

7  
FEC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO

OSCILAÇÕES ASSIMÉTRICAS:

UMA CONTRIBUIÇÃO AO SEU ESTUDO

Marcio Luiz de Andrade Netto

Orientador: Hermano M.F. Tavares

01/73

Tese de Mestrado apresentada  
à Faculdade de Engenharia  
de Campinas da Universidade  
Estadual de Campinas.

Janeiro - 1973

À minha esposa

Luzia

meus filhos

Fábio e Fernando

e meus pais

José e Odacy

## RESUMO

Este trabalho analisa auto-oscilações assimétricas e propõe um método para estudo de sua estabilidade orbital. Este é baseado no método da primeira harmônica para a determinação da existência da auto-oscilação e considera perturbações no nível contínuo e na amplitude da oscilação, estudando o comportamento destas com respeito ao tempo, obtendo um critério para a estabilidade orbital da auto-oscilação.

## ABSTRACT

This work analyses asymmetrical self-oscillations and presents a method to study its orbital stability. The determination of the self-oscillation is based on the describing-function method, and considers perturbations in the DC level and amplitude of the oscillation to derive a criterion for the orbital stability of the self-oscillation.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	1
CAP. 1 - MÉTODO DA PRIMEIRA HARMÔNICA.....	3
1.1 - Introdução.....	5
1.2 - Função de transferência equivalente.....	6
1.3 - Sistema considerado.....	6
1.4 - Auto-oscilações simétricas.....	7
1.5 - Estabilidade orbital das auto-oscilações simétricas.....	10
CAP. 2 - COMPLEMENTOS PARA ANÁLISE DE AUTO-OSCILAÇÕES.....	15
2.1 - Extensão do método do lugar das raízes.....	16
2.2 - Observação sobre o critério de L <sup>ö</sup> eb.....	23
2.3 - Discussão sobre um caso particular.....	25
CAP. 3 - MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DA ESTABILIDADE DE AUTO-OSCILAÇÕES ASSIMÉTRICAS.....	28
3.1 - Determinação de auto-oscilações.....	30
3.2 - Estabilidade de uma auto-oscilação.....	35
3.3 - Exemplo de aplicação do método.....	45
3.4 - Simulação análoga.....	59
CAP. 4 - PARTICULARIZAÇÃO DO MÉTODO PARA NÍVEL CONTÍNUO NULO - COMPARAÇÃO COM O CRITÉRIO DE L <sup>ö</sup> EB.....	66
4.1 - Critério de L <sup>ö</sup> eb.....	66
4.2 - Critério de estabilidade para nível contínuo nulo.....	67
4.3 - Comentários e exemplo.....	70
CAP. 5 - CONCLUSÕES.....	75
APÊNDICE.....	78
BIBLIOGRAFIA.....	88

## INTRODUÇÃO

O estudo de auto-oscilações em sistemas não lineares é um campo bastante amplo, objeto de intensas pesquisas, onde existe ainda uma quantidade enorme de trabalho a ser realizado.

Tendo em vista a complexidade do assunto, procuramos abordá-lo por um método de análise que, apesar de não rigoroso, é, sem dúvida, uma das grandes ferramentas para a previsão do comportamento de uma classe de sistemas não lineares, e que se denomina Método da Primeira Harmônica.

Este método, também conhecido por Função Descritiva, procura aplicar aos não lineares algumas das técnicas utilizadas na análise de sistemas lineares, o que lhe dá a característica de simplicidade.

A forma clássica do método é mostrada no Capítulo 1, assim como é apresentado o Critério de Ljapunov para a estabilidade de auto-oscilações simétricas.

No Capítulo 2 é discutida uma outra técnica aproximada de análise, devida a Kalman, qual seja, o método dos pontos críticos reais e virtuais. Neste Capítulo ainda, apresentamos uma extensão do método do lugar das raízes, tendo em vista uma não linearidade substituída por seu ganho complexo equivalente; e também são analisados dois casos interessantes que surgem da aplicação do método da primeira harmônica.

No Capítulo 3 é apresentada a contribuição que deu origem a este trabalho; um método para a determinação da estabilidade orbital de auto-oscilações assimétricas, baseado na consideração de perturbações aplicadas a uma auto-oscilação que é solução para o sistema não linear estudado, e analisando-se o comportamento no tempo das perturbações consideradas. Neste Capítulo é

desenvolvido, também, um exemplo de aplicação do método, acompanhado de uma simulação analógica.

O método é, em seguida, particularizado para o caso de nível contínuo nulo (Capítulo 4) e é feita uma tentativa de comparação com o Critério de Löeb.

O Capítulo final apresenta algumas considerações com respeito ao método proposto.

## CAPÍTULO I

### MÉTODO DA PRIMEIRA HARMÔNICA

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

O método da função descritiva consiste na substituição de um elemento não linear, excitado com um sinal conhecido, por um bloco linear "equivalente"; quando o sinal excitador é senoidal esta técnica toma o nome específico de Aproximação da Primeira Harmônica ou Método da Primeira Harmônica ou ~~Método da Linearização~~ Harmônica.

A técnica é bastante aplicada no estudo do ~~desempenho de~~ sistemas de controle, e sua vantagem é "traduzir" em termos de engenharia os métodos quase-lineares da mecânica não linear. Pode ser vista também como uma tentativa de ~~generalização da noção~~ de função de transferência para sistemas não lineares.

Seu mérito principal é a simplicidade de aplicação; sua desvantagem básica é a falta de rigor, não se sabendo, senão por certas indicações empíricas, quais as condições de validade para seu uso correto.

#### 1.2 - FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EQUIVALENTE

Consideremos um sistema linear descrito pela seguinte equação diferencial:

$$a_n \frac{d^n r}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 r = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (1.1)$$

com

$$a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad n > m$$

Para abreviar a notação escrevamos (1.1) em termos do operador diferencial  $p = \frac{d}{dt}$

$$D(p) r(t) = M(p) x(t)$$

com

$$D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$$

$$M(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$$

Se o sistema é invariante falamos de sua equação característica

$$D(s) = 0 \quad (1.2)$$

e de sua função de transferência

$$G(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$$

onde  $s = \sigma + j\omega$  é a variável complexa de Laplace. Representaremos tal sistema pelo diagrama da Figura 1.1

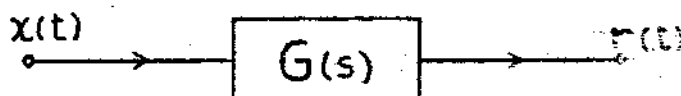


Figura 1.1 - Representação em bloco de um sistema linear invariante

Se todas as raízes de (1.2), equação característica, estiverem no semi-plano esquerdo e o sistema for excitado por uma entrada senoidal

$$x(t) = x_1 \text{ sen } \omega t \quad (1.3)$$

com  $x_1$  e  $\omega$  constantes, a saída  $r(t)$  alcança um regime permanente dado por



$$r_p(t) = r_1 \text{ sen } (wt + \psi)$$

com

$$\frac{r_1}{x_1} = A = |G(jw)| \quad \psi = \angle G(jw)$$

A função de transferência, para  $s = jw$ ,  $G(jw) = A \cdot \exp(j\psi)$ , é função exclusiva de  $w$ , não dependendo da amplitude de excitação  $x_1$ . Esta é a base dos métodos harmônicos de grande utilidade no estudo de sistemas lineares; tentaremos estendê-lo, de maneira aproximada, para sistemas não lineares.

Consideraremos o sistema não linear da Figura 1.2 com as seguintes suposições:

- a) excitação senoidal  $x(t) = x_1 \text{ sen } wt$ ,  $x_1$  e  $w$  constantes.
- b) a saída,  $r(t)$ , alcança um regime permanente periódico,  $r_p(t)$ , de período igual ao da excitação.
- c) o valor médio do regime permanente da saída é nulo.

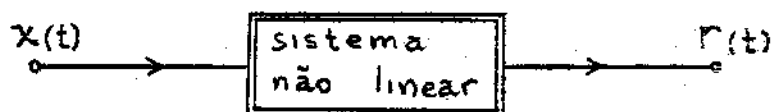


Figura 1.2 - Representação de sistema não linear

Uso de traço duplo para distinguir do linear

O regime permanente  $r_p(t)$  é periódico, mas não obrigatoriamente senoidal; associemos a ele, seguindo um critério, uma senoide  $r_1 \text{ sen } (wt + \phi)$ ; os critérios mais usuais são

a)  $r_1 \text{ sen } (wt + \phi)$  é a componente fundamental do desenvolvimento em série de Fourier de  $r_p(t)$ .

$$b) \left( \begin{array}{l} \text{energia por ciclo} \\ \text{de } r_p(t) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{energia por ciclo} \\ \text{de } r_1 \text{ sen } (wt + \phi) \end{array} \right)$$

e mais uma condição que permita fixar a fase  $\phi$

Para outros critérios de associação vide [1]

Adotaremos o primeiro critério, pois sua aplicação é mais intuitiva nos sistemas "filtrados" como veremos no parágrafo seguinte.

Por extensão, definimos a função de transferência equivalente para o sistema não linear em consideração, como:

$$N = N(x_1, w) = B \exp(j\phi)$$

com

$$B = B(x_1, w) = \frac{r_1}{x_1} \quad \text{e} \quad \phi = \phi(x_1, w)$$

Em princípio,  $N$  é função da frequência,  $w$ , e também da amplitude,  $x_1$ , do sinal senoidal de excitação; se  $N$  não é função constante de  $x_1$ , o princípio da superposição, ~~caráter essencial~~ dos sistemas lineares, não é mais aplicável.

Quando a função de transferência equivalente,  $N$ , não depende de  $w$ , toma o nome de ganho complexo equivalente. Diz-se, então, que o sistema não linear é instantâneo ou sem inércia ou, ainda, que a característica não linear é algébrica. Neste caso, a saída  $r(t)$ , como considerada, não tem transitório e coincide, portanto, com  $r_p(t)$ .

Consideraremos apenas características não lineares algébricas, pois, no caso mais geral em que  $N$  depende de  $w$ , a aproximação da primeira harmônica perde sua vantagem principal que é a simplicidade

### 1.3 - SISTEMA CONSIDERADO

Por questões de padronização consideraremos sistemas que possam ser colocados sob a forma do diagrama de blocos da Figura 1.3, onde o órgão não linear é suposto sem inércia.

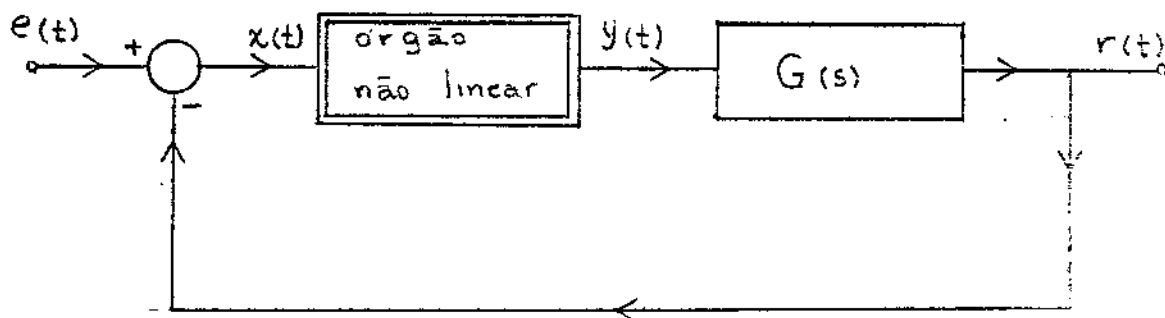


Figura 1.3 - Sistema padrão

Se  $x(t) = x_1 \text{ sen } \omega t$ , vemos que  $y(t)$ , periódica, apresentará harmônicas em  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ ; para que  $r(t)$  tenha uma forma aproximadamente senoidal devemos supor que o bloco linear,  $G(s)$ , efetua uma enérgica filtragem sobre as harmônicas superiores, que é o caso de diversos sistemas de controle, em especial, os servomecanismos que tem saída mecânica de grande inércia. Fala-se então, em sistemas filtrados

A falta de rigor na definição dos sistemas filtrados constitui o maior inconveniente do método da primeira harmônica. Na resolução de um problema prático não podemos ter certeza de que a aplicação do método forneça resultados qualitativamente corretos.

Evidentemente, a suposição (c) feita no parágrafo 1.2 pode ser retirada, se supusermos que a filtragem também se efetua para o nível contínuo

#### 1.4 - AUTO-OSCILAÇÕES SIMÉTRICAS

Consideremos o sistema linear invariante da Figura 1.4, onde  $e(t) \equiv 0$ ,  $k$  é um ganho independente da frequência e  $G(s)$  é uma função de transferência da forma anotada no parágrafo 1.2.

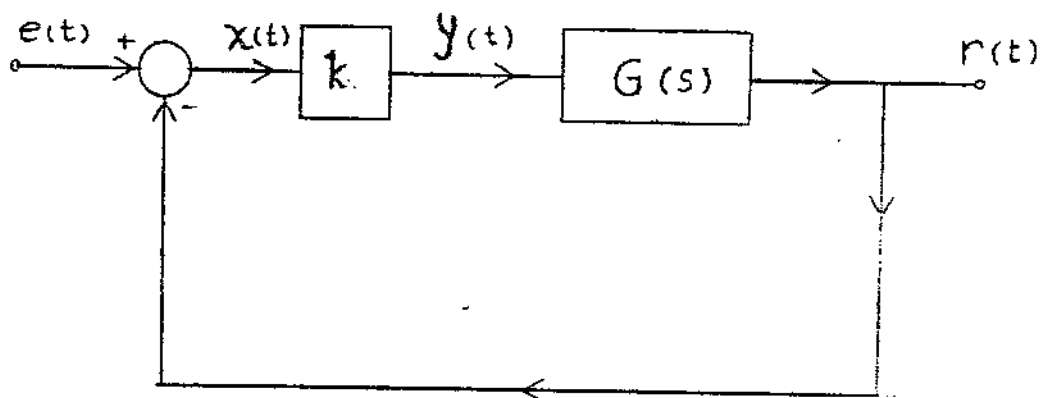


Figura 1.4 - Sistema Linear Invariante

As equações deste sistema

$$D(p) r(t) = M(p) y(t)$$

$$y(t) = k x(t)$$

$$x(t) = - r(t)$$

podem ser reduzidas a

$$[D(p) + k M(p)] x(t) = 0$$

cuja equação característica é

$$D(s) + k M(s) = 0$$

ou

$$G(s) = -\frac{1}{k}$$

O sistema apresentará uma auto-oscilação ou uma oscilação própria se duas raízes da equação característica forem imaginárias puras conjugadas, todas as demais raízes estando localizadas no semi-plano esquerdo do plano complexo  $s$ . Esta situação ocorreria para um determinado valor de  $k$ . Para valores de  $k$  ligeiramente superiores ou inferiores, teremos ou oscilações crescentes ou decrescentes (note que o crescente não corresponde necessariamente ao  $k$  superior). O caso de raízes imaginárias conjugadas é, portanto, um caso limite entre comportamentos qualitativamente diferentes. Experimentalmente, o comportamento correspondente ao caso limite não ocorre, não tendo interesse de um ponto de vista de engenharia.

A determinação de oscilações próprias pode ser feita através do critério de Nyquist, que leva em conta o número de voltas dadas pelo lugar  $G(j\omega)$  em torno do "ponto crítico"  $-\frac{1}{k}$  [15].

A frequência das auto-oscilações é determinada pelos parâmetros do sistema; a amplitude, pelas condições iniciais.

Consideremos, a seguir, o sistema não linear descrito no parágrafo 1.3, com  $e(t) \equiv 0$ ; suas equações são :

$$D(p) r(t) = M(p) y(t)$$

$$y(t) = f [x(t)]$$

$$x(t) = -r(t)$$

A aproximação da primeira harmônica permite reduzi-las, sem rigor, a :

$$[D(p) + N(x_1) M(p)] x(t) = 0$$

cuja equação característica é :

$$D(s) + N(x_1) M(s) = 0$$

ou

$$G(s) = \frac{1}{N(x_1)} = C(x_1)$$

(1.4)

$C(x_1)$  é chamado o lugar crítico da característica não linear; ele faz, em relação aos sistemas lineares, o papel de um ponto crítico variável com  $x_1$ . A determinação de auto-oscilação pode ser feita pelo critério de Nyquist, determinando a intersecção entre  $G(j\omega)$  e  $C(x_1)$  (Figura 1.5), os valores de  $\omega$  e  $x_1$  neste ponto definem a frequência e a amplitude da oscilação. Não são a frequência, mas também a amplitude de oscilação dependem, agora, dos parâmetros do sistema. No caso de oscilação em sistema linear, a amplitude era fixada pelas condições iniciais.

o estudo da estabilidade da oscilação, feito a seguir, indicará os casos em que tais oscilações ocorrem fisicamente.

Devemos, sempre, ter em mente, as condições restritivas e vagas, dentro das quais as conclusões da aproximação da primeira harmônica são válidas:

- a) existência de um par de raízes imaginárias puras da equação característica, sendo todas as demais de parte real negativa
- b)  $G(s)$  exerce uma enérgica filtragem sobre as harmônicas de  $y_p(t)$

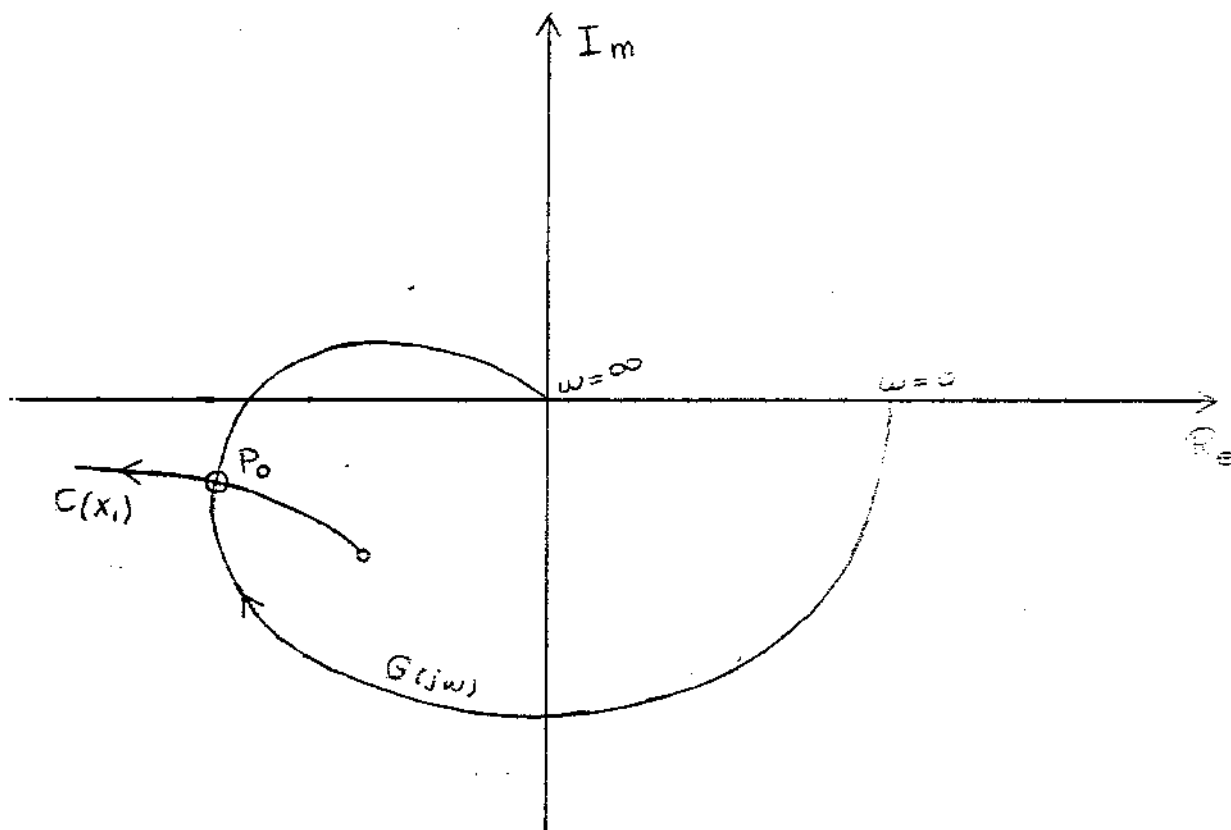


Figura 1.5 - Determinação gráfica de uma auto-oscilação

### 1.5 - ESTABILIDADE ORBITAL DAS AUTO-OSCILAÇÕES SIMÉTRICAS

O ponto  $P_0$  da Figura 1.5 caracteriza uma auto-oscilação de primeira harmônica do sistema da Figura 1.3; a amplitude,  $x_{10}$ , e a frequência,  $\omega_0$ , desta oscilação podem ser determinadas, respectivamente, pelas curvas de  $C(x_1)$  e  $G(j\omega)$ . O ponto  $P_0$  representa uma solução da equação característica, para  $s = j\omega$ , e corresponde a uma solução no tempo do tipo :

$$x(t) \rightarrow X_{10} e^{j\omega_0 t}$$

Interessa-nos, agora, saber se esta oscilação é estável; em outras palavras, procuraremos determinar se quando submetido a perturbações, o sistema "tende" a conservar esta solução.

Podemos, sem rigor, abordar este problema, procurando soluções de (1.4) para  $s = \alpha + j\omega$ ,  $\alpha \neq 0$  (Figura 1.6.). Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são também soluções da equação característica; ao ponto  $P_1$ , por exemplo, corresponde uma solução do tipo

$$x(t) \rightarrow X_{11} e^{\alpha t} e^{j\omega_1 t} \quad (1.5)$$

Como, neste caso,  $\alpha < 0$  a amplitude da oscilação (1.5) diminui com o tempo; o "ponto de operação" do sistema tende a caminhar de  $P_1$  no sentido de  $P_0$ .

Um raciocínio idêntico nos mostraria que uma perturbação que levasse o sistema a  $P_2$  tenderia, também, a ser "regenerada" para  $P_0$ .

Nestas condições, podemos afirmar que, a solução auto-oscilante caracterizada pelo ponto  $P_0$ , é orbitalmente estável. Idênticamente, na Figura 1.7., M representa uma oscilação orbitalmente instável e N estável.

