



André Marcorin de Oliveira

# **Análise e controle de um sistema mecânico com dados transmitidos através da rede**

Campinas, SP

2015





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

André Marcorin de Oliveira

## **Análise e controle de um sistema mecânico com dados transmitidos através da rede**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno André Marcorin de Oliveira, e orientada pelo Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves .

---

Campinas, SP

2015

FICHA CATALOGRÁFICA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA  
ELIZANGELA APARECIDA DOS SANTOS – CRB 8/8098

OL4a Oliveira, André Marcorin de, 1987-  
Análise e controle de um sistema mecânico com dados transmitidos através da rede / André Marcorin de Oliveira. – Campinas, SP: [s.n.], 2015.

Orientador: Alim Pedro de Castro Gonçalves.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Sistemas estocásticos. 4. Markov, Processos de. 5. Identificação de sistemas. I. Gonçalves, Alim Pedro de Castro, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

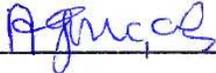
Título em Inglês:	Analysis and control of a mechanical system through network transmitted data
Palavras-chave em Inglês:	Control theory Linear systems Stochastic systems Markov processes System identification
Área de concentração:	Automação
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Alim Pedro de Castro Gonçalves [Orientador] Eduardo Fontoura Costa João Bosco Ribeiro do Val
Data da defesa:	03/07/2015
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Elétrica

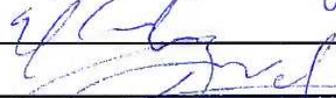
## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** André Marcorin de Oliveira

**Data da Defesa:** 3 de julho de 2015

**Título da Tese:** "Análise e Controle de um Sistema Mecânico com Dados Transmitidos Através da Rede"

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (Presidente):  \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa:  \_\_\_\_\_

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val:  \_\_\_\_\_



# Resumo

Nesta dissertação, é realizado um estudo sobre o comportamento de controles markovianos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado em um pêndulo de Furuta, também conhecido como pêndulo invertido rotacional, em um ambiente de rede simulado sujeito a falhas de envio de sinais de controle. Nesse contexto, o modelo não-linear do pêndulo é obtido analiticamente e submetido a estudos de comportamento e de identificação dos seus respectivos parâmetros. Por fim, este modelo é submetido ao controle por realimentação de estado em três tipos de redes markovianas: Gilbert-Elliot, Fritchman e McCullough.

**Palavras-chaves:** Teoria de controle, sistemas lineares, sistemas estocásticos, processos de Markov, identificação de sistemas.

# Abstract

In this thesis, a performance study of  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  markovian state feedback controllers is performed in a Furuta pendulum, also known as rotary inverted pendulum, in a simulated network environment subject to control signals packet dropouts. In this context, Furuta pendulum's non-linear equations are obtained analytically, and some tests were performed in a real model in order to identify its parameters. Finally simulations and experiments of state feedback markovian control are performed in three different markovian network channels: Gilbert-Elliot, Fritchman and McCullough.

**Keywords:** Control theory, linear systems, stochastic systems, Markov processes, system identification.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos de Sistemas Dinâmicos Lineares</b>	<b>5</b>
2.1	Notação	5
2.2	Representações de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo	6
2.3	Estabilidade de sistemas dinâmicos contínuos e discretos	7
2.4	Representações de sistemas dinâmicos lineares com saltos markovianos	9
2.5	Estabilidade de sistemas dinâmicos lineares com saltos markovianos	10
2.6	Espaço normados e normas de trajetórias	11
2.7	A norma $\mathcal{H}_2$	13
2.7.1	Sistemas contínuos	14
2.7.2	Sistemas discretos	15
2.7.3	Sistemas com saltos markovianos	17
2.8	A norma $\mathcal{H}_\infty$	19
2.8.1	Sistemas contínuos	20
2.8.2	Sistemas discretos	21
2.8.3	Sistemas com saltos markovianos	22
2.9	O Observador de Luenberger	23
2.10	Conclusão	24
<b>3</b>	<b>Modelagem física do sistema mecânico</b>	<b>25</b>
3.1	Modelagem	26
3.1.1	Modelagem do pêndulo rotacional	27
3.1.2	Modelagem do sistema mecânico SRV02	29
3.2	Linearização	33
3.2.1	Linerização para o ponto de equilíbrio estável	33
3.2.2	Linerização para o ponto de equilíbrio instável	33
3.2.3	Obtenção das equações de estado	34
3.3	Comparação do modelo com a literatura	35
3.3.1	O modelo obtido por Furuta	36
3.3.2	O modelo da Quanser	37
3.3.3	O modelo obtido por Iwase	37
3.4	Conclusão	38
<b>4</b>	<b>Identificação dos parâmetros do sistema mecânico</b>	<b>39</b>
4.1	Ensaio para caracterização da planta	40

4.1.1	Ensaio de condição inicial . . . . .	40
4.1.2	Resposta ao degrau . . . . .	42
4.1.3	Resposta a senóides . . . . .	44
4.1.4	Conclusão . . . . .	45
4.2	Identificação dos parâmetros . . . . .	46
4.2.1	O método de identificação <i>Grey-Box</i> . . . . .	46
4.2.2	Escolha do sinal de excitação . . . . .	46
4.2.3	O sinal PRBS . . . . .	47
4.2.4	Resultados . . . . .	49
4.2.5	Validação . . . . .	52
4.3	Conclusão . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos . . . . .</b>	<b>55</b>
5.1	Canais markovianos . . . . .	55
5.1.1	O canal de Gilbert-Elliot . . . . .	55
5.1.2	O canal de Fritchman . . . . .	57
5.1.3	O canal de McCullough . . . . .	58
5.2	O controle por realimentação de estados . . . . .	60
5.3	Controle $\mathcal{H}_2$ de realimentação de estados para sistemas lineares com saltos markovianos . . . . .	63
5.3.1	Simulações e experimentos para o controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .	68
5.4	Controle $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados para sistemas lineares com saltos markovianos . . . . .	74
5.4.1	Simulações e experimentos para o controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	77
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>87</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>Anexos . . . . .</b>	<b>93</b>
	<b>ANEXO A Conceitos básicos de álgebra linear . . . . .</b>	<b>95</b>
	<b>ANEXO B O complemento de Schur . . . . .</b>	<b>97</b>
	<b>ANEXO C O teorema de Parseval . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>ANEXO D Integrais de centro de massa e momento de inércia . . . . .</b>	<b>103</b>
	<b>ANEXO E Custos de controladores clássicos em um canal markoviano . . . . .</b>	<b>105</b>

*Para minha família, meus amigos, meus amores.*



# Agradecimentos

Aos meus pais, Jeanete e Douglas, por estarem sempre presentes e pelo imenso apoio e amor que me foi dado em todas as etapas da minha vida.

Aos meus irmãos Leonardo, Flávia e Cássia, por me darem uma grande força de forma incondicional sempre quando precisei.

A minha namorada Gabriela, que além de sempre me apoiar e me auxiliar em minhas dúvidas, revisou essa monografia com muita minúcia. Sou muito grato por suas sugestões.

Ao meu orientador, professor Alim Gonçalves, pela oportunidade de realizar esse projeto desafiador, pelos ensinamentos e pelas lições que me fizeram crescer como um pesquisador.

Ao meu amigo e companheiro de laboratório Matheus, por sempre estar disposto a me ajudar, bem como pela revisão dessa monografia. Sou igualmente grato por suas sugestões.

Ao professor André Fioravanti, por estar sempre disponível para me auxiliar e dar opiniões extremamente valiosas.

Ao professor Geromel, pelas oportunidades e ensinamentos de grande valor, tanto para a minha vida, quanto pelo conhecimento nessa minha área de estudo.

Aos meus companheiros de laboratório Jonathan e Leonardo pelas sugestões e diversão em todos os momentos.

A toda a minha família e amigos que me acompanharam em todo esse meu percurso. Apesar de não citar todos os nomes que sempre estiveram ao meu lado, saibam que vocês foram fundamentais no apoio e no carinho que me deram para o meu crescimento.

Sou muito grato aos membros da banca examinadora, Profs. Drs. Eduardo Costa e João Bosco do Val, pelas sugestões que contribuíram para o refinamento, a qualidade e o enriquecimento das discussões apresentadas nessa dissertação.

Finalmente, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, por acreditar na capacidade de nossas universidades e pesquisadores, bem como pelo financiamento que tornou possível esse projeto.



*“Carry on wayward son”*  
*(Kansas)*



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de sistema em malha fechada com sinais de controle e medidas submetidos a uma rede. Adaptado de (HESPANHA <i>et al.</i> , 2007) © 2007 IEEE. . . . .	3
Figura 2 – O pêndulo de Furuta do fabricante Quanser. Retirado de (QUANSER, 2011b). . . . .	25
Figura 3 – O pêndulo de Furuta utilizado no projeto. . . . .	26
Figura 4 – Diagrama de convenções do pêndulo. Adaptado de (CAZZOLATO; PRIME, 2011). . . . .	27
Figura 5 – O sistema mecânico SRV02 (APKARIAN <i>et al.</i> , 2011) do fabricante Quanser.	29
Figura 6 – O sistema mecânico SRV02 do fabricante Quanser em detalhe. Retirado de (APKARIAN <i>et al.</i> , 2011). A engrenagem de carga possui o índice (5); a <i>anti-backslash</i> (6); a engrenagem acoplada ao eixo (20); e a engrenagem que forma o final da caixa de redução (19). . . . .	30
Figura 7 – Diagrama de corpo livre do SRV02 do fabricante Quanser (QUANSER, 2011c), representando a armadura do motor DC e as engrenagens. . . . .	30
Figura 8 – Fluxograma de identificação de sistemas. Baseada em (LJUNG, 1987). . . . .	39
Figura 9 – Ângulo $\alpha$ [°] e $\phi$ [°] em função do tempo $t$ [s] para condição inicial $\alpha = 5^\circ$ . . . . .	41
Figura 10 – <i>Fast Fourier Transform</i> de $\alpha$ para condição inicial $\alpha = 5^\circ$ . . . . .	42
Figura 11 – $\phi$ [°] e $\alpha$ [°] em função do tempo $t$ [s] para entrada do tipo onda quadrada de amplitude 0.5 V e frequência de 0.313 Hz . . . . .	43
Figura 12 – $\phi$ [°] e $\alpha$ [°] em função do tempo $t$ [s] para entrada do tipo onda quadrada de amplitude 0.6 V e frequência de 0.313 Hz . . . . .	44
Figura 13 – $V_m$ [V] e $\phi$ [°] em função do tempo $t$ [s] para entrada do tipo senóide de amplitude 0.6 V e frequência de 0.8 Hz . . . . .	45
Figura 14 – Gerador PRBS de quatro bits. Retirado de (FAIRWEATHER <i>et al.</i> , 2011). . . . .	47
Figura 15 – Espectro característico de um sinal PRBS. Retirado de (FAIRWEATHER <i>et al.</i> , 2011) . . . . .	48
Figura 16 – Identificação das saídas $\phi$ e $\alpha$ em função do tempo para entrada do tipo PRBS, $n = 3$ , $T_{clk} = 0.38$ s . . . . .	50
Figura 17 – Curvas de Validação das saídas experimentais e do modelo identificado $\phi$ e $\alpha$ em função do tempo para entrada do tipo PRBS, $n = 3$ , $T_{clk} = 0.38$ s. . . . .	52
Figura 18 – Autocorrelação dos resíduos da saída $y_1$ ( $\phi$ ) e $y_2$ ( $\alpha$ ) em função do <i>lag</i> . A faixa de confiança é de 99 %. . . . .	53

Figura 19 – Correlação entre a entrada $u_1(V_m)$ e os resíduos da saída $y_1$ ( $\phi$ ) e $y_2$ ( $\alpha$ ) em função do <i>lag</i> . A faixa de confiança é de 99 %.	53
Figura 20 – O diagrama do canal de Gilbert-Elliot. Adaptado de (GONÇALVES <i>et al.</i> , 2010).	56
Figura 21 – O diagrama do canal de Fritchman. Retirado de (GONÇALVES <i>et al.</i> , 2010).	57
Figura 22 – O diagrama do canal de McCullough. Adaptado de (GONÇALVES <i>et al.</i> , 2010).	58
Figura 23 – Bloco das simulações e experimentos que implementam a perda de pacote.	62
Figura 24 – Evolução de $z(t)'z(t)$ para o controle $\mathcal{H}_2$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t = kT_d$ [s] para o canal de Gilbert-Elliot.	71
Figura 25 – Evolução temporal de $z(t)'z(t)$ para o controle $\mathcal{H}_2$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t = kT_d$ [s], com respectivos desvios.	71
Figura 26 – Ângulo $\alpha(t)$ e $\phi(t)$ para o controle $\mathcal{H}_2$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t$ [s].	73
Figura 27 – Esforço de controle $V_m(t)$ e pacotes enviados para o controle $\mathcal{H}_2$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t$ [s].	73
Figura 28 – Diagrama de valor singular do sistema realimentado clássico.	79
Figura 29 – Ruído aditivo $w$ na entrada do sistema em [V] em função do tempo $t$ [s].	79
Figura 30 – Evolução temporal de $z(t)'z(t)$ para o controle $\mathcal{H}_\infty$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t = kT_d$ [s].	82
Figura 31 – Evolução temporal de $z(t)'z(t)$ para o controle $\mathcal{H}_\infty$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t = kT_d$ [s], com respectivos desvios.	82
Figura 32 – Ângulo $\alpha(t)$ e $\theta(t)$ para o controle $\mathcal{H}_\infty$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t$ [s].	84
Figura 33 – Esforço de controle $V_m(t)$ e pacotes enviados para o controle $\mathcal{H}_\infty$ clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo $t$ [s].	84

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros identificados do pêndulo de Furuta da Quanser e desvios padrão associados. . . . .	50
Tabela 2 – Comparação entre os valores identificados e os valores teóricos/tabelados dos parâmetros. . . . .	51
Tabela 3 – Custos $\mathcal{H}_2$ de projeto de realimentação de estado com disponibilidade total (" <b>Observação completa</b> ") e parcial do modo (" <b>Custo garantido</b> ") obtidos pelo Teorema 5.1. . . . .	69
Tabela 4 – Custos $\mathcal{H}_2$ calculado via (2.55) ( <b>Custo calculado</b> ) e simulado ( <b>Custo simulado</b> ) para o sistema com disponibilidade parcial do modo, desvios padrão da simulação e erros relativos. . . . .	69
Tabela 5 – Custos $\mathcal{H}_2$ do sistema realimentado considerando o projeto de controle clássico ( <b>Custo calculado</b> ), custos simulados em ambiente de perda de pacote ( <b>Custo simulado</b> ), desvios padrão da simulação e erros relativos. . . . .	70
Tabela 6 – Custos $\mathcal{H}_2$ do controle markoviano ( <b>Custos mark.</b> ) e clássico ( <b>Custos cláss.</b> ) com realimentação de estado no pêndulo invertido rotacional da <i>Quanser</i> para os tipos de rede apresentados, bem como os respectivos desvios e erros percentuais em relação aos valores calculados. . . . .	72
Tabela 7 – Custos $\mathcal{H}_\infty$ de projeto de realimentação de estado com disponibilidade total ( <b>Observação completa</b> ) e parcial ( <b>Custo garantido</b> ) do modo obtidos pelo Teorema 5.3. . . . .	80
Tabela 8 – Custos $\mathcal{H}_\infty$ calculado ( <b>Custo calculado</b> ) e simulado ( <b>Custo simulado</b> ) para o sistema com disponibilidade parcial de modo, desvios padrão da simulação e distâncias relativas percentuais em relação ao limitante superior. . . . .	80
Tabela 9 – Custos $\mathcal{H}_\infty$ do sistema realimentado considerando o projeto de controle clássico ( <b>Custo calculado</b> ), custos simulados em ambiente de perda de pacote ( <b>Custo simulado</b> ), desvios padrão da simulação e diferenças percentuais relativas em relação ao limitante superior previsto. . . . .	81
Tabela 10 – Custos $\mathcal{H}_\infty$ do sistema markoviano e clássico com realimentação de estado no pêndulo invertido rotacional da <i>Quanser</i> para os tipos de rede apresentados, bem como os respectivos desvios e distâncias relativas em relação ao limitante teórico. . . . .	83

Tabela 11 – Custos  $\mathcal{H}_2$  de projeto de controle por realimentação de estados clássico aplicados em canais markovianos com medida do sinal de controle posterior à falha ("**Custo na planta**") e anterior à falha ("**Custo no controlador**").106

Tabela 12 – Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  de projeto de controle por realimentação de estados clássico aplicados em canais markovianos com medida do sinal de controle posterior à falha ("**Limit. na planta**") e anterior à falha ("**Limit. no controlador**").107

# Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	– Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	– Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	– Conjunto das matrizes reais de dimensão $n$ por $m$ .
$\mathbb{S}^n$	– Conjunto das matrizes simétricas reais de ordem $n$ .
$\mathbb{S}_+^n$	– Conjunto das matrizes simétricas reais definidas positivas de ordem $n$ .
$\mathbb{K}$	– Conjunto dos $N$ primeiros números naturais.
$\mathbb{P}$	– Matriz de probabilidade de transição.
$X'$	– Transposta da matriz $X$ .
$X > (\geq) 0$	– Matriz simétrica $X$ definida (semidefinida) positiva.
$X < (\leq) 0$	– Matriz simétrica $X$ definida (semidefinida) negativa.
$\mathbf{diag}[X, Y]$	– Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $X$ e $Y$ .
$\mathbf{tr}(X)$	– Traço da matriz $X$ .
$X^{-1}$	– Inversa da matriz $X$ .
$\lambda(X)$	– Autovalores da matriz $X$ .
$\bullet$	– Elementos simétricos em relação a diagonal de uma matriz simétrica.
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	– Esperança matemática de $\{\cdot\}$ .



# 1 Introdução

A teoria de análise e controle de sistemas lineares é um ramo recente da ciência, pois desenvolveu-se fundamentalmente no decorrer dos séculos XIX e XX, (BENNETT, 1996). Nesse contexto, desde os primeiros passos da teoria até os dias atuais, verifica-se um grande crescimento tecnológico que impõe novos desafios de aplicação em diversas áreas. Pode-se citar especialmente a interdisciplinaridade que imediatamente surge nos novos contextos de aplicação, como o controle através de redes de comunicação. Esse surge da fusão entre duas disciplinas distintas, a saber, a teoria de comunicação e a própria teoria de controle. A motivação para a análise e controle de sistemas à distância é variada, porém instigante ao se considerar os benefícios relacionados a diminuição de custos de manutenção e arquiteturas flexíveis (HESPANHA *et al.*, 2007). Todavia, novos problemas e restrições surgem nesse contexto, gerando a necessidade de novos tratamentos teóricos diversos à teoria clássica.

O ponto de partida para a compreensão da teoria de controle através da rede utilizada nessa dissertação é a própria teoria de sistemas lineares. Essa teoria constitui o alicerce para a análise e síntese de controladores, formando assim o arcabouço das teorias descritas nesse projeto. Nesse âmbito, toma-se como ponto de partida o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos, cuja origem remonta à revolução industrial inglesa. Nesse contexto, podem ser citados J.V. Poncelet e G.B. Airy, cientistas pioneiros que motivaram o desenvolvimento da teoria através de publicações que abordaram a possibilidade de descrever a dinâmica de controladores através de equações diferenciais. Apesar dos físicos e matemáticos da época terem conhecimento que a condição de estabilidade de sistemas lineares recai sobre as raízes de suas respectivas equações características, o desafio de fato era obter condições que não tivessem como requisito o cálculo desses valores. Porém, os cientistas citados não obtiveram sucesso no estudo dessa problemática (BENNETT, 1996). Ainda nesse intento, James Clerk Maxwell obteve condições necessárias e suficientes até sistemas de quarta ordem em seu artigo *On governors*, de 1868. Finalmente, coube a Edward Routh e Adolf Hurwitz encontrar condições necessárias e suficientes por meio de análise da equação característica do sistema (BENNETT, 1996).

Além dos cientistas teóricos citados, bem como o trabalho de homens que efetivamente aplicaram conceitos ou criaram máquinas como James Watts, desponta o fundamental trabalho de um russo, Aleksandr Lyapunov, através do seminal *The General Problem of Stability of Motion* de 1892, ver (MAWHIN, 2005). Nesse trabalho foram apresentados os métodos de Lyapunov para determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos, introduzindo conceitos

que posteriormente dariam origem à análise de sistemas lineares através das desigualdades matriciais lineares<sup>1</sup>. Em decorrência do trabalho de Lyapunov, sabe-se que um sistema linear contínuo é estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ , que satisfaça a desigualdade

$$A'P + PA < 0, \quad (1.1)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz dinâmica do sistema.

Somam-se a teoria criada por Lyapunov os esforços de cientistas como Lur'e, Postnikov, Yabukovich, Popov e Kalman, entre outros, no aprimoramento da análise e controle através das desigualdades matriciais lineares (BOYD *et al.*, 1994). Porém, o método de análise e síntese de controladores via LMI ganhou real espaço prático somente a partir da década de 90, com a publicação do livro *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* por Stephen Boyd e coautores, (BOYD *et al.*, 1994). Nessa época, o desenvolvimento de métodos numéricos promissores para problemas convexos, como o de algoritmos de pontos interiores no final da década de 80 por Nesterov e Nemirovsky, permitiu a programação de *solvers* mais rápidos e numericamente confiáveis em detrimento a busca por soluções analíticas. Essa abordagem foi proposta para uma desigualdade matricial específica por Willems em (WILLEMS, 1971), ver (BOYD *et al.*, 1994), sem a ambição de tornar esse método geral. O trecho, retirado do livro de Boyd o qual, por sua vez, utilizou a fonte de Willems, mostra a potencialidade que as LMIs possuíam:

*"The basic importance of the LMI seems to be largely unappreciated. It would be interesting to see whether or not it can be exploited in **computacional algorithms**, for example."*

Retirado de (BOYD *et al.*, 1994) e (WILLEMS, 1971).

A análise e síntese de controladores para sistemas lineares a partir de LMIs permitiu a obtenção de soluções de problemas clássicos, como os de controle ótimo, de forma mais eficiente. Nesse tipo de controle, um custo definido por um funcional (uma função das variáveis do sistema) deve ser otimizado, como por exemplo os custos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . A título de ilustração, define-se o funcional  $J$  para um controlador do tipo LQR contínuo e de horizonte infinito para um sistema de apenas uma entrada como

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + \rho u'u) dt. \quad (1.2)$$

onde  $x(t)$  é o estado do sistema e  $u(t)$ , a entrada de controle, (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

<sup>1</sup> do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMI).

Atualmente, na fusão das áreas de controle e de transmissão de dados, surge a área de aplicação da teoria de controle para sinais submetidos a canais não perfeitos. Nessa abordagem, o sinal de controle e/ou de sensores são enviados através de redes de comunicação, sujeitos a diversos fenômenos intrínsecos ao canal como perdas de sinais, limitação de banda, atrasos, entre outros. Essa área de estudo é chamada de Controle Através da Rede<sup>2</sup>, a qual é considerada promissora, com resultados consistentes em aplicações como cirurgia remota, controle remoto em ambientes hostis, rodovias autônomas e veículos aéreos não-tripulados (HESPANHA *et al.*, 2007). A Figura 1 mostra a representação de um sistema em malha fechada onde sinais de controle e de medidas são submetidos à rede.

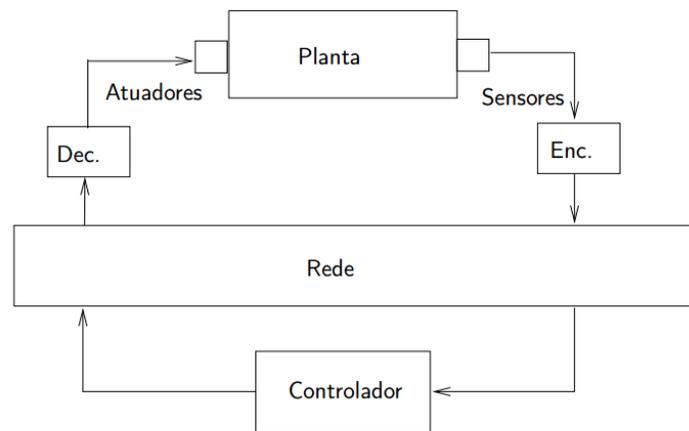


Figura 1 – Representação de sistema em malha fechada com sinais de controle e medidas submetidos a uma rede. Adaptado de (HESPANHA *et al.*, 2007) © 2007 IEEE.

Especificamente, o comportamento de sistemas sujeitos a falhas de envio de sinais de controle ou de sensores pode ser modelado, em redes digitais, através de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos a tempo discreto<sup>3</sup>. MJLS são uma classe de sistemas estocásticos, cuja dinâmica é regida por uma cadeia de Markov discreta. Esses sistemas são compostos por um conjunto de realizações de espaço de estados  $(A_{\theta_k}, B_{\theta_k}, C_{\theta_k}, D_{\theta_k})$ , que permutam estocasticamente de acordo com o modo da cadeia de Markov  $\theta_k$ . Devido às características de comportamento de MJLS, esses podem ser utilizados para modelar sistemas sujeitos a falhas em atuadores e/ou sensores, ou perdas de pacote modeladas por cadeias de Markov. A modelagem de canais de comunicação por processos estocásticos markovianos é bem estabelecida na literatura, para os quais existem vários modelos, (ELLIOTT, 1963), (MCCULLOUGH, 1968), entre outros; bem como uma literatura bem desenvolvida para simulação (TRANter

<sup>2</sup> *Networked Control Systems (NCS)*, em inglês.

<sup>3</sup> do inglês, *Markovian Jump Linear Systems (MJLS)*.

*et al.*, 2003). Em relação aos MJLS a tempo discreto, a teoria é considerada bem sedimentada. Sua origem pode ser traçada na década de 60, com os artigos *Analytical design of controllers in systems with random attributes* de N. N. Krasovskii e E. A. Lidskii e *Optimal control of continuous-time Markov stochastic systems* de J. J. Florentin, ver (COSTA *et al.*, 2005). Desde então, diversos aspectos de análise e controle robusto foram abordados, como o problema LQG a horizonte finito e infinito, o controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , filtragem, entre outros. A referência fundamental para MJLS discretos é (COSTA *et al.*, 2005).

Essa dissertação de mestrado visa contribuir com a área de MJLS e NCS ao realizar um estudo de desempenho de controladores amostrados por realimentação de estado em ambientes sujeitos a falhas de transmissão do sinal de controle, aplicados a um sistema mecânico. Essas falhas são modeladas conforme o comportamento de canais conhecidos na literatura como o canal de Gilbert-Elliot, Fritchman e McCullough. Especificamente, o estudo visa comparar a performance dos controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  MJLS frente aos seus equivalentes clássicos, que não prevêm o fenômeno da perda de pacote. Em relação ao sistema mecânico, será utilizado o pêndulo invertido rotacional, uma planta não-linear e instável. O modelo será obtido através de abordagens tradicionais da física, bem como a planta será submetida a um processo de identificação dos seus respectivos parâmetros.

Essa dissertação é organizada como segue:

- **Capítulo 2:** neste capítulo são abordados os conceitos fundamentais de controle, como a estabilidade de Lyapunov, bem como os conceitos de normas de sistemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para o domínio contínuo, discreto e para sistemas lineares com saltos markovianos.
- **Capítulo 3:** a modelagem da planta é realizada de forma tradicional, através de coordenadas generalizadas. Em adição, o modelo é comparado com as diversas propostas encontradas na literatura.
- **Capítulo 4:** neste capítulo é realizada a identificação prática dos parâmetros que compõem o sistema através de métodos de identificação *Grey-box*, além do estudo de uma grande parte das características da planta através de testes de comportamento,
- **Capítulo 5:** neste capítulo são introduzidas as desigualdades matriciais para a síntese do controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  markoviano, bem como os resultados das simulações e da aplicação na planta real, e a comparação de performance com controles clássicos em ambientes de perda de pacote.

## 2 Conceitos Básicos de Sistemas Dinâmicos Lineares

Neste capítulo serão explorados os conceitos básicos de estabilidade, normas e os problemas de otimização  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, para os casos contínuo e discreto, bem como MJLS a tempo discreto. A primeira seção introduz as notações utilizadas no decorrer de toda a tese. Na segunda seção, é apresentada a notação de espaço de estado para sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, contínuo e discreto, bem como as suas respectivas respostas temporais. A terceira seção introduz o conceito de estabilidade, bem como as condições necessárias e suficientes para que um sistema contínuo e discreto seja considerado estável. A quarta seção introduz a notação de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos e a quinta seção estabelece as condições necessárias e suficientes para estabilidade de sistemas desse tipo. Na sexta seção, é realizada uma introdução de espaços normados para que, na sétima e oitava seções, sejam introduzidos e desenvolvidos os conceitos de norma de sistemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas contínuos, discretos e markovianos. Finalmente, a última seção introduz os conceitos do observador de Luenberger clássico utilizado nos projetos desse trabalho para que os controladores por realimentação de estado possam ser implementados. O conteúdo desse capítulo foi amplamente baseado na tese de mestrado *Controle de Sistemas Dinâmicos Através de Redes de Comunicação* (SOUZA, 2012) e na tese de doutorado *Controle Dinâmico de saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos* (GONÇALVES, 2009). Em relação aos sistemas markovianos discretos, conforme citado na Introdução, uma referência fundamental é (COSTA *et al.*, 2005).

### 2.1 Notação

Nessa tese, letras maiúsculas denotam matrizes e minúsculas denotam vetores. Letras gregas minúsculas foram utilizadas na representação de escalares. A operação da transposição para matrizes e vetores é denotada por ( $'$ ), bem como a operação do traço é denotada, para matrizes quadradas,  $\mathbf{tr}(\cdot)$ .

O conjunto dos números naturais são representados por  $\mathbb{N}$ , assim como  $\mathbb{R}$  denota os números reais. Para vetores de dimensão  $n$ , a sua respectiva representação do conjunto é  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto dos primeiros  $N$  números naturais é representado por  $\mathbb{K}$ . Além disso, o espaço das matrizes  $n \times m$  é representado por  $\mathbb{R}^{n \times m}$  e as matrizes simétricas de ordem  $n$ , por  $\mathbb{S}^n$ .

Uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{S}^n$  que respeita a condição

$$x'Px > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad (2.1)$$

é dita matriz definida positiva ( $P > 0$ ). O espaço das matrizes simétricas definidas positivas é denotado por  $\mathbb{S}_+^n$ .

Quando matrizes são representadas por blocos, o símbolo  $(\bullet)$  denota o bloco simétrico correspondente, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} A & \bullet \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Dados  $N^2$  números reais não negativos  $p_{ij}$  que satisfaçam às restrições  $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iN} = 1$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $N$  matrizes reais simétricas  $X_j$  para todo  $j \in \mathbb{K}$ , a combinação convexa destas matrizes com pesos  $p_{ij}$  é definida por

$$X_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j. \quad (2.3)$$

Da mesma forma, define-se para matrizes reais simétricas, a inversa da combinação convexa das inversas de  $X_j$  como

$$X_{qi} = \left( \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j^{-1} \right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Por fim, para matrizes que dependem de dois índices  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , as definições acima continuam válidas substituindo-se  $X_j$  por  $X_{ij}$ .

## 2.2 Representações de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo

Um sistema dinâmico linear contínuo invariante no tempo pode ser representado da seguinte forma,

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Jw(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = C_y x(t) + E_y w(t), \\ z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) + E_z w(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^q$  é a entrada controlada,  $w \in \mathbb{R}^m$  é a entrada exógena,  $y \in \mathbb{R}^s$  é a saída medida e  $z \in \mathbb{R}^r$  a saída controlada. A condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é dada.

Para encontrar a representação em frequência do sistema contínuo, basta aplicar a transformada de Laplace no conjunto representado na Equação (2.5) e encontrar  $\hat{y}(s)$  em

função das suas entradas  $\hat{u}(s)$  e  $\hat{w}(s)$ . Além disso, a saída temporal do sistema  $y(t)$  pode ser encontrada pela solução da equação diferencial da Equação (2.5).

$$y(t) = C_y \left[ e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} (Bu(\tau) + Jw(\tau)) d\tau \right] + E_y w(t). \quad (2.6)$$

De forma similar, um sistema linear discreto e invariante no tempo é representado por,

$$\mathcal{G}_d : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Jw(k), & x(0) = x_0, \\ y(k) = C_y x(k) + E_y w(k), \\ z(k) = C_z x(k) + D_z u(k) + E_z w(k). \end{cases} \quad (2.7)$$

Sua resposta no domínio da frequência pode ser encontrada através da aplicação da transformada  $Z$  nas equações do sistema apresentado na Equação (2.7). Para encontrar a saída temporal do sistema no domínio discreto, basta encontrar a fórmula recursiva do sistema. O resultado é mostrado na Equação (2.8).

$$y(k) = C_y \left[ A^k x(0) + u_s(k-1) \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} (Bu(i) + Jw(i)) \right] + E_y w(k), \quad (2.8)$$

onde  $u_s$  é o degrau unitário.

