UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Tábitha Esteves Rosa

Controle escalonado por realimentação de saída para sistemas lineares a tempo discreto afetados por parâmetros variantes no tempo.

Campinas
2017

Tábitha Esteves Rosa

Controle escalonado por realimentação de saída para sistemas lineares a tempo discreto afetados por parâmetros variantes no tempo.

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira
Coorientadora: Dr.ª Cecília de Freitas Morais

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELA ALUNA TÁBITHA ESTEVES ROSA E ORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO CORAÇÃO DE LEÃO FONTOURA DE OLIVEIRA.

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 132220/2015-6

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

R71c

Rosa, Tábitha Esteves, 1990-
Controle escalonado por realimentação de saída para sistemas lineares a tempo discreto afetados por parâmetros variantes no tempo / Tábitha Esteves Rosa. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.
Coorientador: Cecília de Freitas Morais.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares variantes no tempo. 2. Sistemas de controle por realimentação. 3. Teoria de controle. 4. Desigualdades matriciais lineares. I. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de,1978-. II. Morais, Cecília de Freitas,1987-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Gain-scheduled output-feedback control for discrete-time linear systems affected by time-varying parameters
Palavras-chave em inglês:
Linear time-varying systems
Feedback control systems
Control theory
Linear matrix inequalities
Área de concentração: Automação
Titulação: Mestra em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:
Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira [Orientador]
Grace Silva Deaecto
João Bosco Ribeiro do Val
Data de defesa: 27-07-2017
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidata: Tábitha Esteves Rosa **RA:** 162649
Data da Defesa: 27/07/2017

Título da Dissertação: "Controle escalonado por realimentação de saída para sistemas lineares a tempo discreto afetados por parâmetros variantes no tempo."

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira (presidente, FEEC/UNICAMP)
Prof. Dr. Grace Silva Deaecto (FEM/UNICAMP)
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica da aluna.

Agradecimentos

Ao meu orientador Ricardo, que desde o início acreditou em mim e me deu todo o apoio que necessitei para chegar até o final desta dissertação, sempre de uma maneira excepcional. Além disso, sou extremamente grata por todos os ensinamentos que me foram passados, direta ou indiretamente!

À Cecília, por quem, assim como com o professor Ricardo, eu certamente não conseguirei escolher as palavras certas para agradecer. Além de tudo o que fez por mim como coorientadora e amiga - todas as dicas, correções, aulas, paciência, incentivos e muito mais, hoje é também alguém que muito me influencia positivamente na vida e que se tornou uma mulher que profundamente admiro.

Aos meus pais, Célio e Giane, que mesmo eu querendo sair pelo mundo andando com minhas próprias perninhas, estão sempre me guiando e me ajudando quando não consigo andar sozinha. Sem vocês eu não faço ideia de como as coisas seriam, mas é fato que com vocês tudo é muito melhor e mais fácil! Ao meu irmão Daniel, por sempre me apoiar e estar lá quando eu preciso e por, junto ao meu pai, serem pessoas que, sem nem dizerem nada, sempre me fazem lembrar que mesmo quando existem motivos para desesperar, manter a calma em qualquer situação é essencial. Obrigada por todo o sempre pela existência de vocês três na minha vida!

Aos meus amigos do LE16, obrigada por tudo, meus caros! Ao Renato, Luciano, Lício, Elmer e Cecília: obrigada pela disponibilidade pronta para me ajudar e serem meus técnicos de TI e professores particulares! Ainda sobre esses já citados e também ao Filipe, Gustavo 2 (de perto ou de longe), João, Lucas, Jonathan, Marciano, Raul e a todos os outros que passaram ou que recém chegaram no laboratório, obrigada pela companhia, pelas infinitas ajudas e conselhos, por ouvirem todas as minhas reclamações e, em especial, por deixarem a vida bem mais divertida, dentro e fora do laboratório. Vocês fizeram toda a diferença na minha vida aqui na UNICAMP. Quando cheguei na FEEC, um dos meus maiores receios era cair em um laboratório em que as pessoas não interagiam entre si e não se ajudavam. Desde os primeiros e-mails trocados e os primeiros contatos, eu vi e tive a certeza de que estaria cercada de pessoas excelentes, não só no âmbito profissional, mas mais ainda no pessoal.

Aos amigos que fiz aqui em Campinas, um enorme obrigado! Aos amigos que fiz pela FEEC, aos da Rep dos Franceses, aos amigos do extinto grupo "Amigos da Tábitha Ninja", aos que moraram e moram comigo, muito obrigada por todos os momentos de descontração fora do laboratório! Em especial à Ana, Isabela e Filipe Trindade, que, além de muito compartilharem e me ensinarem sobre tudo, estiveram comigo em muitos altos e também em baixos momentos da minha vida. Obrigada!

Aos amigos que acompanharam de longe essa jornada, e em especial à Riri, Prates, Gabs, Fome, Michellisa, Keith, Fernanda e Jéssica, obrigada de coração pela amizade de vocês!! Mesmo não presentes fisicamente e nem tendo contatos tão frequentes como o que eu gostaria, vocês permaneceram e fizeram diferença. E à Yasmim, que esteve muito longe e agora está mais perto, obrigada por ser minha melhor amiga! E por ser uma pessoa que, mais do que qualquer outra, sabe que o fato de eu utilizar essa expressão sobre ela já diz muito sobre a sua importância na minha vida.

Ao Valter, que além de ser um amigo que também acompanhou de longe, também foi um grande motivador e preparador para que eu me decidisse por iniciar uma vida acadêmica, optando pelo mestrado aqui na UNICAMP. Obrigada não só a ele, mas também a todos os outros excelentes professores que tive! Incluo aqui também o professor Pedro Peres, que desde o início tem me acompanhado, sempre oferecendo dicas preciosas.

Aos meus avós, Eva e João, que mesmo não entendendo o que é um mestrado e o que eu e muitos outros pesquisam, sempre me apoiaram e tentaram compreender minha ausência. Uma das minhas maiores alegrias é chegar em Minas de surpresa e ver o sorrisão dos véios.

À minha família, tios, primos, avós, obrigada por serem suportes, por torcerem pela minha felicidade e por serem motivo de muitos dos meus sorrisos, embora, na maior parte das vezes, eu esteja fisicamente longe. Ainda bem que existem os grupos de Whatsapp que me provêm, entre outros, fotos de bebês, cachorros e piadas de tio diariamente!

Aos professores Grace e João Bosco, que aceitaram nosso convite para a avaliação dessa dissertação e cujas contribuições foram valiosas.

À UNICAMP, de uma forma geral, agradeço por me fornecer toda a estrutura, não só física mas também pessoal, na forma de professores e funcionários, para realizar esse trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro, que infelizmente não durou mais do que vinte e quatro parcelas, e das quais algumas não foram suficientes para eu fazer tudo o que queria, mas que me deixaram contente vivendo em Barão Geraldo.

Finalmente, à FAEPEX e à UNICAMP, que financiaram minha participação no *IFAC World Congress*, em Toulouse, França. Valeu a pena postergar minha defesa quando existiam apenas esperanças de que esse financiamento fosse possível. Mesmo tendo a notícia de que poderia ir apenas duas semanas antes, foi uma experiência incrível e uma excelente forma de finalizar meu período de mestrado!

Aos demais, que eu porventura não mencionei aqui, mas que sabem que também contribuíram para esse trabalho, muito obrigada!

Resumo

Esta dissertação trata dos problemas de estabilização e controle $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ por realimentação dinâmica de saída de ordem reduzida de sistemas lineares discretos no tempo. As matrizes associadas à representação de espaço de estados possuem duas classes de matrizes variantes no tempo, uma com dependência polinomial em parâmetros variantes no tempo e outra limitada em norma. As condições de projeto são formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares dependentes de parâmetros combinadas com buscas em escalares, sendo capazes de prover controladores robustos ou escalonados. Dentre as novidades técnicas, destaca-se um tratamento genérico da matriz associada à saída medida, permitindo matrizes com dependência polinomial nos parâmetros variantes no tempo e a existência do termo de transmissão direta. Graças à generalidade da abordagem, o método proposto pode ser particularizado para lidar com sistemas politópicos variantes e invariantes no tempo e sistemas chaveados, permitindo ainda, por meio do tratamento das incertezas limitadas em norma nas condições de síntese, o projeto de leis de controle implementadas digitalmente para sistemas incertos a tempo contínuo discretizados. Além disso, é apresentada uma nova heurística de busca por soluções estabilizantes para sistemas politópicos variantes e invariantes no tempo, a qual é fornecida em termos de um algoritmo de dois passos, que combina uma condição de síntese relaxada e uma condição de análise aplicada *a posteriori* para certificar a estabilidade em malha-fechada. As condições propostas podem ser resolvidas numericamente por meio de aproximações polinomiais, resultando em um conjunto finito de desigualdades matriciais lineares. Exemplos numéricos são fornecidos para ilustrar as potencialidades da abordagem para tratar diversas classes de sistemas lineares a tempo discreto e a eficiência das condições de projeto propostas quando comparadas com os métodos existentes na literatura.

Palavras-chaves: Sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo; controle por realimentação de saída; controle escalonado; desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This dissertation deals with the problems of reduced order dynamic output feedback stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ control of discrete-time linear systems. The matrices associated to the state-space representation have two classes of time-varying matrices, one with polynomial dependence on time-varying parameters and the other limited in norm. The design conditions are formulated in terms of parameter-dependent linear matrix inequalities combined with scalar searches, being capable to provide robust or gain-scheduled controllers. Among the technical novelties, one highlights a generic treatment of the measured output matrices, allowing matrices with polynomial dependence on the time-varying parameters and the existence of feed-forward matrices. Thanks to the generality of the approach, the proposed method can be particularized to handle time-varying and time-invariant polytopic systems and switched systems, also allowing, through the treatment of the norm-bounded uncertainties in the synthesis conditions, the project digitally implemented control laws discretized uncertain continuous-time systems. Besides that, a new heuristic is introduced to search for stabilizing solutions for time-varying and time-invariant polytopic systems, given in terms of a two steps algorithm, that combines a relaxed synthesis condition and an analysis condition applied *a posteriori* to certify the closed-loop stability. The proposed conditions can be numerically solved by means of polynomial approximations, resulting in a finite set of linear matrix inequalities. Numerical examples are provided to illustrate the potentialities of the approach to cope with several classes of discrete-time linear systems and the efficiency of the proposed design conditions when compared with the methods available in the literature.

Keywords: Linear parameter-varying systems; output feedback control; gain-scheduled control; linear matrix inequalities.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Círculo de raio ρ no plano complexo. 22
Figura 2 – Trajetórias dos estados do sistema (3.15) com: (a) controlador obtido pelo Corolário 3.4 (com $\rho = 1$) com uma aproximação de primeira ordem ($\ell = 1$) e desprezando os erros de aproximação da discretização. (b) controlador obtido pelo Corolário 3.3 com $\ell = 3$ considerando os erros de aproximação da discretização. 45
Figura 3 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ associados aos controladores por realimentação estática de saída escalonados (a) ou robustos (b) calculados pelos métodos C4.1, dCCOPS e DY para o Exemplo 4.4.2. 58
Figura 4 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados aos controladores por realimentação estática de saída escalonados (a) ou robustos (b) calculados pelos métodos C4.2, dCCOPS e DY para o Exemplo 4.4.2. 59

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Resultados de estabilização de sistemas invariantes no tempo. 42
Tabela 2 – Resultados de estabilização de sistemas variantes no tempo. 43
Tabela 3 – Resultados de estabilização por realimentação de saída de sistemas chaveados discretos com regra de chaveamento arbitrária utilizando o Corolário 3.5 (C3.5) e o Teorema 3 de Daafouz *et al.* (2002) (DMI). . . . 45
Tabela 4 – Resultados de estabilização por realimentação de estados de sistemas chaveados discretos com regra de chaveamento arbitrária utilizando o Corolário 3.5 (C3.5) e o Teorema 3 de Daafouz *et al.* (2002) (DMI). . . 46
Tabela 5 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ associados aos controladores por realimentação estática de saída projetados pelo Teorema 4.1 para o Exemplo 4.4.1. . . 57
Tabela 6 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados aos controladores por realimentação estática de saída projetados pelo Teorema 4.2 para o Exemplo 4.4.1. . . 57
Tabela 7 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ (μ_∞) obtidos para o Exemplo 4.4.3. 60
Tabela 8 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ (μ_2) obtidos para o Exemplo 4.4.3. 60
Tabela 9 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ ($\mu_{\infty,1}$ e $\mu_{\infty,2}$) obtidos para o Exemplo 4.4.4. . . 62

Lista de Acrônimos e Abreviações

$\lambda_i(\cdot)$	Representa os autovalores da matriz $(\cdot)$
$\alpha(k)$	Vetor de parâmetros variantes no tempo
δ_i	Limitantes superiores das normas dos termos incertos
ℓ_2	Espaço das funções discretas quadraticamente somáveis
$\mathrm{He}(M)$	Indica a soma da matriz M com sua transposta M^T
Λ	Simplex unitário de N vértices
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Esperança matemática
μ_2	Limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema
μ_∞	Limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vetores (matrizes) reais de ordem n $(n \times n)$
ρ	Limitante da taxa de decaimento (LPV) ou raio do círculo no plano complexo que contém os polos do sistema (LTI)
$\mathbb{S}_+^{n\times n}$	Conjunto de matrizes reais simétricas definidas positivas de ordem $n \times n$
$\star$	Representa um bloco induzido pela simetria da matriz
$\mathrm{Tr}\{\cdot\}$	Traço de uma matriz
I	Matriz identidade de dimensão apropriada
BMI	Bilinear Matrix Inequality (Desigualdade matricial bilinear)
LMI	Linear Matrix Inequality (Desigualdade matricial linear)
LPV	Linear Parameter-Varying (Linear com parâmetros variantes)
LTI	Linear Time-Invariant (Linear invariante no tempo)

Sumário

Lista de Ilustrações 9
Lista de Tabelas 10
Lista de Acrônimos e Abreviações 11
Sumário 12
1 Introdução 14

I Fundamentos 17

2 Fundamentos Matemáticos 18
- 2.1 Definição do Problema 18
- 2.2 Análise de Estabilidade 20
  - 2.2.1 Estabilidade Assintótica 21
  - 2.2.2 Taxa de decaimento 21
- 2.3 Cômputo de Normas 23
  - 2.3.1 Critério de Desempenho $\mathcal{H}_\infty$ 23
  - 2.3.2 Critério de Desempenho $\mathcal{H}_2$ 23
- 2.4 Resultados Auxiliares 24
- 2.5 Definições de Sistemas Auxiliares 25
  - 2.5.1 Sistemas LPV Politópicos 25
  - 2.5.2 Sistemas LTI 25
  - 2.5.3 Sistemas Chaveados 26

II Contribuições 27

3 Estabilização de Sistemas LPV com Termos Limitados em Norma 28
- 3.1 Estabilização por Realimentação Dinâmica de Saída 28
- 3.2 Principais Aplicações e Vantagens da Técnica 34
- 3.3 Testes de Dimensão Finita 37
- 3.4 Exemplos Numéricos 40
  - 3.4.1 Comparação Estatística dos Métodos de Estabilização 41
  - 3.4.2 Estabilização Robusta de Sistemas LTI com Termos Limitados em Norma 43
  - 3.4.3 Sistemas Chaveados 44

4 Controle $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ 47
- 4.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação Dinâmica de Saída 47
- 4.2 Controle $\mathcal{H}_2$ por Realimentação Dinâmica de Saída 50

4.3 Principais Extensões e Vantagens da Técnica 54
4.4 Exemplos Numéricos 56
4.4.1 Sistema LPV Polinomial 56
4.4.2 Sistema LPV Politópico (DE CAIGNY *et al.*, 2009) 58
4.4.3 Sistema LPV Politópico (EMEDI; KARIMI, 2016) 59
4.4.4 Sistema LTI Politópico 60
5 Considerações Finais 64

Referências 66

Apêndices 72
APÊNDICE A Descrição de Matrizes Polinomiais 73
APÊNDICE B Relaxações LMIs 74
B.1 Relaxações LMIs 74

1 Introdução

Uma importante classe de modelos que descreve tanto dinâmicas lineares afetadas por parâmetros variantes no tempo quanto sistemas não lineares representados em termos de uma família de modelos lineares, são os sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter-Varying* – LPV), como é mostrado em Rugh e Shamma (2000). A versatilidade dessa classe de modelos pode ser constatada por inúmeras aplicações práticas, por exemplo, em plantas mecânicas como os robôs móveis não-holonômicos estudados em Huang *et al.* (2014), em pilotos automáticos de mísseis (WHITE *et al.*, 2007), em aplicações envolvendo vibroacústica (DE CAIGNY *et al.*, 2010), em aviões, como o Boeing 747-100/200 (SZÁSZI *et al.*, 2005) e em turbinas eólicas (SHIRAZI *et al.*, 2012). Com relação à análise de estabilidade robusta e aos métodos de projeto de controladores estabilizantes, eventualmente incluindo critérios de desempenho, é possível afirmar que a teoria de estabilidade de Lyapunov é a que tem fornecido as técnicas mais generalistas e relevantes desenvolvidas até o momento para sistemas LPV. Nesse contexto, os primeiros resultados da literatura empregam a estratégia conhecida como *estabilidade quadrática*, em que a matriz de Lyapunov utilizada é quadrática nos estados e não depende dos parâmetros. No entanto, é de conhecimento geral que as técnicas baseadas nesta abordagem podem ser conservadoras na maior parte dos casos e, como uma tentativa de melhorar a acurácia dos resultados, funções de Lyapunov dependentes de parâmetros com estruturas afins e politópicas foram propostas, por exemplo, em Scherer (1996), Apkarian e Adams (1998), Apkarian *et al.* (2000), Lee (2006), de Souza *et al.* (2006), Daafouz e Bernussou (2001a) e Du e Yang (2008), e matrizes homogêneas polinomialmente dependentes de parâmetros foram empregadas em De Caigny *et al.* (2010) e Agulhari *et al.* (2010). É importante salientar que os métodos baseados em matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros são menos conservadores e, em geral, contêm os resultados da estabilidade quadrática como um caso particular.

Em muitas situações práticas, pode ser custoso ou até mesmo inviável medir ou estimar em tempo real todos os estados da planta a ser controlada, o que dificulta o projeto de controladores baseado em leis de realimentação de estado. Nesses casos, o emprego de técnicas baseadas em realimentação de saída torna-se uma alternativa mais viável, devido à facilidade e ao menor custo de implementação. No entanto, do ponto de vista teórico, o problema de realimentação de saída, mesmo para sistemas sem incertezas, é um desafio muito maior que o de realimentação de estado, o que fez com que poucos (embora significativos) aprimoramentos tenham sido realizados nas últimas décadas (PERES *et al.*, 1994b; GEROMEL *et al.*, 1996). Alguns resultados da literatura, que tratam o projeto de controladores por realimentação estática de saída foram apresentados em Du e Yang

(2008), Braga *et al.* (2015b) e De Caigny *et al.* (2010) para lidar com sistemas LPV discretos no tempo, e em Agulhari *et al.* (2010) e Chang *et al.* (2015) para tratar sistemas lineares invariantes no tempo (do inglês, *Linear Time-Invariant* – LTI). Quando é possível ler ou estimar os parâmetros variantes no tempo, o controlador pode ser escalonado em tempo real pelos valores desses parâmetros, potencialmente melhorando os resultados com respeito ao controlador robusto (independente dos parâmetros variantes no tempo). Essa classe de controladores é chamada de ganho escalonado (em inglês, *gain scheduled*) e tem sido investigada e aplicada em vários trabalhos na literatura há cerca de duas décadas (SATO; PEAUCELLE, 2013; RUGH; SHAMMA, 2000; MOHAMMADPOUR; SCHERER, 2012; APKARIAN; ADAMS, 1998; HOFFMANN; WERNER, 2015).

O propósito desta dissertação de mestrado é fornecer um procedimento de síntese de controladores escalonados por realimentação dinâmica de saída de ordem reduzida para sistemas discretos polinomialmente dependentes de parâmetros variantes no tempo. A principal motivação da investigação dessa classe de modelos é a discretização de sistemas incertos e LPV em tempo contínuo, seguindo a linha de trabalhos iniciada em Braga *et al.* (2013a), Braga *et al.* (2013b), Braga *et al.* (2014a), Braga *et al.* (2014b), Braga *et al.* (2015a) e Braga *et al.* (2016). Nesse contexto, as condições de projeto desenvolvidas são uma novidade na literatura, tratando simultaneamente parâmetros variantes no tempo com dependência polinomial e termos limitados em norma. Além disso, casos particulares também são explorados, como por exemplo o tratamento de sistemas politópicos invariantes e variantes no tempo e uma adaptação para lidar com sistemas chaveados com regra de chaveamento arbitrária. Diferentemente de outros métodos da literatura que restringem o tratamento da matriz de saída, impondo restrições estruturais nas variáveis do problema e necessitando da aplicação de transformações de similaridade, aumentando o conservadorismo das soluções, as condições propostas conseguem tratar matrizes de saída de maneira irrestrita, apresentando uma melhoria significativa na abrangência dos resultados graças a esse aspecto. Por meio de exemplos numéricos, é mostrado que os métodos propostos podem fornecer resultados menos conservadores que as técnicas recentes disponíveis na literatura, tanto para sistemas variantes no tempo quanto para os invariantes. A metodologia de projeto é baseada em otimização convexa, mais precisamente em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) dependentes de parâmetros, as quais podem ser convertidas em condições numericamente tratáveis por meio de relaxações polinomiais obtidas, por exemplo, por *softwares* especializados, como o ROLMIP (Robust LMI Parser) desenvolvido em Agulhari *et al.* (2012) especialmente para essa tarefa.

