

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA & COMUNICAÇÕES

ESTUDO QUANTITATIVO DO ACOPLAMENTO  
ENTRE ONDAS CARACTERÍSTICAS EM  
MEIOS ANISOTRÓPICOS

Dalton Soares Arantes

Orientador: R.R. Scarabucci

03/72

Tese de Mestrado apresentada  
à Faculdade de Engenharia  
de Campinas da Universidade  
Estadual de Campinas.

Junho - 1972



*A meus pais*

*Antonio e Dora*

## AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho. Em particular sou grato a:

Dr. Rege Scarabucci, meu orientador, pela inestimável colaboração e pelas discussões estimulantes sobre o assunto.

Dr. Manoel Sobral Jr., Diretor da Faculdade de Engenharia, por ter proporcionado condições favoráveis à execução deste trabalho.

Meus colegas Rui Fragassi Souza, Ricardo M. O. Galvão, Ivan Mourilhe Silva e Alberto Kin Kwei Yin pelo apoio e incentivo.

Dr. Fernando Walter pelo estímulo que me proporcionou no estudo de Rádio-Propagação e Dr. J.L.R.Muzzio que gentilmente colaborou com algumas sugestões úteis.

Sra. Sandra Silva pela paciência e boa vontade no trabalho de datilografia.

Orlando Gilberto Fariani, do Instituto de Física da U.E.C., pela realização dos gráficos.

Srtas. Maria Duarte Penteado e Vilma A. Pavanatti pelo auxílio nas correções e elaboração final desta Tese.

## ÍNDICE

I.	PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE BAIXA FREQUÊNCIA NA IONOSFERA...	1
I.a	- Ion-Cyclotron Whistler.....	1
I.b	- Propagação em Meio Homogêneo.....	5
I.b.1	- Índice de Refração para plasmas de vários constituintes.....	5
I.b.2	- Polarização da onda.....	7
I.b.3	- Propriedades gerais do índice de refração	9
I.c	- Propagação de Ion-Whistlers na Ionosfera.....	10
I.d	- Geração de Proton-Whistlers na Ionosfera.....	13
II.	ACOPLAMENTO ENTRE ONDAS CARACTERÍSTICAS.....	16
II.a	- Conceituação.....	16
II.b	- Acoplamento para o caso de incidência vertical... 18	
II.c	- Acoplamento para o caso de incidência oblíqua.... 22	
II.c.1	- Ondas Características.....	23
II.c.2	- Forma acoplada das equações de Clemmow e Heading.....	25
II.d	- Cálculo dos elementos da Matriz $\tilde{T}$ .....	28
III.	ESTUDO DA ESTRUTURA DA ONDA.....	34
III.a	- Solução de onda completa.....	35
III.b	- Separação em ondas características.....	42
III.c	- Descrição do Programa do computador.....	44
III.c.1	- Programa principal.....	44
III.c.2	- Subrotina MEDIUM.....	45
III.c.3	- Subrotina QUARTC.....	46
III.c.4	- Subrotina EIGEN.....	46
III.c.5	- Subrotina HAVING.....	46
III.c.6	- Subrotina MATRIX.....	46
III.c.7	- Subrotina BRAIN.....	48
III.c.8	- Subrotina OUTPUT.....	49
III.c.9	- Subrotina OUTAUX.....	50

IV.	ESTUDO QUANTITATIVO DA EXCITAÇÃO DOS PROTON-WHISTLERS..	52
IV.a	- Acoplamento entre ondas R e L.....	53
IV.b	- Polarização das ondas R e L.....	55
IV.c	- Coeficientes de Transmissão através da região de crossover.....	56
IV.d	- Determinação dos campos das ondas ascendentes...	59
IV.e	- Conclusões finais.....	63
	APÊNDICE A.....	68
	APÊNDICE B.....	73
	REFERÊNCIAS.....	76

## INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é o estudo quantitativo do acoplamento entre ondas eletromagnéticas que se propagam em meios anisotrópicos e planarmente estratificados. O problema da determinação dos campos é igualmente enfatizado a fim de possibilitar o estudo interessante da excitação de "Proton-Whistlers" na alta ionosfera. A teoria aqui desenvolvida é especialmente útil no estudo de ondas eletromagnéticas de baixa frequência (VLF) na ionosfera, embora ela seja válida para qualquer frequência e para qualquer meio anisotrópico bi-refringente.

Para meios ionizados e de vários constituintes as equações que governam a propagação das ondas são, em geral, resolvidas em computador. Um programa para a resolução dessas equações, apresentado por Scarabucci (1969), foi adaptado para o cálculo dos campos em torno da região de "crossover" em um modelo de ionosfera constituído de elétrons, Hidrogênio ( $H^+$ ), Hélio ( $He^+$ ) e Oxigênio ( $O^+$ ). Com isso foi possível determinar quantitativamente a influência do acoplamento e da inversão de polarização no processo de geração de "Proton-Whistlers".

Um dos resultados mais importantes deste trabalho é a determinação da influência das frequências de colisão nas potências das ondas transmitidas através da região de "crossover". Essas ondas são produzidas por uma onda polarizada à direita ("Eletron-Whistlers") incidindo abaixo da região de "crossover". Mostramos que, ao contrário do que se pensava, o efeito do ângulo de acoplamento crítico sobre as potências transmitidas é praticamente nulo. Para confirmar este resultado foi desenvol

vido um processo para o cálculo numérico dos coeficientes de acoplamento (Clemmow e Heading, 1954) e um processo de separação de uma onda total em ondas características, semelhante ao desenvolvido por Scarabucci e Smith (1970). Assim, pelo estudo comparativo dos coeficientes de transmissão, da estrutura das ondas características e dos fatores de acoplamento, foi possível explicar as razões principais da influência quase nula do ângulo crítico sobre as potências das ondas geradas na região de "crossover".

## I - PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE BAIXA FREQUÊNCIA NA IONOSFERA

O estudo da propagação de ondas de VLF introduzido neste capítulo, deverá servir como motivação para o estudo teórico do problema da determinação dos campos de uma onda eletromagnética em meio anisotrópico e para estudo do acoplamento entre ondas características. Em particular, estudaremos a geração dos "Proton-Whistlers" na altura de "Crossover", por ser um fenômeno bastante interessante e suficientemente complicado, para merecer um estudo bem minucioso.

### I.a - Ion-Cyclotron Whistlers

"Whistlers" são fenômenos produzidos pela propagação de ondas de baixa frequência (VLF) cuja energia provém de descargas elétricas atmosféricas na superfície da Terra. Os Whistlers denominados "Ion-Cyclotron" foram observados pela primeira vez em receptores colocados nos satélites Injun 3 e Alouette (Smith et al., 1964; Brice, 1964). Este tipo de Whistler aparece em espectrogramas de frequência-tempo como um traço que começa imediatamente depois da recepção de um Whistler de curta duração e apresenta inicialmente um acréscimo rápido na frequência aproximando assintoticamente a girofrequência do ion correspondente na altura do satélite. À girofrequência do proton  $H^+$  está associado o "Proton-Whistler" e à girofrequência do Hélio  $He^+$  o "Hélio-Whistler". As Figs. (1) e (2) mostram os espectrogramas destes Whistlers (Gurnett et al. - 1965; Barrington et al. - 1966).

Foi mostrado por Gurnett, Shawhan, Brice e Smith (1965) que os Ion-Cyclotron Whistlers são simplesmente o resultado de uma dispersão sofrida pelo impulso elétrico original (relâmpago) no seu percurso através da ionosfera. Eles mostraram ainda que esta dispersão é devida à influência de ions sobre a propagação de ondas eletromagnéticas na ionosfera. O Whistler de curta duração que precede o Proton-Whistler e o Hélio-Whistler é denominado "Eletron-Whistler" (Fig. 1). A designação Eletron-Whistler foi adotada porque a girofrequência dos eletrons é a máxima frequência para a qual esse modo Whistler polarizado à direita pode se propagar.



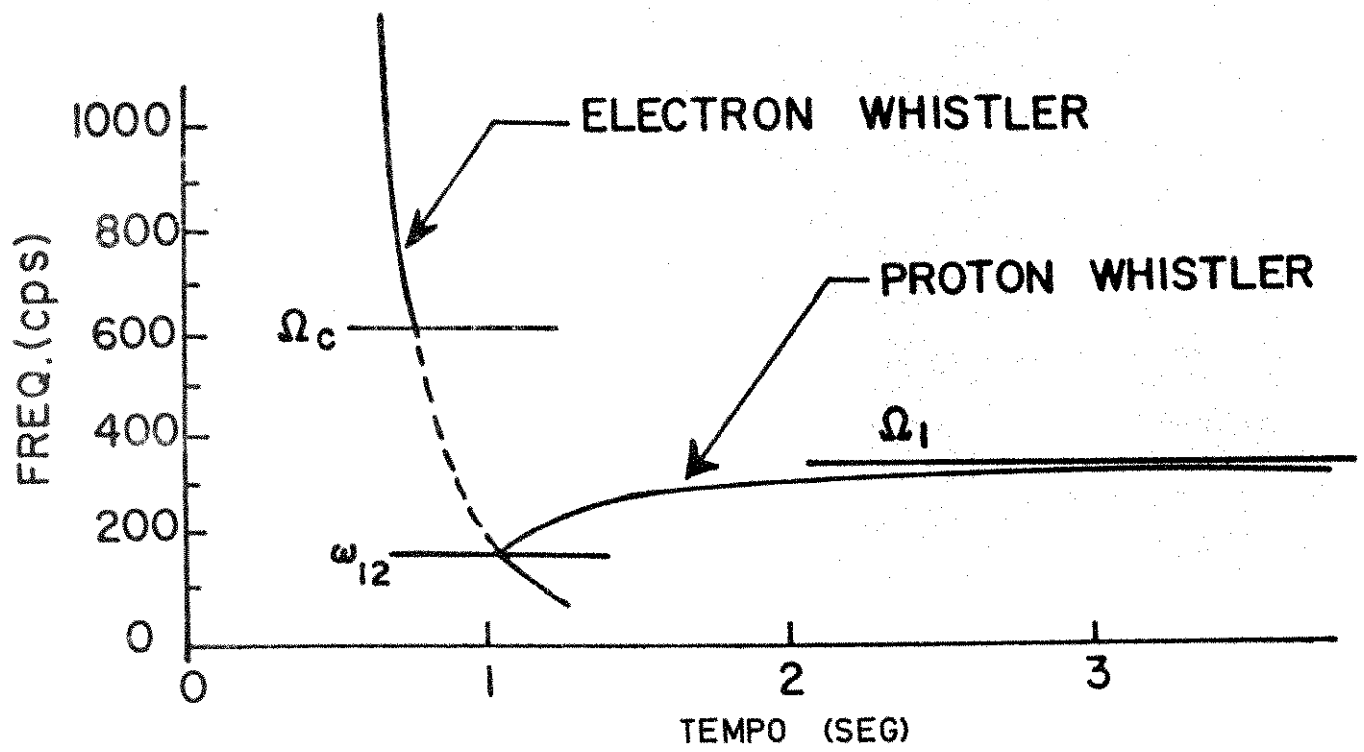
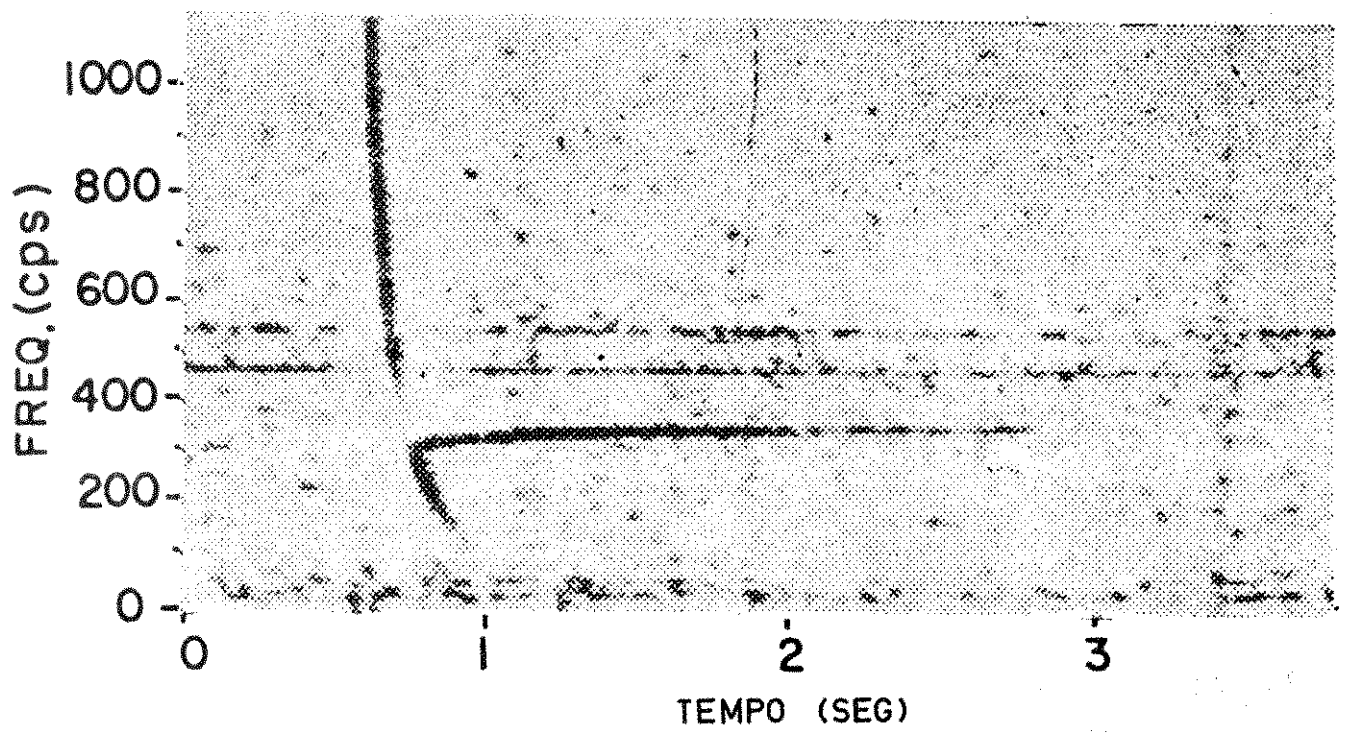


Fig: 1 - ESPECTROGRAMA DE UM PROTON WHISTLER  
E NOMENCLATURA

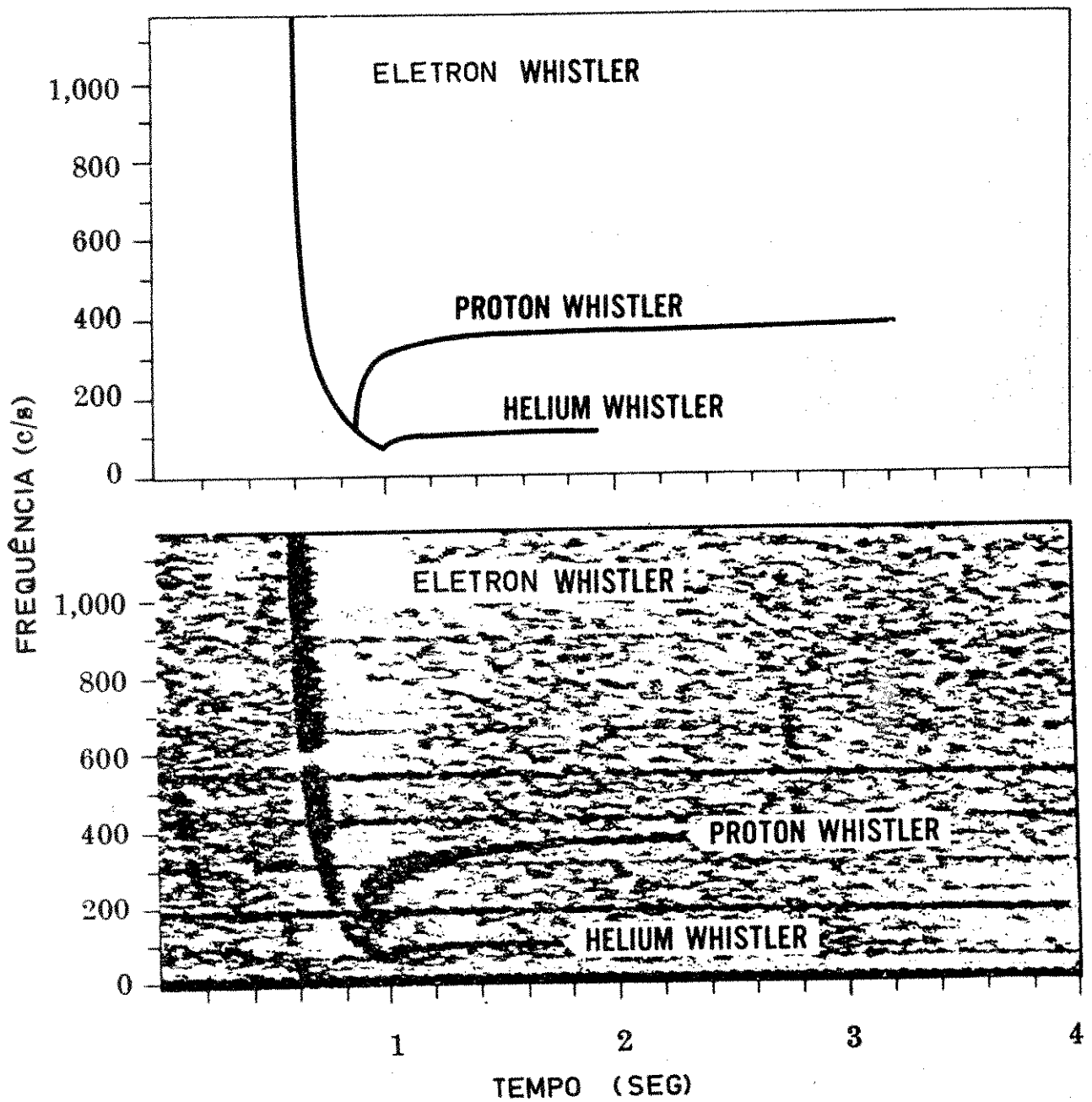


Fig: 2 - PROTON WHISTLER E HELIUM WHISTLER OBSERVADOS NO SATÉLITE ALOUETTE II. A PARTE SUPERIOR DESTA FIGURA É UMA REPRESENTAÇÃO IDEALIZADA DO EVENTO.

A explicação teórica dos Proton-Whistlers e Hélio-Whistlers deve-se basear no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em um modelo de ionosfera tendo vários tipos de ions. A propagação de ondas em meios deste tipo foram estudadas por Stix (1962), Gintsburg (1963), Smith e Brice (1964) e outros. Quando incluímos o efeito de ions nas equações de propagação notamos que, além do modo Whistler polarizado à direita (Eletron-Whistler) é possível também a propagação do modo polarizado à esquerda (Proton e Hélio-Whistlers) para certas faixas de frequências e certas alturas na ionosfera. As ondas polarizadas à esquerda que se propagam com frequências menores que a máxima girofrequência dos ions são denominadas "Ondas Ion-Cyclotron" (Stix, 1962). Gintsburg (1963) mostrou que o modo de propagação Ion-Cyclotron entra em ressonância com o meio em que se propaga em cada girofrequência de ions. A propagação para este modo é possível para uma faixa de frequências abaixo de cada girofrequência de ions e a frequência de corte para cada faixa é maior que a próxima girofrequência de ions mais baixa. A largura de faixa disponível para propagação depende da concentração relativa dos vários ions. O Proton-Whistler é uma onda Ion-Cyclotron que se propaga na faixa de frequência disponível logo abaixo da girofrequência dos Protons  $H^+$ . O Hélio-Whistler se propaga na faixa disponível logo abaixo da girofrequência do Hélio  $He^+$ .

Stix (1962) mostrou que uma onda pode inverter o sentido de rotação enquanto se propaga através de um meio que varia e que possui ions positivos com diferentes razões de carga/massa. Smith e Brice (1964) demonstram que entre cada duas girofrequências adjacentes existe uma frequência denominada "frequência de crossover" para a qual ambos os modos de propagação são linearmente polarizados. Uma onda que se propaga em meio que varia lentamente inverte o sentido da polarização quando sua frequência for igual à frequência de crossover. É através desse processo de inversão de polarização na ionosfera que um Eletron-Whistler polarizado à direita pode tornar-se um Proton-Whistler ou um Hélio-Whistler polarizado à esquerda. A inversão de polarização na frequência de crossover é um fator

importante na explicação dos Ion-Whistlers porque, como veremos adiante, a grande concentração de  $O^+$  e  $He^+$  na baixa ionosfera impede a propagação direta dos Whistlers inteiramente a través do modo Ion-Cyclotron.

Será mostrado mais tarde que próximo da altura e das frequências para as quais ocorre inversão de polarização os dois modos de propagação, modo rápido e modo lento, podem estar altamente acoplados. Quando existir acoplamento é de se esperar que um Eletron-Whistler ascendente seja dividido em duas ondas ascendentes. Estas duas ondas, depois de passarem pela região de acoplamento, se propagam independentemente, uma com polarização à direita e a outra com polarização à esquerda. Este processo de acoplamento é importante para se determinar as regiões da ionosfera que são acessíveis aos dois tipos de Whistlers.

Usando um modelo de ionosfera constituído de três íons ( $H^+$ ,  $He^+$  e  $O^+$ ), Gurnett et al. (1965) calcularam teóricamente os tempos de propagação de grupo para os Eletron-Whistlers e Proton-Whistlers e mostraram que eles se aproximam com bastante precisão aos indicados pelos espectrogramas. A dispersão sofrida pelos Proton-Whistlers desde o ponto em que são gerados até a altura do satélite é devida, em parte, à propagação no modo polarizado à direita e em parte, à propagação no modo polarizado à esquerda. A frequência de crossover pode ser determinada dos espectrogramas de Proton-Whistlers e é usada para o cálculo da concentração percentual de  $H^+$  relativa à densidade de eletrons no plasma próximo ao satélite.

Gurnett (1963) analisou os dados obtidos do satélite Injun 3 e fez um estudo preliminar da ocorrência de Ion-Whistlers na ionosfera. As suas conclusões mais importantes foram:

1. Os Proton-Whistlers são observados somente depois da recepção de um trecho de Whistler de curta duração. A Fig. 1 mostra claramente o traço de um Eletron-Whistler seguido de um Proton-Whistler. Os Eletron-Whistlers são sempre de curta duração podendo ser contínuos ou fracionados. Em todos os espectrogramas estu

dados não se observou nenhum Proton-Whistler sem a presença de um Eletron-Whistler. Todavia, em somente 36% das revoluções do satélite em que ocorreram Eletron-Whistlers, é que se observou também a presença de Proton-Whistlers. Tudo leva a crer que os Eletron-Whistlers propagam-se diretamente desde a baixa ionosfera até o satélite.

2. Existe uma frequência para a qual os Eletron-Whistlers e os Proton-Whistlers são coincidentes no tempo. A Fig. 1 mostra um Eletron-Whistler coincidente com um Proton-Whistler em uma frequência  $\omega_{12}$ . Veremos mais tarde que esta frequência corresponde à frequência de crossover na altura do satélite e se situa entre a girofrequência do Proton  $H^+$  e a girofrequência do Hélio  $He^+$ . A Fig. 2 apresenta um espectrograma em que aparece, além do Proton-Whistler, um Hélio-Whistler. Nesta figura podemos notar que o Hélio-Whistler e o Eletron-Whistler são coincidentes em uma frequência de crossover menor que a frequência  $\omega_{12}$  da Fig. 1. Esta nova frequência corresponde à frequência de crossover entre a girofrequência do  $He^+$  e a girofrequência do Oxigênio  $O^+$ .

Em alguns casos o traço do Eletron-Whistler aparece interrompido entre as frequências de  $\omega_{12}$  e  $\Omega_c$  (Fig. 1). Esta interrupção parece ser devida a uma grande atenuação que o Eletron-Whistler sofre no seu percurso até o satélite.

