



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Miguel Tadayuki Koga

Dinâmica populacional da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) em um ambiente com competição: simulações computacionais.

Campinas
2015

Miguel Tadayuki Koga

Dinâmica populacional da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) em um ambiente com competição: simulações computacionais.

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Orientador: Akebo Yamakami

Coorientador: João Frederico da Costa
Azevedo Meyer

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Miguel Tadayuki Koga, orientado pelo Prof. Dr. Akebo Yamakami e Coorientado pelo Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Campinas
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizângela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

K822d Koga, Miguel Tadayuki, 1967-
Dinâmica populacional da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) em um ambiente com competição : simulações computacionais / Miguel Tadayuki Koga. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Akebo Yamakami.

Coorientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Mosca-do-chifre. 2. Besouro. 3. Método dos elementos finitos. I. Yamakami, Akebo, 1947-. II. Meyer, João Frederico da Costa Azevedo, 1947-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Population dynamics of the horn fly (*Haematobia irritans*) in a competitive environment : computer simulations

Palavras-chave em inglês:

Horn fly

Beetle

Finite element method

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

João Frederico da Costa Azevedo Meyer [Coorientador]

Rosane Ferreira de Oliveira

Rosana Sueli da Motta Jafelice

Laécio Carvalho de Barros

Rodney Carlos Bassanezi

Data de defesa: 31-07-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

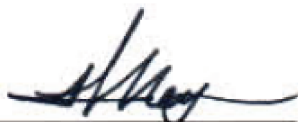
COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Miguel Tadayuki Koga

Data da Defesa: 31 de julho de 2015

Título da Tese: "Dinâmica Populacional da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) em um Ambiente com Competição: Simulações Computacionais"

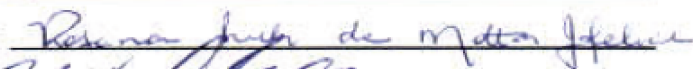
Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (Presidente):



Profa. Dra. Rosane Ferreira de Oliveira:



Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice:



Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros:



Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi:



Dedico este trabalho a minha mãe Verônica, a minha irmã Márcia, em especial a minha esposa Jaqueline e aos meus filhos Isadora e Fábio a quem amo muito e que juntos alcançamos mais este objetivo.

Agradecimentos

Agradeço,

ao Professor Dr. Akebo Yamakami, que aceitou minha orientação e me recebeu na FEEC - Faculdade de Engenharia Elétrica.

ao Professor, coorientador e amigo João Frederico da Costa Azevedo Meyer que desde o IMECC me acompanhou nesta etapa de minha vida, pessoa que me acolheu como um filho e teve toda paciência para concluirmos este trabalho.

à minha esposa Jaqueline e aos meus filhos Fábio e Isadora que sempre estiveram ao meu lado me apoiando e dando força para concluir este trabalho.

ao meu amigo Cristiano Torezzan que desde o início incentivou e apoiou nas minhas dificuldades.

aos amigos professores da UNEMAT que sempre apoiaram neste doutorado.

aos amigos e companheiros de curso Marta, Luciana, Rodrigo, Deccy, Paulo, Ju Marta, Elaine, Roberta, João, Mael, Salvador, André e outros, pela ajuda e pelos bons momentos.

aos professores da banca: Rodney, Laécio, Rosane e Rosana, pelas contribuições que apresentaram no trabalho.

a UNEMAT - Universidade do Estado de Mato Grosso que incentivou e apoiou para que conseguisse concluir mais esta etapa da minha vida profissional.

aos membros da banca examinadora os comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.

à agência FAPEMAT o apoio financeiro concedido durante um período de doutoramento.

à FEEC/UNICAMP a ótima estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.

a todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso como aluno.

Resumo

Este trabalho apresenta o modelo matemático envolvendo a criação do gado (rês), a Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) e o besouro coprófago. A Mosca-dos-chifres é um ectoparasita que se alimenta de sangue, preferencialmente bovino e se reproduz nas fezes do gado. A ação da mosca-dos-chifres de parasitar o gado provoca uma irritação no animal, dificultando sua alimentação, acarretando um prejuízo na parte econômica, tanto no gado de corte como no gado de leite. O besouro coprófago é um inseto que se alimenta exclusivamente de excrementos de mamíferos. A ação do besouro coprófago é de se alimentar do bolo fecal do gado e assim, sua ação prejudica a reprodução da mosca. O modelo matemático que representa, teoricamente, o ambiente de relação entre as espécies é estruturado em um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, com característica do tipo Lotka-Volterra com Malthus e Verhulst em seu crescimento populacional. A solução deste sistema foi aproximada pelo Método de Elementos Finitos, que utiliza do Método de Galerkin para ao tratamento das variáveis espaciais e pelo Método de Crank-Nicolson para a variável temporal. Ao final, é apresentado um algoritmo em matlab, que permite simular hipóteses e cenários onde é possível visualizar e avaliar qualitativamente os resultados. Os resultados são apresentados através de gráficos evolutivos, os quais mostram o comportamento do sistema e quais as possíveis condições para o controle populacional da mosca-dos-chifres, isto é, um equilíbrio biológico no modelo.

Palavras-chave: Mosca-dos-Chifres. Besouros. Método dos elementos finitos.

Abstract

This paper presents the mathematical model involving the raising of cattle, the population and dynamics Horn fly (*Haematobia irritans*) and of the coprophagous beetle. The Horn fly is an ectoparasite that feeds on blood, preferably and reproduces in cattle stools. The action of the Horn fly parasites cattle and causes an irritation in animals, making it difficult to eat, leading to a loss in the economic part, both in beef cattle and in dairy cattle. The beetle is coprophagous insect that feeds exclusively on mammals droppings. The action of coprophagous beetle is to feed cattle fecal cake, its action harms fly reproduction. The mathematical model that represents, in theory, the relationship between the species is structured on a system of nonlinear partial differential equations, with Lotka-Volterra type feature with Malthus and Verhulst in its population growth. The solution of this system still approximated by the use of the finite element method, which uses the Galerkin method for the treatment of spatial variables and the Crank-Nicolson method for the temporal variable. An algorithm in matlab, is presented which allows the simulation of hypotheses and scenarios, where one can view and evaluate the results qualitatively. These results are presented through graphs, which show the behavior of the system and the possible conditions for the population control of the Horn fly, that is, a biological balance in the model.

Key-words: Horn fly. Beetle. Finite element method.

Lista de Figuras

1.1	Ciclo evolutivo da Mosca-dos-chifres.	18
1.2	Fatores climáticos e flutuação populacional da Mosca-dos-chifres.	20
1.3	Classificação dos besouros coprófagos.	25
3.1	Domínio Ω do problema.	43
4.1	Malha da região Ω e triângulos de referência.	58
4.2	Triângulos de referência do tipo 1 e tipo 2.	58
5.1	Domínio das simulações.	62
5.2	Simulação 1 para testar o sistema com crescimento populacional do besouro e da mosca.	64
5.3	Simulação 1 relação entre as três espécies.	65
5.4	Simulação 2 para o crescimento populacional do besouro e da mosca.	65
5.5	Simulação 2 relação entre as três espécies.	66
5.6	Cenário 1: Crescimento populacional da mosca.	67
5.7	Cenário 1: Crescimento populacional do besouro.	68
5.8	Cenário 1: Comparação das duas espécies.	68
5.9	Cenário 1: Relação entre as três espécies.	69
5.10	Cenário 1: Relação entre as três espécies.	70
5.11	Cenário 2 - População da mosca.	71
5.12	Cenário 2 - População da besouro.	71
5.13	Cenário 2 - Relação entre as três espécies 1.	72
5.14	Cenário 2 - Relação entre as três espécies 2.	72
5.15	Cenário 2 - Relação entre as três espécies 3.	73

Sumário

Introdução	12
1 O problema: A Pecuária do Mato Grosso e a Mosca-dos-Chifres(<i>Haematobia Irritans</i>)	15
O problema: A Pecuária do Mato Grosso e a Mosca-dos-Chifres(<i>Haematobia Irritans</i>)	15
1.1 - Pecuária no Estado de Mato Grosso	15
1.2 - A mosca-dos-chifres (<i>Haematobia irritans</i>)	18
1.3 - Manejo biológico: Besouros Cropófagos	23
1.4 - Dinâmica populacional: Lotka-Volterra e a relação de competitividade . . .	26
2 Modelos em Biomatemática: Grupo de Pesquisa em Biomatemática da UNICAMP.	29
2.1 - O grupo de pesquisa em biomatemática.	29
2.2 - Modelos trabalhados com sistemas de equações diferenciais parciais não-lineares e tratados pelo método dos Elementos Finitos	33
3 A Modelagem do Problema	39
3.1 - O modelo matemático de interação das três espécies	39
4 Formulação Variacional e Discretização	46
4.1 - Formulação Clássica e Variacional	46
4.2 - Discretização espacial: Método de Galerkin	50
4.3 - Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson	52
4.4 - Malha da região Ω	58

SUMÁRIO

4.5 - Matriz de rigidez	60
5 Simulações, análise e resultados	62
5.1 - Primeiro cenário	66
5.2 - Segundo Cenário	70
6 Conclusão	74
Referências Bibliográficas	76
A Códigos do Matlab	84
B Matrizes de Rigidez	98

Introdução

Segundo Schlesinger (2010) o Brasil é um dos maiores exportadores de carne bovina do mundo. Grande parte de sua produção é proveniente da região centro oeste, que apresenta um dos maiores rebanhos bovinos do Brasil. Segundo o IBGE, o Estado de Mato Grosso possui uma área de $903.378,292\text{km}^2$, equivalente a França e Alemanha juntas, é o terceiro maior estado brasileiro, menor apenas que o Amazonas e o Pará. Sua população gira em torno de 3 milhões de habitantes. Faz divisa com Rondônia, Amazonas, Pará, Tocantins, Goiás e Mato Grosso do Sul. Aproximadamente 47% do território do estado está em zonas de floresta, 39% por cento de cerrado e 14% de pântano.

De acordo com o Instituto Mato-grossense de Economia Agropecuária - IMEA (2013), o Mato Grosso tem um dos maiores rebanhos do gado do país com aproximadamente 26 milhões de cabeça, sendo também um dos maiores fornecedores de carne bovina com um abate próximo de 4 milhões de cabeças por ano.

Juntamente com este desenvolvimento a pecuária vem enfrentando vários problemas, entre eles, o controle da *Haematobia irritans*, comumente chamada mosca-dos-chifres. A mosca é um inseto hematófago que parasita o gado e passa quase toda sua vida se alimentando do sangue bovino, saindo somente para depositar seus ovos nos bolos fecais de seu hospedeiro. Analisando o trabalho de Lysyc (1992), o clima e a temperatura do estado oferecem condições favoráveis para a reprodução da mosca.

O controle populacional da mosca-dos-chifres é realizado através de produtos químicos. Utiliza-se de inseticida para eliminar a mosca adulta e

produtos injetáveis para evitar que os ovos eclodam, pois o produto injetado é expelido nas fezes bovinas impossibilitando a reprodução da mosca. Em ambos os casos há prejuízo para o pecuarista, seja no custo dos produtos ou na própria comercialização da carne ou do leite. Algumas empresas que atuam no ramo alimentício buscam a carne orgânica, produto resultante da criação de animais que não utilizam produtos químicos ou fármacos.

O objetivo deste trabalho é de estruturar um modelo matemático que apresente condições para se simular um possível controle biológico da mosca-dos-chifres e, para isto, é inserido no modelo o besouro coprófago, competidor natural da mosca pelas fezes bovinas.

No modelo trabalhado, considera-se o besouro coprófago que é um inseto que se alimenta das fezes bovinas e ao se alimentar, elimina o ambiente de reprodução da mosca. O algoritmo resultante deve prestar-se a testar possíveis equilíbrios biológicos para o ambiente apresentado.

O modelo construído será aproximado e tratado computacionalmente simulando as três espécies se relacionando em um mesmo ambiente. Além do besouro, estudos mostram que há outros competidores da mosca-dos-chifres nos bolos fecais que impedem reprodução, porém no modelo apresentado será considerado somente a presença dos besouros.

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo apresentamos o problema que estrutura nosso modelo matemático, no contexto da pecuária no Estado de Mato Grosso, seu desenvolvimento através dos tempos e algumas transformações que vêm ocorrendo com a inclusão da produção de grãos e a redução da área de pastagem. Também, os estudos realizados sobre a mosca-dos-chifres, seus prejuízos e as alternativas de controle populacional, entre eles o controle biológico através do besouro coprófago.

No segundo capítulo fazemos um estudo sobre os trabalhos realizados pelo grupo de Biomatemática da UNICAMP, que apresentam problemas que envolvem questões ambientais que são modeladas e analisadas através de métodos numéricos, baseadas, principalmente, nos métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos.

No terceiro capítulo apresentamos o modelo matemático estruturado nas três espécies (rês, mosca-dos-chifres e besouro coprófago), as condi-

ções em que estaremos abordando o problema e o referencial diferenciado que teremos comparado com os outros trabalhos, estudado.

No quarto capítulo desenvolvemos o método numérico descrevendo as transformações que acontecem no sistema de equações, primeiramente a transformação da formulação clássica (forte) para a formulação variacional (fraca), depois as aplicações dos métodos de Galerkin e de Crank-Nicolson. Por fim a estruturação da malha do domínio trabalhado no problema.

No quinto capítulo apresentamos os resultados das simulações computacionais desenvolvidas em ambiente Matlab, considerando dois cenários. O primeiro cenário estará considerando a pecuária intensiva, onde o gado é mantido num sistema de confinamento com uma alimentação balanceada. No segundo cenário estará considerando a pecuária extensiva, onde o gado é solto em grandes áreas de pastagem.

Ao final apresentamos a análise referente aos resultados apresentados, assim como a perspectivas do tratamento de vários outros problemas envolvendo a Biomatemática, principalmente na região de Mato Grosso, onde o desenvolvimento Agropecuário é grande e as questões ambientais são discutidas, porém não existem propostas suficientes para superar os problemas encontrados.

Capítulo

1

O problema: A Pecuária do Mato Grosso e a Mosca-dos-Chifres(*Haematobia Irritans*)

1.1 - Pecuária no Estado de Mato Grosso

A bovinocultura extensiva foi introduzida no Mato Grosso ainda no século XVIII, com a derrubada de vegetação para o uso da terra como pasto. Inicialmente começou com a pecuária de corte, em que a carne era utilizada para a alimentação local, principalmente em regiões cuja sustentação econômica era o ouro (região de garimpo).

Dessa forma, na abertura de terras do Cerrado, onde se constituíam os garimpos de ouro, a pecuária de corte destinava-se à alimentação humana e ao fabrico de material de transporte, identificado nos diversos estudos de historiadores e cronistas nos estudos desde a fundação de Cuiabá em 1720, passando pela manutenção do território durante o século XIX, até os anos recentes quando é retomado na discussão da sustentabilidade de diferentes regiões do estado. (Bonjour, 2008, p.3)

Mato Grosso apresenta dois momentos distintos de colonização. Claramente temos os registros históricos que, mesmo servindo como ponto estratégico na guerra do Paraguai, Mato Grosso sempre se destacou na extração de minérios, sendo que a região norte também sofreu com a extração de minérios, principalmente do ouro, no segundo momento de colonização ocorrido na década de 60 e 70 do século XX. Com o Estatuto da Terra, lei nº 4504, de 30 de novembro de 1964, foi incentivada a ocupação das áreas em torno das rodovias federais, criando uma colonização denominada de espinha de peixe.

Neste período, com uma política de ocupação do governo federal, que incentivava à migração e amparada pelo Estatuto da Terra, uma grande quantidade de agricultores, empresários e outros provenientes do sul do Brasil, investiram na região norte do Mato

Grosso. Neste período, desenvolvia-se o chamado processo madeira-arroz-pecuária, pois as áreas desmatadas ficavam destinadas para a pecuária. Inicialmente retiravam-se as madeiras aceitas comercialmente pelas leis brasileiras para depois queimar e derrubar a mata restante, de forma a destruir toda vegetação existente, para o plantio de arroz (somente no primeiro ano) e, posteriormente, para o plantio de capim para a alimentação bovina.

Em Mato Grosso, a pecuária extensiva bovina é a forma na qual se desenvolve o processo de abertura de áreas destinadas à agropecuária como forma de apropriação e legitimação para uso da terra. O núcleo pioneiro onde se fazia a criação de gado foi o Pantanal, onde houve integração dos bovinos no ecossistema sem impacto grave no bioma...Em 1974 foram inaugurados dois grandes frigoríficos: o da Sadia Oeste, em Várzea Grande, que chegaria a abater 1200 cabeças por dia e a Sudanisa em Barra do Garças, com a mesma capacidade de abate. (Bonjour, 2008, p.3)

Atualmente, o Mato Grosso se destaca como um dos maiores produtores de carne do país, em 2008 o estado apresentava a maior área do Brasil destinada à pecuária com 25,7 milhões de hectares de área para a pastagem, além de apresentar o maior rebanho bovino do Brasil, com quase 26 milhões de cabeças de boi. O número de abate em 2008 chegou perto de 4,1 milhões de cabeças de gado abatido por ano.

Já a pecuária leiteira de Mato Grosso é sustentada pela agricultura familiar. Segundo Persona (2011), cerca de 140 mil dos 188 mil produtores de leite no estado pertencem à agricultura familiar. Existe a perspectiva de que a pecuária leiteira tenha um aumento significativo de produção para os próximos anos, almejando chegar a uma produção de 3 milhões de litros/dia. Outro problema é a industrialização do produto, pois o estado possui 94 laticínios e dois destes trabalham com o leite ultra processado (UHT); além disto, 70% do leite é transformado em queijo, o restante é embalado em saquinhos, caixas ou são transformados em iogurte e leite condensado.

Fatores importantes influenciam o desenvolvimento da pecuária bovina no estado, um deles é o clima tropical, com temperaturas variando entre $20^{\circ}C$ e $38^{\circ}C$ e com uma média anual de $26^{\circ}C$. O Estado possui dois períodos climáticos bem definidos, período da seca (abril/maio até outubro) e o da chuva (outubro até abril/maio).

Segundo Instituto Mato-grossense de Economia Agropecuária (IMEA), o município de Sinop apresenta atualmente 66.016 cabeças de gado, aproximadamente 0,71

cabeça de gado por alqueire - UA/ha (unidade animal por alqueire), localizada no Médio Norte do estado que é composto por 16 municípios e um rebanho de 869.570 cabeças, logo não é um município que sobrevive da pecuária, porém está localizada em um ponto estratégico da BR 163, tem dois frigoríficos com capacidade de mais de 5000 cabeças por dia.

Ao contrário de várias microrregiões do Estado, Sinop apresentou decréscimo considerável da área de pastagem ao longo dos últimos anos, de 12%, e hoje apresenta a menor área de pastagem por microrregião do Estado. Apesar dessa queda, fato diretamente relacionado ao crescimento da produção agrícola, o avanço tecnológico, através da integração com agricultura, proporcionou aumento no rebanho de 28%. Com isso, a taxa de lotação teve o maior crescimento do Estado, 46%, passando de 0,49 UA/ha para 0,71 UA/ha, porém ainda inferior à média estadual, que é de 0,77 UA/ha. Além da menor área de pastagem, a microrregião tem o menor rebanho estadual, 245 mil cabeças, 0,85% do total. (IMEA, s/d, p.81)

Com o avanço da agricultura de escala, principalmente a de grãos, a região necessita de novas estratégias para a ocupação das áreas e, com isto, surge um crescimento na prática da criação de gado confinado. No período de 2005 até 2008, a quantidade de gado confinado cresceu mais de 389%, passando de 117 mil cabeças para 576 mil cabeças. Atualmente está em aproximadamente 717 mil cabeças de gado.

Um estudo encomendado pela Acrimat (Associação dos Criadores de Mato Grosso) ao Imea (Instituto Mato-Grossense de Economia Agropecuária) mostrou que em 2013 o número de bovinos confinados no estado retraiu em 9,5%. Em valores absolutos, foram 717.826 animais abatidos depois de passar pelo cochocontra 792.786 em 2012. (CONFINAR, 2013, p.1)

Nesta ampliação na produção de grãos, o município de Sorriso (vizinho de Sinop) produziu em 2000 mais de 3% da produção nacional, tornando-se o município de maior produção de grãos do Brasil e com um consequente aumento no número de gado confinado, ocorre uma diminuição da área de pastagem livre, de 2008 a 2011 ocorreu uma redução de 802.237 hectares.

... área de pastagem utilizada na atividade pecuária em Mato Grosso encolheu 3% entre os anos de 2008 e 2011. Na prática, 802.237 hectares deixaram de ser utilizados para a criação de gado e ganharam uma nova destinação: seja ela para fins agricultáveis ou até mesmo para criação de espaços destinados ao confinamento do gado. (NASCIMENTO, 2013, p. 1)

Este processo e o clima favorecem o desenvolvimento de determinadas pragas, entre elas citamos a mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*), o qual encontra um clima ideal e ambiente propício para o seu desenvolvimento. De acordo com Brito (2007) (EMBRAPA - Rondonia), com este ambiente, a mosca está presente o ano inteiro no animal, apresentando picos nos meses de chuva: *O fator climático de maior influência sobre a sazonalidade da mosca-dos-chifres no Município de Presidente Médici é a pluviometria.*(p. 14)

1.2 - A mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*)

A mosca é um ectoparasito que se alimenta exclusivamente do sangue, preferencialmente bovino, e seu ciclo biológico ocorre nas fezes de seus hospedeiros. Este parasita é considerado um fator importante para a economia bovina, pois provoca uma perda expressiva na produção, neste caso, na produção de leite e na redução do ganho de peso no gado de corte.

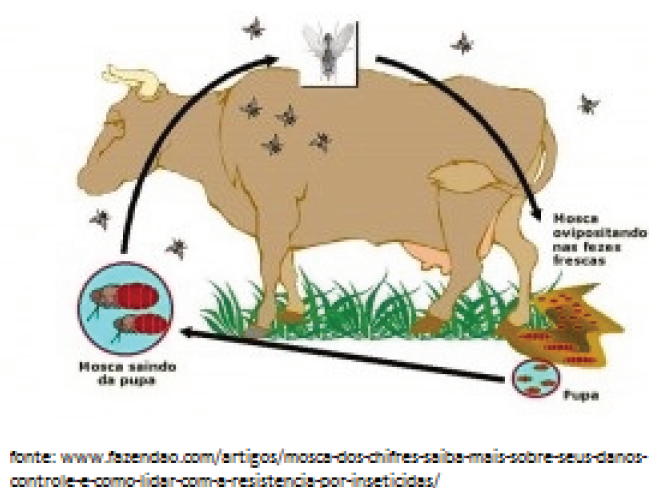


Figura 1.1: Ciclo evolutivo da Mosca-dos-chifres.

A Mosca-dos-Chifres foi detectada no Brasil na segunda metade dos anos 70 e inicialmente registrada no Estado de Roraima, através do trabalho de Valério e Guimarães

em 1983. Em decorrências do clima favorável, em poucos anos, a mosca se dispersou por todo país, inclusive em outros países da América do Sul.

Após ter cruzado a barreira amazônica, a mosca iniciou sua dispersão pelo país, o que foi facilitado pelo transporte em rotas de comercialização de gado. Ao final da década de 80, a mosca se encontrava em vários estados do Norte e Nordeste, chegando ao Centro-Oeste em 1990 e ao Sul no ano seguinte. Uma vez distribuída em todas as regiões do país, não tardou a ser registrada em países vizinhos, como a Argentina (Luzuriaga et al., 1991), Uruguai (Carballo e Martinez, 1992) e Bolívia. (BARROS, 2004 p. 109)

Em estudos realizados por Bianchin (2006) em 2004, o gado apresentou uma perda no ganho de peso do animal vivo em aproximadamente 10%, o que projetaria, para o ano, um prejuízo de aproximadamente R\$2.380.000.000,00 (2.38 bilhões de reais). O fator principal de prejuízo apresentado pela presença da mosca não está no sangue absorvido pelo parasita, mas em decorrência de sua picada ser bastante dolorida, incomodando o animal, dificultando a sua alimentação. Esta picada também proporciona um prejuízo para a indústria de couro, pois estas deixam marcas, exigindo um processo denominado maquiagem antes da industrialização do couro.

A atividade hematófaga da mosca-dos-chifres não é seu aspecto mais nocivo, as picadas dolorosas e incessantes sobre os bovinos proporcionam a irritação observada nos animais infestados, deixando-os extremamente agitados e estressados, o que explica o epíteto específico "irritans" (SCHREIBER; CAMPBELL, 1986). (Brito et al. 2007p.7)

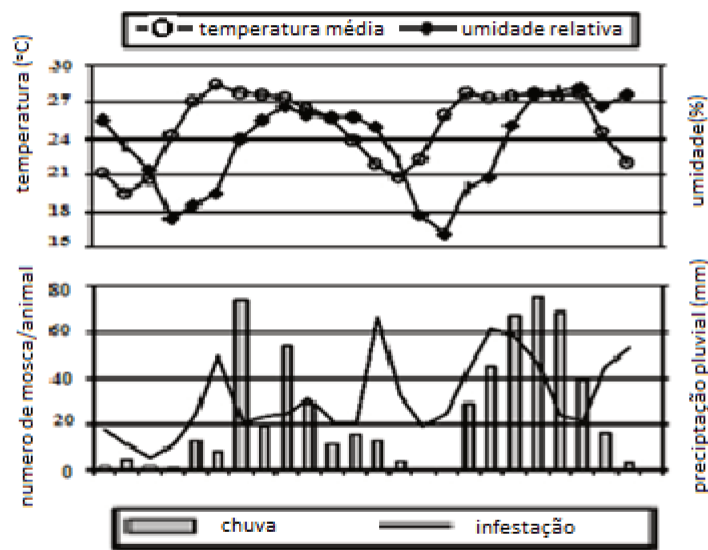
Alguns trabalhos mostram a importância de um melhor conhecimento da dinâmica populacional da mosca, em decorrência das dificuldades crescentes de seu controle químico. Entre eles, temos os trabalhos de Lysyk (1992) e Castro(2008) que estudaram a taxa do desenvolvimento populacional da mosca-dos-chifres e apresentam informações importantes sobre a sua dinâmica populacional.

Lysyk desenvolveu seus estudos em um ambiente laboratorial analisando como se dá o desenvolvimento da mosca em temperaturas variadas, mostrando que o ambiente e a temperatura do Brasil contribuem diretamente para o desenvolvimento da mosca. Para desenvolver a fase prepupal, a mosca necessita a uma temperatura média de 20,1°C, de aproximadamente 8 a 9 dias, enquanto que, com o aumento da temperatura, este período pode reduzir em quase 60%, quando a temperaturas se aproxima de 35°C.

The relationship between rate of preadult development and temperature was $r_i(\Theta) = e^{-6.602833+0.243065\Theta-0.0032910\Theta^2}$ ($R^2 = 0.98$; $F = 2512.1$; $df = 2.91$; $P < 0.0001$). All coefficients were significantly diferente from 0 to $P < 0.0001$ using t -tests. My equation predicts average developmental times ranging from 41.6 days at 15°C to 8.4 days at 35°C . Temperatures less than 17°C induce diapause in a proportion of the pupae, therefore the eight means below this temperature were based on a total of 57 flies. (Lysyk, 1992, p.844)

Castro realizou seus estudos no Uruguai, onde contabilizou o número de moscas presentes nos animais, com leituras periódicas entre outubro de 1999 a maio de 2002, quando verificou a influência da temperatura e da incidência de chuvas no crescimento populacional da mosca.

Bianchin e outros (2006) também concluíram em seus estudos que a chuva apresenta uma correlação importante com relação à taxa de desenvolvimento populacional da mosca. Em seus trabalhos realizados no Mato Grosso do Sul verificaram que o número de moscas diminuiu em meados da primavera e no verão, período em que há a maior densidade pluviométrica na região, esta oscilação é observado na figura abaixo.



fonte: Barros et al. (2002)

Figura 1.2: Fatores climáticos e flutuação populacional da Mosca-dos-chifres.

A estrutura climática do Mato Grosso do Sul é semelhante a do estado de Mato Grosso, onde vulgarmente se definem apenas duas estações no ano, o período das chuvas e o período da seca. No período das chuvas, o índice populacional de mosca baixa

razoavelmente. Uma das hipóteses levantada para este fato seria que a grande quantidade de água que destrói o bolo fecal do gado.

Apesar de abordar a dinâmica populacional da mosca, Lysyk (1992) realiza um estudo laboratorial com o objetivo de verificar como a temperatura influencia na reprodução da mosca. já Castro (2008) observa resultados semelhantes, mas seus estudos se estruturam em contagens periódicas da mosca adulta presente no gado.

Mesmo apresentando um tratamento matemático, não há referência sobre a densidade populacional na perspectiva de Malthus ou Verhulst, sendo trabalhos experimentais e, neste sentido, não são considerados outros fatores que possam influenciar a dinâmica de população de cada espécie.

Segundo Honer et all (1988) apud Collares, (1990.p.10): *estimaram que a Haematobia irritans vem se expandido no Brasil, com uma taxa linear anual de 100 à 140Km*. Um dos fatores desta expansão esta no transporte do gado, outro é a autonomia de voo da espécie. Trabalhos na área da Biomatemática que envolvem dinâmica populacional, tentam retratar este fatores através da equação da difusão-advecção, sendo o transporte considerado pelo termo advectivo e a autonomia de deslocamento pela difusão.

Modelos populacionais são estruturados na perspectiva dos modelos de Malthus (1797) e de Verhulst (1838). Para Malthus a densidade populacional, num determinado tempo, é igual à densidade num tempo anterior adicionado da variação populacional neste intervalo de tempo ($P_i = P_{i-1} + \Delta P$).

Verhulst introduz um fator importante no modelo Malthusiano, considerando os fatores inibidores do crescimento populacional. Ele observou que à medida que ocorre o crescimento populacional, o fator redutor ou limitador, também é proporcional a este crescimento, e inseriu esta queda de crescimento ao modelo. A taxa de crescimento populacional é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{P}{K} \right) P,$$

onde, P é população λ e K são constantes, respectivamente de crescimento intrínseco da espécie a a capacidade de suporte do meio.

A solução desta equação diferencial é dada por:

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-\lambda t}} \quad (1.1)$$

com $P_0 = P(0)$, população inicial.

Segundo Gurney & Nisbet (1975), a estrutura ambiental é um fator importante no processo de dispersão de uma espécie, isto é, ambientes favoráveis ou desfavoráveis contribuem para o processo de imigração ou emigração. Assim, a densidade populacional é afetada pela taxa de natalidade (nascimentos e mortes), pela dispersão e, possivelmente, pela imigração e emigração.

Em nosso modelo, devemos considerar a autonomia de voo, isto é, observar o processo de dispersão da mosca assim como o transporte do gado. Harris & Miller, (apud Brito, 2005, p.3) afirmam que: *Adultos de H. irritans apresentam autonomia de vôo de até 12Km quando em busca de um hospedeiro..* Reescrevendo a equação anterior, considerando M como população da mosca, de acordo com a equação da logística de Verhulst e usando resultados já clássicos (Gurney e Nisbet, Gurtin e MacCamy, Okubo e Levin, Murray, Skellam, Cantrell e Cosner), temos

$$\frac{dM}{dt} = \text{div}_{(x,y)} (\alpha \nabla M) + \vec{V} \nabla M + \lambda \left(1 - \frac{M}{K} \right) M. \quad (1.2)$$

Atualmente o controle populacional da mosca é realizado através de aplicações de inseticidas do grupo Piretróide, princípio ativo Deltametrina e ou cipermetrina. Porém, em decorrência do uso descontrolado, a mosca-dos-chifres já vem apresentando resistência a esses produtos e novos princípios ativos têm sido testados, ou uma maior dosagem do produto tem sido utilizada, provocando um aumento no risco de intoxicação e contaminação dos ambientes e de alimentos.