Esta dissertação é dividida em duas partes: Fundamentos e Contribuições. A primeira é composta pelo Capítulo 2, enquanto a segunda é dividida entre os capítulos de 3 a 5. Uma breve descrição de cada capítulo é dada a seguir.

Capítulo 2: Apresentação da definição do problema, conceitos sobre estabilidade, critérios de desempenho e lemas auxiliares que são utilizados no decorrer desta dissertação.

Capítulo 3: Apresenta novas condições LMIs suficientes para tratar o caso de estabilização por realimentação dinâmica de saída de sistemas LPV com matrizes com dependência polinomial de grau arbitrário nos parâmetros variantes no tempo e termos limitados em norma. Além disso, são apresentadas as principais aplicações e vantagens da técnica, assim como são fornecidas algumas informações quanto à obtenção dos testes de dimensão finita (condições programáveis numericamente). A eficiência do método proposto com relação a outras técnicas similares baseadas em LMIs é destacada por meio de exemplos numéricos retirados da literatura.

Capítulo 4: Apresentação dos resultados no âmbito da síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ escalonados por realimentação dinâmica de saída para tratar sistemas LPV polinomiais com termos incertos limitados em norma. Além disso, são apresentadas as principais aplicações e vantagens da técnica e, em seguida, exemplos numéricos são dados de forma a ilustrar a eficácia do método proposto.

Capítulo 5: Apresentação das conclusões desta dissertação e perspectivas de trabalhos futuros.

Parte I

Fundamentos

2 Fundamentos Matemáticos

Este capítulo apresenta os fundamentos necessários para a familiarização do leitor com o problema de controle a ser investigado, que é a estabilização por realimentação dinâmica de saída de sistemas LPV polinomiais com termos incertos limitados em norma. Primeiramente, é apresentada a definição do problema e, em seguida, são apresentados conceitos sobre estabilidade, critérios de desempenho e resultados auxiliares que são utilizados no decorrer desta dissertação.

2.1 Definição do Problema

Seja o seguinte sistema linear discreto no tempo afetado por parâmetros variantes no tempo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\Delta(\alpha(k))x(k) + B_\Delta(\alpha(k))u(k) + E_\Delta(\alpha(k))w(k) \\ z(k) &= C_z(\alpha(k))x(k) + D_z(\alpha(k))u(k) + E_z(\alpha(k))w(k) \\ y(k) &= C_y(\alpha(k))x(k) + E_y(\alpha(k))w(k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^r$ é a entrada de ruído, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a variável de saída controlada, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida e $\alpha(k) = [\alpha_1(k), \ldots, \alpha_N(k)]$ é um vetor de parâmetros variantes no tempo, que pertencem ao simplex unitário de N vértices dado por

$$\Lambda \equiv \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \zeta_i = 1,\ \zeta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \right\},$$

para todo $k \geq 0$. As matrizes $A_\Delta(\alpha(k))$, $B_\Delta(\alpha(k))$ e $E_\Delta(\alpha(k))$ são dadas por

$$\begin{aligned} A_\Delta(\alpha(k)) &= A(\alpha(k)) + \Delta A(\alpha(k)), \\ B_\Delta(\alpha(k)) &= B(\alpha(k)) + \Delta B(\alpha(k)), \\ E_\Delta(\alpha(k)) &= E(\alpha(k)) + \Delta E(\alpha(k)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que os termos $\Delta A(\alpha(k))$, $\Delta B(\alpha(k))$ e $\Delta E(\alpha(k))$ são incertos e cujas normas têm como limitantes superiores os valores conhecidos (δ_A, δ_B, δ_E) conforme descrito a seguir

$$\delta_A = \sup_{\alpha(k)\in\Lambda} ||\Delta A(\alpha(k))||_2,\ \delta_B = \sup_{\alpha(k)\in\Lambda} ||\Delta B(\alpha(k))||_2,\ \delta_E = \sup_{\alpha(k)\in\Lambda} ||\Delta E(\alpha(k))||_2. \tag{2.3}$$

As matrizes de espaço de estados do sistema (2.1) ($A(\alpha(k))$, $B(\alpha(k))$, $E(\alpha(k))$, $C_z(\alpha(k))$, $D_z(\alpha(k))$, $E_z(\alpha(k))$, $C_y(\alpha(k))$ e $E_y(\alpha(k))$) são matrizes polinomiais de grau fixo em $\alpha(k)$, cujos coeficientes dos monômios são matrizes conhecidas (veja Apêndice A para mais detalhes sobre uma notação genérica para descrever matrizes polinomiais com parâmetros no simplex unitário).

A motivação para a consideração das matrizes $A_\Delta(\alpha(k))$, $B_\Delta(\alpha(k))$ e $E_\Delta(\alpha(k))$ na forma mostrada em (2.2), isto é, constituídas por matrizes polinomiais de grau arbitrário mais um termo limitado em norma, vem da discretização de sistemas LTI ou LPV politópicos contínuos no tempo (a qual apresenta várias aplicações práticas que incluem o controle via redes de comunicação (WANG; LIU, 2008)). Utilizando a expansão em série de Taylor de um grau fixo, como proposto em Braga *et al.* (2014a), o sistema discretizado resultante pode ser representado por esta estrutura particular. Embora o processo de discretização não seja investigado nesta dissertação, essa representação mais generalista é adotada. Nesse contexto, observe ainda que não apenas os sistemas politópicos discretizados, mas também outros modelos dinâmicos podem ser descritos em termos de polinômios de grau genérico como, por exemplo, os sistemas identificados por meio das técnicas apresentadas em De Caigny *et al.* (2008) e De Caigny *et al.* (2009) e os pilotos automáticos de mísseis projetados em White *et al.* (2007).

O objetivo desta dissertação é o projeto de um controlador estabilizante por realimentação dinâmica de saída[1] de ordem $n_c \leq n_x$, dado por

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x_c(k+1) = A_c(\alpha(k))x_c(k) + B_c(\alpha(k))y(k) \\ \quad\;\; u(k) = C_c(\alpha(k))x_c(k) + D_c(\alpha(k))y(k) \end{cases} \tag{2.4}$$

Por ser um problema de difícil solução numérica, o cômputo de um controlador por realimentação dinâmica de saída de ordem n_c pode ser reformulado, por exemplo, utilizando o método proposto em Mårtensson (1985) e El Ghaoui *et al.* (1997), os quais reestruturam o projeto do controlador (2.4) como a busca por um ganho de realimentação estática de saída, dado por

$$\Theta(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} A_c(\alpha(k)) & B_c(\alpha(k)) \\ C_c(\alpha(k)) & D_c(\alpha(k)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}, \tag{2.5}$$

para o sistema aumentado

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}_\Delta(\alpha(k))\tilde{x}(k) + \tilde{B}_\Delta(\alpha(k))\tilde{u}(k) + \tilde{E}_\Delta(\alpha(k))w(k) \\ \tilde{z}(k) &= \tilde{C}_z(\alpha(k))\tilde{x}(k) + \tilde{D}_z(\alpha(k))\tilde{u}(k) + \tilde{E}_z(\alpha(k))w(k) \\ \tilde{y}(k) &= \tilde{C}_y(\alpha(k))\tilde{x}(k) + \tilde{E}_y(\alpha(k))w(k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

com $\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k)^T & x_c(k)^T \end{bmatrix}^T$, $\tilde{u}(k) = \begin{bmatrix} x_c(k+1)^T & u(k)^T \end{bmatrix}^T$, $\tilde{y}(k) = \begin{bmatrix} x_c(k)^T & y(k)^T \end{bmatrix}^T$,

[1] Note que, para implementar um controlador escalonado (dependente de parâmetros) em plantas físicas, é necessário conhecer (por estimação ou medição) todos os valores dos parâmetros variantes em tempo real.

$\tilde{z}(k) = z(k)$ e

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_\Delta(\alpha(k)) & \tilde{E}_\Delta(\alpha(k)) & \tilde{B}_\Delta(\alpha(k)) \\ \tilde{C}_z(\alpha(k)) & \tilde{E}_z(\alpha(k)) & \tilde{D}_z(\alpha(k)) \\ \tilde{C}_y(\alpha(k)) & \tilde{E}_y(\alpha(k)) & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} A_\Delta(\alpha(k)) & 0 & E_\Delta(\alpha(k)) & 0 & B_\Delta(\alpha(k)) \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ \hline C_z(\alpha(k)) & 0 & E_z(\alpha(k)) & 0 & D_z(\alpha(k)) \\ \hline 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ C_y(\alpha(k)) & 0 & E_y(\alpha(k)) & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Considerando essas estruturas, o sistema em malha fechada é dado por

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}_{cl}(\alpha(k))\tilde{x}(k) + \tilde{B}_{cl}(\alpha(k))w(k) \\ \tilde{z}(k) = \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))\tilde{x}(k) + \tilde{D}_{cl}(\alpha(k))w(k) \end{cases} \tag{2.7}$$

cujas matrizes são dadas por

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{cl}(\alpha(k)) & \tilde{B}_{cl}(\alpha(k)) \\ \tilde{C}_{cl}(\alpha(k)) & \tilde{D}_{cl}(\alpha(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_\Delta(\alpha(k)) & \tilde{E}_\Delta(\alpha(k)) \\ \tilde{C}_z(\alpha(k)) & \tilde{E}_z(\alpha(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_\Delta(\alpha(k)) \\ \tilde{D}_z(\alpha(k)) \end{bmatrix} \Theta(\alpha(k)) \begin{bmatrix} \tilde{C}_y(\alpha(k))' \\ \tilde{E}_y(\alpha(k))' \end{bmatrix}'. \tag{2.8}$$

Assim como em grande parte das pesquisas em teoria de controle, o objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de técnicas que permitam projetar controladores que proporcionem, em malha fechada, estabilidade, eventualmente minimizando alguma função objetivo associada a um índice de desempenho (geralmente representado por uma norma). Com esse intuito, as próximas sessões introduzem os principais conceitos e resultados publicados na literatura referentes à análise de estabilidade de sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo.

2.2 Análise de Estabilidade

Seja o seguinte sistema dinâmico com entrada nula

$$x(k+1) = \hat{A}(\alpha(k))x(k), \tag{2.9}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. Esse sistema é dito assintoticamente estável se, dada uma condição inicial $x(0)$, o mesmo retorna à origem quando o tempo tende a infinito, isto é

$$\lim_{k\to\infty} x(k) \to 0, \quad \forall x(0).$$

A análise de estabilidade de sistemas LPV discretos pode ser realizada por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov (KHALIL, 2002), que está diretamente associada às propriedades da matriz $\hat{A}(\alpha(k))$ do sistema em (2.9).

2.2.1 Estabilidade Assintótica

A estabilidade assintótica de um sistema LPV discreto pode ser verificada por uma condição suficiente dada a seguir.

Lema 2.1. *O sistema* (2.9) *é assintoticamente estável se existir uma matriz* $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_{+}^{n\times n}$*, tal que*

$$\hat{A}(\alpha(k))P(\alpha(k))\hat{A}(\alpha(k))' - P(\alpha(k+1)) < 0, \quad \forall \alpha(k) \in \Lambda \tag{2.10}$$

ou, equivalentemente (por complemento de Schur)

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1)) & \hat{A}(\alpha(k))P(\alpha(k)) \\ P(\alpha(k))\hat{A}(\alpha(k))' & P(\alpha(k)) \end{bmatrix} > 0. \tag{2.11}$$

Para sistemas invariantes no tempo (LTI), esta condição é necessária e suficiente para garantir a Schur estabilidade do sistema (2.9) para todo $\alpha(k+1) = \alpha(k) = \alpha$, ou equivalentemente, para que a matriz dinâmica $\hat{A}(\alpha)$ possua todos os autovalores dentro do círculo de raio unitário.

Note que as condições do Lema 2.1, da forma como estão apresentadas, são LMIs dependentes do parâmetro variante no tempo $\alpha(k)$ (e também de seu instante avançado $\alpha(k+1)$). A verificação dessas desigualdades caracteriza um problema de otimização de dimensão infinita, pois a variável solução $P(\alpha(k))$ é uma função do parâmetro $\alpha(k)$, cuja forma (estrutura) é desconhecida *a priori*. Uma discussão mais detalhada sobre como tratar esse problema numericamente é apresentada na Seção 3.3 e no Apêndice B.

2.2.2 Taxa de decaimento

É possível generalizar o Lema 2.1 de forma a, além de certificar a estabilidade, ainda determinar um limitante para a taxa de decaimento de convergência das trajetórias para a origem (RUGH, 1996). Primeiramente, sabe-se que, se a função de Lyapunov, $V(x(k))$, é tal que

$$V(x(k+1)) < \rho^2 V(x(k)),$$

para $0 < \rho \leq 1$, então as trajetórias convergem para a origem (sistema assintoticamente estável) e, além disso, ρ estabelece um limitante para a taxa de decaimento dos estados, (ELIA; MITTER, 2001), isto é,

$$||x(k)||_2 \leq \rho^k ||x(0)||_2, \quad \forall k \geq 1.$$

As condições apresentadas no lema a seguir, quando verificadas, garantem a estabilidade assintótica do sistema (2.9) com taxa de decaimento ρ.

Lema 2.2. *O sistema (2.9) possui taxa de decaimento limitada por ρ se existir uma matriz $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_{+}^{n\times n}$, tal que*

$$\hat{A}(\alpha(k))P(\alpha(k))\hat{A}(\alpha(k))' - \rho^2 P(\alpha(k+1)) < 0, \quad \forall \alpha(k) \in \Lambda$$

ou, equivalentemente (por complemento de Schur)

$$\begin{bmatrix} \rho^2 P(\alpha(k+1)) & \hat{A}(\alpha(k))P(\alpha(k)) \\ P(\alpha(k))\hat{A}(\alpha(k))' & P(\alpha(k)) \end{bmatrix} > 0.$$

Além disso, se $0 < \rho \leq 1$ o sistema é assintóticamente estável.

Para sistemas invariantes no tempo, a taxa de decaimento limitada por ρ pode ser interpretada como o raio de um círculo centrado na origem, que contém todos os polos do sistema (2.9). Esta região, ilustrada na Figura 1, é delimitada por

$$|\lambda_i(\hat{A}(\alpha)/\rho)| < 1,$$

em que $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$, são os autovalores da matriz $\hat{A}(\alpha)/\rho$ para um valor fixo de α (HADDAD; BERNSTEIN, 1992).

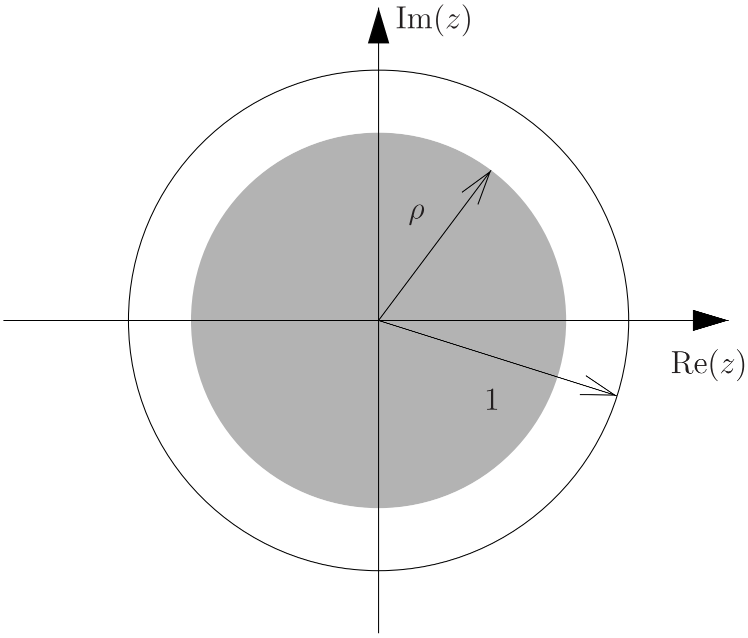


Figura 1 – Círculo de raio ρ no plano complexo.

A condição mostrada no Lema 2.2, aplicada para o caso dos sistemas invariantes no tempo, é necessária e suficiente para garantir que o sistema possua todos os polos dentro da região de interesse, para todo $\alpha \in \Lambda$. Note que, em princípio, não há sentido em considerar valores de ρ maiores que um, pois autovalores fora do círculo unitário implicariam na instabilidade do sistema. Contudo, o valor de ρ não foi limitado no Lema 2.2, pois valores maiores do que um poderão ser utilizados em uma heurística na busca por controladores estabilizantes. Mais detalhes sobre esse procedimento são apresentados na Seção 3.3.

2.3 Cômputo de Normas

Nesta dissertação, como critério de desempenho para o projeto de controladores dinâmicos estabilizantes na forma (2.4), adota-se a minimização de um limitante superior (custo garantido) para a norma $\mathcal{H}_\infty$ (para representar critérios de robustez relacionados à rejeição de distúrbios) ou para a norma $\mathcal{H}_2$ (a qual é utilizada para especificar critérios de otimização associados à energia) do sistema em malha fechada (2.7).

2.3.1 Critério de Desempenho $\mathcal{H}_\infty$

Com relação à norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema LPV (2.7), o controlador $\Theta(\alpha(k))$ deve ser computado de forma a minimizar um limitante superior μ_∞ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.7), de forma a atender a definição apresentada a seguir (veja por exemplo o trabalho em De Caigny *et al.* (2010)) que garante que, para qualquer entrada $w(k) \in \ell_2$, a saída do sistema $\tilde{z}(k) \in \ell_2$ satisfaz

$$||\tilde{z}(k)||_2 < \mu_\infty ||w(k)||_2, \quad \mu_\infty > 0$$

para todo $\alpha(k) \in \Lambda,\ k \geq 0$. O próximo lema mostra uma condição LMI dependente de parâmetros baseada no *bounded real lemma* para o cômputo da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.7), conforme apresentado em de Souza *et al.* (2006)[Lema 3].

Lema 2.3. *Se existir uma matriz $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$ e um escalar $\mu_\infty > 0$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1)) & \star & \star & \star \\ P(\alpha(k))\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))' & P(\alpha(k)) & \star & \star \\ \tilde{B}_{cl}(\alpha(k)) & 0 & \mu_\infty \mathrm{I} & \star \\ 0 & \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k)) & \tilde{D}_{cl}(\alpha(k)) & \mu_\infty \mathrm{I} \end{bmatrix} > 0 \qquad (2.12)$$

para todo $\alpha(k) \in \Lambda$, então o sistema (2.7) é assintoticamente estável e μ_∞ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.7).

2.3.2 Critério de Desempenho $\mathcal{H}_2$

Se o sistema (2.7), representado por $\mathcal{H}$, é assintoticamente estável, então o índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ em um horizonte infinito é definido por (BARBOSA *et al.*, 2002)

$$||\mathcal{H}||_2^2 = \limsup_{T\to\infty} \mathcal{E}\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T} \tilde{z}(k)'\tilde{z}(k)\right\},$$

em que T é um inteiro positivo que representa o horizonte de tempo e $\mathcal{E}\{\cdot\}$ é a esperança matemática, considerando que $w(k)$ é um ruído branco padrão (gaussiano de media nula em que a matriz de covariância é igual a matriz identidade). Uma condição LMI dependente de parâmetros que fornece um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ em um horizonte infinito é dada pelo lema a seguir, conforme apresentado em De Caigny *et al.* (2010).

Lema 2.4. *Se existirem matrizes* $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$ *e* $W(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{p\times p}$*, tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1)) - \tilde{A}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))' & \tilde{B}_{cl}(\alpha(k)) \\ \tilde{B}_{cl}(\alpha(k)) & \mathrm{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{2.13}$$

e

$$\begin{bmatrix} W(\alpha(k)) - \tilde{D}_{cl}(\alpha(k))\tilde{D}_{cl}(\alpha(k))' & \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k)) \\ P(\alpha(k))\tilde{C}_{cl}(\alpha(k))' & P(\alpha(k)) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.14}$$

para todo $\alpha(k) \in \Lambda$*, então o sistema* (2.7) *é assintoticamente estável e*

$$||\mathcal{H}||_2^2 \leq \inf_{P(\alpha(k)),W(\alpha(k))} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T} Tr\{W(\alpha(k))\} = \mu_2^2.$$

2.4 Resultados Auxiliares

Nesta seção são apresentados dois lemas auxiliares importantes para a construção e demostração das condições propostas ao longo da dissertação. O primeiro lema, chamado Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), é reproduzido a seguir e tem por finalidade separar a matriz de Lyapunov das matrizes do sistema e acrescentar variáveis extras ao problema, obtendo assim, condições mais favoráveis aos procedimentos de síntese.

Lema 2.5. *Considere* $w \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *com posto* $\mathcal{B} < n$ *e* $\mathcal{B}^\perp$ *uma base para o espaço nulo de* $\mathcal{B}$*, isto é,* $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$*, então as seguintes condições são equivalentes*

1. $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$
2. $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0.$

Para aplicar o lema de Finsler em problemas com matrizes dependentes de parâmetros, basta considerar todas as variáveis como dependentes dos parâmetros e que as igualdades e desigualdades precisam ser verificadas para todos os valores dos parâmetros.

O seguinte lema (ZHOU; KHARGONEKAR, 1988) está relacionado à majoração de matrizes que é necessária para tratar os termos limitados em norma por (2.3) presentes em (2.2).