As mesmas conclusões, também não rigorosas, podem ser obtidas pelo Critério de Löb [16]; ele é, entretanto, de aplicação extremamente rápida. Omitiremos sua demonstração e citaremos apenas sua aplicação; uma oscilação, como determinada pelo método da primeira harmônica é estável se :

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \wedge \frac{dC(x_1)}{dx_1} > 0$$



As derivadas são tomadas no ponto de intersecção e correspondem a vetores tangentes, respectivamente aos lugares  $G(j\omega)$  e  $C(x_1)$ , orientados no sentido dos  $\omega$  e  $x_1$  crescentes. O sinal  $\Delta$  significa produto vetorial. No caso contrário, a oscilação é instável.

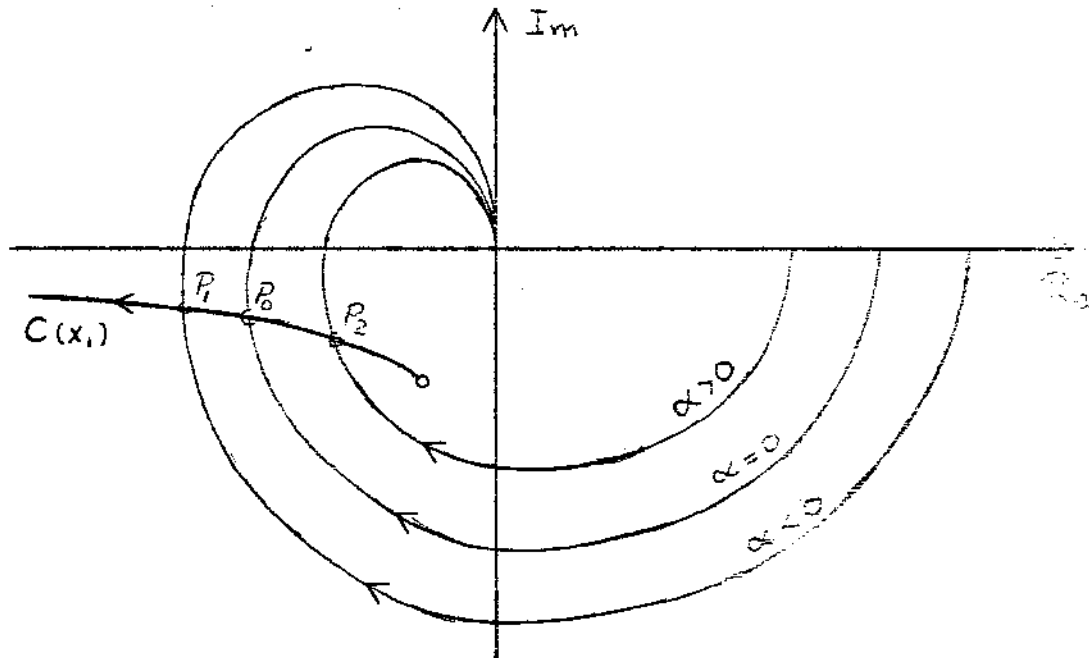


Figura 1.6 - Curvas de  $G(\alpha + j\omega)$  com  $\omega \geq 0$

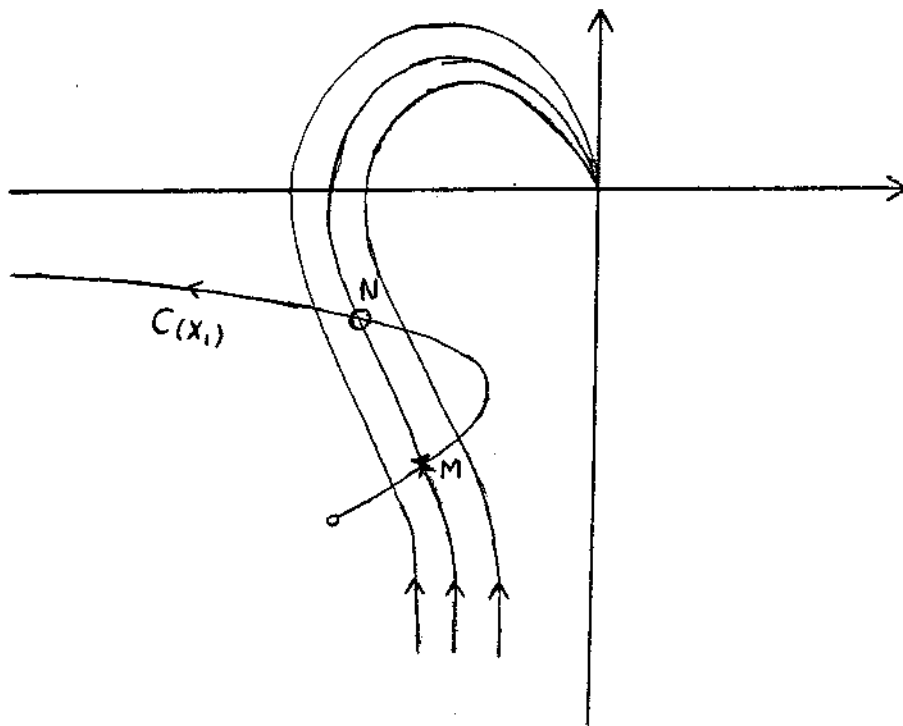


Figura 1.7 - Auto-oscilações de sistema não linear

A Figura 1.8 ilustra a aplicação do Critério de Løeb : M é uma oscilação orbitalmente instável e N é orbitalmente estável.

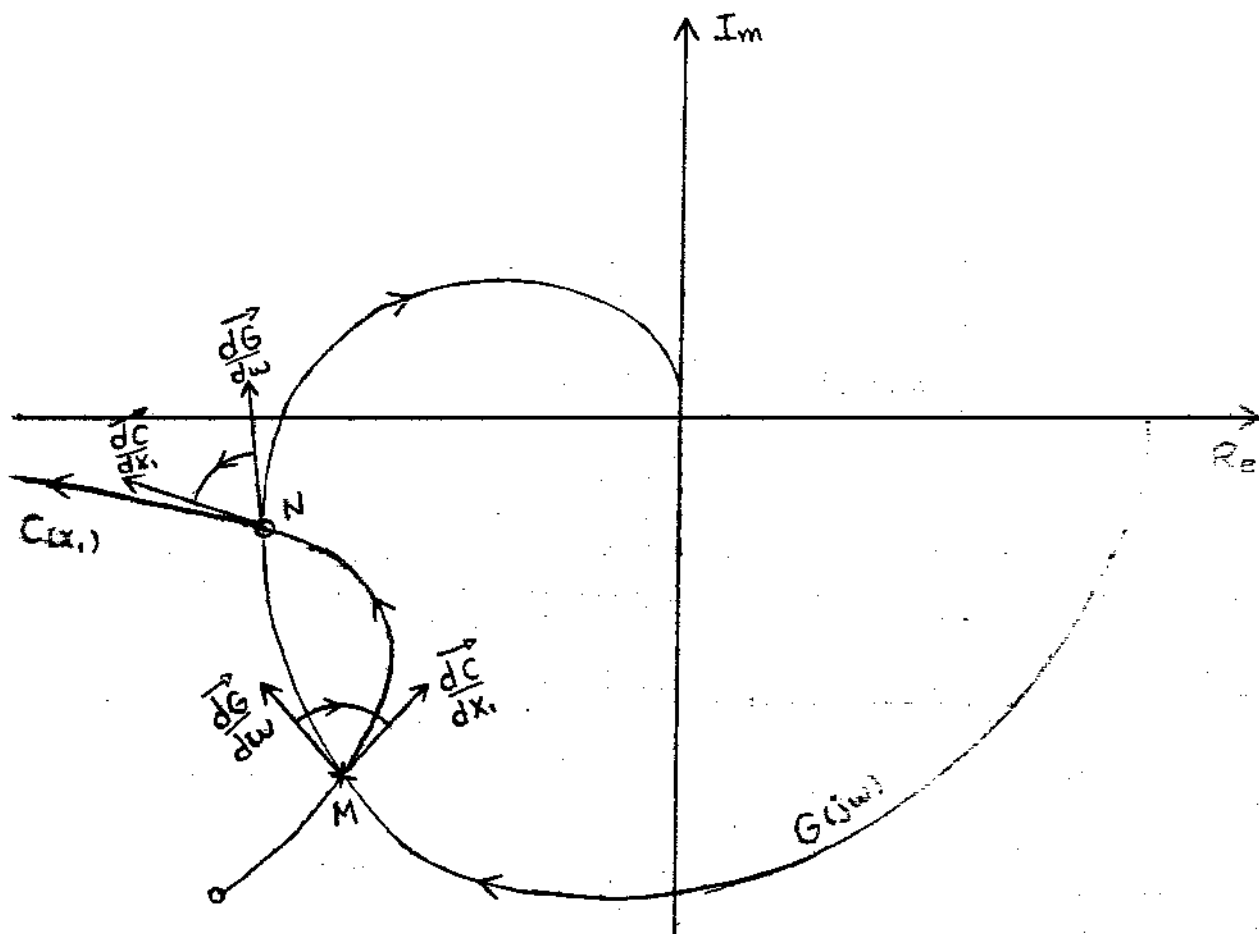


Figura 1.8 - Critério de Løeb

Todas as construções gráficas efetuadas na pesquisa de auto-oscilações podem ser executadas, equivalentemente, num diagrama polar de Nyquist ou numa carta de Nichols, também conhecida como diagrama de Black.

## CAPÍTULO 2

### COMPLEMENTOS PARA ANÁLISE DE AUTO-OSCILAÇÕES

Este Capítulo versará sobre alguns tópicos que auxiliam o estudo de auto-oscilações em sistemas não lineares. Os assuntos aqui abordados serão desenvolvidos através de exemplos simples, que elucidam e dão ao leitor familiaridade com os métodos.

#### 2.1 - EXTENSÃO DO MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

A técnica do lugar das raízes, desenvolvida para análise de sistemas lineares, pode, dentro de certos limites, ser estendida aos sistemas não lineares com o propósito de se obter informações com respeito à estabilidade do sistema em questão.

Esta extensão envolve uma aproximação da não linearidade por trechos de reta e a análise sendo realizada, então, em um sistema linear por partes [5], ou, para estudo de auto-oscilações, pode-se considerar o ganho complexo equivalente da característica não-linear no lugar desta.

A forma dos sistemas aqui considerados é a mostrada na Figura 1.3.

Para a aproximação por trechos de reta, devemos impor restrições quanto ao tipo da não linearidade  $f(x)$  envolvida [5]:  $f(x)$  deve ser sem inércia, biunívoca, contínua e diferenciável, com  $f' = \frac{df}{dx}$ . Com isto podemos dizer que, enquanto o valor do erro  $\dot{x}(t)$  estiver na vizinhança de  $x = X_2$ , a característica não linear pode ser substituída por uma constante  $K = f'(X_2)$ , e o comportamento das trajetórias no entorno de  $X_2$  serão descritos por uma equação diferencial linear invariante, cujas raízes características dependem de  $K$  e de  $G(s)$ .

O exposto acima nos fornece duas consequências importantes:

- a) Se para todos os possíveis valores de  $f'(x)$  o sistema linear é estável, é intuitivo que o sistema não linear será estável.
- b) Se para alguns valores de  $f'(x)$  o sistema linear é instável, então, o sistema não linear poderá não ser estável.

Neste ponto está bastante clara a necessidade da construção do lugar das raízes da parte linear, que evidenciará de imediato se é possível ou não considerar o sistema estável.

Uma exposição bastante interessante e completa do método pode ser vista na referência [5].

### Exemplo 2.1

Consideremos um sistema de controle como o da Figura 1.3, dado por

$$G(s) = \frac{1 - s}{s(1 + s)}$$

$f(x)$  característica da saturação (Figura 2.1)

A característica de saturação  $f(x)$  pode ser especificada matematicamente por:

$$f(x) = - f(-x)$$

$f'(x)$  função positiva não crescente em  $|x|$

$$\max f'(x) = f'(0)$$

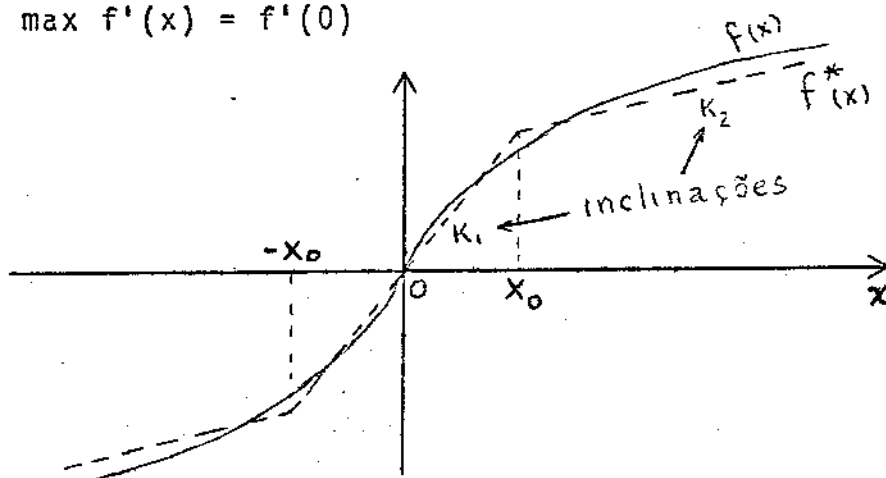


Figura 2.1 - Característica de Saturação

O lugar das raízes para a parte linear é mostrado na Figura 2.2, graduado em termos de  $K = f'(x)$

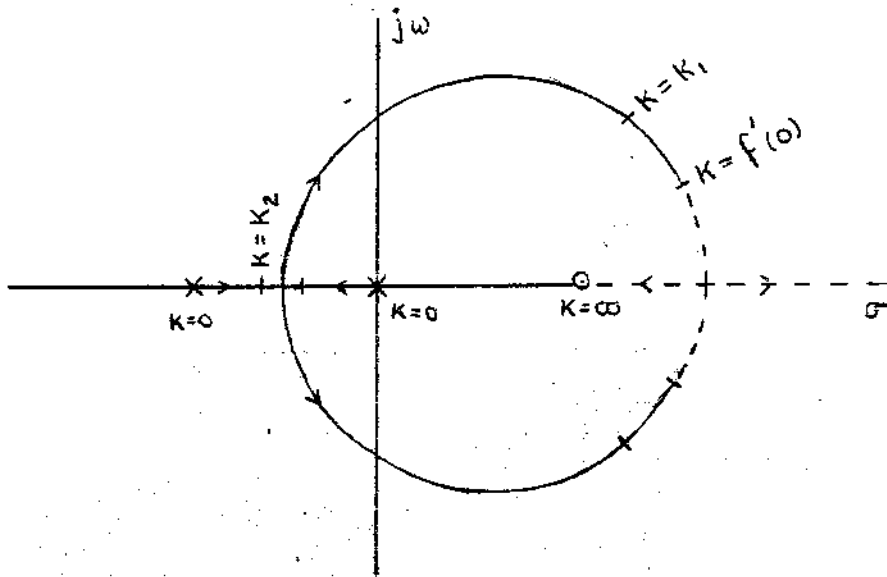


Figura 2.2 - Lugar das Raízes da Parte Linear

A Figura 2.2 mostra que se  $f'(0)$  é suficientemente grande, o lugar das raízes como uma função de  $|x|$  estará inicialmente ( $x=0$ ) no semi-plano direito, e depois, para algum  $x \neq 0$ , passará para o semi-plano esquerdo. Isto sugere que será suficiente tomar trechos de retas com apenas duas inclinações diferentes como, por exemplo,  $f^*(x)$  da Figura 2.1. Se um estudo mais detalhado das trajetórias se fizer necessário, pode-se tomar quatro inclinações diferentes, o que levará em consideração que o sistema linear correspondente a cada segmento da aproximação de  $f(x)$  poderá ter um dos seguintes tipos de pontos críticos: não instável, foco instável, foco estável ou não estável

Neste ponto é interessante observar que se  $f'(0)$  é tal que corresponda a raízes no semi-plano esquerdo, pode-se considerar o sistema não linear como sendo estável.

O caso de interesse, entretanto, é a situação como mostrada na Figura 2.2, ou seja, nada se pode dizer, a priori, sobre a estabilidade do sistema.

Serã usada a aproximação  $f^*(x)$  da Figura 2.1, e também o método dos pontos críticos reais e virtuais num plano de fase, exposto por Kalman [6].

A aproximação  $f^*(x)$  é redesenhada na Figura 2.2, para a obtenção dos pontos críticos e de suas regiões de atuação.

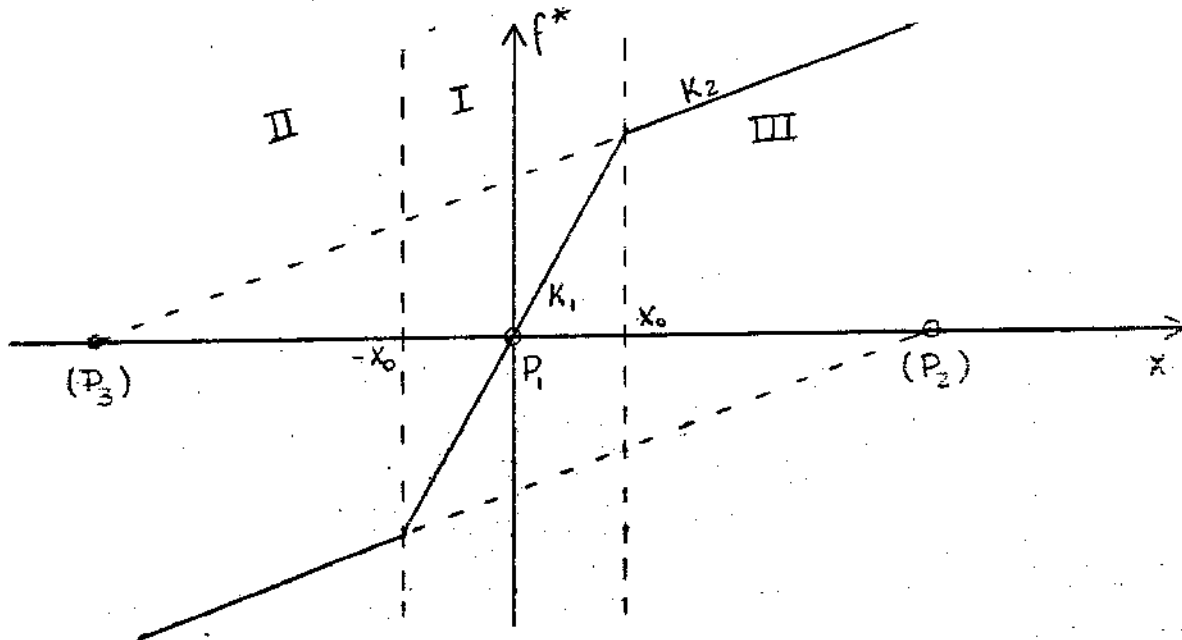


Figura 2.3 - Característica  $f^*(x)$

Assume-se que o sistema funcione com entrada nula ( $e(t) \equiv 0$ ).

Com os pontos de descontinuidade da derivada de  $f^*(x)$  ( $-x_0$  e  $x_0$ ) pode-se determinar três regiões do eixo das abscissas:

Região I	$-x_0 < x < x_0$
Região II	$x < -x_0$
Região III	$x_0 < x$

Como discutido em Apêndice, se a variável  $x$  se encontra em I, o sistema linear se comporta com  $K=K_1$ , e o ponto crítico num plano de fase  $(x, \dot{x})$  se situaria no ponto  $(0,0)$  o qual pertence à região I e será chamado de ponto crítico real.

