

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO :
ALOCAÇÃO DE PÓLOS, ROBUSTEZ
E APLICAÇÃO EM SISTEMAS FLEXÍVEIS

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Gustavo Henrique da
Costa Oliveira e aprovada pela Comissão
Julgadora em 03 / 04 / 92.

Amaral
Orientador

Por : Gustavo Henrique da Costa Oliveira ^{nt}
Orientador : Wagner Caradori do Amaral
Co-orientador : Luiz Gimeno Latre

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
Elétrica FEE - UNICAMP, como parte dos re-
quisitos exigidos para a obtenção do títu-
lo de MESTRE EM ENGENHARIA

Campinas - Abril - 1992

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Dedico a minha família, em especial a meus pais, pelo incentivo, apoio e confiança.

AGRADECIMENTOS

Aos Profs. Dr. Wagner Caradori do Amaral e Dr. Luiz Gimeno Latre, pela orientação, incentivo, oportunidades oferecidas e por tudo que, com eles, pude aprender.

À Coordenadoria para Aperfeiçoamento do Ensino Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

À minha noiva Luciana, pelo carinho, apoio e amizade que sempre estiveram presentes.

Ao Ruben, pela amizade e pelas valiosas discussões que muito acrescentaram a este trabalho.

Aos amigos Humberto, Cláudio e Rodrigo, pelo companherismo no dia a dia.

Aos amigos da FEE e LCA.

RESUMO

Neste trabalho discute-se aspectos teóricos de uma estratégia de controle do tipo preditiva de horizonte longo, o Controlador Preditivo Generalizado - GPC. Analisa-se o controlador GPC sob os enfoques do comportamento determinístico, isto é, a resposta ao sinal de referência, e de robustez do sistema em malha fechada.

Neste trabalho estuda-se a influência dos parâmetros de projeto do GPC na resposta do sistema a variações no sinal de referência, e compara-se seu desempenho com outras estratégias de controle, como o Controlador por Alocação de Pólos e um Controlador Proporcional Derivativo. É conhecido na literatura que para o controlador GPC é difícil obter uma relação geral entre os pólos do sistema em malha fechada e seus parâmetros de projeto. A solução deste problema não é trivial e ainda não está disponível na literatura. Portanto, o estudo do comportamento determinístico do sistema é feito através de propriedades do polinômio característica do sistema em malha fechada e de resultados heurísticos da influência dos parâmetros de projeto no desempenho do sistema.

Um importante campo de estudos no GPC é a análise da robustez do sistema em malha fechada quando em presença de dinâmicas não modeladas do processo. Para tanto obtém-se o diagrama do limite de estabilidade para o GPC e, a partir do estudo deste diagrama, propõem-se diretrizes para a aumentar a robustez do sistema em malha fechada.

Desenvolve-se também a estratégia de controle por alocação de pólos a fim de obter analogias e comparações com o GPC. Utiliza-se o modelo de um sistema flexível, para comparação de desempenho destas estratégias de controle.

**ASPECTOS TEÓRICOS DO
CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO (GPC)
E APLICAÇÃO EM SISTEMAS FLEXÍVEIS**

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO	1.1
1.2 - CONTROLADORES PREDITIVOS DE HORIZONTE LONGO	1.2
1.3 - O CONTROLE DE POSIÇÃO DE UMA JUNTA ISOLADA DE ROBÔ	1.6
1.4 - OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	1.8

**CAPÍTULO 2 - O MODELO E CONTROLE DE POSIÇÃO DE UMA
JUNTA ISOLADA DE ROBÔ**

2.1 - INTRODUÇÃO	2.1
2.2 - O MODELO DE UMA JUNTA ISOLADA DE ROBÔ	2.2
2.3 - O CONTROLADOR PROPORCIONAL DE VELOCIDADE E POSIÇÃO	2.4

CAPÍTULO 3 - O CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - O ALGORITMO DE CONTROLE	
3.2.1 - Introdução	3.2
3.2.2 - A Alocação de Pólos	3.3
3.2.3 - A Equação Diofantina	3.6
3.2.4 - A Influência do Polinômio Observador	3.9
3.2.5 - Uma Especificação de Projeto	3.10
3.2.6 - O Algoritmo CAP	3.11
3.3 - MEDIDAS DE ROBUSTEZ DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	
3.3.1 - Introdução	3.13
3.3.2 - O Limite de Estabilidade	3.14
3.4 - O LUGAR DAS RAÍZES RECÍPROCO	
3.4.1 - Definição	3.16
3.4.2 - Aplicação do LRR no Controlador por Alocação de Pólos	3.17

CAPÍTULO 4 - O CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO

4.1 - INTRODUÇÃO	4.1
4.2 - A FUNÇÃO DE CUSTO	4.3
4.3 - A PREVISÃO DAS SAÍDAS FUTURAS	
4.3.1 - Introdução	4.5
4.3.2 - Previsão através da Equação Diofantina	4.5
4.3.3 - Previsão pelo Cálculo Iterativo do Modelo	4.8
4.3.4 - A Incorporação do Filtro T	4.9
4.4 - A LEI DE CONTROLE	
4.4.1 - Introdução	4.12
4.4.2 - A Decomposição da Saída Prevista	4.12
4.4.3 - A Minimização da Função de Custo	4.16
4.4.4 - O Algoritmo GPC	4.18
4.5 - A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	
4.5.1 - Introdução	4.19
4.5.2 - O Modelo RTS Equivalente	4.20
4.5.3 - A Função de Transferência do Sistema em Malha Fechada	4.22
4.5.4 - Análise da Equação Característica Pmf	
4.5.4.1 - <i>Propriedades da Equação Característica Pmf</i>	4.24
4.5.4.2 - <i>Análise dos Pólos de Malha Fechada</i>	4.25
4.5.4.3 - <i>Exemplos</i>	4.27
4.5.5 - Referência Pré-especificada e Referência Normal	4.29
4.6 - ALOCAÇÃO DE PÓLOS ATRAVÉS DO GPC	
4.6.1 - Introdução	4.33
4.6.2 - Alocação de Pólos Tipo 1	4.34
4.6.3 - Alocação de Pólos Tipo 2	4.37
4.6.4 - Alocação de Pólos Tipo 3	4.40
4.6.5 - Análise dos 3 Métodos de Sintonia do GPC	4.41
4.6.6 - Comparação da Alocação de Pólos através do GPC com o CAP ..	4.42

CAPÍTULO 5 - ESTUDOS DE ROBUSTEZ PARA O GPC

5.1 - INTRODUÇÃO	5.1
5.2 - O LIMITE DE ESTABILIDADE PARA O GPC	5.2
5.3 - A SELEÇÃO DO POLINÔMIO OBSERVADOR T	
5.3.1 - Introdução	5.5
5.3.2 - A Escolha da Ordem do Polinômio T	5.6

5.3.3 - A Escolha das Raízes do Polinômio T	5.20
5.3.3.1 - <i>Limite de Estabilidade quando $P^* \rightarrow A$</i>	5.20
5.3.3.2 - <i>Limite de Estabilidade quando $P^*=1$</i>	5.22
5.3.3.3 - <i>Limite de Estabilidade quando $T \in LRR$</i>	5.23
5.3.4 - Exemplo	5.27

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE PROJETO DO GPC E DESEMPENHO PARA O CONTROLE DE UM SISTEMA FLEXÍVEL

6.1 - INTRODUÇÃO	6.1
6.2 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO HORIZONTE N_Y	6.4
6.3 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO HORIZONTE N_1	6.8
6.4 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO HORIZONTE N_U	6.11
6.5 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE λ	6.15
6.6 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO FILTRO P	6.18
6.7 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM	6.20
6.8 - COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO DO GPC COM O CAP E O CPVP	6.22

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES

7.1 - CONCLUSÕES	7.1
-------------------------------	------------

APÊNDICE A : DEMONSTRAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES DA SEÇÃO 4.5

A.1 - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.1	A.1
A.2 - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.2	A.3
A.3 - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.3	A.7
A.4 - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.4	A.9
A.5 - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.5	A.11

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO

O crescente desenvolvimento da indústria de microeletrônica com diminuição do custo do hardware digital para controle de processos e a necessidade de aprimoramento da qualidade dos processos industriais, vem tornando cada vez mais frequente a utilização pela indústria de sistemas de controle digitais. Este fato traz como consequência o desenvolvimento e a possibilidade de implementação de algoritmos de controle mais complexos, avançados e adequados à tecnologia digital, em substituição ao clássico PID de ganho fixo. O controlador PID apresenta um comportamento satisfatório na maioria dos casos, porém apresenta problemas quando, por exemplo, o processo é variante no tempo ou quando as especificações de projeto são muito rígidas. Nestes casos, a utilização destes algoritmos complexos de controle tem o objetivo de melhorar o desempenho do sistema.

Uma destas estratégias de controle, que podem ser utilizadas em substituição ao PID, são os Controladores Preditivos de Horizonte Longo (*Long Range Predictive Control - LRPC*), que tiveram seu conceito introduzido por Richalet em [Richalet78]. Desde então, os LRPC vem recebendo grande atenção na literatura, com o desenvolvimento de diversos algoritmos de controle baseados no conceito de LRPC.

O tema deste trabalho é o estudo do comportamento determinístico, da robustez quando em presença de dinâmicas não modeladas, e da aplicação no controle de posição de uma junta isolada de robô, de um algoritmo de controle baseado no conceito de LRPC, o Controlador Preditivo Generalizado (*Generalized Predictive Control - GPC*).

A seguir, na seção 1.2, faz-se uma revisão dos LRPC. Na seção 1.3 discute-se o problema de controle de manipuladores robóticos, e na seção 1.4 apresenta-se os objetivos e a organização deste trabalho.

1.2 - CONTROLADORES PREDITIVOS DE HORIZONTE LONGO

Os controladores preditivos de horizonte longo (LRPC) baseiam-se na previsão do comportamento futuro do processo para o cálculo do sinal de controle. As previsões são feitas utilizando-se um modelo deste processo sobre um horizonte de tempo denominado Horizonte de Previsão. O conceito destes controladores é ilustrado pela fig. (1.1) a seguir:

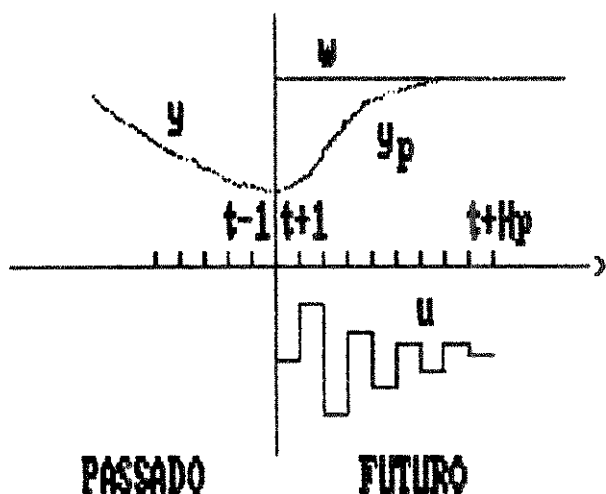


Fig. (1.1) - Conceito de controle preditivo

onde: t é o instante de tempo atual

y é a saída do processo

y_p é a saída prevista do processo

H_p é o horizonte de previsão

w é o sinal de referência

$u(k)$, e $k < t$, é o sinal de controle

O controlador preditivo calcula a sequência dos futuros sinais de controle, isto é,

$$u(t), u(t+1), \dots, u(t+H_p-1)$$

que minimizam um critério, que usualmente é um critério quadrático como o descrito a seguir:

$$J = \sum_{j=1}^{H_p} \left(y_p(t+j) - w(t+j) \right)^2 \quad (1.1)$$

Normalmente o problema de minimização requer a utilização de um procedimento iterativo, porém, quando o modelo do processo é linear e não existem restrições no sinal de controle (como por exemplo, sinal mínimo ou máximo para $u(.)$) o processo de minimização pode ser feito analiticamente.

Dos sinais de controle calculados, somente o primeiro é utilizado para o controle do processo naquele instante de tempo. No próximo instante, todo o procedimento é repetido. Esta característica possui o nome de método de "receding horizon".

Em controladores preditivos, qualquer tipo de modelo pode ser utilizado para a previsão do comportamento do processo. Porém, o mais usual é utilizar um modelo discreto do tipo entrada e saída descrito por equações a diferenças lineares. O modelo CARIMA (*Controlled Auto Regressive Integrated Moving Average*) é um exemplo deste tipo de modelo, e é descrito a seguir:

$$A(q^{-1}) y(t) = B'(q^{-1}) u(t-d) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta \quad (1.2)$$

onde: \circ $A(q^{-1})$, $B'(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são polinômios no operador deslocamento dados por:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

\circ 'd' é a diferença entre o número de pólos e o número de zeros mais o atraso de transporte do processo.

\circ $u(.)$ e $y(.)$ são, respectivamente, a entrada e a saída do processo.

\circ Δ é dado por $\Delta = (1-q^{-1})$

\circ $\xi(.)$ é um ruído branco

O modelo CARIMA [LambertM87] evita a estimação do nível DC do processo e modela adequadamente perturbações do tipo browniano.

Pode-se reescrever a eq. (1.2) com o atraso do processo 'd-1' incorporado ao polinômio $B(q^{-1})$ na forma de 'd-1' coeficientes nulos, como a seguir:

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta \quad (1.3)$$

Note que o polinômio $B(q^{-1})$ da eq. (1.3) possui a ordem incrementada de 'd-1' unidades em relação ao polinômio $B'(q^{-1})$ da eq. (1.2).

Existem na literatura diversos tipos de controladores baseados no conceito de LRPC, como por exemplo:

- *Extended Horizon Adaptive Control* (EHAC) [Ydstie84 apud Keyser88]
- *Extended Prediction Self-Adaptive Control* (EPSAC) [Keyser88]
- *Dynamic Matrix Control* (DMC) [Cutler80 apud Keyser88]
- *Generalized Predictive Control* (GPC) [Clarke87]
- *Model Algorithmic Control* (MAC) [Richalet78]
- *Multipredictor Receding Horizon Adaptive Control* (MURHAC) [Lemos85 apud Kramer91]
- *Multistep Multivariable Adaptive Control* (MUSMAR) [Menga79 apud Clarke89]
- *Predictive Control ALgorithm* (PCA) [Brujin86 apud Soeterboek91]
- *Optimum Control Synthesis* (OCS) [Peterka82 apud Kramer91]

Em [Keyser88] [Kramer91] faz-se uma comparação entre alguns destes algoritmos de controle, e, Em [Soeterboek91], desenvolve-se uma versão unificada para controladores preditivos, e apresenta-se o *Unified Predictive Control* (UPC). Através da seleção apropriada dos parâmetros do UPC pode-se obter vários controladores preditivos citados anteriormente, assim como suas características.

Os algoritmos de controle preditivos, com auxílio de um método de estimação, podem ser implementados de forma adaptativa, isto é, na forma controladores adaptativos indiretos [Astrom89]. Controladores adaptativos são controladores que, através de um esquema de identificação, atualizam seus parâmetros em função de mudanças ou incertezas na dinâmica do processo, e são basicamente divididos em dois grupos: os Diretos e os Indiretos. Os controladores adaptativos diretos são aqueles em que os parâmetros do controlador são estimados e atualizados diretamente pelo algoritmo de identificação. Os controladores adaptativos indiretos são aqueles em que os parâmetros do modelo são estimados diretamente, e, então utilizados para síntese, *on-line*, da lei de controle. Esta lei de controle pode ser uma lei de controle preditiva de horizonte longo. O GPC adaptativo é um bom exemplo de controlador preditivo adaptativo.

Desde o trabalho de Clarke [Clarke87], o Controlador Preditivo Generalizado (GPC) tem recebido grande atenção na literatura [Mohtadi86a] [Mohtadi86b] [LambertM87] [Favier88] [Clarke89] [Saaman89] [Crisalle90] [Bitmead90] [Coelho90]. Ele pode ser visto como uma extensão, e uma evolução, do controlador de Variância Mínima Generalizada (GMV) [Clarke75]. Isto é feito através do aumento do número de previsões, de 1 (uma) previsão no GMV para um horizonte de previsão no GPC, como demonstra Mohtadi em [Mohtadi86a]. Com esta característica, o GPC mostra-se robusto quando aplicado a processos de atraso desconhecido ou variante [Clarke87], principal problema do GMV.

Na literatura encontram-se diversos exemplos da aplicação do GPC em controle de processos, como a seguir:

- Manipuladores robóticos [Lelic87] [LambertM87]
- Secador de uma fábrica de açúcar de beterraba [Prada91]
- Usina de moer cimento [Clarke90]
- Torre de secagem com spray [LambertE87 apud Clarke90]
- Coluna de destilação [Coelho90] [Souza90]
- Turbina a vapor para geração de eletricidade [Rossiter91]
- Controle de pressão arterial [Kwok90]

1.3 - CONTROLE DE POSIÇÃO DE UMA JUNTA ISOLADA DE ROBÔ

Na área de robótica, frequentemente estuda-se o problema da movimentação e localização no espaço de um robô, isto é, o controle de posição do manipulador.

O controle de posição da garra de um robô pode ser implementado pelo controle de posição de cada junta isoladamente. Através de uma transformação de espaços, do espaço cartesiano para o espaço das juntas, isto é, o cálculo das posições das juntas que correspondem a uma determinada posição da garra [Craig86], obtém-se as referências que cada junta deve seguir para que a garra descreva determinada trajetória. Assim, um robô industrial é um sistema de posicionamento no qual cada uma das juntas possui um sistema próprio de controle de posição.

Paul em [Paul81], e Luh em [Luh83] assumem, para o controle de posição, que um robô pode ser representado por corpos rígidos (braços) interconectados e movidos por puras fontes de torque. Porém, estes modelos são inadequados [Good85] para representar a maior parte dos manipuladores mecânicos devido ao fato de negligenciarem a interação dinâmica entre as juntas e os atuadores. Em [Good85], propõe-se um modelo que incorpora a existência de flexibilidade na conexão entre o motor e o braço do robô, e que é validado quando comparado com o robô real usado nos experimentos. Em [Gimeno88] desenvolve-se um modelo de junta de robô que apresenta o efeito de torção na transmissão do torque produzido pelo motor. Este fato introduz pólos complexos conjugados mal amortecidos típico de sistemas flexíveis.

O controle de sistemas flexíveis é também estudados em [LambertM87] [Astrom90] e [Franklin88]. Em [LambertM87] encontra-se o problema do controle de posição de um robô composto por uma junta e com um braço flexível. O algoritmo de controle é o Controle Preditivo Generalizado (a ser descrito no Capítulo 4). Em [Astrom90] tem-se a aplicação do algoritmo de controle por Alocação de Pólos (a ser descrito no Capítulo 3) no controle de posição de um mecanismo robótico cujo modelo é semelhante ao descrito em [Gimeno88]. E finalmente, em [Franklin88] estuda-se o projeto de um sistema de controle de posição de um satélite, que também demonstrou ser um sistema flexível.

O sistema de controle de posição de uma junta isolada de robô, a ser descrito neste trabalho, é baseado em medidas de posição feitas no motor, isto é, procura-se controlar a posição do braço do robô a partir de medidas de posição do motor. Quando

Isto ocorre diz-se que o sensor é colocado. Quando ocorre o inverso, isto é, o sensor está posicionado na carga e portanto o controle é feito a partir de medidas da carga, diz-se que o sensor é não colocado. Existem problemas de implementação prática do sensor não colocado devido à dificuldade de se obter medidas da posição da carga.

1.4 - OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo do Controlador Preditivo Generalizado (GPC) abordando os seguintes aspectos:

- Comportamento determinístico do sistema em malha fechada, com: dedução e análise da função de transferência, estudo das condições de sintonia onde os pólos de malha fechada desejados possam ser especificados *a priori*, e da influência dos parâmetros de projeto no desempenho do sistema.
- Robustez do sistema em malha fechada quando em presença de dinâmicas não modeladas e a influência dos parâmetros de projeto nesta robustez.
- Exemplo de aplicação em sistemas flexíveis, através de simulação em computador digital do GPC quando aplicado ao controle de posição de uma junta isolada de robô, e da comparação de desempenho com o Controlador por Alocação de Pólos e com um Controle Proporcional de Velocidade e Posição.

A organização do trabalho é a seguinte:

No Capítulo 2 apresenta-se um modelo de uma junta isolada de robô e o esquema de controle proporcional de velocidade e posição.

No Capítulo 3 tem-se a descrição do Controlador por Alocação de Pólos [Astrom90] para fins de comparação e obtenção de analogias com o GPC. Discute-se a utilização do método do Lugar das Raízes Recíproco [Kailath80] para a escolha dos pólos a serem alocados, e, obtém-se medidas para a robustez do sistema em malha fechada, como o diagrama do limite de estabilidade. Este controlador é escolhido como comparação com o GPC por apresentar uma base teórica simples e bastante estudada na literatura, e, utilizar um modelo geral para a lei de controle.

No Capítulo 4 apresenta-se o algoritmo de controle GPC. Deduz-se sua lei de controle e a função de transferência do sistema em malha fechada. Obtém-se propriedades da função de transferência e condições que relacionam os parâmetros de projeto com o número de pólos em malha fechada na origem. Analisa-se as condições de sintonia do GPC onde os pólos de malha fechada desejados possam ser especificados *a priori*, e compara-se estas condições com o Controlador por Alocação de Pólos.

No Capítulo 5 estuda-se a robustez do sistema em malha fechada controlado pelo GPC, quando em presença de dinâmicas não modeladas. Isto é feito através da dedu-

ção e análise do diagrama do limite de estabilidade do GPC. Obtém-se condições que relacionam o comportamento deste diagrama com os parâmetros de projeto.

A obtenção de condições que relacionam o número de pólos na origem com os parâmetros de projeto e de condições que relacionam o comportamento do diagrama do limite de estabilidade com os parâmetros de projeto são as principais contribuições deste trabalho.

No Capítulo 6 analisa-se a influência da variação dos parâmetros de projeto do GPC no desempenho do sistema em malha fechada, quando utilizado no controle da junta isolada de robô. Compara-se o desempenho do GPC com o Controlador por Alocação de Pólos e com o Controlador Proporcional de Velocidade e Posição.

No Capítulo 7 encontram-se as conclusões.

CAPÍTULO 2

O MODELO E CONTROLE DE POSIÇÃO DE UMA JUNTA ISOLADA DE ROBÔ

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, na seção 2.2, apresenta-se o modelo de uma junta isolada de robô desenvolvido em [Gimeno88]. Como discutido no capítulo 1, sabe-se que o controle de posição de um robô pode ser decomposto no controle de posição individual de cada junta. Uma estratégia de controle que pode ser utilizada em cada junta isolada é um Controlador Proporcional de Velocidade e Posição. Esta estratégia é descrita na seção 2.3, como base para comparação com as estratégias mais elaboradas, como o controlador por Alocação de Pólos (a ser descrito no Capítulo 3) e o GPC (a ser descrito no Capítulo 4).

2.2 - O MODELO DE UMA JUNTA ISOLADA DE ROBÔ

O modelo de uma junta isolada de robô é descrito a seguir.

As funções de transferência deste sistema, cujos valores de entrada são a Tensão ($V(s)$) e o Torque de Perturbação ($T_p(s)$), e os valores de saída são a posição do motor ($\theta_m(s)$) e a posição da carga $\theta_l(s)$, onde "s" é o operador diferencial $s = d/dt$, são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{i) } \theta_m(s) = & \left(K_i / R \right) \left[\left(J_l s^2 + c s + K_t \right) / s \text{ DEN}(s) \right] V(s) + \\ & - n \left[\left(c_t s + K_t \right) / s \text{ DEN}(s) \right] T_p(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \theta_l(s) = & \left(K_i n / R \right) \left[\left(c_t s + K_t \right) / s \text{ DEN}(s) \right] V(s) + \\ & - \left[\left(J_m s^2 + (B + n^2 c_t) s + n^2 K_t \right) / s \text{ DEN}(s) \right] T_p(s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{iii) } \theta_l(s) = n \left[\left(c_t s + K_t \right) / \left(J_l s^2 + c s + K_t \right) \right] \theta_m(s) \quad (2.3)$$

com:

$$\text{DEN}(s) = \left(J_m s + B \right) \left[J_l s^2 + c s + K_t \right] + n^2 \left[J_l s + B_l \right] \left[c_t s + K_t \right]$$

- onde:
- K_i - Constante de torque do motor
 - R - Resistência do motor
 - K_b - Constante de f.c.e.m.
 - J_m - Inércia do motor
 - B_m - Atrito viscoso do motor
 - K_t - Constante da mola
 - c_t - Atrito viscoso da mola
 - n - Redução da engrenagem (motor/carga)
 - J_l - Inércia da carga
 - B_l - Atrito viscoso da carga
 - $B = B_m + K_i K_b / R$
 - $c = c_t + B_l$

(2.4)

Em [Gimeno88] atribui-se às equações (2.1) e (2.2) os seguintes valores numéricos :

Para: $K_l = 0.9$	$K_t = 13750$
$R = 2$	$c_t = 61.875$
$K_b = 0.9$	$n = 0.04$
$J_m = 0.011$	$J_l = 6.875$
$B_m = 0.002$	$B_l = 0$

Assim, as equações (2.1) e (2.2), com $T_p(s) = 0$, tornam-se:

- i) $\theta_m / V = \text{num}(s) / \text{den}(s)$
 $\text{num}(s) = 3.0938s^2 + 27.8438s + 6187.5000$
 $\text{den}(s) = 0.07563s^4 + 4.1594s^3 + 327.6831s^2 + 5596.2500s$
zeros = $-4.5000 \pm j44.4944$
polos = 0
-20.4018
 $-17.2991 \pm j57.6877$
- ii) $\theta_l / V = \text{num}(s) / \text{den}(s)$
 $\text{num}(s) = 1.1137s + 247.5000$
 $\text{den}(s) = 0.07563s^4 + 4.1594s^3 + 327.6831s^2 + 5596.2500s$
zeros = -222.2222
polos = 0
-20.4018
 $-17.2991 \pm j57.6877$
- iii) $\theta_l / \theta_m = \text{num}(s) / \text{den}(s)$
 $\text{num}(s) = 2.4750s + 550.0000$
 $\text{den}(s) = 6.8750s^2 + 61.8750s + 13750$
zeros = -222.2222
polos = $-4.5000 \pm j44.4944$

A flexibilidade deste processo é caracterizada pelos pólos mal amortecidos, $-17.2991 \pm j57.6877$, da função de transferência θ_m / V e pelos pólos mal amortecidos, $-4.5000 \pm j44.4944$, da função de transferência θ_l / θ_m .

2.3 - O CONTROLADOR PROPORCIONAL DE VELOCIDADE E POSIÇÃO

Em [Gimeno88] propõe-se, para o controle posição da junta isolada de robô um esquema de controle proporcional de velocidade e posição (neste trabalho denominado de CPVP), como o descrito a seguir:

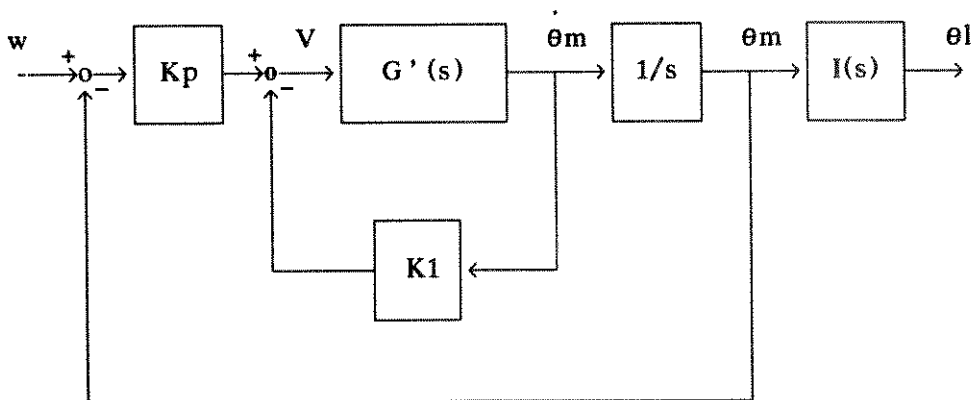


Fig. (2.1) - Sistema de controle proporcional de velocidade e posição, aplicado a uma junta isolada de robô

onde: $G'(s) = f_{\dot{\theta}_m} / V$ = fç. de transferência da tensão (entrada) pela velocidade do motor (saída).

$$e, \quad \begin{aligned} G'(s) &= \dot{\theta}_m / V = \left(K_l / R \right) \left(J l s^2 + c s + K_t \right) / \text{DEN}(s) \\ I(s) &= \theta_l / \theta_m \end{aligned} \quad (2.7)$$

O comportamento do sistema em malha fechada é função dos valores atribuídos a K_1 e K_p . No capítulo 6, apresenta-se a melhor condição de desempenho do CPVP para comparação de desempenho com o GPC.

Em [Gimeno88] mostra-se que o ajuste dos ganhos do controlador deve ser feito de forma que os modos flexíveis não sejam dominantes no sistema. Isto leva a limitações nos ganhos do controlador, que conseqüentemente, limitam a performance do sistema em malha fechada.

CAPÍTULO 3

O CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

(POLE-PLACEMENT)

3.1 - INTRODUÇÃO

O projeto de controle por alocação de pólos tem como princípio básico obter a compensação do processo a partir de um controlador geral, e, em seguida determinando seus parâmetros de forma que o sistema em malha fechada possua as características desejadas. Nesta estratégia de controle as especificações de projeto são traduzidas em localização dos pólos e zeros em malha fechada.

Na literatura, o desenvolvimento do Controlador por Alocação de Pólos (*Pole-Placement Controller*, neste trabalho denominado por simplicidade de CAP) pode ser encontrado em [Astrom90] [Seborg86] [Wittenmark90], entre outros. Wittenmark, em [Wittenmark90] considera esta estratégia de controle um método de projeto bastante flexível, e destaca o fato de que outras estratégias de controle podem ser descritas como a de Alocação de Pólos, como por exemplo, o Controlador de Variância Mínima Generalizado (GMV) [Clarke75].

Quando implementado como lei de controle em controladores adaptativos indiretos [Astrom89], o CAP mostra-se robusto quando em presença de processos com atrasos variantes, porém, torna-se instável quando a ordem do modelo estimado do processo é sobre-estimada [Mohtadi86a].

A escolha dos pólos do sistema em malha fechada pode ser feita a partir de especificações de respostas temporais, como por exemplo, tempo de subida, amortecimento. Pode ser feita também através da utilização do método matemático denominado Lugar das Raízes Recíproco (LRR) [Kailath80]. A utilização deste método garante que o sistema em malha fechada vai otimizar um critério de desempenho quadrático, calculado no intervalo de tempo de zero a infinito, como o mostrado a seguir :

$$J = (\text{Saída} - \text{Referência})^2 - r (\text{Controle})^2$$

A constante 'r', da equação anterior, torna-se uma medida do compromisso desejado entre o erro da saída e o nível de controle utilizado.

A seguir apresenta-se o método de Controle por Alocação de Pólos. Na seção 3.2 desenvolve-se o algoritmo de controle. Medidas de robustez do sistema em malha fechada são descritas na seção 3.3. A definição de Lugar das Raízes Recíproco, assim como sua aplicação neste método, encontram-se na seção 3.4.

3.2 - O ALGORITMO DE CONTROLE

3.2.1 - INTRODUÇÃO

Utiliza-se para representar o processo um modelo descrito através de equações a diferenças, como o modelo CARIMA, descrito no capítulo 1, e reescrito a seguir:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta \quad (1.3)$$

Define-se $G_m(q^{-1})$ como sendo as especificações de resposta à mudanças na referência desejadas para o sistema em malha fechada:

$$G_m(q^{-1}) = q^{-1}B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1}) \quad (3.1)$$

e os polinômios $A_m(q^{-1})$ e $B_m(q^{-1})$ contém os pólos e zeros desejados para o sistema em malha fechada. Estes polinômios tem a seguinte forma:

$$X(q^{-1}) = x_0 + x_1q^{-1} + \dots + x_{nx}q^{-nx}$$

e possuem ordens nam e nbm , respectivamente. O polinômio $A_m(q^{-1})$ é mônico, isto é, possui o coeficiente do termo de maior grau igual a unidade.

O atraso do processo $G_m(q^{-1})$ deve ser maior ou igual ao do processo representado por $G(q^{-1})$ [Astrom90], onde:

$$G(q^{-1}) = q^{-1}B(q^{-1})/A(q^{-1}) \quad (3.2)$$

Uma estrutura geral para a lei de controle, denominada aqui de RTS, é dada por:

$$R(q^{-1})u(t) = Tc(q^{-1})w(t) - S(q^{-1})y(t) \quad (3.3)$$

onde : $u(.)$ é o sinal de controle, $w(.)$ é o sinal de referência e $y(.)$ é

sinal de saída.

• $R(q^{-1})$, $Tc(q^{-1})$ e $S(q^{-1})$ são da mesma forma de $X(q^{-1})$, e possuem as ordens n_r , n_{tc} e n_s . O polinômio $R(q^{-1})$ é mônico.

Daqui em diante será omitido o operador (q^{-1}) da notação dos polinômios por motivo de simplicidade.

O controlador representado pela eq. (3.3) pode ser descrito como uma composição de uma parte *feedforward* do sinal de referência e de uma parte *feedback* do sinal de saída, como mostra a figura a seguir:

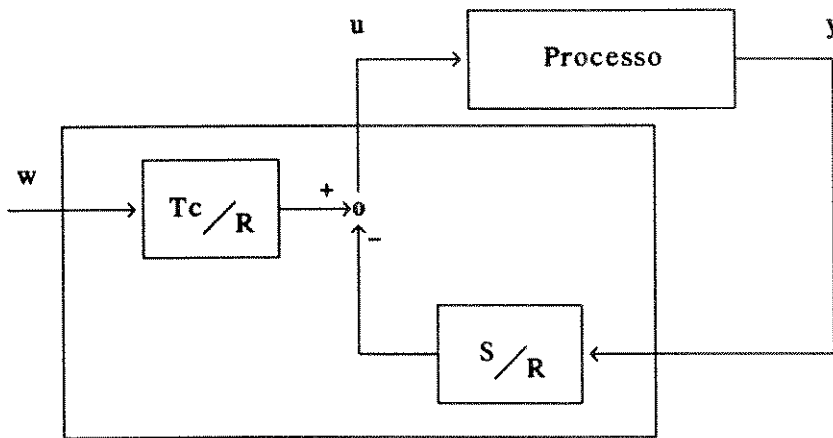


Fig. (3.1) - Diagrama de blocos da lei de controle RTS

onde: a parte *feedforward* é $H_{ff} = Tc/R$ (3.4)

e, a parte *feedback* é $H_{fb} = S/R$ (3.5)

3.2.2 - A ALOCAÇÃO DE PÓLOS

A seguir obtém-se equações que relacionam os pólos e zeros desejados do sistema com os polinômios do controlador, descritos pela eq. (3.3). Inicialmente deduz-se a função de transferência em malha fechada do sistema através da combinação do modelo do processo com o modelo controlador.

O modelo RTS equivalente do controlador é dado pela eq. (3.3), reescrita a seguir :

$$R u(t) = Tc w(t) - S y(t) \quad (3.3)$$

ou

$$u(t) = (Tc/R)w(t) - (S/R)y(t)$$

e o modelo do processo é dado pela eq. (1.3), reescrita a seguir:

$$A y(t) = q^{-1}B u(t) + C \xi(t)/\Delta \quad (1.3)$$

Substituindo-se a eq. (3.3) na eq. (1.3) obtém-se:

$$A y(t) = q^{-1}B \left[(Tc/R)w(t) - (S/R)y(t) \right] + C \xi(t)/\Delta$$

$$y(t) = \left[q^{-1}B Tc / (A R + q^{-1}B S) \right] w(t) + \left[C R^* / (A R + q^{-1}B S) \right] \xi(t) \quad (3.6)$$

ou

$$y(t) = \left(Z1mf / Pmf \right) w_{ff}(t) + \left(Z2mf / Pmf \right) \xi(t)$$

onde:

$$\circ \Delta R^* = R \quad (3.7)$$

\circ a ordem de R^* é nr^* , cujo valor é $nr^* = nr - 1$.

Pela eq. (3.6) tem-se que o polinômio característico do sistema controlado é dada por:

$$\boxed{Pmf = A R + q^{-1}B S} \quad (3.8)$$

O número de pólos do sistema em malha fechada é:

$$n_{pmf} = \max \begin{cases} na+nr \\ nb+1+ns \end{cases} \quad (3.9)$$

O numerador da função de transferência entre a referência e a saída é dado por :

$$\boxed{Z_{1mf} = q^{-1}B T_c} \quad (3.10)$$

Para que o sistema em malha fechada possua as características especificadas por (3.1) tem-se que:

$$q^{-1}B T_c / (A R + q^{-1}B S) = q^{-1}B_m / A_m \quad (3.11)$$

Assim, o projeto do controlador baseado em Alocação de Pólos consiste em encontrar os polinômios R, T_c e S que satisfazem a eq. (3.11).

Analisando-se a eq. (3.11) nota-se que os pólos do sistema compensado, obtidos através da equação $A R + q^{-1}B S = 0$, devem conter os zeros de malha aberta que deseja-se cancelar. Para separar os zeros de malha aberta que serão cancelados dos que não serão cancelados, faz-se uma representação do polinômio B através de uma multiplicação de dois polinômios, da seguinte forma:

$$B = B^- B^+ \quad (3.12)$$

onde: B⁺ contém os zeros do processo original que serão cancelados. Este polinômio é mônico.