Lema 2.6. *Dado um escalar* $\eta > 0$ *e matrizes* M *e* N *de dimensões compatíveis, então*

$$MN + N'M' \leq \eta MM' + \eta^{-1}N'N.$$

2.5 Definições de Sistemas Auxiliares

Nesta seção são apresentadas algumas definições de sistemas que podem ser tratados como extensões ou particularizações do sistema mais geral apresentado em (2.1). O objetivo dessas especializações é tornar mais clara a apresentação das condições de síntese que são propostas ao longo da dissertação para tratar todas essas classes de sistemas lineares a tempo discreto.

2.5.1 Sistemas LPV Politópicos

O primeiro sistema que pode ser obtido a partir do modelo LPV polinomial apresentado em (2.1), é o *sistema politópico variante no tempo* (LPV politópico) sem termos limitados em norma, como o representado a seguir

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\Delta(\alpha(k))x(k) + B_\Delta(\alpha(k))u(k) + E_\Delta(\alpha(k))w(k) \\ z(k) &= C_z(\alpha(k))x(k) + D_z(\alpha(k))u(k) + E_z(\alpha(k))w(k) \\ y(k) &= C_y(\alpha(k))x(k) + E_y(\alpha(k))w(k) \end{aligned} \tag{2.15}$$

As matrizes $A_\Delta(\alpha(k))$, $B_\Delta(\alpha(k))$, $E_\Delta(\alpha(k))$, $C_z(\alpha(k))$, $D_z(\alpha(k))$, $E_z(\alpha(k))$, $C_y(\alpha(k))$ e $E_y(\alpha(k))$ são afins (dependência polinomial de grau um) nos parâmetros variantes no tempo $\alpha(k) \in \Lambda$, de forma que cada uma das matrizes é dada pela combinação convexa de N vértices conhecidos conforme descrito a seguir

$$M(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(k) M_i, \ \ \alpha(k) \in \Lambda. \tag{2.16}$$

2.5.2 Sistemas LTI

Uma possível extensão dos métodos propostos é para tratar os sistemas lineares incertos invariantes no tempo ($\alpha(k) = \alpha$, para todo $k \in \mathbb{N}$), como o sistema apresentado a seguir

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\Delta(\alpha)x(k) + B_\Delta(\alpha)u(k) + E_\Delta(\alpha)w(k) \\ z(k) &= C_z(\alpha)x(k) + D_z(\alpha)u(k) + E_z(\alpha)w(k) \\ y(k) &= C_y(\alpha)x(k) + E_y(\alpha)w(k) \end{aligned} \tag{2.17}$$

em que as matrizes $A_\Delta(\alpha)$, $B_\Delta(\alpha)$ e $E_\Delta(\alpha)$ possuem estrutura similar a apresentada em (2.2), ou seja,

$$\begin{aligned} A_\Delta(\alpha) &= A(\alpha) + \Delta A(\alpha), \\ B_\Delta(\alpha) &= B(\alpha) + \Delta B(\alpha), \\ E_\Delta(\alpha) &= E(\alpha) + \Delta E(\alpha), \end{aligned}$$

em que os termos $\Delta A(\alpha)$, $\Delta B(\alpha)$ e $\Delta E(\alpha)$ são incertos e cujas normas têm como limitantes superiores os valores conhecidos (δ_A, δ_B, δ_E) conforme descrito a seguir

$$\delta_A = \sup_{\alpha\in\Lambda} ||\Delta A(\alpha)||_2, \ \ \delta_B = \sup_{\alpha\in\Lambda} ||\Delta B(\alpha)||_2, \ \ \delta_E = \sup_{\alpha\in\Lambda} ||\Delta E(\alpha)||_2.$$

Além disso, as matrizes $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $E(\alpha)$, $C_z(\alpha)$, $D_z(\alpha)$, $E_z(\alpha)$, $C_y(\alpha)$ e $E_y(\alpha)$ podem ser polinomiais (veja Apêndice A para mais detalhes sobre uma notação genérica para escrever matrizes polinomiais com parâmetros no simplex unitário) ou politópicas (dependência afim nos parâmetros invariantes no tempo $\alpha \in \Lambda$). No caso particular da estrutura politópica, cada uma das matrizes de espaço de estados é dada pela combinação convexa de N vértices conhecidos conforme descrito a seguir

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i M_i, \;\; \alpha \in \Lambda.$$

2.5.3 Sistemas Chaveados

Além das extensões apresentadas anteriormente, os métodos propostos também podem ser ajustados para tratar a estabilização de uma importante classe de sistemas lineares, caracterizada pela existência de “chaveamentos” entre subsistemas (ou modos de operação). Modelos dinâmicos dessa classe são comumente denominados por *sistemas chaveados*, que possuem diversas aplicações práticas e uma extensa literatura especializada (DAAFOUZ *et al.*, 2002; LIN; ANTSAKLIS, 2009; WICKS *et al.*, 1998; DEAECTO *et al.*, 2011). Para tal, considere o seguinte sistema chaveado a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\psi(k)}x(k) + B_{\psi(k)}u(k) \\ y(k) &= C_{\psi(k)}x(k) \end{aligned} \tag{2.18}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida. As matrizes $A_{\psi(k)}$, $B_{\psi(k)}$ e $C_{\psi(k)}$ são respectivamente as matrizes dinâmica, de entrada e de saída do sistema. Observe que esse sistema é análogo a um sistema LPV politópico em que as matrizes de espaço de estados assumem apenas os valores dos vértices do politopo Λ, possuindo como função de chaveamento

$$\psi(k) : \mathbb{N} \to \Lambda \tag{2.19}$$

que seleciona arbitrariamente o subsistema (modo de operação) linear que está ativo a cada instante de tempo.

Parte II

Contribuições

3 Estabilização de Sistemas LPV com Termos Limitados em Norma

Neste capítulo são apresentados os principais resultados desta dissertação para o caso de estabilização por realimentação dinâmica de saída de sistemas LPV polinomiais com termos incertos limitados em norma. Primeiramente, é apresentado um breve histórico das técnicas cujas condições aqui propostas foram embasadas e, em seguida, é apresentada a condição desenvolvida para estabilização por realimentação de saída. Após isso, são apresentadas as principais aplicações e vantagens da técnica, assim como são dadas algumas informações quanto à obtenção dos testes de dimensão finita. Finalizando o capítulo, propõe-se exemplos numéricos com o objetivo de ilustrar a eficácia do método proposto.

3.1 Estabilização por Realimentação Dinâmica de Saída

Nesta seção são apresentadas condições suficientes para a síntese de controladores dinâmicos estabilizantes por realimentação de saída para sistemas LPV com termos incertos limitados em norma. Antes de apresentar as condições, é importante mencionar dois trabalhos anteriores nos quais o método proposto é embasado: Geromel e Korogui (2006) e Vieira *et al.* (2015). A principal contribuição realizada em Geromel e Korogui (2006) se dá na forma como é feita a recuperação do ganho por realimentação de estados para sistemas incertos contínuos no tempo. Para mostrar de forma sucinta e simples a ideia proposta pelos autores, a dependência dos parâmetros será omitida, uma vez que isso não influencia diretamente no desenvolvimento do resultado. Sendo assim, considere o seguinte sistema linear contínuo no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida. A estabilidade desse sistema segundo o critério de Lyapunov pode ser testada por meio da existência de uma matriz simétrica definida positiva P tal que a seguinte desigualdade

$$AP + PA' < 0, \tag{3.1}$$

seja verificada. Para o caso de realimentação de estados ($u(t) = Kx(t)$), tem-se que a matriz dinâmica do sistema em malha fechada é dada por $A_{cl} = A + BK$. Desenvolvendo a desigualdade (3.1) para A_{cl}, tem-se

$$(A + BK)P + P(A + BK)' < 0. \tag{3.2}$$

Arbitrando a seguinte estrutura para o ganho de realimentação $K = LS^{-1}$, tem-se

$$(A + BLS^{-1})P + P(A + BLS^{-1})' < 0,$$

que é uma restrição difícil de ser verificada numericamente, visto que a desigualdade matricial se torna bilinear, ou seja, uma BMI (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*), além de apresentar a inversa de uma variável de otimização (S^{-1}). Diante desse cenário, a sugestão perspicaz proposta em Geromel e Korogui (2006) é somar e subtrair termos na desigualdade, de forma a separar as matrizes L e S, como mostrado a seguir. Somando e subtraindo BL e $L'B'$ no lado esquerdo da desigualdade, obtém-se

$$(A + BLS^{-1})P + P(A + BLS^{-1})' + BL - BL + L'B' - L'B' < 0.$$

Colocando os termos BL e $L'B'$ em evidência, tem-se

$$AP + PA' + BL + L'B' + BL(S^{-1}P - \mathrm{I}) + (BL(S^{-1}P - \mathrm{I}))' < 0,$$

que pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & (S^{-1}P - I)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AP + BL + P'A' + L'B' & BL \\ L'B' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ (S^{-1}P - I) \end{bmatrix} < 0,$$

cuja estrutura é similar a do item 2 do Lema de Finsler (Lema 2.5). Ao aplicar a condição do item 4 do mesmo lema, com uma escolha adequada para $\mathcal{B}$, é possível linearizar a desigualdade (isto é, obter uma LMI) impondo uma estrutura particular para a variável de folga que vai ser introduzida.

A técnica proposta em Geromel e Korogui (2006, Teorema 4) adota passos similares aos apresentados, com a adição de mais variáveis de folga para obter condições programáveis. Também vale à pena ressaltar que uma condição mais simples, com menos variáveis de folga e que contém como caso particular a condição proposta em Geromel e Korogui (2006, Teorema 4), foi publicada em Oliveira *et al.* (2011, Lema 9). No entanto, como mostrado nas comparações numéricas estatísticas apresentadas em Oliveira *et al.* (2011), o desempenho das condições de Geromel e Korogui (2006, Teorema 4) e Oliveira *et al.* (2011, Lema 9) é muito inferior quando comparado com o de outras condições da literatura. Uma forma de melhorar os resultados baseados na ideia apresentada anteriormente foi proposta em Vieira *et al.* (2015), que adota um procedimento similar, mas partindo de uma condição de estabilidade que já possui variáveis de folga inicialmente (ao contrário da condição (3.1) que possui apenas a matriz de Lyapunov). Além de apresentar resultados numéricos superiores, também foi possível provar que a condição proposta contém outras condições da literatura como casos particulares, portanto sempre fornecendo no máximo o mesmo grau de conservadorismo.

Contudo, o problema de estabilização por realimentação de saída ainda não havia sido resolvido pela abordagem proposta em Geromel e Korogui (2006) (e nem por Oliveira *et al.* (2011) e Vieira *et al.* (2015)), uma vez que, nesse caso, $A_{cl} = A + BKC$, portanto para $K = LS^{-1}$ com $L \in \mathbb{R}^{m\times q}$ e $S \in \mathbb{R}^{q\times q}$, tem-se

$$(A + BLS^{-1}C)P + P(A + BLS^{-1}C)' < 0, \tag{3.3}$$

e ao utilizar o procedimento de soma e subtração dos termos BL e $L'B'$ à desigualdade (3.3), é constatada uma incompatibilidade de dimensão pois $BL \in \mathbb{R}^{n_x\times q}$ e $A+BLS^{-1}C \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$. A principal novidade desta dissertação é introduzir uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{q\times n_x}$ ao problema com a finalidade de realizar o ajuste de dimensões, de forma que a soma e subtração dos termos BLQ e $Q'L'B'$ na desigualdade (3.3) seja possível, viabilizando um procedimento de linearização das desigualdades associadas à realimentação de saída (caso contrário seria necessário trabalhar com BMIs). Esse artifício possibilita adaptar os procedimentos propostos por Geromel e Korogui (2006) e aprimorados em Vieira *et al.* (2015) para tratar o caso de realimentação de saída. Observe que as dimensões impostas a essa matriz são iguais às dimensões da matriz de saída C do sistema original, portanto uma escolha intuitiva é fazer $Q = C$. No entanto, a Observação 3.1, apresentada a seguir, fornece escolhas alternativas para a matriz Q, a qual é utilizada no desenvolvimento das condições de projeto desta dissertação. Outra vantagem desta manipulação, discutida com mais detalhes no final da Seção 3.2, é que não será necessário impor nenhuma restrição de estrutura na matriz C, que é uma prática muito utilizada pelas condições da literatura.

Observação 3.1. *As matrizes $Q_i(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $i = 1,\ 2$, são estipuladas pelo usuário e têm por finalidade realizar o ajuste de dimensões nas condições apresentadas neste texto. Duas possíveis opções para $Q_i(\alpha(k))$ são propostas:*

- *A primeira, e mais intuitiva, é*

$$Q_i(\alpha(k)) = \tilde{C}_y(\alpha(k))$$

- *A segunda é dada por*

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0_{(q+n_c)\times\sigma_Q} & \mathrm{I}_{(q+n_c)} & 0_{(q+n_c)\times(n_x-\sigma_Q-q)} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

em que um novo parâmetro de entrada, $0 \le \sigma_Q \le n_x - q$, é introduzido com o propósito de definir a posição da matriz identidade.

Com base nessas informações iniciais, o Teorema 3.1 é proposto para tratar o caso de estabilização por realimentação dinâmica de saída para sistemas LPV polinomiais com termos incertos limitados em norma.

Teorema 3.1. *Existe um ganho de realimentação dinâmica de saída* $\Theta(\alpha(k))$ *tal que o sistema* (2.7)*, para uma entrada de ruído* $w(k) = 0$*, é assintoticamente estável se existirem matrizes* $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $F(\bar{\alpha}(k))$ *e* $G(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$[1]*,* $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ *e* $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$*, matrizes dadas* $Q_i(\alpha(k))$*,* $i = 1,\ 2$*, como sugeridas na Observação 3.1, variáveis escalares* η_A *e* η_B *e parâmetros escalares dados* $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon$ *e* ξ*, tais que*

$$\mathcal{Q} + \mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{C}' < 0, \qquad \forall \alpha(k) \in \Lambda, \tag{3.5}$$

seja satisfeita, considerando que $\mathcal{Q}$ *é dada por*

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \star & \star & \star & \star \\ \Gamma_{21} & -\epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') + P(\alpha(k)) & \star & \star & \star \\ L(\alpha(k))'\tilde{B}(\alpha(k))' & 0 & 0 & \star & \star \\ \xi F(\bar{\alpha}(k)) & \epsilon G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & -\eta_A \mathrm{I} & \star \\ \xi L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) & \epsilon L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) & L(\alpha(k)) & 0 & -\eta_B \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = {} & \xi He\Big(\tilde{A}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k))\Big) - P(\alpha(k+1)) \\ & + \eta_A \delta_A^2 \mathrm{I} + \eta_B \delta_B^2 \mathrm{I} \\ \Gamma_{21} = {} & -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)) + \tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)))' \end{aligned}$$

e as matrizes $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}$ *são dadas, respectivamente, por*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_2 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_3 \mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(\alpha(k)), \quad \mathcal{B}' = \begin{bmatrix} \xi(Q_2(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(Q_2(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ \mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No caso afirmativo, o ganho estabilizante escalonado por realimentação dinâmica de saída é dado por $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$*.*

Demonstração. Para facilitar a compreensão da demonstração, a dependência nos parâmetros variantes no tempo é omitida. Para os termos que dependem do instante seguinte de tempo como, por exemplo, $P(\alpha(k+1))$, a representação utilizada é P^+. As matrizes $G(\bar{\alpha}(k))$ e $F(\bar{\alpha}(k))$ são representadas como $\bar{G}$ e $\bar{F}$, respectivamente.

O primeiro passo para realizar a demonstração deste teorema é recuperar as desigualdades que tratam as matrizes originais do sistema $(\tilde{A}_\Delta,\ \tilde{B}_\Delta)$, que unem os termos polinomiais às incertezas limitadas em norma, ou seja, é necessário manipular as condições de maneira a recuperar os termos ΔA e ΔB a partir dos limitantes δ_A e δ_B, empregando a

[1] O vetor de parâmetros $\bar{\alpha}(k)$ representa $\bar{\alpha}(k) = \big(\alpha(k),\ \alpha(k+1)\big)$.

relação mostrada em (2.3). Primeiramente, note que a desigualdade (3.5) pode se reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}\left(\tilde{A}\bar{F}+\tilde{B}LQ_2\right)+\eta_A\delta_A^2\mathrm{I}+\eta_B\delta_B^2\mathrm{I}+\Psi_{11} & \star & \star & \star & \star \\ \epsilon(\tilde{A}\bar{G}+\tilde{B}LQ_2)'+\Psi_{21} & \Psi_{22} & \star & \star & \star \\ L'\tilde{B}'+\Psi_{31} & \Psi_{23} & \Psi_{33} & \star & \star \\ \xi\bar{F} & \epsilon\bar{G} & 0 & -\eta_A\mathrm{I} & \star \\ \xi LQ_2 & \epsilon LQ_2 & L & 0 & -\eta_B\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

com

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= -P^{+}+\epsilon\gamma_1\mathrm{He}\left(Q_1(Q_2-S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F})\right) \\ \Psi_{21} &= -\xi\bar{F}+\xi\gamma_2Q_1(Q_2-S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F})+\epsilon\gamma_1Q_1(Q_2-S^{-1}\tilde{C}_y\bar{G})' \\ \Psi_{31} &= \gamma_1Q_1'+\xi\gamma_3(Q_2-S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F}) \\ \Psi_{22} &= P+\epsilon\mathrm{He}\left(\gamma_2Q_1(Q_2-S^{-1}\tilde{C}_y\bar{G})-\bar{G}\right) \\ \Psi_{23} &= \xi\gamma_3(Q_2-S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F})+\gamma_1Q_1' \\ \Psi_{33} &= 2\gamma_3\mathrm{I} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim, aplicando o complemento de Schur nesta última desigualdade, tem-se

$$R_B+\eta M_BM_B'+\eta^{-1}N_B'N_B<0, \tag{3.7}$$

com as seguintes escolhas

$$M_B'=\begin{bmatrix}\delta_B\mathrm{I} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad N_B=\begin{bmatrix}\xi LQ_2 & \epsilon LQ_2 & L & 0\end{bmatrix}, \quad \eta=\eta_B,$$

$$R_B=\begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}(\tilde{A}\bar{F}+\tilde{B}LQ_2)+\Psi_{11}+\eta_A\delta_A^2\mathrm{I} & \star & \star & \star \\ \epsilon(\tilde{A}\bar{G}+\tilde{B}LQ_2)'+\Psi_{21} & \Psi_{22} & \star & \star \\ L'\tilde{B}'+\Psi_{31} & \Psi_{23} & \Psi_{33} & \star \\ \xi\bar{F} & \epsilon\bar{G} & 0 & -\eta_A \end{bmatrix},$$

considerando as matrizes Ψ_{ij} dadas em (3.6). Utilizando o Lema 2.6 e levando em conta a relação dada em (2.3) ($\Delta\tilde{B}\Delta\tilde{B}'\leq\delta_B^2\mathrm{I}$), tem-se que (3.7) é limitada superiormente por

$$R_B+\begin{bmatrix}\Delta\tilde{B}\\0\\0\\0\end{bmatrix}N_B+N_B'\begin{bmatrix}\Delta\tilde{B}' & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0.$$

Aplicando o complemento de Schur nesta última desigualdade, é possível reescrevê-la como

$$R_A+\eta M_AM_A'+\eta^{-1}N_A'N_A<0, \tag{3.8}$$

com as seguintes escolhas

$$M_A'=\begin{bmatrix}\delta_A\mathrm{I} & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad N_A=\begin{bmatrix}\xi\bar{F} & \epsilon\bar{G} & 0\end{bmatrix}, \quad \eta=\eta_A,$$

$$R_A=\begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}(\tilde{A}\bar{F}+\tilde{B}_\Delta LQ_2)+\Psi_{11} & \star & \star \\ \epsilon(\tilde{A}\bar{G}+\tilde{B}_\Delta LQ_2)'+\Psi_{21} & \Psi_{22} & \star \\ L'\tilde{B}_\Delta'+\Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{bmatrix},$$

considerando as matrizes Ψ_{ij} dadas em (3.6). Utilizando o Lema 2.6 e levando em conta a relação dada em (2.3) ($\Delta\tilde{A}\Delta\tilde{A}' \leq \delta_A^2 \mathrm{I}$), tem-se que (3.8) é limitada superiormente por

$$R_A + \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N_A + N_A' \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}' & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0.$$

Finalmente, a desigualdade anterior pode ser reescrita como

$$\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{B}}'\hat{\mathcal{C}}' < 0 \tag{3.9}$$

para

$$\hat{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}(\tilde{A}_\Delta\bar{F} + \xi\tilde{B}_\Delta L(\alpha(k))Q_2) - P^+ & \star & \star \\ -\xi\bar{F} + \epsilon(\tilde{A}_\Delta\bar{G})' + \epsilon(\tilde{B}_\Delta L Q_2)' & -\epsilon(\bar{G} + \bar{G}') + P & \star \\ L'\tilde{B}_\Delta' & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1 \\ \gamma_2 Q_1 \\ \gamma_3 \mathrm{I} \end{bmatrix} S, \quad \hat{\mathcal{B}}' = \begin{bmatrix} \xi(Q_2 - S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F})' \\ \epsilon(Q_2 - S^{-1}\tilde{C}_y\bar{G})' \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}.$$

O próximo passo da demonstração do teorema, relacionado à recuperação do ganho estabilizante, parte da relação $\Theta = LS^{-1}$ e, como mencionado anteriormente, da manipulação do termo $\tilde{A}_{cl}$ de (2.7), que é mostrada a seguir

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{cl} &= \tilde{A}_\Delta + \tilde{B}_\Delta\Theta\tilde{C}_y \\ &= \tilde{A}_\Delta + \tilde{B}_\Delta L S^{-1}\tilde{C}_y + \tilde{B}_\Delta L Q_2 - \tilde{B}_\Delta L Q_2 \\ &= \tilde{A}_\Delta + \tilde{B}_\Delta L Q_2 - \tilde{B}_\Delta L(Q_2 - S^{-1}\tilde{C}_y). \end{aligned}$$

Adotando $\hat{\mathcal{B}}^\perp$ como se segue

$$\hat{\mathcal{B}}^\perp = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & \xi(S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F} - Q_2)' \\ 0 & \mathrm{I} & \epsilon(S^{-1}\tilde{C}_y\bar{G} - Q_2)' \end{bmatrix}',$$

e aplicando-se uma transformação de congruência em (3.9) utilizando $\hat{\mathcal{B}}^\perp$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}(\tilde{A}_{cl}\bar{F}) - P^+ & \star \\ -\xi\bar{F} + \epsilon(\tilde{A}_{cl}\bar{G})' & -\epsilon(\bar{G} + \bar{G}') + P \end{bmatrix} < 0. \tag{3.10}$$

Multiplicando-se (3.10) à esquerda por $T = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \tilde{A}_{cl} \end{bmatrix}$ e à direita por T', obtém-se

$$\tilde{A}_{cl} P \tilde{A}_{cl}' - P^+ < 0,$$

que garante que o sistema (2.7) é assintoticamente estável. □

3.2 Principais Aplicações e Vantagens da Técnica

Nesta seção são apresentadas as diferentes formas em que a técnica proposta nesta dissertação pode ser estendida a outras classes de sistemas além dos sistemas LPV polinomiais variantes no tempo tratados pelo Teorema 3.1. Também são apontadas as principais vantagens do método aqui proposto.

