Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Lagrangeana Aumentada e Barreira Combinadas com o Método do Gradiente Reduzido na Solução do Fluxo de Potência Ótimo

Autor: Esdras Penêdo de Carvalho
Orientador: Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Banca Examinadora

Akebo Yamakami, Dr. .... DT/FEEC/Unicamp
Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira, Ph.D. .... IMEEC/Unicamp
Leonardo Nepomuceno, Dr. .... DEE/FEB/Unesp-Bauru
Paulo Augusto Valente Ferreira, Dr. .... DT/FEEC/Unicamp
Roberto de Souza Salgado, Ph.D. .... Labspot/EEL/UFSC
Takaaki Ohishi, Dr. .... DENSIS/FEEC/Unicamp

Campinas, SP

Agosto/2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C253L

Carvalho, Esdras Penêdo de
Lagrangeana aumentada e barreira combinadas com o método do gradiente reduzido na solução do fluxo de potência ótimo / Esdras Penêdo de Carvalho.– Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Anésio dos Santos Júnior.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Otimização matemática. 2. Potência reativa (Engenharia elétrica). 3. Método do gradiente projetado. 4. Sistemas de energia elétrica. I. Santos Júnior, Anésio dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Tudo que é natureza é arte que desconheces;
Tudo que é acaso é direcionamento que não podes ver;
Tudo que é discordância é harmonia não compreendida;
Tudo que é mal parcial é bem universal.

Alexander Pope em o "Ensaio Sobre o Homem"

Este Trabalho é dedicado à Ieda, à Beatriz,
ao Henrique e à Edilena.

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao meu Orientador, Prof. Anésio, pela orientação, paciência e dedicação dadas a mim ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

À Ieda e à Edilena pelo apoio nos momentos difíceis, os quais não foram poucos.

Ao Émerson, pelo incentivo e confiança.

Ao Josmar. Sem ele, este trabalho não teria saído em LaTeX.

Aos amigos do COSE, Erinaldo e Thaís, pela ajuda.

À Noêmia e Jaqueline, pela atenção, paciência, simpatia e eficiência com que sempre me atenderam.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá por ter feito o possível e o impossível para proporcionar-me tempo para a conclusão deste trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro, e

Muito obrigado, meu Deus, por Você ter me permitido ficar ainda por aqui.

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados de uma investigação na aplicação de técnicas de otimização matemática não-linear no problema do Fluxo de Potência Ótimo (FPO). É proposta uma estratégia de solução do problema FPO combinando técnicas de Lagrangeana Aumentada e de Barreira com o método do Gradiente Reduzido. A estratégia de utilização dessas técnicas leva em conta as características relacionais específicas entre as variáveis envolvidas no modelo do FPO. Historicamente, o método do Gradiente Reduzido já foi aplicado na solução do FPO combinado com técnicas de penalidades. Neste trabalho, é proposta uma combinação de métodos que torna a solução do FPO bastante mais eficiente que a forma clássica. De um modo geral tem-se pesquisado intensamente a solução do FPO através da técnica de barreira juntamente com o método de Newton, denominada método de Pontos Interiores. Esta metodologia apresenta dificuldades relacionadas às singularidades da matriz de coeficientes que são contornadas de modo numérico/experimental. Os resultados apresentados neste trabalho mostram vantagens em relação à forma clássica de resolver o problema através do Método do Gradiente Reduzido.

Palavras-chave: Otimização Não-Linear, Fluxo de Potência Ótimo, Pontos Interiores, Sistemas de Potência.

Abstract

This work is concerned with the application of nonlinear mathematical optimization methods in the Optimal Power Flow (OPF) problem. It is proposed a strategy of solution of the OPF problem by combining techniques from augmented Lagrangean and barrier methods with the Reduced Gradient method. The employment of such techniques take into account specific characteristics on the relationship between the variables of the OPF model. Historically, the Reduced Gradient method was early used in OPF problems, when combined with penalty techniques. Also, several researches have been dedicated to the solution of the OPF problem by combining barrier method with Newton method, the so called Interior Points method. But this approach presents difficulties related to the singularities of the coefficient matrix, usually bypassed in a numerical/experimental way. The results in the present work show advantages upon the classical approach based in the Reduced Gradient method. The proposed method is more efficient than the classical ones.

Keywords: Nonlinear Optimization, Optimal Power Flow, Interior Points.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A operação de sistemas de potência tem como premissa básica o atendimento da carga, sendo que os níveis de geração e de variáveis elétricas são determinados por estudos estáticos e pelo conhecimento dos planejadores e operadores.

Um dos modos mais eficientes de despacho de variáveis elétricas de controle é através do fluxo de potência ótimo (FPO), um modelo de otimização onde a rede elétrica é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas. O modelo é resolvido através de técnicas de otimização, onde certos critérios de desempenho são otimizados de forma a obter um cenário mais eficiente para a operação.

O FPO é um problema não-linear de otimização estática com restrições de igualdade e desigualdade e objetiva otimizar a operação de um sistema de potência em estado estacionário, evitando violações nos limites de operação. Sua formulação foi proposta inicialmente por Carpentier (1962) a partir do problema clássico de despacho econômico.

Nas últimas quatro décadas, uma ampla variedade de técnicas de otimização tem sido utilizada para resolver problemas de FPO. Dentre as várias abordagens, podemos citar o método do gradiente reduzido de Dommel & Tinney (1968); método Lagrangeano projetado (Murtagh & Saunders, 1982); resolução das condições de otimalidade pelo método de Newton (Sun, Ashley, Brewer, Hughes & Tinney, 1984); métodos de programação quadrática seqüencial (Biggs & Laughton, 1977; Burchett, Happ & Vierath, 1984; Sun et all., 1984); algoritmos específicos baseados na resolução de uma seqüência de problemas de programação linear (Alsac, Bright, Prais & Stott, 1990) ou de uma seqüência de problemas de programação quadrática (Granville; Lima, M.; Lima, L. & Prado, 1991) e métodos de pontos interiores (Granville, 1994).

Alguns trabalhos como os de Momoh, El-Hawary & Adapa (1999a, 1999b) e de Quintana, Torres & Medina-Palomo (2000) apresentam um resumo do desenvolvimento dessas abordagens.

As primeiras abordagens propostas para se resolver o problema de FPO foram as técnicas de gradiente. Dommel & Tinney (1968) propuseram a utilização do método do gradiente reduzido o qual consiste de um algoritmo *steepest descent* aplicado no subespaço tangente das equações do fluxo de carga. Este é um procedimento que, após mudança nas variáveis de controle, as equações do fluxo de carga são resolvidas pelo método de Newton. As restrições de desigualdade são tratadas por projeção (para variáveis de controle) e por penalidades (para variáveis dependentes e restrições funcionais). O método tem convergência de primeira ordem.

Sasson (1969) estendeu este trabalho e tentou melhorar a convergência do método combinando os métodos de Powell e Fletcher-Powell. Esta abordagem trabalha bem para sistemas de pequeno porte, mas apresenta sérios problemas de convergência em sistemas maiores.

Tentando eliminar tal problema, alguns trabalhos propuseram a aplicação de técnicas de programação quadrática seqüencial ao problema do FPO (Burchett et all., 1984; Sun et all., 1984).

Iniciando a linha de utilização de métodos de 2ª ordem, Sasson, Viloria & Aboytes (1973) propuseram a inclusão de penalidades à função objetivo. Este foi um dos primeiros trabalhos a utilizar a matriz Hessiana na resolução do problema de FPO.

Em seguida, Sun et all. (1984) utilizaram o método de Newton na resolução das condições de otimalidade da Lagrangeana. Nesta abordagem, uma aproximação quadrática da função Lagrangeana é usada e as restrições de desigualdade são tratadas através de funções penalidades.

Várias pesquisas seguiram nesta linha combinando o método de Newton com outras técnicas, tais como Lagrangeana aumentada e pontos interiores.

O método da função Lagrangeana aumentada foi desenvolvido por Hestenes (1969) e Powell (1969) e estudada por Rockafellar (1974) e Bertsekas (1976). Esta técnica incorpora restrições à função objetivo através da utilização de multiplicadores de Lagrange e penalidades quadráticas, obtendo excelentes resultados. Pesquisas sobre aplicação desse método ao FPO foram realizadas por Santos, Deckmann & Soares (1988). Este trabalho pode ser visto como uma melhora da abordagem com penalidade desenvolvida por Sasson et all. (1973), pois evita o problema de mal-condicionamento da matriz Hessiana causado por valores muito grandes do fator de penalidade.

O método de pontos interiores foi desenvolvido por Karmarkar (1984) inicialmente para resolver problemas de Programação Linear. Esta abordagem foi estendida a problemas não-lineares e atualmente é bastante utilizada na resolução do FPO.

Após o trabalho publicado por Granville (1994), aplicando pontos interiores na resolução do FPO, inúmeras outras pesquisas foram publicadas com várias versões alternativas.

Uma das versões mais usadas no FPO é o método preditor-corretor, proposto para problemas de Programação Linear por Mehrotra (1992).

Em Wu, Debs & Marsten (1994) é sugerida uma extensão do método primal-dual em que o algoritmo utiliza a técnica preditor-corretor para acelerar o processo de convergência. Muitos trabalhos nessa linha foram publicados como em Rezania & Shahidehpour (2001) onde é utilizado um método eficiente de pontos interiores primal-dual preditor-corretor, usando uma matriz Jacobiana modificada, para otimização da potência reativa.

Em resumo, esses trabalhos aplicam o método de pontos interiores acoplando um termo de barreira, associado às restrições de desigualdade, à função Lagrangeana do problema. Em seguida, resolve-se o sistema de equações resultante das condições de estacionariedade da Lagrangeana pelo método de Newton com algumas adaptações.

De um modo geral, nas abordagens de solução pelo método de Newton (ver Granville, 1994; Quintana et all., 2000; Santos et all., 1988; Santos & Costa, 1995; Sun et all., 1984; Wu et all., 1994), as restrições de desigualdade, lineares e funcionais não-lineares, têm sua factibilidade garantida de modo indireto através das técnicas de penalidade, Lagrangeana aumentada e barreira.

Neste trabalho é apresentado um estudo do comportamento das técnicas de barreira logarítmica e de Lagrangeana aumentada atuando juntamente com o método do gradiente reduzido na busca da solução do problema do FPO. A vantagem desta abordagem é que podemos tirar proveito da natureza das restrições do problema para definir a forma de aplicação das técnicas de otimização. Por exemplo, podemos adotar uma técnica que opera com pontos factíveis para tratar um tipo de restrição e adotar outra técnica que opera com pontos infactíveis para tratar outro tipo de restrição. Essa flexibilidade mostrou-se extremamente útil no tratamento de restrições em variáveis fortemente acopladas. Foi escolhido um problema para ilustrar o comportamento dos processos de solução através dos algoritmos estudados neste trabalho. Assim, os estudos desse exemplo serão apresentados ao longo do texto para ilustrar o comportamento dos métodos analisados.

As implementações computacionais dos estudos realizados, foram desenvolvidas utilizando MATLAB®.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta a formulação matemática do problema do fluxo de potência ótimo (FPO) e as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associadas. Tal formulação está adequada à metodologia adotada para solução e faz uma distinção entre variáveis dependentes e independentes.

O Capítulo 3 apresenta o método do gradiente reduzido e as formas como são tratadas as variáveis independentes: por gradiente reduzido projetado ou por gradiente reduzido com barreira logarítmica. É apresentada uma estratégia de solução para um subproblema do FPO no qual são levadas em conta apenas as restrições de desigualdade nas variáveis independentes.

O Capítulo 4 apresenta a combinação do método do gradiente reduzido projetado sobre variáveis independentes com a técnica de Lagrangeana aumentada para tratar as restrições de desigualdade funcionais e/ou variáveis dependentes.

O Capítulo 5 apresenta a combinação do método do gradiente reduzido com barreira logarítmica sobre variáveis independentes com a técnica de Lagrangeana aumentada para tratar desigualdades funcionais e/ou variáveis dependentes. Nesses dois capítulos, são apresentadas formulações para resolver o problema parcial e completo.

O Capítulo 6 apresenta uma reformulação do problema na qual adota-se como variável independente a variável de folga associada às restrições funcionais de desigualdade. É aplicado o método do gradiente reduzido no espaço das variáveis de folga associadas às restrições funcionais de desigualdade que são tratadas por projeção ou barreira. A técnica de Lagrangeana aumentada é adotada para tratar as restrições sobre as variáveis dependentes e independentes da formulação original.

Do Capítulo 2 ao 6, para exemplificar a aplicação das técnicas apresentadas, é utilizado um problema de dimensão pequena (sistema com três barras) cujos processos de solução são retratados através de tabelas e gráficos com as respectivas trajetórias de busca da solução.

O Capítulo 7 apresenta os resultados obtidos em sistemas maiores (IEEE 14 e IEEE 30) e o Capítulo 8, as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

O Apêndice A apresenta a modelagem da rede elétrica utilizada no trabalho e a obtenção das equações do fluxo de carga.

O Apêndice B apresenta a função objetivo utilizada e seu gradiente e o Apêndice C, as restrições funcionais e suas derivadas.

O Apêndice D apresenta o método de Newton aplicado na resolução do problema do fluxo de carga.

O Apêndice E apresenta o método de busca unidimensional utilizado no trabalho.

Capítulo 2

Modelo de Fluxo de Potência Ótimo e Condições de Karush-Kuhn-Tucker

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar a formulação do problema do fluxo de potência ótimo (FPO) e as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para sua solução. A formulação matemática apresentada está orientada segundo a metodologia analisada neste trabalho.

2.2 Formulação do Problema

O problema de fluxo de potência ótimo consiste em otimizar o estado de operação estática de um sistema geração-transmissão de energia elétrica. O estado ótimo de operação deve satisfazer três exigências básicas:

- Minimizar um critério de operação;
- Atender a demanda de potência do sistema;
- Manter os controles, variáveis e funções do sistema dentro de limites tolerados.

Estas exigências podem ser formuladas, respectivamente, como:

- Minimização de uma função objetivo como, por exemplo, perdas de potência nos componentes de transmissão;
- Restrições de igualdade: equações básicas do fluxo de carga que resultam das leis de Kirchhoff aplicadas ao circuito de potências; e

- Restrições de desigualdade: limites nos valores das grandezas do sistema que representam restrições físicas operativas. Por exemplo, limites inferiores e superiores de tensão e de suporte de potência reativa.

2.2.1 Variáveis Especificadas

O problema adotado para os estudos realizados neste trabalho, trata da decisão sobre variáveis de magnitudes de tensão nas barras (nós) que apresentam capacidade de controle. Considera-se o fluxo de potência ótimo aplicado em sistemas (redes) com n barras (nós).

Na formulação básica do problema (sistema de potência em regime permanente), a cada barra da rede são associadas quatro variáveis:

- V_k – magnitude de tensão na barra k;
- θ_k – ângulo de tensão na barra k;
- P_k – injeção líquida de potência ativa na barra k; e
- Q_k – injeção líquida de potência reativa na barra k.

Para facilitar a formulação do FPO, redefinem-se os tipos de barras da formulação do fluxo de carga (Apêndice A) relaxando-se as magnitudes das tensões nas barras SL e PV. Assim, redefinem-se os tipos de barras como:

- SL (Referência) ou tipo 1 – é dado θ_k e calculados, na otimização, P_k, Q_k e V_k;
- PV ou tipo 2 – é dado P_k e calculados, na otimização, Q_k, θ_k e V_k;
- PQ ou tipo 0 – são dados P_k, Q_k e calculados θ_k e V_k.

A barra de referência tem dupla função: fornece a referência angular e é usada para fechar o balanço de potência ativa do sistema. O ângulo na barra de referência é definido como sendo zero.

As injeções líquidas de potência ativa e reativa (P_k e Q_k) são funções dos ângulos e magnitudes das tensões e são determinadas resolvendo-se as equações de fluxo de carga apresentadas no Apêndice A.

2.2.2 Vetor de Variáveis e Função Objetivo

As variáveis θ_k e V_k são agrupadas em dois vetores definidos como:

- θ - ângulo das tensões nas barras PV e PQ, com dimensão $n-1$;
- V - magnitude das tensões em todas as barras, com dimensão n.

A função objetivo adotada é a perda de potência nos elementos-série dos ramos de transmissão. Essa função será representada como:

$$F(\theta, V), \tag{2.1}$$

cuja expressão está detalhada no Apêndice B.

2.2.3 Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade referem-se ao atendimento da carga do sistema, que são obtidas das leis de Kirchhoff aplicadas à malha do sistema elétrico (Apêndice A). Exceto para uma barra (tipo SL), todas as demais têm as injeções líquidas de potência ativa especificadas. A barra sem especificação (barra de referência) funciona como folga para fechar o balanço de potência entre geração, carga e perdas de transmissão. Isto é necessário uma vez que as perdas são inicialmente desconhecidas. Logo, existem $n-1$ equações de potência ativa do tipo:

$$P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0, \tag{2.2}$$

onde:

k pertence ao conjunto de todas as barras, exceto a do tipo SL;

P_k^{esp} é a injeção líquida de potência ativa especificada na barra k; e

$P_k(\theta, V)$ está definida em (A.18).

As barras de carga (tipo PQ) têm as injeções líquidas de potência reativa especificadas, fornecendo nc (número de barras de carga) equações do tipo:

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0, \tag{2.3}$$

onde:

k pertence ao conjunto das barras de carga;

Q_k^{esp} é a injeção líquida de potência reativa especificada na barra k; e

$Q_k(\theta, V)$ está definida em (A.19).

As equações (2.2) e (2.3) aplicadas às barras PQ e a equação (2.2), às barras PV definem as equações de atendimento da carga. Quando relaxam-se as especificações de magnitudes de tensão nas barras SL e PV, como definido na Seção 2.2.1, as equações (2.2) e (2.3) tornam-se as restrições de igualdade do FPO e estas igualdades serão representadas como:

$$G(\theta, V) = 0. \tag{2.4}$$

Esta equação define o subespaço no qual a carga do sistema é atendida.

2.2.4 Restrições de Desigualdade

Desigualdades Funcionais

De um modo geral, as restrições de desigualdade são devidas a limitações físicas dos equipamentos, limites de segurança etc. Neste trabalho, iremos considerar o problema (FPO) onde a geração de potência ativa é pré-fixada. Assim, as restrições de desigualdade funcionais consideradas dizem respeito aos limites de geração de potência reativa nas barras SL e PV. Estas restrições de desigualdade são formuladas como:

$$Q_{g_k}^{\min} \leq Q_{g_k}(\theta, V) \leq Q_{g_k}^{\max} \tag{2.5}$$

onde:

$Q_{g_k}(\theta, V)$ é a potência reativa gerada calculada na barra k e está definida em (A.25);

$Q_{g_k}^{\min}$ é a quantidade mínima de potência reativa gerada na barra k;

$Q_{g_k}^{\max}$ é a quantidade máxima de potência reativa gerada na barra k.

Para um dado sistema, as $n - nc$ restrições de canalização nas potências reativas geradas, agrupadas no vetor de funções $H(\theta, V)$, serão representadas como:

$$H^{\min} \leq H(\theta, V) \leq H^{\max} \tag{2.6}$$

Desigualdades Lineares

Consideramos também restrições de canalização sobre as magnitudes das tensões nas barras:

$$V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max}, \tag{2.7}$$

onde:

$V_k^{\min}$ e $V_k^{\max}$ são, respectivamente, os limites mínimo e máximo sobre a magnitude de tensão na barra k.

Os limites sobre V_k são muito severos e, portanto, os mais importantes porque são limitações físicas que não podem ser expandidas por meios técnicos.

Neste trabalho, os valores de $V_k^{\min}$ e $V_k^{\max}$ usados nos experimentos numéricos são apresentados nos estudos de caso. Essas restrições são representadas como:

$$V^{\min} \leq V \leq V^{\max}. \tag{2.8}$$

2.2.5 Modelo para o FPO

Considerando as variáveis, a função objetivo e as restrições definidas, apresenta-se a seguinte formulação para o problema do FPO:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F(\theta, V) \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} G(\theta, V) = 0 \\ H^{\min} \leq H(\theta, V) \leq H^{\max} \\ V^{\min} \leq V \leq V^{\max}. \end{cases} \end{array} \tag{2.9}$$

2.3 Formulação Matemática e Condições de KKT

2.3.1 Reformulação do FPO

A formulação apresentada em (2.9) é agora reestruturada em termos de variáveis independentes e dependentes.

As variáveis independentes são as magnitudes de tensão das barras SL e PV que representam a capacidade de controle sobre as mesmas. Essas variáveis serão representadas pelo vetor u com dimensão $n - nc$

$$u = \left[V_k,\ k \in \{\text{SL} \cup \text{PV}\}\right]. \tag{2.10}$$

As variáveis dependentes são os ângulos das tensões de todas as barras, com exceção da barra SL, juntamente com as magnitudes das tensões de todas as barras PQ. Essas variáveis serão representadas pelo vetor x

$$x = \begin{bmatrix} \theta_k,\ k \in \{\text{PV} \cup \text{PQ}\} \\ V_k,\ k \in \{\text{PQ}\} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Com essas definições, o problema de FPO (2.9) é reescrito como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x,u) \\ \text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u) = 0 & \text{(a)} \\ h^{\min} \le h(x,u) \le h^{\max} & \text{(b)} \\ u^{\min} \le u \le u^{\max} & \text{(c)} \\ x^{\min} \le x \le x^{\max} & \text{(d)} \end{cases}, \end{array} \tag{2.12}$$

onde:

(a)$-$restrições de igualdade;

(b)$-$restrições de desigualdade funcionais;

(c)$-$restrições de desigualdade nas variáveis independentes;

(d)$-$restrições de desigualdade nas variáveis dependentes.

A formulação apresentada em (2.12) é adequada para aplicação do método do gradiente reduzido, no qual a solução do problema é procurada no espaço da variável u.

2.3.2 Condições Necessárias de KKT

As condições de KKT para o problema (2.12) são escritas considerando os multiplicadores de Lagrange associados a todas as restrições. Para isso, reescreve-se (2.12) e associam-se os devidos multiplicadores de Lagrange a cada restrição.

Considera-se o problema reformulado abaixo

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x,u) \\ \text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u) = 0 & (\lambda) & \text{(a)} \\ h^{\min} - h(x,u) \le 0 & (\underline{\mu}_h) & \text{(b)} \\ h(x,u) - h^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_h) & \text{(c)} \\ u^{\min} - u \le 0 & (\underline{\mu}_u) & \text{(d)} \\ u - u^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_u) & \text{(e)} \\ x^{\min} - x \le 0 & (\underline{\mu}_x) & \text{(f)} \\ x - x^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_x) & \text{(g)} \end{cases}, \end{array} \tag{2.13}$$

onde:

$\lambda-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade;

$\underline{\mu}_h-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições funcionais de desigualdade em seus limites mínimos;

$\overline{\mu}_h$−vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições funcionais de desigualdade em seus limites máximos;

$\underline{\mu}_u$−vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis independentes em seus limites mínimos;

$\overline{\mu}_u$−vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis independentes em seus limites máximos;

$\underline{\mu}_x$−vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis dependentes em seus limites mínimos;

$\overline{\mu}_x$−vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis dependentes em seus limites máximos.

A função Lagrangeana associada ao problema (2.13) é dada por

$$\begin{aligned} l(x,u,\lambda,\underline{\mu}_h,\overline{\mu}_h,\underline{\mu}_u,\overline{\mu}_u,\underline{\mu}_x,\overline{\mu}_x) \;\; = \;\; & f(x,u)+\lambda^t g(x,u) \\ & +\underline{\mu}_h^t\left[h^{\min}-h(x,u)\right]+\overline{\mu}_h^t\left[h(x,u)-h^{\max}\right] \\ & +\underline{\mu}_u^t\left(u^{\min}-u\right)+\overline{\mu}_u^t\left(u-u^{\max}\right) \\ & +\underline{\mu}_x^t\left(x^{\min}-x\right)+\overline{\mu}_x^t\left(x-x^{\max}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

As condições de KKT associadas ao problema são dadas por:

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{\partial l}{\partial x}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}+J_x^g(x,u)^t\lambda-J_x^h(x,u)^t\underline{\mu}_h+J_x^h(x,u)^t\overline{\mu}_h-\underline{\mu}_x+\overline{\mu}_x=0 & & & \text{(a)} \\ \frac{\partial l}{\partial u}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}+J_u^g(x,u)^t\lambda-J_u^h(x,u)^t\underline{\mu}_h+J_u^h(x,u)^t\overline{\mu}_h-\underline{\mu}_u+\overline{\mu}_u=0 & & & \text{(b)} \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda}=g(x,u)=0 & & & \text{(c)} \\ \underline{\mu}_h^t\left[h^{\min}-h(x,u)\right]=0 & \text{e} & \overline{\mu}_h^t\left[h(x,u)-h^{\max}\right]=0 & \text{(d)} \\ \underline{\mu}_u^t\left(u^{\min}-u\right)=0 & \text{e} & \overline{\mu}_u^t\left(u-u^{\max}\right)=0 & \text{(e)} \\ \underline{\mu}_x^t\left(x^{\min}-x\right)=0 & \text{e} & \overline{\mu}_x^t\left(x-x^{\max}\right)=0 & \text{(f)} \\ \lambda \text{ irrestrito} & & & \text{(g)} \\ \underline{\mu}_h\geq 0 \text{ e } \overline{\mu}_h\geq 0 & & & \text{(h)} \\ \underline{\mu}_u\geq 0 \text{ e } \overline{\mu}_u\geq 0 & & & \text{(i)} \\ \underline{\mu}_x\geq 0 \text{ e } \overline{\mu}_x\geq 0 & & & \text{(j)} \end{array}\right. \tag{2.15}$$

onde:

$J_u^g(x,u)$ e $J_u^h(x,u)$ são, respectivamente, as matrizes Jacobianas de g e de h em relação a u e $J_x^g(x,u)$ e $J_x^h(x,u)$ são, respectivamente, as matrizes Jacobianas de g e de h em relação a x.

Os algoritmos de solução do FPO buscam o atendimento destas condições.

2.4 Formulação para o Problema-Exemplo

Consideraremos como problema-exemplo, o sistema com três barras apresentado em Dommel & Tinney (1968). O problema de FPO formulado para este sistema será utilizado para ilustração dos métodos analisados neste trabalho.

2.4.1 Sistema Dommel & Tinney

O sistema, cujo diagrama está representado na Figura 2.1, é composto de 3 barras. A Tabela 2.1 resume a natureza das barras e os tipos de restrições nodais associadas.

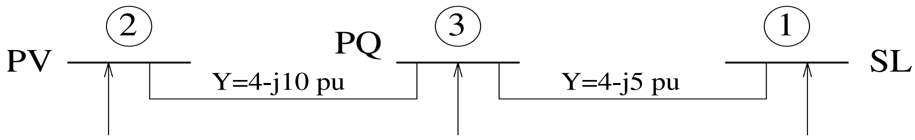


Figura 2.1: Diagrama unifilar do sistema de 3 barras Dommel & Tinney.

Tabela 2.1: Natureza das barras e tipos de restrições nodais associadas.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Tensão
1	PQ	igualdade	igualdade	canalização
1	SL	-	canalização	canalização
1	PV	igualdade	canalização	canalização

Este sistema elétrico tem as seguintes características:

- Rede: $\begin{cases} \text{3 barras} \begin{cases} \text{1 - referência (SL)} \\ \text{2 - geração (PV)} \\ \text{3 - carga (PQ)} \end{cases} \\ \text{2 linhas de transmissão} \end{cases}$
- Condições iniciais: Tabela 2.2
- Função objetivo: perdas nos elementos-série
- Restrições de igualdade: 3 restrições
- Restrições canalizadas: $\begin{cases} \text{3 de tensão} \\ \text{2 de potência reativa} \end{cases}$

A Tabela 2.2, na Página 13, apresenta os valores iniciais das variáveis V e θ do sistema.

Tabela 2.2: Valores iniciais do sistema de 3 barras.

Barra	Tipo	P	Q	V	θ
1	SL	0.0	0.0	0.9500	0.0000
2	PV	0.0	0.0	0.9500	0.1786
3	PQ	-2.0	-1.0	0.8234	0.0268

2.4.2 Formulação Matemática

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & F(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \\
\text{sujeita a} & \left\{ \begin{array}{l}
P_2^{esp} - P_2(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\
P_3^{esp} - P_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\
Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\
Q_{g_1}^{\min} \leq Q_{g_1}(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \leq Q_{g_1}^{\max} \\
Q_{g_2}^{\min} \leq Q_{g_2}(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \leq Q_{g_2}^{\max} \\
V_1^{\min} \leq V_1 \leq V_1^{\max} \\
V_2^{\min} \leq V_2 \leq V_2^{\max} \\
V_3^{\min} \leq V_3 \leq V_3^{\max}
\end{array} \right.
\end{array} . \tag{2.16}
$$

Baseado em (2.10), (2.11) e (2.12), temos

$$
u = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} , \; x = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ V_3 \end{bmatrix},
$$

$$
g(x,u) = \begin{bmatrix} P_2^{esp} - P_2(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \end{bmatrix},
$$

$$
h(x,u) = \begin{bmatrix} Q_{g_1}(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \\ Q_{g_2}(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \end{bmatrix}
$$

e

$$
h^{\min} = \begin{bmatrix} Q_{g_1}^{\min} \\ Q_{g_2}^{\min} \end{bmatrix} \text{ e } h^{\max} = \begin{bmatrix} Q_{g_1}^{\max} \\ Q_{g_2}^{\max} \end{bmatrix}.
$$

2.4.3 Limites Considerados nos Estudos

Os limites considerados nos estudos deste problema foram:

$$V^{\min} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V^{\max} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Os limites sobre $h(x, u)$ foram:

$$h^{\min} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad h^{\max} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

ou

$$h^{\min} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad h^{\max} = \begin{bmatrix} 10 \\ -0.5 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

No capítulo a seguir, apresentaremos o método do gradiente reduzido e as duas formas de tratamento das variáveis independentes (u).

Capítulo 3

Método do Gradiente Reduzido com Projeção e com Barreiras nas Variáveis Independentes

3.1 Introdução

Neste capítulo é proposta a utilização da técnica de barreira para o tratamento das restrições de desigualdade sobre as variáveis independentes na formulação (2.12) do FPO. Para um estudo de viabilidade dessa abordagem considera-se, neste capítulo, um subproblema do FPO (2.12) que contempla apenas as restrições funcionais de igualdade (atendimento de carga) e as restrições de canalização nas variáveis independentes. Assim, são estudados os tratamentos das restrições em variáveis independentes através de projeção e de barreira logarítmica.

Serão apresentados os métodos e suas aplicações no exemplo com a comparação dos processos de solução através de projeção e barreira sobre as variáveis independentes.

3.2 Subproblema e Respectivas Condições de KKT

Consideremos o problema abaixo o qual denominaremos subproblema (3.1)

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x,u) \\ \text{sujeita a} & \left\{ \begin{array}{ll} g(x,u) = 0 & \text{(a)} \\ u^{\min} \leq u \leq u^{\max}. & \text{(b)} \end{array} \right. \end{array} \tag{3.1}$$

A função Lagrangeana associada ao subproblema (3.1) é dada por

$$l(x,u,\lambda,\underline{\mu}_u,\overline{\mu}_u) = f(x,u) + \lambda^t g(x,u) + \underline{\mu}_u^t \left(u^{\min} - u\right) + \overline{\mu}_u^t \left(u - u^{\max}\right),$$

onde λ, $\underline{\mu}_u$ e $\overline{\mu}_u$ estão definidos em (2.13).

As condições de KKT para o subproblema (3.1) são escritas considerando os multiplicadores de Lagrange associados às restrições em g e u. Estas condições são o subconjunto {a, b, c, e, g, i} das condições (2.15) e estão resumidas como:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} + J_x^g(x,u)^t\lambda = 0 & \text{(a)} \\ \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} + J_u^g(x,u)^t\lambda - \underline{\mu}_u + \overline{\mu}_u = 0 & \text{(b)} \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = g(x,u) = 0 & \text{(c)} \\ \underline{\mu}_u^t\left(u^{\min} - u\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \overline{\mu}_u^t\left(u - u^{\max}\right) = 0 & \text{(e)} \\ \lambda \text{ irrestrito} & \text{(g)} \\ \underline{\mu}_u \geq 0 \text{ e } \overline{\mu}_u \geq 0. & \text{(i)} \end{cases} \tag{3.2}$$

3.3 Método do Gradiente Reduzido Projetado

O método do gradiente reduzido foi inicialmente desenvolvido por Wolfe (1963) para resolver um problema de programação não-linear com restrições lineares e, mais tarde, generalizado por Abadie & Carpentier (1969) para tratar restrições não-lineares.

A idéia do método consiste em resolver uma seqüência de subproblemas, cada um dos quais usando uma aproximação linear das restrições. À medida que o ótimo é aproximado em sua vizinhança, as restrições linearizadas dos subproblemas tornam-se aproximações cada vez melhores das restrições não-lineares originais. Desse modo, no ponto ótimo, o problema aproximado (linearizado) terá a mesma solução do problema original (não-linear) (Abadie, 1970; Abadie, 1986; Lasdon, Waren & Ratner, 1978).

Para ilustrar o desenvolvimento do método, consideremos o problema não-linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f(z) & \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} g(z) = 0 \\ z^{\min} \leq z \leq z^{\max}, \end{cases} \end{array} \tag{3.3}$$

onde g e z são vetores de dimensão m e n ($n > m$), respectivamente, e $z^{\min}$ e $z^{\max}$ são os limites inferior e superior sobre z.

O método reduz a dimensão do problema por representar uma parcela das variáveis, denominadas variáveis básicas, em termos de um subconjunto independente de variáveis denominadas variáveis não-básicas.

Para isso, de maneira análoga ao caso linear [ver Wolfe (1963)], é considerada a hipótese de não-degeneração em cada ponto z que pressupõe a existência de uma partição $z = (x, u)$ tendo as seguintes propriedades:

- x (vetor de variáveis básicas) tem dimensão m e u (vetor de variáveis não-básicas), tem dimensão $n - m$; e
- a matriz Jacobiana de g em relação a x (J_x^g) é não-singular em $z = (x, u)$.

Em nosso trabalho, x e u já foram definidas convenientemente de acordo com as características do problema apresentadas na Seção 2.3.1.

Assim, as restrições de igualdade podem ser escritas como

$$g(x, u) = 0 \tag{3.4}$$

e resolvidas em x a partir de especificações arbitrárias para u. Supõe-se, então, uma função implícita $x(u)$ válida para todo (x^k, u^k) solução de (3.4).

Supõe-se também a função objetivo como uma função implícita de u, ou seja,

$$f(x(u), u) = f_r(u). \tag{3.5}$$

Agora supõe-se ainda o problema original (pelo menos na vizinhança de uma solução (x^k, u^k) de (3.4)),0 representado por um problema reduzido mais simples como

$$\begin{array}{ll} \underset{u}{\text{minimizar}} & f_r(u) \\ \text{sujeita a} & u^{\min} \le u \le u^{\max} \end{array} \tag{3.6}$$

onde $u^{\min}$ e $u^{\max}$ são limites sobre u. A função f_r é chamada de função objetivo reduzida e seu gradiente, ∇f_r, o gradiente reduzido.

Desse modo, o problema original (3.1) é resolvido através da resolução de uma seqüência de aproximações de problemas reduzidos (3.6).

O vetor

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} + J_u^g(x, u)^t \lambda \tag{3.7}$$

tem um significado importante; ele é o vetor gradiente ∇f_r que é ortogonal às curvas de nível da função objetivo no espaço das variáveis u. ∇f_r mede a sensibilidade da função objetivo com relação às mudanças em u, sujeita às restrições de igualdade (3.1.a).

As condições (3.2) são não-lineares e só podem ser resolvidas iterativamente. A idéia básica de resolução consiste em mover de um ponto factível na direção contrária à do gradiente ∇f_r para um novo ponto factível com menor valor de função objetivo. Por meio desse procedimento, espera-se chegar numa solução do problema.

O cálculo de uma direção factível a partir de $\frac{\partial l}{\partial u}$ em (3.2.b), dado um valor para u, é feito através dos seguintes passos:

- Resolve-se a equação (3.2.c) para x pelo método de Newton;
- Resolve-se a equação (3.2.a) para λ;
- Substitui-se u, x e λ em $\frac{\partial l}{\partial u}$ dado na expressão (3.2.b) onde:

$$\underline{\mu}_{u_i} = \overline{\mu}_{u_i} = 0 \text{ se } u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max} \tag{3.8}$$

- Define-se uma direção factível de descida d, através de suas componentes, como:

$$d_j = \begin{cases} 0, & \frac{\partial l}{\partial u_j} < 0 \text{ e } u_j = u_j^{\max} \\ 0, & \frac{\partial l}{\partial u_j} > 0 \text{ e } u_j = u_j^{\min} \\ -\frac{\partial l}{\partial u_j}, & u_j^{\min} < u_j < u_j^{\max}. \end{cases} \tag{3.9}$$

A partir da direção d, resolve-se um problema unidimensional em α definido como:

$$\underset{\alpha>0}{\text{minimizar}}\ f_r(u + \alpha d). \tag{3.10}$$

Esta minimização é feita aproximadamente e é realizada escolhendo um α_k de uma seqüência de valores positivos $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$ para α (Bertsekas, 1995; Dennis & Schnabel, 1996; Nocedal & Wright, 1999; Kelley, 1999 $-$ Apêndice E) que satisfaça uma condição de decréscimo suficiente de f_r e tal que

$$u^{\min} \leq u + \alpha_k d \leq u^{\max}. \tag{3.11}$$

Para cada valor de α_i, $f_r(u+\alpha_i d)$ deve ser avaliada. Pela equação (3.5), isto é igual a $f(x(u+\alpha_i d), u+\alpha_i d)$ de modo que as variáveis $x(u+\alpha_i d)$ devem ser determinadas. A determinação é feita resolvendo-se o sistema de equações não-linear

$$g(x, u + \alpha_i d) = 0, \tag{3.12}$$

onde u, α_i e d são conhecidos e x deve ser encontrado. Este sistema é resolvido pelo método de Newton (Apêndice D).

Se o método de Newton converge, e α_i produziu decréscimo em f_r, então a busca unidimensional é finalizada e a resolução de um novo problema reduzido, iniciada. Se α_i não produziu decréscimo, então um ajuste quadrático de f_r é realizado para três valores ($f_r(0)$, $f_r'(0)$, $f_r(u+\alpha_i d)$) e f_r é avaliada no mínimo desta quadrática. Se houver decréscimo, a busca termina; caso contrário, é feito um ajuste cúbico de f_r e o mínimo da cúbica, determinado. Este procedimento pára quando houver decréscimo suficiente de f_r.

Neste método, o processo é inicializado em um ponto factível (x^0, u^0) e a variável u é corrigida iterativamente até que, através de um critério pré-estabelecido, o processo seja interrompido.

Fluxograma do Método

O fluxograma do método do gradiente reduzido está apresentado na Figura 3.1 na Página 20 e dois passos merecem atenção especial.

Atualização de u^k

A atualização de u^k necessita da determinação do passo α_k. Tal determinação é feita através de uma busca unidimensional na direção factível d. Nessa direção, a função objetivo passa a depender apenas de α. Seja, por exemplo, $\phi(\alpha) = f(u + \alpha d)$ aproximada por uma quadrática. Então, o mínimo de ϕ, α_k, pode ser determinado através de três valores. Um valor de ϕ, $\phi(0)$, já é conhecido e um segundo valor ($\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ em $\alpha = 0$) é facilmente calculado como

$$\phi'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -\nabla f_r^t \nabla f_r.$$

Um terceiro valor, ϕ_1, é determinado de $\alpha = \alpha_1$. Este é um valor de passo máximo que é determinado antes do processo de busca unidimensional iniciar. O valor de α_1 é determinado de modo que a condição

$$u_j^{\min} \leq u_j^k + \alpha_1 d^k \leq u_j^{\max}$$

seja sempre atendida.

Assim, α_k é determinado da seguinte expressão

$$\alpha_k = -\frac{\alpha_1^2 \phi'(0)}{2\left[\phi(\alpha_1) - \phi(0) - \alpha_1 \phi'(0)\right]}.$$

Neste trabalho, o método utilizado é um misto de interpolação quadrática e cúbica com o procedimento *backtracking* os quais estão detalhados no Apêndice E.

Critério de Parada

O critério de parada verifica o valor absoluto de cada componente da direção factível d. Assim, o maior valor absoluto das componentes deve ser menor que uma tolerância pré-estabelecida, ou seja

$$\max_j\{|d_j|\} < \epsilon, \tag{3.13}$$

onde:

d_j-componente da direção factível definida por (3.9); e

$\epsilon-$tolerância adotada.

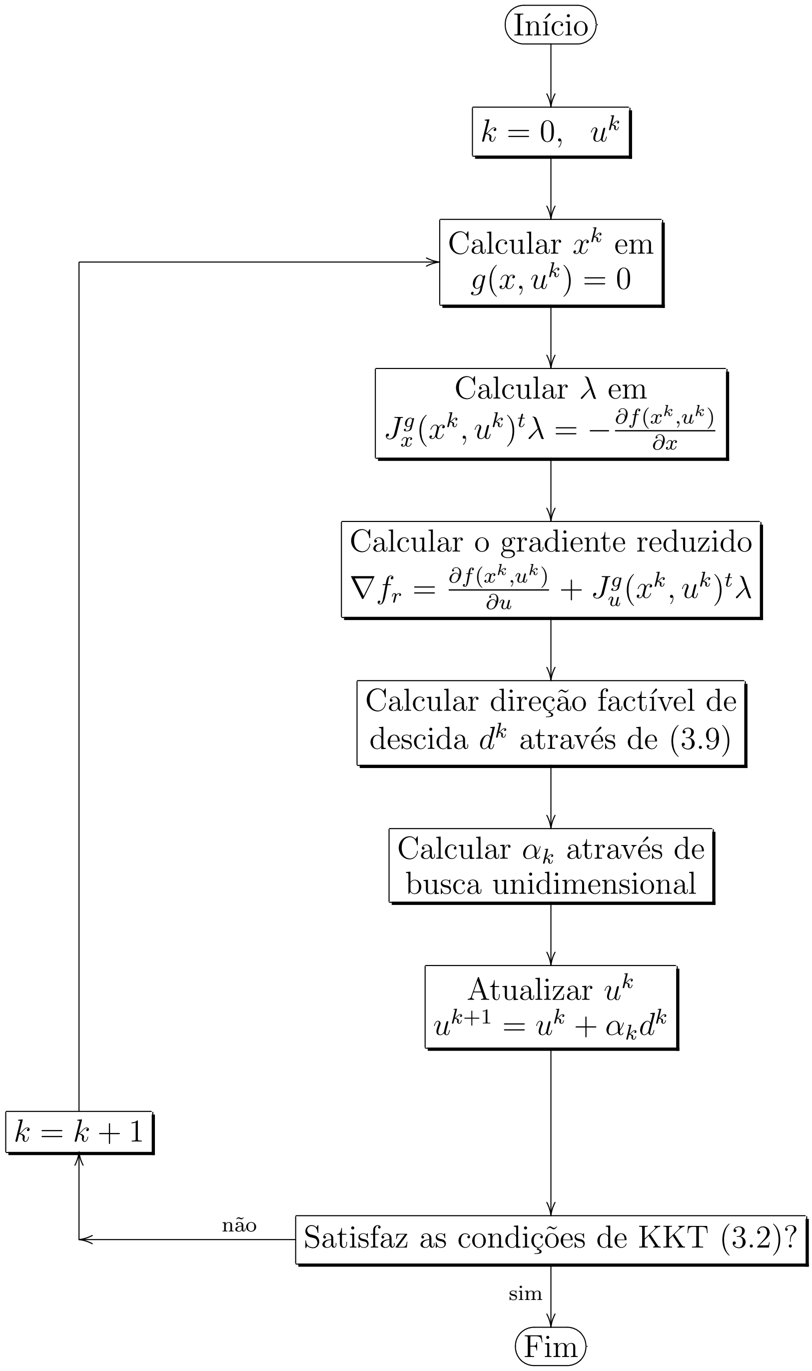


Figura 3.1: Método do Gradiente Reduzido Projetado.

Exemplo

Consideremos um subproblema (3.1) formulado para o Problema-Exemplo (2.16) com $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \\ \text{sujeita a} & \left\{ \begin{array}{l} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ V_1^{\min} \le V_1 \le V_1^{\max} \\ V_2^{\min} \le V_2 \le V_2^{\max}. \end{array} \right. \end{array} \tag{3.14}$$

A Tabela 3.1 apresenta o ponto inicial u^0 e os pontos obtidos no processo de otimização usando o método do gradiente reduzido projetado para resolver o problema (3.14). A Figura 3.2, na Página 22, apresenta curvas de nível da função objetivo e a trajetória para a solução ótima no espaço das variáveis u, V_2 e V_1, partindo-se do ponto de inicialização $V_1^0 = V_2^0 = 0.95$.

Tabela 3.1: Valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u.

Iteração	V_1	V_2	V_3
Inicialização	0.9500	0.9500	0.8234
0	0.9687	1.0401	0.8914
	1.0463	1.0479	0.9380
	1.0542	1.1119	0.9815
	1.1146	1.1201	1.0181
	1.1250	1.2000	1.0710
	1.2000	1.1789	1.0968
	1.1936	1.2000	1.1063

A seguir, apresentamos o outro tipo de tratamento dado às variáveis independentes.

3.4 Método do Gradiente Reduzido com Barreira Logarítmica

O método de barreira é um procedimento que visa resolver problemas de otimização com restrições de desigualdade por meio da resolução de uma seqüência de problemas irrestritos. Os problemas irrestritos são obtidos adicionando-se à função objetivo do problema original uma parcela que estabelece um alto custo aos pontos próximos da fronteira da região de factibilidade em favor dos pontos do interior da mesma. Essa parcela está associada a um parâmetro β, chamado fator de barreira, que determina quão severa é a barreira, bem como o modo pelo qual os problemas irrestritos se aproximam do problema original (restrito). A idéia central é que quando β tende para 0, a aproximação torna-se cada vez melhor.

O trabalho inicial de aproximar um problema restrito por um problema irrestrito é atribuído a Courant (1943) e foi sistematicamente empregado em otimização numérica por muitos anos

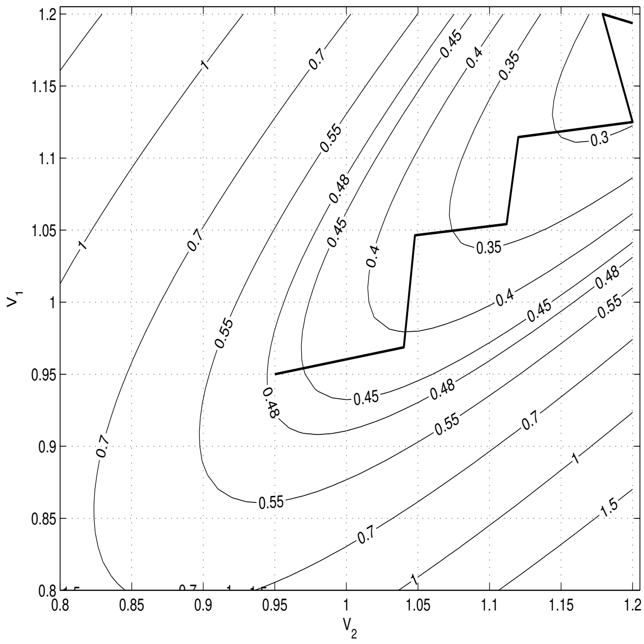


Figura 3.2: Trajetória em direção à solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 utilizando gradiente reduzido projetado e curvas de nível da função objetivo.

(Fiacco, 1995; Boukari & Fiacco, 1995). Entretanto, ela foi popularizada principalmente através do trabalho clássico de Fiacco & McCormick (1968) sob o título SUMT (Técnica de Minimização Seqüencial Irrestrita).

Uma vez que o problema de barreira é formulado, métodos irrestritos para resolver esse tipo de problema podem ser empregados.

Diferentemente do método de penalidades, a solução do problema irrestrito de barreira se aproxima da solução do problema original pelo interior da região de factibilidade. Dessa forma, o método gera uma seqüência de pontos factíveis cujo limite é uma solução ótima do problema original.

Para encontrar uma solução, inicia-se em um ponto interior à região factível e utiliza-se algum método aplicável a problemas irrestritos. Como o valor da função barreira se aproxima do infinito quando o ponto gerado se aproxima da fronteira da região, o procedimento de busca (se cuidadosamente implementado) automaticamente força a permanência da solução no interior da região de factibilidade.

Ao contrário do método de penalidades, este método só pode ser aplicado em problemas com restrições de desigualdade. Se o problema tiver restrições de igualdade, tais restrições podem ser incorporadas à função objetivo usando um termo de penalidade e as desigualdades podem usar um termo de barreira, levando a um problema misto de penalidade e barreira.

3.4.1 O Problema de Barreira

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(z) \\ &\text{sujeita a } \; h(z) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Consideremos o conjunto $F^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : h(z) < 0\}$. A idéia do método de barreira consiste em substituir o problema (3.15) por um problema irrestrito da forma:

$$\text{minimizar } f(z) + \beta b(z), \tag{3.16}$$

onde β é uma constante positiva e b é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, denominada função barreira, satisfazendo as seguintes condições:

- $b(z)$ é contínua em F^0;
- $b(z) \geq 0$ para todo $x \in F^0$; e
- $b(z) \to \infty$ quando x se aproxima da fronteira de F^0.

A função barreira mais importante é a função barreira logarítmica de Frisch, ou somente função barreira logarítmica, que tem a forma

$$b(z) = -\sum_{j=1}^{m} \ln\left[-h_j(z)\right].$$

Referimo-nos à função $f_b(z) = f(z) + \beta b(z)$ como função auxiliar. Idealmente, gostaríamos que a função b tomasse valor zero em F^0 e valor infinito na sua fronteira. Isto garantiria que não deixaríamos a região $\{x : h(z) \leq 0\}$, dado que o problema de minimização iniciou num ponto interior. Contudo, esta descontinuidade impõe sérias dificuldades para qualquer procedimento computacional. Portanto, esta construção ideal de b é substituída pelo requisito mais realista de que b é não-negativa e contínua sobre a região F^0 e que ela aproxima-se do infinito quando a fronteira é aproximada pelo interior. Note que o termo βb aproxima a função barreira ideal descrita acima quando β aproxima-se de zero.

Para valores pequenos de β, o mínimo do problema (3.16) deverá ocorrer na região onde b é pequeno, ou seja, espera-se que as soluções correspondentes se aproximem da fronteira da região de factibilidade e minimizem $f(z)$ (Nocedal & Wright, 1999). Então para $\beta \to 0$ espera-se que a seqüência de soluções do problema (3.16) convirja para a solução do problema original (3.15).

3.4.2 Barreira Logarítmica no Tratamento das Restrições sobre Variáveis Independentes

Propomos aqui a resolução do subproblema (3.1) pelo método do gradiente reduzido combinado com a técnica de barreiras para o tratamento das restrições de canalização sobre as variáveis independentes (u).

Formulação do Problema de Barreira

Definimos uma seqüência de problemas de barreira associada a (3.1), para o tratamento das restrições em u, como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \left[f(x,u)+b\left(u,\beta^k\right)\right] \\ &\text{sujeita a } \ g(x,u)=0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde

$$b\left(u,\beta^k\right)=-\beta^k\sum_{j\in\{\mathrm{SL}\cup\mathrm{PV}\}}\left[\ln(u_j-u_j^{\min})+\ln(u_j^{\max}-u_j)\right]$$

e β^k é o fator de barreira, $k=0,1,2,....$

Condições de KKT

A função Lagrangeana do problema de barreira (3.17) é dada por

$$l_b(x,u,\lambda,\beta^k)=f(x,u)+b\left(u,\beta^k\right)+\lambda^t g(x,u).$$

As condições de KKT para o problema (3.17) são

$$\begin{cases} \frac{\partial l_b(x,u,\lambda,\beta^k)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}+J_x^g(x,u)^t\lambda=0 & \text{(a)}\\ \frac{\partial l_b(x,u,\lambda,\beta^k)}{\partial u}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}+J_u^g(x,u)^t\lambda+\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u}=0 & \text{(b)}\\ \frac{\partial l_b(x,u,\lambda,\beta^k)}{\partial \lambda}=g(x,u)=0 & \text{(c)}\\ \lambda \text{ irrestrito} & \text{(d)} \end{cases} \tag{3.18}$$

onde

$$\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j}=-\beta^k\left(\frac{1}{u_j-u_j^{\min}}-\frac{1}{u_j^{\max}-u_j}\right),\quad j\in\{\mathrm{SL}\cup\mathrm{PV}\}.$$

Análise das Condições de KKT (3.2) e Multiplicadores de Lagrange

As condições de KKT (3.2) são atendidas através das condições de KKT (3.18) quando o parâmetro β^k tende para zero. Consideremos a restrição (3.1.b)

$$u^{\min} \leq u \leq u^{\max}.$$

Na solução de (3.2), as componentes inativas da restrição (3.1.b) apresentam

$$u_j^{\min} < u_j < u_j^{\max} \text{ e } \underline{\mu}_{u_j} = \overline{\mu}_{u_j} = 0 \tag{3.19}$$

o que atende as condições (3.2.e) e (3.2.i).

As componentes ativas da restrição (3.1.b) apresentam, na solução do problema, as seguintes possíveis condições

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_j = u_j^{\min};\ \underline{\mu}_{u_j} > 0 \text{ e } \overline{\mu}_{u_j} = 0 & \text{(a)} \\ \text{ou} & \\ u_j = u_j^{\max};\ \underline{\mu}_{u_j} = 0 \text{ e } \overline{\mu}_{u_j} > 0. & \text{(b)} \end{array} \right. \tag{3.20}$$

Nestes casos, as componentes da restrição (3.2.b) são escritas como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} + J_{u_j}^g(x,u)^t\lambda - \underline{\mu}_{u_j} = 0 \text{ para } u_j = u_j^{\min} & \text{(a)} \\ \text{ou} & \\ \frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} + J_{u_j}^g(x,u)^t\lambda + \overline{\mu}_{u_j} = 0 \text{ para } u_j = u_j^{\max}. & \text{(b)} \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Consideremos agora as condições de KKT (3.18) atendidas através da resolução de uma seqüência de problemas de barreira (3.17) na qual o parâmetro β^k está se aproximando de zero. Na solução de (3.17) com $\beta^k \approx 0^+$, as componentes inativas da restrição (3.1.b) atendem as condições (3.19) e portanto as componentes $\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j}$ se aproximam de zero juntamente com o parâmetro β^k. Neste caso temos

$$\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j} \approx 0 \text{ e } u_j^{\min} < u_j < u_j^{\max}. \tag{3.22}$$

Consideremos agora as componentes ativas das restrições (3.1.b) na solução de (3.1). Neste caso as soluções dos problemas de barreira (3.17) apresentam essas componentes se aproximando dos respectivos limites (mínimo ou máximo) à medida que o parâmetro β^k se aproxima de zero. Assim podemos escrever

$$\frac{\partial l_b(u,\beta^k)}{\partial u_j} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} + J_{u_j}^g(x,u)^t\lambda + \frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j} \approx 0 \text{ para } u_j \approx u_j^{\min^+} \text{ ou } u_j \approx u_j^{\max^-} \tag{3.23}$$

quando β^k se aproxima de 0. Neste caso, $\frac{\partial b}{\partial u_j} = -\frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} - J^g_{u_j}(x,u)^t\lambda \neq 0$.

Deste modo, a resolução do problema de barreira (3.17) fornece os multiplicadores das componentes ativas de (3.1.b) através das expressões (3.23). Assim, comparando (3.2) e (3.18) podemos escrever as seguintes relações:

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{\mu}_{u_j} = \frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j} \text{ quando } u_j \approx u_j^{\max^-} & \text{(a)} \\ \text{ou} & \\ \underline{\mu}_{u_j} = -\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j} \text{ quando } u_j \approx u_j^{\min^+}. & \text{(b)} \end{array}\right. \tag{3.24}$$

Fluxograma do Método

A aplicação da técnica de barreiras na resolução de (3.1) consiste na resolução de uma seqüência de problemas (3.17) na qual o valor do parâmetro β^k decresce aproximando-se de zero. A regra de atualização de β^k é dada por:

$$\beta^{k+1} = \frac{\beta^k}{\rho},\ \rho > 1.$$

O fluxograma do método do gradiente reduzido com barreira logarítmica está apresentado na Figura 3.3, na Página 27.

Exemplo

Consideremos o problema de barreira do problema (3.14)

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) - \beta^k \sum_{j=1}^{2}\left[\ln(V_j - V_j^{\min}) + \ln(V_j^{\max} - V_j)\right] \\ \text{sujeita a} & \left\{\begin{array}{l} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \end{array}\right. \end{array} \tag{3.25}$$

A Tabela 3.2 apresenta o ponto inicial u^0 e os pontos obtidos no processo de otimização usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica para resolver o problema (3.25). A Figura 3.4, na Página 28, apresenta curvas de nível da função objetivo e a trajetória para a solução ótima no espaço das variáveis u, V_2 e V_1, partindo-se do ponto de inicialização $V_1^0 = V_2^0 = 0.95$. Baseado num estudo preliminar, o valor inicial do fator de barreira foi definido como sendo 0.05 e $\rho = 275$.

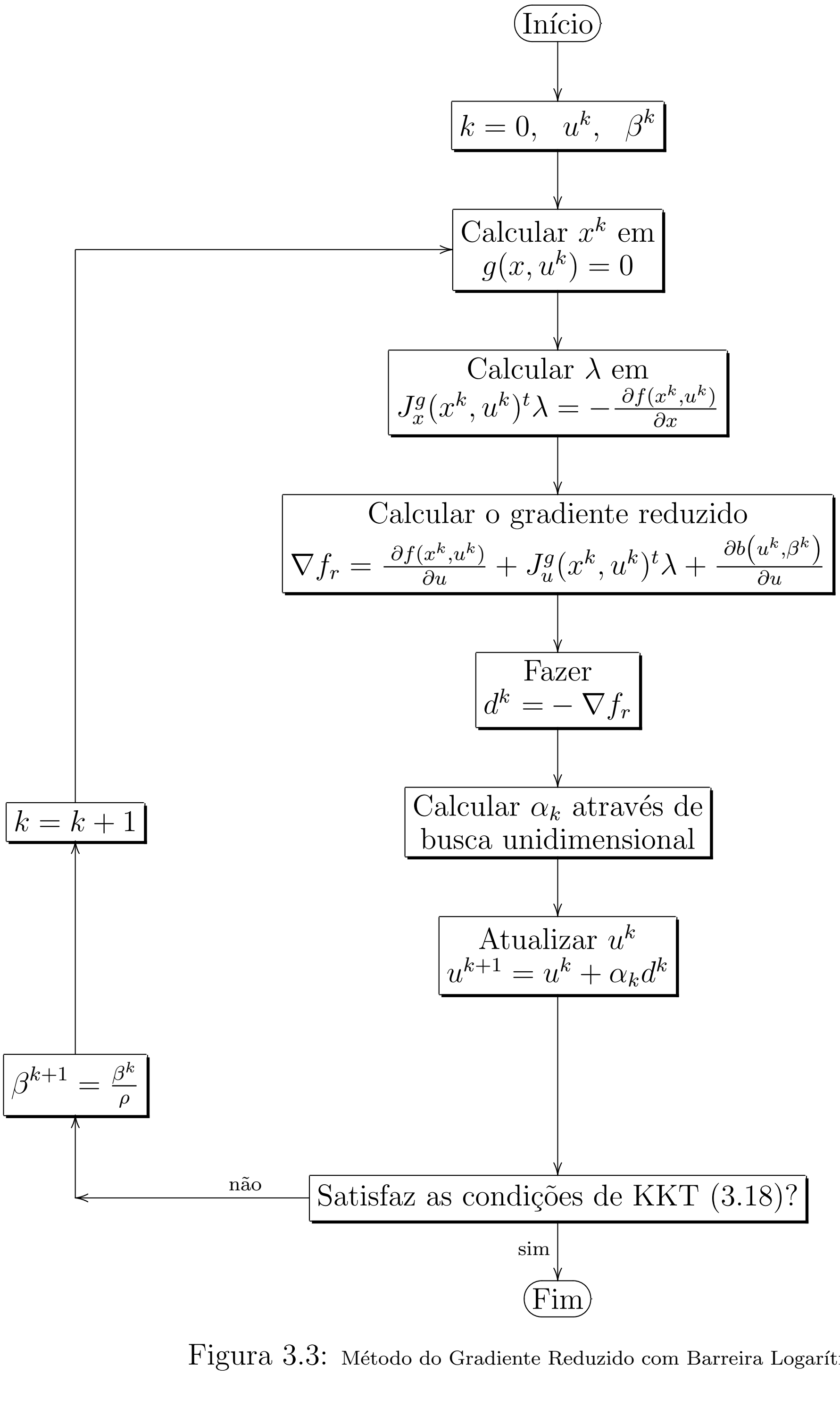


Figura 3.3: Método do Gradiente Reduzido com Barreira Logarítmica.

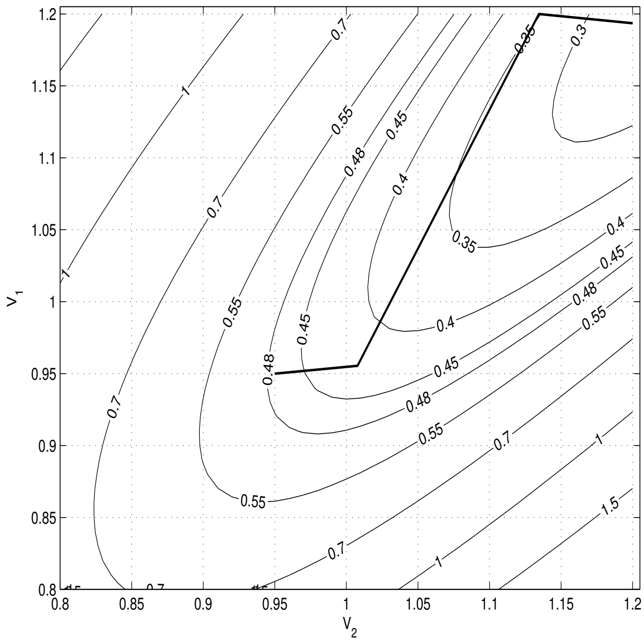


Figura 3.4: Trajetória em direção à solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 utilizando gradiente reduzido com barreira e curvas de nível da função objetivo.

Tabela 3.2: Valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em u.

Iteração	V_1	V_2	V_3	β
Inicialização	0.9500	0.9500	0.8234	$5.0000.10^{-2}$
0	0.9554	1.0077	0.8639	$1.8182.10^{-4}$
	1.2000	1.1345	1.0695	$6.6116.10^{-7}$
	1.1936	1.2000	1.1063	$2.4042.10^{-9}$

A seguir, nos Capítulos 4 e 5, estudaremos a resolução do subproblema (3.1) considerando a inclusão de restrições de desigualdade sobre variáveis dependentes (x) e/ou funcionais (h).

Capítulo 4

Gradiente Reduzido Projetado com Lagrangeana Aumentada em Restrições Funcionais e em Variáveis Dependentes

4.1 Introdução

Neste capítulo é proposto o método do gradiente reduzido projetado combinado com a técnica de Lagrangeana aumentada para o tratamento das restrições de desigualdade funcionais (h) e lineares em variáveis dependentes (x) do FPO. Inicialmente, apresenta-se uma revisão sobre os métodos de penalidade quadrática e Lagrangeana aumentada. Estes métodos utilizam basicamente a mesma estratégia de solução, a qual consiste em relaxar as restrições, ou parte delas, adicionando-as à função objetivo e resolvendo uma seqüência de problemas resultantes gerados pela variação de multiplicadores de Lagrange e do fator de penalidade. É considerado o uso de funções penalidades e Lagrangeanas aumentadas para o tratamento das restrições de desigualdades funcionais (h) e em variáveis dependentes (x).

4.2 Método de Penalidades

Como o método de barreira, o método de penalidade é um procedimento que visa aproximar problemas de otimização com restrições por meio de um único problema irrestrito equivalente ou uma seqüência de problemas irrestritos. Essa aproximação é obtida adicionando-se à função objetivo uma parcela que estabelece uma grande penalidade pela violação das restrições. Essa parcela está associada a um parâmetro c, chamado fator de penalidade, que determina quão severa é a penalidade, se as restrições forem violadas, bem como o modo pelo qual o problema aproximado (irrestrito) se aproxima do problema original (restrito). A idéia central é que quando c tende para infinito, a aproximação torna-se cada vez melhor.

No método de penalidade, um termo de penalidade é adicionado à função objetivo para qualquer violação das restrições. Este método gera uma seqüência de pontos infactíveis, daí a razão de seu nome, cujo limite é uma solução ótima do problema original.

4.2.1 O Problema Penalizado

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(z) \\ &\text{sujeita a } \ h(z) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A idéia do método de penalidade consiste em substituir o problema (4.1) por um problema irrestrito da forma:

$$\text{minimizar } [f(z) + cp(z)], \tag{4.2}$$

onde c é uma constante positiva e p é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- $p(z)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$;
- $p(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$; e
- $p(z) = 0$ se e somente se z for factível.

A função p, assim definida, é uma função penalidade.

Tipicamente, p é da forma $p(z) = \sum_{j=1}^{n} [\max\{0, h_j(z)\}]^q$, onde q é um inteiro positivo, normalmente igual a 2. Assim,

$$p(z) = \sum_{j=1}^{n} [\max\{0, h_j(z)\}]^2 .$$

Para valores grandes de c, o mínimo do problema (4.2) deverá ocorrer na região onde p é pequeno, ou seja, espera-se que as soluções correspondentes se aproximem da região de factibilidade e minimizem $f(z)$. Então para $c \to \infty$ espera-se que a seqüência de soluções do problema (4.2) convirja para a solução do problema (4.1).

Existem dois pontos fundamentais a serem levados em conta para a resolução de um problema penalizado. O primeiro é como o problema irrestrito se aproxima do problema restrito. É essencial determinar o modo como a solução do problema irrestrito se aproxima da solução do problema original quando $c \to \infty$. O segundo, é como resolver o problema irrestrito, quando a função objetivo contém uma função penalidade. Se por um lado, quando c cresce, a aproximação entre os problemas melhora, por outro lado, a estrutura do problema irrestrito torna-se cada vez mais desfavorável no que diz respeito ao mal-condicionamento da matriz hessiana e à taxa de convergência.

4.3 Método da Função Lagrangeana Aumentada

Uma das classes mais eficientes de métodos de Programação Não-linear é a de métodos da função Lagrangeana aumentada, também conhecidos como métodos dos multiplicadores [nome dado por Hestenes (1969) devido ao envolvimento de multiplicadores de Lagrange].

Powell (1969) e Hestenes (1969), independentemente, propuseram um novo tipo de penalidade, em que um termo de penalidade quadrático era adicionado à função Lagrangeana usual para obter a função Lagrangeana aumentada. A motivação inicial para isso, era tentar evitar as dificuldades associadas ao mal-condicionamento encontrado na penalidade clássica quando o fator de penalidade tende a infinito. Hestenes sugeriu que resolvendo uma seqüência de minimizações irrestritas da função Lagrangeana aumentada, cada uma delas seguida pela atualização dos multiplicadores de Lagrange através de uma fórmula que em efeito maximizaria um problema dual, resolveria o problema (4.1).

O método da função Lagrangeana aumentada pode ser visto como uma combinação dos métodos de Penalidade e Dual Lagrangeano, pois a cada restrição do problema é associado um fator de penalidade e um multiplicador de Lagrange. Sendo assim, esses dois conceitos trabalham juntos para reduzir muitas das desvantagens associadas a cada método separadamente (necessidade de convexidade para relaxação Lagrangeana e mal-condicionamento da penalidade pura). A convergência do método dos multiplicadores normalmente é atingida sem a necessidade de se aumentar c para infinito, desse modo aliviando o problema de mal-condicionamento que prejudica o método de penalidade. Além disso, a iteração do multiplicador de Lagrange pelo método da função Lagrangeana aumentada tende a convergir para o multiplicador ótimo muito mais rápido que no método primal-dual ou que a seqüência $\{c_k h(z_k)\}$, no método de penalidade.

Por causa dessas características atrativas, o método da função Lagrangeana aumentada e suas variações emergiram como uma classe muito importante de métodos de minimização restrita. Uma grande quantidade de pesquisas foi direcionada para sua análise e entendimento de suas propriedades. Além disso, suas descobertas deram ímpeto e uma nova perspectiva para se reexaminar os métodos Lagrangeanos propostos e quase abandonados por vários anos. A seguir apresentamos a formulação de uma função Lagrangeana aumentada.

4.3.1 Formulação de uma Função Lagrangeana Aumentada

Embora possa lidar com restrições de igualdade e desigualdade, neste trabalho utilizaremos técnicas de Lagrangeana aumentada apenas no tratamento de restrições de desigualdade, pois as restrições de igualdade são tratadas diretamente pelo método do gradiente reduzido.

Consideremos novamente o problema (4.1):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(z) \\ &\text{sujeita a } \; h(z) \leq 0. \end{aligned}$$

Este problema pode ser escrito como um problema equivalente com restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(z) \\ &\text{sujeita a } \begin{cases} h(z) + v = 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde v é o vetor de variáveis de folga.

O método da função Lagrangeana aumentada pode ser interpretado como uma extensão dos métodos duais para problemas não-convexos. A idéia básica consiste em adicionar termos de penalidade quadráticos à função Lagrangeana do problema (4.3).

A Lagrangeana do problema (4.3) é dada por:

$$L(z, \mu, v) = f(z) + \mu^t \left[h(z) + v\right], \tag{4.4}$$

onde μ é o vetor multiplicador de Lagrange.

Adicionando termos de penalidade quadráticos à função (4.4), temos:

$$L_a(z, \mu, v, c) = f(z) + \mu^t \left[h(z) + v\right] + \frac{1}{2} c \sum_{j=1}^{m} \left[h_j(z) + v_j\right]^2$$

que é a função Lagrangeana aumentada do problema (4.3), $c > 0$ o fator de penalidade e $v \geq 0$.

