

Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Controle de Sistemas Dinâmicos Através de Redes de Comunicação

Matheus Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Orientador: Prof. Dr. José Cláudio Geromel

Campinas, SP
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

So89c	Souza, Matheus Controle de Sistemas Dinâmicos Através de Redes de Comunicação / Matheus Souza. – Campinas, SP: [s.n.], 2012. Orientador: José Cláudio Geromel. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. 1. Teoria de Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Sistemas com comutação. 4. Redes de comunicação. I. Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título
-------	---

Título em Inglês:	Networked Control of Dynamical Systems
Palavras-chave em Inglês:	Control theory, Linear systems, Switched systems, Communication networks
Área de concentração:	Automação
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Liu Hsu, Jose Mario Martinez Perez
Data da defesa:	04/05/2012
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Elétrica

Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Matheus Souza

Data da Defesa: 4 de maio de 2012

Título da Tese: "Controle de Sistemas Dinâmicos Através de Redes de Comunicação"

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente): _____

Prof. Dr. Liu Hsu: _____

Prof. Dr. Jose Mario Martinez Perez: _____

Resumo

Nesta dissertação, são propostas técnicas de projeto de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ via realimentação de estado para sistemas dinâmicos com limitação de largura de faixa no sinal de controle. Esta restrição é considerada com o objetivo de generalizar os resultados clássicos da teoria de controle para o contexto de sistemas em rede. Um problema linear quadrático é resolvido para uma taxa de amostragem fixa, o que possibilita a abordagem de problemas de controle ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , ambos sob esta condição. Finalmente, são desenvolvidos controladores de uma classe especial que flexibilizam essa hipótese e que buscam minimizar critérios de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ através de uma alocação dinâmica do período de amostragem. Os resultados apresentados são validados através de vários exemplos e são aplicados para a elaboração de dois projetos de cunho prático.

Palavras-chave: Teoria de controle, sistemas lineares, sistemas com comutação, redes de comunicação.

Abstract

In this dissertation, state feedback \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control design techniques are proposed for dynamical systems with bandwidth limitations on the control signal. This constraint is considered in order to generalize classical control theory results to the context of networked systems. A linear quadratic problem is solved for a fixed sampling rate, which yields to the statement and solution of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ optimal control problems, both under this assumption. Finally, controllers of a special class are developed to relax this hypothesis and to try to improve \mathcal{H}_2 or \mathcal{H}_∞ performance with dynamical allocation of the sampling period. The presented results are validated through several examples and they are applied to the solution of two practical problems.

Keywords: Control theory, linear systems, switched systems, communication networks.

*Aos meus pais, Jucélia e Neri,
e ao meu irmão, Daniel*

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor José Cláudio Geromel, pelos grandes ensinamentos, acadêmicos e cotidianos, e pela agradável convivência diária, que muito contribuíram para a conclusão deste trabalho e para minha formação como pesquisador e, principalmente, como cidadão.

Aos meus pais, Jucélia e Neri, por estarem sempre presentes e pelo intenso apoio e amor que me foi dado em todas as etapas da minha vida. Ao meu irmão, Daniel, por ser um excelente companheiro e ótimo amigo.

Sou muito grato à professora Cheti que me orientou durante praticamente toda a graduação. As inúmeras conversas que tivemos foram essenciais para meu amadurecimento acadêmico e, principalmente, para consolidar uma eterna amizade. Agradeço à professora Valéria, pela grande amizade que cultivamos desde o meu primeiro dia de aula na Unicamp. Destaco ainda minha gratidão às professoras Vera Lopes e Márcia Ruggiero, que amigavelmente sempre forneceram conselhos indispensáveis.

A todos os colegas de laboratório pelo companheirismo. Em especial, agradeço ao doutor André Fioravanti, por todos os problemas que resolvemos a quatro mãos e por seu humor de qualidade questionável, e à doutora Grace Deaecto, pelo apoio e pelos bons trabalhos conjuntos. Sou grato aos amigos André Gomes e Caetano Cardeliquio pela ótima convivência.

Ao professor Alim Gonçalves pelos notáveis pensamentos, pelas indispensáveis aulas de computação e pelos bons conselhos que sempre me ajudaram.

Aos meus grandes amigos Mateus, Letícia e Rodrigo, pelo grande apoio fornecido desde a graduação. Agradeço ao Mateus pelas ótimas discussões e conversas, à Letícia pelos divertidos almoços e ao Rodrigo pela paciência e pela companhia.

Sou muito grato aos membros da banca examinadora pelas sugestões que contribuíram para a qualidade desta dissertação. Ressalto as observações dadas pelos professores Romis Attux e Maria Aparecida Diniz Ehrhardt que, mesmo como membros suplentes, promoveram excelentes discussões e propiciaram melhorias à versão final deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES que permitiu o desenvolvimento deste trabalho.

1	Introdução	1
2	Conceitos Fundamentais	9
2.1	Sistemas Dinâmicos Lineares Invariantes no Tempo	9
2.2	Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	10
2.3	Normas para Sistemas a Tempo Contínuo	13
2.3.1	Normas de Trajetórias e o Espaço \mathcal{L}_p	13
2.3.2	Norma \mathcal{H}_2	14
2.3.3	Norma \mathcal{H}_∞	16
2.4	Normas para Sistemas a Tempo Discreto	18
2.4.1	Normas de Trajetórias e o Espaço ℓ_p	19
2.4.2	Norma \mathcal{H}_2	19
2.4.3	Norma \mathcal{H}_∞	21
2.5	Regulador Linear Quadrático	23
2.6	Considerações Finais	28
3	Controle Linear Quadrático através de Redes	29
3.1	Regulador Linear Quadrático em Rede	30
3.2	Critérios de Desempenho	38
3.2.1	Critério de desempenho \mathcal{H}_2	39
3.2.2	Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞	40
3.3	Projeto de Controle \mathcal{H}_2	45

3.4	Projeto de Controle \mathcal{H}_∞	49
3.5	Aplicação Prática: Pêndulo Invertido	52
3.5.1	Projeto de Controlador Ótimo \mathcal{H}_2	54
3.5.2	Projeto de Controlador Ótimo \mathcal{H}_∞	55
3.6	Considerações Finais	57
4	Projeto de Controle Auto-Acionado	59
4.1	Sistemas a Tempo Discreto com Comutação	60
4.1.1	Estabilidade	61
4.1.2	CrITÉRIOS de Desempenho	63
4.2	Projeto de Controlador \mathcal{H}_2 Auto-Acionado	65
4.2.1	Definição do Problema	66
4.2.2	Estabilidade, Otimização de Desempenho e Consistência	66
4.2.3	Exemplos	69
4.3	Projeto de Controlador \mathcal{H}_∞ Auto-Acionado	73
4.3.1	Definição do Problema	73
4.3.2	Desenvolvimento do Projeto	74
4.4	Aplicação Prática: Sistema Massa-Mola	77
4.5	Considerações Finais	79
5	Conclusões e Perspectivas	81
	Bibliografia	83
A	Resultados Auxiliares	87
B	Análise de Estabilidade	91
B.1	Estabilidade de Sistemas Amostrados	91
B.2	Amostragem Patológica	93

CAPÍTULO 1

Introdução

O primeiro sistema de comunicação baseado em sinais elétricos surgiu no início do século XIX, com o telégrafo, primeiramente desenvolvido por Gauss, Weber e Wheatstone, e posteriormente aperfeiçoado por Morse (Carlson & Crilly 2010). Durante esse mesmo século e no decorrer do século XX, foram criadas diversas tecnologias em sistemas de comunicações¹ que permitiram o surgimento dos primeiros canais compartilhados. O seu uso inicia o desenvolvimento de redes de comunicação, permitindo a ligação de diversos dispositivos através de uma única estrutura, mais complexa e inteligente que os simples canais de múltiplo acesso.

Assim, na segunda metade do século XX, as redes se tornaram um foco de estudo da área de comunicações. Mesmo que os primeiros computadores eletrônicos tenham surgido nos anos 40, estes apenas se tornaram mais difundidos no início dos anos 60, com o uso expressivo de computadores de grande porte por diversas instituições (Hennessy & Patterson 2007). Com o objetivo de fornecer comunicação entre terminais, a ARPANET, precursora da Internet, foi desenvolvida. A evolução prosseguiu, melhorando as tecnologias de enlaces de comunicação e de protocolos de transporte e de rede.

Atualmente, a Internet figura como a mais utilizada rede de comunicação de dados, estando baseada nos protocolos TCP, para transporte confiável de dados ponto-a-ponto, e IP, para endereçamento na rede (Kurose & Ross 2009). Além disso, sob o ponto de vista de enlace, o protocolo *Ethernet* (IEEE 802.3) é utilizado na maioria das redes de computadores locais e o protocolo *WiFi* (IEEE 802.11) é amplamente usado em redes locais sem fio (Kurose & Ross 2009).

¹Como, por exemplo, a multiplexação de sinais.

Com essa difusão do uso de redes de comunicação, várias áreas da engenharia estão sendo integradas a um ambiente conectado através de uma rede. Isso se deve à maior flexibilidade de tráfego de informação entre os componentes do sistema e também ao seu menor custo de implantação, principalmente no caso de redes sem fio (Wang & Liu 2008). Sistemas de controle em rede (NCSs²) são muito utilizados atualmente para projetos de automação industrial e para aplicações militares (Wang & Liu 2008). Definindo de forma mais precisa, um NCS é um sistema de controle espacialmente distribuído no qual a comunicação entre os sensores, atuadores e controladores é feita através de uma rede de comunicação de dados (Hespanha, Naghshtabrizi & Xu 2007). Essa estrutura difere daquela estudada na teoria clássica de controle, onde os canais de comunicação de dados são considerados ideais e não são compartilhados.

Para melhor discutir algumas propriedades de sistemas de controle em rede, vamos considerar um sistema dinâmico com a seguinte representação de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}), \\ \mathbf{z}(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t}),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle e $\mathbf{z}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é sua saída. A notação $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \equiv d\mathbf{x}(\mathbf{t})/d\mathbf{t}$ será sempre utilizada no decorrer do texto para indicar a derivada em relação ao tempo $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$ do estado $\mathbf{x}(\mathbf{t})$. As matrizes têm dimensões compatíveis. Neste contexto, da definição acima, podemos enunciar as seguintes características principais de sistemas de controle em rede (Hespanha et al. 2007, Wang & Liu 2008):

- **Largura de faixa limitada.** Qualquer rede de comunicação possui uma taxa de transmissão de dados máxima, por limitações físicas ou específicas da aplicação. Em diversos sistemas dinâmicos, tais como veículos de exploração não-tripulados, essa restrição depende principalmente da característica da aplicação. Sendo assim, essa característica impõe que a entrada de controle seja da forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{u}(\mathbf{t}_k),\tag{1.2}$$

para todo $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1})$. Uma questão fundamental que surge nessas condições é determinar o maior período $T_k = \mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k \geq T_* > 0$ que mantém a estabilidade do sistema. Para melhor caracterizar este aspecto, seguindo (Matveev & Savkin 2009), vamos supor que o canal de comunicação não apresenta ruídos ou atraso no tempo e que $\mu > 0$ seja a maior taxa de transmissão de *bits* permitida. Então, para um dado $r > 0$, consideramos a classe

²Do inglês: *Networked Control Systems*

\mathcal{S}_r de canais com qualquer período de amostragem $T > 0$ satisfazendo

$$\frac{\mu}{T} \leq r, \quad (1.3)$$

que modela a limitação em largura de faixa. Portanto, esta restrição é equivalente a $T \geq T_\star \equiv \mu/r > 0$, onde T_\star é o menor período de amostragem permitido para transmissão. Logo, este é um sistema de controle com taxa de transmissão de dados limitada, onde a restrição de largura de faixa é $1/T_\star$.

- **Quantização e atraso.** Para trafegar em um canal de comunicação, os dados devem ser amostrados, quantizados e codificados em um formato digital, transmitidos via rede e finalmente decodificados. Porém, note que essa amostragem não é necessariamente periódica. De fato, a informação que trafega na rede pode sofrer atrasos de transmissão e atrasos de acesso, já que esta é compartilhada. Logo, neste caso, a entrada de controle é substituída pela atrasada, ou seja,

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}(t - \tau), \quad (1.4)$$

onde $\tau > 0$ representa o atraso da informação, que pode ser fixo ou variante no tempo. Note que, no modelo acima, supomos que os erros de quantização são desprezíveis (Fadali & Visioli 2009). Atrasos em sistemas de controle, quando não são devidamente considerados, podem afetar muito o desempenho do sistema em malha fechada (Geromel & Korogui 2011).

- **Perda de pacotes de dados.** Dados que fluem através da rede podem ser descartados, sendo que esta é uma diferença significativa entre o controle em rede e o controle clássico. Nesse caso, dados são descartados devido à detecção de erros no pacote ou à sobrecarga de dados nos roteadores. Um sistema sujeito a perda de pacote ou descarte por erros pode ser modelado com um sistema sujeito a saltos Markovianos, problema abordado em (Gonçalves 2009, Fioravanti 2007).

Observe que, em um caso mais geral, a limitação na largura de faixa e os atrasos de acesso e de transmissão podem ser considerados no mesmo modelo. Assim sendo, a entrada de controle é tal que

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t_{k-1}) & \forall t \in [t_k, t_k + \tau_k) \\ \mathbf{u}(t_k) & \forall t \in [t_k + \tau_k, t_{k+1}) \end{cases}, \quad (1.5)$$

onde supomos que o atraso é menor que o intervalo de amostragem. Quando o atraso ocorre em múltiplos do intervalo de amostragem,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_{k-\ell}), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (1.6)$$

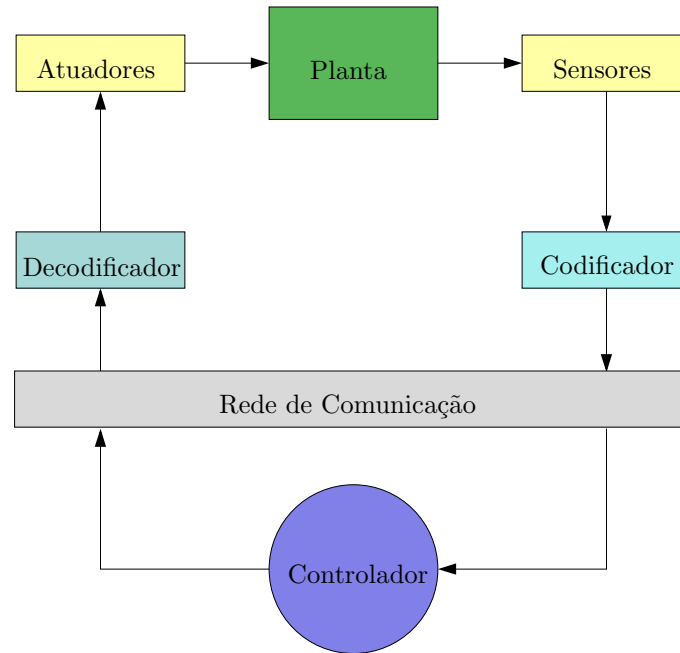


Figura 1.1: Estrutura direta.

onde $\ell \in \mathbb{N}$ pode ser variante no tempo. Note que, em ambos os casos, os modelos que devem ser considerados para análise de estabilidade e para o projeto de sistemas de controle têm sua complexidade aumentada significativamente.

Em termos de arquitetura, qualquer sistema de controle em rede apresenta elementos básicos para comunicação, como codificadores e decodificadores. Porém, a topologia da rede e da interconexão entre diversos sistemas varia muito. Dessa forma, na prática, é comum o uso das duas seguintes arquiteturas básicas para o projeto de NCSs: (Wang & Liu 2008, Hespanha et al. 2007):

- **Estrutura direta.** Nessa estrutura, a ligação entre o controlador, atuadores e sensores é realizada através de uma rede de comunicação. Essa estrutura é representada na Figura 1.1 e é a base para os sistemas que vamos tratar no decorrer desta dissertação.
- **Estrutura hierárquica.** Nessa estrutura, vários subsistemas de controle são conectados a um controlador central através da rede. O controlador mestre determina aos controladores locais as referências e cada um deles gerencia o seu subsistema, fornecendo também informações do seu estado para o mestre. Esta estrutura está representada na Figura 1.2.

Uma observação importante deve ser feita neste ponto. A estrutura hierárquica de controle garante a estabilidade dos subsistemas em casos de instabilidades na rede, enquanto a estrutura direta é totalmente sensível às perturbações nela presentes. Portanto, os fenômenos relacionados

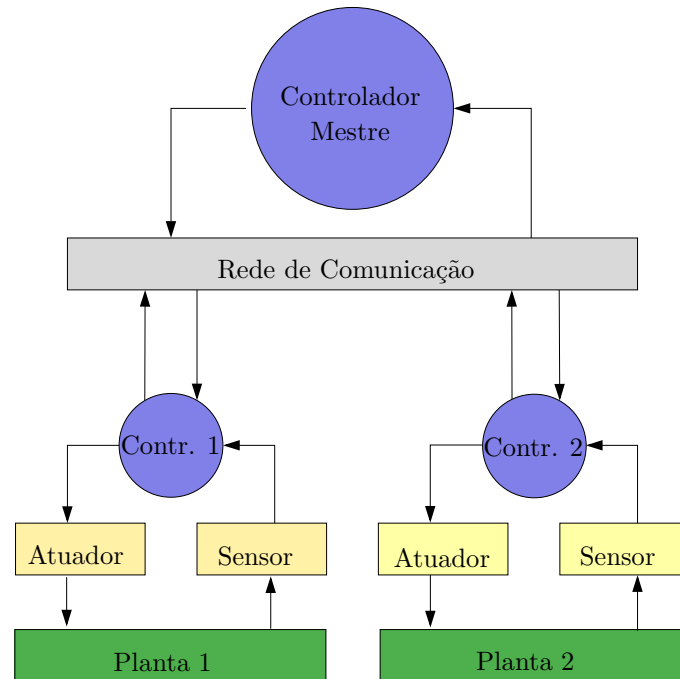


Figura 1.2: Estrutura hierárquica.

à comunicação de dados na rede devem ser considerados de forma mais relevante na estrutura direta, o que torna essa estrutura um item principal no estudo de NCSs.

Atualmente, temos diversos resultados na literatura que envolvem NCSs. Vários deles são importantes, pois permitem determinar a taxa mínima de *bits* necessária para estabilizar um sistema dinâmico linear (Hespanha, Ortega & Vasudevan 2002), sendo que resultados semelhantes foram obtidos também para sistemas não-lineares (Liberzon & Hespanha 2005).

Ainda no contexto de estabilidade de NCSs, temos outros focos de análise. Alguns modelos para sistemas de controle em rede com largura de faixa limitada são apresentados e discutidos em (Montestruque & Antsaklis 2003), juntamente com condições necessárias e suficientes de estabilidade para realimentação de estado e de saída, que são dependentes da localização dos autovalores de uma matriz aumentada associada ao sistema original. Em (Zhang, Branicky & Phillips 2001) e (Branicky, Phillips & Zhang 2000) são analisadas várias condições de estabilidade envolvendo a taxa mínima de amostragem do sinal, atrasos na rede e perdas de pacotes de dados. Finalmente, vale ressaltar que um protocolo de alocação dinâmica dos recursos da rede é descrito em (Walsh, Ye & Bushnell 2002) e este assegura a estabilidade do sistema em malha fechada.

A literatura ainda apresenta algumas abordagens para garantir um certo desempenho dos sistemas de controle em rede. (Lian, Moyne & Tilbury 2002) fazem uma análise de desempenho

do ponto de vista de qualidade de serviço (QoS) e de qualidade de desempenho (QoP)³. Neste artigo, o primeiro índice de qualidade é visto como responsabilidade da rede de comunicação, que fornece o serviço de entrega da informação, e o segundo índice é responsabilidade de um controlador bem projetado, sendo analisados alguns critérios de desempenho do sistema em diversas situações de contingência da rede.

Uma abordagem interessante é feita por (Chen & Francis 1995), que buscam a determinação de um controlador de realimentação de estado ótimo para o critério quadrático

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \mathbf{z}(t)' \mathbf{z}(t) dt, \quad (1.7)$$

com a restrição adicional de amostragem periódica no sinal de controle. Essa proposta, relativamente simples na teoria, apresenta excelentes resultados na prática. Além disso, é feita uma análise dos critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas de controle com dados amostrados.

Outra abordagem de projeto de controladores em NCSs que satisfazem algum critério de desempenho é o uso dos conceitos de auto-acionamento e acionamento por evento⁴ (Tabuada 2007, Mazo Jr. & Tabuada 2008, Mazo Jr., Anta & Tabuada 2009, Postoyan, Tabuada, Nešić & Anta 2011, Almeida, Silvestre & Pascoal 2011). Ambas as técnicas têm por objetivo reduzir o consumo de recursos de transmissão do sinal de controle e são discutidas no contexto de controle em rede por (Mazo Jr. & Tabuada 2008). A primeira técnica utiliza o estado atual do sistema para determinar o sinal de controle e também o próximo instante em que o controlador entrará em ação. Já no caso da segunda, o próximo instante de amostragem do controlador é determinado pelo decaimento de uma função do estado atual do sistema, fazendo com que a alocação dos recursos da rede não tenha agendamento prévio.

Analisando tudo o que fora dito anteriormente, percebemos que a literatura é rica em resultados de análise de sistemas dinâmicos em rede, com diversas condições de estabilidade. Porém, em termos de projeto de controladores em NCSs que satisfazem algum critério de desempenho, a literatura ainda apresenta diversas lacunas. Percebemos que os principais resultados de controle ótimo são realizados para um período de amostragem fixo, o que não é razoável em redes compartilhadas, uma vez que a necessidade de um tempo de amostragem fixo faz com que o sistema de controle utilize mais recursos da rede que o necessário. Além disso, mostraremos exemplos em que, dados dois períodos de discretização, a melhor solução não é obtida tomando-se um deles como período fixo. Além disso, a estratégia de acionamento por evento apresenta um excessivo consumo de recursos para verificar se o evento esperado ocorre.

³Do inglês: *Quality of Service* e *Quality of Performance*.

⁴Do inglês: *self-triggering* e *event-triggering*.

Portanto, uma estratégia do tipo auto-acionamento está perfeitamente de acordo com os objetivos de controle em rede, uma vez que permite um controle por amostragem e não apresenta um consumo excessivo de recursos. Sendo assim, esta dissertação tem por objetivo apresentar resultados de projeto de controladores em rede, buscando obter sistemas em malha fechada que otimizam critérios \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para um dado período de discretização fixo, baseados em (Chen & Francis 1995). Esta condição é relaxada posteriormente, quando será implementado um sistema de controle com comutação, cuja regra será responsável pela escolha do próximo instante de amostragem, selecionando um período T_i dentre N disponíveis, com o objetivo de melhorar o desempenho.

Em termos de sistemas com comutação, utilizaremos resultados baseados em condições de estabilidade de sistemas chaveados discretos, apresentados em (Geromel & Colaneri 2006), e em resultados de custo garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , explorados em (Deaecto 2010). Neste contexto, usaremos uma função de comutação do tipo σ -controle para minimizar custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em função do período de amostragem.

Estratégias de controle com comutação aplicadas ao projeto de controladores em redes de comunicação já foram desenvolvidas. Em (Donkers, Hetel, Heemels, van de Wouw & Steinbuch 2009), é feita uma análise de estabilidade para vários sistemas ligados a uma rede comum, sendo que cabe à função de comutação decidir qual sistema será conectado à rede em cada instante de tempo. A função de comutação é projetada de duas formas, a depender do algoritmo de acesso ao meio compartilhado. A primeira possibilidade explorada impõe que a função de comutação seja da forma

$$\sigma(t_k) = \arg \max_{i \in \mathbb{K}} \|e_k^i\|_2^2, \quad (1.8)$$

onde e_k^i representa o erro entre a saída enviada pelo sistema $i \in \mathbb{K}$ no último acesso à rede e a sua saída no instante t_k , garantindo que sistemas com comportamento mais agressivo recebam mais recursos do que sistemas já estabilizados. A segunda possibilidade utilizada é baseada no algoritmo de escalonamento de tarefas *round-robin*, onde todos os sistemas têm acesso garantido à rede periodicamente, ou seja,

$$\sigma(t_k) = i \in \mathbb{K} \Leftrightarrow i = k \bmod N, \quad (1.9)$$

o que garante uma distribuição justa de recursos da rede entre os vários agentes. Outro tipo de análise de sistemas de controle em rede com comutação é feita em (Dai, Lin & Ge 2009), onde os autores apresentam uma estratégia de escalonamento de acesso. São supostas restrições no número de sistemas conectados e limitações como perda de pacotes ou atrasos.

A notação utilizada é usual. O conjunto dos números naturais é $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ e os conjuntos

dos números reais e dos números complexos são denotados por \mathbb{R} e \mathbb{C} . Denotaremos por $\mathbb{C}^{m \times n}$ o conjunto das matrizes com coeficientes complexos de dimensão $m \times n$ e por \mathbb{C}^n o conjunto dos vetores–coluna de n componentes complexas. Similarmente, o conjunto das matrizes reais $m \times n$ é dado por $\mathbb{R}^{m \times n}$ e \mathbb{R}^n é formado pelos vetores–coluna reais de dimensão n . Para uma matriz A qualquer, A' denota sua transposta, \bar{A} denota sua conjugada, A^* denota sua conjugada transposta e $\mathcal{N}(A)$ denota seu espaço nulo. Para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definimos $\lambda(A)$ como o conjunto formado pelos seus autovalores. Uma matriz simétrica definida positiva (semi-definida positiva) é denotada por $P > 0$ ($P \geq 0$).

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: neste capítulo realizamos uma revisão das redes de comunicação e de sua integração à área de sistemas de controle. Também fizemos uma análise dos principais resultados existentes na área de controle em rede. Apresentamos a notação utilizada no decorrer do texto e a organização da dissertação.

Capítulo 2: neste capítulo são apresentados resultados preliminares essenciais para o desenvolvimento do texto. Apresentamos conceitos e técnicas de cálculo para normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , além da solução do problema linear quadrático para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto.

Capítulo 3: resultados de controle ótimo para sistemas de controle com limitação de largura de faixa são desenvolvidos neste capítulo. Com a hipótese de período de amostragem constante, projetamos controladores ótimos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . O capítulo é finalizado com um projeto de controlador para o pêndulo invertido.