3. A razão  $\omega_{12}/\Omega_1 = \Lambda_{12}$  aumenta quando a altitude diminui, aproximando a unidade em uma altura da ordem de 440 km à meia-noite (hora local) e 640 km ao meio-dia (hora local). A Fig. 3. mostra uma sequência de espectrogramas para hora local em torno de meia-noite e para várias altitudes. Quando a altura diminui o valor de  $\Lambda_{12}$  aumenta de aproximadamente 0,52 para

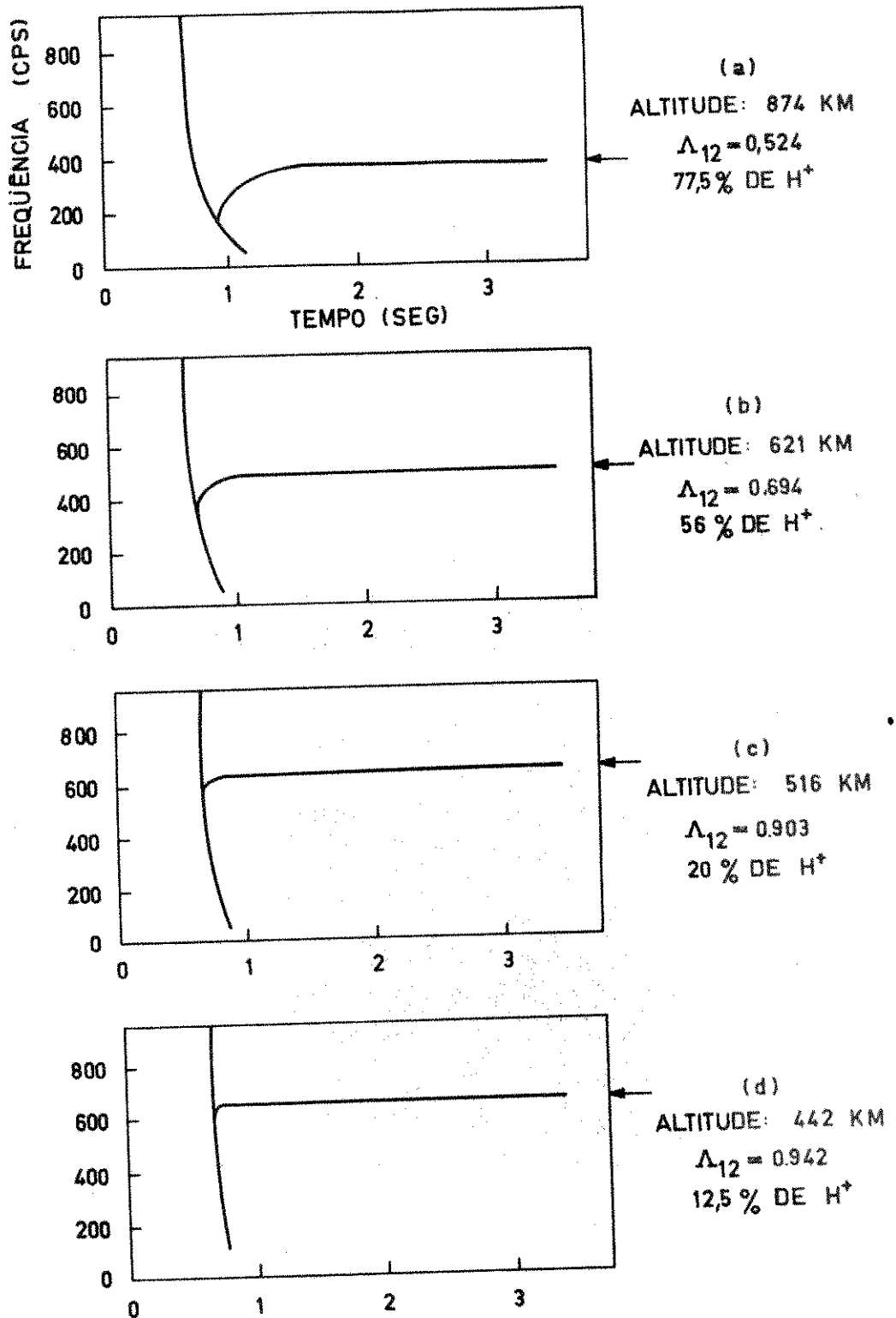


FIG: 3 -VARIACÃO DE  $\omega_{12}/\Omega_1$  COM A ALTITUDE PARA MEIA-NOITE (HORA LOCAL)

(a) em uma altitude de 874 km para aproximadamente 0,94 para (d) em uma altura de 442 km. Para alturas abaixo de 442 km não se observou Proton-Whistlers.

Nesta figura as girofrequências do Proton são indicadas por uma flexa.

### I.b - Propagação em Meio Homogêneo

Para explicarmos o fenômeno dos Ion-Whistlers devemos considerar o efeito de ions sobre a propagação de ondas eletromagnéticas na ionosfera. Veremos que a presença de ions de diferentes razões de carga/massa produz efeitos importantes na propagação de ondas eletromagnéticas na ionosfera para frequências da ordem das girofrequências dos ions.

#### I.b.1 - Índice de refração para plasmas de vários componentes

O índice de refração para um plasma contendo vários tipos de ions é dado por Hines (1957) e outros. Vamos supor que todos os campos variem da forma  $\exp\{j\omega t - jkn(lx + my + qz)\}$  sendo  $\omega$  a frequência angular da onda,  $k$  a constante de propagação no vácuo,  $n$  o índice de refração e  $(l, m, q)$  os cossenos diretores do vetor  $\vec{k}$ . Usaremos a notação de Stix (1962) que apresenta a expressão para o índice de refração da seguinte forma:

$$An^4 - Bn^2 + RLP = 0 \quad (1.1)$$

sendo

$$A = S \cdot \text{sen}^2 \theta + P \cdot \text{cos}^2 \theta \quad (1.2)$$

$$B = R \cdot L \cdot \text{sen}^2 \theta + P \cdot S \cdot (1 + \text{cos}^2 \theta) \quad (1.3)$$

$$R = 1 - \sum_k \frac{X_k}{1 + \epsilon_k Y_k} \quad (1.4)$$

$$L = 1 - \sum_k \frac{X_k}{1 - \epsilon_k Y_k} \quad (1.5)$$

$$P = 1 - \sum_k X_k \quad (1.6)$$

$$S = \frac{1}{2} (R + L) \quad (1.7)$$

$$D = \frac{1}{2} (R - L) \quad (1.8)$$

$$X_k = \frac{\omega_{pk}^2}{\omega^2} \quad (1.9)$$

$$\omega_{pk}^2 = \frac{e^2 N_k}{\epsilon_0 m_k} \quad (1.10)$$

$$Y_k = \frac{\Omega_k}{\omega} \quad (1.11)$$

$$\Omega_k = \frac{|e| B_c}{m_k} \quad (1.12)$$

$$\epsilon_k = \frac{q_k}{|q_k|} \quad (1.13)$$

onde  $e$  é a carga do eletrón,  $\theta$  é o ângulo entre o vetor de propagação  $\vec{k}$  e o campo magnético  $\vec{B}_0$  e  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo.

O índice  $k$  refere-se à partícula do tipo  $k$  tendo massa  $m_k$ , carga  $q$  e densidade  $N_k$ ;  $\omega_{pk}$  e  $\Omega_k$  são respectivamente a frequência angular de plasma e girofrequência angular da partícula  $k$ .

O efeito de colisões pode ser introduzido substituindo  $m_k$  por  $m_k(1-jZ_k)$ , sendo  $Z_k = \nu_k/\omega$  e  $\nu_k$  a frequência de colisão efetiva da partícula  $k$ .

A solução da relação de dispersão (1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$n^2 = (B \pm F)/2A \quad (1.14)$$

onde

$$F^2 = (R.L - P.S)^2 \cdot \text{sen}^4 \theta + 4.P^2.D^2 \cdot \text{cos}^2 \theta \quad (1.15)$$



Ondas se propagando transversalmente ou ao longo de  $\vec{B}_0$ ,  $\theta = \pi/2$  ou  $\theta = 0$  têm aplicação especial no estudo das propriedades gerais da relação de dispersão e são denominadas "ondas transversais" e "ondas longitudinais" respectivamente.

$$\theta = 0^\circ \rightarrow n_R^2 = R \quad ; \quad n_L^2 = L \quad (1.16)$$

$$\theta = 90^\circ \rightarrow n_x^2 = \frac{2RL}{R+L} \quad ; \quad n_o^2 = P \quad (1.17)$$

Os símbolos  $R, L, x$  e  $o$  significam respectivamente "right", "left", "extraordinary" e "ordinary".

### I.b.2 - Polarização da Onda

Consideremos o sistema de eixos cartesianos representado na Fig. 4. O vetor de propagação  $\vec{k}$  faz um ângulo  $I$  com o eixo  $z$  e um ângulo  $\chi$  com o plano  $zy$ . O campo magnético  $\vec{B}_0$  está contido no plano  $zy$  e faz um ângulo  $-DIP$  com o eixo  $y$ . Os cossenos diretores de  $\vec{k}$  e  $\vec{B}_0$  são  $(l, m, n)$  e  $(0, \gamma, \xi)$  respectivamente.

$$\gamma = \cos(DIP) \quad (1.18)$$

$$\xi = -\sin(DIP) \quad (1.19)$$

$$l = \sin I \sin \chi \quad (1.20)$$

$$m = \sin I \cos \chi \quad (1.21)$$

$$n = \cos I \quad (1.22)$$

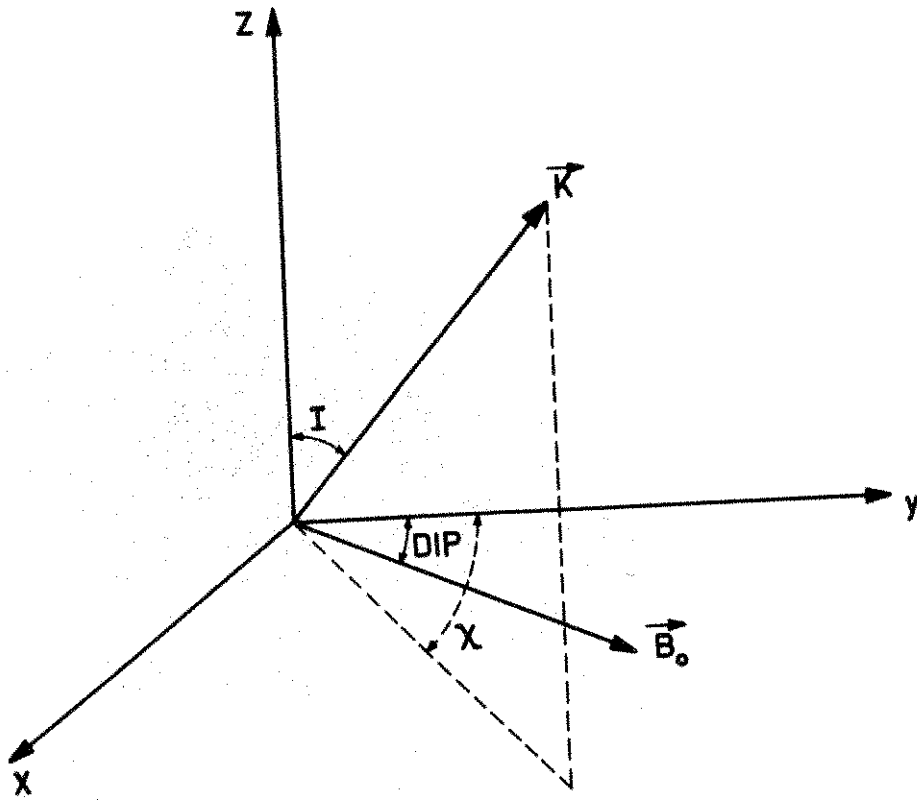


FIG: 4 - SISTEMA DE COORDENADAS E VETOR DE PROPAGAÇÃO  $\vec{K}$

A polarização de uma onda plana cuja normal é  $\vec{k}$  será definida em função das componentes do campo elétrico na frente da onda, isto é, no plano normal a  $\vec{k}$ .

Pela geometria da Fig. 4 podemos ver facilmente que a polarização  $\rho$  é dada por

$$\rho = \frac{E_{||}}{E_{\perp}} = \frac{E_z \cdot \text{sen} I - (E_x \cdot \text{sen} \chi + E_y \cdot \text{cos} \chi) \cdot \text{cos} I}{E_x \cdot \text{cos} \chi - E_y \cdot \text{sen} \chi} \quad (1.23)$$

sendo  $E_{||}$  e  $E_{\perp}$  as componentes do campo elétrico na frente da onda, que são respectivamente paralela e perpendicular ao plano de propagação  $\vec{kz}$ .

Para propagação ao longo do meridiano magnético ( $\chi = 0$ ) a polarização será (Gurnett et al., 1965).

$$\rho = j \cdot \frac{(S \cdot n^2 - R \cdot L)}{D \cdot n^2 \cdot \text{cos} \theta} \quad (1.24)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor de propagação  $\vec{k}$  e o campo magnético  $\vec{B}_0$ .

Se designarmos por  $\rho_o$  e  $\rho_x$  a polarização da onda para os dois valores de  $n^2$ , teremos

$$\rho_o \cdot \rho_x = 1 \quad (1.25)$$

A polarização de uma onda fornece a variação relativa no tempo das componentes de  $\vec{E}$  perpendiculares ao vetor de propagação  $\vec{k}$ . Se desprezarmos o efeito de colisões,  $n^2$  será sempre real e em consequência a polarização será um número imagi

nário. Quando  $\rho = j$  a polarização é circular e os campos giram à direita com relação ao vetor de propagação. Quando  $\rho = -j$  a polarização é circular e os campos giram à esquerda com relação a  $\vec{k}$ . Para propagação longitudinal ( $\theta = 0^\circ$ ) a polarização é circular à direita se  $n^2 = R$  e circular à esquerda se  $n^2 = L$ .

1.b.3 - Propriedades Gerais do Índice de Refração

O índice de refração para um plasma de vários constituintes (1.14) depende dos parâmetros  $\omega$ ,  $\vec{B}_0$ ,  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ .....  $\omega_{pm}$  e do ângulo  $\theta$  entre o campo magnético  $\vec{B}_0$  e o vetor de propagação  $\vec{k}$ . A variação de  $n^2$  com esses parâmetros pode ser investigada fixando-se as concentrações dos constituintes e usando-se uma frequência normalizada  $\Lambda = \frac{\omega}{\Omega_1}$ . Com isso podemos traçar um gráfico polar da variação de  $n^2$  com  $\theta$  e com a frequência normalizada, denominado "espaço de parâmetros" ou "diagramas C.M.A." devido a Glenow e Mullaly (1955) e Allis (1959). Será conveniente também obtermos os gráficos em coordenadas esféricas da velocidade da onda  $u = c/n$  para cada frequência  $\Lambda$ . Estas "superfícies de velocidade de fase" têm simetria rotacional em torno do campo magnético.

Dizemos que existe "corte" e "ressonância" na propagação da onda quando  $n^2 = 0$  e  $n^2 = \infty$ , respectivamente. Da relação de dispersão (1.1) podemos ver que haverá "corte" quando  $R = 0$  ou  $L = 0$  ou  $P = 0$ . Das eqs. (1.16) e (1.17) vemos que ocorre "ressonância" para ondas longitudinais quando  $R = \infty$  e  $L = \infty$  e para ondas transversas extraordinárias quando  $S = 0$ . As superfícies de velocidade de fase para os dois valores de  $n^2$  são denominadas R (right) e L (left) de acordo com o senti

do da polarização para  $\theta = 0^\circ$ . Para propagação transversa e las são denominadas O (ordinary) ou X (extraordinary) de acordo com o índice de refração para  $\theta = 90^\circ$ .

Na frequência em que  $D = 0$  i.e.,  $R = L$ , denominada "frequência de crossover", a polarização  $\rho$  (eq.1.24) muda de sinal. Veremos mais adiante que é exatamente neste ponto que ocorre a inversão de polarização dos Eletron-Whistlers mencionada anteriormente. As superfícies de velocidade de fase podem ser denominadas também de f (fast) ou s (slow) de acordo com a magnitude da velocidade de fase para ângulos entre 0 e  $90^\circ$ .

A Fig. 5 (Carnett et al. -1965) mostra as superfícies de velocidade de fase e a variação de  $n^2$  com a frequência normalizada  $\Lambda$  para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ . Esta figura corresponde a um ponto da ionosfera em que existem 80% de  $H^+$ , 15% de  $He^+$  e 5% de  $O^+$  e  $\omega_{pe} = \Omega_e$ . Devida à neutralidade elétrica da ionosfera a densidade de eletrons é igual à soma das densidades dos ions.

### 1.c - Propagação de Ion-Whistlers na Ionosfera

Inicialmente vamos considerar um plasma sem colisões ( $Z_k = 0$ ). Na Fig. 5 podemos ver os valores da frequência da onda que correspondem aos pontos especiais do índice de refração  $L = 0$  (corte);  $L = \infty$  (ressonância);  $D = 0$  (frequência de crossover) e  $S = 0$ . Para propagação longitudinal a onda polarizada à esquerda (L) tem ressonâncias nas girofrequências dos ions  $H^+$ ,  $He^+$  e  $O^+$  correspondendo a  $\Lambda = 1$ ,  $\Lambda = \frac{1}{4}$  e  $\Lambda = \frac{1}{16}$  respectivamente. Estas ressonâncias são denominadas "ressonâncias ciclotrônicas dos ions". As ressonâncias para a onda transversa extraordinária ocorrem para valores de  $\Lambda$  que satisfazem a eq.  $S = 0$  e são denominadas "ressonâncias híbridas".



As frequências que são raízes da eq.  $D = 0$  são denominadas frequências de crossover (Smith e Brice, 1964). A frequência de crossover situada entre as frequências de ressonância do  $H^+$  e do  $He^+$  é denominada  $\omega_{12}$  e a situada entre o  $He^+$  e  $O^+$  é denominada  $\omega_{23}$ .

Gurnett et al. (1965) discutem as diversas transições que ocorrem na superfície do índice de refração nos pontos  $L = \infty$ ,  $S = 0$ ,  $L = 0$  e  $D = 0$ . Neste trabalho interessa-nos apenas a transição em  $D = 0$ , pois é neste ponto que ocorre a inversão de polarização dos Eletron-Whistlers. Na Fig. 5 podemos ver que, próximo de  $D = 0$  os dois valores de  $n^2$  são positivos isto é, os dois modos de propagação L e R representam ondas progressivas. Os esboços (3) e (4) dessa figura representam as "superfícies de velocidade de fase" ou "superfícies da normal à onda" em torno do ponto de crossover  $D = 0$ . A superfície externa f (fast) é uma esfera topológica e corresponde ao sinal positivo na expressão de  $n^2$  (1.14). A superfície interna s (slow) tem como seção reta uma lemniscata e corresponde ao sinal negativo de (1.14). As superfícies da normal à onda para os dois valores do índice de refração variam de uma maneira contínua em torno do ponto  $D = 0$ . Da expressão (1.14) podemos ver que no ponto de crossover,  $D = 0$ , o modo rápido (f) é isotrópico e as duas superfícies da normal à onda são tangentes para  $\theta = 0^\circ$ . É fácil ver na eq. (1.24) que o modo rápido (f) e o modo lento (s) permutam as suas polarizações em  $D = 0$ . Para  $\theta \neq 0^\circ$  a polarização do modo lento (s) tende a infinito (polarização linear) a medida que aproximamos do ponto  $D = 0$ . Para  $\theta = 0^\circ$  a polarização é descontínua em  $D = 0$ .

Para propagação vertical ( $I = 0^\circ$ ) e usando a definição de polarização (1.23) podemos obter a seguinte relação para os campos elétricos do modo lento (s)

$$\frac{E_y}{\rho} = E_x = 0 \quad \text{para } D = 0 \text{ e } \theta \neq 0^\circ \quad (1.26)$$

Isto significa que o campo elétrico é linearmente polarizado no plano  $\vec{k}\vec{B}_0$  para  $\theta \neq 0^\circ$ .

A polarização para o modo rápido (f) em  $D = 0$  é indeterminada porque  $Sn^2 - RL = 0$  em  $D = 0$ . Porém, se usarmos a relação (1.25)

$$\rho_o \cdot \rho_x = 1 \quad (1.27)$$

notamos que a polarização do modo rápido (f) tende a zero quando aproximamos do ponto  $D = 0$ . Assim, a relação dos campos elétricos para o modo rápido (f) será

$$E_y = \rho E_x = 0 \quad \text{para } D = 0 \text{ e } \theta \neq 0^\circ \quad (1.28)$$

isto é, em  $D = 0$  o modo rápido (f) é linearmente polarizado no plano normal ao plano  $\vec{k}\vec{B}_0$ .

As conclusões sobre a polarização apresentadas acima variam sensivelmente quando introduzimos colisões. Neste caso, embora o valor de  $\rho$  possa ter uma parte real diferente de zero, a relação (1.25) ainda será válida se a polarização for definida como na relação (1.23).



No capítulo IV teremos oportunidade de confirmar os resultados sobre polarização discutidos acima.

#### I.d - Geração de Proton-Whistlers na ionosfera

Gurnett et al. usaram o perfil de densidades de constituintes mostrado na Fig. 6.a para explicar o processo de geração de Proton-Whistlers na alta ionosfera.

A Fig. 6.b mostra a variação das frequências de corte ( $L = 0$ ), de ressonância ( $L = \infty$ ) e de crossover ( $D = 0$ ) com a altura. Neste gráfico, para cada altura, o cruzamento de uma frequência de crossover ( $D = 0$ ) é equivalente ao cruzamento do ponto  $D = 0$  no espaço de parâmetros estudado anteriormente (Fig. 5). As ressonâncias marcadas na Fig. 6.b ( $L = \infty$ ) são as girofrequências para o  $H^+$ ,  $He^+$  e  $O^+$ . A frequência de crossover situada entre  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  foi omitida dessa figura.

Comparando as Figs. 5 e 6.b podemos verificar que as regiões hachuradas desta última, que se situam abaixo de  $\Omega_1, \Omega_2$  e  $\Omega_3$ , são as regiões de propagação para as ondas ciclotrônicas do  $H^+$ ,  $He^+$  e  $O^+$  respectivamente. Nestas regiões, para cada frequência, existem duas superfícies de velocidade de fase entre os cortes  $L = 0$  e as ressonâncias  $L = \infty$ . Nas regiões sem hachuras existe somente uma superfície de velocidade de fase que corresponde ao modo R.

A grande concentração de  $O^+$  e  $He^+$  na baixa ionosfera impede a propagação direta de um impulso elétrico para a alta ionosfera inteiramente através do modo L (onda ciclotrônica do Proton). Podemos ver na Fig. 6.b que para uma frequência de 400 Hz e para alturas inferiores a 800 km o modo L é evanescente.