O mínimo de L_a em relação às variáveis de folga (v_j) é calculado fazendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_a}{\partial v_j} \geq 0 \text{ se } v_j = 0 \\ \frac{\partial L_a}{\partial v_j} = 0 \text{ se } v_j > 0. \end{cases}$$

Esta condição é satisfeita para:

$$v_j = \begin{cases} -h_j(z) - \frac{\mu_j}{c} \text{ se } \; - h_j(z) - \frac{\mu_j}{c} \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou equivalentemente, $v_j = \max\left\{0, -h_j(z) - \frac{\mu_j}{c}\right\}$.

Substituindo a expressão acima na função Lagrangeana aumentada, obtemos:

$$L_a(z, \mu, c) = f(z) + p_a\left[h(z)\right], \tag{4.5}$$

onde

$$p_a\left[h(z)\right] = \sum_{j=1}^{m} \begin{cases} \mu_j\left[h_j(z)\right] + \frac{1}{2}c\left[h_j(z)\right]^2 & \text{se } \mu_j + ch_j(z) \geq 0 \\ \frac{-\mu_j^2}{2c} & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Observamos que a função Lagrangeana aumentada é diferenciável de 2^a ordem na fronteira de $h_j(z)$, o que garante a satisfação estrita da restrição sem a necessidade de fazer $c \to \infty$. O multiplicador μ assegura a factibilidade da restrição sem crescimento exagerado do parâmetro c.

O problema (4.1) é resolvido através da resolução de uma seqüência de problemas Lagrangeanos irrestritos definidos como:

$$\underset{z}{\text{minimizar}}\ L_a(z, \mu^k, c^k), \tag{4.7}$$

onde $\mu^k \geq 0$ e $c^k > 0$.

Na resolução de (4.7), a atualização do fator de penalidade é realizada segundo a expressão:

$$c^{k+1} = \gamma c^k, \text{ onde } \gamma > 1 \text{ e } k = 0, 1, 2, ... \tag{4.8}$$

e a regra de atualização do multiplicador de Lagrange μ pode ser obtida a partir da condição de estacionariedade da função Lagrangeana (4.5) em relação a z, ou seja

$$\nabla L_a(z, \mu, c) = \nabla f(z) + \nabla h(z)^t \mu + c\sum_{j=1}^{m}\left[\nabla h_j(z) h_j(z)\right]. \tag{4.9}$$

Rearranjando (4.9), obtemos

$$\nabla L_a(z, \mu, c) = \nabla f(z) + \sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j + ch_j(z)\right]\nabla h_j(z).$$

O termo $\left[\mu_j + ch_j(z)\right]$ pode ser interpretado como um multiplicador de Lagrange associado à restrição $h_j(z)$.

Deste modo, a regra de atualização fica:

$$\mu_j^{k+1} = \mu_j^k + ch_j(z).$$

A solução do problema (4.1) pode ser obtida por uma seqüência de soluções do problema (4.7) sem a necessidade de c tender para o infinito (Luenberger, 1984; Bertsekas, 1982; Bertsekas, 1995; Rockafellar, 1974). Esta é uma vantagem muito significativa, pois ela resulta na eliminação ou pelo menos na redução do mal-condicionamento. Uma segunda vantagem é que a taxa de convergência deste método é consideravelmente melhor que a do método de penalidades.

4.4 Abordagem através de Gradiente Reduzido Projetado com Lagrangeana Aumentada

Consideremos o problema (2.13)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & f(x,u) \\
\text{sujeita a} & \left\{ \begin{array}{lll}
g(x,u) = 0 & (\lambda) & \text{(a)} \\
h^{\min} - h(x,u) \leq 0 & (\underline{\mu}_h) & \text{(b)} \\
h(x,u) - h^{\max} \leq 0 & (\overline{\mu}_h) & \text{(c)} \\
u^{\min} - u \leq 0 & (\underline{\mu}_u) & \text{(d)} \\
u - u^{\max} \leq 0 & (\overline{\mu}_u) & \text{(e)} \\
x^{\min} - x \leq 0 & (\underline{\mu}_x) & \text{(f)} \\
x - x^{\max} \leq 0 & (\overline{\mu}_x). & \text{(g)}
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Para resolver tal problema adotando a técnica de Lagrangeana aumentada, no tratamento das restrições (b), (c), (f) e (g), definimos inicialmente os seguintes termos:

$$
\underline{p}_a[x] = \sum_j \left\{ \begin{array}{ll}
\underline{\mu}_{x_j} \left(x_j^{\min} - x_j \right) + \frac{1}{2} c_x \left(x_j^{\min} - x_j \right)^2 & \text{se } \underline{\mu}_{x_j} + c_x \left(x_j^{\min} - x_j \right) \geq 0 \\
-\frac{\underline{\mu}_{x_j}^2}{2c_x} & \text{caso contrário,}
\end{array} \right. \tag{4.10}
$$

$$
\overline{p}_a[x] = \sum_j \left\{ \begin{array}{ll}
\overline{\mu}_{x_j} \left(x_j - x_j^{\max} \right) + \frac{1}{2} c_x \left(x_j - x_j^{\max} \right)^2 & \text{se } \overline{\mu}_{x_j} + c_x \left(x_j - x_j^{\max} \right) \geq 0 \\
-\frac{\overline{\mu}_{x_j}^2}{2c_x} & \text{caso contrário,}
\end{array} \right. \tag{4.11}
$$

$$
\underline{p}_a[h] = \sum_j \left\{ \begin{array}{ll}
\underline{\mu}_{h_j} \left[h_j^{\min} - h_j(x,u) \right] + \frac{1}{2} c_h \left[h_j^{\min} - h_j(x,u) \right]^2 & \text{se } \underline{\mu}_{h_j} + c_h \left[h_j^{\min} - h_j(x,u) \right] \geq 0 \\
-\frac{\underline{\mu}_{h_j}^2}{2c_h} & \text{caso contrário,}
\end{array} \right. \tag{4.12}
$$

$$\overline{p}_a[h] = \sum_j \begin{cases} \overline{\mu}_{h_j}\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right] + \frac{1}{2}c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right]^2 & \text{se } \overline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right] \geq 0 \\ -\frac{\overline{\mu}_{h_j}^2}{2c_h} & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Em seguida, definimos uma seqüência de problemas Lagrangeanos aumentados parcialmente restritos (PLAR) como:

$$\begin{array}{ll} \underset{(x,u)}{\text{minimizar}} & L_a(x,u,\underline{\mu}_h^k,\overline{\mu}_h^k,\underline{\mu}_x^k,\overline{\mu}_x^k) \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} g(x,u) = 0 & \text{(a)} \\ u^{\min} \leq u \leq u^{\max}, & \text{(b)} \end{cases} \end{array} \tag{4.14}$$

onde

$$L_a(x,u,\underline{\mu}_x^k,\overline{\mu}_x^k,\underline{\mu}_h^k,\overline{\mu}_h^k) = f(x,u) + \underline{p}_a[x] + \overline{p}_a[x] + \underline{p}_a[h] + \overline{p}_a[h].$$

Na estratégia de solução estudada neste capítulo, as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (2.13), são procuradas através da solução de uma seqüência de problemas (4.14).

A seqüência de problemas (4.14) é iniciada com um primeiro problema no qual estabelece-se um valor arbitrário para o fator de penalidade e consideram-se nulos todos os multiplicadores $\underline{\mu}_{x_j}^k$, $\overline{\mu}_{x_j}^k$, $\underline{\mu}_{h_j}^k$ e $\overline{\mu}_{h_j}^k$. A partir da solução desse primeiro problema, pode-se gerar uma seqüência de problemas (4.14) com os seguintes procedimentos alternativos:

- Crescendo-se os fatores de penalidade (c_x e c_h) e mantendo-se nulos os multiplicadores de Lagrange (método clássico de penalidades) através de uma regra do tipo:

$$c^{k+1} = \begin{cases} \gamma c^k, & \gamma c^k \leq c^{\lim} \\ c^{\lim}, & \gamma c^k > c^{\lim}, \end{cases} \tag{4.15}$$

  onde $\gamma > 1$ e $k = 0, 1, 2, ...$

- Mantendo-se o fator de penalidade constante e atualizando-se os multiplicadores de Lagrange $\underline{\mu}_{x_j}^k$, $\overline{\mu}_{x_j}^k$, $\underline{\mu}_{h_j}^k$ e $\overline{\mu}_{h_j}^k$ através das regras:

$$\begin{cases} \underline{\mu}_{x_j}^{k+1} = \underline{\mu}_{x_j}^k + c_x\left(x_j^{\min} - x_j\right) \\ \overline{\mu}_{x_j}^{k+1} = \overline{\mu}_{x_j}^k + c_x\left(x_j - x_j^{\max}\right) \\ \underline{\mu}_{h_j}^{k+1} = \underline{\mu}_{h_j}^k + c_h\left[h_j^{\min} - h_j(x,u)\right] \\ \overline{\mu}_{h_j}^{k+1} = \overline{\mu}_{h_j}^k + c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right]; \end{cases} \tag{4.16}$$

- Atualizando-se os multiplicadores como em (4.16) e após isso, acrescer os fatores de penalidade como em (4.15).

4.5 Condições de KKT relativas aos PLAR

Inicialmente apresentamos as expressões para as derivadas primeiras de $\underline{p}_a[x]$, $\overline{p}_a[x]$, $\underline{p}_a[h]$ e $\overline{p}_a[h]$ dadas em (4.10) a (4.13). Essas expressões são dadas por:

$$\frac{\partial \underline{p}_a[x]}{\partial x_m} = \sum_j \begin{cases} -\left[\underline{\mu}_{x_j} + c_x\left(x_j^{\min} - x_j\right)\right] & \text{se } \underline{\mu}_{x_j} + c_x\left(x_j^{\min} - x_j\right) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial \overline{p}_a[x]}{\partial x_m} = \sum_j \begin{cases} \left[\overline{\mu}_{x_j} + c_x\left(x_j - x_j^{\max}\right)\right] & \text{se } \overline{\mu}_{x_j} + c_x\left(x_j - x_j^{\max}\right) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial x_m} = \sum_j \begin{cases} -\left\{\underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j^{\min} - h_j(x,u)\right]\right\}\frac{\partial h_j(x,u)}{\partial x_m} & \text{se } \underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j^{\min} - h_j(x,u)\right] \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial x_m} = \sum_j \begin{cases} \left\{\underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right]\right\}\frac{\partial h_j(x,u)}{\partial x_m} & \text{se } \underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right] \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial u_m} = \sum_j \begin{cases} -\left\{\underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j^{\min} - h_j(x,u)\right]\right\}\frac{\partial h_j(x,u)}{\partial u_m} & \text{se } \underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j^{\min} - h_j(x,u)\right] \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial u_m} = \sum_j \begin{cases} \left\{\underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right]\right\}\frac{\partial h_j(x,u)}{\partial u_m} & \text{se } \underline{\mu}_{h_j} + c_h\left[h_j(x,u) - h_j^{\max}\right] \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Com as definições dos termos (4.17) a (4.22) as condições de KKT para os problemas (4.14) são obtidas a partir da função Lagrangeana associada dada por:

$$\begin{aligned} l(x,u,\lambda,\underline{\mu}_x^k,\overline{\mu}_x^k,\underline{\mu}_h^k,\overline{\mu}_h^k) &= f(x,u) + \lambda^t g(x,u) \\ &\quad + \underline{p}_a[x] + \overline{p}_a[x] + \underline{p}_a[h] + \overline{p}_a[h] \\ &\quad + \underline{\mu}_u^t\left(u^{\min} - u\right) + \overline{\mu}_u^t\left(u - u^{\max}\right). \end{aligned}$$

Assim, as condições de KKT associadas aos problemas (4.14) são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} + J_x^g(x,u)^t\lambda + \frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial x} + \frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial x} + \frac{\partial \underline{p}_a[x]}{\partial x} + \frac{\partial \overline{p}_a[x]}{\partial x} = 0 & \text{(a)} \\ \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} + J_u^g(x,u)^t\lambda + \frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial u} + \frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial u} - \underline{\mu}_u + \overline{\mu}_u = 0 & \text{(b)} \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = g(x,u) = 0 & \text{(c)} \\ \underline{\mu}_u^t\left(u^{\min} - u\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \overline{\mu}_u^t\left(u - u^{\max}\right) = 0 & \text{(d)} \\ \lambda \text{ irrestrito} & \text{(e)} \\ \underline{\mu}_u \geq 0 \text{ e } \overline{\mu}_u \geq 0. & \text{(f)} \end{cases} \tag{4.23}$$

A estratégia para gerar a seqüência de problemas (4.14), resolver as respectivas condições de KKT e atingir as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (2.13), consiste em aplicar procedimentos definidos na próxima seção. Essa estratégia está resumida no fluxograma apresentado na Figura 4.1 abaixo.

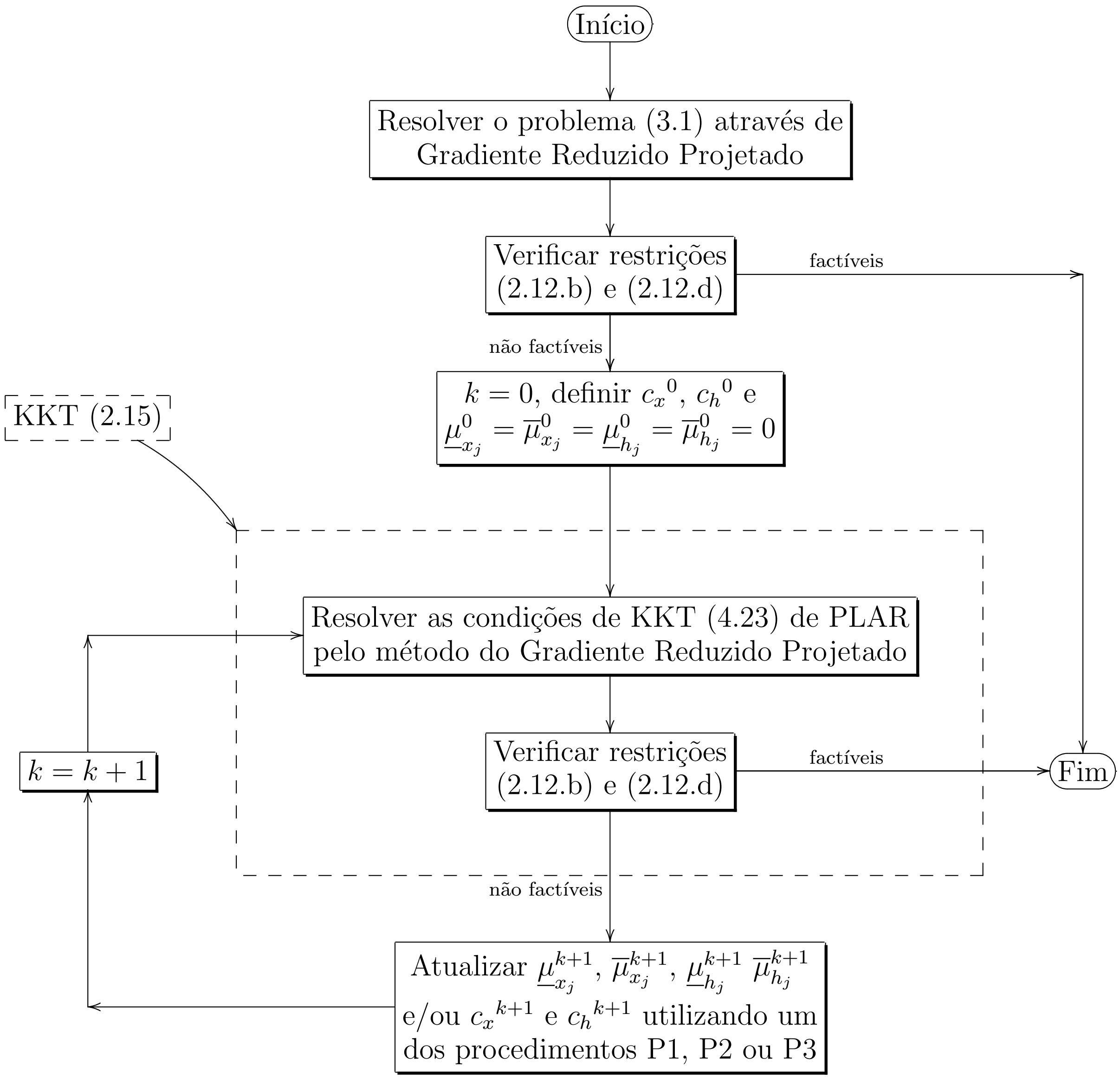


Figura 4.1: Método do gradiente reduzido projetado com os procedimentos P1, P2 e P3 para resolver a seqüência de problemas (4.14).

4.6 Estudos com os Procedimentos P1, P2 e P3

Nesta seção apresentamos três procedimentos para gerar a seqüência de problemas (4.14) que são resolvidos iterativamente. Esses procedimentos são os seguintes:

P1 – Associando-se à função objetivo um termo de penalidade relativo a cada restrição de desigualdade em x e/ou h com fator de penalidade crescente de acordo com (4.15);

P2 – Associando-se à função objetivo um termo de Lagrangeana aumentada relativo a cada restrição de desigualdade em x e/ou h com fator de penalidade constante e com atualização dos multiplicadores de Lagrange de acordo com a regra dada em (4.16); e

P3 – Associando-se à função objetivo um termo de Lagrangeana aumentada relativo a cada restrição de desigualdade em x e/ou h com atualizações do multiplicador de Lagrange de acordo com (4.16) e do fator de penalidade segundo (4.15).

4.7 Problema com Restrição em x

Nesta seção consideraremos a inclusão de restrições de desigualdade em x ao subproblema (3.1), ou seja

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x,u) \\ \text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u)=0 \\ u^{\min} \leq u \leq u^{\max} \\ x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \ . \end{cases} \end{array} \tag{4.24}$$

Para o problema-exemplo considerado, temos

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \\ \text{sujeita a } \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ V_1^{\min} \leq V_1 \leq V_1^{\max} \\ V_2^{\min} \leq V_2 \leq V_2^{\max} \\ V_3^{\min} \leq V_3 \leq V_3^{\max} \end{cases} \end{array} \tag{4.25}$$

onde $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

Os limites de V considerados no estudo são aqueles apresentados na Página 14 e a regra de atualização do fator de penalidade segue a regra dada em (4.15) com $c_x^0 = 10$ e $\gamma_x = 1.2$.

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização tendo como inicialização a solução ótima em V obtida na iteração 0 (Tabela 3.1), ou seja, $V = (1.1936, 1.2000, 1.1063)^t$.

4.7.1 Estratégia com Penalidade (P1)

A Tabela 4.1 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com penalidade sobre x para resolver o problema (4.25).

Tabela 4.1: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063		
1	1.1052	1.1784	1.0489	10.00	0.048941
	1.0956	1.1437	1.0234		0.023401
	1.1423	1.1688	1.0618		0.061841
	1.1315	1.1630	1.0527		0.052655
	1.1316	1.1630	1.0527		0.052676
2	1.1224	1.1542	1.0427	12.00	0.042704
	1.1252	1.1556	1.0449		0.044943
	1.1252	1.1570	1.0458		0.045809
	1.1245	1.1560	1.0448		0.044832
3	1.1151	1.1471	1.0346	14.40	0.034636
	1.1188	1.1500	1.0383		0.038308
	1.1180	1.1511	1.0385		0.038539
	1.1184	1.1500	1.0381		0.038076
4	1.1088	1.1409	1.0276	17.28	0.027638
	1.1133	1.1452	1.0326		0.032570
	1.1142	1.1438	1.0322		0.032211
	1.1131	1.1448	1.0323		0.032250
5	1.1082	1.1402	1.0269	20.74	0.026930
	1.1092	1.1398	1.0272		0.027185
	1.1085	1.1403	1.0271		0.027139
6	1.1037	1.1357	1.0219	24.88	0.021876
	1.1051	1.1363	1.0230		0.023001
	1.1047	1.1366	1.0230		0.022963
7	1.0997	1.1319	1.0175	29.86	0.017513
	1.1017	1.1334	1.0194		0.019415
	1.1012	1.1339	1.0195		0.019478
	1.1015	1.1334	1.0193		0.019340
8	1.0964	1.1286	1.0138	35.83	0.013811
	1.0987	1.1309	1.0164		0.016361
	1.0996	1.1298	1.0163		0.016262
	1.0987	1.1307	1.0163		0.016255
9	1.0961	1.1283	1.0135	43.00	0.013465
	1.0967	1.1281	1.0136		0.013629
	1.0962	1.1283	1.0136		0.013558
10	1.0938	1.1260	1.0109	51.60	0.010857
	1.0947	1.1262	1.0114		0.011444
	1.0944	1.1264	1.0114		0.011433
11	1.0918	1.1240	1.0086	61.92	0.008614
	1.0928	1.1248	1.0096		0.009607
	1.0924	1.1251	1.0096		0.009613
	1.0927	1.1248	1.0095		0.009548
12	1.0901	1.1223	1.0068	74.30	0.006766
	1.0913	1.1235	1.0081		0.008051
	1.0918	1.1230	1.0080		0.008024
	1.0913	1.1234	1.0080		0.008024
13	1.0900	1.1222	1.0066	89.16	0.006591
	1.0903	1.1221	1.0067		0.006706
	1.0901	1.1222	1.0067		0.006697
14	1.0888	1.1210	1.0053	106.99	0.005277
	1.0891	1.1213	1.0056		0.005634
15	1.0878	1.1200	1.0042	128.39	0.004153
	1.0883	1.1205	1.0047		0.004686
16	1.0870	1.1192	1.0032	154.07	0.003241
	1.0877	1.1197	1.0039		0.003919
	1.0876	1.1198	1.0039		0.003916
17	1.0871	1.1192	1.0033	184.88	0.003267
18	1.0864	1.1185	1.0025	221.86	0.002541
	1.0862	1.1189	1.0026		0.002639
	1.0865	1.1187	1.0027		0.002726
19	1.0861	1.1183	1.0023	266.23	0.002277

Tabela 4.1: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$
20	1.0858	1.1180	1.0019	319.48	0.001900
21	1.0856	1.1176	1.0016	383.38	0.001558
22	1.0853	1.1173	1.0012	460.05	0.001228
	1.0851	1.1176	1.0013		0.001253
	1.0853	1.1175	1.0013		0.001320
23	1.0851	1.1173	1.0011	552.06	0.001101
24	1.0850	1.1171	1.0009	662.47	0.000918

4.7.2 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 4.2 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre x e fator de penalidade constante para resolver o problema (4.25).

Tabela 4.2: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x com c_x constante.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1052	1.1784	1.0489	10.00	0.000000	0.048941
	1.0956	1.1437	1.0234			0.023401
	1.1423	1.1688	1.0618			0.061841
	1.1315	1.1630	1.0527			0.052655
	1.1316	1.1630	1.0527			0.052676
2	1.0855	1.1192	1.0028	10.00	0.526760	0.002779
	1.0948	1.1177	1.0064			0.006403
	1.0932	1.1262	1.0107			0.010706
	1.0880	1.1209	1.0048			0.004795
	1.0905	1.1225	1.0071			0.007083
	1.0904	1.1226	1.0071			0.007089
3	1.0842	1.1167	1.0003	10.00	0.597652	0.000275
	1.0857	1.1166	1.0010			0.000958
	1.0857	1.1182	1.0020			0.001975
	1.0850	1.1172	1.0010			0.001028
4	1.0841	1.1164	1.0000	10.00	0.607933	0.000032
	1.0844	1.1161	1.0000			-0.000013
	1.0842	1.1164	1.0001			0.000100

4.7.3 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 4.3 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre x para resolver o problema (4.25).

Tabela 4.3: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			

Tabela 4.3: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$
1	1.1052	1.1784	1.0489	10.00	0.000000	0.048941
	1.0956	1.1437	1.0234			0.023401
	1.1423	1.1688	1.0618			0.061841
	1.1315	1.1630	1.0527			0.052655
	1.1316	1.1630	1.0527			0.052676
2	1.0763	1.1104	0.9928	12.00	0.526760	-0.007203
	1.0932	1.1195	1.0067			0.006691
	1.0927	1.1270	1.0110			0.010982
	1.0892	1.1215	1.0058			0.005811
	1.0895	1.1217	1.0060			0.006049
3	1.0819	1.1144	0.9977	14.40	0.599342	-0.002319
	1.0851	1.1169	1.0009			0.000875
	1.0838	1.1185	1.0011			0.001136
	1.0846	1.1169	1.0006			0.000614
	1.0847	1.1169	1.0006			0.000649
	1.0847	1.1169	1.0006			0.000644

As Figuras 4.2(a), 4.2(b) e 4.2(c), na Página 43, apresentam as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

As Figuras 4.3(a), 4.3(b) e 4.3(c), na Página 43, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

As Figuras 4.4(a), 4.4(b) e 4.4(c), na Página 44, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

As Figuras 4.5(a), 4.5(b) e 4.5(c), na Página 44, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

4.7.4 Comentários

Procedimento P1

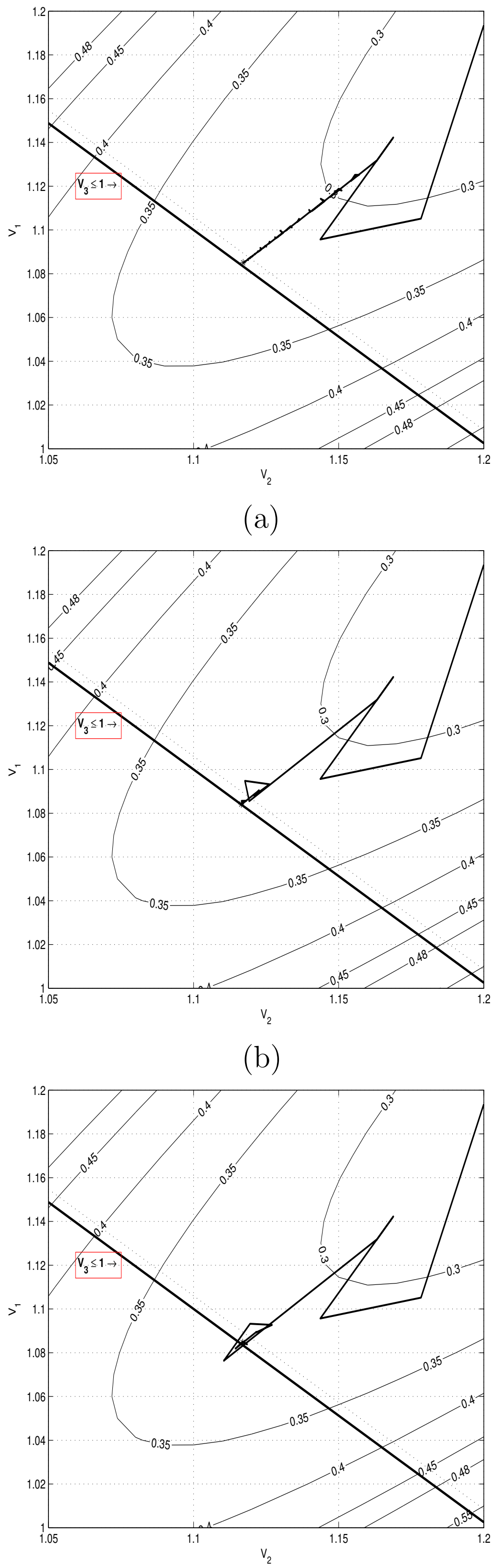
Observa-se tanto pela Tabela 4.1 como pelo gráfico da Figura 4.2(a) que V_3 aproxima-se de $V_3 = 1$ por pontos infactíveis apenas. Da terceira à décima iteração externa percebe-se pequeno ganho em termos de aproximação para $V_3 = 1$ e da décima primeira iteração externa em diante, o ganho é mais lento e gradativo. Percebe-se comportamento assintótico das funções objetivo e penalizada e das tensões (Figura 4.3(a)) ao longo do processo iterativo.

Procedimento P2

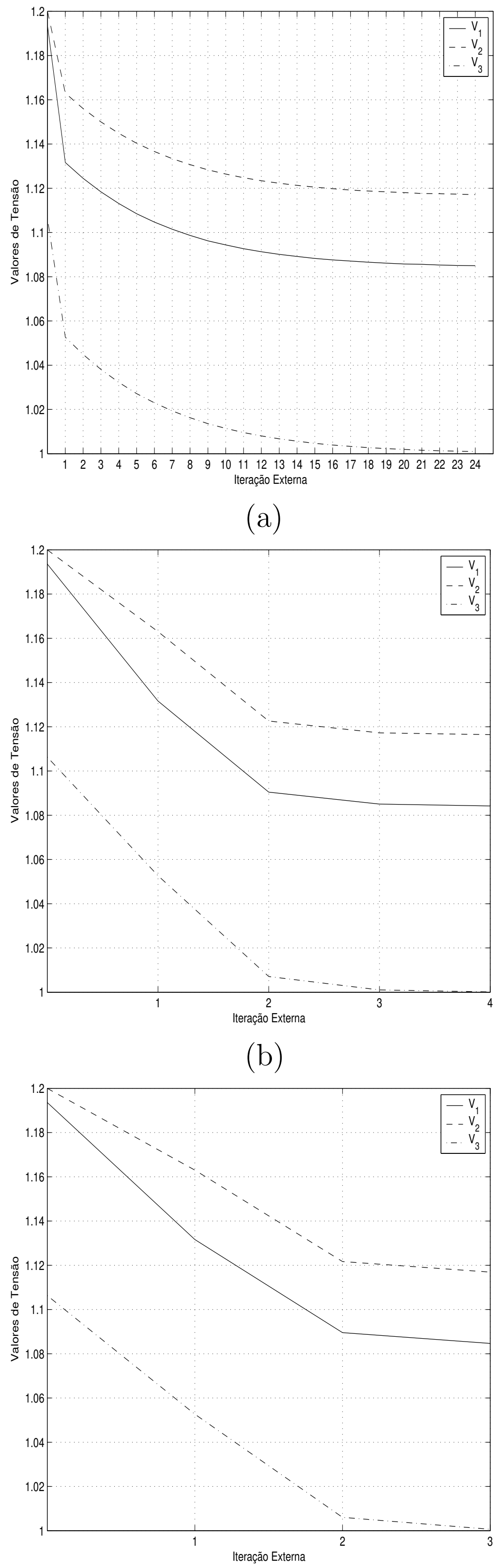
Observa-se tanto pela Tabela 4.2 como pelo gráfico da Figura 4.2(b) que V_3 também se aproxima de $V_3 = 1$ por pontos infactíveis como no procedimento P1, mas esta aproximação é muito mais rápida. Já na segunda iteração externa percebe-se ganho importante em termos de aproximação para $V_3 = 1$.

Procedimento P3

Observa-se tanto pela Tabela 4.3 como pelo gráfico da Figura 4.2(c) que ocorre oscilação em torno de $V_3 = 1$ gerando pontos factíveis e infactíveis. A partir do início da segunda iteração externa percebe-se uma aproximação expressiva de $V_3 = 1$ enquanto que no procedimento P1 isso só acontece a partir da décima primeira iteração externa.



(a) (b) (c)



(a) (b) (c)

Figura 4.2: Curvas de nível da função objetivo e trajetória em direção à solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

Figura 4.3: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

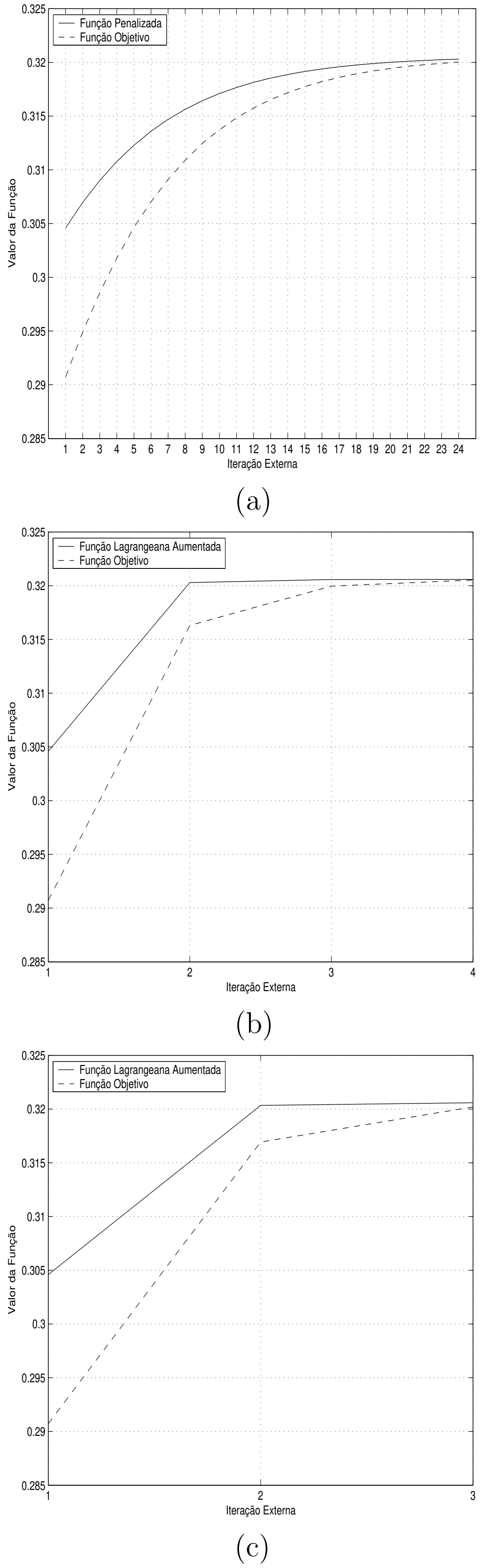


Figura 4.4: Desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada ao longo do processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

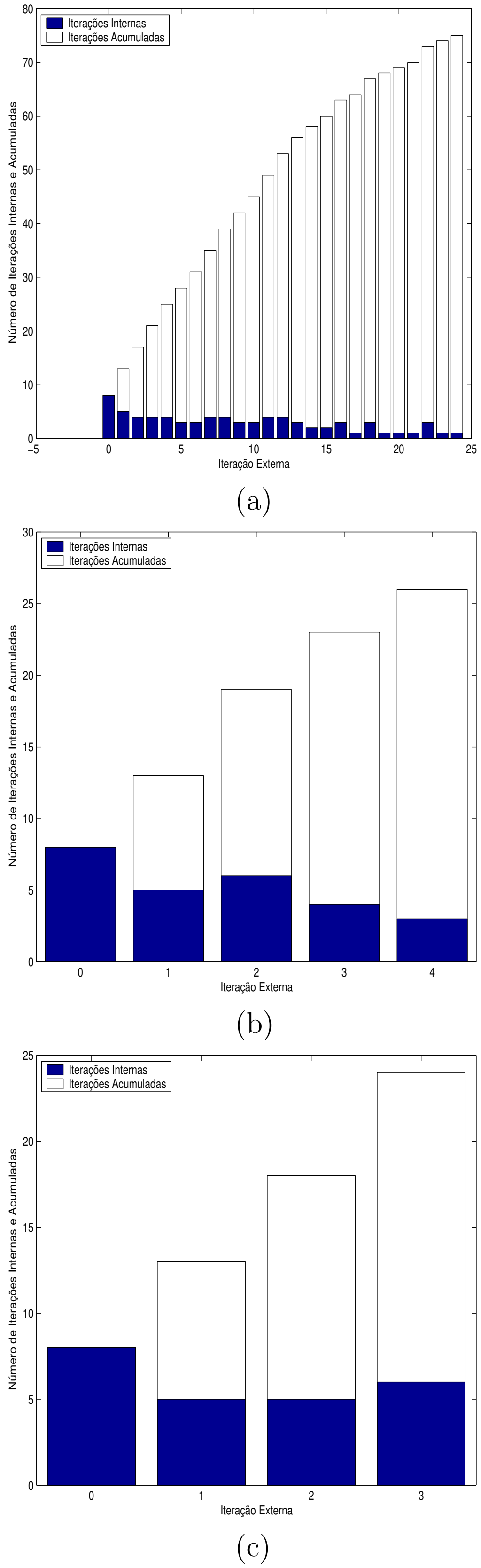


Figura 4.5: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

4.8 Problema com Restrições de Desigualdade Funcionais

Nesta seção consideraremos a inclusão de restrições de desigualdade em h ao subproblema (3.1), ou seja

$$\text{minimizar } f(x,u) \quad \text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u)=0 \\ u^{\min} \le u \le u^{\max} \\ h^{\min} \le h(x,u) \le h^{\max} \,. \end{cases} \tag{4.26}$$

Para o problema-exemplo considerado, temos

$$\text{minimizar } F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \quad \text{sujeita a } \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_{g_1}^{\min} \le Q_{g_1}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \le Q_{g_1}^{\max} \\ Q_{g_2}^{\min} \le Q_{g_2}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \le Q_{g_2}^{\max} \\ V_1^{\min} \le V_1 \le V_1^{\max} \\ V_2^{\min} \le V_2 \le V_2^{\max} \end{cases} \tag{4.27}$$

sendo $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

Os limites sobre V são os mesmos da seção anterior e os limites sobre Q_g são aqueles apresentados na Página 14. A regra de atualização do fator de penalidade é dada em (4.15) com $c_h^0 = 10$ e $\gamma_h = 1.2$.

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização tendo como inicialização a solução ótima em V obtida na iteração 0 (Tabela 3.1), ou seja, $V = (1.1936, 1.2000, 1.1063)^t$.

4.8.1 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 4.4 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com penalidade sobre h para resolver o problema (4.27) considerando $h_2^{\max} = -0.5$.

Tabela 4.4: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063		
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.602556
	1.2000	1.0430	1.0117		0.331190
	1.2000	1.0035	0.9850		0.183881
	1.2000	0.9871	0.9736		0.129290
	1.2000	0.9831	0.9708		0.116613
	1.2000	0.9828	0.9706		0.115512

Tabela 4.4: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
2	1.2000	0.9771	0.9667	12.00	0.097008
	1.2000	0.9779	0.9673		0.099806
	1.2000	0.9779	0.9673		0.099753
3	1.2000	0.9724	0.9635	14.40	0.082088
	1.2000	0.9736	0.9643		0.085903
	1.2000	0.9735	0.9643		0.085837
4	1.2000	0.9681	0.9605	17.28	0.068909
	1.2000	0.9697	0.9616		0.073689
	1.2000	0.9696	0.9616		0.073614
5	1.2000	0.9643	0.9579	20.74	0.057332
	1.2000	0.9662	0.9592		0.063010
	1.2000	0.9662	0.9592		0.062931
6	1.2000	0.9610	0.9556	24.88	0.047212
	1.2000	0.9631	0.9571		0.053719
	1.2000	0.9631	0.9571		0.053639
7	1.2000	0.9605	0.9553	29.86	0.045991
	1.2000	0.9604	0.9552		0.045593
8	1.2000	0.9579	0.9535	35.83	0.038157
	1.2000	0.9581	0.9536		0.038658
9	1.2000	0.9556	0.9519	43.00	0.031404
	1.2000	0.9560	0.9522		0.032703
10	1.2000	0.9536	0.9505	51.60	0.025605
	1.2000	0.9543	0.9510		0.027608
11	1.2000	0.9519	0.9493	61.92	0.020644
	1.2000	0.9528	0.9499		0.023281
	1.2000	0.9528	0.9499		0.023266
12	1.2000	0.9504	0.9483	74.30	0.016415
	1.2000	0.9515	0.9490		0.019591
	1.2000	0.9515	0.9490		0.019575
13	1.2000	0.9503	0.9482	89.16	0.016191
	1.2000	0.9504	0.9483		0.016446
14	1.2000	0.9492	0.9475	106.99	0.013102
	1.2000	0.9495	0.9476		0.013800
15	1.2000	0.9483	0.9468	128.39	0.010491
	1.2000	0.9487	0.9471		0.011568
16	1.2000	0.9475	0.9463	154.07	0.008288
	1.2000	0.9480	0.9466		0.009688
17	1.2000	0.9475	0.9462	184.88	0.008108
18	1.2000	0.9470	0.9459	221.86	0.006781
19	1.2000	0.9466	0.9456	266.23	0.005668
20	1.2000	0.9463	0.9454	319.48	0.004735
21	1.2000	0.9460	0.9452	383.38	0.003954
22	1.2000	0.9458	0.9450	460.05	0.003301
23	1.2000	0.9456	0.9449	552.06	0.002755
24	1.2000	0.9454	0.9448	662.47	0.002299
25	1.2000	0.9453	0.9447	794.97	0.001917
26	1.2000	0.9451	0.9446	953.96	0.001599
27	1.2000	0.9450	0.9445	1144.75	0.001334
28	1.2000	0.9450	0.9445	1373.71	0.001112
29	1.2000	0.9449	0.9444	1648.45	0.000927

4.8.2 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 4.5 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre h e fator de penalidade constante para resolver o problema (4.27).

Tabela 4.5: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h constante ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.602556
	1.2000	1.0430	1.0117			0.331190
	1.2000	1.0035	0.9850			0.183881
	1.2000	0.9871	0.9736			0.129290
	1.2000	0.9831	0.9708			0.116613
	1.2000	0.9828	0.9706			0.115512
2	1.2000	0.9599	0.9550	10.00	1.155123	0.043508
	1.2000	0.9545	0.9511			0.028161
	1.2000	0.9541	0.9509			0.027120
3	1.2000	0.9445	0.9442	10.00	1.426326	-0.000334
	1.2000	0.9474	0.9462			0.007797
	1.2000	0.9473	0.9461			0.007505
4	1.2000	0.9447	0.9443	10.00	1.501378	0.000394
	1.2000	0.9453	0.9447			0.002164
5	1.2000	0.9446	0.9442	10.00	1.523014	0.000146
	1.2000	0.9448	0.9444			0.000632

4.8.3 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 4.6 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre h e fator de penalidade crescente para resolver o problema (4.27).

Tabela 4.6: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.602556
	1.2000	1.0430	1.0117			0.331190
	1.2000	1.0035	0.9850			0.183881
	1.2000	0.9871	0.9736			0.129290
	1.2000	0.9831	0.9708			0.116613
	1.2000	0.9828	0.9706			0.115512
2	1.2000	0.9599	0.9550	12.00	1.155123	0.043508
	1.2000	0.9535	0.9504			0.025237
	1.2000	0.9529	0.9500			0.023662
3	1.2000	0.9434	0.9434	14.40	1.439071	-0.003436
	1.2000	0.9464	0.9455			0.005197
	1.2000	0.9464	0.9455			0.005021
4	1.2000	0.9449	0.9444	17.28	1.511380	0.000938
	1.2000	0.9449	0.9444			0.000960

As Figuras 4.6(a), 4.6(b) e 4.6(c), na Página 60, apresentam curvas de nível da função objetivo e de h_2 e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 4.7(a), 4.7(b) e 4.7(c), na Página 60, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 4.8(a), 4.8(b) e 4.8(c), na Página 61, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 4.9(a), 4.9(b) e 4.9(c), na Página 61, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

4.8.4 Comentários

De acordo com os gráficos (a), (b) e (c) da Figura 4.6 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias praticamente idênticas em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 4.4 com as Tabelas 4.5 e 4.6 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos P1 do que P2 e P3.

Os procedimentos P2 e P3 têm um comportamento muito semelhante em termos de perfis das tensões (Figura 4.7), funções objetivo e Lagrangeana aumentada (Figura 4.8) e iterações internas e externas (Figura 4.9), com o procedimento P3 levando pequena vantagem.

4.8.5 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 4.7 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com penalidade sobre h para resolver o problema (4.27) considerando $h_2^{\max} = 0.0$.

Tabela 4.7: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em h ($h_2^{\max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063		
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.102556
	1.2000	1.0953	1.0448		0.067082
	1.2000	1.0917	1.0425		0.050084
	1.2000	1.0916	1.0424		0.049631
2	1.2000	1.0886	1.0405	12.00	0.035642
	1.2000	1.0900	1.0414		0.042009
	1.2000	1.0899	1.0414		0.041955
3	1.2000	1.0884	1.0404	14.40	0.034918
	1.2000	1.0885	1.0405		0.035401
4	1.2000	1.0870	1.0395	17.28	0.028327
	1.2000	1.0873	1.0397		0.029809
5	1.2000	1.0858	1.0388	20.74	0.022713
	1.2000	1.0863	1.0391		0.025061
6	1.2000	1.0848	1.0381	24.88	0.017947
	1.2000	1.0855	1.0385		0.021041
7	1.2000	1.0847	1.0381	29.86	0.017646
8	1.2000	1.0841	1.0377	35.83	0.014785
9	1.2000	1.0836	1.0373	43.00	0.012377
10	1.2000	1.0832	1.0370	51.60	0.010353
11	1.2000	1.0828	1.0368	61.92	0.008653
12	1.2000	1.0825	1.0366	74.30	0.007230
13	1.2000	1.0822	1.0364	89.16	0.006039
14	1.2000	1.0820	1.0363	106.99	0.005042
15	1.2000	1.0818	1.0362	128.39	0.004208
16	1.2000	1.0817	1.0361	154.07	0.003511
17	1.2000	1.0815	1.0360	184.88	0.002929
18	1.2000	1.0814	1.0359	221.86	0.002443
19	1.2000	1.0813	1.0359	266.23	0.002037
20	1.2000	1.0813	1.0358	319.48	0.001699
21	1.2000	1.0812	1.0358	383.38	0.001417
22	1.2000	1.0812	1.0358	460.05	0.001181
23	1.2000	1.0811	1.0357	552.06	0.000985

4.8.6 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 4.8 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre h e fator de penalidade constante para resolver o problema (4.27).

Tabela 4.8: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h constante ($h_2^{\max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.102556
	1.2000	1.0953	1.0448			0.067082

Tabela 4.8: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h constante ($h_2^{\max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
	1.2000	1.0917	1.0425			0.050084
	1.2000	1.0916	1.0424			0.049631
2	1.2000	1.0733	1.0308	10.00	0.496313	-0.034687
	1.2000	1.0817	1.0361			0.003634
	1.2000	1.0819	1.0362			0.004370
3	1.2000	1.0806	1.0354	10.00	0.540009	-0.001450
	1.2000	1.0810	1.0356			0.000400

4.8.7 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 4.9 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre h e fator de penalidade crescente para resolver o problema (4.27).

Tabela 4.9: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente ($h_2^{\max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.102556
	1.2000	1.0953	1.0448			0.067082
	1.2000	1.0917	1.0425			0.050084
	1.2000	1.0916	1.0424			0.049631
2	1.2000	1.0733	1.0308	12.00	0.496313	-0.034687
	1.2000	1.0815	1.0360			0.002847
	1.2000	1.0817	1.0361			0.003698
3	1.2000	1.0810	1.0356	14.40	0.540685	0.000243

As Figuras 4.10(a), 4.10(b) e 4.10(c), na Página 62, apresentam curvas de nível da função objetivo e de h_2 e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 4.11(a), 4.11(b) e 4.11(c), na Página 62, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 4.12(a), 4.12(b) e 4.12(c), na Página 63, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 4.13(a), 4.13(b) e 4.13(c), na Página 63, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

4.8.8 Comentários

De acordo com os gráficos (a), (b) e (c) da Figura 4.10 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 4.7 com as Tabelas 4.8 e 4.9 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos P1 do que P2 ou P3. Observamos ainda que a trajetória utilizando P1 se desenvolve por pontos infactíveis apenas.

A partir da segunda iteração externa, verificamos que com P1 as funções objetivo e penalizada exibem comportamento assintótico em direção ao valor objetivo ótimo. Por outro lado, P2 e P3 têm comportamentos muito semelhantes em termos de perfis das tensões (Figura 4.11), funções objetivo e Lagrangeana aumentada (Figura 4.12). Com relação a iterações internas e externas (Figura 4.13) os dois procedimentos se diferenciam apenas na última iteração com o procedimento P3 levando pequena vantagem.

4.9 Problema com Restrições de Desigualdade em x e Funcionais

Nesta seção, serão consideradas as restrições canalizadas nas variáveis x e h. Assim, nesta fase, considera-se a resolução do problema completo:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimizar } f(x,u)\\
&\text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u)=0\\ h^{\min} \le h(x,u) \le h^{\max}\\ u^{\min} \le u \le u^{\max}\\ x^{\min} \le x \le x^{\max} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Para o problema-exemplo considerado, temos

$$
\begin{aligned}
&\text{minimizar } F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3)\\
&\text{sujeita a } \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0\\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0\\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0\\ Q_{g_1}^{\min} \le Q_{g_1}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \le Q_{g_1}^{\max}\\ Q_{g_2}^{\min} \le Q_{g_2}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \le Q_{g_2}^{\max}\\ V_1^{\min} \le V_1 \le V_1^{\max}\\ V_2^{\min} \le V_2 \le V_2^{\max}\\ V_3^{\min} \le V_3 \le V_3^{\max} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

sendo $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

Os limites sobre V e Q_g são os mesmos da seção anterior. Os fatores de penalidade iniciais considerados foram $c_x^0 = 10$ e $c_h^0 = 10$ com $\gamma_x = 1.2$ e $\gamma_h = 1.2$. A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização tendo como inicialização a solução ótima obtida na iteração 0 (Tabela 3.1), ou seja, $V = (1.1936, 1.2000, 1.1063)^t$.

4.9.1 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 4.10 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com penalidade sobre x e h para resolver o problema (4.28).

Tabela 4.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063				
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.047427	10.00	0.602556
	1.2000	1.0428	1.0116		0.011563		0.330369
	1.2000	1.0038	0.9851		-0.014853		0.184916
	1.2000	0.9873	0.9737		-0.026266		0.130052

Tabela 4.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
	1.2000	0.9832	0.9708		-0.029155		0.116689
	1.2000	0.9828	0.9706		-0.029410		0.115512
2	1.2000	0.9771	0.9667	12.00	-0.033307	12.00	0.097008
	1.2000	0.9779	0.9673		-0.032724		0.099806
	1.2000	0.9779	0.9673		-0.032735		0.099753
3	1.2000	0.9724	0.9635	14.40	-0.036540	14.40	0.082088
	1.2000	0.9736	0.9643		-0.035721		0.085903
	1.2000	0.9735	0.9643		-0.035736		0.085837
4	1.2000	0.9681	0.9605	17.28	-0.039457	17.28	0.068909
	1.2000	0.9697	0.9616		-0.038406		0.073689
	1.2000	0.9696	0.9616		-0.038424		0.073614
5	1.2000	0.9643	0.9579	20.74	-0.042069	20.74	0.057332
	1.2000	0.9662	0.9592		-0.040795		0.063010
	1.2000	0.9662	0.9592		-0.040815		0.062931
6	1.2000	0.9610	0.9556	24.88	-0.044393	24.88	0.047212
	1.2000	0.9631	0.9571		-0.042907		0.053719
	1.2000	0.9631	0.9571		-0.042927		0.053639
7	1.2000	0.9605	0.9553	29.86	-0.044687	29.86	0.045991
	1.2000	0.9604	0.9552		-0.044783		0.045593
8	1.2000	0.9579	0.9535	35.83	-0.046516	35.83	0.038157
	1.2000	0.9581	0.9536		-0.046402		0.038658
9	1.2000	0.9556	0.9519	43.00	-0.048113	43.00	0.031404
	1.2000	0.9560	0.9522		-0.047808		0.032703
10	1.2000	0.9536	0.9505	51.60	-0.049499	51.60	0.025605
	1.2000	0.9543	0.9510		-0.049022		0.027608
11	1.2000	0.9519	0.9493	61.92	-0.050696	61.92	0.020644
	1.2000	0.9528	0.9499		-0.050061		0.023281
	1.2000	0.9528	0.9499		-0.050065		0.023266
12	1.2000	0.9504	0.9483	74.30	-0.051724	74.30	0.016415
	1.2000	0.9515	0.9490		-0.050954		0.019591
	1.2000	0.9515	0.9490		-0.050958		0.019575
13	1.2000	0.9503	0.9482	89.16	-0.051781	89.16	0.016191
	1.2000	0.9504	0.9483		-0.051720		0.016446
14	1.2000	0.9492	0.9475	106.99	-0.052538	106.99	0.013102
	1.2000	0.9495	0.9476		-0.052367		0.013800
15	1.2000	0.9483	0.9468	128.39	-0.053181	128.39	0.010491
	1.2000	0.9487	0.9471		-0.052916		0.011568
16	1.2000	0.9475	0.9463	154.07	-0.053725	154.07	0.008288
	1.2000	0.9480	0.9466		-0.053380		0.009688
17	1.2000	0.9475	0.9462	184.88	-0.053771	184.88	0.008108
18	1.2000	0.9470	0.9459	221.86	-0.054100	221.86	0.006781
19	1.2000	0.9466	0.9456	266.23	-0.054377	266.23	0.005668
20	1.2000	0.9463	0.9454	319.48	-0.054609	319.48	0.004735
21	1.2000	0.9460	0.9452	383.38	-0.054804	383.38	0.003954
22	1.2000	0.9458	0.9450	460.05	-0.054968	460.05	0.003301
23	1.2000	0.9456	0.9449	552.06	-0.055104	552.06	0.002755
24	1.2000	0.9454	0.9448	662.47	-0.055218	662.47	0.002299
25	1.2000	0.9453	0.9447	794.97	-0.055314	794.97	0.001917
26	1.2000	0.9451	0.9446	953.96	-0.055394	953.96	0.001599
27	1.2000	0.9450	0.9445	1144.75	-0.055460	1144.75	0.001334
28	1.2000	0.9450	0.9445	1373.71	-0.055516	1373.71	0.001112
29	1.2000	0.9449	0.9444	1648.45	-0.055562	1648.45	0.000927

4.9.2 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 4.11 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre x e h e fatores de penalidade constantes para resolver o problema (4.28).

Tabela 4.11: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063						
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.047427	10.00	0.000000	0.602556
	1.2000	1.0428	1.0116			0.011563			0.330369
	1.2000	1.0038	0.9851			-0.014853			0.184916
	1.2000	0.9873	0.9737			-0.026266			0.130052
	1.2000	0.9832	0.9708			-0.029155			0.116689
	1.2000	0.9828	0.9706			-0.029410			0.115512
2	1.2000	0.9599	0.9550	10.00	0.000000	-0.044997	10.00	1.155123	0.043508
	1.2000	0.9545	0.9511			-0.048872			0.028161
	1.2000	0.9541	0.9509			-0.049139			0.027120
3	1.2000	0.9445	0.9442	10.00	0.000000	-0.055828	10.00	1.426326	-0.000334
	1.2000	0.9474	0.9462			-0.053843			0.007797
	1.2000	0.9473	0.9461			-0.053920			0.007505
4	1.2000	0.9447	0.9443	10.00	0.000000	-0.055693	10.00	1.501378	0.000394
	1.2000	0.9453	0.9447			-0.055252			0.002164
5	1.2000	0.9446	0.9442	10.00	0.000000	-0.055759	10.00	1.523014	0.000146
	1.2000	0.9448	0.9444			-0.055637			0.000632

4.9.3 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 4.12 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado com Lagrangeana aumentada sobre x e h e fatores de penalidade crescentes para resolver o problema (4.28).

Tabela 4.12: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063						
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.047427	10.00	0.000000	0.602556
	1.2000	1.0428	1.0116			0.011563			0.330369
	1.2000	1.0038	0.9851			-0.014853			0.184916
	1.2000	0.9873	0.9737			-0.026266			0.130052
	1.2000	0.9832	0.9708			-0.029155			0.116689
	1.2000	0.9828	0.9706			-0.029410			0.115512
2	1.2000	0.9599	0.9550	12.00	0.000000	-0.044997	12.00	1.155123	0.043508
	1.2000	0.9535	0.9504			-0.049566			0.025237
	1.2000	0.9529	0.9500			-0.049969			0.023662
3	1.2000	0.9434	0.9434	14.40	0.000000	-0.056612	14.40	1.439071	-0.003436
	1.2000	0.9464	0.9455			-0.054489			0.005197
	1.2000	0.9464	0.9455			-0.054538			0.005021
4	1.2000	0.9449	0.9444	17.28	0.000000	-0.055559	17.28	1.511380	0.000938
	1.2000	0.9449	0.9444			-0.055554			0.000960

As Figuras 4.14(a), 4.14(b) e 4.14(c), na Página 64, apresentam curvas de nível da função objetivo e de h_2 e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 4.15(a), 4.15(b) e 4.15(c), na Página 64, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 4.16(a), 4.16(b) e 4.16(c), na Página 65, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 4.17(a), 4.17(b) e 4.17(c), na Página 65, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

4.9.4 Comentários

Comparando os gráficos e tabelas desta seção com os da Seção 4.8 verificamos que o processo iterativo se comporta de maneira idêntica àquele apresentado na Seção 4.8. Isto se deve ao fato da restrição em x ($V_3 \leq 1$) ser inativa e, portanto, não ter nenhuma influência adicional sobre o processo iterativo.

4.9.5 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 4.13 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em u com penalidade sobre x e h para resolver o problema (4.28).

Tabela 4.13: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063				
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.047427	10.00	0.102556
	1.2000	1.0945	1.0443		0.044336		0.063526
	1.2000	1.0906	1.0418		0.041806		0.044995
	1.2000	1.0905	1.0417		0.041730		0.044478
2	1.2000	1.0875	1.0398	12.00	0.039812	12.00	0.030395
	1.2000	1.0889	1.0407		0.040693		0.036853
	1.2000	1.0888	1.0407		0.040685		0.036796
3	1.2000	1.0873	1.0397	14.40	0.039721	14.40	0.029749
	1.2000	1.0875	1.0398		0.039793		0.030281
4	1.2000	1.0859	1.0388	17.28	0.038818	17.28	0.023187
	1.2000	1.0863	1.0390		0.039028		0.024716
5	1.2000	1.0847	1.0380	20.74	0.038046	20.74	0.017600
	1.2000	1.0852	1.0384		0.038376		0.019992
6	1.2000	1.0837	1.0374	24.88	0.037388	24.88	0.012859
	1.2000	1.0844	1.0378		0.037823		0.015994
7	1.2000	1.0836	1.0373	29.86	0.037326	29.86	0.012416
	1.1948	1.0773	1.0308		0.030763		0.013542
	1.1976	1.0808	1.0344		0.034362		0.013235
	1.1973	1.0804	1.0340		0.034021		0.013225

Tabela 4.13: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
8	1.1974	1.0797	1.0335	35.83	0.033528	35.83	0.009607
	1.1931	1.0745	1.0281		0.028141		0.010506
	1.1936	1.0753	1.0289		0.028916		0.011197
9	1.1936	1.0745	1.0284	43.00	0.028426	43.00	0.007515
	1.1894	1.0694	1.0231		0.023060		0.008392
	1.1905	1.0710	1.0246		0.024626		0.009447
	1.1904	1.0709	1.0245		0.024524		0.009466
10	1.1904	1.0701	1.0240	51.60	0.024036	51.60	0.005716
	1.1862	1.0649	1.0187		0.018662		0.006581
	1.1878	1.0672	1.0209		0.020869		0.007966
	1.1876	1.0670	1.0206		0.020649		0.007941
11	1.1876	1.0666	1.0204	61.92	0.020414	61.92	0.006098
	1.1835	1.0616	1.0152		0.015183		0.006864
	1.1854	1.0639	1.0176		0.017617		0.006712
	1.1853	1.0638	1.0175		0.017480		0.006707
12	1.1853	1.0634	1.0172	74.30	0.017241	74.30	0.004809
	1.1832	1.0608	1.0146		0.014567		0.005189
	1.1833	1.0610	1.0147		0.014730		0.005640
13	1.1833	1.0606	1.0145	89.16	0.014492	89.16	0.003721
	1.1813	1.0580	1.0118		0.011810		0.004098
	1.1816	1.0587	1.0124		0.012388		0.004735
14	1.1817	1.0583	1.0122	106.99	0.012150	106.99	0.002803
	1.1796	1.0557	1.0095		0.009468		0.003176
	1.1802	1.0567	1.0104		0.010438		0.003968
	1.1802	1.0567	1.0104		0.010414		0.003975
15	1.1802	1.0565	1.0103	128.39	0.010294	128.39	0.002997
	1.1781	1.0539	1.0076		0.007585		0.003355
	1.1790	1.0550	1.0088		0.008760		0.003326
	1.1790	1.0549	1.0087		0.008693		0.003313
16	1.1790	1.0547	1.0086	154.07	0.008578	154.07	0.002358
	1.1780	1.0535	1.0073		0.007270		0.002527
	1.1780	1.0535	1.0073		0.007313		0.002783
17	1.1780	1.0533	1.0072	184.88	0.007195	184.88	0.001804
	1.1770	1.0520	1.0058		0.005849		0.001978
	1.1771	1.0523	1.0061		0.006123		0.002328
18	1.1772	1.0521	1.0060	221.86	0.006005	221.86	0.001346
	1.1761	1.0508	1.0047		0.004659		0.001518
	1.1764	1.0513	1.0051		0.005122		0.001946
19	1.1764	1.0512	1.0051	266.23	0.005064	266.23	0.001454
	1.1754	1.0499	1.0037		0.003715		0.001621
	1.1758	1.0505	1.0043		0.004283		0.001626
20	1.1758	1.0504	1.0042	319.48	0.004224	319.48	0.001133
	1.1753	1.0498	1.0036		0.003579		0.001358
21	1.1753	1.0497	1.0035	383.38	0.003521	383.38	0.000864
	1.1749	1.0492	1.0030		0.002991		0.001134
22	1.1749	1.0491	1.0030	460.05	0.002962	460.05	0.000886
	1.1746	1.0487	1.0025		0.002498		0.000946
23	1.1744	1.0485	1.0023	552.06	0.002328	460.05	0.001216
	1.1742	1.0483	1.0021		0.002085		0.000947
24	1.1741	1.0481	1.0019	662.47	0.001914	460.05	0.001220
	1.1740	1.0479	1.0017		0.001740		0.000948
25	1.1738	1.0478	1.0016	794.97	0.001569	460.05	0.001223
	1.1738	1.0477	1.0015		0.001451		0.000949
26	1.1736	1.0475	1.0013	953.96	0.001280	460.05	0.001221
	1.1736	1.0474	1.0012		0.001210		0.000949
27	1.1734	1.0473	1.0010	1144.75	0.001039	460.05	0.001223
	1.1734	1.0472	1.0010		0.001009		0.000950
28	1.1733	1.0471	1.0008	1373.71	0.000838	460.05	0.001224
	1.1733	1.0471	1.0008		0.000841		0.000950

4.9.6 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 4.14 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em u com Lagrangeana aumentada sobre x e h e fatores de penalidade constantes para resolver o problema (4.28).

Tabela 4.14: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063						
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.047427	10.00	0.000000	0.102556
	1.2000	1.0945	1.0443			0.044336			0.063526
	1.2000	1.0906	1.0418			0.041806			0.044995
	1.2000	1.0905	1.0417			0.041730			0.044478
2	1.2000	1.0723	1.0301	10.00	0.417305	0.030117	10.00	0.444784	-0.039257
	1.2000	1.0806	1.0354			0.035390			-0.001608
	1.2000	1.0807	1.0355			0.035477			-0.000806
3	1.2000	1.0793	1.0345	10.00	0.772078	0.034549	10.00	0.444784	-0.007399
	1.1916	1.0692	1.0241			0.024063			-0.004835
	1.1955	1.0745	1.0293			0.029334			-0.003512
	1.1946	1.0734	1.0282			0.028167			-0.003472
4	1.1931	1.0730	1.0272	10.00	1.053748	0.027186	10.00	0.410063	0.003905
	1.1766	1.0520	1.0057			0.005715			0.003070
	1.1784	1.0539	1.0077			0.007744			0.001938
	1.1781	1.0535	1.0073			0.007324			0.001913
5	1.1783	1.0531	1.0072	10.00	1.126992	0.007166	10.00	0.429193	-0.000663
	1.1713	1.0444	0.9982			-0.001822			0.000770
	1.1752	1.0494	1.0033			0.003287			0.000628
	1.1744	1.0484	1.0023			0.002255			0.000654
6	1.1734	1.0475	1.0012	10.00	1.149542	0.001190	10.00	0.429193	0.002411
	1.1726	1.0463	1.0000			-0.000031			0.001712
	1.1732	1.0469	1.0006			0.000639			0.000814

4.9.7 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 4.15 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em u com Lagrangeana aumentada sobre x e h e fatores de penalidade crescentes para resolver o problema (4.28).

Tabela 4.15: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063						
1	1.1952	1.1000	1.0474	10.00	0.000000	0.047427	10.00	0.000000	0.102556
	1.2000	1.0945	1.0443			0.044336			0.063526
	1.2000	1.0906	1.0418			0.041806			0.044995
	1.2000	1.0905	1.0417			0.041730			0.044478
2	1.2000	1.0723	1.0301	12.00	0.417305	0.030117	12.00	0.444784	-0.039257
	1.2000	1.0802	1.0351			0.035127			-0.003456
	1.2000	1.0806	1.0354			0.035388			-0.001441

Tabela 4.15: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
3	1.1751	1.0527	1.0055	14.40	0.841962	0.005494	14.40	0.427487	0.014567
	1.1735	1.0489	1.0023			0.002283			0.006861
	1.1964	1.0753	1.0304			0.030366			-0.005774
	1.1859	1.0630	1.0173			0.017308			-0.000621
	1.1860	1.0630	1.0173			0.017286			-0.000546
4	1.1793	1.0570	1.0102	17.28	1.090879	0.010243	14.40	0.427487	0.010572
	1.1705	1.0434	0.9971			-0.002897			0.000620
	1.1762	1.0506	1.0046			0.004592			-0.000154
	1.1751	1.0493	1.0032			0.003190			0.000544
	1.1751	1.0493	1.0032			0.003185			0.000503
5	1.1736	1.0480	1.0016	20.74	1.145922	0.001622	14.40	0.427487	0.003058
	1.1716	1.0448	0.9985			-0.001479			0.000458
	1.1733	1.0471	1.0009			0.000854			0.000715
	1.1731	1.0467	1.0005			0.000513			0.000706

As Figuras 4.18(a), 4.18(b) e 4.18(c), na Página 66, apresentam curvas de nível da função objetivo e de h_2 e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 4.19(a), 4.19(b) e 4.19(c), na Página 66, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 4.20(a), 4.20(b) e 4.20(c), na Página 67, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

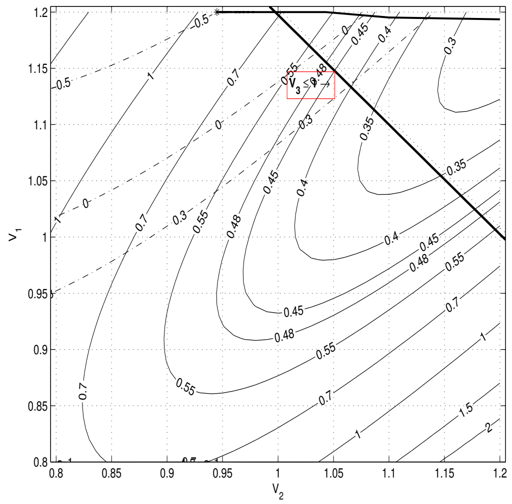
As Figuras 4.21(a), 4.21(b) e 4.21(c), na Página 67, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

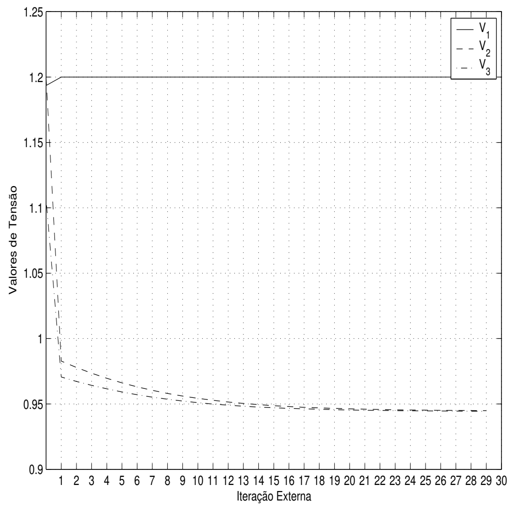
4.9.8 Comentários

Pelo que se pode ver, pelas Tabelas 4.13 a 4.15 e pelas trajetórias dos gráficos da Figura 4.18, a restrição em h é satisfeita antes da restrição em x. As trajetórias em direção à solução ótima das Figuras 4.18 (b) e (c) são semelhantes e se desenvolvem por pontos factíveis e infactíveis; já a trajetória da Figura 4.18(a) se desenvolve por pontos infactíveis apenas. Isto pode ser verificado através das Tabelas 4.13 a 4.15.

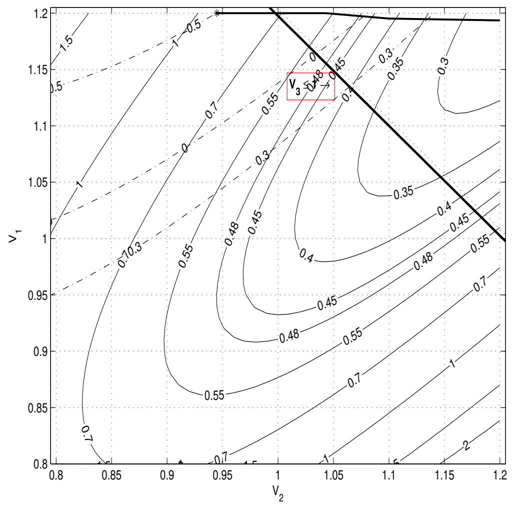
Com relação à Figura 4.19, as tensões em (b) e (c) apresentam performances semelhantes e em (a) esta performance segue comportamento assintótico a partir da oitava iteração externa.

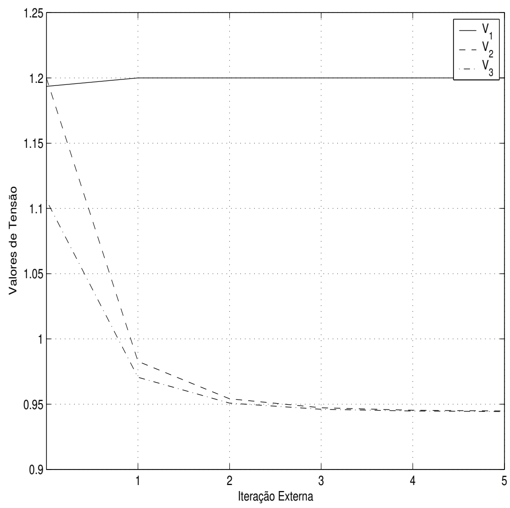
As funções objetivo e Lagrangeana aumentada também têm comportamentos semelhantes (Figuras 4.20(b) e (c)) e em termos de iterações os gráficos da Figura 4.21 mostram que os procedimentos P2 e P3 são muito mais eficientes que o procedimento P1.



