



Márcio Feliciano Braga

Discretização e Controle por Rede de Sistemas Politópicos com Taxa de Amostragem Incerta e Atraso

Campinas

2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Márcio Feliciano Braga

Discretização e Controle por Rede de Sistemas Politópicos com Taxa de Amostragem Incerta e Atraso

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro L. D. Peres

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Márcio Feliciano Braga e orientada pelo Prof. Dr. Pedro L. D. Peres

Campinas

2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

B73d Braga, Márcio Feliciano, 1983-
Discretização e controle por rede de sistemas politópicos com taxa de amostragem incerta e atraso / Márcio Feliciano Braga. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Coorientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de controle. 2. Análise de sistemas. 3. Incerteza. 4. Taylor, Séries de. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de, 1978-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Discretization and network control of polytopic systems with uncertain sampling rates and delay

Palavras-chave em inglês:

Control theory

System analysis

Uncertainties

Series, Taylor's

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Leonardo Antônio Borges Tôres

Edson Roberto De Pieri

Juan Francisco Camino dos Santos

Paulo Augusto Valente Ferreira

Data de defesa: 27-03-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Márcio Feliciano Braga

Data da Defesa: 27 de março de 2015

Título da Tese: "Discretização e Controle por Rede de Sistemas Politépicos com Taxa de Amostragem Incerta e Atraso"

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (Presidente): Pedro Luis Dias Peres

Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres: Leonardo A. B. Tôres

Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri: Edson Roberto De Pieri

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos: J. Camino

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira: Paulo Augusto Valente Ferreira

Resumo

Esta tese investiga o problema de discretização de sistemas lineares incertos em dois cenários distintos. O primeiro supõe que as matrizes do sistema e a taxa de amostragem são incertas e invariantes no tempo, descritas em termos de politopos. No segundo caso supõe-se que todos os parâmetros incertos, incluindo o intervalo de amostragem, podem variar no tempo; que os parâmetros do sistema possuem limitantes conhecidos para a taxa de variação e são continuamente monitorados, de forma que uma nova amostra é coletada sempre que ocorrer uma mudança significativa nos parâmetros ou quando um intervalo máximo desde a última amostragem for atingido, caracterizando-se assim a chamada amostragem baseada em eventos. O objetivo é projetar controladores digitais para o sistema discretizado e garantir teoricamente a estabilidade robusta em malha fechada do sistema contínuo original. Considera-se também um atraso induzido pela rede no modelo discreto. Do ponto de vista da discretização, propõem-se extensões da expansão em série de Taylor até um grau arbitrário ℓ aplicada ao sistema original como uma solução para tratar as expressões envolvendo exponenciais de matrizes incertas. O modelo discreto resultante é composto por matrizes polinomiais homogêneas de grau ℓ com parâmetros pertencentes ao produto cartesiano de simplexes unitários, chamado multi-simplex, mais um termo aditivo limitado em norma que representa o erro residual de aproximação. Modelos mais acurados são obtidos com o aumento do grau ℓ que, conseqüentemente, produz resíduos com menor norma, possibilitando resultados de síntese menos conservadores. Também são propostas condições na forma de desigualdade matriciais lineares para a síntese de controladores digitais robustos por realimentação de estados e de saída, cômputo de norma \mathcal{H}_2 e análise de estabilidade para sistemas discretos polinomiais com incertezas aditivas limitadas em norma. As condições empregam funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros incertos para certificar a estabilidade em malha fechada do sistema controlado. Em alguns casos, as desigualdades matriciais possuem um parâmetro escalar, tornando-se lineares para valores fixos desse parâmetro. Os resultados obtidos são gradativamente menos conservadores com o aumento do grau da matriz de Lyapunov, podendo ainda ser melhorados com o auxílio de uma busca linear no parâmetro escalar. Experimentos numéricos são apresentados para ilustrar a versatilidade da metodologia proposta, aplicável a uma classe mais geral de problemas de controle por rede que os métodos existentes na literatura.

Palavras-chaves: Sistemas lineares discretizados, Sistemas controlados por rede, Expansão em séries de Taylor, Incertezas politópicas, Desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This thesis investigates the problem of discretization of uncertain linear systems in two distinct scenarios. The first one supposes that the matrices of the system and the sampling rate are uncertain and time-invariant, described in terms of polytopes. The second case considers that all uncertain parameters, including the sampling interval, can vary in time and that the parameters of the system have known bounds for the rate of variation and are continuously monitored, in such a way that a new sample is collected whenever a significant change in the parameters occurs or when a maximum time interval since the previous sample is reached, thus characterizing the so-called event-based sampling. The aim is to design digital controllers for the discretized system and to guarantee the closed-loop robust stability of the original continuous-time system. A network-induced delay is also considered in the discrete-time model. From the discretization point of view, extensions of the Taylor series expansion of an arbitrary degree ℓ applied to the original system are proposed as a solution to deal with expressions involving the exponential of uncertain matrices. The resulting discrete-time model consists of homogeneous polynomial matrices of degree ℓ with parameters belonging to the Cartesian product of unit simplexes, called multi-simplex, plus an additive norm-bounded term which represents the approximation residual error. More accurate models are obtained with the increase in the degree ℓ which, consequently, yields residues with lower norms, allowing to produce less conservative synthesis results. Conditions based on linear matrix inequalities for the synthesis of robust state-feedback and output-feedback digital controllers, \mathcal{H}_2 norm computation, and stability analysis for polynomial discrete-time systems with additive norm-bounded terms are also proposed. The conditions employ Lyapunov functions with polynomial dependency on the uncertain parameters to certify the closed-loop stability of the controlled system. In some cases, the matrix inequalities have a scalar parameter, becoming linear for fixed values of the parameter. The obtained results are gradually less conservative with the increase of the degree of the Lyapunov matrix and can be further enhanced with the help of a line search in the scalar parameter. Numerical experiments are presented to illustrate the versatility of the proposed methodology, applicable to a more general class of networked control problems than the existing methods in the literature.

Keywords: Discretized linear systems, Network control systems, Taylor series expansion, Polytopic uncertainties, Linear matrix inequalities.

Introdução		1
1	Discretização e Controle de Sistemas Lineares Incertos Invariantes no Tempo	7
1.1	Introdução	7
1.2	Descrição do Problema	8
1.3	Controle de Sistemas Discretizados	9
1.3.1	Discretização de Sistemas Incertos com Período de Amostragem Incerto Maior do que o Atraso Induzido pela Rede	9
1.3.2	Estabilização de Sistemas Discretizados com Período de Amostragem Maior do que o Atraso Induzido pela rede	13
1.3.2.1	Exemplos de Estabilização para Sistemas Discretizados com Ta- xas de Amostragem Incertas e Atraso	18
1.3.3	Estabilização de Sistemas Discretizados com Período de Amostragem Me- nor do que o Atraso Induzido pela rede	22
1.3.3.1	Exemplos de Estabilização para Sistemas Discretizados com Pe- ríodos de Amostragem Incertos Maiores do que o Atraso	25
1.4	Cômputo da norma \mathcal{H}_2	27
1.4.1	Exemplo de Cômputo da Norma \mathcal{H}_2	32
1.5	Análise de Estabilidade Robusta de Sistemas Discretizados	33

1.5.1	Exemplo Numérico de Análise de Estabilidade de um Conversor Conectado em Rede	36
1.6	Conclusões Parciais	42
2	Discretização e Controle de Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes no Tempo	43
2.1	Introdução	43
2.2	Descrição do Problema	45
2.3	Procedimento de Discretização	47
2.3.1	Modelagem do Domínio Paramétrico	50
2.4	Estabilização	52
2.5	Exemplos Numéricos	59
2.6	Conclusões Parciais	63
	Conclusão	65
	Referências	71
A	Demonstração da Estabilidade em Malha Fechada do Sistema Contínuo Híbrido	77
B	Demonstração da Estabilidade em Malha Fechada do Sistema LPV Híbrido	81
C	Lemas Auxiliares	83
D	Desenvolvimento das Séries Multinomiais	85
D.1	Definições para o Simplex Unitário	85
D.2	Definições para o Domínio Multi-Simplex	88
D.3	Notações Adicionais	89

Dedico este trabalho à minha querida mãe, Maria das Dores Braga, com quem tive a oportunidade de aprender o que significa amar incondicionalmente e de me maravilhar com suas singelas palavras que sempre me fizeram rir mesmo nos momentos mais difíceis de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer imensamente à minha família: meus pais Edson e Dora por terem sido fonte de incentivo, encorajamento e conforto; aos meus irmãos Patrícia e Marcelo que sempre apoiaram os meus estudos e por terem me agraciado com três sobrinhos maravilhosos (Eduardo, Maria Clara e Bernardo) com quem volto a ser criança e me divirto intensamente.

Agradeço profundamente à minha noiva Letícia, pessoa maravilhosa que tenho a honra de ter ao meu lado, por ser meu porto seguro, sobretudo nestes últimos dois anos que foram os mais sombrios de minha vida.

Agradeço a todos os colegas do DSE pelo acolhimento e pelos nossos “cafés com prosa”, onde pude discutir assuntos fantásticos e dar boas risadas.

Agradeço aos amigos Cecília e Márcio com quem tive a oportunidade de trabalhar e aprender muito neste doutorado, sobretudo à Cecília com quem divido a glória desta conquista por termos trabalhado juntos nesses últimos quatro anos e pela coautoria em todos os meus trabalhos.

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Professor Doutor Pedro L. D. Peres e ao meu coorientador Professor Doutor Ricardo C. L. F. Oliveira pela supervisão deste doutorado, especialmente pela amizade, pela incalculável dedicação na orientação e pelos ensinamentos.

Agradeço a FAPESP (Processo 2011/08312-6) pelo apoio financeiro concedido durante o desenvolvimento deste doutorado.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos”.

– Isaac Newton

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Ilustração do sistema controlado por rede investigado neste trabalho.	2
Figura 2	Segundo estado do sistema $\dot{x}(t) = E(\alpha_1)x(t)$ (linha contínua), com os vértices de $E(\alpha_1)$ dados em (1.19), e do sistema discretizado para um período de amostragem incerto $T(\alpha_2) = 0.1\alpha_{21} + 0.3\alpha_{22}$ s com $\alpha_1 = (0.5998, 0.3665, 0.0337)$ e $x_0 = [1 \ -2]'$ (apenas para efeito de visualização, um linha tracejada foi introduzida para o caso $\ell = 1$), com as escolhas (a) $\alpha_2 = (0.7, 0.3)$ e (b) $\alpha_2 = (0.5, 0.5)$. 14	14
Figura 3	Estados do sistema do Exemplo 1.1 para $\alpha_1 = (0.4, 0.6)$ e $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]'$ simulados com $\alpha_2 = (0.2, 0.8)$, representando $T = 0.56$ s, usando: (a) o controlador digital por realimentação de estados obtido por meio do Teorema 1.1, com $g = (1, 1)$, $d = 0$, $\xi = 0$, $\ell = 5$, $T \in [0.4, 0.6]$, $\delta_{\hat{A}} \cong 0.0069$, $\delta_{\hat{B}} \cong 0.0005$, e $\tau = 0.2$ s, e; (b) o ganho obtido por (DE OLIVEIRA <i>et al.</i> , 1999, Teorema 3), com $\tau = 0$ s e uma aproximação de primeira ordem ($\ell = 1$) de Taylor com $T = 0.4$ s.	20
Figura 4	Região de estabilidade para o Exemplo 1.2 provida pelo Teorema 1.1 com $g = (1, 1)$, $d = 0$ e: (a) $\xi = 0$ com diferentes graus de aproximação (ℓ) da série de Taylor (os graus maiores também estabilizam os graus menores); (b) $\ell = 2$. Primeiro caso: $\xi = 0$ (■); segundo caso: $\xi \in [-0.9, 0.9]$ (■ e ▼).	22
Figura 5	Trajetórias dos estados do sistema (1.44) usando $T = 0.5$ s, $\tau = 1.1$ s, $\alpha = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$, $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]'$, $\ell = 4$, $g = 1$, $d = 0$: (a) com ganho de realimentação fornecido pelo Teorema 1.2 com $\delta \cong 0.0223$; (b) com o controlador obtido pelo Corolário 1.1 (BRAGA <i>et al.</i> , 2013, Teorema 1) com $\delta_A \cong 0.0223$ e $\delta_B \cong 0.0015$	26

Figura 6	Região de estabilidade para o Exemplo 1.4 provida pelo Teorema 1.2 com $g = 1$, $d = 0$ e: (a) $\xi = 0$ com diferentes graus de aproximação (ℓ) da série de Taylor (os graus maiores também estabilizam os graus menores); (b) $\ell = 3$. Primeiro caso: $\xi = 0$ (●); Segundo caso: $\xi \in [-0.9, 0.9]$ (● e ▼).	26
Figura 7	Comportamento de μ versus o período de amostragem T : Comparação entre a norma \mathcal{H}_2 (Cont.) de pior caso dos sistema contínuo computado com (GONÇALVES <i>et al.</i> , 2007) e o custo garantido (μ) obtido com o Teorema 1.3 com $g = 4$, $d = 0$ e graus de aproximação $\ell = 1, \dots, 6$	34
Figura 8	Inversor PWM com um filtro LCL conectado à rede.	36
Figura 9	Autovalores do sistema discretizado aumentado em malha fechada para L_g de 0.5 mH a 2.8348 mH (limite de estabilidade provido pelo Teorema 1.4).	40
Figura 10	Simulação das respostas em regime i_g para o sistema em malha fechada. A forma de onda em cinza é o resultado para $L_g = 0.5 \text{ mH}$, enquanto a em preto é para $L_g = 2.8348 \text{ mH}$ (a curva cinza está superposta à curva preta).	41
Figura 11	Resultados experimentais para $L_g = 1.5 \text{ mH}$ mostrando a referência (i_{ref}), em cinza, e a saída do sistema (i_g), em preto.	42
Figura 12	Esquema ilustrativo da amostragem por eventos.	46
Figura 13	Trajatórias da saída controlada do sistema em malha fechada (2.39) com $\ell = 2$, $\tau(\alpha_3(t)) = 0.01\alpha_{31}(t) + 0.02\alpha_{32}(t) \text{ s}$, α_1 dado por (2.40) e $x_0 = [-3 \ 2]'$ para o Exemplo 2.1.	60
Figura 14	Trajatórias da saída controlada do sistema VTOL em malha fechada com $\ell = 3$, $\tau = 0.01 \text{ s}$, α_1 dado por (2.41) e $x_0 = [-1 \ 2 \ 1 \ 3]'$ para o Exemplo 2.2.	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Limitantes para os erros de discretização (δ_A e δ_B) e tempos de processamento (em segundos) do procedimento de discretização para o Exemplo 1.1 com diferentes graus ℓ da expansão em série de Taylor.	19
Tabela 2	Custos garantidos \mathcal{H}_2 para o Exemplo 1.5 usando o Teorema 1.3 com $T = 0.1$ s e diferentes graus para a aproximação da série de Taylor (ℓ), para as matrizes de Lyapunov (g) e para a relaxação de Pólya ($d = 0$). Os limitantes (δ_A , δ_C) para os erros de discretização também são fornecidos.	33
Tabela 3	Valores máximos permitidos de L_g para os quais o sistema em malha fechada é estável.	40
Tabela 4	Limitantes superiores de $\beta > 0$ para diferentes graus g da matriz de Lyapunov e h das variáveis de folga no Teorema 2.1 para $\ell = 2$ no Exemplo 2.1.	61

LISTA DE ACRÔNIMOS E ABREVIACÕES

- (\cdot) indica a operação de transposição quando pós-posto a um vetor ou matriz
- 0 indica uma matriz de zeros de dimensões apropriadas
- $\text{Tr}(\cdot)$ representa o traço de uma matriz
- \mathbb{N} denota o conjunto dos números naturais
- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais
- \star indica um bloco simétrico nas LMIs
- A notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
- I indica uma matriz identidade de dimensões apropriadas
- $M > 0$ indica que a matriz M é simétrica definida positiva
- $M \geq 0$ indica que a matriz M é simétrica semi-definida positiva
- BMI Desigualdade Matricial Bilinear (do inglês, *Bilinear Matrix Inequality*)
- LMI Desigualdade Matricial Linear (do inglês, *Linear Matrix Inequality*)
- LPV Linear com parâmetros variantes (do inglês, *Linear Parameter-Varying*)
- LTI Linear Invariante no Tempo (do inglês, *Linear Time Invariant*)
- NCS Sistemas Controlados por Rede (do inglês, *Networked Control Systems*)

INTRODUÇÃO

A ideia de utilizar computadores como componentes em sistemas de controle surgiu em meados do século XX, sendo que as primeiras aplicações investigadas foram no controle de aeronaves e de mísseis. A partir de então, devido aos avanços dos sistemas de computação, em especial nas últimas décadas, pode-se dizer que praticamente todos os sistemas de controle da atualidade são implementados por computadores. No entanto, este não foi um caminho fácil de ser trilhado, visto que os computadores empregados naqueles sistemas primitivos apresentavam diversos inconvenientes que precisavam ser sobrepujados, entre os quais pode-se citar o tamanho, o alto consumo de energia, a lentidão, o alto custo, etc. Apesar desses obstáculos, a indústria entreviu novos mercados e as universidades vislumbraram promissores campos de pesquisa, tanto que diversos estudos foram feitos com o intuito de avaliar a factibilidade e a aplicabilidade de controle por computador em processos reais (veja (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1984) para uma lista detalhada de trabalhos publicados na época), levando à utilização extensiva de controladores digitais nos dias de hoje (OGATA, 1995).

Como consequência direta desse desenvolvimento tecnológico, viu-se também o surgimento do amplo emprego de canais de comunicação no controle de sistemas dinâmicos (ZHANG *et al.*, 2001). Neste contexto, uma boa alternativa para a implementação de controle distribuído e sistemas interconectados é a utilização da arquitetura de sistemas controlados por rede (do inglês, *Networked Control Systems — NCS*), que permite a troca de informações entre os componentes do sistema de controle. Como principais vantagens de NCSs, pode-se citar a redução do cabeamento, o uso de dispositivos autoconfiguráveis (do inglês, *plug and play*), o aumento na agilidade, facilidade de manutenção e diagnose dos sistemas. Entretanto, existem algumas desvantagens que podem restringir o emprego dessa arquitetura, como perdas ou transmissão simultânea de pacotes de informação, limitação da banda do canal de comunicação e atrasos induzidos pela rede (LIAN *et al.*, 2001; ZHANG *et al.*, 2001; BORGES *et al.*, 2010). Em especial, deve-se ressaltar os prejuízos

causados pelos atrasos induzidos pela rede, que ocorrem sempre que dados trafegam por um canal de comunicação. Quando não considerados no projeto dos controladores, os atrasos podem levar à degradação de desempenho ou mesmo à instabilidade dos sistemas (LIAN *et al.*, 2001; ZHANG *et al.*, 2001). Tais inconveniências têm recebido considerável atenção em estudos realizados por diversos pesquisadores (LIU; YU, 2003; MAHMOUD; ISMAIL, 2003; MONTESTRUQUE; ANT-SAKLIS, 2004; NEŠIĆ; TEEL, 2004; VELASCO *et al.*, 2005; YANG *et al.*, 2006; CHEN *et al.*, 2007; YU *et al.*, 2009; WU *et al.*, 2010), nos quais procuram-se estratégias capazes de lidar com as dificuldades decorrentes da utilização da arquitetura NCS.

No contexto NCS, a estratégia de controle geralmente compreende um processo modelado em tempo contínuo controlado por um controlador discreto interfaceado por conversores analógico-digitais (A/D) e digital-analógicos (D/A), como mostra o esquema apresentado na Figura 1. Além disso, visto que o sistema contínuo pode ser afetado por incertezas, que ocorrem devido a variações de parâmetros, perturbações externas, ruídos, imprecisão de sensores e atuadores, ou estão relacionadas a dinâmicas ocultas (não modeladas) (ACKERMANN, 1993), essa estrutura dá origem a dois problemas importantes que devem ser tratados conjuntamente: primeiramente, lidar com as incertezas presentes no sistema; e, em segundo lugar, a necessidade de projetar um controlador digital que assegure a estabilidade do sistema híbrido em malha fechada (planta contínua e controlador digital).

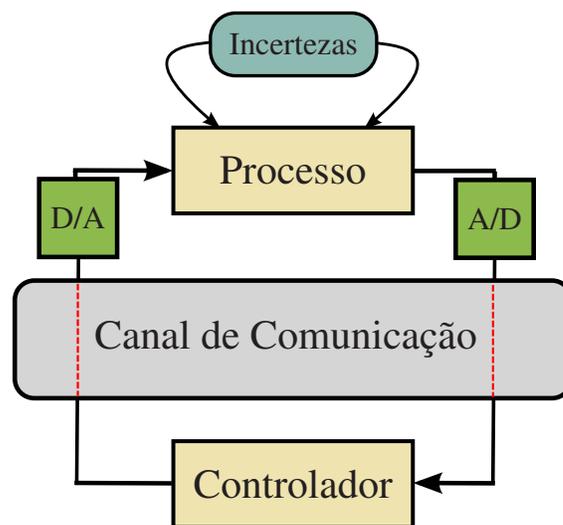


Figura 1: Ilustração do sistema controlado por rede investigado neste trabalho.

Uma possível solução para o primeiro problema é o emprego das teorias de sistemas lineares incertos e de sistemas com parâmetros variantes no tempo (BOYD *et al.*, 1994; MOHAMMADPOUR; SCHERER, 2012). Enquanto o primeiro caso lida com sistemas lineares invariantes no tempo (do inglês, *Linear Time Invariant* — LTI), cuja descrição para as incertezas satisfaz

alguma forma especial, como politópicas, intervalares, estruturadas ou não estruturadas, a modelagem por sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter-Varying* — LPV) pode ser utilizada para representar um sistema não linear em termos de uma família de modelos lineares ou representar sistemas lineares cuja dinâmica é afetada por parâmetros que variem arbitrariamente rápido ou tenham limitantes conhecidos em suas taxas de variação (RUGH; SHAMMA, 2000).

O segundo problema, geralmente, requer um procedimento para discretizar as equações contínuas que representam o modelo da planta (veja (HARA *et al.*, 1996) para uma discussão mais detalhada dos diferentes métodos para o projeto de controladores digitais). Como importante observação a ser feita a respeito desse assunto, nota-se que a maioria das abordagens de discretização presentes na literatura apenas lidam com plantas livres de incertezas (isto é, sistemas precisamente conhecidos) (BLACKMORE *et al.*, 2001; ONO *et al.*, 2002; GAUDETTE; MILLER, 2013; SOUZA *et al.*, 2013), em virtude da dificuldade em tratar exponenciais de matrizes incertas. Algumas pesquisas lidam com o problema de discretização de sistemas incertos por meio de aproximações numéricas que negligenciam o erro de discretização. Por exemplo, pode-se citar o trabalho apresentado em (SU *et al.*, 1998), no qual assume-se que as matrizes do espaço de estados do sistema contínuo são matrizes intervalares e o modelo discretizado é obtido usando as fórmulas de quadratura de Chebyshev e aritmética intervalar. Todavia, essa abordagem não pode ser aplicada a sistemas politópicos com um número arbitrário de vértices. Outros trabalhos (KOTHARE *et al.*, 1996; LEE; WON, 2006; WADA *et al.*, 2006) utilizam uma aproximação de primeira ordem da série de Taylor para contornar esta dificuldade, mas isto implica que, para grandes valores do tempo de amostragem, o modelo resultante torna-se impreciso. Em (APKARIAN, 1997), o autor trata a discretização de sistemas LPV, mas assim como os demais não considera a influência do erro de discretização no projeto do controlador. Um dos poucos resultados que examina a influência do erro de discretização é o apresentado em (HETEL *et al.*, 2007), mas a estratégia utilizada pelos autores é aplicável somente a sistemas chaveados livres de incertezas, sujeitos a atrasos incertos induzidos pela rede.

Diante do exposto, nota-se que o problema de discretização de sistemas incertos LTI e LPV ainda é um problema em aberto na literatura. O primeiro objetivo desta tese é propor uma técnica mais precisa de discretização de sistemas contínuos incertos LTI e LPV com atrasos de comunicação entre a planta e o controlador. Tal modelagem pode ser alcançada descrevendo as exponenciais de matrizes incertas por meio de expansões em série de Taylor de grau arbitrário. Como segunda contribuição, formulam-se condições de análise de estabilidade, cômputo de norma \mathcal{H}_2 e síntese de controladores para sistemas discretos com dependência polinomial nos parâmetros em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities* (BOYD *et al.*, 1994)). As condições são obtidas com base em matrizes de Lyapunov com dependência poli-

nomial de grau arbitrário (OLIVEIRA; PERES, 2007) nos parâmetros incertos, buscando produzir resultados menos conservadores do que os obtidos com matrizes de Lyapunov constantes ou afins. Especificamente no caso LTI, as condições apresentam um parâmetro escalar e , para valores fixos, tornam-se LMIs. A presença do escalar nas condições representa um grau de liberdade importante, que pode produzir controladores melhores sob algum critério, por exemplo, capazes de estabilizar uma região maior no espaço de incertezas, ou de produzir menores custos garantidos \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ ao se variar o valor do parâmetro. O trabalho apresenta ainda, ao longo do texto, exemplos numéricos ilustrativos que realçam a eficácia dos resultados obtidos. Todas as rotinas utilizadas foram implementadas em Matlab, versão 7.10 (R2010a) usando Yalmip (LÖFBERG, 2004) e os resolvedores Sedumi (STURM, 1999) (Capítulo 1) e Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000) (Capítulo 2), em um computador AMD Phenom (TM) II X6 1090T (3.2GHz), 4GB RAM.

A estrutura da tese, que inclui uma breve descrição de cada capítulo, é apresentada na sequência.

Capítulo 1

Este capítulo apresenta um novo procedimento de discretização para sistemas lineares incertos invariantes no tempo, que baseia-se na descrição das exponenciais de matrizes incertas por meio da expansão de séries de Taylor de grau arbitrário. Como contribuição adicional, propõem-se condições LMIs para a síntese de controladores, cômputo de norma \mathcal{H}_2 e análise de sistemas discretos com dependência polinomial nos parâmetros e termos aditivos limitados em norma. Toda a notação e definições necessárias ao desenvolvimento da técnica de discretização e das condições também são estabelecidas.

Capítulo 2

Este capítulo propõe uma técnica de discretização, também baseada em expansões por série de Taylor de grau arbitrário, que converte um sistema contínuo LPV sujeito a um atraso induzido pela rede variante no tempo em um sistema discreto LPV equivalente. Esse procedimento é acionado por eventos, o que significa que os parâmetros do sistema LPV são continuamente monitorados e, quando uma mudança significativa nos valores ocorre, ou ainda quando um tempo máximo é atingido, uma nova amostragem é realizada. Adicionalmente, novas condições para o projeto de controladores por realimentação de saída, baseadas na técnica de dois estágios, para sistemas discretos com dependência polinomial nos parâmetros e termos aditivos limitados em norma são propostas. Tais condições utilizam funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros incertos de grau arbitrário e variáveis de folga que podem reduzir o conservadorismo dos resultados.

Conclusões e Perspectivas

Apresentam-se as conclusões, as perspectivas de trabalhos futuros e os artigos gerados durante o período de produção desta tese.