Este aumento de inseticida também é temporário, pois, a cada aplicação, há moscas que sobrevivem, uma quantidade quase imperceptível, que irão procriar e gerar insetos com maior resistência e, com o passar do tempo, a quantidade de moscas resistentes aumentará, acarretando uma ineficácia do produto, a médio e longo prazos.

A média de mosca por animal no Brasil é de 80 moscas, bem abaixo de estudos apresentados em outros países, para Bianchin (2002) os possíveis fatores para estes valores é a raça bovina, o período de contagem das moscas e/ou a presença de inimigos naturais e também a utilização de inseticidas. Dentre esses inimigos naturais temos o besouro coprófago, a espécie africana *Digitonthophagus Gazella*, que foi introduzida na região estudada em 1989 pela Embrapa Gado de Corte.

*O uso indiscriminado e repetido de inseticidas, além do custo do produto e da sua aplicação, pode acarretar prejuízos decorrentes da toxicidade subclínica por produtos químicos, provocando a diminuição do ganho de peso e desaceleração do crescimento dos bovinos jovens. Isto compromete as vantagens decorrentes ao combate as *Haematobia irritans* por inseticidas além de aumentar a possibilidade do aparecimento de resistência aos produtos. (Collares, 1990. p. 45)*

1.3 - Manejo biológico: Besouros Coprófagos

O manejo biológico da mosca-dos-chifres objetiva encontrar organismos associados a ela, tais como vetores e/ou inimigos naturais, para o desenvolvimento de medidas de controle populacional. Entende-se que não há populações isoladas e duas ou mais espécies interagem de formas diferenciadas. No caso do gado com a mosca existe uma relação direta, em que a mosca parasita o gado afetando-o de forma negativa. Além disto, ela depende diretamente do gado para sua reprodução. Neste ambiente, buscam-se outras espécies que venham servir de inimigos naturais para a mosca e estes são definidos como biocontroladores, que têm como objetivo manter um equilíbrio do ecossistema.

Nas fezes bovinas se desenvolvem diversos organismos, além da *Haematobia irritans*. As massas fecais são visitadas por insetos predadores à procura de ovos e larvas que lhe servem de alimentos. Em Sereno (2000), observou-se que uma quantidade de pupas da mosca-dos-chifres era parasitada por *Spalangia nigroaenea* (Pteromalidae). Neste estudo Sereno detecta uma mortalidade de 32,8% das pupas de *Haematobia irritans* em função de tais predadores.

*Considerando um total de 352 massas fecais de bovinos nelore coletadas, 281 (79,8%) apresentaram pupas de dípteros e 71(20,2%) não apresentaram pupas. Em 145(43,7%) das massas fecais recolhidas foram obtidas pupas de *H. irritans*. Do total de 4.193 pupas coletadas pertencentes à família Muscidae, apenas 588(14%) foram de *H. irritans*. Das pupas de mosca-do-chifre obtidas, 395 (67,2%) produziram adultos, 134(22,8%) não emergiram adultos ou parasitoides e 59 (10%) estavam parasitadas. (Sereno, 2000. p.1686)*

Um dos maiores competidores da mosca-dos-chifres nesse ecossistema são os besouros coprófagos, insetos da família dos coleópteros que se alimentam das fezes bovinas. Algumas espécies de besouros coprófagos fazem galerias no interior do bolo fecal, são insetos pertencentes às famílias Scarabaeidae e Aphodidae. Como se alimentam das

fezes do gado, os besouros competem diretamente com a mosca-dos-chifres no uso dos bolos fecais, local onde a mosca se desenvolve até se tornar adulta. Assim a ação dos besouros coprófagos nas fezes bovinas inviabiliza a reprodução da *Haematobia irritans*, sendo, portanto um possível biocontrolador da mosca-dos-chifres.

... existe competição entre organismos sempre que um deles exerça um efeito negativo sobre o outro, quer consumindo quer controlando o acesso a um recurso cuja disponibilidade é limitada. É importante notar que a existência de competição depende da existência de pelo menos um recurso limitado. (Gomes, p.3)

Segundo Haynes & Willians (1993, apud Marchesin, 2005) as fezes bovinas provocam vários efeitos no ambiente natural. Inicialmente uma cabeça de gado adulta chega a defecar de 8 a 12 vezes por dia, com uma área média de 500cm^2 a 900cm^2 por bolo fecal, sendo necessário um período de 1 a 231 dias para a degradação do bolo fecal. Em locais com presença de bolos fecais, geralmente o gado não pasta porque inclusive o bolo fecal influencia negativamente no desenvolvimento do pasto, sendo necessária a limpeza ou a degradação mais rápida possível do bolo fecal. Vários fatores influenciam no período de degradação do bolo fecal, a chuva em grande quantidade contribui muito para isto, tendo em vista que o excesso de água destrói o bolo fecal. Analogamente, a ação dos besouros coprófagos nas fezes bovinas contribui também para o melhor desenvolvimento do pasto com a degradação dos bolos fecais.

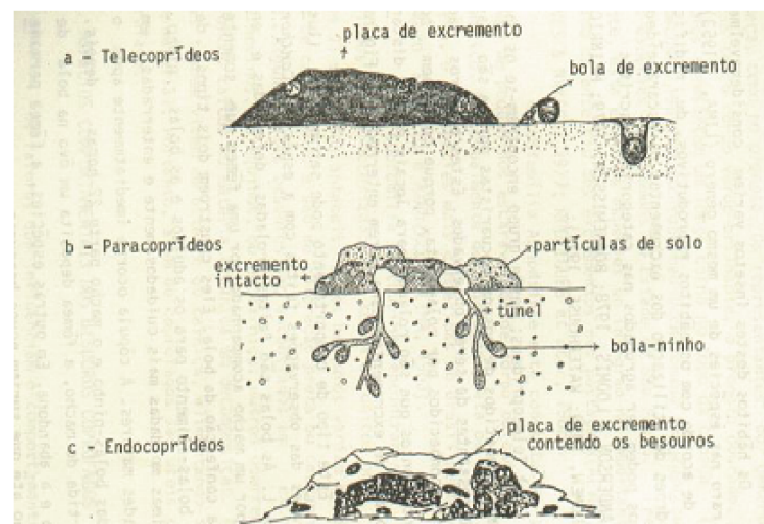
Os besouros coprófagos são insetos extremamente úteis, pois sua ação de enterrar massas fecais e ou desestruturá-las pode resultar na melhoria da estrutura e fertilidade do solo (Calafiori, 1979), além de atuar no controle de ectoparasitos e endoparasitos de bovinos, especialmente nematoides e dípteros, pela destruição de seu habitat... (Flechtmann et al., 1995.p.251)

A ação dos besouros coprófagos nas fezes bovinas é influenciada pelo clima, assim como pelo tipo de solo, Ridsdill-Smith & Hall (1987 apud Campiglia, 2002) comentam que se observaram atividades de besouros coprófagos durante o período chuvoso e com temperatura superior a 12°C . Além destes fatores, a luminosidade também é fator que influencia a atividade dos besouros. Segundo Doube (1983, apud Campiglia, 2002), quanto menor a intensidade luminosa maior é a quantidade de indivíduos.

Davis (1996) observou o aumento substancial de atividades de besouros coprófagos, importantes na degradação das placas de fezes, durante o período das chuvas. Os besouros coprófagos da família Scarabaeidae são importantes agentes de remoção de massas fecais em áreas de pastagens... (Páscoa, 2001.p.6)

Segundo Macedo (1999) a família dos *Coleópteros* coprófagos podem ser dividido em 4 grupos, três grupos são representados na figura 1.3.

- Telecoprídeos: Têm a característica de separar um pedaço de fezes e rolá-lo a uma determinada distância da massa fecal para depois enterrá-lo. Estruturam as bolas de duas formas, uma para alimento dos adultos e a outra como bola ninho para alimento dos filhotes. Esta é mais bem moldada e enterrada a maior profundidade, (estes besouros são vulgarmente chamados de rola-bosta);
- Paracoprídeos: São besouros que constroem seus ninhos ao redor ou embaixo da massa fecal, interligando-os através de túneis;
- Endocoprídeos: Os Endocoprídeos adultos fazem vários túneis no bolo fecal, onde se alimentam e constroem seus ninhos; e
- Cleptocoprídeos: São poucos citados na literatura, porém são os besouros que utilizam das massas já enterradas por outros besouros coprófagos.



Fonte: RODRIGUES (1989)

Figura 1.3: Classificação dos besouros coprófagos.

Outro fator que influencia no desenvolvimento dos besouros coprófagos é o vento, pois a localização dos bolos fecais é feita através do odor das massas, além disto,

o deslocamento do besouro é influenciado pelo vento. A autonomia de voo do besouro é grande. Este processo, assim como o da sua reprodução apresenta situações semelhantes à da mosca-dos-chifres, logo a equação logística de Verhuslt adotada para o besouro, porém não será considerado o termo advectivo nesta equação, assim a equação matemática que representa a densidade populacional do besouro no modelo será

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \text{div}(\alpha \nabla B) = \lambda \left(1 - \frac{B}{k}\right) B \text{ ou } \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha \Delta B = \lambda \left(1 - \frac{B}{k}\right) B,$$

para α constante.

1.4 - Dinâmica populacional: Lotka-Volterra e a relação de competitividade

Um dos objetivos deste trabalho é encontrar um equilíbrio dentro do ecossistema apresentado. A relação de competitividade existente entre as duas espécies pode ser representada por a um modelo do tipo Lotka-Volterra o qual retrata como uma espécie influencia a densidade populacional da outra, neste contexto, uma relação interespecífica. Apesar de o trabalho envolver três espécies diferentes (gado, mosca-dos-chifres e besouros coprófagos), a presença do gado é condição necessária para coexistência das outras duas espécies, porém o gado não depende das outras para sobreviver, o parasitismo da mosca é prejudicial, mas não apresenta risco de morte.

Estudos sobre a relação existente entre espécies de animais, denominado de sistema presa-predador ou competição, começou na década de 20 do século passado com Vito Volterra (1860 – 1940) e Alfred J. Lotka (1880 – 1949). Em meado de 1920, o biólogo italiano Umberto D’Ancona, observou mudanças populacionais em algumas espécies de peixe, em decorrência da 1ª guerra mundial (1914 – 1918). A pesca havia sido suspensa em parte do Mar Adriático e espécies de peixes apresentaram um aumento relativo em sua população, enquanto outras espécies sofreram reduções, sem haver a intervenção humana, isto é, sem a pesca. Umberto D’Ancona propôs este problema a Vito Volterra (1860 – 1940), que descreveu o modelo através de um sistema de equações diferenciais.

Se definirmos $N(t)$ como o número (ou densidade) de presas e $P(t)$ o número (ou densidade) de predadores, o sistema proposto por Vito Volterra apresenta a seguinte formulação

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\alpha_N N - \beta_N NP \\ \frac{dP}{dt} = \alpha_P P + \beta_P PN \end{cases},$$

onde $\alpha_N N$ e $-\alpha_P P$ são respectivamente o crescimento populacional da presa e a mortalidade de predador especialista e $\beta_N NP$ e $\beta_P PN$ a relação entre as espécies, relação presa x predador, onde o sinal negativo indica o que é prejudicial a espécie e o positivo o que é benéfico para a espécie.

Paralelamente, Alfred J. Lotka (1880 – 1949), matemático Norte - Americano trabalhou em modelos semelhantes ao proposto por Vito Volterra, mesmo trabalhando na mesma época, os dois desenvolveram seus trabalhos de forma independente.

Atualmente os modelos Lotka-Volterra são considerados bastantes teóricos, pois são modelos especialistas, retratam uma relação bastante específica de presa x predador. As relações entre espécies são mais complexas e em sua maioria envolvem outras espécies. Pesquisadores apresentam modelos estruturados de forma genérica, respeitando processos de dispersão, migração, transporte e outros fatores que influenciam o modelo, além disto, trabalha-se com $N = N(x, y, t)$ e $P = P(x, y, t)$ funções não lineares. Outra condição é a competição intraespecífica, onde a quantidade de presa pode levar a espécie predadora a competir entre si pela sobrevivência, provocando um aumento na mortalidade da espécie. Considerando o modelo de Verhulst para duas espécies, o modelo Lotka-Volterra generalista pode ser escrito como sendo

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} - \text{div}(\alpha_N \nabla N - NV_N) = \lambda_N \left(1 - \frac{N}{k_N}\right) N - \beta_N NP \\ \frac{dP}{dt} - \text{div}(\alpha_P \nabla P - PV_P) = \lambda_P \left(1 - \frac{P}{k_P}\right) P + \beta_P PN \end{cases}.$$

Um dos primeiros trabalhos sobre dispersão populacional foi feito por Skellam em 1951, utilizando uma equação diferencial parcial para descrever a capacidade de dispersão de espécies de animais. O trabalho de Kareiva em 1983 analisa o movimento de insetos em um curto espaço de tempo, em períodos maiores devem-se considerar as variações espaciais, as temporais e a densidade-dependência.

A longo prazo verifica-se a necessidade de se incluir componentes que modelem o caráter evolutivo do fenômeno, e que descrevam, além da dinâmica vital, por exemplo processos migratórios sazonais (ou seja, que variam com o tempo), ou comportamento que dependam da densidade populacional (o que chamamos de densidade-dependentes). (Lacaz, 1999, p. 17)

Há alguns anos, pesquisadores do grupo de pesquisa em Biomatemática da UNICAMP vêm desenvolvendo estudos teóricos com equações e sistemas de equações diferenciais parciais não lineares apresentando soluções através de tratamentos matemáticos diferenciados, Método de Diferenças Finitas, Teoria de Conjunto Fuzzy e o Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 2

Modelos em Biomatemática: Grupo de Pesquisa em Biomatemática da UNICAMP.

2.1 - O grupo de pesquisa em biomatemática.

Um grupo de pesquisadores da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP vem construindo modelos matemáticos com a utilização de diferentes equações e ou sistemas de equações não lineares, os quais, em sua maioria, não apresentam uma solução analítica, necessitando do desenvolvimento de processos numéricos na busca soluções aproximadas. Nestes casos o grupo tem utilizado os tratamentos numéricos necessários para encontrar uma solução para a equação ou sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, utilizando o Método de Galerkin, juntamente com o Método de Elementos Finitos ou Método das Diferenças Finitas e o Método de Crank-Nicolson.

Os trabalhos na área da Biomatemática que utilizam o Método dos Elementos Finitos se iniciaram na década de 90 do século passado, com o trabalho de Diomar Cristina Mistro (Mistro, (1992)). Mistro realiza seu trabalho analisando a dispersão do mercúrio nos rios brasileiros, principalmente na região amazônica (Rondônia, Roraima, Pará e Norte do Mato Grosso), Goiás e norte do Rio de Janeiro. Para descrever o modelo matemático, Mistro utilizou Murray (1989), Okubo (1980), Edelstein-Kesht (2005) e Marchuk (1986). O modelo descreve o comportamento da concentração de mercúrio num determinado tempo $t \in I = (0, T]$ e $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, domínio trabalhado por Mistro. A equação trabalhada foi

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \underbrace{div(\alpha_M \nabla C)}_{\text{difusão}} + \underbrace{\sigma C}_{\text{decaimento}} + \underbrace{div(\vec{V} \cdot M)}_{\text{advecção}} = \underbrace{f}_{\text{fonte}}. \quad (2.1)$$

Mistro faz a simulação de como o mercúrio se desloca pelos rios através de

uma fonte poluidora, analisando o espalhamento pela superfície da água, considerando inicialmente a superfície da água como um plano bidimensional (x, y) e, considerando também a variação temporal.

Sonia Elena Palomino Castro (Castro, (1993)) faz um estudo sobre os poluentes do ar, construindo um modelo matemático que busque conhecer como ocorrer a difusão dessa poluição. Para isto ela trabalha com um domínio restrito a um plano vertical com condições de contorno de Neumann e Dirichlet homogêneo, utilizando a equação (2.1).

Posterior a Castro, Geraldo Lúcio Diniz (Diniz, (1994)) realiza o primeiro trabalho do grupo retratando a dinâmica populacional. Constrói o modelo matemático através a equação de dispersão-migração (2.1), que retrata a situação da mudança de um habitat, tendo em vista a construção de represa, analisando a nova geomorfologia a que os peixes devem se adaptar.

Mateus Bernardes (Bernardes, (1998)) também apresenta seu trabalho envolvendo a equação (2.1) para analisar a difusão de poluentes utilizando como referência o Esteros de Iberá. Localizada na Província de Corrientes, nordeste da Argentina, é uma região pantanosa que sofre com o processo de poluição pela crescente atividade agroindustrial. Neste trabalho, Bernardes utiliza um domínio em que o processo de difusão ocorre em sua profundidade, tendo em vista que o Esteros é uma região de lago, não havendo correntezas fortes que influenciam diretamente a difusão dos poluentes.

Neste mesmo ano, diante de um projeto envolvendo a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Universidade de São Paulo (USP), Companhia Nacional de Petróleo (PETROBRÁS) e Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (CETESB), com o objetivo de construir um modelo matemático que pudesse descrever como se movimenta a mancha de óleo na superfície de marés costeiras, para prevenção de futuros acidentes ou até mesmo que ações de contingência caso aconteça um acidente, Renato Fernandes Cantão (Cantão (1998)) modela o problema e apresenta ferramentas que venham contribuir para decisões em situações de emergência. Assim, como nos trabalhos anteriores, Cantão trabalha com a Equação de Difusão-Advecção, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(-\alpha \nabla u) + \operatorname{div}(\vec{V} \cdot u) + \sigma u = f \text{ para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in (0, T],$$

sendo $u = u(x, y, t)$ a concentração de óleo, $\alpha = \alpha(x, y, t)$ função que descreve a difusibilidade, $V(x, y, t) = (V_1(x, y, t), V_2(x, y, t))$ função vetorial que caracteriza a direção induzida pelo vento, circulação e mares, $\sigma = \sigma(x, y, t)$ função de decaimento do óleo e f

fonte poluente.

Tânia Maria Vilela Salgado Lacaz (Lacaz, (1999)) faz uma revisão bibliográfica sobre modelos de dinâmica populacional, para depois analisar o bicudo do algodoeiro. Este trabalho retrata uma situação encontrada no final da década de 80, início da década de 90 do século passado, no interior do estado de São Paulo, com o objetivo de determinar os coeficientes $(\alpha, \lambda, \sigma)$ e $f(x, y, t)$ da equação diferencial (2.1), para poder analisar e fazer uma perspectiva de expansão do bicudo para outras regiões do estado que apresentavam o cultivo do algodão.

Silvio de Alencastro Pregnotatto (Pregnotatto (2002)) faz um estudo sobre o Mal-das-Cadeiras em Capivaras da região do Esteros do Iberá. Este trabalho apresenta um modelo considerando populações de capivara diferenciadas, pois contém capivaras suscetíveis, infectadas e mortas, denominado como modelo SIM, semelhante ao modelo SIR/SIRS apresentado por Webb (1982) (apud Pregnotatto, 2002). Este é o primeiro trabalho do grupo que envolve um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e apesar de ser um sistema, o tratamento matemático é semelhante aos trabalhos anteriores, levando em consideração três equações diferentes e as relações existentes entre as espécies.

Neste mesmo período outros pesquisadores trabalharam com o Esteros do Iberá. Geraldo Lúcio Diniz (Diniz (2003)) estrutura um modelo matemático analisando o lago do Iberá, situado na Argentina, neste trabalho Diniz constrói um sistema de duas equações, a primeira relacionada com a difusão de poluentes aérea e a segunda representando a difusão da poluição no meio aquático, considerando o domínio um campo bidimensional.

Ainda nesta região e ano, Renata Cristina Sossae (Sossae (2003)) realiza um estudo envolvendo a relação de quatro espécies de animais, duas presas (P_1 e P_2), que competem entre si e duas espécies de predadores (P_3 e P_4), que também competem entre si. É o primeiro trabalho que envolve em seu modelo espécies diferentes de populações.

Também neste período, Rosane Ferreira de Oliveira (Oliveira (2003)) realiza um estudo na Baía de Ilha Grande, situada em Angra dos Reis litoral sul do Rio de Janeiro, um trabalho semelhante ao de Cantão (1998), fazendo um estudo no comportamento evolutivo da mancha de óleo e seus derivados. Diferente do trabalho de Cantão, na equação da difusão-advecção-reação (2.1). Oliveira faz um tratamento diferenciado no fluxo advectivo, assumindo que dois fenômenos afetam o comportamento da mancha de óleo, o vento definido como W_v e a circulação superficial padrão do Canal Central W_p , onde W_p é obtido pela Equação de Stokes.

Julio César Saavedra Vásquez (Vásquez (2005)) faz um estudo de dispersão de poluentes com a equação da difusão-advecção (2.1) no meio aquático (marítimo), considerando o seu domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, onde as dimensões representavam a dispersão na superfície e na profundidade.

Nesse ano ainda Marcos Marreiro Salvatierra (Salvatierra (2005)) usando praticamente os trabalhos anteriores faz um modelo que correlaciona a interação entre duas espécies competindo no sentido Lotka-Volterra, influenciadas por um material impactante (poluição). As duas espécies analisadas são as aves Chajá (*Chauna torquata*) e o Jacaré (*Caiman yacare*), animais que estão no topo da cadeia alimentar competindo entre si por animais de pequeno porte (peixes e rãs) presentes no Esteros de Iberá. A poluição é decorrente da agricultura e outras atividades desenvolvidas na região que são apresentadas por Bernardes (1998) e Diniz (2003).

Nelson Fernando Inforzato (Inforzato, (2008)) analisa o trabalho de Diniz (2003) e Vásquez (2005) e constrói um modelo matemático envolvendo os problemas tratados em cada trabalho, seu modelo se a analisar o processo de dispersão de poluentes no sistema Ar-Água com um domínio tridimensional ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Diniz (2003) se diferencia pelo domínio e Vásquez (2005) por trabalhar com a dispersão no ar.

Maristela Missio (Missio (2008)) discute um modelo matemático do tipo SIR (cf Kermack - McKendrick) retratando a febre aftosa. Misso constrói um modelo que interliga Equações Diferenciais Parciais com tratamento através de modelos *fuzzy*, estocásticos, método dos elementos finitos e Cranck-Nicolson.

No ano seguinte, ocorrem dois trabalhos semelhantes, o de Elaine Cristina Catapani Poletti (Poletti (2009)) e Leidy Diane Wolmuth (Wolmuth (2009)), porém retratando duas situações e regiões diferentes do Brasil. Poletti trabalha com a difusão de poluentes no reservatório de Salto Grande, interior do estado de São Paulo. O domínio de seu trabalho é estruturado em três regiões interligadas, trabalha com parâmetros *fuzzy* e com o método dos elementos finitos. Já Wolmuth faz a análise sobre a dispersão de poluente na represa do Manso, localizada no estado de Mato Grosso, próximo a Cuiabá.

Além destes, Luciana Carrara Abreu (Abreu (2009)) desenvolve seu modelo estudando a Baía de Sepetiba. Abreu analisa o processo de poluição e a densidade populacional de macroalgas e, como esta macroalgas se desenvolvem com a presença de poluentes.

Juliana Marta Rodrigues de Souza (Souza (2010)) estrutura um modelo matemático para analisar a dispersão do risco de contágio do H5N1, vírus da influenza aviária,

chamada de gripe aviária, este modelo é construído pela equação da difusão-advecção (2.1).

André Krindges (Krindges (2011)) desenvolve seu trabalho na mesma região que Wolmuth (2009), analisando o problema da difusão dos poluentes na represa do rio Manso, trabalha com a equação da difusão-advecção (2.1), porém com o domínio em $\mathbb{R}^3$, isto é, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, com o campo advectivo (campo de velocidade) descrito pela equação de Navier-Stokes.

Concluído, em 2012 Paulo Casar Carmona Tabares (Tabares (2012)) faz seu trabalho modelando os efeitos da falta de luz em populações bentônicas que vivem na Enseada Potter, localizada ao norte da Península Antártida. Tabares estrutura o modelo através de equações da advecção-difusão-reação considerando, além do impacto da areia, 4 grupos de organismo. Seu modelo é estruturado em um sistema de equações diferenciais parciais não lineares com domínio bidimensional.

2.2 - Modelos trabalhados com sistemas de equações diferenciais parciais não-lineares e tratados pelo método dos Elementos Finitos

Este trabalho se propõe a desenvolver com um modelo que represente a relação de três espécies de animais que se interagem entre si, estruturando-se em um sistema de equações de equações diferenciais parciais não lineares, sistema encontrado nos trabalhos de Pregnotatto (2002), Diniz (2003), Sossae (2003), Salvatierra (2005), Inforzato (2008), Missio (2008), Abreu (2009) e Tabares (2012). Porém cada trabalho apresenta suas diferenças.

Pregnotatto (2002) foi o primeiro a apresentar um problema populacional que envolve o sistema de equações. Apesar de trabalhar somente com uma espécie de animal (capivara) seu modelo é estruturado de acordo com a condição de saúde das capivaras e cada condição representa um tipo de população diferenciada, sendo elas, capivaras suscetíveis, capivaras infectadas ou capivaras mortas, um modelo denominado como modelo SIM, semelhante ao modelo SIR apresentado por Kermack-McKendrick que trabalha com populações suscetíveis, infectadas e recuperadas. Considerando, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T]$ o sistema trabalhado por Pregnotatto é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V}S) + \sigma_S S &= \lambda_S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) N - \beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_I \Delta I + \sigma_I I &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma I \end{cases},$$

onde $S = S(x, y, t)$ são as capivaras suscetíveis, $I = I(x, y, t)$ as capivaras infectadas e $M = M(x, y, t)$ as capivaras mortas. Os termos α_S e α_I são os coeficientes de difusibilidade, σ_S e σ_I os coeficientes de mortalidade natural, λ_S o coeficiente da taxa de natalidade, β o coeficiente da taxa de animais suscetíveis que foram infectados, γ o coeficiente de mortalidade pela doença e K capacidade de suporte, todos os valores constantes.

O trabalho de Missio (2008) segue a mesma linha do trabalho de Pregnotatto, porém retrata o problema da febre aftosa, estruturado no modelo do tipo SIR conforme Kermack-McKendrick. A diferença apresentada por Missio é que além de estar vinculada a outro ambiente, o tratamento matemático é diferente, pois trabalha com o Método dos Elementos Finitos e também utiliza parâmetros *fuzzy* e estocásticos.

Já os modelos apresentados por Diniz (2003) e Inforzato (2008) que trabalham com a dispersão de poluentes não apresentam as relações entre as equações, sendo duas equações distintas resultando no seguinte sistema de equações diferenciais parciais lineares:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(\alpha_u \nabla u - \vec{V}u) - \sigma_u u + f \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= \operatorname{div}(\alpha_a \nabla a - \vec{W}a) - \sigma_a a + F \end{cases}$$

O que difere nestes trabalhos desenvolvidos é o domínio. Para Diniz a região do domínio é bidimensional, ou seja, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, o coeficiente da difusão do poluente no ar e os elementos do vetor $\vec{V}$ são funções que dependem do domínio Ω , logo $u = u(x, y, t)$ é a concentração do poluente no ar, $\alpha_u = \alpha_u(x, y, t)$ função que aproxima a difusibilidade efetiva no meio aéreo, α_a constante de difusibilidade efetiva no meio aquático, $\vec{V} = (v_1(x, y, t), v_2(x, y, t))$, campo de velocidade no ar, $\vec{W} = (w_1, w_2)$ campo de velocidade no domínio Ω_a , σ_u e σ_a são coeficientes constantes de decaimento, no ar e na água e f e F são fontes de poluição.

Já Inforzato utilizou o domínio tridimensional, ou seja, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, logo $u = u(x, y, z, t)$ é a concentração do poluente no ar, α_u e α_a são constantes de difusibilidade efetiva no meio (ar e água), $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$, campo de velocidade no ar, $\vec{W} = (w_1, w_2, w_3)$ campo de velocidade no domínio Ω_a , σ_u e σ_a coeficientes constantes de decaimento no ar e na água e f e F são fontes de poluição (ar e água).

Outro tipo de trabalho é desenvolvido por Sossae (2003) e Salvatierra (2005), os quais desenvolvem seus modelos através da equação da difusão-advecção, porém utilizam uma situação clássica do modelo Lotka-Volterra, com interações do tipo presa-predador com competição, diferente dos modelos de Pregniolato (2002) e Missio (2008) que utilizam o modelo SIR de Kermack-McKendrick.

O trabalho de Sossae é o segundo trabalho envolvendo dinâmica populacional com o tratamento numérico através do Método dos Elementos Finitos e retrata a relação entre quatro espécies diferentes de animais, dois predadores (jacarés e pássaros) e duas presas (peixes e rãs). Assim Sossae utilizou a equação de dispersão-migração e a dinâmica populacional de Verhulst. O sistema estruturado por Sossae é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \text{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \text{div}(V P_1) + \rho_1 \sigma_1 P_1 = \lambda_1 \left(1 - \frac{P_1}{K_1}\right) P_1 - c_1 P_1 P_3 - d_1 P_1 P_4 - \\ \quad - e_1 P_1 P_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \text{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \text{div}(W P_2) + \rho_2 \sigma_2 P_2 = \lambda_2 \left(1 - \frac{P_2}{K_2}\right) P_2 - c_2 P_2 P_3 - d_2 P_2 P_4 - \\ \quad - e_2 P_1 P_2 \\ \frac{\partial P_3}{\partial t} - \text{div}(\alpha_3 \nabla P_3) + \text{div}(U P_3) + \rho_3 \sigma_3 P_3 = \lambda_3 \left(1 - \frac{P_3}{K_3}\right) P_3 + c_3 P_1 P_3 + d_3 P_2 P_3 - \\ \quad - e_3 P_3 P_4 \\ \frac{\partial P_4}{\partial t} - \text{div}(\alpha_4 \nabla P_4) + \text{div}(T P_4) + \rho_4 \sigma_4 P_4 = \lambda_4 \left(1 - \frac{P_4}{K_4}\right) P_4 + c_4 P_1 P_4 + d_4 P_2 P_4 - \\ \quad - e_4 P_3 P_4 \end{array} \right. ,$$

onde, para $I = 1$ a 4 ,

- $P_I = P_I(x, y, t)$ são as populações ou as densidades populacionais;
- $\alpha_I = \alpha_I(x, y, t)$ são os coeficientes de efetiva dispersão populacional;
- $\sigma_I = \sigma_I(x, y, t)$ são as taxas de decaimento das espécies;
- $\vec{V}$, $\vec{W}$, $\vec{U}$ e $\vec{T}$ são vetores velocidade de migração populacional ou advecção;
- K_I coeficiente constante, referente a capacidade de suporte de cada espécie ;

- λ_I , c_I , d_I e e_I são coeficientes constantes, utilizados para a taxa de crescimento intrínseco e da relação interespecífica.