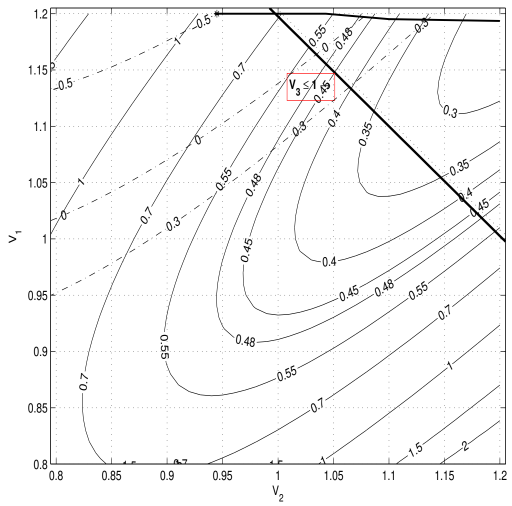


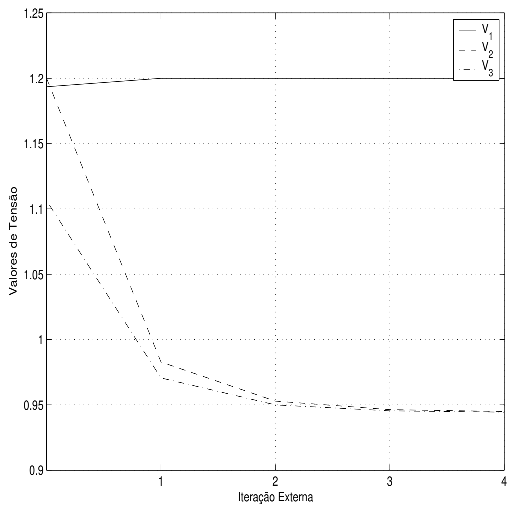
(a) (a)





(b) (b)

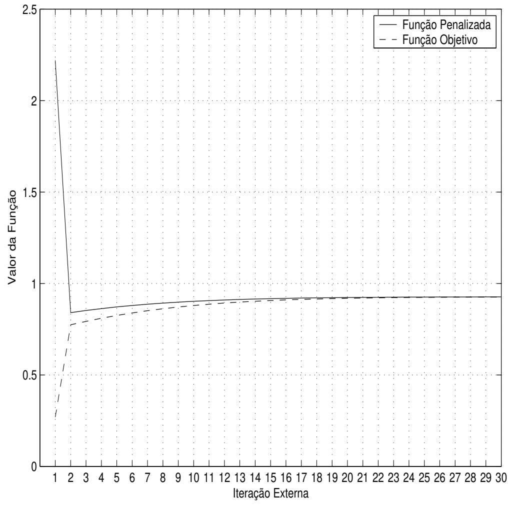




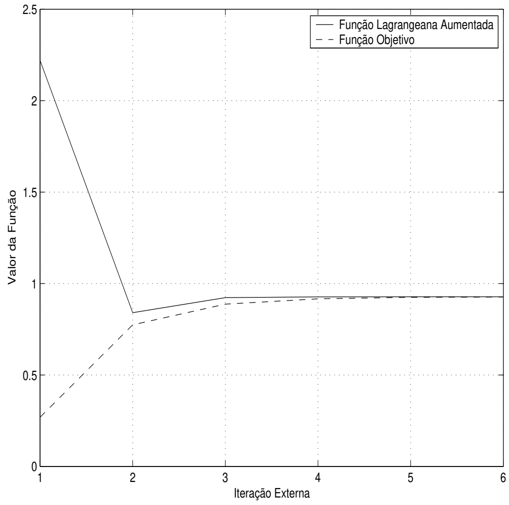
(c) (c)

Figura 4.6: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória em direção à solução ótima no espaço V_2 e V_1 com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

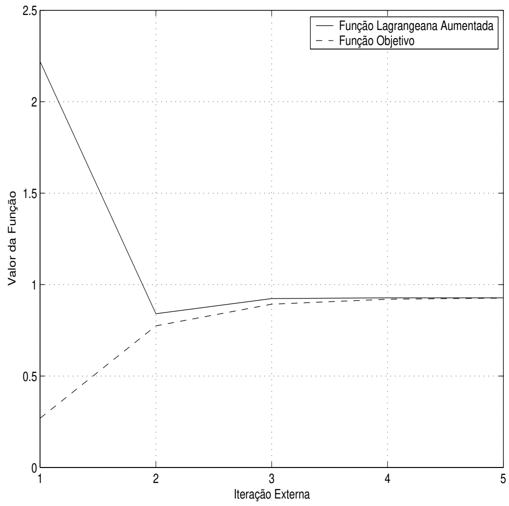
Figura 4.7: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

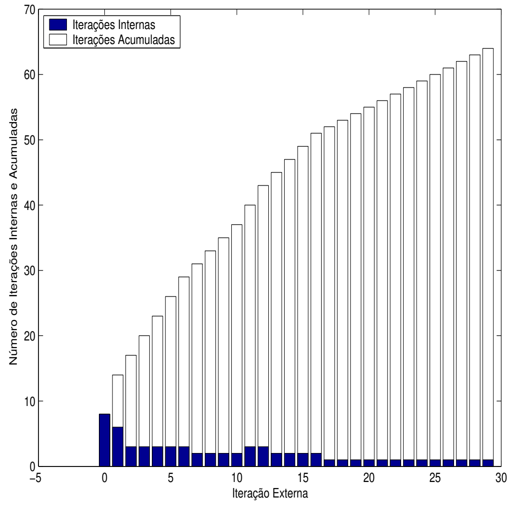


(b)

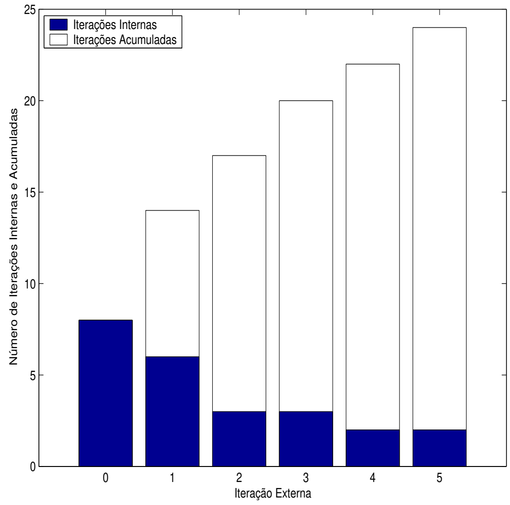


(c)

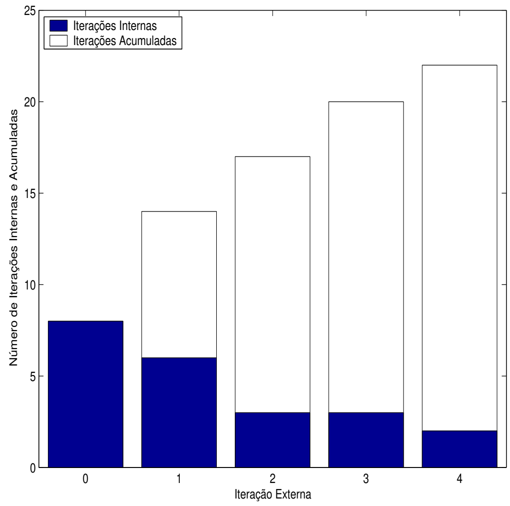
Figura 4.8: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada ao longo do processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

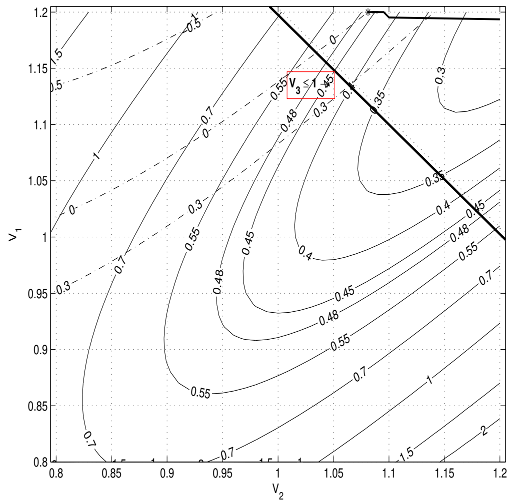


(b)

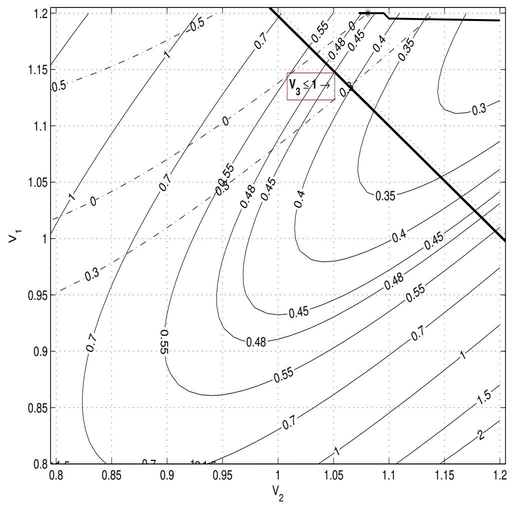


(c)

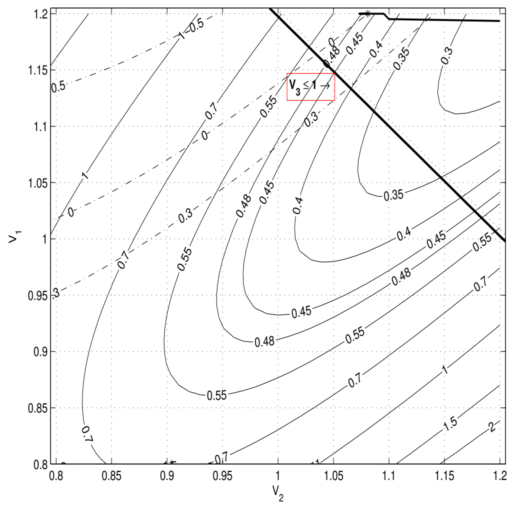
Figura 4.9: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo do processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

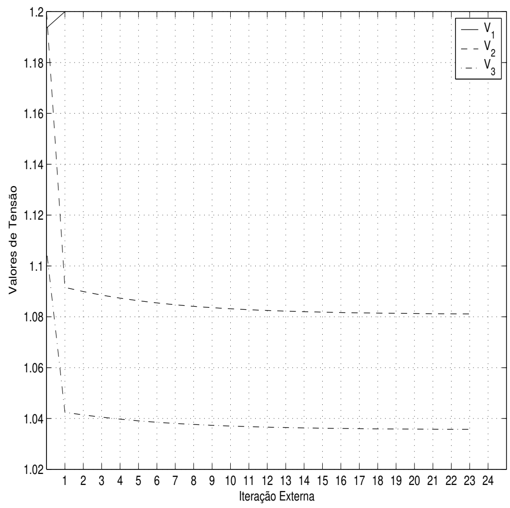


(b)

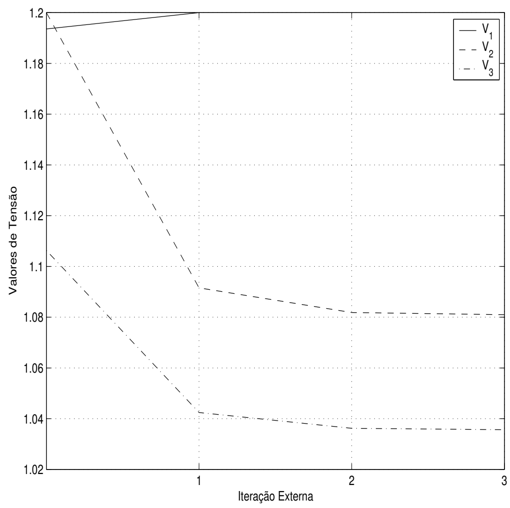


(c)

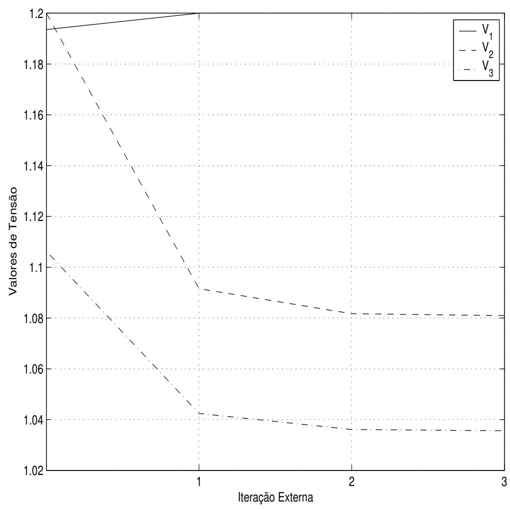
Figura 4.10: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória em direção à solução ótima no espaço V_2 e V_1 com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

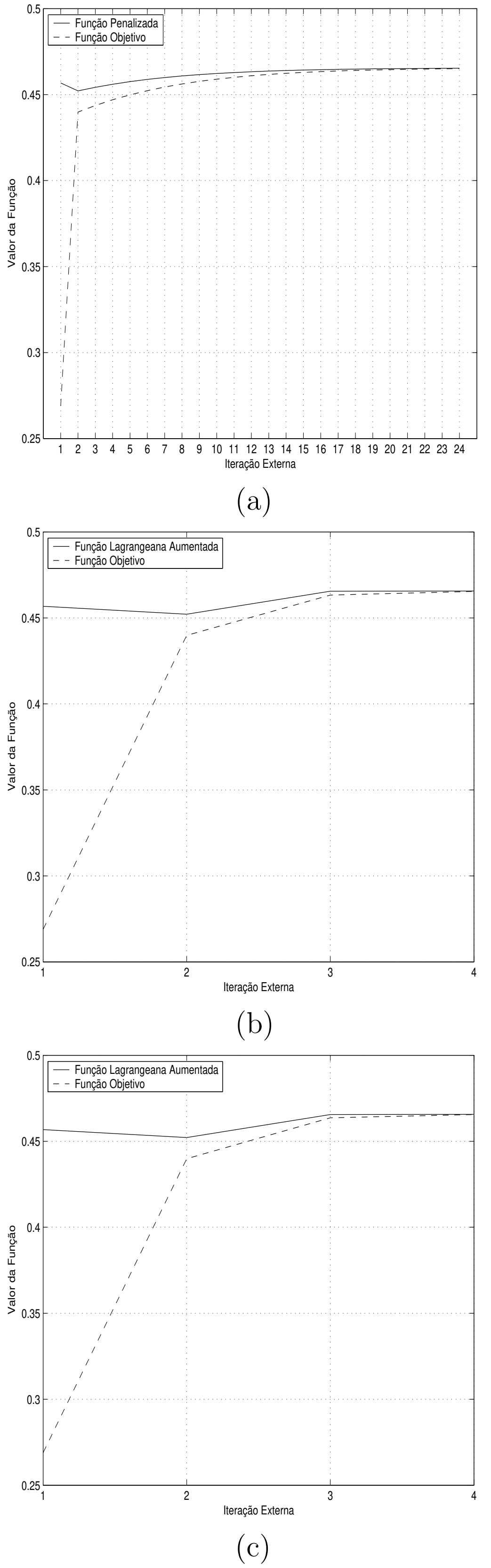


(b)



(c)

Figura 4.11: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, considerando $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



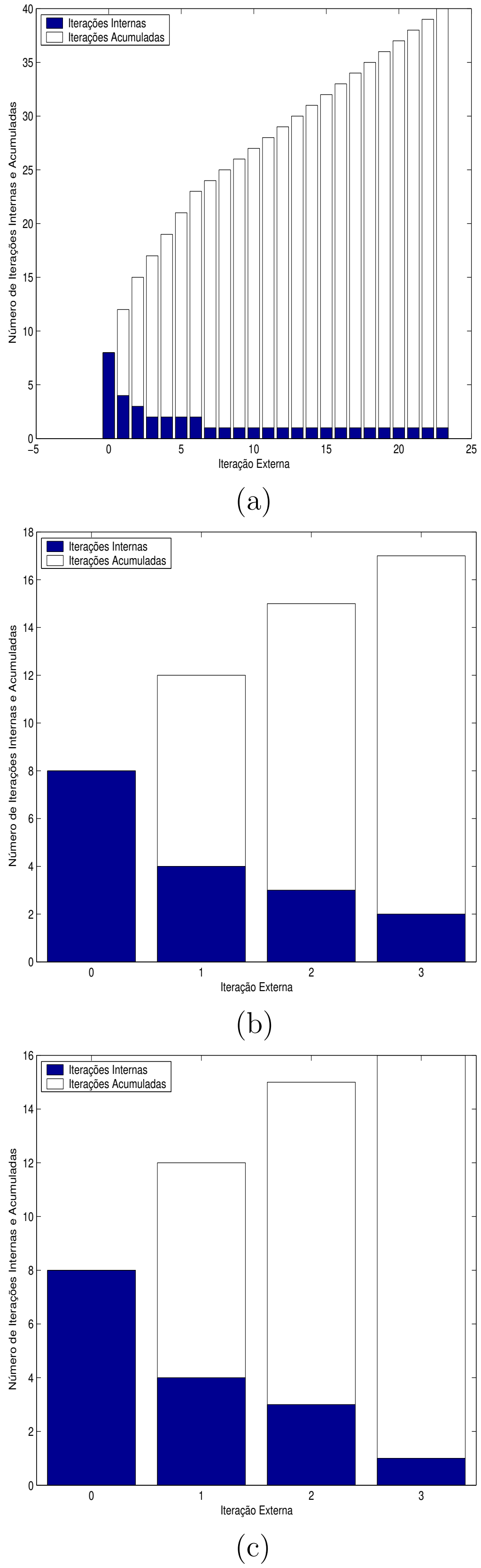
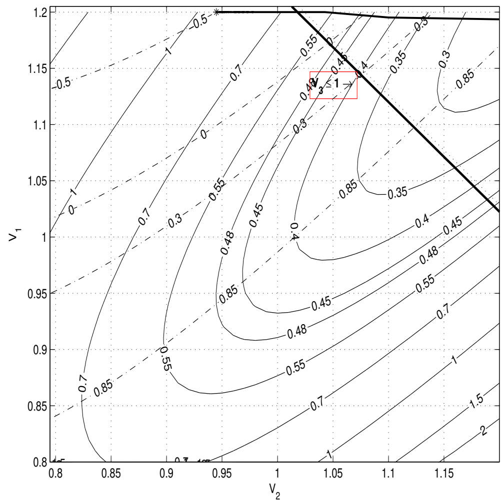
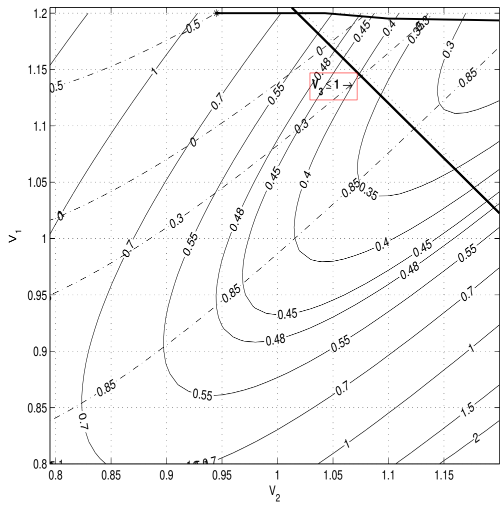


Figura 4.12: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada ao longo do processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

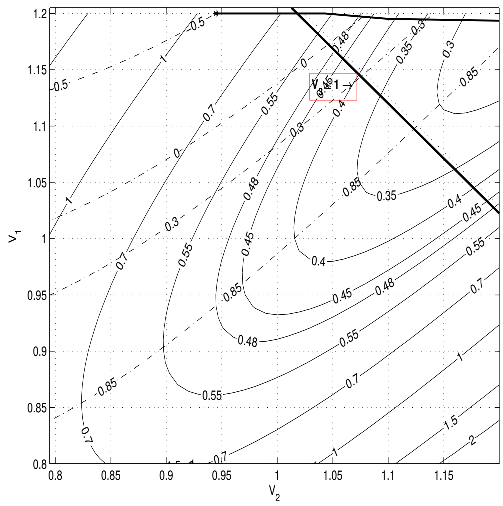
Figura 4.13: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, considerando $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

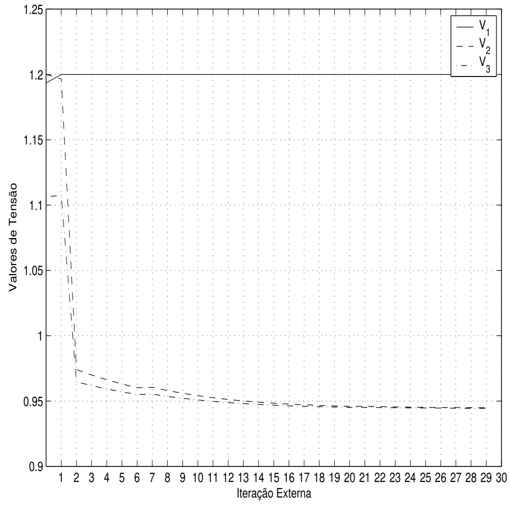


(b)

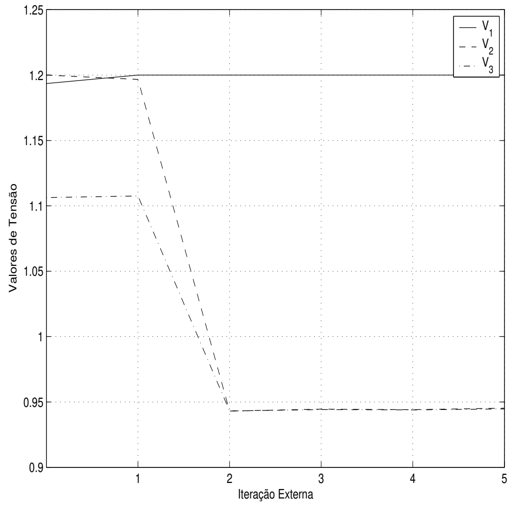


(c)

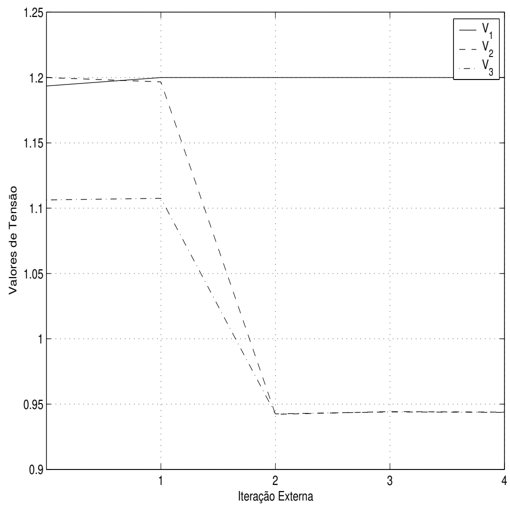
Figura 4.14: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

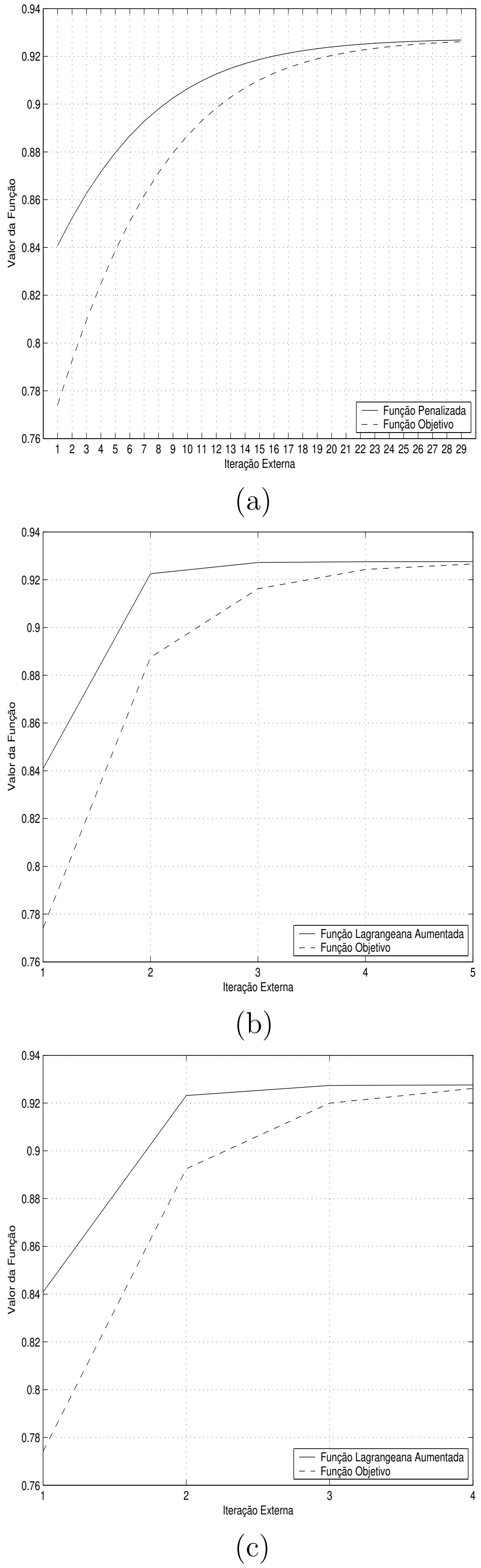


(b)



(c)

Figura 4.15: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



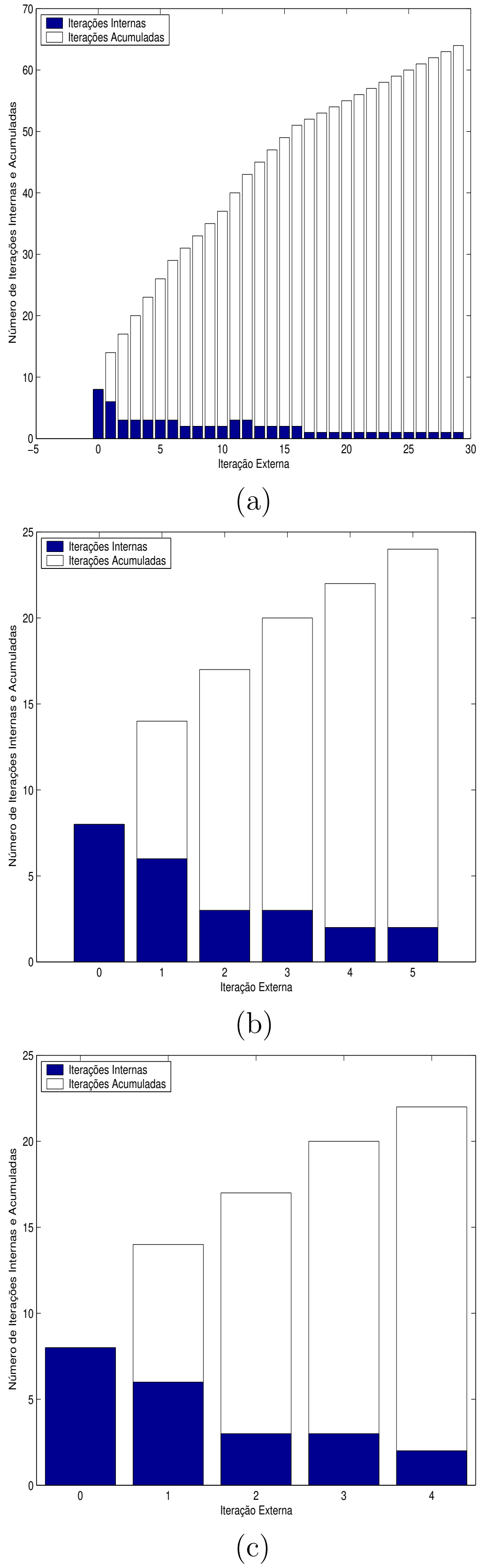
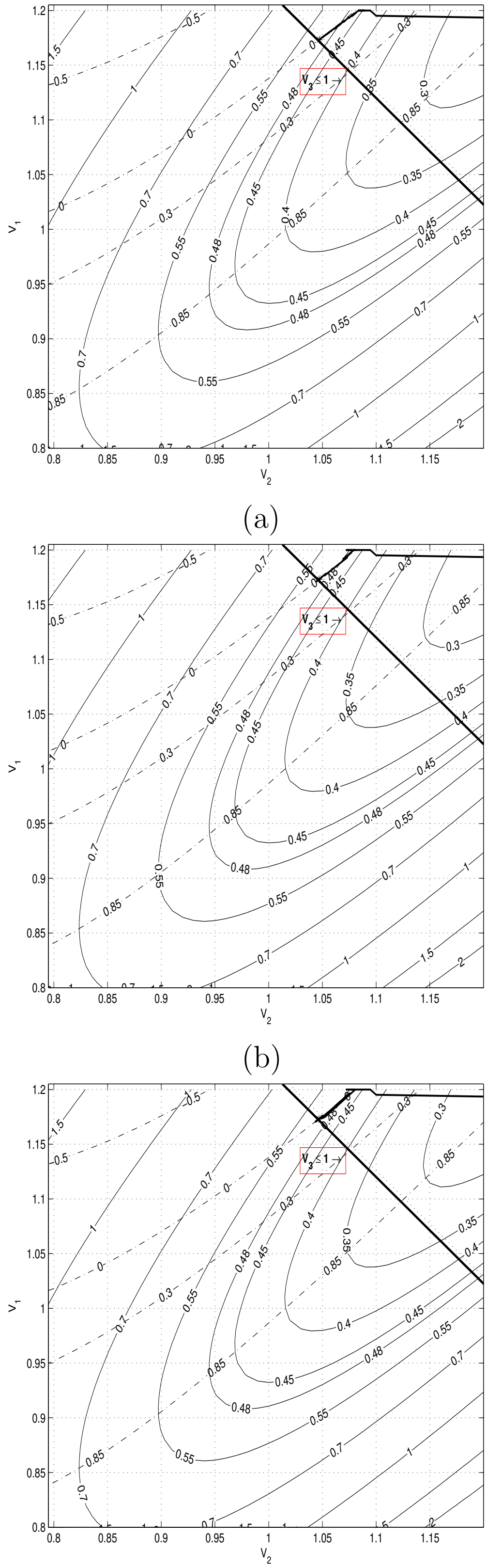


Figura 4.16: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Figura 4.17: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

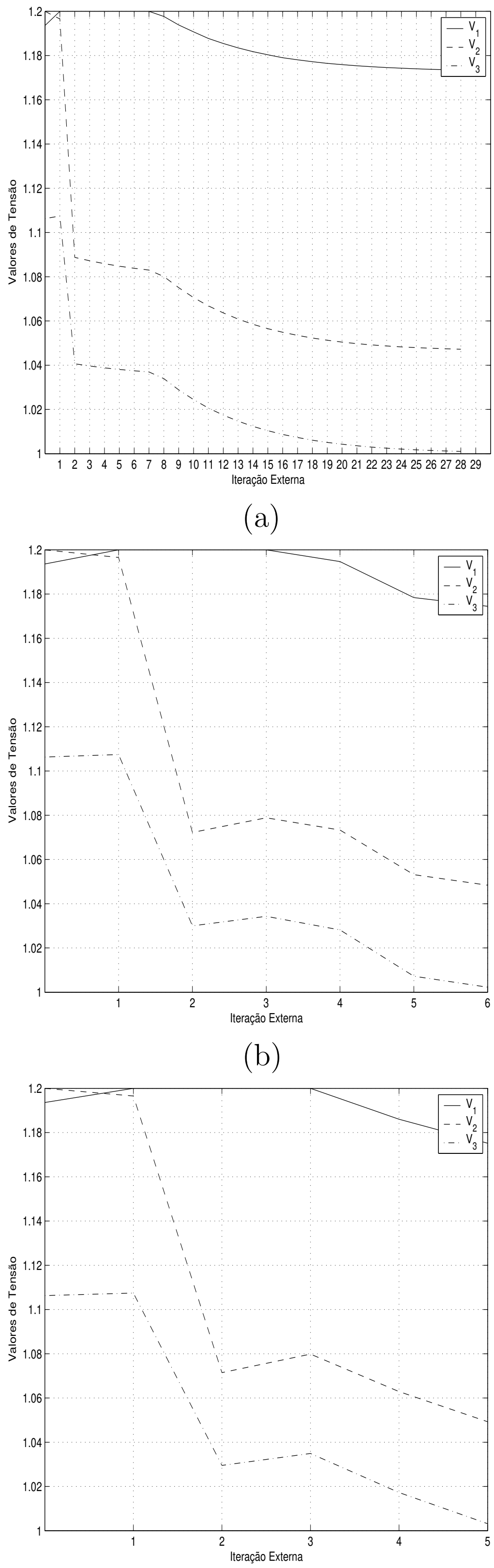


(a)

(b)

(c)

Figura 4.18: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

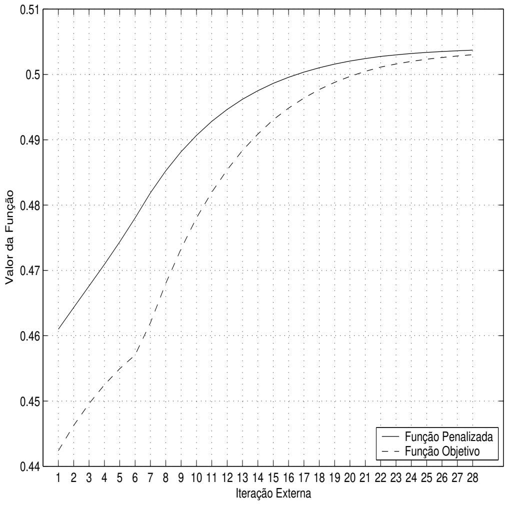


(a)

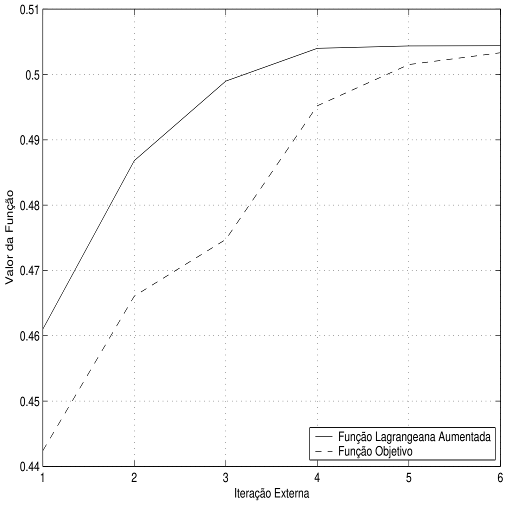
(b)

(c)

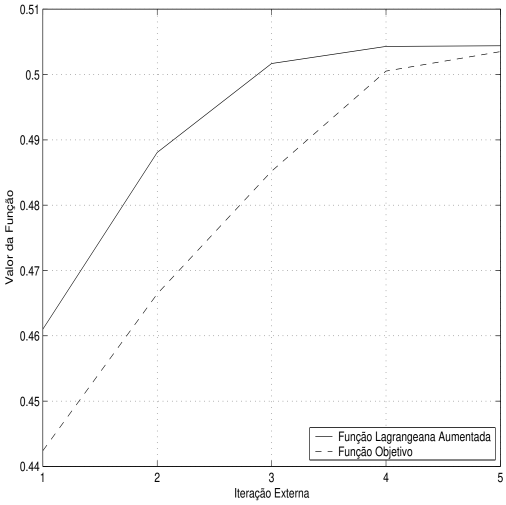
Figura 4.19: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

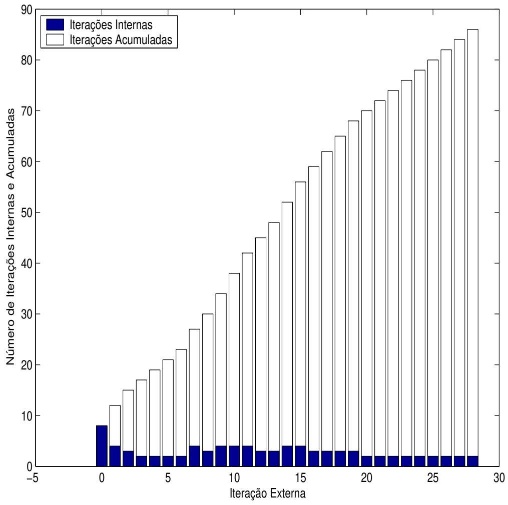


(b)

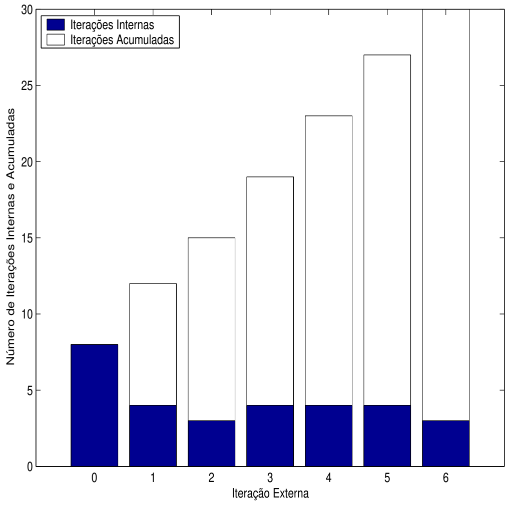


(c)

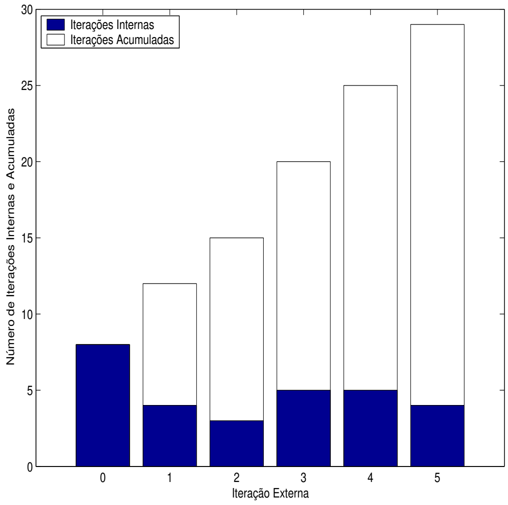
Figura 4.20: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.21: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização com gradiente reduzido projetado em u, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Capítulo 5

Gradiente Reduzido e Barreira com Lagrangeana Aumentada em Restrições Funcionais e em Variáveis Dependentes

Neste capítulo é proposta uma estratégia para a resolução do problema do FPO considerando o tratamento das variáveis independentes (u) pelo método do gradiente reduzido com barreira logarítmica e o tratamento das restrições de desigualdade funcionais (h) e das variáveis dependentes (x) através da técnica de Lagrangeana aumentada. Os estudos apresentados adotam os procedimentos P1, P2 e P3 definidos na Seção 4.6.

5.1 Abordagem através de Gradiente Reduzido com Barreira Logarítmica, Penalidade e Lagrangeana Aumentada

Considera-se novamente o problema (2.13)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar } f(x,u) & \\
\text{sujeita a} & \left\{
\begin{array}{lll}
g(x,u) = 0 & (\lambda) & \text{(a)} \\
h^{\min} - h(x,u) \le 0 & (\underline{\mu}_h) & \text{(b)} \\
h(x,u) - h^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_h) & \text{(c)} \\
u^{\min} - u \le 0 & (\underline{\mu}_u) & \text{(d)} \\
u - u^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_u) & \text{(e)} \\
x^{\min} - x \le 0 & (\underline{\mu}_x) & \text{(f)} \\
x - x^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_x). & \text{(g)}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Define-se inicialmente um conjunto de problemas de barreira, relativa às restrições (2.13.d) e (2.13.e), associado ao problema (2.13) definido como:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x,u) + b\left(u,\beta^k\right) \\ \text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u) = 0 & (\lambda) & \text{(a)} \\ h^{\min} - h(x,u) \le 0 & (\underline{\mu}_h) & \text{(b)} \\ h(x,u) - h^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_h) & \text{(c)} \\ x^{\min} - x \le 0 & (\underline{\mu}_x) & \text{(f)} \\ x - x^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_x), & \text{(g)} \end{cases} \end{array} \tag{5.1}$$

onde

$$b\left(u,\beta^k\right) = -\beta^k \sum_{j\in\{\mathrm{SL}\cup\mathrm{PV}\}} \left[\ln(u_j - u_j^{\min}) + \ln(u_j^{\max} - u_j)\right].$$

Quando o conjunto de problemas de barreira (5.1), para valores de β^k, $k = 0, 1, 2, ...$, tal que $\beta^{k+1} < \beta^k$, é resolvido através da estratégia utilizada no capítulo anterior, para tratamento das restrições (b), (c), (f) e (g), é gerada uma seqüência de problemas Lagrangeanos aumentados parcialmente restritos nos quais os multiplicadores de Lagrange são corrigidos juntamente com os fatores de penalidade e de barreira nesta ordem. Assim, definimos a seqüência de problemas Lagrangeanos aumentados parcialmente restritos com barreira (PLARB) associados ao problema (2.13) como:

$$\begin{array}{l} \underset{(x,u)}{\text{minimizar}}\ L_{ab}(x,u,\underline{\mu}_x^k,\overline{\mu}_x^k,\underline{\mu}_h^k,\overline{\mu}_h^k,\beta^k) \\ \text{sujeita a } \ g(x,u) = 0, \end{array} \tag{5.2}$$

onde

$$L_{ab}(x,u,\underline{\mu}_x^k,\overline{\mu}_x^k,\underline{\mu}_h^k,\overline{\mu}_h^k,\beta^k) = f(x,u) + b\left(u,\beta^k\right) + \underline{p}_a\left[x\right] + \overline{p}_a\left[x\right] + \underline{p}_a\left[h\right] + \overline{p}_a\left[h\right]$$

e $\underline{p}_a\left[x\right]$, $\overline{p}_a\left[x\right]$, $\underline{p}_a\left[h\right]$ e $\overline{p}_a\left[h\right]$ estão definidas na Seção 4.4.

Na estratégia proposta neste capítulo, as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (2.13), são procuradas através da solução de uma seqüência da problemas (5.2).

Como no capítulo anterior, a seqüência de problemas (5.2) é iniciada com um primeiro problema no qual estabelece-se um valor arbitrário para os fatores de penalidade e de barreira e consideram-se nulos todos os multiplicadores $\underline{\mu}_{x_j}^k$, $\overline{\mu}_{x_j}^k$, $\underline{\mu}_{h_j}^k$ e $\overline{\mu}_{h_j}^k$. A partir da solução desse primeiro problema, pode-se gerar uma seqüência de problemas (5.2) com os procedimentos alternativos P1, P2 e P3 já descritos anteriormente. O fator de barreira é atualizado de acordo com a seguinte regra:

$$\beta^{k+1} = \begin{cases} \frac{\beta^k}{\rho}, & \frac{\beta^k}{\rho} \ge \beta^{\lim} \\ \beta^{\lim}, & \frac{\beta^k}{\rho} < \beta^{\lim}, \end{cases} \tag{5.3}$$

onde $\rho > 1$ e $k = 0, 1, 2, ...$

5.2 Condições de KKT relativas aos PLARB

Consideremos a Lagrangeana associada aos problemas (5.2) dada por:

$$\begin{aligned} l_b(x,u,\lambda,\underline{\mu}_x^k,\overline{\mu}_x^k,\underline{\mu}_h^k,\overline{\mu}_h^k,\underline{\mu}_u^k,\overline{\mu}_u^k,\beta^k) &= f(x,u)+\lambda^t g(x,u)+b\left(u,\beta^k\right) \\ &+\underline{p}_a[x]+\overline{p}_a[x]+\underline{p}_a[h]+\overline{p}_a[h]. \end{aligned}$$

Com as definições das derivadas primeiras de $\underline{p}_a[x]$, $\overline{p}_a[x]$, $\underline{p}_a[h]$ e $\overline{p}_a[h]$ dadas em (4.10) a (4.13), as condições de KKT para os problemas (5.2) são:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial l_b}{\partial x}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}+J_x^g(x,u)^t\lambda+\frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial x}+\frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial x}+\frac{\partial \underline{p}_a[x]}{\partial x}+\frac{\partial \overline{p}_a[x]}{\partial x}=0 & \text{(a)} \\ \frac{\partial l_b}{\partial u}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}+J_u^g(x,u)^t\lambda+\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u}+\frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial u}+\frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial u}=0 & \text{(b)} \\ \frac{\partial l_b}{\partial \lambda}=g(x,u)=0 & \text{(c)} \\ \lambda \text{ irrestrito,} & \text{(d)} \end{array}\right. \tag{5.4}$$

onde

$$\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j}=-\beta^k\left(\frac{1}{u_j-u_j^{\min}}-\frac{1}{u_j^{\max}-u_j}\right),\quad j\in\{\mathrm{SL}\cup\mathrm{PV}\}.$$

Análise das Condições de KKT (4.23)

As condições de KKT (4.23) são atendidas através das condições de KKT (5.4) quando o parâmetro β^k tende a zero. Elas se referem à restrição (4.14.b)

$$u^{\min}\le u\le u^{\max}.$$

Na solução de (4.23), as componentes inativas da restrição (4.14.b) apresentam

$$u_j^{\min}<u_j<u_j^{\max} \text{ e } \underline{\mu}_{u_j}=\overline{\mu}_{u_j}=0 \tag{5.5}$$

o que atende as condições (4.23.d) e (4.23.f).

As componentes ativas da restrição (4.14.b) apresentam, na solução do problema, as seguintes possíveis condições

$$\left\{\begin{array}{ll} u_j=u_j^{\min};\ \underline{\mu}_{u_j}>0 \text{ e } \overline{\mu}_{u_j}=0 & \text{(a)} \\ \qquad\qquad \text{ou} & \\ u_j=u_j^{\max};\ \underline{\mu}_{u_j}=0 \text{ e } \overline{\mu}_{u_j}>0 & \text{(b)} \end{array}\right. \tag{5.6}$$

Nestes casos, as componentes da restrição (4.23.b) são escritas como

$$
\begin{cases}
\frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} + J^g_{u_j}(x,u)^t\lambda + \frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial u_j} + \frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial u_j} - \underline{\mu}_{u_j} = 0 \text{ para } u_j = u_j^{\min} & \text{(a)} \\
\text{ou} & \\
\frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} + J^g_{u_j}(x,u)^t\lambda + \frac{\partial \underline{p}_a[h]}{\partial u_j} + \frac{\partial \overline{p}_a[h]}{\partial u_j} + \overline{\mu}_{u_j} = 0 \text{ para } u_j = u_j^{\max} & \text{(b)}
\end{cases}
. \tag{5.7}
$$

Consideremos agora as condições de KKT (5.4) atendidas através da resolução de uma seqüência de problemas de barreira (5.2) na qual o parâmetro β^k está se aproximando de zero. Na solução de (5.2) com $\beta^k \approx 0^+$, as componentes inativas da restrição (4.14.b) atendem as condições (5.5) e portanto as componentes $\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j}$ se aproximam de zero juntamente com o parâmetro β^k. Neste caso temos

$$
\frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j} \approx 0 \text{ e } u_j^{\min} < u_j < u_j^{\max}. \tag{5.8}
$$

Consideremos agora as componentes ativas das restrições (4.14.b) na solução de (5.2). Neste caso as soluções dos problemas de barreira (5.2) apresentam essas componentes se aproximando dos respectivos limites (mínimo ou máximo) à medida que o parâmetro β^k se aproxima de zero. Assim podemos escrever as situações limites

$$
\frac{\partial l_b(u,\beta^k)}{\partial u_j} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u_j} + J^g_{u_j}(x,u)^t\lambda + \frac{\partial \underline{p}_a\,[h]}{\partial u_j} + \frac{\partial \overline{p}_a\,[h]}{\partial u_j} + \frac{\partial b\left(u,\beta^k\right)}{\partial u_j} = 0 \tag{5.9}
$$

quando β^k se aproxima de 0. Portanto, neste caso $\frac{\partial b}{\partial u_j} \neq 0$.

A estratégia para gerar a seqüência de problemas (5.2), resolver as respectivas condições de KKT e atingir as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (2.12), está resumida no fluxograma da Página 72.

Nas seções a seguir, apresentaremos a solução da seqüência de problemas (5.2) resolvida considerando as estratégias P1, P2 e P3 definidas na Seção 4.6.

5.3 Problema com Restrição em x

Nesta seção consideraremos a inclusão de restrições de desigualdade em x ao subproblema (3.1), ou seja

$$
\begin{array}{l}
\text{minimizar } f(x,u) \\
\text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u) = 0 \\ u^{\min} \le u \le u^{\max} \\ x^{\min} \le x \le x^{\max} \end{cases}
\end{array} \tag{5.10}
$$

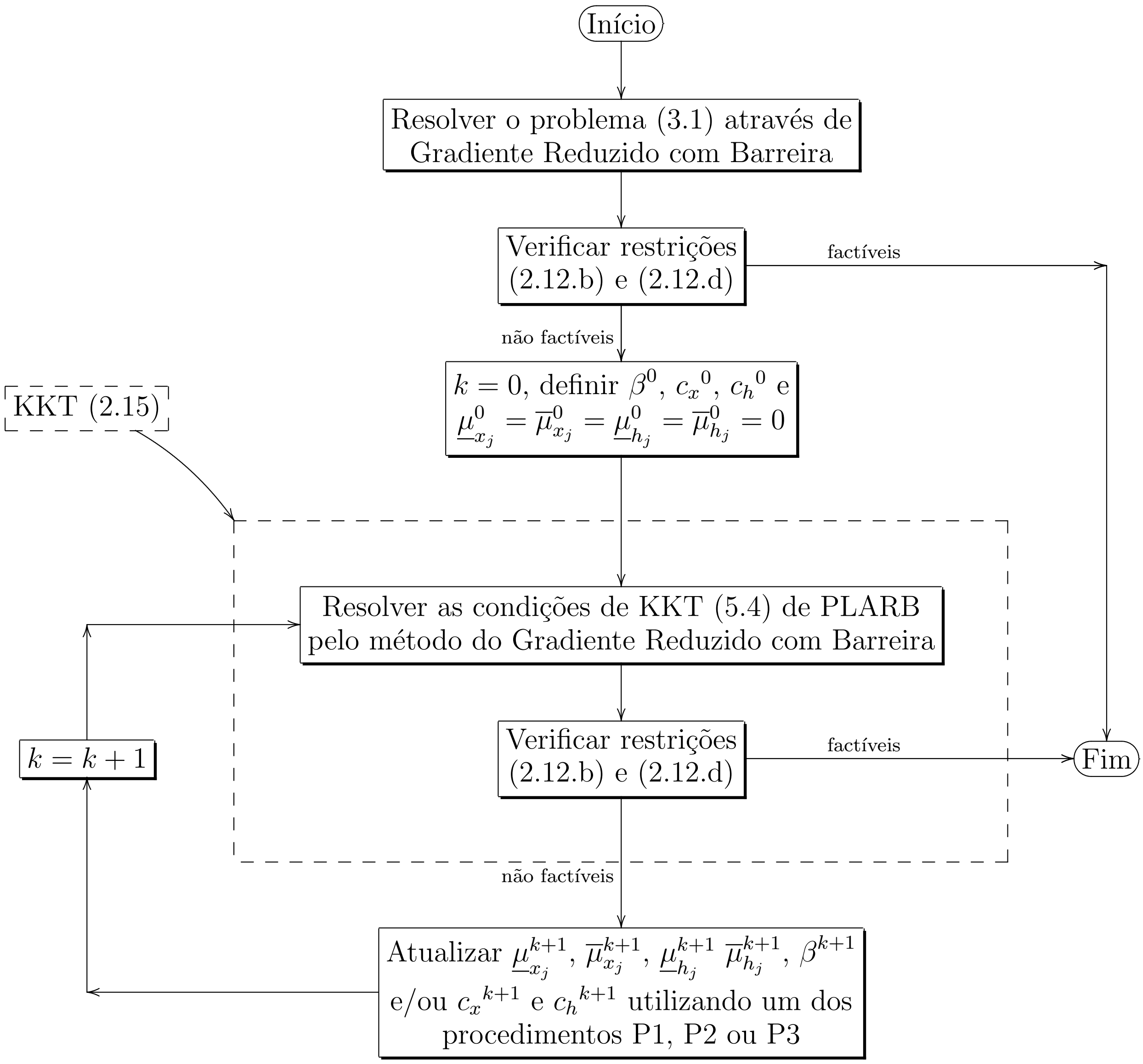


Figura 5.1: Método do gradiente reduzido com barreira logarítmica e com os procedimentos P1, P2 e P3 para resolver a seqüência de problemas (5.2).

Para o problema-exemplo considerado, temos

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & F(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) - \beta^k \sum_{j=1}^{2} \left[\ln(V_j - V_j^{\min}) + \ln(V_j^{\max} - V_j) \right] \\
\text{sujeita a} & \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\ V_3^{\min} \leq V_3 \leq V_3^{\max} \end{cases}
\end{array}
\tag{5.11}
$$

onde $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

Os limites de V considerados no estudo são aqueles apresentados na Página 14 e as atualizações dos fatores de penalidade e de barreira são dadas pelas regras (4.15) e (5.3), respectivamente. O fator de penalidade inicial considerado foi $c_x^0 = 10$, $\gamma_x = 1.2$ e o fator de barreira $\beta^0 = 0.0005$ com $\rho = 2$. Consideramos $\beta^{\lim} = 10^{-10}$.

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização tendo como inicialização a solução ótima obtida na iteração 0 (Página 28), ou seja, $V = (1.1936, 1.2000, 1.1063)^t$.

5.3.1 Estratégia com Penalidade (P1)

A Tabela 5.1 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e penalidade sobre x para resolver o problema (5.11).

Tabela 5.1: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.0052	1.0000	0.8859	5.0000e-004	10.00	-0.114130
	1.1086	1.1334	1.0240			0.023968
	1.1178	1.1527	1.0395			0.039465
	1.1272	1.1610	1.0492			0.049227
	1.1305	1.1617	1.0513			0.051339
2	1.1221	1.1539	1.0423	2.5000e-004	12.00	0.042325
	1.1248	1.1550	1.0444			0.044397
	1.1249	1.1565	1.0454			0.045372
	1.1241	1.1556	1.0444			0.044353
3	1.1150	1.1470	1.0346	1.2500e-004	14.40	0.034561
	1.1187	1.1498	1.0381			0.038112
	1.1179	1.1509	1.0384			0.038354
	1.1182	1.1498	1.0379			0.037892
4	1.1088	1.1409	1.0276	6.2500e-005	17.28	0.027643
	1.1132	1.1451	1.0325			0.032493
	1.1141	1.1438	1.0321			0.032133
	1.1130	1.1448	1.0322			0.032182
5	1.1082	1.1402	1.0269	3.1250e-005	20.74	0.026903
	1.1091	1.1398	1.0272			0.027158
	1.1084	1.1403	1.0271			0.027109
6	1.1036	1.1357	1.0219	1.5625e-005	24.88	0.021870
	1.1051	1.1363	1.0230			0.022990
	1.1047	1.1366	1.0230			0.022952
7	1.0997	1.1319	1.0175	7.8125e-006	29.86	0.017512
	1.1016	1.1333	1.0194			0.019411
	1.1012	1.1339	1.0195			0.019470
	1.1015	1.1334	1.0193			0.019335
8	1.0964	1.1286	1.0138	3.9063e-006	35.83	0.013811

Tabela 5.1: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$
	1.0987	1.1309	1.0164			0.016359
	1.0996	1.1298	1.0163			0.016260
	1.0987	1.1307	1.0163			0.016253
9	1.0961	1.1282	1.0135	1.9531e-006	43.00	0.013464
	1.0967	1.1281	1.0136			0.013628
	1.0962	1.1283	1.0136			0.013558
10	1.0938	1.1260	1.0109	9.7656e-007	51.60	0.010857
	1.0947	1.1262	1.0114			0.011444
	1.0944	1.1264	1.0114			0.011433
11	1.0918	1.1240	1.0086	4.8828e-007	61.92	0.008614
	1.0928	1.1248	1.0096			0.009607
	1.0924	1.1251	1.0096			0.009612
	1.0927	1.1248	1.0095			0.009548
12	1.0901	1.1223	1.0068	2.4414e-007	74.30	0.006766
	1.0913	1.1235	1.0081			0.008051
	1.0918	1.1230	1.0080			0.008024
	1.0913	1.1234	1.0080			0.008024
13	1.0900	1.1222	1.0066	1.2207e-007	89.16	0.006591
	1.0903	1.1221	1.0067			0.006706
	1.0901	1.1222	1.0067			0.006697
14	1.0888	1.1210	1.0053	6.1035e-008	106.99	0.005277
	1.0891	1.1213	1.0056			0.005634
15	1.0878	1.1200	1.0042	3.0518e-008	128.39	0.004153
	1.0883	1.1205	1.0047			0.004686
16	1.0870	1.1192	1.0032	1.5259e-008	154.07	0.003241
	1.0877	1.1197	1.0039			0.003919
	1.0876	1.1198	1.0039			0.003916
17	1.0871	1.1192	1.0033	7.6294e-009	184.88	0.003267
18	1.0864	1.1185	1.0025	3.8147e-009	221.86	0.002541
	1.0862	1.1189	1.0026			0.002639
	1.0865	1.1187	1.0027			0.002726
19	1.0861	1.1183	1.0023	1.9073e-009	266.23	0.002277
20	1.0858	1.1180	1.0019	9.5367e-010	319.48	0.001900
21	1.0856	1.1176	1.0016	4.7684e-010	383.38	0.001558
22	1.0853	1.1173	1.0012	2.3842e-010	460.05	0.001228
	1.0851	1.1176	1.0013			0.001253
	1.0853	1.1175	1.0013			0.001320
23	1.0851	1.1173	1.0011	1.1921e-010	552.06	0.001101
24	1.0850	1.1171	1.0009	1.0000e-010	662.47	0.000918

5.3.2 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 5.2 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre x com fator de penalidade constante para resolver o problema (5.11).

Tabela 5.2: Iterações e valores de tensão obtidos utilizando gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x com c_x constante.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$
Inicialização	1.2000	1.2000	1.1095				
1	1.0052	1.0000	0.8859	5.0000e-004	10.00	0.000000	-0.114130
	1.1086	1.1334	1.0240				0.023968
	1.1178	1.1527	1.0395				0.039465
	1.1272	1.1610	1.0492				0.049227
	1.1305	1.1617	1.0513				0.051339
2	1.0861	1.1197	1.0034	2.5000e-004	10.00	0.513394	0.003399
	1.0954	1.1187	1.0073				0.007293
	1.0945	1.1277	1.0123				0.012331

Tabela 5.2: Iterações e valores de tensão obtidos utilizando gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x com c_x constante.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$
	1.0884	1.1214	1.0053				0.005327
	1.0913	1.1233	1.0079				0.007932
	1.0912	1.1234	1.0080				0.007978
3	1.0844	1.1168	1.0004	1.2500e-004	10.00	0.593177	0.000433
	1.0859	1.1169	1.0013				0.001259
	1.0860	1.1179	1.0019				0.001938
	1.0853	1.1175	1.0013				0.001297
4	1.0842	1.1165	1.0001	6.2500e-005	10.00	0.606149	0.000096
	1.0844	1.1167	1.0003				0.000346

5.3.3 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 5.3 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre x com fator de penalidade crescente para resolver o problema (5.11).

Tabela 5.3: Iterações e valores de tensão obtidos utilizando gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$
Inicialização	1.2000	1.2000	1.1095				
1	1.0052	1.0000	0.8859	5.0000e-004	10.00	0.000000	-0.114130
	1.1086	1.1334	1.0240				0.023968
	1.1178	1.1527	1.0395				0.039465
	1.1272	1.1610	1.0492				0.049227
	1.1305	1.1617	1.0513				0.051339
2	1.0771	1.1112	0.9937	2.5000e-004	12.00	0.513394	-0.006333
	1.0937	1.1202	1.0074				0.007387
	1.0931	1.1275	1.0115				0.011488
	1.0899	1.1221	1.0066				0.006562
	1.0902	1.1223	1.0068				0.006775
3	1.0817	1.1143	0.9976	1.2500e-004	14.40	0.594699	-0.002432
	1.0853	1.1171	1.0011				0.001085
	1.0839	1.1189	1.0014				0.001440
	1.0848	1.1170	1.0008				0.000805
	1.0849	1.1171	1.0008				0.000843

As Figuras 5.2(a), 5.2(b) e 5.2(c), na Página 77, apresentam curvas de nível da função objetivo e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

As Figuras 5.3(a), 5.3(b) e 5.3(c), na Página 77, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

As Figuras 5.4(a), 5.4(b) e 5.4(c), na Página 78, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

As Figuras 5.5(a), 5.5(b) e 5.5(c), na Página 78, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

5.3.4 Comentários

Nos 3 procedimentos utilizados, observa-se que no início da primeira iteração externa (Figura 5.2), o processo iterativo envia o ponto gerado para o centro da região de factibilidade. Isto se deve à forte influência do termo de barreira, pois o ponto do qual se inicia o processo iterativo está muito próximo da fronteira.

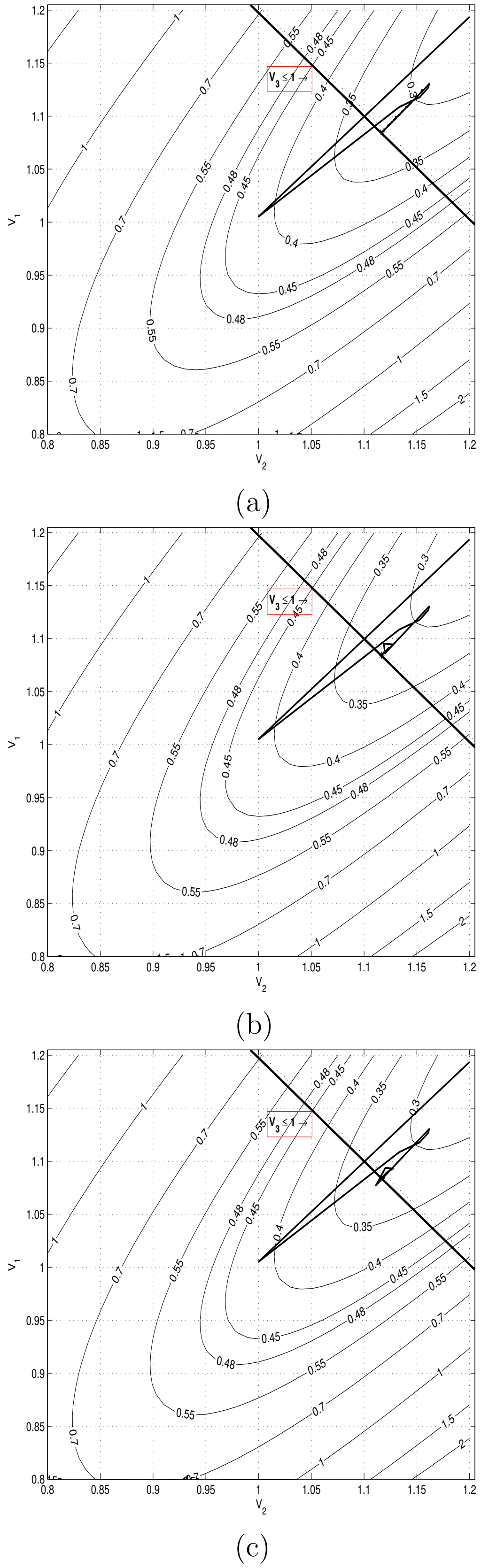
Com o procedimento P1, observa-se tanto pela Tabela 5.1 como pelo gráfico da Figura 5.2(a) que V_3 aproxima-se de $V_3 = 1$ por pontos infactíveis. Ao longo das iterações percebe-se pequeno ganho em termos de aproximação para $V_3 = 1$. Percebe-se comportamento assintótico das tensões (Figura 5.3(a)) e das funções objetivo, barreira e penalizada (Figura 5.4(a)) em direção ao ótimo.

Com o procedimento P2, observa-se tanto pela Tabela 5.2 como pelo gráfico da Figura 5.2(b) que V_3 também se aproxima de $V_3 = 1$ por pontos infactíveis como no procedimento P1, mas esta aproximação é muito mais rápida. Já no início da segunda iteração externa percebe-se ganho expressivo em termos de aproximação para $V_3 = 1$.

Com o procedimento P3, observa-se tanto pela Tabela 5.3 como pelo gráfico da Figura 5.2(c) que ocorre oscilação em torno de $V_3 = 1$ gerando pontos factíveis e infactíveis. A partir do início da segunda iteração externa percebe-se uma aproximação expressiva de $V_3 = 1$ enquanto que com P1 isso só acontece a partir da décima primeira iteração externa.

Com relação à Figura 5.3, as tensões em (b) e (c) apresentam performances muito semelhantes e em (a) esta performance segue comportamento assintótico a partir da primeira iteração externa.

As funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada também têm comportamentos semelhantes (Figuras 5.4(b) e (c)) e em termos de iterações os gráficos da Figura 5.5 mostram que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1.



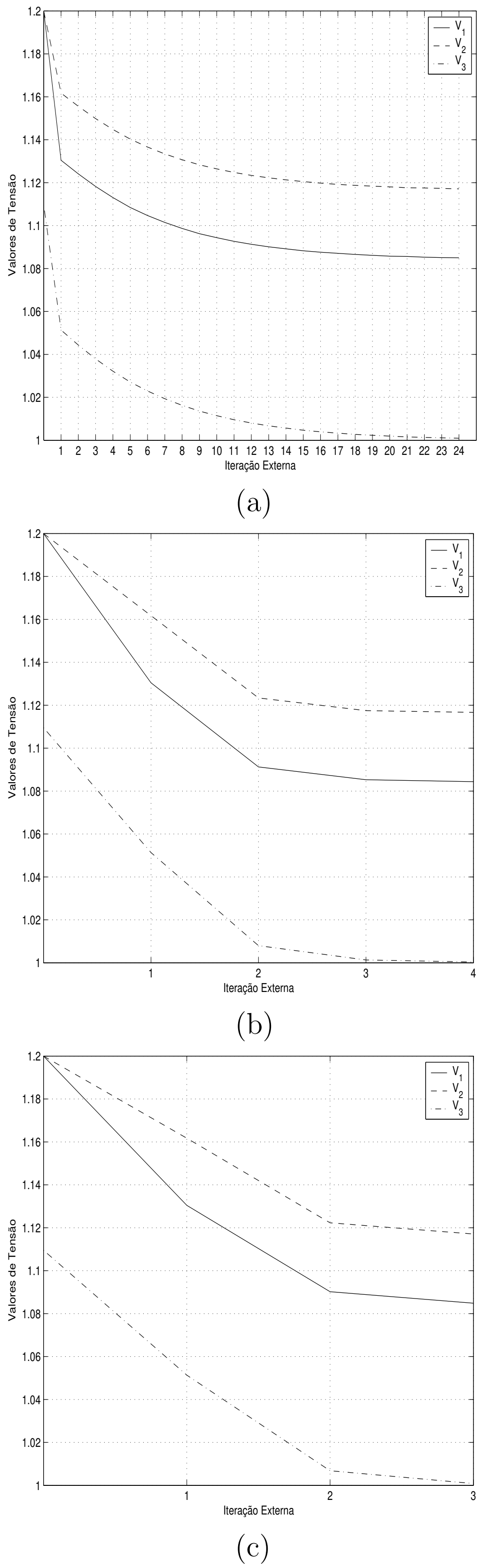
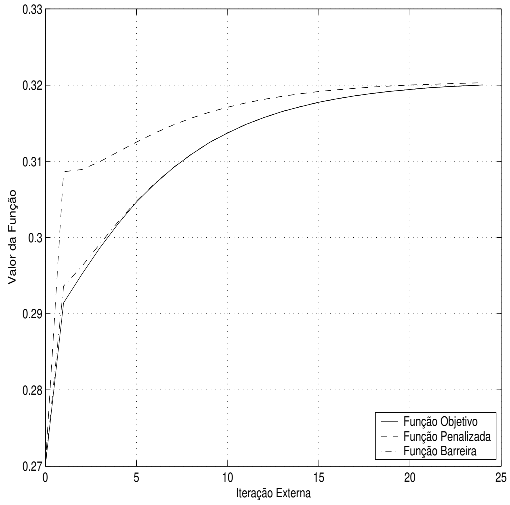
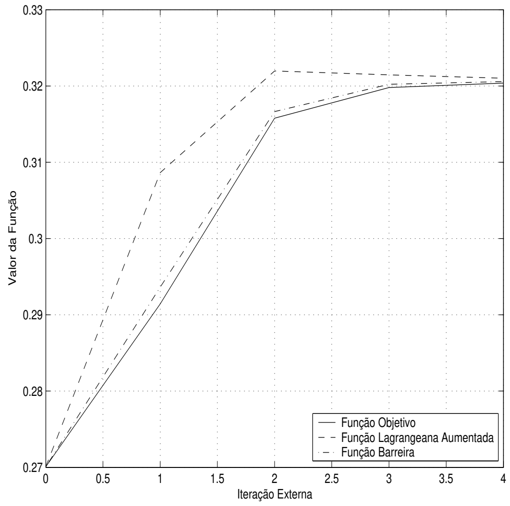


Figura 5.2: Curvas de nível da função objetivo e trajetória em direção à solução ótima no espaço V_2 e V_1 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

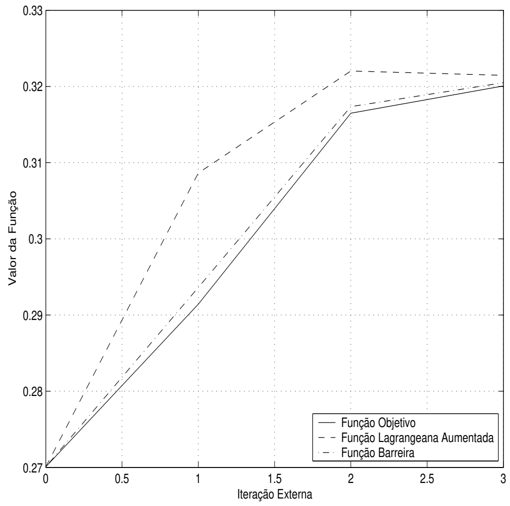
Figura 5.3: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.