CAPÍTULO 1

DISCRETIZAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS INVARIANTES NO TEMPO

1.1 Introdução

Qualquer estratégia realista de modelagem, análise de estabilidade e desempenho, ou projeto de controladores para sistemas dinâmicos deve considerar a presença de incertezas na planta (ACKERMANN, 1993). Como a proposta deste trabalho é lidar com NCS, o projeto de controladores nesse contexto necessita que o modelo contínuo seja discretizado e que as condições de análise e síntese garantam a estabilidade do sistema híbrido. Portanto, o objetivo deste capítulo pode ser dividido em duas partes: i) propor uma técnica mais precisa de discretização de sistemas contínuos incertos com atrasos de comunicação induzidos pela rede entre a planta e o controlador; ii) formular condições de síntese de controladores, de análise de estabilidade e de cômputo de norma \mathcal{H}_2 para sistemas lineares discretos com dependência polinomial nos parâmetros incertos e incertezas aditivas limitadas em norma.

O primeiro objetivo pode ser alcançado descrevendo as exponenciais de matrizes incertas por meio de expansões em série de Taylor e utilizando graus maiores do que um na aproximação. Desse modo, o sistema politópico contínuo original é convertido em um sistema discreto equivalente cujos parâmetros incertos pertencem ao produto cartesiano de simplexes unitários (chamado multi-simplex (OLIVEIRA *et al.*, 2008)). As matrizes discretizadas são polinômios homogêneos de grau fixo ℓ mais um termo limitado em norma que representa o erro residual de discretização, que depende do grau utilizado na expansão da série de Taylor, do intervalo de amostragem e dos parâmetros incertos presentes na planta. Posto que se utiliza uma expansão da série de Taylor, modelos discretos mais precisos são obtidos ao empregar graus ℓ elevados na série de Taylor

que, conseqüentemente, produz modelos discretos mais elaborados, aumentando a complexidade computacional.

Para o segundo objetivo, formulam-se as condições em termos de LMIs, que são tratáveis por procedimentos numéricos eficientes e podem levar em conta a presença de parâmetros incertos no sistema. Particularmente com o uso de funções de Lyapunov com dependência polinomial de grau arbitrário (OLIVEIRA; PERES, 2007) nos parâmetros incertos, é possível reduzir o conservadorismo das condições LMIs. Para o caso de síntese de controladores, as condições apresentam um parâmetro escalar ξ , cuja busca no intervalo $(-1, 1)$ pode reduzir ainda mais o conservadorismo. É importante salientar que, diferentemente de outros métodos existentes, as condições propostas, quando factíveis, fornecem uma matriz de Lyapunov homogênea com dependência polinomial de grau arbitrário nos parâmetros incertos que assegura a estabilidade robusta em malha fechada não só do sistema discretizado, mas também do sistema contínuo original.

Ao longo do capítulo, experimentos numéricos são apresentados para ilustrar as condições desenvolvidas, incluindo comparações com outros métodos.

1.2 Descrição do Problema

Considere o sistema linear incerto contínuo no tempo controlado por um canal de comunicação, conforme a ilustração apresentada na Figura 1. Para $t \geq 0$, $x(0) = 0$, $u(t) = 0$ para $t < 0$, a seguinte descrição para a planta é utilizada

$$\dot{x}(t) = E(\alpha_1)x(t) + F_u(\alpha_1)u(t - \tau) + F_w(\alpha_1)w(t) \quad (1.1a)$$

$$z(t) = G(\alpha_1)x(t) \quad (1.1b)$$

em que τ representa o atraso induzido pela rede, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor com o sinal de controle e $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ contém as entradas de ruído. As matrizes $E(\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $F_u(\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $F_w(\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ e $G(\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ são incertas e pertencem a um domínio politépico, ou seja, podem ser escritas como a combinação convexa de N_1 vértices conhecidos

$$(E, F_u, F_w, G)(\alpha_1) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} (E_i, F_{u_i}, F_{w_i}, G_i) \quad (1.2)$$

e $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1N_1})$ é um vetor de parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simplex unitário, dado por

$$\Lambda_{N_m} = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{N_m}) \in \mathbb{R}^{N_m} : \sum_{i=1}^{N_m} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N_m \right\}. \quad (1.3)$$

Como o período de amostragem pode variar por diversas razões (MONTESTRUQUE; ANTSAKLIS, 2004; VELASCO *et al.*, 2005), assume-se que o mesmo não seja precisamente conhecido, mas pertença ao intervalo $[T_1, T_2]$, podendo ser descrito por uma representação politópica dada por

$$T(\alpha_2) = \sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} T_i, \quad \alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \Lambda_2. \quad (1.4)$$

Por simplicidade, supõe-se que τ seja constante e conhecido. Tal hipótese é válida especialmente quando protocolos do tipo estático (do inglês, *static scheduling network*) são implementados (ZHANG *et al.*, 2001; BORGES *et al.*, 2010). Inicialmente, assume-se que o atraso induzido pelo canal de comunicação é menor do que o limitante inferior do tempo de amostragem, ou seja, $\tau < T_1$ (Subseção 1.3.2). Na sequência, tal restrição é relaxada e atrasos maiores do que o limitante superior do intervalo de amostragem, isto é, $\tau > T_2$ são considerados (Subseção 1.3.3).

1.3 Controle de Sistemas Discretizados

Em sistemas controlados por rede, todos os sinais estão sujeitos à limitação de banda imposta pelo canal de comunicação, de modo que os mesmos podem ser considerados constantes dentro do período de amostragem $T(\alpha_2) = t_{k+1} - t_k$. Portanto, o objetivo desta seção é obter um modelo discreto equivalente para o sistema (1.1a), com $w(t) = 0$, tão acurado quanto possível, para a síntese de controladores digitais que leiam o estado $x(t)$ nos instantes de amostragem $kT(\alpha_2)$, $k = 1, 2, \dots$, e provejam um sinal de controle $u(t)$.

1.3.1 Discretização de Sistemas Incertos com Período de Amostragem Incerto Maior do que o Atraso Induzido pela Rede

Considere que o sistema (1.1a), com $w(t) = 0$, seja amostrado com um período $T(\alpha_2) > \tau$, $\forall \alpha_2 \in \Lambda_2$. Seguindo as linhas de (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1984), o procedimento de discretização fornece o modelo discreto dado por

$$x((k+1)T(\alpha_2)) = A(\alpha)x(kT(\alpha_2)) + B(\alpha)u(kT(\alpha_2)) + B_d(\alpha)u((k-1)T(\alpha_2)), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.5)$$

em que as matrizes incertas $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ e $B_d(\alpha)$ são apresentadas a seguir

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= e^{E(\alpha_1) T(\alpha_2)}, \\ B(\alpha) &= \left(\int_0^{Y(\alpha_2)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F_u(\alpha_1), \\ B_d(\alpha) &= e^{E(\alpha_1)Y(\alpha_2)} \left(\int_0^\tau e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F_u(\alpha_1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

com

$$\Upsilon(\alpha_2) = \alpha_{21}(T_1 - \tau) + \alpha_{22}(T_2 - \tau). \quad (1.7)$$

Os parâmetros incertos que afetam o sistema e o intervalo de amostragem podem ser agrupados em um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ que pertence ao domínio multi-simplex Λ_N , dado pelo produto cartesiano de simplexes unitários Λ_{N_m} , $m = 1, 2$, como definido a seguir.

Definição 1.1 (Multi-simplex (OLIVEIRA *et al.*, 2008)). *Um multi-simplex Λ_N é o produto cartesiano $\Lambda_{N_1} \times \cdots \times \Lambda_{N_r}$ de um número r de simplexes $\Lambda_{N_1}, \dots, \Lambda_{N_r}$. A dimensão de Λ_N é definida pelo índice $N = (N_1, \dots, N_r)$. Por simplicidade de notação, \mathbb{R}^N denota o espaço $\mathbb{R}^{N_1 + \dots + N_r}$. Um dado elemento $\alpha \in \Lambda_N$ é um vetor pertencente ao \mathbb{R}^N e pode ser decomposto como $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ de acordo com a estrutura de Λ_N e, subsequentemente, cada α_m , $m = 1, \dots, r$, é decomposto na forma $(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mN_m})$.*

Devido à dificuldade em tratar exponenciais de matrizes incertas, propõe-se um novo procedimento de discretização, baseado na expansão em série de Taylor. Assim, o sistema discreto resultante (1.5) possui matrizes no espaço de estados que são polinômios homogêneos de grau ℓ cujos parâmetros incertos pertencem ao domínio multi-simplex e termos limitados em norma. Os termos adicionais, que representam o erro proveniente do procedimento de discretização, dependem do grau ℓ da expansão da série de Taylor, do período de amostragem e dos parâmetros incertos α_1 e α_2 . Portanto, as matrizes do sistema (1.5) podem ser escritas como

$$A(\alpha) = A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha), \quad B(\alpha) = B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha), \quad B_d(\alpha) = B_{d\ell}(\alpha) + \Delta B_{d\ell}(\alpha) \quad (1.8)$$

com

$$A_\ell(\alpha) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{E(\alpha_1)^j}{j!} T(\alpha_2)^j \quad (1.9)$$

$$B_\ell(\alpha) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{E(\alpha_1)^{j-1}}{j!} F_u(\alpha_1) \Upsilon(\alpha_2)^j \quad (1.10)$$

$$B_{d\ell}(\alpha) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{E(\alpha_1)^{i+j-1}}{i! j!} F_u(\alpha_1) \Upsilon(\alpha_2)^i \tau^j \quad (1.11)$$

e

$$\Delta A_\ell(\alpha) = e^{E(\alpha_1)T(\alpha_2)} - A_\ell(\alpha) \quad (1.12)$$

$$\Delta B_\ell(\alpha) = \left(\int_0^{\Upsilon(\alpha_2)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F_u(\alpha_1) - B_\ell(\alpha) \quad (1.13)$$

$$\Delta B_{d\ell}(\alpha) = e^{E(\alpha_1)\Upsilon(\alpha_2)} \left(\int_0^{\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F_u(\alpha_1) - B_{d\ell}(\alpha) \quad (1.14)$$

em que $\Delta A_\ell(\alpha)$, $\Delta B_\ell(\alpha)$ e $\Delta B_{d\ell}(\alpha)$ são os resíduos da expansão em série de Taylor de ordem ℓ .

Usando as definições relacionadas a N -uplas e séries multinomiais, apresentadas no Apêndice D, a matriz (1.9) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
A_\ell(\alpha) &= \mathbf{I} + T(\alpha_2)E(\alpha_1) + \frac{T(\alpha_2)^2}{2}E(\alpha_1)^2 + \dots + \frac{T(\alpha_2)^\ell}{\ell!}E(\alpha_1)^\ell \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^\ell \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^\ell \mathbf{I} + \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{\ell-1} \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^{\ell-1} T(\alpha_2)E(\alpha_1) + \dots + \frac{T(\alpha_2)^\ell}{\ell!}E(\alpha_1)^\ell \\
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbf{1})} \alpha^k \left(\frac{(\ell!)^2}{k!} \mathbf{I} + \dots + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-j)\mathbf{1}) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(j\mathbf{1}) \\ k - \hat{k} \succeq \tilde{k} \\ p \in \mathcal{R}(\tilde{k}_1)}} \frac{((\ell-j)!)^2}{\hat{k}! \tilde{k}_2!} T_{\tilde{k}_2} E_p + \dots + \sum_{p \in \mathcal{R}(k_1)} \frac{1}{k_2!} T_{k_2} E_p \right) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbf{1})} \alpha^k \left(\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-j)\mathbf{1}) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(j\mathbf{1}) \\ k - \hat{k} \succeq \tilde{k} \\ p \in \mathcal{R}(\tilde{k}_1)}} \frac{((\ell-j)!)^2}{\hat{k}! \tilde{k}_2!} T_{\tilde{k}_2} E_p \right) \\
&\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbf{1})} \alpha^k A_k = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} A_{k_1 k_2}, \tag{1.15}
\end{aligned}$$

a matriz (1.10) também pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
B_\ell(\alpha) &= \Upsilon(\alpha_2)F_u(\alpha_1) + \frac{\Upsilon(\alpha_2)^2}{2}E(\alpha_1)F_u(\alpha_1) + \dots + \frac{\Upsilon(\alpha_2)^\ell}{\ell!}E(\alpha_1)^{\ell-1}F_u(\alpha_1) \\
&= \sum_{s=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{\ell-s} \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^{\ell-s} \frac{\Upsilon(\alpha_2)^s}{s!}E(\alpha_1)^{s-1}F_u(\alpha_1) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbf{1})} \alpha^k \left(\sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-1)\mathbf{1}) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_{1i} - \hat{k}_{1i} > 0 \\ j \in \{1, 2\} \\ k_{2j} - \hat{k}_{2j} > 0}} \frac{((\ell-1)!)^2}{\hat{k}!} \Upsilon_j F_{ui} + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-2)\mathbf{1}) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_1 - \hat{k}_1 - e_i - e_j \succeq 0}} \frac{((\ell-2)!)^2}{\hat{k}!(k_2 - \hat{k}_2)!} \right. \\
&\quad \times \Upsilon_{k_2 - \hat{k}_2} E_i F_{uj} + \dots + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-j)\mathbf{1}) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_1 - \hat{k}_1 - e_i \succeq 0}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(j\mathbf{1}) \\ k - \hat{k} \succeq \tilde{k} \\ p \in \mathcal{R}(\tilde{k}_1 - e_i)}} \frac{((\ell-j)!)^2}{\hat{k}! \tilde{k}_2!} \Upsilon_{\tilde{k}_2} E_p F_{ui} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} & + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_{1i} > 0}} \sum_{\substack{p \in \mathcal{R}(k_1 - e_i) \\ k \succeq \hat{k}}} \frac{1}{k_2!} \Upsilon_{k_2} E_p F_{ui} \end{aligned} \right) \\
& = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbf{1})} \alpha^k \left(\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-j)\mathbf{1}) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_1 - \hat{k}_1 - e_i \succeq 0}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(j\mathbf{1}) \\ k - \hat{k} \succeq \tilde{k} \\ p \in \mathcal{R}(\tilde{k}_1 - e_i)}} \frac{((\ell-j)!)^2}{\hat{k}! \tilde{k}_2!} \Upsilon_{\tilde{k}_2} E_p F_{ui} \right) \\
& \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbf{1})} \alpha^k B_k = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} B_{k_1 k_2}, \tag{1.16}
\end{aligned}$$

e, finalmente, reescreve-se (1.11) como

$$\begin{aligned}
B_{d\ell}(\alpha) &= \left(\mathbf{I} + \Upsilon(\alpha_2) E(\alpha_1) + \dots + \frac{\Upsilon(\alpha_2)^\ell}{\ell!} E(\alpha_1)^\ell \right) \\
&\quad \times \left(\tau F_u(\alpha_1) + \frac{\tau^2}{2} E(\alpha_1) F_u(\alpha_1) + \dots + \frac{\tau^\ell}{\ell!} E(\alpha_1)^{\ell-1} F_u(\alpha_1) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{2\ell-s-q} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_{2j} \right)^{\ell-s} \frac{\tau^q}{s! q!} \Upsilon(\alpha_2)^s E(\alpha_1)^{s+q-1} F_u(\alpha_1) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k \left(\sum_{s=0}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} \frac{\tau^q}{s! q!} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell-s-q) \times \mathcal{K}_2(\ell-s) \\ k \succeq \hat{k}}} \right. \\
&\quad \times \left. \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_1 - \hat{k}_1 - e_i \succeq 0}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(s+q) \times \mathcal{K}_2(s) \\ k - \hat{k} \succeq \tilde{k} \\ p \in \mathcal{R}(\tilde{k}_1 - e_i)}} \frac{(2\ell-s-q)!(\ell-s)!s!}{\hat{k}! \tilde{k}_2!} \Upsilon_{\tilde{k}_2} E_p F_{ui} \right) \\
&\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k B_{dk} = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} B_{dk_1 k_2}, \tag{1.17}
\end{aligned}$$

em que A_k , B_k e B_{dk} são os coeficientes matriciais do sistema polinomial discretizado $A_\ell(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e $B_{d\ell}(\alpha)$, respectivamente.

Essa metodologia provê um modelo que é uma aproximação de grau ℓ para o modelo discretizado descrito por (1.5) e (1.6). A fim de que os termos negligenciados na expansão em séries sejam considerados nas condições, limitantes δ_A , δ_B e δ_{B_d} para a norma dos termos incertos dados por (1.12)-(1.14) podem ser definidos, respectivamente, como

$$\delta_A = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta A_\ell(\alpha)\|, \quad \delta_B = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta B_\ell(\alpha)\|, \quad \delta_{B_d} = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta B_{d\ell}(\alpha)\|. \tag{1.18}$$

O cômputo dos valores exatos de δ_A , δ_B e δ_{B_d} é uma tarefa difícil. No entanto, limitantes superiores podem ser computados, por exemplo, utilizando métodos de análise intervalar (OPPENHEIMER; MICHEL, 1988; ALTHOFF *et al.*, 2007), mas as estimativas são em geral muito conservadoras. Neste trabalho, aproximações internas para os limitantes foram computadas realizando uma busca em uma malha fina de valores de $\alpha \in \Lambda_N$. Para os exemplos considerados neste trabalho, estimativas mais próximas dos valores exatos foram obtidas fazendo a malha de valores cada vez mais densa dentro do domínio Λ_N . Tal procedimento aumenta o esforço computacional, mas todos os cálculos são feitos *off-line*.

O principal motivo de se propor um método genérico de discretização de sistemas incertos deve-se ao fato que aproximações de primeira ordem, utilizadas em muitos trabalhos da literatura, são muitas vezes incapazes de reproduzir satisfatoriamente o comportamento do sistema incerto contínuo original. Esse aspecto torna-se mais evidente quando o período de amostragem aumenta. Como exemplo, considere o sistema incerto contínuo e estável $\dot{x}(t) = E(\alpha_1)x(t)$ com três vértices dados por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 4.0 & 3.0 \\ -8.6 & -4.2 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -12.1 & 2.3 \\ -3.6 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} -6.1 & 4.7 \\ -20.9 & 5.9 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Na Figura 2, ilustra-se que o aumento do grau ℓ da aproximação do modelo discretizado, $x(k+1) = A_\ell(\alpha)x(k)$, produz trajetórias do sistema discreto cada vez mais próximas das trajetórias do sistema contínuo original. Note que para maiores valores da aproximação de Taylor, o valor de δ_A que limita o resíduo $\Delta A_\ell(\alpha)$ da expansão em série de Taylor de ordem ℓ reduz-se como mostrado a seguir:

$$\delta_{A_{\ell=1}} \cong 5.3601, \quad \delta_{A_{\ell=2}} \cong 4.9243, \quad \delta_{A_{\ell=3}} \cong 3.7013.$$

Para as simulações, escolheu-se um $\alpha_1 = (0.5998, 0.3665, 0.0337)$ arbitrário, com $x_0 = [1 \ -2]'$ e um período de amostragem $T(\alpha_2) = 0.1\alpha_{21} + 0.3\alpha_{22}$ s.

1.3.2 Estabilização de Sistemas Discretizados com Período de Amostragem Maior do que o Atraso Induzido pela rede

Considere novamente o sistema discretizado (1.5), para $k \in \mathbb{N}$,

$$x((k+1)T(\alpha_2)) = (A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha))x(kT(\alpha_2)) + (B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha))u(kT(\alpha_2)) \\ + (B_{d\ell}(\alpha) + \Delta B_{d\ell}(\alpha))u((k-1)T(\alpha_2)), \quad (1.20)$$

no qual as parcelas relacionadas à expansão em série de Taylor e ao erro de aproximação das matrizes incertas são explicitadas, empregando (1.8). O sistema (1.20) pode ser reescrito como o seguinte sistema aumentado

$$z((k+1)T(\alpha_2)) = (\hat{A}_\ell(\alpha) + \Delta \hat{A}_\ell(\alpha))z(kT(\alpha_2)) + (\hat{B}_\ell(\alpha) + \Delta \hat{B}_\ell(\alpha))u(kT(\alpha_2)) \quad (1.21)$$

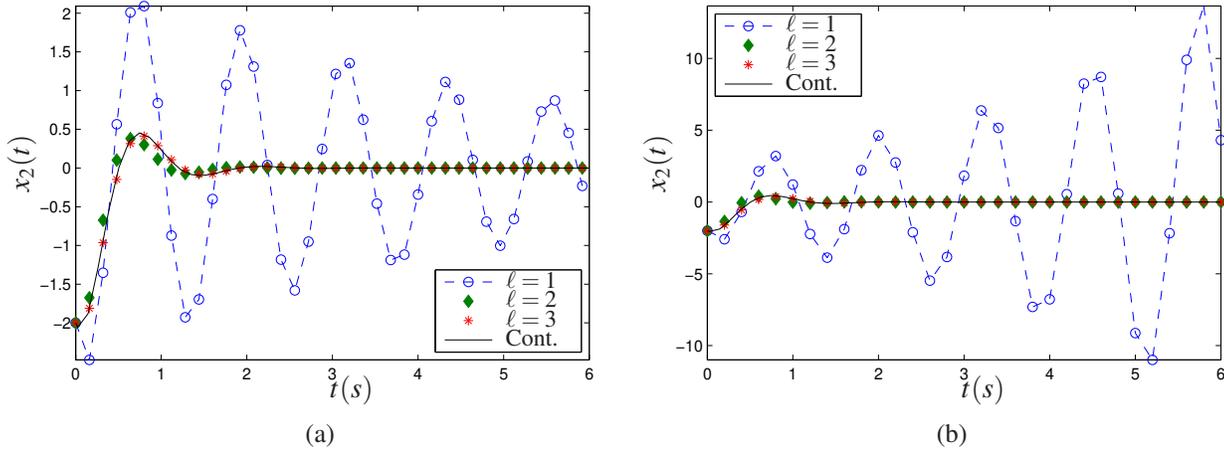


Figura 2: Segundo estado do sistema $\dot{x}(t) = E(\alpha_1)x(t)$ (linha contínua), com os vértices de $E(\alpha_1)$ dados em (1.19), e do sistema discretizado para um período de amostragem incerto $T(\alpha_2) = 0.1\alpha_{21} + 0.3\alpha_{22}$ s com $\alpha_1 = (0.5998, 0.3665, 0.0337)$ e $x_0 = [1 \ -2]'$ (apenas para efeito de visualização, um linha tracejada foi introduzida para o caso $\ell = 1$, com as escolhas (a) $\alpha_2 = (0.7, 0.3)$ e (b) $\alpha_2 = (0.5, 0.5)$).

em que

$$z(kT(\alpha_2)) = \begin{bmatrix} x(kT(\alpha_2)) \\ u((k-1)T(\alpha_2)) \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} A_\ell(\alpha) & B_{d\ell}(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} B_\ell(\alpha) \\ I \end{bmatrix},$$

$$\Delta\hat{A}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha) & \Delta B_{d\ell}(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\hat{B}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} \Delta B_\ell(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Estimativas para os limitantes superiores de $\|\Delta\hat{A}_\ell(\alpha)\|$ e $\|\Delta\hat{B}_\ell(\alpha)\|$ podem ser computadas, respectivamente, como

$$\delta_{\hat{A}} = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta\hat{A}_\ell(\alpha)\|, \quad \delta_{\hat{B}} = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta\hat{B}_\ell(\alpha)\|. \quad (1.22)$$

Como os elementos $A_\ell(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e $B_{d\ell}(\alpha)$, que compõem as matrizes $\hat{A}_\ell(\alpha)$ e $\hat{B}_\ell(\alpha)$, possuem graus diferentes em α , torna-se necessário empregar um procedimento de homogeneização, para que todos os termos apresentem os mesmos graus de dependência nos parâmetros incertos em cada simplex unitário, como mostrado a seguir.

$$\hat{A}_\ell(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k \hat{A}_k = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k \begin{bmatrix} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(0) \\ k \geq \bar{k}}} \frac{\ell!}{\bar{k}!} A_{k-\bar{k}} & B_{dk} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$\hat{B}_\ell(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k \hat{B}_k = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k \begin{bmatrix} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(0) \\ k \geq \bar{k}}} \frac{\ell!}{\bar{k}!} B_{k-\bar{k}} \\ \frac{(2\ell)! \ell!}{k!} I \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Definindo a lei de controle por realimentação de estados

$$u(kT(\alpha_2)) = Kz(kT(\alpha_2)) = \begin{bmatrix} K_x & K_d \end{bmatrix} \left[x(kT(\alpha_2))' \quad u((k-1)T(\alpha_2))' \right]' \quad (1.25)$$

pode-se enunciar o seguinte teorema para a estabilização dos sistemas (1.20), (1.21) e, consequentemente, (1.1a) com $w(t) = 0$.

Teorema 1.1. *Se existirem matrizes simétricas $W_k \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$, variáveis escalares $\lambda_{\hat{A}}$ e $\lambda_{\hat{B}}$, graus $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{N}^2$, um grau de relaxação de Pólya $d \in \mathbb{N}$ e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as seguintes LMIs sejam asseguradas*

$$S = \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_N(\mathbb{1}d) \\ k \geq \bar{k}}} \frac{d!}{\bar{k}!} W_{k-\bar{k}} > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g + \mathbb{1}d) \quad (1.26)$$

$$M_1 + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(w-h) \\ k \geq \hat{k}}} M_2 + \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{K}_N(w-g) \\ k \geq \check{k}}} M_3 < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(w) \quad (1.27)$$

em que¹

$$M_1 = \frac{w!}{k!} \begin{bmatrix} \Theta & * & * & * \\ -\xi G & -G - G' & * & * \\ \xi Z & Z & -\lambda_{\hat{B}} I & * \\ \xi G & G & 0 & -\lambda_{\hat{A}} I \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{(w-h)!}{\hat{k}!} \begin{bmatrix} \xi \left(\bar{A}_{k-\hat{k}} G + G' \bar{A}'_{k-\hat{k}} \right) & * & * & * \\ G' \bar{A}'_{k-\hat{k}} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \frac{(w-g)!}{\check{k}!} \text{diag} \left(-W_{k-\check{k}}, W_{k-\check{k}}, 0, 0 \right)$$

com $\Theta = (\lambda_{\hat{A}} \delta_{\hat{A}}^2 + \lambda_{\hat{B}} \delta_{\hat{B}}^2) I$, $\bar{A}_k = \hat{A}_k + \hat{B}_k Z G^{-1}$, \hat{A}_k e \hat{B}_k sendo os coeficientes das matrizes $\hat{A}_\ell(\alpha)$ e $\hat{B}_\ell(\alpha)$, respectivamente, com grau de aproximação $\ell \in \mathbb{N}$, $h = (2\ell, \ell)$, $w = \max\{g, h\} + \mathbb{1}d$, $\delta_{\hat{A}}$ e $\delta_{\hat{B}}$ dados por (1.22), então a lei de controle por realimentação de estados (1.25) com $K = ZG^{-1}$ estabiliza robustamente os sistemas (1.20), (1.21) e, consequentemente, (1.1a) com $w(t) = 0$.

Prova: Primeiro, note que $\left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^d \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^d = 1$ para todo $d \in \mathbb{N}$. Portanto, a matriz $W(\alpha)$ pode ser reescrita como

$$\left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^d \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^d W(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g + \mathbb{1}d)} \alpha^k S. \quad (1.28)$$

¹O símbolo $*$ representa um bloco simétrico na LMI.