## 2.3 Estabilidade de sistemas dinâmicos contínuos e discretos

O estudo da estabilidade de um sistema dinâmico é essencial para sua respectiva análise, bem como para o correto funcionamento de projetos de controle. Nesse contexto, faz-se necessário definir o conceito de ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico (SLOTINE *et al.*, 1991), para  $u = 0$  e  $w = 0$ .

**Definição 2.1** *Um estado  $x_e$  é um ponto de equilíbrio de um sistema se, a partir do momento em que o vetor de estado  $x(t)$  atinge  $x_e$ ,  $x(t)$  permanece em  $x_e$  para todo o tempo futuro.*

Dessa forma, seja a região no espaço de estados definida por  $\|x\| < R$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $R \in \mathbb{R}$ . Define-se o conceito da estabilidade local como (SLOTINE *et al.*, 1991),

**Definição 2.2 Estabilidade Local:** *O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito estável se, para qualquer  $R > 0$ , existe um  $r > 0$  de forma que, se  $\|x(0)\| < r$ , então  $\|x\| < R$  para todo  $t \geq 0$ . Caso contrário, esse ponto é dito instável.*

Assim, define-se o conceito de estabilidade assintótica para sistemas contínuos e discretos, (SLOTINE *et al.*, 1991), tomando a origem como ponto de equilíbrio:

**Definição 2.3** O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito assintoticamente estável se  $x_e$  for estável e existir  $r > 0$  tal que  $\|x(0)\| < r$ , e  $x(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .

A condição  $\|x(0)\| < r$  é necessária somente para sistemas não-lineares que apresentam mais pontos de equilíbrio. Caso o sistema seja assintoticamente estável para qualquer condição inicial, situação que sempre ocorrerá em sistemas lineares estáveis, o ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável, como mostrado na próxima definição, (SLOTINE *et al.*, 1991).

**Definição 2.4 Estabilidade global:** Se a estabilidade assintótica é respeitada para qualquer estado inicial, o ponto de equilíbrio é dito de assintoticamente estável para todo o espaço de estados, ou ainda, globalmente assintoticamente estável.

Verifica-se que um sistema dinâmico linear contínuo é globalmente assintoticamente estável se a condição,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0, \quad (2.9)$$

for respeitada. Da mesma forma, para um sistema discreto ser classificado como globalmente assintoticamente estável, esse deve respeitar a condição,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 = 0. \quad (2.10)$$

O limite em (2.9) é respeitado se, e somente se, os autovalores  $\lambda(A)$  da matriz  $A$  possuem partes reais negativas. Uma matriz em que esta propriedade é satisfeita é chamada de matriz *Hurwitz*. Para o caso discreto, o limite em (2.10) é respeitado se, e somente se, os autovalores de  $A$  respeitam a condição  $|\lambda(A)| < 1$ . Esse tipo de matriz é chamada de matriz *Schur*. Os autovalores  $\lambda(A)$  são também chamados de polos do sistema.

Em posse dos conceitos de estabilidade, pode-se enunciar o Teorema de Lyapunov para a estabilidade global, (SLOTINE *et al.*, 1991),

**Teorema 2.1 Teorema de Lyapunov para Estabilidade global:** Se existir uma função escalar  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos estados  $x$  de um sistema dinâmico, continuamente diferenciável (ou somente contínua para sistemas discretos), de tal forma que, para todo  $x$ ,

- $v(x) > 0$ ,
- $\dot{v}(x) < 0$  (caso contínuo);  $v(x(k+1)) - v(x(k)) < 0$  (caso discreto),
- $v(x) \rightarrow \infty$  para  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,

então a origem é globalmente assintoticamente estável. A função  $v$  é chamada de função de Lyapunov.

Verifica-se que uma forma de analisar a estabilidade de um sistema dinâmico é definir uma função do estado do tipo Lyapunov e verificar se as propriedades do Teorema 2.1 são satisfeitas. Para um sistema linear, essa análise pode ser realizada tomando a função de Lyapunov do tipo quadrática,  $v(x) = x'Px$ . Assim, pode ser enunciado o Corolário 2.1 em relação a estabilidade de um sistema contínuo.

**Corolário 2.1** *Um sistema linear contínuo é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{S}_+^n$  de tal forma que a condição  $A'P + PA < 0$  seja satisfeita.*

Esse resultado é facilmente obtido ao se definir a função quadrática  $v(x) = x'Px$  e utilizar a representação do espaço de estado  $\dot{x}(t) = Ax$ , e estabelecer as condições sobre a função  $v(x)$  para que o Teorema 2.1 seja satisfeito.

Para o caso discreto, a mesma função quadrática  $v(x) = x'Px$  pode ser utilizada. O resultado é mostrado no Corolário 2.2.

**Corolário 2.2** *Um sistema linear discreto é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{S}_+^n$  de tal forma que a condição  $A'PA - P < 0$  seja satisfeita.*

Verifica-se que os Corolários 2.1 e 2.2 estabelecem uma condição simples: basta existir uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{S}_+^n$  que satisfaça as condições propostas que o sistema é globalmente assintoticamente estável. A matriz  $P$  pode ser facilmente obtida através de métodos numéricos de programas científicos como o *Matlab*.

## 2.4 Representações de sistemas dinâmicos lineares com saltos markovianos

Um sistema linear com saltos markovianos a tempo discreto (MJLS) é um sistema estocástico, cujas matrizes de estado dependem do estado (modo) de uma cadeia de Markov finita. Esse sistema pode ser representado através de equações de estado como,

$$\mathcal{G}_m : \begin{cases} x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k), \\ y(k) = C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k), \\ z(k) = C_z(\theta_k)x(k) + D_z(\theta_k)u(k) + E_z(\theta_k)w(k), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^q$  é a entrada de controle,  $w(k) \in \mathbb{R}^m$  é a perturbação externa,  $y(k) \in \mathbb{R}^s$  é a saída medida e  $z(k) \in \mathbb{R}^r$  é a saída controlada.

O argumento  $\theta_k$  representa o estado markoviano, também chamado modo. As matrizes de espaço de estado em (2.11) dependem de uma cadeia de Markov cujos valores são tomados no conjunto finito  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ . As probabilidades de transição são dadas pela matriz de transição associada  $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , cujos elementos satisfazem  $p_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i)$ ,  $p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1$  e  $p_{ij} > 0$ . Para facilitar a apresentação, as matrizes de espaço de estado são escritas como  $A(\theta_k) := A_i$ ,  $B(\theta_k) := B_i$ ,  $J(\theta_k) := J_i$ ,  $C_z(\theta_k) := C_{zi}$ ,  $D_z(\theta_k) := D_{zi}$  e  $E_z(\theta_k) := E_{zi}$ , quando  $\theta_k = i \in \mathbb{K}$ .

## 2.5 Estabilidade de sistemas dinâmicos lineares com saltos markovianos

A análise da estabilidade de sistemas dinâmicos lineares com saltos markovianos difere da análise anterior realizada nesse capítulo para sistemas contínuos e discretos devido a sua natureza estocástica. Assim, a estabilidade para esse tipo de sistema pode ser definida de várias formas estocásticas equivalentes encontradas na literatura, (JI *et al.*, 1991), mostradas nas definições a seguir.

**Definição 2.5** *Considere o sistema (2.11) com entrada de controle  $u(k) = 0$  e entrada exógena  $w(k) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e condições iniciais  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{K}$ . O sistema  $\mathcal{G}_m$  é,*

a) *Estável por média quadrática, se para todo estado inicial  $(x_0, \theta_0)$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{x(k)'x(k) | x_0, \theta_0\} = 0, \quad (2.12)$$

b) *Estocasticamente estável, se para todo estado inicial  $(x_0, \theta_0)$ ,*

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)'x(k) | x_0, \theta_0 \right\} < \infty, \quad (2.13)$$

c) *Exponencialmente estável por média quadrática, se para todo estado inicial  $(x_0, \theta_0)$  existirem constantes  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 0$  tais que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\mathcal{E} \{x(k)'x(k) | x_0, \theta_0\} < \beta \alpha^k x_0'x_0, \quad (2.14)$$

Essas três definições são equivalentes para sistemas lineares com saltos markovianos e cadeia de Markov finita, conforme mostrado em (JI *et al.*, 1991). Esse conjunto é normalmente chamado de estabilidade de segundo momento<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Second Moment Stability (SMS)

Por fim, pode-se escrever condições em desigualdades matriciais lineares de forma similar às obtidas através das condições de estabilidade de Lyapunov, para o sistema linear com saltos markovianos, (COSTA; FRAGOSO, 1993).

**Lema 2.1** *O sistema (2.11) com entrada de controle  $u(k) = 0$  e entrada exógena  $w(k) = 0$  é estável pelo segundo momento se, e somente se, existirem matrizes  $P_i \in \mathbb{S}_+$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  tais que as  $N$  desigualdades de Lyapunov acopladas,*

$$A_i' P_{p_i} A_i - P_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.15)$$

*possam ser simultaneamente satisfeitas.*

A prova do Lema 2.1 pode ser encontrada em (COSTA; FRAGOSO, 1993) e (GONÇALVES, 2009).

Assim, o conceito de estabilidade para sistemas determinísticos e estocásticos foi apresentado e desenvolvido. Essas são condições necessárias para a caracterização de sistemas dinâmicos e para o cômputo das normas de sistemas que serão estudados nesse capítulo.

## 2.6 Espaço normados e normas de trajetórias

O estudo de normas se faz necessário para a definição de critérios de controle ótimo, como o  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  que serão utilizados nessa tese. Esses possuem analogias com critérios da engenharia comumente adotados, como a energia associada às trajetórias dos estados de um sistema ou a performance do próprio frente a ruídos.

O conceito de norma está intimamente ligado com o conceito de distâncias. Essa entidade é um "conceito auxiliar que utiliza as operações de um espaço vetorial (...) empregada para obter uma métrica  $d$  do tipo desejado", (KREYSZIG, 1978). A definição formal é dada por:

**Definição 2.6** *A norma em um espaço vetorial real ou complexo  $\mathcal{X}$  é uma função real em  $\mathcal{X}$  para a qual um valor  $x \in \mathcal{X}$  é denotado por  $\|x\|$  com as seguintes propriedades,*

- $\|x\| > 0, x \in \mathcal{X} | x \neq 0, \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0;$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$
- $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|, x, y \in \mathcal{X}. \text{ (Desigualdade triangular);}$

Através da união do conceito de norma e espaços vetoriais, pode-se definir o espaço normado, bem como o espaço de Banach, (KREYSZIG, 1978).

**Definição 2.7** *Um espaço normado  $\mathcal{X}$  é um espaço vetorial dotado de norma. Um espaço de Banach é um espaço normado completo na métrica definida pela norma,*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.16)$$

*O espaço normado é representado por  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ , ou simplesmente por  $\mathcal{X}$ .*

Assim, um espaço normado completo, ou espaço de Banach, é um espaço vetorial cuja métrica é induzida pela função norma operada dentro do espaço em questão. Essa função pode ser definida de várias formas, desde que se respeitem as condições da Definição 2.6. Nesse contexto, define-se o espaço de trajetórias contínuas,  $\mathcal{L}_2$ . (KHALIL, 2002).

**Definição 2.8** *O espaço  $\mathcal{L}_2$  é o espaço de trajetórias definidas como  $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e contínuas por partes, tal que a norma,*

$$\|z\|_2 = \left( \int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

*seja finita.*

Em (KREYSZIG, 1978), mostra-se que o espaço  $\mathcal{L}_2$  é um espaço de Banach.

De forma equivalente, define-se o espaço de trajetórias  $\ell_2$  de sistemas discretos como,

**Definição 2.9** *O espaço  $\ell_2$  é o espaço de trajetórias discretas definidas como  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de tal forma que a norma,*

$$\|z\|_2 = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

*seja finita.*

De forma análoga ao espaço  $\mathcal{L}_2$ , mostra-se que o espaço  $\ell_2$  é um espaço de Banach, (KREYSZIG, 1978).

Em relação aos MJLS, faz-se necessário definir o espaço de probabilidade fundamental para que o equivalente estocástico de  $\ell_2$  seja estabelecido (COSTA *et al.*, 2005). Nesse contexto, para o sistema estocástico definido em (2.11), a variável da cadeia de Markov  $\theta_k$  assume valores no conjunto  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$  para todo tempo  $k \in \mathbb{N}$  e o restante das variáveis tomam seus valores do espaço amostral  $\tilde{\Omega}_k$ . Dessa forma, para  $\theta_k$ , define-se a  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{K}$  de

todos os subconjuntos de  $\mathbb{K}$  e, para o restante das variáveis, define-se  $\tilde{\mathfrak{F}}_k$  como a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\tilde{\Omega}_k$ . Para que todo o tempo  $k$  possa ser considerado, define-se

$$\Omega = \prod_{k \in \mathbb{N}} (\tilde{\Omega}_k \times \mathbb{K}_k),$$

onde  $\mathbb{K}_k$  são cópias de  $\mathbb{K}$ . Além disso, define-se  $\mathbb{N}_k = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq k\}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  e, dessa forma

$$\mathfrak{F} = \sigma \left\{ \prod_{k \in \mathbb{N}} (F_k \times \kappa_k) \mid F_k \in \tilde{\mathfrak{F}}_k \text{ e } \kappa_k \in \mathfrak{K} \text{ para cada } k \in \mathbb{N} \right\}$$

e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathfrak{F}_k = \sigma \left\{ \prod_{l \in \mathbb{N}_k} (F_l \times \kappa_l) \times \prod_{\tau=k+1}^{\infty} (\tilde{\Omega}_\tau \times \mathbb{N}_\tau) \mid F_l \in \tilde{\mathfrak{F}}_l \text{ e } \kappa_l \in \mathfrak{K} \text{ para cada } l \in \mathbb{N}_k \right\}$$

de forma que  $\mathfrak{F}_k \subset \mathfrak{F}$ . Por fim, para as medidas de probabilidade de transição

$$\text{Prob}(\theta_{k+1} = j \mid \mathfrak{F}_k) = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i) = p_{ij}, \quad (2.17)$$

e  $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ , a matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov, define-se o espaço de probabilidade fundamental  $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_k\}, \text{Prob})$ , (COSTA *et al.*, 2005).

Assim, o espaço de trajetórias estocásticas  $\mathbb{L}_2$  é definido como, (VAL *et al.*, 2002).

**Definição 2.10** *Seja uma cadeia de Markov homogênea a tempo discreto de matriz de probabilidade  $\mathbb{P}$ , uma variável aleatória  $z = \{z(k)\}$  para  $k \geq 0$  que pertence ao espaço de probabilidade fundamental  $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_k\}, \text{Prob})$ . Define-se o espaço  $\mathbb{L}_2$  para  $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e, para cada  $k \geq 0$ , a norma estocástica,*

$$\|z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z(k)'z(k)\} < \infty.$$

Em posse das definições abordadas, as normas de sistema  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser apresentadas.

## 2.7 A norma $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  é uma norma de um sistema definida ao se aplicar excitações impulsivas em todos os seus canais de entrada. Pode ser mostrado que essa norma é equivalente a norma quadrática da trajetória efetuada pela saída  $z$ , a qual remete a energia de sistemas físicos.

### 2.7.1 Sistemas contínuos

A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema contínuo é definida em sua forma frequencial como:

**Definição 2.11** *Seja a função de transferência  $H(s)$  de um sistema contínuo  $\mathcal{G}_c$  da entrada exógena  $w$  para a saída controlada  $z$ , para  $u = 0$  e  $s = j\omega$ . A norma  $\mathcal{H}_2$  desse sistema é definida como, (GEROMEL; KOROGUI, 2011),*

$$\|\mathcal{G}_c\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{tr}(H(-j\omega)'H(j\omega)) d\omega \right)}.$$

Pode-se utilizar a Definição 2.11 e o teorema de Parseval (Anexo C) para encontrar uma definição equivalente no tempo. Dessa forma, a Definição 2.11 pode ser escrita como

$$\|\mathcal{G}_c\|_2 = \sqrt{\left( \int_0^{\infty} \mathbf{tr}(h(t)'h(t)) dt \right)}. \quad (2.18)$$

Assim, toma-se a resposta ao impulso do sistema, definida como a anti-transformada da função de transferência,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{C_z(sI - A)^{-1}J + E_z\} = C_z e^{At}J + E_z\delta(t) \quad (2.19)$$

Substitui-se a Equação (2.19) em (2.18) para obter

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_c\|_2^2 &= \int_0^{\infty} \mathbf{tr}(h(t)'h(t)) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{tr}(J'e^{A't}C'_zC_z e^{At}J) dt + \mathbf{tr}(E'_zC_zJ) \\ &\quad + \mathbf{tr}(J'C'_zE_z) + \int_0^{\infty} \mathbf{tr}(E'_zE_z)\delta(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para que a expressão (2.20) possa convergir, a matriz  $E_z$  deve ser nula, pois a integral de  $\delta(t)^2$  diverge, o que implica que o sistema seja estritamente próprio. Além disso, a matriz  $A$  deve ser Hurwitz para garantir a convergência das integrais discutidas acima.

Por fim, a Equação (2.20) pode ser escrita como

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \mathbf{tr} \left( \int_0^{\infty} J'e^{A't}C'_zC_z e^{At}J dt \right) = \mathbf{tr} \left( J' \left[ \int_0^{\infty} e^{A't}C'_zC_z e^{At} dt \right] J \right) = \mathbf{tr}(J'P_oJ), \quad (2.21)$$

onde  $P_o$  é o gramiano de observabilidade,

$$P_o = \int_0^{\infty} e^{A't}C'_zC_z e^{At} dt. \quad (2.22)$$

Da mesma forma, pela propriedade da invariância do traço pela operação da transposição (Anexo A), pode-se obter outra forma equivalente, chamada dual,

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \mathbf{tr} \left( \int_0^{\infty} C_z e^{At}J J'e^{A't}C'_z dt \right) = \mathbf{tr} \left( C_z \left[ \int_0^{\infty} e^{At}J J'e^{A't} dt \right] C'_z \right) = \mathbf{tr}(C_zP_cC'_z), \quad (2.23)$$

onde  $P_c$  é o gramiano de controlabilidade,

$$P_c = \int_0^{\infty} e^{At} J J' e^{A't} dt. \quad (2.24)$$

Ambos os gramianos são as respectivas soluções das equações de Lyapunov, (GEROMEL; KOROGUI, 2011),

$$A'P_o + P_oA + C'_z C_z = 0, \quad (2.25)$$

$$AP_c + P_cA' + JJ' = 0. \quad (2.26)$$

Essas equações são fundamentais para escrever o problema da obtenção da norma  $\mathcal{H}_2$  na forma de LMIs. Pode ser mostrado que, para dois pares de solução da equação de Lyapunov  $(P_o, Q_o)$  e  $(P, Q)$ , se  $Q_o > Q$ , então  $P_o > P$ , (OLIVEIRA, 1999). Então, pode-se reescrever a Equação (2.25) como

$$A'P + PA + C'_z C_z < 0, \quad (2.27)$$

a qual implica que  $P > P_o$ . Assim, a Equação (2.21) pode ser reescrita como

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \mathbf{tr}(J'P_oJ) < \mathbf{tr}(J'PJ). \quad (2.28)$$

Assim, ao se minimizar a expressão  $\mathbf{tr}(J'PJ)$ , pode-se obter o valor da norma  $\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \mathbf{tr}(J'P_oJ)$  com a precisão desejada. O problema pode ser reescrito como

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \inf_{P>0} \{ \mathbf{tr}(J'PJ) \mid A'P + PA + C'_z C_z < 0 \}. \quad (2.29)$$

De forma similar, pode-se escrever as Equações (2.23) e (2.26) em um problema de otimização,

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \inf_{P>0} \{ \mathbf{tr}(C_z P C'_z) \mid AP + PA' + JJ' < 0 \}. \quad (2.30)$$

## 2.7.2 Sistemas discretos

A norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas discretos é definida como:

**Definição 2.12** *Seja a função de transferência  $H(z)$ ,  $z = e^{j\omega}$ , de um sistema discreto  $\mathcal{G}_d$  da entrada exógena  $w$  para a saída controlada  $z$  e  $u = 0$ . A norma  $\mathcal{H}_2$  desse sistema é definida em frequência como, (OLIVEIRA, 1999),*

$$\|\mathcal{G}_d\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \mathbf{tr}(H(e^{-j\omega})' H(e^{j\omega})) d\omega \right)}.$$

Pode-se utilizar a Definição 2.12 e o teorema de Parseval (Anexo C) para encontrar uma definição equivalente no tempo discreto

$$\|\mathcal{G}_d\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{tr}(h(k)' h(k))}.$$

Da mesma forma realizada para sistemas contínuos, toma-se a anti-transformada  $Z$  da função de transferência

$$h(k) = Z^{-1}\{H(z)\} = \begin{cases} E_z, & k = 0 \\ C_z A^{k-1} J, & k \geq 1. \end{cases} \quad (2.31)$$

Assim, pode-se escrever a definição temporal (2.12) da norma  $\mathcal{H}_2$  discreta como

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{tr}(J'(A')^{k-1} C'_z C_z A^{k-1} J) + \mathbf{tr}(E'_z E_z), \quad (2.32)$$

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{tr}(J'(A')^k C'_z C_z A^k J) + \mathbf{tr}(E'_z E_z). \quad (2.33)$$

Nota-se que a restrição de  $E_z = 0$  presente em sistemas contínuos não é necessária para a convergência da norma  $\|\mathcal{G}_d\|_2$ , ou seja, o sistema não necessariamente precisa ser estritamente próprio. Além disso, a série da equação é convergente se, e somente se, a matriz  $A$  é Schur. De forma similar ao sistema contínuo, pode-se definir a norma  $\mathcal{H}_2$  na forma

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \mathbf{tr}(J' P_o J) + \mathbf{tr}(E'_z E_z), \quad (2.34)$$

para o gramiano de observabilidade,

$$P_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k C'_z C_z A^k. \quad (2.35)$$

E de forma similar, pela propriedade do traço (Anexo A),

$$\|\mathcal{G}_d\|_2^2 = \mathbf{tr}(C_z P_c C'_z) + \mathbf{tr}(E_z E'_z), \quad (2.36)$$

para o gramiano de controlabilidade

$$P_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k J J' (A')^k. \quad (2.37)$$

Além disso, as matrizes  $P_o$  e  $P_c$  são soluções das respectivas equações de Lyapunov, (GEROMEL; KOROGUI, 2011),

$$A' P_o A - P_o + C'_z C_z = 0, \quad (2.38)$$

$$A P_c A' - P_c + J J' = 0. \quad (2.39)$$

Da mesma forma que as equações de Lyapunov para o caso contínuo podem ser transformadas em problemas de otimização convexa, o problema  $\mathcal{H}_2$  discreto também pode ser convertido em formato similar, (OLIVEIRA, 1999). Assim, reescreve-se a Equação (2.34) e (2.37) no problema de otimização

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\mathbf{tr}(J' P J + E'_z E_z) \mid A' P A - P + C'_z C_z < 0\}, \quad (2.40)$$

bem como o seu equivalente,

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\mathbf{tr}(C_z P C'_z + E_z E'_z) \mid A P A' - P + J J' < 0\}. \quad (2.41)$$

### 2.7.3 Sistemas com saltos markovianos

A norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos é definida conforme segue, (VAL *et al.*, 2002).

**Definição 2.13** *Seja  $\mu_i := \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ , a distribuição inicial do estado Markoviano, bem como o sistema linear com saltos markovianos em (2.11). Define-se a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema linear com saltos markovianos  $\mathcal{G}_m$  estável por segundo momento como*

$$\|\mathcal{G}_m\|_2^2 = \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \|z_{s,i}\|_2^2,$$

onde  $z_{s,i}$  representa a saída  $z = z(k)$  quando  $w(k) = \delta(k)e_s$ ,  $\delta(k)$  é o delta de Kronecker,  $w_k = 0, k = 1, 2, \dots$  e  $e_s \in \mathbb{R}^r$  é o  $s$ -ésimo elemento da base canônica,  $e_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$ ,  $x_0 = 0$  e  $\theta_0 = i$  e  $u(k) = 0$ .

Nota-se que a Definição 2.13 é formulada no tempo, ao contrário das definições da norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas contínuos e discretos na frequência. Isso ocorre pois não existe definição de função de transferência para um sistema markoviano, pois essa classe de sistema consiste de diferentes sistemas discretos chaveados por uma regra estocástica. Verifica-se ainda que, para  $N = 1$ , a Definição 2.13 se reduz ao caso determinístico mostrado para sistema discretos em (2.33) após manipulação algébrica apropriada, (VAL *et al.*, 2002). Além disso, mostra-se o custo quadrático apresentado na Definição 2.13 é igual a norma  $\mathbb{L}^2$  do sistema  $\mathcal{G}_m$  com entrada nula e condição inicial dada por  $x(0) = J_i e_s$ , onde  $\theta_0 = i \in \mathbb{K}$  com probabilidade  $\mu_i$  e  $s = 1, 2, \dots, m$ , (GONÇALVES, 2009).

Verifica-se que, quando a distribuição de probabilidade inicial  $\mu_i$  não é conhecida, a Definição 2.13 pode ser reescrita como, (GONÇALVES, 2009),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_m\|_2^2 &= \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \|z_{s,i}\|_2^2, \\ &\leq \max_{\mu \in \Lambda} \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \|z_{s,i}\|_2^2, \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\leq \sup_{\theta_0 \in \mathbb{K}} \sum_{s=1}^r \|z_{s,\theta_0}\|_2^2, \tag{2.43}$$

onde  $\Lambda$  é o simplex unitário. A desigualdade (2.42) é uma consequência direta do operador max, bem como a desigualdade (2.43) é obtida pelo fato de o máximo de uma função linear em um conjunto convexo ocorrer em um vértice desse conjunto. Dessa forma, pode-se encontrar um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  definida em (2.13) considerando a distribuição de probabilidade inicial como uma variável no problema de otimização.

Da mesma forma que para sistemas discretos foi mostrado que sua respectiva norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser calculada através de uma formulação alternativa mostrada nas Equações (2.34) e (2.36), uma forma similar pode ser derivada para o caso markoviano. Esse fato é mostrado no Teorema 2.2, (GONÇALVES, 2009).

**Teorema 2.2** *A norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema  $\mathcal{G}_m$ , tal como definida em (2.13), pode ser calculada por*

$$\|\mathcal{G}_m\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(J'_i P_{pi} J_i + E'_{zi} E_{zi}), \quad (2.44)$$

para  $P_i > 0, i \in \mathbb{K}$ , soluções das equações

$$P_i = A'_i P_{pi} A_i + C'_{zi} C_{zi}, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (2.45)$$

**Prova:** Toma-se a Definição 2.13 da norma  $\mathcal{H}_2$  e se aplica a definição de norma quadrática estocástica em (2.10) para a entrada de controle  $u(k) = 0$ ,  $x_0 = 0$  e  $\theta_0 = i$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_m\|_2^2 &= \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z(k)' z(k) | \theta_0, x(0) \right\}, \\ &= \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' C'_{z\theta_k} C_{z\theta_k} x(k) | \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(E'_{zi} E_{zi}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

De forma similar ao equivalente determinístico discreto, pode-se escrever a desigualdade (2.15) como

$$A'_i P_{pi} A_i - P_i + C'_{zi} C_{zi} = 0, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (2.47)$$

Se a Equação (2.47) for satisfeita por hipótese, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_m\|_2^2 &= \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' (P_{\theta_k} - A'_{\theta_k} P_{p\theta_k} A_{\theta_k}) x(k) | \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(E'_{zi} E_{zi}), \\ &= \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' P_{\theta_k} x(k) - x(k+1)' P_{p\theta_k} x(k+1) | \theta_0, x(0) \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(E'_{zi} E_{zi}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Além disso, para  $j \geq 1$ ,  $\mathcal{E}\{P_{\theta_j}\} = \mathcal{E}\{P_{p\theta_{j-1}}\}$ . Assim, pode-se expandir a soma telescópica resultante em (2.48), levando em consideração a hipótese da estabilidade de segundo momento.

O resultado é

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_m\|_2^2 &= \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E}\{x(1)' P_{\theta_1} x(1) | \theta_0, x(0)\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(E'_{zi} E_{zi}), \\ &= \sum_{i=1}^N \mu_i \sum_{s=1}^r (e'_s J'_i \mathcal{E}\{P_{\theta_1} | \theta_0\} J_i e_s) + \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(E'_{zi} E_{zi}), \\ &= \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(J'_i \mathcal{E}\{P_{\theta_1} | \theta_0\} J_i + E'_{zi} E_{zi}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Por fim,  $\mathcal{E}\{P_{\theta_1}|\theta_0 = i\} = P_{p\theta_0} = P_{pi}$ , o que completa a prova.  $\square$

Além disso, o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  para MJLS a tempo discreto pode ser reescrito em um problema de otimização, ver (COSTA *et al.*, 1997) e (VAL *et al.*, 2002). Assim, a partir da Equação (2.47), escreve-se

$$A'_i P_{pi} A_i - P_i + C'_{zi} C_{zi} < 0, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (2.50)$$

Em posse da desigualdade em (2.50), a Equação (2.44) pode ser escrita como, (VAL *et al.*, 2002),

$$\|\mathcal{G}_m\|_2^2 < \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(J'_i P_{pi} J_i + E'_{zi} E_{zi}). \quad (2.51)$$

Assim, o problema pode ser formulado como

$$\|\mathcal{G}_m\|_2^2 = \inf_{P_i > 0} \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(J'_i P_{pi} J_i + E'_{zi} E_{zi}) \quad \mid \quad A'_i P_{pi} A_i - P_i + C'_{zi} C_{zi} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \right\}. \quad (2.52)$$

O problema mostrado na Equação (2.52) pode ser reescrito em um formato alternativo, (GONÇALVES, 2009). Assim, para as condições,

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} J_i & P_{pi} & \bullet \\ E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.53)$$

e

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} A_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.54)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ , formula-se o problema de otimização:

$$\|\mathcal{G}_m\|_2^2 = \inf_{P_i, W_i > 0} \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{tr}(W_i) \quad \mid \quad (2.53), (2.54) \right\}. \quad (2.55)$$

## 2.8 A norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma de um sistema  $\mathcal{H}_\infty$ , conforme será derivado a partir das definições no decorrer dessa seção, pode ser vista como uma medida de robustez de um sistema frente a ruídos que pertençam ao conjunto  $\mathcal{L}_2$ , ou ao seu equivalente discreto e markoviano. Especificamente, essa norma é um limitante superior de custo para o pior ruído possível aplicado ao sistema.

### 2.8.1 Sistemas contínuos

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema contínuo é definida como, (OLIVEIRA, 1999):

**Definição 2.14** *Seja a função de transferência  $H(s)$  de um sistema contínuo  $\mathcal{G}_c$  para a saída controlada  $z$  e entrada de controle  $u = 0$ ,  $s = j\omega$ . A norma  $\mathcal{H}_\infty$  desse sistema é definida como*

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[H(j\omega)],$$

onde  $\sigma_{\max}[\cdot]$  é o máximo valor singular da função de transferência.

Pode-se estabelecer a condição  $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$ , reescrevendo o problema proposto pela Definição 2.14 como

$$H(j\omega)^* H(j\omega) < \gamma I, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.56)$$

Assim, pela definição da função de transferência

$$\hat{z}(j\omega)^* \hat{z}(j\omega) - \gamma \hat{w}(j\omega)^* \hat{w}(j\omega) < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.57)$$

A Equação (2.57) pode ser reescrita no tempo, ao integra-la em frequência e utilizar o teorema de Parseval, (Anexo C):

$$\int_0^\infty z(t)' z(t) - \gamma w(t)' w(t) dt < 0. \quad (2.58)$$

A condição da Equação (2.58) só é satisfeita se, e somente se,  $w, y \in \mathcal{L}_2$  para que a convergência seja respeitada. Assim para  $\gamma > 0$ , a desigualdade  $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$  é válida, se, e somente se,

$$\sup_{w \neq 0 \in \mathcal{L}_2} \|z\|_2^2 - \gamma \|w\|_2^2 < 0. \quad (2.59)$$

O problema de otimização pode ser escrito como

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0} \{\gamma \mid \|z\|_2^2 - \gamma \|w\|_2^2 < 0\} = \sup_{w \neq 0 \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \quad (2.60)$$

Em termos de LMIs, escreve-se a solução do problema em (2.60) como, (OLIVEIRA, 1999),

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf_{P > 0} \{\gamma \mid (2.62)\}. \quad (2.61)$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PJ & C_z' \\ J'P & -\gamma I & E_z' \\ C_z & E_z & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.62)$$

### 2.8.2 Sistemas discretos

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema discreto é definida como, (OLIVEIRA, 1999):

**Definição 2.15** *Seja a função de transferência  $H(z)$  de um sistema discreto  $\mathcal{G}_d$  para a saída controlada  $z$  e entrada de controle  $u = 0$ ,  $z = e^{j\omega}$ . A norma  $\mathcal{H}_\infty$  desse sistema é definida como*

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}[H(e^{j\omega})],$$

onde  $\sigma_{\max}[\cdot]$  é o máximo valor singular da função de transferência.