(a)

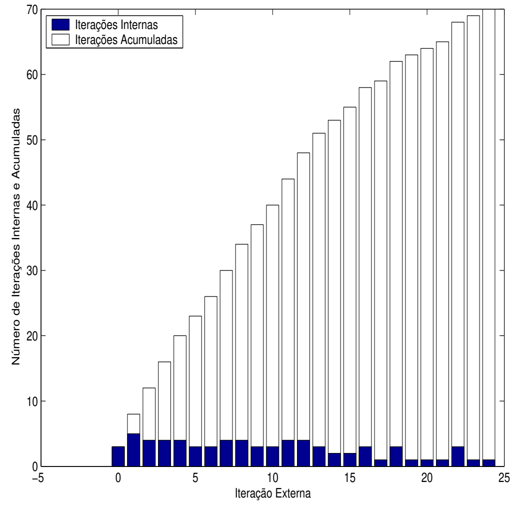


(b)

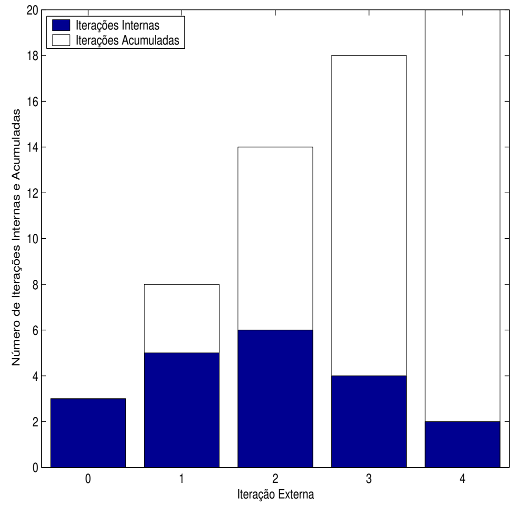


(c)

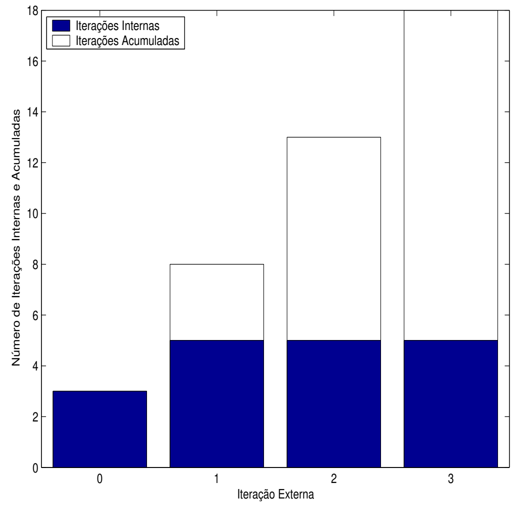
Figura 5.4: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada ao longo do processo de otimização com gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.5: Número de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x, (b) Lagrangeana aumentada em x com c_x constante e (c) Lagrangeana aumentada em x com c_x crescente.

5.4 Problema com Restrições de Desigualdade Funcionais

Nesta seção consideraremos a inclusão de restrições de desigualdade em h ao subproblema (3.1), ou seja

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x,u) \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} g(x,u) = 0 \\ u^{\min} \le u \le u^{\max} \\ h^{\min} \le h(x,u) \le h^{\max} \end{cases} \end{array} \tag{5.12}$$

Para o problema-exemplo considerado, temos

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) - \beta^k \sum_{j=1}^{2} \left[\ln(V_j - V_j^{\min}) + \ln(V_j^{\max} - V_j)\right] \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_{g_1}^{\min} \le Q_{g_1}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \le Q_{g_1}^{\max} \\ Q_{g_2}^{\min} \le Q_{g_2}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \le Q_{g_2}^{\max} \end{cases} . \end{array} \tag{5.13}$$

sendo $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

Os limites sobre V são os mesmos da seção anterior e os limites sobre Q_g são aqueles apresentados na Página 14. As atualizações dos fatores de penalidade e de barreira são dadas pelas regras (4.15) e (5.3), respectivamente. O fator de penalidade inicial considerado foi $c_x^0 = 10$, $\gamma_x = 1.2$ e o fator de barreira $\beta^0 = 0.0005$ com $\rho = 2$ e $\beta^{\lim} = 10^{-10}$.

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização tendo como inicialização a solução ótima obtida na iteração 0 (Página 28), ou seja, $V = (1.1936, 1.2000, 1.1063)^t$.

5.4.1 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{\max} = -0.5$

A Tabela 5.4 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e penalidade sobre h para resolver o problema (5.13) considerando $h_2^{\max} = -0.5$.

Tabela 5.4: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.574198
	1.2000	1.0415	1.0107			0.325302
	1.2000	1.0032	0.9848			0.183050
	1.2000	0.9873	0.9737			0.129889
	1.2000	0.9831	0.9708			0.116657
	1.2000	0.9828	0.9706			0.115523
2	1.1999	0.9771	0.9667	2.5000e-004	12.00	0.097016
	1.2000	0.9779	0.9673			0.099807
	1.2000	0.9779	0.9673			0.099759
3	1.1999	0.9724	0.9635	1.2500e-004	14.40	0.082092
	1.2000	0.9736	0.9643			0.085902
	1.2000	0.9735	0.9643			0.085840
4	1.1999	0.9681	0.9605	6.2500e-005	17.28	0.068911
	1.2000	0.9697	0.9616			0.073687
	1.2000	0.9696	0.9616			0.073615
5	1.1999	0.9643	0.9579	3.1250e-005	20.74	0.057333
	1.2000	0.9662	0.9592			0.063008
	1.2000	0.9662	0.9592			0.062931
6	1.1999	0.9610	0.9556	1.5625e-005	24.88	0.047212
	1.2000	0.9631	0.9571			0.053716
	1.2000	0.9631	0.9571			0.053639
7	1.1999	0.9605	0.9553	7.8125e-006	29.86	0.045990
	1.2000	0.9604	0.9552			0.045593
8	1.1999	0.9579	0.9535	3.9063e-006	35.83	0.038157
	1.2000	0.9581	0.9536			0.038658
9	1.1999	0.9556	0.9519	1.9531e-006	43.00	0.031403
	1.2000	0.9560	0.9522			0.032703
10	1.1999	0.9536	0.9505	9.7656e-007	51.60	0.025604
	1.2000	0.9543	0.9510			0.027608
11	1.1999	0.9519	0.9493	4.8828e-007	61.92	0.020643
	1.2000	0.9528	0.9499			0.023280
	1.2000	0.9528	0.9499			0.023266
12	1.1999	0.9504	0.9483	2.4414e-007	74.30	0.016415
	1.2000	0.9515	0.9490			0.019590
	1.2000	0.9515	0.9490			0.019575
13	1.1999	0.9503	0.9482	1.2207e-007	89.16	0.016190
	1.2000	0.9504	0.9483			0.016446
14	1.1999	0.9492	0.9475	6.1035e-008	106.99	0.013102
	1.2000	0.9495	0.9476			0.013800
15	1.1999	0.9483	0.9468	3.0518e-008	128.39	0.010491
	1.2000	0.9487	0.9471			0.011568
16	1.1999	0.9475	0.9463	1.5259e-008	154.07	0.008288
	1.2000	0.9480	0.9466			0.009688
17	1.1999	0.9469	0.9458	7.6294e-009	184.88	0.006433
	1.2000	0.9475	0.9462			0.008108
18	1.1999	0.9463	0.9454	3.8147e-009	221.86	0.004873
	1.2000	0.9470	0.9459			0.006780
19	1.1999	0.9458	0.9451	1.9073e-009	266.23	0.003563
	1.2000	0.9466	0.9456			0.005667
20	1.1999	0.9455	0.9448	9.5367e-010	319.48	0.002464
	1.2000	0.9463	0.9454			0.004734
21	1.1999	0.9451	0.9446	4.7684e-010	383.38	0.001543
	1.2000	0.9460	0.9452			0.003954
22	1.1999	0.9448	0.9444	2.3842e-010	460.05	0.000773
	1.2000	0.9458	0.9450			0.003300
23	1.1999	0.9446	0.9442	1.1921e-010	552.06	0.000128
	1.2000	0.9456	0.9449			0.002754
24	1.1999	0.9444	0.9441	1.0000e-010	662.47	-0.000411
	1.2000	0.9454	0.9448			0.002233
	1.2000	0.9454	0.9448			0.002298
25	1.1999	0.9443	0.9440	1.0000e-010	794.97	-0.000861
	1.2000	0.9452	0.9447			0.001777
	1.2000	0.9453	0.9447			0.001917
26	1.1999	0.9441	0.9439	1.0000e-010	953.96	-0.001237
	1.2000	0.9451	0.9446			0.001397
	1.2000	0.9451	0.9446			0.001599
27	1.1999	0.9440	0.9438	1.0000e-010	1144.75	-0.001551
	1.2000	0.9450	0.9445			0.001080

Tabela 5.4: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
	1.2000	0.9450	0.9445			0.001334
28	1.1999	0.9439	0.9437	1.0000e-010	1373.71	-0.001813
	1.2000	0.9449	0.9444			0.000815
	1.2000	0.9450	0.9445			0.001112
29	1.1999	0.9438	0.9437	1.0000e-010	1648.45	-0.002032
	1.2000	0.9448	0.9444			0.000594
	1.2000	0.9453	0.9447			0.002069
	1.2000	0.9449	0.9444			0.000927

5.4.2 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{\max} = -0.5$

A Tabela 5.5 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre h com fator de penalidade constante para resolver o problema (5.13).

Tabela 5.5: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h constante ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063				
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.574198
	1.2000	1.0415	1.0107				0.325302
	1.2000	1.0032	0.9848				0.183050
	1.2000	0.9873	0.9737				0.129889
	1.2000	0.9831	0.9708				0.116657
	1.2000	0.9828	0.9706				0.115523
2	1.1999	0.9599	0.9550	2.5000e-004	10.00	1.155228	0.043511
	1.2000	0.9545	0.9511				0.028164
	1.2000	0.9541	0.9509				0.027128
3	1.1999	0.9445	0.9442	1.2500e-004	10.00	1.426507	-0.000329
	1.2000	0.9474	0.9462				0.007787
	1.2000	0.9473	0.9461				0.007501
4	1.1999	0.9447	0.9443	6.2500e-005	10.00	1.501520	0.000358
	1.2000	0.9453	0.9447				0.002157
5	1.1999	0.9424	0.9427	3.1250e-005	10.00	1.523090	-0.005979
	1.2000	0.9449	0.9445				0.001059
	1.2000	0.9448	0.9444				0.000621

5.4.3 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{\max} = -0.5$

A Tabela 5.6 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre h com fator de penalidade crescente para resolver o problema (5.13).

Tabela 5.6: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063				
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.574198
	1.2000	1.0415	1.0107				0.325302
	1.2000	1.0032	0.9848				0.183050
	1.2000	0.9873	0.9737				0.129889
	1.2000	0.9831	0.9708				0.116657
	1.2000	0.9828	0.9706				0.115523
2	1.1999	0.9599	0.9550	2.5000e-004	12.00	1.155228	0.043511
	1.2000	0.9535	0.9504				0.025240
	1.2000	0.9529	0.9500				0.023669
3	1.1999	0.9434	0.9434	1.2500e-004	14.40	1.439260	-0.003432
	1.2000	0.9464	0.9455				0.005189
	1.2000	0.9464	0.9455				0.005018
4	1.1999	0.9449	0.9444	6.2500e-005	17.28	1.511522	0.000920
	1.2000	0.9449	0.9444				0.000967

As Figuras 5.6(a), 5.6(b) e 5.6(c), na Página 84, apresentam curvas de nível da função objetivo e de h_2 e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 5.7(a), 5.7(b) e 5.7(c), na Página 84, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 5.8(a), 5.8(b) e 5.8(c), na Página 85, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 5.9(a), 5.9(b) e 5.9(c), na Página 85, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

5.4.4 Comentários

De acordo com os gráficos da Figura 5.6 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 5.4 com as Tabelas 5.5 e 5.6 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos o P1 do que P2 ou P3.

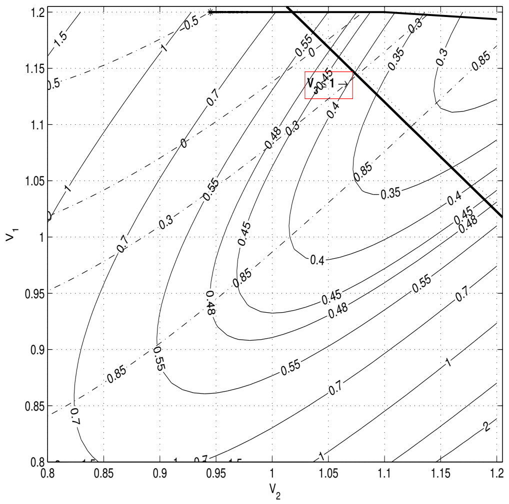
Os procedimentos P2 e P3 têm comportamentos muito semelhants em termos de perfis das tensões (Figura 5.7), desempenhos das funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada (Figura 5.8) e número de iterações internas e externas (Figura 5.9) com P3 levando pequena vantagem sobre P2. Verificamos, ainda, que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1.

5.4.5 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{max} = 0.0$

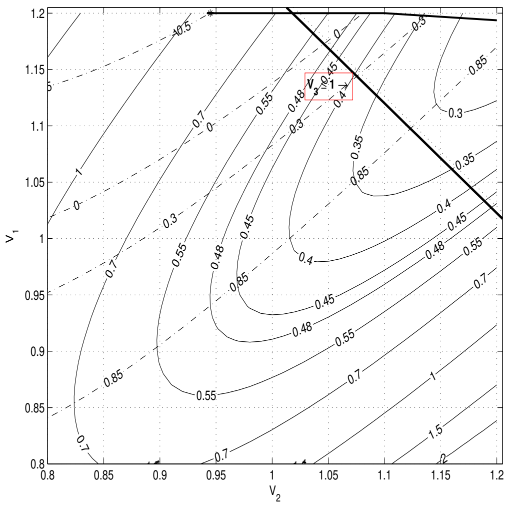
A Tabela 5.7 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e penalidade sobre h para resolver o problema (5.13) considerando $h_2^{max} = 0.0$.

Tabela 5.7: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em h ($h_2^{\max} = 0.0$).

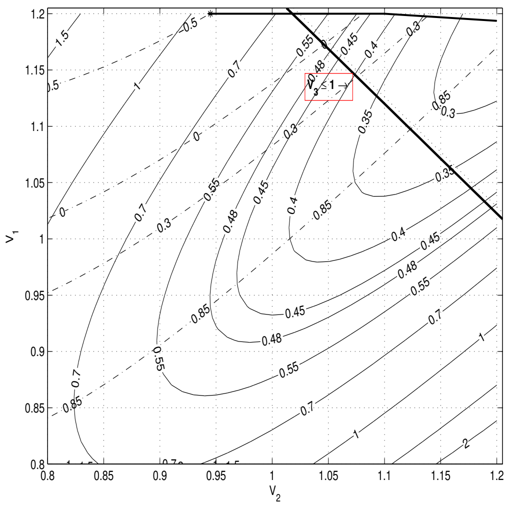
Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063			
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.074198
	1.2000	1.0943	1.0442			0.062374
	1.2000	1.0907	1.0419			0.045586
	1.2000	1.0916	1.0424			0.049586
2	1.1999	1.0886	1.0405	2.5000e-004	12.00	0.035618
	1.2000	1.0899	1.0414			0.041985
	1.2000	1.0899	1.0414			0.041919
3	1.1999	1.0884	1.0404	1.2500e-004	14.40	0.034901
	1.2000	1.0885	1.0405			0.035391
4	1.1999	1.0870	1.0395	6.2500e-005	17.28	0.028315
	1.2000	1.0873	1.0397			0.029805
5	1.1999	1.0858	1.0388	3.1250e-005	20.74	0.022703
	1.2000	1.0863	1.0391			0.025060
6	1.1999	1.0848	1.0381	1.5625e-005	24.88	0.017938
	1.2000	1.0855	1.0385			0.021040
7	1.1999	1.0847	1.0380	7.8125e-006	29.86	0.017468
	1.2000	1.0847	1.0381			0.017645
8	1.1999	1.0840	1.0376	3.9063e-006	35.83	0.014066
	1.2000	1.0841	1.0377			0.014783
9	1.1999	1.0833	1.0372	1.9531e-006	43.00	0.011198
	1.2000	1.0836	1.0373			0.012374
10	1.1999	1.0828	1.0368	9.7656e-007	51.60	0.008785
	1.2000	1.0832	1.0370			0.010351
11	1.1999	1.0828	1.0368	4.8828e-007	61.92	0.008553
	1.2000	1.0828	1.0368			0.008653
12	1.1999	1.0824	1.0366	2.4414e-007	74.30	0.006854
	1.2000	1.0825	1.0366			0.007230
13	1.1999	1.0821	1.0364	1.2207e-007	89.16	0.005430
	1.2000	1.0822	1.0364			0.006038
14	1.1999	1.0818	1.0362	6.1035e-008	106.99	0.004237
	1.2000	1.0820	1.0363			0.005041
15	1.1999	1.0818	1.0362	3.0518e-008	128.39	0.004140
	1.2000	1.0818	1.0362			0.004207
16	1.1999	1.0816	1.0361	1.5259e-008	154.07	0.003306
	1.2000	1.0817	1.0361			0.003511
17	1.1999	1.0815	1.0360	7.6294e-009	184.88	0.002609
	1.2000	1.0815	1.0360			0.002929
18	1.1999	1.0813	1.0359	3.8147e-009	221.86	0.002027
	1.2000	1.0814	1.0359			0.002443
19	1.1999	1.0812	1.0358	1.9073e-009	266.23	0.001541
	1.2000	1.0813	1.0359			0.002037
20	1.1999	1.0812	1.0357	9.5367e-010	319.48	0.001135
	1.2000	1.0813	1.0358			0.001699
21	1.1999	1.0811	1.0357	4.7684e-010	383.38	0.000796
	1.2000	1.0812	1.0358			0.001416
22	1.1999	1.0810	1.0357	2.3842e-010	460.05	0.000514
	1.2000	1.0812	1.0358			0.001181
23	1.1999	1.0810	1.0356	1.1921e-010	552.06	0.000278
	1.2000	1.0811	1.0357			0.000984



(a)

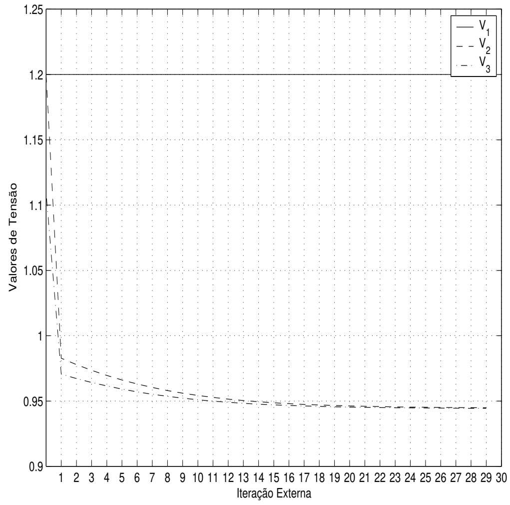


(b)

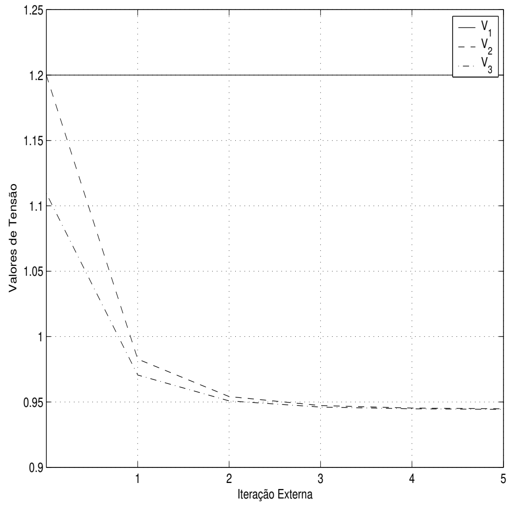


(c)

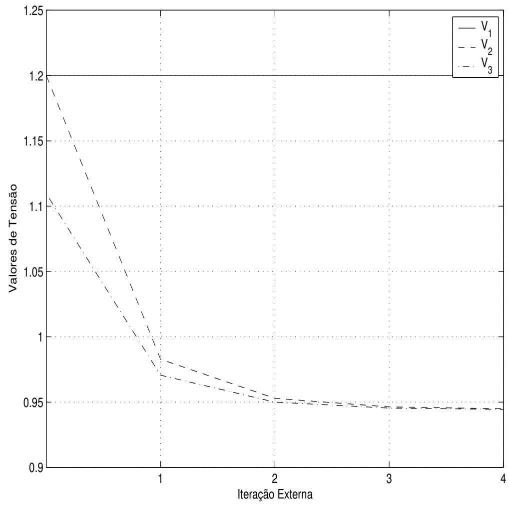
Figura 5.6: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 considerando gradiente reduzido com barreira em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

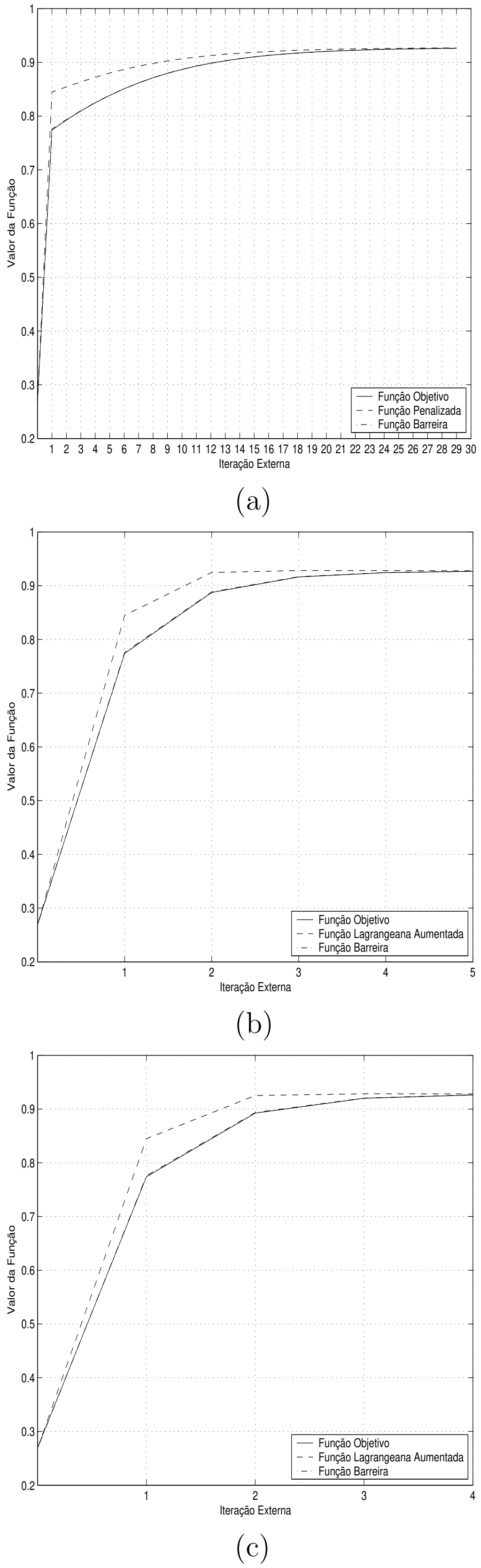


(b)



(c)

Figura 5.7: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização com gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



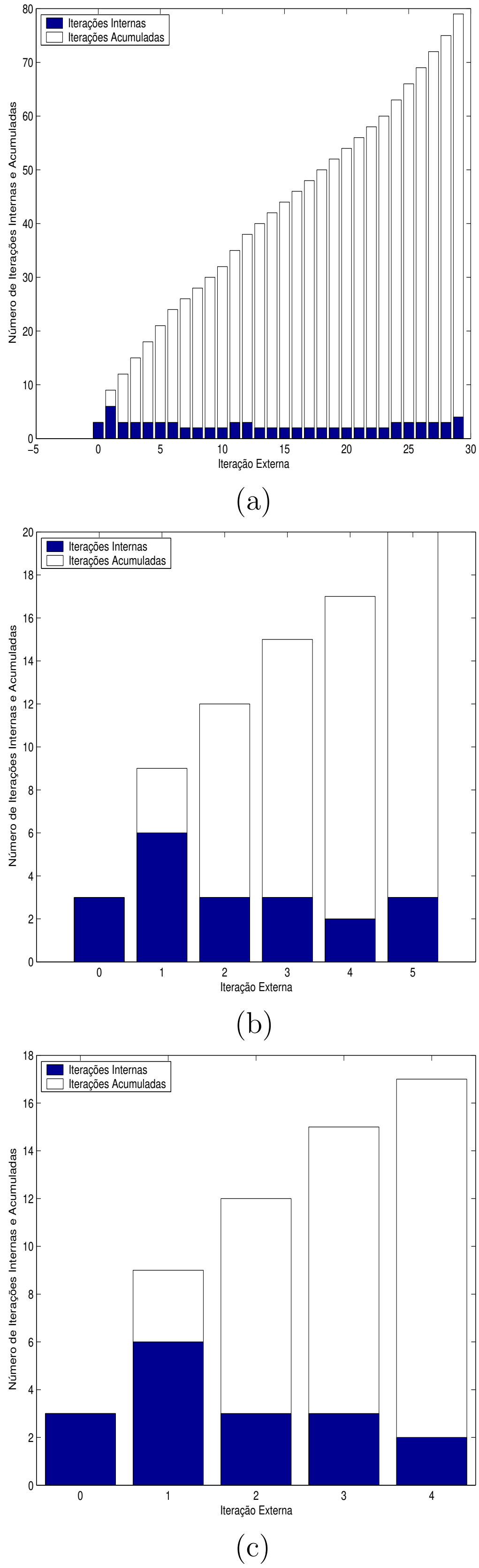


Figura 5.8: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

Figura 5.9: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

5.4.6 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 5.8 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre h com fator de penalidade constante para resolver o problema (5.13).

Tabela 5.8: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h constante ($h_2^{\max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063				
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.074198
	1.2000	1.0943	1.0442				0.062374
	1.2000	1.0907	1.0419				0.045586
	1.2000	1.0916	1.0424				0.049586
2	1.1999	1.0733	1.0308	2.5000e-004	10.00	0.495860	-0.034731
	1.2000	1.0817	1.0361				0.003650
	1.2000	1.0819	1.0362				0.004386
3	1.1999	1.0806	1.0354	1.2500e-004	10.00	0.539724	-0.001456
	1.2000	1.0810	1.0356				0.000413

5.4.7 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 5.9 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre h com fator de penalidade crescente para resolver o problema (5.13).

Tabela 5.9: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente ($h_2^{\max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063				
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.074198
	1.2000	1.0943	1.0442				0.062374
	1.2000	1.0907	1.0419				0.045586
	1.2000	1.0916	1.0424				0.049586
2	1.1999	1.0733	1.0308	2.5000e-004	12.00	0.495860	-0.034731
	1.2000	1.0815	1.0360				0.002860
	1.2000	1.0817	1.0361				0.003712
3	1.1999	1.0809	1.0356	1.2500e-004	14.40	0.540403	0.000153
	1.2000	1.0810	1.0356				0.000253

As Figuras 5.10(a), 5.10(b) e 5.10(c), na Página 88, apresentam curvas de nível da função objetivo e de h_2 e trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 5.11(a), 5.11(b) e 5.11(c), na Página 88, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

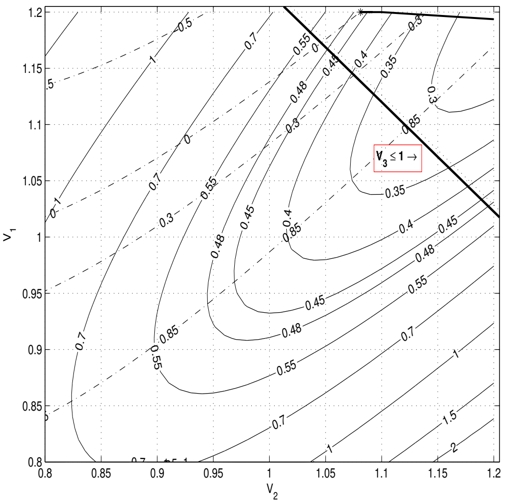
As Figuras 5.12(a), 5.12(b) e 5.12(c), na Página 89, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

As Figuras 5.13(a), 5.13(b) e 5.13(c), na Página 89, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em h, Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

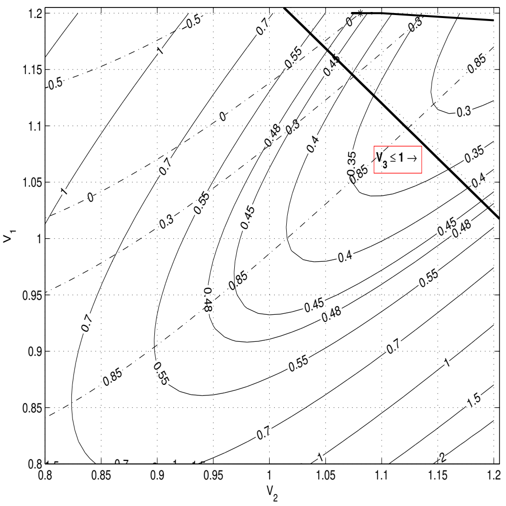
5.4.8 Comentários

De acordo com os gráficos da Figura 5.10 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 5.7 com as Tabelas 5.8 e 5.9 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos o procedimento P1 do que os procedimentos P2 e P3. Observamos ainda que a trajetória utilizando P1 se desenvolve por pontos infactíveis apenas.

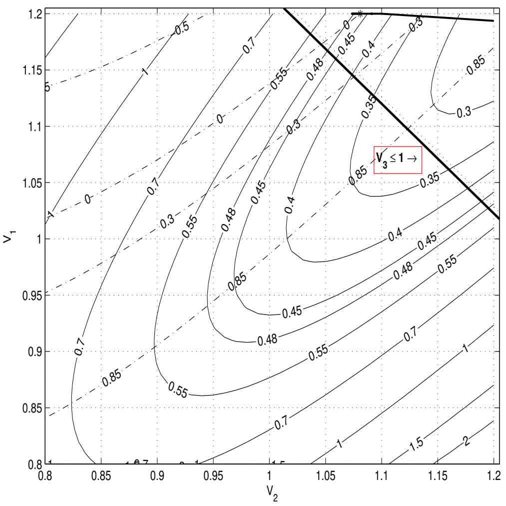
Após a primeira iteração, verificamos que com P1 as tensões (Figura 5.11(a)) e as funções objetivo, barreira e penalizada exibem comportamento assintótico em direção ao valor objetivo ótimo (Figura 5.12(a)). Por outro lado, P2 e P3 têm comportamentos idênticos em termos de perfis das tensões (Figura 5.11), funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada (Figura 5.12) e iterações internas e externas (Figura 5.13).



(a)

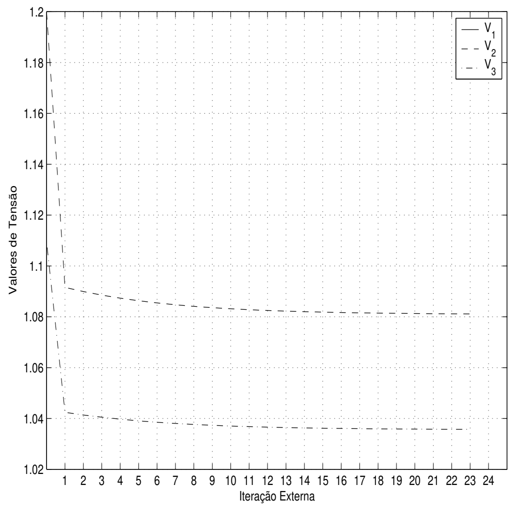


(b)

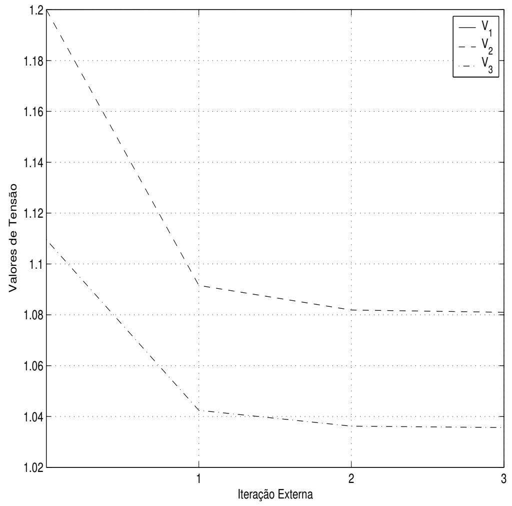


(c)

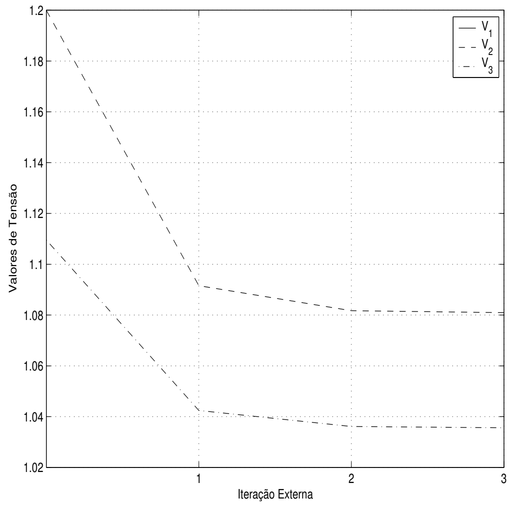
Figura 5.10: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

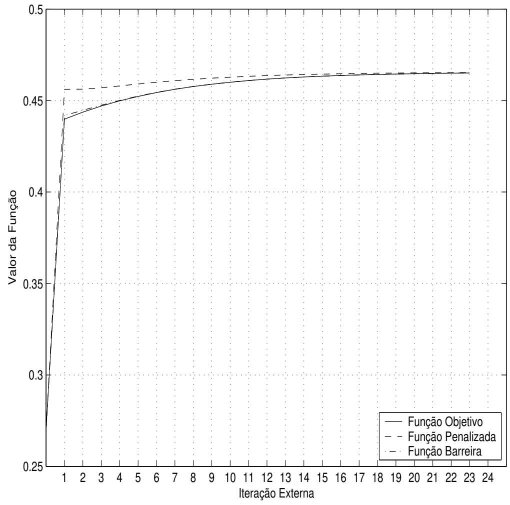


(b)

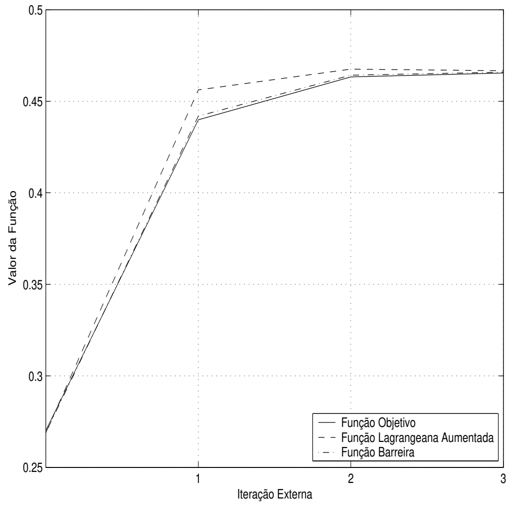


(c)

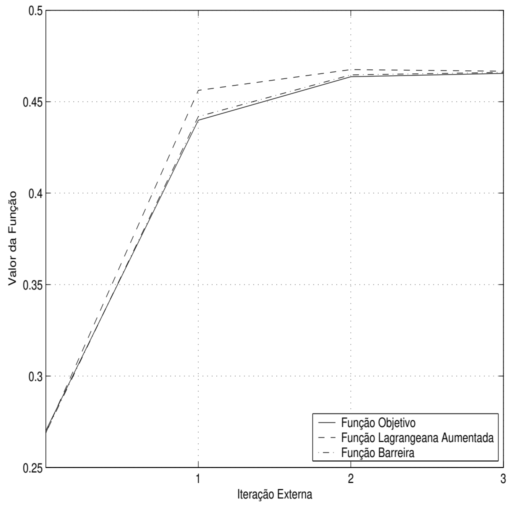
Figura 5.11: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização com gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)

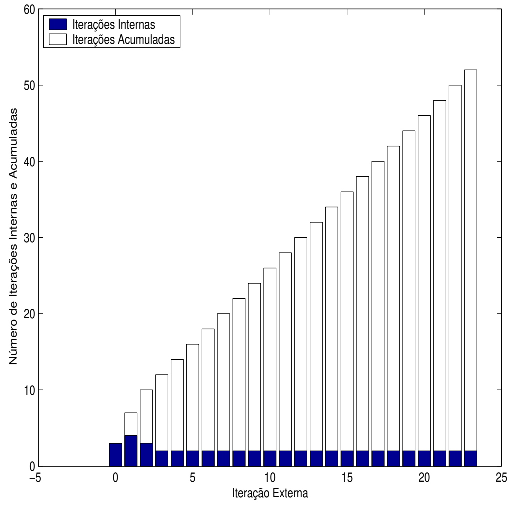


(b)

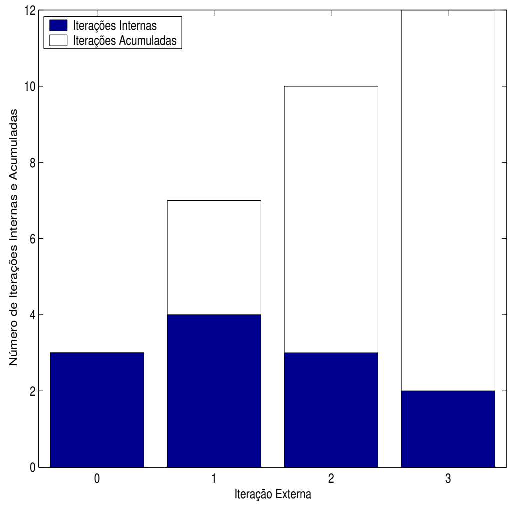


(c)

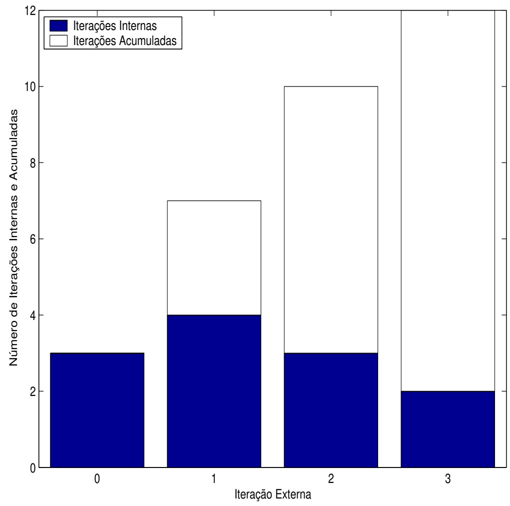
Figura 5.12: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.13: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em h, (b) Lagrangeana aumentada em h com c_h constante e (c) Lagrangeana aumentada em h com c_h crescente.

5.5 Problema com Restrições de Desigualdade em x e Funcionais

Nesta seção, serão consideradas as restrições canalizadas nas variáveis x e h. Assim, nesta fase, considera-se a resolução do problema completo:

$$\text{minimizar } f(x,u)$$
$$\text{sujeita a } \begin{cases} g(x,u) = 0 \\ h^{\min} \le h(x,u) \le h^{\max} \\ u^{\min} \le u \le u^{\max} \\ x^{\min} \le x \le x^{\max} \end{cases}$$

Para o problema-exemplo considerado, temos

$$\text{minimizar } F(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) - \beta^k \sum_{j=1}^{2} \left[\ln(V_j - V_j^{\min}) + \ln(V_j^{\max} - V_j) \right]$$
$$\text{sujeita a } \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) = 0 \\ Q_{g_1}^{\min} \le Q_{g_1}(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \le Q_{g_1}^{\max} \\ Q_{g_2}^{\min} \le Q_{g_2}(\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3) \le Q_{g_2}^{\max} \\ V_3^{\min} \le V_3 \le V_3^{\max} \end{cases}, \tag{5.14}$$

sendo $u = (V_1, V_2)^t$ e $x = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$.

Os limites sobre V são os mesmos da seção anterior e os limites sobre Q_g são aqueles apresentados na Página 14. As atualizações dos fatores de penalidade e de barreira são dadas pelas regras (4.15) e (5.3), respectivamente. O fator de penalidade inicial considerado foi $c_x^0 = 10$, $\gamma_x = 1.2$ e o fator de barreira $\beta^0 = 0.0005$ com $\rho = 2$ e $\beta^{\lim} = 10^{-10}$.

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização tendo como inicialização a solução ótima obtida na iteração 0 (Página 28), ou seja, $V = (1.1936, 1.2000, 1.1063)^t$.

5.5.1 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{\max} = -0.5$

A Tabela 5.10 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e penalidade sobre x e h para resolver o problema (5.14).

Tabela 5.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x e h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063					

Tabela 5.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x e h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.049696	10.00	0.574198
	1.2000	1.0417	1.0108			0.010783		0.325872
	1.2000	1.0030	0.9846			-0.015370		0.182236
	1.2000	0.9871	0.9736			-0.026418		0.129353
	1.2000	0.9831	0.9708			-0.029174		0.116603
	1.2000	0.9828	0.9706			-0.029408		0.115523
2	1.1999	0.9771	0.9667	2.5000e-004	12.00	-0.033304	12.00	0.097016
	1.2000	0.9779	0.9673			-0.032723		0.099807
	1.2000	0.9779	0.9673			-0.032734		0.099759
3	1.1999	0.9724	0.9635	1.2500e-004	14.40	-0.036538	14.40	0.082092
	1.2000	0.9736	0.9643			-0.035721		0.085902
	1.2000	0.9735	0.9643			-0.035735		0.085840
4	1.1999	0.9681	0.9605	6.2500e-005	17.28	-0.039456	17.28	0.068911
	1.2000	0.9697	0.9616			-0.038406		0.073687
	1.2000	0.9696	0.9616			-0.038423		0.073615
5	1.1999	0.9643	0.9579	3.1250e-005	20.74	-0.042069	20.74	0.057333
	1.2000	0.9662	0.9592			-0.040796		0.063008
	1.2000	0.9662	0.9592			-0.040814		0.062931
6	1.1999	0.9610	0.9556	1.5625e-005	24.88	-0.044393	24.88	0.047212
	1.2000	0.9631	0.9571			-0.042907		0.053716
	1.2000	0.9631	0.9571			-0.042927		0.053639
7	1.1999	0.9605	0.9553	7.8125e-006	29.86	-0.044687	29.86	0.045990
	1.2000	0.9604	0.9552			-0.044783		0.045593
8	1.1999	0.9579	0.9535	3.9063e-006	35.83	-0.046516	35.83	0.038157
	1.2000	0.9581	0.9536			-0.046402		0.038658
9	1.1999	0.9556	0.9519	1.9531e-006	43.00	-0.048113	43.00	0.031403
	1.2000	0.9560	0.9522			-0.047808		0.032703
10	1.1999	0.9536	0.9505	9.7656e-007	51.60	-0.049499	51.60	0.025604
	1.2000	0.9543	0.9510			-0.049022		0.027608
11	1.1999	0.9519	0.9493	4.8828e-007	61.92	-0.050696	61.92	0.020643
	1.2000	0.9528	0.9499			-0.050061		0.023280
	1.2000	0.9528	0.9499			-0.050065		0.023266
12	1.1999	0.9504	0.9483	2.4414e-007	74.30	-0.051724	74.30	0.016415
	1.2000	0.9515	0.9490			-0.050954		0.019590
	1.2000	0.9515	0.9490			-0.050958		0.019575
13	1.1999	0.9503	0.9482	1.2207e-007	89.16	-0.051781	89.16	0.016190
	1.2000	0.9504	0.9483			-0.051720		0.016446
14	1.1999	0.9492	0.9475	6.1035e-008	106.99	-0.052538	106.99	0.013102
	1.2000	0.9495	0.9476			-0.052367		0.013800
15	1.1999	0.9483	0.9468	3.0518e-008	128.39	-0.053180	128.39	0.010491
	1.2000	0.9487	0.9471			-0.052916		0.011568
16	1.1999	0.9475	0.9463	1.5259e-008	154.07	-0.053725	154.07	0.008288
	1.2000	0.9480	0.9466			-0.053380		0.009688
17	1.1999	0.9469	0.9458	7.6294e-009	184.88	-0.054186	184.88	0.006433
	1.2000	0.9475	0.9462			-0.053771		0.008108
18	1.1999	0.9463	0.9454	3.8147e-009	221.86	-0.054574	221.86	0.004873
	1.2000	0.9470	0.9459			-0.054100		0.006780
19	1.1999	0.9458	0.9451	1.9073e-009	266.23	-0.054901	266.23	0.003563
	1.2000	0.9466	0.9456			-0.054377		0.005667
20	1.1999	0.9455	0.9448	9.5367e-010	319.48	-0.055176	319.48	0.002464
	1.2000	0.9463	0.9454			-0.054610		0.004734
21	1.1999	0.9451	0.9446	4.7684e-010	383.38	-0.055407	383.38	0.001543
	1.2000	0.9460	0.9452			-0.054804		0.003954
22	1.1999	0.9448	0.9444	2.3842e-010	460.05	-0.055600	460.05	0.000773
	1.2000	0.9458	0.9450			-0.054968		0.003300
23	1.1999	0.9446	0.9442	1.1921e-010	552.06	-0.055763	552.06	0.000128
	1.2000	0.9456	0.9449			-0.055104		0.002754
24	1.1999	0.9444	0.9441	1.0000e-010	662.47	-0.055898	662.47	-0.000411
	1.2000	0.9454	0.9448			-0.055235		0.002233
	1.2000	0.9454	0.9448			-0.055219		0.002298
25	1.1999	0.9443	0.9440	1.0000e-010	794.97	-0.056012	794.97	-0.000861
	1.2000	0.9452	0.9447			-0.055349		0.001777
	1.2000	0.9453	0.9447			-0.055314		0.001917
26	1.1999	0.9441	0.9439	1.0000e-010	953.96	-0.056106	953.96	-0.001237
	1.2000	0.9451	0.9446			-0.055444		0.001397
	1.2000	0.9451	0.9446			-0.055394		0.001599
27	1.1999	0.9440	0.9438	1.0000e-010	1144.75	-0.056186	1144.75	-0.001551
	1.2000	0.9450	0.9445			-0.055524		0.001080
	1.2000	0.9450	0.9445			-0.055460		0.001334
28	1.1999	0.9439	0.9437	1.0000e-010	1373.71	-0.056252	1373.71	-0.001813

Tabela 5.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x e h ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
	1.2000	0.9449	0.9444			-0.055590		0.000815
	1.2000	0.9450	0.9445			-0.055516		0.001112
29	1.1999	0.9438	0.9437	1.0000e-010	1648.45	-0.056307	1648.45	-0.002032
	1.2000	0.9448	0.9444			-0.055646		0.000594
	1.2000	0.9453	0.9447			-0.055276		0.002069
	1.2000	0.9449	0.9444			-0.055562		0.000927

5.5.2 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 5.11 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (5.14).

Tabela 5.11: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063							
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.049696	10.00	0.000000	0.574198
	1.2000	1.0417	1.0108				0.010783			0.325872
	1.2000	1.0030	0.9846				-0.015370			0.182236
	1.2000	0.9871	0.9736				-0.026418			0.129353
	1.2000	0.9831	0.9708				-0.029174			0.116603
	1.2000	0.9828	0.9706				-0.029408			0.115523
2	1.1999	0.9599	0.9550	2.5000e-004	10.00	0.000000	-0.044994	10.00	1.155229	0.043511
	1.2000	0.9545	0.9511				-0.048871			0.028164
	1.2000	0.9541	0.9509				-0.049137			0.027128
3	1.1999	0.9445	0.9442	1.2500e-004	10.00	0.000000	-0.055826	10.00	1.426507	-0.000329
	1.2000	0.9474	0.9462				-0.053846			0.007787
	1.2000	0.9473	0.9461				-0.053921			0.007501
4	1.1999	0.9447	0.9443	6.2500e-005	10.00	0.000000	-0.055702	10.00	1.501520	0.000358
	1.2000	0.9453	0.9447				-0.055254			0.002157
5	1.1999	0.9424	0.9427	3.1250e-005	10.00	0.000000	-0.057304	10.00	1.523090	-0.005979
	1.2000	0.9449	0.9445				-0.055526			0.001059
	1.2000	0.9448	0.9444				-0.055639			0.000621

5.5.3 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = -0.5$

A Tabela 5.12 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre x e h, com fatores de penalidade crescentes, para resolver o problema (5.14).

Tabela 5.12: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes ($h_2^{\max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063							
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.049696	10.00	0.000000	0.574198
	1.2000	1.0417	1.0108				0.010783			0.325872
	1.2000	1.0030	0.9846				-0.015370			0.182236
	1.2000	0.9871	0.9736				-0.026418			0.129353
	1.2000	0.9831	0.9708				-0.029174			0.116603
	1.2000	0.9828	0.9706				-0.029408			0.115523
2	1.1999	0.9599	0.9550	2.5000e-004	12.00	0.000000	-0.044994	12.00	1.155229	0.043511
	1.2000	0.9535	0.9504				-0.049565			0.025240
	1.2000	0.9529	0.9500				-0.049968			0.023669
3	1.1999	0.9434	0.9434	1.2500e-004	14.40	0.000000	-0.056610	14.40	1.439260	-0.003432
	1.2000	0.9464	0.9455				-0.054491			0.005189
	1.2000	0.9464	0.9455				-0.054539			0.005018
4	1.1999	0.9449	0.9444	6.2500e-005	17.28	0.000000	-0.055563	17.28	1.511522	0.000920
	1.2000	0.9449	0.9444				-0.055553			0.000967

As Figuras 5.14(a), 5.14(b) e 5.14(c), na Página 94, apresentam curvas de nível das funções objetivo, h_2 e trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

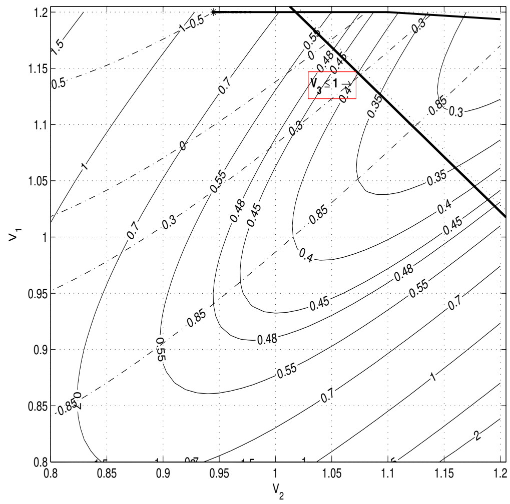
As Figuras 5.15(a), 5.15(b) e 5.15(c), na Página 94, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 5.16(a), 5.16(b) e 5.16(c), na Página 95, apresentam os desempenhos das funçôes objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

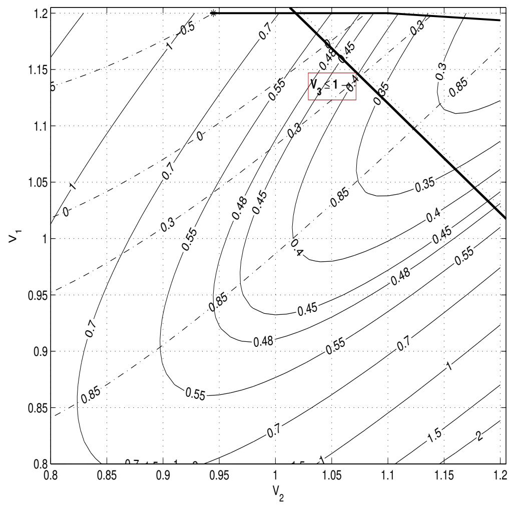
As Figuras 5.17(a), 5.17(b) e 5.17(c), na Página 95, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

5.5.4 Comentários

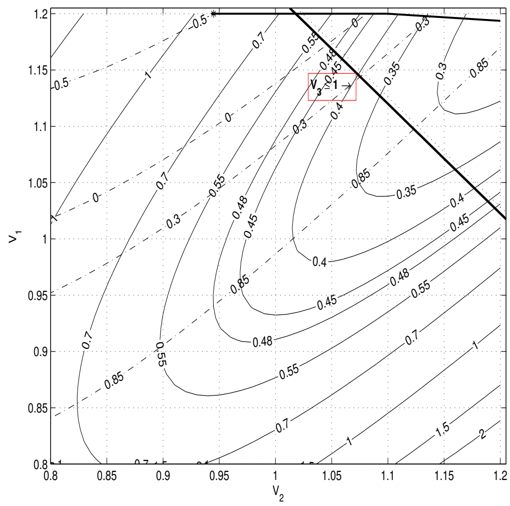
Comparando os gráficos e Tabelas desta seção com os da Seção 5.4 verificamos que o processo iterativo se comporta de maneira idêntica ao apresentado naquela seção. Isto se deve ao fato da restrição em x ($V_3 \leq 1$) ser inativa e, portanto, não ter nenhuma influência adicional sobre o processo iterativo.



(a)

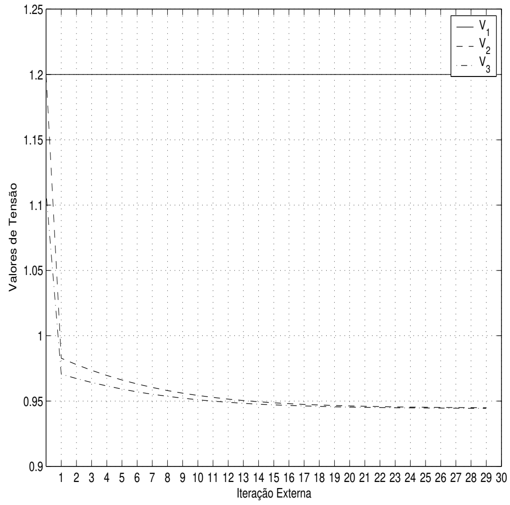


(b)

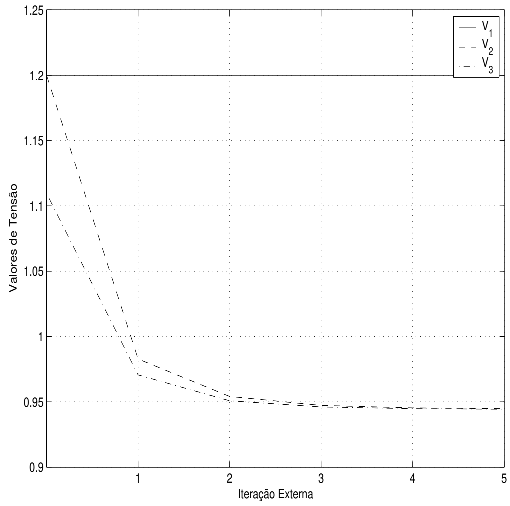


(c)

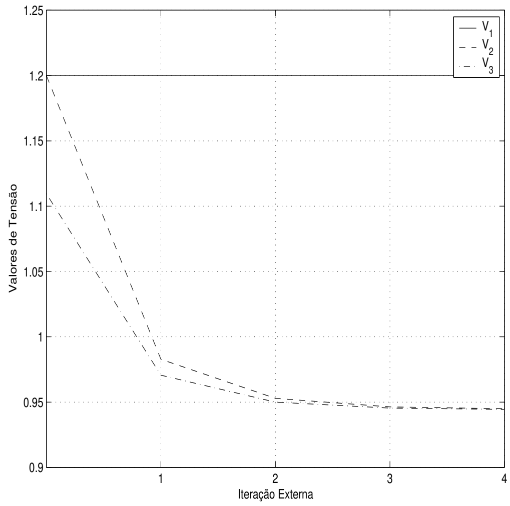
Figura 5.14: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.15: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h.

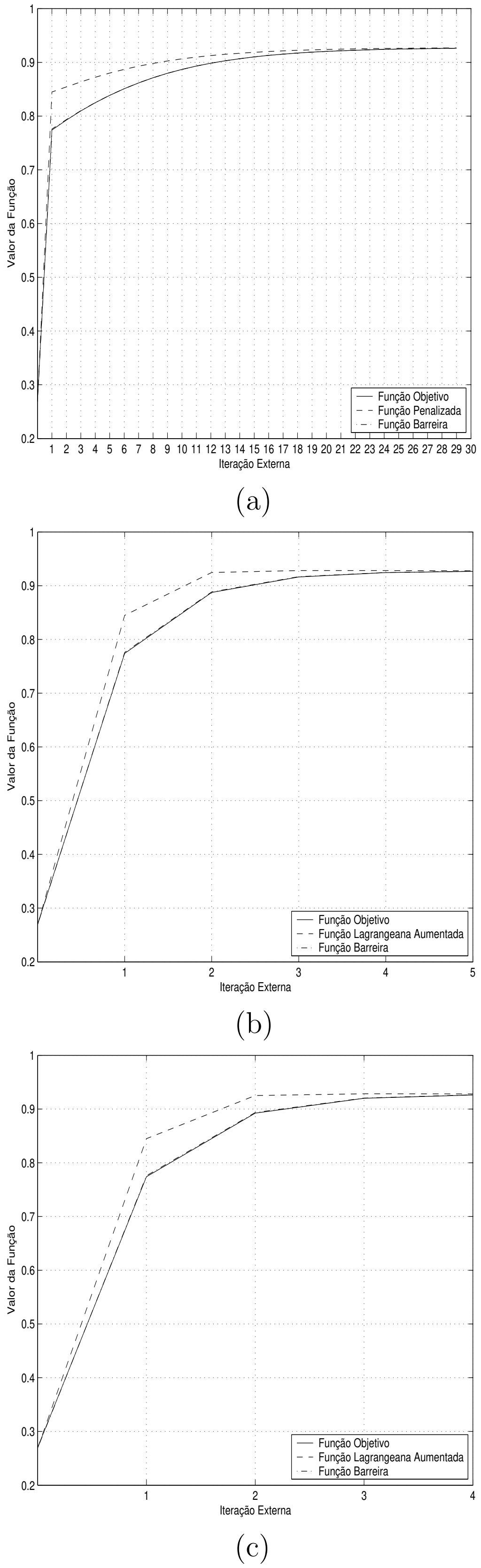


Figura 5.16: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h.

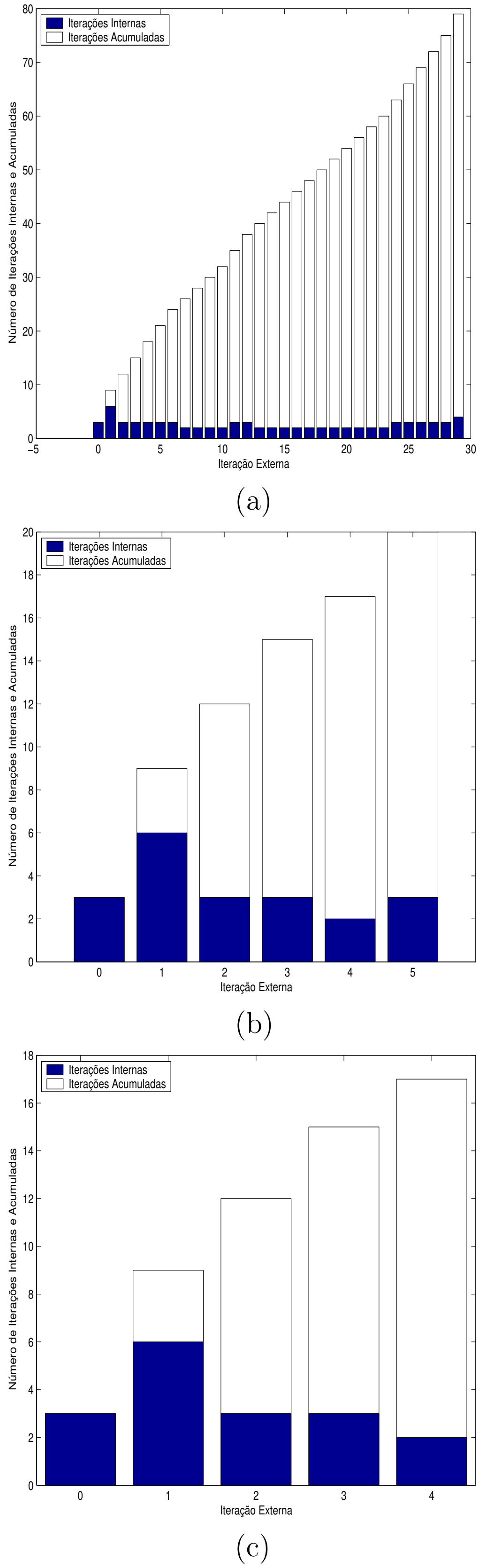


Figura 5.17: Iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = -0.5$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h.

5.5.5 Estratégia com Penalidade (P1) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 5.13 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x e h para resolver o problema (5.14).

Tabela 5.13: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x e h ($h_2^{\max} = 0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063					
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.049696	10.00	0.074198
	1.2000	1.0935	1.0437			0.043710		0.058808
	1.1990	1.0923	1.0424			0.042431		0.059110
	1.1996	1.0880	1.0400			0.039986		0.035105
	1.1986	1.0885	1.0398			0.039779		0.043077
	1.1993	1.0903	1.0413			0.041298		0.048136
	1.1992	1.0897	1.0408			0.040840		0.045038
	1.1993	1.0896	1.0408			0.040844		0.044632
2	1.1993	1.0867	1.0389	2.5000e-004	12.00	0.038946	12.00	0.030615
	1.2000	1.0889	1.0407			0.040700		0.036899
	1.2000	1.0888	1.0407			0.040688		0.036816
3	1.1999	1.0873	1.0397	1.2500e-004	14.40	0.039718	14.40	0.029728
	1.2000	1.0874	1.0398			0.039792		0.030271
4	1.1999	1.0859	1.0388	6.2500e-005	17.28	0.038817	17.28	0.023176
	1.2000	1.0863	1.0390			0.039028		0.024712
5	1.1999	1.0847	1.0380	3.1250e-005	20.74	0.038045	20.74	0.017591
	1.2000	1.0852	1.0384			0.038376		0.019991
6	1.1999	1.0837	1.0374	1.5625e-005	24.88	0.037387	24.88	0.012850
	1.2000	1.0844	1.0378			0.037823		0.015993
7	1.1999	1.0836	1.0373	7.8125e-006	29.86	0.037325	29.86	0.012411
	1.1971	1.0802	1.0338			0.033760		0.013014
	1.1973	1.0804	1.0340			0.033961		0.013240
8	1.1973	1.0796	1.0335	3.9063e-006	35.83	0.033466	35.83	0.009617
	1.1931	1.0745	1.0281			0.028119		0.010509
	1.1936	1.0753	1.0289			0.028904		0.011199
9	1.1936	1.0745	1.0284	1.9531e-006	43.00	0.028414	43.00	0.007517
	1.1894	1.0694	1.0231			0.023057		0.008393
	1.1905	1.0710	1.0246			0.024622		0.009447
	1.1904	1.0709	1.0245			0.024521		0.009466
10	1.1904	1.0701	1.0240	9.7656e-007	51.60	0.024032	51.60	0.005717
	1.1862	1.0649	1.0187			0.018661		0.006580
	1.1878	1.0672	1.0209			0.020868		0.007966
	1.1876	1.0670	1.0207			0.020651		0.007942
11	1.1876	1.0666	1.0204	4.8828e-007	61.92	0.020416	61.92	0.006098
	1.1835	1.0616	1.0152			0.015181		0.006864
	1.1854	1.0639	1.0176			0.017617		0.006712
	1.1853	1.0638	1.0175			0.017479		0.006707
12	1.1853	1.0634	1.0172	2.4414e-007	74.30	0.017240	74.30	0.004809
	1.1832	1.0608	1.0146			0.014567		0.005189
	1.1833	1.0610	1.0147			0.014730		0.005640
13	1.1833	1.0606	1.0145	1.2207e-007	89.16	0.014492	89.16	0.003721
	1.1813	1.0580	1.0118			0.011810		0.004098
	1.1816	1.0587	1.0124			0.012388		0.004735
14	1.1817	1.0583	1.0122	6.1035e-008	106.99	0.012150	106.99	0.002803
	1.1796	1.0557	1.0095			0.009468		0.003176
	1.1802	1.0567	1.0104			0.010438		0.003968
	1.1802	1.0567	1.0104			0.010414		0.003975
15	1.1802	1.0565	1.0103	3.0518e-008	128.39	0.010294	128.39	0.002997
	1.1781	1.0539	1.0076			0.007585		0.003355
	1.1790	1.0550	1.0088			0.008760		0.003326
	1.1790	1.0549	1.0087			0.008693		0.003313
16	1.1790	1.0547	1.0086	1.5259e-008	154.07	0.008578	154.07	0.002358
	1.1780	1.0535	1.0073			0.007270		0.002527
	1.1780	1.0535	1.0073			0.007313		0.002783
17	1.1780	1.0533	1.0072	7.6294e-009	184.88	0.007195	184.88	0.001804
	1.1770	1.0520	1.0058			0.005849		0.001978
	1.1771	1.0523	1.0061			0.006123		0.002328
18	1.1772	1.0521	1.0060	3.8147e-009	221.86	0.006005	221.86	0.001346
	1.1761	1.0508	1.0047			0.004659		0.001518
	1.1764	1.0513	1.0051			0.005122		0.001946

Tabela 5.13: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e penalidade em x e h ($h_2^{\max} = 0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	$h_2 - h_2^{\max}$
19	1.1764	1.0512	1.0051	1.9073e-009	266.23	0.005064	266.23	0.001454
	1.1754	1.0499	1.0037			0.003715		0.001621
	1.1758	1.0505	1.0043			0.004283		0.001626
20	1.1758	1.0504	1.0042	9.5367e-010	319.48	0.004224	319.48	0.001133
	1.1753	1.0498	1.0036			0.003579		0.001358
21	1.1753	1.0497	1.0035	4.7684e-010	383.38	0.003521	383.38	0.000864
	1.1749	1.0492	1.0030			0.002991		0.001134
22	1.1749	1.0491	1.0030	2.3842e-010	460.05	0.002962	460.05	0.000886
	1.1746	1.0487	1.0025			0.002498		0.000946
23	1.1744	1.0485	1.0023	1.1921e-010	552.06	0.002328	460.05	0.001216
	1.1742	1.0483	1.0021			0.002085		0.000947
24	1.1741	1.0481	1.0019	1.0000e-010	662.47	0.001914	460.05	0.001220
	1.1740	1.0479	1.0017			0.001740		0.000948
25	1.1738	1.0478	1.0016	1.0000e-010	794.97	0.001569	460.05	0.001223
	1.1738	1.0477	1.0015			0.001451		0.000949
26	1.1736	1.0475	1.0013	1.0000e-010	953.96	0.001280	460.05	0.001221
	1.1736	1.0474	1.0012			0.001210		0.000949
27	1.1734	1.0473	1.0010	1.0000e-010	1144.75	0.001039	460.05	0.001223
	1.1734	1.0472	1.0010			0.001009		0.000950
28	1.1733	1.0471	1.0008	1.0000e-010	1373.71	0.000838	460.05	0.001224
	1.1733	1.0471	1.0008			0.000841		0.000950

5.5.6 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 5.14 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (5.14).

Tabela 5.14: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes ($h_2^{\max} = 0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063							
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.049696	10.00	0.000000	0.074198
	1.2000	1.0935	1.0437				0.043710			0.058808
	1.1990	1.0923	1.0424				0.042431			0.059110
	1.1996	1.0880	1.0400				0.039986			0.035105
	1.1986	1.0885	1.0398				0.039779			0.043077
	1.1993	1.0903	1.0413				0.041298			0.048136
	1.1992	1.0897	1.0408				0.040840			0.045038
	1.1993	1.0896	1.0408				0.040844			0.044632
2	1.1993	1.0715	1.0293	2.5000e-004	10.00	0.408440	0.029282	10.00	0.446323	-0.039003
	1.1937	1.0730	1.0275				0.027489			0.000051
	1.2000	1.0824	1.0366				0.036551			0.006696
	1.1992	1.0795	1.0343				0.034331			-0.001552
	1.1996	1.0803	1.0350				0.035003			-0.000965
	1.1992	1.0799	1.0346				0.034594			-0.000021
	1.1993	1.0799	1.0346				0.034564			-0.000627
3	1.1990	1.0784	1.0335	1.2500e-004	10.00	0.754083	0.033526	10.00	0.446323	-0.005810
	1.1936	1.0729	1.0274				0.027354			-0.000031
	1.1946	1.0733	1.0281				0.028074			-0.003398
4	1.1931	1.0729	1.0271	6.2500e-005	10.00	1.034824	0.027133	10.00	0.412339	0.003623
	1.1774	1.0527	1.0066				0.006570			0.002272
	1.1794	1.0551	1.0090				0.009024			0.001612
	1.1791	1.0547	1.0086				0.008565			0.001603
5	1.1792	1.0543	1.0084	3.1250e-005	10.00	1.120479	0.008391	10.00	0.428365	-0.000709
	1.1747	1.0487	1.0026				0.002587			0.000235
	1.1747	1.0488	1.0026				0.002645			0.000706

Tabela 5.14: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes ($h_2^{\max} = 0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
6	1.1736	1.0478	1.0014	1.5625e-005	10.00	1.146929	0.001425	10.00	0.428365	0.002460
	1.1725	1.0462	0.9999				-0.000136			0.001416
	1.1735	1.0473	1.0011				0.001075			0.000890
	1.1733	1.0470	1.0008				0.000774			0.000890

5.5.7 Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3) considerando $h_2^{max} = 0.0$

A Tabela 5.15 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada sobre x e h, com fatores de penalidade crescentes, para resolver o problema (5.14).