Assim, se $S > 0$, $k \in \mathcal{K}_N(g+1d)$, então $W(\alpha) > 0$ verifica-se $\forall \alpha \in \Lambda_N$. Em seguida, multiplicando (1.27) por α^k , somando $\forall k \in \mathcal{K}_N(w)$ e definindo

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag} \left(\Theta - W(\alpha), W(\alpha), -\lambda_{\hat{A}}\mathbf{I}, -\lambda_{\hat{B}}\mathbf{I} \right), \\ U &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha)' & -\mathbf{I} & K' & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ V &= \begin{bmatrix} \xi\mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

obtém-se

$$Q + U'GV + V'G'U < 0 \quad (1.29)$$

em que $\bar{A}(\alpha) = \hat{A}_\ell(\alpha) + \hat{B}_\ell(\alpha)ZG^{-1}$. Escolhendo as seguintes bases para os espaços nulos de U e V

$$N_U = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \bar{A}(\alpha)' & K' & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad N_V = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ -\xi\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

verifica-se que (1.29) é equivalente, pelo lema da projeção (Lema C.2), a

$$N_V'QN_V = \text{diag} \left(\Theta - W(\alpha) + \xi^2W(\alpha), -\lambda_{\hat{A}}\mathbf{I} \right)$$

que provê os limitantes para o parâmetro escalar ξ ,

$$-(1 - \xi^2)W(\alpha) < (\lambda_{\hat{A}}\delta_{\hat{A}}^2 + \lambda_{\hat{B}}\delta_{\hat{B}}^2)\mathbf{I} \Leftrightarrow (1 - \xi^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < \xi < 1. \quad (1.30)$$

Usando a segunda condição do lema da projeção (Lema C.2), $N_U'QN_U < 0$, e aplicando o complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha) + \Theta & * & * & * \\ W(\alpha)\bar{A}(\alpha)' & -W(\alpha) & * & * \\ 0 & KW(\alpha) & -\lambda_{\hat{B}}\mathbf{I} & * \\ 0 & W(\alpha) & 0 & -\lambda_{\hat{A}}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.31)$$

que é equivalente a (1.29). Substituindo $\bar{A}(\alpha)$ por $\hat{A}_\ell(\alpha) + \hat{B}_\ell(\alpha)K$ em (1.31) e novamente aplicando o complemento de Schur, produz-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W(\alpha) - \lambda_{\hat{A}}\delta_{\hat{A}}^2\mathbf{I} & * & * \\ \Psi(\alpha) & W(\alpha) & * \\ 0 & W(\alpha)' & \lambda_{\hat{A}}\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{M_b} - \lambda_{\hat{B}}\text{diag} \left(\delta_{\hat{B}}^2\mathbf{I}, 0, 0 \right) - \lambda_{\hat{B}}^{-1}\text{diag} \left(0, W(\alpha)K'KW(\alpha), 0 \right) > 0$$

com $\Psi(\alpha) = W(\alpha)\hat{A}_\ell(\alpha)' + W(\alpha)K'\hat{B}_\ell(\alpha)'$. Denotando o lado esquerdo da desigualdade acima por \mathbb{M}_1 e sabendo que $\Delta\hat{B}_\ell(\alpha)\Delta\hat{B}_\ell(\alpha)' \leq \delta_B^2 I$, obtém-se

$$\underbrace{M_b - \lambda_{\hat{B}}MM' - \lambda_{\hat{B}}^{-1}N'N}_{\mathbb{M}_2} > \mathbb{M}_1 > 0$$

com $M = \begin{bmatrix} \Delta\hat{B}_\ell(\alpha)' & 0 & 0 \end{bmatrix}'$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & -W(\alpha)K' & 0 \end{bmatrix}'$. A seguir, usando o Lema C.1, obtém-se

$$\underbrace{M_b - MN - N'M'}_{\mathbb{M}_3} \geq \mathbb{M}_2 \geq \mathbb{M}_1 > 0$$

ou

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W(\alpha) - \lambda_A \delta_A^2 I & * & * \\ \Psi(\alpha) + W(\alpha)K'\Delta\hat{B}_\ell(\alpha)' & W(\alpha) & * \\ 0 & W(\alpha) & \lambda_A I \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}_3} \geq \mathbb{M}_2 > 0.$$

Repetindo o mesmo procedimento (primeiro aplicando o complemento de Schur e em seguida o Lema C.1), produz-se

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & * \\ W(\alpha) (\hat{A}(\alpha) + \hat{B}(\alpha)K)' & W(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (1.32)$$

com $\hat{A}(\alpha) = \hat{A}_\ell(\alpha) + \Delta\hat{A}_\ell(\alpha)$ e $\hat{B}(\alpha) = \hat{B}_\ell(\alpha) + \Delta\hat{B}_\ell(\alpha)$, que certifica a estabilidade robusta em malha fechada dos sistemas (1.20) e (1.21).

Embora a estabilizabilidade de um sistema discretizado incerto não implique, no caso geral, na estabilizabilidade do sistema contínuo incerto original, na abordagem proposta neste trabalho a lei de controle de realimentação de estados (1.25) também garante a estabilidade do sistema contínuo incerto (1.1a), com $w(t) = 0$, em malha fechada, se o erro de aproximação do procedimento de discretização for levado em consideração. Esse fato é demonstrado no Apêndice A. \square

Observação 1.1. Note que $\xi \in (-1, 1)$ representa um grau de liberdade a ser explorado na busca de uma solução factível. Por exemplo, pode-se realizar uma busca linear em ξ ou, simplesmente, testar um conjunto de valores pré-estabelecidos. Uma escolha particular que mostrou-se apropriada nos exemplos testados é $\xi = 0$. Tal opção satisfaz a restrição (1.30), isto é $\xi \in (-1, 1)$, além de simplificar alguns termos das condições (1.27). Note ainda que, uma vez que o parâmetro escalar ξ é fixado, as condições do Teorema 1.1 deixam de ser desigualdades matriciais bilineares (BMIs, do inglês bilinear matrix inequalities (BOYD et al., 1994)) e tornam-se LMIs. Portanto, testar as condições para diversos valores de ξ representa um grau extra de liberdade na redução do conservadorismo (ao preço de um maior esforço computacional).

Embora o Teorema 1.1 trate de sistemas discretizados com taxas de amostragem incertas e atraso induzido pela rede, as condições propostas podem ser especializadas para prover um ganho de realimentação de estados para sistemas incertos amostrados com período precisamente conhecido e sem atraso, como apresentado no seguinte corolário.

Corolário 1.1. *Se existirem matrizes simétricas $W_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, variáveis escalares $\lambda_{\hat{A}}$ e $\lambda_{\hat{B}}$, graus $g \in \mathbb{N}$ e de relaxação de Pólya $d \in \mathbb{N}$, e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que (1.26) e (1.27) se verificam, com $\Theta = (\lambda_{\hat{A}}\delta_A^2 + \lambda_{\hat{B}}\delta_B^2)I$, $\bar{A}_k = A_k + B_k Z G^{-1}$, A_k e B_k sendo os coeficientes matriciais de $A_\ell(\alpha)$ e $B_\ell(\alpha)$, respectivamente, dados por (1.15) e (1.16) com um período de amostragem constante ($T(\alpha_2) = T$), atraso nulo ($\Upsilon(\alpha_2) = T$) e um grau de aproximação da série de Taylor $\ell \in \mathbb{N}$, $w = \max\{g, \ell\} + d$, com δ_A e δ_B dados por (1.18), então a lei de controle por realimentação de estados*

$$u(kT) = ZG^{-1}x(kT)$$

estabiliza robustamente o sistema

$$x((k+1)T) = (A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha))x(kT) + (B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha))u(kT)$$

e, conseqüentemente, o sistema contínuo

$$\dot{x}(t) = E(\alpha_1)x(t) + F(\alpha_1)u(t).$$

Observação 1.2. *A hipótese de que o período de amostragem seja invariante no tempo pode ser restritiva no contexto de NCS. Como discutido em (MONTESTRUQUE; ANTSAKLIS, 2004) e (VELASCO et al., 2005), o período de amostragem pode variar por diferentes razões, por exemplo, devido à alocação dinâmica da largura de banda e política de escalonamento. As condições do Teorema 1.1 podem ser adaptadas para tratar este caso específico, bastando impor $g_2 = 0$, o que significa permitir que $T(\alpha_2(t))$ varie arbitrariamente no intervalo dado. Um outra alternativa seria adotar uma estratégia menos conservadora para variações pequenas, seguindo as linhas propostas em (BORGES et al., 2010), em que uma matriz de Lyapunov dependente de $\alpha_2(t)$ é utilizada e limitantes para as taxas de variação de $\alpha_2(t)$ são considerados.*

1.3.2.1 Exemplos de Estabilização para Sistemas Discretizados com Taxas de Amostragem Incertas e Atraso

Exemplo 1.1. Considere o sistema massa-mola contínuo dado em (IWASAKI, 1996)

$$\dot{x}(t) = E(\beta)x(t) + F_u u(t - \tau) \tag{1.33}$$

em que $\beta \in [3.6, 5.4]$ e

$$E(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta/2 & \beta/2 & 0 & 0 \\ \beta/3 & -\beta/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ao avaliar a matriz dinâmica do sistema nos valores extremos do parâmetro incerto β , obtém-se um polítopo de dois vértices. O objetivo é projetar um controlador digital robusto por realimentação de estados utilizando um período de amostragem incerto pertencente ao intervalo $[0.4, 0.6]$, isto é, $T(\alpha_2) = 0.4\alpha_{21} + 0.6\alpha_{22}$ s, $\alpha_2 \in \Lambda_2$, que assegure a estabilidade do sistema contínuo incerto com um atraso induzido pela rede $\tau = 0.2$ s.

Neste ponto, faz-se necessário destacar o papel crucial desempenhado pelos limitantes dos erros de discretização na metodologia proposta. Geralmente, o procedimento é iniciado empregando baixos graus de aproximação na série de Taylor. Contudo, nesses casos, os valores de $\delta_{\hat{A}}$ e $\delta_{\hat{B}}$ são geralmente altos e a condição de síntese de controladores por realimentação de estados do Teorema 1.1 não provê um ganho estabilizante. Ao aumentar o grau ℓ da expansão por série de Taylor, os limitantes são reduzidos, como pode ser observado na Tabela 1. Tal melhoria é alcançada ao preço da elevação do esforço computacional, uma vez que o uso de maiores graus ℓ implica em um aumento no número de monômios (associado aos coeficientes matriciais) do modelo polinomial discretizado. O aumento de ℓ implica diretamente em um aumento do tempo de processamento do procedimento de discretização e no tamanho (i.e., o número de variáveis e de linhas de LMIs) das condições, como mostrado na Tabela 1. O esforço computacional também é afetado pelo número de vértices do sistema original e do grau escolhido para as matrizes da função de Lyapunov nas condições.

Tabela 1: Limitantes para os erros de discretização ($\delta_{\hat{A}}$ e $\delta_{\hat{B}}$) e tempos de processamento (em segundos) do procedimento de discretização para o Exemplo 1.1 com diferentes graus ℓ da expansão em série de Taylor.

ℓ	1	2	3	4	5
$\delta_{\hat{A}}$	1.1004	0.6986	0.1340	0.0584	0.0069
$\delta_{\hat{B}}$	0.0421	0.0168	0.0018	0.0006	0.0004
Tempo (s)	0.10	0.80	4.25	17.49	64.88

Neste exemplo, apenas para $\ell \geq 5$ os valores de $\delta_{\hat{A}}$ e $\delta_{\hat{B}}$ são suficientemente pequenos tais que o Teorema 1.1 provê uma solução factível. Portanto, aplicando o Teorema 1.1 com $\ell =$

5, $g = (1, 1)$, $d = 0$, $\xi = 0$, um ganho robusto por realimentação de estados que estabiliza o sistema contínuo é encontrado. Na Figura 3a, apresentam-se as respostas temporais (realizadas em Simulink Matlab) do sistema em malha fechada para $\alpha_1 = (0.4, 0.6)$ e $\alpha_2 = (0.2, 0.8)$, representando $T = 0.56$ s, e uma condição inicial $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]^T$ usando o controlador $K = [0.0890 \ -1.2375 \ -2.3672 \ -1.7851 \ -0.2448]$.

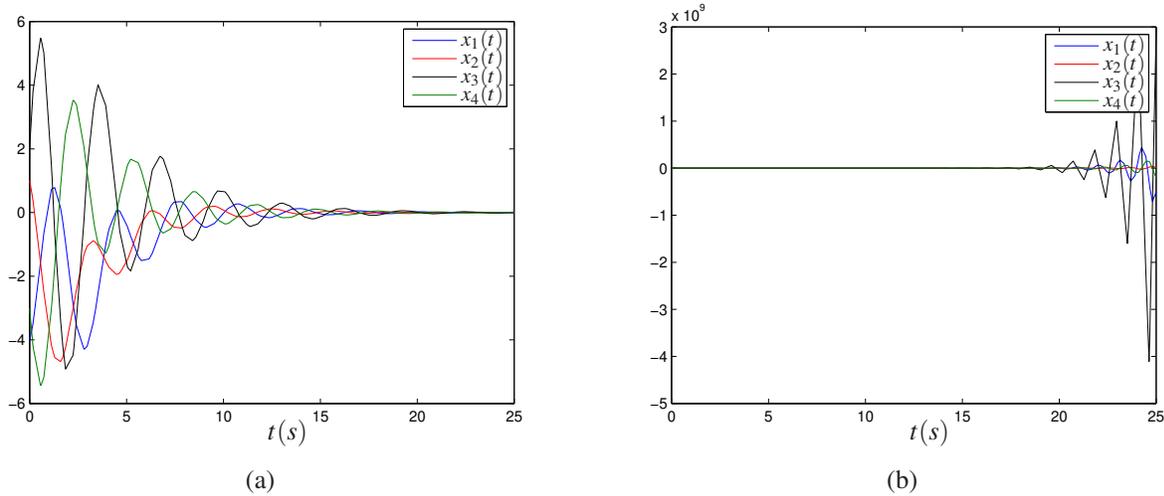


Figura 3: Estados do sistema do Exemplo 1.1 para $\alpha_1 = (0.4, 0.6)$ e $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]^T$ simulados com $\alpha_2 = (0.2, 0.8)$, representando $T = 0.56$ s, usando: (a) o controlador digital por realimentação de estados obtido por meio do Teorema 1.1, com $g = (1, 1)$, $d = 0$, $\xi = 0$, $\ell = 5$, $T \in [0.4, 0.6]$, $\delta_{\hat{A}} \cong 0.0069$, $\delta_{\hat{B}} \cong 0.0005$, e $\tau = 0.2$ s, e; (b) o ganho obtido por (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999, Teorema 3), com $\tau = 0$ s e uma aproximação de primeira ordem ($\ell = 1$) de Taylor com $T = 0.4$ s.

Ao tratar sistemas politópicos contínuos controlados por computadores digitais, é comum observar que a maioria das técnicas existentes da literatura adota o procedimento de discretizar os vértices do sistema usando um período de amostragem fixo e uma aproximação de primeira ordem da série de Taylor que resulta em outro politopo (i.e., um sistema incerto com dependência afim nos parâmetros) no domínio discreto. Em seguida, uma condição para projeto de controladores discretos é aplicada, como pode ser visto nos exemplos apresentados em (KOTHARE *et al.*, 1996; LEE; WON, 2006; WADA *et al.*, 2006). Contudo, essa estratégia pode prover ganhos que não estabilizam os sistemas contínuos, uma vez que o erro de discretização não é considerado.

Para ilustrar esse importante fato, considere uma versão simplificada do sistema apresentado em (1.33) com $\tau = 0$ s. Realizando uma discretização de primeira ordem usando um período de amostragem constante $T = 0.4$ s (valor inferior do intervalo de amostragem, representando a escolha $\alpha_2 = (1, 0)$) e aplicando uma condição de projeto para sistemas politópicos discretos que não leva em conta o erro de aproximação, como por exemplo (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999, Teorema 3),

o seguinte ganho robusto por realimentação de estados é determinado

$$K = \begin{bmatrix} -5.2112 & 2.5893 & -8.4170 & 0.1229 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Embora o controlador obtido estabilize o sistema contínuo amostrado com $T = 0.4$ s, a estabilidade em malha fechada do sistema contínuo não pode ser garantida para todos os valores do período de amostragem no intervalo $T \in [0.4, 0.6]$ s. Na Figura 3b, apresenta-se uma simulação temporal (realizada no Simulink Matlab) na qual assume-se um período de amostragem T igual a 0.56 s, com os mesmos valores usados anteriormente para os parâmetros, $\alpha_1 = (0.4, 0.6)$, $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]'$, e o controlador (1.34). Como pode ser notado, o comportamento do sistema em malha fechada é claramente instável. Similarmente, mesmo que se utilize o período máximo de amostragem $T = 0.6$ s no procedimento de discretização e aplique-se novamente a condição de (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999), o controlador projetado não assegura a estabilidade em malha fechada para todo $T \in [0.4, 0.6]$ s. Nesse caso específico, mesmo para $T = 0.6$ s o controlador leva o sistema (1.33) à instabilidade.

Exemplo 1.2. Considere o sistema politópico contínuo (1.1a), com $F_w(\alpha_1) = 0$ e um atraso induzido pela rede igual a $\tau = 0.05$ s, cujos vértices das matrizes do sistema são

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -5.0 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} a & 1.0 \\ -1.0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad F_{u_1} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}, \quad F_{u_2} = \begin{bmatrix} b \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

para constantes a e b dadas.

O sistema é amostrado com um período T pertencente ao intervalo $[0.1, 0.2]$ s, isto é, $T(\alpha_2) = 0.1\alpha_{21} + 0.2\alpha_{22}$ s, $\alpha_2 \in \Lambda_2$, utilizando aproximações de 1^a a 5^a ordem na série de Taylor, ou seja, foram aplicados $\ell = 1, \dots, 5$ em (1.15)-(1.17). O objetivo deste exemplo é mostrar que, com o aumento do grau ℓ combinado com uma busca linear no parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$ no Teorema 1.1, é possível reduzir o conservadorismo dos resultados em termos da estabilizabilidade de vários valores dos parâmetros (a, b) .

No primeiro teste, utilizou-se o Teorema 1.1 com $g = (1, 1)$, $d = 0$ e $\xi = 0$. Na Figura 4a, ilustram-se os resultados e permite-se concluir que é possível estabilizar um conjunto maior de sistemas contínuos aumentando o grau da aproximação ℓ . Uma segunda investigação considera um grau de discretização fixo ($\ell = 2$), $g = (1, 1)$, $d = 0$ e 19 valores igualmente espaçados no intervalo $[-0.9, 0.9]$ para o parâmetro escalar. Os resultados são ilustrados na Figura 4b, que mostra que uma maior gama de valores de a e b pode ser estabilizada por meio do emprego de uma busca no parâmetro escalar. O preço a ser pago é um aumento no esforço computacional, pois necessita-se testar valores distintos de ξ para um grau ℓ fixo.

Domínios maiores para os parâmetros a e b podem ser obtidos aumentando os graus parciais das matrizes associadas à função de Lyapunov no Teorema 1.1. Por exemplo, com $\ell = 2$, $\xi = 0$, $a =$

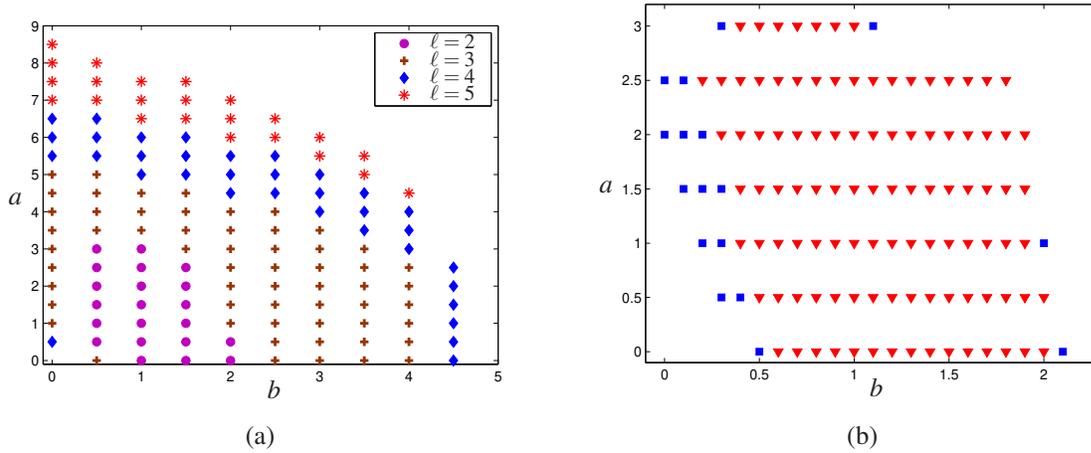


Figura 4: Região de estabilidade para o Exemplo 1.2 provida pelo Teorema 1.1 com $g = (1, 1)$, $d = 0$ e: (a) $\xi = 0$ com diferentes graus de aproximação (ℓ) da série de Taylor (os graus maiores também estabilizam os graus menores); (b) $\ell = 2$. Primeiro caso: $\xi = 0$ (■); segundo caso: $\xi \in [-0.9, 0.9]$ (■ e ▼).

1, $d = 0$ e $g = (0, 0)$, a região de estabilidade para b é $[0.7, 1.4]$. Também vale a pena salientar que a metodologia multi-simplex permite empregar diferentes graus para cada simplex, de forma que se g for escolhido igual a $(1, 0)$ o intervalo de estabilidade para b é $[0.5, 1.8]$. Considerando também grau um para o segundo simplex, isto é $g = (1, 1)$, o intervalo de b é estendido para $[0.4, 1.9]$ (veja Figura 4b).

1.3.3 Estabilização de Sistemas Discretizados com Período de Amostragem Menor do que o Atraso Induzido pela rede

Considere que o sistema (1.1a), com $F_w(\alpha_1)$ nula, seja amostrado com um período $T < \tau$. Seguindo a mesma linha de (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1984), o procedimento de discretização fornece o seguinte modelo discreto²

$$x((k+1)T) = A(\alpha)x(kT) + B(\alpha)u((k-\theta+1)T) + B_d(\alpha)u((k-\theta)T), \quad (1.36)$$

sendo que o parâmetro $\theta \in \mathbb{N}$ (associado aos instantes atrasados que são utilizadas na lei de controle) obedece às seguintes relações

$$\theta > 1, \quad \tau = (\theta - 1)T + \tau^*, \quad 0 < \tau^* \leq T, \quad (1.37)$$

em que τ^* representa o menor atraso que pode ser considerado dentro do intervalo de amostragem. Adicionalmente, as matrizes $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ e $B_d(\alpha)$ são dadas por (1.6) substituindo τ por τ^* .

²Por simplicidade, considera-se que o período de amostragem $T(\alpha_2)$ é constante, isto é, $T_1 = T_2 = T$ nas próximas subseções.

Para $k \in \mathbb{N}$, o sistema (1.36) pode ser reescrito como o seguinte modelo aumentado,

$$z((k+1)T) = \mathbb{A}(\alpha)z(kT) + \mathbb{B}v(kT) \quad (1.38)$$

em que $\mathbb{A}(\alpha) = \mathbb{A}_\ell(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)$, $v(kT) = u(kT)$,

$$z(kT) = \begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-\theta)T) \\ \vdots \\ u((k-2)T) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} A_\ell(\alpha) & B_{d\ell}(\alpha) & B_\ell(\alpha) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha) & \Delta B_{d\ell}(\alpha) & \Delta B_\ell(\alpha) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

e os termos $A_\ell(\alpha)$, $B_{d\ell}(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e θ são dados, respectivamente, por (1.15)-(1.17) e (1.37).

Nessas circunstâncias, são necessárias θn_u variáveis de estado extras, produzindo um vetor de estados $z(kT)$ composto pelo estado atual $x(kT)$ e pelas últimas θ entradas de controle. Além disso, o termo adicional $\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)$, que representa o erro residual de discretização, pode ser limitado por uma constante, $\|\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)\| \leq \delta$, sendo definida como

$$\delta = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)\|. \quad (1.39)$$

Como os elementos $A_\ell(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e $B_{d\ell}(\alpha)$, que compõem a matriz $\mathbb{A}_\ell(\alpha)$, possuem graus diferentes em α , realiza-se o seguinte procedimento de homogeneização.

$$\hat{\mathbb{A}}(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(2\ell)} \alpha^k \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11} & B_{dk} & \mathbb{A}_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(2\ell)} \alpha^k \mathbb{A}_k, \quad (1.40)$$

com

$$\mathbb{A}_{11} = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(\ell) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{\ell!}{\tilde{k}!} A_{k-\tilde{k}}, \quad \mathbb{A}_{13} = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(\ell) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{\ell!}{\tilde{k}!} B_{k-\tilde{k}}, \quad \mathbb{I} = \frac{(2\ell)!}{k!} I.$$

Definindo a lei de controle

$$u(kT) = Kz(kT) = \begin{bmatrix} K_x & K_\theta & \cdots & K_1 \end{bmatrix} z(kT) \quad (1.41)$$

pode-se enunciar o seguinte teorema para a estabilização dos sistemas (1.38), (1.36) e, consequentemente, de (1.1a) com $w(t) = 0$.

Teorema 1.2. *Se existirem matrizes simétricas W_k , $k \in \mathcal{K}_N(g)$, matrizes G e Z de dimensões compatíveis, um grau de relaxação de Pólya d , uma variável escalar λ e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{d!}{\tilde{k}!} W_{k-\tilde{k}} > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d) \quad (1.42)$$

$$M_1 + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(w-h) \\ k \geq \hat{k}}} M_2 + \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{K}_N(w-g) \\ k \geq \check{k}}} M_3 < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(w) \quad (1.43)$$

em que

$$M_1 = \frac{w!}{k!} \begin{bmatrix} \Phi & * & * \\ -\xi G + Z' \mathbb{B}' & -G - G' & * \\ \xi G & G & -\lambda I \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{(w-h)!}{\hat{k}!} \begin{bmatrix} \xi \left(\mathbb{A}_{k-\hat{k}} G + G' \mathbb{A}'_{k-\hat{k}} \right) & * & * \\ G' \mathbb{A}'_{k-\hat{k}} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \frac{(w-g)!}{\check{k}!} \text{diag} \left(-W_{k-\check{k}}, W_{k-\check{k}}, 0 \right)$$

com $\Phi = \lambda \delta^2 I + \xi (\mathbb{B}Z + Z' \mathbb{B}')$ e \mathbb{A}_k sendo o coeficiente matricial de $\hat{\mathbb{A}}(\alpha)$ com grau de aproximação $\ell \in \mathbb{N}$, $w = \max\{g, 2\ell\} + d$ e δ dado por (1.39), então a lei de controle por realimentação de estados (1.41) com $K = ZG^{-1}$ estabiliza robustamente o sistema (1.38), (1.36) e, consequentemente, (1.1a) com $w(t) = 0$.

