



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão

**Projeto de Filtros para Sistemas Lineares com
Critérios H-2, H-infinito e H-infinito em Faixas
de Frequência por meio de Desigualdades
Matriciais**

Campinas
2017

Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão

Projeto de Filtros para Sistemas Lineares com Critérios H-2, H-infinito e H-infinito em Faixas de Frequência por meio de Desigualdades Matriciais

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO LÍCIO BRUNO RIBEIRO RODRIGUES ROMÃO E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

Campinas
2017

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

R662r Romão, Lício Bruno Ribeiro Rodrigues, 1990-
Projeto de filtros para sistemas lineares com critérios H-2, H-infinito e H-infinito em faixas de frequência por meio desigualdades matriciais / Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas Lineares. 2. Desigualdades matriciais lineares. I. Dias, Pedro Luis Peres, 1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Filter design for linear systems with H-2, H-infinity and H-infinity in frequency interval criteria by means of matrix inequalities

Palavras-chave em inglês:

Linear systems

Linear matrix inequalities

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Juan Francisco Camino dos Santos

Matheus Souza

Data de defesa: 09-02-2017

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão

RA: 160946

Data da Defesa: 09/02/2017

Título da Dissertação/Tese: “Projeto de Filtros para Sistemas Lineares com Critérios H_2 , H_∞ e H_∞ em Faixas de Frequência por meio de Desigualdades Matriciais”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos (FEM/UNICAMP)

Prof. Dr. Matheus Souza (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer a Deus pela minha existência e saúde, pelo amor e força dados; elementos indispensáveis na execução deste trabalho. Prometo retribuí-lhe distribuindo e gerando amor por onde passo e praticando atos de generosidade para com os outros, da mesma forma que Jesus, seu filho, o fez ao vir à Terra.

Agradeço ao Prof. Antônio Marcus Nogueira Lima, da Universidade Federal de Campina Grande, pela indicação dada durante o processo de seleção na Universidade de Campinas. Sem a sua ajuda, talvez, não tivesse chegado onde estou hoje.

Agradeço ao Prof. Pedro L. D. Peres, pela diligência durante a execução deste projeto de mestrado. Devo muito de minha evolução como pesquisador a sua busca incansável pela perfeição e aos conhecimentos adquiridos em nossas conversas, que me ajudaram não apenas profissionalmente, mas também pessoalmente, tornando-me um ser humano melhor.

Agradeço ao Prof. Ricardo C. L. F. Oliveira, pelas inúmeras oportunidades em que discutimos o andamento do projeto de mestrado. Posso afirmar, sem dúvida, que o caminho teria sido mais difícil sem o seu auxílio.

Agradeço ao Prof. Maurício C. de Oliveira, da Universidade da Califórnia San Diego (UCSD), pela forma com que fui recebido e pelo conhecimento adquirido durante meus seis meses de estágio na UCSD. Muitos dos resultados apresentados neste texto devem-se às nossas conversas e discussões. Vale ressaltar que, com ele, aprendi a olhar para problemas de controle com um maior rigor matemático.

Agradeço aos professores da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp com os quais cursei disciplinas: Prof. João Bosco, Prof. Paulo Valente e Prof. Akebo; e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos n^{os} 2014/06408-4 – bolsa no Brasil – e 2015/13135-7 – bolsa BEPE –, pelo financiamento durante o mestrado.

Agradeço aos meus amigos de laboratório pela convivência harmoniosa e pelas nossas conversas na hora do café, que enriqueceram minha forma de ver e analisar o nosso mundo e a nossa sociedade. Em especial, gostaria de agradecer à Cecília F. Morais, pelas tardes que passamos juntos em muitos finais de semana, sempre na companhia do seu esposo, Glaucio, e grande amigo que ganhei neste período de mestrado; e ao Luciano Frezzatto, pelo período que passamos juntos nos EUA, indo, sempre que possível, comer hambúrguer no *Five Guys*.

Agradeço aos meus Pais, Edna e Edgar, pelo apoio incondicional dado a minha decisão de seguir carreira como pesquisador; e aos meus irmãos, Edgar Filho e Maria Marietta, que, apesar da distância, seguem presentes, seja por conversas no telefone, seja por diários e saudosos pensamentos.

Agradeço aos meu sogro e minha sogra, Gomes e Edna, pelo apoio; em especial, aquele dado nas mudanças de apartamento que fiz durante o período de execução deste trabalho.

E, antes que todos pensem que esqueci ou, simplesmente, ignorei, gostaria de dedicar este último, e mais importante, parágrafo a você, Isabela Miranda Gomes, minha namorada e futura esposa. Com certeza, por meio da nossa convivência, cresci como homem e pesquisador, o que me ajudou a enfrentar com mais vontade e coragem os desafios que a vida oferece. Obrigado por fazer parte da minha vida!

“Anyone who has never made a mistake has never tried anything new.”
(Albert Einstein)

Resumo

Esta dissertação aborda o problema de filtragem para sistemas dinâmicos lineares utilizando metodologias baseadas em desigualdades matriciais lineares (do inglês, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*). Mais precisamente, são fornecidas condições para o projeto de filtros de ordem completa para sistemas lineares contínuos e discretos no tempo, usando como critérios de desempenho as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, com extensões para tratar sistemas com incertezas politópicas. As condições possuem um parâmetro escalar, tornando-se LMIs para valores fixos do parâmetro. Como características principais, as condições propostas isolam a matriz de Lyapunov, usada para certificar a estabilidade com desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, das matrizes que produzem o filtro e contêm os resultados da literatura conhecidos como estabilidade quadrática para escolhas particulares do escalar.

Adicionalmente, o problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ com especificações em baixa, média e alta frequência é abordado a partir de uma extensão do Lema de Kalman-Yakubovich-Popov que relaciona desigualdades no domínio da frequência em intervalos de reta ou segmentos de círculo com desigualdades matriciais. São propostas condições baseadas em LMIs para o projeto de filtros $\mathcal{H}_\infty$ com especificações em intervalos de frequência que garantem uma realização estável com matrizes reais, nos casos contínuo e discreto no tempo, com extensões para tratar sistemas incertos.

Exemplos numéricos ilustram os resultados do trabalho.

Palavras-chaves: Sistemas Lineares, Incertezas Politópicas, Filtragem $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, Desigualdades matriciais lineares (LMIs), Lema de Kalman-Yakubovich-Popov.

Abstract

This thesis is devoted to the problem of filter design for linear dynamic systems using the Linear Matrix Inequality (LMI) framework. More precisely, LMI based conditions for the design of full order filters for continuous- and discrete-time linear systems, using the $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms as performance criteria, are proposed, with extensions to deal with polytopic uncertainty. The conditions have a scalar parameter and become LMIs for fixed values of the scalar. As attractive characteristics, the proposed conditions dissociate the Lyapunov matrix, that certifies the stability and the $\mathcal{H}_\infty$ or $\mathcal{H}_2$ performance, from the matrices of the filter realization, encompassing the well-known quadratic stability based results from the literature for specific values of the scalar parameter.

Additionally, the $\mathcal{H}_\infty$ filtering problem with low, middle and high frequency specifications is addressed through an extension of the Kalman-Yakubovich-Popov Lemma that relates frequency domain inequalities on line or circle segments with matrix inequalities. LMI based conditions for the design of $\mathcal{H}_\infty$ filters satisfying frequency range specifications with a stable realization and real matrices are proposed, for both continuous- and discrete-time cases, as well as extensions to cope with uncertain systems.

Numerical examples illustrate the proposed results.

Keywords: Linear Systems, Polytopic Uncertainty, $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Filtering, Linear Matrix Inequalities (LMIs), Kalman-Yakubovich-Popov Lemma.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos do problema de filtragem.	50
Figura 2 – Comparação entre os resultados do Lema 2.24 e Teorema 3.1 para o sistema (3.13). As curvas contínuas representam o limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$ para um dado valor do escalar ξ usando as formulações primal (em azul) e dual (em verde); a curva vermelha tracejada é o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ obtida por meio do Lema 2.24.	66
Figura 3 – Comparação entre os resultados do Lema 2.24 e Teorema 3.2 para o sistema do Exemplo 3.2. As curvas contínuas representam o limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ para um dado valor do escalar ξ para a formulação primal (em azul), dual (em verde). A curva vermelha tracejada é o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ obtida por meio do Lema 2.24.	68
Figura 4 – Influência do parâmetro ξ no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$ para o sistema do Exemplo 3.3 usando as condições do Teorema 3.4 (primal, azul tracejada; dual, vermelho contínua) com variáveis afins.	73
Figura 5 – Limitante da norma $\mathcal{H}_2$ fornecido pelas condições de (LACERDA <i>et al.</i> , 2011) ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, vermelho contínua), Lema 2.25 (azul, tracejada com pontos) e Teorema 3.4 ($\xi = 0$, dual, verde tracejada) para o Exemplo 3.3.	74
Figura 6 – Limitantes para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema do Exemplo 4.1 para (LACERDA <i>et al.</i> , 2011, $\lambda_1 = \lambda_2 = \xi, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$) (linha vermelha tracejada com pontos), adaptação do Lema 2.26 para tratar o caso robusto (linha azul tracejada) e Teorema 4.3 (linha verde), com ξ pertencente ao conjunto dado em (3.28).	81
Figura 7 – Diagrama de valores singulares do sistema (4.1) composto pela interconexão do sistema (4.27) com os filtros obtidos por meio dos Teoremas 4.4, 4.6 e 4.8 com especificações de estabilidade para $\xi = 1$	94
Figura 8 – Diagrama de valores singulares do sistema incerto (4.31) conectado ao filtro (4.32) para diferentes valores do parâmetro incerto, $\alpha \in \Xi$, para o parâmetro escalar $\xi = 1$, e para a especificação $\omega \leq 2.5$	95
Figura 9 – Diagrama de valores singulares do sistema (4.1) composto pelo sistema (4.33) e pelos filtros obtidos por meio dos Teoremas 4.5, 4.7 e 4.9 com especificações em frequência para $\xi = 0$	96
Figura 10 – Diagrama de valores singulares do sistema incerto (4.37) conectado ao filtro (4.38) para diferentes valores do parâmetro incerto, $\alpha \in \Xi$, para $\xi = 0$ e para a especificação $\pi/6 \leq \omega \leq \pi/2$	97

Lista de Tabelas

Tabela 1	– Resultado da expressão $\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q$ para especificações de baixa, média e alta frequência, casos contínuo (C) e discreto (D).	59
Tabela 2	– Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o Exemplo 4.2 usando o Teorema 4.3 (T4.3), $\xi = 0.1$, e (LACERDA <i>et al.</i> , 2011) (LOP) com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ para diferentes valores do limitante do parâmetro δ , definido por $\bar{\delta}$	80

Lista de Abreviações e Siglas

$\mathbb{R}^{n \times p}$	Conjunto dos números reais de dimensão n por p
$\mathbb{C}^{n \times p}$	Conjunto dos números complexos de dimensão n por p
A^*	Conjugado transposto da matriz A
A^T	Transposto da matriz A
$A \preceq B$	Matriz $A - B$ é semidefinida negativa
$\text{Tr}(A)$	Traço (soma dos elementos da diagonal principal) da matriz A
$\bar{\sigma}(A)$	Máximo valor singular da matriz A
$\sup_{t \in I} f(t)$	Supremum da função $f(t)$ em um intervalo I
$\inf_{t \in I} f(t)$	Infimum da função $f(t)$ em um intervalo I
$\mathcal{O}(\epsilon)$	Função que tende a zero quando a variável independente ϵ tende a zero
min.	Verbo minimizar, utilizado em problemas de otimização
$\text{rank}(A)$	Posto da matriz A
$A^\perp$	Matriz cujas colunas são elementos que formam uma base para o espaço nulo da matriz A . Ou seja, $AA^\perp = 0$
e_i	Vetor de dimensão apropriada cujo i -ésimo elemento é 1, e os outros são nulos
$\text{He}(A)$	Soma $A + A^*$
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov
gKYP	Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (do inglês, <i>generalized Kalman-Yakubovich-Popov</i>)
SOS	Soma de Quadrados (do inglês, <i>Sum of Squares</i>)
FDI	Desigualdade no Domínio da Frequência (do inglês, <i>Frequency Domain Inequality</i>)
BIBO	Sistemas com saídas limitadas para entradas limitadas (do inglês, <i>Bounded Input Bounded Output</i>)
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, <i>Linear Matrix Inequalities</i>)

Sumário

Lista de Ilustrações	10
Lista de Tabelas	11
Lista de Abreviões e Siglas	12
Sumário	13
1 Introdução	15
2 Fundamentos	19
2.1 Normas de Sinais e de Sistemas	19
2.1.1 Conceitos Básicos	19
2.1.2 Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$	21
2.2 Cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ Usando LMIs	23
2.2.1 Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$	24
2.2.1.1 Sistemas Contínuos	24
2.2.1.2 Sistemas Discretos	27
2.2.2 Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$	28
2.3 Resultados Auxiliares	30
2.3.1 Lema de Finsler	30
2.3.2 Lema da Projeção	31
2.4 Cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ Usando Escalares	33
2.5 Sistemas Dinâmicos com Incertezas Politópicas	39
2.5.1 Estabilidade Robusta	39
2.5.2 Custos Garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$	42
2.5.2.1 Custo Garantido $\mathcal{H}_2$	43
2.5.2.2 Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$	46
2.6 Filtragem	48
2.6.1 Definição	49
2.6.2 Filtragem Baseada na Estabilidade Quadrática	50
2.6.2.1 Filtragem Clássica $\mathcal{H}_2$	51
2.6.2.2 Filtragem Clássica $\mathcal{H}_\infty$	54
2.7 Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)	55
3 Filtragem $\mathcal{H}_2$	60
3.1 Filtragem $\mathcal{H}_2$ Contínua	60
3.2 Filtragem $\mathcal{H}_2$ Discreta	63
3.3 Filtragem Robusta	67
4 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$	75
4.1 Problema de Filtragem $\mathcal{H}_\infty$	75
4.1.1 Sistemas Contínuos	75

4.1.2	Discreto	77
4.1.3	Filtros Robustos $\mathcal{H}_\infty$	78
4.1.4	Exemplos Numéricos	79
4.2	Projeto de Filtros usando o gKYP	81
4.2.1	Especificações em Baixa Frequência	81
4.2.2	Especificações em Média Frequência	85
4.2.3	Especificações em Alta Frequência	87
4.2.4	Assegurando Estabilidade para os Filtros Projetados por meio do gKYP	90
4.2.5	Projetos de Filtros Robustos com Especificações em Faixas de Frequên- cia	91
4.2.6	Exemplos Numéricos	93
5	Conclusão e Perspectivas	98
	Referências	100
	Apêndices	106
	APÊNDICE A Rotina do Teorema 3.4 Usando o ROLMIP	107

1 Introdução

Nesta dissertação, aborda-se o problema de filtragem por meio de otimização convexa, mais precisamente pela utilização de Desigualdades Matriciais Lineares, ou LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD *et al.*, 1994; EL GHAOUI; NICULESCU, 2000). Primeiramente, usando como critério de desempenho as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, novas condições com um parâmetro escalar (que são LMIs para um valor fixo do escalar) para o projeto de filtros são apresentadas. Em seguida, com a finalidade de realizar o projeto de filtros em intervalos de frequência, usa-se uma extensão do Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), conhecida como gKYP (do inglês, *generalized KYP*). Antes da apresentação dos resultados, faz-se um resumo do uso das técnicas baseadas em LMIs na teoria de controle e no problema de filtragem.

Com a introdução de algoritmos computacionais especializados (GAHINET *et al.*, 1995; STURM, 1999; LÖFBERG, 2004), vários problemas da área de controle foram reformulados em termos de procedimentos de otimização, e métodos alternativos às técnicas de projeto tradicionais (lugar das raízes, e diagramas de Bode e Nyquist) emergiram na literatura. Dentre esses, destacam-se as técnicas que usam programação semidefinida, como, por exemplo, soma de quadrados (ou SOS, do inglês *Sum of Squares*) e LMIs. Métodos baseados em SOS podem ser úteis no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos que apresentam não linearidades ou atrasos (PARRILO, 2000); porém, limitando-se ao estudo de sistemas lineares e invariantes no tempo, os resultados desta dissertação são restritos às condições obtidas na forma de LMIs.

Associadas à teoria de Lyapunov, técnicas por meio de LMIs foram utilizadas na solução de vários problemas da área de controle, abrangendo desde a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes no tempo (HORISBERGER; BELANGER, 1976; GEROMEL *et al.*, 1998; DE OLIVEIRA *et al.*, 1999b; PEAUCELLE *et al.*, 2000) ao projeto de controladores (BERNUSSOU *et al.*, 1989; GEROMEL *et al.*, 1991; SCHERER *et al.*, 1997; DE OLIVEIRA *et al.*, 1999a; SHAKED, 2001; OLIVEIRA *et al.*, 2002) e filtros (GEROMEL *et al.*, 1998; PALHARES; PERES, 1998; GEROMEL, 1999; GEROMEL *et al.*, 2002; DUAN *et al.*, 2006; LACERDA *et al.*, 2011), e desde a análise de estabilidade de sistemas não lineares com saturação (HU; LIN, 2001; TARBOURIECH *et al.*, 2006; VALMÓRBIDA *et al.*, 2010) e sistemas lineares com saltos markovianos (EL GHAOUI; AIT-RAMI, 1996; NILIM; EL GHAOUI, 2005; de Farias *et al.*, 2000; BRAGA *et al.*, 2013; MORAIS *et al.*, 2015) ao problema de controle descentralizado (PERES; GEROMEL, 1993; GEROMEL *et al.*, 1994; OLIVEIRA *et al.*, 2000). Os primeiros problemas de controle foram resolvidos por meio de LMIs usando o conceito de estabilidade quadrática, que consiste em encontrar uma função de Lyapunov, ou seja, uma função positiva fora da origem do espaços de estados com derivada negativa na solução do sistema dinâmico,

que seja quadrática nos estados (isto é, uma forma quadrática com matriz constante). Extensões para a análise de estabilidade de sistemas com incertezas politópicas foram feitas com a mesma matriz sendo utilizada para garantir a estabilidade assintótica do sistema em todo o domínio de incertezas. Devido à sua flexibilidade, a estabilidade quadrática foi utilizada não apenas na análise de estabilidade robusta, mas também na solução de diversos problemas na área de controle, incluindo o problema de filtragem.

O problema de filtragem, recorrente em diversas áreas, consiste na estimação de variáveis por meio da medição de variáveis correlatas. Por muitas vezes, deseja-se eliminar o efeito de ruídos ou imprecisão inerente ao processo de medição. Na teoria de controle, quando a saída a ser estimada é o próprio espaço de estados, o problema de filtragem recebe o nome de *estimação de estados* e o filtro torna-se um *observador de estados*; nesse caso, o problema de estimação de estados é tratado como o problema dual do problema de controle por realimentação de estados e, dessa forma, muitas técnicas desenvolvidas para o problema de realimentação de estados são, com algumas adaptações, aplicáveis ao problema de filtragem.

Dentre os critérios de desempenho existentes, as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre a saída do sistema e a saída estimada pelo filtro estão entre as mais utilizadas. Soluções do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ por meio de equações de Riccati (ZHOU; KHARGONEKAR, 1988; BERNSTEIN; HADDAD, 1989; GRIMBLE, 1993) estão disponíveis na literatura. Alternativamente, o problema de filtragem pode ser resolvido por LMIs usando o conceito de estabilidade quadrática, tanto para sistemas contínuos (GEROMEL, 1999; DE SOUZA *et al.*, 2000) como para sistemas discretos (GEROMEL *et al.*, 2000; COUTINHO *et al.*, 2009). Fornecendo o filtro ótimo para sistemas precisamente conhecidos e provendo extensões diretas para tratar o caso incerto, os resultados de filtragem quadrática consolidaram o uso de LMIs na resolução de problemas de controle.

Apesar do avanço promovido e de prover o filtro ótimo $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ no caso de sistemas precisamente conhecidos, a estabilidade quadrática pode fornecer resultados conservadores para sistemas incertos. Por isso, condições menos conservadoras foram obtidas com a utilização de funções de Lyapunov e condições LMIs com variáveis extras dependentes polinomialmente de parâmetros que, além de superar o uso da mesma função de Lyapunov para todo o politopo, separam a matriz de Lyapunov das variáveis utilizadas na síntese dos filtros. Dessa forma, condições de projeto de filtros com variáveis dependentes de parâmetros foram propostas primeiramente para o caso discreto (BARBOSA *et al.*, 2002; GEROMEL *et al.*, 2002; XIE *et al.*, 2004; DUAN *et al.*, 2006; LACERDA *et al.*, 2011) e com algumas extensões para o caso contínuo (BARBOSA *et al.*, 2005; DE SOUZA *et al.*, 2007; LACERDA *et al.*, 2011), para a obtenção de resultados menos conservadores.

Um importante lema para a teoria de controle é o Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), que pode ser usado para testar positividade real de matrizes de transferência ou para obter o *Bounded-Real-Lemma* (muito utilizado no projeto de controladores

$\mathcal{H}_\infty$). Em sua forma padrão, o Lema KYP estabelece a equivalência entre a desigualdade no domínio da frequência, ou FDI (do inglês, *Frequency Domain Inequality*),

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \prec 0$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$, e a busca por uma matriz simétrica $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \prec 0, \quad (1.1)$$

em que A e B representam as matrizes dinâmica do sistema e a de controle ou ruído, respectivamente.

Observe que enquanto a FDI representa um teste de difícil verificação (pois deve ser válida para todo $\omega \in \mathbb{R}$), a LMI (1.1), por definir um conjunto convexo, pode ser validada por meio de algoritmos eficientes, por exemplo métodos de pontos interiores (NESTEROV; NEMIROVSKII, 1994; NESTEROV, 2004). Apesar de ser um resultado importante na teoria de controle, em sua forma padrão, o lema não trata especificações em faixas de frequência finita.

Na década de 2010, extensões do lema de KYP que consideram intervalos finitos de frequência foram desenvolvidas. Nesse contexto, destaca-se o trabalho (IWASAKI; HARA, 2005), conhecido como Lema de KYP generalizado, ou gKYP (do inglês, *generalized Kalman-Yakubovich-Popov Lemma*). Outra extensão do lema de KYP foi feita em (GRAHAM *et al.*, 2009) para especificações em baixa, média e alta frequência por meio de um par de desigualdades.

Portanto, a partir da extensão do gKYP apresentada em (IWASAKI; HARA, 2005) ou ainda de (GRAHAM *et al.*, 2009), podem ser desenvolvidas condições de projetos de filtros, contínuos e discretos, com especificações em baixa, média e alta frequência.

As principais contribuições desta dissertação são: (1) projeto de filtros contínuos e discretos, otimizando como critério de desempenho as normas $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, tanto para o caso precisamente conhecido, como para o caso incerto considerando um limitante. Como principais características, as condições apresentadas contêm e generalizam os resultados de filtragem baseadas na estabilidade quadrática, fornecendo limitantes menos conservadores no caso incerto. Adicionalmente, quando comparadas com outras condições da literatura, resultados similares são obtidos com menor esforço computacional; (2) projeto de filtros, contínuo e discreto, com especificações em faixas de frequência a partir do resultado do gKYP de (IWASAKI *et al.*, 2000; IWASAKI; HARA, 2005).

A organização desta dissertação segue a seguinte estrutura para os próximos capítulos, sendo que o Capítulo 2 apresenta os fundamentos; os capítulos 3 e 4 contêm as contribuições; e o capítulo 5 apresenta as conclusões. Ao final, apresenta-se, no apêndice, a rotina do MATLAB para a implementação de um dos resultados propostos usando o

ROLMIP.

Capítulo 2: Conceitos Básicos

Apresentam-se alguns conceitos matemáticos utilizados ao longo da dissertação, como a caracterização dos espaços de Hilbert com normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$; as condições LMIs para o cálculo dessas normas, com e sem parâmetro escalar; os resultados de filtragem baseadas na estabilidade quadrática; e o Lema gKYP.

Capítulo 3: Filtragem $\mathcal{H}_2$

Apresentam-se as condições com parâmetro escalar para o projeto de filtro $\mathcal{H}_2$, casos contínuo e discreto. Exemplos numéricos ilustram a aplicação das condições propostas.

Capítulo 4: Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

Apresentam-se as condições para o projeto de filtro $\mathcal{H}_\infty$ com parâmetro escalar. Além disso, são apresentadas as condições para o projeto de filtros com especificações em baixa, média e alta frequência, para os casos contínuo e discreto no tempo. Exemplos numéricos ilustram a aplicação das condições propostas.

Capítulo 5: Conclusões e Perspectivas

Contém as conclusões, perspectivas para trabalhos futuros e relação dos artigos produzidos ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

Apêndice

Apresenta-se uma rotina MATLAB que utiliza o ROLMIP para programação de LMIs dependentes de parâmetro.

2 Fundamentos

Este capítulo tem o objetivo de apresentar os conceitos básicos utilizados ao longo desta dissertação. Embora na literatura possam ser encontradas referências aos resultados contidos nesse capítulo, procura-se introduzir as principais ferramentas teóricas que servem como base para os resultados dos capítulos subsequentes. A maior parte dos resultados expostos neste capítulo podem ser encontrada em Zhou *et al.* (1996), Fairman (1998).

2.1 Normas de Sinais e de Sistemas

Alguns conceitos matemáticos são introduzidos nas subseções seguintes com o objetivo de definir, resumidamente, os espaços $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Sistemas dinâmicos com matrizes de transferência que pertencem a esses espaços são estudados ao longo deste trabalho.

2.1.1 Conceitos Básicos

Seja X um espaço vetorial tendo $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) como campo, e considere $\|\cdot\|$ uma norma em X . Então, denomina-se X como espaço normado. Por exemplo, $\mathbb{R}^n$ junto com qualquer norma $\|\cdot\|_p$ representa um espaço vetorial normado. Adicionalmente, o espaço $C[a, b]$, formado pelo conjunto de funções contínuas e limitadas em um intervalo real $[a, b]$, equipado com norma definida por

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|,$$

em que $f \in C[a, b]$, é um espaço normado.

Com isto em mente, considere X um espaço normado, e defina $\{x_n\}$ uma sequência contida em X . A sequência $\{x_n\}$ é convergente em X , diga-se $x_n \rightarrow x$, se $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, para algum $x \in X$. Além disso, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy se $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, para $n, m \rightarrow \infty$. Observe que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy; no entanto, a recíproca não é verdadeira. Espaços vetoriais normados nos quais toda sequência de Cauchy é convergente são denominados de espaços de Banach, como, por exemplo, o espaço $C[a, b]$. Os espaços $\ell_p[0, \infty]$, para $0 \leq p \leq \infty$, em que, para cada valor de p , $\ell_p[0, \infty)$ representa o conjunto de todas as sequências $\{x_n\}$ com $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$, e norma definida como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

são exemplos de espaços de Banach.

Se $p = \infty$, o espaço $\ell_\infty[0, \infty)$ representa o conjunto de sequências limitadas com norma definida por

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Para espaços cujos elementos são vetores ou matrizes, substitui-se o valor absoluto, $|\cdot|$, pela correspondente norma.

Espaços vetoriais com produto interno podem ser equipados com a norma induzida pelo produto escalar, definida como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa um produto escalar.

Associados ao conceito de espaços com produto interno, têm-se os espaços de Hilbert, caracterizados por serem espaços com produto interno completos. Note que os espaços de Hilbert são uma classe especial de espaços de Banach. Como exemplo de espaços de Hilbert de dimensão finita, considere o $\mathbb{C}^{n \times m}$ com o produto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^* b_{ij}, \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times m},$$

em que a_{ij} e b_{ij} são os elementos das matrizes A e B .

O espaço $\ell_2(-\infty, +\infty)$ equipado com o produto escalar no espaço euclidiano é um espaço de Hilbert de dimensão infinita. De maneira similar, o espaço formado por funções quadraticamente integráveis em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)^* g(t) dt$$

com $f(t), g(t) \in \mathcal{L}_2(I)$, é outro exemplo de espaço de Hilbert de dimensão infinita, denominado $\mathcal{L}_2(I)$. Se as funções são vetores ou matrizes, define-se o produto interno por

$$\langle f, g \rangle = \int_I \text{Tr}(f(t)^* g(t)) dt.$$

O espaços vetoriais $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$, $\mathcal{L}_2[0, +\infty)$ e $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, são importantes no desenvolvimento deste trabalho, e recebem a notação $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_{2+}$ e $\mathcal{L}_{2+}^\perp$, respectivamente.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, e considere um subconjunto $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{H}$. Então, define-se o complemento ortogonal de $\mathcal{S}_1$ em $\mathcal{H}$, denominado $\mathcal{S}_1^\perp$, como

$$\mathcal{S}_1^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{S}_1\}.$$

Portanto, note que $\mathcal{L}_{2+}^\perp$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{L}_{2+}$ com relação ao espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2$.