Capítulo 4: neste capítulo, desenvolvemos projetos de controladores auto–acionados utilizando funções de comutação. Resultados para controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são mostrados, porém é verificado que apenas a primeira estratégia fornece uma função de comutação com a propriedade de ser sempre consistente. Um exemplo prático finaliza o capítulo.

Capítulo 5: são apresentadas as conclusões gerais e as perspectivas de próximos trabalhos.

Apêndice A: são apresentados e demonstrados resultados auxiliares que são utilizados na parte principal do texto.

Apêndice B: é feita uma breve análise de estabilidade de sistemas dinâmicos com a estrutura semelhante à estudada na dissertação.

Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, apresentamos e discutimos resultados essenciais para o desenvolvimento do texto. Primeiramente, analisamos sistemas dinâmicos lineares a tempo contínuo e a tempo discreto, definidos a partir de sua representação de estado e, a partir disso, são obtidas suas funções de transferência. O conceito de estabilidade é apresentado em seguida, inicialmente através de definições gerais de pontos de equilíbrio, os tipos de equilíbrio e, a partir desses conceitos, a estabilidade de sistemas lineares é estudada usando a teoria de Lyapunov. Nas duas seções seguintes, são estudadas normas de sistemas dinâmicos e de suas trajetórias, sendo definidos os espaços normados \mathcal{L}_2 , ℓ_2 , \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . São mostrados métodos para o cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ através de problemas de otimização convexa, com restrições descritas por desigualdades matriciais lineares (LMIs¹) (Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994). Finalmente, é resolvido o problema linear quadrático, um problema clássico de controle ótimo e que será essencial para os desenvolvimentos abordados nos capítulos seguintes.

2.1 Sistemas Dinâmicos Lineares Invariantes no Tempo

Um sistema dinâmico linear invariante no tempo pode ser representado na forma

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Ew(t), & x(0) = \xi \\ z(t) = Cx(t) + Fw(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

¹Do inglês: *Linear Matrix Inequalities*

quando ele se comporta a tempo contínuo, e na forma

$$\mathcal{G}_d : \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{E}\mathbf{w}_k, & \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}\mathbf{w}_k \end{cases} \quad (2.2)$$

quando consideramos seu comportamento a tempo discreto. O vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado e suas componentes x^i , para $i = 1, \dots, n_x$, são as variáveis de estado. O vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada externa e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ é o vetor de saída. As matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ têm dimensões compatíveis. Dizemos que um sistema linear é estritamente próprio se $\mathbf{F} = 0$ e próprio no caso contrário.

A função de transferência do sistema (2.1) é dada, em termos de transformada de Laplace, por

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{F}. \quad (2.3)$$

Para o sistema discreto (2.2), a função de transferência é dada por sua transformada \mathcal{Z} , sendo

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Note que a matriz \mathbf{A} desempenha papel central no comportamento dinâmico de ambos os sistemas, uma vez que seus autovalores determinam os polos e, portanto, os modos próprios de (2.1) e (2.2) (Geromel & Palhares 2011). Em decorrência deste fato, a análise de estabilidade de um sistema linear é essencialmente baseada na matriz que define sua dinâmica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

2.2 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

O estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos é muito explorado na literatura e é essencial para o projeto de sistemas de controle (Geromel & Korogui 2011). Nesta seção, consideraremos o conceito de estabilidade para os sistemas lineares (2.1) e (2.2) com $\mathbf{w} \equiv 0$. Primeiramente, definiremos o conceito de ponto de equilíbrio de sistemas dinâmicos (Luenberger 1979).

Definição 2.1 (Ponto de Equilíbrio) *Um ponto \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico se, uma vez que o vetor de estado do sistema assume o valor \mathbf{x}_e , este permanece com o valor \mathbf{x}_e em todo tempo futuro.*

Desta forma, \mathbf{x}_e é ponto de equilíbrio de (2.1) se $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$ implica $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Assim, como o vetor de estado deve permanecer constante nos pontos de equilíbrio, é fácil ver que \mathbf{x}_e satisfaz $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = 0$, ou seja, $\mathbf{x}_e \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Portanto, a não-singularidade de \mathbf{A} implica na unicidade da origem do espaço \mathbb{R}^{n_x} como ponto de equilíbrio.

De forma semelhante, \mathbf{x}_e é ponto de equilíbrio de (2.2) se $\mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_e$ implica $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_e$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Sendo assim, \mathbf{x}_e satisfaz $A\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e$, ou seja, \mathbf{x}_e é ponto fixo da transformação linear definida por A . Logo, se $1 \notin \lambda(A)$, então a origem do espaço \mathbb{R}^{n_x} é o único ponto de equilíbrio.

Conforme discutido acima, qualquer sistema linear possui a origem como ponto de equilíbrio, que pode ou não ser único. Considerando esta propriedade, nossa análise a partir de agora focará exclusivamente na origem como sendo um ponto de equilíbrio. Seguem as definições de estabilidade e estabilidade assintótica de sistemas dinâmicos (Khalil 2002).

Definição 2.2 (Estabilidade) *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = 0$ é dito estável se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon)$ tal que*

(i) $\|\mathbf{x}(0)\|_2 < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\|_2 < \epsilon, \forall t \geq 0$, no caso do sistema (2.1);

(ii) $\|\mathbf{x}_0\|_2 < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}_k\|_2 < \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}$, no caso do sistema (2.2).

Caso contrário, o sistema é dito instável.

Adicionalmente, a origem é dita globalmente assintoticamente estável se for estável e se, para qualquer condição inicial,

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$, no caso do sistema (2.1);

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = 0$, no caso do sistema (2.2).

Pode-se mostrar que o sistema (2.1) é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, a matriz A for Hurwitz² e esta propriedade garante a analiticidade de sua função de transferência no semiplano complexo direito fechado. De forma análoga, o sistema (2.2) é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, a matriz A for Schur³, o que torna sua função de transferência analítica na circunferência unitária e no seu exterior.

A análise de estabilidade de sistemas lineares pode ser feita através do critério de Lyapunov. Uma função $v: \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições (Luenberger 1979)

- v é continuamente diferenciável (ou apenas contínua no caso discreto);
- $v(0) = 0$ e $v(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$;
- ao longo de qualquer trajetória do sistema, o valor da função nunca cresce;

²Matriz cujos autovalores têm parte real negativa.

³Matriz cujos autovalores têm módulo menor que a unidade.

é dita função de Lyapunov. Note que a última condição pode ser reescrita como $\dot{v}(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ na trajetória do sistema (2.1) ou $v(\mathbf{x}_{k+1}) - v(\mathbf{x}_k) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ na trajetória do sistema (2.2).

Uma função de Lyapunov pode ser analisada como uma medida de distância do vetor de estado à origem, pela segunda condição acima. Logo, como o valor da função nunca aumenta na trajetória do sistema, a existência de v garante a estabilidade da origem. Para garantir a estabilidade assintótica global, a função de Lyapunov deve ser estritamente decrescente para qualquer trajetória. O teorema a seguir enuncia esse resultado (Slotine & Li 1991).

Teorema 2.1 (Teorema de Lyapunov) *Considere um sistema dinâmico autônomo. Se existir uma função de Lyapunov $v : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(i) *v é estritamente decrescente para todo $\mathbf{x} \neq 0$ na trajetória do sistema;*

(ii) *$v(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ sempre que $\|\mathbf{x}\|_2 \rightarrow \infty$;*

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Para estudar a estabilidade de sistemas lineares, a função quadrática $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}$, com $\mathbf{P} > 0$, é a escolha natural como candidata a função de Lyapunov. Como $v(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$, apenas devemos analisar seu comportamento ao longo de uma trajetória genérica.

Considerando o sistema (2.1), devemos impor que

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} < 0, \quad (2.5)$$

para todo $\mathbf{x} \neq 0$. Portanto, pelo Teorema 2.1, a matriz \mathbf{A} é Hurwitz se, e somente se, existir uma matriz $\mathbf{P} > 0$ tal que

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0. \quad (2.6)$$

Tal condição é chamada de desigualdade matricial de Lyapunov, se trata de uma LMI e, portanto, é uma restrição convexa na variável matricial \mathbf{P} . Note que essa desigualdade, quando factível, possui infinitas soluções. Uma solução específica pode ser obtida resolvendo-se a equação matricial $\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = 0$, com $\mathbf{Q} > 0$ dada. O resultado a seguir (Geromel & Korogui 2011) enuncia o critério de Lyapunov para sistemas contínuos.

Lema 2.1 (Critério de Lyapunov – Tempo Contínuo) *O sistema dinâmico linear contínuo no tempo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, para qualquer matriz $\mathbf{Q} > 0$ dada, existir $\mathbf{P} > 0$ solução da equação matricial de Lyapunov*

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = 0. \quad (2.7)$$

Realizando a mesma análise para o sistema discreto (2.2), devemos impor que

$$v(x_{k+1}) - v(x_k) = x_k'(A'PA - P)x_k < 0, \quad (2.8)$$

para todo $x_k \neq 0$. Portanto, pelo Teorema 2.1, a matriz A é Schur se, e somente se, existir uma matriz $P > 0$ tal que

$$A'PA - P < 0. \quad (2.9)$$

Esta LMI é a desigualdade de Lyapunov para sistemas a tempo discreto. Analogamente ao caso contínuo, uma solução específica de (2.9) pode ser obtida resolvendo-se $A'PA - P + Q = 0$ para $Q > 0$ dada. O próximo lema (Geromel & Korogui 2011) enuncia o critério de Lyapunov para essa classe de sistemas dinâmicos.

Lema 2.2 (Critério de Lyapunov – Tempo Discreto) *O sistema dinâmico linear a tempo discreto $x_{k+1} = Ax_k$ é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, para qualquer matriz $Q > 0$ dada, existir $P > 0$ solução da equação matricial de Lyapunov*

$$A'PA - P + Q = 0. \quad (2.10)$$

Os Lemas 2.1 e 2.2 caracterizam a estabilidade assintótica global para os sistemas lineares (2.1) e (2.2), respectivamente, considerando-se a entrada $w \equiv 0$. Vale ressaltar que as condições de Lyapunov exploradas nesta seção, tanto no caso de igualdade quanto no de desigualdade, podem ser facilmente testadas para uma matriz A dada, uma vez que existem métodos numéricos bem-estabelecidos para resolver as condições de estabilidade que acabamos de enunciar (Golub & Van Loan 1996).

2.3 Normas para Sistemas a Tempo Contínuo

Nesta seção, apresentamos a definição de normas para os sistemas dinâmicos lineares a tempo contínuo da forma (2.1) e para suas trajetórias. Sendo assim, primeiramente é definido o espaço \mathcal{L}_p e sua norma associada e, a partir do caso especial $p = 2$, são definidas as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

2.3.1 Normas de Trajetórias e o Espaço \mathcal{L}_p

Trajetoórias de sistemas a tempo contínuo são funções $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas por partes. Neste contexto, a definição de uma norma para uma trajetória é essencial para analisar o

comportamento do sistema em questão. Definimos a norma \mathcal{L}_p da trajetória f como (Khalil 2002)

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.11)$$

O espaço normado \mathcal{L}_p é o conjunto de todas as trajetórias f com norma \mathcal{L}_p finita (Khalil 2002). Pode-se mostrar que tal espaço é um *espaço de Banach* (Kreyszig 1978). Espaços de Banach são espaços normados completos, propriedades essenciais para estabelecer diversos resultados em análise de sistemas dinâmicos (Khalil 2002).

Vale ressaltar o caso especial em que $p = 2$, ou seja, o espaço \mathcal{L}_2 , que é formado por todas as funções quadraticamente integráveis. As normas de sistemas dinâmicos, que serão definidas a seguir, estão fortemente relacionadas com o conceito de norma \mathcal{L}_2 .

2.3.2 Norma \mathcal{H}_2

Consideremos o sistema a tempo contínuo (2.1), cuja função de transferência é dada por (2.3). Definimos a sua norma \mathcal{H}_2 como

$$\|\mathcal{G}_c\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} (H(j\omega)^* H(j\omega)) d\omega}. \quad (2.12)$$

De forma análoga à feita para os espaços \mathcal{L}_p , diremos que $\mathcal{G}_c \in \mathcal{H}_2$ se, e somente se, a integral (2.12) convergir. Utilizando-se o Teorema de Parseval (Teorema A.1), a norma \mathcal{H}_2 pode ser reescrita como

$$\|\mathcal{G}_c\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{tr} (h(t)' h(t)) dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_w} \int_0^\infty h^i(t)' h^i(t) dt}, \quad (2.13)$$

o que indica que o quadrado da norma \mathcal{H}_2 do sistema é a soma dos quadrados das normas \mathcal{L}_2 das colunas da resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$.

Notemos que sua função de transferência

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}E + F \quad (2.14)$$

pertence à classe \mathcal{H}_2 se, e somente se, A for Hurwitz e $F = 0$. Com efeito, a resposta ao impulso deste sistema é dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = Ce^{At}E + F\delta(t). \quad (2.15)$$

Portanto, a integral

$$\int_0^{\infty} \mathbf{tr}(\mathbf{h}(t)' \mathbf{h}(t)) \, dt = \mathbf{tr} \left(\mathbf{E}' \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \, dt \, \mathbf{E} \right) + \mathbf{tr}(\mathbf{E}' \mathbf{C}' \mathbf{F}) \\ + \mathbf{tr}(\mathbf{F}' \mathbf{C} \mathbf{E}) + \int_0^{\infty} \mathbf{tr}(\mathbf{F}' \mathbf{F}) \delta^2(t) \, dt \quad (2.16)$$

converge se, e apenas se, \mathbf{A} for Hurwitz e $\mathbf{F} = 0$. Logo, apenas sistemas assintoticamente estáveis e estritamente próprios compõem a classe \mathcal{H}_2 .

Finalmente, do resultado acima, $\mathbf{F} = 0$ implica em

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \mathbf{tr} \left(\mathbf{E}' \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \, dt \, \mathbf{E} \right) = \mathbf{tr} \left(\mathbf{C} \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{E} \mathbf{E}' e^{\mathbf{A}'t} \, dt \, \mathbf{C}' \right), \quad (2.17)$$

onde foi utilizada a propriedade de invariância do traço quanto à transposição. Então,

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \mathbf{tr}(\mathbf{E}' \mathbf{P}_o \mathbf{E}) = \mathbf{tr}(\mathbf{C} \mathbf{P}_c \mathbf{C}'), \quad (2.18)$$

onde a matriz \mathbf{P}_o é o *gramiano de observabilidade* do sistema (2.1), dado por

$$\mathbf{P}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}' \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \, dt, \quad (2.19)$$

e a matriz \mathbf{P}_c é o *gramiano de controlabilidade* deste mesmo sistema, dado por

$$\mathbf{P}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{E} \mathbf{E}' e^{\mathbf{A}'t} \, dt. \quad (2.20)$$

É imperativo notar que tais matrizes podem ser obtidas pela resolução das equações de Lyapunov (Geromel & Korogui 2011)

$$\mathbf{A}' \mathbf{P}_o + \mathbf{P}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}' \mathbf{C} = 0 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{A}' + \mathbf{E} \mathbf{E}' = 0 \quad (2.22)$$

Observe que as condições necessárias e suficientes para que os gramianos \mathbf{P}_o e \mathbf{P}_c sejam matrizes definidas positivas são a observabilidade do par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) e a controlabilidade do par (\mathbf{A}, \mathbf{E}) , respectivamente.

Para finalizar esta seção, mostraremos como a norma \mathcal{H}_2 do sistema linear (2.1) pode ser obtida através da resolução de problemas de otimização convexa. O lema a seguir (de Oliveira 1999) é essencial para atingirmos este objetivo.

Lema 2.3 *Seja A uma matriz Hurwitz. Se os pares (P_1, Q_1) e (P_2, Q_2) satisfazem a equação de Lyapunov $A'P + PA + Q = 0$, então $Q_1 > Q_2$ implica $P_1 > P_2$.*

Prova: Sejam $\Delta Q = Q_1 - Q_2 > 0$ e $\Delta P = P_1 - P_2$. Então,

$$A'P_1 + P_1A + Q_1 = 0 = A'P_2 + P_2A + Q_2$$

fornece

$$A'\Delta P + \Delta PA + \Delta Q = 0.$$

Como A é Hurwitz, temos que $\Delta Q > 0$ implica $\Delta P > 0$. Portanto, $Q_1 > Q_2$ implica $P_1 > P_2$, o que completa a prova. \square

Consideremos a desigualdade de Lyapunov $A'P + PA + C'C < 0$. Então, qualquer solução $P > 0$ desta inequação é tal que $P > P_o$. Com efeito, dado que $P > 0$ satisfaz esta desigualdade, podemos concluir que existe $R > 0$ tal que $A'P + PA + C'C = -R$ e, usando o Lema 2.3, concluimos que $P > P_o$. Portanto, a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.1) pode ser obtida resolvendo-se o problema de otimização semidefinida

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{tr}(E'PE) : A'P + PA + C'C < 0\}. \quad (2.23)$$

Realizando procedimento análogo para o gramiano de controlabilidade, podemos obter a sua norma \mathcal{H}_2 resolvendo

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{tr}(CPC') : AP + PA' + EE' < 0\}. \quad (2.24)$$

Observemos que as soluções dos problemas (2.23) e (2.24) são obtidas com $P = P_o > 0$ no primeiro caso e $P = P_c > 0$ no segundo caso.

2.3.3 Norma \mathcal{H}_∞

Para o sistema (2.1) com função de transferência (2.3), a sua norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(H(j\omega)), \quad (2.25)$$

onde $\sigma_{\max}(\cdot)$ denota o maior valor singular de uma matriz. Diremos que $\mathcal{G}_c \in \mathcal{H}_\infty$ se, e somente se, o sistema \mathcal{G}_c for assintoticamente estável, o que assegura que o supremo (2.25) é um número

finito. Observe que, da definição acima, resulta

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega))}, \quad (2.26)$$

onde $\lambda_{\max}(\cdot)$ denota o maior valor próprio de uma matriz.

Analisemos o significado da norma \mathcal{H}_∞ no domínio do tempo. Vamos supor que o sistema satisfaz a restrição $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$, o que fornece a condição equivalente

$$\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega) < \gamma \mathbf{I}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.27)$$

uma vez que (2.26) é satisfeita. Da condição acima, podemos obter a seguinte restrição equivalente

$$\hat{\mathbf{y}}(j\omega)^* \hat{\mathbf{y}}(j\omega) - \gamma \hat{\mathbf{w}}(j\omega)^* \hat{\mathbf{w}}(j\omega) < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Integrando-se ambos os termos da desigualdade acima para todo $\omega \in \mathbb{R}$ e utilizando-se o Teorema de Parseval (Teorema A.1), obtemos

$$\int_0^\infty (\mathbf{y}(t)' \mathbf{y}(t) - \gamma \mathbf{w}(t)' \mathbf{w}(t)) dt < 0, \quad (2.29)$$

condição que é satisfeita se, e somente se, $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_2$, uma vez que $\mathcal{G}_c \in \mathcal{H}_\infty$. Portanto, para dado $\gamma > 0$, a desigualdade $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$ é válida se, e somente se,

$$\sup_{\mathbf{w} \neq 0 \in \mathcal{L}_2} \|\mathbf{y}\|_2^2 - \gamma \|\mathbf{w}\|_2^2 < 0. \quad (2.30)$$

Logo, das condições acima, podemos observar que tomando-se $\gamma > 0$ como o menor valor que satisfaz a desigualdade (2.30), temos que $\sqrt{\gamma}$ coincide com a norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Portanto,

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0} \{\gamma : (2.30)\} = \sup_{\mathbf{w} \neq 0 \in \mathcal{L}_2} \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}, \quad (2.31)$$

identidade que define a norma \mathcal{H}_∞ como o ganho \mathcal{L}_2 de pior caso para o sistema em estudo.

O cálculo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.1) será realizado através de problemas de otimização convexa. O teorema a seguir (de Oliveira 1999) fornece condições expressas por LMIs que permitem determinar a referida norma.

Teorema 2.2 *Com relação ao sistema (2.1) e sua função de transferência (2.3), as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma;$

(ii) $\sigma_{\max}(F) < \sqrt{\gamma}$ e existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$, tal que

$$A'P + PA + (PE + C'F)(\gamma I - F'F)^{-1}(E'P + F'C) + C'C = 0; \quad (2.32)$$

(iii) $\sigma_{\max}(F) < \sqrt{\gamma}$ e existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$, tal que

$$AP + PA' + (PC' + EF')(\gamma I - FF')^{-1}(CP + FE') + EE' = 0; \quad (2.33)$$

(iv) existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PE & C' \\ \bullet & -\gamma I & F' \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (2.34)$$

(v) existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & E & PC' \\ \bullet & -I & F' \\ \bullet & \bullet & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.35)$$

O valor da norma \mathcal{H}_∞ do sistema \mathcal{G}_c pode ser calculado através dos seguintes problemas de otimização semidefinida

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0, P > 0} \{\gamma : (2.34)\} \quad (2.36)$$

ou

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0, P > 0} \{\gamma : (2.35)\}. \quad (2.37)$$

2.4 Normas para Sistemas a Tempo Discreto

Esta seção tem por objetivo analisar resultados análogos aos da seção anterior, porém para sistemas a tempo discreto, da forma (2.2). Portanto, definimos primeiramente o espaço ℓ_p e sua norma associada e, assim como no caso contínuo, o espaço ℓ_2 será utilizado para interpretar as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

2.4.1 Normas de Trajetórias e o Espaço ℓ_p

Trajetórias de sistemas a tempo discreto são sequências $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que cada termo $f(k)$ será indicado por f_k , por simplicidade. De forma análoga ao caso contínuo, o estudo de normas de trajetórias é essencial para analisar sistemas dinâmicos a tempo discreto. Definimos a norma ℓ_p da trajetória f como (Kreyszig 1978)

$$\|f\|_p = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.38)$$

O espaço normado ℓ_p é o conjunto de todas as trajetórias f com a norma ℓ_p finita (Kreyszig 1978) e este conjunto também é um espaço de Banach. Assim como no caso contínuo, o caso $p = 2$, ou seja, o espaço ℓ_2 é notavelmente importante. Este espaço é formado por todas as sequências quadraticamente somáveis e sua norma associada está diretamente relacionada com as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

2.4.2 Norma \mathcal{H}_2

Consideremos o sistema a tempo discreto (2.2) e sua função de transferência (2.4). Definimos sua norma \mathcal{H}_2 como sendo

$$\|\mathcal{G}_d\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} (H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega})) \, d\omega}. \quad (2.39)$$

De forma análoga ao caso contínuo, diremos que $\mathcal{G}_d \in \mathcal{H}_2$ se, e apenas se, a integral (2.39) for convergente. Utilizando o Teorema de Parseval (Teorema A.2), podemos reescrever a norma \mathcal{H}_2 na forma

$$\|\mathcal{G}_d\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{tr} (h_k' h_k)}, \quad (2.40)$$

o que indica que o quadrado da norma \mathcal{H}_2 é a soma dos quadrados das normas ℓ_2 das colunas da sua resposta ao impulso $h_k = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$.

É importante observar que o sistema \mathcal{G}_d , com função de transferência (2.4), pertence à classe \mathcal{H}_2 se, e somente se, sua matriz dinâmica A for Schur. Com efeito, utilizando a transformada \mathcal{Z} inversa, temos que a resposta ao impulso é dada por

$$h_k = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = \begin{cases} F & , \text{ se } k = 0 \\ CA^{k-1}E & , \text{ se } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.41)$$

de onde segue que a série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{tr}(h'_k h_k) = \mathbf{tr} \left(E' \sum_{k \in \mathbb{N}} (A')^k C' C A^k E \right) + \mathbf{tr}(F'F) \quad (2.42)$$

é convergente se, e somente se, A for Schur.

Portanto, de forma análoga à realizada para sistemas contínuos, a norma \mathcal{H}_2 pode ser obtida através da relação

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \mathbf{tr}(E' P_o E) + \mathbf{tr}(F'F) = \mathbf{tr}(C P_c C') + \mathbf{tr}(F'F), \quad (2.43)$$

onde

$$P_o = \sum_{k \in \mathbb{N}} (A')^k C' C A^k \quad (2.44)$$

é o *gramiano de observabilidade* do sistema (2.2) e

$$P_c = \sum_{k \in \mathbb{N}} A^k E E' (A')^k \quad (2.45)$$

é o seu *gramiano de controlabilidade*. Assim sendo, as matrizes P_o e P_c definidas acima são soluções das equações de Lyapunov a tempo discreto (Geromel & Korogui 2011)

$$A' P_o A - P_o + C' C = 0 \quad (2.46)$$

$$A P_c A' - P_c + E E' = 0. \quad (2.47)$$

Para finalizar esta análise, mostraremos como a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.2) pode ser computada através da resolução de um problema de otimização semidefinida. O lema a seguir possibilita a obtenção deste resultado.

Lema 2.4 *Seja A uma matriz Schur. Se os pares (P_1, Q_1) e (P_2, Q_2) satisfazem a equação de Lyapunov $A' P A - P + Q = 0$, então $Q_1 > Q_2$ implica $P_1 > P_2$.*

Prova: Consideremos as matrizes $\Delta P = P_1 - P_2$ e $\Delta Q = Q_1 - Q_2 > 0$. Então,

$$A' P_1 A - P_1 + Q_1 = 0 = A' P_2 A - P_2 + Q_2$$

fornece

$$A' \Delta P A - \Delta P + \Delta Q = 0.$$

Como A é Schur, temos que $\Delta Q > 0$ implica $\Delta P > 0$. Portanto, $Q_1 > Q_2$ implica $P_1 > P_2$ e a prova está completa. \square

Considere a desigualdade de Lyapunov $A'PA - P + C'C < 0$. Qualquer solução $P > 0$ desta inequação é tal que $P > P_o$. De fato, se P satisfaz essa desigualdade, então existe $R > 0$ tal que $A'PA - P + C'C = -R$ e, através do resultado acima, concluímos que $P > P_o$. Portanto, podemos obter a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.2) resolvendo o problema de otimização semidefinida

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{tr}(E'PE + F'F) : A'PA - P + C'C < 0\}. \quad (2.48)$$

Utilizando o mesmo argumento para o gramiano de controlabilidade, temos o problema alternativo

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{tr}(CPC' + FF') : APA' - P + EE' < 0\}. \quad (2.49)$$

Analogamente ao caso contínuo, as soluções dos problemas (2.48) e (2.49) são $P = P_o > 0$ para o primeiro caso e $P = P_c > 0$ para o segundo caso, respectivamente. Todavia, $\|\mathcal{G}_d\|_2$ finita não implica que sua função de transferência seja estritamente própria.