Se a variável  $x$  se encontra em II, o sistema linear se comporta com  $K = K_2$ , e teria o ponto crítico num plano de fase  $(x, \dot{x})$

situado no ponto  $(P_2, 0)$ , que não pertence à região II, que será então denominado ponto crítico virtual

Com o mesmo tipo de raciocínio conclui-se que a região III possuiria um ponto crítico virtual no plano  $(x, \dot{x})$ , no ponto  $(P_3, 0)$

Usa-se, para representação no plano  $(x, \dot{x})$  a seguinte notação

S para pontos críticos do tipo SELA

N para pontos críticos do tipo NÓ

F para pontos críticos do tipo FOCO

O sobrescrito  $^+$  indica ponto crítico estável

O sobrescrito  $^-$  indica ponto crítico instável

O uso de parênteses indica ponto crítico virtual; caso contrário será ponto crítico real

Os subscritos 1, 2 ou 3 indicam a que região pertence o ponto crítico

Com esta notação e consultando o lugar das raízes da equação 2.2 chegamos à seguinte configuração num plano de fase (ver Figura 2.4)

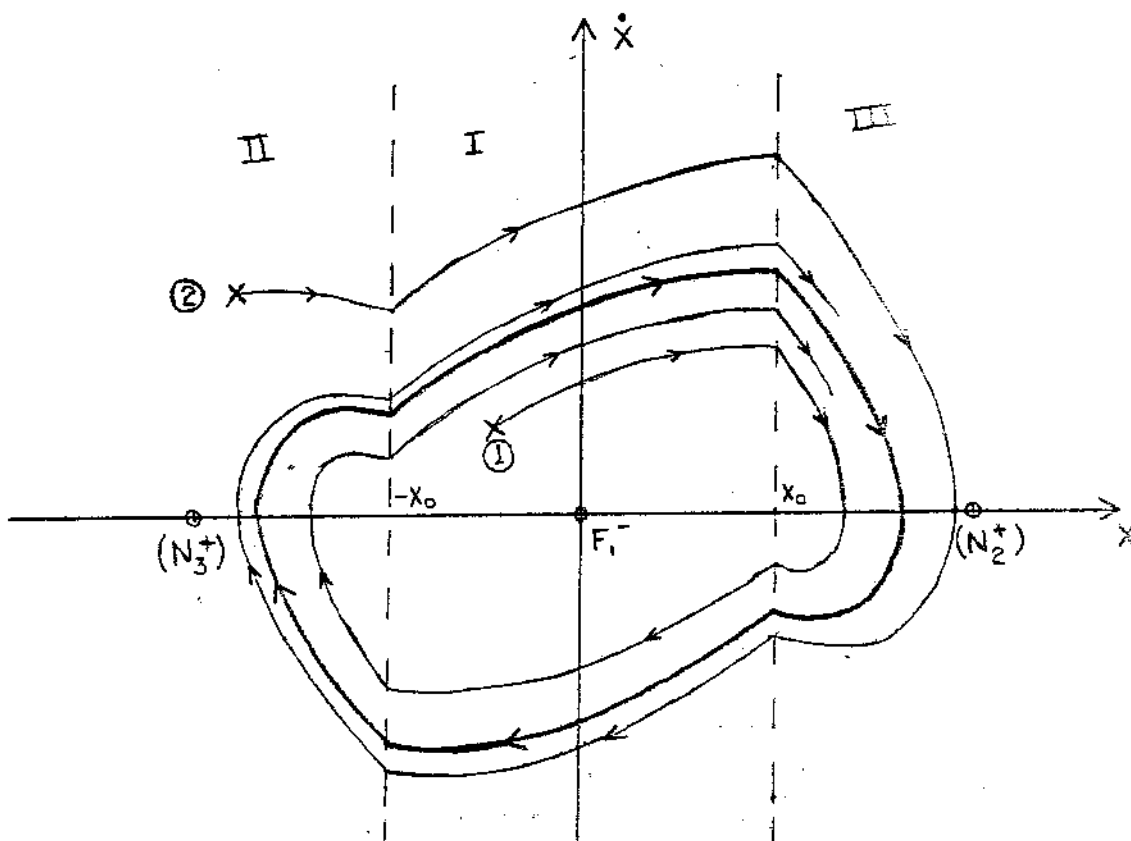


Figura 2.4 - Plano de fase do sistema considerado

Os pontos críticos são  $F_1^-$ ,  $(N_2^+)$  e  $(N_3^+)$ , ou seja, se o sistema tem condições iniciais como as dadas pelo ponto ①, seu comportamento, enquanto estiver na região I, será instável, ou seja, tenderá a se afastar do ponto crítico  $(0,0)$ . Quando atingir a região III,  $x > x_0$ , e enquanto nela permanecer, terá um comportamento estável, com ponto de equilíbrio  $(P_3,0)$ , ou seja, tenderá a se aproximar, com trajetória característica de não estável, do ponto de equilíbrio. Como este ponto se situa na região II, chegará o instante em que ele deixa III e entra em I, passando ao comportamento instável observado anteriormente, só que agora no sentido dos  $x$  decrescentes, até atingir a região II.

Atingindo II seu comportamento será estável, tendendo ao ponto  $(P_2,0)$ , situado em III, o que o força a voltar para a região I, repetindo os comportamentos descritos anteriormente.

Para condições iniciais em ②, o comportamento será semelhante, sendo que a diferença entre a oscilação iniciada em ① e aquela iniciada em ②, é a "amplitude" de oscilação, que no primeiro caso é crescente, e no segundo é decrescente. Este fato implica na existência de ciclo limite estável para o sistema.

Poder-se-ia mostrar a existência do ciclo limite usando-se um argumento devido a Poincaré, e ilustrado na Figura 2.5.

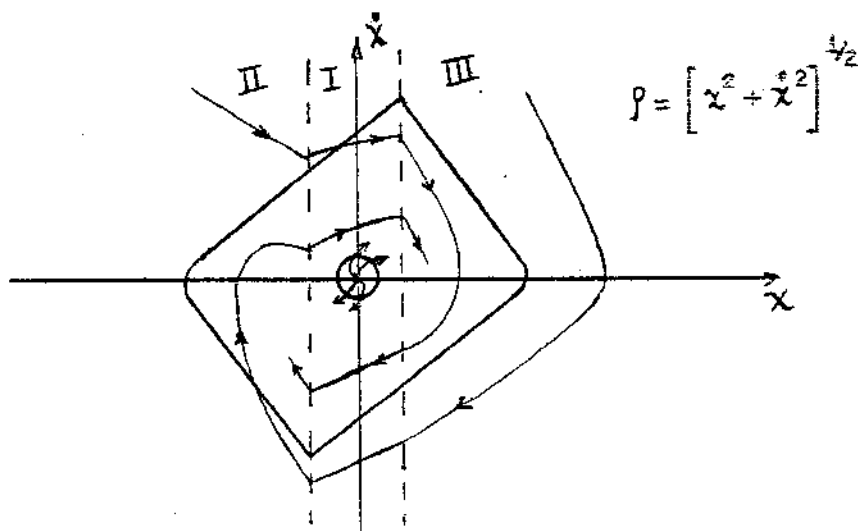


Figura 2.5 - Plano de fase do sistema



Dado o comportamento estável do sistema para valores elevados de  $\beta$ , existe uma curva fechada (a de forma losangular) no plano de fase, envolvendo a origem, a qual todas as trajetórias cruzam no sentido de fora para dentro\*. Por outro lado, dado a origem ser um ponto crítico real instável, existe uma curva fechada que a envolve e da qual todas as trajetórias originárias de seu interior saem. Isto implica na existência de pelo menos um ciclo limite estável na região compreendida entre as duas curvas [3].

Uma outra forma de análise aproximada para o sistema em questão, pode ser realizada usando-se o conceito de ganho complexo equivalente da não linearidade considerada. Este tipo de análise decorre imediatamente dos conceitos desenvolvidos no método da primeira harmônica, e terá portanto o mesmo grau de incerteza quanto aos resultados obtidos.

Para descrevê-lo será usado o mesmo sistema do Exemplo 2.1

### Exemplo 2.2

Seja o sistema considerado no exemplo anterior. Se ao invés da não-linearidade toma-se um elemento de ganho variável com a amplitude de oscilação, é possível visualizar-se o comportamento das raízes características do sistema com a variação de amplitude.

É possível, até, calibrar-se o lugar das raízes em termos da amplitude de oscilação, bastando para isto conhecer a expressão  $B(x_1)$ ; consequentemente, um valor do ganho de malha aberta do sistema, e com isto localizam-se as raízes da equação característica. Para a não-linearidade considerada (curva de saturação), e tendo em vista resultados qualitativos apenas, é suficiente saber que para  $x_1 = 0$ ,  $B(x_1) = f'(0)$ , e  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} B(x_1) = 0$ ; com  $B(x_1)$  função monotônica decrescente com  $x_1$ .

O lugar das raízes calibrado em amplitude será então o mostrado na Figura 2.6

---

\* A obtenção de uma curva fechada com estes requisitos é bastante laboriosa; uma demonstração da existência de pelo menos um ciclo limite para o sistema é feita em Apêndice, usando-se o método das transformações puntuais (diagrama de Lamerey).



estável, ou seja, o lugar das raízes calibrado em amplitude cruzou o eixo imaginário da direita para a esquerda. Cabe aqui uma ressalva: este critério bastante simples é válido, desde que não haja para aquele valor de amplitude, nenhuma raiz situada à direita do eixo imaginário. Este fato será analisado num exemplo que virá a seguir.

Cumpra ainda notar que se o lugar das raízes tiver cruzado o eixo imaginário da esquerda para a direita, o ponto  $K_{10}$  de cruzamento representaria uma auto-oscilação instável, o que é bastante fácil de se concluir.

Pode-se também, por este método, analisar sistemas onde o ganho complexo equivalente não seja real. Isto implica, entretanto na existência de uma defasagem  $\phi$  entre a entrada e a saída da não linearidade. A técnica do lugar das raízes, em sua forma mais conhecida, e para a qual existem regras simples de construção [6], é desenvolvida para sistemas com defasagem constante de  $180^\circ$  (realimentação negativa) ou  $0^\circ$  (realimentação positiva). A análise de sistemas com defasagens diferentes exigiria um trabalho bastante grande, e o método perderia sua simplicidade.

## 2.2 - OBSERVAÇÕES SOBRE O CRITÉRIO DE LÖEB

Neste parágrafo serão explicitados alguns cuidados que devem ser tomados na aplicação do Critério de Löeb. Como foi visto no Capítulo 1, a determinação da estabilidade de auto-oscilações por este Critério é bastante simples, bastando observar o sinal de um produto vetorial. A análise, entretanto, deve ser um pouco mais cuidadosa, como será visto no Exemplo abaixo:

### Exemplo 2.3 -

Seja um sistema sob a forma da Figura 1.3, com

$f(x)$  = característica de saturação (Figura 2.1)

$$G(s) = \frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)(s + a_4)(s + a_5)(s + a_6)(s + a_7)}$$

tomando valores positivos e distintos para os  $a_i$ , a parte linear apresentará o diagrama de Nyquist da Figura 2.7

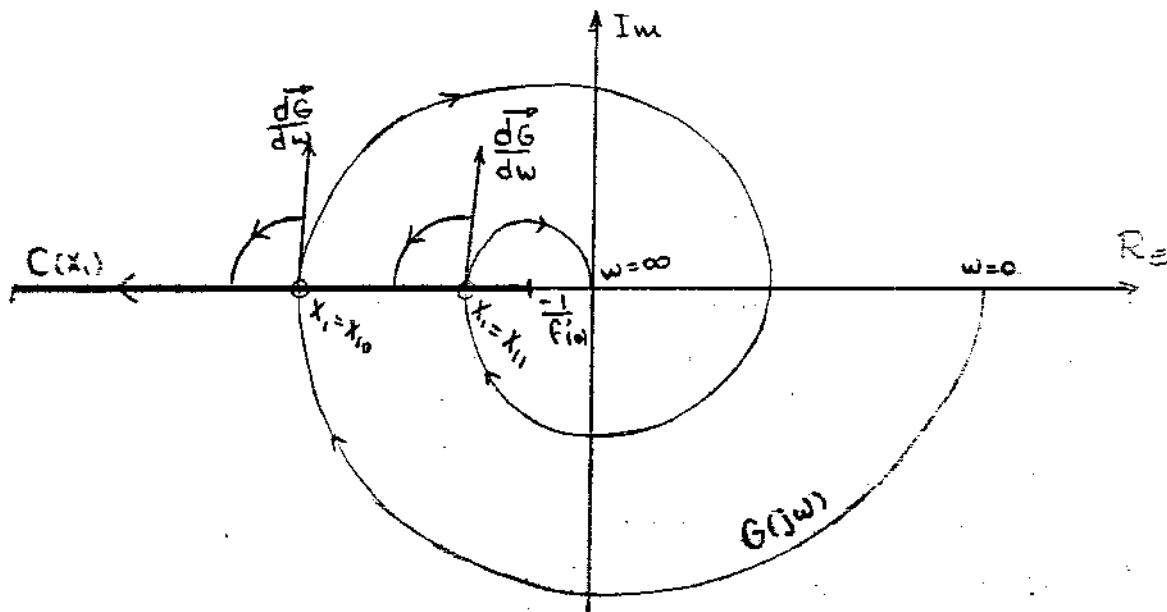


Figura 2.7 - Diagrama de Nyquist e lugar crítico do sistema

Para aplicação do critério de Loeb é representado também o lugar crítico  $C(x_1)$ , assumindo que  $f'(0)$  é suficientemente grande para atingir a configuração mostrada.

A aplicação pura e simples do critério daria a existência de duas auto-oscilações estáveis nos pontos  $x_1 = x_{10}$  e  $x_1 = x_{11}^*$ .

Porém esta afirmação não é correta, o que é visto de imediato fazendo-se a análise através do lugar das raízes (Figura 2.8)

---

\* Detalhes interessantes são discutidos na referência [19].

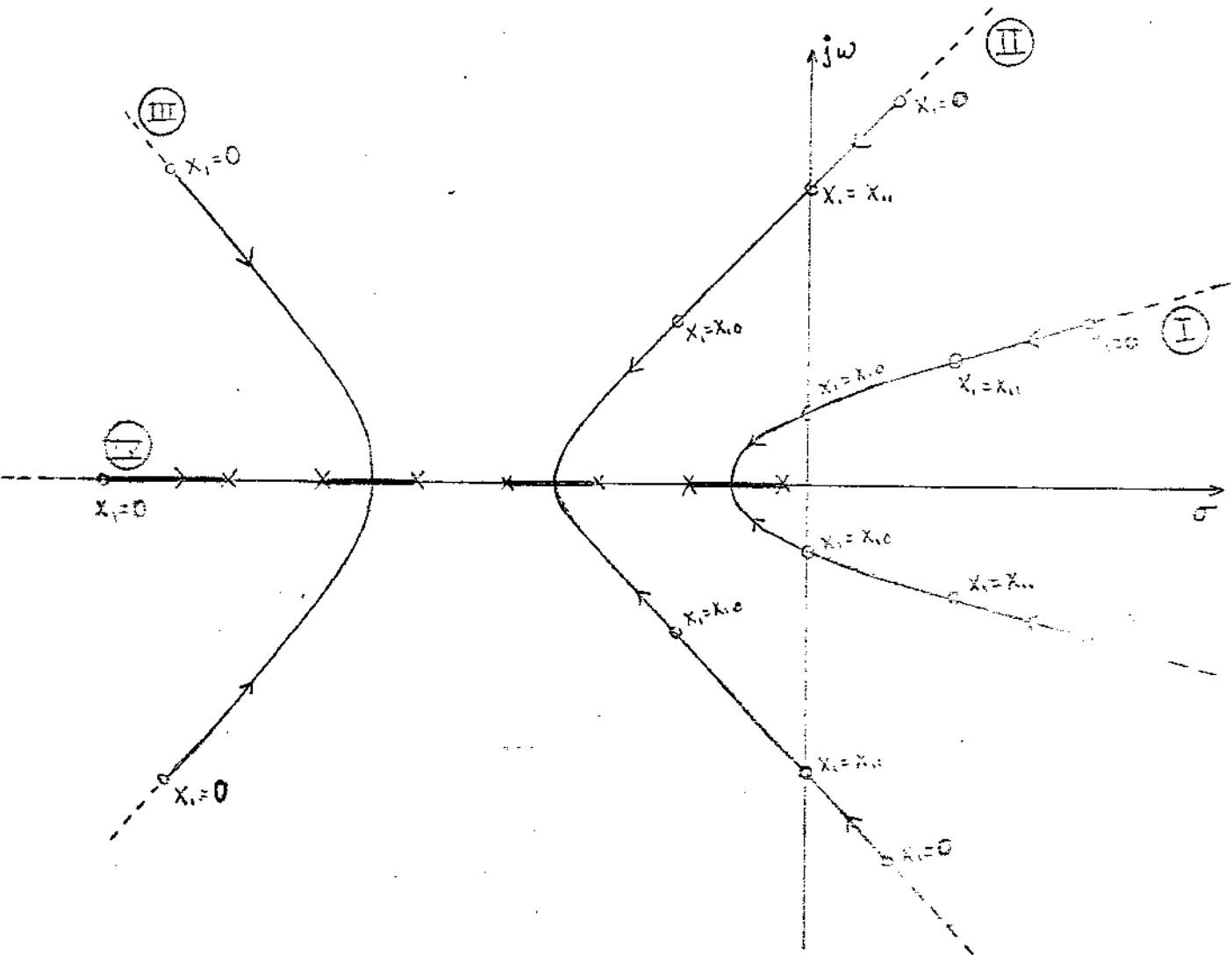


Figura 2.8 - Lugar das raízes calibrado em amplitude

A Figura 2.8 mostra claramente que a auto-oscilação de amplitude  $X_1 = X_{11}$  é instável, uma vez que para este valor de amplitude, existe no ramo (I) um par de raízes complexas conjugadas que dão comportamento instável ao sistema. A auto-oscilação de amplitude de  $X_1 = X_{10}$  por sua vez é estável, dado que para este valor de amplitude, todas as raízes do sistema darão um comportamento estável com exceção das raízes imaginárias puras do ramo (I), que provocarão a auto-oscilação.

Este fato poderia ser visualizado no diagrama polar, desde que fosse aplicado o critério de Nyquist para os pontos críticos  $C(x_{11})$  e  $C(x_{10})$ , certificando a existência de duas raízes no se mi-plano direito para o ponto  $C(x_{11})$ , além do par imaginário puro, e para o ponto  $C(x_{10})$  a existência apenas do par imaginário puro.

Conclue-se, então, que a aplicação pura e simples do critério de Löeb pode conduzir a resultados errôneos, o que poderia ser eliminado usando-se o critério de Nyquist ou o método do lugar das raízes.

### 2.3 - DISCUSSÃO SOBRE UM CASO PARTICULAR

Seja um sistema sob a forma da Figura 1.3 onde a não linearidade é do tipo relê com histerese e zona morta, e o bloco linear é tal que apresente o diagrama de Nyquist mostrado na Figura 2.9. Ajustando-se cuidadosamente os valores da zona morta e da histerese, pode-se obter o lugar crítico  $C(x_1)$  mostrado.

Este é um caso interessante, onde a curva  $C(x_1)$  intercepta a curva  $G(-j\omega)$ , mas não a curva  $G(j\omega)$ , e o problema seria, então, a existência ou não de auto-oscilação [1]

O Critério de Nyquist para sistemas lineares não apresenta dificuldades em sua interpretação pois estamos diante de uma situação do tipo

$$1 + KG(j\omega) = 0 \quad , \text{ onde } K \text{ é uma constante real.}$$

Na extensão deste critério para sistemas não lineares tratados pelo método da primeira harmônica teremos

$$1 + N(x_1)G(j\omega) = 0$$

onde  $N(x_1)$  é um valor complexo calculado para  $\omega > 0$ .

O cálculo do ganho complexo equivalente para frequências negativas nos levaria a  $\bar{N}(x_1)$ , complexo conjugado de  $N(x_1)$  e aí, a forma do Critério de Nyquist a ser aplicada seria

$$1 + \bar{N}(x_1)G(-j\omega) = 0$$

Assim, as interseções de  $C(x_1)$  e  $G(-j\omega)$  não têm significado como raízes imaginárias puras da equação característica.

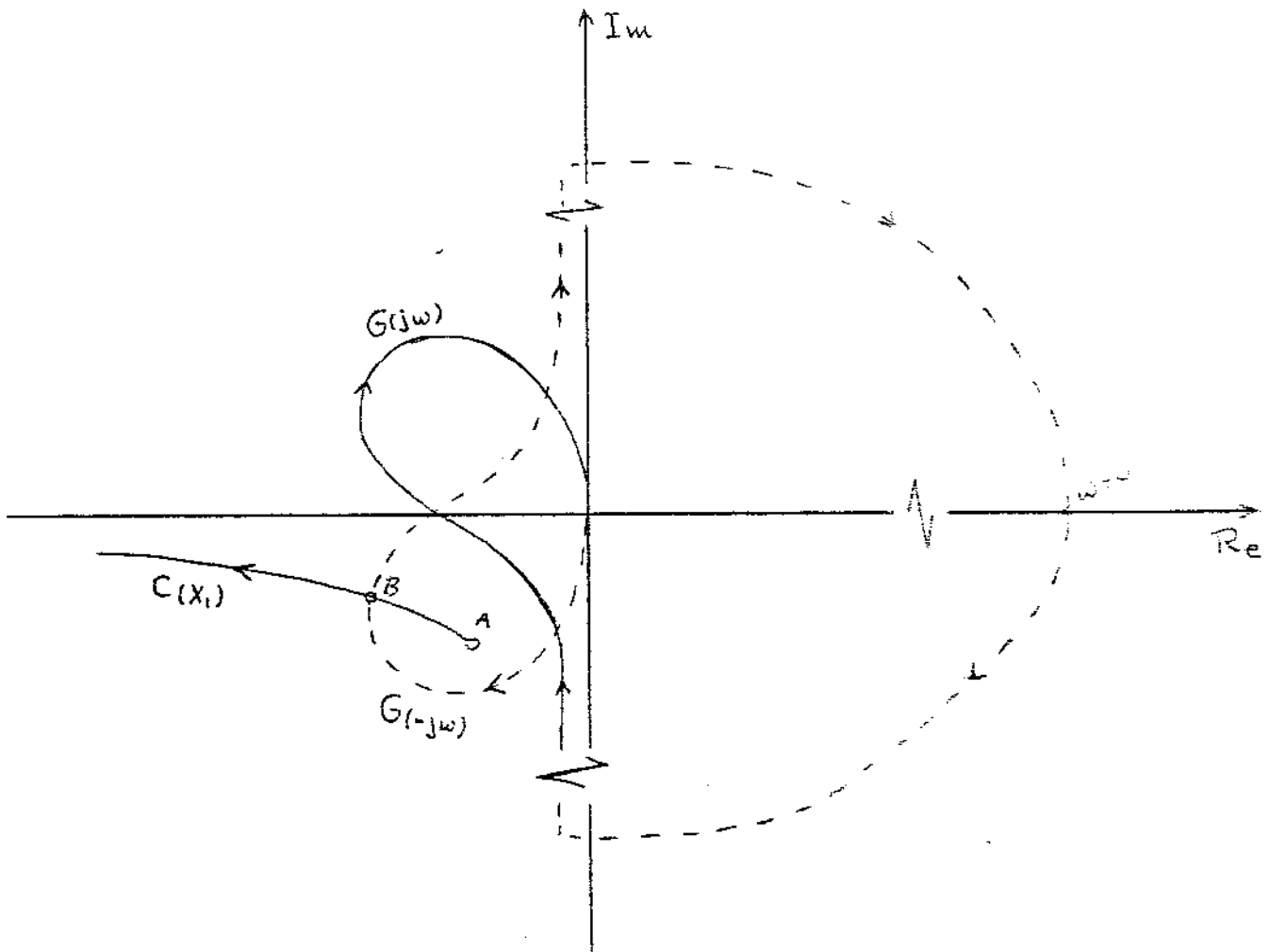


Figura 2.9 - Diagrama de Nyquist e lugar crítico do sistema

### CAPÍTULO 3

#### MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DA ESTABILIDADE DE AUTO- -OSCILAÇÕES ASSIMÉTRICAS

O método da primeira harmônica ("describing function"), embora não rigoroso, é de grande utilidade na determinação de auto-oscilações de sistemas que podem ser colocados na forma de diagrama de blocos da Figura 3.1 com:

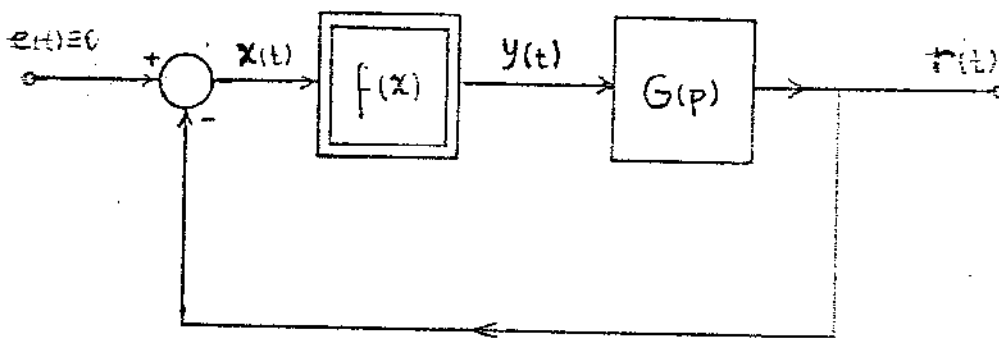


FIGURA 3.1

a)  $x(t) = X_1 \cos \omega t$                        $X_1 > 0$

b)  $G(p) = \frac{M(p)}{D(p)}$

sendo  $M(p) = b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m$

$D(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$



$p = \frac{d}{dt}$  , operador derivada no sentido distributivo

$n$  e  $m$  inteiros,  $n > m$

c)  $y = f(x)$  , característica não linear algébrica, gozando de simetria ímpar.