2.1.2 Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção, abordam-se espaços formados por funções complexas de variáveis complexas. Ou seja, considera-se $S \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e uma função $f : S \rightarrow \mathbb{C}$. A função f é analítica em um ponto z_0 se for diferenciável em z_0 e em uma vizinhança de z_0 . Da teoria de variável complexa, uma função é analítica em um ponto z_0 se e somente a função tem representação em série de Taylor em z_0 (BROWN; CHURCHILL, 2014). Além disso, a função f é analítica em S se para todo ponto $z \in S$, a função é analítica em z .

Dito isto, considere $S \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto. O espaço de dimensão finita formado por funções $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(F(j\omega)^* F(j\omega)) d\omega < +\infty,$$

equipado com o produto interno definido por

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(F(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega,$$

e norma induzida dada por

$$\|F\|_2 = \sqrt{\langle F, F \rangle},$$

é denominado espaço $\mathcal{L}_2$.

O subconjunto $\mathcal{H}_2$, definido como o conjunto de função analíticas em $\text{Re}(s) > 0$, compõe uma ferramenta fundamental no desenvolvimento deste trabalho. O complemento ortogonal de $\mathcal{H}_2$, definido como $\mathcal{H}_2^\perp$, é formado pelo conjunto de matrizes que são analíticas no semiplano esquerdo.

Dessa forma, observe que do ponto de vista da teoria de sistemas, matrizes de transferência associada a sistemas dinâmicos estáveis e causais pertencem ao espaço $\mathcal{H}_2$. Por outro lado, sistemas não causais e antiestáveis¹ geram matrizes de transferência que pertencem a $\mathcal{H}_2^\perp$.

Sendo um espaço de Hilbert, o espaço $\mathcal{H}_2$ é equipado com produto interno e norma definida por

$$\|F\|_2^2 = \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(F(\sigma + j\omega)^* F(\sigma + j\omega)) d\omega \right\}, \quad (2.1)$$

em que $F \in \mathcal{H}_2$. Como apresentado em (ZHOU *et al.*, 1996), a expressão (2.1) equivale a

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(F(j\omega)^* F(j\omega)) d\omega. \quad (2.2)$$

Vale ressaltar a relação dos espaços $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_2^\perp$ no domínio da frequência com os espaços no domínio do tempo introduzidos no início do capítulo. Para tanto,

¹ Sistemas dinâmicos antiestáveis têm todos os autovalores no semiplano direito, sendo uma subclasse dos sistemas instáveis. Ver Zhou *et al.* (1996), Fairman (1998) para maiores detalhes.

note que se uma função (matricial, vetorial ou escalar) no tempo $f(t) \in \mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$, então a transformada bilateral de Laplace existe, e o eixo imaginário pertencente à região de convergência. Definindo $F(s) = \mathbb{L}\{f(t)\}$, em que $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$, e $\mathbb{L} : \mathcal{L}_2(-\infty, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}_2$ é uma transformação linear entre os espaços $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$, no domínio do tempo, e $\mathcal{L}_2$, na frequência, e usando o teorema de Parseval, tem-se que

$$\|F(s)\|_2 = \|f(t)\|_2,$$

ou seja, a transformação $\mathbb{L}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$ e $\mathcal{L}_2$. Considerando $\mathbb{L}^+$ a transformada de Laplace à direita e $\mathbb{L}^-$ a transformada de Laplace à esquerda, mostra-se, de maneira similar, que essas estabelecem um isomorfismo entre os espaços no tempo $\mathcal{L}_{2+}$ e $\mathcal{L}_{2+}^\perp$, e os espaços na frequência $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_2^\perp$, respectivamente. Em outras palavras, os espaços $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$, $\mathcal{L}_{2+}$ e $\mathcal{L}_{2+}^\perp$ são relacionados por meio de uma transformação linear isomórfica (diga-se, transformada de Laplace) com os espaços no domínio da frequência $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_2^\perp$.

Além do espaço $\mathcal{H}_2$, utiliza-se o espaço $\mathcal{H}_\infty$ na apresentação dos resultados dessa dissertação. O conjunto $\mathcal{L}_\infty$ é um espaço de Banach (porém, não de Hilbert, pois não é equipado com um produto interno) formado por funções complexas de variáveis complexas que são essencialmente limitadas² no eixo imaginário, ou seja,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)) < \infty,$$

associadas à norma

$$\|F(s)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)). \quad (2.3)$$

No caso em que $F(j\omega)$ é uma função racional, a expressão (2.3) equivale a

$$\|F(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)). \quad (2.4)$$

Associados ao espaço $\mathcal{L}_\infty$, têm-se os subespaços $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty^-$. O primeiro é formado pelo conjunto de funções analíticas em $\operatorname{Re}(s) > 0$ e limitadas no eixo imaginário, e o segundo por funções analíticas em $\operatorname{Re}(s) < 0$ e limitadas no eixo imaginário. O espaço $\mathcal{H}_\infty$ é equipado com a norma

$$\|F(s)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma > 0} \bar{\sigma}(F(s)) = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)), \quad (2.5)$$

e $\mathcal{H}_\infty^-$, por sua vez, com

$$\|F(s)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma < 0} \bar{\sigma}(F(s)) = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)). \quad (2.6)$$

Observe que, se $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$ ou $F(s) \in \mathcal{H}_\infty^-$ é uma função racional própria, então $\|F(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega))$.

² Uma função é essencialmente limitada se existe uma constante c , tal que o conjunto $\{\omega \in \mathbb{R} : |F(j\omega)| > c\}$ é um conjunto de medida zero.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ tem uma interpretação importante no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo, pois representa o valor do ganho máximo, denominado ganho $\mathcal{L}_2$, entre a energia da entrada e saída ao considerarem-se sinais de entradas pertencentes ao espaço $\mathcal{L}_2$. Esse resultado é apresentado a seguir.

Teorema 2.1. Considere $H(s) \in \mathcal{L}_\infty$ a matriz de transferência de um sistema linear e invariante no tempo de dimensão $p \times q$. Então, $\|H(s)\|_\infty$ representa o ganho máximo da energia de saída para a entrada ao aplicarem-se sinais de entradas quadraticamente integráveis, ou seja, sinais pertencentes ao $\mathcal{L}_2$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (ZHOU *et al.*, 1996). $\square$

As seguintes propriedades associadas às matrizes de transferências racionais que pertencem ao espaço $\mathcal{L}_\infty$ são importantes no contexto deste trabalho.

- i) Se $H(s) \in \mathcal{L}_\infty$, então $\{Y(s) : Y(s) = H(s)U(s) : U(s) \in \mathcal{L}_2\} \subset \mathcal{L}_2$;
- ii) Se $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$, então $\{Y(s) : Y(s) = H(s)U(s) : U(s) \in \mathcal{H}_2\} \subset \mathcal{H}_2$;
- iii) Se $H(s) \in \mathcal{H}_\infty^-$, então $\{y(s) : Y(s) = H(s)U(s) : U(s) \in \mathcal{H}_2^\perp\} \subset \mathcal{H}_2^\perp$.

Doravante, os resultados apresentados referem-se às matrizes racionais que pertencem ao espaço $\mathcal{H}_\infty$, e, portanto, assume-se que $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$ implica que $H(s)$ é uma matriz de transferência de um sistema causal e analítica no semiplano direito e, portanto, BIBO (do inglês, *Bounded input bounded output*) estável.

2.2 Cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ Usando LMIs

Nesta seção, o cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de matrizes de transferências associadas a sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo usando LMIs é apresentado. Aborda-se, primeiramente, o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$, para sistemas contínuos e discretos, usando as formulações primal e dual. Em seguida, o problema da determinação da norma $\mathcal{H}_\infty$ por meio de LMIs é apresentado.

Para tanto, considere o sistema em espaço de estados

$$\begin{aligned}\delta[x] &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.7}$$

com

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times r},$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entradas, $y \in \mathbb{R}^p$ representa o vetor de saídas e $\delta[x]$ é ou o operador derivada, $\dot{x}(t)$, para sistemas contínuos, ou avanço

no tempo, $x(k+1)$, para sistemas discretos. Adicionalmente, considere

$$H(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B + D \quad (2.8)$$

a matriz de transferência racional associada ao sistema (2.7), sendo ζ a variável de Laplace s no caso de sistemas contínuos, ou a variável z para sistemas discretos.

2.2.1 Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$

Antes da apresentação das condições usando LMIs para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.7), note que, no caso contínuo, o modelo representa sistemas cujas respostas ao impulso $h(t)$ são nulas para $t < 0$, ou seja, sistemas causais. Consequentemente, as correspondentes matrizes de transferências (2.8) são elementos do espaço $\mathcal{H}_2$ se e somente se $h(t) \in \mathcal{L}_2[0, +\infty)$. Em espaços de estados, a condição $h(t) \in \mathcal{L}_2[0, +\infty)$ implica que a matriz A é Hurwitz (todos os autovalores têm parte real negativa), e a matriz D é nula (ZHOU *et al.*, 1996). No caso discreto, por outro lado, $h(k) \in l_2[0, +\infty)$ se e somente se a matriz A for Schur estável (todos os autovalores estão no interior do círculo de raio unitário do plano complexo).

Deste ponto em diante, ao mencionar-se norma $\mathcal{H}_2$ de uma matriz de transferência, assume-se, implicitamente, que as restrições supracitadas são impostas ao modelo (2.7).

2.2.1.1 Sistemas Contínuos

Conforme apresentado na expressão (2.2), se a matriz $H(s)$, dada em (2.8), pertence ao espaço $\mathcal{H}_2$, a norma é definida por

$$\begin{aligned} \|H(s)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \text{Tr}(H(j\omega)^* H(j\omega)) d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \text{Tr}(h^*(t)h(t)) dt = \int_0^{+\infty} \text{Tr}(h(t)h^*(t)) dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que

$$h(t) = \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0. \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Substituindo a expressão de $h(t)$ em (2.9), obtêm-se as expressões para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema contínuo (2.7).

Lema 2.1. Considere o sistema contínuo controlável e observável descrito por (2.7), em que A é Hurwitz e $D = 0$. O valor da norma $\mathcal{H}_2$ (ao quadrado) da matriz de transferência $H(s)$ é dado por

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}(B^T P B) = \text{Tr}(C W C^T) \quad (2.10)$$

em que $P = P^T \succ 0$ e $W = W^T \succ 0$ são soluções das equações

$$A^T P + PA + C^T C = 0, \quad (2.11)$$

$$AW + WA^T + BB^T = 0. \quad (2.12)$$

As matrizes P e W são denominadas gramianos de observabilidade e controlabilidade, respectivamente.

As equações (2.11)–(2.12) apresentam soluções únicas, simétricas e definidas positivas se A for Hurwitz e (A, C) for observável, ou (A, B) for controlável (propriedades da solução da equação de Lyapunov). Portanto, usando o resultado do Lema 2.1, a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.7) pode ser calculada pela expressão (2.10) a partir da solução de (2.11) ou (2.12).

Alternativamente, usando o resultado a seguir (RAN; VREUGDENHIL, 1988), o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.7) pode ser formulado por meio de um problema convexo de otimização com restrições LMIs.

Lema 2.2. Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz Hurwitz, matrizes simétricas $Q_2 \succ Q_1 \succeq 0$ tais que o par $(A, Q_i^{1/2})$, seja observável para $i = 1, 2$. Defina P_1 e P_2 soluções das equações

$$A^T P_1 + P_1 A + Q_1 = 0, \quad A^T P_2 + P_2 A + Q_2 = 0.$$

Então, $P_2 \succ P_1$.

Usando o Lema 2.2, considere uma matriz $\tilde{P}$ tal que

$$A^T \tilde{P} + \tilde{P} A + C^T C \prec 0, \quad (2.13)$$

então $\tilde{P} \succ P$, em que P é a solução da equação (2.11). Portanto, a norma $\|H(s)\|_2$ pode ser calculada a partir da seguinte formulação convexa (DE OLIVEIRA, 1999):

$$\|H(s)\|_2^2 = \inf \{ \text{Tr}(B^T P B) : A^T P + PA + C^T C \prec 0 \}. \quad (2.14)$$

Observe que uma questão a ser discutida é se, de fato, a solução obtida por meio de (2.14) equivale à solução do Lema 2.1. Sem utilizar argumentos matemáticos complexos, a equivalência pode ser provada por meio de uma redefinição da matriz de saída C . Dessa forma, fazendo-se

$$C \leftarrow \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{\epsilon} I \end{bmatrix},$$

em que $\epsilon > 0$, a formulação (2.14) é equivalente ao seguinte problema convexo sobre um conjunto fechado (DE OLIVEIRA, 1999):

$$\|H(s, \epsilon)\|_2^2 = \min \{ \text{Tr}(B^T P B) : A^T P + PA + C^T C \preceq 0 \}. \quad (2.15)$$

A diferença entre as normas calculadas a partir do procedimento (2.15) e do Lema 2.1 é dada por

$$\|H(s, \epsilon)\|_2^2 - \|H(s)\|_2^2 = \epsilon \text{Tr}(\mathbf{W}) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.16)$$

portanto, como o valor de ϵ controla a distância entre as soluções, tornando as soluções do problema tão próximas quanto desejado, o problema de determinação da norma $\mathcal{H}_2$ é feito utilizando³ a formulação (2.14). As formulações com LMIs, como (2.14), podem ser ainda expandidas pela utilização do complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994), resultando em condições mais propícias para a síntese de filtros (DE OLIVEIRA, 1999).

Lema 2.3. Considere o sistema contínuo representado por (2.7). As seguintes relações são equivalentes:

$$i) \quad \|H(s)\|_2 < \rho.$$

$$ii) \quad \text{Existem matrizes } 0 \prec P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } M = M^T \in \mathbb{R}^{r \times r} \text{ tais que}$$

$$\text{Tr}(M) < \rho^2, \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} M & \mathbf{B}^T P \\ P\mathbf{B} & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & C^T \\ C & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.19)$$

$$iii) \quad \text{Existem matrizes } 0 \prec W = W^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } M = M^T \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ tais que (2.17),}$$

$$\begin{bmatrix} M & CW \\ WC^T & W \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA^T & B \\ B^T & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.21)$$

O valor da norma $\mathcal{H}_2$ (ao quadrado) do sistema (2.7) é obtido, de maneira equivalente, por meio dos seguintes problemas de otimização convexa

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (2.17)-(2.19)\}, \quad (2.22)$$

ou

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (2.17), (2.20)-(2.21)\}. \quad (2.23)$$

Além disso, os problemas (2.22) e (2.23) são chamados de formulação primal e dual, respectivamente.

³ A partir deste ponto do manuscrito, apenas desigualdades estritas são utilizadas.

2.2.1.2 Sistemas Discretos

De maneira análoga ao caso contínuo, a expressão

$$\begin{aligned}\|H(z)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}(H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega})) d\omega \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Tr}(h^*(k)h(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Tr}(h(k)h^*(k))\end{aligned}\quad (2.24)$$

é utilizada para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência discreta (2.8). A sequência $h(k)$ é a resposta ao impulso do sistema discreto (2.7) dada por

$$h(k) = \begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & k > 0. \\ \mathbf{D}, & k = 0. \end{cases}\quad (2.25)$$

Substituindo-se (2.25) em (2.24), obtém-se o seguinte resultado (análogo ao Lema 2.1 para sistemas contínuos).

Lema 2.4. Considere o sistema discreto (2.7), com matriz $\mathbf{A}$ Schur estável. Então,

$$\|H(z)\|_2^2 = \text{Tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{D}^T \mathbf{D}) = \text{Tr}(\mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{C}^T + \mathbf{D} \mathbf{D}^T) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^T - \mathbf{W} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0, \quad (2.28)$$

sendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ e $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$ os gramianos de observabilidade e controlabilidade, respectivamente.

Similar ao caso contínuo, como a matriz $\mathbf{A}$ é Schur estável, as matrizes $\mathbf{P}$ e $\mathbf{W}$ são positivas definidas. Resultados para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas discretos usando LMIs são apresentados a seguir.

Lema 2.5. Considere um sistema Schur estável representado por (2.7). Então, as seguintes afirmações são equivalentes.

$$i) \quad \|H(z)\|_2 < \rho$$

$$ii) \quad \text{Existem matrizes } 0 \prec \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } \mathbf{M} = \mathbf{M}^T \in \mathbb{R}^{r \times r} \text{ tais que (2.17),}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}^T \mathbf{P} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{P} & 0 \\ \mathbf{D} & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{P} \mathbf{A} & -\mathbf{P} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.30)$$

iii) Existem matrizes $0 \prec W = W^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M = M^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tais que (2.17),

$$\begin{bmatrix} M & CW & D \\ WC^T & W & 0 \\ D^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{bmatrix} -W & AW & B \\ WA^T & -W & 0 \\ B^T & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.32)$$

Assim, a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada usando as formulações primal

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{min.} \{ \rho^2 : (2.17), (2.29)-(2.30) \},$$

ou dual

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{min.} \{ \rho^2 : (2.17), (2.31)-(2.32) \}.$$

2.2.2 Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.7) é utilizada nos resultados apresentados nesta dissertação. Consideram-se sistemas dinâmicos cujas matrizes de transferências são racionais e pertencem ao espaço $\mathcal{H}_\infty$ (ou seja, causais e analíticas no semiplano direito fechado). No caso contínuo, a matriz de transferência é limitada no eixo imaginário e tem norma $\mathcal{H}_\infty$ dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega > 0} \bar{\sigma}(H(j\omega)).$$

No caso discreto, são considerados sistemas nos quais a matriz de transferência é limitada no círculo unitário, com norma $\mathcal{H}_\infty$ dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \bar{\sigma}(H(e^{j\omega})).$$

A partir do resultado do Teorema 2.1 (bem como o equivalente discreto), estabelece-se o seguinte resultado para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema linear e invariante no tempo dado em (2.7).

Lema 2.6. Considere o sistema contínuo linear e invariante no tempo dado em (2.7). As seguintes condições são equivalentes:

i) $\|H(s)\|_\infty < \gamma.$

ii) Existe uma matriz simétrica $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -I & D^T \\ C & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.33)$$

Demonstração. A partir do resultado do Teorema 2.1, sabe-se que $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se, e somente se,

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|u(t)\|_2^2. \quad (2.34)$$

Note que, dizer que $H(s)$ é racional e analítica no semiplano direito fechado é o mesmo que garantir que a matriz A no sistema (2.7) é Hurwitz. Ou seja, existe uma matriz simétrica $P \succ 0$ tal que, a derivada da função de Lyapunov quadrática nos estados, $v(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, é negativa, isto é

$$x(t)^T (A^T P + P A) x(t) + 2u(t)^T B^T P x(t) < 0. \quad (2.35)$$

Reescrevendo (2.34) por meio de produtos escalares e somando-se a desigualdade resultante com (2.35), obtém-se a seguinte desigualdade

$$x(t)^T (A^T P + P A) x(t) + 2u(t)^T B^T P x(t) + y(t)^T y(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0. \quad (2.36)$$

Substituindo-se a expressão para $y(t)$ obtida de (2.7) em (2.36), tem-se

$$\begin{bmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0. \quad (2.37)$$

Como a desigualdade (2.37) deve ser válida para todo $t \geq 0$, $\forall x(t)$ e $\forall u(t)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Portanto, o resultado segue pela aplicação do complemento de Schur.

O valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser obtido a partir do problema de otimização convexo

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \mathbf{min.} \{ \gamma^2 : (2.33) \}.$$

□

Lema 2.7. Com relação ao sistema discreto representado por (2.7), as seguintes condições são equivalentes.

i) $\|H(z)\|_\infty < \gamma$

ii) Existe uma matriz simétrica $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B & C^T \\ B^T P A & B^T P B - \gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.38)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ é obtida por meio do problema de otimização convexo

$$\|H(z)\|_\infty^2 = \mathbf{min.} \{ \gamma^2 : (2.38) \}.$$

Demonstração. Similar ao caso contínuo.

□

2.3 Resultados Auxiliares

Alguns resultados auxiliares são apresentados nesta seção, a saber: os lemas de Finsler e da Projeção, bastante utilizados em teoria de controle, pois permitem a obtenção de condições equivalentes na forma de LMIs. Por muitas vezes, o Lema de Finsler é utilizado para separar as variáveis de decisão da matriz de Lyapunov, permitindo que a matriz de Lyapunov seja considerada dependente de parâmetros. O Lema de Finsler também é usado em condições relacionadas com as normas $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ e para introduzir variáveis extras nas condições, as chamadas variáveis de folga, ou multiplicadores, proporcionando condições menos conservadoras ao tratar sistemas incertos.

2.3.1 Lema de Finsler

Composto por quatro equivalências algébricas, o Lema de Finsler é uma ferramenta essencial no projeto de sistemas de controle usando LMIs.

Lema 2.8. Considere uma matriz hermitiana $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e uma matriz $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ com $m < n$ e $\text{rank}(B) = r < n$. Então, as seguintes condições são equivalentes.

- i) $z^T Q z < 0$, para todo z tal que $Bz = 0$.
- ii) $B^{\perp*} Q B^{\perp} \prec 0$.
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R}, \mu > 0 : Q - \mu B^* B \prec 0$.
- iv) $\exists X \in \mathbb{C}^{n \times m} : Q + XB + B^* X^* \prec 0$.

Demonstração. A prova deste lema pode ser encontrada em (SKELTON *et al.*, 1998) ou em (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), e é reproduzida a seguir.

$i) \Rightarrow ii)$: Primeiramente note que todo vetor z tal que $Bz = 0$, pode ser escrito como $z = B^{\perp} y$, para algum $y \in \mathbb{C}^{n-r}$. Então,

$$y^* B^{\perp*} Q B^{\perp} y = z^* Q z < 0,$$

usando-se o fato que $i)$ é verdadeiro.

$ii) \Rightarrow i)$: De maneira similar, assume-se que $ii)$ é verdadeiro. Portanto,

$$z^* Q z = y^* B^{\perp*} Q B^{\perp} y < 0,$$

em que $z = B^{\perp} y$, ou seja, $Bz = 0$.

$iii), iv) \Rightarrow ii)$: Primeiramente, considere o caso $iii) \Rightarrow ii)$. Assumindo que o item $iii)$ é verdadeiro, note que

$$B^{\perp*} Q B^{\perp} = B^{\perp*} (Q - \mu B^* B) B^{\perp},$$

como, por hipótese, $Q - \mu B^*B \prec 0$ e $B^\perp$ tem posto completo de colunas, o resultado segue. A implicação $iv) \Rightarrow ii)$ pode ser mostrada similarmente.

$iii) \Rightarrow iv)$: Assumindo que o item $iii)$ é verdadeiro e escolhendo $X = (-\mu/2)B^*$, observe que

$$Q + XB + B^*X^* = Q - \mu B^*B \prec 0.$$

$ii) \Rightarrow iii)$: Suponha que o item $ii)$ é verdadeiro. Note que se existir uma matriz $D \in \mathbb{C}^{n \times r}$ tal que $\text{rank}(D) = r$,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D & B^\perp \end{bmatrix} = n, \quad (2.39)$$

e $D^*B^*BD = I$, então o resultado está provado. Isto pode ser verificado da identidade

$$\begin{bmatrix} D^* \\ B^{\perp*} \end{bmatrix} (Q - \mu B^*B) \begin{bmatrix} D & B^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^*QD - \mu I & D^*QB^\perp \\ B^{\perp*}QD & B^{\perp*}QB^\perp \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

e, por hipótese, $B^{\perp*}QB^\perp \prec 0$. Então, com a aplicação do complemento de Schur prova-se que existe um escalar $\mu > 0$ que faz com que a matriz à direita da igualdade na expressão (2.40) seja definida negativa.

Neste ponto, a prova do lema resume-se à busca de uma matriz D com as características supracitadas. Para tanto, considere a decomposição de posto completo⁴ da matriz $B = B_\ell B_r$, em que $B_\ell \in \mathbb{C}^{m \times r}$ e $B_r \in \mathbb{C}^{r \times n}$. A partir dessa decomposição, a matriz de interesse é construída da seguinte forma $D = B_r^*(B_r B_r^*)^{-1}(B_\ell^* B_\ell)^{-1/2}$. Note que essa matriz satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

Observe que $i)$ e $ii)$ estabelecem a equivalência entre o teste de negatividade de Q no subespaço vetorial formado pelo conjunto de vetores, $w \in \mathbb{C}^m$, tais que $Bw = 0$ com a negatividade da mesma matriz ao restringir-se o domínio ao subespaço gerado pelos vetores ortogonais a $\mathcal{R}(B^T)$. Adicionalmente, note que nos itens $iii)$ e $iv)$ introduzem-se variáveis extras μ e X , respectivamente.

2.3.2 Lema da Projeção

O Lema da Projeção estabelece alternativas para testar a negatividade de uma expressão matricial em dois subespaços simultaneamente. O resultado é importante no desenvolvimento de condições alternativas para o cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo.

Lema 2.9. Considere $x \in \mathbb{C}^n$, $Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tais que $\text{rank}(S) < n$ e $\text{rank}(K) < n$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

⁴ Esta fatoração sempre existe e pode ser obtida a partir da decomposição de valores singulares da matriz B . Por exemplo, considere $B = U\Sigma V^*$, com $U = [U_1 \ U_2]$, $V = [V_1 \ V_2]$ e $\Sigma = \text{diag}\{\Sigma_r, 0\}$, em que $\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_i\}$, $i = 1, \dots, r$. Então, pode-se escolher $B_\ell = U_1$ e $B_r = \Sigma_r V_1^*$. Vale a pena destacar que esta decomposição não é única.

$$i) \ S^{\perp*} Q S^{\perp} \prec 0 \text{ e } K^{\perp*} Q K^{\perp} \prec 0.$$

$$ii) \ \exists \mu \in \mathbb{R}, \mu > 0 : Q - \mu S^* S \prec 0 \text{ e } Q - \mu K^* K \prec 0.$$

$$iii) \ \exists X \in \mathbb{C}^{p \times m} : Q + K^* X S + S^* X^* K \prec 0.$$

Demonstração. A prova desse lema pode ser encontrada em (SKELTON *et al.*, 1998) ou em (BOYD *et al.*, 1994); porém, a versão da prova nesta dissertação segue a apresentada em (DE OLIVEIRA, 2016).

$ii), iii) \Rightarrow i)$: Segue passos similares aos utilizados na prova do Lema de Finsler, realizando transformações de congruências com $S^{\perp}$ e $K^{\perp}$.

$i) \Rightarrow ii)$: Supondo que $i)$ é verdadeiro e aplicando do Lema de Finsler para cada desigualdade, sabe-se que existem escalares positivos μ_1 e μ_2 tais que

$$Q - \mu_1 S^* S \prec 0, \quad Q - \mu_2 K^* K \prec 0.$$

Definindo $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$, o item $ii)$ é obtido.

