

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

**Antena de Microfita com Um ou Dois Elementos  
Radiadores, ressoando ao longo da Direção  
Azimutal, sobre Superfície Cônica**

Eng. Wagner Gomes Barbosa

orientador : Prof. Dr. Atílio José Giarola

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por Wagner Gomes Barbosa  
e aprovada pela Comissão

Julgadora em 20/03/95.

Atílio José Giarola  
Orientador

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para atendimento dos pré-requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

março 1995

Dedico esta tese às principais pessoas da minha existência:

ABEL e MABEL GOMES BARBOSA, meus pais;  
WALTER, WALMIR, WOLBAN, WALTEÍZE, WALDETE, WEIDSON E WATSON,  
meus irmãos;  
LÍGIA E CRISTINA, minhas cunhadas;  
ALEXANDRE, WANESSA, EDGAR HENRIQUE e as GÊMEAS que estão por vir, meus  
sobrinhos;  
como também a todas as pessoas que acreditam em seus sonhos e são perseverantes,  
disciplinadas e determinadas a fazer com que estes se tornem realidade, apesar das  
circunstâncias.

## Agradecimentos...

... aos amigos RUBEM, JOÃO, MARCELO, TEREZA, MARIA JOSÉ, KARIN, CARLOS, LUCIANO e HELDER pela convivência num clima de cooperação mútua e companheirismo; pelo mesmo motivo aos funcionários EMERSON e MÁRCIA.

...aos professores do Departamento de Microonda e Óptica, GIAROLA, RUI e EVANDRO CONFORTI pela sempre disposição em ajudar;

...ao NILTON e a VIRGÍNIA pelas dicas de  $\text{\LaTeX}$ ;

...ao CLAUDIO CASTELLI e RONEY pelos apoios de laboratório;

...ao LUÍS CLÁUDIO CORADINE pelo ensino do software XFIG;

...ao JEAN CARLO FAUSTINO pela explanação de dúvidas no sistema UNIX;

...ao EMÍLIO ABUD da Telebrás pelos conselhos importantes;

...aos demais colegas e funcionários da Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, que direta ou indiretamente contribuíram através da constante cooperação e pronta ajuda para a realização deste trabalho;

...às seguintes agências brasileiras: CAPES, CNPq, TELEBRÁS e FINEP;

...aos meus pais pelo incentivo durante todo o período de execução da tese e também durante toda a minha vida;

...a Deus pela força de vontade.

“ Amai ao próximo como a ti mesmo.”

Jesus Cristo, Século I.

## Sumário

Um desenvolvimento teórico é aqui apresentado para a análise de antenas de microfita sobre superfície cônica e operando no modo  $TM_{10}$ . Três antenas de microfita são propostas e analisadas, duas delas com um único *patch* e uma com dois *patches*, simetricamente localizados, ao redor da superfície cônica. Nessa análise, o modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas é utilizado para o cálculo da frequência de ressonância e da impedância de entrada. A formulação através das funções diádicas de Green é utilizada para a obtenção dos campos radiados pelas antenas, na região dos campos distantes. Resultados numéricos para essas antenas são apresentados para: 1) frequência de ressonância, 2) impedância de entrada em função do ponto de alimentação e da frequência e 3) diagrama de radiação. O conhecimento destes resultados é importante para o projeto das antenas consideradas.

## Abstract

A theoretical development is presented here for the analysis of microstrip antennas on a conical surface and operating in the  $TM_{10}$  mode. Three microstrip antennas are proposed and analyzed, two of them with a single patch and one with two patches, symmetrically located around the conical surface. In this analysis the cavity model with magnetic side walls is used for the calculation of the resonant frequency and input impedance. The dyadic Green's functions formulation is used for obtaining the fields radiated by the antennas, in the far field region. Numerical results for these antennas are shown for: 1) resonant frequency, 2) input impedance as function of feed position and of frequency, and 3) radiation pattern. The knowledge of these results is important for the design of this considered antennas.

# Índice

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>i</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>ÍNDICE</b>	<b>iii</b>
<b>1 A antena de microfita</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Configuração . . . . .	4
1.3 Utilização . . . . .	5
1.4 Método do modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas . . . . .	6
<b>2 Formulação das funções diádicas de Green para a obtenção dos campos radiados</b>	<b>8</b>
2.1 Função diádica de Green . . . . .	8
2.2 Função diádica de Green para o espaço livre . . . . .	13
2.3 Função diádica de Green de 2 <sup>a</sup> espécie para estruturas cônicas condutoras perfeitas obtida pelo método de Ohm-Rayleigh. . . . .	17
<b>3 Impedância de entrada</b>	<b>22</b>
3.1 Cálculo do campo elétrico sob o <i>patch</i> . . . . .	22

3.1.1	Funções de Legendre . . . . .	25
3.1.2	Funções de Bessel esféricas . . . . .	27
3.2	"Patch" com ressonância ao longo do azimute ( $\phi$ ) . . . . .	32
3.2.1	Escolha de $\theta_0$ e dos autovalores $m$ e $\lambda$ . . . . .	32
3.2.2	Escolha das dimensões do <i>patch</i> para $m = 2, \lambda = 3$ . . . . .	36
3.3	Impedância de entrada obtida a partir da expansão do campo elétrico na cavidade . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Campos radiados pela antena</b> . . . . .	<b>45</b>
4.1	Perdas e fatores de qualidade . . . . .	45
4.2	Potência radiada pela antena e energia armazenada na cavidade. . . . .	47
4.3	Campos radiados considerando ressonância ao longo da direção azimutal. . . . .	48
<b>5</b>	<b>Antenas com um <i>patch</i> para ressonância azimutal</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1	Antena com modo de ressonância para $\lambda=2$ . . . . .	59
5.1.1	Escolha de $\theta_0$ e dos autovalores $m$ e $\lambda$ . . . . .	59
5.1.2	Escolha das dimensões do <i>patch</i> para $m = 1, \lambda = 2$ . . . . .	61
5.1.3	Impedância de entrada obtida a partir da expansão do campo elétrico na cavidade . . . . .	65
5.1.4	Campos radiados pela antena . . . . .	66
5.2	Antena com modo de ressonância para $\lambda=3$ . . . . .	73
5.2.1	Escolha de $\theta_0$ e dos autovalores $m$ e $\lambda$ . . . . .	73
5.2.2	Escolha das dimensões do <i>patch</i> para $m = 1, \lambda = 3$ . . . . .	74
5.2.3	Impedância de entrada obtida a partir da expansão do campo elétrico na cavidade . . . . .	77
5.2.4	Campos radiados pela antena . . . . .	78



<b>6 Resultados Numéricos</b>	<b>85</b>
6.1 Freqüência de ressonância, fator de qualidade de radiação e diretividade . .	85
6.2 Impedância de entrada . . . . .	86
6.3 Diagrama de radiação . . . . .	88
<b>7 Conclusão</b>	<b>91</b>
7.1 Trabalhos Futuros . . . . .	92
<b>A Dimensionamento da superfície cônica metálica e do <i>patch</i></b>	<b>93</b>
A.1 Superfície cônica metálica (superfície de terra) . . . . .	93
A.2 <i>Patch</i> . . . . .	96
<b>B Correção devida ao efeito de borda</b>	<b>98</b>
<b>C Programas Utilizados</b>	<b>101</b>
C.1 Programa para o cálculo das impedâncias de entrada . . . . .	101
C.2 Programa para o cálculo dos campos radiados . . . . .	104
C.3 Programa para o cálculo do fator de qualidade . . . . .	106
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>107</b>

# Capítulo 1

## A antena de microfita

### 1.1 Introdução

O conceito de antena manufaturada a partir da microfita, apareceu com Deschamps [1], nos Estados Unidos, em 1953, e, dois anos depois, na França, com Gutton e Bassinot [2], continuado em 1960 por Lewin [3].

Entretanto, nenhum outro trabalho, de igual importância que o relatório original de Deschamps, foi relatado na literatura até 1970, quando Byron [4] publicou o seu trabalho em radiador de fita condutora. Neste trabalho, as antenas possuíam meio comprimento de onda de largura e vários outros comprimentos de onda ao longo da fita, as quais eram alimentadas por conexões coaxiais, em intervalos periódicos ao longo de ambas as bordas radiadoras. Aplicações práticas resultaram deste trabalho.

Pouco depois, em 1972, resultados com *patches* de microfita circulares e retangulares foram publicados por Howell [5] e em 1973, um elemento de microfita foi patenteado por Munson [6].

Weinschell [7], ainda em 1973, publicou um relatório cujo progresso consistia no desenvolvimento de diversos tipos de geometrias de microfita utilizadas em redes, operando na Banda-S de frequência, sobre estruturas de superfícies cilíndricas, para soldagem em foguetes.

Em 1974, Sanford [8] mostrou que o elemento de microfita poderia ser usado

no projeto de uma rede conformável de elementos, para comunicação na Banda-L de uma aeronave KC-135, para o satélite ATS-6. Trabalhos adicionais em elementos básicos de microfita foram relatados em 1975, por Garvin et al. [9], onde uma antena de microfita era montada na base de um pequeno míssil com baixo perfil elétrico. Howel [10] com antenas de microfita e Weinschell [11] com uma rede cilíndrica de antenas de microfita polarizadas circularmente, e finalmente James e Wilson [12] desenvolveram técnicas novas de projeto para redes de antenas de microfita. O trabalho de Munson no desenvolvimento de antenas de microfita, para uso com baixo perfil não-saliente, montadas em foguetes e mísseis, mostraram que estas eram de uma concepção prática para uso em muitos problemas de sistemas de antenas, e através disso nasceu uma nova indústria de antena.

O modelo matemático do radiador de microfita básico foi, inicialmente, retirado da analogia com a linha de transmissão para um simples *patch* retangular, alimentado no centro de uma de suas paredes radiantes, por Munson [13] e Derneryd [14].

Em 1976, a radiação padrão de uma antena de microfita circular analisada e medida, foi relatada por Carver [15]. A primeira análise matemática de uma larga variedade de antenas de microfita foi publicada em 1977 por Lo et al. [16], o qual usou a técnica de expansão modal para analisar *patches* retangulares, circulares e semicirculares. Depois, no mesmo ano, Derneryd [17] publicou uma teoria de investigação de um elemento retangular de uma antena de microfita, e Shen e Long [18] relataram antenas de circuito impresso de baixo perfil.

No ano de 1978, a antena de microfita ficou muito mais conhecida e tornou-se largamente usada numa grande variedade de sistemas de comunicação. Isto despertou a atenção da comunidade teórica para desenvolver modelos matemáticos, os quais poderiam ser usados para projetos.

No encontro internacional de 1979, na Universidade do Novo México, em Las Cruces, foram apresentados materiais para antenas de microfita, projetos práticos, configurações de rede e modelos teóricos. Na mesma época, Kaloi [19] publicou um trabalho que estudou configurações quadradas e retangulares básicas.

Então, em 1981, foi publicado por Carver e Mink [20] um relatório que descrevia a tecnologia da antena de microfita com as suas configurações, métodos de alimentação e resultados matemáticos em várias frequências de operação, e em 1982 Chew [21] trabalhou

com uma antena de microfita em anel de faixa larga.

A partir de então, procurou-se conformar a antena de microfita não somente sobre superfícies estratificadas, e muitos trabalhos foram publicados sobre outros tipos de superfícies como cilíndricas, com Krowne [22] em 1983, com Ashkenazy, Shtrikman e Treves [23] em 1985, e com Luk, Lee e Dahele [24] em 1989, além de Lima e Giarola [25] em 1991.

Sobre superfícies esféricas, Tam e Luk [26], em 1991, analisaram a ressonância em estruturas de microfita circulares sobre superfícies esféricas, Lima, Descardecí e Giarola [27] em 1992 e Kishk [28] em 1993, analisaram a antena de microfita circular em uma superfície esférica.

Pouco existe na literatura sobre superfícies cônicas. Um desenvolvimento teórico foi apresentado por Descardecí e Giarola [29] em 1992, que despertou interesse devido à existência de estruturas que possuem forma cônica, como mísseis, foguetes, espaçonaves, aeronaves, etc.

## 1.2 Configuração

Uma antena de microfitas na sua forma mais simplificada consiste num sanduíche de duas placas condutoras paralelas, separadas por um substrato dielétrico fino. A placa condutora inferior funciona como um plano terra, e o condutor superior pode ser um *patch* (elemento ressonante da antena) retangular, circular, em disco, anel ou espiral ressonante, um dipolo ressonante ou uma rede monolítica impressa de *patches* ou dipolos e o seu circuito de alimentação associado.

A permissividade elétrica relativa do substrato dielétrico é uma grandeza de extrema importância no desempenho da antena de microfitas, sendo necessário o uso de um substrato de alta qualidade, ou seja, pequena tolerância, porque uma variação nesta, causa uma variação na frequência de ressonância.

Estas permissividades variam de 1 a 25, com tangente de perdas da ordem de  $10^{-4}$ . Os substratos dielétricos são comumente feitos à base de politetrafluoretileno (PTFE), teflon, duróide e cerâmica, sendo seu uso associado ao valor da constante dielétrica que se necessite.

O superfície de terra, além da geometria plana, pode assumir outras formas, nas quais se concentram esforços dos trabalhos mais recentes, como superfícies cilíndricas, esféricas e cônicas sendo que é nesta última geometria que se desenvolve o presente trabalho.

A alimentação é feita com linhas de microfitas, ligadas diretamente ou por acoplamento capacitivo a uma borda da placa superior, ou por cabo coaxial, sendo o seu condutor central ligado à placa superior, após atravessar o plano terra e o substrato dielétrico, como mostrado na Fig. 1.1.

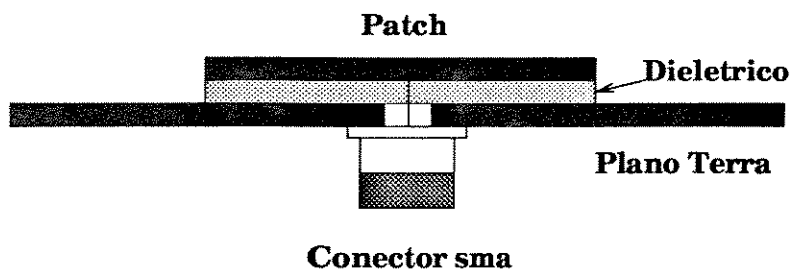


Figura 1.1: Alimentação de uma antena de microfitas via cabo coaxial.

### 1.3 Utilização

As antenas de microfitas são utilizadas, na prática, em comunicações por satélites, radares, veículos de alta velocidade, aeronaves, espaçonaves, mísseis, foguetes, sensores, etc.

Na sua utilização, devemos citar algumas desvantagens, como pequena largura de banda, ganho relativamente baixo, possibilidade de excitação de ondas de superfície, que pode ser diminuída com o uso de substratos finos e de pequena permissividade relativa, além da baixa capacidade de potência.

Porém, o seu uso tornou-se amplamente difundido pela leveza, pequena estrutura volumétrica, baixo perfil, custo reduzido, facilidade de integração com outros circuitos, fácil adaptação a diversas superfícies, obtenção de polarizações linear e circular, com mudança na posição do ponto de alimentação, além da alimentação e dispositivos de casamento poderem ser feitos juntos com a antena, numa estrutura única. Antenas de microfitas práticas tem sido desenvolvidas para uso entre 400 MHz e 38 GHz.

## 1.4 Método do modelo de cavidade com paredes laterais magnética

Existem diversos tipos de métodos para o cálculo e análise das antenas de microfita, como o método dos momentos, das diferenças finitas, dos elementos finitos, etc.

Um dos métodos é o do modelo da linha de transmissão que é baseado na suposição da estrutura da antena ser considerada como uma linha de transmissão carregada por impedâncias em suas bordas radiadoras. Este método é de fácil implementação, mas os seus elementos de microfita só podem ter geometrias retangulares, e desprezam-se os efeitos da alimentação e variações do campo ao longo da abertura, além do efeito de bordas ser determinado praticamente. Tudo isto é eliminado com a técnica da expansão modal, onde o elemento de microfita é considerado como uma cavidade com paredes laterais magnéticas, de fina espessura, operando no modo TM (transverso magnético) de ressonância.

Funções diádicas de Green e o modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas podem também ser usados para a análise de antenas de microfita. Para isso o campo dentro da estrutura é expresso em termos de auto-funções de uma cavidade sem perdas, apresentando alta precisão quando a estrutura sob consideração apresenta uma componente de perda por radiação pequena, de forma que o campo magnético tangencial à superfície da abertura possa ser desconsiderado para a análise dos campos internos à estrutura.

Isto é feito considerando-se que a espessura do dielétrico é muito menor que o comprimento de onda no mesmo. Admite-se também, com boa aproximação, que os campos eletromagnéticos, na região entre os dois condutores, não variam segundo a direção normal ao plano da placa condutora, ocasionando um campo elétrico na região entre a placa condutora e o plano terra com componente apenas na direção normal ao plano da placa e o campo magnético com componentes apenas na direção paralela a esse plano.

Considerando-se também que a corrente elétrica na placa condutora não apresenta componente normal às bordas, então a componente tangencial do campo magnético na região das paredes laterais deve ser nula, para satisfazer às condições de contorno. Esta hipótese de existência de paredes laterais magnéticas acarreta imprecisão no valor da frequência de ressonância da cavidade. Para melhorar a precisão na determinação dessa frequência pode-se fazer uso de fórmulas empíricas, como aquelas apresentadas em [30].

Desta forma, a região entre a placa e o plano terra pode ser considerada como

uma cavidade de paredes laterais magnéticas e superfícies inferior e superior condutoras. Com o princípio de Huygens [31] se define uma densidade de corrente magnética equivalente, para determinação dos campos radiados por esta fonte de corrente magnética em um meio estratificado, que, neste caso, passam a ser também os campos radiados pela antena de microfita. O formalismo das funções diádicas de Green é utilizado para a determinação destes campos.



## Capítulo 2

# Formulação das funções diádicas de Green para a obtenção dos campos radiados

### 2.1 Função diádica de Green

Sendo dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , definidos em coordenadas cartesianas por

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}, \quad \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}, \quad (2.1)$$

a função diádica  $\vec{\vec{D}}$  é definida por [32] como

$$\vec{\vec{D}} = \vec{A}\vec{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})(B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}). \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{\vec{D}} = & (A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} + A_y B_x \hat{y}\hat{x} + \\ & + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + A_y B_z \hat{y}\hat{z} + A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em formato matricial temos

$$[\vec{\vec{D}}] = \begin{vmatrix} A_x B_x \hat{x}\hat{x} & A_x B_y \hat{x}\hat{y} & A_x B_z \hat{x}\hat{z} \\ A_y B_x \hat{y}\hat{x} & A_y B_y \hat{y}\hat{y} & A_y B_z \hat{y}\hat{z} \\ A_z B_x \hat{z}\hat{x} & A_z B_y \hat{z}\hat{y} & A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

$$\vec{D}^{(x)} = A_x B_x \hat{x} + A_y B_x \hat{y} + A_z B_x \hat{z} = B_x \vec{A}, \quad (2.5)$$

$$\vec{D}^{(y)} = A_x B_y \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_y \hat{z} = B_y \vec{A}, \quad (2.6)$$

$$\vec{D}^{(z)} = A_x B_z \hat{x} + A_y B_z \hat{y} + A_z B_z \hat{z} = B_z \vec{A}, \quad (2.7)$$

onde

$$\vec{\vec{D}} = (\vec{D}^{(x)} \hat{x} + \vec{D}^{(y)} \hat{y} + \vec{D}^{(z)} \hat{z}). \quad (2.8)$$

A transposta da função diádica  $[\vec{\vec{D}}]^T$  é, obtida a partir da matriz  $[\vec{\vec{D}}]$ , dada por

$$[\vec{\vec{D}}]^T = \begin{vmatrix} A_x B_x \hat{x}\hat{x} & A_y B_x \hat{y}\hat{x} & A_z B_x \hat{z}\hat{x} \\ A_x B_y \hat{x}\hat{y} & A_y B_y \hat{y}\hat{y} & A_z B_y \hat{z}\hat{y} \\ A_x B_z \hat{x}\hat{z} & A_y B_z \hat{y}\hat{z} & A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Então

$$\vec{\vec{D}}^T = \vec{B} \vec{A}. \quad (2.10)$$

A diádica é dita simétrica quando

$$\vec{D}_s = [\vec{D}_s]^T. \quad (2.11)$$

Um caso especial, de uma diádica simétrica ocorre quando o elemento  $\vec{D}_{i,j} = 0$  para  $i \neq j$  e  $\vec{D}_{i,j} = 1$  para  $i = j$ . Estas duas propriedades podem ser expressas por

$$[\vec{D}_{i,j}] = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde  $\delta_{i,j}$  é chamado de função delta de Kronecker. Esta diádica é chamada função diádica unitária  $\vec{I}$ . Definida como

$$\vec{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}. \quad (2.13)$$

O produto escalar anterior entre a função vetorial  $\vec{C}$  e a função diádica  $\vec{D}$  é dado por

$$\vec{C}.\vec{D} = (\vec{C}.\vec{A})\vec{B}. \quad (2.14)$$

Nota-se que o produto escalar anterior tem como resultado um vetor na direção do elemento posterior  $\vec{B}$  da função diádica.

O produto escalar posterior entre a função diádica  $\vec{D}$  e a função vetorial  $\vec{C}$  é dado por

$$\vec{D}.\vec{C} = \vec{A}(\vec{B}.\vec{C}) = (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}. \quad (2.15)$$

Nota-se que o produto escalar posterior tem como resultado um vetor na direção do elemento anterior  $\vec{A}$  da função diádica.

Nota-se também que  $\vec{C}.\vec{D} \neq \vec{D}.\vec{C}$ , exceto para uma diádica simétrica, a qual implica que

$$\vec{C} \cdot \vec{\vec{D}}_s = \vec{\vec{D}}_s \cdot \vec{C}. \quad (2.16)$$

Em um caso particular

$$\vec{C} \cdot \vec{I} = \vec{I} \cdot \vec{C} = \vec{C}. \quad (2.17)$$

De um modo geral,

$$\vec{C} \cdot \vec{\vec{D}} = [\vec{\vec{D}}]^T \cdot \vec{C}, \quad (2.18)$$

ou

$$\vec{\vec{D}} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot [\vec{\vec{D}}]^T. \quad (2.19)$$

Os produtos vetoriais anterior e posterior resultam em uma função diádica e definem-se, respectivamente, como

$$\vec{C} \times \vec{\vec{D}} = (\vec{C} \times \vec{A}) \vec{B}, \quad (2.20)$$

$$\vec{\vec{D}} \times \vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}). \quad (2.21)$$

Em geral, tem-se

$$\vec{C} \times \vec{\vec{D}} \neq -\vec{\vec{D}} \times \vec{C}, \quad (2.22)$$

e

$$\vec{C} \times \vec{\vec{D}} \neq [\vec{\vec{D}}]^T \times \vec{C}. \quad (2.23)$$

Agora,

$$\vec{C} \times \vec{\vec{D}} = -\{[\vec{\vec{D}}]^T \times \vec{C}\}^T, \quad (2.24)$$

e, em particular,

$$\vec{C} \times \vec{\vec{I}} = -[\vec{\vec{I}} \times \vec{C}]^T. \quad (2.25)$$

O divergente e o rotacional de uma função diádica têm, como resultados, uma função vetorial e uma função diádica, respectivamente, sendo expressos como

$$\nabla \cdot \vec{\vec{D}} = (\nabla \cdot \vec{D}^{(x)})\hat{x} + (\nabla \cdot \vec{D}^{(y)})\hat{y} + (\nabla \cdot \vec{D}^{(z)})\hat{z}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \vec{\vec{D}} = (\nabla \times \vec{D}^{(x)})\hat{x} + (\nabla \times \vec{D}^{(y)})\hat{y} + (\nabla \times \vec{D}^{(z)})\hat{z}. \quad (2.27)$$

Note-se também que

$$\nabla \cdot (\vec{\vec{I}}\delta) = \nabla\delta, \quad (2.28)$$

onde  $\delta$  é uma função escalar da posição .

## 2.2 Função diádica de Green para o espaço livre

As equações de Maxwell, que representam os campos elétricos e magnéticos oscilando harmonicamente no tempo, dependência esta representada por  $e^{+j\omega t}$ , excitados por uma fonte de corrente magnética  $\vec{M}$ , num meio dielétrico isotrópico, linear e homogêneo, com  $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = \epsilon_0$ , são dadas por

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} - \vec{M}, \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \vec{H} = +j\omega\epsilon_0\vec{E}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E}) = \rho, \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\vec{H}) = 0. \quad (2.33)$$

Então os campos radiados por esta fonte serão, após substituição de (2.32) e (2.33) e aplicação do rotacional em (2.29) e (2.30), equações de Maxwell, calculados por

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - \kappa_1^2\vec{H} = -j\omega\epsilon_0\vec{M}, \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \kappa_1^2\vec{E} = -\nabla \times \vec{M}, \quad (2.35)$$

onde  $\kappa_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  é o número de onda no dielétrico.