Prova: A prova é similar à do Teorema 1.1 e, portanto, é omitida. \square

Observação 1.3. *Embora todo o desenvolvimento apresentado nesta subseção tenha sido feito para um período de amostragem T e uma atraso induzido pela rede τ constantes, as condições de estabilidade apresentadas no Teorema 1.2 podem ser adaptadas para tratar os casos em que esses parâmetros são incertos e podem ser escritos como uma combinação convexa de dois valores extremos, isto é, $T(\alpha_2) = \alpha_{21}T_1 + \alpha_{22}T_2$ e $\tau(\alpha_3) = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2$. Entretanto, torna-se necessário impor uma restrição adicional a (1.37) que é utilizada para computar τ^* , a saber,*

$$nT_2 < \tau(\alpha_3) < nT_2 + T_1, \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N}.$$

1.3.3.1 Exemplos de Estabilização para Sistemas Discretizados com Períodos de Amostragem Incertos Maiores do que o Atraso

Exemplo 1.3. Considere o sistema incerto contínuo massa-mola-amortecedor, com quatro vértices, inspirado no modelo apresentado em (IWASAKI, 1996),

$$\dot{x}(t) = E(k, b)x(t) + F_u u(t - \tau) \quad (1.44)$$

em que

$$E(k, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/2 & k/2 & -b/2 & b/2 \\ k/3 & -k/3 & b/3 & -b/3 \end{bmatrix}, \quad F_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \in [3, 6], \quad b \in [1, 2].$$

O objetivo neste exemplo é projetar um controlador digital robusto por realimentação de estados que assegure a estabilidade do sistema contínuo incerto, usando um período de amostragem $T = 0.5$ s com um atraso induzido pela rede $\tau = 1.1$ s.

Aplicando o procedimento de discretização com $\ell = 4$ obtém-se $\delta \cong 0.0223$ e, em seguida, utilizando o Teorema 1.2 com $\ell = 4$, $g = 1$, $d = 0$ e $\xi = 0$, produz-se o seguinte controlador

$$K = -[0.367 \ 0.652 \ 1.956 \ 2.976 \ 0.097 \ 0.457 \ 0.413]$$

que garante a estabilidade robusta do sistema contínuo. Como ilustração, na Figura 5a, apresentam-se as respostas temporais do sistema em malha fechada para $\alpha = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$ e uma condição inicial $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]'$ usando o controlador projetado.

Como discutido no início do capítulo, quando o atraso induzido pela rede não é considerado no projeto do controlador, o sistema pode ser levado à instabilidade. Para ilustrar este fato, considere que o controlador digital seja obtido pelo Corolário 1.1 (BRAGA *et al.*, 2013, Teorema 1), com $T = 0.5$ s, $\ell = 4$, $g = 1$, $d = 0$, que não leva em conta o atraso τ , embora também garanta a estabilidade do sistema contínuo incerto em malha fechada para sistemas sem atraso. Neste caso, ao aplicar o controlador projetado pelo Corolário 1.1, o sistema (1.44) torna-se instável, como pode ser observado pelas trajetórias dos estados apresentadas na Figura 5b, simuladas com os mesmos valores de α e x_0 utilizados anteriormente.

Exemplo 1.4. Considere o sistema politópico contínuo (1.1a), com um atraso induzido pela rede igual a $\tau = 0.23$ s e $w(t) = 0$, cujos vértices das matrizes dos sistema são dados em (1.35). O sistema é amostrado com um período $T = 0.10$ s utilizando aproximações de 2^a a 4^a ordem da expansão em série de Taylor. O objetivo desse exemplo é mostrar que o aumento do grau ℓ combinado com uma busca linear no parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$ no Teorema 1.2 são capazes de reduzir o conservadorismo dos resultados em termos da estabilizabilidade para faixas maiores dos parâmetros (a, b) .

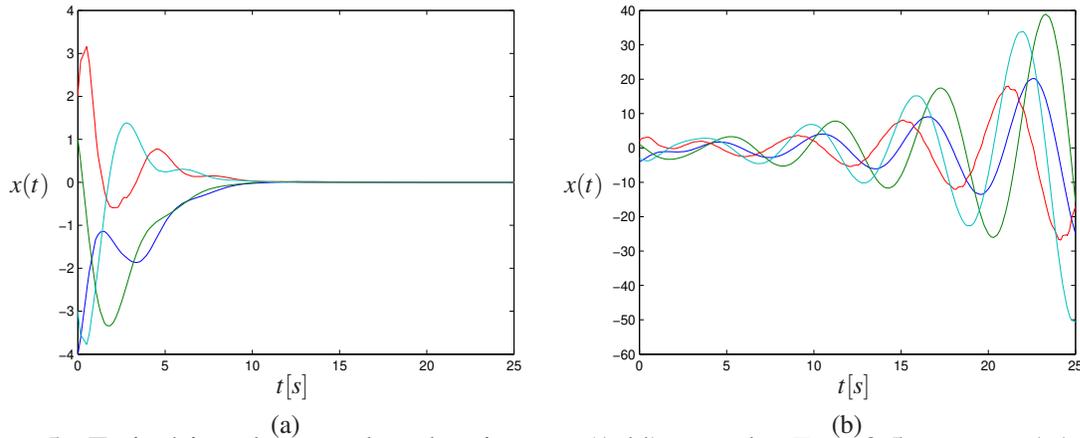


Figura 5: Trajetórias dos estados do sistema (1.44) usando $T = 0.5$ s, $\tau = 1.1$ s, $\alpha = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$, $x_0 = [-4 \ 1 \ 2 \ -3]'$, $\ell = 4$, $g = 1$, $d = 0$: (a) com ganho de realimentação fornecido pelo Teorema 1.2 com $\delta \cong 0.0223$; (b) com o controlador obtido pelo Corolário 1.1 (BRAGA *et al.*, 2013, Teorema 1) com $\delta_A \cong 0.0223$ e $\delta_B \cong 0.0015$.

No primeiro teste, utilizou-se o Teorema 1.2, com $g = 1$, $d = 0$ e $\xi = 0$ e os resultados são apresentados na Figura 6a. Como pode ser observado, o crescimento do grau da aproximação (ℓ) aumenta o tamanho do conjunto de sistemas contínuos estabilizados. No segundo caso, para um

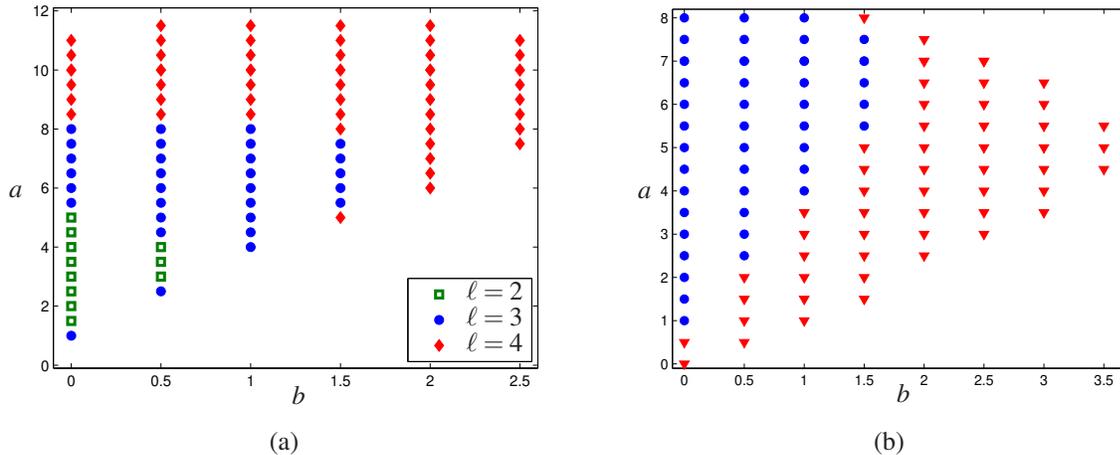


Figura 6: Região de estabilidade para o Exemplo 1.4 provida pelo Teorema 1.2 com $g = 1$, $d = 0$ e: (a) $\xi = 0$ com diferentes graus de aproximação (ℓ) da série de Taylor (os graus maiores também estabilizam os graus menores); (b) $\ell = 3$. Primeiro caso: $\xi = 0$ (\bullet); Segundo caso: $\xi \in [-0.9, 0.9]$ (\bullet e \blacktriangledown).

grau de discretização fixo ($\ell = 3$), $g = 1$ e $d = 0$, foram testados 19 valores igualmente espaçados no intervalo $[-0.9, 0.9]$ para o parâmetro escalar. Os resultados são ilustrados na Figura 6b, que

mostra que uma maior gama de valores de a e b pode ser estabilizada por meio do emprego de uma busca no parâmetro escalar. O preço a ser pago é um aumento do custo computacional, pois necessita-se testar valores distintos de ξ para um grau ℓ fixo.

Maiores domínios para os parâmetros a e b podem ser obtidos aumentando os graus parciais das matrizes de Lyapunov no Teorema 1.1. Por exemplo, fixando $b = 0$, $\ell = 2$, $\xi = 0$, $d = 0$ e $g = 0$, a região de estabilidade para a é $[2.5, 4.5]$. Entretanto, aumentando o grau da matriz de Lyapunov para $g = 1$, o intervalo de a compreende os valores $[1.5, 5.0]$ (veja Figura 6a).

1.4 Cômputo da norma \mathcal{H}_2

Considere o sistema contínuo linear e incerto (1.1), com $u(t) = 0$. Assuma que o sistema seja estável e a perturbação seja tal que $w(t) = e_i \delta(t)$, em que $e_i \in \mathbb{R}^{n_w}$, $i = 1, \dots, n_w$, é dado em (D.12). Denotando por $z_i(t)$ a trajetória de saída correspondente, a norma \mathcal{H}_2 para o sistema contínuo (1.1), com $u(t) = 0$, pode ser expressa para um $\alpha \in \Lambda_N$ fixo como

$$\|H(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n_w} \int_0^\infty z_i(t)' z_i(t) dt = \left\| G(\alpha) (sI - E(\alpha))^{-1} F_w(\alpha) \right\|_2^2. \quad (1.45)$$

O procedimento de discretização proposto provê o seguinte modelo discreto

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= A(\alpha)x(kT) + B_w(\alpha)w(kT) \\ z(kT) &= C(\alpha)x(kT) \end{aligned} \quad (1.46)$$

em que $A(\alpha)$, $B_w(\alpha)$ e $C(\alpha)$, $\alpha \in \Lambda_N$, são matrizes incertas dadas por

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= e^{E(\alpha)T}, \\ B_w(\alpha) &= F_w(\alpha), \\ C(\alpha)'C(\alpha) &= \int_0^T e^{E(\alpha)'s} G(\alpha)' G(\alpha) e^{E(\alpha)s} ds. \end{aligned} \quad (1.47)$$

A escolha das matrizes (1.47) para o sistema discreto é feita de forma a garantir que a norma \mathcal{H}_2 do sistema contínuo (1.1), com $u(t) = 0$, seja idêntica à norma \mathcal{H}_2 do sistema discreto (1.46), para um dado $\alpha \in \Lambda_N$. A obtenção das matrizes (1.47) segue as mesmas linhas apresentadas em (CHEN; FRANCIS, 1995; SOUZA *et al.*, 2013) para sistemas precisamente conhecidos. O desenvolvimento para o caso incerto é apresentado a seguir.

Partindo da função de transferência do sistema discreto, para um α fixo, tem-se

$$\begin{aligned}
\|H(z)\|_2^2 &= \left\| C(\alpha) (zI - A(\alpha))^{-1} B(\alpha) \right\|_2^2 \\
&= \text{Tr} \left(B_w(\alpha)' \sum_{k=0}^{\infty} (A(\alpha)')^k C(\alpha)' C(\alpha) A(\alpha)^k B_w(\alpha) \right) \\
&= \text{Tr} \left(F_w(\alpha)' \sum_{k=0}^{\infty} e^{E(\alpha)'kT} \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{E(\alpha)'(t-kT)} G(\alpha)' G(\alpha) e^{E(\alpha)(t-kT)} dt \right) e^{E(\alpha)kT} F_w(\alpha) \right) \\
&= \text{Tr} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} F_w(\alpha)' e^{E(\alpha)'t} G(\alpha)' G(\alpha) e^{E(\alpha)t} F_w(\alpha) dt \right) \\
&= \text{Tr} \left(\int_0^{\infty} F_w(\alpha)' e^{E(\alpha)'t} G(\alpha)' G(\alpha) e^{E(\alpha)t} F_w(\alpha) dt \right) \\
&= \left\| G(\alpha) (sI - E(\alpha))^{-1} F_w(\alpha) \right\|_2^2 = \|H(s)\|_2^2. \tag{1.48}
\end{aligned}$$

Analisando (1.47) percebe-se que o sistema discreto resultante tem a mesma matriz de entrada do modelo contínuo, $B_w(\alpha) = F_w(\alpha)$, e as matrizes $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ são polinômios homogêneos de grau ℓ em $\alpha \in \Lambda_N$ mais um termo limitado em norma.

As matrizes de (1.47) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha), \\
B_w(\alpha) &= F_w(\alpha), \\
C(\alpha)' C(\alpha) &= \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}_\ell(\alpha) + \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

com $A_\ell(\alpha)$ e $\Delta A_\ell(\alpha)$ dados, respectivamente, por (1.9) e (1.12),

$$\mathcal{C}_\ell(\alpha) = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} \frac{T^{s+q-1}}{s! q! (s+q-1)} (E(\alpha)')^{s-1} G(\alpha)' G(\alpha) (E(\alpha))^{q-1} \tag{1.50}$$

e

$$\Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha) = \int_0^T e^{E(\alpha)s} G(\alpha)' G(\alpha) e^{E(\alpha)s} ds - \mathcal{C}_\ell(\alpha), \tag{1.51}$$

sendo este último limitado por uma constante δ_C , computada como

$$\delta_C = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)\|. \tag{1.52}$$

Assim como feito anteriormente, a condição para o cômputo da norma \mathcal{H}_2 do sistema (1.46) requer a obtenção dos coeficientes matriciais A_k e \mathcal{C}_k do sistema polinomial discretizado $A_\ell(\alpha)$ e

$\mathcal{C}_\ell(\alpha)$. Enquanto os coeficientes matriciais de $A_\ell(\alpha)$ são dados em (1.15), a obtenção de \mathcal{C}_k é feita empregando as definições apresentadas no Apêndice D de tal maneira que (1.50) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\ell(\alpha) = & \sum_{k \in \mathcal{K}_N(2\ell)} \alpha^k \left(T \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(2\ell-2) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, N\} \\ k - \hat{k} - e_i - e_j \geq 0}} \frac{(2\ell-2)!}{\hat{k}!} G'_i G_j \right. \\
& + \dots + \frac{T^{s+q-1}}{s! q! (s+q-1)} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(2\ell-s-q) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, N\} \\ k - \hat{k} - e_i - e_j \geq 0}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_N(q-1) \\ r \in \mathcal{R}(k - \hat{k} - e_i - e_j - \bar{k}) \\ p \in \mathcal{R}(k - \hat{k} - e_i - e_j - r)}} \frac{(2\ell-q-s)!}{\hat{k}!} E'_r G'_i G_j E_p \\
& + \dots + \frac{T^{2\ell-1}}{\ell! \ell! (2\ell-1)} \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, N\} \\ k - e_i - e_j \geq 0}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_N(q-1) \\ r \in \mathcal{R}(k - e_i - e_j - \bar{k}) \\ p \in \mathcal{R}(k - e_i - e_j - r)}} E'_r G'_i G_j E_p \left. \right) \\
& \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_N(2\ell)} \alpha^k \mathcal{C}_k, \tag{1.53}
\end{aligned}$$

em que e_i e e_j são dados em (D.12).

Essa metodologia é uma aproximação de grau ℓ do modelo discretizado descrito por (1.46) e (1.47). Para um sistema precisamente conhecido, essa representação discreta, utilizando um grau ℓ suficientemente grande, recupera o índice de desempenho \mathcal{H}_2 apresentado em (SOUZA *et al.*, 2013).

Com base nessas considerações, pode-se enunciar o seguinte teorema para o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_2 de um sistema discreto com dependência polinomial nos parâmetros incertos e com incertezas limitadas em norma.

Teorema 1.3. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$, com $g \in \mathbb{N}$, variáveis escalares λ_A e λ_C , tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \geq \hat{k}}} \frac{d!}{\hat{k}!} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(1) \\ k \geq \hat{k} + \hat{k}}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_N(1) \\ k \geq \hat{k} + \hat{k} + \bar{k}}} \text{Tr} \left(B'_k P_{k - \hat{k} - \hat{k} - \bar{k}} B_{\bar{k}} \right) - \frac{g!}{(k - \hat{k} - \hat{k} - \bar{k})!} \mu^2 < 0,$$

$$\forall k \in \mathcal{K}_N(g+2+d) \tag{1.54}$$

$$M_1 + \sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_N(w-g) \\ k \geq \hat{k}}} M_2 + \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_N(w-2\ell) \\ k \geq \bar{k}}} M_3 + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(w-\ell-g) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{K}_N(g) \\ k \geq \hat{k} + \check{k}}} M_4 > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(w) \tag{1.55}$$

em que

$$M_1 = \frac{w!}{k!} \begin{bmatrix} -\left(\lambda_A \delta_A^2 + \frac{1}{4} \lambda_C \delta_C^2\right) I & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_A I & * \\ I & 0 & 0 & \lambda_C I \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{(w-g)!}{\hat{k}!} \begin{bmatrix} P_{k-\hat{k}} & * & * & * \\ 0 & P_{k-\hat{k}} & * & * \\ 0 & P_{k-\hat{k}} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \frac{(w-2\ell)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} -\mathcal{C}_{k-\tilde{k}} & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \frac{(w-\ell-g)!}{\hat{k}!} \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ P_k A_{k-\hat{k}-\tilde{k}} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com o modelo discretizado de grau de aproximação $\ell \in \mathbb{N}$, $w = \max\{2\ell, \ell + g\} + d$ e δ_A e δ_C dados por (1.18) e (1.52), então μ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema (1.46) e, conseqüentemente, para o sistema (1.1), com $u(t) = 0$.

Prova: Multiplicando (1.54) por α^k e somando $\forall k \in \mathcal{K}_N(g+2+d)$, obtém-se

$$\text{Tr} (B'(\alpha)P(\alpha)B(\alpha)) < \mu^2 \quad (1.56)$$

Similarmente, multiplicando (1.55) por α^k e somando $\forall k \in \mathcal{K}_N(w)$, (1.55) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \Xi(\alpha) & * & * & * \\ P(\alpha)A_\ell(\alpha) & P(\alpha) & * & * \\ 0 & P(\alpha) & \lambda_A I & * \\ I & 0 & 0 & \lambda_C I \end{bmatrix} > 0, \quad (1.57)$$

com $\Xi(\alpha) = P(\alpha) - \mathcal{C}_\ell(\alpha) - \frac{1}{4} \lambda_C \delta_C^2 I - \lambda_A \delta_A^2 I$. Empregando o complemento de Schur, (1.57) é equivalente a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(\alpha) - \mathcal{C}_\ell(\alpha) - \lambda_A \delta_A^2 I & * & * \\ P(\alpha)A_\ell(\alpha) & P(\alpha) & * \\ 0 & P(\alpha) & \lambda_A I \end{bmatrix}}_{T_c} - \lambda_C^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{N'_c} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{N'_c}' - \lambda_C \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \delta_C^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0.$$

Denotando o lado esquerdo da desigualdade acima por M_1 e sabendo que $\Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)' \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha) \leq \delta_C^2 I$, tem-se que

$$T_c - \lambda_C^{-1} N'_c N_c - \lambda_C \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{M_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{M_c}' \geq M_1 > 0.$$

A seguir, usando o Lema C.1, obtém-se

$$T_c - M_c N_c - N_c' M_c' \geq T_c - \lambda_C M_c M_c' - \lambda_C^{-1} N_c' N_c \geq \mathbb{M}_1 > 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - (\mathcal{C}_\ell(\alpha) + \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)) - \lambda_A \delta_A^2 I & \star & \star \\ P(\alpha) A_\ell(\alpha) & P(\alpha) & \star \\ 0 & P(\alpha) & \lambda_A I \end{bmatrix} > 0.$$

Novamente, aplicando o complemento de Schur

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(\alpha) - (\mathcal{C}_\ell(\alpha) + \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)) & \star \\ P(\alpha) A_\ell(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix}}_{T_a} - \lambda_A^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -P(\alpha) \end{bmatrix}}_{N_a'} \begin{bmatrix} 0 \\ -P(\alpha) \end{bmatrix}' - \lambda_A \begin{bmatrix} \delta_A^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} > 0,$$

denotando o lado esquerdo da última inequação por \mathbb{M}_2 e utilizando a seguinte desigualdade $\Delta A_\ell(\alpha)' \Delta A_\ell(\alpha) \leq \delta_A^2 I$, tem-se que

$$T_a - \lambda_A^{-1} N_a' N_a - \lambda_A \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha)' \\ 0 \end{bmatrix}}_{M_a} \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha)' \\ 0 \end{bmatrix}' \geq \mathbb{M}_2 > 0.$$

A última desigualdade pode ser reescrita, por meio do Lema C.1, como

$$T_a - M_a N_a - N_a' M_a' \geq T_a - \lambda_A M_a M_a' - \lambda_A^{-1} N_a' N_a \geq \mathbb{M}_2 > 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - (\mathcal{C}_\ell(\alpha) + \Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)) & \star \\ P(\alpha) (A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha)) & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0,$$

que é, pelo complemento de Schur, equivalente à condição do gramiano de observabilidade para o sistema discreto (1.46)

$$A(\alpha) P(\alpha) A(\alpha)' - P(\alpha) + C(\alpha)' C(\alpha) < 0,$$

com $A(\alpha)$ e $C(\alpha)' C(\alpha)$ dadas em (1.49). Uma vez que μ é um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do sistema discreto (1.46) e, como para qualquer α fixo pertencente ao domínio Λ_N , a igualdade (1.48) se verifica, então μ também é um custo garantido para o sistema contínuo (1.1), com $u(t) = 0$. \square

É importante destacar que a minimização de μ^2 fornece o menor custo garantido \mathcal{H}_2 por meio do Teorema 1.3, contudo essas condições são apenas suficientes. Tal restrição deve-se ao fato de que o Teorema 1.3 utiliza os limitantes superiores δ_A e δ_C em vez dos erros reais $\Delta A_\ell(\alpha)$ e $\Delta \mathcal{C}_\ell(\alpha)$, respectivamente. Ademais, algum conservadorismo adicional pode ser introduzido pelo uso do Lema C.1. Todavia, com o aumento de g e d , o Teorema 1.3 provê estimativas cada vez mais acuradas para o custo garantido \mathcal{H}_2 .

Observação 1.4. Note que, diferentemente de (SOUZA et al., 2013), que é aplicável apenas a sistemas precisamente conhecidos e necessita da determinação da matriz de saída C , todos os desenvolvimentos apresentados neste trabalho são feitos em termos do produto $C(\alpha)'C(\alpha) = \mathcal{C}(\alpha)$. Vale a pena mencionar que, para o projeto de controladores \mathcal{H}_2 seguindo as estratégias tradicionais da literatura, é necessário a determinação dos vértices da matriz incerta $C(\alpha)$ a partir de $\mathcal{C}(\alpha)$ em (1.49). No entanto, esse problema ainda é um desafio a ser superado, uma vez que tanto $C(\alpha)$ quanto $\mathcal{C}(\alpha)$ são matrizes incertas.

1.4.1 Exemplo de Cômputo da Norma \mathcal{H}_2

Exemplo 1.5. Considere o sistema incerto contínuo (1.1), com $u(t) = 0$, cujos vértices são:

$$E_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ -0.5 & -1.9 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -1.1 & -0.1 \\ 0.5 & -2.8 \end{bmatrix}, F_{w_1} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, F_{w_2} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, G'_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, G'_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é mostrar que o método de discretização proposto provê sistemas discretizados com custos garantidos \mathcal{H}_2 muito próximos da norma \mathcal{H}_2 de pior caso do correspondente sistema contínuo incerto, quando comparado com os métodos tradicionais que discretizam os vértices do politopo utilizando aproximações de primeira ordem da série de Taylor. Neste último caso, os vértices das matrizes dos sistemas discretizados com período de amostragem T são dados por

$$A_i = I + E_i T, \quad B_i = F_i T, \quad C_i = G_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_1.$$

A norma \mathcal{H}_2 de pior caso do sistema contínuo do Exemplo 1.5 é 1.3406 e pode ser calculada, por exemplo, empregando relaxações baseadas em soluções polinomiais para sistemas contínuos de (OLIVEIRA; PERES, 2008, Teorema 6) ou por meio do particionamento do domínio incerto que combina a triangularização de Delaunay com uma técnica de divisão de simplex orientada pelas arestas (GONÇALVES *et al.*, 2006; GONÇALVES *et al.*, 2007). Usando uma aproximação de primeira ordem com $T = 0.1$ s e computando o custo garantido \mathcal{H}_2 por meio da condição LMI para sistemas discretos apresentada em (OLIVEIRA; PERES, 2008, Teorema 6) com graus g das matrizes de Lyapunov e d do Teorema de Pólya suficientemente grandes, o valor obtido é $\mu = 0.4363$. Deve-se enfatizar que esse valor não é, de fato, um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do sistema contínuo.

Por outro lado, empregando a técnica de discretização e o Teorema 1.3 propostos, obtêm-se os resultados mostrados na Tabela 2. Como pode ser visto, os custos garantidos obtidos são sempre limitantes superiores para a norma \mathcal{H}_2 do sistema contínuo incerto. Na tabela, também apresentam-se os custos garantidos \mathcal{H}_2 correspondentes ao sistema discretizado com grau ℓ da aproximação da série de Taylor e graus g das matrizes de Lyapunov e d do Teorema de Pólya. Note que o uso de maiores graus ℓ na aproximação da série de Taylor permite obter representações discretas

mais precisas (1.46), uma vez que os limitantes (δ_A and δ_C) para os erros de discretização (1.12) e (1.51) diminuem. Adicionalmente, o aumento de g e d no Teorema 1.3 provê resultados menos conservadores, o que significa que a distância entre μ e a norma \mathcal{H}_2 de pior caso do sistema contínuo é cada vez menor.

Tabela 2: Custos garantidos \mathcal{H}_2 para o Exemplo 1.5 usando o Teorema 1.3 com $T = 0.1$ s e diferentes graus para a aproximação da série de Taylor (ℓ), para as matrizes de Lyapunov (g) e para a relaxação de Pólya ($d = 0$). Os limitantes (δ_A , δ_C) para os erros de discretização também são fornecidos.