$ii) \Rightarrow iii)$: Supondo que $ii)$ é verdadeiro, e definindo $\Phi = Q - \nu^2 S^* S - \nu^2 K^* K$, tem-se:

$$\Phi + \nu^2 K^* K \prec 0, \tag{2.41}$$

$$\Phi + \nu^2 S^* S \prec 0, \tag{2.42}$$

em que $\mu = \nu^2$. Observe que $\Phi \prec 0$, pois

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[(Q - 2\nu^2 S^* S) + (Q - 2\nu^2 K^* K) \right].$$

Portanto, usando complemento de Schur, estabelecem-se as seguintes equivalências:

$$\Phi + \nu^2 K^* K \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Phi & \nu K^* \\ \nu K & -I \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow -I - \nu^2 K \Phi^{-1} K^* \prec 0.$$

Similarmente,

$$\Phi + \nu^2 S^* S \prec 0 \Leftrightarrow -I - \nu^2 S \Phi^{-1} S^* \prec 0.$$

Consequentemente, conclui-se que

$$\begin{bmatrix} -I - \nu^2 S \Phi^{-1} S^* & \mathcal{Y}^* - \nu^2 S \Phi^{-1} K^* \\ \mathcal{Y} - \nu^2 K \Phi^{-1} S^* & -I - \nu^2 K \Phi^{-1} K^* \end{bmatrix} \prec 0, \tag{2.43}$$

em que $\mathcal{Y} = \nu^2 K \Phi^{-1} S^*$. Aplicando complemento de Schur, a expressão (2.43) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \Phi & \nu S^* & \nu K^* \\ \nu S & -I & \mathcal{Y}^* \\ \nu K & \mathcal{Y} & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} \Phi + \nu^2 K^* K & \nu S + \nu K^* \mathcal{Y} \\ \nu S + \nu \mathcal{Y}^* K & -I + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q - \nu^2 S^* S & \nu(S + \mathcal{Y}^* K)^* \\ \nu(S + \mathcal{Y}^* K) & -I + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Mais uma vez, a partir do complemento de Schur, obtêm-se as seguintes correspondências

$$-I + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y} \prec 0, \quad Q - \nu^2 S^* S + \nu^2 (S + \mathcal{Y}^* K)^* (-I + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y})^{-1} (S + \mathcal{Y}^* K) \prec 0. \quad (2.44)$$

Usando o lema da inversa de matrizes, a segunda desigualdade de (2.44) pode ser reescrita como

$$Q + \nu^2 K^* \mathcal{Y} S + \nu^2 S^* \mathcal{Y}^* K + \nu^2 K^* \mathcal{Y} \mathcal{Y}^* K + \nu^2 (S + \mathcal{Y}^* K)^* (I - \mathcal{Y} \mathcal{Y}^*)^{-1} (S + \mathcal{Y}^* K) \prec 0.$$

Ou seja, *iii*) é verdadeira e o resultado está provado com $X = \nu^2 \mathcal{Y}$. $\square$

2.4 Cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ Usando Escalares

O cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.7) pode ser feito de maneira alternativa a partir de desigualdades matriciais com escalares (que tornam-se LMIs para um valor fixo do escalar), obtidas por meio do Lema 2.9 aplicado aos resultados apresentados nos Lemas 2.3, 2.5, 2.6 e 2.7.

Os lemas a seguir apresentam condições equivalentes com parâmetro escalar para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema linear e invariante no tempo (PIPELEERS *et al.*, 2009; BRAGA *et al.*, 2012), tanto no caso contínuo quanto no caso discreto.

Lema 2.10. Considere o sistema contínuo dado por (2.7). Então as seguintes condições são equivalentes:

$$i) \|H(s)\|_2 < \rho$$

$$ii) \text{ Existem matrizes } 0 \prec P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, M = M^T \in \mathbb{R}^{r \times r}, X \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } G \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ e um escalar } \xi > 0 \text{ tais que (2.17),}$$

$$\begin{bmatrix} P - G - G^T & G^T B \\ B^T G & -M \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} \xi(A^T X + X^T A) & P + A^T X - \xi X^T & C^T \\ P + X^T A - \xi X & -X - X^T & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.46)$$

Condições similares são obtidas a partir da formulação dual, substituindo (A, B, C) por (A^T, C^T, B^T) .

Um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema contínuo (2.7) pode ser calculado em função do parâmetro $\xi > 0$ por meio do seguinte problema de otimização convexa

$$\|H(s, \xi)\|_2^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (2.17), (2.45)-(2.46)\}, \quad (2.47)$$

ou, alternativamente, trocando-se (2.45) e (2.46) pelas respectivas formulações duais.

Demonstração. A equivalência entre *i)* e *ii)* é estabelecida utilizando os resultados dos Lemas 2.3 e 2.9. O resultado do Lema 2.9 é usado para provar equivalência entre as desigualdades (2.45) e (2.18), e entre (2.46) e (2.19). Dessa forma, o resultado segue a partir do Lema 2.3. Para tanto, observe que (2.45) pode ser reescrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} + \begin{bmatrix} -I \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{G} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{G}^T \underbrace{\begin{bmatrix} -I & \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \prec 0,$$

e note que, com a escolha

$$\mathbf{S}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ I \end{bmatrix},$$

$\mathbf{S}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{S}^\perp \prec 0$ é a desigualdade (2.18), após o uso do complemento de Schur. Ademais, $\mathbf{K}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{K}^\perp \prec 0$, com

$$\mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

implica em $M \succ 0$, que é automaticamente satisfeita. Usando a equivalência entre *i)* e *iii)* do Lema 2.9, prova-se a equivalência entre (2.45) e (2.18). Analogamente, a desigualdade (2.46) pode ser reescrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P & \mathbf{C}^T \\ P & 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & -I \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ -I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \prec 0.$$

Uma vez que $\mathbf{S}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{S}^\perp \prec 0$, com a escolha

$$\mathbf{S}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{A} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

é correspondente, por complemento de Schur, à desigualdade (2.19), e $\mathbf{K}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{K}^\perp \prec 0$, por meio da escolha

$$\mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \xi I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

é

$$\begin{bmatrix} -2\xi P & C^T \\ C & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.50)$$

conclui-se que, se a desigualdade (2.50) é satisfeita para um determinado valor de $\xi > 0$, a desigualdade (2.46) é equivalente a (2.19). A prova para a formulação dual do caso contínuo é obtida usando passos análogos. $\square$

Para provar que o problema de otimização (2.47) contém a solução da equação (2.11), define-se $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T = P/\xi$. Em seguida, com a aplicação do complemento de Schur com relação ao bloco (3, 3) de (2.46), a seguinte desigualdade equivalente é obtida

$$\begin{bmatrix} A^T P + P^T A + C^T C & A^T P/\xi \\ PA/\xi & -2P/\xi \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.51)$$

Aplicando-se o complemento de Schur mais um vez, desta vez com respeito ao bloco (2, 2) da desigualdade (2.51), obtêm-se as desigualdades

$$A^T P + PA + C^T C + \frac{1}{2\xi} A^T P A \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (2.52)$$

Note que quando o valor do parâmetro escalar $\xi \rightarrow \infty$, a matriz P , solução da equação (2.11), é obtida. Portanto, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \|H(s, \xi)\|_2 = \|H(s)\|_2$.

Lema 2.11. Com relação ao sistema discreto dado por (2.7), as seguintes condições são equivalentes:

i) $\|H(z)\|_2 < \rho$.

ii) Existem matrizes $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M = M^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que (2.17),

$$\begin{bmatrix} -P & P & 0 & 0 \\ P & -\mathbf{G} - \mathbf{G}^T & \mathbf{G}\mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T & -M & \mathbf{D}^T \\ 0 & 0 & \mathbf{D} & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.53)$$

$$\begin{bmatrix} -P + \xi(A^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T A) & A^T \mathbf{X} - \xi \mathbf{X}^T & C^T \\ \mathbf{X}^T A - \xi \mathbf{X} & P - \mathbf{X} - \mathbf{X}^T & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.54)$$

Similarmente ao caso contínuo, um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema discreto (2.7) pode ser obtido a partir do seguinte problema convexo de otimização em que $\xi \in (-1, 1)$,

$$\|H(z, \xi)\|_2^2 = \mathbf{min.} \{ \rho^2 : (2.17), (2.53) \text{—} (2.54) \}. \quad (2.55)$$

Demonstração. Seguindo passos similares ao caso contínuo, a equivalência entre *i)* e *ii)* pode ser estabelecida reescrevendo (2.53) como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M & D^T \\ 0 & 0 & D & -I \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{G} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I & B & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ B^T \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{G}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \prec 0,$$

e observando que, com

$$\mathbf{S}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

a desigualdade $\mathbf{S}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{S}^\perp \prec 0$ é (2.29), e que

$$\mathbf{K}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -M & D^T \\ 0 & D & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

com

$$\mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

é automaticamente satisfeita, uma vez que (2.29) implica em $M \succ D^T D$. Dessa forma, usando o Lema 2.9 mostra-se que (2.53) e (2.29) são equivalentes. Reescrevendo-se (2.54) como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P & 0 & C^T \\ 0 & P & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} + \begin{bmatrix} A^T \\ -I \\ 0 \end{bmatrix} X \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \end{bmatrix} X^T \underbrace{\begin{bmatrix} A & -I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \prec 0,$$

note que $\mathbf{S}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{S}^\perp \prec 0$, com $\mathbf{S}^\perp$ dada em (2.48), é a desigualdade (2.30). Ademais, se existir um $\bar{\xi}$ tal que para todo $\xi \in (-\bar{\xi}, \bar{\xi})$ a desigualdade

$$\mathbf{K}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} (\xi^2 - 1)P & C^T \\ C & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

com $\mathbf{K}^\perp$ dada em (2.49), seja satisfeita, prova-se que (2.54) equivale a (2.30) pelo Lema 2.9. A existência de tal $\bar{\xi}$ é garantida, uma vez que $-P + C^T C \prec 0$ (pois A é Schur estável). Consequentemente, *iii)* e *iv)* são equivalentes. O resultado dual é obtido de maneira similar. $\square$

Discussão similar ao caso contínuo pode ser feita para provar que o problema de otimização (2.55) contém o valor ótimo. De fato, definindo $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T = P$ e aplicando complementos de Schur é possível mostrar que a desigualdade (2.54) é satisfeita se e somente se

$$\mathbf{A}^T P \mathbf{A} - P + \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \xi^2 P \prec 0, \quad P \succ 0.$$

Dessa forma, se $\xi = 0$, resolver o problema de otimização (2.55) equivale ao problema de cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ ótima (apresentado do Lema 2.5).

O cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ por meio de condições LMIs com parâmetro escalar é apresentado a seguir.

Lema 2.12. Com relação ao sistema contínuo (2.7), as seguintes condições são equivalentes.

$$i) \|H(s)\|_\infty < \gamma.$$

ii) Existem uma matriz simétrica $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{A} & P + \xi \mathbf{A}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T & \mathbf{X}^T \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ P + \xi \mathbf{X}^T \mathbf{A} - \mathbf{X} & -\xi(\mathbf{X} + \mathbf{X}^T) & \xi \mathbf{X}^T \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B}^T \mathbf{X} & \xi \mathbf{B}^T \mathbf{X} & -I & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & 0 & \mathbf{D} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.56)$$

Demonstração. Como no caso $\mathcal{H}_2$, estabelece-se a equivalência entre *i)* e *ii)* por meio do Lema 2.9. Primeiramente, note que a desigualdade (2.56) pode ser reescrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & \mathbf{C}^T \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & 0 & \mathbf{D} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ -I \\ \mathbf{B}^T \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \underbrace{\begin{bmatrix} I & \xi I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} I \\ \xi I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -I & \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \prec 0.$$

Observe que, com

$$\mathbf{S}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} \xi I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

a desigualdade $\mathbf{S}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{S}^\perp \prec 0$ é a desigualdade (2.33), e

$$\mathbf{K}^{\perp*} \mathbf{Q} \mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} -2\xi P & 0 & -\xi \mathbf{C}^T \\ 0 & -I & \mathbf{D}^T \\ -\xi \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

Por meio do complemento de Schur, $K^\perp{}^* Q K^\perp \prec 0$ se, e somente se, $\xi > 0$ e

$$-2\xi P - \begin{bmatrix} 0 & -\xi C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & D^T \\ D & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\xi C \end{bmatrix} \prec 0.$$

Portanto, existe um $\xi \in (0, \bar{\xi})$, tal que a desigualdade acima é sempre satisfeita, e a equivalência entre *i*) e *ii*) segue pelo Lema 2.9. Note que a inversa indicada na desigualdade acima existe, pois a matriz aparece como um bloco da diagonal na condição (2.33). $\square$

Lema 2.13. Considere o sistema discreto dado por (2.7), as seguintes relações são equivalentes.

$$i) \|H(z)\|_\infty < \gamma.$$

ii) Existem uma matriz simétrica $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que

$$\begin{bmatrix} \xi(A^T X + X^T A) - P & A^T X - \xi X^T & \xi X^T B & C^T \\ X^T A - \xi X & P - X - X^T & X^T B & 0 \\ \xi B^T X & B^T X & -I & D^T \\ C & 0 & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.58)$$

Demonstração. O resultado discreto é obtido de maneira similar, reescrevendo (2.58) como,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & C^T \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & D^T \\ C & 0 & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_Q + \begin{bmatrix} A^T \\ -I \\ B^T \\ 0 \end{bmatrix} X \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_K + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} X^T \underbrace{\begin{bmatrix} A & -I & B & 0 \end{bmatrix}}_S \prec 0,$$

e observando que, com a matriz $S^\perp$ dada em (2.57) e

$$K^\perp = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ \xi I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

a desigualdade $S^{\perp*} Q S^\perp \prec 0$ é equivalente à desigualdade (2.38), e que

$$K^{\perp*} Q K^\perp = \begin{bmatrix} (\xi^2 - 1)P & 0 & C^T \\ 0 & -I & D^T \\ C & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

Então, $K^{\perp*} Q K^{\perp} \prec 0$ se, e somente se, existir um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tal que,

$$(\xi^2 - 1)P + \begin{bmatrix} 0 & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D^T \\ D & \gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} \prec 0.$$

No entanto, como (2.38) implica em

$$-P + \begin{bmatrix} 0 & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D^T \\ D & \gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} \prec 0,$$

a equivalência entre *iii*) e *iv*) segue pelo Lema 2.9. $\square$

Observação 2.1. A utilidade dos Lemas 2.10, 2.11, 2.12, e 2.13 torna-se evidente com a introdução do conceito de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_{\infty}$ para sistemas com incertezas politópicas. Nesse caso, as condições com escalares podem prover custos garantidos menores do que os obtidos a partir de extensões dos Lemas 2.3, 2.5, 2.6 e 2.7 para tratar sistemas incertos por meio da estabilidade quadrática. Ou seja, realizar busca no parâmetro escalar pode ser vantajoso ao tratarem-se sistemas incertos.

2.5 Sistemas Dinâmicos com Incertezas Politópicas

O conceito de estabilidade robusta é de grande importância na teoria de controle. A robustez de um sistema de controle está relacionada com a sua capacidade de manter determinadas propriedades na presença de incertezas. As principais características desejáveis associadas a um sistema incerto são estabilidade e custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_{\infty}$. Dentre os modelos utilizados para representar incertezas no espaço de estados, destacam-se as incertezas intervalares, as limitadas em norma e as pertencentes a um politopo.

Nesta dissertação, aborda-se o estudo de sistemas dinâmicos com incertezas politópicas usando como critério de desempenho as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_{\infty}$. Assim, são introduzidos os conceitos de estabilidade robusta e custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_{\infty}$ para a classe de incertezas politópicas.

2.5.1 Estabilidade Robusta

Considera-se o modelo

$$\delta[x] = A(\alpha)x, \tag{2.59}$$

em que a matriz $A(\alpha)$ pertence ao conjunto politópico convexo dado por

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Xi \right\},$$

em que Ξ , o simplex unitário, é dado por

$$\Xi = \{\alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0\}. \quad (2.60)$$

As matrizes A_i , $i = 1, \dots, N$ são os vértices do politopo, ou seja, o parâmetro incerto é invariante no tempo e pertence ao simplex representado por Ξ . A estabilidade do sistema (2.59) pode ser verificada por meio de funções de Lyapunov quadráticas nos estados na forma $V(x) = x^T P x$, resultado apresentado no seguinte lema e conhecido na literatura como estabilidade quadrática.

Lema 2.14. Se existir uma matriz $0 \prec P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A_i^T P + P A_i \prec 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

então o sistema contínuo (2.59) é Hurwitz estável para toda matriz $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. Alternativamente, a estabilidade robusta do sistema contínuo (2.59) pode ser verificada pelas desigualdades

$$A_i P + P A_i^T \prec 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

pois os autovalores de $A(\alpha)$ são os mesmo de $A(\alpha)^T$.

Lema 2.15. Se existir uma matriz $0 \prec P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} -P & A_i^T P \\ P A_i & -P \end{bmatrix} \prec 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

então o sistema discreto dado por (2.59) é Schur estável para toda matriz $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. O resultado dual é obtido trocando-se A_i por A_i^T .

Observação 2.2. A prova do Lema 2.14 é imediata; multiplicando-se as LMIs por α_i e somando-as de 1 a N , implica que

$$A(\alpha)^T P + P A(\alpha) \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Xi,$$

que, por sua vez, garante a estabilidade robusta do sistema (2.59) a partir da função de Lyapunov $v(x) = x^T P x$. Para a prova do Lema 2.15, usa-se estratégia similar.

Note que a estabilidade quadrática é uma condição suficiente para garantir estabilidade de sistemas, pois a matriz P utilizada é a mesma para todo $\alpha \in \Xi$. Portanto, espera-se que os resultados obtidos a partir dos Lemas 2.14 e 2.15 sejam conservadores, principalmente para sistemas com politopos de incerteza grandes. Condições necessárias e suficientes para a estabilidade do sistema (2.59) podem ser obtidas a partir de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e quadráticas no estado (BLIMAN, 2004; OLIVEIRA *et al.*, 2008), ou seja, funções de Lyapunov do tipo $V(x) = x^T P(\alpha) x$, $\alpha \in \Xi$, com uma estrutura polinomial homogênea de grau arbitrário para $P(\alpha)$.

A aplicação deste tipo de função ao sistema (2.59) gera o seguinte resultado (OLIVEIRA; PERES, 2007).

Lema 2.16. Considere o sistema contínuo com incertezas politópicas dado em (2.59). As seguintes condições são equivalentes:

- i) O conjunto $\mathcal{A}$ é Hurwitz estável, ou seja, $\forall \alpha \in \Xi$, todos os autovalores de $A(\alpha)$ têm parte real negativa.
- ii) Existe uma matriz polinomial homogênea de grau arbitrário, $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um inteiro $d \geq 0$ tais que

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d \left(A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) \right) \prec 0.$$

Lema 2.17. No caso de sistemas discretos, têm-se as seguintes equivalências:

- i) O conjunto $\mathcal{A}$ é Schur estável, ou seja, os elementos $A(\alpha)$ têm todos os autovalores com módulo menor que 1, $\forall \alpha \in \Xi$.
- ii) Existe uma matriz polinomial homogênea de grau arbitrário $P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um inteiro $d \geq 0$ tais que

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d \begin{bmatrix} -P(\alpha) & A^T(\alpha)P(\alpha) \\ P(\alpha)A(\alpha) & -P(\alpha) \end{bmatrix} \prec 0.$$

Os resultados dos Lemas 2.16 e 2.17 seguem diretamente da aplicação da função de Lyapunov $V(x) = x^T P(\alpha) x$ no sistema descrito por (2.59). No caso discreto, usa-se o complemento de Schur para obter a desigualdade do item ii). Note que, como $\alpha \in \Xi$, as desigualdades não são alteradas com a relaxação de Pólya.

A partir do resultado apresentado em (BLIMAN, 2004; OLIVEIRA *et al.*, 2008), impõe-se para $P(\alpha)$ a estrutura polinomial sem perda de generalidade. Dessa forma, usando por exemplo a notação proposta em (OLIVEIRA; PERES, 2007),

$$P(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g)} \alpha^{k_1} \dots \alpha^{k_N} P_k, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N \quad (2.61)$$

sendo $\alpha^{k_1} \dots \alpha^{k_N}$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$ os monômios da matriz polinomial $P(\alpha)$ cujos coeficientes são denotados por $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$. Por definição, $\mathcal{K}_N(g)$ é o conjunto de N -uplas cujos elementos são os números inteiros não negativos solução da equação $k_1 + \dots, k_N = g$. Utilizando a teoria de análise combinatorial (ROSS, 2010), mostra-se que o número de N -uplas do conjunto $\mathcal{K}_N(g)$, definido por $\mathcal{J}_N(g)$, é dado por

$$\mathcal{J}_N(g) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!}.$$

Por exemplo, para variáveis polinomiais homogêneas de grau $g = 2$ com $N = 3$ vértices, têm-se $\mathcal{K}_3(2) = \{\{200\}, \{110\}, \{020\}, \{011\}, \{002\}, \{101\}\}$ e $\mathcal{J}_3(2) = 6$, representando uma variável genérica

$$P(\alpha) = \alpha_1^2 P_{200} + \alpha_1 \alpha_2 P_{110} + \alpha_2^2 P_{020} + \alpha_2 \alpha_3 P_{011} + \alpha_3^2 P_{002} + \alpha_1 \alpha_3 P_{101}.$$

Com as definições apresentadas, condições necessárias e suficientes para verificar a estabilidade robusta do sistema (2.59) usando matrizes polinomiais homogêneas com grau arbitrário são apresentadas a seguir.

Lema 2.18. Considere o sistema contínuo dado em (2.59). As seguintes condições são equivalentes.

- i) O conjunto $\mathcal{A}$ é Hurwitz estável (isto é, todas as matrizes do conjunto possuem autovalores com parte real negativa).
- ii) Existem um grau g , um inteiro natural d , e matrizes $P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$ tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} (\mathbf{A}_i^T P_{k-k'-e_i} + P_{k-k'-e_i} \mathbf{A}_i) \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \frac{d!}{\pi(k')} (P_{k-k'}) \succ 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d).$$

Lema 2.19. Com relação ao sistema discreto dado por (2.59), as seguintes condições são equivalentes.

- i) O conjunto $\mathcal{A}$ é Schur estável (isto é, todas as matrizes do conjunto possuem autovalores com valor absoluto menor do que um).
- ii) Existem um grau g , um inteiro natural d , e matrizes $P_k = P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$ tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} -P_{k-k'-e_i} & P_{k-k'-e_i} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_i^T P_{k-k'-e_i} & -P_{k-k'-e_i} \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1).$$

2.5.2 Custos Garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Procedendo de maneira análoga, pode-se definir robustez de um sistema dinâmico com relação às normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Como objetivo, procura-se por um limitante superior para a norma de pior caso da matriz de transferência de uma realização $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ computada dentre todas as matrizes que pertencem a um conjunto politópico convexo.

Doravante, a depender da norma utilizada, estes limitantes são chamados de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$.

Considere o seguinte sistema dinâmico linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned}\delta[x] &= \mathbf{A}(\alpha)x + \mathbf{B}(\alpha)u \\ y &= \mathbf{C}(\alpha)x + \mathbf{D}(\alpha)u\end{aligned}\tag{2.62}$$

com as matrizes $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$, em que x , u e y são os vetores de estados, entrada de controle ou perturbação e saída, respectivamente, com dimensões definidas em (2.7), e δ representa o operador derivada, para sistemas contínuos, ou o operador avanço no tempo, no caso de sistemas discretos. Considere a matriz de sistema

$$\mathcal{S}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{B}(\alpha) \\ \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha) \end{bmatrix},\tag{2.63}$$

pertencente ao politopo convexo

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathcal{S}(\alpha) : \mathcal{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{S}_i, \quad \alpha \in \Xi \right\},\tag{2.64}$$

em que Ξ é definido em (2.60), as matrizes

$$\mathcal{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N,$$

são os vértices, e a matriz de transferência

$$H(\zeta, \alpha) = \mathbf{C}(\alpha)(\zeta I - \mathbf{A}(\alpha))^{-1}\mathbf{B}(\alpha) + \mathbf{D}(\alpha)\tag{2.65}$$

entre a entrada u e a saída y para cada valor do parâmetro α , sendo ζ a variável de Laplace em sistemas contínuos, e a variável z no caso de sistemas discretos.

2.5.2.1 Custo Garantido $\mathcal{H}_2$

Com relação ao sistema (2.62), um limitante superior para o custo garantido $\mathcal{H}_2$ pode ser estabelecido por meio do seguinte resultado.

Lema 2.20. Considere o sistema contínuo com incertezas politópicas dado em (2.62), com $\mathbf{D}(\alpha) = 0$. As seguintes condições são equivalentes:

- i) $\|H(s, \alpha)\|_2 < \rho, \forall \alpha \in \Xi$.
- ii) Existem matrizes simétricas e dependentes do parâmetros incerto $0 \prec P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tais que

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2, \quad (2.66)$$

$$-M(\alpha) + \mathbf{B}(\alpha)^T P(\alpha) \mathbf{B}(\alpha) \prec 0, \quad (2.67)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ \mathbf{C}(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.68)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Xi$.

iii) Existem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M(\alpha) = M(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes dependentes de parâmetros $\mathbf{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{G}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que (2.66),

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - \mathbf{G}(\alpha) - \mathbf{G}(\alpha)^T & \mathbf{G}(\alpha)^T \mathbf{B}(\alpha) \\ \mathbf{B}^T(\alpha) \mathbf{G}(\alpha) & -M(\alpha) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} \xi(\mathbf{A}(\alpha)^T \mathbf{X}(\alpha) + \mathbf{X}(\alpha)^T \mathbf{A}(\alpha)) & P(\alpha) + \mathbf{A}^T \mathbf{X}(\alpha) - \xi \mathbf{X}(\alpha)^T & \mathbf{C}^T(\alpha) \\ P(\alpha) + \mathbf{X}(\alpha)^T \mathbf{A}(\alpha) - \xi \mathbf{X}(\alpha) & -\mathbf{X}(\alpha) - \mathbf{X}(\alpha)^T & 0 \\ \mathbf{C}(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.70)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Xi$.

iv) Existem um grau g , um inteiro natural d , matrizes simétricas $P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $M_k = M_k^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$, tais que

$$\text{Tr}(M_k) < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} -M_{k-k'-e_i} & \mathbf{B}_i^T P_{k-k'-e_i} \\ P_{k-k'-e_i} \mathbf{B}_i & -P_{k-k'-e_i} \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{A}_i^T P_{k-k'-e_i}) & \beta_1(g, k-k', i) \mathbf{C}_i^T \\ \beta_1(g, k-k', i) \mathbf{C}_i & -\beta_2(g, k-k') I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

em que

$$\beta_1(g, t, i) = \frac{g!}{\pi(t-e_i)}, \quad \beta_2(g, t) = \frac{(g+1)!}{\pi(t)}.$$

v) Existem um grau g , um inteiro natural d , matrizes simétricas $0 \prec P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{G}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$, e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\text{Tr}(M_k) < \rho^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{11_{k-k'}}^i & \mathbf{G}_{k-k'-e_i}^T \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{G}_{k-k'-e_i} & -M_{k-k'-e_i} \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11_{k-k'}}^i & \mathcal{F}_{12_{k-k'}}^i & (\mathcal{F}_{13_{k-k'}}^i)^T \\ (\mathcal{F}_{12_{k-k'}}^i)^T & \text{He}(\mathbf{X}_{k-k'-e_i}) & 0 \\ \mathcal{F}_{13_{k-k'}}^i & 0 & \beta_2(k-k') I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

com

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_{11_l}^i &= P_{l-e_i} - G_{l-e_i} - G_{l-e_i}^T, \quad \mathcal{F}_{11_l}^i = \xi \text{He}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}_{l-e_i}), \quad \mathcal{F}_{12_l}^i = P_{l-e_i} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{X}_{l-e_i} - \xi \mathbf{X}_{l-e_i}^T, \\ \mathcal{F}_{13_l}^i &= \beta_1(g, l, i) \mathbf{C}_i.\end{aligned}$$

Na formulação dual, troca-se $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ por $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$.