Tabela 5.15: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes ($h_2^{\max} = 0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	β	c_x	μ_x	$V_3 - V_3^{\max}$	c_h	μ_h	$h_2 - h_2^{\max}$
Inicialização	1.1936	1.2000	1.1063							
1	1.1999	1.0999	1.0497	5.0000e-004	10.00	0.000000	0.049696	10.00	0.000000	0.074198
	1.2000	1.0935	1.0437				0.043710			0.058808
	1.1990	1.0923	1.0424				0.042431			0.059110
	1.1996	1.0880	1.0400				0.039986			0.035105
	1.1986	1.0885	1.0398				0.039779			0.043077
	1.1993	1.0903	1.0413				0.041298			0.048136
	1.1992	1.0897	1.0408				0.040840			0.045038
	1.1993	1.0896	1.0408				0.040844			0.044632
2	1.1993	1.0715	1.0293	2.5000e-004	12.00	0.408440	0.029282	12.00	0.446323	-0.039003
	1.1920	1.0637	1.0207				0.020669			-0.032222
	1.1960	1.0817	1.0342				0.034242			0.026062
	1.1990	1.0794	1.0342				0.034157			-0.001165
	1.1991	1.0795	1.0342				0.034212			-0.001182
3	1.1902	1.0719	1.0251	1.2500e-004	14.40	0.818988	0.025091	14.40	0.432139	0.014969
	1.1808	1.0571	1.0110				0.011023			0.001874
	1.1876	1.0650	1.0194				0.019378			-0.000881
	1.1867	1.0638	1.0182				0.018180			-0.000840
	1.1867	1.0638	1.0182				0.018184			-0.000840
4	1.1799	1.0576	1.0109	6.2500e-005	17.28	1.080843	0.010879	14.40	0.432139	0.009700
	1.1711	1.0438	0.9977				-0.002301			-0.001364
	1.1765	1.0509	1.0049				0.004864			-0.000322
	1.1754	1.0497	1.0036				0.003570			0.000256
	1.1755	1.0497	1.0036				0.003579			0.000181
5	1.1738	1.0482	1.0019	3.1250e-005	20.74	1.142691	0.001852	14.40	0.432139	0.002818
	1.1718	1.0449	0.9987				-0.001302			-0.000041
	1.1734	1.0471	1.0010				0.000953			0.000403
	1.1732	1.0468	1.0006				0.000621			0.000395

As Figuras 5.18(a), 5.18(b) e 5.18(c), na Página 100, apresentam curvas de nível da funções objetivo e h_2 e trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 5.19(a), 5.19(b) e 5.19(c), na Página 100, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

As Figuras 5.20(a), 5.20(b) e 5.20(c), na Página 101, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

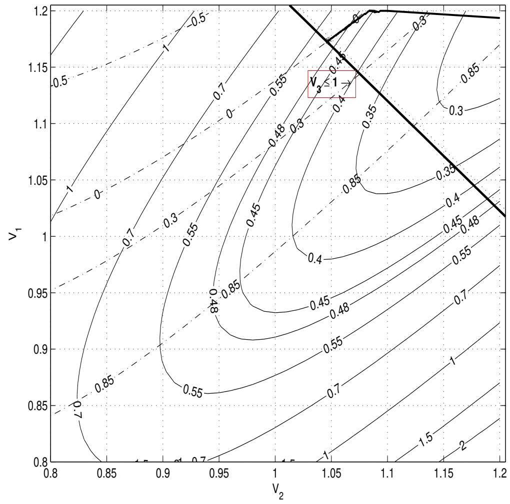
As Figuras 5.21(a), 5.21(b) e 5.21(c), na Página 101, apresentam os números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

5.5.8 Comentários

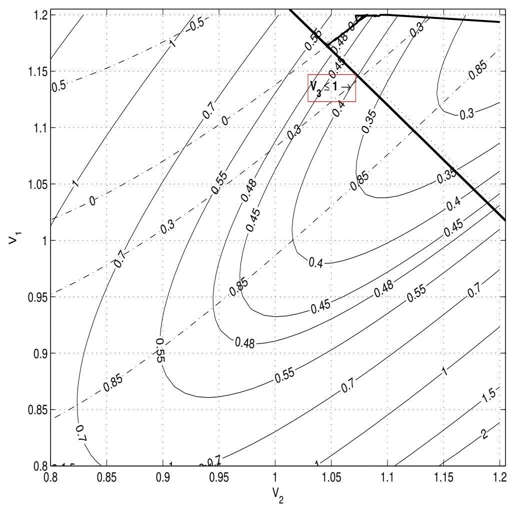
De acordo com os gráficos da Figura 5.18 percebemos que a restrição em h é satisfeita antes da restrição em x. Os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 5.13 com as Tabelas 5.14 e 5.15 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos P1 do que P2 ou P3. Observamos ainda que as trajetórias geradas utilizando P2 e P3 se desenvolvem por pontos factíveis e infactíveis; já a trajetória utilizando P1 é desenvolvida por pontos infactíveis apenas.

Após a sexta iteração externa, verificamos que com P1 as tensões (Figura 5.19(a)) as funções objetivo, barreira e penalizada exibem comportamento assintótico em direção ao valor objetivo ótimo (Figura 5.20(a)). Este comportamento também pode ser observado nas performances das tensões (Figura 5.19(a)). Por outro lado, P2 e P3 têm comportamentos diferentes de P1, mas muito semelhantes entre si (Figura 5.19(b) e (c)).

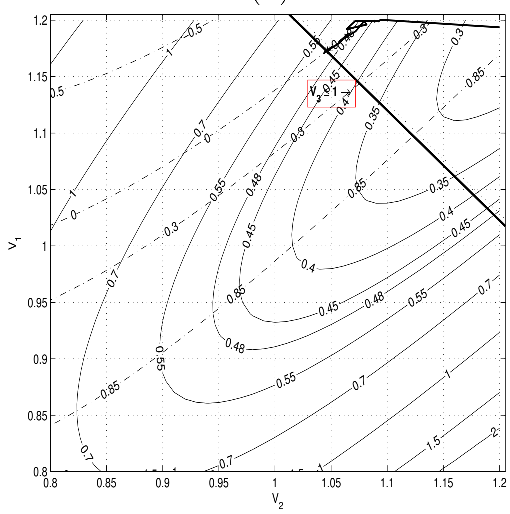
Com relação ao número de iterações internas e externas, os gráficos da Figura 5.21 mostram que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P3 leva pequena vantagem sobre P2.



(a)

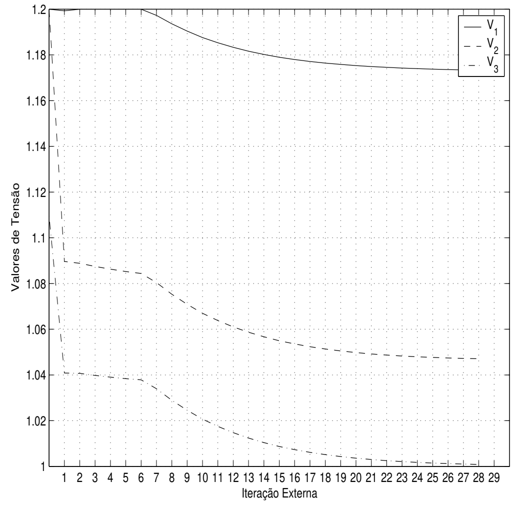


(b)

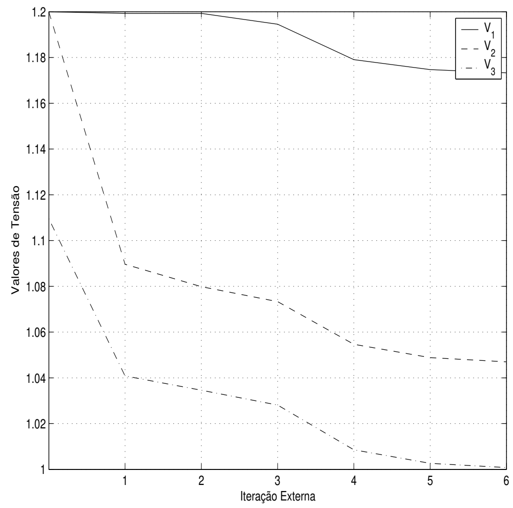


(c)

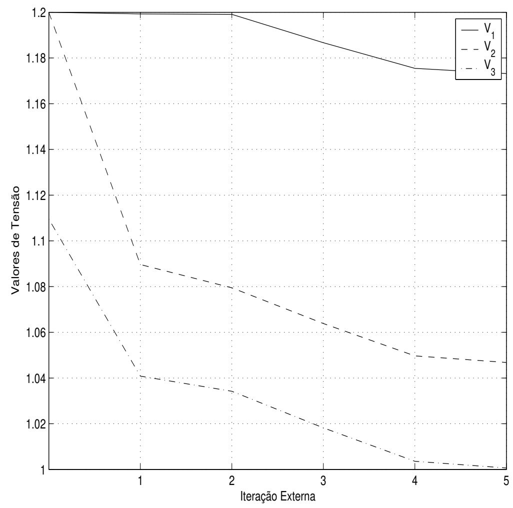
Figura 5.18: Curvas de nível das funções objetivo e h_2 e trajetória ótima considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

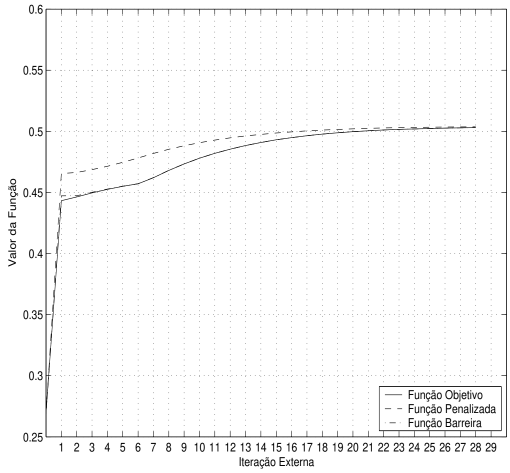


(b)

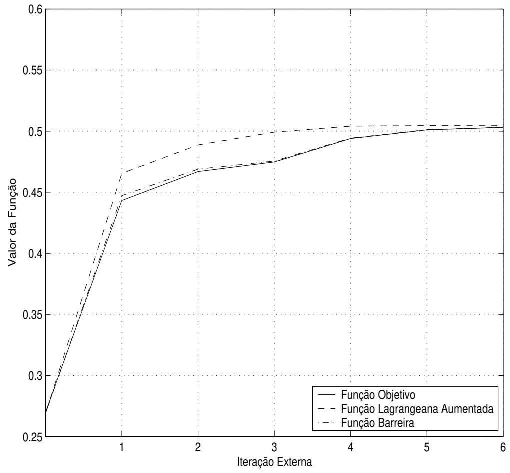


(c)

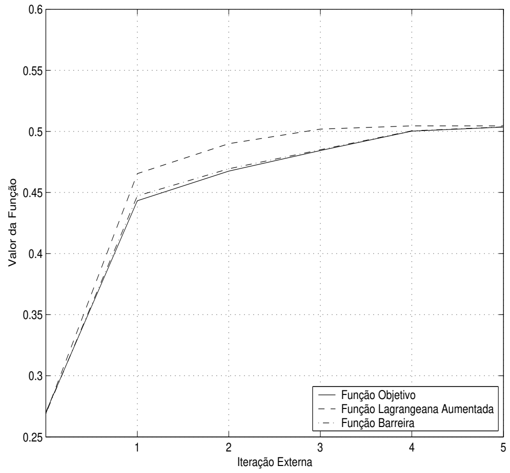
Figura 5.19: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

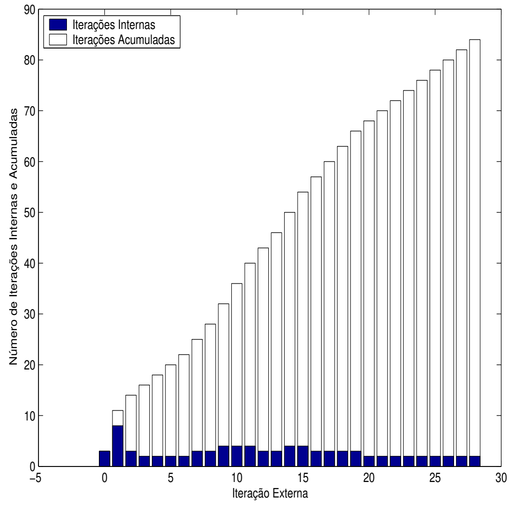


(b)

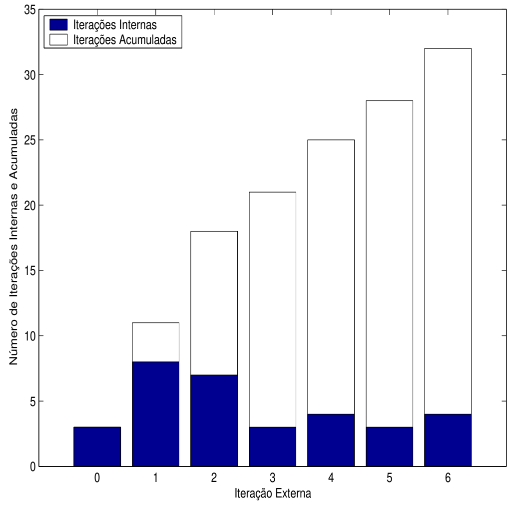


(c)

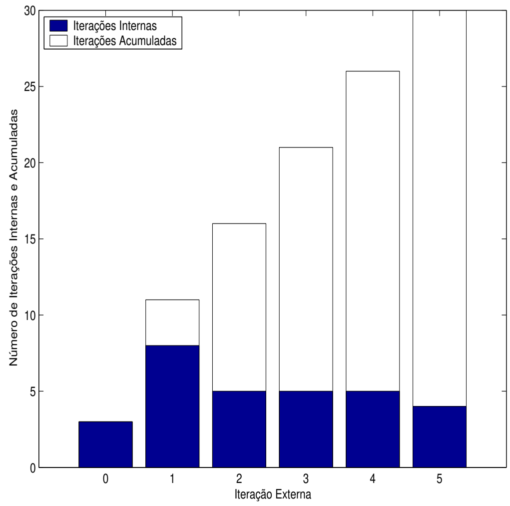
Figura 5.20: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.21: Iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u, $h_2^{\max} = 0.0$ e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Capítulo 6

Gradiente Reduzido com Projeção ou Barreira nas Restrições Funcionais e Lagrangeana Aumentada nas Restrições em Variáveis

6.1 Introdução

Neste capítulo é proposta uma reformulação do problema (2.12) com o objetivo de aplicar a técnica de barreira no tratamento da restrição funcional (2.12.b). Assim, essa restrição é normalizada e transformada em igualdade pela introdução de uma variável de folga. Essa variável é definida como independente e a correspondente restrição é tratada por projeção ou por técnica de barreira. As variáveis das restrições (2.12.c), juntamente com (2.12.d), são redefinidas como dependentes e as respectivas restrições são tratadas pela técnica de Lagrangeana aumentada. São apresentados os resultados do processo de otimização no problema-exemplo considerando as estratégias já aplicadas nos Capítulos 4 e 5.

6.2 Problema Reformulado com Variável de Folga

Consideremos as restrições sobre $h(x, u)$ do problema (2.12)

$$h^{\min} \leq h(x, u) \leq h^{\max}.$$

A normalização dessa restrição é realizada reescrevendo-a do seguinte modo:

$$0 \leq \frac{h(x, u) - h^{\min}}{h^{\max} - h^{\min}} \leq 1. \tag{6.1}$$

Define-se a variável s em (6.2) como:

$$\frac{h(x,u) - h^{\min}}{h^{\max} - h^{\min}} = s. \tag{6.2}$$

Introduzindo (6.1) e (6.2) no problema (2.12) obtém-se o problema transformado apresentado em (6.3).

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f(x,u) & \\ \text{sujeita a} & \left\{ \begin{array}{l} g(x,u) = 0 \\ s - \frac{h(x,u) - h^{\min}}{h^{\max} - h^{\min}} = 0 \\ u^{\min} \leq u \leq u^{\max} \\ x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \\ 0 \leq s \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \tag{6.3}$$

Redefinindo-se novas variáveis

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{u} = [s]$$

e novas restrições

$$\tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) = \begin{bmatrix} g(\tilde{x}) \\ s - \frac{h(\tilde{x}) - h^{\min}}{h^{\max} - h^{\min}} \end{bmatrix},$$

obtém-se o problema transformado equivalente dado em (6.4).

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f(\tilde{x}) & \\ \text{sujeita a} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) = 0 \\ \tilde{x}^{\min} \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}^{\max} \\ \tilde{u}^{\min} \leq \tilde{u} \leq \tilde{u}^{\max}, \end{array} \right. \end{array} \tag{6.4}$$

onde $\tilde{u}^{\min} = 0$ e $\tilde{u}^{\max} = 1$.

O problema definido em (6.4) está na mesma forma padrão do subproblema (5.10). Portanto, a estratégia para sua solução será através das abordagens apresentadas nos Capítulos 4 e 5. O tratamento das restrições de igualdade e das variáveis independentes será realizado diretamente por gradiente reduzido projetado ou por gradiente reduzido com barreira logarítmica e o tratamento das variáveis dependentes será através da técnica de Lagrangeana aumentada, segundo os procedimentos P1, P2 e P3 definidos na Seção 4.6.

6.3 Projeção nas Restrições em $\tilde{u}$ e Lagrangeana Aumentada nas Restrições em $\tilde{x}$

Considera-se o problema (6.5)

$$\text{minimizar } f(\tilde{x})$$
$$\text{sujeita a } \begin{cases} \tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) = 0 & (\tilde{\lambda}) & \text{(a)} \\ \tilde{u}^{\min} - \tilde{u} \leq 0 & (\underline{\mu}_{\tilde{u}}) & \text{(b)} \\ \tilde{u} - \tilde{u}^{\max} \leq 0 & (\overline{\mu}_{\tilde{u}}) & \text{(c)} \\ \tilde{x}^{\min} - \tilde{x} \leq 0 & (\underline{\mu}_{\tilde{x}}) & \text{(d)} \\ \tilde{x} - \tilde{x}^{\max} \leq 0 & (\overline{\mu}_{\tilde{x}}) & \text{(e)} \end{cases} \tag{6.5}$$

onde:

$\tilde{\lambda}-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade;

$\underline{\mu}_{\tilde{u}}-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis independentes em seus limites mínimos;

$\overline{\mu}_{\tilde{u}}-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis independentes em seus limites máximos;

$\underline{\mu}_{\tilde{x}}-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis dependentes em seus limites mínimos;

$\overline{\mu}_{\tilde{x}}-$vetor multiplicador de Lagrange associado às restrições em variáveis dependentes em seus limites máximos.

Para resolver tal problema adotando a técnica de Lagrangeana aumentada, no tratamento das restrições (d) e (e), definem-se os seguintes termos:

$$\underline{p}_a[\tilde{x}] = \sum_j \begin{cases} \underline{\mu}_{\tilde{x}_j}\left(\tilde{x}_j^{\min} - \tilde{x}_j\right) + \frac{1}{2}c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j^{\min} - \tilde{x}_j\right)^2 & \text{se } \underline{\mu}_{\tilde{x}_j} + c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j^{\min} - \tilde{x}_j\right) \geq 0 \\ -\frac{\underline{\mu}^2_{\tilde{x}_j}}{2c_{\tilde{x}}} & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\overline{p}_a[\tilde{x}] = \sum_j \begin{cases} \overline{\mu}_{\tilde{x}_j}\left(\tilde{x}_j - \tilde{x}_j^{\max}\right) + \frac{1}{2}c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j - \tilde{x}_j^{\max}\right)^2 & \text{se } \overline{\mu}_{\tilde{x}_j} + c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j - \tilde{x}_j^{\max}\right) \geq 0 \\ -\frac{\overline{\mu}^2_{\tilde{x}_j}}{2c_{\tilde{x}}} & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{6.7}$$

Em seguida, define-se uma seqüência de problemas Lagrangeanos aumentados parcialmente restritos (PLAR) em (6.8).

$$
\begin{array}{ll}
\underset{(\tilde{x},\tilde{u})}{\text{minimizar}} & L_a(\tilde{x},\tilde{u},\underline{\mu}_{\tilde{x}}^k,\overline{\mu}_{\tilde{x}}^k) \\
\text{sujeita a} & \begin{cases} \tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) = 0 & \text{(a)} \\ \tilde{u}^{\min} \leq \tilde{u} \leq \tilde{u}^{\max}, & \text{(b)} \end{cases}
\end{array}
\tag{6.8}
$$

onde

$$
L_a(\tilde{x},\tilde{u},\underline{\mu}_{\tilde{x}}^k,\overline{\mu}_{\tilde{x}}^k) = f(\tilde{x}) + \underline{p}_a\left[\tilde{x}\right] + \overline{p}_a\left[\tilde{x}\right].
$$

Na estratégia proposta neste capítulo, as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (6.4), são procuradas através da solução de uma seqüência de problemas (6.8).

A seqüência de problemas (6.8) é iniciada com um primeiro problema no qual estabelece-se um valor arbitrário para o fator de penalidade e consideram-se nulos todos os multiplicadores $\underline{\mu}_{\tilde{x}_j}^k$ e $\overline{\mu}_{\tilde{x}_j}^k$. A partir da solução desse primeiro problema, pode-se gerar uma seqüência de problemas (6.8) com os procedimentos alternativos P1, P2 e P3 definidos na Seção 4.6.

6.4 Condições de KKT relativas aos PLAR (6.8)

Consideremos inicialmente as expressões para as derivadas primeiras de $\underline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$ e $\overline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$ dadas abaixo:

$$
\frac{\partial \underline{p}_a\left[\tilde{x}\right]}{\partial \tilde{x}_m} = \sum_j \begin{cases} -\left[\underline{\mu}_{\tilde{x}_j} + c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j^{\min} - \tilde{x}_j\right)\right] & \text{se } \underline{\mu}_{\tilde{x}_j} + c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j^{\min} - \tilde{x}_j\right) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
\tag{6.9}
$$

$$
\frac{\partial \overline{p}_a\left[\tilde{x}\right]}{\partial \tilde{x}_m} = \sum_j \begin{cases} \left[\overline{\mu}_{\tilde{x}_j} + c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j - \tilde{x}_j^{\max}\right)\right] & \text{se } \overline{\mu}_{\tilde{x}_j} + c_{\tilde{x}}\left(\tilde{x}_j - \tilde{x}_j^{\max}\right) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
\tag{6.10}
$$

Com as definições desses termos, as condições de KKT para os problemas (6.8) são obtidas a partir da função Lagrangeana associada dada por:

$$
l(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{\lambda},\underline{\mu}_{\tilde{x}}^k,\overline{\mu}_{\tilde{x}}^k) = f(\tilde{x}) + \tilde{\lambda}^t\tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) + \underline{p}_a\left[\tilde{x}\right] + \overline{p}_a\left[\tilde{x}\right] + \underline{\mu}_{\tilde{u}}^t\left(\tilde{u}^{\min} - \tilde{u}\right) + \overline{\mu}_{\tilde{u}}^t\left(\tilde{u} - \tilde{u}^{\max}\right).
$$

Assim, as condições de KKT associadas aos problemas (6.8) são dadas por:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial l}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + J_{\tilde{x}}^{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{u})^t\tilde{\lambda} + \frac{\partial \underline{p}_a[\tilde{x}]}{\partial \tilde{x}_m} + \frac{\partial \overline{p}_a[\tilde{x}]}{\partial \tilde{x}_m} = 0 & \text{(a)} \\
\frac{\partial l}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{u}} + J_{\tilde{u}}^{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{u})^t\tilde{\lambda} - \underline{\mu}_{\tilde{u}} + \overline{\mu}_{\tilde{u}} = 0 & \text{(b)} \\
\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) = 0 & \text{(c)} \\
\underline{\mu}_{\tilde{u}}^t\left(\tilde{u}^{\min} - \tilde{u}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\mu}_{\tilde{u}}^t\left(\tilde{u} - \tilde{u}^{\max}\right) = 0 & \text{(e)} \\
\tilde{\lambda} \text{ irrestrito} & \text{(f)} \\
\underline{\mu}_{\tilde{u}} \geq 0 \text{ e } \overline{\mu}_{\tilde{u}} \geq 0 & \text{(g)}
\end{cases}
\tag{6.11}
$$

onde $J_{\tilde{x}}^{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{u})$ e $J_{\tilde{u}}^{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{u})$ são, respectivamente, as matrizes Jacobianas de $\tilde{g}$ em relação a $\tilde{x}$ e $\tilde{u}$.

A estratégia para gerar a seqüência de problemas (6.8), resolver as respectivas condições de KKT e atingir as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (6.4), consiste em aplicar os procedimentos P1, P2 ou P3 e é análoga ao método apresentado na Página 37.

6.5 Estudos com o Problema-exemplo

Considera-se o problema-exemplo escrito no formato do problema (6.4), ou seja

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ s_1 - \frac{Q_{g1}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3)-Q_{g1}^{\min}}{Q_{g1}^{\max}-Q_{g1}^{\min}} = 0 \\ s_2 - \frac{Q_{g2}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3)-Q_{g2}^{\min}}{Q_{g2}^{\max}-Q_{g2}^{\min}} = 0 \\ V_1^{\min} \le V_1 \le V_1^{\max} \\ V_2^{\min} \le V_2 \le V_2^{\max} \\ V_3^{\min} \le V_3 \le V_3^{\max} \\ 0 \le s_1 \le 1 \\ 0 \le s_2 \le 1, \end{cases} \end{array} \tag{6.12}$$

onde $\tilde{u} = (s_1, s_2)^t$ e $\tilde{x} = (\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3)^t$.

Os limites de V e Q_g considerados no estudo são os mesmos apresentados no Capítulo 4. O fator de penalidade inicial em $\tilde{x}$ foi 50 e $\gamma_{\tilde{x}} = 1.2$.

6.5.1 Considerando $h_2^{max} = -0.5$

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização partindo-se do ponto $\tilde{x} = (0.20980, 0.11108, 1.4665, 1.3033, 1.3048)^t$.

Estratégia com Penalidade (P1)

A Tabela 6.1 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ com penalidade sobre $\tilde{x}$ para resolver o problema (6.12).

Tabela 6.1: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$ ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4665	1.3033	1.3048	50.00	0.304785	-0.107320
	1.3533	1.1718	1.1675		0.167453	0.006443
	1.3224	1.1283	1.1239		0.123897	0.003487
	1.2397	1.0167	1.0138		0.013807	0.016798
	1.2516	1.0273	1.0247		0.024720	-0.000148
	1.2524	1.0286	1.0260		0.025979	0.000003
	1.2520	1.0280	1.0254		0.025354	0.000001
	1.2521	1.0281	1.0254		0.025447	0.000000
2	1.2330	0.9996	0.9976	60.00	-0.002444	0.001353
	1.2387	1.0079	1.0057		0.005728	0.000098
	1.2390	1.0082	1.0060		0.006000	0.000000
3	1.2362	1.0040	1.0019	72.00	0.001889	0.000031
	1.2368	1.0048	1.0027		0.002721	0.000001
	1.2367	1.0047	1.0026		0.002643	0.000000
4	1.2340	1.0005	0.9985	86.40	-0.001526	0.000033
	1.2343	1.0009	0.9989		-0.001076	0.000000
	1.2345	1.0013	0.9993		-0.000689	0.000000
5	1.2290	0.9927	0.9909	103.68	-0.009090	0.000133
	1.2301	0.9944	0.9926		-0.007387	0.000005
	1.2299	0.9941	0.9923		-0.007724	0.000000
6	1.2243	0.9852	0.9836	124.42	-0.016380	0.000143
	1.2262	0.9882	0.9865		-0.013521	0.000015
	1.2258	0.9875	0.9858		-0.014171	0.000001
	1.2258	0.9876	0.9859		-0.014054	0.000000
7	1.2201	0.9785	0.9771	149.30	-0.022900	0.000151
	1.2226	0.9825	0.9810		-0.019024	0.000028
	1.2221	0.9817	0.9802		-0.019817	0.000001
	1.2222	0.9818	0.9803		-0.019691	0.000000
8	1.2194	0.9772	0.9758	179.16	-0.024199	0.000040
	1.2190	0.9766	0.9752		-0.024789	0.000001
	1.2191	0.9767	0.9753		-0.024693	0.000000
9	1.2162	0.9720	0.9707	214.99	-0.029266	0.000042
	1.2163	0.9721	0.9709		-0.029090	0.000000
10	1.2134	0.9674	0.9663	257.99	-0.033729	0.000043
	1.2140	0.9683	0.9672		-0.032828	0.000002
	1.2139	0.9682	0.9671		-0.032938	0.000000
11	1.2110	0.9633	0.9624	309.59	-0.037641	0.000045
	1.2119	0.9649	0.9639		-0.036130	0.000005
	1.2118	0.9647	0.9637		-0.036293	0.000000
12	1.2089	0.9598	0.9589	371.50	-0.041052	0.000046
	1.2101	0.9619	0.9610		-0.039010	0.000008
	1.2100	0.9617	0.9608		-0.039205	0.000000
13	1.2085	0.9592	0.9584	445.81	-0.041608	0.000012
	1.2085	0.9591	0.9583		-0.041720	0.000000
14	1.2070	0.9566	0.9559	534.97	-0.044128	0.000012
	1.2072	0.9569	0.9561		-0.043883	0.000000
15	1.2057	0.9544	0.9537	641.96	-0.046257	0.000012
	1.2061	0.9550	0.9543		-0.045699	0.000001
	1.2060	0.9550	0.9543		-0.045736	0.000000
16	1.2046	0.9525	0.9519	770.35	-0.048080	0.000012
	1.2051	0.9534	0.9527		-0.047270	0.000001
	1.2051	0.9533	0.9527		-0.047315	0.000000
17	1.2037	0.9509	0.9504	924.42	-0.049634	0.000011
	1.2043	0.9520	0.9514		-0.048610	0.000002
	1.2043	0.9519	0.9513		-0.048658	0.000000
18	1.2040	0.9514	0.9508	1109.31	-0.049164	0.000001
	1.2040	0.9514	0.9508		-0.049171	0.000000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 6.2 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante para resolver o problema (6.12).

Tabela 6.2: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4665	1.3033	1.3048	50.00	0.000000	0.304785	-0.107320
	1.3533	1.1718	1.1675			0.167453	0.006443
	1.3224	1.1283	1.1239			0.123897	0.003487
	1.2397	1.0167	1.0138			0.013807	0.016798
	1.2516	1.0273	1.0247			0.024720	-0.000148
	1.2524	1.0286	1.0260			0.025979	0.000003
	1.2520	1.0280	1.0254			0.025354	0.000001
	1.2521	1.0281	1.0254			0.025447	0.000000
2	1.2140	0.9711	0.9697	50.00	1.272362	-0.030335	0.005260
	1.2168	0.9729	0.9716			-0.028352	-0.000008
	1.2177	0.9744	0.9732			-0.026846	0.000005
	1.2171	0.9735	0.9723			-0.027723	0.000002
	1.2174	0.9740	0.9727			-0.027289	0.000000
	1.2174	0.9740	0.9727			-0.027274	0.000000
3	1.2042	0.9523	0.9516	50.00	0.000000	-0.048398	0.000879
	1.2091	0.9602	0.9594			-0.040634	0.000109
	1.2059	0.9548	0.9541			-0.045864	0.000058
	1.2078	0.9580	0.9572			-0.042824	0.000019
	1.2067	0.9562	0.9554			-0.044586	0.000007
	1.2074	0.9572	0.9565			-0.043546	0.000002
	1.2070	0.9566	0.9558			-0.044157	0.000001
	1.2071	0.9567	0.9560			-0.044036	0.000000
4	1.2017	0.9476	0.9471	50.00	0.000000	-0.052899	0.000163
	1.2045	0.9524	0.9517			-0.048257	0.000044
	1.2024	0.9488	0.9483			-0.051739	0.000026
	1.2037	0.9510	0.9504			-0.049580	0.000010
	1.2029	0.9496	0.9491			-0.050917	0.000004
	1.2034	0.9505	0.9499			-0.050100	0.000001
	1.2033	0.9503	0.9497			-0.050267	0.000000
5	1.2007	0.9458	0.9454	50.00	0.000000	-0.054587	0.000040

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 6.3 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente para resolver o problema (6.12).

Tabela 6.3: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4665	1.3033	1.3048	50.00	0.000000	0.304785	-0.107320
	1.3533	1.1718	1.1675			0.167453	0.006443
	1.3224	1.1283	1.1239			0.123897	0.003487
	1.2397	1.0167	1.0138			0.013807	0.016798
	1.2516	1.0273	1.0247			0.024720	-0.000148
	1.2524	1.0286	1.0260			0.025979	0.000003
	1.2520	1.0280	1.0254			0.025354	0.000001
	1.2521	1.0281	1.0254			0.025447	0.000000
2	1.2140	0.9711	0.9697	60.00	1.272362	-0.030335	0.005260
	1.2159	0.9715	0.9703			-0.029712	0.000005
	1.2157	0.9712	0.9700			-0.029989	0.000000
	1.2153	0.9706	0.9694			-0.030596	0.000001
	1.2154	0.9707	0.9695			-0.030494	0.000000
3	1.2025	0.9494	0.9488	72.00	0.000000	-0.051204	0.000851
	1.2065	0.9559	0.9552			-0.044846	0.000071
	1.2047	0.9526	0.9520			-0.047999	0.000021
	1.2055	0.9540	0.9534			-0.046628	0.000004
	1.2051	0.9534	0.9528			-0.047217	0.000001

Tabela 6.3: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
	1.2052	0.9536	0.9529			-0.047070	0.000000
4	1.2018	0.9477	0.9473	86.40	0.000000	-0.052748	0.000068
	1.2017	0.9476	0.9471			-0.052866	0.000000
5	1.2004	0.9452	0.9448	103.68	0.000000	-0.055153	0.000011

As Figuras 6.1(a), 6.1(b) e 6.1(c), na Página 122, apresentam curvas de nível das funções objetivo e h_2, a região de factibilidade e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.2(a), 6.2(b) e 6.2(c), na Página 122, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.3(a), 6.3(b) e 6.3(c), na Página 123, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.4(a), 6.4(b) e 6.4(c), na Página 123, apresentam os números de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

6.5.2 Comentários

De acordo com os gráficos da Figura 6.1 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 6.1 com as Tabelas 6.2 e 6.3 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é mais lenta quando utilizamos o procedimento P1 do que os procedimentos P2 e P3.

Devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, o processo iterativo gera uma trajetória infactível em direção a uma solução factível.

Ainda com relação à Tabela 6.1, verificamos que o processo iterativo utilizando P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3}.

Os procedimentos P2 e P3 têm comportamentos muito semelhantes em termos de perfis das tensões (Figura 6.2), funções objetivo e Lagrangeana aumentada (Figura 6.3) e iterações internas e externas (Figura 6.4) com o procedimento P3 levando vantagem no número total de iterações.

6.5.3 Considerando $h_2^{max} = 0.0$

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização partindo-se do ponto $\tilde{x} = (0.1517, 0.0680, 1.4211, 1.3340, 1.3004)^t$.

Estratégia com Penalidade (P1)

A Tabela 6.4 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade sobre $\tilde{x}$ para resolver o problema (6.12).

Tabela 6.4: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$ ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4211	1.3340	1.3004	50.00	0.300417	-0.071815
	1.2456	1.1434	1.1007		0.100714	0.014043
	1.2395	1.1300	1.0859		0.085896	0.001287
	1.2093	1.0930	1.0480		0.047992	0.001422
	1.2240	1.1108	1.0662		0.066196	0.000279
	1.2233	1.1098	1.0652		0.065248	0.000002
	1.2234	1.1099	1.0653		0.065329	0.000000
2	1.1707	1.0452	0.9990	60.00	-0.001003	0.004086
	1.1834	1.0599	1.0141		0.014071	0.000086
	1.1868	1.0643	1.0185		0.018530	0.000021
	1.1865	1.0639	1.0181		0.018126	0.000000
3	1.1828	1.0591	1.0132	72.00	0.013206	0.000026
	1.1844	1.0612	1.0154		0.015383	0.000005
	1.1843	1.0611	1.0153		0.015258	0.000000
4	1.1824	1.0586	1.0128	86.40	0.012773	0.000007
	1.1825	1.0587	1.0128		0.012824	0.000000
5	1.1806	1.0562	1.0103	103.68	0.010319	0.000007
	1.1809	1.0567	1.0108		0.010764	0.000000
6	1.1790	1.0542	1.0082	124.42	0.008242	0.000007
	1.1796	1.0550	1.0090		0.009026	0.000000
7	1.1777	1.0525	1.0065	149.30	0.006488	0.000007
	1.1785	1.0536	1.0076		0.007594	0.000001
	1.1785	1.0535	1.0076		0.007561	0.000000
8	1.1775	1.0523	1.0063	179.16	0.006286	0.000002
	1.1776	1.0523	1.0063		0.006328	0.000000
9	1.1766	1.0511	1.0050	214.99	0.005048	0.000002
	1.1768	1.0513	1.0053		0.005293	0.000000
10	1.1758	1.0501	1.0040	257.99	0.004008	0.000002
	1.1761	1.0505	1.0044		0.004425	0.000000
11	1.1751	1.0492	1.0031	309.59	0.003136	0.000002
	1.1756	1.0498	1.0037		0.003697	0.000000
12	1.1751	1.0492	1.0031	371.50	0.003088	0.000000
13	1.1747	1.0487	1.0026	445.81	0.002579	0.000000
14	1.1744	1.0483	1.0022	534.97	0.002153	0.000000
15	1.1741	1.0479	1.0018	641.96	0.001797	0.000000
16	1.1739	1.0476	1.0015	770.35	0.001498	0.000000
17	1.1737	1.0474	1.0012	924.42	0.001249	0.000000
18	1.1736	1.0473	1.0012	1109.31	0.001155	0.000000
19	1.1736	1.0473	1.0011	1200.00	0.001138	0.000000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 6.5 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante para resolver o problema (6.12).

Tabela 6.5: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4211	1.3340	1.3004	50.00	0.000000	0.300417	-0.071815
	1.2456	1.1434	1.1007			0.100714	0.014043
	1.2395	1.1300	1.0859			0.085896	0.001287
	1.2093	1.0930	1.0480			0.047992	0.001422
	1.2240	1.1108	1.0662			0.066196	0.000279
	1.2233	1.1098	1.0652			0.065248	0.000002
	1.2234	1.1099	1.0653			0.065329	0.000000
2	1.1181	0.9805	0.9327	50.00	3.266473	-0.067335	0.015028
	1.1392	1.0016	0.9543			-0.045657	-0.000309
	1.1453	1.0099	0.9629			-0.037094	0.000099
	1.1442	1.0084	0.9613			-0.038668	0.000004
	1.1443	1.0085	0.9614			-0.038590	0.000000
3	1.1876	1.0670	1.0213	50.00	1.336998	0.021318	0.004805
	1.1628	1.0338	0.9874			-0.012644	0.001641
	1.1703	1.0430	0.9968			-0.003196	0.000063
	1.1703	1.0430	0.9967			-0.003271	0.000000
4	1.1731	1.0466	1.0004	50.00	1.173442	0.000418	0.000016

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 6.6 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente para resolver o problema (6.12).

Tabela 6.6: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4211	1.3340	1.3004	50.00	0.000000	0.300417	-0.071815
	1.2456	1.1434	1.1007			0.100714	0.014043
	1.2395	1.1300	1.0859			0.085896	0.001287
	1.2093	1.0930	1.0480			0.047992	0.001422
	1.2240	1.1108	1.0662			0.066196	0.000279
	1.2233	1.1098	1.0652			0.065248	0.000002
	1.2234	1.1099	1.0653			0.065329	0.000000
2	1.1181	0.9805	0.9327	60.00	3.266473	-0.067335	0.015028
	1.1377	0.9996	0.9523			-0.047698	-0.000311
	1.1551	1.0233	0.9766			-0.023424	0.000622
	1.1483	1.0140	0.9670			-0.032994	0.000127
	1.1486	1.0143	0.9673			-0.032655	0.000000
3	1.1699	1.0429	0.9967	72.00	1.307173	-0.003322	0.001092
	1.1724	1.0457	0.9995			-0.000487	0.000001

As Figuras 6.5(a), 6.5(b) e 6.5(c), na Página 124, apresentam curvas de nível das funções objetivo e h_2, a região de factibilidade e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.6(a), 6.6(b) e 6.6(c), na Página 124, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.7(a), 6.7(b) e 6.7(c), na Página 125, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.8(a), 6.8(b) e 6.8(c), na Página 125, apresentam os números de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

6.5.4 Comentários

De acordo com os gráficos da Figura 6.5 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 6.4 com as Tabelas 6.5 e 6.6 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos P1 do que P2 e P3.

Devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, o processo iterativo gera uma trajetória infactível em direção a uma solução ótima (factível). Esta solução ocorre em $V_3 \leq 1$ ativa.

A partir da segunda iteração externa, verificamos que com P1 as funções objetivo e penalizada exibem comportamento assintótico em direção ao valor objetivo ótimo (Figura 6.7(a)). Por outro lado, até a terceira iteração externa, P2 e P3 têm comportamentos muito semelhantes em termos de performance das tensões (Figura 6.6), funções objetivo e Lagrangeana aumentada (Figura 6.7) e iterações internas e externas (Figura 6.8) com o procedimento P3 levando pequena vantagem.

Ainda com relação à Tabela 6.4, verificamos que o processo iterativo utilizando P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3}.

6.6 Barreira Logarítmica nas Restrições em $\tilde{u}$ e Lagrangeana Aumentada nas Restrições em $\tilde{x}$

Considera-se inicialmente um problema de barreira, relativa às restrições (6.5.b) e (6.5.c), associado ao problema (6.5) definido como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f(\tilde{x}) + b\left(\tilde{u}, \beta^k\right) & \\ \text{sujeita a } \left\{ \begin{array}{lll} \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0 & (\tilde{\lambda}) & \text{(a)} \\ \tilde{x}^{\min} - \tilde{x} \le 0 & (\underline{\mu}_{\tilde{x}}) & \text{(b)} \\ \tilde{x} - \tilde{x}^{\max} \le 0 & (\overline{\mu}_{\tilde{x}}), & \text{(c)} \end{array} \right. \end{array} \tag{6.13}$$

onde

$$b\left(\tilde{u}, \beta^k\right) = -\beta^k \sum_{j \in \{\text{SL} \cup \text{PV}\}} \left[\ln(\tilde{u}_j - \tilde{u}_j^{\min}) + \ln(\tilde{u}_j^{\max} - \tilde{u}_j)\right].$$

O problema de barreira (6.13), para um valor de β^k, $k = 0, 1, 2, ...$, tal que $\beta^{k+1} < \beta^k$, é resolvido utilizando-se as estratégias da seção anterior para o tratamento das restrições (b) e (c). Para isso, definimos uma seqüência de problemas Lagrangeanos aumentados parcialmente restritos. Nessa seqüência de problemas, o fator de penalidade e/ou multiplicadores de Lagrange são atualizados simultaneamente com o fator de barreira. Assim, definimos a seqüência de problemas Lagrangeanos aumentados parcialmente restritos com barreira (PLARB) associados ao problema (6.5) como:

$$\begin{array}{l} \underset{(\tilde{x}, \tilde{u})}{\text{minimizar}}\ L_{ab}(\tilde{x}, \tilde{u}, \underline{\mu}_{\tilde{x}}^k, \overline{\mu}_{\tilde{x}}^k, \beta^k) \\ \text{sujeita a } \ \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0, \end{array} \tag{6.14}$$

onde

$$L_{ab}(\tilde{x}, \tilde{u}, \underline{\mu}_{\tilde{x}}^k, \overline{\mu}_{\tilde{x}}^k, \beta^k) = f(\tilde{x}) + b\left(\tilde{u}, \beta^k\right) + \underline{p}_a\left[\tilde{x}\right] + \overline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$$

e $\underline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$ e $\overline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$ estão definidas na seção anterior.

No método apresentado neste capítulo, as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (6.4), são procuradas através da solução de uma seqüência da problemas (6.14).

Como na seção anterior, a seqüência de problemas (6.14) é iniciada com um primeiro problema no qual estabelece-se um valor arbitrário para o fator de penalidade e de barreira e consideram-se nulos todos os multiplicadores $\underline{\mu}_{\tilde{x}_j}^k$ e $\overline{\mu}_{\tilde{x}_j}^k$. A partir da solução desse primeiro problema, pode-se gerar uma seqüência de problemas (6.14) com os procedimentos alternativos P1, P2 ou P3 já descritos anteriormente. O fator de barreira é atualizado de acordo com a seguinte regra:

$$\beta^{k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\beta^k}{\rho}, & \frac{\beta^k}{\rho} \ge \beta^{\lim} \\ \beta^{\lim}, & \frac{\beta^k}{\rho} < \beta^{\lim}, \end{array} \right. \tag{6.15}$$

onde $\rho > 1$ e $k = 0, 1, 2, ...$

6.7 Condições de KKT relativas aos PLARB (6.14)

Consideremos a função Lagrangeana associada aos problemas (6.14) dada por:

$$l_b(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{\lambda},\underline{\mu}_{\tilde{x}}^k,\overline{\mu}_{\tilde{x}}^k,\beta^k) = f(\tilde{x}) + \tilde{\lambda}^t\tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) + b\left(\tilde{u},\beta^k\right) + \underline{p}_a\left[\tilde{x}\right] + \overline{p}_a\left[\tilde{x}\right].$$

Com as definições das derivadas primeiras de $\underline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$ e $\overline{p}_a\left[\tilde{x}\right]$ dadas em (6.9) e (6.10), as condições de KKT para os problemas (6.14) são:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial l}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + J_{\tilde{x}}^{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{u})^t\tilde{\lambda} + \frac{\partial \underline{p}_a[\tilde{x}]}{\partial \tilde{x}_m} + \frac{\partial \overline{p}_a[\tilde{x}]}{\partial \tilde{x}_m} = 0 & \text{(a)} \\ \frac{\partial l}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{u}} + J_{\tilde{u}}^{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{u})^t\tilde{\lambda} + \frac{\partial b\left(\tilde{u},\beta^k\right)}{\partial \tilde{u}} = 0 & \text{(b)} \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = \tilde{g}(\tilde{x},\tilde{u}) = 0 & \text{(c)} \\ \tilde{\lambda} \text{ irrestrito} & \text{(d)} \end{array}\right. \tag{6.16}$$

onde

$$\frac{\partial b\left(\tilde{u},\beta^k\right)}{\partial \tilde{u}_j} = -\beta^k\left(\frac{1}{\tilde{u}_j - \tilde{u}_j^{\min}} - \frac{1}{\tilde{u}_j^{\max} - \tilde{u}_j}\right), \quad j \in \{\mathrm{SL} \cup \mathrm{PV}\}.$$

A estratégia para gerar a seqüência de problemas (6.14), resolver as respectivas condições de KKT e atingir as condições de KKT (2.15), relativas ao problema (6.4), é análoga ao método apresentado na Página 72.

6.8 Estudos com o Problema-exemplo

Considera-se o problema-exemplo escrito no formato do problema (6.4) com um termo de barreira em $\tilde{u}$ associado, ou seja

$$\begin{array}{rl} & \text{minimizar } F(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) - \beta_s^k\sum_{j=1}^{2}\left[\ln(s_j) + \ln(1-s_j)\right] \\ \text{sujeita a} & \left\{\begin{array}{l} P_2^{esp} - P_2(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ P_3^{esp} - P_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ Q_3^{esp} - Q_3(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) = 0 \\ s_1 - \frac{Q_{g1}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) - Q_{g1}^{\min}}{Q_{g1}^{\max} - Q_{g1}^{\min}} = 0 \\ s_2 - \frac{Q_{g2}(\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3) - Q_{g2}^{\min}}{Q_{g2}^{\max} - Q_{g2}^{\min}} = 0 \\ V_1^{\min} \leq V_1 \leq V_1^{\max} \\ V_2^{\min} \leq V_2 \leq V_2^{\max} \\ V_3^{\min} \leq V_3 \leq V_3^{\max} \end{array}\right. , \end{array} \tag{6.17}$$

onde $\tilde{u} = (s_1,s_2)^t$ e $\tilde{x} = (\theta_2,\theta_3,V_1,V_2,V_3)^t$.

6.8.1 Considerando $h_2^{\max} = -0.5$

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização partindo-se do ponto $\tilde{x} = (0.20980, 0.11108, 1.4665, 1.3033, 1.3048)^t$, com $\beta_{\tilde{u}}^0 = 0.00005$ e $\beta_{\tilde{u}}^{\lim} = 10^{-8}$.

Estratégia com Penalidade (P1)

A Tabela 6.7 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica sobre $\tilde{u}$ e penalidade sobre $\tilde{x}$ para resolver o problema (6.17).

Tabela 6.7: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$ ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4665	1.3032	1.3048	50.00	5.0000e-005	0.304786	-0.107812
	1.3206	1.1320	1.1281			0.128150	0.014249
	1.2975	1.0945	1.0906			0.090558	0.003327
	1.2387	1.0122	1.0096			0.009596	0.009635
	1.2536	1.0303	1.0277			0.027652	-0.000319
	1.2516	1.0272	1.0246			0.024647	-0.000458
	1.2523	1.0283	1.0257			0.025728	-0.000473
	1.2522	1.0281	1.0255			0.025506	-0.000475
2	1.2331	0.9996	0.9976	60.00	2.5000e-005	-0.002386	0.000878
	1.2388	1.0078	1.0057			0.005702	-0.000379
	1.2390	1.0081	1.0060			0.005986	-0.000475
3	1.2363	1.0039	1.0019	72.00	1.2500e-005	0.001874	-0.000444
	1.2368	1.0048	1.0027			0.002706	-0.000474
	1.2368	1.0047	1.0026			0.002628	-0.000475
4	1.2340	1.0004	0.9985	86.40	6.2500e-006	-0.001543	-0.000442
	1.2343	1.0008	0.9989			-0.001108	-0.000475
	1.2346	1.0012	0.9993			-0.000737	-0.000475
5	1.2290	0.9926	0.9909	103.68	3.1250e-006	-0.009144	-0.000342
	1.2302	0.9943	0.9926			-0.007442	-0.000470
	1.2300	0.9940	0.9922			-0.007778	-0.000475
6	1.2243	0.9851	0.9836	124.42	1.5625e-006	-0.016440	-0.000332
	1.2262	0.9880	0.9864			-0.013581	-0.000460
	1.2258	0.9874	0.9858			-0.014232	-0.000474
	1.2259	0.9875	0.9859			-0.014115	-0.000475
7	1.2202	0.9784	0.9770	149.30	7.8125e-007	-0.022967	-0.000323
	1.2227	0.9824	0.9809			-0.019089	-0.000447
	1.2222	0.9816	0.9801			-0.019884	-0.000474
	1.2223	0.9817	0.9802			-0.019757	-0.000475
8	1.2194	0.9771	0.9757	179.16	3.9063e-007	-0.024268	-0.000435
	1.2190	0.9764	0.9751			-0.024862	-0.000474
	1.2191	0.9765	0.9752			-0.024765	-0.000475
9	1.2162	0.9718	0.9707	214.99	1.9531e-007	-0.029341	-0.000433
	1.2163	0.9720	0.9708			-0.029168	-0.000475
10	1.2134	0.9672	0.9662	257.99	9.7656e-008	-0.033810	-0.000432
	1.2140	0.9682	0.9671			-0.032911	-0.000473
	1.2139	0.9680	0.9670			-0.033020	-0.000475
11	1.2110	0.9632	0.9623	309.59	4.8828e-008	-0.037727	-0.000430
	1.2119	0.9647	0.9638			-0.036217	-0.000470
	1.2118	0.9646	0.9636			-0.036380	-0.000475
12	1.2089	0.9597	0.9589	371.50	2.4414e-008	-0.041143	-0.000429
	1.2101	0.9618	0.9609			-0.039101	-0.000467
	1.2100	0.9616	0.9607			-0.039296	-0.000475
13	1.2086	0.9591	0.9583	445.81	1.2207e-008	-0.041701	-0.000463
	1.2085	0.9590	0.9582			-0.041814	-0.000475
14	1.2070	0.9565	0.9558	534.97	1.0000e-008	-0.044221	-0.000463
	1.2072	0.9567	0.9560			-0.043981	-0.000475
15	1.2057	0.9543	0.9536	641.96	1.0000e-008	-0.046353	-0.000463
	1.2061	0.9549	0.9542			-0.045801	-0.000474
	1.2060	0.9548	0.9542			-0.045837	-0.000475
16	1.2046	0.9524	0.9518	770.35	1.0000e-008	-0.048179	-0.000463
	1.2051	0.9532	0.9526			-0.047374	-0.000474

Tabela 6.7: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$ ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
	1.2051	0.9532	0.9526			-0.047418	-0.000475
17	1.2037	0.9508	0.9503	924.42	1.0000e-008	-0.049735	-0.000464
	1.2043	0.9518	0.9513			-0.048717	-0.000473
	1.2043	0.9518	0.9512			-0.048764	-0.000475
18	1.2040	0.9513	0.9507	1109.31	1.0000e-008	-0.049271	-0.000474
	1.2040	0.9513	0.9507			-0.049278	-0.000475

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 6.8 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante para resolver o problema (6.17).

Tabela 6.8: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4665	1.3032	1.3048	50.00	0.000000	5.0000e-005	0.304786	-0.107812
	1.3206	1.1320	1.1281				0.128150	0.014249
	1.2975	1.0945	1.0906				0.090558	0.003327
	1.2387	1.0122	1.0096				0.009596	0.009635
	1.2536	1.0303	1.0277				0.027652	-0.000319
	1.2516	1.0272	1.0246				0.024647	-0.000458
	1.2523	1.0283	1.0257				0.025728	-0.000473
	1.2522	1.0281	1.0255				0.025506	-0.000475
2	1.2141	0.9711	0.9697	50.00	1.275306	2.5000e-005	-0.030278	0.004787
	1.2168	0.9728	0.9716				-0.028374	-0.000483
	1.2176	0.9742	0.9729				-0.027051	-0.000471
	1.2174	0.9738	0.9726				-0.027426	-0.000475
3	1.2042	0.9521	0.9515	50.00	0.000000	1.2500e-005	-0.048524	0.000403
	1.2092	0.9602	0.9593				-0.040665	-0.000363
	1.2059	0.9547	0.9540				-0.045976	-0.000415
	1.2078	0.9579	0.9571				-0.042882	-0.000455
	1.2067	0.9560	0.9553				-0.044680	-0.000468
	1.2074	0.9571	0.9564				-0.043616	-0.000473
	1.2070	0.9565	0.9558				-0.044243	-0.000474
	1.2071	0.9566	0.9559				-0.044114	-0.000475
4	1.2017	0.9474	0.9470	50.00	0.000000	6.2500e-006	-0.053002	-0.000311
	1.2045	0.9522	0.9517				-0.048341	-0.000430
	1.2024	0.9486	0.9482				-0.051845	-0.000449
	1.2037	0.9509	0.9503				-0.049666	-0.000465
	1.2029	0.9495	0.9490				-0.051019	-0.000471
	1.2034	0.9503	0.9498				-0.050190	-0.000474
	1.2033	0.9501	0.9496				-0.050360	-0.000475
5	1.2007	0.9457	0.9453	50.00	0.000000	3.1250e-006	-0.054699	-0.000435

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 6.9 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente para resolver o problema (6.17).

Tabela 6.9: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente ($h_2^{max} = -0.5$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4665	1.3032	1.3048	50.00	0.000000	5.0000e-005	0.304786	-0.107812
	1.3206	1.1320	1.1281				0.128150	0.014249
	1.2975	1.0945	1.0906				0.090558	0.003327
	1.2387	1.0122	1.0096				0.009596	0.009635
	1.2536	1.0303	1.0277				0.027652	-0.000319
	1.2516	1.0272	1.0246				0.024647	-0.000458
	1.2523	1.0283	1.0257				0.025728	-0.000473
	1.2522	1.0281	1.0255				0.025506	-0.000475
2	1.2141	0.9711	0.9697	60.00	1.275306	2.5000e-005	-0.030278	0.004787
	1.2160	0.9714	0.9703				-0.029731	-0.000469
	1.2158	0.9711	0.9700				-0.030041	-0.000475
	1.2153	0.9704	0.9693				-0.030737	-0.000474
	1.2154	0.9705	0.9694				-0.030615	-0.000475
3	1.2025	0.9492	0.9487	72.00	0.000000	1.2500e-005	-0.051303	0.000375
	1.2066	0.9557	0.9551				-0.044940	-0.000404
	1.2047	0.9525	0.9519				-0.048103	-0.000453
	1.2055	0.9539	0.9533				-0.046724	-0.000471
	1.2051	0.9533	0.9527				-0.047318	-0.000474
	1.2052	0.9534	0.9528				-0.047169	-0.000475
4	1.2018	0.9476	0.9471	86.40	0.000000	6.2500e-006	-0.052855	-0.000407
	1.2017	0.9474	0.9470				-0.052974	-0.000475
5	1.2004	0.9451	0.9447	103.68	0.000000	3.1250e-006	-0.055268	-0.000464

As Figuras 6.9(a), 6.9(b) e 6.9(c), na Página 126, apresentam curvas de nível das funções objetivo e h_2, a região de factibilidade e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (6.4), utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em x com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.10(a), 6.10(b) e 6.10(c), na Página 126, apresentam os perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.11(a), 6.11(b) e 6.11(c), na Página 127, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.12(a), 6.12(b) e 6.12(c), na Página 127, apresentam os números de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

6.8.2 Comentários

De acordo com os gráficos da Figura 6.9 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela

6.7 com as Tabelas 6.8 e 6.9 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos P1 do que P2 e P3.

Devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, o processo iterativo gera uma trajetória infactível em direção a uma solução ótima.

Ainda com relação à Tabela 6.7, verificamos que o processo iterativo utilizando P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3}.

De acordo com os gráficos da Figura 6.10 percebemos que P2 e P3 apresentam comportamentos muito semelhantes em termos de perfis das tensões. Analisando as outras figuras, percebemos que P2 e P3 têm comportamentos muito semelhantes em termos de performance das funções objetivo e Lagrangeana aumentada (Figura 6.11) e iterações internas e externas (Figura 6.12) com P3 levando vantagem no número total de iterações.

6.8.3 Considerando $h_2^{max} = 0.0$

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização partindo-se do ponto $\tilde{x} = (0.1517, 0.0680, 1.4211, 1.3340, 1.3004)^t$, com $\beta = 0.00005$.

Estratégia com Penalidade (P1)

A Tabela 6.10 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica sobre $\tilde{u}$ e penalidade sobre $\tilde{x}$ para resolver o problema (6.17).

Tabela 6.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$ ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4211	1.3339	1.3004	50.00	5.0000e-005	0.300418	-0.072364
	1.2116	1.1053	1.0619			0.061943	0.020456
	1.2203	1.1064	1.0617			0.061665	0.000195
	1.2245	1.1113	1.0668			0.066775	-0.000477
	1.2233	1.1098	1.0652			0.065193	-0.000497
	1.2234	1.1099	1.0653			0.065316	-0.000500
2	1.1708	1.0451	0.9990	60.00	2.5000e-005	-0.001013	0.003588
	1.1834	1.0599	1.0141			0.014065	-0.000414
	1.1869	1.0642	1.0185			0.018543	-0.000479
	1.1866	1.0638	1.0181			0.018134	-0.000500
3	1.1828	1.0590	1.0132	72.00	1.2500e-005	0.013212	-0.000473
	1.1845	1.0611	1.0154			0.015390	-0.000495
	1.1844	1.0610	1.0153			0.015265	-0.000500
4	1.1825	1.0586	1.0128	86.40	6.2500e-006	0.012779	-0.000493
	1.1825	1.0587	1.0128			0.012830	-0.000500
5	1.1806	1.0562	1.0103	103.68	3.1250e-006	0.010324	-0.000493
	1.1810	1.0566	1.0108			0.010769	-0.000500
6	1.1791	1.0542	1.0082	124.42	1.5625e-006	0.008246	-0.000493
	1.1797	1.0549	1.0090			0.009030	-0.000500
7	1.1777	1.0525	1.0065	149.30	7.8125e-007	0.006492	-0.000493
	1.1786	1.0535	1.0076			0.007598	-0.000499
	1.1785	1.0535	1.0076			0.007564	-0.000500

Tabela 6.10: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$ ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
8	1.1776	1.0523	1.0063	179.16	3.9063e-007	0.006289	-0.000498
	1.1776	1.0523	1.0063			0.006331	-0.000500
9	1.1766	1.0511	1.0051	214.99	1.9531e-007	0.005050	-0.000498
	1.1768	1.0513	1.0053			0.005296	-0.000500
10	1.1759	1.0500	1.0040	257.99	9.7656e-008	0.004010	-0.000498
	1.1762	1.0504	1.0044			0.004427	-0.000500
11	1.1752	1.0492	1.0031	309.59	4.8828e-008	0.003137	-0.000498
	1.1756	1.0497	1.0037			0.003698	-0.000500
12	1.1752	1.0491	1.0031	371.50	2.4414e-008	0.003089	-0.000500
13	1.1748	1.0486	1.0026	445.81	1.2207e-008	0.002580	-0.000500
14	1.1745	1.0482	1.0022	534.97	1.0000e-008	0.002154	-0.000500
15	1.1742	1.0479	1.0018	641.96	1.0000e-008	0.001798	-0.000500
16	1.1740	1.0476	1.0015	770.35	1.0000e-008	0.001498	-0.000500
17	1.1738	1.0473	1.0012	924.42	1.0000e-008	0.001250	-0.000500
18	1.1737	1.0473	1.0012	1109.31	1.0000e-008	0.001156	-0.000500

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 6.11 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ para resolver o problema (6.17).

Tabela 6.11: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4211	1.3339	1.3004	50.00	0.000000	5.0000e-005	0.300418	-0.072364
	1.2116	1.1053	1.0619				0.061943	0.020456
	1.2203	1.1064	1.0617				0.061665	0.000195
	1.2245	1.1113	1.0668				0.066775	-0.000477
	1.2233	1.1098	1.0652				0.065193	-0.000497
	1.2234	1.1099	1.0653				0.065316	-0.000500
2	1.1181	0.9804	0.9327	50.00	3.265819	2.5000e-005	-0.067342	0.014536
	1.1393	1.0015	0.9543				-0.045659	-0.000809
	1.1454	1.0099	0.9629				-0.037056	-0.000400
	1.1443	1.0084	0.9614				-0.038644	-0.000496
	1.1444	1.0085	0.9614				-0.038565	-0.000500
3	1.1877	1.0670	1.0214	50.00	1.337559	1.2500e-005	0.021364	0.004311
	1.1629	1.0338	0.9874				-0.012634	0.001145
	1.1704	1.0430	0.9968				-0.003196	-0.000438
	1.1704	1.0429	0.9967				-0.003271	-0.000500
4	1.1731	1.0465	1.0004	50.00	1.174022	6.2500e-006	0.000418	-0.000484

Estratégia com Lagrangeana Aumentada e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 6.12 apresenta o resumo dos cálculos realizados usando o método do gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada sobre $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente para resolver o problema (6.17).

Tabela 6.12: Iterações e valores de tensão obtidos com gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente ($h_2^{max} = 0.0$).

Iteração Externa	V_1	V_2	V_3	$c_{\tilde{x}}$	$\mu_{\tilde{x}}$	β	$V_3 - V_3^{\max}$	$Q_{g2} - Q_{g2}^{\max}$
1	1.4211	1.3339	1.3004	50.00	0.000000	5.0000e-005	0.300418	-0.072364
	1.2116	1.1053	1.0619				0.061943	0.020456
	1.2203	1.1064	1.0617				0.061665	0.000195
	1.2245	1.1113	1.0668				0.066775	-0.000477
	1.2233	1.1098	1.0652				0.065193	-0.000497
	1.2234	1.1099	1.0653				0.065316	-0.000500
2	1.1181	0.9804	0.9327	60.00	3.265819	2.5000e-005	-0.067342	0.014536
	1.1378	0.9995	0.9523				-0.047699	-0.000811
	1.1552	1.0233	0.9767				-0.023338	0.000128
	1.1484	1.0139	0.9670				-0.032976	-0.000371
	1.1487	1.0143	0.9674				-0.032635	-0.000500
3	1.1700	1.0429	0.9967	72.00	1.307731	1.2500e-005	-0.003291	0.000594
	1.1724	1.0456	0.9995				-0.000528	-0.000499

As Figuras 6.13(a), 6.13(b) e 6.13(c), na Página 128, apresentam curvas de nível das funções objetivo e h_2, a região de factibilidade e as trajetórias para a solução ótima no espaço das variáveis V_2 e V_1 partindo-se da solução ótima obtida na resolução do subproblema (3.1), utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.14(a), 6.14(b) e 6.14(c), na Página 128, apresentam as perfis das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.15(a), 6.15(b) e 6.15(c), na Página 129, apresentam os desempenhos das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada, ao longo do processo de otimização utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 6.16(a), 6.16(b) e 6.16(c), na Página 129, apresentam os números de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

6.8.4 Comentários

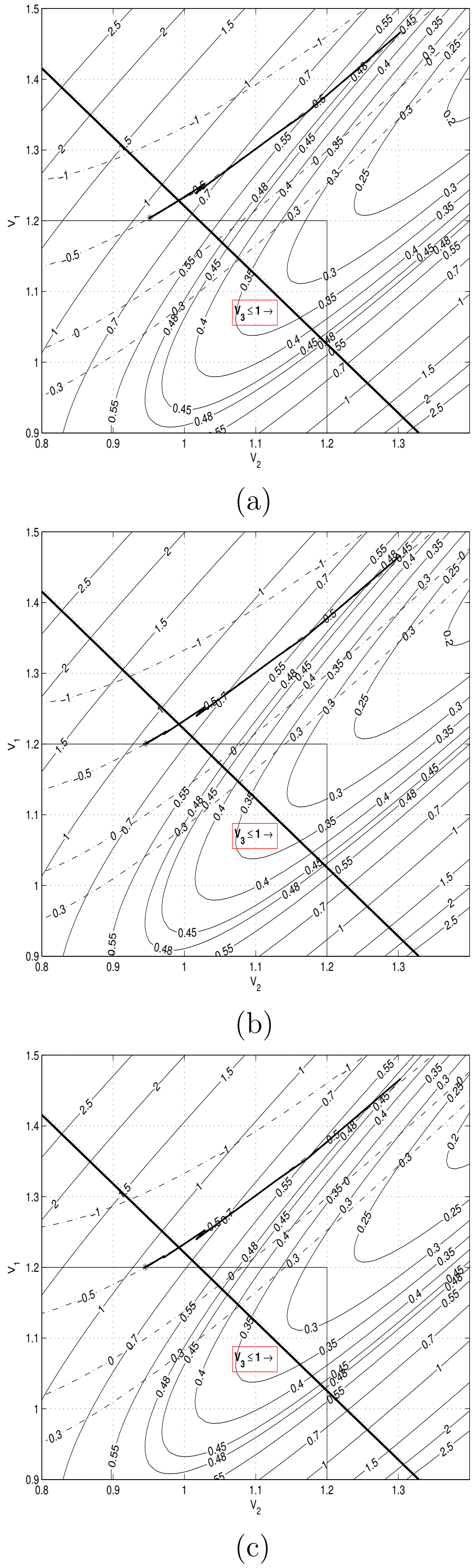
De acordo com os gráficos da Figura 6.13 percebemos que os procedimentos P1, P2 e P3 apresentam trajetórias muito semelhantes em direção à solução ótima, mas comparando a Tabela 6.10 com as Tabelas 6.11 e 6.12 verificamos que a geração de pontos que dão origem a essas trajetórias é muito mais lenta quando utilizamos P1 do que P2 e P3.

Devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, o processo iterativo gera uma trajetória infactível em direção a uma solução ótima (factível).

A partir da segunda iteração externa, verificamos que com P1 as funções objetivo, barreira e penalizada exibem comportamento assintótico em direção ao valor objetivo ótimo (Figura 6.15(a)) e, até a terceira iteração externa, P2 e P3 têm comportamentos muito semelhantes em termos de perfis das tensões (Figura 6.14), funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada (Figura 6.15) e iterações internas e externas (Figura 6.16) com o procedimento P3 levando pequena vantagem.

Ainda com relação à Tabela 6.10, verificamos que o processo iterativo utilizando P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3}.

No capítulo a seguir, apresentaremos resultados de otimização em sistemas de dimensões maiores utilizando as estratégias descritas neste capítulo e nos Capítulos 4 e 5.