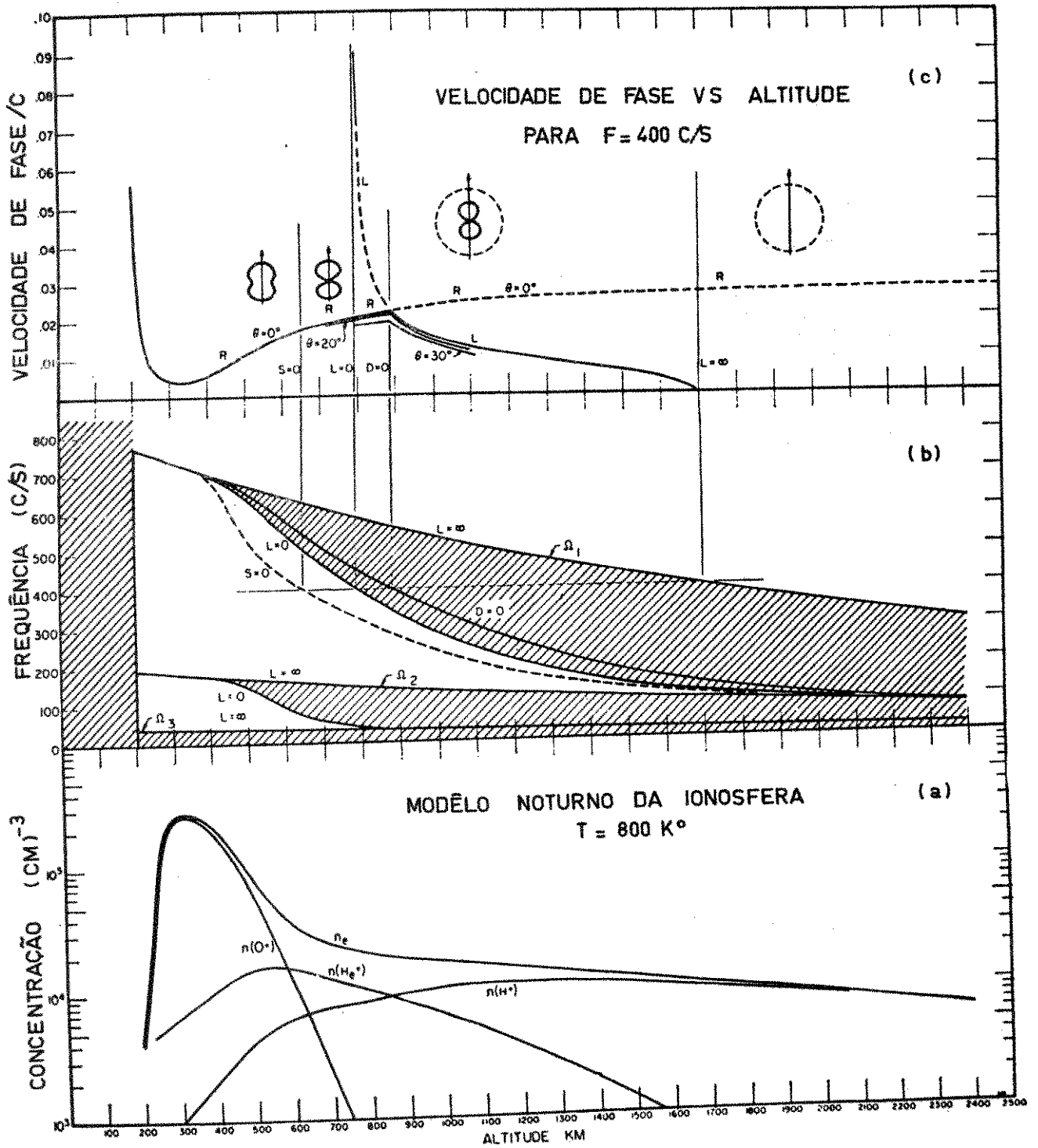


Fig. 6 - FREQUÊNCIAS CRÍTICAS VS ALTITUDE PARA UM MÔDELO TÍPICO DA IONOSFERA

Vamos considerar agora uma onda incidindo na base da ionosfera ( $\sim 200$  km) com uma frequência de 400 Hz. A Fig. 6.c apresenta as velocidades de fase dessa onda em função da altitude. A velocidade de fase do modo rápido (f) para  $\theta = 0^\circ$  está representada por uma linha pontilhada. A superfície da normal à onda para o modo rápido (f) (Fig. 6.c) é a superfície externa entre  $L = 0$  e  $L = \infty$ . As linhas contínuas da Fig. 6.c representam a velocidade de fase do modo lento (s) para  $\theta = 0^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $30^\circ$ . A superfície da normal à onda para este modo é real para todas as altitudes abaixo de  $L = \infty$  e se deforma de uma maneira contínua nesta região. Portanto, para uma fonte de ondas ascendentes localizada na base da ionosfera, todas as altitudes abaixo de  $L = \infty$  são acessíveis, através do modo lento (s). Para uma onda incidindo com  $\theta \neq 0^\circ$  na base da ionosfera, a sua polarização aproxima-se de infinito de uma maneira contínua a medida que a altura aproxima-se de  $D = 0$ . Em  $D = 0$  a onda é linearmente polarizada no plano  $\vec{k}\vec{B}_0$ . Quando a onda ultrapassa o ponto  $D = 0$  a sua polarização muda de sinal e as superfícies da normal à onda do modo lento (s) muda de R para L. Daí em diante a onda se propaga através do modo L. Esta onda ciclotrônica do Proton, entre  $D = 0$  e  $L = \infty$ , representa o traço do Proton-Whistler mencionado no início. A medida que a onda ciclotrônica do Proton aproxima-se da altura em que a girofrequência do Proton é igual à frequência da onda (400 Hz) a velocidade de fase aproxima-se de zero e a energia da onda é absorvida pela ionosfera.

Na Fig. 6.c vemos que as superfícies da normal à onda, para os dois modos de propagação, se tocam em  $D = 0$  e  $\theta = 0^\circ$

mas não se interceptam em nenhuma altitude. Se desprezarmos o acoplamento entre os dois modos e considerarmos o caso  $D = 0$  e  $\theta = 0^\circ$  como "pouco provável", devemos concluir que para uma certa frequência a região acima de  $L = \infty$  é inacessível para uma onda ascendente proveniente da base da ionosfera. Porém, experimentalmente tem-se observado ondas provenientes da base da ionosfera em alturas bem acima de  $L = \infty$ . Esta aparente contradição só pode ser explicada se admitirmos a possibilidade de haver acoplamento entre ondas próximo da região  $D = 0$ . No próximo capítulo vamos considerar o acoplamento entre ondas características próximo da região de crossover,  $D = 0$ , levando em conta as frequências de colisão dos constituintes.

## II - ACOPLAMENTO ENTRE ONDAS CARACTERÍSTICAS

Neste capítulo devemos estudar o problema geral do acoplamento entre ondas características que se propagam em meios anisotrópicos e planarmente estratificados. Em particular, analisaremos qualitativamente o acoplamento próximo da região de crossover, para o caso de incidência vertical, que servirá para classificar os diversos tipos de Eletron-Whistlers e Proton-Whistlers que podem ser captados na alta ionosfera. No final do capítulo apresentamos um novo processo de cálculo dos fatores de acoplamento que será aplicado para justificar alguns resultados importantes obtidos neste trabalho.

### II.a - Conceituação

Dada uma certa direção dentro de um meio bi-refringente e homogêneo, podemos em geral, encontrar quatro "ondas características", duas se propagando em um sentido e duas no sentido inverso. Estas ondas características são ondas cujas polarizações não variam ao longo da direção de propagação. Assim, uma onda cuja polarização varia ao longo da direção de propagação dentro deste meio homogêneo, pode ser considerada como uma combinação linear das quatro ondas características do meio na mesma direção.

Vamos imaginar dois meios homogêneos e bi-refringentes a e b separados por um meio não homogêneo c, bi-refringente e planarmente estratificado. Uma onda  $e_a^{(1)}$ , que se propaga no meio a com polarização constante (onda característica), atravessa o meio c e se propaga no meio b com uma polarização que em

geral varia ao longo da direção de propagação. Esta onda que se propaga no meio b é a soma de duas ondas com polarizações constantes (ondas características)  $e_b^{(1)}$  e  $e_b^{(2)}$ . Porém, matematicamente a onda  $e_a^{(1)}$  transforma-se na onda  $e_b^{(1)}$  durante o seu percurso no meio não homogêneo c. Durante a mudança de polarização da onda  $e_a^{(1)}$ , dentro do meio c, foi gerada então uma nova onda com polarização diferente que transformou-se continuamente em  $e_b^{(2)}$ . A este processo de geração de onda característica de polarização diferente da onda original denominamos de acoplamento".

Neste exemplo a onda  $e_b^{(2)}$  foi gerada por um processo de acoplamento que é devido à variação da polarização da onda original  $e_a^{(1)}$  no meio não homogêneo c. Quanto mais rápida for a variação de polarização da onda  $e_a^{(1)}$ , maior será o acoplamento e conseqüentemente a amplitude de  $e_b^{(2)}$ .

O estudo matemático do acoplamento entre ondas eletromagnéticas em meios anisotrópicos foi inicialmente desenvolvido por Fürsterling (1942), que considerou apenas o caso de propagação vertical. Fürsterling utiliza um fator  $\Psi$  que acopla a onda ordinária total (ascendente e descendente) com a onda extraordinária total (ascendente e descendente).

Clemmow e Heading (1954) generalizaram o estudo do acoplamento utilizando o conceito de equações acopladas. Nesse estudo são usados fatores de acoplamento que correspondem a interações entre cada duas ondas características separadamente. Budden e Clemmow (1957) calcularam expressões analíticas para esses coeficientes de acoplamento em função dos parâmetros do

meio e de suas derivadas. Scarabucci e Smith (1970) utilizaram os fatores de acoplamento para confirmar alguns resultados obtidos em um estudo de irregularidades na magnetosfera orientadas ao longo do campo magnético terrestre.

### II.b - Acoplamento para o Caso de Incidência Vertical

No estudo de FÜRSTERLING as ondas ascendentes e descendentes de mesma polarização são grupadas duas a duas, fornecendo duas novas ondas representadas pelos valores  $F_o$  e  $F_x$  que são proporcionais aos campos elétricos dos modos Ordinário e Extraordinário respectivamente. Usando a relação (1.25) e a equação de onda que relaciona  $E_x$  a  $E_y$  para incidência vertical (Budden, 1966), FÜRSTERLING mostrou que a  $F_o$  e  $F_x$  satisfazem as equações acopladas.

$$F_o'' + F_o(n_o^2 + \psi^2) = \psi'F_x + 2\psi F_x' \quad (2.1)$$

$$F_x'' + F_x(n_x^2 + \psi^2) = \psi'F_o + 2\psi F_o' \quad (2.2)$$

onde o símbolo (') significa  $\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial z}$  e  $\psi$  é dado por

$$\psi = \frac{\rho_o'}{\rho_o^2 - 1} = \frac{\rho_x'}{\rho_x^2 - 1} \quad (2.3)$$

$n_o$  e  $n_x$  são os índices de refração dos modos Ordinário e Extraordinário respectivamente. A variável  $\psi$  é denominada "fator de acoplamento", pois ela acopla a onda  $F_o$  com a onda  $F_x$ . Para propagação longitudinal ( $\theta = 0^\circ$ ), bem como para meios homogêneos,  $\rho_o$  e  $\rho_x$  são constantes e conseqüentemente  $\rho' = 0$

e  $\Psi = 0$ , isto é, as ondas Ordinária e Extraordinária se propagam independentemente. Quando  $\rho'$  for diferente de zero e  $\rho = \pm 1$  o coeficiente de acoplamento  $\Psi$  torna-se infinito. A condição  $\rho = \pm 1$  e  $\rho' \neq 0$  é denominada de "acoplamento crítico" e significa que os modos Ordinário e Extraordinário estão altamente acoplados.

Das eqs. (1.1) e (1.24) podemos calcular a expressão para a polarização  $\rho$  para propagação ao longo do meridiano magnético ( $\chi = 0^\circ$ )

$$\rho^2 + 2j\rho \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{RL - PS}{P(L - R)} + 1 = 0 \quad (2.4)$$

Ocorrerá acoplamento crítico quando a eq. (2.4) apresentar raízes duplas, isto é

$$G = \frac{P(L - R)}{RL - PS} = \pm j \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (2.5)$$

Esta expressão demanda que a parte real de  $G$  seja zero e quando isto ocorrer a sua parte imaginária fornece  $\sin^2 \theta_c / \cos \theta_c$ , sendo  $\theta_c$  o "ângulo crítico" ou "ângulo de crossover" entre  $\vec{B}_0$  e  $\vec{k}$ . Para cada perfil de densidades e de frequências de colisão de ions e eletrons, existe um "ângulo crítico" para o qual o acoplamento é infinito. Devido à condição  $\rho_0 \rho_x = 1$ , as polarizações  $\rho_0$  e  $\rho_x$  serão idênticas quando  $\rho = \pm 1$ . Portanto, da eq. (1.24) vemos que no acoplamento crítico  $\rho_0 = \rho_x$ . Logo, a condição de crossover ocorre quando o acoplamento é infinito.



Para um plasma sem colisões a polarização é sempre um número imaginário e a condição  $\rho = \pm 1$  não pode ser satisfeita. É fácil ver que nestas condições o ângulo crítico é zero. Para um dado perfil de densidades, o ângulo crítico varia de zero a  $90^\circ$  quando aumentamos as frequências de colisão.

Jones (1970) calculou os valores da polarização da onda em várias altitudes em torno de  $D = 0$  usando o perfil noturno de Gurnett et al. e as frequências de colisão Coulombianas dadas por Nicolet (1953). A Fig. 7 reproduz os cálculos de Jones e mostra em detalhes como a polarização varia em torno de  $D = 0$  para vários ângulos entre  $\vec{B}_0$  e  $\vec{k}$ . Nessa figura o semiplano superior corresponde ao modo polarizado à esquerda ( $\text{Im}(\rho) > 0$ ) e o semiplano inferior ao modo polarizado à direita ( $\text{Im}(\rho) < 0$ ) (Jones usa a definição  $\rho = +j^0$  para o modo polarizado à esquerda e  $\rho = -j^0$  para o modo polarizado à direita) e o ângulo crítico é de  $8,9^\circ$ . Para ângulos da normal à onda menores que  $\theta_c$  a trajetória da polarização não cruza o eixo real de  $\rho$  e por isso o sentido da polarização, esquerda ou direita, não varia quando a onda passa pela região de crossover (~772 km). Para ângulos da normal à onda maiores que  $\theta_c$  ( $\theta = 10^\circ$ , por exemplo) a polarização para o modo R começa em  $\rho = +j$  ( $\rho = -j$  para o modo L) e termina em  $\rho = -j$  ( $\rho = +j$  para o modo L) e a inversão da polarização ocorre quando a onda passa pela altura de crossover.

As conclusões de Gurnett et al. e Jones podem ser resumidas no seguinte:

- a. A condição  $\theta > \theta_c$  indica inversão de polarização e

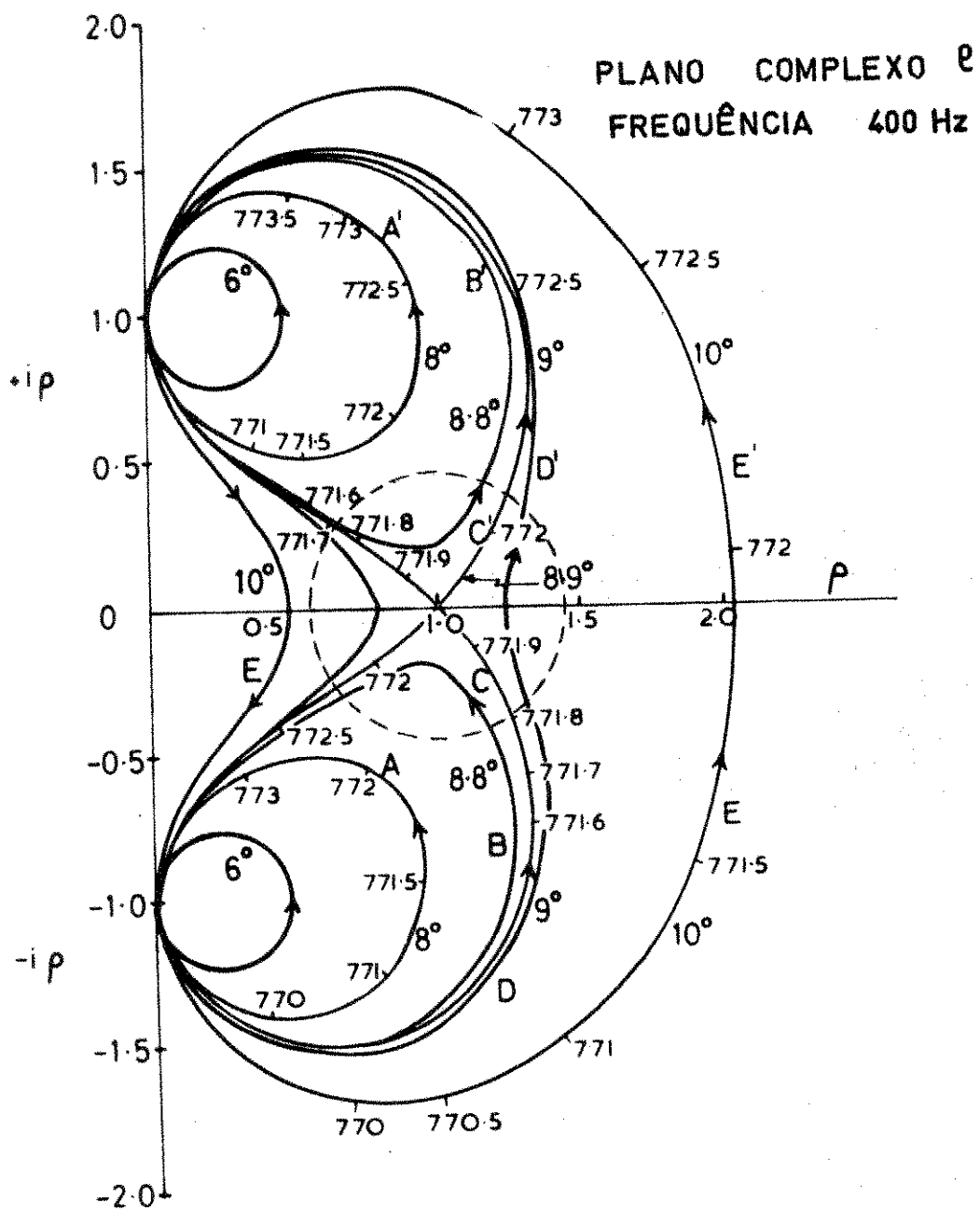


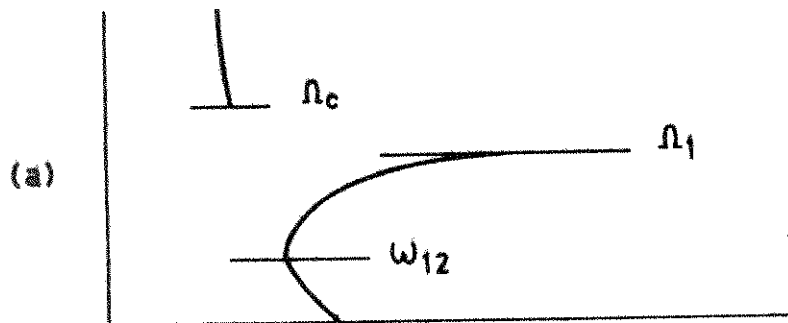
Fig: 7 - VARIAÇÃO DA POLARIZAÇÃO COM O ÂNGULO  $\theta$  E COM A ALTURA ( $\theta_c = 8,9^\circ$ )

acoplamento desprezível. Uma onda ascendente polarizada no modo R transforma-se lentamente em uma onda polarizada no modo L ao passar pela região de crossover. Um pequeno acoplamento no trajeto da onda pode gerar uma pequena quantidade de energia no modo R acima da altura de crossover.

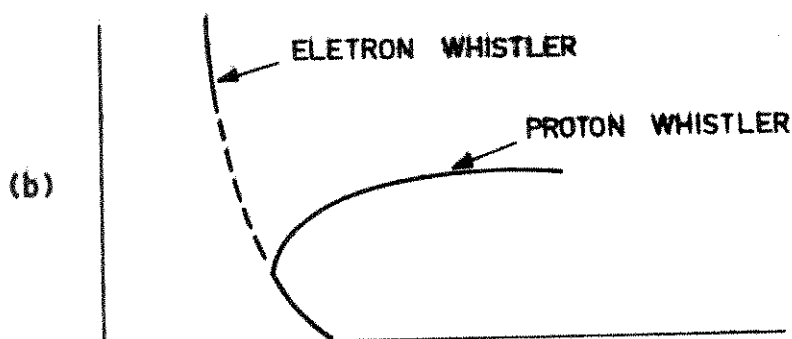
- b. Para  $\theta \approx \theta_c$  o acoplamento é crítico e uma onda R ascendente é dividida em duas ondas progressivas R e L próximo da altura em que  $\rho = +1$ . Esta condição corresponde ao círculo pontilhado da Fig. 7. Para se determinar as quantidades de energia nos dois modos é necessário usar uma solução de "onda completa".
- c. Para  $\theta < \theta_c$  não ocorre inversão de polarização e o acoplamento é insignificante. Uma onda R ascendente permanece no modo R podendo gerar uma pequena quantidade de energia no modo L se  $|\theta - \theta_c|$  for pequeno.

De acordo com essas conclusões os vários tipos de acoplamento poderiam ser classificados como na Fig. 8. O acoplamento do tipo (c) corresponde a um ângulo de meia potência onde os modos R e L saem com a mesma potência acima da altura de crossover.

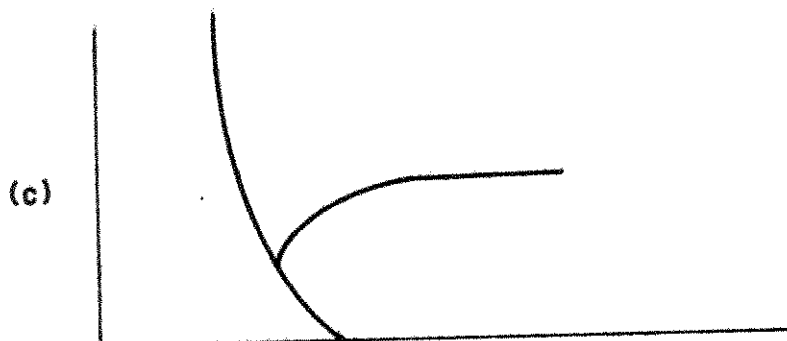
Entre os resultados mais importantes deste trabalho, veremos mostrar que a influência do ângulo crítico  $\theta_c$ , sobre as potências das ondas R e L acima da região de crossover, é praticamente nula. Veremos que para valores grandes de ângulo crítico, o acoplamento fora da região de crossover é que de



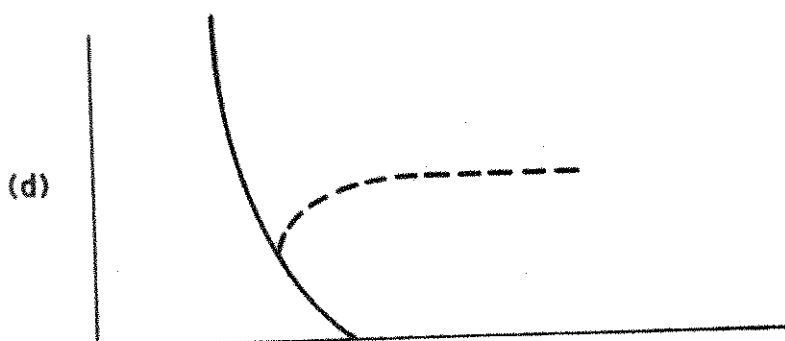
INVERSÃO DE POLARIZAÇÃO  
SEM ACOPLAMENTO



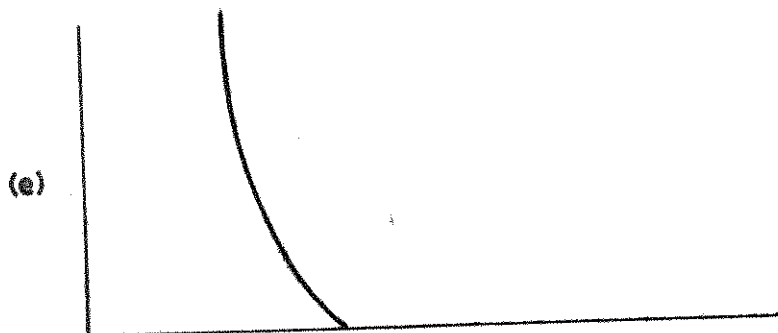
INVERSÃO DE POLARIZAÇÃO  
COM PEQUENO ACOPLAMENTO



GRANDE ACOPLAMENTO



POUCO ACOPLAMENTO  
SEM INVERSÃO DE  
POLARIZAÇÃO



NENHUM ACOPLAMENTO  
E NEM INVERSÃO DE  
POLARIZAÇÃO

Fig. 8 - CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE ACOPLAMENTO.

termina as quantidades de energia transmitidas em cada modo. Paradoxalmente, mostraremos que a estrutura das ondas características, próximo de  $D = 0$ , é grandemente afetada pelo ângulo crítico.

O estudo feito acima, sobre os fenômenos de acoplamento e inversão de polarização, é válido somente para o caso de incidência vertical ( $I = 0^\circ$ ). Este caso particular é importante porque as ondas que incidem obliquamente na baixa ionosfera, sofrem grande refração e emergem com o vetor de propagação  $\vec{k}$  muito próximo da vertical. Neste caso, admitindo a aproximação do dipolo para o campo magnético terrestre, a transição entre os tipos de Whistlers da Fig. 8 deve depender somente da latitude magnética.

No caso de haver gradientes laterais na baixa ionosfera a onda pode incidir obliquamente na região de crossover. As equações de Clemmow e Heading serão bastante úteis neste caso.

### II.c - Acoplamento para o Caso de Incidência Oblíqua

As equações acopladas de Clemmow e Heading contêm fatores que acoplam cada duas ondas características separadamente, ao passo que as equações de Fösterling utilizam o fator  $\Psi$  que acopla a onda Ordinária total (ascendente e descendente) com a onda Extraordinária total (ascendente e descendente). Além dessa desvantagem, as equações de Fösterling se restringem ao caso de incidência vertical somente, enquanto as de Clemmow e Heading são válidas para o caso geral de incidência oblíqua.

As equações diferenciais de Maxwell podem ser escritas como um conjunto de quatro equações diferenciais lineares simultâneas (apêndice A). Usando o vetor coluna  $\vec{e} = [E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y]^T$  Clemow e Heading mostraram que para meios estratificados horizontalmente, esse conjunto de equações pode ser escrito na seguinte forma

$$\frac{d\vec{e}}{dz} = -jk\tilde{T}\vec{e} \quad (2.6)$$

sendo  $\tilde{T}$  uma matriz (4 x 4) cujos elementos são funções do meio e da altura z.

O conjunto de equações acima pode ser resolvido com bastante precisão usando-se um método numérico de integração em computadores (Scarabucci, 1969). Embora esse conjunto de equações já esteja em uma forma conveniente para ser integrado, ele pode ser transformado para a forma "acoplada", como veremos adiante.

