

5. 1. 3. 12. 50

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPTº DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA

CONTROLE EM TEMPO MÍNIMO DE UM SISTEMA LINEAR
UTILIZANDO MODULAÇÃO EM LARGURA DE PULSOS

Autor: JOSÉ CLAUDIO GEROMEL
Orientador: YARO BURIAN JUNIOR

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas da UNICAMP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências.

SETEMBRO DE 1976

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Agradeço a todas as pessoas que ajudaram neste trabalho, em particular ao meu orientador Prof. Yaro Burian Junior e aos Professores Ivanil Sebastião Bonatti e Cícero Campos.

R E S U M O

Este trabalho estuda o controle de um sistema linear utilizando modulação em largura de pulsos.

Determinam-se as condições de estabilidade em malha fechada para operação com controlador - proporcional e proporcional mais derivativo.

Propõe-se também um controlador proporcional mais derivativo que proporciona ao sistema a estabilização, sem oscilações, da sua saída em torno do valor de referência em um tempo mínimo.

Finalizando, o sistema é simulado em computador analógico.

Í N D I C E

	Página
CAPÍTULO I - <u>INTRODUÇÃO E OBJETIVOS</u>	1
I.1 - INTRODUÇÃO	1
I.2 - OBJETIVOS	1
I.3 - DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS	3
I.4 - HISTÓRICO	4
CAPÍTULO II - ESTUDO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL	7
II.1 - INTRODUÇÃO	7
II.2 - MODELAMENTO	7
II.3 - SISTEMA EM MALHA ABERTA	12
II.4 - RECORRÊNCIA ASSOCIADA AO SISTEMA EM MALHA ABERTA	15
II.5 - ESTUDO GERAL DA EQUAÇÃO RECORRENTE ASSOCIADA AO SISTEMA ...	18
II.5.1 PONTOS DUPLOS	18
II.5.2 ONDULAÇÃO PICO A PICO NA SAÍDA	19
II.5.3 ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA	22
II.6 - ESTUDO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	24
II.6.1 ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	28
II.7 - REGIÃO DE COMUTAÇÃO NO PLANO DE FASE	36
II.8 - RETICÊNCIAS	39
II.9 - SIMULAÇÃO	41
CAPÍTULO III - <u>ESTUDO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS</u> <u>DERIVATIVO</u>	48
III.1 - INTRODUÇÃO	48
III.2 - MODELAMENTO	48
III.3 - ESTUDO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	50
III.3.1 ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	51

	Página
III.4 - REGIÃO DE COMUTAÇÃO NO PLANO DE FASE	61
III.5 - ESTUDO DO PROBLEMA DE TEMPO MÍNIMO	64
III.6 - SIMULAÇÃO	70
CAPÍTULO IV - <u>CONCLUSÕES</u>	76
IV.1 - CONCLUSÕES	76
IV.2 - CONSIDERAÇÃO FINAL	79
<u>APÊNDICE A</u> : SIMULADOR ANÁLOGO-HÍBRIDO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA..	81
<u>APÊNDICE B</u> : CONTROLE EM TEMPO MÍNIMO	89
<u>APÊNDICE C</u> : PROVAS DAS PROPOSIÇÕES	94
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	100

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

I.1. INTRODUÇÃO

Este trabalho estuda um sistema de controle utilizando modulação em largura de pulsos. Este sistema pode ser subdividido em três partes distintas:

1. Sistema linear de 2a. ordem a ser controlado
2. Controlador
3. Parte não linear (Comutador)

Deseja-se obter uma saída constante do sistema linear que poderá assumir valores fixados a priori (referência). Em malha fechada o controlador comanda uma chave que permite comutar a entrada do sistema linear entre dois valores distintos (liga-desliga).

Na Fig. I.1 tem-se o diagrama de blocos do sistema em estudo.

Nos capítulos II e III a seguir este sistema é estudado considerando-se dois tipos de controladores.

Cap. II - Proporcional

Cap. III - Proporcional mais derivativo

I.2. OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho são:

1. Estudo do desempenho do sistema de controle da Fig. I.1 para controladores do tipo proporcional e proporcional mais derivativo.
2. Determinação das regiões de estabilidade para os dois tipos de controladores
3. Proposta de um controlador proporcional derivativo que forne

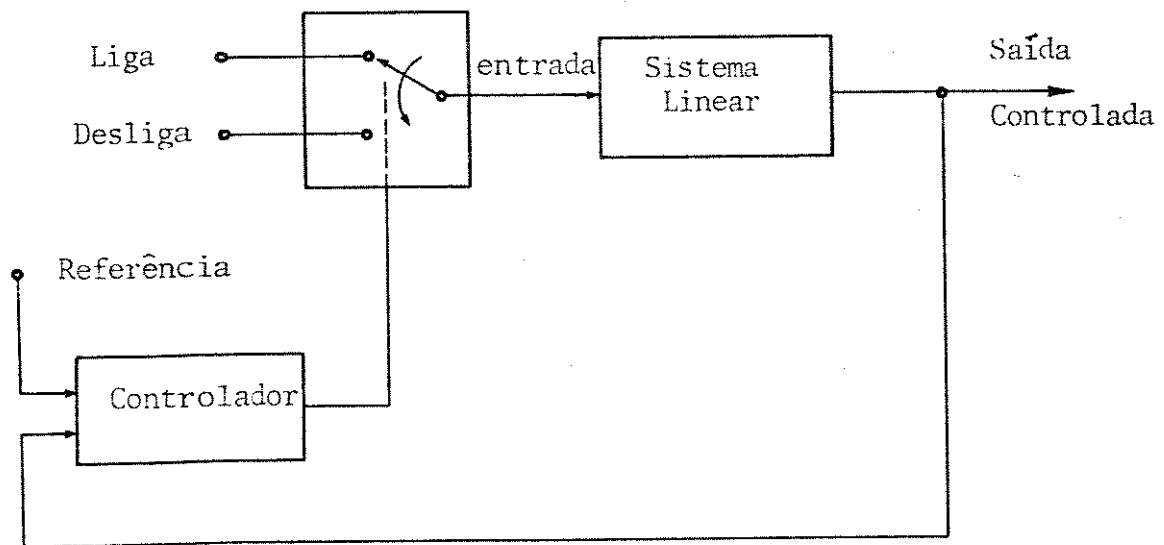


FIG. I.1. - DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA EM ESTUDO

ce tempo mínimo de estabilização sem ondulação da saída. Independente dos estados inicial e final do sistema.

4. Implementação em computador analógico do sistema de controle.

A partir da caracterização do problema e dos objetivos finais desejados, passamos a descrever cada capítulo.

I.3. DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

1. CAPÍTULO II :

Neste capítulo apresenta-se um diagrama de blocos mais detalhado do sistema controlado por um controlador proporcional.

Estuda-se a estabilidade do sistema determinando-se também, num plano de parâmetros, a região de estabilidade para pior caso.

Estuda-se também o desempenho do controle em malha fechada no plano de fase do sistema linear e determina-se curvas de ondulação pico a pico da saída.

O estudo é feito a partir de equações recorrentes de 2a. ordem - não lineares e implícitas que descrevem o sistema.

São feitas algumas aproximações que simplificam o tratamento matemático necessário para o estudo destas equações.

Os resultados referentes a este capítulo são colocados na forma de gráficos obtidos com a implementação do sistema em computador analógico.

2. CAPÍTULO III

Neste capítulo determina-se a região de estabilidade para o sistema operando em malha fechada com controlador proporcional mais derivativo, utilizando-se a mesma ferramenta matemática - equações recorrentes de 2a. ordem, não lineares e implícitas.

Estuda-se também o desempenho do controle em malha fechada no plano de fase do sistema linear.

Propõe-se a solução do problema de tempo mínimo de estabilização da saída com as restrições:

- a) Não se permite que a saída oscile em torno do valor de regime.
- b) Os ganhos do controlador devem independender do estado inicial e do estado final desejado.

Os resultados são colocados na forma de gráficos obtidos com o simulador analógico do sistema.

3. APÊNDICES

- A - Neste apêndice apresenta-se o programa analógico que simula todo o sistema apresentado na Fig. I.1 . Este programa foi implementado para o uso em computador analógico do tipo EAI-680.
- B - Determina-se a solução do problema de tempo mínimo por minimização do Hamiltoniano associado ao sistema linear em estudo.
- C - Prova das proposições enunciadas no Capítulo III.

I.4. HISTÓRICO

O presente trabalho foi originado pelo problema de controle de temperatura em um forno usado no estudo de transição de Fase em Cristais.

Supõe-se que o cristal em estudo (NaNO_2) apresente três fases - distintas (Fase I, intermediária e II). O objetivo é a detecção e o estudo da Fase intermediária.

O método de medidas usado, necessita que as transições de Fase - ocorram em uma sequência crescente (I \rightarrow Inter. \rightarrow II) ou decrescente (II \rightarrow Inter. \rightarrow I), além disso, nas Fases I e II é preciso que a temperatura fique constante durante um certo intervalo de tempo.

Na Fig. I.2. mostra-se o perfil de temperatura que satisfaz as

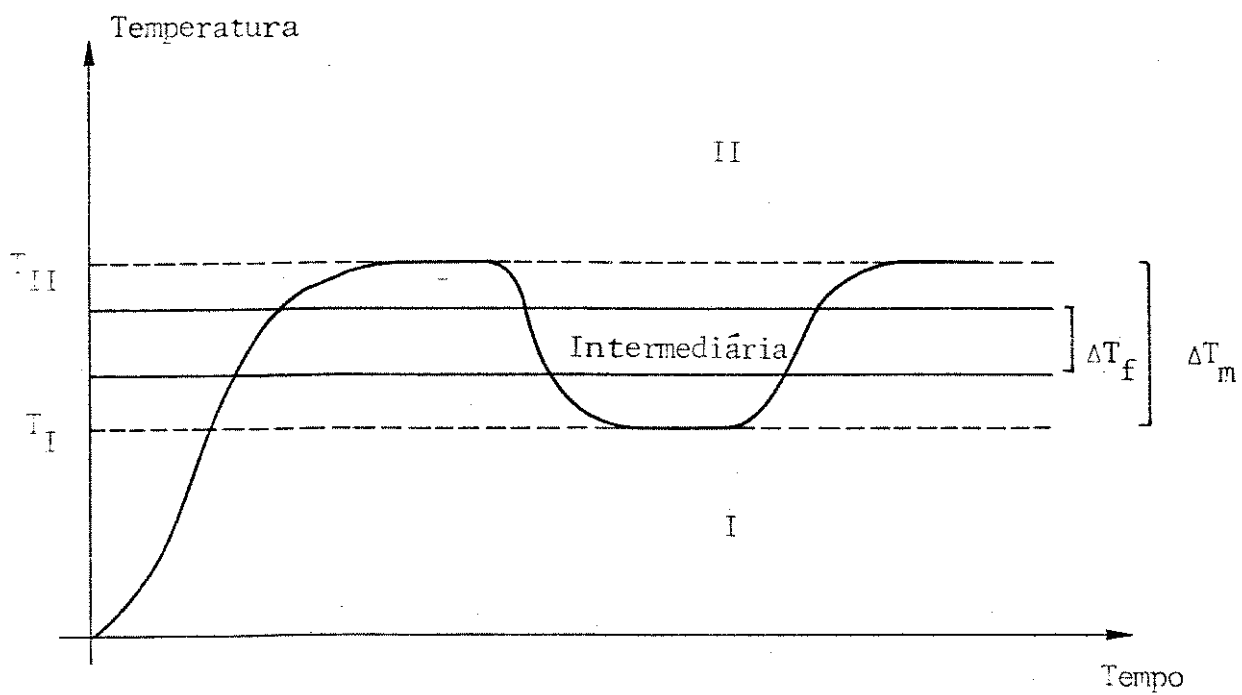


FIG. I.2. - PERFIL DE TEMPERATURA DESEJADO

condições acima, onde ΔT_m deve ser suficientemente próximo de ΔT_f para que não ocorra desalinhamento do cristal, devido à dilatação e introduza erros de medida.

Para atender as condições anteriores deve-se obter um controlador com as seguintes características.

1. Não permitir oscilações de temperatura quando esta passa de T_I para T_{II} ou vice-versa.
2. Devido ao grande número de medidas as quais utilizam raio X, faz-se com que o intervalo de tempo necessário para a temperatura passar de T_I para T_{II} (ou vice-versa) seja mínimo.

Para o forno foi determinado um modelo linear de 2a. ordem e por estimação (mínimos quadrados) obteve-se os valores de seus parâmetros.

§§§§§

§

CAPÍTULO II

ESTUDO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL

II.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se o sistema em estudo, bem como o controlador proporcional a êle associado.

Estuda-se o comportamento do sistema tanto em malha aberta como fechada.

II.2. MODELAMENTO

O sistema que aqui se analisa está representado pelo seu Diagrama de Blocos na Fig. II.1. O sistema linear de 2a. ordem que se deseja controlar obedece à equação:

$$\ddot{y}^*(t) + 2\xi \omega_n \dot{y}^*(t) + \omega_n^2 y^*(t) = k_e \omega_n^2 u^*(t) \quad (\text{II.1.})$$

Nesta equação pode-se fazer $y^*(t) = k_e y(t)$ (normalização de amplitude) e $\tau = \omega_n t$ (normalização no tempo) obtendo-se:

$$\ddot{y}(\tau) + 2\xi \dot{y}(\tau) + y(\tau) = u(\tau) \quad (\text{II.2.})$$

Tomando $\underline{x}(\tau)$ como o vetor das variáveis de Estado do Sistema:

$$\underline{x}(\tau) = \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.})$$

com

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= y(\tau) \\ x_2(\tau) &= \dot{y}(\tau) \end{aligned} \quad (\text{II.4.})$$

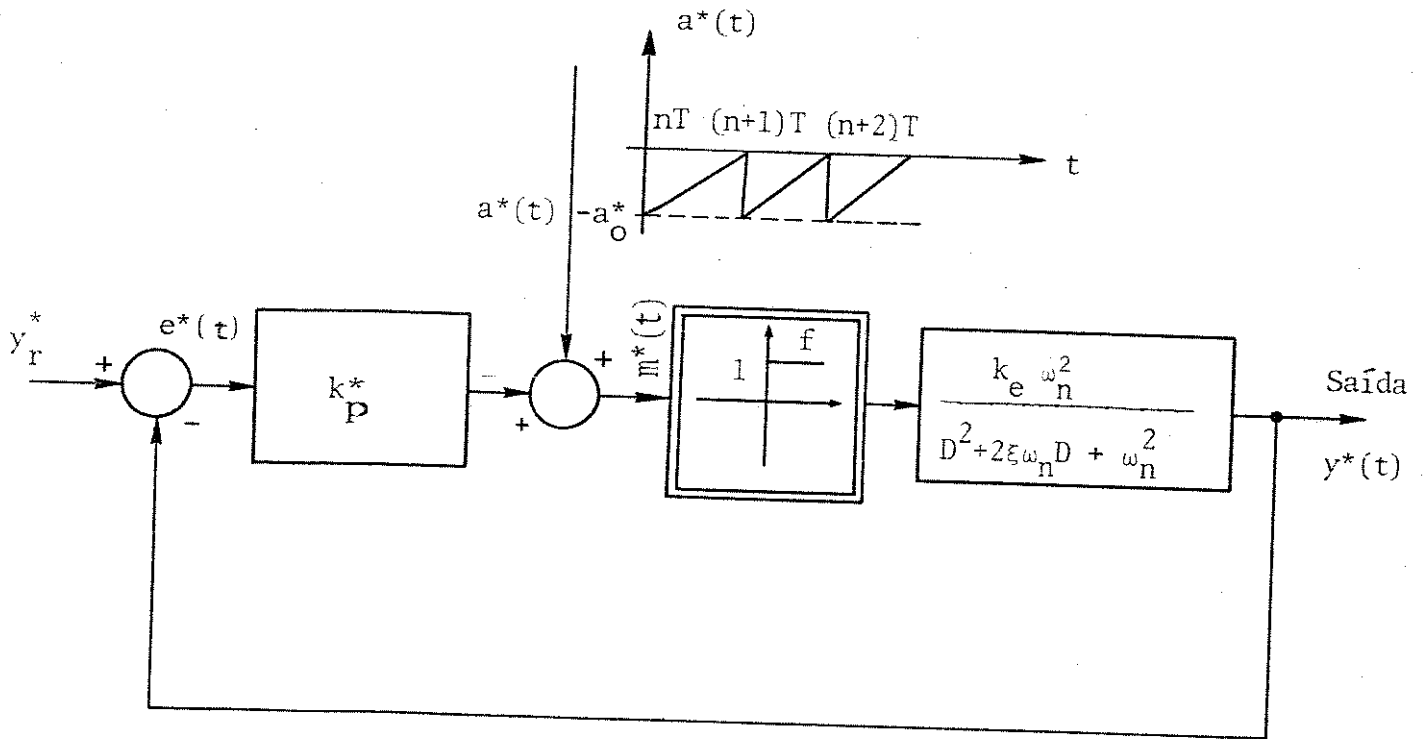


FIG. II.1. - SISTEMA DE CONTROLE COM O CONTROLADOR PROPORCIONAL (k_p^*), A FUNÇÃO DE COMUTAÇÃO $a^*(t)$ E O SISTEMA LINEAR DE 2ª. ORDEM A SER CONTROLADO ONDE D É O OPERADOR DIFERENCIAL.

obtem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(\tau) &= A \underline{x}(\tau) + \underline{b} u(\tau) \\ y(\tau) &= \underline{e}^T \underline{x}(\tau) \end{aligned} \quad (\text{II.5.})$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.})$$

A partir destas equações, pode-se obter o Diagrama de Blocos do sistema normalizado que está representado na Fig. II.2. onde fez-se:

$$\begin{aligned} y^*(\tau) &= k_e y(t) \\ y_r^* &= k_e y_r \\ k_p &= k_p^* k_e \\ a_o^* &= a_o \\ \tau_n &= \omega_n T \\ a^*(t) &= a(\tau) \end{aligned} \quad (\text{II.7.})$$

A função de controle $u(\tau)$ pode ser colocada na forma:

$$u(\tau) = f[m(\tau)] = \begin{cases} 1 & p/m(\tau) > 0 \\ 0 & p/m(\tau) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.8.})$$

onde $m(\tau)$ se relaciona com o erro

$$e_r(\tau) = y_r - y(\tau) \quad (\text{II.8a.})$$

por

$$m(\tau) = k_p e_r(\tau) + a(\tau) \quad (\text{II.8b.})$$

Considerando-se a normalização no tempo introduzida no sistema por $\tau = \omega_n t$, a função de comutação $a(\tau)$ pode ser escrita como:

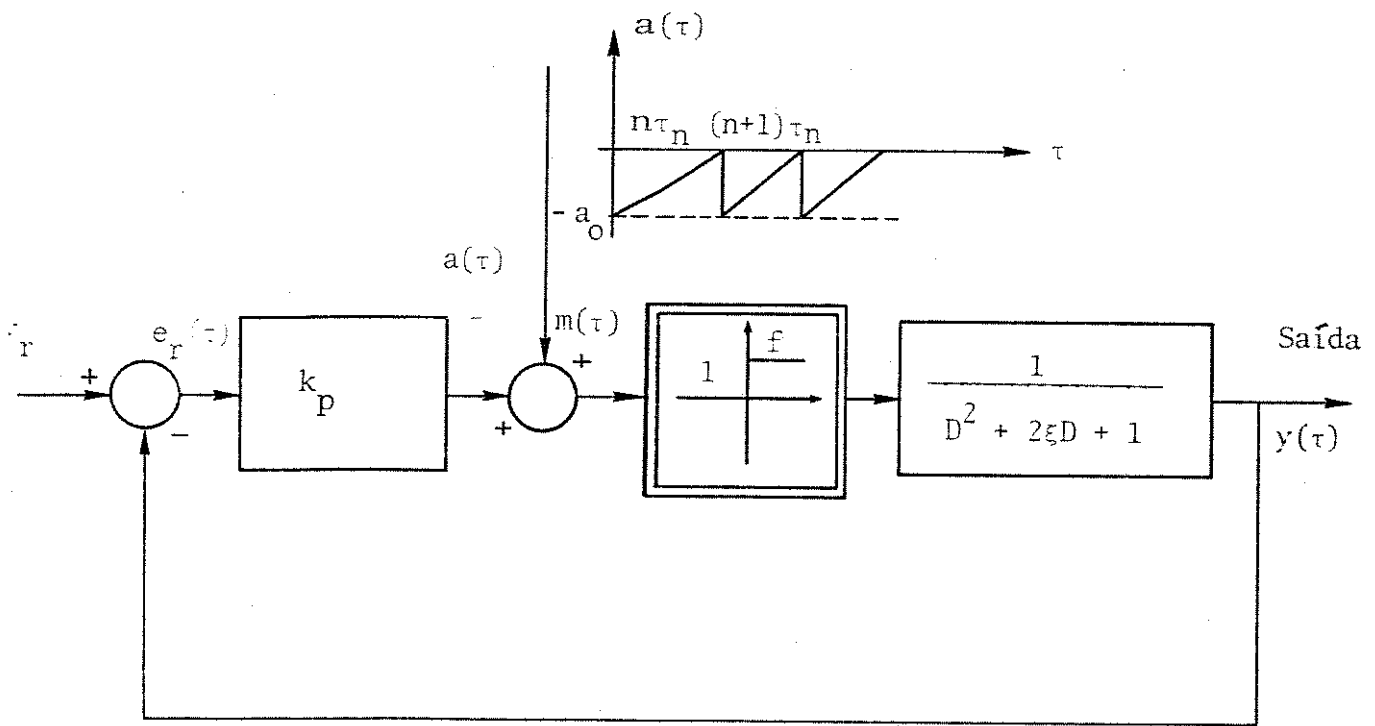


FIG. II.2. - SISTEMA NORMALIZADO, DENTRO DAS CONDIÇÕES IMPOSTAS POR II.7.

$$a(\tau) = \frac{a_0}{\tau_n} \left[\tau - (n+1) \tau_n \right] \quad n \cdot \tau_n \leq \tau \leq (n+1) \tau_n \quad (\text{II.9.})$$

Obtem-se a partir do diagrama de blocos da Fig. II.2., a equação do sistema em malha fechada:

$$u(\tau) = f[m(\tau)] = f\{a(\tau) + k_p [y_r - y(\tau)]\} \quad (\text{II.10.})$$

Portanto, levando em conta as equações (II.5.) tem-se:

$$\dot{\underline{x}}(\tau) = A \underline{x}(\tau) + \underline{b} f\{a(\tau) + k_p [y_r - \underline{e}^T \underline{x}(\tau)]\} \quad (\text{II.11.})$$

Para se estudar o desempenho do sistema inicial proposto (Fig. II.1.), deve-se resolver a equação diferencial não linear (II.11.). Com o intuito de simplificar a sua solução, pode-se desacoplar o sistema ou seja, determinar uma transformação (modal) tal que diagonalize a matriz A.

A transformação a ser aplicada é:

$$\underline{x}(\tau) = P \underline{\hat{x}}(\tau) \quad (\text{II.12.})$$

onde P é uma matriz da forma $P = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{bmatrix}$, sendo \underline{v}_1 e \underline{v}_2 auto-vetores da matriz A correspondentes aos auto-valores λ_1 e λ_2 , os auto-vetores e auto-valores podem ser calculados na forma:

$$\text{- auto-valores : } \det(A - \lambda_i I) = 0 \rightarrow \lambda_i = -\xi + (-1)^i [\xi^2 - 1]^{1/2}$$

$$\text{- auto-vetores : } A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \rightarrow \underline{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz modal P referente a transformação (II.12.) se escreve

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13.})$$

Deve-se aqui notar que vamos considerar apenas os casos em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e portanto existe a inversa de P (*), admitiremos, ainda, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Com a transformação (II.12.), as equações do sistema ficam na forma:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\hat{x}}}(\tau) = \underline{\hat{A}} \underline{\hat{x}}(\tau) + \underline{\hat{B}} u(\tau) \\ y(\tau) = \underline{\hat{e}}^T \underline{\hat{x}}(\tau) \end{cases} \quad (\text{II.14.})$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{A}} &= P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ \underline{\hat{B}} &= P^{-1} b = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \underline{\hat{e}} &= P^T e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

com a mesma transformação, a equação (II.11.) fica:

$$\dot{\underline{\hat{x}}}(\tau) = \underline{\hat{A}} \underline{\hat{x}}(\tau) + \underline{\hat{B}} f \{ a(\tau) + k_p [y_r - \underline{\hat{e}}^T \underline{\hat{x}}(\tau)] \} \quad (\text{II.15.})$$

Portanto, deve-se agora, resolver esta equação diferencial não linear. Uma das maneiras de tratar este problema envolve a utilização de transformações puntuais: determina-se uma equação recorrente associada à equação (II.15.), o que é feito na próxima secção:

II.3. SISTEMA EM MALHA ABERTA

A Fig. (II.3.) ilustra a determinação da função $u(\tau)$, satisfazendo a equação (II.8.). No caso aí representado, em que $m(\tau)$ se anula uma vez em cada intervalo $[n.\tau_n, (n+1)\tau_n]$ pode-se definir o instante de comutação θ_n por:

$$m[(n + \theta_n)\tau_n] = 0 \quad (\text{II.16.})$$

Tem-se, neste caso,

(*) o caso $\lambda_1 = \lambda_2$ não apresenta interesse prático por corresponder a um sistema não grosseiro.

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } n \cdot \tau_n \leq \tau < (n+\Theta_n) \tau_n \\ 1 & \text{p/ } (n+\Theta_n) \tau_n \leq \tau < (n+1) \tau_n \end{cases} \quad (\text{II.17.})$$

Θ_n pode ser determinado explicitamente no caso de e_r ser constante, satisfazendo a condição

$$0 < e_r < \frac{a_o}{k_p}$$

obtendo-se

$$1 - \Theta_n = \left(\frac{a_o}{k_p}\right)^{-1} e_r \quad (\text{II.18.})$$

Nos casos

$$e_r \leq 0$$

$$e_r \geq \frac{a_o}{k_p}$$

$m(\tau)$ é sempre negativo ou sempre positivo. É conveniente estender a noção de instante de comutação para estes casos, fazendo respectivamente

$$1 - \Theta_n = 0$$

$$1 - \Theta_n = 1$$

Nestas condições, o instante de comutação será expresso pela função:

$$1 - \Theta_n = h(e_r) = \begin{cases} 0 & \text{se } e_r \leq 0 \\ \frac{k_p}{a_o} e_r & \text{se } 0 < e_r < \frac{a_o}{k_p} \\ 1 & \text{se } e_r > \frac{a_o}{k_p} \end{cases} \quad (\text{II.19.})$$

A Fig. (II.4.) representa esta função

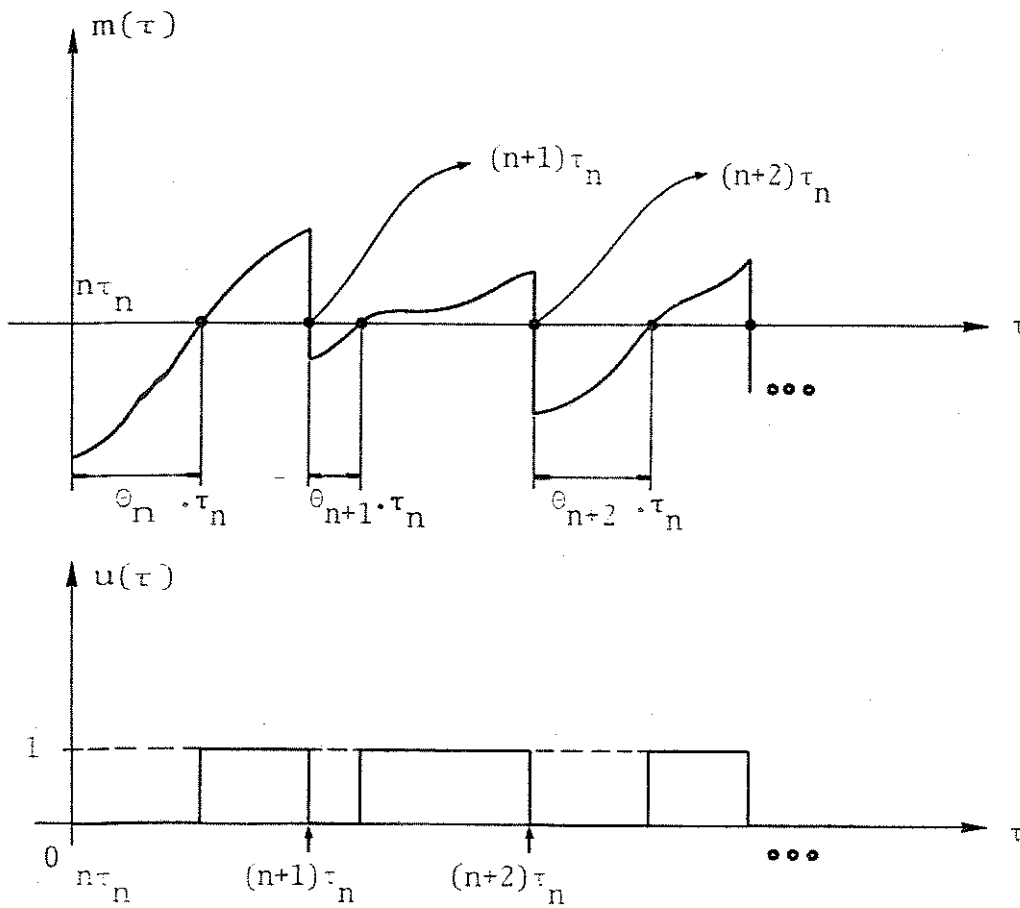


FIG. II.3. - OBTENÇÃO DA ENTRADA $u(\tau)$ A PARTIR DA FUNÇÃO DE CONTROLE $m(\tau)$

Sendo a equação de evolução do sistema dada por

$$\dot{\underline{\hat{x}}}(\tau) = \hat{\Lambda} \underline{\hat{x}}(\tau) + \hat{\underline{b}} u(\tau) \quad (\text{II.20.})$$

onde $u(\tau)$ é a entrada anteriormente descrita, introduz-se a notação (II.21.) que é conveniente para a manipulação da equação recorrente do sistema em malha aberta.

$$\underline{\hat{x}}(n \cdot \tau_n) = \underline{\hat{x}}_n \quad (\text{II.21.})$$

Pode-se finalmente determinar esta equação recorrente.