Lema 2.21. Considere o sistema discreto com incertezas politópicas dado em (2.62). As seguintes condições são equivalentes:

$$i) \quad \|H(z, \alpha)\|_2 < \rho, \forall \alpha \in \Xi.$$

$$ii) \quad \text{Existem matrizes dependentes de parâmetros } P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } M(\alpha) = M(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{r \times r} \text{ tais que (2.66),}$$

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha)\mathbf{B}(\alpha) & 0 \\ \mathbf{B}(\alpha)^T P(\alpha) & -M(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha)^T \\ 0 & \mathbf{D}(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.71)$$

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{A}(\alpha)^T P(\alpha) & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ P(\alpha)\mathbf{A}(\alpha) & -P(\alpha) & 0 \\ \mathbf{C}(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.72)$$

$$iii) \quad \text{Existem matrizes simétricas dependentes de parâmetros } 0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } M(\alpha) = M(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{r \times r}, \text{ matrizes dependentes de parâmetros } \mathbf{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } \mathbf{G}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ e um escalar } \xi \in (-1, 1) \text{ tais que (2.66),}$$

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha) & 0 & 0 \\ P(\alpha) & -\mathbf{G}(\alpha) - \mathbf{G}(\alpha)^T & \mathbf{G}(\alpha)\mathbf{B}(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(\alpha)^T \mathbf{G}(\alpha)^T & -M(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha)^T \\ 0 & 0 & \mathbf{D}(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) + \xi(\mathbf{A}^T(\alpha)\mathbf{X}(\alpha) + \mathbf{X}^T(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)) & \mathbf{A}^T(\alpha)\mathbf{X}(\alpha) - \xi\mathbf{X}(\alpha)^T & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ \mathbf{X}^T(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^T & P(\alpha) - \mathbf{X}(\alpha) - \mathbf{X}(\alpha)^T & 0 \\ \mathbf{C}(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0.$$

$$iv) \quad \text{Existem um grau } g, \text{ um inteiro natural } d, \text{ matrizes simétricas } P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } M_k = M_k^T \in \mathbb{R}^{r \times r}, \forall k \in \mathcal{K}_N, \text{ tais que}$$

$$\text{Tr}(M_k) < \rho^2, \forall k \in \mathcal{K}_N(g),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} -P_{k-k'-e_i} & P_{k-k'-e_i} \mathbf{B}_i & 0 \\ \mathbf{B}_i^T P_{k-k'-e_i} & -M_{k-k'-e_i} & \tilde{\mathcal{U}}_{23_{k-k'}}^i \\ 0 & (\tilde{\mathcal{U}}_{23_{k-k'}}^i)^T & \mathcal{U}_{33_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0, \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} -P_{k-k'-e_i} & \mathbf{A}_i^T P_{k-k'-e_i} & \mathcal{U}_{13_{k-k'}}^i \\ P_{k-k'-e_i} \mathbf{A}_i & -P_{k-k'-e_i} & 0 \\ (\mathcal{U}_{13_{k-k'}}^i)^T & 0 & \mathcal{U}_{33_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0, \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1).$$

com

$$\tilde{\mathcal{U}}_{23_l}^i = \beta_1(g, l, i) D_i^T, \quad \mathcal{U}_{13_l}^i = \beta_1(g, l, i) C_i^T, \quad \mathcal{U}_{33_l}^i = -\beta_2(g, l) I.$$

v) Existem um grau g , um inteiro natural d , matrizes simétricas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{G}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N$, e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} -\mathcal{T}_{11_{k-k'}}^i & P_{k-k'-e_i} & 0 & 0 \\ P_{k-k'-e_i} & -\mathcal{T}_{22_{k-k'}}^i & \mathcal{T}_{23_{k-k'}}^i & 0 \\ 0 & (\mathcal{T}_{23_{k-k'}}^i)^T & -M_{k-k'-e_i} & \mathcal{T}_{34_{k-k'}}^i \\ 0 & 0 & (\mathcal{T}_{34_{k-k'}}^i)^T & \mathcal{T}_{44_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_{11_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{U}}_{12_{k-k'}}^i & \beta_1(g, k-k', i) C_i^T \\ (\tilde{\mathcal{U}}_{12_{k-k'}}^i)^T & \tilde{\mathcal{U}}_{22_{k-k'}}^i & 0 \\ \beta_1(g, k-k', i) C_i & 0 & -\beta_2(g, k-k') I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

com

$$\mathcal{T}_{11_l}^i = P_{l-e_i}, \quad \mathcal{T}_{22_l}^i = \text{He}(\mathbf{G}_{l-e_i}), \quad \mathcal{T}_{34_l}^i = \beta_1(g, l, i) D_i^T, \quad \mathcal{T}_{44_l}^i = -\beta_2(g, l) I, \quad \mathcal{T}_{23_l}^i = \mathbf{G}_{l-e_i} \mathbf{B}_i,$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_{11_l}^i = P_{l-e_i} + \xi \text{He}(\mathbf{A}_i^T P_{l-e_i}), \quad \tilde{\mathcal{U}}_{12_l}^i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{X}_{l-e_i} - \xi \mathbf{X}_{l-e_i}^T, \quad \tilde{\mathcal{U}}_{22_l}^i = P_{l-e_i} - \text{He}(\mathbf{X}_{l-e_i}).$$

Na formulação dual, troca-se $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ por $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$.

2.5.2.2 Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$

De maneira similar, com relação ao sistema (2.62), o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pode ser determinado a partir do seguinte resultado.

Lema 2.22. Considere o sistema contínuo com incertezas politópicas dado por (2.62). As seguintes condições são equivalentes.

i) $\|H(s, \alpha)\|_\infty < \gamma, \forall \alpha \in \Xi$.

ii) Existe uma matriz simétrica e dependente de parâmetros $0 \prec P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) \mathbf{A}(\alpha) & P(\alpha) \mathbf{B}(\alpha) & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ \mathbf{B}(\alpha)^T P(\alpha) & -I & \mathbf{D}(\alpha)^T \\ \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Xi.$$

iii) Existem uma matriz simétrica dependente de parâmetros $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz dependente de parâmetros $\mathbf{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{A}(\alpha)^T \mathbf{X}(\alpha)) & P(\alpha) + \xi \mathbf{A}(\alpha)^T \mathbf{X}(\alpha) - \mathbf{X}(\alpha)^T & \mathbf{X}(\alpha)^T \mathbf{B}(\alpha) & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ * & -\xi \text{He}(\mathbf{X}(\alpha)) & \xi \mathbf{X}(\alpha)^T \mathbf{B}(\alpha) & 0 \\ * & * & -I & \mathbf{D}(\alpha)^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Xi.$$

iv) Existem um grau g , um inteiro natural d , matrizes simétricas $P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$, tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11_{k-k'}}^i & \mathcal{S}_{12_{k-k'}}^i & \mathcal{S}_{13_{k-k'}}^i \\ \star & -\mathcal{S}_{22_{k-k'}}^i & \mathcal{S}_{23_{k-k'}}^i \\ \star & \star & -\mathcal{S}_{33_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11_l}^i &= \text{He}(\mathbf{A}_i^T P_{l-e_i}), & \mathcal{S}_{12_l}^i &= P_{l-e_i} \mathbf{B}_i, & \mathcal{S}_{13_l}^i &= \beta_1(g, l, i) \mathbf{C}_i^T, & \mathcal{S}_{22_l} &= \beta_2(g, l) I, \\ \mathcal{S}_{23_l}^i &= \beta_1(g, l, i) \mathbf{D}_i^T, & \mathcal{S}_{33_l} &= \gamma^2 \beta_2(g, l) I, \end{aligned}$$

em que

$$\beta_1(g, t, i) = \frac{g!}{\pi(t - e_i)}, \quad \beta_2(g, t) = \frac{(g+1)!}{\pi(t)}.$$

v) Existem um grau g , um inteiro natural d , matrizes simétricas $0 \prec P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$, e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_{11_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{S}}_{12_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{S}}_{13_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{S}}_{14_{k-k'}}^i \\ \star & \xi \tilde{\mathcal{S}}_{22_{k-k'}}^i & \xi \tilde{\mathcal{S}}_{13_{k-k'}}^i & 0 \\ \star & \star & -\tilde{\mathcal{S}}_{33_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{S}}_{34_{k-k'}}^i \\ \star & \star & \star & -\tilde{\mathcal{S}}_{44_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0, \quad k \in \mathcal{K}_N(g+d+1),$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{11_l}^i &= \text{He}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}_{l-e_i}), & \tilde{\mathcal{S}}_{12_l}^i &= P_{l-e_i} + \xi \mathbf{A}_i^T \mathbf{X}_{l-e_i} - \mathbf{X}_{l-e_i}^T, & \tilde{\mathcal{S}}_{13_l}^i &= \mathbf{X}_{l-e_i}^T \mathbf{B}_i, & \tilde{\mathcal{S}}_{14_l}^i &= \beta_1(g, l, i) \mathbf{C}_i^T, \\ \tilde{\mathcal{S}}_{22_l} &= \text{He}(\mathbf{X}_{l-e_i}), & \tilde{\mathcal{S}}_{33_l} &= \beta_2(g, l) I, & \tilde{\mathcal{S}}_{34_l} &= \beta_1(g, l, i) \mathbf{D}_i^T, & \tilde{\mathcal{S}}_{44_l} &= \gamma^2 \beta_2(g, l) I. \end{aligned}$$

Lema 2.23. Considere o sistema discreto com incertezas politópicas dado por (2.62). As seguintes condições são equivalentes.

i) $\|H(z, \alpha)\|_\infty < \gamma, \forall \alpha \in \Xi$.

ii) Existe uma matriz simétrica dependente de parâmetros $0 \prec P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha)^T P(\alpha) \mathbf{A}(\alpha) - P(\alpha) & \mathbf{A}(\alpha)^T P(\alpha) \mathbf{B}(\alpha) & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ \mathbf{B}(\alpha)^T P(\alpha) \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{B}(\alpha)^T P(\alpha) \mathbf{B}(\alpha) - \gamma^2 I & \mathbf{D}(\alpha)^T \\ \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Xi.$$

iii) Existem uma matriz simétrica dependente de parâmetros $0 \prec P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz dependente de parâmetros $\mathbf{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e uma escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que

$$\begin{bmatrix} \xi \text{He}(\mathbf{A}(\alpha)^T \mathbf{X}(\alpha)) - P(\alpha) & \mathbf{A}(\alpha)^T \mathbf{X}(\alpha) - \xi \mathbf{X}(\alpha)^T & \xi \mathbf{X}(\alpha)^T \mathbf{B}(\alpha) & \mathbf{C}(\alpha)^T \\ \star & P(\alpha) - \text{He}(\mathbf{X}(\alpha)) & \mathbf{X}(\alpha)^T \mathbf{B}(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -I & \mathbf{D}(\alpha)^T \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Xi.$$

iv) Existem um grau g , um inteiro natural d , e matrizes simétricas $0 \prec P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$ tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N\} \\ k - k' - e_i - e_j \geq 0}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11_{k-k'}}^{i,j} & \mathcal{G}_{12_{k-k'}}^{i,j} & \mathcal{G}_{13_{k-k'}}^i \\ \star & \mathcal{G}_{22_{k-k'}}^{i,j} & \mathcal{G}_{23_{k-k'}}^i \\ \star & \star & \mathcal{G}_{33_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g + d + 2).$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11_l}^{i,j} &= A_i^T P_{l-e_i-e_j} A_j - P_{l-e_i-e_j}, & \mathcal{G}_{12_l}^{i,j} &= A_i^T P_{l-e_i-e_j} B_j, & \mathcal{G}_{13_l}^i &= \beta_1(g+1, l, i) C_i^T, \\ \mathcal{G}_{22_l}^{i,j} &= B_i^T P_{l-e_i-e_j} B_j - \gamma^2 \beta_2(g+1, l) I, & \mathcal{G}_{23_l}^i &= \beta_1(g+1, l, i) D_i^T, & \mathcal{G}_{33_l} &= -\beta_2(g+1, l) I. \end{aligned}$$

v) Existem um grau g , um inteiro natural d , e matrizes simétricas $0 \prec P_k = P_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}_N(g)$, e uma escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que

$$\sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \succeq k'}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > k'_i}} \frac{d!}{\pi(k')} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{G}}_{11_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{G}}_{12_{k-k'}}^i & \xi \tilde{\mathcal{G}}_{23_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{G}}_{14_{k-k'}}^i \\ \star & \tilde{\mathcal{G}}_{22_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{G}}_{23_{k-k'}}^i & 0 \\ \star & \star & -\tilde{\mathcal{G}}_{33_{k-k'}}^i & \tilde{\mathcal{G}}_{34_{k-k'}}^i \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \tilde{\mathcal{G}}_{33_{k-k'}}^i \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g + d + 1).$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{11_l}^i &= \xi \text{He}(A_i^T X_{l-e_i}) - P_{l-e_i}, & \tilde{\mathcal{G}}_{12_l}^i &= A_i^T X_{l-e_i} - \xi X_{l-e_i}^T, & \tilde{\mathcal{G}}_{23_l}^i &= X_{l-e_i}^T B_i, & \tilde{\mathcal{G}}_{22_l}^i &= P_{l-e_i} - \text{He}(X_{l-e_i}), \\ \tilde{\mathcal{G}}_{33_l} &= \beta_2(g, l) I, & \mathcal{G}_{14_l}^i &= \beta_1(g, l, i) C_i^T, & \mathcal{G}_{34_l}^i &= \beta_1(g, l, i) D_i^T, \end{aligned}$$

Como pode ser observado nos itens iv) e v) dos Lemas 2.22 e 2.23, a complexidade das condições LMIs aumenta com os graus das variáveis dependentes de parâmetros e os níveis d de relaxações de Pólya genéricos, resultando em uma apresentação complicada em termos de notação. A estratégia de explicitar as LMIs em função dos graus g e dos níveis d de relaxação de Pólya tornaria ainda menos inteligível as condições para a síntese de filtros. Assim, optou-se por apresentar as condições na forma de desigualdades matriciais dependentes de parâmetros, utilizando-se o pacote computacional ROLMIP (*Robust LMI parser*), de (AGULHARI *et al.*, 2012), para a programação das relaxações LMIs por meio de um procedimento automático. Em outras palavras, dadas as condições LMIs dependentes de parâmetros, os dados do problema e as estruturas das variáveis de decisão (incluindo ou não relaxações de Pólya), o pacote retorna condições LMIs prontas para ser submetidas ao resolvidor (*solver*). Portanto, a partir deste ponto, as condições são apresentadas na forma de LMIs dependentes de parâmetros.

2.6 Filtragem

Como principal objetivo desta dissertação, estuda-se o problema de filtragem usando desigualdades matriciais lineares com um parâmetro escalar. Esta seção introduz

o problema de filtragem e a solução por meio de LMIs a partir da função de Lyapunov quadrática, resultado conhecido na literatura como filtragem baseada na estabilidade quadrática.

2.6.1 Definição

Considere um sistema dinâmico assintoticamente estável, linear e invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned}\delta[x] &= Ax + B_w w \\ z &= C_z x + D_{zw} w \\ y &= C_y x + D_{yw} w\end{aligned}\tag{2.73}$$

com

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_w \in \mathbb{R}^{n \times r}, C_z \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_{zw} \in \mathbb{R}^{p \times r}, C_y \in \mathbb{R}^{q \times n}, D_{yw} \in \mathbb{R}^{q \times r},$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $w \in \mathbb{R}^r$ a entrada de perturbação, $z \in \mathbb{R}^p$ a saída a ser estimada e $y \in \mathbb{R}^q$ a saída medida. O operador delta representa derivada para sistemas contínuos, e o avanço no tempo para sistemas discretos.

O objetivo é o projeto de um filtro de ordem completa, representado por

$$\begin{aligned}\delta[x_f] &= A_f x_f + B_f y \\ z_f &= C_f x_f + D_f y\end{aligned}\tag{2.74}$$

com

$$A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}, B_f \in \mathbb{R}^{n_f \times q}, C_f \in \mathbb{R}^{p \times n_f}, D_f \in \mathbb{R}^{p \times q},$$

em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ com $n_f = n$ representa o vetor de estados do filtro, e $z_f \in \mathbb{R}^p$ a saída do filtro, de modo a minimizar algum critério de desempenho associado à matriz de transferência da entrada de perturbação, w , para o erro de estimação, $e = z - z_f$. Note que, implicitamente, para que as normas sejam finitas, o filtro deve ter dinâmica assintoticamente estável, o que garante que o erro de estimação vai para zero na ausência de ruídos.

Dependendo da norma utilizada como critério de desempenho, tem-se o problema de filtragem $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. O diagrama do problema de filtragem é apresentado na Figura 1, em que o sistema (2.73) está representado pelo bloco $\mathcal{S}$ e o filtro (2.74) pelo bloco $\mathcal{F}$.

A solução do problema é obtida a partir da descrição do sistema em um espaço de estados aumentado, $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & x_f^T \end{bmatrix}^T$, dado por (2.7) com

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_w \\ B_f D_{yw} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_z - D_f C_y & -C_f \end{bmatrix}, D = D_{zw} - D_f D_{yw}, \tag{2.75}$$

associado aos resultados apresentados dos Lemas 2.3 e 2.5 que utilizam funções de Lyapunov quadráticas.

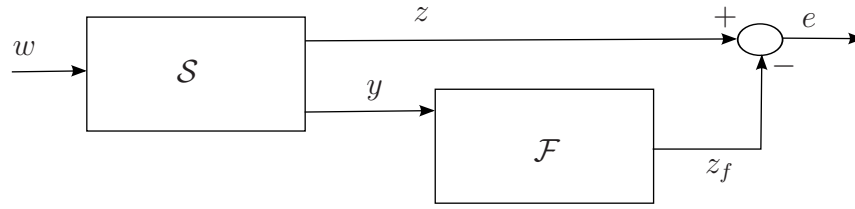


Figura 1 – Diagrama de blocos do problema de filtragem.

No domínio do tempo, minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema aumentado com matrizes dadas em (2.74) significa projetar matrizes do filtro de forma que a energia da resposta ao impulso seja minimizada. Note que o objetivo de controle não é levar a norma temporal do erro para zero. Com relação a norma $\mathcal{H}_\infty$, que é ganho $\mathcal{L}_2$ do sistema, o objetivo é minimizar o impacto da entrada de perturbação (w) na saída estimada (z_f).

Para os casos nos quais o sistema (2.73) apresenta incertezas politópicas, reformula-se o problema de filtragem como um problema de determinação de um limitante superior para os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema linear invariante no tempo com incertezas politópicas dado por (2.62), com $x = \tilde{x}$, $y = e$, $u = w$ e cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_y(\alpha) & A_f \end{bmatrix}, & B(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_w(\alpha) \\ B_f D_{yw}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ C(\alpha) &= [C_z(\alpha) - D_f C_y(\alpha) \quad -C_f], & D(\alpha) &= [D_{zw}(\alpha) - D_f D_{yw}(\alpha)] \end{aligned} \quad (2.76)$$

e pertencem ao politopo $\mathcal{E}$ dado em (2.64). Dessa forma, utilizam-se os resultados apresentados nos Lemas 2.3 e 2.5 para projeto do filtro (2.74) que minimiza um limitante superior para os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

Por utilizar uma função de Lyapunov quadrática quadrática (isto é, matriz de Lyapunov constante para todo o domínio de incertezas), as adaptações dos resultados apresentados na próxima seção geram limitantes superiores conservadores para os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ no problema de filtragem. Esta dissertação provê condições de projeto de filtros, que contêm o resultado quadrático como caso particular, em termos de desigualdades matriciais com variáveis extras e a partir de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros que, conseqüentemente, geram filtros associados a custos garantidos menos conservadores quando comparados com os filtros quadráticos.

2.6.2 Filtragem Baseada na Estabilidade Quadrática

Os resultados de filtragem baseados na estabilidade quadrática, caso contínuo (GEROMEL, 1999; DE SOUZA; TROFINO, 2000; GEROMEL *et al.*, 2000; GEROMEL; DE OLIVEIRA, 2001) e caso discreto (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999a), foram os

primeiros métodos utilizados para realizar a síntese de filtros robustos por meio de LMIs. A mesma matriz de Lyapunov é utilizada para garantir um limitante para o critério de desempenho do filtro acoplado ao sistema para todo o politopo e as matrizes do filtro são obtidas das partições da matriz de Lyapunov. Essa formulação obtém filtros ótimos para sistemas precisamente conhecidos.

2.6.2.1 Filtragem Clássica $\mathcal{H}_2$

Os próximos lemas apresentam os resultados de filtragem quadrática $\mathcal{H}_2$ para sistemas precisamente conhecidos contínuos e discretos no tempo. Note que, no caso contínuo, considera-se $D_{zw} = 0$ e $D_f = 0$, pois, caso contrário, a matriz D_f teria de ser escolhida de maneira a satisfazer a restrição

$$D_{zw} - D_f D_{yw} = 0,$$

para poder garantir que a matriz de transferência do sistema aumentado pertence ao espaço $\mathcal{H}_2$.

Lema 2.24. Considere o sistema contínuo linear e invariante no tempo representado por (2.73). Então as seguintes condições são equivalentes:

- i) Existem matrizes A_f, B_f e C_f tais que $\|H(s)\|_2 < \gamma$, sendo $H(s)$ dada por (2.8) com matrizes A, B e C dadas em (2.75).
- ii) Existem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(M) < \gamma, \\ & \begin{bmatrix} M & B_w^T Z & B_w^T Y + D_{yw}^T F^T \\ Z B_w & Z & Z \\ Y B_w + F D_{yw} & Z & Y \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} A^T Z + Z A & Z A + A^T Y + C_y^T F^T + Q^T & C_z^T - L^T \\ A^T Z + Y A + F C_y + Q & A^T Y + Y A + F C_y + C_y^T F^T & C_z^T \\ C_z - L & C_z & -I \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned}$$

Em caso afirmativo, as matrizes que satisfazem o item i) são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & F \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (UZ)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

com U e V obtidas a partir da expressão $U^T V = I - Z^{-1} Y$.

iii) Existem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(M) < \gamma, \\ & \begin{bmatrix} M & C_z - L & C_z \\ C_z^T - L^T & Z & Z \\ C_z^T & Z & Y \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} A^T Z + Z A & Z A + A^T Y + C_y^T F^T + Q^T & Z B_w \\ A^T Z + Y A + F C_y + Q & A^T Y + Y A + F C_y + C_y^T F^T & Y B_w + F D_{yw} \\ B_w^T Z & B_w^T Y + D_{yw}^T F^T & -I \end{bmatrix} \prec 0, \end{aligned}$$

Em caso afirmativo, usa-se (2.77) para obtenção das matrizes que satisfazem o item i).

Demonstração. Definindo as variáveis simétricas

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} Z^{-1} & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

as seguintes relações estão implícitas

$$\begin{aligned} Z^{-1}Y + U^T V &= I, & Z^{-1}V^T + U^T \hat{Y} &= 0, \\ UY + \hat{X}V &= 0, & UV^T + \hat{X}\hat{Y} &= I. \end{aligned}$$

Além disso, por meio da transformação

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} Z & Y \\ 0 & V^T \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

obtem-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} \tilde{T}^T \mathbf{A} \tilde{X} \tilde{T} &= \begin{bmatrix} Z A & Z A \\ Y A + F C_y + Q & Y A + F C_y \end{bmatrix}, & \tilde{T}^T \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} Z B_w \\ Y B_w + F D_{yw} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} \tilde{X} \tilde{T} &= \begin{bmatrix} C_z - D_f C_y - L & C_z - D_f C_y \end{bmatrix}, & \tilde{T}^T \tilde{X} \tilde{T} &= \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Portando, fazendo-se $\tilde{X} = P^{-1}$ as condições do item ii) podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{T}^T P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \mathbf{B}^T P \\ P \mathbf{B} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \tilde{T} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} \tilde{T}^T P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T P + P \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} \tilde{T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned}$$

Por meio de uma transformação de congruência e do Lema 2.3, estabelece-se a equivalência com o item i), uma vez que a mudança de variáveis (2.77) é bijetiva. De maneira similar, com $\tilde{X} = W$, prova-se a equivalência entre o item iii) e i). $\square$

Lema 2.25. Considere o sistema discreto linear e invariante no tempo representado por (2.73). Então as seguintes condições são equivalentes:

- i) Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que $\|H(z)\|_2 < \gamma$, sendo $H(z)$ dada por (2.8) com matrizes A, B, C e D dadas em (2.75).
- ii) Existem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(M) < \gamma, \\ & \begin{bmatrix} M & B_w^T Z & B_w^T Y + D_{yw}^T F^T & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\ Z B_w & Z & Z & 0 \\ Y B_w + F D_{yw} & Z & Y & 0 \\ D_{zw} - D_f D_{yw} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} -Z & -Z & A^T Z & A^T Y + C_y^T F^T + Q^T & C_z^T - C_y^T D_f^T - L^T \\ -Z & -Y & A^T Z & A^T Y + C_y^T F^T & C_z^T - C_y^T D_f^T \\ Z A & Z A & -Z & -Z & 0 \\ Y A + F C_y + Q & Y A + F C_y & -Z & -Y & 0 \\ C_z - L & C_z & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \end{aligned}$$

Em caso afirmativo, usa-se

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & F \\ L & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (UZ)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

com U e V obtidas a partir da expressão $U^T V = I - Z^{-1} Y$.

- iii) Existem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(M) < \gamma, \\ & \begin{bmatrix} M & C_z - D_f C_y - L & C_z - D_f C_y & D_{zw} - D_f D_{yw} \\ C_z^T - C_y^T D_f^T - L^T & Z & Z & 0 \\ C_z^T - C_y^T D_f^T & Z & Y & 0 \\ D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} -Z & -Z & Z A & Z A & Z B_w \\ -Z & -Y & Y A + F C_y + Q & Y A + F C_y & Y B_w + F D_{yw} \\ A^T Z & A^T Y + C_y^T F^T + Q^T & -Z & -Z & 0 \\ A^T Z & A^T Y + C_y^T F^T & -Z & -Y & 0 \\ B_w^T Z & B_w^T Y + D_{yw}^T F^T & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \end{aligned}$$

Em caso afirmativo, usa-se (2.81) para obtenção das matrizes que satisfazem o item i).

Demonstração. O caso discreto primal também é obtido de maneira à prova do Lema 2.24. Ou seja, definido $\tilde{X} = P^{-1}$ e usando as relações em (2.80) as desigualdades do item *v*) podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}^T P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & B^T P & D \\ PB & P & 0 \\ D^T & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} \tilde{T} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.82)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}^T P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}^T P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & A^T P & C^T \\ PA & -P & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} \tilde{T} & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} \tilde{T} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.83)$$

Dessa forma, o resultado segue pelo Lema 2.5 e aplicação de uma transformação de congruência. Analogamente, o resultado dual é obtido fazendo-se $\tilde{X} = W$ e repetindo-se passos similares. $\square$

2.6.2.2 Filtragem Clássica $\mathcal{H}_\infty$

Com relação ao problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ usando a estabilidade quadrática, tem-se o seguinte resultado.

Lema 2.26. Considere o sistema contínuo linear e invariante no tempo dado em (2.73). As seguintes relações são equivalentes:

- i*) Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que $\|H(s)\|_\infty < \gamma$, em que $H(s)$ é dada em (2.8) com matrizes A, B, C e D definidas em (2.75).
- ii*) Existem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \text{He}(A^T Z) & ZA + A^T Y + C_y^T F^T + Q^T & ZB_w & C_z^T - C_y^T D_f^T - L^T \\ \star & \text{He}(YA + FC_y) & YB_w + FD_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T \\ \star & \star & -I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Em caso afirmativo, usa-se (2.81) para a determinação das matrizes que satisfazem o item *i*).

Demonstração. Segue passos similares à demonstração do Lema 2.24, relativo ao problema de filtragem $\mathcal{H}_2$. Definem-se as variáveis $\tilde{X}$ e $\tilde{X}^{-1}$ dadas em (2.78), bem como a transformação $\tilde{T}$ em (2.79), e, com as expressões dadas em (2.80), reescreve-se a condição do item *i*) como

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}^T P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -I & D^T \\ C & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} \tilde{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0,$$

em que $\tilde{X} = P^{-1}$. O resultado segue usando o Lema 2.6. $\square$

Lema 2.27. Considere o sistema discreto linear e invariante no tempo dado em (2.73). As seguintes relações são equivalentes:

- i) Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que $\|H(z)\|_\infty < \gamma$, em que $H(z)$ é dada em (2.8) com matrizes A, B, C e D definidas em (2.75).
- ii) Existem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZA & ZA & ZB_w & 0 \\ \star & Y & YA + FC_y + Q & YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} & 0 \\ \star & \star & Z & Z & 0 & C_z^T - C_y^T D_f^T - L^T \\ \star & \star & \star & Y & 0 & C_z^T - C_y^T D_f^T \\ \star & \star & \star & \star & I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succ 0.$$

Em caso afirmativo, usa-se (2.81) para a obtenção das matrizes que satisfazem o item i).

Demonstração. De maneira similar à prova do Lema 2.26, reescreve-se a desigualdade do item ii) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}^T P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}^T P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & PA & PB & 0 \\ A^T P & P & 0 & C^T \\ B^T P & 0 & I & D^T \\ 0 & C & D & \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} \tilde{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} \tilde{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

em que $\tilde{X} = P^{-1}$ e o resultado segue, mais uma vez, pelo Lema 2.7. $\square$

Observação 2.3. Extensões dos resultados apresentados nos Lemas 2.24, 2.25, 2.26 e 2.27 para tratar o caso incerto podem ser feitas de maneira imediata, adicionando o subíndice i nas matrizes do sistemas e resolvendo as LMIs resultantes, para $i = 1, \dots, N$, em que N é o número de vértices do sistema na representação politópica.

2.7 Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)

Além do problema tradicional de filtragem, esta dissertação aborda o projeto de filtros $\mathcal{H}_\infty$ para intervalos de frequência diferentes do eixo imaginário para sistemas contínuos, ou do círculo unitário para o caso discreto. O lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) é a ferramenta básica para tratar esses problemas e, portanto, é apresentado nesta seção.