Salvatierra mantém a mesma estrutura do sistema de equações anterior, porém reduz a duas espécies e inclui a competição intraespecífica e interespecífica na dinâmica vital de Verhulst, além dos vetores $\vec{U}$ e $\vec{W}$ dos campos de velocidade de migração não serem constantes. Portanto o sistema fica

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \text{div}(\alpha_1 \nabla P_1) + \text{div}(U P_1) + \rho_1 \sigma P_1 &= a_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K}\right) - \delta_1 P_1 P_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \text{div}(\alpha_2 \nabla P_2) + \text{div}(W P_2) + \rho_2 \sigma P_2 &= a_2 P_2 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K}\right) - \delta_2 P_1 P_2 \end{cases}$$

onde,

- $P_1 = P_1(x, y, t)$ e $P_2 = P_2(x, y, t)$ são as densidades populacionais;
- $\alpha_1 = \alpha_1(x, y, t)$ e $\alpha_2 = \alpha_2(x, y, t)$ representam as dispersões populacionais de cada espécie;
- $U = (U_1(x, y, t), U_2(x, y, t))$, $W = (W_1(x, y, t), W_2(x, y, t))$, representam os campos de velocidades de migração de cada espécie, com $\text{div}(U) = \text{div}(W) = 0$;
- $\sigma = \sigma(x, y, t)$ representa a concentração de um poluente no meio;
- ρ_1 e ρ_2 representam os decaimentos populacionais de cada espécie devido à mortalidade causada pela presença deste poluente;
- a_1 e a_2 representam as taxas de crescimento intrínsecas de cada espécie;
- K coeficiente constante, referente a capacidade de suporte de cada espécie;
- δ_1 e δ_2 representam as taxas de relação interespecífica (o sinal negativo caracteriza a competição).

Abreu (2009) desenvolve um modelo cujo sistema envolve equações de crescimento populacional tipo Verhulst e a equação de difusão de poluentes, sendo que a poluição afeta a taxa de mortalidade assim como a taxa de crescimento populacional,

diferente dos dois caso anteriores, onde o poluente afetava somente a taxa de mortalidade. Além destas diferenças Abreu também altera o coeficiente da difusão e o coeficiente da taxa de crescimento populacional, trabalhando com variáveis em função de x com $x \in \Omega$. O sistema de equações diferenciais parciais não linear desenvolvido para analisar este problema é

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_p \Delta p + \operatorname{div}(Vp) + \sigma_p p &= f(x) \\ \frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_a(x) \nabla a) + \mu_a p a &= \lambda_a(x) e \left(1 - \frac{\beta_{aa}a + \beta_{ab}b}{K}\right) - \gamma_a ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_b(x) \nabla b) + \mu_b p b &= \lambda_b(x) g \left(1 - \frac{\beta_{ba}a + \beta_{bb}b}{K}\right) - \gamma_b ab \\ \frac{\partial e}{\partial t} - \alpha_e \Delta e + V \nabla e + \sigma_e e &= \lambda_e a \\ \frac{\partial g}{\partial t} - \alpha_g \Delta g + V \nabla g + \sigma_g g &= \lambda_g b \end{cases}$$

sendo p poluentes, a e b macroalgas, e e g concentração de células de reprodução das algas.

Observe-se que α_a e α_b , λ_a e λ_b são funções em $x \in \Omega$ e o termo de Verhulst é multiplicado por e e por g que são as concentrações de células reprodutoras. Os demais coeficientes são todos constantes.

Tabares (2012) trabalha com um sistema que envolve cinco equações diferenciais parciais não lineares sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, o qual constrói o modelo trabalhando com a equação da advecção-difusão-reação, num domínio bidimensional irregular estruturada na Enseada *Potter*, região localizada ao norte da Península Antártida. Seu modelo matemático é construído em decorrência da ampliação do fluxo de água proveniente da geleira *Fourcade*, o que tem provocado um aumento no transporte de sedimentos e prejudicado o desenvolvimento dos organismos vivos, entre eles os bentos (organismo que vivem no substrato). Tabares estrutura seu modelo em quatro grupos de organismos, *bivalve* (*Laternula elliptica*), *pennatulacea* (*Malacobelemnoides daytoni*), *ascídia erguido* (*Mongula pedunculata*), *ascídia aplanado* (*A. challengerii*). Considerando, que para m variando de 1 a 4, $P_m = P_m(x, y, t)$ e $S = S(x, y, t)$; com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ o sistema de equações fica definido como

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha_1 \nabla^2 P_1 & = & \lambda_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{K} \right) - \frac{\beta_1 S^2}{\gamma_1 + S^2} P_1 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \alpha_2 \nabla^2 P_2 & = & \lambda_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2}{K} \right) - \frac{\delta_{12}}{K} P_1 P_2 - \frac{\beta_2 S^2}{\gamma_2 + S^2} P_2 \\ \frac{\partial P_3}{\partial t} - \alpha_3 \nabla^2 P_3 & = & \lambda_3 P_3 \left(1 - \frac{P_3}{K} \right) - \frac{\delta_{13}}{K} P_1 P_3 - \frac{\delta_{23}}{K} P_2 P_3 - \frac{\beta_3 S^2}{\gamma_3 + S^2} P_3 \\ \frac{\partial P_4}{\partial t} - \alpha_4 \nabla^2 P_4 & = & \lambda_4 P_4 \left(1 - \frac{P_4}{K} \right) - \frac{\delta_{14}}{K} P_1 P_4 - \frac{\delta_{24}}{K} P_2 P_4 - \frac{\delta_{34}}{K} P_3 P_4 - \\ & & - \frac{\beta_4 S^2}{\gamma_4 + S^2} P_4 \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \nabla^2 S + W \nabla S & = & -\sigma_1 P_1 S - \sigma_2 P_2 S - \sigma_3 P_3 S - \sigma_4 P_4 S + g \end{array} \right.$$

onde, para $m = 1$ a 4 e $i = 1$ a 3 , $\alpha_m, \alpha_S, \lambda_m, \sigma_m, \gamma_m, \beta_m$ e δ_{im} , com $i \neq m$ são coeficientes constantes.

Portanto este trabalho se respalda em um modelo estruturado na dinâmica populacional de três espécies diferentes de animais (gado, mosca e besouro). Apesar da semelhança com o sistema de equações apresentado por Pregnotatto (2002), este modelo se equipara aos modelos apresentados nos trabalhos de Sossae (2003) e Salvatierra (2005), que trabalham com relações do tipo presa-predador com competição interespecífica e intraespecífica conforme os modelos clássico Lotka-Volterra, diferente do modelo SIR de Kermack-McKendrick utilizado por Pregnotatto (2002) e Missio (2008).

Sossae em seu trabalho, considera como valores constantes todos os coeficiente que acompanham as relações interespecíficas e intraespecífica. Os coeficientes da difusão α_i e das taxas de decrescimento σ_i com $i = 1$ até 4 , são funções definidas para $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in J = (0, T]$. Já Salvatierra, assume a mesma situação de Sossae, ampliando os termos não lineares do sistema. Inicialmente reduz a situação para duas espécies de animais predadores e inclui a competição entre elas, acrescenta também termos não lineares na parte advectiva das equações que representam as duas espécies de animais, isto é, $U = U(x, y, t)$ e $V = V(x, y, t)$. Levando em consideração aos modelos apresentados, construiremos o modelo matemático que represente as três espécies de animais.

Capítulo 3

A Modelagem do Problema

3.1 - O modelo matemático de interação das três espécies

O problema estudado irá considerar as condições de cada espécie. O gado apresenta o ciclo de vida longo em se comparado às outras duas espécies, a mosca-dos-chifres e o besouro. Portanto, a densidade populacional do gado assume as características do modelo Malthusiano. Para a estruturação do modelo, respeita-se a condição de criação intensiva (gado confinado) e extensiva.

Apesar das diferentes formas de criação, o domínio será uma região e limitada definida como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, diferindo somente na possibilidade de procriação na criação extensiva, o que não ocorre na criação de gado confinado.

Embora o contato da mosca com o gado seja prejudicial, não apresenta risco de morte para o animal. Portanto, a taxa de decaimento populacional do gado será influenciada pelo abate, assim como o crescimento no número de cabeças de gado ocorrerá com a entrada de novos animais. Consideraremos $R = R(x, y, t)$ como a densidade de gado na região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ em um intervalo de tempo $J = (0, T]$, a equação diferencial parcial do gado fica

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_R R \quad (3.1)$$

onde,

- λ_R coeficiente da taxa de crescimento da população;
- μ_A coeficiente da taxa de abate de gado.

A mosca-dos-chifres apresenta características bem diferentes. De acordo com Honer (1990), a fêmea sobrevive aproximadamente 40 dias e neste período, chega a depositar entre 80 a 300 ovos. Em condições normais, aproximadamente 10% destes eclodem. Diante desta característica, a representação matemática da densidade populacional da mosca assume características do modelo Verhulstiano. Gurney & Nisbet (1975) apresentam o Biased Random Motion Model (BRM model) em que espécies de animais que são territoriais podem se deslocar para outras comunidades ou mesmo serem transportados. Quando se torna adulta, a mosca-dos-chifres apresenta uma autonomia de voo de até $12Km$, além da autonomia de voo, o transporte de gado permite o deslocamento para outro animal ou outro ambiente. Portanto, nestas condições a densidade população da mosca adquire características advectivas, assim para $M = M(x, y, t)$ com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $t \in J = (0, T]$, a equação diferencial não linear que modela a mosca-dos-chifres é dada por

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \text{div}(\alpha_M \nabla M) + \vec{W} \cdot \nabla M = \lambda_M M \left(1 - \frac{M}{K_M}\right) \quad (3.2)$$

onde,

- $M = M(x, y, t)$ é densidade populacional da mosca;
- $\alpha_M \Delta M$, (resultado do uso clássico de $\text{div}(\alpha_M \nabla M)$) indica a dispersão efetiva (Okubo e Levin, (2001));
- $\text{div}(\vec{W} \cdot M) = \text{div}(\vec{W}) \cdot M + \vec{W} \cdot \text{div}(M)$ é a advecção (ou transporte) com $\text{div}(\vec{W}) = 0$ então $\text{div}(\vec{W} \cdot M) = \vec{W} \cdot \nabla M$. (cf. Edelstein-Keshet (1987)); e
- $\lambda_M M \left(1 - \frac{M}{K_M}\right)$ é a dinâmica populacional.

O besouro é direcionado pelo odor das fezes, o que poderia ser influenciado pelo vento, porém não há outro tipo de transporte, ficando somente sua autonomia de voo, neste sentido, a equação apresenta somente o termo difusivo. Sua reprodução é alta em relação ao gado, porém, menor que a mosca o que leva a assumir a condição de um modelo Verhulstiano. A equação do besouro fica

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \Delta B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) \quad (3.3)$$

onde,

- $B = B(x, y, t)$ é densidade populacional do besouro;
- $\alpha_B \Delta B$, (resultado do uso clássico $div(\alpha_B \nabla B)$) indica a dispersão efetiva (Okubo e Levin, (2001));
- $\lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K}\right)$ é a dinâmica populacional.

Como o objetivo é analisar um ecossistema envolvendo as três espécies, há a relação entre as espécies. O modelo deve considerar as influências que cada espécie provoca uma na outra. Neste sentido, observa-se que o gado sofre com o parasitismo da mosca, não provocando sua morte, mas influenciando seu desenvolvimento, pois sua picada incomoda o animal. Já a presença do besouro não apresenta relação alguma com a vida do gado. Assim, o parasitismo da mosca é representado na equação do gado como um fator negativo e a equação fica

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \mu_{RM} RM. \quad (3.4)$$

Para a equação da mosca surgem dois termos novos, um relacionado à existência do gado que é vital para a sua sobrevivência. O outro relativo à presença do besouro, que neste ambiente não afeta a mosca adulta (período em que não habita mais o bolo fecal), porém prejudica em suas fases anteriores (ovo-larva-pupa) que ocorrem no bolo fecal. A competição pelo bolo fecal é prejudicial para a densidade populacional da mosca. Estas relações são representadas na equação da mosca da seguinte forma

$$\frac{\partial M}{\partial t} - div(\alpha_M \nabla M) + \vec{W} \cdot \nabla M = \lambda_M M \left(1 - \frac{M+B}{K_M}\right) - \mu_{MB} MB + \mu_{MR} MR. \quad (3.5)$$

Já para o besouro a importância é a existência do gado, logo a representação matemática do besouro fica

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \Delta B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) + \mu_{BR} BR. \quad (3.6)$$

Portanto a representação matemática do modelo relacionando as três espécies

de animais será o sistema de equações diferenciais não lineares dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \mu_{RM} R M \\ \frac{\partial M}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M) + \vec{W} \cdot \nabla M = \lambda_M M \left(1 - \frac{M+B}{K_M}\right) - \mu_{MB} M B + \mu_{MR} M R \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \Delta B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) + \mu_{BR} B R \end{cases} \quad (3.7)$$

onde,

- $R = R(x, y, t)$, $M = M(x, y, t)$ e $B = B(x, y, t)$ são funções que representam as densidades populacionais;
- α_M e α_B são coeficientes da dispersão populacional de cada espécie;
- $W = (w_1, w_2)$, representam os campos de velocidades, com $\operatorname{div}(W) = 0$;
- λ_R, λ_M e λ_B , representam as taxas de crescimento intrínseca de cada espécie;
- $\mu_R, \mu_{RM}, \mu_{MB}, \mu_{MR}$ e μ_{BR} representam as taxas de relação interespecífica;
- K_M e K_B representam as capacidades de suporte.

Como inovação o trabalho propõe ampliar o estudo de modelos matemáticos biológicos que envolvem um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, estruturado com a equação da difusão-advecção. Em Diniz (2003), Sossae (2003) e Inforzato (2008), que trabalharam com os coeficientes $\alpha = \alpha(x, y, t)$ como uma função. Diniz assumiu as coordenadas de $\vec{V}$ como funções e Sossae (2003) utilizou a não linearidade no coeficiente σ da taxa de decaimento da espécie. Ainda, Abreu (2009) trabalha com o coeficiente λ da taxa de crescimento populacional como função no domínio definido.

Este trabalho propõe inserir uma outra não linearidade na capacidade de suporte K_M da mosca-dos-chifres o termo verhulstiano. Assim $K_M = \rho R$, com $R = R(x, y, t)$ para $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $t \in T = (0, T]$, ou seja, K_M é uma função que depende de R . Todos os trabalhos apresentados até o momento utilizaram a capacidade de suporte como coeficiente constante.

Considerando que o Laplaciano é a soma das derivadas parciais de segunda ordem $(\operatorname{div}(\nabla M) = \Delta M = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right))$ ou $\left(\operatorname{div}(\nabla B) = \Delta B = \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right)\right)$,

que o gradiente ∇ é o vetor das derivadas parciais $\left(\nabla M = \left(\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y}\right)\right)$ e que $\vec{W} \cdot \nabla M = (w_1, w_2) \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(w_1 \frac{\partial M}{\partial x} + w_2 \frac{\partial M}{\partial y}\right)$. Então o sistema 3.7 fica

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \mu_{RM} RM \\ \frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) + w_1 \frac{\partial M}{\partial x} + w_2 \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda_M M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R}\right) - \\ \quad - \mu_{MB} MB + \mu_{MR} MR \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right) = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) + \mu_{BR} BR, \end{cases} \quad (3.8)$$

De acordo com Souza e outros (2005) "A céu aberto: consiste de curraletes feitos para confinar na ordem de 50 a 100 animais, devendo ser disponível área de 8 a 20m² por animal (no Brasil, é mais comum de 9 a 12m² por cabeça)", logo o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, será a região com uma forma geométrica que pode ser utilizada no confinamento de gado, assim como pode representar o formato de fazendas da região norte do Mato Grosso. Assumindo que *um* é unidade de medida, o domínio será a região Ω , representada pela figura abaixo

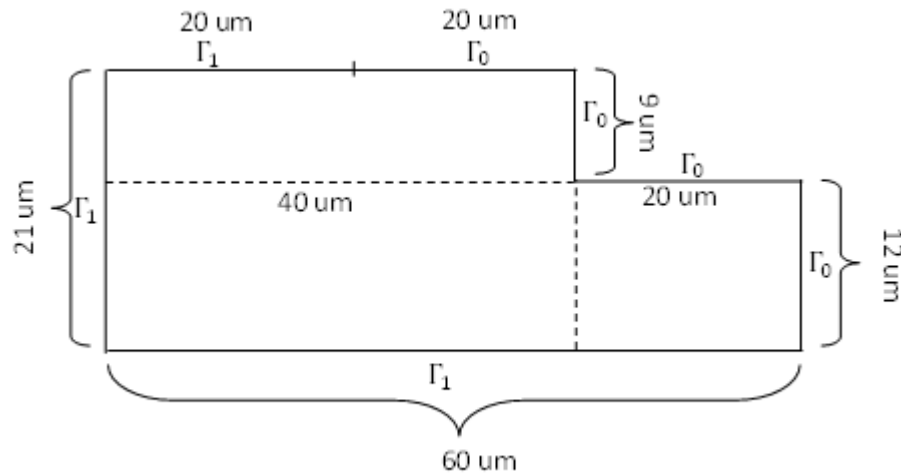


Figura 3.1: Domínio Ω do problema.

Para a criação extensiva a área representada será uma fazenda de aproximadamente 1080 hectares cercada (limitada), onde a região definida como Γ_0 é limitada por um grande rio, o que permite a transposição somente da mosca, pois o besouro é guiado pelo odor das fezes e o movimento do vento pelo rio não permite a transposição do cheiro. A limitação Γ_1 são cercas que a mosca-dos-chifres e o besouro atravessam livremente.

Para a criação em confinamento será usado no mpdelo um curral fechado com aproximadamente $1080m^2$, a região Γ_0 é uma área limitada por telas o qual não permite a transposição do besouro, mas permite a passagem da mosca, a região Γ_1 são cercas e cochos que impossibilitam somente a passagem do gado.

Neste contexto, e considerando as condições iniciais abaixo, as condições de contorno para o gado será a de Neumann homogênea para toda fronteira. Para a mosca assumiremos a condição de Robin para toda fronteira e para o besouro será Neumann homogênea em Γ_0 e a condição de Robin para Γ_1 , ficando da seguinte forma,

- Para a rês:

⊖ Condição de contorno

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_{\partial \Omega} = 0, (x, y) \in \partial \Omega \text{ e}$$

⊖ Condição inicial

$$R(x, y, 0) = R_0(x, y) = r_0, (x, y) \in \Omega.$$

- Para a mosca-dos-chifres:

⊖ Condição de contorno, $t \in J$

$$-\alpha_M \left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_0} = k_0 M \text{ e } -\alpha_M \left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1} = k_1 M, \text{ com } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial \Omega.$$

⊖ Condição Inicial

$$M(x, y, 0) = M_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in \partial \Omega \\ m_0, & \text{se } (x, y) \in \Omega \end{cases}.$$

- Para o besouro:

⊖ Condição de contorno, $t \in J$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_0} = 0 \text{ e } -\alpha_B \left. \frac{\partial B}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1} = k_B B, \text{ com } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial \Omega$$

⊖ Condição Inicial

$$B(x, y, 0) = B_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in \partial \Omega \\ b_0, & \text{se } (x, y) \in \Omega \end{cases}.$$

Tendo em vista que o sistema de equações diferenciais parciais não lineares não apresenta, até o momento, uma solução analítica, estaremos buscando uma solução aproximada através de um método numérico. O método numérico escolhido para este trabalho é o Método de Elementos Finitos. Para o desenvolvimento do método temos que trabalhar com a formulação variacional do problema, utilizando o Método de Galerkin para tratar as variáveis espaciais e o Método de Crank-Nicolson para as variáveis temporais. Este tratamento matemático é apresentado no capítulo seguinte.

Formulação Variacional e Discretização

4.1 - Formulação Clássica e Variacional

Para encontrar uma solução aproximada do sistema (3.7), observa-se que o sistema não tem uma solução analítica. A aproximação da parte espacial da solução será obtida usando o Método de Elementos Finitos. Para este método é necessário transformar o sistema encontrado no capítulo anterior (formulação forte) em uma formulação variacional (formulação fraca).

Nesta transformação trabalha-se com o espaço de funções quadrado integráveis, no sentido de Lebesgue, com um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotado por

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ com } \int \int_{\Omega} [u(x, y)]^2 d\Omega < +\infty \right\},$$

onde o produto interno e a norma serão definidos como:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int \int_{\Omega} u(x, y) v(x, y) d\Omega$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 d\Omega} = (u, u)_{L^2(\Omega)}^{1/2},$$

para u e $v \in L^2(\Omega)$.

Seja $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções quadrado integráveis com derivadas parciais de primeira ordem no sentido das distribuições quadrado integráveis:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}$$

com o produto interno e a norma definida como

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$, onde $(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$.

Nesta mudança aproximaremos a solução de (3.7), considerando as variáveis espacial e temporal no espaço:

$$u = u(x, y, t) \in V = \left\{ u \in L^2(J : H^1(\Omega)) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2, \forall J = (0, T] \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

$$v = v(x, y) \in X = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}, \text{ com } H_o^1(\Omega) \subset X \subset H^1(\Omega) \text{ e,}$$

assim,

$$(u, v)_X = \int \int_{\Omega} u v d\Omega, \text{ para } X_{\Omega} = \{v(x, y) \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}, \quad (4.1)$$

o qual será denotado como

$$(u, v) = (u, v)_X$$

.

Para a formulação variacional do sistema (3.8) multiplicam-se as equações por $v \in X$. Inicialmente, faz-se a substituição separadamente em cada equação, para depois estruturá-las no sistema. Assim a primeira equação (gado) será

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}, v \right) = \lambda_R(R, v) - \mu_R(R, v) - \mu_{RM}(RM, v) \quad (4.2)$$

ou

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial t} v d\Omega = \lambda_R \int \int_{\Omega} R v d\Omega - \mu_R \int \int_{\Omega} R v d\Omega - \mu_{RM} \int \int_{\Omega} R M v d\Omega. \quad (4.3)$$

Para a equação da mosca,

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) + w_1 \frac{\partial M}{\partial x} + w_2 \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda_M M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R} \right) - \mu_{MB} MB + \mu_{MR} MR \text{ tem se}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial M}{\partial t}, v \right) - \alpha_M \left(\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right), v \right) + \left(w_1 \frac{\partial M}{\partial x}, v \right) + \left(w_2 \frac{\partial M}{\partial y}, v \right) = \\ & = \lambda_M \left(M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R} \right), v \right) - \mu_{MB} (MB, v) + \mu_{MR} (MR, v) \end{aligned} \quad , \quad (4.4)$$

ou

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial t} v d\Omega - \alpha_M \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) v d\Omega + \iint_{\Omega} \left(w_1 \frac{\partial M}{\partial x} v \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \left(w_2 \frac{\partial M}{\partial y} v \right) d\Omega \\ & = \lambda_M \iint_{\Omega} M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R} \right) v d\Omega - \mu_{MB} \iint_{\Omega} MB v d\Omega + \mu_{MR} \iint_{\Omega} MR v d\Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

Trabalhando com a integral do Laplaciano através do Teorema de Green, temos:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) v d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} v d\Omega + \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} v d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial M}{\partial \eta} v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla M \nabla v) d\Omega,$$

Como $v \in X = \{v(x, y) \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$ e, de acordo com as condições de contorno $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = k_0 M \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = \frac{-k_0 M}{\alpha_M}$ e $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = k_1 M \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{k_1 M}{-\alpha_M}$ calculando e fazendo a substituição na equação anterior,

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right) v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla M \nabla v) d\Omega = \oint_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \underbrace{v}_0 d\gamma + \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right) v d\gamma - \\ & - \iint_{\Omega} (\nabla M \nabla v) d\Omega = \oint_{\Gamma_1} \left(-\frac{K_1 M}{\alpha_M} \right) v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla M \nabla v) d\Omega = \frac{-K_1}{\alpha_M} \oint_{\Gamma_1} (Mv) d\gamma - \\ & - \iint_{\Omega} (\nabla M \nabla v) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Fazendo a substituição na equação (4.5),

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial t} v d\Omega + K_1 \oint_{\Gamma_1} (Mv) d\gamma + \alpha_M \iint_{\Omega} (\nabla M \nabla v) d\Omega + \iint_{\Omega} \left(w_1 \frac{\partial M}{\partial x} v \right) d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \left(w_2 \frac{\partial M}{\partial y} v \right) d\Omega = \lambda_M \iint_{\Omega} M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R} \right) v d\Omega - \mu_{MB} \iint_{\Omega} MB v d\Omega + \\ & + \mu_{MR} \iint_{\Omega} MR v d\Omega, \end{aligned} \quad (4.7)$$

que também pode ser escrito como sendo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial M}{\partial t}, v \right) + K_1 \langle M, v \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_M (\nabla M, \nabla v) + w_1 \left(\frac{\partial M}{\partial x}, v \right) + w_2 \left(\frac{\partial M}{\partial y}, v \right) = \\ & = \lambda_M \left(M \left(1 - \frac{M+B}{\rho R} \right), v \right) - \mu_{MB} (MB, v) + \mu_{MR} (MR, v). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para a equação que modela o besouro,

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B} \right) + \mu_{BR} BR,$$

multiplicando por $v \in X$ teremos

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}, v \right) - \left(\left(\alpha_B \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) \right), v \right) = \left(\lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B} \right), v \right) + (\mu_{BR} BR, v)$$

ou

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial B}{\partial t} v d\Omega - \alpha_B \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) v d\Omega = \lambda_B \iint_{\Omega} B \left(1 - \frac{B}{K_B} \right) v d\Omega + \mu_{BR} \iint_{\Omega} BR v d\Omega. \quad (4.9)$$

Por Green novamente,

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) v d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial B}{\partial \eta} v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla B \nabla v) d\Omega$$

Considerando as condições de contorno definido em (??), temos que $\frac{\partial B}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = 0$ e $\frac{\partial B}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = -\frac{k_B B}{\alpha_B}$ e substituindo na expressão de Green,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) v d\Omega &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial B}{\partial \eta} v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla B \nabla v) d\Omega \\ &= \underbrace{\oint_{\Gamma_0} \frac{\partial B}{\partial \eta} v d\gamma}_0 + \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial B}{\partial \eta} v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla B \nabla v) d\Omega \\ &= - \oint_{\Gamma_1} \frac{k_B B}{\alpha_B} v d\gamma - \iint_{\Omega} (\nabla B \nabla v) d\Omega. \end{aligned}$$

Voltando e substituindo na equação (4.9),

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial B}{\partial t} v d\Omega + k_B \oint_{\Gamma_1} B v d\gamma + \alpha_B \iint_{\Omega} (\nabla B \nabla v) d\Omega = \lambda_B \iint_{\Omega} B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) v d\Omega + \mu_{BR} \iint_{\Omega} B R v d\Omega$$

ou

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}, v\right) + k_B \langle B, v \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_B (\nabla B, \nabla v) = \lambda_B \left(B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right), v\right) + \mu_{BR} (BR, v). \quad (4.10)$$

Considerando as formulações variacionais das equações (4.2), (4.4) e (4.10) o sistema (3.7) será escrito da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R}{\partial t}, v\right) - \lambda_R (R, v) + \mu_A (R, v) + \mu_{RM} (RM, v) \\ \left(\frac{\partial M}{\partial t}, v\right) + K_1 \langle M, v \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_M (\nabla M, \nabla v)_{\Omega} + \left(w_1 \frac{\partial M}{\partial x}, v\right) + \left(w_2 \frac{\partial M}{\partial y}, v\right) - \\ - \lambda_M \left(M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R}\right), v\right) + \mu_{MB} (MB, v) - \mu_{MR} (MR, v) \\ \left(\frac{\partial B}{\partial t}, v\right) + k_B \langle B, v \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_B (\nabla B, \nabla v) - \lambda_B \left(B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right), v\right) - \mu_{BR} (BR, v) \end{array} \right. = 0. \quad (4.11)$$

4.2 - Discretização espacial: Método de Galerkin

Com a mudança da formulação classica para a formulação variacional, busca-se uma solução aproximada do sistema, para isto, utiliza-se do Método de Galerkin para realizar o tratamento matemático das variáveis espaciais. Este método propõe a resolução aproximada de problemas na forma variacional em um subespaço de V de dimensão finita.