II.4. RECORRÊNCIA ASSOCIADA AO SISTEMA EM MALHA ABERTA

Integrando a equação (II.20.) obtém-se:

$$\underline{\hat{x}}(\tau) = \phi(\tau - \tau_0) \underline{\hat{x}}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \phi(\tau - \tau^*) \hat{\underline{b}} u(\tau^*) d\tau^* \quad (\text{II.22.})$$

onde: $\underline{\hat{x}}(\tau_0) \rightarrow$ vetor de estado inicial
 $\phi(\tau) \rightarrow$ matriz de transição

Como $\hat{\Lambda}$ é uma matriz formada por elementos invariantes no tempo, a matriz de transição será dada por:

$$\phi(\tau) = e^{\hat{\Lambda}\tau} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1\tau} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2\tau} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23.})$$

obtida a matriz de transição e considerando a entrada $u(\tau)$ dada pela equação (II.17.), pode-se determinar a equação recorrente associada ao sistema em malha aberta, fazendo:

$$a) n \cdot \tau_n \leq \tau < (n + \theta_n) \tau_n$$

neste intervalo temos $u(\tau) = 0$, portanto pela equação (II.22.), tem-se:

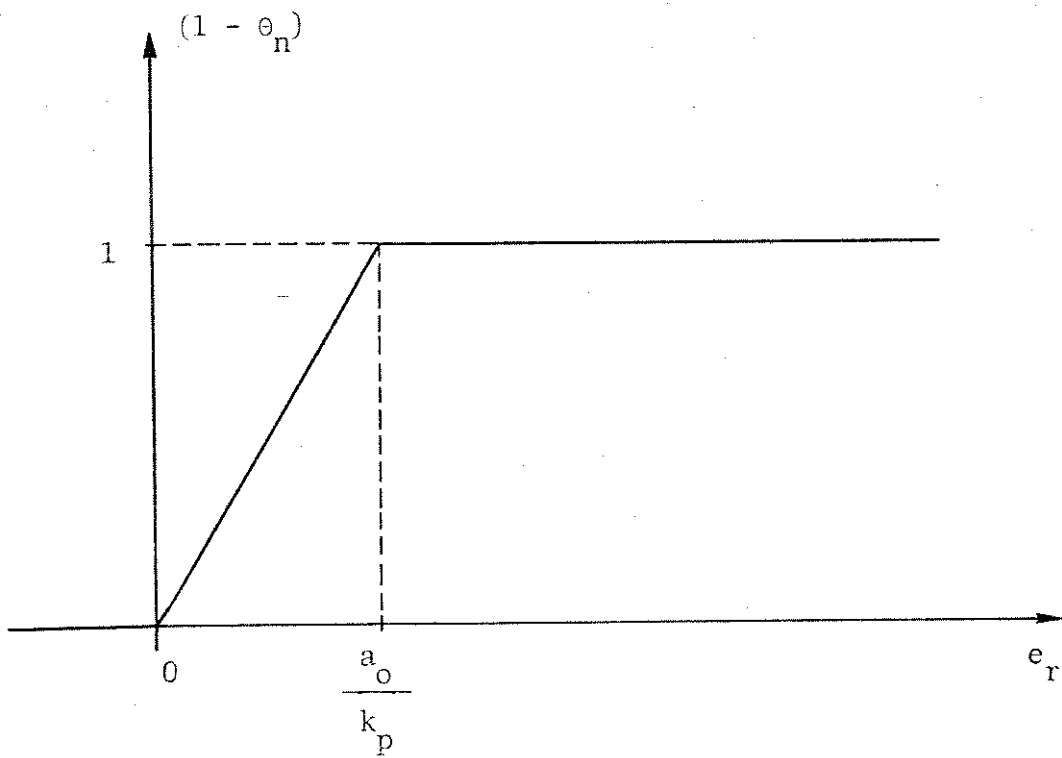


FIG. II.4. - VARIAÇÃO DO INSTANTE DE COMUTACÃO EM FUNÇÃO DO ERRO PRODUZIDO COM REALIMENTAÇÃO

$$\hat{x}(\tau) = \phi(\tau - n \cdot \tau_n) \hat{x}(n \cdot \tau_n) \quad (\text{II.24.})$$

com a notação anteriormente introduzida fica:

$$\hat{x}_{n+\theta_n} = \phi(\theta_n \tau_n) \hat{x}_n \quad (\text{II.25.})$$

$$b) \quad (n + \theta_n) \tau_n \leq \tau < (n+1) \tau_n$$

Neste intervalo temos $u(\tau) = 1$, portanto pela equação (II.22.)

$$\hat{x}(\tau) = \phi[\tau - (n+\theta_n)\tau_n] \hat{x}[(n+\theta_n)\tau_n] + \int_{(n+\theta_n)\tau_n}^{\tau} \phi(\tau - \tau^*) \underline{b} \, d\tau^* \quad (\text{II.26.})$$

Desta equação pode-se obter:

$$\hat{x}_{n+1} = \phi[(1 - \theta_n)\tau_n] \hat{x}_{n+\theta_n} + \int_{(n+\theta_n)\tau_n}^{(n+1)\tau_n} \phi[(n+1)\tau_n - \tau^*] \underline{b} \, d\tau^* \quad (\text{II.27.})$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integral da equação acima e considerando-se:

$$\bar{\theta}_n = 1 - \theta_n \quad (\text{II.28.})$$

chega-se a:

$$\underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) = \int_{(n+\theta_n)\tau_n}^{(n+1)\tau_n} \phi[(n+1)\tau_n - \tau^*] \underline{b} \, d\tau^* = \int_0^{\bar{\theta}_n \tau_n} \phi(\beta) \underline{b} \, d\beta \quad (\text{II.29.})$$

Resolvendo a integral indicada em (II.29.) obtem-se:

$$\underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2(1 - e^{\lambda_1 \bar{\theta}_n \tau_n}) \\ \lambda_1(e^{\lambda_2 \bar{\theta}_n \tau_n} - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.30.})$$

Retomando a equação (II.27.) obtem-se:

$$\hat{x}_{-n+1} = \phi(\bar{\theta}_n \tau_n) \hat{x}_{-n+\theta_n} + \underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (\text{II.31.})$$

Considerando-se agora as equações resultantes dos itens (a) e (b) respectivamente, obtem-se a equação recorrente entre os estados \hat{x}_{-n} e \hat{x}_{-n+1} na forma:

$$\hat{x}_{-n+1} = \phi(\tau_n) \hat{x}_{-n} + \underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (\text{II.32.})$$

A equação recorrente (II.32.) é portanto a equação que descreve o comportamento do sistema em malha aberta, por isso, será objeto de estudo da próxima secção.

II.5. ESTUDO GERAL DA EQUAÇÃO RECURRENTE ASSOCIADA AO SISTEMA

II.5.1 PONTOS DUPLOS

Define-se Ponto Duplo de uma equação recorrente o ponto P tal que:

$$\underline{x}^p \triangleq \underline{x}_{-n+1} = \underline{x}_{-n} \quad (\text{II.33.})$$

impondo-se esta condição à equação (II.32.) obtem-se:

$$\hat{x}^p = [I - \phi(\tau_n)]^{-1} \underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (\text{II.34.})$$

Tomando a equação (II.34.) resulta o vetor que define o ponto duplo como sendo:

$$\hat{x}_1^p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1 - e^{\lambda_1 \bar{\theta}_n \tau_n}}{1 - e^{\lambda_1 \tau_n}} \quad (\text{II.35.})$$

$$\underline{x}_2^p = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1 - e^{\lambda_2 \bar{\Theta}_n \tau_n}}{1 - e^{\lambda_2 \tau_n}} \quad (\text{II.36.})$$

A partir das equações que definem o ponto duplo $\hat{\underline{x}}^p$, pode-se obter as equações do ponto duplo \underline{x}^p .

Nas duas figuras seguintes (5. e 6.) mostra-se a variação de x_1^p e x_2^p com o instante de comutação Θ_n , tendo τ_n como parâmetro.

Temos portanto:

$$\underline{x}^p = P \hat{\underline{x}}^p \quad (\text{II.37.})$$

A partir das equações (II.35., II.36. e II.37.) podemos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{\tau_n \rightarrow 0} \underline{x}^p = \begin{bmatrix} 1 - \Theta_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.38.})$$

Pelas Figuras II.5. e II.6., pode-se notar que este resultado se confirma, ou seja, vamos aproximar o valor real de \underline{x}^p pelo seu limite sob a condição de que a frequência da função de comutação seja muito maior que a frequência natural do sistema a ser controlado ($\tau_n \rightarrow 0$).

A partir deste ponto em diante sempre estaremos considerando que o nosso sistema opera sob a condição de τ_n muito pequeno.

II.5.2 ONDULAÇÃO NA SAÍDA

Vamos estudar o comportamento de uma grandeza relacionada com a ondulação pico a pico da saída definida por:

$$O_{pp} \triangleq y_n - y_{n+\Theta_n} = \hat{\underline{e}}^T \left[\hat{\underline{x}}_n - \hat{\underline{x}}_{n+\Theta_n} \right] \quad (\text{II.39.})$$

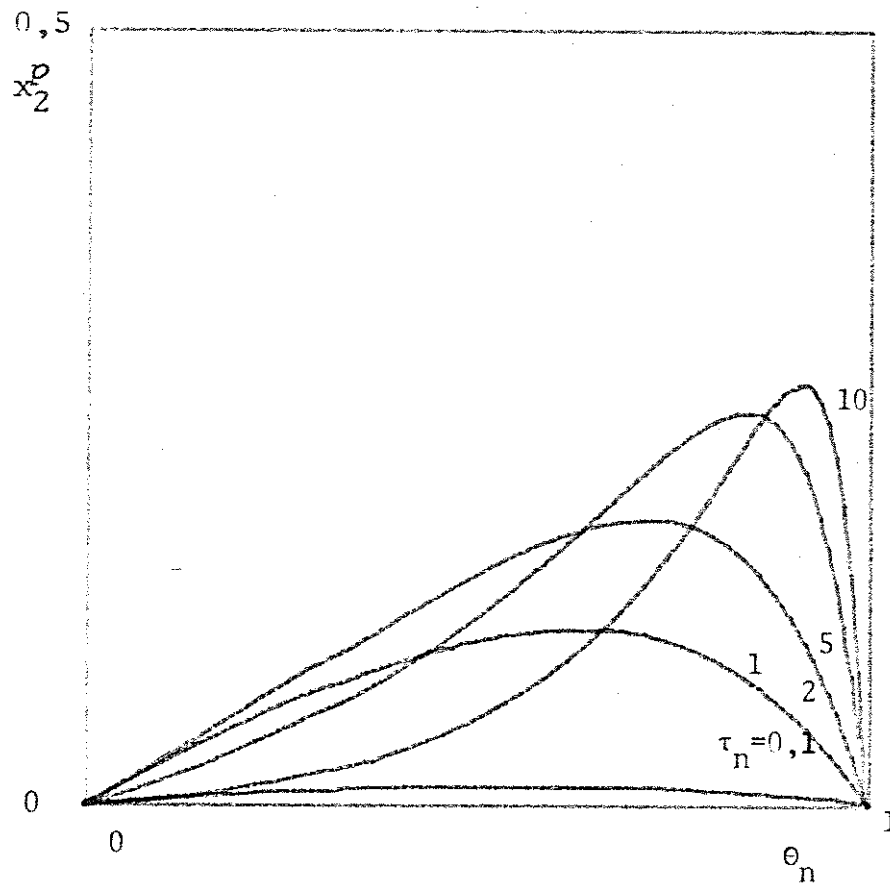


FIG. II.5. - VARIACÃO DA DERIVADA DA SAÍDA (x_2^D) COM O INSTANTE DE COMUTACÃO θ_n TENDO τ_n COMO PARÂMETRO NA CONDIÇÃO DE PONTO DUPLO ($\xi = 1,5$)

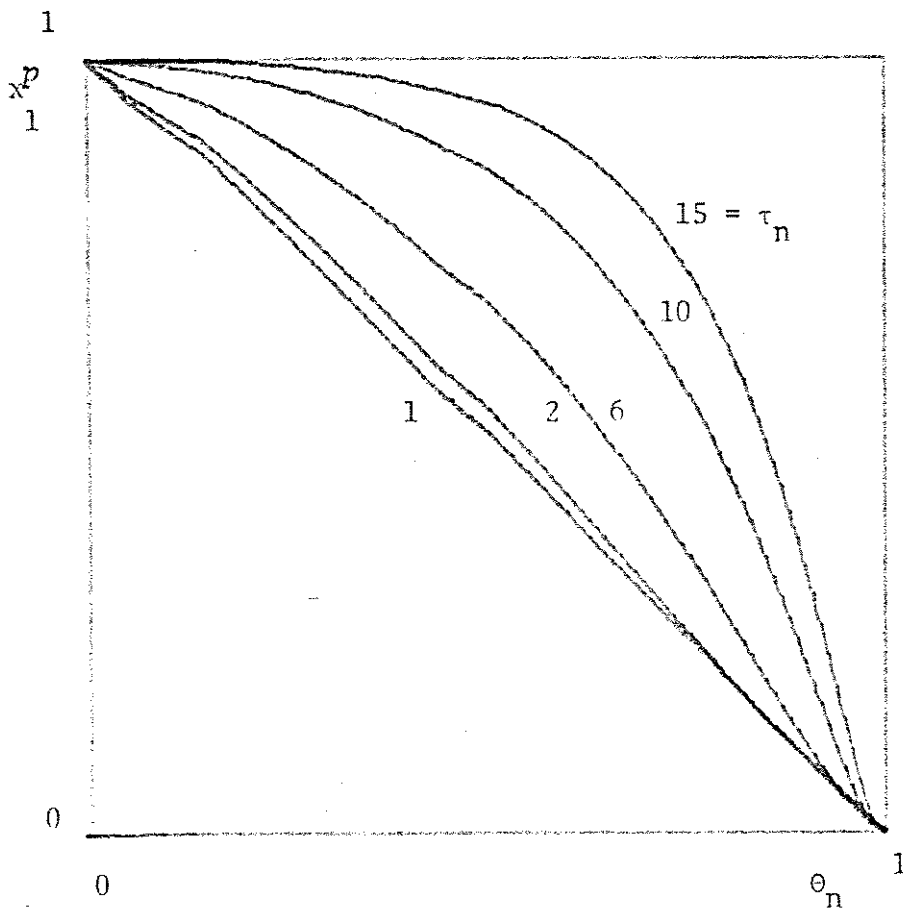


FIG. II.6. - VARIACÃO DO PONTO DUPLO (x_1^D) COM O INSTANTE DE COMUTAÇÃO θ_n , TENDO τ_n COMO PARÂMETRO ($\xi = 1,5$)

Desenvolvendo a equação (II.39.) e impondo a condição de ponto duplo ($\hat{x}_n = \hat{x}^p$) tem-se:

$$O_{pp} = \hat{e}^T \left[I - \phi(\theta_n \tau_n) \right] \hat{x}^p \quad (II.40.)$$

levando-se em conta a equação que determina o ponto duplo (II.34.), resulta:

$$O_{pp} = \hat{e}^T \left[I - \phi(\theta_n \tau_n) \right] \left[I - \phi(\tau_n) \right]^{-1} \underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (II.41.)$$

A seguir, na Fig. (II.7.) mostra-se o comportamento de O_{pp} em relação a θ_n . Por esta figura nota-se ainda que:

$$\lim_{\tau_n \rightarrow 0} O_{pp} = 0 \quad (II.42.)$$

o que enfatiza o fato anteriormente comentado de que se deve trabalhar com a frequência do sinal de comutação bem maior que a frequência natural do sistema a ser controlado.

II.5.3 ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

O sistema em malha aberta é, por hipótese, estável: trata-se de um sistema linear de 2a. ordem a ser controlado, com uma entrada $u(\tau)$, relacionada com o sinal de erro e_r .

Para ilustrar o método utilizado posteriormente, esta estabilidade pode ser confirmada a partir da equação que descreve o funcionamento do sistema em malha aberta:

$$\hat{x}_{n+1} = \phi(\tau_n) \hat{x}_n + \underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (II.43.)$$

levando-se em conta a equação que define a matriz de transição $\phi(\tau_n)$, pode-se obter:

$$\sigma = -TR [\phi(\tau_n)] = - (e^{\lambda_1 \tau_n} + e^{\lambda_2 \tau_n}) \quad (II.44.)$$

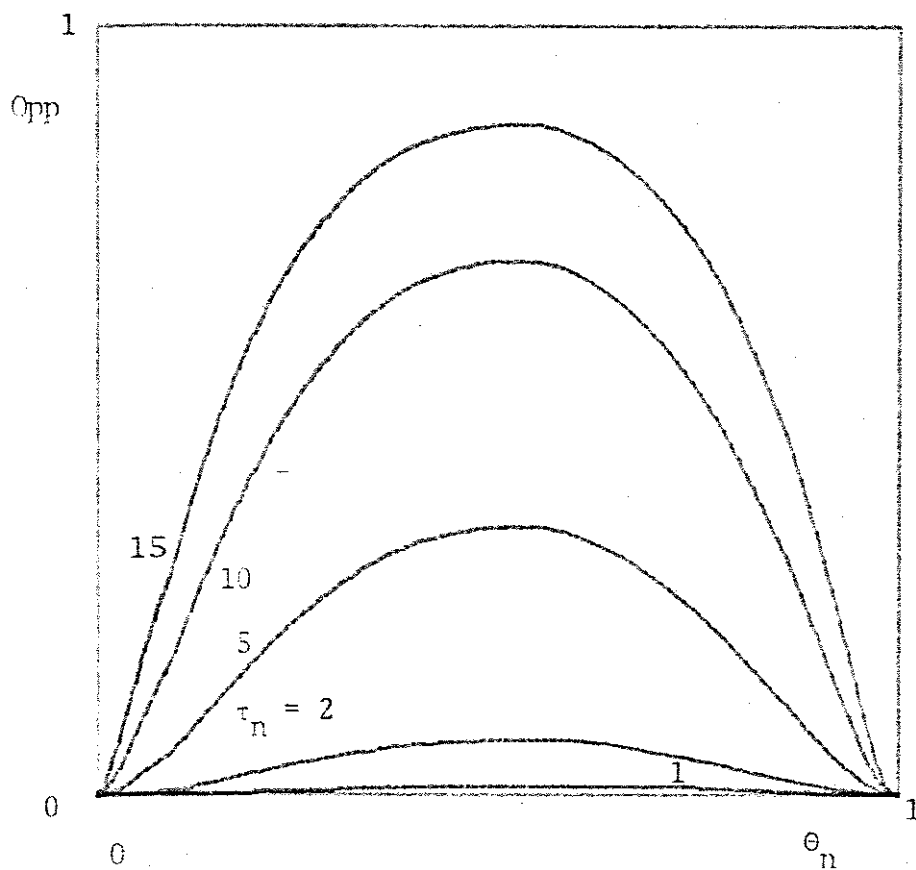


FIG. II.7. - VARIACÃO DE O_{pp} EM FUNÇÃO DO INSTANTE DE COMUTACÃO
TENDO τ_n COMO PARÂMETRO ($\epsilon' = 1,5$)

$$\Delta = \text{DeT} [\phi(\tau_n)] = e^{\lambda_1 \tau_n} \cdot e^{\lambda_2 \tau_n} \quad (\text{II.45.})$$

Observe-se que, nas equações anteriores $\text{TR} [\phi(\tau_n)]$ é o traço e $\text{DeT} [\phi(\tau_n)]$ é o determinante da matriz de transição.

Na Figura (II.8.) apresenta-se o plano de parâmetros (Δ, σ) , para sistemas discretos onde o interior do quadrilátero ABCD corresponde aos pontos onde o sistema é estável. Como se pode notar, o sistema de 2a. ordem aqui estudado é estável para quaisquer valores do fator de amortecimento $(\xi > 1)$ e da relação entre a frequência natural do sistema e da frequência da função de comutação $a(\tau)$.

II.6. ESTUDO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

Para o estudo do sistema em malha fechada considera-se, além da equação recorrente associada ao sistema (II.32.), a equação (II.16.) que determina o instante de comutação:

$$m[(n + \theta_n) \tau_n] = 0 \quad (\text{II.46.})$$

e que pode ser escrita, levando em conta (II.8a.), (II.8b.) e (II.9.), na forma:

$$-a_o(1 - \theta_n) + k_p [y_r - \hat{e}^T \hat{x}_{n+\theta_n}] = 0 \quad (\text{II.47.})$$

Esta equação pode não admitir solução, pode ter solução única, ou pode ter mais de uma solução para $n \cdot \tau_n \leq \tau \leq (n+1) \tau_n$.

No 1º caso estamos na saturação com $\theta_n = 0$ ou $\theta_n = 1$. No 3º caso ocorrem reticências, fenômeno este que será estudado posteriormente.

Vamos estudar o caso em que a equação (II.47.) admite solução única. Esta equação pode ser colocada na forma:

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - \hat{e}^T \phi(\theta_n \tau_n) \hat{x}_n] = 0 \quad (\text{II.48.})$$

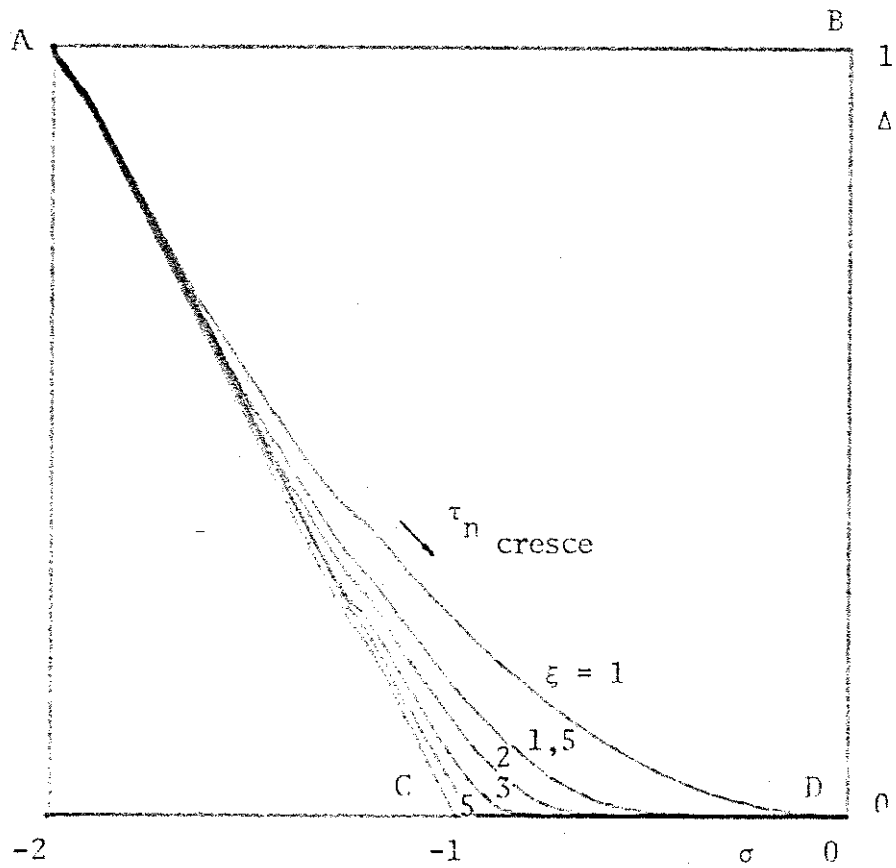


FIG. II.8. - PLANO DE PARÂMETROS (Δ , σ) PARA O SISTEMA DESCRITO PELA EQUAÇÃO RECORRENTE (II.43.) TENDO O FATOR DE AMORTECIMENTO (ξ) COMO PARÂMETRO

como na matriz de transição $\phi(\theta_n \tau_n)$ aparecem termos em $e^{\lambda_1 \theta_n \tau_n}$ e $e^{\lambda_2 \theta_n \tau_n}$, a equação (II.48.) é do tipo transcendente, não permitindo explicitar θ_n em função do vetor de estado \tilde{x}_n . A recorrência associada ao sistema é uma recorrência implícita.

O ponto duplo desta recorrência será dado pelas equações (II.34.) reproduzidas a seguir:

$$\tilde{x}^p = [I - \phi(\tau_n)]^{-1} \phi(\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (II.34.)$$

e

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - \tilde{e}^T \phi(\theta_n \tau_n) \tilde{x}^p] = 0 \quad (II.49.)$$

Não é possível explicitar θ_n ou \tilde{x}^p a partir destas equações.

Foi visto anteriormente que se deve usar τ_n suficientemente pequeno para se obter, na saída, ondulações pico a pico de valores menores possíveis. Sob esta hipótese pode-se aproximar (II.49.) por

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - x_1^p] = 0 \quad (II.50.)$$

de onde obtém-se, levando em conta (II.38.)

$$1 - \theta_n \cong \frac{1}{1 + \left(\frac{a_o}{k_p}\right)} y_r \quad (II.51.)$$

Pela equação (II.51.) nota-se que fixado um certo valor da referência, a saída $y = x_1^p$ tende a se aproximar cada vez mais de y_r se escolhermos $\left(\frac{a_o}{k_p}\right) \ll 1$. Chega-se portanto como critério de escolha do ganho k_p a seguinte relação:

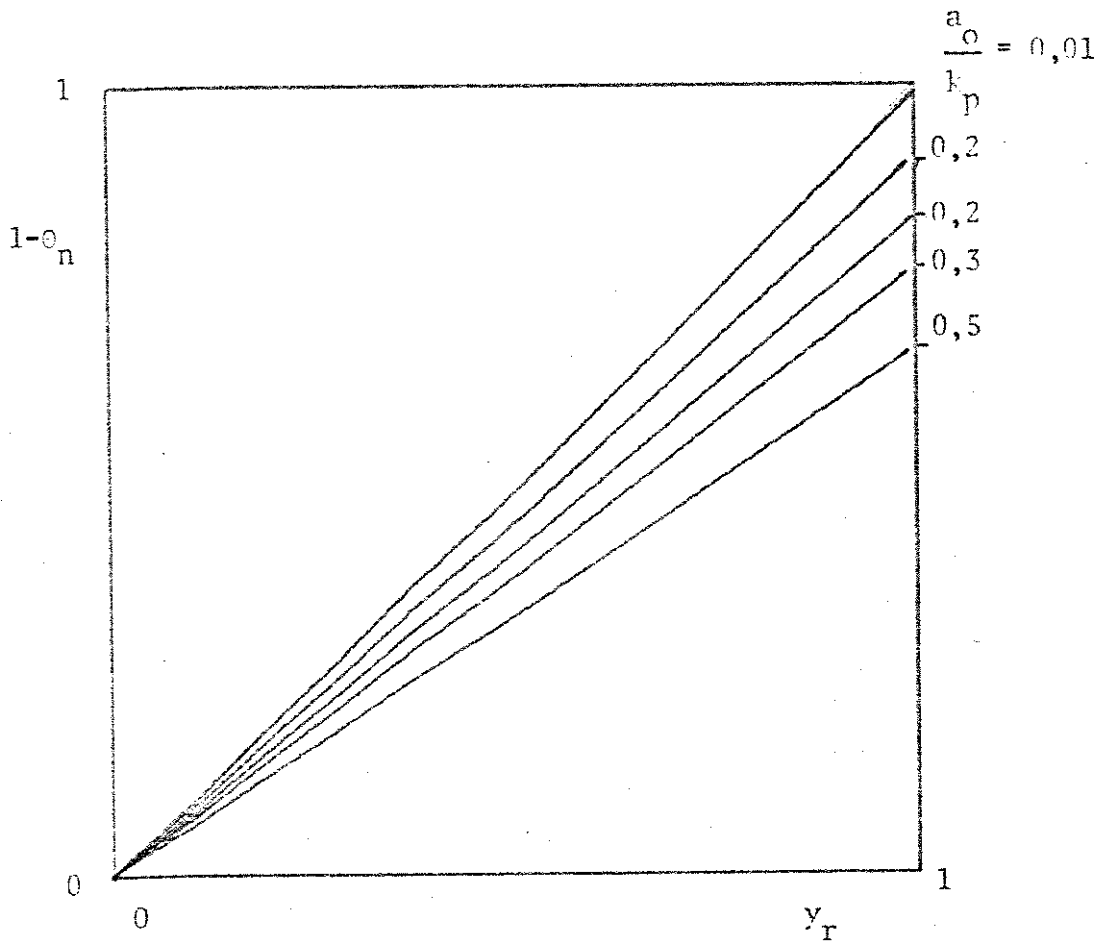


FIG. II.9. - VARIACÃO DA LARGURA DE PULSOS ($1-\theta_n$) COM A REFERÊNCIA TENDO A RELAÇÃO (a_o/k_p) COMO PARÂMETRO.

$$\frac{a_o}{k_p} \ll 1 \quad (\text{II.52.})$$

Na Fig. (II.9.) mostra-se a variação de $(1-\theta_n)$ com a referência, nota-se que esta variação é linear dentro da condição imposta pela equação (II.52.).