Da mesma forma realizada para o sistema contínuo, pode-se estabelecer a condição  $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$ , reescrevendo o problema proposto pela Definição 2.15 como

$$H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega}) < \gamma I, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]. \quad (2.63)$$

Assim, pela definição da função de transferência

$$\hat{z}(e^{j\omega})^* \hat{z}(e^{j\omega}) - \gamma \hat{w}(e^{j\omega})^* \hat{w}(e^{j\omega}) < 0, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]. \quad (2.64)$$

A Equação (2.64) pode ser reescrita no tempo, ao somá-la em frequência para  $\omega \in [0, 2\pi]$  e utilizar o teorema de Parseval, (Anexo C),

$$\sum_{k=0}^{\infty} z(k)' z(k) - \gamma w(k)' w(k) < 0. \quad (2.65)$$

A condição da Equação (2.65) é satisfeita se, e somente se,  $w, y \in \ell_2$  para que a convergência seja respeitada. Assim para  $\gamma > 0$ , a desigualdade  $\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 < \gamma$  é válida, se, e somente se,

$$\sup_{w \neq 0 \in \ell_2} \|z\|_2^2 - \gamma \|w\|_2^2 < 0. \quad (2.66)$$

Assim, para se respeitar a desigualdade  $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$ , o problema de otimização deve ser escrito como

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 = \inf_{\gamma > 0} \{ \gamma \mid \|z\|_2^2 - \gamma \|w\|_2^2 < 0 \} = \sup_{w \neq 0 \in \ell_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \quad (2.67)$$

O problema em (2.67) pode ser escrito em LMIs como, (OLIVEIRA, 1999),

$$\|\mathcal{G}_d\|_\infty^2 = \inf_{P > 0} \{ \gamma \mid (2.69) \}. \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} P & A'P & 0 & C'_z \\ PA & P & PJ & 0 \\ 0 & J'P & \gamma I & E_z \\ C_z & 0 & E_z & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.69)$$

### 2.8.3 Sistemas com saltos markovianos

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares com saltos markovianos é definida da seguinte forma:

**Definição 2.16** Para o sistema  $\mathcal{G}_m$  estável por segundo momento, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema  $\mathcal{G}_m$  da entrada  $w$  para a saída  $z$  é dada por

$$\|\mathcal{G}_m\|_\infty^2 = \sup_{w \in \mathbb{L}_2, w \neq 0, \theta_0 \in \mathbb{K}} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \quad (2.70)$$

Nota-se a similaridade com o caso discreto da Equação (2.67) e seu correspondente contínuo. Da mesma forma realizada para o caso contínuo e discreto, pode-se transformar a Definição (2.16) em um problema de otimização convexa. Para isso, faz-se necessário introduzir o conceito de sistemas fracamente controláveis no âmbito de sistemas estocásticos.

**Definição 2.17** Um sistema  $\mathcal{G}_m$  é dito fracamente controlável se para cada estado inicial  $(x(0), \theta_0)$  e qualquer estado final  $(\bar{x}, \bar{\theta})$  existir um tempo finito  $T_c$  tal que

$$\text{Prob}(x(T_c) = \bar{x}) > 0, \quad (2.71)$$

$$\text{Prob}(\theta(T_c) = \bar{\theta}) > 0. \quad (2.72)$$

Em posse da Definição (2.17), pode-se escrever o *bounded real lemma* para sistemas markovianos, (SEILER; SENGUPTA, 2003).

**Teorema 2.3** Se o sistema (2.11) for fracamente controlável, ele será estável por segundo momento e irá satisfazer a restrição da norma  $\|\mathcal{G}_m\|_\infty < \gamma$  se, e somente se, existirem matrizes  $P_i \in \mathbb{S}_+^n$ , tais que

$$\begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{pi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.73)$$

A prova completa do teorema pode ser encontrado em (SEILER; SENGUPTA, 2003). Assim, aplicando-se o complemento de Schur em (2.73) (Anexo B) e linearizando o resultado obtido de forma apropriada obtém-se a desigualdade

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}J_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (2.74)$$

Assim, o problema de otimização convexa pode ser escrito como

$$\|\mathcal{G}_m\|_\infty^2 = \inf_{\gamma, P_i > 0} \{\gamma \mid (2.74)\}. \quad (2.75)$$

## 2.9 O Observador de Luenberger

Os sistemas apresentados neste capítulo em sua forma de representação por espaço de estados permitem concluir que suas respectivas saídas são funções dos estados e da entrada exógena,

$$y(t) = C_y x(t) + E_y w(t). \quad (2.76)$$

Verifica-se que para uma saída qualquer, nem todos os estados de um sistema podem ser obtidos. Isso se reflete na prática, onde um número limitado de sensores é utilizado para medir valores de interesse. Por exemplo, em um sistema mecânico cujos estados são valores de posição e velocidade, é bastante comum a presença somente de sensores do primeiro tipo, devido a simplicidade e custo. Essa característica pode eliminar a possibilidade da utilização de controladores do tipo realimentação de estado,

$$u(t) = Kx(t). \quad (2.77)$$

Porém, essa limitação pode ser contornada pela síntese de observadores, que são sistemas dinâmicos lineares que sintetizam os estados não medidos. Nesse projeto, devido a presença de sensores somente de posição, o observador clássico de Luenberger será utilizado devido a sua simplicidade. Esse observador possui a forma, (GEROMEL; KOROGUI, 2011),

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{x}_o(t) &= Ax_o(t) + Bu(t) + L(y(t) - y_o(t)), \\ y_o(t) &= Cx_o(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.78)$$

Observa-se que uma "cópia" do sistema a ser observado está contido no próprio observador, contendo assim a dinâmica do sistema de interesse. Um ganho  $L$ , chamado ganho do observador, regula a diferença entre a saída do observador e a saída medida da planta. O objetivo do observador é diminuir o erro  $e_o(t)$  entre seu próprio estado e o estado da planta. Portanto, pode-se encontrar a equação dinâmica do erro, em posse de sua definição, para  $w = 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= \dot{x} - \dot{x}_o \\ &= Ax + Bu - (Ax_o + Bu + LCx - LCx_o) \\ &= A(x - x_o) - LC(x - x_o) \\ &= (A - LC)e_o \end{aligned} \quad (2.79)$$

A equação dinâmica do erro mostra que, para que a condição  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0$ , o sistema de matriz dinâmica  $(A - LC)$  deve ser estável. Além disso, considera-se que a dinâmica do erro deve ser mais rápida que a dinâmica do sistema, característica que pode ser obtida

ao se alocar os polos de  $(A - LC)$  de maneira apropriada em relação ao sistema observado. Para outras formas de projeto do ganho do observador  $L$  além da alocação de polos, ver (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

## 2.10 Conclusão

No presente capítulo foram abordados de forma não-exaustiva os conceitos fundamentais de sistemas lineares e invariantes no tempo contínuos e discretos, bem como os sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto, utilizados no decorrer dessa tese. Para maiores detalhes em relação aos aspectos teóricos de sistemas lineares e invariantes no tempo, ver (GEROMEL; PALHARES, 2004), (GEROMEL; KOROGUI, 2011), (LUENBERGER, 1979), entre outros, bem como os livros para sistemas não-lineares, (SLOTINE *et al.*, 1991) e (KHALIL, 2002), que tangem a teoria de Lyapunov. Para as normas de sistema  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , o livro (GEROMEL; KOROGUI, 2011) faz uma discussão teórica básica, bem como a tese de doutorado (OLIVEIRA, 1999) e o livro (BOYD *et al.*, 1994) para formulações em LMIs.

Para conceitos básicos da teoria de probabilidades, pode-se citar (KNILL, 2009), bem como o célebre (PAPOULIS, 1991). Nesse assunto, o livro (LEON-GARCIA, 2008) aborda aspectos práticos para engenharia, bem como o livro (TRANter *et al.*, 2003) trata de simulações de cadeias de Markov no contexto de redes de comunicação. Em termos de cálculo funcional, ver (KREYSZIG, 1978).

Para MJLS, o livro (COSTA *et al.*, 2005) aborda os conceitos fundamentais no assunto, como as definições básicas, conceitos de estabilidade, controle LQG,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e filtragem. O *bounded real lemma* para MJLS a tempo discreto é estabelecido em (SEILER; SENGUPTA, 2003). O controle  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estado é abordado em (COSTA *et al.*, 1997) para uma formulação convexa, bem como o controle com observação dos modos de Markov por *clusters* pode ser estudado em (COSTA *et al.*, 1997) e (GONÇALVES *et al.*, 2012). Para filtragem e realimentação de saída em MJLS, ver (GONÇALVES *et al.*, 2010), (GEROMEL *et al.*, 2009) e a tese de doutorado (GONÇALVES, 2009).

### 3 Modelagem física do sistema mecânico

O sistema físico que será submetido ao controle markoviano utilizado nesse projeto é o pêndulo invertido rotacional, também conhecido como pêndulo de Furuta. Esse sistema foi apresentado pela primeira vez em (FURUTA *et al.*, 1991) durante a conferência *IEEE - International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation - IECON'91*. O pêndulo de Furuta consiste de um braço rotacional atuado por um motor DC, cuja montagem permite a rotação apenas no plano horizontal, acoplado a um pêndulo com rotação permitida apenas no plano vertical, podendo assim ser classificado como sub-atuado (sistemas com mais graus de liberdade que atuadores), pois apresenta somente um atuador frente ao maior número de graus de liberdade presentes. A Figura 2 ilustra o pêndulo de Furuta do fabricante Quanser.



Figura 2 – O pêndulo de Furuta do fabricante Quanser. Retirado de (QUANSER, 2011b).

Devido a sua característica não-linear, seu caráter sub-atuado e sua instabilidade, essa planta se apresenta como uma excelente e desafiadora plataforma de aplicação para a teoria de controle linear e não-linear (JADLOVSKA; SARNOVSKY, 2013), bem como promissora plataforma de pesquisa e aplicação de controle adaptativo, como a teoria de *Safe Control Manual* aplicada com sucesso ao pêndulo em (AKESSON; ASTROM, 2001) e (IWASE *et al.*,

2006), onde são discutidas sua importância para o controle de aeronaves. A Figura 3 mostra o pêndulo de Furuta utilizado nesse projeto, do mesmo fabricante do aparato mostrado na Figura 2.



Figura 3 – O pêndulo de Furuta utilizado no projeto.

### 3.1 Modelagem

Diversas variações de modelos são encontradas na literatura devido a simplificações ou erros de dedução. Uma dedução completa pode ser encontrada em (CAZZOLATO; PRIME, 2011), onde o modelo é obtido corretamente através da abordagem Lagrangiana (utilizada pela grande maioria das referências), bem como pelo método iterativo de Newton-Euler. Além disso, nesse mesmo artigo, primeiramente é deduzido o modelo que considera a dinâmica tridimensional completa (através de um tensor de momento de inércia para os corpos presentes), para posteriormente obter-se um modelo simplificado. Outro método alternativo, o computacional, é apresentado em (JADLOVSKA; SARNOVSKY, 2013). Para esse projeto em questão, o modelo foi deduzido através da abordagem Lagrangiana, baseado em (GÄFVERT, 1998) e no modelo simplificado de (CAZZOLATO; PRIME, 2011).

### 3.1.1 Modelagem do pêndulo rotacional

A Figura 4 mostra o diagrama de convenções do pêndulo. O braço rotacional é modelado como uma haste rígida, livre para rotação no plano  $\hat{x}\hat{y}$ , onde a origem é colocada no pivô de rotação. Na outra extremidade, uma outra haste rígida, isto é, o pêndulo, é acoplada de forma a permitir rotações no plano  $\hat{\phi}\hat{z}$ .

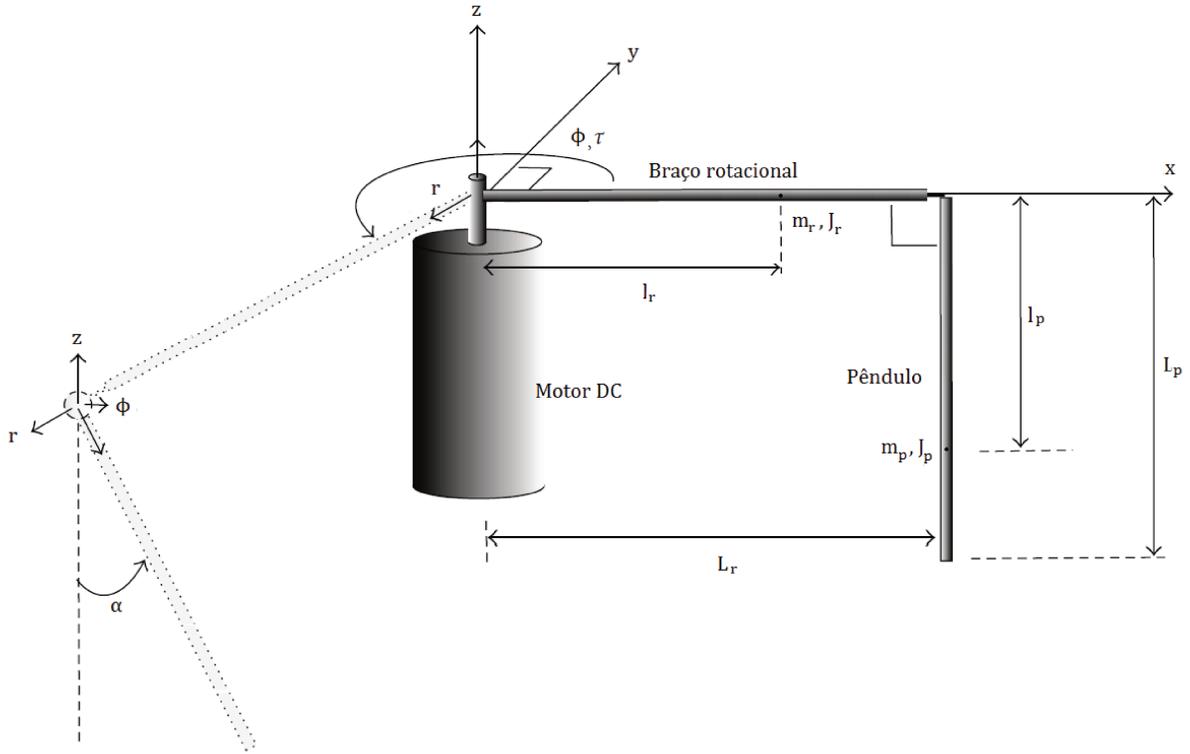


Figura 4 – Diagrama de convenções do pêndulo. Adaptado de (CAZZOLATO; PRIME, 2011).

Para o braço rotacional, todas as grandezas são referenciadas pelo índice  $r$ , bem como  $p$  é o índice utilizado para as grandezas do pêndulo. Assim, as massas são, respectivamente,  $m_r$  e  $m_p$ , o comprimento dos braços  $L_r$  e  $L_p$  e a distância do centro de massa até o pivô de rotação, respectivamente,  $l_r$  e  $l_p$ . O objetivo é encontrar o modelo dinâmico através das equações de Lagrange.

Em princípio, define-se o vetor

$$\vec{u}(r, p) = (r \cos \phi - p \sin \phi \sin \alpha) \hat{i} + (r \sin \phi + p \cos \phi \sin \alpha) \hat{j} - p \cos \alpha \hat{k}. \quad (3.1)$$

Ao se fixar  $p = 0$ , o vetor em (3.1) modela qualquer ponto do braço rotacional, para  $0 \leq r \leq L_r$ . De forma similar, para  $r = L_r$ ,  $\vec{u}(L_r, p)$  descreve qualquer ponto no pêndulo para

$0 \leq p \leq L_p$ . Assim, pode-se definir o vetor velocidade  $v$  como

$$\vec{v}(r, p) = \frac{d}{dt} \vec{u}(r, p). \quad (3.2)$$

Assim, para (3.2), obtém-se para as três coordenadas em separado,

$$v(r, p)_x = -(r \sin \phi + p \cos \phi \sin \alpha) \dot{\phi} - p \sin \phi \cos \alpha \dot{\alpha}, \quad (3.3)$$

$$v(r, p)_y = (r \cos \phi - p \sin \phi \sin \alpha) \dot{\phi} + p \cos \phi \cos \alpha \dot{\alpha}, \quad (3.4)$$

$$v(r, p)_z = p \sin \alpha \dot{\alpha}. \quad (3.5)$$

Em posse das equações das velocidades vetoriais, pode-se calcular o módulo quadrado da velocidade  $v(r, p)^2$ . Após extensa manipulação algébrica, obtém-se

$$v(r, p)^2 = (r^2 + p^2 \sin^2 \alpha) \dot{\phi}^2 + p^2 \dot{\alpha}^2 + 2rp \cos \alpha \dot{\phi} \dot{\alpha}. \quad (3.6)$$

Assim, pode-se calcular a energia cinética e potencial, respectivamente,

$$K = \frac{1}{2} \int v(r, p)^2 dm, \quad (3.7)$$

e

$$U = g \int u(r, p)_z dm, \quad (3.8)$$

para o braço rotacional e o pêndulo.

- Braço rotacional.

A energia cinética do braço rotacional pode ser calculada, levando em consideração a definição de integral de momento de inércia (Anexo D), como,

$$K_r = \frac{1}{2} \int v(r, 0)^2 dm = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} J_r \dot{\phi}^2. \quad (3.9)$$

A energia potencial do braço rotacional é nula,

$$U_r = 0. \quad (3.10)$$

- Pêndulo.

A energia cinética do pêndulo é calculada, considerando a definição de integral de centro de massa (Anexo D), como

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2} \int v(L_r, p)^2 dm = \frac{1}{2} \int [(L_r^2 + p^2 \sin^2 \alpha) \dot{\phi}^2 + p^2 \dot{\alpha}^2 + 2L_r p \cos \alpha \dot{\phi} \dot{\alpha}] dm, \\ &= \frac{1}{2} (m_p L_r^2 + \sin^2 \alpha J_p) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + m_p l_p L_r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A energia potencial do pêndulo é obtida como

$$U_p = g \int u(r, p)_z dm = g \int -r \cos \alpha dm = -m_p l_p g \cos \alpha. \quad (3.12)$$

- Cômputo da energia total.

A energia cinética total é a soma de (3.9) e (3.11),

$$K = K_r + K_p = \frac{1}{2}(J_r + m_p L_r^2 + \sin^2 \alpha J_p) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + m_p l_p L_r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha}. \quad (3.13)$$

Bem como a energia potencial é a soma das energias potenciais (3.10) e (3.12),

$$U = U_r + U_p = -m_p l_p g \cos \alpha. \quad (3.14)$$

Em posse das energias cinética e potencial em (3.13) e (3.14), utiliza-se as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) = Q_i, \quad (3.15)$$

onde  $q = (\phi, \alpha)$ ,  $L = K - U$  e  $Q_i$ , as forças generalizadas para o  $i$ -ésimo corpo, ou seja, os torques. São utilizados o atrito viscoso nos dois corpos, para os coeficientes de atrito  $B_r$  e  $B_p$ , bem como o torque do motor,  $\tau$ . Assim, realizando-se as operações necessárias, obtém-se as equações dinâmicas do sistema

$$(m_p l_p L_r \cos \alpha) \ddot{\phi} + J_p \ddot{\alpha} - \left(\frac{1}{2} J_p \sin 2\alpha\right) \dot{\phi}^2 + m_p l_p g \sin \alpha = -B_p \dot{\alpha}, \quad (3.16)$$

$$(J_r + J_p \sin^2 \alpha + m_p L_r^2) \ddot{\phi} + (m_p l_p L_r \cos \alpha) \ddot{\alpha} + (J_p \sin 2\alpha) \dot{\phi} \dot{\alpha} - (m_p l_p L_r \sin \alpha) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\phi}. \quad (3.17)$$

### 3.1.2 Modelagem do sistema mecânico SRV02

O pêndulo rotacional é acoplado a um sistema de engrenagens o qual por sua vez é acionado por um motor de corrente contínua. Esse sistema de acionamento é chamado pelo fabricante de *Rotary Motion Servo Plant - SRV02*, e faz parte de um *benchmark* de sistemas mecânicos pedagógicos que utilizam o SRV02 como atuador para outros sistemas além do pêndulo rotacional. O modelo demonstrado a seguir é inteiramente baseado na referência (APKARIAN *et al.*, 2011). A Figura 5 mostra o sistema mecânico SRV02.



Figura 5 – O sistema mecânico SRV02 (APKARIAN *et al.*, 2011) do fabricante Quanser.

O braço rotacional é acoplado a uma engrenagem de carga de 72 dentes. Essa, por sua vez, é fixada a um eixo compartilhado com outra engrenagem maior, de 120 dentes e o *encoder*. Uma engrenagem *anti-backslash* é posicionada de forma a reduzir a folga do sistema. Por fim, a engrenagem maior permite que o motor DC, composto por uma engrenagem de 24 dentes e uma caixa de redução, aplique o torque ao sistema. A Figura 6 mostra o sistema descrito.



Figura 6 – O sistema mecânico SRV02 do fabricante Quanser em detalhe. Retirado de (APKARIAN *et al.*, 2011). A engrenagem de carga possui o índice (5); a *anti-backslash* (6); a engrenagem acoplada ao eixo (20); e a engrenagem que forma o final da caixa de redução (19).

O motor DC, por sua vez, é um modelo de baixa indutância (*Faulhaber Coreless DC Motor model 2338S006*). Esse motor permite uma resposta mais rápida em relação aos motores DC convencionais (APKARIAN *et al.*, 2011). Dessa forma, o sistema pode ser representado conforme o diagrama de corpo livre da Figura 7.

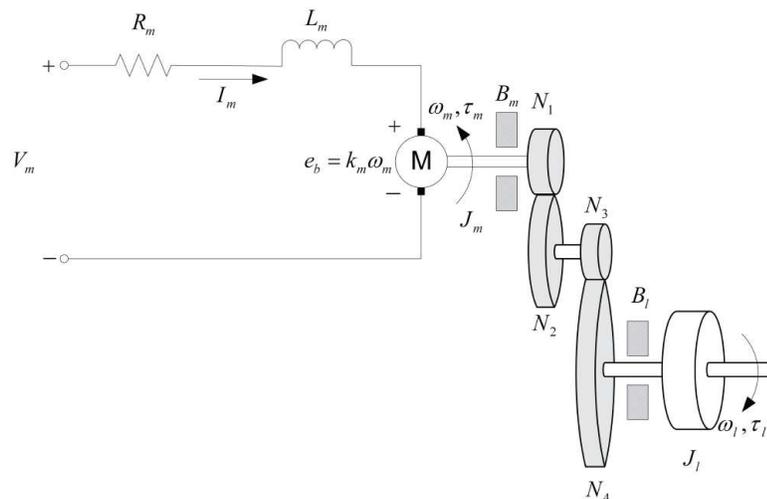


Figura 7 – Diagrama de corpo livre do SRV02 do fabricante Quanser (QUANSER, 2011c), representando a armadura do motor DC e as engrenagens.

Nesse diagrama,  $R_m$  é a resistência de armadura do motor, bem como  $L_m$ , a indutância. A constante contra-eletromotriz é  $k_m$ . As engrenagens representadas por  $N_1$  e  $N_2$  constituem a caixa de redução acoplada diretamente ao eixo do motor, que possui constante de atrito dinâmico de valor  $B_m$ . A engrenagem  $N_2$  é acoplada ao mesmo eixo da engrenagem  $N_3$ , externa (24 dentes), que por sua vez impulsiona a engrenagem  $N_4$  de (120 dentes). As engrenagens e o braço rotacional constituem a carga, denotada no diagrama de  $J_l$ . Por fim, esse eixo é submetido a um atrito dinâmico de coeficiente  $B_l$ . O torque do motor  $\tau_m$  é convertido para um torque resultante na carga  $\tau_l$ . O objetivo é encontrar a função de transferência que modele a tensão de entrada  $V_m$  e o torque na carga. Para adequação da notação,  $\omega_m = \dot{\phi}_m$ , bem como  $\omega_l = \dot{\phi}_l$ .

### • Equações elétricas

O circuito pode ser equacionado através da lei de Kirchhoff das malhas.

$$V_m - R_m I_m - L_m \dot{I}_m - k_m \dot{\phi}_m = 0. \quad (3.18)$$

Devido as características intrínsecas do modelo de motor utilizado pelo fabricante, a indutância possui um valor que pode ser desprezado, simplificando a equação. Assim, pode-se escrever

$$I_m(t) = \frac{1}{R_m} (V_m - k_m \omega_m(t)). \quad (3.19)$$

A relação entre a corrente de armadura  $I_m$  e o torque do motor  $\tau_m$  é dado por

$$\tau_m(t) = \eta_m k_t I_m(t), \quad (3.20)$$

onde  $\eta_m$  é a eficiência do motor e  $k_t$  é a constante de torque. Assim, ao se multiplicar a equação (3.19) por  $\eta_m k_t$ .

$$\tau_m(t) = \frac{\eta_m k_t}{R_m} (V_m - k_m \omega_m(t)). \quad (3.21)$$

### • Equações mecânicas

A equação diferencial mecânica no motor pode ser escrita através das leis de Newton, resultando em

$$J_m \ddot{\phi}_m + B_m \dot{\phi}_m + \tau_{ml} = \tau_m, \quad (3.22)$$

onde  $\tau_{ml}$  é o torque resultante da carga aplicado ao eixo do motor. Esse pode ser escrito em termos do torque na carga através das relações das engrenagens.

$$\tau_l = \eta_g K_g \tau_{ml}, \quad (3.23)$$

onde  $\eta_g$  é a eficiência da caixa de redução e  $K_g$  a relação de torques entre as engrenagens  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , e  $N_4$ ,

$$K_g = \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3}. \quad (3.24)$$

Além disso, pode-se escrever a relação entre o deslocamento angular na carga e no motor, bem como suas respectivas derivadas temporais,

$$\phi_m(t) = K_g \phi_l(t), \quad (3.25)$$

$$\dot{\phi}_m(t) = K_g \dot{\phi}_l(t). \quad (3.26)$$

Substitui-se as relações (3.23) e (3.26) em (3.22) para obter a equação diferencial em função da carga.

$$J_m K_g \ddot{\phi}_l + B_m K_g \dot{\phi}_l + \frac{\tau_l}{\eta_g K_g} = \tau_m. \quad (3.27)$$

A equação diferencial que representa o sistema físico da carga é dada por

$$J_l \ddot{\phi}_l + B_l \dot{\phi}_l = \tau_l. \quad (3.28)$$

Substitui-se o torque  $\tau_l$  de (3.28) em (3.27)

$$(J_l + \eta_g K_g^2 J_m) \ddot{\phi}_l + (B_l + \eta_g K_g^2 B_m) \dot{\phi}_l = \eta_g K_g \tau_m. \quad (3.29)$$

Por fim, substitui-se, (3.21) em (3.29), levando em consideração a relação de velocidades angulares (3.26),

$$(J_l + \eta_g K_g^2 J_m) \ddot{\phi}_l + (B_l + \eta_g K_g^2 B_m) \dot{\phi}_l = \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} (V_m - k_m K_g \dot{\phi}_l). \quad (3.30)$$

A Equação (3.30) se relaciona com a Equação (3.17) do pêndulo rotacional, pois ao se acoplar o braço rotacional no sistema mecânico SRV02, pode-se considerar a relação  $\phi_l = \phi$ . Nesse sentido, o momento de inércia  $J_r$  passará a englobar os momentos de inércia do motor e das engrenagens acopladas. Além disso, o atrito viscoso  $B_r$  possuirá um termo adicional do atrito entre as engrenagens e a força contra eletromotriz do motor. Em relação ao torque de entrada  $\tau$ , esse é bem descrito pela relação obtida em (3.30), (QUANSER, 2011b). Assim, pode-se reescrever a Equação (3.17) como

$$(J'_r + J_p \sin^2 \alpha + m_p L_r^2) \ddot{\phi} + (m_p l_p L_r \cos \alpha) \ddot{\alpha} + (J_p \sin 2\alpha) \dot{\phi} \dot{\alpha} - (m_p l_p L_r \sin \alpha) \dot{\alpha}^2 = \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} V_m - \left( B'_r + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right) \dot{\phi}, \quad (3.31)$$

onde,  $J'_r = (J_r + J_{SRV02} + \eta_g K_g^2 J_m)$  e  $B'_r = (B_r + B_{SRV02} + \eta_g K_g^2 B_m)$ . A grandeza  $J_{SRV02}$  denota a soma dos momentos de inércia do eixo do motor, das engrenagens e do *encoder* acoplado, bem como  $B_{SRV02}$  representa os respectivos atritos viscosos entre as engrenagens, o eixo e o ar. Portanto, as equações completas do sistema dinâmicos considerando o sistema SRV02 se tornam (3.16) e (3.31).

## 3.2 Linearização

A linearização será realizada para os dois pontos de equilíbrio do pêndulo, isto é, para  $\alpha_e = 0$  e para  $\alpha_i = \pi$ . A primeira linearização é necessária para encontrar os parâmetros do pêndulo através dos métodos de identificação que serão estudados no Capítulo 4. Em adição, o modelo instável da segunda linearização será utilizado para a síntese de todos os controles desse projeto.

### 3.2.1 Linearização para o ponto de equilíbrio estável

Define-se o vetor  $z$  como

$$z' = [\phi \quad \alpha \quad \dot{\phi} \quad \dot{\alpha} \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\alpha}]. \quad (3.32)$$

A Equação (3.31) pode ser linearizada em  $z_0 = [\phi_0 \quad \alpha_0 \quad \dot{\phi}_0 \quad \dot{\alpha}_0 \quad \ddot{\phi}_0 \quad \ddot{\alpha}_0] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ , definindo a função  $f(z)$  ao se tomar seu lado não linear.

$$f(z) = (J'_r + J_p \sin^2 \alpha + m_p L_r^2) \ddot{\phi} + (m_p l_p L_r \cos \alpha) \ddot{\alpha} + (J_p \sin 2\alpha) \dot{\phi} \dot{\alpha} - (m_p l_p L_r \sin \alpha) \dot{\alpha}^2. \quad (3.33)$$

Portanto, a função  $f(z)$  linearizada em torno de  $z_0$  é obtida através da Equação (3.33).

$$\tilde{f}(z) = \left. \frac{\partial f(z)}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} \phi + \left. \frac{\partial f(z)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \alpha + \left. \frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\phi}} \right|_{\dot{\phi}_0} \dot{\phi} + \left. \frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\alpha}} \right|_{\dot{\alpha}_0} \dot{\alpha} + \left. \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\phi}} \right|_{\ddot{\phi}_0} \ddot{\phi} + \left. \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right|_{\ddot{\alpha}_0} \ddot{\alpha}. \quad (3.34)$$

Após a realização das derivadas parciais, obtém-se  $\tilde{f}(z)$ , bem como a equação final.

$$(J'_r + m_p L_r^2) \ddot{\phi} + (m_p l_p L_r) \ddot{\alpha} + \left( B'_r + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right) \dot{\phi} = \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} V_m. \quad (3.35)$$

Da mesma forma, define-se  $f(z)$  a partir da Equação (3.16),

$$f(z) = (m_p l_p L_r \cos \alpha) \ddot{\phi} + J_p \ddot{\alpha} - \left( \frac{1}{2} J_p \sin 2\alpha \right) \dot{\phi}^2 + m_p l_p g \sin \alpha. \quad (3.36)$$

Pela relação (3.34), obtém-se o modelo final no ponto de equilíbrio desejado.

$$(m_p l_p L_r) \ddot{\phi} + J_p \ddot{\alpha} + (m_p l_p g) \alpha = -B_p \dot{\alpha}. \quad (3.37)$$

### 3.2.2 Linearização para o ponto de equilíbrio instável

A linearização para o ponto de equilíbrio instável é similar a realizada na subseção anterior. Porém, o novo conjunto para a linearização é dado por

$$z'_0 = [\phi \quad \alpha \quad \dot{\phi} \quad \dot{\alpha} \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\alpha}] = [0 \quad \pi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (3.38)$$

As equações obtidas são

$$(J'_r + m_p L_r^2) \ddot{\phi} - (m_p l_p L_r) \ddot{\alpha} + \left( B'_r + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right) \dot{\phi} = \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} V_m, \quad (3.39)$$

$$-(m_p l_p L_r) \ddot{\phi} + J_p \ddot{\alpha} - (m_p l_p g) \alpha = -B_p \dot{\alpha}. \quad (3.40)$$

Verifica-se que as equações obtidas são similares as Equações (3.35) e (3.37), com diferenças de sinais em alguns termos.

### 3.2.3 Obtenção das equações de estado

Pode-se verificar que ambos os pares de Equações (3.35) e (3.37), e (3.39) e (3.40) podem ser escritas na forma

$$D(q)\ddot{q} + C(q)\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (3.41)$$

onde,  $q' = [\phi \ \alpha]'$ . Para denotar o conjunto de matrizes do modelo estável, é utilizado o índice "est", bem como "ins" para o grupo instável.