Primeiramente, note que a importância do KYP para a teoria de sistemas lineares reside no fato que o lema relaciona testes de dimensão infinita no domínio da frequência, denominados FDIs (do inglês, *Frequency Domain Inequalities*), com a existência de matrizes que satisfazem LMIs, convertendo, dessa maneira, o problema original em um teste de factibilidade em um domínio convexo. A origem do lema está relacionada com o critério de Popov (POPOV, 1961), fornecendo um mecanismo para a análise de estabilidade de sistemas que apresentam não linearidades sem memória. Em seguida, nos trabalhos de Yakubovich (YAKUBOVICH, 1962) e Kalman (KALMAN, 1962), o lema foi introduzido para provar que a condição de Popov no domínio da frequência é equivalente à existência de uma forma especial de função de Lyapunov. Extensões para testar a positividade real de matrizes de transferências associadas a sistemas lineares multivariáveis foram propostas em Anderson (1967).

A forma padrão (na qual exige-se que uma FDI seja válida para todo intervalo de frequência) do lema de KYP é apresentada a seguir.

Lema 2.28. Considere o sistema contínuo (2.7) com $\det(j\omega I - A) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. As seguintes relações são equivalentes.

i) A FDI

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \prec 0,$$

é válida $\forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

ii) Existe uma matriz $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \prec 0.$$

Lema 2.29. Considere o sistema discreto (2.7) com $\det(e^{j\omega}I - A) \neq 0, \forall \omega \in [-\pi, \pi]$. As seguintes relações são equivalentes.

i) A FDI

$$\begin{bmatrix} (e^{j\omega}I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (e^{j\omega}I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \prec 0,$$

é válida $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$.

ii) Existe uma matriz $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \prec 0.$$

Demonstração. Ver (RANTZER, 1996). □

Observação 2.4. Particionando a matriz

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^* & \Theta_{22} \end{bmatrix},$$

observe que, quando o bloco Θ_{11} é semidefinido positivo, a estabilidade da matriz A é obtida impondo-se $P \succ 0$.

A caracterização de funções de transferência positivas reais e limitadas por meio de problemas de otimização é consequência direta do lema de KYP. A positividade real é uma propriedade importante em estimação linear, garantindo a existência de soluções estabilizantes para a equação de Riccati, que são usadas para obtenção da decomposição espectral (KAILATH *et al.*, 2000). Por outro lado, o *Bounded-Real Lemma* (ver Lemas 2.6 e 2.7) é amplamente utilizado no contexto de projetos de controle $\mathcal{H}_\infty$, e pode ser obtido a partir dos Lemas 2.28 e 2.29 com a escolha

$$\Theta = \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

No entanto, os resultados dos Lemas 2.28 e 2.29 não abrangem especificações em intervalos finitos no domínio da frequência. Dessa forma, os Lemas 2.28 e 2.29 foram estendidos para tratar os casos com intervalos finitos de frequência em Iwasaki e Hara (2005), Graham *et al.* (2009), Graham e de Oliveira (2010). Dentre as extensões propostas, destaca-se o gKYP (do inglês, *Generalized KYP*), desenvolvido em Iwasaki e Hara (2005) e apresentado a seguir.

Lema 2.30. Considere o sistema linear dado por (2.7). Para matrizes hermitianas $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\Theta \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$ em que $\det(\lambda I - A) \neq 0$, $\forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi)$, as seguintes condições são equivalentes.

i) A FDI

$$\begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} \prec 0,$$

é válida para todo $\lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi)$.

ii) Existem matrizes simétricas $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que $Q \succ 0$ e

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \prec 0.$$

O conjunto $\Lambda(\Phi, \Psi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(\lambda, \Phi) = 0, \sigma(\lambda, \Psi) \geq 0\}$ representa uma curva no plano complexo, com

$$\sigma(\lambda, \Pi) = \begin{bmatrix} \lambda^* & 1 \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} \lambda^* & 1 \end{bmatrix}^*.$$

Demonstração. Ver (IWASAKI; HARA, 2005). $\square$

O gKYP é utilizado nesse trabalho na proposição de condições para projeto de filtros que garantem custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em baixa, média e alta frequência, tanto para sistemas contínuos quanto discretos no tempo. Para tanto, o procedimento de cálculo das matrizes Φ e Ψ que geram segmentos de reta no eixo imaginário e segmentos do círculo unitário é demonstrado a seguir.

Primeiramente, observe que o eixo imaginário é mapeado pela escolha

$$\Phi = \Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \lambda = j\omega,$$

pois, neste caso, $\sigma(j\omega, \Phi_c) = 0$. Além disso, para os intervalos de baixa, alta e média frequência, têm-se, respectivamente, as seguintes escolhas para Ψ

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_\ell^2 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_h^2 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}, \quad \omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

uma vez que

$$\sigma(j\omega, \Psi_1) \geq 0 \implies |\omega| \leq \omega_\ell, \quad \sigma(j\omega, \Psi_2) \geq 0 \implies |\omega| \geq \omega_h, \quad \sigma(j\omega, \Psi_3) \geq 0 \implies \omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

Por outro lado, o círculo unitário é mapeado com a escolha

$$\Phi = \Phi_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pois $\sigma(e^{j\omega}, \Phi_d) = 0$. Especificações de baixa, alta e média frequência no domínio discreto são obtidas com as seguintes escolhas para a matriz Ψ

$$\Psi_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \cos(\eta_\ell) \end{bmatrix} \implies |\omega| \leq \eta_\ell, \quad \Psi_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \cos(\eta_h) \end{bmatrix} \implies |\omega| \geq \eta_h,$$

$$\Psi_6 = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\eta_c} \\ e^{-j\eta_c} & -2 \cos(\eta_w) \end{bmatrix} \implies \eta_1 \leq \omega \leq \eta_2,$$

em que $\eta_c = (\eta_1 + \eta_2)/2$ e $\eta_w = (\eta_2 - \eta_1)/2$.

Na Tabela 1 é apresentado o resumo das curvas de interesse desta dissertação, explicitando o resultado da expressão $\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q$ para os casos contínuo e discreto, e especificações de baixa, média e alta frequência.

Tabela 1 – Resultado da expressão $\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q$ para especificações de baixa, média e alta frequência, casos contínuo (C) e discreto (D).

	Baixa	Média	Alta
C	$\begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \omega_\ell^2 Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Q & P + j\omega_c Q \\ P - j\omega_c Q & -\omega_1\omega_2 Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\omega_h^2 Q \end{bmatrix}$
D	$\begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - (2 \cos(\eta_\ell))Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -P & e^{j\eta_c} Q \\ e^{-j\eta_c} Q & P - (2 \cos(\eta_w))Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -P & -Q \\ -Q & P + (2 \cos(\eta_h))Q \end{bmatrix}$

3 Filtragem $\mathcal{H}_2$

Neste capítulo, aborda-se o problema de filtragem $\mathcal{H}_2$ por meio de condições LMIs com parâmetros escalares, tanto para o caso contínuo, quanto para o caso discreto. Como principais características, as condições apresentadas a seguir contêm e generalizam as condições baseadas na estabilidade quadrática, e proveem resultados similares a outras condições da literatura (por exemplo, (LACERDA *et al.*, 2011)) com a utilização de um menor número de variáveis.

Com a finalidade de facilitar a leitura deste trabalho, note que, no problema de filtragem $\mathcal{H}_2$, considera-se a matriz de transferência

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D, \quad (3.1)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_w \\ B_f D_{yw} \end{bmatrix}, \quad C = [C_z \quad -C_f], \quad D = 0,$$

no caso contínuo, ou

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_w \\ B_f D_{yw} \end{bmatrix}, \quad C = [C_z - D_f C_y \quad -C_f], \quad D = D_{zw} - D_f D_{yw},$$

para o caso discreto.

Para maiores detalhes com relação à definição do problema, ver Seção 2.6.

3.1 Filtragem $\mathcal{H}_2$ Contínua

Com relação ao problema de filtragem $\mathcal{H}_2$ para sistemas contínuos no tempo, estabelece-se o seguinte resultado.

Teorema 3.1. Considere a matriz de transferência (3.1). As seguintes condições são equivalentes.

- i) Existem matrizes A_f , B_f e C_f tais que $\|H(s)\|_2 < \rho$.
- ii) Existem matrizes simétricas $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes $E_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\text{Tr}(M) < \rho^2,$$

(3.2)

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_3 \\ \star & E_2 \end{bmatrix} \succ 0,$$

(3.3)

$$\begin{bmatrix} E_1 - \text{He}(G_1) & E_3 - \xi X_5 - G_0^T & G_1 B_w + \xi M_{Bf} D_{yw} \\ \star & E_2 - \xi \text{He}(X_5) & G_0 B_w + \xi M_{Bf} D_{yw} \\ \star & \star & -M \end{bmatrix} \prec 0,$$

(3.4)

$$\begin{bmatrix} \xi \text{He}(X_1 A + M_{Bf} C_y) & \xi(M_{Af} + A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T) & E_1 + A^T X_1^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_1 \\ \star & \xi \text{He}(M_{Af}) & E_3^T + M_{Af}^T - \xi X_0 \\ \star & \star & -\text{He}(X_1) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 + A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & C_z^T \\ E_2 + M_{Af}^T - \xi X_5 & -C_f^T \\ -(X_5 + X_0^T) & 0 \\ -\text{He}(X_5) & 0 \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0.$$

(3.5)

- iii) Existem matrizes simétricas $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $E_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e um escalar $\xi > 0$ tais que (3.2), (3.3),

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} E_1 - \xi \text{He}(X_1) & E_3 - \xi(X_5 + X_0^T) & C_z^T \\ \star & E_2 - \xi \text{He}(X_5) & -C_f^T \\ \star & \star & -M \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.6) \\
& \begin{bmatrix} \xi \text{He}(X_1 A + M_{Bf} C_y) & \xi(M_{Af} + A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T) & E_1 + X_1 A + M_{Bf} C_y - \xi X_1^T \\ \star & \xi \text{He}(M_{Af}) & E_3^T + X_0 A + M_{Bf} C_y - \xi X_5^T \\ \star & \star & -\text{He}(X_1) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} E_3 + M_{Af} - \xi X_0^T & X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw} \\ E_2 + M_{Af} - \xi X_5^T & X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw} \\ -(X_5 + X_0^T) & 0 \\ -\text{He}(X_5) & 0 \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Ademais, o filtro que minimiza o índice $\mathcal{H}_2$ para um determinado valor de ξ é obtido a partir do seguinte problema de otimização

$$\tilde{\rho}^2(\xi) = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.2)-(3.5)\},$$

ou, a partir da formulação dual, usando o problema

$$\tilde{\rho}^2(\xi) = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.2), (3.3), (3.6), (3.7)\},$$

com matrizes dadas por⁵

$$A_f = X_5^{-1} M_{Af}, \quad B_f = X_5^{-1} M_{Bf},$$

Para $\xi \rightarrow \infty$, obtém-se o filtro ótimo.

Demonstração. Note que a desigualdade (3.5) pode ser reescrita como

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I\} \begin{bmatrix} \xi \text{He}(A^T X) & P + A^T X - \xi X^T & C^T \\ \star & -\text{He}(X) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \underbrace{\text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I\}}_{Y_1^{-1}} \prec 0, \quad (3.8)$$

em que

$$X^T = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

com $R = X_2^{-T} X_3^T$, são matrizes bloco 2×2 , pois, com a definição acima, tem-se

$$\tilde{R}^T X^T \tilde{R} = \begin{bmatrix} X_1 & X_5 \\ X_0 & X_5 \end{bmatrix},$$

⁵ Como a matriz X_5 aparece no bloco (4, 4) das desigualdades (3.5) e (3.7), conclui-se que, para ambos os casos, ela é não singular.

com $X_0 = X_3 X_2^{-1} X_4$ e $X_5 = X_3 X_2^{-T} X_3^T$, e

$$\tilde{R}^T \mathbf{X}^T \mathbf{A} \tilde{R} = \tilde{R}^T \mathbf{X}^T \tilde{R} \underbrace{\tilde{R}^{-1} \mathbf{A} \tilde{R}}_{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} X_1 & X_5 \\ X_0 & X_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ \tilde{B}_f C_y & \tilde{A}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 A + M_{Bf} C_y & M_{Af} \\ X_0 A + M_{Bf} C_y & M_{Af} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{R}^T \mathbf{X}^T \mathbf{B} = \tilde{R}^T \mathbf{X}^T \tilde{R} \underbrace{\tilde{R}^{-1} \mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} X_1 & X_5 \\ X_0 & X_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ \tilde{B}_f D_{yw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw} \\ X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{R}^T \mathbf{C}^T = \tilde{\mathbf{C}}^T = \begin{bmatrix} C_z^T \\ -\tilde{C}_f^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}^T P \tilde{R} = \begin{bmatrix} E_1 & E_3 \\ E_3^T & E_2 \end{bmatrix},$$

com $M_{Af} = X_5 \tilde{A}_f$ e $M_{Bf} = X_5 \tilde{B}_f$, em que $\tilde{A}_f = R^{-1} A_f R$, $\tilde{B}_f = R^{-1} B_f$ e $\tilde{C}_f = C_f R$. Resumidamente, a matriz R pode ser interpretada como uma transformação de coordenadas nas matrizes da realização do filtro que, ao compor a transformação aumentada $\tilde{R}$, permite, sem perda de generalidade, igualar os dois blocos da segunda coluna da variável $\mathbf{X}^T$, por exemplo, neste⁶ caso, iguais a X_5 .

Isto posto, multiplicando-se a desigualdade (3.8) à direita por Y_1 e à esquerda por Y_1^T , recupera-se a desigualdade (2.46). Neste ponto, refere-se à discussão após a apresentação do Lema 2.10 para provar que a condição proposta contém o caso quadrático quando $\xi \rightarrow \infty$. A estrutura

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & \xi X_3 \\ G_4 & \xi X_2 \end{bmatrix},$$

com $G_4 = X_2 X_3^{-1} G_0$, é adotada para que o resultado quadrático seja recuperado; uma vez que, com essa estrutura, recupera-se sem perda de generalidade, a desigualdade (2.18) com a escolha $G = \xi \mathbf{X} = P$. A prova do resultado dual segue passos similares. $\square$

3.2 Filtragem $\mathcal{H}_2$ Discreta

Com relação ao problema $\mathcal{H}_2$ para sistemas discretos no tempo, estabelece-se o seguinte resultado.

Teorema 3.2. Considere a matriz de transferência (3.1). As seguintes condições são equivalentes.

- i) Existem matrizes A_f , B_f , C_f e D_f tais que $\|H(z)\|_2 < \rho$.
- ii) Existem matrizes simétricas $E_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes $E_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que (3.2),

⁶ Essa parametrização, com dois blocos iguais na matriz de transformação $\mathbf{X}^T$, é uma alternativa a trabalhar-se com as definições tradicionais de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}^{-1}$ em blocos com a restrição adicional de que $\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = I$, utilizadas por exemplo em (DE OLIVEIRA, 1999).

$$\begin{bmatrix} -E_1 & -E_3 & E_1 & E_3 & 0 & 0 \\ \star & -E_2 & E_3^T & E_2 & 0 & 0 \\ \star & \star & -\text{He}(G_1) & -(X_5 + G_0^T) & G_1 B_w + M_{Bf} D_{yw} & 0 \\ \star & \star & \star & -\text{He}(X_5) & G_0 B_w + M_{Bf} D_{yw} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -M & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11} & -E_3 + \xi(M_{Af} + A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T) & A^T X_1^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_1 \\ \star & -E_2 + \xi \text{He}(M_{Af}) & M_{Af}^T - \xi X_0 \\ \star & \star & E_1 - \text{He}(X_1) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & C_z^T - C_y^T D_f^T \\ M_{Af}^T - \xi X_5 & -C_f \\ E_3 - (X_5 + X_0^T) & 0 \\ E_2 - \text{He}(X_5) & 0 \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.10)$$

com

$$\mathcal{S}_{11} = -E_1 + \xi \text{He}(X_1 A + M_{Bf} C_y),$$

são factíveis.

iii) Existem matrizes simétricas $E_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $E_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que (3.2),

$$\begin{bmatrix} -E_1 & -E_3 & E_1 & E_3 & 0 & 0 \\ \star & -E_2 & E_3^T & E_2 & 0 & 0 \\ \star & \star & -\text{He}(X_1) & -(X_5 + X_0^T) & C_z^T - C_y^T D_f^T & 0 \\ \star & \star & \star & -\text{He}(X_5) & -C_f^T & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -M & D_{zw} - D_f D_{yw} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} E_1 - \text{He}(X_1) & E_3 - X_5 - X_0^T & A^T X_1^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_1 \\ \star & E_3 - \text{He}(X_5) & M_{Af}^T - \xi X_0 \\ \star & \star & -E_1 + \xi \text{He}(X_1 A + M_{Bf} C_y) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & 0 \\ M_{Af}^T - \xi X_5 & 0 \\ -E_3 + \xi(M_{Af} + A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T) & X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw} \\ -E_2 + \xi \text{He}(M_{Af}) & X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw} \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.12)$$

são factíveis.

Além disso, para cada valor de $\xi > 0$, o filtro que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ é obtido a partir do problema de otimização,

$$\tilde{\rho}^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.2), (3.9)-(3.10)\},$$

ou, alternativamente, usando a formulação dual

$$\tilde{\rho}^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.2), (3.11)-(3.12)\}.$$

Para cada formulação, as matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = X_5^{-1}M_{Af}, \quad B_f = X_5^{-1}M_{Bf},$$

e as matrizes C_f e D_f são obtidas diretamente como variáveis de decisão do problema de otimização. O filtro ótimo é obtido para $\xi = 0$.

Demonstração. A prova é feita a partir do resultado do Lema 2.11. Para tanto, note que a desigualdade (3.10) pode ser expressa como

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I\} \begin{bmatrix} P & A^T X - \xi X^T & C \\ \star & P - \text{He}(X) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I\} \prec 0,$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

com $R = X_2^{-T} X_3^T$, similarmente à prova do Teorema 3.1. Destarte, a partir de uma transformação de congruência, prova-se que a desigualdade (3.10) é equivalente a (2.54). Consequentemente, a partir do comentário após a prova do Lema 2.11, o filtro quadrático é recuperado com $\xi = 0$.

Por outro lado, a desigualdade (3.9) pode ser reescrita como

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I, I\} \begin{bmatrix} -P & P & 0 & 0 \\ \star & -\text{He}(G) & GB & 0 \\ \star & \star & -M & D^T \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I, I\} \prec 0,$$

que é equivalente à desigualdade (2.29).

Para que $X = X^T = P$ pertença ao conjunto de soluções factíveis, atribui-se a seguinte estrutura para a variável de folga, G , na desigualdade (2.53)

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & X_3 \\ G_4 & X_2 \end{bmatrix},$$

com $G_4 = X_2 X_3^{-1} G_0$. Essa escolha garante que o conjunto de soluções factíveis do problema contém a solução ótima. O resultado dual é obtido de maneira similar. $\square$

Com a finalidade de ilustrar os resultados dos Teoremas 3.1 e 3.2, consideram-se os seguintes exemplos de síntese de filtros com critério $\mathcal{H}_2$.

Exemplo 3.1. Seja o sistema assintoticamente estável, contínuo, linear e invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0.45 & -0.86 \\ 1.11 & -0.57 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1.21 \\ -1.11 \end{bmatrix} w(t), \\ z(t) &= \begin{bmatrix} -0.01 & 1.53 \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -0.77 & 0.37 \end{bmatrix} x(t) - 0.23w(t).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Aplicando-se o resultado do Lema 2.24, obtêm-se as seguintes matrizes para o filtro ótimo

$$A_f^q = \begin{bmatrix} 0.09 & -4.55 \\ 0.61 & -2.06 \end{bmatrix}, \quad B_f^q = \begin{bmatrix} 1.07 \\ -1.25 \end{bmatrix}, \quad C_f^q = \begin{bmatrix} -0.11 & -5.61 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

com custo $\mathcal{H}_2$ igual a $\rho = 2.59$. Por outro lado, na Figura 2, apresenta-se o resultado obtido por meio do Teorema 3.1 para 400 valores de ξ espaçados em escala logarítmica usando as formulações primal (em azul) e dual (em verde). O resultado para o caso quadrático é ilustrado com a linha tracejada em vermelho.

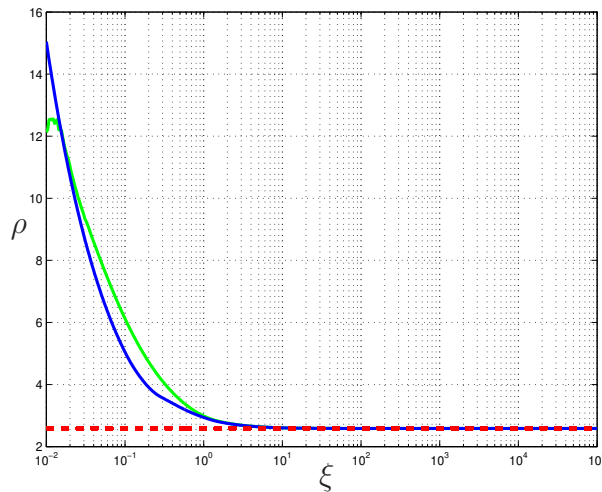


Figura 2 – Comparação entre os resultados do Lema 2.24 e Teorema 3.1 para o sistema (3.13). As curvas contínuas representam o limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$ para um dado valor do escalar ξ usando as formulações primal (em azul) e dual (em verde); a curva vermelha tracejada é o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ obtida por meio do Lema 2.24.

Neste ponto, ressalta-se que o filtro ótimo é obtido em ambas as condições quando o valor do parâmetro escalar ξ tende para infinito. De fato, para o valor $\xi = 200$, o filtro obtido pela formulação primal (item *ii*) do Teorema 3.1 é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.09 & -4.45 \\ 0.62 & -2.06 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.01 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} -8.58 & -554.88 \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

A transformação de similaridade que relaciona as realizações (3.14) e (3.15) é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.0002 \\ 0 & 0.0101 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

uma vez que⁷ $A_f^q = T^{-1}A_fT$, $B_f^q = T^{-1}B_f$ e $C_f^q = C_fT$, corroborando o fato de que a condição do Teorema 3.1 contém o caso quadrático quando o parâmetro escalar tende a infinito (neste caso, $\xi = 200$). Resultado semelhante é válido para a formulação dual.

Exemplo 3.2. Considere o sistema assintoticamente estável, discreto, linear e invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.19 & -0.21 & -0.29 \\ -0.08 & 0.24 & -0.22 \\ 0.08 & -0.31 & -0.79 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.44 & 1.37 \\ 0.33 & -1.71 \\ -0.75 & -0.10 \end{bmatrix} w(k), \\ z(k) &= \begin{bmatrix} -0.24 & 0.31 & -0.03 \\ 0.32 & -0.86 & -0.16 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.63 & 1.11 \\ 1.09 & -0.86 \end{bmatrix} w(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0.08 & -1.21 & -1.11 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.01 & 1.53 \end{bmatrix} w(k). \end{aligned}$$

Variando-se o parâmetro $\xi \in (-1, 1)$, obtém-se o resultado apresentado na Figura 3. A norma $\mathcal{H}_2$ ótima para o caso quadrático é apresentada na curva vermelha tracejada e o valor da norma $\mathcal{H}_2$ para um dado ξ com o resultado primal e dual nas curvas azul e verde, respectivamente. Observe que o filtro ótimo é obtido com $\xi = 0$. Comportamento similar em relação ao escalar ξ pode ser verificado em outros exemplos considerados.

Observação 3.1. A partir dos resultados das Figuras 2 e 3, percebe-se que, ao tratarmos sistemas precisamente conhecidos, as condições dos Teoremas 3.1 e 3.2 não apresentam vantagem quando comparado com o caso quadrático. No entanto, a vantagem do escalar é evidente quando se trabalha com sistemas incertos e essas vantagens são discutidas na próxima seção.

3.3 Filtragem Robusta

Extensões dos resultados apresentados nos Teoremas 3.1 e 3.2 para tratar sistemas com incertezas politópicas são feitas por meio de condições LMIs robustas (ou dependentes de parâmetros), como apresentado nos teoremas a seguir.

⁷ As matrizes apresentadas neste exemplo foram truncadas na segunda casa decimal. Ao considerar-se a matriz T dada em (3.16), mas com as matrizes (sem truncamento)

$$A_f^q = \begin{bmatrix} -0.0894 & -4.5471 \\ 0.6066 & -2.0558 \end{bmatrix}, \quad A_f = \begin{bmatrix} -0.0873 & -4.4513 \\ 0.6203 & -2.0569 \end{bmatrix},$$

obtém-se $\|A_f^q - T^{-1}A_fT\|_F = 0.0015$, em que $\|A\|_F$ representa a norma de Frobenius da matriz A . Valores da mesma ordem de grandeza são obtidos para as matrizes B_f^q e B_f , e C_f^q e C_f .

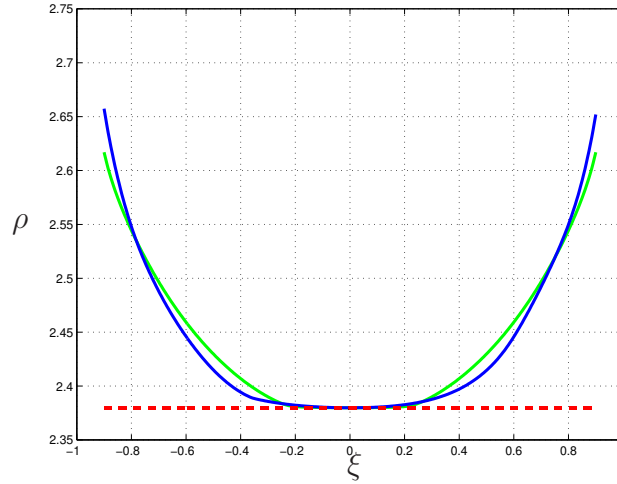


Figura 3 – Comparação entre os resultados do Lema 2.24 e Teorema 3.2 para o sistema do Exemplo 3.2. As curvas contínuas representam o limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ para um dado valor do escalar ξ para a formulação primal (em azul), dual (em verde). A curva vermelha tracejada é o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ obtida por meio do Lema 2.24.

Teorema 3.3. Considere o sistema dinâmico contínuo (2.73) com incertezas politópicas. Se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $E_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}(\alpha)$ e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes dependentes de parâmetros $E_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que,

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2, \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} E_1(\alpha) & E_3(\alpha) \\ \star & E_2(\alpha) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} E_1(\alpha) - \text{He}(G_1(\alpha)) & E_3(\alpha) - \xi X_5 - G_0(\alpha)^T & G_1(\alpha)B_w(\alpha) + \xi M_{Bf}D_{yw}(\alpha) \\ \star & E_2(\alpha) - \xi \text{He}(X_5) & G_0(\alpha)B_w(\alpha) + \xi M_{Bf}D_{yw}(\alpha) \\ \star & \star & -M(\alpha) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix}
\xi \text{He}(X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} \\
\star & \xi \text{He}(M_{Af}) & E_3(\alpha)^T + M_{Af}^T - \xi X_0(\alpha) \\
\star & \star & -\text{He}(X_1(\alpha)) \\
\star & \star & \star \\
\star & \star & \star \\
E_3(\alpha) + A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & C_z(\alpha)^T & \\
E_2(\alpha) + M_{Af}^T - \xi X_5 & -C_f(\alpha)^T & \\
-(X_5 + X_0(\alpha)^T) & 0 & \\
-\text{He}(X_5) & 0 & \\
\star & -I &
\end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.20)$$

em que

$$\mathcal{S}_{12} = \xi(M_{Af} + A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T),$$

$$\mathcal{S}_{13} = E_1(\alpha) + A(\alpha)^T X_1(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T - \xi X_1(\alpha),$$

sejam válidas $\forall \alpha \in \Xi$, as matrizes

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5^{-1} M_{Af} & X_5^{-1} M_{Bf} \\ C_f & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

garantem $\|H(s, \alpha)\|_2 < \rho$, $\forall \alpha \in \Xi$, em que $H(s, \alpha)$ é a extensão da matriz de transferência (4.1) para o domínio politópico.

