\text{A.15})$$

O resultado para  $u(r, t)$  é o seguinte:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \cdot \gamma^2 \cdot t}{R^2}\right) \cdot J_o\left(\xi_k \frac{r}{R}\right). \quad (\text{A.16})$$

Para satisfazer as condições iniciais a constante  $C_k$  deve ser obtida substituindo-se a expressão (A.3) na expressão (A.16) como a seguir:

$$u(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot J_o\left(\xi_k \frac{r}{R}\right) = \phi(r). \quad (\text{A.17})$$

Uma vez que:

$$r = x \cdot R. \quad (\text{A.18})$$

a expressão (A.17) toma a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot J_o(\xi_k \cdot x) = \phi(x \cdot R). \quad (\text{A.19})$$

Para se obter a constante  $C_k$ , os dois lados da expressão (A.19) têm que ser multiplicados por  $x \cdot J_o(\xi_n \cdot x)$  e integrados para o intervalo  $[0:1]$  da seguinte maneira:

$$\int_0^1 x \cdot J_o(\xi_n \cdot x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot J_o(\xi_k \cdot x) dx = \int_0^1 x \cdot J_o(\xi_n \cdot x) \phi(x \cdot R) dx. \quad (\text{A.20})$$

Considerando-se as propriedades das funções de Bessel, a integral do lado esquerdo da expressão ( A.20) pode ser representada pela seguinte função:

$$\int_0^1 x \cdot J_0(\xi_k \cdot x) \cdot J_0(\xi_n \cdot x) dx = \begin{cases} 0 & ; & k \neq n \\ \frac{1}{2} \cdot J_0^2(\xi_k) & ; & k = n \end{cases} \quad (\text{ A.21})$$

Com a expressão ( A.21) e depois de uma modificação, a expressão ( A.20) toma a seguinte forma:

$$C_n \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0^2(\xi_n) = \int_0^1 x \cdot J_0(\xi_n \cdot x) \cdot \phi(x \cdot R) dx. \quad (\text{ A.22})$$

Logo,

$$C_n = \frac{2}{J_0^2(\xi_n)} \int_0^1 x \cdot J_0(\xi_n \cdot x) \cdot \phi(x \cdot R) dx.. \quad (\text{ A.23})$$

Usando também a seguinte propriedade da função de Bessel:

$$J_0'(x) = J_1(x) \quad (\text{ A.24})$$

a expressão ( A.23) toma a seguinte forma:

$$C_n = \frac{2}{J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x \cdot J_0(\xi_n \cdot x) \cdot \phi(x \cdot R) dx. \quad (\text{ A.25})$$

No caso de condições iniciais dadas pela seguinte função:

$$\phi(r) = \phi(x, R) = -1 \quad (\text{ A.26})$$

a expressão ( A.25) pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_n = -\frac{2}{J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x \cdot J_0(\xi_n \cdot x) \cdot dx. \quad (\text{ A.27})$$

A integral do lado direito da expressão ( A.27) poderia ser feita usando-se a seguinte propriedade da função de Bessel:

$$\int_0^x x J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) \}. \quad (\text{A.28})$$

Assim, segue-se que:

$$\int_0^1 J_0(\xi_n \cdot x) \cdot x dx = \frac{1}{\xi_n^2} \cdot \xi_n \cdot J_1(\xi_n) = \frac{J_1(\xi_n)}{\xi_n}. \quad (\text{A.29})$$

Com o resultado da expressão ( A.29) substituída na expressão ( A.27) e considerando-se ( $k = n$ ), a constante ( $C_k$ ) é igual a:

$$C_k = -\frac{2}{J_1^2(\xi_k)} \cdot \frac{J_1(\xi_k)}{\xi_k} = -\frac{2}{\xi_k \cdot J_1(\xi_k)}. \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, a solução completa da equação de onda ( A.1) é apresentada pela seguinte expressão:

$$u(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_0(\xi_k \cdot x)}{\xi_k \cdot J_1(\xi_k)} \cdot \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \cdot \gamma^2 \cdot t}{R^2}\right). \quad (\text{A.31})$$

## REFERÊNCIAS

- [1] **L. Fox**, " *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations* ", Pergamon Press LTD, 1962.
- [2] **Forsythe G. E. & Wasow W. R.**, " *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations* ", John Willey & Sons Inc., 1960.
- [3] **William H. Hayt Jr.**, " *Eletromagnetismo* ", Terceira Edição, Livros Tecnicos e Cientificos Editora SA, 1983.
- [4] **G. I. Costache**, " *Finite Element Solution of Steady-State Skin-Effect Problems in Straight Flat Conductors* ", COMPEL-Int. Comput. and Math. in Elec. and Electron. Eng., vol. 2, no. 2, pp. 35-39, 1983.
- [5] **P. Silvester**, " *Model Network Theory of Skin-Effect in Flat Conductors* ", Proc. IEEE, vol. 54, no. 9, pp. 1147-1151, Sept. 1966.
- [6] **Edward S. M. & Mokand G. I. Costache**, " *Skin-Effect Considerations on Transmission Lines Subjected to External Time-Domain em Fields* ", Proc. IEEE, PP. 80-84, 1990.
- [7] **Chu-sun Yen & Zvonko Fazaring & Richard L. Wheeler**, " *Time-Domain Skin-Effect Model for Transient Analysis of Lossy Transmission Lines* ", Proc. IEEE, vol. 70, no. 7, PP. 750-757, July 1982.
- [8] **R. Plonsey & R. E. Collin**, " *Principles and Applications of Electromagnetic Fields* ", McGraw-Hill Publishing Company LTD, 1976.