Para as Equações (3.35) e (3.37), o conjunto estável  $D(q)_{\text{est}}$ ,  $C(q)_{\text{est}}$ ,  $g(q)_{\text{est}}$  e  $\tau_{\text{est}}$  se torna

$$\left[ \begin{array}{c|c} D(q)_{\text{est}} & g(q)_{\text{est}} \\ \hline C(q)_{\text{est}} & \tau_{\text{est}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} J'_r + m_p L_r^2 & m_p l_p L_r & 0 \\ m_p l_p L_r & J_p & m_p l_p g \alpha \\ \hline B'_r + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} & 0 & \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} V_m \\ 0 & B_p & 0 \end{array} \right]. \quad (3.42)$$

Em contrapartida, para as Equações (3.39) e (3.40), o conjunto  $D(q)_{\text{ins}}$ ,  $C(q)_{\text{ins}}$ ,  $g(q)_{\text{ins}}$  e  $\tau_{\text{ins}}$  o conjunto se torna

$$\left[ \begin{array}{c|c} D(q)_{\text{ins}} & g(q)_{\text{ins}} \\ \hline C(q)_{\text{ins}} & \tau_{\text{ins}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} J'_r + m_p L_r^2 & -m_p l_p L_r & 0 \\ -m_p l_p L_r & J_p & -m_p l_p g \alpha \\ \hline B'_r + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} & 0 & \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} V_m \\ 0 & B_p & 0 \end{array} \right]. \quad (3.43)$$

Assim, pode-se escrever as equações do sistema no formato de espaço de estado para o vetor de estados definido em (3.32)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.44)$$

Após manipulação algébrica extensiva, obtém-se para o grupo estável, ao se definir a entrada  $u = V_m$ , a matriz dinâmica do sistema  $A_{\text{est}}$  e a de entrada  $B_{\text{est}}$ ,

$$A_{\text{est}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J_t}(m_p l_p)^2 L_r g & -\frac{J_p}{J_t}(B_r + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_t k_m}{R_m}) & \frac{1}{J_t} m_p l_p L_r B_p \\ 0 & -\frac{1}{J_t} m_p l_p g (J_r + m_p L_r^2) & \frac{1}{J_t} m_p l_p L_r (B_r + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_t k_m}{R_m}) & -\frac{1}{J_t} B_p (J_r + m_p L_r^2) \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$B'_{\text{est}} = \frac{1}{J_t} \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} [0 \ 0 \ J_p \ -m_p l_p L_r]', \quad (3.46)$$

para,

$$J_t = J_p (J'_r + m_p L_r^2) - (m_p l_p L_r)^2. \quad (3.47)$$

Aplicando o mesmo raciocínio para o grupo instável, obtém-se  $A_{\text{ins}}$  e  $B_{\text{ins}}$ ,

$$A_{\text{ins}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J_t}(m_p l_p)^2 L_r g & -\frac{J_p}{J_t}(B_r + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_t k_m}{R_m}) & -\frac{1}{J_t} m_p l_p L_r B_p \\ 0 & \frac{1}{J_t} m_p l_p g (J_r + m_p L_r^2) & -\frac{1}{J_t} m_p l_p L_r (B_r + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m k_t k_m}{R_m}) & -\frac{1}{J_t} B_p (J_r + m_p L_r^2) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

$$B'_{\text{ins}} = \frac{1}{J_t} \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} [0 \ 0 \ J_p \ m_p l_p L_r]'. \quad (3.49)$$

As matrizes C e D são iguais para ambos os sistemas, visto que representam a saída medida. Como os dados obtidos são as posições fornecidas por *encoders*, as matrizes C e D se tornam

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

$$D = [0 \ 0]'. \quad (3.51)$$

Nota-se a semelhança entre os pares  $(A_{\text{est}}, B_{\text{est}})$  e  $(A_{\text{ins}}, B_{\text{ins}})$ , para os quais ocorrem somente mudanças de sinais em determinados termos.

### 3.3 Comparação do modelo com a literatura

Conforme explicado na Seção 3.1, diversas deduções podem ser encontradas na literatura. Essa variedade pode ser explicada por erros de dedução ou tipográficos e/ou simplificações, (CAZZOLATO; PRIME, 2011). Nesta seção, alguns modelos demonstrados em artigos

considerados relevantes na literatura são comparados ao modelo derivado nessa dissertação. Para isso, o modelo do sistema pode ser escrito na forma da Equação (3.41). Assim, para as Equações (3.16) e (3.17), efetua-se o deslocamento angular de  $\alpha = \alpha' + \pi$  de forma a obter o modelo no ponto de equilíbrio instável, para  $q' = x' = [\phi \ \alpha']$ ,

$$\begin{bmatrix} -m_p l_p L_r \cos \alpha & J_p \\ J_r + J_p \sin^2 \alpha + m_p L_r^2 & -m_p l_p L_r \cos \alpha \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} J_p \sin(2\alpha) \dot{\phi} & B_p \\ J_p \sin(2\alpha) \dot{\alpha} + B_r & m_p l_p L_r \sin \alpha \dot{\alpha} \end{bmatrix} \dot{x} - \begin{bmatrix} m_p l_p g \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Para facilitar a notação, o ângulo  $\alpha'$  que denota o ponto de equilíbrio instável será denotado somente como  $\alpha$  no restante dessa seção.

Deve ser recordado que esse formato é idêntico ao modelo simplificado obtido em (CAZZOLATO; PRIME, 2011), desconsiderando o torque de perturbação no pêndulo. Nesse artigo, o modelo completo é derivado por dois métodos diferentes, a saber o método de Euler-Lagrange e o método iterativo de Newton-Euler, sem a hipótese de braços longos para o pêndulo e o braço rotacional. Assim esse modelo se torna mais abrangente e complexo ao considerar o uso de tensores de momentos de inércia.

### 3.3.1 O modelo obtido por Furuta

As equações originais do modelo original proposto em (FURUTA *et al.*, 1991), consideram na convenção adotada pelo autor, o ângulo  $\alpha$  variando positivamente no sentido horário. Assim, tomando em consideração as diferenças de notação, as equações obtidas através do método de Euler-Lagrange são

$$\begin{bmatrix} -m_p l_p L_r \cos \alpha & J_p \\ J_r + m_p l_p^2 \sin^2 \alpha + m_p L_r^2 & -m_p l_p L_r \cos \alpha \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} -m_p l_p^2 \sin \alpha \dot{\phi} & J_r + m_p l_p^2 \\ 2m_p l_p^2 \sin(2\alpha) \dot{\alpha} + B_r & m_p l_p L_r \cos \alpha \dot{\alpha} \end{bmatrix} \dot{x} - \begin{bmatrix} m_p l_p g \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Verificam-se divergências no termo da diagonal secundária de  $F$ , onde o momento de inércia é substituído por  $m_p l_p^2$  no segundo elemento. Além disso, verificam-se outras discrepâncias como a substituição do termo de atrito viscoso  $B_p$  na matriz  $G$  por um fator  $J_r + m_p l_p^2$ , bem como o termo multiplicado por um  $\cos(\alpha)$  em vez de um  $\sin(\alpha)$ . Diferenças similares foram mencionadas e explicadas em (CAZZOLATO; PRIME, 2011) para outros artigos do autor, citando ainda outras referências de modelos com erros similares.

### 3.3.2 O modelo da Quanser

O modelo fornecido pelo fabricante da planta utilizada nesse projeto pode ser encontrado em (QUANSER, 2011b). Assume-se que o centro de massa do pêndulo ocorre em seu ponto médio geométrico, ou seja,  $l_p = \frac{L_p}{2}$ . O modelo obtido através do método de Euler-Lagrange pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} -m_p l_p L_r \cos \alpha & J_p \\ J_r + m_p l_p^2 \sin^2 \alpha + m_p L_r^2 & -m_p l_p L_r \cos \alpha \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_p l_p^2 \sin 2\alpha \dot{\phi} & B_p \\ m_p l_p^2 \sin 2\alpha \dot{\alpha} + B_r & m_p l_p L_r \sin \alpha \dot{\alpha} \end{bmatrix} \dot{x} - \begin{bmatrix} m_p l_p g \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Verifica-se que o modelo fornecido pelo fabricante assume uma forma muito similar ao modelo obtido na dedução deste capítulo. Variações ocorrem entre termos  $J_p$  e  $m_p l_p^2$ , em termos similares aos obtidos em (FURUTA *et al.*, 1991). Em adição, a análise se torna difícil, pois não são definidos explicitamente os termos de energia cinética e potencial. A explicação provável para as diferenças nos termos de atrito de inércia é que o modelo da Quanser considera uma massa pontual na extremidade do pêndulo. Porém, essa condição do modelo não está explícita no texto.

Apesar das diferenças, ao se linearizar esse modelo, obtém-se os mesmos resultados dos modelos linearizados desse projeto.

### 3.3.3 O modelo obtido por Iwase

Em (IWASE *et al.*, 2006), o modelo apresentado obtido através de Euler-Lagrange é similar ao obtido nessa dissertação, ao se desconsiderar os termos de atrito viscoso

$$\begin{bmatrix} -m_p l_p L_r \cos \alpha & J_p \\ J'_r + J_p \sin^2 \alpha + m_p L_r^2 & -m_p l_p L_r \cos \alpha \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} J_p \sin 2\alpha \dot{\phi} & 0 \\ J_p \sin(2\alpha) \dot{\alpha} & m_p l_p L_r \sin \alpha \dot{\alpha} \end{bmatrix} \dot{x} - \begin{bmatrix} m_p l_p g \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Nota-se somente a afirmação incorreta no artigo de que o termo  $J'_r$  deve ser o momento de inércia calculado a partir do centro de gravidade. Na realidade, a própria grandeza é definida como o momento de inércia do braço rotacional considerando o efeito do pêndulo, o que implica que esse deve ser em relação ao pivô de rotação. Formato semelhante pode ser encontrado em (AKESSON; ASTROM, 2001). Porém, nesse artigo, não é claro se os momentos de inércia são declarados em relação ao pivô ou ao centro de gravidade, onde a última a opção é a correta, (CAZZOLATO; PRIME, 2011).

## 3.4 Conclusão

A importância da modelagem e de uma aproximação linear correta é notada pois, nos próximos capítulos são identificados os parâmetros físicos que compõe esse modelo. Em posse dessas informações, controladores por realimentação de estados são sintetizados e aplicados para o ponto de equilíbrio instável. Verificam-se as dificuldades que surgem na identificação de sistemas inerentemente instáveis, as quais podem ser contornadas pela propriedade da inversão de sinais nas matrizes de espaço de estados entre os pontos de equilíbrio mostrada nesse capítulo. Dessa forma, os procedimentos clássicos de identificação podem ser realizados nessa planta de maneira satisfatória. Por fim, o modelo dinâmico obtido foi comparado com diversas variações presentes na literatura e, assim, validado para as aplicações deste projeto.

## 4 Identificação dos parâmetros do sistema mecânico

A obtenção de modelos que descrevem fenômenos naturais e permitem inferir observações e comportamentos futuros de sistemas constitui um dos objetivos principais da ciência (LJUNG, 1987). A rigor, um modelo é uma descrição da relação entre sinais de excitação aplicados ao sistema, ou seja, suas respectivas entradas, e os resultados dessa excitação, a saber, as saídas. Essa descrição, usualmente uma expressão matemática, é obtida através de um conjunto de medidas de sinais de entrada e saída, bem como de uma estrutura pré-estabelecida do modelo (LJUNG, 2010). Por fim, métodos estatísticos de ajuste, como o método dos quadrados mínimos, são utilizados para obter os valores pertinentes da estrutura do modelo escolhido. A Figura 8, baseada no diagrama da Figura 11 em (LJUNG, 1987), ilustra as etapas da obtenção matemática de modelos.

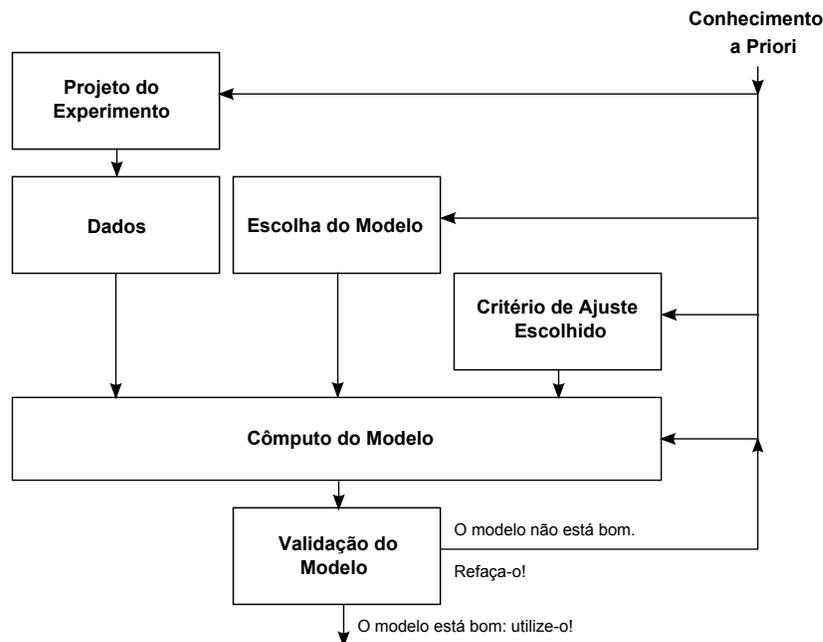


Figura 8 – Fluxograma de identificação de sistemas. Baseada em (LJUNG, 1987).

Especificamente nesse projeto, o modelo físico do pêndulo de Furuta foi obtido com sucesso no Capítulo 3. Nesse modelo, parâmetros como as massas das hastes  $m_p$  e  $m_r$ , bem como os seus respectivos comprimentos  $L_r$  e  $L_p$  são facilmente medidos. Porém, os valores de parâmetros como o coeficiente de atrito viscoso  $B$ , ou valores de eficiência do motor  $\eta_m$ ,

podem variar conforme o ambiente e as condições dos experimentos realizados. Assim, para assegurar que o modelo obtido por modelagem clássica seja uma descrição convincente da realidade, esses parâmetros citados devem ser estimados.

Na Figura 8, o *Conhecimento a Priori* é o primeiro passo para a identificação do modelo. Esse conhecimento pode variar, da posse da descrição completa ou parcial do modelo dinâmico até o total desconhecimento da dinâmica interna do sistema. O primeiro caso, conhecido como *Greybox Model*, utiliza as equações do modelo dinâmico para obter os parâmetros dos componentes que constituem o sistema. Em contrapartida, o último caso, chamado de *Blackbox Model*, utiliza estruturas genéricas que a rigor não possuem relações diretas com os parâmetros das componentes constituintes do sistema. Em ambos os casos, o tipo de identificação é chamada paramétrica, pois visam obter modelos matemáticos, tais como funções de transferência ou modelos de espaço de estado. Para o aprofundamento em obtenções paramétricas do tipo *Blackbox*, bem como métodos não-paramétricos, ver (LJUNG, 1987), (AGUIRRE, 2004).

Portanto, em posse do modelo dinâmico obtido no Capítulo 3, um caminho natural para a identificação dos parâmetros citados é o método *Greybox*. Assim, faz-se necessário planejar os experimentos para a obtenção de dados para efetivamente realizar a identificação. Nesse planejamento, é essencial que a planta seja caracterizada além do modelo dinâmico, com experimentos que visam encontrar não-linearidades não previstas para, por fim, escolher o sinal que excitará o sistema para a identificação.

## 4.1 Ensaios para caracterização da planta

O modelo obtido no Capítulo 3 oferece diversos *insights* sobre o comportamento da planta. A presença de um polo em zero indica uma característica integradora para o ângulo  $\phi$ . Além disso, devem ser considerados experimentos que mantenham  $\alpha$  em oscilações pequenas, na faixa para a qual  $\sin \alpha \approx \alpha$  é satisfeita. Porém, deve ser ressaltado que diversas características não-lineares que não estão contidas no modelo obtido, como saturações de entrada do motor DC, não foram consideradas. Os ensaios aqui apresentados visam qualificar e quantificar comportamentos sobre da planta, de forma a melhor caracteriza-la, bem como escolher o sinal de excitação apropriado para a identificação.

### 4.1.1 Ensaio de condição inicial

Os ensaios de condição inicial são realizados elevando o pêndulo até o ângulo escolhido dentro da faixa considerada aproximadamente linear. Esses testes permitem estimar

parâmetros como a constante de tempo do sistema e o fator de amortecimento para, por fim, escolher um sinal de excitação conveniente para a identificação. Adicionalmente, efeitos não-lineares não modelados podem ser verificados. Assim, um experimento foi realizado para o ângulo inicial  $\alpha_1 = 5^\circ$ , cujo resultado é mostrado na Figura 9, através das curvas  $\phi$  e  $\alpha$ .

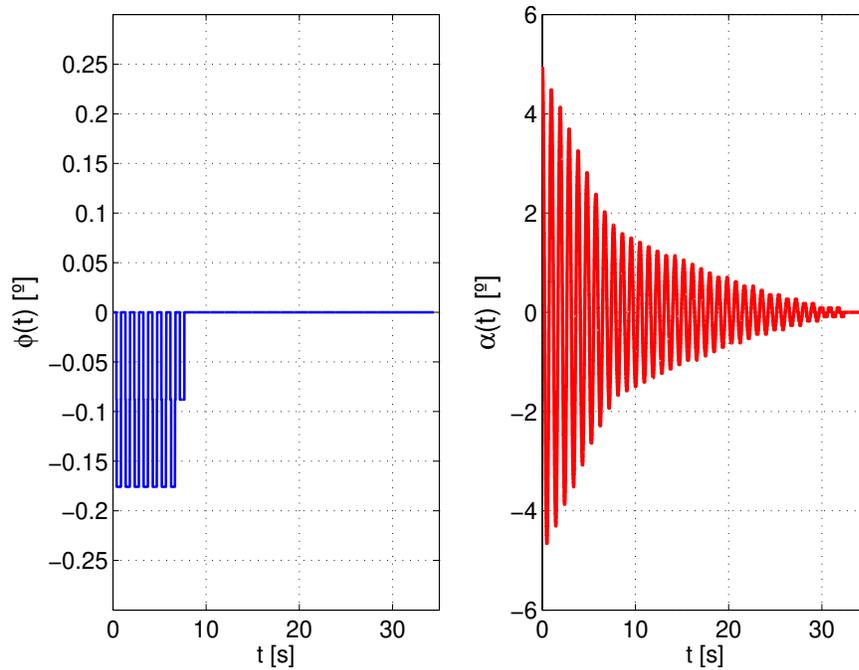


Figura 9 – Ângulo  $\alpha$  [°] e  $\phi$  [°] em função do tempo  $t$  [s] para condição inicial  $\alpha = 5^\circ$ .

Verifica-se um fenômeno interessante no comportamento do ângulo  $\phi$ : sua oscilação possui uma excursão pequena quantizada e mais evanescente que o ângulo  $\alpha$ . Essa característica não-linear não é esperada para uma região de comportamento aproximadamente linear, pois ambos os ângulos deveriam oscilar conjuntamente até o movimento cessar devido ao atrito viscoso. Esse comportamento é explicado pela presença de atrito seco nas engrenagens acopladas ao braço mecânico, restando somente um resíduo de oscilação computado, seja pela resolução do *encoder*, ou fisicamente definida pela folga dos dentes da engrenagem. Esse fenômeno se repete até o final prematuro da oscilação, em aproximadamente 8 segundos, em contraposição ao final da oscilação de  $\alpha$ , em aproximadamente 30 segundos.

Por fim, nota-se que a constante de tempo do sistema,  $\tau$ , é longa, em torno de 8 segundos. A frequência de oscilação obtida possui valor em torno de 1.06 Hz, verificado através da *Fast Fourier Transform* do ângulo  $\alpha$  e mostrado na Figura 10.

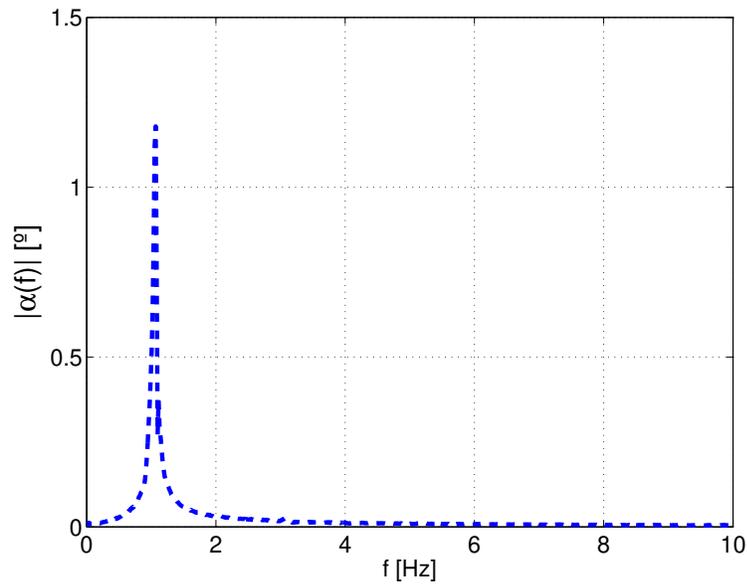


Figura 10 – *Fast Fourier Transform* de  $\alpha$  para condição inicial  $\alpha = 5^\circ$ .

#### 4.1.2 Resposta ao degrau

Verifica-se no modelo linear obtido no capítulo anterior que a planta possui um polo em zero. Esse integrador a torna instável para um sinal do tipo degrau, (GEROMEL; KOROGUI, 2011). Essa característica pode ser verificada experimentalmente, pois a tensão de entrada aplicada ao motor de corrente contínua estabelece uma referência em velocidade, todavia a posição não é controlada de forma direta. Porém, ainda é possível efetuar uma caracterização semelhante a resposta obtida ao degrau ao se aplicar um sinal quadrado, o qual possibilite analisar mais nuances da dinâmica do sistema. A frequência escolhida do sinal foi 0.313 Hz, para amplitudes de 0.5 V e 0.6 V.

- Onda quadrada de amplitude 0.5 V

A Figura 11 mostra as curvas  $\phi(t)$  e  $\alpha(t)$  para uma onda quadrada de amplitude 0.5 V na entrada do motor DC, com frequência de 0.313 Hz, aplicada a entrada.

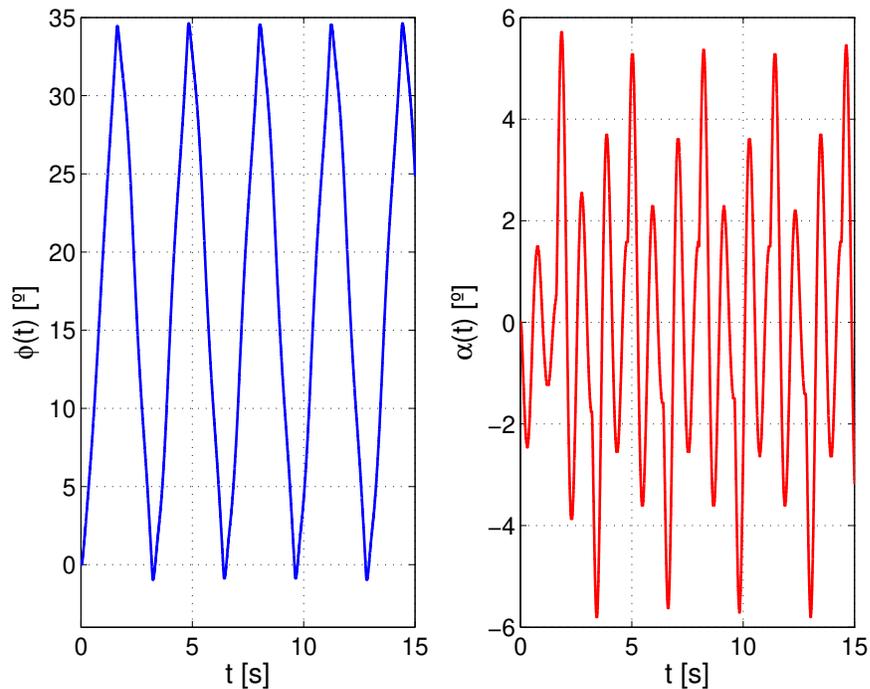


Figura 11 –  $\phi$  [°] e  $\alpha$  [°] em função do tempo  $t$  [s] para entrada do tipo onda quadrada de amplitude 0.5 V e frequência de 0.313 Hz

Nota-se que, apesar da periodicidade da entrada, existem flutuações na amplitude de  $\phi$ , resultantes da construção do pêndulo do fabricante *Quanser*. Nesse aparato mecânico, um cabo de *encoder* que toma medidas do ângulo  $\alpha$  é ligado a extremidade do braço rotacional. Essa configuração mecânica não é prevista no modelo, apesar de seu efeito ser proeminente e relevante, pois esse cabo aplica uma força de resistência no percurso do pêndulo, de forma semelhante a uma força elástica não-linear. Esse fenômeno fica mais evidente para grandes valores de tensão na entrada, pois o cabo impede que o pêndulo efetue o percurso no sentido desejado em  $\phi$ , ao aplicar uma força sempre no sentido contrário ao movimento. Essa característica é observada ao se aplicar amplitudes relevantes do sinal de entrada ao sistema, ou igualmente ao se aplicar sinais de entrada para um longo período de tempo.

- *Onda quadrada de amplitude 0.6 V*

A Figura 12 mostra as curvas  $\phi$  e  $\alpha$  para uma entrada do tipo onda quadrada de amplitude 0.6 V e frequência 0.313 Hz, com o intuito de comparar a resposta obtida com a resposta observada na Figura 11. Nota-se que o fenômeno de flutuação se acentua em relação à amplitude de 0.5 V e que praticamente ocorre uma mudança do ponto de operação do ângulo  $\phi$ .

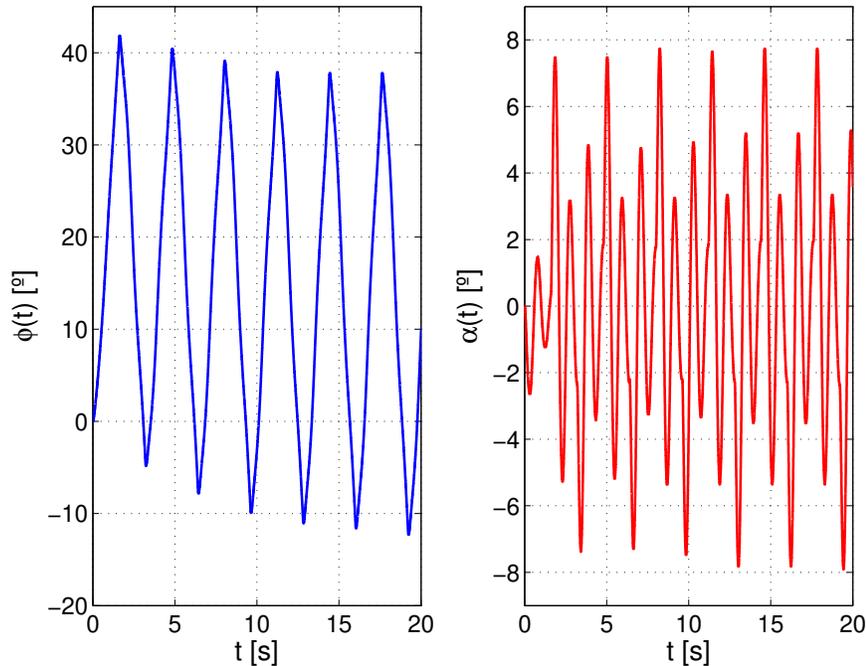


Figura 12 –  $\phi$  [°] e  $\alpha$  [°] em função do tempo  $t$  [s] para entrada do tipo onda quadrada de amplitude 0.6 V e frequência de 0.313 Hz

Pode-se concluir que grandes excursões do sinal de entrada causarão fenômenos não lineares de mudança no ponto de operação de  $\phi$  e, como consequência, prejudicarão o processo de identificação.

### 4.1.3 Resposta a senóides

O ensaio de resposta a senóides tem por objetivo verificar o comportamento do sistema para diferentes frequências, bem como aplicar variações contínuas ao sistema e de excursão de sinal relevante, em contrapartida aos pulsos quadrados aplicados à planta na subseção anterior. Para sistemas mecânicos, devido a inércia das massas envolvidas, é esperado um comportamento atenuador para altas frequências, bem como a presença de uma possível frequência de ressonância. Porém, a aplicação de uma senoide de frequência 0.8 Hz e ampli-

tude de 0.6 V revelou a presença de zona morta no ângulo  $\phi$ , conforme ilustrado pela Figura 13.

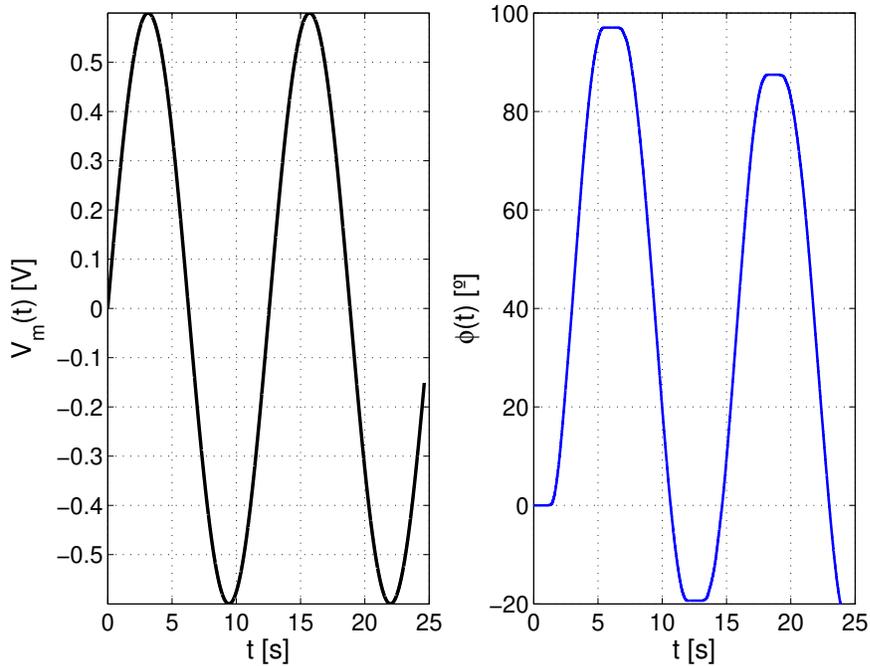


Figura 13 –  $V_m$  [V] e  $\phi$  [°] em função do tempo  $t$  [s] para entrada do tipo senóide de amplitude 0.6 V e frequência de 0.8 Hz

Verifica-se distorção nos picos de  $\phi(t)$  para pequenas amplitudes de tensão de entrada. Essa faixa pode variar, mas está em sua maior parte contida entre, aproximadamente, -0.25 V e 0.25 V, o que caracteriza o fenômeno de zona morta. Existem alguns fatores que originam esse comportamento e que podem ser enumerados, entre eles, o cabo do *encoder* descrito na subseção anterior e sua característica de força contrária ao movimento, bem como a própria incapacidade do motor em vencer a inércia do sistema.

#### 4.1.4 Conclusão

Os testes de condição inicial, resposta ao degrau e resposta a senoide permitem concluir que a planta, além das não-linearidades evidentes pelas equações devido a sua montagem mecânica, possui efeitos não-lineares como forte atrito seco, uma zona morta significativa e saturação da entrada do motor, além de possíveis dinâmicas não modeladas. Esses fenômenos reduzem a zona linear do pêndulo rotacional, sendo necessário um projeto acurado para a identificação e aplicação de técnicas de controle linear. Por fim, para a zona linear, a frequência de oscilação se encontra aproximadamente em 1 Hz, bem como a constante de tempo em torno de 8 segundos.

## 4.2 Identificação dos parâmetros

A etapa de modelagem física realizada com sucesso no Capítulo 3, bem como as características do sistema obtidas através de testes apresentados nesse capítulo são necessárias para o planejamento do experimento de identificação. Nesse ínterim, o sinal de excitação utilizado na planta é de fundamental importância para a satisfatória identificação do modelo. Assim, as etapas restantes requerem experimentos que apliquem o sinal devidamente projetado, bem como a posterior aplicação de métodos de identificação para obter os parâmetros físicos do sistema de forma efetiva.

### 4.2.1 O método de identificação *Grey-Box*

O método de identificação paramétrica utilizado nesse projeto é o chamado *Grey-Box*, conforme explicado na introdução do presente capítulo. Esse método pode ser utilizado quando existe um modelo físico do sistema, (LJUNG, 2000), que é o caso do pêndulo rotacional. Especificamente, o modelo estável representado pelas equações de estado definidas pelas matrizes (3.45), (3.46), (3.50) e (3.51) foi utilizado.

Em termos computacionais, o *Toolbox* do *Matlab* apresenta diversas opções para esse tipo de identificação. A opção efetivamente utilizada nesse projeto é a combinação *idgrey* e *greyest*. O primeiro é um tipo de objeto de identificação no formato de equações de estado gerado a partir das equações diferenciais do modelo, e possibilita que os parâmetros das partes físicas que compõem a planta sejam consideradas variáveis. O segundo é a própria função de estimação, que fornece, além dos parâmetros estimados, os erros de estimação correspondentes. Essa função utiliza diversos métodos iterativos, como o método de subespaço de Gauss-Newton, o método de Levenberg-Marquardt, entre outros, para refinar a convergência, (LJUNG, 2000).