II.6.1 ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

O sistema em malha fechada é descrito pelas equações:

$$\hat{x}_{-n+1} = \phi(\tau_n) \hat{x}_{-n} + \underline{\phi}(\theta_n \tau_n) \quad (\text{II.53.})$$

que é a equação de estado do sistema e

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - \hat{e}^T \phi(\theta_n \tau_n) \hat{x}_{-n}] = 0 \quad (\text{II.54.})$$

que é a equação do instante de comutação.

Examinando estas equações anteriores nota-se que o estudo da estabilidade local do ponto duplo pode ser muito trabalhoso, pois, como já foi comentado, a equação que descreve o sistema em malha fechada é implícita, propõe-se portanto, uma linearização destas equações sob a hipótese de τ_n ser muito pequeno.

Assim, pode-se obter, por série de Taylor:

$$\phi(\tau_u) = e^{\hat{A}\tau_n} \cong I + \hat{A}\tau_n$$

$$\underline{\phi}(\bar{\theta}_n \tau_n) \cong \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} -\bar{\theta}_n \tau_n \\ \bar{\theta}_n \tau_n \end{bmatrix} = \underline{\bar{b}} \bar{\theta}_n \tau_n \quad (\text{II.55.})$$

A linearização imposta à equação (II.54.) pode ser escrita na forma :

$$-\frac{a_0}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - \hat{e}^T (I + \hat{A} \tau_n) \hat{x}_n] = 0 \quad (II.56.)$$

A partir desta equação pode-se então obter o instante de comutação θ_n como uma função explícita do estado:

$$1 - \theta_n = \frac{y_r - \hat{e}^T [I + \hat{A} \tau_n] \hat{x}_n}{\frac{a_0}{k_p} - \hat{e}^T [\hat{A} \tau_n] \hat{x}_n} = g(\hat{x}_n) \quad (II.57.)$$

Linearizando agora esta equação em torno do ponto duplo $(\hat{x}_n^p, \theta_n^p)$ onde:

$$1 - \theta_n^p = \frac{1}{1 + \left(\frac{a_0}{k_p}\right)} y_r \quad (II.58.)$$

Tem-se:

$$1 - \theta_n \cong g(\hat{x}_n^p) + \langle \nabla g(\hat{x}_n^p), (\hat{x}_n - \hat{x}_n^p) \rangle \quad (II.59.)$$

Na equação (II.59.) acima, considera-se $\nabla g(\hat{x}_n^p)$ como o gradiente da função $g(\hat{x}_n)$ no ponto duplo \hat{x}_n^p e define-se:

$$\hat{x}_n = \hat{x}_n - \hat{x}_n^p \quad (II.60.)$$

A partir das equações (II.60.), (II.59.) e (II.53.) obtém-se finalmente a equação que descreve o comportamento do sistema no entorno de um ponto duplo \hat{x}_n^p :

$$\hat{X}_{n+1} = \{ I + [\hat{A} + \hat{b} \nabla^T g(\hat{x}^p)] \tau_n \} \hat{X}_n \quad (\text{II.61.})$$

Retomando a equação (II.57.) pode-se obter o gradiente de $g(\hat{x}^p)$ na forma

$$\nabla g(\hat{x}^p) = - \frac{k_p}{a_o} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \theta_n^p \lambda_1 \tau_n \\ 1 + \theta_n^p \lambda_2 \tau_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.62.})$$

Definindo A^* como sendo:

$$A^* \triangleq I + [\hat{A} + \hat{b} \nabla^T g(\hat{x}^p)] \tau_n \quad (\text{II.63.})$$

A estabilidade do sistema em malha fechada no entorno do ponto duplo \hat{x}^p é estudada por análise do traço e do determinante da matriz A^* :

$$\sigma = -\text{TR}(A^*) = -2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \tau_n + \theta_n^p \left(\frac{k_p}{a_o} \right) \tau_n^2$$

$$\Delta = \text{DET}(A^*) = 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \tau_n + \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_o} \right) (1 - \theta_n^p) \right] \tau_n^2 \quad (\text{II.64.})$$

Na Fig. (II.10.) mostra-se o plano de parâmetros para sistemas discretos (Δ, σ) onde o triângulo hachuriado corresponde às condições de estabilidade do sistema.

Retomando as equações (II.64.) determina-se:

$$\text{a) } \Delta + \sigma + 1 = \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_o} \right) \right] \tau_n^2 > 0$$

$$\text{b) } \Delta - \sigma + 1 = 4 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_o} \right) (1 - 2\theta_n^p) \right] \tau_n^2 \quad (\text{II.65.})$$

$$\text{c) } \Delta = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_o} \right) (1 - \theta_n^p) \right] \tau_n^2$$

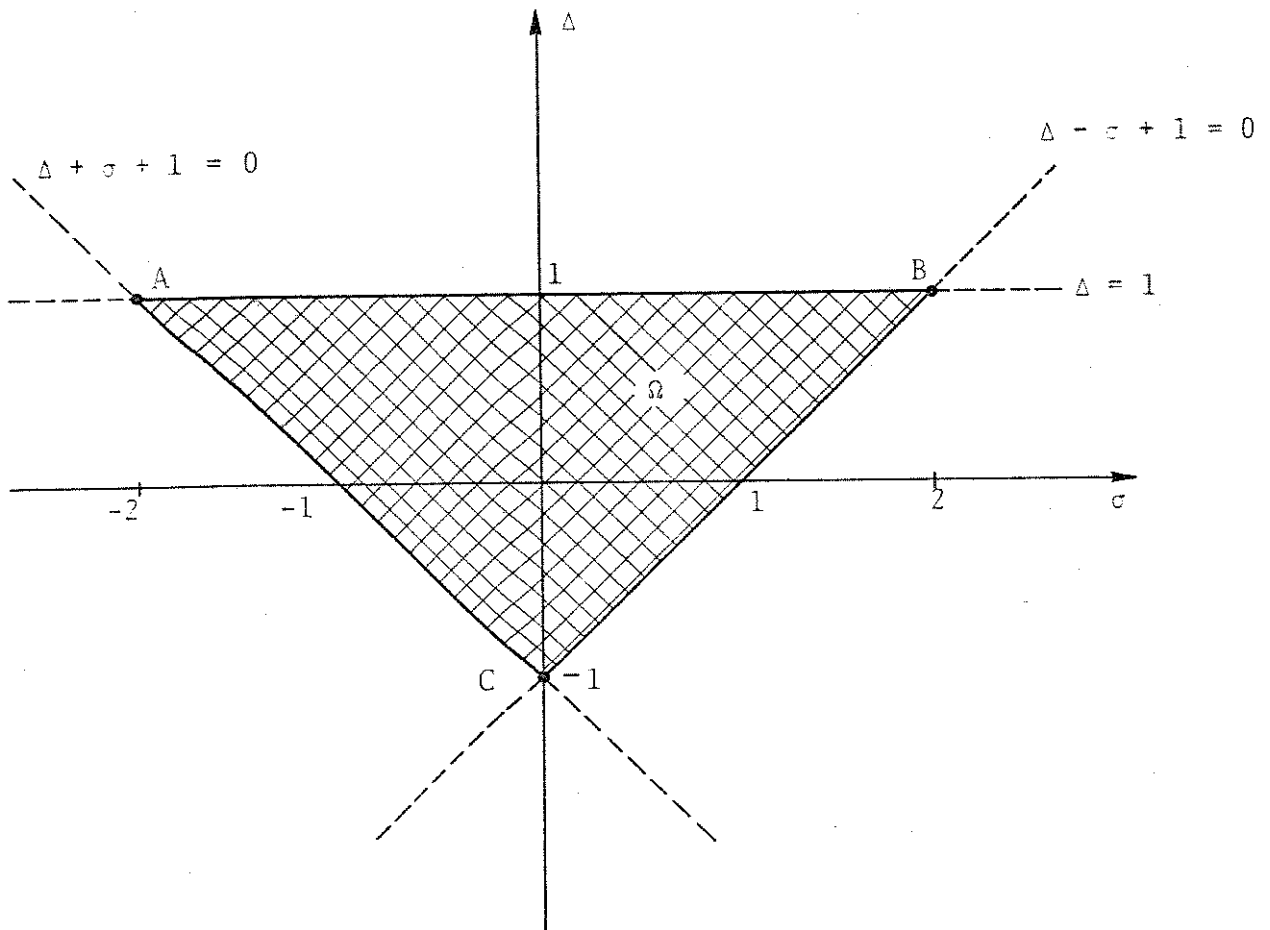


FIG. II.10. - PLANO DE PARÂMETROS PARA SISTEMAS DISCRETOS, O INTERIOR DO TRIÂNGULO ABC CORRESPONDE A SITUAÇÕES ESTÁVEIS

os pontos que correspondem a situações estáveis pertencem portanto a um conjunto Ω tal que:

$$\Omega \triangleq \{p_0(\sigma, \Delta) \in \Omega / \Delta < 1; \Delta + \sigma + 1 > 0; \Delta - \sigma + 1 > 0\} \quad (\text{II.66.})$$

A partir da Def. (II.66.) e das condições (II.65.) pode-se determinar as condições de estabilidade, porém como estas equações são funções de θ_n^p vamos estudá-las para a condição de pior caso.

a) $\Delta + \sigma + 1 > 0$ sempre

b) $\Delta - \sigma + 1 > 0 \rightarrow 4 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_0}\right)(1 - 2\theta_n^p)\right]\tau_n^2 > 0$

Neste item, a condição de pior caso é: $\theta_n^p = 1$, ou seja

$$4 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left[1 - \left(\frac{k_p}{a_0}\right)\right]\tau_n^2 > 0 \quad (\text{II.67.})$$

c) $\Delta < 1 \rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_0}\right)(1 - \theta_n^p)\right]\tau_n^2 < 0$

Neste item, a condição de pior caso é: $\theta_n^p = 0$, ou seja

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left[1 + \left(\frac{k_p}{a_0}\right)\right]\tau_n^2 < 0 \quad (\text{II.68.})$$

Estas duas condições aparecem na Fig. (II.11) e nota-se que para τ_n suficientemente pequeno, o conjunto solução de (II.68.) engloba o conjunto solução de (II.67.) no plano $((k_p/a_0), \tau_n)$.

Na Fig. (II.12.) a parte hachuriada corresponde a parâmetros que tornam o sistema estável. Note-se ainda que (k_p/a_0) é limitada superiormente para garantir-se a estabilidade do sistema, portanto não podemos diminuir indefinidamente a relação (a_0/k_p) como era interessante, do ponto de vista de baixa

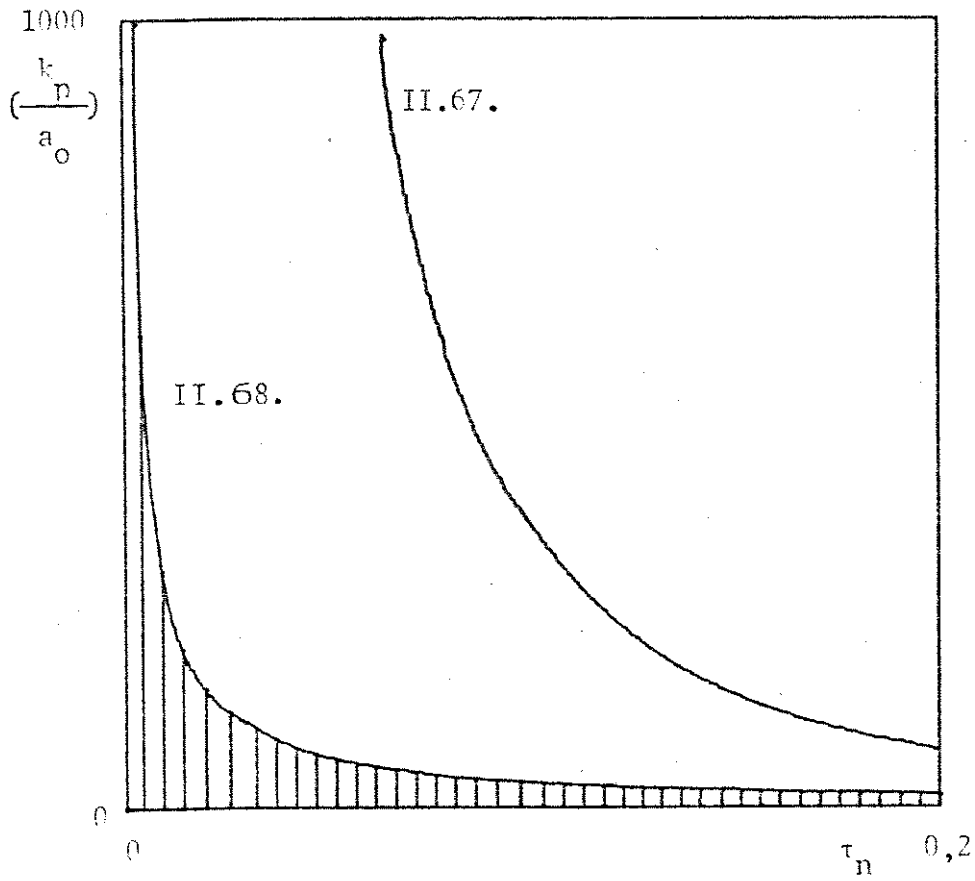


FIG. II.11. - REPRESENTAÇÃO DA REGIÃO DE ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA ($\xi = 1,5$)

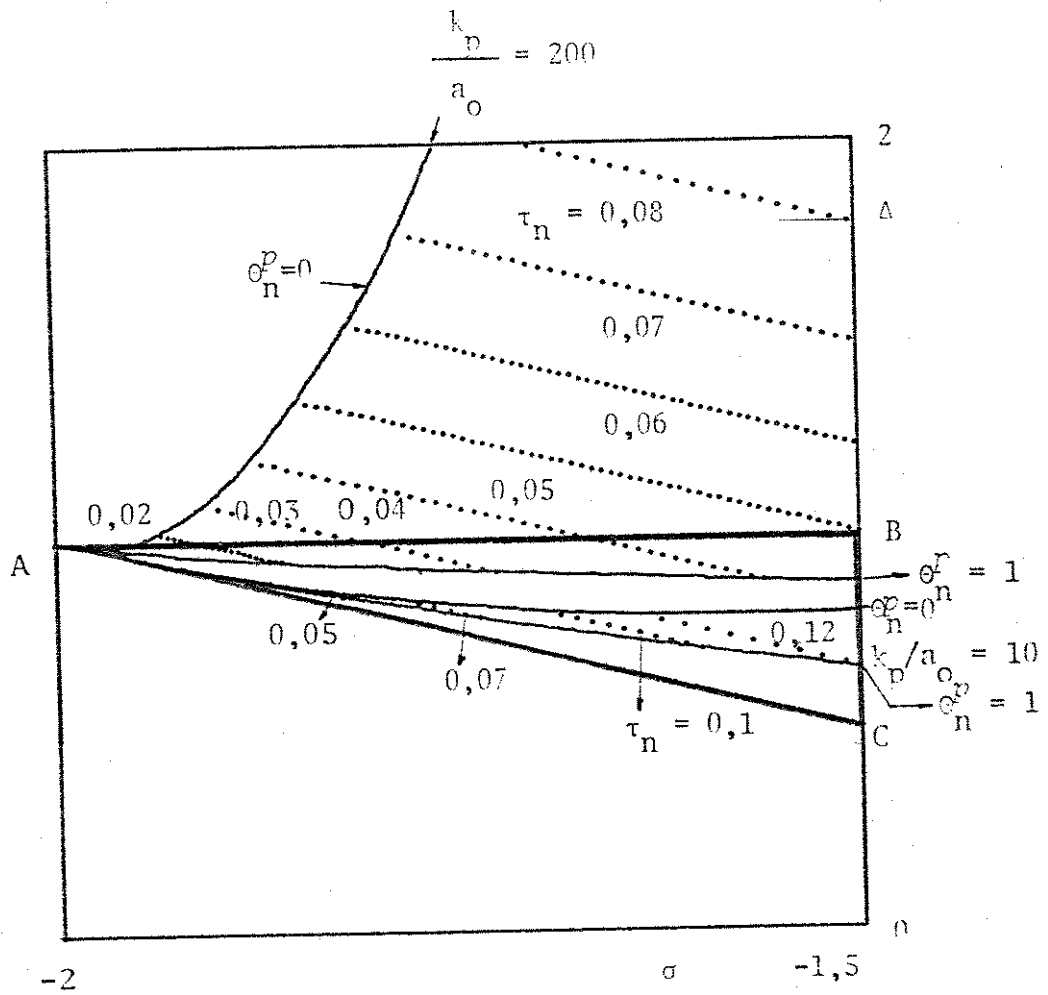


FIG. II.12. - PLANO DE PARÂMETROS (Δ , σ) PARA O SISTEMA OPERANDO EM MALHA FECHADA ($\xi = 1,5$)

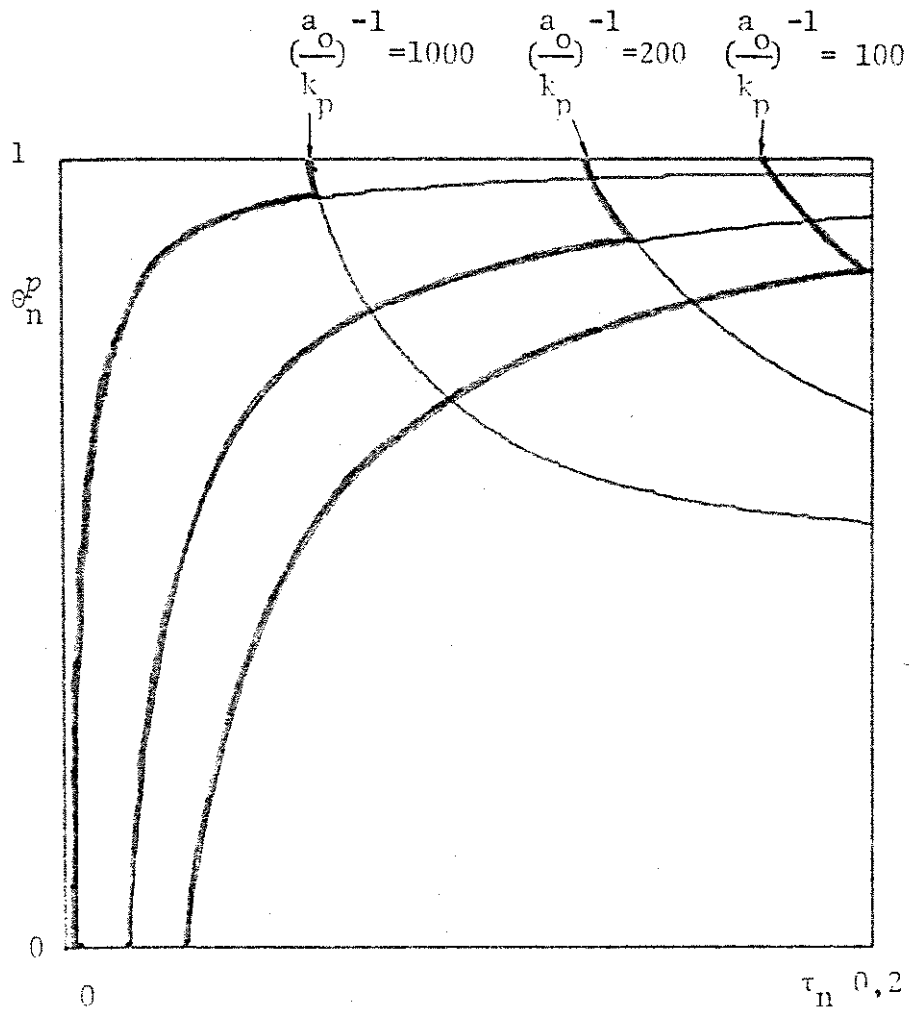


FIG. II.13. - LIMITAÇÕES DO INSTANTE DE COMUTACÃO. CONSIDERA-SE ($\varepsilon = 1,5$)

ondulação na saída.

A seguir, na Fig. (II.12) vê-se o plano de parâmetros para o sistema em malha fechada onde o interior do triângulo ABC corresponde a pontos que apresentam estabilidade no sistema.

Nota-se ainda na Fig. (II.12.) que situações estáveis podem ser obtidas fora da região suficiente de estabilidade correspondente à Fig. (II.11.) impondo-se uma limitação no instante de comutação dentro do intervalo $[0, 1]$.

Na Fig. (II.13.) tem-se portanto, no plano (θ_n^p, τ_n) , as limitações de θ_n de tal forma que se garante a estabilidade do sistema nos pontos interiores ao contorno mais escuro para cada relação (k_p/a_o) .

II.7. REGIÃO DE COMUTAÇÃO NO PLANO DE FASE

Retomando a equação (II.14.) que descreve o sistema em malha aberta:

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = \hat{A} \hat{x}(\tau) + \hat{b} u(\tau) \quad (II.69.)$$

os pontos singulares, devem satisfazer a condição

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = \underline{0} \quad (II.70.)$$

Na equação (II.69.) obtêm-se dois pontos singulares:

$$\hat{x}_0^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{x}_1^s = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (II.71.)$$

respectivamente para $u(\tau) = 0$ e $u(\tau) = 1$.

O controlador proporcional em estudo é tal que:

$$\left[\begin{array}{l} e_r(\tau) < 0 \rightarrow \theta_n = 1 \\ e_r(\tau) > \frac{a_o}{k_p} \rightarrow \theta_n = 0 \\ 0 \leq e_r(\tau) \leq \frac{a_o}{k_p} \rightarrow 0 \leq \theta_n \leq 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.72.})$$

Deve-se notar que:

$$e_r(\tau) = y_r - \hat{e}^T \hat{x}(\tau) = y_r - \hat{x}_1(\tau) - \hat{x}_2(\tau) \quad (\text{II.73.})$$

Com as duas equações anteriores, pode-se determinar o plano de fase do sistema e observa-se que os dois pontos singulares anteriormente citados são em geral Pontos Singulares Virtuais.

Retomando a equação (II.72.):

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1(\tau) = \lambda_1 \hat{x}_1(\tau) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} u(\tau) \\ \dot{\hat{x}}_2(\tau) = \lambda_2 \hat{x}_2(\tau) + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} u(\tau) \end{array} \right. \quad (\text{II.74.})$$

Portanto a equação da trajetória percorrida no plano de Fase é obtida por integração da equação acima. No caso de $u(\tau)$ constante:

$$\hat{x}_2(\tau) = k^* [\lambda_1 \hat{x}_1(\tau) - \delta(\tau)]^{\lambda_2/\lambda_1} - \frac{\delta(\tau)}{\lambda_2} \quad (\text{II.75.})$$

onde k^* = constante que depende das condições iniciais

$$\delta(\tau) = \frac{u(\tau)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \text{também constante}$$

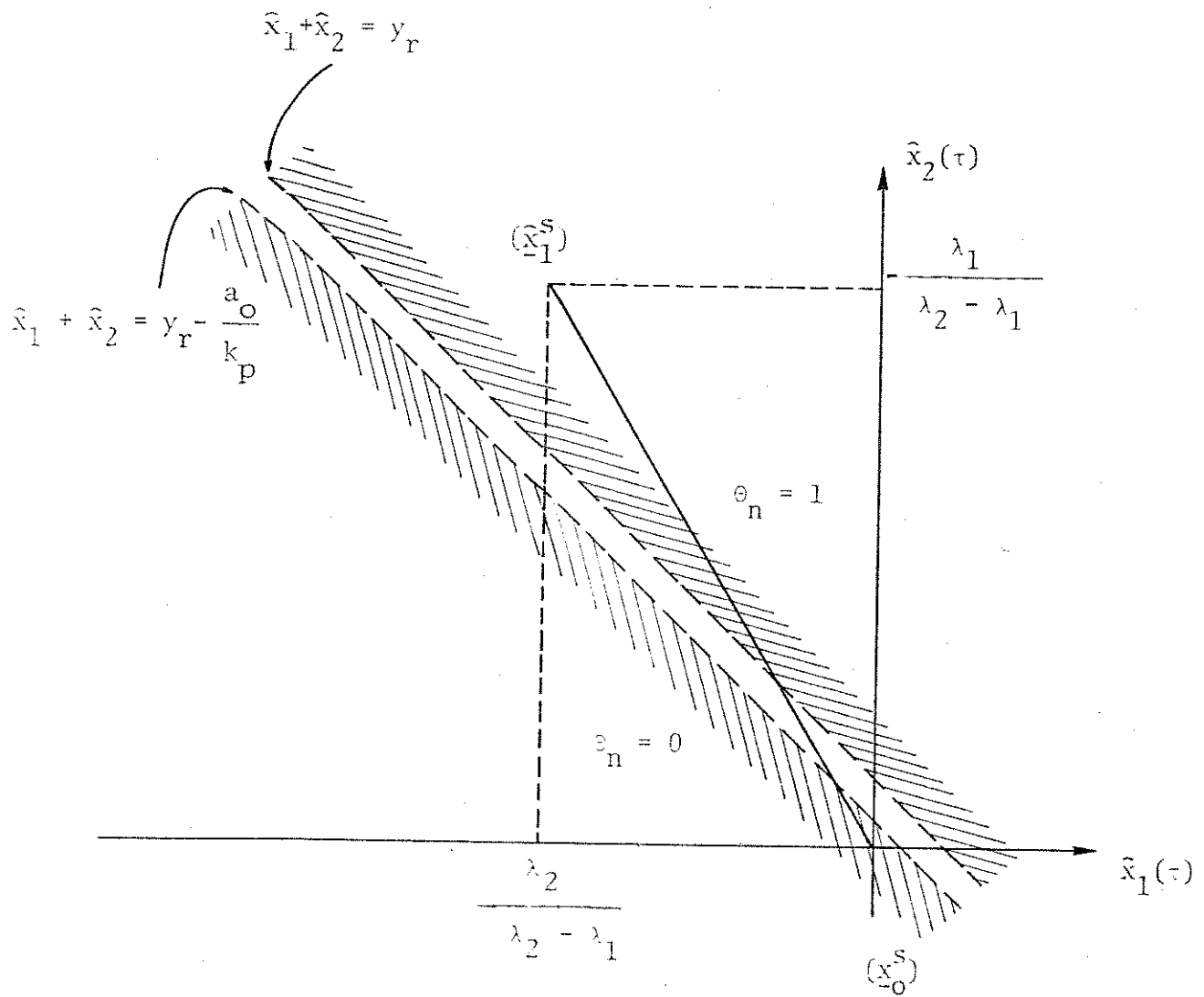


FIG. II.14. - PLANO DE FASE ONDE SE VÊ AS RETAS DE COMUTAÇÃO IMPOSTAS PELO CONTROLADOR PROPORCIONAL

Sendo agora o ponto \hat{x}^0 correspondente a uma condição inicial qualquer e \hat{x}^1 o estado alcançado mediante a aplicação de

$$u(\tau) = 0 \text{ durante o intervalo } \Theta_n \tau_n$$

e \hat{x}^2 o estado alcançado a partir de \hat{x}^1 mediante a aplicação de:

$$u(\tau) = 1 \text{ durante o intervalo } \bar{\Theta}_n \tau_n$$

Pela equação (II.74.) obtém-se:

$$\begin{cases} \hat{x}_1^2 = \hat{x}_1^0 e^{\lambda_1 \tau_n} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [1 - e^{\lambda_1 \bar{\Theta}_n \tau_n}] \\ \hat{x}_2^2 = \hat{x}_2^0 e^{\lambda_2 \tau_n} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [1 - e^{\lambda_2 \bar{\Theta}_n \tau_n}] \end{cases} \quad (\text{II.76.})$$

Na Fig. (II.15.) plota-se as condições dadas por (II.76.) e nota-se que o controle tende a levar:

$$\begin{cases} \hat{x}_1^2 = \hat{x}_1^0 = \hat{x}_1^p \\ \hat{x}_2^2 = \hat{x}_2^0 = \hat{x}_2^p \end{cases} \quad (\text{II.77.})$$

II.8. RETICÊNCIAS

Durante o intervalo de tempo $[n \cdot \tau_n, (n+\Theta_n)\tau_n]$ tem-se $m(\tau) < 0$; no instante $(n+\Theta_n)\tau_n$ a função $m(\tau)$ se anula e ocorre uma comutação. Se eventualmente logo após o instante $(n+\Theta_n)\tau_n$ a função $m(\tau)$ tender a ser novamente negativa, ou seja:

$$\left. \frac{d}{d\tau} m(\tau) \right|_{\tau = (n+\Theta_n)\tau_n^+} < 0 \quad (\text{II.78.})$$

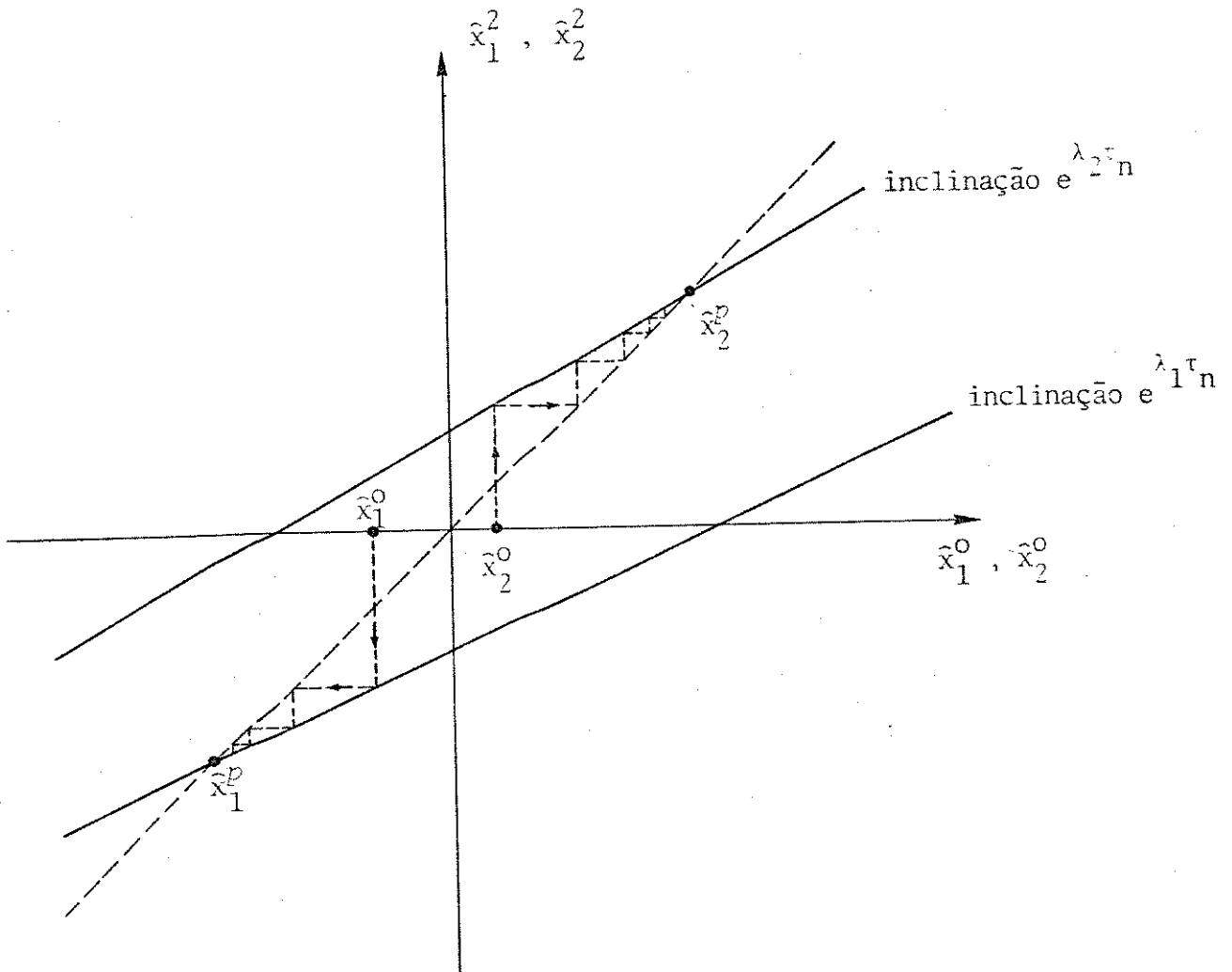


FIG. II.15. - DIAGRAMA DE LAGRANGE CORRESPONDENTE AO SISTEMA EM ESTUDO

então ocorrerá nova comutação, depois outra, e assim sucessivamente. Este fenômeno é chamado de Reticências.