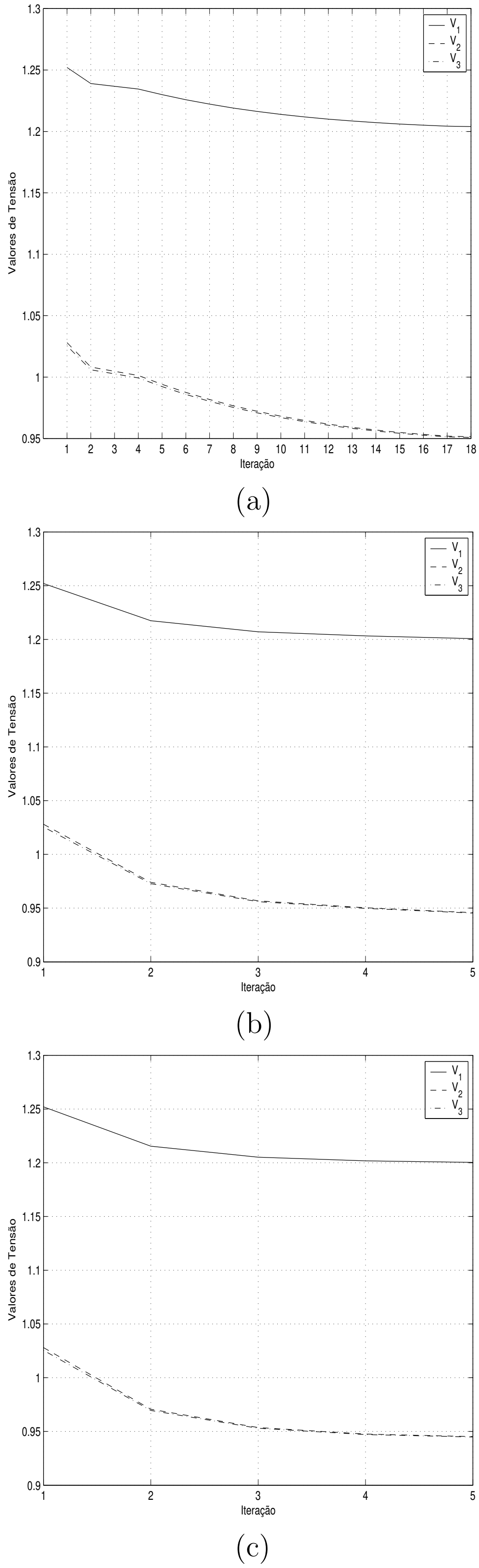
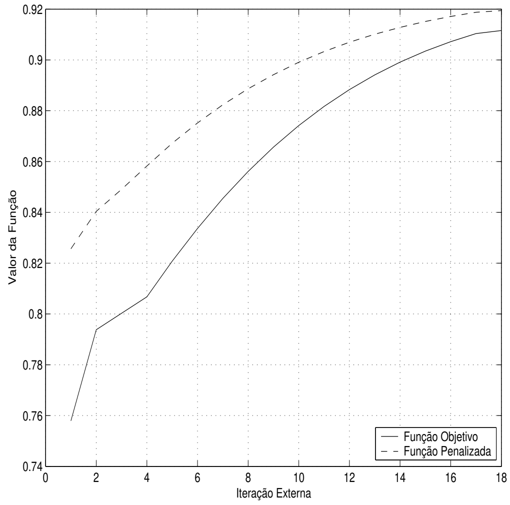
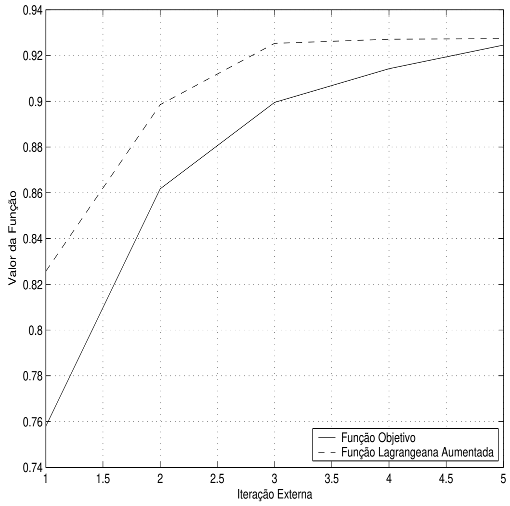


Figura 6.1: Curvas de nível das funções objetivo e h_2, região de factibilidade e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h^{max} = -0,5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

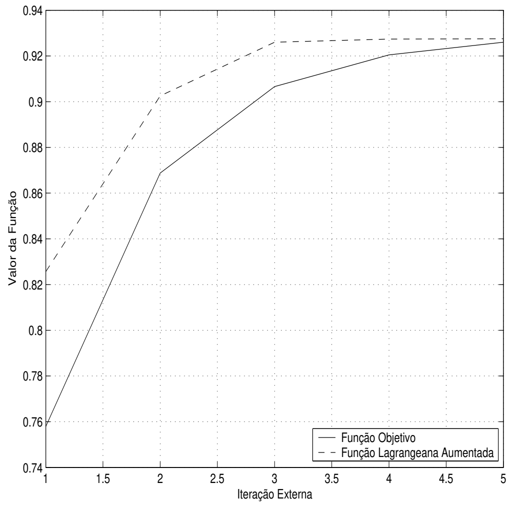
Figura 6.2: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h^{max} = -0,5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

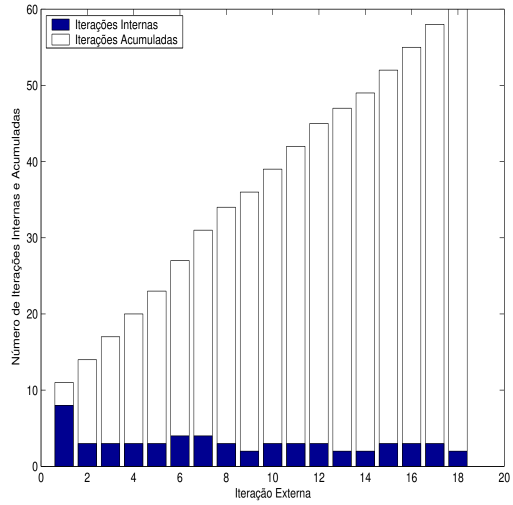


(b)

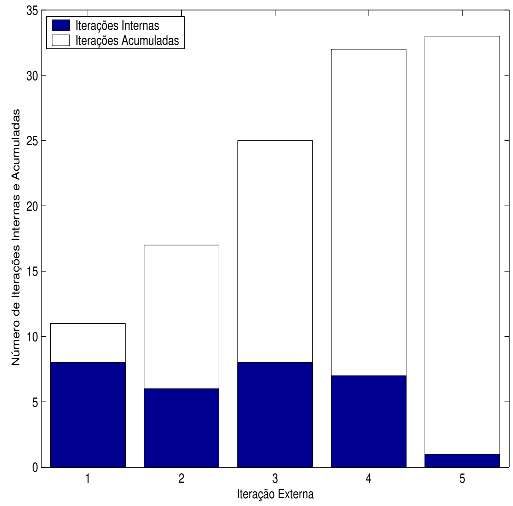


(c)

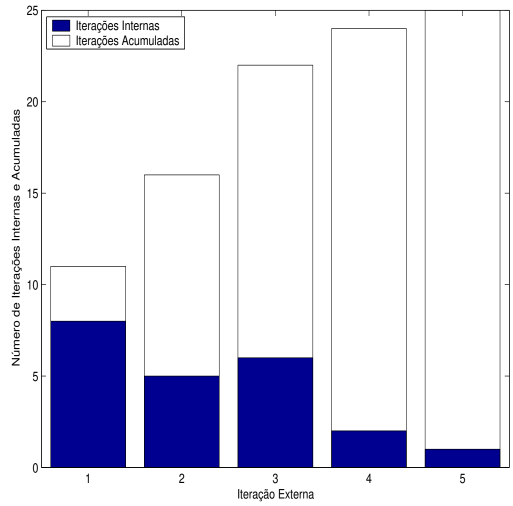
Figura 6.3: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada ao longo do processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h^{max} = -0,5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

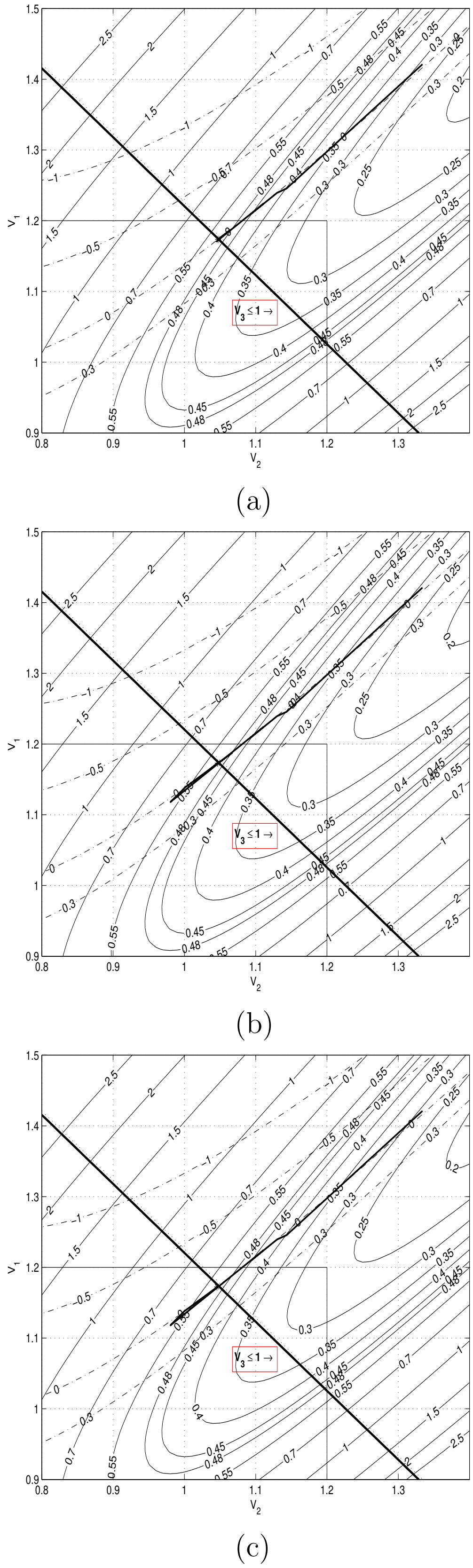


(b)



(c)

Figura 6.4: Números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h^{max} = -0,5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



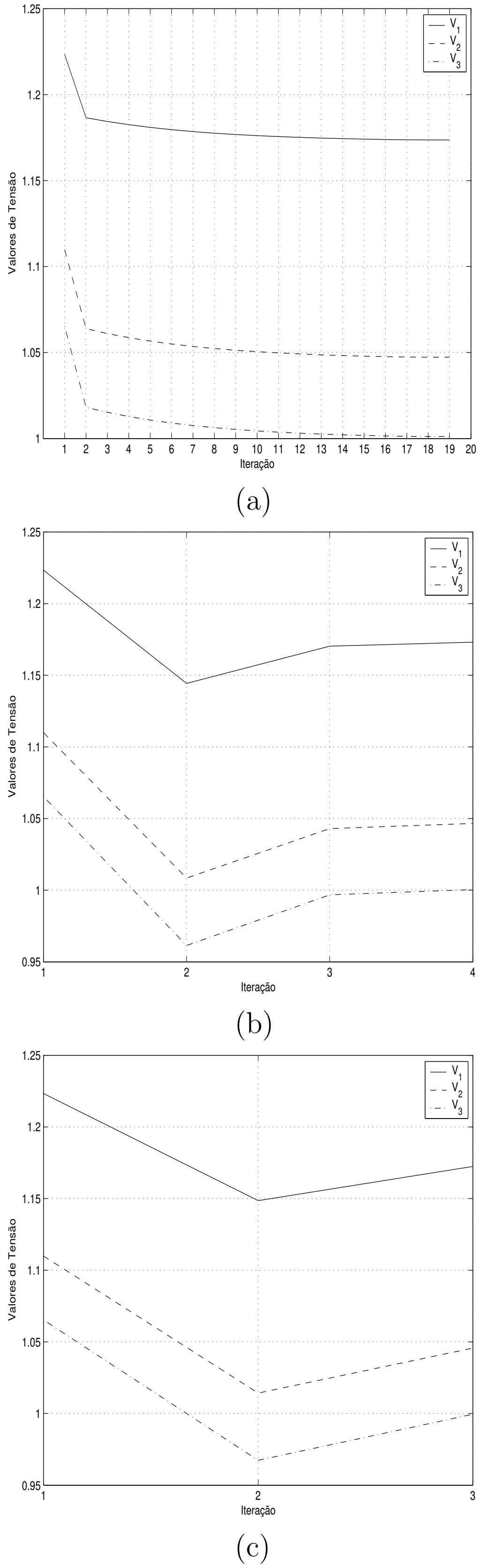
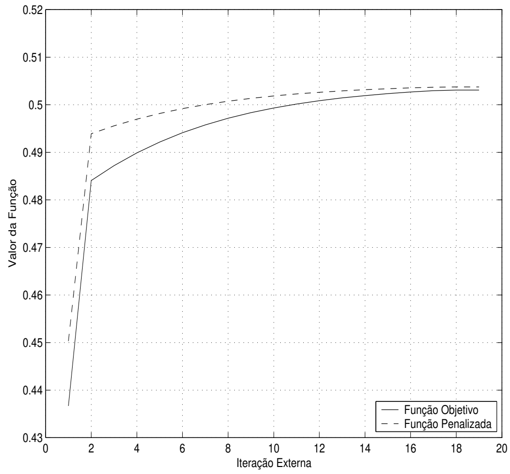
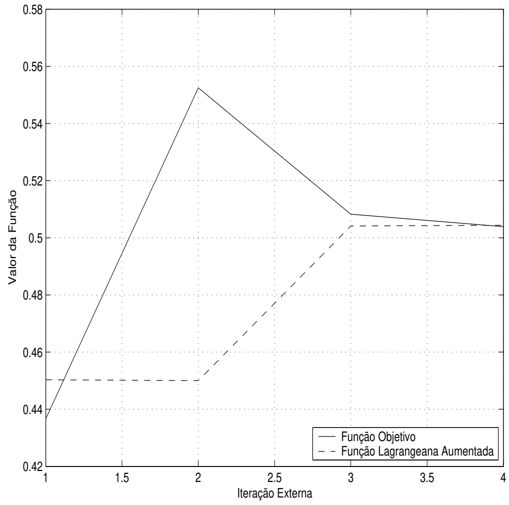


Figura 6.5: Curvas de nível das funções objetivo e h_2, região de factibilidade e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 com gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

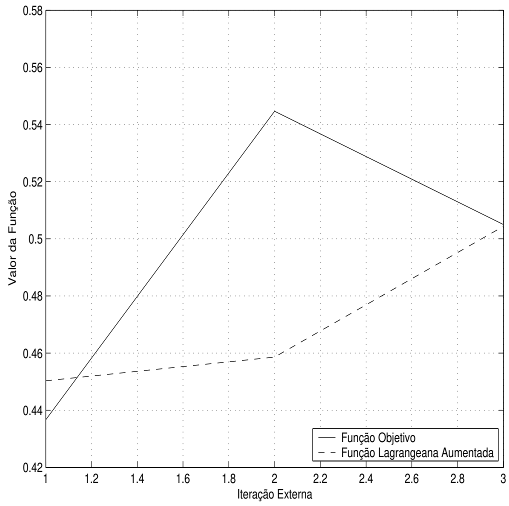
Figura 6.6: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

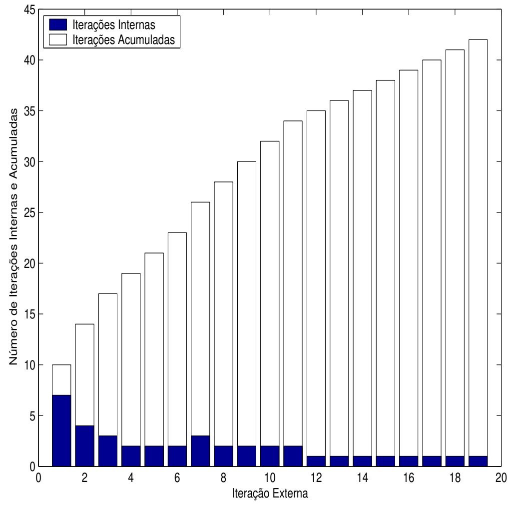


(b)

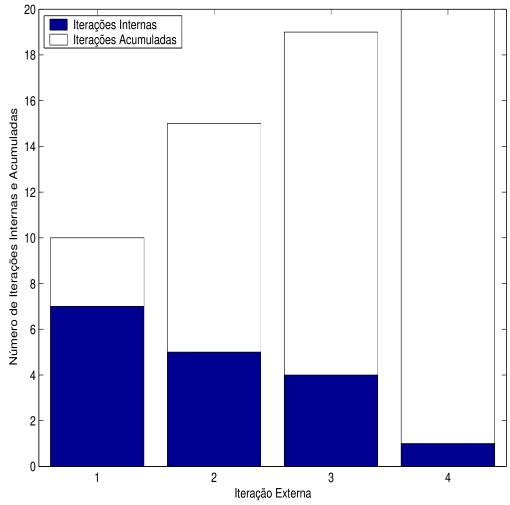


(c)

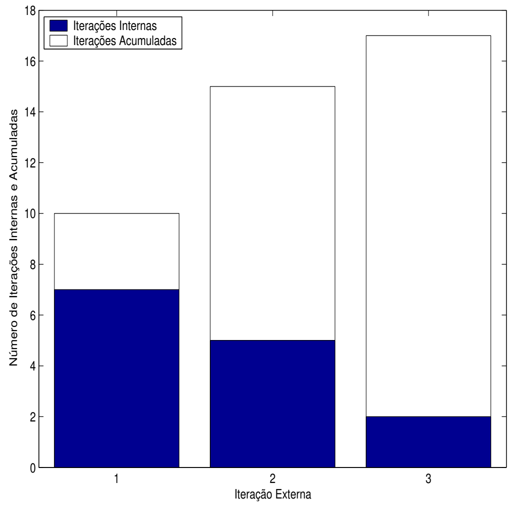
Figura 6.7: Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada ao longo do processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

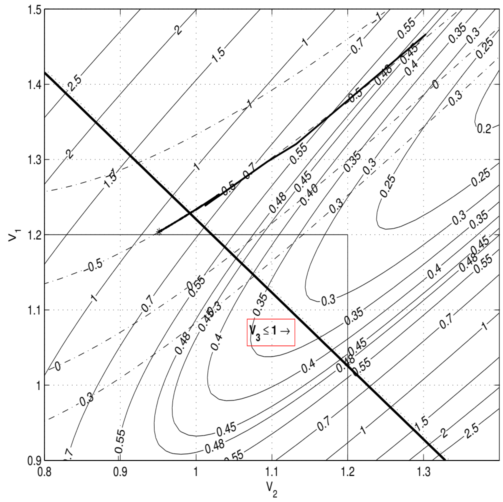


(b)

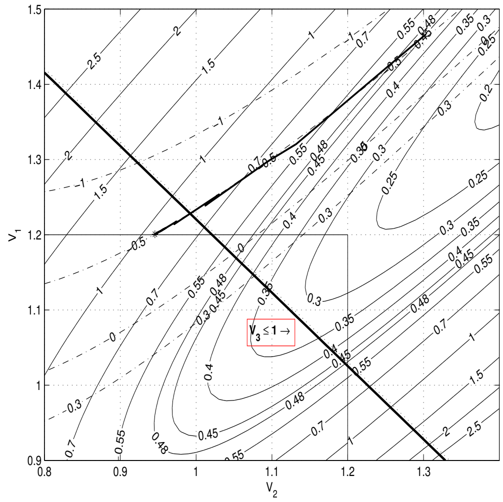


(c)

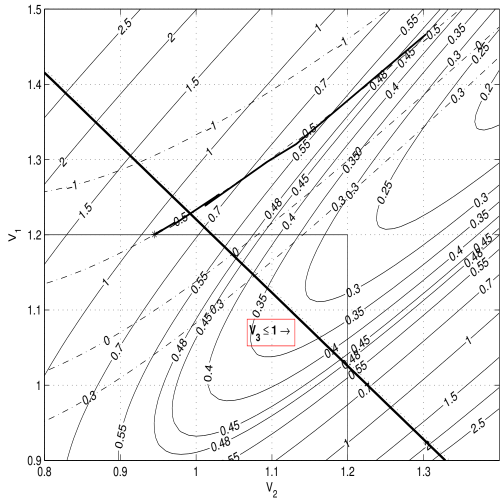
Figura 6.8: Números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

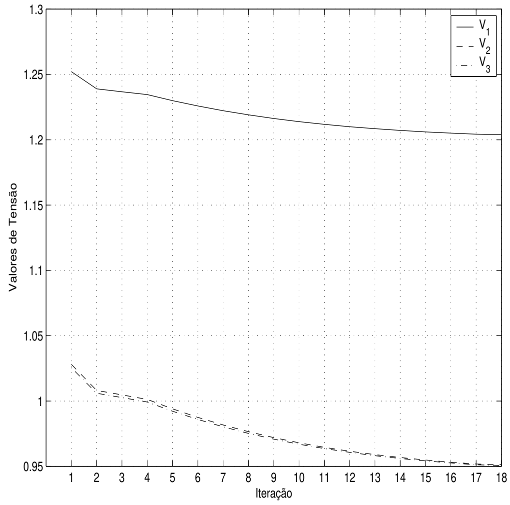


(b)

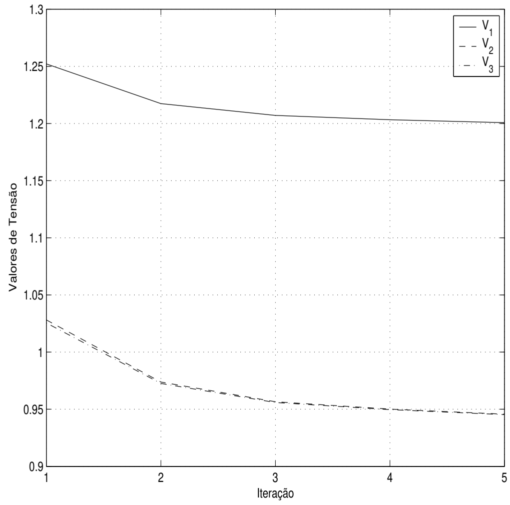


(c)

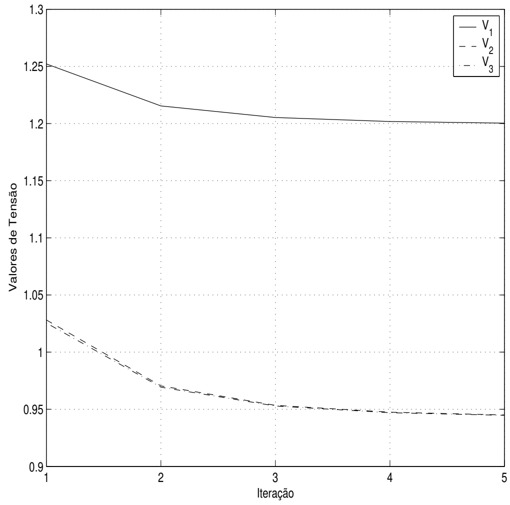
Figura 6.9: Curvas de nível das funções objetivo e h_2, região de factibilidade e trajetória ótima no espaço V_2 e V_1 utilizando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.10: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

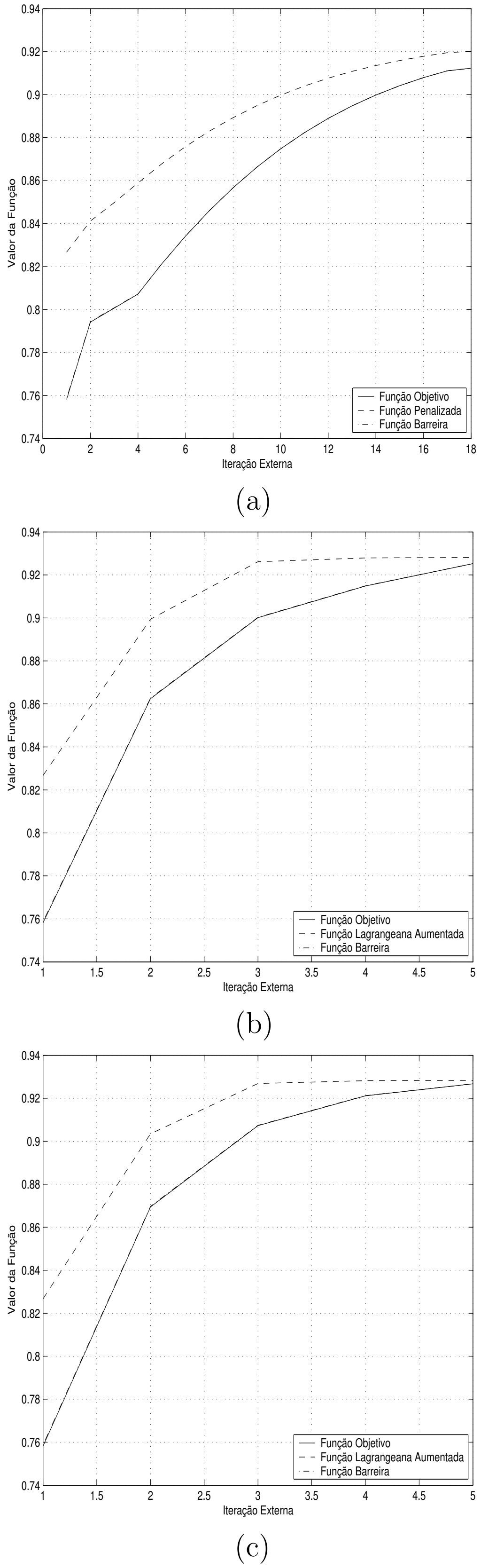


Figura 6.11: Performance das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada, e barreira considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

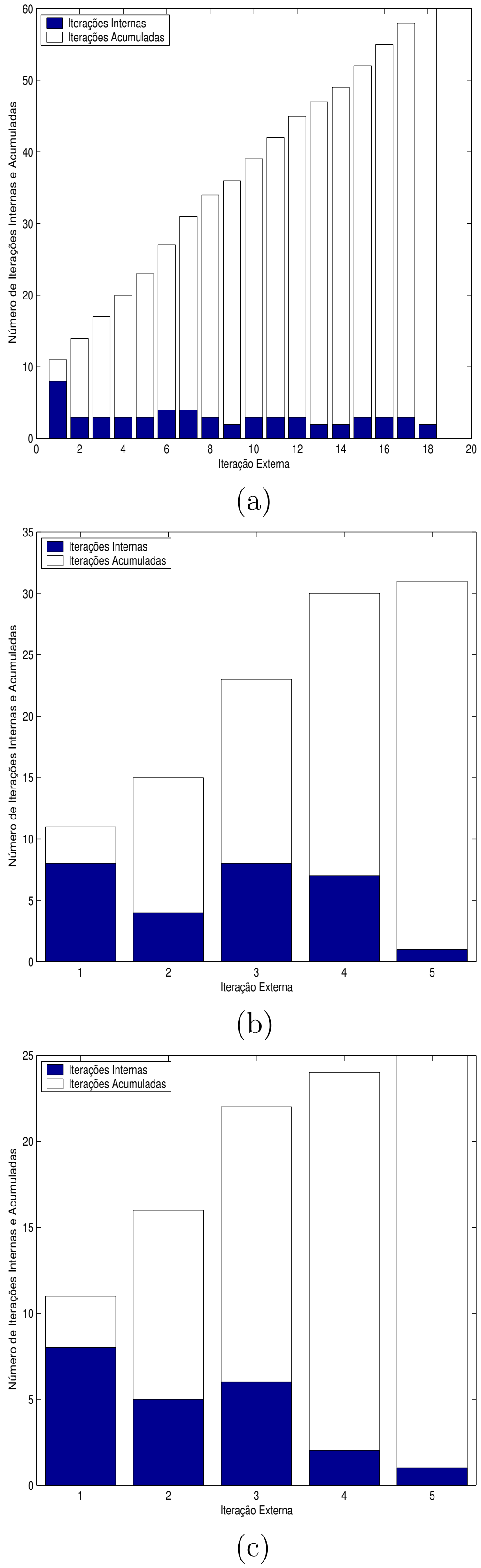
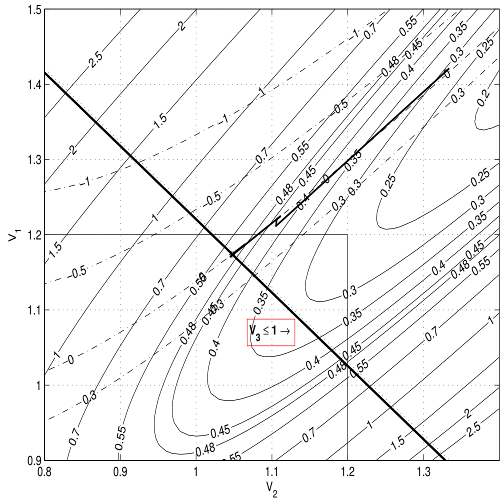
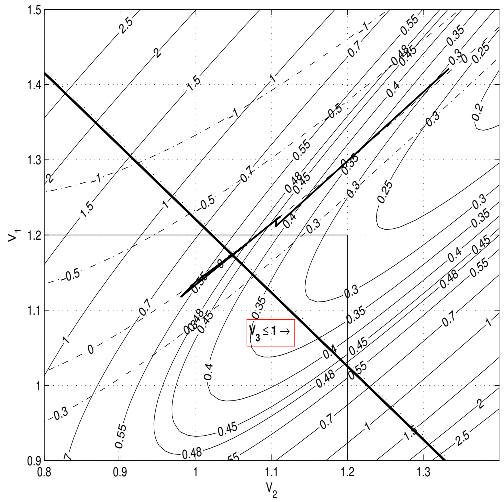


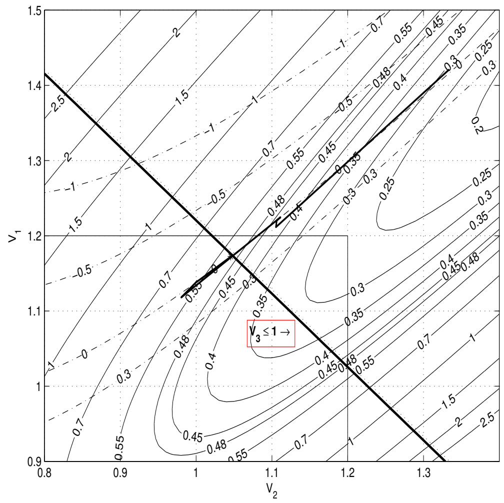
Figura 6.12: Números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = -0.5$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

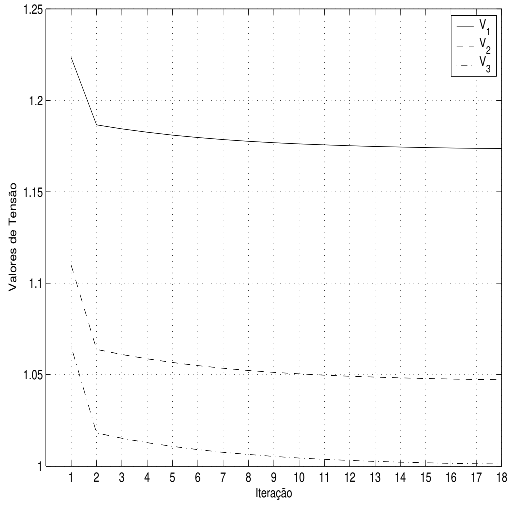


(b)

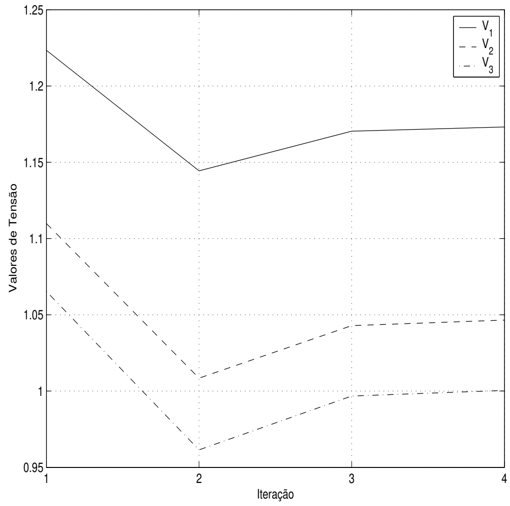


(c)

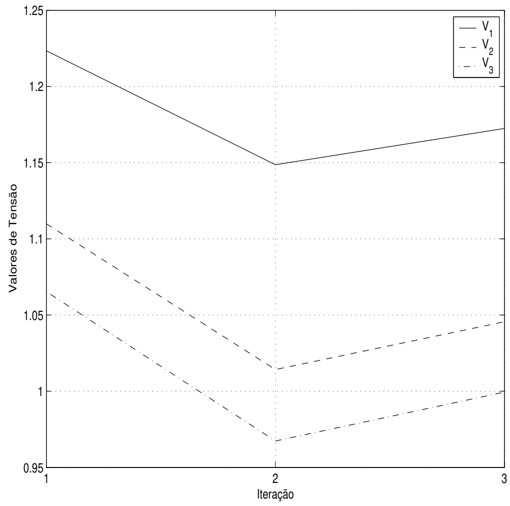
Figura 6.13: Curvas de nível das funções objetivo e h_2, região de factibilidade e trajetória ótima considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

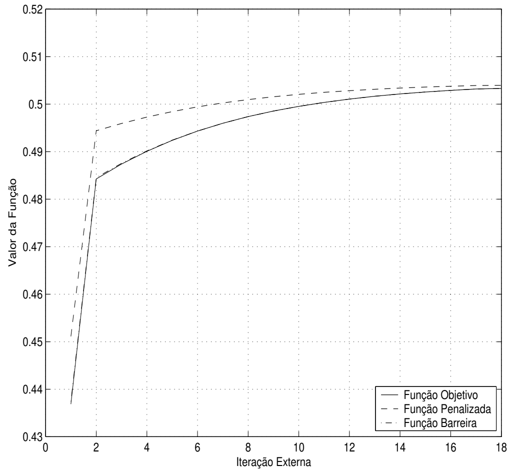


(b)

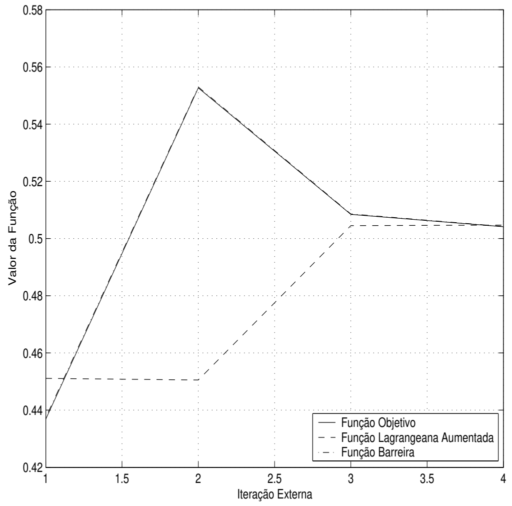


(c)

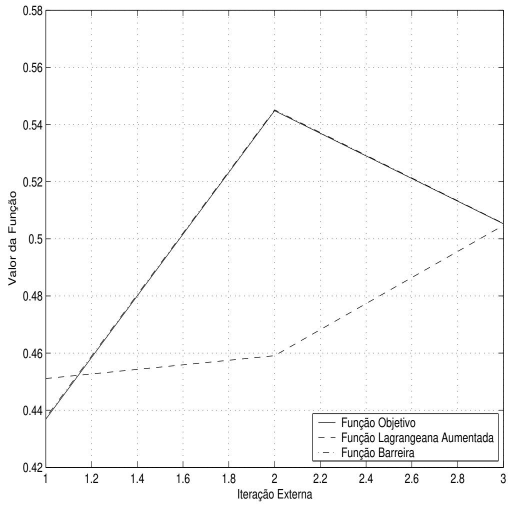
Figura 6.14: Perfis das tensões ao final de cada iteração externa durante o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

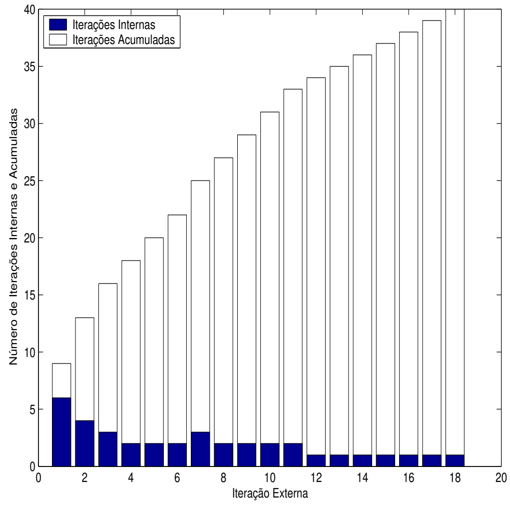


(b)

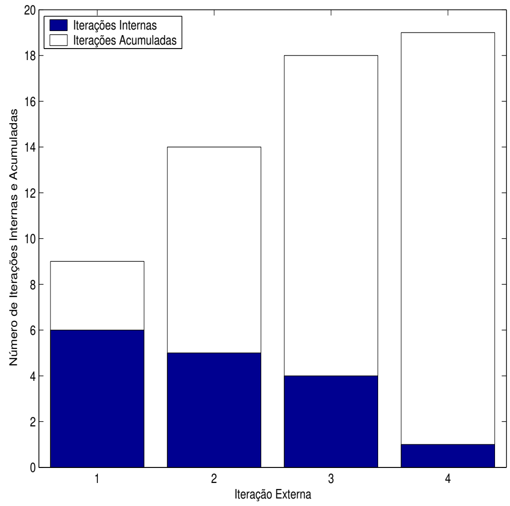


(c)

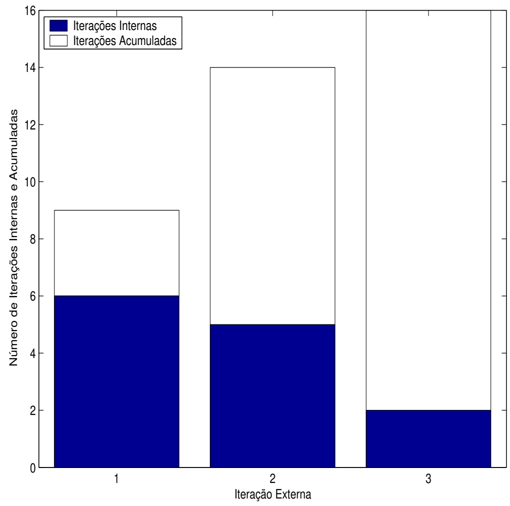
Figura 6.15: Performance das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada, e barreira considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.16: Número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em $\tilde{u}$, $h_2^{max} = 0.0$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Capítulo 7

Testes e Resultados

7.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados do processo de otimização aplicado em sistemas de dimensões maiores (IEEE 14 e IEEE 30) utilizando as técnicas descritas nos Capítulos 4, 5 e 6. Os resultados foram obtidos resolvendo-se o problema completo (7.1) abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x,u) \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} g(x,u) = 0 \\ h^{\min} \le h(x,u) \le h^{\max} \\ u^{\min} \le u \le u^{\max} \\ x^{\min} \le x \le x^{\max} \end{cases} \end{array} \tag{7.1}$$

Os limites sobre V, considerados neste capítulo, são $V^{\min} = 0.95$ e $V^{\max} = 1.05$. Os limites sobre h estão apresentados nas tabelas de valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 (SL) e tipo 2 (PV).

7.2 Sistema IEEE 14

Este sistema é composto de 14 barras e 27 linhas de transmissão. A Tabela 7.1 resume a natureza das barras e os tipos de restrições nodais associadas.

Tabela 7.1: Natureza das barras e tipos de restrições nodais associadas.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Tensão
9	PQ	igualdade	igualdade	canalização
1	SL	-	canalização	canalização
4	PV	igualdade	canalização	canalização

Este sistema elétrico tem as seguintes características:

- Rede: $\begin{cases} 14 \text{ barras} \begin{cases} 1 \text{ de referência (SL)} \\ 4 \text{ de geração (PV)} \\ 9 \text{ de carga (PQ)} \end{cases} \\ 27 \text{ linhas de transmissão} \end{cases}$
- Função objetivo: perdas nos elementos-série (ver Apêndice B)
- Restrições de igualdade: 22 restrições
- Restrições canalizadas: $\begin{cases} 14 \text{ de tensão} \\ 4 \text{ de potência reativa} \end{cases}$

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização.

7.2.1 Gradiente Reduzido Projetado

A Tabela 7.2 apresenta os valores iniciais e limites dos fatores de penalidade considerados.

Tabela 7.2: Valores iniciais e limites dos fatores de penalidade.

Valor	c_x	c_h
Inicial	10	10
Limite	1.00e+006	1.00e+006

Estratégia com Penalidade em x e h (P1)

A Tabela 7.3 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.3: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0865	-0.0887	1.0450	1.0344
3	2	-0.2205	-0.2296	1.0100	1.0140
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0077
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0129
6	2	-0.2596	-0.2654	1.0700	1.0193
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0064
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0367
9	0	-0.2630	-0.2721	1.0279	0.9882
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9858
11	0	-0.2655	-0.2732	1.0450	0.9986
12	0	-0.2743	-0.2816	1.0530	1.0024
13	0	-0.2746	-0.2824	1.0463	0.9962
14	0	-0.2861	-0.2963	1.0176	0.9725

A Tabela 7.4 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.4: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17223	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.20041	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.22153	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.24097	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17832	0.24000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.5 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.5: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0865	-0.0887	1.0450	1.0344
3	2	-0.2205	-0.2296	1.0100	1.0141
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0077
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0129
6	2	-0.2596	-0.2654	1.0700	1.0191
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0065
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0369
9	0	-0.2630	-0.2721	1.0279	0.9882
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9858
11	0	-0.2655	-0.2732	1.0450	0.9985
12	0	-0.2743	-0.2816	1.0530	1.0023
13	0	-0.2746	-0.2824	1.0463	0.9961
14	0	-0.2861	-0.2963	1.0176	0.9725

A Tabela 7.6 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.6: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 e seus respectivos multiplicadores de Lagrange considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade constantes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17213	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19974	0.20000	0.01803
3	2	0.00000	0.01024	0.22242	0.40000	0.00000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23978	0.24000	0.04341
8	2	-0.06000	0.27891	0.17925	0.24000	0.00000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.7 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade crescentes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.7: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0865	-0.0886	1.0450	1.0343
3	2	-0.2205	-0.2296	1.0100	1.0138
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0075
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0128
6	2	-0.2596	-0.2654	1.0700	1.0190
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0061
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0364
9	0	-0.2630	-0.2722	1.0279	0.9879
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9855
11	0	-0.2655	-0.2733	1.0450	0.9983
12	0	-0.2743	-0.2817	1.0530	1.0021
13	0	-0.2746	-0.2824	1.0463	0.9959
14	0	-0.2861	-0.2964	1.0176	0.9722

A Tabela 7.8 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.8: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 e seus respectivos multiplicadores de Lagrange considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.16966	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19997	0.20000	0.01796
3	2	0.00000	0.01024	0.22057	0.40000	0.00000
6	2	-0.06000	0.41524	0.24017	0.24000	0.04343
8	2	-0.06000	0.27891	0.17804	0.24000	0.00000

As Figuras 7.1(a), 7.1(b) e 7.1(c), na Página 135, apresentam as performances das funções objetivo e barreira considerando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.2(a), 7.2(b) e 7.2(c), na Página 135, apresentam o número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.3(a), 7.3(b) e 7.3(c), na Página 136, apresentam as performances das tensões ao final da cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

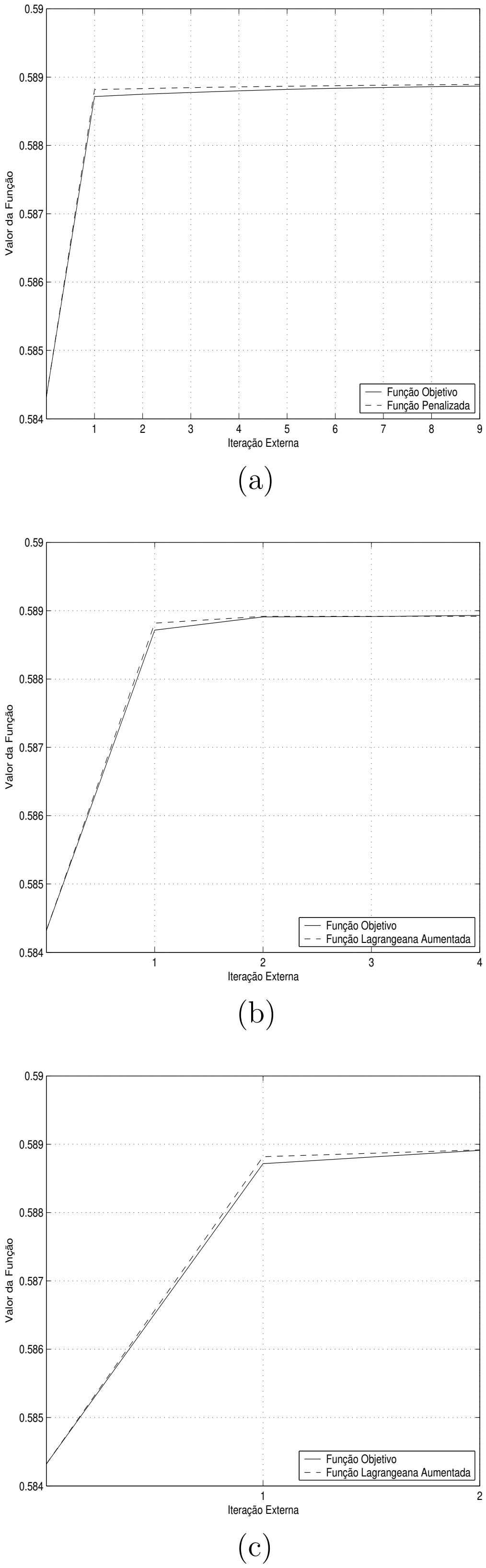
As Figuras 7.4(a), 7.4(b) e 7.4(c), na Página 136, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido projetado em u ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

Comentários

Como se pode ver pela Figura 7.1, as funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada têm comportamentos semelhantes.

As Tabelas 7.3, 7.5 e 7.7 e a Figura 7.4 mostram que os procedimentos P1, P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Mas, pela Figura 7.2, verifica-se que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P3 leva vantagem sobre P2.

Com relação à Figura 7.3, as tensões em (a), (b) e (c) apresentam alterações bastante significativas na primeira iteração externa e após esta, as mudanças são lentas e gradativas em direção à solução.



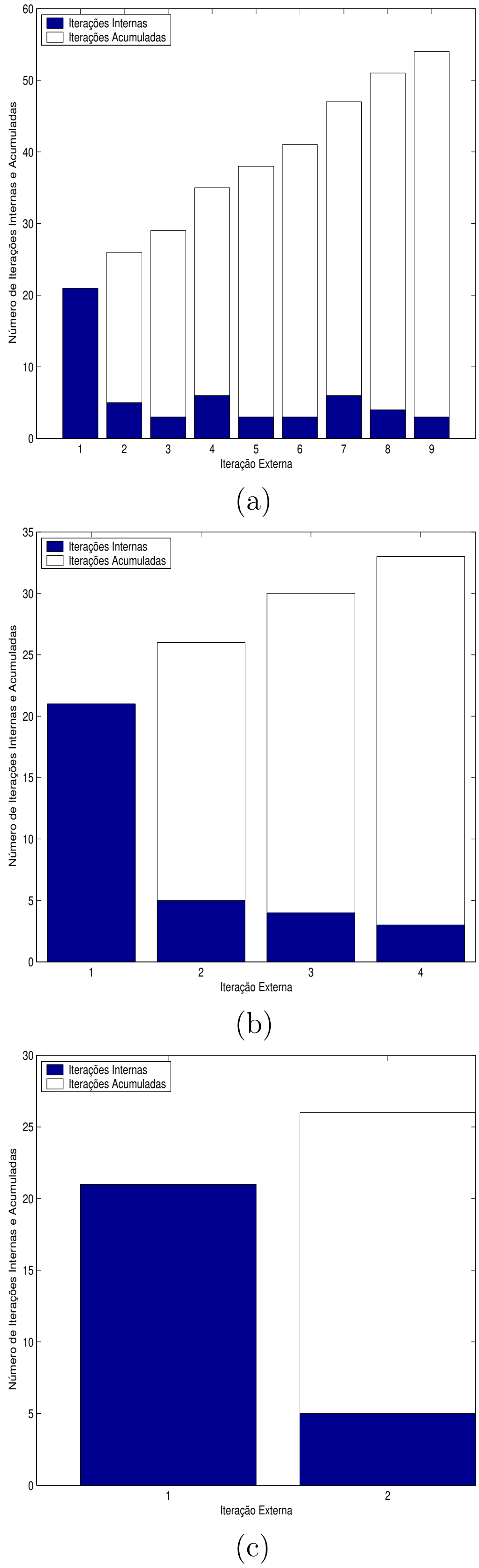
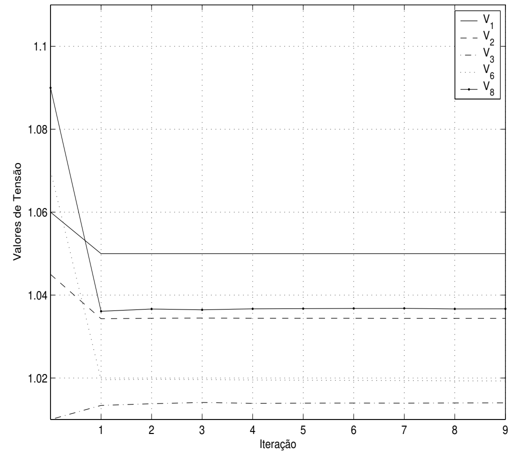
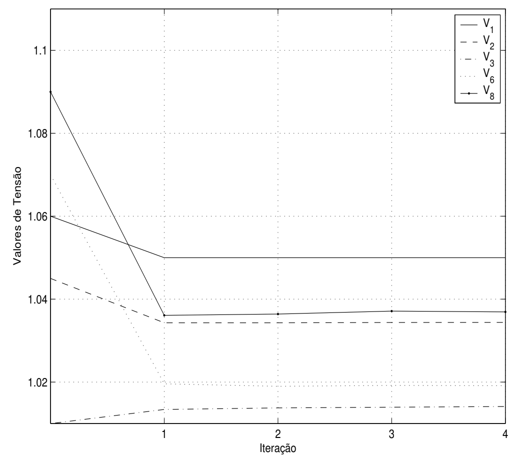


Figura 7.1: IEEE 14 - Performance das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

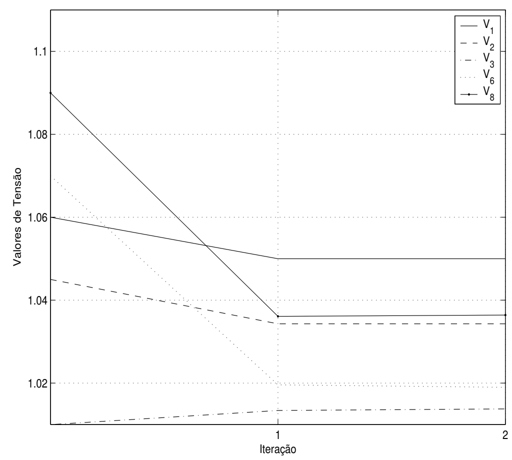
Figura 7.2: IEEE 14 - Número de iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

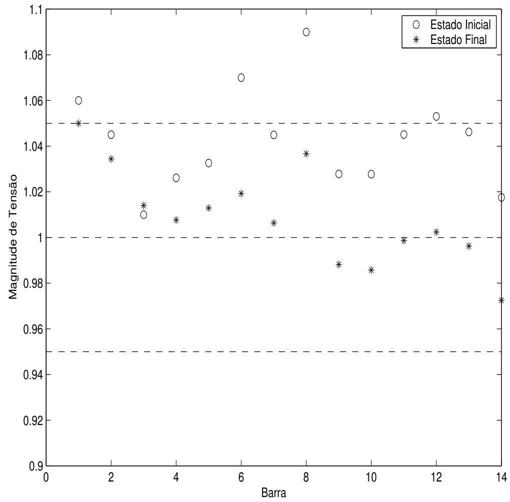


(b)

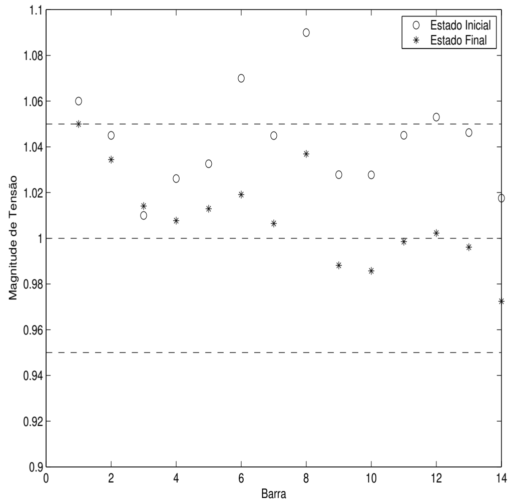


(c)

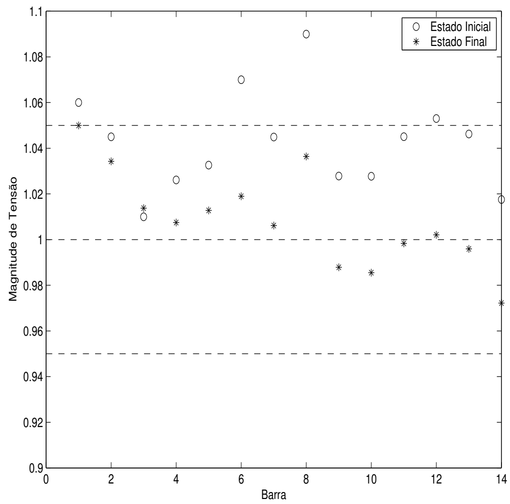
Figura 7.3: IEEE 14 - Performance das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.4: IEEE 14 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

7.2.2 Gradiente Reduzido com Barreira Logarítmica

A Tabela 7.9 apresenta os valores iniciais e limites dos fatores de penalidade e de barreira considerados.

Tabela 7.9: Valores iniciais e limites dos fatores de penalidade e de barreira.

Valor	c_x	c_h	β
Inicial	10	10	5.00e-004
Limite	1.00e+006	1.00e+006	1.00e-008

Estratégia com Penalidade em x e h (P1)

A Tabela 7.10 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.10: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0865	-0.0887	1.0450	1.0344
3	2	-0.2205	-0.2296	1.0100	1.0140
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0077
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0130
6	2	-0.2596	-0.2654	1.0700	1.0194
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0066
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0370
9	0	-0.2630	-0.2721	1.0279	0.9883
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9859
11	0	-0.2655	-0.2732	1.0450	0.9987
12	0	-0.2743	-0.2816	1.0530	1.0025
13	0	-0.2746	-0.2824	1.0463	0.9963
14	0	-0.2861	-0.2963	1.0176	0.9726

A Tabela 7.11 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.11: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17256	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.20040	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.22095	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.24091	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17930	0.24000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.12 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.12: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0865	-0.0886	1.0450	1.0341
3	2	-0.2205	-0.2296	1.0100	1.0135
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0071
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0125
6	2	-0.2596	-0.2655	1.0700	1.0185
7	0	-0.2347	-0.2411	1.0449	1.0053
8	2	-0.2347	-0.2411	1.0900	1.0351
9	0	-0.2630	-0.2722	1.0279	0.9872
10	0	-0.2673	-0.2765	1.0277	0.9848
11	0	-0.2655	-0.2733	1.0450	0.9978
12	0	-0.2743	-0.2818	1.0530	1.0016
13	0	-0.2746	-0.2825	1.0463	0.9954
14	0	-0.2861	-0.2965	1.0176	0.9716

A Tabela 7.13 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.13: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 e seus respectivos multiplicadores de Lagrange considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17019	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19998	0.20000	0.01665
3	2	0.00000	0.01024	0.22122	0.40000	0.00000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23979	0.24000	0.04159
8	2	-0.06000	0.27891	0.17830	0.24000	0.00000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.14 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade crescentes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.14: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0865	-0.0886	1.0450	1.0339
3	2	-0.2205	-0.2295	1.0100	1.0130
4	0	-0.1809	-0.1829	1.0261	1.0068
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0122
6	2	-0.2596	-0.2656	1.0700	1.0181
7	0	-0.2347	-0.2411	1.0449	1.0046
8	2	-0.2347	-0.2411	1.0900	1.0338
9	0	-0.2630	-0.2722	1.0279	0.9866
10	0	-0.2673	-0.2766	1.0277	0.9842
11	0	-0.2655	-0.2734	1.0450	0.9972
12	0	-0.2743	-0.2818	1.0530	1.0012
13	0	-0.2746	-0.2826	1.0463	0.9949
14	0	-0.2861	-0.2965	1.0176	0.9710

A Tabela 7.15 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.15: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 e seus respectivos multiplicadores de Lagrange considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.16832	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19984	0.20000	0.01663
3	2	0.00000	0.01024	0.22043	0.40000	0.00000
6	2	-0.06000	0.41524	0.24012	0.24000	0.04158
8	2	-0.06000	0.27891	0.17706	0.24000	0.00000

As Figuras 7.5(a), 7.5(b) e 7.5(c), na página 141, apresentam as performances das funções objetivo e barreira considerando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.6(a), 7.6(b) e 7.6(c), na página 141, apresentam o número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.7(a), 7.7(b) e 7.7(c), na página 142, apresentam as performances das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.8(a), 7.8(b) e 7.8(c), na página 142, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.5 (b) e (c), as funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.5(a), após a primeira iteração externa, a função barreira descreve comportamento assintótico.

As Tabelas 7.10, 7.12 e 7.14 e a Figura 7.8 mostram que os procedimentos P1, P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Em termos de iterações, pela Figura 7.6, verifica-se que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P3 leva vantagem sobre P2.

Com relação à Figura 7.7, as tensões em (a), (b) e (c) apresentam alterações bastante significativas na primeira iteração externa e após esta, as mudanças são lentas e gradativas em direção à solução.

7.2.3 Gradiente Reduzido com Projeção nas Restrições Funcionais

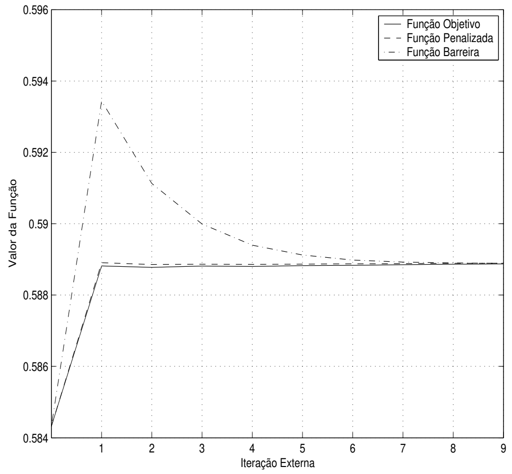
A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização considerando fator de penalidade inicial igual a 50 com limite máximo igual a 10^6.

Estratégia com Penalidade em $\tilde{x}$ (P1)

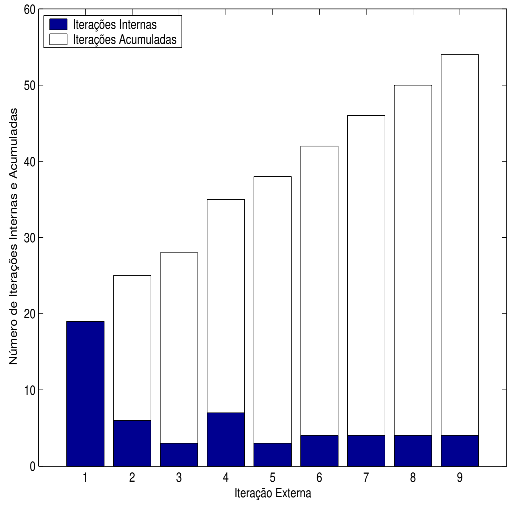
A Tabela 7.16 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.16: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

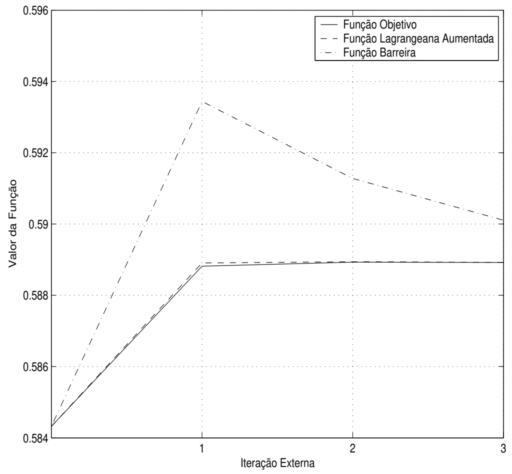
Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0513
2	2	-0.0865	-0.0884	1.0450	1.0355
3	2	-0.2205	-0.2289	1.0100	1.0147
4	0	-0.1809	-0.1825	1.0261	1.0087
5	0	-0.1561	-0.1565	1.0326	1.0140
6	2	-0.2596	-0.2647	1.0700	1.0202
7	0	-0.2347	-0.2404	1.0449	1.0075
8	2	-0.2347	-0.2404	1.0900	1.0378
9	0	-0.2630	-0.2715	1.0279	0.9892
10	0	-0.2673	-0.2757	1.0277	0.9868
11	0	-0.2655	-0.2726	1.0450	0.9996
12	0	-0.2743	-0.2809	1.0530	1.0034
13	0	-0.2746	-0.2817	1.0463	0.9972
14	0	-0.2861	-0.2956	1.0176	0.9736



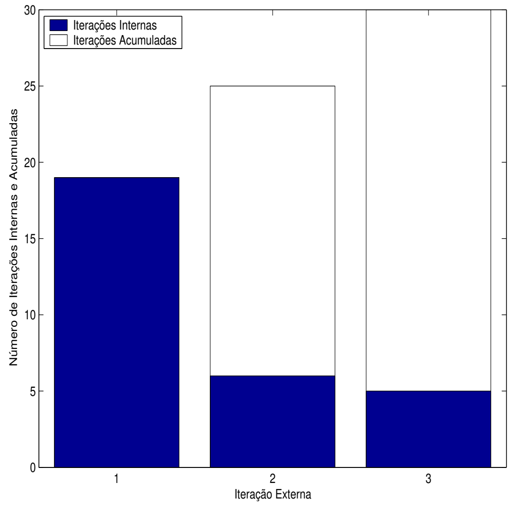
(a)



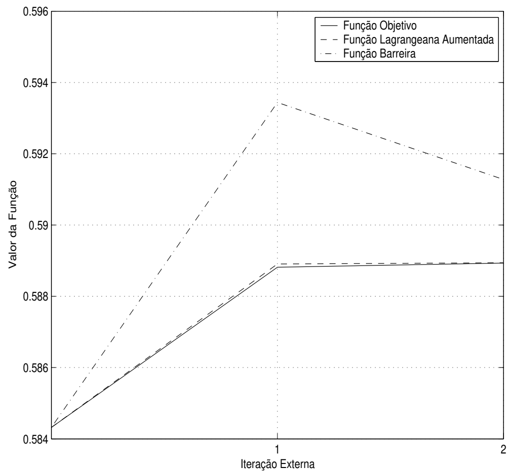
(a)



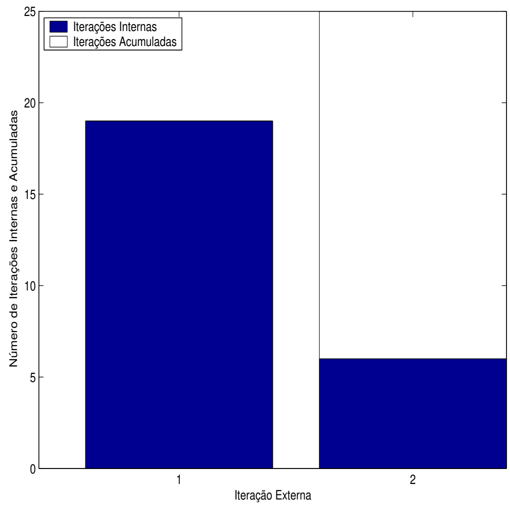
(b)



(b)



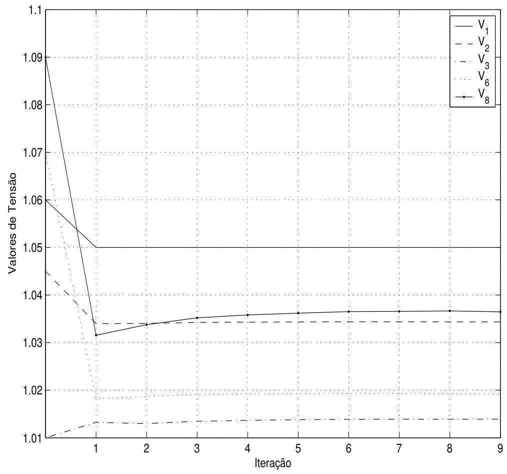
(c)



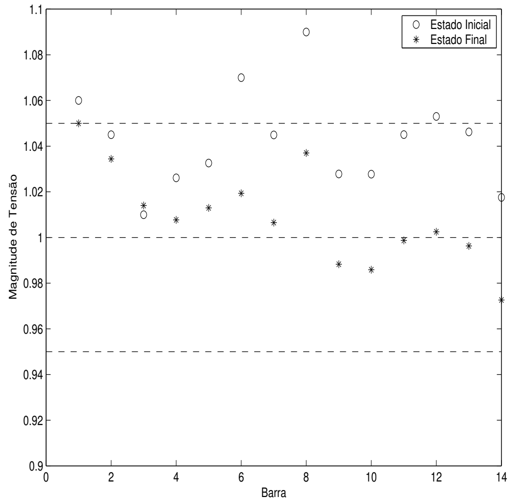
(c)

Figura 7.5: IEEE 14 - Performance das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada e barreira com gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

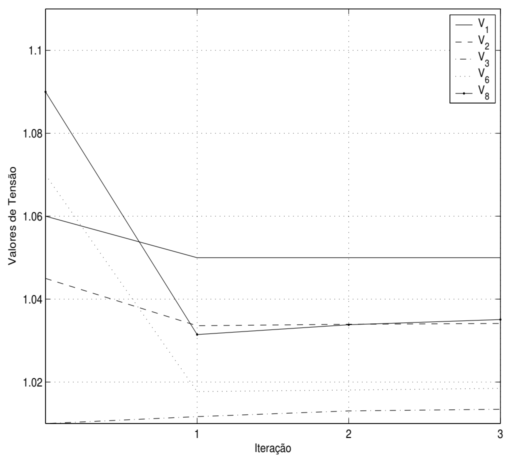
Figura 7.6: IEEE 14 - Iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



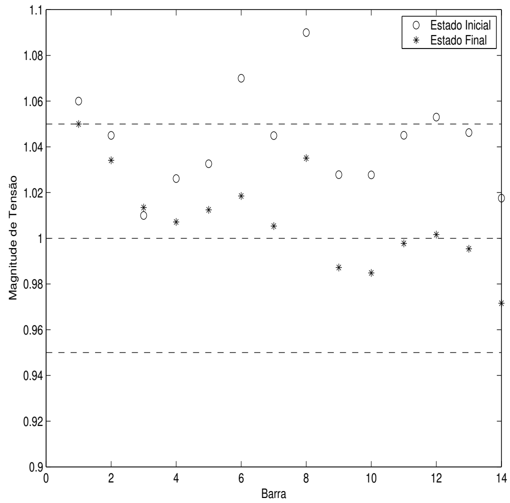
(a)



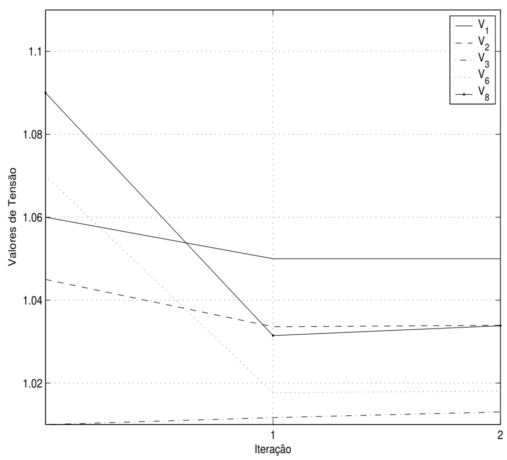
(a)



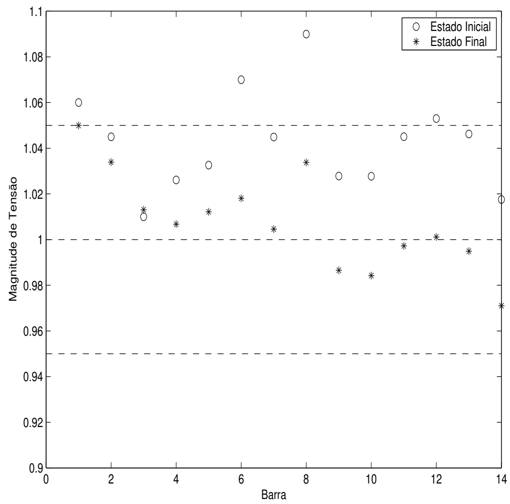
(b)



(b)



(c)



(c)

Figura 7.7: IEEE 14 - Tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Figura 7.8: IEEE 14 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

A Tabela 7.17 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.17: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.16841	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19997	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.21661	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23998	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17878	0.24000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.18 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.18: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0505
2	2	-0.0865	-0.0885	1.0450	1.0347
3	2	-0.2205	-0.2292	1.0100	1.0137
4	0	-0.1809	-0.1828	1.0261	1.0079
5	0	-0.1561	-0.1568	1.0326	1.0132
6	2	-0.2596	-0.2651	1.0700	1.0195
7	0	-0.2347	-0.2408	1.0449	1.0069
8	2	-0.2347	-0.2408	1.0900	1.0375
9	0	-0.2630	-0.2719	1.0279	0.9885
10	0	-0.2673	-0.2762	1.0277	0.9861
11	0	-0.2655	-0.2730	1.0450	0.9989
12	0	-0.2743	-0.2814	1.0530	1.0026
13	0	-0.2746	-0.2821	1.0463	0.9965
14	0	-0.2861	-0.2961	1.0176	0.9728

A Tabela 7.19 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.19: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade constante.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17242	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19997	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.21297	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23998	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17997	0.24000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.20 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade crescente, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.20: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0502
2	2	-0.0865	-0.0886	1.0450	1.0344
3	2	-0.2205	-0.2294	1.0100	1.0134
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0076
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0129
6	2	-0.2596	-0.2653	1.0700	1.0192
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0066
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0374
9	0	-0.2630	-0.2721	1.0279	0.9883
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9858
11	0	-0.2655	-0.2732	1.0450	0.9986
12	0	-0.2743	-0.2815	1.0530	1.0023
13	0	-0.2746	-0.2823	1.0463	0.9962
14	0	-0.2861	-0.2963	1.0176	0.9725

A Tabela 7.21 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade crescente, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.21: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17292	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19997	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.21411	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23998	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.18053	0.24000

As Figuras 7.9(a), 7.9(b) e 7.9(c), na Página 146, apresentam as performances das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.10(a), 7.10(b) e 7.10(c), na Página 146, apresentam o número de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.11(a), 7.11(b) e 7.11(c), na Página 147, apresentam os perfis das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em

$\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.12(a), 7.12(b) e 7.12(c), na Página 147, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.9 (b) e (c), as funções objetivo e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.9(a), as funções descrevem comportamento assintótico.