B⁻ contém os zeros do processo original que não serão cancelados, por exemplo, os possíveis zeros fora do círculo unitário do sistema original, evitando-se assim a introdução de pólos instáveis.

Uma vez que as raízes do polinômio B⁻ estarão entre os zeros de malha fechada, deve-se reescrever o polinômio B_m da seguinte forma:

$$B_m = B^- B_m' \quad (3.13)$$

Através das equações (3.12) e (3.13), a eq. (3.11) torna-se:

$$q^{-1}B^- B^+ T_c / (A R + q^{-1}B S) = q^{-1}B^- B_m' / A_m$$

ou

$$T_c / (A R + q^{-1}B S) = B_m' / (B^+ A_m) \quad (3.14)$$

Com o objetivo de representar dinâmicas do sistema em malha fechada (ue não são excitadas pelo sinal de referência, a seguir introduz-se o polinômio $Ao(q^{-1})$, de ordem nao , como sendo o Polinômio Observador do sistema e cuja forma é dada por:

$$Ao(q^{-1}) = a_0 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{nao} q^{-nao}$$

O nome "polinômio observador" para Ao origina-se do desenvolvimento desta mesma estratégia, porém utilizando um modelo do processo baseado em espaço de estados [Astrom90].

Multiplicando-se a eq. (3.14) por (Ao/Ao) obtém-se:

$$Tc / (A R + q^{-1} B S) = Ao Bm' / (B^+ Am Ao) \quad (3.15)$$

Da eq. (3.15) tem-se que os polinômios R , Tc e S do controlador podem ser obtidos pela resolução das seguintes equações:

$$Tc = Bm' Ao \quad (3.16)$$

$$A R + q^{-1} B S = B^+ Am Ao \quad (3.17)$$

ou

$$\tilde{A} R^* + q^{-1} B S = B^+ Am Ao$$

onde: $\circ \tilde{A} = A\Delta = 1 + \tilde{a}_1 q^{-1} + \dots + \tilde{a}_{n\tilde{a}} q^{-n\tilde{a}}$
 \circ a ordem de \tilde{A} é $n\tilde{a}$, cujo valor é $n\tilde{a} = na+1$.

3.2.3 - A EQUAÇÃO DIOFANTINA

Uma equação do tipo:

$$A X + B Y = V \quad (3.18)$$

onde A, X, B, Y e V são polinômios, é denominada equação diofantina, em homenagem ao matemático grego Diofantus (± 300 AC). Este tipo de equação possui a característica de admitir diferentes valores de X e Y como solução. Seu estudo é relevante aqui devido ao fato de que a eq. (3.17) é uma equação diofantina.

Astrom, em [Astrom90], prova que: uma equação do tipo da eq. (3.18) possui solução se o maior fator comum de A e B for também um fator de V .

Assim, os polinômios do modelo do processo, polinômios A e B , não devem possuir fatores comuns. Quando esta estratégia de controle é implementada de forma adaptativa, e a ordem do modelo estimado é maior que a ordem do processo, os polinômios A e B estimados possuirão fatores comuns, e a solução da eq. (3.17) não existirá. Na prática, apesar do cancelamento perfeito (isto é, dos fatores comuns de A e B) não ocorrer, este 'quase' cancelamento torna o sistema instável [Mohtadi86a]. Logo, o controlador por Alocação de Pólos é instável quando a ordem do sistema é sobreestimada, uma vez que neste caso os polinômios A e B possuirão fatores comuns.

A seguir apresenta-se alguns resultados sobre a equação diofantina, representada pela eq. (3.17)

Seja a eq. (3.17) escrita na forma matricial, como a seguir:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \tilde{a}_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \tilde{a}_{n\tilde{a}} & & & & \\
 0 & \tilde{a}_{n\tilde{a}} & \tilde{a}_{n\tilde{a}-1} & \dots & \\
 \vdots & 0 & \tilde{a}_{n\tilde{a}} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & \dots & 0 \\
 b_0 & 0 & \dots & 0 \\
 b_1 & b_0 & \dots & 0 \\
 b_2 & b_1 & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 b_{n_b} & b_{n_b-1} & & \vdots \\
 0 & b_{n_b} & & \vdots \\
 \vdots & 0 & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & & \vdots
 \end{array} &
 \times &
 \begin{array}{c}
 1 \\
 r_1^* \\
 \vdots \\
 r_{nr^*}^* \\
 s_0 \\
 s_1 \\
 \vdots \\
 s_{ns}
 \end{array} &
 = &
 \begin{array}{c}
 1 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 \vdots \\
 v_{nv}
 \end{array}
 \end{array}$$

ou, $M \cdot \underline{X} = \underline{V}$

onde: $M \in \mathbb{R}^{(nv+1) \times (nr+ns+2)}$, $\underline{X} \in \mathbb{R}^{(nr+ns+2) \times 1}$ e $\underline{V} \in \mathbb{R}^{(nv+1) \times 1}$

O polinômio $V(q^{-1}) = 1 + v_0 q^{-1} + \dots + v_{nv} q^{-nv}$, de ordem nv , cujos elementos

formam o vetor \underline{V} , dado por:

$$\underline{V} = \underline{B}^+ \underline{A} \underline{m} \underline{A} \underline{o} \quad (3.19)$$

e, de $\underline{M} \underline{X} = \underline{V}$, tem-se que n_v é igual a:

$$n_v = \max \begin{cases} n_a+1+n_{r^*} \\ n_b+1+n_s \end{cases}$$

Assim, a eq. (3.17) pode ser descrita como um sistema de equações lineares com:

$$\text{número de incógnitas igual a: } n_{r^*} + n_s + 1 \quad \text{e,} \quad (3.20)$$

$$\text{número de equações igual a: } \max(n_a+1+n_{r^*}, n_b+1+n_s)$$

Analisando-se as igualdades descritas na eq. (3.20) tem-se:

- i) Dados os polinômios R e S , solução da eq. (3.17). A condição necessária e suficiente para existir outros polinômios R' e S' , de mesma ordem, que também são solução da eq. (3.17), é dada por:

$$n_{r^*} > n_b$$

E

(3.21)

$$n_s > n_a$$

- ii) Dados os polinômios R e S , solução da eq. (3.17). A condição necessária e suficiente para não existir outros polinômios R' e S' , de mesma ordem, que também são uma solução da eq. (3.17), ou seja, R e S são uma solução única, é dada por:

$$n_{r^*} < n_b + 1$$

OU

(3.22)

$$n_s < n_a + 1$$

- iii) A condição suficiente para existir solução, e ela ser única, para a eq. (3.17), é dada por:

$$\begin{array}{l}
 ns = na \quad \underline{E} \quad nr^* \geq nb \\
 \quad \quad \quad \underline{OU} \\
 nr^* = nb \quad \underline{E} \quad ns \geq na
 \end{array}
 \tag{3.23}$$

3.2.4 - A INFLUÊNCIA DO POLINÔMIO OBSERVADOR

Tem-se que a função de transferência entre a perturbação e a saída do sistema é dada por:

$$y(t) = \left[C R^* / (A R + q^{-1} B S) \right] \xi(t)$$

ou, pela eq (3.17):

$$y(t) = \left[C R^* / (B^+ A_m A_o) \right] \xi(t) \tag{3.24}$$

Na eq. (3.17) tem-se que, se B^+ é fator de $(B^+ A_m A_o)$, é fator de $q^{-1} B S$, mas não é fator de $A \Delta$, logo, B^+ é fator de R^* . Assim o polinômio R^* pode ser descrito como a seguir:

$$R^* = B^+ R'$$

e a eq. (3.24) torna-se:

$$y(t) = \left[C R' / (A_m A_o) \right] \xi(t) \tag{3.25}$$

Portanto, apesar do polinômio observador A_o não influenciar a resposta servo do sistema, pela eq (3.25), verifica-se sua influência na resposta do sistema à perturbações.

A melhor escolha para A_o , sob o ponto de vista do problema de regulação e quando as perturbações são um ruído branco, é seleccionar A_o igual a C [Wittenmark90].

3.2.5 - UMA ESPECIFICAÇÃO DE PROJETO

Escolha de Am

É útil, em projeto de sistemas de controle, poder especificar os pólos dominantes desejados de malha fechada em função de parâmetros no tempo, como por exemplo, tempo de subida e amortecimento. Isto facilita a escolha dos coeficientes de Am que determinam o comportamento desejado. Esta escolha pode ser feita quando se obtém o comportamento especificado por uma aproximação de um par de pólos dominantes de um sistema contínuo de 2^a ordem, como a seguir:

Seja um par de pólos do polinômio Am dado por [Astrom90] :

$$P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} \quad (3.26)$$

e:

$$p_1 = -2e^{-\zeta w_n \Delta t} \cos\left(w_n \Delta t \sqrt{1-\zeta^2}\right)$$
$$p_2 = e^{-2\zeta w_n \Delta t}$$

onde: w_n é a frequência natural especificada do sistema, dada por:

$$w_n = \frac{\left(\pi - \cos^{-1} \zeta\right)}{\left(\Delta t \sqrt{1-\zeta^2}\right)} \quad (3.27)$$

Δt é o período de amostragem, e, t_s e ζ são, respectivamente, o tempo de subida e o fator de amortecimento, desejados para o sistema em malha fechada.

Cancelamento de Zeros

Algumas formas de implementação do controle por Alocação de pólos, como o controlador de Dahlin's [Seborg86], sugerem o cancelamento completo dos zeros de malha aberta. Porém, sistemas discretos frequentemente apresentam zeros fora e/ou no eixo real negativo do círculo unitário [Astrom84]. Estes zeros não devem ser cancelados, uma vez que, se cancelados, introduzem pólos instáveis no sistema, no caso de zeros fora do círculo unitário, ou *ringing*, isto é, oscilação excessiva no sinal de controle devido a pólos estáveis com parte real negativa. Wittenmark, em [Wittenmark90] sugere que uma boa escolha no projeto de controle por alocação de pólos é não modificar os

zeros de malha aberta.

Erros de Regime para entradas em degrau

Uma vez que a especificação do sistema em malha fechada é dada por:

$$G_m = q^{-1} B_m / A_m = q^{-1} B^- B_m' / A_m$$

A fim de evitar erros de regime para entradas em degrau deve-se projetar o polinômio B_m tal que:

$$B_m'(1) = A_m(1) / B^-(1) \quad (3.28)$$

Escolha de A_o

Como já descrito na seção 3.2.5, uma escolha ótima para o polinômio observador, quando se conhece a natureza das perturbações atuantes no sistema, e elas são descritas por um ruído branco mais um filtro linear, é fazer A_o igual a C . Quando isto não ocorre, um ponto de partida é projetar A_o com uma dinâmica 1.5 a 2 vezes mais rápida que a dinâmica desejada para A_m [Wittenmark90], a fim de que a dinâmica A_o não seja dominante em relação a A_m . Pode-se utilizar, para projetar o polinômio A_o , as eq. (3.26) e eq. (3.27).

3.2.6 - O ALGORITMO DO CAP

Caso não adaptativo

Dados: Polinômios A e B do modelo do processo

Especificações: Polinômios B_m , A_m e A_o

Passo 1) Decompor B em B^+ e B^- , onde B^- é fator de B_m .

Passo 2) Resolver a equação: $A \Delta R^* + q^{-1} B^- S = B^+ A_m A_o$

Passo 3) Resolver a equação: $T_c = B_m A_o / B^-$

Passo 4) A lei de controle é: $R u = T_c w - S y$

com as ordens n_r e n_s segundo as igualdades (3.23).

Caso adaptativo

Dados: ordens do polinômios A e B do modelo do processo

Especificações: polinômios B_m , A_m e A_o

Passo 1) Estimar os polinômios A e B

Passo 2) Decompor B em B^+ e B^- , onde B^- torna-se fator de B_m .

Passo 3) Resolver a equação: $A\Delta R^* + q^{-1}B S = B^+ A_m A_o$

Passo 4) Resolver a equação: $T_c = B_m A_o / B^-$

Passo 5) A lei de controle é: $R u = T_c w - S y$

com as ordens n_r e n_s segundo as igualdades (3.23).

Passo 6) Voltar ao passo 1

3.3 - MEDIDAS DE ROBUSTEZ DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

3.3.1 - INTRODUÇÃO

Muitas vezes, durante a operação do sistema, o modelo do processo representado no controlador não corresponde à realidade, devido a não linearidades, atrasos variantes do processo, etc... , ou, a fim de projetar um controlador mais simples e/ou reduzir o esforço computacional, toma-se como base um modelo simplificado do processo. Lembrando-se que quando controladores são projetados por métodos analíticos, como o método em questão, sua complexidade está diretamente ligada à complexidade do modelo do processo (ver igualdades (3.23)). Assim, torna-se importante analisar a sensibilidade do sistema em malha fechada à variações do processo em relação ao modelo utilizado no projeto.

Seja G_r a função de transferência do processo real, e seja G , ($G=q^{-1}B/A$), a função de transferência do modelo do processo utilizado no projeto controlador. As diferenças entre o modelo do processo e o processo real, denominadas de dinâmicas não modeladas, podem ser representadas como a seguir:

$$\Delta A = G - G_r$$

(3.29)

A representação (ΔA) acima é descrita como sendo a dinâmica não modelada aditiva do sistema.

A dinâmica ΔA não é conhecida *a priori* e sua presença pode levar o sistema em malha fechada à instabilidade. O conceito de robustez é frequentemente encontrado na literatura associado às estratégias de controle denominadas Controle Robusto [Morari89] [Astrom89]. Aqui, diz-se que um sistema em malha fechada é mais robusto que outro quando é menos sensível à presença de dinâmicas não modeladas.

As estratégias de controle adaptativo são uma forma de diminuir a influência das dinâmicas não modeladas. O processo de modelagem feito pelos algoritmos de estimação, faz com que o modelo estimado aproxime do processo real, diminuindo o valor de ΔA .

3.3.2 - O LIMITE DE ESTABILIDADE

Limite de Estabilidade é o limite além do qual o sistema em malha fechada apresenta um comportamento estável com a presença de dinâmicas não modeladas, ou seja, é o valor máximo que o módulo da resposta em frequência de ΔA pode atingir e o sistema em malha fechada é estável.

A seguir calcula-se o limite de estabilidade.

Teorema 3.1

Seja o projeto de controle por alocação de pólos baseado num modelo do processo cuja função de transferência é dada por

$$G = q^{-1}B/A$$

e, seja G_r a função de transferência do processo real. Assume-se que G e G_r possuem o mesmo número de pólos fora do círculo unitário, e que G_m , eq. (3.1) é estável.

Então, o sistema em malha fechada é estável se:

$$\left| G - G_r \right| < \left| G T_c / (G_m S) \right| = \left| G / G_m \right|_x \left| H_{ff} / H_{fb} \right| \quad (3.30)$$

para $\forall q = e^{jw\Delta t}$ e $\forall w \in \mathbb{R}$

onde H_{ff} e H_{fb} são, respectivamente, (T_c/R) (S/R) .

Este teorema e sua demonstração encontram-se em [Astrom90].

□

Pelo teorema 3.1 tem-se o limite de estabilidade (ΔL) de um sistema, isto é, o valor máximo que a dinâmica ΔA (eq. (3.29)) pode atingir e o sistema é estável, é dado por:

$$\left| \Delta L \right| = \left| G / G_m \right|_x \left| H_{ff} / H_{fb} \right| \quad (3.31)$$

Nota-se que o cálculo do limite de estabilidade não depende do conhecimento da função de transferência real do sistema, e pode ser calculado a partir da eq. (3.31) para $q = e^{j\omega\Delta t}$, em vários valores da frequência ω . A robustez, isto é, o grau necessário de precisão no conhecimento do modelo, pode assim ser descrito em termos de condições no domínio da frequência. Quanto maior for o valor do módulo de ΔL , maior poderá ser o valor do módulo de ΔA que não instabiliza o sistema em malha fechada. Maior assim sua robustez, ou insensibilidade, às dinâmicas não modeladas.

Assim, é importante projetar um controlador que assegure o maior valor possível para o limite de estabilidade (ΔL), contanto que a performance do sistema em malha fechada se mantenha aceitável.

Pela eq. (3.31), pode-se dizer que os requerimentos na precisão do modelo são menores (isto é, a robustez é maior) se:

- a largura de faixa do sistema em malha fechada diminui.
- o ganho da parte *feedforward* é maior que o ganho da parte *feedback*, em determinada frequência.

3.4 - O LUGAR DAS RAÍZES RECÍPROCO

3.4.1 - DEFINIÇÃO

Observa-se, através da seção 3.2, que a partir dos polinômios A_m , B_m e A_o especificados é possível deduzir a lei de controle necessária para obter o comportamento desejado. Para auxiliar na escolha dos polinômios A_m e A_o tem-se que é possível calcular seus coeficientes em função de dados mensuráveis no tempo, como tempo de subida a uma entrada em degrau, índice de amortecimento. Uma outra forma de especificar os polinômios A_m e A_o é através do método denominado Lugar das Raízes Recíproco.

O Lugar das Raízes Recíproco (LRR) [Kailath80] [Kwakernaak72] é um procedimento matemático presente na Teoria de Controle Ótimo. Através desta metodologia obtém-se os pólos em malha fechada otimizando um critério quadrático que considera o erro entre a saída e a referência e o nível de controle.

Um sistema linear SISO (*Single Input - Single Output*) pode ser representado pelo seguinte modelo, descrito em espaço de estados:

$$\begin{cases} x(n+1) = A x(n) + B u(n) \\ y(n+1) = C x(n) \end{cases} \quad (3.32)$$

e uma função de custo quadrática para este sistema, quando N tende a infinito, pode ser descrita por :

$$J = \sum_{i=0}^N \left[(y(i) - w(i))^2 + r (u(i))^2 \right] \quad (3.33)$$

Tendo em vista a minimização da função de custo descrita pela eq (3.33), a solução ótima para o sistema dado pela eq. (3.32), pode ser descrita como uma realimentação de estado, ou seja :

$$u(i) = - K x(i) \quad (3.34)$$

Teorema 3.2:

Seja o polinômio característico do sistema, descrito pela eq. (3.32) com realimentação de estados dada pela eq.(3.34), representado a seguir:

$$\det(q I - A + B K) = \prod_{i=0}^p (q - q_i) \quad (3.35)$$

onde: I é a matriz identidade e K é a solução ótima do problema anteriormente descrito.

Os pólos do sistema descrito pela eq. (3.35), ou seja, $[q_i]$, são as 'p' raízes dentro do círculo unitário da identidade polinomial de ordem '2 p', a seguir:

$$1 + k G(q^{-1}) G(q) = 0 \quad (3.36)$$

onde: $\circ k = 1/r$; (3.37)

$\circ G(q) = C (q I - A)^{-1} B$, ou seja, a função de transferência em malha aberta do sistema descrito por (3.32).

A demonstração encontra-se em [Kwakernaak72].

□

Note que a constante 'k' é função da constante de ponderação 'r'. Assim, para cada 'r', que descreve um compromisso entre o erro na saída e o nível de controle (eq. (3.33)), tem-se um 'k'. Através deste 'k' e da eq. (3.36) obtém-se os pólos de um sistema que é ótimo baseado no critério especificado. Variando-se 'k' de 0 a infinito descreve-se um lugar de raízes. Este lugar de raízes é denominado Lugar das Raízes Recíproco.

3.4.2 - APLICAÇÃO DO LRR NO CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

No algoritmo de controle por alocação de pólos, o Lugar das Raízes Recíproco auxilia na escolha dos pólos de malha fechada desejados para sistema. Escolhendo-se, para raízes de A_m e A_o , os pólos dentro do círculo unitário do LRR, para determinado valor de 'k', tem-se que o sistema especificado minimiza o critério quadrático dese-

do. Este método de escolha apresenta a vantagem, em relação à escolha por critérios temporais (seção 3.2.5), de existir um balaceamento entre o erro de saída e o esforço de controle.

Assim, diferentes valores de 'k' especificam as diferentes características do sistema em malha fechada e são a sintonia do controlador. Cada valor de 'k' determina um comportamento para o sistema em malha fechada. Quando 'k' tende para infinito, 'r' tende a zero, e a função de custo pondera mais os erros da saída em detrimento do nível de controle. A medida que o valor de 'k' diminui, pondera-se mais o sinal de controle, e o sistema apresenta erros maiores na saída com menor esforço de controle.

Os passos para a escolha de uma especificação para o controle por alocação de pólos, utilizando o LRR, é descrito a seguir:

- Passo 1) Escolhe-se um valor para 'r', segundo o compromisso desejado, descrito pela eq. (3.33).
- Passo 2) Resolve-se a eq (3.36) para $k = 1/r$.
- Passo 3) Constroe-se o polinômio A_m , a partir dos pólos dentro do círculo unitário do LRR para 'k'.
- Passo 4) Repete-se os passos 1, 2 e 3 para o polinômio observador A_o , especificando-se para A_o uma dinâmica mais rápida (entre 1.5 a 2 vezes) que a escolhida para A_m .

CAPÍTULO 4

O CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO

(GPC)

4.1 - INTRODUÇÃO

O algoritmo de controle denominado Controlador Preditivo Generalizado (GPC) faz parte da categoria dos controladores do tipo Preditivos de Horizonte Longo (LRPC). Como já descrito no Capítulo 1, estas estratégias de controle são constituídas basicamente por:

- Cálculo da previsão da saída em um horizonte de tempo à frente especificado, baseado em um modelo do processo.
- Cálculo da lei de controle, através de um algoritmo que determina a sequência de sinais de controle de modo que as previsões de saída atinjam os valores especificados, isto é, minimizando uma função de custo.

Uma importante linha de pesquisa nesta área é o estudo do comportamento determinístico de um processo controlado pelo GPC. Porém, atualmente não se dispõe na literatura de um método geral que relacione diretamente, como acontece no Controlador por Alocação de Pólos, os parâmetros de sintonia com os pólos do sistema em malha fechada. Métodos heurísticos podem ser obtidos [McIntosh89] [Samaan89] [Nazzetta91] e são analisados no Capítulo 6. Somente em casos particulares, isto é, através de condições particulares de sintonia do GPC, é possível especificar *a priori* a localização dos pólos em malha fechada.

Portanto, no GPC, é possível encontrar os pólos de malha fechada correspondentes a uma determinada sintonia do controlador, porém, encontrar a sintonia do controlador correspondente a um determinado conjunto de pólos de malha fechada desejado só é possível em certos casos particulares.

Neste Capítulo estuda-se o comportamento determinístico de um processo controlado pelo GPC através da dedução e análise da função de transferência do sistema em malha fechada. Esta função é obtida através da colocação da lei de controle do GPC na forma geral RTS (Capítulo 3) e da combinação desta lei de controle com o modelo do processo, como realizado no Capítulo 3 para o CAP. A partir da análise do polinômio característico do sistema em malha fechada pode-se deduzir suas propriedades e obtêm-se condições que relacionam os parâmetros de projeto com o número de pólos na origem e formas particulares de sintonia do GPC.

Nas seções seguintes apresenta-se o algoritmo de controle GPC. Na seção 4.2 discute-se o critério de minimização para o cálculo do sinal de controle. O cálculo da previsão da saída em um horizonte de tempo encontra-se na seção 4.3. Na seção 4.4 obtém-se a lei de controle a partir da minimização da função de custo apresentada na seção 4.2. A análise da função de transferência em malha fechada e o posicionamento dos pólos são discutidos na seção 4.5. Na seção 4.6, tem-se as diferentes formas de sintonizar o GPC onde os pólos de malha fechada desejados podem ser especificados *a priori*.

4.2 - A FUNÇÃO DE CUSTO

A lei de controle do algoritmo preditivo generalizado é deduzida minimizando a seguinte função de custo:

$$J = \sum_{j=N1}^{NY} \left(P(q^{-1})\hat{y}(t+j) - D(q^{-1})w(t+j) \right)^2 + \sum_{j=1}^{NU} \lambda \left(\Delta u(t+j-1) \right)^2 \quad (4.1)$$

- onde:
- N1 é o horizonte inicial de previsão
 - NY é o horizonte final de previsão
 - NU é o horizonte de controle
 - λ é uma constante de ponderação do sinal de controle
 - $P(q^{-1})$ e $D(q^{-1})$ são polinômios de ponderação em q^{-1} , da forma:

$$X(q^{-1}) = x_0 + x_1 q^{-1} + \dots + x_{nx} q^{-nx}$$

- e,
- $P(q^{-1})\hat{y}(t+j)$ é a saída prevista no instante "t+j", filtrada por $P(q^{-1})$.
 - $D(q^{-1})w(t+j)$ é a referência do sistema no instante "t+j", filtrada por $D(q^{-1})$.
 - Δ é dado por: $\Delta = (1 - q^{-1})$
 - $\Delta u(t+j)$ é igual a $u(t+j) - u(t+j-1)$, ou seja, é o incremento do sinal de controle.

Logo, a função de custo é a soma dos quadrados do erro futuro do sistema (diferença entre a saída prevista filtrada e a referência filtrada) com os quadrados dos incrementos futuros do sinal de controle multiplicados por um fator de ponderação λ (escolhido como uma constante positiva, por simplicidade).

Os polinômios $P(q^{-1})$ e $D(q^{-1})$ aumentam a flexibilidade de projeto do controlador GPC, na medida em que permitem filtrar os sinais da saída e da referência. Sua escolha deve ser tal que a razão entre seus ganhos seja igual à unidade, ou seja, $(D(1) / P(1)) = 1$, a fim de se evitar erros de regime para entrada em degrau.

Do critério (4.1) pode-se notar que, para a minimização da função de custo é necessário o conhecimento das referências futuras do sistema entre os instantes "t+N1" e "t+NY". Quando se possui o conhecimento desta informação, como acontece em muitas aplicações na robótica por exemplo, ela é utilizada diretamente e dizemos que a refe-

rência é pré-especificada. Caso contrário, utiliza-se como valor das referências futuras o valor atual da referência, ou seja $w(t)$, e dizemos que a referência é normal.

A partir da minimização do critério quadrático dado pela eq. (4.1) obtém-se NU 's incrementos do sinal de controle. Estes incrementos do sinal de controle deveriam ser aplicados entre os instantes " t " e " $t+NU-1$ ". Após o instante " $t+NU$ " e até o fim do horizonte de previsão " $t+NY$ ", ou seja, entre " $t+NU$ " e " $t+NY$ ", o sinal de controle é feito constante e igual ao existente em " $t+NU-1$ ". Ou seja, neste período considerado o incremento do sinal de controle é zero. Esta abordagem do algoritmo é denominada GPC incremental. Esta característica introduz um aspecto integral no algoritmo de controle, reduzindo o erro de regime, e é a diferença básica de outra forma de implementar o GPC, o GPC posicional.

No GPC posicional utiliza-se uma função de custo modificada em relação ao GPC incremental. A diferença está em que se minimiza a função de custo sobre a variável $u(t)$, ao invés de sobre a variável $\Delta u(t)$ (Na função de custo do GPC posicional deve-se trocar a variável $\Delta u(t)$ por $u(t)$). Este fato acarreta os seguintes problemas de erros de regime. São eles:

- i) NU offset: Ocorre quando $NU < NY$. Através da minimização da função de custo do GPC posicional obtém-se NU 's sinais de controle que seriam aplicados no sistema. Assim, os $NY-NU$ sinais de controle finais do horizonte de previsão são nulos. Este fato faz com que, nos $NY-NU$ instantes finais, o comportamento previsto do processo seja a sua resposta livre. O sinal de controle calculado com estas restrições traz como consequência valores elevados de erros de regime, especialmente quando $NU \ll NY$.
- ii) λ offset: Ocorre quando $\lambda \neq 0$.

Devido a estes motivos o GPC incremental foi o método utilizado neste trabalho.

4.3 - PREVISÃO DAS SAÍDAS FUTURAS

4.3.1 - INTRODUÇÃO

O modelo do processo é descrito por uma equação a diferenças, conforme apresentado no capítulo 1, e reescrito a seguir:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(q^{-1})y(t) &= B(q^{-1})\Delta u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t) \quad \text{ou} \\ y(t) &= \left(B(q^{-1}) / \tilde{A}(q^{-1}) \right) \Delta u(t-1) + \left(C(q^{-1}) / \tilde{A}(q^{-1}) \right) \xi(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

onde o polinômio \tilde{A} é dado por:

$$\tilde{A}(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1})$$

com:

$$\tilde{A}(q^{-1}) = 1 + \tilde{a}_1 q^{-1} + \tilde{a}_2 q^{-2} + \dots + \tilde{a}_{n\tilde{a}} q^{-n\tilde{a}}, \text{ e,}$$
$$n\tilde{a} = n_a + 1$$

As previsões da saída podem ser obtidas através de duas estratégias. Na primeira utiliza-se uma equação diofantina para separar, em cada instante de tempo, as perturbações previsíveis e as imprevisíveis. O outro método realiza um cálculo iterativo da saída utilizando o modelo descrito pela eq. (1.3). As duas formas são apresentadas nas seções 4.3.2 e 4.3.3, respectivamente. A primeira forma é mais adequada para o cálculo da função de transferência em malha fechada do sistema controlado. Já a segunda forma de se obter as previsões, é a implementada devido ao menor esforço computacional. Lambert, em [LambertM87] prova que o erro de previsão é igual nos dois métodos.

4.3.2 - PREVISÃO ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DIOFANTINA

Para se obter uma previsão da saída filtrada "j" instantes de tempo à frente

do atual, utiliza-se a seguinte equação diofantina:

$$\boxed{P(q^{-1})C(q^{-1}) = E_j(q^{-1})\bar{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1})} \quad (4.2)$$

onde $E_j(q^{-1})$ e $F_j(q^{-1})$ são polinômios calculados a partir dos polinômios $\bar{A}(q^{-1})$, $P(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ e do passo de previsão "j". Existe solução única para $E_j(q^{-1})$ e $F_j(q^{-1})$ quando as ordens destes polinômios satisfazem:

$$n_e = j - 1$$

$$n_f = \max \begin{cases} n_a \\ n_p + n_c - j \end{cases}$$

A identidade polinomial (4.2) permite separar, na previsão da saída filtrada no instante "t+j", a informação disponível até o instante "t" (função das medidas passadas), da informação desconhecida (função das medidas futuras).

Para simplificar a notação e aumentar a clareza das fórmulas, será suprimido nos desenvolvimentos a seguir o termo (q^{-1}) da notação dos filtros e polinômios que estão em função de "q⁻¹".

A seguir calcula-se a previsão da saída filtrada.

Multiplicando-se a eq. (1.3) por $P(q^{-1})q^j$, e definindo:

$$y_{fp}(t+j) = P y(t+j) \quad (4.3)$$

obtém-se:

$$y_{fp}(t+j) = (P B / \bar{A}) \Delta u(t+j-1) + (P C / \bar{A}) \xi(t+j) \quad (4.4)$$

Substituindo-se a eq. (4.2) na eq. (4.4), obtém-se:

$$y_{fp}(t+j) = (P B / \bar{A}) \Delta u(t+j-1) + E_j \xi(t+j) + (F_j / \bar{A}) \xi(t) \quad (4.5)$$

Pelo modelo da eq. (1.3), tem-se que a perturbação $\xi(t)$ pode ser descrita como sendo:

$$\xi(t) = (\bar{A} / \mathcal{O}) y(t) - (B / \mathcal{O}) \Delta u(t-1) \quad (4.6)$$

Substituindo-se a eq. (4.6) na eq. (4.5), obtém-se:

$$y_{fp}(t+j) = (P B / \bar{A}) \Delta u(t+j-1) + E_j \xi(t+j) + (F_j / \mathcal{C}) y(t) - (F_j B / \bar{A} \mathcal{C}) \Delta u(t-1)$$

$$y_{fp}(t+j) = \left[(P B / \bar{A}) - (F_j B / \mathcal{C} \bar{A}) q^{-j} \right] \Delta u(t+j-1) + (F_j / \mathcal{C}) y(t) + E_j \xi(t+j) \quad (4.7)$$

Multiplicando-se por $(B / (\mathcal{C} \bar{A}))$ a eq. (4.2) obtém-se:

$$(P B) / \bar{A} = (B E_j) / \mathcal{C} + q^{-j} (F_j B) / (\mathcal{C} \bar{A}) \quad (4.8)$$

Substituindo-se a identidade (4.8) na eq. (4.7) obtém-se:

$$y_{fp}(t+j) = (B E_j / \mathcal{C}) \Delta u(t+j-1) + (F_j / \mathcal{C}) y(t) + E_j \xi(t+j) \quad (4.9)$$

O termo $E_j \xi(t+j)$ só possui componentes de ruídos que ocorrem após o instante "t" (a ordem de E_j é "j-1"), e, portanto, não são conhecidos através das medidas disponíveis no instante "t". Assim, pode-se dizer que a melhor previsão para a saída filtrada ($\hat{y}_{fp}(\cdot)$) no instante "t+j", com a informação disponível no instante "t", é dada por:

$$\hat{y}_{fp}(t+j/t) = (B E_j / \mathcal{C}) \Delta u(t+j-1) + (F_j / \mathcal{C}) y(t)$$

ou, definindo $G_j(q^{-1}) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})$ tem-se que:

$$\boxed{\hat{y}_{fp}(t+j/t) = (G_j / \mathcal{C}) \Delta u(t+j-1) + (F_j / \mathcal{C}) y(t)} \quad (4.10)$$

O erro de previsão é dado por:

$$e(t+j/t) = E_j \xi(t+j) \quad (4.11)$$

Observando a eq. (4.10) pode-se concluir que para se obter um conjunto de

previsões futuras é necessário calcular os polinômios E_j e F_j da eq. diofantina (4.2) para cada instante futuro " $t+j$ ". Com esses valores e com os polinômios do modelo do processo pode-se obter a previsão da saída nos instantes " $t+j$ " futuros. Um procedimento para resolver estas equações diofantinas rapidamente, é calculá-las recursivamente. Em [Clarke87], é apresentado um método para resolver as eqs. diofantinas recursivamente, isto é, cada polinômio E_j e F_j do passo " j " em função dos polinômios do passo " $j-1$ ".

4.3.3 - PREVISÃO PELO CÁLCULO ITERATIVO DO MODELO

Este método baseia-se no fato de que o estado dinâmico do processo pode ser completamente definido no tempo " t " pela medida da saída $y(t)$ e pelos vetores de estado:

$$\begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2) & \dots & y(t-n\bar{a}) \\ \Delta u(t-1) & \Delta u(t-2) & \dots & \Delta u(t-n\bar{b}-1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

As previsões das saídas futuras podem ser facilmente obtidas pela utilização da equação do modelo do processo (eq. (1.3)), dos vetores de estados conhecidos, mais a saída atual, como segue:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1/t) &= -\bar{a}_1 y(t) - \bar{a}_2 y(t-1) + \dots - \bar{a}_{n\bar{a}} y(t-n\bar{a}+1) + B(q^{-1})\Delta u(t) + \\ &\quad + c_1 ep(t) + c_2 ep(t-1) + \dots + c_{nc} ep(t-nc+1) \\ \hat{y}(t+2/t) &= -\bar{a}_1 \hat{y}(t+1/t) - \bar{a}_2 y(t) + \dots - \bar{a}_{n\bar{a}} y(t-n\bar{a}+2) + B(q^{-1})\Delta u(t+1) + \\ &\quad + c_2 ep(t) + c_3 ep(t-1) + \dots + c_{nc} ep(t-nc+2) \\ \hat{y}(t+3/t) &= -\bar{a}_1 \hat{y}(t+2/t) - \bar{a}_2 \hat{y}(t+1/t) + \dots - \bar{a}_{n\bar{a}} y(t-n\bar{a}+3) + \\ &\quad + B(q^{-1})\Delta u(t+2) + c_3 ep(t) + c_4 ep(t-1) + \dots + c_{nc} ep(t-nc+3) \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde: $ep(i) = y(i) - \hat{y}(i/i-1)$

Para se obter a previsão da saída filtrada por P, $(\hat{y}_{fp}(.))$, basta multiplicar todos os membros das eqs. (4.13) por P.

4.3.4 - A INCORPORAÇÃO DO FILTRO T

Para calcular as previsões futuras da saída do processo é necessário obter um modelo que o represente adequadamente. O modelo CARIMA, citado anteriormente, pode ser utilizado para este fim. Quando o modelo do processo não é conhecido, deve-se utilizar um estimador, como o dos mínimos quadrados recursivo estendido, para se obter os parâmetros deste modelo.

A convergência da estimação do polinômio C é lenta, e, este polinômio é variante no tempo se as fontes de perturbação que agem no sistema variam no tempo. Estes fatos tornam difícil a correta estimação do polinômio C [Mohtadi86a].

Uma solução comumente utilizada na literatura é substituir o polinômio C por um filtro T, isto é, utiliza-se o seguinte modelo:

$$\hat{A} y(t) = B \Delta u(t-1) + T \xi(t) \quad (4.14)$$

onde T é um polinômio de ordem nt da seguinte forma:

$$T(q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1} + \dots + t_{nt} q^{-nt} \quad (4.15)$$

O polinômio T é uma especificação de projeto e, sob o ponto de vista do problema de regulação, deve conter o conhecimento sobre as perturbações que agem no sistema, a fim de que as previsões sejam as mais corretas possíveis [Clarke89].

Com o polinômio T pode-se aumentar a robustez do sistema quando em presença de dinâmicas não modeladas [Oliveira92]. No Capítulo 5 deste trabalho é mostrado que a influência deste polinômio na função de transferência em malha fechada é semelhante à do polinômio observador na estratégia de controle por alocação de pólos.