A primeira, e mais próxima, classe de sistemas que o Teorema 3.1 pode abranger são os sistemas politópicos variantes no tempo (dependência afim nos parâmetros), introduzidos na Subseção 2.5.1 e apresentados na Equação (2.15). O seguinte corolário apresenta uma adaptação do Teorema 3.1 para lidar com esse cenário particular, o qual tem sido extensivamente investigado na literatura, além da inclusão de um limitante para a taxa de decaimento ρ.

Corolário 3.1 (Sistemas LPV politópicos (2.15))**.** *Existe um ganho escalonado de realimentação dinâmica de saída $\Theta(\alpha(k))$ tal que o sistema (2.15) em malha fechada, para uma entrada de ruído $w(k) = 0$, possui taxa de decaimento limitada por ρ, se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$ e $G(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$, $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$ e $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1,\ 2$, como sugeridas na Observação 3.1 e parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon,\ \xi$ e ρ, tais que*

$$\check{\mathcal{Q}} + \check{\mathcal{C}}\check{\mathcal{B}} + \check{\mathcal{B}}'\check{\mathcal{C}}' < 0 \tag{3.11}$$

seja satisfeita, considerando que $\check{\mathcal{Q}}$ é dada por

$$\check{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \star & \star \\ \Gamma_{21} & -\epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') + P(\alpha(k)) & \star \\ L(\alpha(k))'\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))' & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \xi He(\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \xi\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2) - \rho^2 P(\alpha(k+1)) \\ \Gamma_{21} &= -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' + \epsilon(\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)))' \end{aligned}$$

e as matrizes $\check{\mathcal{C}}$ e $\check{\mathcal{B}}$ são dadas, respectivamente, por

$$\check{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_2 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_3 \mathrm{I} \end{bmatrix} S(\alpha(k)), \quad \check{\mathcal{B}}' = \begin{bmatrix} \xi(Q_2(\alpha(k)) - S^{-1}(\alpha(k))\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(Q_2(\alpha(k)) - S^{-1}(\alpha(k))\tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}.$$

No caso afirmativo, o ganho por realimentação dinâmica de saída é dado por $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$. Além disso, se $0 < \rho \leq 1$, então, pelo Lema 2.2, também é possível afirmar que o sistema (2.15) em malha fechada é assintoticamente estável.

Demonstração. Para facilitar a visualização desta demonstração, são levadas em conta as mesmas observações realizadas para a demonstração do Teorema 3.1, no sentido da omissão da dependência nos parâmetros na matrizes incertas do sistema.

Primeiramente, para realizar a recuperação do ganho estabilizante, $\Theta = LS^{-1}$, realiza-se a manipulação do termo $\tilde{A}_{cl}$ de (2.7), como mostrado a seguir

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{cl} &= \tilde{A}_{\Delta} + \tilde{B}_{\Delta}\Theta\tilde{C}_y \\ &= \tilde{A}_{\Delta} + \tilde{B}_{\Delta}LS^{-1}\tilde{C}_y + \tilde{B}_{\Delta}LQ_2 - \tilde{B}_{\Delta}LQ_2 \\ &= \tilde{A}_{\Delta} + \tilde{B}_{\Delta}LQ_2 - \tilde{B}_{\Delta}L(Q_2 - S^{-1}\tilde{C}_y).\end{aligned}$$

Adotando $\check{\mathcal{B}}^{\perp}$ como se segue

$$\check{\mathcal{B}}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & \xi(S^{-1}\tilde{C}_y\bar{F} - Q_2)' \\ 0 & \mathrm{I} & \epsilon(S^{-1}\tilde{C}_y\bar{G} - Q_2)' \end{bmatrix}',$$

e aplicando-se uma transformação de congruência em (3.11) utilizando $\check{\mathcal{B}}^{\perp}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}(\tilde{A}_{cl}\bar{F}) - \rho^2P^{+} & \star \\ -\xi\bar{F} + \epsilon(\tilde{A}_{cl}\bar{G})' & -\epsilon(\bar{G} + \bar{G}') + P \end{bmatrix} < 0. \tag{3.12}$$

Multiplicando-se (3.12) à esquerda por $T = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \tilde{A}_{cl} \end{bmatrix}$ e à direita por T', obtém-se

$$\tilde{A}_{cl}P\tilde{A}_{cl}' - \rho^2P^{+} < 0,$$

que garante que o sistema (2.7), considerando que o mesmo corresponde à malha fechada do sistema original (2.15), para uma entrada de ruído $w(k) = 0$, possui taxa de decaimento limitada por ρ. Adicionalmente, se $0 < \rho \leq 1$, então, pelo Lema 2.2, também é possível afirmar que o sistema é assintoticamente estável. □

Como um subproduto, o Corolário 3.1 (assim como o Teorema 3.1, para o caso em que as incertezas limitadas em norma são nulas), pode ser diretamente adaptado para prover um controlador escalonado de realimentação de estados, como é mostrado a seguir.

Corolário 3.2. *Realimentação de estados – LPV politópico] Existe um ganho escalonado de realimentação de estados $\Theta(\alpha(k))$ tal que o sistema (2.15), para uma entrada de ruído $w(k) = 0$, possui uma taxa de decaimento limitada por ρ se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_{+}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$ e $G(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$, $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$ e matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1,\ 2$, como sugeridas na Observação 3.1 e parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon,\ \xi$ e ρ, matrizes $C_y(\alpha(k)) = \mathrm{I}$ e $E_y(\alpha(k)) = 0$, tais que a desigualdade (3.11) seja verificada. No caso afirmativo, o ganho por realimentação de saída é dado por $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$. Além disso, se $0 < \rho \leq 1$, então pelo Lema 2.2 também é possível afirmar que o sistema é assintoticamente estável.*

O Teorema 3.1 também pode ser adaptado para a síntese de controladores robustos (independentes de parâmetros) de realimentação dinâmica de saída para sistemas LTI incertos, introduzidos na Subseção 2.5.2 e apresentados em (2.17), como observado a seguir.

Corolário 3.3 (Sistemas LTI com termos limitados em norma (2.17))**.** *Existe um ganho robusto de realimentação dinâmica de saída* Θ *tal que o sistema* (2.17) *em malha fechada, para uma entrada de ruído* $w(k) = 0$*, é assintoticamente estável se existirem matrizes* $P(\alpha) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $F(\alpha)$ *e* $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $L \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$*,* $S \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$ *e* $Q_i(\alpha)$*,* $i = 1,\ 2$*, como sugeridas na Observação 3.1, variáveis escalares* η_A *e* η_B *e parâmetros escalares dados* $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon$ *e* ξ*, tais que a desigualdade* (3.5) *seja verificada, com* $P(\alpha(k+1)) = P(\alpha(k)) = P(\alpha)$*. No caso afirmativo, o ganho estabilizante é dado por* $\Theta = LS^{-1}$*.*

O Corolário 3.1, para o caso em que as incertezas limitadas em norma são nulas, também pode ser adaptado para a síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para sistemas LTI incertos, apresentados em (2.17), contemplando ainda a alocação de polos dentro de um círculo de raio ρ centrado na origem, como observado a seguir.

Corolário 3.4 (Sistemas LTI sem termos limitados em norma)**.** *Existe um ganho robusto de realimentação dinâmica de saída* Θ *tal que o sistema* (2.17) *em malha fechada, para uma entrada de ruído* $w(k) = 0$*, com* $\Delta A(\alpha) = \Delta B(\alpha) = 0$*, possui todos os autovalores dentro do círculo de raio* ρ *centrado na origem se existirem matrizes* $P(\alpha) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $F(\alpha)$ *e* $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $L \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$*,* $S \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$ *e* $Q_i(\alpha)$*,* $i = 1,\ 2$*, como sugeridas na Observação 3.1 e parâmetros escalares dados* $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon,\ \xi$ *e* ρ*, tais que a desigualdade* (3.11) *seja verificada, com* $P(\alpha(k+1)) = P(\alpha(k)) = P(\alpha)$*. No caso afirmativo, o ganho é dado por* $\Theta = LS^{-1}$*. Além disso, se* $0 < \rho \leq 1$*, então pelo Lema 2.2 também é possível afirmar que o sistema é assintoticamente estável.*

Além das extensões apresentadas anteriormente, o Teorema 3.1 também pode ser ajustado para tratar a estabilização de sistemas chaveados com lei de chaveamento arbitrária (discutidos na Subseção 2.5.3), como mostra o seguinte corolário.

Corolário 3.5. *Existe um ganho* $\Theta_{\psi(k)}$ *tal que o sistema* (2.18) *chaveado a tempo discreto é robustamente estável, se existirem matrizes* $P_{\psi(k)} \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $F_{\psi(k)}$ *e* $G_{\psi(k)} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$*,* $L_{\psi(k)} \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ *e* $S_{\psi(k)} \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$*, matrizes dadas* $Q_{i,\psi(k)}$*,* $i = 1,\ 2$*, como sugeridas na Observação 3.1 e parâmetros escalares dados* $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon$ *e* ξ*, tais que* (3.9) *seja satisfeita e considerando-se que o parâmetro variante no tempo* $\alpha(k)$ *seja substituído pela regra de chaveamento* $\psi(k)$*. Assim,* $\psi(k)$ *e* $\psi(k+1)$ *podem ser substituídos, respectivamente, pelos índices* i *e* j*, com* $i, j = 1, \ldots, N$*, em que* N *é o número de modos do sistema. No caso afirmativo,* $\Theta_{\psi(k)} = L_{\psi(k)} S_{\psi(k)}^{-1}$ *é um controlador* *chaveado por realimentação dinâmica de saída que estabiliza o sistema* (2.18) *com regra de chaveamento* (2.19).

O corolário anterior também pode ser adaptado para tratar o caso de realimentação de estados, de forma similar à que foi mostrada no Corolário 3.2, isto é, fazendo as matrizes $C_{\psi(k)} = \mathrm{I}$.

Além das aplicações do método proposto mencionadas anteriormente, é possível evidenciar algumas outras particularidades relevantes da técnica, como a possibilidade da busca em escalares. Primeiramente, é importante notar que as desigualdades dependentes de parâmetros do Teorema 3.1 e dos corolários apresentados são lineares com respeito às variáveis de otimização apenas se os escalares γ_i, $i = 1, \ldots, 3$, ϵ, ξ e ρ são dados, sendo que mais detalhes a respeito desse assunto são apresentados na Seção 3.3. Embora a heurística sobre como procurar pelos melhores valores para esses parâmetros não seja o foco desta dissertação, e nem seja investigada profundamente, é importante também ressaltar o fato de que é possível a obtenção de resultados significativamente diferentes (mais ou menos conservadores) ao variar os valores dos escalares.

Outro aspecto interessante do método proposto é o fato de tratar qualquer matriz de saída $C_y(\alpha(k))$ sem a necessidade de impor nenhuma estrutura especial ou restrição nas variáveis de otimização. Note que os primeiros métodos de realimentação de saída baseados em LMIs (PERES *et al.*, 1994a; GEROMEL *et al.*, 1996) exigiam que essa matriz fosse constante, independente de parâmetros e com uma estrutura particular na forma $C_y(\alpha(k)) = [\mathrm{I} \;\; 0]$. Os métodos mais recentes aliviaram essas limitações, porém, em geral, ainda requerem transformações de similaridade (DONG; YANG, 2008; DONG; YANG, 2013) e não são capazes de tratar dependência polinomial nos parâmetros (apenas dependência afim). Além disso, uma característica notável das condições de projeto é o fato de que as variáveis de folga $F(\bar{\alpha}(k))$ e $G(\bar{\alpha}(k))$ são dependentes de parâmetros, o que não é comum em condições de síntese que permitem o projeto de ganhos robustos (veja a discussão deste tópico na Seção 3.3).

3.3 Testes de Dimensão Finita

A dependência do tempo associada a todas as matrizes no Teorema 3.1 pode ser eliminada das desigualdades pois é assumido que $\alpha(k) \in \Lambda$ para todo $k \geq 0$. Neste ponto, uma importante observação concerne à matriz $P(\alpha(k+1))$, uma vez que $\alpha(k+1)$ e $\alpha(k)$ podem depender um do outro (taxa de variação limitada) ou não (variação arbitrariamente rápida). O último caso é adotado nos experimentos numéricos da Seção 3.4 (considerando $\alpha(k+1) = \beta(k) \in \Lambda$), mas o caso de variação limitada poderia também ser abordado seguindo as metodologias propostas em De Caigny *et al.* (2010). Mesmo após estas considerações, as condições propostas na Seção 3.1 ainda não são programáveis na forma como foram apresentadas: como LMIs dependentes de parâmetros (ou robustas). Essa classe de problemas de otimização de dimensão infinita é difícil de ser solucionada, no entanto, aproximações polinomiais se tornaram uma ferramenta eficaz para solucionar o problema em termos das, assim chamadas, *relaxações*. Ao fixar as variáveis de otimização como polinômios (mais precisamente, polinômios homogêneos) de grau fixo, a positividade (ou negatividade) das desigualdades polinomiais resultantes pode ser verificada em termos de um conjunto finito de LMIs, utilizando, por exemplo, os métodos baseados no Teorema de Pólya (HARDY *et al.*, 1952). Atualmente, tais conjuntos de LMIs podem ser automaticamente obtidos ao utilizar o *parser* ROLMIP (do inglês, *Robust LMI Parser*) (AGULHARI *et al.*, 2012), que trabalha conjuntamente com o *parser* Yalmip (LÖFBERG, 2004). Para o leitor interessado, o Apêndice B apresenta de forma didática as etapas necessárias para produzir condições LMIs programáveis a partir da imposição de uma estrutura para as variáveis de otimização da condição de análise de estabilidade robusta dada no Lema 2.1. Além disso, também é mostrado como a programação das condições do Lema 2.1 pode ser realizada por meio do *parser* ROLMIP.

Em relação à escolha dos graus das variáveis polinomiais de otimização, algumas observações são importantes. As variáveis $L(\alpha(k))$ e $S(\alpha(k))$ definem a estrutura do controlador e, se um controlador robusto (independente de parâmetros) é requerido, então os graus associados devem ser iguais a zero. Se ao menos um dos graus não é zero, então o controlador sintetizado é escalonado e o vetor de parâmetros $\alpha(k)$ deve estar disponível *online* (estimado ou medido) para realimentação. Os graus associados às outras variáveis influenciam apenas no conservadorismo das soluções e, como regra geral, graus maiores produzem soluções melhores ao preço de um maior esforço computacional. Para realizar uma comparação justa com outros métodos da literatura, essas variáveis são mantidas com grau um nos experimentos numéricos.

Como dito anteriormente, as condições propostas exigem que os parâmetros escalares γ_1, γ_2, γ_3, ϵ e ξ sejam dados, caso contrário, as condições são desigualdades matriciais bilineares. Este trabalho não investiga como realizar a busca nesses parâmetros. Ao invés disso, é utilizado um conjunto de valores testados em Vieira *et al.* (2015), trabalho que emprega uma abordagem similar para investigar o controle por realimentação de estados para sistemas LTI discretos no tempo. O conjunto é dado por:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -10^5, \quad \epsilon = 1, \quad \xi \in \{-0.9, -0.8, \cdots, 0.8, 0.9\}. \tag{3.13}$$

Para as matrizes $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1, 2$, todos os exemplos apresentados nesta dissertação foram realizados utilizando a escolha mais intuitiva, isto é $Q_i(\alpha(k)) = \tilde{C}_y(\alpha(k))$, seguindo o que foi sugerido na Observação 3.1. Testes utilizando a equação (3.4) e combinando a mesma com a escolha de $Q_i(\alpha(k)) = \tilde{C}_y(\alpha(k))$ também foram feitos, porém o desempenho foi inferior à escolha de fazer $Q_i(\alpha(k))$ igual à matriz de saída do sistema. Portanto, esta foi a escolha adotada nesta dissertação para todos os experimentos numéricos apresentados, embora outras escolhas possam fornecer resultados melhores em algumas situações.

Com relação à introdução do limitante da taxa de decaimento ρ nas condições de síntese, uma heurística foi desenvolvida de forma a, na etapa do projeto dos controladores, permitir que o valor de ρ seja maior do que um. Note que essa escolha em princípio não faz sentido, pois o intervalo que garante estabilidade é $0 < \rho \leq 1$. Contudo, este valor serve apenas como um limitante superior (custo garantido) para a taxa de decaimento do sistema, podendo a mesma ser menor. Nesse caso, uma condição de análise de estabilidade poderia ser aplicada a *posteriori* para certificar a estabilidade. Essa lógica é apresentada no Algoritmo 1, no qual são introduzidos alguns outros detalhes relevantes. Primeiramente, é realizada a obtenção de um ganho por realimentação de saída, considerando o problema de otimização apresentado em (3.11) e aplicando a violação do limite do valor de ρ, ou seja, $\rho > 1$. Em sequência, são aplicados dois testes com o intuito de confirmar a estabilidade do sistema em malha fechada com o ganho de realimentação de saída calculado:

1^o Neste teste é verificado o valor absoluto dos autovalores associados às matrizes A_{cl_i}, $i = 1, \ldots, N$, que são obtidas para as seguintes escolhas dos parâmetros: $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0, \forall j = 1, \ldots, N, j \neq i$. Note que, para um sistema politópico, as matrizes A_{cl_i} são chamadas de "vértices" da matriz $A_{cl}(\alpha)$. Determinada a matriz A_{cl_i}, verifica-se o maior valor absoluto dos autovalores. Esse procedimento, que constitui uma condição apenas *necessária* para estabilidade, é utilizado como um teste "barato computacionalmente" de ser verificado, descartando, de imediato, a possibilidade de estabilidade robusta caso algum autovalor de A_{cl_i} esteja fora do círculo unitário.

2^o Apesar do primeiro teste possuir um caráter apenas necessário quanto ao certificado de estabilidade, o mesmo não é suficiente para tal. Isto acontece visto que, mesmo se as matrizes A_{cl_i} possuírem autovalores estáveis, a matriz $A_{cl}(\alpha)$ pode ser instável. Portanto, o segundo teste visa fornecer um certificado de estabilidade robusta por meio da resolução de uma condição LMI de análise de estabilidade robusta. No entanto, esse procedimento demanda a execução de mais uma condição LMI, requerendo um maior esforço computacional.

É importante mencionar que este algoritmo é utilizado apenas para tratar casos de sistemas LPV e LTI sem os termos limitados em norma, utilizando condições de análise de estabilidade robusta adaptadas para tais sistemas. Para análise de estabilidade dos sistemas utilizados nos exemplos desta dissertação, foi empregada a condição apresentada no Teorema 2 de Oliveira *et al.* (1999), para sistemas LTI e sua extensão para tratar sistemas LPV (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001b). Além disso, foi adicionado um parâmetro de entrada $degP$ que equivale a testar a estabilidade utilizando uma matriz de

Lyapunov $P(\alpha(k))$ de grau 1 até grau $degP$ (teste progressivamente menos conservador, embora cada vez mais custoso computacionalmente).

Desta forma, o Algoritmo 1 apresenta um procedimento que verifica, *a posteriori*, a estabilidade do sistema em malha fechada, considerando um controlador obtido a partir de uma heurística de busca que permite que o valor do limitante da taxa de decaimento do sistema seja maior do que um.