2.4.3 Norma \mathcal{H}_∞

Consideremos o sistema dinâmico (2.2), com função de transferência (2.4). Definimos sua norma \mathcal{H}_∞ como

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}(H(e^{j\omega})). \quad (2.50)$$

Diremos que $\mathcal{G}_d \in \mathcal{H}_\infty$ se, e somente se, o sistema \mathcal{G}_d for assintoticamente estável, quando então o supremo (2.50) é um número finito.

Analisemos o significado da norma \mathcal{H}_∞ no domínio do tempo. Suponhamos que o sistema satisfaz a restrição $\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 < \gamma$, com $\gamma > 0$. Usando raciocínio análogo ao caso contínuo, podemos observar que tal restrição é equivalente a

$$H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega}) < \gamma I, \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad (2.51)$$

de onde podemos concluir que

$$\hat{y}(e^{j\omega})^* \hat{y}(e^{j\omega}) - \gamma \hat{w}(e^{j\omega})^* \hat{w}(e^{j\omega}) < 0. \quad (2.52)$$

Integrando-se a expressão acima no intervalo $[0, 2\pi]$ e usando o Teorema de Parseval (Teorema

A.2), obtemos a desigualdade

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \gamma \mathbf{w}'_k \mathbf{w}_k) < 0. \quad (2.53)$$

Observe que a série acima é válida e converge se, e somente se, $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \ell_2$, uma vez que $\mathcal{G}_d \in \mathcal{H}_\infty$. Sendo assim, $\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 < \gamma$, com $\gamma > 0$, se, e apenas se,

$$\sup_{\mathbf{w} \neq 0 \in \ell_2} \|\mathbf{y}\|_2^2 - \gamma \|\mathbf{w}\|_2^2 < 0. \quad (2.54)$$

Logo, das condições acima, podemos observar que, tomando-se $\gamma > 0$ como o menor valor que satisfaz a desigualdade (2.54), temos que $\sqrt{\gamma}$ coincide com a norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Portanto,

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0} \{\gamma : (2.54)\} = \sup_{\mathbf{w} \neq 0 \in \ell_2} \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}, \quad (2.55)$$

identidade que define a norma \mathcal{H}_∞ como o ganho ℓ_2 de pior caso.

O cômputo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.2) será realizado através de problemas de otimização semidefinida. O teorema a seguir (de Oliveira 1999) fornece condições expressas através de LMIs que nos permitem realizar o cálculo da referida norma.

Teorema 2.3 *Com relação ao sistema (2.2) e sua função de transferência (2.4), as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 < \gamma;$

(ii) *Existe uma matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{P} > 0$ tal que*

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} + (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{E} + \mathbf{C}'\mathbf{F})(\gamma\mathbf{I} - \mathbf{F}'\mathbf{F} - \mathbf{E}'\mathbf{P}\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{E}'\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{F}'\mathbf{C}) + \mathbf{C}'\mathbf{C} = 0, \quad (2.56)$$

com $\gamma\mathbf{I} - \mathbf{F}'\mathbf{F} - \mathbf{E}'\mathbf{P}\mathbf{E} > 0$.

(iii) *Existe uma matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{P} > 0$ tal que*

$$\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}' - \mathbf{P} + (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}' + \mathbf{E}\mathbf{F}')(\gamma\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{F}' - \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}')^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{F}\mathbf{E}') + \mathbf{E}\mathbf{E}' = 0, \quad (2.57)$$

com $\gamma\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{F}' - \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}' > 0$.

(iv) existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} P & A'P & 0 & C' \\ \bullet & P & PE & 0 \\ \bullet & \bullet & \gamma I & F' \\ \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0; \quad (2.58)$$

(v) existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} P & AP & E & 0 \\ \bullet & P & 0 & PC' \\ \bullet & \bullet & I & F' \\ \bullet & \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.59)$$

O valor da norma \mathcal{H}_∞ do sistema pode ser calculado através dos seguintes problemas de otimização semidefinida

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0, P > 0} \{\gamma : (2.58)\} \quad (2.60)$$

ou

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0, P > 0} \{\gamma : (2.59)\}. \quad (2.61)$$

2.5 Regulador Linear Quadrático

Nesta seção, discutiremos um problema clássico de controle ótimo, chamado de *problema linear quadrático*. Para este fim, consideraremos o sistema dinâmico linear invariante no tempo

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = \xi \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.62)$$

em tempo contínuo e

$$\mathcal{G}_d : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, & x_0 = \xi \\ z_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (2.63)$$

em tempo discreto. O vetor $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o seu estado, a entrada $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle, a ser projetado, e as matrizes têm dimensões compatíveis.

Desejamos determinar a entrada de controle u que minimiza o critério de desempenho quadrático

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^\infty z(t)'z(t) dt = \int_0^\infty x'Qx + 2x'Su + u'Ru dt, \quad (2.64)$$

no caso contínuo, ou

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} z'_k z_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} x'_k Q x_k + 2x'_k S u_k + u'_k R u_k, \quad (2.65)$$

no caso discreto, onde $Q = C'C \geq 0$, $S = C'D$ e $R = D'D > 0$. Note que, em ambos os casos, a trajetória do vetor de estado é penalizada quadraticamente pela matriz Q , enquanto o sinal de controle é penalizado pela matriz R . Assim, o controle ótimo obtido com um dos índices de desempenho (2.64) ou (2.65) induz o sistema ao ponto de equilíbrio com rapidez, porém sem sobrecarga no sinal de controle.

O teorema a seguir fornece a entrada de controle que minimiza o critério quadrático (2.64).

Teorema 2.4 (Regulador Linear Quadrático) *Considere o sistema dinâmico (2.62). A solução ótima para o problema linear quadrático*

$$\inf_{\mathbf{u}} \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_0^{\infty} z(t)' z(t) dt \quad (2.66)$$

é dada por $\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t)$, com o ganho ótimo de realimentação de estado sendo $K = R^{-1}(B'P + S')$, onde $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a solução simétrica definida positiva da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - (PB + S)R^{-1}(B'P + S') + Q = 0. \quad (2.67)$$

Além disso, o valor ótimo do critério de desempenho é $\inf_{\mathbf{u}} \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \xi'P\xi$.

Prova: A prova é baseada na função de Lyapunov $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'P\mathbf{x}$, onde $P > 0$ é solução da equação de Riccati (2.67). Derivando-se a função em relação ao tempo e usando $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, temos

$$\begin{aligned} \dot{v}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}'P\mathbf{x} + \mathbf{x}'P\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}'(A'P + PA)\mathbf{x} + \mathbf{x}'PB\mathbf{u} + \mathbf{u}'B'P\mathbf{x}. \end{aligned}$$

A partir da igualdade acima e, usando que $A'P + PA = (PB + S)R^{-1}(B'P + S') - Q$, uma vez que P é solução de (2.67), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{x}'[(PB + S)R^{-1}(B'P + S')]\mathbf{x} + \mathbf{x}'PB\mathbf{u} + \mathbf{u}'B'P\mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}'Q\mathbf{x} - \mathbf{u}'R\mathbf{u} - 2\mathbf{x}'S\mathbf{u} + [\mathbf{u} + R^{-1}(B'P + S')\mathbf{x}]'R[\mathbf{u} + R^{-1}(B'P + S')\mathbf{x}]. \end{aligned}$$

Integrando-se ambos os membros da igualdade acima, no intervalo $[0, \infty)$, segue que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = v(\xi) - v(\mathbf{x}(\infty)) + \int_0^{\infty} [\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{S}')\mathbf{x}]' \mathbf{R} [\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{S}')\mathbf{x}] dt.$$

Como o sistema em malha fechada deve ser estável, temos que $\mathbf{x}(\infty) = 0$, de onde obtemos

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = v(\xi) + \int_0^{\infty} [\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{S}')\mathbf{x}]' \mathbf{R} [\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{S}')\mathbf{x}] dt \geq v(\xi),$$

uma vez que $\mathbf{R} > 0$. Além disso, como $\mathbf{R} > 0$, o sinal de controle $\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{S}')\mathbf{x}$ torna o custo quadrático mínimo e o valor ótimo atingido é $v(\xi) = \xi' \mathbf{P} \xi$ o que completa a prova. \square

Observe que a escolha de $\mathbf{Q} > 0$ faz com que o critério dependa de todas as variáveis de estado, o que nem sempre ocorre quando \mathbf{Q} é semidefinida positiva. Além disso, quando (\mathbf{A}, \mathbf{B}) for controlável e $\mathbf{Q} > 0$, sempre existe única $\mathbf{P} > 0$ solução de (2.67).

Note ainda que, considerando-se $\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ e $\mathbf{C}_K = \mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K}$, podemos reescrever a equação (2.67) como a seguinte equação de Lyapunov

$$\mathbf{A}'_K \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_K + \mathbf{C}'_K \mathbf{C}_K = 0, \quad (2.68)$$

quando usamos $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{S}')$. Isso indica que, havendo solução $\mathbf{P} > 0$ para a equação (2.67), a matriz \mathbf{A}_K é Hurwitz e o sistema em malha fechada é, de fato, estável.

Vamos agora considerar o caso discreto. O teorema a seguir fornece a entrada de controle que minimiza o critério quadrático (2.65).

Teorema 2.5 (Regulador Linear Quadrático) *Considere o sistema dinâmico (2.63). A solução ótima para o problema linear quadrático*

$$\inf_{\mathbf{u}} \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{z}'_k \mathbf{z}_k \quad (2.69)$$

é dada por $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k$, com o ganho ótimo de realimentação de estado sendo $\mathbf{K} = (\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{S}')$, onde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a solução simétrica definida positiva da equação algébrica de Riccati

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} - (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{S})(\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{S}') + \mathbf{Q} = 0. \quad (2.70)$$

Além disso, o valor ótimo do critério de desempenho é $\inf_{\mathbf{u}} \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \xi' \mathbf{P} \xi$.

Prova: A prova é baseada na função de Lyapunov $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x}$, onde $\mathbf{P} > 0$ é solução da

equação de Riccati (2.70). Tomando-se a primeira diferença na função de Lyapunov e usando que $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, temos

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) - v(x_k) &= x'_{k+1}Px_{k+1} - x'_kPx_k \\ &= x'_k(A'PA - P)x_k + u'_kB'PBu_k + x'_kA'PBu_k + u'_kB'PAx_k. \end{aligned}$$

A partir da igualdade acima e usando $A'PA - P = (A'PB + S)(B'PB + R)^{-1}(B'PA + S') - Q$, uma vez que P é solução de (2.70), obtemos

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) - v(x_k) &= x'_k(A'PB + S)(B'PB + R)^{-1}(B'PA + S')x_k - x'_kQx_k + \\ &\quad + u'_kB'PBu_k + x'_kA'PBu_k + u'_kB'PAx_k \\ &= -x'_kQx_k - u'_kRu_k - 2x_kSu_k + s'_k(B'PB + R)^{-1}s_k, \end{aligned}$$

onde $s_k = (B'PA + S')x_k + (B'PB + R)u_k$. Somando-se ambos os membros em $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathcal{J}(u) = v(x_0) - v(x_\infty) + \sum_{k \in \mathbb{N}} s'_k(B'PB + R)^{-1}s_k.$$

Como desejamos que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, temos que $x_\infty = 0$. Assim, obtemos

$$\mathcal{J}(u) = v(x_0) + \sum_{k \in \mathbb{N}} s'_k(B'PB + R)^{-1}s_k \geq v(x_0),$$

uma vez que $B'PB + R > 0$. O critério quadrático é minimizado para $s_k = 0$, o que ocorre se e apenas se

$$u_k = -(B'PB + R)^{-1}(B'PA + S')x_k.$$

Adicionalmente, para esta entrada de controle, o valor mínimo do critério é $v(x_0) = \xi'P\xi$. \square

Observemos que a positividade de $B'PB + R$ é garantida, pois $P > 0$ implica $B'PB \geq 0$ e $R > 0$. De forma análoga ao caso contínuo, a positividade de $Q > 0$ e a controlabilidade de (A, B) garantem a existência de uma solução $P > 0$ de (2.70).

Assim como no caso contínuo, considerando-se $A_k = A - BK$ e $C_k = C - DK$, podemos reescrever a equação (2.70) como a seguinte equação de Lyapunov

$$A'_kPA_k - P + C'_kC_k = 0, \quad (2.71)$$

quando consideramos $K = (B'PB + R)^{-1}(B'PA + S')$. Tal resultado assegura que a matriz A_k seja Schur sempre que existir uma única solução $P > 0$ para a equação (2.70).

Note que, sem perda de generalidade, podemos supor que $S = C'D = 0$, pois sempre existe uma transformação nas variáveis do problema que ortogonaliza o produto $C'D$. Com efeito, considerando-se $z = Cx + Du$ com $D'D = R > 0$, temos que

$$z'z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Aplicando a transformação $\hat{u} = R^{-1}S'x + u$, obtemos

$$\begin{aligned} z'z &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} I & SR^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R^{-1}S' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ \hat{u} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde $\hat{Q} = Q - SR^{-1}S'$. Esta transformação é tal que

$$z'z = x'Qx + 2x'Su + u'Ru = x'\hat{Q}x + \hat{u}'R\hat{u}. \quad (2.74)$$

Além disso, por complemento de Schur (Teorema A.3), temos que

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.75)$$

se, e somente se, $\hat{Q} = Q - SR^{-1}S' \geq 0$ e $R > 0$. Como $z'z \geq 0$ para quaisquer x, u , segue que $\hat{Q} \geq 0$. Assim sendo, como a equação dinâmica do sistema é $\dot{x} = Ax + Bu$, então a transformação proposta é tal que

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(\hat{u} - R^{-1}S'x) = (A - BR^{-1}S')x + B\hat{u}. \quad (2.76)$$

Dessa forma, com essa nova equação dinâmica e com o critério tal que $z'z = x'\hat{Q}x + \hat{u}'R\hat{u}$, o problema linear quadrático pode ser resolvido sem o termo cruzado envolvendo x e \hat{u} . Com esta solução, o sinal de controle original é dado por $u(t) = \hat{u}(t) - R^{-1}S'x(t)$. A análise para sistemas a tempo discreto é essencialmente a mesma.

2.6 Considerações Finais

Neste capítulo, analisamos conceitos e resultados fundamentais em análise de sistemas dinâmicos e de controle. A teoria de Lyapunov foi aplicada ao estudo de estabilidade assintótica e, utilizando-se estes resultados, foram obtidas LMIs que fornecem condições de estabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo. Posteriormente, foram apresentadas as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto, sendo que o cômputo de tais normas foi realizado através de problemas de otimização semidefinida. Finalmente, o problema linear quadrático foi resolvido e este problema de controle ótimo será adaptado ao problema de controle através de redes, tema que será desenvolvido no próximo capítulo.

Controle Linear Quadrático através de Redes

Neste capítulo, focamos nossa análise em sistemas de controle em rede sujeitos a limitações em largura de faixa no sinal de controle. Desta forma, primeiramente desenvolvemos um problema semelhante ao Regulador Linear Quadrático, porém com restrições no sinal de controle. Tal problema é convertido em um problema linear quadrático aplicado a um sistema a tempo discreto específico. Com esses resultados, são construídos dois critérios de desempenho, \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , os quais possuem propriedades notáveis. Nas seções subsequentes, são apresentadas técnicas de projeto de controladores por realimentação de estado que minimizam os critérios \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ propostos. Resultados semelhantes foram desenvolvidos por (Chen & Francis 1995), porém com objetivos diferentes e com outro foco de análise.

Para o desenvolvimento dos resultados deste capítulo, consideramos um sistema dinâmico linear invariante no tempo, com realização em espaço de estado da forma

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t), & \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{F}\mathbf{w}(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada exógena. Vamos supor que o sistema e o controlador estão conectados através de uma rede de comunicação, na estrutura direta, como ilustrado na Figura 1.1.

Neste contexto, vamos considerar os efeitos da limitação de faixa no canal de comunicação

sobre o sistema de controle em malha fechada. Assim, a entrada de controle de (3.1) é tal que

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{u}(\mathbf{t}_k), \quad \forall \mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}), \quad (3.2)$$

ou seja, até que ocorra uma atualização na entrada de controle proveniente da rede, cada atuador mantém constante o seu respectivo sinal de controle.

Neste capítulo, adotamos a hipótese de taxa de amostragem constante, ou seja, $\mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k = T$, $\forall k \in \mathbb{N}$, o que modela uma limitação em largura de faixa no canal de comunicação. No capítulo seguinte, relaxamos tal suposição. Além disso, definimos as matrizes

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z \times (n_x+n_u)}, \quad (3.4)$$

que são amplamente utilizadas na exposição dos resultados enunciados a seguir.

3.1 Regulador Linear Quadrático em Rede

Nesta seção, vamos supor que $\xi \neq 0$ e que o sistema é isento de perturbações externas, ou seja, $\mathbf{w} \equiv 0$. Nosso objetivo principal consiste em determinar a entrada de controle que minimiza o critério quadrático

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \mathbf{z}(\mathbf{t})' \mathbf{z}(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}, \quad (3.5)$$

respeitando à restrição de largura de faixa (3.2). Provaremos que esta entrada é da forma

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{t}) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}_k), \quad \forall \mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}) \quad (3.6)$$

e, portanto, nosso objetivo passa a ser a determinação do ganho ótimo $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$.

Tal problema será chamado de *regulador linear quadrático em rede* (LQN¹), devido a sua semelhança com o caso clássico. Evidentemente, temos o interesse de considerar T o maior possível, sem que o desempenho do sistema em malha fechada seja comprometido em demasia.

Primeiramente, notemos que a equação dinâmica do sistema (3.1) tem por solução, no intervalo $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1})$,

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{t} - \mathbf{t}_k)\mathbf{x}(\mathbf{t}_k) + \Gamma(\mathbf{t} - \mathbf{t}_k)\mathbf{u}(\mathbf{t}_k), \quad (3.7)$$

¹Do inglês: *Linear Quadratic Networked Regulator*

onde os operadores $\Phi(\cdot)$ e $\Gamma(\cdot)$ são dados por

$$\Phi(\alpha) = e^{A\alpha} \quad e \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\alpha e^{A\tau} B \, d\tau. \quad (3.8)$$

Para fins de simplicidade, como $t_{k+1} - t_k = T$ e $t_0 = 0$, denotamos $x_k \equiv x(t_k) = x(kT)$ e $u_k \equiv u(t_k) = u(kT)$. Portanto, para $t \in [kT, (k+1)T)$,

$$x(t) = \Phi(t - kT)x_k + \Gamma(t - kT)u_k. \quad (3.9)$$

Os operadores $\Phi(\cdot)$ e $\Gamma(\cdot)$ definidos acima podem ser computados de forma eficiente. Com efeito, a partir das matrizes A e B definidas anteriormente, temos

$$\begin{aligned} e^{A\alpha} &= \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & -\frac{1}{s}(sI - A)^{-1}B \\ 0 & \frac{1}{s}I \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} e^{A\alpha} & \int_0^\alpha e^{A\tau} B \, d\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(\alpha) & \Gamma(\alpha) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dessa forma, com a definição desses operadores, podemos enunciar o teorema a seguir, que fornece um sistema discreto equivalente em termos do custo (3.5).

Teorema 3.1 (Sistema Discreto Equivalente) *Considere o sistema dinâmico (3.1), $w \equiv 0$, e defina matrizes (A_d, B_d, C_d, D_d) de dimensões compatíveis tais que*

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\int_0^T e^{A't} C' C e^{At} \, dt = \begin{bmatrix} C'_d \\ D'_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_d \\ D'_d \end{bmatrix}' \quad (3.12)$$

e o sistema linear a tempo discreto

$$\mathcal{G}_e : \begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, & x_0 = \xi \\ z_k = C_d x_k + D_d u_k. \end{cases} \quad (3.13)$$

Então, a seguinte igualdade é satisfeita

$$\int_0^{\infty} z(t)'z(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k'z_k. \quad (3.14)$$

Prova: Dada a solução (3.9) da equação dinâmica do sistema (3.1), quando $t = (k+1)T$, temos

$$x_{k+1} = \Phi(T)x_k + \Gamma(T)u_k.$$

Portanto, segue que $A_d \equiv \Phi(T)$ e $B_d \equiv \Gamma(T)$ satisfazem (3.11), resultado provado em (3.10).

Consideremos agora a equação de saída do sistema (3.1), que fornece

$$\begin{aligned} z(t) &= C(\Phi(t - kT)x_k + \Gamma(t - kT)u_k) + Du_k \\ &= \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(t - kT) & \Gamma(t - kT) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{C}e^{\mathcal{A}(t-kT)} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

válida para todo $t \in [kT, (k+1)T)$. Portanto, o critério quadrático é tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \int_0^{\infty} z(t)'z(t) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{kT}^{(k+1)T} z(t)'z(t) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^T \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}' e^{\mathcal{A}'\tau} \mathcal{C}' \mathcal{C} e^{\mathcal{A}\tau} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} d\tau \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'_d \\ D'_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_d \\ D'_d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k'z_k, \end{aligned}$$

onde usamos a identidade (3.12) para obter a última igualdade. A prova está completa. \square

Observemos que a identidade (3.14) apresentada no Teorema 3.1 é exata, isto é, não é baseada em nenhuma aproximação. Portanto, obtivemos uma forma de determinar com exatidão a norma \mathcal{L}_2 da saída do sistema contínuo em rede (3.1) através do cômputo da norma ℓ_2 para a saída z de um sistema discreto equivalente. Lembramos que a equação dinâmica de (3.13) pode ser facilmente obtida a partir do sistema original através do cálculo da exponencial de matriz e^{AT} , uma vez que existem técnicas eficientes para a sua avaliação (Golub & Van Loan 1996).

A fim de determinar as matrizes C_d e D_d , devemos calcular a integral

$$\mathcal{Q}(T) = \int_0^T e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau, \quad (3.15)$$

que pode ser obtida de forma confiável e eficaz através de rotinas de integração numérica. Tais rotinas apresentam boa estabilidade numérica, o que faz com que o procedimento seja bastante preciso (Burden & Faires 2011).

Finalmente, calculada a matriz $\mathcal{Q}(T)$, as matrizes C_d e D_d podem ser determinadas através da sua decomposição em valores singulares, (Golub & Van Loan 1996). De fato, como $\mathcal{Q}(T)$ é simétrica e semidefinida positiva, existem matrizes $U \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ unitária e $S \geq 0 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ diagonal, tais que

$$\mathcal{Q}(T) = USU' = GG', \quad (3.16)$$

onde $G = US^{\frac{1}{2}}$. Note que a matriz G está bem-definida, uma vez que $S \geq 0$. Sendo assim, de (3.12) e (3.16), temos que

$$\begin{bmatrix} C_d & D_d \end{bmatrix} = G' = S^{\frac{1}{2}}U'. \quad (3.17)$$

Portanto, C_d e D_d são partições de G' , a primeira contendo as primeiras n_x colunas e a segunda as n_u restantes. Observe que, no caso acima, tanto C_d quanto D_d terão $n_x + n_u$ linhas, sendo que algumas podem ser nulas. Sendo $p = \mathbf{rank}(S)$, definimos a matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times (n_x+n_u)}$ tal que

$$(\Sigma)_{ii} = (S)_{ii}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (3.18)$$

e $(\Sigma)_{ij} = 0$ para $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Neste caso, $G = U\Sigma'$ e C_d, D_d serão matrizes com p linhas linearmente independentes.

É essencial notar que o resultado do Teorema 3.1 é válido para todo $T > 0$. Logo, é interessante observar se este resultado reproduz o problema linear quadrático clássico em tempo contínuo, quando $T \rightarrow 0^+$. De fato, com $T > 0$ suficientemente pequeno, o sistema \mathcal{G}_e é tal que

$$A_d = e^{AT} \approx I + AT \quad (3.19)$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \approx TB \quad (3.20)$$

e a integral (3.15) satisfaz

$$Q(T) = \int_0^T e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau \approx T \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix}', \quad (3.21)$$

de onde segue que $C_d \approx \sqrt{T}C$ e $D_d \approx \sqrt{T}D$. Assim, obtemos

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T} = Ax_k + Bu_k, \quad (3.22)$$

o que implica que o sistema equivalente \mathcal{G}_e se aproxima de (3.1) conforme T tende a zero. Além disso, o critério quadrático satisfaz

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k' z_k &= T \sum_{k \in \mathbb{N}} (Cx_k + Du_k)' (Cx_k + Du_k) \\ &\approx \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{kT}^{(k+1)T} z(t)' z(t) dt = \int_0^\infty z(t)' z(t) dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto, o critério do sistema equivalente se aproxima do critério quadrático para o caso contínuo clássico, conforme T tende a zero, como era esperado. Com esses resultados, podemos enunciar o seguinte teorema, que fornece a solução ótima para o problema linear quadrático em rede.

Teorema 3.2 (Regulador Linear Quadrático em Rede) *Considere o sistema dinâmico (3.1), com $w \equiv 0$, e o sistema (3.13) construído de forma que as afirmações do Teorema 3.1 sejam válidas. Então, a solução ótima para o problema linear quadrático em rede*

$$\inf_{u_k} \mathcal{J}(u_k) = \int_0^\infty z(t)' z(t) dt \quad (3.24)$$

é dada por $u_k(t) = -Kx_k$, para $t \in [kT, (k+1)T)$, onde

$$K = (B_d' P B_d + D_d' D_d)^{-1} (B_d' P A_d + D_d' C_d) \quad (3.25)$$

e $P > 0$ é a solução (única) definida positiva da equação algébrica de Riccati

$$A_d' P A_d - P - (A_d' P B_d + C_d' D_d) (B_d' P B_d + D_d' D_d)^{-1} (A_d' P B_d + C_d' D_d)' + C_d' C_d = 0. \quad (3.26)$$

Além disso, o valor ótimo do critério é $\inf_{u_k} \mathcal{J}(u_k) = \xi' P \xi$.