Além disso, um limitante superior para a norma de pior caso (custo garantido $\mathcal{H}_2$) pode ser obtido a partir do procedimento de otimização, para $\xi > 0$:

$$\tilde{\rho}^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.17)-(3.20)\}.$$

Similarmente, usando-se a formulação dual, se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $E_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes dependentes de parâmetros $E_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que,

(3.17), (3.18),

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} E_1(\alpha) - \xi \text{He}(X_1(\alpha)) & E_3(\alpha) - \xi(X_5 + X_0(\alpha)^T) & C_z(\alpha)^T \\ \star & E_2(\alpha) - \xi \text{He}(X_5) & -C_f^T \\ \star & \star & -M(\alpha) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.22) \\
& \begin{bmatrix} \xi \text{He}(X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) & \xi(M_{Af} + A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T) \\ \star & \xi \text{He}(M_{Af}) \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ E_1(\alpha) + X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha) - \xi X_1(\alpha)^T & E_3(\alpha) + M_{Af} - \xi X_0(\alpha)^T \\ E_3(\alpha)^T + X_0(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha) - \xi X_5^T & E_2(\alpha) + M_{Af} - \xi X_5^T \\ -\text{He}(X_1(\alpha)) & -(X_5 + X_0(\alpha)^T) \\ \star & -\text{He}(X_5) \\ \star & \star \\ X_1(\alpha)B_w(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) \\ X_0(\alpha)B_w(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

sejam válidas $\forall \alpha \in \Xi$, as matrizes (3.21) são tais que $\|H(s, \alpha)\|_2 < \rho$, $\forall \alpha \in \Xi$. Um limitante superior para a norma de pior caso é obtido por meio do procedimento de otimização, para $\xi > 0$:

$$\tilde{\rho}^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.17), (3.18), (3.22)-(3.23)\},$$

Demonstração. A prova deste teorema é uma aplicação direta das implicações $ii) \rightarrow i)$ (primal) e $iii) \rightarrow i)$ (dual) estabelecidas no Teorema 3.1. Observe que a necessidade não é válida, pois os elementos da segunda coluna das variáveis de folga são considerados independentes dos parâmetros incerto. $\square$

Observação 3.2. Note que, no caso incerto, diferentemente do caso precisamente conhecido, os valores dos custos garantidos obtidos por meio das formulações primal e dual não são necessariamente iguais.

Com relação ao caso discreto, estabelece-se o seguinte resultado.

Teorema 3.4. Considere o sistema dinâmico discreto com incertezas politópicas (2.73). Se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $E_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes dependentes de parâmetros $E_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que (3.17),

$$\begin{bmatrix} -E_1(\alpha) & -E_3(\alpha) & E_1(\alpha) & E_3(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & -E_2(\alpha) & E_3(\alpha)^T & E_2(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & -\text{He}(G_1(\alpha)) & -(X_5 + G_0(\alpha))^T & \tilde{\mathcal{G}}_{35} & 0 \\ \star & \star & \star & -\text{He}(X_5) & \tilde{\mathcal{G}}_{45} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -M(\alpha) & D(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & A(\alpha)^T X_1(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T - \xi X_1(\alpha) \\ \star & -E_2(\alpha) + \xi \text{He}(M_{Af}) & M_{Af}^T - \xi X_0(\alpha) \\ \star & \star & E_1(\alpha) - \text{He}(X_1(\alpha)) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & C_z(\alpha)^T - C_y(\alpha)^T D_f^T \\ M_{Af}^T - \xi X_5 & -C_f \\ E_3(\alpha) - (X_5 + X_0(\alpha))^T & 0 \\ E_2(\alpha) - \text{He}(X_5) & 0 \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.25)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{35} &= G_1(\alpha) B_w(\alpha) + M_{Bf} D_{yw}(\alpha), \quad \tilde{\mathcal{G}}_{45} = G_0(\alpha) B_w(\alpha) + M_{Bf} D_{yw}(\alpha), \\ \mathcal{G}_{11} &= -E_1(\alpha) + \xi \text{He}(X_1(\alpha) A(\alpha) + M_{Bf} C_y(\alpha)), \\ \mathcal{G}_{12} &= -E_3(\alpha) + \xi (M_{Af} + A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T), \end{aligned}$$

sejam válidas $\forall \alpha \in \Xi$, o filtro cujas matrizes são dadas por (3.21) garante $\|H(z, \alpha)\|_2 < \rho$, $\forall \alpha \in \Xi$.

Um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ de pior caso pode ser obtido por meio do procedimento de otimização, para $\xi \in (-1, 1)$:

$$\tilde{\rho}^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.17), (3.18), (3.24), (3.25)\}$$

De maneira equivalente, utilizando-se a formulação dual, se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $E_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes dependentes de parâmetros $E_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais

que (3.17),

$$\begin{bmatrix} -E_1(\alpha) & -E_3(\alpha) & E_1(\alpha) & E_3(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & -E_2(\alpha) & E_3(\alpha)^T & E_2(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & -\text{He}(X_1(\alpha)) & -(X_5 + X_0(\alpha)^T) & C_z(\alpha)^T - C_y(\alpha)^T D_f^T & 0 \\ \star & \star & \star & -\text{He}(X_5) & -C_f^T & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -M(\alpha) & D(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} E_1(\alpha) - \text{He}(X_1(\alpha)) & E_3(\alpha) - X_5 - X_0(\alpha)^T & A(\alpha)^T X_1(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T - \xi X_1(\alpha) \\ \star & E_3(\alpha) - \text{He}(X_5) & M_{Af}^T - \xi X_0(\alpha) \\ \star & \star & -E_1(\alpha) + \xi \text{He}(X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & 0 \\ M_{Af}^T - \xi X_5 & 0 \\ -E_3(\alpha) + \xi(M_{Af} + A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T) & X_1(\alpha)B_w(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) \\ -E_2(\alpha) + \xi \text{He}(M_{Af}) & X_0(\alpha)B_w(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.27)$$

sejam válidas $\forall \alpha \in \Xi$, então $\|H(z, \alpha)\|_2 < \rho$, $\forall \alpha \in \Xi$.

Neste caso, um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ de pior caso é obtido por meio do procedimento de otimização, para $\xi \in (-1, 1)$:

$$\tilde{\rho}^2 = \mathbf{min.}\{\rho^2 : (3.17), (3.18), (3.26), (3.27)\}.$$

A aplicação do Teorema 3.4 no projeto⁸ de filtros robustos $\mathcal{H}_2$ de ordem completa para sistemas dinâmicos discretos é ilustrada nos exemplos a seguir. Resultados similares são obtidos no caso contínuo com a aplicação do Teorema 3.3.

Exemplo 3.3. Considere o sistema linear discreto, robustamente estável, e invariante no tempo com incertezas politópicas definido pelas matrizes (geradas aleatoriamente)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.83 & -0.02 \\ 0.06 & 0.69 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.53 & -0.35 \\ -0.77 & -0.46 \end{bmatrix}, \quad B_{w1} = \begin{bmatrix} 1.27 & 3.45 \\ 0.96 & 1.03 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.53 \\ -1.02 & 3.32 \end{bmatrix},$$

$$C_{z1} = \begin{bmatrix} 0.49 & -1.51 \end{bmatrix}, \quad C_{z2} = \begin{bmatrix} 1.41 & -0.21 \end{bmatrix}, \quad C_{y1} = \begin{bmatrix} -0.36 & -1.51 \end{bmatrix}, \quad C_{y2} = \begin{bmatrix} -0.77 & -1.65 \end{bmatrix},$$

$$D_{yw1} = \begin{bmatrix} 0.18 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad D_{yw2} = \begin{bmatrix} 3.25 & -1.98 \end{bmatrix}.$$

⁸ Com o intuito de apresentar ao leitor a utilização do pacote computacional ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012), a rotina da condição dual do Teorema 3.4 é fornecida no Apêndice.

Na Figura 4, é apresentado o resultado da aplicação das condições do Teorema 3.4 para diferentes valores do escalar ξ . Percebe-se que, para a formulação primal (curva azul tracejada) com variáveis afins no parâmetro incerto e para uma busca no parâmetro escalar limitada ao conjunto

$$\xi \in \{0.95, 0.9, \dots, -0.05, 0, 0.05, \dots, 0.9, 0.95\}, \quad (3.28)$$

obtém-se uma redução máxima do custo garantido $\mathcal{H}_2$ de cerca de 1.3% (para $\xi = 0.35$) quando comparado com $\xi = 0$. Para a formulação dual (curva vermelha) com variáveis afins, conclusões semelhantes são obtidas, com redução máxima de 9% (para $\xi = -0.4$) no custo garantido $\mathcal{H}_2$.

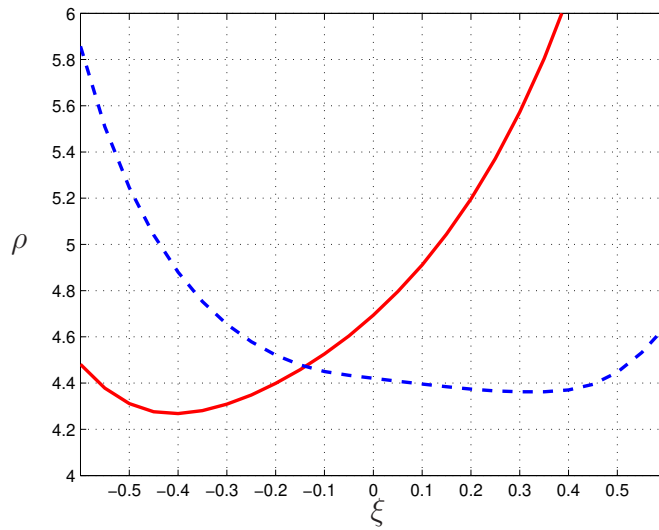


Figura 4 – Influência do parâmetro ξ no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$ para o sistema do Exemplo 3.3 usando as condições do Teorema 3.4 (primal, azul tracejada; dual, vermelho contínua) com variáveis afins.

Exemplo 3.4. Este exemplo tem o objetivo de comparar o desempenho das condições do Lema 2.25 para sistemas discretos e do trabalho (LACERDA *et al.*, 2011) (para $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$) com o Teorema 3.4 (fixando-se $\xi = 0$), ao aumentar-se gradativamente a quantidade de incerteza presente no sistema. Para tanto, cria-se, inicialmente, um sistema precisamente conhecido com matrizes A , B_w , C_z , C_y , D_{yw} e, em seguida, constrói-se um sistema politópico com dois vértices, $A_1 = A$ e $A_2 = \nu A$, e as demais matrizes permanecem inalteradas. Note que, para $\nu = 1$, tem-se um sistema precisamente conhecido. As matrizes (geradas aleatoriamente e truncadas em duas casas decimais) são

$$A = \begin{bmatrix} 0.009 & 0.015 & 0 \\ 0 & -0.448 & -0.298 \\ 0.153 & 0.284 & -0.159 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -1.058 \\ -8.357 \\ 4.339 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} -1.011 & 2.973 & 3.253 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1.384 & 0.289 & 4.288 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = -4.305,$$

e o resultado é apresentado na Figura 5. Observa-se que, quando a incerteza é baixa (valores de ν próximos a 1), a condição do Teorema 3.4 provê resultados melhores em termos de custo garantido $\mathcal{H}_2$ do que as condições em (LACERDA *et al.*, 2011) e do que o filtro obtido pela extensão do Lema 2.25 para tratar o caso incerto. Neste exemplo, a condição de Lacerda *et al.* (2011) produz resultados menos conservadores para valores de $\nu > 2.3$.

Os resultados desses exemplos foram apresentados em (ROMÃO *et al.*, 2015).

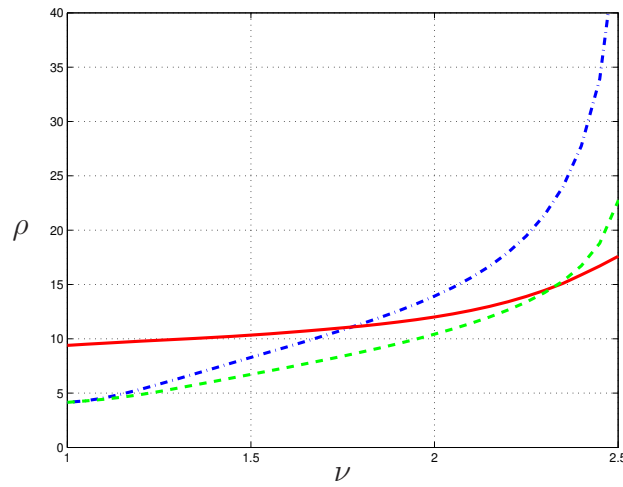


Figura 5 – Limitante da norma $\mathcal{H}_2$ fornecido pelas condições de (LACERDA *et al.*, 2011) ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, vermelho contínua), Lema 2.25 (azul, tracejada com pontos) e Teorema 3.4 ($\xi = 0$, dual, verde tracejada) para o Exemplo 3.3.

4 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

Neste capítulo, aborda-se o problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ por meio de condições LMIs para todo o intervalo de frequência, chamado simplesmente de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ e, usando-se o gKYP (ver capítulo 2), para especificações em baixa, média e alta frequência, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto.

Inicialmente, estendem-se as condições para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ com parâmetros escalares apresentados no Capítulo 3 com o objetivo de reduzir o conservadorismo com relação ao resultado quadrático para todo intervalo de frequência. Em seguida, explora-se o problema de filtragem em faixas de frequências.

Com o objetivo de facilitar a leitura deste capítulo, note que, no problema de filtragem, interessa-se pelo desempenho, em termos das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, da matriz de transferência

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D, \quad (4.1)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_w \\ B_f D_{yw} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_z - D_f C_y & -C_f \end{bmatrix}, \quad D = D_{zw} - D_f D_{yw}.$$

Para maiores detalhes sobre a definição do problema de filtragem, ver Seção 2.6.

4.1 Problema de Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

Com relação ao problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas contínuos no tempo, estabelece-se o seguinte resultado.

4.1.1 Sistemas Contínuos

Teorema 4.1. Considere a matriz de transferência (4.1). As seguintes condições são equivalentes.

- i) Existem matrizes A_f , B_f , C_f e D_f tais que $\|H(s)\|_\infty < \gamma$.
- ii) Existem matrizes simétricas $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $E_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_3 \\ E_3^T & E_2 \end{bmatrix} \succ 0,$$

(4.2)

$$\begin{bmatrix} \text{He}(X_1 A + M_{Bf} C_y) & M_{Af} + A^T X_0 + C_y^T M_{Bf} & E_1 + \xi(A^T X_1^T + C_y^T M_{Bf}^T) - X_1 & & & \\ \star & \text{He}(M_{Af}) & E_3^T + \xi M_{Af}^T - X_0 & & & \\ \star & \star & -\xi \text{He}(X_1) & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ E_3 + \xi(A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T) - X_5 & X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T & & & \\ E_2 + \xi M_{Af}^T - X_5 & X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw} & -C_f^T & & & \\ -\xi(X_5 + X_0^T) & \xi(X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw}) & 0 & & & \\ -\xi \text{He}(X_5) & \xi(X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw}) & 0 & & & \\ \star & -I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T & & & \\ \star & \star & -\gamma^2 I & & & \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.3)$$

Ademais, o filtro que minimiza o índice $\mathcal{H}_\infty$ para um determinado valor de ξ é obtido a partir do seguinte problema de otimização

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.2)-(4.3)\}$$

com matrizes dadas por⁹

$$A_f = X_5^{-1} M_{Af}, \quad B_f = X_5^{-1} M_{Bf},$$

e matrizes C_f e D_f são obtidas diretamente do problema de otimização. Quando $\xi \rightarrow 0$, o filtro ótimo é obtido.

Demonstração. Usando as definições apresentadas na prova do Teorema 3.1, observe que a desigualdade (4.3) pode ser escrita como

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I, I\} \begin{bmatrix} \text{He}(A^T X) & P + \xi A^T X - X^T & X^T B & C^T \\ \star & -\xi \text{He}(X) & \xi X^T B & 0 \\ \star & \star & -I & D^T \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I, I\} \prec 0.$$

Dessa forma, com a aplicação de uma transformação de congruência, prova-se a equivalência da desigualdade acima com o item *ii*) do Lema 2.6; além disso, como a desigualdade (4.2) é equivalente a $P \succ 0$, o resultado segue pelo Lema 2.6.

⁹ A existência da inversa da matriz X_5 segue por argumento similar ao apresentado no Teorema 3.1.

Outrossim, observe que a matriz $X = X^T = P$ é factível se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ \star & -I & D^T \\ \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} A^T P \\ B^T P \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} PA & PB & 0 \end{bmatrix} \prec 0,$$

ou seja, o filtro ótimo é obtido quando $\xi \rightarrow 0$. $\square$

4.1.2 Discreto

Com relação ao problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas discretos no tempo, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 4.2. Considere a matriz de transferência (4.1). As seguintes condições são equivalentes.

- i) Existem matrizes A_f , B_f , C_f e D_f tais que $\|H(z)\|_\infty < \gamma$.
- ii) Existem matrizes simétricas $E_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $E_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que (4.2) e (4.4) sejam factíveis.

$$\begin{bmatrix} \xi \text{He}(X_1 A + M_{Bf} C_y) - E_1 & \xi(M_{Af} + A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T) - E_3 & A^T X_1^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_1 \\ \star & \xi \text{He}(M_{Af}) - E_2 & M_{Af}^T - \xi X_0 \\ \star & \star & E_1 - \text{He}(X_1) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} A^T X_0^T + C_y^T M_{Bf}^T - \xi X_5 & \xi(X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw}) & C_z^T - C_y^T D_f^T \\ M_{Af}^T - \xi X_5 & \xi(X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw}) & -C_f^T \\ E_3 - X_5 - X_0^T & X_1 B_w + M_{Bf} D_{yw} & 0 \\ E_2 - \text{He}(X_5) & X_0 B_w + M_{Bf} D_{yw} & 0 \\ \star & -I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\ \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0.$$

O filtro que minimiza o índice $\mathcal{H}_\infty$ para um determinado valor de $\xi \in (-1, 1)$ é obtido por meio de problema de otimização

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.2), (4.4)\}$$

com matrizes dadas por

$$A_f = X_5^{-1} M_{Af}, \quad B_f = X_5^{-1} M_{Bf},$$

e as matrizes C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização. Além disso, o filtro ótimo é obtido com $\xi = 0$.

Demonstração. Similarmente à prova do Teorema 4.1, usam-se as definições do Teorema 3.1 e reescreve-se a desigualdade (4.4) como

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I, I\} \begin{bmatrix} \xi \text{He}(\mathbf{A}^T \mathbf{X}) - P & \mathbf{A}^T \mathbf{X} - \xi \mathbf{X}^T & \xi \mathbf{X}^T \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \star & -\text{He}(\mathbf{X}) + P & \mathbf{X}^T \mathbf{B} & 0 \\ \star & \star & -I & \mathbf{D}^T \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I, I\} \prec 0.$$

O resultado segue por uma transformação de congruência e a equivalência do Lema 2.7.

A matriz $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T = P$ é factível se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T P \mathbf{A} - P & \mathbf{A}^T P \mathbf{B} + \xi P \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \star & \mathbf{B}^T P \mathbf{B} - I & \mathbf{D}^T \\ \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0,$$

ou seja, se $\xi = 0$, o filtro ótimo é obtido. $\square$

Não são apresentados exemplos para o problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ nesta seção pelo fato do comportamento ser similar ao do caso $\mathcal{H}_2$. De fato, para ambos os casos, contínuo e discreto, os resultados da variação da norma $\mathcal{H}_\infty$ em função do parâmetro escalar ξ assemelham-se aos ilustrados nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

4.1.3 Filtros Robustos $\mathcal{H}_\infty$

Extensões dos resultados apresentados nos Teoremas 4.1 e 4.2 para o projeto de filtros robustos seguem diretamente. A seguir, apresenta-se a extensão para o caso contínuo (o caso discreto pode ser construído de maneira similar).

Teorema 4.3. Considere o sistema (4.1). A desigualdade $\|H(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$, $\forall \alpha \in \Xi$, é válida se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $E_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes dependentes de parâmetros $E_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar

$\xi > 0$ tais que a seguinte LMI robusta seja factível

$$\begin{bmatrix} \text{He}(X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) & M_{Af} + A(\alpha)^T X_0(\alpha) + C_y(\alpha)^T M_{Bf} & \mathcal{S}_{13} & & & \\ & \star & & \text{He}(M_{Af}) & & \\ & \star & & \star & & \mathcal{S}_{23} \\ & \star & & \star & & -\xi \text{He}(X_1(\alpha)) \\ & \star & & \star & & \star \\ & \star & & \star & & \star \\ & \star & & \star & & \star \\ \mathcal{S}_{14} & X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) & C_z(\alpha)^T - C_y(\alpha)^T D_f^T & & & \\ E_2(\alpha) + \xi M_{Af}^T - X_5 & X_0(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) & -C_f^T & & & \\ -\xi(X_5 + X_0(\alpha)^T) & \xi(X_1(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha)) & 0 & & & \\ -\xi \text{He}(X_5) & \xi(X_0(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha)) & 0 & & & \\ \star & -I & D_{zw}(\alpha)^T - D_{yw}(\alpha)^T D_f^T & & & \\ \star & \star & -\gamma^2 I & & & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.5)$$

para todo $\alpha \in \Xi$, com

$$\mathcal{S}_{13} = E_1(\alpha) + \xi(A(\alpha)^T X_1(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T) - X_1(\alpha), \quad \mathcal{S}_{23} = E_3(\alpha)^T + \xi M_{Af} - X_0(\alpha)$$

$$\mathcal{S}_{14} = E_3(\alpha) + \xi(A(\alpha)^T X_0(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T) - X_5.$$

Um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ de pior caso é obtido a partir do problema de otimização

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.2), (4.5)\},$$

com matrizes do filtro robusto dadas por

$$A_f = M_{Af}X_5^{-1}, \quad B_f = X_5^{-1}M_{Bf}. \quad (4.6)$$

e C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização.

Demonstração. Segue passos similares aos do Lema 3.3. □

4.1.4 Exemplos Numéricos

A utilização do Teorema 4.3 é exemplificada a seguir. Resultados similares são obtidos para o caso discreto.

Exemplo 4.1. Para comparar os resultados do Teorema 4.3 com a extensão do Lema 2.26 para o caso robusto e com (LACERDA *et al.*, 2011), cria-se um sistema politópico em que o grau de incerteza é controlado a partir de um parâmetro escalar (usando um procedimento similar ao utilizado no Exemplo 3.4 do capítulo anterior). Ou seja, considera-se um sistema precisamente conhecido com matrizes A , B_w , C_z , D_{zw} , C_y , D_{yw} e, a partir desse, gera-se um modelo politópico com dois vértices por meio do seguinte procedimento: $A_1 = A$, $A_2 = A - \nu I$, e as outras matrizes são mantidas constantes. Observe que o nível

de incerteza é controlado pelo parâmetro ν , e que, para $\nu = 0$, tem-se um sistema precisamente conhecido. Dito isto, considere as matrizes (geradas aleatoriamente e truncadas em duas casas decimais)

$$A = \begin{bmatrix} -1.23 & -0.63 & -2.49 \\ 0.19 & -0.17 & 0.20 \\ 0.35 & 2.35 & -0.31 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -2.39 & -1.80 \\ 0.27 & 2.12 \\ 0.51 & 3.64 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0.67 & -1.64 & -0.27 \\ 1.11 & 3.36 & 1.32 \end{bmatrix},$$

$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 1.17 & -0.19 \\ -0.30 & 0.09 \end{bmatrix}, \quad C_y = [-0.67 \quad -3.81 \quad 1.45], \quad D_{yw} = [-4.32 \quad -0.91].$$

Definindo uma estrutura afim para as variáveis dependentes de parâmetros em (LACERDA *et al.*, 2011) e no Teorema 4.3, e gerando um *grid* com espaçamentos de 0.05 no parâmetro ν , obtêm-se os resultados apresentados na Figura 6. Note que a condição do Teorema 4.3 provê limitantes $\mathcal{H}_\infty$ próximos aos fornecidos pela resultado em (LACERDA *et al.*, 2011) usando menos variáveis (108 contra 168).

Neste exemplo, foi realizada uma busca linear no parâmetro escalar do Teorema 4.3 e (LACERDA *et al.*, 2011) ($\lambda_1 = \lambda_2 = \xi, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$) no conjunto definido em (3.28).

Note que os resultados (para cada valor de ν) obtidos por meio do Teorema 4.3 são sempre menos conservadores que o resultado quadrático apresentado no Lema 2.26; além disso, o limitante do Teorema 4.3 está próximo do limitante obtido com o resultado apresentado em (LACERDA *et al.*, 2011) para o nível de incerteza considerado. Para maiores valores de incerteza, o método (LACERDA *et al.*, 2011) provê limitantes cada vez menos conservadores quando comparados com os valores fornecidos pelo Teorema 4.3.

Exemplo 4.2. Considere o seguinte sistema dinâmico contínuo e robustamente estável dado por,

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 4 + \delta \\ -4 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = D_{yw} = [0 \quad 1], \quad C_y = [0 \quad -1.2], \quad (4.7)$$

em que $|\delta| \leq \bar{\delta}$. Na Tabela 2, apresenta-se o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ obtido pelas condições do Teorema 4.3 ($\xi = 0.1$) e (LACERDA *et al.*, 2011, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) para diferentes valores de $\bar{\delta}$. Observe que a condição proposta provê limitantes competitivos quando comparados com (LACERDA *et al.*, 2011) usando um menor número de variáveis (50 versus 78).

Tabela 2 – Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o Exemplo 4.2 usando o Teorema 4.3 (T4.3), $\xi = 0.1$, e (LACERDA *et al.*, 2011) (LOP) com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ para diferentes valores do limitante do parâmetro δ , definido por $\bar{\delta}$.

$\bar{\delta}$	1	1.3	1.5	2	2.5
LOP	0.702	0.706	0.709	0.721	0.737
(T4.3)	0.702	0.707	0.711	0.724	0.741

Os resultados desse exemplo foram apresentados em (ROMÃO *et al.*, 2016).

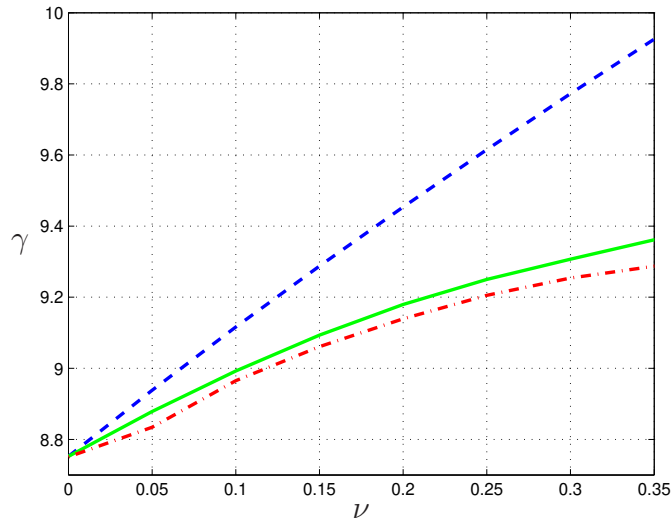


Figura 6 – Limitantes para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema do Exemplo 4.1 para (LACERDA *et al.*, 2011, $\lambda_1 = \lambda_2 = \xi$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$) (linha vermelha tracejada com pontos), adaptação do Lema 2.26 para tratar o caso robusto (linha azul tracejada) e Teorema 4.3 (linha verde), com ξ pertencente ao conjunto dado em (3.28).

4.2 Projeto de Filtros usando o gKYP

O projeto de filtros que minimizam a norma $\mathcal{H}_\infty$ para faixas de frequência pode ser realizado por meio do gKYP, apresentado no Capítulo 2. Neste caso, interessa-se em obter as matrizes do filtro A_f , B_f , C_f e D_f de modo que

$$\|H(\lambda)\|_\infty < \gamma, \quad \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi),$$

em que $H(\lambda)$ é a matriz de transferência (4.1) e $\Lambda(\Phi, \Psi)$ representa um segmento de reta ou círculo (para maiores detalhes sobre a definição deste conjunto, ver (IWASAKI *et al.*, 2000; IWASAKI; HARA, 2005)). Dessa forma, apresentam-se os resultados do projeto de filtros, contínuos e discretos, com especificações em baixa, média e alta frequência.

4.2.1 Especificações em Baixa Frequência

Os próximos resultados abordam o projeto de filtros de ordem completa, contínuos e discretos, para especificações em baixa frequência. Observe que, enquanto estabelece-se uma condição necessária e suficiente para o projeto de filtros no caso contínuo, no caso discreto o resultado apresentado é apenas suficiente.