As soluções para (2.34) e (2.35) são, em função do vetor potencial elétrico  $\vec{F}$ , expressas como

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{\epsilon_0}\nabla \times \vec{F}(\vec{R}), \quad (2.36)$$

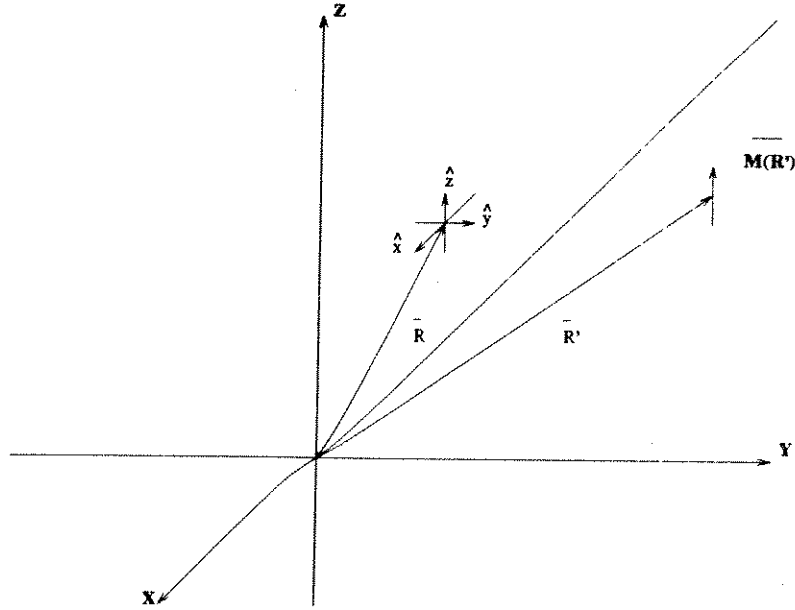


Figura 2.1: O campo elétrico devido a uma fonte infinitesimal de corrente magnética, localizada em  $\vec{R}'$ .

$$\vec{H}(\vec{R}) = -j\omega\left(1 + \frac{1}{\kappa_1^2}\nabla\nabla\cdot\right)\vec{F}(\vec{R}), \quad (2.37)$$

onde

$$\vec{F}(\vec{R}) = \epsilon_0 \int \int \int_v G_0(\vec{R}/\vec{R}') \vec{M}(\vec{R}') dv', \quad (2.38)$$

sendo  $G_0(\vec{R}/\vec{R}')$  a função de Green para o dielétrico, dada por (veja, por exemplo, Tai [33] eq.(3.76), pg. 49)

$$G_0(\vec{R}/\vec{R}') = \frac{e^{-j\kappa_1|\vec{R}-\vec{R}'|}}{4\pi|\vec{R}-\vec{R}'|}. \quad (2.39)$$

Considerando-se na Fig. 1, uma fonte infinitesimal de corrente magnética localizada em  $\vec{R} = \vec{R}'$  e de momento  $-\frac{1}{j\omega\epsilon_0}$  localizado na direção x, pode-se dizer, através de [34], que

$$\vec{M}(\vec{R}') = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0}\delta(\vec{R}-\vec{R}')\hat{x}, \quad (2.40)$$

onde  $\delta(\vec{R} - \vec{R}')$  é a função delta de Dirac.

Por definição ,

$$\int \int \int \vec{M}(\vec{R}') dv' = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} \hat{x}. \quad (2.41)$$

Com  $\vec{M}(\vec{R}')$  dado por (2.40) e substituindo-se em  $\vec{F}(\vec{R})$ , expresso por (2.38), temos como resultado:

$$\vec{F}(\vec{R}) = -\frac{1}{j\omega} G_0(\vec{R}/\vec{R}') \hat{x}. \quad (2.42)$$

Chamando-se de  $\vec{G}^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}')$  o campo magnético produzido pela fonte elementar, a substituição de (2.42) em (2.37) conduz a

$$\vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}') = \left(1 + \frac{1}{\kappa_1^2} \nabla \nabla \cdot\right) G_0(\vec{R}/\vec{R}') \hat{x}. \quad (2.43)$$

A partir de (2.34), com  $\vec{M}(\vec{R}')$  dado por (2.40), verifica-se que  $\vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}')$  tem que satisfazer a equação de onda abaixo

$$\nabla \times \nabla \times \vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}') - \kappa_1^2 \vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}') \hat{x} = \delta(\vec{R} - \vec{R}') \hat{x}. \quad (2.44)$$

A função  $\vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}')$  satisfaz a condição de radiação para  $R \rightarrow \infty$ , isto é, para campos distantes, ou seja,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R[\nabla \times \vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}') + j\kappa_1 \hat{R} \times \vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}')] = 0. \quad (2.45)$$



Definindo-se, da mesma forma que em (2.40), fontes infinitesimais de corrente magnética nas direções  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ , chega-se às funções  $\vec{G}_0^{(y)}(\vec{R}/\vec{R}')$  e  $\vec{G}_0^{(z)}(\vec{R}/\vec{R}')$ . A função diádica de Green para o espaço livre é então definida como

$$\vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}') = \vec{G}_0^{(x)}(\vec{R}/\vec{R}')\hat{x} + \vec{G}_0^{(y)}(\vec{R}/\vec{R}')\hat{y} + \vec{G}_0^{(z)}(\vec{R}/\vec{R}')\hat{z}, \quad (2.46)$$

que satisfaz a seguinte equação de onda:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}') - \kappa_1^2 \vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}') = \vec{\vec{I}}\delta(\vec{R} - \vec{R}'), \quad (2.47)$$

onde  $\vec{\vec{I}}$  é a função diádica identidade.

Sabendo-se que as funções  $\vec{G}_0^{(y)}(\vec{R}/\vec{R}')$  e  $\vec{G}_0^{(z)}(\vec{R}/\vec{R}')$  satisfazem a equações semelhantes à equação (2.43) e, substituindo-se essas expressões em (2.46), temos:

$$\vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}') = (\vec{\vec{I}} + \frac{1}{\kappa_1^2} \nabla \nabla) G_0(\vec{R}/\vec{R}'). \quad (2.48)$$

Conhecendo-se a função diádica de Green para o espaço livre,  $\vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}')$ , pode-se, a partir do teorema vetorial de Green, determinar o campo magnético produzido por uma densidade de corrente magnética  $\vec{M}$  qualquer, através da seguinte relação (veja, por exemplo, Tai [33])

$$\vec{H}(\vec{R}) = -j\omega\epsilon_0 \int \int \int_{v'} \vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{M}(\vec{R}') dv'. \quad (2.49)$$

A integração, na expressão anterior, é efetuada no volume  $v'$  onde se localizam as fontes.

No caso em que  $\vec{M}$  é uma densidade superficial de corrente magnética sobre uma superfície tem-se

$$\vec{H}(\vec{R}) = -j\omega\epsilon_0 \int \int_{s'} \vec{\vec{G}}_0(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{M}(\vec{R}') ds'. \quad (2.50)$$

### 2.3 Função diádica de Green de 2<sup>a</sup> espécie para estruturas cônicas condutoras perfeitas obtida pelo método de Ohm-Rayleigh.

A função escalar de onda,  $\psi_{om\xi}^e$ , solução da equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi_{om\xi}^e + \kappa^2 \psi_{om\xi}^e = 0, \quad (2.51)$$

no sistema de coordenadas esféricas é dado por [33]

$$\psi_{om\xi}^e = z_\xi(\kappa R) [X_\xi^m(\cos \theta)]_{sen}^{\cos}(m\phi), \quad (2.52)$$

com

$$z_\xi(\kappa R) = A_{om\xi}^e j_\xi(\kappa R) + B_{om\xi}^e \eta_\xi(\kappa R), \quad (2.53)$$

onde  $j_\xi(\kappa R)$  e  $\eta_\xi(\kappa R)$  são as funções de Bessel esféricas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> espécies, respectivamente, e de ordem  $\xi$ .  $A_{om\xi}^e$  e  $B_{om\xi}^e$  são constantes a serem determinadas através das condições de contorno. Em particular, em regiões contendo a origem  $\vec{R} = 0$ , tem-se que  $B_{om\xi}^e = 0$ .  $X_\xi^m(\cos \theta)$  é uma função associada de Legendre, dada por

$$X_\xi^m(\cos \theta) = P_\xi^m(\cos \theta) + Y_\xi Q_\xi^m(\cos \theta). \quad (2.54)$$

$P_\xi^m(\cos \theta)$  e  $Q_\xi^m(\cos \theta)$  são as funções associadas de Legendre de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> espécies, de ordem  $\xi$  e associada  $m$  com argumento  $\cos \theta$  e  $Y_\xi$  é uma constante de integração. Para campos eletromagnéticos na presença de um cone condutor simples, a condição de campo finito em  $\theta = 180^\circ$  dos campos eletromagnéticos requer que

$$Y_\xi = -\frac{2}{\pi} \tan(\xi\pi). \quad (2.55)$$

As funções de onda vetoriais esféricas, para um vetor piloto  $\hat{R}$  envolvendo estruturas cônicas condutoras perfeitas, são definidas por [33]

$$\vec{L}_{\text{om}\xi}^e(\kappa) = \nabla \psi_{\text{om}\xi}^e, \quad (2.56)$$

$$\vec{M}_{\text{om}\xi}^e(\kappa) = \nabla \times (\psi_{\text{om}\xi}^e \hat{R}), \quad (2.57)$$

$$\vec{N}_{\text{om}\xi}^e(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times (\psi_{\text{om}\xi}^e \hat{R}), \quad (2.58)$$

onde  $\xi$  pode ser substituído pelos auto valores  $\mu$  e  $\lambda$ , determinados a partir das equações características para o cone simples  $\theta = \theta_0$ , dadas abaixo

$$X_\mu^m(\cos \theta_0) = 0, \quad (2.59)$$

$$\frac{d}{d\theta_0} X_\lambda^m(\cos \theta_0) = 0. \quad (2.60)$$

Substituindo-se (2.52) em (2.57) e (2.58) obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{om}\xi}^e(\kappa) = & \mp \frac{m}{\text{sen}\theta} z_\xi(\kappa R) [X_\xi^m(\cos \theta)]_{\text{cos}}^{\text{sen}}(m\phi) \hat{\theta} \\ & - z_\xi(\kappa R) \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} X_\xi^m(\cos \theta) \right]_{\text{sen}}^{\text{cos}}(m\phi) \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\text{om}\xi}^e(\kappa) = & \frac{\xi(\xi+1)}{\kappa R} z_\xi(\kappa R) [X_\xi^m(\cos \theta)]_{\text{sen}}^{\text{cos}}(m\phi) \hat{R} \\ & + \frac{1}{\kappa R} \frac{\partial}{\partial R} [R z_\xi(\kappa R)] \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} X_\xi^m(\cos \theta) \right]_{\text{sen}}^{\text{cos}}(m\phi) \hat{\theta} \right. \\ & \left. \mp \frac{m}{\text{sen}\theta} [X_\xi^m(\cos \theta)]_{\text{cos}}^{\text{sen}}(m\phi) \hat{\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

que satisfazem as seguintes condições de contorno na superfície do cone,  $\theta = \theta_0$ ,

$$\hat{\theta} \times \vec{M}_{\text{om}\lambda}^e = 0, \quad \hat{\theta} \times \vec{N}_{\text{om}\mu}^e = 0. \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\hat{\theta} \times \nabla \times \vec{M}_{\text{om}\lambda}^e = 0, \quad \hat{\theta} \times \nabla \times \vec{N}_{\text{om}\mu}^e = 0. \quad (\text{Neumann})$$

As funções que satisfazem às condições de contorno de Dirichlet serão usadas para a formulação da função diádica de Green do tipo elétrico e de 1ª espécie, enquanto que as funções que satisfazem as condições de contorno de Neumann serão envolvidas na formulação da função diádica de Green do tipo elétrico e de 2ª espécie.

A partir das funções associadas de Legendre  $P_\xi^m$  e  $Q_\xi^m$ , que satisfazem às equações diferenciais abaixo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta} Z_\lambda^m \right) + \left[ \lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \right] Z_\lambda^m = 0, \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta} Z_\mu^m \right) + \left[ \mu(\mu + 1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \right] Z_\mu^m = 0, \quad (2.64)$$

com  $Z_\xi^m$  podendo ser  $P_\xi^m$  ou  $Q_\xi^m$ , pode-se determinar o fator de normalização para as auto-funções vetoriais.

Multiplicando-se (2.63) por  $\operatorname{sen}\theta Z_\mu^m$  e (2.64) por  $\operatorname{sen}\theta Z_\lambda^m$  e integrando a diferença das duas equações resultantes, de  $\theta = \theta_0$  a  $\pi$ , obtemos

$$[\lambda(\lambda + 1) - \mu(\mu + 1)] \int_{\theta_0}^{\pi} Z_\lambda^m Z_\mu^m \operatorname{sen}\theta d\theta = \left[ \operatorname{sen}\theta Z_\lambda^m \frac{d}{d\theta} Z_\mu^m - \operatorname{sen}\theta Z_\mu^m \frac{d}{d\theta} Z_\lambda^m \right] \Big|_{\theta_0}^{\pi} = 0; \quad (2.65)$$

então

$$\int_{\theta_0}^{\pi} Z_\lambda^m Z_\mu^m \operatorname{sen}\theta d\theta = 0, \quad (2.66)$$

pois  $\mu$  e  $\lambda$  são distintos.

Para duas funções de mesma espécie, tem-se

$$\int_{\theta_0}^{\pi} Z_\lambda^m Z_{\lambda'}^m \operatorname{sen}\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \lambda' \\ I_{m,\lambda}, & \lambda = \lambda' \end{cases}, \quad (2.67)$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} Z_\mu^m Z_{\mu'}^m \operatorname{sen}\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \mu \neq \mu' \\ I_{m,\lambda}, & \mu = \mu' \end{cases}, \quad (2.68)$$

onde  $I_{m,\lambda}$  e  $I_{m,\mu}$  são duas constantes de normalização .

Com a ajuda das relações ortogonais (2.60) e (2.61), podemos determinar as relações de ortogonalidade das funções vetoriais de onda cônicas. Dadas por

$$\int \int \int \vec{M}_{om\lambda}(\kappa) \cdot \vec{N}_{om'\mu'}(\kappa') dv = 0, \quad (2.69)$$

$$\int \int \int \vec{M}_{om\mu}(\kappa) \cdot \vec{N}_{om'\mu'}(\kappa') dv = 0, \quad (2.70)$$

$$\int \int \int \left\{ \begin{array}{cc} \vec{M}_{om\lambda}(\kappa) & \vec{M}_{om'\lambda'}(\kappa') \\ \vec{N}_{om\lambda}(\kappa) & \vec{N}_{om'\lambda'}(\kappa') \end{array} \right\} dv = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq m', \lambda \neq \lambda'. \\ \frac{(1+\delta_0)\pi^2 \lambda(\lambda+1) I_{m,\lambda}}{2k^2} \delta(\kappa - \kappa'). \end{array} \right. , \quad (2.71)$$

$$\int \int \int \left\{ \begin{array}{cc} \vec{M}_{om\mu}(\kappa) & \vec{M}_{om'\mu'}(\kappa') \\ \vec{N}_{om\mu}(\kappa) & \vec{N}_{om'\mu'}(\kappa') \end{array} \right\} dv = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq m', \mu \neq \mu'. \\ \frac{(1+\delta_0)\pi^2 \mu(\mu+1) I_{m,\mu}}{2k^2} \delta(\kappa - \kappa'). \end{array} \right. , \quad (2.72)$$

onde o volume de integração é definido no espaço exterior ao cone, ou seja, com  $\theta$  variando de  $\theta_0$  a  $\pi$ .

Conhecendo-se estas relações para as funções vetoriais de onda cônicas, derivamos as funções diádicas de Green do tipo elétrico de 1ª e 2ª espécie pelo método de  $\vec{G}_m$  descrito por Tai [33]. O campo elétrico radiado, onde  $\vec{R} \gg \vec{R}'$  e  $\vec{R} \neq \vec{R}'$ , pode ser obtido pelo teorema de Green vetorial

$$\vec{E}(\vec{R}) = -j\omega\mu_0 \int \int \int_{v'} \nabla \times \vec{G}_{e2}(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{M}(\vec{R}') dv', \quad (2.73)$$

através da função diádica de Green do tipo elétrico de 2ª espécie dada por

$$\vec{G}_{e2}(\vec{R}/\vec{R}') = \frac{-jk_0}{2\pi} \sum_m (2 - \delta_0) \left\{ \sum_{\mu} \frac{1}{\mu(\mu+1) I_{m,\mu}} \left[ \begin{array}{cc} \vec{M}_{om\mu}^{(2)}(\kappa_0) & \vec{M}'_{om\mu}(\kappa_0) \\ \vec{M}_{om\mu}(\kappa_0) & \vec{M}'_{om\mu}{}^{(2)}(\kappa_0) \end{array} \right] + \right. \\ \left. \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda(\lambda+1) I_{m,\lambda}} \left[ \begin{array}{cc} \vec{N}_{om\lambda}^{(2)}(\kappa_0) & \vec{N}'_{om\lambda}(\kappa_0) \\ \vec{N}_{om\lambda}(\kappa_0) & \vec{N}'_{om\lambda}{}^{(2)}(\kappa_0) \end{array} \right] \right\}_{\substack{R > R' \\ R < R'}} , \quad (2.74)$$

onde

$$I_{m,\mu} = \int_{\theta_0}^{\pi} [P_{\mu}^m(\cos \theta) + Y_{\mu} Q_{\mu}^m(\cos \theta)]^2 \text{sen} \theta d\theta, \quad (2.75)$$

$$I_{m,\lambda} = \int_{\theta_0}^{\pi} [P_{\lambda}^m(\cos \theta) + Y_{\mu} Q_{\lambda}^m(\cos \theta)]^2 \text{sen} \theta d\theta. \quad (2.76)$$

## Capítulo 3

### Impedância de entrada

#### 3.1 Cálculo do campo elétrico sob o *patch*

Usando o modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas e supondo que a espessura do substrato dielétrico é muito menor que qualquer outra dimensão do *patch* [ $h \ll (r_b - r_a)$ ,  $h \ll (2\phi_0 r_0 \text{sen}\theta_0)$ ], com  $h = r_0 \Delta\theta$ , e que o raio de curvatura do cone, Fig. 3.1, é muito maior que o comprimento de onda de operação, de tal modo que as perdas devidas à excitação de ondas de superfície [35] possam ser desprezadas, podemos supor, como primeira aproximação, que, sob o *patch* predomina a componente  $E_\theta$  do campo elétrico de forma a podermos desprezar as componentes  $E_y$  e  $E_z$  e, também, que  $E_\theta$  será praticamente independente de  $\theta$ , na região entre as placas da antena.

Iremos supor a região da cavidade (sob o *patch*) como sendo o meio 1, com  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$  e  $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$ . O cone  $\theta = \theta_0$  será considerado um condutor perfeito. A região externa a  $\theta = \theta_0$  será a região zero (espaço livre), com  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  e  $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ .

Com a hipótese de que existe apenas a componente  $E_\theta$  do campo elétrico na cavidade, para um grande raio de curvatura, e que ela independe de  $\theta$ ,  $E_\theta$  deve aproximadamente satisfazer à equação de onda de Helmholtz dada por:

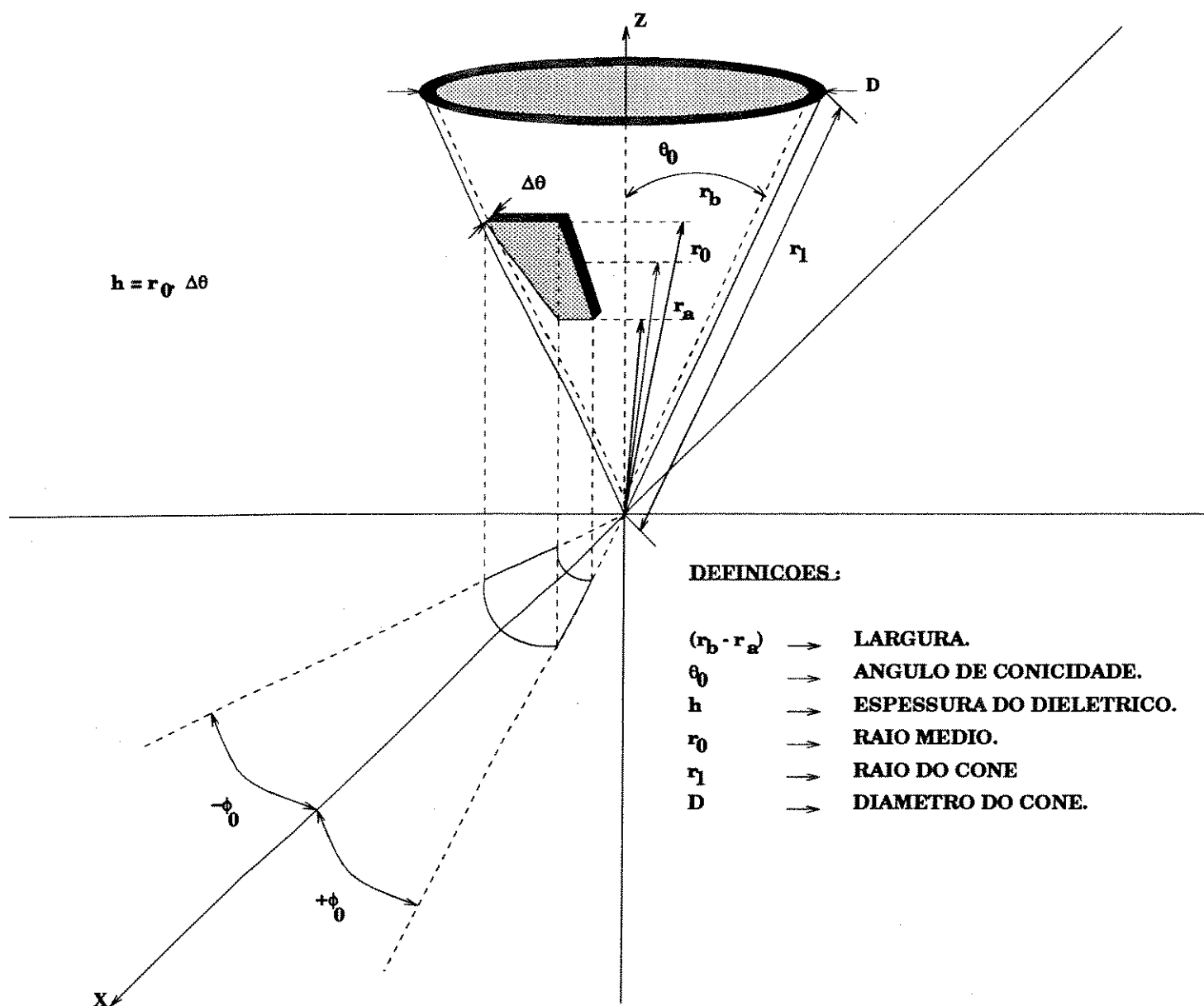


Figura 3.1: Parâmetros geométricos de uma antena de microfitas sobre uma superfície cônica.



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 \frac{\partial E_\theta}{\partial r}]}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial [\sin \theta \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}]}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \phi^2} + (k_1^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}) E_\theta \cong 0. \quad (3.1)$$

A solução geral de (3.1) é dada por:

$$E_{\theta, \lambda} = [A_{\theta, \lambda}^e j_\lambda(k_1 r) + B_{\theta, \lambda}^e \eta_\lambda(k_1 r)] [P_\lambda^m(\cos \theta) + Y_\lambda Q_\lambda^m(\cos \theta)] [C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)], \quad (3.2)$$

onde  $A_{\theta, \lambda}^e$ ,  $B_{\theta, \lambda}^e$ , são constantes de integração que são obtidas das condições de contorno.  $C_m$  e  $D_m$  são constantes que acompanham as funções circulares cosseno e seno. Com a hipótese de que  $\Delta\theta$  é muito pequeno, iremos supor  $\theta$  praticamente constante e igual a  $\theta_0$ .

Como estamos supondo que  $\Delta\theta$  é muito pequeno de tal forma que, para os modos de interesse,  $E_\theta$  é praticamente independente de  $\theta$ , em toda a extensão, de  $\theta_0$  a  $\theta_0 + \Delta\theta$ , podemos, sem perda de generalidade, supor que  $Y_\xi = 0$ .

Como estamos também supondo que a superfície  $\theta = \theta_0$  é um condutor perfeito e que  $E_\theta$  é normal a essa superfície, a seguinte condição de contorno deve ser satisfeita:

$$\frac{d}{d\theta} P_\lambda^m(\cos \theta_0) = 0. \quad (3.3)$$

De acordo com esta equação, dado um ângulo  $\theta = \theta_0$ , os valores de  $\lambda$  e  $m$  possíveis para o campo  $E_\theta$  são aqueles que satisfazem (3.3). Alternativamente, dados  $\lambda$  e  $m$ , somente os valores de  $\theta = \theta_0$  que satisfazem (3.3) são soluções possíveis.

Com a hipótese de que  $E_\theta$  não é função de  $\theta$ , a expressão (3.2) pode ser simplificada e expressa por:

$$E_{\theta, \lambda} = [A_{\theta, \lambda}^e j_\lambda(k_1 r) + B_{\theta, \lambda}^e \eta_\lambda(k_1 r)]_{\cos}^{\cos} (m\phi), \quad (3.4)$$

Antes de prosseguirmos necessitamos conhecer alguns conceitos básicos das funções de Legendre e das funções de Bessel esféricas.

### 3.1.1 Funções de Legendre

A função de Legendre associada de ordem  $m$ , de grau  $\lambda$  e de argumento  $w = \cos \theta$ , é definida de em [36] por:

$$P_{\lambda}^{|m|}(w) = \frac{1}{2^{\lambda} \lambda!} (1 - w^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{\lambda+|m|}}{dw^{\lambda+|m|}} (w^2 - 1)^{\lambda}, \quad (3.5)$$

que é solução da seguinte equação diferencial:

$$\left\{ (1 - w^2) \frac{d^2}{dw^2} - 2w \frac{d}{dw} + [\lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1 - w^2}] \right\} P_{\lambda}^{|m|}(w) = 0, \quad (3.6)$$

onde  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  e  $m = -\lambda, -(\lambda - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (\lambda - 1), \lambda$ .