### II.c.1 - Ondas Características

Para meios homogêneos a matriz  $\tilde{T}$  não depende da variável z e a solução da equação de onda  $\vec{e}$  da forma

$$\vec{e} = \vec{e}_0 \exp(-jkqz) \quad (2.7)$$

sendo q e  $\vec{e}_0$  constantes a serem determinadas.

Levando a solução (2.7) à equação (2.6) teremos

$$\frac{d}{dz} \left[ \vec{e}_0 \exp(-jkqz) \right] = -jk\tilde{T}\vec{e}_0 \exp(-jkqz) \quad (2.8)$$

ou

$$(\tilde{T} - q\tilde{I}) \vec{e} = 0 \quad (2.9)$$

sendo  $\tilde{I}$  uma matriz unidade  $4 \times 4$ .

Existirá solução trivial ( $\vec{e} \neq 0$ ) se

$$\det [\tilde{T} - q\tilde{I}] = 0 \quad (2.10)$$

A expressão (2.9) é a equação característica da matriz  $\tilde{T}$  ( $4 \times 4$ ) e por isso possui quatro autovalores  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  dados pela eq. (2.10). Esta equação é equivalente a uma equação do quarto grau em  $q$ , denominada "quártica de Booker" (Booker, 1936, 1939), introduzida no apêndice A. A cada autovalor  $q_i$  corresponde um autovetor  $\vec{e}_i$  dado pela eq. (2.9). Os autovetores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  e  $\vec{e}_4$ , por serem solução da equação característica (2.9), são chamados de "ondas características". Para meios homogêneos essas ondas características são constantes e se propagam independentemente.

As duas ondas características que correspondem aos valores de  $q$  com parte imaginária negativa, são ondas ascendentes, pois, como  $q$  aparece multiplicado por  $j$  na solução exponencial (2.7), as suas amplitudes diminuem quando  $z$  aumenta. As duas ondas restantes são descendentes e correspondem aos valores de  $q$  com parte imaginária positiva.

Quando o meio variar com a altura  $z$ , a solução da equação de onda não será mais da forma  $\exp(-jkqz)$ . Neste caso as ondas características se interagem e a presença de uma delas em uma certa altura  $z$ , em geral acarreta a presença das ou

tras. Esta geração de ondas características em meios heterogêneos é devida ao acoplamento existente entre elas, como veremos a seguir.

II.c.2 - Forma Acoplada das Equações de Clemmow e Heading

A equação de onda (2.6) pode ser colocada na forma acoplada fazendo-se a transformação linear

$$\vec{e} = \tilde{R}\vec{f} \tag{2.11}$$

onde  $\tilde{R}$  é uma matriz 4 x 4 cujos elementos são funções de z e  $\vec{f}$  é a matriz coluna  $[f_1, f_2, f_3, f_4]$ .

Substituindo a expressão (2.11) na equação de onda, obtemos

$$\tilde{R}'\vec{f} + \tilde{R}\vec{f}' = -jk\tilde{T}\tilde{R}\vec{f} \tag{2.12}$$

Supondo que  $\tilde{R}$  seja uma matriz não singular, a expressão (2.12) pode ser pré-multiplicada por  $\tilde{R}^{-1}$

$$f' + jk\tilde{R}^{-1}\tilde{T}\tilde{R}\vec{f} = -\tilde{R}^{-1}\tilde{R}'\vec{f} \tag{2.13}$$

sendo  $\vec{f} = \tilde{R}^{-1}\vec{e}$ .

Dizemos que o conjunto de equações (2.13) está na forma "acoplada" se a matriz  $\tilde{R}^{-1}\tilde{T}\tilde{R}$  for diagonal. Neste caso o primeiro membro da i-ésima equação do conjunto (2.13) contém apenas a variável  $f_i$ . É sabido da teoria de matrizes que, se  $\tilde{T}$  tiver raízes características (autovalores) distintas, podemos encontrar uma matriz  $\tilde{R}$  tal que  $\tilde{R}^{-1}\tilde{T}\tilde{R}$  seja diagonal. Se  $\vec{e}_i$  fo-



rem os autovetores de  $\tilde{T}$  e  $q_i$  os autovalores, as colunas de  $\tilde{R}$  serão os próprios autovetores  $\vec{e}_i$ , isto é,  $\tilde{R} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$  tal que

$$\tilde{R}^{-1} \tilde{T} \tilde{R} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} = \Delta \quad (2.14)$$

Os autovetores de  $\tilde{T}$  são determinados a menos de um fator multiplicativo, embora a razão entre os seus elementos seja uma característica bem determinada. Para incidência vertical, a razão entre os dois primeiros elementos de  $\vec{e}_i$ ,  $(-E_x/E_y)$ , ou entre os dois últimos,  $(H_x/H_y)$ , fornece a polarização da onda. A razão entre o primeiro e o terceiro elementos, ou entre o segundo e quarto, fornece a impedância intrínseca do meio dividida por  $Z_0$ .

A expressão (2.13) pode ser escrita da seguinte forma

$$\vec{f}' + jk\Delta\vec{f} = \tilde{f}\vec{f} \quad (2.15)$$

sendo

$$\tilde{f} = -\tilde{R}^{-1}\vec{R}' \quad (2.16)$$

uma matriz 4 x 4 denominada "matriz de acoplamento".

Se o meio for homogêneo,  $\vec{R}' = 0$  e  $\tilde{f} = 0$  e a expressão (2.15) simplifica-se para

$$\vec{f}' + jk\Delta\vec{f} = 0 \quad (2.17)$$

ou ainda

$$f'_i + jkq_i f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.18)$$

cujas soluções são as ondas características

$$f_i = F_i \exp(-jkq_i z) \quad (2.19)$$

sendo  $F_i$  uma constante.

Se o meio não for homogêneo, teremos

$$f'_i + jkq_i f_i = \Gamma_{i1} f_1 + \Gamma_{i2} f_2 + \Gamma_{i3} f_3 + \Gamma_{i4} f_4 \quad (i=1,2,3,4) \quad (2.20)$$

Enquanto na equação acoplada os elementos  $\Gamma_{ij}$  representam acoplamento entre as ondas características  $i$  e  $j$ , na equação de Forsterling o fator  $\Psi$  representa o acoplamento entre a onda Ordinária total  $F_o$  e a onda Extraordinária total  $F_x$ . Portanto é mais conveniente usarmos os elementos  $\Gamma_{ij}$  para calcular as regiões da ionosfera que apresentam acoplamento entre ondas características.

Se  $q_1$  e  $q_2$  representarem os autovalores das ondas ascendentes e  $q_3$  e  $q_4$  os autovalores das ondas descendentes, podemos concluir que  $\Gamma_{12}$  e  $\Gamma_{21}$  representam o acoplamento entre as ondas ascendentes  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  e  $\Gamma_{34}$  e  $\Gamma_{43}$  representam o acoplamento entre as ondas descendentes  $\vec{e}_3$  e  $\vec{e}_4$ . Por outro lado, o elemento  $\Gamma_{13}$  por exemplo, representa acoplamento entre a onda ascendente  $\vec{e}_1$  e a onda descendente  $\vec{e}_3$ , isto é, valores de  $\Gamma_{13}$  diferentes de zero significam reflexão parcial ou total de  $\vec{e}_1$ .

Budden e Clemmow (1956) apresentam expressões para os elementos da matriz  $\tilde{T}$  em função dos parâmetros da ionosfera e de suas derivadas. Para o caso geral de incidência oblíqua e campo magnético oblíquo, essas expressões são demasiadamente complicadas e extensas para serem usadas, mesmo com o auxílio de computadores. A seguir apresentamos uma nova expressão para o cálculo dos elementos de  $\tilde{T}$ , fora da diagonal principal, em função da matriz  $\tilde{R}$ , dos autovalores  $q_i$  e da derivada da matriz  $\tilde{T}$ . A vantagem dessa expressão é que ela necessita apenas das derivadas dos elementos de  $\tilde{T}$ , ao passo que as expressões de Budden e Clemmow exigem o cálculo de derivadas de parâmetros mais complexos.

#### II.d - Cálculo dos Elementos da Matriz $\tilde{T}$

Neste parágrafo vamos calcular os elementos de  $\tilde{T}$  que estão fora da diagonal principal para determinarmos as regiões da ionosfera que apresentam acoplamento. Os elementos da diagonal principal não nos interessam, pois eles não representam acoplamento entre ondas características diferentes. A determinação das regiões de acoplamento terá grande importância quando formos aplicar o método de integração de "onda completa" para estudar os Proton-Whistlers.

A expressão (2.14) pode ser escrita da seguinte forma

$$\tilde{T}\tilde{R} = \tilde{R}\Delta \tag{2.21}$$

ou ainda

$$\tilde{R}^{-1}\tilde{T} = \Delta\tilde{R}^{-1} \tag{2.22}$$

Derivando (2.21) em relação a  $z$ , obtemos

$$\tilde{T}'\tilde{R} + \tilde{T}\tilde{R}' = \tilde{R}'\Delta + \tilde{R}\Delta' \quad (2.23)$$

que pré-multiplicada por  $\tilde{R}^{-1}$  fornece

$$\tilde{R}^{-1}\tilde{T}'\tilde{R} + \tilde{R}^{-1}\tilde{T}\tilde{R}' = \tilde{R}^{-1}\tilde{R}'\Delta + \Delta' \quad (2.24)$$

Usando (2.22) vem

$$\tilde{R}^{-1}\tilde{T}'\tilde{R} + \Delta\tilde{R}^{-1}\tilde{R}' = \tilde{R}^{-1}\tilde{R}'\Delta + \Delta' \quad (2.25)$$

Finalmente, usando (2.16) podemos escrever

$$\tilde{T}\Delta - \Delta\tilde{T} = \Delta' - \tilde{R}^{-1}\tilde{T}'\tilde{R} \quad (2.26)$$

É fácil ver que os elementos da diagonal principal de  $\tilde{T}$  se cancelam no primeiro membro de (2.26). Para os elementos restantes teremos

$$\tilde{T}_{ij} = Q_{ij}/(q_i - q_j) \quad (i \neq j) \quad (2.27)$$

onde  $Q_{ij}$  são os elementos da matriz

$$\tilde{Q} = \tilde{R}^{-1}\tilde{T}'\tilde{R} \quad (2.27-A)$$

e  $q_i$  os autovalores de  $\tilde{T}$ .

A expressão (2.27) nos permite concluir os seguintes fatos importantes a respeito do acoplamento para o caso geral de incidência oblíqua.

1. Quando  $q_i = q_j$  e  $Q_{ij} \neq 0$  o acoplamento entre as ondas características  $\vec{e}_i$  e  $\vec{e}_j$  é crítico ( $\Gamma_{ij} = \infty$ ). A expressão 2.27 não fornece entretanto qualquer informação a respeito da polarização da onda.
2. No ponto de crossover existe acoplamento crítico entre as duas ondas que sobem mas, em geral, não existe acoplamento crítico entre uma onda que sobe e uma onda que desce, isto é, a reflexão nesse ponto deve ser pequena. Isto ocorre porque, se por exemplo  $q_1$  e  $q_2$  forem os autovalores das ondas ascendentes  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , então na altura de crossover  $q_1 = q_2$  e em geral  $q_1 \neq q_3$ ,  $q_1 \neq q_4$ ,  $q_2 \neq q_3$  e  $q_2 \neq q_4$ . Assim os denominadores dos elementos  $\Gamma_{13}$ ,  $\Gamma_{14}$ ,  $\Gamma_{23}$  e  $\Gamma_{24}$ , responsáveis por acoplamento entre ondas que sobem e ondas que descem, serão diferentes de zero e por isso o acoplamento não será crítico.

A expressão (2.26) fornece ainda

$$q_i^v = Q_{ii} \tag{2.28}$$

A arbitrariedade nos autovetores  $\vec{e}_i$ , que compõem a matriz  $\vec{R}$ , deve ser investigada cuidadosamente. Vamos supor que ao invés de  $\vec{e}_i$  tenhamos  $\lambda_i \vec{e}_i$ , sendo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  funções arbitrárias de  $z$ . Isto significa que ao invés de  $\vec{R}$  teremos  $\vec{R}\Lambda$  sendo  $\Lambda$  a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

A eq. (2.14) permanece inalterada porque

$$(\tilde{R}\Lambda)^{-1}\tilde{T}(\Lambda) = \Delta \quad (2.30)$$

Designando  $\tilde{A}$  a nova matriz de acoplamento semelhante a (2.16), teremos a relação

$$\tilde{A} = -(\tilde{R}\Lambda)^{-1}(\tilde{R}\Lambda)' = -(\Lambda^{-1}\Lambda' + \Lambda^{-1}\tilde{R}^{-1}\tilde{R}'\Lambda) \quad (2.31)$$

ou

$$\tilde{A} = \Lambda^{-1}\tilde{\Gamma}\Lambda - \Lambda^{-1}\Lambda' \quad (2.32)$$

A relação entre os elementos  $A_{ij}$  e  $\Gamma_{ij}$  será

$$A_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot \Gamma_{ij} \quad (i \neq j) \quad (2.33)$$

$$A_{ii} = \Gamma_{ii} - \lambda'_i/\lambda_i \quad (2.34)$$

Como mencionamos anteriormente, interessa-nos apenas a relação entre os elementos da diagonal principal (2.33). Dependendo dos valores de  $\lambda_i$  que escolhermos para normalizar os autovetores  $\vec{e}_i$ , os elementos  $A_{ij}$  podem apresentar valores que nos levaria a uma interpretação errônea do acoplamento. Budden (1966) chama a atenção para esse ponto e mostra alguns exemplos.

No nosso caso, o programa de computador apresentado no capítulo seguinte calcula os quatro autovalores sempre normalizados para  $E_x = 1$ . Esta normalização é conveniente quando tivermos propagação vertical e quase longitudinal, isto é,  $|\rho_R| \approx |\rho_L| \approx 1$  ou  $|E_x| \approx |E_y|$  para os modos R e L. Porém, para propagação quase transversa, teríamos  $|\rho_o| \approx 0$  e  $|\rho_x| \approx \infty$ , o que representa um valor  $|E_x| \approx 0$  para o modo Ordinário e  $|E_y| \approx 0$  para o modo Extraordinário. Obviamente, com a norma

lização usada neste trabalho, obteríamos um valor  $|E_y| \approx \infty$  para o modo Ordinário. Vamos supor que  $\Gamma_{12}$  e  $\Gamma_{21}$  sejam valores calculados com uma normalização conveniente (que desconhecemos) e que as ondas  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  representem os modos Ordinário e Extraordinário respectivamente. É fácil ver que a normalização  $E_x = 1$  para as ondas  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  acarreta  $\lambda_1 \approx \infty$ , isto é,

$$A_{12} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\Gamma_{12} \approx 0 \quad \text{para } \Gamma_{12} \neq 0 \quad (2.35)$$

$$A_{21} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\Gamma_{21} \approx \infty \quad \text{para } \Gamma_{21} \neq 0 \quad (2.36)$$

Porém, é sabido que o acoplamento entre os modos Ordinários e Extraordinários quase transversos é bem pequeno. Embora o valor de  $A_{12}$  confirme o valor esperado, o valor  $A_{21}$  significaria grande acoplamento entre os modos.

O exemplo acima e o fato de que o acoplamento deveria ser recíproco, isto é, as duas ondas se influenciariam igualmente, nos leva a crer que a matriz  $\tilde{\Gamma}$  deve ser simétrica ou anti-simétrica, isto é,

$$|\Gamma_{ij}| = |\Gamma_{ji}| \quad (2.37)$$

Budden e Clemmow (1956) usam fatores de normalização que tornam  $\tilde{\Gamma}$  anti-simétrica em alguns casos particulares.

Os valores de  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) correspondentes a uma matriz  $\tilde{\Gamma}$  simétrica podem ser calculados usando (2.33)

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = (A_{ij} \cdot A_{ji})^{1/2} \quad (i \neq j) \quad (2.38)$$

O método descrito acima, para o cálculo de  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) pode ser facilmente aplicado em computador se dispuzermos, como é o nosso caso, de subrotinas para o cálculo da matriz  $\tilde{T}$  e de seus autovalores  $q_i$  e autovetores  $\vec{e}_i$ . O método apresenta a vantagem de estar na forma matricial que facilita a programação em computador.

Outra vantagem do método é a necessidade de se calcular derivadas apenas da matriz  $\tilde{T}$ , pois o cálculo numérico de derivadas em computador é uma das principais fontes de erro.



### III - ESTUDO DA ESTRUTURA DA ONDA

A solução dos campos eletromagnéticos de ondas que se propagam em meios ionizados e planarmente estratificados, deve satisfazer a equação de onda (2.6). Quando o meio for homogêneo, a solução da equação de onda é imediata e é dada pelas ondas características

$$\vec{e}_i = \vec{e}_{oi} \exp(-jkq_i z) \quad (3.1)$$

Se o meio variar lentamente com a altura e os coeficientes de acoplamento  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) forem pequenos, existirá uma solução aproximada do tipo (3.1). Neste caso os campos podem ser encontrados usando-se a aproximação W.K.B. (Budden, 1966).

Nos casos em que a variação do meio for grande, em distâncias comparáveis ao comprimento de onda e os elementos  $\Gamma_{ij}$  não forem desprezíveis, a solução da eq. (2.6) pode ser encontrada através de uma integração numérica em computador (Scarabucci, 1969; Scarabucci e Smith, 1970).

A região de crossover é um caso típico de um meio em que a solução W.K.B. não é válida e a integração da eq. (2.6) deve ser feita numericamente. O processo de integração da equação de onda usado neste trabalho é o mesmo usado por Scarabucci (1969) e consiste no método modificado de predição e correção para resolver sistemas de equações diferenciais lineares desenvolvido por Hamming (1957). O método de obtenção da solução da equação de onda se resume em calcular os valores dos campos, ponto a ponto, através de um incremento de integração muito menor que o comprimento de onda e por isso é

denominado de "método de onda completa".

Outros métodos existem, para a determinação dos campos em meios estratificados, que, embora sendo mais simples para o caso de incidência vertical, são muito menos precisos. O método desenvolvido por Altman e Cory (1969), por exemplo, consiste em aproximar o meio por estratos homogêneos nos quais a solução W.K.B. é válida. Obviamente esta aproximação introduz erros que são tanto maiores quanto maior for a variação no meio.

Wang (1971) utilizou a aproximação por estratos homogêneos para calcular os campos em torno da região de crossover para um modelo de ionosfera com frequências de colisões nulas. Comparando os seus resultados com os nossos, veremos no capítulo seguinte que o método de Wang introduz erros que efetivamente aumentam a reflexão interna e o acoplamento.

### III.a - Solução de Onda Completa

Como toda equação diferencial, a eq. (2.6) deve ser resolvida usando-se condições de contorno que correspondam a propriedades físicas conhecidas. Considerando que a fonte de energia se situa em um ponto abaixo da ionosfera, as condições de contorno serão

1. Em um ponto  $z_1$ , dentro da ionosfera, existem somente ondas ascendentes e o meio varia lentamente.
2. Em um ponto  $z_n$ , abaixo de  $z_1$  e dentro da ionosfera, existe uma onda incidente representada por uma onda característica ascendente. Em relação a esta onda deveremos calcular os campos acima de  $z_n$  e os coeficientes de transmissão e de reflexão.

No caso geral em que a onda incidente é composta de duas ondas características ascendentes, o problema pode ser resolvido por superposição, visto que a equação de onda é linear.

O caso de incidência abaixo da ionosfera, onde não existe ionização, é discutido por Scarabucci (1969).

3. São conhecidos a polarização, o ângulo de incidência e a potência da onda característica incidente.

Para alturas superiores em torno de  $z_1$ , o acoplamento e as reflexões internas são desprezíveis e a solução da equação de onda é dada pelos autovetores  $\vec{e}_1(z_1)$  e  $\vec{e}_2(z_1)$  que correspondem a duas ondas características ascendentes. A solução geral no ponto  $z_1$  é uma combinação linear dos quatro autovetores.

$$\vec{e}(z_1) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 + a_4 \vec{e}_4 \quad (3.2)$$

Porém, como a fonte de energia fica abaixo de  $z_1$  os valores de  $a_3$  e  $a_4$  são nulos.

Na dedução da equação de onda no apêndice A, admitimos que a onda incidente varia da seguinte forma

$$\exp \{j\omega t - jk(n_1 l x + n_1 m y + q_1 z)\} \quad (3.3)$$

sendo  $n_1$  o índice de refração e  $(l, m, q_1/n_1)$  os cossenos diretores de  $\vec{k}$ . Embora a forma de variação da onda incidente cor

responda a uma onda em um meio homogêneo, veremos que ela pode ser usada também, com boa aproximação, para meios não homogêneos.

A lei de Snell demanda que as componentes tangenciais dos campos ao longo das fronteiras na direção  $z$  sejam constantes, o que equivale a

$$\frac{\partial}{\partial x} = - jkn_1 l = c^{te} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = - jkn_1 m = c^{te} \quad (3.5)$$

pois o meio é estratificado horizontalmente isto é, a projeção do índice de refração no plano horizontal (plano  $xy$ ), em qualquer altura  $z$ , é constante e igual à projeção do índice de refração da onda incidente no mesmo plano.

O primeiro passo para a integração da eq.(2.6) é calcular os autovalores de  $\tilde{T}$  no ponto  $z_1$  e escolher os dois que correspondem a ondas ascendentes. Estes autovalores vão depender apenas dos parâmetros do meio no ponto  $z_1$  e da direção e do índice de refração da onda incidente no ponto  $z_n$ .

A integração deve ser realizada usando-se o seguinte procedimento:

1. Tomando  $\vec{e}_1(z_1)$  como solução inicial, a eq.(2.6) é integrada para baixo até o ponto  $z_n$ .
2. A integração é realizada novamente tomando agora o

autovetor  $\vec{e}_2(z_1)$  como solução inicial. É interessante observarmos que a medida que a integração é realizada para baixo, através do meio não homogêneo, o vetor  $\vec{e}_1(z)$  (ou  $\vec{e}_2(z)$ ) consistirá de uma soma de duas ondas ascendentes e duas ondas descendentes que produzirão em  $z_1$  apenas a onda característica puramente ascendente  $\vec{e}_1(z_1)$  (ou  $\vec{e}_2(z_1)$ ).

3. Supomos que no ponto  $z_n$  o meio varia lentamente e não haja acoplamento, isto é, as soluções  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$  consistirão, cada uma, de quatro ondas características, duas ascendentes e duas descendentes. Se no ponto  $z_n$  houver acoplamento e o meio variar, as soluções  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$  poderão ainda ser consideradas como compostas, cada uma, de quatro ondas de polarizações diferentes, as quais seriam ondas características em um meio homogêneo que tivesse as mesmas propriedades que o meio considerado no ponto  $z_n$ .

4. Depois de havermos separado as soluções  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$  em ondas características, impomos a condição de que a onda incidente seja composta de apenas uma onda característica ascendente no ponto  $z_n$ . Isto é feito simplesmente formando-se uma combinação linear das soluções  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$ .

Se  $q_a$  e  $q_b$  forem os autovalores correspondentes às ondas ascendentes no ponto  $z_n$  e  $q_c$  e  $q_d$  os autovalores correspondentes às ondas descendentes, teremos

$$\vec{e}_1(z_n) = \vec{U}_a^{(1)}(z_n) + \vec{U}_b^{(1)}(z_n) + \vec{D}_c^{(1)}(z_n) + \vec{D}_d^{(1)}(z_n) \quad (3.6)$$

sendo  $\vec{U}_a^{(1)}(z_n)$  e  $\vec{U}_b^{(1)}(z_n)$  as ondas características ascendentes a e b e  $\vec{D}_c^{(1)}(z_n)$  e  $\vec{D}_d^{(1)}(z_n)$  as ondas características descendentes c e d. Assim, usando a expressão (3.1), teremos:

$$\vec{e}_1(z_n) = \vec{U}_a^{(1)} e^{-jkqaz_n} + \vec{U}_b^{(1)} e^{-jkqbz_n} + \vec{D}_c^{(1)} e^{-jkqc z_n} + \vec{D}_d^{(1)} e^{-jkqd z_n} \quad (3.7)$$

e uma expressão análoga para a segunda solução.