Para obter as novas previsões das saídas filtradas futura do sistema, define-se, em substituição à eq. (4.2) a seguinte equação:

$$\boxed{P T = E_j \hat{A} + q^{-j} F_j} \quad (4.16)$$

onde E_j e F_j são polinômios calculados a partir dos polinômios \hat{A} , P , T e do passo de previsão " j ". Existe solução única para E_j e F_j quando as ordens destes polinômios satisfazem:

$$n_e = j - 1$$

$$n_f = \max \begin{cases} n_a \\ n_p + n_t - j \end{cases}$$

Combinando-se a eq. (4.16) com a eq. (4.14), como foi feito anteriormente, obtém-se como a melhor previsão da saída filtrada no instante " $t+j$ " o seguinte:

$$\hat{y}_{fpt}(t+j/t) = (G_j / T) \Delta u(t+j-1) + (F_j / T) y(t) \quad (4.17)$$

ou

$$\boxed{\hat{y}_{fpt}(t+j/t) = G_j \Delta u_{ft}(t+j-1) + F_j y_{ft}(t)} \quad (4.18)$$

onde: $\Delta u_{ft}(t) = (1/T) \Delta u(t)$

e $y_{ft}(t) = (1/T) y(t)$

A incorporação do filtro T nas previsões das saídas filtradas por P , pelo método do cálculo iterativo do modelo, pode ser feita através da substituição do modelo original por:

$$\hat{A} (y(t)/T) = B(\Delta u(t-1)/T) + \xi(t) \quad (4.19)$$

Assim, pode-se calcular as previsões da saída filtrada iteragindo-se como feito anteriormente, o modelo acima com os seguintes vetores de estado:

$$\begin{bmatrix} y(t-1)/T & y(t-2)/T & \dots & y(t-n_a)/T \\ \Delta u(t-1)/T & \Delta u(t-2)/T & \dots & \Delta u(t-n_b-1)/T \end{bmatrix}$$

As previsões obtidas estão filtradas por P e por $(1/T)$, como abaixo:

$$\left[\hat{y}_{fp}(t+1/t)/T \hat{y}_{fp}(t+2/t)/T \dots \hat{y}_{fp}(t+NY/t)/T \right]$$

Para se obter a previsão da saída filtrada somente por P, como desejado, deve-se retirar a influência do filtro $(1/T)$ filtrando-se o resultado por T, como descrito pelas eqs. (4.20):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{fp}(t+1/t) &= t_0 \hat{y}_{fpft}(t+1/t) + t_1 y_{fpft}(t) + \dots + t_{nt} y_{fpft}(t-nt+1) \\ \hat{y}_{fp}(t+2/t) &= t_0 \hat{y}_{fpft}(t+2/t) + t_1 \hat{y}_{fpft}(t+1/t) + \dots + t_{nt} y_{fpft}(t-nt+2) \\ &\vdots \\ \hat{y}_{fp}(t+NY/t) &= t_0 \hat{y}_{fpft}(t+NY/t) + t_1 \hat{y}_{fpft}(t+NY-1/t) + \dots + t_{nt} \hat{y}_{fpft}(t+NY-nt/t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde: $\hat{y}_{fpft}(t+i/t) = (1/T) \hat{y}_{fp}(t+i/t)$ e

t_i é o i-ésimo coeficiente do filtro T

4.4 - A LEI DE CONTROLE

4.4.1 - INTRODUÇÃO

A lei de controle do algoritmo GPC é obtida minimizando a soma do erro quadrático entre as previsões da saída e as referências futuras filtradas, mais o quadrado dos incrementos de controle futuros multiplicados por um fator de ponderação. É importante destacar que a função de custo é minimizada em relação ao vetor formado pelos incrementos futuros do sinal de controle, e não somente em relação aos futuros sinais de controle.

Os passos para a obtenção da lei de controle são os seguintes:

- i) Decompor a saída prevista em duas partes, uma parte livre (que depende do estado do sistema até o instante "t", e que portanto não pode ser alterada pelos controles futuros) e uma parte forçada (que depende dos acontecimentos após o instante "t" e é função somente dos incrementos do sinal de controle nos instantes seguintes)
- ii) Substituir a saída prevista decomposta (passo i) na função de custo e minimizar, através de diferenciação pelo vetor $\Delta \underline{u}$ dos incrementos de controle nos instantes posteriores.
- iii) Como resultado obtém-se um vetor ($\Delta \underline{u}$), cujos elementos são incrementos de controle que minimizam a função de custo. O primeiro elemento deste vetor (o elemento $\Delta u(t)$) é o incremento do sinal de controle aplicado no sistema.

4.4.2 - A DECOMPOSIÇÃO DA SAÍDA PREVISTA

Tem-se que a saída prevista filtrada do sistema no instante "t+j" é descrita pela equação (4.18), reescrita a seguir:

$$\hat{y}_{fpt}(t+j/t) = G_j \Delta u_{ft}(t+j-1) + F_j y_{ft}(t) \quad (4.18)$$

Com o objetivo de separar os valores de $\Delta u(\cdot)$ conhecidos até o instante "t", e os valores a serem calculados, define-se a seguinte identidade polinomial:

$$\boxed{G_j = E_j B = T H_j + q^{-j} I_j} \quad (4.21)$$

onde H_j e I_j são polinômios calculados a partir dos polinômios E_j , B , T e do passo de previsão "j". Existe solução única para H_j e I_j quando as ordens destes polinômios satisfazem:

$$\begin{aligned} n_h &= j - 1 \\ n_i &= \max \begin{cases} n_b - 1 \\ n_t - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo-se a eq. (4.21) na eq. (4.18) obtém-se:

$$\hat{y}_{f_{pf}t}(t+j/t) = H_j \Delta u(t+j-1) + I_j \Delta u_{ft}(t-1) + F_j y_{ft}(t) \quad (4.22)$$

Observando-se a eq. (4.22), e sabendo-se que a ordem do polinômio H_j é "j-1", pode-se verificar que as previsões das saídas após o instante "t" são facilmente descritas em função dos incrementos futuros dos sinais de controle e dos acontecimentos ocorridos anteriormente ao instante "t". Sendo assim, pode-se dividir as previsões futuras conforme segue:

$$\hat{y} = \hat{y}_f + \hat{y}_l \quad (4.23)$$

onde: \hat{y}_f , saída forçada, é a parte da previsão da saída que é função dos incrementos futuros no sinal de controle, supondo que o estado inicial é zero; e,

\hat{y}_l , saída livre, é a parte da previsão da saída que é função das saídas e sinais de controle passados, ou seja, a resposta do sistema com nenhum incremento no sinal de controle aplicado.

Sendo assim, pode-se decompor a previsão da saída filtrada, dada pela eq. (4.22), por:

$$\hat{y}_{fpft}(t+j/t) = I_j \Delta u_{ft}(t-1) + F_j y_{ft}(t) \quad (4.24)$$

$$\hat{y}_{fpft}(t+j/t) = H_j \Delta u(t+j-1) \quad (4.25)$$

O cálculo da decomposição das previsões da saída, segundo o método iterativo, é desenvolvido a seguir. Uma vez que este método é utilizado principalmente para a implementação do algoritmo de controle, por simplicidade considera-se o filtro \hat{y} como sendo igual a 1. Posteriormente ao desenvolvimento, encontram-se as considerações necessárias para a implementação do caso geral, ou seja, para um filtro T qualquer.

Tem-se que as previsões $\hat{y}_{fp}(t+j/t)$ são dadas pelas equações (4.13) multiplicadas por $P(q^{-1})$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{fp}(t+1/t) &= -\hat{a}_1 y_{fp}(t) - \hat{a}_2 y_{fp}(t-1) + \dots - \hat{a}_{n\hat{a}} y_{fp}(t-n\hat{a}+1) + P(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t) + \\ &\quad + c_1 ep_{fp}(t) + c_2 ep_{fp}(t-1) + \dots + c_{nc} ep_{fp}(t-nc+1) \\ \hat{y}_{fp}(t+2/t) &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{fp}(t+1/t) - \hat{a}_2 y_{fp}(t) + \dots - \hat{a}_{n\hat{a}} y_{fp}(t-n\hat{a}+2) + P(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t) + \\ &\quad + c_2 ep_{fp}(t) + c_3 ep_{fp}(t-1) + \dots + c_{nc} ep_{fp}(t-nc+2) \\ \hat{y}_{fp}(t+3/t) &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{fp}(t+2/t) - \hat{a}_2 \hat{y}_{fp}(t+1/t) + \dots - \hat{a}_{n\hat{a}} y_{fp}(t-n\hat{a}+3) + P(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t) + \\ &\quad + c_3 ep_{fp}(t) + c_4 ep_{fp}(t-1) + \dots + c_{nc} ep_{fp}(t-nc+3) \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Fazendo a decomposição da previsão em \hat{y}_{fp} e $\hat{y}_{l_{fp}}$, tem-se:

i) $\hat{y}_{l_{fp}}$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{l_{fp}}(t+1/t) &= -\hat{a}_1 y_{fp}(t) - \hat{a}_2 y_{fp}(t-1) + \dots - \hat{a}_{n\hat{a}} y_{fp}(t-n\hat{a}+1) + \\ &\quad + pb_1 \Delta u(t-1) + pb_2 \Delta u(t-2) + \dots + pb_{npb} \Delta u(t-npb) + \\ &\quad + c_1 ep_{fp}(t) + c_2 ep_{fp}(t-1) + \dots + c_{nc} ep_{fp}(t-nc+1) \\ \hat{y}_{l_{fp}}(t+2/t) &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{l_{fp}}(t+1/t) - \hat{a}_2 y_{fp}(t) + \dots - \hat{a}_{n\hat{a}} y_{fp}(t-n\hat{a}+2) + \\ &\quad + pb_2 \Delta u(t-1) + pb_3 \Delta u(t-2) + \dots + pb_{npb} \Delta u(t-npb+1) \\ &\quad + c_2 ep_{fp}(t) + c_3 ep_{fp}(t-1) + \dots + c_{nc} ep_{fp}(t-nc+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{fp}(t+3/t) &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{fp}(t+2/t) - \hat{a}_2 \hat{y}_{fp}(t+1/t) + \dots - \hat{a}_{n\hat{a}} \hat{y}_{fp}(t-n\hat{a}+3) \\
&+ pb_3 \Delta u(t-1) + pb_4 \Delta u(t-2) + \dots + pb_{npb} \Delta u(t-npb+2) \\
&+ c_3 ep_{fp}(t) + c_4 ep_{fp}(t-1) + \dots + c_{nc} ep_{fp}(t-nc+3) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde: $PB(q^{-1}) = P(q^{-1})B(q^{-1})$ e

$$PB(q^{-1}) = pb_0 + pb_1 q^{-1} + \dots + pb_{npb} q^{-npb}$$

ii) \hat{y}_{fp} :

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{fp}(t+1/t) &= b_0 \Delta u(t) \\
\hat{y}_{fp}(t+2/t) &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{fp}(t+1/t) + pb_0 \Delta u(t+1) + pb_1 \Delta u(t) \\
\hat{y}_{fp}(t+3/t) &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{fp}(t+2/t) - \hat{a}_2 \hat{y}_{fp}(t+1/t) + pb_0 \Delta u(t+2) \\
&+ pb_1 \Delta u(t+1) + pb_2 \Delta u(t) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{fp}(t+1/t) &= pb_0 \Delta u(t) \\
\hat{y}_{fp}(t+2/t) &= pb_0 \Delta u(t+1) + (pb_1 - \hat{a}_1 pb_0) \Delta u(t) \\
\hat{y}_{fp}(t+3/t) &= pb_0 \Delta u(t+2) + (pb_1 - \hat{a}_1 pb_0) \Delta u(t+1) + \\
&+ (pb_2 - \hat{a}_1 (pb_1 - \hat{a}_1 pb_0) - \hat{a}_2 pb_0) \Delta u(t) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Analisando-se as eqs. (4.28), comparando-se com a eq. (4.25), pode-se reescrever as eqs. (4.28) como segue:

$$\hat{y}_{fp}(t+j/t) = \sum_{i=0}^{j-1} h_i \Delta u(t+j-i-1) \tag{4.29}$$

onde h_i é o i -ésimo elemento do polinômio H_j , e descrito pela seguinte fórmula recursiva:

$$h_i = pb_i - \sum_{k=1}^{\min(i, n\bar{a})} (\bar{a}_k h_{i-k}) \quad (4.30)$$

Das eq. (4.16) e eq. (4.21) tem-se que:

$$T = E_j \bar{A} / P + q^{-j} F_j / P \quad (4.16)$$

$$E_j B = T H_j + q^{-j} I_j \quad (4.21)$$

Substituindo o polinômio T da eq. (4.21) pela eq. (4.16) obtém-se:

$$E_j B = \left[(E_j \bar{A} + q^{-j} F_j) / P \right] H_j + q^{-j} I_j$$

$$(P B / \bar{A}) = H_j + q^{-j} (P I_j + F_j H_j) / (E_j \bar{A}) \quad (4.31)$$

A seguir verifica-se que os elementos h_i correspondem também ao i -ésimo elemento da divisão $(P B / \bar{A})$.

Com os elementos h_i do polinômio H_j , pode-se definir a seguinte matriz:

$$H = \begin{bmatrix} h_{N1-1} & h_{N1-2} & \dots & h_{N1-NU} \\ h_{N1} & h_{N1-1} & \dots & h_{N1-NU+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NY-1} & h_{NY-2} & \dots & h_{NY-NU} \end{bmatrix}_{(NY-N1+1) \times NU}$$

onde $h_x = 0$ para $x < 0$

Utilizando-se da definição da matriz H, e sabendo-se que os incrementos do sinal de controle entre os instantes "t+NU+1" e "t+NY" são zeros, pode-se reescrever a previsão da saída filtrada \hat{y}_{fp} (eq. (4.23)), como segue:

$$\hat{y}_{fp} = H \Delta \underline{u} + \hat{y}_{fp}^1 \quad (4.32)$$

onde:

$$\hat{\underline{y}}_{fp} = [\hat{y}_{fp}(t+N1/t) \hat{y}_{fp}(t+N1+1/t) \dots \hat{y}_{fp}(t+NY/t)]^T$$

$$\hat{\underline{y}}l_{fp} = [\hat{y}l_{fp}(t+N1/t) \hat{y}l_{fp}(t+N1+1/t) \dots \hat{y}l_{fp}(t+NY/t)]^T$$

$$\Delta \underline{u} = [\Delta u(t) \Delta u(t+1) \dots \Delta u(t+NU-1)]^T$$

Os vetores $\hat{\underline{y}}_{fp}$ e $\hat{\underline{y}}l_{fp} \in \mathbb{R}^{(NY-N1+1) \times 1}$ e o vetor $\Delta \underline{u} \in \mathbb{R}^{NU \times 1}$

Incorporação do filtro T na decomposição da saída prevista

A incorporação do filtro T, na decomposição da saída pelo método do cálculo iterativo do modelo, é feita de maneira análoga à descrita na seção 4.3.4.

Pela eq. (4.25) tem-se que a parte forçada da saída filtrada prevista não depende do filtro T, ou seja, não se altera com a incorporação do filtro T, uma vez que os elementos h_i são os mesmos com ou sem filtro T.

Na parte livre da previsão da saída filtrada, a principal modificação é que, agora, os incrementos futuros do sinal de controle filtrados não são mais nulos, possuem novos valores. São os incrementos do sinal de controle filtrados por $(1/T)$, ou seja, é o vetor:

$$[0(t+NY) \dots 0(t+1) 0(t) \Delta u(t-1) \Delta u(t-2)] (1/T)$$

4.4.3 - A MINIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE CUSTO

Tem-se que a função de custo, eq. (4.1), reescrita na forma vetorial é dada por:

$$J = \left(\hat{\underline{y}}_{fp} - \underline{w}_{fd} \right)^T \left(\hat{\underline{y}}_{fp} - \underline{w}_{fd} \right) + \lambda \Delta \underline{u}^T \Delta \underline{u} \quad (4.33)$$

onde: $w_{fd}(t) = D(q^{-1})w(t)$;

$$\underline{w}_{fd} = [w_{fd}(t+N1) \ w_{fd}(t+N1+1) \ \dots \ w_{fd}(t+NY)]^T$$

O vetor $\underline{w}_{fd} \in \mathbb{R}^{(NY-N1+1) \times 1}$

Substituindo-se o vetor \hat{y}_{fp} da eq. (4.33) pela sua forma decomposta descrita pela eq. (4.32), tem-se que:

$$J = \left(H \Delta \underline{u} + \underline{y}_{l_{fp}} - \underline{w}_{fd} \right)^T \left(H \Delta \underline{u} + \underline{y}_{l_{fp}} - \underline{w}_{fd} \right) + \lambda \Delta \underline{u}^T \Delta \underline{u} \quad (4.34)$$

Minimizando a eq. (4.34) em relação ao vetor de controle $\Delta \underline{u}$, obtém-se:

$$\partial J / \partial \Delta \underline{u} = 2H^T H \Delta \underline{u} + 2H^T \left(\underline{y}_{l_{fp}} - \underline{w}_{fd} \right) + 2\lambda \Delta \underline{u} = 0 \quad (4.35)$$

logo:

$$\Delta \underline{u} = \left(H^T H + \lambda I \right)^{-1} H^T \left(\underline{w}_{fd} - \underline{y}_{l_{fp}} \right) \quad (4.36)$$

Obtém-se assim, os incrementos futuros do sinal de controle que minimizam a função de custo J, representada pela eq. (4.1).

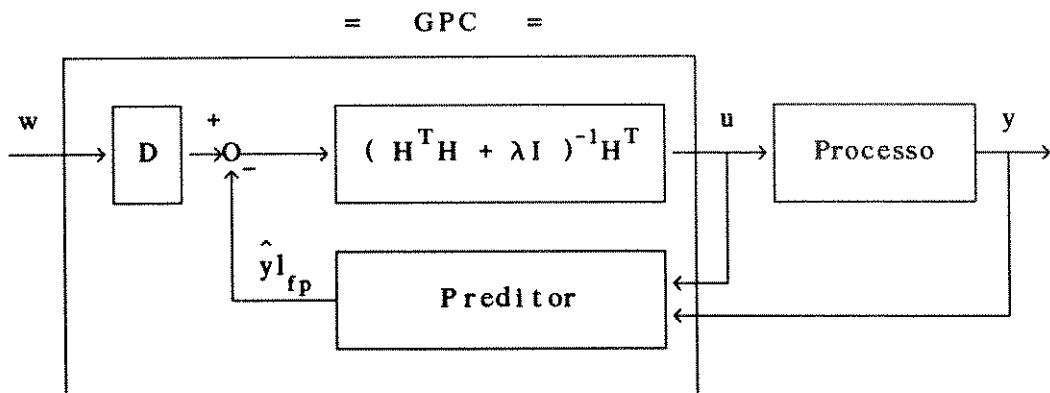


Fig.(4.1) - Diagrama de blocos - GPC acoplado a um processo

Observa-se, uma vez que a eq. (4.36) é função da matriz H, que quanto menor

for o valor de NU menor será o esforço computacional do algoritmo, pela diminuição do número de colunas da matriz H e, conseqüentemente, de tempo de processamento para a inversão da matriz $H^T H$. O fator λ , além de ponderar o sinal de controle, permite o condicionamento da matriz $(H^T H + \lambda I)$, quando esta for singular.

O processo mais controlador pode ser representado pelo diagrama de blocos da fig. (4.1).

4.4.4 - O ALGORITMO GPC

Caso não adaptativo

Dados: Horizontes $N1$, NY e NU ; fator λ ; filtros $P(q^{-1})$, $D(q^{-1})$ e $T(q^{-1})$ e polinômios do modelo do processo $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$

Passo 1: Calcular a matriz H

2: Obter a saída do processo $y(t)$

3: Fazer a previsão das saídas livres filtradas, (\hat{y}_{lp})

4: Obter as referências futuras filtradas, (\underline{w}_{fd})

5: Calcular o vetor $\Delta \underline{u}$, pela eq. (4.36), fazendo $\Delta u(t)$ igual ao 1º elemento de $\Delta \underline{u}$.

6: Aplicar o controle no processo, isto é, $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$.

7: Voltar ao passo 2

Caso adaptativo

Dados: Horizontes $N1$, NY e NU ; fator λ ; filtros $P(q^{-1})$, $D(q^{-1})$ e $T(q^{-1})$ e ordens dos polinômios do modelo do processo $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$

Passo 1: Obter a saída do processo $y(t)$

2: Estimar os polinômios $\hat{A}(q^{-1})$ e $\hat{B}(q^{-1})$

3: Calcular a matriz H

4: Fazer a previsão das saídas livres filtradas, (\hat{y}_{lp})

5: Obter as referências futuras filtradas, (\underline{w}_{fd})

6: Calcular o vetor $\Delta \underline{u}$, pela eq. (4.36), fazendo $\Delta u(t)$ igual ao 1º elemento de $\Delta \underline{u}$.

7: Aplicar o controle no processo, isto é, $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$.

8: Voltar ao passo 2

4.5 - A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

4.5.1 - INTRODUÇÃO

Nesta seção obtém-se a função de transferência em malha fechada de um sistema controlado pelo GPC. Inicialmente mostra-se que a lei de controle do GPC pode ser colocada na forma aqui denominada de RTS, típica de um controlador por alocação de pólos (Capítulo 3). Para o caso do GPC, é introduzido um filtro, denominado F_c , para o valor da referência "NY" instantes de tempo a frente do atual a fim de representar o conhecimento *a priori* da referência, isto é, a referência pré-especificada.

A forma RTS é descrita pela eq. (4.37), a seguir:

$$R u(t) = T_c w_{ff}(t) - S y(t) \quad (4.37)$$

onde: $w_{ff}(t) = F_c w(t+NY)$

R , T_c , S e F_c são polinômios em q^{-1} da forma:

$$X = x_0 + x_1 q^{-1} + \dots + x_{nx} q^{-nx}$$

O diagrama de blocos correspondente é:

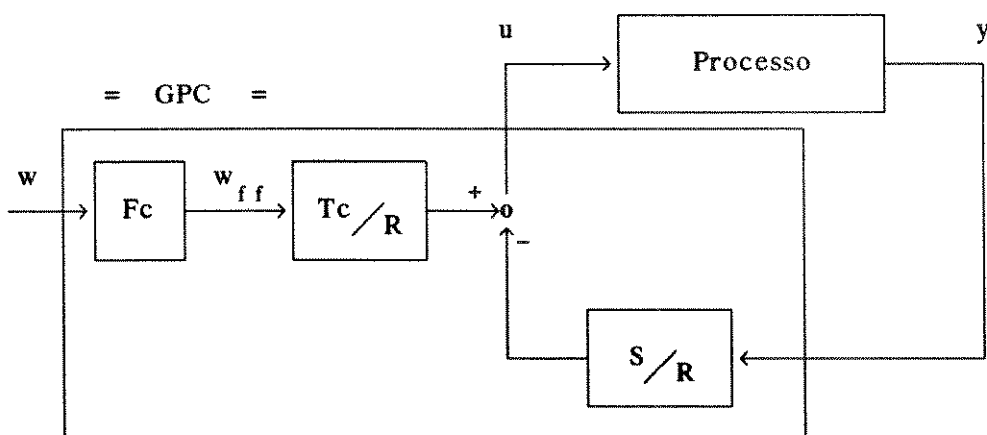


Fig.(4.2) - Diagrama de blocos da lei de controle RTS

Na seção 4.5.2 desenvolve-se uma equação para os polinômios R , S , T_c e F_c da eq. (4.37) em função dos parâmetros de sintonia do GPC e do modelo do processo. A

partir dos polinômios R, S e Tc do controlador e dos polinômios A e B do modelo do processo é possível calcular a função de transferência do sistema em malha fechada. Este desenvolvimento encontra-se na seção 4.5.3. Na seção 4.5.4 tem-se uma análise da eq. característica e dos pólos do sistema em malha fechada.

4.5.2 - O MODELO RTS EQUIVALENTE

Do desenvolvimento do algoritmo de controle GPC, tem-se que o vetor dos incrementos futuros dos sinais de controle entre os instantes "t" e "t+NU" é dado pela equação (4.36), reescrita a seguir:

$$\Delta \underline{u} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T (\underline{w}_{fd} - \hat{\underline{y}}_{fp}) \quad (4.36)$$

onde: $(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T \in \mathbb{R}^{NU \times (NY-N1+1)}$ e $(\underline{w}_{fd} - \hat{\underline{y}}_{fp}) \in \mathbb{R}^{(NY-N1+1) \times 1}$

Devido à utilização da estratégia de "receding horizon", somente é aplicado ao sistema o primeiro elemento do vetor $\Delta \underline{u}$, ou seja, $\Delta u(t)$. Portanto, somente a primeira linha da matriz $[(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T]$ é importante. Sendo assim, define-se:

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{U}} [(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T] \quad (4.38)$$

onde: $\underline{\mathbf{U}} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times NU}$

$$\underline{\mathbf{M}} = [m_{N1} \ m_{N1+1} \ \dots \ m_{NY}]_{1 \times (NY-N1+1)}$$

O controle $\Delta u(t)$ aplicado ao sistema pode ser descrito como sendo:

$$\Delta u(t) = \underline{\mathbf{M}} (\underline{w}_{fd} - \hat{\underline{y}}_{fp}) \quad (4.39)$$

A previsão da saída livre filtrada é dada pela eq. (4.24). Substituindo-se esta equação na eq. (4.39) obtém-se:

$$\Delta u(t) = \underline{M} \left[\underline{w}_{fd} - \begin{bmatrix} (FN_1/T)y(t) + (IN_1/T)\Delta u(t-1) \\ \vdots \\ (FNY/T)y(t) + (INY/T)\Delta u(t-1) \end{bmatrix} \right]$$

$$\Delta u(t) = \sum_{j=N_1}^{NY} m_j \left[w_{fd}(t+j) - (F_j/T)y(t) - (I_j/T)\Delta u(t-1) \right]$$

$$\left[T + q^{-1} \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j I_j) \right] \Delta u(t) = \left[T D \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j w(t+j)) \right] - \left[\sum_{j=N_1}^{NY} (m_j F_j) \right] y(t)$$

$$\left[T + q^{-1} \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j I_j) \right] \Delta u(t) = \left[T D \sum_{j=N_1}^{NY} m_{(NY+N_1-j)} q^{-(j-N_1)} \right] w(t+NY) - \left[\sum_{j=N_1}^{NY} (m_j F_j) \right] y(t)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(T + q^{-1} \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j I_j) \right) \Delta \right] u(t) &= \left[T D K \right] \left[\left(\sum_{j=N_1}^{NY} m_{(NY+N_1-j)} q^{-(j-N_1)} \right) / K \right] w(t+NY) + \\ &- \left[\sum_{j=N_1}^{NY} (m_j F_j) \right] y(t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde:

$$K = \sum_{j=N_1}^{NY} m_j \quad (4.41)$$

Comparando a eq. (4.40) com o modelo do controlador RTS, dado pela eq. (4.37), pode-se definir:

$$\begin{aligned} R &= \Delta R^* = \left(1 - q^{-1} \right) \left(T + q^{-1} \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j I_j) \right) \\ S &= \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j F_j) \\ Tc &= K D T \\ Fc &= \left(\sum_{j=N_1}^{NY} m_{(NY+N_1-j)} q^{-(j-N_1)} \right) / K \end{aligned} \quad (4.42)$$

Definindo-se como n_r , n_s , n_{tc} e n_{fc} os valores das ordens de R , S , T_c e F_c , respectivamente, e sabendo-se que a ordem de F_j , n_f , é o $\max(n_a, n_p + n_t - j)$ e a ordem de I_j , n_i , é o $\max(n_b - 1, n_t - 1)$, pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} n_r &= \max \left\{ \frac{n_t}{n_i + 1} \right\} + 1 = \max \left\{ \frac{n_t + 1}{n_b + 1} \right\} \\ n_s = n_f &= \max \left\{ \frac{n_a}{n_p + n_t - j} \right\} = \max \left\{ \frac{n_a}{n_p + n_t - N_1} \right\} \\ n_{tc} &= n_d + n_t \\ n_{fc} &= N_Y - N_1 \end{aligned} \quad (4.43)$$

O polinômio F_c representa a incorporação, no GPC, da referência pré-especificada.

Se a referência é pré-especificada, o polinômio F_c torna-se um filtro para o valor da referência "NY" instantes de tempo a frente do instante atual.

Se a referência é normal, ou seja, não há conhecimento à priori das referências futuras, todos os valores de $w(\cdot)$ nos instantes a frente de "t" são considerados como se fossem iguais, ao valor atual. Isto é, sendo $w(t+N_1)$ a $w(t+N_Y)$ são iguais a $w(t)$. Com esta característica o polinômio F_c torna-se um ganho unitário.

4.5.3 - A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

A função de transferência em malha fechada do sistema é obtida combinando-se o modelo do processo com o modelo do controlador.

O modelo RTS equivalente do controlador é dado pela eq. (4.37), reescrita abaixo:

$$R u(t) = T_c w_{ff}(t) - S y(t) \quad (4.37)$$

ou

$$u(t) = \left(T_c / R \right) w_{ff}(t) - \left(S / R \right) y(t)$$

A equação do processo é dada pela eq. (1.3), reescrita a seguir:

$$A y(t) = q^{-1}B u(t) + C \xi(t)/\Delta \quad (1.3)$$

Substituindo-se a eq. (4.37) na eq. (1.3) obtém-se:

$$A y(t) = q^{-1}B \left[(Tc/R)w_{ff}(t) - (S/R)y(t) \right] + C \xi(t)/\Delta$$

$$y(t) = \left[q^{-1}B Tc / (A R + q^{-1}B S) \right] w_{ff}(t) + \left[C R / (A R + q^{-1}B S) \right] \xi(t)$$

ou

$$y(t) = \left(Z1mf / Pmf \right) w_{ff}(t) + \left(Z2mf / Pmf \right) \xi(t)$$

Pela eq. (4.44) tem-se que o polinômio característico do sistema em malha fechada é dado por:

$$\boxed{Pmf = A R + q^{-1}B S} \quad (4.45)$$

Onde, se polinômios A e B modelo do processo não são conhecidos, podem ser estimados através de um método como o dos mínimos quadrados recursivo.

O número de pólos do sistema em malha fechada é :

$$n_{pmf} = \max \left\{ \begin{array}{l} na + nr = \max \left\{ \begin{array}{l} na + nt + 1 \\ na + nb + 1 \end{array} \right. \\ nb + 1 + ns = \max \left\{ \begin{array}{l} nb + 1 + na \\ nb + 1 + np + nt - N1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ou

$$n_{pmf} = \max \left\{ \begin{array}{l} na + 1 + nt \\ na + 1 + nb \\ nb + 1 + nt + np - N1 \end{array} \right.$$

(4.46)

Os zeros do sistema em malha fechada da função de transferência entre a saída do processo e a referência são obtidos do polinômio Z1mf descrito a seguir :

$$Z_{1mf} = q^{-1} B T_c$$

(4.47)

4.5.4 - ANÁLISE DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO PMF

4.5.4.1 - Propriedades do Polinômio Característico Pmf

O polinômio característico do sistema em malha fechada controlado pelo GPC é descrita pela eq. (4.45), reescrita a seguir:

$$P_{mf} = A R + q^{-1} B S \quad (4.45)$$

Substituindo-se os valores dos polinômios R e S representados pelas eqs. (4.42) na eq. (4.45), obtém-se:

$$P_{mf} = \tilde{A} \left[T + q^{-1} \sum_{j=N_1}^{NY} (m_j I_j) \right] + q^{-1} B \left[\sum_{j=N_1}^{NY} (m_j F_j) \right] \quad (4.48)$$

Proposição 4.1

O filtro T é um fator do polinômio característico Pmf [Samaan89]. Assim, as raízes de T pertencem ao conjunto de pólos especificados em malha fechada. Isto é, o polinômio Pmf pode ser descrito como a seguir:

$$P_{mf} = T P^* \quad (4.49)$$

onde:

$$P^* = \tilde{A} + q^{-1} \left[\sum_{j=N_1}^{NY} m_j (B P - \tilde{A} H_j) q^j \right] \quad (4.50)$$

e, não existem parcelas de P* onde o operador "q" esteja elevado a um número positivo, ou seja, não existe q^x , e $x > 0$, em P*.

A demonstração encontra-se no Apêndice A , seção A.1.

Proposição 4.2

O polinômio P* da equação característica é dado pela seguinte equação :

$$P^* = 1 + \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \tilde{a}_k - \sum_{i=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-i)} \right] \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb+1-N1} \left[\sum_{n=N1-1}^{NY-1} pb_{(n+k)} m_{(n+1)} \right] q^{-k}$$

onde: $PB(q^{-1}) = P(q^{-1})B(q^{-1}) = pb_0 + pb_1 q^{-1} + \dots + pb_{npb} q^{-npb}$

A demonstração encontra-se no Apêndice A, seção A.2, ou para o caso particular do filtro $P = 1$, em [Acundeger90].

Proposição 4.3

Quando a constante lambda de ponderação do sinal de controle é igual a zero ($\lambda = 0$) tem-se que os coeficientes do polinômio P* da equação característica Pmf são descritos por:

$$P^* = 1 - \sum_{k=1}^{na+1-NU} \left\{ \sum_{i=NU}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-i)} \right] \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb+1-N1} \left[\sum_{n=N1-1}^{NY-1} pb_{(n+k)} m_{(n+1)} \right] q^{-k} \quad (4.52)$$

A demonstração encontra-se no Apêndice A, seção A.3, ou para o caso particular do filtro $P = 1$, em [Acundeger90].

4.5.4.2 - Análise dos Pólos de Malha Fechada

Da equação característica do sistema em malha fechada (eq. (4.45)) tem-se que o número de pólos em malha fechada é dado por:

$$n_{pmf} = \max \begin{cases} na + 1 + nt \\ na + 1 + nb \\ nb + 1 + nt + np - N1 \end{cases}$$

Proposição 4.4

A condição suficiente para que parte dos pólos em malha fechada estejam na origem é dada por:

$$(nt < nb) \text{ E } (nt + np - N1 < na) \quad (4.53)$$

O número de pólos na origem consequência desta condição é dado por:

$$(nb - nt) \text{ quando } (np - N1 \leq na - nb) \quad (4.54)$$

OU

$$(na - nt - np + N1) \text{ quando } (np - N1 \geq na - nb) \quad (4.55)$$

A demonstração encontra-se no Apêndice A, seção A.4

Proposição 4.5

Quando a constante lambda de ponderação do sinal de controle é igual a zero ($\lambda = 0$) tem-se que a condição suficiente para que parte dos pólos de malha fechada estejam na origem é dada por:

$$(np - N1 < na - nb) \text{ OU } (nt + np - N1 < na) \quad (4.56)$$

O número de pólos na origem consequência desta condição, é dado por:

$$\text{mín} \begin{cases} NU \\ na - np - nb + N1 \end{cases} \text{ quando } (nt \geq nb) \quad (4.57)$$

OU

$$\text{mín} \begin{cases} NU + nb - nt \\ na - np - nt + N1 \end{cases} \text{ quando } (nt \leq nb) \quad (4.58)$$

A demonstração encontra-se no Apêndice A, seção A.5.

Nota-se que, se a condição (4.53) é satisfeita, tem-se que a condição (4.56) também é satisfeita. Isto ocorre devido ao fato de que a proposição 4.5 trata de um caso particular da proposição 4.4.

4.5.4.3 - Exemplos

A seguir apresentam-se exemplos ilustrativos das proposições 4.4 e 4.5.

Exemplo 4.1: Ilustração da proposição 4.4

Neste exemplo ilustra-se que quando as condições (4.53) e (4.54) são satisfeitas, o número de pólos na origem é igual a $(nb - nt)$.

O modelo do processo é dado por:

$$G = q^{-1}B/A$$

$$\text{onde: } B = 0.0017 - 0.0015q^{-1} - 0.001q^{-2} + 0.0014q^{-3}$$

$$A = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}$$

assim, $nb = 3$ e $na = 4$.

O GPC é sintonizado com os horizontes; $N1 = 1$, $NY = 8$, $NU = 1$ e $\lambda = 0.001$; e os filtros; $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. Pela eq. (4.46) tem-se que $n_{pmf} = na + nb + 1 = 8$, ou seja, o número de pólos em malha fechada é 8 (oito).

Entre os 8 (oito) pólos em malha fechada, existirão pólos na origem pois a condição (4.53) é satisfeita : $nt < nb$ ($0 < 3$) e $nt + np - N1 < na$ ($0 + 0 - 1 < 4$). O número de pólos na origem é $(nb - nt)$ ($3 - 0 = 3$) pois a condição (4.54) é satisfeita: $np - N1 \leq na - nb$ ($0 - 1 \leq 4 - 3$).

A equação característica do sistema em malha fechada, obtida da eq. (4.48), é :

$$Pmf(q^{-1}) = 1 - 3.2140q^{-1} + 4.2592q^{-2} - 2.8408q^{-3} + 0.9178q^{-4} - 0.1046q^{-5}$$

ou,
$$Pmf^*(q) = 1q^8 - 3.2140q^7 + 4.2592q^6 - 2.8408q^5 + 0.9178q^4 - 0.1046q^3$$

onde $Pmf^*(q)$ é o polinômio característico em função do operador "q".

Os pólos em malha fechada são : $0.7206 \pm j0.4540$, $0.7704 \pm j0.1666$, 0.2321 , 0 , 0 , 0 . E confirma-se que o número de pólos na origem é $nb-nt = 3-0 = 3$.