Seja X_h subespaço finito de X , tal que $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$ é uma base de X_h . O método de Galerkin consiste em construir funções R_h, M_h e $B_h \in X_h$, que se aproximem das soluções R, M e B do problema original e as equações serão escritas como

$$1. R_h(t, x, y) = \sum_{j=1}^N R_j(t) \varphi_{R_j}(x, y):$$

$$\bullet \frac{\partial R_h}{\partial x} = \sum_{j=1}^N R_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x};$$

$$\bullet \frac{\partial R_h}{\partial y} = \sum_{j=1}^N R_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y};$$

$$\bullet \frac{\partial R_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{dR_j}{dt} \varphi_j.$$

$$2. \quad M_h(t, x, y) = \sum_{j=1}^N M_j(t) \varphi_{M_j}(x, y):$$

$$\bullet \quad \frac{\partial M_h}{\partial x} = \sum_{j=1}^N M_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x};$$

$$\bullet \quad \frac{\partial M_h}{\partial y} = \sum_{j=1}^N M_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y};$$

$$\bullet \quad \frac{\partial M_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{dM_j}{dt} \varphi_j.$$

$$3. \quad B_h(t, x, y) = \sum_{j=1}^N B_j(t) \varphi_{B_j}(x, y):$$

$$\bullet \quad \frac{\partial B_h}{\partial x} = \sum_{j=1}^N B_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x};$$

$$\bullet \quad \frac{\partial B_h}{\partial y} = \sum_{j=1}^N B_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y};$$

$$\bullet \quad \frac{\partial B_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{dB_j}{dt} \varphi_j.$$

Considerando o subespaço $X_h \subset X$, o sistema de equações (4.11) passará a ser

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R_h}{\partial t}, v_h \right) - \lambda_R(R_h, v_h) + \mu_A(R_h, v_h) + \mu_{RM}(R_h M_h, v_h) = 0 \\ \left(\frac{\partial M_h}{\partial t}, v_h \right) + K_1 \langle M_h, v_h \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_M(\nabla M_h, \nabla v_h) + w_1 \left(\frac{\partial M_h}{\partial x}, v_h \right) + w_2 \left(\frac{\partial M_h}{\partial y}, v_h \right) - \\ - \lambda_M \left(M_h \left(1 - \frac{M_h + \theta B_h}{\rho R_h} \right), v_h \right) + \mu_{MB}(M_h B_h, v_h) - \mu_{MR}(M_h R_h, v_h) = 0 \\ \left(\frac{\partial B_h}{\partial t}, v_h \right) + k_B \langle B_h, v_h \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_B(\nabla B_h, \nabla v_h) - \lambda_B \left(B_h \left(1 - \frac{B_h}{K_B} \right), v_h \right) - \\ - \mu_{BR}(B_h R_h, v_h) = 0 \end{array} \right. , \quad (4.12)$$

que pode ser escrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \frac{dR_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i) - \lambda_R \sum_{j=1}^N R_j (\varphi_j, \varphi_i) + \mu_R \sum_{j=1}^N R_j (\varphi_j, \varphi_i) + \mu_{RM} \sum_{j=1}^N R_j \\ \sum_{k=1}^N M_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0 \\ \sum_{j=1}^N \frac{dM_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i) + K_1 \sum_{j=1}^N M_j \langle \varphi_{M_j}, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_M \sum_{j=1}^N M_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + w_1 \sum_{j=1}^N M_j \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) + w_2 \sum_{j=1}^N M_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) - \lambda_M \sum_{j=1}^N M_j (\varphi_j, \varphi_i) + \lambda_M \sum_{j=1}^N M_j \varphi_j \\ \left(\frac{\sum_{l=1}^N M_l \varphi_l + \sum_{k=1}^N \theta B_k \varphi_k}{\rho R}, \varphi_i \right) + \mu_{MB} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_j B_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \\ - \mu_{MR} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_j R_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0 \\ \sum_{j=1}^N \frac{dB_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i) + k_B \sum_{j=1}^N B_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_B \sum_{j=1}^N B_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \lambda_B \sum_{j=1}^N B_j (\varphi_j, \varphi_i) + \\ + \frac{\lambda_B}{K_B} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N B_k B_j (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \mu_{BR} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N B_j R_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

4.3 - Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson

Para a realização da discretização da parte temporal o método utilizado será o de Crank-Nicolson. Este método consiste em usar as aproximações abaixo

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) + u_j(t_n)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t}$$

ambas com aproximação na ordem Δt^2 estimadas em $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Para o gado (R), a mosca (M) e o besouro (B), serão adotadas as notações

$$\bullet \quad R_j^{n+1} = R_j(t_{n+1}) \cong R(x_j, y_j, t_{n+1}) \quad \text{e} \quad R_j^{n+\frac{1}{2}} = R_j(t_{n+\frac{1}{2}}) \cong R(x_j, y_j, t_{n+\frac{1}{2}}),$$

logo,

$$R_j^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{R_j^{n+1} + R_j^n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dR_j}{dt}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{R_j^{n+1} - R_j^n}{\Delta t};$$

- $M_j^{n+1} = M_j(t_{n+1}) \cong M(x_j, y_j, t_{n+1})$ e $M_j^{n+\frac{1}{2}} = M_j(t_{n+\frac{1}{2}}) \cong M(x_j, y_j, t_{n+\frac{1}{2}})$,
logo,

$$M_j^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dM_j^{n+\frac{1}{2}}}{dt} \cong \frac{M_j^{n+1} - M_j^n}{\Delta t};$$

- $B_j^{n+1} = B_j(t_{n+1}) \cong B(x_j, y_j, t_{n+1})$ e $B_j^{n+\frac{1}{2}} = B_j(t_{n+\frac{1}{2}}) \cong B(x_j, y_j, t_{n+\frac{1}{2}})$.

$$B_j^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{B_j^{n+1} + B_j^n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dB_j^{n+\frac{1}{2}}}{dt} \cong \frac{B_j^{n+1} - B_j^n}{\Delta t}.$$

Para desenvolver o método de Crank-Nicolson, substituem-se as equações acima no sistema (4.13). Para isto, trabalha-se separadamente cada equação para posteriormente juntá-las em um sistema final, que fica

1. Para a equação do gado

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{dR_j^{n+\frac{1}{2}}}{dt}(\varphi_j, \varphi_i) - \lambda_R \sum_{j=1}^N R_j^{n+\frac{1}{2}}(\varphi_j, \varphi_i) + \mu_R \sum_{j=1}^N R_j^{n+\frac{1}{2}}(\varphi_j, \varphi_i) + \\ & + \mu_{RM} \sum_{j=1}^N R_j^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^N M_k^{n+\frac{1}{2}}(\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0; \\ & \sum_{j=1}^N \frac{R_j^{n+1} - R_j^n}{\Delta t}(\varphi_j, \varphi_i) - \lambda_R \sum_{j=1}^N \frac{R_j^{n+1} + R_j^n}{2}(\varphi_j, \varphi_i) + \mu_R \sum_{j=1}^N \frac{R_j^{n+1} + R_j^n}{2}(\varphi_j, \varphi_i) + \\ & + \mu_{RM} \sum_{j=1}^N \frac{R_j^{n+1} + R_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{M_k^{n+1} + M_k^n}{2}(\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0; \\ & \sum_{j=1}^N R_j^{n+1} \left[\left(1 + \frac{(\mu_R - \lambda_R)\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{\mu_{RM}\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{M_k^{n+1} + M_k^n}{2}(\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right] = \\ & = \sum_{j=1}^N R_j^n \left[\left(1 - \frac{(\mu_R - \lambda_R)\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) - \frac{\mu_{RM}\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{M_k^{n+1} + M_k^n}{2}(\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right]. \end{aligned}$$

2. Para equação da mosca

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{j=1}^N \frac{dM_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i) + K_1 \sum_{j=1}^N M_j \langle \varphi_{M_j}, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_M \sum_{j=1}^N M_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + w_1 \sum_{j=1}^N M_j \\
& \quad \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) + w_2 \sum_{j=1}^N M_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) - \lambda_M \sum_{j=1}^N M_j (\varphi_j, \varphi_i) + \lambda_M \\
& \quad \left(\sum_{j=1}^N M_j \frac{\sum_{l=1}^N M_l \varphi_l + \sum_{k=1}^N B_k \varphi_k}{\rho \sum_{p=1}^N R_p \varphi_p}, (\varphi_j, \varphi_i) \right) + \mu_{MB} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_j B_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \\
& \quad - \mu_{MR} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_j R_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0; \\
& \bullet \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} - M_j^n}{\Delta t} (\varphi_j, \varphi_i) + K_1 \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_M \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \\
& \quad (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + w_1 \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) + w_2 \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) - \\
& \quad - \lambda_M \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} (\varphi_j, \varphi_i) + \lambda_M \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \\
& \quad \left(\frac{\sum_{l=1}^N \frac{M_l^{n+1} + M_l^n}{2} \varphi_l + \sum_{k=1}^N \left(\frac{B_k^{n+1} + B_k^n}{2} \right) \varphi_k}{\rho \sum_{p=1}^N \left(\frac{R_p^{n+1} + R_p^n}{2} \right) \varphi_p} (\varphi_j, \varphi_i) \right) + \\
& \quad + \mu_{MB} \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{B_k^{n+1} + B_k^n}{2} (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \mu_{MR} \sum_{j=1}^N \frac{M_j^{n+1} + M_j^n}{2} \\
& \quad \sum_{k=1}^N \frac{R_k^{n+1} + R_k^n}{2} (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{j=1}^N M_j^{n+1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{K_1 \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \frac{\alpha_M \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{w_1 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) + \frac{w_2 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) + \frac{\mu_{MB} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \\
& - \frac{\mu_{MR} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \\
& \left. \left(\frac{\sum_{l=1}^N (M_l^{n+1} + M_l^n) \varphi_l + \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) \varphi_k}{\rho \sum_{p=1}^N (R_p^{n+1} + R_p^n) \varphi_p} (\varphi_j, \varphi_i) \right) \right] = \\
& = \sum_{j=1}^N M_j^n \left[\left(1 + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) - \frac{K_1 \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} - \frac{\alpha_M \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{w_1 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) - \frac{w_2 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) - \frac{\mu_{MB} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) + \\
& + \frac{\mu_{MR} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \\
& \left. \left(\frac{\sum_{l=1}^N (M_l^{n+1} + M_l^n) \varphi_l + \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) \varphi_k}{\rho \left(\sum_{l=1}^N R_p^{n+1} + R_p^n \right) \varphi_p} (\varphi_j, \varphi_i) \right) \right].
\end{aligned}$$

3. Para a equação do besouro

$$\bullet \sum_{j=1}^N \frac{dB_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i) + k_B \sum_{j=1}^N B_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_B \sum_{j=1}^N B_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \lambda_B \sum_{j=1}^N B_j$$

$$(\varphi_j, \varphi_i) + \frac{\lambda_B}{K_B} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N B_k B_j (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \mu_{BR} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N B_j R_k (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0;$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{B_j^{n+1} - B_j^n}{\Delta t} (\varphi_j, \varphi_i) + k_B \sum_{j=1}^N \frac{B_j^{n+1} + B_j^n}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \alpha_B \sum_{j=1}^N \frac{B_j^{n+1} + B_j^n}{2}$$

$$(\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \lambda_B \sum_{j=1}^N \frac{B_j^{n+1} + B_j^n}{2} (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{\lambda_B}{K_B} \sum_{j=1}^N \frac{B_j^{n+1} + B_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{B_k^{n+1} + B_k^n}{2}$$

$$(\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \mu_{BR} \sum_{j=1}^N \frac{B_j^{n+1} + B_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_k^{n+1} + R_k^n}{2} (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) = 0;$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N B_j^{n+1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_B \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{k_B \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \frac{\alpha_B \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_B \Delta t}{4 K_B} \sum_{K=1}^N (B_K^{n+1} + B_K^n) (\varphi_K \varphi_j, \varphi_i) - \frac{\mu_{BR} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right] = \\ & = \sum_{j=1}^N B_j^n \left[\left(1 + \frac{\lambda_B \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) - \frac{k_B \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} - \frac{\alpha_B \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda_B \Delta t}{4 K_B} \sum_{K=1}^N (B_K^{n+1} + B_K^n) (\varphi_K \varphi_j, \varphi_i) + \frac{\mu_{BR} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right]. \end{aligned}$$

Assim nosso sistema (4.13) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^N R_j^{n+1} \left[\left(1 + \frac{(\mu_R - \lambda_R)\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{\mu_{RM}\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{M_k^{n+1} + M_k^n}{2} (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right] \right. \\
 &= \sum_{j=1}^N R_j^n \left[\left(1 - \frac{(\mu_R - \lambda_R)\Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) - \frac{\mu_{RM}\Delta t}{2} \sum_{k=1}^N \frac{M_k^{n+1} + M_k^n}{2} (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right]; \\
 & \sum_{j=1}^N M_j^{n+1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{K_1 \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \frac{\alpha_M \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \frac{w_1 \Delta t}{2} \right. \\
 & \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) + \frac{w_2 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) + \frac{\mu_{MB} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \frac{\mu_{MR} \Delta t}{4} \\
 & \left. \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left(\frac{\sum_{l=1}^N (M_l^{n+1} + M_l^n) \varphi_l + \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) \varphi_k}{\rho \sum_{p=1}^N (R_p^{n+1} + R_p^n) \varphi_p} (\varphi_j, \varphi_i) \right) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^N M_j^n \left[\left(1 + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) - \frac{K_1 \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} - \frac{\alpha_M \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \frac{w_1 \Delta t}{2} \right. \\
 & \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i \right) - \frac{w_2 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right) - \frac{\mu_{MB} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) + \frac{\mu_{MR} \Delta t}{4} \\
 & \left. \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left(\frac{\sum_{l=1}^N (M_l^{n+1} + M_l^n) \varphi_l + \sum_{k=1}^N (B_k^{n+1} + B_k^n) \varphi_k}{\rho \left(\sum_{p=1}^N R_p^{n+1} + R_p^n \right) \varphi_p} (\varphi_j, \varphi_i) \right) \right]; \\
 & \sum_{j=1}^N B_j^{n+1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_B \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{k_B \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} + \frac{\alpha_B \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \right. \\
 & \left. \frac{\lambda_B \Delta t}{4K_B} \sum_{K=1}^N (B_K^{n+1} + B_K^n) (\varphi_K \varphi_j, \varphi_i) - \frac{\mu_{BR} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right] = \\
 & \sum_{j=1}^N B_j^n \left[\left(1 + \frac{\lambda_B \Delta t}{2} \right) (\varphi_j, \varphi_i) - \frac{k_B \Delta t}{2} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1} - \frac{\alpha_B \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - \right. \\
 & \left. \frac{\lambda_B \Delta t}{4K_B} \sum_{K=1}^N (B_K^{n+1} + B_K^n) (\varphi_K \varphi_j, \varphi_i) + \frac{\mu_{BR} \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (R_k^{n+1} + R_k^n) (\varphi_j \varphi_k, \varphi_i) \right].
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Matricialmente, o sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, considerando A_i e B_i matrizes com $i = 1, 2$ e 3 , ficará

$$\begin{aligned}
 A_1 (M^{(n+1)}, M^{(n)}) R^{(n+1)} &= B_1 (M^{(n+1)}, M^{(n)}) R^{(n)} \\
 A_2 (M^{(n+1)}, M^{(n)}, B^{(n+1)}, B^{(n)}, R^{(n+1)}, R^{(n)}) M^{(n+1)} &= B_2 (M^{(n+1)}, M^{(n)}, B^{(n+1)}, B^{(n)}, R^{(n+1)}, R^{(n)}) M^{(n)} \\
 A_3 (B^{(n+1)}, B^{(n)}, R^{(n+1)}, R^{(n)}) B^{(n+1)} &= B_3 (B^{(n+1)}, B^{(n)}, R^{(n+1)}, R^{(n)}) B^{(n)}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.4 - Malha da região Ω

A construção da malha se dá com a subdivisão da região Ω em triângulos de acordo com a figura abaixo

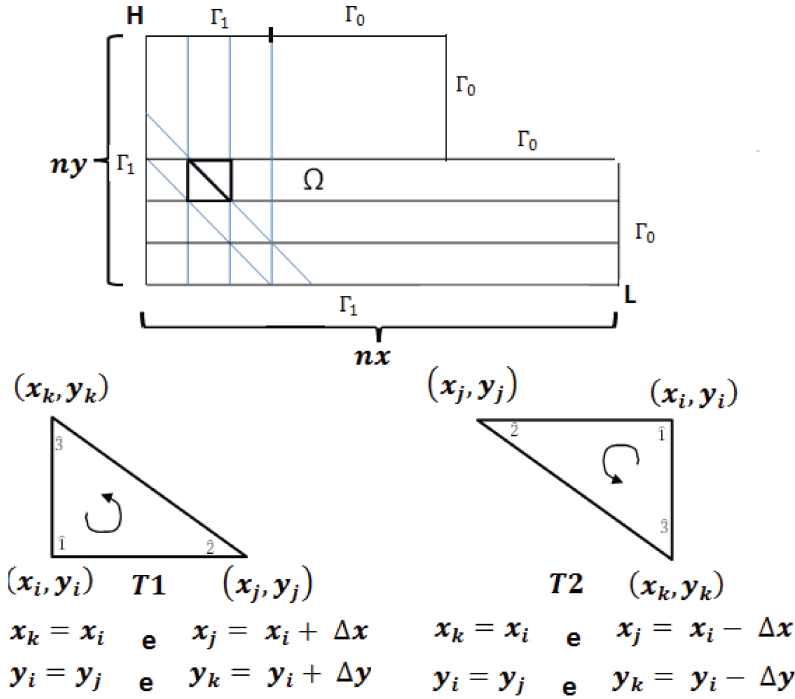


Figura 4.1: Malha da região Ω e triângulos de referência.

Nesta subdivisão da região Ω o objetivo será de trabalhar com triângulos do tipo 1 definido como T_1 e do tipo 2 que definiremos como T_2 , onde

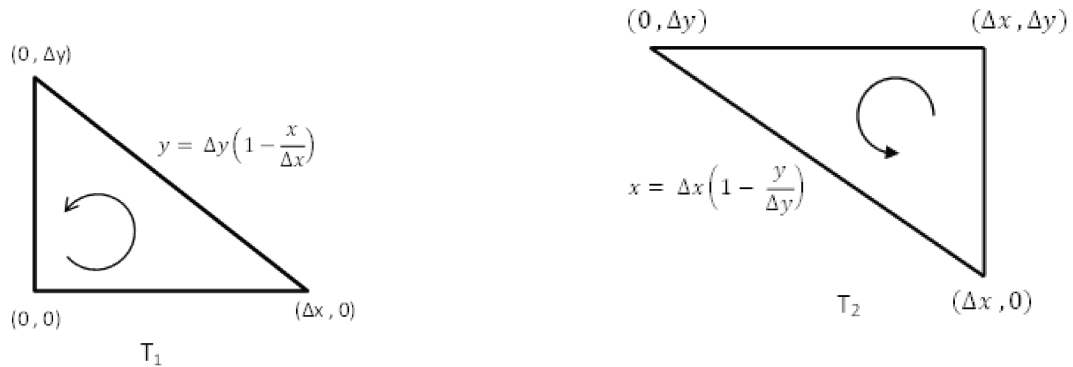


Figura 4.2: Triângulos de referência do tipo 1 e tipo 2.

Em T_1 , observa-se que

$$\varphi_1(x, y) = 1 - \frac{x - x_i}{\Delta x} - \frac{y - y_i}{\Delta y} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x_i, y_i) &= 1 \\ \varphi_1(x_i + \Delta x, y_i) &= 0 \\ \varphi_1(x_i, y_i + \Delta y) &= 0 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{x - x_i}{\Delta x} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_2(x_i, y_i) & = 0 \\ \varphi_2(x_i + \Delta x, y_i) & = 1 \\ \varphi_2(x_i, y_i + \Delta y) & = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{y - y_i}{\Delta y} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_3(x_i, y_i) & = 0 \\ \varphi_3(x_i + \Delta x, y_i) & = 0 \\ \varphi_3(x_i, y_i + \Delta y) & = 1 \end{cases}$$

Considerando que $(x_i, y_i) = (0, 0)$ e assumindo que $\varphi_1(x, y) = \varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y) = \varphi_2(x, y)$ e $\varphi_3(x, y) = \varphi_3(x, y)$ teremos

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{y}{\Delta y} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Para T_2

$$\varphi_1(x, y) = \frac{x - (x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{y - (y_i - \Delta y)}{\Delta y} - 1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x_i, y_i) & = 1 \\ \varphi_1(x_i - \Delta x, y_i) & = 0 \\ \varphi_1(x_i, y_i - \Delta y) & = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{-x + x_i}{\Delta x} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_2(x_i, y_i) & = 0 \\ \varphi_2(x_i - \Delta x, y_i) & = 1 \\ \varphi_2(x_i, y_i - \Delta y) & = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{-y + y_i}{\Delta y} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_3(x_i, y_i) & = 0 \\ \varphi_3(x_i - \Delta x, y_i) & = 0 \\ \varphi_3(x_i, y_i - \Delta y) & = 1 \end{cases}$$

e as funções $\varphi_i(x, y)$ para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_2(x, y) &= 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3(x, y) &= 1 - \frac{y}{\Delta y} \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.5 - Matriz de rigidez

Para o desenvolvimento, temos que observar que $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$ é uma base finita de $X_h \subset X$, e que, para $u, v \in X \implies (u, v)_X = \iint_{\Omega} uv d\Omega$. Assim, considerando as equações (4.16) e (4.17) para os triângulos $(T)_1$ e $(T)_2$ teremos as seguintes matrizes,

- $(\varphi_i, \varphi_j)_{X_h} = \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega$ para i e $j = 1, 2, 3$, ou seja,

$$M(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} \end{bmatrix};$$

- $(\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j)_{X_h} = \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$ para i e $j = 1, 2, 3$, então

$$M(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) = \frac{\Delta x \Delta y}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} & -\frac{1}{\Delta^2 x} & -\frac{1}{\Delta^2 y} \\ -\frac{1}{\Delta^2 x} & \frac{1}{\Delta^2 x} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta^2 y} & 0 & \frac{1}{\Delta^2 y} \end{bmatrix};$$

- $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i\right)_{X_h} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i\right) d\Omega$ para i e $j = 1, 2, 3$, então

$$M\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i\right) = \frac{\Delta y}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

- $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i\right)_{X_h} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i\right) d\Omega$ para i e $j = 1, 2, 3$, então

$$M\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i\right) = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- $(\varphi_1 \varphi_i, \varphi_j)_{X_h} = \iint_{\Omega} (\varphi_1 \varphi_i, \varphi_j) d\Omega$ para k, i e $j = 1, 2, 3$, então

$$M(\varphi_1 \varphi_i, \varphi_j) = \frac{\Delta x \Delta y}{20} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$M(\varphi_2\varphi_i, \varphi_j) = \frac{\Delta x \Delta y}{20} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$M(\varphi_3\varphi_i, \varphi_j) = \frac{\Delta x \Delta y}{20} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

A construção das matrizes de rigidez são apresentadas em anexo *B*.

Para experimentar o modelo, foram desenvolvidas simulações computacionais em ambiente Matlab. Os resultados encontrados serão apresentados no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Simulações, análise e resultados

Para testar o modelo foram realizadas simulações computacionais estruturadas em ambiente Matlab. As simulações foram testadas com valores estimados com o intuito de verificar o comportamento do sistema de equações.

Os coeficientes encontrados contribuíram para estruturar dois cenários para simular a situação apresentado pelo modelo. O primeiro cenário irá retratar a criação intensiva ou criação em confinamento, em que o objetivo principal é para o gado de corte, principalmente no período de abate. O segundo cenário irá representar a criação extensiva e, nesse caso a, área trabalhada é extensa e o gado vive solto e se alimenta quase que exclusivamente de pasto.

No primeiro teste mantivemos o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, apresentado no capítulo 3, onde "um" é abreviatura de unidade de medida. A figura abaixo mostra as medidas assumidas nas simulações.

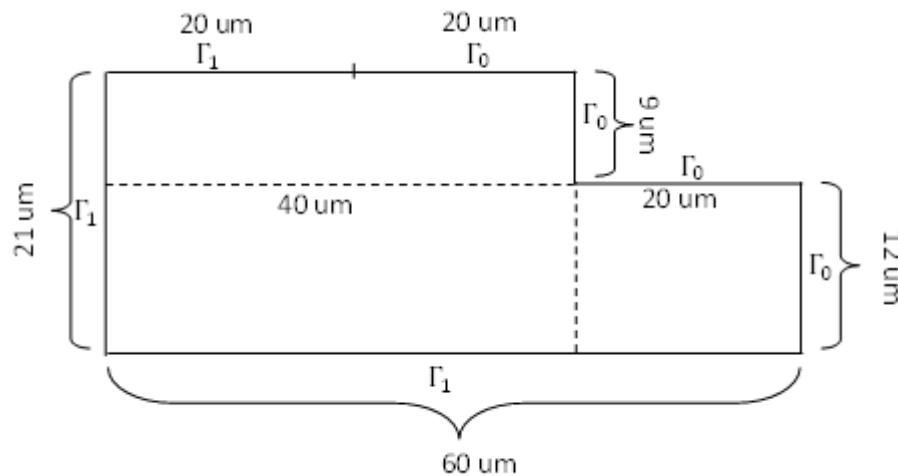


Figura 5.1: Domínio das simulações.

Assumindo os valores

- a. Criação intensiva, crescimento constante: $\lambda_r = 10^{-4}; \mu_r = 10^{-9}; \mu_{rm} = 2.10^{-4};$
- b. Criação extensiva, crescimento variando: $\lambda_r = 1, 3.10^{-2}; \mu_r = 10^{-9}; \mu_{rm} = 2.10^{-4};$
- $\alpha_m = 1, 5.10^{-1}; \mu_m = 4.10^{-4}; \lambda_m = 2.10^{-1}; \mu_{mb} = 4, 5.10^{-2}; \mu_{mr} = 9.10^{-2}; \rho_m = 4; w1 = 5.10^{-2}; w2 = 8.10^{-2};$
- $\alpha_b = 5.10^{-2}; \mu_b = 2.10^{-4}; \mu_{br} = 3.10^{-3}; \lambda_b = 6.10^{-2}; K_B = 5; k_B = 2.10^{-1}.$

Para o sistema (3.8) dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \mu_{RM} R M \\ \frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) + w_1 \frac{\partial M}{\partial x} + w_2 \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda_M M \left(1 - \frac{M + \theta B}{\rho R} \right) - \\ \quad - \mu_{MB} M B + \mu_{MR} M R \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{K_B} \right) + \mu_{BR} B R, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

com as condições iniciais definidas como:

- $R_0 = 100$ cabeças de gado;
- $M_0 = 3000$ moscas, média de 30 moscas por cabeça de gado;
- $B_0 = 1000$ besouros, média de 10 besouros por cabeça de gado;

Mesmo como simulações teste o tratamento será realizado como se se tratasse do modelo real. O sistema de confinamento é utilizado principalmente para o gado de corte. Em seu período de engorda ele é mantido por aproximadamente 90 dias confinado, num local onde há grande concentração de animais num mesmo ambiente. A extração de animais deste ambiente é realizada no momento do abate e, portanto, no sistema o coeficiente μ_R retrata a mortalidade pelo abate de animais, já o coeficiente μ_{RM} é a influência que a mosca provoca no gado, porém não provoca a sua morte.

A área do domínio Ω é de $1080m^2$ ($um = m$) e cada cabeça de gado ocupa entre $9m^2$ a $12m^2$, então a quantidade inicial de gado R_0 foi de 100 cabeças de gado. Para a Mosca-dos-chifres e o besouro não há um estudo que defina uma relação com a área, como a literatura apresenta que no Brasil a infestação média é de cerca de 80 mosca por animal.

Projetou-se então uma quantidade inicial de 30 mosca por animal, ou seja, $M_0 = 3000$. A quantidade de besouro se limitou à $\frac{1}{3}$ da quantidade de moscas no ambiente, isto é, $R_0 = 1000$.

Como citado no capítulo 3, a fronteira definida como Γ_0 é estruturada com construção ou outro obstáculo que permite somente a passagem da mosca, portanto este contorno é tratado pela condição de Von Neumann homogênea para o besouro e pela condição de Robin para a mosca.

Considerando o período de 90 dias, projeta-se a iteração de 1000 passos no tempo para verificar os resultados. O gráfico abaixo representa a densidade populacional do besouro e da mosca-dos-chifres em dois nós (30 e 100) do domínio. Com estes valores não há crescimento populacional do gado e o gráfico apresenta a densidade populacional isolada de cada espécie de inseto.

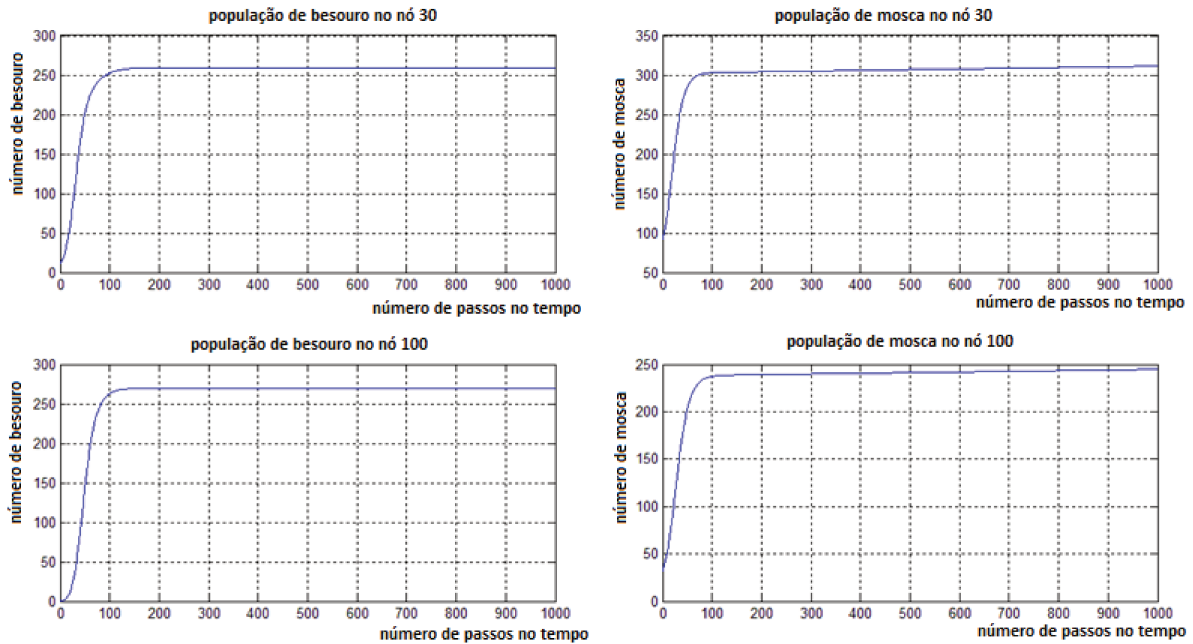


Figura 5.2: Simulação 1 para testar o sistema com crescimento populacional do besouro e da mosca.

Os gráficos apresentam o comportamento de um modelo Verhulstiano, com a capacidade de suporte limitando cada uma das espécies. Sob estas mesmas condições, em um nó diferente, o gráfico a seguir mostra como a presença do besouro prejudica o crescimento populacional da mosca-dos-chifres.

Os gráficos abaixo apresentam claramente como a existência de besouro no ambiente prejudica diretamente a densidade populacional da mosca-dos-chifres. Observa-se que a população da mosca vai se aproximando de zero, porém isto não implica necessari-

amente na sua extinção.

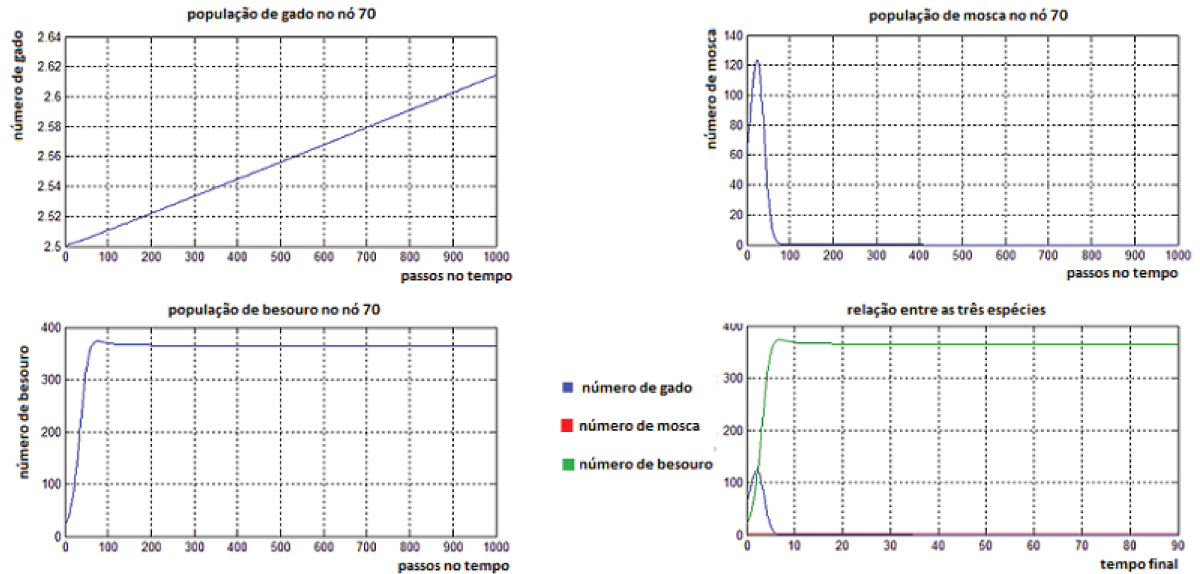


Figura 5.3: Simulação 1 relação entre as três espécies.

Testando a segunda condição em que ocorre a variação populacional do gado, o sistema se comportou conforme a figura abaixo.

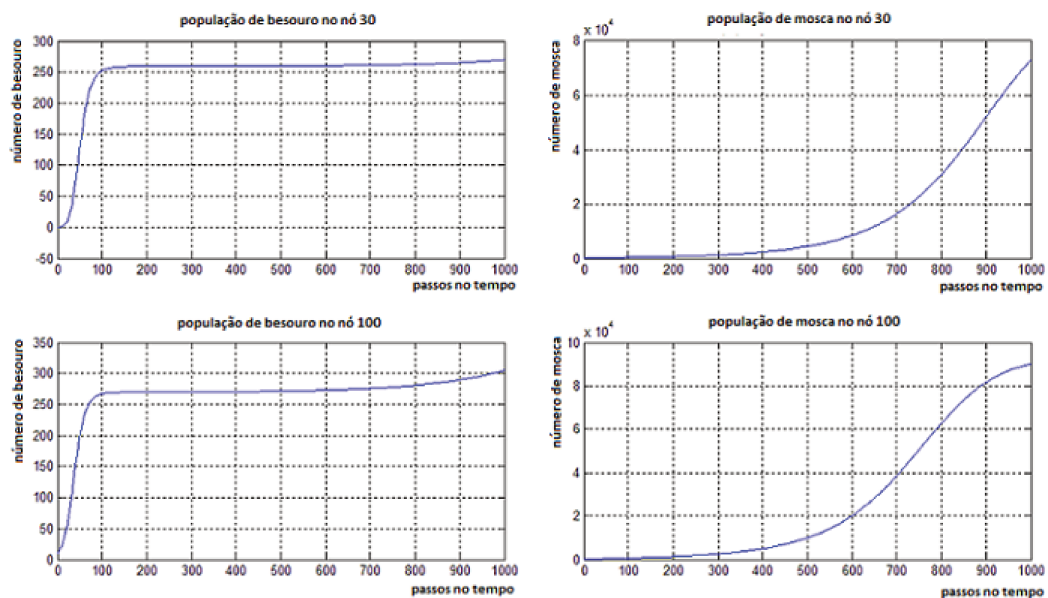


Figura 5.4: Simulação 2 para o crescimento populacional do besouro e da mosca.