### 4.2.2 Escolha do sinal de excitação

O sinal escolhido para a identificação é do tipo *Pseudorandom Binary Sequence* - PRBS. A escolha foi motivada devido às não-linearidades identificadas no decorrer dos ensaios de caracterização, como a zona-morta e o atrito seco, que deformam as senoides injetadas na entrada. Essas características impossibilitaram bons resultados de identificação de sinais do tipo soma de senoides, ou mesmo do tipo aleatório, pois os níveis de tensão produzidos podem ser gerados dentro da zona morta para ambos os sinais, fato que impossibilita uma identificação linear satisfatória. Em contrapartida, o PRBS é um sinal de fácil geração e espectro ajustável e que permite a minimização dos efeitos de atrito seco e zona morta para essa planta, pois aplica níveis fixos de tensão na faixa desejada.

### 4.2.3 O sinal PRBS

O PRBS é um sinal periódico que apresenta duas amplitudes fixas  $\pm V_{PRBS}$ , obtido através de *flip-flops* em série realimentados por uma porta *XOR*. As entradas da porta *XOR* são tomadas de saídas conhecidas dos *flip-flops*, chamados *taps*, que permitem a maior sequência aleatória possível (WARD; MOLTENO, 2012). A quantidade  $n$  desses elementos e o *clock* do sistema determinam o período para o qual o sinal exibe uma característica aleatória, (AGUIRRE, 2004). A Figura 14 ilustra um gerador PRBS de quatro bits.

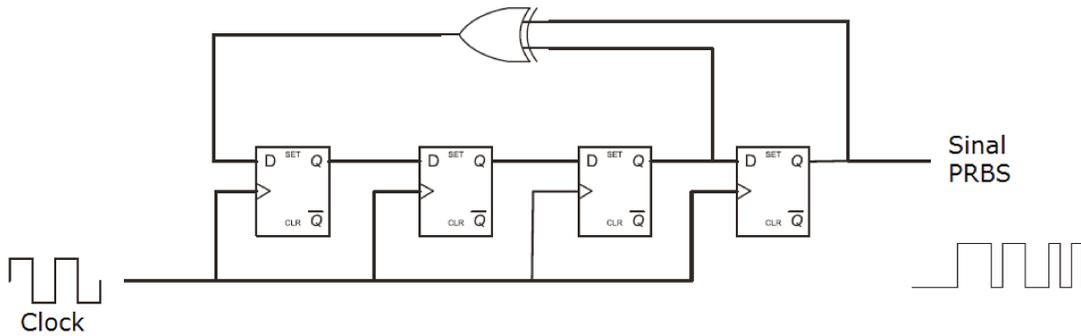


Figura 14 – Gerador PRBS de quatro bits. Retirado de (FAIRWEATHER *et al.*, 2011).

Assim, os parâmetros de geração do sinal são a frequência do *clock*,  $T_{\text{clk}}$ , o número  $n$  de *flip-flops*, e a amplitude de saída,  $V_{PRBS}$ . Esses permitem obter as características do sinal gerado. Além disso, como alternativa à estrutura mostrada na Figura 14, esse sinal pode ser gerado através de rotinas numéricas no *Matlab*, como a função *idinput*.

- *Período do sinal PRBS*

O sinal PRBS é uma sequência que passa a se repetir após  $N$  termos, obtido por,

$$N = 2^n - 1. \quad (4.1)$$

Assim, o período do sinal é dado por,

$$T_{PRBS} = NT_{\text{clk}}. \quad (4.2)$$

Uma heurística comumente utilizada que normalmente fornece resultados satisfatórios é, (AGUIRRE, 2004),

$$\frac{\tau}{10} \leq T_{\text{clk}} \leq \frac{\tau}{3}, \quad (4.3)$$

para períodos do PRBS,  $T_{PRBS}$ , que sejam próximos da constante de tempo de interesse do sistema, ou seja,  $T_{PRBS} \approx \tau$ .

- *Propriedades frequenciais do sinal*

O espectro de um sinal PRBS é descrito por um conjunto de frequências discretas com suas respectivas amplitudes moduladas pela função  $\text{sinc}(x)$ , (FAIRWEATHER *et al.*, 2011). Sua magnitude atinge pela primeira vez o zero na frequência do clock,  $f_{\text{clk}}$ . A Figura 15 mostra o espectro característico de um sinal PRBS.

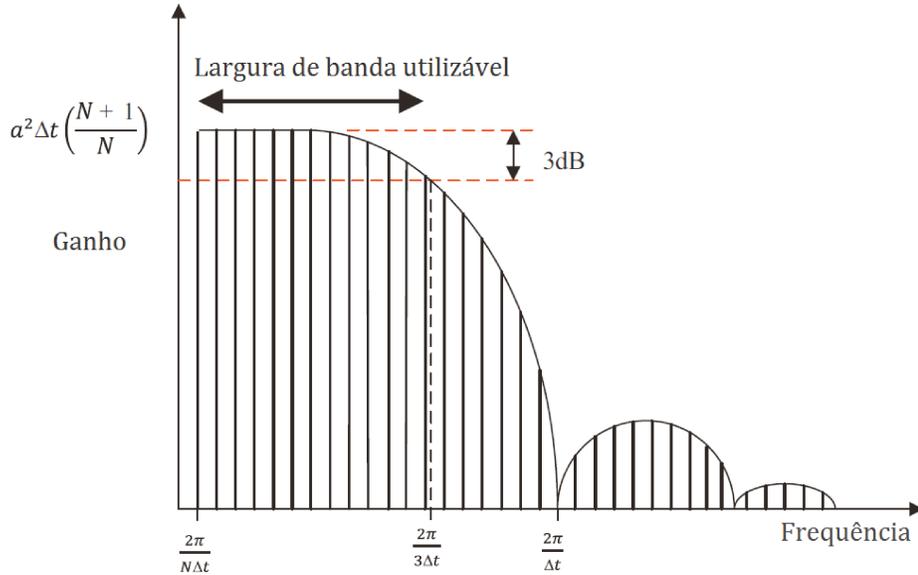


Figura 15 – Espectro característico de um sinal PRBS. Retirado de (FAIRWEATHER *et al.*, 2011)

A frequência de corte, usando o critério da queda de 3 dB, acontece em  $\frac{1}{3}f_{\text{clk}}$ . Além disso, o espectro é limitado em faixa, de frequência mínima  $\frac{1}{N}f_{\text{clk}}$ . Nesse contexto, se estabelece outra heurística que fornece bons resultados, (FAIRWEATHER *et al.*, 2011),

$$f_{\text{clk}} \approx 2.5f_{\text{max}}. \quad (4.4)$$

Além disso, a duração do sinal está intimamente ligado a largura da banda da identificação, como pode ser notado na Figura 15,

$$B = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{N} \right) f_{\text{clk}} \approx 2.5 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{N} \right) f_{\text{max}}. \quad (4.5)$$

Assim, a escolha da quantidade de bits  $n$  é arbitrada pelo tamanho da banda da identificação, onde a escolha ocorre para a necessidade do sistema. Para maiores valores de  $n$ , a banda em (4.5) aumentará, porém o tempo do experimento seguirá a mesma tendência.

- *Dimensionamento do sinal*

Para a heurística temporal proposta em (AGUIRRE, 2004), os intervalos mínimo e máximo para o  $T_{\text{clk}}$  do PRBS são, respectivamente,  $T_{\text{min,clk}} = 0.8$  s e  $T_{\text{max,clk}} = 2.7$  s. Para valores que se aproximam do intervalo máximo, mesmo para amplitudes pequenas de  $V_{\text{PRBS}}$  (levando em consideração a zona morta da entrada sua assimetria para pequenas tensões), a excursão do ângulo  $\phi$  se torna grande, tornando o efeito de deslocamento do ponto de equilíbrio mostrado na Figura 12. Para valores que atingem o limitante inferior proposto, o valor mínimo do número de bits é  $n = 4$ , o que ainda acarreta o deslocamento da condição inicial de  $\phi$ , devido aos grandes intervalos de tempo para os quais a tensão de entrada é aplicada, bem como a longa duração do teste. Todos os testes utilizando essa heurística para esse sistema em conjunto com a forma fixa do espaço de estados do método *Greybox* não tiveram resultados satisfatórios.

Por outro lado, para a heurística proposta em (FAIRWEATHER *et al.*, 2011), estabeleceu-se um bom compromisso entre a amplitude de entrada e o seu tempo de aplicação. A frequência natural de oscilação do sistema foi medida como, aproximadamente, 1.06 Hz. Assim, a frequência do *clock* foi tomada como,  $f_{\text{clk}} = 2.65$  Hz, o que corresponde ao período aproximado de  $T_{\text{clk}} \approx 0.38$  s. Tendo em vista que grandes durações dos testes realizados para a primeira heurística produziram resultados insatisfatórios, decidiu-se por efetuar testes variando pequenos valores de  $n$  empiricamente. Foram realizados diversos experimentos para  $3 \leq n \leq 5$ . Em termos da duração da identificação, verificou-se que os melhores resultados ocorreram para  $n$  pequenos, devido a baixa excursão do ângulo  $\phi$ .

#### 4.2.4 Resultados

O sinal *PRBS* foi gerado para  $3 \leq n \leq 5$ ,  $T_{\text{clk}} = 0.38$  s e amplitude  $V_{\text{PRBS}} = 0.6$  V. As variáveis a serem identificadas são  $J_p$ ,  $J'_r$ ,  $B_p$ ,  $B'_r$  e a relação das eficiências da caixa de engrenagens, do motor e a resistência do motor  $R_m$ , por constituírem parâmetros que possuem maior dependência com as condições do ambiente. O restante dos parâmetros, como as massas e os comprimentos das hastes foram tomadas de (QUANSER, 2011a), bem como as relações das engrenagens em (QUANSER, 2011c). Os melhores resultados em termos de porcentagem de ajuste das curvas  $\phi$  e  $\alpha$  foram obtidos para  $n = 3$ , do qual faz parte o conjunto escolhido, mostrado na Figura 16. As curvas pontilhadas representam as medidas reais, ao passo que as curvas cheias representam a saída do modelo. A porcentagem de ajuste (*fit*) para  $\phi$  e  $\alpha$  foram, respectivamente, 91.4 % e 92.43 %.

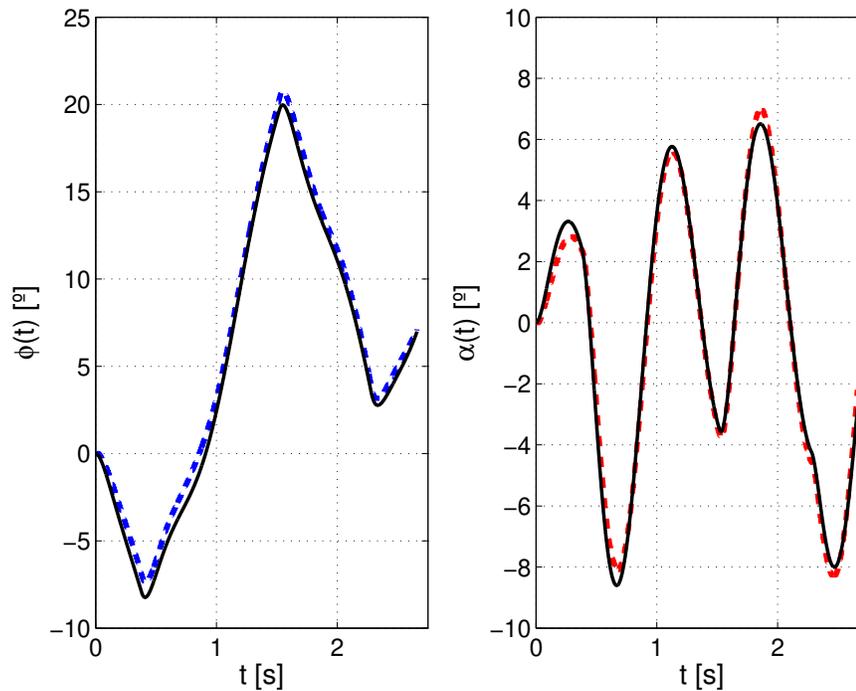


Figura 16 – Identificação das saídas  $\phi$  e  $\alpha$  em função do tempo para entrada do tipo PRBS,  $n = 3$ ,  $T_{\text{clk}} = 0.38$  s

Os resultados proporcionados pelo método *GreyBox* pela estimação mostrada na Figura 16 são mostrados na Tabela 1 para todos os parâmetros estimados, bem como os respectivos desvios.

Tabela 1 – Parâmetros identificados do pêndulo de Furuta da Quanser e desvios padrão associados.

Parâmetro	Valor	Desvio Padrão	Unidade
$J_p$	4.44e-03	2e-05	$kg.m^2$
$J'_r$	3.7e-03	4e-04	$kg.m^2$
$B_p$	2e-04	1e-04	$N.m/(rad/s)$
$B'_r$	4.8e-02	4e-03	$N.m/(rad/s)$
$\frac{\eta_g \eta_m}{R_m}$	1.9e-01	1e-02	$\Omega^{-1}$

Para comparação, os valores dos parâmetros teóricos ou fornecidos pelo fabricante *Quanser* são mostrados na Tabela 2, em conjunto com os valores estimados e os erros relativos aos valores teóricos ou fornecidos. Verifica-se que as maiores porcentagens de erro são provenientes de comparações com valores práticos obtidos pelo fabricante, a saber os valores de atrito viscoso, ou com valores de que dependem de eficiência.

Tabela 2 – Comparação entre os valores identificados e os valores teóricos/tabelados dos parâmetros.

Parâmetro	Valor Experimental	Valor Teórico	Erro (*) [%]
$J_p$	4.4e-03	4.3e-03	3.0
$J'_r$	3.7e-03	3.8e-03	3.0
$B_p$	2.0e-04	2.4e-03	92.0
$B'_r$	4.8e-02	1.7e-02	176.0
$\frac{\eta_g \eta_m}{R_m}$	1.9e-01	2.4e-01	21.0

(\*) Em relação ao valor teórico ou fornecido pelo fabricante.

Esse fenômeno ocorre devido a sensibilidade da planta frente a sua montagem em bancada, bem como o a posição do cabo do *encoder* citado anteriormente e a situação de carga da planta durante o ensaio. Em suma, esses parâmetros dependem do ambiente o qual está inserido o pêndulo. Finalmente, para os momentos de inércia, o erro está em uma faixa adequada e, como esperado, não devem possuir uma grande variação no experimento. Esses resultados mostram a importância da identificação de parâmetros *in loco* em detrimento ao uso de valores tabelados, pois as diferenças percentuais foram grandes, em até aproximadamente 170 % em relação ao valor fornecido.

### 4.2.5 Validação

Para a validação, outros sinais PRBS de mesmos parâmetros, porém de condições iniciais distintas, são gerados e aplicados ao sistema. A comparação entre as saídas experimentais (linhas pontilhadas) e o modelo (linhas contínuas) é mostrada na Figura 17. A porcentagem de ajuste (*fit*) para  $\phi$  e  $\alpha$  são, respectivamente, 90.5 % e 91.8%. Verifica-se que a performance do modelo em comparação ao sistema, para as condições escolhidas, é satisfatória: apesar das porcentagens de ajuste das saídas diminuírem para uma entrada diferente da utilizada para a identificação, esses valores ainda mantêm-se acima de 90 % para os dois ângulos.

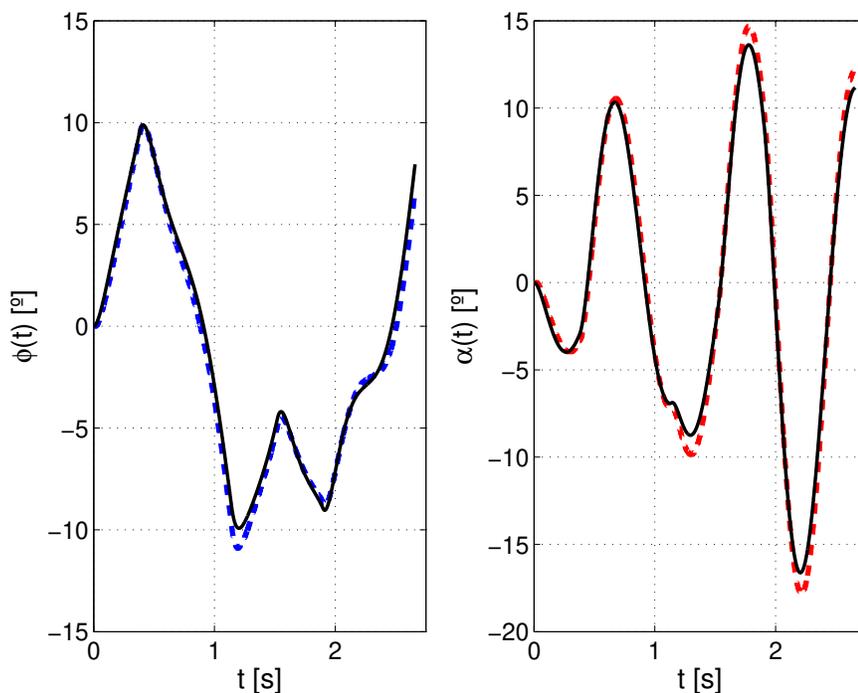


Figura 17 – Curvas de Validação das saídas experimentais e do modelo identificado  $\phi$  e  $\alpha$  em função do tempo para entrada do tipo PRBS,  $n = 3$ ,  $T_{clk} = 0.38$  s.

Outros métodos possíveis de validação de um modelo são baseados na análise do comportamento dos resíduos das saídas de um sistema. Esses resíduos são obtidos ao se computar as diferenças entre os valores medidos e os valores de um modelo estimado para uma mesma entrada aplicada. Nesse contexto, podem ser citados dois testes: o *whiteness test criteria* e o *independence test criteria*. O primeiro é obtido pela função de autocorrelação dos resíduos dos sinais de saída, no caso, para os ângulos  $\alpha$  e  $\phi$ . A interpretação é que os erros de estimação do modelo sejam causados por ruídos brancos, e assim o valor da autocorrelação deve possuir as características desse tipo de ruído. O segundo verifica se o resíduos das saídas

do modelo são satisfatoriamente descritas pela entrada aplicada: um modelo considerado satisfatório possui seus resíduos não correlacionados com entradas passadas, (LJUNG, 2000). Dessa forma, a autocorrelação entre os resíduos das respectivas saídas, bem como a correlação dos resíduos e a entrada são mostradas nas Figuras 18 e 19.

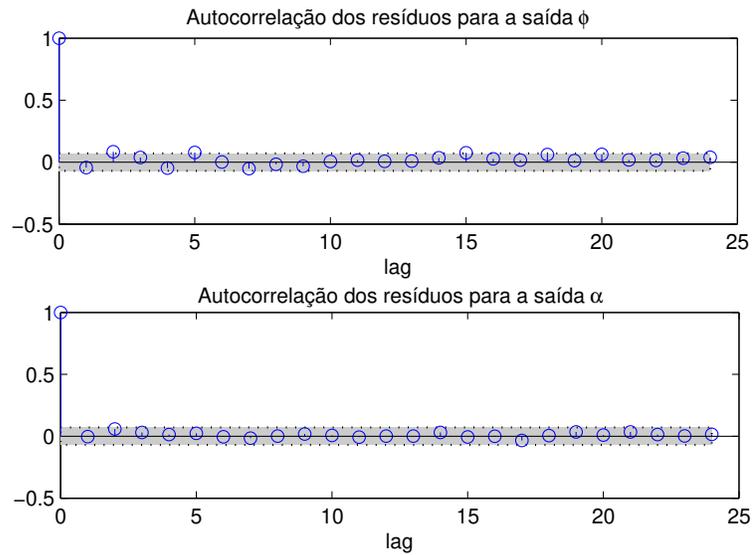


Figura 18 – Autocorrelação dos resíduos da saída  $y_1$  ( $\phi$ ) e  $y_2$  ( $\alpha$ ) em função do  $lag$ . A faixa de confiança é de 99 %.

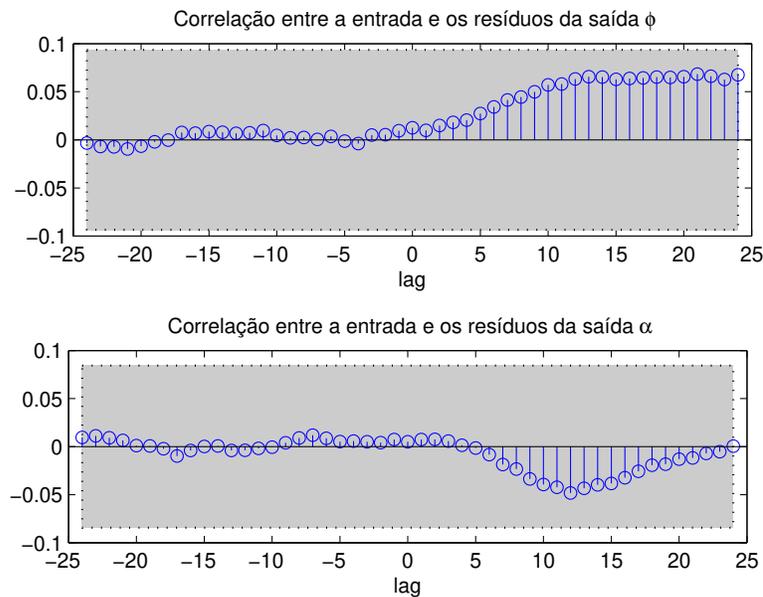


Figura 19 – Correlação entre a entrada  $u_1(V_m)$  e os resíduos da saída  $y_1$  ( $\phi$ ) e  $y_2$  ( $\alpha$ ) em função do  $lag$ . A faixa de confiança é de 99 %.

Verifica-se que, para os intervalos de confiança estabelecidos, o modelo satisfaz o critério da autocorrelação dos resíduos, bem como o da correlação entre as saídas e a entrada, o que valida o modelo obtido.

Assim, as matrizes do modelo final podem ser apresentadas. Para o vetor de estados definido conforme o Capítulo 3 como  $x' = [\phi \ \alpha \ \dot{\phi} \ \dot{\alpha}]'$ , a matriz dinâmica do sistema e a de entrada definidas pelas Equações (3.45) e (3.46), se tornam,

$$\left[ A_{\text{est}} \mid B_{\text{est}} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 34.16 & -18.62 & 0.035 & 18.31 \\ 0 & -76.74 & 17.96 & -0.079 & -17.65 \end{array} \right]. \quad (4.6)$$

Além disso, pode-se escrever os desvios padrão associados com os elementos das matrizes, obtidos através da identificação. Assim, para um sistema incerto na forma  $A_{\text{est}} \pm \Delta A_{\text{est}}$  e  $B_{\text{est}} \pm \Delta B_{\text{est}}$ , obtém-se,

$$\left[ \Delta A_{\text{est}} \mid \Delta B_{\text{est}} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.37 & 0.90 & 0.021 & 0.80 \\ 0 & 2.31 & 0.87 & 0.046 & 0.77 \end{array} \right]. \quad (4.7)$$

Finalmente, as matrizes do sistema instável efetivamente utilizadas nos projetos dos controladores em rede devem ser calculadas. Como mostrado no Capítulo 3, a mudança é realizada somente pela troca de sinais em termos específicos. Assim, as matrizes sistema instável descrito pelas Equações (3.48) e (3.49) são,

$$\left[ A_{\text{ins}} \mid B_{\text{ins}} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 34.16 & -18.62 & -0.035 & 18.31 \\ 0 & 76.74 & -17.96 & -0.079 & 17.65 \end{array} \right]. \quad (4.8)$$

### 4.3 Conclusão

A identificação dos parâmetros dos sistemas físicos através do modelo obtido no Capítulo 2 foi realizada de forma satisfatória. Nesse contexto, ressalta-se que, apesar das heurísticas descritas em (AGUIRRE, 2004) não fornecerem boas estimativas devido as características da planta, utilizou-se outra heurística frequencial de (FAIRWEATHER *et al.*, 2011) que permitiu uma boa estimativa dos parâmetros. Destaca-se que as validações apresentadas nesse capítulo constituem a primeira fase de teste do modelo identificado, pois esse precisa possuir o comportamento esperado nos experimentos de controle projetados para o próximo capítulo.

# 5 Controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos

O controle através de redes de comunicação está sujeito aos fenômenos inerentes a um canal imperfeito. Dentre esses fenômenos podem ser citados a limitação da largura de banda devido à amostragem, perdas de pacote na transmissão, atrasos, entre outros. Especificamente nesse projeto, é abordado o fenômeno de perdas de pacote, modelados através de MJLS. A modelagem de perda de pacotes através de redes de comunicação utilizando cadeias de Markov discretas é intuitiva e bem fundamentada na literatura, (TRANTER *et al.*, 2003). Na área de telecomunicações, os canais markovianos são conhecidos por otimizar os tempos computacionais de simulação em detrimento da abordagem física determinística, que utiliza formas de onda, interferências, ruídos de quantização, entre outros parâmetros de transmissões reais, ver (TRANTER *et al.*, 2003). Em posse dos modelos de rede que são analisados nesse capítulo, sintetizam-se controladores por realimentação de estado que otimizam as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema markoviano em estudo, bem como seus equivalentes clássicos. Desta forma, o objetivo desse capítulo é aplicar controladores markovianos e clássicos a ambientes simulados de perda de pacotes, no intuito de comparar seus respectivos desempenhos.

## 5.1 Canais markovianos

Os modelos de canal utilizados nesse projeto são processos markovianos discretos. Assim, as perdas de pacote são variáveis aleatórias, (HESPANHA *et al.*, 2007), caracterizadas pela sua distribuição inicial  $\mu_i := \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ , sua matriz de probabilidade de transição associada  $\mathbb{P}$ , (LEON-GARCIA, 2008) e sua representação gráfica por grafos markovianos. Especificamente nesse projeto são utilizados os modelos mais conhecidos: Gilbert-Elliot, Fritchman e McCullough. Os parâmetros das redes obtidos através de modelagens equivalentes de um canal Rayleigh plano, com modulação BPSK (*Binary Phase-Shift Keying*) foram retirados de (MARCONDES, 2005). Dentre os valores de sinal-ruído utilizados nesse trabalho, foi escolhido o menor deles, pois as perdas de pacote devem ser perceptíveis no decorrer das simulações e experimentos.

### 5.1.1 O canal de Gilbert-Elliot

O modelo de Gilbert-Elliot é um aprimoramento do modelo de Gilbert proposto em (GILBERT, 1960), cujo objetivo foi apresentar um modelo estocástico mais realístico para

perdas de pacote em rajadas. O modelo de Gilbert original consiste de uma cadeia de Markov de dois estados simples: um estado BOM e um estado RUIM. As perdas de pacote ocorrem somente no estado RUIM, com uma probabilidade de perda associada. O modelo de Gilbert-Elliot, proposto em (ELLIOTT, 1963) como uma generalização do primeiro modelo, adiciona uma probabilidade de perda de pacote também ao estado BOM. A Figura 20 mostra o grafo para uma rede de Gilbert-Elliot.

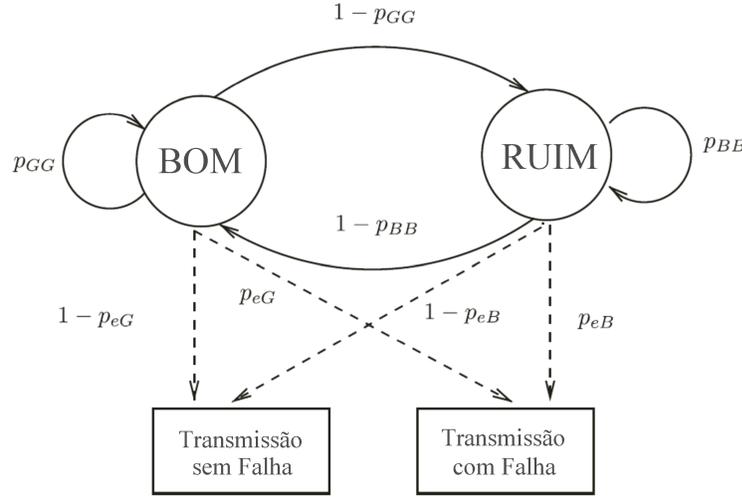


Figura 20 – O diagrama do canal de Gilbert-Elliot. Adaptado de (GONÇALVES *et al.*, 2010).

A probabilidade de permanecer no estado BOM dado que o estado atual é BOM é  $p_{GG}$ . De forma similar, a probabilidade de permanecer no estado RUIM dado que o estado atual é RUIM é  $p_{BB}$ . A probabilidade de erro no estado BOM é  $p_{eG}$  e no estado RUIM,  $p_{eB}$ . Pode-se perceber que existem estados implícitos além dos estados BOM e RUIM, pois esses são insuficientes para descrever o sistema completo. Esse tipo de cadeia de Markov, onde ocorre a presença de estados implícitos, é chamada de cadeia de Markov oculta, ver (TRANTER *et al.*, 2003). Os estados adicionais podem ser calculados ao se combinar as probabilidades de transição e as probabilidades de perda de pacotes, o que permite a obtenção da matriz de transição  $\mathbb{P}$ . Nesse projeto, utiliza-se a seguinte convenção para modelar todos os modos possíveis,

$$\mathbb{P}_{GE} = \begin{bmatrix} p_{GG}p_{eG} & p_{GG}(1 - p_{eG}) & (1 - p_{GG})p_{eB} & (1 - p_{GG})(1 - p_{eB}) \\ p_{GG}p_{eG} & p_{GG}(1 - p_{eG}) & (1 - p_{GG})p_{eB} & (1 - p_{GG})(1 - p_{eB}) \\ (1 - p_{BB})p_{eG} & (1 - p_{BB})(1 - p_{eG}) & p_{BB}p_{eB} & p_{BB}(1 - p_{eB}) \\ (1 - p_{BB})p_{eG} & (1 - p_{BB})(1 - p_{eG}) & p_{BB}p_{eB} & p_{BB}(1 - p_{eB}) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde a primeira linha representa o modo BOM com falha na transmissão, a segunda linha

representa o modo BOM sem falha, a terceira é o modo RUIM com falha e a última linha, o modo RUIM sem falha.

Os parâmetros retirados de (MARCONDES, 2005), para o sinal-ruído de 1 dB são  $p_{eG} = 0.04$ ,  $p_{eB} = 0.29$ ,  $p_{GG} = 0.87$  e  $p_{BB} = 0.75$ . A matriz de transição  $\mathbb{P}_{GE}$  resultante é,

$$\mathbb{P}_{GE} = \begin{bmatrix} 0.0348 & 0.8352 & 0.0377 & 0.0923 \\ 0.0348 & 0.8352 & 0.0377 & 0.0923 \\ 0.0100 & 0.2400 & 0.2175 & 0.5325 \\ 0.0100 & 0.2400 & 0.2175 & 0.5325 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Os modos para o modelo de Gilbert-Elliot associados com sucesso ou falha no envio de pacotes podem ser agrupado em dois *clusters*,  $\mathbb{U}_{s,GE}$  e  $\mathbb{U}_{f,GE}$ , respectivamente. Esses assumem os valores,  $\mathbb{U}_{s,GE} = \{2, 4\}$  e  $\mathbb{U}_{f,GE} = \{1, 3\}$ . Além disso, o cálculo do custo  $\mathcal{H}_2$  utiliza explicitamente a distribuição de probabilidade inicial  $\mu_i$ , como apresentado na Definição 2.13. Essa distribuição é arbitrária, sendo utilizada nesse projeto a distribuição estacionária da cadeia de Markov  $\pi$ , a qual é obtida quando a rede está em regime, uma hipótese experimental razoável, (GONÇALVES *et al.*, 2010). Assim, para a matriz de probabilidade de transição,  $\mathbb{P}_{GE}$ , a distribuição inicial da rede é tomada como,

$$\mu = \pi = [0.0263 \quad 0.6316 \quad 0.0992 \quad 0.2429]. \quad (5.3)$$

### 5.1.2 O canal de Fritchman

O canal de Fritchman, introduzido em (FRITCHMAN, 1967), é uma alternativa ao canal de Gilbert-Elliot para fornecer um modelo flexível e matematicamente tratável. Esse canal é composto de vários modos, cuja quantidade depende da necessidade da rede a ser modelada, e os quais podem ser agrupados em dois *clusters*,  $\mathbb{U}_1$  and  $\mathbb{U}_2$ . Os modos que estão contidos no *cluster*  $\mathbb{U}_1$  possuem probabilidade de erro nula, ao passo que os modos contidos em  $\mathbb{U}_2$  possuem a certeza do erro. Assim,  $\mathbb{U}_1$  pode ser interpretado como um *cluster* BOM, bem como  $\mathbb{U}_2$ , o *cluster* RUIM. A Figura 21 mostra o diagrama de transição para um canal de Fritchman.