Exemplo 4.2 : Ilustração da proposição 4.4

Neste exemplo mostra-se que o sistema em malha fechada não apresenta pólos na origem, quando a condição (4.53) não é satisfeita. Mostra-se também que as raízes do filtro T pertencem ao conjunto de pólos de malha fechada (proposição 4.1).

O modelo do processo é o mesmo do exemplo 4.1, com $nb=3$ e $na=4$.

O GPC é sintonizado com os horizontes; $N1 = 1$, $NY = 8$, $NU = 1$ e $\lambda = (.001$; e os filtros; $P = 1$, $D = 1$ e $T = (1 + 0.5q^{-1})^3$. Pela eq. (4.46) tem-se que $npmf = na + nb + 1$, ou seja, o número de pólos em malha fechada é 8 (oito).

A constante λ é diferente de zero, e $nt < nb$ ($3 < 3$ "falso"). Assim a condição suficiente para ter pólos na origem, condição (4.53), não é satisfeita.

A equação característica do sistema em malha fechada, dada pela resolução da eq. (4.48), é:

$$Pmf(q^{-1}) = 1 - 4.7140q^{-1} + 9.8302q^{-2} - 11.7651q^{-3} + 8.7752q^{-4} - 4.1444q^{-5} + 1.2004q^{-6} - 0.1932q^{-7} + 0.0131q^{-8}$$

ou,
$$Pmf(q) = 1q^8 - 4.7140q^7 + 9.8302q^6 - 11.7651q^5 + 8.7752q^4 - 4.1444q^3 + 1.2004q^2 - 0.1932q^1 + 0.0131$$

e os pólos em malha fechada são : $0.7206 \pm j0.4540$, $0.7704 \pm j0.1666$, 0.2321 , 0.5 , 0.5 , 0.5 .

Nota-se que os pólos em malha fechada do sistema, que não são raízes do filtro T, não variaram em relação ao caso de simulação 4.1. Estes pólos são as raízes do polinômio P^* . A diferença de sintonia entre os casos 4.1 e 4.2 foi somente do filtro T. O polinômio P^* , como pode ser observado pelas eq. (4.50) e eq. (4.51), não é função do filtro T.

Exemplo 4.3: Ilustração da proposição 4.5

Neste exemplo projeta-se para a constante λ o valor 0. Mostra-se que o número de pólos na origem é igual a $(NU + nb - nt)$ porque as condições (4.56) e (4.58) são satisfeitas (proposição 4.5).

O modelo do processo é o mesmo do caso de simulação 4.1, com $nb = 3$ e $na = 4$.

O GPC é sintonizado com os horizontes; $N1=1$, $NY=8$, $NU=1$ e $\lambda=0$; e os filtros; $P=1$, $D=1$ e $T=1$. Pela eq. (4.46) tem-se que $npmf = na + nb + 1 = 8$, ou seja, o número de pólos em malha fechada é 8 (oito).

Entre os 8 (oito) pólos em malha fechada, existirão pólos na origem pois a condição (4.56) é satisfeita : $np - N1 < na - nb$ ($0 - 1 < 4 - 3$). O número de pólos na origem é $(nb - nt + NU)$ ($3 - 0 + 1 = 4$) pois a condição (4.58) é satisfeita : $nb \geq nt$ ($3 \geq 0$).

A equação característica do sistema em malha fechada, deduzida pela resolução da eq. (4.48), é:

$$Pmf(q^{-1}) = 1 - 2.9900q^{-1} + 3.5840q^{-2} - 2.0267q^{-3} + 0.4563q^{-4}$$

ou,

$$Pmf(q) = 1q^8 - 2.9900q^7 + 3.5840q^6 - 2.0267q^5 + 0.4563q^4$$

e os pólos em malha fechada são: $0.7201 \pm j0.4569$, $0.7749 \pm j0.1551$, 0 , 0 , 0 , j . E o número de pólos na origem é $nb - nt + NU = 3 - 0 + 1 = 4$.

4.5.5 - REFERÊNCIA PRÉ-ESPECIFICADA E REFERÊNCIA NORMAL

Uma das grandes vantagens do GPC reside em poder utilizar o conhecimento *a priori* da referência a fim de obter um melhor desempenho. Através de uma atuação antecipatória da ação de controle, obtém-se uma transição mais suave entre dois estados da referência do sistema ($w(.)$), com diminuição do tempo necessário para atingir um novo valor. Obviamente, a presença da referência pré-especificada só faz sentido quando há o conhecimento do comportamento futuro da referência.

Os sistemas robóticos, que geralmente executam uma trajetória pré-determina-

da, são um dos candidatos naturais para o uso da referência pré-especificada, uma vez que os sinais futuros da referência estão usualmente disponíveis.

A utilização do recurso da referência pré-especificada implica na utilização do polinômio F_c para filtrar o valor da referência em " $t+NY$ ". Assim, a nova referência para o sistema será $w_{ff}(\cdot)$, isto é, $w(\cdot)$ filtrado por F_c , ao invés de $w(\cdot)$. Não há alteração dos pólos do sistema em malha fechada.

O seguinte exemplo ilustra diversos valores da referência $w_{ff}(\cdot)$, que é aplicada no sistema, em função do parâmetro de projeto " NY " para uma entrada em degrau, como sinal de $w(\cdot)$. Varia-se o horizonte de previsão porque, como é ilustrado no exemplo 4.4, este parâmetro de projeto influi bastante no caráter antecipatório do sistema.

Exemplo 4.4

O modelo do processo é dado por:

$$G = q^{-1}B/A$$

onde: $B = 0.0017 - 0.0015q^{-1} - 0.001q^{-2} + 0.0014q^{-3}$

$$A = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}$$

O GPC é sintonizado com os horizontes; $N1=1$, $NU=1$ e $\lambda=0$; e os filtros; $P=1$, $D=1$ e $T=1$. Na fig. (4.3) mostra-se o valor da referência filtrada por F_c ($w_{ff}(\cdot)$) para vários valores do horizonte NY . Nota-se que, quanto maior o valor de NY , mais antecipatório torna-se o sistema, pois $w_{ff}(\cdot)$ movimenta-se " NY " instantes de tempo antes que a referência real ($w(\cdot)$).

A utilização da referência pré-especificada, geralmente, traz os seguintes benefícios para o desempenho do sistema em malha fechada em relação à referência normal:

- i) Diminuição do tempo de subida e de estabilização do sistema.
- ii) Diminuição do nível do sinal de controle.

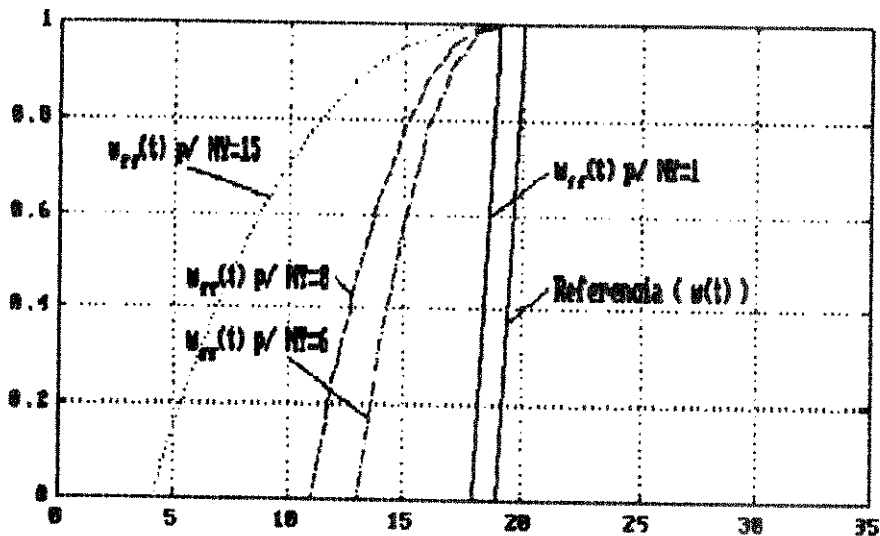


Fig. (4.3) - Valor da referência filtrada $w_{ff}(t)$ para vários valores de NY

As características anteriormente citadas não são observadas quando ocorre, principalmente, dois fatores: em configurações específicas dos horizontes (como por exemplo, observa-se uma excessiva variância no sinal de saída antes da mudança da referência quando se aumenta o horizonte "NU" até valores próximos da ordem do polinômio A, ou seja, o exemplo 4.4 com $N1=1$, $NY=8$, e $NU=3$), e, quando o período da referência é pequeno (isto é, a frequência da referência é alta) quando comparado com o tempo de previsão ("NY" vezes "o período de amostragem" segundos).

Pode-se observar no seguinte exemplo as características 'i' e 'ii'. Em [LambertM87] e [Lelic87] encontram-se casos de simulação onde observam-se as mesmas características.

Exemplo 4.5

O modelo do processo é o mesmo do exemplo 4.4.

O GPC é sintonizado com os horizontes; $N1=1$, $NU=1$, $NY=8$ e $\lambda=0$; e os filtros; $P=1$, $D=1$ e $T=1$. São feitas simulações usando as referências normal e pré-especificada. As fig. (4.4) e fig. (4.5) mostram o comportamento do sistema com os dois tipos de referência.

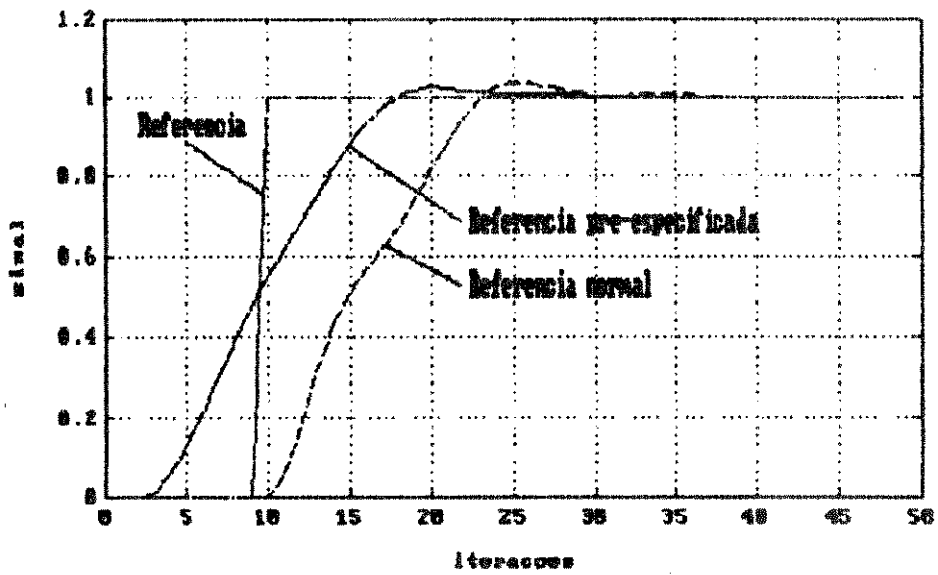


Fig. (4.4) - Saída do sistema, com/sem referência pré-especificada

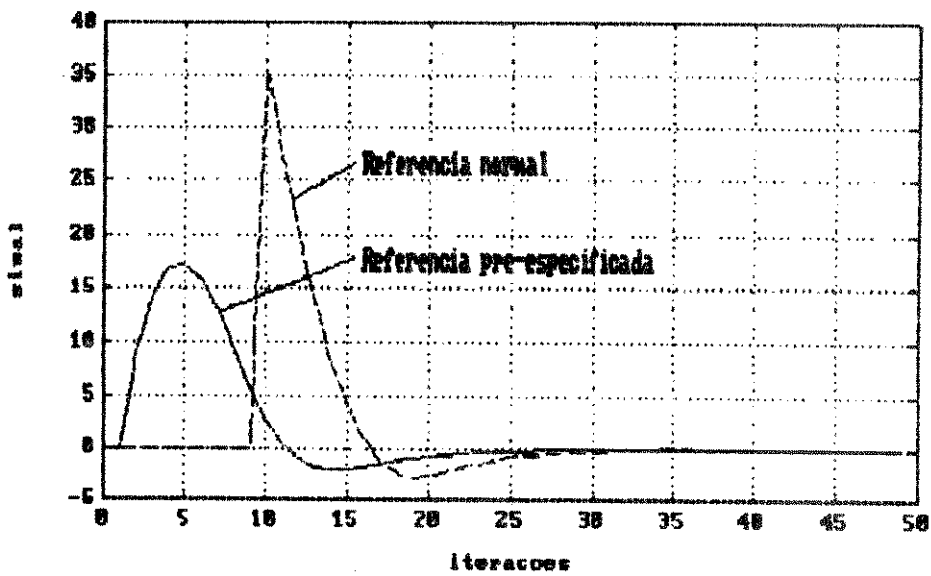


Fig. (4.5) - Sinal de controle para o sistema com/sem referência pré-especificada

□

4.6 - ALOCAÇÃO DE PÓLOS ATRAVÉS DO GPC

4.6.1 - INTRODUÇÃO

Os pólos e zeros do sistema em malha fechada são determinados de acordo com as especificações de projeto da função de custo (eq. (4.1)), como foi visto na seção 4.5. Portanto, os pólos e zeros de malha fechada são obtidos indiretamente a partir da sintonia do controlador.

Para cada sintonia, está associado um conjunto de pólos que podem ser facilmente obtidos através do cálculo das raízes da equação característica do sistema (eq. (4.48)). Porém o inverso, isto é, a especificação da sintonia do controlador a partir de um conjunto de pólos desejados de malha fechada, é difícil, dada a complexidade da relação dos horizontes com a localização dos pólos em malha fechada.

Denomina-se neste trabalho por Alocação de Pólos através do GPC, quando é possível especificar *a priori* os pólos do sistema em malha fechada. Isto é possível porque em algumas combinações dos parâmetros de projeto do GPC, mostradas a seguir, pode-se realizar simplificações na equação característica do sistema, e assim a alocação de pólos em malha fechada pode ser feita a partir da especificação dos filtros de projeto.

Atualmente, encontra-se na literatura [McIntosh89] [Clarke89] [Savaan89] tres formas diferentes de fazer a determinação *a priori* dos pólos em malha fechada do sistema controlado pelo GPC. Estas formas são determinadas pelas diferentes sintonias do GPC que permitem especificar os pólos e zeros de malha fechada desejados. Cada sintonia admite um diferente grau de flexibilidade para escolha dos pólos e zeros, isto é, os parâmetros de projeto.

A seguir apresentam-se três (3) formas de especificar os pólos no GPC.

4.6.2 - ALOCAÇÃO DE PÓLOS TIPO 1

Proposição 4.6

Quando: $N1 = d$
 $NY = \text{'qualquer'}$
 $NU = NY - N1 + 1$
 $\lambda = 0$

tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = \left(T D / T P \right) w_{ff}(t-d)$$

ou

$$y(t) = \left(D / P \right) w_{ff}(t-d)$$

onde "d" é o atraso do processo, e, lembrando-se que o modelo utilizado do processo é dado por:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta \quad (1.3)$$

e os "d-1" atrasos do processo restantes são incorporados no modelo numa forma em que os "d-1" primeiros coeficientes do polinômio $B(q^{-1})$ são nulos (Capítulo 1).

A alocação de pólos é feita especificando-se os polinômios P e D com os pólos e zeros, respectivamente, desejados para o sistema em malha fechada.

Prova

A função de transferência, entre a referência e a saída, do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = \left(Z1mf / Pmf \right) w_{ff}(t)$$

onde:

$$Z1mf = q^{-1} B Tc \quad (4.47)$$

$$Pmf = T \left\{ \tilde{A} + q^{-1} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (B P - \tilde{A} H_j) q^j \right] \right\} \quad (4.49)$$

$$H_j = \sum_{k=0}^{j-1} h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)}$$

Pmf pode ser reescrito como segue:

$$Pmf = T \left\{ \tilde{A} + q^{-1} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (B P) q^j \right] - q^{-1} \tilde{A} \left[\left(\sum_{j=N1}^{NY} \sum_{k=0}^{j-1} m_j h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)} q^j \right) \right] \right\} \quad (P6.1)$$

e a matriz H é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} h_{N1-1} & h_{N1-2} & \dots & h_{N1-NU} \\ h_{N1} & h_{N1-1} & \dots & h_{N1-NU+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NY-1} & h_{NY-2} & \dots & h_{NY-NU} \end{bmatrix}_{(NY-N1+1) \times NU}$$

E seus elementos são descritos pela eq. (4.30), reescrita a seguir:

$$h_i = pb_i - \sum_{k=1}^{\min(i, n\tilde{a})} (\tilde{a}_k h_{i-k}) \quad (4.30)$$

Sabendo-se que os elementos do polinômio B, b_x , são nulos para $0 \leq x \leq d-2$, tem-se que os elementos h_x da matriz H são nulos para $0 \leq x \leq d-2$, que, pelas condições iniciais, é igual a $0 \leq x \leq N1-2$. Logo, a matriz H é triangular inferior.

Tem-se, pelo desenvolvimento feito na demonstração da proposição 4.3, (equações (P3.3) a (P3.5)), que quando $\lambda = 0$, a matriz M é dada por:

$$M H = U I = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times NU}$$

Supondo-se que não existem elementos h_x nulos para $\forall x$, tal que $N1-1 \leq x \leq NY-1$, ela torna-se:

$$M = [1/h_{N1-1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Logo: $m_{N1} = 1/h_{N1-1}$ e $m_x = 0$ para $x > N1-1$

Portanto, o valor de K , eq. (4.41), é:

$$K = \sum_{j=N1}^{NY} m_j = m_{N1} = 1/h_{N1-1} \quad (P6.2)$$

e a eq. (P6.1) pode ser reescrita como a seguir:

$$Pmf = T \left\{ \hat{A} + q^{-1} \left[m_{N1} (B \ P) q^{N1} \right] - \hat{A} \left[\left(m_{N1} \sum_{k=0}^{N1-1} h_{(N1-1-k)} q^k \right) \right] \right\} \quad (P6.3)$$

Da eq. (P6.2), e sabendo-se que $h_x = 0$ para $x < N1-1$, e que $N1 = d$, tem-se que a eq. (P6.3) torna-se:

$$Pmf = T \left\{ \hat{A} + (1/h_{N1-1}) (B \ P) q^{d-1} - \hat{A} (1/h_{N1-1}) (h_{N1-1}) \right\}$$

$$Pmf = T (1/h_{N1-1}) q^{d-1} B \ P, \text{ ou,}$$

$$Pmf = T (1/h_{N1-1}) B' \ P \quad (P6.4)$$

onde: $B' = q^{d-1} B$, ou seja, B' é o polinômio B sem o atraso incorporado (ver eq. (1.2) e eq. (1.3)).

Utilizando-se a definição de Tc e as eqs. (4.42), (P6.2), a eq. (4.47) pode ser reescrita como sendo:

$$Z1mf = q^{-1} (1/h_{N1-1}) B \ D \ T$$

Logo a saída do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = \left((1/h_{N1-1}) B \ D \ T / (1/h_{N1-1}) B' \ T P \right) w_{ff}(t-1)$$

e sabendo-se que $B' = q^{d-1}B$, obtém-se que:

$$y(t) = \left(T \ D / TP \right) w_{ff}(t-d)$$

ou

$$y(t) = \left(D / P \right) w_{ff}(t-d)$$

eqd

Nota-se que os zeros originais do sistema em malha aberta não estão presentes no sistema em malha fechada. Isto ocorre devido ao fato da eq. característica do sistema em malha fechada possuir o polinômio B como fator, quando o GPC é sintonizado segundo a proposição 4.6. Assim, esta forma de obter alocação de pólos é inadequada quando o sistema em malha aberta apresenta zeros fora do círculo unitário, pois o controlador apresentará pólos instáveis que são cancelados, o que poderá acarretar problemas de instabilidade quando o modelo do processo não é conhecido adequadamente.

4.6.3 - ALOCAÇÃO DE PÓLOS TIPO 2

Para se obter a alocação de pólos através da sintonia a ser descrita na proposição 4.7 define-se [Mohtadi86a] [Clarke89] mais um polinômio de projeto, o filtro $V(q^{-1})$, que filtra os sinais de saída e entrada do processo.

Ele tem a mesma forma que os filtros de projeto citados anteriormente e a sua utilização no sistema dá-se através de uma modificação no modelo do processo, como segue:

$$\tilde{A}(q^{-1})V(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})\Delta V(q^{-1})u(t-1)$$

ou definindo-se os sinais auxiliares, tem-se que:

$$\tilde{A}(q^{-1})\psi(t) = B(q^{-1})\Delta\phi(t-1)$$

onde: $\psi(t) = V(q^{-1})y(t)$ e
 $\phi(t) = V(q^{-1})u(t)$

Proposição 4.7

Quando: $N1 \geq nb + np + 1$
 $NU \geq na + 1$
 $NY \geq \text{máx}(N1, NU)$
 $\lambda = 0$
 $P = \text{'qualquer'}$

tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = K \left(\begin{array}{c|c} T & B \ D \\ \hline T & V \end{array} \right) w_{ff}(t-1)$$

ou

$$y(t) = K \left(\begin{array}{c|c} B \ D & \\ \hline & V \end{array} \right) w_{ff}(t-1)$$

O GPC, com esta sintonia, e quando $V = 1$, tem um comportamento do tipo *dead beat*.

Da equação anterior, pode-se verificar que os pólos em malha fechada podem ser especificados pelo polinômio V e parte dos zeros podem ser especificados pelo polinômio D .

Prova

A função de transferência, entre a referência e a saída auxiliar, do sistema em malha fechada é dada por:

$$\psi(t) = \left(\begin{array}{c|c} Z1mf & \\ \hline & Pmf \end{array} \right) w_{ff}(t)$$

onde:

$$Z1mf = q^{-1} B Tc \tag{4.47}$$

$$Pmf = T P^* \tag{4.49}$$

Como λ é igual a 0, pela proposição 4.3 (seção 4.5.4), tem-se que o polinômio P^* é dado por:

$$P^* = 1 - \sum_{k=1}^{na+1-NU} \left\{ \sum_{i=NU}^{na+1-k} \hat{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} (pb_{(n+k)} m_{(n+1)}) \right\} q^{-k} \quad (4.52)$$

Sabendo-se que $NU \geq na+1$, $N1 \geq nb+np+1$, P^* torna-se:

$$P^* = 1$$

E Pmf pode ser reescrito como a seguir:

$$Pmf = T \quad (P7.1)$$

Sabendo-se que Tc é igual a $K D T$, a eq. (4.47) pode ser reescrita como sendo:

$$Z1mf = q^{-1} K B D T \quad (P7.2)$$

Assim, das eq. (P7.1) e eq. (P7.2), a saída auxiliar $\psi(t)$ é dada por:

$$\psi(t) = K \left(B D T / T \right) w_{ff}(t-1) \quad (P7.3)$$

Sabendo-se que $y(t) = V(q^{-1})\psi(t)$, pode-se descrever a saída do sistema como sendo:

$$y(t) = K \left(B D T / T V \right) w_{ff}(t-1)$$

ou

$$y(t) = K \left(B D / V \right) w_{ff}(t-1)$$

cqd

4.6.4 - ALOCAÇÃO DE PÓLOS TIPO 3

Proposição 4.8

Quando: $N1 = 1$
 $NY \rightarrow \infty$
 $NU = 1$
 $\lambda = 0$
 $P = 1$

tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = K \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline T & A \end{array} \right) w_{ff}(t-1)$$

ou

$$y(t) = K \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline & A \end{array} \right) w_{ff}(t-1)$$

O GPC com esta sintonia tem um comportamento do tipo *mean level*, devido ao fato dos pólos do sistema em malha fechada serem os pólos do sistema em malha aberta.

Neste caso somente é possível escolher parte dos zeros do sistema em malha fechada, através do polinômio D.

Prova

A função de transferência, entre a referência e a saída, do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = \left(\begin{array}{c|c} Z1mf & \\ \hline & Pmf \end{array} \right) w_{ff}(t)$$

onde:

$$Z1mf = q^{-1} B Tc \tag{4.47}$$

$$Pmf = T P^* \tag{4.49}$$

Sabendo-se que Tc é igual a K D T, a eq. (4.47) pode ser reescrita como

sendo:

$$Z1mf = q^{-1} K B D T \quad (P8.1)$$

Sabe-se que quando NY tende para infinito, P^* tende para o polinômio A [Samaan89]. Assim, Pmf pode ser reescrito a seguir:

$$Pmf = T A \quad (P8.2)$$

Assim, das eq. (P8.1) e eq. (P8.2), a função de transferência do sistema é dada por:

$$y(t) = K \left(B D T / T A \right) w_{ff}^{(t-1)}$$

cq

4.6.5 - ANÁLISE DOS 3 MÉTODOS DE SINTONIA DO GPC

i) Vantagens:

Tipo 1: Pode-se especificar todos os zeros de malha fechada.

Pode-se especificar todos os pólos de malha fechada.

Tipo 2: Pode-se especificar todos os pólos de malha fechada.

Pode ser utilizado quando o sistema em malha aberta é de fase não mínima.

Tipo 3: É mais robusto à erros de modelagem que o tipo 2 [Robinson91].

ii) Desvantagens:

Tipo 1: Não pode ser utilizado quando o sistema em malha aberta é de fase não mínima.

O atraso do processo deve ser conhecido.

Tipo 2: Os zeros de malha aberta, necessariamente, estarão entre os zeros de malha fechada.

Nota-se, durante testes de simulação, que esta configuração de sintonia apresenta problemas de condicionamento numérico para a inversão da matriz $H^T H$.

Tipo 3: Não possui flexibilidade de escolha dos zeros e pólos de malha fechada.

Alto custo computacional, pois uma das dimensões da matriz H aumenta muito.

Se o sistema em malha aberta for instável, o sistema em malha fechada também o será.

4.6.6 - COMPARAÇÃO DA ALOCAÇÃO DE PÓLOS ATRAVÉS DO GPC COM O CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Partindo do princípio de que deseja-se fazer a especificação de projeto em termos de pólos e zeros de malha fechada, a seguir compara-se duas estratégias de obter esta característica: O controlador clássico de alocação de pólos - CAP (Capítulo 3), e a alocação de pólos através do GPC, com as maneiras descritas nesta seção.

Tanto no CAP quando no GPC é possível especificar os pólos de malha fechada desejados. Nota-se porém, que nas sintonias descritas nesta seção não há flexibilidade de cancelamento de zeros de malha aberta, isto é, ou cancela-se todos os zeros de malha aberta (tipo 1) ou não há cancelamento de zeros (tipo 2 e tipo 3). O Controlador por Alocação de Pólos (CAP) permite maior flexibilidade na escolha dos zeros a serem cancelados.

Com o CAP pode-se não somente obter todas as equações características obtidas com as sintonias do GPC da seção anterior, como também apresenta vantagens quando comparado com cada uma delas, como a seguir:

Se o sistema é de fase não-mínima pode-se:

- utilizar o GPC sintonizado como tipo 2, e tem-se problemas de condicionamento numérico e um sistema em malha fechada *dead beat* (os pólos especificados são introduzidos no sistema através de um filtro na saída e no sinal

de controle) o que normalmente acarreta sinais de controle elevados. No CAP estes problemas não existem.

- utilizar o GPC sintonizado como tipo 3, e não se tem flexibilidade de escolha dos pólos de malha fechada. No CAP este problema não existe.

Se o sistema é de fase mínima pode-se utilizar o GPC sintonizado como tipo 1, e evita-se os problemas da sintonia tipo 2, porém o atraso do processo deve ser conhecido e cancela-se todos os zeros de malha aberta, fato que pode levar à oscilação excessiva no sinal de controle (como discutido na seção 3.2.5). No CAP tem-se a opção de não cancelar os zeros de malha aberta, e o CAP é robusto quanto ao conhecimento anterior do atraso do processo.

Porém, o CAP, quando implementado de forma adaptativa, torna-se instável se as ordens do modelo estimado são sobre-parametrizadas (seção 3.2.3).

Portanto, nota-se que o CAP possui vantagens em relação às sintonias descritas anteriormente. Porém, estes métodos possuem utilidade pois, através deles pode-se observar a tendência dos pólos de malha fechada quando se varia os parâmetros de projeto. Por exemplo, quando o horizonte de controle N_U tende para o horizonte final de previsão N_Y , e λ é igual a zero, os pólos de malha fechada tendem para os pólos do polinômio P . Estas tendências serão analisadas no Capítulo 6.

CAPÍTULO 5

ESTUDOS DE ROBUSTEZ PARA O CONTROLADOR PREDITIVO GENERALIZADO (GPC)

5.1 - INTRODUÇÃO

Como descrito no Capítulo 4, tem-se que para o cálculo da lei de controle do GPC é necessário calcular as previsões futuras da saída filtrada do processo. Para tanto, obtém-se um modelo que o represente adequadamente. Frequentemente, na utilização prática, não se dispõe de um modelo preciso do processo físico para o projeto do controlador, e assim, ocorre a existência de dinâmicas não modeladas, que podem levar o desempenho do sistema fora das especificações desejadas, ou mesmo à instabilidade.

Neste capítulo deduz-se o limite de estabilidade para o Controlador Preditivo Generalizado (GPC), para a análise da robustez do sistema em malha fechada em relação a dinâmicas não modeladas. Através de um estudo comparativo entre o controlador por Alocação de Pólos - CAP (Capítulo 3) e o GPC, pode-se, partindo-se da equação do limite de estabilidade para o CAP, desenvolver uma equação semelhante para o GPC.

Através da análise da equação do limite de estabilidade para o GPC pode-se obter diretrizes para a sintonia do GPC, e, mais especificamente, para a sintonia do filtro de projeto T, também denominado polinômio observador [Mohtadi86a]. O polinômio observador T é uma especificação de projeto e, sob o ponto de vista do problema de estimação, deve conter o conhecimento sobre as perturbações que agem no sistema, a fim de que as previsões sejam o mais corretas possíveis [Clarke89]. Neste trabalho analisa-se a seleção do polinômio T de modo a aumentar a estabilidade do sistema em malha fechada quando em presença de dinâmicas não modeladas.

A seguir, na seção 5.2, deduz-se o limite de estabilidade para o GPC. As diretrizes para a escolha do polinômio observador T são apresentadas na seção 5.3.

5.2 - O LIMITE DE ESTABILIDADE PARA O GPC

Como já foi discutido na seção 3.3, tem-se que muitas vezes não se dispõe de um modelo preciso do processo físico para o projeto do controlador. Assim, pode ocorrer a existência de dinâmicas não modeladas. Estas dinâmicas não modeladas podem levar o sistema em malha fechada à instabilidade, e são representadas pela eq. (3.29) reescrita a seguir:

$$\Delta A = G - Gr \quad (3.29)$$

onde: G é a função de transferência estimada do processo dada por:

$$G = q^{-1}B/A \quad (1.3)$$

e Gr é a função de transferência do processo real.

Na estratégia de controle por alocação de pólos (Capítulo 3), das eq. (3.6), eq. (3.16) e eq. (3.17), tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$y(t) = q^{-1} \left[\begin{array}{c} B \ Bm' \ A_o \\ \hline (B^+ \ Am \ A_o) \end{array} \right] w(t) + \left[\begin{array}{c} C \ R^* \\ \hline (B^+ \ Am \ A_o) \end{array} \right] \xi(t) \quad (3.6)$$

No GPC, pela proposição 4.1 (seção 4.5.4), e eq. (4.42), tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada (eq. (4.44)) pode ser descrita como sendo:

$$y(t) = q^{-1} \left[\begin{array}{c} B \ K \ D \ T \\ \hline (T \ P^*) \end{array} \right] w_{ff}(t) + \left[\begin{array}{c} C \ R^* \\ \hline (T \ P^*) \end{array} \right] \xi(t) \quad (4.44)$$

Considerando-se que ambos os controladores estão descritos na forma RTS, e que o modelo utilizado para o processo (modelo tipo CARIMA) é o mesmo, das eq. (3.6) e eq. (4.44) observa-se que existem polinômios análogos entre o GPC e o controlador por Alocação de Pólos (CAP), como descrito na tabela 5.1, a seguir:

GPC	CAP
Tc	Bm' Ao
K D	Bm'
T	Ao
P*	B ⁺ Am

Tabela 5.1 - Analogia entre os polinômios do GPC e os polinômios do controlador por Alocação de Pólos

Da tabela 5.1, verifica-se que o filtro de projeto T é o polinômio observador para o GPC.

A seguir desenvolve-se a equação do limite de estabilidade para o GPC.

Seja o limite de estabilidade, descrito pela eq. (3.31), discutido na seção 3.3.2 para o controlador por Alocação de Pólos, reescrito a seguir:

$$\left| \Delta L \right| = \left| G / G_m \right| \times \left| H_{ff} / H_{fb} \right| \quad (3.31)$$

para $\forall q = e^{jw\Delta t}$ e $\forall w \in \mathbb{R}$

Com:

$$\circ G_m = q^{-1} B_m / A_m \quad (3.1)$$

$$\circ H_{ff} = T_c / R \quad (3.4)$$

$$\circ H_{fb} = S / R \quad (3.5)$$

Da eq. (4.42), tem-se que Tc é igual a K D T, logo:

$$H_{ff} = K D T / R \quad (5.1)$$

Da seção 3.2.2, tem-se que:

$$B = B^- B^+ \quad (3.12)$$

$$B_m = B_m' B^- \quad (3.13)$$

Multiplicando-se a eq. (3.1) por (B^+ / B^+) , e, utilizando as equações (3.12) e (3.13), obtém-se:

$$G_m = q^{-1} B_m B^+ / (B^+ A_m) = q^{-1} B_m' B / (B^+ A_m) \quad (5.2)$$

Substituindo-se os polinômios B_m' e $B^+ A_m$ pelos valores correspondentes da tabela 5.1, obtém-se:

$$G_m = K q^{-1} (D B) / P^* \quad (5.3)$$

Assim, através da substituição dos valores de G , eq. (1.3), G_m , eq. (5.3), H_{ff} , eq. (5.1) e H_{fb} , eq. (3.5), na eq. (3.30), a equação do limite de estabilidade, aplicada ao GPC, é dada por:

$$\left| \Delta L \right| = \left| \left(q^{-1} B / A \right)_x \left(P^* / q^{-1} (K D B) \right)_x \left| \times \right| \left(K D T / R \right)_x \left(R / S \right)_x \right|$$

ou

$$\left| \Delta L \right| = \left| T P^* / (A S) \right| \quad (5.4)$$

$$\text{para } \forall q = e^{jw\Delta t} \text{ e } \forall w \in \mathbb{R}$$

Na estratégia de controle por Alocação de Pólos o polinômio P^* é especificado pelo usuário. Entretanto no GPC, o valor de P^* é determinado indiretamente através dos parâmetros de projeto (eq. (4.50) e eq. (4.51)). O polinômio S pode ser calculado em função do valor especificado de T e de P^* . Portanto, para uma sintonia qualquer dos parâmetros de projeto do GPC, é difícil prever a localização dos pólos do sistema em malha fechada, logo, não é uma tarefa simples fazer uma análise matemática exaustiva do comportamento da equação de $|\Delta L|$ em função da variação dos parâmetros de projeto do GPC.

5.3 - A SELEÇÃO DO POLINÔMIO OBSERVADOR T

5.3.1 - INTRODUÇÃO

O polinômio observador T está presente tanto no denominador quanto no numerador da função de transferência entre a referência e a saída do processo. Desta forma, seu valor não interfere no comportamento servo do sistema em malha fechada quando o modelo do processo é igual ao processo físico. Porém, da seção 5.2, verifica-se que o polinômio T tem uma importante influência no limite de estabilidade de um processo controlado pelo GPC.

Como já foi discutido anteriormente, não é trivial explicitar a influência das raízes do polinômio observador T na equação do limite de estabilidade. Quando se faz restrições na sintonia, como descrito no Capítulo 4 (seção 4.6), pode-se determinar *a priori* o valor de P^* . Dois destes casos particulares da sintonia do GPC, descritos nas seções 4.6.3 e 4.6.4, alocam os pólos na origem ou mantém os pólos do sistema em malha aberta, respectivamente. Robinson [Robinson91] e Clarke [Clarke90] mostram a influência do filtro T na robustez do GPC, para estes dois casos particulares. Porém, estes casos restringem a liberdade de projeto dos horizontes do controlador, uma vez que são utilizadas condições rígidas para a obtenção do polinômio P^* desejado. Por exemplo, para $P^* \rightarrow A$, o valor de NY deve tender ao infinito, o que na prática é inviável, pois seria necessária a inversão de matrizes com dimensões infinitas. Robinson, em [Robinson91], considera que valores de NY maiores que a razão entre a constante de tempo dominante do sistema e o período de amostragem são suficientes para obter os mesmos resultados que quando $NY \rightarrow \infty$.

Outra solução possível para observar o comportamento da equação de $|\Delta L|$ em relação a variações na sintonia do controlador é projetar o filtro T pertencente ao Lugar das Raízes Recíproco (LRR, Capítulo 3, seção 3.4). Neste caso, a sintonia do GPC não é pré-especificada, trazendo maior liberdade para o projeto do controlador. Esta escolha para T é pertinente pois, quando os pólos de malha fechada pertencem ao LRR, é equivalente a resolver um problema de controle ótimo que minimiza um critério quadrático especificado. Como as raízes do filtro T estão entre os pólos de malha fechada (proposição 4.1), e T é o polinômio observador, tem-se que quando $T \in \text{LRR}$, parte dos pólos de malha fechada, os pólos do observador, pertencem ao LRR, estando assim de acordo como o método de especificação descrito na seção 3.4.2. Os outros pólos do sistema em malha fechada, raízes de P^* , são determinados pelos parâmetros de

projeto do GPC em função de outras especificações de projeto.