As Tabelas 7.18 e 7.20 e as Figuras 7.12 (b) e (c) mostram que os procedimentos P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Já o procedimento P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3} (observar valor de tensão da barra 1 na Tabela 7.16).

Em termos de iterações, pela Figura 7.10, verifica-se que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P3 leva vantagem sobre P2.

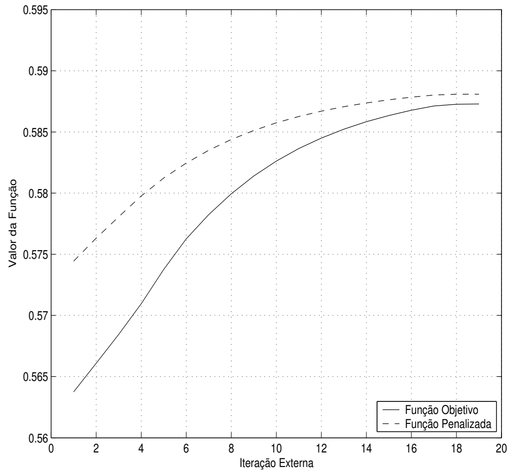
Observa-se ainda que, nos três procedimentos, a primeira iteração externa tem uma parcela altamente significativa dentro de todo o processo iterativo. Isto pode ser devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, que faz com que o processo iterativo gere, nas iterações iniciais, tensões infactíveis em direção a uma solução factível (Figura 7.11).

7.2.4 Gradiente Reduzido com Barreira nas Restrições Funcionais

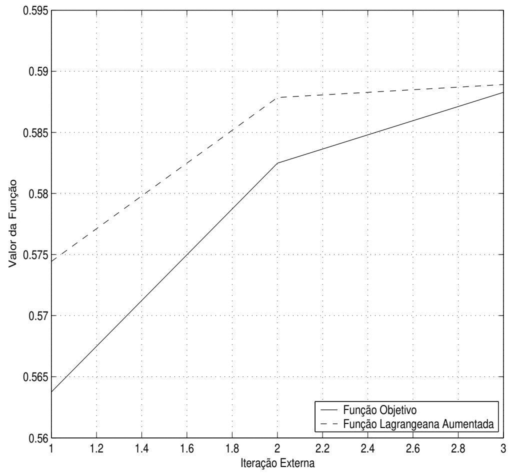
A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização considerando fator de penalidade inicial igual a 50 com limite máximo igual a 10^6.

Estratégia com Penalidade em $\tilde{x}$ (P1)

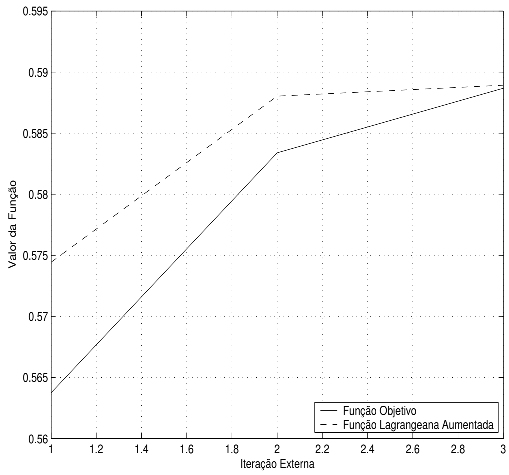
A Tabela 7.22 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.13).



(a)

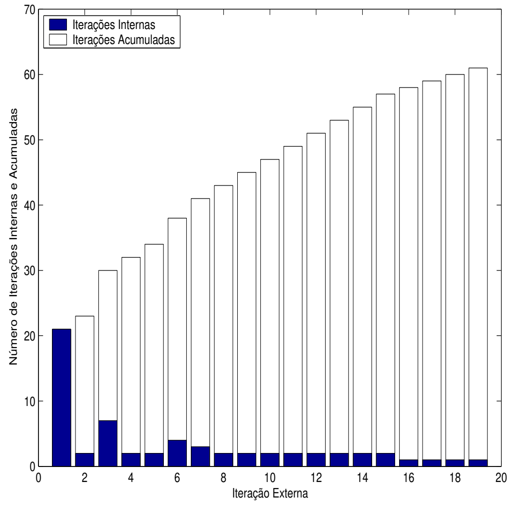


(b)

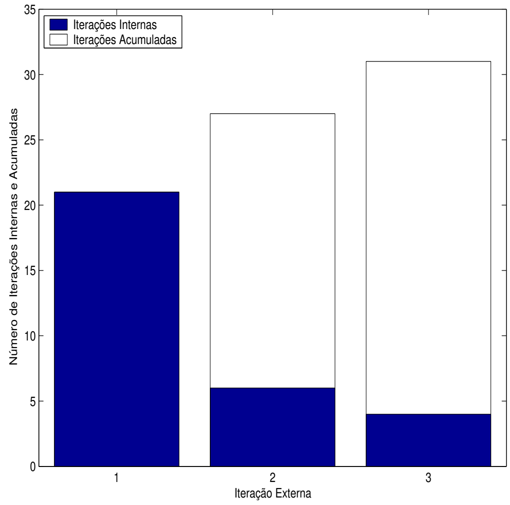


(c)

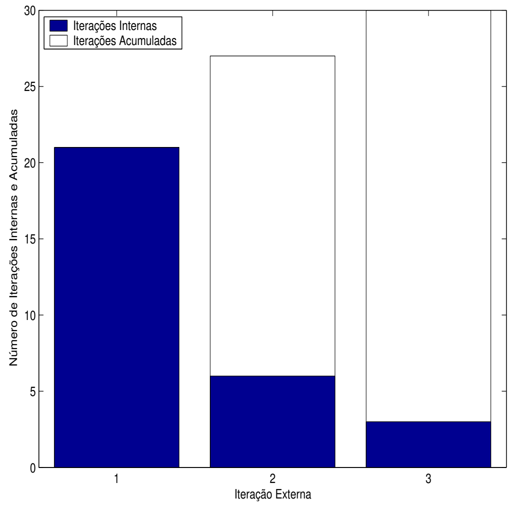
Figura 7.9: IEEE 14 - Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.10: IEEE 14 - Números de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

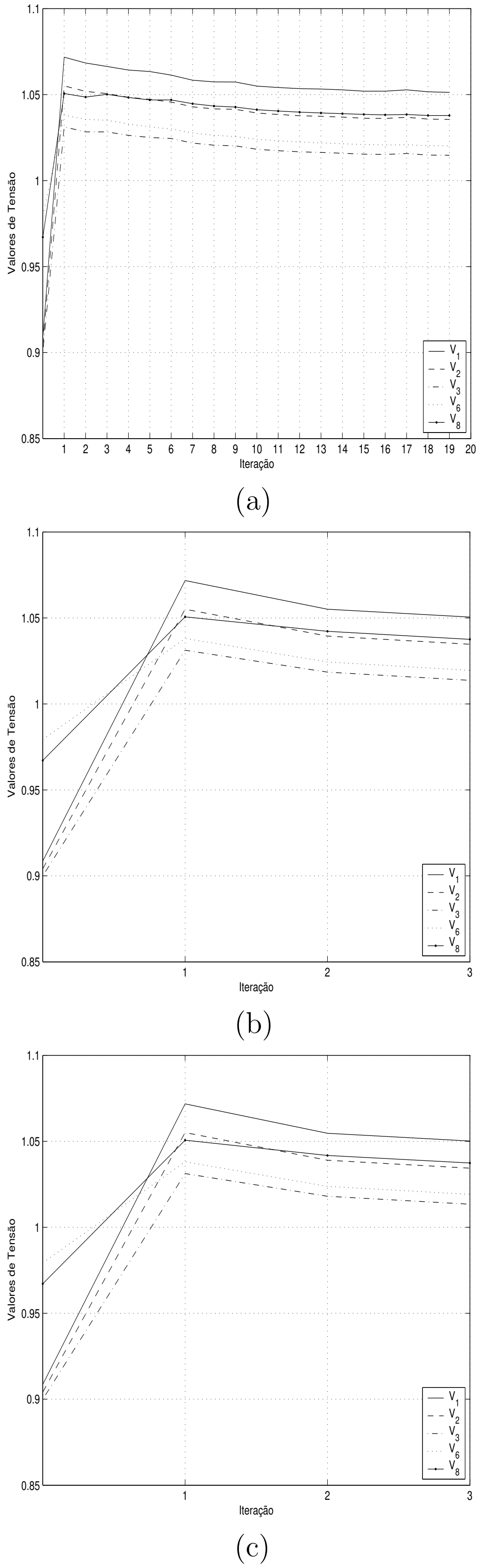


Figura 7.11: IEEE 14 - Perfis das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

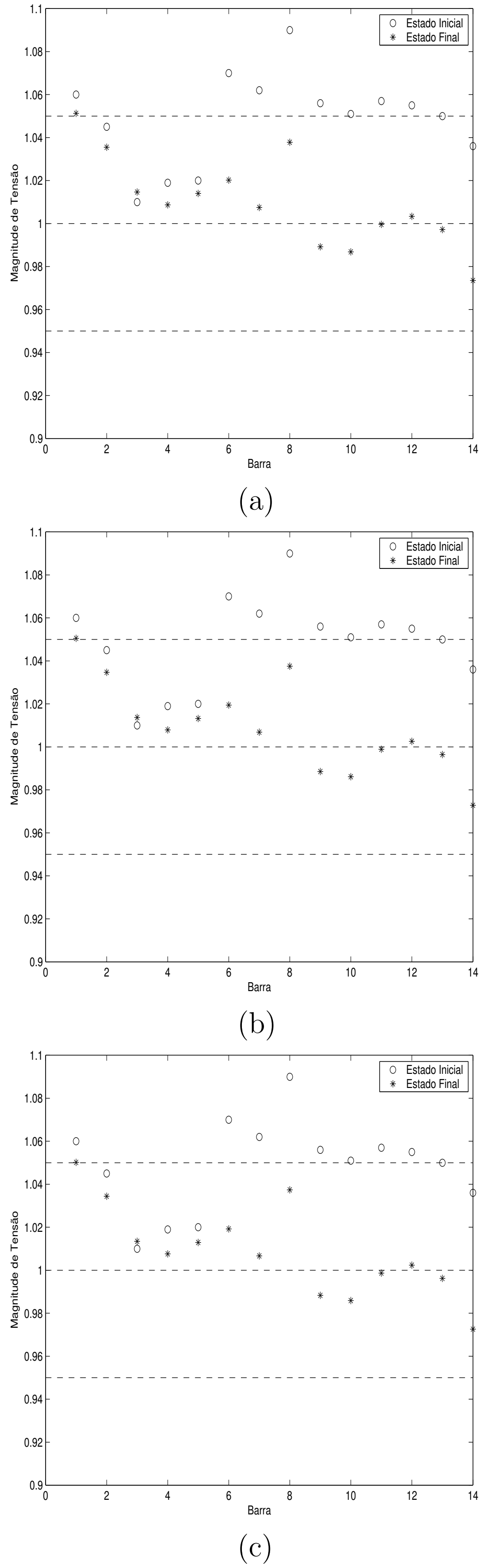


Figura 7.12: IEEE 14 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão de todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Tabela 7.22: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0513
2	2	-0.0865	-0.0884	1.0450	1.0356
3	2	-0.2205	-0.2289	1.0100	1.0149
4	0	-0.1809	-0.1825	1.0261	1.0088
5	0	-0.1561	-0.1565	1.0326	1.0141
6	2	-0.2596	-0.2647	1.0700	1.0202
7	0	-0.2347	-0.2404	1.0449	1.0075
8	2	-0.2347	-0.2404	1.0900	1.0377
9	0	-0.2630	-0.2715	1.0279	0.9892
10	0	-0.2673	-0.2757	1.0277	0.9868
11	0	-0.2655	-0.2726	1.0450	0.9996
12	0	-0.2743	-0.2809	1.0530	1.0034
13	0	-0.2746	-0.2817	1.0463	0.9972
14	0	-0.2861	-0.2956	1.0176	0.9736

A Tabela 7.23 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.23: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.16940	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19997	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.21808	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23998	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17828	0.24000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.24 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.24: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0501
2	2	-0.0865	-0.0886	1.0450	1.0344
3	2	-0.2205	-0.2296	1.0100	1.0142
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0077
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0130
6	2	-0.2596	-0.2654	1.0700	1.0191
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0064
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0366
9	0	-0.2630	-0.2721	1.0279	0.9881
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9857
11	0	-0.2655	-0.2732	1.0450	0.9985
12	0	-0.2743	-0.2816	1.0530	1.0023
13	0	-0.2746	-0.2824	1.0463	0.9961
14	0	-0.2861	-0.2963	1.0176	0.9724

A Tabela 7.25 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.25: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17074	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19903	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.22312	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23966	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17818	0.24000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.26 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade crescente, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.26: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0501
2	2	-0.0865	-0.0886	1.0450	1.0345
3	2	-0.2205	-0.2295	1.0100	1.0143
4	0	-0.1809	-0.1830	1.0261	1.0078
5	0	-0.1561	-0.1569	1.0326	1.0130
6	2	-0.2596	-0.2653	1.0700	1.0192
7	0	-0.2347	-0.2410	1.0449	1.0064
8	2	-0.2347	-0.2410	1.0900	1.0367
9	0	-0.2630	-0.2721	1.0279	0.9882
10	0	-0.2673	-0.2764	1.0277	0.9857
11	0	-0.2655	-0.2732	1.0450	0.9986
12	0	-0.2743	-0.2816	1.0530	1.0023
13	0	-0.2746	-0.2823	1.0463	0.9961
14	0	-0.2861	-0.2963	1.0176	0.9725

A Tabela 7.27 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade crescente, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.27: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22513	-0.17102	10.00000
2	2	-0.40000	0.18012	0.19906	0.20000
3	2	0.00000	0.01024	0.22333	0.40000
6	2	-0.06000	0.41524	0.23965	0.24000
8	2	-0.06000	0.27891	0.17818	0.24000

As Figuras 7.13(a), 7.13(b) e 7.13(c), na Página 151, apresentam as performances das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.14(a), 7.14(b) e 7.14(c), na Página 151, apresentam o número de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.15(a), 7.15(b) e 7.15(c), na Página 152, apresentam os perfis das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.16(a), 7.16(b) e 7.16(c), na Página 152, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

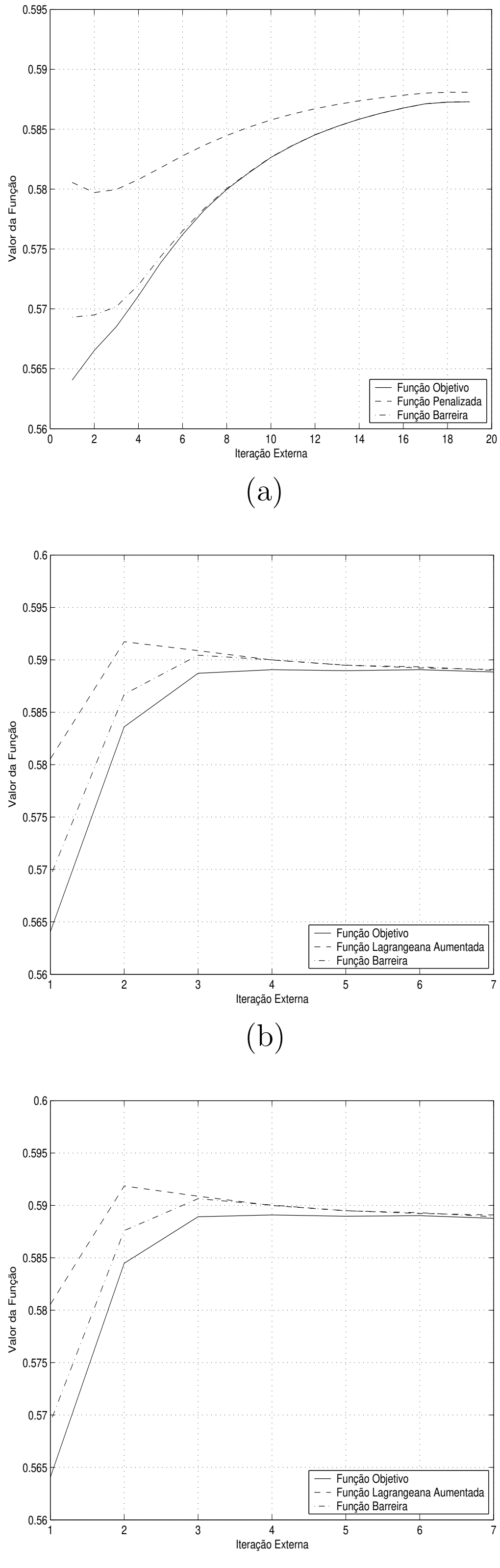
Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.13 (b) e (c), as funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.13(a), as funções descrevem comportamento assintótico após a quarta iteração externa.

As Tabelas 7.24 e 7.26 e as Figuras 7.16 (b) e (c) mostram que os procedimentos P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Já o procedimento P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3} (observar valor de tensão da barra 1 na Tabela 7.22).

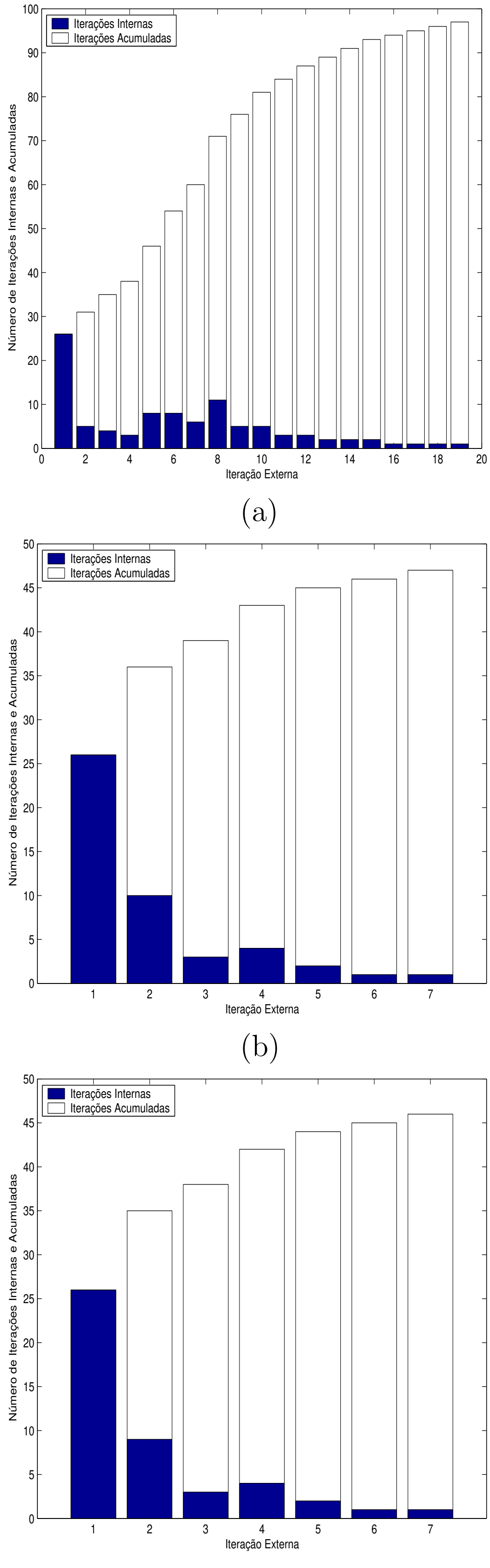
Em termos de iterações, pela Figura 7.14, verifica-se que P2 e P3 têm comportamentos idênticos e são muito mais eficientes que P1.

Observa-se ainda que, nos três procedimentos, a primeira iteração externa tem uma parcela altamente significativa dentro de todo o processo iterativo. Isto pode ser devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, que faz com que o processo iterativo gere, nas iterações iniciais, tensões infactíveis em direção a uma solução factível (Figura 7.15).



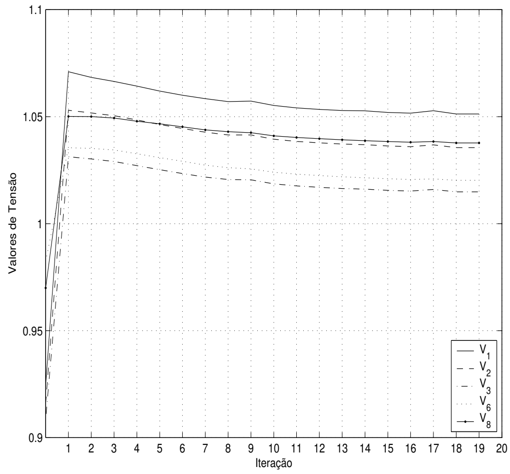
(a) (b) (c)

Figura 7.13: IEEE 14 - Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

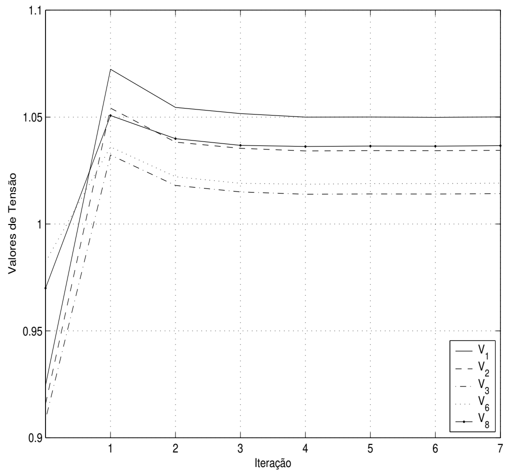


(a) (b) (c)

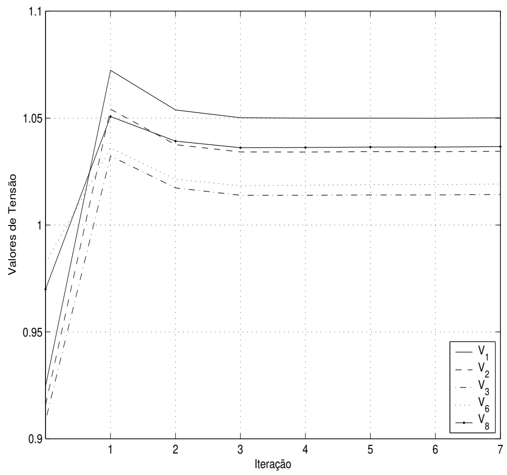
Figura 7.14: IEEE 14 - Número de iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

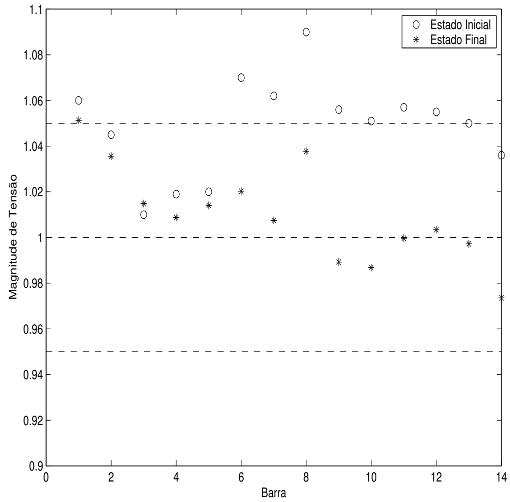


(b)

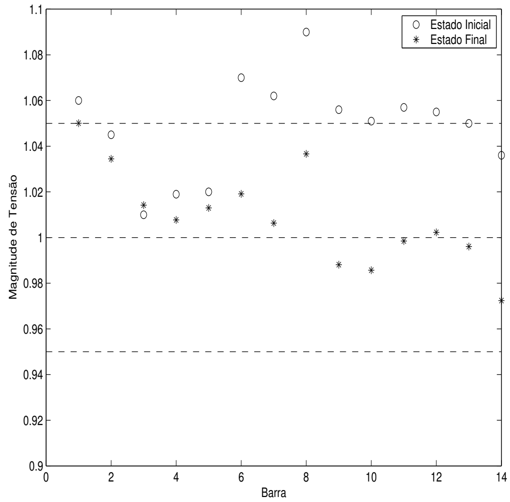


(c)

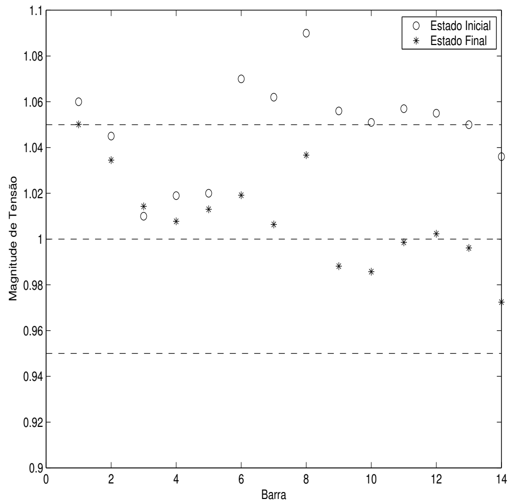
Figura 7.15: IEEE 14 - Perfis das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.16: IEEE 14 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão de todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

7.3 Sistema IEEE 30

Este sistema é composto de 30 barras e 37 linhas de transmissão. A Tabela 7.28 resume a natureza das barras e os tipos de restrições nodais associadas.

Tabela 7.28: Natureza das barras e tipos de restrições nodais associadas.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Tensão
24	PQ	igualdade	igualdade	canalização
1	SL	-	canalização	canalização
5	PV	igualdade	canalização	canalização

Este sistema elétrico tem as seguintes características:

- Rede: $\begin{cases} 30 \text{ barras} \begin{cases} 1 \text{ - referência (SL)} \\ 5 \text{ - geração (PV)} \\ 24 \text{ - carga (PQ)} \end{cases} \\ 37 \text{ linhas de transmissão} \end{cases}$
- Função objetivo: perdas nos elementos-série
- Restrições de igualdade: 52 restrições
- Restrições canalizadas: $\begin{cases} 30 \text{ de tensão} \\ 6 \text{ de potência reativa} \end{cases}$

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização.

7.3.1 Gradiente Reduzido Projetado

A Tabela 7.29 apresenta os valores iniciais e limites dos fatores de penalidade considerados.

Tabela 7.29: Valores iniciais e limites dos fatores de penalidade.

Valor	c_x	c_h
Inicial	10	10
Limite	1.00e+006	1.00e+006

Estratégia com Penalidade em x e h (P1)

A Tabela 7.30 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.30: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0404
3	0	-0.1477	-0.1509	1.0270	1.0222
4	0	-0.1783	-0.1820	1.0197	1.0160
5	2	-0.2569	-0.2631	1.0100	1.0163
6	0	-0.2085	-0.2139	1.0152	1.0164
7	0	-0.2376	-0.2432	1.0053	1.0086
8	2	-0.2202	-0.2283	1.0100	1.0210
9	0	-0.2707	-0.2772	1.0377	1.0182
10	0	-0.3017	-0.3095	1.0272	1.0081
11	2	-0.2707	-0.2772	1.0820	1.0420
12	0	-0.2936	-0.2985	1.0347	1.0074
13	2	-0.2936	-0.2985	1.0710	1.0279
14	0	-0.3090	-0.3149	1.0198	0.9935
15	0	-0.3100	-0.3165	1.0158	0.9906
16	0	-0.3021	-0.3086	1.0242	1.0002
17	0	-0.3056	-0.3132	1.0209	1.0002
18	0	-0.3197	-0.3273	1.0074	0.9841
19	0	-0.3220	-0.3300	1.0057	0.9835
20	0	-0.3180	-0.3260	1.0103	0.9888
21	0	-0.3099	-0.3179	1.0141	0.9949
22	0	-0.3096	-0.3176	1.0144	0.9954
23	0	-0.3155	-0.3229	1.0055	0.9831
24	0	-0.3165	-0.3246	1.0003	0.9820
25	0	-0.3069	-0.3160	0.9934	0.9826
26	0	-0.3146	-0.3239	0.9753	0.9642
27	0	-0.2963	-0.3057	0.9979	0.9918
28	0	-0.2204	-0.2265	1.0134	1.0157
29	0	-0.3189	-0.3286	0.9775	0.9713
30	0	-0.3351	-0.3451	0.9657	0.9594

A Tabela 7.31 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.31: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.37858	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39401	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22708	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.20025	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11938	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.15096	0.15000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.32 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.32: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0404
3	0	-0.1477	-0.1508	1.0270	1.0221
4	0	-0.1783	-0.1820	1.0197	1.0159
5	2	-0.2569	-0.2631	1.0100	1.0165
6	0	-0.2085	-0.2139	1.0152	1.0163
7	0	-0.2376	-0.2432	1.0053	1.0086
8	2	-0.2202	-0.2284	1.0100	1.0209
9	0	-0.2707	-0.2773	1.0377	1.0181
10	0	-0.3017	-0.3096	1.0272	1.0078
11	2	-0.2707	-0.2773	1.0820	1.0421
12	0	-0.2936	-0.2985	1.0347	1.0067
13	2	-0.2936	-0.2985	1.0710	1.0266
14	0	-0.3090	-0.3149	1.0198	0.9928
15	0	-0.3100	-0.3165	1.0158	0.9900
16	0	-0.3021	-0.3086	1.0242	0.9997
17	0	-0.3056	-0.3133	1.0209	0.9998
18	0	-0.3197	-0.3273	1.0074	0.9836
19	0	-0.3220	-0.3301	1.0057	0.9830
20	0	-0.3180	-0.3260	1.0103	0.9884
21	0	-0.3099	-0.3180	1.0141	0.9946
22	0	-0.3096	-0.3177	1.0144	0.9951
23	0	-0.3155	-0.3229	1.0055	0.9826
24	0	-0.3165	-0.3247	1.0003	0.9816
25	0	-0.3069	-0.3161	0.9934	0.9823
26	0	-0.3146	-0.3239	0.9753	0.9640
27	0	-0.2963	-0.3058	0.9979	0.9916
28	0	-0.2204	-0.2265	1.0134	1.0156
29	0	-0.3189	-0.3287	0.9775	0.9711
30	0	-0.3351	-0.3451	0.9657	0.9592

A Tabela 7.33 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.33: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 e seus respectivos multiplicadores de Lagrange considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade constantes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38370	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.40102	0.40000	0.01017
5	2	-0.40000	0.15332	0.22506	0.40000	0.00000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.20105	0.20000	0.01053
11	2	-0.06000	0.23026	0.11937	0.24000	0.00000
13	2	-0.06000	0.27808	0.15015	0.15000	0.08056

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.34 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.34: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade crescentes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0402
3	0	-0.1477	-0.1508	1.0270	1.0221
4	0	-0.1783	-0.1820	1.0197	1.0159
5	2	-0.2569	-0.2632	1.0100	1.0165
6	0	-0.2085	-0.2140	1.0152	1.0163
7	0	-0.2376	-0.2433	1.0053	1.0086
8	2	-0.2202	-0.2284	1.0100	1.0209
9	0	-0.2707	-0.2773	1.0377	1.0182
10	0	-0.3017	-0.3096	1.0272	1.0080
11	2	-0.2707	-0.2773	1.0820	1.0424
12	0	-0.2936	-0.2985	1.0347	1.0069
13	2	-0.2936	-0.2985	1.0710	1.0271
14	0	-0.3090	-0.3149	1.0198	0.9931
15	0	-0.3100	-0.3166	1.0158	0.9902
16	0	-0.3021	-0.3086	1.0242	0.9999
17	0	-0.3056	-0.3133	1.0209	1.0000
18	0	-0.3197	-0.3273	1.0074	0.9838
19	0	-0.3220	-0.3301	1.0057	0.9833
20	0	-0.3180	-0.3260	1.0103	0.9886
21	0	-0.3099	-0.3179	1.0141	0.9948
22	0	-0.3096	-0.3177	1.0144	0.9952
23	0	-0.3155	-0.3229	1.0055	0.9829
24	0	-0.3165	-0.3247	1.0003	0.9818
25	0	-0.3069	-0.3160	0.9934	0.9824
26	0	-0.3146	-0.3239	0.9753	0.9641
27	0	-0.2963	-0.3058	0.9979	0.9917
28	0	-0.2204	-0.2265	1.0134	1.0156
29	0	-0.3189	-0.3287	0.9775	0.9711
30	0	-0.3351	-0.3451	0.9657	0.9593

A Tabela 7.35 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.35: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 e seus respectivos multiplicadores de Lagrange considerando gradiente reduzido projetado em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade crescentes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38128	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39889	0.40000	0.00000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22618	0.40000	0.00000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.20068	0.20000	0.02018
11	2	-0.06000	0.23026	0.11857	0.24000	0.00000
13	2	-0.06000	0.27808	0.15019	0.15000	0.10498

As Figuras 7.17(a), 7.17(b) e 7.17(c), na Página 158, apresentam as performances das funções objetivo e barreira considerando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.18(a), 7.18(b) e 7.18(c), na Página 158, apresentam o número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e

Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.19(a), 7.19(b) e 7.19(c), na Página 159, apresentam as performances das tensões ao final da cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.20(a), 7.20(b) e 7.20(c), na Página 159, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido projetado em u ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.17 (b) e (c), as funções objetivo e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.17(a), após a primeira iteração externa, a função barreira descreve comportamento constante.

As Tabelas 7.30, 7.32 e 7.34 e a Figura 7.20 mostram que os procedimentos P1, P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Em termos de iterações, pela Figura 7.18, verifica-se que P2 e P3 são mais eficientes que P1 e que P2 leva pequena vantagem sobre P3 no número de iterações acumuladas.

Com relação à Figura 7.19, as tensões em (b) e (c) também apresentam comportamentos muito semelhantes em direção à solução.

7.3.2 Gradiente Reduzido com Barreira Logarítmica

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização considerando fator de penalidade inicial igual a 10 com limite máximo igual a 10^6 e fator de barreira inicial igual a 5.10^{-3} com limite mínimo igual a 10^{-8}.

Estratégia com Penalidade em x e h (P1)

A Tabela 7.36 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

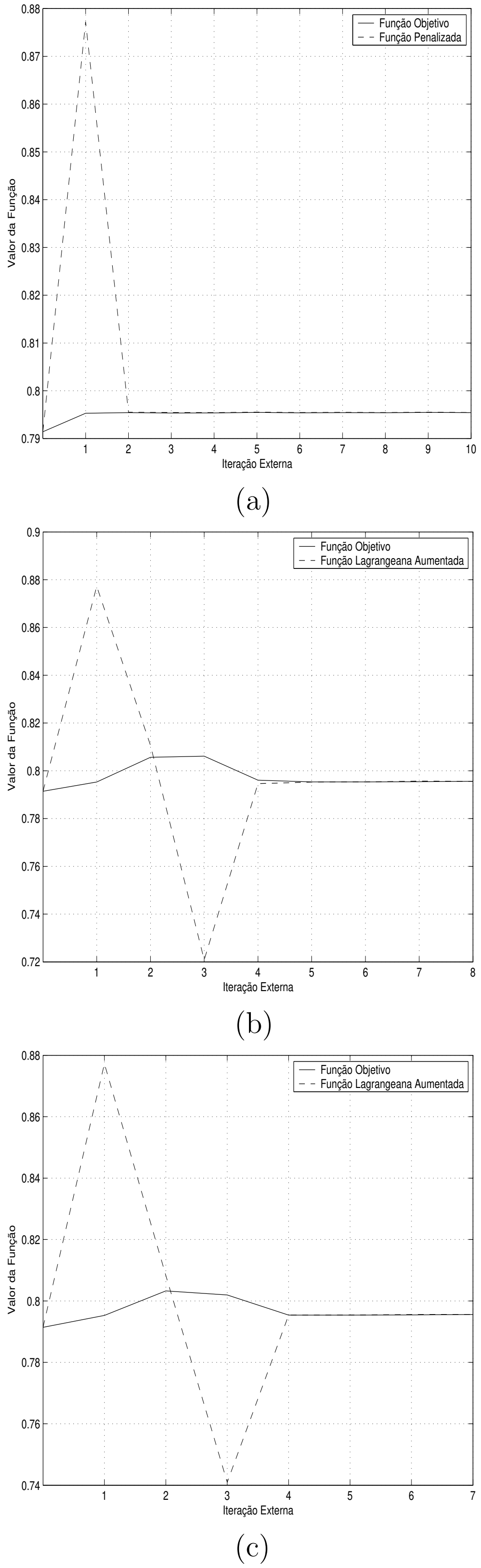


Figura 7.17: IEEE 30 - Performance das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

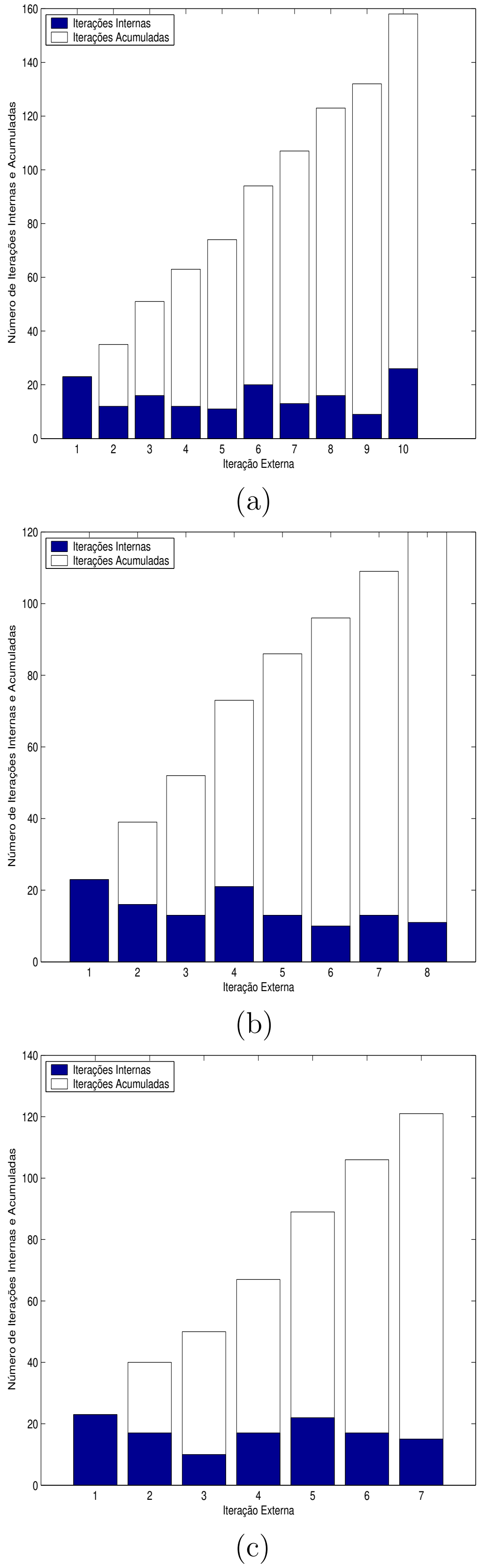
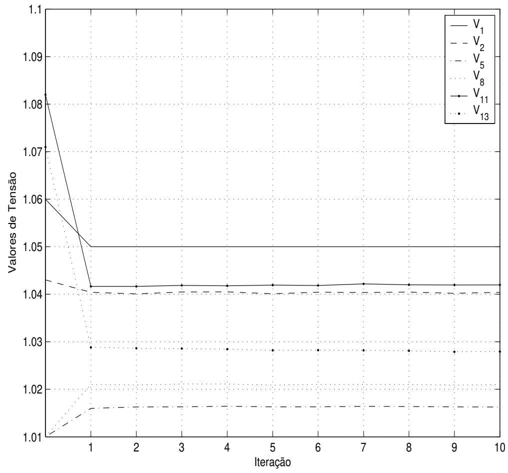
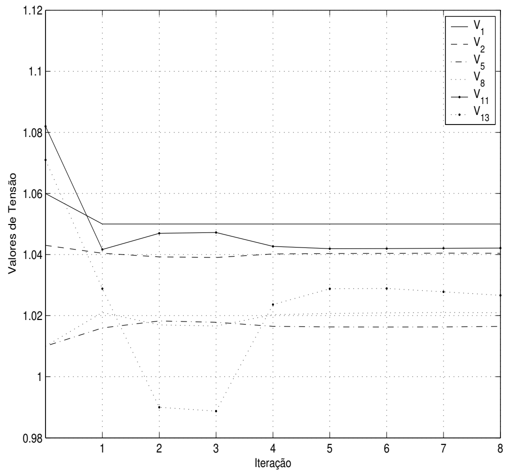


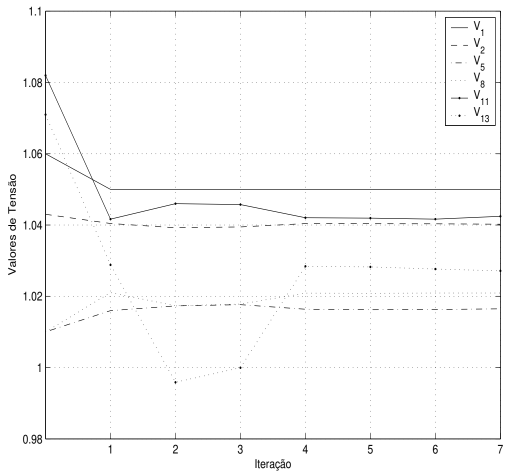
Figura 7.18: IEEE 30 - Número de iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

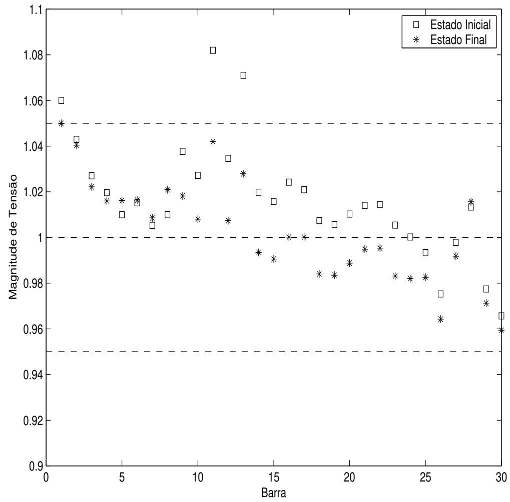


(b)

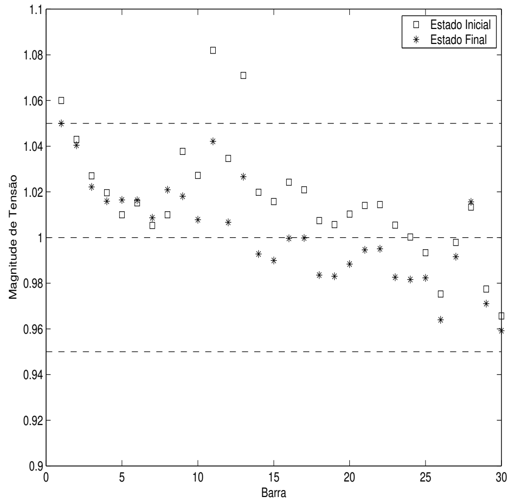


(c)

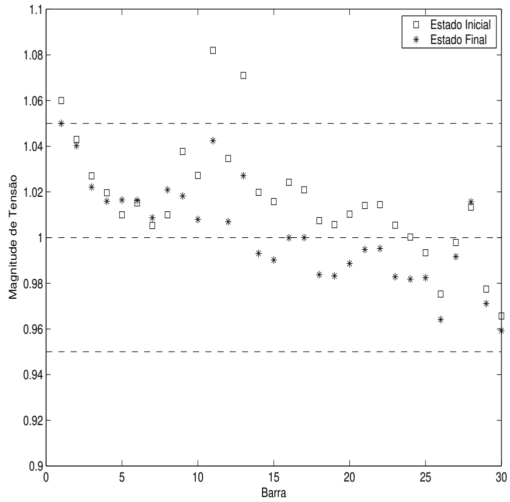
Figura 7.19: IEEE 30 - Performance das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.20: IEEE 30 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido projetado em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

Tabela 7.36: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0403
3	0	-0.1477	-0.1508	1.0270	1.0221
4	0	-0.1783	-0.1820	1.0197	1.0159
5	2	-0.2569	-0.2631	1.0100	1.0161
6	0	-0.2085	-0.2139	1.0152	1.0162
7	0	-0.2376	-0.2432	1.0053	1.0084
8	2	-0.2202	-0.2283	1.0100	1.0208
9	0	-0.2707	-0.2772	1.0377	1.0179
10	0	-0.3017	-0.3095	1.0272	1.0078
11	2	-0.2707	-0.2772	1.0820	1.0416
12	0	-0.2936	-0.2986	1.0347	1.0072
13	2	-0.2936	-0.2986	1.0710	1.0278
14	0	-0.3090	-0.3149	1.0198	0.9933
15	0	-0.3100	-0.3166	1.0158	0.9904
16	0	-0.3021	-0.3086	1.0242	1.0000
17	0	-0.3056	-0.3132	1.0209	1.0000
18	0	-0.3197	-0.3273	1.0074	0.9839
19	0	-0.3220	-0.3300	1.0057	0.9833
20	0	-0.3180	-0.3260	1.0103	0.9886
21	0	-0.3099	-0.3179	1.0141	0.9947
22	0	-0.3096	-0.3176	1.0144	0.9951
23	0	-0.3155	-0.3229	1.0055	0.9830
24	0	-0.3165	-0.3247	1.0003	0.9818
25	0	-0.3069	-0.3160	0.9934	0.9824
26	0	-0.3146	-0.3239	0.9753	0.9641
27	0	-0.2963	-0.3058	0.9979	0.9916
28	0	-0.2204	-0.2265	1.0134	1.0155
29	0	-0.3189	-0.3286	0.9775	0.9711
30	0	-0.3351	-0.3451	0.9657	0.9592

A Tabela 7.37 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.37: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e penalidade em x e h.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38269	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.40033	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22597	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.20024	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11822	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.15097	0.15000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.38 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.38: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0403
3	0	-0.1477	-0.1508	1.0270	1.0219
4	0	-0.1783	-0.1820	1.0197	1.0156
5	2	-0.2569	-0.2631	1.0100	1.0160
6	0	-0.2085	-0.2139	1.0152	1.0160
7	0	-0.2376	-0.2432	1.0053	1.0082
8	2	-0.2202	-0.2283	1.0100	1.0206
9	0	-0.2707	-0.2773	1.0377	1.0175
10	0	-0.3017	-0.3096	1.0272	1.0073
11	2	-0.2707	-0.2773	1.0820	1.0412
12	0	-0.2936	-0.2986	1.0347	1.0063
13	2	-0.2936	-0.2986	1.0710	1.0264
14	0	-0.3090	-0.3150	1.0198	0.9924
15	0	-0.3100	-0.3166	1.0158	0.9896
16	0	-0.3021	-0.3087	1.0242	0.9993
17	0	-0.3056	-0.3133	1.0209	0.9993
18	0	-0.3197	-0.3274	1.0074	0.9831
19	0	-0.3220	-0.3301	1.0057	0.9826
20	0	-0.3180	-0.3261	1.0103	0.9879
21	0	-0.3099	-0.3180	1.0141	0.9941
22	0	-0.3096	-0.3178	1.0144	0.9946
23	0	-0.3155	-0.3230	1.0055	0.9822
24	0	-0.3165	-0.3248	1.0003	0.9812
25	0	-0.3069	-0.3161	0.9934	0.9819
26	0	-0.3146	-0.3240	0.9753	0.9636
27	0	-0.2963	-0.3059	0.9979	0.9912
28	0	-0.2204	-0.2264	1.0134	1.0153
29	0	-0.3189	-0.3288	0.9775	0.9707
30	0	-0.3351	-0.3452	0.9657	0.9588

A Tabela 7.39 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h, com fatores de penalidade constantes, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.39: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade constantes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.37782	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.40068	0.40000	0.00675
5	2	-0.40000	0.15332	0.22424	0.40000	0.00000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.20098	0.20000	0.00980
11	2	-0.06000	0.23026	0.11546	0.24000	0.00000
13	2	-0.06000	0.27808	0.15042	0.15000	0.07923

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em x e h e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.40 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.40: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade crescentes.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0500
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0402
3	0	-0.1477	-0.1508	1.0270	1.0218
4	0	-0.1783	-0.1820	1.0197	1.0155
5	2	-0.2569	-0.2631	1.0100	1.0159
6	0	-0.2085	-0.2139	1.0152	1.0158
7	0	-0.2376	-0.2432	1.0053	1.0081
8	2	-0.2202	-0.2283	1.0100	1.0204
9	0	-0.2707	-0.2773	1.0377	1.0171
10	0	-0.3017	-0.3096	1.0272	1.0070
11	2	-0.2707	-0.2773	1.0820	1.0403
12	0	-0.2936	-0.2986	1.0347	1.0063
13	2	-0.2936	-0.2986	1.0710	1.0266
14	0	-0.3090	-0.3150	1.0198	0.9924
15	0	-0.3100	-0.3167	1.0158	0.9895
16	0	-0.3021	-0.3087	1.0242	0.9991
17	0	-0.3056	-0.3133	1.0209	0.9991
18	0	-0.3197	-0.3274	1.0074	0.9830
19	0	-0.3220	-0.3301	1.0057	0.9824
20	0	-0.3180	-0.3261	1.0103	0.9877
21	0	-0.3099	-0.3180	1.0141	0.9938
22	0	-0.3096	-0.3177	1.0144	0.9943
23	0	-0.3155	-0.3230	1.0055	0.9821
24	0	-0.3165	-0.3248	1.0003	0.9810
25	0	-0.3069	-0.3161	0.9934	0.9817
26	0	-0.3146	-0.3240	0.9753	0.9634
27	0	-0.2963	-0.3059	0.9979	0.9910
28	0	-0.2204	-0.2264	1.0134	1.0151
29	0	-0.3189	-0.3288	0.9775	0.9705
30	0	-0.3351	-0.3453	0.9657	0.9586

A Tabela 7.41 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h, para resolver o problema (7.1).

Tabela 7.41: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u e Lagrangeana aumentada em x e h com fatores de penalidade crescentes.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$	μ_h
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.36264	10.00000	0.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39967	0.40000	0.00000
5	2	-0.40000	0.15332	0.21929	0.40000	0.00000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19351	0.20000	0.00000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11599	0.24000	0.00000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14989	0.15000	0.07858

As Figuras 7.21(a), 7.21(b) e 7.21(c), na página 167, apresentam as performances das funções objetivo e barreira considerando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.22(a), 7.22(b) e 7.22(c), na página 167, apresentam o número de iterações internas, externas e acumuladas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.23(a), 7.23(b) e 7.23(c), na página 168, apresentam as performances das tensões ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

As Figuras 7.24(a), 7.24(b) e 7.24(c), na página 168, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido com barreira logarítmica em u ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x e h, Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes e Lagrangeana aumentada em x e h com atualização de c_x e c_h.

Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.21 (b) e (c), as funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.21(a), após a primeira iteração externa, a função barreira descreve comportamento assintótico.

As Tabelas 7.36, 7.38 e 7.40 e a Figura 7.24 mostram que os procedimentos P1, P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Em termos de iterações, pela Figura 7.22, verifica-se que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P2 leva pequena vantagem sobre P3.

Com relação à Figura 7.23, as tensões em (b) e (c) também apresentam comportamentos muito semelhantes em direção à solução.

7.3.3 Gradiente Reduzido com Projeção nas Restrições Funcionais

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização considerando fator de penalidade inicial igual a 10 com limite máximo igual a 10^6.

Estratégia com Penalidade em $\tilde{x}$ (P1)

A Tabela 7.42 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.42: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0518
2	2	-0.0997	-0.1033	1.0430	1.0422
3	0	-0.1477	-0.1503	1.0270	1.0240
4	0	-0.1783	-0.1814	1.0197	1.0178
5	2	-0.2569	-0.2621	1.0100	1.0180
6	0	-0.2085	-0.2131	1.0152	1.0182
7	0	-0.2376	-0.2423	1.0053	1.0104
8	2	-0.2202	-0.2275	1.0100	1.0228
9	0	-0.2707	-0.2762	1.0377	1.0197

Tabela 7.42: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
10	0	-0.3017	-0.3084	1.0272	1.0098
11	2	-0.2707	-0.2762	1.0820	1.0430
12	0	-0.2936	-0.2974	1.0347	1.0091
13	2	-0.2936	-0.2974	1.0710	1.0295
14	0	-0.3090	-0.3137	1.0198	0.9952
15	0	-0.3100	-0.3154	1.0158	0.9923
16	0	-0.3021	-0.3074	1.0242	1.0019
17	0	-0.3056	-0.3121	1.0209	1.0019
18	0	-0.3197	-0.3261	1.0074	0.9858
19	0	-0.3220	-0.3288	1.0057	0.9852
20	0	-0.3180	-0.3248	1.0103	0.9905
21	0	-0.3099	-0.3167	1.0141	0.9966
22	0	-0.3096	-0.3165	1.0144	0.9971
23	0	-0.3155	-0.3217	1.0055	0.9849
24	0	-0.3165	-0.3235	1.0003	0.9838
25	0	-0.3069	-0.3149	0.9934	0.9844
26	0	-0.3146	-0.3227	0.9753	0.9661
27	0	-0.2963	-0.3046	0.9979	0.9936
28	0	-0.2204	-0.2256	1.0134	1.0175
29	0	-0.3189	-0.3274	0.9775	0.9732
30	0	-0.3351	-0.3438	0.9657	0.9613

A Tabela 7.43 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.43: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38343	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39996	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22417	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19998	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11668	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14999	0.15000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.44 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.44: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0507
2	2	-0.0997	-0.1035	1.0430	1.0411
3	0	-0.1477	-0.1506	1.0270	1.0229
4	0	-0.1783	-0.1818	1.0197	1.0167
5	2	-0.2569	-0.2627	1.0100	1.0170
6	0	-0.2085	-0.2136	1.0152	1.0170
7	0	-0.2376	-0.2429	1.0053	1.0093
8	2	-0.2202	-0.2280	1.0100	1.0216

Tabela 7.44: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
9	0	-0.2707	-0.2768	1.0377	1.0186
10	0	-0.3017	-0.3091	1.0272	1.0086
11	2	-0.2707	-0.2768	1.0820	1.0422
12	0	-0.2936	-0.2981	1.0347	1.0079
13	2	-0.2936	-0.2981	1.0710	1.0283
14	0	-0.3090	-0.3145	1.0198	0.9940
15	0	-0.3100	-0.3161	1.0158	0.9911
16	0	-0.3021	-0.3081	1.0242	1.0007
17	0	-0.3056	-0.3128	1.0209	1.0007
18	0	-0.3197	-0.3268	1.0074	0.9846
19	0	-0.3220	-0.3295	1.0057	0.9840
20	0	-0.3180	-0.3255	1.0103	0.9893
21	0	-0.3099	-0.3174	1.0141	0.9954
22	0	-0.3096	-0.3172	1.0144	0.9959
23	0	-0.3155	-0.3224	1.0055	0.9837
24	0	-0.3165	-0.3242	1.0003	0.9826
25	0	-0.3069	-0.3156	0.9934	0.9832
26	0	-0.3146	-0.3234	0.9753	0.9649
27	0	-0.2963	-0.3053	0.9979	0.9924
28	0	-0.2204	-0.2261	1.0134	1.0163
29	0	-0.3189	-0.3282	0.9775	0.9719
30	0	-0.3351	-0.3446	0.9657	0.9600

A Tabela 7.45 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.45: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38321	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39996	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22454	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19998	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11671	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14999	0.15000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.46 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com fator de penalidade crescente para resolver o problema (6.4).

Tabela 7.46: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0502
2	2	-0.0997	-0.1036	1.0430	1.0406
3	0	-0.1477	-0.1508	1.0270	1.0224
4	0	-0.1783	-0.1819	1.0197	1.0162

Tabela 7.46: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
5	2	-0.2569	-0.2630	1.0100	1.0166
6	0	-0.2085	-0.2138	1.0152	1.0165
7	0	-0.2376	-0.2431	1.0053	1.0088
8	2	-0.2202	-0.2282	1.0100	1.0211
9	0	-0.2707	-0.2771	1.0377	1.0181
10	0	-0.3017	-0.3094	1.0272	1.0080
11	2	-0.2707	-0.2771	1.0820	1.0417
12	0	-0.2936	-0.2984	1.0347	1.0074
13	2	-0.2936	-0.2984	1.0710	1.0278
14	0	-0.3090	-0.3148	1.0198	0.9934
15	0	-0.3100	-0.3164	1.0158	0.9905
16	0	-0.3021	-0.3084	1.0242	1.0002
17	0	-0.3056	-0.3131	1.0209	1.0001
18	0	-0.3197	-0.3271	1.0074	0.9840
19	0	-0.3220	-0.3299	1.0057	0.9834
20	0	-0.3180	-0.3258	1.0103	0.9888
21	0	-0.3099	-0.3177	1.0141	0.9949
22	0	-0.3096	-0.3175	1.0144	0.9953
23	0	-0.3155	-0.3227	1.0055	0.9831
24	0	-0.3165	-0.3245	1.0003	0.9820
25	0	-0.3069	-0.3159	0.9934	0.9826
26	0	-0.3146	-0.3237	0.9753	0.9643
27	0	-0.2963	-0.3056	0.9979	0.9919
28	0	-0.2204	-0.2263	1.0134	1.0158
29	0	-0.3189	-0.3285	0.9775	0.9713
30	0	-0.3351	-0.3449	0.9657	0.9595

A Tabela 7.47 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.4).

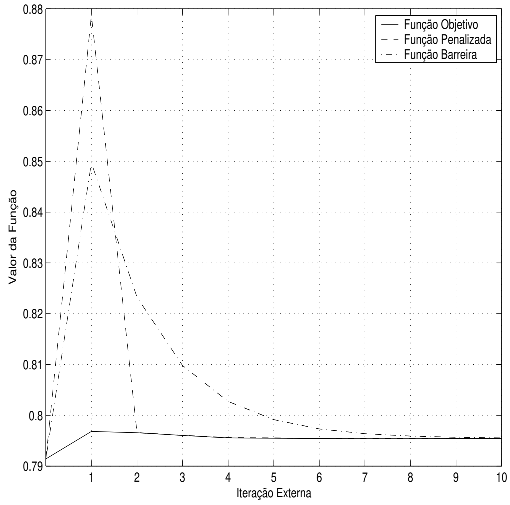
Tabela 7.47: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38374	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39996	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22227	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19998	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11630	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14999	0.15000

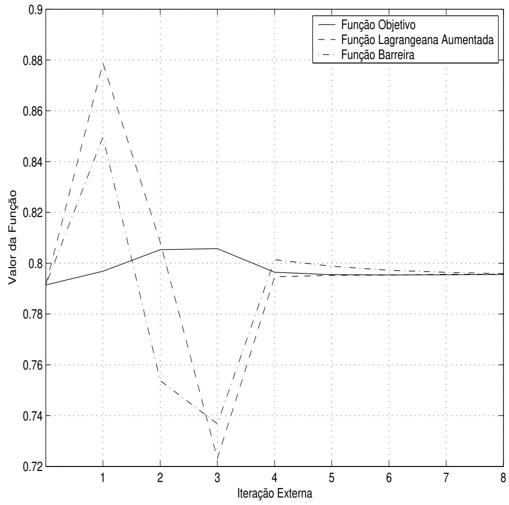
As Figuras 7.25(a), 7.25(b) e 7.25(c), na Página 174, apresentam as performances das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.26(a), 7.26(b) e 7.26(c), na Página 174, apresentam o número de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

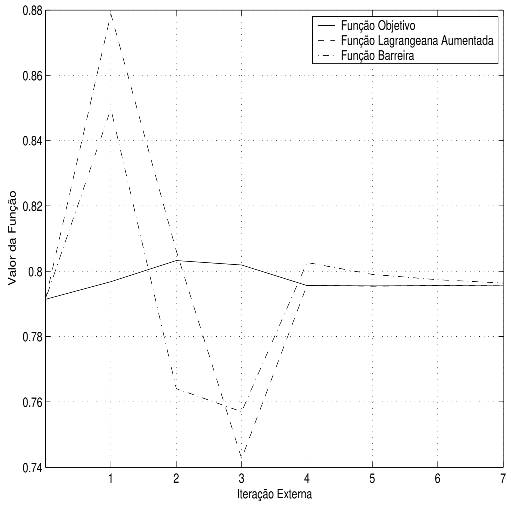
As Figuras 7.27(a), 7.27(b) e 7.27(c), na Página 175, apresentam os perfis das tensões nas



(a)

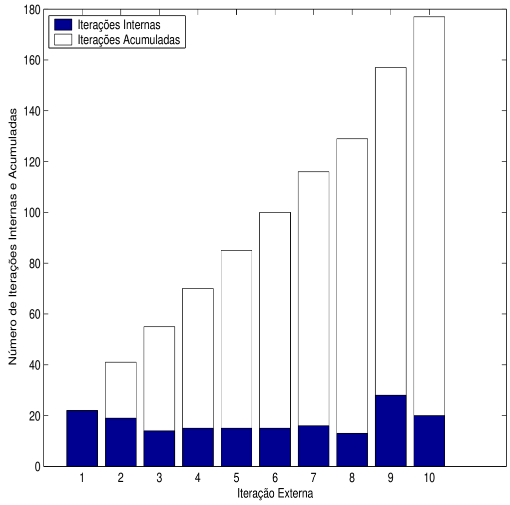


(b)

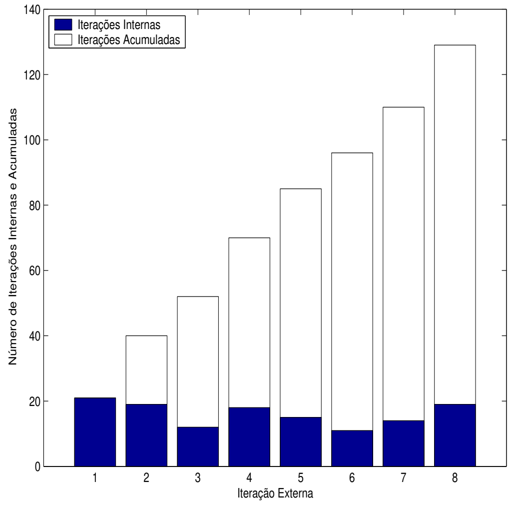


(c)

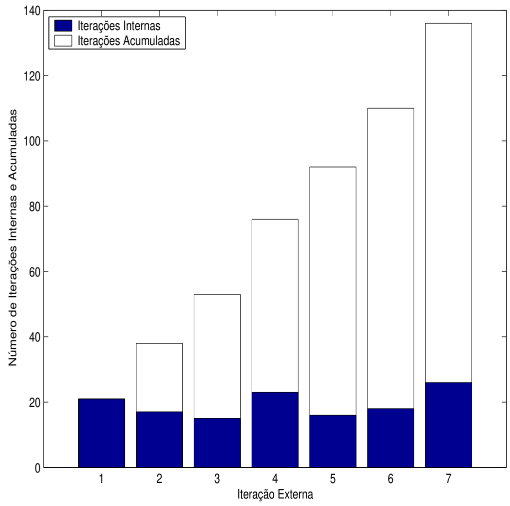
Figura 7.21: IEEE 30 - Performance das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada e barreira considerando gradiente reduzido com barreira em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

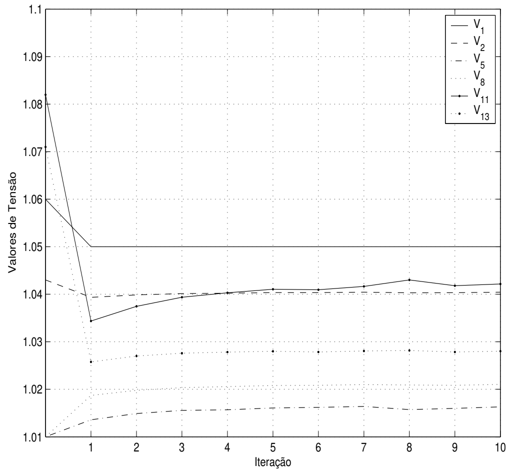


(b)

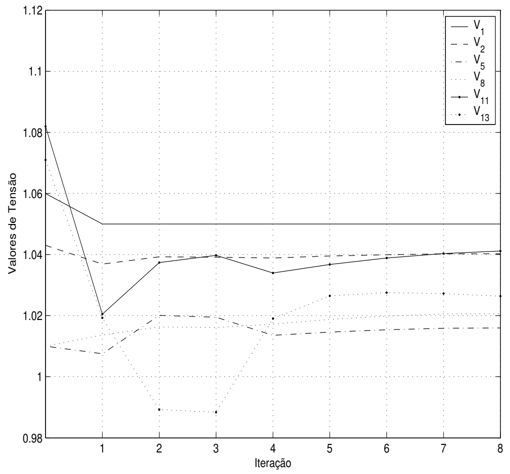


(c)

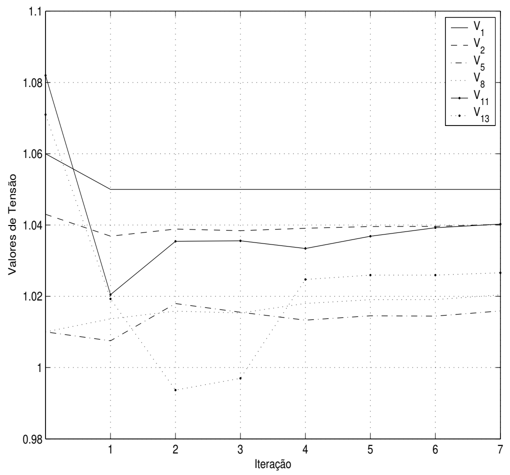
Figura 7.22: IEEE 30 - Iterações internas, externas e acumuladas ao longo do processo de otimização considerando gradiente reduzido com barreira em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)

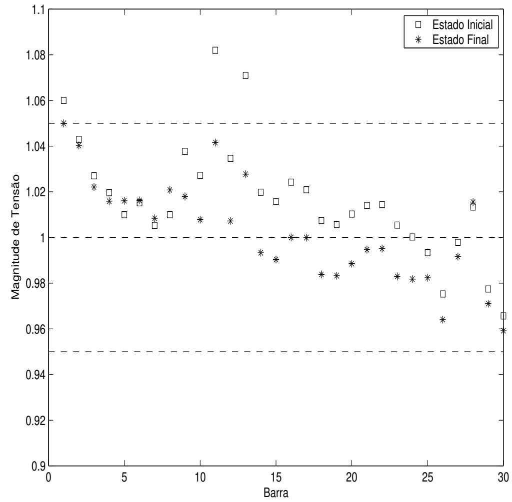


(b)

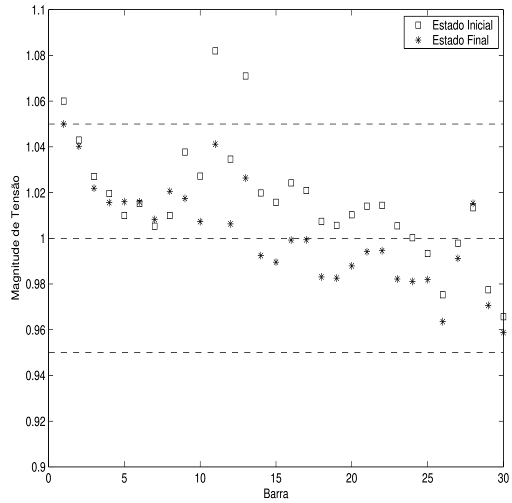


(c)

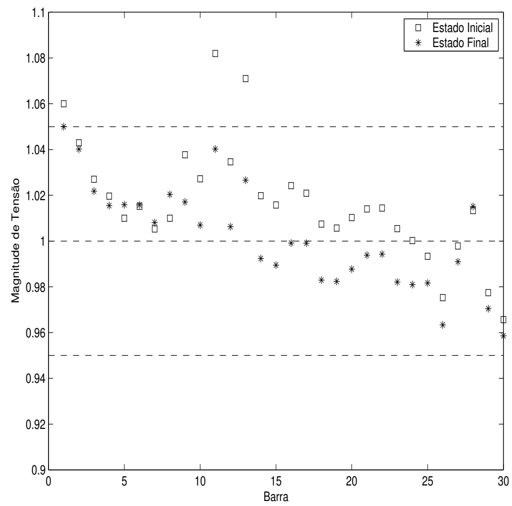
Figura 7.23: IEEE 30 - Tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido com barreira em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.24: IEEE 30 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão considerando gradiente reduzido com barreira em u e: (a) penalidade em x e h, (b) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h constantes, e (c) Lagrangeana aumentada em x e h com c_x e c_h crescentes.

barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.28(a), 7.28(b) e 7.28(c), na Página 175, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.25 (b) e (c), as funções objetivo e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.25(a), as funções descrevem comportamento assintótico.

As Tabelas 7.44 e 7.46 e as Figuras 7.28 (b) e (c) mostram que os procedimentos P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Já o procedimento P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3} (observar valor de tensão da barra 1 na Tabela 7.42).

Em termos de iterações, pela Figura 7.26, verifica-se que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P3 leva vantagem sobre P2.

Observa-se ainda que, nos três procedimentos, as iterações externas iniciais têm uma parcela altamente significativa dentro de todo o processo iterativo. Isto pode ser devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, que faz com que o processo iterativo gere, nessas iterações, tensões infactíveis em direção a uma solução factível (Figura 7.27).

7.3.4 Gradiente Reduzido com Barreira nas Restrições Funcionais

A seguir apresentamos os resultados do processo de otimização considerando fator de penalidade inicial igual a 10 com limite máximo igual a 10^6 e fator de barreira inicial igual a 5.10^{-3} com limite mínimo igual a 10^{-8}.