Uma solução geral no ponto  $z_n$  pode ser obtida fazendo-se uma combinação linear das soluções  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$

$$\vec{e}(z_n) = a_1 \vec{e}_1(z_n) + a_2 \vec{e}_2(z_n) \quad (3.8)$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{e}(z_n) = a_1 \left[ \vec{U}_a^{(1)}(z_n) + \vec{U}_b^{(1)}(z_n) + \vec{D}_c^{(1)}(z_n) + \vec{D}_d^{(1)}(z_n) \right] + \\ + a_2 \left[ \vec{U}_a^{(2)}(z_n) + \vec{U}_b^{(2)}(z_n) + \vec{D}_c^{(2)}(z_n) + \vec{D}_d^{(2)}(z_n) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

O problema proposto exige que a parte ascendente de  $\vec{e}(z_n)$  seja constituída de apenas uma onda característica ascendente. Se esta onda for do tipo a, por exemplo, a eq.(3.9) fornece

$$a_1 \vec{U}_b^{(1)}(z_n) + a_2 \vec{U}_b^{(2)}(z_n) = 0 \quad (3.10)$$

Porém, os autovetores  $\vec{U}_b^{(1)}(z_n)$  e  $\vec{U}_b^{(2)}(z_n)$  diferem apenas de uma constante, pois ambos correspondem à onda característica tipo b. Assim,

$$\vec{U}_b^{(1)}(z_n) = K \vec{U}_b^{(2)}(z_n) \quad (3.11)$$

sendo K uma constante.

Das eqs. (3.10) e (3.11) obtemos

$$(a_1 K + a_2) \vec{U}_b^{(2)}(z_n) = 0 \quad (3.12)$$

Supondo  $\vec{U}_b^{(2)}(z_n)$  diferente de zero

$$a_1 = - \frac{a_2}{K} \quad (3.13)$$

O valor de K pode ser obtido usando-se, por exemplo, as componentes  $U_{xb}^{(1)}(z_n)$  e  $U_{xb}^{(2)}(z_n)$  na eq. (3.11)

$$K = \frac{U_{xb}^{(1)}(z_n)}{U_{xb}^{(2)}(z_n)} \quad (3.14)$$

A eq. (3.13) fornece

$$a_1 = - \frac{U_{xb}^{(2)}(z_n)}{U_{xb}^{(1)}(z_n)} \cdot a_2 \quad (3.15)$$

Finalmente, fixando a potência da onda incidente (tipo a) ou uma componente do autovetor que a representa, podemos obter outra relação entre  $a_1$  e  $a_2$

$$E_{xinc} = a_1 \left[ U_{xa}^{(1)}(z_n) - \frac{U_{xb}^{(1)}(z_n)}{U_{xb}^{(2)}(z_n)} \cdot U_{xa}^{(2)}(z_n) \right] \quad (3.16)$$

As eqs. (3.15) e (3.16) fornecem os valores de  $a_1$  e  $a_2$  em função de  $E_{xinc}$  no ponto  $z_n$ .

Os campos resultantes serão:

Onda incidente:  $\vec{U}_a(z_n)$  (dado)

Onda Refletida tipo c:  $a_1 \vec{D}_c^{(1)}(z_n) + a_2 \vec{D}_c^{(2)}(z_n)$

Onda Refletida tipo d:  $a_1 \vec{D}_d^{(1)}(z_n) + a_2 \vec{D}_d^{(2)}(z_n)$

Onda total em um ponto genérico

$z' (z_n < z' < z_1)$ :  $a_1 \vec{e}_1(z') + a_2 \vec{e}_2(z')$

No ponto  $z_1$  a onda total é constituída de:

Onda transmitida tipo 1:  $a_1 \cdot (\text{autovetor inicial } \vec{e}_1(z_1))$

Onda transmitida tipo 2:  $a_2 \cdot (\text{autovetor inicial } \vec{e}_2(z_1))$

O problema estará formalmente resolvido depois de estudarmos um método de separação de uma onda genérica em quatro ondas características, duas ascendentes e duas descendentes.



III.b - Separação em Ondas Características

Pitteway e Jespersen (1966) apresentam um processo de separação de uma onda total em ondas características, para o caso particular em que as frequências de colisão são nulas. Scarabucci e Smith (1970) desenvolveram um processo de separação que é válido para o caso geral em que o meio é dissipativo. Embora ambos os métodos sejam válidos para meios homogêneos, veremos no capítulo seguinte que eles podem ser aplicados também, com boa aproximação, para meios não homogêneos.

Apresentaremos a seguir um novo método de separação em ondas características que é equivalente ao método usado por Scarabucci e Smith (1970).

Uma onda genérica que se propaga em um meio horizontalmente estratificado, satisfaz a equação de onda

$$\vec{e}' = -jk\tilde{T}\vec{e} \quad (3.17)$$

e pode ser representada como uma soma de ondas características ascendentes e descendentes (eq. 3.7). Quando o meio for homogêneo esta representação é exata, pois para este caso a solução da equação de onda são as próprias ondas características. No caso em que o meio varia com a altitude a representação é aproximada. Assim,

$$\vec{e}(z) = \vec{U}_a e^{-jkq_a z} + \vec{U}_b e^{-jkq_b z} + \vec{D}_c e^{-jkq_c z} + \vec{D}_d e^{-jkq_d z} \quad (3.18)$$

O problema se resume em calcular os valores  $\vec{U}_a$ ,  $\vec{U}_b$ ,  $\vec{D}_c$  e  $\vec{D}_d$  em um ponto qualquer sendo conhecidos os valores de  $\vec{e}(z)$ ,  $q_a$ ,  $q_b$ ,  $q_c$ ,  $q_d$  e os elementos de  $\tilde{T}$  neste ponto.

A expressão (3.18) representa um sistema de equações com dezesseis incógnitas, visto que  $\vec{U}_a$ ,  $\vec{U}_b$ ,  $\vec{D}_c$  e  $\vec{D}_d$  são vetores de quatro componentes. Para simplificar a notação, vamos calcular inicialmente as componentes  $E_{xa}$ ,  $E_{xb}$ ,  $E_{xc}$  e  $E_{xd}$  destes vetores. Da eq. 3.18 obtemos

$$E_x(z) = U_{xa} e^{-jkq_a z} + U_{xb} e^{-jkq_b z} + D_{xc} e^{-jkq_c z} + D_{xd} e^{-jkq_d z} \quad (3.19)$$

Derivando (3.19) tres vezes em relação a  $z$ , podemos formar o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ q_a & q_b & q_c & q_d \\ q_a^2 & q_b^2 & q_c^2 & q_d^2 \\ q_a^3 & q_b^3 & q_c^3 & q_d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xa}(z) \\ U_{xb}(z) \\ D_{xc}(z) \\ D_{xd}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x(z) \\ E'_x(z) \\ E''_x(z) \\ E'''_x(z) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

As derivadas  $E'_x(z)$ ,  $E''_x(z)$  e  $E'''_x(z)$  do segundo membro de (3.20) podem ser obtidas da equação de onda (3.17)

$$\vec{e} = -jk\tilde{T}\vec{e} \quad (3.21)$$

$$\vec{e}'' = -jk\tilde{T}\vec{e}' = (-jk)^2\tilde{T}\tilde{T}\vec{e} \quad (3.22)$$

$$\vec{e}''' = (-jk)^3\tilde{T}\tilde{T}\tilde{T}\vec{e} \quad (3.23)$$

onde  $\bar{T}$  é constante, pois o meio é homogêneo, Quando o meio variar com a altura  $z$ , a aproximação  $T' = T'' = 0$  poderá acarretar um pequeno erro no cálculo das derivadas  $\vec{e}'$ ,  $\vec{e}''$ , e  $\vec{e}'''$ .

A inversão do sistema (3.20) fornece os valores  $U_{xa}(z)$ ,  $U_{xb}(z)$ ,  $D_{xc}(z)$  e  $D_{xd}(z)$  procurados. Exatamente o mesmo cálculo pode ser feito para se encontrar as outras três componentes das ondas características. Neste caso, basta substituir a matriz coluna do segundo membro de (3.20) pela matriz coluna correspondente.

### III.c - Descrição do Programa de Computador

O programa de "onda completa" usado neste trabalho se compõe de um programa principal e de oito subrotinas auxiliares. O diagrama de blocos do programa é apresentado na Fig. 9. As funções do programa principal e das subrotinas são as seguintes:

#### III.c.1 - Programa principal

Nesta parte do programa são especificadas todas as propriedades da onda incidente, isto é, o ângulo de incidência  $I$ , o azimute  $\chi$ , a frequência e o ponto de incidência  $z_n$ . Para o cálculo do índice de refração devemos usar a relação de dispersão (1.14) que utiliza os valores de  $R$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $D$ ,  $S$  e  $\theta$  na altura de incidência. O valor de  $\theta$  é função do ângulo de incidência  $I$ , do azimute  $\chi$  e do DIP do campo magnético. Os valores de  $R$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $D$  e  $S$  são calculados pela subrotina MEDIUM.

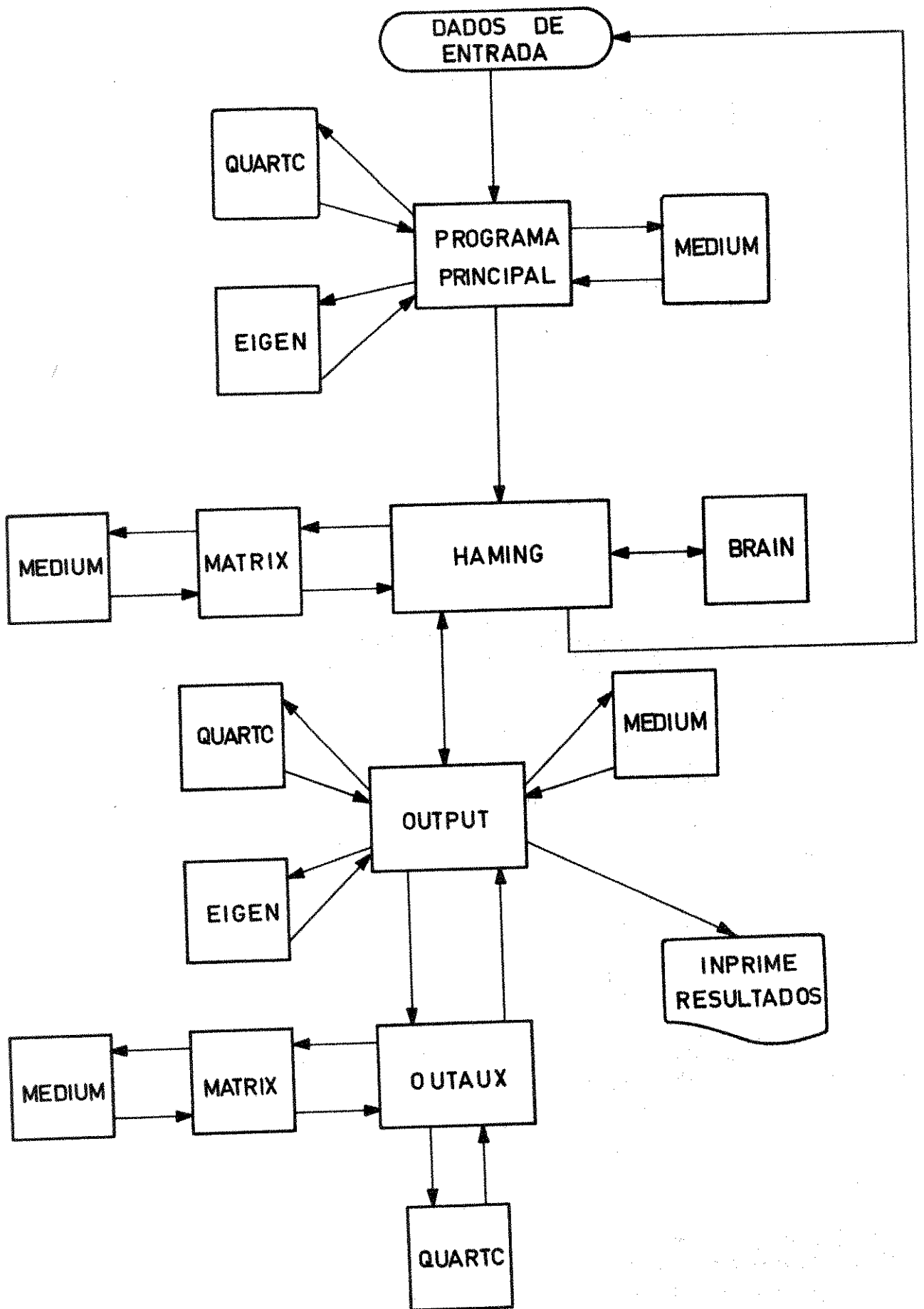


Fig: 9 - DIAGRAMA DE BLOCOS DO PROGRAMA "ONDA COMPLETA"

Conhecido o valor do índice de refração e a direção da onda incidente, podemos calcular as raízes da quartica de Booker (autovalores de  $\tilde{T}$ ) e conseqüentemente os autovalores de  $\tilde{T}$  em qualquer altura acima do ponto de incidência. Os autovalores são calculados pela subrotina QUARTC e os autovetores são calculados pela subrotina EIGEN.

O programa principal calcula, com o auxílio das subrotinas MEDIUM, QUARTC e EIGEN, os autovetores ascendentes no ponto  $z_1$  que servirão para iniciar a integração feita pela subrotina HAVING. Daí em diante e até o término da integração, o controle do programa será exercido pela subrotina HAVING.

O programa principal calcula também as potências dos quatro autovetores no ponto  $z_1$ . Estas potências serão bastantes úteis na conferição do processo de ordenação dos autovalores e na determinação de possíveis ondas evanescentes. São especificadas, ainda no programa principal, algumas constantes usadas nas subrotinas.

### III.c.2 - Subrotina MEDIUM

Esta subrotina calcula os valores de R, L, P, S e D em qualquer ponto da ionosfera acima de 500 km de altitude. Os perfis de densidades dos constituintes são calculados usando-se o processo de equilíbrio difusivo (Angerami e Thomas, 1964). O cálculo das frequências de colisão coulombiana seguem o estudo de Nicolet (1953). No apêndice B apresentamos as expressões analíticas dos perfis de densidades e das frequências de colisão.

### III.c.3 - Subrotina QUARTC

Os autovalores  $q_a$ ,  $q_b$ ,  $q_c$  e  $q_d$  são calculados nesta subrotina utilizando-se o método clássico de solução de equação do quarto grau. A dedução dos coeficientes da quartica de Booker apresentados no apêndice A, pode ser encontrada em Scarabucci (1969).

A ordenação dos autovalores é feita de tal maneira que  $q_a$  e  $q_b$  correspondam a ondas ascendentes e  $q_c$  e  $q_d$  a ondas descendentes. Os valores de R, L, S, P e D necessários para o cálculo dos autovalores são fornecidos pela subrotina MEDIUM.

### III.c.4 - Subrotina EIGEN

Esta subrotina calcula os autovetores da matriz  $\tilde{T}$  sendo dados os autovalores correspondentes. Os detalhes dos cálculos podem ser encontrados em Scarabucci (1969).

Para cada chamada da subrotina EIGEN são calculados dois autovetores de uma só vez de acordo com os dois autovalores fornecidos. Cada autovetor é normalizado de modo que  $E_x = 1$ .

### III.c.5 - Subrotina HAMING

A integração numérica da equação de onda utiliza o método de predição e correção introduzido por Hamming (1959). Scarabucci (1969) analisa detalhadamente este processo de integração salientando as suas vantagens sobre os processos usados em trabalhos anteriores.

O sistema de equações complexas a ser integrado deve ser previamente transformado em um sistema de equações reais da forma

$$\frac{d\vec{Y}(z)}{dz} = \tilde{V}(z) \cdot \vec{Y}(z) \quad (3.24)$$

sendo  $\tilde{V}(z)$  uma matriz real (8 x 8) relacionada à matriz complexa  $\tilde{T}(z)$  (4 x 4) e  $\vec{Y}(z)$  uma matriz coluna real relacionada à matriz complexa  $\vec{e}(z)$ . Em cada ponto a matriz  $\tilde{T}$  deve ser calculada e imediatamente transformada na matriz  $\tilde{V}$ , operação que é feita pela subrotina MATRIX.

Sendo conhecido um autovetor inicial  $\vec{Y}_0(z_1)$ , o problema se resume em estimar o valor de  $\vec{Y}(z)$  em pontos discretos  $z_i$ . A distância entre esses pontos discretos é dada pelo incremento de integração, do qual depende muito a precisão dos cálculos. O valor ideal do incremento de integração pode ser obtido por tentativas; valores muito grandes de incrementos acarretam erros de truncamento grandes e valores muito pequenos aumentam o tempo de integração, além de ampliarem os erros de arredondamento produzidos pelo próprio computador. O método de Hamming nos permite avaliar o erro de truncamento cometido em cada passo de integração (Scarabucci - 1969). Erros da ordem de  $10^{-6}/10^{-7}$  são obtidos, próximo da região de crossover, para um incremento de integração da ordem de 1/50 do comprimento de onda local.

A cada oito incrementos de integração a subrotina HAMING transfere os campos calculados para a subrotina BRAIN. Quando a integração atingir o ponto de incidência  $z_n$ , o comando do programa é transferido para a subrotina OUTPUT que fornece todas as saídas desejadas. A seguir o comando retorna ao programa principal para a leitura de novos dados e início de nova integração, se for o caso.

### III.c.6 - Subrotina MATRIX

Nesta subrotina são calculados os elementos da matriz  $\tilde{T}$  em cada ponto usando-se o índice de refração e os cossenos diretores do vetor de propagação da onda incidente e os valores de R, L, S, P e D no ponto considerado. Por isso esta subrotina necessita dos valores calculados no programa principal e na subrotina MEDIUM.

Em seguida é feita a transformação da matriz complexa  $\tilde{T}$  (4 x 4) para a matriz real  $\tilde{V}$  (8 x 8) que é usada pela subrotina HAVING.

### III.c.7 - Subrotina BRAIN

A função da subrotina BRAIN é armazenar os campos provenientes da subrotina HAVING e calcular os erros de truncamento ocorridos no cálculo das soluções  $\vec{e}_1(z)$  e  $\vec{e}_2(z)$  em cada ponto.

Scarabucci (1969) utiliza esta subrotina para fazer também uma ortogonalização dos campos  $\vec{e}_1(z)$  e  $\vec{e}_2(z)$  a fim de evitar uma instabilidade inerente ao processo de integração que ocorre quando uma das ondas características é evanescente. A propagação de ondas de VLF na baixa ionosfera apresenta um modo penetrante, correspondente a uma onda progressiva e um modo não penetrante correspondente a uma onda evanescente. Neste caso a ortogonalização dos campos é indispensável durante o processo de integração. No nosso caso a integração é feita em torno da região de crossover, onde as ondas características são progressivas e a ortogonalização é desnecessária.



### III.c.8 - Subrotina OUTPUT

Esta subrotina realiza as seguintes operações:

- a. Calcula os valores de  $a_1$  e  $a_2$  (eqs. 3.15 e 3.16) usando  $E_{xinc} = 1$  e os valores das componentes do campo elétrico no eixo x das ondas características ascendentes contidas em  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$ . As ondas características que compõem as soluções  $\vec{e}_1(z_n)$  e  $\vec{e}_2(z_n)$  são calculadas pela subrotina OUTAUX.
- b. Determina o campo total proveniente da onda incidente (tipo a) em todos os pontos entre  $z_n$  e  $z_1$ .
- c. Calcula, com o auxílio da subrotina OUTAUX, as ondas características que compõem o campo total em cada ponto.
- d. Usando a subrotina EIGEN, são calculadas as polarizações das ondas características ascendentes em cada ponto.
- e. Finalmente, são calculadas as potências na direção z, das duas ondas características transmitidas, normalizadas com relação a potência da onda incidente na direção z.

A potência média de uma onda eletromagnética plana é dada por

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad (3.25)$$

Assim, a componente de  $\vec{P}$  na direção z será

$$P_z = \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} |E_x \cdot (Z_0 H_y)^* - E_y \cdot (Z_0 H_x)^*| \quad (3.26)$$

Definindo coeficiente de transmissão como sendo a raiz quadrada da razão entre a potência transmitida e a potência incidente, ambas na direção z, teremos

$$T_1 = \left( \frac{P_1}{P_{\text{inc}}} \right)^{1/2} \cdot |a_1| \quad (3.27)$$

$$T_2 = \left( \frac{P_2}{P_{\text{inc}}} \right)^{1/2} \cdot |a_2| \quad (3.28)$$

sendo  $P_1$  e  $P_2$  as potências dos autovetores  $\vec{e}_1(z_1)$  e  $\vec{e}_2(z_1)$  e  $P_{\text{inc}}$  a potência da onda incidente. Os valores de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_{\text{inc}}$  são calculados usando-se os autovetores fornecidos pela subrotina EIGEN. Isto é possível porque estas autovetores possuem  $E_x = 1$ , assim como a onda característica incidente.

### III.c.9 - Subrotina OUTAUX

Nesta subrotina são calculadas as ondas características que compõem uma onda total qualquer. Para isto basta fornecermos as componentes dessa onda no ponto desejado, os elementos da matriz  $\tilde{T}$  e os quatro autovalores  $q_a$ ,  $q_b$ ,  $q_c$  e  $q_d$ .

A inversão do sistema de equações (3.20) é feita eliminando inicialmente a incógnita  $D_{xd}(z)$  e resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas assim obtido. Este processo é bem mais simples que a inversão direta da matriz (4 x 4) formada com os autovalores de  $\tilde{T}$ .

Embora o programa usado calcule somente as componentes do campo elétrico  $E_x$  e  $E_y$  das ondas características, um pequeno cálculo adicional é suficiente para se determinar as outras componentes  $Z_0 H_x$  e  $Z_0 H_y$ .

O presente programa foi processado em um computador IBM/360 Modelo 44 usando linguagem FORTRAN IV. A memória total ocupada pelo programa é de 95 Kbytes e o tempo de processamento, incluindo compilação, é da ordem de 8 minutos para cada conjunto de dados de entrada.

#### IV - ESTUDO QUANTITATIVO DA EXCITAÇÃO DOS PROTON-WHISTLERS

Usando o método de solução de onda completa apresentado no capítulo anterior, podemos estudar agora, quantitativamente, o fenômeno de acoplamento e inversão de polarização próximo da região de crossover. O perfil de densidades a ser usado é aproximadamente o mesmo utilizado por Gurnett et al. (1965) e está representado na Fig. 10. A frequência da onda incidente será de 400 Hz. A intensidade e a direção do campo magnético terrestre devem ser fixadas, pois estamos supondo um meio horizontalmente estratificado. Podemos adotar, observando a Fig. 5, uma girofrequência para os elétrons da ordem de 1,2 MHz em uma altitude em torno de 1.000 km.

Embora o programa de computador seja completamente geral, nós o aplicaremos aqui somente para o caso de incidência vertical. Este caso é importante porque, se não houver gradientes laterais na baixa ionosfera, o vetor de propagação do modo penetrante terá uma direção muito próxima da vertical.

Devido ao fato dos trabalhos anteriores sobre Proton-Whistlers afirmarem a existência de uma grande influência das frequências de colisão no processo de acoplamento, obteremos, sempre que for conveniente, resultados em meios com colisões e em meios sem colisões.