O bloco linear  $G(p)$  representa a seguinte equação diferencial linear a coeficientes constantes

$$D(p) r(t) = M(p) y(t)$$

De uma forma geral o método baseia-se no seguinte raciocínio intuitivo:

- $x(t)$  é uma senoide pura de frequência  $\omega$
- $y(t)$ , devido à característica não linear  $f(x)$ , apresenta harmônicas da frequência  $\omega$
- o bloco linear exerce uma filtragem rigorosa sobre estas harmônicas

A estabilidade orbital da oscilação pode ser determinada pelo critério de Loeb ou por uma extensão do "Root-Locus" [3].

Alguns fenômenos verificados não podem ser explicados pela primeira harmônica; entre eles:

#### I) Aparecimento de nível contínuo nas oscilações

Uma explicação do fenômeno foi dada por Loeb e Lebel [10], supondo uma oscilação do tipo

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos \omega t$$

Em geral, o aparecimento do nível contínuo é associado a uma característica não linear  $y = f(x)$  que não apresenta mais simetria ímpar. Na realidade, como é mostrado num exemplo posterior

ele pode ocorrer para características ímpares e seu aparecimento está na realidade ligado a filtragem exercida pelo bloco linear  $G(p)$  sobre os componentes do sinal  $y(t)$ .

Estuda-se também a estabilidade orbital da oscilação e comparam-se os resultados com os obtidos pelo método clássico.

## II) Desvio de Frequência

Nos casos em que, por exemplo,  $y = f(x)$  é uma característica uniforme, sem histerese (ganho complexo equivalente real), o método da primeira harmônica não prevê variações da frequência de oscilação devido a alterações do ganho em malha aberta. Na prática, este fenômeno é largamente verificado, podendo ocorrer desvios de frequência de considerável magnitude (50 % por exemplo); tais desvios modificam as condições de filtragem e dão lugar ao aparecimento de harmônicas superiores

Para pequenos desvios, o fenômeno foi estudado por Grozskowsky [11]. Para grandes desvios de frequência, o problema pode ser tratado por uma técnica similar à da "Dual Input Describing Function" [1], supondo sinais do tipo:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega t + \theta) + X_3 \cos 3 \omega t$$

ou

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos(\omega t + \theta) + X_2 \cos 2 \omega t$$

Este tratamento é entretanto muito laborioso e deve ser completado com um estudo sobre a estabilidade orbital da oscilação.

### 3.1 - DETERMINAÇÃO DE AUTO-OSCILAÇÕES

Para o sistema considerado, impondo que a parte linear  $G(p)$  exerça uma filtragem "eficiente" sobre harmônicos de ordem superior à primeira pode-se fazer, como aproximação

$$\dot{x}(t) = X_0(t) + X_1(t) \cos \omega t \quad (3.1)$$

com

$$x(t) = -r(t) \quad (3.2)$$

O bloco não linear fornecerá

$$y(t) = f [X(t)] = f [X_0(t) + X_1(t) \cos \omega t] \quad (3.3)$$

Expandindo  $y(t)$  em Série de Fourier obtem-se:

$$y(t) = Y_0(X_0, X_1) + Y_1(X_0, X_1) \cos [\omega t + \phi_1(X_0, X_1)] + \\ + Y_2(X_0, X_1) \cos [2 \omega t + \phi_2(X_0, X_1)] + \dots \quad (3.4)$$

Esta expansão permite [3] definir o ganho complexo equivalente como sendo

$$N(X_0, X_1) = \frac{Y_1(X_0, X_1)}{X_1} \exp [j \phi_1(X_0, X_1)] \quad (3.5)$$

O bloco linear tem como entrada  $y(t)$  e como saída  $x(t)$ .

Tomando apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento em Série de Fourier da entrada  $y(t)$ , a equação diferencial que descreve o sistema será

$$D(p) \{X_0 + X_1 \cos \omega t\} + \\ + M(p) \left\{ Y_0(X_0, X_1) + Y_1(X_0, X_1) \cos [\omega t + \phi_1(X_0, X_1)] \right\} = 0 \quad (3.6)$$

Usando notação complexa em (3.6)

$$D(p) \left\{ X_0 + X_1 \exp [j\omega t] \right\} + \\ + M(p) \left\{ Y_0(X_0, X_1) + Y_1(X_0, X_1) \exp [j\omega t + j\phi_1(X_0, X_1)] \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Separando a equação (3.7) nas componentes contínua e fundamental vem

$$\begin{aligned}
 D(p) \{X_0\} + M(p) \{Y_0(X_0, X_1)\} &= 0 \\
 D(p) \{X_1 \exp [j\omega t]\} + & \\
 + M(p) \{Y_1(X_0, X_1) \exp [j\omega t + j\phi_1(X_0, X_1)]\} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Da definição do ganho complexo equivalente (3.5)

$$Y_1(X_0, X_1) = X_1 N(X_0, X_1) \exp [-j\phi_1(X_0, X_1)]
 \tag{3.9}$$

Portanto o sistema (3.8) fica

$$\begin{aligned}
 D(p) \{X_0\} + M(p) \{Y_0(X_0, X_1)\} &= 0 \\
 D(p) \{X_1 \exp [j\omega t]\} + M(p) \{X_1 N(X_0, X_1) \exp [j\omega t]\} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Veja-se agora as condições para existência de ~~uma auto-oscilação~~; deve-se ter nível contínuo constante, amplitude de oscilação constante e diferente de zero e frequência de oscilação constante e diferente de zero, ou seja

$$\left.
 \begin{aligned}
 X_0(t) &= X_{00} = \text{constante} \\
 X_1(t) &= X_{10} = \text{constante} \neq 0 \\
 \omega &= \omega_0 = \text{constante} \neq 0
 \end{aligned}
 \right\}
 \tag{3.11}$$

Entrando com os valores (3.11) no sistema de equações (3.10) tira-se a condição de existência de uma auto-oscilação:

$$\left. \begin{aligned} D(p) \{X_{00}\} + M(p) \{Y_0(X_{00}, X_{10})\} &= 0 \\ D(p) \{X_{10} \exp[j\omega_0 t]\} + M(p) \{X_{10} N(X_{00}, X_{10}) \exp[j\omega_0 t]\} &= 0 \end{aligned} \right\} (3.12)$$

Realizando as operações indicadas no sistema de equações (3.12)

$$D(p) \{X_{00}\} = (a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) \{X_{00}\} = a_0 X_{00} \quad (3.13)$$

$Y_0(X_{00}, X_{10})$ ,  $Y_1(X_{00}, X_{10})$  e  $\phi_1(X_{00}, X_{10})$  dados por (3.4), com

$X_{00}$  e  $X_{10}$  constantes, serão por sua vez constantes: logo

$N(X_{00}, X_{10})$  dado por (3.5) será também constante. Então:

$$\begin{aligned} M(p) \{Y_0(X_{00}, X_{10})\} &= (b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) \{Y_0(X_{00}, X_{10})\} = \\ &= b_0 Y_0(X_{00}, X_{10}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$D(p) \{X_{10} \exp[j\omega_0 t]\} = X_{10} D(p) \{\exp[j\omega_0 t]\} \quad (3.15)$$

$$M(p) \{X_{10} N(X_{00}, X_{10}) \exp[j\omega_0 t]\} = X_{10} N(X_{00}, X_{10}) M(p) \{\exp[j\omega_0 t]\} \quad (3.16)$$

Entretanto, seja  $L(p)$  um polinômio qualquer em relação ao operador  $p = \frac{d}{dt}$ , e  $\lambda$  um número complexo qualquer. Então, vem [9]:

$$L(p)\exp[\lambda t] = \exp[\lambda t] \cdot L(\lambda)$$

Aplicando esta propriedade às equações (3.15) e (3.16).

$$D(p) \{X_{10} \exp[j\omega_0 t]\} = X_{10} \exp[j\omega_0 t] \cdot D(j\omega_0) \quad (3.17)$$

$$M(p) \{X_{10} N(X_{00}, X_{10}) \exp[j\omega_0 t]\} = X_{10} N(X_{00}, X_{10}) \cdot \exp[j\omega_0 t] M(j\omega_0) \quad (3.18)$$

Substituindo (3.13), (3.14), (3.17) e (3.18) no sistema de equações (3.12) vem:

$$a_0 X_{00} + b_0 Y_0(X_{00}, X_{10}) = 0$$

$$X_{10} \exp[j\omega_0 t] \{D(j\omega_0) + N(X_{00}, X_{10}) M(j\omega_0)\} = 0 \quad \text{ou}$$

$$D(j\omega_0) + N(X_{00}, X_{10}) M(j\omega_0) = 0 \quad \text{ou ainda}$$

$$1 + N(X_{00}, X_{10}) G(j\omega_0) = 0$$

Portanto:

$$\left. \begin{aligned} a_0 X_{00} + b_0 Y_0(X_{00}, X_{10}) &= 0 \\ 1 + N(X_{00}, X_{10}) G(j\omega_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

é a condição de existência de uma auto-oscilação [10].

### 3.2 - ESTABILIDADE DE UMA AUTO-OSCILAÇÃO

No capítulo anterior determinou-se a condição para a existência de auto-oscilação da forma

$$x(t) = X_{00} + X_{10} \exp[j\omega_0 t] \quad (3.20)$$

Assumindo a sua existência, estuda-se agora a estabilidade orbital local desta auto-oscilação dando uma perturbação no nível contínuo, na amplitude e no argumento da exponencial:

$$x_p(t) = X_{00} + \Delta X_0 + (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j(\omega_0 t + \theta)] \quad (3.21)$$

com  $\Delta X_0$ ,  $\Delta X_1$  e  $\dot{\theta}$ , funções do tempo, ~~suficientemente pequenos.~~

O sistema de equações (3.8) será então:

$$D(p) \{X_{00} + \Delta X_0\} + M(p) \{Y_0(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1)\} = 0$$

$$D(p) \{(X_{10} + \Delta X_1) \exp[j(\omega_0 t + \theta)]\} + M(p) \{(X_{10} + \Delta X_1) \exp[j(\omega_0 t + \theta)]\} = 0 \quad (3.22)$$

$$\cdot N(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1) \exp[j(\omega_0 t + \theta)] = 0$$

A seguir aplicam-se os operadores  $D(p)$  e  $M(p)$  da maneira especificada em (3.22), desprezando nos resultados obtidos as derivadas de ordem superior a primeira e os termos de grau superior a um nos acréscimos  $\Delta X_0$ ,  $\Delta X_1$  e  $\dot{\theta}$

Na aplicação dos operadores usa-se  $Y_0(X_0, X_1)$  e  $N(X_0, X_1)$  linearizados em torno do ponto de operação  $(X_{00}, X_{10})$

$$\begin{aligned}
 Y_0(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1) &\cong Y_0(X_{00}, X_{10}) + \\
 + \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \Big|_0 \Delta X_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 &\quad (3.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1) &\cong N(X_{00}, X_{10}) + \\
 + \frac{\partial N}{\partial X_0} \Big|_0 \Delta X_0 + \frac{\partial N}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 &\quad (3.24)
 \end{aligned}$$

onde o símbolo  $\Big|_0$  se refere à função calculada no ponto de operação  $(X_{00}, X_{10})$ .

Utiliza-se uma propriedade dos operadores diferenciais polinomiais demonstrada em [9]

Para um operador

$$L(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_n p^n \quad \text{com}$$

$$\alpha_i = \text{constante} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

para  $h(t)$  uma função do tempo e  $\lambda$  um número complexo qualquer

$$L(p) \{e^{\lambda t} h(t)\} = e^{\lambda t} L(p + \lambda) \{h(t)\} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
 L(p + \lambda) &= \alpha_0 + \alpha_1 (p + \lambda) + \alpha_2 (p + \lambda)^2 + \dots + \alpha_n (p + \lambda)^n = \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_n \lambda^n \\
 &+ p [\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda + \dots + \binom{i}{i-1} \alpha_i \lambda^{i-1} + \dots + \binom{n}{n-1} \alpha_n \lambda^{n-1}] \\
 &+ p^2 [\alpha_2 + 3\alpha_3 \lambda + \dots + \binom{i}{i-2} \alpha_i \lambda^{i-2} + \dots + \binom{n}{n-2} \alpha_n \lambda^{n-2}]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \dots + p^k [\alpha_k + \dots + \binom{i}{i-k} \alpha_i \lambda^{i-k} + \dots + \binom{n}{n-k} \alpha_n \lambda^{n-k}] \\
 & + \dots + p^n [\alpha_n] = \\
 = & L(\lambda) + \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} p + \frac{1}{2!} \frac{d^2 L(\lambda)}{d\lambda^2} p^2 + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k L(\lambda)}{d\lambda^k} p^k + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n L(\lambda)}{d\lambda^n} p^n
 \end{aligned}$$

Em forma compacta

$$L(p + \lambda) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \frac{d^i L(\lambda)}{d\lambda^i} p^i \quad (3.25)$$

Para a aplicação deste resultado neste desenvolvimento, de acordo com as simplificações admitidas (derivadas de ordem superior à primeira e termos de grau superior a um ~~nos acréscimos dos~~ prezíveis), tomam-se em (3.26) apenas os termos  $i = 0$  e  $i = 1$

$$L(p + \lambda) \cong L(\lambda) + \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} p \quad (3.27)$$

Esta aproximação é um dos aspectos da analogia passa faixa - passa faixa [11]. Realizando as operações indicadas em (3.22) para a primeira das equações vem

$$D(p) \{X_{00} + \Delta X_0\} + M(p) \{Y_0(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1)\} = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
 D(p) \{X_{00} + \Delta X_0\} &= a_0 X_{00} + D(p) \{\Delta X_0\} = \\
 &= a_0 X_{00} + a_0 \Delta X_0 + a_1 \Delta^* X_0 + \dots + a_n \Delta^{(n)} X_0
 \end{aligned}$$

$$D(p) \{X_{00} + \Delta X_0\} \cong a_0 X_{00} + a_0 \Delta X_0 + a_1 \Delta^* X_0 \quad (3.29)$$

Utilizando a linearização de  $Y_0(X_0, X_1)$  [(3.23)]

$$M(p) \{Y_0(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1)\} \approx b_0 Y_0(X_{00}, X_{10}) + b_0 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \right|_0 \Delta X_0 + b_0 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \right|_0 \Delta X_1 + b_1 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \right|_0 \Delta^* X_0 + b_1 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \right|_0 \Delta^* X_1 \quad (3.30)$$

Portanto a equação (3.28) se escreve:

$$a_0 X_{00} + a_0 \Delta X_0 + a_1 \Delta^* X_0 + b_0 Y_0(X_{00}, X_{10}) + b_0 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \right|_0 \Delta X_0 + b_0 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \right|_0 \Delta X_1 + b_1 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \right|_0 \Delta^* X_0 + b_1 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \right|_0 \Delta^* X_1 = 0 \quad (3.31)$$

Da condição de existência de uma auto-oscilação (3.19)

$$a_0 X_{00} + b_0 Y_0(X_{00}, X_{10}) = 0$$

A equação (3.31) se escreve então:

$$a_0 \Delta X_0 + b_0 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \right|_0 \Delta X_0 + a_1 \Delta^* X_0 + b_1 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \right|_0 \Delta^* X_0 + b_0 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \right|_0 \Delta X_1 + b_1 \left. \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \right|_0 \Delta^* X_1 = 0$$

Agrupando vem

$$\left[ a_0 + b_0 \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \Big|_0 \right] \Delta X_0 + \left[ a_1 + b_1 \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \Big|_0 \right] \Delta X_0 + b_0 \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 +$$

$$+ b_1 \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 = 0 \quad (3.32)$$

Para a segunda das equações do sistema (3.22)

$$D(p) \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\omega_0 t + j\theta] \} = D(p) \{ \exp[j\omega_0 t] (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\theta] \}$$

com  $\lambda = j\omega_0 = \text{constante}$  e  $h(t) = (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\theta]$ , aplicando a propriedade (3.25)

$$D(p) \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\omega_0 t + j\theta] \} = \exp[j\omega_0 t] D(p + j\omega_0) \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\theta] \}$$

Aplicando a aproximação (3.27)

$$D(p + \lambda) \approx D(\lambda) + \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=j\omega_0} \cdot p$$

$$D(p) \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\omega_0 t + j\theta] \} =$$

$$= \exp[j\omega_0 t] \left[ D(j\omega_0) + \frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)} \Big|_{\omega_0} \cdot p \right] \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\theta] \} =$$

$$= \exp[j\omega_0 t + j\theta] (X_{10} + \Delta X_1) D(j\omega_0) +$$

$$+ \exp[j\omega_0 t] \frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)} \Big|_{\omega_0} \cdot p \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\theta] \}$$

Mas

$$p \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp [j\theta] \} = \exp [j\theta] [\Delta^* X_1 + j\dot{\theta} (X_{10} + \Delta X_1)] =$$

$$= \exp [j\theta] [\Delta^* X_1 + jX_{10} \dot{\theta} + j \Delta X_1 \dot{\theta}]$$

Desprezando o termo  $j \Delta X_1 \dot{\theta}$  por ser de grau superior a um nos acréscimos

$$p \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp [j\theta] \} = \exp [j\theta] (\Delta^* X_1 + jX_{10} \dot{\theta})$$

portanto

$$D(p) \{ (X_{10} + \Delta X_1) \exp [j\omega_0 t + j\theta] \} = \exp [j\omega_0 t + j\theta] (X_{10} + \Delta X_1) D(j\omega_0) +$$

$$+ \exp [j\omega_0 t + j\theta] (\Delta^* X_1 + jX_{10} \dot{\theta}) \left. \frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)} \right|_{\omega_0} =$$

$$= \exp [j\omega_0 t + j\theta] \left[ (X_{10} + \Delta X_1) D(j\omega_0) + (\Delta^* X_1 + jX_{10} \dot{\theta}) \left. \frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)} \right|_{\omega_0} \right] \quad (3.33)$$

Por um procedimento análogo desenvolve-se o termo

$$M(p) \{ (X_{10} + \Delta X_1) N(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1) \exp [j\omega_0 t + j\theta] \}$$

Utilizando a propriedade (3.25), a aproximação (3.27), a linearização de  $N(X_{00} + X_0, X_{10} + X_1)$  dada por (3.24) e lembrando que

$$p \{ (X_{10} + \Delta X_1) \left[ N(X_{00}, X_{10}) + \left. \frac{\partial N}{\partial X_0} \right|_0 \Delta X_0 + \left. \frac{\partial N}{\partial X_1} \right|_0 \Delta X_1 \right] \exp [j\theta] \} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp [j\theta] \left\{ N(x_{00}, x_{10}) + \left. \frac{\partial N}{\partial x_0} \right|_0 \Delta x_0 + \left. \frac{\partial N}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 \right] \Delta^* x_1 + \\
 &\quad + (x_{10} + \Delta x_1) \left[ \left. \frac{\partial N}{\partial x_0} \right|_0 \Delta^* x_0 + \left. \frac{\partial N}{\partial x_1} \right|_0 \Delta^* x_1 \right] + \\
 &+ j\theta (x_{10} + \Delta x_1) \left[ N(x_{00}, x_{10}) + \left. \frac{\partial N}{\partial x_0} \right|_0 \Delta x_0 + \left. \frac{\partial N}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 \right] \}
 \end{aligned}$$

Eliminando os termos de grau superior a um nos acréscimos é possível escrever

$$\begin{aligned}
 p \{ (x_{10} + \Delta x_1) \left[ N(x_{00}, x_{10}) + \left. \frac{\partial N}{\partial x_0} \right|_0 \Delta x_0 + \left. \frac{\partial N}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 \right] \exp [j\theta] \} = \\
 = \exp [j\theta] \left[ N(x_{00}, x_{10}) \Delta^* x_1 + x_{10} \left. \frac{\partial N}{\partial x_0} \right|_0 \Delta^* x_0 + \right. \\
 \left. + x_{10} \left. \frac{\partial N}{\partial x_1} \right|_0 \Delta^* x_1 + j x_{10} N(x_{00}, x_{10}) \theta \right]
 \end{aligned}$$