Prova: Como as hipóteses do Teorema 3.1 são válidas, sabemos que

$$\int_0^{\infty} z(t)'z(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k'z_k,$$

para os sistemas (3.1) e (3.13). Sendo assim, pelo Teorema 2.5, sabemos que a entrada de controle que minimiza

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k'z_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' C_d' C_d x_k + 2x_k' C_d' D_d u_k + u_k' D_d' D_d u_k$$

é dada por $u_k = -Kx_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde a matriz de ganho $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ é dada por (3.25) e P é solução definida positiva de (3.26). Como os critérios são idênticos, a entrada de controle $u_k(t) = -Kx_k$ para $t \in [kT, (k+1)T)$ é ótima para o sistema contínuo em rede (3.1), o que completa a prova. \square

O resultado provado no Teorema 3.2 fornece um ganho de realimentação de estado, projetado a partir de um sistema a tempo discreto, porém que assegura a estabilidade do sistema a tempo contínuo inicial. De fato, o Teorema B.1 fornece a demonstração de estabilidade para sistemas com esta estrutura. O teorema assegura a estabilidade de um sistema a tempo contínuo com realimentação da forma (3.6) sempre que o sistema a tempo discreto equivalente for estável. Os exemplos dados a seguir ilustram os resultados que acabamos de obter.

Exemplo 3.1 Consideremos o sistema dinâmico (3.1), com entrada $w \equiv 0$, realização de estado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e condição inicial $\xi = [1 \ 1]'$. Para vários valores de $T > 0$, determinamos o valor ótimo do índice de desempenho $\mathcal{J}(\mathbf{u}_k)$ que estão representados na Figura 3.1.

O gráfico representado na Figura 3.1 expõe o comportamento não monotônico do valor ótimo do critério em função do período $T > 0$. Sendo assim, é fácil ver que, mesmo para períodos maiores, o desempenho do sistema em malha fechada pode ser melhor. Por exemplo, para $T = 1,25$ [s], temos $\inf_{u_k} \mathcal{J}(\mathbf{u}_k) = 1.256,30$, e para $T = 2,00$ [s], o valor ótimo é $\inf_{u_k} \mathcal{J}(\mathbf{u}_k) = 271,49$.

Notamos a existência de assíntotas verticais para o problema a tempo discreto. Estas singularidades evidenciam a existência de valores do período de amostragem para os quais o sistema em malha fechada é instável. Neste caso, a equação de Riccati para o sistema a tempo discreto equivalente não admite solução estabilizante definida positiva. Este fenômeno é causado por

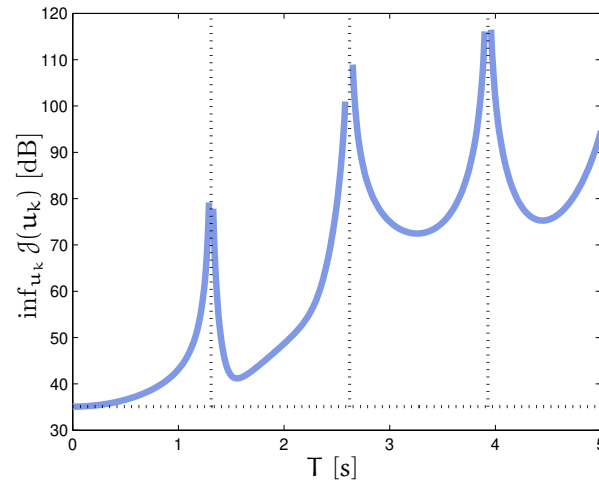


Figura 3.1: Valores para o índice de desempenho $\mathcal{J}(\mathbf{u}_k)$ para $T > 0$.

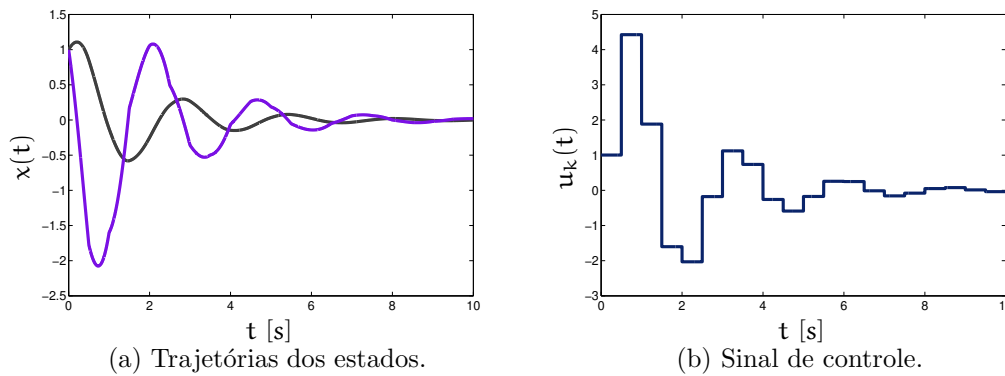


Figura 3.2: Resultados de simulação para $T = 0,5$ [s].

amostragem patológica das variáveis de estado (Seron, Braslavsky & Goodwin 1997), o que cria modos próprios instáveis não controláveis no sistema em malha fechada a tempo discreto.

Por fim, exibimos na Figura 3.2 os resultados de simulação para $T = 0,5$ [s]. Neste caso, o ganho ótimo de realimentação de estado é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2,3649 & 1,3631 \end{bmatrix},$$

o que fornece o valor mínimo do critério como sendo $\inf_{\mathbf{u}_k} \mathcal{J}(\mathbf{u}_k) = 67,4881$.

É importante notar que o desempenho de cada controlador determinado através da aplicação do Teorema 3.2 para cada $T > 0$ dado é ótimo. Por outro lado, um ganho de realimentação de estado calculado através do Teorema 2.4 (aplicado ao sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$) ou do Teorema 2.5

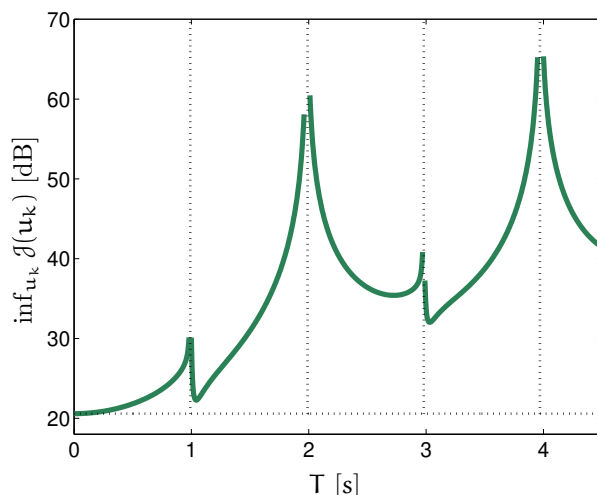


Figura 3.3: Valores para o índice de desempenho $\mathcal{J}(u_k)$ para $T > 0$.

(aplicado ao sistema discretizado (A_d, B_d, C, D)) apresentará desempenho inferior e, além disso, o ganho ótimo para o sistema contínuo pode não ser, nem mesmo, uma solução estabilizante para o sistema em malha fechada que acabamos de projetar. Isso ocorre pois, nesses dois últimos casos, a restrição (3.2) não é tratada de forma exata. O exemplo 3.2 a seguir tem por objetivo ilustrar essa situação.

Exemplo 3.2 Consideremos o sistema dinâmico (3.1), com entrada $w \equiv 0$, realização de estado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e condição inicial $\xi = [1 \ 1]'$. Assim como no exemplo anterior, resolvemos o problema de controle ótimo apresentado no Teorema 3.2 para vários valores de $T > 0$. O gráfico dos valores ótimos do critério quadrático está representado na Figura 3.3. Como no exemplo anterior, nota-se a existência de assíntotas verticais para o problema a tempo discreto.

Para $T = 1,04$ [s], calculamos os ganhos de realimentação de estado K_c , K_d e K_* da seguinte forma:

- K_c é obtido através do Teorema 2.4 para o sistema (A, B, C, D) .
- K_d é obtido através do Teorema 2.5 para o sistema discretizado (A_d, B_d, C, D) tradicional.
- K_* é obtido através do Teorema 3.2.

A Figura 3.4 mostra a evolução do custo quadrático do sistema em malha fechada utilizando os

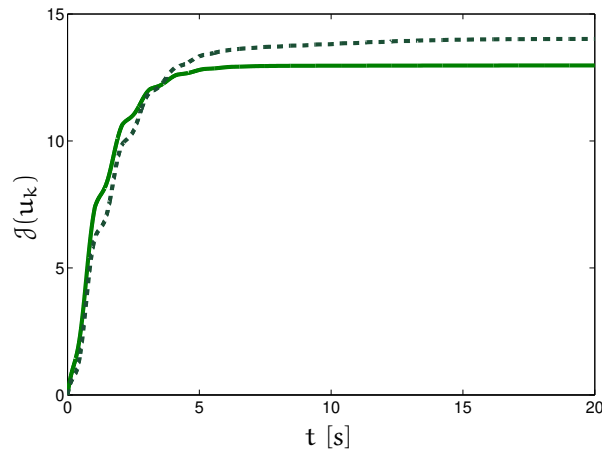


Figura 3.4: Evolução do índice de desempenho $\mathcal{J}(\mathbf{u}_k)$ com o tempo de simulação.

ganhos \mathbf{K}_d (linha tracejada) e \mathbf{K}_* (linha contínua). Com o ganho \mathbf{K}_c ele não é estável, ou seja, o ganho assim calculado não é estabilizante.

Os exemplos discutidos acima ilustram os aspectos mais importantes dos resultados desta seção. Deve-se notar que o período de amostragem tem grande impacto no desempenho do sistema em malha fechada e pode ser um importante parâmetro a ser projetado em sistemas de controle com limitação de largura de faixa. Nesse caso, a análise da variação do critério de desempenho em função de $T > 0$ é essencial para que esse parâmetro seja escolhido com a devida parcimônia. No Apêndice B é feita uma análise a respeito de períodos de amostragem para os quais não existe uma solução estabilizante para o sistema a tempo discreto equivalente em estudo.

3.2 Critérios de Desempenho

Nesta seção, desenvolvemos dois critérios de desempenho, baseados nos resultados do Teorema 3.1, que são associados a sistemas de controle com largura de faixa limitada. Tais índices estão relacionados com os conceitos de norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo.

Consideramos o sistema (3.1) em malha aberta e com condições iniciais nulas, ou seja, $\mathbf{u}_k \equiv 0$ e $\xi = 0$. Além disso, vamos supor que a matriz \mathbf{A} seja Hurwitz, o que implica que \mathbf{A}_d fornecida pelo Teorema 3.1 é Schur para todo $T > 0$ dado.

3.2.1 Critério de desempenho \mathcal{H}_2

Nesta subseção apresentamos um critério de desempenho que é fortemente relacionado com a norma \mathcal{H}_2 para o sistema (3.1). Como é usual para a definição da norma \mathcal{H}_2 , vamos impor que $F = 0$ e que a perturbação w é da forma $w(t) = e_i \delta(t)$, onde $\{e_i \in \mathbb{R}^{n_w}, i = 1, \dots, n_w\}$ é a base canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n_w} . Portanto, denotando por z^i a trajetória de saída associada à entrada $e_i \delta(t)$, o critério de desempenho \mathcal{H}_2 é definido como sendo

$$\mathcal{J}_2 = \|C(sI - A)^{-1}E\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n_w} \int_0^{\infty} z^i(t)' z^i(t) dt. \quad (3.27)$$

Observemos que cada entrada impulsiva em $t = 0$ cria uma descontinuidade na condição inicial do sistema, o que faz com que a condição inicial $x(0) = 0$ se mova instantaneamente para $x(0^+) = Ee_i$, $i = 1, \dots, n_w$. Pelo Teorema 3.1, temos que

$$\int_0^{\infty} z^i(t)' z^i(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} (z_k^i)' (z_k^i) \quad (3.28)$$

fornece a identidade

$$\text{tr} \left(E' \int_0^{\infty} e^{\Lambda' t} C' C e^{\Lambda t} dt E \right) = \text{tr} \left(E' \sum_{k \in \mathbb{N}} (A_d^k)' C_d' C_d (A_d^k) E \right), \quad (3.29)$$

para $x_{k+1} = A_d x_k$, $x_0 = Ee_i$ e $z_k^i = C_d x_k$. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \|C(sI - A)^{-1}E\|_2^2 \\ &= \text{tr} \left(E' \int_0^{\infty} e^{\Lambda' t} C' C e^{\Lambda t} dt E \right) \\ &= \text{tr} \left(E' \sum_{k \in \mathbb{N}} (A_d^k)' C_d' C_d (A_d^k) E \right) \\ &= \|C_d(zI - A_d)^{-1}E\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

É importante notar que as matrizes A_d e C_d obtidas com o uso do Teorema 3.1 dependem do período de amostragem $T > 0$, mas, como acabamos de mostrar, o índice \mathcal{J}_2 é constante para todo T . Além disso, a identidade (3.30) fornece uma forma alternativa para calcular o critério de desempenho \mathcal{J}_2 em termos da norma \mathcal{H}_2 do sistema discreto equivalente fornecido pelo Teorema 3.1. No decorrer desta dissertação, ficará claro que este resultado é muito útil quando lidamos com sistemas de controle através da rede.

3.2.2 Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞

Nesta subseção focamos nossa análise em um critério de desempenho relacionado com a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (3.1). Agora vamos supor que $w \in \mathcal{L}_2$ seja uma perturbação não-nula arbitrária transmitida através de um canal de comunicação com período de amostragem $T > 0$. Isso significa que w é modelada por

$$w(t) = w_k(t) = w(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.31)$$

onde $t_{k+1} - t_k = T$ para todo $k \in \mathbb{N}$. No presente contexto, esse modelo é natural e é de nosso interesse pois consideramos que w atua como uma perturbação aditiva no canal de controle.

Definimos o critério de desempenho \mathcal{J}_∞ na forma

$$\mathcal{J}_\infty = \sup_{w \neq 0 \in \mathcal{L}_2} \frac{\int_0^\infty z(t)'z(t) dt}{\int_0^\infty w_k(t)'w_k(t) dt}, \quad (3.32)$$

que é o quadrado da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.1). Note que, se considerarmos a entrada w genérica, segue que

$$\mathcal{J}_\infty \leq \sup_{w \neq 0 \in \mathcal{L}_2} \frac{\int_0^\infty z(t)'z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)'w(t) dt} = \|C(sI - A)^{-1}E + F\|_\infty^2, \quad (3.33)$$

que é o quadrado da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.1) em malha aberta e sem as restrições impostas pela rede. O lema a seguir oferece um resultado importante para o cálculo deste critério.

Lema 3.1 (Critério \mathcal{H}_∞) *Considere o sistema (3.1) com entrada $u_k \equiv 0$, com condições iniciais $\xi = 0$ e com matriz dinâmica A Hurwitz. Considere ainda que a perturbação externa w satisfaz (3.31) com $t_{k+1} - t_k = T > 0$. Defina o sistema a tempo discreto*

$$\mathcal{G}_\infty : \begin{cases} x_{k+1} &= A_d x_k + E_d w_k, & x_0 = 0 \\ z_k &= C_d x_k + F_d w_k, \end{cases} \quad (3.34)$$

obtido a partir de (3.1) com (A_d, E_d, C_d, F_d) que satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1 com entrada w_k . Então, o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ definido por (3.32) satisfaz a igualdade

$$\mathcal{J}_\infty = \frac{1}{T} \|\mathcal{G}_\infty\|_\infty^2. \quad (3.35)$$

Prova: Primeiramente observemos que, como $w_k \in \mathcal{L}_2$ é constante por partes, a igualdade

$$\int_0^\infty w_k(t)'w_k(t) dt = T \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k' w_k$$

é claramente satisfeita. Além disso, o Teorema 3.1 fornece que

$$\int_0^\infty z(t)'z(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} z'_k z_k.$$

Utilizando as duas identidades acima, obtemos

$$\mathcal{J}_\infty = \sup_{w_k \neq 0 \in \ell_2} \frac{\int_0^\infty z(t)'z(t) dt}{\int_0^\infty w_k(t)'w_k(t) dt} = \sup_{w \neq 0 \in \ell_2} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} z'_k z_k}{T \sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k} = \frac{1}{T} \|\mathcal{G}_\infty\|_\infty^2$$

e a prova está completa. \square

O resultado acima fornece um modo simples de calcular o índice \mathcal{J}_∞ através da norma \mathcal{H}_∞ clássica do sistema a tempo discreto equivalente. Sendo assim, como no caso \mathcal{H}_2 , essa forma é essencial para o projeto de controladores através de redes com limitação na taxa de transmissão. Porém, o critério \mathcal{H}_∞ desenvolvido difere do anterior em uma característica importante: enquanto o índice \mathcal{J}_2 não depende do período de amostragem, o critério \mathcal{H}_∞ é fortemente influenciado por este.

O resultado a seguir fornece uma análise do comportamento do índice \mathcal{J}_∞ para valores de $T > 0$ arbitrariamente grandes ou pequenos.

Lema 3.2 *Suponha que as hipóteses do Lema 3.1 são válidas e considere o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ dado por (3.32). Então as seguintes identidades são satisfeitas:*

$$(i) \quad \lim_{T \rightarrow 0^+} \mathcal{J}_\infty = \|C(sI - A)^{-1}E + F\|_\infty^2;$$

$$(ii) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\infty = \sigma_{max}^2(F - CA^{-1}E).$$

Prova: (i) Note que, por soma de Riemann, temos que

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k T = \int_0^\infty w(t)'w(t) dt,$$

onde usamos que $w_k = w(t_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \mathcal{J}_\infty = \lim_{T \rightarrow 0^+} \sup_{w \in \ell_2} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} z'_k z_k}{T \sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k} = \sup_{w \in \ell_2} \frac{\int_0^\infty z(t)'z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)'w(t) dt} = \|C(sI - A)^{-1}E + F\|_\infty^2.$$

A segunda igualdade é obtida utilizando o Teorema 3.1. A prova está completa.

(ii) Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\infty &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sup_{w \in \ell_2} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} z'_k z_k}{\sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sup_{w \in \ell_2} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C'_d \\ F'_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_d \\ F'_d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}}{\sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k} \\
&= \sup_{w \in \ell_2} \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{N}} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}' \mathcal{Q}(T) \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}}{\sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k},
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Q}(T) = \int_0^T e^{-A'\xi} c' c e^{A\xi} d\xi$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} C & F \end{bmatrix}.$$

Portanto, é essencial determinar o limite $\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{1}{T} \mathcal{Q}(T)$. Vamos utilizar a seguinte notação

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(T) &= \int_0^T \begin{bmatrix} \Phi' & 0 \\ \Gamma' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & C'F \\ F'C & F'F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} d\xi \\
&= \begin{bmatrix} \int_0^T \Phi' C' C \Phi d\xi & \int_0^\infty [\Phi' C' C \Gamma + \Phi' C' F] d\xi \\ \bullet & \int_0^T [\Gamma' C' C \Gamma + \Gamma C' F + F' C \Gamma + F' F] d\xi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ \bullet & Q_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde $\Phi \equiv \Phi(\xi) = e^{A\xi}$ e $\Gamma \equiv \Gamma(\xi) = \int_0^\xi e^{A\tau} E d\tau = A^{-1}(e^{A\xi} - I)E$. Note que a matriz A tem inversa pois, por hipótese, ela é Hurwitz. Assim sendo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_1(T) = \int_0^\infty e^{A'\xi} C' C e^{A\xi} d\xi = P,$$

onde $P > 0$ é solução da equação de Lyapunov $A'P + PA + C'C = 0$ e, portanto, constante. Logo,

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Q_1(T) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} Q_2(T) &= \int_0^\infty \left[e^{A'\xi} C' C A^{-1} (e^{A\xi} - I) E + e^{A'\xi} C' F \right] d\xi \\ &= P A^{-1} E + (A')^{-1} C' C A^{-1} E - (A')^{-1} C' F, \end{aligned}$$

onde P é dada acima. Logo, por este limite também ser uma constante, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Q_2(T) = 0$. Analisando o bloco Q_3 , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Q_3(T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\Gamma' C' C \Gamma + \Gamma C' F + F' C \Gamma + F' F] d\xi \\ &= E' (A')^{-1} C' C A^{-1} E - E' (A')^{-1} C' F - F' C A^{-1} E + F' F \\ &= (F - C A^{-1} E)' (F - C A^{-1} E), \end{aligned}$$

onde as passagens utilizadas para o cálculo do limite são análogas às realizadas para os blocos Q_1 e Q_2 . Portanto, os resultados acima fornecem

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Q(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (F - C A^{-1} E)' (F - C A^{-1} E) \end{bmatrix}.$$

Com isso, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\infty &= \sup_{w \neq 0 \in \ell_2} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k (F - C A^{-1} E)' (F - C A^{-1} E) w_k}{\sum_{k \in \mathbb{N}} w'_k w_k} \\ &= \|F - C A^{-1} E\|_2^2 \\ &= \sigma_{\max}^2(F - C A^{-1} E), \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

O resultado do Lema 3.2 fornece o comportamento assintótico do critério de desempenho \mathcal{H}_∞ para valores de extremos de $T > 0$. Quando $T > 0$ é um número arbitrariamente pequeno, notamos que o índice \mathcal{J}_∞ se aproxima arbitrariamente do quadrado da norma \mathcal{H}_∞ do sistema quando não são supostas restrições sobre a entrada w . Além disso, mostramos que essa norma é, na verdade, uma cota superior para o critério \mathcal{H}_∞ desenvolvido.

Note que o primeiro item pode ser justificado de uma forma alternativa. Quando $T > 0$ é um número arbitrariamente pequeno, temos que $A_d \approx I + TA$, $E_d \approx TE$, $C_d \approx \sqrt{T}C$ e $F_d \approx \sqrt{T}F$.

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\infty &= \frac{1}{T} \|C_d(zI - A_d)^{-1}E_d + F_d\|_\infty^2 \\
&\approx \left\| C \left(\frac{zI - I}{T} - A \right)^{-1} E + F \right\|_\infty^2 \\
&\approx \sup_{\omega \in [0, \pi/T)} \sigma_{\max}^2 \left(H \left(\frac{e^{j\omega T} - 1}{T} \right) \right) \\
&\approx \|C(sI - A)^{-1}E + F\|_\infty^2,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde a última aproximação segue da aproximação linear

$$e^{j\omega T} \approx 1 + j\omega T,$$

válida para todo $\omega \in \mathbb{R}$ com $T > 0$ arbitrariamente pequeno.

Finalmente, o segundo item do lema anterior fornece o comportamento para valores de T extremamente grandes, que fazem com que o custo tenda a uma constante. Uma interpretação dessa característica está relacionada com a hipótese de que $w \in \mathcal{L}_2$, o que faz com que $\|w(t)\|_2 \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Dessa forma, se o período de amostragem for suficientemente grande, apenas a primeira amostra de w irá influenciar o sistema, pois as normas das demais amostras estarão arbitrariamente próximas de zero. O exemplo dado a seguir ilustra os resultados discutidos nesta subseção.

Exemplo 3.3 *Consideremos o sistema dinâmico (3.1) em malha aberta, isto é, com $u_k \equiv 0$ e realização de estado*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad F = 1,$$

com condições iniciais nulas. A Figura 3.5 representa o gráfico de \mathcal{J}_∞ contra o valor de $T > 0$. Para $T \rightarrow 0$, está ilustrada a proposição (i) do Lema 3.2 e para $T \rightarrow \infty$, temos a comprovação da afirmação (ii) do mesmo lema. Além disso, note que a desigualdade (3.33) é claramente satisfeita.

As próximas seções têm por objetivo analisar o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas com limitação em largura de faixa. Com esta finalidade, utilizamos os critérios de desempenho apresentados nesta seção e os resultados desenvolvidos neste capítulo. A técnica a ser utilizada é fortemente baseada nos Teoremas 3.1 e 3.2, que fornecem a solução do problema

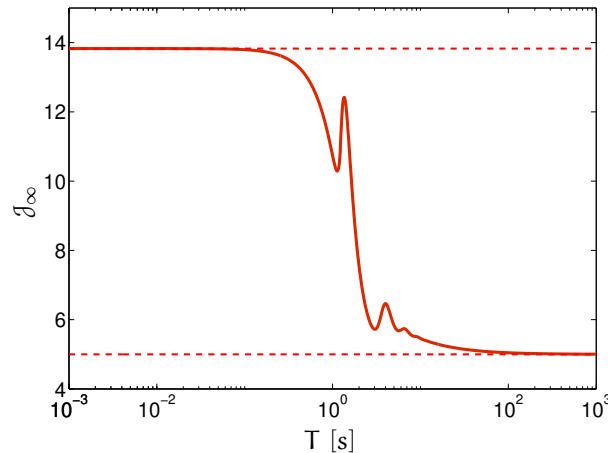


Figura 3.5: Comportamento do critério \mathcal{J}_∞ contra o período de amostragem T .

a ser considerado através de um sistema equivalente a tempo discreto.

3.3 Projeto de Controle \mathcal{H}_2

Nesta seção, consideramos o sistema dinâmico \mathcal{G} com realização no espaço de estado dada por (3.1) e com condições iniciais nulas $\xi = 0$. Além disso, devemos supor $F = 0$ para que a norma \mathcal{H}_2 seja finita.

Nosso objetivo é determinar a entrada de controle $\mathbf{u}_k(\mathbf{t}) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}_k)$, para $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1})$, tal que o índice \mathcal{J}_2 do sistema em malha fechada seja minimizado. Como foi mostrado na seção anterior, este índice está fortemente relacionado com a norma \mathcal{H}_2 e, portanto, a estratégia a ser seguida é de minimizar a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Considerando a entrada $\mathbf{w}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}_i \delta(\mathbf{t})$, para $i = 1, \dots, \mathbf{n}_w$, e utilizando o mesmo argumento da seção anterior, ela apenas promove uma alteração na condição inicial. Assim sendo, utilizando a igualdade (3.30) e o sistema discreto equivalente com realização $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d)$, tal que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam válidas, obtemos a identidade

$$\inf_{\mathbf{u}_k} \mathcal{J}_2 = \inf_{\mathbf{K}} \left\| (\mathbf{C}_d - \mathbf{D}_d \mathbf{K})(z\mathbf{I} - (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}))^{-1} \mathbf{E} \right\|_2^2, \quad (3.37)$$

que é o problema clássico de controle ótimo \mathcal{H}_2 para sistemas a tempo discreto.