É visível que o comportamento da população de besouro não é afetada pela variação populacional do gado. Por outro lado, a população de mosca cresce sem um limitante em sua capacidade de suporte. Este fato ocorre devido à capacidade de suporte depender do crescimento populacional do gado e, como esta população está crescendo,

aumenta a capacidade de suporte. O gráfico a seguir mostra como a relação entre as espécies afeta a densidade populacional de cada uma.

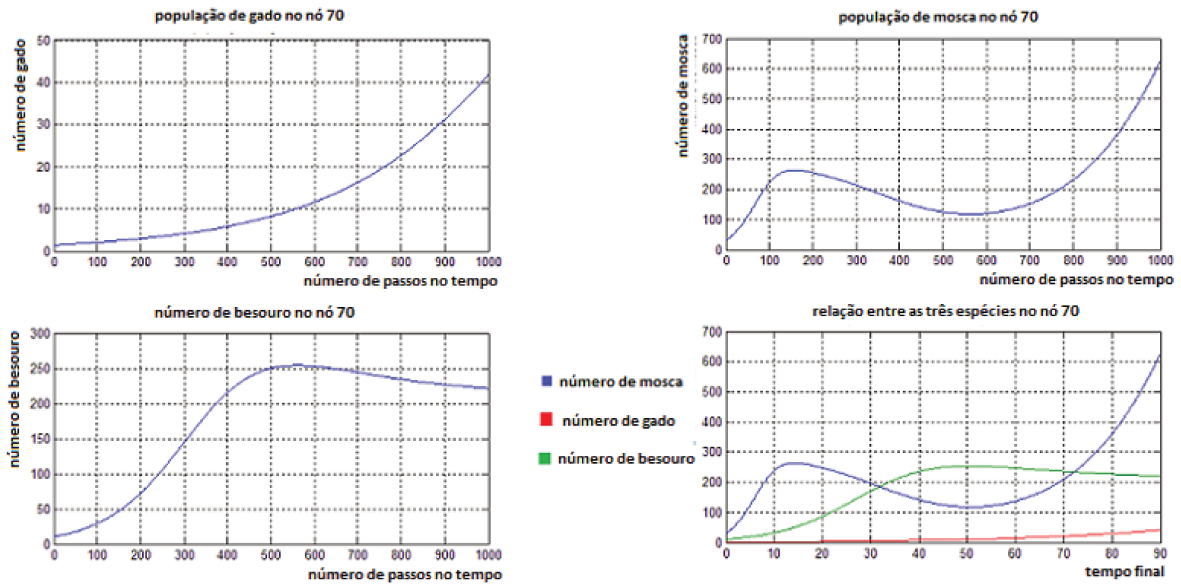


Figura 5.5: Simulação 2 relação entre as três espécies.

O quarto quadro mostra fortemente como a relação entre as espécies afeta a densidade populacional de cada uma. Enquanto o crescimento inicial da mosca é maior, o crescimento do besouro é menor. O crescimento populacional do besouro afeta negativamente a população de mosca, provocando um decaimento populacional da mosca, porém como a sua capacidade de suporte é limitada, este decaimento ocorre em um período apenas. Como a população de gado cresce, o ambiente torna-se propício para a reprodução e criação da mosca, o que provoca um grande crescimento populacional da mosca.

5.1 - Primeiro cenário

Os resultados apresentados nos testes foram satisfatórios, entendendo que as análises feitas são de situações que ocorrem em uma situação real. Para tratar o modelo de criação extensiva e intensiva modificaremos os valores dos coeficientes, principalmente α e μ da população da mosca e do besouro, isto pelo fato de estarem diretamente ligados com a área (domínio) e com o tempo. Os demais coeficientes permaneceram com os mesmos valores testados anteriormente.

Neste primeiro cenário, assume-se o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e os valores dos coeficientes para a criação de gado em confinamento, quando não há reprodução e nem mortalidade

natural do gado. A mortalidade representada no sistema é o abate e o acréscimo é devido à inclusão de novos animais adultos no ambiente. Os coeficientes terão os seguintes valores.

- $\lambda_r = 10^{-4}; \mu_r = 10^{-9}; \mu_{rm} = 2.10^{-4};$
- $\alpha_m = \frac{10^{-5}}{tf}; \mu_m = \frac{10^{-6}}{2 * tf}; \lambda_m = 1.10^{-1}; \mu_{mb} = 1.10^{-3}; \mu_{mr} = 1.10^{-7}; \rho_m = 2; w1 = 2.10^{-8}; w2 = 3.10^{-8};$
- $\alpha_b = \frac{3.10^{-6}}{tf}; \mu_b = \frac{3.10^{-7}}{2 * tf}; \mu_{br} = 3.10^{-8}; \lambda_b = 6.10^{-2}; K_B = 3; k_B = 1.$

Primeiramente apresentamos o comportamento da população de cada espécie com presença do gado.

Para a mosca, sem o crescimento populacional da rês:

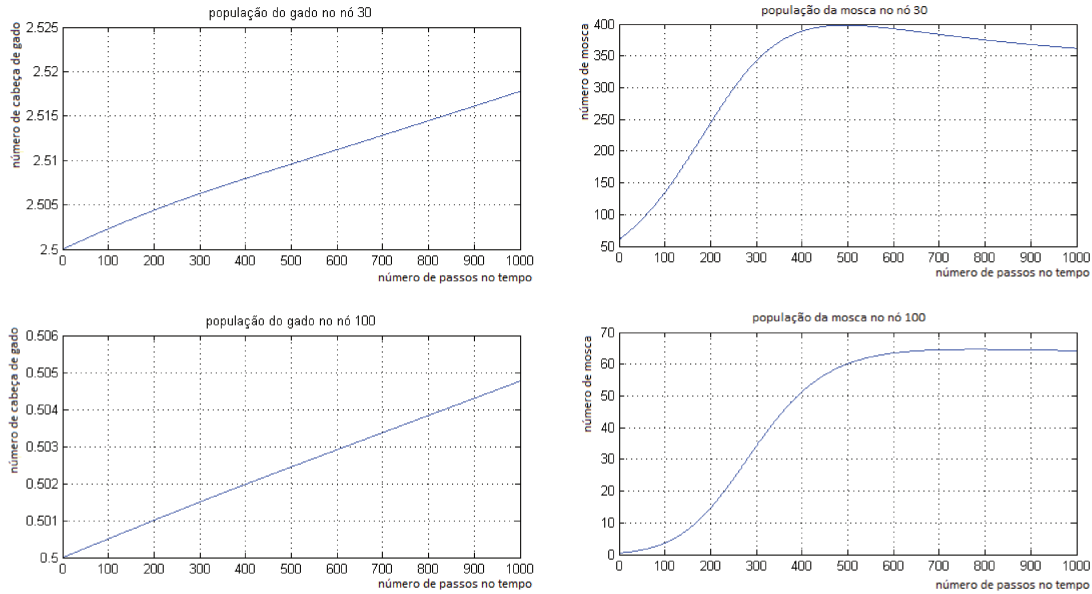


Figura 5.6: Cenário 1: Crescimento populacional da mosca.

Analisando os gráficos observamos que mesmo sem a variação na população do gado a presença de gado no local influencia a capacidade de suporte da mosca-dos-chifres. Observa-se que no nó 100 não há presença do gado, o que limita a capacidade em um valor menor que a capacidade de suporte apresentada no nó 30, onde há a presença de gado.

Para o besouro, o comportamento é diferente, pois este necessita da presença do gado, embora sua capacidade de suporte não dependa do gado.

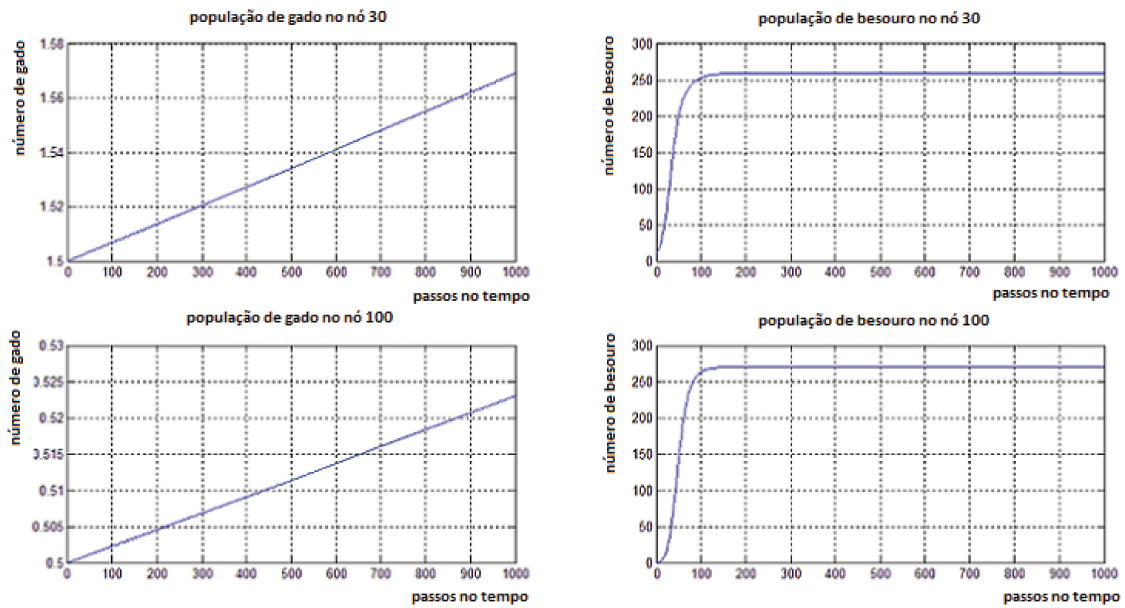


Figura 5.7: Cenário 1: Crescimento populacional do besouro.

O gráfico seguinte apresenta o comportamento das duas espécies nos mesmos nós anteriores.

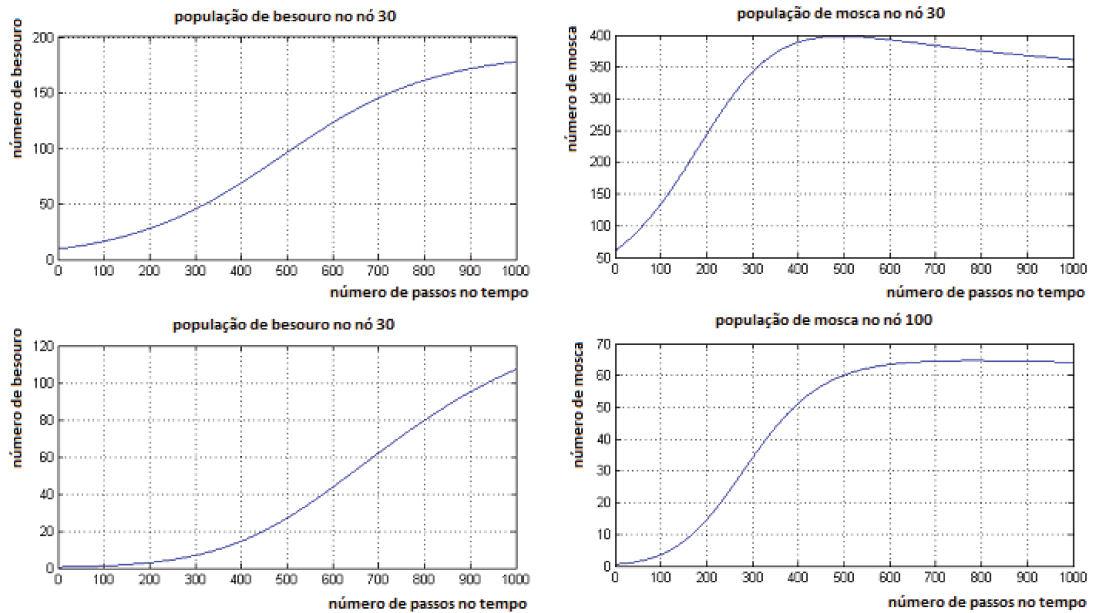


Figura 5.8: Cenário 1: Comparação das duas espécies.

O comportamento das duas espécies apresenta a característica de um modelo Verhulstiano com um crescimento populacional limitado por sua capacidade de suporte. A simulação envolvendo o sistema que trata as três espécies apresentou

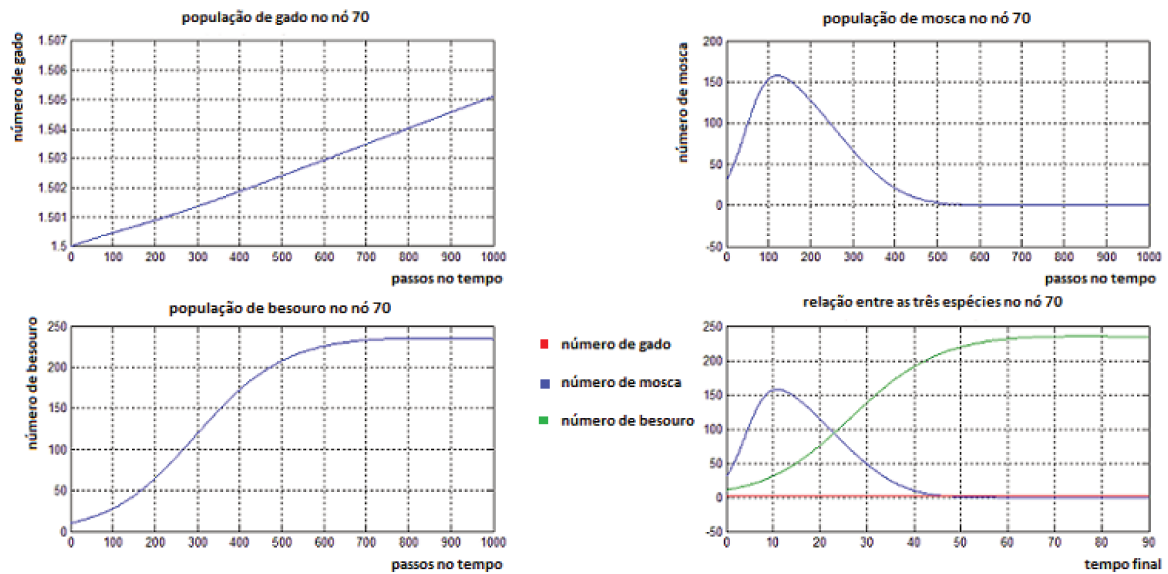


Figura 5.9: Cenário 1: Relação entre as três espécies.

O primeiro quadro representa a população do gado não tendo ocorrido a variação populacional na simulação. Conta com a condição inicial de apenas um animal no nó 70. No segundo e terceiro quadros temos o desenvolvimento populacional da mosca-dos-chifres e do besouro e, como nos casos anteriores, o besouro se aproxima de sua capacidade de suporte, o que não acontece com a mosca-dos-chifres, pois a mesma é afetada diretamente pelo crescimento populacional do besouro, levando à mosca a quase extinção neste ambiente. O último quadro apresenta o desenvolvimento populacional das três espécies, onde é visível o efeito que a presença de besouro provoca na população de moscas, o gráfico que representa a população de mosca se aproxima assintoticamente de zero.

Apesar de a simulação apresentar uma tendência à zero, o fato nem sempre ocorre desta forma, com a alteração do coeficiente λ_M o sistema apresentou um resultado diferente. Observamos que apesar de aproximar de zero, o equilíbrio de um ecossistema não está na eliminação de uma espécie. No quadro abaixo, a população de mosca-dos-chifres decresce para próximo de zero, mas não é zero, o processo mostra que o equilíbrio não está na extinção de uma das espécies e sim na coexistência das espécies.

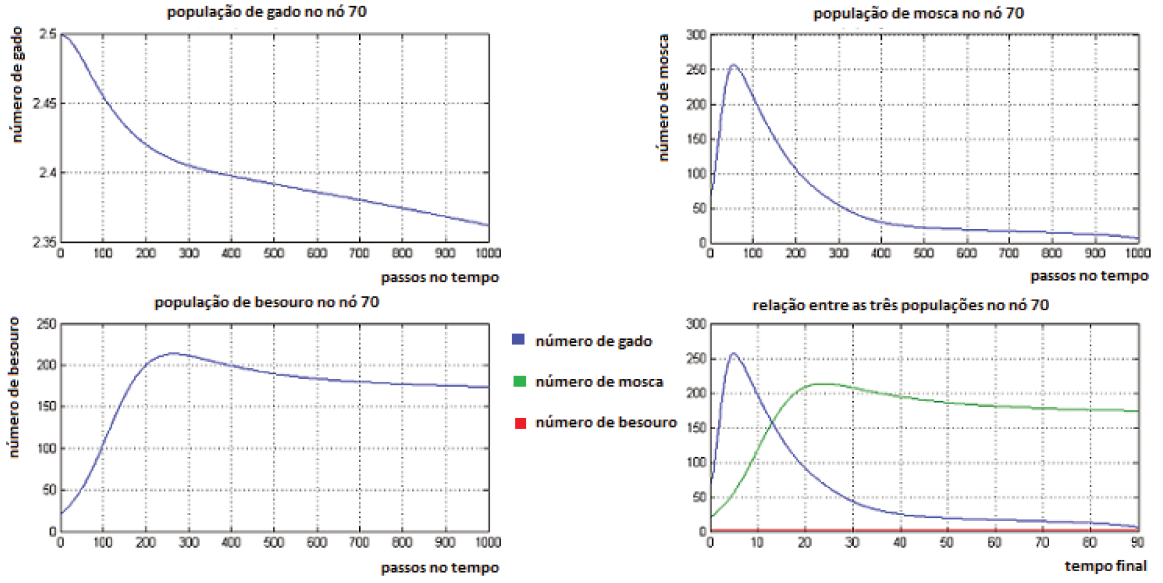


Figura 5.10: Cenário 1: Relação entre as três espécies.

5.2 - Segundo Cenário

No segundo cenário, assume-se o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com unidade de medida diferente do primeiro cenário, os valores para a criação extensiva de gado são maiores do que as de confinamento. O que será agora analisado é a relação existente na capacidade de suporte da mosca com o crescimento populacional do gado. Neste sentido, existe a mortalidade natural, bem como a procriação. Assim, modificaremos o coeficiente do gado para que ocorra a procriação e verificaremos o comportamento da população de mosca. Os coeficientes terão os seguintes valores.

- $\lambda_r = 1, 3 \cdot 10^{-2}; \mu_r = 10^{-9}; \mu_{rm} = 2 \cdot 10^{-4};$
- $\lambda_m = 10^{-1}; \alpha_m = \left(\frac{10^{-5}}{tf}\right); \mu_m = \left(\frac{10^{-6}}{2 * tf}\right); \mu_{mb} = 10^{-3}; \mu_{mr} = 10^{-7}; \rho_m = 2; w_1 = 2 \cdot 10^{-7}; w_2 = 3 \cdot 10^{-7};$
- $\lambda_b = 6 \cdot 10^{-2}; \alpha_b = \left(\frac{3 \cdot 10^{-6}}{tf}\right); \mu_b = \left(\frac{3 \cdot 10^{-7}}{2 * tf}\right); \mu_{br} = 3 \cdot 10^{-8}; K_B = 3; k_B = 1.$

A densidade populacional das duas espécies, mosca e besouro são mostradas relacionando-se com a rês. No primeiro gráfico apresentamos o crescimento populacional da mosca-dos-chifres e, os nós analisados são os mesmos do cenário anterior até mesmo para podermos verificar a mudança que ocorre em se comparando este caso com o primeiro cenário.

O gráfico apresenta o comportamento da população de mosca com o crescimento da população de gado.

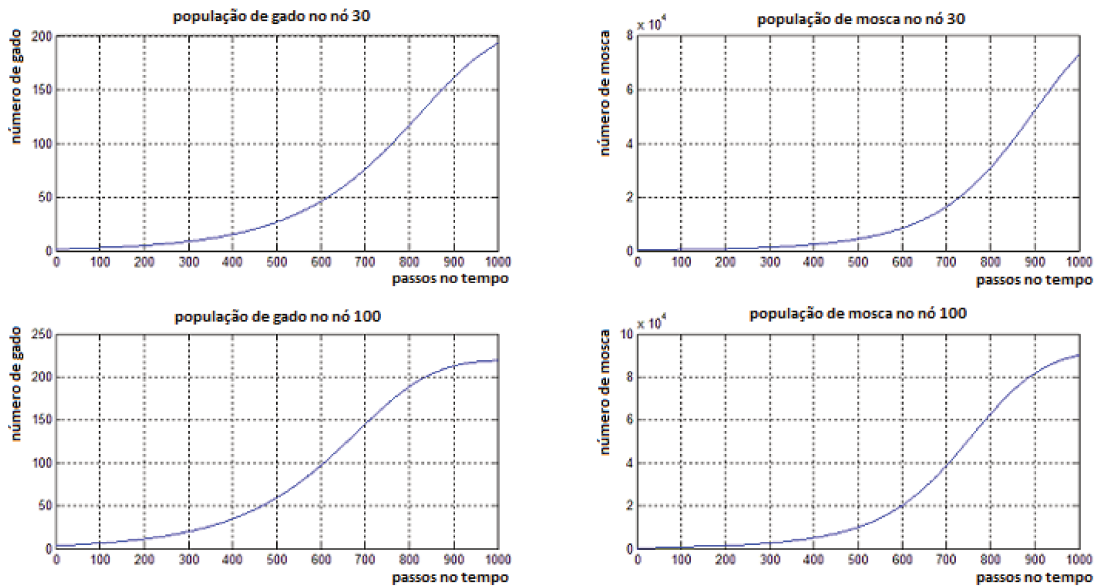


Figura 5.11: Cenário 2 - População da mosca.

Com o crescimento populacional do gado observa-se que a população de moscas-dos-chifres aumenta em grande escala, mesmo com a característica de Verhulst, a população de mosca respeita a população de gado. Este efeito mostra como o crescimento populacional do gado afeta a capacidade de suporte da mosca, ponto chave do nosso sistema de equações.

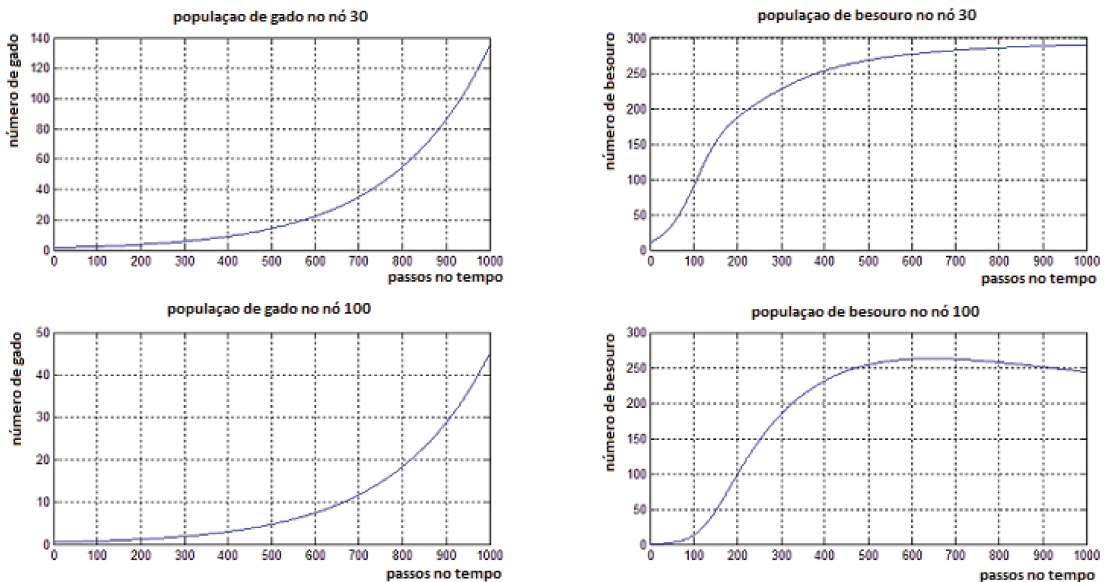


Figura 5.12: Cenário 2 - População da besouro.

Neste cenário, apesar do crescimento populacional do gado, a população do besouro cresce a um limitante que é definido pela sua capacidade de suporte, diferente da mosca onde a capacidade de suporte é uma função que depende do gado. Assim, o quadro do besouro é semelhante ao quadro dos primeiros cenários. Apresentamos também

a interação entre as espécies, em que obtivemos resultados diferentes: o comportamento populacional de cada espécie mostra que a quantidade inicial, bem como a capacidade de suporte, contribuem para o equilíbrio do sistema.

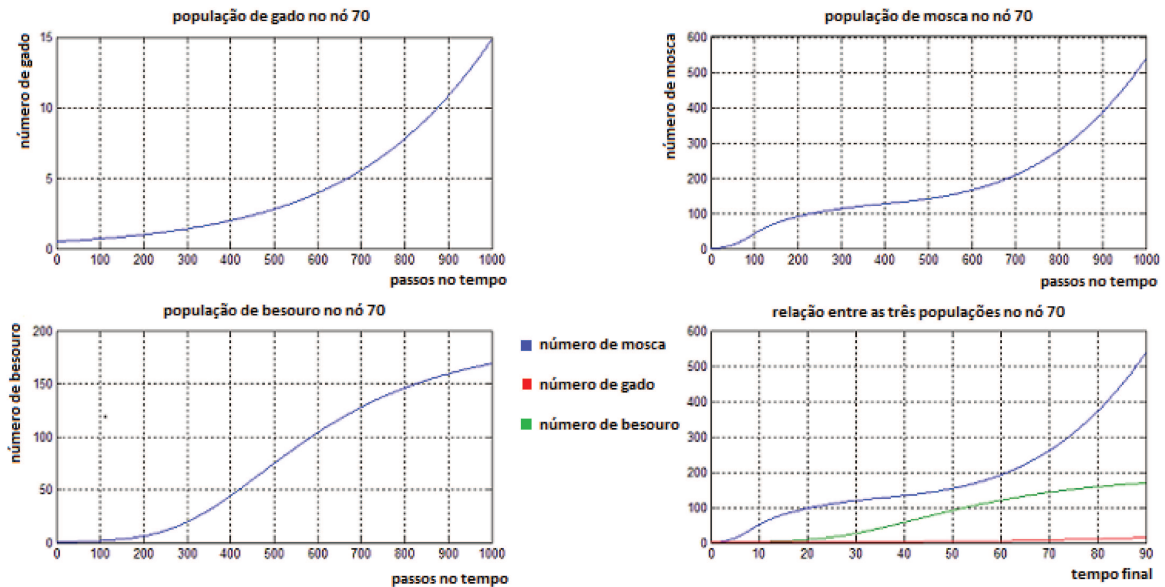


Figura 5.13: Cenário 2 - Relação entre as três espécies 1.

No primeiro gráfico a população de mosca cresce continuamente. Apesar de se conseguir perceber a influência que o crescimento populacional do besouro provoca na população de mosca, esta interferência não é suficiente para controlar a mosca; além disto, o crescimento populacional do gado contribui para melhorar as condições de vida da mosca, assim como na sua reprodução.

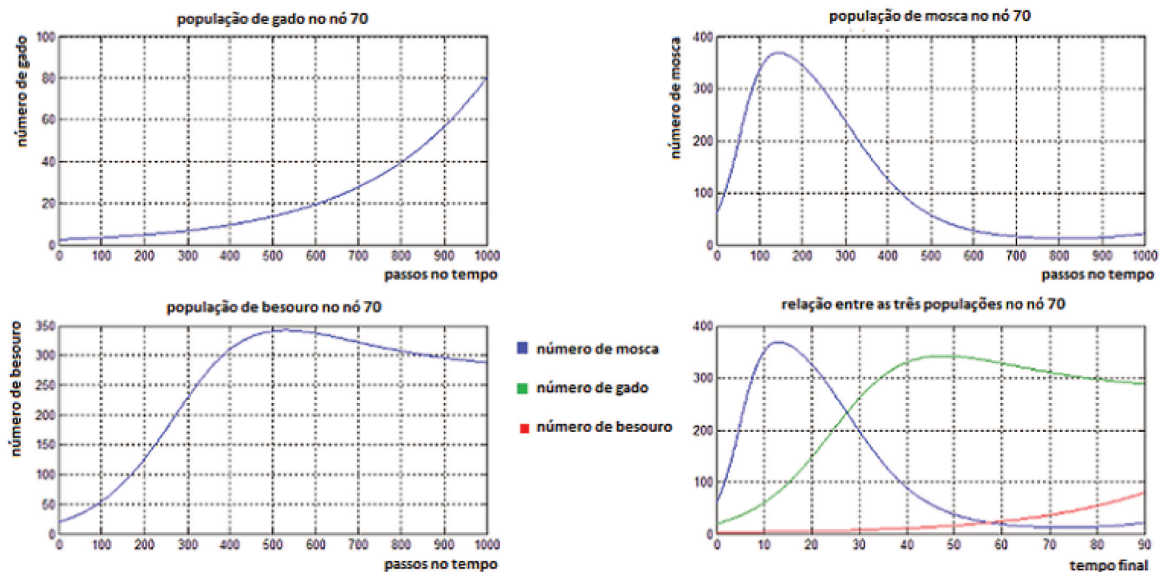


Figura 5.14: Cenário 2 - Relação entre as três espécies 2.

Neste segundo gráfico a influência da população de besouro sobre a mosca é maior, provocando um equilíbrio no sistema. Porém, com o aumento da população de gado e como o besouro é limitado pela sua capacidade de suporte e as condições do ambiente irão melhorar para a mosca, a tendência é que esta venha voltar a crescer novamente. Este fato é observado na figura a seguir.

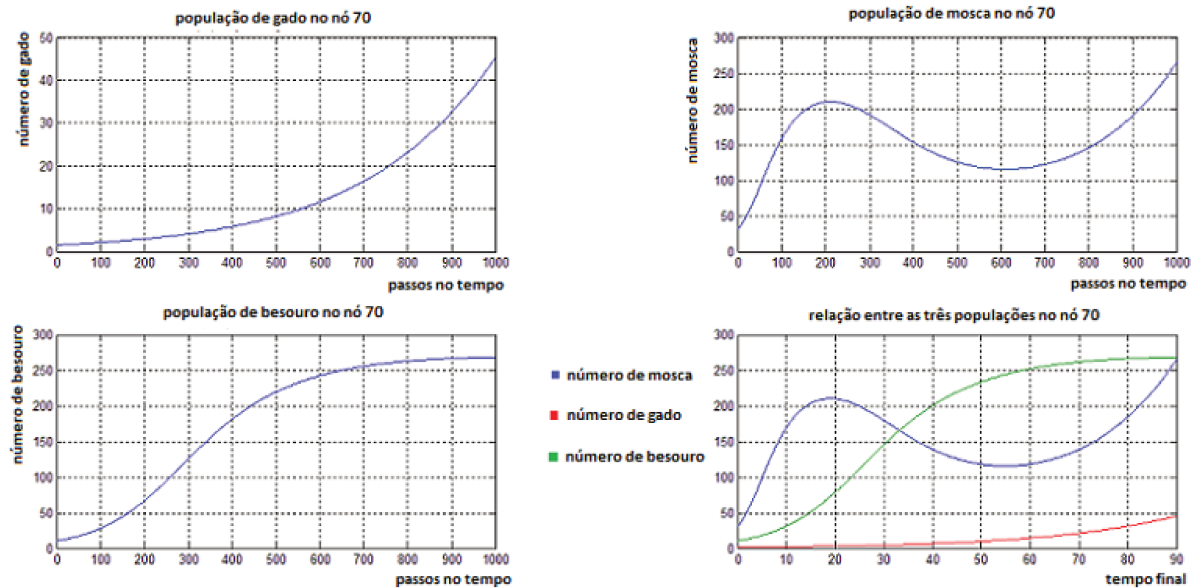


Figura 5.15: Cenário 2 - Relação entre as três espécies 3.

