

Impl.

## Métodos de Alta Resolução com Restrição de Subespaço para Detecção de Frequências

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Comunicações, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica.

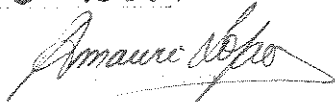
Autor

\*  
**Rodrigo Pinto Lemos**  
Engenheiro Eletricista pela UFG em 1992

Orientador

\*  
**Prof. Dr. Amauri Lopes**  
Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP em 1982

Campinas, 24 de março de 1995.

|                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Este exemplo de aprovação final da tese                                              |
| de <b>RODRIGO PINTO LEMOS</b>                                                        |
| foi aprovada pela Comissão                                                           |
| em <b>24 03 1995</b> .                                                               |
|  |

*Aos meus pais, Janice e Waltenir,  
espíritos corajosos que me inspiram  
a todo momento.*

*Para Lucimeire, doçura e carinho  
que alegam o meu viver.*

## Abstract

This work is concerned with the use of the forward-backward linear prediction for the detection of frequencies in the presence of noise. The noise and signal subspaces structures associated to the data are detailed by the use of singular value decomposition. The noise effects are studied in order to achieve its maximum reduction. The amplitude response of the prediction error filter is compared to its phase response first derivative. These schemes are used for frequency estimation. Also, we show that the phase first derivative yields an alternative method, which is competitive to the known frequency estimation techniques. The linear prediction normal equation is solved in sense of Linear and Total Linear Least Squares criteria. The later allowed us to develop a new frequency detection method based on forward-backward linear prediction. Finally, simulation results show the excellent performance of the new method and bring into light details not yet appointed on the performance of Tufts and Kumaresan's Modified FBLP method.

## Sumário

Este trabalho estuda a aplicação de predição linear *forward-backward* para a detecção de frequências em meio ruidoso. Aqui é detalhada a estrutura de subespaços de sinal e de ruído, associada aos dados, através da decomposição em valores singulares, buscando compreender a extensão da atuação ruidosa, de forma a reduzi-la à mínima possível. Estudamos comparativamente a resposta de amplitude e a derivada da resposta de fase do filtro de erro de predição como meios de estimar as frequências do sinal. Mostramos que a derivada da fase fornece uma alternativa competitiva com as técnicas conhecidas. Analisamos ainda a solução da equação normal de predição linear pelos critérios de mínimos quadrados e de mínimos quadrados totais. Este último permitiu desenvolver um novo método de detecção, utilizando a predição linear *forward-backward*. Estabelecemos comparações e terminamos com a apresentação de resultados de simulações minuciosas que mostraram o excelente desempenho do novo método e trouxeram à luz detalhes ainda não explorados do desempenho do método FBLP Modificado, proposto por Tufts e Kumaresan.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, acima de tudo, pela oportunidade de ter vivido esta experiência fascinante. Sou e serei eternamente grato aos espíritos amigos que me inspiraram a paz e o ânimo nos momentos de intranquilidade.

Agradeço profundamente ao meu orientador, Professor Doutor Amauri Lopes, que exemplar como Cientista, contribuiu fundamentalmente para que o meu simplório romantismo científico amadurecesse em consciência crítica fundamentada. Ele não somente foi brilhante em sua competência técnica e inolvidável em suas sugestões, mas também se revelou um grande amigo e conselheiro, de cuja estima pretendo dignar-me por toda a vida.

Agradeço ainda aos amigos, que felizmente são tantos que se torna até difícil citar nomes sem deixar de ser injustamente omissos com algum deles. Em especial, deixo o meu abraço à amiga Ana Lúcia T. Romano, que tanto apoio me concedeu. Sua presença alegre e conselheira conferiu-me confiança e otimismo. Àqueles companheiros que tanto contribuíram com seus conhecimentos e paciência de me ensinar tantas coisas acessórias, mas sem as quais a confecção deste trabalho teria sido mais árdua, sem mesmo atingir a qualidade que eu tinha em mente, ofereço a certeza de poderem contar sempre com o auxílio desinteressado deste muitíssimo grato amigo.

Não posso deixar de me lembrar dos funcionários desta instituição que com paciência e eficácia atenderam prontamente aos pedidos que fiz ao longo destes anos. A eles o meu muitíssimo obrigado, de coração.

Recordo com gratidão dos Professores que tive durante os semestres de créditos, que com competência inquestionável e espírito inovador, ensinaram-me não somente o que a lousa apresentava, mas também me transmitiram a motivação de fazer Ciência por mais adverso que pareça ao vulgo deste país.

Agradeço do fundo de minha alma ao apoio recebido de toda a minha família desde o início.

Ao meu tio Saul, grande amigo e segundo pai, agradecimentos é muito pouco. Seu exemplo de trabalho incessante e seu coração do tamanho do mundo são balizamentos

para minha caminhada. Espero em minha vida dar-lhe o orgulho que não posso mais dar ao meu pai.

Um beijo bem grande para minha irmã Juliana, companheira que vi criança e hoje é digna de toda a minha admiração profissional e orgulho de irmão coruja. Outro beijo para Lourdes, que tantas vezes ouviu meus sonhos e lamentações como verdadeira irmã do meu coração.

Especialmente divulgo a gratidão infinita que devoto à minha mãe, Janice, que com a firmeza que lhe é inata, suportou com imenso carinho este sonhador, e em cuja imagem corajosa procurei me espelhar nestes anos definitivos de minha vida. Eternamente jovem em seu espírito, consegue conjugar a doçura e o dinamismo, alcançando vôos mais altos e colecionando amigos a cada dia de sua vida. Mãezinha, eu te amo.

Meus agradecimentos sinceros ao meu primo Mário Lúcio que, com tanto carinho, emprestou-me seus conhecimentos de especialista da Língua Portuguesa, na qualidade de revisor deste texto.

Agradeço também, de forma quase indescritível, à minha esposa Lucimeire, pelo seu Amor devotado, pela compreensão amiga e pelo apoio encorajador, sem os quais eu já teria sucumbido nos momentos de insegurança. Sem dúvida alguma ela foi a minha maior descoberta nestes anos de mestrado e a que me causa maior orgulho e alegria. À minha companheira meu eterno Amor e devoção.

Uma menção carinhosa à minha nova família, meus sogros Vicente e Laurinete, de quem sempre recebi palavras de estímulo, e aos meus cunhados Luciano, Ana e André, pelas horas alegres e descontraídas nos finais de semana. É muito bom sentir que laços distantes do passado finalmente se reataram.

Finalmente declaro a minha gratidão ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro que tão fundamentalmente permitiu o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço ainda à Telebrás pelo suporte bibliográfico que tanto enriqueceu esta obra.

# Conteúdo

|          |                                                                          |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                        | <b>1</b>  |
| 1.1      | Cenário . . . . .                                                        | 1         |
| 1.2      | Objetivos deste Trabalho . . . . .                                       | 2         |
| 1.3      | Rápida Visão dos Capítulos . . . . .                                     | 3         |
| <b>2</b> | <b>Detecção de Frequências por Predição Linear</b>                       | <b>6</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .                                                     | 6         |
| 2.2      | Predição Linear Forward-Backward - FBLP . . . . .                        | 7         |
| 2.3      | O Método FBLP para Detecção de Frequências . . . . .                     | 11        |
| 2.3.1    | A Função de Transferência do Filtro FBLP . . . . .                       | 11        |
| 2.3.2    | A Resposta em Frequência do Filtro FBLP . . . . .                        | 13        |
| 2.4      | O Caso Ruidoso . . . . .                                                 | 14        |
| <b>3</b> | <b>Derivando a Fase</b>                                                  | <b>17</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                                                     | 17        |
| 3.2      | O Espectro da Derivada da Fase como Técnica para Detecção de Frequências | 18        |
| 3.3      | Comparação entre os Espectros de Magnitude e de Derivada da Fase . . . . | 20        |
| 3.3.1    | Resolução . . . . .                                                      | 20        |
| 3.3.2    | Efeito de Limiar . . . . .                                               | 21        |
| 3.3.3    | Concluindo sobre os Espectros . . . . .                                  | 23        |
| 3.4      | Desempenhos dos Espectros de Magnitude e de Derivada da Fase . . . . .   | 25        |
| <b>4</b> | <b>SVD e Subespaços</b>                                                  | <b>28</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                                     | 28        |

|          |                                                                                                                       |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2      | Definições . . . . .                                                                                                  | 29        |
| 4.3      | Decomposição em Valores Singulares . . . . .                                                                          | 29        |
| 4.4      | A SVD da Matriz $\mathbf{A}$ e o Vetor $\mathbf{w}$ . . . . .                                                         | 30        |
| 4.5      | Os Subespaços de Sinal e de Ruído . . . . .                                                                           | 30        |
| 4.6      | Dissecando os Subespaços . . . . .                                                                                    | 31        |
| 4.6.1    | A Matriz de Dados Exatos $\mathbf{E}$ . . . . .                                                                       | 32        |
| 4.6.2    | Considerações sobre a SVD de $\mathbf{A}$ . . . . .                                                                   | 33        |
| 4.6.3    | A SVD de $\mathbf{A}$ em termos da SVD de $\mathbf{E}$ . . . . .                                                      | 35        |
| 4.6.4    | Limitações no Conhecimento de $\mathbf{E}$ . . . . .                                                                  | 36        |
| 4.7      | Resumindo . . . . .                                                                                                   | 37        |
| 4.8      | Interpretação Geométrica da Solução . . . . .                                                                         | 38        |
| 4.8.1    | Vetores no Plano . . . . .                                                                                            | 38        |
| 4.8.2    | Vetores no Espaço Tridimensional . . . . .                                                                            | 39        |
| 4.9      | Todas as Soluções Possíveis . . . . .                                                                                 | 40        |
| 4.10     | Considerações Estatísticas . . . . .                                                                                  | 42        |
| 4.11     | Considerações de Ordem Prática . . . . .                                                                              | 43        |
| <b>5</b> | <b>O Método FBLP Modificado</b>                                                                                       | <b>45</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .                                                                                                  | 45        |
| 5.2      | A Estimativa por Mínimos Quadrados - LS . . . . .                                                                     | 45        |
| 5.3      | Melhorando o FBLP . . . . .                                                                                           | 46        |
| 5.4      | Derivada da Fase Modificada . . . . .                                                                                 | 49        |
| 5.4.1    | Comparação de Desempenho entre o Espectro de Derivada da Fase e a Extração de Raízes para o FBLP Modificado . . . . . | 49        |
| <b>6</b> | <b>FBLP e Mínimos Quadrados Totais TLS-FBLP</b>                                                                       | <b>52</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .                                                                                                  | 52        |
| 6.2      | A Estimativa pelo Critério de Mínimos Quadrados Totais - TLS . . . . .                                                | 53        |
| 6.2.1    | Análise pela Teoria de Perturbações . . . . .                                                                         | 53        |
| 6.2.2    | A Solução dos Mínimos Quadrados Totais . . . . .                                                                      | 54        |
| 6.2.3    | Comparação entre Mínimos Quadrados e Mínimos Quadrados Totais                                                         | 57        |

|          |                                                                                                     |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.2.4    | A Relação entre Mínimos Quadrados e Mínimos Quadrados Totais .                                      | 60        |
| 6.3      | Estimativa de Variância Mínima - MV . . . . .                                                       | 62        |
| 6.4      | Relação entre as Estimativas de Variância Mínima e Mínimos Quadrados<br>Totais Modificado . . . . . | 63        |
| 6.5      | Desempenhos em Perspectiva . . . . .                                                                | 64        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e Sugestões</b>                                                                       | <b>70</b> |
| 7.1      | Resumo . . . . .                                                                                    | 70        |
| 7.2      | Conclusões e Contribuições . . . . .                                                                | 71        |
| 7.3      | Sugestões de Trabalhos Futuros . . . . .                                                            | 72        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                                                 | <b>74</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                        |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Filtro de erro de predição <i>forward</i> . . . . .                                    | 7  |
| 2.2  | Filtro de erro de predição <i>backward</i> . . . . .                                   | 7  |
| 2.3  | Zeros da função de transferência, $L = 24$ , $\text{SNR} = \infty$ . . . . .           | 12 |
| 2.4  | Amplitude da resposta em frequência. . . . .                                           | 13 |
| 2.5  | Fase da resposta em frequência (em radianos). . . . .                                  | 13 |
| 2.6  | Zeros da função de transferência, $L = 24$ , $\text{SNR} = 10\text{dB}$ . . . . .      | 14 |
| 2.7  | Comparação de desempenho entre os métodos ML e FBLP. . . . .                           | 16 |
| 3.1  | Espectro do logaritmo da amplitude (dB). . . . .                                       | 20 |
| 3.2  | Espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase (fase em radianos). . . . . | 20 |
| 3.3  | Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB). . . . .                               | 21 |
| 3.4  | Espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase (fase em radianos). . . . . | 21 |
| 3.5  | Espectro do numerador da derivada da resposta de fase (fase em radianos). . . . .      | 21 |
| 3.6  | Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB). . . . .                               | 22 |
| 3.7  | Espectro de fase (em radianos). . . . .                                                | 22 |
| 3.8  | Espectro da derivada da resposta de fase (fase em radianos). . . . .                   | 22 |
| 3.9  | Amplitude da resposta em frequência (sem ruído). . . . .                               | 23 |
| 3.10 | Amplitude da resposta em frequência (com ruído). . . . .                               | 23 |
| 3.11 | Fase da resposta em frequência (em radianos) (sem ruído). . . . .                      | 24 |
| 3.12 | Fase da resposta em frequência (em radianos) (com ruído). . . . .                      | 24 |
| 3.13 | Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB) (sem ruído). . . . .                   | 24 |
| 3.14 | Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB) (com ruído). . . . .                   | 24 |
| 3.15 | Espectro do numerador (sem ruído). . . . .                                             | 25 |
| 3.16 | Espectro do numerador (com ruído). . . . .                                             | 25 |

|      |                                                                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.17 | Espectro da derivada da resposta de fase (sem ruído). . . . .                                                                                 | 25 |
| 3.18 | Espectro da derivada da resposta de fase (com ruído). . . . .                                                                                 | 25 |
| 3.19 | Desempenho do método FBLP com detecção pela resposta de amplitude inversa, pela derivada da resposta de fase e por extração de zeros. . . . . | 26 |
| 4.1  | As decomposições ortogonais do vetor $\mathbf{A}$ bidimensional. . . . .                                                                      | 38 |
| 4.2  | As decomposições ortogonais do vetor $\mathbf{A}$ tridimensional. . . . .                                                                     | 39 |
| 4.3  | Sólido gerado por todos os $\mathbf{E}$ e $\mathbf{Y}$ soluções para o caso tridimensional. . . .                                             | 39 |
| 4.4  | Uma representação do conjunto bola de matrizes $\mathcal{B}$ . . . . .                                                                        | 40 |
| 5.1  | Zeros da função de transferência FBLP, $N = 25$ amostras, $L = 24$ , $\text{SNR} = 10\text{dB}$ . . . . .                                     | 47 |
| 5.2  | Zeros da função de transferência FBLP Modificado, $N = 25$ amostras, $L = 18$ , $\text{SNR} = 10\text{dB}$ . . . . .                          | 47 |
| 5.3  | Comparação de desempenho entre os métodos ML, FBLP e FBLP Modificado. . . . .                                                                 | 48 |
| 5.4  | Comparação de desempenho entre os métodos FBLP Modificado usando raízes e derivada da resposta de fase, $L = 18$ . . . . .                    | 49 |
| 5.5  | Comparação de desempenho entre os métodos FBLP Modificado usando raízes e derivada da resposta de fase, $L = 12$ . . . . .                    | 50 |
| 5.6  | Comparação de desempenho entre os métodos FBLP Modificado usando raízes e derivada da resposta de fase, $L = 8$ . . . . .                     | 50 |
| 6.1  | Diferenças no ajuste da reta $w$ pelos critérios LS ou TLS. . . . .                                                                           | 59 |
| 6.2  | O erro LS. . . . .                                                                                                                            | 59 |
| 6.3  | O erro TLS. . . . .                                                                                                                           | 59 |
| 6.4  | Uma representação do conjunto bola de matrizes $\mathcal{B}$ e da estimativa de variância mínima de $\mathbf{E}$ . . . . .                    | 63 |
| 6.5  | Conjunto bola de matrizes $\mathcal{B}$ e $\mathbf{E}_{MV}$ para vetores no plano. . . . .                                                    | 63 |
| 6.6  | Superfície de desempenho para o método TLS-FBLP (perspectiva à esquerda). . . . .                                                             | 65 |
| 6.7  | Superfície de desempenho para o método TLS-FBLP (perspectiva à direita). . .                                                                  | 65 |
| 6.8  | Superfície de desempenho para o método FBLP Modificado (perspectiva à esquerda). . . . .                                                      | 65 |

---

|      |                                                                                                          |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.9  | Superfície de desempenho para o método FBLP Modificado (perspectiva à direita). . . . .                  | 65 |
| 6.10 | Linhas de nível para a superfície de desempenho TLS-FBLP (vista de topo). . . . .                        | 66 |
| 6.11 | Linhas de nível para a superfície de desempenho TLS-FBLP (perspectiva). . . . .                          | 66 |
| 6.12 | Linhas de nível para a superfície de desempenho FBLP Modificado (vista de topo). . . . .                 | 66 |
| 6.13 | Linhas de nível para a superfície de desempenho FBLP Modificado (perspectiva). . . . .                   | 66 |
| 6.14 | Vetores na direção do gradiente para a superfície de desempenho TLS-FBLP (vista de topo). . . . .        | 67 |
| 6.15 | Vetores na direção do gradiente para a superfície de desempenho FBLP Modificado (vista de topo). . . . . | 67 |
| 6.16 | Sobreposição das curvas de desempenho TLS-FBLP. . . . .                                                  | 68 |
| 6.17 | Sobreposição das curvas de desempenho FBLP Modificado. . . . .                                           | 68 |
| 6.18 | Comparação entre os melhores desempenhos TLS-FBLP e FBLP Modificado. . . . .                             | 68 |

# Notação Adotada nas Expressões Matemáticas

|                         |                                                                 |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| FEP                     | filtro de erro de predição.                                     |
| $N$                     | número de amostras utilizadas na predição.                      |
| $L$                     | ordem de predição, número de taps do FEP.                       |
| $M$                     | número de exponenciais complexas componentes do sinal.          |
| $n$                     | posição da amostra no vetor de entrada.                         |
| $u[n]$                  | n-ésima amostra do sinal de entrada.                            |
| $y[n]$                  | n-ésima amostra do ruído branco complexo aditivo.               |
| $\sigma^2$              | variância.                                                      |
| $\epsilon$              | energia do erro de predição.                                    |
| $f_L[n]$                | erro de predição forward.                                       |
| $b_L[n]$                | erro de predição backward.                                      |
| $\mathbf{A}$            | matriz de dados de entrada do FEP.                              |
| $\mathbf{w}$            | vetor de coeficientes do FEP.                                   |
| $\mathbf{b}$            | vetor desejado, a ser predito.                                  |
| $w_i$                   | i-ésimo elemento do vetor $\mathbf{w}$ .                        |
| $\omega$                | frequência angular normalizada pela frequência de amostragem.   |
| $\omega_k$              | frequência da k-ésima exponencial complexa componente do sinal. |
| $\phi_k$                | fase da k-ésima exponencial complexa componente do sinal.       |
| $W(z)$                  | função de transferência do FEP.                                 |
| $W(e^{j\omega})$        | resposta em frequência do FEP.                                  |
| $ W(e^{j\omega}) $      | resposta de amplitude do FEP.                                   |
| $\angle W(e^{j\omega})$ | resposta de fase de FEP.                                        |

|                            |                                                                                                                          |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r$                        | amplitude de $z$ .                                                                                                       |
| $r_k$                      | amplitude do $k$ -ésimo zero $z_k$ de $W(z)$ .                                                                           |
| CRU                        | circunferência de raio unitário no plano $z$ .                                                                           |
| $\hat{\omega}_i$           | frequência angular estimada.                                                                                             |
| $num$                      | número de experimentos realizados.                                                                                       |
| $var\langle \cdot \rangle$ | variância.                                                                                                               |
| $\Phi(e^{j\omega})$        | derivada de $\angle W(e^{j\omega})$ em relação a $\omega$ .                                                              |
| $N(e^{j\omega})$           | numerador de $\Phi(e^{j\omega})$ .                                                                                       |
| $\mathbf{U}$               | matriz de vetores singulares à esquerda.                                                                                 |
| $\mathbf{V}$               | matriz de vetores singulares à direita.                                                                                  |
| $\Sigma$                   | matriz diagonal contendo os $\sigma_i$ ordenados decrescentemente.                                                       |
| $\sigma_i$                 | $i$ -ésimo valor singular.                                                                                               |
| $\mathbf{u}_i$             | $i$ -ésimo vetor singular à esquerda.                                                                                    |
| $\mathbf{v}_i$             | $i$ -ésimo vetor singular à direita.                                                                                     |
| $\mathbf{S}$               | matriz diagonal contendo os valores singulares não nulos de $\Sigma$ .                                                   |
| $\mathbf{E}$               | matriz de sinal exata que compõe $\mathbf{A}$ .                                                                          |
| $\mathbf{Y}$               | matriz de ruído aditivo branco complexo que compõe $\mathbf{A}$ .                                                        |
| $\mathbf{I}$               | matriz identidade.                                                                                                       |
| $\mathbf{C}$               | matriz diagonal contendo os cossenos dos ângulos canônicos entre os subespaços de sinal de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{A}$ . |
| $\ \cdot\ _F$              | norma de Frobenius.                                                                                                      |
| $\ \cdot\ _2$              | norma linear.                                                                                                            |
| $\lambda_i$                | $i$ -ésimo autovalor.                                                                                                    |
| SVD                        | decomposição em valores singulares (Singular Value Decomposition).                                                       |
| FBLP                       | método de predição linear forward-backward.                                                                              |
| LS                         | critério dos mínimos quadrados (Least Squares).                                                                          |
| TLS                        | critério dos mínimos quadrados totais (Total Least Squares).                                                             |
| MV                         | método da variância mínima (Minimum Variance).                                                                           |
| ML                         | método da Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood).                                                                   |
| KP                         | caso Kumaresan-Prony.                                                                                                    |
| SNR                        | relação sinal-ruído.                                                                                                     |
| $\mathbf{w}_{LS}$          | estimativa FBLP do vetor de coeficientes $\mathbf{w}$ .                                                                  |
| $\mathbf{w}_{Mod.}$        | estimativa FBLP Modificado do vetor de coeficientes $\mathbf{w}$ .                                                       |
| $\mathbf{w}_{MV}$          | estimativa MV do vetor de coeficientes $\mathbf{w}$ .                                                                    |
| $\mathbf{w}_{TLS}$         | estimativa TLS do vetor de coeficientes $\mathbf{w}$ .                                                                   |
| $\mathbf{w}_{TLMS}$        | estimativa TLS Modificado do vetor de coeficientes $\mathbf{w}$ .                                                        |

---

|                      |                                                                                                    |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{R}(\cdot)$ | espaço vetorial gerado pelas colunas de uma matriz; imagem.                                        |
| $\mathcal{L}(\cdot)$ | espaço vetorial gerado pelas linhas de uma matriz; domínio.                                        |
| $\mathcal{N}(\cdot)$ | espaço nulo de uma matriz.                                                                         |
| $\mathcal{B}$        | espaço de todas as estimativas de $\mathbf{E}$ a partir de $\mathbf{A}$ ; conjunto bola de matriz. |
| $\mathbb{R}$         | conjunto dos reais.                                                                                |
| $\mathbb{C}$         | conjunto dos complexos.                                                                            |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Cenário

O problema de detecção de sinais senoidais com frequências muito próximas corrompidos por ruído tem recebido especial atenção nos últimos anos, seja devido à sua riqueza sob o ponto de vista acadêmico, seja por sua ampla aplicabilidade às mais diversas áreas da engenharia, mantendo-se sempre como um assunto atual.

Este problema caracteriza-se como um caso de otimização não linear para as frequências e amplitudes e se torna mais crítico na medida em que se reduz o número de amostras de sinal disponíveis e se diminui a relação sinal-ruído.

Embora o melhor desempenho seja alcançado por métodos baseados em Máxima Verossimilhança, o esforço computacional proibitivo associado tem motivado a busca de soluções que aproximem esse desempenho máximo, porém mantendo a factibilidade de aplicação a problemas práticos. Este é o desafio básico ao longo deste trabalho.

Quando o sinal é isento de ruído, o método de Prony[21] permite facilmente a determinação das frequências através de três etapas: 1) a formação da equação de predição linear com o vetor de coeficientes desconhecido; 2) a solução deste sistema de equações no sentido dos mínimos quadrados (LS), caso o número de equações exceda o dobro da ordem de predição; 3) a determinação das frequências a partir das raízes da equação característica definida pelo vetor de coeficientes de predição otimizado.

Os métodos modernos de detecção de frequências baseados em predição linear são, na verdade, variantes do método de Prony desenvolvidos para combater o efeito nocivo do

ruído sobre a robustez da estimação.

Ulrich e Clayton [30] e Nuttal [17], em 1976, propuseram o método de predição linear *forward-backward* (FBLP) que utiliza um filtro de predição *forward* e outro *backward*, otimizados conjuntamente. Este método fornece melhores estimativas para as frequências do que os métodos convencionais, quando existem poucas amostras disponíveis e SNR's grandes. Entretanto, para SNR's pequenas, ele se revela muito mal condicionado.