No Apêndice A, junto com o programa analógico, apresenta-se um circuito que detecta e inibe o comutador caso ocorra este fenômeno.

A condição (II.78.) pode ser expressa na forma:

$$\hat{e}^T \hat{A} \hat{x}_{n+\theta_n} > \left(\frac{a_0}{k_p} \right) \frac{1}{\tau_n} \quad (II.79.)$$

$$S/a : \hat{e}^T \hat{x}_{n+\theta_n} = y_r - \left(\frac{a_0}{k_p} \right) \bar{\theta}_n$$

Portanto, no presente estudo só consideraremos situações tais que $m(\tau)$ tenha uma ou não tenha solução no intervalo $[n \cdot \tau_n, (n+\theta_n) \tau_n]$ pois quando ocorrer reticências o comutador será inibido e só poderá comutar uma vez o intervalo de tempo acima citado.

No apêndice A mostra-se o circuito detector e inibidor de reticências.

II.9. SIMULAÇÃO

1. A Fig. (II.16.) corresponde a uma situação estável com baixa ondulação na saída com os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,01 \\ k_p &= 1 \\ \tau_n &= 0,01 \end{aligned} \quad (II.80.)$$

Nota-se que para a relação $\frac{a_0}{k_p}$ usada, praticamente o valor da saída em regime coincide com a referência fixada.

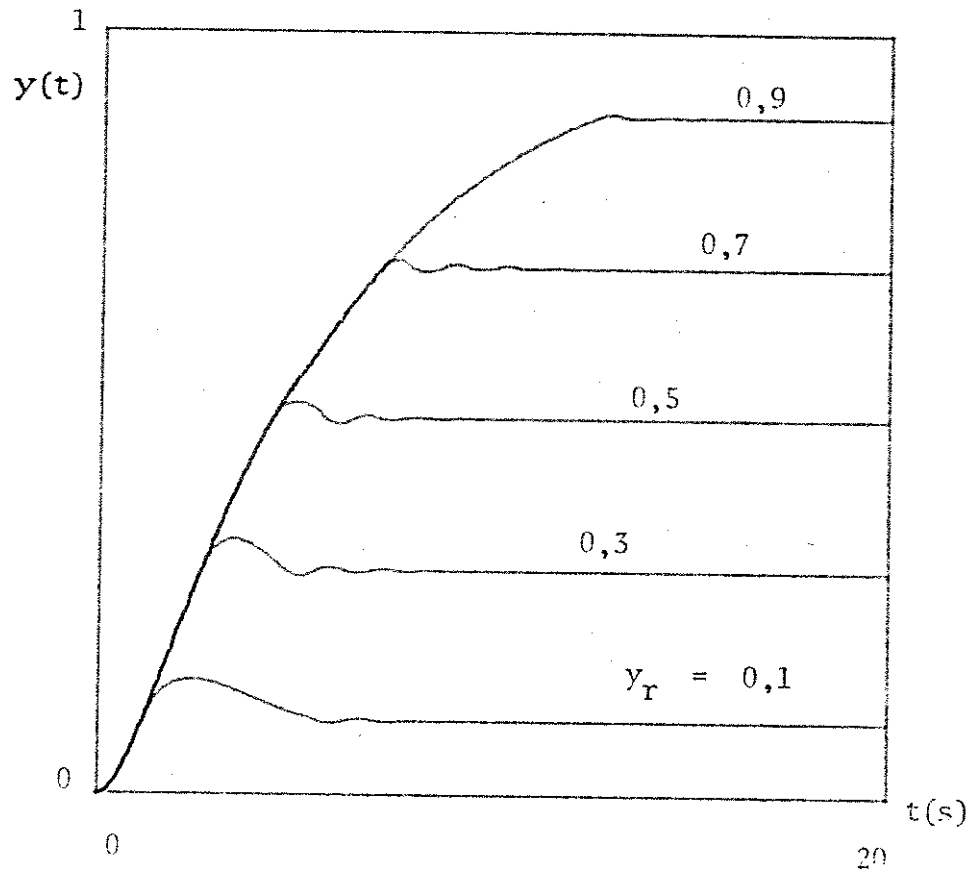


FIG. II.16. - DESEMPENHO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL COM OS PARÂMETROS DADOS POR II.80.

2. A Fig. (II.17.) corresponde a uma situação estável, porém com uma ondulação na saída, maior que no caso anterior, foi usado os seguintes valores para os parâmetros:

$$\begin{aligned} a_o &= 1 \\ k_p &= 1 \\ \tau_n &= 0,2 \end{aligned} \tag{II.81.}$$

Nota-se agora que a saída $y(t)$ em regime é bem diferente do valor da referência fixada, porém satisfaz a equação (II.54.).

$$(y(\tau))_{\text{regime}} \cong 1 - \theta_n \cong \frac{y_r}{2} \tag{II.82.}$$

3. A Fig. (II.18.) mostra três condições, uma estável e duas instáveis segundo os critérios de estabilidade anteriormente determinados, os parâmetros são dados por:

$a_o = 0,01$	$a_o = 0,01$	$a_o = 0,01$
(II) $k_p = 1$	(I2) $k_p = 1$	(E1) $k_p = 1$
$\tau_n = 0,05$	$\tau_n = 0,5$	$\tau_n = 0,01$

4. A Fig. (II.19) mostra novamente três condições, porém, agora todas são estáveis tendo uma delas maior ondulação pico a pico que as outras; os parâmetros são:

$a_o = 0,25$	$a_o = 0,25$	$a_o = 0,25$
(E1) $k_p = 1$	(E2) $k_p = 1$	(E3) $k_p = 1$
$\tau_n = 0,05$	$\tau_n = 0,5$	$\tau_n = 0,01$

Pelos resultados da simulação pode-se notar:

1. A Fig. (II.18.) condição (I2) mostra que a variação da derivada de

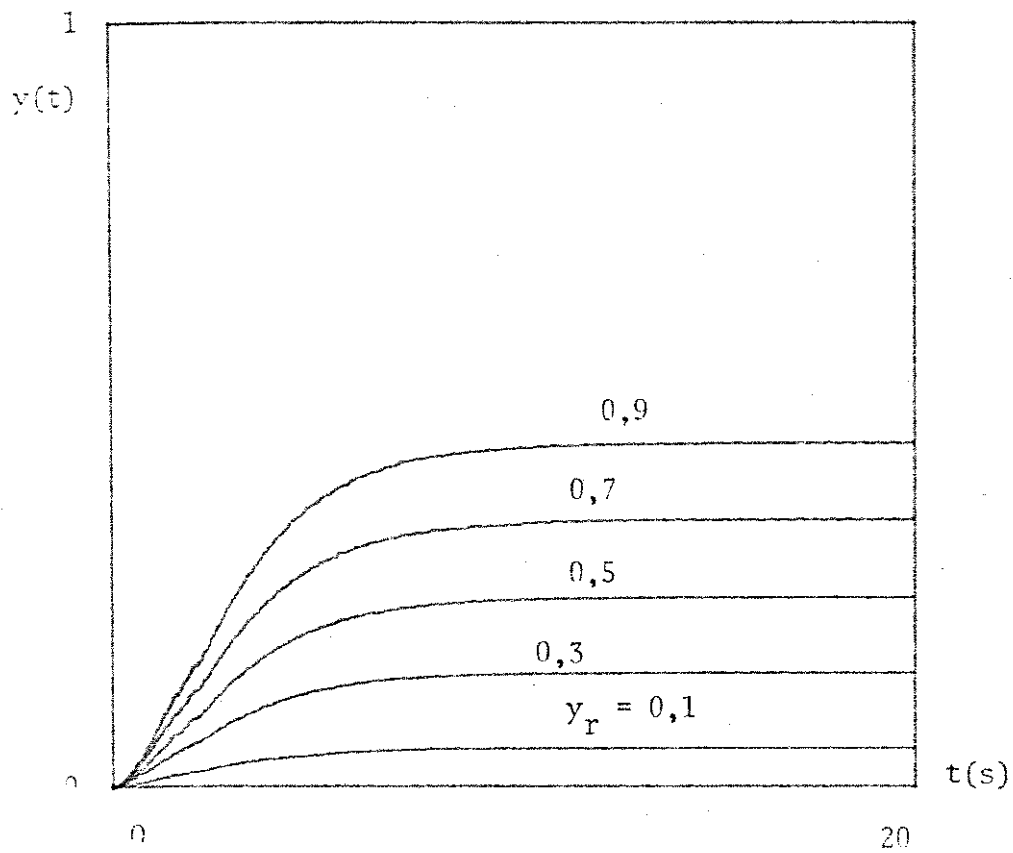


FIG. II.17. - DESEMPENHO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL COM OS PARÂMETROS DADOS POR (II.81.)

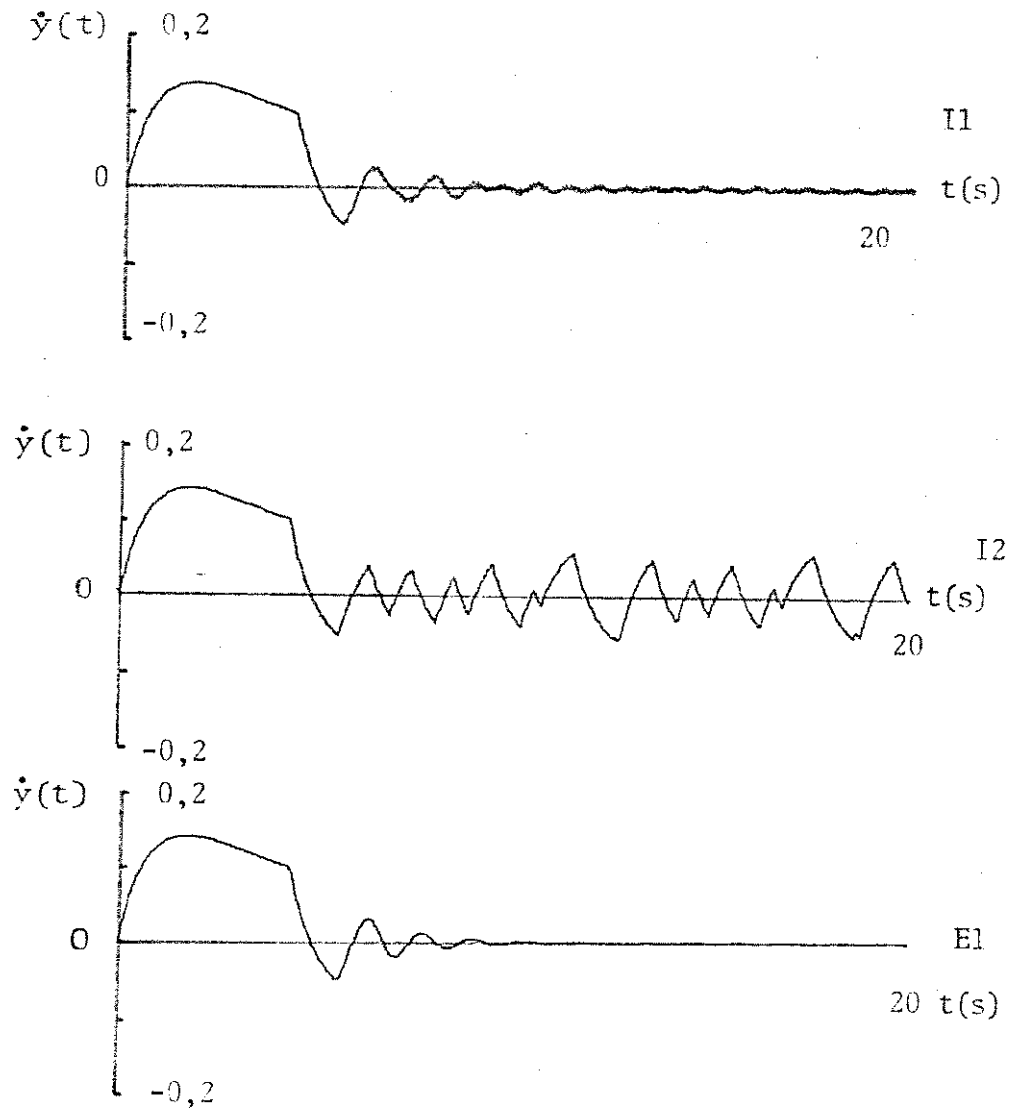


FIG. II.18. - VARIAÇÃO NO TEMPO DE $\dot{y}(\tau)$ ONDE (E) CORRESPONDE A SITUAÇÃO ESTÁVEL E (I) INSTÁVEL ($\gamma_r = 0,5$)

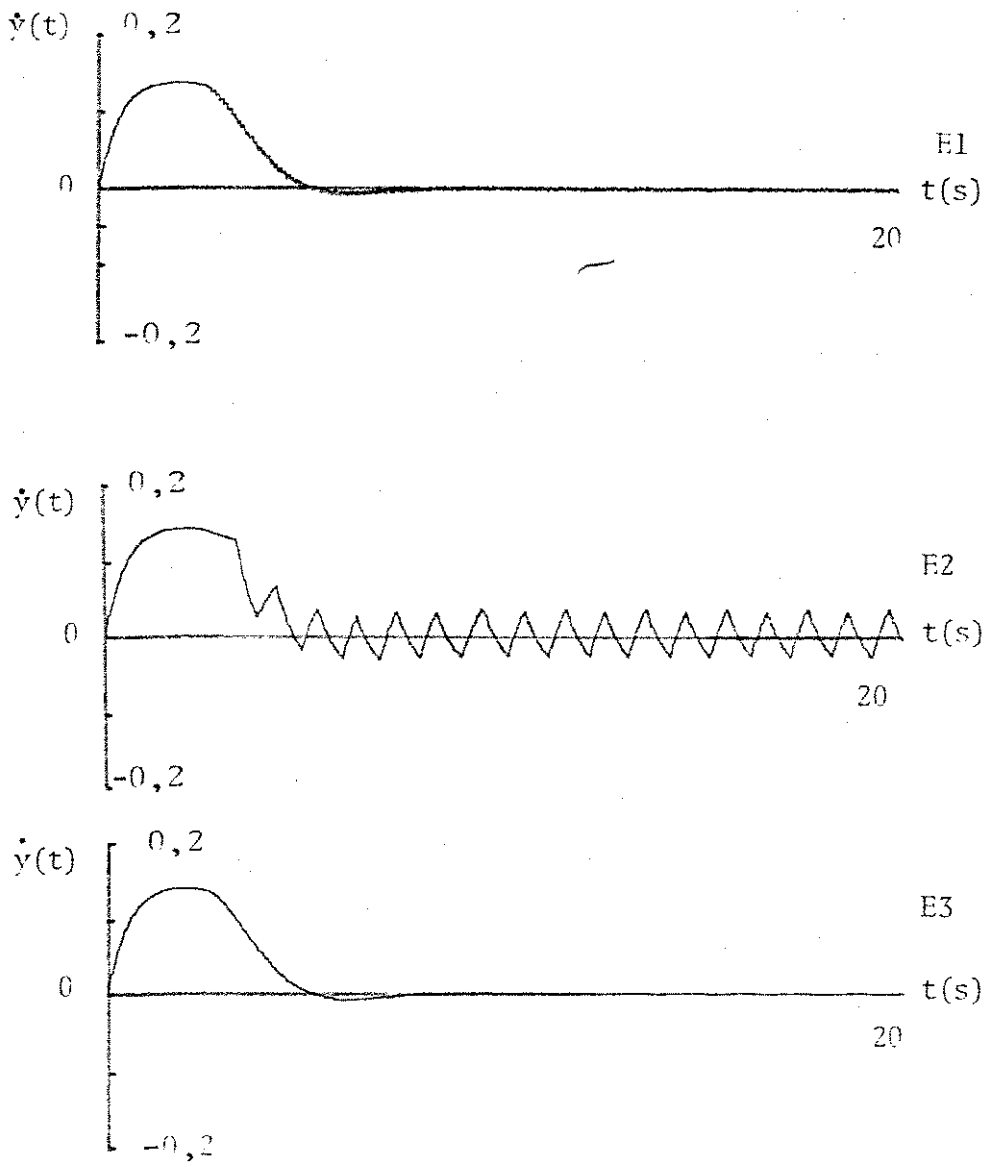


FIG. II.19. - DESEMPENHO DO SISTEMA, MOSTRANDO TRÊS CONDIÇÕES ESTÁVEIS
($y_r = 0,5$)

$y(\tau)$ no tempo apresenta um comportamento pseudo-aleatório denominado fenômeno de Pulkin que caracteriza portanto uma situação instável.

2. Na Fig. (II.18.) condição (I1) vê-se uma oscilação de alta frequência, superposta à derivada da saída que não é devido à ocorrência de reticências pois só foi permitido comutar uma única vez em cada intervalo de tempo $[0, T]$.

Aparentemente estes valores dos parâmetros não instabilizam o sistema, isto se deve ao fato que determinamos o domínio suficiente de estabilidade e a operação do sistema nesta dituação se encontra bem próxima da fronteira de estabilidade.

3. Na Fig. (II.19.) condição (E2) o sistema se apresenta estável, porém, com uma grande ondulação na saída. Nesta condição o sistema chega em regime a um ciclo limite estável no plano de fase (x_1, x_2) .

§§§§§

§

CAPÍTULO III

ESTUDO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO

III.1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se novamente o sistema em estudo (como no capítulo anterior) porém, associado agora com um controlador do tipo proporcional mais derivativo.

Determina-se o comportamento do sistema em malha fechada.

III.2. MODELA'ENTO

O sistema agora em estudo (com o controlador P.D.) está representado no Diagrama de Blocos a seguir. Note-se que o sistema já aparece normalizado nas mesmas condições do capítulo anterior com $k = k^* \omega_n$. Deste Diagrama - obtem-se:

$$u(\tau) = f[m(\tau)] = f\{a(\tau) + k_p [(y_r - y(\tau) - k \dot{y}(\tau))]\} \quad (\text{III.1.})$$

Portanto, levando-se em conta as equações que descrevem o sistema tem-se:

$$\dot{\underline{x}}(\tau) = A \underline{x}(\tau) + \underline{b} f \{ a(\tau) + k_p [(y_r - y(\tau) - k \dot{y}(\tau))]\} \quad (\text{III.2.})$$

Fazendo agora a transformação modal proposta no capítulo anterior obtem-se:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\underline{x}}}(\tau) = \hat{A} \hat{\underline{x}}(\tau) + \hat{\underline{b}} u(\tau) \\ y(\tau) = \hat{\underline{e}}^T \hat{\underline{x}}(\tau) \end{cases} \quad (\text{III.3.})$$

onde as matrizes \hat{A} , $\hat{\underline{b}}$ e $\hat{\underline{e}}$ são calculadas pela equação (II.14.), levando-se em conta a equação (III.3.) em (III.2.) obtem-se a equação diferencial não linear, que descreve todo o processo em estudo.

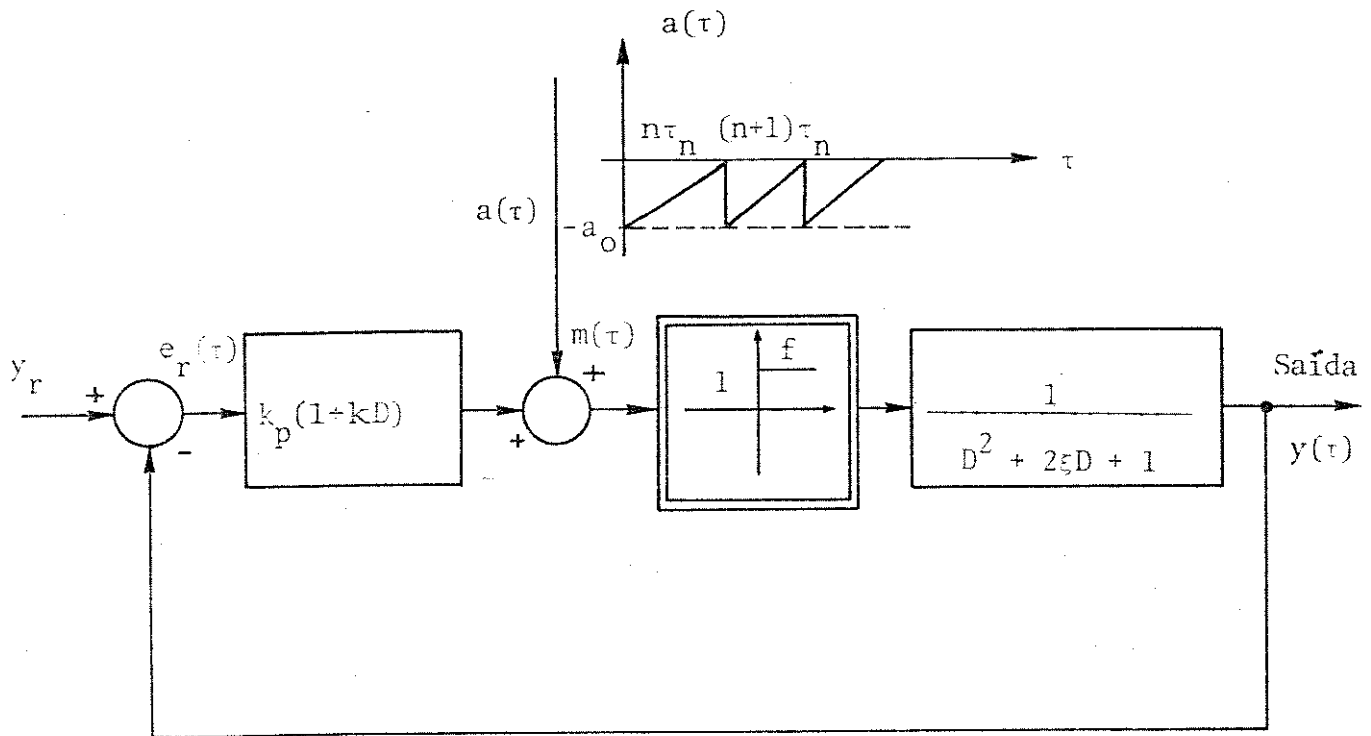


FIG. II.1. - SISTEMA DE CONTROLE COM O CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO. O PRESENTE DIAGRAMA JÁ ESTÁ NORMALIZADO E D É O OPERADOR DIFERENCIAL

$$\dot{\underline{\hat{x}}}(\tau) = \underline{\hat{A}} \underline{\hat{x}}(\tau) + \underline{\hat{b}} f\{ a(\tau) + k_p [y_r - \underline{\hat{e}}^T (I + k\hat{A}) \underline{\hat{x}}(\tau)] \} \quad (\text{III.4.})$$

Portanto, o estudo do sistema se resume na solução desta equação, sendo que o método usado para isto será o mesmo utilizado no capítulo anterior (transformações puntuais).

Não será novamente estudado o sistema em malha aberta, visto que é idêntico ao do capítulo anterior.

III.3. ESTUDO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

O instante de comutação é determinado novamente por:

$$m [(n+\theta_n)\tau_n] = 0 \quad (\text{III.5.})$$

Levando-se em conta o controlador que se emprega, chega-se a:

$$- a_o (1 - \theta_n) + k_p [y_r - \underline{\hat{e}}^T (I + k\hat{A}) \underline{\hat{x}}_{n+\theta_n}] = 0 \quad (\text{III.6.})$$

Supondo a não ocorrência de Reticências, obtêm-se as equações que determinam o instante de comutação na forma:

$$\left[\begin{array}{l} \theta_n = 1 \quad \text{p/} \quad y_r < \underline{\hat{e}}^T [I + k\hat{A}] \phi(\tau_n) \underline{\hat{x}}_n \\ \theta_n = 0 \quad \text{p/} \quad y_r > \frac{a_o}{k_p} + \underline{\hat{e}}^T [I + k\hat{A}] \underline{\hat{x}}_n \\ - \frac{a_o}{k_p} (1-\theta_n) + [y_r - \underline{\hat{e}}^T (I + k\hat{A}) \phi(\theta_n \tau_n) \underline{\hat{x}}_n] = 0 \quad \text{p/} \quad \underline{\hat{e}}^T [I+k\hat{A}] \phi(\tau_n) \underline{\hat{x}}_n \leq \\ y_r \leq \frac{a_o}{k_p} + \underline{\hat{e}}^T [I+k\hat{A}] \underline{\hat{x}}_n \end{array} \right. \quad (\text{III.7.})$$

Nota-se novamente que a equação recorrente associada ao sistema é implícita pois, pela equação (III.7.) conclui-se que o instante de comutação não pode ser colocado como uma função explícita do vetor de estado.

Evidentemente o ponto duplo \tilde{x}^p é tal que o instante de comutação é determinado por:

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - \hat{e}^T (I + k\hat{A}) \phi(\theta_n \tau_n) \tilde{x}^p] = 0 \quad (\text{III.8.})$$

Tomando novamente a aproximação τ_n ser suficientemente pequeno, pode-se obter:

$$(1 - \theta_n) \left[\frac{a_o}{k_p} + (1 - k\tau_n \theta_n) \right] = y_r \quad (\text{III.9.})$$

Nas Fig. (III.2.) e (III.3.) a seguir, mostra-se a variação do instante de comutação θ_n em função da referência y_r para os casos $k\tau_n \geq 1 + \frac{a_o}{k_p}$ e $k\tau_n < 1 + \frac{a_o}{k_p}$ respectivamente.

Nota-se por estas figuras que a variação de θ_n com y_r não é mais linear como no caso do controlador proporcional visto no capítulo anterior.

III.3.1 ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

As equações que descrevem o sistema em malha fechada são:

$$\tilde{x}_{n+1} = \phi(\tau_n) \tilde{x}_n + \hat{e} (\bar{\theta}_n \tau_n) \quad (\text{III.10.})$$

que é a equação de estado do sistema, obtida no capítulo anterior, e

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \theta_n) + [y_r - \hat{e}^T (I + k\hat{A}) \phi(\theta_n \tau_n) \tilde{x}_n] = 0 \quad (\text{III.11.})$$

que é a equação de determinação do instante de comutação para o controlador P.D.