A seguir analisa-se o limite de estabilidade com o objetivo de se obter diretrizes para a escolha da ordem e das raízes do polinômio T.

5.3.2 - A ESCOLHA DA ORDEM DO POLINÔMIO T

A seguir estuda-se a influência da variação da ordem do polinômio T na curva do limite de estabilidade (eq. (5.4)). Para tanto analisa-se o comportamento da assíntota de alta frequência do módulo de ΔL . É mostrado que a declividade desta assíntota é função da ordem do polinômio T.

Na verdade, nesta seção utiliza-se erroneamente o sentido da palavra "assíntota", uma vez que a curva do módulo da resposta em frequência em sistemas discretos é invertida a cada $\Pi/\Delta t$ e é periódica a cada $2\Pi/\Delta t$ (Δt é o período de amostragem). Porém, a parte da curva de resposta em frequência de um sistema analisada neste trabalho é aquela entre 1 e $\Pi/\Delta t$. Assim, por analogia com sistemas discretos diz-se por "declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências" a tendência da curva de $|\Delta L|$ em frequências próximas a $\Pi/\Delta t$.

Proposição 5.1:

A condição suficiente para determinar a declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências em função da ordem de T e dos valores dos horizontes N_1 , N_U , λ e da ordem de P, n_p , é dado pela tabela 5.2, quando $\lambda = 0$, e pela tabela 5.3, quando $\lambda \neq 0$, a seguir. Supõe-se, por simplicidade, que $n_a = n_b + 1$.

I) Quando $nt+np-N1 < nb+1$ e		
I.a)	$nt-NU > nb$	→ crescente
I.b)	$nt-NU = nb$	→ constante
I.c)	$nt-NU < nb$	→ decrescente
II) Quando $nt+np-N1 = nb+1$ e		
II.a)	$nt-NU > nb$	→ crescente
II.b)	$nt-NU = nb$	→ constante
II.c)	$nt-NU < nb$	→ constante
III) Quando $nt+np-N1 > nb+1$ e		
III.a) $nt-NU > nb$ <u>se</u> :		
	$1 \leq np-N1$	→ constante
	$1 > np-N1$	<u>se</u> $NU < 1-np+N1 \rightarrow$ cres.
		$NU \geq 1-np+N1 \rightarrow$ cons.
III.b)	$nt-NU = nb$	→ constante
III.c)	$nt-NU < nb$	→ constante

Tabela 5.2 - Declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências em função da ordem de T, quando $\lambda = 0$.

I) Quando $nt+np-N1 < nb+1$ e		
I.a)	$nt > nb$	→ crescente
I.b)	$nt = nb$	→ constante
I.c)	$nt < nb$	→ decrescente
II) Quando $nt+np-N1 = nb+1$ e		
II.a)	$nt > nb$	→ crescente
II.b)	$nt = nb$	→ constante
II.c)	$nt < nb$	→ constante
III) Quando $nt+np-N1 > nb+1$ e		
III.a) $nt > nb$ <u>se</u> :		
	$1 \leq np-N1$	→ constante
	$1 > np-N1$	→ crescente
III.b)	$nt = nb$	→ constante
III.c)	$nt < nb$	→ constante

Tabela 5.3 - Declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências em função da ordem de T, quando $\lambda \neq 0$.

Prova

A demonstração dos resultados das tabelas 5.2 e 5.3 baseia-se no fato de que a relação entre, o número de raízes fora da origem do numerador e do denominador da curva de $|\Delta L|$ (eq. (5.4)), determina a declividade da assíntota em altas frequências. Assim, se existem mais raízes no numerador que no denominador fora da origem, a assíntota é crescente. Se este número for igual, a assíntota é constante, e, se for menor a assíntota é decrescente. Supõe-se que $n_a = n_b + 1$.

Sabe-se que:

$$n_s = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + 1 \\ n_p + n_t - N_1 \end{array} \right. \quad (4.43)$$

$$n_{pmf} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_a + n_t + 1 \\ n_a + n_b + 1 \\ n_a + n_t + n_p - N_1 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Logo: ordem}(T P^*) = n_{pmf} & \rightarrow \text{numerador} \\ \text{ordem}(A S) = n_a + n_s & \rightarrow \text{denominador} \end{array}$$

e

ordem*(T P*) é o número de pólos que influenciam o módulo da resposta em frequência

Parte 1: quando $\lambda = 0$:

I.a e I.b) quando: $n_t + n_p - N_1 < n_b + 1$

$$n_t - N_U \geq n_b$$

Das equações acima tem-se que:

$$n_p < 1 + N_1$$

$$N_U < 1 - n_p + N_1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = n_a + n_t + 1$

$$\text{ordem}(A S) = n_a + n_b + 1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em T P* é satisfeita (Proposição 4.5 seção 4.5.4). Como $n_t \geq n_b$ e $N_U < 1 - n_p + N_1$, os pólos na origem são em

número de NU. Assim, tem-se que:

$$\text{ordem}^*(T P^*) = na+nt+1-NU$$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

Se $nt-NU > nb$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é maior que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências é crecente.

Se $nt-NU = nb$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é constante.

I.c) 1) quando: $nt+np-N1 < nb+1$

$$nt-NU < nb$$

$$nt > nb$$

Destas equações tem-se que:

$$np < 1+N1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = na+nt+1$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita (Proposição 4.5). Como $nt > nb$, os pólos na origem são em número de $\text{mín}(NU, 1-np+N1)$. Assim:

Se $NU \leq 1-np+N1$, tem-se que: $\text{ordem}^*(T P^*) = na+nt+1-NU$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

Como $nt+np-N1 < nb+1$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é menor que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é decrecente.

Se $NU > 1-np+N1$, tem-se que: $\text{ordem}^*(T P^*) = na+nt+1-1+np-N1$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

Como $np < 1+N1$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é menor que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é decrecente.

$$\text{ii) quando: } nt+np-N1 < nb+1$$

$$nt-NU < nb$$

$$nt \leq nb$$

Das equações acima tem-se que:

$$\text{ordem}(T P^*) = na+nb+1$$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita (Proposição 4.5). Logo, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é menor que $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é decrecente.

$$\text{II.a e II.b) quando: } nt+np-N1 = nb+1$$

$$nt-NU \geq nb$$

Destas equações tem-se que:

$$np < 1+N1$$

$$NU \leq 1-np+N1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = na+nt+1$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita (Proposição 4.5). Como $nt \geq nb$ e $NU \leq 1-np+N1$, os pólos na origem são em número de NU . Assim tem-se que:

$$\text{ordem}^*(T P^*) = na+nt+1-NU$$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

Se $nt-NU > nb$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é maior que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é crecente.

Se $nt-NU = nb$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da

assíntota é constante.

$$\begin{aligned} \text{II.c) i) quando: } \quad nt+np-N1 &= nb+1 \\ nt-NU &< nb \\ nt &> nb \end{aligned}$$

Das equações acima tem-se que:

$$\begin{aligned} np &< 1+N1 \\ NU &> 1 - np + N1 \end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned} \text{ordem}(T P^*) &= na+nt+1 \\ \text{ordem}(A S) &= na+nb+1 \end{aligned}$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita (Proposição 4.5). Como $nt \geq nb$ e $NU > 1-np+N1$, os pólos na origem são em número de $1-np+N1$. Assim tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{ordem}^*(T P^*) &= na+nt+1-1+np-N1 \\ \text{ordem}(A S) &= na+nb+1 \end{aligned}$$

Como $nt+np-N1 = nb+1$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é constante.

$$\begin{aligned} \text{ii) quando: } \quad nt+np-N1 &= nb+1 \\ nt-NU &< nb \\ nt &\leq nb \end{aligned}$$

Destas equações tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{ordem}(T P^*) &= na+nb+1 \\ \text{ordem}(A S) &= na+nb+1 \end{aligned}$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfei-

ta (Proposição 4.5). Logo $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

$$\begin{aligned} \text{III.a) i) quando: } \quad & nt+np-N1 > nb+1 \\ & nt-NU > nb \\ & np \geq 1+N1 \end{aligned}$$

Das equações acima tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{ordem}(T P^*) &= na+nt+np-N1 \\ \text{ordem}(A S) &= na+nt+np-N1 \end{aligned}$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.5). Logo $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

$$\begin{aligned} \text{ii) quando: } \quad & nt+np-N1 > nb+1 \\ & nt-NU > nb \\ & np < 1+N1 \end{aligned}$$

Destas equações tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{ordem}(T P^*) &= na+nt+1 \\ \text{ordem}(A S) &= na+nt+np-N1 \end{aligned}$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita (Proposição 4.5). Como $nt \geq nb$, os pólos na origem são em número de $\text{mín}(NU, 1-np+N1)$. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Se } NU < 1-np+N1, \text{ tem-se que: } \quad & \text{ordem}^*(T P^*) = na+nt+1-NU \\ & \text{ordem}(A S) = na+nt+np-N1 \end{aligned}$$

Como $1-NU > np-N1$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é maior que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é crescente.

Se $NU \geq 1 - np + N1$, tem-se que: $\text{ordem}^*(T P^*) = na + nt + 1 - 1 + np - N1$

$$\text{ordem}(A S) = na + nt + np - N1$$

Logo, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

III.b e III.c) i) quando: $nt + np - N1 > nb + 1$

$$nt - NU \leq nb$$

$$nt > nb$$

$$np \geq 1 + N1$$

Das condições anteriores tem-se que:

$$\text{ordem}(T P^*) = na + nt + np - N1$$

$$\text{ordem}(A S) = na + nt + np - N1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.5). Logo $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

ii) quando: $nt + np - N1 > nb + 1$

$$nt - NU \leq nb$$

$$nt > nb$$

$$np < 1 + N1$$

Das equações acima tem-se que:

$$NU > 1 - np + N1$$

e que:

$$\text{ordem}(T P^*) = na + nt + 1$$

$$\text{ordem}(A S) = na + nt + np - N1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita

(Proposição 4.5). Como $nt \geq nb$ e $NU > 1 - np + N1$, os pólos na origem são em número de $1 - np + N1$. Assim tem-se que:

$$\text{ordem}^*(T P^*) = na + nt + 1 - 1 + np - N1$$

$$\text{ordem}(A S) = na + nt + np - N1$$

Logo, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

iii) quando: $nt + np - N1 > nb + 1$

$$nt - NU \leq nb$$

$$nt \leq nb$$

Destas equações tem-se que:

$$np \geq 1 + N1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = na + nt + np - N1$

$$\text{ordem}(A S) = na + nt + np - N1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.5). Logo $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

Parte 2: quando $\lambda \neq 0$:

I.a e I.b) quando: $nt + np - N1 < nb + 1$

$$nt \geq nb$$

Das condições anteriores tem-se que:

$$np < 1 + N1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = na+nt+1$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.4 seção 4.5.4).

Se $nt > nb$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é maior que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é crecente.

Se $nt = nb$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é constante.

I.c) quando: $nt+np-N_1 < nb+1$
 $nt < nb$

Das equações acima tem-se que:

$$\text{ordem}(T P^*) = na+nb+1$$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ é satisfeita (Proposição 4.4). Logo, a $\text{ordem}^*(T P^*)$ é menor que a $\text{ordem}(A S)$, e, a declividade da assíntota é decrecente.

II.a) quando: $nt+np-N_1 = nb+1$
 $nt > nb$

Das condições anteriores tem-se que:

$$np < 1+N_1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = na+nt+1$

$$\text{ordem}(A S) = na+nb+1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.4). Logo $\text{ordem}(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e, a declividade da assíntota é constante.

III.a) i) quando: $nt+np-N_1 > nb+1$

$$nt > nb$$

$$np \geq 1+N_1$$

Das equações acima tem-se que:

$$\text{ordem}(T P^*) = na+nt+np-N_1$$

$$\text{ordem}(A S) = na+nt+np-N_1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.4). Logo $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

ii) quando: $nt+np-N_1 > nb+1$

$$nt > nb$$

$$np < 1+N_1$$

Das condições anteriores tem-se que:

$$\text{ordem}(T P^*) = na+nt+1$$

$$\text{ordem}(A S) = na+nt+np-N_1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.4). Como $np < 1+N_1$, $\text{ordem}^*(T P^*)$ é maior que $\text{ordem}(A S)$. Logo a declividade da assíntota é crecente.

III.b e III.c) quando: $nt+np-N_1 > nb+1$

$$nt \leq nb$$

Destas equações tem-se que:

$$np > 1+N_1$$

e que: $\text{ordem}(T P^*) = na+nt+np-N_1$

$$\text{ordem}(A S) = na+nt+np-N_1$$

A condição suficiente para existirem pólos na origem em $T P^*$ não é satisfeita (Proposição 4.4). Logo $\text{ordem}^*(T P^*)$ é igual a $\text{ordem}(A S)$, e a declividade da assíntota é constante.

cqgd

Exemplo 5.1:

Nesta simulação procura-se exemplificar alguns dos resultados demonstrados na proposição 5.1.

Seja o modelo do processo dado por $G = q^{-1}B/A$, onde:

$$B = 0.001739 - 0.001512q^{-1} - 0.0009802q^{-2} + 0.001361q^{-3}, \quad n_b = 3$$

$$A = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}, \quad n_a = 4$$

O GPC é sintonizado com $N_1 = 1$, $N_Y = 8$, $N_U = 1$ e $\lambda = 0$, com $P = 1$ e $D = 0$. Escolhe-se para valor de T os seguintes polinômios:

$$T_0 = (1 - 0.7q^{-1})^3 = 1 - 2.1q^{-1} + 1.47q^{-2} - 0.343q^{-3}$$

$$T_1 = (1 - 0.7q^{-1})^4 = 1 - 2.8q^{-1} + 2.94q^{-2} - 1.372q^{-3} + 0.2401q^{-4}$$

$$T_2 = (1 - 0.7q^{-1})^5 = 1 - 3.5q^{-1} + 4.90q^{-2} - 3.430q^{-3} + 1.2005q^{-4} - 0.1681q^{-5}$$

Na fig. (5.1) encontram-se valores da curva do limite de estabilidade que confirmam a proposição 5.1. Note que para $n_t = 3$ tem-se o caso (I.c) da tab. (5.2). Para $n_t = 4$ e $n_t = 5$ tem-se, respectivamente, os casos (I.b) e (II.a) da tab. (5.2).

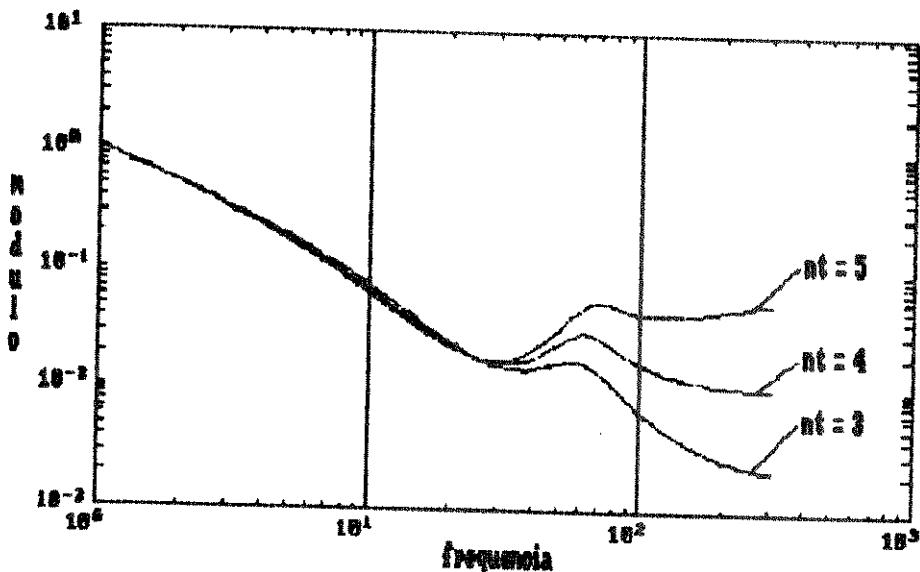


Fig. (5.1) - Curvas do limite de estabilidade para diferentes valores da ordem de T

Resultados semelhantes são obtidos quando se faz $\lambda \neq 0$, na síntese do controlador apresentada anteriormente. Na fig. (5.2) encontra-se a curva do limite de estabilidade para o processo considerado quando $\lambda = 0$ e quando $\lambda \neq 0$. O polinômio T é igual a $(1 - 0.7q^{-1})^4$. Observa-se que quando $\lambda = 0$ a declividade da assíntota é constante (caso I.b da tab. (5.2)), e quando $\lambda \neq 0$ a declividade da assíntota é crescente (caso I.a da tab. (5.3)).

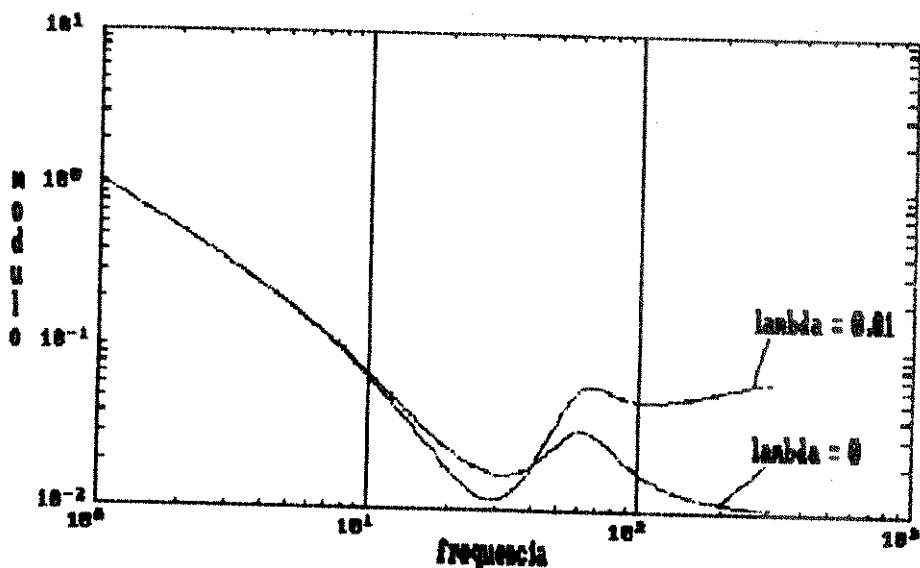


Fig. (5.2) - Curvas do limite de estabilidade para variação de λ

□

Portanto, da proposição 5.1, pode-se concluir que, aumentando-se o valor da ordem do polinômio T, melhora-se o valor do limite de estabilidade em altas frequências. Apesar de não haver garantias da mesma melhora em baixas e médias

frequências, pode-se sugerir projetar a ordem do polinômio T conforme segue:

$$n_t \geq n_b + N_U \quad (5.5)$$

Através de (5.5) garante-se que a forma da declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências não é decrescente.

O polinômio T substitui a estimação do polinômio C para parâmetros do processo, ou seja, estima-se o seguinte modelo:

$$y(t) = (B/A)u(t-1) + (T/A)\xi(t)/\Delta \quad (4.14)$$

Portanto, o valor da ordem do polinômio T não deve exceder ao valor da ordem do polinômio $A\Delta$, isto é:

$$n_t \leq n_a + 1 \quad (5.6)$$

Como as ordens dos polinômios do controlador (n_s e n_r), são função do valor escolhido para n_t , para se obter um controlador mais simples, n_t não deve ser elevado.

Sabe-se que as ordens dos polinômios S, R e R^* (supondo-se $n_a = n_b + 1$) são:

$$n_s = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + 1 \\ n_p + n_t - N_1 \end{array} \right\}, \quad n_r = \max \left\{ \begin{array}{l} n_t + 1 \\ n_b + 1 \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad n_{r^*} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_t \\ n_b \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

A equação característica do sistema em malha fechada é:

$$A\Delta R^* + q^{-1}B S = Pmf \quad (4.45)$$

A solução para os polinômios S e R^* da eq. (4.45) é única se a eq. (3.22) é satisfeita, isto é:

$$\begin{array}{l} n_{r^*} < n_b + 1 \rightarrow n_{r^*} \leq n_b \\ \underline{\text{OU}} \\ n_s < n_a + 1 = n_b + 2 \end{array} \quad (3.22)$$

Supondo-se, pela eq. (5.5), n_t é maior que n_b , tem-se que $n_r^* = n_t$ e $n_r^* > n_b$. Logo, pelas equações (3.22), a solução para os polinômios S e R no GPC, é única, se n_s for menor que n_b+2 . Portanto as ordens de T e P devem satisfazer a:

$$n_b+1 > n_p+n_t-N_1 \quad (5.7)$$

As equações (5.5) a (5.7) são um conjunto de diretrizes para a escolha da ordem dos polinômios T e P, sob o ponto de vista da melhora da robustez do sistema em malha fechada. Estas equações são reescritas a seguir.

$n_t \geq n_b + N_U$ $n_t \leq n_a + 1$ $n_b + 1 > n_p + n_t - N_1$	(5.8)
---	-------

5.3.3 - A ESCOLHA DAS RAÍZES DO POLINÔMIO T

A seguir analisa-se a forma da equação do limite de estabilidade, eq. (5.4), e discute-se a escolha das raízes do polinômio T para aumentar a robustez no GPC. Esta análise foi possível somente em alguns casos particulares da configuração dos horizontes do controlador, nos casos em que $P^* \rightarrow A$, e $P^* = 1$, e também quando projeta-se o polinômio T pertencente ao Lugar das Raízes Recíproco.

5.3.3.1 - Limite de Estabilidade quando $P^* \rightarrow A$ (GPC mean level)

Através da sintonia descrita na proposição 4.8 (seção 4.6.4) tem-se que:

$$P^* \rightarrow A$$

logo,

$$A R + q^{-1} B S = A T \quad (5.9)$$

Pela eq. (5.9) tem-se que o polinômio A é fator de (A R) e de (A T), logo, também é fator de $(q^{-1} B S)$, e o polinômio S pode ser descrito como sendo:

$$S = S^* A \quad (5.10)$$

$$e \quad S = s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{ns} q^{-ns}$$

O polinômio S^* torna-se o escalar s_0 quando $na \geq np+nt-N_1$, pois a ordem de S , ns , é dada por $\max(na, np+nt-N_1)$. Quando $ns = na$, S^* é um escalar. Sabendo-se que o polinômio A é mônico, este escalar é s_0 . Mas, se $na < np+nt-N_1$, a ordem de S é maior que a ordem de A , e S^* é um polinômio. Assim, supondo-se que $na \geq np+nt-N_1$, o polinômio S é dado por:

$$S = s_0 A \quad (5.11)$$

O valor do escalar s_0 é obtido fazendo-se $q = 1$ na eq. (5.9). Sabendo-se que $R(1) = 0$ (O polinômio R contém Δ como fator, e $\Delta(1) = 0$) tem-se que o escalar s_0 é dado por:

$$s_0 = T(1) / B(1) \quad (5.12)$$

Através das equações (5.10) e (5.12), o limite de estabilidade, quando $P^* \rightarrow A$, é dado por:

$$\begin{aligned} \left| \Delta L \right| &= \left| T A / (A^2 T(1) / B(1)) \right| \\ \left| \Delta L \right| &= \left| B(1) T / (T(1) A) \right| = \left| (1/s_0) T / A \right| \end{aligned} \quad (5.13)$$

Neste caso, pode-se explicitar a função do polinômio observador T no limite de estabilidade do sistema em malha fechada, e com isso simplificar sua análise. Da eq. (5.13), tem-se que projetando-se raízes mais lentas para T o limite de estabilidade aumenta. Assim, a escolha apropriada de raízes dominantes do polinômio T permitem aumentar a robustez do sistema. Porém, as raízes de T pertencem aos pólos da função de transferência entre a perturbação do sistema e a saída. Se as raízes de T forem os pólos dominantes do sistema, sua resposta à perturbações degrada-se quando as raízes de T tornam-se mais lentas. Portanto é necessário um compromisso entre estas duas características, alta robustez e rápida rejeição à perturbações.

Em baixas frequências a influência do polinômio T é pequena pois $|T| \approx T(1)$.

Fazendo-se $T = A$, o limite de estabilidade é constante e igual ao ganho do processo, isto é:

$$|\Delta L| = B(1)/A(1) = G(1) \quad (5.14)$$

Quando $nt=na$, e sabendo-se que $NU=1$, $N1=1$, $P=1$, $\lambda=0$, (condição para $P^* \rightarrow A$), então $nt=nb+NU$, e, da tab. 5.2 parte (I.b), tem-se que a declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências é constante.

5.3.3.2 - Limite de Estabilidade quando $P^*= 1$, (GPC dead beat)

Através da sintonia descrita na proposição 4.7 (seção 4.6.3), e, fazendo-se o polinômio V igual a 1, tem-se que:

$$A R + q^{-1}B S = T \quad (5.15)$$

Projeta-se um polinômio T de modo a conter o polinômio A como fator, como a seguir,

$$T = T^* A \quad (5.16)$$

onde: T^* é um polinômio em q^{-1} de ordem nt^*

Logo, a eq. (5.15) torna-se:

$$A R + q^{-1}B S = T^* A \quad (5.17)$$

A partir da eq. (5.17) pode-se fazer um raciocínio análogo ao caso anterior, isto é, o GPC *mean level*. Assim, tem-se que o limite de estabilidade do GPC *dead beat*, quando o polinômio T contém o polinômio A como fator, é igual ao do GPC *mean level*. Porém deve-se fazer a ressalva de que nt^* deve satisfazer a $nt^* \leq N1-np$. Pois, no desenvolvimento anterior, quando $P^* \rightarrow A$, supunha-se que $na \geq np+nt-N1$. Mas, pela eq. (5.16), tem-se que $nt = nt^*+na$, logo neste caso deve-se supor que $nt^* \leq N1-np$.

5.3.3.3 - Limite de Estabilidade quando $T \in LRR$

Tem-se que o Lugar das Raízes Recíproco é o lugar descrito pelas raízes, com a variação de k de 0 a infinito, da seguinte equação:

$$A(q^{-1})A(q) + k(q^{-1}B(q^{-1})B(q)) = 0 \quad (3.36)$$

A eq. (3.36) possui ' $2 \times na$ ' raízes, das quais ' na ' estão dentro do círculo unitário.

Seja $Lrr(k)$ o polinômio em q^{-1} formado pelas ' na ' raízes estáveis da eq. (3.36), para determinado ' k ', como a seguir:

$$Lrr(k) = 1 + lrr_1 q^{-1} + lrr_2 q^{-2} + \dots + lrr_{na} q^{-na}$$

Esta proposta de sintonia para T baseia-se em fazer o polinômio observador T igual a $Lrr(k)$. Assim, a escolha de um valor para T limita-se a especificar um valor para ' k ' na eq. (3.36). Em seguida obtém-se $Lrr(k)$ e faz-se $T = Lrr(k)$.

A ordem do polinômio T assim escolhido é igual a ' na '.

Em sequência determina-se a equação do limite de estabilidade (eq (5.4)), quando $T = Lrr(k)$, nos valores limites de $Lrr(k)$, que são: $Lrr(0)$ e $Lrr(\infty)$.

1) Quando $T = Lrr(0)$:

Pela eq (3.36) tem-se que quando $k = 0$, $Lrr(0)$ é igual a A . Logo, $T = A$, e a equação característica do sistema torna-se:

$$A R + q^{-1}B S = P^* A \quad (5.18)$$

Para que a ordem de S seja ' na ' supõe-se que $N1-np \geq 0$ (Como já discutido anteriormente, quando $P^* \rightarrow A$, e sabendo-se que $nt = na$). Assim, tem-se que:

$$S = s_0 A \quad (5.11)$$

$$e \quad s_0 = P^*(1)/B(1) \quad (5.19)$$

e a equação do limite de estabilidade, quando $T = Lrr(0)$, é dada por:

$$\left| \Delta L \right| = \left| \frac{P^* A}{A^2 P^*(1)/B(1)} \right|$$

ou

$$\left| \Delta L \right| = \left| \frac{(B(1)/P^*(1)) P^*/A}{1} \right| \quad (5.20)$$

Pelas equações (1.3) e (5.3), supondo-se $D = 1$ por simplicidade, pode-se reescrever a eq. (5.20) como a seguir:

$$\left| \Delta L \right| = \left| \frac{Gm(1)G}{Gm} \right| \quad (5.21)$$

Assim, quando se especifica o polinômio observador T pertencente ao LRR (e $k = 0$), ou quando especifica-se $T = A$, a robustez do sistema em malha fechada é função somente de sua largura de faixa, determinada pelos parâmetros de projeto. Isto é, a robustez do sistema aumenta quando a largura de faixa especificada diminui. Intuitivamente, pode-se dizer que quanto mais rápido desejamos que o sistema se comporte, melhor devemos conhecê-lo.

Em baixas frequências, quando $|Gm| \approx Gm(1)$ e $|G| \approx G(1)$, tem-se que:

$$\left| \Delta L \right| = G(1) \quad (5.22)$$

ii) Quando $T = Lrr(\infty)$:

Pela eq. (3.36) tem-se que quando $k = \infty$, $Lrr(\infty)$ possui as raízes de B mais $(na-nb)$ raízes na origem. Assim, faz-se $T = B / b_0$, com $nt = nb$. E a equação característica do sistema é dada por:

$$A R + q^{-1} B S = \frac{P^* B}{b_0} \quad (5.23)$$

O polinômio R possui a ordem de $nr = \max(nt+1, nb+1)$. Como $nt = nb$, nr é igual a $nb+1$. Tem-se que R é descrito por:

$$R = \Delta R^* \quad (4.42)$$

Pelas equações (4.42) e (5.23), e sabendo-se que o polinômio R é mônico, tem-se que R^* é igual B/b_0 , e:

$$A\Delta + b_0 q^{-1}S = P^*$$

ou

$$S = q(P^* - A\Delta)/b_0 \quad (5.24)$$

Substituindo-se a eq. (5.24) na eq. (5.4) obtém-se:

$$\left| \Delta L \right| = \left| \frac{P^* B/b_0}{A q (P^* - A\Delta)/b_0} \right|$$

como $G = q^{-1}B/A$, obtém-se:

$$\left| \Delta L \right| = \left| G / (1 - A\Delta/P^*) \right|$$

$$\left| \Delta L \right| = \left| G / \left[1 - (A\Delta/P^*) (K B/K B) \right] \right|$$

ou, pela eq. (5.3), e supondo-se por simplicidade que $D = 1$, tem-se que o limite de estabilidade, quando $T = Lrr(\omega)$, é dado por:

$$\left| \Delta L \right| = \left| G / \left[1 - (Gm/G) (\Delta/K) \right] \right| \quad (5.25)$$

Em baixas frequências, quando $|\Delta| \approx 0$ e $|G| \approx G(1)$, tem-se que:

$$\left| \Delta L \right| = G(1) \quad (5.26)$$

iii) Quando $T = Lrr(k)$ e $0 < k < \infty$:

A seguir tem-se um exemplo do comportamento curva do limite de estabilidade quando varia-se 'k' de 0 a ∞ , e $T = Lrr(k)$.

Exemplo 5.2

Seja o modelo do processo dado por $G = q^{-1}B/A$, onde:

$$B = 0.001739 - 0.001512q^{-1} - 0.0009802q^{-2} + 0.001361q^{-3}$$

$$A = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}$$

e o GPC sintonizado com $N1 = 1$, $NY = 8$, $NU = 1$, $P = 1$ e $D = 1$. São atribuídos a T os seguintes valores do LRR em função de k:

$$k = 0 : T0 = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}$$

$$k = 750 : T1 = 1 - 3.0358q^{-1} + 3.6711q^{-2} - 2.0958q^{-3} + 0.4757q^{-4}$$

$$k = 10^4 : T2 = 1 - 2.7723q^{-1} + 3.1103q^{-2} - 1.6457q^{-3} + 0.3553q^{-4}$$

$$k = 10^6 : T3 = 1 - 1.7044q^{-1} + 0.9510q^{-2} - 0.1075q^{-3} + 0.0656q^{-4}$$

$$k = 10^{99} : T4 = 1 - 0.8697q^{-1} - 0.5637q^{-2} - 0.7825q^{-3}$$

As curvas do limite de estabilidade, eq. (5.4), para os valores de T anteriormente descritos, encontram-se na fig. (5.3).

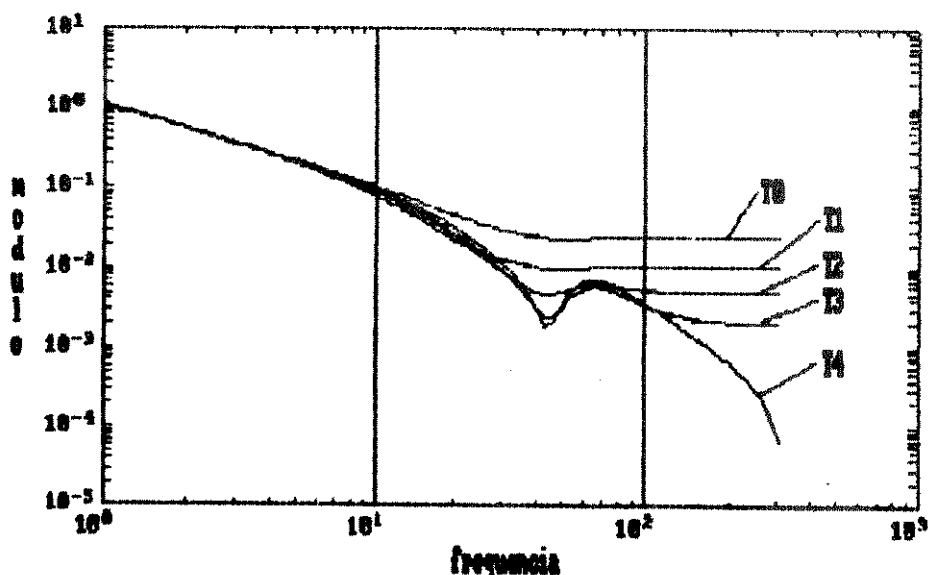


Fig. (5.3) - Curvas do limite de estabilidade para valores de k iguais a: $0 \leq k \leq \infty$

A partir de resultados de simulação (exemplo 5.2) nota-se que, para valores intermediários de 'k', ou seja, quando $0 < k < \infty$, a curva do limite de estabilidade posiciona-se entre os valores extremos, e, que em baixas frequências seus valores pouco variam com a variação de 'k' (ver eq. (5.22) e eq. (5.26)). Nota-se também que os valores do limite de estabilidade diminuem quando 'k' varia de 0 para infinito, ou seja, a nível do critério quadrático do LRR, reescrito a seguir,

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} (y(t) - w(t))^2 + (1/k) (u(t))^2$$

tem-se que, quando a ponderação no sinal de controle diminui, o limite de estabilidade diminui.

Quando $T \in \text{LRR}$, tem-se que n_t é igual a n_a ou n_b+1 , e, se $\lambda = 0$ e $NU = 1$, a declividade da assíntota da curva $|\Delta L|$ em altas frequências é constante, ver tab. (5.2) parte (I.b), (II.b) ou (III.b). Logo, com a variação de 'k' de ∞ para 0, aumenta-se o valor do patamar da curva de $|\Delta L|$ em altas frequências (fig. (5.3)) melhorando a robustez do sistema nesta região. Na fig. (5.3) observa-se que, quando 'k' tende para infinito, a declividade da assíntota da curva de $|\Delta L|$ é decrescente. Isto ocorre devido a que, neste caso $T \rightarrow B$, e $n_t \rightarrow n_b$, satisfazendo à parte (I.c) da tab. (5.2).

Com a escolha de T pertencente ao LRR, a sintonia do controlador não é determinada *a priori*, fato que traz mais liberdade para o projeto. Como as raízes do filtro T também são os pólos de malha fechada, tem-se que quando $T \in \text{LRR}$, parte dos pólos de malha fechada, os pólos do observador, pertencerão ao LRR, estando assim de acordo com o método de especificação descrito na seção 3.4.2. O restante dos pólos de malha fechada, raízes de P^* , podem ser determinados pelos parâmetros de projeto do GPC.

5.3.4 - EXEMPLO

A seguir ilustra-se o desempenho do método para seleção do polinômio observador T, onde a variação do polinômio T aumenta a robustez do sistema frente a dinâmicas não modeladas. Simula-se a utilização do GPC em um processo $(Gr(s))$ como a seguir:

$$Gr(s) = \left(\frac{100^2}{(s^2 + 140s + 100^2)} \right) \left(\frac{0.5}{(s + 0.5)s} \right)$$

O modelo $G(q^{-1})$ utilizado para a previsão da saída no controlador é uma versão simplificada de $Gr(s)$, com período de amostragem de 0.01 segs., e é descrito a seguir:

$$G(s) = \left(\frac{0.5}{(s + 0.05)s} \right) \quad \text{ou: } B = 0.000025 + 0.000025q^{-1} \quad nb=1$$

$$A = 1 - 1.9995q^{-1} + 0.9995q^{-2} \quad na=2$$

O GPC é sintonizado com $N1=1$, $NY=8$, $NU=1$, $P=1$ e $D=1$. São simulados dois casos: o primeiro com $T=1$, para fins de comparação, e o segundo com o polinômio T selecionado de acordo como os métodos citados nas seções 5.3.2 e 5.3.3. Para a ordem de T escolhe-se o valor $nt=2$, pois: satisfaz à eq. (5.5), e a curva do limite de estabilidade é constante (ver tab. (5.2), para $\lambda=0$ e $nt-NU=nb$ ou $2-1=1$), e, satisfaz às eqs. (5.6) e (5.7). Para a escolha das raízes do polinômio T , faz-se T pertencer ao LRR do processo $G(q^{-1})$, como a seguir:

$$T = Lrr(10000) = 1 - 1.9001q^{-1} + 0.9048q^{-2}$$

Pela fig. (5.4) nota-se que a mudança do filtro T aumentou-se o limite de estabilidade nas frequências mais altas. Também na fig. (5.4) encontra-se a resposta em frequência da dinâmica não modelada ΔA ($\Delta A = G(q^{-1}) - Gr(q^{-1})$) para o caso simulado. A resposta de ΔA ultrapassa o limite de estabilidade quando $T = 1$, mas não ultrapassa o limite quando $T = Lrr(10000)$.