Aqui se observa o que esperava anteriormente quando afirmamos que o que diferencia o crescimento da mosca neste caso da simulação anterior é que a população é diferente, alterando somente no tempo necessário para o processo se concluir.

Mais ponderações sobre o comportamento populacional das espécies foram apresentados nestes gráficos, estarão sendo feitos na conclusão deste trabalho.

Capítulo 6

Conclusão

O sistema de equações diferenciais parciais não lineares, composto pela equação da dispersão-migração e pelas características dos modelos de Malthus e Verhulst, já vem sendo estudado há alguns anos por pesquisadores da área de Biomatemática. Este trabalho está estruturado em um sistema de equações com três equações que representam a densidade populacional de três espécies de animais (o gado, a mosca-dos-chifres e o besouro), que convivem em um ambiente com competição e predação indireta.

O objetivo deste trabalho é de apresentar um equilíbrio biológico neste ecossistema com a inclusão do besouro coprófagos. O modelo matemático estruturado tenta levar em consideração as características de cada espécie com o objetivo representar o modelo real, porém faltam informações sobre os parâmetros que possam melhorar as simulações.

Matematicamente este trabalho, apresenta uma característica diferenciada na capacidade de suporte da população da mosca-dos-chifres, segunda equação do sistema (3.8), onde o termo característico de Verhulst apresenta uma não linearidade. Assume-se que a capacidade de suporte $K_M = \rho R$, com $R = R(x, y, t)$, onde $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in J = (0, T]$, isto é, a capacidade de suporte não é constante, como é assumido em outros trabalhos, dependendo de R .

Os resultados apresentados nas simulações computacionais mostraram-se coerentes com a situação representada. No primeiro cenário, a criação intensiva de gado apresentou um ambiente com maior facilidade de controle. Este cenário almejou encontrar um equilíbrio biológico para o modelo. Nas condições simuladas, observamos uma possibilidade de um equilíbrio biológico no sistema, podendo ocorrer a coexistência das três espécies.

Cabe ressaltar que estas conclusões são especulativas, tendo em vista que não temos dados suficientemente precisos sobre as relações entre as espécies, para estipular

melhor os coeficientes numéricos presentes nos termos das equações que representam esta relação.

As simulações apresentaram no primeiro cenário que é possível termos um controle biológico para a mosca-dos-chifres.

No segundo cenário, representando a criação de gado extensiva, o controle biológico é mais complicado, isto pelo fato do ambiente ser aberto, assim como a presença da característica diferenciada que incluímos no sistema.

Em decorrência da capacidade de suporte da mosca estar relacionada com o crescimento populacional do gado, o equilíbrio biológico não ocorre, pois com o aumento da população bovina as condições tornam-se cada vez mais favoráveis para a sua sobrevivência e procriação. Apesar de o besouro ser um competidor pelas fezes bovinas, influenciando o crescimento populacional da mosca, seu controle sobre a reprodução da mosca é temporário, tendo em vista que sua população é limitada.

Os gráficos 5.9, 5.10, 5.13, 5.14 e 5.15 representam bem o comportamento das populações das três espécies. Nos gráficos 5.9 e 5.10 apresentam a possibilidade de encontrar um equilíbrio biológico do sistema.

Nos gráficos 5.13, 5.14 e 5.15, mostram o crescimento bovino com o aumento seguido de queda concomitante ao aumento da população da mosca-dos-chifres e o crescimento da população de besouro até atingir a capacidade de suporte, este efeito ocorre pelo fato da capacidade de suporte da mosca-dos-chifres depender do crescimento populacional do gado.

Ao final concluímos que o modelo matemático apresentado pode ser utilizado em vários problemas biológicos para o controle de pragas, podendo ser expandido para outros ambientes que apresentem a condição de competição ou de presa-predador. Além disto, observamos que o sistema apresenta uma solução numérica aproximada, mesmo com a capacidade de suporte dependendo da população de gado e que os resultados apresentados no segundo cenário são bastante coerentes com uma situação real.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, Luciana Carrara. *Influência de poluentes sobre Macroalgas na Baía de Sepetiba, RJ: Modelagem Matemática, Análise Numérica e Simulações Computacionais*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, e Dissertação de Mestrado em Matematica Aplicada. Campinas, SP, 2009.
- [2] ASSAN, Aloisio Ernesto.. *Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos*. 2ª ed. Editora da Unicamp, Campinas-SP, 2003.
- [3] BARROS, A. T. M., ISMAEL, A. P. K., GOMES, E. M.. *Dinâmica Populacional da Mosca-dos-Chifres no Pantanal*. Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento, número 31, EMBRAPA, Corumbá, MS, 2002.
- [4] BARROS, A. T. M.. *Desenvolvimento da Haematobia irritans (diptera: muscidae) em massas fecais de bovinos mantidas em laboratório*. Pesquisa Agropecuária Bras., Brasília, v. 36, 2001.
- [5] BARROS, A. T. M.. *Dynamics of Horn Fly Haematobia irritans (Diptera: Muscidae), Infestation on Nelore Cattle in the Pantanal, Brazil*. Mem. Inst. Oswaldo Cruz, Rio de Janeiro, vol. 96, 2001.
- [6] BARROS, A. T. M.. *Situação da resistência da Haematobia irritans no Brasil*. Revista Brasileira Parasitologia Veterinária. v.13, suplemento 1, p.109 – 110, 2004.
- [7] BARROS, ATM. *Desenvolvimento das formas imaturas da mosca-dos-chifres, Haematobia irritans (Diptera: muscidae), no município de Corumba, MS..* In: SIMPOSIO SOBRE RECURSOS NATURAIS E SOCIO-ECONOMICOS DO PANTANAL, 3., 2000.

- [8] BASSANEZI, Rodney C., FERREIRA Jr. Wilson C.. *Equações Diferenciais com Aplicações*. Editora HARBRA Ltda. São Paulo - SP, 1988.
- [9] BERNARDES, Mateus. *Poluição em corpos aquáticos de baixa circulação: modelagem e simulação numérica*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, e Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 1998.
- [10] BIANCHIN, Ivo. *Sazonalidade de Haematobia irritans no Brasil Central*. Pesquisa Veterinária Brasileira. vol 26nº2 : 79 – 86. Rio de Janeiro, 2006.
- [11] BIANCHIN, Ivo e ALVES, Rafael G. O.. *Mosca-dos-chifres, Haematobia irritans: comportamento e danos em vacas e bezerros Nelore antes da desmama*. Pesquisa Veterinária Brasileira. vol.22nº3 : 109 – 113 Rio de Janeiro July/Sept. 2002.
- [12] BONJOUR, Sandra C. M. Bonjour, FIGUEREDO, Adriano Marcos Rodrigues e MARTA, José Manuel Carvalho. *A Pecuária de Corte no Estado de Mato Grosso*, Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural.. XLVI Congresso da Sociedade Brasileiro de Economia, Cuiabá/MT, 2008.
- [13] BRITO, Luciana Gatto, NETTO, Francelino Goulart da Silva e ROCHA, Rodrigo Barros. *Influência dos fatores climáticos na flutuação sazonal da mosca-dos-chifres no Município de Presidente Médici, Rondônia*. EMBRAPA-Rondônia , 2007. 17 p.. (EMBRAPA - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - Centro de Pesquisa Agroflorestal de Rondônia, Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento nº50).
- [14] BRITO, Luciana Gatto, NETTO, Francelino Goulart da Silva, BORJA, Gonzalo Efraim Moya e OLIVEIRA, Márcia Cristina de Sena. *Mosca-dos-chifres: aspectos bio-ecológicos, importância econômica, interações parasito-hospedeiro e controle*. EMBRAPA-Rondônia , 2005. 15 p.. (EMBRAPA - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - Centro de Pesquisa Agroflorestal de Rondônia, Comunicado Técnico nº302).
- [15] CAMPIGLIA, Marcelo. *A influência de sistemas silvipastoris sobre a dinâmica populacional de besouros coprófagos*. Centro de Ciências Agrárias da Universidade Federal de Santa Catarina. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, SC, nov. 2002.

- [16] CANTÃO, Renato Fernandes. *Modelagem e simulação numérica de derrames de óleo no canal de São Sebastião*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, e Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 1998.
- [17] CANTRELL, Robert S., COSNER, Chris. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley series in mathematical and computation biology, 2003.
- [18] CASTRO, E.; GIL, A.; PIAGGIO, J.; CHIFFLET, L.; FARIAS, N.A.; SOLARI, M.A. e MOON, R.D.. *Population dynamics of horn fly, Haematobia irritans irritans (L.) (Diptera: Muscidae), on Hereford cattle in Uruguay*. Veterinary Parasitology, vol. 151, n.º.2 – 4, p.286 – 299, 2008.
- [19] CASTRO, Sonia Elena Palomino. *Modelagem Matemática e Aproximação Numérica do Estudo de Poluentes do Ar*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, e Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 1993.
- [20] CONFINAR - Simpósio de confinamento de gado de corte, 2013. Campo Grande/MS. *Confinamento de gado de corte no Mato Grosso em 2013*. Disponível em: <http://ruralcentro.uol.com.br/analises/>. Acessado em 01 de mar. 2014.
- [21] COLLARES, Nelson C. P.. *Alguns Aspectos Etológicos da Haematobia Irritans em Roraima*. Dissertação de Mestrado em Epidemiologia, Escola de Veterinária da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1990.
- [22] DINIZ, Geraldo Lucio. *A mudança no habitat de populações de peixes: de Rio a Represa - O Modelo Matemático*. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - IMECC. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 1994.
- [23] DINIZ, Geraldo Lucio. *Dispersão de poluentes num sistema ar-água : modelagem, aproximação e aplicações*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica. Campinas, SP, 2003.
- [24] EDELSTEIN-KESHET, Leah. *Mathematical Models in Biology*, SIAM, Philadelphia, 2005.
- [25] Finite Element Handbook. McGraw-Hill Book Company, 1987.

- [26] FLECHTMANN, Carlos A. H., RODRIGUES, Sergio Roberto e SENO, Maria Conceição Zocoller. *Controle biológico da mosca-dos-chifres (Haematobia irritans irritans) em Selvíria, Mato Grosso do Sul. 3. Levantamento de espécies fímícolas associadas à mosca*. Revista Brasileira de Entomologia. v.39, p.249 – 258, 1995.
- [27] GOMES, Manuel C.. *Interações entre espécies - Competição*. Disponível em <http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/biopop/Mod4/Competicao.pdf>. Acessado em 15/07/2014.
- [28] GROVER, N. B.. *Diffusion with attrition*. J. Math. Biol., v.53, 889 – 903, 2006.
- [29] GURNEY, W. S. C., NISBET R.M.. *The Regulation of Inhomogeneous Populations*. J. Theor. Biology, v.52, 441 – 457, 1975.
- [30] GURNEY, W. S. C., NISBET R.M.. *Ecological Dynamics*. Oxford, New York, 1998.
- [31] GURTIN, Morton E.. *A System of Equations for Age-dependent Population Diffusion*. J. Theor. Biology, v.40, 389 – 392, 1973.
- [32] GURTIN, Morton E., MacCCAMY, Richard C.. *On The Diffusion os Biological Populations*. Mathematical Biosciences, v.33, 35 – 49, 1977.
- [33] HONER, Michael R., BIANCHIN, Ivo e GOMES, Alberto.. *Mosca-dos-chifres: Histórico, Biologia e Controle*. CNPGC - EMBRAPA. Campo Grande, 1990.
- [34] IIDA, Masato, MIMURA, Masayasu, NINOMIYA, Hirokazu.. *Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction*. J. Math. Biol., v.53, 617 – 641, 2006.
- [35] INFORZATO, Nelson Fernando. *Dispersão de poluentes num sistema ar-água : modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matematica Aplicada. Campinas, SP, 2008.
- [36] KAREIVA, P. M.. Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. Oecologia, 57 : 332 – 327, 1983.
- [37] KOGA, Miguel Tadayuki; MEYER, Joao Frederico da Costa Azevedo; TABARES, Paulo César Carmona. *Dinâmica Populacional Interativa da Mosca-dos-chifres (Haematobia irritans) na Presença de um Predador: Simulações Computacionais*. Bio-matemática n° 21, 71, v.86, 2011.

- [38] KOLLER, Wilson Werner, et al. *Ocorrência e sazonalidade de besouros copro/necrófagos (Coleoptera; Scarabaeidae), em massas fecais de bovinos, na região de Cerrados do Mato Grosso do Sul*. Pesquisa em Andamento, Embrapa Gado de Corte 48(1997) : 1 – 5.
- [39] KRINDGES, André. *Modelagem e simulação computacional de um problema tridimensional de difusão-advecção com uso de Navier-Stokes*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2011.
- [40] LACAZ, Tânia M.V. Salgado. *Análise de Problemas Populacionais Intraespecíficos e Interespecíficos com Difusão Densidade-Dependente*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 1998.
- [41] LEVEQUE, Randall J.. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM, Philadelphia, 1955.
- [42] LYSYK, T. J.. *Simulating development of immature horn flies, Haematobia Irritans Irritans (L.) (Diptera: Muscidae), in Alberta*. The Canadian Entomologist. 841 – 851 p.. September/October - 1992.
- [43] MACEDO, José Dionísio Borges de. *Besouros coprófagos: Os insetos benéficos das pastagens*. Revista Bahia Agrícola. v.3, n°3, p.45 – 49, set. 1999.
- [44] MARCHESIN, Wilson Aparecido. *Dinâmica de deposição de fezes em pastagem de Brachiaria brizantha submetida à intensidades de pastejo*. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, 2005.
- [45] MARCHUK, G. I.. *Mathematical models in environmental problems*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 16. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [46] MATO GROSSO, Governo do Estado de - Instituto Mato-grossense de Economia Agropecuária. *Bovinocultura Mato Grossense: Caracterização da Bovinocultura no Estado do Mato Grosso*. Cuiabá/MT. Disponível em: <http://imea.com.br>. Acessado em 12 de nov. de 2013.

- [47] MISSIO, Maristela. *Modelos de EDP integrado à Lógica Fuzzy e Métodos Probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de doutorado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2008.
- [48] MISTRO, Diomar Cristina. *O problema da poluição em rios por mercúrio metálico: Modelagem e Simulações*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Dissertação de mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 1992.
- [49] MONTEIRO, Caio Márcio de Oliveira; KOLLER, Wilson Werner; DOS REIS, Éder Sebastião. *Besouros coprófagos (Coleoptera; Scarabaeoidea) presentes nas pastagens do campo experimental da Embrapa gado de leite, no município de Coronel Pacheco, Minas Gerais*. Resumos XXIX Semana de Biologia e XII Mostra de Produção Científica - UFJF, Minas Gerais, Brasil, p. 29 – 33, 2006.
- [50] MURRAY, J. D.. *Mathematical Biology*, Springer, Heidelberg, 1989.
- [51] NASCIMENTO, Leandro. *Área de pastagem cede espaço para agricultura e confinamento em MT*, 2013. Disponível em: <http://g1.globo.com/mato-grosso/index.html>. Acessado em: 01 de mar. 2014.
- [52] OKUBO, A. *Diffusion and ecological problems: Mathematical models*, vol. 1, Springer, 1980;
- [53] OLIVEIRA, Rosane Ferreira de. *O Comportamento Evolutivo de uma Mancha de Óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: Modelagem, Análise Numérica e Simulações*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2003.
- [54] PÁSCOA, Adriano Gomes. *Padrões de desintegração das placas de fezes de bovinos da raça Nelore em dois sistemas intensivos de pastejo rotacionado*. Trabalho de Graduação em Zootecnia - Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias - Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal, 2001.
- [55] PERSONA, Rosana. *Técnicos recebem treinamento para atuar na cadeia produtiva do leite em Mato Grosso*. Governo do Estado de Mato Grosso. Cuiabá/MT,

2011. Disponível em: <http://www.mt.gov.br/editorias/agricultura/tecnicos-recebem-treinamento-para-atuar-na-cadeia-produtiva-do-leite-em-mato-grosso/65217>. Acesso em: 01 de mar. 2014.
- [56] POLETTI, Elaine Cristina Catapani. *Dispersão de Poluente em Sistema de Reservatório: Modelagem Matemática e Simulação Computacional utilizando-se Aproximação Numérica e Conjuntos Fuzzy*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica. Campinas, SP, 2009.
- [57] PREGNOLATTO, Sílvia de Alencastro. *O Mal-das-Cadeiras em capivaras: estudo, modelagem e simulação de um caso*. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica. Campinas, SP, 2002.
- [58] RAYCHAUDHURI, S., SINHA, D. K. e CHATTOPADHYAY, J.. *Effect of time-varying cross-diffusivity in a two-species Lotka-Volterra competitive system*. Ecological Modelling, número 92 : p.55 – 64, 1996.
- [59] SALVATIERRA, Marcos Marreiro. *Modelagem matemática e simulação computacional da presença de materiais impactantes tóxicos em casos de dinâmica populacional com competição inter e intra-específica*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Dissertação de Mestrado em Matematica Aplicada. Campinas, SP, 2005.
- [60] SERENO, F. T. P. S., and José Robson Bezerra Sereno. *Emergência de Haematobia irritans nas massas fecais de bovinos das raças Nelore e Pantaneira no Pantanal Mato-Grossense*. Pesquisa Agropecuária Brasileira nº 34.9 : p. 1705 – 1709, (1999).
- [61] SERENO, Fabiana T. P. S.. *Pupas de mosca-dos-chifres, Haematobia irritans, em massas fecais de bovinos Nelore no Pantanal*. Pesquisa Agropecuária Brasileira. vol.35nº8 : p.1685 – 1688 Brasília ago. 2000.
- [62] SKELLAM, J. G. *Random Dispersal in Theoretical Populations*. Biometrika, Vol. 38, nº $\frac{1}{2}$, pp196 – 218, Jun., 1951.
- [63] SOSSAE, Renata Cristina. *A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matematica Aplicada. Campinas, SP, 2003.

- [64] SOUZA, A. P., et al. *Variação sazonal de Haematobia irritans no planalto catari-nense e eficiência do controle dirigido*. Revista Brasileira de Parasitologia Veterinária, 14.1(2005) : 11 – 15.
- [65] SOUZA, Juliana Marta Rodrigues de. *Estudo da Dispersão de Risco de Epizootias em Animais: o Caso da Influenza Aviária*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2010.
- [66] TABARES, Paulo Cesar Carmona. *Impacto do sedimento sobre espécies que intera-gem: Modelagem e simulações de bentos na Enseada Potter*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2012.
- [67] VÁSQUEZ, Julio César Saavedra. *Comportamento Evolutivo de Descarga de Água de Produção Decorrente de Atividade Offshore: Tratamento Numérico e Simula-ção Computacional*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2005.
- [68] WALKER, I. *Competition and Information*. Acta Biotheoretica, Vol. 41 : 249 – 266, 1993.
- [69] WOLMULTH, Leidy Diane. *Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: o caso da represa do rio Manso*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, SP, 2010.

Apêndice

Códigos do Matlab

% Programa de elementos finitos bidimensional, para o problema do mosca do % do chifres e do besouro comprófago, com dominio simulando uma área de % confinamento de gado e com condicoes de contorno considerando Robin, Von % Neumann e Dirichlet homogénea.

```
% Apagar os dados e os gráficos clc; clf; clear all; format long; tp=cputime;
% Parametros do problema
% Parametros do dominio
l = 60; h = 21; tf = 20; l1 = 40; h1 = 12; l2 = l - l1; h2 = h - h1; k1 = 1e-3;
% a) Para a rês:
lambr = 1e-5; mir = 0.1e-9; mirm = 0.1e-5; r0=100; %lambr = 1e-2; mir =
0.1e-8; mirm = 0.2e-3; r0=100;
% b) Para a mosca:
alfm = (1e-5)/tf; mim = 1e-6/(2*tf); lambm = 1e-1; mimb = 1e-4; mimr =
1e-7; rhom = 2; w1 = 2e-8; w2 = 3e-8;
% c) Para o besouro:
alfb = (3e-6)/tf; mib = 3e-7/(2*tf); mibr = 3e-8; lambb = 6e-2; Kb = 3; kb
= 1;
% Parametros da discretizacao
ny = 7; nx=15; dy = h/ny; dx=l/nx; nnx=nx+1; nx1 = 10; ny1 = 7; nx2 = 5;
ny2 = 4; nny = ny + 1; nnx1 = nx1 + 1; nny1 = ny1 + 1; nnx2 = nx2 + 1; nny2 = ny2
+ 1; nt = 1000; dt = tf/nt; nn = nnx1*nny + nx2*nny2; ntr = 2*(nx1*ny + nx2*ny2);
dxdy = dx*dy; dxy = dx/dy; dyx = dy/dx;
% Número de Péclet
pec = [abs((w1*dx)/alfm) abs((w2*dy)/alfm)];
```



```

fprintf('Os números de Péclet sao: para u %4.2f e para v%4.2fn',pec(1),pec(2));
if max(abs(pec))> 2
break;
else
end
% Cálculos auxiliares
% a) Para a rês:
cr1 = 1 + (mir - lambr)*dt/2; cr2 = mirm*dt/2; cr3 = 1-(mir - lambr)*dt/2;
% b) Para a mosca:
cm1 = 1 - lambm*dt/2; cm2 = alfm*dt/2; cm3 = w1*dt/2; cm4 = w2*dt/2;
cm5 = mimb*dt/2; cm6 = mimr*dt/2; cm7 = lambm*dt/2; cm8 = 1 + lambm*dt/2;
cm9 = k1*dt/2;
% c) Para o besouro:
cb1 = 1 - lambb*dt/2; cb2 = kb*dt/2; cb3 = alfb*dt/2; cb4 = lambb*dt/(2*Kb);
cb5 = mibr*dt/2; cb6 = 1 + lambb*dt/2;
% submatrizes de rigidez
%Gradiente phi x e phi y
grd = (1/2)*[dxy+dyx -dyx -dxy -dyx dyx 0 -dxy 0 dxy];
%Derivada phi em x
dfx = (1/6)*[ -dy dy 0 -dy dy 0 -dy dy 0];
%Derivada phi em y
dfy = (1/6)*[ -dx 0 dx -dx 0 dx -dx 0 dx];
%Phi i j
fxye = (dxdy/12)*[ 1 1/2 1/2 1/2 1 1/2 1/2 1/2 1];
%Phi k i j esquerda
fkxy = (dxdy/12)*[ 1 1/2 1/2 1/2 1 1/2 1/2 1/2 1];
f1xy = (dxdy/20)*[ 1 1/3 1/3 1/3 1/3 1/6 1/3 1/6 1/3];
f2xy = (dxdy/20)*[ 1/3 1/3 1/6 1/3 1 1/3 1/6 1/3 1/3];
f3xy = (dxdy/20)*[ 1/3 1/6 1/3 1/6 1/3 1/3 1/3 1/3 1 ];
fkij(1,,:) = f1xy;
fkij(2,,:) = f2xy;
fkij(3,,:) = f3xy;
%Phi i j
pfji = (dx/6)*[ 2 1 1 2];

```

```

%Preparacao da matriz da malha
%Parte 1
mrig = zeros(ntr,3);
for i=1:nx1
for j=1:ny1
%Triangulo tipo 1
in = 2*(i-1)*ny + 2*j-1;
mrig(in,1) = (i-1)*nny + j;
mrig(in,2) = i*nny + j;
mrig(in,3) = (i-1)*nny + j + 1;
%Triangulo tipo 2
in = in + 1;
mrig(in,1) = i*nny + j + 1;
mrig(in,2) = (i-1)*nny + j + 1;
mrig(in,3) = i*nny + j;
end
end
%Parte 2
for i=2:nx2
for j=1:ny2
%Triangulo tipo 1
inp1 = 2*nx1*ny;
inp2 = 2*(i-1)*ny2 + 2*j-1;
in = inp1 + inp2;
mrig(in,1) = (i-2)*nny2 + j + nnx1*nny;
mrig(in,2) = (i-1)*nny2 + j + nnx1*nny;
mrig(in,3) = (i-2)*nny2 + j + 1 + nnx1*nny;
%Triangulo tipo 2
in = in + 1;
mrig(in,1) = (i-1)*nny2 + j + 1 + nnx1*nny;
mrig(in,2) = (i-2)*nny2 + j + 1 + nnx1*nny;
mrig(in,3) = (i-1)*nny2 + j + nnx1*nny;
end
end

```

```

for i=1
for j=1:ny2
%Triangulo tipo 1
inp1 = 2*nx1*ny;
inp2 = 2*(i-1)*ny2 + 2*j-1;
in = inp1 + inp2;
mrig(in,1) = (i-2)*nny + j + nnx1*nny;
mrig(in,2) = (i-1)*nny + j + nnx1*nny;
mrig(in,3) = (i-2)*nny + j + 1 + nnx1*nny;
%Triangulo tipo 2
in = in + 1;
mrig(in,1) = (i-1)*nny + j + 1 + nnx1*nny;
mrig(in,2) = (i-2)*nny + j + 2 + nnx1*nny;
mrig(in,3) = (i-1)*nny + j + nnx1*nny;
end
end
% Correção da malha
for i=1:ny2
%Triangulo tipo 1
in = inp1 + 2*i - 1;
mrig(in,1) = mrig(in,2) - nny;
mrig(in,3) = mrig(in,1) + 1;
%Triangulo tipo 2
in = inp1 + 2*i;
mrig(in,2) = mrig(in,2) - 1;
end
% Preparação e montagem das matrizes da Rês parte linear
mer = sparse(nn,nn); mdr = sparse(nn,nn);
for itr=1:ntr
for il=1:3
igl = mrig(itr,il);
if igl ==0
for jl=1:3
jgl = mrig(itr,jl);

```

```

if jgl =0
mer(igl,jgl) = mer(igl,jgl) + cr1*fxye(il,jl);
mdr(igl,jgl) = mdr(igl,jgl) + cr3*fxye(il,jl);
end
end
end
end
end
end
% Preparação e montagem da matriz de rigidez da Mosca parte linear
mem = sparse(nn,nn); mdm = sparse(nn,nn);
for itr=1:ntr
for il=1:3
igl = mrig(itr,il);
if igl =0
for jl=1:3
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl =0
mem(igl,jgl) = mem(igl,jgl) + cm1*fxye(il,jl) + cm2*grd(il,jl) + cm3*dfx(il,jl)
+ cm4*dfy(il,jl);
mdm(igl,jgl) = mdm(igl,jgl) + cm8*fxye(il,jl) - cm2*grd(il,jl) - cm3*dfx(il,jl)
- cm4*dfy(il,jl);
end
end
end
end
end
end
%Borda inferior da mosca primeira parte.
for i = 1:nx1
itr = 2*i*ny+1;
for il=1:2;
igl = mrig(itr,il);
if igl =0
for jl=1:2;
jgl = mrig(itr,jl);

```

```

if jgl =0
mem(igl,jgl) = mem(igl,jgl) + cm9*pfji(il,jl);
mdm(igl,jgl) = mdm(igl,jgl) - cm9*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
end
%Borda inferior da mosca segunda parte.
for i = 1:(nx2-1)
for il=1:2
itr = 2*nx1*ny+1 +i*2*ny2;
igl = mrig(itr,il);
if igl =0
for jl=1:2
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl =0
mem(igl,jgl) = mem(igl,jgl) + cm9*pfji(il,jl);
mdm(igl,jgl) = mdm(igl,jgl) - cm9*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
end
%Borda esquerda da mosca.
for i = 1:ny
itr = 2*i-1;
for il=1:2
ill=2*il-1;
igl = mrig(itr,ill);
if igl =0
for jl=1:2
jll=2*jl-1;
jgl = mrig(itr,jll);

```

```

if jgl =0
mem(igl,jgl) = mem(igl,jgl) + cm9*pfji(il,jl);
mdm(igl,jgl) = mdm(igl,jgl) - cm9*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
end
%Borda superior da mosca.
nnm=floor(nx1/2);
for i = 1:nnm
itr = 2*i*ny;
for il=1:2
igl = mrig(itr,il);
if igl =0
for jl=1:2
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl =0
mem(igl,jgl) = mem(igl,jgl) + cm9*pfji(il,jl);
mdm(igl,jgl) = mdm(igl,jgl) - cm9*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
end
end
% Preparação e montagem da matriz de rigidez da Besouro parte linear
meb = sparse(nn,nn); mdb = sparse(nn,nn);
for itr=1:ntr
for il=1:3
igl = mrig(itr,il);
if igl =0
for jl=1:3
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl =0

```

```

meb(igl,jgl) = meb(igl,jgl) + cb1*fxye(il,jl) + cb3*grd(il,jl);
mdb(igl,jgl) = mdb(igl,jgl) + cb6*fxye(il,jl) - cb3*grd(il,jl);
end
end
end
end
end
end
%Borda inferior da besouro primeira parte.
for i = 1:nx1
for il=1:2;
itr = 2*i*ny+1;
igl = mrig(itr,il);
if igl ==0
for jl=1:2;
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl ==0
meb(igl,jgl) = meb(igl,jgl) + cb2*pfji(il,jl);
mdb(igl,jgl) = mdb(igl,jgl) - cb2*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
%Borda inferior da besouro segunda parte.
for i = 1:(nx2-1)
for il=1:2
itr = 2*nx1*ny+1 +i*2*ny2;
igl = mrig(itr,il);
if igl ==0
for jl=1:2
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl ==0
meb(igl,jgl) = meb(igl,jgl) + cb2*pfji(il,jl);
mdb(igl,jgl) = mdb(igl,jgl) - cb2*pfji(il,jl);

```

```

end
end
end
end
end
%Borda esquerda do besouro.
for i = 1:ny
itr = 2*i-1;
for il=1:2
ill=2*il-1;
igl = mrig(itr,ill);
if igl ==0
for jl=1:2
jll=2*jl-1;
jgl = mrig(itr,jll);
if jgl ==0
meb(igl,jgl) = meb(igl,jgl) + cb2*pfji(il,jl);
mdb(igl,jgl) = mdb(igl,jgl) - cb2*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
%Borda superior do besouro.
nnm=floor(nx1/2);
for i = 1:nnm
itr = 2*i*ny;
for il=1:2
igl = mrig(itr,il);
if igl ==0
for jl=1:2
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl ==0
meb(igl,jgl) = meb(igl,jgl) + cb2*pfji(il,jl);

```



```

mdb(igl,jgl) = mdb(igl,jgl) - cb2*pfji(il,jl);
end
end
end
end
end
r = 0.5*ones(nn,1); m = 0.5*ones(nn,1); b = 0.5*ones(nn,1);
for it = 1:r0
ind = randi([1 nn]);
if ind ==0
r(ind) = r(ind) + 1; m(ind) = m(ind) + 30; b(ind) = b(ind) + 10;
end
end
vnor = sparse(nt,1);
vnom = sparse(nt,1);
vnob = sparse(nt,1);
bz = b; mz = m; rz = r;
for itr1 = 1:nt
for int = 1:4
moper = zeros(nn,nn); mopdr = zeros(nn,nn);
for itr = 1:ntr
mi = (m + mz)/2; bi = (b + bz)/2; ri = (r + rz)/2;
bz = b; rz = r; mz = m;
for il = 1:3
igl = mrig(itr,il);
if igl ==0
for jl=1:3
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl ==0
s=0;
for kl = 1:3
klg = mrig(itr,kl);
if klg ==0
for kv = 1:3