Estratégia com Penalidade em $\tilde{x}$ (P1)

A Tabela 7.48 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.48: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0518
2	2	-0.0997	-0.1033	1.0430	1.0422
3	0	-0.1477	-0.1503	1.0270	1.0240
4	0	-0.1783	-0.1814	1.0197	1.0178
5	2	-0.2569	-0.2621	1.0100	1.0180
6	0	-0.2085	-0.2131	1.0152	1.0182
7	0	-0.2376	-0.2423	1.0053	1.0104
8	2	-0.2202	-0.2275	1.0100	1.0228
9	0	-0.2707	-0.2762	1.0377	1.0197
10	0	-0.3017	-0.3084	1.0272	1.0098
11	2	-0.2707	-0.2762	1.0820	1.0430
12	0	-0.2936	-0.2974	1.0347	1.0091
13	2	-0.2936	-0.2974	1.0710	1.0295
14	0	-0.3090	-0.3137	1.0198	0.9952
15	0	-0.3100	-0.3154	1.0158	0.9923
16	0	-0.3021	-0.3074	1.0242	1.0019
17	0	-0.3056	-0.3121	1.0209	1.0019
18	0	-0.3197	-0.3261	1.0074	0.9858
19	0	-0.3220	-0.3288	1.0057	0.9852
20	0	-0.3180	-0.3248	1.0103	0.9905
21	0	-0.3099	-0.3167	1.0141	0.9966
22	0	-0.3096	-0.3165	1.0144	0.9971
23	0	-0.3155	-0.3217	1.0055	0.9849
24	0	-0.3165	-0.3235	1.0003	0.9838
25	0	-0.3069	-0.3149	0.9934	0.9844
26	0	-0.3146	-0.3227	0.9753	0.9661
27	0	-0.2963	-0.3046	0.9979	0.9936
28	0	-0.2204	-0.2256	1.0134	1.0175
29	0	-0.3189	-0.3274	0.9775	0.9731
30	0	-0.3351	-0.3438	0.9657	0.9613

A Tabela 7.49 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.49: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e penalidade em $\tilde{x}$.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38343	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39996	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22418	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19998	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11667	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14999	0.15000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Constante (P2)

A Tabela 7.50 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.50: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0506
2	2	-0.0997	-0.1035	1.0430	1.0410
3	0	-0.1477	-0.1507	1.0270	1.0228
4	0	-0.1783	-0.1818	1.0197	1.0166
5	2	-0.2569	-0.2628	1.0100	1.0169
6	0	-0.2085	-0.2137	1.0152	1.0169
7	0	-0.2376	-0.2429	1.0053	1.0092
8	2	-0.2202	-0.2281	1.0100	1.0215
9	0	-0.2707	-0.2769	1.0377	1.0185
10	0	-0.3017	-0.3091	1.0272	1.0085
11	2	-0.2707	-0.2769	1.0820	1.0421
12	0	-0.2936	-0.2982	1.0347	1.0078
13	2	-0.2936	-0.2982	1.0710	1.0282
14	0	-0.3090	-0.3145	1.0198	0.9939
15	0	-0.3100	-0.3162	1.0158	0.9910
16	0	-0.3021	-0.3082	1.0242	1.0006
17	0	-0.3056	-0.3128	1.0209	1.0006
18	0	-0.3197	-0.3269	1.0074	0.9845
19	0	-0.3220	-0.3296	1.0057	0.9839
20	0	-0.3180	-0.3256	1.0103	0.9892
21	0	-0.3099	-0.3175	1.0141	0.9953
22	0	-0.3096	-0.3173	1.0144	0.9958
23	0	-0.3155	-0.3225	1.0055	0.9836
24	0	-0.3165	-0.3243	1.0003	0.9824
25	0	-0.3069	-0.3156	0.9934	0.9831
26	0	-0.3146	-0.3235	0.9753	0.9648
27	0	-0.2963	-0.3054	0.9979	0.9923
28	0	-0.2204	-0.2262	1.0134	1.0162
29	0	-0.3189	-0.3282	0.9775	0.9718
30	0	-0.3351	-0.3447	0.9657	0.9599

A Tabela 7.51 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade constante, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.51: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com $c_{\tilde{x}}$ constante.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38294	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39996	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.22494	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19998	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11690	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14999	0.15000

Estratégia com Lagrangeana Aumentada em $\tilde{x}$ e Fator de Penalidade Crescente (P3)

A Tabela 7.52 apresenta as condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, com fator de penalidade crescente, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.52: Condições inicial e final de θ e V em todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$\theta^{inicial}$	θ^{final}	$V^{inicial}$	V^{final}
1	1	+0.0000	+0.0000	1.0600	1.0508
2	2	-0.0997	-0.1035	1.0430	1.0412
3	0	-0.1477	-0.1506	1.0270	1.0230
4	0	-0.1783	-0.1817	1.0197	1.0168
5	2	-0.2569	-0.2627	1.0100	1.0171
6	0	-0.2085	-0.2136	1.0152	1.0171
7	0	-0.2376	-0.2428	1.0053	1.0094
8	2	-0.2202	-0.2280	1.0100	1.0217
9	0	-0.2707	-0.2768	1.0377	1.0188
10	0	-0.3017	-0.3090	1.0272	1.0087
11	2	-0.2707	-0.2768	1.0820	1.0424
12	0	-0.2936	-0.2980	1.0347	1.0080
13	2	-0.2936	-0.2980	1.0710	1.0284
14	0	-0.3090	-0.3144	1.0198	0.9941
15	0	-0.3100	-0.3160	1.0158	0.9912
16	0	-0.3021	-0.3081	1.0242	1.0008
17	0	-0.3056	-0.3127	1.0209	1.0008
18	0	-0.3197	-0.3268	1.0074	0.9847
19	0	-0.3220	-0.3295	1.0057	0.9841
20	0	-0.3180	-0.3254	1.0103	0.9895
21	0	-0.3099	-0.3174	1.0141	0.9956
22	0	-0.3096	-0.3171	1.0144	0.9960
23	0	-0.3155	-0.3223	1.0055	0.9838
24	0	-0.3165	-0.3241	1.0003	0.9827
25	0	-0.3069	-0.3155	0.9934	0.9833
26	0	-0.3146	-0.3233	0.9753	0.9650
27	0	-0.2963	-0.3052	0.9979	0.9925
28	0	-0.2204	-0.2261	1.0134	1.0164
29	0	-0.3189	-0.3281	0.9775	0.9720
30	0	-0.3351	-0.3445	0.9657	0.9601

A Tabela 7.53 apresenta os valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$, para resolver o problema (6.13).

Tabela 7.53: Valores inicial e final de potência reativa gerada nas barras tipo 1 e 2 considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Barra	Tipo	$Q_g^{\min}$	$Q^{inicial}$	Q^{final}	$Q_g^{\max}$
1	1	-10.00000	-0.22052	-0.38319	10.00000
2	2	-0.40000	0.31864	0.39910	0.40000
5	2	-0.40000	0.15332	0.21803	0.40000
8	2	-0.10000	-0.08058	0.19905	0.20000
11	2	-0.06000	0.23026	0.11612	0.24000
13	2	-0.06000	0.27808	0.14961	0.15000

As Figuras 7.29(a), 7.29(b) e 7.29(c), na Página 176, apresentam as performances das funções objetivo, penalizada ou Lagrangeana aumentada, utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.30(a), 7.30(b) e 7.30(c), na Página 176, apresentam os números de iterações internas e externas ao longo de todo o processo de otimização, utilizando, respectivamente, penalidade em x, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.31(a), 7.31(b) e 7.31(c), na Página 177, apresentam os perfis das tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

As Figuras 7.32(a), 7.32(b) e 7.32(c), na Página 177, apresentam os estados inicial e final das magnitudes de tensão utilizando, respectivamente, penalidade em $\tilde{x}$, Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Comentários

Como se pode ver pelas Figuras 7.29 (b) e (c), as funções objetivo, barreira e Lagrangeana aumentada exibem comportamentos muito semelhantes. Já na Figura 7.29(a), as funções descrevem comportamento assintótico.

As Tabelas 7.50 e 7.52 e as Figuras 7.32 (b) e (c) mostram que os procedimentos P2 e P3 conduziram ao mesmo estado final de θ e V. Já o procedimento P1 não consegue produzir uma solução que possa ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3} (observar valor de tensão da barra 1 na Tabela 7.48).

Em termos de iterações, pela Figura 7.30, verifica-se que P2 e P3 são muito mais eficientes que P1 e que P3 leva vantagem sobre P2.

Observa-se ainda que, nos três procedimentos, as iterações externas iniciais têm uma parcela altamente significativa dentro de todo o processo iterativo. Isto pode ser devido à condição $0 \leq \tilde{u} \leq 1$, que faz com que o processo iterativo gere, nessas iterações, tensões infactíveis em direção a uma solução factível (Figura 7.31).

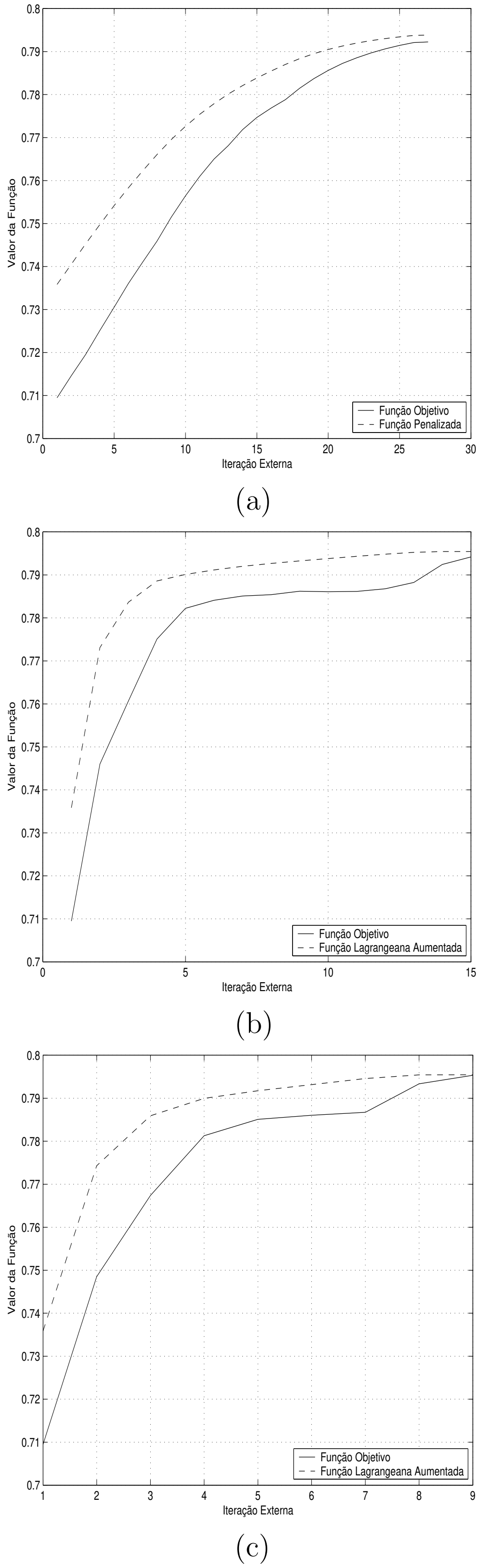


Figura 7.25: IEEE 30 - Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

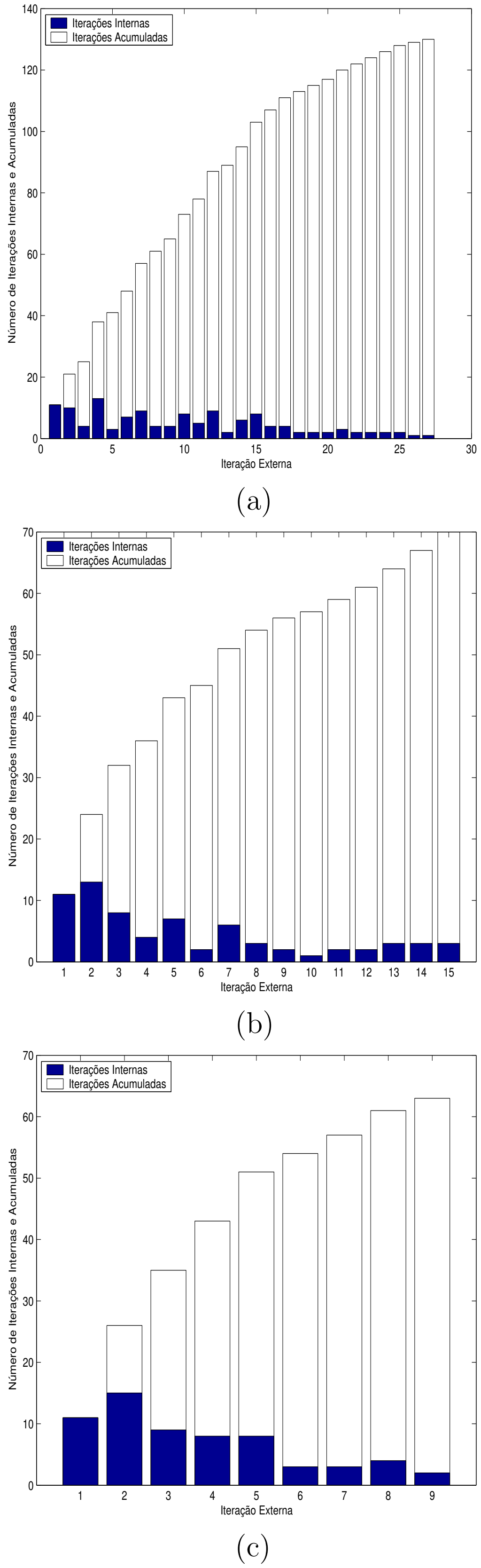
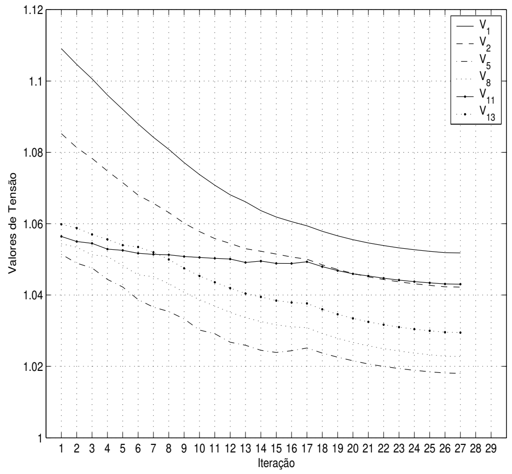
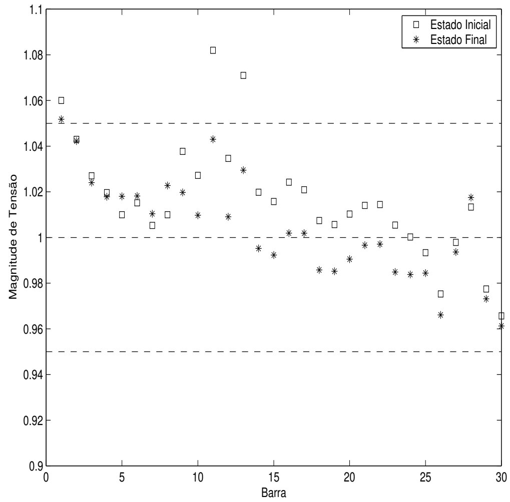


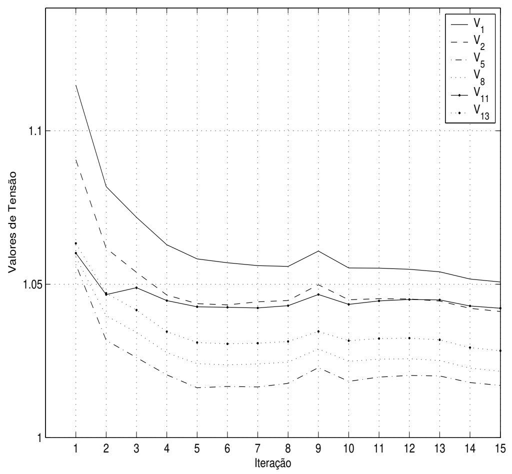
Figura 7.26: IEEE 30 - Números de iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



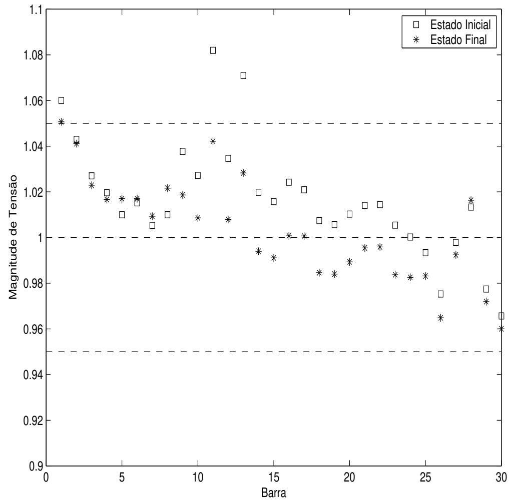
(a)



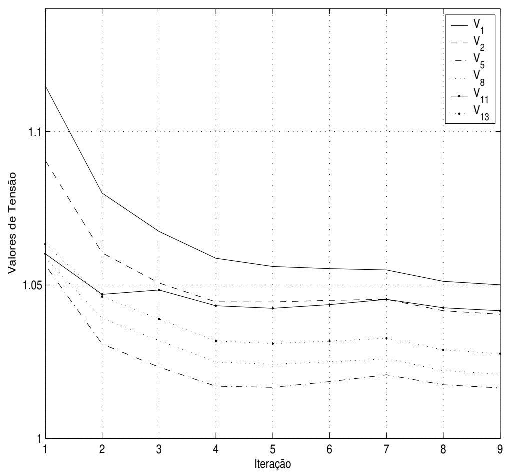
(a)



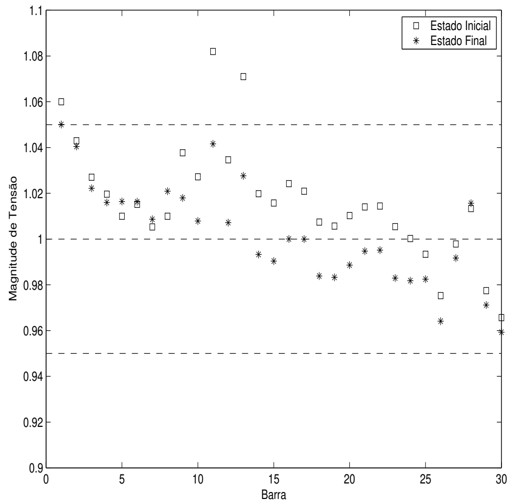
(b)



(b)



(c)



(c)

Figura 7.27: IEEE 30 - Perfis de tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Figura 7.28: IEEE 30 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão de todas as barras considerando gradiente reduzido projetado em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

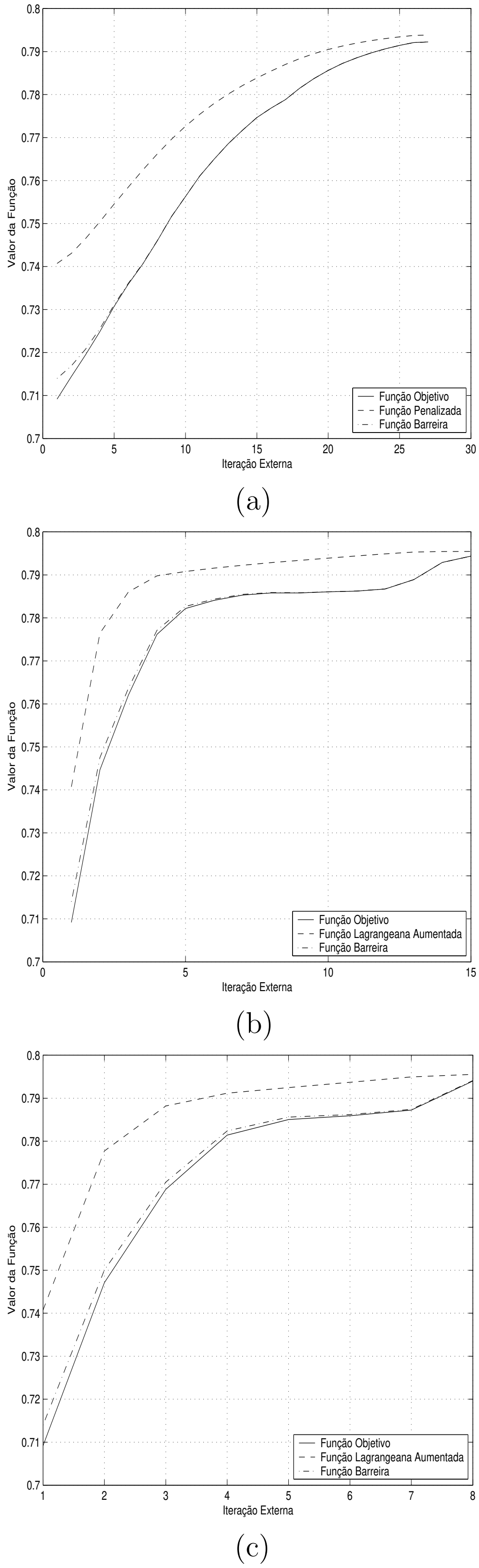


Figura 7.29: IEEE 30 - Performance das funções objetivo e penalizada ou Lagrangeana aumentada considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

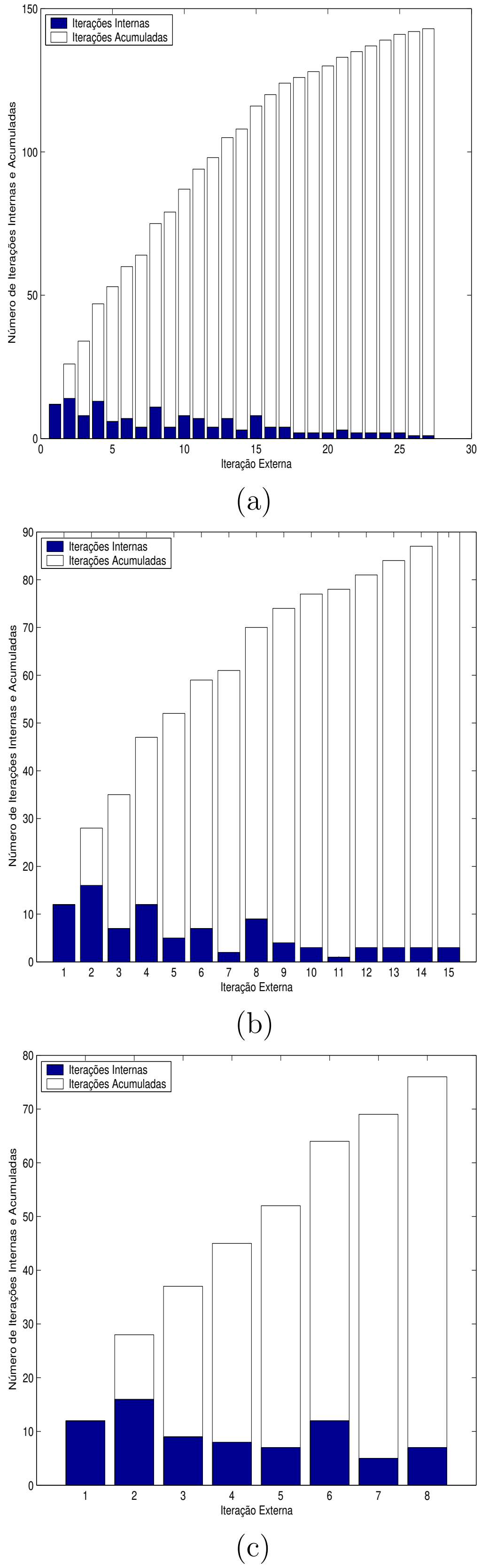
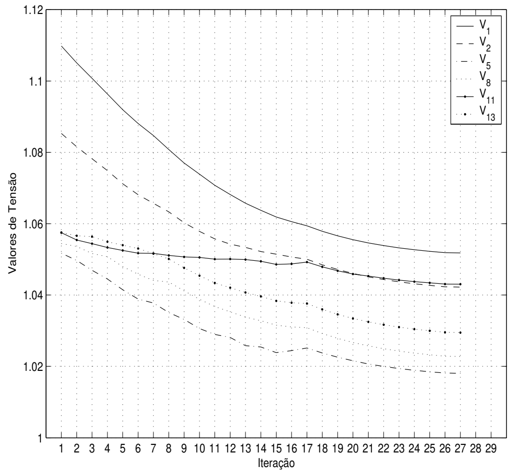
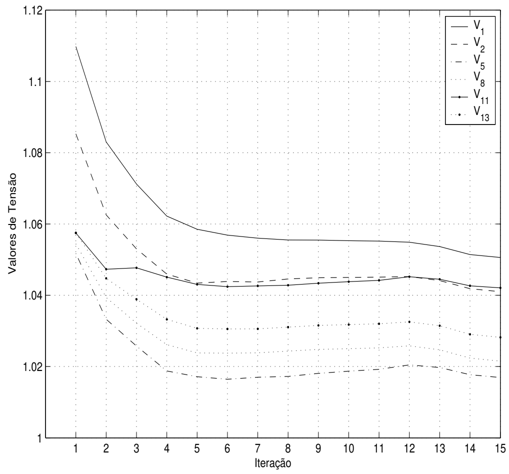


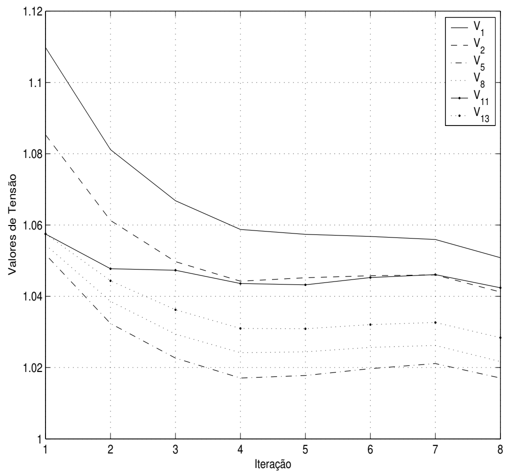
Figura 7.30: IEEE 30 - Números de iterações internas, externas e acumuladas considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)

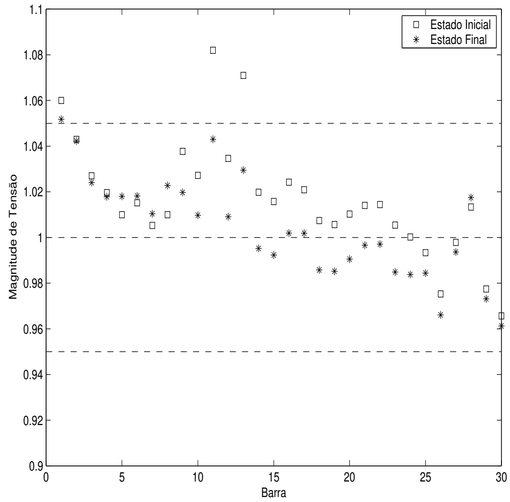


(b)

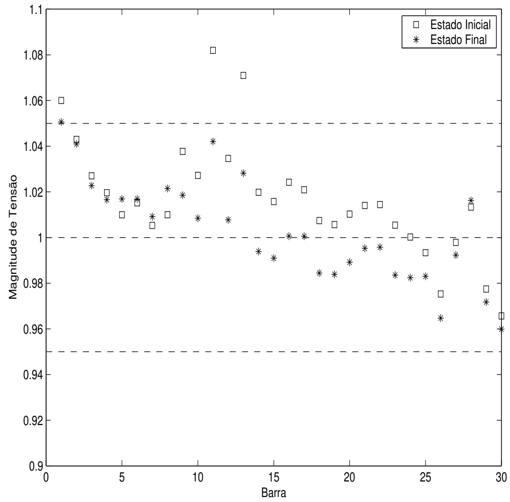


(c)

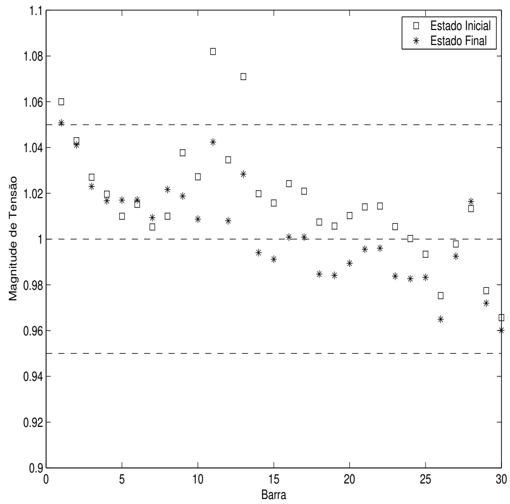
Figura 7.31: IEEE 30 - Perfis de tensões nas barras tipo 1 e 2 ao final de cada iteração externa considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.32: IEEE 30 - Estados inicial e final das magnitudes de tensão de todas as barras considerando gradiente reduzido com barreira em $\tilde{u}$ e: (a) penalidade em $\tilde{x}$, (b) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ constante e (c) Lagrangeana aumentada em $\tilde{x}$ com $c_{\tilde{x}}$ crescente.

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

8.1 Conclusões

O trabalho que resultou nesta tese foi orientado para a experimentação numérica de novas estratégias e algoritmos baseados no método do gradiente reduzido que possibilitem a resolução do FPO visando detectar as dificuldades inerentes aos diferentes tipos de restrições do problema e escolher as técnicas mais adequadas para seu tratamento.

Essas estratégias são baseadas no método do gradiente reduzido combinado com técnicas de projeção, de barreira logarítmica e de Lagrangeana aumentada. As estratégias implementadas e testadas aproveitaram as características que as técnicas possuem quando utilizadas individualmente para a consideração das restrições na resolução do problema.

De um modo geral, nas diversas abordagens de resolução do FPO, as restrições de desigualdade lineares e funcionais, têm sua factibilidade garantida através de técnicas de projeção, de barreiras e de Lagrangeana aumentada. Apresentamos um estudo do comportamento dessas técnicas atuando juntamente com o método do gradiente reduzido na busca da solução do problema. A vantagem desta abordagem é que pudemos tirar proveito da natureza das restrições do problema para definir a forma de aplicação das técnicas de otimização. Por exemplo, pudemos adotar uma técnica que opera com pontos factíveis para tratar um tipo de restrição (gradiente reduzido com projeção ou barreira sobre variáveis independentes e restrições de igualdade) combinada com outra técnica que opera com pontos infactíveis para tratar outras restrições fortemente acopladas com as primeiras (Lagrangeana aumentada para restrições de desigualdade funcionais e variáveis dependentes). Essa flexibilidade se mostrou extremamente útil.

Escolhemos um exemplo de problema para ilustrar o comportamento dos processos de solução utilizando os algoritmos estudados. Os estudos de casos desse exemplo foram apresentados ao longo do texto para ilustrar o comportamento dos métodos analisados.

Sobre os resultados gerais obtidos podemos tecer alguns comentários. Em todos os casos considerados, os procedimentos (P2 e P3) utilizando Lagrangeana aumentada foram muito mais eficientes que o procedimento (P1) utilizando penalidade. Ao final da primeira iteração externa (comum nos três procedimentos) o ganho, em termos de perfil de tensões ou valor da função objetivo, é bastante considerável. Mas daí em diante, a utilização de P1 torna o processo iterativo muito lento indicando uma dificuldade em se chegar à solução ótima do problema. Em alguns casos não se conseguiu produzir uma solução que pudesse ser considerada factível dentro de uma tolerância de 10^{-3}.

Sobre a utilização de gradiente reduzido projetado ou com barreira sobre as variáveis independentes, a utilização desta abordagem combinada com P1, P2 ou P3 em alguns casos mostrou-se um pouco melhor que aquela. Em outros casos, o desempenho foi praticamente o mesmo nas duas abordagens.

Os resultados obtidos a partir dos estudos realizados nos capítulos 4 e 5, indicam que a restrição em h é satisfeita antes da restrição em x indicando uma maior dificuldade desta restrição em ser satisfeita.

Os estudos realizados nos Capítulos 6 e 7 indicam que a estratégia de utilizar barreira nas restrições em h combinada com P1, P2 ou P3 não é mais eficiente que as estratégias aplicadas nos capítulos 4 e 5.

8.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Uma perspectiva de continuidade da pesquisa está relacionada à modelagem do sistema, onde é prevista a inclusão de algumas alternativas para a função objetivo, e à utilização de outras técnicas de otimização para comparação com o que já foi estudado. Ultimamente, a resolução do problema de FPO tem sido realizada utilizando técnicas de pontos interiores com sucesso. Entretanto, esta abordagem apresenta sérias dificuldades quando a matriz dos coeficientes torna-se mal-condicionada. Desse modo, uma outra perspectiva que se abre, seria a combinação desta abordagem com as técnicas de gradiente reduzido, barreiras e Lagrangeana aumentada estudadas neste trabalho.

Finalmente, pretendemos realizar experimentações numéricas em problemas de dimensões maiores.

Referências Bibliográficas

[1] Abadie, J. Application of the GRG algorithm to optimal control problems. In *Integer and nonlinear programming*, pages 191–211. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[2] Abadie, J. Generalized reduced gradient and global Newton methods. In *Optimization and related fields (Erice, 1984)*, volume 1190 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–20. Springer, Berlin, 1986.

[3] Abadie, J. and Carpentier, J. Generalization of the Wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints. *Optimization*, pages 37–47, 1969.

[4] Abadie, J. and Guigou, J. Numerical experiments with the GRG method. In *Integer and nonlinear programming*, pages 529–536. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[5] Alsac, O., Bright, J., Prais, M., and Stott, B. Further developments in LP-based optimal power flow. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, PAS-5(3):697–711, 1990.

[6] Bertsekas, D. P. On penalty and multiplier methods for constrained minimization. In *Nonlinear programming (Proc. Sympos. Special Interest Group on Math. Programming, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1974)*, pages 165–191. Academic Press, New York, 1974.

[7] Bertsekas, D. P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, 1982.

[8] Bertsekas, D. P. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, 1995. 2nd edition, 1999.

[9] Biggs, M. C. and Laughton, M. A. Optimal electric power rescheduling: A large nonlinear programming test problem solved by recursive quadratic programming. *Mathematical Programming*, (13):167–182, 1977.

[10] Birgin, E. G., Martínez, J. M., and Raydan, M. Inexact spectral projected gradient methods on convex sets. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 23(4):539–559, Oct. 2003.

[11] Boukari, D. and Fiacco, A. V. Survey of penalty, exact-penalty and multiplier methods from 1968 to 1993. *Optimization*, 32(4):301–334, 1995.

[12] Burchett, R. C., Happ, H. H., and Vierath, D. R. Quadratically convergent optimal power flow. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, PAS-103(11):3267–3275, 1984.

[13] Carpentier, J. Contribution à l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, 3:431–447, 1962.

[14] Clements, K. A., Davis, P. W., and Frey, K. D. Treatment of inequality constraints in power system state estimation. *IEEE Trans. on Power Systems*, 10(2):567–574, 1995.

[15] Coleman, T. F. and Li, Y. A reflective Newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal on Optimization*, 6:1040–1058, 1996.

[16] Conn, A. R., Gould, N. I. M., and Toint, P. L. A globally convergent augmented Lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(2):545–572, Apr. 1991.

[17] Conn, A. R., Gould, N. I. M., and Toint, P. L. A globally convergent Lagrangian barrier algorithm for optimization with general inequality constraints and simple bounds. *Mathematics of Computation*, 66(217):261–288, Jan. 1997.

[18] Costa, G. R. M. *O Método Dual-Newton Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*. PhD thesis, Departamento de Engenharia de Sistemas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1990.

[19] Courant, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:1–23, 1943.

[20] Dennis, J. E. Jr. and Schnabel, R. B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Number 16 in Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, Penn., 1996.

[21] Dommel, H. W. and Tinney, W. F. Optimal power flow solutions. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, PAS-88(10):1866–1876, 1968.

[22] El-Bakry, A. S., Tapia, R. A., Tsuchiya, T., and Zhang, Y. On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89(3):507–541, 1996.

[23] Fiacco, A. V. Objective function and logarithmic barrier function properties in convex programming: level sets, solution attainment and strict convexity. *Optimization*, 34(3):213–222, 1995.

[24] Fiacco, A. V. and McCormick, G. P. *Nonlinear programming sequential unconstrained minimization techniques*. John Wiley, New York, NY, 1968. Reprinted by SIAM Publications, 1990.

[25] Gill, P. E., Murray, W., and Wright, M. H. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.

[26] Granville, S. Optimal reactive dispatch through interior point method. *IEEE Trans. on Power Systems*, 9(1):136–146, 1994.

[27] Granville, S., Lima, M. C. A., Lima, L. C., and Prado, S. *PLANVAR - An Optimization Software for VAr Sources Planning*. 14th Symposium in Mathematical Programming, Amsterdam, 1991.

[28] Hestenes, M. R. Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4:303–320, 1969.

[29] Himmelblau, D. M., Edgar, T. F., and Lasdon, L. S. *Optimization of Chemical Process*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 2001.

[30] Karmarkar, N. A new polinomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorics*, 4(4):373–395, 1984.

[31] Kelley, C. T. *Iterative methods for optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.

[32] Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain, A., and Ratner, M. Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 4(1):34–50, Mar. 1978.

[33] Luenberger, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, second edition, May 1984. Reprinted with corrections in May, 1989.

[34] Mehrotra, S. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM J. Optim.*, 2(4):575–601, 1992.

[35] Mehrotra, S. and Ye, Y. Finding an interior point in the optimal face of linear programs. *Math. Programming*, 62(3, Ser. A):497–515, 1993.

[36] Momoh, J. A., El-Hawary, M. E., and Adapa, R. A review of selected optimal power flow literature to 1993 - part I: Nonlinear and quadratic programming approaches. *IEEE Trans. on Power Systems*, 14(1):96–104, 1999a.

[37] Momoh, J. A., El-Hawary, M. E., and Adapa, R. A review of selected optimal power flow literature to 1993 - part II: Newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Trans. on Power Systems*, 14(1):105–111, 1999b.

[38] Monticelli, A. J. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Edgard Blücher, São Paulo, 1983.

[39] Moré, J. J. and Thuente, D. J. Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(3):286–307, Sept. 1994.

[40] Murray, W. and Wright, M. H. Line search procedures for the logarithmic barrier function. *SIAM Journal on Optimization*, 4(2):229–246, 1994.

[41] Murtagh, B. A. and Saunders, M. A. A projected Lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints. *Mathematical Programming Study*, (16):84–117, 1982.

[42] Nocedal, J. and Wright, S. J. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[43] Peschon, J., Bree, D. W. Jr., and Laszlo, P. H. Optimal power-flow solutions for power system planning. *Proceedings of the IEEE*, 60(1):64–70, 1972.

[44] Powell, M. J. D. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In R. Fletcher, editor, *Optimization*, pages 283–298. Academic Press, New York, NY, 1969.

[45] Quintana, V. H., Torres, G. L., and Medina-Palomo, J. Interior point methods and their applications on power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Trans. on Power Systems*, 15(1):170–176, 2000.

[46] Rezania, E. and Shahidehpour, S. M. Real power loss minimization using interior point method. *Electrical Power and Energy Systems*, 23:45–56, 2001.

[47] Rockafellar, R. T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming. *SIAM J. Control*, 12:268–285, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Lucien W. Neustadt.

[48] Santos, A. Jr. *O Método da Lagrangeana Aumentada Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*. PhD thesis, Departamento de Engenharia de Sistemas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1986.

[49] Santos, A. Jr. and Costa, G. R. M. Optimal-power-flow solution by Newton's method applied to an augmented Lagrangian function. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, 142(1):33–36, 1995.

[50] Santos, A. Jr., Deckmann, S., and Soares, S. A dual augmented Lagrangian approach for optimal power flow. *IEEE Trans. on Power Systems*, 3(3):1020–1025, 1988.

[51] Sasson, A. M. Combined use of the parallel and Fletcher-Powell non-linear programming methods for optimal load flows. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, PAS-88(10):1530–1537, 1969.

[52] Sasson, A. M., Viloria, F., and Aboytes, F. Optimal load flow using the Hessian matrix. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, PAS-92:31–41, 1973.

[53] Sun, D.I., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A., and Tinney, W. F. Optimal power flow by Newton method. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, PAS-103(10):2864–2880, 1984.

[54] Vanderbei, R. J. and Shanno, D. F. An interior point algorithm for nonconvex nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, (13):231–252, 1999.

[55] Vasconcellos, M. T. *Métodos de Solução do Fluxo de Potência Ótimo Reativo e Tratamento das Restrições de Desigualdade.* PhD thesis, Departamento de Engenharia de Sistemas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1999.

[56] Venkataraman, P. *Applied optimization with MATLAB programming.* Wiley, New York, NY, USA, 2002.

[57] Wolfe, P. Methods of nonlinear programming. In *Recent advances in mathematical programming*, pages 67–86. McGraw-Hill, New York, 1963.

[58] Wu, Y., Debs, A.S., and Marsten, R.E. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flow. *IEEE Trans. on Power Systems*, 9:876–883, 1994.

Apêndice A

Modelo da Rede Elétrica e Equações do Fluxo de Carga

Este apêndice apresenta a modelagem da rede elétrica utilizada neste trabalho e é baseada em Monticelli (1983). O modelo da rede elétrica utilizado neste trabalho é um modelo estático de injeções constantes de potência, devido às leis de Kirchhoff. Os geradores e cargas são modelados através das barras ou nós da rede, e os transformadores e linhas de transmissão, através dos ramos.

A.1 Definições e Variáveis

Os seguintes termos são aqui definidos:

- V_k−magnitude de tensão na barra k;
- θ_k−ângulo de tensão na barra k;
- θ_{km}−diferença angular entre as barras k e m ($\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$);
- E_k−tensão complexa (fasor) na barra k $\left(E_k = V_k e^{j\theta_k}\right)$;
- I_k−injeção líquida de corrente na barra k;
- I_k^{sh}−injeção de corrente na barra k devido a um elemento *shunt* (banco de capacitores ou indutores);
- P_{c_k}−potência da carga ativa na barra k;
- Q_{c_k}−potência da carga reativa na barra k;
- P_{g_k}−potência ativa gerada na barra k;

- $Q_{g_k}-$potência reativa gerada na barra k;
- $P_k^{esp}-$potência ativa especificada na barra k ($P_k^{esp} = P_{g_k} - P_{c_k}$);
- $Q_k^{esp}-$potência reativa especificada na barra k ($Q_k^{esp} = Q_{g_k} - Q_{c_k}$);
- P_k-injeção líquida de potência ativa na barra k;
- Q_k-injeção líquida de potência reativa na barra k;
- $P_{km}-$fluxo de potência ativa no ramo $k-m$;
- $Q_{km}-$fluxo de potência reativa no ramo $k-m$;
- $Q_k^{sh}-$componente de injeção reativa na barra k devido a um elemento reativo *shunt* ligado à barra (banco de capacitores ou indutores: $Q_k^{sh} = b_k^{sh} V_k^2$) ;
- $z_{km}-$ impedância do ramo $k-m$;
- $r_{km}-$ resistência do ramo $k-m$;
- $x_{km}-$ reatância do ramo $k-m$;
- $y_{km}-$ admitância do ramo $k-m$;
- $g_{km}-$ condutância do ramo $k-m$;
- $b_{km}-$ susceptância do ramo $k-m$;
- $t_{km}-$ tap do transformador em fase do ramo $k-m$;
- $b_k^{sh}-$ susceptância *shunt* ligada à barra k;
- $b_{km}^{sh}-$ susceptância *shunt* do ramo $k-m$;
- Ω_k-conjunto das barras vizinhas à barra k;
- $\mathbb{K}-$conjunto das barras vizinhas à barra k mais a barra k;
- $j-$unidade imaginária $\left(j = \sqrt{-1}\right)$;
- $n-$número de barras da rede.

A Figura A.1 mostra as injeções de potência que podem existir na modelagem de uma barra do sistema:

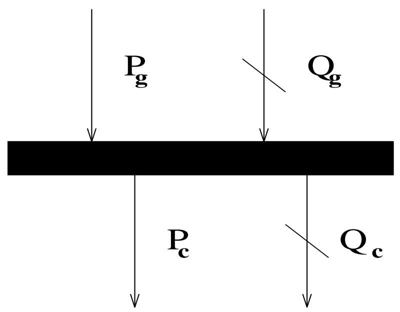


Figura A.1: Injeções de potência.

A.2 Tipos de Barras

As barras são divididas em três tipos básicos:

- SL−barra de referência (*slack*), fornece a referência angular do sistema e fecha o balanço de potência;
- PV−barra de geração onde a injeção reativa é desconhecida;
- PQ−barra de carga onde as potências demandadas pelas cargas são conhecidas.

A.3 Modelo π da Linha de Transmissão

O modelo π da linha de transmissão é mostrado na Figura (A.2) juntamente com as convenções de sentido de corrente.

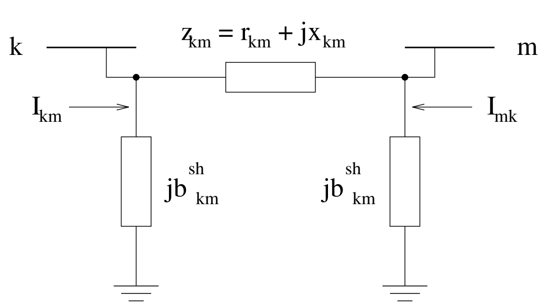


Figura A.2: Modelo π.

No modelo π, a reatância série é dada por:

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km} \tag{A.1}$$

e a admitância série é dada por seu inverso:

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = \frac{1}{z_{km}}, \tag{A.2}$$

onde

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \tag{A.3}$$

e

$$b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \tag{A.4}$$

Correntes de Ramo

As correntes I_{km} e I_{mk} do modelo π podem ser calculadas a partir das leis de Kirchhoff:

$$I_{km} = y_{km}\left(E_k - E_m\right) + jb_{km}^{sh}E_k \tag{A.5}$$

e

$$I_{mk} = y_{km}\left(E_m - E_k\right) + jb_{km}^{sh}E_m. \tag{A.6}$$

A.4 Transformador em Fase

Transformadores em fase alteram a relação entre as magnitudes de tensão das barras terminais, embora preservem a diferença angular. Seu modelo é de uma admitância série y_{km} e um autotransformador ideal $1 : t_{km}$, como visto na Figura A.3

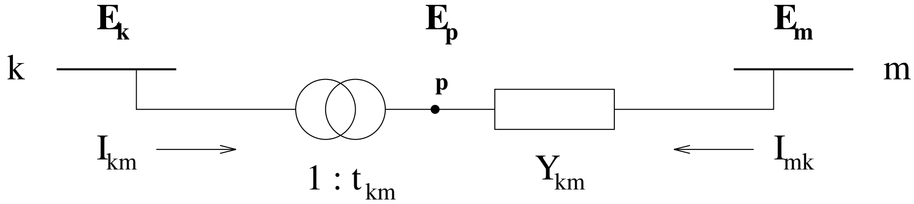


Figura A.3: Modelo do transformador em fase.

O modelo do transformador em fase impõe $\theta_k = \theta_p$ e, portanto:

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p}{V_k} = t_{km} \tag{A.7}$$

As correntes (A.5) e (A.6), para um ramo contendo transformador em fase, ficam:

$$I_{km} = t_{km}y_{km}\left(E_p - E_m\right) = t_{km}^2 y_{km}E_k - t_{km}y_{km}E_m \tag{A.8}$$

$$I_{mk} = y_{km}\left(E_m - E_p\right) = -t_{km}y_{km}E_k + y_{km}E_m \tag{A.9}$$

A.5 Injeções de Potência nas Barras e Matriz Y

A injeção líquida de corrente na barra k é obtida através da lei de Kirchhoff das correntes

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m\in\Omega_k} I_{km},\ k = 1, ..., n, \tag{A.10}$$

onde $I_k^{sh} = -jb_k^{sh}E_k$.

A injeção de corrente no ramo $k - m$ pode ser escrita de forma generalizada:

$$I_{km} = \left(t_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh}\right)E_k - t_{km}y_{km}E_m. \tag{A.11}$$

Assim, a expressão (A.11) pode ser escrita como:

$$I_k = \left[jb_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k}\left(jb_{km}^{sh} + t_{km}^2 y_{km}\right)\right]E_k + \sum_{m\in\Omega_k}\left(-t_{km}y_{km}\right)E_m. \tag{A.12}$$

Para $k = 1, ..., NB$, esta expressão pode ser posta na forma matricial:

$$I = [Y]\,E, \tag{A.13}$$

onde I é o vetor da injeções nodais; E, o vetor de tensões nodais e $Y = G + jB$, a matriz admitância nodal cujos elementos são dados por:

- $Y_{kk} = jb_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k}\left(jb_{km}^{sh} + t_{km}^2 y_{km}\right)$

  $g_{kk} = \sum_{m\in\Omega_k} t_{km}^2 g_{km}$

  $b_{kk} = b_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k} b_{km}^{sh} t_{km}^2 b_{km}$

- $Y_{km} = -t_{km}y_{km}$

  $g_{km} = -t_{km}g_{km}$

$b_{km} = -t_{km}b_{km}$

- $Y_{mk} = -t_{km}y_{km} = Y_{km}$

  $g_{km} = g_{mk}$

  $b_{km} = b_{mk}$

- $Y_{mm} = jb_m^{sh} + \sum_{i\in\Omega_m}\left(jb_{mi}^{sh} + y_{mi}\right)$

  $g_{mm} = \sum_{m\in\Omega_k} g_{km}$

  $b_{mm} = b_m^{sh} + \sum_{k\in\Omega_m} b_{km}^{sh}b_{km}.$

A injeção de potência na barra k pode ser colocada na forma:

$$I_k = Y_{kk}E_k + \sum_{m\in\Omega_k} Y_{km}E_m = \sum_{m\in\mathbb{K}} Y_{km}E_m. \tag{A.14}$$

A equação (A.14) pode ser escrita como:

$$I_k = \sum_{m\in\mathbb{K}} \left(g_{km} + jb_{km}\right) V_m e^{j\theta_m}. \tag{A.15}$$

A injeção de potência é dada por:

$$S_k^* = P_k - jQ_k = E_k^* I_k \tag{A.16}$$

que, em substituindo I_k (A.14), tem-se:

$$S_k^* = V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m\in\mathbb{K}} \left(g_{km} + jb_{km}\right) V_m e^{j\theta_m}. \tag{A.17}$$

Separando as partes real e imaginária de equação (A.17), obtém-se as equações para as injeções líquidas de potência ativa e reativa, escritas em função dos vetores θ e V:

$$P_k(\theta, V) = V_k \sum_{m\in\mathbb{K}} V_m \left(g_{km}\cos\theta_{km} + b_{km}\mathrm{sen}\theta_{km}\right) \tag{A.18}$$

$$Q_k(\theta, V) = V_k \sum_{m\in\mathbb{K}} V_m \left(g_{km}\mathrm{sen}\theta_{km} - b_{km}\cos\theta_{km}\right). \tag{A.19}$$

A.6 Equações de Atendimento da Carga

As restrições de igualdade do fluxo de carga ótimo são dadas pelas equações de atendimento da carga, isto é, em cada barra a potência calculada (líquida) deve ser igual à potência especificada (geração menos carga):

$$P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \tag{A.20}$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \tag{A.21}$$

que podem ser escritas como:

$$P_{g_k} - P_{c_k} - V_k \sum_{m \in \mathbb{K}} V_m \left(g_{km} \cos\theta_{km} + b_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} \right) = 0 \tag{A.22}$$

$$Q_{g_k} - Q_{c_k} - V_k \sum_{m \in \mathbb{K}} V_m \left(g_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} - b_{km} \cos\theta_{km} \right) = 0. \tag{A.23}$$

Assim, as expressões das potências geradas ficam:

$$P_{g_k} = P_{c_k} + V_k \sum_{m \in \mathbb{K}} V_m \left(g_{km} \cos\theta_{km} + b_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} \right) = 0 \tag{A.24}$$

$$Q_{g_k} = Q_{c_k} + V_k \sum_{m \in \mathbb{K}} V_m \left(g_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} - b_{km} \cos\theta_{km} \right) = 0. \tag{A.25}$$

As equações de atendimento da carga são compostas pelas igualdades (A.20) para as barras PV e PQ e pelas igualdades (A.21) para as barras PQ do sistema.

Apêndice B

Função Objetivo e suas Derivadas

Neste apêndice são apresentadas as expressões da função objetivo perda de potência e das componentes de seu gradiente.

B.1 Função Objetivo

A função objetivo adotada como critério de desempenho do sistema foi a perda de potência nos elementos-série da rede e é definida por:

$$F(\theta, V) = \sum_{m \in \Omega_k} \sqrt{g_{km}^2 + b_{km}^2} \left(V_k^2 + V_m^2 - 2 V_k V_m \cos \theta_{km} \right), \tag{B.1}$$

onde:

g_{km} é a condutância do ramo $k - m$ que liga a barra k à barra m;

b_{km} é a susceptância do ramo $k - m$ que liga a barra k à barra m;

V_k e V_m são as magnitudes das tensões nas barras k e m, respectivamente;

$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ é a diferença angular entre as tensões das barras k e m.

B.2 Gradiente

As expressões para o gradiente da função objetivo são dadas por:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_k} = 2 \sum_{m \in \Omega_k} \sqrt{g_{km}^2 + b_{km}^2} V_k V_m \mathrm{sen} \theta_{km} \tag{B.2}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial V_k} = 2 \sum_{m \in \Omega_k} \sqrt{g_{km}^2 + b_{km}^2} \left(V_k - V_m \cos \theta_{km} \right). \tag{B.3}$$

Apêndice C

Restrições e suas Derivadas

Neste apêndice são apresentadas as expressões das injeções nodais de potência, de suas respectivas derivadas e das derivadas dos fluxos de potência ativa e reativa nas ligações elétricas.

C.1 Derivadas de 1^a Ordem das Injeções Nodais de Potência Ativa e Reativa

As expressões das injeções nodais e de potência ativa e reativa em uma barra são dadas por:

$$P_k = P_k^{calc} = V_k \sum_{m \in \mathbb{K}} V_m \left(G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} \right) \tag{C.1}$$

e

$$Q_k = Q_k^{calc} = V_k \sum_{m \in \mathbb{K}} V_m \left(G_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} - B_{km} \mathrm{cos}\theta_{km} \right). \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -Q_k - V_k^2 B_{kk} \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial P_m}{\partial \theta_k} = V_k V_m \left(-G_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} - B_{km} \mathrm{cos}\theta_{km} \right) \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = P_k - V_k^2 G_{kk} \tag{C.5}$$

$$\frac{\partial Q_m}{\partial \theta_k} = V_k V_m \left(-G_{km} \mathrm{cos}\theta_{km} + B_{km} \mathrm{sen}\theta_{km} \right) \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial V_k} = \frac{P_k + V_k^2 G_{kk}}{V_k} \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial P_m}{\partial V_k} = V_m \left(G_{km} \mathrm{cos} \theta_{km} - B_{km} \mathrm{sen} \theta_{km} \right) \tag{C.8}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = \frac{Q_k - V_k^2 B_{kk}}{V_k} \tag{C.9}$$

$$\frac{\partial Q_m}{\partial V_k} = V_m \left(-G_{km} \mathrm{sen} \theta_{km} - B_{km} \mathrm{cos} \theta_{km} \right). \tag{C.10}$$

Apêndice D

O Método de Newton Aplicado ao Problema do Fluxo de Carga

D.1 Introdução

Neste apêndice apresentamos o método de Newton para resolução do problema de fluxo de carga. Consideramos aqui apenas o tratamento das restrições de igualdade (carga). O tratamento das restrições de desigualdade (lineares e funcionais) está apresentado nos Capítulos 4, 5 e 6.

Do Apêndice C temos as restrições de igualdade do fluxo de carga ótimo que formam um sistema de equações não-lineares, isto é,

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= P_k^{esp} - P_k^{calc} = 0,\ k \in \{\mathrm{PV} \cup \mathrm{PQ}\} \\ \Delta Q_k &= Q_k^{esp} - Q_k^{calc} = 0,\ k \in \{\mathrm{PQ}\}. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Definindo-se o vetor de incógnitas x como

$$x = \begin{bmatrix} \theta_k,\ k \in \{\mathrm{PV} \cup \mathrm{PQ}\} \\ V_k,\ k \in \{\mathrm{PQ}\} \end{bmatrix} \tag{D.2}$$

o sistema de equações (D.1) passa a ser representado por

$$g(x) = 0. \tag{D.3}$$

Expandindo g em série de Taylor em torno de um ponto x^p e truncando a série após o termo de primeira ordem, obtemos

$$g(x) = g(x^p) + J_x^g(x^p)(x - x^p) = 0$$

onde:

$J_x^g(x^p)-$ matriz Jacobiana da função vetorial g em relação a x calculada no ponto x^p;

$\Delta x^p = (x - x^p)-$ correção do valor prévio x^p.

O cálculo de uma solução de (D.3) através do método de Newton consiste na resolução iterativa da equação

$$J_x^g(x^p)\Delta x^p = -g(x^p), \tag{D.4}$$

seguida da atualização do vetor x^p dada por $x^{p+1} = x^p + \Delta x^p$.

O processo é inicializado num ponto x^0 e repetido tantas vezes quanto necessárias até que se obtenha

$$\max_j \{|g_j(x^p)|\} \leq \epsilon, \tag{D.5}$$

onde ϵ é uma tolerância previamente definida.

A seguir, apresentamos o fluxograma do método de Newton.

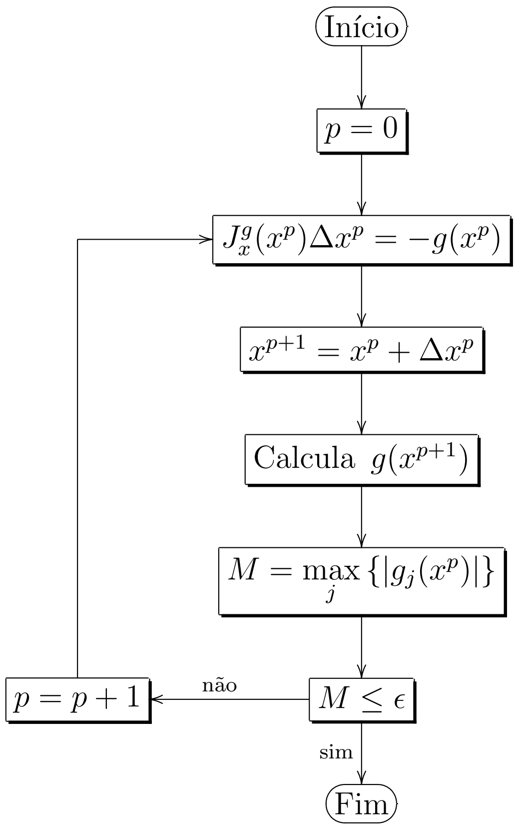


Figura D.1: Fluxograma do método de Newton.

Apêndice E

Busca Unidimensional

E.1 Introdução

A maioria dos métodos de otimização utilizam a solução de um subproblema para render uma direção de busca num dado intervalo em que a solução é estimada estar. O mínimo ao longo dessa direção geralmente é aproximado usando um procedimento de busca (por exemplo, Seção Áurea, Fibonacci) ou por um método polinomial envolvendo interpolação (por exemplo, quadrática, cúbica). Métodos polinomiais aproximam um número de pontos por um polinômio cujo mínimo pode ser calculado facilmente.

Neste apêndice descrevemos os algoritmos de busca unidimensional utilizados neste trabalho: interpolação quadrática e cúbica. Estes algoritmos iterativos são utilizados para implementar (aproximadamente) as regras de minimização do tamanho do passo. Entretanto, sua validade depende da suposição de unimodalidade da função e de que o mínimo deve estar no intervalo gerado pelos pontos disponíveis.

Em nossa apresentação, consideraremos a minimização da função

$$\phi(\alpha) = f(x + \alpha d), \;\; \alpha > 0,$$

onde f é continuamente diferenciável. Pela regra da cadeia, temos

$$\phi'(\alpha) = \frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \nabla f(x + \alpha d)^t d.$$

Assumimos que $\phi'(0) = \nabla f(x)^t d < 0$, isto é, que d é uma direção de descida em x. Aqui não apresentaremos resultados de convergência, mas pode ser mostrado que os métodos de interpolação têm convergência superlinear (Bertsekas, 1995; Dennis & Schnabel, 1996).

E.2 Comprimento do Passo

No cálculo do passo α_k, gostaríamos de escolher α_k para uma redução substancial de f, mas ao mesmo tempo, não queremos despender muito tempo fazendo tal escolha. A escolha ideal seria o mínimo da função univariada definida por

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d^k), \quad \alpha > 0. \tag{E.1}$$

Mas em geral, é muito dispendioso identificar esse valor. Entretanto, utilizamos estratégias práticas que realizam uma busca inexata para identificar um comprimento de passo que alcance reduções adequadas de f a um custo menor. Algoritmos de busca típicos testam uma seqüência de candidatos para α, parando quando um desses valores satisfaz certas condições. A busca unidimensional é feita em dois estágios: uma fase de *backtracking* que encontra um intervalo que contém comprimentos de passo desejáveis e uma fase de bissecção ou interpolação que calcula um comprimento de passo aceitável dentro desse intervalo.

E.3 Condições de Armijo e de Curvatura

Uma condição inicialmente imposta ao passo α é produzir *decréscimo suficiente* na função objetivo f, que pode ser medido pela seguinte desigualdade

$$f(x_k + \alpha d^k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f(x_k)^t d^k, \tag{E.2}$$

para algum $c_1 \in (0, 1)$. A quantidade $\alpha \nabla f(x_k)^t d^k$ é o decréscimo em f previsto pela inclinação de f em x_k na direção d^k (deve-se notar que $\alpha \nabla f(x_k)^t d^k < 0$, pois d^k é uma direção de descida). Em outras palavras, a redução em f deve ser proporcional ao comprimento do passo e à derivada direcional $\nabla f(x_k)^t d^k$. Mas esta condição, também conhecida como condição de Armijo, não é suficiente para assegurar que o algoritmo faça progresso razoável, já que é sempre satisfeita para valores de α pequenos. Para evitar a escolha de passos muito pequenos, introduzimos um segundo requisito, chamado *condição de curvatura*,

$$\nabla f(x_k + \alpha d^k)^t d^k \geq c_2 \nabla f(x_k)^t d^k, \tag{E.3}$$

para algum $c_2 \in (c_1, 1)$.

E.4 *Backtracking*

Mencionamos que a condição de Armijo sozinha não é suficiente para assegurar que o algoritmo faça progresso razoável ao longo da direção dada. Entretanto, se for escolhido um

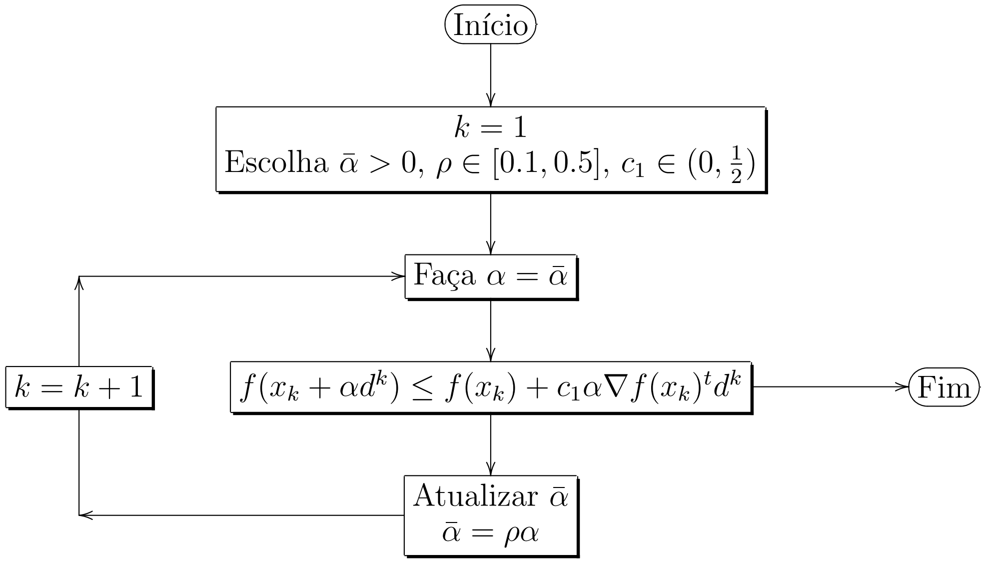


Figura E.1: Fluxograma do procedimento *Backtracking*.

candidato a comprimento de passo apropriadamente pelo procedimento conhecido como *backtracking*, poderemos dispensar a condição (E.3) e utilizar somente a condição (E.2) para concluir o procedimento de busca (Nocedal & Wright, 1999).

O procedimento *backtracking* está resumido na Figura E.1. As escolhas de ρ e c_1 em geral são feitas considerando $\rho \in [0.1, 0.5]$ e $c_1 \in (0, \frac{1}{2})$ (Dennis & Schnabel, 1996; Nocedal & Wright, 1999). Em nosso trabalho, consideramos $\rho = 0.5$ e $c_1 = 10^{-4}$.

E.5 Seleção do Comprimento do Passo

Agora, consideraremos as técnicas utilizadas neste trabalho para encontrar um mínimo α^* da função univariada

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d^k), \;\; \alpha > 0$$

ou, simplesmente, um passo α_k que satisfaça uma das condições (E.2) ou (E.3). Assumiremos que d^k seja uma direção de descida, isto é, $\phi'(0) < 0$, de modo que nossa busca possa ser restrita a valores positivos de α.

E.6 Interpolação

Começamos descrevendo um procedimento de busca baseado na interpolação de valores conhecidos da função e da derivada da função ϕ. Este procedimento pode ser visto como uma melhora do algoritmo *backtracking.* O objetivo é encontrar um valor de α que satisfaça a condição de Armijo sem ser muito pequeno. Conseqüentemente, o procedimento gera uma seqüência decrescente de valores α_i não muito menor que seu antecessor α_{i-1}.

Podemos escrever a condição de Armijo como

$$\phi(\alpha_k) \leq \phi(0) + c_1\alpha_k\phi'(0). \tag{E.4}$$

Suponha que o passo inicial α_0 seja dado. Se α_0 satisfaz a condição acima, então a busca é finalizada. Caso contrário, no intervalo $[0,\ \alpha_0]$, constrói-se uma aproximação quadrática de ϕ a partir de $\phi(0)$, $\phi(\alpha_0)$ e $\phi'(0)$, ou seja

$$\phi_q(\alpha) = \left(\frac{\phi(\alpha_0) - \phi(0) - \alpha_0\phi'(0)}{\alpha_0^2}\right)\alpha^2 + \phi'(0)\alpha + \phi(0).$$

Note que $\phi_q(0) = \phi(0)$, $\phi_q(\alpha_0) = \phi(\alpha_0)$ e $\phi_q'(0) = \phi'(0)$.

O mínimo de ϕ_q é dado por

$$\alpha_1 = -\frac{\phi'(0)\alpha_0^2}{2\left[\phi(\alpha_0) - \phi(0) - \phi'(0)\alpha_0\right]}.$$

Se α_1 satisfaz a condição de Armijo, a busca é finalizada. Caso contrário, constrói-se uma aproximação cúbica para ϕ a partir de $\phi(0)$, $\phi(\alpha_0)$, $\phi(\alpha_1)$ e $\phi'(0)$, ou seja

$$\phi_c(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + \phi'(0)\alpha + \phi(0),$$

onde

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_0^2\alpha_1^2(\alpha_1 - \alpha_0)}\begin{bmatrix} \alpha_0^2 & -\alpha_1^2 \\ -\alpha_0^3 & \alpha_1^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi(\alpha_1) - \phi(0) - \phi'(0)\alpha_1 \\ \phi(\alpha_0) - \phi(0) - \phi'(0)\alpha_0 \end{bmatrix}.$$

O mínimo de ϕ_c é

$$\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3a\phi'(0)}}{3a}.$$

Se necessário, o processo é repetido, fazendo interpolação cúbica de $\phi(0)$, $\phi'(0)$ e dos dois valores mais recentes de ϕ, até que um α que satisfaça a condição (E.4) seja localizado. Se algum α_i está muito próximo do seu antecessor α_{i-1} ou é muito menor que α_{i-1}, faz-se $\alpha_i = \frac{\alpha_{i-1}}{2}$. Esta salvaguarda assegura progresso razoável a cada iteração e que o valor final de α não seja muito pequeno (Kelley, 1999; Nocedal & Wright,1999), .

A seguir, apresentamos o fluxograma do método implementado.

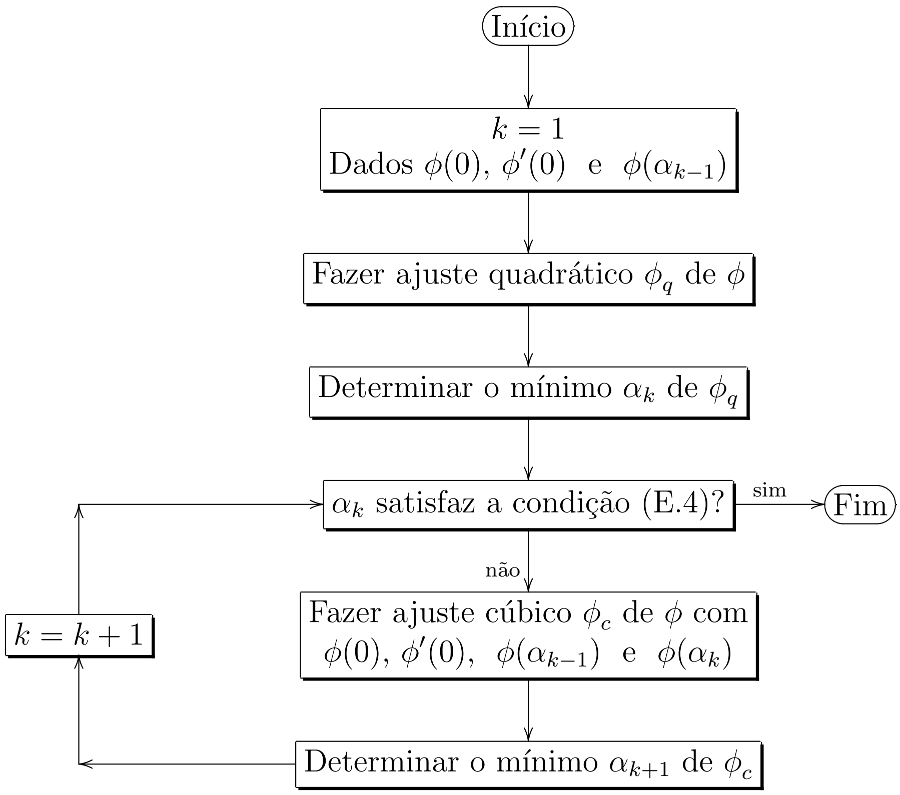


Figura E.2: Busca unidimensional com ajuste quadrático/cúbico.