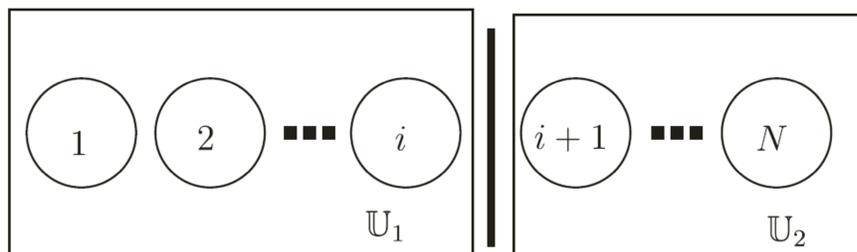


Figura 21 – O diagrama do canal de Fritchman. Retirado de (GONÇALVES *et al.*, 2010).

Nesse projeto, um modelo de Fritchman simplificado é utilizado, onde  $\mathbb{U}_1$  é composto por três modos e  $\mathbb{U}_2$ , por somente um modo. A matriz de transição de probabilidade,  $\mathbb{P}_F$ , para o sinal-ruído de 1 dB e probabilidade de ocorrência de um erro sequencial (*gap*) GL, (MARCONDES, 2005), é,

$$\mathbb{P}_F = \begin{bmatrix} 0.8250 & 0 & 0 & 0.1750 \\ 0 & 0.9300 & 0 & 0.0700 \\ 0 & 0 & 0.9300 & 0.0700 \\ 0.6450 & 0.1700 & 0.0750 & 0.1100 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Os modos para o modelo de Fritchman Simplificado associados a sucesso ou falha no envio de pacote são naturalmente agrupados em dois *clusters*,  $\mathbb{U}_s$  e  $\mathbb{U}_f$ , respectivamente. Esses assumem os valores,  $\mathbb{U}_{s,F} = \{1, 2, 3\}$  e  $\mathbb{U}_{f,F} = \{4\}$ . Além disso, da mesma forma que foi computada para *Gilbert-Elliott*, a distribuição inicial de probabilidade é tomada como a distribuição estacionária definida por,

$$\mu = \pi = [0.4503 \quad 0.2967 \quad 0.1309 \quad 0.1222]. \quad (5.5)$$

### 5.1.3 O canal de McCullough

O canal de McCullough, também chamado de canal binário regenerativo, foi introduzido por Richard McCullough em (MCCULLOUGH, 1968). A Figura 22 mostra o diagrama de transição para um canal de McCullough simplificado de dois estados.

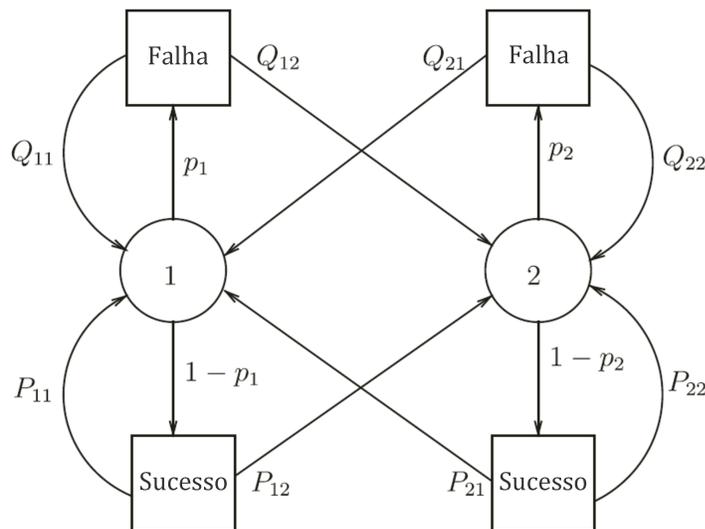


Figura 22 – O diagrama do canal de McCullough. Adaptado de (GONÇALVES *et al.*, 2010).

A principal característica do canal de McCullough reside em sua flexibilidade: o número de modos, seja BOM ou RUIM, pode ser definido conforme a necessidade. O modelo geral é completamente caracterizado pela probabilidade de erro no  $i$ -ésimo estado,  $p_i$ , as probabilidades de transição após a ocorrência de um erro,  $q_{ij}$ , e após uma transmissão correta,  $p_{ij}$ . Especificamente, as transições entre modos são permitidas somente após a ocorrência de um erro, estabelecendo-se assim as relações  $p_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ , e  $p_{ii} = 1$ . Além disso, o canal de McCullough pode ser visto como uma generalização do canal de Gilbert-Elliot, pois ao se fixar dois modos e  $p_{ij} = q_{ij}$ , o canal de Gilbert-Elliot é recuperado.

Os parâmetros utilizados nesse projeto para o canal de McCullough foram retirados de (MARCONDES, 2005), para sinal-ruído de 1 dB. Além disso, o canal utilizado possui três modos, resultando na matriz de probabilidade de transição entre estados após um erro  $Q$ ,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0.25 & 0.20 & 0.55 \\ 0.25 & 0.20 & 0.55 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Nota-se que a matriz de probabilidade de transição após uma transmissão correta  $P$  corresponde a matriz identidade. Além disso, as probabilidades de erro no  $i$ -ésimo estado são,  $p = [0.40 \ 0.05 \ 0.25]$ . A distribuição dos modos ocultos resultante é,

$$\mathbb{P}_M = \begin{bmatrix} q_{11}p_1 & q_{12}p_2 & q_{13}p_3 & q_{11}(1-p_1) & q_{12}(1-p_2) & q_{13}(1-p_3) \\ q_{21}p_1 & q_{22}p_2 & q_{23}p_3 & q_{21}(1-p_1) & q_{22}(1-p_2) & q_{23}(1-p_3) \\ q_{31}p_1 & q_{32}p_2 & q_{33}p_3 & q_{31}(1-p_1) & q_{32}(1-p_2) & q_{33}(1-p_3) \\ p_1 & 0 & 0 & (1-p_1) & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & (1-p_2) & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & (1-p_3) \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

onde o primeiro modo corresponde ao estado 1 com erro, o segundo modo representa o estado 2 com erro e o terceiro modo, o estado 3 com erro. Nessa mesma sequência, os modos quatro, cinco e seis correspondem aos estados 1, 2 e 3 com sucesso na transmissão. Dessa forma, a matriz de transição  $\mathbb{P}_M$  resultante é,

$$\mathbb{P}_M = \begin{bmatrix} 0.0800 & 0.0350 & 0.0250 & 0.1200 & 0.6650 & 0.0750 \\ 0.1000 & 0.0100 & 0.1375 & 0.1500 & 0.1900 & 0.4125 \\ 0.1000 & 0.0100 & 0.1375 & 0.1500 & 0.1900 & 0.4125 \\ 0.4000 & 0 & 0 & 0.6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0500 & 0 & 0 & 0.9500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0.7500 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Os modos do modelo de McCullough associados a sucesso ou falha no envio de pacotes podem ser agrupados em dois *clusters*,  $\mathbb{U}_s$  e  $\mathbb{U}_f$ , respectivamente. Esses assumem os valores,

$\mathbb{U}_{s,M} = \{4, 5, 6\}$  e  $\mathbb{U}_{f,M} = \{1, 2, 3\}$ . A distribuição inicial para o canal de McCullough é tomada como,

$$\mu = \pi = [0.0272 \quad 0.0365 \quad 0.0506 \quad 0.0408 \quad 0.6930 \quad 0.1519]. \quad (5.9)$$

## 5.2 O controle por realimentação de estados

O controle por realimentação de estados amostrado é uma classe de controle realizado a partir dos estados medidos do sistema e de um ganho de realimentação  $K$ , através da lei de controle,

$$u(k) = Kx(k), \quad (5.10)$$

onde  $u$  é a entrada de controle do sistema,  $K$  é o ganho de realimentação e  $x$  é o vetor de estados do sistema.

Especificamente para o controle por realimentação de estados de um MJLS existe, para cada modo  $\theta_k = i$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , um ganho  $K_i$ . Esse conjunto de ganhos pode ser obtido de forma a respeitar um critério pré-estabelecido, tal qual estabilidade, ou mesmo as normas do sistema realimentado. A lei de controle para MJLS é representado pela Equação (5.11),

$$u(k) = K(\theta_k)x(k), \quad (5.11)$$

onde o argumento  $\theta_k$  representa o modo markoviano. Assim, o problema consiste em encontrar o conjunto de ganhos de realimentação de estado  $K_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , que estabilize e minimize um critério de desempenho escolhido

$$\min_{K_i} \|\mathcal{F}_m\|_{\beta}^2, \quad (5.12)$$

onde  $\beta = \{2, \infty\}$  e  $\mathcal{F}_m$ , o sistema markoviano em (2.11) realimentado por (5.11),

$$\mathcal{F}_m : \begin{cases} x(k+1) &= (A(\theta_k) + B(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + J(\theta_k)w(k), \\ z(k) &= (C_z(\theta_k) + D_z(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + E_z(\theta_k)w(k). \end{cases} \quad (5.13)$$

Nesse contexto, devem ser analisadas algumas premissas de cunho prático para o projeto de controladores por realimentação de estados neste trabalho:

- *Disponibilidade parcial do modo da cadeia*

Nota-se que os valores dos ganhos do controle MJLS por realimentação de estados,  $K(\theta_k)$ , dependem explicitamente do modo  $\theta_k$  no instante  $k$  da respectiva cadeia de Markov associada. Essa característica desse tipo de controlador obviamente requer que esses modos estejam disponíveis de alguma forma para o controlador. Tomando em

consideração essa limitação, sintetizam-se nesse projeto controladores em função de agrupamentos de modos, chamados de *clusters*. Esses agrupamentos visam unir os modos de uma cadeia com características semelhantes, tais como os estados para os quais ocorre falha ou sucesso no envio de pacotes. Esse procedimento é realizado, uma vez que, em uma rede real, os modos são abstrações do modelo e podem não ser facilmente estimados durante a aplicação do controle. Assim, em termos de controladores por realimentação de estados, fixam-se os ganhos para os modos de um mesmo *cluster*, dado que não é possível distinguir o estado atual da cadeia dentro do agrupamento. O problema de realimentação de estado  $\mathcal{H}_2$  com agrupamentos dos modos pode ser estudado com detalhe em (VAL *et al.*, 2002), bem como o problema  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser visto em (GONÇALVES *et al.*, 2012).

- *Disponibilidade parcial dos estados medidos*

Para todas as sínteses de controladores por realimentação de estado nesse projeto, fez-se necessário utilizar um observador de Luenberger mostrado na Equação (2.78), pois as únicas medidas disponíveis para o sistema são medidas de posição fornecidas por *encoders*. Uma alternativa ao uso do observador de Luenberger em conjunto com controladores de realimentação de estado é a síntese de controladores dinâmicos markovianos de saída, por exemplo, em (GEROMEL *et al.*, 2009). Porém, a formulação desse problema requer que os modos markovianos estejam disponíveis em uma rede, o que em um ambiente real muitas vezes não é facilmente realizável. Tomando em consideração essa limitação, optou-se pela estimação dos estados através de um observador clássico implementado na planta, onde os polos do observador são alocados duas vezes mais rápidos que o polo de menor parte real do sistema.

- *Medida do sinal de controle para o cômputo dos custos*

Uma discussão importante em relação a modelagem de falhas em MJLS é a obtenção dos valores simulados e experimentais do sinal de controle para o cômputo das respectivas normas. Em uma rede real, a falha ocorrerá em algum ponto indeterminado do canal e pode ser modelada por uma chave nos ambientes de simulação e experimental. A Figura 23 mostra esse dispositivo utilizado em *Simulink*, onde a falha é modelada por uma chave condicionada a uma cadeia de Markov. O ponto **a** representa a saída do controlador, o ponto **b** pode ser interpretado como a entrada do sistema e o ponto **c**, o sinal proveniente da cadeia de Markov associada que produz a falha. Nesse contexto, podem ser consideradas duas possibilidades de medida do sinal de controle  $u$  para o cálculo dos custos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ : o sinal de controle  $u_a$  anterior à falha e o sinal  $u_b$  posterior à falha.

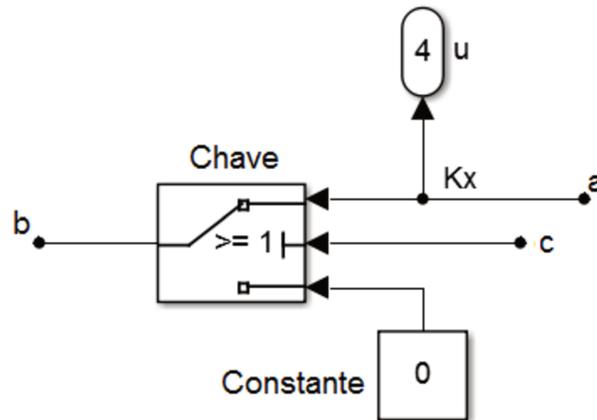


Figura 23 – Bloco das simulações e experimentos que implementam a perda de pacote.

Neste projeto, para controladores MJLS, ambos os sinais acabam se tornando equivalentes: ganhos MJLS associados aos modos para os quais ocorrem falhas se anulam, como será verificado no decorrer desse capítulo. Esse comportamento advém da otimização dos custos, visto que os ganhos dessa classe se adaptam a falha de forma a minimizar esses valores. Porém, para controladores clássicos não adaptativos, existirá uma diferença de valores desses índices de desempenho ao se utilizar  $u_a$  ou  $u_b$ . As interpretações para o uso dos dois custos podem considerar:

- Para  $u_a$ , o sinal gerado pelo controlador ao ser computado considera esforços de controle que não são aplicados a planta, mas são gerados invariavelmente. Nesse ponto, verifica-se que os controladores MJLS são ótimos no sentido de minimizar o custo ao evitar aplicar esforços de controle em vão, o que o distingue do controlador clássico. Assim, considera-se que o controlador realizará o esforço de controle, porém o sistema composto pela planta e a rede não reagirá.
- Para  $u_b$ , o sinal gerado pelo controlador é desconsiderado, pois a medida ocorrerá após a falha. Nesse contexto, verifica-se que esse sinal é efetivamente aplicado à planta, sem considerar a rede como uma parte desse sistema. Nesse ponto, é esperado que os controladores MJLS possuam performance superior, porém os custos obtidos por controladores clássicos se aproximariam dos resultados obtidos pelo primeiro.

As diferenças entre os custos que surgem em decorrência de uma falha em um canal constituem um aspecto interessante e inerente ao Controle Através da Rede. Nesse âmbito, dados custos  $\mathcal{H}_2$  e/ou  $\mathcal{H}_\infty$  representados de forma genérica por  $\rho$  e obtidos por controladores clássicos que sejam função dos pontos **a** ou **b**, bem como custos

obtidos por controladores markovianos representados pelo índice  $m$ , espera-se que o comportamento desses valores sigam as desigualdades

$$\rho_a > \rho_b > \rho_m. \quad (5.14)$$

Nesse projeto, para modelar falhas de transmissão de pacotes utilizando MJLS, fixam-se as matrizes de entrada do sistema em  $B_i = 0$ , para  $i \in \mathbb{U}_f$ , onde  $\mathbb{U}_f \subset \mathbb{K}$  é o *cluster* dos modos sujeitos a falhas. Nota-se que uma falha de controle em algum ponto não especificado do canal é representado efetivamente por uma falha nos atuadores do sistema, pois o conjunto  $B_{\theta_k}$  corresponde as matrizes de entrada do sistema markoviano. Portanto, para que a comparação possa ser efetivamente realizada entre o sistema clássico e o sistema markoviano, considerou-se nesse trabalho que a falha no sistema clássico ocorre nos atuadores: o esforço de controle é efetivamente aplicado ao sistema, porém, em casos de erro o atuador não responde ao estímulo. Nesse sentido, pode-se considerar que uma das diferenças entre os controladores em (5.10) e (5.11) é que o primeiro não possui mecanismo de percepção, aplicando o sinal de controle mesmo sem necessidade, e assim ocasionando um aumento no índice de desempenho. Em contrapartida, o segundo caso possui um mecanismo de configuração que permite ajustar o sinal de controle e minimizar o mesmo índice.

Apesar da escolha realizada nesse trabalho consistir do cômputo do custo anterior à falha, o custo calculado posterior a esse comportamento é de fácil obtenção e pode ser verificado através de simulação utilizando os dados fornecidos no decorrer do texto. Além disso, são mostradas formas de obtenção do custo anterior e posterior a falha no Anexo E.

### 5.3 Controle $\mathcal{H}_2$ de realimentação de estados para sistemas lineares com saltos markovianos

O controle  $\mathcal{H}_2$  para MJLS consiste na síntese de controladores mostrados (5.11) de forma a obter esse custo ótimo para o sistema em malha em (5.13). Assim, o problema pode ser definido como

$$\min_{K_i} \|\mathcal{F}_m\|_2^2, \quad (5.15)$$

Assim, o Teorema 5.1 permite sintetizar controladores  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estado para MJLS considerando a disponibilidade total dos modos.

**Teorema 5.1** *Existem controladores por realimentação de estados na forma (5.11) que satisfazem a restrição de norma do sistema realimentado  $\|\mathcal{F}_m\|_2^2 < \gamma$  para um dado  $\gamma \in \mathbb{R}$  e*

$\mu_i = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ , se e somente se existem  $W_i \in \mathbb{S}_+^m$ ,  $X_i \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Z_{ij} \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , tal que

$$\inf \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma, \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ J_i & H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet \\ E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} G_i + G'_i - X_i & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet \\ C_{zi} G_i + D_{zi} Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad (5.19)$$

para  $i, j \in \mathbb{K}$ . Se essas condições são satisfeitas, os controladores são obtidos por  $K_i = Y_i G_i^{-1} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Para a necessidade, assuma que as desigualdades do problema definido em (2.55) do Capítulo 2 são satisfeitas, para as matrizes do sistema  $A_i$  e  $C_i$  substituídas pelas matrizes em malha fechada  $A_i + B_i K_i$  e  $C_i + D_i K_i$ . Defina  $X_i := P_i^{-1}$  and  $Y_i = K_i G_i$ , e multiplique a desigualdade (2.53) pela direita por  $\text{diag}[I, P_{pi}^{-1}, I]$  e pela esquerda pela sua transposta, bem como a desigualdade (2.54) pela direita por  $\text{diag}[G'_i, P_{pi}^{-1}, I]$  e pela esquerda pela sua transposta. O resultado é

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ J_i & X_{qi} & \bullet \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} G'_i X_i^{-1} G_i & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & X_{qi} & \bullet \\ C_i G_i + D_i Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0.$$

Defina  $H_i = X_{qi}$  e  $Z_{ij} = X_{qi} X_j^{-1} X_{qi} + \epsilon I$ , para  $\epsilon > 0$ . Ao se aplicar o complemento de Schur para  $\epsilon \rightarrow 0$  origina a terceira condição do Teorema (5.1), bem como,

$$H_i + H'_i - Z_{pi} = X_{qi} - \epsilon I,$$

onde  $Z_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} Z_{ij}$ . Por fim, toma-se  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $G_i = X_i$ , e assim todas as demais desigualdades do Teorema são obtidas.

Para a suficiência, assuma que as desigualdades do Teorema (5.1) são satisfeitas. A desigualdade (5.19) origina  $Z_{ij} > H'_i X_j^{-1} H_i$ . Pode-se multiplicar essa desigualdade por  $p_{ij}$  e

a somar para todo  $j \in \mathbb{K}$ , o que resultará

$$\begin{aligned} H_i + H'_i - Z_{pi} &= H_i + H'_i - \sum_{j=1}^N p_{ij} Z_{ij}, \\ &\leq H_i + H'_i - H'_i X_{qi}^{-1} H'_i, \\ &\leq X_{qi} - (H_i - X_{qi})' X_{qi}^{-1} (H_i - X_{qi}), \\ &\leq X_{qi}, \end{aligned}$$

o que implica que para ambas as desigualdades (5.17) e (5.18) do teorema continuam válidas se o segundo termo de suas respectivas diagonais for mudado para  $X_{qi}$ . Além disso,

$$G'_i X_i^{-1} G_i \geq G_i + G'_i - X_i,$$

o que implica que  $G_i + G'_i - X_i$  pode ser substituída por  $G'_i X_i^{-1} G_i$  na última desigualdade.

Por fim, deve-se linearizar as desigualdades obtidas utilizando  $\mathbf{diag}[I, P_{pi}, I]$  para a (5.17) e  $\mathbf{diag}[G_i'^{-1}, P_{pi}, I]$  para (5.18), da mesma forma realizada para a necessidade. Assim, as matrizes em malha fechada  $A_i + B_i K_i$  e  $C_i + D_i K_i$  são obtidas.  $\square$

Uma forma alternativa para a obtenção do controlador  $\mathcal{H}_2$  para sistemas markovianos pode ser também encontrada em (VAL *et al.*, 2002).

Em posse do Teorema 5.1, pode-se escrever o problema de otimização

$$\|\mathcal{F}_m\|_2^2 = \min_{\mathcal{X} \in \Omega} \{ \gamma \mid (5.16), (5.17), (5.18), (5.19) \}. \quad (5.20)$$

onde  $\mathcal{X} = (W_i, X_i, Z_{ij}, H_i, G_i, Y_i)$ , bem como  $\Omega$  é o conjunto de todas as soluções possíveis de (5.16), (5.17), (5.18) e (5.19).

Verifica-se que os ganhos  $K_i$  obtidos através do Teorema 5.1 são independentes da distribuição de probabilidade inicial  $\mu_i$ , sendo somente função do modo  $\theta_k = i \in \mathbb{K}$ . Neste caso, o valor de  $\mu_i$  influencia somente a norma  $\mathcal{H}_2$  associada a distribuição inicial dada. Além disso, uma discussão interessante é realizada no Capítulo 2 acerca da norma de pior caso, quando  $\mu_i$  se torna uma variável no problema de otimização.

Para que a restrição da medida dos modos markovianos possa ser considerada, esses devem ser organizados em *clusters* que possam ser detectados pelo controlador, conforme explicado anteriormente. A solução mais intuitiva é agrupa-los em termos de sucesso ou falha na transmissão do pacote. Assim, o número de controladores deve ser restrito ao número de agrupamentos que modelam esses dois casos. Nesse cenário, uma restrição adicional deve ser imposta no Teorema 5.1, isto é, dado um *cluster* específico  $\mathbb{U}_c$ , os controladores  $K_i$ ,  $i \in \mathbb{U}_c$  devem ser os mesmos, ou seja,  $K_i = K_c$ . Como consequência, as matrizes  $G_i$  e  $Y_i$  do Teorema

5.1 devem respeitar as restrições adicionais  $G_i = G_c$  e  $Y_i = Y_c$ ,  $i \in \mathbb{U}_c \subseteq \mathbb{K}$ . Como esperado, essas restrições tornam o Teorema 5.1 somente suficiente e introduzem conservadorismo no problema de otimização em (5.20). Assim, os custos obtidos com a observação em *clusters* se tornam limitantes superiores.

Além disso, para que a comparação com o caso clássico seja efetivamente realizada, é necessário estabelecer as condições necessárias e suficientes para a síntese de controladores discretos clássicos  $\mathcal{H}_2$ . Essas condições são mostradas no Teorema 5.2, baseado nas condições de norma  $\mathcal{H}_2$  no problema de otimização (2.41) do Capítulo 2.

**Teorema 5.2** *Existe um controlador por realimentação de estados na forma (5.10) que satisfaça a restrição  $\|\mathcal{F}_d\|_2^2 < \gamma$  do sistema realimentado  $\mathcal{F}_d$  discreto, se e somente se existem  $W \in \mathbb{S}_+^m$ ,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$  tal que,*

$$\mathbf{tr}(W) < \gamma, \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} P & AX + BL & J \\ \bullet & X + X' - P & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z X + D_z L & E_z \\ \bullet & X + X' - P & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0. \quad (5.23)$$

Se essas condições são satisfeitas, o controlador é obtido por  $K = LX^{-1} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ .

**Prova:** Ver (OLIVEIRA, 1999). □

Portanto, para que o controlador ótimo discreto seja obtido, o seguinte problema de otimização deve ser solucionado

$$\|\mathcal{F}_d\|_2^2 = \min_{\mathcal{X} \in \Omega} \{ \gamma \mid (5.21), (5.22), (5.23) \}. \quad (5.24)$$

onde  $\mathcal{X} = (W, P, X, L)$ , bem como  $\Omega$  é o conjunto de todas as soluções possíveis de (5.21), (5.22) e (5.23).

Nota-se que outra forma possível de obter esse tipo de controlador é solucionar o problema descrito em (5.20) para  $\mathbb{K} = \{1\}$  e  $[p_{ij}] = 1$ , ou seja, o problema recairá no caso determinístico.

Assim, os experimentos e simulações de controle para a norma  $\mathcal{H}_2$  podem ser realizados ao se tomar as matrizes do espaço de estado do pêndulo de Furuta linearizados em seu ponto

de equilíbrio instável, mostradas nas Equações (4.8) no Capítulo 4. As matrizes de espaço de estado do pêndulo constituem um sistema instável e contínuo,

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 34.16 & -18.62 & -0.035 & 18.31 \\ 0 & 76.74 & -17.96 & -0.079 & 17.65 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nota-se que os MJLS definidos nessa dissertação são sistemas discretos, com período de amostragem da rede  $T_d$ . Assim, faz-se necessário encontrar períodos de amostragem adequados que permitam observar o fenômeno da perda de pacotes no sistema físico. Especificamente nesse projeto, o período da rede foi escolhido como  $T_d = 50$  ms, originando as matrizes discretas utilizando o segurador de ordem zero

$$\left[ A_d \mid B_d \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1.0000 & 0.0325 & 0.0324 & 0.0005 & 0.0173 \\ 0 & 1.0869 & -0.0171 & 0.0514 & 0.0168 \\ 0 & 1.1495 & 0.3862 & 0.0313 & 0.6033 \\ 0 & 3.3591 & -0.6044 & 1.0834 & 0.5941 \end{array} \right]. \quad (5.25)$$

Adicionalmente, dados dois *clusters*  $\mathbb{U}_s$  e  $\mathbb{U}_f$  e estados  $s \in \mathbb{U}_s$  e  $f \in \mathbb{U}_f$ , onde  $\mathbb{U}_f$  agrupa os estados com falha na transmissão, para o qual assume-se que o sinal de controle não é transmitido com sucesso. Assim, as matrizes de espaço de estado se tornam,  $A_s = A_f = A_d$ ,  $B_s = B_d$  e  $B_f = 0$ .

Além disso, o projeto do observador de estados é realizado conforme mostrado no Capítulo 2, tomando-se o sistema do observador em (2.79). Assim, o polo mais rápido do sistema constituído pelas matrizes da Equação (4.8) possui o valor  $-20.4647$ , o que permite que os polos do observador sejam alocados próximos de  $-40.9294$ , conforme o critério estabelecido no Capítulo 2. O ganho do observador  $L$  se torna

$$L' = \begin{bmatrix} 0.0633 & -0.0180 & 0.4992 & -1.1385 \\ -0.0001 & 0.0820 & 0.0309 & 1.7541 \end{bmatrix} 10^3, \quad (5.26)$$

bem como o estado inicial do observador é fixado como o estado inicial da planta.

### 5.3.1 Simulações e experimentos para o controle $\mathcal{H}_2$

#### *Simulações*

As simulações foram realizadas no ambiente *Matlab/Simulink* através de blocos clássicos, bem como formulações que permitem a síntese de uma cadeia de Markov discreta, conforme em (TRANTER *et al.*, 2003). As matrizes da saída controlada foram escolhidas de forma empírica em conjunto com a condição inicial e o tempo de amostragem, de forma a manter o pêndulo dentro de sua região linear, mesmo com a saturação do motor. Essa não linearidade representou o maior desafio nos experimentos, pois esforços de controle que ultrapassam a região imposta pelo motor não são efetivamente aplicados a planta, ocasionando instabilidade e/ou danos ao motor. Assim, as matrizes escolhidas foram

$$\left[ C_{zi} \mid D_{zi} \mid E_{zi} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \end{array} \right]. \quad (5.27)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Para o caso clássico, foram utilizados os mesmos valores em (5.27).

Como discutido no Capítulo 2, pode-se mostrar que uma condição inicial não-nula  $x_0$  equivale a uma entrada exógena impulsiva, isto é, a matriz  $J$  é numericamente igual a condição inicial  $x_0$ . Assim, a condição inicial escolhida foi

$$x'_0 = [0.0175 \quad 0.2618 \quad 0 \quad 0]', \quad (5.28)$$

que corresponde a  $\alpha = 15^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ . Por fim, os ganhos de realimentação de estado obtidos para as redes de Gilbert-Elliot, Fritchman e McCullough para o *cluster*  $\mathbb{U}_s$  associado a sucesso na transmissão são

$$\begin{bmatrix} K_{s,GE} \\ K_{s,F} \\ K_{s,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5493 & -29.1225 & 2.9792 & -4.0750 \\ 2.5725 & -28.2357 & 2.9105 & -3.9603 \\ 2.4893 & -29.3775 & 2.9967 & -4.1070 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

e para o *cluster* relacionado a falha na transmissão, para os três tipos de rede, o ganho  $K_f$  se anula.

Os custos do projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  do sistema, com disponibilidade total e parcial dos modos, são mostrados na Tabela 3. Observa-se que, conforme esperado, o custo do sistema com disponibilidade parcial do modo ("**Custo garantido**") corresponde a um limitante superior quando comparado a disponibilidade total de modo ("**Observação completa**").

Tabela 3 – Custos  $\mathcal{H}_2$  de projeto de realimentação de estado com disponibilidade total ("**Observação completa**") e parcial do modo ("**Custo garantido**") obtidos pelo Teorema 5.1.

Modelo do canal	Observação completa	Custo garantido ( <i>cluster</i> )
Gilbert-Elliot	14.1738	14.2882
Fritchman	13.6769	13.7010
McCullough	14.0515	14.2318

Adicionalmente, conforme discutido na Seção 5.2, existem restrições em relação a disponibilidade dos estados do sistema dinâmico e dos modos markovianos. Considerando estas restrições, realizou-se uma simulação de Monte Carlo para cada tipo de rede, com 2000 iterações, no ambiente *Simulink/Matlab*. Além disso, calculou-se o custo  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada considerando os controladores obtidos através de (5.20) considerando a restrição por *cluster* através do problema de otimização em (2.55). Esses valores são apresentados na Tabela 4, bem como os respectivos desvios e os erros relativos entre os valores calculados e simulados. Nota-se que os erros relativos são pequenos, o que indica uma boa aproximação do resultado simulado em relação ao calculado.

Tabela 4 – Custos  $\mathcal{H}_2$  calculado via (2.55) (**Custo calculado**) e simulado (**Custo simulado**) para o sistema com disponibilidade parcial do modo, desvios padrão da simulação e erros relativos.

Modelo do canal	Custo calculado (*)	Custo simulado	$\sigma_{sim}$	Erro rel. (%)
Gilbert-Elliot	14.2232	14.1579	1.5710	0.5
Fritchman	13.6914	13.6552	0.7848	0.3
McCullough	14.1430	14.1587	1.5797	0.1

(\*) Custo calculado para o sistema em malha fechada através do problema em (2.55).

Pode ser verificado que o cálculo dos custos mostrados na Tabela 4 são inferiores ao limitante superior da terceira coluna da Tabela 3. Esse resultado é coerente na medida em que este último valor é um limitante obtido em um projeto de controle não-ótimo, ao passo que o primeiro é a norma do sistema realimentado. Em relação aos tipos de rede, a rede de Fritchman apresenta o menor custo, uma tendência também verificada para os experimentos de  $\mathcal{H}_\infty$  apresentadas posteriormente. Em contrapartida, os custos para os canais de Gilbert-Elliot e McCullough se aproximam.

Para comparação, o controle  $\mathcal{H}_2$  clássico discreto foi projetado através do Teorema 5.2 e do problema de otimização em (5.24) e aplicado ao mesmo ambiente de simulação de

perda de pacotes dos canais descritos. O custo de realimentação de estados clássico previsto é  $\|\mathcal{F}_d\|_2 = 12.1917$ . Nota-se que o custo clássico previsto é menor do que os custos teóricos markovianos da Tabela 3, pois seu cálculo não considera os efeitos de perda de pacote. Por fim, o ganho calculado do controlador de realimentação clássico é

$$K_{\text{clássico}} = \begin{bmatrix} 2.6476 & -25.7210 & 2.6883 & -3.6241 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Foi realizado o mesmo procedimento de simulação de Monte Carlo de 2000 iterações, utilizando o *Simulink/Matlab*, para o controlador clássico no ambiente markoviano. O custo calculado (**Custo calculado**) pelo controle  $\mathcal{H}_2$  clássico, bem como os valores obtidos nas simulações considerando a disponibilidade parcial dos modos (**Custo simulado**), seus desvios e erros relativos são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Custos  $\mathcal{H}_2$  do sistema realimentado considerando o projeto de controle clássico (**Custo calculado**), custos simulados em ambiente de perda de pacote (**Custo simulado**), desvios padrão da simulação e erros relativos.