ℓ	δ_A, δ_C	g	μ
1	$\delta_A \cong 3.6 \times 10^{-2}$	0	2.0123
	$\delta_C \cong 1.1 \times 10^{-2}$	1	1.7584
2	$\delta_A \cong 3.5 \times 10^{-3}$	0	1.4944
	$\delta_C \cong 3.5 \times 10^{-4}$	1	1.3637
3	$\delta_A \cong 2.5 \times 10^{-4}$	0	1.4662
	$\delta_C \cong 1.0 \times 10^{-5}$	1	1.3423
4	$\delta_A \cong 1.4 \times 10^{-5}$	0	1.4643
	$\delta_C \cong 3.0 \times 10^{-7}$	1	1.3408
5	$\delta_A \cong 6.4 \times 10^{-7}$	0	1.4642
	$\delta_C \cong 1.3 \times 10^{-8}$	1	1.3407

Na Figura 7, apresenta-se uma comparação entre a norma \mathcal{H}_2 exata de pior caso do sistema contínuo computada com (GONÇALVES *et al.*, 2007) e o custo garantido \mathcal{H}_2 calculado pelo Teorema 1.3 com $g = 4$, $d = 0$ e diferentes graus de aproximação, $\ell = 1, \dots, 6$. Note que o período de amostragem influencia diretamente o cômputo de μ por meio das condições do Teorema 1.3, uma vez que os erros de discretização se elevam com o aumento do período de amostragem, necessitando de maiores valores de ℓ para a obtenção de resultados mais precisos.

1.5 Análise de Estabilidade Robusta de Sistemas Discretizados

Nessa seção, propõe-se uma nova condição LMI para analisar a estabilidade robusta de sistemas discretos com dependência polinomial nos parâmetros incertos e com uma incerteza aditiva limitada em norma.

Nesse íterim, considere que o sistema (1.1a), com $F_u(\alpha_1)$ e $F_w(\alpha_1)$ nulas, seja amostrado

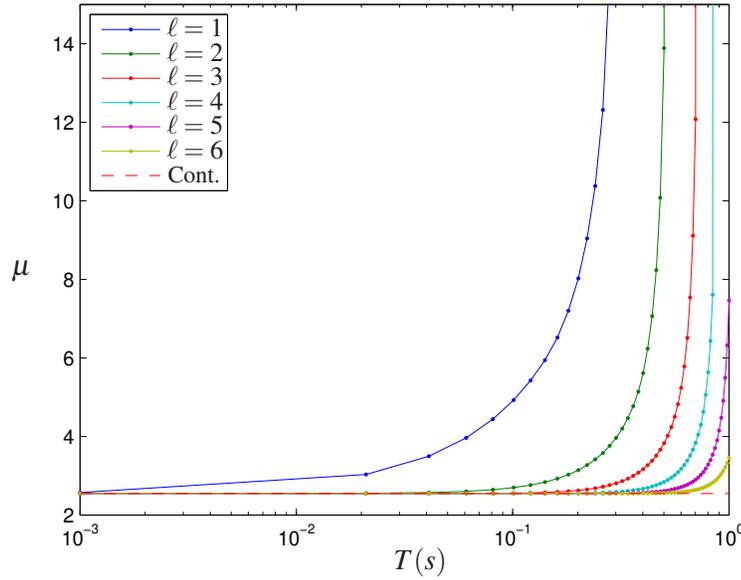


Figura 7: Comportamento de μ versus o período de amostragem T : Comparação entre a norma \mathcal{H}_2 (Cont.) de pior caso dos sistema contínuo computado com (GONÇALVES *et al.*, 2007) e o custo garantido (μ) obtido com o Teorema 1.3 com $g = 4$, $d = 0$ e graus de aproximação $\ell = 1, \dots, 6$.

com um período T , produzindo o seguinte modelo discreto

$$x((k+1)T) = A(\alpha)x(kT), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.58)$$

sendo a matriz $A(\alpha)$ dada por (1.6). Assim, pode-se enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$, com $g \in \mathbb{N}$, matrizes X_k e $Y_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}(f)$, com $f \in \mathbb{N}$, e uma variável escalar λ_A , tais que as seguintes LMIs se verificarem*

$$\sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{d!}{\tilde{k}!} P_{k-\tilde{k}} > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g+d) \quad (1.59)$$

$$M_1 + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(w-f) \\ k \geq \tilde{k}}} M_2 + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_N(w-g) \\ k \geq \tilde{k}}} M_3 + \sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_N(w-\ell-f) \\ k \geq \tilde{k}}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(\ell) \\ k+\hat{k} \geq \tilde{k}}} M_4 > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(w) \quad (1.60)$$

em que

$$M_1 = \frac{w!}{k!} \begin{bmatrix} -\lambda_A \delta_A^2 I & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \lambda_A I \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{(w-f)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ -X'_{k-\tilde{k}} & Y_{k-\tilde{k}} + Y'_{k-\tilde{k}} & \star \\ X_{k-\tilde{k}} & Y'_{k-\tilde{k}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} P_{k-\tilde{k}} & \star & \star \\ 0 & -P_{k-\tilde{k}} & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \frac{(w-\ell-f)!}{\dot{k}!} \begin{bmatrix} -X_{k-\hat{k}-\hat{k}}A_{\hat{k}} - A_{\hat{k}}'X'_{k-\hat{k}-\hat{k}} & \star & \star \\ Y_{k-\hat{k}-\hat{k}}A_{\hat{k}} & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com o modelo discretizado de grau de aproximação $\ell \in \mathbb{N}$, $w = \max\{g, \ell + f\} + d$ e δ_A dado por (1.18), então o sistema (1.58) é assintótica e robustamente estável.

Prova: A prova de (1.59) é similar à apresentada na prova do Teorema 1.1 e, portanto, é omitida. Quanto à desigualdade (1.60), multiplique-a por α^k e some $\forall k \in \mathcal{K}_N(w)$ para obter

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - A_\ell(\alpha)'X(\alpha)' - X(\alpha)A_\ell(\alpha) - \lambda_A \delta_A^2 I & \star & \star \\ -X(\alpha)' + Y(\alpha)A_\ell(\alpha) & -P(\alpha) + Y(\alpha) + Y(\alpha)' & \star \\ X(\alpha)' & Y(\alpha)' & \lambda_A I \end{bmatrix} > 0. \quad (1.61)$$

Aplicando o complemento de Schur em (1.61), obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} P(\alpha) - A_\ell(\alpha)'X(\alpha)' \\ -X(\alpha)A_\ell(\alpha) \end{pmatrix} & \star \\ -X(\alpha)' + Y(\alpha)A_\ell(\alpha) & \begin{pmatrix} -P(\alpha) \\ +Y(\alpha) \\ +Y(\alpha)' \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_R - \lambda_A \begin{bmatrix} \delta_A I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A I \\ 0 \end{bmatrix}' - \lambda_A^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} X(\alpha) \\ Y(\alpha) \end{bmatrix}}_{V'} \begin{bmatrix} X(\alpha) \\ Y(\alpha) \end{bmatrix}' > 0.$$

Em seguida, utilize a seguinte informação $\Delta A_\ell(\alpha)' \Delta A_\ell(\alpha) < \delta_A^2 I$ e aplique o Lema C.1 para obter

$$R - \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} V - V' \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}' > 0 \quad (1.62)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - A(\alpha)'X(\alpha)' - X(\alpha)A(\alpha) & \star \\ -X(\alpha)' + Y(\alpha)A(\alpha) & -P(\alpha) + Y(\alpha) + Y(\alpha)' \end{bmatrix} > 0 \quad (1.63)$$

em que $A(\alpha)$ é dada por (1.8). Finalmente, multiplique (1.63) por $\mathcal{B}' = \begin{bmatrix} -I & A(\alpha)' \end{bmatrix}$ à esquerda e por \mathcal{B} à direita e obtenha

$$P(\alpha) - (A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha))' P(\alpha) (A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha)) > 0,$$

a qual assegura a estabilidade robusta do sistema (1.58) e, conseqüentemente, do sistema (1.1a), com $F_u = F_w = 0$. A prova que garante a estabilidade do sistema contínuo a partir da verificação da estabilidade do sistema discretizado é similar à apresentada no Apêndice A. \square

É digno de nota que uma escolha apropriada para o grau ℓ da expansão em série de Taylor produz valores suficientemente pequenos para o limitante do erro residual de discretização δ_A , de forma que é possível provar a estabilidade robusta utilizando o Teorema 1.4. Maiores valores de ℓ , f e g melhoram os resultados ao preço do aumento do esforço computacional.

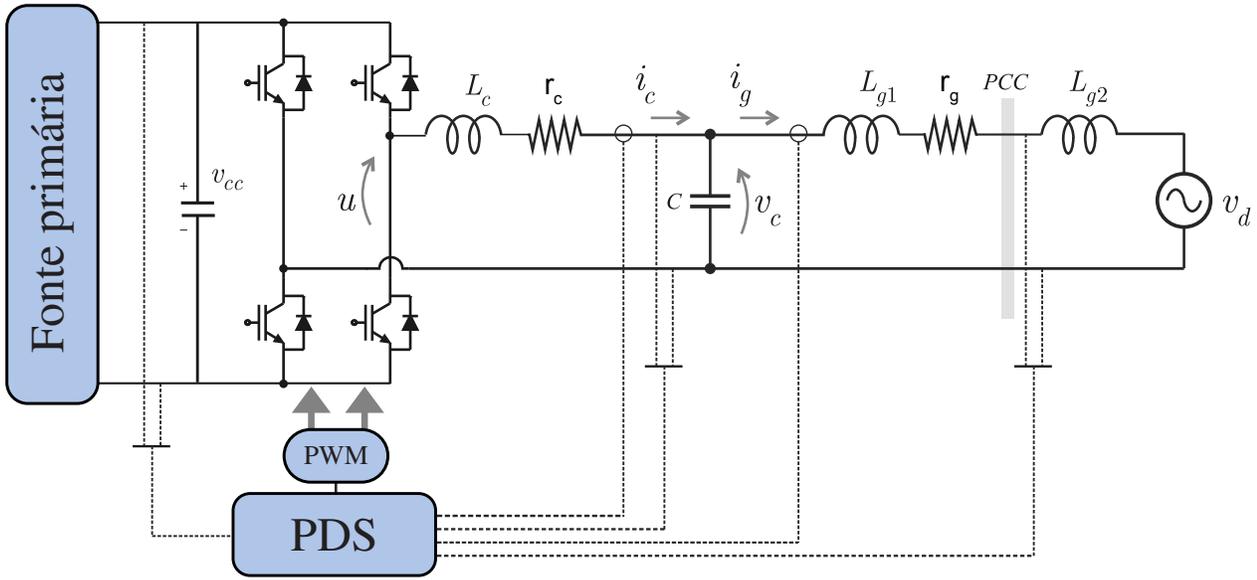


Figura 8: Inversor PWM com um filtro LCL conectado à rede.

1.5.1 Exemplo Numérico de Análise de Estabilidade de um Conversor Conectado em Rede

Para verificar a eficiência das condições propostas para a análise de estabilidade robusta de um sistema contínuo controlado por um ganho digital, considere o conversor modulado em largura de pulso conectado a uma rede elétrica indutiva,³ ilustrado na Figura 8.

As indutâncias do filtro LCL e da rede são dadas por L_{g1} e L_{g2} , respectivamente. A indutância da rede não é precisamente conhecida, mas é representada por um parâmetro incerto pertencente a um dado intervalo. Definindo $L_g = L_{g1} + L_{g2}$, o problema é determinar o parâmetro $L_{g_{\max}}$ tal que $L_g \in [L_{g1} \ L_{g_{\max}}]$.

O conversor por Modulação de Largura de Pulso (PWM, do inglês *Pulse Width Modulation*), o filtro LCL e a rede podem ser descritos como um modelo contínuo com dependência afim nos parâmetros incertos dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= E_p(\eta)x(t) + F_{up}u(t) + F_{wp}(\eta)w(t) \\ z(t) &= G_px(t) \end{aligned} \tag{1.64}$$

³Todos os testes experimentais foram feitos em parceria com o Professor Doutor Vinícius F. Montagner e seus colaboradores do Grupo de Eletrônica de Potência e Controle da Universidade Federal de Santa Maria.

com⁴

$$E_p(\eta) = E_{p_0} + \eta E_{p_1} = \begin{bmatrix} -r_c/L_c & -1/L_c & 0 \\ 1/C & 0 & -1/C \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_g \end{bmatrix},$$

$$F_{up} = \begin{bmatrix} 1 \\ L_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{wp}(\eta) = F_{wp_0} + \eta F_{wp_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$G_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em que η é um parâmetro incerto dado por

$$\eta = \frac{1}{L_g} \in [\eta_{\min} \quad \eta_{\max}],$$

com $\eta_{\min} = 1/L_{g_{\max}}$ e $\eta_{\max} = 1/L_{g_1}$.

O vetor de estados é $x(t)' = [i_c(t) \quad v_c(t) \quad i_g(t)]$, sendo $i_c(t)$ a corrente do conversor, $v_c(t)$ a tensão do capacitor e $i_g(t)$ a corrente na rede. O sinal $u(t)$ é a entrada de controle, sintetizada por um inversor PWM, a saída controlada $z(t)$ é a corrente na rede i_g e o distúrbio $w(t)$ é a tensão da rede v_d .

Introduzindo a seguinte mudança de variáveis

$$\alpha_1 = \frac{\eta - \eta_{\min}}{\eta_{\max} - \eta_{\min}}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1, \quad \eta \in [\eta_{\min} \quad \eta_{\max}],$$

o sistema (1.64) pode ser reescrito como o modelo politópico (1.1), com $\tau = 0$, cujos vértices são

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{p_0} + \eta_{\max} E_{p_1}, & E_2 &= E_{p_0} + \eta_{\min} E_{p_1}, \\ F_{w_1} &= F_{wp_0} + \eta_{\max} F_{wp_1}, & F_{w_2} &= F_{wp_0} + \eta_{\min} F_{wp_1}, \\ F_{u_1} &= F_{u_2} = F_{up}, & G_1 &= G_2 = C_p. \end{aligned}$$

O objetivo neste exemplo é determinar o maior valor do parâmetro $L_{g_{\max}}$ tal que o sistema contínuo (1.64) seja estável para um dado controlador robusto por realimentação de estados.

Para analisar o sistema contínuo controlado por um ganho digital, uma representação discreta do sistema é necessária. Usando um segurador de ordem zero com período de amostragem constante T , tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B(\alpha)u(k) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) &= C(\alpha)x(k), \end{aligned} \tag{1.65}$$

⁴Os valores das constantes apresentadas neste exemplo e uma descrição mais detalhada da modelagem podem ser encontrados em (MACCARI *et al.*, 2014).

em que as matrizes incertas $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_w(\alpha)$ e $C(\alpha)$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= e^{E(\alpha)T}, \\ [B(\alpha) \ B_w(\alpha)] &= \int_0^T e^{E(\alpha)s} ds [F_u(\alpha) \ F_w(\alpha)], \\ C(\alpha) &= G(\alpha). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Como o controlador digital é implementado por um processador digital de sinais (DSP), o sinal de controle é atrasado de uma amostra. Levando esta informação em consideração, um estado extra (ou adicional) é introduzido, produzindo a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(\alpha)\hat{x}(k) + \hat{B}\hat{u}(k) + \hat{B}_w\hat{w}(k) \\ \hat{z}(k) &= \hat{G}(\alpha)\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (1.67)$$

em que

$$\hat{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_w(\alpha) = \begin{bmatrix} B_w(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{x}(k)' = \begin{bmatrix} x(k)' & u(k-1)' \end{bmatrix}, \quad \hat{w}(k) = w(k), \quad \hat{u}(k) = u(k), \quad \hat{z}(k) = z(k).$$

Para assegurar que a corrente injetada na rede siga uma referência senoidal e também rejeite perturbações harmônicas, controladores ressonantes baseados no princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1976) podem ser empregados. A inclusão do controlador ressonante⁵

$$x_{cr}(k+1) = Rx_{cr}(k) - M\hat{C}(\alpha)\hat{x}(k),$$

a (1.67), produz a seguinte representação discreta

$$\tilde{x}(k+1) = (\tilde{A}_\ell(\alpha) + \Delta\tilde{A}_\ell(\alpha))\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) + (\tilde{B}_{w_\ell}(\alpha) + \Delta\tilde{B}_{w_\ell}(\alpha))\tilde{w}(k) \quad (1.68)$$

em que $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{w_\ell}(\alpha) + \Delta\tilde{B}_{w_\ell}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_{w_\ell}(\alpha)' + \Delta B_{w_\ell}(\alpha)' & 0 & 0 \end{bmatrix}', \\ \tilde{A}_\ell(\alpha) + \Delta\tilde{A}_\ell(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_\ell(\alpha) & B_\ell(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -MC(\alpha) & 0 & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha) & \Delta B_\ell(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

⁵ R e M são os ganhos do controlador ressonante. Veja (MACCARI *et al.*, 2014), para uma descrição mais detalhada.

e

$$\tilde{x}(k)' = \begin{bmatrix} x(k)' & u(k-1)' & x_{cr}(k)' \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}(k) = u(k), \quad \tilde{w}(k) = w(k).$$

O novo vetor de estados aumentado em (1.68) inclui as variáveis de estado do filtro, os estados do controlador ressonante e o atraso induzido pela implementação do controlador digital.

Em seguida, assumindo que o vetor de estados está disponível para realimentação, que a sincronização com a tensão PCC está assegurada, isto é, $w(t) = 0$, e que a tensão v_{cc} está fixa em um valor contante, considere a lei de controle por realimentação de estados

$$\tilde{u}(k) = K\tilde{x}(k), \quad (1.69)$$

com o ganho estabilizante K projetado em (MACCARI *et al.*, 2014).

Desconsiderando a entrada de perturbação, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada pode ser avaliada por meio da representação

$$\tilde{x}(k+1) = (A_{cl\ell}(\alpha) + \Delta A_{cl\ell}(\alpha))\tilde{x}(k), \quad (1.70)$$

em que $A_{cl\ell}(\alpha) = \tilde{A}_\ell(\alpha) + \tilde{B}K$ e $\Delta A_{cl\ell}(\alpha) = \Delta \tilde{A}_\ell(\alpha)$.

Os parâmetros do conversor e o ganho K são apresentados em (MACCARI *et al.*, 2014). Destaca-se que o controlador K foi projetado utilizando um modelo politópico simplificado (discretização de primeira ordem sem levar em consideração o erro de discretização), não provendo, portanto, nenhuma garantia teórica de estabilidade em malha fechada. A estabilidade em (MACCARI *et al.*, 2014) foi verificada *a posteriori* por meio de uma discretização exaustiva para uma faixa de valores de L_g , o que implicou em um alto custo computacional.

Análise Robusta

Empregando o procedimento de discretização apresentado na Subseção 1.3.1, obtêm-se os coeficientes de $A_{cl\ell}$ e, assim, o Teorema 1.4 pode ser utilizado para determinar os valores máximos de $L_{g_{\max}}$ para os quais a estabilidade em malha fechada de (1.70) é assegurada. Os resultados para um período de amostragem $T = 1/f_s$, com $f_s = 20040 \text{ Hz}$, são apresentados na Tabela 3, em que ℓ é o grau da aproximação da série de Taylor, g é o grau da matriz de Lyapunov $P(\alpha)$, f é o grau das variáveis de folga $X(\alpha)$ e $Y(\alpha)$ e $L_{g_{\max}}$ é o máximo valor permitido de L_g para o qual o sistema em malha fechada é estável. Para graus $\ell \leq 4$, o Teorema 1.4 não é capaz de produzir uma solução factível, uma vez que o limitante do erro residual de discretização não é suficientemente pequeno. Resultados menos conservadores são obtidos quando valores maiores de ℓ , g e f são empregados. Para graus $\ell \geq 7$, g e $f \geq 1$, os resultados produzidos pelo Teorema 1.4 não apresentaram mudanças significativas para a precisão adotada.

Tabela 3: Valores máximos permitidos de L_g para os quais o sistema em malha fechada é estável.

ℓ	f	g	$L_{g_{\max}}$ (mH)
5	0	0	2.1162
≥ 6	0	0	2.1172
5	0	1	2.8184
6	0	1	2.8271
7	0	1	2.8281
5	1	1	2.8336
6	1	1	2.8342
≥ 7	≥ 1	≥ 1	2.8348

Para corroborar o limite de estabilidade assegurado pelo Teorema 1.4, uma busca exaustiva para os valores de α no simplex unitário foi realizada para a obtenção de $E(\alpha)$, $F_u(\alpha)$ e $G(\alpha)$, com $L_g \in [0.5, 2.8348]$ mH. Para cada valor fixo de α , as matrizes do sistema (precisamente conhecidas) foram discretizadas empregando (1.66), os autovalores do sistema discreto aumentado são obtidos e apresentados na Figura 9.

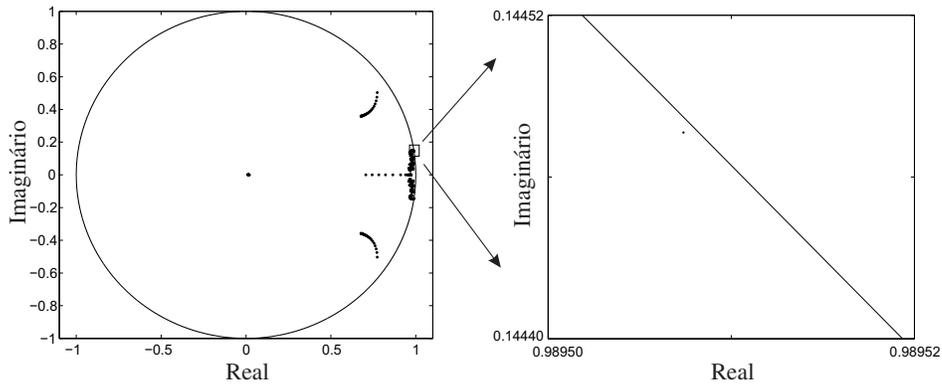


Figura 9: Autovalores do sistema discretizado aumentado em malha fechada para L_g de 0.5 mH a 2.8348 mH (limite de estabilidade provido pelo Teorema 1.4).

Note que os autovalores do sistema em malha fechada, computados para 0.5000 a 2.8348 mH estão dentro do círculo unitário, como destacado na Figura 9, confirmando o limite de estabilidade fornecido pelo Teorema 1.4. Deve-se destacar que, enquanto a avaliação dos autovalores do sistema em malha fechada por meio de uma grade exaustiva no espaço de parâmetros é apenas uma condição necessária para garantir a estabilidade, as condições do Teorema 1.4 são suficientes para assegurar a estabilidade de (1.70) sob a hipótese de uma indutância invariante e incerta. Os resultados do Teorema 1.4 baseiam-se na existência de uma função de Lyapunov dependente de

parâmetros e proveem novas informações sobre os limites de estabilidade robusta para essa aplicação.

Simulação e Resultados Experimentais

Na Figura 10, apresentam-se simulações temporais em que as formas de onda da corrente da rede em regime para $L_g = 0.5000 \text{ mH}$ e $L_g = 2.8348 \text{ mH}$ mostram que o sistema em malha fechada é estável para tais valores. Simulações para vários valores de L_g dentro do intervalo $[0.5000 \text{ } 2.8348] \text{ mH}$ também indicam que o sistema em malha fechada permanece estável. Assim, o limite de estabilidade fornecido pelo Teorema 1.4 foi confirmado por esta análise temporal.

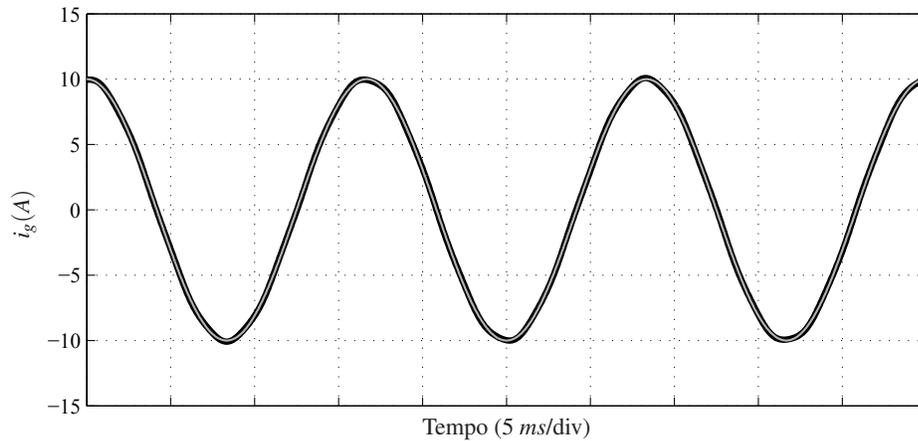


Figura 10: Simulação das respostas em regime i_g para o sistema em malha fechada. A forma de onda em cinza é o resultado para $L_g = 0.5 \text{ mH}$, enquanto a em preto é para $L_g = 2.8348 \text{ mH}$ (a curva cinza está superposta à curva preta).

Com o intuito de validar a presente proposta, um resultado experimental foi obtido, escolhendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (0.19, 0.81)$, o que corresponde a um filtro LCL com uma indutância de rede de $L_g = 1.5 \text{ mH}$. Para implementar o algoritmo de controle, um DSP de ponto flutuante TMS320F28335 da *Texas Instruments* foi utilizado. Note que o valor escolhido ($L_g = 1.5 \text{ mH}$) encontra-se no interior dos limites computados pelo Teorema 1.4 para o qual a estabilidade é assegurada. Como pode ser visto na Figura 11, o sistema apresenta um comportamento estável desde a inicialização até atingir o regime permanente. O teste mostra a referência e a corrente de rede controlada para $L_g = 1.5 \text{ mH}$.

Finalmente, para avaliar o conservadorismo das condições do Teorema 1.4, realizou-se o seguinte teste. Primeiro, para um valor fixo de L_g , as matrizes contínuas $E(\alpha)$, $F_u(\alpha)$ e $G(\alpha)$ são precisamente conhecidas e a discretização pode ser feita de forma exata utilizando (1.66). Então, a indutância da rede L_g é aumentada até que os autovalores da matriz do sistema aumentado fiquem sobre o círculo unitário. O valor máximo encontrado é $L_g = 2.8349 \text{ mH}$. Embora a estabilidade

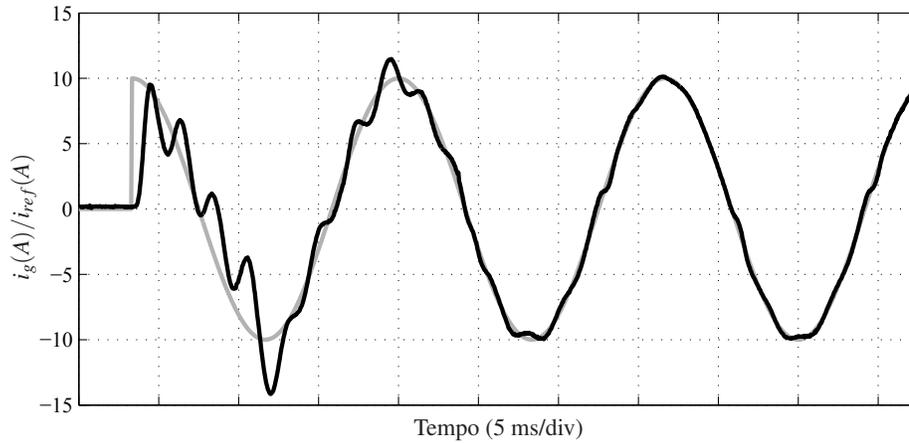


Figura 11: Resultados experimentais para $L_g = 1.5$ mH mostrando a referência (i_{ref}), em cinza, e a saída do sistema (i_g), em preto.

do sistema possa ser assegurada para valores de L_g ligeiramente superiores aos apresentados na Tabela 3 para $\ell = 7$, $g = f = 1$, as condições do Teorema 1.4 claramente exibem uma avaliação com baixo conservadorismo. A pequena diferença entre os resultados (0.0001 mH) não foi reduzida devido à influência do limitante (δ_A) para o erro de discretização na condição de análise.