Este capítulo será dividido nas seguintes partes:

- a. Cálculo da variação do fator de acoplamento  $\Gamma_{12}$ , em

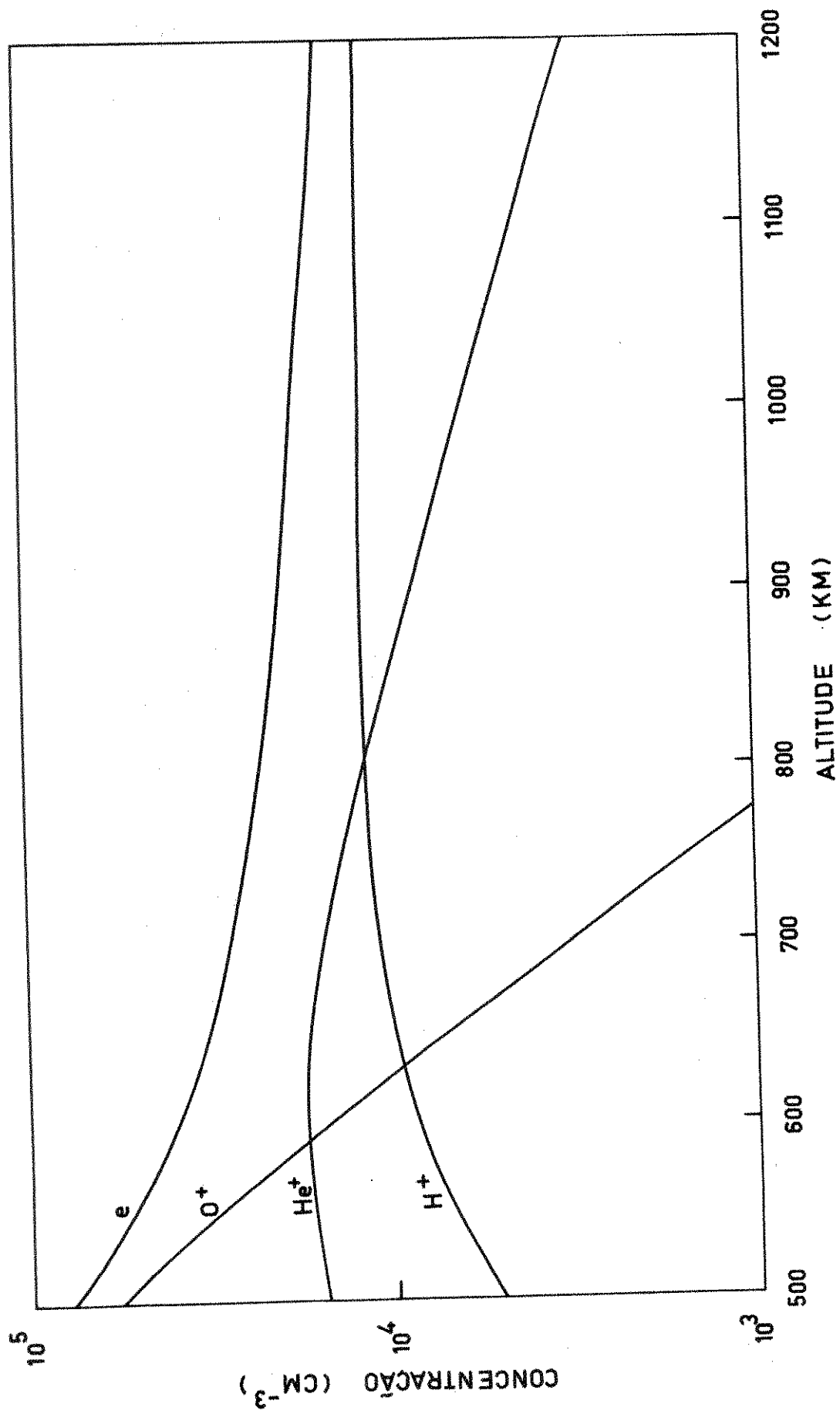


FIG: 10 - MODELO NOTURNO DA IONOSFERA

tre os modos R e L, com a altura e com o ângulo  $\theta$  entre a normal à onda e o campo magnético terrestre.

- b. Cálculo da polarização das ondas R e L, em torno do ponto de crossover, para um meio com colisões.
- c. Determinação dos coeficientes de transmissão e de sua variação com as frequências de colisão e com o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{B}_0$  e  $\vec{k}$ .
- d. Determinação dos campos das ondas características em torno do ponto de crossover para vários valores de  $\theta$ .

IV.a - Acoplamento entre as ondas R e L

Os elementos da matriz de acoplamento  $\tilde{\Gamma}$  são calculados a partir dos elementos da matriz  $\tilde{A}$  definida no capítulo II. A expressão (2.38) fornece os valores dos elementos  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) para uma matriz  $\tilde{\Gamma}$  simétrica.

Os valores de  $A_{ij}$  podem ser obtidos a partir da matriz  $\tilde{M} = \tilde{R}^{-1} \tilde{T}' \tilde{R}$

$$A_{ij} = \frac{M_{ij}}{q_i - q_j} \quad (i \neq j) \quad (4.1)$$

Um programa de computador calcula os valores de  $\Gamma_{ij}$  usando as subrotinas MEDIUM, QUARTO, MATRIX e EIGEN descritas no capítulo anterior e uma subrotina adicional necessária pa

ra inverter a matriz  $\tilde{R}$ . A precisão nos cálculos de  $\Gamma_{ij}$  vai depender, em grande parte, do processo usado para o cálculo da derivada da matriz  $\tilde{T}$ . O atual programa utiliza o método de aproximação linear, para o cálculo de  $\tilde{T}'$ , que é o mais simples que existe. Outros métodos existem, que dão maior precisão sem consumirem muito mais tempo de computação, mas a programação é mais difícil.

A Fig. 11 apresenta os valores das amplitudes de  $\Gamma_{12}$  para vários valores de  $\theta$  e para várias alturas em torno do ponto de crossover (~1,015 Km). A onda incidente é polarizada à direita (modo R) e a sua frequência é de 400 Hz. As frequências de colisão usadas são suficientemente pequenas para que o meio possa ser considerado sem perdas. Neste caso o ângulo crítico  $\theta_c$  é próximo de zero, o que é perfeitamente confirmado pela Fig. 11.

A medida que aumentamos o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{B}_0$  e  $\vec{k}$  (variando o DIP), os picos das curvas do fator de acoplamento diminuem, mas em compensação elas atuam cada vez mais em uma região mais ampla em torno de  $D = 0$ . O efeito do acoplamento nos coeficientes de transmissão, para  $\theta = 2^\circ$  e  $\theta = 8^\circ$  por exemplo, pode ser semelhante. Esta possibilidade é confirmada pelo programa de onda completa que computa coeficientes de transmissão quase iguais para os dois casos.

Para valores de  $\theta$  maiores que  $40^\circ$ , verifica-se que as curvas de acoplamento são desprezíveis. Isto significa que vai ocorrer apenas uma lenta inversão de polarização da onda incidente.

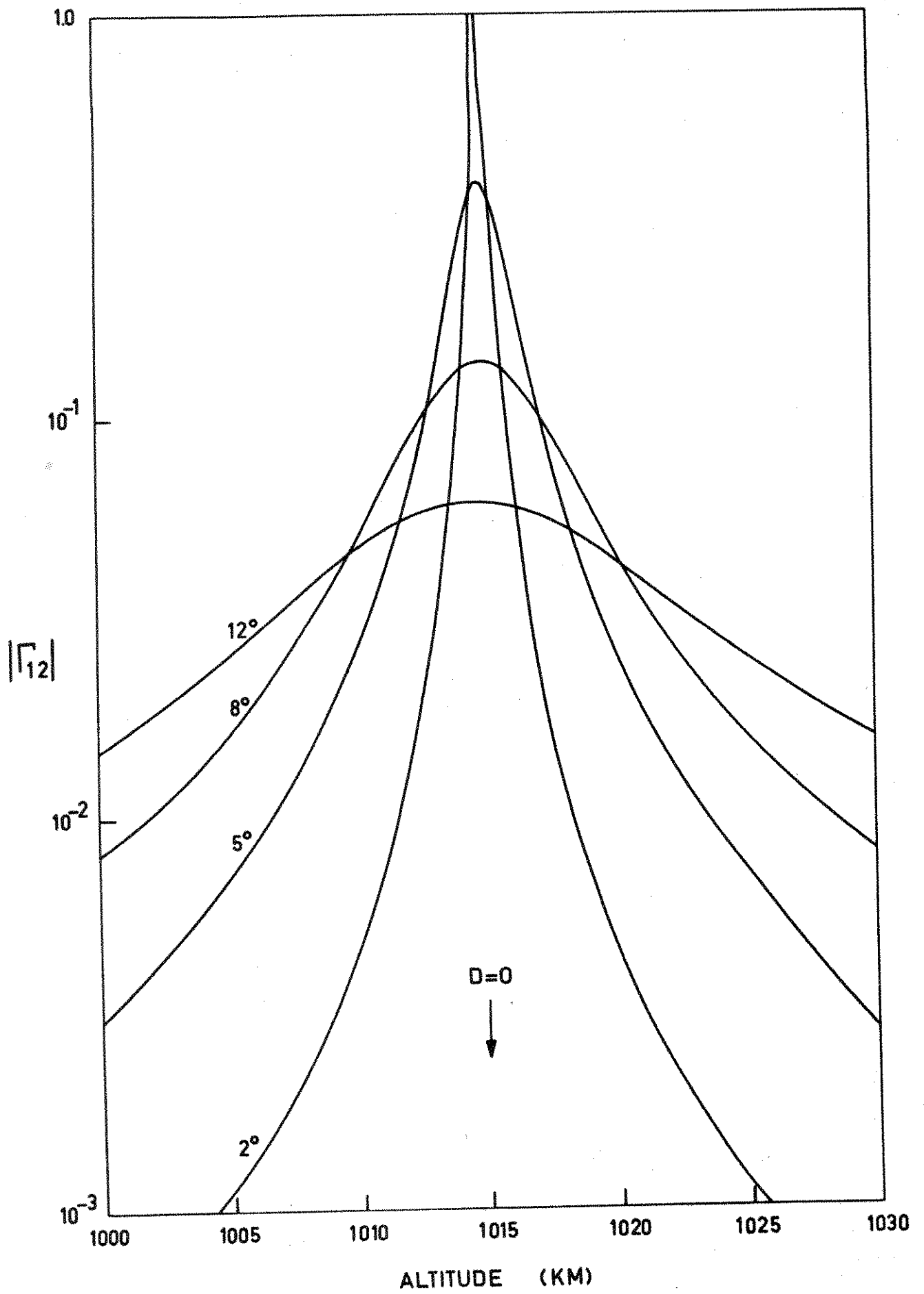


Fig: 11 - ACOPLAMENTO ENTRE AS ONDAS R e L PARA UM MEIO SEM COLISÕES ( $\theta_c = 0^\circ$ ).



Introduzindo agora as frequências de colisão no cálculo do fator de acoplamento, obtemos as curvas da Fig.12. O ângulo crítico neste caso é da ordem de  $10,2^\circ$ .

Comparando as Figs. 11 e 12 podemos separar o acoplamento em duas regiões distintas:

A. Região de Acoplamento Não-Crítico - região distante do ponto  $D = 0$  na qual, para cada altura e para cada  $\theta$ , o valor de  $|\Gamma_{12}|$  calculado com frequências de colisões iguais a zero (Fig. 11), não difere mais de 50% do valor de  $|\Gamma_{12}|$  calculado com frequências de colisões diferentes de zero (Fig.12). Esta região compreende todos os pontos que distam mais de  $\sim 8$  km do ponto  $D = 0$ .

É interessante observarmos, nas Figs. 11 e 12, que as frequências de colisões influem muito pouco no acoplamento não-crítico (para o fixado as curvas de  $|\Gamma_{12}|$  nas Figs. 11 e 12 são aproximadamente iguais para alturas distantes do ponto  $D = 0$ ) e sua região de atuação aumenta quando aumentarmos o ângulo  $\theta$ .

B. Região de Acoplamento Crítico - toda região em torno do ponto  $D = 0$  (aproximadamente 15 km) que não coincide com a região de acoplamento não-crítico. Apesar do acoplamento crítico depender exclusivamente do ângulo crítico, a sua região de atuação permanece confinada a  $\sim 15$  km em torno de  $D = 0$  para qualquer valor de  $\theta_c$ .

#### IV.b - Polarização das Ondas R e L

O cálculo das polarizações das ondas características é feito no programa de onda completa pelas subrotinas OUTPUT e EIGEN. A expressão (1.23), que determina a polarização  $\rho$ , necessita das componentes  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  da onda característica correspondente. Os valores  $E_x$  e  $E_y$  são fornecidos pela subrotina EIGEN e o valor de  $E_z$  é calculado a partir das outras

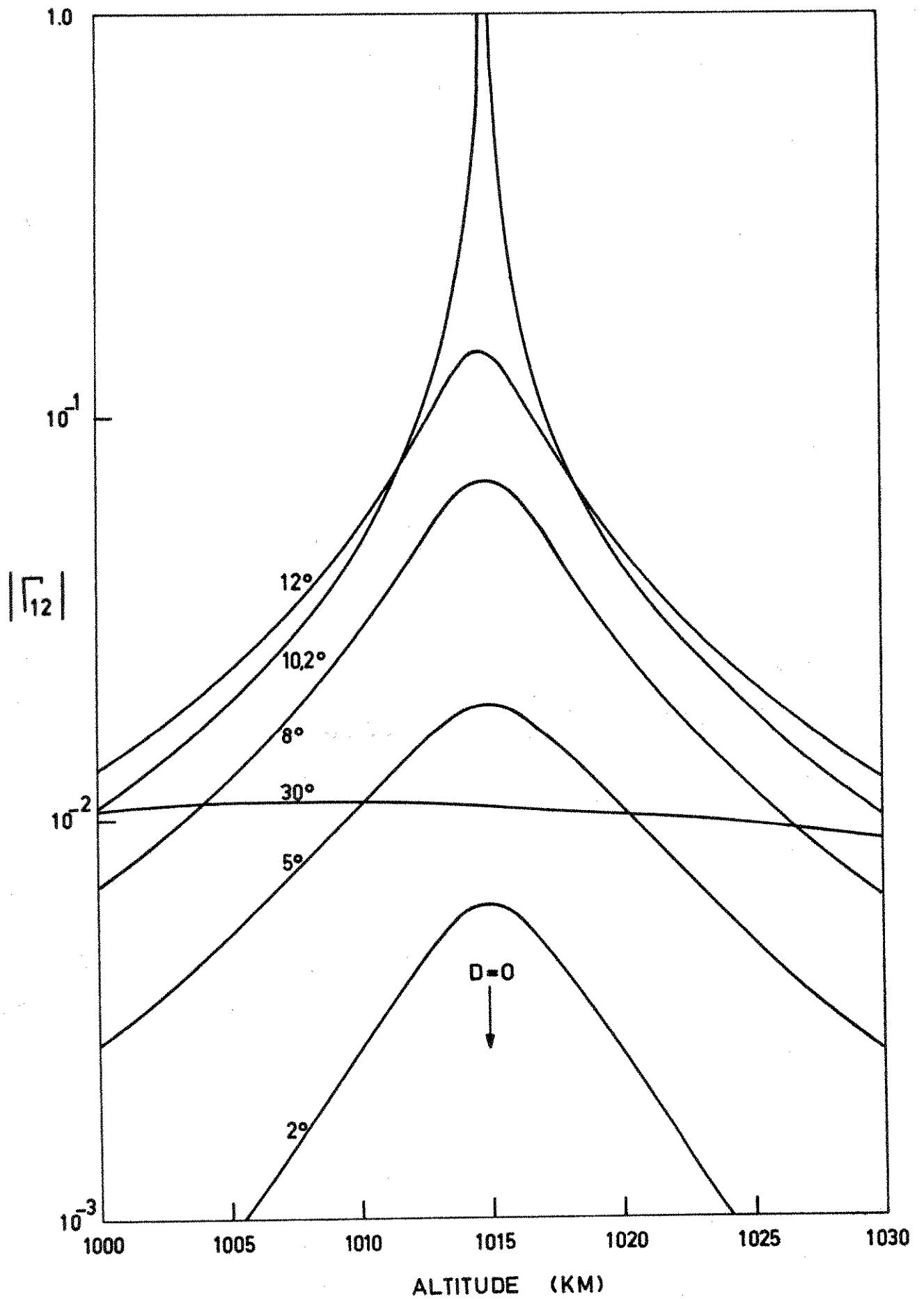


Fig: 12 - ACOPLAMENTO ENTRE AS ONDAS R e L PARA UM MEIO COM COLISÕES ( $\theta_c=10,2^\circ$ ).

componentes utilizando-se as equações de Maxwell.

A Fig. 13 mostra a variação das polarizações com a altura e com o ângulo  $\theta$  para incidência vertical. O meio considerado é o mesmo utilizado anteriormente para o cálculo do acoplamento da Fig. 12 e a onda incidente tem uma frequência de 400 Hz e é polarizada à direita (modo R). Em ambas figuras podemos verificar que o ângulo crítico é de  $10,2^\circ$ . Para este ângulo as polarizações passam pelo ponto +1 na Fig. 13 em uma altitude de aproximadamente 1.015 Km. Este fato também é consistente com a Fig. 12.

As diferenças entre a Fig. 7 obtida por Jones (1970) e a Fig. 12 calculada neste trabalho, são os ângulos críticos e as alturas de crossover. Isto é devido ao fato de terem sido usados diferentes valores de frequências de colisão e de intensidades de campo magnético nos dois trabalhos. Com relação aos coeficientes de transmissão, verificamos que essas diferenças não acarretam variação sensível em suas amplitudes.

#### IV.c - Coeficientes de Transmissão através da Região de Crossover

Para calcularmos os coeficientes de transmissão devemos verificar inicialmente quais as regiões em torno da região de crossover que apresentam acoplamento sensível. Isto deve ser feito a fim de satisfazermos as condições de contorno estipuladas na solução de onda completa. Analisando a variação do acoplamento com a altitude, podemos escolher a altura de 1.060 Km para o início da integração e 950 Km para o ponto de incidência. A frequência da onda incidente será de 400 Hz e a sua polarização será à direita (modo R).

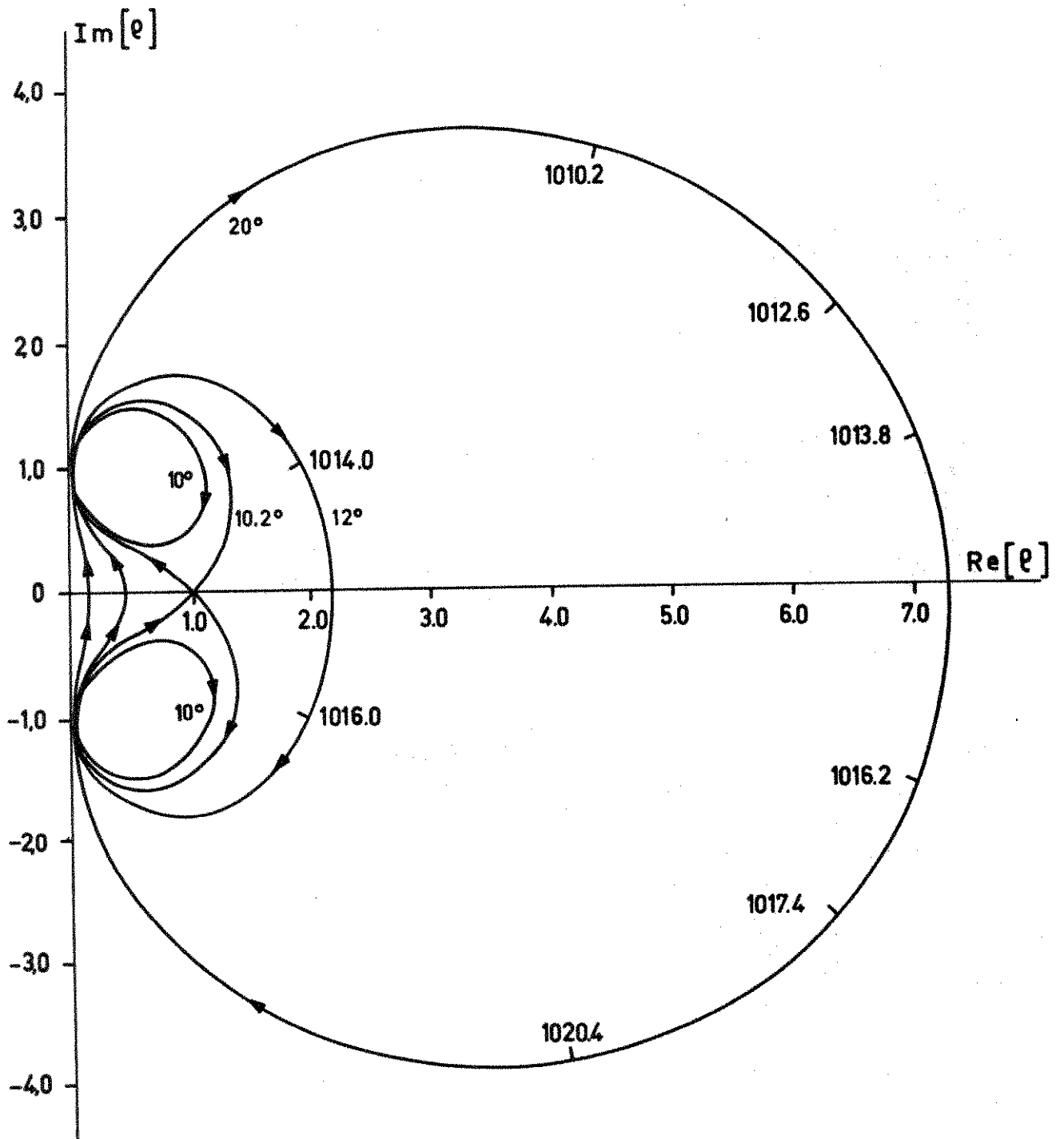


Fig: 13 - VARIAÇÃO DAS POLARIZAÇÕES DAS ONDAS R e L COM A ALTITUDE E COM O ÂNGULO  $\theta$  ( $\theta_c = 10,2^\circ$ )

Usando as expressões (3.26) e (3.27) foram calculados os coeficientes de transmissão para incidência vertical e para vários valores de  $\theta$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . A Fig. (14) apresenta a variação dos coeficientes de transmissão com o ângulo  $\theta$  para ângulos críticos de  $0^\circ$ ,  $10,2^\circ$  e  $16^\circ$ . Nessa figura definimos  $R^T_R$  e  $R^T_L$  como sendo os coeficientes de transmissão da onda incidente (modo R) para as ondas transmitidas de modo R e de modo L respectivamente.

A Fig. (14) nos mostra, surpreendentemente, que a transição entre os vários tipos de Whistlers da Fig. 8 praticamente independe do ângulo crítico  $\theta_c$ . O ângulo de meia potência para as curvas da Fig. 14 correspondentes a um meio sem colisões ( $\theta_c = 0$ ) é da ordem de  $21^\circ$ ; quando aumentamos as frequências de colisão, o ângulo de meia potência aumenta de  $21^\circ$  (para  $\theta_c = 0^\circ$ ) até  $24^\circ$  (para  $\theta_c = 16^\circ$ ). Se o ângulo crítico controlasse a transmissão de ondas na região de crossover, o ângulo de meia potência para o caso  $\theta_c = 16^\circ$  deveria ser bem maior que  $24^\circ$ . Além disso, podemos ver claramente da Fig. 14 que o pequeno aumento de  $3^\circ$  ocorrido no ângulo de meia potência é devido exclusivamente ao fato da atenuação da onda L (left) ser bem maior que a atenuação da onda R (right). Se tal não fosse o caso, as curvas de  $R^T_R$  e  $R^T_L$  deveriam ser quase simétricas em relação ao ângulo de meia potência para qualquer frequência de colisão. Tivemos oportunidade de comprovar a afirmação acima observando que, para o caso em que a onda incidente é do modo L, o ângulo de meia potência para as curvas de  $L^T_L$  e  $L^T_R$  diminui à medida que aumentamos as frequências de colisão.

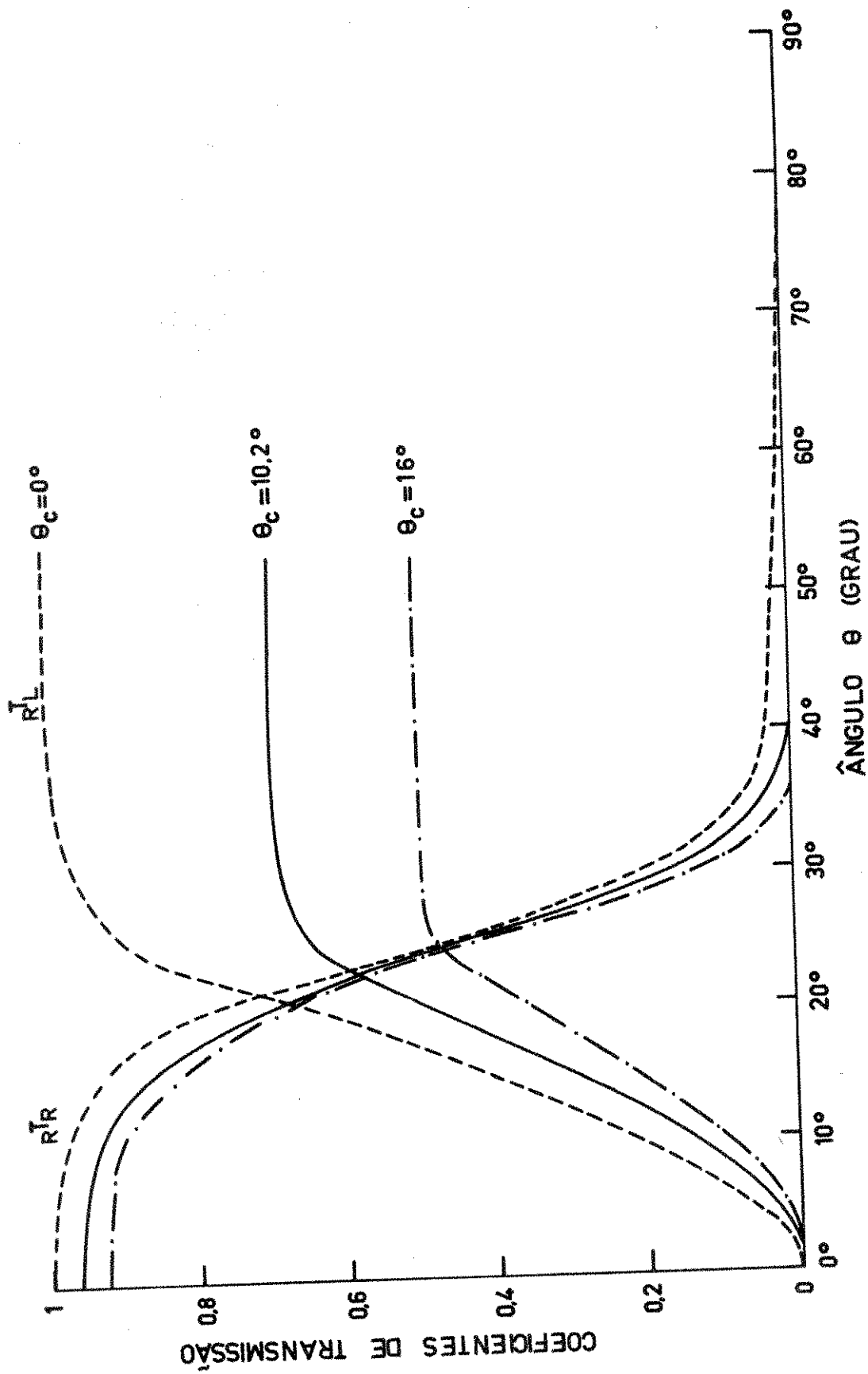


Fig. 14 - VARIACÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO  $\bar{R}^T_R$  e  $\bar{R}^T_L$  COM O ÂNGULO  $\theta$  ENTRE  $\bar{B}_0$  e  $\bar{K}$  ( $\theta_c = 0^\circ, \theta_c = 10.2^\circ$  e  $\theta_c = 16^\circ$ )

Comparando a Fig. 8 com a Fig. 14 podemos concluir que:

1. O Whistler tipo (a) da Fig. 8 corresponde a  $\theta > 35^\circ$  na Fig. 14.
2. O Whistler tipo (b) corresponde aproximadamente a  $25^\circ < \theta < 35^\circ$ .
3. O Whistler tipo (c), em que as ondas R e L saem com a mesma potência acima do ponto de crossover, corresponde a  $18^\circ < \theta < 25^\circ$ .
4. O Whistler tipo (d) corresponde a  $10^\circ < \theta < 18^\circ$ .
5. Finalmente, o Whistler tipo (e) corresponde a  $0 < \theta < 10^\circ$ .