Novamente deve-se salientar que o estudo de estabilidade em malha fechada se restringe ao estudo da estabilidade do sistema no entorno do ponto -

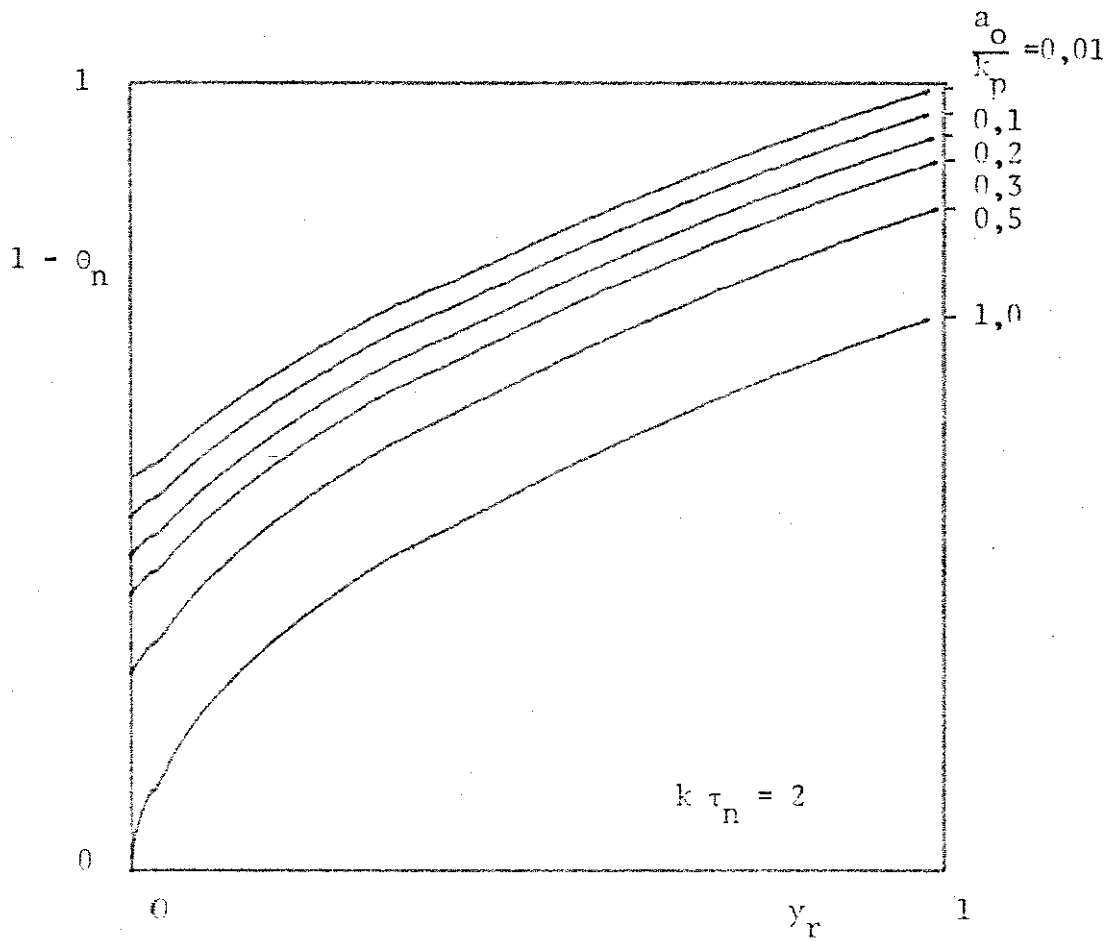


FIG. III.2. - VARIACÃO DE $(1 - \theta_n)$ COM A REFERÊNCIA y_r PARA O CASO

$$k\tau_n > 1 + \frac{a_o}{k_p}$$

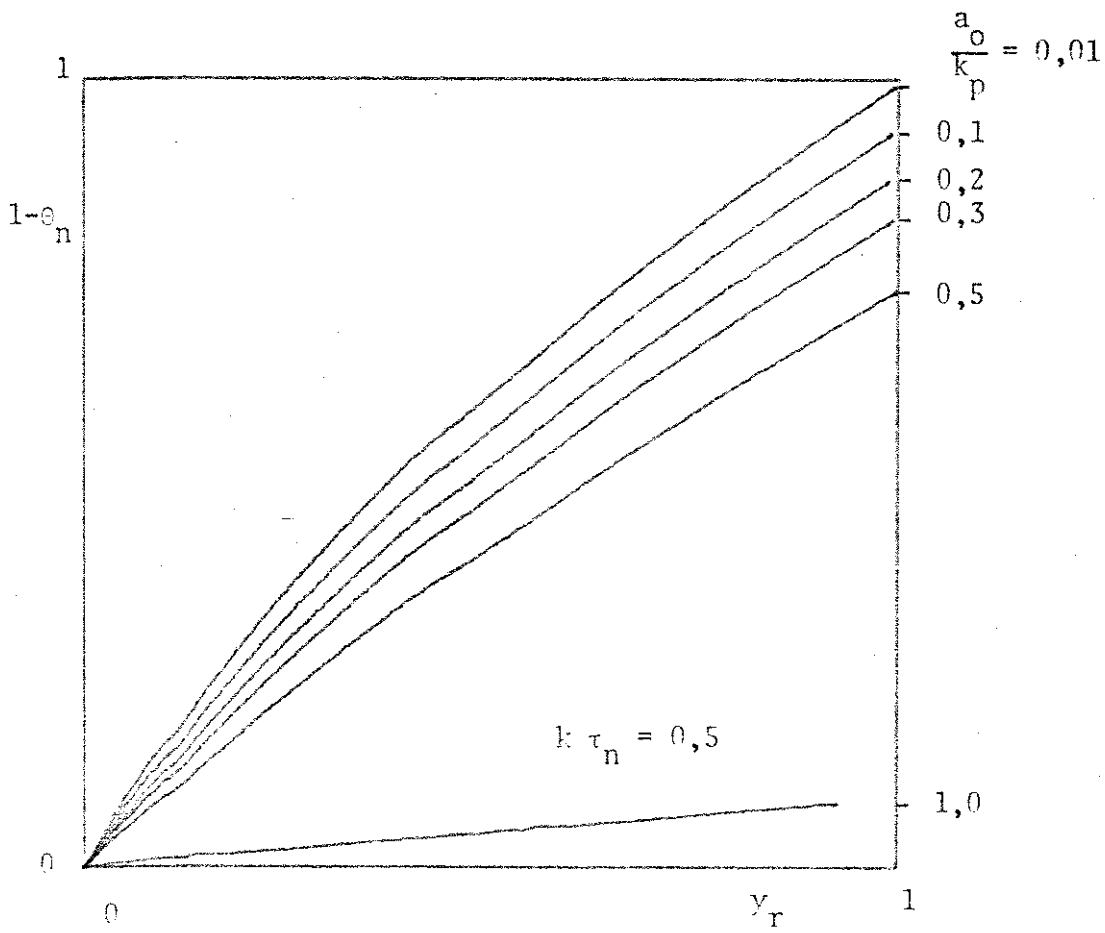


FIG. III.3. - VARIACÃO DE $(1 - \theta_n)$ COM A REFERÊNCIA y_r PARA O CASO

$$k\tau_n < 1 + \frac{a_o}{k_p}$$

duplo \tilde{x}^p (estabilidade local).

Considerando que se opera com τ_n suficientemente pequeno, a seguinte aproximação para a equação (II.10.) é válida:

$$\tilde{x}_{n+1} = [I + \hat{A} \tau_n] \tilde{x}_n + \underline{B} \bar{\Theta}_n \tau_n \quad (\text{III.12.})$$

Com esta mesma aproximação obtém-se para a equação (III.11.)

$$-\frac{a_o}{k_p} (1 - \Theta_n) + [y_r - \hat{e}^T (I + k\hat{A}) (I + \hat{A} \tau_n) \tilde{x}_n] = 0 \quad (\text{III.13.})$$

A partir desta equação pode-se obter o instante de comutação Θ_n como uma função explícita do estado \tilde{x}_n :

$$1 - \Theta_n = \frac{y_r - \hat{e}^T (I + k\hat{A}) (I + \tau_n \hat{A}) \tilde{x}_n}{\frac{a_o}{k_p} - \hat{e}^T (I + k\hat{A}) (\hat{A} \tau_n) \tilde{x}_n} = g'(\tilde{x}_n) \quad (\text{III.14.})$$

Linearizando esta equação em torno do ponto duplo $(\tilde{x}^p, \Theta_n^p)$ onde :

$$(1 - \Theta_n^p) \left[\frac{a_o}{k_p} + (1 - k\tau_n \Theta_n^p) \right] = y_r \quad (\text{III.15.})$$

Tem-se:

$$1 - \Theta_n \cong g'(\tilde{x}^p) + \langle \nabla g'(\tilde{x}^p), (\tilde{x}_n - \tilde{x}^p) \rangle \quad (\text{III.16.})$$

Considerando-se novamente pequenas variações em torno do ponto duplo \tilde{x}^p :

$$\hat{x}_n = \tilde{x}_n - \tilde{x}^p \quad (\text{III.17.})$$

Leva-se agora as condições (II.16.) e (II.17.) à equação (III.12.) e chega-se a:

$$\hat{x}_{n+1} = \{ I + [\hat{A} + \hat{b} v^T g'(\underline{x}^p)] \tau_n \} \hat{x}_n \quad (\text{III.18.})$$

Retomando a equação (III.14.) pode-se obter o gradiente $\nabla g'(\underline{x}^p)$ na forma:

$$\nabla g'(\underline{x}^p) = \frac{-1}{\left(\frac{a_0}{k_p}\right) + k\tau_n \bar{\theta}_n^p} \begin{bmatrix} (1 + k\lambda_1) (1 + \theta_n^p \tau_n \lambda_1) \\ (1 + k\lambda_2) (1 + \theta_n^p \tau_n \lambda_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.19.})$$

Definindo-se a matriz A^* como sendo:

$$A^* \triangleq I + [\hat{A} + \hat{b} v^T g'(\underline{x}^p)] \tau_n \quad (\text{III.20.})$$

A estabilidade do sistema operando em malha fechada com o controlador P.D. pode ser estudada mediante a determinação do traço e do determinante da matriz A^* no entorno do ponto duplo \underline{x}^p .

$$\sigma = - \text{Tr}(A^*) = - 2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_n + j(\theta_n^p, k) \quad (\text{III.21.})$$

$$\Delta = \text{DeT}(A^*) = 1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_n + i(\theta_n^p, k)$$

As funções i e j podem ser determinadas pela equação (III.20.), sendo:

$$\left[\begin{array}{l} i(\theta_n^p, k) = \left\{ 1 + \frac{1 - k\theta_n^p \tau_n}{\frac{a_0}{k_p} + k\theta_n^p \tau_n} \right\} \tau_n^2 \\ j(\theta_n^p, k) = \frac{\theta_n^p \tau_n + k [1 + \theta_n^p \tau_n (\lambda_1 + \lambda_2)]}{\frac{a_0}{k_p} + k\tau_n \bar{\theta}_n^p} \cdot \tau_n \end{array} \right. \quad (\text{III.22.})$$

As situações estáveis correspondem portanto àquelas cujos parâmetros definem pontos pertencentes ao conjunto Ω já caracterizado no capítulo anterior, ou seja:

$$a) \Delta + \sigma + 1 = i(\theta_n^p, k) > 0$$

A situação de pior caso se resume em determinar a dupla

$$(\theta_o, k_o) / \text{MIN } i(\theta_n^p, k)$$

$$s/a \begin{cases} 0 \leq \theta_n^p \leq 1 \\ k \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.23.})$$

A solução do problema anteriormente descrito é:

$$(\theta_o, k_o) = (1, \infty) \rightarrow i(1, \infty) = -\infty \quad (\text{III.24.})$$

Impondo agora que $i(\theta_n^p, k) > 0$ obtém-se:

$$k < \left(1 + \frac{a_o}{k_p}\right) \cdot \frac{1}{\tau_n} \quad (\text{III.25.})$$

Satisfazendo-se a inequação (III.25.) estaremos portanto satisfazendo a restrição de estabilidade referente a este item (a).

$$b) \Delta - 1 = (\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + i(\theta_n^p, k) - j(\theta_n^p, k) < 0$$

Tem-se agora como situação de pior caso:

$$(\theta_o, k_o) / \text{MAX } \{i(\theta_n^p, k) - j(\theta_n^p, k)\}$$

$$s/a \begin{cases} 0 \leq \theta_n^p \leq 1 \\ 0 \leq k < \left(1 + \frac{a_o}{k_p}\right) \frac{1}{\tau_n} \end{cases} \quad (\text{III.26.})$$

A solução é:

$$(\theta_0, k_0) = (0, 0) \rightarrow \{i(0, 0) - j(0, 0)\} = \left(1 + \frac{k_p}{a_0}\right) \tau_n^2 \quad (\text{III.27.})$$

Portanto $\Delta - 1 < 0$ é satisfeito para :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left(1 + \frac{k_p}{a_0}\right)\tau_n^2 < 0 \quad (\text{III.28.})$$

Fez-se uma hipótese para obter o resultado acima, hipótese esta que fixaremos para a escolha de τ_n .

$$\tau_n < -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (\text{III.29.})$$

$$c) \Delta - \sigma + 1 = 4 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + i(\theta_n^p, k) - 2j(\theta_n^p, k) > 0$$

Tem-se como situação de pior caso:

$$(\theta_0, k_0) / \text{MIN} \{i(\theta_n^p, k) - 2j(\theta_n^p, k)\} \quad (\text{III.30.})$$

$$s/a \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leq \theta_n^p \leq 1 \\ 0 \leq k < \left(1 + \frac{a_0}{k_p}\right) \frac{1}{\tau_n} \end{array} \right.$$

A solução deste problema é:

$$(\theta_0, k_0) = \left[1, \left(1 + \frac{a_0}{k_p}\right) \frac{1}{\tau_n}\right] \quad (\text{III.31.})$$

A partir de (III.31.) determina-se que $\Delta - \sigma + 1 > 0$ para:

$$\frac{k_p}{a_0} < \frac{1}{\tau_n^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + 1} \quad (\text{III.32.})$$

Esta restrição faz com que sejam admitidas somente as relações $\frac{a_o}{k_p} > 1$, porém, pela Fig. (III.3.) nota-se que é desejável se ter $\frac{a_o}{k_p}$ menor que 1.

Então, em lugar de procurarmos o pior caso, vamos fazer com que a região de estabilidade no plano $((k_p/a_o), \tau_n)$ coincida com a região determinada para o controlador proporcional, dada pela equação (III.28.). Isto imposto, o sistema é estável se forem verificadas simultaneamente as desigualdades:

$$\left[\begin{array}{l} k \left(1 + \frac{a_o}{k_p}\right) \frac{1}{\tau_n} & (1) \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + \left(1 + \frac{k_p}{a_o}\right)\tau_n^2 < 0 & (2) \\ 4 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_n + i(1, k) - 2j(1, k) > 0 & (3) \end{array} \right. \quad (III.34.)$$

Satisfeita a relação (2), nota-se que a (3) engloba a (1); nas Fig. (III.4.) e (III.5.) são mostradas as regiões onde as equações (III.34.) são simultaneamente satisfeitas. Se usarmos τ_n "pequeno" e a relação (k_p/a_o) "grande" o valor do ganho k deverá se restringir a:

$$k \triangleq \frac{k_v}{k_p} < - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (III.35.)$$

onde k_p e k_v são os ganhos do controlador P.D. usado.

Convém aqui frisar que se pode escolher uma outra região no plano $(\frac{k_p}{a_o}, \tau_n)$ para a qual o sistema é estável, porém esta região deve estar delimitada por uma curva que esteja entre as dadas pelas equações (II.70.) e (II.71.) e evidentemente esta nova escolha levará a uma modificação na região de estabilidade da Fig. (III.4.).

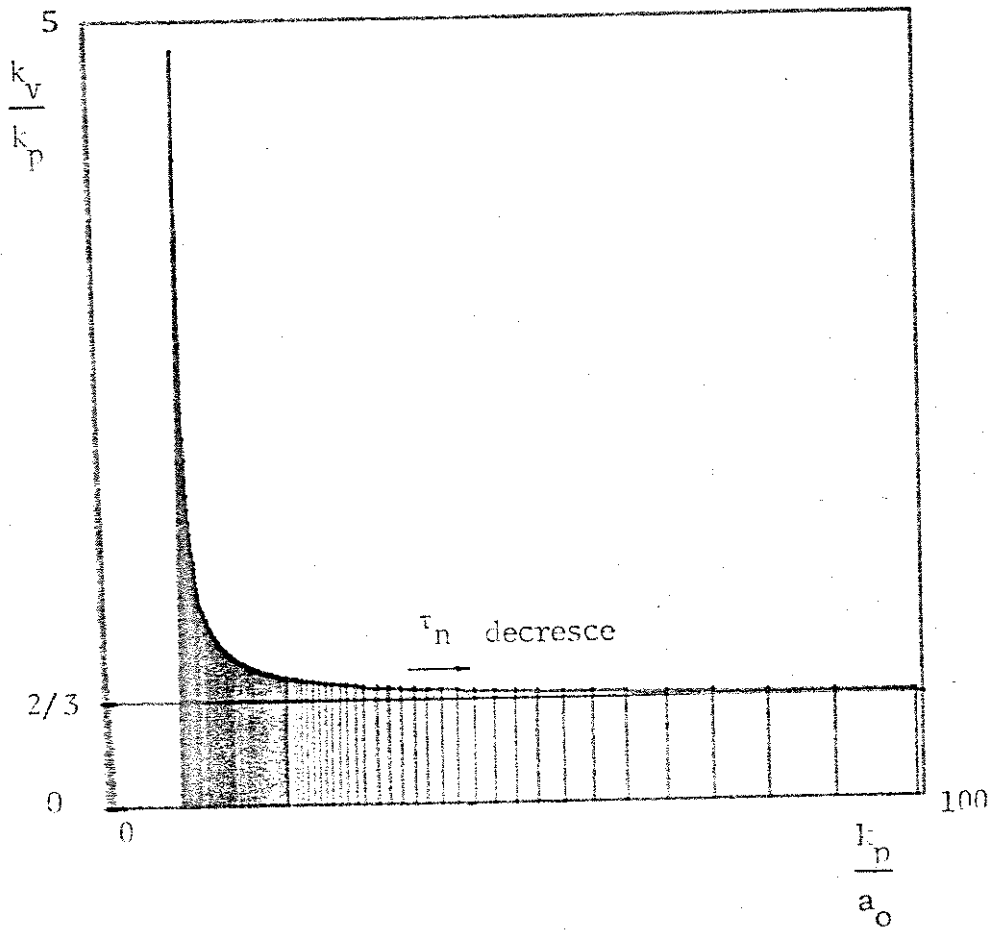


FIG. III.4 - A PARTE HACHURIADA CORRESPONDE A CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE
($\xi = 1,5$)

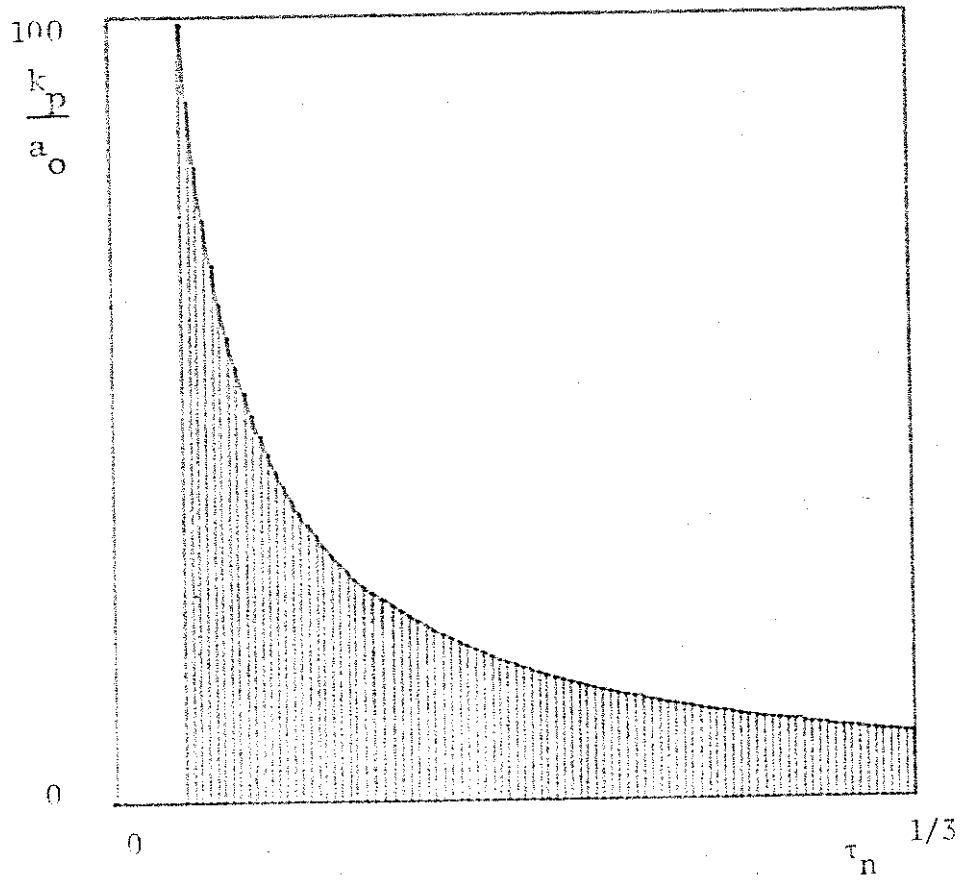


FIG. III.5. - REPRESENTAÇÃO DA REGIÃO DE ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA ($\xi = 1,5$)

III.4. REGIÃO DE COMUTAÇÃO NO PLANO DE FASE

Considerando-se o plano de fase do sistema descrito pela equação:

$$\dot{\underline{\hat{x}}}(\tau) = \underline{\hat{\Lambda}} \underline{\hat{x}}(\tau) + \underline{\hat{b}} u(\tau) \quad (\text{III.36.})$$

sendo ainda seus pontos singulares $\underline{\hat{x}}_0^s$ e $\underline{\hat{x}}_1$ anteriormente calculados, usando um controlador P.D. temos:

$$\left[\begin{array}{l} y_r - \underline{\hat{e}}^T (\underline{I} + k\underline{\hat{\Lambda}}) \underline{\hat{x}}(\tau) < 0 \rightarrow \theta_n = 1 \\ y_r - \underline{\hat{e}}^T (\underline{I} + k\underline{\hat{\Lambda}}) \underline{\hat{x}}(\tau) > \frac{a_o}{k_p} \rightarrow \theta_n = 0 \\ 0 \leq y_r - \underline{\hat{e}}^T (\underline{I} + k\underline{\hat{\Lambda}}) \underline{\hat{x}}(\tau) \leq \frac{a_o}{k_p} \rightarrow 0 \leq \theta_n \leq 1 \end{array} \right. \quad (\text{III.37.})$$

A partir das condições (III.37.) determina-se as retas s e s' que delimitam as regiões de comutação:

$$s : (1 + k\lambda_1) \hat{x}_1 + (1 + k\lambda_2) \hat{x}_2 = y_r$$

$$s' : (1 + k\lambda_1) \hat{x}_1 + (1 + k\lambda_2) \hat{x}_2 = y_r - \frac{a_o}{k_p}$$

Na Fig. (III.6.) abaixo mostra-se o plano de fase com as retas s e s' para um determinado k escolhido.

Devido à dificuldade de interpretação neste plano, a seguir mostra-se as retas de comutação para os dois controladores em estudo no plano (x_1, x_2) .

Pela Fig. (III.7.) pode-se concluir que o ganho k faz com que o coeficiente angular das duas retas que delimitam a região de comutação possa variar.

Pode-se adotar qualquer valor de k observando as restrições impostas pelo estudo de estabilidade. Na próxima secção é feito um estudo de deter-

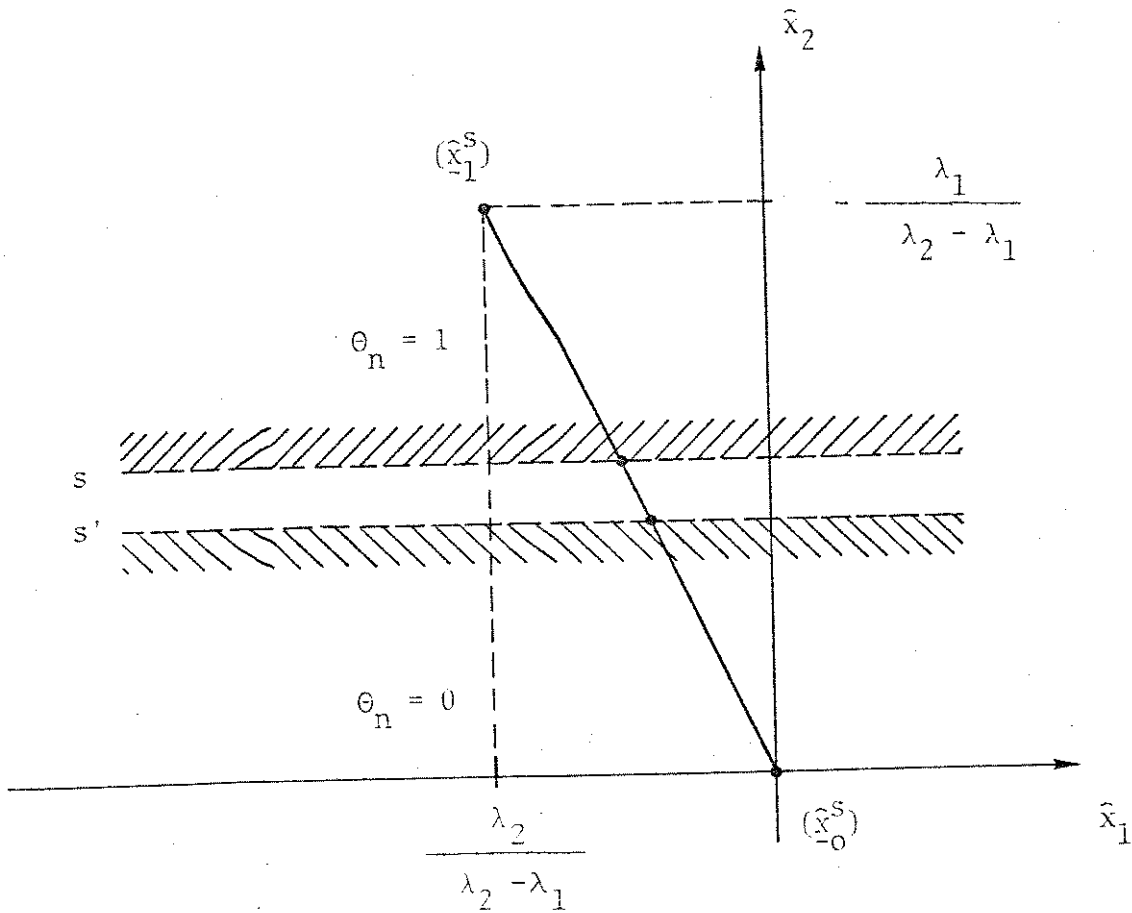


FIG. III.6 . - PLANO DE FASE MOSTRANDO AS RETAS DE COMUTAÇÃO IMPOSTAS PELO CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO

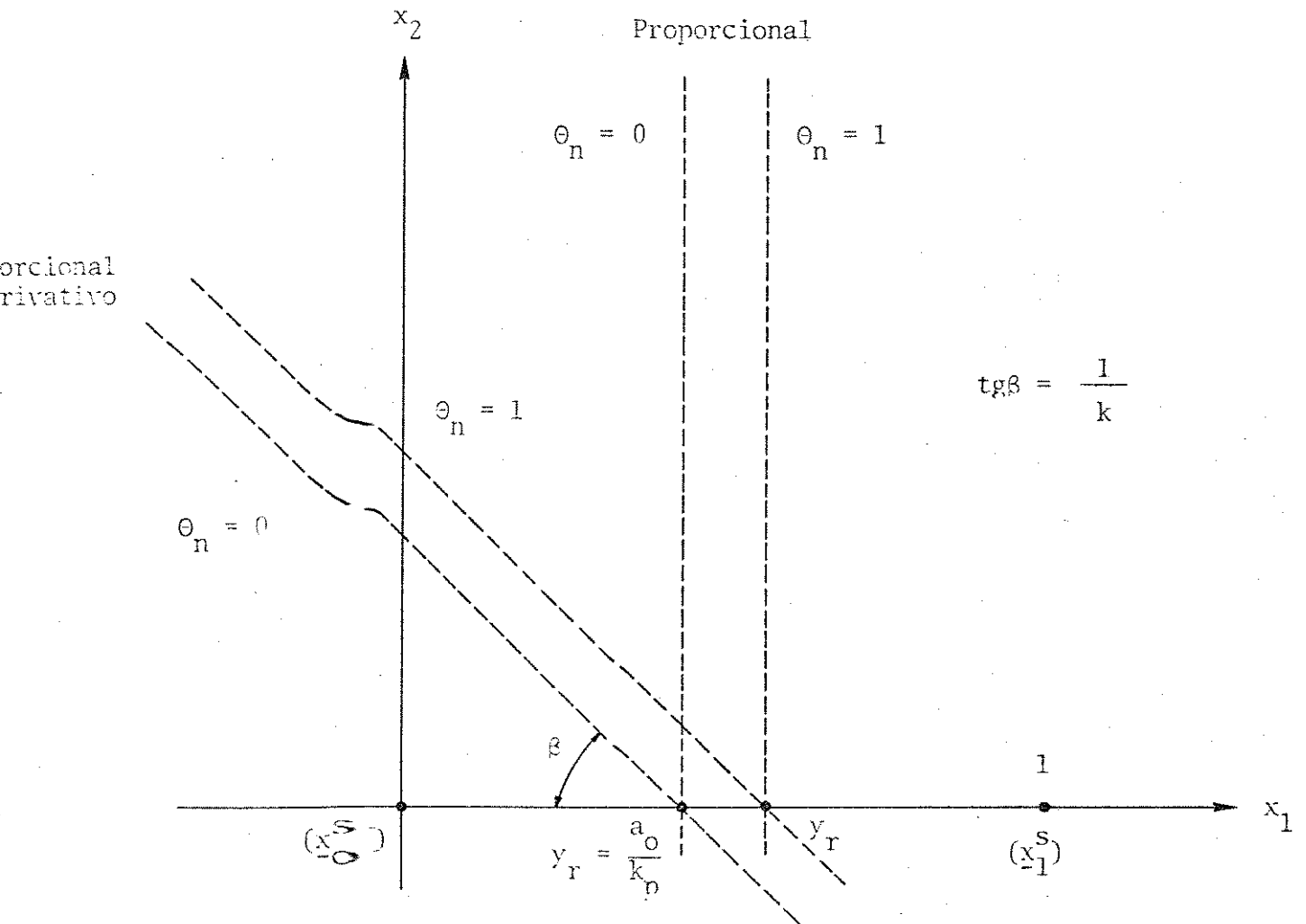


FIG. III.7 - - PLANO DE FASE (x_1, x_2) OBTIDO PELA TRANSFORMAÇÃO
 $\underline{x} = P \hat{\underline{x}}$ SOBRE O PLANO (\hat{x}_1, \hat{x}_2) .

minação de k tendo como critério a obtenção de tempo mínimo de estabilização da saída.