O ganho ótimo de realimentação de estado, considerando-se \mathbf{E} apenas para condições iniciais, pode ser obtido através do resultado do Teorema 3.2, onde a solução $\mathbf{P} > 0$ da equação de Riccati

$$(\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K})' \mathbf{P} (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}) - \mathbf{P} + (\mathbf{C}_d - \mathbf{D}_d \mathbf{K})' (\mathbf{C}_d - \mathbf{D}_d \mathbf{K}) = 0 \quad (3.38)$$

fornece $K = (B_d'PB_d + D_d'D_d)^{-1}(B_d'PA_d + D_d'C_d)$. Este ganho ótimo, quando a restrição (3.2) é considerada, é único. Além disso, este ganho é estabilizante para o sistema original como consequência dos resultados dos Teoremas 3.1 e B.1. Para isso, a controlabilidade do par (A,B) e a observabilidade do par (A,C) são necessárias para garantir a existência e unicidade de solução definida positiva de (3.38).

Observemos o que ocorre quando $T > 0$ é arbitrariamente pequeno. Utilizando as aproximações usuais a equação de Riccati (3.38) pode ser reescrita como

$$(I + T(A - BK))'P(I + T(A - BK)) - P + T(C - DK)'(C - DK) = 0. \quad (3.39)$$

Dividindo ambos os membros por T e rearranjando os termos, obtemos

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + (C - DK)'(C - DK) + \mathcal{O}(T) = 0, \quad (3.40)$$

onde $\mathcal{O}(T) \geq 0$ e, como era esperado, tende a zero quando $T \rightarrow 0$. Nesta situação, obtemos o ganho ótimo de realimentação de estado para o problema a tempo contínuo. Porém, essas aproximações são válidas apenas para T suficientemente pequeno.

Observe que este problema de controle ótimo pode ser resolvido alternativamente através de um problema de otimização semidefinida. O próximo teorema apresenta este importante resultado.

Teorema 3.3 (Controle Ótimo \mathcal{H}_2) *Existe um controlador de realimentação de estado da forma (3.6) para o sistema (3.1), com $\xi = 0$ e $F = 0$, tal que o $\mathcal{J}_2 < \rho$ se, e somente se, existirem matrizes $X > 0$, $W > 0$ e Z que satisfazem as desigualdades matriciais lineares*

$$\text{tr}(W) < \rho \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} W & E' \\ E & X \end{bmatrix} > 0 \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} X & XA_d' - Z'B_d' & X'C_d - Z'D_d' \\ \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.43)$$

onde (A_d, B_d, C_d, D_d) são tais que as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas. Caso as restrições (3.41)–(3.43) sejam factíveis, o menor valor para o índice \mathcal{J}_2 pode ser obtido através da solução

do problema de otimização convexa

$$\inf_{u_k} \mathcal{J}_2 = \inf_{X, W, \rho, Z} \{\rho : (3.41) - (3.43)\} \quad (3.44)$$

e o ganho ótimo de realimentação de estado é dado por $K = ZX^{-1}$.

Prova: O problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 pode ser formulado como

$$\inf_{P > 0, K} \{\text{tr}(E'PE) : (A_d - B_d K)'P(A_d - B_d K) - P + (C_d - D_d K)'(C_d - D_d K) < 0\},$$

obtido a partir de (2.23) e do problema (3.37). Logo, $\mathcal{J}_2 < \rho$ se, e somente se, existirem $P > 0$ e K tais que

$$\begin{aligned} \text{tr}(E'PE) &< \rho \\ (A_d - B_d K)'P(A_d - B_d K) - P + (C_d - D_d K)'(C_d - D_d K) &< 0. \end{aligned}$$

A segunda desigualdade anterior pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} (A_d - B_d K)'P(A_d - B_d K) - P & (C_d - D_d K)' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0,$$

obtida utilizando-se complemento de Schur (Teorema A.3). Aplicando-se o complemento de Schur novamente em conjunto de algumas manipulações, chegamos à seguinte condição

$$\begin{bmatrix} P & C_d' - K'D_d' & A_d' - K'B_d' \\ \bullet & I & 0 \\ \bullet & \bullet & P^{-1} \end{bmatrix} > 0.$$

Aplicando-se a transformação de congruência $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$, definindo $X = P^{-1} > 0$ e $Z = KX = KP^{-1}$ e usando matrizes de permutação, obtemos a desigualdade equivalente

$$\begin{bmatrix} X & XA_d' - Z'B_d' & XC_d' - Z'D_d' \\ \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0,$$

o que prova a restrição (3.43). Já a desigualdade $\text{tr}(E'PE) < \rho$ é satisfeita se, e somente se, existe $W > 0$ tal que

$$\text{tr}(W) < \rho \quad \text{e} \quad W > E'PE = E'X^{-1}E.$$

Utilizando-se complemento de Schur, obtemos as restrições

$$\text{tr}(W) < \rho \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} W & E' \\ \bullet & X \end{bmatrix} > 0,$$

que fornecem as desigualdades (3.41)–(3.42). Agora, como

$$\rho > \text{tr}(W) > \text{tr}(E'PE),$$

o problema (3.44) fornece o menor valor possível para \mathcal{J}_2 . Como mostramos anteriormente, as variáveis originais do problema (3.37) podem ser obtidas aplicando-se a transformação inversa $P = X^{-1}$ e $K = ZX^{-1}$. A prova está completa. \square

Vamos analisar o que ocorre com o problema (3.44) quando $T > 0$ é arbitrariamente pequeno. Em primeiro lugar, as restrições (3.41) e (3.42) não são modificadas. Portanto, utilizando as aproximações usuais para (3.43), obtemos

$$\begin{bmatrix} X & X(I + TA') - TZ'B' & \sqrt{T}XC' - \sqrt{T}Z'D' \\ \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.45)$$

Aplicando a transformação de congruência $\text{diag}(I/\sqrt{T}, I/\sqrt{T}, I)$ e utilizando o complemento de Schur, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{X}{T} - \left(\frac{X}{T} + XA' - Z'B'\right) \left(\frac{X}{T}\right)^{-1} \left(\frac{X}{T} + AX - BZ\right) & XC' - Z'D' \\ \bullet & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.46)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - BZ - Z'B' + \mathcal{O}(T) & X'C' - Z'D' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.47)$$

onde $\mathcal{O}(T) \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$. Esta desigualdade em conjunto com as restrições (3.41) e (3.42) definem o problema \mathcal{H}_2 clássico associado a um sistema a tempo contínuo.

Observe que os resultados discutidos nesta seção são uma generalização do problema linear quadrático com largura de faixa limitada discutido na seção 3.1. De fato, a perturbação impulsiva cria uma descontinuidade no vetor de estado do sistema, o que pode ser modelado através de condições iniciais. Sendo assim, o comportamento do critério de desempenho \mathcal{H}_2 é essencialmente

o mesmo do custo linear quadrático analisado anteriormente.

3.4 Projeto de Controle \mathcal{H}_∞

Nesta seção, temos por objetivo determinar a entrada de controle \mathbf{u}_k sujeita à restrição (3.2) tal que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema \mathcal{G} em malha fechada seja mínima. Vamos supor que o sistema tenha condições iniciais nulas $\xi = 0$ e que a entrada $\mathbf{w} \in \mathcal{L}_2$ seja um ruído aditivo no canal de controle, isto é, a perturbação é modelada da forma

$$\mathbf{w}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{w}(\mathbf{t}_k) = \mathbf{w}_k, \quad \forall \mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}). \quad (3.48)$$

Como a entrada de controle \mathbf{u}_k é adicionada à perturbação \mathbf{w}_k , vamos reescrever o sistema dado em (3.1) da seguinte forma

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k(\mathbf{t}) \\ \mathbf{w}_k(\mathbf{t}) \end{bmatrix}, & \mathbf{x}(0) = 0 \\ \mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k(\mathbf{t}) \\ \mathbf{w}_k(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.49)$$

e aplicaremos os resultados do Teorema 3.1, considerando $\hat{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \ \mathbf{E}]$ e $\hat{\mathbf{D}} = [\mathbf{D} \ \mathbf{F}]$. Logo, obtemos $\hat{\mathbf{B}}_d$ e $\hat{\mathbf{D}}_d$ que serão particionadas de acordo com as dimensões das entradas \mathbf{u}_k e \mathbf{w}_k , fornecendo as matrizes \mathbf{B}_d e \mathbf{D}_d da entrada de controle e \mathbf{E}_d e \mathbf{F}_d da perturbação.

Nestas condições, a entrada de controle da forma $\mathbf{u}_k(\mathbf{t}) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k$, para $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1})$, que minimiza o índice \mathcal{J}_∞ pode ser obtida através da solução do problema

$$\inf_{\mathbf{K}} \frac{1}{T} \left\| (\mathbf{C}_d - \mathbf{D}_d \mathbf{K}) (\mathbf{zI} - (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}))^{-1} \mathbf{E}_d + \mathbf{F}_d \right\|_\infty^2. \quad (3.50)$$

Como $T > 0$ é fixo, o problema de otimização acima é semelhante ao problema clássico de controle \mathcal{H}_∞ para sistemas a tempo discreto, que pode ser expresso através de um problema de otimização convexa sujeito a LMIs. O teorema a seguir enuncia este resultado.

Teorema 3.4 (Controle Ótimo \mathcal{H}_∞) *Existe um controlador de realimentação de estado da forma (3.6) para o sistema (3.1), com $\xi = 0$, tal que $\mathcal{J}_\infty < \gamma$ se, e somente se, existirem*

matrizes $X > 0$ e Z que satisfazem a desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} X & A_d X - B_d Z & E_d & 0 \\ \bullet & X & 0 & X C_d' - Z' D_d' \\ \bullet & \bullet & I & F_d' \\ \bullet & \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.51)$$

com $(A_d, [B_d \ E_d], C_d, [D_d \ F_d])$ tais que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam válidas. Caso a restrição (3.51) seja factível, o menor valor para o índice \mathcal{J}_∞ pode ser obtido através da solução do problema de otimização convexa

$$\inf_{u_k} \mathcal{J}_\infty = \frac{1}{T} \inf_{X > 0, Z, \gamma} \{\gamma : (3.51)\} \quad (3.52)$$

e o ganho ótimo de realimentação de estado é dado por $K = ZX^{-1}$.

Prova: Como $T > 0$ é constante, o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser escrito na forma

$$\inf_K \left\| (C_d - D_d K) (zI - (A_d - B_d K))^{-1} E_d + F_d \right\|_\infty^2,$$

o qual, pode ser convertido em um problema de otimização convexa, de acordo com o Teorema 2.3. Considerando-se a desigualdade matricial linear (2.59), escrevemos a restrição a seguir para o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} X & (A_d - B_d K)X & E_d & 0 \\ \bullet & X & 0 & X(C_d - D_d K)' \\ \bullet & \bullet & I & F_d' \\ \bullet & \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > 0,$$

Definindo-se $Z = KX$, obtemos a desigualdade (3.51). Além disso, o valor mínimo de \mathcal{J}_∞ é igual ao valor mínimo de γ/T e o ganho ótimo de realimentação de estado é dado por $K = ZX^{-1}$. A prova está completa. \square

Observe que existem técnicas alternativas à proposta acima para a solução do problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ . Uma técnica clássica consiste em resolver iterativamente a equação de Riccati com valores decrescentes de $\gamma > 0$, até que ela se torne infactível. O menor valor de γ que viabiliza a solução da equação de Riccati é igual à norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada.

Analisemos a validade do problema para valores de $T > 0$ arbitrariamente pequenos. Utili-

zando as aproximações usuais, obtemos a LMI

$$\begin{bmatrix} X & (I + TA)X - TBZ & TE & 0 \\ \bullet & X & 0 & \sqrt{T}XC' - \sqrt{T}Z'B' \\ \bullet & \bullet & I & \sqrt{T}F' \\ \bullet & \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.53)$$

cujos complemento de Schur em relação ao segundo bloco da diagonal principal fornece

$$\begin{bmatrix} X & TE & 0 \\ \bullet & I & \sqrt{T}F' \\ \bullet & \bullet & \gamma I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} X + T(AX - BZ) \\ 0 \\ \sqrt{T}(CX - DZ) \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} X + T(XA' - Z'B') & 0 & \sqrt{T}(XC' - Z'D') \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Agrupando as matrizes acima e simplificando seus termos, vem

$$\begin{bmatrix} -T(AX + XA' - BZ - Z'B') + \mathcal{O}(T^2) & TE & -\sqrt{T}(XC' - Z'D') \\ \bullet & I & \sqrt{T}F' \\ \bullet & \bullet & \gamma I + \mathcal{O}(T) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.55)$$

onde as parcelas denotadas por $\mathcal{O}(T)$ e $\mathcal{O}(T^2)$ serão desprezadas pois tendem para zero quando $T \rightarrow 0$. Nestas condições, definindo as matrizes $Q = X/T$ e $R = Z/T$ e o escalar $\beta = \gamma/T > 0$, através da transformação de similaridade $\mathbf{diag}(T^{-2}I, I, T^{-1}I)$, obtemos a LMI

$$\begin{bmatrix} AQ + QA' - BR - R'B' & E & QC' - R'D' \\ \bullet & -I & F' \\ \bullet & \bullet & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.56)$$

que é a restrição do problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ associado ao sistema a tempo contínuo. Observe que, dado o valor ótimo de β , obtemos o valor ótimo de γ através de $\gamma = \beta T$, onde o fator de escala $T > 0$ é retirado da função objetivo, conforme estabelecido em (3.52). Portanto, o índice \mathcal{J}_∞ converge para o quadrado da norma \mathcal{H}_∞ do sistema a tempo contínuo em malha fechada, quando consideramos $T > 0$ suficientemente pequeno.

O exemplo a seguir ilustra a teoria desenvolvida nesta seção.

Exemplo 3.4 Considere o sistema \mathcal{G} dado em (3.1) com a seguinte realização

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F = 0.$$

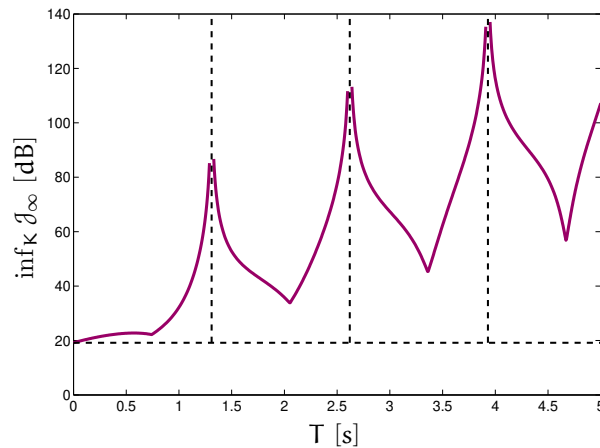


Figura 3.6: Valores ótimos do critério \mathcal{J}_∞ para $T > 0$.

Suponhamos que o sistema apresente condições iniciais nulas $\xi = 0$ e as restrições (3.2) sobre o sinal de controle e (3.48) sobre a perturbação sejam satisfeitas. Na Figura 3.6 está representado o comportamento do valor ótimo do critério \mathcal{H}_∞ , obtido através da solução do problema (3.52), para vários valores de $T > 0$. Observe que as assíntotas também acontecem neste caso e estas também são periódicas. Estas singularidades reforçam a ideia de que existem períodos de amostragem tais que o sistema em malha fechada é instável, o que é confirmado pela infactibilidade das LMIs do problema (3.52). De forma similar ao custo \mathcal{H}_2 descrito anteriormente, nota-se que os valores ótimos para o índice \mathcal{J}_∞ não apresentam comportamento monotônico em relação a $T > 0$.

Através do exemplo discutido acima, foram confirmados os principais aspectos teóricos enunciados nesta seção. Os valores ótimos do critério de desempenho \mathcal{H}_∞ apresentam comportamento similar ao custo funcional \mathcal{H}_2 , com ênfase para a existência de valores particulares do período de amostragem $T > 0$ que tornam o sistema em malha fechada instável. Maiores detalhes a respeito deste aspecto são dados no Apêndice B.

3.5 Aplicação Prática: Pêndulo Invertido

Nesta seção, desenvolvemos o projeto de controladores ótimos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para o pêndulo invertido apresentado em (Geromel & Korogui 2011). Como ilustrado na Figura 3.7, deseja-se posicionar o carro de massa M na origem do sistema de coordenadas e equilibrar o pêndulo invertido, de massa m , na posição vertical, através da aplicação de uma força f , que será a sua entrada de controle. Considera-se que não há ação de atrito e que a barra rígida do pêndulo tem comprimento ℓ e massa desprezível.

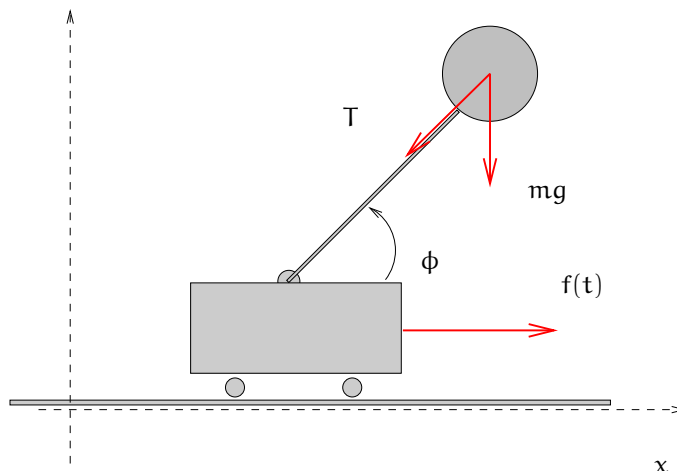


Figura 3.7: Pêndulo Invertido.

O modelo linearizado para pequenos deslocamentos verticais do pêndulo é dado pelas equações diferenciais

$$(M + m)\ddot{x}(t) - m\ell\ddot{\theta}(t) = f(t) \quad (3.57)$$

$$\ell\ddot{\theta}(t) - \ddot{x}(t) - g\theta(t) = 0 \quad (3.58)$$

onde x é o deslocamento horizontal do carro e $\theta = \phi - \pi/2$ é o deslocamento angular do pêndulo medido em relação à vertical. Considerando-se os valores numéricos $M = 10,0$ [kg], $m = 2,0$ [kg], $\ell = 1,0$ [m] e $g = 9,8$ [m/s²], a sua realização no espaço de estado é dada por

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,9600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 11,7600 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,1 \\ 0,0 \\ 0,1 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.59)$$

onde o vetor de estado é definido por $x_p(t) = [x(t) \dot{x}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t)]'$. Adicionalmente, definimos a seguinte saída que penaliza os desvios em relação às posições $x = 0$ e $\theta = 0$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.60)$$

e cuja norma será minimizada. Vamos supor que a entrada de controle é da forma dada em (3.2), para algum período $T > 0$ fixo.

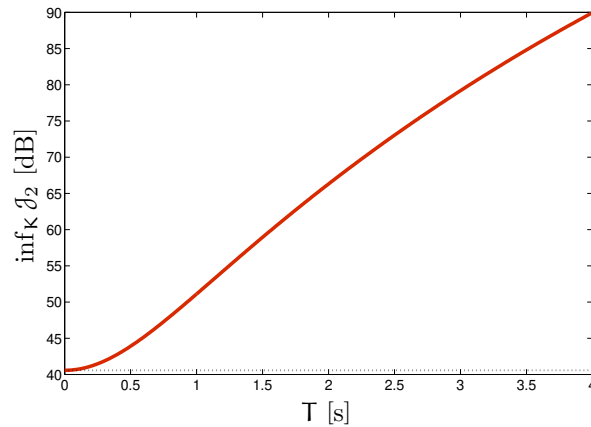


Figura 3.8: Valores ótimos para o índice \mathcal{J}_2 para $T > 0$.

3.5.1 Projeto de Controlador Ótimo \mathcal{H}_2

Para o projeto de um controlador da forma $\mathbf{u}_k(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_p(t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, com período de amostragem $T > 0$ fixo, vamos supor que o sistema está sujeito à condição inicial

$$\mathbf{x}_p(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\pi/4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

o que representa, no contexto de controle ótimo \mathcal{H}_2 , uma perturbação impulsiva com $\mathbf{E} = \mathbf{x}_p(0)$, na realização (3.1) com $\xi = 0$ e $F = 0$. Esta condição inicial impõe que o carro inicialmente se encontra em repouso na origem do sistema de coordenadas e o pêndulo se encontra com inclinação de $\pi/4$ [rad], em relação à vertical. Com a finalidade de realizar uma análise preliminar, determinamos o valor ótimo do critério \mathcal{H}_2 para $T > 0$. Os resultados obtidos estão representados no gráfico da Figura 3.8. Notemos que não ocorrem as assíntotas verticais de instabilidade, uma vez que os polos instáveis do sistema são números reais.

O projeto foi realizado com $T = 0,5$ [s], utilizando-se os resultados fornecidos pelo Teorema 3.2. Nestas condições, obtivemos o seguinte ganho ótimo de realimentação de estado

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1,3023 & -3,3221 & 159,1264 & 46,8910 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

e o valor mínimo do critério \mathcal{H}_2 como sendo 156,67, resultado confirmado através de simulação. A Figura 3.9 mostra as trajetórias das variáveis de estado na parte (a) e o sinal de controle pode ser observado na parte (b). Na Figura 3.9-(a), as posições do carro e do pêndulo são apresentadas

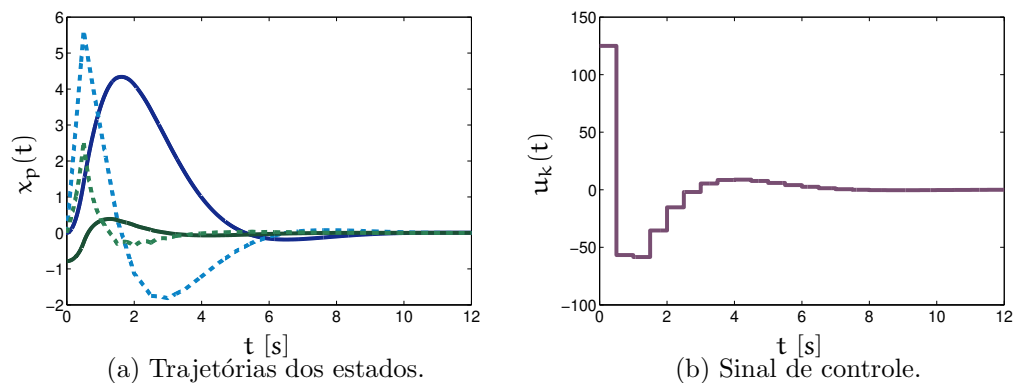


Figura 3.9: Resultados de simulação para $T = 0,5$ [s].

pelas linhas contínuas e as velocidades pelas linhas tracejadas. Como podemos perceber, ambas as variáveis tendem ao ponto de equilíbrio, sendo que primeiramente o pêndulo se aproxima da vertical e, com isso, permite que o carro retorne para a origem mais facilmente.

Em (Geromel & Korogui 2011) projeto semelhante foi desenvolvido com controle ótimo \mathcal{H}_2 e realimentação de estado mas sem as restrições impostas pela rede de comunicação. As curvas obtidas para as trajetórias de estado foram semelhantes às obtidas pelos autores, mesmo considerando que o sinal de controle satisfaça (3.2). Neste ponto, para finalizarmos nossa análise, devemos verificar a influência do valor do período de amostragem sobre o desempenho do sistema. Nosso procedimento encontra instabilidade numérica para valores de T próximos de $5,0$ [s] e não é encontrada solução estabilizante para valores maiores que $6,6$ [s]. Se utilizarmos o ganho ótimo de realimentação de estado para o sistema a tempo contínuo

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} -10,0000 & -21,4443 & 342,9299 & 103,0445 \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

obtemos que o maior período de amostragem tal que o sistema em malha fechada se torna estável é de 260 [ms], aproximadamente. Com isso, ressaltamos que um projeto para sistemas de controle sujeitos a limitação em largura de faixa deve considerar as restrições do canal de comunicação, uma vez que essa característica tem grande influência no desempenho e na estabilidade do sistema em malha fechada.

3.5.2 Projeto de Controlador Ótimo \mathcal{H}_∞

Prosseguimos agora para o projeto de um controlador que otimiza o critério \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada. O controlador será da forma $\mathbf{u}_k(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_p(\mathbf{t}_k)$, $\forall t \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1})$, com período de amostragem $T = \mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k > 0$ fixo. Vamos supor condições iniciais nulas $\xi = 0$ e que a

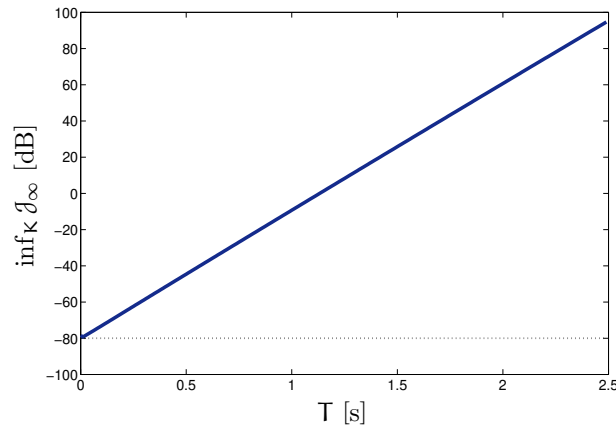


Figura 3.10: Valores ótimos para o índice \mathcal{J}_∞ para $T > 0$.

perturbação w seja um ruído aditivo no canal de controle, da forma (3.48). Para este projeto, as matrizes de realização do sistema com respeito à perturbação externa são $E = 0,1 \times B$ e $F = 0$. Assim como no projeto anterior, realizamos uma análise preliminar, determinando o valor ótimo do critério \mathcal{H}_∞ para $T > 0$, através da solução do problema de otimização convexa (3.52). Os resultados desta análise estão representados na Figura 3.10.