1.6 Conclusões Parciais

Foi proposto neste capítulo um novo procedimento de discretização para sistemas lineares invariantes no tempo e incertos baseado em expansões em série de Taylor. A utilização desta técnica provê um sistema discreto incerto descrito por matrizes com dependência polinomial nos parâmetros incertos que pertencem ao domínio multi-simplex e termos aditivos limitados em norma que representam o erro residual de discretização. Quando o grau da aproximação é apropriado, o erro residual de discretização é reduzido e, conseqüentemente, o modelo discretizado reproduz acuradamente o comportamento dinâmico do sistema contínuo. Adicionalmente, foram propostas condições LMIs, baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, para a análise de estabilidade robusta, o cômputo da norma \mathcal{H}_2 e a síntese de controladores digitais, sendo que nesse último caso utiliza-se uma busca em um parâmetro escalar. Como o erro residual de discretização é levado em conta, pode-se garantir a estabilidade do sistema discretizado e do sistema contínuo original e, no que se refere ao cômputo da norma \mathcal{H}_2 , os resultados obtidos pelas condições sempre proveem um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de pior caso do sistema contínuo incerto. Finalmente, mostrou-se por meio de exemplos numéricos que para um dado grau de discretização ℓ , o aumento nos graus f , g e d e a busca no parâmetro escalar ξ podem reduzir o conservadorismo dos resultados ao preço de uma maior complexidade computacional.

CAPÍTULO 2

DISCRETIZAÇÃO E CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES COM PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO

2.1 Introdução

A modelagem de sistemas dinâmicos por sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV) tem apresentado uma notável evolução nos últimos anos, sobretudo devido à flexibilidade dessa representação que pode ser utilizada, por exemplo, para descrever sistemas não lineares em termos de uma família de modelos lineares e para descrever sistemas cuja dinâmica é afetada por parâmetros variantes no tempo (RUGH; SHAMMA, 2000). Nessa modelagem, os parâmetros podem variar arbitrariamente rápido ou podem ter limitantes conhecidos em suas taxas de variação. Como discutido em (TÓTH *et al.*, 2010), embora a estabilidade e requisitos de desempenho de sistemas LPV sejam apropriadamente descritos em tempo contínuo, as ferramentas de controle mais atuais são digitais e as aplicações requerem uma representação mais precisa do sistema no domínio de tempo discreto.

Em geral, as técnicas de discretização disponíveis na literatura para sistemas LPV são extensões de métodos originalmente propostos para sistemas LTI e não consideram o erro de discretização (APKARIAN, 1997). Contudo, existem alguns trabalhos na literatura que tratam da discretização de sistemas LPV. Pode-se citar, por exemplo, a técnica apresentada em (TAN *et al.*, 1999; TAN *et al.*, 2002), na qual os autores propõem condições para o projeto de controladores digitais para sistemas LPV com especificações de desempenho empregando a metodologia de *lifting* (BAMIEH; PEARSON J., 1992). Outro exemplo pode ser encontrado em (RAMEZANIFAR *et al.*, 2015), no qual um filtro digital é projetado pela mesma abordagem. Entretanto, nesses artigos assume-se que tanto o procedimento de discretização quanto o projeto do controlador ou filtro

são realizados em tempo real, isto é, os parâmetros variantes no tempo são lidos continuamente e, a cada amostra, um novo modelo discreto, relacionado à planta contínua para o valor atual do parâmetro, é computado, e as condições de síntese são reavaliadas. Nesse tratamento, a planta é um sistema LTI e o modelo discreto é exato, pois para cada valor fixo do parâmetro, o sistema contínuo torna-se um sistema precisamente conhecido. Não obstante, essa técnica apresenta, como inconveniente, um alto custo computacional de execução, visto que o modelo discreto é computado e as condições de síntese são resolvidas em tempo real.

Neste capítulo, propõe-se um procedimento de discretização baseado em uma extensão da expansão da série de Taylor de grau arbitrário ℓ , que converte um sistema LPV contínuo com um atraso induzido pela rede variante no tempo em um sistema LPV discreto equivalente. A precisão do modelo resultante está fortemente relacionada ao aumento do grau ℓ . Com o intuito de estabelecer um modelo LPV discreto equivalente, assume-se que os parâmetros variantes no tempo são constantes por partes e continuamente monitorados. Assim, uma nova amostra é coletada quando uma mudança significativa nos parâmetros é detectada ou, ainda, quando o intervalo de amostragem limite pré-estabelecido é atingido, implicando que o intervalo de amostragem também é variante no tempo. Diante desse cenário, torna-se possível tratar uma classe extensa de problemas, envolvendo motores, sistemas de manufatura e sistemas telerrobóticos (TAN *et al.*, 2002). Por exemplo, pode-se citar motores de combustão interna cujo intervalo de amostragem é variável e depende da velocidade do motor (TAN *et al.*, 2002). Portanto, a metodologia proposta pode ser vista como uma técnica de amostragem baseada em eventos que pode ser utilizada em uma ampla variedade de sistemas LPV. Comparada com a estratégia usual que impõe um período de amostragem constante e pequeno para tratar variações abruptas, demandando uma grande largura de banda e um aumento na carga do tráfego da rede, a presente proposta representa uma importante contribuição no contexto de NCS.

Adicionalmente, são propostas novas condições para o projeto de controladores por realimentação estática de estados e de saída para sistemas polinomiais discretos com parâmetros variantes no tempo. As condições são resolvidas por meio de relaxações LMIs que consideram os limitantes nas taxas de variações dos parâmetros. Como estratégia de solução para o problema de projeto da lei de controle por realimentação de saída, a técnica de dois estágios (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001; ARZELIER *et al.*, 2003; MEHDI *et al.*, 2004; AGULHARI *et al.*, 2012) é empregada, sendo que: inicialmente, sintetiza-se um ganho dependente de parâmetros por realimentação de estados que é aplicado como entrada para o segundo estágio, no qual determina-se um controlador dependente de parâmetros por realimentação de saída. Supõe-se que os parâmetros variantes no tempo estejam disponíveis para medição ou estimação em tempo real, e se este não for o caso as condições podem ser adaptadas para fornecer uma lei de controle robusta (independente de parâmetros). Similarmente às condições apresentadas no Capítulo 1, utilizam-se matrizes de Lya-

punov e variáveis de folga com dependência polinomial nos parâmetros com grau arbitrário que podem reduzir o conservadorismo das condições de síntese. Por fim, a aplicabilidade do método é ilustrada por meio de exemplos numéricos.

2.2 Descrição do Problema

Considere um sistema linear contínuo com parâmetros variantes no tempo controlado digitalmente por meio de um canal de comunicação, como ilustrado na Figura 1. A fim de obter uma lei de controle digital, um procedimento de discretização é requerido. Os parâmetros variantes do sistema $\alpha_1(t)$ são continuamente monitorados. Sempre que uma mudança significativa de $\alpha_1(t)$ ocorre, isto é, $\|\Delta\alpha_1(t)\| \geq \varepsilon$, ou o tempo máximo T_2 após um amostra prévia é atingido, os valores amostrados do sistema contínuo e do parâmetro $\alpha_1(t)$ são enviados por meio da rede de comunicação para o controlador. O limiar ε é escolhido pelo projetista, assim também como o valor de T_2 , ambos relacionados com o intervalo de tempo em que o período de amostragem real está contido. Supõe-se que a rede tenha um atraso variante $\tau(t)$ que permanece dentro de limites conhecidos. Nenhuma hipótese é feita sobre a derivada temporal de $\tau(t)$.

Para $t \geq 0$, $x(0) = 0$, $u(t) = 0$ para $t < 0$, utiliza-se a seguinte descrição para a planta

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E(\alpha_1(t))x(t) + F(\alpha_1(t))u(t - \tau(t)) \\ y(t) = G(\alpha_1(t))x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle. As matrizes $E(\alpha_1(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $F(\alpha_1(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $G(\alpha_1(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ são dependentes de parâmetros e são descritas como uma combinação convexa de N_1 vértices conhecidos

$$(E, F, G)(\alpha_1(t)) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i}(t)(E_i, F_i, G_i). \quad (2.2)$$

Assume-se que o vetor de parâmetros variantes no tempo $\alpha_1(t) = (\alpha_{11}(t), \dots, \alpha_{1N_1}(t))$ pertença ao simplex unitário (1.3) para $t \geq 0$.

O objetivo principal é projetar uma lei de controle digital por realimentação de saída que estabilize robustamente o sistema (2.1). Como a saída medida $y(t)$ é lida nos instantes $kT(\alpha_2(t))$, $k = 1, 2, \dots$, o sinal de controle é constante por partes $u(t) = u(kT(\alpha_2(t)))$, sendo que $T(\alpha_2(t))$ é o tempo decorrido entre duas amostras consecutivas. O período de amostragem $T(\alpha_2(t))$ pode variar no intervalo $[T_1, T_2]$ e $\alpha_2(t)$ é um parâmetro variante pertencente ao simplex unitário Λ_{N_2} , $N_2 = 2$, que representa o domínio dos valores de $T(\cdot)$. Sabendo que $\|\dot{\alpha}_1(t)\| \leq \sigma$, o valor mínimo que $T(\alpha_2(t))$ admite pode ser inferido como

$$T_1 = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad (2.3)$$

pois

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} \simeq \frac{\Delta\alpha_1(kT(\alpha_2(t)))}{\Delta t} \leq \frac{\varepsilon}{T_1} = \sigma$$

em que $\Delta\alpha_1(kT(\alpha_2))$ é o módulo da diferença de $\alpha_1(\cdot)$ entre duas amostras consecutivas, isto é,

$$\Delta\alpha_1(kT(\alpha_2)) = \|\alpha_1((k+1)T(\alpha_2(t))) - \alpha_1(kT(\alpha_2(t)))\| \leq \varepsilon. \quad (2.4)$$

Com o intuito de ilustrar as definições para a obtenção dos intervalos de amostragem, considere o sinal contínuo $\alpha_1(t)$ genérico, apresentado na Figura 12. Escolhendo $\varepsilon = 0.3$ e sabendo que $\sigma = 1.2$, o limitante inferior do intervalo de amostragem é computado por (2.3), cujo resultado é $T_1 = 0.3/1.2 = 0.25$ s. Em seguida, se T_2 for definido igual a 0.40 s, os instantes de amostragem para o parâmetro incerto $\alpha_1(t)$ são os apresentados na Figura 12. Note que sempre que $\|\Delta\alpha_1(t)\| = \varepsilon$, uma amostra é coletada, como ocorre no primeiro e último instantes de amostragem mostrados na Figura 12. Adicionalmente, se o parâmetro não variar de uma quantidade ε uma nova amostra é coletada quando o intervalo a partir da última amostra for igual a T_2 .

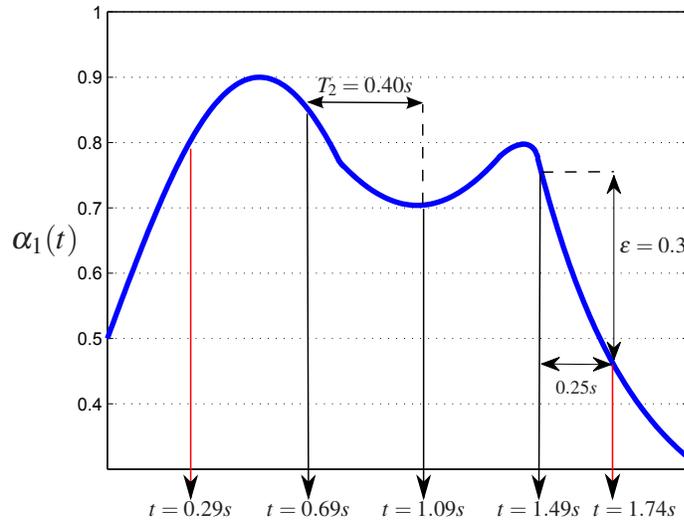


Figura 12: Esquema ilustrativo da amostragem por eventos.

A partir do conhecimento do intervalo no qual o atraso pode assumir valores, $\tau(t)$ pode ser reescrito como uma combinação convexa dos seus limitantes, $\tau(\alpha_3(t))$, em que $\alpha_3(t)$ é um parâmetro variante no tempo pertencente ao simplex unitário Λ_{N_3} , $N_3 = 2$.

Empregando as hipóteses apresentadas anteriormente, propõe-se um modelo discreto equi-

valente para o sistema (2.1), tão acurado quanto possível, representado por¹

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B(\alpha(k))u(k) + B_d(\alpha(k))u(k-1) \\ y(k) = C(\alpha(k))x(k) \end{cases} \quad (2.5)$$

em que $\tau(\alpha_3(t))$ é suposto ser menor do que $T(\alpha_2(t))$, $\forall \alpha_2(t), \forall \alpha_3(t)$. Visto que ε pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, os parâmetros variantes no tempo $\alpha_1(t)$ são considerados constantes por partes entre dois instantes de amostragem, isto é, $\alpha(t) = \alpha(k)$, $\forall t \in [k, k+1)$. Portanto, as matrizes $A(\alpha(k))$, $B(\alpha(k))$ e $B_d(\alpha(k))$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} A(\alpha(k)) &= e^{E(\alpha_1(t))T(\alpha_2(t))} \\ B(\alpha(k)) &= \left(\int_0^{\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)} e^{E(\alpha_1(t))s} ds \right) F(\alpha_1(t)) \\ B_d(\alpha(k)) &= e^{E(\alpha_1(t))\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)} \left(\int_0^{\tau(\alpha_3(t))} e^{E(\alpha_1(t))s} ds \right) F(\alpha_1(t)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que $\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3) = T(\alpha_2(t)) - \tau(\alpha_3(t))$.

Os parâmetros variantes no tempo que afetam o sistema, o intervalo de amostragem e o atraso podem ser agrupados em um único vetor $\alpha(k) = (\alpha_1(k), \alpha_2(k), \alpha_3(k))$ que pertence ao domínio multi-simplex Λ_N , dado pelo produto cartesiano (veja a Definição 1.1) dos simplexes unitários Λ_{N_m} , $m = 1, 2, 3$.

2.3 Procedimento de Discretização

Devido à dificuldade em tratar exponenciais de matrizes dependentes de parâmetros, propõe-se um procedimento de discretização com taxa de amostragem e atraso incertos, baseado em expansões da série de Taylor, similar ao que foi feito na Subseção 1.3.1. Por simplicidade de notação, a dependência de $\alpha(\cdot)$ com o tempo é omitida.

As matrizes do sistema (2.5) podem ser escritas como a soma de duas parcelas que representam, respectivamente, a expansão de ordem ℓ da série de Taylor ($A_\ell(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e $B_{d\ell}(\alpha)$) e o resíduo da expansão ($\Delta A_\ell(\alpha)$, $\Delta B_\ell(\alpha)$ e $\Delta B_{d\ell}(\alpha)$), a saber

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha), \\ B(\alpha) &= B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha), \\ B_d(\alpha) &= B_{d\ell}(\alpha) + \Delta B_{d\ell}(\alpha) \\ C(\alpha) &= G(\alpha_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

¹Para simplificar a apresentação, o instante $kT(\alpha_2(t))$ será denotado por k .

com

$$A_\ell(\alpha) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{E(\alpha_1)^j}{j!} T(\alpha_2)^j \quad (2.8)$$

$$B_\ell(\alpha) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{E(\alpha_1)^{j-1}}{j!} \Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)^j F(\alpha_1) \quad (2.9)$$

$$B_{d\ell}(\alpha) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{E(\alpha_1)^{i+j-1}}{i! j!} \Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)^i \tau(\alpha_3)^j F(\alpha_1) \quad (2.10)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta A_\ell(\alpha) &= e^{E(\alpha_1)T(\alpha_2)} - A_\ell(\alpha) \\ \Delta B_\ell(\alpha) &= \left(\int_0^{\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) - B_\ell(\alpha) \\ \Delta B_{d\ell}(\alpha) &= e^{E(\alpha_1)\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)} \left(\int_0^{\tau(\alpha_3)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) - B_{d\ell}(\alpha). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usando as definições relacionadas a N -uplas e séries multinomiais (apresentadas na Subseção 1.3.1), pode-se escrever (2.8) como

$$\begin{aligned} A_\ell(\alpha) &= I + T(\alpha_2)E(\alpha_1) + \frac{T(\alpha_2)^2}{2} E(\alpha_1)^2 + \dots + \frac{T(\alpha_2)^\ell}{\ell!} E(\alpha_1)^\ell \\ &= \sum_{s=0}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{\ell-s} \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^{\ell-s} \frac{T(\alpha_2)^s}{s!} E(\alpha_1)^s \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(0)} \alpha^k \left(\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell-j) \times \mathcal{K}_2(\ell-j) \times \mathcal{K}_2(0) \\ k \succeq \hat{k}}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(j) \times \mathcal{K}_2(j) \times \mathcal{K}_2(0) \\ k - \hat{k} = \bar{k} \\ v \in \mathcal{B}(\bar{k}_1)}} \frac{((\ell-j)!)^2}{\hat{k}! \bar{k}_2!} T_{\bar{k}_2} E_v \right) \\ &\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(0)} \alpha^k A_k = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \sum_{k_3 \in \mathcal{K}_2(0)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \alpha_3^{k_3} A_{k_1 k_2 k_3}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

a matriz (2.9) como

$$\begin{aligned} B_\ell(\alpha) &= \Upsilon(\alpha_2, \alpha_3) F(\alpha_1) + \frac{\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)^2}{2} E(\alpha_1) F(\alpha_1) + \dots + \frac{\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)^\ell}{\ell!} E(\alpha_1)^{\ell-1} F(\alpha_1) \\ &= \sum_{s=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{\ell-s} \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^{\ell-s} \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{3i} \right)^{\ell-s} \frac{\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)^s}{s!} E(\alpha_1)^{s-1} F(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_N(\ell \mathbb{1})} \alpha^k \left(\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N((\ell-j)\mathbb{1}) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_1 - \hat{k}_1 - e_i \geq 0}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(j) \times \mathcal{K}_4(j) \\ k - \hat{k} \geq \tilde{k} \\ v \in \mathcal{R}(\tilde{k}_1 - e_i)}} \right. \\
&\quad \left. \begin{aligned} &(-1)^{k_3 - \hat{k}_3 - \tilde{k}_3} ((\ell - j)!)^3 \sum_{i=1}^2 \tilde{k}_{2i} \sum_{i=1}^2 \tilde{k}_{3i} \\ &\times \frac{T_{k_2 - \hat{k}_2 - \tilde{k}_2} \tau_{k_3 - \hat{k}_3 - \tilde{k}_3} E_v F_i}{\hat{k}! \tilde{k}_2! \tilde{k}_3! (k_2 - \hat{k}_2 - \tilde{k}_2)! (k_3 - \hat{k}_3 - \tilde{k}_3)!} \end{aligned} \right) \\
&\triangleq \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \sum_{k_3 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha^k B_k = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \sum_{k_3 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \alpha_3^{k_3} B_{k_1 k_2 k_3}, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

e, finalmente, (2.10) como

$$\begin{aligned}
B_{d\ell}(\alpha) &= \left(\mathbf{I} + \Upsilon(\alpha_2, \alpha_3) E(\alpha_1) + \dots + \frac{\Upsilon(\alpha_2, \alpha_3)^\ell}{\ell!} E(\alpha_1)^\ell \right) \\
&\quad \times \left(\tau(\alpha_3) F(\alpha_1) + \frac{\tau(\alpha_3)^2}{2} E(\alpha_1) F(\alpha_1) + \dots + \frac{\tau(\alpha_3)^\ell}{\ell!} E(\alpha_1)^{\ell-1} F(\alpha_1) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} \sum_{p=0}^s \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{2\ell-s-q} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_{2j} \right)^{\ell-s+p} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_{3j} \right)^{2\ell-p-q} \\
&\quad \times \frac{(-1)^p}{p!(s-p)!q!} T(\alpha_2)^{s-p} \tau(\alpha_3)^{p+q} E(\alpha_1)^{s+q-1} F(\alpha_1) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(2\ell)} \alpha^k \left(\sum_{s=0}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} \sum_{p=0}^s \frac{(-1)^p}{p!(s-p)!q!} \right. \\
&\quad \times \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell-s-q) \times \mathcal{K}_2(\ell-s+p) \times \mathcal{K}_2(2\ell-p-q) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N_1\} \\ k_1 - \hat{k}_1 - e_i \geq 0 \\ v \in \mathcal{R}(k_1 - \hat{k}_1 - e_i)}} \frac{\left(\sum_{i=1}^2 k_{2i} - \hat{k}_{2i} \right)! \left(\sum_{i=1}^2 k_{3i} - \hat{k}_{3i} \right)!}{\hat{k}! (k_2 - \hat{k}_2)! (k_3 - \hat{k}_3)!} \\
&\quad \left. \times (2\ell - s - q)! (\ell - s + p)! (2\ell - p - q)! T_{k - \hat{k}_2} \tau_{k - \hat{k}_3} E_v F_i \right) \\
&\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(2\ell)} \alpha^k B_{dk} = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_2(\ell)} \sum_{k_3 \in \mathcal{K}_2(2\ell)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \alpha_3^{k_3} B_{dk_1 k_2 k_3}, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

em que os vetores $\mathbb{1}$ e e_i são os definidos em (D.11) e (D.12) e A_k , B_k e B_{dk} são, respectivamente, os coeficientes das matrizes $A_\ell(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e $B_{d\ell}(\alpha)$ do sistema discretizado (2.5).

2.3.1 Modelagem do Domínio Paramétrico

A maioria dos trabalhos que tratam sistemas com parâmetros variantes no tempo pertencentes ao simplex unitário consideram taxas de variação arbitrárias. Um resultado mais realista e que pode ser menos conservador foi proposto em (OLIVEIRA; PERES, 2009), no qual supõe-se que a taxa de variação dos parâmetros é limitada por um valor conhecido *a priori* $b \in \mathbb{R}$, tal que

$$-b \leq \Delta\alpha_{mi}(k) \leq b, \quad \text{para } i = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

em que $\Delta\alpha_{mi}(k) = \alpha_{mi}(k+1) - \alpha_{mi}(k)$ e $b \in [0, 1]$. Neste trabalho, o valor de b é dado por ε definido em (2.4).

Como $\alpha_m(k) \in \Lambda_{N_m}$, pode-se provar que

$$\sum_{i=1}^{N_m} \Delta\alpha_{mi}(k) = \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_{mi}(k+1) - \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_{mi}(k) = 0. \quad (2.16)$$

Os vetores $\alpha_m(k)$ e $\Delta\alpha_m(k)$ são agrupados em um espaço aumentado, chamado espaço γ e a região em que o vetor $(\alpha_m(k), \Delta\alpha_m(k))$ assume valores pode ser modelado pelo politopo

$$\Gamma_b = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^{2N_m} : \vartheta \in \text{co} \{z^1, \dots, z^{M_m}\}, z^i = \begin{bmatrix} f^i \\ h^i \end{bmatrix}, f^i \in \mathbb{R}^{N_m}, h^i \in \mathbb{R}^{N_m}, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{N_m} h_j^i = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{N_m} f_j^i = 1, \text{ com } f_j^i \geq 0, \forall j = 1, \dots, N_m, \forall i = 1, \dots, M_m \right\} \quad (2.17)$$

definido como a combinação convexa de M_m vetores z^i , em que M_m é o número de vértices do m -ésimo simplex unitário no espaço γ . Os vetores f^i e h^i do conjunto Γ_b são obtidos seguindo as linhas apresentadas em (OLIVEIRA; PERES, 2009; DE CAIGNY *et al.*, 2012). Uma importante característica dessa modelagem é a relação linear entre os parâmetros α e γ , isto é

$$(\alpha_m(k), \Delta\alpha_m(k)) = \sum_{i=1}^{M_m} \begin{bmatrix} f^i \\ h^i \end{bmatrix} \gamma_{mi}(k) = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_m \\ \mathbb{H}_m \end{bmatrix} \gamma_m(k) \quad (2.18)$$

com $\mathbb{F}_m = [f^1 \ \dots \ f^{M_m}]$, $\mathbb{H}_m = [h^1 \ \dots \ h^{M_m}]$ e $\gamma_m(k) \in \Lambda_{M_m}$. O parâmetro variante no tempo $\gamma(k) = (\gamma_1(k), \gamma_2(k), \dots, \gamma_r(k))$ pertence ao domínio multi-simplex Λ_M , em que $M = (M_1, M_2, \dots, M_r) \in \mathbb{N}^r$, dado pelo produto cartesiano de simplexes unitários Λ_{M_m} , $m = 1, \dots, r$.