Modelo do canal	Custo calculado (*)	Custo simulado	$\sigma_{sim}$	Erro rel. (%)
Gilbert-Elliot	12.1917	15.0605	2.5297	24
Fritchman	12.1917	14.4199	1.3910	18
McCullough	12.1917	15.2064	2.9680	25

(\*) Custo obtido pelo problema de otimização em (5.24).

Verifica-se que os custos do sistema com o controle clássico aplicado ao ambiente de rede (terceira coluna da Tabela 5) são superiores ao custo previsto (primeira coluna da mesma tabela), conforme esperado, pois este não considera a dinâmica estocástica de perda de pacotes. Além disso, comparando-se os custos simulados das Tabelas 5 e 4, verifica-se que os valores referentes a primeira tabela são maiores que os mostrados na segunda, o que evidencia a importância de controladores apropriados markovianos para otimização dos esforços de controle. Por fim, pode-se citar a confiabilidade do projeto markoviano, pois os custos simulados se aproximam dos previstos, ao passo que para o projeto que não considera a rede os valores de custos simulados são distintos dos previstos.

Para ilustração, a Figura 24 mostra a evolução temporal de  $z(t)'z(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i \|z(t)_i\|^2$  para os casos clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo para a rede de Gilbert-Elliot, a partir da simulação realizada, para  $t = kT_d$ .

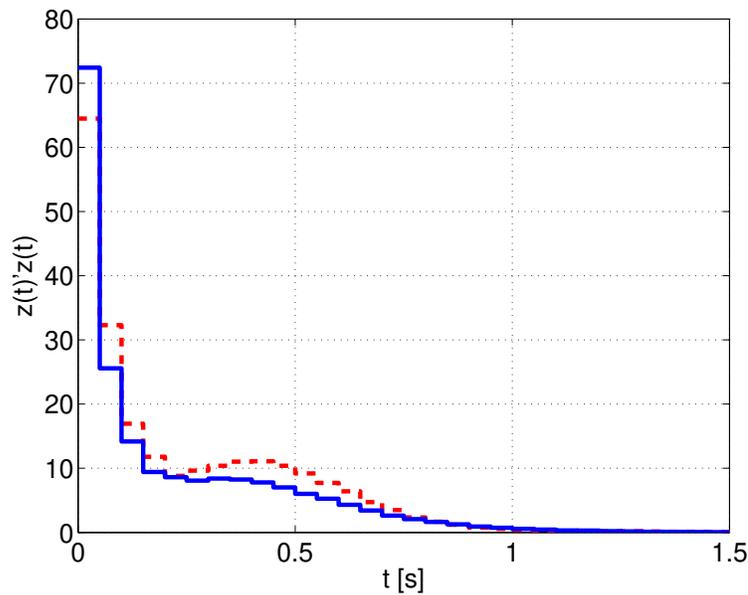


Figura 24 – Evolução de  $z(t)'z(t)$  para o controle  $\mathcal{H}_2$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t = kT_d$  [s] para o canal de Gilbert-Elliot.

Além disso, na Figura 25, as mesmas evoluções temporais dos custos markoviano e clássico mostrados na Figura são mostrados em separado, com seus respectivos desvios.

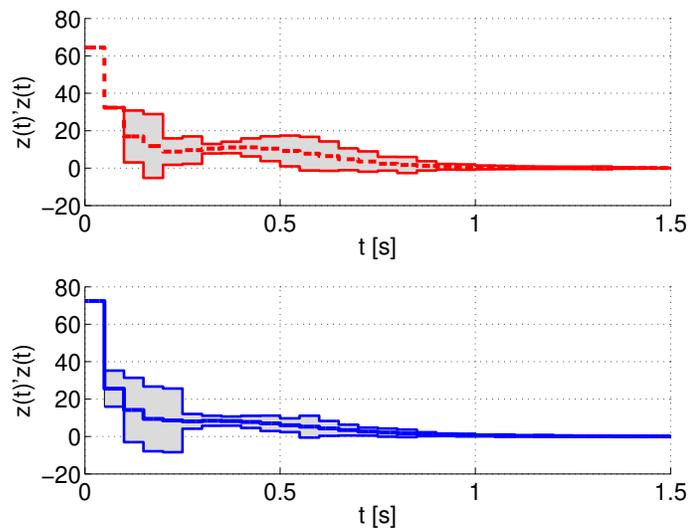


Figura 25 – Evolução temporal de  $z(t)'z(t)$  para o controle  $\mathcal{H}_2$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t = kT_d$  [s], com respectivos desvios.

Verifica-se que, na Figura 24, o valor de  $z(t)'z(t)$ ,  $t = kT_d$ , para o sistema com controle clássico permanece menor do que o sistema markoviano em  $k = 0$ , devido aos diferentes valores do ganho de realimentação e, posteriormente, o controle markoviano possui melhor performance. Além disso, verifica-se uma tendência similar em relação ao comportamento dos desvios na Figura 25, onde para o sistema markoviano os desvios são menores, com exceção de alguns momentos.

### Experimentos

Os experimentos foram realizados no pêndulo invertido rotacional do fabricante Quanser. Nessa planta mecânica, a saturação da tensão de entrada do motor, em adição ao fenômeno de oscilação observado em  $\phi$  quando o ângulo  $\alpha$  se estabiliza, tornam problemática a obtenção do custo para um horizonte infinito de tempo. Assim, os custos foram computados até o momento em que o ângulo  $\alpha$  se estabiliza, a saber, cerca de 4 segundos após a aplicação da lei de controle. Além disso, buscou-se manter o esforço de controle e as saídas do sistema sempre na região linear. Nesse contexto, explica-se o motivo da escolha da condição inicial em (5.28). Devido a impossibilidade de realizar uma quantidade de experimentos estatisticamente relevante, optou-se por efetuar uma amostra de 25 realizações do experimento. Assim, a Tabela 6 mostra os custos para o sistema realimentado com controle markoviano (**Custos mark.**) e clássico (**Custos cláss.**), para os três tipos de rede, bem como os erros em relação aos seus respectivos custos calculados.

Tabela 6 – Custos  $\mathcal{H}_2$  do controle markoviano (**Custos mark.**) e clássico (**Custos cláss.**) com realimentação de estado no pêndulo invertido rotacional da Quanser para os tipos de rede apresentados, bem como os respectivos desvios e erros percentuais em relação aos valores calculados.

Canal	Custo mark.	$\sigma_{mark}$	Er.(%)	Custo cláss.	$\sigma_{cláss}$	Er.(%)
Gilbert-Elliot	14.3829	0.8725	1	15.8627	3.6133	30
Fritchman	14.0495	0.9739	3	15.0457	2.5481	23
McCullough	14.7535	1.4049	4	15.7583	2.8084	29

Nota-se que, experimentalmente, para uma quantidade limitada de amostras, o controle markoviano se aproxima dos custos definidos teoricamente mostrados na Tabela 4, validando uma melhor performance do controle markoviano frente ao clássico. Além disso, os custos experimentais para os controladores markovianos e clássicos seguiram tendências similares às experimentais mostradas nas Tabelas 4 e 5

Para ilustração, as curvas dos ângulos  $\alpha$  e  $\phi$ , o esforço de controle  $V_m$  e os pacotes enviados de uma realização do experimento de Gilbert-Elliot são mostradas nas Figuras 26

e 27.

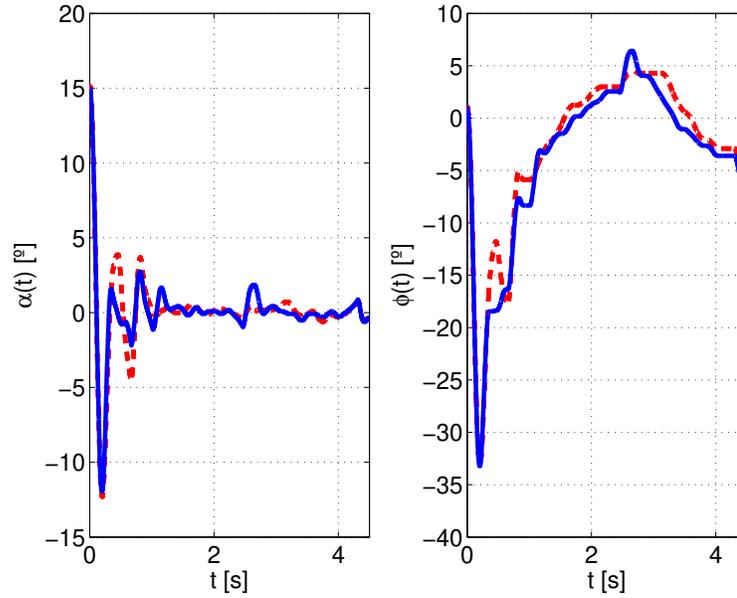


Figura 26 – Ângulo  $\alpha(t)$  e  $\phi(t)$  para o controle  $\mathcal{H}_2$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t$  [s].

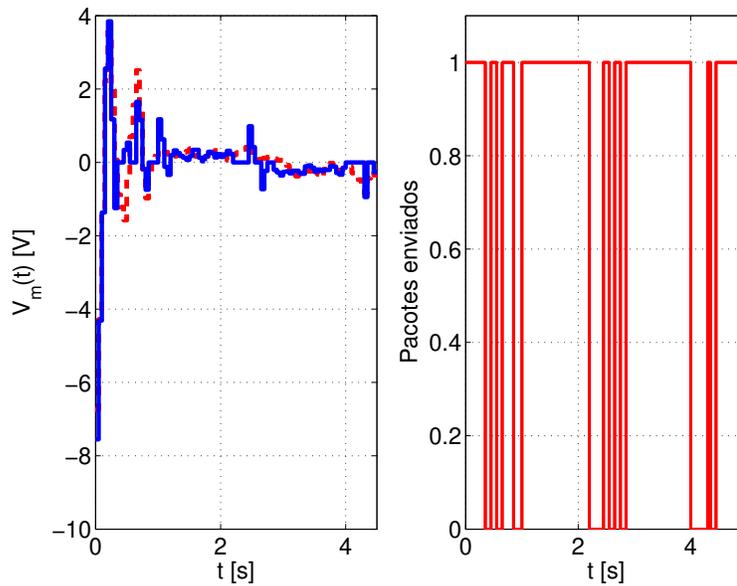


Figura 27 – Esforço de controle  $V_m(t)$  e pacotes enviados para o controle  $\mathcal{H}_2$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t$  [s].

Devido a oscilação do ângulo  $\phi$  anteriormente citada, verifica-se que essa saída não

tende assintoticamente para zero, em contraste ao comportamento do ângulo  $\alpha$  na Figura 26. Além disso, para o esforço de controle  $V_m$  mostrado na Figura 27, verifica-se um pico transitório maior do que o valor de saturação de 5 V do motor. Essa situação ocorreu para todas as realizações devido à condição inicial  $\alpha$  ter sido escolhida considerando o compromisso entre o limite da região de linearização de  $\sin \alpha \approx \alpha$  e o valor de saturação de tensão do motor. Adicionalmente, pode ser notado que o esforço de controle tende assintoticamente a zero, para os dois tipos de controle utilizados. Por fim, o gráfico à direita do esforço de controle indica a perda de pacotes, onde o valor ‘1’ corresponde ao sucesso no envio, bem como ‘0’, à falha. Pode ser verificado que esses dois valores correspondem respectivamente aos modos contidos nos *clusters*  $\mathbb{U}_s$  e  $\mathbb{U}_f$ .

### Conclusão

Os controles markoviano e clássico foram simulados e apresentaram valores condizentes com o esperado. Em especial, os custos teórico e simulado para o primeiro tipo de controlador se aproximaram, validando a teoria. Em contrapartida, para o caso clássico, os custos simulados se distanciaram do previsto, o que é esperado de forma intuitiva. Além disso, os custos do caso clássico foram superiores aos custos do caso markoviano. Por fim, os experimentos em um pêndulo de Furuta real validaram os custos previstos pelas simulações e pela teoria, na medida em que os custos para o controle markoviano são menores que os custos do controle clássico.

## 5.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados para sistemas lineares com saltos markovianos

O controle de realimentação de estado para sistemas lineares com saltos markovianos que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada em (5.13) possui a mesma forma da Equação (5.11). A formulação do problema para a determinação do controlador que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é

$$\min_{K_i} \|\mathcal{F}_m\|_\infty^2. \quad (5.31)$$

O resultado utilizado para a solução de (5.31) é mostrado no Teorema 5.3, (GONÇALVES *et al.*, 2012).

**Teorema 5.3** *Existem controladores de realimentação de estados na forma (5.11) que satisfazem a restrição  $\|\mathcal{F}_m\|_\infty^2 < \gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , do sistema realimentado  $\mathcal{F}_m$ , se, e somente se, existem*

matrizes  $X_i \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_{ij} \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Y_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que,

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i' - X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & J_i & H_i + H_i' - Z_{pi} & \bullet \\ C_i G_i + D_i Y_i & E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.32)$$

e

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad (5.33)$$

para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, os ganhos de realimentação de estados são dados por  $K_i = Y_i G_i^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Para a necessidade, assuma que a desigualdade em (2.74) seja satisfeita, para as matrizes  $A_i$  e  $C_i$  em malha fechada, ou seja,  $\tilde{A}_i = A_i + B_i K_i$  e  $\tilde{C}_i = C_i + D_i K_i$ . Defina  $X_i := P_i^{-1}$  e  $Y_i = K_i G_i$  e multiplique a desigualdade em (2.74) pela direita por  $\mathbf{diag}[G_i, I, P_{pi}^{-1}, I]$  e pela esquerda pela sua transposta para obter,

$$\begin{bmatrix} G_i' P_i G_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & J_i & X_{pi} & \bullet \\ C_i G_i + D_i Y_i & E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (5.34)$$

Para  $H_i = X_{qi}$  e  $Z_{ij} = X_{qi} X_j^{-1} X_{qi} + \varepsilon I$  para  $\varepsilon > 0$  implica que a LMI da Equação (5.33) é obtida. Além disso, obtém-se,

$$H_i + H_i' - Z_{pi} = X_{qi} - \varepsilon I, \quad (5.35)$$

e assim, tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a desigualdade em (5.33) implica que a desigualdade (5.32) vale para  $G_i = X_i$ . Para a suficiência, assume-se que as desigualdades (5.32) e (5.33) são satisfeitas. Para a desigualdade (5.33), por complemento de Schur obtém-se,

$$Z_{ij} > H_i' X_j^{-1} H_i, \quad (5.36)$$

e a multiplicando por  $p_{ij}$  e somando em  $j \in \mathbb{K}$ , obtém-se,

$$\begin{aligned} H_i + H_i' - Z_{pi} &= H_i + H_i' - \sum_{j=1}^N p_{ij} Z_{ij}, \\ &\leq H_i + H_i' - H_i' X_{qi}^{-1} H_i, \\ &\leq X_{qi} - (H_i - X_{qi})' X_{qi}^{-1} (H_i - X_{qi}), \\ &\leq X_{qi}, \end{aligned}$$

que implica que a desigualdade (5.32) se mantém válida ao se trocar o terceiro termo em sua diagonal por  $X_{qi}$ . Por outro lado,

$$G_i + G'_i - X_i \leq G'_i X_i^{-1} G_i \quad (5.37)$$

e da mesma forma, o termo  $G_i + G'_i - X_i$  pode ser substituído por  $G'_i X_i^{-1} G_i$  na mesma desigualdade. Por fim, basta aplicar a transformação de similaridade após as substituições indicadas por  $\mathbf{diag}[G_i^{-1}, I, I, I]$  pela direita e sua transposta pela esquerda para obter,

$$\begin{bmatrix} X_i^{-1} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i K_i & J_i & \left( \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j^{-1} \right)^{-1} & \bullet \\ C_i + D_i K_i & E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.38)$$

que é a expressão equivalente a desigualdade (2.74) para as matrizes em malha fechada  $A_i + B_i K_i$  e  $C_i + D_i K_i$ , e  $P_i = X_i^{-1}$ .  $\square$

Em posse do Teorema 5.3, pode-se escrever o problema de otimização

$$\|\mathcal{F}_m\|_\infty^2 = \min_{\mathcal{X} \in \Omega} \{ \gamma \mid (5.32), (5.33) \}. \quad (5.39)$$

onde  $\mathcal{X} = (X_i, G_i, Z_{ij}, Y_i, H_i)$ , bem como  $\Omega$  é o conjunto de todas as soluções possíveis de (5.32) e (5.33).

Em relação a disponibilidade do modo, as mesmas restrições realizadas anteriormente para o Teorema 5.1 no agrupamento de modos devem ser impostas, ou seja, dado um *cluster*  $\mathbb{U}_c$ ,  $i \in \mathbb{U}_c$ , os ganhos são fixados  $K_i = K_c$ , o que implica em  $Y_i = Y_c$  e  $G_i = G_c$ . Da mesma forma, o resultado do Teorema 5.3 se torna somente suficiente, o que introduz conservadorismo no resultado em (5.39). Assim, o valor de norma obtido será um limitante superior.

Para o cálculo da realimentação de estados  $\mathcal{H}_\infty$  clássico, pode-se enunciar o seguinte teorema,

**Teorema 5.4** *Existe um controle de realimentação de estados discreto na forma (5.10) que satisfaça  $\|\mathcal{F}_d\|_\infty^2 < \gamma$  do sistema se, e somente se, existem matrizes  $E \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$  que satisfaçam,*

$$\begin{bmatrix} E & \bullet & \bullet & \bullet \\ AX + BL & X + X' - E & \bullet & \bullet \\ 0 & J' & \gamma I & \bullet \\ C_z X + D_z L & 0 & E_z & I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.40)$$

*Em caso afirmativo, os ganhos de realimentação de estado são dados por  $K = LX^{-1}$ .*

**Prova:** Ver (OLIVEIRA, 1999). □

Portanto, para que o controlador ótimo discreto seja obtido, o seguinte problema de otimização deve ser solucionado

$$\|\mathcal{F}_d\|_\infty^2 = \min_{\mathcal{X} \in \Omega} \{\gamma \mid (5.40)\}. \quad (5.41)$$

onde  $\mathcal{X} = (E, X, L)$ , bem como  $\Omega$  é o conjunto de todas as soluções possíveis de (5.40).

Outra forma possível de obter esse tipo de controlador é solucionar o problema descrito em (5.39) para  $\mathbb{K} = \{1\}$  e  $[p_{ij}] = 1$ , ou seja, o problema é reescrito para o caso determinístico.

O mesmo sistema do pêndulo de Furuta instável das equações de estado (4.8) foi utilizado. O período da rede foi mantido o mesmo, ou seja,  $T_d = 50$  ms, o que resulta no mesmo conjunto  $(A_d, B_d)$  discreto da Equação (5.25).

De forma similar a realizada para os experimentos  $\mathcal{H}_2$ , são definidos dois *clusters* associados à transmissão de pacotes  $\mathbb{U}_s$  e  $\mathbb{U}_f$  e estados  $s \in \mathbb{U}_s$  e  $f \in \mathbb{U}_f$ , onde  $\mathbb{U}_f$  agrupa os estados com falha na transmissão. Assim, as matrizes de espaço de estado se tornam,  $A_s = A_f = A_d$ ,  $B_s = B_d$  e  $B_f = 0$ .

Da mesma forma que foi implementado para os projetos  $\mathcal{H}_2$  de realimentação de estado na seção anterior, é utilizado na planta um observador de estados da forma (2.78) com matriz  $L$  mostrada em (5.26).

Para fins de implementação prática, a matriz da entrada exógena  $J_{\theta_k}$  é obtida ao se considerar um ruído aditivo a entrada de controle, submetido aos efeitos da rede,

$$u(k) = K_{\theta_k}x + w(k). \quad (5.42)$$

Substitui-se a Equação (5.42) na equação dinâmica do sistema markoviano definido em (2.11), sem a entrada exógena. Assim,

$$x(k+1) = (A_{\theta_k} + B_{\theta_k}K_{\theta_k})x + B_{\theta_k}w(k), \quad x(0) = 0, \quad (5.43)$$

e portanto,  $J_{\theta_k} = B_{\theta_k}$ .

### 5.4.1 Simulações e experimentos para o controle $\mathcal{H}_\infty$

#### *Simulações*

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é uma medida de robustez do sistema considerando o pior ruído pertencente ao conjunto  $\mathbb{L}_2$ . Para MJLS, em (SEILER; SENGUPTA, 2003), o ruído de pior caso é construído para que o *bounded real lemma* para sistemas markovianos discretos possa ser

obtido. Esse ruído é estocástico e depende da resolução de Equações a Diferenças de Ricatti Generalizadas<sup>1</sup> em cada instante  $t = kT_d$  da simulação e da realização do experimento. Devido à complexidade da implementação desse ruído, somado às limitações físicas do sinal de entrada (saturação), optou-se por uma outra classe de sinal para comparação entre o controle markoviano e o clássico. A classe de sinais escolhida é a do ruído de pior caso para o sistema clássico realimentado, ou seja, um ruído senoidal. Esse valor é a própria norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema clássico, obtido na frequência da senoide que provoca o comportamento crítico.

Portanto, para o ruído escolhido deve-se calcular o ganho de realimentação de estados clássico e verificar a resposta em frequência do sistema em malha fechada, desconsiderando o fenômeno de perda de pacote. Assim, as matrizes da saída controlada são definidas de acordo com o mesmo critério utilizado para o caso  $\mathcal{H}_2$

$$\left[ C_{zi} \mid D_{zi} \mid E_{zi} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right], \quad (5.44)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . O ganho de realimentação do sistema clássico obtido através do Teorema 5.4 é

$$K_{clássico} = [0.4762 \quad -36.0480 \quad 3.4668 \quad -4.9509]. \quad (5.45)$$

O valor do custo  $\mathcal{H}_\infty$  clássico é de aproximadamente 2.9000, para a frequência angular  $\omega = 6.0520$  rad/s. O ruído de interesse escolhido é a senoide aplicada somente em uma janela fixa de tempo de 4 s, de amplitude 1 V, mostrado na Equação (5.46). Ressalta-se que a janela de tempo escolhida permite que o sistema em malha fechada entre em regime antes da extinção da entrada exógena, para o controle markoviano e clássico.

$$w(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & \text{para } 0 < t \leq 4, \\ 0, & \text{para } t > 4, \end{cases} \quad (5.46)$$

para  $t = kT_d$ .

O diagrama de valor singular do sistema clássico em malha fechada é mostrado na Figura 28.

<sup>1</sup> Generalized Ricatti Difference Equations, (GRDE).

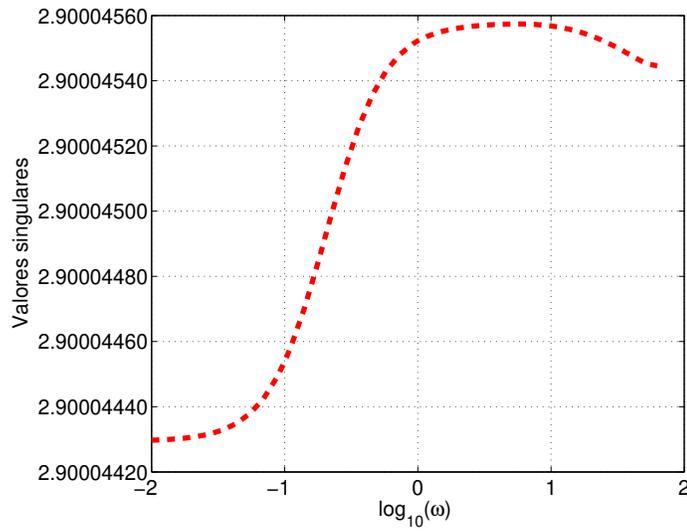


Figura 28 – Diagrama de valor singular do sistema realimentado clássico.

A entrada exógena definida em (5.46) é mostrada na Figura 29.

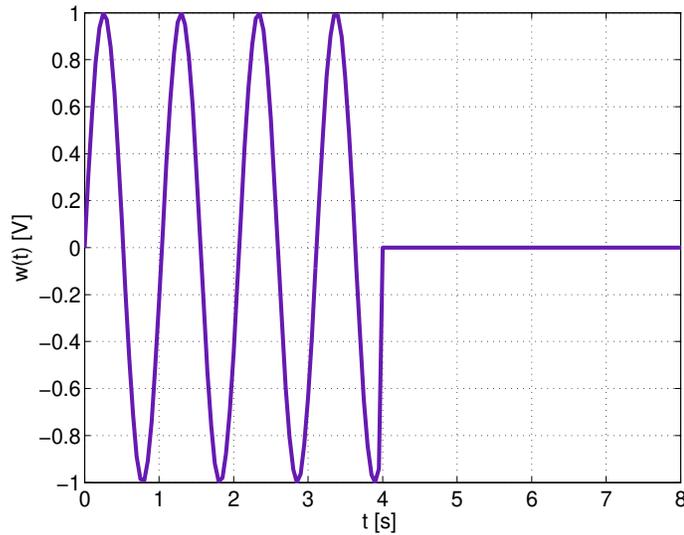


Figura 29 – Ruído aditivo  $w$  na entrada do sistema em [V] em função do tempo  $t$  [s].

Em relação ao controle markoviano, os ganhos de realimentação de estados obtidos pelo problema de otimização em (5.39) com a restrição de *clusters* para os três tipos de rede são

$$\begin{bmatrix} K_{s,GE} \\ K_{s,F} \\ K_{s,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3947 & -35.9060 & 3.4458 & -4.9282 \\ 0.4293 & -35.9662 & 3.4547 & -4.9378 \\ 0.3868 & -35.8918 & 3.4437 & -4.9260 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Ressalta-se que os ganhos de realimentação no *cluster* referentes a falha no envio para os três tipos de rede se anulam, da mesma forma ocorrida no caso  $\mathcal{H}_2$ .

Os custos de projeto de realimentação de estado para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos pelo problema de otimização definido em (5.39) com observação total do modo (**Observação completa**), bem como os custos de projeto para o caso de disponibilidade parcial do modo (**Custo garantido**) são mostrados na Tabela 7, para os três tipos de canal. Verifica-se que os custos obtidos com a observação em *cluster* constituem um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , e portanto um resultado mais conservador.

Tabela 7 – Custos  $\mathcal{H}_\infty$  de projeto de realimentação de estado com disponibilidade total (**Observação completa**) e parcial (**Custo garantido**) do modo obtidos pelo Teorema 5.3.

Modelo do canal	Observação completa	Custo garantido ( <i>Cluster</i> )
Gilbert-Elliot	3.4376	3.5056
Fritchman	3.2286	3.2398
McCullough	3.5851	3.7307

Nota-se que o limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  canal de McCullough possui uma variação maior, indicando que esse limitante se torna mais conservador que os outros. Uma possível explicação é que, para esse canal, existe o maior agrupamento de modos dentro dentro da mesma quantidade de *clusters*.

Foi realizada uma simulação de Monte Carlo para cada tipo de rede, com 2000 iterações, no ambiente Simulink/Matlab, mostrada na Tabela 8 (**Custo simulado**). Em seguida, calculou-se o custo  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada considerando a restrição por *cluster* através do problema de otimização em (2.75) (**Custo calculado**), da mesma forma realizada para o caso  $\mathcal{H}_2$ . Esses valores são apresentados na Tabela 8, bem como os respectivos desvios e as distâncias relativas entre os valores calculados e simulados.

Tabela 8 – Custos  $\mathcal{H}_\infty$  calculado (**Custo calculado**) e simulado (**Custo simulado**) para o sistema com disponibilidade parcial de modo, desvios padrão da simulação e distâncias relativas percentuais em relação ao limitante superior.

Modelo do canal	Custo calculado (*)	Custo simulado	$\sigma_{sim}$	Dist (%)
Gilbert-Elliot	3.5040	2.9824	0.1441	-15
Fritchman	3.2399	2.9454	0.0725	-9
McCullough	3.7243	2.9818	0.1435	-20

(\*) Custo calculado para o sistema em malha fechada através do problema em (2.75)

Nota-se que os valores simulados mostrados na coluna três são inferiores ao limitante superior da coluna dois da Tabela 8. Isso ocorre devido a escolha da entrada exógena não ser o pior caso para o sistema em estudo. Além disso, o sinal escolhido é amostrado nos instantes  $t = kT_d$ , restringindo ainda mais o conjunto das entradas exógenas consideradas no cômputo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Apesar disso, verifica-se que os valores são relevantes, para uma diferença relativa média de aproximadamente 15 %.

O mesmo procedimento de simulação de Monte Carlo de 2000 iterações foi realizado para o controle clássico no ambiente markoviano, utilizando o Simulink/Matlab. O custo previsto pelo controle  $\mathcal{H}_\infty$  clássico (**Custo calculado**), calculado através de (5.41), bem como os valores obtidos nas simulações considerando a disponibilidade parcial dos modos (**Custo simulado**), seus desvios e diferenças relativas são mostrados na Tabela 9.

Tabela 9 – Custos  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema realimentado considerando o projeto de controle clássico (**Custo calculado**), custos simulados em ambiente de perda de pacote (**Custo simulado**), desvios padrão da simulação e diferenças percentuais relativas em relação ao limitante superior previsto.

Modelo do canal	Custo calculado (*)	Custo simulado	$\sigma_{sim}$	Dist (%)
Gilbert-Elliot	2.9000	3.2177	0.2822	11
Fritchman	2.9000	3.1445	0.1594	8
McCullough	2.9000	3.2058	0.2981	11

(\*) Custo obtido pelo problema de otimização em (5.41).

Verifica-se que os custos do sistema com o controle clássico aplicado ao ambiente de rede (terceira coluna da Tabela 9) são superiores ao limitante clássico previsto (primeira coluna da mesma tabela). Portanto, em um projeto que considera crítico a minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , todos os limitantes previstos seriam ultrapassados ao se desconsiderar a perda de pacotes da rede. Em contrapartida, os limitantes do sistema markoviano mostrados na Tabela 8 são respeitados, mostrando a confiabilidade do projeto. Em termos de performance, os custos simulados clássicos da Tabela 9 são superiores aos custos simulados markovianos da Tabela 8.

Para ilustração, a Figura 30 mostra a evolução de  $z(t)'z(t)$  para os casos clássico (pontilhado em vermelho) e markoviano (cheio em azul) em função do tempo  $t = kT_d$  para a rede de Gilbert-Elliot.

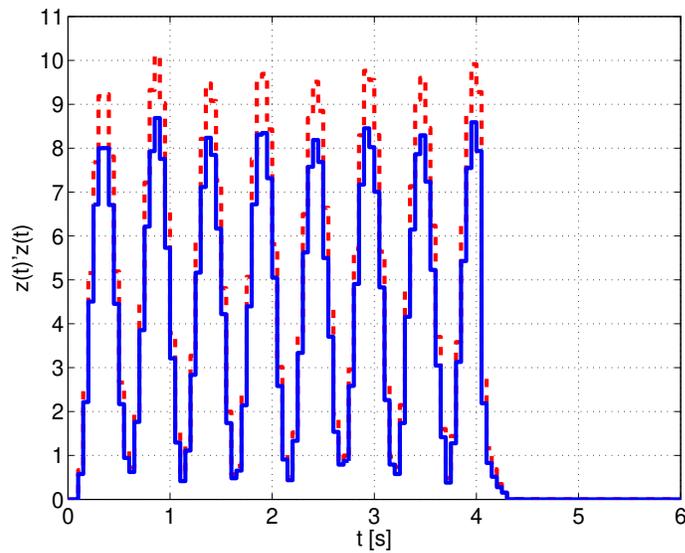


Figura 30 – Evolução temporal de  $z(t)'z(t)$  para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t = kT_d$  [s].

Além disso, na Figura 31, as mesmas evoluções temporais dos custos markoviano e clássico mostrados na Figura 30 são mostrados em separado na Figura 31, com seus respectivos desvios.

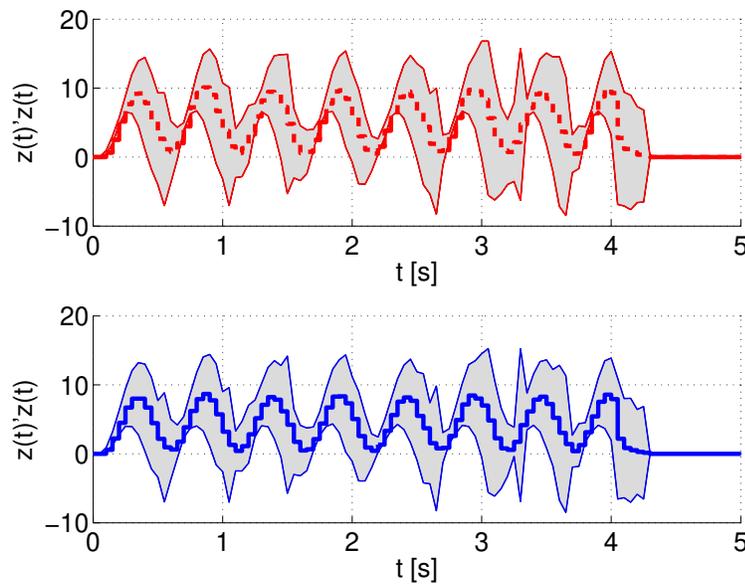


Figura 31 – Evolução temporal de  $z(t)'z(t)$  para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t = kT_d$  [s], com respectivos desvios.