O projeto foi desenvolvido usando $T = 0,5$ [s] através dos resultados fornecidos pelo problema de otimização (3.52). Neste caso, obtemos o ganho ótimo de realimentação de estado

$$K = \begin{bmatrix} -1,3153 & -3,3640 & 161,7917 & 47,6745 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e o valor mínimo do critério \mathcal{H}_∞ é 0,0059. Simulamos o sistema em malha fechada com a entrada $w(t)$ da forma

$$w(t) = \mu(t) - \mu(t - 0,5), \quad (3.65)$$

onde μ é a função degrau unitário. Para esta entrada, o ganho \mathcal{L}_2 calculado através de simulação é 0,00588, próximo do ganho \mathcal{L}_2 de pior caso. As trajetórias de estado, posições em linhas contínuas e velocidades em linhas tracejadas, e de controle simuladas estão mostradas na Figura 3.11. Notemos que, como o sistema está sob condições iniciais nulas, o primeiro intervalo entre amostras não tem ação do sinal de controle, uma vez que este apenas passa a atuar sobre o sistema a partir do segundo instante de amostragem.

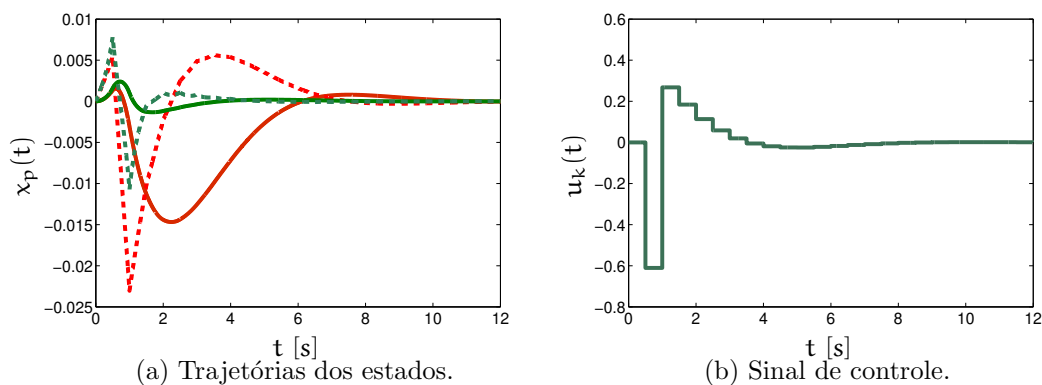


Figura 3.11: Resultados de simulação para $T = 0,5$ [s].

3.6 Considerações Finais

Neste Capítulo, desenvolvemos estratégias que julgamos essenciais para o projeto de controladores de sistemas a tempo contínuo que apresentam restrições em largura de faixa no sinal de controle. Foram enunciados resultados que fornecem a solução ótima para um problema linear quadrático, considerando sistemas desta estrutura. Provamos que tal solução pode ser obtida através da resolução de uma equação de Riccati aplicada a um sistema dinâmico a tempo discreto específico denominado *sistema equivalente*. Adicionalmente, foram definidos critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e estes foram utilizados para o projeto de controladores que os minimizam. Através de exemplos foi possível não apenas confirmar a teoria desenvolvida como também enfatizar características notáveis apresentadas por sistemas com esta estrutura particular. Finalmente, um projeto de controle aplicado foi desenvolvido com essas ferramentas a fim de confirmar a sua utilidade prática.

Projeto de Controle Auto-Acionado

Neste capítulo, realizamos o projeto de um controlador auto-acionado, baseado nos resultados desenvolvidos no Capítulo 3. Com a finalidade de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada, vamos assumir que $T \in \{T_i : i \in \mathbb{K}\}$, com $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$, onde o número de períodos de amostragem N e seus respectivos valores T_i são fornecidos pelo projetista. Reafirmamos que estes valores devem ser escolhidos tendo em vista um melhor desempenho do sistema em malha fechada e as limitações de largura de faixa, que exigem que $T_i \geq T_{\min} > 0$. Observe que o primeiro objetivo é otimizado para $T \rightarrow 0$, enquanto o segundo exige o contrário.

Para resolver este problema, projetamos uma regra de comutação que seleciona um período de amostragem em particular T_i , $i \in \mathbb{K}$. É essencial que essa função de comutação seja consistente, ou seja, é fundamental que o valor ótimo para o custo garantido seja menor ou igual aos valores dos índices de desempenho para cada subsistema. A regra de comutação proposta apresenta esta importante propriedade, isto é, ela é consistente em relação ao critério de desempenho \mathcal{H}_2 . Infelizmente, o mesmo pode não ocorrer para o critério \mathcal{H}_∞ .

Este capítulo está organizado como segue. Primeiramente, analisamos resultados para sistemas dinâmicos a tempo discreto com comutação. Eles envolvem o estudo de estabilidade e fornecem métodos de cálculo para custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que serão utilizados em nosso projeto. Nas duas seções subsequentes, projetamos controladores ótimos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ que utilizam as técnicas de comutação conhecidas e que buscam melhor desempenho quando comparados com o que foi apresentado no Capítulo 3. Finalmente, um exemplo prático é analisado a fim de validar a teoria desenvolvida.

4.1 Sistemas a Tempo Discreto com Comutação

Os resultados que serão apresentados neste capítulo estão fortemente baseados em propriedades fundamentais de sistemas dinâmicos a tempo discreto com comutação. Neste sentido, o estudo de estabilidade e as definições de critérios de desempenho para sistemas com comutação formam a base teórica para o desenvolvimento dos demais resultados. A análise de sistemas com comutação a tempo discreto está fortemente baseada em (Deaecto 2010, Geromel & Colaneri 2006).

Um sistema dinâmico a tempo discreto com comutação é variante no tempo e é caracterizado pela existência de uma função $\sigma(\cdot)$ que seleciona, em cada instante de tempo, um dos N subsistemas disponíveis. Dessa forma, um sistema com comutação apresenta a seguinte realização

$$\mathcal{G}_\sigma : \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{\sigma(k)}\mathbf{x}_k + \mathbf{E}_{\sigma(k)}\mathbf{w}_k, & \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{C}_{\sigma(k)}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}_{\sigma(k)}\mathbf{w}_k, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde o vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada exógena e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada. A função $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ é denominada função de comutação que seleciona, em cada instante $k \in \mathbb{N}$, um e apenas um dos N sistemas \mathcal{G}_i , $i \in \mathbb{K}$.

Nosso objetivo é estudar sistemas com comutação para os quais a regra de comutação é uma variável de controle, projetada para garantir estabilidade e para otimizar desempenho. Neste caso, σ não depende apenas do instante de tempo, mas sim do vetor de estado \mathbf{x}_k . Para os resultados discutidos neste capítulo, algumas notações devem ser introduzidas. Primeiramente, precisamos explicitar um conjunto de matrizes especiais, denominadas *matrizes de Metzler*, assim definidas:

Definição 4.1 *Uma matriz quadrada $\Pi = (\pi_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ cujos elementos, excetuando-se os da diagonal principal, são maiores ou iguais a zero é denominada matriz de Metzler. Adicionalmente, denotaremos por \mathcal{M} a classe de matrizes de Metzler tais que*

$$\pi_{ii} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1. \quad (4.2)$$

Com este conceito, vamos denotar

$$\mathbf{P}_{\mathbf{p}i} = \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathbf{P}_j, \quad (4.3)$$

onde as matrizes \mathbf{P}_j , $j \in \mathbb{K}$, são definidas positivas e $\Pi = (\pi_{ij}) \in \mathcal{M}$. É claro que $\mathbf{P}_{\mathbf{p}i} > 0$ para toda $\Pi \in \mathcal{M}$. As matrizes de Metzler pertencentes à classe \mathcal{M} são ditas matrizes não-negativas, uma vez que todos os seus elementos são maiores que ou iguais a zero. Este conjunto

de matrizes apresenta propriedades notáveis, como a aplicabilidade do Teorema de Frobenius–Perron (Luenberger 1979) e tais características fornecem resultados de estabilidade provados em (Geromel & Colaneri 2006).

4.1.1 Estabilidade

As seguintes condições de estabilidade são baseadas em funções de Lyapunov quadráticas $v(x) = x'Px$, com $P > 0$, ou quadráticas por partes do tipo mínimo $v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'P_i x$, com $P_i > 0$, $i \in \mathbb{K}$. Outra possibilidade de escolha, em alguns casos, são funções de Lyapunov do tipo máximo, ou seja, $v(x) = \max_{i \in \mathbb{K}} x'P_i x$, $P_i > 0$, $i \in \mathbb{K}$. Essas últimas apresentam a vantagem de serem funções convexas porém, nem sempre, fornecem resultados satisfatórios, ver (Deaecto 2010).

Consideremos o sistema dinâmico (4.1) com entrada $w \equiv 0$. Vamos analisar sob que condições a origem $x = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Baseados na função do tipo mínimo, a regra de comutação escolhida é dada por

$$\sigma(x_k) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x_k' P_i x_k, \quad (4.4)$$

a qual escolhe, arbitrariamente, um dos subsistemas nos pontos x_k em que o mínimo indicado em (4.4) não for único. O teorema a seguir (Geromel & Colaneri 2006), fornece condições de estabilidade derivadas com este tipo de função de comutação.

Teorema 4.1 (Estabilidade) *Para o sistema (4.1), a regra de comutação (4.4) é globalmente estabilizante e a desigualdade*

$$\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0 \quad (4.5)$$

é válida se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov–Metzler

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} A_i & P_{pi} & \bullet \\ C_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (4.6)$$

Prova: Para estabilidade, basta provar que a função de Lyapunov do tipo mínimo

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x$$

é estritamente decrescente em uma trajetória arbitrária do sistema em estudo. Primeiramente,

é essencial notar que as desigualdades de Lyapunov–Metzler podem ser escritas como

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i + C_i' C_i < 0,$$

onde utilizamos o complemento de Schur. Suponha que no instante $k \in \mathbb{N}$ a regra de comutação é tal que $\sigma(x_k) = i \in \mathbb{K}$. Assim sendo, $v(x_k) = x_k' P_i x_k$ e, da equação dinâmica do sistema,

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) &= \min_{j \in \mathbb{K}} x_k' A_i' P_j A_i x_k \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} x_k' A_i' \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j P_j \right) A_i x_k \\ &\leq x_k' A_i' \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i x_k \\ &\leq x_k' A_i' P_{pi} A_i x_k, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da propriedade de que cada coluna de $\Pi \in \mathcal{M}$ pertence ao simplex unitário Λ . Das desigualdades anteriores, vem

$$v(x_{k+1}) < x_k' (P_i - C_i' C_i) x_k \leq x_k' P_i x_k = v(x_k),$$

de onde segue a condição de estabilidade para a função de Lyapunov considerada. Além disso, essa mesma desigualdade também permite concluir que

$$v(x_{k+1}) - v(x_k) < -x_k' C_i' C_i x_k,$$

o que implica em

$$v(x_\infty) - v(x_0) < - \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' C_\sigma' C_\sigma x_k$$

e, como o sistema é globalmente assintoticamente estável, obtemos

$$\|z\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' C_\sigma' C_\sigma x_k < v(x_0) = \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0$$

e a prova está completa. □

Observe que as condições acima não exigem que cada um dos subsistemas seja globalmente assintoticamente estável. Com efeito, é provado em (Geromel & Colaneri 2006) que uma condição

necessária para a factibilidade de (4.6) é que as matrizes $\sqrt{\pi_{ii}}\mathbf{A}_i$, para cada $i \in \mathbb{K}$, sejam Schur. Entretanto, uma vez que $\pi_{ii} \in [0,1]$, as matrizes \mathbf{A}_i não precisam ser Schur.

É importante notar também que a escolha $\Pi = \mathbf{I}$ é possível se, e somente se, as matrizes \mathbf{A}_i forem Schur para todo $i \in \mathbb{K}$. Neste caso, as desigualdades de Lyapunov–Metzler se tornam $\mathbf{A}_i'\mathbf{P}_i\mathbf{A}_i - \mathbf{P}_i + \mathbf{C}_i'\mathbf{C}_i < 0$, que são as desigualdades clássicas de Lyapunov para cada \mathcal{G}_i , $i \in \mathbb{K}$.

Podemos ainda considerar a condição de estabilidade quadrática para (4.1). \mathcal{G}_σ é quadraticamente estável, ou seja, admite uma função de Lyapunov $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}$, com $\mathbf{P} > 0$, se

$$\mathbf{A}_i'\mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{P} + \mathbf{C}_i'\mathbf{C}_i < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}, \quad (4.7)$$

ou seja, todas as desigualdades de Lyapunov associadas a cada subsistema \mathcal{G}_i devem admitir uma solução $\mathbf{P} > 0$ em comum. Sob estas hipóteses, a regra de comutação σ pode ser arbitrária e a estabilidade assintótica é garantida.

Finalmente, vale ressaltar que as desigualdades de Lyapunov Metzler são difíceis de resolver numericamente, uma vez que os produtos de variáveis $\{\Pi, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N\}$ tornam as desigualdades não-convexas. Porém, elas podem ser resolvidas através de um procedimento de busca multi-dimensional, fixando os valores da matriz Π , o que as torna LMIs em relação exclusivamente a \mathbf{P}_i , $i \in \mathbb{K}$. Portanto, para cada $\Pi \in \mathcal{M}$ dada devemos apenas manipular restrições convexas.

4.1.2 Critérios de Desempenho

Nesta subseção, vamos definir dois critérios de desempenho relacionados com as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas com comutação. Considerando (4.1), os índices que serão definidos são tais que, para $\sigma(\mathbf{x}_k) = i \in \mathbb{K}$ para todo $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, eles se igualam ao quadrado das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para o subsistema \mathcal{G}_i . Ademais, veremos que o valor exato para os custos funcionais propostos pode apenas ser determinado através de simulações. Os resultados teóricos desenvolvidos fornecerão apenas limitantes superiores para tais custos.

Primeiramente, definimos o critério de desempenho \mathcal{H}_2 . Para o sistema (4.1), temos

$$\mathcal{J}_2(\sigma) = \sum_{i=1}^{n_w} \|z^i\|_2^2 + \mathbf{e}_i'\mathbf{F}'_{\sigma(0)}\mathbf{F}_{\sigma(0)}\mathbf{e}_i, \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_i\delta(k)$, $i = 1, \dots, n_w$ produz a resposta ao impulso z^i . Este custo funcional é, portanto, semelhante ao índice de desempenho \mathcal{J}_2 apresentado no Capítulo 3.

Como podemos observar, o cálculo analítico do custo (4.8) é extremamente complexo. Nossa estratégia, baseada nos resultados de (Deaecto 2010), buscará obter um limitante superior denominado *custo garantido* para esse critério de desempenho. Apresentamos a seguir um valor

possível para o custo garantido \mathcal{H}_2 .

Teorema 4.2 (Custo Garantido \mathcal{H}_2) *Para o sistema (4.1), a regra de comutação (4.4) é globalmente estabilizante e a desigualdade*

$$\mathcal{J}_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr} \left(E'_{\sigma(0)} P_i E_{\sigma(0)} + F'_{\sigma(0)} F_{\sigma(0)} \right) \quad (4.9)$$

é válida se as condições de estabilidade do Teorema 4.1 forem satisfeitas.

Prova: A prova é realizada em (Deaecto 2010) e, portanto, será omitida. \square

Observe que as condições do Teorema 4.2 podem fornecer limitantes melhores para o custo garantido. Como a função de comutação σ é uma variável de controle, seu valor inicial pode ser projetado. Neste caso, obtemos o seguinte limitante superior

$$\mathcal{J}_2 < \min_{\ell \in \mathbb{K}} \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr} (E'_\ell P_i E_\ell + F'_\ell F_\ell). \quad (4.10)$$

A determinação do custo garantido dado acima é difícil, uma vez que envolve a minimização nos dois índices independentes. Impondo-se a restrição $\ell = i \in \mathbb{K}$, obtemos um custo garantido maior porém que pode ser calculado de forma mais simples

$$\mathcal{J}_2 < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr} (E'_i P_i E_i + F'_i F_i). \quad (4.11)$$

Portanto, a menor cota superior é obtida através do seguinte problema de otimização

$$\mathcal{J}_2^{\text{so}} = \inf_{P_i > 0, i \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathcal{M}} \left\{ \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr} (E'_i P_i E_i + F'_i F_i) : (4.6) \right\}, \quad (4.12)$$

que fornece uma função de comutação estabilizante σ_2^{so} que claramente satisfaz $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{\text{so}}) \leq \mathcal{J}_2^{\text{so}}$.

Analisemos agora um segundo critério de desempenho para (4.1), considerando $w_k \in \ell_2$ uma perturbação arbitrária. O critério de desempenho \mathcal{H}_∞ é dado por

$$\mathcal{J}_\infty(\sigma) = \sup_{w \in \ell_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \quad (4.13)$$

Observe que, assim como no caso \mathcal{H}_2 , se a função de comutação for constante, $\sigma \equiv i \in \mathbb{K}$, o custo funcional se iguala ao quadrado da norma \mathcal{H}_∞ do subsistema \mathcal{G}_i . Como a determinação analítica desse custo funcional \mathcal{H}_∞ é virtualmente impossível, buscamos a determinação de um

limitante superior cuja avaliação seja mais fácil. Logo, desejamos encontrar $\gamma > 0$ tal que

$$\mathcal{J}_\infty(\sigma) < \gamma \quad (4.14)$$

e certificar o desempenho do sistema através da minimização deste limitante. Com este objetivo, o resultado a seguir fornece condições que permitem o cálculo de γ .

Teorema 4.3 (Custo Garantido \mathcal{H}_∞) *Para $\gamma > 0$ dado, a regra de comutação (4.4) é globalmente estabilizante e o sistema (4.1) satisfaz a restrição (4.14) se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as desigualdades de Riccati–Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}E_i & P_{pi} & \bullet \\ C_i & F_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (4.15)$$

Prova: A prova está apresentada em (Deaecto 2010) e, portanto, será omitida. \square

O resultado acima permite determinar um limitante superior para o custo \mathcal{H}_∞ . Dessa forma, o menor custo garantido \mathcal{H}_∞ que satisfaz ao Teorema 4.3 pode ser obtido através da solução do problema de otimização

$$\mathcal{J}_\infty^{\text{so}} = \inf_{\gamma > 0, P_i > 0, i \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathcal{M}} \{\gamma : (4.15)\}. \quad (4.16)$$

Sua solução fornece uma função de comutação estabilizante $\sigma_\infty^{\text{so}}$ tal que $\mathcal{J}_\infty(\sigma_\infty^{\text{so}}) \leq \mathcal{J}_\infty^{\text{so}}$.

Os resultados discutidos nesta seção fornecem condições de estabilidade e critérios de desempenho para sistemas com comutação a tempo discreto. Nas seções a seguir, utilizamos estes conceitos para melhorar o desempenho de sistemas de controle em rede, em que a função de comutação determina o valor do período de amostragem.

4.2 Projeto de Controlador \mathcal{H}_2 Auto-Acionado

Nesta seção projetamos um controlador do tipo auto-acionado (*self-triggered*) que otimiza o desempenho \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada e considera uma limitação em largura de faixa no canal de comunicação. Em geral, o primeiro objetivo induz pequenos valores para o período de amostragem, enquanto o segundo inviabiliza esta escolha.

4.2.1 Definição do Problema

Considere o sistema dinâmico

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_k(t) + Ew(t), & x_0 = 0 \\ z(t) = Cx(t) + Du_k(t), \end{cases} \quad (4.17)$$

onde o sinal de controle é tal que $u_k(t) = u_k$, para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$. No Capítulo 3, a diferença $T_k = t_{k+1} - t_k > 0$ foi suposta constante. Esta restrição é agora relaxada, supondo que o projetista tem à sua disposição N períodos de amostragem T_i , $i \in \mathbb{K}$, que satisfazem as restrições da rede. Desta forma, definimos o conjunto

$$\mathcal{T} = \{T_i : i \in \mathbb{K}\} \quad (4.18)$$

e, com esta definição, segue que a restrição sobre o sinal de controle é

$$u_k(t) = u_k, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad T_k = t_{k+1} - t_k \in \mathcal{T}. \quad (4.19)$$

Nosso principal objetivo é determinar uma regra de comutação que seleciona em cada instante t_k , $k \in \mathbb{N}$, o período de amostragem a ser utilizado T_i , $i \in \mathbb{K}$, de forma a melhorar o desempenho \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada.

Esta estratégia é contrastante com controle acionado por evento, onde o período de amostragem do controlador é considerado uma variável contínua $T \in \mathbb{R}$ que deve ser determinada em tempo real. O controle acionado por evento também assegura estabilidade, porém esta característica é garantida através de instantes em que o período de amostragem pode ser extremamente pequeno, o que torna esta técnica incompatível com ambientes com limitação em largura de faixa. Os exemplos finais desta seção ilustram esse aspecto indesejável.

4.2.2 Estabilidade, Otimização de Desempenho e Consistência

O passo inicial do projeto é considerar cada período de amostragem T_i , $i \in \mathbb{K}$, de forma exclusiva. Desta forma, considera-se que a restrição de amostragem do controlador é tal que $t_{k+1} - t_k = T_i > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizando-se os resultados dos Teoremas 3.1 e 3.3, obtemos o ganho de realimentação de estado ótimo K_i para o período de amostragem T_i fixo. Neste caso, definindo $A_i = A_{di} - B_{di}K_i$ e $C_i = C_{di} - D_{di}K_i$, onde $(A_{di}, B_{di}, C_{di}, D_{di})$ decorre do Teorema 3.1 com

período de amostragem T_i , obtemos o sistema a tempo discreto com comutação

$$\mathcal{G}_\sigma : \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A_\sigma \mathbf{x}_k + E \mathbf{w}_k, & \mathbf{x}_0 = 0 \\ \mathbf{z}_k = C_\sigma \mathbf{x}_k, \end{cases} \quad (4.20)$$

onde $\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ é a função de comutação a ser projetada.

Para o desempenho \mathcal{H}_2 , consideremos que a entrada \mathbf{w}_k é uma perturbação impulsiva da forma $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_\ell \delta(k)$, para $\ell = 1, \dots, n_w$, e estas entradas geram as respectivas respostas ao impulso \mathbf{z}^ℓ . Desta forma, o critério de desempenho \mathcal{H}_2 definido em (4.8) para o sistema (4.20) torna-se

$$\mathcal{J}_2(\sigma) = \sum_{\ell=1}^{n_w} \|\mathbf{z}^\ell\|_2^2. \quad (4.21)$$

Como já foi dito, é essencial notar que, sempre que $\sigma \equiv \mathbf{i} \in \mathbb{K}$, então $\mathcal{J}_2(\sigma)$ se iguala ao valor ótimo do custo funcional \mathcal{H}_2 dado em (3.27) para o sistema em malha fechada com período T_i .

Portanto, nosso objetivo é determinar uma função de comutação σ da forma (4.4) que dinamicamente escolha o período de amostragem T_i , para algum $\mathbf{i} \in \mathbb{K}$, de forma a melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Através do Teorema 4.2 e da desigualdade (4.11), obtemos o seguinte limitante para o custo \mathcal{H}_2

$$\mathcal{J}_2(\sigma) < \min_{\mathbf{i} \in \mathbb{K}} \mathbf{tr}(E' P_i E). \quad (4.22)$$

Portanto, sua menor cota superior pode ser obtida através da solução do problema de otimização

$$\mathcal{J}_2^{s_o} = \inf_{P_i > 0, \mathbf{i} \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathcal{M}} \left\{ \min_{\mathbf{i} \in \mathbb{K}} \mathbf{tr}(E' P_i E) : (4.6) \right\}, \quad (4.23)$$

que fornece uma função de comutação globalmente estabilizante $\sigma_2^{s_o}$ tal que $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{s_o}) \leq \mathcal{J}_2^{s_o}$, como já observamos anteriormente.

Teorema 4.4 (Consistência e Estabilidade) *Considere o sistema dinâmico \mathcal{G} dado em (4.17), o conjunto de períodos de amostragem \mathcal{T} dado em (4.18) e a restrição (4.19) sobre o sinal de controle. Sob as hipóteses dos Teoremas 3.1 e 3.3, construa o sistema a tempo discreto com comutação \mathcal{G}_σ dado em (4.20). As afirmações a seguir são válidas:*

- (i) *A função de comutação $\sigma_2^{s_o} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ obtida através da solução de (4.23) é consistente, ou seja, $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{s_o}) \leq \mathcal{J}_2(\mathbf{i})$ para todo $\mathbf{i} \in \mathbb{K}$.*
- (ii) *O sistema (4.17) em malha fechada, com escolha dinâmica do período de amostragem determinada por $\sigma_2^{s_o}$, tem o mesmo desempenho \mathcal{H}_2 que o sistema (4.20).*

(iii) O sistema (4.17) em malha fechada, com escolha dinâmica do período de amostragem determinada por $\sigma_2^{s_0}$, é globalmente assintoticamente estável.

Prova: (i) Com efeito, por construção todas as matrizes A_i , $i \in \mathbb{K}$, são Schur e, consequentemente, a matriz $\Pi = I \in \mathcal{M}$ é factível e as desigualdades de Lyapunov–Metzler (4.6) se tornam desacopladas, ou seja,

$$A_i' P_i A_i - P_i + C_i' C_i < 0, \quad i \in \mathbb{K}.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(\sigma_2^{s_0}) &\leq \mathcal{J}_2^{s_0} \\ &\leq \inf_{P_i > 0, i \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathcal{M}} \left\{ \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(E' P_i E) : A_i' P_i A_i - P_i + C_i' C_i < 0, i \in \mathbb{K} \right\} \\ &\leq \min_{i \in \mathbb{K}} \|C_i(zI - A_i)^{-1} E\|_2^2 \\ &\leq \min_{i \in \mathbb{K}} \mathcal{J}_2(i), \end{aligned}$$

de onde segue a tese.