Então, com a eliminação de termos com grau maior que um nos acréscimos

$$M(p) \{ (x_{10} + \Delta x_1) N(x_{00} + \Delta x_0, x_{10} + \Delta x_1) \exp [j\omega_0 t + j\theta] \} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp[j\omega_0 t] \left\{ (X_{10} + \Delta X_1) \left[ N(X_{00}, X_{10}) + \frac{\partial N}{\partial X_0} \Big|_0 \Delta X_0 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial N}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 \right] \exp[j\theta] M(j\omega_0) + \right. \\
 &\quad \left. + p \left[ (X_{10} + \Delta X_1) \left[ N(X_{00}, X_{10}) + \frac{\partial N}{\partial X_0} \Big|_0 \Delta X_0 + \frac{\partial N}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 \right] \exp[j\theta] \frac{dM(j\omega)}{d(j\omega)} \Big|_{\omega_0} \right] \right\} = \\
 &= \exp[j\omega_0 t + j\theta] \left\{ \left[ X_{10} N(X_{00}, X_{10}) + X_{10} \frac{\partial N}{\partial X_0} \Big|_0 \Delta X_0 + X_{10} \frac{\partial N}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N(X_{00}, X_{10}) \Delta X_1 \right] M(j\omega_0) + \left[ N(X_{00}, X_{10}) \Delta^* X_1 + X_{10} \frac{\partial N}{\partial X_0} \Big|_0 \Delta^* X_0 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + X_{10} \frac{\partial N}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta^* X_1 + j X_{10} N(X_{00}, X_{10}) \theta \right] \frac{dM(j\omega)}{d(j\omega)} \Big|_{\omega_0} \right\} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Utilizando a notação abaixo especificada, re-escreve-se os resultados (3.33) e (3.34)

$$M = M(j\omega_0) \qquad M' = \frac{dM(j\omega)}{d(j\omega)} \Big|_{\omega_0}$$

$$D = D(j\omega_0) \qquad D' = \frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)} \Big|_{\omega_0}$$

$$N = N(X_{00}, X_{10}) \qquad N'_0 = \frac{\partial N}{\partial X_0} \Big|_0 \qquad N'_1 = \frac{\partial N}{\partial X_1} \Big|_0$$

Portanto (3.33) será:

$$D(p)\{(X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\omega_0 t + j\theta]\} = \exp[j\omega_0 t + j\theta] \left[ (X_{10} + \Delta X_1) D + (\Delta \dot{X}_1 + jX_{10} \dot{\theta}) D' \right] \quad (3.35)$$

e (3.34) :

$$M(p)\{(X_{10} + \Delta X_1) N(X_{00} + \Delta X_0, X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\omega_0 t + j\theta]\} = \exp[j\omega_0 t + j\theta] \{ [X_{10} N + X_{10} N'_0 \Delta X_0 + X_{10} N'_1 \Delta X_1 + N \Delta X_1] M + [N \Delta \dot{X}_1 + X_{10} N'_0 \Delta \dot{X}_0 + X_{10} N'_1 \Delta \dot{X}_1 + jX_{10} N \dot{\theta}] M' \} \quad (3.36)$$

Somando os segundos membros de (3.35) e (3.36) e igualando o resultado a zero (segunda equação do sistema (3.22)) vem

$$\exp[j\omega_0 t + j\theta] \{ X_{10} D + D \Delta X_1 + D' \Delta \dot{X}_1 + jX_{10} D' \dot{\theta} + X_{10} N M + X_{10} N'_0 M \Delta X_0 + X_{10} N'_1 M \Delta X_1 + N M \Delta X_1 + N M' \Delta \dot{X}_1 + X_{10} N'_0 M' \Delta \dot{X}_0 + X_{10} N'_1 M' \Delta \dot{X}_1 + jX_{10} N M' \dot{\theta} \} = 0$$

lembrando que da condição de existência (3.19)

$$D + N M = 0$$

pode-se afirmar que

$$D' \Delta \dot{X}_1 + jX_{10} D' \dot{\theta} + X_{10} N'_0 M \Delta X_0 + X_{10} N'_1 M \Delta X_1 + N M' \Delta \dot{X}_1 + X_{10} N'_0 M' \Delta \dot{X}_0 + X_{10} N'_1 M' \Delta \dot{X}_1 + jX_{10} N M' \dot{\theta} = 0 \quad (3.37)$$

Agrupando convenientemente os termos de (3.37)

$$\begin{aligned}
 & X_{10} N_0' M' \Delta^* X_0 + X_{10} N_0' M \Delta X_0 + (D' + NM' + X_{10} N_1' M') \Delta^* X_1 + \\
 & + X_{10} N_1' M \Delta X_1 + X_{10} (D' + NM') j \dot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

O sistema de equações (3.22) será então como segue

$$\begin{aligned}
 & \left[ a_0 + b_0 \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \Big|_0 \right] \Delta X_0 + \left[ a_1 + b_1 \frac{\partial Y_0}{\partial X_0} \Big|_0 \right] \Delta^* X_0 + \\
 & + b_0 \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta X_1 + b_1 \frac{\partial Y_0}{\partial X_1} \Big|_0 \Delta^* X_1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
 & X_{10} N_0' M \Delta X_0 + X_{10} N_0' M' \Delta^* X_0 + X_{10} N_1' M \Delta X_1 + \\
 & + (D' + NM' + X_{10} N_1' M') \Delta^* X_1 + X_{10} (D' + NM') j \dot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

A relação (3.40) envolve duas equações quando são consideradas as partes real e imaginária. Estas duas equações permitem eliminar a variável  $\dot{\theta}$ , sendo que a relação restante, juntamente com (3.39) formam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em  $\Delta X_0$  e  $\Delta X_1$ , do tipo abaixo

$$\begin{pmatrix} \Delta^* X_0 \\ \Delta^* X_1 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta X_1 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

Em (3.41)  $W$  é uma matriz constante  $2 \times 2$ , e a condição de estabilidade local é dada por



$$\begin{aligned} \text{tr } W &< 0 \\ \text{det } W &> 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para este problema, então, se o sistema (3.41) for estável significa que a solução perturbada

$$x_p(t) = (X_{00} + \Delta X_0) + (X_{10} + \Delta X_1) \exp[j\omega_0 t + j\theta]$$

tende, quando  $t \rightarrow \infty$ , para a solução

$$x(t) = X_{00} + X_{10} \exp[j\omega_0 t]$$

ou seja, a auto-oscilação é estável.

Desta forma, a condição de estabilidade orbital local de uma auto-oscilação no sistema da figura 3.1 será

$$\begin{aligned} \text{tr } W &< 0 \\ \text{det } W &> 0 \end{aligned}$$

### 3.3 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO

Seja para o sistema da Figura 3.1

$$f(x) = x(1 - \beta x^2) \quad (3.43)$$

$$G(p) = \frac{M(p)}{D(p)} = K \frac{2\omega_1^3}{p(p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2)} \quad (3.44)$$

não haverá perda de generalidade na suposição  $\beta = 1$  e  $\omega_1 = 1$ , dado que as transformações

$$\sqrt{\beta} x \rightarrow x$$

$$\omega_1 t \rightarrow t$$

levam a isto.

Assumindo como entrada do bloco não linear

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos \omega_0 t$$

vem

$$\begin{aligned} y(t) = f(x) &= (X_0 + X_1 \cos \omega_0 t) [1 - (X_0 + X_1 \cos \omega_0 t)^2] = \\ &= (X_0 - X_0^3) + (X_1 - 3 X_0^2 X_1) \cos \omega t - 3 X_0 X_1^2 \cos^2 \omega t - X_1^3 \cos^3 \omega t \quad (3.45) \end{aligned}$$

A expansão em série de Fourier de (3.45) é imediata, pois sendo um polinômio de terceiro grau, a expansão terá até a terceira harmônica

Utilizando

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\omega t]$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} [3 \cos \omega t + \cos 3 \omega t]$$

substituindo em (3.45) e agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned} y(t) &= (X_0 - X_0^3 - \frac{3}{2} X_0 X_1^2) + (X_1 - 3 X_0^2 X_1 - \frac{3}{4} X_1^3) \cos \omega t \\ &\quad - \frac{3}{2} X_0 X_1^2 \cos 2 \omega t - \frac{1}{4} X_1^3 \cos 3 \omega t \quad (3.46) \end{aligned}$$

Segundo a nomenclatura adotada no desenvolvimento teórico, equações (3.4) e (3.5);

$$Y_0(X_0, X_1) = X_0 \left( 1 - X_0^2 - \frac{3}{2} X_1^2 \right) \quad (3.47)$$

$$Y_1(X_0, X_1) = X_1 \left( 1 - 3X_0^2 - \frac{3}{4} X_1^2 \right) \quad (3.48)$$

A não linearidade estudada, como é visto em (3.46) não introduz defasagem nas harmônicas, em particular na primeira, portanto

$$\phi_1(X_0, X_1) = 0$$

Logo

$$N(X_0, X_1) = \frac{Y_1(X_0, X_1)}{X_1} e^{j\phi_1(X_0, X_1)} = \left( 1 - 3X_0^2 - \frac{3}{4} X_1^2 \right) \quad (3.49)$$

Serão determinadas as auto-oscilações possíveis, pelas condições de existência (3.19).

Para o sistema particular estudado:

$$M(p) = 2 K \omega_1^3 = 2 K \quad (3.50)$$

$$D(p) = p^3 + 2\xi\omega_1 p^2 + \omega_1^2 p = p^3 + 2\xi p^2 + p \quad (3.51)$$

Donde

$$a_0 = 0$$

$$b_0 = 2K$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2\xi$$

$$a_3 = 1$$

$$G(p) = \frac{M(p)}{D(p)}$$

Então:

$$G(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{2K}{-j\omega^3 - 2\xi\omega^2 + j\omega} = \frac{2K}{-2\xi\omega^2 - j\omega(\omega^2 - 1)} \quad (3.52)$$

A primeira das equações (3.19) será

$$2K [X_{00}(1 - X_{00}^2 - \frac{3}{2} X_{10}^2)] = 0$$

ou ainda, como  $K \neq 0$

$$X_{00}(1 - X_{00}^2 - \frac{3}{2} X_{10}^2) = 0 \quad (3.53)$$

com  $X_{00}$  sendo o nível contínuo da oscilação e  $X_{10}$  a amplitude

A segunda das equações (3.19) fornece

$$\begin{aligned} 1 + (1 - 3X_{00}^2 - \frac{3}{4} X_{10}^2)G(j\omega_0) &= \\ = 1 + (1 - 3X_{00}^2 - \frac{3}{4} X_{10}^2) \left[ \frac{2K}{-2\xi\omega_0^2 - j\omega_0(\omega_0^2 - 1)} \right] &= 0 \quad (3.54) \end{aligned}$$

com  $\omega_0$  sendo a frequência fundamental da auto-oscilação.

A equação (3.54) só é satisfeita para valores reais de  $G(j\omega_0)$  consequentemente,

$$I_m [G(j\omega_0)] = 0$$

o que é equivalente a :

$$\omega_0(\omega_0^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

Evidentemente, o valor de  $\omega_0$  que interessa é

$$\omega_0 = 1$$

Então,

$$G(j\omega_0) = G(j.1) = G_1 = \frac{-K}{\xi}$$

E a equação (54) será

$$1 + (1 - 3X_{00}^2 - \frac{3}{4} X_{10}^2)G_1 = 0 \tag{3.55}$$

É possível com as equações (3.53) e (3.55) determinar as auto-oscilações do sistema. Para maior clareza, reescrevem-se estas equações

$$X_{00}(1 - X_{00}^2 - \frac{3}{2} X_{10}^2) = 0$$

$$1 + (1 - 3X_{00}^2 - \frac{3}{4} X_{10}^2)G_1 = 0$$

Estas equações são satisfeitas para

$$\left. \begin{aligned} X_{00} &= 0 \\ X_{10} &= 2\sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{G_1}\right)} \end{aligned} \right\} \tag{3.56}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{00} &= \pm\sqrt{\frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{G_1}\right)} \\ X_{10} &= \sqrt{\frac{4}{15} \left(2 - \frac{1}{G_1}\right)} \end{aligned} \right\} \tag{3.57}$$

Os valores em (3.56) correspondem a oscilações com nível contínuo nulo (simétricas) que serão denominadas oscilações do tipo  $P_1$ .

Os valores em (3.57) correspondem a oscilações com nível contínuo não nulo (assimétricas) que serão denominadas oscilações do tipo  $P_2$  e  $P_3$ .

As oscilações do tipo  $P_1$  poderão existir, segundo (3.56), para valores de  $G_1$  que tornem a expressão sob o radical positiva, ou seja:

$$G_1 > 0$$

ou

$$-1 > G_1$$

As auto-oscilações dos tipos  $P_2$  e  $P_3$  podem ocorrer para as seguintes faixas de valores de  $G_1$ :

$$G_1 > 0,5$$
$$-2 > G_1$$

De uma maneira geral

$G_1 < -2$	tipos $P_1, P_2$ e $P_3$
$-2 < G_1 < -1$	tipo $P_1$
$-1 < G_1 < 0$	não haverá auto-oscilação
$0 < G_1 < 0,5$	tipo $P_1$
$0,5 < G_1$	tipos $P_1, P_2$ e $P_3$

Aplica-se agora o critério de estabilidade de auto-oscilações desenvolvido no trabalho [relações (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42)].

Para tanto, necessita-se dos seguintes valores

$$\frac{\partial Y_0}{\partial X_0} = 1 - 3X_0^2 - \frac{3}{2} X_1^2$$

$$\frac{\partial Y_0}{\partial X_1} = -3X_0 X_1$$

$$N(X_0, X_1) = 1 - 3X_0^2 - \frac{3}{4} X_1^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_0} = -6X_0$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_1} = -\frac{3}{2} X_1$$

$$M(j\omega) = 2K$$

$$\frac{dM(j\omega)}{d(j\omega)} = 0$$

$$D(j\omega) = -2\xi\omega^2 - j(\omega^3 - \omega)$$

$$\frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)} = (1 - 3\omega^2) + j 4\xi\omega$$

$$\text{Para } \omega = \omega_0 = 1$$

$$M = 2K,$$

$$M' = 0$$

$$D = -2\xi$$

$$D' = -2 + j.4\xi$$

Aplicando em (3.39) e (3.40) vem

$$2K(1 - 3X_{00}^2 - \frac{3}{2}X_{10}^2)\Delta X_0 + \Delta^* X_0 - 6KX_{00}X_{10}\Delta X_1 = 0 \quad (3.58)$$

$$-12KX_{00}X_{10}\Delta X_0 - 3KX_{10}^2\Delta X_1 + (-2 + j4\xi)\Delta^* X_1 + X_{10}(-2 + j4\xi)j\dot{\theta} = 0 \quad (3.59)$$

Separando (3.59) em parte real e parte imaginária

$$-12K X_{00}X_{10}\Delta X_0 - 3K X_{10}^2 \Delta X_1 - 2 \Delta^* X_1 - 4 X_{10}\xi\dot{\theta} = 0 \quad (3.60)$$

$$4\xi\Delta^* X_1 - 2X_{10}\dot{\theta} = 0 \quad + \quad X_{10}\dot{\theta} = 2\xi\Delta^* X_1$$

Substituindo  $X_{10}\dot{\theta}$  em (3.60) vem

$$12KX_{00}X_{10}\Delta X_0 + 3KX_{10}^2\Delta X_1 + 2(1 + 4\xi^2)\Delta^* X_1 = 0 \quad (3.61)$$

Das relações (3.58) e (3.61) pode-se ~~escrever imediatamente~~ escrever o sistema de equações diferenciais da forma (3.41) como segue:

$$\begin{pmatrix} \Delta^* X_0 \\ \Delta^* X_1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 6X_{00}^2 + 3X_{10}^2 - 2 & 6X_{00}X_{10} \\ -\frac{6X_{00}X_{10}}{1 + 4\xi^2} & -\frac{\frac{3}{2}X_{10}^2}{1 + 4\xi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta X_1 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Portanto

$$W = K \begin{pmatrix} 6X_{00}^2 + 3X_{10}^2 - 2 & 6X_{00}X_{10} \\ -\frac{6X_{00}X_{10}}{1 + 4\xi^2} & -\frac{\frac{3}{2}X_{10}^2}{1 + 4\xi^2} \end{pmatrix}$$



$$T_r W = K \left[ 6X_{00}^2 + 3X_{10}^2 - 2 - \frac{\frac{3}{2} X_{10}^2}{1 + 4\xi^2} \right] =$$

$$= \frac{K}{1 + 4\xi^2} \left[ (1 + 4\xi^2)(6X_{00}^2 + 3X_{10}^2 - 2) - \frac{3}{2} X_{10}^2 \right] \quad (3.63)$$

$$\det W = \frac{K^2}{1 + 4\xi^2} \left[ (6X_{00}^2 + 3X_{10}^2 - 2) \left( -\frac{3}{2} X_{10}^2 \right) + 36X_{00}^2 X_{10}^2 \right] \quad (3.64)$$

A condição de estabilidade orbital local de uma auto-oscilação é dada por

$$T_r W < 0$$

$$\det W > 0$$

as quais aplicadas em (3.63) e (3.64), tendo em vista que

$$(1 + 4\xi^2) > 0$$

fornecem:

$$K \left[ (1 + 4\xi^2)(6X_{00}^2 + 3X_{10}^2 - 2) - \frac{3}{2} X_{10}^2 \right] < 0 \quad (3.65)$$

$$1 + 9X_{00} - \frac{3}{2} X_{10} > 0 \quad (3.66)$$

Determina-se agora, num plano de parâmetros  $(\xi, K)$  as regiões de estabilidade e instabilidade dos diversos tipos de auto-oscilações ( $P_1$ ,  $P_2$ , e  $P_3$ ), aplicando as condições (3.65) e (3.66)

Estabilidade de oscilações do tipo  $P_1$

De (3.56)

$$X_{00} = 0$$

$$X_{10} = 2\sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{G_1}\right)}$$

Como foi visto anteriormente, a existência de  $P_1$  é possível para

$$G_1 > 0$$

ou  $G_1 < -1$  onde  $G_1 = -\frac{K}{\xi}$

A condição (3.66) fornece:

$$1 - 2\left(1 + \frac{1}{G_1}\right) > 0$$

$$\frac{-2}{G_1} > 1$$

Se  $G_1 > 0 \rightarrow G_1 < -2$  (impossível)

Se  $G_1 < 0 \rightarrow G_1 > -2 \rightarrow -2 < G_1 < 0$

Então  $-2 < \frac{-K}{\xi} < 0$  ou  $2 > \frac{K}{\xi} > 0$

Para  $\xi > 0 \quad 0 < K < 2\xi$   
 $\xi < 0 \quad 0 > K > 2\xi$  (3.67)

A condição (3.65):

$$K \left[ \left(1 + 4\xi^2\right) \left(4 + \frac{4}{G_1} - 2\right) - 2 - \frac{2}{G_1} \right] < 0$$

$$\frac{K}{G_1} [2 + 16\xi^2 + 8\xi^2 G_1] < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi > 0 \quad \rightarrow \quad K < 2\xi + \frac{1}{4\xi} \\ \xi < 0 \quad \rightarrow \quad K < 2\xi + \frac{1}{4\xi} \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

Estabilidade de oscilações dos tipos  $P_2$  e  $P_3$

De (3.57)

$$X_{00} = \pm \sqrt{\frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{G_1}\right)}$$

$$X_{10} = \sqrt{\frac{4}{15} \left(2 - \frac{1}{G_1}\right)}$$

Como foi visto anteriormente, é possível a existência de  $P_2$  e  $P_3$  para

$$G_1 < -2$$

ou  $G_1 > \frac{1}{2}$

A condição (66) fornece:

$$1 + \frac{9}{15} + \frac{18}{5G_1} - \frac{4}{5} + \frac{2}{5G_1} > 0$$

$$1 + \frac{2}{G_1} > 0$$

Se  $G_1 > 0 \rightarrow G_1 > -2$  (sempre verdade)

Se  $G_1 < 0 \rightarrow G_1 > -2$  (coincide com a condição de existência).

Isto significa que a condição (3.66) não impõe restrição alguma além da condição de existência

A condição (3.65):

$$K \left[ (1 + 4\xi^2) \left( \frac{6}{5} + \frac{12}{5G_1} + \frac{8}{5} - \frac{4}{5G_1} - 2 \right) - \frac{4}{5} + \frac{2}{5G_1} \right] < 0$$

$$\frac{K}{G_1} [5 + 16\xi^2 + 8\xi^2 G_1] < 0$$

$$K < 2\xi + \frac{5}{8\xi}, \text{ para qualquer } \xi \quad (3.69)$$

Das condições obtidas para a estabilidade das auto-oscilações {(3.67) ... (3.69)} e das condições de existência, obtém-se a configuração mostrada no plano de parâmetros  $(\xi, K)$  da Figura 3.2

O sobrescrito  $+$  indica oscilação estável e o  $-$  oscilação instável. A expressão da curva  $h(\xi)$  é:

$$h(\xi) = 2\xi + \frac{5}{8\xi}$$

O estudo do mesmo sistema pelo método clássico da primeira harmônica fornece os comportamentos descritos no plano de parâmetros  $(\xi, K)$  da Figura 3.3.