```

```

s = s + mi(klg)*cr2*fki(kv,il,jl);
end
end
end
moper(igl,jgl) = moper(igl,jgl) + s;
mopdr(igl,jgl) = mopdr(igl,jgl) - s;
end
end
end
end
moper = moper + mer;
mopdr = mopdr + mdr;
end
r = moper - (mopdr*rz);
mopem = zeros(nn,nn); mopdm = zeros(nn,nn);
for itr = 1:ntr
for il = 1:3
igl = mrig(itr,il);
if igl == 0
for jl = 1:3
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl == 0
s=0;
for kl = 1:3
klg = mrig(itr,kl);
if klg == 0
if ri(klg) == 0
for kv = 1:3
s = s + bi(klg)*cm5*fki(kv,il,jl) - cm6*ri(klg)*fki(kv,il,jl)
+ cm7*[(bi(klg)+mi(klg))/(rhom*ri(klg))]*fki(kv,il,jl);
end
end
end
end
end

```

```

mopem(igl,jgl) = mopem(igl,jgl) + s;
mopdm(igl,jgl) = mopdm(igl,jgl) - s;
end
end
end
end
mopem = mopem + mem;
mopdm = mopdm + mdm;
end
m = mopem - (mopdm*mz);
mopeb = zeros(nn,nn); mopdb = zeros(nn,nn);
for itr = 1:ntr
for il = 1:3
igl = mrig(itr,il);
if igl ==0
for jl=1:3
jgl = mrig(itr,jl);
if jgl ==0
s=0;
for kl = 1:3
klg = mrig(itr,kl);
if klg ==0
for kv = 1:3
s = s + bi(klg)*cb4*fki(kv,il,jl)- cb5*ri(klg)*fkij(kv,il,jl);
end
end
end
mopeb(igl,jgl) = mopeb(igl,jgl) + s;
mopdb(igl,jgl) = mopdb(igl,jgl) - s;
end
end
end
end
mopeb = meb + mopeb;

```

```

mopdb = mdb + mopdb;
end
b = mopeb (mopdb*bz);
end
round(r); round(m); round(b);
vnor(itr1) = r(70);
vnom(itr1) = m(70);
vnob(itr1) = b(70);
vx = 0:dx:l; vy = 0:dy:h;
vt=dt:dt:tf;
for i = 1 : nnx1
for j = 1: nny1
ind = (i*nnny) + 1 - j;
indi=nnny - j + 1;
[indi, i];
verm(indi,i) = m(ind);
verb(indi,i) = b(ind);
verr(indi,i) = r(ind);
end
end
for i = 1:nx2
for j=1:ny2
ind = nx1*nnny+(i*nnny2)+ 1 - j;
verm(nny2-j+1,nnx1+i) = m(ind);
verb(nny2-j+1,nnx1+i) = b(ind);
verr(nny2-j+1,nnx1+i) = r(ind);
end
end
if itr1==1 || mod(itr1,50)==0
valor = itr1;
valgraf = num2str(valor);
ProgFig = strcat('ProgFig',valgraf);
figure(1)
subplot(2,2,1)

```

```

    plot(vt,vnor);grid on, title('população do gado no nó 70')
    subplot(2,2,2)
    plot(vt,vnom);grid on, title('população do mosca no nó 70')
    subplot(2,2,3)
    plot(vt,vnob);grid on, title('população do besouro no nó 70')
    subplot(2,2,4)
    plot(vt,vnom,vt,vnob,vt,vnor);grid on, title('relação entre as três populações
no nó 70')
    %gravar o gráfico
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches');
    set(gcf, 'PaperSize', [11 5]);
    print(gcf,'-dbmp',ProgFig)
end
r1=0; m1=0;
for i=1:nn
    r1= r1+r(i);
    m1=m1+m(i);
end
end
tp=cputime-tp

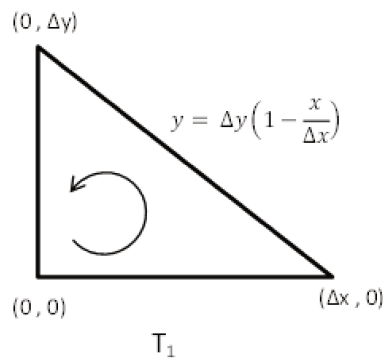
```

Apêndice B

Matrizes de Rigidez

Para o triângulo T_1 (veja figura abaixo), temos que as funções φ_j estão dadas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{x}{\Delta x} \text{ e} \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{y}{\Delta y}\end{aligned}$$



1. Trabalhando com $\iint_{T_1} \varphi_i \varphi_j d\Omega$:

Para $i = 1$, teremos;

$$\text{a) } \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 dy dx$$

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) \Rightarrow \begin{cases} dy = -du \Delta y \\ \text{p/ } y = 0 \\ \text{p/ } y = \Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_{1-\frac{x}{\Delta x}}^0 u^2 (-\Delta y) du dx$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx &= \Delta y \int_0^{\Delta x} \int_0^{1-\frac{x}{\Delta x}} u^2 du dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx &= \Delta y \int_0^{\Delta x} \frac{u^3}{3} \Big|_0^{1-\frac{x}{\Delta x}} dx = \frac{\Delta y}{3} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3 dx \\
\text{Fazendo } v = \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) &\Rightarrow \begin{cases} dx = -dv \Delta x \\ p/ \ x = 0 & \Rightarrow \ v = 1 \\ p/ \ x = \Delta x & \Rightarrow \ v = 0 \end{cases} \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx &= \frac{\Delta y}{3} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3 dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx &= \frac{\Delta y}{3} \int_1^0 v^3 (-\Delta x) dv \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx &= \frac{\Delta x \Delta y}{3} \int_0^1 v^3 dv = \frac{\Delta x \Delta y}{3} \frac{v^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\Delta x \Delta y}{12}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) \frac{x}{\Delta x} dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx \\
\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) &\Rightarrow \begin{cases} dy = -du \Delta y \\ p/ \ y = 0 & \Rightarrow \ u = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ p/ \ y = \Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) & \Rightarrow \ u = 0 \end{cases} \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \int_{1-\frac{x}{\Delta x}}^0 u (-\Delta y) du dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \int_0^{1-\frac{x}{\Delta x}} u du dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(\frac{u^2}{2}\right) \Big|_0^{1-\frac{x}{\Delta x}} dx = \frac{\Delta y}{2\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 dx \\
x \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 &= x \left(1 - \frac{2x}{\Delta x} + \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2\right) = x - \frac{2x^2}{\Delta x} + \frac{x^3}{\Delta^2 x} \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{2\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(x - \frac{2x^2}{\Delta x} + \frac{x^3}{\Delta^2 x}\right) dx = \frac{\Delta y}{2\Delta x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3\Delta x} + \frac{x^4}{4\Delta^2 x}\right) \Big|_0^{\Delta x} \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{2\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 x}{2} - \frac{2\Delta^3 x}{3\Delta x} + \frac{\Delta^4 x}{4\Delta^2 x}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{24}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) \frac{y}{\Delta y} dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(y - \frac{xy}{\Delta x} - \frac{y^2}{\Delta y}\right) dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{xy^2}{2\Delta x} - \frac{y^3}{3\Delta y}\right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 y}{2} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x\Delta^2 y}{2\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{\Delta^3 y}{3\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3\right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx &= \Delta y \int_0^{\Delta x} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x}{2\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3\right) dx
\end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } u = 1 - \frac{x}{\Delta x} \Rightarrow \begin{cases} x = \Delta x(1 - u) \\ dx = -\Delta x du \\ \text{p/ } x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \\ \text{p/ } x = \Delta x \quad \Rightarrow \quad u = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \Delta y \int_1^0 \left(\frac{1}{2}(u)^2 - \frac{\Delta x(1-u)}{2\Delta x}(u)^2 - \frac{1}{3}(u)^3 \right) (-\Delta x) du$$

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \Delta x \Delta y \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} - \frac{u^3}{3} \right) du$$

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{6} \left(\frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\Delta y \Delta x}{24}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

Para $i = 2$, teremos;

$$\text{a) } \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \frac{x}{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right) dy dx = \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 dy dx = \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{x}{\Delta x} \right)^2 dy dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} x^2 \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} 1 dy dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} x^2 \left(y \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \right) dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} x^2 \left(\Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \right) dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} \left(x^2 - \frac{x^3}{\Delta x} \right) dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4\Delta x} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta^3 x}{3} - \frac{\Delta^4 x}{4\Delta x} \right) \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx &= \frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta^3 x}{3} - \frac{\Delta^3 x}{4} \right) = \frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta^3 x}{12} \right) = \frac{\Delta y \Delta x}{12} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{x}{\Delta x} \frac{y}{\Delta y} \right) dy dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} y dy dx \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \left(\frac{(\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x}))^2}{2} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta^2 y}{2 \Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^2 dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta^2 y}{2 \Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(x - \frac{2x^2}{\Delta x} + \frac{x^3}{\Delta^2 x} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta y}{2 \Delta x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3 \Delta x} + \frac{x^4}{4 \Delta^2 x} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta y}{2 \Delta x} \left(\frac{\Delta^2 x}{2} - \frac{2 \Delta^3 x}{3 \Delta x} + \frac{\Delta^4 x}{4 \Delta^2 x} \right) \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta y}{2 \Delta x} \left(\frac{\Delta^2 x}{2} - \frac{2 \Delta^2 x}{3} + \frac{\Delta^2 x}{4} \right) = \frac{\Delta y}{2 \Delta x} \frac{\Delta^2 x}{12} = \frac{\Delta y \Delta x}{24}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

Para $i = 3$, teremos;

$$\text{a) } \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_1 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x})} \frac{y}{\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right) dy dx = \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_1 dy dx = \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\text{b) } \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_2 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{y}{\Delta y} \frac{x}{\Delta x} \right) dy dx = \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_2 dy dx = \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{y}{\Delta y} \right)^2 dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x})} dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} \frac{(\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x}))^3}{3} dx \\
\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta^3 y}{3 \Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^3 dx
\end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } u = 1 - \frac{x}{\Delta x} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\Delta x du \\ \text{p/ } x = 0 & \Rightarrow u = 1 \\ \text{p/ } x = \Delta x & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta y}{3} \int_1^0 u^3 (-\Delta x) du \\
\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta x \Delta y}{3} \int_0^1 u^3 du \\
\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta x \Delta y}{3} \left(\frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\Delta x \Delta y}{12}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

A matriz $\iint_{T_1} \varphi_i \varphi_j d\Omega$, será:

$$M(\varphi_i | \varphi_j) = \begin{bmatrix} \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 & \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 & \iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 \\ \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 & \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_2 & \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 \\ \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_1 & \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_2 & \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

2. Para $\iint_{T_1} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$, primeiramente temos que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \\ \varphi_2 = \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3 = \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \varphi_1 = \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \\ \nabla \varphi_2 = \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \\ \nabla \varphi_3 = \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \end{cases}$$

Para $i = 1$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \int_0^{\Delta x} y \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \int_0^{\Delta x} (\Delta y (1 - \frac{x}{\Delta x})) dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \Delta y \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \Delta y \left(\frac{\Delta x}{2} \right) = \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dy dx = \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} -\frac{1}{\Delta^2 x} dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} y \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} (\Delta y (1 - \frac{x}{\Delta x})) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \Delta y \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx &= -\left(\frac{1}{\Delta^2 x} \right) \Delta y \left(\frac{\Delta x}{2} \right) = -\left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2 x}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx = -\left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2 x}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} -\frac{1}{\Delta^2 y} dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} y \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} (\Delta y (1 - \frac{x}{\Delta x})) dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \Delta y \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx &= -\left(\frac{1}{\Delta^2 y} \right) \Delta y \left(\frac{\Delta x}{2} \right) = -\left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2 y}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx = -\left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2 y}$$

Para $i = 2$;

$$\begin{aligned}\text{a) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} -\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 dy dx = \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dy dx = \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dy dx = -\left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2 x}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 dy dx = -\iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dy dx\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dy dx = -\iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dy dx = \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2 x}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} 0 dy dx = 0\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dy dx = 0$$

Para $i = 3$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} -\left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 dy dx = \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dy dx = \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dy dx = -\left(\frac{\Delta x \Delta y}{2}\right) \frac{1}{\Delta^2 y}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} 0 dy dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 dy dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle 0, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle dy dx \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 dy dx = -\iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dy dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dy dx = -\iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dy dx = \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2}\right) \frac{1}{\Delta^2 y}$$

$$M(\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j) = \begin{bmatrix} \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 & \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 & \iint_{T_1} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 & \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 & \iint_{T_1} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 \\ \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 & \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 & \iint_{T_1} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 \end{bmatrix}$$

$$M(\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j) = \frac{\Delta x \Delta y}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} & -\frac{1}{\Delta^2 x} & -\frac{1}{\Delta^2 y} \\ -\frac{1}{\Delta^2 x} & \frac{1}{\Delta^2 x} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta^2 y} & 0 & \frac{1}{\Delta^2 y} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

3. Para $\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\Omega$, primeiramente temos que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \\ \varphi_2 = \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3 = \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Para $j = 1$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= -\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(y - \frac{xy}{\Delta x} - \frac{y^2}{2\Delta y}\right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= -\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(\Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) - \frac{x\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})}{\Delta x} - \frac{(\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x}))^2}{2\Delta y}\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x}\right)\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\Delta x} + \frac{x^2}{2\Delta^2 x}\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{x^3}{6\Delta^2 x}\right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{6}\right) = -\frac{\Delta y}{6} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx = -\frac{\Delta y}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) \left(\frac{x}{\Delta x}\right) dy dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} x(y) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} x(\Delta y(1 - \frac{x}{\Delta x})) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta x} \left(x - \frac{x^2}{\Delta x}\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\Delta x}\right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta^2 x}{2} - \frac{\Delta^2 x}{3}\right) = -\frac{\Delta y}{6} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx = -\frac{\Delta y}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) \left(\frac{y}{\Delta y}\right) dy dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(\frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{2\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} (\Delta y (1 - \frac{x}{\Delta x}))^2 dx \\
\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= -\frac{\Delta^2 y}{2\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{2x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x}\right) dx \\
\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= -\frac{\Delta y}{2\Delta x} \left(x - \frac{x^2}{\Delta x} + \frac{x^3}{3\Delta^2 x}\right) \Big|_0^{\Delta x} \\
\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= -\frac{\Delta y}{2\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{3}\right) = -\frac{\Delta y}{6}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx = -\frac{\Delta y}{6}$$

Para $j = 2$;

$$\text{a) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta y}{6}$$

$$\text{b) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \left(\frac{x}{\Delta x}\right) dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y}{6}$$

$$\text{c) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \left(\frac{y}{\Delta y}\right) dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y}{6}$$

$$\text{Para } j = 3, \text{ como } \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_1 dy dx &= 0 \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_2 dy dx &= 0 \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_3 dy dx &= 0 \end{cases}$$

$$M \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) = \begin{bmatrix} \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_1 d\Omega \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_2 d\Omega \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_3 d\Omega \end{bmatrix}$$

$$M \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) = \frac{\Delta y}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

4. Para $\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\Omega$, como no caso anterior, temos que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \\ \varphi_2 = \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3 = \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} \end{cases}$$

Para $j = 1$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(-\frac{1}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= -\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(y - \frac{xy}{\Delta x} - \frac{y^2}{2\Delta y}\right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= -\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(\Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) - \frac{x\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})}{\Delta x} - \frac{(\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x}))^2}{2\Delta y}\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x}\right)\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= -\int_0^{\Delta x} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\Delta x} + \frac{x^2}{2\Delta^2 x}\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= -\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{x^3}{6\Delta^2 x}\right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx &= -\left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{6}\right) = -\frac{\Delta x}{6} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx = -\frac{\Delta x}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(-\frac{1}{\Delta y}\right) \left(\frac{x}{\Delta x}\right) dy dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x(y) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx &= -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \left(\Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx &= -\frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} \left(x - \frac{x^2}{\Delta x}\right) dx \end{aligned}$$

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx = -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\Delta x} \right) \Big|_0^{\Delta x}$$

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx = -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 x}{2} - \frac{\Delta^2 x}{3} \right) = -\frac{\Delta x}{6}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx = -\frac{\Delta x}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(-\frac{1}{\Delta y}\right) \left(\frac{y}{\Delta y}\right) dy dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} \left(\frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{2\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} (\Delta y (1 - \frac{x}{\Delta x}))^2 dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx &= -\frac{\Delta^2 y}{2\Delta^2 y} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{2x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x}\right) dx \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{\Delta x} + \frac{x^3}{3\Delta^2 x}\right) \Big|_0^{\Delta x} \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{3}\right) = -\frac{\Delta x}{6} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx = -\frac{\Delta x}{6}$$

$$\text{Para } j = 2, \text{ como } \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_1 dy dx = 0 \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_2 dy dx = 0 \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_3 dy dx = 0 \end{cases}$$

Para $j = 3$;

$$\text{a) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta x}{6}$$

$$\text{b) } \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta y}\right) \left(\frac{x}{\Delta x}\right) dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 dy dx = -\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta x}{6}$$

$$c) \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{1}{\Delta y}\right) \left(\frac{y}{\Delta y}\right) dy dx = - \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 dy dx = - \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x}{6}$$

$$M \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) = \begin{bmatrix} \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 d\Omega \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 d\Omega \\ \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 d\Omega \end{bmatrix}$$

$$M \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

5. Para $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 1$ e $i = 1$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_1 \varphi_1 d\Omega dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} (\varphi_1)^3 dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 d\Omega dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 dy dx$$

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) \Rightarrow \begin{cases} dy = -du\Delta y \\ \text{p/ } y = 0 & \Rightarrow u = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \text{p/ } y = \Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_{1-\frac{x}{\Delta x}}^0 u^3 (-\Delta y) du dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = -\Delta y \int_0^{\Delta x} \frac{u^4}{4} \Big|_{1-\frac{x}{\Delta x}}^0 dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = -\Delta y \int_0^{\Delta x} -\frac{(1-\frac{x}{\Delta x})^4}{4} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = \frac{\Delta y}{4} \int_0^{\Delta x} (1 - \frac{x}{\Delta x})^4 dx$$

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \Rightarrow \begin{cases} dx = -du\Delta x \\ \text{p/ } x = 0 & \Rightarrow u = 1 \\ \text{p/ } x = \Delta x & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = \frac{\Delta y}{4} \int_1^0 (u)^4 - \Delta x du$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = \frac{-\Delta x \Delta y}{4} \frac{(u)^5}{5} \Big|_1^0$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = \frac{-\Delta x \Delta y}{4} \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

b) Para $j = 2$:

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right)^2 \left(\frac{x}{\Delta x} \right) dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right)^2 dy dx$$

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right) \Rightarrow \begin{cases} dy = -du \Delta y \\ p/ y = 0 & \Rightarrow u = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ p/ y = \Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \int_{1-\frac{x}{\Delta x}}^0 (u)^2 (-\Delta y) du dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = -\Delta y \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \frac{(u)^3}{3} \Big|_{1-\frac{x}{\Delta x}}^0 dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = -\Delta y \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \left(-\frac{(1-\frac{x}{\Delta x})^3}{3} \right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^3 dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{3x}{\Delta x} + \frac{3x^2}{(\Delta x)^2} - \frac{x^3}{(\Delta x)^3} \right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(x - \frac{3x^2}{\Delta x} + \frac{3x^3}{(\Delta x)^2} - \frac{x^4}{(\Delta x)^3} \right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3\Delta x} + \frac{3x^4}{4(\Delta x)^2} - \frac{x^5}{5(\Delta x)^3} \right) \Big|_0^{\Delta x}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \left(\frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} + \frac{3(\Delta x)^4}{4(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^5}{5(\Delta x)^3} \right)$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y (\Delta x)^2}{3\Delta x} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{3} \left(\frac{1}{20} \right) = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right)^2 \left(\frac{y}{\Delta y} \right) dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx = \left(\frac{1}{\Delta y} \right) \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right)^2 y dy dx$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta y} \right) \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(y - \frac{2xy}{\Delta x} - \frac{2y^2}{\Delta y} + \frac{x^2 y}{(\Delta x)^2} + \frac{y^3}{(\Delta y)^2} + \frac{2xy^2}{\Delta x \Delta y} \right) dy dx \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta y} \right) \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 y - \frac{2y^2}{\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) + \frac{y^3}{(\Delta y)^2} \right) dy dx \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta y} \right) \int_0^{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) + \frac{y^4}{4(\Delta y)^2} \right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \left(\frac{1}{\Delta y} \right) \int_0^{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 \frac{(\Delta y)^2}{2} - \frac{2(\Delta y)^3}{3\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 + \frac{(\Delta y)^4}{4(\Delta y)^2} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 \right) dx \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \left(\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} \right) \int_0^{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 \right) dx \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \Delta y \int_0^{\Delta x} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 dx \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta y}{12} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 dx \\
\text{Como } \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 dx &= \frac{\Delta x}{5}, \text{ então:} \\
\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx &= \frac{\Delta y}{12} \frac{\Delta x}{5} = \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y}{12} \frac{\Delta x}{5} = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

6. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 2$ e $i = 1$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) y - \frac{y^2}{2\Delta y} \right) \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) - \frac{(\Delta y)^2 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2}{2\Delta y} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} \left(x^2 - \frac{2x^3}{\Delta x} + \frac{x^4}{(\Delta x)^2} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4\Delta x} + \frac{x^5}{5(\Delta x)^2} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\
\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \left(\frac{(\Delta x)^3}{3} - \frac{(\Delta x)^4}{2\Delta x} + \frac{(\Delta x)^5}{5(\Delta x)^2} \right) \\
\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{\Delta y \Delta x}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\Delta y \Delta x}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

c) Para $j = 3$:

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{y}{\Delta y} \right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right) \left(\frac{x}{\Delta x} \right) dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) y - \frac{y^2}{\Delta y} \right) dy dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3(\Delta y)} \right) \Big|_{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})}^0 dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_0^{\Delta x} x \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \frac{(\Delta y)^2 \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^2}{2} - \frac{(\Delta y)^3 \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^3}{3(\Delta y)} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^3}{2} - \frac{\left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^3}{3} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta y}{6\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^3 dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta y}{6\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(x - \frac{3x^2}{\Delta x} + \frac{3x^3}{(\Delta x)^2} - \frac{x^4}{(\Delta x)^3} \right) dx \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta y}{6\Delta x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3\Delta x} + \frac{3x^4}{4(\Delta x)^2} - \frac{x^5}{5(\Delta x)^3} \right) \Big|_0^{\Delta x} \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta y}{6\Delta x} \left(\frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} + \frac{3(\Delta x)^4}{4(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^5}{5(\Delta x)^3} \right) \\
\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta y \Delta x}{6} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\Delta y \Delta x}{120}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

7. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 3$ e $i = 1$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} \varphi_3(\varphi_1)^2 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2(\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{y}{\Delta y}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}\right) dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{1}{(\Delta y)^2} \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left((1 - \frac{x}{\Delta x})y^2 - \frac{y^3}{\Delta y}\right) dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{1}{(\Delta y)^2} \int_0^{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4\Delta y} \right) \Big|_{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})}^0 dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{1}{(\Delta y)^2} \int_0^{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \frac{(\Delta y)^3 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3}{3} - \frac{(\Delta y)^4 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4}{4\Delta y} \right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta y}{12} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 dx$$

$$\text{Como } \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 dx = \frac{\Delta x}{5}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta y}{12} \frac{\Delta x}{5} = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

8. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 1$ e $i = 2$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} \varphi_2(\varphi_1)^2 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} (\varphi_1)^2 \varphi_2 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_2(\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$:

$$\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 d\Omega = \iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1(\varphi_2)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

c) Para $j = 3$;

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

9. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 2$ e $i = 2$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_1 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} (\varphi_2)^2 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 y \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \Delta y \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^3} \int_0^{\Delta x} \left(x^3 - \frac{x^4}{\Delta x}\right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5\Delta x}\right) \Big|_0^{\Delta x}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^3} \left(\frac{(\Delta x)^4}{4} - \frac{(\Delta x)^5}{5\Delta x}\right)$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\Delta y \Delta x}{20}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{20}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 \frac{y}{\Delta y} dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{1}{\Delta y (\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} y dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{1}{\Delta y (\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{1}{\Delta y (\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} x^2 \frac{(\Delta y)^2 (1-\frac{x}{\Delta x})^2}{2} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \int_0^{\Delta x} \left(x^2 - \frac{2x^3}{\Delta x} + \frac{x^4}{(\Delta x)^2} \right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4\Delta x} + \frac{x^5}{5(\Delta x)^2} \right) \Big|_0^{\Delta x}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y}{2(\Delta x)^2} \left(\frac{(\Delta x)^3}{3} - \frac{(\Delta x)^4}{2\Delta x} + \frac{(\Delta x)^5}{5(\Delta x)^2} \right)$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

10. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 3$ e $i = 2$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_1} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega = \iint_{T_1} (\varphi_2)^2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{y}{\Delta y}\right)^2 \frac{x}{\Delta x} dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{1}{\Delta x (\Delta y)^2} \int_0^{\Delta x} x \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} y^2 dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{1}{\Delta x (\Delta y)^2} \int_0^{\Delta x} x \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{1}{3\Delta x (\Delta y)^2} \int_0^{\Delta x} x \left((\Delta y)^3 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right) dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3 dx$$

$$\text{Como } \int_0^{\Delta x} x \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3 dx = \frac{(\Delta x)^2}{20}, \text{ então:}$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y}{3\Delta x} \frac{(\Delta x)^2}{20} = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

11. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 1$ e $i = 3$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega = \iint_{T_1} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega = \iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

12. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 2$ e $i = 3$, encontraremos os mesmo resultados em $k = 3$ e $i = 2$, pois teremos:

$$\iint_{T_1} \varphi_2 \varphi_3 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 dy dx$$

$$\iint_{T_1} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_3 (\varphi_2)^2 dy dx$$

$$\iint_{T_1} \varphi_2 (\varphi_3)^2 d\Omega = \iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 dy dx$$

13. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 3$ e $i = 3$:

- a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_1 (\varphi_3)^2 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

- b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_2 (\varphi_3)^2 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

- c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} \left(\frac{y}{\Delta y} \right)^3 dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{1}{(\Delta y)^3} \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} y^3 dy dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{1}{(\Delta y)^3} \int_0^{\Delta x} \frac{y^4}{4} \Big|_0^{\Delta y(1-\frac{x}{\Delta x})} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{1}{(\Delta y)^3} \int_0^{\Delta x} \frac{(\Delta y)^4 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4}{4} dx$$

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{\Delta y}{4} \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 dx$$

Como $\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^4 = \frac{\Delta x}{5}$, então

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{\Delta y}{4} \frac{\Delta x}{5} = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

Portanto,

$$\iint_{T_1} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

A matriz resultante será $M_{ij} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, neste sentido teremos:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_1 \varphi_1 d\Omega = \iint_k (\varphi_1)^3 d\Omega + \iint_k \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega + \iint_k \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega$$

$$a_{11} = \frac{\Delta x \Delta y}{20} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \iint_k (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega + \iint_k \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega + \iint_k \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{120} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_1 \varphi_3 d\Omega = \iint_k (\varphi_1)^2 \varphi_3 d\Omega + \iint_k \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega + \iint_k \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{120} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_2 \varphi_2 d\Omega = \iint_k \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega + \iint_k (\varphi_2)^3 d\Omega + \iint_k \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega$$

$$a_{22} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{20} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_2 \varphi_3 d\Omega = \iint_k \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 d\Omega + \iint_k (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega + \iint_k (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{\Delta x \Delta y}{120} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

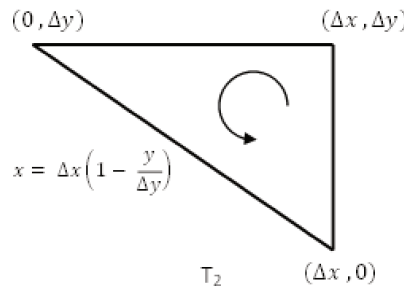
$$a_{33} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_3 \varphi_3 d\Omega = \iint_k \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega + \iint_k \varphi_2 (\varphi_3)^2 d\Omega + \iint_k (\varphi_3)^3 d\Omega$$

$$a_{33} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{20} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$M((\varphi_k \varphi_i, \varphi_j)) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} \end{bmatrix} = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Para o triângulo T_2 (veja figura abaixo), temos que as funções φ_j estão dadas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_2(x, y) &= 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3(x, y) &= 1 - \frac{y}{\Delta y}\end{aligned}$$



1. Trabalhando com $\iint_{T_2} \varphi_i \varphi_j d\Omega$:

Para $i = 1$, teremos;

$$\text{a) } \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right)^2 dx dy$$

$$\text{Fazendo } u = \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} dx = \Delta x du \\ \text{p/ } x = \Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) & \Rightarrow u = 0 \\ \text{p/ } y = \Delta x & \Rightarrow u = \frac{y}{\Delta y} \end{cases}$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_0^{\frac{y}{\Delta y}} u^2 (\Delta x) du dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 dx dy = \Delta x \int_0^{\Delta y} \frac{u^3}{3} \Big|_0^{\frac{y}{\Delta y}} dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 dx dy = \frac{\Delta x}{3} \int_0^{\Delta y} \frac{y^3}{\Delta^3 y} dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 dx dy = \frac{\Delta x}{3} \left(\frac{y^4}{4\Delta^3 y} \right) \Big|_0^{\Delta y} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$\text{b) } \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 - \frac{x^2}{\Delta^2 x} - \frac{yx}{\Delta y \Delta x} + \frac{x}{\Delta x} \right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \left(\frac{x^2}{\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x - \frac{x^3}{3\Delta^2 x} - \frac{yx^2}{2\Delta y \Delta x} \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy$$

Fazendo o cálculo teremos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta^2 x}{\Delta x} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x - \frac{\Delta^3 x}{3\Delta^2 x} - \frac{y\Delta^2 x}{2\Delta y \Delta x} \right) - \left(\frac{(\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y}))^2}{\Delta x} + \frac{y\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}{\Delta y} - (\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})) \right. \\ & \left. - \frac{(\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y}))^3}{3\Delta^2 x} - \frac{y(\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y}))^2}{2\Delta y \Delta x} \right) = \Delta x \left[\frac{y}{2\Delta y} - \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 - \frac{y}{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) + 1 - \frac{y}{\Delta y} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 + \frac{y}{2\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \right] = \Delta x \left[\frac{2}{3} - \frac{y}{2\Delta y} - 1 + \frac{2y}{\Delta y} - \frac{y^2}{\Delta^2 y} - \frac{y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y} + 1 \right. \\ & \left. - \frac{y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y} - \frac{y^3}{3\Delta^3 y} + \frac{y}{2\Delta y} - \frac{y^2}{\Delta^2 y} + \frac{y^3}{2\Delta^3 y} \right] = \Delta x \frac{y^3}{6\Delta^3 y} \end{aligned}$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \Delta x \frac{y^3}{6\Delta^3 y} dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \Delta x \left(\frac{y^4}{24\Delta^3 y} \right) \Big|_0^{\Delta y} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 - \frac{y^2}{\Delta^2 y} - \frac{yx}{\Delta y \Delta x} + \frac{y}{\Delta y} \right) dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{2yx}{\Delta y} - x - \frac{xy^2}{\Delta^2 y} - \frac{yx^2}{2\Delta y \Delta x} \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo teremos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta x} + \frac{2y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x - \frac{\Delta xy^2}{\Delta^2 y} - \frac{y(\Delta x)^2}{2\Delta y \Delta x} \right) - \left(\frac{\Delta^2 x(1-\frac{y}{\Delta y})^2}{2\Delta x} + \frac{2y\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}{\Delta y} - \Delta x(1-\frac{y}{\Delta y}) \right. \\ & \left. - \frac{y^2 \Delta x}{\Delta^2 y} (1 - \frac{y}{\Delta y}) - \frac{y\Delta^2 x}{2\Delta y \Delta x} (1 - \frac{y}{\Delta y})^2 \right) = \Delta x \left(\frac{1}{2} + \frac{2y}{\Delta y} - 1 - \frac{y^2}{\Delta^2 y} - \frac{y}{2\Delta y} - \frac{1}{2} + \frac{y}{\Delta y} - \frac{y^2}{2\Delta^2 y} \right. \\ & \left. - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{2y^2}{\Delta^2 y} + 1 - \frac{y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y} - \frac{y^3}{\Delta^3 y} + \frac{y}{2\Delta y} - \frac{y^2}{\Delta^2 y} + \frac{y^3}{2\Delta^3 y} \right) = \Delta x \left(\frac{y^2}{2\Delta^2 y} - \frac{y^3}{2\Delta^3 y} \right) \end{aligned}$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy = \int_0^{\Delta y} \Delta x \left(\frac{y^2}{2\Delta^2 y} - \frac{y^3}{2\Delta^3 y} \right) dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{y^3}{3\Delta^2 y} - \frac{y^4}{4\Delta^3 y} \right) \Big|_0^{\Delta y} = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\Delta y}{3} - \frac{\Delta y}{4} \right) = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