Tufts e Kumaresan [29], em seu método de componentes principais ou FBLP Modificado, utilizaram a decomposição em valores singulares para separar a informação dos dados observados em subespaços de sinal e de ruído. Utiliza-se, então, apenas a informação do subespaço de sinal, descartando a contribuição do subespaço de ruído. Isto ocorre pela exclusão das parcelas correspondentes a esse subespaço, na recomposição da matriz de dados, obtendo-se uma matriz corrigida. A esta matriz é aplicado o método de Prony. Os autores mostraram que o seu método garante um desempenho satisfatório para valores de SNR muito menores do que os demais métodos. Porém, da mesma forma que todos os demais, o desempenho cai rapidamente para valores de SNR abaixo de um determinado limiar.

Em 1980, Golub e Van Loan [7] apresentaram o critério de otimização dos mínimos quadrados totais (TLS), que atua na minimização do erro considerando perturbações tanto no vetor desejado (como o LS) quanto na matriz de dados.

De Moor [6], em 1993, detalhou as condições para a aplicação da SVD ao problema de um sinal contaminado por ruído aditivo branco, bem como esclareceu a atuação da parcela ruidosa mesmo no subespaço de ruído. Esse trabalho, embora originalmente dedicado a recuperação de forma de onda, problema mais amplo do que o tratado aqui, lança luzes sobre a potencialidade da SVD para a detecção de frequências, a qual vinha sendo explorada apenas como ferramenta complementar até então.

## 1.2 Objetivos deste Trabalho

Neste trabalho, tomamos como base o método FBLP e buscamos aplicar técnicas adicionais na tentativa de melhorar o seu desempenho para a detecção de frequências. Neste sentido, aprofundamo-nos no estudo da SVD e dos subespaços de sinal e de ruído. Diversificando a abordagem por análise espectral, buscamos utilizar a informação de fase da resposta em frequência, na esperança de superar o desempenho da magnitude. Apresentamos também o método FBLP sob o critério de mínimos quadrados, conforme proposto por Ulrich e Clayton, e também sob o critério de mínimos quadrados totais, em uma abordagem inédita, configurando um novo método de detecção. Pelo teor comparativo deste trabalho, buscaremos enriquecê-lo com ilustrações suficientes para esclarecer as diferenças

no desempenho das diversas técnicas.

## 1.3 Rápida Visão dos Capítulos

Faremos agora uma breve *"tourn  e"* pelos principais aspectos a serem tratados aqui, tentando situar o leitor no contexto e lhe transmitir um sentimento do conteúdo de cada capítulo.

### Capítulo 2 - Detec     de Freqüências por Predi     Linear

Neste capítulo apresentamos brevemente a predi     linear como técnica para a detec     de freqüências. Desenvolvemos a estrutura de predi     *forward-backward* e demonstramos como ela pode ser empregada na determina     de freqüências de exponenciais complexas não amortecidas. Apresentamos os procedimentos para a estima     a partir da fun     de transferência ou da resposta em freqüência do filtro otimizado e finalmente introduzimos as medidas de desempenho a serem utilizadas neste documento.

### Capítulo 3 - Derivando a Fase

Aqui, lan  amo-nos ao estudo da detec     de freqüências sob a abordagem pela resposta em freqüência do filtro otimizado, analisando as respostas tanto de amplitude quanto de fase. Porém, como a resposta de amplitude tem sido amplamente explorada na literatura, partimos para o desenvolvimento de técnicas que permitem utilizar as informações contidas na resposta de fase. Chegamos a algumas conclus    es interessantes, melhorando o desempenho da abordagem por análise espectral aplicada    detec     de freqüências.

### Capítulo 4 - SVD e Subespaços

Apresentamos, inicialmente, a SVD, decomposi     em valores singulares, e definimos o que denominamos por subespaços de sinal e de ruído. A seguir, passamos a um estudo detalhado da SVD da matriz de dados  $\mathbf{A}$ , associada    descri     da predi     linear, com o intuito de excluir completamente a atua     nociva do ruído. Entretanto, verificamos que

não é possível recuperar toda a informação do sinal quando ele está corrompido por ruído aditivo. Neste sentido, delimitamos esta incerteza, definindo um conjunto de soluções do tipo bola de matriz para  $\mathbf{A}$ . No capítulo seguinte, aplicaremos estes conceitos à detecção de frequências.

## Capítulo 5 - O Método FBLP Modificado

Neste capítulo, determinamos, no sentido dos mínimos quadrados, a estimativa da matriz de dados exata. Partindo daí, definimos o método FBLP Modificado pela restrição ao subespaço de sinal, discutindo as suas características principais. Além disso, aplicamos estes conhecimentos ao espectro de derivada da fase para a detecção de frequências, o que acreditamos ser inédito, uma vez que não encontramos menção à mesma na literatura. Ao fim do capítulo, apresentamos resultados de simulações que revelaram a derivada da fase como uma técnica competitiva.

## Capítulo 6 - FBLP e Mínimos Quadrados Totais - TLS-FBLP

Até este ponto do trabalho, utilizamos a otimização do filtro de erro de predição segundo o critério dos mínimos quadrados. Outro critério mais abrangente é aquele denominado Mínimos Quadrados Totais, ou TLS - do inglês *Total Least Squares*. Este critério permite o vetor  $\mathbf{w}$  de coeficientes de predição, de uma forma mais completa, admitindo erros na matriz de dados e no vetor desejado.

Neste capítulo vamos desenvolver o TLS aplicado à predição linear *forward-backward*. Utilizaremos também este critério no sentido de definir um método FBLP segundo o critério dos mínimos quadrados totais, TLS-FBLP. Acreditamos que a associação do método FBLP com o critério TLS constitui-se em contribuição inédita dado desconharmos quaisquer outras abordagens de igual teor efetuadas por outros autores.

Apresentaremos ainda as relações entre a solução TLS e as soluções de norma mínima e de mínima variância. Finalmente, apresentamos uma comparação fina de desempenho entre os métodos TLS-FBLP e FBLP Modificado, contribuindo de maneira inédita ao detalhamento do comportamento dos métodos estudados.

## **Capítulo 7 - Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros**

Finalizamos com um balanço das conclusões e resultados obtidos nesta tese e vislumbrando as perspectivas de continuação e avanços sobre a exposição aqui efetuada, bem como enumerando algumas aplicações.

## Capítulo 2

# Detecção de Frequências por Predição Linear

### 2.1 Introdução

Um problema especialmente interessante em processamento de sinais é o de predição, onde se utiliza um conjunto de amostras de um processo estacionário para predizer o valor que será assumido pelo mesmo em algum instante futuro ou, genericamente, para extrapolar os valores do processo fora do intervalo de observação. A filtragem de Wiener aplica-se a este problema, utilizando a autocorrelação para conhecer o comportamento estatístico do sinal. Entretanto, como dispomos apenas de um conjunto finito de amostras do sinal, não conhecemos completamente a sua autocorrelação. Logo, utilizamos estimativas da mesma. Para evitar distorções na interpretação do sinal pelo filtro, restringiremos a predição ao intervalo de tempo em que o filtro encontrar-se totalmente preenchido. Isto pode dar origem a um sistema com quantidades diferentes de incógnitas e de equações. Assim, efetuaremos a otimização de um filtro de erro de predição linear segundo o critério dos mínimos quadrados, desenvolvido no contexto de predição *forward-backward*. O filtro ótimo resultante desta minimização aplica-se especificamente à estimação de sinais senoidais não amortecidos. As frequências dos sinais senoidais podem, então, ser estimadas a partir das raízes da função de transferência do filtro otimizado ou a partir dos zeros do módulo de sua resposta em frequência. Encerrando, apresentaremos gráficos que permitirão avaliar o desempenho desta abordagem para a detecção de frequências, comparando o seu desempenho ao dos métodos baseados em Máxima Verossimilhança.

## 2.2 Predição Linear Forward-Backward - FBLP

Seja um conjunto de  $N$  amostras de um dado sinal com valores complexos  $u[1], u[2], \dots, u[N]$ , observados respectivamente nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , uniformemente espaçados. Aplica-se este sinal aos filtros de erro de predição *forward* e *backward* de ordem  $L < N$ , apresentados nas figuras 2.1 e 2.2, onde  $(*)$  simboliza conjugado complexo.

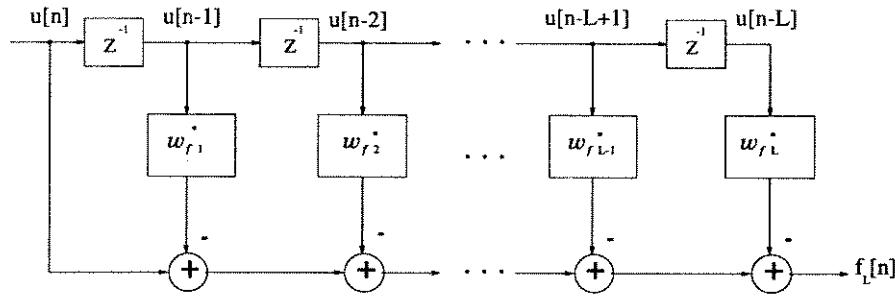


Figura 2.1: Filtro de erro de predição *forward*.

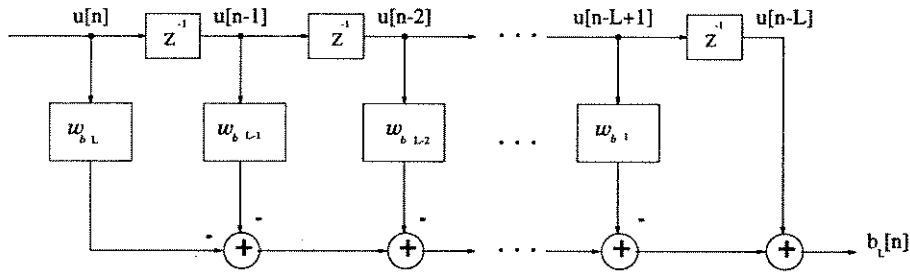


Figura 2.2: Filtro de erro de predição *backward*.

Estes filtros tentam prever uma amostra do sinal em função de uma combinação linear das demais amostras presentes no filtro. Daí o nome *Predição Linear*, sendo os filtros denominados *Filtros de Erro de Predição Linear (FEP)*, pois  $f_L[n]$  e  $b_L[n]$  representam estes erros.

O filtro *forward* procura prever a amostra de entrada  $u[n]$  a partir das amostras anteriores do sinal, enquanto que o filtro *backward* tenta estimar a amostra de saída  $u[n-L]$  a partir do conhecimento das amostras posteriores do sinal.

Os erros de predição *forward* e *backward* são obtidos por:

$$f_L[n] = u[n] - \sum_{k=1}^L w_{fk}^* \cdot u[n-k] \quad (2.1)$$

e

$$b_L[n] = u[n - L] - \sum_{k=0}^{L-1} w_{bk}^* \cdot u[n - k] \quad (2.2)$$

para  $n = L + 1, \dots, N$ .

Os vetores de coeficientes dos filtros *forward* ( $L \times 1$ ) e *backward* ( $L \times 1$ ) são definidos como:

$$\mathbf{w}_f = \begin{bmatrix} w_{f1} \\ w_{f2} \\ \vdots \\ w_{fL} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w}_b = \begin{bmatrix} w_{b(L-1)}^* \\ w_{b(L-2)}^* \\ \vdots \\ w_{b0}^* \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Nas aplicações em análise espectral e detecção de frequências, o filtro *forward* é projetado minimizando-se a energia do erro de predição *forward* produzido enquanto o filtro encontra-se totalmente preenchido por amostras de sinal:

$$\epsilon(\mathbf{w}_f) = \sum_{n=L+1}^N |f_L[n]|^2, \quad \text{para } w_{f0} = -1. \quad (2.4)$$

De forma similar, o filtro *backward* é projetado minimizando-se a energia do erro de predição *backward*:

$$\epsilon(\mathbf{w}_b) = \sum_{n=L+1}^N |b_L[n]|^2, \quad \text{para } w_{bL} = -1. \quad (2.5)$$

Combinando-se os métodos de predição linear *forward* e *backward*, obtém-se um terceiro método que utiliza melhor a informação contida nas amostras de sinal disponíveis, denominado *forward-backward* (FBLP). Nele, o critério de otimização consiste na minimização da soma das energias dos erros de predição *forward* e *backward* através do ajuste dos coeficientes dos filtros:

$$\epsilon_{fb}(\mathbf{w}_{fb}) = \epsilon_f(\mathbf{w}_f) + \epsilon_b(\mathbf{w}_b) \quad (2.6)$$

$$\epsilon_{fb}(\mathbf{w}_{fb}) = \sum_{k=L+1}^N [|f_L[k]|^2 + |b_L[k]|^2] \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{w}_{fb}$  é o vetor de coeficientes *forward-backward* ( $L \times 1$ ).

Embora as soluções  $\mathbf{w}_f$  e  $\mathbf{w}_b$  sejam normalmente distintas quando  $N$  é finito, no método FBLP a igualdade é assumida como restrição para a otimização. Se não impusermos a igualdade entre  $\mathbf{w}_f$  e  $\mathbf{w}_b$  para  $N$  finito, obteremos erros com características distintas, pois cada filtro trata com um conjunto distinto de amostras na geração do vetor de erro. Assim, teríamos vetores de coeficientes ótimos diferentes. Isto levaria a questionarmos qual deles deveria ser utilizado, uma vez que são resultantes da mesma minimização. Para evitar tal

ambiguidade é que se assume a igualdade dos  $\mathbf{w}$ . A otimização conjunta dos filtros com a restrição  $\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_b$  permite atingir um único vetor ótimo e fornece, em geral, melhores resultados na análise espectral e detecção de frequências [1][30][17].

Adicionalmente a essas justificativas, a restrição que impusemos é satisfeita assintoticamente com  $N$ , justificando a sua utilização. Isto é demonstrado pelos argumentos a seguir.

Analisando as equações normais *forward* e *backward*, verificamos que [1]:

a) No caso *forward*:

$$\mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{w}_f = \mathbf{A}_f^H \cdot \mathbf{b}_f \quad (2.8)$$

ou

$$\hat{\mathbf{R}}_f \cdot \mathbf{w}_f = \hat{\mathbf{r}}_f \quad (2.9)$$

b) no caso *backward*:

$$\mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{w}_b = \mathbf{A}_b^H \cdot \mathbf{b}_b \quad (2.10)$$

ou

$$\hat{\mathbf{R}}_b \cdot \mathbf{w}_b = \hat{\mathbf{r}}_b \quad (2.11)$$

onde:

- $(\hat{\phantom{x}})$  indica estimação polarizada [9] e  $(^H)$  conjugado transposto.
- $\mathbf{A}_f$  e  $\mathbf{A}_b$  são, respectivamente, as matrizes de dados *forward* e *backward*  $((N-L) \times L)$ .

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} u^*[L] & u^*[L-1] & \cdots & u^*[1] \\ u^*[L+1] & u^*[L] & \cdots & u^*[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^*[N-1] & u^*[N-2] & \cdots & u^*[N-L] \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} u[2] & u[3] & \cdots & u[L+1] \\ u[3] & u[4] & \cdots & u[L+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[N-L+1] & u[N-L+2] & \cdots & u[N] \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

- $\mathbf{b}_f$  e  $\mathbf{b}_b$  são, respectivamente, os vetores desejados *forward* e *backward*  $((N-L) \times 1)$ .

$$\mathbf{b}_f = \begin{bmatrix} u^*[L+1] \\ u^*[L+2] \\ \vdots \\ u^*[N] \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{b}_b = \begin{bmatrix} u[1] \\ u[2] \\ \vdots \\ u[N-L] \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

- $\hat{\mathbf{R}}_f$  e  $\hat{\mathbf{R}}_b$  são, respectivamente, as matrizes de correlação estimadas *forward* e *backward*.
- $\hat{\mathbf{r}}_f$  e  $\hat{\mathbf{r}}_b$  são, respectivamente, os vetores de correlação estimados *forward* e *backward*.

Admitindo ergodicidade, quando  $N \rightarrow \infty$  obtemos [9]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_f &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{r}}_f \rightarrow \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{R}}_b &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{r}}_b \rightarrow \mathbf{r}\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{w}_f = \mathbf{r} \quad (2.15)$$

e

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{w}_b = \mathbf{r} \quad (2.16)$$

Logo

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_b = \mathbf{w} \quad (2.17)$$

ou seja, para  $(\cdot)^T$  simbolizando transposto:

$$[w_{f1} \ w_{f2} \ \cdots \ w_{fL}]^T = [w_{b(L-1)}^* \ w_{b(L-2)}^* \ \cdots \ w_{b0}^*]^T \quad (2.18)$$

Verificamos, então, que, assintoticamente, os filtros apresentarão coeficientes simétricos conjugados e os erros produzidos apresentarão as mesmas características estatísticas. Logo, sob este critério, os filtros são semelhantes.

A minimização da soma das energias dos erros de predição fica expressa como:

$$\frac{\partial \epsilon_f(\mathbf{w}_f)}{\partial \mathbf{w}_f} + \frac{\partial \epsilon_b(\mathbf{w}_b)}{\partial \mathbf{w}_b} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}-2\mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f + 2\mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_f - 2\mathbf{A}_b^H \mathbf{b}_b + 2\mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w}_b &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_f + \mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w}_b &= \mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f + \mathbf{A}_b^H \mathbf{b}_b \\ \mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w} + \mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w} &= \mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f + \mathbf{A}_b^H \mathbf{b}_b \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f^H : \mathbf{A}_b^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f \\ \cdots \\ \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f^H : \mathbf{A}_b^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \cdots \\ \mathbf{b}_b \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{A}$  é  $2(N - L) \times L$ , definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f \\ \cdots \\ \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

e  $\mathbf{b}$  é  $2(N - L) \times 1$ , definido como:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \dots \\ \mathbf{b}_b \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

É demonstrado em [1] que a solução  $\mathbf{w}$  da equação normal FBLP (2.20) é dada, no sentido dos mínimos quadrados, por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b}. \quad (2.23)$$

onde o símbolo ( $\#$ ) significa a aplicação de pseudo-inversa [9][1], a qual será definida no capítulo 4.

## 2.3 O Método FBLP para Detecção de Frequências

Definamos agora o sinal de entrada  $u[n]$  composto por  $M$  exponenciais complexas, inicialmente isento de ruído, da forma:

$$u[n] \triangleq \sum_{k=1}^M a_k \cdot \exp[j(\omega_k \cdot n + \phi_k)], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

onde:

- $a_k$  são as amplitudes das exponenciais.
- $\omega_k$  são as frequências das exponenciais;  $\omega_k = 2\pi f_k$ , e  $f_k$  é a frequência normalizada em relação à frequência de amostragem.
- $\phi_k$  são as fases das exponenciais.

### 2.3.1 A Função de Transferência do Filtro FBLP

Aplicando o procedimento FBLP a  $u[n]$ , obtemos um vetor de coeficientes  $\mathbf{w}$  que define um polinômio  $W(z)$  de ordem  $L$  da forma:

$$W(z) = 1 - w_1^* z^{-1} - w_2^* z^{-2} - \dots - w_L^* z^{-L} \quad (2.25)$$

**Teorema 2.1:** Se  $L$  satisfaz a desigualdade  $M \leq L \leq (N - M/2)$ , e se  $\mathbf{w}$  satisfaz  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{b}$ , então  $W(z)$  tem  $M$  de seus zeros na circunferência de raio unitário (CRU) em  $z = \exp[j\omega_k]$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Caso  $(M/2)$  seja racional, este valor é arredondado para o maior inteiro mais próximo.

**Teorema 2.2:** Os  $(L - M)$  zeros restantes de  $W(z)$  localizam-se no interior da CRU, se o vetor  $\mathbf{w}$  é de norma mínima.

As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [1].

Estas afirmações podem ser verificadas na figura 2.3 a seguir, referente ao caso em que  $M = 2$ ,  $L = 24$ ,  $N = 25$  amostras e as amplitudes e freqüências são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.0, \quad \omega_1 = (1,00)\pi \quad \text{e} \quad \phi_1 = (-1,00)\pi. \\ a_2 &= 1.0, \quad \omega_2 = (1,04)\pi \quad \text{e} \quad \phi_2 = (-0,79)\pi. \end{aligned}$$

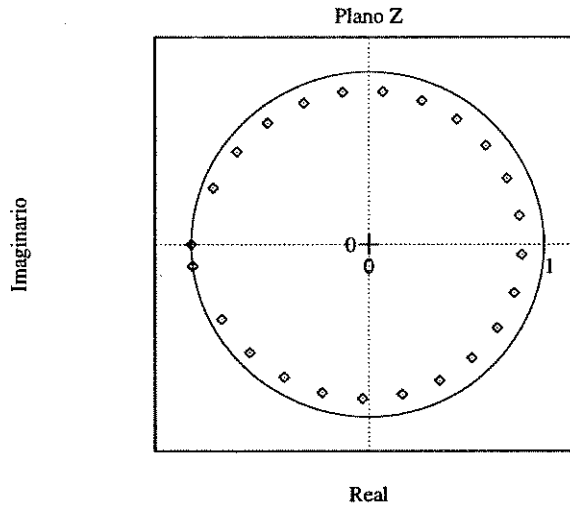


Figura 2.3: Zeros da função de transferência,  $L = 24$ ,  $\text{SNR} = \infty$ .

Os zeros de  $W(z)$  que se posicionam sobre a CRU, são denominados *zeros de sinal*, enquanto os demais são os *zeros estranhos*. Dado que os zeros de sinal distinguem-se dos zeros estranhos e indicam os valores dos  $\omega_k$  através de sua posição angular, concluímos que o método FBLP permite detectar as  $M$  freqüências de  $u[n]$ . Porém, tal método aplica-se somente à detecção de exponenciais não amortecidas.

### 2.3.2 A Resposta em Frequência do Filtro FBLP

Uma vez que os zeros de sinal se posicionam mais próximos da CRU do que os zeros estranhos, em princípio podemos usar a resposta em frequência como forma alternativa para estimar as exponenciais complexas não amortecidas que compõem o sinal. A resposta em frequência do filtro FBLP é obtida a partir de  $W(z)$  quando  $z = e^{j\omega}$  e pode ser separada em amplitude e fase:

$$W(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|e^{j\angle W(e^{j\omega})}. \quad (2.26)$$

As figuras 2.4 e 2.5 apresentam estas respostas para as mesmas condições da figura 2.3:

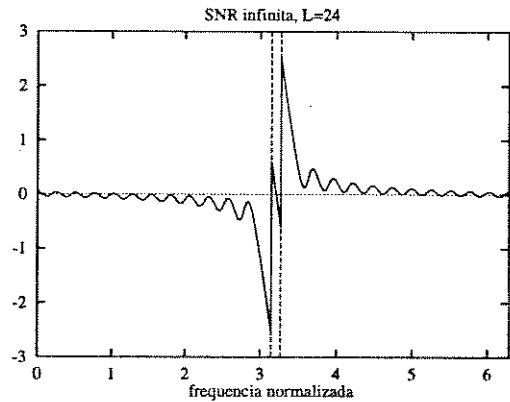
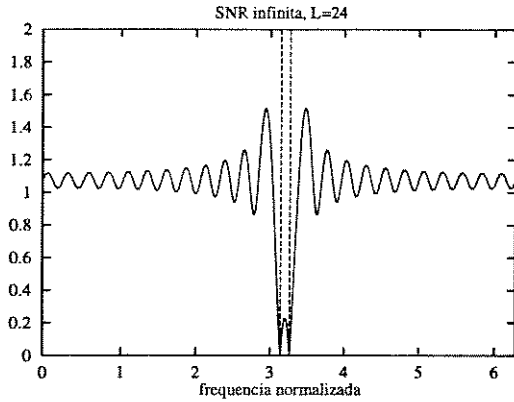


Figura 2.4: Amplitude da resposta em frequência.

Figura 2.5: Fase da resposta em frequência (em radianos).

$|W(e^{j\omega})|$  apresenta vales profundos nas posições das frequências  $\omega_k$ , permitindo que estas sejam estimadas. Porém, invertendo este espectro, encontramos a resposta de amplitude do filtro inverso. Isto faz com que, onde havia vales, surjam picos espectrais agudos de grande amplitude, facilitando a estimação dos  $\omega_k$ 's.

Observando a resposta de fase,  $\angle W(e^{j\omega})$ , verificamos que a curva apresenta variações bruscas, cruzando por zero nas posições de frequência  $\omega_k$ . Estas informações poderiam ser utilizadas para a estimação destes parâmetros, entretanto é pela intensidade da derivada da fase que podemos distinguir os cruzamentos espúrios por zero daqueles referentes aos  $\omega_k$ 's. Assim, vamos utilizar adiante a derivada da resposta de fase como base para a formulação de estimativas.

## 2.4 O Caso Ruidoso

Redefinamos o sinal  $u[n]$ , agora considerando-o corrompido pela inserção de ruído aditivo:

$$u[n] \triangleq \sum_{k=1}^M a_k \cdot \exp[j(\omega_k \cdot n + \phi_k)] + y[n], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.27)$$

onde  $y[n]$  é um ruído branco complexo com variâncias  $\sigma_{yr}^2 = \sigma_{yi}^2$ .

A relação sinal-ruído para cada exponencial complexa é definida como:

$$SNR \triangleq 10 \cdot \log \left( \frac{a_k^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2.28)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância da parte real ou da parte imaginária de  $y$ .

Enquanto que no caso sem ruído temos  $\text{posto}(\mathbf{A}) = M$ , agora, o  $\text{posto}(\mathbf{A}) = \min[2(N-L), L]$  e os teoremas 2.1 e 2.2 não mais se verificam. A distribuição espacial dos zeros de sinal e dos zeros estranhos de  $W(z)$  já não apresenta mais a mesma simetria anterior. Isto pode ser observado na figura 2.6 que se refere ao mesmo sinal da figura 2.3, mas agora com uma SNR de 10 dB para cada exponencial complexa.