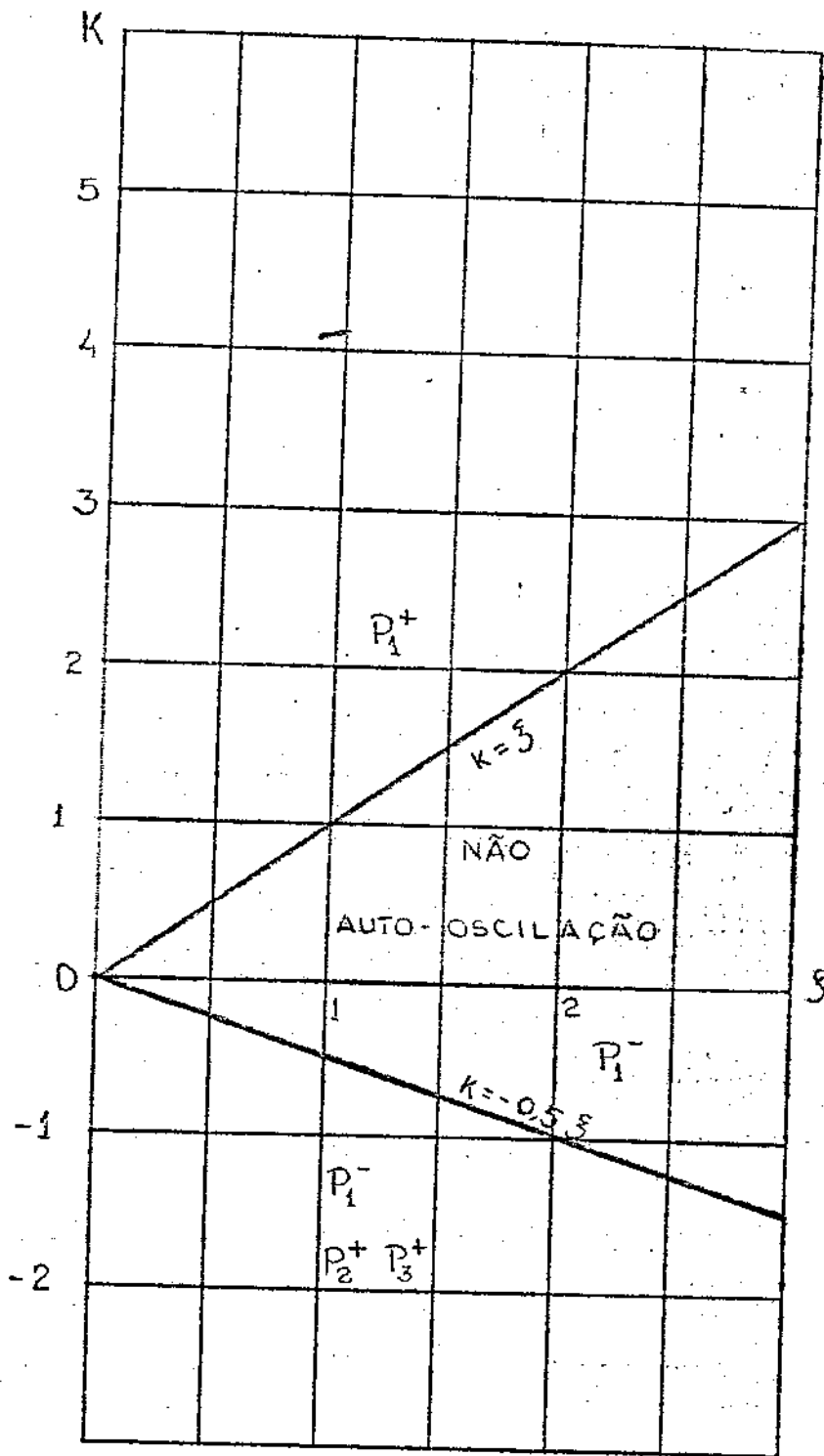


Figura 3.3- Plano de parâmetros  $(\xi, K)$  com o critério clássico do método da primeira harmônica.

### 3.4 - SIMULAÇÃO ANALÓGICA

Com o objetivo de comparação dos resultados obtidos pela aplicação do método proposto com o comportamento real do sistema que serviu de exemplo, foi efetuada uma simulação do mesmo no computador analógico EAI-680 da UNICAMP.

Para tanto, realizou-se a montagem esquematizada na Figura 3.4

Os resultados verificados para o sistema são mostrados no plano de parâmetros  $(\xi, K)$  da Figura 3.5, em confronto com os resultados previstos pelo método proposto.

Para valores de K positivos os comportamentos qualitativos previstos foram observados. O erro quantitativo verificado em  $h(\xi)$  é maior para valores pequenos de  $\xi$ . Na figura 3.5 são apresentados gráficos de  $x(t)$  vs.  $t$  para  $\xi = 1,5$  e alguns valores de K. No exemplo apresentado o período previsto da oscilação é  $T = 6,2$  seg, correspondente a  $\omega_0 = \omega_1 = 1$  rad/seg. Pode-se notar claramente o desvio de frequência, porém as ondas registradas não evidenciam a existência de um nível contínuo. Para mostrá-lo, o sinal  $x(t)$  foi processado em um filtro com função de transferência

$$F(j\omega) = 40 \frac{0,005}{j\omega + 0,005}$$

Os resultados obtidos foram registrados na Figura 3.7.

Para valores de K negativos, verificaram-se erros de comportamento qualitativo. Estes erros podem ser explicados pelo aparecimento de uma forte componente de terceira harmônica no sinal  $x(t)$ , sendo que esta não havia sido prevista na suposição inicial para o desenvolvimento do critério:

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos \omega t$$

O aparecimento da terceira harmônica ocorre conjuntamente com a eliminação do nível contínuo e com um grande desvio negativo

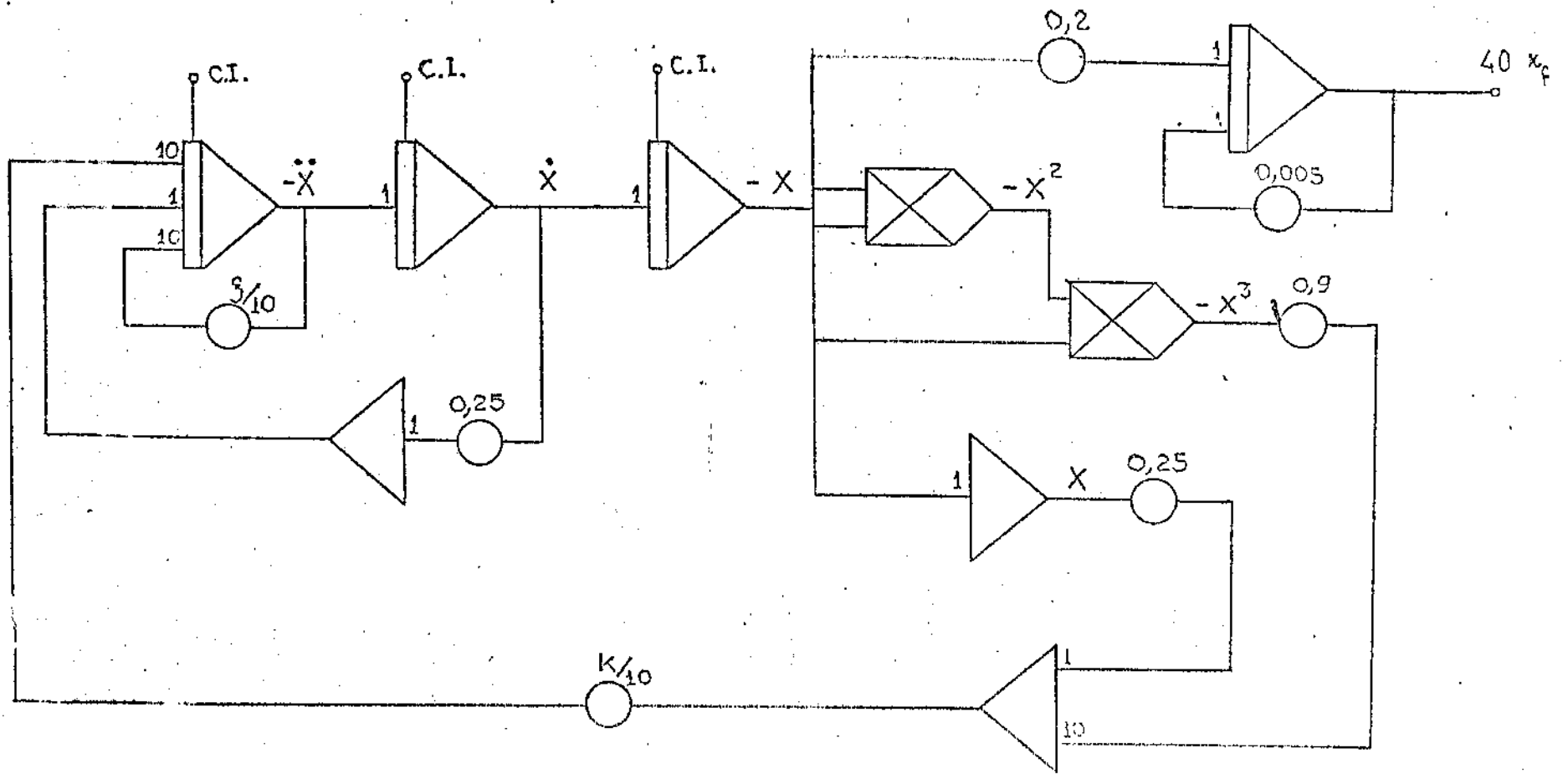


Figura 3.4- Diagrama de simulação analógica.



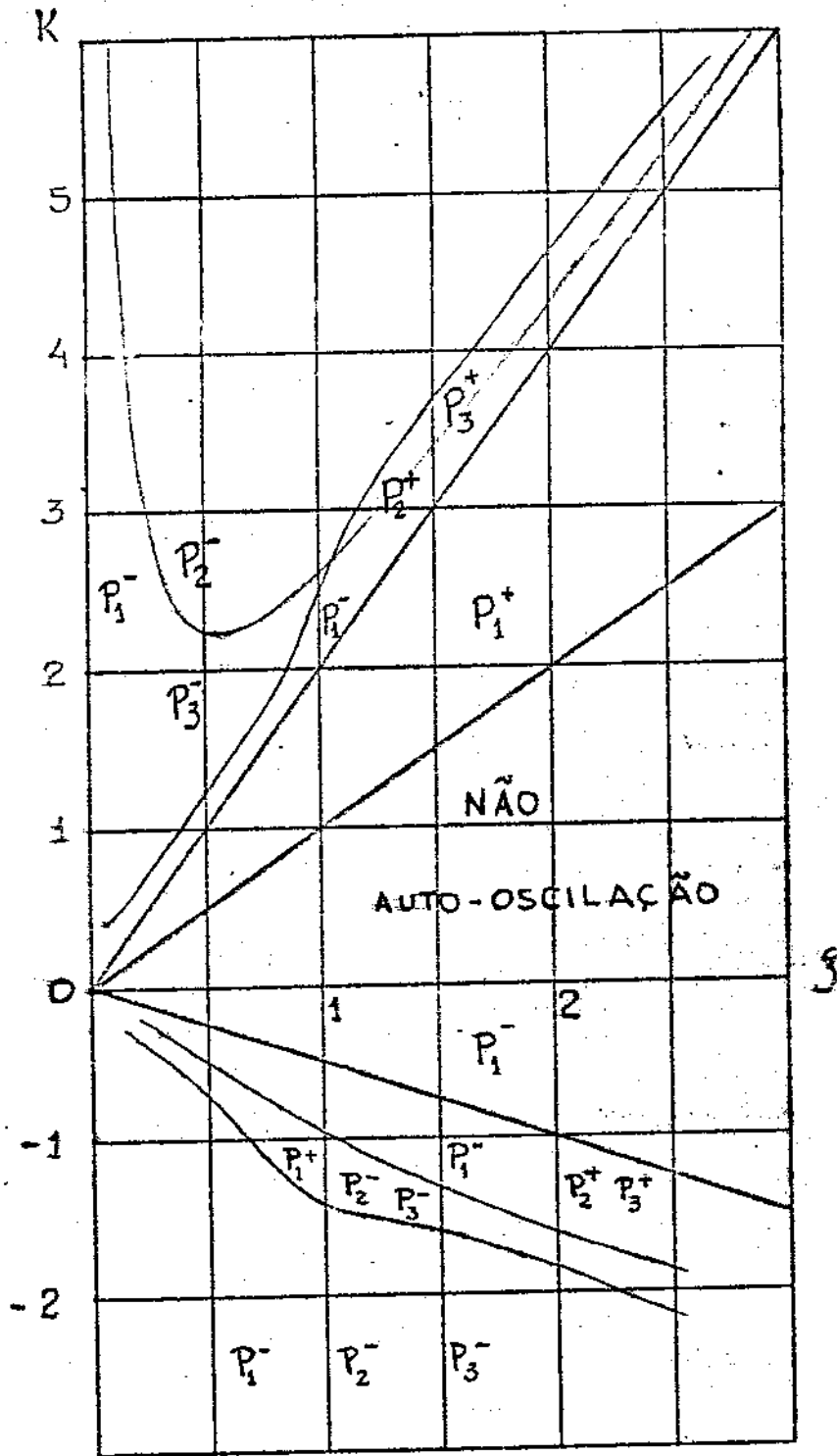
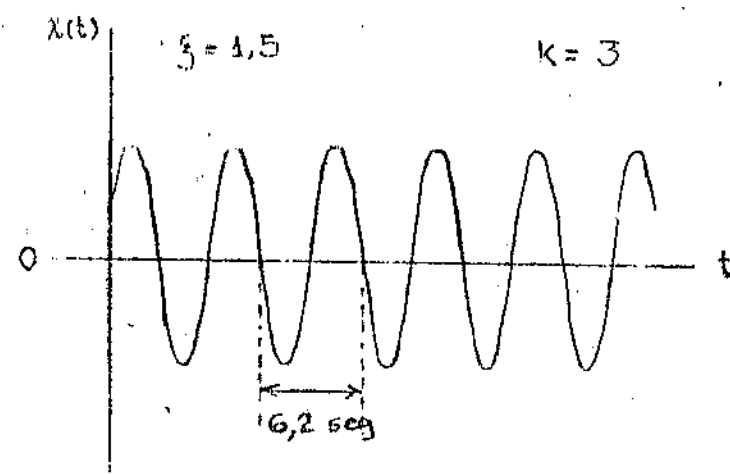
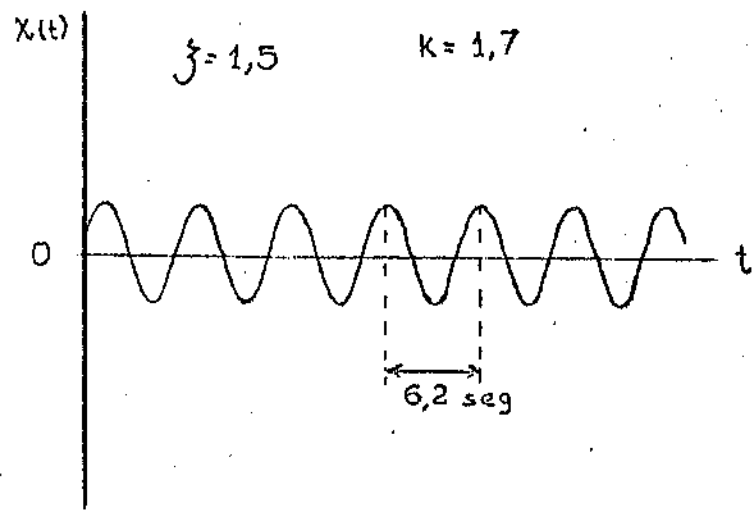


Figura 3.5- Plano de parâmetros  $(\epsilon, K)$  com os resultados da simulação.



ESCALAS

$x(t) : 0,6/cm$

$t : 5,0 \text{ seg}/cm$

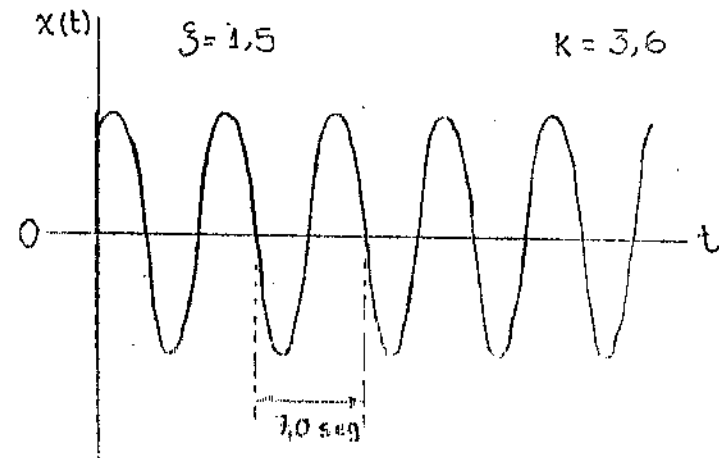
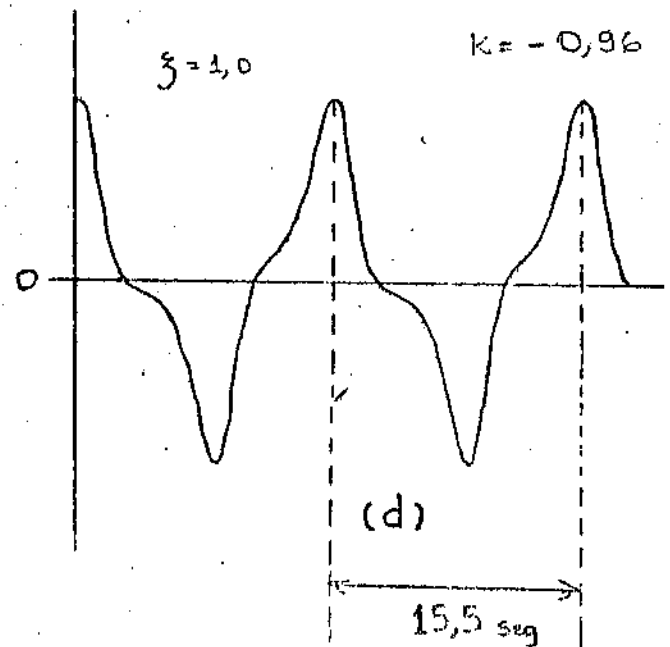
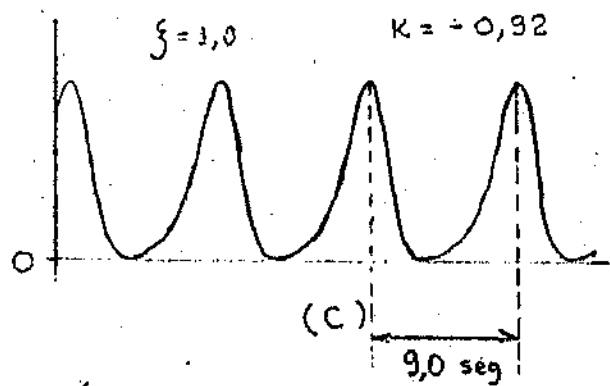
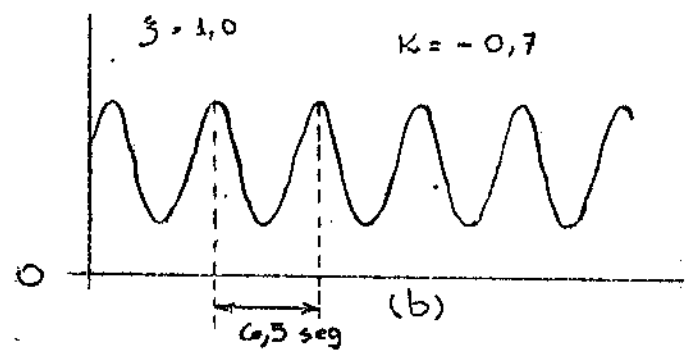
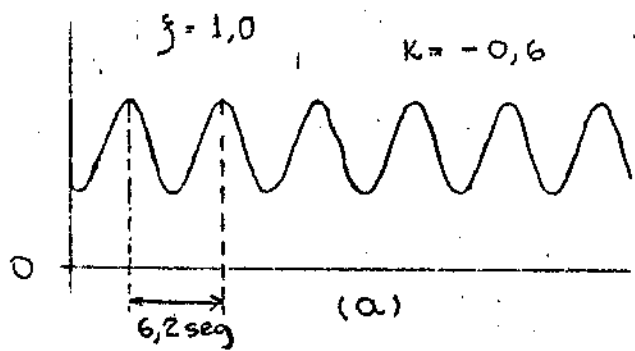


Figura 3.6 - Saídas do sistema simulado para alguns valores dos parâmetros.

da frequência da oscilação, o que piora as condições de filtragem de harmônicas no sistema, reforçando a hipótese apresentada para a não validade do método.

Na figura 3.8 é mostrado o sinal  $x(t)$  para  $\xi = 1,0$  e diversos valores negativos de  $K$ . Note-se em (a), (b) e (c) a presença de nível contínuo e em (d) a existência de terceira harmônica.



ESCALAS:

$x(t)$ : 0,6/cm

$t$ : 5,0 seg/cm

Figura 3.8- Saídas do sistema simulado para alguns valores dos parâmetros.

## CAPÍTULO 4

### PARTICULARIZAÇÃO DO MÉTODO PARA NÍVEL CONTÍNUO NULO

#### COMPARAÇÃO COM O CRITÉRIO DE LÖEB

De posse do critério de estabilidade de auto-oscilações assimétricas descrito no Capítulo 3, toma-se o caso particular em que o nível contínuo é nulo. Para efeito de comparação, este caso será desenvolvido de maneira a tomar uma forma semelhante à do critério de Löeb.

#### 4.1 - CRITÉRIO DE LÖEB

Consideram-se, neste capítulo, sistemas que assumam a forma explicitada na Figura 3.1. Neste caso, o critério de Löeb será simplesmente a verificação do sinal do produto vetorial.

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \wedge \frac{dC(x_1)}{dx_1}$$

com as derivadas calculadas nos pontos onde  $G(j\omega) = C(x_1)$ .

Entretanto, tomando o quociente entre os números complexos

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \text{ e } \frac{dC(x_1)}{dx_1}, \text{ vem}$$

$$\frac{\left[ \frac{dG(j\omega)}{d\omega} \right]}{\left[ \frac{dC(x_1)}{dx_1} \right]} = \rho e^{-j\alpha}$$

onde  $\rho$  é um número real não negativo e  $\alpha$  um número real.