As primeiras funções de Legendre são:

$$P_0^0(\cos \theta) = 1, \quad (3.7)$$

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta, \quad (3.8)$$

$$P_1^1(\cos \theta) = \text{sen} \theta, \quad (3.9)$$

$$P_2^0(\cos \theta) = \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}, \quad (3.10)$$

$$P_2^1(\cos \theta) = 3 \text{sen} \theta \cos \theta, \quad (3.11)$$

$$P_2^2(\cos \theta) = 3 \text{sen}^2 \theta, \quad (3.12)$$

$$P_3^0(\cos \theta) = \frac{(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2}, \quad (3.13)$$

$$P_3^1(\cos \theta) = \frac{3 \operatorname{sen} \theta (5 \cos^2 \theta - 1)}{2}, \quad (3.14)$$

$$P_3^2(\cos \theta) = 15 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta, \quad (3.15)$$

$$P_3^3(\cos \theta) = 15 \operatorname{sen}^3 \theta. \quad (3.16)$$

O polinômio de Legendre é o caso particular da função de Legendre, quando  $m = 0$ . Portanto, os primeiros polinômios de Legendre são:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad (3.17)$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad (3.18)$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}, \quad (3.19)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2}. \quad (3.20)$$

As fórmulas de recorrência para os polinômios de Legendre são:

$$P_{\lambda+1}(w) = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} w P_{\lambda}(w) - \frac{\lambda}{\lambda + 1} P_{\lambda-1}(w), \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dw} P_{\lambda}(w) = -\frac{\lambda w}{(1 - w^2)} P_{\lambda}(w) + \frac{\lambda}{(1 - w^2)} P_{\lambda-1}(w). \quad (3.22)$$

Usando (3.21) podemos obter os polinômios de ordem seguinte. Assim:

$$P_4(\cos \theta) = \frac{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3}{8}, \quad (3.23)$$

$$P_5(\cos \theta) = \frac{63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta}{8}, \quad (3.24)$$

$$P_6(\cos \theta) = \frac{231 \cos^6 \theta - 315 \cos^4 \theta + 105 \cos^2 \theta - 5}{16}, \quad (3.25)$$

$$P_7(\cos \theta) = \frac{429 \cos^7 \theta - 693 \cos^5 \theta + 315 \cos^3 \theta - 35 \cos \theta}{16}. \quad (3.26)$$

As derivadas dos polinômios de Legendre com relação a  $\theta$  são:

$$\frac{d}{d\theta} P_0(\cos \theta) = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_1(\cos \theta) = -\operatorname{sen} \theta, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_2(\cos \theta) = -3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta, \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_3(\cos \theta) = \left( \frac{-15 \cos^2 \theta + 3}{2} \right) \operatorname{sen} \theta, \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_4(\cos \theta) = \left( \frac{-140 \cos^3 \theta + 60 \cos \theta}{8} \right) \operatorname{sen} \theta, \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_5(\cos \theta) = \left( \frac{-315 \cos^4 \theta + 210 \cos^2 \theta - 15}{8} \right) \operatorname{sen} \theta, \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_6(\cos \theta) = \left( \frac{-693 \cos^5 \theta + 630 \cos^3 \theta + 105 \cos \theta}{8} \right) \operatorname{sen} \theta. \quad (3.33)$$

### 3.1.2 Funções de Bessel esféricas

As funções de Bessel esféricas  $j_\lambda(x)$  e  $\eta_\lambda(x)$ , bem como as funções de Hankel esféricas  $h_\lambda^1(x)$  e  $h_\lambda^2(x)$ , satisfazem de acordo com [36] a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} [x j_\lambda(x)] + \left[ 1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2} \right] j_\lambda(x) = 0. \quad (3.34)$$

Convém lembrar também que

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ x^2 \frac{d}{dx} j_\lambda(x) \right] = \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} [x j_\lambda(x)]. \quad (3.35)$$

As funções de Hankel esféricas estão relacionadas com as funções de Bessel esféricas por

$$j_\lambda(x) = \frac{1}{2} [h_\lambda^{(1)}(x) + h_\lambda^{(2)}(x)], \quad (3.36)$$

$$\eta_\lambda(x) = \frac{1}{2} [h_\lambda^{(1)}(x) - h_\lambda^{(2)}(x)]. \quad (3.37)$$

Essas funções se relacionam com as funções de Bessel, Neumann e Hankel cilíndricas, da seguinte forma:

$$j_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x), \quad (3.38)$$

$$\eta_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\lambda+\frac{1}{2}}(x), \quad (3.39)$$

$$h_\lambda^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\lambda+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \quad (3.40)$$

$$h_\lambda^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\lambda+\frac{1}{2}}^{(2)}(x). \quad (3.41)$$

Convém observar que os autovalores  $\lambda$  podem, em geral, ser fracionários. Para os primeiros valores inteiros de  $\lambda$  essas funções são:

$$j_0(x) = \frac{\text{sen } x}{x}, \quad (3.42)$$

$$j_1(x) = \frac{\text{sen } x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad (3.43)$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\text{sen}x - \frac{3}{x^2}\cos x, \quad (3.44)$$

$$j_3(x) = \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\text{sen}x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x, \quad (3.45)$$

$$j_4(x) = \left(\frac{105}{x^5} - \frac{45}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\text{sen}x - \left(\frac{105}{x^4} - \frac{10}{x^2}\right)\cos x, \quad (3.46)$$

$$\eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad (3.47)$$

$$\eta_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x}, \quad (3.48)$$

$$\eta_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\text{sen}x, \quad (3.49)$$

$$\eta_3(x) = -\left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\cos x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\text{sen}x, \quad (3.50)$$

$$\eta_4(x) = -\left(\frac{105}{x^5} - \frac{45}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\cos x - \left(\frac{105}{x^4} - \frac{10}{x^2}\right)\text{sen}x, \quad (3.51)$$

$$h_0^{(1)}(x) = -\frac{j}{x}e^{jx}, \quad (3.52)$$

$$h_1^{(1)}(x) = \left(-\frac{1}{x} - \frac{j}{x^2}\right)e^{jx}, \quad (3.53)$$

$$h_2^{(1)}(x) = \left(\frac{j}{x} - \frac{3}{x^2} - j\frac{3}{x^3}\right)e^{jx}, \quad (3.54)$$

$$h_3^{(1)}(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{15}{x^3} - j\frac{15}{x^4}\right)e^{jx}, \quad (3.55)$$

com  $h_\lambda^{(2)}(x)$  semelhante a  $h_\lambda^{(1)}(x)$ , com  $j$  substituído por  $-j$ .

As funções de Bessel, Neumann e Hankel esféricas satisfazem as seguintes expressões de recorrência

$$j_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda+1}{x} j_{\lambda}(x) - j_{\lambda-1}(x), \quad (3.56)$$

$$j'_{\lambda}(x) = \frac{\lambda}{x} j_{\lambda}(x) - j_{\lambda+1}(x), \quad (3.57)$$

onde  $j'_{\lambda}(x)$  representa a derivada com relação ao argumento  $x$ . Convém lembrar que (3.56) e (3.57) são também satisfeitas por  $\eta_{\lambda}(x)$ ,  $h_{\lambda}^{(1)}(x)$  e  $h_{\lambda}^{(2)}(x)$ .

Outras relações importantes são [36] mostradas abaixo

$$\int j_{\lambda}^2(x) x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 [j_{\lambda}^2(x) - j_{\lambda-1}(x) j_{\lambda+1}(x)], \quad \lambda > 0, \quad (3.58)$$

$$\int j_0^2(x) x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 [j_0^2(x) - \eta_0(x) j_1(x)], \quad (3.59)$$

$$\int \eta_0^2(x) x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 [\eta_0^2(x) - j_0(x) \eta_1(x)], \quad (3.60)$$

$$\int_{r_a}^{r_b} \eta_{\lambda}(k_1 r) \eta_{\lambda'}(k_1 r) r^2 dr = \begin{cases} L_{m,\lambda}, & \lambda = \lambda' \\ 0, & \lambda \neq \lambda' \end{cases}, \quad (3.61)$$

$$\int_{r_a}^{r_b} j_{\lambda}(k_1 r) \eta_{\lambda'}(k_1 r) r^2 dr = 0, \quad \text{sempre}, \quad (3.62)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos(m'\phi) d\phi = \begin{cases} (1+\delta_0)\pi, & m=m' \\ 0, & m \neq m' \end{cases}. \quad (3.63)$$

onde  $\delta_0$  é o delta de Kronecker, com  $\delta_0 = 1$  para  $m = 0$  e  $\delta_0 = 0$  para  $m \neq 0$ .

A partir da fórmula de recorrência, (3.56), as expressões para  $j_5(x)$  e  $j_6(x)$  são obtidas como segue:

$$j_5(x) = \left( \frac{945}{x^6} - \frac{405}{x^4} + \frac{9}{x^2} \right) \text{sen} x - \left( \frac{945}{x^5} - \frac{90}{x^3} \right) \cos x \\ - \left( \frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2} \right) \text{sen} x + \left( \frac{15}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x, \quad (3.64)$$

ou

$$j_5(x) = \left(\frac{945}{x^6} - \frac{420}{x^4} + \frac{15}{x^2}\right) \text{sen} x - \left(\frac{945}{x^5} - \frac{105}{x^3} + \frac{1}{x}\right) \cos x, \quad (3.65)$$

$$j_6(x) = \left(\frac{10395}{x^7} - \frac{4620}{x^5} + \frac{165}{x^3}\right) \text{sen} x - \left(\frac{10395}{x^6} - \frac{1155}{x^4} + \frac{11}{x^2}\right) \cos x, \\ - \left(\frac{105}{x^5} - \frac{45}{x^3} + \frac{1}{x}\right) \text{sen} x + \left(\frac{105}{x^4} - \frac{10}{x^2}\right) \cos x, \quad (3.66)$$

ou

$$j_6(x) = \left(\frac{10395}{x^7} - \frac{4725}{x^5} + \frac{210}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \text{sen} x - \left(\frac{10395}{x^6} - \frac{1260}{x^4} + \frac{21}{x^2}\right) \cos x. \quad (3.67)$$



### 3.2 "Patch" com ressonância ao longo do azimute ( $\phi$ )

Para obtenção da impedância de entrada de um *patch* com ressonância ao longo da direção radial R [37], foi suposto um modo com  $m = 0$ , segundo o qual o campo independe de  $\phi$ . O primeiro modo daquela estrutura seria para o caso do campo elétrico ser máximo em  $r_a$  e em  $r_b$  e apresentar um único valor igual a zero entre  $r_a$  e  $r_b$ .

Iremos agora supor que a ressonância do *patch* se dá ao longo da direção  $\phi$  de tal forma que o campo elétrico varie apenas lentamente com R, sem apresentar nenhum nulo entre  $r_a$  e  $r_b$  e que, para o menor modo de operação, o campo elétrico seja máximo em  $\phi = +\phi_0$  e em  $\phi = -\phi_0$  e com um nulo em  $\phi = 0$ , onde o comprimento do *patch* em  $r_0$  é dado por  $L_\phi = 2\phi_0 r_0 \text{sen}\theta_0$ , sendo  $r_0$  o raio para o qual o campo elétrico é máximo e aproximadamente igual ao raio médio do *patch* ( $r_0 \cong \frac{r_a+r_b}{2}$ ).

#### 3.2.1 Escolha de $\theta_0$ e dos autovalores $m$ e $\lambda$

Como a condição de contorno em  $\theta_0$  deve ser satisfeita, vimos que, em  $\theta_0$ , devemos ter:

$$\frac{d}{d\theta} P_\lambda^m(\cos\theta_0) = 0. \quad (3.68)$$

Esta equação nos permite obter  $m$  e  $\lambda$ , dado  $\theta_0$  ou obter  $\theta_0$  dados  $m$  e  $\lambda$ . Na prática a superfície cônica  $\theta = \theta_0$  é conhecida (superfície de um veículo espacial, por exemplo) e se desejam obter  $m$  e  $\lambda$ . Isso, no entanto, irá fornecer  $\lambda$  fracionários o que torna o desenvolvimento teórico e numérico mais complexo.

Com a hipótese de que temos liberdade de escolha da superfície cônica, podemos escolher os valores de  $m$  e  $\lambda$  e obter  $\theta_0$  de (3.68). Desta forma, podemos escolher  $\lambda$  inteiro e simplificar o desenvolvimento teórico e numérico.

Entretanto, na escolha de  $\theta_0$  iremos ter que adotar  $m \neq 0$  pois o campo elétrico deverá ter derivada nula com relação a  $\phi$  em  $\phi = \pm\phi_0$ . Assim, se usarmos  $m = 1$ , a derivada do campo elétrico pode ser nula em  $2\phi_0 = 180^\circ$ . Para  $m = 2$ ,  $2\phi_0 = 90^\circ$ . Para  $m = 3$ ,  $2\phi_0 = 45^\circ$ . Para  $m = 4$ ,  $2\phi_0 = 22,5^\circ$ , e assim por diante.

Vamos então escolher  $m \neq 0$  e obter os valores de  $\theta_0$ , a partir dos menores valores de  $m$  e  $\lambda$ .

(a)  $m = 1, \lambda = 1$ :

De (3.9):

$$\frac{d}{d\theta} P_1^1(\cos \theta) = \cos \theta_0 = 0 \left\{ \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \begin{array}{l} m=1 \\ \lambda=1 \end{array} \right. \quad (3.69)$$

(b)  $m = 1, \lambda = 2$ :

De (3.11):

$$\frac{d}{d\theta} P_2^1(\cos \theta) = \cos 2\theta_0 = 0 \left\{ \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \begin{array}{l} m=1 \\ \lambda=2 \end{array} \right. \quad (3.70)$$

(c)  $m = 2, \lambda = 2$ :

De (3.12):

$$\frac{d}{d\theta} P_2^2(\cos \theta) = 2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \left\{ \theta_0 = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \begin{array}{l} m=2 \\ \lambda=2 \end{array} \right. \quad (3.71)$$

(d)  $m = 1, \lambda = 3$ :

De (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} P_3^1(\cos \theta) &= 5 \cos^3 \theta_0 - 10 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \cos \theta_0 - \cos \theta_0 = 0 \\ &= \cos \theta_0 [-15 \operatorname{sen}^2 \theta_0 + 4] = 0 \left\{ \theta_0 = \frac{\pi}{2}, 31.09^\circ, \begin{array}{l} m=1 \\ \lambda=3 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.72)$$

(e)  $m = 2, \lambda = 3$ :

De (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} P_3^2(\cos \theta) &= 2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos^2 \theta_0 - \operatorname{sen}^3 \theta_0 = 0 \\ &= \operatorname{sen} \theta_0 (2 - 3 \operatorname{sen}^2 \theta_0) = 0 \left\{ \theta_0 = 0, \pi, 54.73^\circ, \quad \begin{matrix} m=2 \\ \lambda=3 \end{matrix} \right. . \end{aligned} \quad (3.73)$$

(d)  $m = 3, \lambda = 3$ :

De (3.16):

$$\frac{d}{d\theta} P_3^1(\cos \theta) = 3 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \left\{ \theta_0 = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \quad \begin{matrix} m=3 \\ \lambda=3 \end{matrix} \right. . \quad (3.74)$$

Observe que as soluções  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  correspondem ao cone degenerado em uma linha ao longo do eixo  $z$ . Portanto, essas soluções não interessam. Também, a solução  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  corresponde ao plano  $z = 0$  (plano  $x$ - $y$ ) que pode ser estudado com uma formulação mais simples. Para nós interessam os valores de  $\theta_0$  menores de  $90^\circ$ . Isto é possível com os seguintes valores (com  $m \neq 0$ ):

$$(1) \quad m = 1, \lambda = 2 \quad \{ \theta_0 = 45^\circ , \quad (3.75)$$

$$(2) \quad m = 1, \lambda = 3 \quad \{ \theta_0 = 31.09^\circ , \quad (3.76)$$

$$(3) \quad m = 2, \lambda = 3 \quad \{ \theta_0 = 54.73^\circ . \quad (3.77)$$

Embora conviesse examinar os valores de  $\theta_0$  para  $\lambda$  maiores de 3, para se obterem valores de  $\theta_0$  menores de  $90^\circ$  (da ordem de  $30^\circ$  ou menos) e maiores valores de  $m$  (para se obterem *patches* com  $\phi_0$  menores), os valores de  $\theta_0 = 45^\circ$  para  $m = 1$  e  $\lambda = 2$ ,  $\theta_0 = 31,09^\circ$  para  $m = 1$  e  $\lambda = 3$  e de  $\theta_0 = 54,73^\circ$  para  $m = 2$  e  $\lambda = 3$  são todos de interesse aqui.

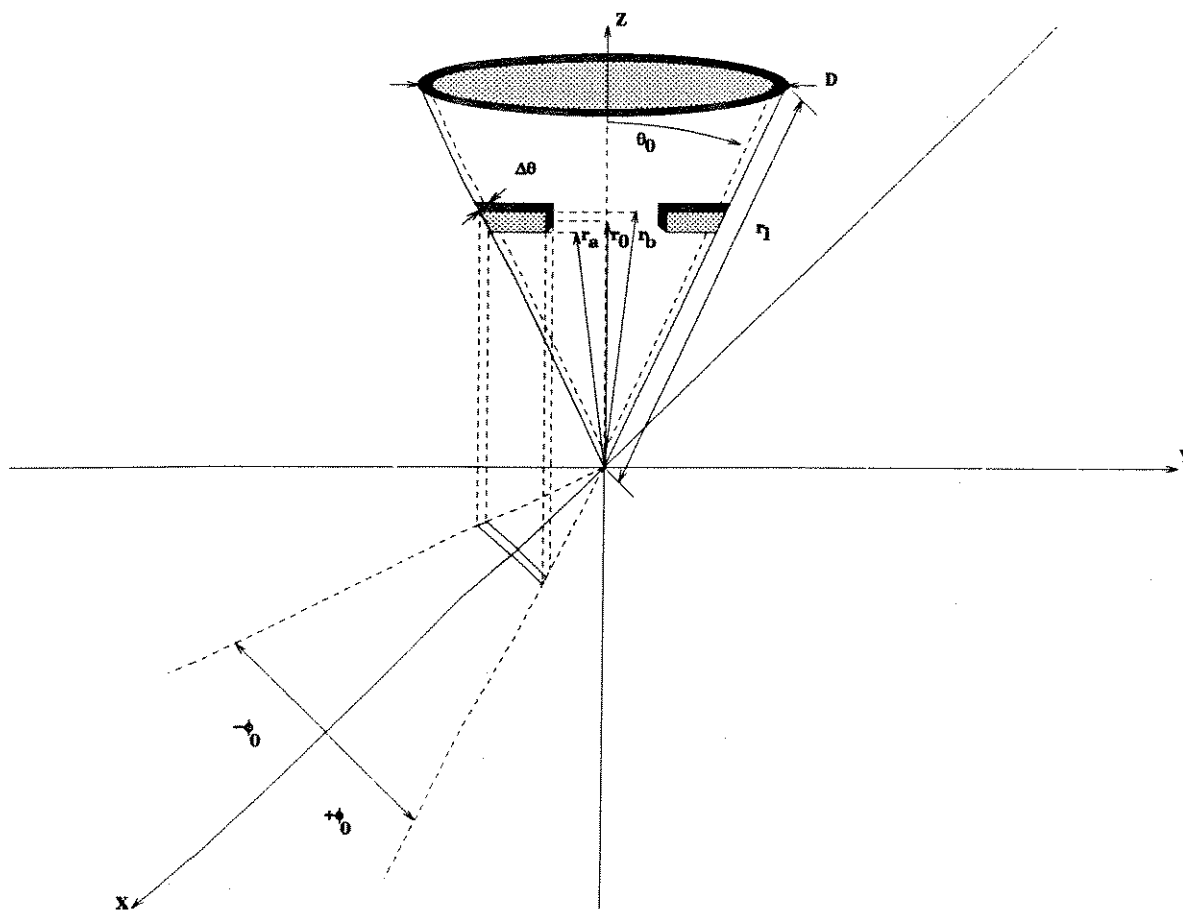


Figura 3.2: Geometria de uma antena de microfita com dois *patches* simétricos sobre uma superfície cônica.

Iremos analisar, a seguir, o caso de  $\theta_0 = 54,73^\circ$ , para  $m = 2$  e  $\lambda = 3$ , no qual utiliza-se, como mostra a Fig. 3.2, dois *patches* localizados simetricamente sobre a superfície cônica, permitindo assim, campos eletricos radiados pela antena, mais simétricos.

### 3.2.2 Escolha das dimensões do *patch* para $m = 2$ , $\lambda = 3$

Com a hipótese de que  $(\Delta\theta)r_a$  é muito menor que as outras dimensões do *patch* e, portanto, muito menor do que o comprimento de onda de operação, iremos supor que  $E_\theta$  independe de  $\theta$ . Portanto, para  $m = 2$  e  $\lambda = 3$ , a equação (3.2) fica:

$$E_{\theta_{2,3}} = [A_{\theta_{2,3}} j_3(k_1 r) + B_{\theta_{2,3}} \eta_3(k_1 r)] \text{sen}(2\phi), \quad (3.78)$$

Com a escolha de  $m = 2$ , os valores de  $\phi_0$ , para o qual  $\frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} = 0 \therefore 2 \cos(2\phi) = 0$ , são  $\phi_0 = \pm 45^\circ, \pm 90^\circ, \pm 135^\circ, \pm 180^\circ$ .

Iremos escolher o menor valor, ou seja,  $\phi_0 = \pm 45^\circ$ . Portanto, o comprimento do *patch* ao longo de  $\phi$ , sobre o raio  $r_0$  é de

$$L_\phi = r_0 \text{sen} \theta_0 2\phi_0 = r_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{2} = 1,2825 r_0. \quad (3.79)$$

Para que o *patch* ressoe ao longo de  $\phi$ , temos que impor, para o primeiro modo  $m' = 1$  (ímpar), que a seguinte relação seja satisfeita

$$k_1 L_\phi = \pi. \quad (3.80)$$

Com (3.81) em (3.83) temos:

$$x_0 = \kappa_1 r_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{6} = 2.449. \quad (3.81)$$

De (3.84), obtemos que a frequência de ressonância é dada por

$$f_o \cong \frac{\pi c}{2\pi \sqrt{\epsilon_r} L_\phi} \cong \frac{c}{4\phi_0 \sqrt{\epsilon_r} r_0 \text{sen} \theta_0}, \quad (3.82)$$

que, para esse 1<sup>o</sup> modo, é

$$f_o = \frac{\sqrt{6}c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}r_0}, \quad (3.83)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no espaço livre e  $\epsilon_r$  é a constante dielétrica do substrato.

Por exemplo, para  $r_0 = 8\text{cm}$  e para  $\epsilon_r = 2,32$ , obtemos:

$$f_o = 0,96\text{GHz}. \quad (3.84)$$

Para dimensionar completamente o patch, necessitamos obter os valores de  $r_a$  e  $r_b$ . Para isso vamos primeiro examinar como  $E_\theta$  varia nas vizinhanças de  $r_0$ , mantendo  $\phi$  fixo. Com  $\phi = \phi_0$  (3.78) fica

$$E_\theta = [Aj_3(k_1r) + B\eta_3(k_1r)]\text{sen}(2\phi_0), \quad (3.85)$$

Para que  $E_\theta$  adquira um valor extremo em  $r = r_0$ , devemos ter

$$Aj'_3(\kappa_1r_0) + B\eta'_3(\kappa_1r_0) = 0, \quad (3.86)$$

ou

$$B = -A \frac{j'_3(\kappa_1r_0)}{\eta'_3(\kappa_1r_0)}, \quad (3.87)$$

onde o símbolo primo indica derivada da função com relação ao seu argumento.

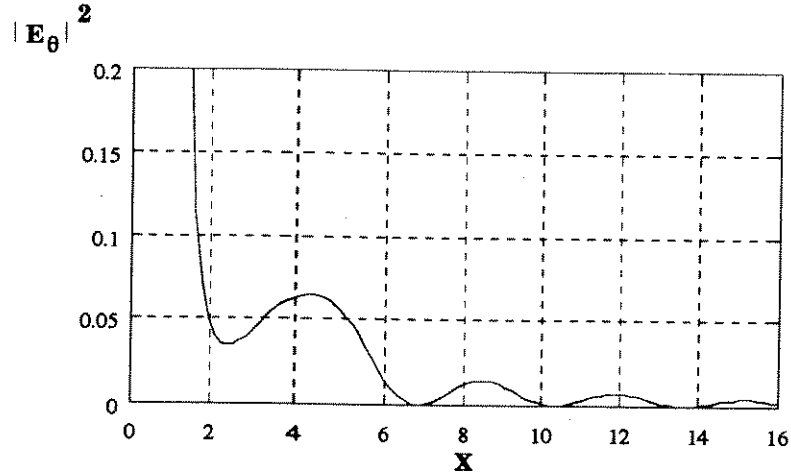


Figura 3.3: Variação do campo elétrico (escala arbitrária) ao longo do *patch* na direção radial.

Com (3.87) em (3.85) obtemos

$$E_{\theta} = E_0 \left[ \frac{j_3(\kappa_1 r)}{j_3(\kappa_1 r_0)} - \frac{\eta_3(\kappa_1 r)}{\eta_3(\kappa_1 r_0)} \right], \quad (3.88)$$

Para que o *patch* apresente  $E_{\theta}$  aproximadamente constante em  $r$ , basta traçar (3.88) e escolher duas raízes para  $x$ , uma  $x_a = \kappa_1 r_a$  e outra  $x_b = \kappa_1 r_b$ , ao redor de  $x_0 = \kappa_1 r_0$ , para as quais  $E_{\theta} \simeq$  constante.

Para obter a curva  $|E_{\theta}|^2$  versus  $x$ , convém lembrar que  $j_3(x)$  é dado por (3.45), e a sua derivada com relação a  $x$  é:

$$j_3'(x) = \left( -\frac{60}{x^5} + \frac{27}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \text{sen} x - \left( -\frac{60}{x^4} + \frac{7}{x^2} \right) \cos x. \quad (3.89)$$

Do gráfico, Fig. 3.3, observa-se que uma escolha conveniente de  $r_a$  e  $r_b$ , para variações de  $|E_\theta|^2$  menores do que 5%, são os valores de  $x$  correspondentes a:

$$\begin{aligned}x_a &= \kappa_1 r_a = 2,1, \\x_b &= \kappa_1 r_b = 2,9.\end{aligned}\tag{3.90}$$

Com essa escolha temos que

$$\kappa_1(r_b - r_a) = 0,8\tag{3.91}$$

que é suficientemente menor do que  $\kappa_1 L_\phi = \pi = 3,141592654$ , ou seja  $L_\phi = \frac{\lambda}{2}$ , valor este que estabelece um modo com o campo elétrico igual a zero em  $\phi = 0$  e máximo em  $\phi = \pm\phi_0 = \pm 45^\circ$ . Observe, também, que a escolha de  $x_a = 2,1$  e  $x_b = 2,9$  é tal que o campo  $E_\theta$  sob o *patch* praticamente não varia com  $r$ .

Voltando ao exemplo numérico de  $r_0 = 8\text{cm}$  e  $\epsilon_r = 2,32$ , que fornecem uma frequência de ressonância para o modo fundamental de  $f_0 = 0,96\text{ GHz}$ , devemos ter

$$\begin{aligned}L_\phi &= 10,26\text{cm}, \\r_b &= 9,5\text{cm}, \\r_a &= 6,9\text{cm}.\end{aligned}\tag{3.92}$$





### 3.3 Impedância de entrada obtida a partir da expansão do campo elétrico na cavidade

Considere um *patch* alimentado por um cabo coaxial em  $r = r_0$  e  $\phi = \phi_1 \neq 0$ . A alimentação é modelada por uma fita de largura efetiva  $w$ , com uma densidade de corrente dada por

$$J_r = J(\phi)\delta(r - r_0), \quad (3.93)$$

com

$$J(\phi) = \begin{cases} 1, & -(\frac{\pi}{2}) \leq [r_0 \sin(\theta_0 + \Delta\theta)](\phi_1 + \phi) \leq (\frac{\pi}{2}) \\ 0, & \text{demais valores de } \phi \end{cases}, \quad (3.94)$$

e  $\delta(r - r_0)$  é a função delta de Dirac.