É claro que a determinação do ganho k para o critério de tempo mínimo de estabilização terá como restrição aquela já determinada pelo estudo de estabilidade do sistema em malha fechada.

III.5. ESTUDO DO PROBLEMA DE TEMPO MÍNIMO

O problema de tempo mínimo associado ao sistema aqui em estudo pode ser colocado na forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(\tau) = \hat{A} \hat{x}(\tau) + \hat{b} u(\tau) \\ y(\tau) = \hat{e}^T \hat{x}(\tau) \end{cases} \quad \text{(III.39.)}$$

Dadas as equações de estado e saída do sistema propõe-se:

Problema: Determinar $u(\tau)$ / $0 \leq u(\tau) \leq 1$ de maneira a

$$\text{MIN}_{u(\tau)} \int_0^{T_f} dt \quad \text{com condições iniciais e finais conhecidas}$$

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad \text{e} \quad \hat{x}(T_f) = \hat{x}_f$$

A sua solução é encontrada no apêndice B e nota-se que para se implementar o controle em tempo mínimo em malha fechada, deve-se construir uma função não linear para a malha de realimentação.

A obtenção e implementação desta função nos parece algo trabalhoso. Propõe-se então a utilização de um controlador P.D. na malha de realimentação e determina-se o ganho k de tal forma que se tenha tempo mínimo de estabilização da saída.

No presente trabalho s3 se consideram casos, em que o sistema (para um dado k) convirja assintoticamente e sem oscila3es para o estado final.

Pode-se ent3o propor:

Problema:
$$\begin{cases} \dot{\underline{\hat{x}}}(\tau) = \underline{\hat{A}} \underline{\hat{x}}(\tau) + \underline{\hat{b}} u(\tau) \\ y(\tau) = \underline{\hat{e}}^T \underline{\hat{x}}(\tau) \end{cases} \quad (\text{III.40.})$$

MIN
$$\int_0^{T_f} dt \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(\tau) = f [y_r - \underline{\hat{c}}^T \underline{\hat{x}}(\tau)] \\ \underline{\hat{x}}(0) = \underline{\hat{x}}_0 \\ \underline{\hat{x}}(T_f) = \underline{\hat{x}}_f - \underline{\hat{e}} \end{cases}$$

Nas equa3es acima temos:

- $\underline{\hat{c}}$ — vetor invariante no tempo e independente das condi3es iniciais e finais impostas
- $\underline{\hat{e}}$ — vetor que indica a precis3o escolhida na aproxima33o — entre a solu33o de regime $\underline{\hat{x}}_f$ e o estado no instante T_f .
- f — fun33o n3o linear indicada no diagrama de blocos III.1.

considerando-se que o problema de tempo m3nimo imp3e que a fun33o de controle s3o assuma os valores extremos no intervalo em que 3 definida (ver ap3ndice B), fizemos em (III.4.) $a(\tau) = 0$. Comparando as equa3es (III.4.) e (III.40.) temos:

$$\underline{\hat{c}} = (I + k\underline{\hat{A}})^T \underline{\hat{e}} \quad (\text{III.41.})$$

$$\underline{\hat{x}}_f = \begin{bmatrix} y_r \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\hat{x}}_f = P^{-1} \underline{x}_f$$

A determina33o de $\underline{\hat{c}}$ ser3 feita por meio de proposi33es enunciadas a seguir e provadas no ap3ndice C.

DEFINI33ES:

1. $\underline{\Gamma}_0$ — trajet3ria que passa pelo ponto $\underline{\hat{x}}_0$ e atinge o ponto singular $\underline{\hat{x}}_0^S$ sem nenhuma comuta33o com $u(\tau) = 0$.

2. Γ_1 - Trajetória que passa pelo ponto \hat{x}_0 e atinge o ponto singular \hat{x}_1^s sem nenhuma comutação, com $u(\tau) = 1$.

Na Fig. (III.8.) mostra-se as trajetórias acima definidas, no plano (\hat{x}_1, \hat{x}_2) .

A condição de o sistema tender monotonicamente para o estado final desejado, implica em que a trajetória do sistema no plano de fase não intercepta mais de uma vez a reta de comutação (só existe uma agora, pois a função de comutação é zero).

A proposição 1, abaixo, determina as famílias de retas que têm esta propriedade.

Proposição 1: sendo a reta de comutação no plano de fase (\hat{x}_1, \hat{x}_2) definida por

$$s: \underline{\hat{C}}^T \underline{\hat{x}} = y_r \quad (\text{III.42.})$$

sendo ainda o ponto P_0 tal que: $P_0 = s \cap \{\Gamma_0 \cup \Gamma_1\}$ então a condição para que P_0 seja único é que: $\underline{\hat{C}} = \alpha_1 \cdot \underline{\hat{v}}_1$ ou $\underline{\hat{C}} = \alpha_2 \underline{\hat{v}}_2$ onde $\underline{\hat{v}}_1$ e $\underline{\hat{v}}_2$ são os autovetores da matriz \hat{A} e α_1 e α_2 são constantes.

Tomando-se o resultado desta proposição e as relações (III.41.), determina-se:

$$\underline{\hat{C}} = \alpha_1 \underline{\hat{v}}_1 \rightarrow k = -1/\lambda_2 \quad (\text{III.43.})$$

$$\underline{\hat{C}} = \alpha_2 \underline{\hat{v}}_2 \rightarrow k = -1/\lambda_1$$

Usando um dos valores acima, a trajetória seguida pelo sistema no plano de fase é determinada pela seguinte proposição.

Proposição 2: se o vetor $\underline{\hat{C}}$ satisfaz as condições impostas pela proposição 1 em tão qualquer que seja a trajetória seguida pelo sistema, desde a condição inicial até o ponto P_0 onde ocorre a primeira comutação, neste ponto começará ocorrer reticências.

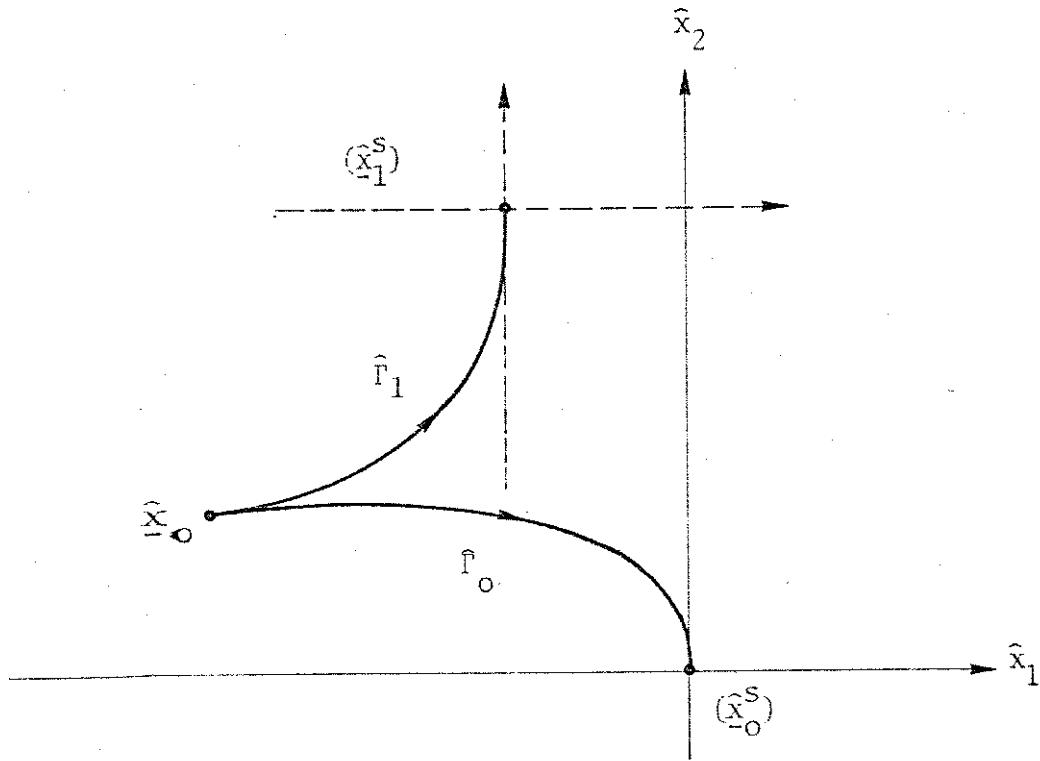


FIG. III.8 - - PLANO DE FASE (\hat{x}_1, \hat{x}_2) COM AS TRAJETÓRIAS $\hat{\Gamma}_0$ E $\hat{\Gamma}_1$

Na Fig. (III.9.) vêem-se as trajetórias seguidas pelo sistema desde a condição inicial até o estado final desejado.

No Apêndice A apresenta-se junto com o simulador do sistema, um detetor de reticências que será usado na simulação em computador analógico.

Assim que ocorrer reticências, o circuito detetor inibe o comutador de tal modo a ocorrer uma única comutação no intervalo $[n \cdot \tau_n, (n+1)\tau_n]$. Isto faz com que se verifique pequenas oscilações em torno da reta de comutação porém, as amplitudes destas oscilações podem ser controladas pela variação adequada de τ_n .

Dentre os dois valores possíveis de k obtidos anteriormente, escolhe-se um deles de acordo com a proposição seguinte.

Proposição 3: dentro das condições impostas pelas proposições anteriores, se tomarmos o vetor \underline{C} tal que $\underline{C} = \alpha_2 \hat{v}_2$ então o tempo de estabilização é mínimo.

Retomando-se uma das equações (III.43.) verifica-se que a escolha de $\underline{C} = \alpha_2 \hat{v}_2$ acarreta numa escolha de $k = -1/\lambda_1$ que corresponde a uma situação estável segundo as Figuras (III.4.) e (III.5.) determinadas no parágrafo anterior.

Anteriormente determinou-se que:

$$k < - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\xi} \quad (\text{III.44.})$$

Pela proposição 3 tem-se

$$k = - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\xi + [\xi^2 - 1]^{1/2}} < \frac{1}{\xi} \quad (\text{III.45.})$$

Portanto para qualquer fator de amortecimento, $k = -1/\lambda_1$ é sempre uma solução estável, dentro dos critérios aqui apresentados.

As proposições anteriormente citadas foram provadas sob a hipóte-

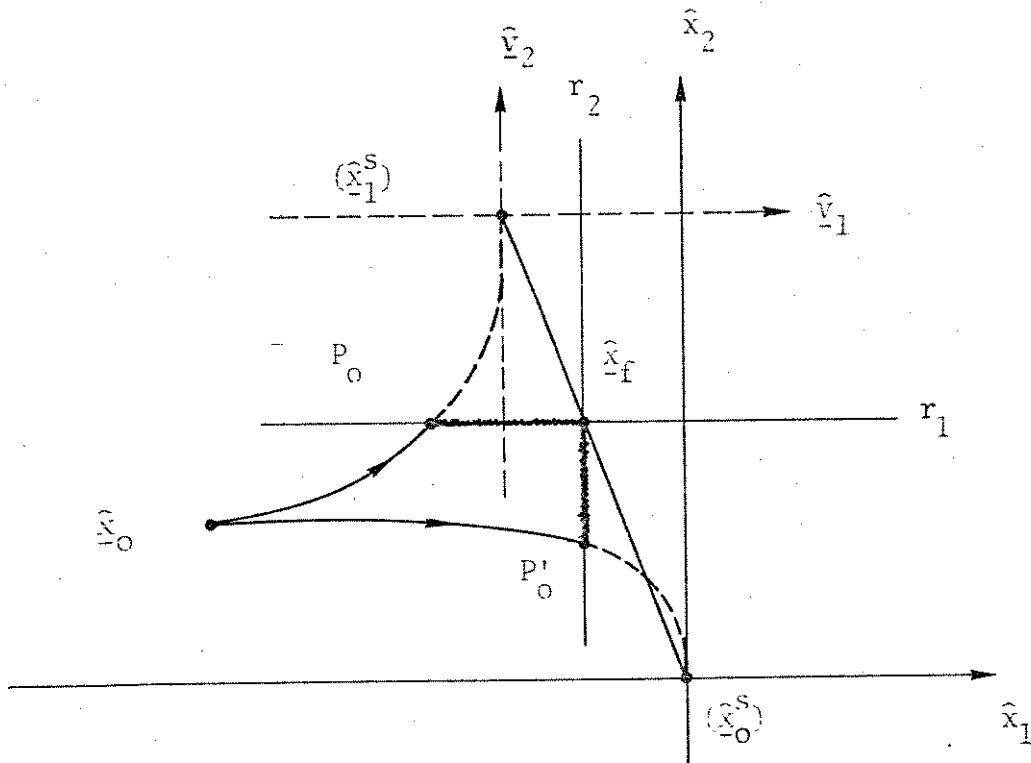


FIG. III.9 . - PLANO DE FASE MOSTRANDO AS TRAJETÓRIAS DE \hat{x}_0 a \hat{x}_f ONDE AS RETAS r_1 ($k = -1/\lambda_1$) e r_2 ($k = -1/\lambda_2$) SÃO AS RETAS DE COMUTAÇÃO

se de $a(\tau) \approx 0$, porém, esta condição leva a um controle do tipo Bang-Bang, ocorrendo com certeza reticências.

Os parâmetros $\frac{a_0}{k_p}$ e τ_n são escolhidos suficientemente pequenos

para que a trajetória não se afaste muito da reta de comutação. Reticências são detetadas e irribidas.

III.6. SIMULAÇÃO

Com o programa analógico apresentado no Apêndice A obtiveram-se os seguintes resultados:

1. Na Fig. (III.10.) vê-se a saída $y(t)$ para três valores distintos do ganho k^* sendo que dois deles forneceu uma situação estável e o outro fornece uma instável, os parâmetros são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,01 \\ k_p &= 1 \\ \tau_n &= 0,01 \end{aligned}$$

2. Na Fig. (III.11.) tem-se a variação de $\hat{y}(\tau)$ no tempo para três condições distintas, sendo duas estáveis e uma instável pelo critério de estabilidade discutido neste capítulo. Os parâmetros são os mesmos do gráfico anterior.

I $\{k^* = 4$

E1 $\{k^* = 0,764$

E2 $\{k^* = 0,1$

3. Na Fig. (III.12.) vêem-se três situações instáveis com os parâmetros dados por:

(I1) $\begin{aligned} a_0 &= 0,0 \\ k_p &= 1 \\ \tau_n &= 0,5 \\ k^* &= 4 \end{aligned}$

(I2) $\begin{aligned} a_0 &= 0,01 \\ k_p &= 1 \\ \tau_n &= 0,5 \\ k^* &= 0,764 \end{aligned}$

(I3) $\begin{aligned} a_0 &= 0,01 \\ k_p &= 1 \\ \tau_n &= 0,5 \\ k^* &= 0,1 \end{aligned}$

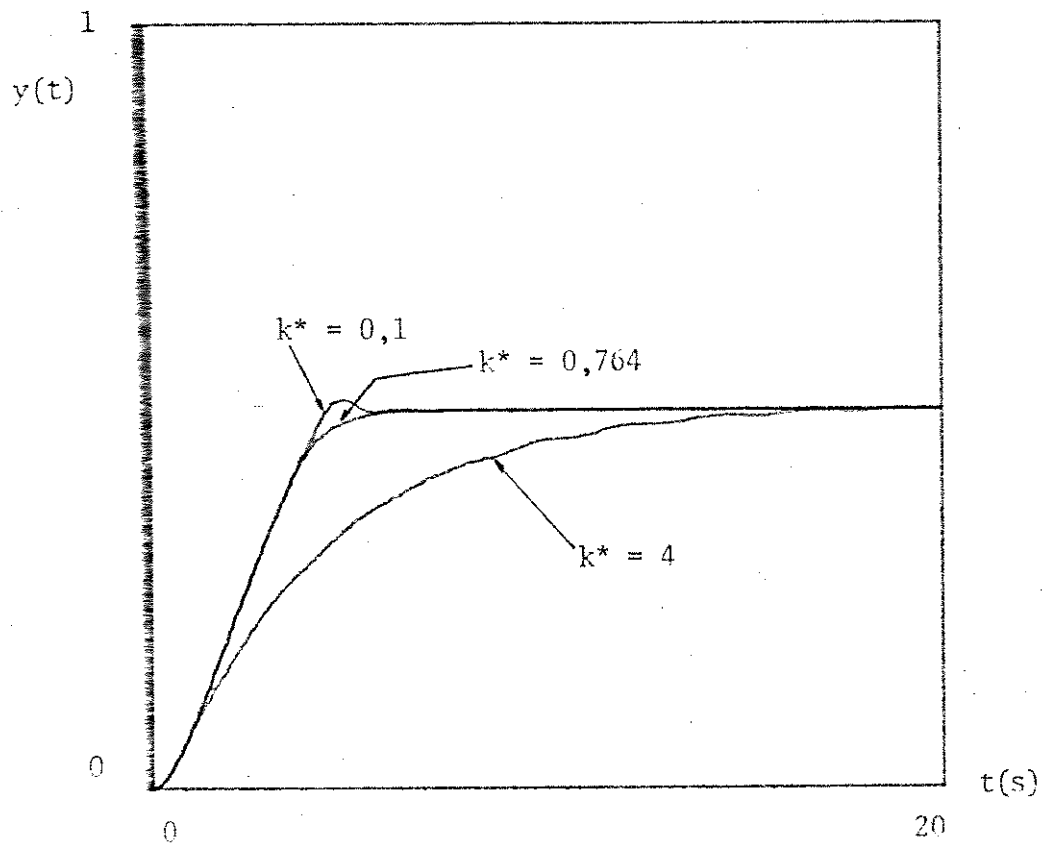


FIG. III.10 - DESEMPENHO DO SISTEMA COM CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO COM $k^* = 0,1$; $k^* = 0,764$ (GANHO QUE PROPORCIONA TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO MÍNIMO) E $k^* = 4$. ($y_r = 0,5$)

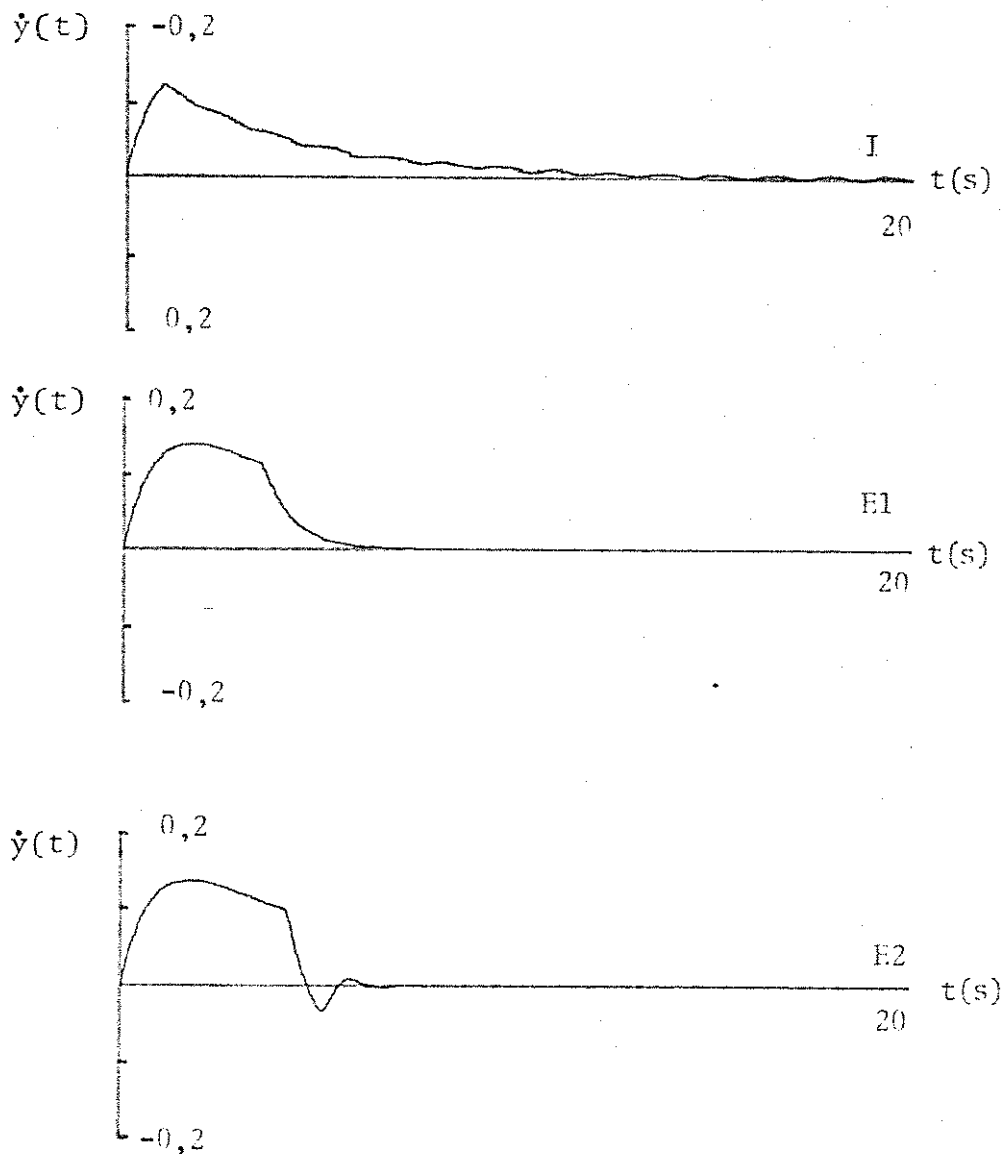


FIG. III.11. - DESEMPENHO DO SISTEMA PARA DOIS CASOS DE ESTABILIDADE E UM DE INSTABILIDADE ($y_r = 0,5$). FORAM USADOS OS SEGUINTE PARÂMETROS: $a_o = 0,01$, $k_p = 1$, $\tau_n = 0,01$

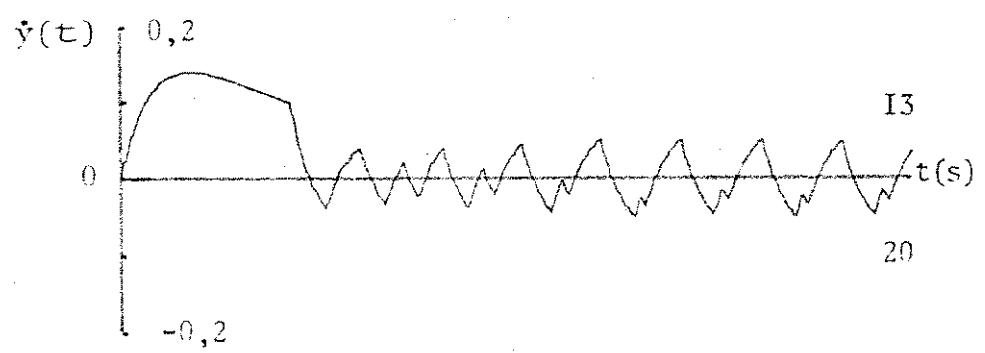
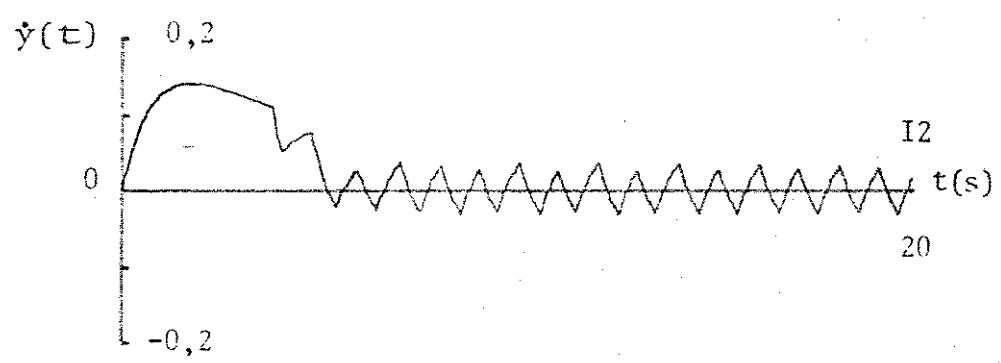
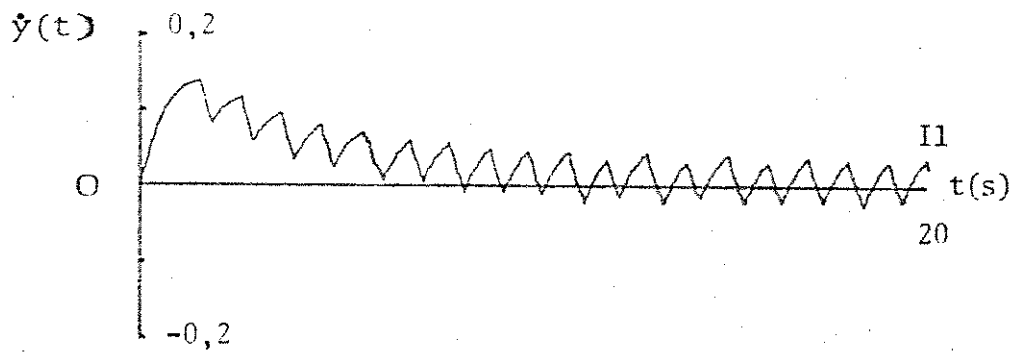


FIG. III.12. - DESEMPENHO DO SISTEMA PARA TRÊS SITUAÇÕES INSTÁVEIS ($y_r=0,5$)

4. Na Fig. (III.13.) tem-se o plano de fase com o controlador proporcional mais derivativo de ganho $k^* = 0,764$ que proporciona tempo mínimo de estabilização. Os valores dos parâmetros são:

$$y_r = 0,5$$

$$a_o = 0,01$$

$$k_p = 1$$

$$\tau_n = 0,01$$

A partir dos Gráficos anteriores, observa-se que:

1. Na Fig. (III.10.) vê-se que o sistema estabiliza mais rápido para $k^* = 0,1$ do que para $k^* = 0,7640$. Não satisfazendo, entretanto, a restrição imposta de não se permitir oscilações da saída.

2. O Plano de Fase traçado na Fig. (III.13.) foi obtido permitindo que houvesse no máximo uma comutação no intervalo de tempo $[0, T]$ e mesmo assim (devido aos parâmetros usados) a trajetória seguida a partir da 1ª. comutação foi aproximadamente a reta de comutação definida pelo controlador.