Algoritmo 1: Teste de estabilidade de sistemas com $\rho > 1$

Entrada: $\tilde{A}(\alpha(k))$, $\tilde{B}(\alpha(k))$, $\tilde{C}_y(\alpha(k))$, ξ, ϵ, γ_1, γ_2, γ_3, ρ e $degP$

Saída: Factibilidade e $\Theta(\alpha(k))$

resolve problema de otimização (3.11)

se *problema de otimização é factível* **então**

  calcula $\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))$ segundo (2.8)

  se $max(|\lambda_j(\tilde{A}_{cl_i})| > 1)$*, para* $j = 1, \ldots, n_x + n_c$*, e* $i = 1, \ldots, N$ **então**

    retorna infactível

  senão

    p = 0;

    enquanto $p \leq degP$ **faça**

      resolve condição de análise com $P(\alpha(k))$ de grau p

      se *condição de análise é factível* **então**

        retorna factível e $\Theta(\alpha(k))$

      senão

        $p = p + 1$

      fim

    fim

  fim

senão

  retorna infactível

fim

3.4 Exemplos Numéricos

As condições propostas nesta dissertação foram programadas utilizando o software Matlab (R2014a) com o auxílio dos *parsers* ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012) e Yalmip (LÖFBERG, 2004) e do resolvedor SeDuMi 1.3 (STURM, 1999). As simulações foram realizadas em um computador Ubuntu Linux, Intel Core i7-4770 (3.40 GHz), 8.0 GB RAM.

3.4.1 Comparação Estatística dos Métodos de Estabilização

Este primeiro exemplo tem por objetivo realizar uma comparação das condições de projeto dadas no Teorema 3.1, adaptadas para realimentação de estados por meio do Corolário 3.2, com o método apresentado em Morais *et al.* (2012) para o caso LTI ou com a técnica apresentada em Daafouz e Bernussou (2001a) para o caso LPV. Para tal, foram realizados testes numéricos de estabilização utilizando a base de sistemas politópicos proposta em Morais *et al.* (2012). Esta base constitui-se de sistemas instáveis em malha aberta, que são robustamente estabilizáveis por um ganho robusto, mas que não são quadraticamente estabilizáveis. Os testes foram realizados inicialmente para sistemas com dimensão $n_x \in \{2, 3\}$ estados e $N \in \{2, \ldots, 5\}$ vértices. Para cada combinação de n_x e N a base contém 100 conjuntos diferentes de sistemas, que foram utilizados nas simulações.

A primeira parte deste exemplo visa a estabilização por realimentação de estados de sistemas invariantes no tempo. Para tal, foram realizados testes para o Lema 5 ($LA - \xi$) de Morais *et al.* (2012), que possui buscas realizadas no parâmetro ξ, considerando dezenove elementos igualmente espaçados no intervalo $[-0.9\ 0.9]$ e para o método aqui proposto, por meio da adaptação mostrada no Corolário 3.4 e cuja busca nos escalares é realizada em (3.13), com $\xi = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$. Com relação à alocação de polos, duas situações foram analisadas utilizando o Algoritmo 1 com $degP = 1$. Para a primeira, foi considerada uma alocação em um raio unitário (C3.4) e, para a segunda essa restrição foi relaxada, aumentando o raio para $\rho = \{1.05,\ 1.1\}$ (C3.4-ρ).

A Tabela 1 mostra o resultado de estabilização por realimentação de estados de sistemas invariantes no tempo para as técnicas comparadas. É possível notar que os resultados obtidos por meio da relaxação da alocação de polos em raios maiores que o unitário apresentam vantagens em todas as combinações de dimensão $(n_x|N)$ em relação aos outros métodos. Os resultados obtidos para a técnica desenvolvida em Morais *et al.* (2012) e para a condição adaptada dos Corolários 3.4 e 3.2 considerando a alocação no círculo unitário são exatamente os mesmos. Este fato já era esperado, pois como demonstrado em (VIEIRA *et al.*, 2015), as condições dos Corolários 3.2 e 3.4 contêm as condições de (MORAIS *et al.*, 2012) como um caso particular se os escalares forem fixados como em (3.13). Uma análise geral dos resultados mostra que, mesmo realizando menos testes do que a técnica comparada utiliza (19 *versus* 10), a técnica proposta, nos dois casos analisados, obtém os melhores resultados.

Quanto à segunda parte deste exemplo, foram realizados testes para os Teoremas 3 (controlador robusto) e 4 (controlador escalonado) de Daafouz e Bernussou (2001a) (DB01) e para condições adaptadas por meio do Corolário 3.2 para tratar o caso sem as incertezas limitadas em norma. Com relação à busca em escalares do Corolário 3.2, esta foi realizada em (3.13), com $\xi = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$. Assim como foi feito anteriormente, duas situações foram analisadas com relação à taxa de decaimento limitada por ρ,

Tabela 1 – Resultados de estabilização de sistemas invariantes no tempo.

n_x | N		C3.4	C3.4-ρ	$LA-\xi$
2	2	85	91	85
	3	93	95	93
	4	91	96	91
	5	93	99	93
3	2	86	92	86
	3	97	100	97
	4	95	96	95
	5	96	99	96
Total (%)		92	96	92

utilizando-se o Algoritmo 1 com $degP = 1$. Para a primeira, foi considerado $\rho = 1$ (C3.2) e, para a segunda, $\rho = \{1.05,\ 1.1\}$ (C3.2-ρ).

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para os métodos sob investigação, que foram testados para ambos os casos de estruturas de controladores, sejam eles robustos (grau zero em $S(\alpha(k))$ e $L(\alpha(k))$) ou escalonados (grau zero em $S(\alpha(k))$ e um em $L(\alpha(k))$ para os testes com $\rho > 1$ e grau um em ambas as matrizes para os testes com $\rho = 1$). É importante observar que para realizar os testes de estabilidade robusta descritos no Algoritmo 1, utilizados quando $\rho > 1$, o primeiro passo é obter a matriz dinâmica em malha fechada. Para isso é necessário determinar explicitamente o ganho (por exemplo, em termos de uma estrutura polinomial), o qual envolve o cálculo da inversa da matriz $S(\alpha(k))$. Embora seja possível eliminar o termo $S(\alpha(k))^{-1}$, por meio, por exemplo, de transformações de congruência (o que implicaria em $S(\alpha(k))$ multiplicando outras matrizes), é imposta uma estrutura constante (grau zero) para a matriz $S(\alpha(k))$, a fim de simplificar o cômputo de sua inversa. No entanto, as condições de síntese elaboradas dessa maneira (grau zero em $S(\alpha(k))$ e um em $L(\alpha(k))$), embora projetem um controlador escalonado, são mais conservadoras quando comparadas ao caso em que ambas matrizes que compõem o ganho são dependentes de parâmetros (grau um em $S(\alpha(k))$ e $L(\alpha(k))$). A partir da observação dos resultados, é possível perceber que, assim como ocorre para sistemas LTI, as soluções obtidas por meio da relaxação das taxas de decaimento ($\rho > 1$) apresentam vantagens em todas as combinações de dimensões ($n_x|N$) em relação aos outros métodos, tanto para o caso robusto quanto para o escalonado. Quando comparado ao método de Daafouz e Bernussou (2001a), as condições adaptadas por meio do Corolário 3.2 sem a relaxação da taxa de decaimento ($\rho = 1$) apresentam resultados um pouco menos conservadores em ambos os casos robusto e escalonado.

Tabela 2 – Resultados de estabilização de sistemas variantes no tempo.

n_x	N	Controle Robusto			Controle Escalonado		
		DB01	C3.2	C3.2-ρ	DB01	C3.2	C3.2-ρ
2	2	7	8	29	42	44	59
	3	14	16	37	60	61	73
	4	18	19	44	55	57	72
	5	16	17	48	54	55	68
3	2	11	11	43	57	58	71
	3	14	15	50	50	55	78
	4	23	24	59	66	68	78
	5	26	26	55	61	63	83
Total (%)		16.13	17.00	45.63	55.63	57.63	72.75

3.4.2 Estabilização Robusta de Sistemas LTI com Termos Limitados em Norma

Este exemplo foi desenvolvido para destacar a aplicação do método proposto na estabilização de sistemas polinomiais com termos limitados em norma, cuja modelagem decorre de um procedimento de discretização de sistemas politópicos a tempo contínuo via série de Taylor truncada. Para isso, considere o seguinte sistema linear incerto contínuo no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

cujas matrizes em espaço de estados representam a dinâmica de um sistema massa-mola, como descrito em Iwasaki (1996). Fazendo $k_1 = 0$, $m_1 = 3.7$, $m_2 = 2$, $c_0 = 0$ e $k_2 \in [8\ 12]$, tem-se que os vértices do sistema (3.14) são dados por

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_2(i)/3.7 & k_2(i)/3.7 & 0 & 0 \\ k_2(i)/2 & -k_2(i)/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3.7 \\ 0 \end{bmatrix}, \ C_i = \mathrm{I}, \ i = 1, 2. \tag{3.15}$$

Para obter as matrizes polinomiais discretas no tempo $A_\Delta(\alpha)$ e $B_\Delta(\alpha)$, a partir de (3.15), foi utilizado o método de discretização proposto em Braga *et al.* (2014a), para um período de amostragem de $T = 0.4$s.

Primeiramente, testa-se o Corolário 3.4, com $\rho = 1$, utilizando o sistema discretizado considerando uma expansão em série de Taylor de grau $\ell = 1$, de primeira ordem, e sem considerar os termos limitados em norma ($\Delta A(\alpha)$ e $\Delta B(\alpha)$, que representam o erro de discretização). Nesse caso, o sistema discreto equivalente é dito politópico, e é possível obter um controlador pelo método proposto (Corolário 3.4, com $\rho = 1$). No entanto, este não garante a estabilidade do sistema contínuo original, pois o erro de discretização foi negligenciado. Para comprovar essa afirmação, simulações temporais foram realizadas em Matlab/Simulink considerando $x_0 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}'$. A Figura 2a mostra a evolução temporal dos estados do sistema híbrido (planta contínua + controlador discreto) para o caso particular em que o parâmetro incerto α é dado por $\alpha = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$ conectando o controlador discreto no sistema contínuo via segurador de ordem zero (do inglês, *zero order holder* – ZOH).

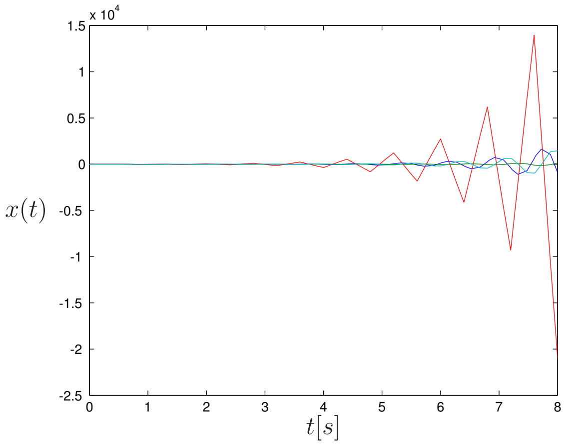
Um novo teste é realizado utilizando novamente a expansão em série de Taylor de primeira ordem, porém agora utilizando o Corolário 3.3 que é adaptado para sistemas LTI considerando os erros de discretização, ou seja, os termos $\Delta A(\alpha)$ e $\Delta B(\alpha)$ limitados em norma como em (2.3) são levados em conta no procedimento de síntese do controlador. O que é constatado é que a técnica não consegue encontrar um ganho estabilizante, provavelmente pelos valores elevados que limitam em norma os termos desprezados na expansão em série ($\delta_A = 1.2324$ e $\delta_B = 0.0277$).

A segunda parte dos testes consiste em realizar uma discretização com um grau maior da expansão em série de Taylor, como por exemplo $\ell = 3$, e verificar o comportamento do sistema híbrido em malha fechada. Aplicando então o Teorema 3.1 adaptado para sistemas LTI considerando os erros de discretização ($\delta_A = 0.1283$ e $\delta_B = 0.0023$), encontra-se um controlador estabilizante. Com relação ao sistema híbrido, a simulações temporais (Figura 2b) também mostram que o ganho sintetizado é estabilizante. Vale à pena ressaltar que, embora a Figura 2b apresente apenas o comportamento temporal dos estados para $\alpha = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$, foram feitas simulações para uma grade fina de valores em $\alpha \in [0\ 1]$, todos fornecendo evoluções temporais similares, ou seja, estados convergindo para zero. A estabilidade do sistema híbrido pode ser garantida teoricamente seguindo passos similares aos demonstrados no Apêndice 2 do artigo Braga *et al.* (2014a). Contudo, como esse não é o foco desta dissertação, esse exemplo foi apresentado apenas com o intuito de justificar a abordagem genérica do método proposto (que além de tratar os tradicionais modelos politópicos, consegue manipular sistemas polinomialmente dependentes de parâmetros com incertezas limitadas em norma) apresentando uma de suas possíveis aplicações em teoria de controle.

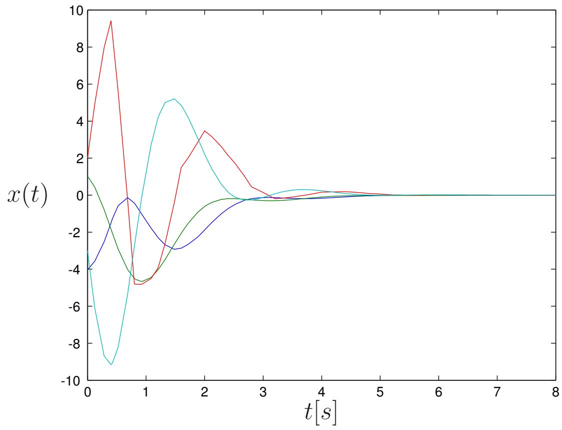
3.4.3 Sistemas Chaveados

O objetivo desse exemplo é comparar a condição de projeto dada no Corolário 3.5 (C3.5), que trata sistemas chaveados, com o método proposto especialmente para esse fim no Teorema 3 de Daafouz *et al.* (2002) (DMI). Com esse objetivo, foram realizados testes numéricos de estabilização utilizando a base de sistemas politópicos proposta em Morais *et al.* (2012), considerando que os N vértices do politopo representam os N modos de operação do sistema chaveado. A combinação de parâmetros apresentada em (3.13) foi utilizada no Corolário 3.5.

As Tabelas 3 e 4 mostram os resultados obtidos das simulações para a base de dados testada considerando, respectivamente, ganhos por realimentação de saída e de



(a)



(b)

Figura 2 – Trajetórias dos estados do sistema (3.15) com: (a) controlador obtido pelo Corolário 3.4 (com $\rho = 1$) com uma aproximação de primeira ordem ($\ell = 1$) e desprezando os erros de aproximação da discretização. (b) controlador obtido pelo Corolário 3.3 com $\ell = 3$ considerando os erros de aproximação da discretização.

estados. Dois casos distintos foram estudados: controle dependente do modo de operação (menos conservador, representado por $K_{\xi(k)}$ nas tabelas) e controle independente de modos (um único controlador garante a estabilidade do sistema, independentemente do chaveamento, simbolizado por K nas tabelas). Pode-se notar que, com exceção do caso de realimentação de estados dependente de modo, os resultados obtidos com a condição proposta apresentam vantagens em todas combinações de dimensões (n_x/N) com relação ao método proposto em Daafouz *et al.* (2002).

Tabela 3 – Resultados de estabilização por realimentação de saída de sistemas chaveados discretos com regra de chaveamento arbitrária utilizando o Corolário 3.5 (C3.5) e o Teorema 3 de Daafouz *et al.* (2002) (DMI).

n_x	N	C3.5		DMI	
		K	$K_{\xi(k)}$	K	$K_{\xi(k)}$
2	2	4	37	1	33
	3	3	48	2	41
	4	5	45	3	38
	5	6	43	2	40
3	2	0	13	0	11
	3	1	25	0	17
	4	2	28	0	24
	5	5	20	4	17
Total (%)		3.25	32.38	1.50	27.63

Tabela 4 – Resultados de estabilização por realimentação de estados de sistemas chaveados discretos com regra de chaveamento arbitrária utilizando o Corolário 3.5 (C3.5) e o Teorema 3 de Daafouz *et al.* (2002) (DMI).

n_x	N	C3.5		DMI	
		K	$K_{\xi(k)}$	K	$K_{\xi(k)}$
2	2	8	78	7	78
	3	16	96	14	96
	4	19	90	18	90
	5	17	89	16	89
3	2	11	84	11	84
	3	15	84	14	84
	4	24	89	23	89
	5	26	91	26	91
Total (%)		17.00	87.63	16.13	87.63

4 Controle $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$

Neste capítulo são apresentados os principais resultados no âmbito da síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$, desenvolvidos a partir das técnicas de estabilização apresentadas no Capítulo 3. Primeiramente, são apresentadas condições LMIs dependentes de parâmetros suficientes para a obtenção de controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ escalonados por realimentação dinâmica de saída para tratar sistemas LPV polinomiais com termos incertos limitados em norma. Na sequência, são apresentadas as principais extensões e vantagens da técnica e, finalmente, exemplos numéricos são fornecidos de forma a demonstrar a eficácia do método proposto.

4.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação Dinâmica de Saída

O primeiro resultado apresentado neste capítulo refere-se a condições LMIs dependentes de parâmetros suficientes para a síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ escalonados por realimentação dinâmica de saída para o sistema (2.1), que são apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$ e $G(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ e $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$, matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1,\ 2$, como sugeridas na Observação 3.1, variáveis escalares μ_∞, η_A, η_B e η_E, e parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon$ e ξ tais que*

$$\mathcal{Q} + \mathcal{C}\mathcal{S} + \mathcal{S}'\mathcal{C}' < 0, \qquad \forall \alpha(k) \in \Lambda, \tag{4.1}$$

em que $\mathcal{Q}$ é dada por

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & -\mu_\infty^2 \mathrm{I} & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Gamma_{41} & 0 & \Gamma_{43} & -\mathrm{I} & \star & \star & \star & \star \\ L(\alpha(k))'\tilde{B}(\alpha(k))' & 0 & \Gamma_{53} & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ \xi F(\bar{\alpha}(k)) & \epsilon G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0 & 0 & -\eta_A \mathrm{I} & \star & \star \\ \xi L(\alpha(k)) Q_2(\alpha(k)) & \Gamma_{72} & 0 & \Gamma_{74} & L(\alpha(k)) & 0 & -\eta_B \mathrm{I} & \star \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & -\eta_E \mathrm{I} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

com

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= \xi He\left(\tilde{A}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k))\right) - P(\alpha(k+1)) \\
&\quad + \eta_A\delta_A^2\mathrm{I} + \eta_B\delta_B^2\mathrm{I} + \eta_E\delta_E^2\mathrm{I} \\
\Gamma_{21} &= -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' + \epsilon(\tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)))' \\
\Gamma_{31} &= \xi\tilde{C}_z(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \xi\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) \\
\Gamma_{41} &= \tilde{E}(\alpha(k))' + (\tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\
\Gamma_{22} &= -\epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') + P(\alpha(k)) \\
\Gamma_{32} &= \epsilon\tilde{C}_z(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) \\
\Gamma_{72} &= \epsilon L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) \\
\Gamma_{43} &= E_z(\alpha(k))' + (\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\
\Gamma_{53} &= L(\alpha(k))'\tilde{D}_z(\alpha(k))' \\
\Gamma_{74} &= L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k))
\end{aligned}$$

e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_2 Q_1(\alpha(k)) \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_3\mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}' = \begin{bmatrix} \xi(S(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) - \tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(S(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) - \tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ 0 \\ (S(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) - \tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ S(\alpha(k))' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$ é um controlador escalonado estabilizante por realimentação dinâmica de saída e μ_∞ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.7).

Demonstração. O primeiro passo da demonstração consiste em obter as LMIs que tratam as matrizes originais do sistema ($\tilde{A}_\Delta$, $\tilde{B}_\Delta$, $\tilde{E}_\Delta$), unindo os termos polinomiais às incertezas limitadas em norma. Basicamente essa tarefa consiste em manipular as condições de maneira recuperar os termos $\Delta A(\alpha(k))$, $\Delta B(\alpha(k))$, $\Delta E(\alpha(k))$, a partir dos limitantes δ_A, δ_B e δ_E, tendo conhecimento da relação mostrada em (2.3). Os procedimentos enunciados na demonstração do Teorema 3.1 (aplicação do complemento de Schur e Lema 2.6 em sequência) são executados sequencialmente com as escolhas

$$M' = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{E}(\alpha)' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \eta = \eta_E,$$

em seguida

$$M' = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{B}(\alpha)' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \eta = \eta_B,$$
$$N = \begin{bmatrix}\xi L(\alpha(k))\tilde{C}_y(\alpha(k)) & \epsilon L(\alpha(k))\tilde{C}_y(\alpha(k)) & 0 & L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) & L(\alpha(k)) & 0\end{bmatrix},$$

e, finalmente,

$$M' = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{A}(\alpha)' & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}\xi F(\bar{\alpha}(k)) & \epsilon G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \eta = \eta_A.$$

Realizando esses passos, tem-se que, se (4.1) é satisfeita, então a seguinte desigualdade também é válida

$$\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{S}} + \hat{\mathcal{S}}'\hat{\mathcal{C}}' < 0 \tag{4.3}$$

para

$$\hat{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \star & \star & \star & \star \\ \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22} & \star & \star & \star \\ \Upsilon_{31} & \Upsilon_{32} & -\mu_\infty^2 \mathrm{I} & \star & \star \\ \Upsilon_{41} & 0 & \Upsilon_{43} & -\mathrm{I} & \star \\ L(\alpha(k))'\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))' & 0 & L(\alpha(k))'\tilde{D}_z(\alpha(k))' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{11} &= \xi \mathrm{He}(\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \xi\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k))) - P(\alpha(k+1)) \\
\Upsilon_{21} &= -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' + \epsilon(\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)))' \\
\Upsilon_{31} &= \xi\tilde{C}_z(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \xi\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) \\
\Upsilon_{41} &= \tilde{E}_\Delta(\alpha(k))' + (\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\
\Upsilon_{22} &= -\epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') + P(\alpha(k)) \\
\Upsilon_{32} &= \epsilon\tilde{C}_z(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) \\
\Upsilon_{43} &= \tilde{E}_z(\alpha(k))' + (\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))'
\end{aligned}$$

e

$$\hat{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_2 Q_1(\alpha(k)) \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_3 \mathrm{I} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{S}}' = \begin{bmatrix} \xi(S(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) - \tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(S(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) - \tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ 0 \\ (S(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) - \tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ S(\alpha(k))' \end{bmatrix}.$$

Observe que a desigualdade em (4.3) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{C}}\mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}'\hat{\mathcal{C}}' < 0, \tag{4.4}$$

com $\mathcal{X} = S(\alpha(k))$ e

$$\mathcal{B}' = \begin{bmatrix} \xi(Q_2(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(Q_2(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ 0 \\ (\tilde{E}_y(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}.$$

Pré e pós multiplicando (4.4) respectivamente por $\mathcal{B}^{\perp\prime}$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ com

$$\mathcal{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & \xi(S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) - Q_2(\alpha(k)))' \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & \epsilon(S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)) - Q_2(\alpha(k)))' \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & (S(\alpha(k))^{-1}\tilde{E}_y(\alpha(k)) - \tilde{E}_y(\alpha(k)))' \end{bmatrix}', \tag{4.5}$$

obtém-se a seguinte expressão

$$\mathcal{J} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{cl}(\alpha(k)) \\ -\mathrm{I} \\ \tilde{C}_{cl}(\alpha(k)) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi F(\bar{\alpha}(k))' \\ \epsilon G(\bar{\alpha}(k))' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \xi F(\bar{\alpha}(k))' \\ \epsilon G(\bar{\alpha}(k))' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{cl}(\alpha(k)) \\ -\mathrm{I} \\ \tilde{C}_{cl}(\alpha(k)) \\ 0 \end{bmatrix}' < 0 \tag{4.6}$$

em que

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} -P(\alpha(k+1)) & \star & \star & \star \\ 0 & P(\alpha(k)) & \star & \star \\ 0 & 0 & -\mu_\infty^2\mathrm{I} & \star \\ \tilde{B}_{cl}(\alpha(k))' & 0 & \tilde{D}_{cl}(\alpha(k))' & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

e $\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))$, $\tilde{B}_{cl}(\alpha(k))$, $\tilde{C}_{cl}(\alpha(k))$, $\tilde{D}_{cl}(\alpha(k))$ são dadas em (2.8).