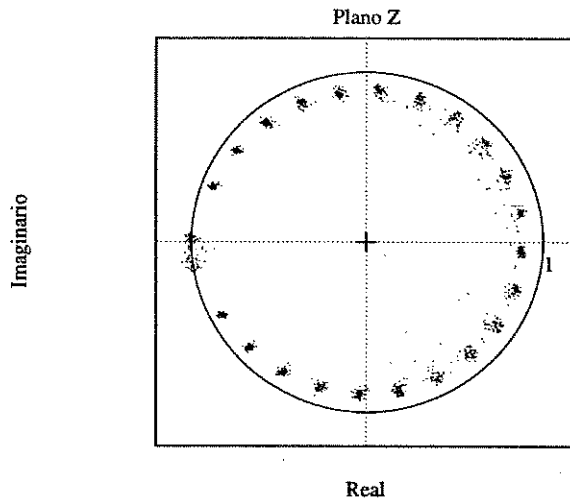


Figura 2.6: Zeros da função de transferência,  $L = 24$ , SNR = 10dB.

Esta figura apresenta a superposição dos resultados de 50 experimentos, onde a cada um mantemos o mesmo sinal, porém alteramos o ruído. O objetivo é evidenciar a variância do posicionamento dos zeros produzida pelo ruído.

Em [1] verifica-se que, sob a influência de ruído, o vetor de coeficientes  $w$  define uma função  $W(z)$  tal que:

- $M$  de seus zeros posicionam-se aleatoriamente na vizinhança dos zeros de sinal e tanto mais próximos dos mesmos quanto maior a relação sinal-ruído (SNR).
- Os  $(L - M)$  zeros restantes posicionam-se aleatoriamente ao longo da vizinhança da CRU, podendo eventualmente se posicionar sobre ou mesmo fora dela.
- A variância das estimativas dos zeros de sinal e dos zeros estranhos depende da relação entre o número de amostras disponíveis e a ordem da predição ( $N$  e  $L$ , respectivamente) e cresce com a redução da SNR.

De modo geral, a estratégia de identificação dos zeros de sinal consiste em associá-los aos  $M$  zeros mais próximos da CRU. O ruído insere uma aleatoriedade na abordagem anterior, prejudicando a estimação dos  $\omega_k$ 's através dos zeros de sinal e pode dar margem a estimativas drasticamente erradas. Apenas quando a SNR assume valores elevados é que os zeros de  $W(z)$  fornecem boas estimativas para os  $\omega_k$ 's, pois neste caso a situação é mais próxima daquela sem ruído e observações quanto a  $W(z)$  tornam-se válidas de forma aproximada.

À medida que a SNR decresce, as flutuações dos zeros de sinal ao redor de suas posições ideais produzem erros com variância crescente nas estimativas. Este comportamento altera-se drasticamente para SNR's abaixo de um determinado limiar, uma vez que a influência do ruído faz com que os zeros estranhos possam se posicionar mais próximos da CRU do que os zeros de sinal. Quando tal ocorre, um zero estranho é tomado como estimador de frequência e um grande erro é cometido. O desempenho do método degrada rapidamente dando origem ao fenômeno denominado *efeito de limiar*. A seguir apresentamos uma abordagem quantitativa da degradação da estimação sob diversas SNR's e ordens de predição  $L$ . Para tanto, conforme [29], definimos a medida de desempenho:

$$var\langle \hat{f}_1 \rangle \triangleq \frac{1}{num} \sum_{k=1}^{num} \left( \frac{\hat{\omega}_{1k} - \omega_1}{2\pi} \right)^2 \quad (2.29)$$

onde:

- $num$  é o número de experimentos realizados (utilizamos  $num = 500$ ).
- $\hat{\omega}_{1k}$  é a estimativa de  $\omega_1$  do  $k$ -ésimo experimento.

Utilizamos como referência, entretanto, o valor  $10 \cdot \log(1/var\langle \hat{f}_1 \rangle)$ , para obtermos maior sensibilidade a pequenas flutuações da variância através do logaritmo. Este valor é traçado em função da SNR [dB]. O limite inferior para a variância de um estimador

não polarizado é conhecido como *limite inferior de Cramér-Rao* [31][25] e é apresentado juntamente com as curvas de desempenho FBLP na figura 2.7 para as ordens  $L = 8$ , 12 e 24. Esta figura apresenta ainda a curva de desempenho do método de Máxima Verossimilhança [1] para efeito de comparação.

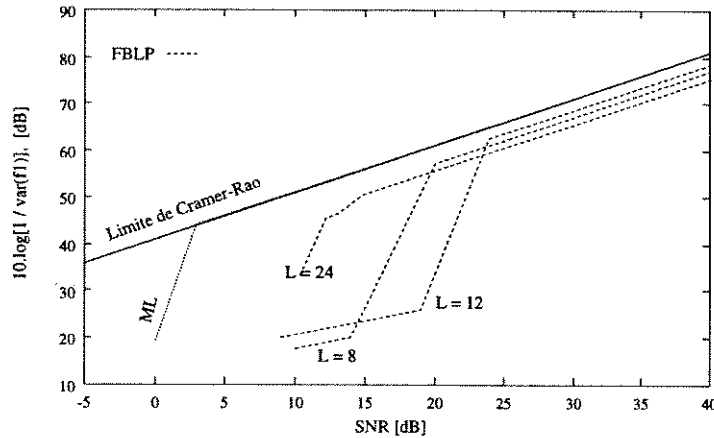


Figura 2.7: Comparação de desempenho entre os métodos ML e FBLP.

Podemos verificar a degradação contínua do desempenho à medida em que a SNR decresce, correspondente ao aumento das flutuações dos zeros de sinal em torno de suas posições ideais e conseqüente aumento da imprecisão das estimativas. Isto se verifica até o surgimento do efeito de *limiar*, identificado por uma mudança brusca da inclinação das curvas de desempenho. Estes limiares ocorrem para diferentes SNR's conforme a ordem de estimação adotada. Pode ser observado que o menor valor de limiar ocorre para  $L = 24$ , correspondendo a uma SNR de cerca de 12 dB. Observamos também que, mesmo acima do limiar, embora o desempenho do método FBLP se mostre inferior ao da Máxima Verossimilhança (ML), seu comportamento acompanha o limite de Cramér-Rao.

Estimar  $\omega_k$  através dos zeros mais próximos da CRU é equivalente a estimar através dos picos de maior amplitude da resposta  $1/|W(e^{j\omega})|$ . Entretanto, a variância das estimativas dos zeros se traduz em variância das amplitudes e posições dos picos espectrais. A possibilidade do aparecimento de zeros estranhos mais próximos da CRU do que os zeros de sinal faz com que possam existir picos espectrais maiores do que aqueles relativos aos zeros de sinal. Denominamos tais picos maiores de *picos espúrios*, em contraste com os *picos de sinal*. Portanto, aqui também se verifica o comportamento descrito anteriormente para o desempenho das estimativas em função da relação sinal-ruído, inclusive com o surgimento do efeito de limiar.

Essas características serão analisadas com maiores detalhes no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Derivando a Fase

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior verificamos que podemos estimar as frequências das exponenciais complexas, seja pela extração dos zeros da função de transferência do filtro de erro de predição otimizado, seja através dos picos da resposta de amplitude inversa ( $1/|W(e^{j\omega})|$ ) ou dos cruzamentos por zero da resposta de fase. Isto é possível pois quanto mais próxima uma raiz estiver da CRU, maior e mais agudo será o pico correspondente na resposta de amplitude inversa e, também, mais brusca será a respectiva transição por zero da resposta de fase. Uma vez que a detecção de frequências pela resposta de amplitude inversa envolve procedimentos simples como o cálculo da transformada de Fourier da sequência formada pelo vetor de coeficientes  $\mathbf{w}$  e a inversão do espectro do módulo da mesma, já tratados no capítulo anterior, iniciamos este capítulo com a resposta de fase, tradicionalmente menos explorado que a amplitude inversa.

A detecção de frequências pela resposta de fase exige a observação da intensidade de suas variações no eixo das frequências. Assim, somos impulsionados a estudar a derivada da resposta de fase no sentido de explorar melhor as informações contidas no seu espectro.

Neste capítulo vamos definir a derivada da resposta de fase e também explicitar a sua relação com a resposta de amplitude inversa. Além disso, faremos uma comparação entre a estimação de frequências pela detecção de picos na resposta de amplitude inversa e na derivada da resposta de fase, avaliando também os efeitos do ruído sobre os espectros. Ao final do capítulo, apresentamos os desempenhos das duas abordagens de análise espectral comparados ao obtido pela extração de zeros da função de transferência.

### 3.2 O Espectro da Derivada da Fase como Técnica para Detecção de Frequências

As transições da resposta de fase ocorrem nas mesmas posições de frequência dos picos no espectro  $1/|W(e^{j\omega})|$  e são tão mais abruptas quanto mais agudos os picos espectrais correspondentes [18], ou seja, são tão mais abruptas quanto mais próximo da CRU estiver o zero responsável pelo pico de amplitude.

No espectro do valor absoluto da variação da fase em relação a  $\omega$ , temos picos espectrais nas posições de frequência relativas às transições da fase. Estes picos são tão maiores quanto mais intensas as respectivas transições. Portanto, os picos no valor absoluto da derivada da resposta de fase ocorrem nas mesmas posições de frequência que os picos da amplitude, crescendo em amplitude à medida em que o zero correspondente se aproxima da CRU. A presença de ruído prejudica a estimação através do espectro da derivada da resposta de fase na medida em que algum pico espúrio na resposta de  $1/|W(e^{j\omega})|$  pode se tornar mais agudo do que um pico de sinal. Entretanto, um pico espúrio de grande amplitude na resposta de amplitude inversa, porém mais largo, deve aparecer mais atenuado no espectro da derivada da resposta de fase. Assim, percebemos no espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase uma tendência a corrigir os efeitos nocivos do ruído.

Vamos obter, originalmente, a forma analítica para o espectro da derivada da resposta de fase, visando realizar uma análise comparativa entre os mecanismos apresentados para a estimação dos  $\omega_k$ 's. Rescrevendo  $W(z)$  em função de seus zeros, resulta em:

$$W(z) = \prod_{k=1}^L (1 - z_k z^{-1}) \quad (3.1)$$

que facilita o acesso aos zeros  $z_k$  do sistema.

Expressando  $z$  e  $z_k$  na forma polar,  $z = re^{j\omega}$  e  $z_k = r_k e^{j\omega_k}$ , a equação (3.1) torna-se:

$$W(re^{j\omega}) = \prod_{k=1}^L \left( 1 - \frac{r_k}{r} e^{-j(\omega - \omega_k)} \right) \quad (3.2)$$

Para separar  $W(re^{j\omega})$  em módulo e fase temos que expandir a equação (3.2) na forma retangular:

$$W(re^{j\omega}) = \prod_{k=1}^L \left\{ \left[ 1 - \frac{r_k}{r} \cos(\omega - \omega_k) \right] + j \left[ \frac{r_k}{r} \sin(\omega - \omega_k) \right] \right\} \quad (3.3)$$

daí:

$$W(re^{j\omega}) = \left\{ \prod_{k=1}^L \left[ \left(1 - \frac{r_k}{r} \cos(\omega - \omega_k)\right)^2 + \left(\frac{r_k}{r} \sin(\omega - \omega_k)\right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} e^{j \left\{ \sum_{k=1}^L \arctg \left[ \frac{\frac{r_k}{r} \sin(\omega - \omega_k)}{1 - \frac{r_k}{r} \cos(\omega - \omega_k)} \right] \right\}} \quad (3.4)$$

Restringindo a análise à CRU, resulta em:

$$|W(e^{j\omega})| = \left\{ \prod_{k=1}^L [1 + r_k^2 - 2r_k \cos(\omega - \omega_k)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

e

$$\angle W(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^L \left\{ \arctg \left[ \frac{r_k \sin(\omega - \omega_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \omega_k)} \right] \right\} \quad (3.6)$$

Definindo  $\Phi(e^{j\omega})$  como:

$$\Phi(e^{j\omega}) \triangleq - \frac{d}{d\omega} [\angle W(e^{j\omega})] \quad (3.7)$$

$$\Phi(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^L \left\{ \frac{r_k [r_k - \cos(\omega - \omega_k)]}{[1 + r_k^2 - 2r_k \cos(\omega - \omega_k)]} \right\} \quad (3.8)$$

Resolvendo o somatório, tem-se:

$$\Phi(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=1}^L \{r_k [r_k - \cos(\omega - \omega_k)] \prod_{i=1, i \neq k}^L [1 + r_i^2 - 2r_i \cos(\omega - \omega_i)]\}}{\prod_{k=1}^L \{[1 + r_k^2 - 2r_k \cos(\omega - \omega_k)]\}} \quad (3.9)$$

Definindo o numerador de (3.9) como  $N(e^{j\omega})$  e substituindo o denominador de (3.9) por  $|W(e^{j\omega})|^2$ , resulta:

$$\Phi(e^{j\omega}) = \frac{1}{|W(e^{j\omega})|^2} \cdot N(e^{j\omega}) \quad (3.10)$$

Portanto, os picos de  $\Phi(e^{j\omega})$  são aqueles de  $1/|W(e^{j\omega})|^2$  modificados pelo numerador  $N(e^{j\omega})$  como pode ser observado nas figuras 3.1 e 3.2, referentes à mesma situação de sinal e ruído da figura 2.6.

Por uma questão de simplicidade, usamos o espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase para a detecção de frequências,  $|\Phi(e^{j\omega})|$ .

Buscando esmiuçar ainda mais a análise pela resposta de fase, verificamos que a curva de fase, na ausência de ruído, apresenta descontinuidades nas posições de frequência  $\omega_k$ , não sendo derivável nestes pontos. Isto pode ser verificado aplicando o limite à expressão (3.6) para  $r_k = 1$  e  $\omega \rightarrow \omega_k$ , onde o limite à direita resulta em  $\pi/2$ , enquanto o limite à esquerda em  $-\pi/2$ . Restringimo-nos, portanto, a afirmar que a derivada da resposta de fase pode ser utilizada como ferramenta para detecção de frequências, como pôde ser constatado experimentalmente e pode ser verificado nas figuras 3.1 e 3.2.

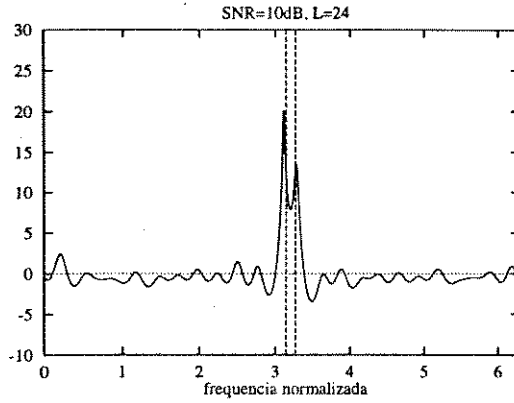


Figura 3.1: Espectro do logaritmo da amplitude (dB).

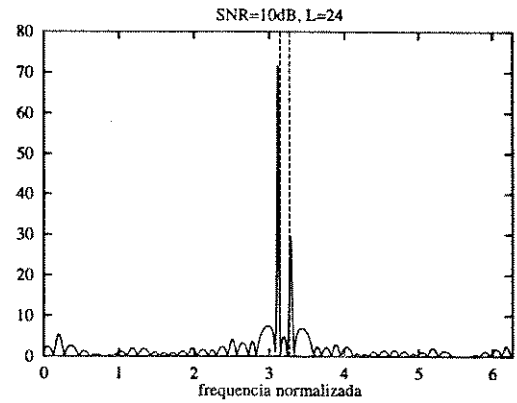


Figura 3.2: Espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase (fase em radianos).

### 3.3 Comparação entre os Espectros de Magnitude e de Derivada da Fase

A avaliação aqui realizada restringe-se inicialmente a uma análise qualitativa, observando dois aspectos de maior relevância: resolução espectral e efeito de limiar. Nas simulações aqui apresentadas, foram utilizadas  $N = 25$  amostras do sinal definido por (2.27), com  $M = 2$ , sob uma SNR de 10dB e com as mesmas frequências e amplitudes anteriormente utilizadas.

Submetendo tal sinal à predição linear *forward-backward* de ordem  $L = 12$  e 24, podem ser observadas algumas características comportamentais dos espectros de amplitude inversa e valor absoluto da derivada da resposta de fase.

#### 3.3.1 Resolução

Nossas simulações mostraram que a resposta de amplitude inversa apresentou menor capacidade de discernimento entre as duas frequências próximas do que a derivada da resposta de fase. Como exemplo, podemos observar nas figuras 3.3 e 3.4, que a derivada da resposta de fase identificou as duas frequências em situações onde o módulo espectral apresentou um único pico na região correspondente às mesmas.

A melhor resolução verificada na derivada da resposta de fase é devida à influência do

polinômio do numerador  $N(e^{j\omega})$  (figura 3.5). A presença de  $N(e^{j\omega})$  produz um "seccionamento" do pico único, situado entre as frequências desejadas, em dois picos próximos, reduzindo o erro de estimação conforme se pode constatar na figura 3.4.

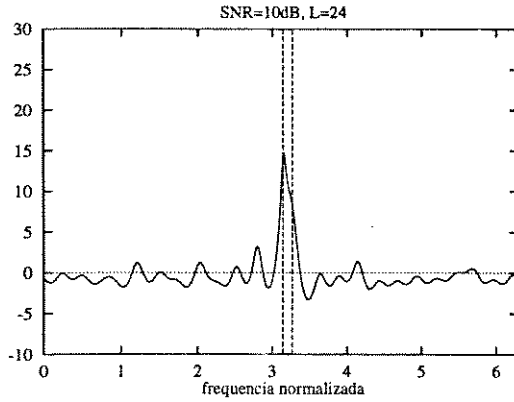


Figura 3.3: Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB).

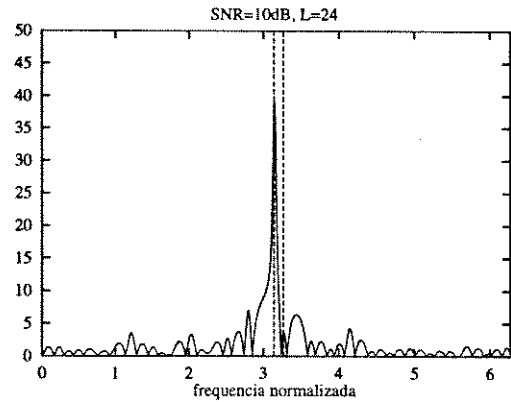


Figura 3.4: Espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase (fase em radianos).

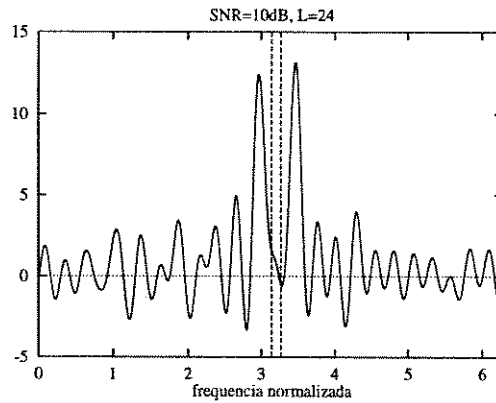


Figura 3.5: Espectro do numerador da derivada da resposta de fase (fase em radianos).

### 3.3.2 Efeito de Limiar

Recordando, o efeito de limiar ocorre à medida que a SNR decresce e surgem zeros estranhos mais próximos da CRU do que os zeros de sinal. Neste caso, as estimativas dos  $\omega_k$ 's apresentam grandes erros resultantes da escolha de um zero estranho como indicador da posição da frequência do sinal.

Este efeito de limiar também ocorre quando da estimação através das amplitudes dos picos espectrais de  $1/|W(e^{j\omega})|$ , uma vez que podem surgir picos estranhos mais pronunciados do que os picos de sinal. Porém, existe agora um outro mecanismo para a geração do efeito de limiar: a falta de resolução espectral. Observando a figura 3.3, notamos que a presença de um único pico espectral na região das frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , faz com que um pico espúrio seja tomado como estimativa de  $\omega_2$ , produzindo um erro de grandes proporções.

Concluimos que o efeito de limiar, no caso da detecção através dos espectros, é produzido por dois mecanismos: picos estranhos mais pronunciados e falta de resolução espectral.

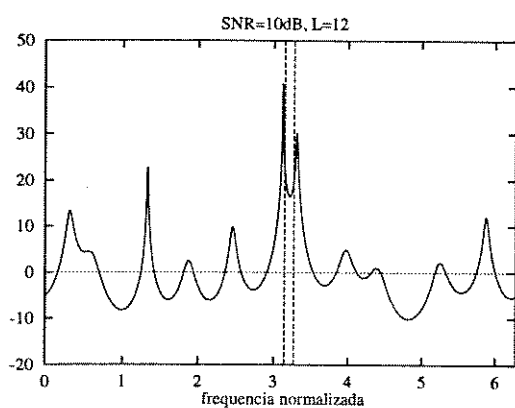


Figura 3.6: Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB).

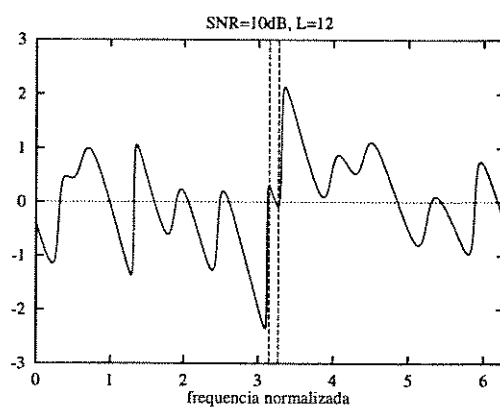


Figura 3.7: Espectro de fase (em radianos).

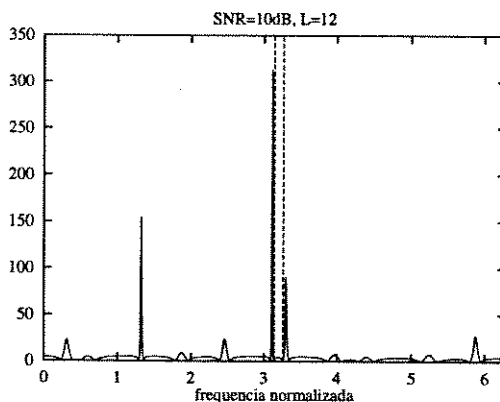


Figura 3.8: Espectro da derivada da resposta de fase (fase em radianos).

A derivada da resposta de fase também apresentou experimentalmente a ocorrência de

picos espúrios de grande amplitude no seu espectro, como pode ser visto nas figuras 3.4 e 3.8. Estes picos podem ser confundidos com os principais, levando ao efeito de limiar na detecção das frequências.

O surgimento de picos espúrios de grande amplitude na derivada da resposta de fase explica-se pelo fato de ser resultante de uma diferenciação. Logo, suas amplitudes serão tão maiores quanto mais bruscas as transições na fase (ver figura 3.7). Estas, por sua vez, acompanham as posições espectrais dos picos da amplitude (ver figuras 3.6 e 3.8), sendo tão mais abruptas quanto mais agudos os respectivos picos na resposta de amplitude inversa. Em contrapartida, podemos afirmar que picos espúrios largos da resposta de amplitude inversa são atenuados na resposta de  $|\Phi(e^{j\omega})|$ , reduzindo o seu efeito nocivo sobre a detecção.

Paralelamente, a estimação com base no espectro da derivada da resposta de fase pode também apresentar o efeito de limiar provocado pela falta de resolução, a qual está vinculada fortemente à ordem de predição empregada e à relação sinal-ruído.

### 3.3.3 Concluindo sobre os Espectros

Finalmente, vamos agora apresentar um paralelo entre os espectros estudados para os casos sem e com ruído. As frequências e amplitudes utilizadas foram as mesmas já adotadas anteriormente, bem como os parâmetros  $M$ ,  $L$  e  $N$ . Comparando as figuras 3.9 e 3.10, 3.11 e 3.12, 3.13 e 3.14, podemos constatar a degradação produzida pelo ruído, tendendo a reduzir o contraste entre os picos, bem como entre as transições da fase.

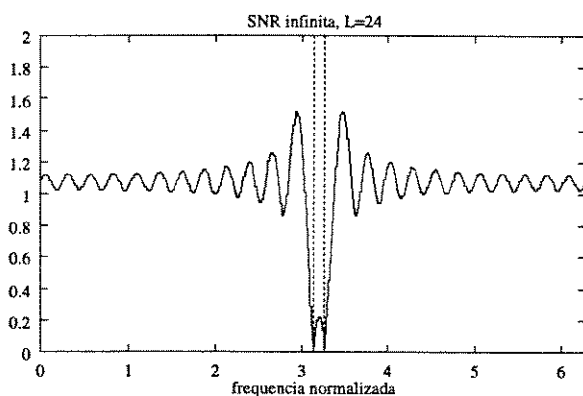


Figura 3.9: Amplitude da resposta em frequência (sem ruído).

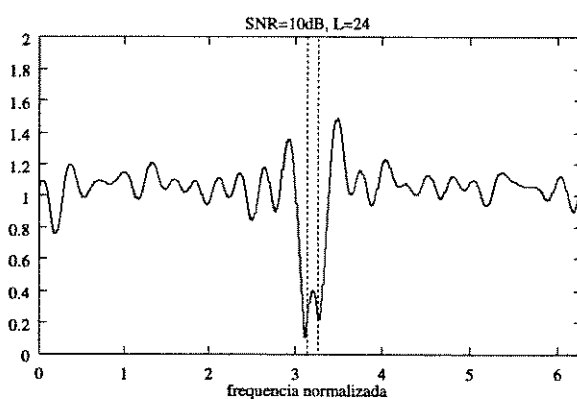


Figura 3.10: Amplitude da resposta em frequência (com ruído).