Agora, o critério de Lëeb será expresso em termos do ângulo  $\alpha$ , ou seja

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < \pi &\rightarrow \text{auto-oscilação estável} \\ \pi < \alpha < 2\pi &\rightarrow \text{auto-oscilação instável} \end{aligned} \quad (4.1)$$

#### 4.2 - CRITÉRIO DE ESTABILIDADE PARA NÍVEL CONTÍNUO NULO

Para o sistema mostrado na Figura 3.1, considerando auto-oscilações com nível contínuo nulo, a equação (3.40) fornece imediatamente :

$$(D' + NM' + X_{10} N_1' M') \Delta \dot{X}_1 + X_{10} N_1' M \Delta X_1 + X_{10} (D' + NM') j \hat{\theta} = 0 \quad (4.2)$$

Da condição de existência de auto-oscilação

$$N = -\frac{D}{M}$$

substituindo em (4.2)

$$(D' - \frac{D}{M} M' + N_1' M' X_{10}) \Delta \dot{X}_1 + X_{10} N_1' M \Delta X_1 + X_{10} (D' - \frac{D}{M} M') j \hat{\theta} = 0 \quad (4.3)$$

fazendo  $G' = \frac{d G(j\omega)}{d(j\omega)}$ , dividindo a equação (4.3)

por D e lembrando que

$$\frac{G'}{G} = \frac{M'}{M} - \frac{D'}{D}$$

vem

$$\left(-\frac{G'}{G} + N_1' \frac{M'}{D} X_{10}\right) \Delta \dot{X}_1 + X_{10} N_1' G \Delta X_1 + X_{10} \frac{G'}{G} j\dot{\theta} = 0 \quad (4.4)$$

usando

$$C' = \frac{dC(X_1)}{dX_1}, \text{ como } C = \frac{-1}{N}, \quad C' = \frac{N_1'}{N^2}$$

então (4.4) fica

$$X_{10} C' N^2 \left(\frac{M}{D} \frac{M'}{M} \Delta \dot{X}_1 + G \Delta X_1\right) = \frac{G'}{G} (\Delta \dot{X}_1 + X_{10} j\dot{\theta})$$

ou ainda, como  $NG = -1$

$$X_{10} \left(\frac{M'}{M} \Delta \dot{X}_1 + \Delta X_1\right) = \frac{G'}{C'} (\Delta \dot{X}_1 + X_{10} j\dot{\theta}) \quad (4.5)$$

mas

$$p e^{-j\alpha} = \frac{\frac{dG(j\omega)}{d\omega}}{\frac{dC(X_1)}{dX_1}} = \frac{-jG'}{C'}$$

substituindo em (4.5) vem

$$X_{10} \left(\frac{M'}{M} \Delta \dot{X}_1 + \Delta X_1\right) = p e^{-j\alpha} (X_{10} j\dot{\theta} - j\Delta \dot{X}_1) \quad (4.6)$$

Fazendo

$$\frac{M'}{M} = \mu e^{j\beta}$$

onde  $\mu$  é um número real não negativo e  $\beta$  um número real, e substituindo em (4.6)

$$X_{10}(\mu e^{j\beta} \Delta^* X_1 + \Delta X_1) = \rho e^{-j\alpha} (X_{10} \dot{\theta} - j \Delta^* X_1) \quad (4.7)$$

Pode-se considerar em (4.7) as partes real e imaginária, o que permitirá eliminar a variável  $\dot{\theta}$ .

a) Parte Imaginária

$$X_{10} \mu \operatorname{sen} \beta \Delta^* X_1 = -\rho X_{10} \dot{\theta} \operatorname{sen} \alpha - \rho \Delta^* X_1 \operatorname{cos} \alpha$$

ou

$$\rho X_{10} \dot{\theta} \operatorname{sen} \alpha = -(\mu X_{10} \operatorname{sen} \beta + \rho \operatorname{cos} \alpha) \Delta^* X_1 \quad (4.8)$$

Não serão considerados os casos

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi$$

b) Parte Real

$$X_{10}(\mu \Delta^* X_1 \operatorname{cos} \beta + \Delta X_1) = \rho (X_{10} \dot{\theta} \operatorname{cos} \alpha - \Delta^* X_1 \operatorname{sen} \alpha) \quad (4.9)$$

substituindo o valor de  $\dot{\theta}$  dado em (4.8) na equação (4.9)

$$X_{10}(\mu \Delta^* X_1 \operatorname{cos} \beta + \Delta X_1) \operatorname{sen} \alpha = -(\mu X_{10} \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha + \rho) \Delta^* X_1$$

ou então



$$[\mu X_{10} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \rho] \Delta^* X_1 + [X_{10} \operatorname{sen}\alpha] \Delta X_1 = 0 \quad (4.10)$$

dado (4.10) o critério de estabilidade de auto-oscilação será

I) Oscilação estável quando

$$[\mu X_{10} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \rho] [X_{10} \operatorname{sen}\alpha] > 0 \quad (4.11)$$

II) Oscilação instável quando

$$[\mu X_{10} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \rho] [X_{10} \operatorname{sen}\alpha] < 0 \quad (4.12)$$

#### 4.3 - COMENTÁRIOS E EXEMPLO

O critério de Lðeb na forma (4.1) exige para a estabilidade de uma auto-oscilação, que

$$\operatorname{sen} \alpha > 0$$

Para o caso em que  $\mu = 0$ , ou seja, em que  $M = \text{constante}$ , o critério aqui desenvolvido (4.11) e (4.12) coincide com Lðeb.

Infelizmente, não foi possível, no atual estágio de estudos, - apresentar conclusões concretas em relação ao caso geral ( $\mu \neq 0$ ).

No entanto, será apresentado exemplo, com o intuito de familiarizar o leitor com o método apresentado.

##### Exemplo 4.1

Seja o sistema sob a forma da Figura 3.1, com a característica não linear dada por

$$f(x) = x(1 - x^2)$$

(4.13)

e

$$G(s) = \frac{1 - s}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

Para esta característica não linear

$$N(x_1) = 1 - \frac{3}{4} x_1^2$$

O diagrama de Nyquist para os casos  $\xi > 0$  e  $\xi < 0$  são mostrados nas Figuras 4.1 e 4.2

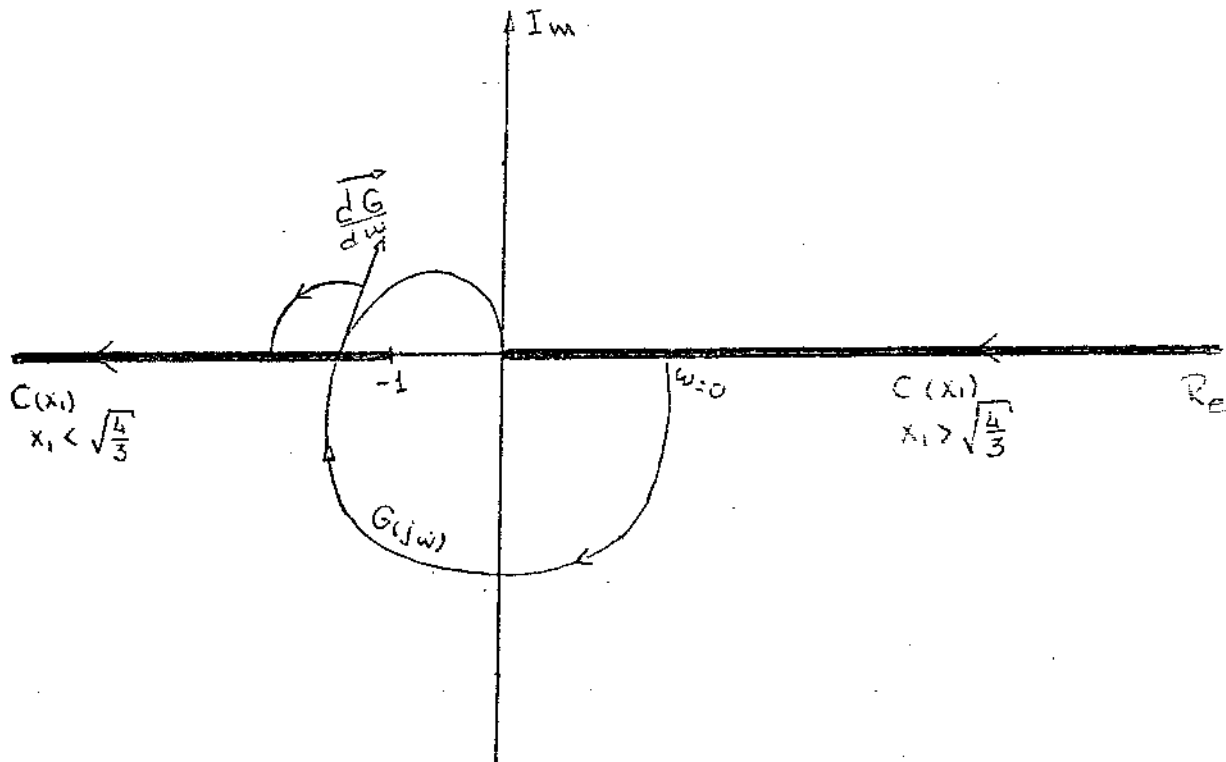


Figura 4.1 - Diagrama de Nyquist para  $G(s)$ , com  $\xi > 0$

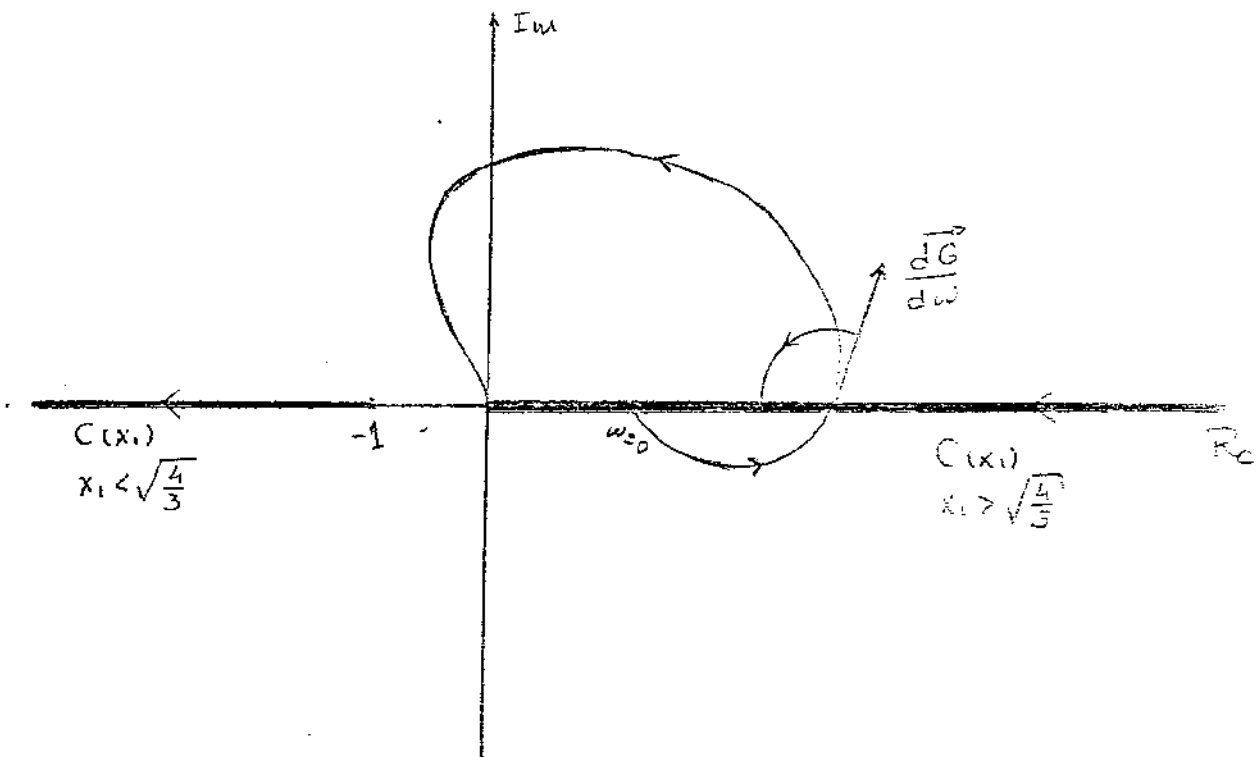


Figura 4.2 - Diagrama de Nyquist para  $G(s)$ , com  $\xi < 0$

A existência de auto-oscilação é dada por

$$G(j\omega) = \frac{-1}{N(X_1)} = C(X_1)$$

ou seja

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{(1 - \omega^2) + j 2\xi\omega} = \frac{-1}{1 - \frac{3}{4} X_1^2}$$

Esta relação fornece duas equações (partes real e imaginária), obtendo-se os valores

$$\omega_0^2 = 1 + 2\xi$$

$$X_{10}^2 = \frac{4}{3} (1 - 2\xi)$$

A condição de existência será então :

$$1 + 2\xi > 0$$

$$\frac{4}{3}(1 - 2\xi) > 0$$

ou ainda

$$-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}$$

(4.14)

Para aplicação do critério de Lőeb, calcula-se

$$\left. \frac{dG}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad \text{e} \quad \left. \frac{dC(X_1)}{dX_1} \right|_{X_{10}}, \quad \text{que são explicitadas abaixo}$$

$$\left. \frac{dG}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \frac{\omega_0 \sqrt{2}}{4\xi^2 \sqrt{\xi+1}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} + j \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} \right]$$

$$\left. \frac{dC(X_1)}{dX_1} \right|_{X_{10}} = \frac{-3}{8\xi^2} X_{10}$$

O quociente entre as duas derivadas fornecerá os dados para aplicação do critério de Lőeb

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{dG}{d\omega} \right|}{\left| \frac{dC}{dX_1} \right|} &= \rho e^{-j\alpha} = \rho(\cos\alpha - j \operatorname{sen}\alpha) = \\ &= \frac{2\sqrt{2} \omega_0}{3X_{10}\sqrt{\xi+1}} \left[ \frac{-1}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} - j \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} \right] \quad (4.15) \end{aligned}$$

Portanto

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} > 0$$

Desta forma, pelo critério de Lőeb, obedecidas as condições de existência, a auto-oscilação será sempre estável.

Para aplicação do critério desenvolvido neste capítulo e dado por (4.11) e (4.12), calcula-se

$$\left. \frac{M'(j\omega)}{M(j\omega)} \right|_{\omega_0}$$

$$M(j\omega) = 1 - j\omega$$

$$M'(j\omega) = -1$$

$$\left. \frac{M'(j\omega)}{M(j\omega)} \right|_{\omega_0} = \mu e^{j\beta} = \mu (\cos \beta + j \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} \left[ \frac{-1}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} + j \frac{-\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 1}} \right] \quad (4.16)$$

portanto, de (4.15) e (4.16)

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{-\omega_0}{\omega_0^2 + 1} + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + 1} = 0$$

Este resultado, aliado ao fato de  $\rho$  ser positivo, faz com que os dois critérios coincidam, isto é, (4.11) e (4.12) dão as mesmas condições que o critério de Lőeb.

## CAPÍTULO 5

### C O N C L U S Õ E S

O trabalho teve dois objetivos principais : estudar um novo método de análise para auto-oscilações assimétricas, e apresentar algumas técnicas conhecidas para o estudo de auto-oscilações em sistemas não lineares.

Com relação ao método aqui desenvolvido, é interessante observar que, na determinação das oscilações, ele é análogo ao método de primeira harmônica e, no estudo da estabilidade, se aproxima do método de Andronov e Vitt [3].

As idéias envolvidas são relativamente simples, ou seja, determina-se uma solução de equilíbrio da forma.

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos \omega t$$

desprezando-se, portanto, as componentes harmônicas de ordem superior à primeira, e estuda-se a estabilidade orbital local desta solução, admitindo-se uma solução perturbada.

$$x(t) = X_{00} + \Delta X_0 + (X_{10} + \Delta X_1) \cos(\omega t + \theta)$$

e analisando o comportamento dinâmico dos acréscimos.

Todas as aproximações realizadas se referem a termos de grau superior a um nos acréscimos, e as derivadas de ordem maior que a primeira.

Obtem-se desta maneira um sistema de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma.

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{X}_0 \\ \Delta \dot{X}_1 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta X_1 \end{pmatrix}$$

do qual são retiradas as condições para a estabilidade orbital local da auto-oscilação determinada;

$$\text{Tr } W < 0$$

$$\text{det } W > 0$$

Para a realização deste estudo, admite-se que ~~todas as harmôni~~cas de ordem superior à primeira, componentes da saída da não-linearidade, são suficientemente atenuadas pelo bloco linear.

Os erros observados, qualitativos e quantitativos, se prendem à simplicidade da forma de oscilação escolhida, desprezando-se harmônicas superiores que podem ter influência tanto no desvio de frequência como na fixação das fronteiras das regiões de comportamento qualitativamente diferentes. Entretanto, uma extensão no sentido de supor um conteúdo harmônico mais rico complicaria demasiadamente o trabalho matemático e comprometeria toda característica de simplicidade do método da primeira harmônica. Desta maneira, pode-se considerar o método proposto como uma extensão deste último.

Quanto ao estudo da estabilidade, ele é mais completo que a extensão clássica da primeira harmônica para nível contínuo não nulo [10], pois são consideradas variações dinâmicas no nível contínuo -

não ligadas algebricamente às variações dinâmicas do nível alternado; este detalhe permite mostrar a existência de comportamentos qualitativos não previstos pelo método clássico existente e observados na prática.

A principal fraqueza do método, no que ele se aproxima também daquele da primeira harmônica, é a necessidade, para sua aplicação, de conhecimento, a priori, do tipo de sinal que existirá na saída - (conteúdo harmônico, modos aperiódicos, etc.). Na tentativa de se contornar esta falha, são feitas exigências, um tanto quanto vagas, sobre as condições de filtragem do bloco linear.

Com relação à comparação realizada com o critério de Lööb, esta foi desenvolvida com a finalidade de se ter alguma idéia a respeito de discrepâncias entre os dois métodos, mas, infelizmente, ainda não foi possível estabelecer, de maneira geral, algum resultado.

Ainda sobre o método aqui exposto, cumpre ressaltar as dificuldades fatalmente encontradas no cálculo dos equivalentes harmônicos das características não lineares. Entretanto, já é possível encontrar na literatura uma razoável quantidade de técnicas a serem empregadas, como, por exemplo, [10], [12], [13] ou [14].

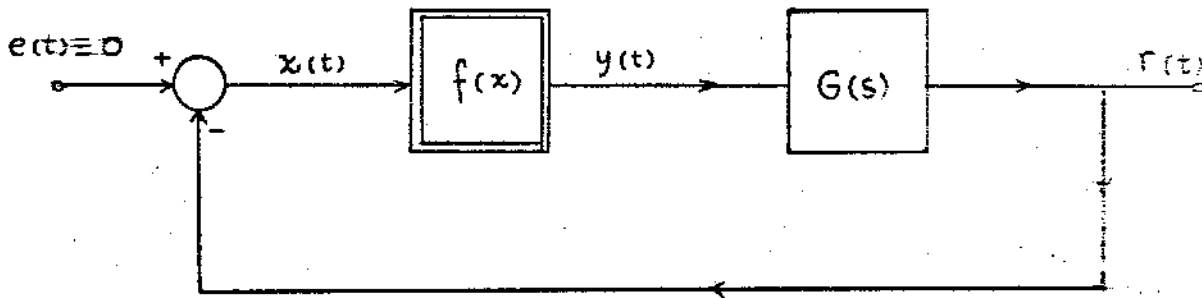
A parte inicial do trabalho foi uma exposição de técnicas conhecidas para a análise de auto-oscilações, com objetivos, principalmente, didáticos, e apresentação de alguns tópicos julgados interessantes sobre o estudo de sistemas não lineares e não comumente abordados na bibliografia disponível.



## APÊNDICE

### EXISTÊNCIA DE CICLO LIMITE PARA UM SISTEMA DE CONTROLE COM SATURAÇÃO

Para o sistema de controle do Exemplo 2.1 (CAPÍTULO 2), por clareza mostrado abaixo, calculemos os pontos singulares para as regiões I e III.



$$G(s) = \frac{1-s}{s(1+s)}$$

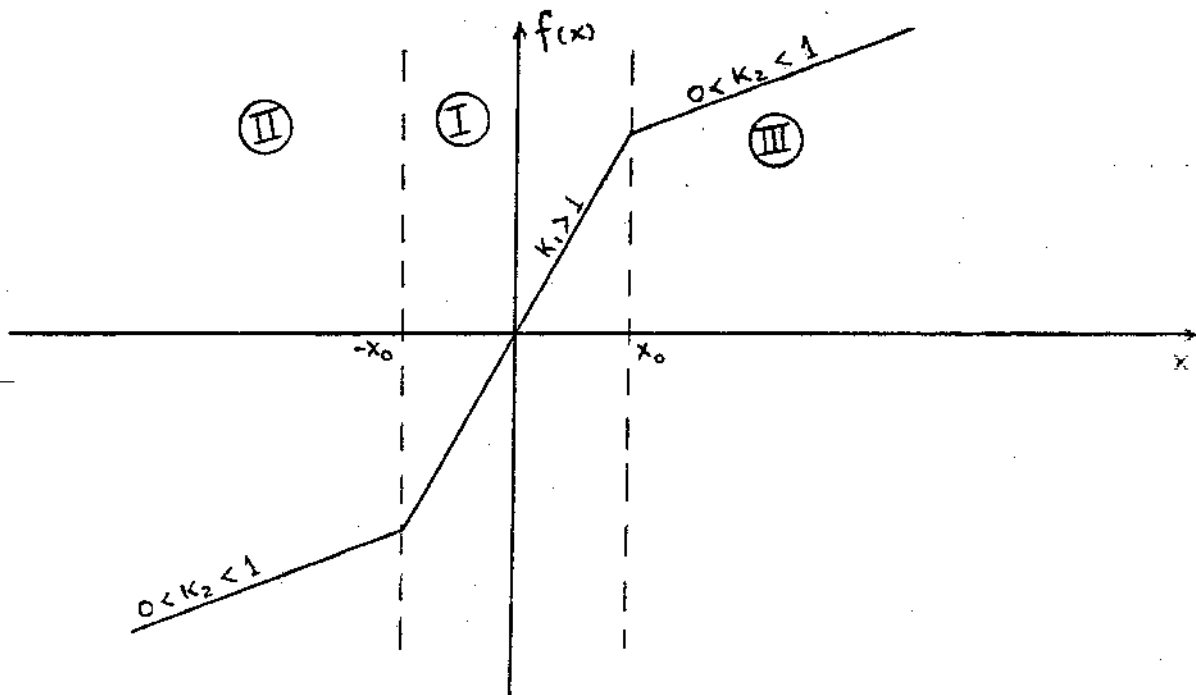


Figura A.1 - Sistema de controle e característica não-linear considerada

Cumpra notar que os cálculos não serão efetuados para a região II, dado esta ser exatamente simétrica à região III.