Multiplicando-se (4.6) à esquerda por $\mathcal{R}'$ e à direita por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{cl}(\alpha(k))' & \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))' & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))' \\ -P(\alpha(k+1)) \end{pmatrix} & \star & \star \\ \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))' & -\mu_\infty^2\mathrm{I} + \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))\tilde{C}_{cl}(\alpha(k))' & \star \\ \tilde{B}_{cl}(\alpha(k))' & \tilde{D}_{cl}(\alpha(k))' & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

que pode ser reconhecido como o *Bounded Real Lemma* (Lema 2.3). □

4.2 Controle $\mathcal{H}_2$ por Realimentação Dinâmica de Saída

Nesta seção, são propostas condições LMIs dependentes de parâmetros suficientes para a síntese de controladores $\mathcal{H}_2$ escalonados por realimentação dinâmica de saída para o sistema (2.1), que são apresentadas no Teorema 4.2.

Teorema 4.2. *Se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$, $G(\bar{\alpha}(k))$ e $H(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ e $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$, matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1, \cdots, 4$, como sugeridas na Observação 3.1, variáveis escalares μ_2, η_A, η_B e η_E, e parâmetros escalares dados γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, ϵ e ξ tais que*

$$\mu_2^2 \geq Tr\,\{W(\alpha(k))\}, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{Q}_G + \mathcal{C}_G\mathcal{S}_G + \mathcal{S}_G{}'\mathcal{C}_G{}' < 0, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{Q}_T + \mathcal{C}_T\mathcal{S}_T + \mathcal{S}_T{}'\mathcal{C}_T{}' < 0, \tag{4.9}$$

sejam satisfeitas $\forall\alpha(k) \in \Lambda$ considerando $\mathcal{Q}_G$ igual a

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Gamma_{31} & 0 & -\mathrm{I} & \star & \star & \star & \star \\ (\tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k)))' & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ \xi F(\bar{\alpha}(k)) & \epsilon G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0 & -\eta_A & \star & \star \\ \xi L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) & \epsilon L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) & L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) & L(\alpha(k)) & 0 & -\eta_B & \star \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & -\eta_E \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \xi He(\tilde{A}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k))) - P(\alpha(k+1)) \\ \Gamma_{21} &= -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' + \epsilon(\tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)))' \\ \Gamma_{31} &= \tilde{E}(\alpha(k))' + (\tilde{B}(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ \Gamma_{22} &= P(\alpha(k)) - \epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') \end{aligned}$$

matrizes $\mathcal{C}_G$ e $\mathcal{S}_G$ dadas por

$$\mathcal{C}_G = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_2 Q_1(\alpha(k)) \\ 0 \\ \gamma_3\mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(\alpha(k)), \quad \mathcal{S}_G{}' = \begin{bmatrix} \xi(Q_2(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(Q_2(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ (S(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ \mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e sendo ainda

$$\mathcal{Q}_T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} P(\alpha(k)) \\ -H(\bar{\alpha}(k)) - H(\bar{\alpha}(k))' \end{pmatrix} & \star & \star & \star \\ \Phi_{21} & -W(\alpha(k)) & \star & \star \\ 0 & \Phi_{32} & -\mathrm{I} & \star \\ 0 & (\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k)))' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\Phi_{21} = \tilde{C}_z(\alpha(k))H(\bar{\alpha}(k)) + \tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_3(\alpha(k)))'$$
$$\Phi_{32} = \tilde{E}_z(\alpha(k))' + (\tilde{D}_z(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))'$$

e matrizes $\mathcal{C}_T$ e $\mathcal{S}_T$ dadas por

$$\mathcal{C}_T = \begin{bmatrix} \gamma_4 Q_4(\alpha(k)) \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_5 \mathrm{I} \end{bmatrix} S(\alpha(k)), \quad \mathcal{S}_T' = \begin{bmatrix} \xi(Q_3(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ 0 \\ (\tilde{E}_y(\alpha(k)) - S(\alpha(k))^{-1}\tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ \mathrm{I} \end{bmatrix},$$

então $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$ é um controlador escalonado estabilizante por realimentação dinâmica de saída e μ_2 é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.8).

Demonstração. Primeiramente, é necessário recuperar as desigualdades que tratam as matrizes originais do sistema ($\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))$, $\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))$, $\tilde{E}_\Delta(\alpha(k))$) unindo os termos polinomiais às incertezas limitadas em norma. Basicamente essa tarefa consiste em manipular as condições de maneira a recuperar os termos $\Delta A(\alpha(k))$, $\Delta B(\alpha(k))$, $\Delta E(\alpha(k))$, a partir dos limitantes δ_A, δ_B e δ_E, tendo conhecimento da relação mostrada em (2.3). As desigualdades (4.7) e (4.9) não necessitam dessas manipulações, uma vez que somente a desigualdade (4.8) (referente ao gramiano) apresenta as incertezas limitadas em norma. Para tal, o Lema 2.6 é aplicado sequencialmente em (4.8), da maneira como foi evidenciada no Teorema 3.1, com as seguintes escolhas

$$M' = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{E}(\alpha)' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \eta = \eta_E,$$

em seguida

$$M' = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{B}(\alpha)' & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \eta = \eta_B,$$
$$N = \begin{bmatrix}\xi L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) & \epsilon L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) & L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) & L(\alpha(k)) & 0\end{bmatrix},$$

e, finalmente,

$$M' = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{A}(\alpha)' & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}\xi F(\bar{\alpha}(k)) & \epsilon G(\bar{\alpha}(k)) & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \eta = \eta_A.$$

Assim, tem-se que, se (4.8) é satisfeita, então a seguinte desigualdade também é válida

$$\hat{\mathcal{Q}}_G + \hat{\mathcal{C}}_G\hat{\mathcal{S}}_G + \hat{\mathcal{S}}_G'\hat{\mathcal{C}}_G' < 0 \tag{4.10}$$

para

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \star & \star & \star \\ \Upsilon_{21} & P(\alpha(k)) - \epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') & \star & \star \\ \Upsilon_{31} & 0 & -I & \star \\ (\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k)))' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{11} &= \xi \mathrm{He}(\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) + \tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k))) - P(\alpha(k+1))\\
\Upsilon_{21} &= -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}_\Delta(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' + \epsilon(\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)))'\\
\Upsilon_{31} &= \tilde{E}_\Delta(\alpha(k))' + (\tilde{B}_\Delta(\alpha(k))L(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)))'
\end{aligned}$$

e

$$\hat{\mathcal{C}}_G = \begin{bmatrix} \gamma_1 Q_1(\alpha(k)) \\ \gamma_2 Q_1(\alpha(k)) \\ 0 \\ \gamma_3 \mathrm{I} \end{bmatrix} S(\alpha(k)), \quad \hat{\mathcal{S}}_G' = \begin{bmatrix} \xi(S(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) - \tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)))' \\ \epsilon(S(\alpha(k))Q_2(\alpha(k)) - \tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' \\ (S(\alpha(k))\tilde{E}_y(\alpha(k)) - \tilde{E}_y(\alpha(k)))' \\ S(\alpha(k))' \end{bmatrix}.$$

A segunda parte da demonstração é realizada separadamente para as LMIs relacionadas ao custo e ao gramiano. Começando pela desigualdade relativa ao gramiano, dada por (4.10), adotando $\hat{\mathcal{S}}_G^\perp$ como se segue

$$\hat{\mathcal{S}}_G^\perp = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & \xi(S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k)) - Q_2(\alpha(k)))' \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & \epsilon(S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)) - Q_2(\alpha(k)))' \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & (S(\alpha(k))^{-1}\tilde{E}_y(\alpha(k)) - \tilde{E}_y(\alpha(k)))' \end{bmatrix}',$$

nota-se que, se a desigualdade $\hat{\mathcal{S}}_G^{\perp\prime}\hat{\mathcal{Q}}_G\hat{\mathcal{S}}_G^\perp < 0$, item 4 do Lema de Finsler (Lema 2.5), é satisfeita então tem-se que a seguinte desigualdade também é satisfeita

$$\begin{bmatrix} \xi\mathrm{He}(\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))F(\bar{\alpha}(k))) - P(\alpha(k+1)) & \star & \star \\ -\xi F(\bar{\alpha}(k)) + \epsilon(\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))G(\bar{\alpha}(k)))' & \begin{pmatrix} -\epsilon(G(\bar{\alpha}(k)) + G(\bar{\alpha}(k))') \\ +P(\alpha(k)) \end{pmatrix} & \star \\ \tilde{B}_{cl}(\alpha(k))' & 0 & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.11)$$

com $\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))$ e $\tilde{B}_{cl}(\alpha(k))$ dadas como em (2.7). O próximo passo da demonstração tem por finalidade retirar os escalares e as variáveis de folga da desigualdade referente ao gramiano, o que é feito ao multiplicar (4.11) à esquerda por

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \tilde{A}_{cl}(\alpha(k)) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix},$$

e à direita por T'. Realizando esta operação, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))\tilde{A}_{cl}(\alpha(k))' - P(\alpha(k+1)) & \tilde{B}_{cl}(\alpha(k)) \\ \tilde{B}_{cl}(\alpha(k))' & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0,$$

que é a mesma desigualdade dada em (2.13).

Passando então à demonstração da desigualdade relacionada ao custo, adotando $\mathcal{S}_T^\perp$ como

$$\hat{\mathcal{S}}_T^\perp = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & \xi(S(\alpha(k))^{-1}\tilde{C}_y(\alpha(k))H(\bar{\alpha}(k)) - Q_3(\alpha(k)))' \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & (S(\alpha(k))^{-1}\tilde{E}_y(\alpha(k)) - \tilde{E}_y(\alpha(k)))' \end{bmatrix}',$$

nota-se que se a desigualdade $\hat{\mathcal{S}}_T^{\perp\prime}\hat{\mathcal{Q}}_T\hat{\mathcal{S}}_T^{\perp} < 0$, item 4 do Lema de Finsler, é satisfeita então

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) - (H(\bar{\alpha}(k))' + H(\bar{\alpha}(k))) & \star & \star \\ \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))H(\bar{\alpha}(k)) & -W(\alpha(k)) & \star \\ 0 & \tilde{D}_{cl}(\alpha(k)) & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.12}$$

com $\tilde{C}_{cl}(\alpha(k))$ e $\tilde{D}_{cl}(\alpha(k))$ dadas como em (2.7). O próximo passo da demonstração tem por finalidade retirar os escalares e as variáveis de folga da desigualdade (4.9), o que é feito ao multiplicar (4.12) à esquerda por

$$T = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{cl}(\alpha(k)) & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}.$$

e à direita por T'. Realizando esta operação, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{cl}(\alpha(k))P(\alpha(k))\tilde{C}_{cl}(\alpha(k))' - W(\alpha(k)) & \tilde{D}_{cl}(\alpha(k)) \\ \tilde{D}_{cl}(\alpha(k))' & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0,$$

que é a mesma desigualdade apresentada em (2.14). Desta forma, recuperam-se as desigualdades apresentadas no Lema 2.4, garantindo a estabilidade assintótica do sistema (2.7) e que μ_2 é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.7). □

4.3 Principais Extensões e Vantagens da Técnica

As condições propostas nos Teoremas 4.1 e 4.2 podem ser adaptadas para tratar alguns casos particulares que são enunciados no decorrer desta seção. A primeira extensão do método tem por objetivo tratar a classe de sistemas politópicos variantes no tempo (dependência afim nos parâmetros), como os apresentados em (2.15). Os Corolários 4.1 e 4.2 apresentam as adaptações dos Teoremas 4.1 e 4.2, respectivamente, para tratar controle $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$.

Corolário 4.1. *Se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$ e $G(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ e $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$, matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1,\ 2$, como sugeridas na Observação 3.1, uma variável escalar μ_∞, e parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon$ e ξ, tais que (4.3) seja verificada, então $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$ é um controlador estabilizante por realimentação dinâmica de saída e μ_∞ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.15) em malha fechada.*

Corolário 4.2. *Se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$, $G(\bar{\alpha}(k))$ e $H(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ e $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$, matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1, \cdots, 4$, como sugeridas na Observação 3.1, variável escalar μ_2, e parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5,\ \epsilon$ e ξ tais que (4.7), (4.9) e (4.10) sejam satisfeitas, então $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$ é um controlador escalonado estabilizante* *por realimentação dinâmica de saída e μ_2 é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema* (2.15) *em malha fechada.*

Como subproduto, os Teoremas 4.1 e 4.2 (assim como os Corolários 4.1 e 4.2) podem ser diretamente adaptados para prover controladores escalonados por realimentação de estados, como é mostrado nos Corolários 4.3 e 4.4.

Corolário 4.3. *Se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$ e $G(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ e $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$, matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1,\ 2$, como sugeridas na Observação 3.1, variáveis escalares μ_∞, η_A, η_B e η_E, parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \epsilon$ e ξ, matrizes $C_y(\alpha(k)) = \mathrm{I}$ e $E_y(\alpha(k)) = 0$, tais que* (4.1) *seja verificada, então $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$ é um controlador escalonado estabilizante por realimentação de estados e μ_∞ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema* (2.8).

Corolário 4.4. *Se existirem matrizes $P(\alpha(k)) \in \mathbb{S}_+^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $F(\bar{\alpha}(k))$, $G(\bar{\alpha}(k))$ e $H(\bar{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_c)\times(n_x+n_c)}$, $L(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(q+n_c)}$ e $S(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{(q+n_c)\times(q+n_c)}$, matrizes dadas $Q_i(\alpha(k))$, $i = 1, \cdots, 4$, como sugeridas na Observação 3.1, variáveis escalares μ_2, η_A, η_B e η_E, parâmetros escalares dados $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5,\ \epsilon$ e ξ, e matrizes $C_y(\alpha(k)) = \mathrm{I}$ e $E_y(\alpha(k)) = 0$, tais que* (4.7), (4.8) *e* (4.9) *sejam satisfeitas, então $\Theta(\alpha(k)) = L(\alpha(k))S(\alpha(k))^{-1}$ é um controlador escalonado estabilizante por realimentação de estados e μ_2 é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema* (2.8).

De forma análoga ao que foi mostrado no Corolário 3.3, do capítulo anterior, os Teoremas 4.1 e 4.2 também podem ser adaptados diretamente para a síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para os sistemas LTI incertos (2.17).

Os comentários realizados na Seção 3.3 e ao final da Seção 3.2 do capítulo anterior também são válidos para os Teoremas 4.1 e 4.2. Adicionalmente às particularidades da técnica apresentadas nesses comentários, a presença do termo de transmissão direta $E_y(\alpha(k))$ também se mostra como um diferencial, uma vez que grande parte dos trabalhos encontrados na literatura não contemplam este termo.

Com relação à busca nos escalares para o Teorema 4.1 (controladores $\mathcal{H}_\infty$), são utilizados os valores apresentados em (3.13) para os exemplos deste capítulo. Para a síntese de controladores $\mathcal{H}_2$ via Teorema 4.2, são utilizados os seguintes valores

$$\begin{gathered}\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -10^5, \quad \gamma_4 = 0, \quad \gamma_5 = -1, \\ \epsilon = 1, \quad \xi \in \{-0.9, -0.8, \ \cdots, \ 0.8, \ 0.9\}.\end{gathered} \tag{4.13}$$

4.4 Exemplos Numéricos

As condições propostas neste capítulo foram programadas utilizando as mesmas ferramentas mencionadas no início da Seção 3.4. Em função da maior complexidade computacional de síntese de controladores demandada pelo Exemplo 4.4.1, optou-se por utilizar um resolvedor de LMIs mais rápido e estável numericamente, chamado Mosek (APS, 2015), para esse exemplo em particular.

4.4.1 Sistema LPV Polinomial

Considere o sistema LPV contínuo no tempo que representa uma equação dinâmica linearizada do helicóptero VTOL apresentada em Keel *et al.* (1988) (no qual podem ser encontrados mais detalhes sobre a descrição física das equações dinâmicas) com as seguintes matrizes:

$$A_c(\alpha(t))=\begin{bmatrix}-0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555\\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208\\ 0.1002 & p(t) & -0.7070 & 1.4200\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ B_c(\alpha(t))=\begin{bmatrix}0.4422 & 0.1761\\ 3.5446 & -7.5922\\ -5.5200 & 4.4900\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$E_c(\alpha(t)) = \begin{bmatrix}0.05 & 0.01 & 0 & 0\end{bmatrix}', \tag{4.14}$$

em que $p(t)$ é um parâmetro que varia arbitrariamente dentro do intervalo 0.3681 ± 0.05. As matrizes polinomiais discretas no tempo $A_\Delta(\alpha(k))$, $B_\Delta(\alpha(k))$ e $E_\Delta(\alpha(k))$, podem ser calculadas a partir de (4.14) por meio do método de discretização proposto em Braga *et al.* (2014a), considerando, por exemplo, a expansão em série de Taylor de grau $\ell = 2$ para um período de amostragem de $T = 0.01$ s. Por meio desse método, são obtidas matrizes que dependem polinomialmente dos parâmetros com grau 2 e cujos termos incertos limitados em norma representam os erros de discretização (ver Braga *et al.* (2014a) para mais detalhes sobre o procedimento de discretização).

Para o projeto de controladores por realimentação de saída, considere também as seguintes matrizes:

$$C_z = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ D_z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ E_z = \begin{bmatrix}0.1\\ 0.2\end{bmatrix},$$
$$C_y(\alpha(k)) = 0.5I\alpha_1(k) + I\alpha_2(k),\quad E_y = \begin{bmatrix}0.1 & 0.05 & 0 & 0\end{bmatrix}',$$

nas quais as incertezas na matriz $C_y(\alpha(k))$ podem representar, por exemplo, falhas nos sensores de medição.

O objetivo deste exemplo é aplicar o Teorema 4.1 para obter controladores estabilizantes por realimentação estática de saída ($n_c = 0$) garantindo limitantes superiores para as normas $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada. É considerado para este projeto o caso de estabilização robusta ($L(\alpha(k)) = L$ e $S(\alpha(k)) = S$) e o controle escalonado ($L(\alpha(k))$ e $S(\alpha(k))$ com grau um de dependência nos parâmetros). Além disso, a flexibilidade do método associada à busca nos parâmetros escalares, é avaliada ao comparar o emprego dos Teoremas 4.1 e 4.2 com o conjunto de escalares apresentados em (3.13) e (4.13), respectivamente, e com os mesmos teoremas fixando o valor de ξ em zero (nenhuma busca é realizada).

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos em termos dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ associados aos controladores por realimentação estática de saída projetados. Observe que os melhores resultados foram obtidos com busca no parâmetro escalar ξ no conjunto (3.13), de forma que o melhor controlador robusto foi computado com $\xi = -0.9$ e é dado por (truncado com quatro dígitos decimais)

$$\Theta = \begin{bmatrix} -1.4574 & -0.6769 & 0.4679 & 0.7212 \\ -0.5063 & 0.8386 & -0.2711 & -1.1103 \end{bmatrix}.$$

Tabela 5 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ associados aos controladores por realimentação estática de saída projetados pelo Teorema 4.1 para o Exemplo 4.4.1.