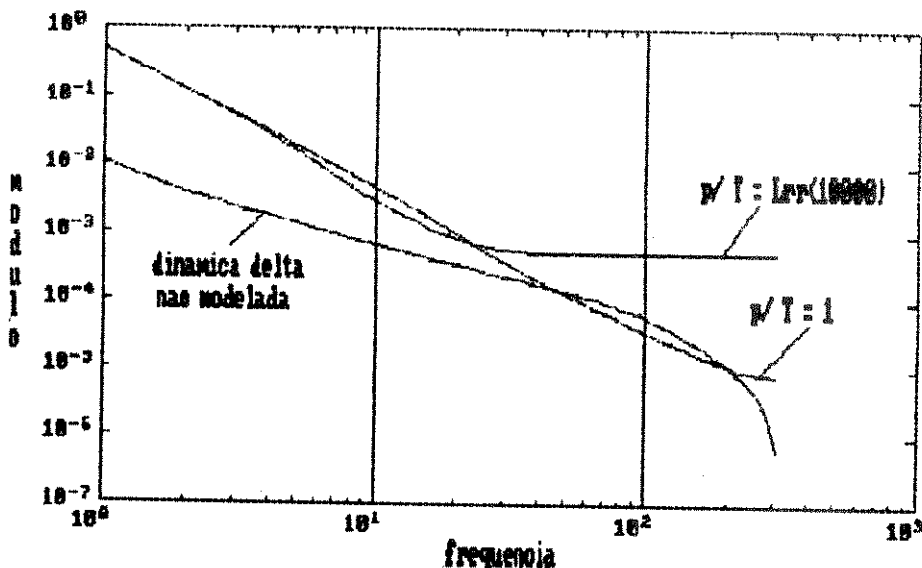


Fig. 5.4 - Influência do filtro T na estabilidade do sistema

A seguir simula-se a utilização do GPC, no processo Gr, sintonizado com $T = 1$ e com $T = Lrr(10000)$. Na fig. (5.5) encontra-se a resposta do sistema em malha fechada a uma entrada em degrau, para os dois casos.

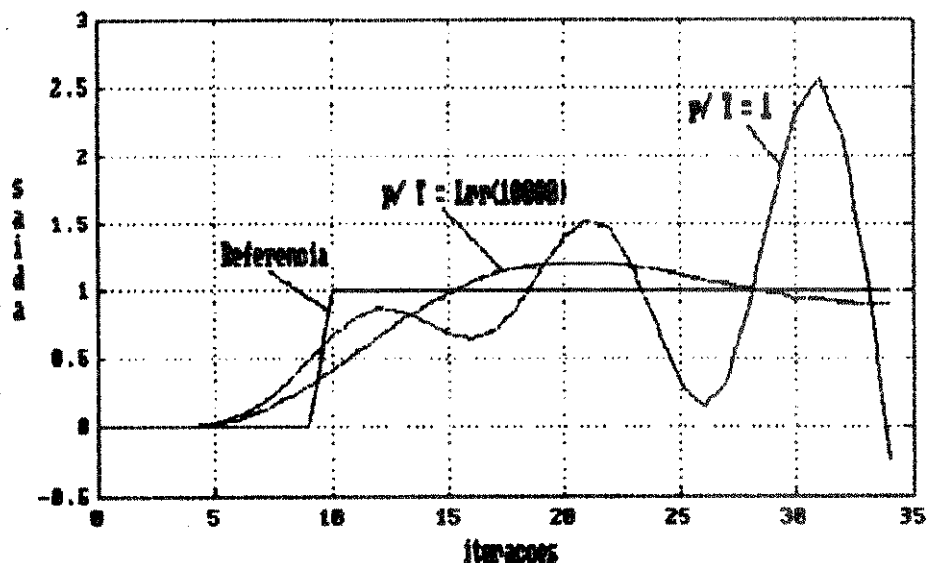


Fig. 5.5 - Saída do sistema

Nota-se, pela fig. (5.4), que a variação da ordem e das raízes do polinômio T , utilizando as diretrizes descritas nas seções 5.3.2 e 5.3.3, aumentou a robustez do sistema frente às dinâmicas não modeladas do processo real. Esta melhora foi comprovada nos resultados de simulação (fig. (5.5)). Nota-se também que esta escolha do polinômio observador T resultou na melhora da robustez do sistema sem restringir a escolha dos horizontes do controlador.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE PROJETO DO GPC E DESEMPENHO PARA O CONTROLE DE UM SISTEMA FLEXÍVEL

6.1 - INTRODUÇÃO

O critério minimizado para se obter o algoritmo de controle GPC é dado pela eq. (4.1) reescrita a seguir:

$$J = \sum_{j=N1}^{NY} \left(P \hat{y}(t+j) - D w(t+j) \right)^2 + \sum_{j=1}^{NU} \lambda \left(\Delta u(t+j-1) \right)^2 \quad (4.1)$$

Os horizontes $N1$, NY e NU , a constante λ , e os filtros de projeto F e D , proporcionam flexibilidade de projeto do sistema em malha fechada, para satisfazer as especificações do usuário. Porém, como já foi discutido no capítulo 4, é tarefa complexa obter os pólos do sistema em malha fechada *à priori* em função dos parâmetros de projeto (exceção feita aos casos descritos na seção 4.6). Assim, torna-se necessária uma estratégia prática para a seleção destes parâmetros de projeto.

Devido a experiência prática e simulações, na literatura [Clarke87] [Mohtadi86a] considera-se como escolha inicial para os parâmetros do GPC os seguintes valores:

$$N1 = 1, \quad NY = 10, \quad NU = 1$$

$$\lambda = 0$$

$$P = 1, \quad D = 1$$

O Horizonte Final NY é usualmente escolhido de forma a ser maior que o tempo de subida do processo [LambertM87] [Mohtadi86a]. Para a maioria dos processos estáveis, a dinâmica em malha fechada torna-se mais rápida com a diminuição do horizonte NY [Samaan90]. Para processos instáveis, altos valores de NY podem levar o sistema em malha fechada à instabilidade (uma vez que, pela proposição 4.5 seção 4.6.4, os pólos de malha fechada tendem aos de malha aberta com o aumento de NY)

O Horizonte Inicial $N1$ é usualmente escolhido como sendo pelo menos maior ou igual ao atraso conhecido do processo, a fim de evitar cálculos supérfluos [LambertM87]. O aumento de $N1$ diminui o esforço computacional do algoritmo.

O Horizonte de Controle NU , quando λ é igual a zero e o valor de $N1$ é elevado, influi diretamente no número de pólos na origem do sistema compensado (Proposição 4.5 seção 4.5.4.2). Com altos valores de NU obtém-se sinais de controle

mais ativos, e também, o aumento de NU aumenta o esforço computacional para o cálculo de $u(t)$. Assim, o valor de NU deve ser o menor possível, que permita ao sistema um desempenho satisfatório. Com a diminuição da relação NY-NU, os pólos de malha fechada tendem para os pólos de filtro P.

A introdução da constante λ diminui os níveis do sinal de controle e aumenta a sobre-elevação da saída do sistema. Isto é devido a que, com valores diferentes de zero para λ , o sinal de controle passa a ter seus valores ponderados na função de custo. Sua introdução também melhora o condicionamento dos cálculos de $u(t)$, pois, no caso adaptativo, podem existir linhas nulas na matriz $H^T H$, o que a torna não singular, logo não inversível. Um valor não nulo para λ permite a inversão desta matriz (ver eq. (4.38) e eq. (4.40)).

O filtro de projeto P é usualmente utilizado para diminuir a sobre-elevação da saída do sistema compensado. Isto acontece para valores de NU pequenos comparados a NY. Quando NU aumenta tendendo a NY, os pólos de malha fechada tendem para o valor de P (Proposição 4.6 seção 4.6.2), e assim, o filtro P torna-se, juntamente com o filtro D, a especificação do sistema em malha fechada.

O filtro de projeto D especifica os zeros em malha fechada e é projetado tal que $D(1)$ seja igual a $P(1)$, a fim de evitar erros de regime para entrada em degrau.

Em [Nazzetta91] encontra-se um estudo da variação dos parâmetros do GPC e desenvolve-se uma base de regras para sua escolha.

Nas seções 6.2 a 6.6 tem-se um estudo da variação dos parâmetros de sintonia do GPC e seus efeitos no desempenho do controle de posição de uma junta isolada de um robô (Capítulo 2 eq. (2.1) eq. (2.2) com valores numéricos pela eq. (2.5)), cujo modelo discreto, com período de amostragem de 0.01 segs., é descrito a seguir:

i) Função de transferência entre a posição do motor e a tensão de entrada:

$$\theta_m / V = \text{num}(q^{-1}) / \text{den}(q^{-1})$$

$$\text{num}(q^{-1}) = q^{-1}(1.7393 - 1.5128q^{-1} - 0.9804q^{-2} + 1.3610q^{-3}) \cdot 10^{-3}$$

$$\text{den}(q^{-1}) = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}$$

$$\text{zeros} = \begin{matrix} 0.8629 \pm j0.4114 \\ -0.8561 \end{matrix}$$

$$\text{pólos} = \begin{matrix} 0.7049 \pm j0.4587 \\ 0.8514 \\ 1 \end{matrix}$$

ii) Função de transferência entre a posição da carga e a tensão:

$$\theta_l / V = \text{num}(q^{-1}) / \text{den}(q^{-1})$$

$$\text{num}(q^{-1}) = q^{-1}(0.3316 + 1.6835q^{-1} + 0.4866q^{-2} - 0.07300q^{-3}) \cdot 10^{-5}$$

$$\text{den}(q^{-1}) = 1 - 3.2255q^{-1} + 4.0828q^{-2} - 2.4343q^{-3} + 0.5769q^{-4}$$

$$\text{zeros} = 0.1085$$

$$-0.4265$$

$$-4.7591$$

$$\text{pólos} = 0.7049 \pm j0.4587$$

$$0.8514$$

$$1$$

Na seção 6.7 encontra-se um exemplo da influência da escolha do período de amostragem nos valores dos horizontes. Uma comparação de desempenho entre o GPC com e sem referência pré-especificada (Capítulo 4), o Controlador por Alocação de Pólos (Capítulo 3), e o Controlador Proporcional de Velocidade e Posição (Capítulo 2) no controle de posição de uma junta flexível de robô encontra-se na seção 6.8.

6.2 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO HORIZONTE DE NY

O GPC é sintonizado com: $N1 = 1$, $NU = 1$, $\lambda = 0$, $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. São feitas simulações com os valores de NY iguais a 6, 8 e 10. As fig. (6.1), fig. (6.2) e fig. (6.3) mostram o comportamento do sistema (saída do motor, saída da carga e sinal de controle, respectivamente) para uma entrada em degrau e diferentes valores de NY .

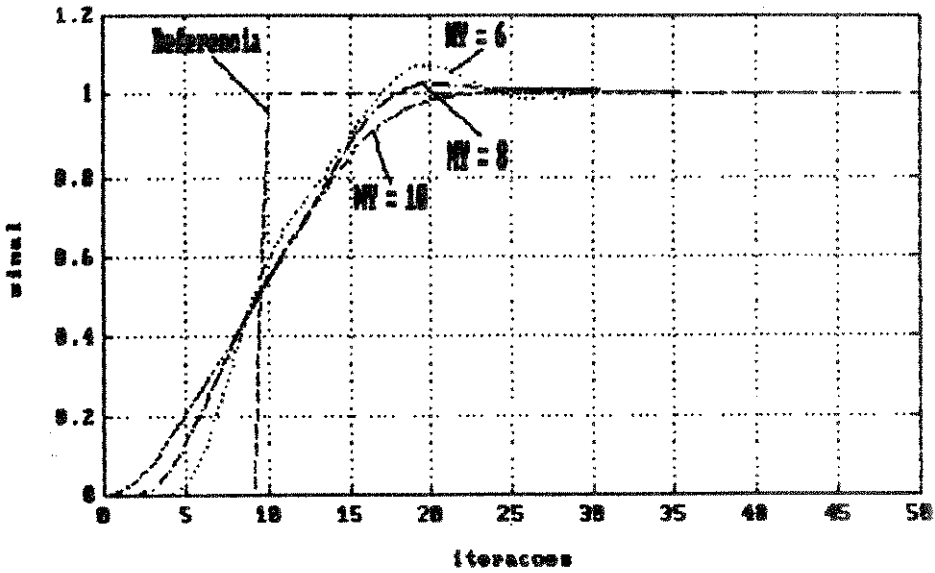


Fig. (6.1) - Posição do motor para NY igual a 6, 8 e 10

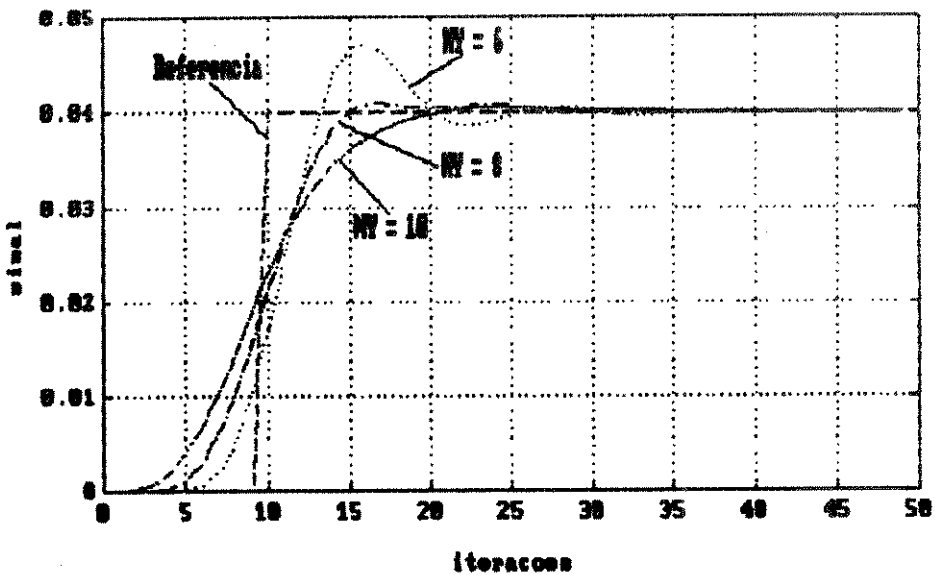


Fig. (6.2) - Posição da carga para NY igual a 6, 8 e 10

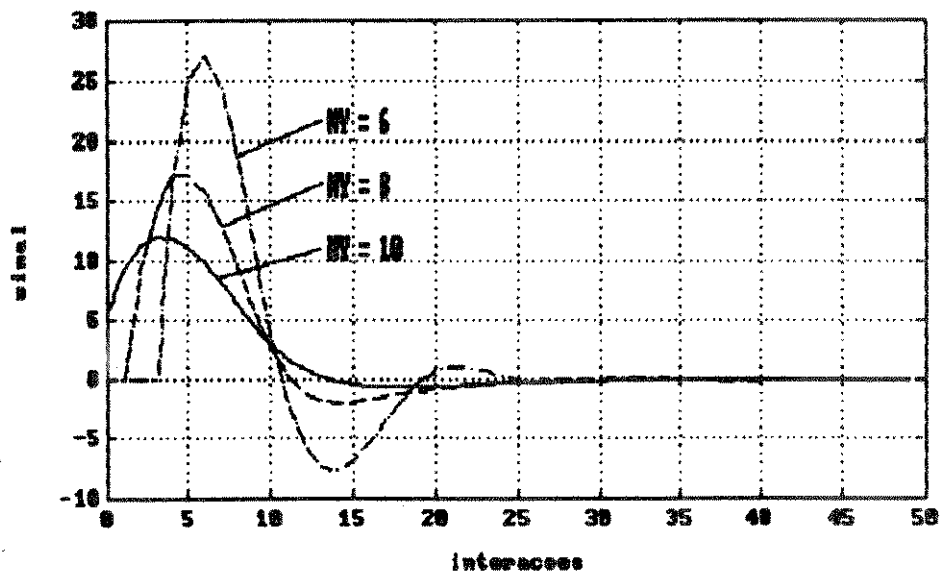


Fig. (6.3) - Sinal de controle para NY igual a 6, 8 e 10

Dos resultados anteriores pode-se observar que:

- a) A saída torna-se mais lenta com o aumento de NY, apesar de ser mais antecipativa.
- b) Ocorre uma diminuição da sobrelevação com o aumento de NY.
- c) O nível do sinal de controle diminui com o aumento de NY.

Pelas fig. (6.4) e tab. (6.1) observa-se o comportamento dos pólos em malha fechada quando o valor de NY aumenta. Na segunda metade da tab. (6.1) estão os pólos em malha fechada representados pela sua frequência natural e amortecimento na forma do sistema contínuo (período de amostragem igual a 0.01 seg.). Nota-se que, para o par de pólos dominante, a frequência natural diminuiu e o fator de amortecimento aumenta com o aumento de NY. Verifica-se que o aumento de NY faz os pólos de malha fechada tenderem para os pólos de malha aberta (proposição 4.8, seção 4.6.4).

NY	6		8		10	
1 ^o par	0.7422 ± j0.4323		0.7201 ± j0.4569		0.7091 ± j0.4611	
2 ^o par	0.7247 ± j0.2129		0.7749 ± j0.1551		0.8033 ± j0.1188	
	Wn	ζ	Wn	ζ	Wn	ζ
1 ^o par	54.89	0.28	58.74	0.27	60.04	0.28
2 ^o par	40.05	0.70	30.73	0.77	25.48	0.82

Tabela 6.1 - pólos do sistema em malha fechada - valor, frequência natural e amortecimento

Root Locus p/ GPC

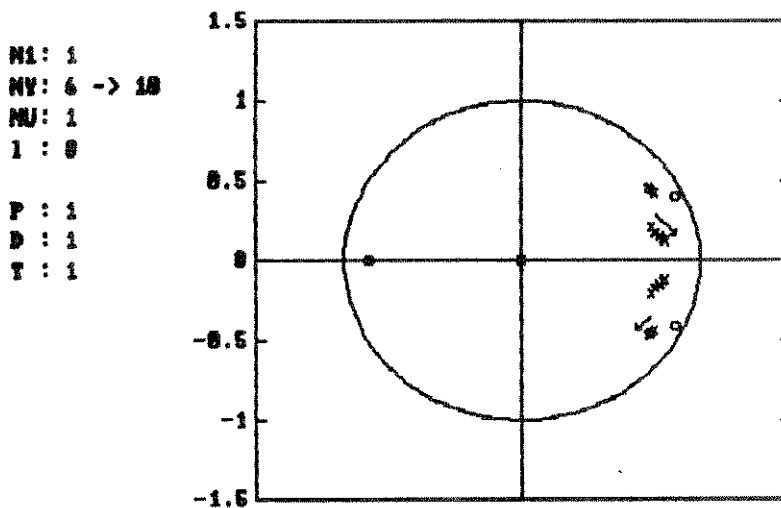


Fig. (6.4) - Lugar das Raízes para o GPC - variação de NY

Tem-se que o controle $\Delta u(t)$ aplicado ao sistema é descrito pela eq. (4.40), reescrita a seguir, e o vetor \underline{M} pondera o erro entre a saída livre prevista e a referência.

$$\Delta u(t) = \underline{M} \left(\underline{w}_{fd} - \hat{y}_{lp} \right) \quad (4.40)$$

onde:

$$\circ \underline{M} = \underline{U} \left[\left(\underline{H}^T \underline{H} + \lambda \underline{I} \right)^{-1} \underline{H}^T \right] \quad (4.38)$$

$$\circ \underline{M} = \left[m_{N1} \ m_{N1+1} \ \dots \ m_{NY} \right]_{1 \times (NY-N1+1)}$$

$$\circ K = \sum_{j=N1}^{NY} m_j \quad (4.41)$$

Pode-se verificar, pela tab. (6.2), que o valor de NY afeta diretamente a quantidade e o valor dos elementos do vetor \underline{M} . Como o valor de K diminui com o aumento de NY, para um mesmo erro previsto, o sinal de controle calculado é menor se NY aumen-

ta, tornando o sistema mais lento.

NY	Matriz M							K	
6	1.04	3.49	6.56	9.81	13.11	16.55	50.56		
8	0.39	1.29	2.43	3.63	4.85	6.13	7.52	9.11	35.35
10	0.17	0.57	1.06	1.59	2.12	2.68			25.84
	3.29	3.98	4.77	5.64					

Tabela 6.2 - Matriz M x NY

Observando-se o polinômio R do controlador em cada simulação, nota-se que existiram pólos instáveis no controlador em todas as simulações feitas nessa seção, porém o sistema em malha fechada não apresentou instabilidade. O aumento de NY não estabilizou o controlador.

6.3 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO HORIZONTE DE N1

O GPC é sintonizado com: $N_Y = 8$, $N_U = 1$, $\lambda = 0$, $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. São feitas simulações para os valores de N_1 iguais a 1, 4 e 8. As fig. (6.5), fig. (6.6) e fig. (6.7) mostram o comportamento do sistema (saída do motor, saída da carga e sinal de controle, respectivamente) para uma entrada em degrau e diferentes valores de N_1 .

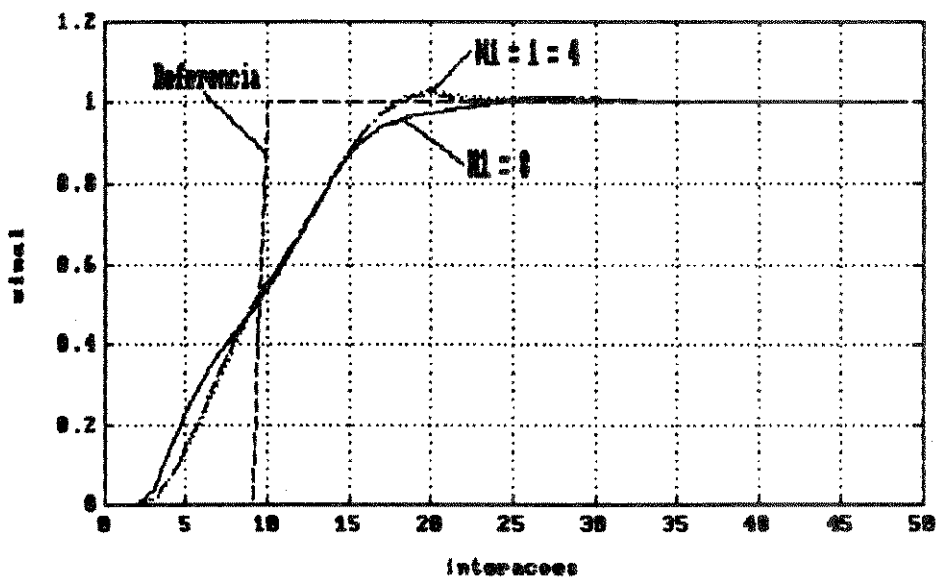


Fig. (6.5) - Posição do motor para N_1 igual a 1, 4 e 8

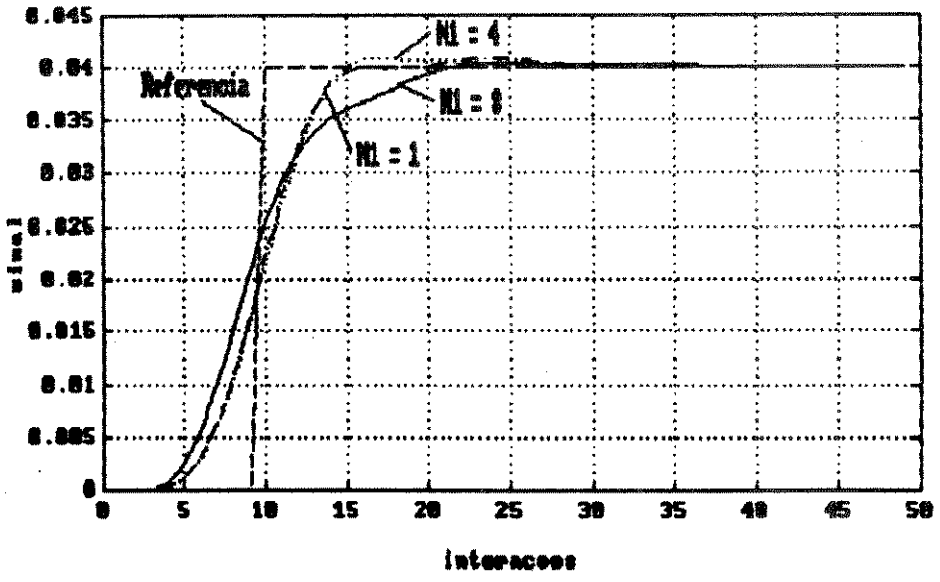


Fig. (6.6) - Posição da carga para N_1 igual a 1, 4 e 8

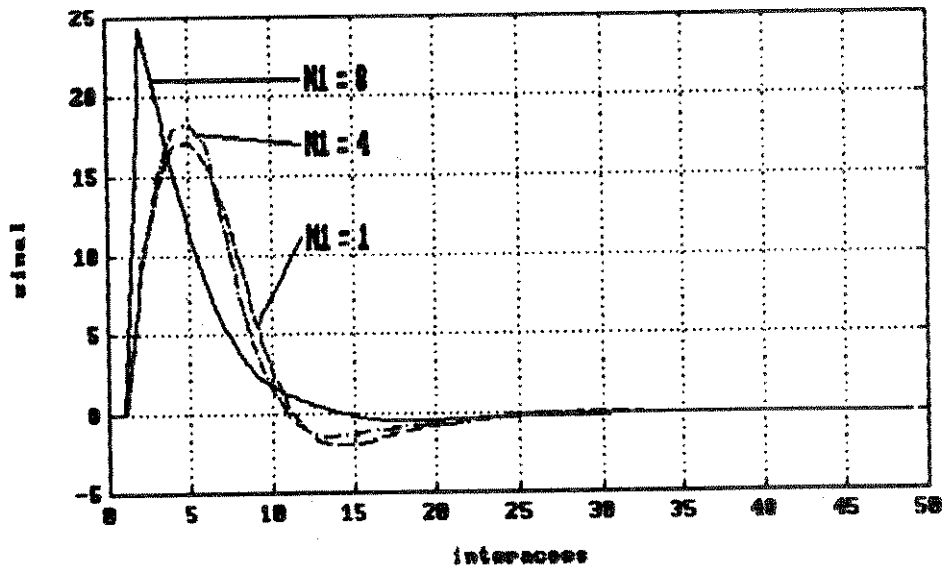


Fig. (6.7) - Sinal de controle para N_1 igual a 1, 4 e 8

Dos resultados anteriores pode-se observar que:

- a) Há uma pequena modificação no sistema quando N_1 varia no seu domínio, isto é, de 1 a 8. O tempo de subida praticamente não varia.
- b) Ocorre uma pequena diminuição da sobre-elevação com o aumento de N_1 .
- c) O nível máximo do sinal de controle aumenta com o aumento de N_1 .

Através do lugar das raízes em função de N_1 , fig. (6.8), pode-se verificar que os pólos em malha fechada sofrem pequena alteração quando N_1 varia em seu domínio, isto é, de 1 a 8.

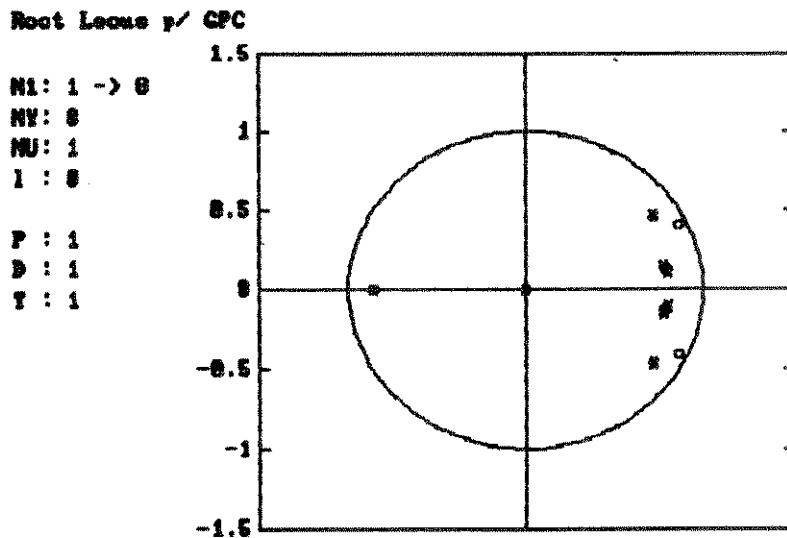


Fig. (6.8) - Lugar da Raízes para o GPC - variação de $N1$

Os polinômios R , S e a equação característica do sistema em malha fechada também não apresentaram variação significativa.

Intuitivamente tem-se que o aumento de $N1$ aumenta a capacidade de antecipação do sistema, pois só são considerados pelo algoritmo os valores mais à frente da referência, que são os que se alteram primeiro. Esta característica é observada no filtro de referência F_c . Quando $N1$ aumenta, diminui a ordem do filtro F_c (eq. (4.42)) e aumenta o valor de seus elementos, causando um aumento nos valores iniciais da referência filtrada ($w_{ff}(\cdot)$). Porém, nas simulações feitas, esta variação foi pequena para causar mudança significativa no comportamento em malha fechada do sistema.

A influência de $N1$ não deve ser considerada isoladamente. Dependendo da escolha dos outros parâmetros, o valor de $N1$ altera o número de pólos na origem do sistema (Proposição 4.5 seção 4.5.4.2). Produz-se assim, uma alteração mais significativa no sistema do que a constatada nas fig. (6.5) e fig. (6.7).

6.4 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO HORIZONTE DE NU

O GPC é sintonizado com: $N1 = 1$, $NY = 8$, $\lambda = 0$, $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. São feitas simulações com os valores de NU iguais a 1, 4, 5 e 8. As fig. (6.9), fig. (6.10) e fig. (6.11) mostram o comportamento do sistema (saída do motor, saída da carga e sinal de controle, respectivamente) para uma entrada em degrau e diferentes valores de NU .

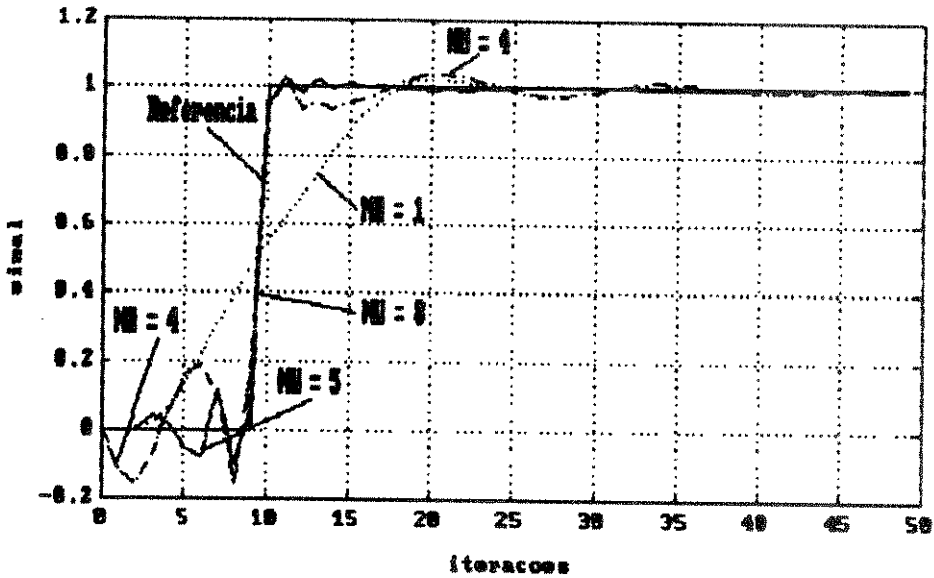


Fig. (6.9) - Posição do motor para NU igual a 1, 4, 5 e 8

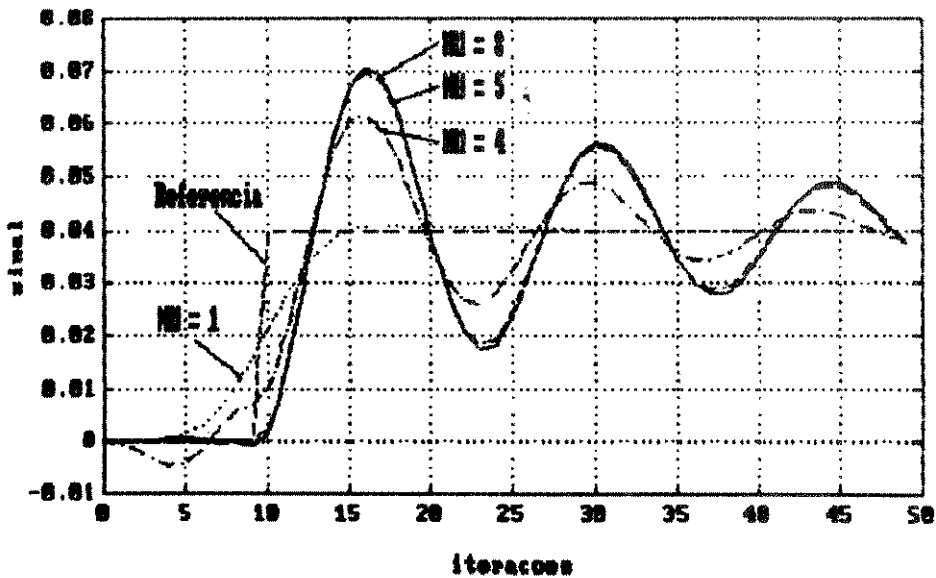


Fig. (6.10) - Posição da carga para NU igual a 1, 4, 5 e 8

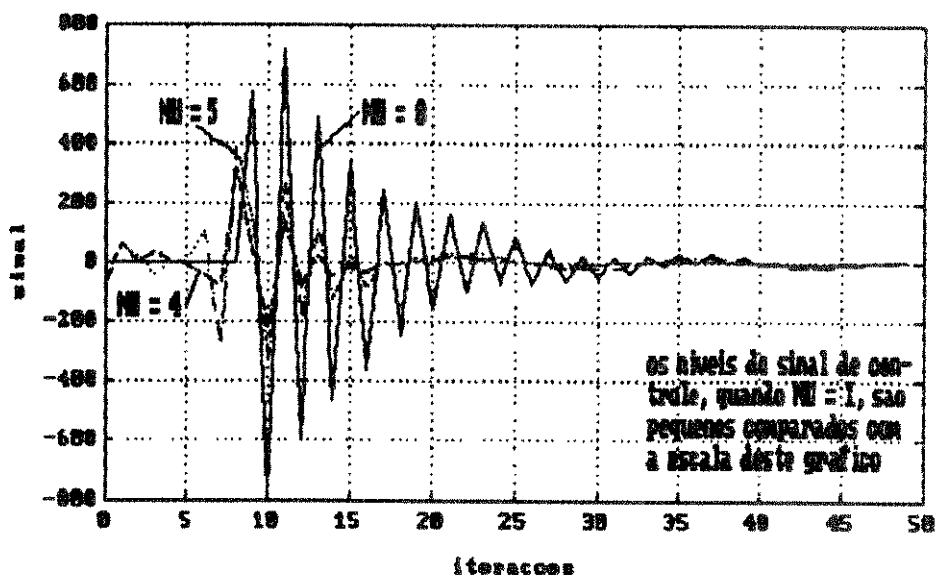


Fig. (6.11) - Sinal de controle para NU igual a 1, 4, 5 e 8

Dos resultados anteriores pode-se observar que:

- O nível do sinal de controle aumenta quando o valor de NU cresce.
- Para o motor, o sistema torna-se mais rápido com o aumento de NU (sem penalizar a sobre elevação, quando NU é maior que n_{a+1}).

Pode-se verificar dois comportamentos distintos quando ocorre variação de NU. Para NU entre 1 a n_a e quando NU varia de n_{a+1} a N_Y . Este fato está ilustrado no lugar das raízes das fig. (6.12) e fig. (6.13). Quando NU varia de 1 a n_a , o sistema torna-se mais rápido porém com elevada sobre elevação. Já quando NU varia de n_{a+1} a N_Y o sistema torna-se mais rápido sem penalizar a sobre elevação, e a equação característica vai ficando próxima dos zeros de malha fechada. Quando NU é igual a N_Y os pólos de malha fechada são os zeros de malha fechada mais o polinômio P (que é igual a 1), e o seguimento da referência é perfeito.