Verifica-se que, na Figura 30, o valor de  $z(t)'z(t)$ ,  $t = kT_d$ , do sistema clássico permanece maior do que o sistema markoviano para todos os instantes de tempo, o que torna perceptível as performances dos dois tipos de controle. Verifica-se uma tendência similar em relação ao comportamento dos desvios na Figura 31, onde para o sistema markoviano, esses permanecem ligeiramente menores quando comparados ao controle clássico.

### *Experimentos*

Os experimentos foram realizados no pêndulo rotacional, considerando 25 realizações para cada tipo de rede, para os casos dos controles clássicos e markovianos. A distribuição inicial dos modos é a distribuição estacionária da respectiva cadeia de Markov do canal. Foram considerados somente os resultados dentro da faixa linear do pêndulo, para o módulo da tensão de entrada menor que a tensão de saturação. Além disso, o cômputo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  foi realizado até 3 segundos após a perturbação ser aplicada ao sistema, devido ao fenômeno de oscilação na saída  $\phi$ . O resultado dos custos experimentais para os controles markoviano e clássico, o desvio padrão das amostras, bem como as diferenças percentuais em relação ao limitante teórico são mostrados na Tabela 10.

Tabela 10 – Custos  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema markoviano e clássico com realimentação de estado no pêndulo invertido rotacional da Quanser para os tipos de rede apresentados, bem como os respectivos desvios e distâncias relativas em relação ao limitante teórico.

Canal	Custo markov.	$\sigma_{mark.}$	Dist(%)	Custo cláss.	$\sigma_{class}$	Dist(%)
Gilbert-Elliot	3.1356	0.2907	-11	3.6068	0.3847	24
Fritchman	3.0808	0.3146	-5	3.5374	0.3741	22
McCullough	3.0885	0.2980	-17	3.6417	0.6463	26

Nota-se que todos os custos do controle markoviano se mantêm abaixo do limitante teórico e se aproximam dos valores obtidos através da simulação. Em relação ao controle clássico, os limitantes são superados, devido a presença da perda de pacotes, de forma similar a ocorrida na simulação. Além disso, o resultado do controle markoviano é superior em performance ao controle clássico.

Para ilustração, as curvas dos ângulos  $\alpha$ ,  $\phi$ , do esforço de controle  $V_m$  e dos pacotes enviados em uma realização do experimento de Fritchman para o ruído definido em (5.46) são mostradas nas Figuras 32 e 33.

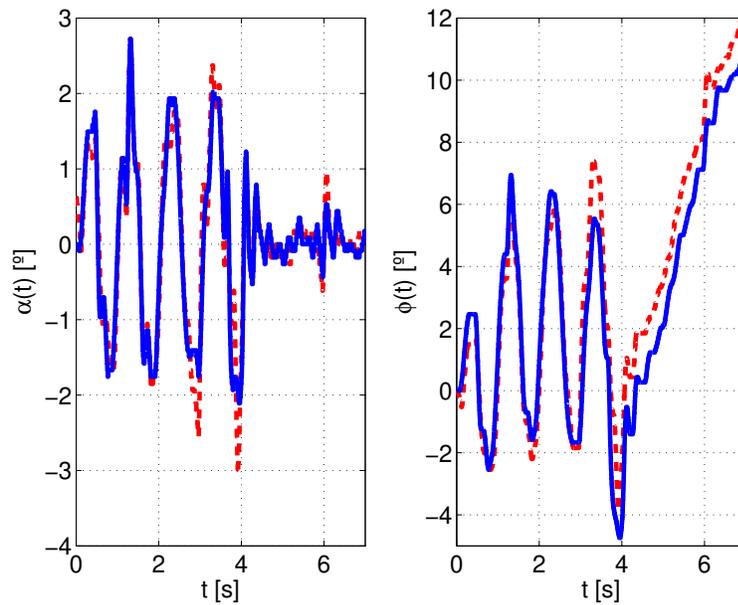


Figura 32 – Ângulo  $\alpha(t)$  e  $\theta(t)$  para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t$  [s].

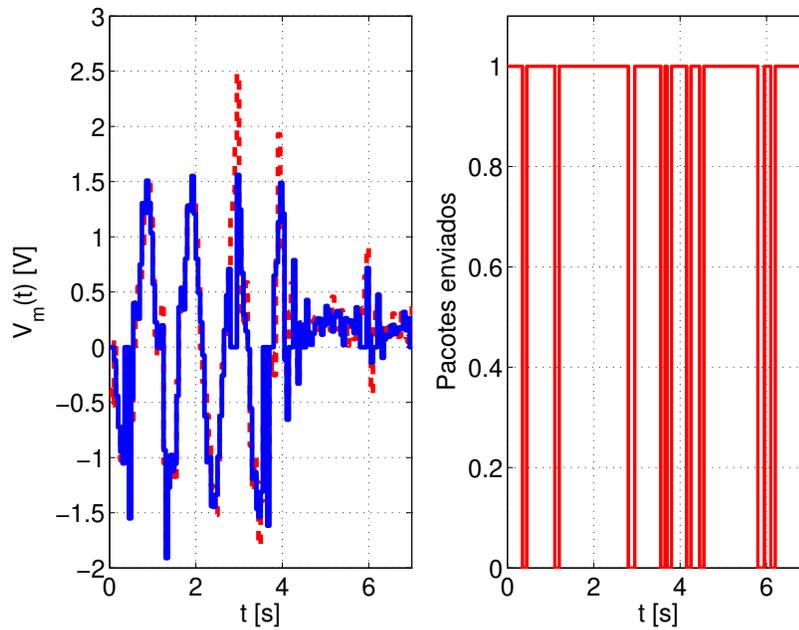


Figura 33 – Esforço de controle  $V_m(t)$  e pacotes enviados para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  clássico (linhas pontilhadas em vermelho) e markoviano (linhas cheias em azul) em função do tempo  $t$  [s].

Devido a oscilação do ângulo  $\phi$  anteriormente citada, verifica-se que essa saída não tende assintoticamente para zero. Além disso, essa oscilação na sua respectiva curva da Figura 32 aparenta divergência. Porém, esse não é o caso, pois o esforço de controle na Figura 33 tendeu a zero. Assim, o método utilizado de computar o custo até um instante de tempo finito é justificado por esse fenômeno não linear. Verifica-se que, com exceção do ângulo  $\phi$ , as curvas  $\alpha$  e a do esforço de controle se mantêm na faixa linear. Por fim, o gráfico à direita do esforço de controle indica a perda de pacotes, cujo significado já foi analisado para o caso  $\mathcal{H}_2$

#### *Conclusão*

Os custos para o controle markoviano simulado ao se aplicar o sinal descrito em (5.46) se mantêm dentro da norma obtida pelo Teorema 5.3, mesmo com a limitação de *cluster* imposta em conjunto com o observador clássico. Além disso, os custos simulados do sistema com o controlador clássico no ambiente de rede foram superiores ao limitante clássico obtido, o que demonstra a necessidade do projeto de controladores markovianos. Em relação aos dois tipos de controladores, a performance do markoviano foi superior ao clássico para o ruído escolhido. Finalmente, as tendências dos resultados simulados foram seguidas pelos resultados experimentais e teóricos.



# Conclusão

As etapas propostas do projeto foram realizadas de maneira satisfatória. A modelagem do sistema mecânico complexo, o pêndulo de Furuta, foi obtida com sucesso e, em posse desse modelo, submeteu-se o sistema físico a um processo de identificação. Além disso, uma série de testes permitiram qualificar e quantificar fenômenos não-lineares os quais não estão contidos no modelo físico obtido, ora pela própria simplicidade das hipóteses mecânicas, ora pela limitação da construção e dos elementos físicos. A caracterização realizada, apesar de não ser exaustiva, pode ser considerada de importância para eventuais aplicações do nosso grupo de pesquisa, bem como os parâmetros identificados do modelo.

Por fim, uma formulação alternativa para o problema  $\mathcal{H}_2$  markoviano foi apresentada e utilizada para sintetizar controladores para os tipos de rede propostos: Gilbert-Elliot, Fritchman e McCullough. No caso  $\mathcal{H}_2$ , os resultados foram satisfatórios e condizentes com a teoria formulada pelo nosso grupo de trabalho. Esses mostraram as vantagens de se utilizar o projeto markoviano em detrimento ao clássico em ambientes de perda de pacote. Da mesma forma, o projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$  foi sintetizado e aplicado satisfatoriamente para uma perturbação relevante. Os resultados apontaram um bom desempenho do controle markoviano frente ao clássico para a simulação e o experimento em bancada, onde o controle markoviano obteve melhor desempenho em todos os tipos de canais. Conclui-se de forma semelhante ao caso  $\mathcal{H}_2$  que o projeto de controladores markovianos é essencial para ambientes sujeito a falhas de envio de sinal.

O pêndulo de Furuta proporciona um horizonte vasto para diversas aplicações de controles lineares e não-lineares, com possibilidades de linearização por *feedback*, controle de saída, entre outros. Uma extensão natural desse trabalho é a aplicação de filtros markovianos combinados com a realimentação de estado, bem como a própria realimentação de saída markoviana. Porém, faz-se necessário o uso de uma planta que possua uma excursão maior do sinal de entrada, bem como uma construção apropriada que minimize os efeitos não lineares detectados, em detrimento ao sistema mecânico utilizado. Finalmente, considera-se o sucesso da aplicação do controle markoviano no pêndulo de Furuta como um incentivo para a síntese de projetos de controladores que consideram falhas no controle, bem como para a pesquisa futura nessa área.



# Referências

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Belo Horizonte, MG: Editora UFMG, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 40, 47, 49 e 54.

AKESSON, J.; ASTROM, K. J. Safe manual control of the furuta pendulum. In: INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS (IEEE). *Control Applications, 2001. (CCA '01). Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on*. Mexico City, Mexico: IEEE, 2001. p. 890–895. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 37.

APKARIAN, J.; LEVIS, M.; GUROCAK, H. *Instructor Workbook - SRV02 Base Unit Experiment for Matlab Simulink Use*. 2011. Citado 3 vezes nas páginas xvii, 29 e 30.

BENNETT, S. A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 16, n. 3, p. 17–25, 1996. Citado na página 1.

BOYD, S. P.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 24.

CAZZOLATO, B. S.; PRIME, Z. On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, Hindawi Publishing Corp., v. 2011, p. 8, 2011. Citado 6 vezes nas páginas xvii, 26, 27, 35, 36 e 37.

COSTA, O.; VAL, J. D.; GEROMEL, J. A convex programming approach to h2 control of discrete-time markovian jump linear systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 66, n. 4, p. 557–580, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.

COSTA, O. L.; FRAGOSO, M. D. Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 154–178, 1993. Citado na página 11.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. New York, NY, USA: Springer, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 4, 5, 12, 13 e 24.

ELLIOTT, E. Estimates of error rates for codes on burst-noise channels. *Bell system technical journal*, Wiley Online Library, v. 42, n. 5, p. 1977–1997, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 56.

FAIRWEATHER, A.; FOSTER, M.; STONE, D. Battery parameter identification with pseudo random binary sequence excitation (prbs). *Journal of Power Sources*, Elsevier, v. 196, n. 22, p. 9398–9406, 2011. Citado 5 vezes nas páginas xvii, 47, 48, 49 e 54.

FRITCHMAN, B. D. A binary channel characterization using partitioned markov chains. *Information Theory, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 13, n. 2, p. 221–227, 1967. Citado na página 57.

- FURUTA, K.; YAMAKITA, M.; KOBAYASHI, S. Swing up control of inverted pendulum. In: IEEE. *Industrial Electronics, Control and Instrumentation, 1991. Proceedings. IECON'91., 1991 International Conference on*. Kobe, 1991. p. 2193–2198. Citado 3 vezes nas páginas 25, 36 e 37.
- GÄFVERT, M. Modelling the furuta pendulum. *Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology*, 1998. Citado na página 26.
- GEROMEL, J. C.; GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R. Dynamic output feedback control of discrete-time markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 48, n. 2, p. 573–593, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 61.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 2011. Citado 8 vezes nas páginas 2, 14, 15, 16, 23, 24, 42 e 97.
- GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 2004. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 99.
- GILBERT, E. N. Capacity of a burst-noise channel. *Bell system technical journal*, Wiley Online Library, v. 39, n. 5, p. 1253–1265, 1960. Citado na página 55.
- GONÇALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. *Signal Processing*, Elsevier, v. 90, n. 10, p. 2842–2850, 2010. Citado 5 vezes nas páginas xviii, 24, 56, 57 e 58.
- GONÇALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C.  $H_\infty$  robust and networked control of discrete-time mjls through lmis. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 349, n. 6, p. 2171–2181, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 24, 61 e 74.
- GONÇALVES, A. P. d. C. *Controle dinâmico de saída para sistemas discretos com saltos markovianos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 5, 11, 17, 18, 19 e 24.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física*. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2008. Citado na página 103.
- HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 95, n. 1, p. 138–162, 2007. Citado 4 vezes nas páginas xvii, 1, 3 e 55.
- IWASE, M.; ASTOM, K.; FURUTA, K.; AKESSON, J. Analysis of safe manual control by using furuta pendulum. In: INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS (IEEE). *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2006 IEEE*. Munich, Germany: IEEE, 2006. p. 568–572. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 37.

- JADLOVSKA, S.; SARNOVSKY, J. A complex overview of modeling and control of the rotary single inverted pendulum system. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, IEEE, Rajec Teplice, v. 11, n. 2, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- JI, Y.; CHIZECK, H. J.; FENG, X.; LOPARO, K. A. Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 7, 247–270, 1991. Citado na página 10.
- KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 24.
- KNILL, O. *Probability Theory and Stochastic Processes with Applications*. New Delhi, India: [s.n.], 2009. Citado na página 24.
- KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Application*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1978. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 24.
- LEON-GARCIA, A. *Probability Statistics and Random processes for electrical engineering*. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 55.
- LJUNG, L. *System identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987. Citado 3 vezes nas páginas xvii, 39 e 40.
- LJUNG, L. *System Identification Toolbox for Use with Matlab*. 5. ed. Natick, MA, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 53.
- LJUNG, L. Perspectives on system identification. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 34, n. 1, p. 1–12, 2010. Citado na página 39.
- LUENBERGER, D. *Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1979. Citado na página 24.
- MARCONDES, G. *Modelos discretos para análise de ocorrências de erros em redes sem fio*. Dissertação (Mestrado) — Inatel, Brazil, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 55, 57, 58 e 59.
- MAWHIN, J. *Alexandr Mikhailovich Lyapunov, The general problem of the stability of motion (1892)*. Amsterdam: Landmark Writings in Western Mathematics, 2005. Landmark writings in Western mathematics, 1640-1940, I. Grattan-Guinness ed., Elsevier. Citado na página 1.
- MCCULLOUGH, R. H. The binary regenerative channel. *Bell System Technical Journal*, Wiley Online Library, v. 47, n. 8, p. 1713–1735, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 58.
- MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Philadelphia, PA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. Citado na página 95.
- OLIVEIRA, M. C. de. *Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas, 1999. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 20, 21, 24, 66 e 77.

- PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 3rd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 1991. ISBN 0070484775. Citado na página 24.
- QUANSER. *Quanser Rotary Servo*. Ontario, Canadá, 2011. Citado na página 49.
- QUANSER. *Rotary Pendulum - Instructor Workbook*. Ontario, Canadá, 2011. Citado 4 vezes nas páginas xvii, 25, 32 e 37.
- QUANSER. *SRV02 User Manual*. Ontario, Canadá, 2011. Citado 3 vezes nas páginas xvii, 30 e 49.
- SEILER, P.; SENGUPTA, R. A bounded real lemma for jump systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 48, n. 9, p. 1651–1654, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 77.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *et al. Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 7, 8 e 24.
- SOUZA, M. *Controle de Sistemas Dinamicos Atraves de Redes de Comunicação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2012. Citado na página 5.
- TRANter, W.; SHANMUGAN, K.; RAPPAPORT, T.; KOSBAR, K. *Principles of communication systems simulation with wireless applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Press, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 4, 24, 55, 56 e 68.
- VAL, J. B. D.; GEROMEL, J. C.; GONÇALVES, A. P. The h<sub>2</sub>-control for jump linear systems: cluster observations of the markov state. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 343–349, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 13, 17, 19, 61 e 65.
- WARD, R. W.; MOLTENO, T. C. A. *Table of linear feedback shift registers*. New Zealand, 2012. Citado na página 47.
- WILLEMS, J. C. Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 621–634, 1971. Citado na página 2.

# Anexos



# ANEXO A – Conceitos básicos de álgebra linear

Nesse anexo, serão abordados os conceitos básicos de álgebra linear necessários para entender e aplicar os conceitos expostos nessa dissertação. Esse anexo é inteiramente baseado no livro (MEYER, 2000).

## Operações com vetores e matrizes

### *Transposição*

Define-se a operação de transposição de vetores, para  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\cdot)' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , como,

$$(u)' = \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \right)' = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \quad (\text{A.1})$$

Essa mesma operação pode ser definida para matrizes. Seja a matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , a operação  $(\cdot)' : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  como,

$$(A)' = \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \right)' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Da definição acima, podem ser derivadas as seguintes propriedades, para  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

1. A operação da transposição aplicada a matriz transposta resulta na própria matriz,  $(A')' = A$ ,
2. Distributividade da operação traço na soma,  $(A + B)' = A' + B'$ ,
3. A operação traço preserva a propriedade da multiplicação por escalar  $(\alpha A)' = \alpha A'$ ,

Além disso, uma matriz  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é definida simétrica se  $C' = C$ .

### *Traço*

A operação traço é definida para matrizes quadradas de dimensão  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{tr}(\cdot) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , para os elementos de  $A = [a_{ij}]$ ,

$$\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad (\text{A.3})$$

ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal.

As propriedades principais do traço podem ser enunciadas,

1. O traço da soma de matrizes é a soma do traço das matrizes,  $\mathbf{tr}(A+B) = \mathbf{tr}(A) + \mathbf{tr}(B)$ ,
2. A operação de traço respeita o produto por escalar,  $\mathbf{tr}(\alpha A) = \alpha \mathbf{tr}(A)$
3. A traço de uma matriz  $A$  é numericamente igual ao traço da matriz transposta,  $\mathbf{tr}(A) = \mathbf{tr}(A')$ ,
4. O traço do produto é comutativo,  $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$ ,
5. O traço do produto respeita permutações cíclicas,  $\mathbf{tr}(ABC) = \mathbf{tr}(BCA) = \mathbf{tr}(CAB)$ .

#### *Autovalores, autovetores e matrizes definidas positivas*

Definem-se autovalores e autovetores de uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para a transformação que mapeia um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  para um vetor na mesma direção de  $v$ , a saber,  $\lambda v$ ,

$$Av = \lambda v, \quad (\text{A.4})$$

que possui  $n$  incógnitas  $\lambda$  e seu correspondente  $v$ . Essa equação pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ (A - \lambda I)v &= 0, \\ \det(A - \lambda I) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

As raízes da equação  $\det(A - \lambda I) = 0$ , chamada equação característica são os autovalores da matriz  $A$ .

Se a matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  for simétrica, isso é,  $A' = A$ ,  $A \in \mathbb{S}^n$ , pode ser mostrado que seus autovalores são reais e, assim, podem ser ordenados. Assim, uma matriz é dita definida positiva se todos os seus autovalores forem positivos,

$$v'Av > 0 \Leftrightarrow \lambda(A) > 0, \quad (\text{A.6})$$

denotada por  $A > 0$ ,  $A \in \mathbb{S}_+^n$ . De forma similar, define-se uma matriz definida negativa,

$$v'Av < 0 \Leftrightarrow \lambda(A) < 0, \quad (\text{A.7})$$

denotada por  $A < 0$ .

## ANEXO B – O complemento de Schur

O complemento de Schur é uma ferramenta fundamental para a manipulação das desigualdades matriciais. Assim, pode-se enuncia-lo como, (GEROMEL; KOROGUI, 2011),

**Lema B.1** *Sejam matrizes simétricas  $X, Z$  e matrizes  $Y$  de dimensão apropriada. A desigualdade,*

$$\begin{bmatrix} X & Y' \\ Y & Z \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{B.1})$$

*se, e somente se uma das seguintes condições for satisfeita*

- $Z > 0, X > Y'Z^{-1}Y,$
- $X > 0, Z > YZ^{-1}Y'.$

**Prova:** Para a necessidade, suponha que a primeira condição vale. Defina-se

$$Q = \begin{bmatrix} X - Y'Z^{-1}Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.2})$$

Defina-se a transformação de similaridade não singular  $T$ ,

$$T = \begin{bmatrix} I & Y'Z^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

e aplicando a transformação em  $Q > 0$ , implica em

$$TQT' = \begin{bmatrix} X & Y' \\ Y & Z \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.4})$$

□

Para a suficiência, como  $T$  é não singular, basta aplicar a transformação  $T^{-1}$  pela esquerda e sua transposta pela direita na primeira inequação do lema. Dessa forma, chega-se a primeira condição de forma parecida a obtida pela necessidade. O procedimento é análogo para a segunda condição.



## ANEXO C – O teorema de Parseval

O teorema de Parseval é uma ferramenta útil para o cálculo de integrais e/ou somatórios, pois permite alterar o domínio o qual a integral está sendo computada, do tempo para a frequência, e vice-versa. Esse teorema é enunciado para sistemas contínuos como, (GEROMEL; PALHARES, 2004),

**Teorema C.1 Teorema de Parseval para Tempo Contínuo** *Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função tal que sua transformada de Laplace  $\hat{f}$  tenha um domínio  $\mathcal{D}(\hat{f})$  que satisfaz*

$$\Upsilon = \{s \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \cap \{-s \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \neq \emptyset, \quad (\text{C.1})$$

sendo  $\gamma$  uma linha vertical qualquer inteiramente contida em  $\Upsilon$ , a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\int_0^\infty f(t)' f(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \hat{f}(s)' \hat{f}(-s) ds. \quad (\text{C.2})$$

**Prova:** Verifica-se que  $\gamma \subset \mathcal{D}(\hat{f})$  e, assim, pode-se escrever a anti-transformada de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \hat{f}(s) e^{st} ds, \quad t > 0. \quad (\text{C.3})$$

Por outro lado, por hipótese  $s \in \gamma$  faz com que  $-s$  também pertença ao domínio da transformada, de onde segue

$$\hat{f}(-s) = \int_0^\infty f(t) e^{st} dt. \quad (\text{C.4})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)' f(t) dt &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty f(t)' \int_\gamma \hat{f}(s) e^{st} ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \hat{f}(s)' \int_0^\infty f(t) e^{st} dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \hat{f}(s)' \hat{f}(-s) ds \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Verifica-se que o teorema exige que função  $\hat{f}$  seja analítica em um domínio contendo o eixo imaginário, o que implica que, caso aplicado a funções de transferência de sistemas lineares, esse deve ser globalmente assintoticamente estável. Além disso, se  $\gamma$  é o próprio eixo imaginário, pode-se reescrever a Equação C.2 como

$$\int_0^\infty f(t)' f(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(j\omega)' \hat{f}(j\omega) d\omega, \quad (\text{C.5})$$

que é a forma tradicional do teorema de Parseval ao se utilizar a transformada de Fourier de  $f$ .

Por fim, pode-se anunciar o teorema de Parseval no domínio discreto,

**Teorema C.2 Teorema de Parseval para Tempo Discreto** Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função tal que sua transformada  $\mathcal{Z}$ ,  $\hat{f}$ , tenha um domínio  $\mathcal{D}(\hat{f})$  que satisfaz

$$\Upsilon = \{z \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \cap \{z^{-1} \in \mathcal{D}(\hat{f})\} \neq \emptyset, \quad (\text{C.6})$$

sendo  $\gamma$  uma circunferência positivamente orientada qualquer, centrada na origem, inteiramente contida em  $\Upsilon$ , a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)' f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \hat{f}(\bar{z}^{-1})^* \hat{f}(z) z^{-1} dz. \quad (\text{C.7})$$

**Prova:** Verifica-se que  $\gamma$  está inteiramente contida no domínio da transformada  $\mathcal{Z}$ , e assim pode-se escrever a sua respectiva transformada inversa

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \hat{f}(z) z^{k-1} dz, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.8})$$

Por outro lado,  $z \in \gamma \subset \mathcal{D}(\hat{f})$  implica  $z^{-1} \in \mathcal{D}(\hat{f})$ . Nesse caso,

$$\hat{f}(z^{-1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) z^k. \quad (\text{C.9})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)' f(k) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)^* f(k) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)^* \oint_{\gamma} \hat{f}(z) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)^* z^k \hat{f}(z) z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) \bar{z}^k \right)^* \hat{f}(z) z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \hat{f}(\bar{z}^{-1})^* \hat{f}(z) z^{-1} dz \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Por fim, uma condição necessária para o Teorema de Parseval para sistemas a tempo discreto é que a circunferência unitária esteja contida no domínio da transformada. Portanto,

---

quando aplicado a sistemas lineares invariantes no tempo, esse deve ser globalmente assintoticamente estável. Além disso, se  $\gamma$  é a própria circunferência unitária, pode-se reescrever a equação C.7 como

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)' f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{j\omega})^* \hat{f}(e^{j\omega}) d\omega, \quad (\text{C.10})$$

que é a forma tradicional do teorema de Parseval ao se utilizar a transformada de Fourier do sistema discreto  $f$ .



## ANEXO D – Integrais de centro de massa e momento de inércia

Esse anexo define as integrais de centro de massa e momento de inércia utilizadas no capítulo de modelagem do sistema mecânico.

A definição da integral de centro de massa é, (HALLIDAY *et al.*, 2008),

**Definição D.1** *O centro de massa  $x_{cm}$  de um objeto de massa total  $m_x$  é definido como,*

$$x_{cm} = \frac{1}{m_x} \int x dm. \quad (\text{D.1})$$

Para um objeto unidimensional de densidade linear  $\rho(x)$ , obtém-se

$$\int x dm = \int x \rho(x) dx = m_x x_{cm}, \quad (\text{D.2})$$

para o intervalo que define o objeto  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $x_t$ .

Por fim, a definição do momento de inércia de um corpo rígido é, (HALLIDAY *et al.*, 2008),

**Definição D.2** *O momento de inércia  $J$  de um objeto de massa total  $m_x$  é definido como*

$$J = \int x^2 dm = \int x^2 \rho(x) dx. \quad (\text{D.3})$$



# ANEXO E – Custos de controladores clássicos em um canal markoviano

No Capítulo 5, discutiu-se de forma breve que o envio do sinal de controle através de um canal sujeito a falhas gera dois custos distintos: um custo anterior a falha, ao se tomar o sinal de controle  $u_a$ , e um posterior, através de  $u_b$ . A abordagem utilizada nesse trabalho foi comparar os custos de controladores markovianos com custos de controladores clássicos medindo valores do esforço de controle fisicamente anteriores a perda de pacote, para que a distinção entre esses controladores pudesse incorporar o aspecto adaptativo do primeiro. Entrementes, pode-se estimar o comportamento do controlador clássico em ambas as situações anteriormente descritas através das mesmas ferramentas de cálculo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  MJLS, respectivamente em (2.55) e (2.75). A premissa é a mesma da modelagem de um sistema discretizado e determinístico em um sistema estocástico: estabelece-se a mesma matriz dinâmica e da saída controlada para todos os modos, conforme realizado nesse projeto, bem como anula-se a matriz de entrada em modos de falha. Porém, calcula-se os custos através dos problema de otimização em (2.55) e (2.75) utilizando ganhos clássicos de realimentação obtidos em (5.24) e (5.41), em detrimento dos ganhos MJLS. Portanto, através da forma padrão do sistema abordado no Capítulo 5,

$$A_s = A_f = A_d, \quad B_s = B_d, \quad B_f = 0,$$

bem como para matrizes  $J(\theta_k)$  escolhidas de acordo com o critério estabelecido, e matrizes da saída controlada  $C_z(\theta_k)$ ,  $D_z(\theta_k)$  e  $E_z(\theta_k)$  fixadas para todos os modos, conforme realizado nesse projeto, pode-se modelar as duas situações conforme segue:

- Para  $u_a$ , os ganhos de realimentação clássico são fixados para todos os modos, ou seja,

$$K_i = K, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{K},$$

e dessa forma, para a saída controlada  $z(k)$  do sistema em malha fechada em (5.13), não ocorre anulação da parcela associada a  $D_z(\theta_k)$ , agregando o esforço do controlador clássico ao custo em todos os modos.

- Para  $u_b$ , os ganhos de realimentação clássico são fixados para o *cluster* de sucesso e anulados para caso de falha:

$$K_i = \begin{cases} K & , \text{ para } i \in \mathbb{U}_s, \\ 0 & , \text{ para } i \in \mathbb{U}_f, \end{cases}$$

e dessa forma, para a saída controlada  $z(k)$  do sistema em malha fechada em (5.13), ocorre anulação da parcela associada a  $D_z(\theta_k)$  em *clusters* de falha de modo similar ao controlador MJLS, porém utilizando o controlador do projeto clássico.

No restante desse anexo, serão mostrados os custos obtidos através dessas modelagens para os controladores clássicos em ambientes markovianos via LMIs markovianas, para os critérios  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e respectivas matrizes parametrizadas conforme mostradas no decorrer do Capítulo 5. As simulações referentes aos custos após a falha não são abordadas, porém podem ser facilmente realizadas em caso de necessidade do leitor.

### Controladores clássicos $\mathcal{H}_2$ em ambientes de perda de pacotes

As matrizes da saída controlada são definidas em (5.27) e a condição inicial, em (5.28). A matriz dinâmica e de entrada é amostrada com o período de rede  $T_d = 50$  ms, resultando no conjunto (5.25). Para o controle markoviano, obtém-se o limitante inferior, dado pela observação completa dos modos, um limitante superior dado pelo agrupamento em *clusters*, bem como a norma do sistema ao se realimentar o sistema com os ganhos dos controladores em (5.29). Esses valores já foram mostrados no Capítulo 5, nas Tabelas 3 e 4.

Utilizando o problema de otimização (2.55) para o sistema em malha fechada com o ganho de realimentação clássico em (5.29), bem como as premissas descritas anteriormente para computar os custos anterior e posterior à falha, são mostrados esses resultados na Tabela 11.

Tabela 11 – Custos  $\mathcal{H}_2$  de projeto de controle por realimentação de estados clássico aplicados em canais markovianos com medida do sinal de controle posterior à falha ("**Custo na planta**") e anterior à falha ("**Custo no controlador**").

Modelo do canal	Custo na planta	Custo no controlador
Gilbert-Elliot	14.5462	15.3951
Fritchman	13.8714	14.4946
McCullough	14.4537	15.5724

Como é esperado, os custos computados na planta (após a falha) são inferiores aos custos computados no controlador (antes da falha). Nota-se ainda que os custos na planta são superiores aos custos com observação parcial (*cluster*) da Tabela 3, o que mostra a otimalidade do controle markoviano frente a esse projeto, pois o primeiro custo é um limitante superior do controle MJLS. Além disso, a conjectura de ordenação em (5.14) é respeitada. Outro ponto de interesse é que os custos no controlador são próximos aos obtidos por simulação e

mostrados na terceira coluna da Tabela 5, o que valida a simulação e mostra que é possível prever custos de controladores clássicos aplicados a um canal markoviano utilizando a teoria de MJLS.

### Controladores clássicos $\mathcal{H}_\infty$ em ambientes de perda de pacotes

As matrizes da saída controlada são definidas em (5.44) e  $J(\theta_k) = B(\theta_k)$ . A matriz dinâmica e de entrada é amostrada com o período de rede  $T_d = 50$  ms, resultando no conjunto (5.25). Para o controle markoviano, obtém-se o limitante ótimo, dado pela observação completa dos modos e um limitante superior dado pelo agrupamento em *clusters*, bem como o limitante da norma do sistema ao realimentá-lo com os ganhos dos controladores em (5.47). Esses valores já foram mostrados no Capítulo 5, nas Tabelas 7 e 8.

Utilizando o problema de otimização (2.75) para o sistema em malha fechada com o ganho de realimentação clássico em (5.45), bem como as premissas descritas no início do anexo para computar os custos anterior e posterior à falha, obtém-se os resultados mostrados na Tabela 12.

Tabela 12 – Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  de projeto de controle por realimentação de estados clássico aplicados em canais markovianos com medida do sinal de controle posterior à falha ("**Limit. na planta**") e anterior à falha ("**Limit. no controlador**").

Modelo do canal	Limit. na planta	Limit. no controlador
Gilbert-Elliot	3.5124	3.9873
Fritchman	3.2438	3.5268
McCullough	3.7338	4.3540

De forma similar a análise para  $\mathcal{H}_2$ , o limitante na planta é superior ao limitante com a observação em *clusters* da Tabela 7, o que mostra que o controlador clássico, conforme esperado, terá custos superiores ao MJLS. Esse limitante é ainda maior no controlador, visto que computam-se também esforços de controle em modos de falha. Nota-se o grande aumento do canal de McCullough, um tendência similar a mostrada na Tabela 8. Finalmente, a conjectura de ordenação em (5.14) também é respeitada.