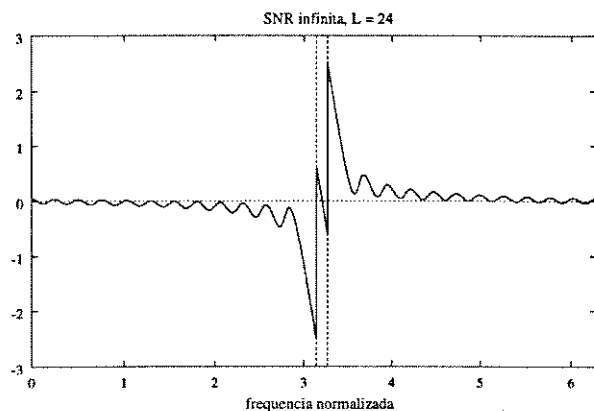


Figura 3.11: Fase da resposta em frequência (em radianos) (sem ruído).

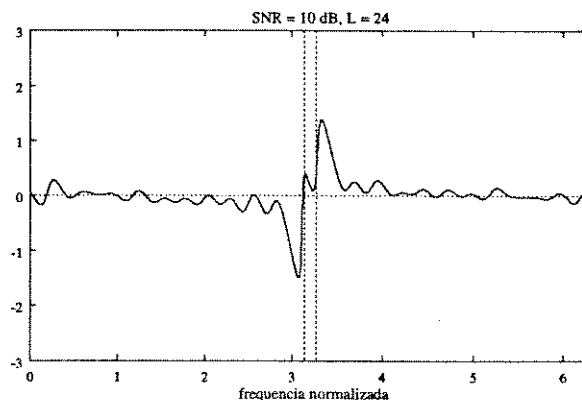


Figura 3.12: Fase da resposta em frequência (em radianos) (com ruído).

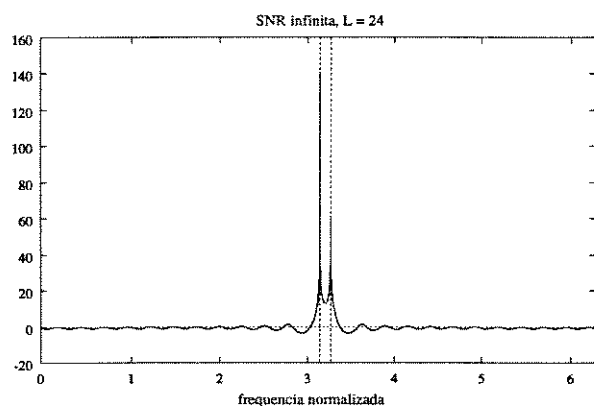


Figura 3.13: Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB) (sem ruído).

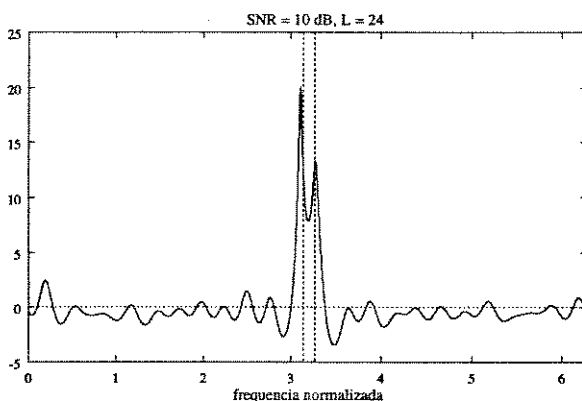


Figura 3.14: Espectro do logaritmo da amplitude inversa (dB) (com ruído).

Constatamos também que a espectro de numerador (figura 3.15 e 3.16) tem zeros nas posições dos picos principais da amplitude inversa (figura 3.13 e 3.14), mas que na derivada da resposta de fase, gerado pelo produto dos dois espectros anteriores, os picos não são cancelados (figura 3.17 e 3.18). Isto confirma a ocorrência de um valor infinito para a derivada na considerada transição por zero da resposta de fase.

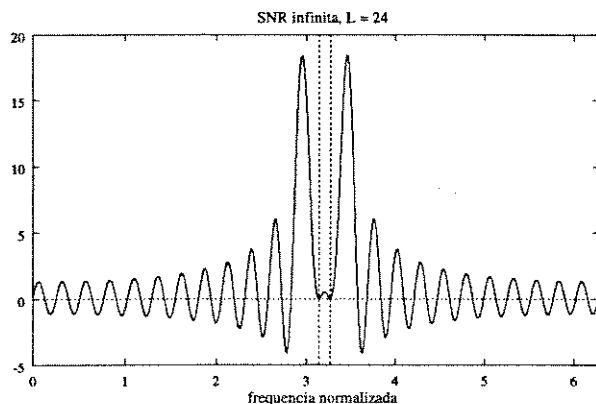


Figura 3.15: Espectro do numerador (sem ruído).

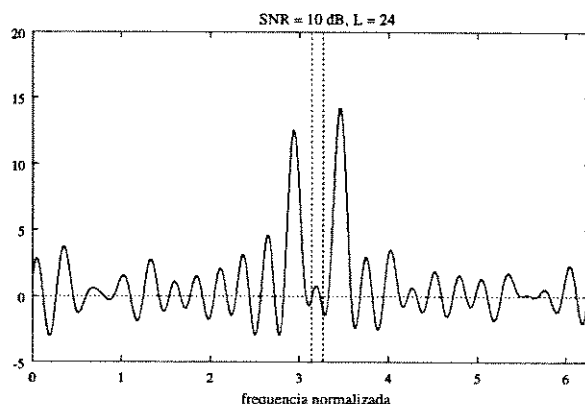


Figura 3.16: Espectro do numerador (com ruído).

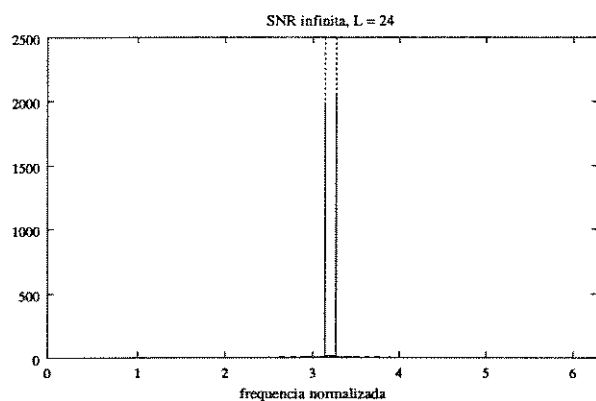


Figura 3.17: Espectro da derivada da resposta de fase (sem ruído).

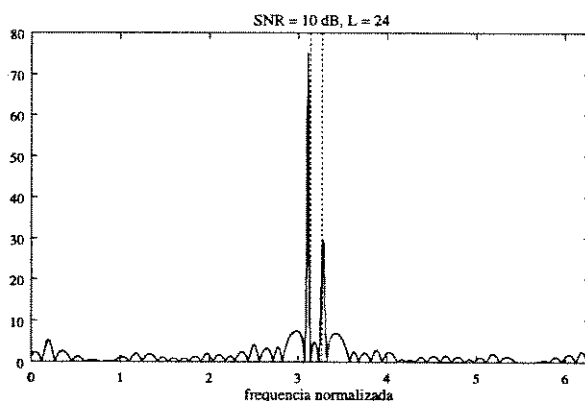


Figura 3.18: Espectro da derivada da resposta de fase (com ruído).

### 3.4 Desempenhos dos Espectros de Magnitude e de Derivada da Fase

A análise qualitativa anterior não permitiu observar alguma vantagem decisiva para qualquer das alternativas para a detecção. Resta então uma análise comparativa quantitativa, elaborada a seguir. A figura 3.19 apresenta os desempenhos do método FBLP

segundo a resposta de amplitude inversa e derivada da resposta de fase comparados àquele obtido sob a abordagem por extração de zeros para  $L = 24$ , o melhor caso, após a realização de 500 experimentos.

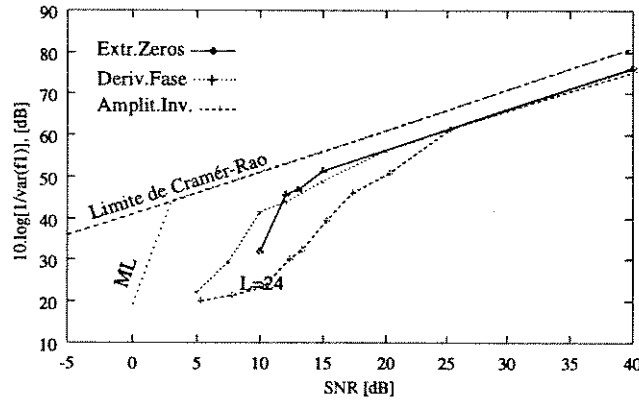


Figura 3.19: Desempenho do método FBLP com detecção pela resposta de amplitude inversa, pela derivada da resposta de fase e por extração de zeros.

Observamos que o desempenho da resposta de amplitude inversa, ao contrário do que intuitivamente se poderia pensar, ficou bem aquém da extração de zeros.

Podemos observar que, de fato, o desempenho da detecção de frequências pela extração de zeros degrada-se rapidamente abaixo de uma SNR da ordem de 12 dB, que caracterizamos como seu valor de limiar, embora possamos identificar uma degradação suave a partir de 15 dB. O desempenho da derivada da resposta de fase, embora experimente uma queda pouco mais acentuada do que a do limite de Cramér-Rao a partir de 20 dB, degrada-se severamente somente abaixo de 10 dB.

Assim, constatamos que a detecção de frequências pela derivada da resposta de fase apresenta um desempenho comparável ao obtido pela extração de zeros, superando em muito o alcançado pela resposta de amplitude inversa.

Analisando qualitativamente a complexidade computacional do método FBLP utilizando extração de zeros ou derivada da resposta de fase, podemos dividir o processamento em três etapas:

1. Até o cálculo do vetor  $w$ , a complexidade é a mesma, pois o processamento é comum às duas abordagens.
2. A segunda etapa permite verificar a maior complexidade dos procedimentos de determinação dos zeros de  $W(z)$ , no caso de extração de zeros, em confronto com a simplicidade dos procedimentos envolvidos na aplicação de FFT ao vetor  $w$  e derivação numérica para o cálculo de  $|\Phi(e^{j\omega})|$ , relativos à derivada da fase.

3. Na terceira etapa, devido a utilizarmos 1024 pontos no espectro da derivada da fase, a seleção dos maiores picos espectrais envolve muito mais testes do que para a determinação dos  $M$  zeros mais próximos da CRU, que são selecionados dentro de um universo composto por apenas  $L$  valores.

Dessa forma, concluimos que a detecção de picos no espectro do valor absoluto da derivada da resposta de fase FBLP, é uma técnica competitiva com o procedimento baseado em extração de zeros para a detecção de frequências.

## Capítulo 4

# SVD e Subespaços

### 4.1 Introdução

A presença do ruído degrada seriamente a estimação de frequências próximas entre si à medida que a relação sinal-ruído diminui. Esta degradação caracteriza-se pela redução de resolução e pelo surgimento de picos espúrios de grande amplitude no espectro, ou zeros estranhos mais próximos da CRU do que os zeros de sinal. Estes efeitos podem ser atenuados pelo uso da Decomposição em Valores Singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*), que separa a informação nos subespaços de sinal e de ruído. A exclusão do subespaço de ruído permite gerar estimativas mais robustas tanto quanto às degradações produzidas pelas flutuações dos zeros ou picos de sinal ao redor de suas posições ideais, como quanto ao efeito de limiar.

Neste capítulo, inicialmente, apresentamos a SVD e definimos o que denominamos por subespaços de sinal e de ruído. A seguir, passamos a um estudo detalhado da SVD da matriz de dados  $\mathbf{A}$ . Verificaremos que não é possível recuperar toda a informação do sinal quando ele foi corrompido por ruído aditivo. Neste sentido, delimitaremos esta incerteza, definindo um conjunto de soluções do tipo bola de matrizes para  $\mathbf{A}$ . No capítulo seguinte aplicaremos estes conceitos à detecção de frequências.

## 4.2 Definições

Dada uma matriz  $\mathbf{Z}$   $m \times n$ , existe uma função  $f$  definida por  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}.\mathbf{x}$  tal que, exceto em alguns casos,  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , ou seja,  $f$  é uma transformação linear que mapeia  $\mathbb{C}^n$  em  $\mathbb{C}^m$ . Assim, uma transformação linear pode ser caracterizada em termos da matriz que a representa:

- O domínio de  $f$  é definido como o espaço vetorial  $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$  gerado pelas combinações lineares das linhas de  $\mathbf{Z}$ .
- A imagem ou *range* de  $f$  é definida como o espaço vetorial  $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$  gerado pelas combinações lineares das colunas de  $\mathbf{Z}$ .
- O espaço nulo de  $f$  é a partição do seu domínio correspondente à imagem nula, ou seja, o espaço de todos  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{Z}.\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Para tal utilizamos a representação  $\mathcal{N}(\mathbf{Z})$ .

É importante recordar também que o posto de uma matriz  $\mathbf{Z}$  é definido como o número de colunas ou linhas linearmente independentes, ou seja, é a dimensão do  $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$ . Após esta breve revisão, vamos agora abordar a SVD.

## 4.3 Decomposição em Valores Singulares

**Teorema 4.1:** Toda matriz complexa  $\mathbf{Z}$   $m \times n$  pode ser fatorada como  $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$  onde  $\mathbf{U}$  é  $m \times m$  e  $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}$  é  $n \times n$  e  $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , e  $\mathbf{\Sigma}$  é uma matriz real  $m \times n$  com seus únicos elementos não nulos na diagonal principal. Estes elementos são chamados *valores singulares* e são ordenados como  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , onde  $r$  é o posto de  $\mathbf{Z}$ . As colunas de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$ , são, respectivamente, os *vetores singulares* de  $\mathbf{Z}$  à esquerda e à direita.

A demonstração deste teorema e maiores detalhes sobre SVD podem ser obtidos em [1], [8] e [28].

Entretanto, devemos recordar que, interpretando  $\mathbf{Z}$  como uma transformação linear, a SVD decompõe esta transformação em dois conjuntos de bases vetoriais ortonormais: um conjunto  $\mathbf{U}$  gerador da imagem de  $\mathbf{Z}$  e um conjunto  $\mathbf{V}$  gerador do domínio de  $\mathbf{Z}$ . Os valores singulares, por sua vez, constituem-se nos módulos das projeções de  $\mathbf{Z}$  segundo cada direção definida por  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$  em cada base.

## 4.4 A SVD da Matriz $\mathbf{A}$ e o Vetor $\mathbf{w}$

Seja a matriz de dados  $\mathbf{A}$  ( $2(N - L) \times L$ ), definida no contexto da predição linear *forward-backward* de ordem  $L$ , aplicada à detecção de  $M$  exponenciais complexas a partir de  $N$  amostras de  $u[n]$ , conforme exposto no capítulo 2. Analisando a SVD de  $\mathbf{A}$ , podemos escrever:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V}^H \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{S}$  é  $r \times r$ , para  $r = \min[2(N - L), L]$ , o posto de  $\mathbf{A}$ . Definimos então a pseudo inversa da matriz  $\mathbf{A}$  como:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{V} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U}^H$$

Dessa forma, a solução da equação normal (2.20), dada no sentido dos mínimos quadrados pode agora ser expressa a partir da SVD de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^\# \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\min[2(N-L), L]} \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{b} \quad (4.2)$$

Verificamos que esta solução sofre influência do ruído, o qual prejudica a estimação de  $\mathbf{w}$  à medida que a potência do ruído aumenta. Para reduzir estes danos, vamos estudar, a partir de agora, a atuação do ruído sobre o sinal.

## 4.5 Os Subespaços de Sinal e de Ruído

Sejam as seguintes partições na SVD de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

onde:

- $\mathbf{U}_1$  é uma partição de  $\mathbf{U}$  contendo as suas  $M$  primeiras colunas e  $\mathbf{U}_2$  contendo as suas  $2(N - L) - M$  últimas colunas;
- $\mathbf{V}_1$  é uma partição de  $\mathbf{V}$  contendo as suas  $M$  primeiras colunas e  $\mathbf{V}_2$  contendo as suas  $L - M$  últimas colunas;

- $\mathbf{S}_1$  é uma partição quadrada  $M \times M$  de  $\mathbf{\Sigma}$  contendo os  $M$  primeiros elementos de sua diagonal e  $\mathbf{S}_2$  retangular,  $[2(N-L)-M] \times [L-M]$ , contendo os  $\min[2(N-L), L] - M$  últimos elementos da diagonal de  $\mathbf{\Sigma}$ .

No caso sem ruído, o posto de  $\mathbf{A}$  é  $M$  e  $\mathbf{S}_2$  seria nula. Logo, haveria  $M$  valores singulares não nulos, associados aos vetores singulares de  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{V}_1$ . Eles são denominados respectivamente de *valores e vetores singulares de sinal*.

No caso com ruído, o posto de  $\mathbf{A}$  é cheio e igual a  $\min[2(N-L), L]$  e os  $\min[2(N-L), L] - M$  valores singulares que anteriormente eram nulos, tornam-se positivos. À medida que a SNR decresce, tais valores singulares aproximam-se mais e mais dos  $M$  primeiros, os valores singulares de sinal. Portanto, os menores  $\min[2(N-L), L] - M$  valores e vetores singulares associados estão relacionados unicamente ao ruído, sendo então denominados *valores e vetores singulares de ruído*.

Assim, podemos separar o espaço vetorial do sinal  $u[n]$  em dois subespaços:

- **O Subespaço de Sinal:** relacionado aos  $M$  maiores valores singulares de  $\mathbf{A}$  e aos vetores singulares associados e, portanto, relativos às exponenciais complexas contidas no sinal  $u[n]$ .
- **O Subespaço de Ruído:** relacionado aos  $\min[2(N-L), L] - M$  menores valores singulares de  $\mathbf{A}$  e aos vetores singulares correspondentes, isto é, associado à parcela de ruído,  $y[n]$ .

## 4.6 Dissecando os Subespaços

Conhecendo os subespaços de sinal e de ruído, a primeira idéia que nos ocorre é a diminuição da influência do ruído em  $\mathbf{w}$ , o vetor de coeficientes ótimos de predição FBLP, pela exclusão dos valores e vetores singulares correspondentes ao subespaço de ruído na expressão (4.2). Este procedimento foi adotado por Tufts e Kumaresan em [29] e será apresentado no capítulo 5. Entretanto, na referência citada, não se faz um estudo mais detalhado da decomposição em valores singulares, de seu potencial nem das condições necessárias à sua aplicação para a detecção de frequências, conforme apresentado a seguir neste capítulo. Tal desenvolvimento será validado estatisticamente e efetuaremos uma interpretação geométrica dos subespaços de sinal e de ruído, juntamente com o detalhamento de sua interrelação algébrica, no sentido de esclarecer a atuação do ruído sobre o sinal.

### 4.6.1 A Matriz de Dados Exatos $\mathbf{E}$

Uma vez que consideramos o sinal corrompido por ruído aditivo, podemos escrever a matriz  $\mathbf{A}$  como a soma de uma matriz  $\mathbf{E}$ , composta apenas por amostras de sinal, com uma matriz  $\mathbf{Y}$  unicamente de ruído, de mesmas dimensões que  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{Y} \quad (4.4)$$

Como  $\mathbf{Y}$  contém amostras de ruído branco, suas colunas são independentes, logo seu posto é cheio. A matriz  $\mathbf{E}$  equivale à matriz  $\mathbf{A}$  do caso sem ruído e seu posto é  $M$  e, como  $M \leq \min[2(N - L), L]$ , o posto de  $\mathbf{E}$  é incompleto.  $\mathbf{A}$  tem posto cheio, conforme apresentado na seção 4.5. Desse modo, a SVD de  $\mathbf{E}$  fica expressa por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}_E \cdot \mathbf{\Sigma}_E \cdot \mathbf{V}_E^H \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{E_1} & \vdots & \mathbf{U}_{E_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{E_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{E_1}^H \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{E_2}^H \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{S}_{E_1}$  é uma matriz diagonal,  $M \times M$ , com os valores singulares de  $\mathbf{E}$  em sua diagonal principal. Além disso, os vetores  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M\}$  formam uma base ortonormal para a imagem de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ . Podemos observar ainda que os vetores  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$  constituem uma base ortonormal para o domínio,  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ , enquanto os vetores  $\{\mathbf{v}_{M+1}, \dots, \mathbf{v}_L\}$  formam uma base ortonormal para o espaço nulo de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathcal{N}(\mathbf{E})$ , pois  $\mathbf{E}\mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0}$ .

Concluindo, a SVD de  $\mathbf{E}$  permite-nos escrever:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H \quad (4.7)$$

A SVD de  $\mathbf{A}$  fica agora expressa por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_A \cdot \mathbf{\Sigma}_A \cdot \mathbf{V}_A^H \quad (4.8)$$

ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{A_1} & \vdots & \mathbf{U}_{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A_1}^H \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{A_2}^H \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

### 4.6.2 Considerações sobre a SVD de $\mathbf{A}$

Nos desenvolvimentos a seguir, buscaremos estabelecer condições suficientes para podermos expressar a SVD de  $\mathbf{A}$  em termos da SVD de  $\mathbf{E}$ , de forma que possamos extrair as informações de sinal da matriz de dados ruidosos  $\mathbf{A}$ .

Tomando a relação (4.4) entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$  e lembrando que o Teorema 4.1 da SVD assegura que  $\mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H = \mathbf{I}$ , podemos escrever:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} + \mathbf{Y})\mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H \quad (4.10)$$

Particionando  $\mathbf{V}_E$  como em (4.6) temos:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} + \mathbf{Y})[\mathbf{V}_{E_1} : \mathbf{V}_{E_2}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{E_1}^H \\ \dots \\ \mathbf{V}_{E_2}^H \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

logo,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} + \mathbf{Y})(\mathbf{V}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H + \mathbf{V}_{E_2} \mathbf{V}_{E_2}^H) \quad (4.12)$$

Como  $\mathbf{E}\mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0}$ , temos:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}\mathbf{V}_{E_1} + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_1})\mathbf{V}_{E_1}^H + (\mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2})\mathbf{V}_{E_2}^H \quad (4.13)$$

A partir da expressão anterior, com alguma manipulação algébrica, podemos chegar a uma expressão para a decomposição em valores singulares de  $\mathbf{A}$  em termos dos vetores singulares à direita de  $\mathbf{E}$ . Para tanto, definimos as seguintes SVD's:

$$(\mathbf{E}\mathbf{V}_{E_1} + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_1}) \triangleq \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{Q}_1^H \quad (4.14)$$

e

$$(\mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2}) \triangleq \mathbf{P}_2 \mathbf{S}_2 \mathbf{Q}_2^H \quad (4.15)$$

Substituindo as expressões anteriores na expressão (4.13), podemos escrever:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{Q}_1^H \mathbf{V}_{E_1}^H + \mathbf{P}_2 \mathbf{S}_2 \mathbf{Q}_2^H \mathbf{V}_{E_2}^H \quad (4.16)$$

ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 : \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^H \mathbf{V}_{E_1}^H \\ \dots \\ \mathbf{Q}_2^H \mathbf{V}_{E_2}^H \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Para que a equação acima constitua uma decomposição em valores singulares para a matriz ruidosa  $\mathbf{A}$ , faz-se necessário que  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  sejam ortogonais, ou seja:

$$\mathbf{P}_1^H \mathbf{P}_2 = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Como  $\mathbf{P}_1$  forma uma base ortogonal para  $\mathcal{R}[(\mathbf{E} + \mathbf{Y})\mathbf{V}_{E_1}]$  e  $\mathbf{P}_2$  para  $\mathcal{R}(\mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2})$ , a ortogonalidade entre  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  implica em que

$$\mathbf{V}_{E_1}^H (\mathbf{E}^H + \mathbf{Y}^H) \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

Uma das possibilidades para que esta condição se verifique é:

$$\mathbf{V}_{E_1}^H (\mathbf{E}^H \mathbf{Y}) \mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

e

$$\mathbf{V}_{E_1}^H (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}) \mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

Para atender às duas condições acima, muitas considerações são admissíveis. Se assumirmos que o ruído é "branco" no contexto de  $\mathbf{Y}$ , isto é:

$$\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (4.22)$$

a condição (4.21) é satisfeita. No caso de (4.20), poderíamos supor também  $\mathbf{E}^H \mathbf{Y} = \gamma^2 \mathbf{I}$ . Entretanto, considerando o sinal descorrelacionado do ruído, temos:

$$\mathbf{E}^H \mathbf{Y} = \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

Assim, as restrições (4.22) e (4.23) garantem as igualdades de (4.20) e (4.21) e podemos especificar as condições suficientes para que a expressão (4.17) represente a SVD de  $\mathbf{A}$ :

- Os dados exatos devem ser ortogonais ao ruído no sentido em que  $\mathbf{E}^H \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ ;
- As matrizes  $\mathbf{V}_{E_1}$  e  $\mathbf{V}_{E_2}$  devem ser ortogonais entre si no produto interno gerado por  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{V}_{E_1}^H (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}) \mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0}$ . Tal ocorre quando o ruído satisfaz (4.22).
- O menor valor singular em  $\mathbf{S}_1$  deve ser maior do que o maior valor singular em  $\mathbf{S}_2$  de modo a respeitarmos o teorema 4.1. Esta ordenação define os vetores de  $\mathbf{V}_{E_1}$  em contraste com aqueles de  $\mathbf{V}_{E_2}$ .

No final deste capítulo, apresentaremos as motivações de ordem prática para a opção pelas hipóteses acima, bem como os limites para a sua validade.