Teorema 4.4. Considere o sistema contínuo associado à matriz de transferência (4.1), e considere um escalar $\omega_\ell > 0$. As seguintes condições são equivalentes.

$$i) \quad \|H(s)\|_\infty < \gamma, \quad \forall s = j\omega \text{ e } |\omega| \leq \omega_\ell.$$

ii) Existem matrizes simétricas definidas positivas $Q_{11} = Q_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_{22} = Q_{22}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{21} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tais que

$$\begin{bmatrix} -Q_{11} & -Q_{12} & P_{11} - G_{11}^T & P_{12} - G_{21}^T \\ \star & -Q_{22} & P_{12}^T - \hat{K}^T & P_{22} - \hat{K}^T \\ \star & \star & \omega_\ell^2 Q_{11} + \text{He}(G_{11}A + M_{Bf}C_y) & \omega_\ell^2 Q_{12} + M_{Af} + A^T G_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T \\ \star & \star & \star & \omega_\ell^2 Q_{22} + \text{He}(M_{Af}) \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T & & \\ G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^T & & \\ -\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T & & \\ \star & -I & & \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.8)$$

Ademais, o menor limitante superior que satisfaz *i*) é obtido a partir do problema de otimização

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.8)\},$$

e as matrizes do filtro que garantem este desempenho são dadas por

$$A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}, \quad B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf}.$$

com C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização.

Demonstração. Definindo as matrizes

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{22}^{-T} \tilde{G}_{12}^T \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \tilde{R}^T Q \tilde{R}, \quad \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} = \tilde{R}^T P \tilde{R},$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & \hat{K} \\ G_{21} & \hat{K} \end{bmatrix} = \tilde{R}^T G \tilde{R},$$

observe que

$$\tilde{R}^T G A \tilde{R} = \begin{bmatrix} G_{11}A + M_{Bf}C_y & M_{Af} \\ G_{21}A + M_{Bf}C_y & M_{Af} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}^T G B = \begin{bmatrix} G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} \\ G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} \end{bmatrix},$$

$$C \tilde{R} = \begin{bmatrix} C_z - D_f C_y \\ -C_f \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a desigualdade (4.8) pode ser escrita como

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I, I\} \begin{bmatrix} -Q & P - G^T & 0 & 0 \\ P - G & \omega_\ell^2 Q + \text{He}(GA) & GB & C^T \\ 0 & B^T G^T & -\gamma^2 I & D^T \\ 0 & C & D & -I \end{bmatrix} \text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I, I\} \prec 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -Q & P & 0 \\ P & \omega_\ell^2 Q + C^T C & C^T D \\ 0 & D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A^T \\ B^T \end{bmatrix} G^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} G \underbrace{\begin{bmatrix} -I & A & B \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \prec 0,$$

e como¹⁰, por meio da escolha

$$\mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^\perp = \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{\perp T} \begin{bmatrix} -Q & P & 0 \\ P & \omega_\ell^2 Q + C^T C & C^T D \\ 0 & D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \mathbf{K}^\perp = \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0,$$

usando-se o Lema 2.9, mostra-se que a desigualdade (4.8) é equivalente a

$$\mathbf{S}^{\perp T} \underbrace{\begin{bmatrix} -Q & P & 0 \\ P & \omega_\ell^2 Q + C^T C & C^T D \\ 0 & D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \mathbf{S}^\perp \prec 0. \quad (4.9)$$

Note que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & C^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q & P & 0 & 0 \\ P & \omega_\ell^2 Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & C & D \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

e, portanto, a desigualdade (4.9) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} A^T & I & C^T & 0 \\ B^T & 0 & D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q & P & 0 & 0 \\ P & \omega_\ell^2 Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \implies$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \omega_\ell Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_c \otimes P + \Psi_1 \otimes Q} + \underbrace{\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Theta} \prec 0.$$

Portanto, a equivalência entre *i*) e *ii*) é estabelecida por meio do Lema 2.30. $\square$

¹⁰ Ao longo dessa seção, assume-se que $D^T D - \gamma^2 I \prec 0$. Note que essa hipótese é automaticamente satisfeita para sistemas estritamente próprios.

De maneira similar, obtém-se o seguinte resultado para o caso discreto.

Teorema 4.5. Considere o sistema discreto associado à matriz de transferência (4.1), e considere um escalar $v_\ell > 0$. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{21} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_{21} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tais que

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} -P_{11} - \text{He}(F_{11}) & -P_{12} - F_{21}^T - \hat{K} & Q_{11} - G_{11}^T + F_{11}A + M_{Bf}C_y & & & \\ \star & -P_{22}^T - \text{He}(\hat{K}) & Q_{12}^T - \hat{K}^T + F_{21}A + M_{Bf}C_2 & & & \\ \star & \star & P_{11} + \text{He}(G_{11}A + M_{Bf}C_y) - 2\cos(v_\ell)Q_{11} & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ Q_{12} - G_{21}^T + M_{Af} & F_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 & & & \\ Q_{22} - \hat{K}^T + M_{Af} & F_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 & & & \\ P_{12} + M_{Af} + A^T G_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T - 2\cos(v_\ell)Q_{12} & G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T & & & \\ P_{22} + \text{He}(M_{Af}) - 2\cos(v_\ell)Q_{22} & G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^T & & & \\ \star & -\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T & & & \\ \star & \star & -I & & & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.11)$$

são verificadas, então $\|H(e^{j\omega})\|_\infty < \gamma$ para todo $|\omega| \leq v_\ell$. Ademais, um limitante superior para γ pode ser obtido a partir do problema de otimização

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.10), (4.11)\},$$

e as matrizes do filtro que garantem este desempenho são dadas por

$$A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}, \quad B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf},$$

e C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização.

Demonstração. De maneira similar à prova do Teorema 4.5, reescreve-se a desigualdade (4.11) como,

$$\text{diag}\{\tilde{R}^T, \tilde{R}^T, I, I\} \begin{bmatrix} -P - \text{He}(F) & Q - G^T + FA & FB & 0 \\ \star & P + \text{He}(GA) - 2\cos(v_\ell)Q & GB & C^T \\ \star & \star & -\gamma^2 I & D^T \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \text{diag}\{\tilde{R}, \tilde{R}, I, I\} \prec 0.$$

Aplicando uma transformação de congruência e complemento de Schur, obtém-se a seguinte desigualdade equivalente

$$\begin{bmatrix} -P & Q & 0 \\ \star & P - 2\cos(v_\ell)Q + C^T C & C^T D \\ 0 & D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} F \\ G \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -I & A & B \end{bmatrix}}_S \right) \prec 0,$$

que, se verificada, com

$$S^\perp = \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

implica em

$$S^{\perp T} \begin{bmatrix} -P & Q & 0 \\ \star & P - 2\cos(v_\ell)Q + C^T C & C^T D \\ 0 & D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} S^\perp \prec 0.$$

Usando argumentos similares aos utilizados na prova do Teorema 4.4, a desigualdade anterior é a desigualdade

$$\begin{bmatrix} A^T & I & C^T & 0 \\ B^T & 0 & D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & Q & 0 & 0 \\ Q & P - 2\cos(v_\ell)Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \implies$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - 2\cos(v_\ell)Q \end{bmatrix}}_{\Phi_d \otimes P + \Psi_4 \otimes Q} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Theta} \prec 0.$$

Como (4.10) implica em $Q \succ 0$ (definida no Lema 2.30), o resultado segue do Lema 2.30. $\square$

4.2.2 Especificações em Média Frequência

Resultados para o projeto de filtros em média frequência são obtidos de maneira similar. Estes resultados são apresentados a seguir para os casos contínuo e discreto.

Teorema 4.6. Considere o sistema contínuo associado à matriz de transferência (4.1), e escalares ω_1 e ω_2 satisfazendo $\omega_2 > \omega_1 > 0$. As seguintes condições são equivalentes.

i) $\|H(s)\|_\infty < \gamma, \forall s = j\omega \text{ e } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$

ii) Existem matrizes $G_{11}, G_{21}, \hat{K}, M_{Af}, P_{12}, Q_{12} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$, e matrizes simétricas $P_{11}, P_{22}, Q_{11}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix}
-Q_{11} & -Q_{12} & P_{11} + j\omega_c Q_{11} - G_{11}^T & P_{12} + j\omega_c Q_{12} - G_{21}^T \\
\star & -Q_{22} & P_{12}^T + j\omega_c Q_{12}^T - \hat{K}^* & P_{22} + j\omega_c Q_{22} - \hat{K}^* \\
\star & \star & -\omega_1\omega_2 Q_{11} + \text{He}(G_{11}A + M_{Bf}C_y) & -\omega_1\omega_2 Q_{12} + M_{Af} + A^T G_{21}^* + C_y^T M_{Bf}^* \\
\star & \star & \star & -\omega_1\omega_2 Q_{22} + \text{He}(M_{Af}) \\
\star & \star & \star & \star \\
\star & \star & \star & \star
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T \\
G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^T \\
-\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\
\star & -I
\end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.12)$$

com $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$, seja válida.

Ademais, um limitante superior que satisfaz *i*) é obtido a partir do problema de otimização

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.12)\},$$

e as matrizes do filtro que garantem esse desempenho são dadas por

$$A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}, \quad B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf},$$

com C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização.

Demonstração. A prova segue passos similares aos dos teoremas anteriores e, portanto, é omitida. Este resultado foi apresentado e discutido em (ROMÃO *et al.*, 2016). $\square$

Observação 4.1. Note que, ao contrário do caso com especificação em baixa frequência contínuo, o multiplicador do caso em média frequência deve ser complexo¹¹ para que a necessidade seja mantida. Dessa forma obtêm-se filtros cujas matrizes A_f e B_f são complexas. Para a obtenção de filtros reais, impõe-se que M_{Af} , $\hat{K}$ e M_{Bf} sejam matrizes reais.

O resultado do projeto de sistemas discretos em média frequência é apresentado a seguir.

Teorema 4.7. Considere o sistema discreto associado à matriz de transferência (4.1), e considere escalares v_1 e v_2 satisfazendo $v_2 > v_1 > 0$. Se existirem matrizes $G_{11}, G_{21}, F_{11}, F_{21}, \hat{K}, M_{Af}$,

¹¹ A construção da matriz X que garante a necessidade na prova do Lema 2.9 depende da matriz Q que, neste caso, é uma matriz complexa. Em outras palavras, com a construção apresentada na prova do Lema 2.9, se a matriz Q for complexa a variável X deve ser complexa, mesmo quando K e S são matrizes reais.

$P_{12}, Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$, e matrizes hermitianas P_{11}, P_{22} , $Q_{11}, Q_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que (4.10),

$$\begin{bmatrix} -P_{11} - \text{He}(F_{11}) & -P_{12} - F_{21}^T - \hat{K} & e^{jv_c}Q_{11} - G_{11}^T + F_{11}A + M_{Bf}C_y & \\ \star & -P_{22}^T - \text{He}(\hat{K}) & e^{jv_c}Q_{12}^T - \hat{K}^T + F_{21}A + M_{Bf}C_2 & \\ \star & \star & P_{11} + \text{He}(G_{11}A + M_{Bf}C_y) - 2\cos(v_w)Q_{11} & \\ \star & \star & \star & \\ \star & \star & \star & \\ \star & \star & \star & \\ e^{jv_c}Q_{12} - G_{21}^T + M_{Af} & F_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 & \\ e^{jv_c}Q_{22} - \hat{K}^T + M_{Af} & F_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 & \\ P_{12} + M_{Af} + A^T G_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T - 2\cos(v_w)Q_{12} & G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T & \\ P_{22} + \text{He}(M_{Af}) - 2\cos(v_w)Q_{22} & G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^T & \\ \star & -\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T & \\ \star & \star & -I & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.13)$$

com $v_w = (v_2 - v_1)/2$, $v_c = (v_1 + v_2)/2$, sejam válidas, então

$$\|H(z)\|_\infty < \gamma, \quad \forall s = e^{j\omega}, \quad v_1 \leq \omega \leq v_2. \quad (4.14)$$

Ademais, um limitante superior para γ que satisfaz (4.14), pode ser obtido através do seguinte problema de otimização

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.10), (4.13)\},$$

e as matrizes do filtro que garantem este desempenho são dadas por

$$A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}, \quad B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf},$$

com C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização.

Demonstração. A prova segue passos similares aos da prova do Teorema 4.5, definindo variáveis bloco 2×2 . $\square$

4.2.3 Especificações em Alta Frequência

Além dos resultados para baixa e média frequência, desenvolveram-se condições de síntese de filtros contínuos e discretos com especificações em alta frequência. Estes resultados são apresentados a seguir.

Teorema 4.8. Considere o sistema contínuo associado à matriz de transferência (4.1), e um escalar $\omega_h > 0$. Se existirem matrizes $G_{11}, G_{21}, F_{11}, F_{21}, \hat{K}, M_{Af}, P_{12}, Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$, e matrizes hermitianas $P_{11}, P_{22}, Q_{11}, Q_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que (4.10),

$$\begin{bmatrix} Q_{11} - \text{He}(F_{11}) & Q_{12} - F_{21}^T - \hat{K} & P_{11} - G_{11}^T + F_{11}A + M_{Bf}C_y \\ \star & -Q_{22}^T - \text{He}(\hat{K}) & P_{12}^T - \hat{K}^T + F_{21}A + M_{Bf}C_2 \\ \star & \star & -\omega_h^2 Q_{11} + \text{He}(G_{11}A + M_{Bf}C_y) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ P_{12} - G_{21}^T + M_{Af} & F_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 \\ P_{22} - \hat{K}^T + M_{Af} & F_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 \\ -\omega_h^2 Q_{12} + M_{Af} + A^T G_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T & G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T \\ -\omega_h^2 Q_{22} + \text{He}(M_{Af}) & G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^T \\ \star & -\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.15)$$

sejam válidas, então

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma, \quad \forall s = j\omega, \quad \omega \geq \omega_h. \quad (4.16)$$

Ademais, um limitante superior para γ que satisfaz (4.16), pode ser obtido através do seguinte problema de otimização

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.10), (4.15)\},$$

e as matrizes do filtro que garantem este desempenho são dadas por

$$A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}, \quad B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf},$$

e as demais matrizes, C_f e D_f , vêm diretamente do problema de otimização.

Demonstração. Similar aos casos anteriores. $\square$

Teorema 4.9. Considere o sistema discreto associado à matriz de transferência (4.1), e considere um escalar $v_h > 0$. Se existirem matrizes $G_{11}, G_{21}, F_{11}, F_{21}, \hat{K}, M_{Af}, P_{12}, Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$, e matrizes hermitianas $P_{11}, P_{22}, Q_{11}, Q_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\mathbb{C}^{n \times n}$ tais que (4.10),

$$\begin{bmatrix} -P_{11} - \text{He}(F_{11}) & -P_{12} - F_{21}^T - \hat{K} & -Q_{11} - G_{11}^T + F_{11}A + M_{Bf}C_y & & & \\ \star & -P_{22}^T - \text{He}(\hat{K}) & -Q_{12}^T - \hat{K}^T + F_{21}A + M_{Bf}C_2 & & & \\ \star & \star & P_{11} + \text{He}(G_{11}A + M_{Bf}C_y) + 2\cos(v_h)Q_{11} & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ & -Q_{12} - G_{21}^T + M_{Af} & F_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 & & \\ & -Q_{22} - \hat{K}^T + M_{Af} & F_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 & & \\ P_{12} + M_{Af} + A^T G_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T + 2\cos(v_h)Q_{12} & G_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^T - C_y^T D_f^T & & & \\ P_{22} + \text{He}(M_{Af}) + 2\cos(v_h)Q_{22} & G_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^T & & & \\ & \star & -\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_f^T & & \\ & \star & \star & -I & & \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.17)$$

sejam válidas, então

$$\|H(z)\|_\infty < \gamma, \quad \forall s = e^{j\omega}, \quad \omega \geq v_h. \quad (4.18)$$

Ademais, um limitante superior para γ que satisfaz (4.18), pode ser obtido através do seguinte problema de otimização

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.10), (4.17)\},$$

e as matrizes do filtro que garantem este desempenho são dadas por

$$A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}, \quad B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf},$$

e C_f e D_f obtidas diretamente do problema de otimização.

Demonstração. Similar aos casos anteriores. $\square$

Apesar de renderem filtros com desempenho em determinadas faixas de frequência, os resultados apresentados não garantem a estabilidade do sistema aumentado (4.1), ou seja, as condições podem retornar filtros cujas matrizes A_f têm pelo menos um autovalor com parte real positiva, no caso contínuo; ou pelo menos um autovalor com módulo maior a 1, no caso discreto, i.e., as condições geram matrizes de transferência que pertencem ao espaço $\mathcal{L}_\infty$ (Ver Capítulo 2 e referências para maiores detalhes). A estabilidade da matriz A_f precisa ser assegurada por meio de condições adicionais (impondo, dessa forma, que as matrizes de transferência pertençam ao espaço $\mathcal{H}_\infty$), como descrito na próxima seção.

4.2.4 Assegurando Estabilidade para os Filtros Projetados por meio do gKYP

Para garantir a estabilidade da matriz do sistema (4.1), em que

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

por meio de um problema de otimização, utilizam-se condições tradicionais da literatura, como apresentado a seguir.

Lema 4.1. Considere o sistema contínuo (4.1) cuja matriz dinâmica é dada em (4.19). Então, as seguintes condições são equivalentes:

- i) A matriz A é Hurwitz.
- ii) Existem matrizes simétricas $W_{11}, W_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L_{11}, L_{21}, M_{Af}, \hat{K}, W_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\xi > 0$ tais que as desigualdades

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} -\xi \text{He}(L_{11}) & -\xi(\hat{K} + L_{21}^T) & W_{11} + \xi(L_{11}A + M_{Bf}C_y) - L_{11}^T & W_{12} + \xi M_{Af} - L_{21}^T \\ \star & -\xi \text{He}(\hat{K}) & W_{12}^T + \xi(L_{21}A + M_{Bf}C_y) - \hat{K}^T & W_{22} + \xi M_{Af} - \hat{K}^T \\ \star & \star & \text{He}(L_{11}A + M_{Bf}C_y) & \mathcal{S}_{34} \\ \star & \star & \star & \text{He}(M_{Af}) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.21)$$

com $\mathcal{S}_{34} = M_{Af} + A^T L_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T$, sejam válidas.

Demonstração. Primeiramente, note que, utilizando-se uma função de Lyapunov quadrática no estado, $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, a estabilidade do sistema contínuo (2.7) é assegurada se as desigualdades,

$$W \succ 0, \quad A^T W + W A \prec 0,$$

forem satisfeitas. Aplicado-se o Lema 2.9 à expressão anterior, obtém-se a seguinte condição equivalente para um escalar $\xi > 0$:

$$W \succ 0, \quad \begin{bmatrix} -\xi(L + L^T) & W + \xi LA - L^T \\ \star & \text{He}(LA) \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.22)$$

Portanto, definindo as seguintes matrizes,

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \hat{K} \\ L_{21} & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix},$$

e substituindo-as em (4.22), obtém-se as desigualdades (4.20) e (4.21). Note que $M_{Af} = \hat{K} A_f$. $\square$

Para o caso discreto, tem-se o seguinte resultado.

Lema 4.2. Considere o sistema discreto (4.1) cuja matriz é dada em (4.19). Então, as seguintes condições são equivalentes:

i) A matriz A é Schur.

ii) Existem matrizes simétricas $W_{11}, W_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L_{11}, L_{21}, M_{Af}, \hat{K}, W_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que as desigualdades (4.20) e

$$\begin{bmatrix} W_{11} - \text{He}(L_{11}) & W_{12} - \hat{K} - L_{21}^T & L_{11}A + M_{Bf}C_y - \xi L_{11}^T & M_{Af} - \xi L_{21}^T \\ \star & W_{22} - \text{He}(L_{22}) & L_{21}A + M_{Bf}C_y - \xi \hat{K}^T & M_{Af} - \xi \hat{K}^T \\ \star & \star & -W_{11} + \xi \text{He}(L_{11}A + M_{Bf}C_y) & \mathcal{S}_{34} \\ \star & \star & \star & \mathcal{S}_{44} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.23)$$

com $\mathcal{S}_{34} = -W_{12} + \xi(M_{Af} + A^T L_{21}^T + C_y^T M_{Bf}^T)$ e $\mathcal{S}_{44} = -W_{22} + \xi \text{He}(M_{Af})$, sejam válidas.

Demonstração. O caso discreto é obtido de maneira similar, substituindo-se as partições do caso contínuo na desigualdade

$$W \succ 0, \quad \begin{bmatrix} W - \text{He}(L) & LA - L^T \\ \star & -W + \xi \text{He}(LA) \end{bmatrix} \prec 0.$$

□

Dessa forma, o projeto de filtros assintoticamente estáveis (contínuos ou discretos) pode ser realizado adicionando-se as condições de estabilidade às desigualdades dos teoremas anteriores. Ou seja, resolve-se o correspondente problema de otimização para algum $\xi > 0$ (caso contínuo) ou $\xi \in (-1, 1)$ (caso discreto) incluindo-se a restrição que garante a estabilidade do filtro.

4.2.5 Projetos de Filtros Robustos com Especificações em Faixas de Frequência

Os resultados apresentados nesta seção podem ser estendidos para o projeto de filtros robusto quando o modelo do sistema contém incertezas politópicas. Neste caso, definem-se algumas variáveis dependentes do parâmetro incerto, gerando-se LMIs robustas que, se satisfeitas, implicam no desempenho robusto do sistema com relação à norma $\mathcal{H}_\infty$ na faixa de frequência especificada.

Considerando que a adequação dos teoremas anteriores para tratar sistemas incertos é direta e visando a simplificação da exposição dos resultados, apresenta-se, portanto, apenas a extensão para o caso contínuo com especificação em baixa frequência.

Lema 4.3. Considere o sistema contínuo (2.73) com incertezas politópicas e um escalar $\omega_\ell > 0$. Se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $P_{11}(\alpha), P_{22}(\alpha), Q_{11}(\alpha), Q_{22}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes dependentes de parâmetros $G_{11}(\alpha), G_{21}(\alpha), P_{12}(\alpha), Q_{12}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\hat{K}, M_{Af}, \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} -Q_{11}(\alpha) & -Q_{12}(\alpha) & P_{11}(\alpha) - G_{11}(\alpha)^T & P_{12}(\alpha) - G_{21}(\alpha)^T \\ * & -Q_{22}(\alpha) & P_{12}(\alpha)^T - \hat{K}^T & P_{22}(\alpha) - \hat{K}^T \\ * & * & \mathcal{P}_{33} & \mathcal{P}_{34} \\ * & * & * & \omega_\ell^2 Q_{22}(\alpha) + \text{He}(M_{Af}) \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11}(\alpha)B_w(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) & C_z(\alpha)^T - C_y(\alpha)^T D_f^T & & \\ G_{21}(\alpha)B_w(\alpha) + M_{Bf}D_{yw}(\alpha) & -C_f^T & & \\ -\gamma^2 I & D_{zw}(\alpha)^T - D_{yw}(\alpha)^T D_f^T & & \\ * & -I & & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} W_{11}(\alpha) & W_{12}(\alpha) \\ W_{12}(\alpha)^T & W_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} -\xi \text{He}(L_{11}(\alpha)) & -\xi(\hat{K} + L_{21}(\alpha)^T) & W_{11}(\alpha) + \xi(L_{11}(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) - L_{11}(\alpha)^T \\ * & -\xi \text{He}(\hat{K}) & W_{12}(\alpha)^T + \xi(L_{21}(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) - \hat{K}^T \\ * & * & \text{He}(L_{11}(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)) \\ * & * & * \\ W_{12}(\alpha) + \xi M_{Af} - L_{21}(\alpha)^T & & \\ W_{22}(\alpha) + \xi M_{Af} - \hat{K}^T & & \\ M_{Af} + A(\alpha)^T L_{21}(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T & & \\ \text{He}(M_{Af}) & & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.26)$$

em que,

$$\mathcal{P}_{33} = \omega_\ell^2 Q_{11}(\alpha) + \text{He}(G_{11}(\alpha)A(\alpha) + M_{Bf}C_y(\alpha)),$$

$$\mathcal{P}_{34} = \omega_\ell^2 Q_{12}(\alpha) + M_{Af} + A(\alpha)^T G_{21}(\alpha)^T + C_y(\alpha)^T M_{Bf}^T,$$

sejam válidas $\forall \alpha \in \Xi$, então $\|H(j\omega, \alpha)\|_\infty < \gamma$, $\forall \alpha \in \Xi$ e $|\omega| \leq \omega_\ell$, com A_f Hurwitz estável. Além disso, um limitante superior para a norma de pior caso na faixa de frequência $|\omega| \leq \omega_\ell$ pode ser obtido por meio do problema de otimização, para $\xi > 0$:

$$\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{min.}\{\gamma^2 : (4.24)-(4.26)\}.$$

Demonstração. Definindo as matrizes dependentes de parâmetros

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} Q_{11}(\alpha) & Q_{12}(\alpha) \\ Q_{12}(\alpha)^T & Q_{22}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad G(\alpha) = \begin{bmatrix} G_{11}(\alpha) & \hat{K} \\ G_{21}(\alpha) & \hat{K} \end{bmatrix},$$

e as variáveis $M_{Af} = \hat{K}A_f$ e $M_{Bf} = \hat{K}B_f$, a desigualdade (4.24) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -Q(\alpha) & P(\alpha) & 0 \\ \star & \omega_\ell^2 Q(\alpha) + C(\alpha)^T C(\alpha) & C(\alpha)^T D(\alpha) \\ \star & \star & D(\alpha)^T D(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ G(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A(\alpha) & B(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} -Q(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \omega_\ell^2 Q(\alpha) \end{bmatrix}}_{\Phi_c \otimes P(\alpha) + \Psi_1 \otimes Q(\alpha)} \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} C(\alpha) & D(\alpha) \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\alpha) & D(\alpha) \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Theta} \prec 0. \end{aligned}$$

Como a desigualdade anterior é válida para todo $\alpha \in \Xi$, o resultado segue pela aplicação do Lema 2.30. A estabilidade da matriz A_f pode ser obtida por meio das LMIs robustas (4.25) e (4.26). $\square$

4.2.6 Exemplos Numéricos

Nesta seção utilizam-se as condições propostas para o projeto de filtro com especificações em faixas de frequência.

Exemplo 4.3. Considere o sistema contínuo linear, assintoticamente estável e invariante no tempo apresentado em Lee (2013) dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.6 & 4 \\ -4 & -0.6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} w(t), \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(t). \end{aligned} \tag{4.27}$$

A aplicação dos Teoremas 4.4, 4.6, 4.8 com $\xi = 1$ e as especificações $\omega \leq 2.5$, $1 \leq \omega \leq 10$ e $\omega \geq 7$ gera os filtros

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.11 & 3.73 \\ -2.3200 & -1.45 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.07 \\ -0.10 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.47 \end{bmatrix}, \quad D_f = 0.16, \tag{4.28}$$

$$A_f = \begin{bmatrix} -4.21 & -2.50 \\ -4.62 & -16.43 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 4.10 \\ 10.45 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} 0.09 & -0.74 \end{bmatrix}, \quad D_f = -0.22, \tag{4.29}$$

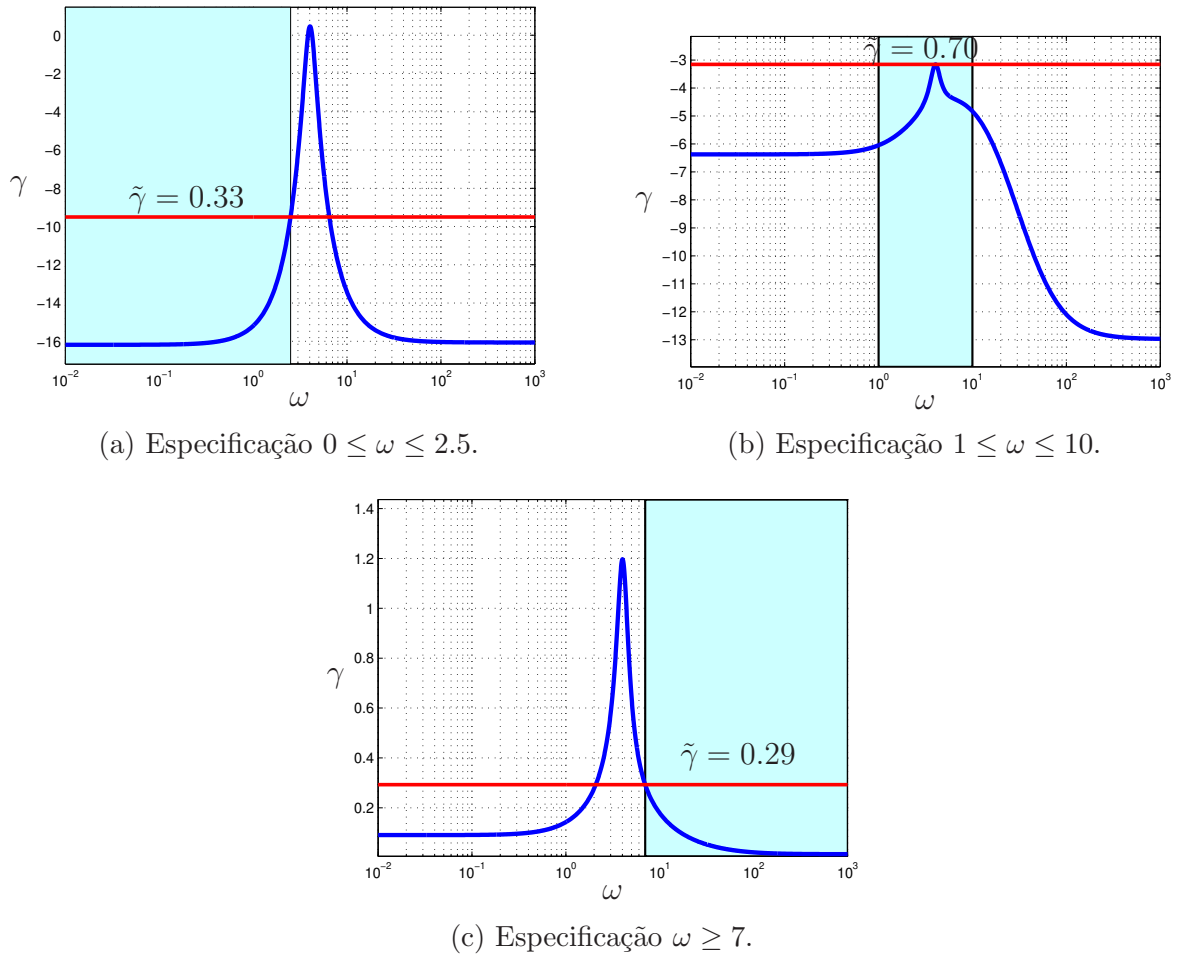


Figura 7 – Diagrama de valores singulares do sistema (4.1) composto pela interconexão do sistema (4.27) com os filtros obtidos por meio dos Teoremas 4.4, 4.6 e 4.8 com especificações de estabilidade para $\xi = 1$.

e

$$A_f = \begin{bmatrix} -2.03 & 2.25 \\ -8.21 & -3.49 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.39 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} -0.11 & -1.14 \end{bmatrix}, \quad D_f = -0.01, \quad (4.30)$$

respectivamente. Os diagramas de valores singulares da interconexão do sistema (4.27) com o filtro para cada especificação em frequência são apresentados na Figura 7. Na figura, as linhas em vermelho representam o valor do limitante superior, $\tilde{\gamma}$, obtido por meio das condições apresentadas nesta dissertação.