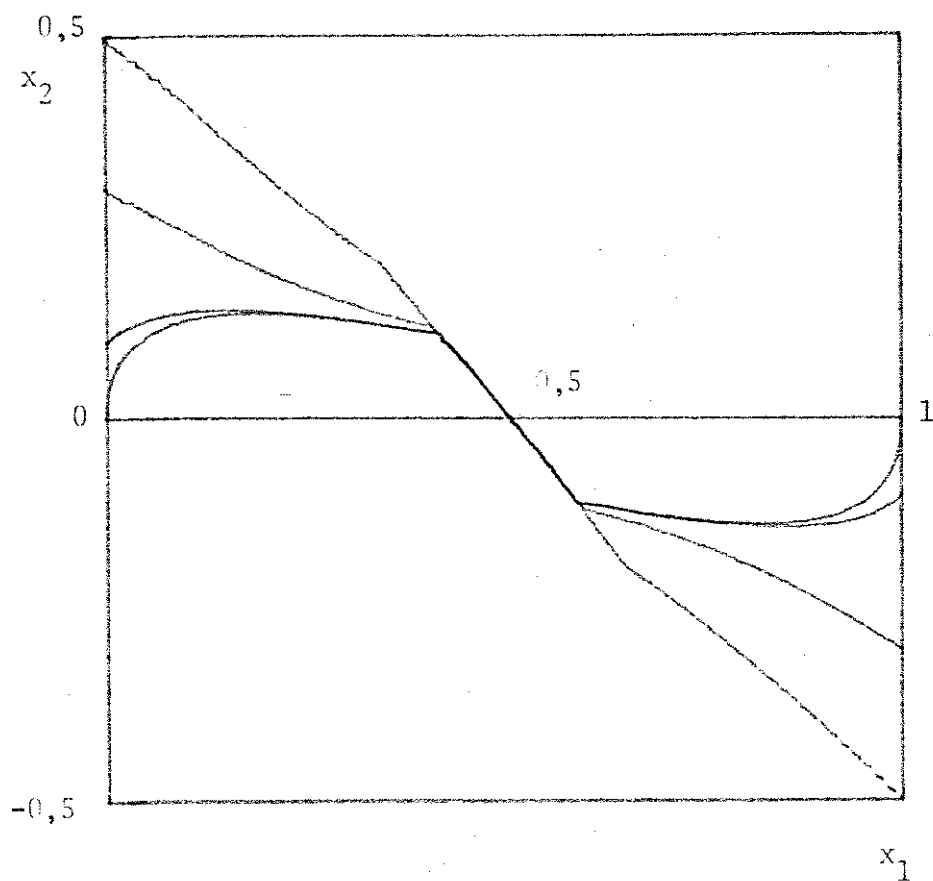


FIG. III.13. - PLANO DE FASE COM CONTROLADOR ÓTIMO

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

IV.1. CONCLUSÕES

Para alcançar os objetivos iniciais propostos, foram obtidos nos dois capítulos anteriores alguns resultados intermediários que permitem concluir:

1. ONDULAÇÃO PICO-A-PICO

Supondo que os parâmetros escolhidos tornem o sistema em malha fechada estável, a ondulação pico-a-pico na saída, depois que o sistema entra em regime ou seja, atinge um ponto, tem a seguinte propriedade:

$$\lim_{\tau_n \rightarrow 0} O_{pp} = 0 \quad (\text{IV.1.})$$

onde o parâmetro τ_n é tal que:

$$\tau_n = \omega_n T = 2\pi \cdot (f_n/f) \quad (\text{IV.2.})$$

Sendo f_n a frequência natural do sistema linear controlado e f a frequência da função de comutação, pode-se obter baixa ondulação na saída, fazendo-se:

$$f_n \ll f \quad (\text{IV.3.})$$

Portanto, sempre que possível, deve-se escolher a frequência da função de comutação muito maior que a frequência natural do sistema que se deseja controlar.

2. SAÍDA - REFERÊNCIA (CONTROLADOR PROPORCIONAL)

Depois de atingido um ponto duplo \tilde{x}^p tem-se:

$$\lim_{\tau_n \rightarrow 0} \tilde{x}^p = \begin{bmatrix} 1 - \theta_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4.})$$

usando τ_n suficientemente pequeno, tem-se portanto baixa ondulação na saída, portanto pode-se escrever:

$$y_{\text{final}}(t) \cong \frac{1}{1 + \left(\frac{a_o}{k_p} \right)} y_r \quad (\text{IV.5.})$$

É desejável que variando a frequência y_r entre os seus valores máximo e mínimo, tenha-se uma variação da saída (em regime) também entre estes mesmos extremos, para isto, deve-se impor:

$$\left(\frac{a_o}{k_p} \right) \ll 1 \rightarrow y_{\text{final}}(t) \cong y_r \quad (\text{IV.6.})$$

Portanto, usando um controlador do tipo proporcional deve-se usar um ganho no controlador bem maior que o valor máximo da função de comutação para obter-se a máxima excursão do valor final da saída.

3. ESTABILIDADE (CONTROLADOR PROPORCIONAL)

Pelo estudo de estabilidade em malha fechada, apresentado no capítulo II pode-se notar que a situação acima descrita:

$$f_n \ll f \quad \text{e} \quad \left(\frac{a_o}{k_p} \right) \ll 1 \quad (\text{IV.7.})$$

torno o sistema estável.

Eventualmente, se quisermos baixa ondulação pico-a-pico na saída, mas, a relação entre a frequência natural f_n e a frequência da tensão de comutação f usada, for tal que o sistema resulta instável, existe ainda a possibilidade de garantir a estabilidade por limitações no instante de comutação, como indica a figura (II-13.).

4. SAÍDA - REFERÊNCIA (CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO)

Novamente, considerando τ_n suficientemente pequeno, tem-se para a saída em regime:

$$y_{\text{final}} \left\{ \frac{a_o}{k_p} + [1 - k\tau_n(1 - y_{\text{final}})] \right\} = y_r \quad (\text{IV.8.})$$

Pelo estudo de estabilidade do sistema em malha fechada, com o controlador proporcional mais derivativo, determina-se que uma das condições é:

$$k\tau_n < 1 + \frac{a_o}{k_p} \quad (\text{IV.9.})$$

Impondo a restrição acima em (IV.8.) conclui-se novamente que a máxima excursão da saída em regime é conseguida impondo:

$$\frac{a_o}{k_p} \ll 1 \quad (\text{IV.10.})$$

5. ESTABILIDADE (CONTROLADOR PROPORCIONAL MAIS DERIVATIVO)

Sendo k_v o ganho do derivativo, determina-se que para a faixa de τ_n estudada, tem-se para estabilidade:

$$k_v < \frac{k_p}{\xi} \quad (\text{IV.11.})$$

Note-se que esta condição foi obtida impondo que a região de estabilidade no plano $((a_o/k_p), \tau_n)$ deste controlador, seja a mesma que para o controlador proporcional.

6. PROBLEMA DO TEMPO MÍNIMO

Por análise do plano de fase do sistema linear em estudo, determinou-se um ganho do derivativo do controlador P.D. de tal forma que o sistema estabilizasse em tempo mínimo e sem oscilações, no estado final desejado. O ganho ótimo é dado por:

$$k_{\text{ótimo}} = - \frac{1}{\lambda_1} \quad (\text{IV.12.})$$

Note-se que este valor de k torna o sistema estável.

7. RESUMO DAS CONCLUSÕES

As condições anteriormente comentadas, podem ser colocadas na seguinte forma reduzida:

- Controlador Proporcional:

$$f_n \ll f$$

$$\frac{a_0}{k_p} \ll 1$$

$$k_v < \frac{k_p}{\xi} \quad \text{com } (k_v)_{\text{ótimo}} = - \left(\frac{k_p}{\lambda_1} \right)$$

IV.2. CONSIDERAÇÃO FINAL

Com o controlador proporcional mais derivativo ótimo, obteve-se a Fig. (IV.1.) que é o perfil da saída desejado (ver histórico).

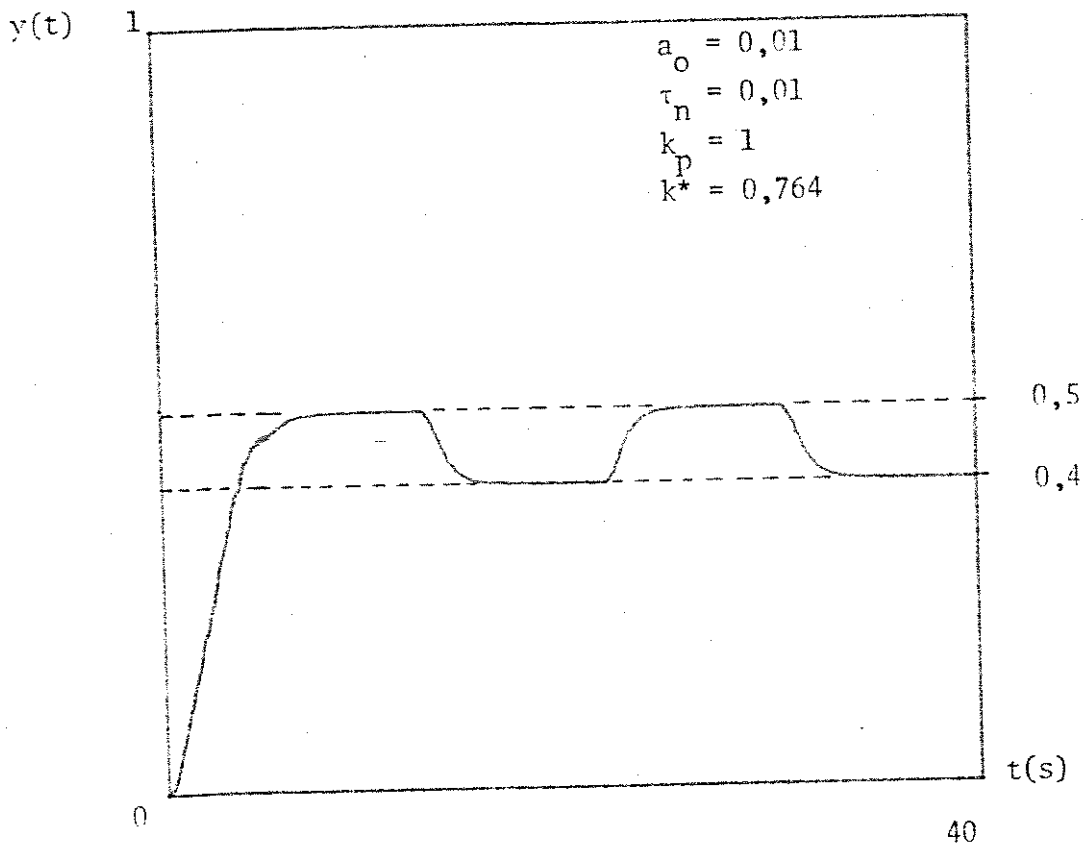


FIG. IV.1. - PERFIL DA SAÍDA DO SISTEMA DE 2a. ORDEM

APÊNDICE A : SIMULADOR ANALÓGICO DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

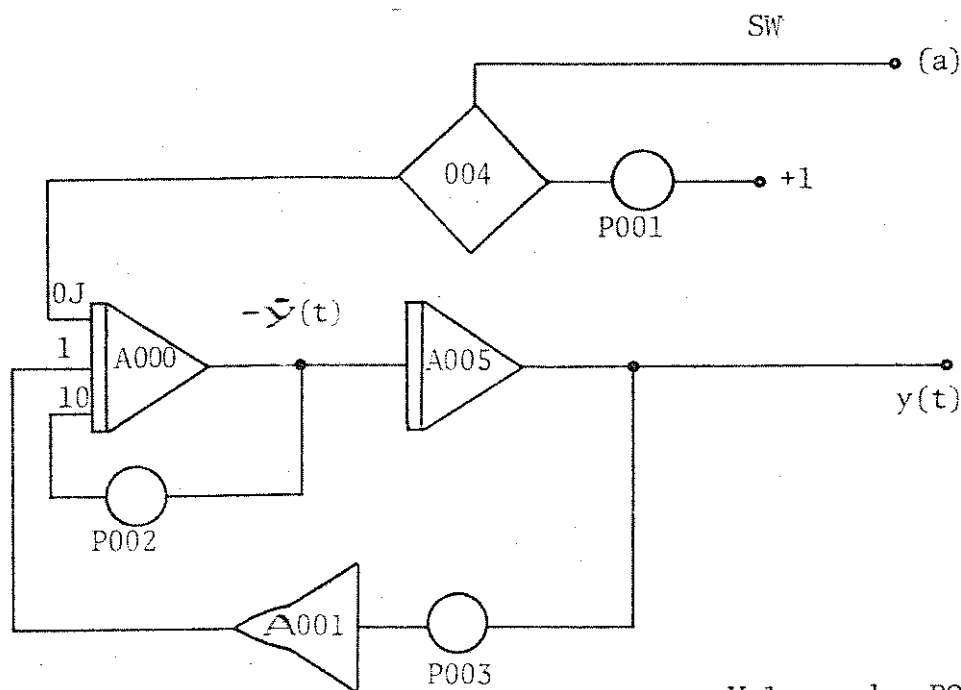
Neste apêndice apresenta-se o programa analógico do sistema em malha fechada que foi implementado em um computador do tipo EAI-680. Passaremos agora a descrever as partes deste programa.

1. SISTEMA LINEAR A SER CONTROLADO

Foi implementado um sistema com as seguintes características:

$$\xi = 1,5$$

$$\omega_n = 0,5 \text{ rd/s}$$

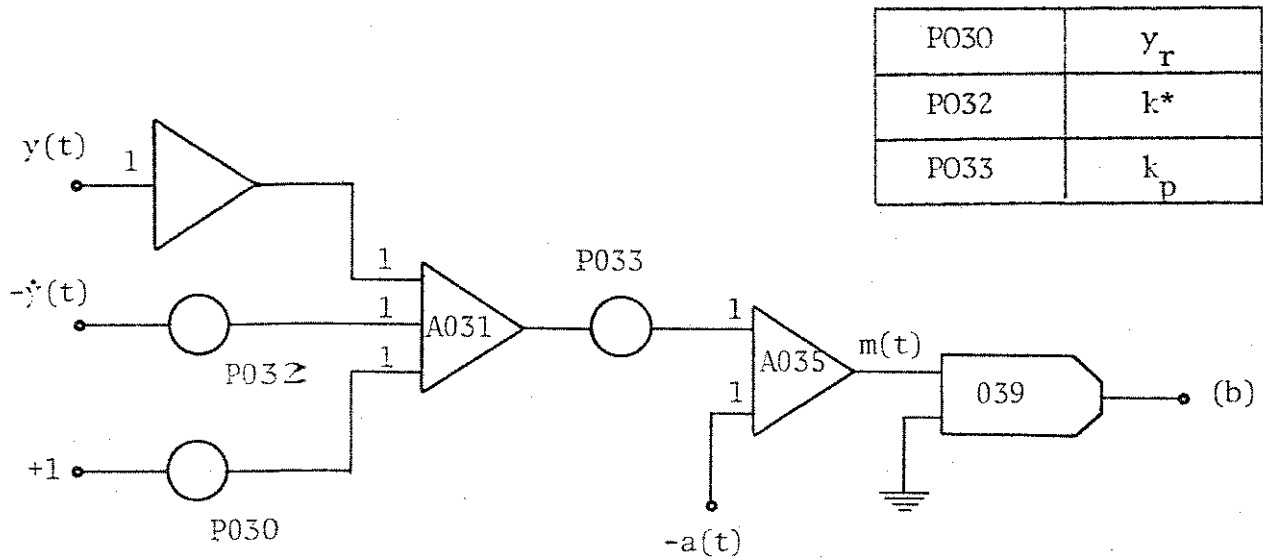


Valores dos POTS.

P001	0,025
P002	0,150
P003	0,250

A entrada (a) será fornecida pela parte do programa que determina θ_n .

2. CONTROLADOR E REFERÊNCIA



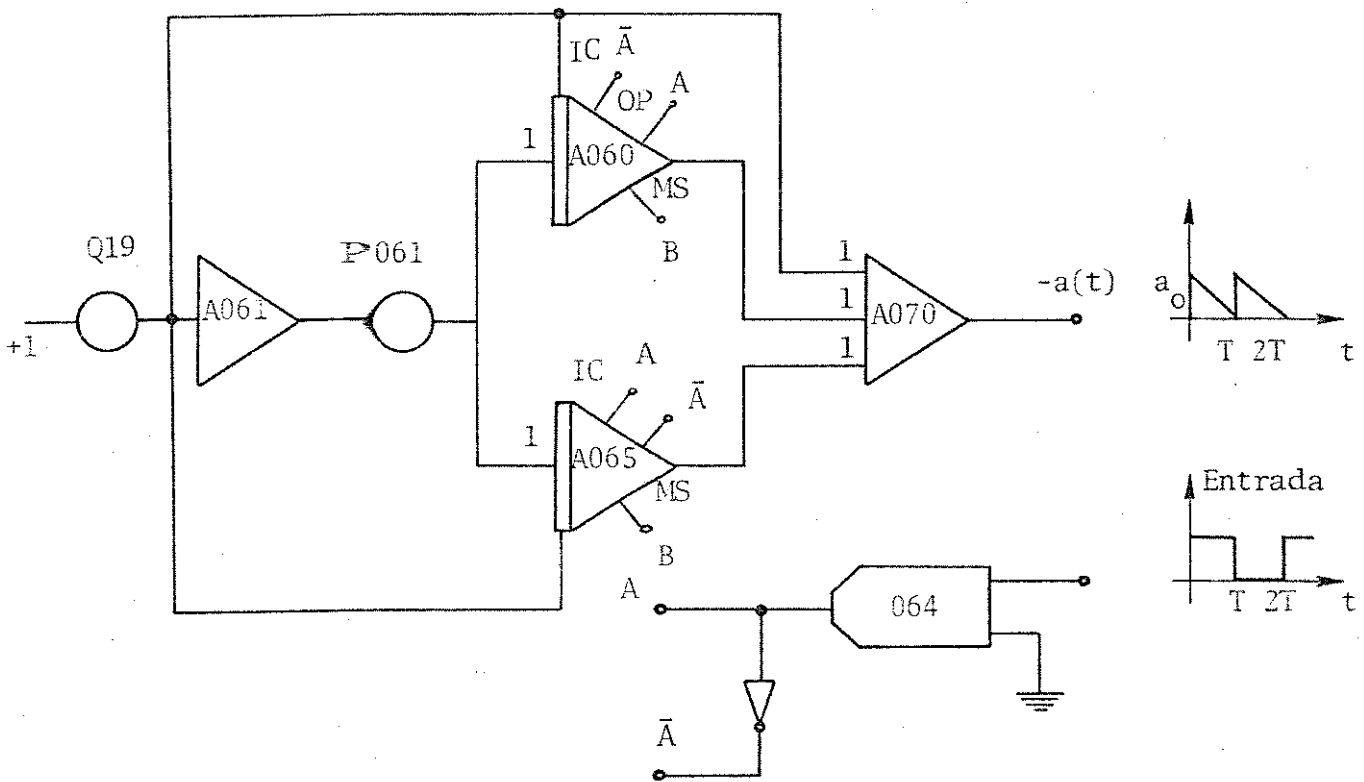
$k^* = 0 \rightarrow$ Controlador Proporcional

$k^* \neq 0 \rightarrow$ Controlador Proporcional + Derivativo

3. GERADOR DA TENSÃO DE COMUTAÇÃO

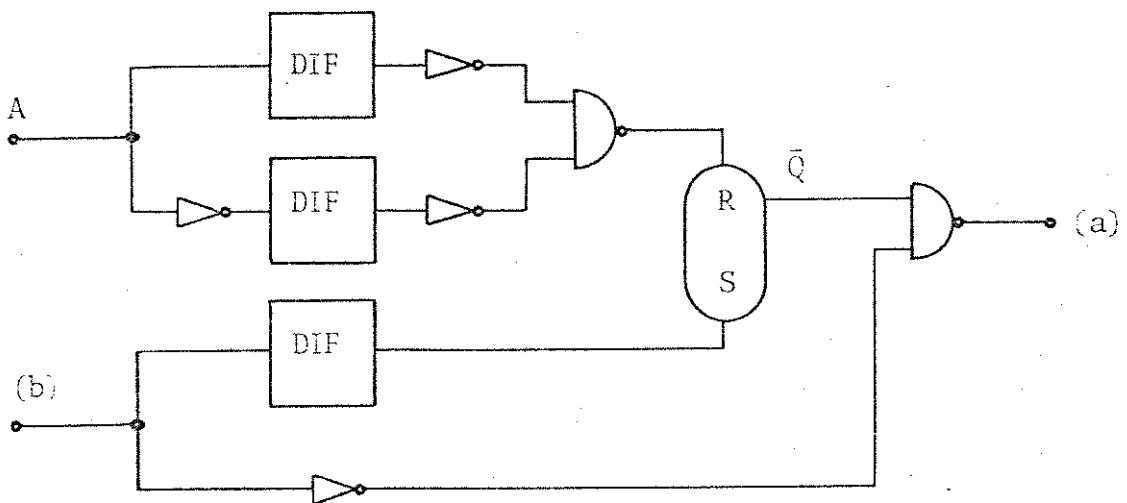
Este circuito gera a função de comutação síncrona com uma onda - quadrada injetada na entrada do comparador, por um gerador de funções do tipo - HP 3310 A. A frequência do gerador poderá ser variada de acordo com o usuário.

P061	$B. (10^{-3}/T)$
Q19	a_0
B	1 (MS)
B	0 (NS)

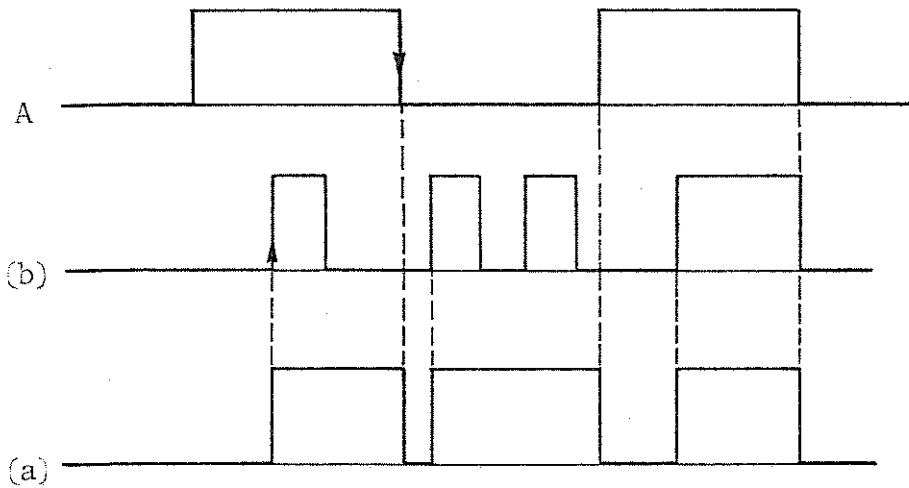


4. INIBIDOR

Neste circuito, usa-se um "Diferencial Lógico" que gera um pulso (~ 5 μ s de duração) quando a sua entrada transita do estado "0" para "1".

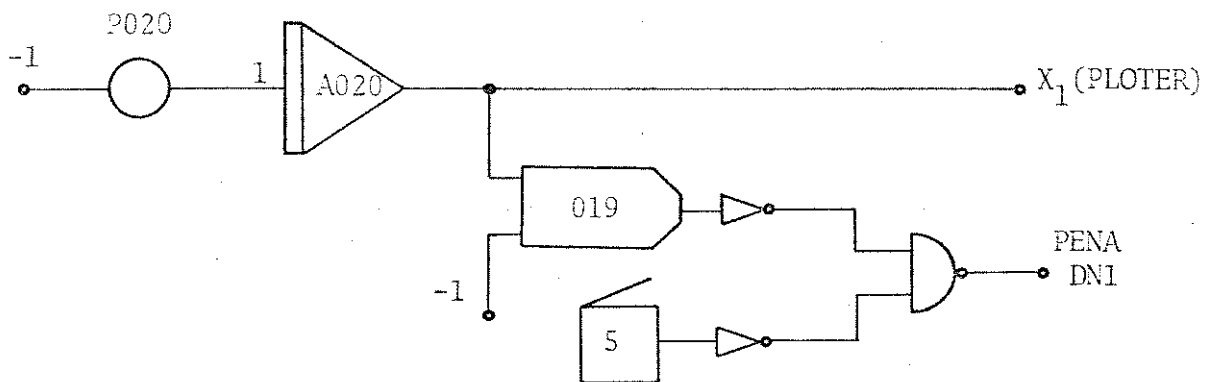


Abaixo vê-se uma possível condição de operação do circuito.



Portanto a largura de pulso $(1 - \theta_n)$ é determinada pela primeira subida de (b) em cada intervalo de tempo correspondente a meio período de A.

5. GERADOR DE VARREDURA PARA O PLOTTER.

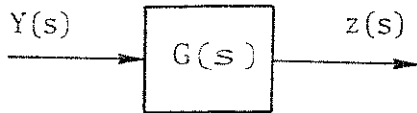


Com o computador operando em normal seconds (NS) o potenciômetro P020 foi determinado para um tempo de operação (OP) de 20 segundos fornecendo:

$$P020 = 0,05$$

6. DERIVADOR

Para obter-se $\dot{y}(t)$ a partir de $y(t)$, usa-se o seguinte:



$$G(s) = \frac{s}{(1 - \Delta) s + 1}$$

$$z(t) = \Delta z(t) - \int_0^t z(t) dt + y(t)$$

Note que: $\lim_{\Delta \rightarrow 1} G(s) = s \rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 1} z(t) = \dot{y}(t)$

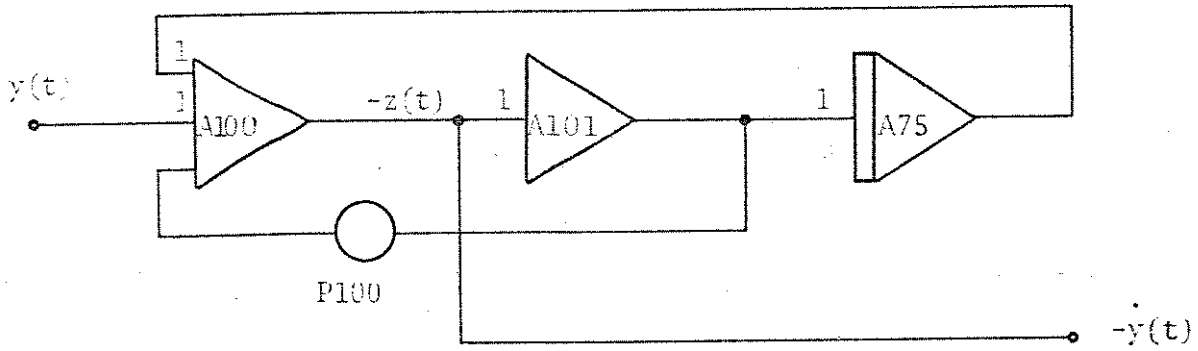
O valor de Δ foi calculado para que num intervalo de tempo bem menor que o tempo de operação, a saída $z(t)$ se aproximasse bastante do valor correto de $\dot{y}(t)$

Definindo $\epsilon \triangleq \dot{y}(t) - z(t)$ onde $\dot{y}(t)$ é a derivada correta obtida por saída do integrador A000 e usando como condições iniciais $\dot{y}(0) = 0,5$ e $z(0) = 0$ traçamos o gráfico da Fig. A.1.

Nota-se que no início o erro é grande, porém, usando $\Delta = 0,9$ este se anula em aproximadamente 2 segundos que corresponde a 10% do tempo de simulação.

Mantendo $z(0) = 0$, traçamos o plano de fase (x_1, x_2) com o derivador com parâmetros idênticos aos da Fig. III.13. Por comparação, nota-se que os dois casos são praticamente iguais, ver Fig. A.2.

A seguir tem-se o circuito usado como derivador.