Se cada parâmetro variante no tempo $\alpha_i(k)$ tem taxa de variação limitada, então existe uma relação linear $\alpha_i = \mathbb{F}_i \gamma_i$, com $\mathbb{F}_i \in \mathbb{R}^{N_i \times M_i}$, $\alpha_i \in \Lambda_{N_i}$ e $\gamma_i \in \Lambda_{M_i}$, para todo $i = 1, \dots, r$. Nesse caso, dada uma matriz homogênea polinomial $R(\alpha)$ de grau $p = (p_1, p_2, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$ na variável $\alpha \in \Lambda_N$,

$$R(\alpha) = \sum_{s \in \mathcal{K}_N(p)} \alpha^s R_s = \sum_{s_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(p_1)} \sum_{s_2 \in \mathcal{K}_{N_2}(p_2)} \dots \sum_{s_r \in \mathcal{K}_{N_r}(p_r)} \alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2} \dots \alpha_r^{s_r} R_{s_1 s_2 \dots s_r}, \quad (2.19)$$

existe uma matriz polinomial homogênea equivalente

$$\tilde{R}(\gamma) = \sum_{t \in \mathcal{K}_M(p)} \gamma^t \tilde{R}_t = \sum_{t_1 \in \mathcal{K}_{M_1}(p_1)} \sum_{t_2 \in \mathcal{K}_{M_2}(p_2)} \cdots \sum_{t_r \in \mathcal{K}_{M_r}(p_r)} \gamma_1^{t_1} \gamma_2^{t_2} \cdots \gamma_r^{t_r} \tilde{R}_{t_1 t_2 \cdots t_r} \quad (2.20)$$

de grau p , tal que $R(\alpha) \equiv R(\mathbb{F}\gamma) \equiv \tilde{R}(\gamma)$, com $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_r)$. Assim, adaptando para o domínio multi-simplex o desenvolvimento apresentado em (DE CAIGNY *et al.*, 2012, A.2), os coeficientes \tilde{R}_t de $\tilde{R}(\gamma)$ podem ser construídos a partir dos coeficientes R_s de $R(\alpha)$, empregando a seguinte combinação linear

$$\begin{aligned} \tilde{R}_t = \tilde{R}_{t_1 t_2 \cdots t_r} &= \sum_{s_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(p_1)} \sum_{s_2 \in \mathcal{K}_{N_2}(p_2)} \cdots \sum_{s_r \in \mathcal{K}_{N_r}(p_r)} \times \\ &\sum_{\substack{k_1 \in \mathcal{K}_{M_1 N_1}(s_1) \\ \sum_{j=1}^{N_1} k_{1j} = t_1}} \sum_{\substack{k_2 \in \mathcal{K}_{M_2 N_2}(s_2) \\ \sum_{j=1}^{N_2} k_{2j} = t_2}} \cdots \sum_{\substack{k_r \in \mathcal{K}_{M_r N_r}(s_r) \\ \sum_{j=1}^{N_r} k_{rj} = t_r}} \left(\prod_{i=1}^r \frac{s_i!}{k_i!} \right) \prod_{v=1}^r \left(\prod_{i=1}^{N_v} \prod_{j=1}^{M_v} \mathbb{F}_v(i, j)^{k_{vij}} \right) R_s, \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que a notação

$$\sum_{\substack{k_i \in \mathcal{K}_{M_i N_i}(s_i) \\ \sum_{j=1}^{N_i} k_{ij} = t_i}} \quad (2.22)$$

indica que nessa soma, para todo $k_i \in \mathcal{K}_{M_i N_i}(s_i)$, deve-se considerar apenas os termos para os quais a relação $t_i = \sum_{j=1}^{N_i} k_{ij}$, para todo $i = 1, \dots, r$, seja satisfeita, em que o vetor \mathbf{M}_{iN_i} é definido como $\mathbf{M}_{iN_i} = (M_i, M_i, \dots, M_i) \in \mathbb{N}^{N_i}$ e o conjunto $\mathcal{K}_{M_i N_i}(s_i)$ denota o produto cartesiano

$$\mathcal{K}_{M_i N_i}(s_i) = \mathcal{K}_{M_i}(s_{i1}) \times \mathcal{K}_{M_i}(s_{i2}) \times \cdots \times \mathcal{K}_{M_i}(s_{iN_i}).$$

Para simplificar as condições LMIs apresentadas neste trabalho, considera-se que apenas os parâmetros $\alpha_1(k)$ relacionados às matrizes dinâmicas do sistema contínuo tenham taxas de variação limitada, enquanto supõe-se que $\alpha_2(k)$ e $\alpha_3(k)$, associados respectivamente ao intervalo de amostragem e ao atraso induzido pela rede, variem arbitrariamente rápido no domínio discreto. Tais hipóteses são devido a: 1) o evento que aciona a amostragem está associado à máxima variação conhecida de $\alpha_1(k)$; 2) o tempo decorrido entre duas amostras consecutivas pode variar arbitrariamente dentro do intervalo $[T_1, T_2]$ pois, logo que uma amostragem anterior tenha ocorrido, $T(\alpha_2)$ pode assumir o valor mínimo, quando $\|\Delta\alpha_1(t)\| > \varepsilon$, ou o valor máximo, quando a variação de $\alpha_1(t)$ é insignificante no intervalo, $\Delta t < T_2$; e 3) embora seja possível estimar os limitantes máximo e mínimo do atraso induzido da rede, em geral, o valor exato de τ entre duas amostras não pode ser facilmente obtido. Nos casos 2) e 3), como discutido em (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001), os parâmetros no instante avançado $k+1$ são independentes do instante atual k e pertencem a simplexos diferentes, isto é $\alpha_2(k+1) = \beta_2(k)$ e $\alpha_3(k+1) = \beta_3(k)$. Portanto, a mudança de variáveis (2.21) pode ser adaptada para tratar todos os casos acima, introduzindo dois novos simplexos

para lidar com os instantes de tempo avançados dos parâmetros α_2 e α_3 . Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{R}_t = \tilde{R}_{t_1 t_2 t_3 t_4 t_5} = & \sum_{s_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(p_1)} \sum_{s_2 \in \mathcal{K}_2(p_2)} \sum_{s_3 \in \mathcal{K}_2(p_3)} \sum_{s_4 \in \mathcal{K}_2(p_4)} \sum_{s_5 \in \mathcal{K}_2(p_5)} \times \\ & \sum_{\substack{k_1 \in \mathcal{K}_{M_1 N_1}(s_1) \\ \sum_{j=1}^{N_1} k_{1j} = t_1}} \sum_{\substack{k_2 \in \mathcal{K}_{M_2 2}(s_2) \\ \sum_{j=1}^2 k_{2j} = t_2}} \sum_{\substack{k_3 \in \mathcal{K}_{M_3 2}(s_3) \\ \sum_{j=1}^2 k_{3j} = t_3}} \sum_{\substack{k_4 \in \mathcal{K}_{M_4 2}(s_4) \\ \sum_{j=1}^2 k_{4j} = t_4}} \sum_{\substack{k_5 \in \mathcal{K}_{M_5 2}(s_5) \\ \sum_{j=1}^2 k_{5j} = t_5}} \prod_{i=1}^5 \frac{s_i!}{k_i!} \times \\ & \left(\prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=1}^{M_1} \mathbb{G}(i, j)^{k_{1ij}} \right) \prod_{v=2}^5 \left(\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 I(i, j)^{k_{vij}} \right) R_s, \quad \forall t \in \mathcal{K}_M(p). \quad (2.23) \end{aligned}$$

em que I denota uma matriz identidade de dimensões apropriadas e o argumento (i, j) indica, respectivamente, a linha e a coluna do elemento da matriz. No caso em que a matriz R depende do instante atual de tempo k , o grau é dado por $p = g = (g_1, g_2, 0, g_3, 0)$ e $\mathbb{G} = \mathbb{F}_1$ obtida de (2.18). Por outro lado, quando a matriz R depende do instante avançado de tempo $k + 1$, tem-se $p = g = (g_1, 0, g_2, 0, g_3)$ e $\mathbb{G} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{H}_1$ com \mathbb{F}_1 e \mathbb{H}_1 computadas por (2.18). Note que $R(\alpha)$ depende polinomialmente dos parâmetros α_1 , α_2 e α_3 com graus g_1 , g_2 e g_3 , respectivamente.

2.4 Estabilização

Novas condições baseadas em LMIs para a síntese de controladores estabilizantes por realimentação de estados e de saída para sistemas discretos com dependência polinomial nos parâmetros e incertezas aditivas limitadas em norma são propostas nessa seção.

O sistema (2.1) é amostrado com um intervalo de amostragem variante no tempo $T(\alpha_2(t))$ maior do que $\tau(\alpha_3(t))$, gerando o modelo discreto aumentado dado por (2.24), para $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} z(k+1) = \mathbb{A}(\alpha)z(k) + \mathbb{B}u(k+1) \\ y(k) = \mathbb{C}(\alpha)z(k) \end{cases} \quad (2.24)$$

em que $\mathbb{A}(\alpha) = \mathbb{A}_\ell(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)$,

$$\mathbb{A}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} A_\ell(\alpha) & B_\ell(\alpha) & B_{d\ell}(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(\alpha) & \Delta B_\ell(\alpha) & \Delta B_{d\ell}(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} C(\alpha)' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}.$$

O termo aditivo $\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)$ representa o erro residual de discretização e pode ser limitado por $\|\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)\| \leq \delta$, definido como

$$\delta = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)\|. \quad (2.25)$$

Como discutido anteriormente, uma estimativa para o limitante δ pode ser computada realizando uma busca em uma malha fina de valores $\alpha \in \Lambda_N$. Essa estratégia mostra-se eficaz, pelo menos para sistemas com poucos parâmetros incertos.

A matriz $\mathbb{A}_\ell(\alpha)$, com grau $\ell \in \mathbb{N}$ da expansão da série de Taylor, tem elementos $A_\ell(\alpha)$, $B_\ell(\alpha)$ e $B_{d\ell}(\alpha)$ com graus diferentes em α , requerendo um procedimento de homogeneização,

$$\hat{\mathbb{A}}_\ell(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(2\ell)} \alpha^k \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & B_{dk} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(2\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(2\ell)} \alpha^k \mathbb{A}_k, \quad (2.26)$$

com

$$\mathbb{A}_{11} = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(0) \times \mathcal{K}_2(2\ell) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{\ell!(2\ell)!}{\tilde{k}!} A_{k-\tilde{k}}, \quad \mathbb{A}_{12} = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(0) \times \mathcal{K}_2(\ell) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{(\ell!)^2}{\tilde{k}!} B_{k-\tilde{k}},$$

$$\mathbb{I} = \frac{(2\ell)!\ell!(2\ell)!}{k!} I.$$

A representação de $\mathbb{C}(\alpha)$ no domínio multi-simplex é

$$\mathbb{C}(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_{N_1}(1) \times \mathcal{K}_2(0) \times \mathcal{K}_2(0)} \alpha^{k_1} \mathbb{C}_k.$$

Supondo que tanto $\alpha(k)$ como $y(k)$ estejam disponíveis para medição em tempo real e definindo a lei de controle dependente de parâmetros por realimentação estática de saída como

$$u(k) = L(\alpha)y(k) = L(\alpha)C(\alpha)x(k), \quad (2.27)$$

os seguintes teoremas podem ser formulados para a estabilização do sistema (2.24) ou (2.5), e, conseqüentemente, de (2.1). Primeiramente, considere o problema de projetar um ganho dependente de parâmetros estabilizante por realimentação de estados por meio de condições LMIs suficientes apresentadas no Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *O ganho dependente de parâmetro por realimentação de estados $K(\alpha) = Z(\alpha)Y^{-1}$, estabiliza o sistema (2.24) ou (2.5) e, conseqüentemente, (2.1), se existirem matrizes simétricas $P_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(g_1, g_2, g_3)$, matrizes $Z_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(h_1, h_2, h_3)$, e $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, uma variável escalar λ , graus de relaxação de Pólya $d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \in \mathbb{N}^5$ e δ computado por (2.25), tais que as seguintes LMIs se verificam*

$$\Omega_1 + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_M(w-g) \\ k \geq \tilde{k}}} \Omega_2 + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_M(w-\bar{g}) \\ k \geq \tilde{k}}} \Omega_3 + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_M(w-h) \\ k \geq \hat{k}}} \Omega_4 + \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{K}_M(w-l_v) \\ k \geq \check{k}}} \Omega_5 < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_M(w) \quad (2.28)$$

em que

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{w!}{k!} \begin{bmatrix} \lambda \delta^2 I & \star & \star \\ 0 & -Y - Y' & \star \\ 0 & Y & -\lambda I \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \frac{(w-g)!}{\bar{k}!} \text{diag} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{P}_{k-\bar{k}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Omega_3 &= \frac{(w-\bar{g})!}{\dot{k}!} \text{diag} \begin{pmatrix} -\bar{P}_{k-\dot{k}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_4 = \frac{(w-h)!}{\hat{k}!} \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ \tilde{Z}'_{k-\hat{k}} B' & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Omega_5 &= \frac{(w-\ell_v)!}{\check{k}!} \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ Y' \tilde{A}'_{k-\check{k}} & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

sendo que $\ell_v = (2\ell, \ell, 0, \ell, 0)$, $g = (g_1, g_2, 0, g_3, 0)$, $\bar{g} = (g_1, 0, g_2, 0, g_3)$, $h = (h_1, h_2, 0, h_3, 0)$ e $w = \max\{g, \bar{g}, h, \ell_v\} + d$. As matrizes \tilde{A}_k , \tilde{Z}_k , \tilde{P}_k e \hat{P}_k são os coeficientes das matrizes polinomiais homogêneas $\tilde{A}(\gamma)$, $\tilde{Z}(\gamma)$, $\tilde{P}(\gamma)$ e $\hat{P}(\gamma)$ obtidos pelo emprego da mudança de variáveis (2.23) com, respectivamente, $R_s = \mathbb{A}_k$, $p = \ell_v$, $R_s = Z_k$, $p = h$, $R_s = P_k$, $p = g$, e $R_s = P_k$, $p = \bar{g}$, sendo \mathbb{A}_k , Z_k e P_k os coeficientes das matrizes $\hat{A}_\ell(\alpha)$, $Z(\alpha)$ e $P(\alpha)$.

Prova: Primeiramente, note que $\prod_{j=1}^5 \left(\sum_{i=1}^{M_j} \gamma_{mi} \right)^{d_j} = 1$ para todo $d_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, 5$ e $m = 1, \dots, 5$.

Definindo a matriz em malha fechada $A_\ell^{sf}(\gamma) = \tilde{A}_\ell(\gamma) + B\tilde{Z}(\gamma)Y^{-1}$, e escolhendo

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \text{diag} \left(-\tilde{P}(\gamma) + \lambda \delta^2 I, \tilde{P}(\gamma), -\lambda I \right), \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} A_\ell^{sf}(\gamma) \\ -I \\ I \end{bmatrix}', \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\ell^{sf}(\gamma)' & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y' \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

em que \mathcal{B}^\perp denota uma base arbitrária para o espaço nulo de \mathcal{B} , tem-se

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0 \quad (2.29)$$

que é (2.28) multiplicada por γ^k e somada para todo $k \in \mathcal{K}_M(w)$. Tais condições são equivalentes a

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma) - \lambda \delta^2 I & \star & \star \\ \tilde{P}(\gamma) A_\ell^{sf}(\gamma)' & \tilde{P}(\gamma) & \star \\ 0 & \tilde{P}(\gamma) & \lambda I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.30)$$

que foi obtida de (2.29) multiplicando $\mathcal{B}^{\perp'}$ à esquerda, \mathcal{B}^\perp à direita e aplicando o complemento de Schur no elemento (1, 1). Se (2.30) for verificada, então a seguinte condição, obtida pela aplicação da mudança de variáveis (2.23) e o complemento de Schur, também é verificada

$$\begin{bmatrix} P(\alpha + \Delta\alpha) & \star \\ P(\alpha) A_\ell^{sf}(\alpha)' & P(\alpha) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \delta I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta I \\ 0 \end{bmatrix}' - \lambda^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P(\alpha) \end{bmatrix}' > 0. \quad (2.31)$$

Em seguida, empregando o Lema C.1 e sabendo que $\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)' < \delta^2 I$, tem-se

$$\begin{bmatrix} P(\alpha + \Delta\alpha) & \star \\ P(\alpha)(\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \mathbb{B}K)' & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.32)$$

Finalmente, multiplique (2.32) à esquerda por \mathcal{T}' e à direita por \mathcal{T} , com

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha + \Delta\alpha)^{-1} \\ P(\alpha)^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

para obter

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)^{-1} & \star \\ P(\alpha + \Delta\alpha)^{-1}(\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \mathbb{B}K) & P(\alpha + \Delta\alpha)^{-1} \end{bmatrix} > 0,$$

ou

$$(\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \mathbb{B}K)'P(\alpha + \Delta\alpha)^{-1}(\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) + \mathbb{B}K) - P(\alpha)^{-1} < 0,$$

que certifica a estabilidade em malha fechada do sistema (2.24) ou (2.5) e, conseqüentemente, de (2.1), por meio da função de Lyapunov $v(x, \alpha) = x'P(\alpha)^{-1}x$. \square

O Teorema 2.1 pode ser adaptado para lidar com um atraso induzido pela rede τ constante, como mostrado a seguir.

Corolário 2.1. *O ganho dependente de parâmetro por realimentação de estados $K(\alpha) = Z(\alpha)Y^{-1}$, estabiliza o sistema (2.24) ou (2.5) e, conseqüentemente, (2.1), com um atraso induzido pela rede constante, se existirem matrizes simétricas $P_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(g_1, g_2)$, matrizes $Z_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(h_1, h_2)$, e $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, uma variável escalar λ , graus da relaxação de Pólya $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{N}^3$ e δ computado por (2.25), tais que (2.28) se verifique com $\ell_v = (2\ell, \ell, 0)$, $g = (g_1, g_2, 0)$, $\bar{g} = (g_1, 0, g_2)$, $h = (h_1, h_2, 0)$ e $w = \max\{g, \bar{g}, h, \ell_v\} + d$. As matrizes $\tilde{\mathbb{A}}_k$, \tilde{Z}_k , \tilde{P}_k e \hat{P}_k são os coeficientes das matrizes polinomiais $\tilde{\mathbb{A}}(\gamma)$, $\tilde{Z}(\gamma)$, $\tilde{P}(\gamma)$ e $\hat{P}(\gamma)$ obtidos pela aplicação da mudança de variáveis (2.23) excluindo os dois últimos simplexes com, respectivamente, $R_s = \mathbb{A}_k$, $p = \ell_v$, $R_s = Z_k$, $p = h$, $R_s = P_k$, $p = g$ e $R_s = P_k$, $p = \bar{g}$, em que \mathbb{A}_k , Z_k e P_k são os coeficientes das matrizes $\hat{\mathbb{A}}_\ell(\alpha)$, $Z(\alpha)$ e $P(\alpha)$.*

Em problemas reais, pode ser difícil acessar todos os estados do sistema devido, por exemplo, ao elevado custo de implementação relacionado ao grande número de sensores necessários ou quando os estados não podem ser diretamente lidos. Conseqüentemente, uma técnica mais efetiva e de utilização prática é o projeto de ganhos por realimentação de saída. Nesses casos, o ganho dependente de parâmetros por realimentação de estados solução do Teorema 2.1 pode ser utilizado como entrada para o segundo estágio, representado pelo Teorema 2.2, o qual provê novas condições LMIs que buscam por um controlador estabilizante estático por realimentação de saída.

Teorema 2.2. *O ganho estático dependente de parâmetros por realimentação de saída $L(\alpha) = H(\alpha)^{-1}J(\alpha)$ estabiliza robustamente o sistema (2.24), (2.5) e, conseqüentemente, (2.1), se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{X}_N(g_1, g_2, g_3)$, matrizes $H_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e $J_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $k \in \mathcal{X}_N(v_1, v_2, v_3)$, $Y_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $F_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{X}_N(f)$, com $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$, uma variável escalar λ , graus de relaxação de Pólya $d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \in \mathbb{N}^5$, matrizes dadas $K_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathcal{X}_N(h_1, h_2, h_3)$, soluções do Teorema 2.1 e δ computada por (2.25), tais que as seguintes LMIs se verifiquem*

$$\begin{aligned} & \frac{w!}{k!} \Omega_1 + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{X}_M(w-v) \\ k \geq \tilde{k}}} \frac{(w-v)!}{\tilde{k}!} \Omega_2 + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{X}_M(w-g) \\ k \geq \hat{k}}} \frac{(w-g)!}{\hat{k}!} \Omega_3 + \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_M(w-\bar{g}) \\ k \geq \bar{k}}} \frac{(w-\bar{g})!}{\bar{k}!} \Omega_4 \\ & + \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{X}_M(w-f) \\ k \geq \check{k}}} \frac{(w-f)!}{\check{k}!} \Omega_5 + \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_M(w-v-\phi) \\ k \geq k}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{X}(\phi) \\ k \geq k + \bar{k}}} \frac{(w-v-\phi)!}{\bar{k}!} \Omega_6 + \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_M(w-v-h) \\ k \geq k}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{X}(h) \\ k \geq k + \bar{k}}} \frac{(w-v-h)!}{\bar{k}!} \Omega_7 \\ & + \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{X}_M(w-f-h) \\ k \geq \check{k}}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{X}_M(h) \\ k \geq k + \bar{k}}} \frac{(w-f-h)!}{\check{k}!} \Omega_8 + \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{X}_M(w-f-l_v) \\ k \geq \check{k}}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{X}_M(l_v) \\ k \geq k + \bar{k}}} \frac{(w-f-l_v)!}{\check{k}!} \Omega_9 > 0, \end{aligned} \quad \forall k \in \mathcal{X}_M(w) \quad (2.33)$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \text{diag}(-\lambda \delta^2 I, 0, 0, \lambda I), & \Omega_2 &= \text{diag}(0, 0, -\tilde{H}_{k-\tilde{k}} - \tilde{H}'_{k-\tilde{k}}, 0), \\ \Omega_3 &= \text{diag}(\tilde{P}_{k-\hat{k}}, 0, 0, 0), & \Omega_4 &= \text{diag}(0, -\bar{P}_{k-\bar{k}}, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_5 &= \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ -F_{k-\check{k}} & Y_{k-\check{k}} + Y'_{k-\check{k}} & * & * \\ -B'F'_{k-\check{k}} & B'Y'_{k-\check{k}} & 0 & * \\ F'_{k-\check{k}} & Y'_{k-\check{k}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \Omega_6 &= \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ \tilde{J}_{k-\check{k}-\bar{k}} \tilde{C}_{\bar{k}} & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Omega_7 &= \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ -\tilde{H}_{k-\check{k}-\bar{k}} \tilde{K}_{\bar{k}} & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \Omega_8 &= \begin{bmatrix} -\tilde{K}'_{\bar{k}} B'F'_{k-\check{k}-\bar{k}} - F_{k-\check{k}-\bar{k}} B \tilde{K}_{\bar{k}} & * & * & * \\ Y_{k-\check{k}-\bar{k}} B \tilde{K}_{\bar{k}} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Omega_9 &= \begin{bmatrix} -\tilde{A}'_{\bar{k}} F'_{k-\check{k}-\bar{k}} - F_{k-\check{k}-\bar{k}} \tilde{A}_{\bar{k}} & * & * & * \\ Y_{k-\check{k}-\bar{k}} \tilde{A}_{\bar{k}} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo que $l_v = (2\ell, \ell, 0, \ell, 0)$, $g = (g_1, g_2, 0, g_3, 0)$, $\bar{g} = (g_1, 0, g_2, 0, g_3)$, $h = (h_1, h_2, 0, h_3, 0)$, $v = (v_1, v_2, 0, v_3, 0)$, $\phi = (1, 0, 0, 0, 0)$ e $w = \max\{g, \bar{g}, v + \phi, f + h, h + v, f + l_v\} + d$. As matrizes $\tilde{A}_{\bar{k}}$,

$\tilde{\mathbb{C}}_k, \tilde{H}_k, \tilde{J}_k, \tilde{K}_k, \tilde{P}_k$ e \tilde{P}_k são os coeficientes das matrizes polinomiais $\tilde{\mathbb{A}}(\gamma), \tilde{\mathbb{C}}(\gamma), \tilde{H}(\gamma), \tilde{J}(\gamma), \tilde{K}(\gamma), \tilde{P}(\gamma)$ e $\tilde{P}(\gamma)$ obtidas com a mudança de variáveis (2.23) com, respectivamente, $R_s = \mathbb{A}_k, p = \ell_v, R_s = \mathbb{C}_k, p = \phi, R_s = H_k$ e $R_s = J_k$, ambos com $p = v, R_s = P_k, p = g$ e $R_s = P_k, p = \bar{g}$, em que $\mathbb{A}_k, \mathbb{C}_k, H_k, J_k$ e P_k são os coeficientes das matrizes $\hat{\mathbb{A}}_\ell(\alpha), \mathbb{C}(\alpha), H(\alpha), J(\alpha)$ e $P(\alpha)$.

Prova: Primeiramente, note que com $A_\ell^{sf}(\gamma) = \tilde{\mathbb{A}}_\ell(\gamma) + \mathbb{B}\tilde{K}(\gamma)$ e $A_\ell^{of}(\gamma) = \tilde{\mathbb{A}}_\ell(\gamma) + \mathbb{B}\tilde{L}(\gamma)\tilde{\mathbb{C}}(\gamma)$, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \tilde{P}(\gamma) - A_\ell^{sf}(\gamma)F'(\gamma) \\ -F(\gamma)A_\ell^{sf}(\gamma) - \lambda\delta^2 I \end{array} \right) & * & * & * \\ -F'(\gamma) + Y(\gamma)A_\ell^{sf}(\gamma) & \begin{pmatrix} Y(\gamma) \\ +Y(\gamma)' \\ -\tilde{P}(\gamma) \end{pmatrix} & * & * \\ B'F'(\gamma) & B'Y'(\gamma) & 0 & * \\ F'(\gamma) & Y'(\gamma) & 0 & \lambda I \end{bmatrix}}_Q + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\tilde{H}(\gamma)}_X \begin{bmatrix} S'(\gamma)' \\ 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} S'(\gamma) \\ 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix}}_V \underbrace{\tilde{H}'(\gamma)}_X \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}' > 0 \quad (2.34)$$

que é (2.33) multiplicada por γ^k e somada para todo $k \in \mathcal{X}_M(w)$, com $S(\gamma) = \tilde{H}(\gamma)^{-1}\tilde{J}(\gamma)\tilde{\mathbb{C}}(\gamma) - \tilde{K}(\gamma)$. Escolhendo

$$N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & S(\gamma) & 0 \end{bmatrix}' \quad \text{e} \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}' ,$$

tem-se que (2.34) é equivalente, pelo lema da projeção (Lema C.2), a

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma) - A_\ell^{cl}(\gamma)'F(\gamma)' - F(\gamma)A_\ell^{cl}(\gamma) - \lambda\delta^2 I & * & * \\ -F(\gamma)' + Y(\gamma)A_\ell^{cl}(\gamma) & -\tilde{P}(\gamma) + Y(\gamma) + Y(\gamma)' & * \\ F(\gamma)' & Y(\gamma)' & \lambda I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.35)$$

que é a multiplicação de Q em (2.34) por N_V' à esquerda e por N_U à direita, substituindo $A_\ell^{cl}(\gamma)$ em (2.35) por $A_\ell^{of}(\gamma)$, ou a multiplicação de Q por N_U à direita e à esquerda por sua transposta, substituindo $A_\ell^{cl}(\gamma)$ em (2.35) por $A_\ell^{sf}(\gamma)$, em que as colunas de N_V e N_U formam bases para o espaço nulo de V e U , respectivamente. Pelo complemento de Schur, (2.35) pode ser reescrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \tilde{P}(\gamma) - A_\ell^{cl}(\gamma)'F(\gamma)' \\ -F(\gamma)A_\ell^{cl}(\gamma) \end{array} \right) & * \\ -F(\gamma)' + Y(\gamma)A_\ell^{cl}(\gamma) & \begin{pmatrix} Y(\gamma) + Y(\gamma)' \\ -\tilde{P}(\gamma) \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_R - \lambda^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} F(\gamma) \\ Y(\gamma) \end{bmatrix}}_{X'} \begin{bmatrix} F(\gamma)' \\ Y(\gamma)' \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \delta I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta I \\ 0 \end{bmatrix}' > 0. \quad (2.36)$$

Observando que $\Delta\mathbb{A}_\ell(\gamma)'\Delta\mathbb{A}_\ell(\gamma) = \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)'\Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha) < \delta^2 I$ e utilizando o Lema C.1, tem-se

$$R - \begin{bmatrix} \Delta\mathbb{A}_\ell(\gamma) \\ 0 \end{bmatrix} X - X' \begin{bmatrix} \Delta\mathbb{A}_\ell(\gamma) \\ 0 \end{bmatrix}' > 0 \quad (2.37)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\gamma) - A_{cl}(\gamma)'F(\gamma)' - F(\gamma)A_{cl}(\gamma) & * \\ -F(\gamma)' + Y(\gamma)A_{cl}(\gamma) & -\hat{P}(\gamma) + Y(\gamma) + Y(\gamma)' \end{bmatrix} > 0 \quad (2.38)$$

em que $A_{cl}(\gamma) = A_\ell^{cl}(\gamma) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\gamma)$. Finalmente, multiplicando (2.38) por $\mathcal{B}' = \begin{bmatrix} -I & A_{cl}(\gamma)' \end{bmatrix}$ à esquerda e por \mathcal{B} à direita e aplicando a mudança de variáveis (2.23), obtém-se

$$A_{cl}(\alpha)'P(\alpha + \Delta\alpha)A_{cl}(\alpha) - P(\alpha) < 0$$

que garante a estabilidade em malha fechada de (2.24) ou (2.5) com a lei de controle por realimentação de saída (2.27), substituindo $A_{cl}(\alpha)$ por $A_\ell^{of}(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)$, ou com a lei de controle por realimentação de estados $u(k) = K(\alpha)x(k)$, substituindo $A_{cl}(\alpha)$ por $A_\ell^{sf}(\alpha) + \Delta\mathbb{A}_\ell(\alpha)$.