I) REGIÃO I :

$$K_1 > 1$$

$$-X_0 < x < X_0$$

A equação diferencial que rege o sistema nesta região é

$$\ddot{x} + (1 - K_1) \dot{x} + K_1 x = 0$$

ou, para

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -K_1 x_1 + (K_1 - 1) x_2$$

O ponto singular  $(x_{10}, x_{20})$  dado por

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

será

$$x_{10} = 0 \quad \text{e} \quad x_{20} = 0$$

Concluimos, então, que o ponto singular pertence à região I, sendo portanto um ponto singular real.

Expressando o plano de fase  $(x_1, x_2)$  do sistema através de coordenadas polares centradas no ponto singular:

$$x_1 = \rho \cos \phi$$

$$x_2 = \rho \sin \phi$$

teremos

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi$$

$$\dot{x}_2 = \rho \dot{\phi} \cos \phi + \dot{\rho} \sin \phi$$

Pelas equações do sistema podemos escrever

$$\rho \dot{\phi} \cos \phi + \dot{\rho} \sin \phi = -K_1 \rho \cos \phi + (K_1 - 1) \dot{\rho} \cos \phi - (K_1 - 1) \rho \dot{\phi} \sin \phi$$

Identificando os termos em seno e coseno

$$\rho \dot{\phi} = -K_1 \rho + (K_1 - 1) \dot{\rho}$$

$$\dot{\rho} = -(K_1 - 1) \rho \dot{\phi}$$

Desta forma, obtemos

$$\dot{\rho} = -(K_1 - 1) [ -K_1 \rho + (K_1 - 1) \dot{\rho} ]$$

ou

$$\dot{\rho} = \frac{K_1 (K_1 - 1)}{1 + (K_1 - 1)^2} \rho \quad (1)$$

portanto, como

$$\rho \dot{\phi} = \frac{-1}{K_1 - 1} \dot{\rho} = \frac{-K_1}{1 + (K_1 - 1)^2} \rho$$

teremos

$$\dot{\phi} = \frac{-K_1}{1 + (K_1 - 1)^2} \quad (2)$$

Concluimos, então, que:

- De (1) dado  $K_1 > 1$ , teremos  $\dot{\rho} > 0$  e portanto  $\rho$  é crescente com o tempo em uma trajetória na região I
- De (2) como  $K_1 > 0$ , teremos  $\dot{\phi} = \text{constante} < 0$ , ou seja,  $\phi$  é decrescente com o tempo em uma trajetória do sistema na região I

Das conclusões a) e b) e das condições geométricas mostradas na Figura A.2

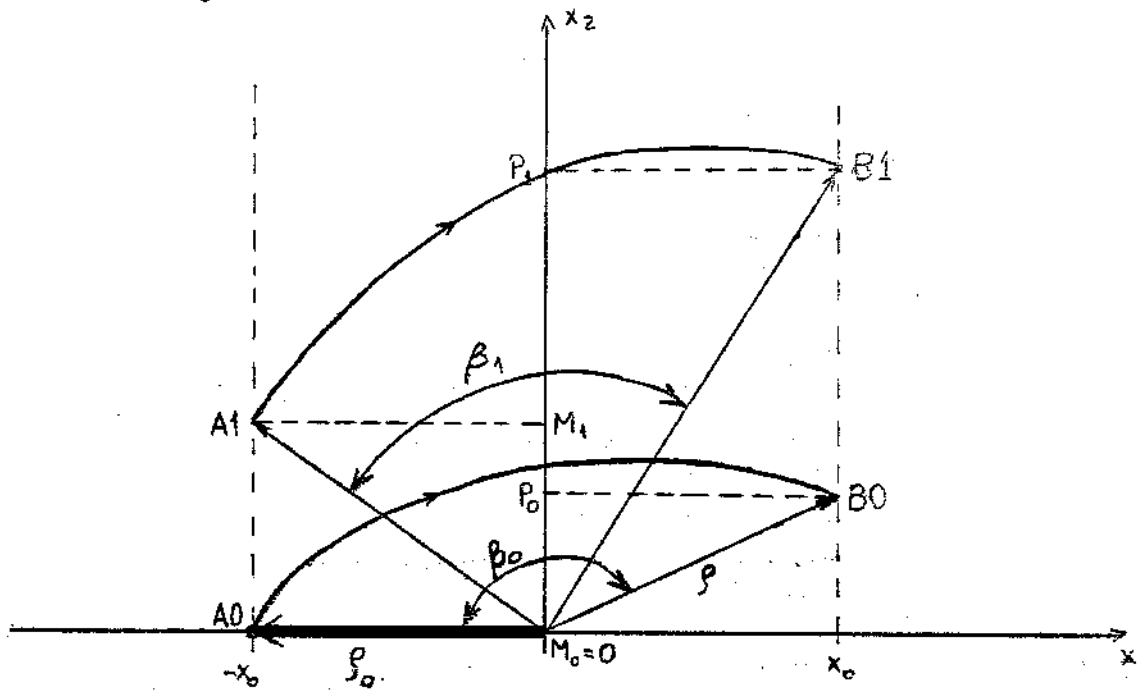


Figura A.2

podemos afirmar que, para qualquer trajetória do sistema iniciada na semi-reta  $x_1 = -X_0$ ,  $x_2 > 0$ , teremos, na interseção da trajetória considerada com a reta  $x_1 = X_0$ ,

$$P > M \quad (3)$$

onde  $M$  é o valor de coordenada  $x_2$  no início da trajetória e  $P$  é o valor desta coordenada na interseção com a reta  $x_1 = X_0$ .

O tempo  $T$  gasto pelo sistema para percorrer estes trechos de trajetória é função de  $M$ , pois  $\dot{\phi}$ , velocidade angular do raio vetor, é constante. O ângulo  $\beta$  descrito diminui com o aumento de  $M$ , e podemos escrever

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T = 0 \quad (4)$$

De (4) e (1)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \rho = \rho_0$$

$$M \rightarrow \infty$$

onde  $\rho_0$  é o módulo do raio vetor no início da trajetória e  $\rho$  é o módulo na interseção com a reta  $x_1 = X_0$ . Desta forma

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P = M \quad (5)$$

$$M \rightarrow \infty$$

Da condição de existência e unicidade da solução da equação diferencial, de (3) e de (5) é possível concluir que  $P = P(x_1)$  é monotônica crescente, tendendo para valores crescentes de  $x_1$  para a reta  $P = M$ . Além disso, como  $P > M$ , no ponto  $M = M_0 = 0$  teremos  $P = P_0 > 0$ .

## II) REGIÃO III :

$$K_2 < 1$$

$$0 < X_0 < x$$

A equação diferencial que rege o sistema é

$$\ddot{x} + (1 - K_2) \dot{x} + K_2 x = (K_2 - K_1) X_0$$

para

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

teremos

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -K_2 x_1 + (K_2 - 1) x_2 + (K_2 - K_1) X_0$$

O ponto singular  $(X_{10}, X_{20})$  dado por

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

será

$$x_{10} = \frac{1}{K_2} (K_2 - K_1) x_0 =$$

$$x_{20} = 0$$

Como  $K_1 > K_2 > 0$  teremos  $x_{10} < 0$  e portanto o ponto singular não pertence à região III, ou seja, é um ponto singular virtual.

Expressando o plano de fase  $(x_1, x_2)$  do sistema através de coordenadas polares centradas no ponto singular:

$$x_1 = \frac{1}{K_2} (K_2 - K_1) x_0 + \rho \cos \phi \quad \dot{x}_1 = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi$$

$$x_2 = \rho \sin \phi \quad \dot{x}_2 = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi$$

Pelas equações do sistema podemos escrever

$$\dot{\rho} \cos \phi + \dot{\rho} \sin \phi = (K_1 - K_2) x_0 - K_2 \rho \cos \phi + (K_2 - 1) \dot{\rho} \cos \phi - (K_2 - 1) \rho \dot{\phi} \sin \phi - (K_1 - K_2) \rho \sin \phi$$

Identificando termos em seno e coseno

$$\rho \dot{\phi} = -K_2 \rho + (K_2 - 1) \dot{\rho}$$

$$\dot{\rho} = -(K_2 - 1) \rho \dot{\phi}$$

que fornecem

$$\dot{\rho} = \frac{-K_2 (1 - K_2)}{1 + (K_2 - 1)^2} \rho \quad (6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{-K_2}{1 + (K_2 - 1)^2} \quad (7)$$

Concluimos, então, que:

- c) De (6), dado  $0 < K_2 < 1$ , teremos  $\dot{\rho} < 0$ , portanto  $\rho$  é decrescente com o tempo em uma trajetória do sistema na região III
- d) De (7), como  $K_2 > 0$ , teremos  $\dot{\phi} = \text{constante} < 0$ , ou seja,  $\phi$  é decrescente com o tempo em uma trajetória do sistema na região I

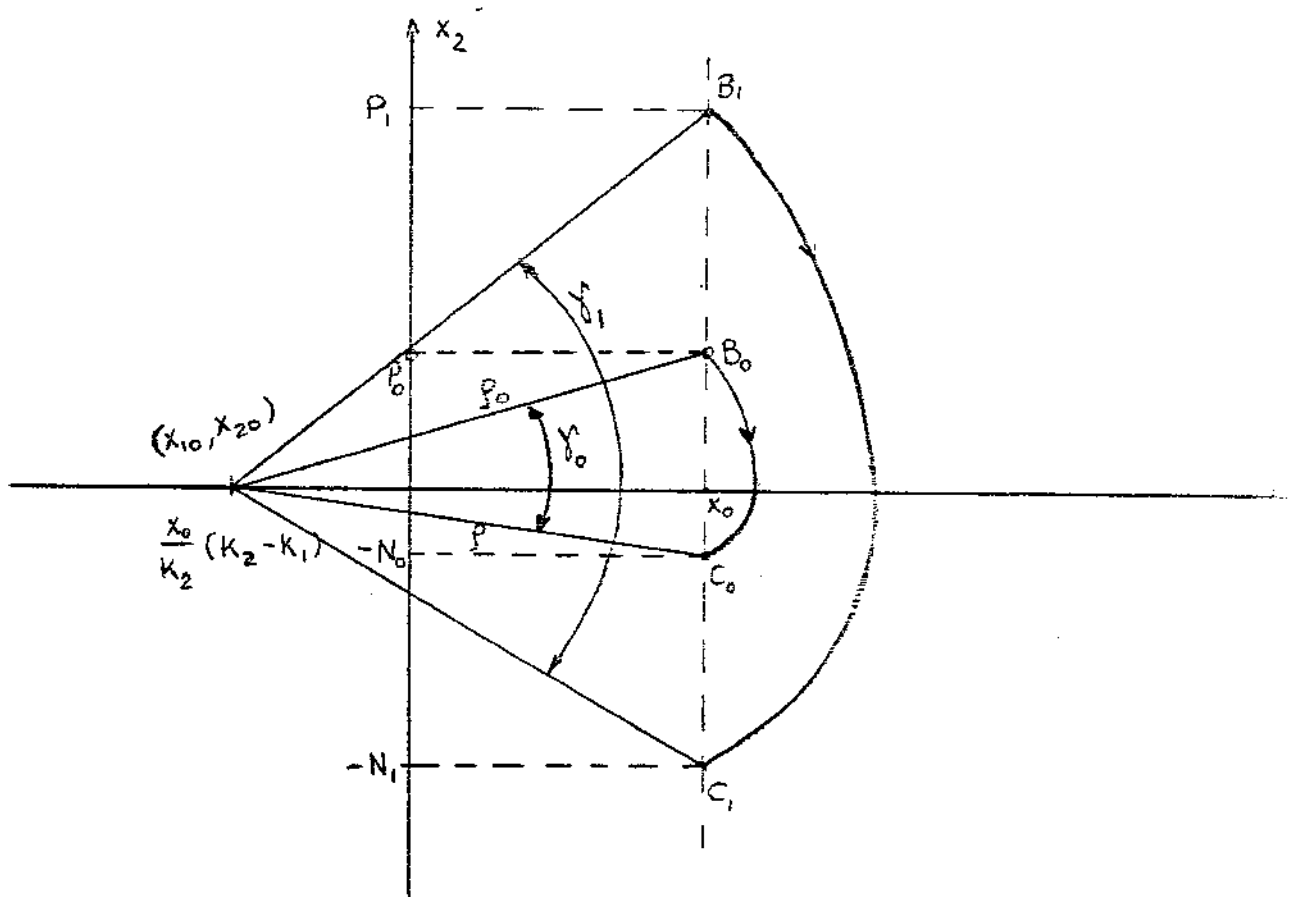


Figura A.3

É importante observar que das conclusões c) e d) e como a tangente à trajetória

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{x_2}{-K_2 x_1 + (K_2 - 1) x_2 + (K_2 - K_1)}$$

é nula para  $x_2 = 0$ ,  $x_1 > 0$ , uma trajetória originada na semi-

-reta  $x_2 > 0$ ,  $x_1 = X_0$ , obrigatoriamente, intercepta a semi-reta  $x_2 < 0$ ,  $x_1 = X_0$

Ainda mais; das conclusões c) e d) e das condições geométricas expostas na Figura A 3, para qualquer trajetória do sistema originada na semi-reta  $x_2 > 0$ ,  $x_1 = X_0$ , teremos, na interseção desta trajetória com a semi-reta  $x_2 < 0$ ,  $x_1 = X_0$

$$P > N \quad P > 0 \quad (8)$$

e  $P = N$  no caso particular  $P = 0$

onde  $P$  é o valor da coordenada  $x_2$  no início da trajetória (ponto B) e  $-N$  o valor desta coordenada na interseção com a semi-reta  $x_2 < 0$ ,  $x_1 = X_0$  (ponto C).

O ângulo  $\gamma$  descrito pelo raio vetor nestes trechos de trajetória é, evidentemente, função monotônica crescente de  $P$ , tal como se vê

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \gamma = \pi$$

Da mesma forma, o tempo  $T$  gasto pelo sistema, que é diretamente proporcional ao ângulo  $\gamma$ , dado que  $\dot{\phi} = \text{constante} < 0$ , terá

$$\lim_{P \rightarrow \infty} T = \lim_{\gamma \rightarrow \pi} T = \frac{1 + (K_2 - 1)^2}{K_2} \cdot \pi \quad (9)$$

Como  $T$  tem um limitante superior finito, pela equação (5) a relação  $\frac{\rho}{\rho_0}$ , onde  $\rho_0$  é o módulo do raio vetor do início da trajetória ( $\rho_0$  (ponto B) e  $\rho$  o módulo do raio vetor na reta  $x_2 < 0$ ,  $x_1 = X_0$  (ponto C), teremos

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-(1 - K_2) \pi} = \text{constante} < 1$$

ou seja, para  $P \rightarrow \infty$  a curva  $N = h(P)$  tende a uma reta de inclinação inferior a 1.



Portanto, a função inversa  $P = h^{-1}(N)$  tende para  $N \rightarrow \infty$  a uma reta de inclinação superior a 1.

Lembremos ainda que para  $N = 0$ ,  $P = 0$  e  $P > N$  quando  $Q$  do  $P$  ou  $N$  maiores do que zero.

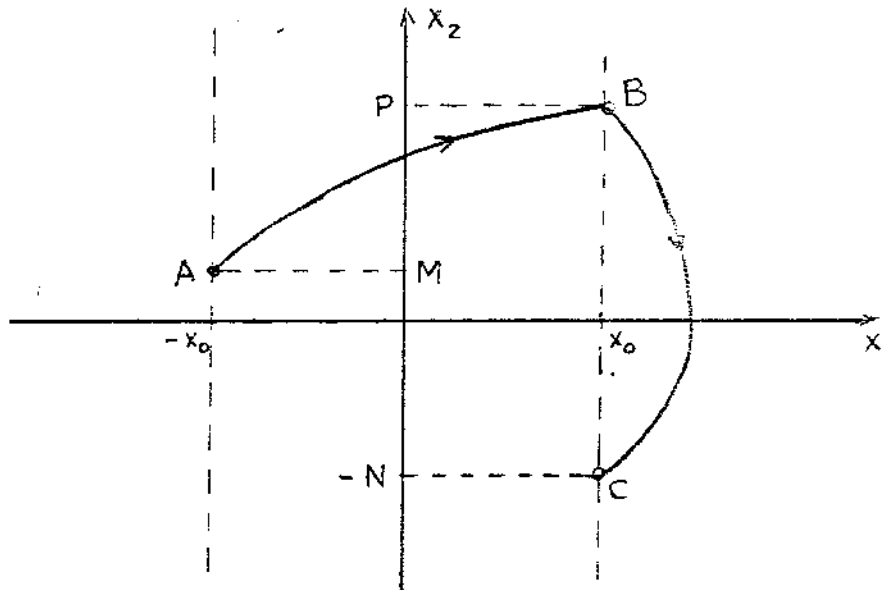


Figura A.4

### III) CONCLUSÃO :

De uma maneira geral, num plano de fase  $(x_1, x_2)$  - Figura A-4, o sistema descreve trajetórias ABC.

Podemos descrever suas características através de transformações pontuais [ 7 ] envolvendo as coordenadas  $M$ ,  $P$  e  $N$ . Para tanto, usaremos as funções

$$P = g(M)$$

$$P = h^{-1}(N)$$

com as propriedades discutidas nos itens I e II ; para  $Q$  positivo  $h^{-1}(Q)$  e  $g(Q)$  (Figura A-5) admitem um número ímpar de interseções que correspondem a ciclos limites do sistema em estudo.

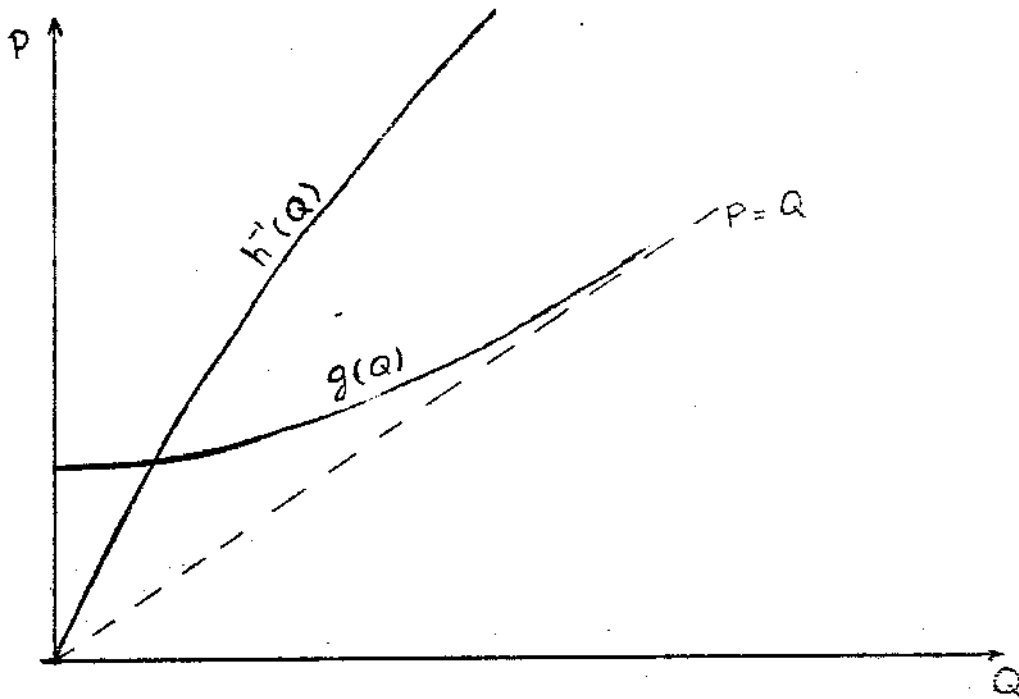


Figura A.5

Excetuando a possibilidade de uma tangência (sistema não-grosseiro), a interseção correspondente ao menor valor de  $Q$  ocorre obrigatoriamente:

$$\frac{d g (Q)}{d Q} < \frac{d h^{-1} (Q)}{d Q}$$

o que assegura a estabilidade do ciclo limite correspondente.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) GIBSON, J.E. - Nonlinear Automatic Control. New York, McGraw-Hill, 1963
- (2) DEMIDOVICH, B. - Problems in Mathematical Analysis. Moscou, - Peace Publishers
- (3) GILLE, J.C.; DECAULNE, P.; PELEGRIN, M. - Méthodes Modernes d'Étude des Systèmes Asservis. Paris, Dunod, 1960.
- (4) MIRA, C. - Cours de Systèmes Asservis Non Linéaires. Paris, Dunod 1969.
- (5) KALMAN, R.E. - Physical and Mathematical Mechanisms of Instability in Nonlinear Automatic Control Systems. Transactions of the ASME. April, 1957.
- (6) KALMAN, R.E. - Phase-Plane Analysis of Automatic Control Systems with Nonlinear Gain Elements. Transaction AIEE, vol. 73, part II 1954.
- (7) ANDRONOV, A.A.; VITT, A.A.; KHAIKIN, S.E. - Theory of Oscillators. Oxford, Pergamon Press, 1966.
- (8) BOTTURA, C.P. - Sistemas de Controle. Rio de Janeiro, Almeida Neves, no prelo.
- (9) PONTRIAGUINE, L. - Équations Différentielles Ordinaires. Moscou, Editions Mir, 1969.
- (10) NASLIN, P. - The Dynamics of Linear and Non Linear Systems. - Gordon & Breach, 1965.
- (11) BURIAN JR., Y. - Osciladores Eletrônicos. Rio de Janeiro, Almeida Neves, 1972.
- (12) TEODURESCU, D. - Describing Function Series : a new means for non linear control systems analysis. Proceedings IEE, vol. 117, nº 11, Nov. 1970.

- (13) SRIDHAR, R. - A general method for deriving the describing-function for a certain class of nonlinearities.  
IRE Transactions AC-5, 1960.
- (14) SILJAK, D.D. - Nonlinear Systems. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- (15) NYQUIST, H. - Regeneration Theory. Bell Syst. Technol. 1932, vol.11, pp 126-147.
- (16) LOEB, J. - Phénomènes "héréditaires" dans les servomécanismes: un critérium général de stabilité. Annales des Télécommunications T-6, N° 12, 1951.