P100	0,9
------	-----

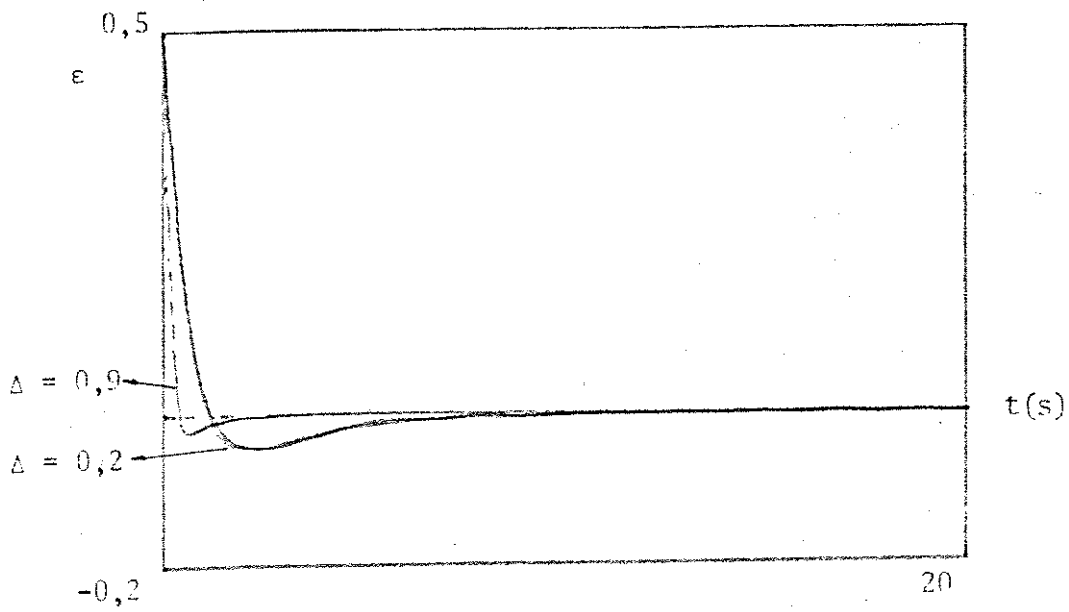


FIG. A1 - ERRO DO DERIVADOR EM FUNÇÃO DO TEMPO

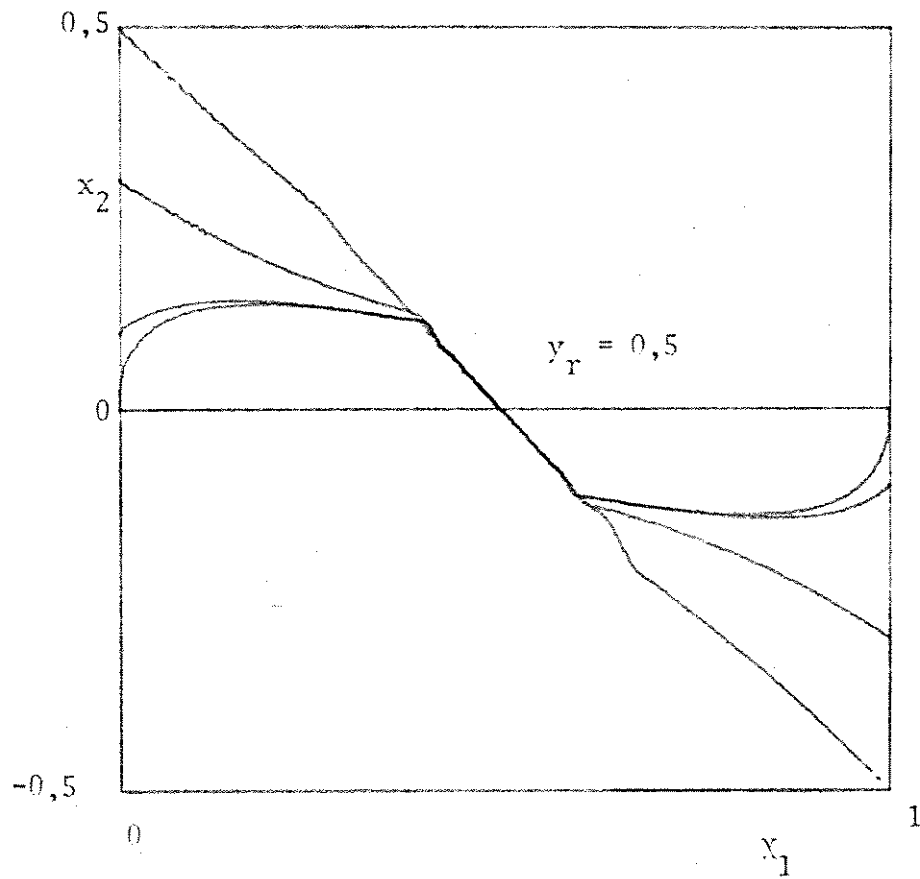


FIG. A.2. - PLANO DE FASE (x_1 , x_2) OBTIDO USANDO O CIRCUITO DERIVADOR ANTERIORMENTE DESCRITO.

APÊNDICE B : CONTROLE EM TEMPO MÍNIMO

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(\tau) = \hat{A} \hat{x}(\tau) + \hat{B} u(\tau) \\ y(\tau) = \hat{e}^T \hat{x}(\tau) \end{cases} \quad (\text{B.1.})$$

$$\text{MIN}_{u(\tau)} \int_0^{T_f} dt \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} u(\tau) = (0,1) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{x}(T_f) = \hat{x}^f \end{cases}$$

O Hamiltoniano para este problema é:

$$H = 1 + P^T(\tau) [\hat{A} \hat{x}(\tau) + \hat{B} u(\tau)] \quad (\text{B.2.})$$

As equações canônicas são :

$$u^*(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } P^T(\tau) \hat{B} > 0 \\ 1 & \text{p/ } P^T(\tau) \hat{B} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3.})$$

$$\dot{P}(\tau) = - \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = -\hat{A} P(\tau) \quad (\text{B.4.})$$

Sendo $P(0)$ a condição inicial para a equação (C.4.) pode-se obter a sua solução:

$$P(\tau) = e^{-\hat{A}\tau} \cdot P(0) \quad (\text{B.5.})$$

Portanto, determina-se:

$$h(\tau) \triangleq P^T(\tau) \hat{B} = P^T(0) e^{-\hat{A}\tau} \cdot \hat{B} \quad (\text{B.6.})$$

Retornando a equação (B.1.) obtém-se a equação da trajetória percorrida no plano de fase

$$\tilde{x}_2 = k^* [\lambda_1 \tilde{x}_1 - \delta]^\alpha - \frac{\delta}{\lambda_2} \quad (B.7.)$$

onde:

$$\alpha = \lambda_2 / \lambda_1$$

$$\delta = \frac{u^*(\tau)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Definindo agora as curvas γ_1 e γ_0 do plano de fase que passam pelo estado final desejado \tilde{x}^f fazendo respectivamente $u^*(\tau) = 1$ e $u^*(\tau) = 0$, tem-se:

$$\gamma_0 = \{ \tilde{x}_2 = k^*(\lambda_1 \tilde{x}_1)^\alpha ; \tilde{x}_1 < \tilde{x}_1^f \} \quad (B.8.)$$

$$\gamma_1 = \{ \tilde{x}_2 = k^* [\lambda_1 \tilde{x}_1 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}]^\alpha - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} ; \tilde{x}_1 > \tilde{x}_1^f \} \quad (B.9.)$$

A curva de comutação será portanto:

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \quad (B.10.)$$

Na Fig.(B.1.) mostra-se o plano de fase com as curvas de comutação γ para cada estado final.

Na Fig. (B.2.) mostra-se o Diagrama de Blocos do sistema de controle em tempo mínimo, onde aparece na malha de realimentação a função não linear que nos parece ser de difícil implementação, por exemplo em computador analógico.

Note que os estados finais escolhido são tais que:

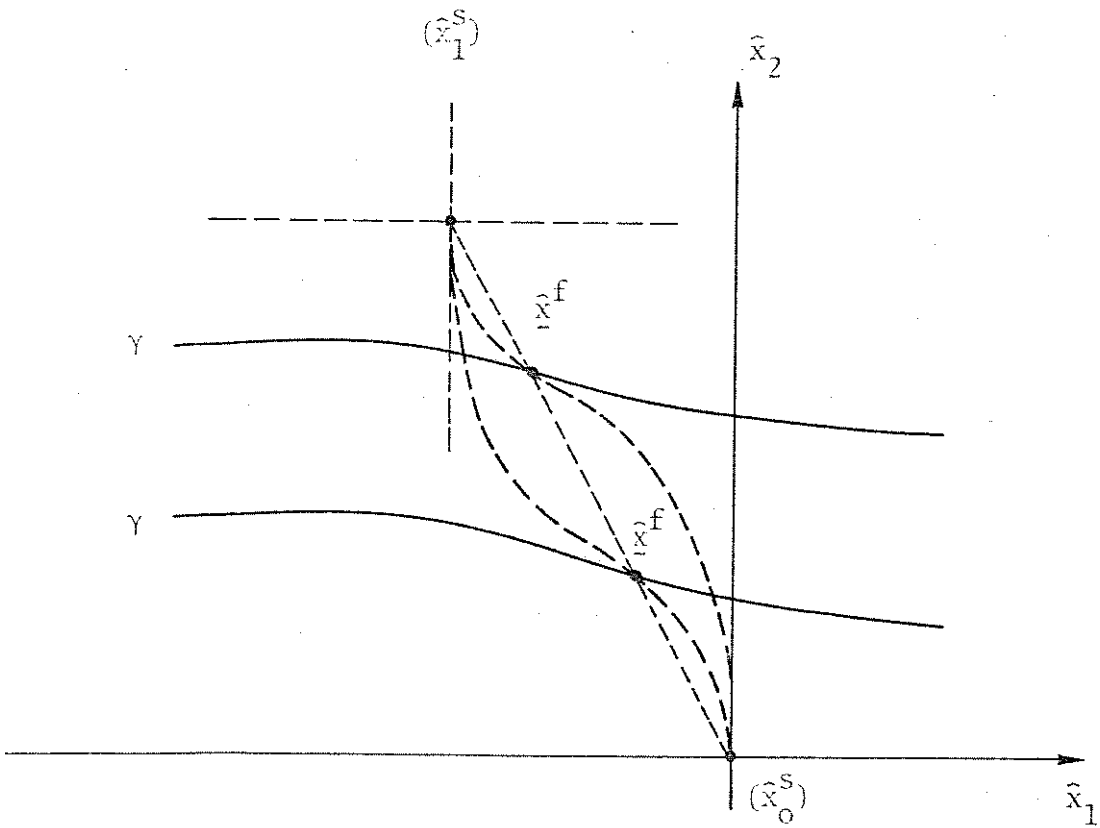


FIG. B.1. - PLANO DE FASE MOSTRANDO AS CURVAS γ DE COMUTAÇÃO PARA DOIS ESTADOS FINAIS DISTINTOS

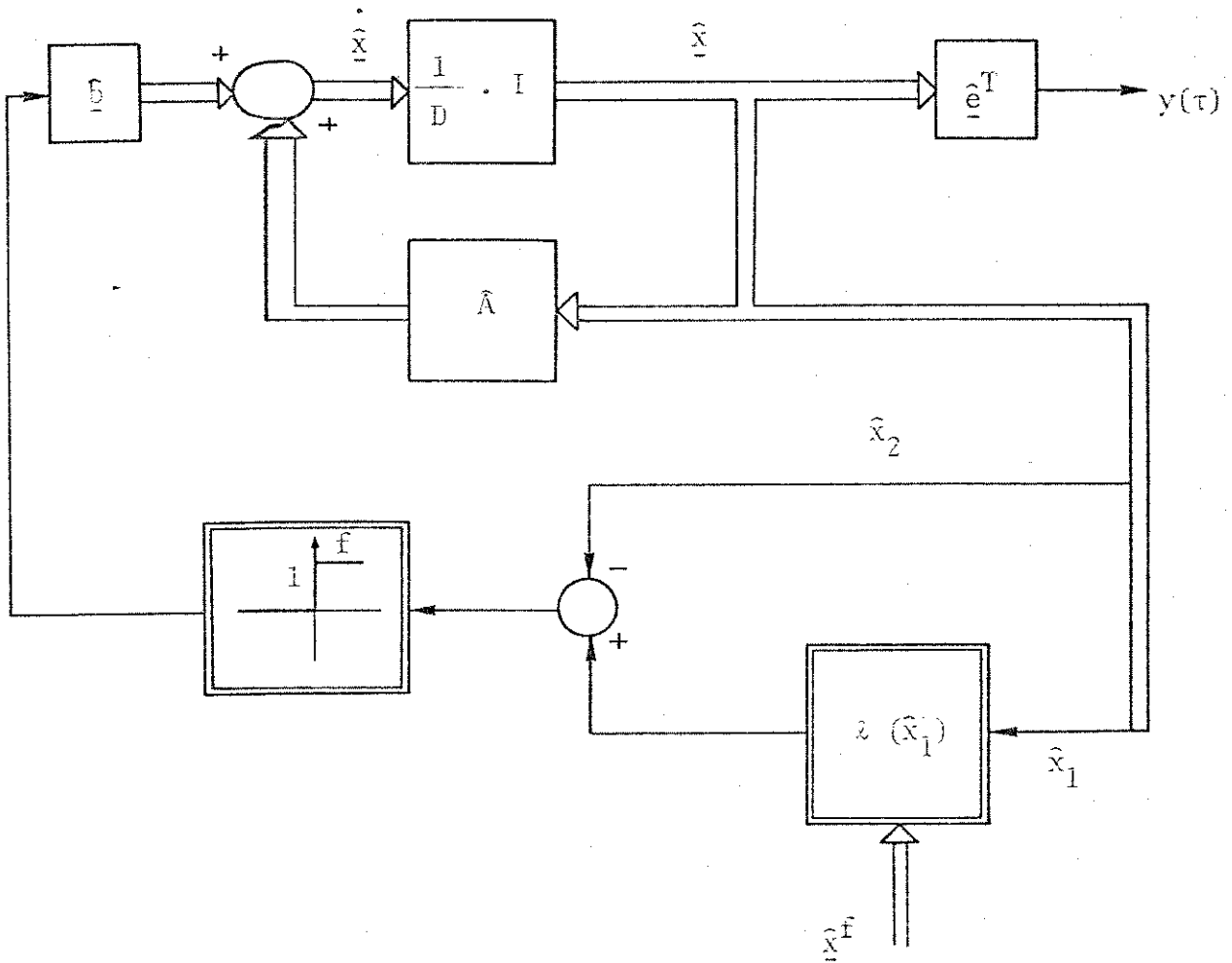


FIG. B.2. — DIAGRAMA DE BLOCOS DO CONTROLADOR DE TEMPO MÍNIMO ONDE D É O OPERADOR DIFERENCIAL

$$\frac{\hat{x}_2^f}{\hat{x}_1^f} = - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad ; \quad \hat{x}_1^s \leq \hat{x}_1^f \leq \hat{x}_0^s \quad (\text{B.11.})$$

pois, pela transformação $\underline{x} = P \hat{\underline{x}}$ temos:

$$0 \leq x_1^f \leq 1 \quad \text{e} \quad x_2^f = 0 \quad (\text{B.12.})$$

Portanto, o estado final \underline{x}^f são pontos tais que $x_2^f = 0$ e x_1^f da do pela referência \underline{y}_r a que se quer atingir.

Para a construção do Diagrama de blocos em malha fechada, define-se:

$$l(\hat{x}_1) = \begin{cases} k^* (\lambda_1 \hat{x}_1)^\alpha & \text{p/ } \hat{x}_1 < \hat{x}_1^f \\ k^* \left[\lambda_1 \hat{x}_1 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]^\alpha - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{p/ } \hat{x}_1 \geq \hat{x}_1^f \end{cases} \quad (\text{B.13.})$$

§§§§§

§

APÊNDICE C - PROVAS DAS PROPOSIÇÕES

Proposição 1: Sendo a reta de comutação no plano de fase (\hat{x}_1, \hat{x}_2) definida por:

$$s : \underline{\hat{C}}^T \underline{\hat{x}} = y_r$$

Sendo ainda o ponto P_0 tal que: $P_0 = s \{ \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \}$ então a condição para que P_0 - seja único é que : $\underline{\hat{C}} = \alpha_1 \underline{\hat{v}}_1$ ou $\underline{\hat{C}} = \alpha_2 \underline{\hat{v}}_2$ onde $\underline{\hat{v}}_1$ e $\underline{\hat{v}}_2$ são os auto-vetores da matriz \hat{A} e α_1 e α_2 são constantes.

Prova:

O plano de fase (\hat{x}_1, \hat{x}_2) diz respeito à equação

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \hat{A} \underline{\hat{x}} + \underline{\hat{b}} u(\tau) \tag{C.1.}$$

Integrando a equação (C.1.) acima, obtém-se:

$$\int \frac{d \hat{x}_1}{\lambda_1 \hat{x}_1 - \delta} = \int \frac{d \hat{x}_2}{\lambda_2 \hat{x}_2 + \delta} + c^{te} \tag{C.2.}$$

Cada uma das integrais acima fornece uma função do tipo logarítmica que admite inversa. Portanto as trajetórias no plano de fase são descritas por uma função que admite inversa.

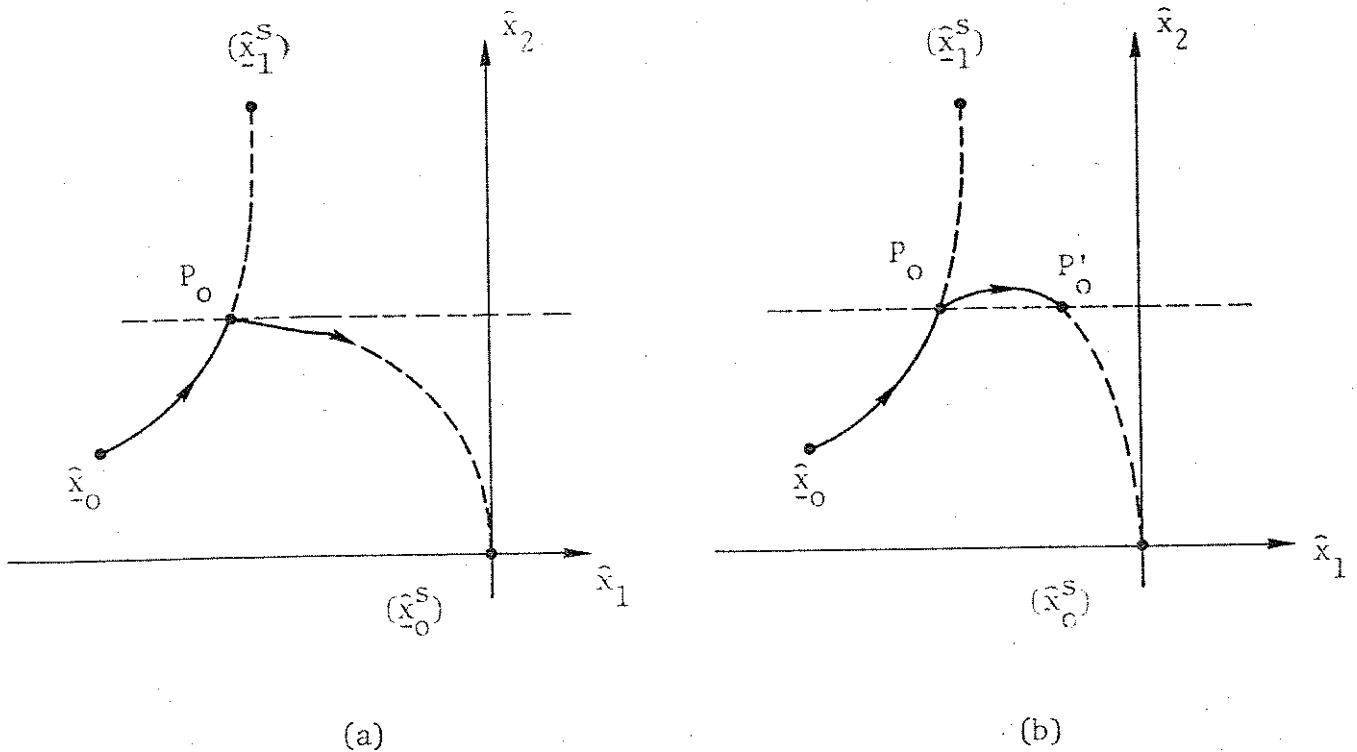
Logo, toda reta do plano (\hat{x}_1, \hat{x}_2) paralela a um de seus eixos intercepta as trajetórias em um único ponto (P_0). Mas, neste plano, os auto-vetores $\underline{\hat{v}}_1$ e $\underline{\hat{v}}_2$ são ortogonais e paralelos aos eixos coordenados, portanto

$$\underline{\hat{C}} = \alpha_1 \underline{\hat{v}}_1 \quad \text{ou} \quad \underline{\hat{C}} = \alpha_2 \underline{\hat{v}}_2 \quad \text{satisfazem a proposição.}$$

Proposição 2: Se o vetor $\underline{\hat{C}}$ satisfaz as condições impostas pela proposição 1, então, qualquer que seja a trajetória seguida pelo sistema, desde a condição inicial até o ponto P_0 , onde ocorre a primeira comutação, neste ponto começará a ocorrer Reticências.

Prova: Por absurdo

Suponhamos que o sistema parte de uma condição inicial qualquer e segue uma determinada trajetória (Γ_0 ou Γ_1) então, quando esta trajetória interceptar a reta de comutação no ponto P_0 , ocorrerá uma comutação para uma nova trajetória, podendo a princípio acontecer duas possibilidades descritas pelas figuras abaixo:



A situação (b) não pode ocorrer, pois não satisfaz a proposição 1, ($P_0 \neq P'_0$).

Portanto, a situação possível é o caso (a). A partir do ponto P_0 , a trajetória volta para o mesmo semi-plano de onde partiu e ocorrerá nova comutação e assim sucessivamente, ocorrendo portanto reticências e a trajetória seguida será a própria reta de comutação.

Proposição 3: Dentro das condições impostas pelas proposições anteriores, se tomarmos o vetor $\underline{\hat{C}}$ tal que $\underline{\hat{C}} = \alpha_2 \underline{\hat{v}}_2$ então o tempo de estabilização é mínimo.

Prova: Seja (x_1, x_2) o plano de fase do sistema em estudo, este plano é dividido em 4 regiões pelas retas de comutação.

$$\left[\begin{array}{l} s_1 : x_1 - \frac{1}{\lambda_1} x_2 = y_r \quad (\underline{\hat{C}} = \alpha_2 \underline{\hat{v}}_2) \\ s_2 : x_1 - \frac{1}{\lambda_2} x_2 = y_r \quad (\underline{\hat{C}} = \alpha_1 \underline{\hat{v}}_1) \end{array} \right. \quad (C.3.)$$

As equações do sistema são:

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\dot{x}}(\tau) = A \underline{x}(\tau) + \underline{b} u(\tau) \\ y(\tau) = \underline{e}^T \underline{x}(\tau) \end{array} \right. \quad (C.4.)$$

Em uma condição inicial qualquer (x_{10}, x_{20}) pode-se linearizar as trajetórias no plano (x_1, x_2) e obtém-se:

$$x_2 - x_{20} = \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_o (x_1 - x_{10}) \quad (C.5.)$$

onde

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_o = - \frac{x_{10}}{x_{20}} + (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{u(\tau)}{x_{20}} \quad (C.6.)$$

Para uma mesma variação $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$ pequena, pode-se calcular $(x_2)_1$ e $(x_2)_o$ que são os valores da ordenada x_2 quando percorremos uma trajetória do tipo Γ_1 e do tipo Γ_0 respectivamente.

$$(x_2)_1 - (x_2)_o = \frac{\Delta x_1}{x_{20}} \quad (C.7.)$$

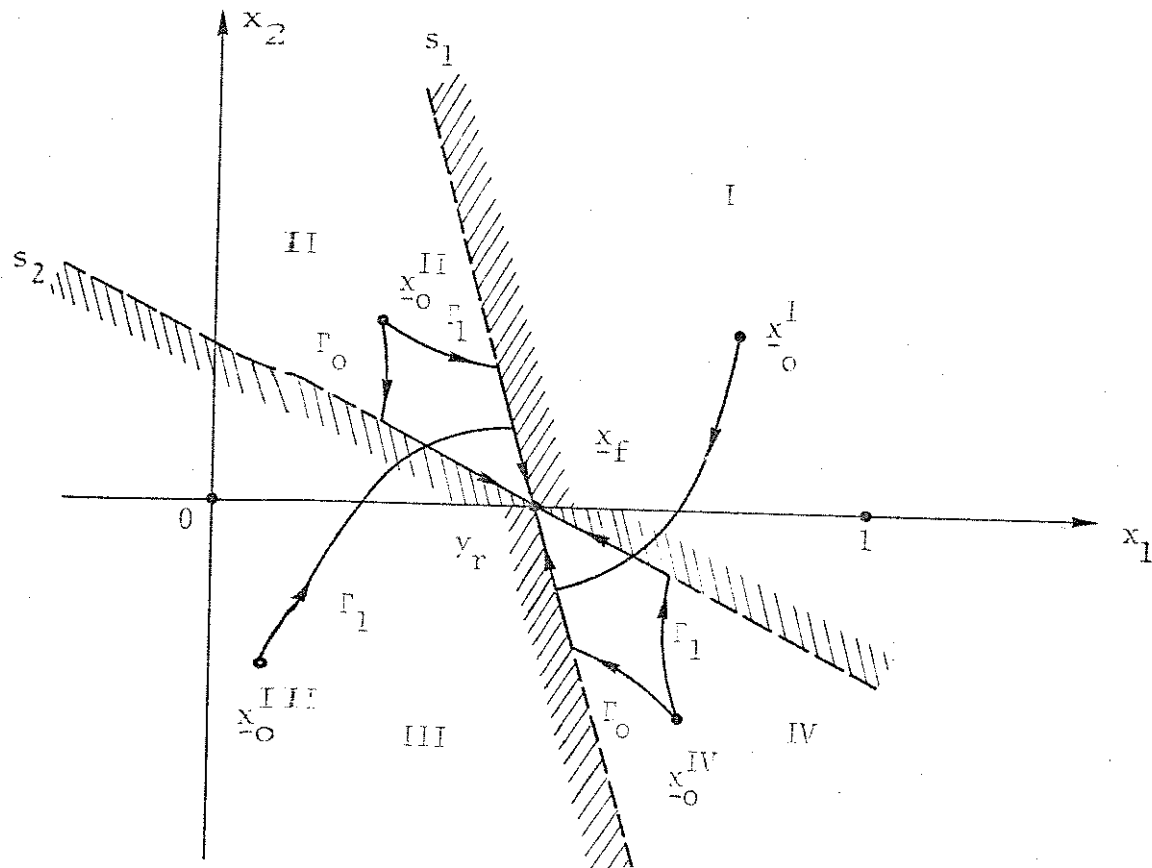


FIG. C.1. - POSSÍVEIS TRAJETÓRIAS NO PLANO DE FASE (x_1, x_2)

Nota-se pela Fig. (C.1.) que se \underline{x}_0 pertencer à região II ou IV as duas trajetórias possíveis terão somente os pontos \underline{x}_0 e \underline{x}^f em comum e tem-se:

- Região II : $\Delta x_1 > 0 \rightarrow (x_2)_1 - (x_2)_0 > 0$, portanto se a reta de comutação for s_1 esta permitirá que a trajetória seguida seja tal que $(x_2)_1 > (x_2)_0$.

- Região IV : $\Delta x_1 < 0 \rightarrow (x_2)_1 - (x_2)_0 > 0$, portanto se a reta de comutação for s_1 esta permitirá que a trajetória seguida seja tal que $(x_2)_0 < (x_2)_1$.

Se a condição inicial pertencer à região I ou III, se usarmos $\tan s_1$ ou s_2 como retas de comutação, as trajetórias serão coincidentes até ocorrer a primeira comutação (sobre s_2), portanto, a linearização anteriormente feita - sobre \underline{x}_0 - será agora feita sobre este ponto que chamaremos \underline{x}_c , fornecendo:

$$(x_2)_0 - (x_2)_c = - \frac{y_r}{x_{20}} \Delta x_1 \quad (C.8.)$$

$$(x_2)_1 - (x_2)_c = \frac{1 - y_r}{x_{20}} \Delta x_1 \quad (C.9.)$$

- Região I : $\Delta x_1 < 0 \rightarrow (x_2)_0 - (x_2)_c < 0$, portanto se a reta de comutação - for s_1 , esta permitirá que a trajetória seguida seja tal que $(x_2)_0 < (x_2)_c$.

- Região III: $\Delta x_1 > 0 \rightarrow (x_2)_1 - (x_2)_c > 0$, portanto a reta de comutação s_1 permite seguir uma trajetória tal que $(x_2)_1 > (x_2)_c$.

Portanto a reta de comutação s_1 faz com que a trajetória seguida, tenha sempre para um mesmo x_1 um valor x_2 maior em módulo que a trajetória seguida usando a reta de comutação s_2 .

Porém:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = x_2 \quad (C.10.)$$

A partir da condição inicial \underline{x}_0 a velocidade instantânea com que y se aproxima de y_r é:

$$v = \frac{dy}{dt} = x_2 \quad (C.11.)$$

mas foi mostrado anteriormente que:

$$v_{s_1} \geq v_{s_2} \quad (C.12.)$$

então, para o sistema transitar do estado inicial \underline{x}_0 até um estado \underline{x}_1 qualquer, com a reta de comutação s_1 o tempo gasto será menor ou igual ao gasto para transitar do estado inicial até um estado \underline{x}_2 qualquer com a reta de comutação s_2 ou seja, se:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{s_1} &= \{ \underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_1 \} \\ \Delta\tau_{s_2} &= \{ \underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_2 \} \end{aligned} \quad (C.13.)$$

tem-se:

$$\Delta\tau_{s_1} < \Delta\tau_{s_2} \quad (C.14.)$$

Portanto, entre as duas possibilidades, tem-se que a reta de comutação s_1 produz um tempo de estabilização mínimo da saída

B I B L I O G R A F I A

1. A. A. ANDRONOV, A. A. VITT, S. E. KHAIKIN - Theory of oscillators - Pergamon Press Ltd. - 1966
2. C. MIRA - Cours de systèmes asservis non linéaires - Dunod, Paris - 1969
3. J. C. GEROMEL, Y. BURIAN Jr. - Controle ótimo de sistemas modulador por largura de pulsos - XXVIII Reunião Anual da S.B.P.C. - Brasília, 1976.
4. Y. BURIAN Jr., C. P. BOTTURA - Regulação de tensão por comutação - 1a. Jornada Latino-Americana de Engenharia Elétrica, Mar Del Plata, Argentina, 1972.
5. C. P. BOTTURA - Contribuição do controle de torque em máquina série por modulação em largura de pulsos - Tese de Doutorado, FEC - UNICAMP - 1973.
6. A. NETUSHIL - Theory of automatic control - MIR Publishers, Moscow - 1973.
7. A. FELDBAUM - Principes theoriques des systèmes asservis optimaux - Éditions MIR - Moscow - 1973
8. M. ATHANS, P. L. FALB - Optimal control - McGraw Hill Book Company - 1966
9. P. VIDAL - Non-linear sampled-data systems - Gordon and Breach Science Publishers - 1969
10. J. E. GIBSON - Non - linear automatic control - McGraw Hill Book Company - 1963.