Embora o tipo de transição previsto nos trabalhos anteriores esteja coerente com a Fig. 14, a correspondência entre os tipos de acoplamento e os tipos de Whistlers observados deve ser reconsiderada.

Finalizando, devemos mencionar que, para cada frequência, a forma de variação dos coeficientes de transmissão  $R^T$  e  $L^T$ , com o ângulo  $\theta$  parece não depender da altura de crossover. Para confirmar isto, um novo cálculo foi feito usando-se o mesmo perfil e uma girofrequência de 1,1 MHz, que corresponde a uma altura de crossover de 900 km e exatamente o mesmo resultado foi obtido.

#### IV.d - Determinação dos Campos das Ondas Ascendente

As subrotinas OUTPUT e OUTAUX separam o campo total em ondas características ascendentes e descendentes em cada ponto. O atual programa fornece as componentes  $E_x$  e  $E_y$  de cada onda característica.

Através das figuras apresentadas a seguir, poderemos visualizar claramente como o processo de acoplamento varia com a altitude e com o ângulo  $\theta$ . A onda incidente é polarizada no modo R e de frequência 400 Hz. No ponto  $z_n = 950$  Km a onda incidente possui  $E_x = 1$  e a incidência é vertical.

Inicialmente vamos utilizar o mesmo meio sem colisões usado anteriormente. A Fig. 15 mostra a amplitude da componente  $E_x$  das ondas características R e L para um ângulo  $\theta = 5^\circ$ . Para simplificar a notação, os campos são denominados de SR (slow right), SL (slow left), FR (fast right) e FL (fast left) de acordo com a velocidade de fase e a polarização em cada ponto. No ponto de crossover as ondas características invertem o sentido da polarização, pois o ângulo  $\theta = 5^\circ$  é maior que o ângulo crítico  $\theta_c = 0^\circ$ . A componente  $E_x$  da onda incidente (SR) começa com um valor unitário em 950 Km e aproxima-se de zero em  $D = 0$ , isto é, no ponto de crossover a onda lenta (slow) é linearmente polarizada no eixo y. Devido ao grande acoplamento próximo de  $D = 0$ , quase toda energia da onda incidente (SR) é transferida para o modo rápido polarizado à esquerda (FL) antes de atingir o ponto  $D = 0$ . Porém, como o modo FL também inverte o sentido da polarização em  $D = 0$ , a



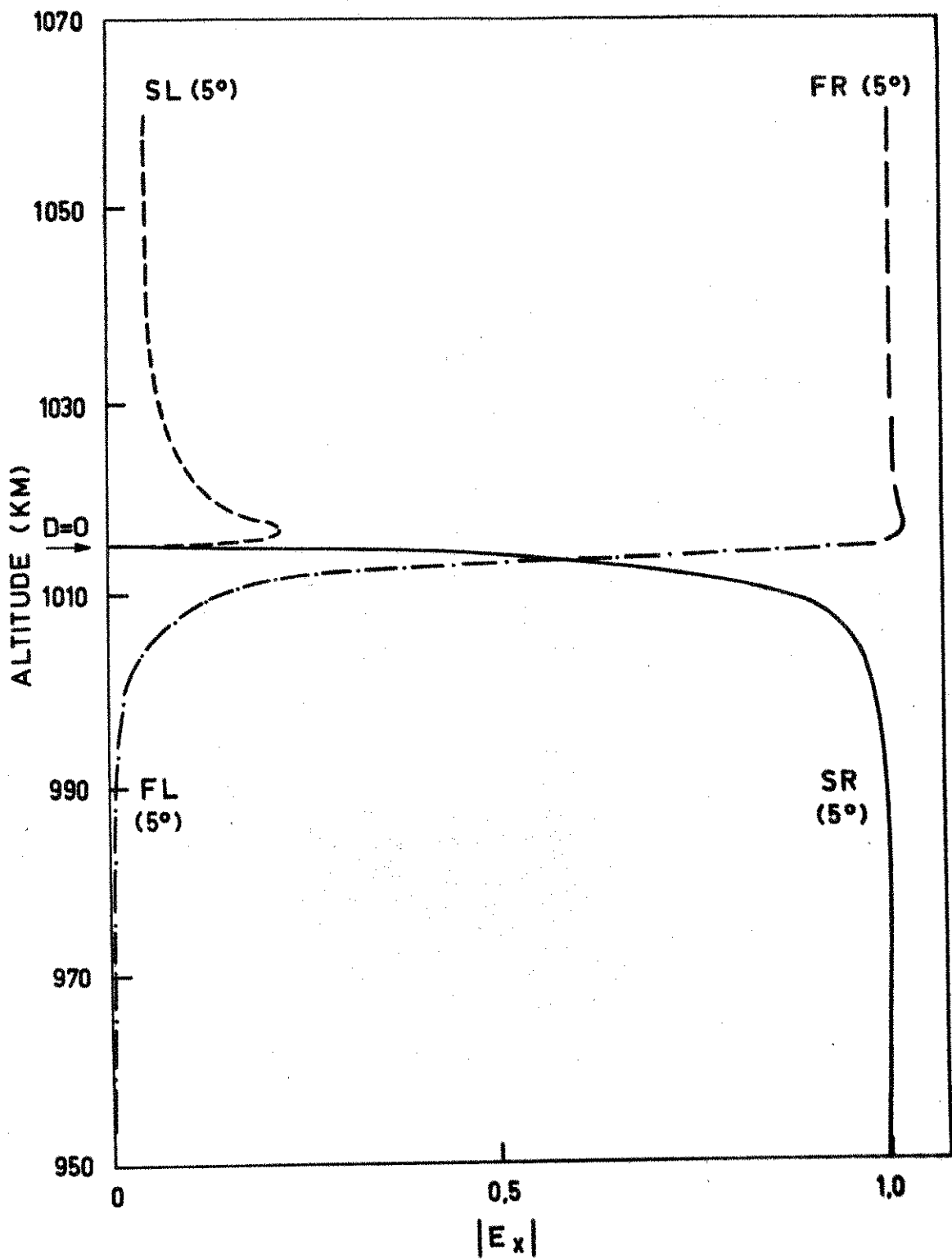


Fig. 15 - VARIACÃO COM A ALTITUDE DA COMPONENTE  $E_x$  DAS ONDAS ASCENDENTES R e L (MEIO SEM COLISÕES).

onda transmitida com maior energia será a onda FR, que possui a mesma polarização da onda incidente.

Comparando as Fig. 15 e 11 podemos verificar que as regiões de acoplamento significativo apresentadas pelas duas figuras são consistentes. Ademais, podemos observar que valores de  $|\Gamma_{12}|$  inferiores a  $10^{-3}$  são completamente desprezíveis neste caso. A onda incidente encontra, durante o seu trajeto, uma região de acoplamento de aproximadamente 30 Km em torno do ponto de crossover. As potências transmitidas (normalizadas) acima de  $D = 0$  para  $\theta = 5^\circ$  podem ser obtidas da Fig. 14.

A Fig. 16 apresenta as amplitudes das componentes  $E_x$  e  $E_y$  dos modos ascendentes R e L para  $\theta = 10^\circ$ . Comparando esta figura com a Fig. 15 vemos que, para  $\theta = 10^\circ$ , a região de acoplamento é maior e a mudança de polarização dos modos R e L é mais lenta que no caso de  $\theta = 5^\circ$ .

A Fig. 16 nos permite ainda obter as amplitudes das polarizações dos modos R e L simplesmente calculando a razão  $|E_y|/|E_x|$  em cada ponto. Na altura de incidência (950 Km) os dois modos são circularmente polarizados e a medida que se aproximam de  $D = 0$  (1015 Km), a polarização do modo lento aproxima-se de infinito e a polarização do modo rápido aproxima-se de zero (ambos são linearmente polarizados). Para alturas bem acima de  $D = 0$ , as polarizações dos dois modos são novamente circulares. Confirmando o que havíamos deduzido no capítulo I, para um meio sem colisões as polarizações dos modos lento e rápido são (em  $D = 0$ ) orientadas ao longo do eixo  $x$  e ao longo do eixo  $y$  respectivamente.

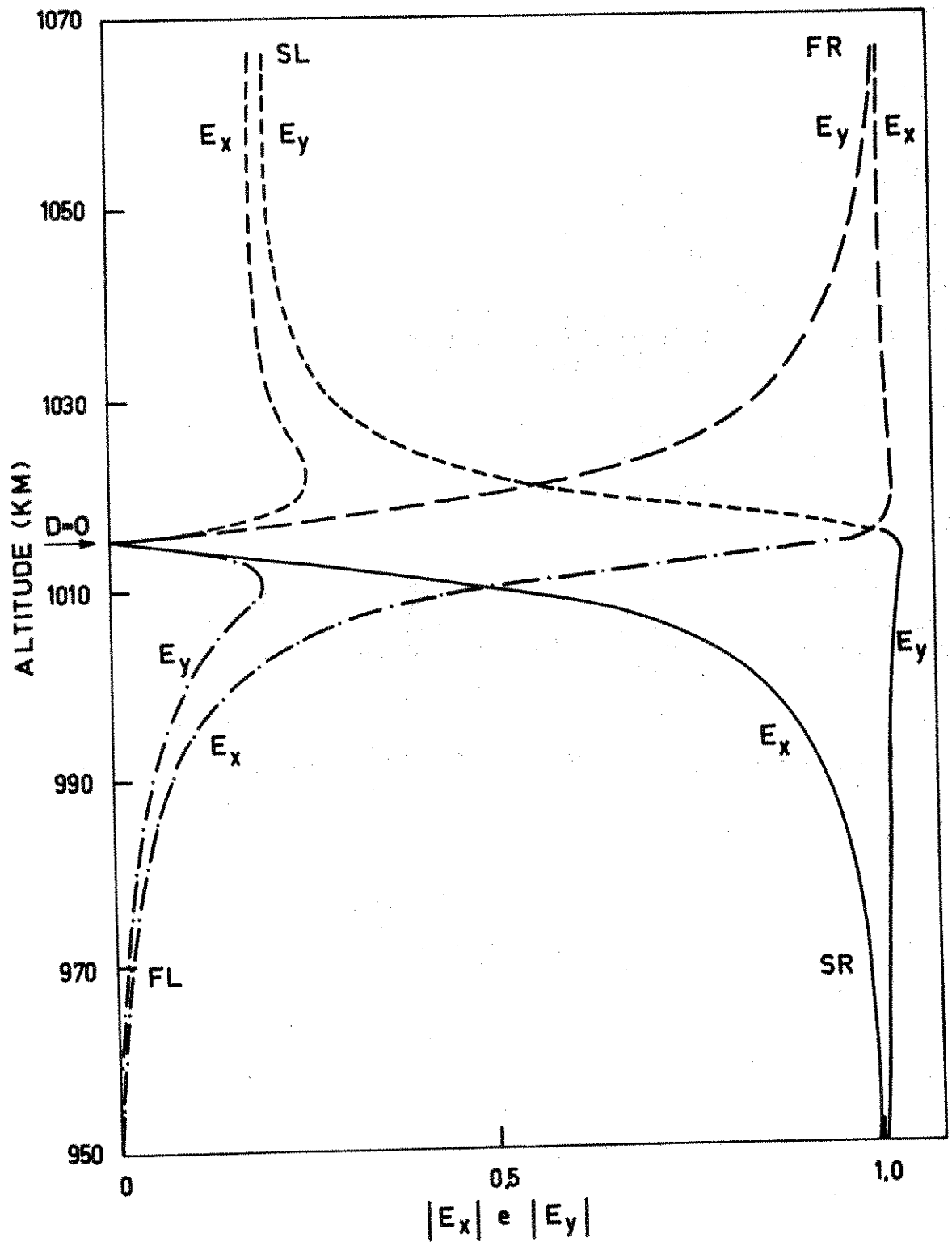


Fig: 16 - VARIACÃO COM A ALTITUDE DAS COMPONENTES  $E_x$  e  $E_y$  DAS ONDAS ASCENDENTES R e L ( $\theta = 10^\circ$ ).

A Fig. 17 mostra a amplitude da componente  $E_x$  dos modos ascendentes R e L para  $\theta = 20^\circ$  e  $\theta = 35^\circ$ . A região de acoplamento nestes dois casos é bem mais ampla que nos casos anteriores para  $\theta = 5^\circ$  e  $\theta = 10^\circ$ . Embora pareça ser necessário aumentar a região de integração para valores de  $\theta$  maiores que  $35^\circ$ , a fim de envolver toda a região de acoplamento, a diferença que isto acarreta nos coeficientes de transmissão é insignificante. Para verificar isto, fizemos novas integrações para valores de  $\theta$  maiores que  $35^\circ$ , começando em 1.500 Km e terminando em 900 Km e praticamente os mesmos coeficientes de transmissão foram obtidos.

Analisando a sequência dos campos nas Figs. 15, 16 e 17, podemos ver como as ondas características variam com a altura e com o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{E}_0$  e  $\vec{k}$ , para incidência vertical em um meio sem colisões. Nestas figuras as amplitudes dos campos das ondas R e L na altura de 1060 Km dão uma estimativa das potências transmitidas para  $\theta = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  e  $35^\circ$ . Obviamente a forma de variação com  $\theta$ , das potências transmitidas em 1060 Km, é a mesma tanto nas Figs. 15, 16 e 17 quanto na Fig. 14.

A Fig. 18 mostra a amplitude da componente  $E_x$  das ondas R e L para um meio com colisões, onde o ângulo crítico  $\theta_c$  é da ordem de  $10,2^\circ$ . Nesta figura o modo lento polarizado à direita (SR) e o modo rápido polarizado à esquerda (FL), para  $\theta = 5^\circ$ , não invertem o sentido da polarização em  $D = 0.0$  que ocorre agora é uma inversão nas amplitudes das velocidades de fase das ondas características, isto é, o modo rápido à esquerda (FL) passa a lento à esquerda (SL) e o modo lento à

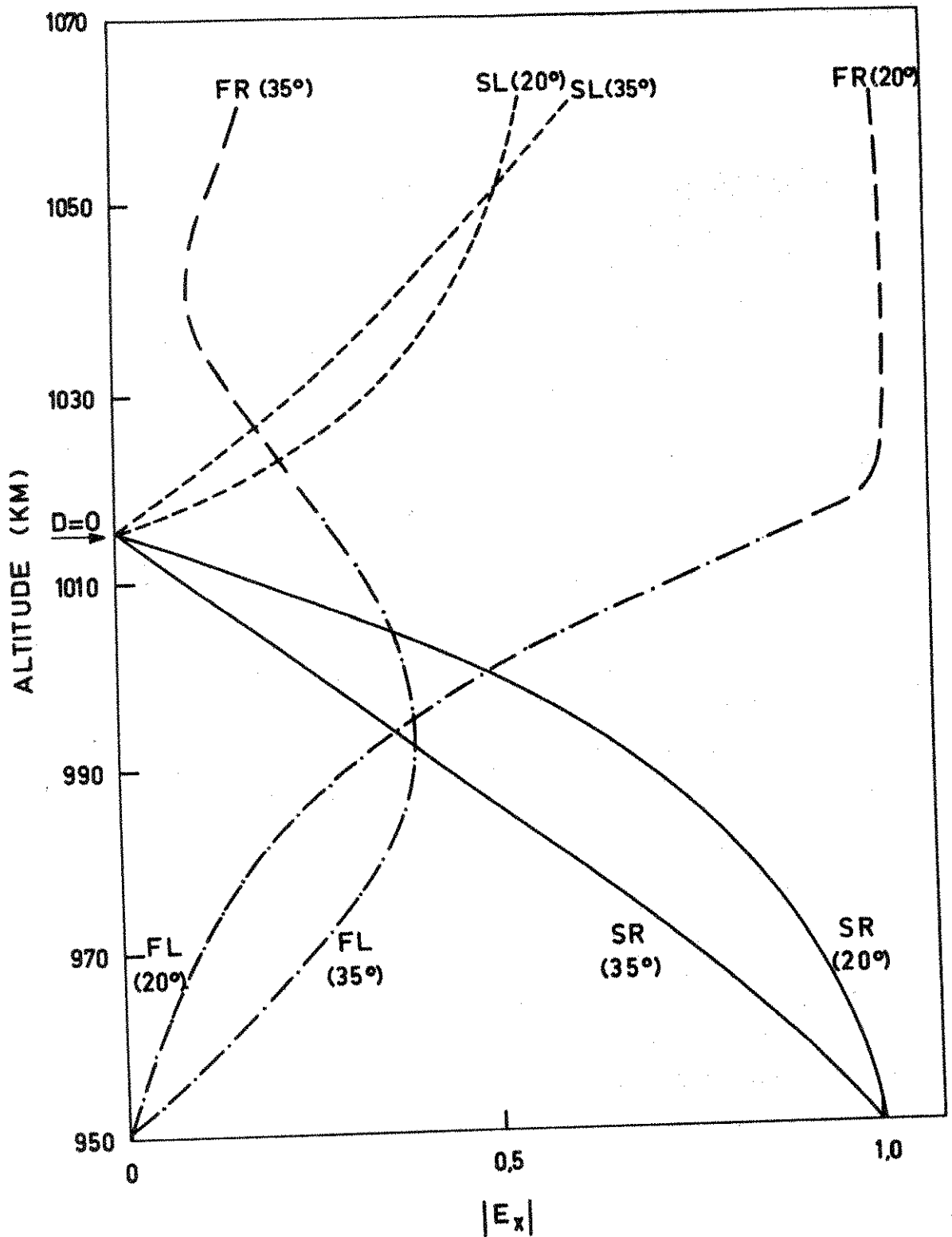


Fig: 17 - VARIACÃO COM A ALTITUDE DA COMPONENTE  $E_x$  DAS ONDAS ASCENDENTES R e L ( $\theta=20^\circ$  e  $\theta=35^\circ$ ).

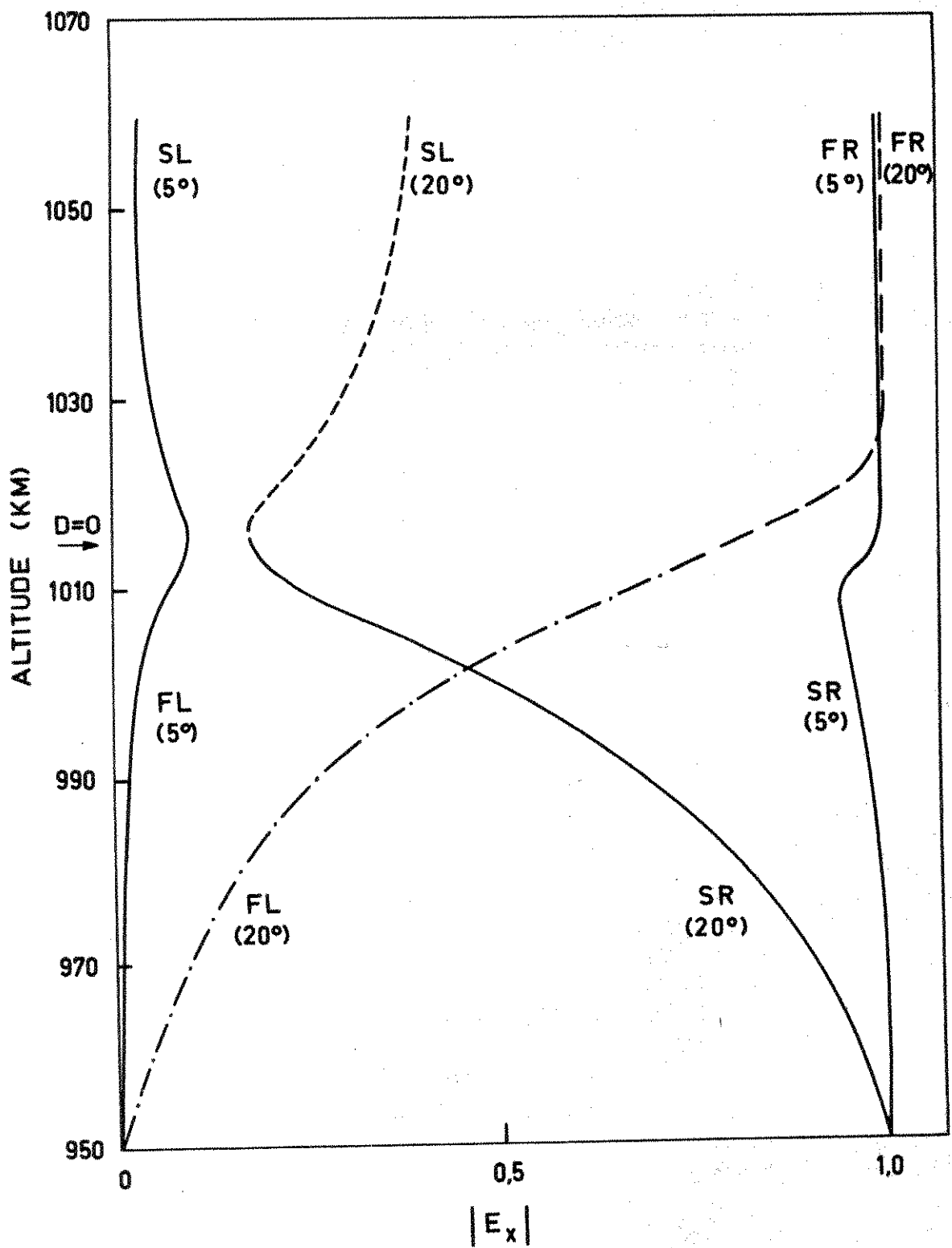


Fig: 18 - VARIACÃO COM A ALTITUDE DA COMPONENTE  $E_x$  DAS ONDAS ASCENDENTES R e L PARA UM MEIO COM COLISÕES ( $\theta_c = 10.2^\circ$ ).

direita (SR) passa a rápido à direita (FR) em  $D = 0$ . Este fato é coerente com a Fig. 13 que mostra as polarizações dos modos R e L para vários valores de  $\theta$ . Para  $\theta < \theta_c$  as ondas características não invertem o sentido da polarização em  $D = 0$ . Neste caso particular,  $\theta = 5^\circ$  é menor que o ângulo crítico  $\theta_c = 10,2^\circ$ .

Ainda na Fig. 18 podemos ver que os modos R e L, para  $\theta = 20^\circ$  (maior que  $\theta_c = 10,2^\circ$ ), invertem o sentido da polarização em  $D = 0$ . A Fig. 13 confirma isto, pois a curva da polarização para  $\theta = 20^\circ$  cruza o eixo real de  $\rho$ , isto é, a parte imaginária de  $\rho$  muda de sinal em  $D = 0$ . Como ocorreu inversão de polarização para  $\theta = 20^\circ$ , neste caso as ondas características não permutam as velocidades de fase em  $D = 0$ .