$E_\theta$  pode ser expandido em termos de um conjunto completo de funções que são soluções da cavidade isenta de fontes [37]:

$$E_{\theta 1} = j\omega\mu_0 \sum_{m,\lambda} \frac{\int_S J_\theta E_{\theta m,\lambda}^* dS}{\kappa_1^2 - \kappa_{m,\lambda}^2} E_{\theta m,\lambda} \frac{1}{\int_V E_{\theta m,\lambda} E_{\theta m,\lambda}^* dV}, \quad (3.95)$$

com  $J_\theta$  dado por (3.94) e (3.95) e com  $E_{\theta m,\lambda}$  dado por (3.4) e reescrito aqui, incluindo a variação em  $\phi$ , como

$$E_{\theta_{om,\lambda}} = [A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r) + B_{m,\lambda} \eta_\lambda(k_{m,\lambda} r)] \frac{\cos(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}{\sin(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}, \quad (3.96)$$

A integral de superfície em (3.95) é

$$\begin{aligned} \int_S J_\theta E_{\theta m,\lambda}^* dS &= \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} d\theta \int_{-\frac{w}{2r \sin\theta_0} - \phi_1}^{\frac{w}{2r \sin\theta_0} - \phi_1} r^2 \sin\theta E_{\theta m,\lambda}^* d\phi = \\ &= [A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r) + B_{m,\lambda} \eta_\lambda(k_{m,\lambda} r)] \frac{r^2 \Delta\theta \sin\theta_0}{(\frac{m\pi}{\phi_0})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ \text{sen} \left[ \frac{\cos}{\phi_0} \left( \frac{m\pi w}{4r \text{sen}\theta_0} - \frac{\phi_1}{2} \right) \right] + \text{sen} \left[ \frac{\cos}{\phi_0} \left( \frac{m\pi w}{4r \text{sen}\theta_0} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\} = \\
& = [A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r) + B_{m,\lambda} \eta_\lambda(k_{m,\lambda} r)] \frac{wr\Delta\theta}{\left(\frac{m\pi}{2\phi_0}\right) \frac{w}{2r \text{sen}\theta_0}} \cdot \\
& \quad \cdot \text{sen} \left( \frac{m\pi w}{4r\phi_0 \text{sen}\theta_0} \right) \frac{-\text{sen}\left(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0}\right)}{\cos\left(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0}\right)} = \\
& = [A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r) + B_{m,\lambda} \eta_\lambda(k_{m,\lambda} r)] wr\Delta\theta \cdot \\
& \quad \cdot j_0 \left( \frac{m\pi w}{4r\phi_0 \text{sen}\theta_0} \right) \frac{-\text{sen}\left(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0}\right)}{\cos\left(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0}\right)}. \tag{3.97}
\end{aligned}$$

onde  $j_0(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$  é a função de Bessel esférica de ordem zero.

A integral de volume, em (3.95), é

$$\begin{aligned}
\int_V E_{\theta m,\lambda} E_{\theta m,\lambda}^* dV &= \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} E_{\theta m,\lambda} E_{\theta m,\lambda}^* r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi = \\
&= [A_{m,\lambda}^2 F_{m,\lambda} + B_{m,\lambda}^2 T_{m,l,\lambda}] \Delta\theta \text{sen}\theta_0(\phi_0) (1 + \delta_{om}), \tag{3.98}
\end{aligned}$$

onde

$$F_{m,\lambda} = \int_{r_a}^{r_b} j_\lambda^2(k_{m,\lambda} r) r^2 dr, \tag{3.99}$$

$$T_{m,l,\lambda} = \int_{r_a}^{r_b} n_\lambda^2(k_{m,\lambda} r) r^2 dr. \tag{3.100}$$

e  $\delta_{om}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{om} = 0$  for  $m \neq 0$  and  $\delta_{om} = 1$  for  $m = 0$ ).

Portanto, (3.95) fica

$$E_{\theta 1} = j\omega\mu_0 \sum_{m,\lambda} \frac{[A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r) + B_{m,\lambda} \eta_\lambda(k_{m,\lambda} r)]}{(\kappa_1^2 - \kappa_{m,\lambda}^2) [A_{m,\lambda}^2 F_{m,\lambda} + B_{m,\lambda}^2 T_{m,l,\lambda}]}$$

$$\frac{[A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r) + B_{m,\lambda} n_\lambda(k_{m,\lambda} r)]}{\phi_0(1 + \delta_{om}) \text{sen} \theta_0} w r \frac{\cos(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}{\text{sen}(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})} \cdot j_0\left(\frac{m\pi w}{4r\phi_0 \text{sen} \theta_0}\right) \frac{-\text{sen}(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}{\cos(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}. \quad (3.101)$$

A impedância de entrada,  $Z_{in}$ , pode agora ser calculada de [37]

$$Z_{in} = \frac{-h}{w} \frac{r \text{sen} \theta_0}{w} \int_{-\Delta\phi - \phi_1}^{+\Delta\phi - \phi_1} E_{\theta_1} d\phi, \quad (3.102)$$

com  $\Delta\phi = \frac{w}{2r_0 \text{sen} \theta_0}$  e  $h \cong r_0 \Delta\theta$  e também com  $r = r_1$ . Portanto, com  $E_{\theta_1}$  dado por (3.101),

$$Z_{in} = -\frac{h}{w} \frac{r_0}{w} j\omega\mu_0 \sum_{m,\lambda} \frac{[A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r_1) + B_{m,\lambda} n_\lambda(k_{m,\lambda} r_1)]^2}{[A_{m,\lambda}^2 F_{m,l,\lambda} + B_{m,\lambda}^2 T_{m,l,\lambda}]} \cdot \frac{w^2 r \frac{\text{sen}^2(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}{\cos^2(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})} j_0^2\left(\frac{m\pi w}{4r_0\phi_0 \text{sen} \theta_0}\right)}{(1 + \delta_{om}) \phi_0 \text{sen} \theta_0 (\kappa_1^2 - \kappa_{m,\lambda}^2)}. \quad (3.103)$$

Note que  $\omega\mu_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \kappa_0\eta_0$ , onde  $\eta_0$  é a impedância intrínseca do espaço livre e igual a  $\eta_0 = 377 \Omega$ .

A equação (3.103) não inclui perdas. Essas perdas seriam devidas a: perdas metálicas, perdas dielétricas, perdas por radiação e perdas por excitação de ondas de superfície. Para pequenas espessuras,  $r_a \Delta\theta \ll [(r_b - r_a) \text{ e } L_\phi]$  as perdas devidas à excitação das ondas de superfície são pequenas e serão desprezadas. As perdas dielétricas, ôhmicas e de radiação podem ser calculadas mediante a utilização de uma tangente de perdas efetiva,  $\delta_{eff}$ , que é a soma da tangente de perdas dielétrica,  $\delta_d$ , com a tangente de perdas ôhmica,  $\delta_m$ , e com a tangente de perdas de radiação,  $\delta_r$ , isto é,

$$\frac{1}{Q_{eff}} = \delta_{eff} = \delta_d + \delta_m + \delta_r = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_r}. \quad (3.104)$$

Sem perdas o número de onda da cavidade é dado por

$$\kappa_1 = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = k_0 \sqrt{\epsilon_r}, \quad (3.105)$$

Inclunindo-se as perdas temos

$$k_{eff} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j\delta_{eff})} = k_1 \sqrt{(1 - j\delta_{eff})}. \quad (3.106)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{-j\omega\mu_0}{(\kappa_1^2 - \kappa_{m,\lambda}^2)} = \frac{-jf}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r[(1 - j\delta_{eff})f^2 - f_{m,\lambda}^2]} = \\ & = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{-jf}{(f^2 - f_{m,\lambda}^2) - j\delta_{eff}f^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{-jf[(f^2 - f_{m,\lambda}^2) + jf^2\delta_{eff}]}{[(f^2 - f_{m,\lambda}^2)^2 + \delta_{eff}^2 f^4]} = \\ & = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{jf[(f_{m,\lambda}^2 - f^2) - jf^2\delta_{eff}]}{[(f_{m,\lambda}^2 - f^2)^2 + \delta_{eff}^2 f^4]}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Portanto, (3.103) fica

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{r_0^2 \Delta\theta}{2\pi\phi_0 \text{sen}\theta_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{m,\lambda} \frac{[A_{m,\lambda} j_\lambda(k_{m,\lambda} r_1) + B_{m,\lambda} \eta_\lambda(k_{m,\lambda} r_1)]^2}{[A_{m,\lambda}^2 F_{m,\lambda} + B_{m,\lambda}^2 T_{m,\lambda}](1 + \delta_{om})} \\ & \quad \cdot j_0^2 \left( \frac{m\pi w}{4r_0 \phi_0 \text{sen}\theta_0} \right) \frac{\text{sen}^2(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})}{\cos^2(\frac{m\pi\phi_1}{2\phi_0})} \frac{jf[(f_{m,\lambda}^2 - f^2) - jf^2\delta_{eff}]}{[(f_{m,\lambda}^2 - f^2)^2 + \delta_{eff}^2 f^4]}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Como o fator de qualidade do *patch* é elevado ( $\cong 50$ ), a impedância de entrada da antena, dada por (3.108), na frequência de ressonância principal do *patch*, é muito pouco influenciada pelos outros modos do *patch*. Como primeira aproximação podemos desprezar

essas influências, de modo que a somatória de (3.108) se reduz a um único termo que, para o modo  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$  é

$$Z_{in} = \frac{r_0^2 \Delta \theta}{2\pi \phi_0 \text{sen} \theta_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{[A_{2,3} j_3(k_{2,3} r_1) + B_{2,3} \eta_3(k_{2,3} r_1)]^2}{[A_{2,3}^2 F_{2,3} + B_{2,3}^2 T_{2,3}]} \cdot j_0^2 \left( \frac{\pi w}{2r_0 \phi_0 \text{sen} \theta_0} \right) \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{\pi \phi_1}{\phi_0} \right) j f [(f_{2,3}^2 - f^2) - j f^2 \delta_{eff}]}{\cos^2 \left( \frac{\pi \phi_1}{\phi_0} \right) [(f_{2,3}^2 - f^2)^2 + \delta_{eff}^2 f^4]} \quad (3.109)$$

onde, para este modo  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\theta_0$  é dado por (3.73), ou seja,

$$\text{sen} \theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad m = 2, \lambda = 3, \quad (3.110)$$

$k_{2,3} = k_1$  é dado por (3.80) e as funções com argumento complexo são expandidas conforme (3.107). Os valores de  $F_{2,3}$  e  $T_{2,3}$  podem ser obtidos de (3.99) e (3.100). O valor de  $r_0$  ou de  $f_0 = f_{2,3}$  é escolhido (veja eq. 3.83)).

Para o caso em  $j_3'(\kappa_{2,3} r_0)$  não seja escolhida igual a zero, a expressão (3.109) irá conter  $j_3(k_{2,3} r_1)$ ,  $\eta_3(k_{2,3} r_1)$ ,  $j_3'(k_{2,3} r_0)$  e  $\eta_3'(k_{2,3} r_0)$ . As funções  $j_3(x)$  e  $\eta_3(x)$  são dadas por (3.45) e (3.50), respectivamente.

A derivada de  $j_3(x)$  é obtida de (3.45), cujo resultado é:

$$j_3' = -\left(\frac{60}{x^5} - \frac{27}{x^3} + \frac{1}{x}\right) \text{sen}(x) + \left(\frac{60}{x^4} - \frac{7}{x^2}\right) \cos(x). \quad (3.111)$$

A derivada de  $\eta_3$  é obtida de (3.50), cujo resultado é:

$$\eta_3' = \left(\frac{60}{x^5} - \frac{27}{x^3} + \frac{1}{x}\right) \cos(x) + \left(\frac{60}{x^4} - \frac{7}{x^2}\right) \text{sen}(x). \quad (3.112)$$

## Capítulo 4

### Campos radiados pela antena

#### 4.1 Perdas e fatores de qualidade

Para cada um dos *patches* com os valores  $r_0 = 8$  cm,  $\epsilon_r = 2,32$  e  $L_\phi = 10,26$  cm,  $r_a = 0,069$  cm,  $r_b = 0,095$  cm,  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$  rad, operando na frequência central de  $f_{2,3} = 0,96$  GHz, conforme equações (3.90) a (3.92), podemos obter dois tipos de curvas para a impedância de entrada. A primeira fixando-se  $\phi_1$  e  $r$ , e traçando  $R$  e  $X$  como funções da frequência e a outra, fixando-se a frequência de ressonância, para o qual  $X = 0$  e traçando  $R$  como função de  $r$ , para  $\phi_1$  fixo ou como função de  $\phi_1$  para  $r$  fixo.

Para essa análise é necessário que se calcule  $\delta_{eff}$ . Como vimos,

$$\delta_{eff} = \delta_d + \delta_m + \delta_r. \quad (4.1)$$

O valor de  $\delta_d$  é aquele fornecido pelo fabricante do substrato dielétrico.

Para os laminados da Roger com  $\epsilon_r = 2,32$ , o fabricante fornece  $\delta_d = 0,0012$ , para o dielétrico, e  $\delta_m = 0,00092$  para o metal (cobre).

O valor de  $\delta_r$  é obtido a partir de

$$Q_{rad} = \frac{1}{\delta_r} = \frac{2\pi f U_{arm}}{P_{rad}}, \quad (4.2)$$

onde  $U_{arm}$  é a energia armazenada em cada uma das cavidades e  $P_{rad}$  é a potência radiada por cada cavidade.

## 4.2 Potência radiada pela antena e energia armazenada na cavidade.

Para obtenção de  $\delta_r$  necessitamos calcular a potência total radiada por cada cavidade,  $P_{rad}$ , e a energia armazenada em cada cavidade,  $U_{arm}$ . Suas expressões são as seguintes:

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{|E_{\theta_r}|^2 + |E_{\phi_r}|^2}{2\eta_0} r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi, \quad (4.3)$$

e

$$U_{arm} \cong \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} |E_{\theta}|^2 r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi, \quad (4.4)$$

onde  $\eta_0$  é a impedância intrínseca do espaço livre ( $\eta_0 = 120\pi \Omega$ ),  $E_{\theta_r}$  e  $E_{\phi_r}$  são as componentes  $\theta$  e  $\phi$  do campo elétrico radiado por uma das cavidades e  $E_{\theta}$  a componente  $\theta$  do campo elétrico na cavidade.

Para a obtenção de  $P_{rad}$  necessitamos da expressão do campo elétrico radiado, com componentes  $E_{\theta_r}$  e  $E_{\phi_r}$ , cuja obtenção será descrita na seção seguinte.

A obtenção de  $U_{arm}$  é feita como segue, para o modo  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$ , para o qual o campo elétrico em uma das cavidades é:

$$E_{\theta} = E_0 \left[ \frac{j_3(k_1 r)}{j_3'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_3(k_1 r)}{\eta_3'(k_1 r_0)} \right] \text{sen}\left(\frac{\pi\phi}{2\phi_0}\right). \quad (4.5)$$

Portanto, com (4.5) em (4.4),

$$U_{arm} \cong \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_0^2}{2} [\Delta\theta \text{sen}\theta_0] \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2\left(\frac{\pi\phi}{2\phi_0}\right) d\phi \int_{r_a}^{r_b} \left[ \frac{j_3(k_1 r)}{j_3'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_3(k_1 r)}{\eta_3'(k_1 r_0)} \right]^2 r^2 dr, \quad (4.6)$$

onde

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \text{sen}\theta d\theta \cong \text{sen}\theta_0 \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} d\theta = \Delta\theta \text{sen}\theta_0. \quad (4.7)$$



### 4.3 Campos radiados considerando ressonância ao longo da direção azimutal.

O campo elétrico radiado pode ser obtido das equações (2.73) e (2.74) como descrito no Capítulo 2. Desenvolvendo-se (2.61) e (2.62) temos:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{omn}}^e(\kappa_0) = & \mp \frac{m}{\text{sen}\theta} j_n(\kappa_0 R) [X_n^m(\cos\theta)]_{\text{cos}}^{\text{sen}}(m\phi) \hat{\theta} - \\ & - j_n(\kappa_0 R) \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} X_n^m(\cos\theta) \right]_{\text{sen}}^{\text{cos}}(m\phi) \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\text{omn}}^e(\kappa_0) = & \frac{n(n+1)}{\kappa_0 R} j_n(\kappa_0 R) [X_n^m(\cos\theta)]_{\text{sen}}^{\text{cos}}(m\phi) \hat{R} + \\ & + \frac{1}{\kappa_0 R} \frac{\partial}{\partial R} [R j_n(\kappa_0 R)] \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} X_n^m(\cos\theta) \right]_{\text{sen}}^{\text{cos}}(m\phi) \hat{\theta} \mp \right. \\ & \left. \mp \frac{m}{\text{sen}\theta} [X_n^m(\cos\theta)]_{\text{cos}}^{\text{sen}}(m\phi) \hat{\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Os autovalores  $\mu$  e  $\lambda$  que aparecem em (2.74) são obtidos das seguintes equações características

$$X_\mu^m(\cos\theta_0) = 0 \quad e \quad \frac{d}{d\theta} X_\lambda^m(\cos\theta_0) = 0. \quad (4.10)$$

$\vec{M}_{\text{omn}}^{\prime}(\kappa_0)$  e  $\vec{N}_{\text{omn}}^{\prime}(\kappa_0)$  são iguais a (4.8) e (4.9), com a diferença de que estas se referem às coordenadas das fontes,  $(R', \theta', \phi')$ , enquanto que (4.8) e (4.9) são para as coordenadas do ponto de observação,  $(R, \theta, \phi)$ .

As expressões  $\vec{M}_{\text{omn}}^{(2)}(\kappa_0)$  e  $\vec{N}_{\text{omn}}^{(2)}(\kappa_0)$  são iguais a (4.8) e (4.9) com a diferença que as funções de Bessel esféricas,  $j_n(\kappa_0 R)$ , são substituídas pelas funções de Hankel esféricas,  $h_n^{(2)}(\kappa_0 R)$ , de segunda espécie.

Em (2.73)  $\vec{M}(\vec{R}')$  é o vetor de magnetização da fonte e é dado por [40]:

$$\vec{M}(\vec{R}') = \left(\frac{1}{j\omega\mu_0}\right) 2\vec{E}_\theta \times \hat{n}|_{paredes}, \quad (4.11)$$

onde  $\vec{E}_\theta$  é o campo elétrico sob o *patch* e  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à parede lateral da cavidade.

Para operação da cavidade no modo  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$ , com ressonância ocorrendo ao longo de  $\phi$ , com  $\kappa_1 L_\phi = \pi$ , podemos supor que a radiação ocorra apenas das bordas laterais de uma das cavidades em  $\phi = -\phi_0$  e  $\phi = +\phi_0$ . Portanto,

$$\vec{M}(\vec{R}') = \frac{2E_\theta}{j\omega\mu_0} R' \text{sen}\theta_0 [\delta(\phi' - \phi_0) + \delta(\phi' + \phi_0)] \hat{R}, \quad (4.12)$$

onde  $\vec{E}_\theta$  é dado por (4.5) e  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Note que a função diádica é da forma:

$$\nabla \times \vec{G}_{e2}(\vec{R}/\vec{R}') = \vec{A}\vec{B}. \quad (4.13)$$

Como

$$\vec{M}(\vec{R}') = M(\vec{R}')_R \hat{R}, \quad (4.14)$$

temos:

$$\nabla \times \vec{G}_{e2}(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{M}(\vec{R}') = \vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{M}(\vec{R}')] = \vec{A}B_R M(\vec{R}')_R. \quad (4.15)$$

Por outro lado, como estamos interessados em obter  $E_R(\vec{R})$  radiados, distantes da antena, apenas as componentes de  $E_{\theta r}$  e  $E_{\phi r}$  estão presentes.

Portanto,

$$\nabla \times \vec{G}_{e2}(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{M}(\vec{R}') = (A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) B_R M(\vec{R}')_R, \quad (4.16)$$

e também, somente a região  $\vec{R} > \vec{R}'$  interessa na expressão (4.14).

Com  $E_R(\vec{R})$  expresso por

$$E_R(\vec{R}) = \int \int \int_V (dE_{\theta_r} \hat{\theta} + dE_{\phi_r} \hat{\phi}), \quad (4.17)$$

temos que:

$$\begin{aligned} dE_{\theta_r} = & (-j\omega\mu_0) \frac{-j\kappa_0^2}{2\pi} \left[ \sum_m (2 - \delta_0) \left\{ \sum_\mu \frac{1}{\mu(\mu+1)I_{m,\mu}} \frac{1}{\kappa_0 R'} \right. \right. \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial \kappa_0 R} [\kappa_0 R h_\mu^{(2)}(\kappa_0 R)] \frac{\partial}{\partial \theta} [X_\mu^m(\cos \theta)] \text{sen}(m\phi) [\vec{M}'_{\text{om}\mu}(\kappa_0) \cdot \hat{R}] + \\ & + \sum_\lambda \frac{1}{\lambda(\lambda+1)I_{m,\lambda}} \left( \frac{m}{\text{sen}\theta} \right) h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) X_\lambda^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)}{\kappa_0 R'} \right. \\ & \left. \left. \cdot j_\lambda(\kappa_0 R') X_\lambda^m(\cos \theta') \text{sen}(m\phi') \right] \right\} \left. \right] \frac{2E_\theta}{j\omega\mu_0 R' \text{sen}\theta_0} \\ & \cdot [\delta(\phi' - \phi_0) + \delta(\phi' + \phi_0)] dV', \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} dE_{\phi_r} = & (-j\omega\mu_0) \frac{-j\kappa_0^2}{2\pi} \left[ \sum_m (2 - \delta_0) \left\{ \sum_\mu \frac{1}{\mu(\mu+1)I_{m,\mu}} \frac{m}{\kappa_0 R \text{sen}\theta} \right. \right. \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial \kappa_0 R} [\kappa_0 R h_\mu^{(2)}(\kappa_0 R)] [X_\mu^m(\cos \theta)] \cos(m\phi) [\vec{M}'_{\text{om}\mu}(\kappa_0) \cdot \hat{R}] + \\ & + \sum_\lambda \frac{1}{\lambda(\lambda+1)I_{m,\lambda}} (-1) h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) \frac{\partial}{\partial \theta} X_\lambda^m(\cos \theta) \text{sen}(m\phi) \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)}{\kappa_0 R'} \right. \end{aligned}$$

$$\cdot j_\lambda(\kappa_0 R') X_\lambda^m(\cos \theta') \text{sen}(m\phi') \Big] \Big] \frac{2E_\theta}{j\omega\mu_0 R' \text{sen}\theta_0} \cdot \left[ \delta(\phi' - \phi_0) + \delta(\phi' + \phi_0) \right] dV'. \quad (4.19)$$

Como  $\vec{M}'_{om\mu}(\kappa_0) \cdot \hat{R} = 0$ , a somatória em  $\mu$  se anula e (4.18) e (4.19) podem ser simplificadas, resultando em:

$$dE_{\theta r} = (-j\omega\mu_0) \frac{-j\kappa_0^2}{2\pi} \sum_m (2 - \delta_0) \sum_\lambda \frac{1}{\lambda(\lambda+1)I_{m,\lambda}} \left( \frac{m}{\text{sen}\theta} \right) h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) \cdot X_\lambda^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)}{\kappa_0 R'} j_\lambda(\kappa_0 R') X_\lambda^m(\cos \theta') \text{sen}(m\phi') \right] \cdot \frac{2E_\theta}{j\omega\mu_0 R' \text{sen}\theta_0} \left[ \delta(\phi' - \phi_0) + \delta(\phi' + \phi_0) \right] dV', \quad (4.20)$$

$$dE_{\phi r} = (-j\omega\mu_0) \frac{-j\kappa_0^2}{2\pi} \sum_m (2 - \delta_0) \sum_\lambda \frac{1}{\lambda(\lambda+1)I_{m,\lambda}} (-1) h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} X_\lambda^m(\cos \theta) \text{sen}(m\phi) \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)}{\kappa_0 R'} j_\lambda(\kappa_0 R') X_\lambda^m(\cos \theta') \text{sen}(m\phi') \right] \cdot \frac{2E_\theta}{j\omega\mu_0 R' \text{sen}\theta_0} \left[ \delta(\phi' - \phi_0) + \delta(\phi' + \phi_0) \right] dV'. \quad (4.21)$$

Em (4.20) e (4.21)  $E_\theta$  é dado por (4.5).

A integral em  $\theta'$  é do tipo:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} F(\theta') d\theta' \cong F(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} d\theta' = \Delta\theta F(\theta_0). \quad (4.22)$$

Como:

$$\int_{-\phi_0}^{+\phi_0} F(\phi') \delta(\phi' - \phi_0) d\phi' = F(\phi_0) \quad (4.23)$$

$$\int_{-\phi_0}^{+\phi_0} F(\phi') \delta(\phi' + \phi_0) d\phi' = F(-\phi_0). \quad (4.24)$$

Então:  $F(\phi_0) = +F(-\phi_0)$ .

Assim:  $F(\phi_0) + F(-\phi_0) = 2F(\phi_0)$ .

A integral em  $\phi'$  é do tipo:

$$\begin{aligned} \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \text{sen}(m\phi') \text{sen}(2\phi') [\delta(\phi' - \phi_0) + \delta(\phi' + \phi_0)] d\phi' = \\ = \text{sen}(m\phi_0) \text{sen}(2\phi_0) + \text{sen}(m\phi_0) \text{sen}(2\phi_0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

A integral em  $R'$  é do tipo (com  $E_\theta$  dado por (4.5)):

$$\int_{r_a}^{r_b} \frac{E_\theta}{(\kappa_0 R')^2} j_\lambda(\kappa_0 R') (R')^2 dR' = \frac{E_0 \text{sen}(2\phi')}{\kappa_0^2} \int_{\kappa_0 r_a}^{\kappa_0 r_b} j_\lambda(x) \left[ \frac{j_3(\sqrt{\epsilon_r} x)}{j_3'(\sqrt{\epsilon_r} x_0)} - \frac{\eta_3(\sqrt{\epsilon_r} x)}{\eta_3'(\sqrt{\epsilon_r} x_0)} \right] dx \quad (4.26)$$

onde é feita, em (4.26), uma mudança de variáveis de integração, dadas por  $\kappa_1 = \sqrt{\epsilon_r} \kappa_0$ ,  $x = \kappa_0 r$  e  $x_0 = \kappa_1 r_0$ .