### 4.6.3 A SVD de $\mathbf{A}$ em termos da SVD de $\mathbf{E}$

Uma vez escolhidas as condições para se aplicar a decomposição em valores singulares no sentido de extrair informações do sinal exato, partindo das considerações (4.22) e (4.23), buscaremos agora explicitar uma expressão para a SVD de  $\mathbf{A}$  em termos da SVD de  $\mathbf{E}$ . Tomando a expressão (4.4) e, substituindo a SVD de  $\mathbf{E}$  de (4.7) e utilizando  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\mathbf{V}_E\mathbf{V}_E^H$ , obtemos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{E_1}\mathbf{S}_{E_1}\mathbf{V}_{E_1}^H + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_1}\mathbf{V}_{E_1}^H + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2}\mathbf{V}_{E_2}^H \quad (4.24)$$

Reagrupando, fica:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{U}_{E_1}\mathbf{S}_{E_1} + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_1})\mathbf{V}_{E_1}^H + (\mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2})\mathbf{V}_{E_2}^H \quad (4.25)$$

que pode ser expressa na forma matricial por:

$$\mathbf{A} = \left[ (\mathbf{U}_{E_1}\mathbf{S}_{E_1} + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_1}) : \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{E_1}^H \\ \cdots \\ \mathbf{V}_{E_2}^H \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Para podermos identificar a expressão acima com uma SVD, devemos inserir uma matriz diagonal  $\Sigma_A$  entre os seus dois fatores. Tendo em consideração o desenvolvimento clássico da SVD como em [9], [11] ou [16], a forma básica dessa matriz é dada por:

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2\mathbf{I})^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma\mathbf{I}_{ret} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde  $\mathbf{I}_{ret}$  é uma matriz retangular com dimensões  $[2(N - L) - M] \times [L - M]$ , cujos seus únicos elementos não nulos estão em sua diagonal principal e valem 1.

Para podermos inserir essa matriz, devemos modificar ligeiramente o primeiro fator, resultando em:

$$\mathbf{A} = \left[ (\mathbf{U}_{E_1}\mathbf{S}_{E_1} + \mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_1})(\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2\mathbf{I})^{-1/2} : \sigma^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{V}_{E_2} \right] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2\mathbf{I})^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma\mathbf{I}_{ret} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{E_1}^H \\ \cdots \\ \mathbf{V}_{E_2}^H \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

que deve ser comparada com a SVD de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{U}_{A_1} : \mathbf{U}_{A_2} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A_1}^H \\ \cdots \\ \mathbf{V}_{A_2}^H \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Podemos então, por comparação, identificar  $\mathbf{U}_{A_1}$  e  $\mathbf{U}_{A_2}$ , observar que os valores singulares de sinal são dados por  $(\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2 \mathbf{I})^{1/2}$  e que os valores singulares de ruído, dada a condição  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , são iguais entre si e valem  $\sigma$ .

Logo, os valores singulares do subespaço de sinal de  $\mathbf{A}$  são aqueles correspondentes de  $\mathbf{E}$  contaminados pela variância do ruído. Por outro lado, os valores singulares do subespaço de ruído de  $\mathbf{A}$  são iguais ao próprio desvio padrão do ruído.

Podemos ainda constatar que, respeitadas as condições (4.22) e (4.23),  $\mathbf{V}_{A_1} = \mathbf{V}_{E_1}$  e  $\mathbf{V}_{A_2} = \mathbf{V}_{E_2}$ .

#### 4.6.4 Limitações no Conhecimento de $\mathbf{E}$

Como partimos das condições (4.22) e (4.23), pela subseção 4.6.2 garantimos que se mantém a ortogonalidade entre  $\mathbf{U}_{A_1}$  e  $\mathbf{U}_{A_2}$ ,  $\mathbf{V}_{A_1}$  e  $\mathbf{V}_{A_2}$ . Como também garantimos que o menor valor singular de  $\mathbf{S}_{A_1}$  é maior do que o maior valor singular de  $\mathbf{S}_{A_2}$ , podemos afirmar que a expressão (4.28) é a SVD de  $\mathbf{A}$ .

Os  $\min[2(N - L), L] - M$  menores valores singulares de  $\Sigma_A$  são iguais entre si e permitem estimar a variância do ruído  $\sigma^2$  a qual, por sua vez, possibilita a obtenção dos valores singulares de  $\mathbf{E}$  através da seguinte expressão:

$$\mathbf{S}_{E_1} = (\mathbf{S}_{A_1}^2 - \sigma^2 \mathbf{I})^{1/2}. \quad (4.30)$$

Os vetores à direita de  $\mathbf{E}$  podem ser recuperados a partir da SVD de  $\mathbf{A}$ , permitindo-nos conhecer o espaço das linhas de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ , pois  $\mathbf{V}_{A_1} = \mathbf{V}_{E_1}$ , bem como podemos recuperar também o espaço nulo de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathcal{N}(\mathbf{E})$ , pois  $\mathbf{V}_{A_2} = \mathbf{V}_{E_2}$ .

Os vetores singulares de  $\mathbf{U}_{A_1}$  guardam uma relação pitagórica com os de  $\mathbf{U}_{E_1}$ , pois  $\mathbf{U}_{A_1} = (\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1} + \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1})(\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1/2}$ , onde:

- $\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1}$  é ortogonal a  $\mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1}$  pois, tendo em conta que  $\mathbf{V}_{E_1}^H \mathbf{V}_{E_1} = \mathbf{I}$ , temos

$$(\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1})^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} = (\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H \mathbf{V}_{E_1})^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} \quad (4.31)$$

Mas  $\mathbf{E} = \mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H$ , logo:

$$(\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1})^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} = (\mathbf{E} \mathbf{V}_{E_1})^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} \quad (4.32)$$

que podemos escrever como:

$$(\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1})^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} = \mathbf{V}_{E_1}^H \mathbf{E}^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} \quad (4.33)$$

Como  $\mathbf{E}^H \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ ,

$$(\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1})^H \mathbf{Y} \mathbf{V}_{E_1} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

- $\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1}$  consiste de vetores coluna cujas normas são dadas pelos elementos na diagonal de  $\mathbf{S}_{E_1}$ ;
- $\mathbf{YV}_{E_1}$  consiste de vetores coluna cujas normas são dadas por  $\sigma$ ;
- $\mathbf{U}_{A_1}$  consiste de vetores coluna cujas normas são dadas pelos elementos diagonais de  $(\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2 \mathbf{I})^{1/2}$ .

Verificamos, entretanto, que não nos é possível conhecer os  $\mathbf{u}_{E_i}$  exatos a partir da SVD de  $\mathbf{A}$  somente, pois  $\mathbf{U}_{A_1} \neq \mathbf{U}_{E_1}$  e não conhecemos  $\mathbf{Y}$ . Dessa forma não conseguimos nos eximir da influência do ruído de forma completa na estimação de  $\mathbf{w}$ .

Os vetores de  $\mathbf{U}_E$  definem  $\mathcal{R}(\mathbf{E})$  que, com a adição de ruído conforme (4.4), sofre uma rotação que produz  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ , o qual é definido pelos vetores de  $\mathbf{U}_A$ . Embora não possamos determinar  $\mathbf{U}_{E_1}$ , podemos calcular os ângulos canônicos entre os espaços das colunas de  $\mathbf{U}_{A_1}$  e de  $\mathbf{U}_{E_1}$ , ou seja, entre os subespaços de sinal de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$ , a partir dos valores singulares do produto [8]:

$$\mathbf{U}_{E_1}^H \mathbf{U}_{A_1} = \mathbf{U}_{E_1}^H (\mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1} + \mathbf{YV}_{E_1}) (\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1/2} \quad (4.35)$$

Como, a partir de (4.23),  $\mathbf{E}$  é ortogonal a  $\mathbf{Y}$ , então  $\mathcal{R}(\mathbf{E})$  é ortogonal a  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ . Logo:

$$\mathbf{U}_{E_1}^H \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

Usando este fato e lembrando que  $\mathbf{U}_{E_1}^H \mathbf{U}_{E_1} = \mathbf{I}$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{E_1}^H \mathbf{U}_{A_1} &= \mathbf{S}_{E_1} (\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1/2} \\ &= \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{S}_{A_1}^{-1} = \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Os elementos na diagonal de  $\mathbf{C}$  são, respectivamente, os cossenos  $c_i$ 's dos ângulos canônicos  $\alpha_i$ 's entre os subespaços de sinal de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{A}$ .

## 4.7 Resumindo

Em resumo, nas seções anteriores verificamos que a partir da SVD de  $\mathbf{A}$  e da validade das considerações (4.4), (4.22) e 4.23), podemos conhecer:

- o espaço das linhas de  $\mathbf{E}$ , pois  $\mathbf{V}_{A_1} = \mathbf{V}_{E_1}$ ;
- o espaço nulo de  $\mathbf{E}$ , pois  $\mathbf{V}_{A_2} = \mathbf{V}_{E_2}$ ;
- os valores singulares de  $\mathbf{E}$ , calculados a partir de (4.30);

- os cossenos dos ângulos canônicos entre os subespaços de sinal de  $\mathbf{A}$  e de  $\mathbf{E}$ , obtidos a partir da expressão (4.37).

Entretanto, isto não é suficiente para determinarmos os vetores singulares à esquerda de  $\mathbf{E}$ , dados pela matriz  $\mathbf{U}_{E_1}$ . Consequentemente, não pudemos excluir por completo a influência do ruído no cálculo de  $\mathbf{w}$ .

## 4.8 Interpretação Geométrica da Solução

A falta do conhecimento completo da matriz de dados exata implica em um número infinito de matrizes  $\mathbf{E}$  que teriam gerado  $\mathbf{A}$  pela adição do ruído  $\mathbf{Y}$ . Esta incerteza pode ser facilmente verificada através dos exemplos seguintes.

### 4.8.1 Vetores no Plano

Restringindo-nos ao caso bidimensional, temos que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ , e reproduzimos as restrições de construção (4.4) e (4.23):

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{E} + \mathbf{Y} \\ \mathbf{E}^H \mathbf{Y} &= 0\end{aligned}$$

A solução clássica para este sistema de equações é apresentada na figura 4.1.

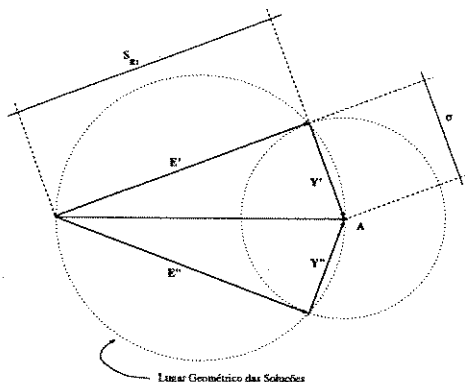


Figura 4.1: As decomposições ortogonais do vetor  $\mathbf{A}$  bidimensional.

O lugar geométrico dos vetores que satisfazem as condições acima, é construído como uma circunferência que tem o vetor  $\mathbf{A}$  como diâmetro. Cada ponto da circunferência

define um par ortogonal  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Y}$  que poderia ter gerado  $\mathbf{A}$ . Mesmo se conhecermos  $\sigma$ , o que permite conhecer também  $S_{E1}$  e os ângulos canônicos  $\alpha_i$ , ainda temos duas soluções possíveis. Isto ocorre porque o nosso conhecimento restringe-se apenas às normas dos vetores e ao ângulo entre eles.

### 4.8.2 Vetores no Espaço Tridimensional

Expandindo o exemplo anterior para o caso tridimensional, verificamos que a incerteza torna-se ainda maior. Ao invés de uma circunferência de soluções possíveis, agora temos uma esfera que tem o vetor  $\mathbf{A}$  como diâmetro, como pode ser visto na figura 4.2. Se conhecêssemos a variância do ruído, o máximo que poderíamos fazer seria gerar uma esfera com raio  $\sigma$ , que intersectaria a esfera solução. A intersecção entre as duas esferas consiste de uma circunferência, que é o lugar geométrico dos pontos que definem os pares ortogonais  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Y}$ , supondo-se conhecida a variância do ruído.

Assim, verificamos que, quando conhecemos  $\sigma$ , a incerteza na determinação de  $\mathbf{E}$  no caso tridimensional é a mesma observada no caso bidimensional com  $\sigma$  desconhecido. Daí inferimos que, em umadada dimensão, o conhecimento da variância do ruído permite reduzir nossa incerteza sobre  $\mathbf{E}$  àquela que teríamos considerando uma dimensão a menos e desconhecendo  $\sigma$ . Na figura 4.3, para facilitar a visualização, apresentamos um sólido composto por estes pares que poderiam ter gerado  $\mathbf{A}$ .

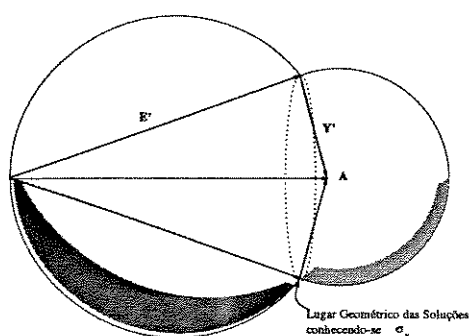


Figura 4.2: As decomposições ortogonais do vetor  $\mathbf{A}$  tridimensional.

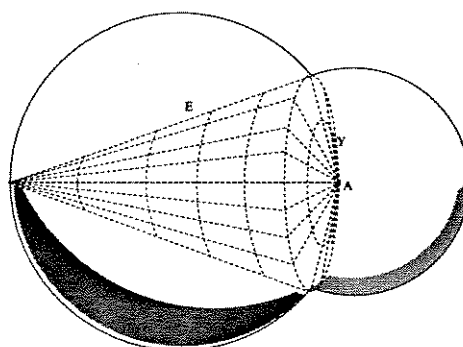


Figura 4.3: Sólido gerado por todos os  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Y}$  soluções para o caso tridimensional.

Percebemos, entretanto, que no caso tridimensional, mesmo conhecendo a variância do ruído, temos ainda infinitos pares solução para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Y}$  definidos pela circunferência. Para casos de maior ordem, estes pares serão definidos por hiper-esferas, o que provoca incertezas de dimensões ainda maiores.

## 4.9 Todas as Soluções Possíveis

Desenvolvemos aqui a generalização multidimensional da incerteza apresentada na seção anterior.

Verificamos anteriormente que não conseguimos estimar consistentemente os vetores à esquerda de  $\mathbf{E}$  a partir da SVD de  $\mathbf{A}$ . Entretanto, podemos calcular os cossenos dos ângulos canônicos entre os subespaços de sinal destas matrizes, mesmo sem conhecer  $\mathbf{E}$ , apenas atendendo às restrições de que o ruído seja branco e ortogonal ao sinal exato.

Uma vez que não podemos obter a matriz  $\mathbf{E}$  que nos leva à solução  $\mathbf{w}$  isenta de ruído, vamos então descrever um conjunto completo de matrizes que poderiam ter gerado a matriz  $\mathbf{A}$ , segundo as condições (4.4), (4.22) e (4.23).

Inicialmente definimos o que denominaremos por bola de matrizes [6], a qual está representada na figura 4.4.

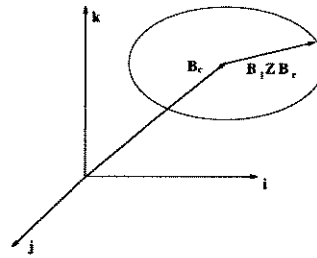


Figura 4.4: Uma representação do conjunto bola de matrizes  $\mathcal{B}$ .

**Definição:** Uma bola de matrizes  $\mathcal{B}$ , com matriz central  $\mathbf{B}_c \in \mathbb{C}^{p \times q}$ , matriz radial esquerda  $\mathbf{B}_l \in \mathbb{C}^{p \times l}$  e matriz radial direita  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{C}^{m \times q}$ , é um conjunto de matrizes da forma:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{B} \mid \mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_l \mathbf{Z} \mathbf{B}_r, \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{l \times m} \text{ é unitária}\} \quad (4.38)$$

O objetivo desta seção é demonstrar que o conjunto de matrizes que apresentam as informações de  $\mathbf{E}$  extraídas da SVD de  $\mathbf{A}$ , constitui uma bola de matrizes. Estas informações são então transcritas para a forma de restrições a serem aplicadas ao conjunto solução para  $\mathbf{E}$ . Seja, então, um conjunto de matrizes  $m \times n$  com as seguintes propriedades:

1. O posto é  $M$  e os valores singulares não nulos são dados por  $\mathbf{S}_{E_1}$ ;
2. Os vetores singulares à direita, correspondentes aos valores singulares não nulos, são as colunas de  $\mathbf{V}_{E_1}$ ;

3. Os cossenos dos ângulos canônicos entre os subespaços de sinal das estimativas de  $\mathbf{E}$  - digamos  $\mathcal{R}(\mathbf{U}_{B_1})$  - e o subespaço de sinal de  $\mathbf{A}$  são dados pelos elementos na diagonal de  $\mathbf{C}$ , conforme a expressão (4.37).
4. A matriz de dados exatos original  $\mathbf{E}$  pertence a este conjunto.

Primeiramente, vamos atender à terceira propriedade. Todas as matrizes  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{C}^{2(N-L) \times M}$  que satisfazem tal condição são dadas por:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H + \mathbf{U}_{A_2} \mathbf{Z}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2} \mathbf{W}_1^H \quad (4.39)$$

onde  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  e  $\mathbf{W}_1$  são matrizes unitárias arbitrárias de dimensões adequadas.

Isto pôde ser constatado calculando-se  $\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{X}_1$ :

$$\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{X}_1 = \mathbf{U}_{A_1}^H [\mathbf{U}_{A_1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H + \mathbf{U}_{A_2} \mathbf{Z}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2} \mathbf{W}_1^H] \quad (4.40)$$

Como  $\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{U}_{A_1} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{U}_{A_2} = \mathbf{0}$ , temos

$$\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H, \quad (4.41)$$

que é uma SVD com valores singulares na diagonal principal de  $\mathbf{C}$ . Portanto, os cossenos dos ângulos canônicos entre  $\mathbf{U}_{A_1}$  e  $\mathbf{X}_1$  são dados pela diagonal de  $\mathbf{C}$ , uma vez que  $\mathbf{X}_1$  é unitária, o que pode ser verificado por:

$$\mathbf{X}_1^H \mathbf{X}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{C}^H \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H + \mathbf{W}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C}) \mathbf{W}_1^H = \mathbf{I} \quad (4.42)$$

A quarta propriedade implica em que a matriz unitária  $\mathbf{U}_{E_1}$  respeite a condição 3, ou seja, atenda à expressão (4.39). Para tanto, determinamos os valores de  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  e  $\mathbf{W}_1$ :

$$\mathbf{U}_{E_1} = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H + \mathbf{U}_{A_2} \mathbf{Z}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2} \mathbf{W}_1^H \quad (4.43)$$

Daí,

$$\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{U}_{E_1} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H \quad (4.44)$$

Mas de (4.37), temos que  $\mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{U}_{E_1} = \mathbf{C}$ , logo:

$$\mathbf{Z}_1 \mathbf{C} \mathbf{W}_1^H = \mathbf{C} \quad (4.45)$$

Como  $\mathbf{C}$  é diagonal, concluímos que:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{W}_1 = \mathbf{I} \quad (4.46)$$

Além disso, dado que  $\mathbf{U}_{A_2}^H \mathbf{U}_{A_1} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{U}_{A_2}^H \mathbf{U}_{A_2} = \mathbf{I}$  e (4.46), temos:

$$\mathbf{U}_{A_2}^H \mathbf{U}_{E_1} = \mathbf{Z}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2} \quad (4.47)$$

Então,

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{U}_{A_2}^H \mathbf{U}_{E_1} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1/2} \quad (4.48)$$

Como não conhecemos  $\mathbf{U}_{E_1}$ , não podemos determinar  $\mathbf{Z}_2$ . Assim, conseguimos apenas exigir que  $\mathbf{U}_{E_1} \in \mathcal{B}_1$ , onde  $\mathcal{B}_1$  é um conjunto de matrizes unitárias:

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_1 = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{C} + \mathbf{U}_{A_2} \mathbf{Z} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2}, \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{[2(N-L)-M] \times M} \text{ é unitária}\} \quad (4.49)$$

que define as propriedades do conjunto de matrizes compostas pelos vetores singulares à esquerda de todas as matrizes  $\mathbf{B}$  que poderiam ter gerado  $\mathbf{A}$ .

Adicionando agora a primeira e a segunda propriedades, encontramos um conjunto  $\mathcal{B}$ , bola de matrizes, tal que:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{B} \mid \mathbf{B} = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{C} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H + \mathbf{U}_{A_2} \mathbf{Z} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H, \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{[2(N-L)-M] \times M} \text{ é unitária}\}. \quad (4.50)$$

A partir da expressão (4.50) identificamos  $\mathbf{B}_c = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{C} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H$ ,  $\mathbf{B}_l = \mathbf{U}_{A_2}$  e  $\mathbf{B}_r = (\mathbf{I} - \mathbf{C}^H \mathbf{C})^{1/2} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H$ . Observamos também que na ausência de ruído,  $\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \mathbf{I}$ , logo  $\mathbf{B}_r = \mathbf{0}$  e a bola de matriz  $\mathcal{B}$  teria apenas um único elemento, a matriz central  $\mathbf{B}_c$ . Neste caso,  $\mathbf{B}_c = \mathbf{U}_{E_1} \mathbf{S}_{E_1} \mathbf{V}_{E_1}^H$ , ou seja, o conjunto bola de matriz seria a própria matriz  $\mathbf{E}$ .

A partir da SVD de  $\mathbf{A}$  não conseguimos recuperar completamente a matriz exata  $\mathbf{E}$ , o que não nos permite obter uma solução única para as expressões (4.4), (4.22) e (4.23). Como não é possível subtrair a influência do ruído sobre os vetores  $\mathbf{u}_{A_i}$ , não conseguimos excluir por completo a atuação ruidosa sobre a estimação do vetor  $\mathbf{w}$  para resolver a equação normal (2.20).

## 4.10 Considerações Estatísticas

A análise até agora efetuada restringiu-se aos aspectos geométricos e algébricos. Nesta seção vamos apresentar os aspectos estatísticos que envolvem a consistência da formulação apresentada anteriormente.

Inicialmente, mostraremos que as condições (4.22) e (4.23) para a extração das informações de  $\mathbf{E}$  a partir da SVD de  $\mathbf{A}$  têm apoio estatístico, sob algumas considerações adicionais. Analisemos, então, a expressão a seguir:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{E}^H \mathbf{E} + \mathbf{Y}^H \mathbf{Y} + \mathbf{E}^H \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^H \mathbf{E} \quad (4.51)$$

Primeiramente, observamos os termos cruzados  $\mathbf{E}^H \mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Y}^H \mathbf{E}$  sob o ponto de vista estatístico e efetuamos as seguintes considerações:

- Os elementos de  $\mathbf{Y}$  devem ter média nula. Dessa forma, como  $\mathbf{E}$  é determinística,  $E\{\mathbf{E}^H \mathbf{Y}\} = \mathbf{0}$  e  $E\{\mathbf{Y}^H \mathbf{E}\} = \mathbf{0}$ ;
- Os elementos de  $\mathbf{Y}$  devem ser independentes e identicamente distribuídos com variância  $\nu^2$ , possivelmente desconhecida. Dessa forma, temos  $E\{\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}\} = 2(N - L)\nu^2 \mathbf{I} \triangleq \sigma^2 \mathbf{I}$

Com estas considerações, a esperança estatística de  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  fica expressa como:

$$E\{\mathbf{A}^H \mathbf{A}\} = \mathbf{E}^H \mathbf{E} + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (4.52)$$

Como  $\mathbf{E}^H \mathbf{E}$  tem apenas  $M$  autovalores não nulos, os  $M$  maiores autovalores de  $E\{\mathbf{A}^H \mathbf{A}\}$  correspondem aos autovalores de  $\mathbf{E}^H \mathbf{E}$  acrescidos de  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , enquanto os demais autovalores são iguais entre si, valendo  $\sigma^2 \mathbf{I}$ .

As observações acima sugerem que quando calculamos a média de diversos experimentos com uma mesma matriz  $\mathbf{E}$  e várias realizações de ruído, como é realizado neste trabalho, as condições geométricas descritas anteriormente são satisfeitas assintoticamente com o número de experimentos considerados, pois:

- $E\{\mathbf{E}^H \mathbf{Y}\} = \mathbf{0}$ ;
- $\mathbf{V}_{E_1}^H E\{\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}\} \mathbf{V}_{E_2} = \mathbf{0}$ ;
- em média, o menor valor singular de  $\mathbf{S}_{A_1}$  é maior do que o maior valor singular de  $\mathbf{S}_{A_2}$ .

Para situações onde a matriz  $\mathbf{E}$  não pode ser utilizada repetidamente com realizações distintas de  $\mathbf{Y}$ , De Moor [6] demonstra que as condições acima são atingidas assintoticamente com o aumento do número de amostras da matriz de dados ruidosos.

Estas considerações representam a motivação para a adoção das condições suficientes representadas por (4.22) e (4.23).

## 4.11 Considerações de Ordem Prática

Observa-se experimentalmente que os algoritmos baseados em SVD mantêm-se robustos mesmo com matrizes de dados compostas por poucas amostras, como será verificado nos próximos capítulos. Mesmo para casos onde  $\|\mathbf{E}^H \mathbf{Y}\|$  é somente pequena, a SVD de  $\mathbf{A}$  fornece boas aproximações para  $\mathcal{R}(\mathbf{V}_{E_1})$  e  $\mathcal{R}(\mathbf{V}_{E_2})$ , e quanto menor esta norma, melhores serão as aproximações.