Equação característica em malha fechada quando NU = N_Y :

$$P_{mf} = 1 - 0.8697q^{-1} - 0.5637q^{-2} + 0.7825q^{-3}$$

Pólos: $0.8629 \pm j0.4114$
 -0.8562

Root Locus $p/$ GPC

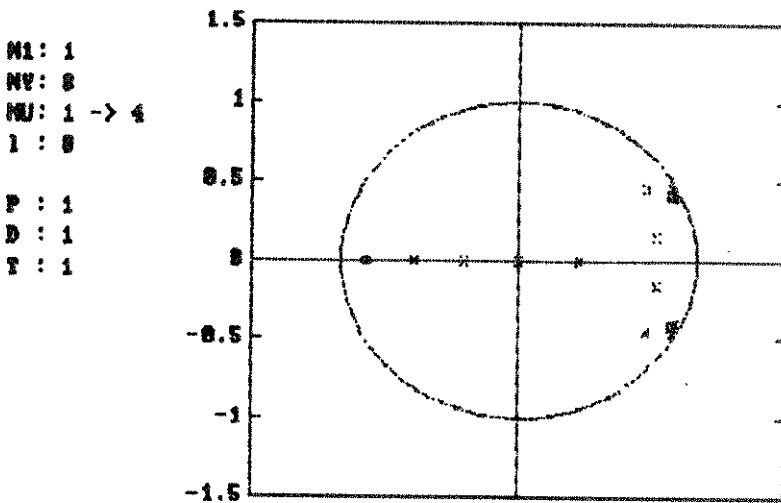


Fig. (6.12) - Lugar das raízes para GPC - variação de NU entre 1 e na

Root Locus $p/$ GPC

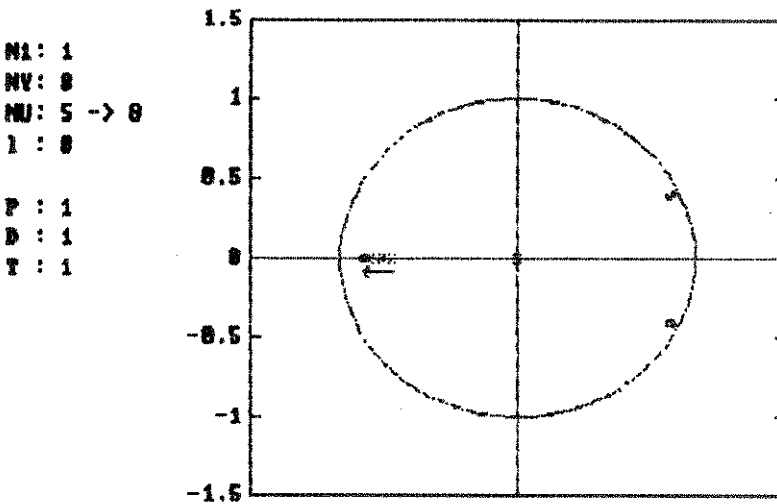


Fig. (6.13) - Lugar das raízes para GPC - variação de NU entre na+1 e NY

Este comportamento pode ser explicado utilizando-se da proposição 4.3 (seção 4.5.4.1), pois sabe-se que quando λ é igual a 0, o fator P^* da equação característica do sistema em malha fechada é dado por:

$$P^* = 1 - \sum_{k=1}^{na+1-NU} \left\{ \sum_{i=NU}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-i)} \right] \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb+1-N1} \left[\sum_{n=N1-1}^{NY-1} p b_{(n+k)} m_{(n+1)} \right] q^{-k}$$

Quando NU varia de 1 a n_a , existem elementos da 2ª parcela na eq. (4.2) que participam do resultado final de P^* . Quando NU varia de n_a+1 até NY somente elementos da 1ª e 3ª parcelas participam da soma total, acarretando uma modificação de comportamento do sistema.

Os movimentos rápidos da saída do motor causaram excessivas oscilações na saída da carga, devido à existência de flexibilidade na junta do robô.

Para valores de NU entre 1 e n_a existem pólos instáveis no controlador, já para valores de NU entre n_a+1 , os pólos do controlador são estáveis (tab. (6.3)). Quando NU é igual a NY as raízes de R^* são os zeros de malha aberta.

Pól. de R^*	NU=1	NU=4	NU=5	NU=8
1ª	2.2604	1.3823	$0.8037 \pm j0.5062$	$0.8629 \pm j0.4114$
2ª	1.2971	0.5509		
3ª	-0.8182	-0.8481	-0.8515	-0.8562

Tabela (6.3) - Raízes do controlador

6.5 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE λ

O GPC é sintonizado com: $N1 = 1$, $NY = 6$, $NU = 1$, $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. São feitas simulações com os valores de λ iguais a 0, 0.001, 0.003, 0.005. As fig. (6.14), fig. (6.15) e fig. (6.16) mostram o comportamento do sistema (saída do motor, saída da carga e sinal de controle, respectivamente) para uma entrada em degrau e diferentes valores de λ .

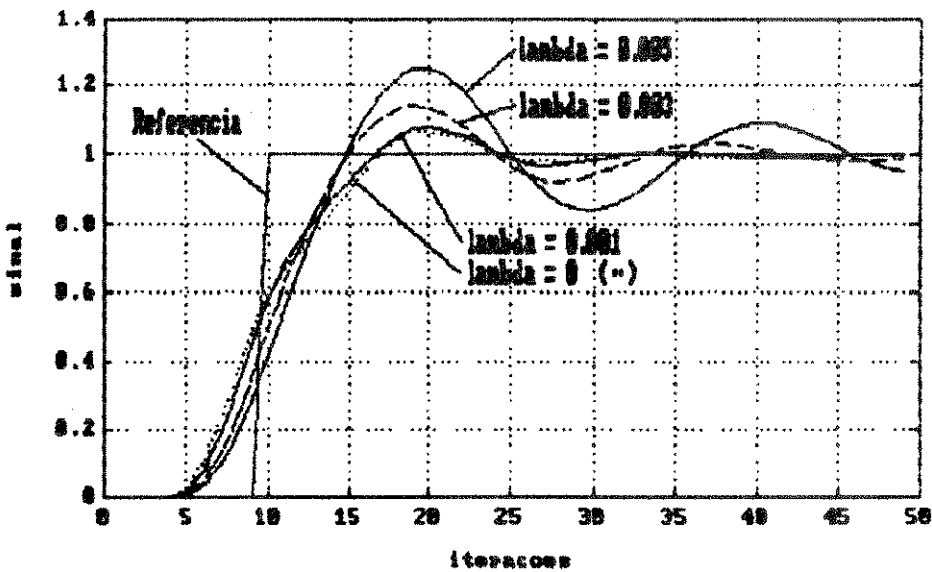


Fig. (6.14) - Posição do motor para λ igual a 0, 0.001, 0.003 e 0.005

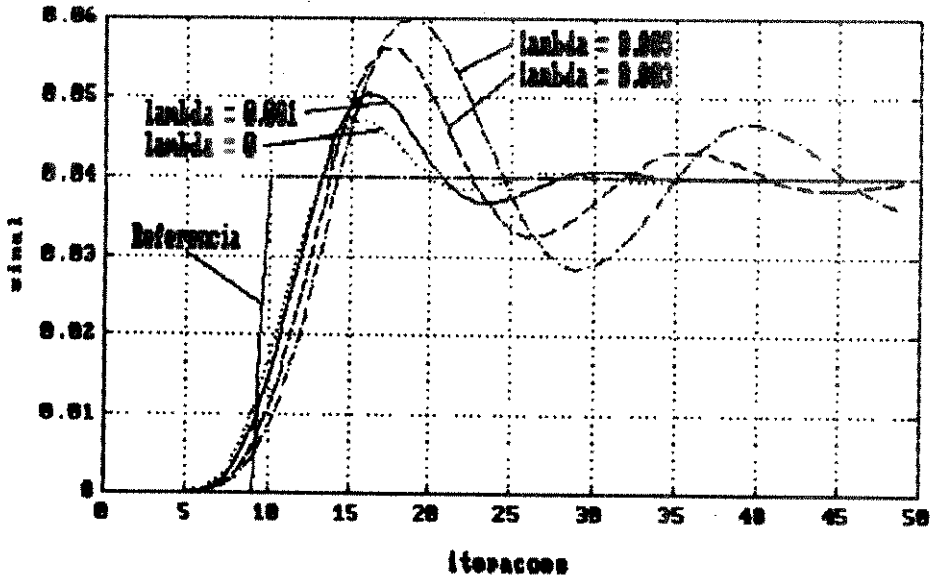


Fig. (6.15) - Posição da carga para λ igual a 0, 0.001, 0.003 e 0.005

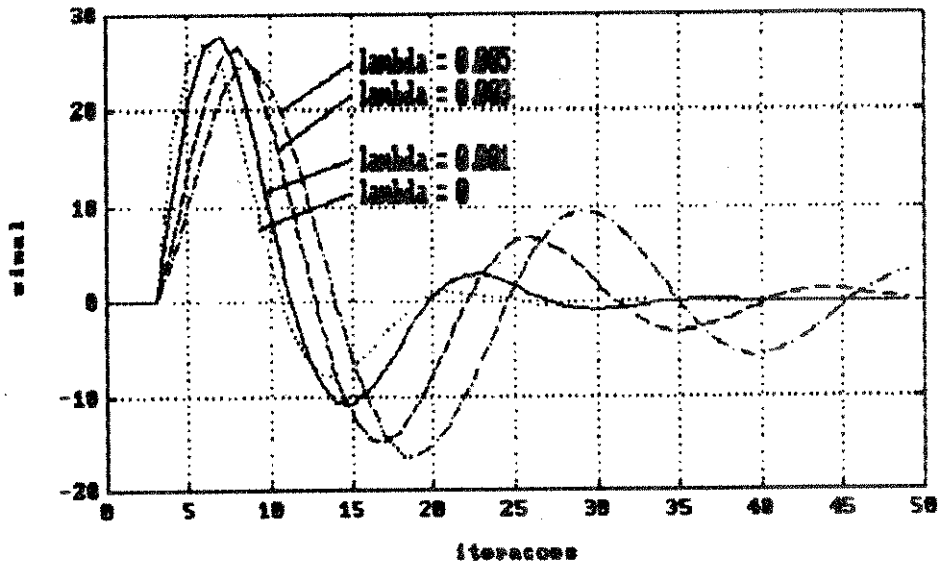


Fig. (6.16) - Sinal de controle para λ igual a 0, 0.001, 0.003 e 0.005

Dos resultados anteriores pode-se observar que:

- a) Ocorre um aumento da sobre-elevação do sistema com aumento de λ .
- b) O nível de controle diminui com aumento de λ .

Pelo lugar das raízes da fig. (6.17) nota-se que os pólos em malha fechada do sistema variam pouco com o aumento, até um certo limite, de λ . Somente um pólo real move-se da origem em direção ao ponto $1+j0$. Após este limite (que nas simulações feitas é da ordem de $\lambda \approx 0.001$) ocorre uma grande variação nos pólos do sistema (tab. (6.4)) com o aumento de λ . Quando λ tende a infinito, observa-se que os pólos de malha fechada tendem para os pólos de malha aberta mais um pólo real em "1" [McIntosh89], ou seja :

$$\text{Quando } \lambda \rightarrow \infty, \text{ Pmf} \rightarrow A(1-q^{-1})$$

lambda	0	0.001	0.005
1º par	$0.7422 \pm j0.4323$	$0.7256 \pm j0.3880$	$0.9073 \pm j0.2810$
2º par	$0.7247 \pm j0.2129$	$0.7315 \pm j0.3147$	$0.6912 \pm j0.4497$
3º	0	0.5031	0.7048

Tabela 6.4 - Pólos do sistema em malha fechada em função do valor de lambda

Root Locus p/ GPC

N1: 1
 NY: 6
 NU: 1
 l: 0 -> 0.0005
 P : 1
 D : 1
 T : 1

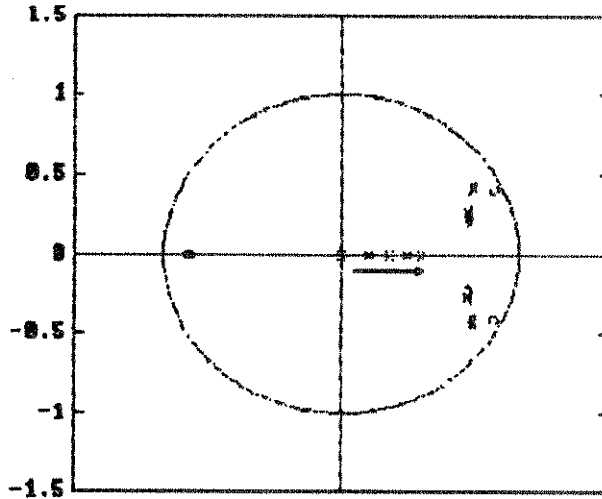


Fig. (6.17) - Lugar das raízes para o GPC - variação de λ

Este comportamento pode ser explicado pela influência de λ no cálculo do vetor M , reescrito a seguir:

$$\underline{M} = \underline{U} \left[\left(H^T H + \lambda I \right)^{-1} H^T \right] \quad (4.38)$$

Para os horizontes $N1=1$, $NY=6$ e $NU=1$, o valor do produto $H^T H$ é igual a 0.0017. Assim pode-se ter uma idéia da magnitude do valor de λ que vai, ou não, influenciar o comportamento do sistema em malha fechada. Este valor pode ser aproximado pela seguinte equação:

$$\rho \mid \text{traço} \left(H^T H \right) \mid / NU \quad (6.1)$$

onde ρ é uma constante tal que $0.5 \leq \rho \leq 1$.

O aumento do valor de λ aumenta a estabilidade do controlador, como pode ser observado pelas raízes do polinômio R^* na tab. (6.4).

Pól. de R^*	$\lambda=0$	$\lambda=0.001$	$\lambda=0.005$
1ª	2.1190	$1.1610 \pm j0.5624$	$0.6273 \pm j0.6122$
2ª	1.1814		
3ª	-0.8156	-0.7675	-0.6522

Tabela (6.4) - Raízes do controlador

6.6 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO FILTRO $P(q^{-1})$

O GPC é sintonizado com: $N1 = 1$, $NY = 6$, $NU = 1$, $\lambda = 0$, $D = 1$ e $T = 1$. São feitas simulações para os seguintes valores para o filtro P : $P = 1$, $P = 2 - 1q^{-1}$ (raiz em $q = 0.5$), $P = 4 - 3q^{-1}$ (raiz em $q = 0.75$). As fig. (6.18), fig. (6.19) e fig. (6.20) mostram o comportamento do sistema (saída do motor, saída da carga e sinal de controle, respectivamente) para uma entrada em degrau e diferentes valores para P .

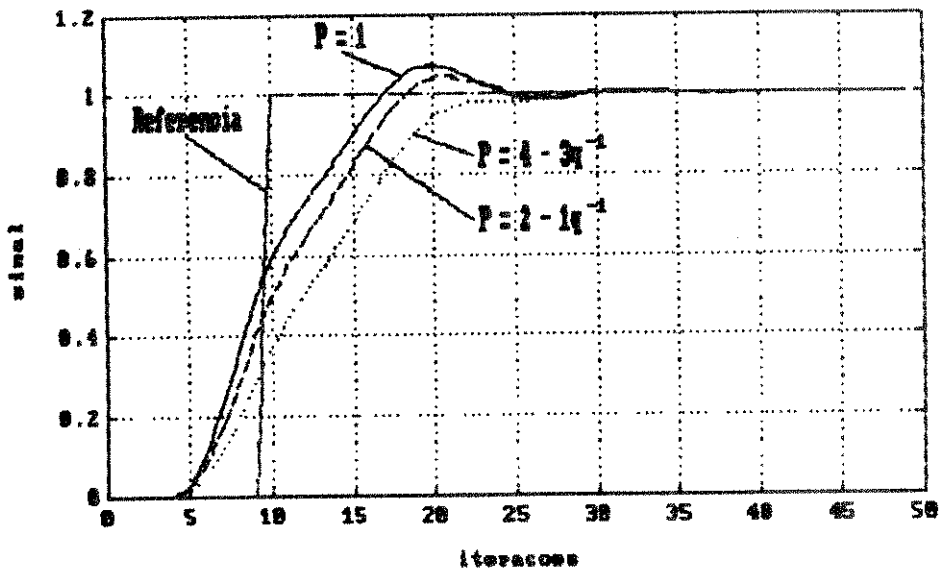


Fig. (6.18) - Posição do motor para diversos valores de P

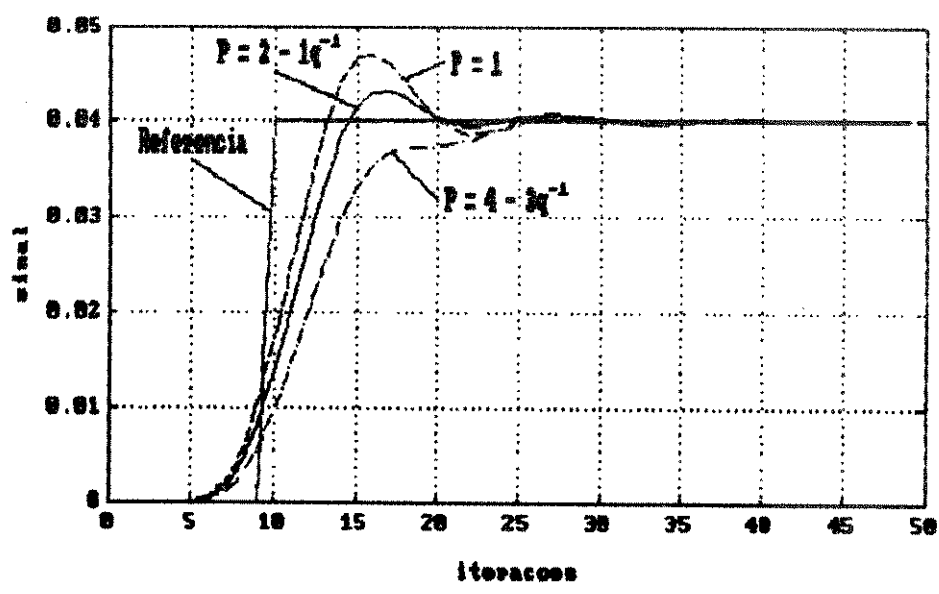


Fig. (6.19) - Posição da carga para diversos valores de P

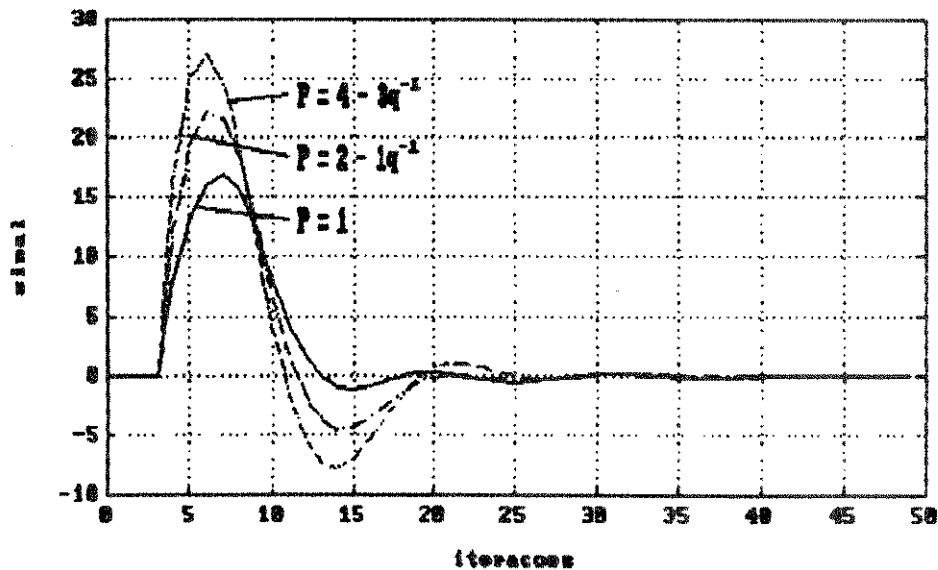


Fig. (6.20) - Sinal de controle para diversos valores de P

Dos resultados anteriores pode-se observar que:

- a) Ocorre uma diminuição da sobrelevação quando o módulo dos pólos de P aumentam.
- b) O sistema torna-se mais lento quando o módulo dos pólos de P aumentam.
- c) Ocorre uma diminuição do sinal de controle quando o módulo dos pólos de P aumentam.

Pela tab. (6.6) observa-se o comportamento dos pólos em malha fechada em função dos pólos de P. A segunda metade da tab. (6.6) apresenta os pólos em malha fechada descritos pela sua frequência natural e amortecimento (frequência de amostragem igual a 0.01 seg.). Note-se que o aumento módulo do pólo de P, aumenta o fator de amortecimento e diminui a freq. natural dos pólos dominantes.

Pól. P	0		0.5		0.75	
1 ^o . par	0.7422 ± j0.4323		0.7426 ± j0.4494		0.7500 ± j0.4633	
2 ^o . par	0.7247 ± j0.2129		0.7427 ± j0.1652		0.7572 ± j0.0784	
	Wn	ζ	Wn	ζ	Wn	ζ
1 ^o . par	54.89	0.28	56.23	0.25	56.75	0.22
2 ^o . par	40.05	0.70	35.02	0.78	29.17	0.94

Tabela 6.6 - pólos do sistema em malha fechada - valor, frequência natural e amortecimento em função dos pólos de P

6.7 - ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM

O GPC é sintonizado com: $N1 = 1$, $NY = 8$, $NU = 1$, $\lambda = 0$, $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. São feitas simulações com o modelo contínuo de uma junta flexível de um robô (Capítulo 2, eq. (2.1) e eq. (2.2) com valores numéricos dados por 2.5) com período de amostragem de 0.005 seg., 0.01 seg. e 0.02 seg..

Na tab. (6.7) tem-se os resultados de desempenho da simulação da atuação do GPC em um modelo amostrado de três maneiras diferentes. As simulações foram denominadas de S1, S2 e S3.

período de amostragem		0.005(S1)	0.01(S2)	0.02(S3)	0.01(S4)
motor	tp. de subida	0.05	0.06	0.10	0.11
	tp. de acomod.	0.20	0.12	0.20	0.20
	sobreelevação	7.47	2.43	0.02	0
carga	tp. de subida	0.03	0.04	0.10	0.10
	tp. de acomod.	0.35	0.08	0.18	0.19
	sobreelevação	41.67	2.17	0.02	0
nível de cont.	máx	46.1	17.2	6.2	6.2
	mín	-18.3	-2.0	0	0

Tabela 6.7 - Resultados de desempenho do GPC

Dos resultados anteriores pode-se observar que:

- A saída tornou-se mais lenta com o aumento do período de amostragem.
- Ocorreu uma diminuição da sobreelevação com o aumento do período de amostragem.
- O nível do sinal de controle diminuiu com o aumento do período de amostragem.

Nota-se que as observações feitas quando aumenta-se o período de amostragem são as mesmas de quando o valor de NY aumenta. Isto é devido ao fato de que, em relação ao tempo real, o aumento do período de amostragem, para um NY constante, aumenta o horizonte de previsão em segundos. Isto é, Em S1 ($NY-N1$) igual a 7 equivale a 0.035 seg. e, em S3, ($NY-N1$) igual a 7 equivale a 0.14 seg.. Portanto o horizonte de previsão, em segundos, aumentou, o que equivale a aumentar NY com o período de amostragem constante.

De outra forma, pode-se sintonizar o GPC com: $N1 = 2$, $NY = 16$, $NU = 1$, $\lambda = 0$, $P = 1$, $D = 1$ e $T = 1$. E, o período de amostragem é 0.01 seg.. Os resultados de desempenho desta simulação encontram-se na tab. (6.7) com o nome de simulação S4. Nota-se que os horizontes de previsão inicial e final do caso de simulação S4 são o dobro dos horizontes do caso de simulação S3, e o período de amostragem é a metade. O objetivo foi obter os mesmos horizontes, em segundos, para as simulações S3 e S4. O horizonte de controle não foi alterado a fim de manter a característica de ter somente um incremento de sinal de controle disponível nos cálculos. Esta característica é mais significativa que as diferenças nos tempos do horizonte de controle.

Pela tab. (6.7) nota-se que os resultados de desempenho entre S3 e S4 são iguais. Na tab. (6.8) tem-se os pólos de malha fechada das simulações S3 e S4. Na segunda metade desta tabela os pólos estão representados pela sua frequência natural e amortecimento, forma que permite a sua comparação. Nota-se que os pólos em malha fechada são os mesmos, o que explica o mesmo comportamento.

caso de sim.	S3		S4	
1º par	0.2871 ± j0.6460		0.7051 ± j0.4582	
2º par	0.7126 ± j0.0909		0.8466 ± j0.0498	
	Wn	ζ	Wn	ζ
1º par	60.18	0.29	60.18	0.26
2º par	17.71	0.93	17.50	0.94

Tabela (6.8) - pólos do sistema em malha fechada - valor, frequência natural e amortecimento

Entre os casos de simulação S1, S2 e S3, os pólos do controlador saíram de uma região de instabilidade (S1 e S2) para uma região de estabilidade (S3). Porém, contrariando as igualdades apresentadas entre as simulações S3 e S4, os pólos alocados para o controlador na simulação S4 foram instáveis (tab. (6.9)).

	raízes de R*	
S3	0.3564 ± j0.9308	-0.6563
S4	1.6114 ± j0.6639	-0.8147

Tabela (6.9) - pólos do controlador das sim. S3 e S4

6.8 - COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO ENTRE GPC, CAP E CPVP

A seguir faz-se um estudo comparativo do desempenho do controlador GPC (com e sem referência pré-especificada), do controlador por Alocação de Pólos - CAP (Capítulo 3) e do Controlador Proporcional de Velocidade e Posição - CPVP (Capítulo 2), quando utilizados no controle de posição de uma junta isolada de robô, descrita no Capítulo 2.

Como base para a sintonia dos controladores, utiliza-se aqui as seguintes restrições de projeto para o sistema.

- i) O nível de controle deve se manter entre ± 100 unidades.
- ii) A sobrelevação da saída deve ser menor que 5%, para uma entrada em degrau.

A partir destas condições procura-se a sintonia dos controladores tal que o sistema apresenta o menor tempo de subida. No GPC o ajuste é feito pela variação dos horizontes e filtros baseada no conhecimento adquirido nas seções 6.2 a 6.7. No controle por Alocação de Pólos o ajuste é feito com o auxílio do LRR (seção 3.4).

Assim sendo, utiliza-se para o GPC os seguintes parâmetros de projeto:

$$N1=1, NY=8, NU=1 \text{ e } \lambda=0,$$

$$P=1, D=1$$

$$T=Lrr(10^5) = 1 - 2.3157q^{-1} + 2.1527q^{-2} - 0.9205q^{-3} + 0.1951q^{-4}$$

O polinômio T foi escolhido de acordo com os diretrizes da seção 5.3. Isto é, a ordem de T satisfaz às eqs. (5.5), (5.6) e (5.7), e suas raízes pertencem ao LRR.

Para o Controlador por Alocação de Pólos os parâmetros de projeto são:

$$A_m = Lrr(1250) = 1 - 2.9984q^{-1} + 3.5913q^{-2} - 2.0312q^{-3} + 0.4573q^{-4}$$

não há cancelamento de zeros de malha aberta

$$A_o = Lrr(10^5) = 1 - 2.3157q^{-1} - 2.1527q^{-2} - 0.9205q^{-3} + 0.1951q^{-4}$$

Para o CPVP os ganhos utilizados para o controlador são:

$K_p=29$ e $K_I=1$

A seguir, nas fig. (6.20), fig. (6.21) e fig. (6.22), encontram-se as respostas dos três sistemas a uma entrada em degrau.

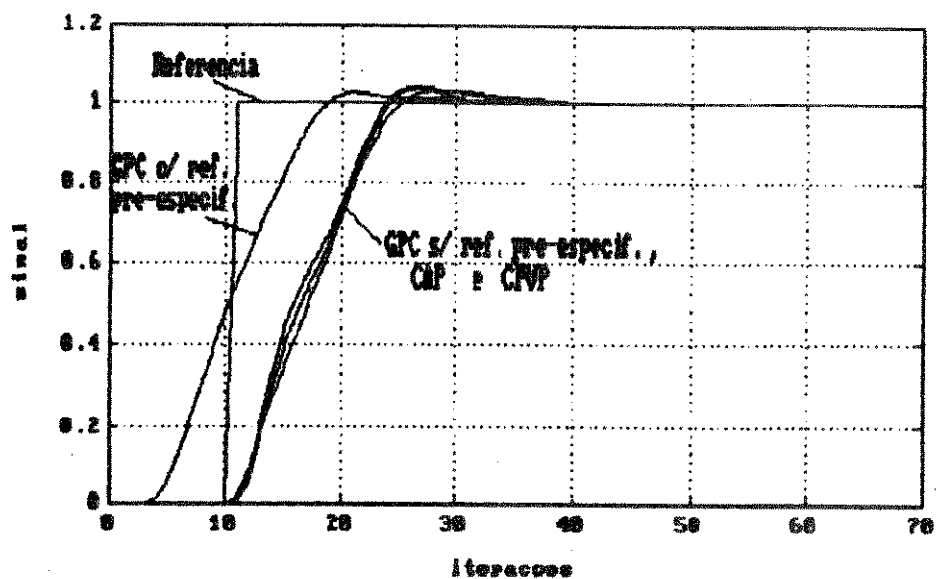


Fig. (6.21) - Posição do motor para o GPC (com/sem referência pré-especificada), CAP e CPVP

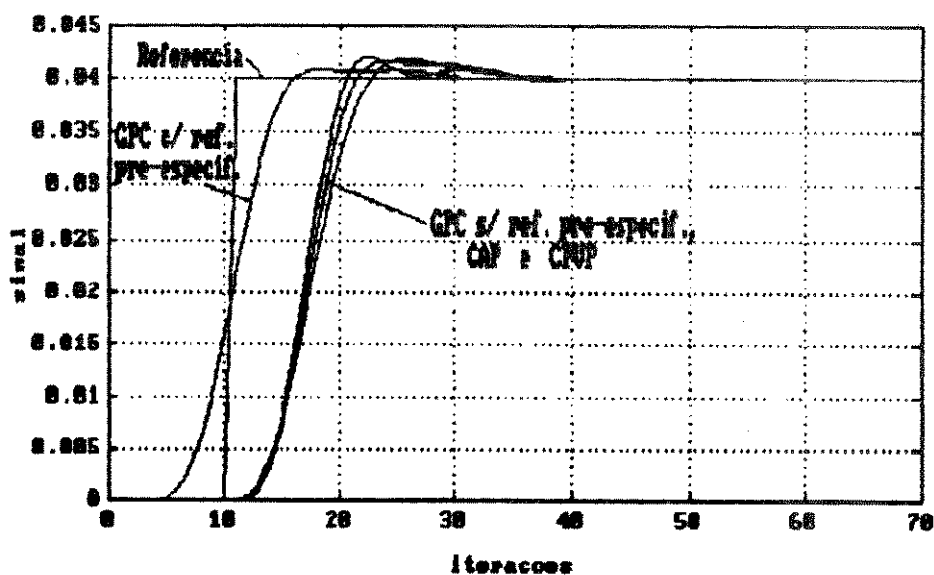


Fig. (6.22) - Posição da carga para o GPC (com/sem referência pré-especificada), CAP e CPVP

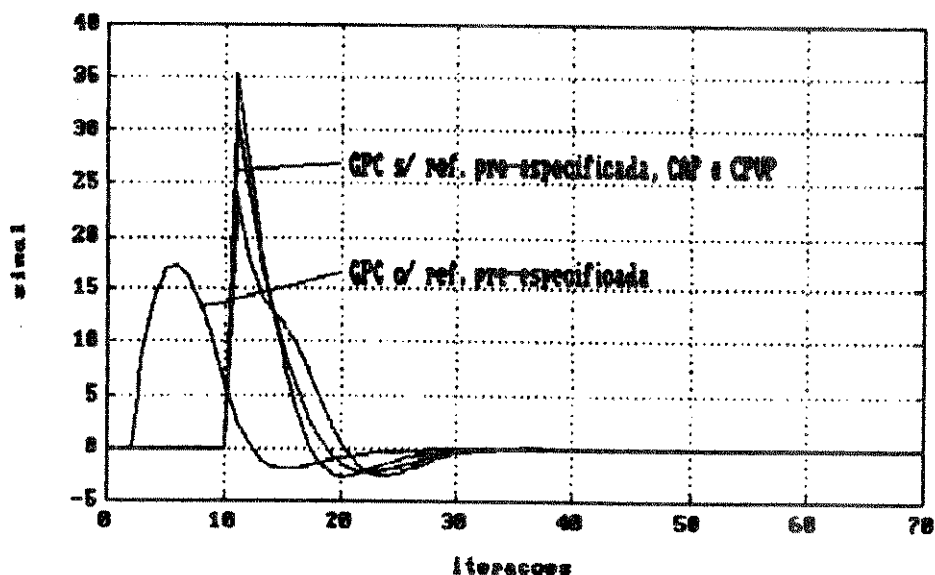


Fig. (6.23) - Sinal de controle para o GPC (com/sem referência pré-especificada), CAP e CPVP

Dos resultados acima pode-se observar que:

- a) O GPC com referência pré-especificada apresenta melhor desempenho.
- b) O desempenho dos outros métodos de controle, incluso o GPC sem referência pré-especificada, é semelhante.

Portanto, nota-se que a inclusão de referência pré-especificada no GPC é o fator determinante para a seu melhor desempenho.

O cálculo do limite de estabilidade para o GPC e para o CAP, nas sintonias anteriormente descritas, mostra que estes algoritmos de controle possuem a mesma robustez quando em presença de dinâmicas não modeladas. Porém, se implementados adaptativamente, o CAP torna-se instável se as ordens do modelo estimada são sobre-parametrizadas, fato que não ocorre com o GPC [Clarke87].

O GPC é limitado em sua possibilidade de sintonia pela flexibilidade existente entre o motor e a carga. Isto é, se o movimento do motor é muito rápido, a carga apresenta excessiva oscilação (veja figs. (6.9) e (6.10)). Isto não ocorre para o CAP e o CPVP. Ou seja, se o parâmetro de comparação fosse somente a posição do motor, o GPC teria um desempenho melhor, e o CAP e o CPVP não.

Pode-se concluir que o GPC possui a melhor performance entre os controladores pois:

- É mais robusto que o CAP, se forem implementados adaptativamente, e possuem a mesma robustez quando em presença de dinâmicas não modeladas.
- O desempenho do GPC é melhor que os outros controladores, e, se não for possível utilizar a referência pré-especificada, seu desempenho é no mínimo igual aos outros controladores.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

7.1 - CONCLUSÕES

O trabalho teve como objetivo o estudo do controlador preditivo generalizado - GPC, sob os aspectos do comportamento determinístico (resposta a mudanças no sinal de referência) e da robustez da estabilidade do sistema em malha fechada. Estudou-se também a aplicação do GPC em sistemas dinâmicos mal amortecidos, utilizando como exemplo uma junta isolada de robô. Para fins de comparação com o GPC, utilizou-se a técnica de controle por alocação de pólos clássica - CAP, devido a que o CAP é uma estratégia de controle simples, cuja base teórica já está bastante estudada e baseada em um modelo geral para o controlador. Mostrou-se que a lei de controle do GPC pode ser obtida na forma deste mesmo controlador geral.

A equação característica do sistema em malha fechada utilizando o controlador GPC pode ser escrita em função dos parâmetros de ajuste do controlador, isto é, horizontes e ponderações utilizadas na função de custo, mas é bem conhecido na literatura que não é simples a obtenção do caminho inverso. Isto é devido à complexidade dos cálculos da equação característica e à natureza discreta dos horizontes do controlador. Demonstrou-se que com determinadas especificações dos horizontes de previsão e de controle é possível calcular *a priori* o número de pólos na origem do sistema em malha fechada. Isto é feito através de condições que relacionam os parâmetros de projeto com a quantidade de pólos na origem. A partir destas condições também pode-se especificar um sistema em malha fechada com número mínimo de pólos na origem, fato que, em geral, aumenta sua robustez.

Também no estudo da equação característica é conhecido que, através de casos particulares na sintonia do GPC, é possível especificar *a priori* os pólos desejados para o sistema em malha fechada. Porém o método clássico de alocação de pólos apresenta vantagens em relação ao GPC sintonizado desta forma. Estes métodos de sintonia são úteis no estudo da tendência dos pólos em malha fechada quando os horizontes do controlador tendem para algum destes casos particulares.

É conhecido na literatura que o controlador GPC, quando implementado na forma de um controlador adaptativo, é mais robusto que o GMV e que o Controlador por Alocação de Pólos. Neste trabalho estudou-se a robustez do sistema na presença de dinâmicas não modeladas. Analisou-se o diagrama do limite de estabilidade e a influência do polinômio de projeto T neste diagrama, e obteve-se diretrizes para a escolha deste polinômio. Através destas diretrizes pode-se melhorar a robustez do sistema em malha fechada.

A obtenção de condições que relacionam o número de pólos na origem com os parâmetros de projeto e de condições que relacionam o comportamento do diagrama do limite de estabilidade com os parâmetros de projeto são as principais contribuições deste trabalho.

Neste trabalho simulou-se a utilização do GPC em sistemas flexíveis o problema do controle de posição de uma junta isolada de robô. Mostrou-se que nestes caso a incorporação da referência pré-especificada permite um seguimento mais suave da referência, importante no controle de sistemas flexíveis [Sasaki90]. A antecipação de variações na referência é o fator determinante para o melhor desempenho do GPC quando comparado com outras estratégias de controle não preditivas, como o Controlador Proporcional de Velocidade e Posição e o Controlador por Alocação de Pólos. Estudou-se a influência dos parâmetros de projeto no desempenho do GPC no controle de uma junta isolada de robô, o que permite estabelecer regras heurísticas da influência de cada parâmetro de projeto. Estes resultados são representativos para sistemas mal amortecidos em geral.