Vamos denominar a integral que aparece em (4.26) por  $F_\lambda(\kappa_0)$ , isto é,

$$F_\lambda(\kappa_0) = \int_{\kappa_0 r_a}^{\kappa_0 r_b} j_\lambda(x) \left[ \frac{j_3(\sqrt{\epsilon_r} x)}{j_3'(\sqrt{\epsilon_r} x_0)} - \frac{\eta_3(\sqrt{\epsilon_r} x)}{\eta_3'(\sqrt{\epsilon_r} x_0)} \right] dx. \quad (4.27)$$

Devido à complexidade de (4.27), ela deve ser obtida numericamente. Obtido o seu valor, e utilizando-se  $\text{sen}(m\phi_0) \text{sen}(2\phi_0) + \text{sen}(m\phi_0) \text{sen}(2\phi_0) = 2 \text{sen}(m\phi_0) \text{sen}(2\phi_0)$  podemos então escrever (4.20) e (4.21) como:

$$E_{\theta r} = (-j\omega\mu_0) \left( \frac{-j\kappa_0}{2\pi} \right)^2 \frac{2E_0 \Delta\theta}{j\omega\mu_0 \kappa_0^2} \sum_m (2 - \delta_0) \sum_\lambda \frac{1}{\lambda(\lambda+1) I_{m,\lambda}} \left( \frac{m}{\text{sen}\theta} \right).$$

$$.h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) X_\lambda^m(\cos\theta) \cos(m\phi) [\lambda(\lambda+1) X_\lambda^m(\cos\theta_0) [\cos(m\phi_0) \text{sen}(2\phi_0)] F_\lambda(\kappa_0)]. \quad (4.28)$$

$$E_{\phi_r} = (-j\omega\mu_0)\left(\frac{-j\kappa_0}{2\pi}\right)^2 \frac{2E_0\Delta\theta}{j\omega\mu_0\kappa_0^2} \sum_m (2 - \delta_0) \sum_\lambda \frac{1}{\lambda(\lambda+1)I_{m,\lambda}} (-1)h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R). \\ \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} X_\lambda^m(\cos\theta)\text{sen}(m\phi) [\lambda(\lambda+1) X_\lambda^m(\cos\theta_0)[\cos(m\phi_0)\text{sen}(2\phi_0)]F_\lambda(\kappa_0)]. \quad (4.29)$$

Como  $E_\theta(+\phi_0) = -E_\theta(-\phi_0)$  somente os termos com paridade par são diferentes de zero. Após simplificação, (4.28) e (4.29) ficam:

$$E_{\theta_r} = \frac{j2E_0\Delta\theta\text{sen}(2\phi_0)}{\pi\text{sen}\theta} \sum_m (2 - \delta_0)(m) \cos(m\phi)\text{sen}(m\phi_0). \\ \cdot \sum_\lambda \frac{1}{I_{m,\lambda}} h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) X_\lambda^m(\cos\theta) X_\lambda^m(\cos\theta_0) F_\lambda(\kappa_0), \quad (4.30)$$

$$E_{\phi_r} = -\frac{j2E_0\Delta\theta\text{sen}(2\phi_0)}{\pi} \sum_m (2 - \delta_0)(+1)\text{sen}(m\phi)\text{sen}(m\phi_0). \\ \cdot \sum_\lambda \frac{1}{I_{m,\lambda}} h_\lambda^{(2)}(\kappa_0 R) \frac{\partial}{\partial\theta} X_\lambda^m(\cos\theta) X_\lambda^m(\cos\theta_0) F_\lambda(\kappa_0). \quad (4.31)$$

Convém alertar que, nas expressões de (4.30) e (4.31), as somatórias em  $m$  e  $\lambda$  não são independentes. O autovalor de  $\lambda$  é uma quantidade positiva, crescendo de 0 a  $\infty$ . Entretanto  $m$  é dependente de  $\lambda$ , pois  $|m| \leq \lambda$ . Isto significa que, para  $\lambda = 0$  tem-se  $m = 0$ , para  $\lambda = 1$  tem-se  $m = -1, 0, +1$ , para  $\lambda = 2$  tem-se  $m = -2, -1, 0, +1, +2$ , para  $\lambda = 3$  tem-se  $m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ , e assim por diante. As somatórias em (4.30) e (4.31) serão truncadas quando os termos para um determinado  $\lambda$  deixam de contribuir significativamente para o valor final dos campos.

Convém observar também que estamos interessados em conhecer os campos elétricos radiados  $E_{\theta_r}$  e  $E_{\phi_r}$  na região de campos distantes, onde  $\kappa_0 r \gg 1$ . Podemos, então, usar expressões assintóticas para as funções de Hankel esféricas de [38], como segue:

$$h_{\lambda}^{(2)}(\kappa_0 R)_{\kappa_0 R \rightarrow \infty} \cong (j)^{\lambda+1} \frac{e^{-jk_0 R}}{\kappa_0 R}. \quad (4.32)$$

Podemos, então, escrever (4.30) e (4.31) como segue:

$$E_{\theta} \cong +E_0 A_1 \sum_m B_m \sum_{\lambda} D_{\lambda} \frac{(j)^{\lambda+2} e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{X_{\lambda}^m(\cos \theta)}{\text{sen} \theta} \cos(m\phi), \quad (4.33)$$

$$E_{\phi} \cong -E_0 A_1 \sum_m G_m \sum_{\lambda} D_{\lambda} \frac{(j)^{\lambda+2} e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{\partial [X_{\lambda}^m(\cos \theta)]}{\partial \theta} \text{sen}(m\phi), \quad (4.34)$$

onde

$$A_1 = \frac{2\Delta\theta \text{sen}(m\phi_0)}{\pi}, \quad (4.35)$$

$$B_m = m(2 - \delta_{om}) \text{sen}(m\phi_0), \quad (4.36)$$

$$D_{\lambda} = \frac{F_{\lambda}(k_0)}{I_{m,\lambda}} X_{\lambda}^m(\cos \theta_0), \quad (4.37)$$

$$G_m = (2 - \delta_{om}) \text{sen}(m\phi_0). \quad (4.38)$$

Conhecidas as componentes do campo elétrico radiado,  $E_{\theta r}$  e  $E_{\phi r}$ , podemos calcular a potência radiada pela antena a partir de (4.3) e a tangente de perda de radiação  $\delta_r$ , a partir de (4.2) e (4.4).

De (4.3) temos:

$$P_{rad} = \frac{E_0^2 A_1^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} \left\{ \left| \sum_m B_m \left[ \sum_{\lambda} D_{\lambda} (j)^{\lambda+2} \frac{X_{\lambda}^m(\cos \theta)}{\text{sen} \theta} \cos(m\phi) \right] \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \sum_m G_m \left[ \sum_{\lambda} D_{\lambda} (j)^{\lambda+2} \frac{\partial}{\partial \theta} X_{\lambda}^m(\cos \theta) \text{sen}(m\phi) \right] \right|^2 \right\} \text{sen} \theta d\theta d\phi, \quad (4.39)$$

pois  $|e^{-jk_0 R}|^2 = 1$  e é um fator que multiplica as duas somatórias em  $m$  e  $\lambda$ .

Convém observar que a obtenção de (4.39) é de alta complexidade numérica, tendo em vista não apenas a existência das funções associadas de Legendre de 1ª e 2ª espécie, representadas por  $X_\lambda^m$ , mas também devido ao fato da somatória em  $\lambda$  se estender de  $\lambda = 0$  a  $\infty$  e, também, que  $m$  é um inteiro extendendo-se de  $m > -\lambda$  a  $m < +\lambda$ , para cada  $\lambda$ .

Entretanto, a cavidade irá excitar campos preferencialmente, com  $m = 2$  e  $\lambda = 3$ . Podemos, em primeira aproximação, desprezar os campos com outros valores de  $m$  e  $\lambda$ .

Com essa hipótese, podemos dizer que as expressões (4.33) e (4.34) apresentam predominância dos termos com  $m = 2$  e  $\lambda = 3$ , portanto, para que esta aproximação possa ser melhorada podemos considerar o caso de uma antena simétrica com 2 *patches* com aberturas em  $\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$ .

Para dois *patches* simétricos em fase:

$$E_\theta \cong \frac{+2E_0\Delta\theta\text{sen}(2\phi_0)}{\pi}(2)\text{sen}(2\phi_0)\frac{F_3(k_0)}{I_{2,3}}P_3^2(\cos\theta_0)\frac{(j)^5 e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \cdot \frac{P_3^2(\cos\theta)}{\text{sen}\theta} \cos(2\phi_0)2, \quad (4.40)$$

$$E_\phi \cong \frac{-2E_0\Delta\theta\text{sen}(2\phi_0)}{\pi}(2)\text{sen}(2\phi_0)\frac{F_3(k_0)}{I_{2,3}}P_3^2(\cos\theta_0)\frac{(j)^5 e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}P_3^2(\cos\theta)\text{sen}(2\phi_0), \quad (4.41)$$

e para  $\theta_0 = 54, 73^\circ$ .

As equações (4.40) e (4.41) podem ser escritas como segue:

$$E_\theta \cong 4jE_0W_{2,3}\frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R}15\text{sen}\theta \cos\theta \cos(2\phi), \quad (4.42)$$



$$E_\phi \cong -2jE_0W_{2,3} \frac{e^{-jk_0R}}{k_0R} 15\text{sen}\theta(2 - 3\text{sen}^2\theta)\text{sen}(2\phi), \quad (4.43)$$

onde

$$W_{2,3} = \frac{2\Delta\theta\text{sen}^2(2\phi_0)F_3(k_0)}{\pi I_{2,3}} 15\text{sen}^2\theta_0 \cos\theta_0. \quad (4.44)$$

A potência radiada, dada por (4.39) fica então expressa aproximadamente por:

$$P_{rad} \cong \frac{4|E_0|^2|W_{2,3}|^2}{2\eta_0\kappa_0^2} \left| \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} [4(15)^2\text{sen}^2\theta \cos^2\theta \cos^2(2\phi) + 15^2\text{sen}^2\theta \cdot (2 - 3\text{sen}^2\theta)^2 \text{sen}^2(2\phi)] \text{sen}\theta d\theta d\phi \right|, \quad (4.45)$$

Como:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(2\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(4\phi)}{2}\right) d\phi = \pi + 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(4\phi)}{2}\right) d\phi = \pi - 0.$$

Então:

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2|E_0|^2|W_{2,3}|^2\pi}{2\eta_0\kappa_0^2} \left| \int_{\theta_0}^{\pi} [4\text{sen}^3\theta(1 - \text{sen}^2\theta) + 4\text{sen}^3\theta - 12\text{sen}^5\theta + 9\text{sen}^7\theta] d\theta \right|, \quad (4.46)$$

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2|E_0|^2|W_{2,3}|^2\pi}{2\eta_0\kappa_0^2} \left| \int_{\theta_0}^{\pi} [8\text{sen}^3\theta - 16\text{sen}^5\theta + 9\text{sen}^7\theta] d\theta \right|, \quad (4.47)$$

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2|E_0|^2|W_{2,3}|^2\pi}{2\eta_0\kappa_0^2} \left| \int_{\cos\theta_0}^{-1} [-8\text{sen}^2\theta + 16\text{sen}^4\theta - 9\text{sen}^6\theta] d\cos\theta \right|, \quad (4.48)$$

Pois,  $\text{sen}\theta d\theta = -d\cos\theta$  e  $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ , então:

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2 |E_0|^2 |W_{2,3}|^2 \pi}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_{\cos \theta_0}^{-1} [-8 + 8x^2 + 16(1-x^2)(1-x^2) - 9(1-x^2)(1-x^2)(1-x^2)] dx \right|, \quad (4.49)$$

com  $x = \cos \theta$ , logo:

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2 |E_0|^2 |W_{2,3}|^2 \pi}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_{\cos \theta_0}^{-1} [-8 + 8x^2 + 16 - 32x^2 + 16x^4 + 9x^6 - 27x^4 + 27x^2 - 9] dx \right|, \quad (4.50)$$

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2 |E_0|^2 |W_{2,3}|^2 \pi}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_{\cos \theta_0}^{-1} [-1 + 3x^2 - 11x^4 + 9x^6] dx \right|, \quad (4.51)$$

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2 |E_0|^2 |W_{2,3}|^2 \pi}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \left[ -x + \frac{3x^3}{3} - \frac{11x^5}{5} + \frac{9x^7}{7} \right] \Big|_{\cos \theta_0}^{-1} dx \right|, \quad (4.52)$$

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2 |E_0|^2 |W_{2,3}|^2 \pi}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \left[ +1 - 1 + \frac{11}{5} - \frac{9}{7} + \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 + \frac{11}{5} \cos^5 \theta_0 - \frac{9}{7} \cos^7 \theta_0 \right] dx \right|, \quad (4.53)$$

$$P_{rad} \cong \frac{4(15)^2 |E_0|^2 |W_{2,3}|^2 \pi}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \left[ \frac{32}{35} + \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 + \frac{11}{5} \cos^5 \theta_0 - \frac{9}{7} \cos^7 \theta_0 \right] dx \right| \quad (4.54)$$

Obtido  $P_{rad}$  de (4.54) podemos obter a tangente de perda de radiação de (4.2) com  $U_{arm}$  dado por (4.4).

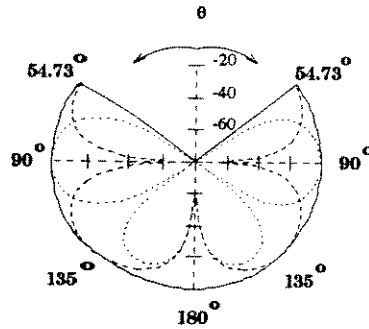


Figura 4.1: Diagrama de radiação , em (dB), nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ (linhas pontilhadas) e  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ (linhas tracejadas) para a antena com  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$  da Fig. 3.2.

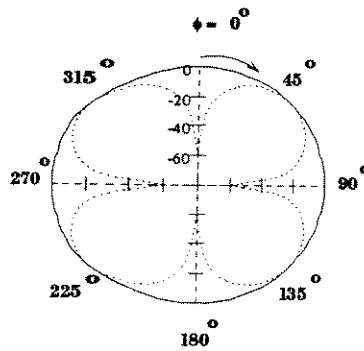


Figura 4.2: Diagrama de radiação , em (dB), no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , para a antena com  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$  da Fig. 3.2.

Podemos também facilmente obter uma apresentação aproximada do diagrama de radiação , em (dB), para o campo radiado total  $|E_{\theta r}|^2 + |E_{\phi r}|^2$  nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ , nos semi-planos  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ , Fig. 4.1, e no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , Fig. 4.2.

## Capítulo 5

### Antenas com um *patch* para ressonância azimutal

#### 5.1 Antena com modo de ressonância para $\lambda=2$

##### 5.1.1 Escolha de $\theta_0$ e dos autovalores $m$ e $\lambda$

Seguindo as mesmas considerações da seção 3.2, para que a condição de contorno do campo elétrico  $\vec{E}$ , seja satisfeita na superfície condutora perfeita  $\theta = \theta_0$ , devemos ter

$$\frac{d}{d\theta} X_\lambda^m(\cos \theta_0)|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad (5.1)$$

onde

$$X_\lambda^m(\cos \theta_0) = P_\lambda^m(\cos \theta_0) + Y_\lambda Q_\lambda^m(\cos \theta_0), \quad (5.2)$$

e

$$Y_\lambda = -\frac{2}{\pi} \tan(\lambda\pi), \quad (5.3)$$

sendo que (5.3) resulta da condição de contorno que requer campo elétrico finito em  $\theta = 180^\circ$ .

Para  $\lambda = \text{inteiro}$  e  $Y_\lambda = 0$ , (5.1) resulta na equação (3.68).

Na escolha de  $\theta_0$  vamos ter que selecionar casos com  $m \neq 0$ , pois o campo elétrico deverá ter derivada nula com relação a  $\phi$  em  $\phi \pm \phi_0$  e, para o modo fundamental, deverá ter valor nulo em  $\phi = 0$ .

Assim, se usarmos  $m = 1$ , a derivada do campo elétrico pode ser nula em  $2\phi_0 = 180^\circ$ . Para  $m = 2$ ,  $2\phi_0 = 90^\circ$ , para  $m = 3$ ,  $2\phi_0 = 45^\circ$ , para  $m = 4$ ,  $2\phi_0 = 22,5^\circ$ , e assim por diante.

Vamos, então, escolher  $m \neq 0$  e obter os valores de  $\theta_0$ , a partir dos menores valores de  $m$  e  $\lambda$  inteiros.

Das equações (3.69) a (3.74) da seção 3.2.1, as soluções  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \pi$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  são descartadas. Para nós interessam os valores de  $\theta_0$  menores de  $90^\circ$ . Isto é possível, para os casos  $m \neq 0$ , com os valores de  $\theta_0$  encontrados de (3.75) a (3.77).

Embora conviesse examinar os valores de  $\theta_0$  para  $\lambda$  maiores de 3 para permitir uma escolha mais conveniente de  $\theta_0$  e para maiores valores de  $m$ , de modo a se obterem *patches* com menores valores de  $2\phi_0$ , os três valores de (3.75) a (3.77) são de interesse aqui.

Iremos a seguir analisar o caso de  $\theta_0 = 45^\circ$  para  $m = 1$  e  $\lambda = 2$ .

### 5.1.2 Escolha das dimensões do *patch* para $m = 1$ , $\lambda = 2$

Com a hipótese de que  $(\Delta\theta)r_a$  é muito menor que as outras dimensões do *patch* e, portanto, muito menor do que o comprimento de onda de operação, iremos, como boa aproximação, supor que  $X_\lambda^m(\cos\theta) \cong X_\lambda^m(\cos\theta_0) = \text{constante}$ .

Portanto, para  $m = 1$  e  $\lambda = 2$ , a equação (3.2) fica:

$$E_{\theta_{1,2}} = [A_{\phi_{1,2}} j_2(k_1 r) + B_{\phi_{1,2}} \eta_2(k_1 r)]_{\text{sen}\phi}^{\cos\phi}, \quad (5.4)$$

e, de (3.75), o ângulo do cone deve ser  $\theta_0 = 45^\circ$ .

Com a escolha de  $m = 1$ , os valores de  $2\phi_0$  para os quais  $\frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} = 0$ , isto é, para

$$\begin{cases} -\text{sen}\phi_0 = 0 \\ +\cos\phi_0 = 0 \end{cases}, \text{ são } 2\phi_0 = 180^\circ \text{ e } 360^\circ \quad (5.5)$$

Iremos escolher o menor valor, ou seja,  $2\phi_0 = 180^\circ$ . Portanto, o comprimento do *patch* ao longo de  $\phi$  sobre o raio  $r_0$  (com  $\text{sen}\theta_0 = \text{sen}(45^\circ) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ) é de

$$L_\phi = (r_0 \text{sen}\theta_0) 2\phi_0 = r_0 \sqrt{\frac{1}{2}} \pi = 2,2214 r_0. \quad (5.6)$$

Para que o *patch* ressoe ao longo de  $\phi$ , o campo sob o *patch* para os modos ímpares em  $\phi$ , deve ser dado por:

$$E_\theta = E'_0 [A'_{1,2} j_2(k_1 r) + B'_{1,2} \eta_2(k_1 r)] \text{sen}\left(\frac{m\pi\phi}{2\phi_0}\right), \quad (5.7)$$

com o *patch* tendo um comprimento em  $\phi$  dado por  $k_1 L_\phi = \pi$ . Com  $L_\phi$  dado por (5.6), temos

$$k_1 r_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}} \pi} = \sqrt{2} = 1,41. \quad (5.8)$$

A escolha de  $r_0$  é feita de forma a se ter  $E_\theta$  máximo em  $r_0$ . Portanto,

$$\left. \frac{dE_\theta}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (5.9)$$

Com  $E_\theta$  dado por (5.7), obtemos

$$B'_{1,2} = -A'_{1,2} \frac{j'_2(\kappa_1 r_0)}{\eta'_2(\kappa_1 r_0)}. \quad (5.10)$$

Portanto, o campo  $E_\theta$  fica

$$E_\theta = A'_{1,2} \left[ j_2(k_1 r) - \frac{j'_2(\kappa_1 r_0)}{\eta'_2(\kappa_1 r_0)} \eta_2(k_1 r) \right] \text{sen} \left( \frac{m' \pi \phi}{2\phi_0} \right), \quad (5.11)$$

que para o primeiro modo  $m' = 1$  e, com  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,

$$E_\theta = A'_{1,2} \left[ j_2(k_1 r) - \frac{j'_2(\kappa_1 r_0)}{\eta'_2(\kappa_1 r_0)} \eta_2(k_1 r) \right] \text{sen} \phi, \quad (5.12)$$

A frequência de ressonância desse primeiro modo  $m' = 1$  pode ser obtida de (5.8):

$$f_0 = \frac{\sqrt{2}c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}r_0}, \quad (5.13)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no espaço livre e  $\epsilon_r$  é a constante dielétrica do substrato.

Para dimensionar completamente o *patch*, são necessários os valores de  $r_a$ ,  $r_b$  e  $r_0$ .

Para isso iremos primeiro examinar como  $|E_\theta|^2$  varia nas vizinhanças de  $r_0$ , com  $\phi$  fixado igual a  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Portanto, de (5.12)

$$E_\theta = E_0 \left[ \frac{j_2(k_1 r)}{j_2(k_1 r_0)} - \frac{\eta_2(k_1 r)}{\eta_2(k_1 r_0)} \right], \quad (5.14)$$

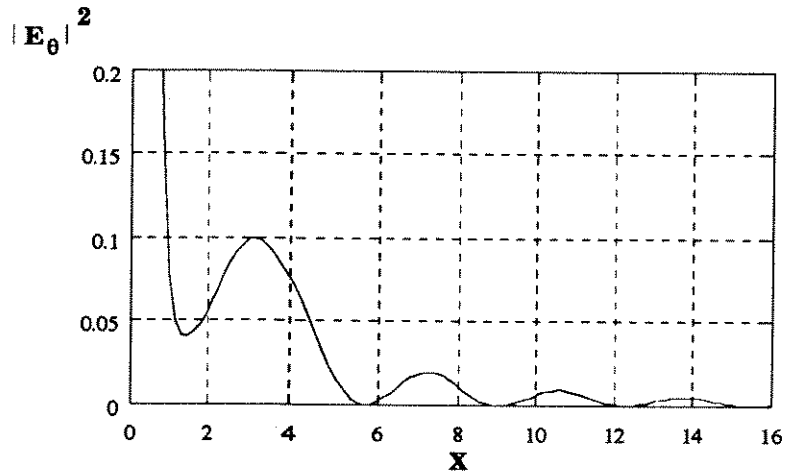


Figura 5.1: Variação do campo elétrico (escala arbitrária) ao longo do *patch* na direção radial.

onde  $j_2(x)$  e  $\eta_2(x)$  são dadas por (3.44) e (3.49), respectivamente, e para um  $k_1 r_0 = x_0 = \sqrt{2} = 1,41$ , dado por (5.8).

De (3.57)

$$j_2'(x) = -\left(\frac{9}{x^4} - \frac{4}{x^2}\right)\text{sen}x + \left(\frac{9}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x, \quad (5.15)$$

semelhantemente,

$$\eta_2'(x) = \left(\frac{9}{x^4} - \frac{4}{x^2}\right)\cos x + \left(\frac{9}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\text{sen}x. \quad (5.16)$$

Traçando-se (5.14), como função de  $x$ , ao redor de  $x_0 = 1,41$ , observa-se no gráfico, Fig. 5.1, que para  $x$  entre 1,1 e 1,8 a variação de  $|E_\theta|^2$  se situa em aproximadamente, 10% (no máximo). Portanto,  $x_a = \kappa_1 r_a = 1,1$  e  $x_b = \kappa_1 r_b = 1,8$ , com  $x_0 = k_1 r_0 = \sqrt{2}$  parece ser uma escolha adequada. Sejam, portanto,  $x_a = x_0 - 0,3$  e  $x_b = x_0 + 0,3$ .

À semelhança do que foi feito anteriormente, iremos escolher um valor de  $r_0 = 0,08m$  que fornece dimensões razoáveis para a antena. Note que poder-se-ia ter selecionado o valor da frequência de operação da antena.



Temos, portanto, para  $\epsilon_r = 2,32$

$$r_a = \frac{x_a}{x_0} r_0 = \frac{\sqrt{2} - 0,3}{\sqrt{2}} \times 0,08 = 0,063m,$$

$$r_b = \frac{x_b}{x_0} r_0 = \frac{\sqrt{2} + 0,3}{\sqrt{2}} \times 0,08 = 0,097m,$$

$$f_o = \frac{\sqrt{2}c}{2\pi\sqrt{2,32} \times 0,08} = 0,55GHz,$$

$$L_\phi = \frac{r_0}{\sqrt{2}} \times \pi = 2,2214r_0 = 0,1777m. \quad (5.17)$$

### 5.1.3 Impedância de entrada obtida a partir da expansão do campo elétrico na cavidade

O desenvolvimento teórico para a impedância de entrada é similar ao descrito na seção 3.3. Então, a equação (3.109) pode ser reescrita como

$$Z_{in} = \frac{r_0^2 \Delta \theta}{2\pi \phi_0 \text{sen} \theta_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{[A_{1,2} j_2(k_{1,2} r_1) + B_{1,2} \eta_2(k_{1,2} r_1)]^2}{[A_{1,2}^2 F_{1,2} + B_{1,2}^2 T_{1,2}]}$$

$$\cdot j_0^2 \left( \frac{\pi w}{2r_0 \phi_0 \text{sen} \theta_0} \right) \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{\pi \phi_1}{\phi_0} \right) j f [(f_{1,2}^2 - f^2) - j f^2 \delta_{eff}]}{\cos^2 \left( \frac{\pi \phi_1}{\phi_0} \right) [(f_{1,2}^2 - f^2)^2 + \delta_{eff}^2 f^4]} \quad (5.18)$$

onde, para este modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\theta_0$  é dado por (3.70), ou seja,

$$\text{sen} \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = 1, \lambda = 2, \quad (5.19)$$

$k_{1,2} = k_1$  é dado por (3.80) e as funções com argumento complexo são expandidas conforme (3.107). Os valores de  $F_{1,2}$  e  $T_{1,2}$  podem ser obtidos de (3.99) e (3.100). O valor de  $r_0$  ou de  $f_0 = f_{1,2}$  é escolhido (veja eq. (5.13)).