Entretanto, considerando um número limitado de amostras, a análise efetuada até aqui torna-se razoavelmente complicada, pois boa parte da informação é perdida. Desse modo, não mais se pode garantir que o ruído seja branco. Além disso, passa a existir uma certa correlação entre o sinal e o ruído. Esta correlação, mesmo desconhecida, danifica a ortogonalidade entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{Y}$ . Embora ainda não existam abordagens completamente satisfatórias, uma análise do caso finito pode ser encontrada em [19].

A seguir, usaremos as informações deste capítulo no sentido de melhorar o desempenho do método FBLP para a detecção de frequências.

# Capítulo 5

## O Método FBLP Modificado

### 5.1 Introdução

No capítulo 2 apresentamos o método FBLP para a detecção de frequências. Verificamos que este método permite a estimação de exponenciais complexas não amortecidas embora seu desempenho seja vulnerável ao ruído, degradando-se rapidamente à medida em que a SNR atinge valores pequenos. No capítulo 4 estudamos a influência do ruído sobre a matriz de dados  $\mathbf{A}$ . Observamos que podemos separar as informações em um subespaço somente de ruído e outro de sinal. Porém, não podemos excluir por completo a atuação do ruído, pois o subespaço de sinal também sofre contribuição deste último. Essa limitação traduz-se na impossibilidade de determinar uma única matriz  $\mathbf{E}$  a partir da SVD de  $\mathbf{A}$ . Neste capítulo, vamos determinar a estimativa de  $\mathbf{E}$  no sentido dos mínimos quadrados. Partindo daí, definiremos o método FBLP Modificado, discutindo as suas características principais. Aplicaremos estes conhecimentos ao método baseado na derivada da fase, abordado do capítulo 3, apresentando resultados de simulações ao final deste capítulo.

### 5.2 A Estimativa por Mínimos Quadrados - LS

Uma vez que, pela SVD somente, não podemos determinar uma única matriz  $\mathbf{E}$  que poderia ter gerado  $\mathbf{A}$ , faremos uma estimativa. A estimativa de  $\mathbf{E}$ , matriz de dados exata

de posto incompleto, no sentido dos mínimos quadrados, dado o conhecimento de  $\mathbf{A}$ , é obtida pela minimização da norma:

$$\min_{\mathbf{E}_{LS}} \|\mathbf{A} - \mathbf{E}_{LS}\|_F^2 \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{E}_{LS} \in \mathbb{C}^{2(N-L) \times L}$  e tem posto  $M$ .

A solução desta otimização [8] fornece:

$$\mathbf{E}_{LS} = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{S}_{A_1} \mathbf{V}_{A_1}^H \quad (5.2)$$

ou seja, uma estimativa baseada apenas nos elementos do subespaço de sinal de  $\mathbf{A}$ .

Esta estimativa pertence ao conjunto bola de matrizes  $\mathcal{B}$  definido no capítulo anterior [6], caracterizando-se como sendo a estimativa de norma mínima para  $\mathbf{E}$ .

Como a estimativa de  $\mathbf{w}$  no sentido dos mínimos quadrados é dada por  $\mathbf{w} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b}$ , substituindo  $\mathbf{A}$  pela estimativa de posto incompleto  $\mathbf{E}_{LS}$ , encontramos

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}_{LS}^\# \mathbf{b} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_{Ak}} \mathbf{v}_{Ak} \mathbf{u}_{Ak}^H \mathbf{b} \quad (5.3)$$

A estimativa obtida acima nada mais é do que aquela proposta por Tufts e Kumaresan [29], que será tratada em maiores detalhes na seção a seguir.

### 5.3 Melhorando o FBLP

O método FBLP Modificado foi proposto por Tufts e Kumaresan [29]. Nele, busca-se diminuir os efeitos dos valores e vetores singulares do subespaço de ruído de  $\mathbf{A}$ , os quais prejudicam desastrosamente o desempenho do método FBLP para a detecção de frequências próximas sob relações sinal-ruído pequenas. A solução  $\mathbf{w}$  de norma mínima pode ser escrita como [1]:

$$\mathbf{w}_{LS} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\min[2(N-L), L]} \frac{1}{\sigma_{Ak}} \mathbf{v}_{Ak} \mathbf{u}_{Ak}^H \mathbf{b} \quad (5.4)$$

Como vimos no capítulo 4, a SVD decompõe a matriz  $\mathbf{A}$  em partes de sinal e de ruído. O mesmo se aplica a  $\mathbf{A}^\#$  e, desse modo, podemos recompô-la com somente a parte do subespaço de sinal, "filtrando-a", de certo modo. Truncando a somatória em (5.4) de

forma a envolver apenas aos  $M$  primeiros termos, ou seja, aqueles relativos ao subespaço de sinal, temos:

$$\mathbf{w}_{Mod.} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_{Ak}} \mathbf{v}_{Ak} \mathbf{u}_{Ak}^H \mathbf{b} \quad (5.5)$$

que é idêntica à expressão (5.3).

Esta estimativa de  $\mathbf{w}$  já não é a de norma mínima, porém sofre menor influência de ruído. Tufts e Kumaresan partiram daí, definindo uma função  $W(z)_{Mod.}$  utilizando este  $\mathbf{w}$ . Note que o polinômio  $W(z)$  mantém sua ordem  $L$ . Tufts e Kumaresan demonstram que, para SNR's não muito pequenas, os valores e vetores singulares de sinal de  $\mathbf{E}_{LS}$  permanecem próximos dos correspondentes valores e vetores singulares de  $\mathbf{E}$ . Agora, portanto, os coeficientes de  $\mathbf{w}_{Mod.}$  aproximam-se mais daqueles do caso sem ruído. Desse modo, os zeros de  $W(z)_{Mod.}$  apresentam um comportamento próximo ao do caso não ruidoso, oferecendo melhores condições à estimação precisa das frequências.

Definimos, assim, o método FBLP Modificado pelo subespaço de sinal, ou método dos componentes principais. Este resultado utiliza as informações obtidas no capítulo 4, reduzindo a atuação ruidosa, porém ainda conserva a influência do ruído sobre os valores e vetores singulares de sinal.

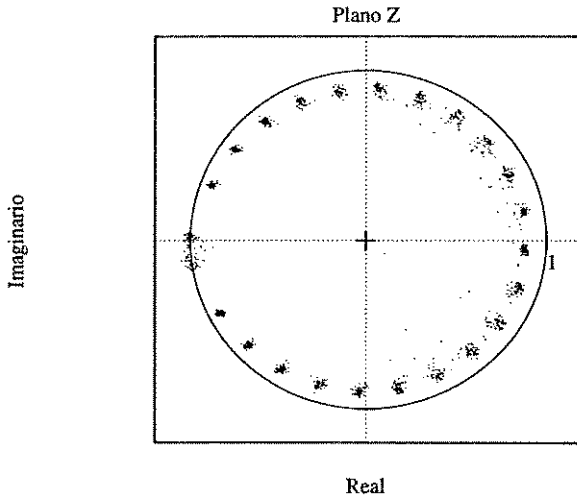


Figura 5.1: Zeros da função de transferência FBLP,  $N = 25$  amostras,  $L = 24$ ,  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ .

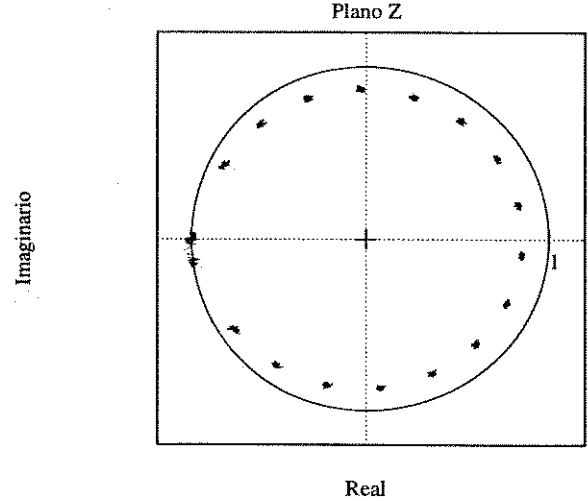


Figura 5.2: Zeros da função de transferência FBLP Modificado,  $N = 25$  amostras,  $L = 18$ ,  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ .

Os resultados obtidos em [29] são melhor discutidos em [1], de onde extraímos as figuras 5.1, 5.2 e 5.3, sob as mesmas condições de amplitude, frequência e ruído da figura 2.3.

Comparando as figuras 5.1 e 5.2, verificamos que a restrição de subespaço reduziu bastante as flutuações dos zeros estranhos devido ao ruído em relação às suas posições ideais, aproximando-se mais do caso não ruidoso. Entretanto, podemos acrescentar que a manutenção da atuação do ruído sobre os valores e vetores de sinal continua prejudicando os zeros de sinal, os quais ainda apresentam espalhamento ao redor de suas posições ideais.

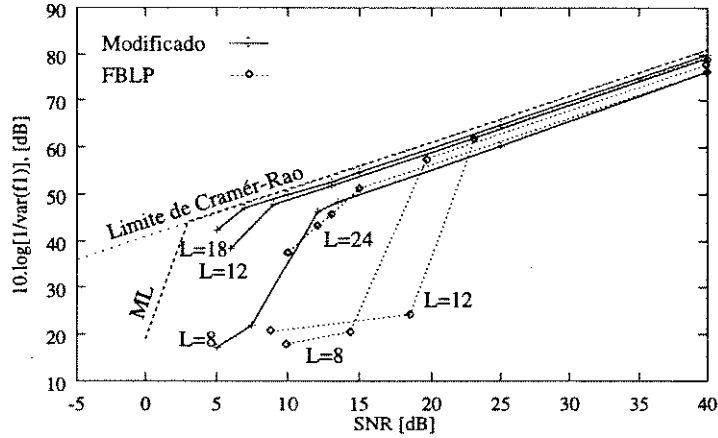


Figura 5.3: Comparação de desempenho entre os métodos ML, FBLP e FBLP Modificado.

Na figura 5.3, podemos avaliar objetivamente os desempenhos dos métodos FBLP e FBLP Modificado para detecção de frequências. Observamos que a restrição ao subespaço de sinal imprimiu significativo aumento na robustez ante o ruído, reduzindo a SNR de limiar em até 14dB para  $L = 12$  e em 8dB do melhor caso FBLP para o melhor caso FBLP Modificado. O melhor desempenho foi alcançado para  $L = 18$  e SNR de limiar de 7dB, aproximando-se mais do desempenho dos métodos baseados em Máxima Verossimilhança.

A partir destes resultados, Tufts e Kumaresan definiram experimentalmente o valor da ordem ótima para a estimação das frequências, ou seja, correspondente à menor SNR de limiar, como sendo  $L = (3/4)N$ . Para  $N = 25$ , a ordem ótima seria 18, que é corroborada na figura 5.3 pela curva respectiva, a qual apresenta a menor SNR de limiar e se posiciona mais próxima do Limite de Cramér-Rao.

Em especial, destacamos o caso *Kumaresan-Prony* (KP), que ocorre quando  $L = N - (M/2)$ , ou seja,  $L = 24$  neste caso. Este valor de  $L$  faz com que a matriz  $\mathbf{A}$  tenha dimensões  $M \times L$ . Como o número de valores singulares não nulos de  $\mathbf{A}$  corresponde ao seu posto, que neste caso vale  $\min[M, L]$ ,  $\mathbf{A}$  tem somente  $M$  valores singulares correspondentes ao sinal, pois  $M \leq L$  por definição. Logo, a restrição da matriz  $\mathbf{A}$  ao subespaço de sinal ocorre automaticamente. Então, no caso KP, os métodos FBLP e FBLP Modificado se equivalem e  $\mathbf{w}_{LS}$  não sofre contribuição do subespaço de ruído.

## 5.4 Derivada da Fase Modificada

A redução de  $\mathbf{A}$  ao subespaço de sinal preservou a relação entre  $\mathbf{w}$  e  $W(z)$ , uma vez que não alterou a ordem do vetor de coeficientes de predição. Logo, também não alterou a ordem do polinômio  $W(z)$ . Assim, podemos aplicar os procedimentos do capítulo 3 ao caso modificado, sem quaisquer restrições. Pretendemos com isto melhorar as estimativas baseadas no espectro de derivada da fase, como poderá ser visto adiante nos resultados de simulações.

Até onde nosso conhecimento permite afirmar, não há menção na literatura a esta proposta. Assim, arriscamo-nos a afirmar que estamos definindo um novo método para a detecção de frequências por análise espectral.

### 5.4.1 Comparação de Desempenho entre o Espectro de Derivada da Fase e a Extração de Raízes para o FBLP Modificado

Apresentamos a seguir uma comparação de desempenho entre o método de Derivada da Resposta de Fase FBLP Modificado, aqui desenvolvido, e a abordagem clássica do FBLP Modificado usando extração de raízes. Retomando a abordagem quantitativa do desempenho, usando a expressão (2.29) para a variância das estimativas, temos as seguintes curvas comparativas entre os métodos supra-citados (figuras 5.4, 5.5 e 5.6):

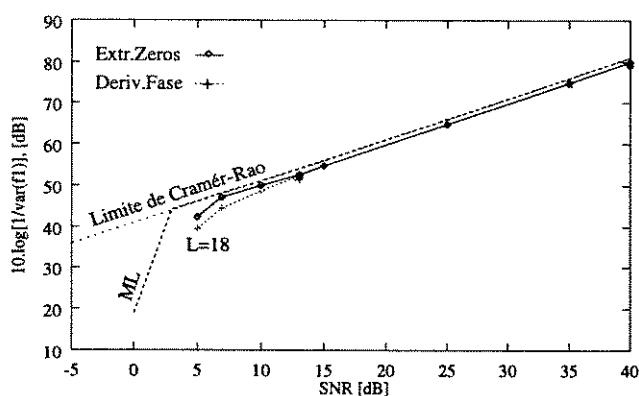


Figura 5.4: Comparação de desempenho entre os métodos FBLP Modificado usando raízes e derivada da resposta de fase,  $L = 18$ .

Podemos verificar que, para  $L = 18$ , a derivada da fase acompanha o desempenho da

detecção por raízes até cerca de 14 dB, sofrendo ligeira degradação à medida em que a SNR aproxima-se de 8 dB, quando o desempenho de ambos alcança a SNR de limiar.

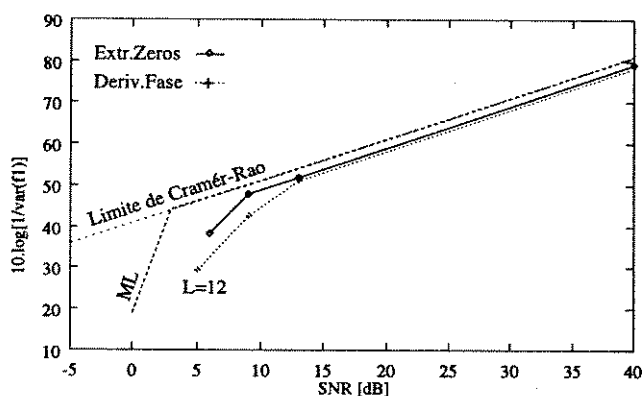


Figura 5.5: Comparação de desempenho entre os métodos FBLP Modificado usando raízes e derivada da resposta de fase,  $L = 12$ .

Para uma ordem de predição igual a 12, observamos que enquanto a SNR de limiar para a extração de raízes está em torno de 9 dB, o limiar para a derivada da fase é cerca de 14 dB.

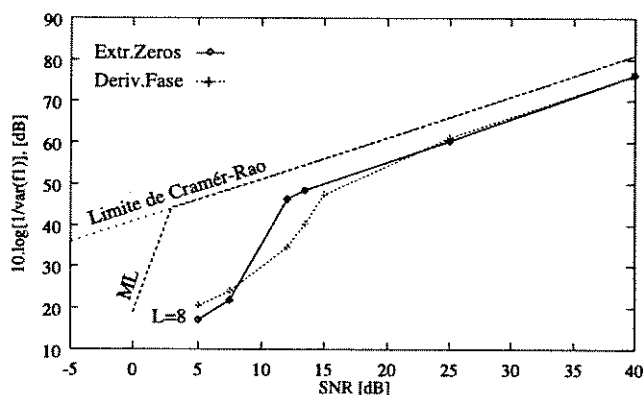


Figura 5.6: Comparação de desempenho entre os métodos FBLP Modificado usando raízes e derivada da resposta de fase,  $L = 8$ .

No caso de  $L = 8$ , os valores de SNR de limiar das duas abordagens ficam em 12 dB para o caso de raízes e em 15 dB no caso do espectro da derivada da fase.

Enfim, a restrição ao subespaço de sinal melhora em muito o desempenho do método FBLP, permitindo um valor de SNR de limiar cerca de 5 dB abaixo da menor SNR de limiar sem a modificação.

Verificamos ainda que tal procedimento também se aplica à abordagem pela derivada da fase, alcançando desempenho semelhante àquele obtido utilizando-se a extração de

raízes. Isto valida a utilização da derivada da fase como método para a detecção de frequências, para ordens mais altas como  $L = 18$ , onde os desempenhos atingem seu ponto de máximo.

O uso da derivada da fase apresenta resultados muito superiores aos obtidos com a abordagem pelo espectro de magnitude, embora ainda inferiores ao desempenho da abordagem por raízes. Tendo em conta que esta última diferença não é grande e que os procedimentos computacionais envolvidos no método da derivada da resposta de fase são mais simples, podemos afirmar que os métodos FBLP Modificado e Derivada da Resposta de Fase FBLP Modificado são competitivos.

## Capítulo 6

# FBLP e Mínimos Quadrados Totais TLS-FBLP

### 6.1 Introdução

Nos capítulos anteriores utilizamos a otimização do filtro de erro de predição segundo o critério dos mínimos quadrados. Outro critério mais abrangente é o denominado Mínimos Quadrados Totais, ou TLS - do inglês *Total Least Squares*. Este critério permite otimizar de forma mais completa o vetor de coeficientes, admitindo erros tanto no vetor desejado como na matriz de dados. Neste capítulo vamos desenvolver o TLS aplicado à predição linear *forward-backward*, na tentativa de definir um método FBLP segundo o critério dos mínimos quadrados totais, TLS-FBLP, que supere o FBLP convencional. Apresentaremos ainda comparações entre o critério TLS e o mínimos quadrados convencional, bem como relacionaremos a estimativa do método TLS-FBLP àquela de mínima variância. Finalmente, apresentamos uma comparação detalhada de desempenho entre o método proposto e o FBLP Modificado.

## 6.2 A Estimativa pelo Critério de Mínimos Quadrados Totais - TLS

O método dos mínimos quadrados totais pode ser considerado como uma generalização da decomposição harmônica de Pisarenko, bem como um refinamento da abordagem dos mínimos quadrados, pois combate o efeito do ruído tanto na matriz de dados observados  $\mathbf{A}$  quanto no vetor de observações  $\mathbf{b}$ , através de ajustes em ambos quando da busca de um sistema homogêneo de equações para a otimização de  $\mathbf{w}$ . Intuitivamente, pode-se esperar um melhor comportamento do TLS em relação ao LS, que considera o efeito do ruído em um único termo da equação normal, como veremos a seguir.

### 6.2.1 Análise pela Teoria de Perturbações

Observando o problema de predição linear sob o ponto de vista da Teoria de Perturbações, podemos dizer que para obtermos a consistência do sistema de equações de predição linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} \approx \mathbf{b} \quad (6.1)$$

podemos inserir um erro  $\mathbf{e}$  entre os dois termos, de modo a se estabelecer a igualdade. Desse modo podemos escrever:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = (\mathbf{b} + \mathbf{e}) \quad (6.2)$$

A solução no sentido dos mínimos quadrados (LS) consiste em encontrar  $\mathbf{w}$ , sujeito a (6.2), que minimize a norma quadrática de  $\mathbf{e}$ , isto é, que assegure:

$$\min \|\mathbf{e}\|_2, \text{ tal que } (\mathbf{b} + \mathbf{e}) \in \mathcal{R}(\mathbf{A}). \quad (6.3)$$

Neste caso  $(\mathbf{b} + \mathbf{e})$  poderá ser "*predito*" pelas colunas de  $\mathbf{A}$ , pois a expressão (6.2) implica em que, particionando  $\mathbf{A}$  em vetores coluna, tenhamos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_L \end{bmatrix} = (\mathbf{b} + \mathbf{e}) \quad (6.4)$$

logo:

$$(\mathbf{b} + \mathbf{e}) = w_1 \mathbf{a}_1 + w_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + w_L \mathbf{a}_L \quad (6.5)$$

ou seja,  $(\mathbf{b} + \mathbf{e})$  é uma combinação linear das colunas de  $\mathbf{A}$ .

O critério TLS pressupõe a perturbação tanto em  $\mathbf{b}$  como em  $\mathbf{A}$ , para obtermos a igualdade em (6.1), conquistando assim um grau de liberdade maior para solucionar o nosso sistema. Portanto, escrevemos:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{w} = (\mathbf{b} + \mathbf{e}) \quad (6.6)$$

onde  $\mathbf{D}$  é  $2(N - L) \times L$ , matriz de perturbação de  $\mathbf{A}$ . De outra forma:

$$([\mathbf{A} : \mathbf{b}] + [\mathbf{D} : \mathbf{e}]) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \cdots \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

que é uma equação homogênea como na decomposição harmônica de Pisarenko. Então, a solução TLS consiste em encontrar  $\mathbf{w}$  que minimize a norma quadrática de  $[\mathbf{D} : \mathbf{e}]$ , sujeito a (6.7).

### 6.2.2 A Solução dos Mínimos Quadrados Totais

Seja  $\mathbf{P} \triangleq [\mathbf{A} : \mathbf{b}]$  e  $\mathbf{Q} \triangleq [\mathbf{D} : \mathbf{e}]$  com dimensões  $2(N - L) \times (L + 1)$ . A solução TLS consiste em encontrar  $\mathbf{w}$  tal que se atinja:

$$\min_{\mathbf{w}, \mathbf{B}} \|[\mathbf{A} : \mathbf{b}] - \mathbf{B}\|_F^2 \quad (6.8)$$

para  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{2(N-L) \times (L+1)}$  sujeito a (6.7), ou seja, encontrar  $\mathbf{w}$  que assegure:

$$\min \|\mathbf{Q}\|_F^2, \text{ tal que } (\mathbf{b} + \mathbf{e}) \in \mathcal{R}(\mathbf{A} + \mathbf{D}) \quad (6.9)$$

Seguindo os passos desenvolvidos em [8], a estimativa TLS será obtida a partir da SVD de  $\mathbf{P}$ . Portanto fazemos:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_P \mathbf{S}_P \mathbf{V}_P^H \quad (6.10)$$

ou seja:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{\min[2(N-L), (L+1)]} \sigma_{P(k)} \mathbf{v}_{P(k)} \mathbf{u}_{P(k)}^H \quad (6.11)$$

onde:

- $\mathbf{U}_P = [\mathbf{u}_{P(1)} \cdots \mathbf{u}_{P(2(N-L))}] \in \mathbb{C}^{2(N-L) \times 2(N-L)}$ ;
- $\mathbf{V}_P = [\mathbf{v}_{P(1)} \cdots \mathbf{v}_{P(L+1)}] \in \mathbb{C}^{(L+1) \times (L+1)}$ ;

- $\mathbf{S}_P = \text{diag}[\sigma_{P(1)}, \dots, \sigma_{P(\min[2(N-L), (L+1)])}] \in \mathbb{R}^{2(N-L) \times (L+1)}$ ;
- $\sigma_{P(1)} \geq \sigma_{P(2)} \geq \dots \geq \sigma_{P(M)} > \sigma_{P(M+1)} = \dots = \sigma_{P(\min[2(N-L), (L+1)])} \geq 0$ .

Como admitimos, a partir de (6.6), que  $(\mathbf{b} + \mathbf{e})$  é combinação linear das colunas de  $(\mathbf{A} + \mathbf{D})$ , podemos considerar que o posto de  $([\mathbf{A} : \mathbf{b}] + [\mathbf{D} : \mathbf{e}])$  é incompleto. Desse modo, pode ser demonstrado que [7]:

$$\min_{\text{posto}(\mathbf{B}) < \min[2(N-L), (L+1)]} \|\mathbf{Q}\|_F = \sigma_{P(\min[2(N-L), (L+1)])} \quad (6.12)$$

o qual é atingido fazendo-se:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{P}\mathbf{v}\mathbf{v}^H \quad (6.13)$$

onde  $\mathbf{v}$  é qualquer vetor unitário no subespaço  $\mathcal{S}_w$  definido pela combinação linear de  $\{\mathbf{v}_{P(M+1)}, \dots, \mathbf{v}_{P(L+1)}\}$ .

Para verificarmos que esta escolha atende aos requisitos da solução procurada, vamos escrever  $\mathbf{v}$  na seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dots \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

tal que  $\alpha \neq 0$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^L$ .

Se fizermos:

$$\mathbf{w}_{TLS} = -\frac{\mathbf{x}}{\alpha} \quad (6.15)$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{\mathbf{v}}{\alpha} \quad (6.16)$$

e definirmos  $\mathbf{Q}$  como em (6.13), então podemos escrever:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{A} : \mathbf{b}] + [\mathbf{D} : \mathbf{e}]) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} &= (\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{v}\mathbf{v}^H) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^H)\left(-\frac{\mathbf{v}}{\alpha}\right) \\ &= -\frac{1}{\alpha}(\mathbf{P}\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v}\mathbf{v}^H\mathbf{v}) \\ &= -\frac{1}{\alpha}(\mathbf{P}\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Portanto, o vetor  $\mathbf{w}_{TLS}$  definido por (6.15) satisfaz a equação (6.7), assegurando que  $\|\mathbf{Q}\|_F^2$  seja mínima. Logo, sob a luz das considerações efetuadas, segue-se que  $\mathbf{w}_{TLS}$  resolve o problema TLS e depende apenas dos vetores singulares à direita correspondentes ao menor valor singular de  $[\mathbf{A}:\mathbf{b}]$ . Entretanto, se não existir  $\mathbf{v}$  em  $\mathcal{S}_w$  tal que  $\alpha \neq 0$ , o critério TLS não consegue resolver o sistema.