Para $i = 2$, teremos;

$$\text{a) } \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy = \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 dx dy = \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{2x}{\Delta x} + \frac{x^2}{\Delta^2 x}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \left(x - \frac{x^2}{\Delta x} + \frac{x^3}{3\Delta^2 x}\right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo teremos:

$$\begin{aligned} \Delta x - \frac{\Delta^2 x}{\Delta x} + \frac{\Delta^3 x}{3\Delta^2 x} - \left(\Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) - \frac{\Delta^2 x}{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 + \frac{\Delta^3 x}{3\Delta^2 x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3\right) &= \\ \Delta x \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{y}{\Delta y} + \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3\right) &= \\ \Delta x \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{y}{\Delta y} + 1 - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y} - \frac{1}{3} + \frac{y}{\Delta y} - \frac{y^2}{\Delta^2 y} + \frac{y^3}{3\Delta^3 y}\right) &= \Delta x \frac{y^3}{3\Delta^3 y} \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_2 dx dy &= \frac{\Delta x}{3\Delta^3 y} \int_0^{\Delta y} y^3 dy = \frac{\Delta x}{3\Delta^3 y} \frac{y^4}{4} \Big|_0^{\Delta y} = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_2 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} + \frac{xy}{\Delta x \Delta y}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{yx}{\Delta y} + \frac{x^2 y}{2\Delta x \Delta y}\right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo teremos:

$$\begin{aligned} \left(\Delta x - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y\Delta^2 x}{2\Delta x \Delta y}\right) - \left(\Delta x - \frac{\Delta x y}{\Delta y} - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2 \Delta x}{\Delta^2 y} + \frac{y\Delta^2 x}{2\Delta x \Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2\right) &= \\ \frac{\Delta x}{2} - \frac{y\Delta x}{2\Delta y} - \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} \left(1 - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y}\right) + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y^2 \Delta x}{\Delta^2 y} - \frac{y\Delta x}{2\Delta y} \left(1 - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y}\right) &= \\ \Delta x \left(\frac{y^2}{2\Delta^2 y} - \frac{y^3}{2\Delta^3 y}\right) &= \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \Delta x \left(\frac{y^2}{2\Delta^2 y} - \frac{y^3}{2\Delta^3 y}\right) dy \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy &= \Delta x \left(\frac{y^3}{6\Delta^2 y} - \frac{y^4}{8\Delta^3 y}\right) \Big|_0^{\Delta y} dy \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy &= \Delta x \left(\frac{\Delta^3 y}{6\Delta^2 y} - \frac{\Delta^4 y}{8\Delta^3 y}\right) = \Delta x \left(\frac{\Delta y}{6} - \frac{\Delta y}{8}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{24} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

Para $i = 3$, teremos;

$$a) \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (1 - \frac{y}{\Delta y})(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1) dx dy = \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 dx dy = \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$b) \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (1 - \frac{y}{\Delta y})(1 - \frac{x}{\Delta x}) dx dy = \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_2 dx dy = \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$\begin{aligned} c) \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (1 - \frac{y}{\Delta y})^2 dx dy \\ \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} (1 - \frac{y}{\Delta y})^2 (x) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\ \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} (1 - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{y^2}{\Delta^2 y}) (\frac{y \Delta x}{\Delta y}) dy \\ \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy &= \Delta x \int_0^{\Delta y} (\frac{y}{\Delta y} - \frac{2y^2}{\Delta^2 y} + \frac{y^3}{\Delta^3 y}) dy \\ \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy &= \Delta x (\frac{y^2}{2\Delta y} - \frac{2y^3}{3\Delta^2 y} + \frac{y^4}{4\Delta^3 y}) \Big|_0^{\Delta y} = \Delta x (\frac{\Delta^2 y}{2\Delta y} - \frac{2\Delta^3 y}{3\Delta^2 y} + \frac{\Delta^4 y}{4\Delta^3 y}) \\ \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy &= \Delta x (\frac{\Delta y}{2} - \frac{2\Delta y}{3} + \frac{\Delta y}{4}) = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

A matriz $\iint_{T_2} \varphi_i \varphi_j d\Omega$, será:

$$M(\varphi_i | \varphi_j) = \begin{bmatrix} \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 d\Omega \\ \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 d\Omega \\ \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_3 d\Omega \end{bmatrix} = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

2. Para $\iint_{T_2} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$, primeiramente temos que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_2 = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3 = 1 - \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \varphi_1 = \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \\ \nabla \varphi_2 = \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \\ \nabla \varphi_3 = \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \end{cases}$$

Para $i = 1$;

$$\begin{aligned}
\text{a) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle dx dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) dx dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \int_0^{\Delta y} x \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \int_0^{\Delta y} (\Delta x - \Delta x + \frac{y \Delta x}{\Delta y}) dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \left(\frac{y^2 \Delta x}{2 \Delta y} \right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy &= \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dx dy = \left(\frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle dx dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta^2 x} dx dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta y} x \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \int_0^{\Delta y} (\Delta x - \Delta x + \frac{y \Delta x}{\Delta y}) dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \left(\frac{y^2 \Delta x}{2 \Delta y} \right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy = -\frac{1}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle dx dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta^2 y} dx dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta y} x \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \int_0^{\Delta y} (\Delta x - \Delta x + \frac{y \Delta x}{\Delta y}) dy \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \left(\frac{y^2 \Delta x}{2 \Delta y} \right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy &= -\frac{1}{\Delta^2 y} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy = -\frac{1}{\Delta^2 y} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)$$

Para $i = 2$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle dx dy \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta^2 x} dx dy = \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dx dy = \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dx dy = -\frac{1}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle dx dy \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta^2 x} dx dy = \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dx dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dx dy = -\iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta^2 x} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle dx dy \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dx dy = 0$$

Para $i = 3$

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y} \right\rangle dx dy \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta^2 y} dx dy = \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dx dy = \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dx dy = -\frac{1}{\Delta^2 y} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\Delta x}, 0 \right\rangle dx dy \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 dx dy = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle \cdot \left\langle 0, -\frac{1}{\Delta y} \right\rangle dx dy \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta^2 y} dx dy = - \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dx dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dx dy = - \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta^2 y} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} M(\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j) &= \begin{bmatrix} \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 d\Omega \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 d\Omega \\ \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 d\Omega \end{bmatrix} \\ M(\nabla \varphi_i | \nabla \varphi_j) &= \frac{\Delta x \Delta y}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta^2 x} + \frac{1}{\Delta^2 y} & -\frac{1}{\Delta^2 x} & -\frac{1}{\Delta^2 y} \\ -\frac{1}{\Delta^2 x} & \frac{1}{\Delta^2 x} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta^2 y} & 0 & \frac{1}{\Delta^2 y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

3. Para $\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\Omega$, primeiramente temos que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_2 = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3 = 1 - \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Para $i = 1$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \end{aligned}$$

Calculando $\left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x\right)\big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x}$, temos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x\right)\big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} &= \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x}\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 - \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(y - \frac{y^2}{\Delta y}\right) + \Delta x - \frac{y^2}{\Delta y} \\ &= \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x - \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y} + \Delta x \\ &= \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y}\end{aligned}$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \frac{y^2 \Delta x}{2\Delta^2 y} dy$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{y^3 \Delta x}{6\Delta^2 y}\right)\bigg|_0^{\Delta y}$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta^3 y \Delta x}{6\Delta^2 y} \bigg|_0^{\Delta y} = \frac{\Delta y}{6}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy = \frac{\Delta y}{6}$$

$$\text{b) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x}\right)\bigg|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy$$

Calculando $\left(x - \frac{x^2}{2\Delta x}\right)\big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x}$, temos,

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{x^2}{2\Delta x}\right)\big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} &= \Delta x - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} - \left(\Delta x\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x}\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2\right) \\ &= \Delta x - \frac{\Delta x}{2} - \left(\Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y}\right) \\ &= \Delta x - \frac{\Delta x}{2} - \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} \\ &= \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y}\end{aligned}$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \frac{y^2 \Delta x}{2\Delta^2 y} dy$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{y^3 \Delta x}{6\Delta^2 y}\right)\bigg|_0^{\Delta y}$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta^3 y \Delta x}{6\Delta^2 y}\right) = \left(\frac{\Delta y}{6}\right) =$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy = \frac{\Delta y}{6}$$

$$\text{c) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \left(x - \frac{yx}{\Delta y}\right)\bigg|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy$$

Calculando $\left(x - \frac{yx}{\Delta y}\right)\big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x}$, temos,

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{yx}{\Delta y}\right)\big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} &= \Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \left(\Delta x\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) - \frac{y(\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y}))}{\Delta y}\right) \\ &= \Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y} \\ &= -\frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \left(-\frac{y \Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2 \Delta x}{\Delta^2 y} \right) dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{y^2 \Delta x}{2 \Delta y} + \frac{y^3 \Delta x}{3 \Delta^2 y} \right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{\Delta^2 y \Delta x}{2 \Delta y} + \frac{\Delta^3 y \Delta x}{3 \Delta^2 y} \right) = -\frac{\Delta y}{2} + \frac{\Delta y}{3} = \frac{\Delta y}{6}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta y}{6}$$

Para $i = 2$;

$$\begin{aligned}
\text{a) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 dx dy &= -\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 dx dy = -\frac{\Delta y}{6}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) dx dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 dx dy &= -\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 dx dy = -\frac{\Delta y}{6}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) dx dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 dx dy &= -\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 dx dy = -\frac{\Delta y}{6}$$

Para $i = 3$, observamos que $\varphi_3 = 1 - \frac{y}{\Delta y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0$, então;

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_1 dx dy = \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_2 dx dy = \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_3 dx dy = \iint_{T_2} 0 dx dy = 0$$

A matriz $\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\Omega$, será:

$$M\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i\right) = \begin{bmatrix} \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_1 d\Omega \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_2 d\Omega \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \varphi_3 d\Omega \end{bmatrix} = \frac{\Delta y}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

4. Para $\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\Omega$, primeiramente temos que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_2 = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3 = 1 - \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta y} \end{cases}$$

Para $i = 1$;

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \end{aligned}$$

Calculando $\left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x}$, temos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} &= \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 - \frac{\Delta x}{\Delta y} \left(y - \frac{y^2}{\Delta y}\right) + \Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} \\ &= \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x - \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y} + \Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} \\ &= \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} \end{aligned}$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} dy$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{y^3\Delta x}{6\Delta^2 y} \right) \Big|_0^{\Delta y}$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy = \frac{1}{\Delta y} \frac{\Delta^3 y\Delta x}{6\Delta^2 y} \Big|_0^{\Delta y} = \frac{\Delta x}{6}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy = \frac{\Delta x}{6}$$

$$\text{b) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy = \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy$$

Calculando $\left(x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x}$, temos,

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{x^2}{2\Delta x}\right)_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)} &= \Delta x - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x} - \left(\Delta x\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) - \frac{\Delta^2 x}{2\Delta x}\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2\right) \\
&= \Delta x - \frac{\Delta x}{2} - \left(\Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y}\right) \\
&= \Delta x - \frac{\Delta x}{2} - \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} \\
&= \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \frac{y^2\Delta x}{2\Delta^2 y} dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{y^3\Delta x}{6\Delta^2 y}\right)_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\Delta^3 y\Delta x}{6\Delta^2 y}\right) = \left(\frac{\Delta x}{6}\right) =
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy = \frac{\Delta x}{6}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)}^{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \left(x - \frac{yx}{\Delta y}\right)_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)}^{\Delta x} dy
\end{aligned}$$

Calculando $\left(x - \frac{yx}{\Delta y}\right)_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)}$, temos,

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{yx}{\Delta y}\right)_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)} &= \Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \left(\Delta x\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) - \frac{y(\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right))}{\Delta y}\right) \\
&= \Delta x - \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y} - \frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y} \\
&= -\frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y} \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \left(-\frac{y\Delta x}{\Delta y} + \frac{y^2\Delta x}{\Delta^2 y}\right) dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \left(-\frac{y^2\Delta x}{2\Delta y} + \frac{y^3\Delta x}{3\Delta^2 y}\right)_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= \frac{1}{\Delta y} \left(-\frac{\Delta^2 y\Delta x}{2\Delta y} + \frac{\Delta^3 y\Delta x}{3\Delta^2 y}\right) = -\frac{\Delta y}{2} + \frac{\Delta y}{3} = \frac{\Delta x}{6}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x}{6}$$

Para $i = 2$, observamos que $\varphi_2 = 1 - \frac{x}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$, então;

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_1 dx dy = \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_2 dx dy = \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_3 dx dy = \iint_{T_2} 0 dx dy = 0$$

Para $i = 3$;

$$\begin{aligned}
\text{a) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta y} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) dx dy \\
\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 dx dy &= -\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x\left(1-\frac{y}{\Delta y}\right)}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) dx dy = -\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 dx dy = - \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 dx dy = -\frac{\Delta x}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta y} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 dx dy &= -\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy = - \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 dx dy = - \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 dx dy = -\frac{\Delta x}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 dx dy &= -\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy = - \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 dx dy = - \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 dx dy = -\frac{\Delta x}{6}$$

A matriz $\iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\Omega$, será:

$$M\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i\right) = \begin{bmatrix} \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_1 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_1 d\Omega \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_2 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_2 d\Omega \\ \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \varphi_3 d\Omega & \iint_{T_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \varphi_3 d\Omega \end{bmatrix} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

5. Para $\iint_{T_2} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 1$ e $i = 1$:

a) Para $j = 1$;

$$\begin{aligned} \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_1 \varphi_1 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dx dy \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \int_0^{\Delta y} \int \Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right)^3 dx dy \\ \text{Fazendo } u &= \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} dx = du \Delta x \\ \text{p/ } x = \Delta x & \Rightarrow u = \frac{y}{\Delta y} \\ \text{p/ } x = \Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) & \Rightarrow u = 0 \end{cases} \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \int_0^{\Delta y} \int_{\frac{y}{\Delta y}}^0 (u)^3 \Delta x du dy \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \Delta x \int_0^{\Delta y} \frac{(u)^4}{4} \Big|_{\frac{y}{\Delta y}}^0 dy \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \Delta x \int_0^{\Delta y} \frac{(\frac{y}{\Delta y})^4}{4} dy \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \frac{\Delta x}{4(\Delta y)^4} \int_0^{\Delta y} y^4 dy \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \frac{\Delta x}{4(\Delta y)^4} \frac{y^5}{5} \Big|_0^{\Delta y} \\ \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^3 dy dx &= \frac{\Delta x}{4(\Delta y)^4} \frac{(\Delta y)^5}{5} = \frac{\Delta x \Delta y}{20} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_1)^3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

b) Para $j = 2$:

$$\begin{aligned} \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{y^2}{(\Delta y)^2} + \frac{2xy}{\Delta x \Delta y} - \frac{2x}{\Delta x} - \frac{2y}{\Delta y} + 1\right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy \\ \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left\{ \left(\frac{3x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{4xy}{\Delta x \Delta y} - \frac{3x}{\Delta x} + \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^3}{(\Delta x)^3} - \frac{xy^2}{\Delta x (\Delta y)^2} - \frac{2x^2 y}{(\Delta x)^2 \Delta y} \right\} dx dy \\ \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left\{ \left(\frac{3x^3}{3(\Delta x)^2} + \frac{4x^2 y}{2\Delta x \Delta y} - \frac{3x^2}{2\Delta x} + \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 x\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^4}{4(\Delta x)^3} - \frac{x^2 y^2}{2\Delta x (\Delta y)^2} - \frac{2x^3 y}{3(\Delta x)^2 \Delta y} \right\} \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\ \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \int_0^{\Delta y} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{2y}{3\Delta y} + \frac{y^2}{2(\Delta y)^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(2\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 + \frac{2\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 y}{\Delta y} - \frac{3\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^4}{4} - \frac{\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 y^2}{2(\Delta y)^2} - \frac{2\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 y}{3\Delta y} \right\} dy \end{aligned}$$

Calculando as integrais separadamente:

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \Rightarrow \begin{cases} dy = -du\Delta y \\ \text{p/ } y = 0 & \Rightarrow u = 1, \text{ então} \\ \text{p/ } y = \Delta y & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 dy = \int_1^0 (u)^2 (-\Delta y) du = -\Delta y \frac{(u)^3}{3} \Big|_1^0 = -\Delta y \frac{(-1)}{3} = \frac{\Delta y}{3} \quad (\text{B.10})$$

$$\int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 dy = \int_1^0 (u)^3 (-\Delta y) du = -\Delta y \frac{(u)^4}{4} \Big|_1^0 = -\Delta y \frac{(-1)}{4} = \frac{\Delta y}{4} \quad (\text{B.11})$$

$$\int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^4 dy = \int_1^0 (u)^4 (-\Delta y) du = -\Delta y \frac{(u)^5}{5} \Big|_1^0 = -\Delta y \frac{(-1)}{5} = \frac{\Delta y}{5} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta y} y \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 dy &= \int_0^{\Delta y} \left(y - \frac{2y^2}{\Delta y} + \frac{y^3}{(\Delta y)^2}\right) dy \\ &= \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3\Delta y} + \frac{y^4}{4(\Delta y)^2} \Big|_0^{\Delta y} \\ &= \frac{(\Delta y)^2}{2} - \frac{2(\Delta y)^3}{3\Delta y} + \frac{(\Delta y)^4}{4(\Delta y)^2} \\ &= (\Delta y)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{(\Delta y)^2}{12} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta y} y \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 dy &= \int_0^{\Delta y} \left(y - \frac{3y^2}{\Delta y} + \frac{3y^3}{(\Delta y)^2} - \frac{y^4}{(\Delta y)^3}\right) dy \\ &= \frac{y^2}{2} - \frac{3y^3}{3\Delta y} + \frac{3y^4}{4(\Delta y)^2} - \frac{y^5}{5(\Delta y)^3} \Big|_0^{\Delta y} \\ &= \frac{(\Delta y)^2}{2} - \frac{(\Delta y)^3}{\Delta y} + \frac{3(\Delta y)^4}{4(\Delta y)^2} - \frac{(\Delta y)^5}{5(\Delta y)^3} \Big|_0^{\Delta y} \\ &= (\Delta y)^2 \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{(\Delta y)^2}{20} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\Delta y} y^2 \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 dy &= \int_0^{\Delta y} \left(y^2 - \frac{2y^3}{\Delta y} + \frac{y^4}{(\Delta y)^2}\right) dy \\
&= \left. \frac{y^3}{3} - \frac{2y^4}{4\Delta y} + \frac{y^5}{5(\Delta y)^2} \right|_0^{\Delta y} \\
&= \frac{(\Delta y)^3}{3} - \frac{(\Delta y)^4}{2\Delta y} + \frac{(\Delta y)^5}{5(\Delta y)^2} \\
&= (\Delta y)^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{(\Delta y)^3}{30}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Substituindo na equação teremos:

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \int_0^{\Delta y} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{2y}{3\Delta y} + \frac{y^2}{2(\Delta y)^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(2 \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right)^3 + \frac{2(1-\frac{y}{\Delta y})^2 y}{\Delta y} - \frac{3(1-\frac{y}{\Delta y})^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1-\frac{y}{\Delta y})^4}{4} - \frac{(1-\frac{y}{\Delta y})^2 y^2}{2(\Delta y)^2} - \frac{2(1-\frac{y}{\Delta y})^3 y}{3\Delta y} \right\} dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \left\{ \Delta x \left[\left(\frac{\Delta y}{4} - \frac{(\Delta y)^2}{3\Delta y} + \frac{(\Delta y)^3}{6(\Delta y)^2} \right) - \left(\frac{2\Delta y}{4} + \frac{2}{\Delta y} \frac{(\Delta y)^2}{12} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \frac{\Delta y}{3} - \frac{1}{4} \frac{\Delta y}{5} - \frac{1}{2(\Delta y)^2} \frac{(\Delta y)^3}{30} - \frac{2}{3\Delta y} \frac{(\Delta y)^2}{20} \right) \right] \\
\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{20} - \frac{1}{60} - \frac{1}{30} \right) \right] \\
\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{1}{12} \right) - \left(\frac{4}{60} \right) \right] = \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

c) Para $j = 3$;

$$\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right)^2 \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right)^2 dx dy$$

$$\text{Fazendo } u = \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} dx = du \Delta x \\ \text{p/ } x = \Delta x & \Rightarrow u = \frac{y}{\Delta y} \\ \text{p/ } x = \Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) \int_0^{\frac{y}{\Delta y}} (u)^2 \Delta x du dy$$

$$\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy = \Delta x \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y} \right) \frac{(u)^3}{3} \Big|_0^{\frac{y}{\Delta y}} dy$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy &= \frac{\Delta x}{3(\Delta y)^3} \int_0^{\Delta y} (1 - \frac{y}{\Delta y}) y^3 dy \\
\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy &= \frac{\Delta x}{3(\Delta y)^3} \int_0^{\Delta y} (y^3 - \frac{y^4}{\Delta y}) dy \\
\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy &= \frac{\Delta x}{3(\Delta y)^3} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5\Delta y} \right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy &= \frac{\Delta x}{3(\Delta y)^3} \left(\frac{(\Delta y)^4}{4} - \frac{(\Delta y)^5}{5\Delta y} \right) \\
\int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy &= \frac{\Delta x \Delta y}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

6. Para $\iint_{T_2} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 2$ e $i = 1$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right)^2 dx dy \\
\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x^3}{(\Delta x)^3} - \frac{3x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{x^2 y}{(\Delta x)^2 \Delta y} + \frac{3x}{\Delta x} - \frac{2xy}{\Delta x \Delta y} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \right) dx dy \\
\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(\frac{x^4}{4(\Delta x)^3} - \frac{3x^3}{3(\Delta x)^2} + \frac{x^3 y}{3(\Delta x)^2 \Delta y} + \frac{3x^2}{2\Delta x} - \frac{2x^2 y}{2\Delta x \Delta y} + \frac{yx}{\Delta y} - x \right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\
\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \Delta x \int_0^{\Delta y} \frac{y^4 \Delta x}{12(\Delta y)^4} dy \\
\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{y^5 \Delta x}{60(\Delta y)^4} \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega &= \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

c) Para $j = 3$:

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy \\
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(-\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{2x}{\Delta x} - \frac{xy}{\Delta x \Delta y} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) dx dy \\
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \left(-\frac{x^3}{3(\Delta x)^2} + \frac{2x^2}{2\Delta x} - \frac{x^2 y}{2\Delta x \Delta y} + \frac{yx}{\Delta y} - x\right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \frac{y^3 \Delta x}{6(\Delta y)^3} dy \\
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(\frac{y^3 \Delta x}{6(\Delta y)^3} - \frac{y^4 \Delta x}{6(\Delta y)^4}\right) dy \\
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \left(\frac{y^4 \Delta x}{24(\Delta y)^3} - \frac{y^5 \Delta x}{30(\Delta y)^4}\right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega &= \Delta x \Delta y \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{30}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{120}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

7. Para este caso $\iint_{T_2} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 3$ e $i = 1$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

c) Para $j = 3$:

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) dx dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right) dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \left(\frac{x^2}{2\Delta x} + \frac{yx}{\Delta y} - x\right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \left(\frac{y^2 \Delta x}{2(\Delta x)^2}\right) dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \int_0^{\Delta y} \left(\frac{\Delta x y^4}{2(\Delta y)^4} - \frac{\Delta x y^3}{(\Delta y)^3} + \frac{\Delta x y^2}{2(\Delta y)^2}\right) dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \left(\frac{\Delta x y^5}{10(\Delta y)^4} - \frac{\Delta x y^4}{4(\Delta y)^3} + \frac{\Delta x y^3}{6(\Delta y)^2}\right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega &= \Delta x \Delta y \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

8. Para este caso $\iint_{T_2} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 1$ e $i = 2$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$:

$$\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

c) Para $j = 3$;

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

9. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 2$ e $i = 2$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x}^{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^3 dx dy$$

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \Rightarrow \begin{cases} dx = -\Delta x du \\ \text{p/ } x = \Delta x & \Rightarrow u = \frac{y}{\Delta y} \\ \text{p/ } x = \Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) & \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \int_{\frac{y}{\Delta y}}^0 (u)^3 (-\Delta x) du dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = (-\Delta x) \int_0^{\Delta y} \frac{u^4}{4} \Big|_{\frac{y}{\Delta y}}^0 dx$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = -\frac{\Delta x}{4} \int_0^{\Delta y} -\left(\frac{y^4}{(\Delta y)^4}\right) dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta x}{4} \frac{y^5}{5(\Delta y)^4} \Big|_0^{\Delta y}$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta x}{4} \frac{(\Delta y)^5}{5(\Delta y)^4} = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{20}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 dx dy$$

$$\text{Fazendo } u = \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \Rightarrow \begin{cases} dx = -\Delta x du \\ \text{p/ } x = \Delta x & \Rightarrow u = 0 \\ \text{p/ } x = \Delta x \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) & \Rightarrow u = \frac{y}{\Delta y} \end{cases}$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \int_{\frac{y}{\Delta y}}^0 (u)^2 (-\Delta x) du dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = (-\Delta x) \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \frac{u^3}{3} \Big|_{\frac{y}{\Delta y}}^0 dy$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega &= -\frac{\Delta x}{3} \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) \left(-\frac{y^3}{(\Delta y)^3}\right) dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega &= -\frac{\Delta x}{3} \int_0^{\Delta y} \left(\left(\frac{y^3}{(\Delta y)^3}\right) - \frac{y^4}{(\Delta y)^4}\right) dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta x}{3} \left(\frac{y^4}{4(\Delta y)^3} - \frac{y^5}{5(\Delta y)^4}\right) \Big|_0^{\Delta y} \\
\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega &= \frac{\Delta x}{3} \left(\frac{(\Delta y)^4}{4(\Delta y)^3} - \frac{(\Delta y)^5}{5(\Delta y)^4}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

10. Para este caso $\iint_{T_2} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 3$ e $i = 2$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 dy dx = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 dy dx = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2 \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x}\right) \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \Delta x \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{y^2}{(\Delta y)^2}\right) \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right) + \frac{\left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^2}{2}\right) dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \Delta x \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{2y}{\Delta y} + \frac{y^2}{(\Delta y)^2}\right) \left(\frac{y^2}{2(\Delta y)^2}\right) dy$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \int_0^{\Delta y} \left(\frac{y^2}{2(\Delta y)^2} - \frac{y^3}{(\Delta y)^3} + \frac{y^4}{2(\Delta y)^4} \right) dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \left(\frac{y^3}{6(\Delta y)^2} - \frac{y^4}{4(\Delta y)^3} + \frac{y^5}{10(\Delta y)^4} \right) \Big|_0^{\Delta y} dy \\
\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega &= \Delta x \Delta y \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \right) = \frac{\Delta x \Delta y}{60}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

11. Para este caso $\iint_{T_2} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 1$ e $i = 3$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 dx dy = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta y \Delta x}{120}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

12. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 2$ e $i = 3$, encontraremos os mesmo resultados em $k = 3$ e $i = 2$, pois teremos:

$$\iint_{T_2} \varphi_2 \varphi_3 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 dx dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_2)^2 dx dy$$

$$\iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_3)^2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 dx dy$$

13. Para este caso $\iint_{T_1} \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, considerando $k = 3$ e $i = 3$:

a) Para $j = 1$;

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_3)^2 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_1 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

b) Para $j = 2$;

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_1} \varphi_2 (\varphi_3)^2 dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{60}$$

c) Para $j = 3$:

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 dx dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 \int_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dx dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 x \Big|_{\Delta x(1-\frac{y}{\Delta y})}^{\Delta x} dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \Delta x \int_0^{\Delta y} \left(1 - \frac{y}{\Delta y}\right)^3 \left(\frac{y}{\Delta y}\right) dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \Delta x \int_0^{\Delta y} \left(-\frac{y^4}{(\Delta y)^4} + \frac{3y^3}{(\Delta y)^3} - \frac{3y^2}{(\Delta y)^2} + \frac{y}{\Delta y}\right) dy$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \Delta x \left(-\frac{y^5}{5(\Delta y)^4} + \frac{3y^4}{4(\Delta y)^3} - \frac{3y^3}{3(\Delta y)^2} + \frac{y^2}{2\Delta y}\right) \Big|_0^{\Delta y}$$

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \Delta x \Delta y \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

Portanto,

$$\iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega = \frac{\Delta x \Delta y}{20}$$

A matriz de rigidez para o triângulo T_2 será $M_{ij} = \sum_{k=1}^N \iint_k \varphi_k \varphi_i \varphi_j d\Omega$, neste sentido teremos:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^N \iint_{T_2} \varphi_k \varphi_1 \varphi_1 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^3 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_1)^2 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_1)^2 d\Omega$$

$$a_{11} = \frac{\Delta x \Delta y}{20} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^N \iint_{T_2} \varphi_k \varphi_1 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_2 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{120} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum_{k=1}^N \iint_{T_2} \varphi_k \varphi_1 \varphi_3 d\Omega = \iint_{T_2} (\varphi_1)^2 \varphi_3 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 d\Omega$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{120} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^N \iint_{T_2} \varphi_k \varphi_2 \varphi_2 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_2)^2 d\Omega + \iint_{T_2} (\varphi_2)^3 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_3 (\varphi_2)^2 d\Omega$$

$$a_{22} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{20} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^N \iint_{T_2} \varphi_k \varphi_2 \varphi_3 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 d\Omega + \iint_{T_2} (\varphi_2)^2 \varphi_3 d\Omega + \iint_{T_2} (\varphi_3)^2 \varphi_2 d\Omega$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{\Delta x \Delta y}{120} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} = \frac{\Delta x \Delta y}{24}$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^N \iint_{T_2} \varphi_k \varphi_3 \varphi_3 d\Omega = \iint_{T_2} \varphi_1 (\varphi_3)^2 d\Omega + \iint_{T_2} \varphi_2 (\varphi_3)^2 d\Omega + \iint_{T_2} (\varphi_3)^3 d\Omega$$

$$a_{33} = \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{60} + \frac{\Delta x \Delta y}{20} = \frac{\Delta x \Delta y}{12}$$

$$M((\varphi_k \varphi_i, \varphi_j)) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{24} & \frac{\Delta x \Delta y}{12} \end{bmatrix} = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$