Para o caso em que  $j_2'(\kappa_{1,2} r_0)$  não seja escolhida igual a zero, a expressão (5.18) irá conter  $j_2(k_{1,2} r_1)$ ,  $\eta_2(k_{1,2} r_1)$ ,  $j_2'(k_{1,2} r_0)$  e  $\eta_2'(k_{1,2} r_0)$ , as quais são dadas por (3.44), (3.49), (5.15) e (5.16), respectivamente.

### 5.1.4 Campos radiados pela antena

#### Perdas e fatores de qualidade

Para o *patch* com os valores  $r_0 = 8$  cm,  $\epsilon_r = 2,32$  e  $L_\phi = 17,77$  cm,  $r_a = 0,063$  cm,  $r_b = 0,097$  cm,  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ , operando na frequência central de  $f_{1,2} = 0,55$  GHz, conforme (5.17), fazendo-se as mesmas considerações da seção 4.1, temos que calcular o valor do fator de qualidade dado por (4.2).

#### Potência radiada pela antena e energia armazenada na cavidade.

Para obtenção de  $\delta_r$  necessitamos calcular a potência total radiada por cada cavidade,  $P_{rad}$ , e a energia armazenada em cada cavidade,  $U_{arm}$ , as quais são dadas pelas expressões (4.3) e (4.4), respectivamente.

A obtenção de  $U_{arm}$  é feita como segue, para o modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$ , para o qual o campo elétrico na cavidade é:

$$E_\theta = E_0 \left[ \frac{j_2(k_1 r)}{j_2'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_2(k_1 r)}{\eta_2'(k_1 r_0)} \right] \text{sen} \left( \frac{\pi \phi_1}{2\phi_0} \right). \quad (5.20)$$

Portanto, com (4.5) em (4.4),

$$U_{arm} \cong \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_0^2}{2} [\Delta\theta \text{sen}\theta_0] \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2(\phi') d\phi' \int_{r_a}^{r_b} \left[ \frac{j_2(k_1 r)}{j_2'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_2(k_1 r)}{\eta_2'(k_1 r_0)} \right]^2 r^2 dr, \quad (5.21)$$

sabendo-se que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 \theta' d\theta' = \left[ \frac{1}{2} \phi - \frac{1}{4} \text{sen} 2\phi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad (5.22)$$

e definindo-se

$$G_2(\kappa_0) = \int_{x_a=k_1 r_a}^{x_b=k_1 r_b} \left[ \frac{j_2(x)}{j_2'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_2(x)}{\eta_2'(k_1 r_0)} \right]^2 x^2 dx, \quad (5.23)$$

tem-se

$$U_{arm} \cong E_0^2 \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \pi \Delta \theta G_2(\kappa_0)}{4k_1^3} \text{sen} \theta_0. \quad (5.24)$$

Note que  $E_0^2$  é a amplitude do campo sob o *patch* e pode ser escolhida como sendo  $E_0 = 1$ .

### Campos radiados considerando ressonância ao longo da direção azimutal.

O campo elétrico radiado pode ser obtido seguindo-se o mesmo procedimento da seção 4.3, onde as equações (4.33) e (4.34) podem ser reescritas como

$$E_{\theta} \cong +E_0 A_1 \sum_m B_m \sum_{\lambda} D_{\lambda} \frac{(j)^{\lambda+2} e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{P_{\lambda}^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(m\phi), \quad (5.25)$$

$$E_{\phi} \cong -E_0 A_1 \sum_m G_m \sum_{\lambda} D_{\lambda} \frac{(j)^{\lambda+2} e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{\partial [P_{\lambda}^m(\cos \theta)]}{\partial \theta} \text{sen}(m\phi), \quad (5.26)$$

sendo que as constantes são as mesmas definidas por (4.35) a (4.38).

É importante observar que, com a escolha de  $\theta_0 = 45^\circ$ , a radiação pelas paredes laterais do *patch*, em  $\phi = -\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$  e  $\phi = +\phi_0 = +\frac{\pi}{2}$ , far-se-á, preferencialmente, através do modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$ . Podemos, portanto, como primeira aproximação, desprezar os campos associados aos demais modos  $m$  e  $\lambda$ .

Com essa hipótese, as somatórias em  $m$  e  $\lambda$ , que aparecem em (5.25) e (5.26), se reduzem a um único termo, com  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$ . Portanto, (5.25) e (5.26) ficam

$$E_{\theta r} \cong + \frac{2E_0 \Delta \theta \text{sen} \phi_0}{\pi} 2 \text{sen} \phi_0 \frac{F_2(\kappa_0)}{I_{1,2}} P_2^1(\cos \theta_0) (j)^4 \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{P_2^1(\cos \theta)}{\text{sen} \theta} \cos \phi, \quad (5.27)$$

$$E_{\phi r} \cong - \frac{2E_0 \Delta \theta \text{sen} \phi_0}{\pi} 2 \text{sen} \phi_0 \frac{F_2(\kappa_0)}{I_{1,2}} P_2^1(\cos \theta_0) (j)^4 \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{\partial P_2^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \text{sen} \phi. \quad (5.28)$$

As equações (5.27) e (5.28) podem ser escritas como seguem

$$E_{\theta} \cong +E_0 W_{1,2} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (3 \cos \theta) \cos \phi, \quad (5.29)$$

$$E_{\phi} \cong -E_0 W_{1,2} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (3 \cos 2\theta) \text{sen} \phi, \quad (5.30)$$

onde

$$W_{1,2} = \frac{4\Delta\theta \text{sen}^2 \phi_0 F_2(k_0)}{\pi I_{1,2}} (3 \text{sen} \theta_0 \cos \theta_0). \quad (5.31)$$

As equações (5.29), (5.30) e (5.31) podem ainda ser escritas da seguinte forma

$$E_{\theta} \cong +3E_0 W_{1,2} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (\cos \theta) \cos \phi, \quad (5.32)$$

$$E_{\phi} \cong -3E_0 W_{1,2} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (\cos 2\theta) \text{sen} \phi, \quad (5.33)$$

onde

$$W_{1,2} = \frac{6\Delta\theta \text{sen}^2 \phi_0 F_2(k_0)}{\pi I_{1,2}} \text{sen}(2\theta_0). \quad (5.34)$$

A potência radiada, dada por (4.39), fica então expressa, aproximadamente, por:

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} [(3 \cos \theta)^2 \cos^2(\phi) + (3 \cos 2\theta)^2 \text{sen}^2 \phi] \cdot \text{sen} \theta d\theta d\phi \right|, \quad (5.35)$$

A integral em  $\phi$  de (5.35) é trivial e fornece  $\pi$ . Portanto,

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} 36\pi \left| \int_{\theta_0}^{\pi} [\cos^2 \theta + (2 \cos^2 \theta - 1)^2] \text{sen} \theta d\theta \right|. \quad (5.36)$$

Com a mudança de variáveis,  $\cos \theta = w$ ,  $d \cos \theta = -\text{sen} \theta d\theta = dw$  e, com os limites  $w_s = \cos \pi = -1$  e  $w_i = \cos \theta_0$ , temos:

$$P_{rad} \cong -36\pi \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_{\cos \theta_0}^{-1} [w^2 + 4w^4 - 4w^2 + 1] dw \right|, \quad (5.37)$$

ou

$$P_{rad} \cong 36\pi \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_{-1}^{\cos \theta_0} [4w^4 - 3w^2 + 1] dw \right|, \quad (5.38)$$

ou

$$P_{rad} \cong 36\pi \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \left[ \frac{4}{5} w^5 - w^3 + w \right]_{-1}^{\cos \theta_0} \right|, \quad (5.39)$$

ou

$$P_{rad} \cong 36\pi \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \left[ \frac{4}{5} - 1 + 1 + \frac{4}{5} \cos^5 \theta_0 - \cos^3 \theta_0 + \cos \theta_0 \right] \right|, \quad (5.40)$$

ou

$$P_{rad} \cong 36\pi \frac{|E_0|^2 |W_{1,2}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \left[ \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cos^5 \theta_0 - \cos^3 \theta_0 + \cos \theta_0 \right] \right|. \quad (5.41)$$

Obtido  $P_{rad}$  de (5.41), podemos obter a tangente de perda de radiação de (4.2) com  $U_{arm}$  dado por (5.24).

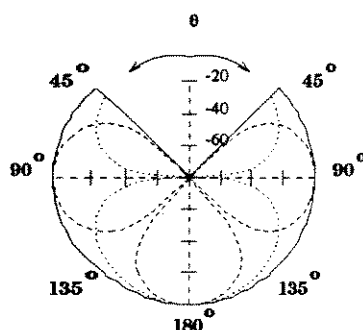


Figura 5.2: Diagrama de radiação , em (dB), nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ (linhas pontilhadas) e  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ (linhas tracejadas) para a antena com  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$  da Fig. 3.1.

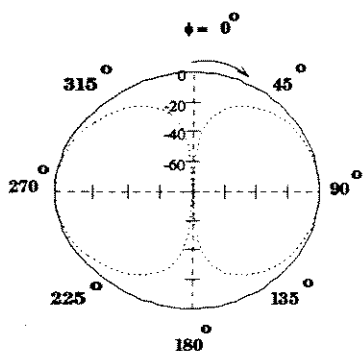


Figura 5.3: Diagrama de radiação , em (dB), no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$  para a antena com  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$  da Fig. 3.1.

Podemos, também, facilmente obter uma apresentação aproximada do diagrama de radiação , em (dB), para o campo radiado total  $|E_{\theta r}|^2 + |E_{\phi r}|^2$  nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ , nos semi-planos  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ , Fig. 5.2, e no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , Fig. 5.3.

Note que, no plano  $\phi = 0$ (ou  $\pi$ ), existe apenas  $|E_{\theta r}|^2$  pois  $|E_{\phi r}|^2 = 0$ , uma vez que em (5.32) e (5.33)  $\cos(0^\circ) = 1$  e  $\sin(0^\circ) = 0$ . O diagrama de radiação nesse plano é, portanto, dado por  $|\cos\theta|^2$ , com direção de nulo  $\theta_{nulo} = 90^\circ$  e direção de máximo  $\theta_{max} = 180^\circ$  (uma vez que  $\theta = 0^\circ$  está excluído da região de radiação ).

No plano  $\phi = \frac{\pi}{2}$ (ou  $\frac{3\pi}{2}$ ) existe apenas  $|E_{\phi r}|^2$  pois  $|E_{\theta r}|^2 = 0$ , conforme (5.32) e (5.33), onde  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  e  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ . O diagrama de radiação nesse plano é, portanto,



dado por  $|\cos 2\theta|^2$ , com direções de nulos  $\theta_{nulos} = 45^\circ e 135^\circ$  e direções de máximos  $\theta_{max} = 90^\circ e 180^\circ$ .

No plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (ou  $\frac{3\pi}{2}$ ) existe apenas  $|E_{\phi r}|^2$  pois  $|E_{\theta r}|^2 = 0$ , conforme (5.32) e (5.33), uma vez que  $\cos^2 \pi = 1$  e  $\cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$ .

O diagrama de radiação nesse plano é, portanto, dado por  $|\sen\phi|^2$ , com direções de nulos  $\theta_{nulos} = 0^\circ e 180^\circ$  e direções de máximos  $\theta_{max} = 90^\circ e 270^\circ$ .

## 5.2 Antena com modo de ressonância para $\lambda=3$

### 5.2.1 Escolha de $\theta_0$ e dos autovalores $m$ e $\lambda$

Seguindo as mesmas considerações do início deste capítulo, para que a condição de contorno do campo elétrico  $\vec{E}$ , seja satisfeita na superfície condutora perfeita  $\theta = \theta_0$ , devemos satisfazer as equações (5.1), (5.2) e (5.3), onde (5.3) resulta para  $\lambda = \text{inteiro}$  e  $Y_\lambda = 0$  em (3.68).

Na escolha de  $\theta_0$  vamos ter que selecionar casos com  $m \neq 0$ , pois o campo elétrico deverá ter derivada nula com relação a  $\phi$  em  $\phi \pm \phi_0$  e, para o modo fundamental, deverá ter valor nulo em  $\phi = 0$ .

Assim, se usarmos  $m = 1$ , a derivada do campo elétrico pode ser nula em  $2\phi_0 = 180^\circ$ . Para  $m = 2$  tem-se  $2\phi_0 = 90^\circ$ , para  $m = 3$  tem-se  $2\phi_0 = 45^\circ$ , para  $m = 4$  tem-se  $2\phi_0 = 22,5^\circ$ , e assim por diante.

Vamos, então, escolher  $m \neq 0$  e obter os valores de  $\theta_0$ , a partir dos menores valores de  $m$  e  $\lambda$  inteiros.

Das equações (3.69) a (3.74) da seção 3.2.1, as soluções  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \pi$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  são descartadas. Para nós interessam os valores de  $\theta_0$  menores de  $90^\circ$ . Isto é possível, para os casos  $m \neq 0$ , com os valores de  $\theta_0$  encontrados de (3.75) a (3.77).

Embora conviesse examinar os valores de  $\theta_0$  para  $\lambda$  maiores de 3 para permitir uma escolha mais conveniente de  $\theta_0$  e para maiores valores de  $m$ , de modo a se obterem *patches* com menores valores de  $2\phi_0$ , os três valores de (3.75) a (3.77) são de interesse aqui.

Iremos a seguir analisar o caso de  $\theta_0 = 31,09^\circ$  para  $m = 1$  e  $\lambda = 3$ .

### 5.2.2 Escolha das dimensões do *patch* para $m = 1$ $\lambda = 3$

Com a hipótese de que  $(\Delta\theta)r_a$  é muito menor que as outras dimensões do *patch* e, portanto, muito menor do que o comprimento de onda de operação, iremos, como boa aproximação supor que  $X_\lambda^m(\cos\theta) \cong X_\lambda^m(\cos\theta_0) = \text{constante}$ .

Portanto, para  $m = 1$  e  $\lambda = 3$ , a equação (3.2) fica:

$$E_{\theta_{1,3}} = [A_{\theta_{1,3}}^e j_3(k_1 r) + B_{\theta_{1,3}}^e \eta_3(k_1 r)]_{\text{sen}\phi}^{\cos\phi} \quad (5.42)$$

e, de (3.76), o ângulo do cone deve ser  $\theta_0 = 31,09^\circ$  ( $\text{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{4}{15}}$ ).

Com a escolha de  $m = 1$  os valores de  $2\phi_0$  para os quais  $\frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} = 0$ , isto é, para

$$\begin{cases} -\text{sen}\phi_0 = 0 \\ +\cos\phi_0 = 0 \end{cases}, \text{ são } 2\phi_0 = 180^\circ \text{ e } 360^\circ \quad (5.43)$$

Iremos escolher o menor valor, ou seja,  $2\phi_0 = 180^\circ$ . Portanto, o comprimento do *patch* ao longo de  $\phi$  sobre o raio  $r_0$  (com  $\text{sen}\theta_0 = \text{sen}(31,09^\circ) = \sqrt{\frac{4}{15}}$ ) é de

$$L_\phi = (r_0 \text{sen}\theta_0) 2\phi_0 = r_0 \sqrt{\frac{4}{15}} \pi = 1,6223 r_0. \quad (5.44)$$

Para que o *patch* ressoe ao longo de  $\phi$ , o campo sob o *patch* para os modos ímpares em  $\phi$ , deve ser dado por:

$$E_\theta = E_0' [A_{1,3}' j_3(k_1 r) + B_{1,3}' \eta_3(k_1 r)] \text{sen}\left(\frac{m'\pi\phi}{2\phi_0}\right), \quad (5.45)$$

com o *patch* tendo um comprimento em  $\phi$  dado por  $k_1 L_\phi = \pi$ . Com  $L_\phi$  dado por (5.6), temos

$$k_1 r_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4}{15}} \pi} = \sqrt{\frac{15}{4}} = 1,9365. \quad (5.46)$$

A escolha de  $r_0$  é feita de forma a se ter  $E_\theta$  máximo em  $r_0$ . Portanto,

$$\frac{dE_\theta}{dr}\Big|_{r=r_0} = 0. \quad (5.47)$$

Com  $E_\theta$  dado por (5.7), obtemos

$$B'_{1,3} = -A'_{1,3} \frac{j'_3(\kappa_1 r_0)}{\eta'_3(\kappa_1 r_0)}. \quad (5.48)$$

Portanto, o campo  $E_\theta$  fica

$$E_\theta = A'_{1,3} [j_3(k_1 r) - \frac{j'_3(k_1 r_0)}{\eta'_3(k_1 r_0)} \eta_3(k_1 r)] \text{sen}(\frac{m' \pi \phi}{2\phi_0}), \quad (5.49)$$

que para o primeiro modo  $m' = 1$  e, com  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,

$$E_\theta = A'_{1,3} [j_3(k_1 r) - \frac{j'_3(k_1 r_0)}{\eta'_3(k_1 r_0)} \eta_3(k_1 r)] \text{sen}\phi, \quad (5.50)$$

A frequência de ressonância desse primeiro modo  $m' = 1$  pode ser obtida de (5.8):

$$f_0 = \frac{\sqrt{\frac{15}{4}} c}{2\pi \sqrt{\epsilon_r} r_0}, \quad (5.51)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no espaço livre e  $\epsilon_r$  é a constante dielétrica do substrato.

Para dimensionar completamente o *patch*, são necessários os valores de  $r_a$ ,  $r_b$  e  $r_0$ .

Para isso, iremos primeiro examinar como  $|E_\theta|^2$  varia nas vizinhanças de  $r_0$ , com  $\phi$  fixado igual a  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Portanto, de (5.14)

$$E_\theta = E_0 \left[ \frac{j_3(k_1 r)}{j'_3(k_1 r_0)} - \frac{\eta_3(k_1 r)}{\eta'_3(k_1 r_0)} \right], \quad (5.52)$$

onde  $j_3(x)$  e  $\eta_3(x)$  são dadas por (3.45) e (3.50), respectivamente, e suas derivadas podem ser obtidas de (3.57), para um  $k_1 r_0 = x_0 = \sqrt{\frac{15}{4}} = 1,9365$ , dado por (5.8).

Para dimensionar completamente o *patch* são necessários os valores de  $r_a$  e  $r_b$ . Para isso vamos primeiro examinar como  $E_\theta$  varia nas vizinhanças de  $r_0$ , com  $\phi$  fixado igual a  $\phi_0$ . Portanto, de (5.52), obtemos um gráfico semelhante para este modo ao da Fig. 3.3; observa-se que uma escolha conveniente de  $r_a$  e  $r_b$ , para variações de  $|E_\theta|^2$  menores do que 5%, são os valores de  $x$  correspondentes a:

$$\begin{aligned}x_a &= \kappa_1 r_a = 2,1, \\x_b &= \kappa_1 r_b = 2,9.\end{aligned}\tag{5.53}$$

À semelhança do que foi feito anteriormente, iremos escolher um valor de  $r_0 = 0,08$  m que fornece dimensões razoáveis para a antena. Note que poder-se-ia ter selecionado o valor da frequência de operação da antena.

Temos, portanto, para  $\epsilon_r = 2,32$

$$\begin{aligned}r_a &= \frac{x_a}{x_0} r_0 = 0,069m, \\r_b &= \frac{x_b}{x_0} r_0 = 0,095m, \\f_o &= 0,759GHz, \\L_\phi &= 0,1298m.\end{aligned}\tag{5.54}$$

### 5.2.3 Impedância de entrada obtida a partir da expansão do campo elétrico na cavidade

O desenvolvimento teórico para a impedância de entrada é similar ao descrito na seção 3.3. Então, a equação (3.109) pode ser reescrita como

$$Z_{in} = \frac{r_0^2 \Delta \theta}{2\pi \phi_0 \text{sen} \theta_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{[A_{1,3} j_3(k_{1,3} r_1) + B_{1,3} \eta_3(k_{1,3} r_1)]^2}{[A_{1,3}^2 F_{1,3} + B_{1,3}^2 T_{1,3}]}$$

$$\cdot j_0^2 \left( \frac{\pi w}{2r_0 \phi_0 \text{sen} \theta_0} \right) \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{\pi \phi_1}{\phi_0} \right) j f [(f_{1,3}^2 - f^2) - j f^2 \delta_{eff}]}{\cos^2 \left( \frac{\pi \phi_1}{\phi_0} \right) [(f_{1,3}^2 - f^2)^2 + \delta_{eff}^2 f^4]} \quad (5.55)$$

onde, para este modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\theta_0$  é dado por (3.72), ou seja,

$$\text{sen} \theta_0 = \sqrt{\frac{4}{15}}, \quad m = 1, \lambda = 3, \quad (5.56)$$

$k_{1,3} = k_1$  é dado por (3.80) e as funções com argumento complexo são expandidas conforme (3.107). Os valores de  $F_{1,3}$  e  $T_{1,3}$  podem ser obtidos de (3.99) e (3.100). O valor de  $r_0$  ou de  $f_0 = f_{1,3}$  é escolhido (veja eq. 5.51).

## 5.2.4 Campos radiados pela antena

### Perdas e fatores de qualidade

Para o *patch* com os valores  $r_0 = 8$  cm,  $\epsilon_r = 2,32$  e  $L_\phi = 12,98$  cm,  $r_a = 0,069$  cm,  $r_b = 0,095$  cm,  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ , operando na frequência central de  $f_{1,3} = 0,759$  GHz, conforme (5.51), fazendo-se as mesmas considerações da seção 4.1, temos que calcular o valor do fator de qualidade dado por (4.2).

### Potência radiada pela antena e energia armazenada na cavidade.

Para obtenção de  $\delta_r$  necessitamos calcular a potência total radiada por cada cavidade,  $P_{rad}$ , e a energia armazenada em cada cavidade,  $U_{arm}$ , as quais são dadas pelas expressões (4.3) e (4.4), respectivamente.

A obtenção de  $U_{arm}$  é feita como segue, para o modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$ , para o qual o campo elétrico na cavidade é:

$$E_\theta = E_0 \left[ \frac{j_3(k_1 r)}{j_3'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_3(k_1 r)}{\eta_3'(k_1 r_0)} \right] \text{sen} \left( \frac{\pi \phi_1}{2\phi_0} \right). \quad (5.57)$$

Portanto, com (4.5) em (4.4),

$$U_{arm} \cong \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_0^2}{2} [\Delta\theta \text{sen}\theta_0] \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2(\phi') d\phi' \int_{r_a}^{r_b} \left[ \frac{j_3(k_1 r)}{j_3'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_3(k_1 r)}{\eta_3'(k_1 r_0)} \right]^2 r^2 dr, \quad (5.58)$$

sabendo-se que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 \theta' d\theta' = \left[ \frac{1}{2} \phi - \frac{1}{4} \text{sen} 2\phi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad (5.59)$$

e definindo-se

$$G_3(\kappa_0) = \int_{x_a=k_1 r_a}^{x_b=k_1 r_b} \left[ \frac{j_3(x)}{j_3'(k_1 r_0)} - \frac{\eta_3(x)}{\eta_3'(k_1 r_0)} \right]^2 x^2 dx, \quad (5.60)$$

tem-se

$$U_{arm} \cong E_0^2 \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \pi \Delta\theta G_3(\kappa_0)}{4k_1^3} \text{sen}\theta_0. \quad (5.61)$$

**Campos radiados obtidos pelo método dos resíduos e considerando ressonância ao longo da direção azimutal.**

O campo elétrico radiado pode ser obtido seguindo-se o mesmo procedimento da seção 4.3, onde as equações (4.33) e (4.34) podem ser reescritas como

$$E_{\theta} \cong +E_0 A_1 \sum_m B_m \sum_{\lambda} D_{\lambda} \frac{(j)^{\lambda+2} e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{P_{\lambda}^m(\cos \theta)}{\text{sen} \theta} \cos(m\phi), \quad (5.62)$$

$$E_{\phi} \cong -E_0 A_1 \sum_m G_m \sum_{\lambda} D_{\lambda} \frac{(j)^{\lambda+2} e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{\partial [P_{\lambda}^m(\cos \theta)]}{\partial \theta} \text{sen}(m\phi), \quad (5.63)$$

sendo que as constantes são as mesmas definidas por (4.35) a (4.38).

É importante observar que, com a escolha de  $\theta_0 = 31,09^\circ$ , a radiação pelas paredes laterais do *patch*, em  $\phi = -\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$  e  $\phi = +\phi_0 = +\frac{\pi}{2}$ , far-se-á, preferencialmente, através do modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$ . Podemos, portanto, como primeira aproximação, desprezar os campos associados aos demais modos  $m$  e  $\lambda$ .