(ii) Sem perda de generalidade, vamos supor que $n_w = 1$. O caso para $n_w \in \mathbb{N}$ arbitrário segue trivialmente. Denotando, por simplicidade, $\sigma = \sigma(x_k)$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k' z_k &= \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' C_\sigma' C_\sigma x_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' (C_{d\sigma} - D_{d\sigma} K_\sigma)' (C_{d\sigma} - D_{d\sigma} K_\sigma) x_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' \int_0^{T_\sigma} e^{(A - BK_\sigma)' t} (C - DK_\sigma)' (C - DK_\sigma) e^{(A - BK_\sigma) t} dt x_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k' \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{(A - BK_\sigma)' (t - t_k)} (C - DK_\sigma)' (C - DK_\sigma) e^{(A - BK_\sigma) (t - t_k)} dt x_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t)' (C - DK_\sigma)' (C - DK_\sigma) x(t) dt \\ &= \int_0^\infty z(t)' z(t) dt, \end{aligned}$$

onde utilizamos os resultados do Teorema 3.1 para obter a terceira igualdade. Note que a última igualdade decorre do particionamento da integral indicada. A prova está completa.

(iii) Segue imediatamente do item (ii), de forma semelhante ao Teorema B.1. \square

Os resultados do Teorema 4.4 garantem as principais vantagens do projeto proposto para o controlador. A primeira proposição é essencial, uma vez que nosso objetivo principal em escolher dinamicamente o período de amostragem é a melhoria do desempenho. A segunda afirmação assegura que isso pode se feito através do sistema com comutação a tempo discreto. A terceira e última propriedade garante a estabilidade e decorre da igualdade do custo \mathcal{H}_2 para os sistemas discreto e contínuo, respectivamente.

Analisemos agora as características computacionais dos resultados obtidos. Observemos que o problema de otimização (4.23) é extremamente complexo, uma vez que o produto de variáveis P_{p_i} presente nas desigualdades de Lyapunov–Metzler torna as restrições não convexas. Sendo assim, estratégias de otimização não linear devem ser aplicadas, porém estas podem apenas obter um ótimo local, o que não garante a consistência da solução obtida. Logo, para pequenos valores de N (tipicamente 2 ou 3) podemos realizar uma busca multidimensional, uma vez que, para $\Pi \in \mathcal{M}$ fixa, as desigualdades de Lyapunov–Metzler (4.6) se tornam N LMIs acopladas.

Os resultados propostos nesta subseção fornecem um controlador inspirado na técnica de auto-acionamento com o uso de comutação. Nossa principal contribuição é a melhoria do desempenho quando o período de amostragem é escolhido dinamicamente, o que será confirmado nos exemplos a seguir. Finalmente, vale ressaltar que nem sempre é possível obter uma regra de comutação que melhore o desempenho do sistema em malha fechada. Neste caso, o período de amostragem é fixo e deve ser projetado com base nos resultados apresentados no Capítulo 3.

4.2.3 Exemplos

Nesta subseção apresentamos alguns exemplos que ilustram a teoria desenvolvida. Para fins de comparação de desempenho, implementamos a estratégia de controle acionado por evento, proposto em (Mazo Jr. & Tabuada 2008), onde os autores utilizam o ganho de realimentação ótimo a tempo contínuo e a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, com $P > 0$ solução da equação de Riccati para sistemas a tempo contínuo

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0. \quad (4.24)$$

A fim de garantir estabilidade, as amostras são efetuadas de forma que $\dot{v}(x) \leq 0$ em toda a trajetória. Esta condição implica que as amostras x_k devem satisfazer

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x) &= (Ax - BKx_k)'Px + x'P(Ax - BKx_k) \\
&= -x'(Q + K'RK)x - 2x'_k K'RKx + 2x'_k K'RKx \\
&= -x'Qx + (x - x_k)'K'RK(x - x_k) - u'_k Ru_k \\
&< -x'Qx + (x - x_k)'K'RK(x - x_k) \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Portanto, o evento de amostragem definido pelos autores ocorre quando a cota superior acima se anula, ou seja,

$$x'Qx - (x - x_k)'K'RK(x - x_k) = 0, \tag{4.26}$$

o que faz com que imediatamente $\dot{v}(x) < 0$ e isso fornece a garantia de convergência. Para fins de desempenho, pode-se impor que $\dot{v}(x) \leq -x'Sx$ para alguma $S > 0$, porém não faremos aqui este tipo de análise. Como vemos nos exemplos, esse evento pode ocorrer com frequência arbitrariamente pequena, e esta característica faz com que esta estratégia não seja viável em sistemas de controle com limitação na largura de faixa da rede de comunicação.

Exemplo 4.1 Considere o sistema \mathcal{G} dado em (4.17) com realização

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para construir os sistemas equivalentes a tempo discreto, adotamos os períodos de amostragem iguais a $T_1 = 0,80$ [s] e $T_2 = 1,10$ [s]. Utilizando os resultados do Teorema 3.3, obtemos que $\mathcal{J}_2(1) = 8,8501$ e $\mathcal{J}_2(2) = 9,9731$. Para resolver o problema de otimização (4.23), adotamos a matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ da forma

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & 1 - q \\ 1 - p & q \end{bmatrix},$$

com $p, q \in [0, 1]$. Logo, avaliando sua função objetivo na caixa $(p, q) \in [0, 1] \times [0, 1]$, obtemos o valor mínimo para o custo garantido \mathcal{H}_2 como sendo $\mathcal{J}_2^{s^o} = 8,6047$ para $p = 1$, $q = 0,64$. A Figura 4.1 mostra os valores do custo garantido para valores de (p, q) e o plano esboçado indica o menor custo \mathcal{H}_2 dentre os dois subsistemas.

Para fins de comparação, determinamos o nosso controlador tendo por base a função de comutação e a técnica de controle acionado por evento proposto em (Mazo Jr. & Tabuada 2008). Através de simulação, calculamos o custo \mathcal{H}_2 para nosso projeto, obtendo $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{s^o}) = 8,30$, e para

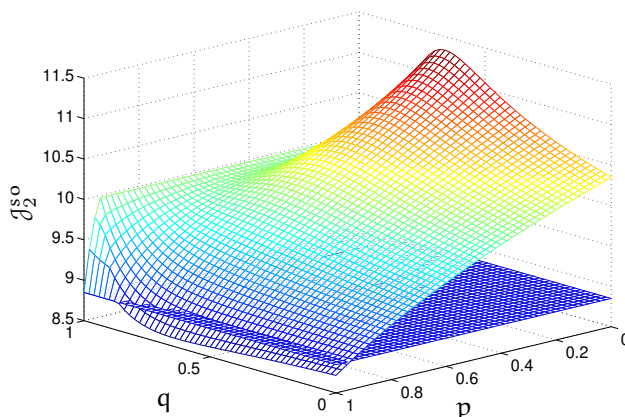


Figura 4.1: Critério \mathcal{J}_2^{so} em função de p, q .

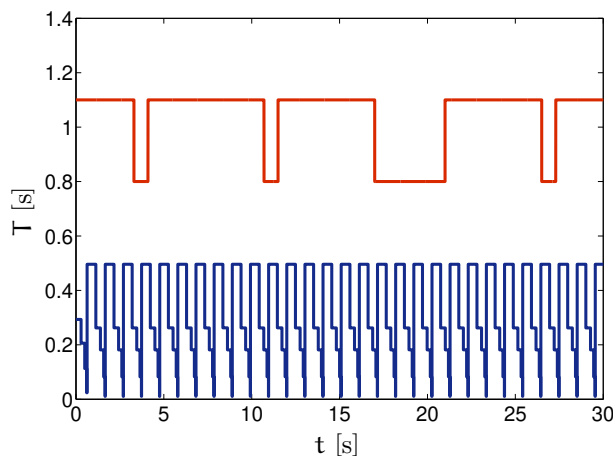


Figura 4.2: Valores para o período de amostragem para ambas as técnicas.

o controlador acionado por evento, temos um custo de 7,80. Porém, para obter esse desempenho, o controlador acionado por evento utiliza períodos de amostragem extremamente pequenos, o que viola a restrição de máxima largura de faixa do canal. Esse comportamento é mostrado na Figura 4.2, que ilustra o período de amostragem para ambas as estratégias. Nesta figura, a curva superior descreve o período de amostragem para a estratégia com comutação e a curva inferior representa o período de amostragem para o controlador acionado por evento.

Sendo assim, impomos um valor mínimo $T_* = 0,80$ [s] para o período de amostragem, representando a máxima taxa de transmissão da rede. Neste caso, o controlador acionado por evento obtém um custo \mathcal{H}_2 de 12,17, o que mostra que nossa técnica representa um ganho de aproximadamente 32% em desempenho. Se desconsiderarmos o valor limítrofe e utilizarmos um período de amostragem fixo igual a 0,55 [s], obtemos um melhor desempenho \mathcal{H}_2 e simultaneamente exi-

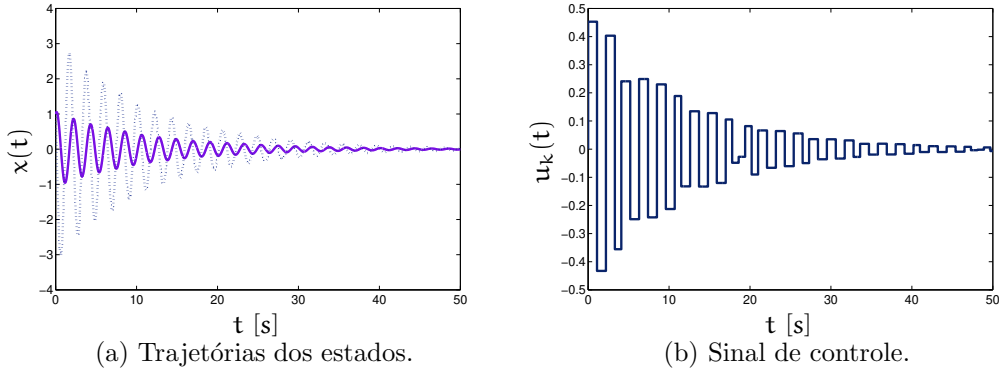


Figura 4.3: Resultados de simulação para Auto-Acionamento.

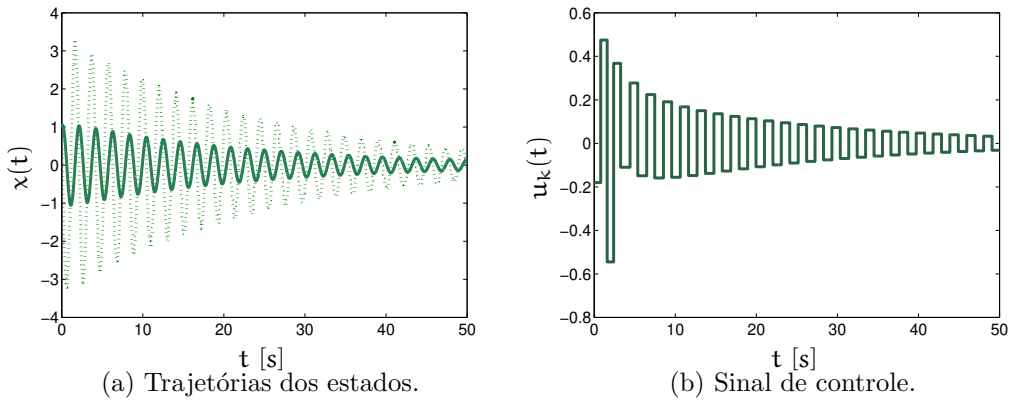


Figura 4.4: Resultados de simulação para Acionamento por Evento.

gimos uma quantidade menos significativa de recursos da rede. Os resultados de simulação estão representados nas Figuras 4.3 e 4.4.

Exemplo 4.2 Considere o sistema \mathcal{G} dado em (4.17) com realização

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neste projeto adotamos o mesmo procedimento do exemplo anterior, supondo que apenas podemos transmitir com períodos de amostragem iguais a $T_1 = 1,35$ [s] e $T_2 = 2,40$ [s]. Utilizando os resultados do Teorema 3.3, obtemos $\mathcal{J}_2(1) = 482,58$ e $\mathcal{J}_2(2) = 476,96$.

Calculando a função objetivo para matrizes de Metzler Π com a mesma estrutura daquela do exemplo anterior, obtemos o custo garantido mínimo \mathcal{H}_2 de $\mathcal{J}_2^{\text{s}^\circ} = 283,18$ para $\mathbf{p} = 1$ e $\mathbf{q} = 0$. Neste caso, através de simulações, obtemos um desempenho $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{\text{s}^\circ}) = 283,179$, bem próximo

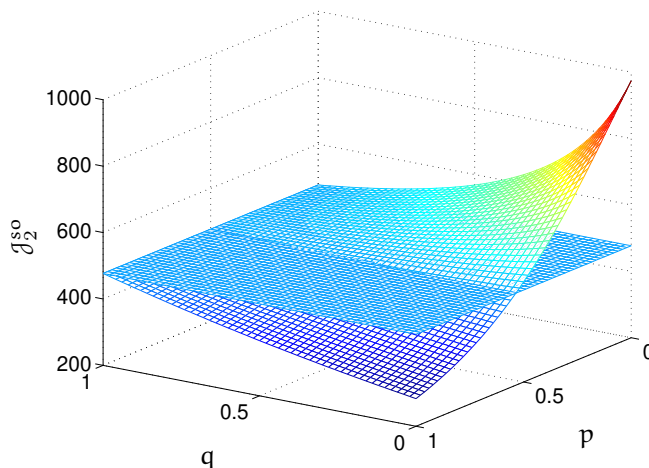


Figura 4.5: Critério \mathcal{J}_2^{so} em função de p, q .

do custo garantido calculado. Portanto, a técnica fornece uma melhoria de aproximadamente 41% em relação ao menor desempenho \mathcal{H}_2 de cada subsistema. A estratégia de acionamento por evento não consegue estabilizar esse sistema para um valor mínimo do período de amostragem $T_s = 1,0$ [s].

Os exemplos apresentados comprovam a teoria desenvolvida e ilustram as possíveis melhorias em desempenho previstas anteriormente. Como foi observado, os controladores propostos são muito eficientes em ambientes com limitação de largura de faixa e, portanto, aplicáveis ao projeto de controladores através de redes de comunicação de dados compartilhadas.

4.3 Projeto de Controlador \mathcal{H}_∞ Auto-Acionado

Nesta seção projetamos um controlador do tipo auto-acionado que otimiza o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada, considerando uma limitação em largura de faixa no canal de comunicação. Buscamos obter resultados análogos aos desenvolvidos para o caso \mathcal{H}_2 , porém verificamos que algumas propriedades não se mantêm para este caso.

4.3.1 Definição do Problema

Considere o sistema dinâmico

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_k(t) + Ew_k(t), & x_0 = 0 \\ z(t) = Cx(t) + Du_k(t) + Fw_k(t), \end{cases} \quad (4.27)$$

onde o sinal de controle e a perturbação externa são tais que $\mathbf{u}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{u}_k$ e $\mathbf{w}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{w}_k$, para todo $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1})$. Assim como na seção anterior, o conjunto \mathcal{T} dado em (4.18) possui N períodos disponíveis para transmissão T_i , o que faz com que $\mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k = T_i$ para algum $i \in \mathbb{K}$.

Nosso objetivo é determinar uma regra de comutação que otimiza o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada. De forma análoga à feita anteriormente, a cada instante \mathbf{t}_k , $k \in \mathbb{N}$, a função de comutação seleciona o período de amostragem T_i , $i \in \mathbb{K}$ a ser utilizado.

4.3.2 Desenvolvimento do Projeto

O projeto segue aproximadamente as mesmas linhas que o projeto \mathcal{H}_2 realizado na seção anterior. Cada período de amostragem T_i , $i \in \mathbb{K}$, é utilizado para, com auxílio dos Teoremas 3.1 e 3.4, obtermos o ganho ótimo \mathcal{H}_∞ de realimentação de estado K_i . Neste caso, definindo as matrizes $A_i = A_{di} - B_{di}K_i$ e $C_i = (C_{di} - D_{di}K_i)$, onde A_{di} , B_{di} , C_{di} , D_{di} , E_{di} e F_{di} são aquelas introduzidas na Seção 3.4, obtemos o sistema a tempo discreto com comutação

$$\mathcal{G}_\sigma : \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_\sigma \mathbf{x}_k + E_{d\sigma} \mathbf{w}_k, & \mathbf{x}_0 = 0 \\ \mathbf{z}_k &= \frac{C_\sigma}{\sqrt{T_\sigma}} \mathbf{x}_k + \frac{F_{d\sigma}}{\sqrt{T_\sigma}} \mathbf{w}_k, \end{cases} \quad (4.28)$$

onde $\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ é a função de comutação a ser projetada. Note que, neste sistema, todas as matrizes que definem a variável de saída foram divididas por $\sqrt{T_i}$, em concordância com (3.35).

Como já foi visto, a perturbação externa é um ruído aditivo no canal de controle e tal que $\mathbf{w}_k \in \mathcal{L}_2$. Assim, o critério \mathcal{H}_∞ é dado por

$$\mathcal{J}_\infty = \sup_{\mathbf{w}_k \in \mathcal{L}_2} \frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{w}_k\|_2^2} = \sup_{\mathbf{w} \in \ell_2} \frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}, \quad (4.29)$$

onde a primeira razão designa o ganho \mathcal{L}_2 de (4.27) e a última representa o ganho ℓ_2 para (4.28). A igualdade (4.29) é válida devido ao Teorema 3.1 e à divisão por $\sqrt{T_i}$ realizada nas matrizes de saída de (4.28). Assim como no caso \mathcal{H}_2 , se $\sigma \equiv i \in \mathbb{K}$, recuperamos o custo \mathcal{H}_∞ do subsistema \mathcal{G}_i , como era esperado.

Sendo assim, nosso objetivo é encontrar um limitante $\gamma > 0$ tal que $\mathcal{J}_\infty(\sigma) < \gamma$ e minimizá-lo aplicando as condições de Riccati–Metzler dadas no Teorema 4.3. Neste caso, as condições de

Riccati–Metzler se expressam na forma

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}E_{di} & P_{pi} & \bullet \\ C_i & F_{di} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}, \quad (4.30)$$

e o custo garantido \mathcal{H}_∞ pode ser obtido através da solução do problema de otimização

$$\mathcal{J}_\infty^{so} = \inf_{\gamma > 0, P_i > 0, i \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathcal{M}} \{\gamma : (4.30)\}, \quad (4.31)$$

que fornece a função de comutação globalmente estabilizante σ_∞^{so} tal que $\mathcal{J}_\infty(\sigma_\infty^{so}) \leq \mathcal{J}_\infty^{so}$.

Infelizmente, no caso \mathcal{H}_∞ não podemos garantir que a função de comutação obtida seja consistente. De fato, como as matrizes A_i , $i \in \mathbb{K}$, são Schur, temos que a matriz $\Pi = I \in \mathcal{M}$ é factível e, assim como no caso \mathcal{H}_2 , as desigualdades de Riccati–Metzler se tornam desacopladas, ou seja,

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_i A_i & P_i E_{di} & P_i & \bullet \\ C_i & F_{di} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}, \quad (4.32)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\infty(\sigma_\infty^{so}) &\leq \mathcal{J}_\infty^{so} \\ &\leq \inf_{\gamma > 0, P_i > 0, i \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathcal{M}} \{\gamma : (4.32)\} \\ &\leq \max_{i \in \mathbb{K}} \frac{1}{\Gamma_i} \left\| C_i(zI - A_i)^{-1} E_{di} + F_{di} \right\|_\infty^2 \\ &\leq \max_{i \in \mathbb{K}} \mathcal{J}_\infty(i). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sendo assim, em alguns casos, a função de comutação obtida pode apresentar desempenho \mathcal{H}_∞ inferior ao desejado. O exemplo a seguir ilustra esse aspecto indesejável.

Exemplo 4.3 *Considere o sistema dinâmico \mathcal{G} dado em (4.27) com realização*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O projeto é desenvolvido de forma análoga à efetuada nos Exemplos 4.1 e 4.2. Primeiramente,

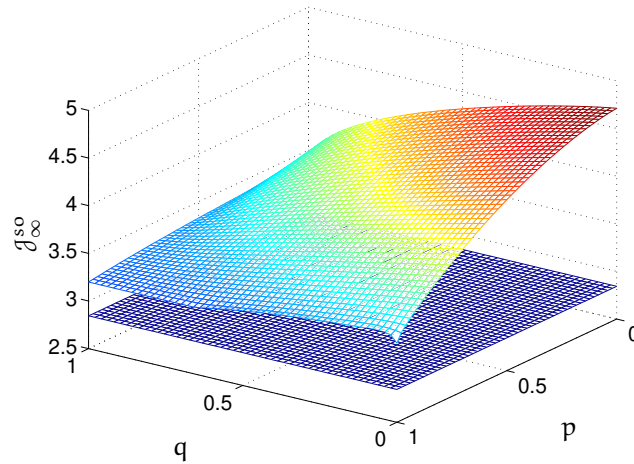


Figura 4.6: Critério $\mathcal{J}_\infty^{\text{so}}$ em função de p, q .

vamos supor que a transmissão é permitida com $T_1 = 2,0$ [s] e $T_2 = 5,5$ [s], de onde temos $\mathcal{J}_\infty(1) = 3,1988$ e $\mathcal{J}_\infty(2) = 2,8442$. Como anteriormente, calculamos os valores da função objetivo para matrizes de Metzler Π , com a mesma estrutura, para resolver o problema de otimização (4.31). A solução ótima é obtida para $p = 1,00$ e $q = 0,70$, fornecendo o custo garantido $\mathcal{J}_\infty^{\text{so}} = 3,1988$, como representado na Figura 4.6. Claramente este custo é maior que o menor dos custos \mathcal{H}_∞ dos subsistemas e, através de simulação, com a perturbação

$$w(t) = \mu(t-2) - \mu(t-4),$$

onde μ é a função degrau unitário, obtemos um custo verdadeiro igual a $\mathcal{J}_\infty(\sigma_\infty^{\text{so}}) = 3,15$. Portanto, comprovamos que a função de comutação é inconsistente para esse projeto.

Utilizando-se os períodos $T_1 = 1,9$ [s] e $T_2 = 7,0$ [s], temos os custos $\mathcal{J}_\infty(1) = 3,2254$ e $\mathcal{J}_\infty(2) = 3,2282$. Resolvendo o problema (4.31) de forma análoga, obtemos a solução ótima $\mathcal{J}_\infty^{\text{so}} = 3,2254$ para $p = 1,00$ e $q = 0,30$, sendo que os valores obtidos na busca multidimensional estão ilustrados na Figura 4.7. Como este custo garantido é igual ao mínimo entre os custos \mathcal{H}_∞ dos subsistemas, esta função de comutação é consistente.

Em alguns casos, o projeto \mathcal{H}_∞ descrito acima não encontra uma função de comutação consistente ou encontra uma função de comutação consistente, porém constante. Portanto, o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ com as técnicas aqui propostas, nesses casos, pode não ser satisfatório e, devido a este fato, o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ sem a escolha dinâmica do período de amostragem pode apresentar resultados melhores.

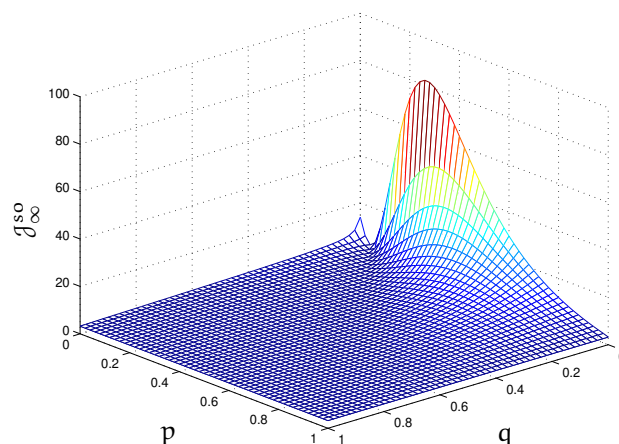


Figura 4.7: Valores de $\mathcal{J}_{\infty}^{\text{so}}$ para valores de p, q .

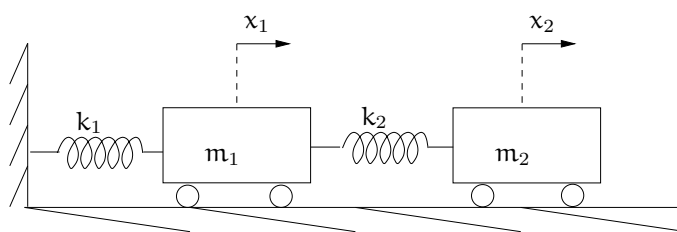


Figura 4.8: Sistema Massa–Mola.

4.4 Aplicação Prática: Sistema Massa–Mola

Nesta seção, desenvolvemos o projeto de um controlador auto-acionado \mathcal{H}_2 para um sistema massa–mola baseado no modelo apresentado em (Gonçalves 2009). Neste sistema, ilustrado na Figura 4.8, dois carros de massas m_1 e m_2 , com centros de massa nas posições dadas por x_1 e x_2 , são conectados através de molas com constantes elásticas k_1 e k_2 . Vamos desprezar qualquer atrito e consideramos $m_1 = 1,0$ [kg], $m_2 = 0,5$ [kg] e as constantes $k_1 = k_2 = 1,0$ [N/m]. Nosso objetivo é controlar a posição do carro 2 a partir da aplicação de uma força u_k no carro 1.

Para este modelo, definimos o vetor de estado como sendo $x(t) = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]'$. A dinâmica do sistema de controle a ser projetado é

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (4.34)$$

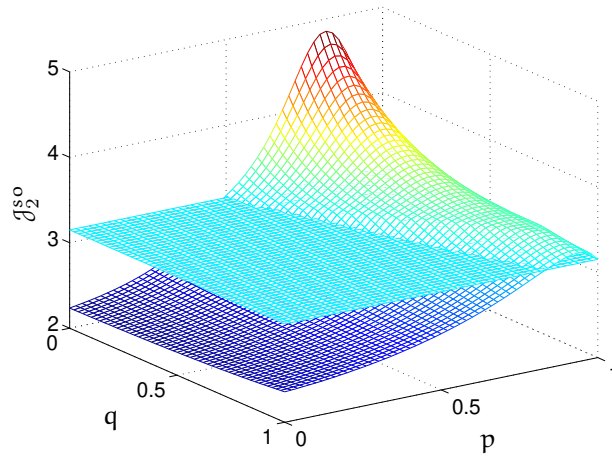


Figura 4.9: Critério \mathcal{J}_2^{so} em função de (p, q) .

onde $w(t) = \delta(t)$ e $x(0) = 0$. A matriz E foi determinada para fins ilustrativos. Como desejamos que, em regime permanente, a posição do carro 2 esteja no ponto de equilíbrio $x_2 = 0$, a saída a ser controlada é dada por

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k(t). \quad (4.35)$$

Neste projeto vamos supor que podemos transmitir o sinal de controle com períodos de amostragem $T_1 = 1,65$ [s] e $T_2 = 2,10$ [s]. Cada período de amostragem, se considerado fixo, fornece um custo \mathcal{H}_2 , dado por $\mathcal{J}_2(1) = 3,1501$ e $\mathcal{J}_2(2) = 3,3468$, respectivamente. Para este projeto, resolvemos o problema de otimização (4.23), a partir do cálculo da função objetivo para matrizes de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ com a estrutura usual, ou seja,

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & 1 - q \\ 1 - p & q \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 4.9, onde o plano constante representa o menor custo dos subsistemas. Claramente a função de comutação é consistente e propicia uma melhoria de desempenho, uma vez que $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{so}) < \mathcal{J}_2^{so}$.