Escalares	(3.13) com $\xi = 0$	(3.13)
Robusto	8.1504	1.8187
Escalonado	6.6586	0.9765

A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos em termos dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados aos controladores por realimentação estática de saída projetados. Da mesma forma que para o caso $\mathcal{H}_\infty$, os melhores resultados foram obtidos com busca no parâmetro escalar ξ no conjunto (4.13), sendo que o melhor controlador robusto foi computado com $\xi = -0.9$ e é dado por (truncado com quatro dígitos decimais)

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0.0700 & -0.3261 & 0.5242 & 0.6071 \\ -0.1114 & 0.0303 & -0.0327 & -0.5951 \end{bmatrix}.$$

Tabela 6 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados aos controladores por realimentação estática de saída projetados pelo Teorema 4.2 para o Exemplo 4.4.1.

Escalares	(4.13) com $\xi = 0$	(4.13)
Robusto	1.0161	0.5684
Escalonado	0.9301	0.4194

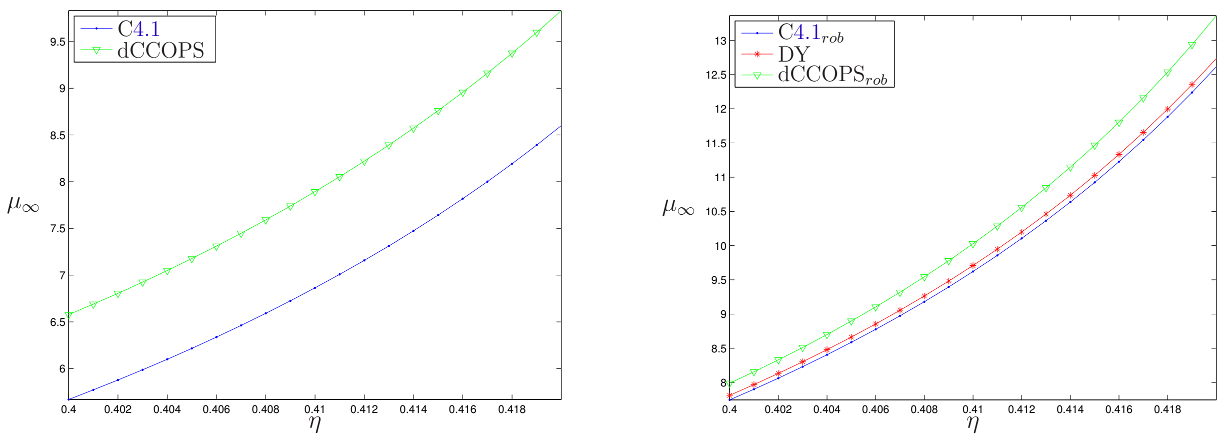
Adicionalmente, note que, como esperado, o uso do controle escalonado ao invés do ganho robusto, associado à busca nas variáveis escalares, permite a obtenção de resultados menos conservadores.

4.4.2 Sistema LPV Politópico (DE CAIGNY *et al.*, 2009)

Neste exemplo é investigado o modelo encontrado em De Caigny *et al.* (2009), que constitui-se de um sistema politópico variante no tempo cujos vértices das matrizes são dados a seguir

$$[A_1|A_2] = \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \; [E_1|E_2|B_i] = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & | & 1 \\ 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 1 & | & 0 \end{bmatrix},$$
$$C_{yi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{z_i} = D_{z_i} = 0, \quad C_{z_i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1,\ 2, \quad \eta > 0 \in \mathbb{R}.$$

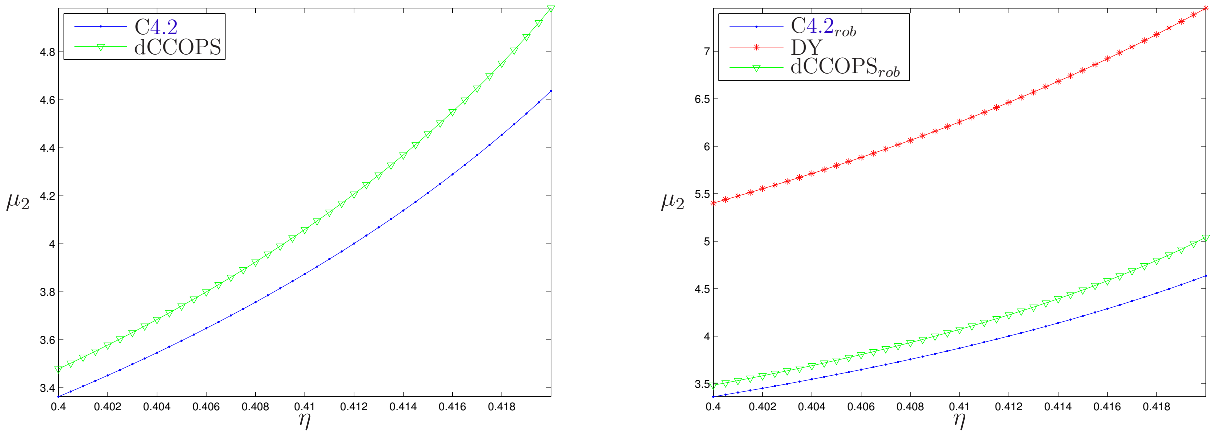
O objetivo deste exemplo é comparar os resultados obtidos com as condições do Corolário 4.1 (C4.1), Teorema 8 de De Caigny *et al.* (2010) (dCCOPS) e Teorema 4 de Du e Yang (2008) (DY). A busca nas variáveis escalares para o Corolário 4.1 é realizada utilizando (3.13). As Figuras 3 e 4 mostram, respectivamente, os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ obtidos pelas técnicas avaliadas para cada η pertencente ao intervalo $[0.4,\ 0.42]$. O exemplo é reproduzido para a síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação estática de saída robustos (C4.1$_{rob}$, dCCOPS$_{rob}$, DY – Figura 3b) e escalonados (C4.1 e dCCOPS – Figura 3a) com grau 1 de dependência nos parâmetros. A Figura 4 mostra o resultado da síntese de controladores $\mathcal{H}_2$ por realimentação estática de saída para o Corolário 4.2 com busca nas variáveis escalares feita em (4.13), Teorema 9 de De Caigny *et al.* (2010) e Teorema 3 de Du e Yang (2008), seguindo a mesma lógica de apresentação dada na figura anterior ao tratar dos casos robustos e escalonados.



(a) Ganho escalonado (b) Robusto

Figura 3 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ associados aos controladores por realimentação estática de saída escalonados (a) ou robustos (b) calculados pelos métodos C4.1, dCCOPS e DY para o Exemplo 4.4.2.

Note que, como esperado, resultados menos conservadores são obtidos ao empregar controladores escalonados. Além disso, observe que para ambos os casos (robusto



(a) Ganho escalonado

(b) Robusto

Figura 4 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados aos controladores por realimentação estática de saída escalonados (a) ou robustos (b) calculados pelos métodos C4.2, dC-COPS e DY para o Exemplo 4.4.2.

e ganho escalonado), os Corolários 4.1 e 4.2 produziram os menores custos garantidos para toda a faixa de η considerada do que os métodos da literatura com os quais foram comparados.

4.4.3 Sistema LPV Politópico (EMEDI; KARIMI, 2016)

Neste exemplo é investigado o sistema LPV politópico apresentado no Exemplo 1 de Emedi e Karimi (2016), considerando uma alteração com relação ao termo de transmissão direta que é definido igual a zero para permitir a comparação com outras técnicas da literatura que não contemplam a existência dessa matriz. Portanto, as matrizes do sistema utilizadas nesta dissertação são dadas como a seguir

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0.7370 & 0.0777 & 0.0810 & 0.0732 \\ 0.2272 & 0.9030 & 0.0282 & 0.1804 \\ -0.0490 & 0.0092 & 0.7111 & -0.2322 \\ -0.1726 & -0.0931 & 0.1442 & 0.7744 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0.0819 & 0.0086 & 0.0090 & 0.0081 \\ 0.0252 & 0.1003 & 0.0031 & 0.0200 \\ -0.0055 & 0.0010 & 0.0790 & -0.0258 \\ -0.0192 & -0.0103 & 0.0160 & 0.0860 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0045 & 0.0044 \\ 0.1001 & 0.0100 \\ 0.0003 & -0.0136 \\ -0.0051 & 0.0936 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.0953 & 0 & 0 \\ 0.0145 & 0 & 0 \\ 0.0862 & 0 & 0 \\ -0.0011 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}', \quad E_y = 0, \quad E_z = 0,$$

em que o parâmetro variante θ pertence ao intervalo $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, em que $\theta = -1$ corresponde a um vértice cujos polos estão contidos dentro do círculo unitário e $\theta = 1$ faz com que um dos polos esteja fora do círculo unitário (sistema instável).

O objetivo deste exemplo é analisar os resultados da síntese de controladores robustos estáticos para as mesmas técnicas empregadas no Exemplo 4.4.2, considerando a otimização dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ (μ_∞) e $\mathcal{H}_2$ (μ_2). A Tabela 7 mostra os valores de μ_∞ obtidos pelo Corolário 4.1 (C4.1) com busca nas variáveis escalares feita em (3.13) e $\gamma_3 = -1$, pelo Teorema 8 de De Caigny *et al.* (2010) (dCCOPS) e pelo Teorema 4 de Du e Yang (2008) (DY). Por outro lado, a Tabela 8 mostra os custos garantidos μ_2 obtidos pelo Corolário 4.2 (C4.2) com busca nas variáveis escalares feita em (4.13) e $\gamma_3 = -1$, pelo Teorema 9 de De Caigny *et al.* (2010) (dCCOPS) e pelo Teorema 3 de Du e Yang (2008) (DY). Ambas as tabelas apresentam o tempo (em segundos) demandado para a solução dos métodos comparados, sendo que, para o Corolário 4.1, é apresentado o tempo médio por iteração.

Tabela 7 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ (μ_∞) obtidos para o Exemplo 4.4.3.

Métodos	μ_∞	Tempo (s)
$C4.1$	1.4290	0.28/iteração
dCCOPS	1.8943	0.70
DY	infactível	0.41

Tabela 8 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ (μ_2) obtidos para o Exemplo 4.4.3.

Métodos	μ_2	Tempo (s)
$C4.2$	0.3788	0.30/iteração
dCCOPS	0.4300	0.64
DY	infactível	0.41

Os resultados mostram que os melhores custos garantidos (resultados mais favoráveis) $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ foram obtidos, respectivamente, pelos Corolários 4.1 e 4.2, ao preço de um esforço computacional maior necessário para realizar a busca no parâmetro ξ.

4.4.4 Sistema LTI Politópico

Nesta subseção são apresentados dois exemplos para demonstrar a eficácia da técnica proposta aplicada a sistemas LTI, sendo o primeiro relacionado ao critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e o segundo ao critério $\mathcal{H}_2$.

Critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema LTI politópico discreto no tempo dado no Exemplo 3 de Chang *et al.* (2015), cujos vértices são dados por

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & E_1 & B_1 \\ \hline C_{z_1} & E_{z_1} & D_{z_1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c|c} -0.2228 & 1.2665 & 0.0210 & -0.1407 & -0.1431 & -0.4 & -0.05 \\ -0.3077 & 0.4837 & -0.1988 & 0.8809 & -0.6714 & -0.46 & -0.85 \\ -0.5078 & 0.0185 & -0.5140 & -0.3025 & 0.0583 & -0.1 & -0.82 \\ -0.2847 & 0.3645 & 0.0138 & 0.3732 & 0.1503 & 0.23 & -0.0623 \\ 0.3795 & 0.8853 & 0.3176 & 1.3000 & -0.6100 & -0.6543 & 1.12 \\ \hline -0.088 & -0.312 & 0.1733 & 1.167 & 0.55 & 0.84 & 0.6 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_2 & E_2 & B_2 \\ \hline C_{z_2} & E_{z_2} & D_{z_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c|c} -0.0463 & 1.0000 & 0.4761 & 0.0006 & -0.1967 & 0.62 & -0.26 \\ 0.1390 & 0.2433 & 0.5270 & -0.2392 & -0.4557 & -1.06 & 0.688 \\ 0.2463 & 1.0720 & -0.3483 & 0.0574 & 0.2562 & -0.59 & -1.1511 \\ 0.4315 & 0.0915 & -0.1487 & -0.0171 & -0.3573 & 0.0852 & -1.04 \\ 0.2005 & -0.2659 & -1.4680 & 0.5854 & 1.0000 & -0.1 & -0.14 \\ \hline -0.89 & -0.0812 & 0.73 & -0.43 & -0.473 & 0.2390 & -1.14 \end{array}\right].$$

Com o propósito de comparar o conservadorismo da técnica proposta com outros métodos da literatura, controladores robustos estáticos de realimentação de saída $\mathcal{H}_\infty$ são projetados pelo Corolário 4.1 (C4.1) proposto neste trabalho aplicado a sistemas LTI (Corolário 3.4), pelo Teorema 4 (CPZ_{T4}) de Chang *et al.* (2015), pelo Teorema 1 de Morais *et al.* (2013) ($MBOP$), adaptado para obter um ganho de realimentação de saída, por um método baseado no critério de estabilização quadrática (QS), e pelo procedimento de dois estágios proposto no Teorema 1/ Teorema 3 de Agulhari *et al.* (2010) (AOP).

A busca nas variáveis escalares contidas no Corolário 4.1 é dada em (3.13). Para o Teorema 4 de Chang *et al.* (2015), são utilizados $\beta = 0.13$ e $\rho = 0.09$ (valores associados aos melhores resultados apresentados em Chang *et al.* (2015)). Para o Teorema 1 de Morais *et al.* (2013) as buscas são realizadas no parâmetro ξ, considerando dezenove elementos igualmente espaçados no intervalo $[-0.9\ 0.9]$.

Primeiramente, é adotada uma matriz de saída precisamente conhecida (algumas técnicas só são aplicáveis nessa situação), dada como no exemplo original em Chang *et al.* (2015):

$$C_y(\alpha) = C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Além disso, os termos de transmissão direta, E_y, são definidos iguais a zero. Os custos garantidos associados ao projeto dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ considerando C_y dada por (4.15) são referidos como $\mu_{\infty,1}$ na Tabela 9. Como segunda investigação, é considerada uma matriz de saída politópica cujos vértices são descritos por $C_{y_1} = C_y$, e $C_{y_2}(\alpha) = 0.5C_y$, com C_y dada em (4.15). Nesse caso, os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ associados são referidos como $\mu_{\infty,2}$ na Tabela 9, na qual também é apresentada a complexidade computacional em termos dos números de variáveis e de linhas de LMIs.

Tabela 9 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ ($\mu_{\infty,1}$ e $\mu_{\infty,2}$) obtidos para o Exemplo 4.4.4.

Métodos	$\mu_{\infty,1}$	$\mu_{\infty,2}$	Linhas de LMIs	Variáveis
$C4.1$	4.7790	3.8157	62	133
$CPZ15_{T4}$	8.4041	13.8880	49	83
$MBOP$	8.8857	–	46	73
QS	Infactível	–	29	13
AOP	36.4517	9.5892	52	85

Note que, para ambos os casos, os melhores resultados foram obtidos ao se empregar as condições do Corolário 4.1 propostas nesse trabalho, ao preço de um incremento na complexidade computacional.

Critério de desempenho $\mathcal{H}_2$

Considere o seguinte sistema LTI politópico apresentado no Exemplo 2 de Sadabadi e Karimi (2013)

$$A_i = \begin{bmatrix} 0.8189 & 0.0863 & 0.0900 & 0.0813 \\ 0.2524 & 1.0033 & 0.0313 & 0.2004 \\ -0.0545 & 0.0102 & p_{1i} & -0.2580 \\ -0.1918 & -0.1034 & 0.1602 & p_{2i} \end{bmatrix}, \ B_i = \begin{bmatrix} 0.0045 & 0.0044 \\ 0.1001 & 0.0100 \\ 0.0003 & -0.0136 \\ -0.0051 & p_{3i} \end{bmatrix}$$

$$C_{yi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_i = \begin{bmatrix} 0.0953 & 0 & 0 \\ 0.0145 & 0 & 0 \\ 0.0862 & 0 & 0 \\ -0.0011 & 0 & 0 \end{bmatrix} C_{zi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{zi} = 0, \ E_{yi} = 0$$

em que $p_1 = [0.7901 \ 0.8533]$, $p_2 = [0.8604 \ 0.9292]$ e $p_3 = [0.0936 \ 0.1011]$ são parâmetros incertos.

O objetivo deste exemplo é comparar os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados ao projeto de controladores robustos estáticos de realimentação de saída computados pelo Corolário 4.2 proposto neste trabalho aplicado a sistemas LTI (Corolário 3.3), pelo Teorema 2 de Morais *et al.* (2013), adaptado para obter um ganho de realimentação de saída, por um método baseado no critério de estabilização quadrática e pelo procedimento de dois estágios que foi apresentado em Moreira *et al.* (2011).

O custo garantido $\mathcal{H}_2$ obtido pelo Corolário 4.2, com a busca dos parâmetros escalares feita em (4.13) com $\gamma_3 = -1$, foi igual a 0.5884. Para o método proposto em Morais *et al.* (2013) (com busca no parâmetro ξ em 19 valores igualmente espaçados pertencentes ao intervalo fechado $[-0.9, 0.9]$) e para a estabilização quadrática, os resultados foram iguais a 0.6164 e 0.6900, respectivamente. Por outro lado, a técnica apresentada em Moreira *et al.* (2011) não conseguiu produzir um controlador por realimentação de saída ao utilizar as variáveis de otimização com graus iguais a um. Aumentando o grau dessas variáveis ($P(\alpha)$, $W(\alpha)$, $F(\alpha)$ e $H(\alpha)$) para dois, obtém-se um custo garantindo $\mathcal{H}_2$ igual a 0.6109. É importante mencionar que, mesmo quando comparado a técnicas que utilizam dois estágios ou empregam graus maiores nas variáveis de otimização, o método apresentado no Corolário 4.2 obteve o melhor resultado, em termos de desempenho $\mathcal{H}_2$.

5 Considerações Finais

Este trabalho apresentou novas condições LMIs dependentes de parâmetros para a estabilização e controle $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ por realimentação dinâmica de saída para tratar sistemas discretos no tempo com dois tipos de matrizes variantes no tempo (polinomialmente dependentes de parâmetros ou com incertezas limitadas em norma), sendo que a principal motivação da investigação dessa modelagem é o tratamento de sistemas incertos a tempo contínuo discretizados. A primeira, de uma série de vantagens do método desenvolvido, é o fato do mesmo ser bastante versátil com relação a aplicações em outros contextos. O método pode tratar diversos tipos de sistemas, como LPV polinomiais com termos limitados em norma, LPV ou LTI politópicos, além de poder resolver casos de realimentação dinâmica (de ordem completa ou reduzida), estática de saída ou de estados, controle escalonado ou robusto, além do controle de sistemas com regra de chaveamento arbitrária, bastando para isso fazer algumas adaptações simples. Quanto ao problema de realimentação de saída, foi visto que a técnica desenvolvida (resolvida em um único passo) é um método competitivo quando comparada com outros métodos da literatura, incluindo os métodos baseados em dois estágios. Outra vantagem observada, é a possibilidade de considerar que a matriz de saída ($C_y(\alpha(k))$) seja politópica ou polinomial com elementos genéricos, enquanto outras técnicas da literatura requerem que essa matriz seja independente de parâmetros, que possua uma estrutura particular ou que passe por transformações de similaridade. Adicionalmente, a abordagem proposta também permite considerar as matrizes de transmissão direta ($E_y(\alpha(k))$) com estrutura genérica, sendo que a maior parte dos trabalhos de síntese de controladores por realimentação estática de saída desprezam a existência desse termo.

No que se refere à estabilização de sistemas LTI e LPV politópicos, foi apresentada uma nova heurística de busca por soluções estabilizantes, a qual mostrou-se notoriamente eficiente em termos estatísticos. Para isso, foi proposto um algoritmo que emprega condições de síntese relaxadas, permitindo que a taxa de decaimento viole o limite superior unitário (que os polos do sistema violem a limitação do raio unitário no caso LTI) em um primeiro passo. Caso exista uma solução, a estabilidade do sistema em malha fechada é testada *a posteriori* por meio de uma condição de estabilidade robusta. Utilizando essa nova heurística, foi observado que os resultados mostraram-se menos conservadores estatisticamente, ou seja, mais sistemas puderam ser estabilizados quando comparados a outras técnicas. Além disso, foi notado que o esforço computacional para encontrar soluções factíveis foi menor do que o melhor método da literatura, uma vez que as soluções factíveis foram encontradas utilizando menos buscas nos escalares.

Os resultados apresentados, os quais mostraram-se vantajosos para o projeto de controladores (tanto em termos estatísticos quanto em termos de menores custos garantidos para alguns exemplos retirados da literatura), são obtidos graças ao uso de variáveis de decisão polinomiais de graus genéricos e pela busca em diversos parâmetros escalares, conforme foi ilustrado pelos vários experimentos numéricos apresentados ao longo da dissertação. No entanto, os benefícios da técnica apresentam em contrapartida um esforço computacional em geral maior (em termos de linhas de LMIs, variáveis de otimização e tempo computacional) que as condições da literatura. Embora outros procedimentos de busca nos parâmetros escalares pudessem ter sido explorados para melhorar ainda mais os resultados obtidos, optou-se em seguir algumas sugestões de buscas propostas em trabalhos anteriores, sendo suficiente para ilustrar a superioridade das condições propostas.