Em relação a trabalhos futuros pode-se sugerir a continuação do estudo da equação característica, a fim de obter novas relações, propriedades e influências dos parâmetros de projeto. Devido a existência de um conhecimento heurístico da influência dos parâmetros de projeto do GPC, e sua sintonia não é direta, pode-se sugerir a construção de um modo supervisor para sintonia automática do GPC. Como foi discutido no capítulo 6, o conhecimento sobre a sintonia do GPC contém grande número de informações pouco precisas, como por exemplo, "Alto" "Baixo" "Lento" "Rápido", etc... Portanto este supervisor poderia ser baseado em lógica difusa, também denominada, lógica nebulosa, que é adequada para o tratamento deste tipo de informação. Supervisores baseados em lógica difusa já foram testados com sucesso na sintonia automática de controladores tipo PID [Lemke85] [Oliveira91]. Pode-se sugerir também a continuação do estudo do diagrama do limite de estabilidade e da alocação dos pólos fora da origem como uma forma de aumentar a robustez do sistema em malha fechada.

Outra importante linha de pesquisas atualmente sobre o GPC é o desenvolvimento de seu algoritmo utilizando, para a previsão do comportamento do processo, outros tipos de modelos que não os do tipo ARMA, por exemplo, modelos não lineares, ou também o desenvolvimento do algoritmo GPC com restrições, como amplitude e taxa de variação, no sinal de controle e no sinal de saída, uma vez que estas restrições frequentemente estão presentes na prática.

Utilizou-se na simulação dos algoritmos de controle de programas de computador feitos em AT-Matlab e Pascal. Uma vez que não era objetivo do trabalho aplicações

em tempo real, a linguagem AT-Matlab mostrou-se adequada e eficiente, mesmo implicando em excessiva lentidão de tempo de processamento quando comparada com linguagens como PASCAL ou C. Testou-se com sucesso uma interface, através de leitura e escrita de arquivos, entre AT-Matlab e Pascal no simulador do algoritmo GPC. Neste simulador os cálculos eram feitos em AT-Matlab, devidos às facilidades de implementação, e a interface homem-máquina em Pascal, devido à sua maior versatilidade.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- [Acundeger90]: Acundeger, E.
"Synththese de Methodes de Commande Predictive"
Rapport Intermediaire n° II, I3E/Univ. de Nice-Sophia Antipolis, 1990
- [Astrom84]: Astrom, K. J.; Hagande, P.; Sternby, J.
"Zeros of Sampled Systems"
Automática, vol. 20, n° 1, pag 31/38, 1984
- [Astrom89]: Astrom, K. J. e Wittenmark, B.
"Adaptive Control"
Addison Wesley Publishing Company, Inc. - 1989
- [Astrom90]: Astrom, K. J. e Wittenmark, B.
"Computer-Controlled Systems, Theory and Design"
Prentice-Hall, Inc. - 1990
- [Bitmead90]: Bitmead, R. R.; Gevers, M.; Wertz, V.
"Adaptive Optiaml Control : The Thinking Man's GPC"
Prentice-Hall, Inc. - 1990
- [Bruijn86]: Bruijn, P., Verbruggen, H., Appeldoorn, P.
"Predictive Control: A Comparison and Simple Implementation"
Proc. of IFAC Conference on Low Cost Automation, Valencia, Espanha, 1986
- [Clarke75]: Clarke, D. W.; Gawthrop, P. J.
"Self-Tunning Controller"
Proc. of IEE, vol. 122, n° 9, Sep. 1975
- [Clarke87]: Clarke, D. W.; Mohtadi, C.; Tuffs, P. S.
"Generalized Predictive Control - Part 1 - The Basic Algorithm;
Part 2 - Extensions and Interpretations"
Automática, vol. 23, n° 2, pag 137/160, 1987
- [Clarke89]: Clarke, D. W.; Mohtadi, C.
"Proprieties of Generalized Predictive Control"
Automática, vol. 25, n° 6, pag 859/875, 1989

- [Clarke90]: Clarke, D. W.
"Generalized Predictive Control"
Proc. CIM, Europe Workshop, Paris, pag 57/75, 1990
- [Coelho90]: Coelho, A. R.; Amaral, W. C.; Yamakami, A.; Gomes, J.
"Controle Preditivo Generalizado: Aspectos Teóricos e Implementação"
Anals do 8º CBA, Belém-Pa, pag 32/37, 1990
- [Craig86]: Craig, J. J.
"Introductions to Robotics Mechanics & Control"
Addison Weley Publishing Company - 1986
- [Crisalle90]: Crisalle, O. D.; Seborg, D. E.; Mellichamp D. A.
"Theoretical Analisis of Long-Range Predictive Controllers"
Proc. of ACC Pittsburg, vol. 1, pag 570/576, Jun. 1990
- [Cutler80]: Cutler, C. R.; Ramaker B. C.
"Dynamic Matriz Control - a Computer Control Algorithm"
Proc, of JACC, San Francisco, U.S.A, 1980
- [Favier88]: Favier, G.; Dubois, D.; Rougerie, C.
"On Predictive Control: A Comparison and Some Extensions"
Int. INRIA Conf. on Analysis & Optimization of Systems, Juan Les Pins, France, pag 798/809, May 1988
- [Franklin88]: Franklin, G.; Powell, J. D.; Nalini, A. E..
"Feedback Control of Dynamic Systems"
Addison Wesley Publishing Company, Inc. - 1988
- [Gimeno88]: Gimeno, L.
"Controle de Posição de uma Junta Isolada"
Notas em Modelagem e Controle de Robôs nr. 01/88 - DCA/FEE/Unicamp - 1988
- [Good85]: Good, M. C.; Sweet, L. M.; Strobel, K. L.
"Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems"
Trans. of the ASME - J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 107, pag 53/59, Mar. 1985
- [Kailath80]: Kailath, T.
"Linear Systems"
Prentice-Hall Information and System Sciences Series - 1980

- [Keyser88]: Keyser, R. M.; Van de Velde, Ph. A.; Dumortier, F.
"A Comparative Study of Self Adaptive Long-Range Control Methods"
Automática, vol 24, nº 2, pag 149/163, 1988
- [Kwakernaak72]: Kwakernaak, H.; Sivan, R.
"Linear Optimal Control"
Wiley Interscience - 1972
- [Kwok90]: Kwok, K. Y.; Clanachan, A. S.; Finegan, B.; Shah, S. L.
"Long-Range Predictive Control of Arterial Blood Pressure"
Proc. of the 29th CDC, Honolulu, Hawaii, pag 2800/2805, Dec. 1990
- [Kramer91]: Kramer, K.; Unbehauen, H.
"Predictive Adaptive Control: Comparison of Main Algorithms"
Proc. of European Control Conference, Grenoble, France, pag 327/332,
Jul. 1991
- [LambertE87]: Lambert, E.
"Process Control Applications of Long-Range Prediction"
D. Phil. Thesis - University of Oxford, Engl. - 1987
- [LambertM87]: Lambert, M.
"Adaptive Control of Flexible Systems"
D. Phil. Thesis - University of Oxford, Engl. - 1987
- [Lelic87]: Lelic, M. A.; Wellstead, P. E.
"Generalized pole-placement self-tuning controller: Part 1. Basic
Algorithm; Part 2. Application to Robot Manipulator"
International Journal of Control, vol. 46, nº 2, pag 547/601, Nov 1987
- [Lemke85]: Lemke, H. R. N.; De-zhao, W.
"Fuzzy PID Supervisor"
Proc. of 24th CDC, Ft Lauderdale, FL, pag 602/608, Dec. 1985
- [Lemos85]: Lemos, J. M.; Mosca, E.
"A Multipredictor-Based LQ Self-Tuning Controller"
Proc. of 7th IFAC Symp. on Identification and system Parameter Estimation,
pag 137/141, 1985

- [Luh83]: "Conventional Controller Design for Industrial Robots: A Tutorial"
IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. 13, nº 3, pag 298/316,
May/Jun. 1983
- [Menga79]: Menga, G., Mosca, E.
"MUSMAR: a new class of multivariable adaptive regulators"
Proc. of IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation,
Darmstadt, Alemanha, 1979
- [McIntosh89]: McIntosh, A. R.; Shah, S. L.; Fisher, D. G.
"Selection of Tuning Parameters for Adaptive Generalized Predictive
Control"
Proc. of ACC Pittsburg, vol. 2, pag 1846/1851, Jun. 1989
- [Mohtadi86a]: Mohtadi, C.
"Studies in Advanced Self-Tuning Algorithms"
D. Phil. Thesis - University of Oxford, Engl. - 1986
- [Mohtadi86b]: Mohtadi, C.; Clarke D. W.
"Generalized Predictive Control, LQ, or Pole Placement: A Unified
Approach"
Proc. of 25th CDC, Athens, Greece, Dec. 1986
- [Morari89]: Morari, M.; Zafirou, E.
"Robust Process Control"
Prentice-Hall - 1989
- [Nazetta91]: Nazetta, R.
"Um Sistema Baseado em Conhecimento para Configuração e Supervisão de algoritmos de Controle Adaptativo"
Tese de Mestrado - DCA/FEE/UNICAMP - 1991
- [Oliveira91]: Oliveira, P.; Lima, P.; Sentieiro, P.
"Fuzzy Supervision on Intelligent Control Systems"
Proc. of European Control Conference, Grenoble, France, pag 1226/1231 pag.
Jul. 1991

- [Oliveira92]: Oliveira, G. H. C; Amaral, W. C.; Latre, L. G.
"O Controlador Preditivo Generalizado com Ajuste do Polinômio Observador para Aumento da Robustez"
A ser publicado nos Anais do 9ª CBA, Vitória, ES, Set. 1992
- [Paul81]: "Robot Manipulators: Mathematics, Programing and Control"
Series in Artificial Intelligence - MIT Press Cambridge - 1981
- [Peterka82]: Peterka, V.
"Predictor Based Self-Tuning Control"
Proc. of 6th IFAC Symp. on Identification and system Parameter Estimation, pag 873/878, 1985
- [Prada91]: Prada, C.; Vega, V.
"GPC Control of a Pulp Dryer"
Proc. of 9th IFAC/IFORS Symposium, Budapest, Hungary, 1991
- [Richalet78]: Richalet, J.; Rault, A.; Testud, J. L.; Papon J.
"Model Predictive Heuristic Control: Aplications to Industrial Process"
Automática, vol. 14, nº 5, pag 413/428, 1978
- [Robinson91]: Robinson, B. D.; Clarke, D. W.
"Robustness Effects of a Prefilter in Generalized Predictive Control"
IEE Proceedings-D, vol. 138, nº 1, pag 2/8, Jan. 1991
- [Rossiter91]: Rossiter, J. A.; Kouvaritakis, B; Dunnett, R. M
"Application of Generalized Predictive Control to a Boiler-Turbine Unit for Electricity Generation"
IEE Proceedings-D, vol. 138, nº 1, pag 59/67, Jan. 1991
- [Sasaki90]: Sasaki, M.; Inooka, H.; Ishikura, T.
"Manual Control of Flexible Arm and its Application to an Automatic Control System"
IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 20, nº 3, MAY/JUN 1990

[Samaan89]: Samaan, M.

"Synthese et Supervision des lois de Commande Adaptive"

Thèse de Doctorat - Institut National Polytechnique de Grenoble, França -
1989

[Seborg86]: Seborg, D. E.; Edgar, T. F.; Shah, S. L.

"Adaptive Control Strategies for Process Control: A Survey"

AIChE Journal, vol. 32, nº 6, pag 881/913, Jun. 1986

[Souza90]: Souza, M. B.; Lima, E. L.

"Simulação do Controle Preditivo Generalizado numa Coluna de Destilação"

Anals do 8º CBA, Belém-Pa, pag 99/104, 1990

[Soeterboek90]: "Predictive Control : A Unified Approach"

Tese de Doutorado - Technische Universiteit Delft - Holanda, 22/Nov/1990

[Wittenmark90]: Wittenmark, Björn e Astrom, Karl J.

"Some Aspects on Pole-Placement Design"

Proc. of 11th IFAC, World congress, vol. 2, Tallinn, Estonia, USSR,
pag 167/172, 1990

[Ydstie84]: Ydstie, B. E.

"Extended Horizon Adaptive Control"

Proc. of 9th IFAC World Congress, Budapest, Hungria, 1984

APÉNDICE

APÊNDICE A

DEMONSTRAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES DA SEÇÃO 4.5 (CAPÍTULO 4)

A.1 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.1

O polinômio característico do sistema em malha fechada, descrito pela eq. (4.48), pode ser reescrito como segue:

$$Pmf = \tilde{A} T + q^{-1} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (\tilde{A} I_j + B F_j) \right] \quad (P1.1)$$

Sabe-se, pelas eq. (4.16) e eq. (4.21), que:

$$q^j (P T - \tilde{A} E_j) = F_j \quad (4.16)$$

e

$$q^j (B E_j - T H_j) = I_j \quad (4.21)$$

Multiplicando-se a eq. (4.16) por B e a eq. (4.21) por \tilde{A} , e somando-se os resultados, obtém-se:

$$\tilde{A} I_j + B F_j = (B P T - \tilde{A} T H_j) q^j \quad (P1.2)$$

Substituindo-se a eq. (P1.2) na eq. (P1.1) obtém-se:

$$Pmf = \tilde{A} T + q^{-1} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (B P T - \tilde{A} T H_j) q^j \right] \quad (P1.3)$$

ou

$$Pmf = T \left\{ \tilde{A} + q^{-1} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (B P - \tilde{A} H_j) q^j \right] \right\} \quad (4.49)$$

O filtro T é, então, um fator do polinômio característico Pmf, provando a primeira parte da proposição 4.1.

A presença do fator "q^j", na eq. (4.49), possibilita a existência de parcelas em que o operador "q" esteja elevado a um número positivo. Porém isto não ocorre devido ao fato de que (B P - \tilde{A} H_j) possui como fator o elemento "q^{-j}", que cancela com "q^j". Este fato é demonstrado a seguir:

Sabe-se, pelas eq. (4.21) e eq. (4.16), que:

$$B = (T H_j) / E_j + q^{-j} (I_j) / E_j \quad (4.21)$$

e

$$\tilde{A} = (P T) / E_j - q^{-j} (F_j) / E_j \quad (4.16)$$

Multiplicando-se a eq. (4.21) por P e a eq. (4.16) por H_j, e, subtraindo-se os resultados, obtém-se:

$$(P B - \tilde{A} H_j) = q^{-j} (I_j P / E_j + F_j H_j / E_j) \quad (P1.4)$$

o que prova a segunda parte da proposição 4.1.

A.2 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.2

Pelas eq. (4.16) e eq. (4.21) tem-se que:

$$T = (E_j \tilde{A}) / P + q^{-j} (F_j) / P \quad (4.16)$$

$$E_j B = T H_j + q^{-j} I_j \quad (4.21)$$

Substituindo-se o polinômio T da eq. (4.21) pela eq. (4.16) obtém-se:

$$E_j B = \left[(E_j \tilde{A} + q^{-j} F_j) / P \right] H_j + q^{-j} I_j$$

$$(P B / \tilde{A}) = H_j + q^{-j} (P I_j + F_j H_j) / (E_j \tilde{A}) \quad (4.31)$$

ou

$$(P B - \tilde{A} H_j) = q^{-j} (P I_j + F_j H_j) / E_j$$

que:

Definindo-se Re_j como sendo: $Re_j(q^{-1}) = (P I_j + F_j H_j) / E_j$, pode-se dizer

$$(P B - \tilde{A} H_j) = q^{-j} (Re_j) \quad (P2.1)$$

Define-se o polinômio $V_j(q^{-1})$ como sendo:

$$V_j = (P B - \tilde{A} H_j) m_j q^{j-1} \quad (P2.2)$$

ou,

$$V_j = (Re_j) m_j q^{-1}$$

Os elementos de V_j são descritos pela seguinte fórmula:

$$v_{j,k} = (p b_{(j-1+k)} - \sum_{i=0}^{\min(na+1-k, j-1)} \tilde{a}_{(i+k)} h_{(j-1-i)}) m_j \quad (P2.3)$$

onde:

$$V_j = v_{j,1} q^{-1} + v_{j,2} q^{-2} + \dots + v_{j, nv_j} q^{-nv_j}$$

$$e \quad PB(q^{-1}) = P(q^{-1})B(q^{-1}) = pb_0 + pb_1 q^{-1} + \dots + pb_{npb} q^{-npb}$$

Através da eq. (P2.3), a equação de V_j , eq. (P2.2), pode ser reescrita como sendo:

$$V_j = \sum_{k=1}^{np+nb-(j-1)} (pb_{(j-1+k)} m_j) q^{-k} - \sum_{k=1}^{na+1} \left[\sum_{i=0}^{\min(na+1-k, j-1)} \tilde{a}_{(i+k)} h_{(j-1-i)} m_j \right] q^{-k} \quad (P2.4)$$

mas, sabe-se que $\tilde{a}_x = 0$ para $x > na+1$. Então a eq. (P2.4) torna-se:

$$V_j = \sum_{k=1}^{np+nb-(j-1)} (pb_{(j-1+k)} m_j) q^{-k} - \sum_{k=1}^{na+1} \left[\sum_{i=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} h_{(j-1-i)} m_j \right] q^{-k} \quad (P2.5)$$

A demonstração da proposição 4.2 prossegue substituindo-se o polinômio V_j , definido anteriormente, na equação de P^* .

Pela equação do polinômio P^* , eq. (4.50), tem-se que:

$$P^* = \tilde{A} + q^{-1} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (B P - \tilde{A} H_j) q^j \right] \quad (4.50)$$

Pela definição de V_j , dada pela eq. (P2.2) e eq. (P2.5), pode-se reescrever a eq. (4.50) como sendo:

$$P^* = \tilde{A} + \sum_{j=N1}^{NY} V_j \quad (P2.6)$$

ou

$$P^* = \sum_{k=0}^{na+1} \tilde{a}_k q^{-k} + \sum_{j=N1}^{NY} \left\{ \sum_{k=1}^{np+nb-(j-1)} (pb_{(j-1+k)} m_j) q^{-k} - \sum_{k=1}^{na+1} \left[\sum_{i=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} h_{(j-1-i)} m_j \right] q^{-k} \right\}$$

$$P^* = 1 + \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \tilde{a}_k - \sum_{j=N1}^{NY} \left[\sum_{l=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(l+k)} h_{(j-1-l)} m_j \right] \right\} q^{-k} + \sum_{j=N1}^{NY} \left\{ \sum_{k=1}^{np+nb-(j-1)} (pb_{(j-1+k)} m_j) \right\} q^{-k} \quad (P2.7)$$

Definindo-se o polinômio X como sendo:

$$X = \sum_{j=N1}^{NY} \left\{ \sum_{k=1}^{np+nb-(j-1)} (pb_{(j-1+k)} m_j) q^{-k} \right\} \quad (P2.8)$$

a eq. (P2.7) torna-se:

$$P^* = 1 + \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \tilde{a}_k - \left[\sum_{l=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(l+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-l)} m_j \right) \right] \right\} q^{-k} + X \quad (P2.9)$$

Definindo-se a variável "n" como sendo: $n = j-1$; polinômio X, torna-se:

$$X = \sum_{n=N1-1}^{NY-1} \left\{ \sum_{k=1}^{np+nb-n} (pb_{(n+k)} m_{(n+1)}) \right\} q^{-k} \quad (P2.10)$$

Sabendo-se que $pb_{(n+k)} = 0$ se $n+k > nb+np$, pode-se dizer que $n_{\text{máx}}$ é $np+nb-k$, e, sabendo-se que $m_{(n+1)} = 0$ se $n+1 > NY$, pode-se dizer que $n_{\text{máx}}$ é $NY-1$. Assim $n_{\text{máx}}$ é o mínimo entre $NY-1$ e $np+nb-k$, logo:

$$\sum_{n=N1-1}^{NY-1} \left\{ \sum_{k=1}^{np+nb-n} = \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{\text{mín}(NY-1, np+nb-k)} \right. \right\} \quad (P2.11)$$

Pode-se dizer que $\text{mín}(NY-1, np+nb-k) = NY-1$, pois $pb_{(n+k)}$ é igual a 0, para $n > np+nb-k$. Assim a eq. (P2.11) torna-se:

$$\sum_{n=N1-1}^{NY-1} \left\{ \sum_{k=1}^{np+nb-n} = \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} \right. \right\} \quad (P2.12)$$

Substituindo-se a eq. (P2.12) na eq. (P2.10), obtém-se:

$$X = \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} (pb_{(n+k)} m_{(n+1)}) \right\} q^{-k} \quad (P2.13)$$

Substituindo-se o polinômio X, eq. (P2.13), na equação de P*, eq. (P2.9), obtém-se:

$$P^* = 1 + \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \tilde{a}_k - \sum_{i=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} (pb_{(n+k)} m_{(n+1)}) \right\} q^{-k}$$

cqgd

A.3 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.3

Tem-se, da proposição 4.2, que:

$$P^* = 1 + \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \tilde{a}_k - \sum_{i=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} (pb_{(n+k)} m_{(n+1)}) \right\} q^{-k} \quad (4.51)$$

Definindo-se o escalar Y_k como sendo:

$$Y_k = \sum_{i=0}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \quad (P3.1)$$

a eq. (4.51) torna-se:

$$P^* = 1 + \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \tilde{a}_k - Y_k \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} pb_{(n+k)} m_{(n+1)} \right\} q^{-k} \quad (P3.2)$$

Propriedade do produto das matrizes M e H, quando lambda é igual a zero

Dadas as definições de \underline{U} , \underline{M} e H , repetidas a seguir:

$$\underline{U} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times NU}$$

$$\underline{M} = [m_{N1} \ m_{N1+1} \ \dots \ m_{NY}]_{1 \times (NY-N1+1)}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{N1-1} & h_{N1-2} & \dots & h_{N1-NU} \\ h_{N1} & h_{N1-1} & \dots & h_{N1-NU+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{NY-1} & h_{NY-2} & \dots & h_{NY-NU} \end{bmatrix}_{(NY-N1+1) \times NU}$$

Sabe-se, pela eq. (4.38), que: $\underline{M} = \underline{U} [H^T H + \lambda I]^{-1} H^T$. Supõe-se que lambda é igual a 0, pelas condições iniciais da proposição 4.3, então:

$$\underline{M} = \underline{U} [H^T H]^{-1} H^T \quad (P3.3)$$

Pós-multiplicando-se a eq. (P3.3) por H , obtém-se:

$$\underline{M} \underline{H} = \underline{U} \underline{I} \quad (\text{P3.4})$$

onde \underline{I} é a matriz identidade.

Da eq. (P3.4) pode-se dizer que:

$$\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1)} = 1 \quad (\text{P3.5})$$

$$e, \quad \sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-i)} = 0 \quad \dots \quad \sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-(NU-1))} = 0$$

Fim

O escalar Y_k pode ser reescrito como sendo:

$$Y_k = \tilde{a}_k \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1)} m_j \right) + \sum_{i=1}^{NU-1} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) + \sum_{i=NU}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \quad (\text{P3.6})$$

Substituindo-se as igualdades (P3.5) na eq. (P3.6) obtém-se:

$$Y_k = \tilde{a}_k + \sum_{i=NU}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \quad (\text{P3.7})$$

Substituindo-se o escalar Y_k , eq. (P3.7), na eq. (P3.2), obtém-se:

$$P^* = 1 - \sum_{k=1}^{na+1} \left\{ \sum_{i=NU}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} (pb_{(n+k)} m_{(n+1)}) \right\} q^{-k} \quad (\text{P3.8})$$

Sabendo-se que: $\tilde{a}_{(i+k)} = 0$ se $i+k > na+1$, e, que o "i" mínimo é NU, então o "k" máximo é $na+1-NU$. Assim a eq. (P3.8) torna-se:

$$P^* = 1 - \sum_{k=1}^{na+1-NU} \left\{ \sum_{i=NU}^{na+1-k} \tilde{a}_{(i+k)} \left(\sum_{j=N1}^{NY} h_{(j-1-i)} m_j \right) \right\} q^{-k} + \sum_{k=1}^{np+nb-(N1-1)} \left\{ \sum_{n=N1-1}^{NY-1} pb_{(n+k)} m_{(n+1)} \right\} q^{-k}$$

cqd

A.4 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.4

Com o objetivo de calcular os pólos do sistema em malha fechada, transforma-se o polinômio característico Pmf, que está em função de "q⁻¹", para a forma em função de "q", ou seja, transforma-se Pmf(q⁻¹) para Pmf*(q). Isto é feito multiplicando-se Pmf(q⁻¹) por q^{npmf}, onde npmf é o número de pólos do sistema controlado, e é dado pela eq. (4.46), repetida a seguir:

$$\text{npmf} = \text{máx} \begin{cases} \text{na} + 1 + \text{nt} \\ \text{na} + 1 + \text{nb} \\ \text{nb} + 1 + \text{nt} + \text{np} - \text{N1} \end{cases} \quad (4.46)$$

Pela condição (4.53), da proposição 4.4, pode-se dizer que: npmf = na+nb+1

Multiplicando-se Pmf(q⁻¹) por q^{npmf} obtém-se:

$$\text{Pmf}^*(q) = q^{(\text{na}+\text{nb}+1)} \text{Pmf}(q^{-1}) \quad (\text{P4.1})$$

Substituindo-se Pmf(q⁻¹) da eq. (P4.1) pela sua definição na proposição 4.1 (eq. (4.49) e eq. (4.50)), repetida a seguir:

$$\text{Pmf}(q^{-1}) = T(q^{-1}) \left\{ \tilde{A}(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=\text{N1}}^{\text{NY}} m_j (P(q^{-1})B(q^{-1}) - \tilde{A}(q^{-1})H_j(q^{-1})) q^j \right\} \quad (4.49)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Pmf}^*(q) = q^{(\text{na}+\text{nb}+1)} \left\{ \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=\text{N1}}^{\text{NY}} m_j (P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) + \right. \\ \left. - \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})H_j(q^{-1})) q^j \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pmf}^*(q) = q^{(\text{na}+\text{nb}+1)} \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1}) + \sum_{j=\text{N1}}^{\text{NY}} m_j (q^{(\text{na}+\text{nb}+j)} P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) \\ - q^{(\text{na}+\text{nb}+j)} \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})H_j(q^{-1})) \end{aligned} \quad (\text{P4.2})$$

mas:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1}) &= q^{-(na+1+nt)}\tilde{A}(q)T(q) \\ P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) &= q^{-(np+nt+nb)}P(q)T(q)B(q) \\ \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})H_j(q^{-1}) &= q^{-(na+1+nt+j-1)}\tilde{A}(q)T(q)H_j(q)\end{aligned}$$

logo:

$$Pmf^*(q) = q^{(nb-nt)}\tilde{A}(q)T(q) + \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na-np-nt+j)}P(q)T(q)B(q) - q^{(nb-nt)}\tilde{A}(q)T(q)H_j(q)) \quad (P4.3)$$

Dado que $nb-nt > 0$, e $na-np-nt+j > 0$, para $N1 \leq j \leq NY$, pelas hipóteses iniciais, tem-se que existirão pólos na origem se condição (4.53), da proposição 4.3, for satisfeita. O número de pólos em malha fechada na origem é dado por:

$$\text{mín} \begin{cases} nb-nt & \text{(I)} \\ na-np-nt+j & \text{(II)}, \text{ para } : N1 \leq j \leq NY \end{cases}$$

que é igual a:

$$\text{mín} \begin{cases} nb-nt & \text{(I)} \\ na-np-nt+N1 & \text{(II)} \end{cases} \quad (P4.4)$$

O mínimo de (P4.4) será (I) se:

$$\begin{aligned}nb - nt &\leq na - np - nt + N1 \\ nb &\leq na - np + N1 \\ np - N1 &\leq na - nb\end{aligned}$$

e, o mínimo de (P4.4) será (II) se:

$$\begin{aligned}nb - nt &\geq na - np - nt + N1 \\ nb &\geq na - np + N1 \\ np - N1 &\geq na - nb\end{aligned}$$

cqd

A.5 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.5

Pela eq. (4.46) tem-se que o número de pólos do sistema em malha fechada é dado por:

$$n_{pmf} = \max \begin{cases} na+1+nt & (i) \\ na+1+nb & (ii) \\ nb+1+nt+np-N1 & (iii) \end{cases} \quad (4.46)$$

A regra (4.56) implica no fato de que o termo (iii), do cálculo de n_{pmf} (eq. (4.46)), não é o máximo entre (i), (ii) e (iii). Assim esta demonstração é dividida em duas partes. Parte 1, quando n_{pmf} é igual a (i), e, parte 2, quando n_{pmf} é igual a (ii). A diferença de resultados, isto é, do número de pólos na origem, quando n_{pmf} é igual a (i) ou (ii), são dados pelas equações (4.57) e (4.58).

Parte 1:

$$\text{Supõe-se:} \quad na > nt + np - N1 \quad (4.56)$$

$$e \quad nt \leq nb \quad (4.58)$$

Assim o número de pólos em malha fechada é dado por (ii), ou por:

$$n_{pmf} = na + nb + 1$$

Com o objetivo de calcular os pólos do sistema em malha fechada, transforma-se a equação característica P_{mf} , que está em função de " q^{-1} ", para a forma em função de " q ", ou seja, transforma-se $P_{mf}(q^{-1})$ para $P_{mf}^*(q)$. Isto é feito multiplicando-se $P_{mf}(q^{-1})$ por $q^{n_{pmf}}$, onde n_{pmf} é igual a $na + nb + 1$.

Através do desenvolvimento feito na demonstração da proposição 4.4, eq. (P4.2), sabe-se que se $n_{pmf} = na+nb+1$ então $P_{mf}^*(q)$ pode ser escrito como a seguir:

$$P_{mf}^*(q) = q^{(na+nb+1)} \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1}) + \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nb+j)} P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) - q^{(na+nb+j)} \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})H_j(q^{-1})) \quad (P5.1)$$

$$\text{Pmf}^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nb+j)} P(q^{-1}) T(q^{-1}) B(q^{-1})) + \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nb+1)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) / K +$$

$$- q^{(na+nb+j)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) H_j(q^{-1}))$$

$$\text{Pmf}^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nb+j)} P(q^{-1}) T(q^{-1}) B(q^{-1})) + \sum_{j=N1}^{NY} m_j \left[q^{(na+nb+1)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) (1/K +$$

$$- q^{(j-1)} H_j(q^{-1})) \right] \quad (\text{P5.2})$$

Definindo-se X como sendo:

$$X = \sum_{j=N1}^{NY} m_j \left[q^{(na+nb+1)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) (1/K - q^{(j-1)} H_j(q^{-1})) \right] \quad (\text{P5.3})$$

a equação de Pmf*(q), eq. (P5.2), torna-se:

$$\text{Pmf}^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nb+j)} P(q^{-1}) T(q^{-1}) B(q^{-1})) + X \quad (\text{P5.4})$$

Sabendo-se que o polinômio H_j pode ser escrito por extenso como a seguir,

$$H_j = \sum_{k=0}^{j-1} h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)}$$

o polinômio X, eq. (P5.3), torna-se:

$$X = \sum_{j=N1}^{NY} m_j \left[q^{(na+nb+1)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) (1/K - q^{(j-1)} \sum_{k=0}^{j-1} h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)}) \right]$$

$$X = q^{(na+nb+1)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) \left[1 - \sum_{j=N1}^{NY} \left(\sum_{k=0}^{j-1} m_j h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)} \right) q^{(j-1)} \right] \quad (\text{P5.5})$$

Evidenciando-se o termo do somatório em k , para $k = 0$, e decompondo o que resta do somatório em k nas partes entre 1 e $NU-1$ e entre NU e $j-1$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 X = & q^{(na+nb+1)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) \left[1 - \sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1)} - \sum_{j=N1}^{NY} \left(\sum_{k=1}^{NU-1} m_j h_{(j-1-k)} \right) q^k + \right. \\
 & \left. - \sum_{j=N1}^{NY} \left(\sum_{k=NU}^{j-1} m_j h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)} \right) q^{(j-1)} \right] \quad (P5.6)
 \end{aligned}$$

À semelhança do desenvolvimento feito na demonstração da proposição 4.3, (equações (P3.3) a (P3.5)), tem-se que para $\lambda = 0$ verifica-se que:

$$\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1)} = 1$$

e,

$$\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-1)} = 0$$

...

$$\sum_{j=N1}^{NY} m_j h_{(j-1-(NU-1))} = 0 \quad (P3.5)$$

Das igualdades (P3.5), pode-se reescrever a eq. (P5.6) como a seguir:

$$X = - q^{(na+nb+j)} \bar{A}(q^{-1}) T(q^{-1}) \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j \left(\sum_{k=NU}^{j-1} h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)} \right) \right] \quad (P5.7)$$

Definindo-se $nH_j(q^{-1})$ como sendo:

$$nH_j(q^{-1}) = \sum_{k=NU}^{j-1} h_{(j-1-k)} q^{-(j-1-k)} \quad (P5.8)$$

a eq. (P5.7) torna-se:

$$X = -q^{(na+nb+j)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (\tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})nH_j(q^{-1})) \right] \quad (P5.9)$$

Através da eq. (P5.9), pode-se reescrever $Pmf^*(q)$, eq. (P5.4), como a seguir:

$$Pmf^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nb+j)} P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1})) - q^{(na+nb+j)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (\tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})nH_j(q^{-1})) \right] \quad (P5.10)$$

mas:

$$P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) = q^{-(np+nt+nb)} P(q)T(q)B(q)$$

$$\tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})nH_j(q^{-1}) = q^{-(na+1+nt+j-1-NU)} \tilde{A}(q)T(q)nH_j(q)$$

logo:

$$Pmf^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na-np-nt+j)} P(q)T(q)B(q)) - q^{(NU+nb-nt)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (\tilde{A}(q)T(q)nH_j(q)) \right]$$

Dado que $na-np-nt+j > 0$ para $\forall j, N1 \leq j \leq NY$, e $NU+nb-nt > 0$, pelas hipóteses iniciais, tem-se que existirão pólos na origem se a condição (4.56), da proposição 4.5, for satisfeita através da parcela $(na > nt + np - N1)$. Se $(nt \leq nb)$, o número de pólos em malha fechada na origem é dado por:

$$\text{mín} \begin{cases} NU + nb - nt \\ na - np - nt + j, \text{ para } : N1 \leq j \leq NY \end{cases}$$

que é igual a:

$$\text{mín} \begin{cases} NU + nb - nt \\ na - np - nt + N1 \end{cases} \quad (P5.12)$$

Parte 2:

$$\text{Supõe-se: } na - nb > np - N1 \quad (4.56)$$

$$nt \geq nb \quad (4.57)$$

Assim o número de pólos em malha fechada é dado por: $npmf = na + nt + 1$

Multiplcando-se $Pmf(q^{-1})$ por q^{npmf} obtém-se:

$$Pmf^*(q) = q^{(na+nt+1)} Pmf(q^{-1}) \quad (P5.13)$$

Substituindo-se $Pmf(q^{-1})$ da eq. (P5.13) pela sua definição na proposição 4.1 (eq. (4.49) e eq. (4.50)), repetida a seguir:

$$Pmf(q^{-1}) = T(q^{-1}) \left\{ \tilde{A}(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=N1}^{NY} m_j (P(q^{-1})B(q^{-1}) - \tilde{A}(q^{-1})H_j(q^{-1})) q^j \right\}$$

obté-m-se:

$$Pmf^*(q) = q^{(na+nt+1)} \left\{ \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=N1}^{NY} m_j (P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) + \right. \\ \left. - \tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})H_j(q^{-1})) q^j \right\} \quad (P5.13)$$

Através de desenvolvimento análogo ao feito nas equações de (F5.1) a (P5.10), pode-se reescrever a eq. (P5.13) como sendo:

$$Pmf^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na+nt+j)} P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1})) - \\ - q^{(na+nt+j)} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (\tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})nH_j(q^{-1})) \right] \quad (P5.14)$$

mas:

$$P(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1}) = q^{-(np+nt+nb)} P(q)T(q)B(q)$$

$$\tilde{A}(q^{-1})T(q^{-1})nH_j(q^{-1}) = q^{-(na+1+nt+j-1-N1)} \tilde{A}(q)T(q)nH_j(q)$$

logo:

$$Pmf^*(q) = \sum_{j=N1}^{NY} m_j (q^{(na-np-nb+j)}) P(q)T(q)B(q) - q^{NU} \left[\sum_{j=N1}^{NY} m_j (\tilde{A}(q)T(q)nH_j(q)) \right] \quad (P5.15)$$

Dado que $NU > 0$ e $na-np-nb+j > 0 \forall j N1 \leq j \leq NY$, pelas hipóteses iniciais, tem-se que existirão pólos na origem se a condição (4.56), da proposição 4.5, for satisfeita através da parcela $(na - nb > np - N1)$. Se $(nt \geq nb)$, o número de pólos em malha fechada na origem é dado por:

$$\text{mín} \left\{ \begin{array}{l} NU \\ na - np - nb + j, \text{ para } : N1 \leq j \leq NY \end{array} \right.$$

que é igual a:

$$\text{mín} \left\{ \begin{array}{l} NU \\ na - np - nb + N1 \end{array} \right. \quad (P5.16)$$

cqcd