Com essa hipótese, as somatórias em  $m$  e  $\lambda$ , que aparecem em (5.62) e (5.63), se reduzem a um único termo, com  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$ . Portanto, (5.62) e (5.63) ficam

$$E_{\theta r} \cong + \frac{2E_0 \Delta \theta \text{sen} \phi_0}{\pi} 2 \text{sen} \phi_0 \frac{F_3(\kappa_0)}{I_{1,3}} P_3^1(\cos \theta_0) (j)^5 \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{P_3^1(\cos \theta)}{\text{sen} \theta} \cos \phi, \quad (5.64)$$

$$E_{\phi r} \cong - \frac{2E_0 \Delta \theta \text{sen} \phi_0}{\pi} 2 \text{sen} \phi_0 \frac{F_3(\kappa_0)}{I_{1,3}} P_3^1(\cos \theta_0) (j)^5 \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} \frac{\partial P_3^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \text{sen} \phi. \quad (5.65)$$



As equações (5.64) e (5.65) podem ser escritas como seguem

$$E_{\theta} \cong +E_0 W_{1,3} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (15 \cos^2 \theta - 3) \cos \phi, \quad (5.66)$$

$$E_{\phi} \cong -E_0 W_{1,3} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (45 \cos^2 \theta - 33) \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad (5.67)$$

onde

$$W_{1,3} = \frac{\Delta \theta \operatorname{sen}^2 \phi_0 F_3(k_0)}{\pi I_{1,3}} (15 \cos^2 \theta_0 - 3) \operatorname{sen} \theta_0. \quad (5.68)$$

As equações (5.66), (5.67) e (5.68) podem ainda ser escritas da seguinte forma

$$E_{\theta} \cong +3j E_0 W_{1,3} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (5 \cos^2 \theta - 1) \cos \phi, \quad (5.69)$$

$$E_{\phi} \cong -3j E_0 W_{1,3} \frac{e^{-jk_0 R}}{k_0 R} (15 \cos^2 \theta - 11) \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad (5.70)$$

onde

$$W_{1,3} = \frac{3 \Delta \theta \operatorname{sen}^2 \phi_0 F_3(k_0)}{\pi I_{1,3}} (5 \cos^2 \theta_0 - 1) \operatorname{sen} \theta_0. \quad (5.71)$$

A potência radiada, dada por (4.39), fica então expressa, aproximadamente, por:

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \left| \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} [(15 \cos^2 \theta - 3)^2 \cos^2(\phi) + (45 \cos^2 \theta - 33)^2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \phi] \text{sen} \theta d\theta d\phi \right|, \quad (5.72)$$

A integral em  $\phi$  de (5.72) é trivial e fornece  $\pi$ . Portanto,

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left| \int_{\theta_0}^{\pi} [(15)^2 \cos^4 \theta - 90 \cos^2 \theta + 9 + (45)^2 \cos^6 \theta - 2970 \cos^4 \theta + (33)^2 \cos^2 \theta] \text{sen} \theta d\theta \right|. \quad (5.73)$$

Com a mudança de variáveis,  $\cos \theta = w$ ,  $d \cos \theta = -\text{sen} \theta d\theta = dw$  e, com os limites  $w_s = \cos \pi = -1$  e  $w_i = \cos \theta_0$ , temos:

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left| \int_{\cos \theta_0}^{-1} [(15)^2 w^4 - 90 w^2 + 9 + (45)^2 w^6 - 2970 w^4 + (33)^2 w^2] dw \right|, \quad (5.74)$$

ou

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left| \int_{-1}^{\cos \theta_0} -[2025 w^6 - 2745 w^4 + 999 w^2 + 9] dw \right|. \quad (5.75)$$

ou

$$P_{rad} \cong \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left| \left[ \frac{2025}{7} w^7 - \frac{2745}{5} w^5 + \frac{999}{3} w^3 + 9w \right] \Big|_{-1}^{\cos \theta_0} \right|, \quad (5.76)$$

ou

$$P_{rad} \cong 9 \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left| \left[ \frac{225}{7} \cos^7 \theta_0 - 61 \cos^5 \theta_0 + \frac{111}{3} \cos^3 \theta_0 + \cos \theta_0 + \frac{225}{7} - 61 + \frac{111}{3} + 1 \right] \right|, \quad (5.77)$$

ou

$$P_{rad} \cong 9 \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left[ \frac{675 - 1281 + 777 + 21}{21} + \frac{225}{7} \cos^7 \theta_0 - 61 \cos^5 \theta_0 + \frac{111}{3} \cos^3 \theta_0 + \cos \theta_0 \right]. \quad (5.78)$$

ou

$$P_{rad} \cong 9 \frac{|E_0|^2 |W_{1,3}|^2}{2\eta_0 \kappa_0^2} \pi \left[ \frac{192}{21} + \frac{225}{7} \cos^7 \theta_0 - 61 \cos^5 \theta_0 + \frac{111}{3} \cos^3 \theta_0 + \cos \theta_0 \right] \quad (5.79)$$

Obtido  $P_{rad}$  de (5.41), podemos obter a tangente de perda de radiação de (4.2) com  $U_{arm}$  dado por (5.24).

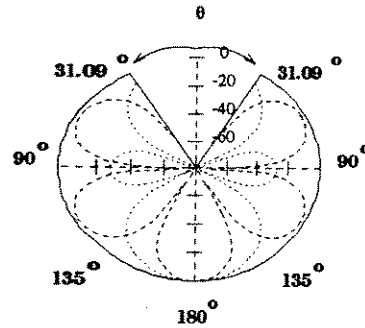


Figura 5.4: Diagrama de radiação , em (dB), nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ (linhas pontilhadas) e  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ (linhas tracejadas) para a antena com  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$  da Fig. 3.1.

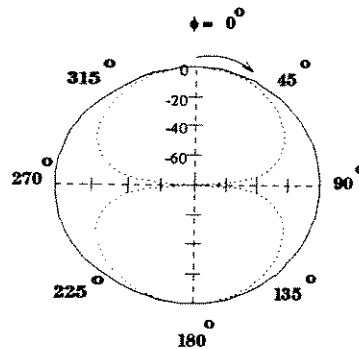


Figura 5.5: Diagrama de radiação , em (dB), no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$  para a antena com  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$  da Fig. 3.1.

Podemos também, facilmente, obter uma representação aproximada do diagrama de radiação , em (dB), para o campo radiado total  $|E_{\theta r}|^2 + |E_{\phi r}|^2$  nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ , nos semi-planos  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ , Fig. 5.4, e no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , Fig. 5.5.

Note que, no plano  $\phi = 0$ (ou  $\pi$ ), existe apenas  $|E_{\theta r}|^2$  pois  $|E_{\phi r}|^2 = 0$ , pois de (5.69) e (5.70),  $\cos(0^\circ) = 1$  e  $\sin(0^\circ) = 0$ . O diagrama de radiação nesse plano é, portanto, dado por  $\frac{|5 \cos^2 \theta - 1|^2}{|5 \cos^2 \pi - 1|^2} = \frac{|5 \cos^2 \theta - 1|^2}{4^2}$ , com direções de nulos  $\theta_{nulo} = \cos^{-1}(\pm \sqrt{\frac{1}{5}}) = 63,43^\circ$  e direções de máximos  $\theta_{max} = 180^\circ; 90^\circ$ .

No plano  $\phi = \frac{\pi}{2}$ (ou  $\frac{3\pi}{2}$ ) existe apenas  $|E_{\phi r}|^2$  pois  $|E_{\theta r}|^2 = 0$ , conforme (5.69)

e (5.70), onde  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  e  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ . O diagrama de radiação nesse plano é, portanto, dado por  $\frac{\cos^2 \theta (15 \cos^2 \theta - 11)^2}{\cos^2 \pi (15 \cos^2 \pi - 11)^2} = \frac{\cos^2 \theta (15 \cos^2 \theta - 11)^2}{16}$ , com direções de nulos  $\theta_{nulos} = \frac{\pi}{2}; \cos^{-1}(+\sqrt{\frac{11}{15}}); \cos^{-1}(-\sqrt{\frac{11}{15}})$ ; ou  $\theta_{nulos} = 90^\circ; 31,09^\circ; 148,91^\circ$ . As direções de máximo são para e direções de máximos  $\theta_{max} = \pi; \cos^{-1}(+\sqrt{\frac{11}{45}}); \cos^{-1}(-\sqrt{\frac{11}{45}})$ ; ou  $\theta_{max} = 180^\circ; 60,39^\circ; 119,63^\circ$ , sendo que o maior máximo ocorre para  $\theta = 180^\circ$ .

No plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$  existe apenas  $|E_{\theta r}|^2$  pois  $|E_{\phi r}|^2 = 0$ , conforme (5.69) e (5.70), onde  $|E_{\theta r}|^2 \propto (5 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1)^2 = 1$  e  $|E_{\phi r}|^2 \propto [(15 \cos^2 \frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2}]^2 = 0$ .

O diagrama de radiação nesse plano é, portanto, dado por  $|\cos \phi|^2$ , com direções de nulos  $\theta_{nulos} = 90^\circ$  e  $270^\circ$  e com direções de máximos  $\theta_{max} = 0^\circ$  e  $180^\circ$ .

## Capítulo 6

### Resultados Numéricos

#### 6.1 Freqüência de ressonância, fator de qualidade de radiação e diretividade

A freqüência de ressonância,  $f_0$ , fator de qualidade de radiação,  $Q_r$ , e diretividade,  $D$ , foram calculados para três diferentes antenas de microfita operando no modo  $TM_{10}$ . Uma delas para o modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 2$ , com  $\theta_0 = 45^\circ$  e com dimensões do *patch*  $r_a = 6,3$  cm,  $r_b = 9,7$  cm,  $r_0 = 8$  cm tais que  $L_\phi = 17,77$  cm e a outra para o modo  $m = 1$ ,  $\lambda = 3$ , com  $\theta_0 = 31,09^\circ$  e com dimensões do *patch*  $r_a = 6,9$  cm,  $r_b = 9,5$  cm,  $r_0 = 8$  cm, tais que  $L_\phi = 12,98$  cm, com ambas as antenas estendendo-se de  $\phi = -90^\circ$  to  $\phi = +90^\circ$ . Uma terceira antena para o modo  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$ , com  $\theta_0 = 54,73^\circ$  e com dimensões do *patch*  $r_a = 6,9$  cm,  $r_b = 9,5$  cm,  $r_0 = 8$  cm, tais que  $L_\phi = 10,26$  cm, estendendo-se de  $\phi = -45^\circ$  to  $\phi = +45^\circ$ . Para todas as antenas a espessura do substrato,  $h \cong r_0 \Delta\theta$ , foi escolhida muito pequena, com  $\Delta\theta = 0,57^\circ$ . Dois substratos dielétricos foram considerados, um com  $\epsilon_r = 1,06$  e o outro com  $\epsilon_r = 2,32$  e os resultados são mostrados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA,  $f_0$ , FATOR DE QUALIDADE DE RADIAÇÃO,  $Q_r$ , E DIRETIVIDADE, D, PARA ANTENAS OPERANDO NO MODO  $TM_{10}$ .

$(m, \lambda)$	$\phi_0$	$\theta_0$	$\epsilon_r$	$f_0(GHz)$	$Q_r$	D (dB)
1,2	90°	45°	2,32	0,56	72,94	4,87
1,2	90°	45°	1,06	0,82	19,87	3,14
1,3	90°	31,09°	2,32	0,76	219,94	4,83
1,3	90°	31,09°	1,06	1,12	33,83	3,15
2,3	45°	54,73°	2,32	0,96	128,56	4,84
2,3	45°	54,73°	1,06	1,42	12,32	3,14

## 6.2 Impedância de entrada

Para a obtenção da impedância de entrada, calcularemos em primeiro lugar a frequência de ressonância, de acordo com as dimensões escolhidas e, depois, o fator de qualidade  $Q$  do *patch*. As impedâncias de entrada para as duas primeiras antenas e para os dois substratos com  $\epsilon_r = 1,06$  e  $2,32$  são calculadas de (5.18) e (5.55) em  $f = f_0$ , como função do ponto de alimentação  $\phi = \phi_1$  e ao longo da direção radial em  $r = r_0$ . Os resultados são mostrados na Fig. 6.1. Note que a impedância de entrada é igual a zero no centro do *patch* ( $\phi_1 = 0^\circ$ ) e máxima nas bordas ( $\phi_1 = \pm 90^\circ$ ). Os máximos valores para  $m = 1, \lambda = 2$  são  $587 \Omega$  para  $\epsilon_r = 1,06$  e  $1457 \Omega$  para  $\epsilon_r = 2,32$  e para  $m = 1, \lambda = 3$  são  $363 \Omega$  para  $\epsilon_r = 1,06$  e  $1597 \Omega$  para  $\epsilon_r = 2,32$ . Para uma impedância de entrada de  $50 \Omega$  o ponto de alimentação com  $m = 1, \lambda = 2$  deverá estar localizado em  $\phi_1 = \pm 16,967^\circ$  para  $\epsilon_r = 1,06$  e  $\phi_1 = \pm 10,675^\circ$  para  $\epsilon_r = 2,32$  e com  $m = 1, \lambda = 3$  este ponto de alimentação deverá estar localizado em  $\phi_1 = \pm 21,769^\circ$  para  $\epsilon_r = 1,06$  e  $\phi_1 = \pm 10,192^\circ$  para  $\epsilon_r = 2,32$ . Foi notado que, se o ponto de alimentação fosse fixado nestes valores de  $\phi_1$  e, em seguida, se movesse ao longo da direção radial, o valor da impedância de entrada variava menos que 5% para "r" variando de  $r_a$  para  $r_b$ . Esta independência prática da impedância em "r" era esperada para operação no modo  $TM_{10}$ . Para a antena em  $m=1$  e  $\lambda = 2$ , foram calculadas eficiências acima de 76,7%, onde  $\eta = \frac{Q_t}{Q_r}$ , podendo-se alcançar eficiências ainda maiores.

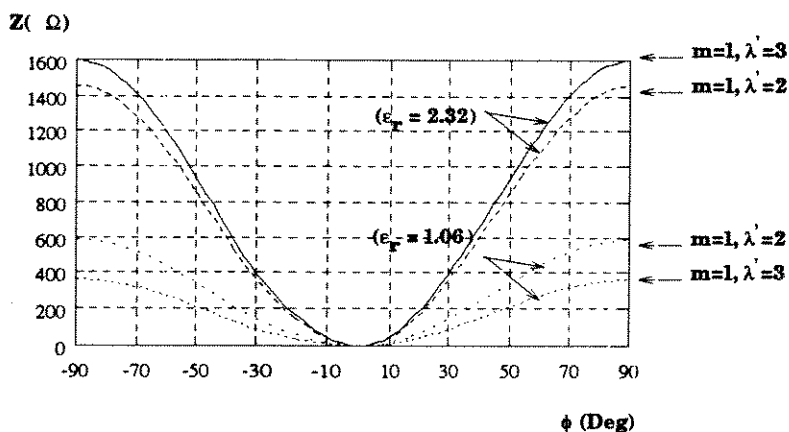


Figura 6.1: Impedância de entrada, na frequência de ressonância, para o modo  $TM_{10}$ , como função do ponto de alimentação,  $\phi_1$ , ao longo do centro do *patch* e para dois substratos dielétricos com  $\epsilon_r = 1,06$  e  $2,32$  para antenas de microfita com 1)  $m = 1, \lambda' = 2, \theta_0 = 45^\circ, \phi_0 = 90^\circ, (r_b - r_a) = 3,4 \text{ cm}, r_0 = 8 \text{ cm}, L_\phi = 17,77 \text{ cm}, \Delta\theta = 0,57^\circ$  e 2)  $m = 1, \lambda' = 3, \theta_0 = 31,09^\circ, \phi_0 = 90^\circ, (r_b - r_a) = 2,6 \text{ cm}, r_0 = 8 \text{ cm}, L_\phi = 12,98 \text{ cm}, \Delta\theta = 0,57^\circ$ .

As impedâncias de entrada para a antena com *patch* duplo e para os dois substratos com  $\epsilon_r = 1,06$  e  $2,32$  são calculadas de (3.109) e mostradas em Fig. 6.2, variando em função do ponto de alimentação, ao longo do centro do *patch* de largura  $L_\phi = 17,77 \text{ cm}$ , na direção azimutal. É observado que obtemos baixos valores da impedância quando  $\phi_1$  se aproxima de zero. Em particular, o valor de 50 ohms é atingido com  $\phi_1 = 6,3223^\circ$  para  $\epsilon_r = 2,32$  e com  $\phi_1 = 10,862^\circ$  para  $\epsilon_r = 1,06$ . A variação de impedância ao longo da direção radial foi observada ser menor que 5%, o que comprova a nossa consideração de ressonância ao longo da direção azimutal com uma variação radial aproximadamente constante.



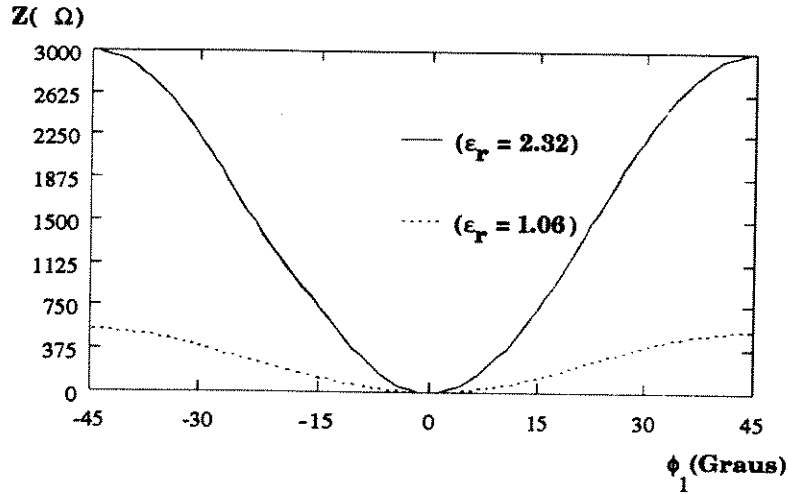


Figura 6.2: Impedância de entrada, na frequência de ressonância, para o modo  $TM_{10}$ , como uma função do ponto de alimentação,  $\phi_1$ , ao longo do centro do *patch* e para dois substratos dielétricos com  $\epsilon_r = 1,06$  e  $2,32$  para antena de microfita com  $m = 2$ ,  $\lambda' = 3$ ,  $\theta_0 = 54,73^\circ$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $(r_b - r_a) = 2,6$  cm,  $r_0 = 8$  cm,  $L_\phi = 17,77$  cm,  $\Delta\theta = 0,57^\circ$ .

### 6.3 Diagrama de radiação

Os diagramas de radiação para as duas primeiras antenas foram obtidos de  $E_\theta$  e  $E_\phi$  dados por (5.32), (5.33) e (5.69), (5.70). Note que, para ambas as antenas,  $E_\theta$  é proporcional a  $\cos\phi$  enquanto  $E_\phi$  é proporcional a  $\sin\phi$ . Então, nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ ,  $E_\phi = 0$  e o diagrama de radiação contém apenas a componente  $E_\theta$ , proporcional a  $\cos\theta$ , para  $m = 1$ ,  $\lambda' = 2$ , e a  $[5(\cos\theta)^2 - 1]$ , para  $m = 1$ ,  $\lambda' = 3$ , e os resultados são mostrados nas Figs. 5.2 e 5.4. Nos semi-planos  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ ,  $E_\theta = 0$  e o diagrama de radiação contém somente a componente  $E_\phi$ , proporcional a  $\cos(2\theta)$  para  $m = 1$ ,  $\lambda' = 2$  e a  $[15(\cos\theta)^2 - 11]\cos\theta$  para  $m = 1$ ,  $\lambda' = 3$ , e os resultados são mostrados nas Figs. 5.3, 5.5.

Os diagramas de radiação para a antena com *patch* duplo foram obtidos de  $E_\theta$  e  $E_\phi$  dados por (4.42) e (4.43). Note que,  $E_\theta$  é proporcional a  $\cos(2\phi)$  enquanto  $E_\phi$  é proporcional a  $\sin(2\phi)$ . Então, nos semi-planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ ,  $E_\phi = 0$  e o diagrama de radiação contém apenas a componente  $E_\theta$ , proporcional a  $15\sin\theta \cos\theta$ , para  $m = 2$ ,  $\lambda' = 3$ , e os resultados são mostrados na Fig. (4.1). Nos semi-planos  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 270^\circ$ ,  $E_\theta = 0$  e o diagrama de radiação contém somente a componente  $E_\phi$ , proporcional a  $(2 - 3\sin^2\theta)$ ,

e os resultados são mostrados na Fig. 4.2.

Os diagramas de radiação variam seu aspecto como resultado da modificação nas distribuições de corrente e potencial na antena. A relação matemática existente entre estas não é, entretanto, muito simples. Pode-se observar que o aumento do modo  $m, \lambda$  produz o aparecimento de um maior número de lóbulos secundários, além de um estreitamento e tendência de alinhamento dos lóbulos principais com o eixo da antena.

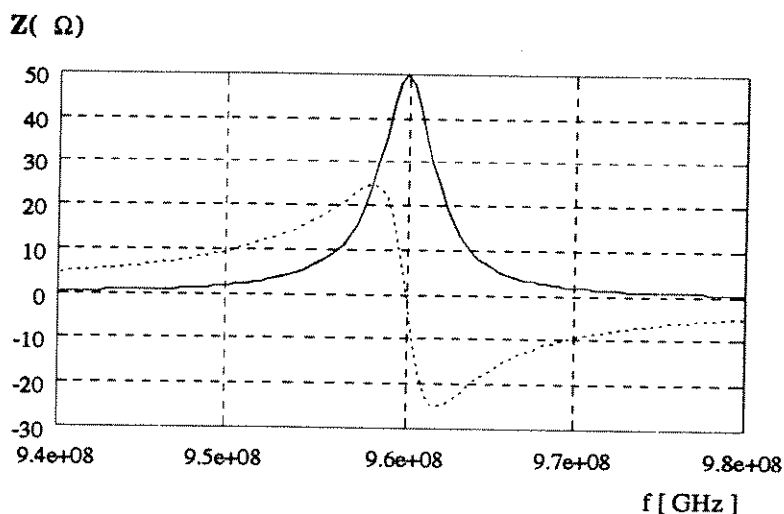


Figura 6.3: Impedância de entrada, no ponto de alimentação, igual a 50  $\Omega$  para o modo  $TM_{10}$ , como uma função da frequência,  $f$ , em torno da frequência de ressonância e para o substrato dielétrico com  $\epsilon_r = 2,32$  para antena de microfita com  $m = 2$ ,  $\lambda' = 3$ ,  $\theta_0 = 54,73^\circ$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$  e  $f_0 = 0,96$  GHz.

Na Fig. 6.3, é dada a variação da impedância com a frequência, em torno da frequência de ressonância para um determinado ponto de alimentação. O programa para este cálculo é dado no Apêndice "C", sendo de natureza similar para todas as outras antenas. Este gráfico demonstra, claramente, o alto fator de qualidade da antena de microfita. Podemos comprovar os cálculos feitos anteriormente, calculando os pontos onde a impedância cai 3 dB do máximo valor da parte real; com isso extrai-se a largura de banda para estes valores de impedância e obtém-se o fator de qualidade. Este gráfico é de grande importância prática, para comparação com gráficos experimentais, extraídos do analisador de espectros elétricos em antenas protótipos, construídas a partir da previsão teórica.

## Capítulo 7

### Conclusão

O modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas foi usado para obtenção da frequência de ressonância e impedância de entrada de antenas de microfita sobre superfície cônica e operando no modo  $TM_{10}$ , com  $m = 1, \lambda' = 2$  e  $m = 1, \lambda' = 3$ . O diagrama de radiação foi obtido das funções diádicas de Green para um cone condutor perfeito. Este procedimento pode também ser usado para examinar antenas sobre superfície cônica, com duplo *patch*, simetricamente localizados ao redor da superfície cônica, como a antena com *patches* localizados de  $\phi = -45^\circ$  a  $\phi = +45^\circ$  e de  $\phi = 135^\circ$  a  $\phi = 225^\circ$ , no modo  $TM_{10}$  com  $m = 2, \lambda' = 3$ .

As funções diádicas de Green foram usadas para se obter os campos radiados das antenas de microfita. O *patch* foi utilizado como uma fonte magnética de corrente para se utilizar o modelo de cavidade com paredes laterais magnéticas. A dependência da impedância de entrada com o substrato dielétrico e o ponto de alimentação foram obtidos para uma excitação na frequência de ressonância. Este trabalho analisa a variação em  $\phi$  e permite prever qualquer ponto de alimentação ao longo do *patch*, visando se obter um perfeito casamento de impedância de entrada na frequência de ressonância que se deseja. A utilização dos dois *patches* simétricos nos possibilita uma distribuição mais simétrica do campo radiado.

Os resultados obtidos confirmam a consideração de que a ressonância predominante do *patch* se dá ao longo da direção  $\phi$  de tal forma que o campo elétrico varie apenas lentamente com "r", sem apresentar nenhum nulo entre  $r_a$  e  $r_b$  e que, para o menor modo

de operação , o campo elétrico seja máximo em  $\phi = +\phi_0$  e em  $\phi = -\phi_0$ , e com um nulo em  $\phi = 0$ , onde o comprimento do patch em  $r_0$  é  $2\phi_0 r_0 \sin \theta_0$ , sendo  $r_0$  o raio para o qual o campo elétrico é máximo e aproximadamente igual ao raio médio do patch ( $r_0 \cong \frac{r_a+r_b}{2}$ ).

Os exemplos ilustram os tipos de antenas onde o trabalho pode ser aplicado. O estreitamento do lóbulo principal com o crescimento do modo  $m, \lambda$  causa, naturalmente, a diminuição da largura do feixe. Avaliando os resultados obtidos, concluímos que a ressonância ao longo da direção azimutal é bastante satisfatória e de boa eficiência, permitindo o projeto de antenas com uma variedade de opções , tais como aquelas analisadas neste trabalho.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Como temas de trabalhos futuros propomos as seguintes linhas de pesquisa:

- Realização experimental das antenas aqui propostas para confirmar as previsões teóricas.
- Estudo de redes de *patches* sobre superfície cônica.

## Apêndice A

# Dimensionamento da superfície cônica metálica e do *patch*

### A.1 Superfície cônica metálica (superfície de terra)

O procedimento para cálculo da superfície cônica metálica (superfície de terra) é feito como segue, baseado na Fig. 6.1. Com a escolha de  $\theta_0$ , ângulo de conicidade, calculamos o diâmetro do cone:

$$\text{sen}(\theta_0) = R/R_L, \quad \text{onde } R = \frac{D}{2}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $R_L$  foi escolhido igual a 40 cm, pois é um valor que praticamente satisfaz a condição de não finitude da superfície cônica com relação ao tamanho do *patch*, distância da ponta do cone e comprimento de onda de operação .