Observando uma vez mais as Figs. 15, 17 e 18 podemos concluir que, fora da região de acoplamento crítico, o sentido das polarizações, as velocidades de fase relativas e as amplitudes dos campos independentem das frequências de colisão (ou do ângulo crítico). Quando o meio for dissipativo ( $\theta_c \neq 0$ ) pode ocorrer, devido à atenuação, uma pequena diferença nas amplitudes dos campos, quando comparadas com as obtidas em um meio sem colisões. Isto pode ser visto nas Fig.s 17 e 18, acima de  $D = 0$ , para  $\theta = 20^\circ$ . Confirmando o que foi mencionado a respeito dos coeficientes de transmissão, a atenuação da onda L é maior que a atenuação sofrida pela onda R.

A Fig. 19 apresenta, em escala expandida, a parte inicial da variação com a altura da onda R total, composta da onda ascendente (modo R) e da onda descendente (modo R). Esta última é proveniente de reflexões internas em todos os pontos

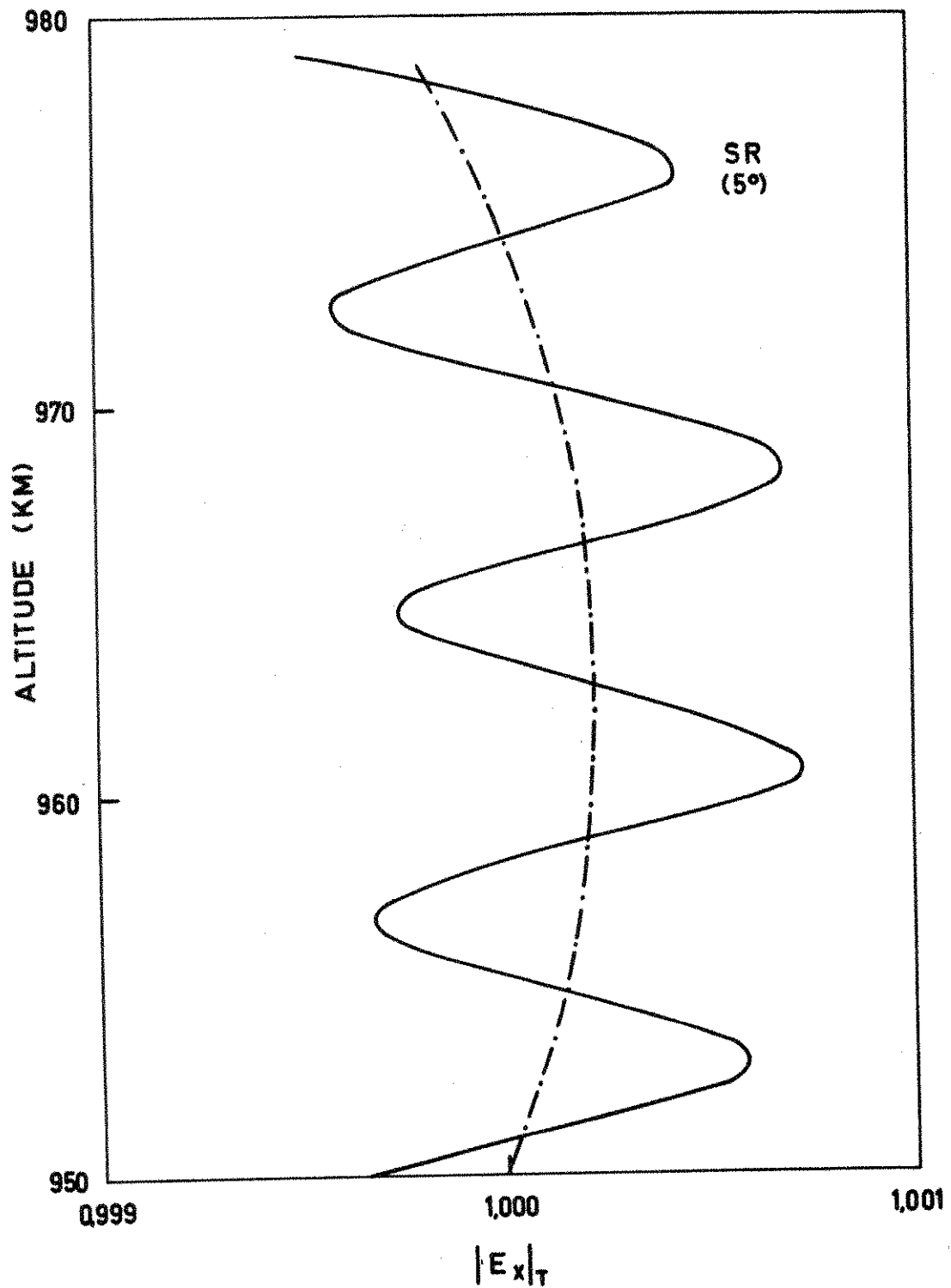


Fig: 19 - VARIACÃO COM A ALTITUDE DA COMPONENTE  $E_x$  DA ONDA R TOTAL (ASCENDENTE E DESCENDENTE)



acima de 950 Km e possui a mesma polarização e o mesmo índice de refração que a onda ascendente (modo R). O resultado da composição dessas duas ondas é uma onda estacionária cuja distância entre os seus máximos ou entre os seus mínimos adjacentes é igual a  $\lambda/2$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda do modo R na região considerada. O índice de refração da onda incidente é de 48,1 para  $\theta = 5^\circ$  e o comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{c}{fn} = 15,6 \text{ Km} \quad (4.3)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo,  $f$  a frequência da onda (400 Hz) e  $n$  o índice de refração.

A distância entre os máximos da Fig. 19 (~ 7,8 Km) confirma com bastante precisão o valor  $\lambda/2$  calculado a partir de (4.3). Nesta figura a linha sólida corresponde à onda total e a linha pontilhada corresponde à onda característica ascendente. A escala horizontal aparece expandida a fim de podermos observar o efeito das reflexões internas que foram bem pequenas neste caso.

#### IV.c - Conclusões Finais

Utilizando o programa de "onda completa" e o método de decomposição em ondas características descritos no capítulo III, foi possível calcular a estrutura dos campos em torno da região de crossover produzidos por uma onda incidente abaixo de  $D = 0$ . O novo processo desenvolvido, para o cálculo dos fatores de acoplamento  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ), nos permitiu visualizar como o acoplamento varia em torno de  $D = 0$ .

As conclusões mais importantes podem ser resumidas como segue:

1. As potências transmitidas bem acima do ponto  $D = 0$ , independem das frequências de colisão (ou do ângulo crítico) a menos da atenuação sofrida pela onda quando o meio for dissipativo.
2. Para um dado ângulo  $\theta$  entre  $\vec{B}_0$  e  $\vec{k}$  e fora da região de acoplamento crítico, o fator de acoplamento  $|\Gamma_{12}|$  praticamente independe das frequências de colisão, como pode ser visto nas Figs. 11 e 12.
3. O acoplamento na região crítica é bastante dependente das frequências de colisão e tende a infinito quando a polarização se aproxima de 1.
4. O efeito total do acoplamento para um certo ângulo  $\theta$ , é a soma dos efeitos do acoplamento crítico, em torno de  $D = 0$  e do acoplamento não crítico existente fora da região crítica. Observando a curva para  $\theta = \theta_c = 10,2^\circ$  na Fig. 12, podemos verificar que o acoplamento não-crítico atua em uma região de aproximadamente 70 Km (obtido por extrapolação), ao passo que o acoplamento crítico atua em uma região de apenas 15 Km em torno de  $D = 0$  (aproximadamente igual ao comprimento de onda local). Estamos admitindo que valores de  $|\Gamma_{12}|$  menores que  $10^{-3}$  são desprezíveis.

Para um dado valor de  $\theta$  a amplitude do acoplamento não-crítico é menor que a amplitude do acoplamento crítico, mas o seu efeito, para valores grandes de  $\theta$ , predomina, pois ele age em uma ampla região e por isso apresenta um efeito cumulativo.

5. Se o acoplamento crítico controlasse a transmissão de ondas através da região de crossover, a transição entre os tipos de Whistlers da Fig. 3 dependeria grandemente do ângulo crítico. Porém, para valores grandes de  $\theta$  o acoplamento não-crítico prevalece e praticamente anula o efeito do acoplamento crítico. O que ocorre fisicamente é que, para  $\theta_c$  grande, uma onda SR incidindo com  $\theta$  próximo de  $\theta_c$  perderá uma parte de sua energia para o modo FL, devido ao acoplamento cumulativo antes de atingir a região de acoplamento crítico. Assim, ao entrarem na região de acoplamento crítico as ondas R e L terão energias quase iguais, não havendo portanto, possibilidade de ocorrer mais troca sensível de energia devido ao acoplamento crítico. Por causa disso e devido ao fato de não haver inversão de polarização para  $\theta < \theta_c$  é que os coeficientes de transmissão não dependem das frequências de colisão.

6. Para alturas próximas de  $D = 0$  a estrutura dos campos é grandemente afetada pelo ângulo crítico. Para  $\theta > \theta_c$  ocorre inversão de polarização em  $D = 0$  da mesma maneira que para o caso  $\theta_c = 0$ . Para  $\theta < \theta_c$

não ocorre inversão de polarização e o acoplamento para um dado valor de  $\theta$  é menor que o acoplamento correspondente em um meio sem colisões.

7. Comparando os nossos resultados com os obtidos por Wang (1971), para um meio sem colisões, podemos concluir que o método de aproximação do meio por estratos homogêneos utilizado por Wang, aumenta a reflexão interna e o acoplamento entre os modos.

As amplitudes das ondas descendentes (refletidas) calculadas por Wang, foram da ordem de  $10^3$  vezes maiores que as calculadas neste trabalho. Os coeficientes de transmissão  $R^T_R$  de Wang são maiores que os da curva tracejada ( $\theta_c = 0^\circ$ ) da Fig. 14; como estes coeficientes são gerados exclusivamente por acoplamento (para o caso  $\theta_c = 0^\circ$ ), podemos concluir que a aproximação por estratos homogêneos superestima o acoplamento.

8. Para incidência vertical existe acoplamento crítico em  $D = 0$  ( $q_1 \approx q_2$  e  $q_3 \approx q_4$ ) somente entre ondas ascendentes ou entre ondas descendentes, isto é, não existe acoplamento crítico entre uma onda ascendente e uma onda descendente. Isto é fácil de verificar se usarmos a expressão (2.27)

$$\Gamma_{ij} = \frac{A_{ij}^*}{q_i - q_j} \quad (4.4)$$

e as relações  $q_1 = -q_3$  e  $q_2 = -q_4$  válidas para

incidência vertical. Com isso fica explicada a razão de haver pouca reflexão dos Eletron-Whistlers , mesmo para valores de  $\theta$  próximos de  $\theta_c$ .

Para incidência oblíqua a expressão (4.4) nos mostra que o acoplamento crítico ocorre no ponto de crossover ( $q_i = q_j$ ) da mesma maneira que para incidência vertical.

BOOKER

A.I - Equação de Onda de Clemmow e Heading

A equação de onda para meios planarmente estratificados pode ser calculada se conhecermos todas as propriedades da onda incidente e os parâmetros do meio no ponto considerado. No sistema de coordenadas utilizado (Fig. 4) os planos de estratificação são paralelos ao plano xy e a altura coincide com o eixo z.

A onda incidente varia da forma

$$\exp(j\omega t - jk(n_1 l x + n_1 m y + q_1 z)) \quad (\text{A.1})$$

sendo

$$l = \text{sen} l \text{sen} \chi \quad (\text{A.2})$$

$$m = \text{sen} l \text{cos} \chi \quad (\text{A.3})$$

$$q_1 = n_1 \text{cos} l \quad (\text{A.4})$$

e  $n_1$  o índice de refração no ponto de incidência dado pela relação de dispersão (1.1). Assim, estamos supondo que a onda incidente é uma onda característica pura. Se o ponto de incidência estiver no espaço livre (abaixo da ionosfera, por exemplo) teremos  $n_1 = 1$ .

Os cossenos diretores do campo magnético são  $(0, \gamma, \xi)$

$$\gamma = \cos(\text{DIP}) \quad (\text{A.5})$$

$$\xi = -\sin(\text{DIP}) \quad (\text{A.6})$$

As equações de Maxwell que relacionam  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$ , para variações senoidais no tempo e para meios não-magnéticos são

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 (\vec{I} + \vec{M}) \vec{E} \quad (\text{A.8})$$

sendo  $\omega$  a frequência angular da onda e  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  a permissividade e a permeabilidade do vácuo respectivamente.  $\vec{I}$  é a matriz unidade e  $\vec{M}$  a matriz susceptibilidade dada pela relação constitutiva do meio

$$\vec{P} = \epsilon_0 \vec{M} \vec{E} \quad (\text{A.9})$$

sendo  $\vec{P}$  o vetor de polarização do meio.

A matriz  $\vec{M}$  é deduzida por Scarabucci (1969) e pode ser escrita simbolicamente como:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Como o meio é planarmente estratificado a lei de Snell deve ser satisfeita, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x} = -jkn_1 l = c^{te} \quad (A.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -jkn_1 m = c^{te} \quad (A.12)$$

e  $\frac{\partial}{\partial z}$  vai depender da variação do meio ao longo da direção z.

Da eq. (A.7) obtemos

$$-jkn_1 m E_z - \frac{dE_y}{dz} = -j\omega\mu_0 H_x \quad (A.13)$$

$$\frac{dE_x}{dz} + jkn_1 l E_z = -j\omega\mu_0 H_y \quad (A.14)$$

$$-jkn_1 l E_y + jkn_1 m E_x = -j\omega\mu_0 H_z \quad (A.15)$$

As eqs. (A.8) e (A.10) fornecem

$$-jkn_1 m H_z - \frac{dH_y}{dz} = j\omega\epsilon_0 \left[ (1 + M_{xx}) E_x + M_{xy} E_y + M_{xz} E_z \right] \quad (A.16)$$

$$\frac{dH_x}{dz} + jkn_1 l H_z = j\omega\epsilon_0 \left[ M_{yx} E_x + (1 + M_{yy}) E_y + M_{yz} E_z \right] \quad (A.17)$$

$$-jkn_1 l H_y + jkn_1 m H_x = j\omega\epsilon_0 \left[ M_{zx} E_x + M_{zy} E_y + (1 + M_{zz}) E_z \right] \quad (A.18)$$

Das eq. (A.13) a (A.18) foi omitido o fator  $\exp(+j\omega t - jkn_1(lx + my))$

Eliminando as variáveis  $E_z$  e  $H_z$  dessas equações obtemos a equação de onda



$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} E_x \\ -E_y \\ Z_0 H_x \\ Z_0 H_y \end{bmatrix} = -jk\tilde{T} \begin{bmatrix} E_x \\ -E_y \\ Z_0 H_x \\ Z_0 H_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

ou

$$\frac{d\vec{e}}{dz} = -jk\tilde{T}\vec{e} \quad (\text{A.20})$$

sendo  $\vec{e}$  a matriz coluna  $(E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y)$ ,  $Z_0$  a impedância característica do espaço livre

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \quad (\text{A.21})$$

e  $\tilde{T}$  uma matriz  $(4 \times 4)$  que é função de  $\tilde{M}$  e dos cossenos diretores do índice de refração da onda incidente.

Os elementos de  $\tilde{T}$  podem ser escritos em função de  $n_1$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $\xi$ ,  $\gamma$  e  $R$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $P$  e  $D$  (Scarabucci, 1969).

$T_{11} = -j\gamma l n_1 D/a$	$T_{21} = j\gamma n_1 m D/a$
$T_{12} = \gamma \xi l n_1 (P-S)/a$	$T_{22} = -\gamma \xi n_1 m (P-S)/a$
$T_{13} = n_1^2 l m/a$	$T_{23} = 1 - n_1^2 m^2/a$
$T_{14} = 1 - n_1^2 l^2/a$	$T_{24} = T_{13}$
$T_{31} = j\xi D - n_1^2 m l + j\gamma^2 \xi D (P-S)/a$	$T_{41} = S - n_1^2 m^2 - \gamma^2 D^2/a$
$T_{32} = \xi^2 S + \gamma^2 P - n_1^2 l^2 - \gamma^2 \xi^2 (P-S)^2/a$	$T_{42} = -j\xi D - n_1^2 m l - j\gamma^2 \xi D (P-S)/a$
$T_{33} = T_{22}$	$T_{43} = -T_{21}$
$T_{34} = T_{12}$	$T_{44} = -T_{11}$

sendo  $a = \gamma^2 S + \xi^2 P$

### A.II - Coeficientes da Quártica de Booker

Os autovalores de  $\tilde{T}$  satisfazem a equação característica

$$\det(\tilde{T} - q\tilde{I}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

que corresponde a uma equação do quarto grau em  $q$

$$\alpha q^4 + \beta q^3 + \gamma q^2 + \delta q + \epsilon = 0$$

sendo (Scarabucci, 1969)

$$\alpha = S\gamma^2 + P\xi^2$$

$$\beta = 2m \xi\gamma(P - S)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = n_1^2 \text{sen}^2 I \{ & S[1 + \gamma^2(1 - \cos^2 \chi)] + P(\xi^2 + \gamma^2 \cos^2 \chi) \} - RL\gamma^2 \\ & - PS(1 + \xi^2) \end{aligned}$$

$$\delta = -2m\xi\gamma \{ (PS - RL) - n_1^2 \text{sen}^2 I(P - S) \}$$

$$\begin{aligned} \epsilon = PRL + n_1^2 \text{sen}^2 I \{ & n_1^2 \text{sen}^2 I [P\gamma^2 \cos^2 \chi + S(1 - \gamma^2 \cos^2 \chi)] - \\ & RL(1 - \gamma^2 \cos^2 \chi) - PS(1 + \gamma^2 \cos^2 \chi) \} \end{aligned}$$

APÊNDICE B - PERFIL DE DENSIDADES DOS CONSTITUINTES E

FREQUÊNCIAS DE COLISÃO

B.1 - Perfil de Densidades

As densidades dos constituintes da alta ionosfera (acima de 500 Km) podem ser obtidos analiticamente usando-se o método de equilíbrio difusivo (Angerami e Thomas, 1964).

A densidade dos eletrons é dada por

$$\frac{n_e(h)}{n_{eo}} = \left[ \frac{\exp(-h/H_1) + n_2 \exp(-h/H_2) + n_3 \exp(-h/H_3)}{n} \right]^{1/2} \quad (\text{B.1})$$

e a densidade dos ions é

$$\frac{n_i(h)}{n_{io}} = \frac{n_i}{n} \cdot \exp(-h/H_i) \cdot \frac{n_{eo}}{n_e(h)} \quad (\text{B.2})$$

sendo

$$h = (R + H_0) \cdot \frac{z - H_0}{z + R} \quad (\text{altura geopotencial})$$

R = raio da Terra

$$H_0 = 500 \text{ Km}$$

z = altura em relação ao nível do mar.

$n_{eo}$  = densidade de eletrons em  $z = H_0$

$n_{i0}$  = densidade do ion  $i$  em  $z = H_0$

$$\eta_i = \frac{n_{i0}}{n_{10}}$$

$H_i$  = escala de altura do ion  $i = \frac{KT}{m_i g}$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \frac{n_{e0}}{n_{10}}$$

### B.II - Frequências de Colisão

As frequências de colisão coulombiana (Nicolet, 1953) entre os vários constituintes podem ser escritos sob a forma

$$v_{ij} = 5,45 \cdot 10^{-14} \frac{(n_i m_i + n_j m_j)}{(m_i m_j)^{1/2} \cdot (m_i + m_j)^{1/2}} \cdot \frac{1}{r^{3/2}}$$

$$\log_e \left[ 1 + 5,67 \cdot 10^6 \cdot \frac{T^2}{(n_i + n_j)^{2/3}} \right] \text{ seg}^{-1}$$

sendo

$v_{ij}$  = frequência de colisão coulombiana entre as partículas  $i$  e  $j$

$n_k$  = densidade da partícula  $k$  ( $\text{cm}^{-3}$ )

$m_k$  = massa da partícula  $k$  (grama)

$T$  = temperatura absoluta ( $800^\circ\text{K}$  no nosso caso)

A Frequência efetiva da partícula  $i$ , por exemplo, será

$$v_{\text{eff}} = \frac{1}{N} \sum_{ij} v_{ij} \quad (34)$$

onde N é o número de constituintes.

As colisões de elétrons com íons têm efeito desprezível sobre os íons devido à pequena massa do elétron comparada com a dos íons. Por causa disso essas colisões podem ser desprezadas no cálculo das frequências de colisão efetivas dos íons.



















## REFERÊNCIAS

- Allis, W.P., Waves in a Plasma, Mass. Inst. Tech. Res. Lab. Electronics Quart. Prog. Rept., 54(5), 1959.
- Altman, C. and H.Cory, The generalized thin-film optical method in electromagnetic wave propagation, Radio Science, 4, 459, 1960.
- Booker, H.G., Oblique propagation of electromagnetic waves in a slowly varying nonisotropic medium, Proc. Roy. Soc. A., 155, 235, 1936.
- Booker, H.G., The propagation of wave packets incident obliquely on a stratified doubly refracting ionosphere, Phil. Trans. A., 237, 411, 1939.
- Brice, N., Discrete very low frequency emissions from the upper atmosphere, SEL 64-068 Radio-Sci. Lab., Stanford Electronics Lab., Stanford Univ., 1964.
- Budden, K.G. and P.C.Clemmow, Coupled forms of the differential equations governing radio propagation in the ionosphere, 2, Proc. Cambridge Phil. Soc., 53 (P.3), 669, 682, 1957.
- Budden, K.G., Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge University Press, London, 1966.

- Clemmow, P.C. and J.Heading, Complred forms of the differential equations governing radio propagation in the ionosphere Proc.Cambridge Phil.Soc., 50, 319-333, 1954.
- Clemmow, P.C. and R.F.Mullaly, The dependence of the refractive index in magnetoionic theory on the direction of the wave normal, The Physics of the Ionosphere, p.340, The Physical Society, London, 1955.
- Fürsterling, K., Über die Ausbreitung elektromagnetischer wellen in einem magnetisierten medium bei senkrechter incidenz, Hochfr.Elek., 59. 110, 1942.
- Gintisburg, M.A., Low-frequency waves in a multicomponent plasma, Geomagnetism Aeronomy, 3, 610-614, 1963.
- Gurnett, D.A., Very low frequency electromagnetic emissions observed with the ONR/SUI satellite Injun 3, SUI Report 63-27, State Univ.Iowa, 1963.
- Gurnett, D.A., Shawhan, S.E., Brice, N.M. and Smith, R.L., Ion cyclotron Whistlers, J.Geophys.Res.70, 1665, 1965.
- Hamming, R.A., Stable predictor-corrector methods for ordinary differential equations, J.Assoc.Comput.Mach.6, 37, 1959.
- Hines, C.O., Heavy-ion effects in audio-frequency radio propagation, J.Atmospheric Terrest.Phys., 11, 36-42, 1957.

Jones, D. The theory of the effect of collisions on ion-cyclotron whistlers, Plasma waves in Space & in the Laboratory, Edinburgh Univ.Press., 1970.

Jones, D., The effect of the latitudinal variation of the terrestrial magnetic field strength on ion cyclotron whistlers, J.Atmospheric Terrest.Phys., 31, 971-981, 1969.

Nicolet, H.J., The collision frequency of electrons in the ionosphere, J.Atmospheric Terrest.Phys., 3, 200-211, 1953.

Pitteway, E.L.V. and J.L.Jespersen, A numerical study of the excitation internal reflection and limiting polarization of whistler waves in the lower ionosphere, J.Atmospheric Terrest. Phys., 28, 17, 1966.

Scarabucci, R.R., Analytical and numerical treatment of wave-propagation in the lower ionosphere, Tech.Rep. SEL-69-046, Radio Science Lab., Stanford Univ. Stanford, California, 1969.

Scarabucci, R.R. and R.L.Smith, Full-wave treatment of wave-propagation through planar irregularities of a magnetoionic medium, Tech.Rep.SEL-70-046, Radio Science Lab., Stanford Univ., Stanford, California



Scarabucci, R.R. and R.L. Smith, Study of magnetospheric field oriented irregularities-the mode theory of bell-shaped ducts, Radio Science, 6 . 65-86, 1971.

Smith, R.L. and Neil Brice, Propagation in multicomponent plasmas, J. Geophys. Res., 69, 5029-5040, 1964.

Stix, T.H., The Theory of plasma Waves, Mc-Graw-Hill Book Company, New York, 1962.

Wang, Ting-I, Intermode coupling at ions whistler frequencies in a stratified collisionless ionosphere, J. Geophysical Res., 76., 947-959, 1971.