Obtivemos o valor ótimo para o custo garantido $\mathcal{J}_2^{so} = 2,2356$ para $p = 0,0$ e $q = 0,0$. Através de simulação, o custo \mathcal{H}_2 real do sistema em malha fechada é $\mathcal{J}_2(\sigma_2^{so}) = 2,0338$, o que representa uma melhoria de desempenho de 35% em relação ao menor custo dos subsistemas. É importante notar que o custo ótimo \mathcal{H}_2 para um controlador a tempo contínuo, sem limitação de faixa, é

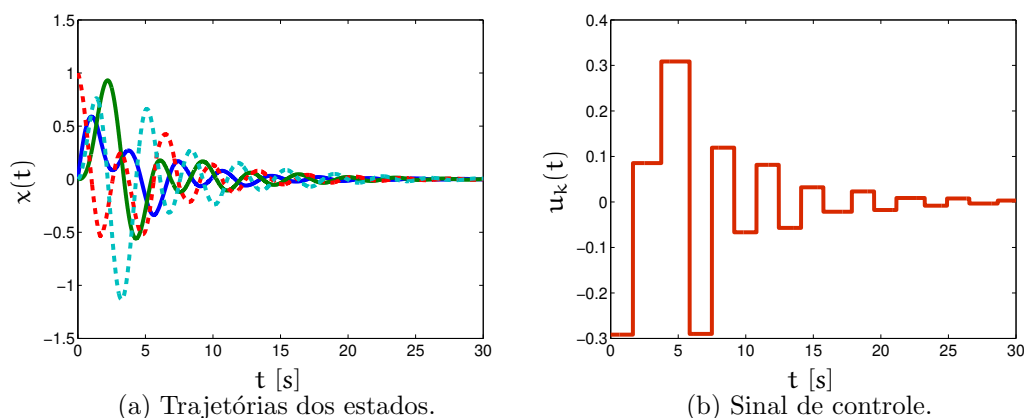


Figura 4.10: Resultados de simulação para o sistema Massa–Mola.

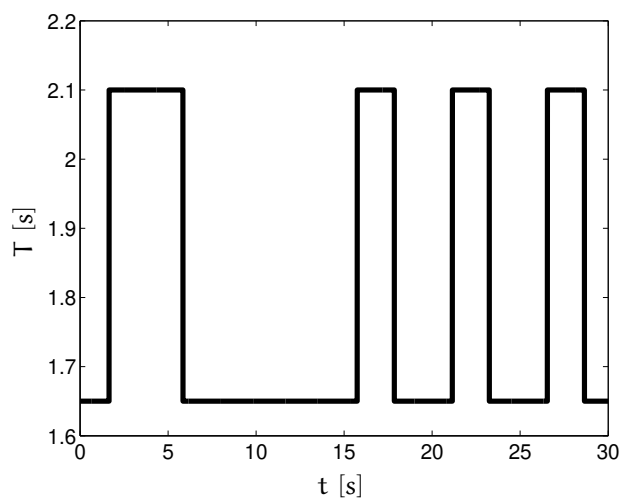


Figura 4.11: Período de amostragem para o sistema Massa–Mola.

igual a 1,1609, o que faz com que nossa técnica, mesmo com períodos de amostragem grandes, apresente desempenho comparável. Os resultados de simulação estão mostrados, na Figura 4.10 (a) as posições em linhas contínuas e as velocidades em linhas tracejadas, na Figura 4.10 (b) o sinal de controle aplicado, e na Figura 4.11 o período de amostragem.

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo, discutimos o projeto de controladores auto-acionados baseados em sistemas a tempo discreto com comutação. A função de chaveamento, em um instante apropriado, seleciona o período de amostragem a ser utilizado para o sistema dinâmico com largura de faixa limitada.

Selecionado o período, o ganho ótimo de realimentação de estado previamente determinado para este período é utilizado. Esta técnica de projeto foi desenvolvida para controladores que minimizam custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , porém apenas no caso \mathcal{H}_2 obtivemos uma regra de comutação sempre consistente e, através desta, ganhos em desempenho para o sistema em malha fechada. O caso \mathcal{H}_∞ nem sempre fornece uma regra de comutação consistente, o que pode inviabilizar o projeto de controladores da forma proposta e, portanto, neste caso, as estratégias desenvolvidas no Capítulo 3 são as mais indicadas. Finalizamos este capítulo com uma aplicação prática de um sistema massa-mola, onde desenvolvemos um controlador auto-acionado \mathcal{H}_2 .

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, desenvolvemos novos procedimentos para projeto de sistemas de controle em redes de comunicação, sujeitos a limitações em largura de faixa no sinal de controle. As técnicas de projeto propostas decorrem de um resultado básico, que permite a definição de um sistema a tempo discreto que apresenta o mesmo critério quadrático do sistema original. Com o uso deste, definimos critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas com esta estrutura e verificamos propriedades notáveis envolvendo os índices apresentados. Através deles, enunciamos e resolvemos problemas de controle ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas com sinal de controle amostrado, supondo que o período de amostragem seja constante.

Com a finalidade de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada, projetamos um controlador auto-acionado sob as restrições de projeto estudadas. Um controlador com esta estrutura flexibiliza a hipótese de período de amostragem constante e uma escolha dinâmica do período de amostragem promove melhorias no desempenho geral do sistema. Além disso, controladores auto-acionados têm papel importante na literatura atual para lidar com controle através de redes de comunicação.

Para o projeto do controlador auto-acionado, consideramos o controlador como um sistema com comutação a tempo discreto. A função de comutação tem por objetivo orquestrar a escolha adequada do período de amostragem, garantindo estabilidade e melhoria de desempenho. Primeiramente, desenvolvemos um controlador auto-acionado que considera o desempenho \mathcal{H}_2 e este controlador fornece melhorias consideráveis. Posteriormente, projetamos um controlador baseado em comutação que minimiza o custo garantido \mathcal{H}_∞ . Verificamos que esta proposta nem

sempre garante a consistência da função de comutação obtida.

A teoria desenvolvida é comprovada através de vários exemplos, que fornecem análises de características peculiares presentes em sistemas com a estrutura estudada. Notamos que o período de amostragem tem grande influência no desempenho do sistema em malha fechada, porém seu comportamento não é monotônico em relação ao período. Comprovamos a existência de taxas de amostragem que não admitem uma solução estabilizante, definidas na literatura como taxas de amostragem patológicas. Finalmente, exemplos práticos foram abordados com a finalidade de apresentar um projeto completo utilizando as técnicas desenvolvidas.

Nos exemplos estudados para o controlador \mathcal{H}_2 auto-acionado, verificamos um desempenho melhor que o obtido pelo controlador acionado por evento proposto em (Mazo Jr. & Tabuada 2008), quando são impostas restrições de limitação de faixa. Também notamos que, em algumas situações, a limitação em largura de faixa pode instabilizar o sistema em malha fechada para o controlador acionado por evento.

Os resultados desenvolvidos neste trabalho geraram dois artigos científicos submetidos para publicação:

- M.Souza, G.S. Deaecto, J.C. Geromel & J. Daafouz, “Self-Triggered Linear Quadratic Networked Control”.
- M.Souza, G.S. Deaecto, J.C. Geromel & J. Daafouz, “Self-Triggered Linear Quadratic Networked Control”, 20th Mediterranean Conference on Control and Automation, Barcelona, Espanha, 2012 (versão para o congresso).

Durante a realização deste trabalho, foram levantados vários tópicos que podem ser abordados em pesquisas futuras. O projeto de filtros e controladores por realimentação dinâmica de saída para sistemas com limitação em largura de faixa é um interessante problema a ser abordado. Além disso, a aplicação de resultados semelhantes aos desenvolvidos nesta dissertação para sistemas com comutação a tempo contínuo pode produzir resultados significativos, excluindo o evento de *chattering* através da amostragem adequada da função de comutação. O projeto de controle auto-acionado \mathcal{H}_∞ pode ser revisto com o uso de outra função de comutação para garantir sua consistência e torná-lo sempre viável. Finalmente, ressaltamos que os resultados desenvolvidos podem ser aplicados no estudo de compartilhamento de rede entre vários sistemas de controle, problema de grande interesse prático.

Bibliografia

- Almeida, J., Silvestre, C. & Pascoal, A. (2011), ‘Self-triggered observer based control of linear plants’, *Proc. of the 18th IFAC World Congress* pp. 10074–10079.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Branicky, M. S., Phillips, S. M. & Zhang, W. (2000), ‘Stability of networked control systems: explicit analysis of delay’, *Proc. of the 2000 Amer. Contr. Conf.* pp. 2352–2357.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (2011), *Numerical Analysis*, 9th edn, Brooks/Cole, Boston, MA.
- Carlson, A. B. & Crilly, P. B. (2010), *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*, 5th edn, McGraw-Hill, New York, NY.
- Chen, T. & Francis, B. A. (1995), *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer-Verlag, London, UK.
- Dai, S.-L., Lin, H. & Ge, S. S. (2009), ‘A switched system approach to scheduling of networked control systems with communication constraints’, *Proc. of the Joint 48th IEEE Conf. on Dec. and Contr. and 28th Chinese Contr. Conf.* pp. 4991–4996.
- de Oliveira, M. C. (1999), Controle de Sistemas Lineares baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) – Unicamp.

- Deaecto, G. S. (2010), Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação: Aplicação em Sistemas Mecânicos e Conversores de Potência CC–CC, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) – Unicamp.
- Donkers, M. C. F., Hetel, L., Heemels, W. P. M. H., van de Wouw, N. & Steinbuch, M. (2009), ‘Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach’, *Hybrid Systems: Computation and Control — Lecture Notes in Computer Science* **5469**, 150–164.
- Fadali, M. S. & Visioli, A. (2009), *Digital Control Engineering: Analysis and Design*, Academic Press, Burlington, MA.
- Fioravanti, A. R. (2007), Filtragem de sistemas discretos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) – Unicamp.
- Geromel, J. C. & Colaneri, P. (2006), ‘Stability and stabilization of discrete time switched system’, *International Journal of Control* **79**(7), 719–728.
- Geromel, J. C. & Korogui, R. H. (2011), *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, Edgard Blucher, São Paulo, SP.
- Geromel, J. C. & Palhares, A. G. B. (2011), *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, segunda edição edn, Edgard Blucher, São Paulo, SP.
- Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1996), *Matrix Computations*, 3rd edn, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD.
- Gonçalves, A. P. (2009), Controle Dinâmico de Saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) – Unicamp.
- Hennessy, J. L. & Patterson, D. A. (2007), *Computer Architecture: A Quantitative Approach*, 4th edn, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA.
- Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P. & Xu, Y. (2007), ‘A survey of recent results in networked control systems’, *Proc. of the IEEE — Special Issue on Technology of Networked Control Systems* **95**(1), 138–162.

- Hespanha, J. P., Ortega, A. & Vasudevan, L. (2002), ‘Towards the control of linear systems with minimum bit-rate’, *Proc. of the Int. Symp. of the Mathematical Theory of Networks and Systems*.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Kreyszig, E. (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, NY.
- Kurose, J. F. & Ross, K. W. (2009), *Computer Networking: A Top-Down Approach*, Addison Wesley, New York, NY.
- Lian, F.-L., Moyne, J. & Tilbury, D. (2002), ‘Network design consideration for distributed control systems’, *IEEE Trans. on Contr. Syst. Technology* **10**(2), 297–307.
- Liberzon, D. & Hespanha, J. P. (2005), ‘Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback’, *IEEE Trans. on Automat. Contr.* **50**(6), 910–915.
- Luenberger, D. G. (1979), *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*, John Wiley & Sons, New York, NY.
- Matveev, A. S. & Savkin, A. V. (2009), *Estimation and Control over Communication Networks*, Birkhäuser, Boston, MA.
- Mazo Jr., M., Anta, A. & Tabuada, P. (2009), ‘On self-triggered control for linear systems: guarantees and complexity’, *10th European Control Conference*.
- Mazo Jr., M. & Tabuada, P. (2008), ‘On event-triggered and self-triggered control over senso/actuator networks’, *Proc. of the 47th IEEE Conf. on Dec. and Contr.* pp. 435–440.
- Montestruque, L. A. & Antsaklis, P. J. (2003), ‘On the model-based control of networked systems’, *Automatica* **39**(10), 1837–1843.
- Postoyan, R., Tabuada, P., Nešić, D. & Anta, A. (2011), Event-triggered and self-triggered stabilization of distributed networked control systems, Technical report. arXiv: 1108.5505v1 [math.OC].
- Seron, M. M., Braslavsky, J. H. & Goodwin, G. C. (1997), *Fundamental Limitations in Filtering and Control*, Springer-Verlag, London, UK.
- Slotine, J.-J. E. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, second edn, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- Tabuada, P. (2007), ‘Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks’, *IEEE Trans. on Automat. Contr.* **52**(9), 1680–1685.
- Walsh, G. C., Ye, H. & Bushnell, L. (2002), ‘Stability analysis of networked control systems’, *IEEE Trans. on Contr. Syst. Technology* **10**(3), 438–446.
- Wang, F.-Y. & Liu, D. (2008), *Networked Control Systems: Theory and Applications*, Springer-Verlag, London, UK.
- Zhang, W., Branicky, M. S. & Phillips, S. M. (2001), ‘Stability of networked control systems’, *IEEE Contr. Syst. Mag.* **21**(1), 84–99.

APÊNDICE A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice são enunciados e provados resultados auxiliares utilizados no decorrer desta dissertação. Primeiramente, apresentamos os Teoremas de Parseval (Geromel & Palhares 2011) para sistemas a tempo contínuo e para sistemas a tempo discreto. Posteriormente, provamos o Complemento de Schur (Geromel & Korogui 2011, Golub & Van Loan 1996), resultado matricial de grande importância para manipulação de desigualdades matriciais lineares.

Teorema A.1 (Teorema de Parseval para Tempo Contínuo) *Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função tal que sua transformada de Laplace \hat{f} tenha um domínio $\mathcal{D}(\hat{f})$ que satisfaz*

$$\Upsilon = \{s \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \cap \{-s \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \neq \emptyset. \quad (\text{A.1})$$

Se γ for uma linha vertical qualquer inteiramente contida em Υ , a seguinte igualdade é verdadeira

$$\int_0^{\infty} f(t)'f(t)dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \hat{f}(s)' \hat{f}(-s)ds. \quad (\text{A.2})$$

Prova: Notando-se que $\gamma \subset \mathcal{D}(\hat{f})$, podemos escrever a transformada de Laplace inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \hat{f}(s)e^{st}ds, \quad t > 0.$$

Por outro lado, por hipótese $s \in \gamma$ faz com que $-s$ também pertença ao domínio da transformada, de onde segue

$$\hat{f}(-s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)'f(t) dt &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} f(t)' \int_{\gamma} \hat{f}(s)e^{st} ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \hat{f}(s)' \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \hat{f}(s)' \hat{f}(-s) ds, \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Duas observações importantes devem ser feitas sobre o teorema acima. Primeiramente, note que ele exige que a função \hat{f} seja analítica em um domínio contendo o eixo imaginário. Logo, esse teorema aplicado a funções de transferência de sistemas lineares exige que o sistema seja globalmente assintoticamente estável. Adicionalmente, quando γ é o eixo imaginário, pode-se reescrever a equação (A.2) da seguinte forma

$$\int_0^{\infty} f(t)'f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(j\omega)^* \hat{f}(j\omega) d\omega, \quad (\text{A.3})$$

que é a formulação tradicional do teorema de Parseval usando a transformada de Fourier de f .

Teorema A.2 (Teorema de Parseval para Tempo Discreto) *Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função tal que sua transformada $\mathcal{Z} \hat{f}$ tenha um domínio $\mathcal{D}(\hat{f})$ que satisfaz*

$$\Upsilon = \{z \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \cap \{z^{-1} \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \neq \emptyset. \quad (\text{A.4})$$

Se γ uma circunferência positivamente orientada qualquer, com centro na origem, inteiramente contida em Υ , a seguinte igualdade é verdadeira

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k' f_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \hat{f}(\bar{z}^{-1})^* \hat{f}(z) z^{-1} dz. \quad (\text{A.5})$$

Prova: Como γ está inteiramente contida no domínio da transformada \mathcal{Z} , podemos escrever a transformada inversa

$$f_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \hat{f}(z) z^{k-1} dz,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, $z \in \gamma \subset \mathcal{D}(\hat{f})$ implica $z^{-1} \in \mathcal{D}(\hat{f})$. Neste caso,

$$\hat{f}(z^{-1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k z^k.$$

Com estas igualdades, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} f'_k f_k &= \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k^* f_k = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k^* \oint_{\gamma} \hat{f}(z) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k^* z^k \hat{f}(z) z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \bar{z}^k \right)^* \hat{f}(z) z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \hat{f}(\bar{z}^{-1})^* \hat{f}(z) z^{-1} dz, \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Observe que o Teorema de Parseval para sistemas a tempo discreto exige que a circunferência unitária esteja contida no domínio da transformada. Portanto, quando aplicado a sistemas lineares invariantes no tempo, devemos exigir que o sistema seja globalmente assintoticamente estável. Nestas condições, quando γ é a circunferência unitária, podemos reescrever (A.5) da seguinte forma

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f'_k f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{j\omega})^* \hat{f}(e^{j\omega}) d\omega, \quad (\text{A.6})$$

que é a formulação tradicional do Teorema de Parseval quando consideramos a Transformada de Fourier do sinal discreto f .

Teorema A.3 (Complemento de Schur) *A matriz*

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

é definida positiva se, e somente se, uma das condições dadas a seguir for satisfeita:

(i) $A > 0$ e $C > BA^{-1}B'$.

(ii) $C > 0$ e $A > B'C^{-1}B$.

Prova: Observe que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} > 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{bmatrix}' > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - BA^{-1}B' \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Note que a transformação de congruência utilizada está bem definida uma vez que a matriz (A.7) é definida positiva somente se, $A > 0$ e $C > 0$. Portanto, pela última desigualdade, a matriz (A.7) é definida positiva se, e somente se,

$$A > 0 \quad \text{e} \quad C - BA^{-1}B' > 0,$$

o que completa a prova do item (i). A prova da segunda condição é análoga e, portanto, será omitida.

□

No teorema acima, a matriz $\Delta_A = C - BA^{-1}B'$ é chamada de *complemento de Schur* em relação a A . De forma análoga, $\Delta_C = A - B'C^{-1}B$ é chamada de *complemento de Schur* em relação a C . Note que as afirmações do teorema acima continuam válidas se a matriz original (A.7) e as matrizes em (i) ou (ii) forem definidas negativas.

Análise de Estabilidade

Neste apêndice, discutimos de forma mais detalhada alguns resultados que dizem respeito à estabilidade dos sistemas controlados com as técnicas apresentadas no Capítulo 3. Primeiramente, provamos uma condição que assegura a estabilidade do sistema a tempo contínuo realimentado sempre que um determinado sistema a tempo discreto for assintoticamente estável. Posteriormente, analisamos a eventual existência de períodos de amostragem que inviabilizam a existência de uma solução estabilizante.

B.1 Estabilidade de Sistemas Amostrados

Durante este trabalho, consideramos sistemas dinâmicos que apresentam uma forma de realimentação sobre amostras do vetor de estado em instantes igualmente espaçados. Esta seção tem por objetivo realizar uma análise mais geral sobre a estabilidade de sistemas amostrados.

Consideremos o sistema dinâmico com equação dinâmica

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(\mathbf{t}_k), \quad \forall t \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}), \quad (\text{B.1})$$

ou seja, o sistema apresenta uma dinâmica a tempo contínuo e uma realimentação a tempo discreto. Suponhamos que os instantes de amostragem sejam igualmente espaçados com período $T > 0$, ou seja, $\mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k = T$. Além disso, vamos denotar por \mathbf{x}_k a amostra do vetor de estado no instante \mathbf{t}_k , i.e., $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\mathbf{t}_k)$ e utilizamos a notação dada em (3.3). Nestas condições, o sistema a

tempo discreto obtido a partir de (B.1) tem equação dinâmica dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d)\mathbf{x}_k, \quad (\text{B.2})$$

onde $\mathbf{A}_d = \Phi(T)$ e $\mathbf{B}_d = \Gamma(T)$, com $\Phi(\cdot)$ e $\Gamma(\cdot)$ definidos em (3.8). O resultado a seguir afirma que, se o sistema (B.2) for assintoticamente estável, então o mesmo ocorre com o sistema original (B.1).

Teorema B.1 (Estabilidade) *Considere o sistema dinâmico (B.1), cujo sistema discretizado é dado por (B.2). Se a matriz dinâmica $\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d$ for Schur, então o sistema (B.1) é assintoticamente estável.*

Prova: Note que a solução da equação diferencial (B.1) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}_k + \int_0^{t-t_k} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{d}\tau \mathbf{B}\mathbf{x}_k, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Nestas condições, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{x}(t)' \mathbf{x}(t) \, dt &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{T_k}^{T(k+1)} \mathbf{x}(t)' \mathbf{x}(t) \, dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{x}_k' \mathbf{Q}(T) \mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{Q}(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}'\xi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}\xi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \, d\xi \geq 0.$$

Como a matriz $\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d$ é Schur, por hipótese, segue que o sistema discretizado é assintoticamente estável e, portanto, a série acima é convergente. Com efeito, o seu valor é dado por

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{x}_k' \mathbf{Q}(T) \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0,$$

onde $\mathbf{P} \geq 0$ é solução da equação matricial de Lyapunov

$$(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d)' \mathbf{P} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d) - \mathbf{P} + \mathbf{Q}(T) = 0,$$

que sempre existe pois a matriz $\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d$ é Schur.

Portanto, como

$$\int_0^\infty \mathbf{x}(t)' \mathbf{x}(t) \, dt = \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 < \infty,$$

segue que o sistema (B.1) é globalmente assintoticamente estável, pois $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_2 = 0$, uma vez que a integral converge. A prova está completa. \square

Em outras palavras, o teorema acima assegura que, como as amostras periódicas de um sistema geram uma sequência convergente, então o sistema a tempo contínuo deve ser estável. Este resultado valida toda a teoria desenvolvida nos Capítulos 3 e 4 desta dissertação, uma vez que as proposições enunciadas estão baseadas na estabilidade de um sistema a tempo discreto com critério de desempenho igual ao do sistema a tempo contínuo.

Observe que podemos mostrar que a matriz $\mathcal{Q}(T)$ é, na verdade, definida positiva. De fato, $\mathcal{Q}(T) > 0$ se e somente se

$$\mathbf{x}'\mathcal{Q}(T)\mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0. \quad (\text{B.3})$$

Porém, por inspeção na estrutura de $\mathcal{Q}(T)$, existe $\mathbf{x} \neq 0$ que torna (B.3) falsa se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} e^{A\xi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0, \quad \forall \xi \in [0, T], \quad (\text{B.4})$$

pois $\mathcal{Q}(T) \geq 0$ e esta apenas se anula se isso ocorrer em todo o intervalo integração. Porém, tomando-se $\xi = 0$, observamos que o produto acima é nulo apenas se $\mathbf{x} = 0$. Logo, por continuidade da função $f(\xi) = e^{A\xi}$, temos que existe um intervalo arbitrariamente próximo de $\xi = 0$ para o qual a função não se anula. Portanto, segue que $\mathcal{Q}(T)$ é definida positiva, como queríamos mostrar.

B.2 Amostragem Patológica

Nos Exemplos 3.1, 3.2 e 3.4 apresentados no Capítulo 3 desta dissertação, observamos a existência de assíntotas verticais nos valores ótimos dos critérios de desempenho definidos. Tais valores do período de amostragem fazem com que o sistema não admita um ganho de realimentação de estado que torne o sistema em malha fechada assintoticamente estável. Vale ressaltar que observamos que esses valores de T ocorre de forma aproximadamente periódica, para maiores detalhes ver (Chen & Francis 1995).

Nesta seção, temos o objetivo de analisar de forma mais satisfatória esta propriedade dos sistemas de controle estudados. Pelos resultados da seção anterior (Teorema B.1), existe um ganho de realimentação de estado $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tal que o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}_k \quad (\text{B.5})$$

seja globalmente assintoticamente estável se, e somente se, K é tal que

$$x_{k+1} = (A_d - B_d K)x_k \quad (\text{B.6})$$

é globalmente assintoticamente estável. Neste caso, exige-se a estabilizabilidade do par (A_d, B_d) , ou seja, os modos não-controláveis do sistema (B.6) devem ser todos assintoticamente estáveis.

Portanto, os períodos em que não existe ganho estabilizante para o sistema (B.5) são tais que o sistema (B.6) não é estabilizável. Nos exemplos explorados no Capítulo 3, é verificado que esse fenômeno ocorre de forma aproximadamente periódica, para os sistemas com modos próprios instáveis e oscilatórios. Este comportamento não foi observado para sistemas com polos instáveis reais ou com polos estáveis.

Em (Seron et al. 1997), os autores realizam uma análise de limitações em sistemas de controle e de filtragem. Quando são considerados controladores com amostragem, é definida a *amostragem patológica*, que é caracterizada pela inexistência de solução estabilizante. Esse fenômeno ocorre em decorrência da perda de controlabilidade de modos próprios instáveis, para um dado período de amostragem.