Para ilustrar a extensão das condições propostas para o caso incerto, considere-se o sistema incerto contínuo robustamente estável, linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.6 & 4 + \delta \\ -4 & -0.6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(t), \end{aligned} \quad (4.31)$$

em que $|\delta| \leq 1$, adaptado a partir de (4.27) por meio da inserção do parâmetro incerto δ . Observe que este sistema pode ser formulado como um sistema politópico de dois vértices. Portanto, com a aplicação do Lema 4.3, acrescido das condições que garantem a estabilidade de A_f com $\xi = 1$ e $\omega_\ell = 2.5$, obtém-se o filtro robusto

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.36 & 3.20 \\ -3.01 & -1.46 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.06 \end{bmatrix}, \quad C_f = [0.13 \quad -0.43], \quad D_f = -0.27. \quad (4.32)$$

Na Figura 8, ilustra-se o diagrama de valor singulares do modelo politópico do sistema (4.31) conectado ao filtro (4.32) para diferentes valores do parâmetro incerto, $\alpha \in \Xi$.

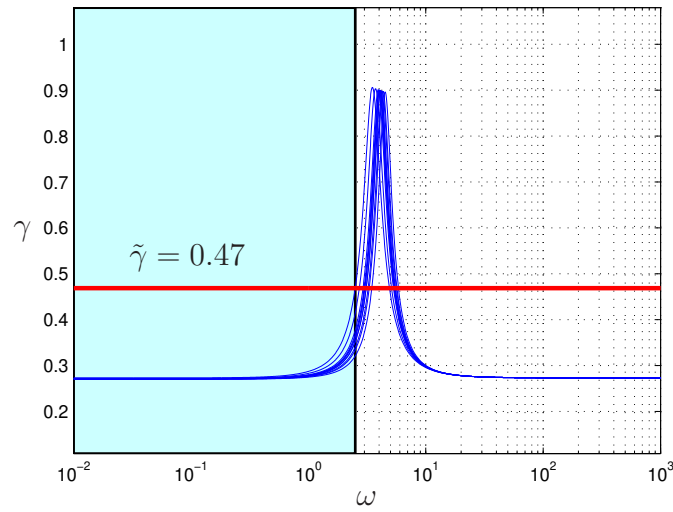


Figura 8 – Diagrama de valores singulares do sistema incerto (4.31) conectado ao filtro (4.32) para diferentes valores do parâmetro incerto, $\alpha \in \Xi$, para o parâmetro escalar $\xi = 1$, e para a especificação $\omega \leq 2.5$.

Exemplo 4.4. Considere o sistema discreto estável, linear e invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.87 & -0.26 \\ 0.13 & 0.02 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.95 \\ -0.16 \end{bmatrix} w(k), \\ y(k) &= [2.11 \quad 1.51] x(k) + [-0.34] w(k), \\ z(k) &= [-0.69 \quad -0.82] x(k) + [0.53] w(k), \end{aligned} \quad (4.33)$$

e considere as especificações de frequência $\omega \leq \pi/6$, $\pi/6 \leq \omega \leq \pi/2$ e $\omega \geq 2\pi/3$. Os diagramas de valores singulares do sistema aumentado formado pelo filtro projetado por meio das condições desta dissertação, com $\xi = 0$, para sistema (4.33) são apresentados na Figura 9. As matrizes dos filtros são dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.70 & 2.89 \\ 0.08 & -0.09 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -1.75 \\ 0.28 \end{bmatrix}, \quad C_f = [-1.81 \quad -1.13], \quad D_f = -1.06, \quad (4.34)$$

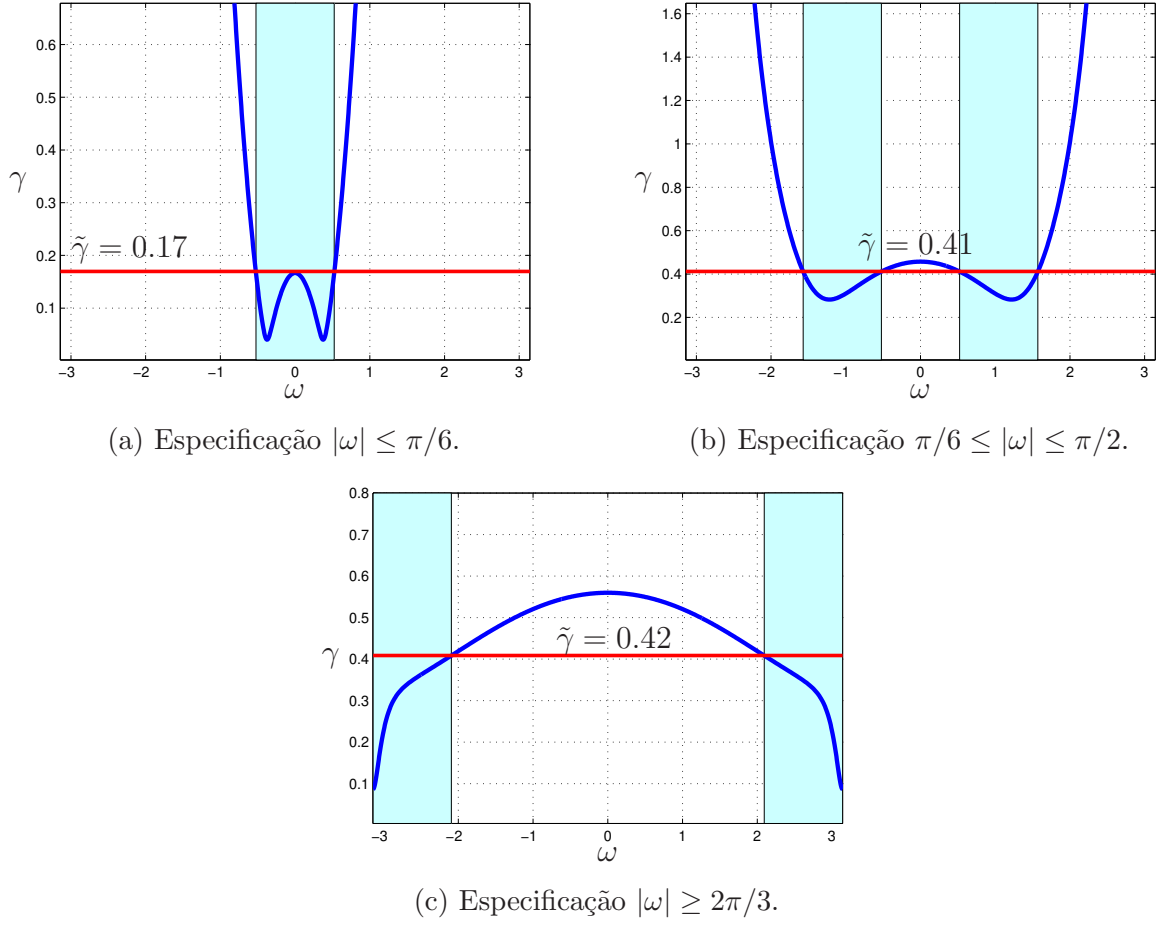


Figura 9 – Diagrama de valores singulares do sistema (4.1) composto pelo sistema (4.33) e pelos filtros obtidos por meio dos Teoremas 4.5, 4.7 e 4.9 com especificações em frequência para $\xi = 0$.

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.85 & 1.48 \\ 0.10 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -0.89 \\ 0.20 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} -0.29 & -0.19 \end{bmatrix}, \quad D_f = -0.35, \quad (4.35)$$

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.30 & 5.20 \\ 0 & -0.30 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.10 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_f = -0.30, \quad (4.36)$$

para as especificações de baixa, média e alta frequência, respectivamente.

De maneira similar, no próximo exemplo, apresenta-se a adaptação do Exemplo 4.4 para o caso incerto.

Exemplo 4.5. Considere o sistema discreto incerto robustamente estável, linear e invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1+\delta \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(k), \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k), \end{aligned} \quad (4.37)$$

com $|\delta| < 0.45$. Adaptando a condição do Teorema 4.7 para o caso incerto, seguindo passos similares aos apresentados no Lema 4.3, incluindo as condições para estabilidade de Af. e definindo a especificação $\pi/6 \leq \omega \leq \pi/2$, obtém-se o seguinte filtro robusto

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.247 & -0.10 \\ 1.62 & -0.35 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_f = -0.01. \quad (4.38)$$

O resultado do diagrama de valores singulares do sistema aumentado para diferentes valores do parâmetro incerto é apresentado na Figura 10.

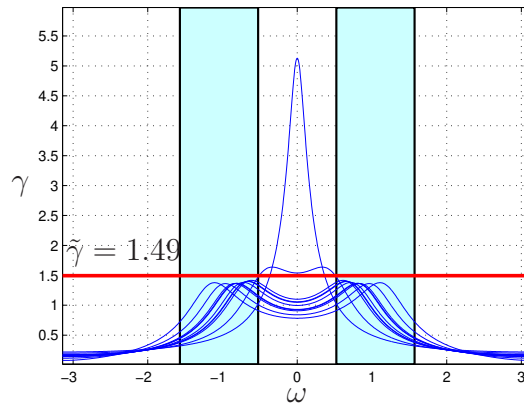


Figura 10 – Diagrama de valores singulares do sistema incerto (4.37) conectado ao filtro (4.38) para diferentes valores do parâmetro incerto, $\alpha \in \Xi$, para $\xi = 0$ e para a especificação $\pi/6 \leq |\omega| \leq \pi/2$.

5 Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação, estudou-se o projeto de filtros $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais com um parâmetro escalar que, para um valor fixo do escalar, tornam-se LMIs que contêm e generalizam os resultados de filtragem baseada na estabilidade quadrática. Ademais, no caso de sistemas incertos, exemplos numéricos apresentados demonstram que uma busca no parâmetro linear pode ser utilizada para redução dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2$, confirmando resultados obtidos em outros trabalhos na literatura para o problema de estabilidade robusta. Foram apresentados exemplos nos quais as condições propostas fornecem um limitante competitivo quando comparado com outras condições na literatura, ao tratarem sistemas incertos, com um menor esforço computacional, ou seja, menor número de variáveis e linhas de LMIs no problema de otimização.

O projeto de filtros $\mathcal{H}_\infty$ com especificações em intervalos de frequência, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto, foi considerado usando-se o Lema gKYP. Dessa forma, condições que tratam o problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ com especificações em baixa, média e alta frequência foram propostas. Para essas condições, vale destacar os seguintes tópicos para pesquisas futuras:

- Investigar a possibilidade de fazer as variáveis reais sem perda de generalidade na condição de projeto de filtros contínuos e discretos com especificação em média frequência;
- No caso discreto com especificações em baixa frequência, investigar a possibilidade de deixar a condição de projeto com uma única variável extra mantendo a necessidade e suficiência.
- Impor estabilidade na matriz do sistema aumentado usando as variáveis do problema de otimização original e, portanto, sem a necessidade de adicionar as restrições de estabilidade apresentadas no Capítulo 4.

Ainda com especificações em intervalos de frequência, foram apresentadas as extensões para tratar sistemas com incertezas politópicas, usando variáveis polinomialmente dependentes de parâmetros e relaxações de Pólya para a obtenção do filtro robusto. As condições apresentadas nesta dissertação podem ser estendidas para o projeto de filtros de ordem reduzida e descentralizados, também tópicos para pesquisa futura.

Como consequência do desenvolvimento deste trabalho, os seguintes artigos foram produzidos:

- L. B. R. R. Romão, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Projeto de Filtros Robustos $\mathcal{H}_2$ usando LMIs com Escalares, *XII SBAI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, SBAI 2015, Natal, RN, 25 a 28 de outubro, 2015.
- L. B. R. R. Romão, M. C. de Oliveira, P. L. D. Peres, R. C. L. F. Oliveira, State-Feedback and Filtering Problems using the Generalized KYP Lemma, *IEEE Multi-Conference on Systems and Control 2016*, MSC 2016, Buenos Aires, Argentina, September 19-22, 2016.
- L. B. R. R. Romão, P. L. D. Peres, R. C. L. F. Oliveira, $\mathcal{H}_\infty$ Robust Filter Design for Continuous-Time Linear Systems Using LMIs with a Scalar Parameter, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, CBA 2016, Vitória, ES, 3 a 7 de outubro, 2016.
- L. B. R. R. Romão, L. Frezzatto, M. C. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Non-minimal order low-frequency $\mathcal{H}_\infty$ filtering for discrete-time systems, *20th International Federation of Automatic Control*, IFAC 2017, Toulouse, France, 9-14 July 2017, accepted.

Referências

- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F. de; PERES, P. L. D. *Robust LMI Parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems*. Campina Grande, PB, Brazil: [s.n.], 2012. 2298–2305 p. Citado 3 vezes nas páginas 48, 72 e 107.
- ANDERSON, B. D. O. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM Journal on Control*, v. 5, n. 2, 1967. Citado na página 56.
- BARBOSA, K. A.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Robust $\mathcal{H}_2$ filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: [s.n.], 2002. p. 3224–3229. Citado na página 16.
- BARBOSA, K. A.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Robust $\mathcal{H}_2$ filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 54, n. 3, p. 251–262, March 2005. Citado na página 16.
- BERNSTEIN, D. S.; HADDAD, W. M. LQG control with an $\mathcal{H}_\infty$ performance bound: A Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 3, p. 293–305, March 1989. Citado na página 16.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 13, n. 1, p. 65–72, July 1989. Citado na página 15.
- BLIMAN, P.-A. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, v. 51, n. 3-4, p. 165–169, March 2004. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 15, 26 e 32.
- BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Realimentação de estados robusta $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs com parâmetros escalares. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 1672–1679. Citado na página 33.
- BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stability and stabilization of discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probability matrix. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 6800–6805. Citado na página 15.
- BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Complex Variables and Applications*. 9. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2014. Citado na página 21.
- COUTINHO, D. F.; DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filter design for a class of discrete-time parameter varying systems. *Automatica*, v. 45, n. 12, p. 2946–2945, December 2009. Citado na página 16.

de Farias, D. P.; GEROMEL, J. C.; do Val, J. B. R.; COSTA, O. L. V. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 45, n. 5, p. 944–949, May 2000. Citado na página 15.

DE OLIVEIRA, M. C. *Controle de Sistemas Lineares baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese (PhD Thesis) — University of Campinas, Campinas, SP, Brazil, May 1999. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 63.

DE OLIVEIRA, M. C. *Slides 280B: Linear Control Design*. 2016. <<http://control.ucsd.edu/mauricio/courses/mae280b/lecture/lecture9.pdf>>. [Online; accessed 06-December-2016]. Citado na página 32.

DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, July 1999. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.

DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 296, n. 1–3, p. 27–38, June 1999. Citado na página 15.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 30.

DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Robust filtering for linear systems with convex-bounded uncertain time-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 6, p. 1132–1138, June 2007. Citado na página 16.

DE SOUZA, C. E.; FU, M.; TROFINO, A. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filter design using parameter dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2000)*. Prague, Czech Republic: [s.n.], 2000. p. 1–6. Citado na página 16.

DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. A linear matrix inequality approach to the design of robust $\mathcal{H}_2$ filters. In: El Ghaoui, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000, (Advances in Design and Control). p. 175–185. Citado na página 50.

DUAN, Z. S.; ZHANG, J. X.; ZHANG, C. S.; MOSCA, E. Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 11, p. 1919–1926, November 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

EL GHAOUI, L.; AIT-RAMI, M. Robust state-feedback stabilization of jump linear systems via LMIs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, n. 9–10, p. 1015–1022, November–December 1996. Citado na página 15.

EL GHAOUI, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. (Advances in Design and Control). Citado na página 15.

FAIRMAN, F. W. *Linear Control Theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The Math Works, 1995. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 1, p. 168–175, January 1999. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 50.
- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; GARCIA, G.; OLIVEIRA, M. C. de. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust filtering for discrete-time linear systems. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL: [s.n.], 1998. v. 1, p. 632–637. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; GARCIA, G.; DE OLIVEIRA, M. C. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 38, n. 5, p. 1353–1368, May 2000. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 50.
- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, v. 30, n. 10, p. 1565–1578, October 1994. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust filtering for convex bounded uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 1, p. 100–107, January 2001. Citado na página 50.
- GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 41, n. 3, p. 700–711, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 285, n. 1–3, p. 69–80, December 1998. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; BERNUSSOU, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 29, n. 2, p. 381–402, March 1991. Citado na página 15.
- GRAHAM, M. R.; DE OLIVEIRA, M. C. Linear matrix inequality tests for frequency domain inequalities with affine multipliers. *Automatica*, v. 46, n. 5, p. 897–901, March 2010. Citado na página 57.
- GRAHAM, M. R.; DE OLIVEIRA, M. C.; CALLAFON, R. A. de. An alternative Kalman-Yakubovich-Popov lemma and some extensions. *Automatica*, v. 45, n. 6, p. 1489–1496, March 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 57.
- GRIMBLE, M. J. Polynomial matrix solution of the $\mathcal{H}_\infty$ filtering problem and the relationship to Riccati equation state-space results. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 41, n. 1, p. 67–81, January 1993. Citado na página 16.
- HORISBERGER, H. P.; BELANGER, P. R. Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, p. 705–708, 1976. Citado na página 15.

- HU, T.; LIN, Z. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Boston, MA: Birkhäuser, 2001. Citado na página 15.
- IWASAKI, T.; HARA, S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 1, p. 41–59, January 2005. Citado 4 vezes nas páginas 17, 57, 58 e 81.
- IWASAKI, T.; MEINSMA, G.; FU, M. Generalized S -procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 6, n. 2–3, p. 305–320, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 81.
- KAILATH, T.; SAYED, A.; HASSIBI, B. *Linear Estimation*. [S.l.]: Prentice Hall Inc., 2000. (Information and System Sciences). Citado na página 57.
- KALMAN, R. E. Canonical struture of linear dynamical systems. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. [S.l.: s.n.], 1962. v. 48, n. 2, p. 596–600. Citado na página 56.
- LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices. *Signal Processing*, v. 91, n. 5, p. 1115–1122, May 2011. Citado 10 vezes nas páginas 10, 11, 15, 16, 60, 73, 74, 79, 80 e 81.
- LEE, D. H. An improved finite frequency approach to robust $\mathcal{H}_\infty$ filter design for LTI systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 27, n. 11, p. 944–956, 2013. Citado na página 93.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 107.
- MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filter design for polytopic continuous-time Markov jump linear systems with uncertain transition rates. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 29, n. 10, p. 1207–1223, October 2015. Citado na página 15.
- NESTEROV, Y. *Introductory Lectures on Convex Optimization*. 1. ed. [S.l.]: Springer US, 2004. (10, v. 87). Citado na página 17.
- NESTEROV, Y.; NEMIROVSKII, A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. Citado na página 17.
- NILIM, A.; EL GHAOU, L. Robust control of Markov decision processes with uncertain transition matrices. *Operations Research*, v. 53, n. 5, p. 780–798, September-October 2005. Citado na página 15.
- OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure. *International Journal of Control*, v. 73, n. 5, p. 371–381, March 2000. Citado na página 15.
- OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, v. 75, n. 9, p. 666–679, June 2002. Citado na página 15.

- OLIVEIRA, R. C. L. F.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. D. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 2226–2231. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- PALHARES, R. M.; PERES, P. L. D. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems — an LMI approach. *International Journal of Systems Science*, v. 29, n. 6, p. 587–593, 1998. Citado na página 15.
- PARRILO, P. A. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, Pasadena, CA, EUA, 2000. Citado na página 15.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; BACHELIER, O.; BERNUSSOU, J. A new robust $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, v. 40, n. 1, p. 21–30, May 2000. Citado na página 15.
- PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. $\mathcal{H}_2$ control for discrete-time systems: optimality and robustness. *Automatica*, v. 29, n. 1, p. 225–228, January 1993. Citado na página 15.
- PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVERS, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 7, p. 510–518, July 2009. Citado na página 33.
- POPOV, V.-M. On the absolute stability of nonlinear controlled systems. *Avtomatika i telemekhanika*, v. 8, p. 961–970, 1961. Citado na página 56.
- RAN, A. C. M.; VREUGDENHIL, R. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous and discrete-time systems. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 99, p. 63–83, February 1988. Citado na página 25.
- RANTZER, A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, v. 28, n. 1, p. 7–10, June 1996. Citado na página 57.
- ROMÃO, L. B. R. R.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. State-feedback and filtering problems using the generalized KYP lemma. In: *2016 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design (CACSD)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1054–1059. Citado na página 86.
- ROMÃO, L. B. R. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Projeto de filtros robustos $\mathcal{H}_2$ usando lmis com escalares. In: . Natal, RN, Brasil: [s.n.], 2015. p. 630–635. Citado na página 74.
- ROMÃO, L. B. R. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. $\mathcal{H}_\infty$ robust filter design for continuous-time linear systems using lmis with a scalar parameter. In: *XXI CBA—Congresso Brasileiro de Automática*. Vitória, ES, Brasil: [s.n.], 2016. p. 1614–1619. Citado na página 80.

- ROSS, S. *A First Course in Probability*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado na página 41.
- SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 7, p. 896–911, July 1997. Citado na página 15.
- SHAKED, U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 652–656, April 2001. Citado na página 15.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 107.
- TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 8, p. 1364–1371, August 2006. Citado na página 15.
- VALMÓRBIDA, G.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. State feedback design for input-saturating quadratic systems. *Automatica*, v. 46, n. 7, p. 1196–1202, July 2010. Citado na página 15.
- XIE, L.; LU, L.; ZHANG, D.; ZHANG, H. Improved robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, v. 40, n. 5, p. 873–880, May 2004. Citado na página 16.
- YAKUBOVICH, V. A. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Soviet Math. Dokl.*, v. 3, p. 620–623, 1962. Citado na página 56.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 19, 21, 23 e 24.
- ZHOU, K.; KHARGONEKAR, P. P. An algebraic Riccati equation approach to $\mathcal{H}_\infty$ optimization. *Systems & Control Letters*, v. 11, p. 85–91, 1988. Citado na página 16.

Apêndices

APÊNDICE A – Rotina do Teorema 3.4

Usando o ROLMIP

A construção da rotina do MATLAB que resolve o problema de otimização apresentado no Teorema 3.4 é ilustrada a seguir. Além do pacote computacional ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012), usa-se o Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o resolvidor SeDuMi (STURM, 1999).

```
function output = Condicao_Teorema_3.4_dual(Sys, ep, grau_P)

% Definindo os parâmetros de inicialização
tol = 1e-4;
h2 = 0;

if h2 == 0
mu = sdpvar();
obj = mu;
else
mu = h2*h2;
obj = [];
end

A = Sys.A;
Bw = Sys.B1;
Cz = Sys.C1;
Dzw = Sys.D11;
Cy = Sys.C2;
Dyw = Sys.D21;

N = length(A);
n = size(A{1},1);
r = size(Bw{1},2);
p = size(Cz{1},1);
q = size(Cy{1},1);

% Passando as matrizes do sistema para o ROLMIP e ...
```

```

% definindo as variáveis do problema
A = rolmipvar(A,'A',N,1);
Bw = rolmipvar(Bw,'Bw',N,1);
Cz = rolmipvar(Cz,'Cz',N,1);
Cy = rolmipvar(Cy,'Cy',N,1);
Dzw = rolmipvar(Dzw,'Dzw',N,1);
Dyw = rolmipvar(Dyw,'Dyw',N,1);

E1 = rolmipvar(n,n,'E1','symmetric',N,grau_P);
E2 = rolmipvar(n,n,'E2','symmetric',N,grau_P);

E3 = rolmipvar(n,n,'E3','full',N,grau_P);

P = [E1,E3;E3',E2];

MAf = rolmipvar(n,n,'MAf','full',N,0);
MBf = rolmipvar(n,q,'MBf','full',N,0);
Cf = rolmipvar(p,n,'Cf','full',N,0);
Df = rolmipvar(p,q,'Df','full',N,0);

X1 = rolmipvar(n,n,'X1','full',N,grau_P);
X0 = rolmipvar(n,n,'X0','full',N,grau_P);
X5 = rolmipvar(n,n,'X5','full',N,0);

M = rolmipvar(p,p,'M','full',N,grau_P);

X = [X1,X5;X0,X5];
XA = [X1*A + MBf*Cy,MAf;X0*A + MBf*Cy,MAf];
XB = [X1*Bw + MBf*Dyw;X0*Bw + MBf*Dyw];
C = [Cz-Df*Cy,-Cf];
D = Dzw - Df*Dyw;

% Restrições LMIs

LMIs = [];

LMIs = [LMIs,trace(M) < mu]; % Desigualdade (3.17)

T11 = -P; T12 = P; T13 = zeros(2*n,p); T14 = zeros(2*n,r);

```

```

T22 = -X -X'; T23 = C'; T24 = zeros(2*n,r);
T33 = -M; T34 = D;
T44 = -eye(r);

T = [T11,T12,T13,T14;
     T12',T22,T23,T24;
     T13',T23',T33,T34;
     T14',T24',T34',T44];

LMIs = [LMIs, T < 0]; % Desigualdade (3.26)

T11 = P - X - X'; T12 = XA' - ep*X; T13 = zeros(2*n,r);
T22 = -P + ep*(XA + XA'); T23 = XB; T33 = -eye(r);

T = [T11,T12,T13;T12',
     T22,T23;T13',T23',T33];

LMIs = [LMIs, T < 0]; % Desigualdade (3.27)

% Resolvendo o problema de otimização
sol = solvesdp(LMIs,obj,...
sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi'));

checkLMIs =min(checkset(LMIs));

% Se factível, recupera as matrizes do filtro
if checkLMIs > -tol
output.feas = 1;

MAf = double(MAf);
MBf = double(MBf);
Cf = double(Cf);
Df = double(Df);

X5 = double(X5);

output.Af = MAf*inv(X5);
output.Bf = MBf;

```

```
output.Cf = Cf*inv(X5);  
output.Df = Df;  
  
ep = double(ep);  
output.ep = ep;  
  
output.h2 = sqrt(double(mu));  
output.Delta = checkLMIs;  
  
end  
end
```