Com o valor do diâmetro calculamos o comprimento da circunferência da base do cone dado por

$$S = \pi \times D. \quad (\text{A.2})$$

De posse do valor de S, calculamos o ângulo do setor circular abrangido pela área do cone aberto,

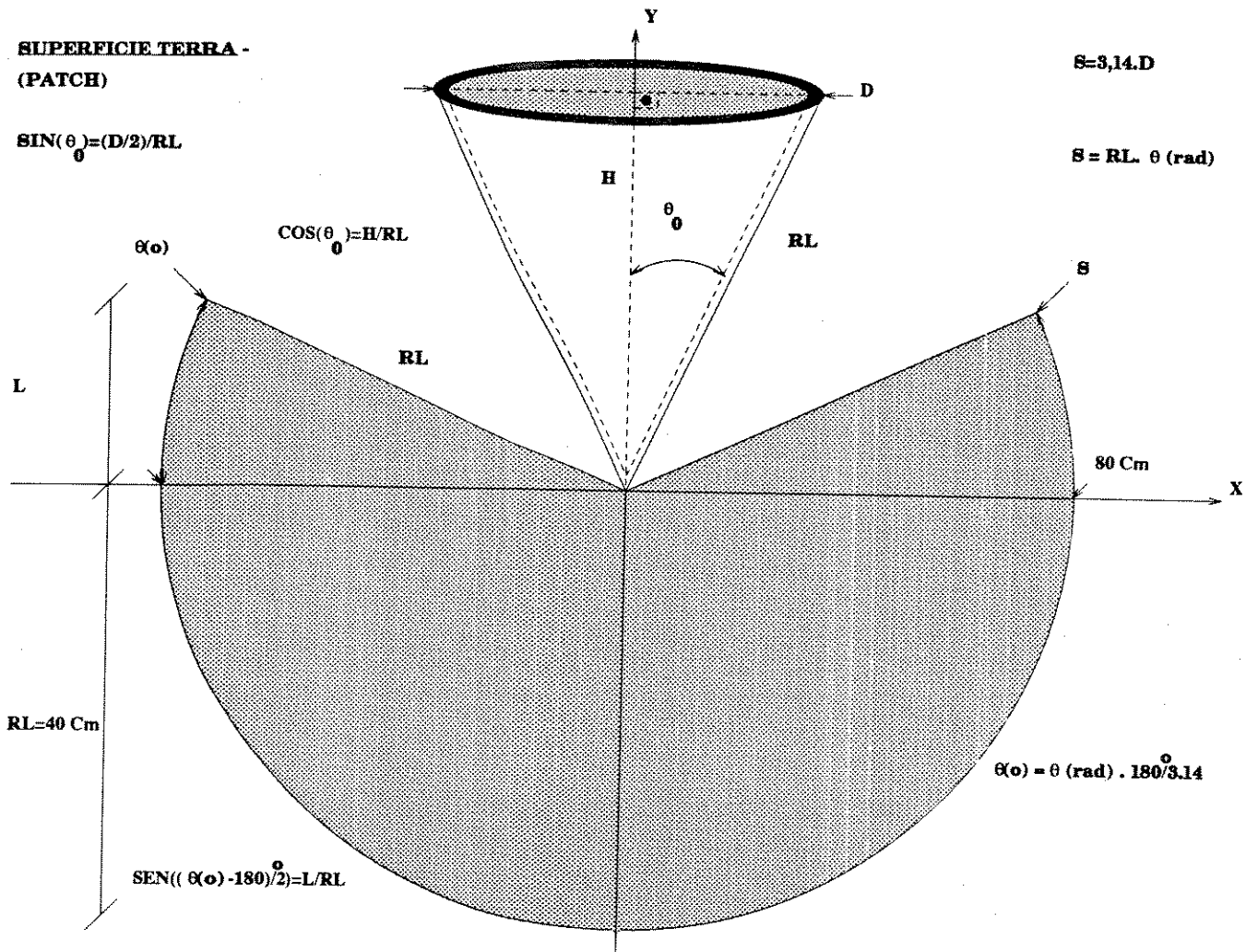


Figura A.1: Parâmetros para cálculo da superfície cônica (superfície de terra).

$$S = R_L \times \theta_{rad}, \quad (\text{A.3})$$

que em graus fica

$$\theta(o) = \frac{\theta_{rad} \times 180^\circ}{\pi}. \quad (\text{A.4})$$

Então para o cálculo do comprimento "L", necessitamos calcular o valor do ângulo que resulta do ângulo total menos  $180^\circ$  dividido por dois, pois

$$\text{sen}\left(\frac{\theta(o) - 180^\circ}{2}\right) = \frac{L}{R_L}. \quad (\text{A.5})$$

Da relação

$$\cos(\theta_0) = \frac{H}{R_L}, \quad (\text{A.6})$$

obtemos a altura do cone.



## A.2 Patch

Para o cálculo do comprimento do *patch*, Fig. C.2, necessitamos apenas subtrair as distâncias ao ápice do cone

$$C = (r_b - r_a). \quad (\text{A.7})$$

As larguras nas bordas inferior e superior são dadas abaixo respectivamente por

$$L_1 = 2 \cdot \phi_0 \cdot R_A \text{sen}(\theta_0), \quad (\text{A.8})$$

$$L_2 = 2 \cdot \phi_0 \cdot R_B \text{sen}(\theta_0). \quad (\text{A.9})$$

**MICROFITA -  
(PATCH)**

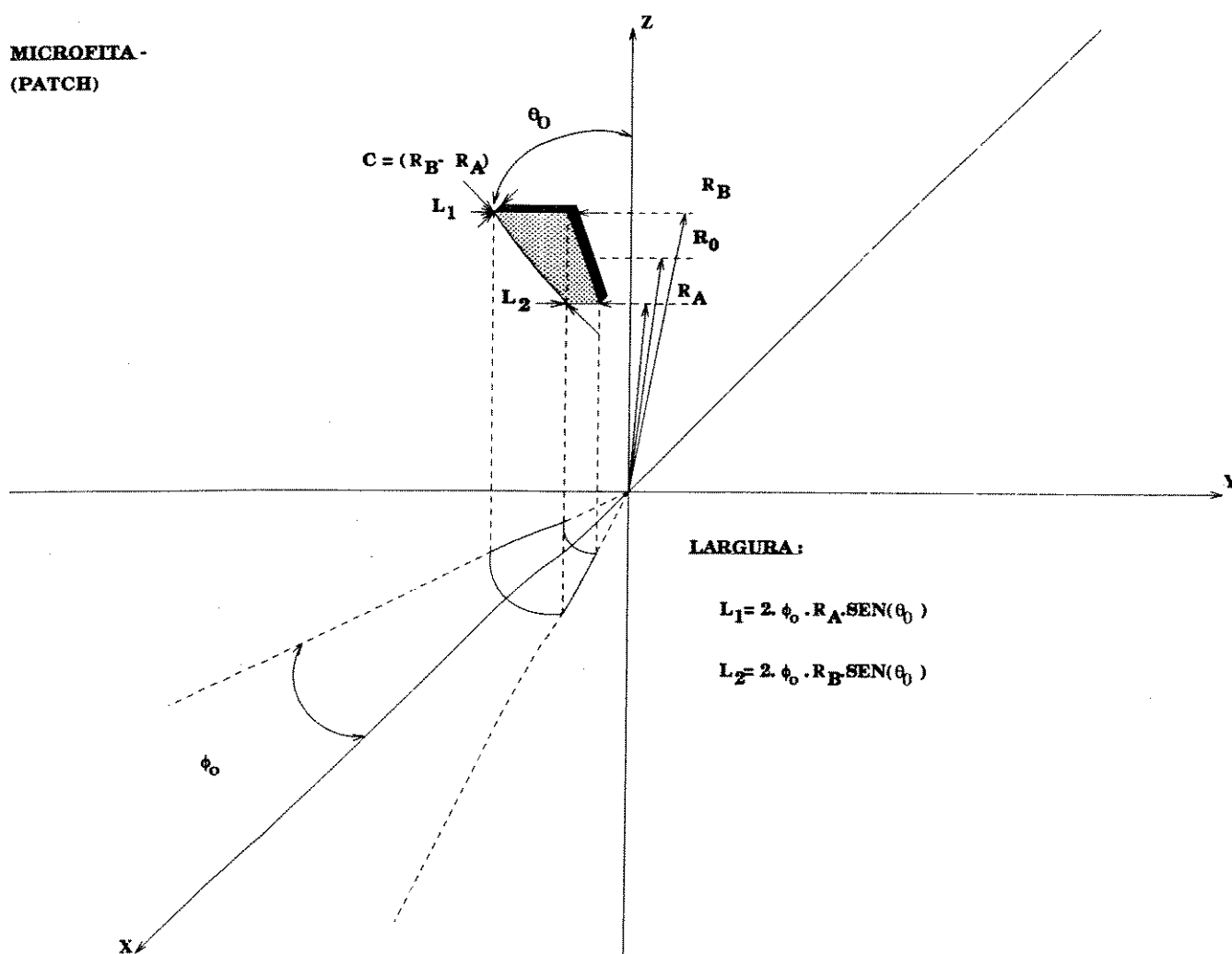


Figura A.2: Cálculo do *patch*.

## Apêndice B

### Correção devida ao efeito de borda

De acordo com dados empíricos [39], para ressonância com paredes laterais magnéticas em  $W_2 \cong L_\phi$  (ressonância azimutal), como mostrado na Fig. B.1, no *patch*, temos que calcular as novas constantes dielétricas efetivas com relação a  $W_1$  e  $W_2$ , dadas por

$$\epsilon_e(W) = \frac{\epsilon + 1}{2} + \frac{\epsilon - 1}{2} \cdot \left[1 + \frac{10h}{W}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.1})$$

com  $W$  substituído por  $W_1$  ou  $W_2$ .

A nova frequência de ressonância corrigida será dada por

$$f_{r1} = f_{r0} \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_e(W_1)\epsilon_e(W_2)}} \cdot \frac{1}{1 + \Delta}, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\Delta = \frac{h}{W_1} \left[ 0,882 + \frac{0,164(\epsilon - 1)}{\epsilon_r^2} + \frac{(\epsilon + 1)}{\pi \epsilon_r} \left\{ 0,758 + \ln\left(\frac{W_1}{h} + 1,88\right) \right\} \right], \quad (\text{B.3})$$

ou melhor,

$$f_{r1} = f_{r0} C_r, \quad (\text{B.4})$$

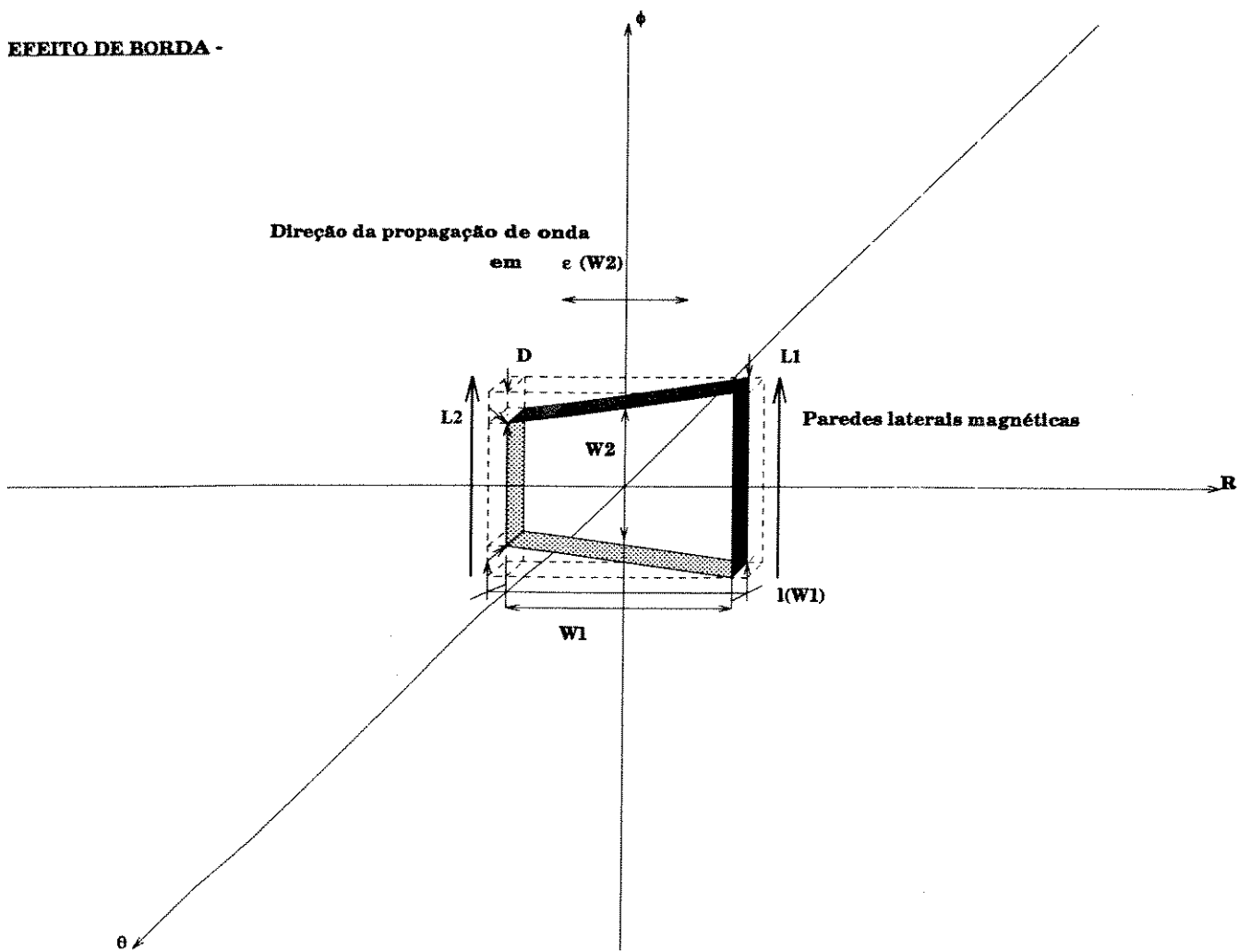


Figura B.1: Parâmetros para cálculo do efeito de borda.

onde  $C_r$  indica a percentagem de erro a ser corrigida da frequência de ressonância esperada, para se obter a nova frequência de ressonância ocasionada pelo novo comprimento elétrico efetivo dado por

$$l(W1) = \frac{c}{2f_{r1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_e(W2)}} \quad (\text{B.5})$$

Por exemplo, para uma antena com os seguintes dados:

$$W1 = 2,9cm \quad e \quad W2 = 2,0cm,$$

$$\epsilon_r = 2,32 \quad e \quad f_{r0} = 3,85GHz,$$

$$h = 1,5mm = 0,15cm.$$

tem-se,

$$\epsilon_e(W1) = 1,66 + 0,66 \cdot \left[1 + \frac{10 \times 0,15}{2,9}\right]^{-\frac{1}{2}} = 2,20.$$

$$\epsilon_e(W2) = 1,66 + 0,66 \cdot \left[1 + \frac{10 \times 0,15}{2,0}\right]^{-\frac{1}{2}} = 2,16.$$

$$\Delta = \frac{0,15}{2,9} \left[0,882 + \frac{0,164(1,32)}{2,32^2} + 1,74\right] = 0,14.$$

então,

$$f_{r1} = 3,85 \times 10^9 \cdot (0,94) = 3,619GHz,$$

com

$$l(W1) = \frac{3 \times 10^{10}}{2 \times 3,619 \times 10^9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2,16}} = 2,82cm. \quad (\text{B.6})$$

# Apêndice C

## Programas Utilizados

### C.1 Programa para o cálculo das impedâncias de entrada

```
set terminal sun
set output "resc.ps"
set noclip points
set clip one
set noclip two
set border
set dummy x,y
set format x "%g"
set format y "%g"
set format z "%g"
set grid
set nokey
set noarrow
set nologscale
set offsets 0, 0, 0, 0
set nopolar
set angles degrees
set noparametric
```

```
set view 60, 30, 1, 1
set samples 100
set isosamples 10
set surface
set nocontour
set nohidden3d
set cntrparam order 4
set cntrparam linear
set cntrparam points 5
set size 1,1
set data style points
set function style lines
set tics in
set ticslevel 0.5
#set xtics 3.75e9,0.05e9,3.95e9
set xtics
set ytics
set ztics
set xlabel "f [ GHz ]" 0,0
set ylabel "Zin [ Ohm ]" 10,0
#set yrange [-30:60]
set xlabel "" 0,0
set zrange [-10 : 10]
set autoscale y
set zero 1e-08
F=1e-6
K=122.786470907
T=122.791040277
#cr=0.92
cr=0.877
f0=3.849e9*cr
#f0=3.385e9
#r1=0.11758
```

```

Q=161.87204/2
r1=0.13
fi=(r1**2)*0.57
f1=(10395/((K*r1)**7))-(4725/((K*r1)**5))+(210/((K*r1)**3))-(1/(K*r1))
f2=f1*sin(K*r1)
f3=(10395/((K*r1)**6))-(1260/((K*r1)**4))+(21/((K*r1)**2))
f4=f3*cos(K*r1)
f6=f2-f4
fr=1/(2*9.17*sin(33.88)*2*pi*2.32*1/36/pi*1e-9)
fs(f)=fr*(f**3/Q)/(((f0**2-f**2)**2)+(f**4/Q**2))
fh(f)=fr*f*(f0**2-f**2)/(((f0**2-f**2)**2)+(f**4/Q**2))
r2=0.11879
fl=(r2**2)*0.57
fa=(10395/((T*r2)**7))-(4725/((T*r2)**5))+(210/((T*r2)**3))-(1/(T*r2))
fb=fa*sin(T*r2)
fc=(10395/((T*r2)**6))-(1260/((T*r2)**4))+(21/((T*r2)**2))
fd=fc*cos(T*r2)
fe=fb-fd
ft=1/(2*9.17*sin(33.88)*2*pi*10.68*1/36/pi*1e-9)
fz(f)=ft*(f**3/131.27040)/(((1.794e9**2-f**2)**2)+(f**4/131.27040**2))
fk(f)=ft*f*(1.794e9**2-f**2)/(((1.794e9**2-f**2)**2)+(f**4/131.27040**2))
f7(f)=fi*f6**2*fs(f)/F
f8(f)=fi*f6**2*fh(f)/F
fg(f)=fl*fe**2*fz(f)/F
fy(f)=fl*fe**2*fk(f)/F
#plot [f=1.69e9:1.89e9] fg(f),fy(f)
#plot [f=3.75e9:3.95e9] f7(f),f8(f)
#plot [f=3e9:3.95e9] f7(f),f8(f)
plot [f=3e9:4.2e9] f7(f),f8(f)

```



## C.2 Programa para o cálculo dos campos radiados

```
set term sun
set output "diagart3.ps"
set noclip points
set clip one
set noclip two
set noborder
set dummy x,y
set format x "%g"
set format y "%g"
set format z "%g"
set grid
set nokey
set nolabel
set noarrow
set offsets 0, 0, 0, 0
set nologscale
set polar
set angles radians
set noparametric
#set size (1/1.5),1
set size 0.6,1
set view 60, 30, 1, 1
set samples 100
set isosamples 50
set surface
set cntrparam order 4
set cntrparam cubicspline
set cntrparam points 5
set data style points
set function style lines
```

```
set tics in
set ticslevel 0.5
set title "" 0,0
set notime
set xlabel "" 0,0
set ylabel "" 0,0
set autoscale t
set rrange [-80:0]

E1(v)=cos(v)
Et(v)=10*log(abs(E1(v)**2))

E2(v)=cos(2*v)
Ef(v)=10*log(abs(E2(v)**2))

plot [v=(46*pi/180):((359*pi/180)-(45*pi/180))] 10*log(1),Et(v),Ef(v)
```

### C.3 Programa para o cálculo do fator de qualidade

Funcao de Bessel de Terceira Ordem

$$a = (15/((k r)^4)) - (6/((k r)^2))$$

$$a = a \sin[k r]$$

$$b = (15/((k r)^3)) - (1/(k r))$$

$$b = b \cos[k r]$$

$$c = a - b$$

$$d = -(15/((k r)^4)) + (6/((k r)^2))$$

$$d = d \cos[k r]$$

$$e = (15/((k r)^3)) - (1/(k r))$$

$$e = e \sin[k r]$$

$$f = d - e$$

$$g = (60/((k r_0)^4)) - (7/((k r_0)^2))$$

$$g = g \cos[k r_0]$$

$$h = -(60/((k r_0)^5)) + (27/((k r_0)^3)) - (1/(k r_0))$$

$$h = h \sin[k r_0]$$

$$i = g + h$$

$$j = (60/((k r_0)^5)) - (27/((k r_0)^3)) + (1/(k r_0))$$

$$j = j \cos[k r_0]$$

$$l = (60/((k r_0)^4)) - (7/((k r_0)^2))$$

$$l = l \sin[k r_0]$$

$$m = j + l$$

$$n = ((c/i) - (f/m))^2 r^2$$

\*\*\*\*\*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. A. Deschamps, "Microstrip microwave antennas", apresentado no 3rd USAF Symp. on Antennas, 1953.
- [2] H. Gutton e G. Bassinot, "Flat aerial for ultra high frequencies", Patente Francesa No. 703113, 1955.
- [3] L. Lewin, "Radiation from discontinuities in stripline", *Proc. Inst. Elec. Eng.*, Vol. 107, pt. C., Fev. 1960, pp. 163-170.
- [4] E. V. Byron, "A new flush-mounted antenna element for phased array application", *Proc. Phased-Array Antenna Symp.*, 1970, pp. 187-192.
- [5] J. Q. Howell, "Microstrip antennas", *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Williamsburg, VA, Dez. 1972, pp. 177-180.
- [6] R. E. Munson, "Single slot cavity antennas assembly", Patente Americana No. 3713162, 23 Jan., 1973.
- [7] H. D. Weinschell, "Progress report on development of microstrip cylindrical arrays for sounding rockets", Physic. and Sci. Lab, New Mexico State Univ., Las Cruces, 1973.
- [8] G. G. Sanford, "Conformal microstrip phased array for aircraft tests with ATS-6", *Proc. Nat. Electronics Conf.*, Vol. 29, Out. 1974, pp. 252-257.
- [9] G. W. Garvin, R. E. Munson, L. T. Ostwald e K. G. Schroeder, "Low profile electrically small missile base mounted microstrip antennas", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Urbana, IL, Jun. 1975, pp. 244-247.
- [10] J. Q. Howell, "Microstrip antennas", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-23, No. 1, pp. 90-93, Jan. 1975.

- [11] H. D. Weinschell, "A cylindrical array of circularly polarized microstrip antennas", em *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Urbana, IL, Jun. 1975, pp. 177-180.
- [12] J. R. James e G. J. Wilson, "New design techniques for microstrip antenna arrays", em *Proc. 5th. European Micro. Conf.*, Hamburg, Set. 1975, pp. 102-106.
- [13] R. E. Munson, "Conformal microstrip antennas and microstrip phased array", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. 22, No. 1, Jan. 1974, pp. 74-77.
- [14] A. G. Derneryd, "Linear microstrip array antennas", *Chalmer Univ. Technol.*, Goteborg, Sweden, Tech. Rep. TR 7505, Out. 1975.
- [15] K. R. Carver, "The radiation pattern of a microstrip disc antenna", Physic. and Sci. Lab, New Mexico State Univ., Las Cruces, Tech. Memo., Nov. 29, 1976.
- [16] Y. T. Lo, D. D. Harrison, D. Solomon, G. A. Deschamps e F. R. Ore, "Study of microstrip antennas, microstrip phased arrays, and microstrip feed networks", Rome Air Development Center, Tech. Rep. TR-77-406, Out. 21, 1977.
- [17] A. G. Derneryd, "A theoretical investigation of the rectangular microstrip antenna element", Rome Air Development Center, Tech. Rep. TR-77-206, Jun., 1977.
- [18] L. C. Shen e S. A. Long, "Low profile printed circuit antennas", Dept. Elec. Eng. Univ. Houston, Houston, TX, Contract DAAG-29-75-0187, Final Rep., Out. 1977.
- [19] C. M. Kaloi, "Microstrip antennas, experimental results", em *Proc. Workshop. Printed Circuit Antenna Tech.*, New Mexico State Univ., Las Cruces, Out. 1979, p. 6/1.
- [20] K. R. Carver e J. W. Mink, "Microstrip antenna technology", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-29, 1981, pp. 2-24.
- [21] W. C. Chew, "A broad-band annular-ring microstrip antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-30, 1982, pp. 918-922.
- [22] C. M. Krowne, "Cylindrical-rectangular microstrip antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-31, 1983, pp. 194-199.
- [23] J. Ashkenazy, S. Shtrikman e D. Treves, "Electric surface current model for the analysis of microstrip antennas on cylindrical bodies", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-33, 1985, pp. 295-300.

- [24] K. M. Luk, K. F. Lee e J. S. Dahele, "Analysis of the cylindrical-rectangular patch antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-37, 1989, pp. 143-147.
- [25] A. C. de Castro Lima e A. J. Giarola, "Rectangular microstrip antenna along a helical direction on a cylindrical substrate", *Micro. and Opt. Tech. Letters*, Vol. 4, No. 9, Ago. 1991, pp. 369-372.
- [26] Wai-Yip Tam e Kwai-Man Luk, "Resonance in spherical-circular microstrip structures", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-39, 1991, pp. 700-704.
- [27] A. C. de Castro Lima, J. R. Descardecı e A. J. Giarola, "Circular microstrip antenna on a spherical surface", *Micro. and Opt. Tech. Letters*, Vol. 5, No. 5, Maio 1992, pp. 221-224.
- [28] Ahmed A. Kishk, "Analysis of spherical annular microstrip antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-41, 1993, pp. 338-343.
- [29] J. R. Descardecı e A. J. Giarola, "Microstrip antenna on a conical surface", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-40, 1992, pp. 460-463.
- [30] I. J. Bahl e P. Bhartia, "Microstrip antennas", *Artech House*, 1980.
- [31] R. F. Harrington, "Time-Harmonic Electromagnetics Fields". *McGraw-Hill Book Company*, 1961.
- [32] C. T. Tai, "Generalized Vector and Dyadic Analysis", *Applied Mathematics in Field Theory*, *IEEE Press*, Piscataway, N.J., 1991.
- [33] C. T. Tai, "Dyadic Green Functions in Eletromagnetic Theory", Second Edition, *IEEE Press*, Piscataway, N.J., 1993.
- [34] A. C. de Castro Lima, "Aplicações do formalismo das funções de Green diádicas na análise de antenas de microfita", *Tese de Doutorado*, Unicamp, Campinas, S.P., 1982.
- [35] A. J. M. Soares, S. B. de Assis Fonseca e A. J. Giarola, "Surface wave excitation on a microstrip ring antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. AP-37, 1989, pp. 1310-1312.
- [36] M. Abramowitz e I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", *Dover Publications*, New York, 1972.

- [37] J. R. **D**escardecı, “Antena de microfitas sobre substrato cônico”, *Tese de Mestrado*, Unicamp, Campinas, S.P., 1991.
- [38] J. A. **S**tratton, “Eletromagnetic Theory”, *McGraw-Hill Book Company*, New York, 1941.
- [39] J. R. **J**ames, P. S. Hall e C. Wood, “Microstrip Antenna”, *Peter Peregrinus Ltd.*, Stevenage, UK e New York, 1981.
- [40] C. A. **B**alanis, “Antenna Theory”, *McGraw-Hill Book Company*, New York, 1990.