- [9] Hildebrand F. B., " *Introduction to Numerical Analysis* ", McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [10] Carnahan L. Luther H. & Wilkes J. D., " *Applied Numerical Methods* ", John Willey & Sons Inc., 1969.
- [11] D. W. Dearholt & W. R. McSpadden, " *Electromagnetic Wave Propagation* ", McGraw-Hill Inc., 1973.
- [12] TynMyint-U, " *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* ", American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1973.
- [13] Constantine A. Balanis, " *Advanced Engineering Electromagnetics* ", John Willey & Sons Inc., New York, 1989.
- [14] Leonard M. Magid, " *Electromagnetic Fields, Energy and Waves* ", John Willey & Sons Inc., New York, 1972.
- [15] I. Osmanis & L. P. Peterson, " *Time-Domain Skin-Effect Model for Electromagnetic Radiating, Scattering and Transmission Problems, in Radioengineering and communication* ". (USSR), Riga: Riga Polytechnical institute, 1985, pp. 17-22.
- [16] I. Osmanis, " *The Transient Model of Skin-Effect for Time-Domain Problems* ", (USSR), Riga: Riga Polytechnical institute, 8p2-E5, pp. 292-294, 1990.
- [17] A. Konrad, " *Integrodifferential Finit Element Formulation of Two-Dimensional Steady State Skin-Effect Problems* ". IEEE Trans. Mag. vol. MAG-18, no. 1, pp. 284-292, 1982.
- [18] G. I. Costache, " *Finite Element Method Applied to Skin-Effect Problems in Strip Transmission Lines* ". IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-35, pp. 1009-1013, Nov. 1987.
- [19] R. B. Wu & I. C. Yang, " *Boundary Integral Equation Formulation of Skin-Effect Problems in Multiconductor Transmission Lines* ". IEEE Trans. Mag. vol. MAG-25,

no. 4, pp. 3013-3015, July 1989.

- [20] **John D. Krauss & Keith R. Caver**, " *Electromagnetics* " Second Edition McGraw-Hill Inc. 1973.
- [21] **L. V. Bewley**, " *Traveling Waves on Transmission Systems*" Second Edition, Dover Publications, Inc. 180 Varick Street New York N. Y. 10014, 1951.
- [22] **P. Silvester**, " *Modern Electromagnetic Fields*" Prentice-Hall, Inc, Englewoods Cliffs, N.J. 1968.
- [23] **Ramo S. Whinnery J. R. & Van Duzer T.**, " *Fields and Waves in Communication Electronics*" Wiley, New York, 1965.
- [24] **Nannapaneni N. R.**, " *Basic Electromagnetics with Applications*" Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [25] **Richard E. Matick**, " *Transmission Lines for Digital and Communication Networks*" McGraw-Hill, Inc. USA, 1969.
- [26] **R. L. Wigington & N. S. Nahman** , " *Transient Analysis of Coaxial Cables Considering Skin Effect*" Proc. IRE, vol. 45, pp. 166-174, Feb. 1957.
- [27] **C. L. Bertin** , " *Transmission Line Response Using Frequency Techniques*" IBM J. Res. Devel., vol. 8, pp. 52-63, Jan. 1964.
- [28] **E. F. Miersch, & A. E. Ruehli** , " *Time-Domain Skin-Effect Model Using Resistors and Lossless Transmission Lines*" IBM Tech. Disol. Bull., vol. 21, no. 5, pp. 2162-2163, Oct. 1968.
- [29] **A. J. Gruodis, C. W. Ho, E. F. Miersch & A. E. Ruehli** , " *Delay Line Approach for Analyzing Lossy Transmission Lines*" IBM Tech. Disol. Bull., vol. 19, no. 6, pp. 2366-2368, Nov. 1976.

- [30] **F. H. Branin** , " *Transient Analysis of Lossless Transmission Lines*" Proc. IEEE, vol. 55, pp. 2012-2013, Nov. 1967.
- [31] **H. W. Dommel** , " *Digital Computer Solution of Electromagnetic Transient in Single and Multiphase Networks*" IEEE, Trans. Power App. Syst.vol. PAS-88, pp. 388-399, Apr. 1969.
- [32] **A. J. Gruodis** , " *Transient Analysis of Uniform Resistive Transmission Lines in Homogeneous Medium*" IBM J. Res. Devel., vol. 23, pp. 675-681, Nov. 1979.
- [33] **A. J. Gruodis & C. S. Chang** , " *Lossy Transmission Line Modelling and Measurements*" in Proc. IEEE Int. Conf. on Circuits and Computers, pp. 796-799, 1980.
- 