No caso de termos um sistema subdeterminado, ou seja,  $2(N-L) < (L+1)$ , teríamos mais incógnitas do que equações em (6.7), o que, segundo [12], produz infinitas soluções com erro nulo. Para esta situação, a solução TLS é a mesma obtida pelo LS. Logo, podemos assumir  $\mathbf{w}_{TLS} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b}$ .

Para um sistema sobredeterminado,  $2(N-L) \geq (L+1)$  e  $\sigma_{P(L+1)}$  é o menor valor singular de  $\mathbf{P}$ . Para o caso de  $\sigma_{P(L+1)}$  ser um valor singular repetido de  $\mathbf{P}$ , temos infinitas soluções e, dentre elas, a solução de norma mínima.

Em particular, quando  $M = L$ , os valores singulares de  $\mathbf{P}$  são todos distintos e  $\sigma_{P(L+1)}$  é único. Nesta situação é possível obter uma solução única dada por:

$$\mathbf{w}_{TLS} = - \frac{1}{v_{P[(L+1),(L+1)]}} \begin{bmatrix} v_{P[1,(L+1)]} \\ \vdots \\ v_{P[L,(L+1)]} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

dado que  $v_{P[(L+1),(L+1)]} \neq 0$ , pois existe apenas um vetor  $\mathbf{v}$  em  $\mathcal{S}_w$ . Neste caso, a solução TLS reduz-se à mesma estrutura algébrica da solução de Pisarenko.

Golub e Van Loan [8] demonstram que a solução de norma mínima para o TLS é dada por:

$$\mathbf{w}_{TLS} = - \sum_{k=M+1}^{L+1} \left[ \frac{v_{P[(L+1),k]}^*}{\sum_{i=M+1}^{L+1} |v_{P[(L+1),i]}|^2} \right] \mathbf{x}_k \quad (6.19)$$

onde

$$\mathbf{v}_{P(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ v_{P[(L+1),k]} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Esta solução atende aos casos de infinitas soluções para sistemas sobre e subdeterminados, igualando-se à solução única quando  $L = M$ .

### 6.2.3 Comparação entre Mínimos Quadrados e Mínimos Quadrados Totais

Apresentamos agora uma interpretação geométrica para a diferença entre as minimizações LS e TLS. Minimizar o erro TLS equivale a minimizar  $\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}]\|_2$  sujeito à condição (6.7). A norma  $\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}]\|_2$  é calculada como:

$$\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}]\|_2 = \max_{\mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \frac{\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}] \mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{z}\|_2} \quad (6.21)$$

$[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}]$ , condicionada por (6.7), apresentará norma mínima se satisfizer (6.13). Neste caso, segundo Golub [8], temos

$$\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}]\|_2 = \frac{\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}] \mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} \quad (6.22)$$

para  $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_w$ . Além disto, temos que, para  $2(N - L) \geq (L + 1)$ :

$$\|[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}]\|_2 = \sigma_{P(L+1)} \quad (6.23)$$

Portanto,  $\sigma_{P(L+1)}^2$ , neste caso, é o valor do erro médio quadrático envolvido na predição linear.

Usando (6.15), substituímos  $\mathbf{v}$  e temos:

$$\frac{\left\| [\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \cdots \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \cdots \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2} = \sigma_{L+1} \quad (6.24)$$

Como, a partir de (6.7), podemos fazer:

$$[\mathbf{A} \vdash \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \cdots \\ -1 \end{bmatrix} = -[\mathbf{D} \vdash \mathbf{e}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \cdots \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

então:

$$\frac{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} : \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2} = \sigma_{P(L+1)} \quad (6.26)$$

A interpretação geométrica do problema TLS torna-se visível quando calculamos:

$$\frac{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} : \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2^2}{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{TLS} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2^2} = \sum_{i=1}^{2(N-L)} \frac{|\mathbf{a}_i^H \mathbf{w}_{TLS} - b_i|^2}{\mathbf{w}_{TLS}^H \mathbf{w}_{TLS} + 1} \quad (6.27)$$

onde  $\mathbf{a}_i$  é a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{A}$  e  $b_i$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{b}$ . Vamos, agora, interpretar a quantidade

$$\mathbf{d}_i = \frac{|\mathbf{a}_i^H \mathbf{w} - b_i|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{w} + 1} \quad (6.28)$$

No caso mais simples quando  $L = 1$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores  $2(N-1) \times 1$ , enquanto  $\mathbf{w}$  é um escalar. Assim, a relação  $\mathbf{A}\mathbf{w} \approx \mathbf{b}$  fica expressa como:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2(N-1)} \end{bmatrix} w \approx \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2(N-1)} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Na figura 6.1 apresentamos uma representação no plano para as relações  $a_i w \approx b_i$ ,  $1 \leq i \leq 2(N-1)$ . Dado um conjunto de pontos  $(a_i, b_i)$ , correspondentes às coordenadas de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$ , tentamos aproximá-los com uma reta de coeficiente angular  $w$ .

Na otimização LS consideramos erros apenas em  $\mathbf{b}$  para aproximar o conjunto de pontos pela reta de coeficiente angular  $\mathbf{w}_{LS}$ . Na figura 6.2, tomando apenas o ponto  $(a_i, b_i)$ , o critério LS minimiza a distância do ponto  $(a_i, a_i w_{LS})$  ao ponto dado, a qual tem o valor  $|a_i w_{LS} - b_i|$ .

Por outro lado, na otimização TLS consideramos erros tanto em  $\mathbf{b}$  como  $\mathbf{a}$  de forma a aproximar os pontos pela reta de coeficiente angular  $\mathbf{w}_{TLS}$ . Na figura 6.3, verificamos que a reta  $\mathbf{w}_{TLS}$  inclina-se de um ângulo  $\beta$ , tal que  $\cos(\beta) = 1/(\mathbf{w}_{TLS}^2 + 1)^{1/2}$ . Logo, analisando

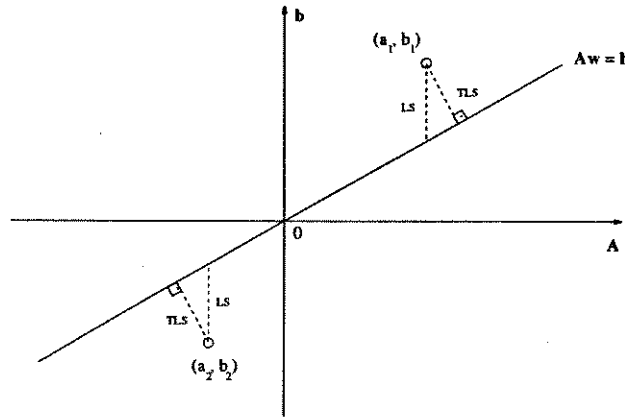


Figura 6.1: Diferenças no ajuste da reta  $w$  pelos critérios LS ou TLS.

a parcela da norma quadrática mínima do erro TLS dada por (6.28), verificamos que podemos escrever:

$$\frac{|a_i w_{TLS} - b_i|^2}{w_{TLS}^2 + 1} = |a_i w_{TLS} - b_i|^2 \cos^2(\beta) \quad (6.30)$$

indicando que esse critério minimiza a distância perpendicular da reta ao ponto dado.

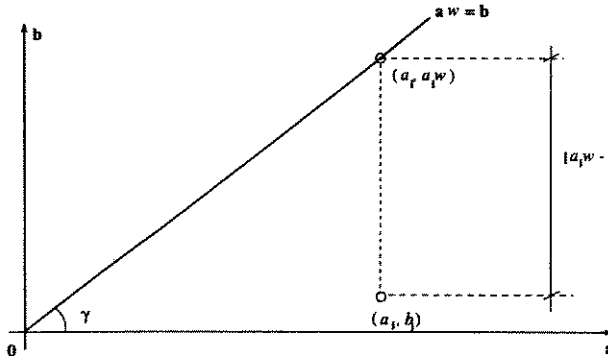


Figura 6.2: O erro LS.

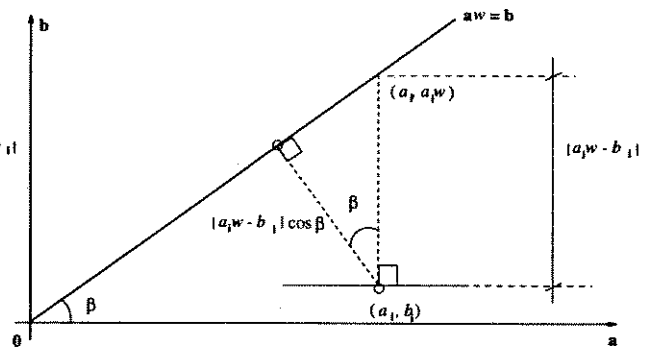


Figura 6.3: O erro TLS.

Assim, generalizando para outros valores de  $L$ , o critério TLS minimiza a soma das distâncias quadráticas de cada ponto  $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ b_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{L+1}$  ao ponto mais próximo do subespaço  $\mathcal{P}_w$  definido por

$$\mathcal{P}_w = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{bmatrix} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{C}^L, b \in \mathbb{C}, b = \mathbf{w}^H \mathbf{a} \right\} \quad (6.31)$$

Concluimos, portanto, que para o ajuste de uma curva entre os pontos observados, a abordagem LS atua na minimização das distâncias verticais, considerando o erro apenas

no vetor  $\mathbf{b}$ , enquanto que o TLS minimiza as distâncias perpendiculares, ajustando tanto  $\mathbf{b}$  quanto  $\mathbf{A}$ .

#### 6.2.4 A Relação entre Mínimos Quadrados e Mínimos Quadrados Totais

A SVD de  $\mathbf{P}$  relaciona-se com a SVD de  $\mathbf{A}$  de uma forma bastante complicada [32]. Entretanto, pela SVD de  $\mathbf{P}$  podemos extrair uma relação a partir da seguinte expressão:

$$(\mathbf{P}^H \mathbf{P}) \mathbf{v}_{P(k)} = \sigma_{P(k)}^2 \mathbf{v}_{P(k)} \quad (6.32)$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^H \mathbf{A} & \mathbf{A}^H \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^H \mathbf{A} & \mathbf{b}^H \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \dots \\ v_{P[k,(L+1)]} \end{bmatrix} = \sigma_{P(k)}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \dots \\ v_{P[k,(L+1)]} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Isto resulta nas seguintes expressões para  $\mathbf{x}_k$  e  $v_{P[k,(L+1)]}$ :

$$(\mathbf{A}^H \mathbf{A} - \sigma_{P(k)}^2 \mathbf{I}) \mathbf{x}_k + v_{P[k,(L+1)]} \mathbf{A}^H \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (6.34)$$

e

$$\mathbf{b}^H \mathbf{A} \mathbf{x}_k + (\mathbf{b}^H \mathbf{b} - \sigma_{P(k)}^2) v_{P[k,(L+1)]} = 0 \quad (6.35)$$

Se os valores singulares de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{P}$  forem todos distintos entre si, então  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A} - \sigma_{P(k)}^2 \mathbf{I})$  é inversível, caso contrário, invocamos a pseudo-inversa. Explicitando  $\mathbf{x}_k$ :

$$\mathbf{x}_k = -v_{P[k,(L+1)]} (\mathbf{A}^H \mathbf{A} - \sigma_{P(k)}^2 \mathbf{I})^\# \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (6.36)$$

e substituindo em (6.19) temos:

$$\mathbf{w}_{TLS} = (1/\alpha^2) \sum_{k=M+1}^{L+1} |v_{P[k,(L+1)]}|^2 (\mathbf{A}^H \mathbf{A} - \sigma_{P(k)}^2 \mathbf{I})^\# \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (6.37)$$

onde:

$$(1/\alpha^2) \sum_{k=M+1}^{L+1} |v_{P[k,(L+1)]}|^2 = 1 \quad (6.38)$$

para  $\alpha \neq 0$ .

Para  $2(N - L) \geq (L + 1)$ , se  $\sigma_{P(k)} \approx \sigma_P$  onde  $k = (M + 1), \dots, (L + 1)$ , temos que o termo que contém  $\sigma_{P(k)}$  pode ser exteriorizado da somatória, e a soma restante iguala-se a 1. Assim, podemos reescrever a estimativa TLS como:

$$\mathbf{w}_{TLS} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A} - \sigma_P^2 \mathbf{I})^\# \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (6.39)$$

que pode ser expressa por:

$$\mathbf{w}_{TLS} = \mathbf{V}_A(\Sigma_A^H \Sigma_A - \sigma_P^2 \mathbf{I})^{-1} \Sigma_A^H \mathbf{U}_A^H \mathbf{b} \quad (6.40)$$

ou seja:

$$\mathbf{w}_{TLS} = \sum_{k=1}^L \frac{\sigma_{A(k)}}{\sigma_{A(k)}^2 - \sigma_P^2} \mathbf{v}_{A(k)} \mathbf{u}_{A(k)}^H \mathbf{b} \quad (6.41)$$

que, simplificando, fica:

$$\mathbf{w}_{TLS} = \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sigma_{A(k)} - \sigma_P^2 / \sigma_{A(k)}} \mathbf{v}_{A(k)} \mathbf{u}_{A(k)}^H \mathbf{b} \quad (6.42)$$

Observamos que  $\sigma_P$  deve ser menor do que  $\sigma_{A(L)}$  e que, quando a variância  $\sigma_P^2$  do ruído é nula, ou seja, na ausência de ruído, a expressão anterior reduz-se ao caso LS.

Embora essa expressão resulte da aplicação de uma série de considerações que nem sempre se verificam, ela permite observar que a otimização TLS tenta corrigir as perturbações ruidosas sobre os valores singulares de  $\mathbf{A}$ . Aparentemente podemos afirmar que a solução TLS será melhor do que a LS caso as perturbações sobre os valores singulares estejam em torno de  $\sigma^2 / \sigma_{Ak}$ .

### TLS-FBLP Modificado

Como o número de exponenciais complexas presentes no sinal é  $M$ , aplicamos à expressão (6.42) a mesma restrição ao subespaço de sinal efetuada por Tufts e Kumaresan [29][22]:

$$\mathbf{w}_{TLMS} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_{A(k)} - \sigma_P^2 / \sigma_{A(k)}} \mathbf{v}_{A(k)} \mathbf{u}_{A(k)}^H \mathbf{b} \quad (6.43)$$

As afirmações dos últimos parágrafos também valem para este caso. Entretanto, nossa experiência prática demonstrou que a utilização desta expressão não atinge bons resultados, muito provavelmente porque as considerações necessárias à sua validade são muito particulares.

Por outro lado, veremos adiante que a expressão (6.19) mostrou-se suficiente em simulações comparativas com o método FBLP Modificado.

### 6.3 Estimativa de Variância Mínima - MV

Um aspecto de extrema importância no desempenho de um estimador, devido à aleatoriedade dos sinais estudados, é a variância das estimativas. Tal medida tem sido tradicionalmente utilizada como parâmetro de desempenho pelos autores na área de detecção de frequências. Dessa forma, buscamos determinar a estimativa de variância mínima da matriz  $\mathbf{E}$ , obtida pela aplicação de uma transformação linear  $\mathbf{X}$  sobre a matriz de dados  $\mathbf{A}$  de forma a garantir a minimização:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{AX} - \mathbf{E}\|_F^2 \quad (6.44)$$

sujeito a  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{L \times L}$ , onde  $\mathbf{E}$  é determinística e foi considerada a estimativa média, para que a minimização acima atue sobre a variância.

A solução para a otimização acima, considerando  $\mathbf{A}$  ruidosa e de posto cheio, pode ser acompanhada em [6], resultando em:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{E} \quad (6.45)$$

logo:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{E} \quad (6.46)$$

Embora não conheçamos  $\mathbf{E}$ , usando as SVD's de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$  em (6.46), pode ser demonstrado que [6]:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{U}_{A_1} [\mathbf{S}_{E_1}^2 (\mathbf{S}_{E_1}^2 + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1/2}] \mathbf{V}_{A_1}^H \quad (6.47)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\mathbf{E}_{MV} = \mathbf{AX} = \mathbf{U}_{A_1} \mathbf{S}_{E_1}^2 \mathbf{S}_{A_1}^{-1} \mathbf{V}_{A_1}^H \quad (6.48)$$

Utilizando (4.37) em (6.48), podemos constatar que  $\mathbf{E}_{MV}$  corresponde à matriz central  $\mathbf{B}_c$  da bola de matrizes  $\mathcal{B}$ , conforme a expressão (4.50). Na construção da figura 6.4, traçamos uma representação espacial da bola de matrizes  $\mathcal{B}$  e das matrizes correspondentes às estimativas de norma mínima e de variância mínima para  $\mathbf{E}$ , respectivamente  $\mathbf{E}_{LS}$  e  $\mathbf{E}_{MV}$ , correspondente à matriz  $\mathbf{B}_c$ .

Salientamos na figura 6.5 o caso de vetores no plano tratado no Capítulo 4. Nela podemos observar a estimativa  $\mathbf{B}_c$  de variância mínima dado o conhecimento da variância  $\sigma^2$  do ruído. Neste caso,  $\mathbf{Z}$  é um escalar que assume valores simétricos, originando, pela soma de  $\mathbf{B}_l \mathbf{Z} \mathbf{B}_r$  a  $\mathbf{B}_c$ , um conjunto bola de matriz composto por dois vetores estimativa de  $\mathbf{E}$ . Observamos que a estimativa de variância mínima consiste na média dos elementos da bola de matriz.

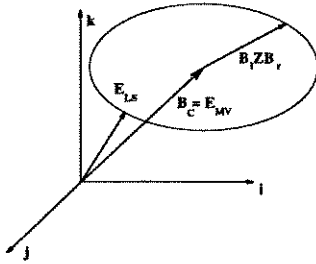


Figura 6.4: Uma representação do conjunto bola de matrizes  $B$  e da estimativa de variância mínima de  $E$ .

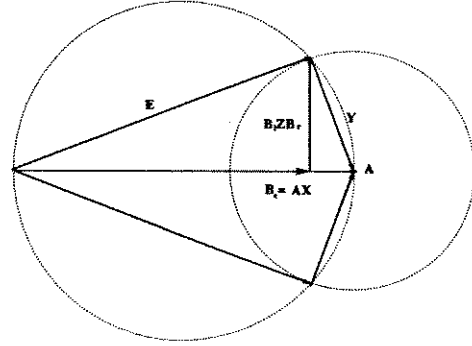


Figura 6.5: Conjunto bola de matrizes  $B$  e  $E_{MV}$  para vetores no plano.

Substituindo  $A$  por  $E_{MV}$  em  $w = A^\# b$ , encontramos a estimativa de variância mínima para o vetor de coeficientes do FEP:

$$w_{MV} = (E_{MV})^\# b \quad (6.49)$$

ou seja:

$$w_{MV} = \sum_{k=1}^M \frac{\sigma_{Ak}}{\sigma_{Ek}^2} v_{Ak} u_{Ak}^H b. \quad (6.50)$$

## 6.4 Relação entre as Estimativas de Variância Mínima e Mínimos Quadrados Totais Modificado

Partindo da expressão final do  $w_{TLSM}$  modificado para o subespaço de sinal (6.43), restringimos nossa atenção ao denominador. Explicitando  $\sigma_{A(k)}$  no denominador, resulta:

$$\sigma_{A(k)} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{A(k)}} = \frac{\sigma_{A(k)}^2 - \sigma^2}{\sigma_{A(k)}} \quad (6.51)$$

a partir da expressão (4.28) temos que  $S_{A_1}^2 = S_{E_1}^2 + \sigma^2 I$ , logo:

$$\sigma_{A(k)} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{A(k)}} = \frac{(\sigma_{E(k)}^2 + \sigma^2) - \sigma^2}{\sigma_{A(k)}} \quad (6.52)$$

ou seja:

$$\sigma_{A(k)} - \frac{\sigma^2}{\sigma_{A(k)}} = \frac{\sigma_{E(k)}^2}{\sigma_{A(k)}} \quad (6.53)$$

Retornando à expressão (6.43), agora substituindo o denominador, resulta:

$$\mathbf{w}_{TLSM} = \sum_{k=1}^M \frac{\sigma_{A(k)}}{\sigma_{E(k)}^2} \mathbf{v}_{A(k)} \mathbf{u}_{A(k)}^H \mathbf{b} \quad (6.54)$$

que na forma matricial podemos escrever:

$$\mathbf{w}_{TLSM} = \mathbf{V}_{A_1} \mathbf{S}_{A_1} \mathbf{S}_{E_1}^{-2} \mathbf{U}_{A_1}^H \mathbf{b} \quad (6.55)$$

Portanto,  $\mathbf{w}_{TLSM} = \mathbf{w}_{MV}$ , ou seja, as estimativas de  $\mathbf{w}$  pelo método dos mínimos quadrados totais modificado são de variância mínima. Este resultado vale sob as considerações da subseção 6.2.4, porém serve apenas como indicativo da potencialidade da aplicação do critério TLS.

## 6.5 Desempenhos em Perspectiva

Visando comparar o desempenho dos métodos TLS-FBLP e FBLP Modificado, efetuamos o cálculo das curvas de desempenho para todas as ordens de predição cabíveis, utilizando as expressões (5.5) e (6.19). Apresentamos estas curvas de forma simultânea, através das superfícies de desempenho mostradas nas figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9, as quais permitem acompanhar a variação da performance dos métodos em função da ordem de predição e da SNR. Destacamos, em todas elas, através de linhas descendentes, os níveis de desempenho para cada valor de ordem de predição  $L$ , desde  $L = 2$  até  $L = 24$ . As linhas transversais foram traçadas almejando, tão somente, melhorar o aspecto das figuras. Estas superfícies permitem verificar onde ocorre o melhor desempenho, o pior ou então acompanhar a variação das SNR's de limiar pelo formato da borda da superfície a partir da qual o desempenho sofre maior degradação.

Através das figuras 6.7 e 6.9, podemos observar que os desempenhos gerais do TLS-FBLP e do FBLP Modificado, para grandes valores de SNR, oscilam conforme a ordem de predição, sendo melhores para as ordens ímpares e piores para as pares. Devemos observar que no caso Kumaresan-Prony (KP)[29],  $L = 24$ , tanto o FBLP Modificado quanto o TLS-FBLP, fornecem a mesma curva de desempenho. Na verdade, as curvas se assemelham a partir da ordem 20, embora com algumas diferenças sutis. Esta semelhança se deve ao fato de que para  $L > 2(N - L)$ , os critérios TLS e LS fornecem os mesmos vetores de coeficientes, como apontado na subseção 6.2.2. Entretanto, a restrição ao subespaço de sinal, empregada no FBLP Modificado, altera a matriz de dados, produzindo as diferenças observadas.

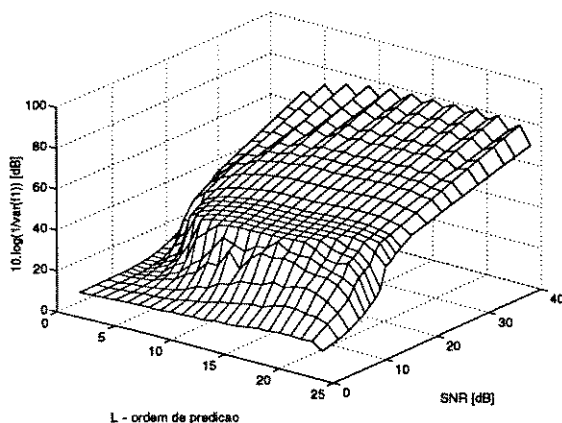


Figura 6.6: Superfície de desempenho para o método TLS-FBLP (perspectiva à esquerda).

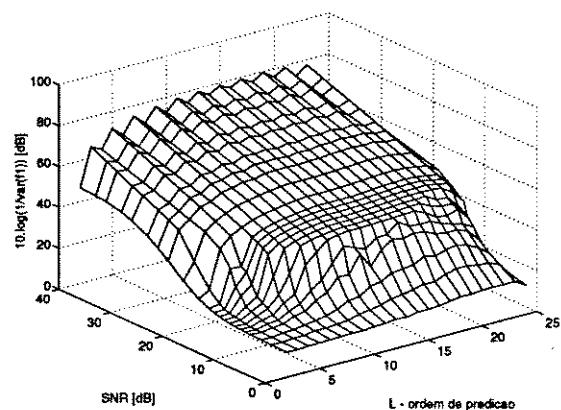


Figura 6.7: Superfície de desempenho para o método TLS-FBLP (perspectiva à direita).

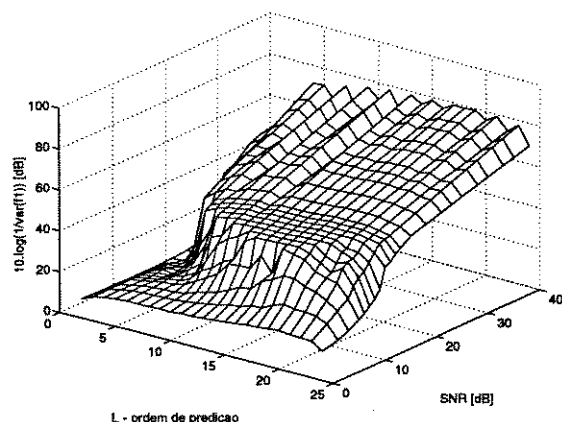


Figura 6.8: Superfície de desempenho para o método FBLP Modificado (perspectiva à esquerda).