Perspectivas

Como perspectivas para trabalhos futuros, existem três diferentes vertentes que podem ser exploradas. A primeira é tratar o problema de síntese dos controladores dinâmicos que, da maneira como foram abordados (baseados no sistema aumentado), podem apresentar estruturas esparsas. Assim, pode-se investigar diferentes formulações, como a que foi dada em Tognetti *et al.* (2012), de forma a obter controladores dinâmicos de ordem superior que produzam melhores desempenhos que os controladores de ordem zero (estáticos).

A segunda vertente é estender os resultados propostos para tratar o caso de sistemas incertos contínuos no tempo. Embora esse desenvolvimento pareça trivial, particularmente no contexto LPV, são encontrados alguns desafios, por exemplo, como lidar com a derivada da matriz de Lyapunov. Acredita-se que tal extensão possa fornecer métodos competitivos com as técnicas disponíveis na literatura para essa classe de sistemas.

Outro tema prospectivo para investigações futuras é realizar a estimação dos parâmetros variantes no tempo e propor controladores escalonados em termos dos parâmetros estimados, levando em conta os erros gerados na estimação. Estes controladores tornam-se mais conservadores quando comparados aos que utilizam parâmetros com medições exatas (embora essa hipótese não seja realística), uma vez que é necessário acrescentar as informações associadas aos erros de estimação nas condições de projeto.

Trabalhos produzidos

- ROSA, T. E.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F. $\mathcal{H}_\infty$ output-feedback gain-scheduling control for discrete-time linear systems affected by time-varying parameters. In: *20th IFAC World Congress*, Toulouse, France: 2017. p. 8948–8953.

Referências

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. Baltimore, MD, USA: [s.n.], 2010. p. 4677–4682. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 61.

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 2298–2305. Citado 5 vezes nas páginas 15, 38, 40, 74 e 76.

APKARIAN, P.; ADAMS, R. J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 6, n. 1, p. 21–32, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

APKARIAN, P.; PELLANDA, P. C.; TUAN, H. D. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ multi-channel linear parameter-varying control in discrete time. *Systems & Control Letters*, v. 41, n. 5, p. 333–346, December 2000. Citado na página 14.

APS, M. *The MOSEK optimization software*. [S.l.], 2015. <http://www.mosek.com>. Citado na página 56.

BARBOSA, K. A.; de Souza, C. E.; TROFINO, A. Robust $\mathcal{H}_2$ filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: [s.n.], 2002. p. 3224–3229. Citado na página 23.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretização e controle por realimentação de estados de sistemas lineares incertos. In: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*. Fortaleza, CE, Brasil: [s.n.], 2013. p. 1–6. Citado na página 15.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florence, Italy: [s.n.], 2013. p. 6397–6402. Citado na página 15.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretisation and control of polytopic systems with uncertain sampling rates and network-induced delays. *International Journal of Control*, v. 87, n. 11, p. 2398–2411, November 2014. Citado 5 vezes nas páginas 15, 19, 43, 44 e 56.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation of discretized uncertain continuous-time systems. In: *Proceedings of the 2014 American Control Conference*. Portland, OR, USA: [s.n.], 2014. p. 5073–5078. Citado na página 15.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretization and discrete-time output feedback control of linear parameter varying continuous-time systems. In: *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, CA, USA: [s.n.], 2015. p. 4765–4771. Citado na página 15.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretization and event triggered digital output feedback control of LPV systems. *Systems & Control Letters*, v. 86, p. 54–65, 2015. Citado na página 15.

BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Linear quadratic networked control of uncertain polytopic systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 26, n. 11, p. 2299–2313, July 2016. Citado na página 15.

CHANG, X.-H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. Robust static output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 85, p. 23–32, august 2015. Citado 3 vezes nas páginas 15, 60 e 61.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 43, n. 5, p. 355–359, August 2001. Citado 3 vezes nas páginas 14, 41 e 42.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Poly-quadratic stability and $\mathcal{H}_\infty$ performance for discrete systems with time varying uncertainties. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, USA: [s.n.], 2001. v. 1, p. 267–272. Citado na página 39.

DAAFOUZ, J.; MILLERIOUX, G.; IUNG, C. A poly-quadratic stability based approach for linear switched systems. *International Journal of Control*, v. 75, n. 16-17, p. 1302–1310, November 2002. Citado 5 vezes nas páginas 10, 26, 44, 45 e 46.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$-control for discrete-time polytopic LPV systems using homogeneous polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2009)*. Haifa, Israel: [s.n.], 2009. p. 19–24. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 58.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time polytopic time-varying systems. *IET Control Theory & Applications*, v. 4, n. 3, p. 362–380, March 2010. Citado 7 vezes nas páginas 14, 15, 23, 24, 37, 58 e 60.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; SWEVERS, J. Identification of MIMO LPV models based on interpolation. In: *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*. Leuven, Belgium: [s.n.], 2008. Citado na página 19.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; SWEVERS, J. Interpolating model identification for SISO linear parameter-varying systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, n. 8, p. 2395–2417, November 2009. Citado na página 19.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 24.

DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 54, n. 6, p. 2110–2118, June 2006. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 23.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of switched linear systems. *Automatica*, v. 47, n. 8, p. 1713–1720, 2011. Citado na página 26.

DONG, J.; YANG, G.-H. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 2, p. 123–131, February 2008. Citado na página 37.

DONG, J.; YANG, G.-H. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, v. 49, n. 6, p. 1821–1829, 2013. Citado na página 37.

DU, X.; YANG, G.-H. LMI conditions for $\mathcal{H}_\infty$ static output feedback control of discrete-time systems. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 5450–5455. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 58 e 60.

EL GHAOUI, L.; OUSTRY, F.; AIT-RAMI, M. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 8, p. 1171–1176, August 1997. Citado na página 19.

ELIA, N.; MITTER, S. K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, 2001. Citado na página 21.

EMEDI, Z.; KARIMI, A. Fixed-structure LPV discrete-time controller design with induced ℓ_2-norm and $\mathcal{H}_2$ performance. *International Journal of Control*, v. 89, n. 3, p. 494–505, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 59.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 12, p. 1984–1989, December 2006. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.

GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, p. 997–1003, July 1996. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 37.

HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 1, p. 54–69, January 1992. Citado na página 22.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PóLYA, G. *Inequalities*. 2. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1952. Citado na página 38.

HOFFMANN, C.; WERNER, H. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 23, n. 2, p. 416–433, 2015. Citado na página 15.

HUANG, J.; WEN, C.; WANG, W.; JIANG, Z.-P. Adaptive output feedback tracking control of a nonholonomic mobile robot. *Automatica*, v. 50, n. 3, p. 821–831, 2014. Citado na página 14.

IWASAKI, T. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, p. 85–99, March 1996. Citado na página 43.

KEEL, L.; BHATTACHARYYA, S. P.; HOWZE, J. W. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 1, p. 68–78, 1988. Citado na página 56.

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. Citado na página 20.

LEE, J.-W. On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 10, p. 1714–1721, October 2006. Citado na página 14.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 2, p. 308–322, February 2009. Citado na página 26.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 76.

MÅRTENSSON, B. The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization. *Systems & Control Letters*, v. 6, n. 2, p. 87–91, 1985. Citado na página 19.

MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. (Ed.). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. New York: Springer, 2012. Citado na página 15.

MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LINGUANOTTO, A. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Controle robusto por realimentação de estados para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs com parâmetros escalares. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 1664–1671. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 44.

MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 3876–3881. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

MOREIRA, H. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust $\mathcal{H}_2$ static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 32, n. 1, p. 1–13, January/February 2011. Citado na página 62.

OLIVEIRA, M. C. de; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, July 1999. Citado na página 39.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; OLIVEIRA, M. C. de; PERES, P. L. D. Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons. In: *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Denver, CO, USA: [s.n.], 2011. p. 1038–1043. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007. Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 76.

PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C.; SOUZA, S. R. $\mathcal{H}_2$ output feedback control for discrete-time systems. In: *Proceedings of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD, USA: [s.n.], 1994. v. 3, p. 2429–2433. Citado na página 37.

PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C.; SOUZA, S. R. Optimal $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control for continuous-time linear systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 82, n. 2, p. 343–359, August 1994. Citado na página 14.

RAMOS, D. C. W.; PERES, P. L. D. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 4, p. 675–678, April 2002. Citado na página 74.

RUGH, W. J. *Linear system theory*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1996. v. 2. Citado na página 21.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, v. 36, n. 10, p. 1401–1425, October 2000. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

SADABADI, M. S.; KARIMI, A. An LMI formulation of fixed-order $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ controller design for discrete-time systems with polytopic uncertainty. In: *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*. Florence, Italy: [s.n.], 2013. p. 2453–2458. Citado na página 62.

SATO, M.; PEAUCELLE, D. Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems. *Automatica*, v. 49, n. 4, p. 1019–1025, April 2013. Citado na página 15.

SCHERER, C. W. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for time-varying and linear parametrically-varying systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, n. 9-10, p. 929–952, 1996. Citado na página 14.

SHIRAZI, F. A.; GRIGORIADIS, K. M.; VIASSOLO, D. Wind turbine integrated structural and LPV control design for improved closed-loop performance. *International Journal of Control*, v. 85, n. 8, p. 1178–1196, 2012. Citado na página 14.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>. Citado na página 40.

SZÁSZI, I.; MARCOS, A.; BALAS, G. J.; BOKOR, J. Linear paramater-varying detection filter design for a boeing 747-100/200 aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 28, n. 3, p. 461–470, 2005. Citado na página 14.

TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Reduced-order dynamic output feedback control of continuous-time T–S fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 207, p. 27–44, November 2012. Citado na página 65.

VIEIRA, H. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ control by means of state-feedback for polytopic linear systems using LMIs and scalar searches. In: *Proceedings of the 2015 American Control Conference*. Chicago, IL, USA: [s.n.], 2015. p. 5966–5973. Citado 5 vezes nas páginas 28, 29, 30, 38 e 41.

WANG, F.-Y.; LIU, D. *Networked control systems*. London, UK: [s.n.], 2008. (Theory and Applications, Springer-Verlag). Citado na página 19.

WHITE, B.; BRUYERE, L.; TSOURDOS, A. Missile autopilot design using quasi-LPV polynomial eigenstructure assignment. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 43, n. 4, p. 1470–1483, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.

WICKS, M.; PELETIES, P.; DECARLO, R. Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems. *European Journal of Control*, v. 4, n. 2, p. 140–147, 1998. Citado na página 26.

ZHOU, K.; KHARGONEKAR, P. P. Robust stabilization of linear systems with norm bounded time varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, v. 10, p. 17–20, January 1988. Citado na página 24.

Apêndices

APÊNDICE A – Descrição de Matrizes Polinomiais

A notação proposta em Oliveira e Peres (2007) é utilizada para descrever matrizes polinomiais em termos de monômios conhecidos. Seja, por exemplo, a matriz[1] $P(\alpha)$,

$$P(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g)} \alpha^{k_1} \dots \alpha^{k_N} P_k, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N \tag{A.1}$$

sendo $\alpha^{k_1} \dots \alpha^{k_N}$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$ os monômios da matriz polinomial $P(\alpha)$ cujos coeficientes são denotados por $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$. Por definição, $\mathcal{K}_N(g)$ é o conjunto de N-uplas cujos elementos são os números inteiros não negativos solução da equação $k_1 + \dots, k_N = g$. Utilizando a teoria de análise combinatorial, mostra-se que o número de N-uplas do conjunto $\mathcal{K}_N(g)$, definido por $\mathcal{J}_N(g)$, é dado por

$$\mathcal{J}_N(g) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!}.$$

Por exemplo, para variáveis polinomiais homogêneas de grau $g = 2$ com $N = 3$ vértices, têm-se $\mathcal{K}_3(2) = \{\{200\}, \{110\}, \{020\}, \{011\}, \{002\}, \{101\}\}$ e $\mathcal{J}_3(2) = 6$, representando uma variável genérica

$$P(\alpha) = \alpha_1^2 P_{200} + \alpha_1 \alpha_2 P_{110} + \alpha_2^2 P_{020} + \alpha_2 \alpha_3 P_{011} + \alpha_3^2 P_{002} + \alpha_1 \alpha_3 P_{101}.$$

[1] A mesma representação pode ser tomada para o caso de matrizes dependentes de parâmetros variantes no tempo, considerando que esta representa a matriz em cada instante de tempo k.

APÊNDICE B – Relaxações LMIs

Neste apêndice, seguindo a linha de desenvolvimento apresentada nos trabalhos (RAMOS; PERES, 2002; OLIVEIRA; PERES, 2007) para tratar LMIs dependentes de parâmetros, são apresentadas duas relaxações para as LMIs dependentes de parâmetros do Lema 2.1, uma baseada em uma matriz de Lyapunov independente de parâmetros (estabilidade quadrática) e outra baseada em uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. Além disso, também é mostrado como relaxações podem ser obtidas diretamente no *parser* ROLMIP para Matlab (AGULHARI *et al.*, 2012).

Por simplicidade de apresentação, é considerado o problema apresentado no Lema 2.1 para tratar o caso de estabilidade de sistemas LPV politópicos do tipo (2.9), de forma que a matriz $\hat{A}(\alpha(k))$ do sistema possua a forma apresentada em (2.16). É importante enfatizar que as técnicas apresentadas podem ser facilmente estendidas para tratar os outros problemas apresentados nessa dissertação, por exemplo, manipular as condições que tratam do controle $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ para sistemas LPV polinomiais.

B.1 Relaxações LMIs

As condições do Lema 2.1, da forma como estão apresentadas, são LMIs dependentes do parâmetro variante no tempo $\alpha(k)$. Assim, a programação dessas condições caracteriza um problema de dimensão infinita, uma vez que é necessário verificar as desigualdades para todos os valores de $\alpha(k) \in \Lambda$. Para contornar essa dificuldade, uma possível abordagem é considerar estruturas particulares para as variáveis do problema, por exemplo, dependência afim no parâmetro, com as quais seja possível obter um conjunto finito de LMIs que, se verificado, garante a validade (apenas suficiente) das condições LMIs dependentes de parâmetros originais para todo $\alpha(k) \in \Lambda$.

Considerando o caso da estabilidade do sistema (2.9), pode-se arbitrar uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov $P(\alpha(k))$, presente nas condições do Lema 2.1, por exemplo, que a mesma seja constante para todo o domínio paramétrico do sistema, ou seja, $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k+1)) = P$ para todo $\alpha(k) \in \Lambda$. Essa escolha reproduz a chamada *estabilidade quadrática*. Desta forma, é possível obter a condição de estabilidade suficiente apresentada a seguir.

Lema B.1. *Se existir uma matriz $P \in \mathbb{S}_+^{n\times n}$, tal que*

$$\begin{bmatrix} P & \hat{A}_i P \\ P\hat{A}_i' & P \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \quad i = 1, \ldots, N,$$

sejam verificadas, então o sistema (2.9) é assintoticamente estável.

Contudo, percebe-se que a escolha da matriz de Lyapunov independente dos parâmetros variantes no tempo é bastante conservadora, uma vez que uma única matriz P deve garantir a estabilidade em todo domínio paramétrico. Tendo em vista a redução desse conservadorismo, uma alternativa é considerar que a matriz de Lyapunov possui a mesma estrutura que a matriz dinâmica do sistema $\hat{A}(\alpha(k))$, isto é, seja politópica com dependência afim no parâmetro incerto, tomando a seguinte forma

$$P(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(k) P_i, \quad \alpha(k) \in \Lambda. \tag{B.1}$$

Considerando ainda que os parâmetros $\alpha(k)$ variam arbitrariamente no tempo entre dois instantes de tempo, isto é, $\alpha(k+1) = \beta(k)$, $\beta(k) \in \Lambda$, tem-se que a estabilidade do sistema (2.9) pode ser alternativamente certificada pelo lema apresentado a seguir.

Lema B.2. *Se existirem matrizes $P_i \in \mathbb{S}_+^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, N$, tais que*

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P_j & \hat{A}_i P_i \\ P_i \hat{A}_i' & P_i \end{bmatrix} > 0, \quad && \begin{array}{l} i = 1, \ldots, N, \\ j = 1, \ldots, N \end{array} \\ &\begin{bmatrix} 2P_j & \hat{A}_i P_l + \hat{A}_l P_i \\ P_l \hat{A}_i' + P_i \hat{A}_l' & P_i + P_l \end{bmatrix} > 0, \quad && \begin{array}{l} i = 1, \ldots, N, \\ j = 1, \ldots, N, \\ l = i+1, \ldots, N, \end{array} \end{aligned} \tag{B.2}$$

sejam verificadas, então o sistema (2.9) é assintoticamente estável.

Ao invés de apresentar uma prova formal e genérica para o Lema B.2, é apresentado como obter as LMIs dadas em (B.2) para um caso particular em que N=2 (sistema com dois vértices). Considere as matrizes:

$$\hat{A}(\alpha(k)) = \alpha_1(k) A_1 + \alpha_2(k) A_2, \quad P(\alpha(k)) = \alpha_1(k) P_1 + \alpha_2(k) P_2,$$
$$\alpha_1(k) + \alpha_2(k) = 1, \quad \alpha_1(k) \geq 0, \quad \alpha_2(k) \geq 0,$$
$$P(\beta(k)) = \beta_1(k) P_1 + \beta_2(k) P_2,$$
$$\beta_1(k) + \beta_2(k) = 1, \quad \beta_1(k) \geq 0, \quad \beta_2(k) \geq 0.$$

Assim, desenvolvendo a desigualdade do Lema 2.1 com essas matrizes, e aplicando as homogenizações necessárias (para que todos os termos tenham os mesmos graus), obtém-se o seguinte polinômio matricial

$$\alpha_1(k)^2\beta_1(k)\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & A_1P_1 \\ P_1A_1' & P_1 \end{bmatrix}}_{T_1} + \alpha_1^2(k)\beta_2(k)\underbrace{\begin{bmatrix} P_2 & A_1P_1 \\ P_1A_1' & P_1 \end{bmatrix}}_{T_2}$$
$$+ \alpha_1(k)\alpha_2(k)\beta_1(k)\underbrace{\begin{bmatrix} 2P_1 & A_1P_2 + A_2P_1 \\ P_2A_1' + P_1A_2' & P_1 + P_2 \end{bmatrix}}_{T_3}$$
$$+ \alpha_1(k)\alpha_2(k)\beta_2(k)\underbrace{\begin{bmatrix} 2P_2 & A_1P_2 + A_2P_1 \\ P_2A_1' + P_1A_2' & P_1 + P_2 \end{bmatrix}}_{T_4}$$
$$+ \alpha_2(k)^2\beta_1(k)\underbrace{\begin{bmatrix} P_2 & A_2P_2 \\ P_2A_2' & P_2 \end{bmatrix}}_{T_5} + \alpha_2(k)^2\beta_1(k)\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & A_2P_2 \\ P_2A_2' & P_2 \end{bmatrix}}_{T_6} > 0.$$

Observe que a verificação da positividade de cada um dos termos T_i, $i = 1, \ldots, 6$, desse polinômio equivale a verificar as desigualdades descritas no Lema B.2. Portanto, caso (B.2) seja satisfeita, então o sistema (2.9) com $N = 2$ vértices é assintoticamente estável para toda variação arbitrária de $\alpha(k) \in \Lambda$. Note que o teste de positividade do polinômio matricial resultante é apenas suficiente, embora seja bastante simples de ser aplicado. Isto é, considerando que tanto $\alpha_i(k)$ quanto $\beta_j(k)$ são sempre não negativos (pertencem ao simplex unitário), impor que $T_i > 0$ é suficiente para que o polinômio matricial seja definido positivo para todo $\alpha(k)$ e $\beta(k)$.

Como mencionado anteriormente, as condições do Lema B.2 são menos conservadoras do que as condições do Lema B.1, pois não há a imposição de uma mesma matriz de Lyapunov para certificar a estabilidade do sistema para todo o domínio paramétrico. Além disso, escolhendo $P_i = P_j = P$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, N$, nas condições do Lema B.2 recupera-se exatamente a condição de estabilidade do Lema B.1. Tendo como base os conceitos apresentados sobre relaxações polinomiais, fundamentados nos métodos propostos em Oliveira e Peres (2007), foi desenvolvido o *parser* ROLMIP (*Robust LMI Parser*) para Matlab (AGULHARI *et al.*, 2012). Esse pacote computacional, que trabalha conjuntamente com o *parser* Yalmip (LÖFBERG, 2004), torna possível a obtenção de um conjunto finito de LMIs ao fixar as variáveis de otimização como polinômios (mais precisamente, polinômios homogêneos) de um grau $g \geq 0$ fixo, viabilizando a verificação da factibilidade das LMIs robustas iniciais. O código mostrado na sequência apresenta um exemplo simples de programação utilizando este *parser* para obter a solução do problema apresentado no Lema B.2 considerando um grau $g \geq 0$. Seja `A` uma matriz construída na forma de célula de forma que `A{i}` corresponde ao vértice i do politopo.

```
N = size(A,2);       % quantidade de vertices
n = size(A{1},2) ;   % ordem

Ai = rolmipvar(A,'A',N,1); % Matriz A de entrada dada como estrutura do
                     % tipo celular - cada celula se comporta como um
                     % vertice do politopo
Palpha = rolmipvar(n,n,'Palpha','symmetric',N,g); % define P(\alpha)
                     % quadrada de ordem n, simetrica e polinomial com
                     % um grau g de dependencia nos parametros \alpha.
Pbeta = fork(Palpha,'Palpha'); % define P(\beta) em um simplex distinto
                     % de P(\alpha): parametro beta nao depende de alpha

LMIs = [[Pbeta A*Palpha; Palpha*A' Palpha] >= 0];

sol = solvesdp(LMIs,[],sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi'));

estavel = min(checkset(LMIs)) > 0;
```