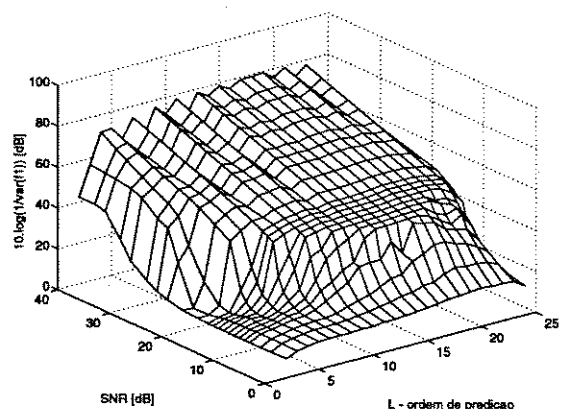


Figura 6.9: Superfície de desempenho para o método FBLP Modificado (perspectiva à direita).

Nas figuras 6.10 e 6.12 traçamos também as curvas de nível para as superfícies apresentadas, gerando alternativas para a visualização do contorno de limiar. Nas regiões onde as superfícies são mais íngremes, as linhas ficam mais próximas entre si, definindo o limiar de desempenho e, conseqüentemente, as respectivas SNR's de limiar para cada ordem de predição. Nas figuras 6.11 e 6.13, para facilitar a compreensão da vista de topo, apresentamos as perspectivas das posições das linhas de nível.

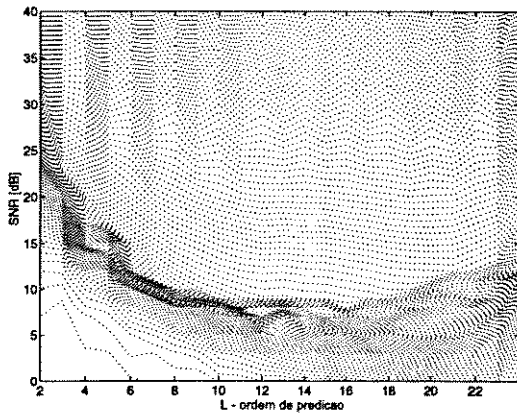


Figura 6.10: Linhas de nível para a superfície de desempenho TLS-FBLP (vista de topo).

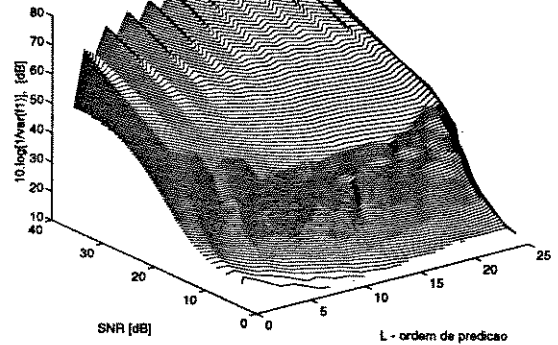


Figura 6.11: Linhas de nível para a superfície de desempenho TLS-FBLP (perspectiva).

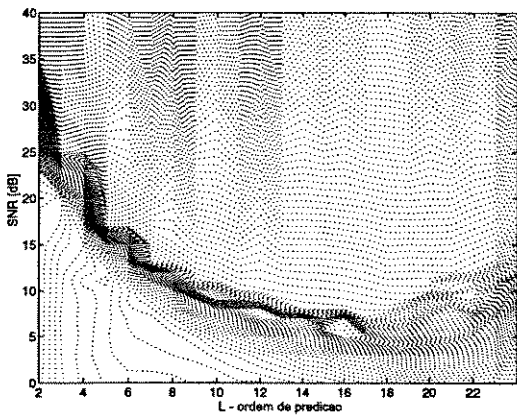


Figura 6.12: Linhas de nível para a superfície de desempenho FBLP Modificado (vista de topo).

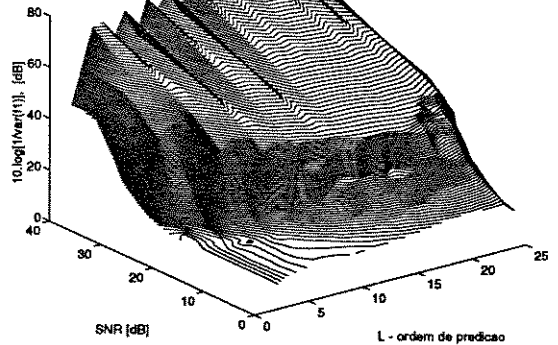


Figura 6.13: Linhas de nível para a superfície de desempenho FBLP Modificado (perspectiva).

No TLS-FBLP verificamos que o desempenho acima do limiar varia mais suavemente com a ordem e que o contorno de limiar é mais suave, ou seja, a variação dos valores de SNR de limiar é muito pequena para ordens  $L$  de 8 a 18. Neste caso, o menor valor de SNR de limiar encontrado foi 8 dB e ocorreu em  $L = 16$ , conforme pode ser observado na figura 6.10. Observando o FBLP Modificado, é fácil constatar que o contorno de limiar é mais agudo, bem como o melhor desempenho ocorre na região de  $L = 14$  a  $L = 18$ , piorando bastante fora deste intervalo. Para ordens pequenas verificamos vales profundos

mesmo para grandes SNR's. Pela figura 6.12 percebemos que a menor SNR de limiar para o FBLP Modificado tem o valor de 7dB e verifica-se para  $L = 17$ , diferente da ordem ótima proposta por Tufts e Kumaresan,  $L = (3/4)N$ , que equivale a  $L = 18$  neste caso.

Observamos que o melhor desempenho, tanto para o TLS-FBLP quanto para o FBLP Modificado, ocorreu quando a ordem de predição empregada foi tal que as respectivas matrizes de dados tornaram-se aproximadamente quadradas. Assim, propomos a medida analítica que afirma que a ordem ótima é aquela que mais aproxima a matriz de dados da forma quadrada, em substituição à medida empírica assinalada por Tufts e Kumaresan para a ordem de menor SNR de limiar do FBLP Modificado.

As figuras 6.14 e 6.15 mostram outra forma interessante de apresentar os resultados acima utilizando o vetor gradiente sobre as superfícies de desempenho. Observando de topo, identificamos os pontos de maior inclinação da derivada pelas setas maiores, correspondentes à projeção do vetor gradiente sobre o plano horizontal. Assim, o limite entre os pontos e as setas marca a SNR de limiar para cada valor de  $L$ .

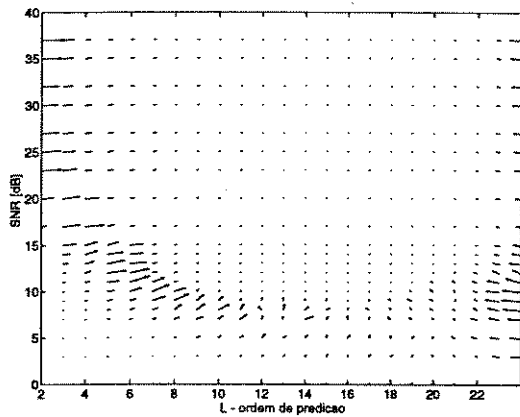


Figura 6.14: Vetores na direção do gradiente para a superfície de desempenho TLS-FBLP (vista de topo).

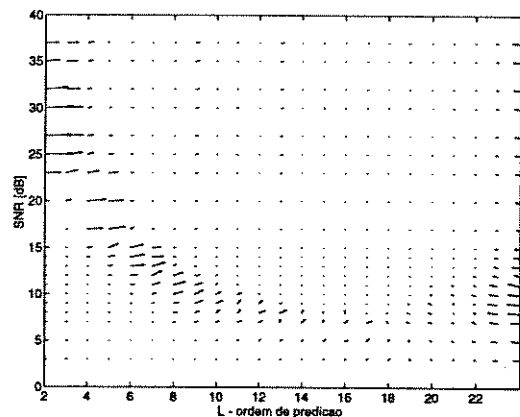


Figura 6.15: Vetores na direção do gradiente para a superfície de desempenho FBLP Modificado (vista de topo).

As figuras 6.16 e 6.17 mostram a sobreposição das diversas curvas de desempenho obtidas para os métodos TLS-FBLP e FBLP Modificado. Apresentamos também o Limite de Cramér-Rao, o qual é acompanhado pela curva do método de Máxima Verossimilhança, extraídos de [29]. Estas superposições permitem-nos verificar que a concentração mais acentuada das curvas do TLS-FBLP, confere maior uniformidade de desempenho a este último em contraste com o FBLP Modificado. Observamos também que no TLS-FBLP as curvas são mais suaves e parecidas umas com as outras do que no FBLP Modificado, onde elas têm uma aparência mais "quebradiça".

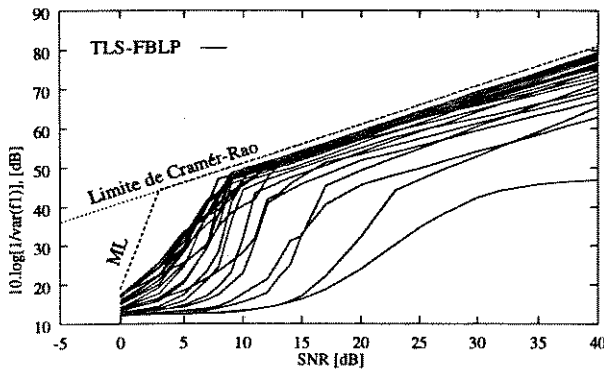


Figura 6.16: Sobreposição das curvas de desempenho TLS-FBLP.

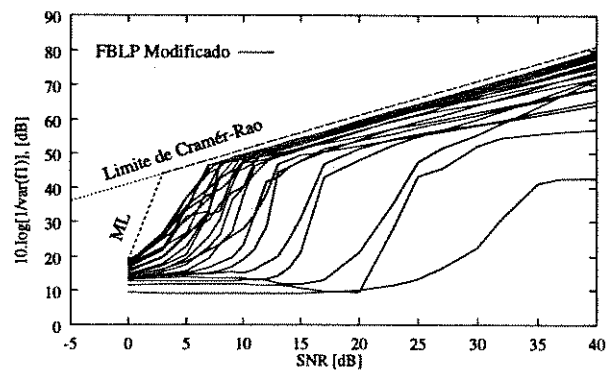


Figura 6.17: Sobreposição das curvas de desempenho FBLP Modificado.

Na figura 6.18 destacamos as curvas correspondentes aos menores valores de SNR de limiar para os métodos TLS-FBLP e FBLP Modificado, ou seja, as curvas relativas aos melhores desempenhos.

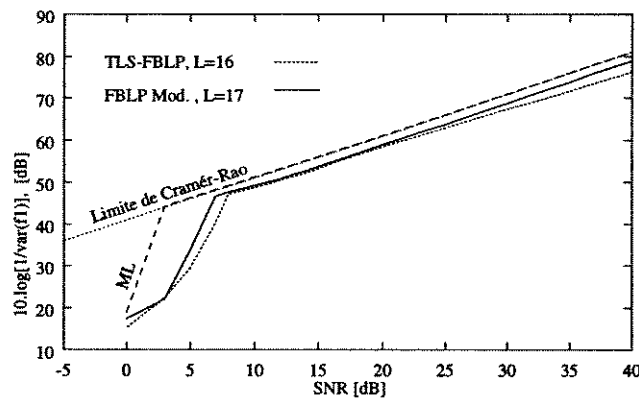


Figura 6.18: Comparação entre os melhores desempenhos TLS-FBLP e FBLP Modificado.

Portanto, o melhor desempenho absoluto foi verificado no método FBLP Modificado de Tufts e Kumaresan. Entretanto, pelas figuras acima, fica patente que a diferença é pequena e que o desempenho do método TLS-FBLP é mais robusto à variação da ordem de predição  $L$ . Ressaltamos que tanto o TLS-FBLP como o FBLP convencional, obtêm soluções ótimas, assemelhando-se neste aspecto, pois não fazem restrição ao subespaço de sinal. Entretanto, o desempenho do TLS-FBLP é muito próximo do melhor desempenho do FBLP Modificado. Logo, dado que o desempenho deste último supera bastante o do FBLP, concluímos que o TLS-FBLP é significativamente superior ao FBLP convencional.

Comparando qualitativamente a complexidade computacional dos métodos TLS-FBLP

e FBLP Modificado, verificamos que a aplicação da SVD sobre a matriz  $\mathbf{P}$  sempre envolve mais cálculos do que a SVD de  $\mathbf{A}$ , pois  $\mathbf{P}$  tem uma coluna a mais do que  $\mathbf{A}$ . Diferentemente, a obtenção da solução  $\mathbf{w}$  depende dos valores de  $M$ ,  $N$  e  $L$ , ou seja, das dimensões dos subespaços de sinal e de ruído. Quanto menor for  $M$ , menor a quantidade de cálculos necessários para obter  $\mathbf{w}_{Mod.}$ . Por outro lado, quanto menor o número de vetores  $\mathbf{v}_{P(M+1)}$  a  $\mathbf{v}_{P(L+1)}$ , menor a complexidade da determinação de  $\mathbf{w}_{TLS}$ . Para o nosso caso de simulação, como utilizamos  $M = 2$ , verificamos que o TLS revelou-se mais complexo do que o FBLP Modificado.

Até onde temos notícia, podemos dizer que o método TLS-FBLP é inédito, revelando-se promissor por ser um método ótimo e possuir desempenho comparável ao do FBLP Modificado para a detecção de frequências.

# Capítulo 7

## Conclusões e Sugestões

### 7.1 Resumo

Neste trabalho estudamos a detecção de frequências através de métodos baseados em predição linear no contexto *forward-backward*. Mostramos que podemos estimar as frequências a partir dos zeros de um polinômio definido pelos coeficientes de um filtro de erro de predição, projetado segundo o método FBLP, bem como a partir de sua resposta em frequência.

Estudamos o teorema da decomposição em valores singulares e o aplicamos sobre a matriz de dados. Detalhamos as implicações da atuação do ruído sobre os valores e vetores singulares e estabelecemos as limitações para a estimação da matriz de dados não ruidosa, interpretando este problema sob um ponto de vista geométrico. Apresentamos o desenvolvimento do método FBLP Modificado e comparamos este ao FBLP convencional.

Analizamos a resposta em frequência do filtro otimizado, concentrando-nos na resposta de fase. Verificamos que a derivada primeira da resposta de fase apresenta melhor resolução espectral do que a resposta de amplitude. Definimos, então, um novo método para a detecção de frequências sob uma abordagem de análise espectral, associando a precisão do FBLP Modificado à melhor resolução da derivada da resposta de fase.

Estudamos o critério de mínimos quadrados totais para a otimização da predição linear, detalhando as diferenças entre o emprego deste critério e do mínimos quadrados convencional.

Aplicamos o critério de mínimos quadrados totais à predição linear *forward-backward*,

definindo um novo método para a detecção de frequências. Comparamos seu desempenho àquele do FBLP Modificado através de simulações detalhadas que revelaram aspectos ainda não observados deste último.

## 7.2 Conclusões e Contribuições

O método FBLP mostra-se ineficiente nos casos em que dispomos de um número reduzido de amostras do sinal, quando as frequências estão mais próximas do que o recíproco do intervalo de observação, ou ainda se a relação sinal-ruído assume valores abaixo de 12 dB. A utilização da SVD para a restrição da solução FBLP ao subespaço de sinal, definindo o método FBLP Modificado, resulta em melhora significativa do desempenho, fazendo a SNR de limiar cair para cerca de 7 dB.

Estudando a SVD em detalhe, verificamos que a ortogonalidade entre o sinal e o ruído, bem como a característica do ruído ser branco são condições suficientes para a extração do sinal exato a partir apenas da SVD da matriz de dados ruidosa. Entretanto, constatamos que não nos é possível conhecer os vetores singulares à esquerda da matriz de dados isenta de ruído, não sendo possível nos exirmos por completo da influência ruidosa na estimação das frequências. Por outro lado, mostramos que é possível obter os valores e vetores singulares à direita da matriz de dados do caso não ruidoso, bem como determinar os ângulos canônicos entre os subespaços de sinal dos casos com e sem ruído. Isto permite delimitar um conjunto bola de matrizes contendo todas as estimativas válidas da matriz de dados não ruidosa.

Verificamos que a derivada da resposta de fase apresenta resolução espectral significativamente superior àquela da resposta de amplitude e que, quando associada ao FBLP Modificado, seu desempenho acompanha o obtido por este último com extração de zeros. Isto define um novo método para a detecção de frequências.

O critério de Mínimos Quadrados Totais (TLS) pode ser aplicado à predição linear *forward-backward* (FBLP), admitindo erros não somente no vetor desejado  $\mathbf{b}$ , como efetuado por Mínimos Quadrados convencional (LS), mas também na matriz de dados  $\mathbf{A}$  e otimizando o vetor  $\mathbf{w}$  de coeficientes de predição através de um sistema homogêneo de equações, como no método de Pisarenko.

Isto permite criar um novo método para a detecção de frequências, o qual denominamos TLS-FBLP, que supera significativamente o desempenho do FBLP convencional de Ulrych e Clayton e Nutall, reduzindo a SNR de limiar para a detecção.

Comparando o TLS-FBLP com o método FBLP Modificado de Tufts e Kumaresan, pudemos observar que este último, no melhor caso, apresenta uma SNR de limiar cerca de 1 dB inferior àquela do método proposto. Entretanto, além desta diferença ser pequena,

o método TLS-FBLP é menos sensível à variação da ordem de predição. Verificamos também que os melhores desempenhos dos métodos ocorrem quando a matriz de dados ou a matriz de dados estendida são aproximadamente quadradas. No caso de as matrizes serem exatamente quadradas e de posto cheio, as otimizações LS e TLS fornecem soluções únicas para  $w$ . Isto define uma indicação analítica para as ordens correspondentes aos melhores desempenhos do FBLP Modificado e TLS-FBLP, superando a definição empírica de Tufts e Kumaresan.

Ressaltamos ainda que o melhor desempenho do FBLP Modificado somente é alcançado através da restrição da matriz de dados ao subespaço de sinal, violando a solução ótima. Enquanto isso, o TLS-FBLP fornece uma solução que é ótima, sem qualquer processamento adicional, e cujo desempenho se compara ao obtido pelo FBLP Modificado.

Até onde temos notícia, podemos dizer que o método TLS-FBLP é inédito, revelando-se promissor por ser um método ótimo e possuir desempenho comparável ao do FBLP Modificado para a detecção de frequências.

### 7.3 Sugestões de Trabalhos Futuros

As informações extraídas a partir da SVD da matriz de dados ruidosa são insuficientes para o conhecimento mais preciso da matriz sem ruído, produzindo um conjunto bola de matrizes. Isto limita a possibilidade de redução do efeito nocivo do ruído sobre a estimação das frequências. Entretanto, se levarmos em consideração que conhecemos a forma do nosso sinal original, ou seja, que são sinais senoidais, temos a expectativa de reduzir a incerteza representada pela bola. Isto permitiria estabelecer um subconjunto que conteria a matriz desejada, melhorando as estimativas da matriz de dados para o caso específico de sinais senoidais.

Além disso, como um corolário sobre a aplicação dos dois métodos aqui desenvolvidos, pretendemos analisar o desempenho da sua associação. Nossa expectativa é que a sensibilidade da derivada da fase à variação da ordem de predição seja reduzida pelo emprego da otimização TLS.

Pretendemos também esmiuçar o procedimento para a obtenção da solução TLS, relacionando-a com a solução LS, bem como estudar a SVD de  $P$ , matriz de dados estendida, verificando a possibilidade de desenvolvimento de um método TLS-FBLP Modificado, do qual esperamos desempenho melhor do que o do FBLP Modificado de Tufts e Kumaresan.

Modelos de espaço de estados têm sido tradicionalmente utilizados em Controle Automático, fornecendo descrições mais detalhadas dos sistemas devido à exploração de informações adicionais, contidas no equacionamento a diferenças das relações lineares. Es-

resulte em estimativas mais precisas e em um método mais robusto à diminuição da SNR.

Pretendemos estender a aplicação dos métodos estudados a problemas reais, desenvolvendo versões dos mesmos implementadas em algoritmos adaptativos. Uma aplicação imediata dos procedimentos descritos nesta tese é o estudo e desenvolvimento de algoritmos para a detecção de direção de chegada de sinais de radar e sonar, normalmente empregando arranjos de antenas. Uma outra área de potencial aplicação é o Processamento de Sinais Biomédicos, como por exemplo a separação do eletrocardiograma do feto do ECG da mãe, conforme efetuado por De Moor [4].

## Bibliografia

- [1] **ANTUNES, E.J.B.** : *Deteção de Frequências através de Predição Linear*, Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, maio de 1992.
- [2] **ANTUNES, E.J.B. and LOPES, A.** : *Frequencies estimation of real sinusoids*, International Symposium on Signals, Systems and Electronics, ISSSE'92, Paris, France, 1-4 September 1992.
- [3] **BEHRENS, R.T. and SCHARF, L.L.** : *Signal processing applications of oblique projection operators*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 1413-24, vol. 42, n°6, June 1994.
- [4] **CALLAERTS, D., DE MOOR, B., VANDEWALLE, J. and SANSEN, W.:** *Comparison of SVD methods to extract the fetal electrocardiogram from cutaneous electrode signals*, Med. Biol. Eng. Computing, vol. 28, pp. 217-24, May 1990.
- [5] **DE MOOR, B. and VANDEWALLE, J.** : *A unifying theorem for linear and total linear least squares*, IEEE Transactions on Automatic Control, pp. 563-66, vol. 35, n°5, May 1990.
- [6] **DE MOOR, B.** : *The singular value decomposition and long and short spaces of noisy matrices*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 2826-38, vol. 41, n°9, September 1993.
- [7] **GOLUB, G. and VAN LOAN, C.** : *An analysis of the total least squares problem*, SIAM J. on Numerical Analysis, vl. 17, n°6, December 1980.
- [8] **GOLUB, G. and VAN LOAN, C.** : *Matrix Computations*, second ed. Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 1989.
- [9] **HAYKIN, S.** : *Modern Filters*, Macmillan Publishing Co., 1990.
- [10] **HILDEBRAND, F.B.** : *Introduction to Numerical Analysis*, New York, NY: MacGraw-Hill, 1956.
- [11] **KAY, S.M.** : *Spectral Estimation: Theory and Application*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- [12] **LAWSON, C.L. and HANSON, R.J.** : *Solving Least Squares Problems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- [13] **LEMOES, R.P. and LOPES, A.** : *Frequency detection by linear prediction using total least squares criterion*, submitted to the 38<sup>th</sup> Midwest Symposium on Circuits and Systems, MWSCAS, to be held in Rio de Janeiro, RJ, Brazil, August 1995.

- [14] LEMOS, R.P. e LOPES, A. : *Detecção de frequências através de predição linear utilizando o critério de mínimos quadrados totais*, submetido ao 13º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 13º SBT, que ocorrerá em Águas de Lindóia, SP, Brazil, em setembro de 1995.
- [15] LEMOS, R.P. e LOPES, A. : *Detecção de frequências pela resposta de fase com alta resolução*, submetido ao 13º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 13º SBT, que ocorrerá em Águas de Lindóia, SP, Brazil, em setembro de 1995.
- [16] MARPLE, S.L., Jr. : *Digital Spectral Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- [17] NUTALL, A.H. : *Spectral analysis of an univariate process with bad data points via maximum entropy and linear predictive techniques*, NUSC Scientific and Engineering Studies, Spectral Estimation, NUSC, New London, CT, March 1976.
- [18] OPPENHEIM, A.V. and SCHAFER, R.W.: *Discrete-Time Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [19] OTTERSTEN, B. : *Parametric Subspace Fitting Methods for Array Signal Processing*, PhD. dissertation, Inform. Syst. Lab., Dep. Elec. Eng., Stanford Univ., December 1989.
- [20] PAPOULIS, A. : *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, third ed. New York, NY: MacGraw-Hill, Inc., 1991.
- [21] PRONY, R. : *Essay Experimental et Analytique*, Paris, J. de l'École Polytechnique, pp. 24-76, vol.1, 1795.
- [22] RAHMAN, M.A. and YU, K. : *Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction*, IEEE Transactions on ASSP. 1440-54, vol. 35, nº10, October 1987.
- [23] RAO, B. D. : *Lowering the threshold SNR of singular value decomposition based methods*, Proceedings of ICASSP, pp. 2472-5, 1988.
- [24] REDDY, N.S. and SWAMY, M.N.S.: *High resolution formant extraction from linear prediction phase spectra*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 1136-44, vol. 32, nº6, December 1984.
- [25] RIFE, D.C. and BOORSTYN, R.R. : *Multiple tone parameter estimation from discrete time observations*, Bell Syst. Tech. J., pp. 1389-1410, November 1976.
- [26] SPIEGEL, M.R. : *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Editora MacGraw-Hill do Brasil, 1973.

- 
- [27] **SREENIVAS, T.V. and NIEDERJOHN, R.J.** : *Zero-crossing based spectral analysis and SVD spectral analysis for formant frequency estimation in noise*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 282-93, vol. 40, n°2, February 1992.
- [28] **STEWART, G.W.** : *Introduction to Matrix Computations*, New York, NY: Academic Press, Inc., 1973.
- [29] **TUFTS, D.W. and KUMARESAN, R.** : *Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood*, Proceedings of the IEEE, pp. 975-89, vol. 70, n°9, September 1982.
- [30] **ULRYCH, T.J. and CLAYTON, R.W.** : *Time series modeling and maximum entropy*, Physics Earth Planet International, pp. 188-200, vol. 12, August 1976.
- [31] **WIGREN, T. and NEHORAI, A.** : *Asymptotic Cramér-Rao Bounds for Estimation of the Parameters of Damped Sine Waves in Noise*, IEEE Transactions on ASSP, vol. 34, n°4, April 1991.
- [32] **WILKINSON, J.H.** : *The Algebraic Engenvalue Problem*, Oxford, UK: Clarendon, 1965.