Embora a estabilizabilidade de um sistema LPV discreto, obtido como resultado de um procedimento de discretização disponível na literatura, geralmente não implica que o sistema LPV contínuo original seja estabilizável, na abordagem proposta a lei de controle por realimentação de saída (2.27) garante a estabilidade do sistema LPV contínuo em malha fechada (2.1), posto que os parâmetros variantes no tempo são constantes por partes e que o erro de aproximação do procedimento de discretização é levado em consideração. A demonstração dessa afirmação é apresentada no Apêndice B. \square

É digno de nota que, devido à flexibilidade introduzida pela metodologia multi-simplex, se algum parâmetro variante no tempo α_i , $i = 1, 2, 3$, não puder ser lido em tempo real, as condições LMIs dos Teoremas 2.1 e 2.2 podem prover ganhos de realimentação independentes de parâmetros (robustos) com respeito ao parâmetro não lido. Nesse caso, basta definir os graus parciais h_i e v_i iguais a zero nos Teoremas 2.1 e 2.2, respectivamente.

Adicionalmente, como feito para o Teorema 2.1, o Teorema 2.2 também pode ser modificado para considerar atrasos constantes induzidos pela rede.

Corolário 2.2. *O ganho por realimentação de saída dependente de parâmetro $L(\alpha) = H(\alpha)^{-1}J(\alpha)$ estabiliza robustamente os sistemas (2.24), (2.5) e, conseqüentemente, (2.1), com um atraso constante induzido pela rede, se existirem matrizes simétricas $P_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(g_1, g_2)$, matrizes $H_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e $J_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $k \in \mathcal{K}_N(v_1, v_2)$, $Y_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $F_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(f)$, com $f = (f_1, f_2, f_3)$, uma variável escalar λ , graus de relaxação de Pólya $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{N}^3$, matrizes dadas $K_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}_N(h_1, h_2)$, soluções do Corolário 2.1 e δ computado com (2.25),*

tais que (2.33) seja verificada com $\ell_v = (2\ell, \ell, 0)$, $g = (g_1, g_2, 0)$, $\bar{g} = (g_1, 0, g_2)$, $h = (h_1, h_2, 0)$, $v = (v_1, v_2, 0)$, $\phi = (1, 0, 0)$ e $w = \max\{g, \bar{g}, v + \phi, f + h, h + v, f + \ell_v\} + d$. As matrizes \tilde{A}_k , \tilde{C}_k , \tilde{H}_k , \tilde{J}_k , \tilde{K}_k , \tilde{P}_k e \tilde{P}_k são os coeficientes das matrizes polinomiais homogêneas $\tilde{A}(\gamma)$, $\tilde{C}(\gamma)$, $\tilde{H}(\gamma)$, $\tilde{J}(\gamma)$, $\tilde{K}(\gamma)$, $\tilde{P}(\gamma)$ e $\tilde{P}(\gamma)$ obtidas pelo emprego da mudança de variáveis (2.23) excluindo os últimos dois simplexos com, respectivamente, $R_s = A_k$, $p = \ell_v$, $R_s = C_k$, $p = \phi$, $R_s = H_k$ e $R_s = J_k$, ambos com $p = v$, $R_s = P_k$, $p = g$, e $R_s = P_k$, $p = \bar{g}$, em que A_k , C_k , H_k , J_k e P_k são os coeficientes das matrizes $\hat{A}_\ell(\alpha)$, $C(\alpha)$, $H(\alpha)$, $J(\alpha)$ e $P(\alpha)$.

2.5 Exemplos Numéricos

Como discutido previamente, as abordagens existentes na literatura para o controle digital de sistemas LPV, as quais em geral requerem que a obtenção do modelo discreto equivalente e o projeto do controlador sejam realizados em tempo real, não permitem uma comparação direta com a técnica proposta, na qual os ganhos são previamente computados e apenas a implementação ocorre em tempo real. Assim, o objetivo desta seção é ilustrar a aplicabilidade do método proposto por meio de experimentos numéricos.

Exemplo 2.1. Considere o sistema contínuo LPV instável (2.1), com um atraso induzido pela rede variante no tempo $\tau(\alpha_3(t)) = 0.01\alpha_{31}(t) + 0.02\alpha_{32}(t)$, cujos vértices são

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -2.0 & 0.3 \end{bmatrix}, & E_2 &= \beta \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.5 \end{bmatrix}, & F_1 &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \\ G_1 &= \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}, & G_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 2.0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

O parâmetro variante no tempo $\alpha_1(t)$ é continuamente monitorado e a máxima taxa de variação (derivada) é dada por $\|\dot{\alpha}_1(t)\| \leq 6$. Para garantir a hipótese que o parâmetro $\alpha_1(k)$ não se altere significativamente no intervalo de amostragem quando a variação de $\alpha_1(k)$ ultrapassar $\varepsilon = 0.3$, isto é $\|\alpha_1(k+1) - \alpha_1(k)\| \geq 0.3$, uma nova amostra é lida e o controlador atua no sistema. Assim, o limitante inferior do intervalo de amostragem é computado como $T_1 = 0.3/6 = 0.05$ s empregando (2.3). Se a variação de $\alpha_1(k)$ permanecer menor do que o limiar $\varepsilon = 0.3$ estabelecido, novas amostras são geradas em $T_2 = 0.1$ s. Portanto, o sistema é amostrado com $T(\alpha_2(t)) = 0.05\alpha_{21}(t) + 0.10\alpha_{22}(t)$ s.

Dois casos são considerados. No primeiro caso, supõe-se que β seja igual a 0.3 e o objetivo é projetar um controlador digital escalonado por realimentação de saída que assegure a estabilidade em malha fechada do sistema LPV contínuo. Em aplicações práticas, é difícil obter os valores do atraso induzido pela rede em tempo real. Por essa razão o ganho escalonado por realimentação de saída foi projetado para ser robusto com respeito a $\tau(\alpha_3(t))$.

Para graus de discretização $\ell < 2$, a técnica de dois estágios não proveu soluções factíveis, pois os limitantes máximos δ para o erro de discretização são altos. Contudo, empregando graus ℓ maiores, obtém-se uma descrição dinâmica mais acurada do sistema LPV (2.39) e, nesse caso, é possível sintetizar uma lei de controle estabilizante. Assim, por exemplo, fixando $\ell = 2$ no procedimento de discretização e aplicando o Teorema 2.1, com $g = \mathbb{1}$, $h = d = 0$, um ganho estabilizante por realimentação de estados pode ser encontrado. Em seguida, empregado o resultado obtido como entrada para o Teorema 2.2, com $g_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $v_1 = v_2 = 1$, $v_3 = 0$ e $f_j = d_j = 0$, $j = 1, \dots, 5$, um ganho por realimentação de saída é encontrado. Para esse exemplo em particular, uma lei de controle independente de parâmetros por realimentação de saída não pode ser projetada pelo Teorema 2.2. Na Figura 13, apresenta-se um simulação temporal do comportamento dinâmico em malha fechada da saída $y(t)$, para uma condição inicial $x_0 = [-3 \ 2]'$, na qual assume-se que os parâmetros LPV $\alpha_1(t)$ são governados pela seguinte função

$$\alpha_{11} = \sin^2(6t) \quad \text{e} \quad \alpha_{12} = 1 - \alpha_{11}, \quad (2.40)$$

e $\alpha_3(t)$ tem uma distribuição uniforme no intervalo $[0.01, 0.02]$. Para efeito de ilustração, os instantes de amostragem variantes no tempo são mostrados na parte inferior da figura.

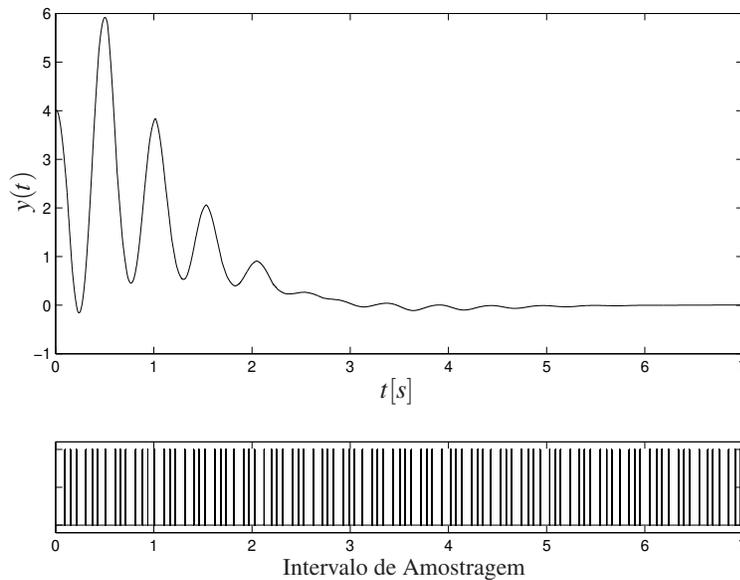


Figura 13: Trajetórias da saída controlada do sistema em malha fechada (2.39) com $\ell = 2$, $\tau(\alpha_3(t)) = 0.01\alpha_{31}(t) + 0.02\alpha_{32}(t)$ s, α_1 dado por (2.40) e $x_0 = [-3 \ 2]'$ para o Exemplo 2.1.

No segundo caso, considere o projeto de controladores estabilizantes por realimentação de estados pelo Teorema 2.1 para diversos valores de $\beta > 0$. O objetivo é mostrar como o conservadorismo dos resultados pode ser reduzido pelo aumento dos graus da matriz de Lyapunov e das

variáveis de folga, como mostrado na Tabela 4. Adicionalmente, realizando um procedimento de discretização mais preciso, o Teorema 2.1 fornece soluções factíveis para uma maior faixa de valores de β . Por exemplo, escolhendo $\ell = 3$ e $g_i = h_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, o valor máximo de β é elevado de 0.7578 (veja Tabela 4) para 0.9297.

Tabela 4: Limitantes superiores de $\beta > 0$ para diferentes graus g da matriz de Lyapunov e h das variáveis de folga no Teorema 2.1 para $\ell = 2$ no Exemplo 2.1.

g	h	β
(0,0,0)	(0,0,0)	0.7578
(1,1,1)	(0,0,0)	1.0781
(0,0,0)	(1,1,1)	1.2012
(1,1,1)	(1,1,1)	1.4102

Exemplo 2.2. Considere uma aeronave VTOL (do inglês, *Vertical Take-off and Landing*) cujo modelo dinâmico linearizado, adaptado de (KEEL *et al.*, 1988), é descrito por (2.1) com um atraso induzido pela rede constante $\tau = 0.01$ s. Nesse modelo, as componentes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ do vetor de estados $x(t)$ e $u_1(t)$, $u_2(t)$ do vetor de entradas de controle $u(t)$ representam, respectivamente, as velocidades horizontais e verticais (nós), a taxa de arfagem (*pitch*) (grau/s), o ângulo de arfagem (graus), o controle coletivo e longitudinal da arfagem. As matrizes do sistema são

$$E(p(t)) = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & p(t) & -0.7070 & 1.4200 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 1.4200 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $p(t) = 0.45 + 0.1319 \sin(4.56t) \cos(9.12t)$ e $i = 1, 2$. Ao avaliar a matriz dinâmica do sistema nos extremos dos valores do parâmetro incerto $p(t) \in [0.3181 \ 0.5819]$, obtém-se um politopo de dois vértices. Para converter a evolução de $p(t)$ em um parâmetro que pertença a um novo domínio paramétrico (politópico), tomam-se

$$\alpha_{11} = \frac{1 + \sin(4.56t) \cos(9.12t)}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_{12} = 1 - \alpha_{11}, \quad (2.41)$$

garantindo que $\alpha_1(t) \in [0 \ 1]$. O parâmetro variante no tempo $\alpha_1(t)$ apresenta uma derivada máxima de 4, isto é, $\|\dot{\alpha}_1(t)\| \leq 4$. Similar ao que foi feito no Exemplo 2.1, para assegurar que o parâmetro α_1 não varie significativamente, escolhe-se ε em (2.3) igual a 0.2 o que significa que

$T_1 = 0.05$ s e adota-se o limitante superior para o intervalo de amostragem T_2 igual a 0.11 s. Consequentemente, as velocidades verticais e horizontais são medidas espaçadas temporalmente de $T(\alpha_2(t)) = 0.05\alpha_{21}(t) + 0.11\alpha_{22}(t)$ s.

O objetivo é projetar um controlador digital escalonado por realimentação de saída que assegure a estabilidade em malha fechada do sistema LPV contínuo. Para este propósito, ganhos por realimentação de estados são obtidos pelo emprego da condição do Corolário 2.1 para os modelos discretos obtidos de (2.12)-(2.14) com $\ell = 1, 2, 3$ e os resultados são utilizados como entrada no Corolário 2.2.

Para graus de discretização $\ell < 3$, a técnica de dois estágios não provê soluções estabilizantes. Contudo, empregando uma discretização mais acurada do sistema LPV, é possível projetar uma lei de controle estabilizante. Por exemplo, escolhendo $\ell = 3$, o limitante do erro residual computado pelo procedimento de discretização é $\delta \cong 1.45 \times 10^{-7}$. Então, fixando $g = h = \mathbb{1}$ e $d_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, no Corolário 2.1 e $g = v = \mathbb{1}$ e $f_j = d_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, no Corolário 2.2, obtém-se um ganho dependente de parâmetros por realimentação de saída. Para este exemplo, um ganho robusto não pôde ser projetado pelo Corolário 2.2. Na Figura 14, apresenta-se uma simulação temporal do comportamento em malha fechada da saída $y(t)$ na qual assume-se que a evolução de $\alpha_1(t)$ é governada pela função (2.41) e o sistema parte da condição inicial $x_0 = [-1 \ 2 \ 1 \ 3]'$. Como pode ser visto, o controlador escalonado projetado estabiliza o sistema LPV contínuo.

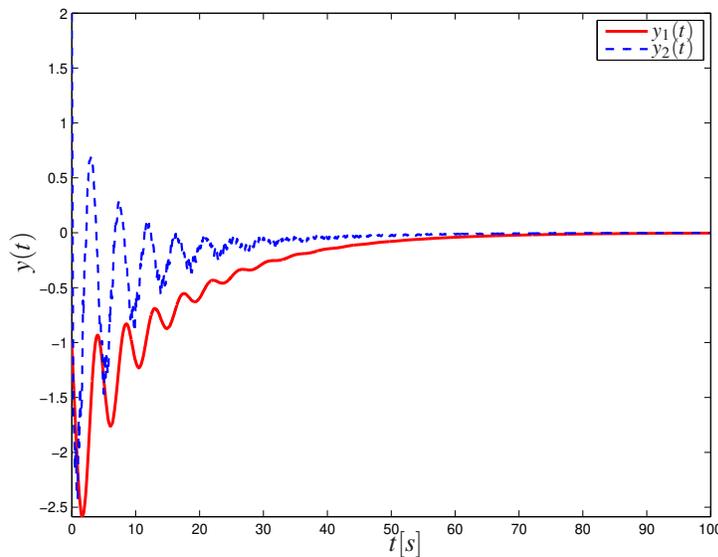


Figura 14: Trajetórias da saída controlada do sistema VTOL em malha fechada com $\ell = 3$, $\tau = 0.01$ s, α_1 dado por (2.41) e $x_0 = [-1 \ 2 \ 1 \ 3]'$ para o Exemplo 2.2.

2.6 Conclusões Parciais

Neste capítulo, apresentou-se uma técnica para o projeto de controladores digitais escalonados por realimentação de saída para sistemas LPV contínuos com um atraso induzido pela rede variante no tempo. Para este fim, foi proposto um procedimento de discretização, que converte um sistema LPV contínuo em um sistema LPV discreto equivalente, baseado em uma extensão da expansão da série de Taylor que utiliza uma amostragem baseada em eventos. Ademais, foram fornecidas novas condições LMIs para o projeto de uma lei de controle estática e escalonada por realimentação de estados ou de saída para sistemas LPV discretos com dependência polinomial nos parâmetros e um termo aditivo limitado em norma. Os experimentos numéricos ilustraram que a lei de controle escalonada digital pode assegurar a estabilidade em malha fechada do sistema LPV contínuo original.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, investigaram-se os problemas de discretização e de projeto de controladores digitais para NCSs com atraso induzido pela rede e taxas de amostragem incertas em dois diferentes cenários: i) sistemas politópicos lineares invariantes no tempo e; ii) sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo. As principais contribuições desta tese são enfatizadas a seguir.

Primeiramente, abordou-se o problema de síntese de controladores robustos digitais para NCSs com atraso induzido pela rede e taxas de amostragem incertas. Foi proposto um novo procedimento de discretização para sistemas lineares invariantes no tempo incertos baseado em expansões em série de Taylor das exponenciais de matrizes incertas. A utilização desta técnica provê um sistema discreto incerto descrito por matrizes com dependência polinomial nos parâmetros incertos que pertencem ao domínio multi-simplex e termos aditivos limitados em norma que representam o erro residual de discretização. Quando o grau da aproximação é apropriado, o erro da representação discreta é reduzido e, conseqüentemente, o modelo representa acuradamente o comportamento dinâmico do sistema contínuo. Além disso, as condições LMIs propostas para síntese de controladores, baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e na busca de um parâmetro escalar, permitem projetar um controlador robusto que garante a estabilidade em malha fechada do NCS. Uma das principais vantagens da técnica proposta é garantir a estabilidade teórica do sistema contínuo em malha fechada sem a restrição da escolha do período de amostragem em função do atraso induzido pela rede. Dessa forma, o projetista pode levar em consideração apenas questões relacionadas com a limitação da banda de comunicação. Os exemplos numéricos mostraram que o controlador digital projetado pelo método proposto, de fato, estabiliza o sistema contínuo original. Como segunda contribuição, também apresentou-se um procedimento de discretização baseado em expansões em série de Taylor, cuja principal característica da representação discreta é prover um custo garantido \mathcal{H}_2 que acuradamente aproxima-se da norma \mathcal{H}_2 de pior caso do sistema contínuo original, se um grau da expansão da série de Taylor ℓ apropriado for utilizado. Adicionalmente,

foram propostas condições LMIs para o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas discretos polinomiais com termos aditivos limitados em norma. Diferentemente dos métodos tradicionais da literatura para a discretização de sistemas incertos, que utilizam aproximações de primeira ordem de Taylor, os resultados obtidos pelas condições sempre proveem um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de pior caso do sistema contínuo original. Finalmente, propôs-se uma condição de análise de estabilidade para sistemas polinomiais discretizados com um termo aditivo limitado em norma, que certifica a estabilidade do mesmo e do sistema contínuo original. Essa estratégia foi aplicada para computar os limites de estabilidade em malha fechada de um conversor conectado em rede controlado por uma lei de controle robusta por realimentação de estados, ilustrando uma interessante aplicação prática da metodologia proposta.

No Capítulo 2, apresentou-se uma técnica para o projeto de controladores digitais escalonados por realimentação de saída para sistemas LPV contínuos com atraso induzido pela rede variante no tempo. O modelo LPV discreto equivalente foi obtido utilizando um procedimento de discretização inspirado na expansão da série de Taylor e amostragem baseada em eventos. No contexto de NCS, a amostragem baseada em eventos é uma importante contribuição pois permite utilizar períodos de amostragem maiores do que as técnicas usuais que empregam períodos de amostragem contantes e pequenos para tratar variações abruptas na dinâmica do sistema, exigindo uma grande largura de banda e aumento na carga do tráfego da rede. Adicionalmente, forneceram-se novas condições LMIs para o projeto de uma lei de controle estática e escalonada por realimentação de estados ou de saída para sistemas LPV discretos com dependência polinomial nos parâmetros e um termo aditivo limitado em norma. Essas condições são baseadas na estratégia de dois estágios para a obtenção do controlador por realimentação de saída que consiste em: computar, no primeiro passo, um ganho dependente de parâmetros por realimentação de estados, que é então aplicado como entrada para o segundo estágio, que pode sintetizar controladores por realimentação de saída escalonados ou robustos.

Tanto no caso LTI quanto no LPV, mostrou-se que, para um dado grau de discretização ℓ , o aumento nos graus das matrizes de Lyapunov, das variáveis de folga e da relaxação de Pólya e a busca no parâmetro escalar ξ podem reduzir o conservadorismo dos resultados.

Perspectivas futuras

Como trabalhos futuros, sugerem-se os seguintes pontos de investigação:

- a) Todas as condições apresentadas nesta tese têm como ponto crucial a utilização do erro residual de discretização, o que permite assegurar a estabilidade do sistema híbrido e, no caso do cômputo da norma, que o custo garantido calculado é um limitante superior para a norma

\mathcal{H}_2 de pior caso do sistema contínuo incerto original. No entanto, a obtenção do erro foi feita realizando uma busca exaustiva em uma malha de valores de α no domínio incerto. Conseqüentemente, sugere-se o desenvolvimento de um método genérico para a obtenção dos resíduos de discretização sem a utilização da busca exaustiva e que seja menos conservador do que as estratégias que utilizam métodos de análise intervalar (OPPENHEIMER; MICHEL, 1988; ALTHOFF *et al.*, 2007).

- b) Os projetos de controladores apresentados nesta tese não levaram em consideração nenhum tipo de critério de desempenho. Por isso, sugere-se desenvolver condições de síntese para prover uma estratégia de controle ótimo LQR (do inglês, *Linear Quadratic Regulator*) e \mathcal{H}_2 que assegure o mesmo custo garantido tanto para o modelo discretizado quanto para o sistema contínuo;
- c) O problema de filtragem, que consiste na utilização das medidas do sinal de saída de um sistema dinâmico para estimar os estados do sistema ou uma combinação linear dos mesmos, ao mesmo tempo que se minimiza a influência de ruídos exógenos na dinâmica do sinal de erro, tem atraído consideráveis esforços de pesquisa nas últimas décadas. No entanto, para sistemas híbridos a literatura carece de pesquisas relacionadas ao projeto de filtros digitais. Portanto, propõe-se desenvolver um procedimento de discretização para a obtenção das matrizes do filtro e condições para a síntese das matrizes do estimador por meio de LMIs com dependência polinomial nos parâmetros, o que pode permitir a redução do conservadorismo dos resultados.
- d) Devido ao grande apelo para a implementação de controladores digitais, um importante problema que vem sendo estudado nos últimos anos é o de projeto de um controlador digital cujo desempenho seja o mais próximo possível do obtido pelo controlador contínuo original, conhecido como procedimento de reprojeto digital (do inglês, *digital redesign procedure*). No entanto, como os trabalhos encontrados na literatura lidam apenas com sistemas precisamente conhecidos, sugere-se pesquisar novas estratégias de reprojeto digital para sistemas sujeitos a incertezas cujas condições empreguem funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros.
- e) Em muitas aplicações, várias plantas podem compartilhar o mesmo barramento de comunicação, exigindo que não somente a estratégia de controle mas também uma política de acesso ao canal de comunicação seja projetada. Assim, sugere-se a investigação de métodos capazes de tratar sistemas incertos e de prover uma política de acesso ao canal satisfazendo um problema de otimização que considera as limitações de banda da rede de comunicação.

Trabalhos produzidos como resultados desta tese

Capítulo 1

1. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretização e controle por realimentação de estados de sistemas lineares incertos. In: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*. Fortaleza, CE, Brasil: [s.n.], 2013. p. 1–6. Disponível em: http://www.sbai2013.ufc.br/Programa_SBAI_DINCON_2013_FINAL.pdf.
2. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florence, Italy: [s.n.], 2013. p. 6397–6402.
3. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation of discretized uncertain continuous-time systems. In: *Proceedings of the 2014 American Control Conference*. Portland, OR, USA: [s.n.], 2014. p. 5073–5078.
4. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretização e controle de sistemas politópicos com atrasos induzidos pela rede. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*. Belo Horizonte, MG, Brasil: [s.n.], 2014. p. 1800–1807.
5. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretization and networked control of polytopic systems with uncertain sampling rates. *International Journal of Control*, 2014. v. 87, n. 11, p. 2398–2411, November 2014.
6. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; MACCARI, L. A.; TOGNETTI, E. S.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stability analysis of grid-connected converters based on parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015. Em revisão.

Capítulo 2

1. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretization and discrete-time output feedback control of linear parameter varying continuous-time systems. In: *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, CA, USA: [s.n.], 2014, p. 4765–4771.

2. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretization and event triggered digital output feedback control of LPV systems. *Systems & Control Letters*, 2014. Em revisão.

Trabalhos não relacionados diretamente com a tese

1. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Realimentação de estados robusta \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs com parâmetros escalares. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 1672–1679.
2. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LINGUANOTTO, A. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Controle robusto por realimentação de estados para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs com parâmetros escalares. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 1664–1671.
3. BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stability and stabilization of discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probability matrix. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 6800–6805.
4. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 3876–3881.
5. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_2 control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix: Improved linear matrix inequality relaxations and multi-simplex modeling. *IET Control Theory & Applications*, 2013. v. 7, p. 1665–1674, August 2013.
6. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Realimentação estática de saída \mathcal{H}_2 para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos discretos no tempo com matrizes de probabilidade incertas por meio de LMIs com parâmetros escalares. In: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*. Fortaleza, CE, Brasil: [s.n.], 2013. p. 1–6. Disponível em: http://www.sbai2013.ufc.br/Programa_SBAI_DINCON_2013_FINAL.pdf.
7. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ static output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition

- probability matrix. In: *Proceedings of the 2014 American Control Conference*. Portland, OR, USA: [s.n.], 2014. p. 489–494.
8. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ state feedback control for MJLS with uncertain probabilities. *Automatica*, 2015. v. 52, p. 317–321, February 2015.
 9. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 control design for polytopic continuous-time Markov jump linear systems with uncertain transition rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, doi: 10.1002/rnc.3329.
 10. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ filter design through multi-simplex modeling for discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probability matrix. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*. Cape Town, South Africa: [s.n.], 2014. p. 5049–5054.
 11. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas markovianos com probabilidades incertas por meio de LMIs com escalares. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*. Belo Horizonte, MG, Brasil: [s.n.], 2014. p. 761–768.
 12. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_2 filter design through multi-simplex modeling for discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probability matrix. In: *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, CA, USA: [s.n.], 2014, p. 6585–6590.
 13. MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for polytopic continuous-time Markov jump linear systems with uncertain transition rates. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2014, doi:10.1002/acs.2528.

REFERÊNCIAS

ACKERMANN, J. *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. London, UK: Springer Verlag, 1993.

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI relaxations for reduced-order robust \mathcal{H}_∞ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012. v. 57, n. 6, p. 1532–1537, June 2012.

ALTHOFF, M.; STURSBURG, O.; BUSS, M. Reachability analysis of linear systems with uncertain parameters and inputs. In: *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA: [s.n.], 2007. p. 726–732.

ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In: FRENK, H.; ROOS, K.; TERLAKY, T.; ZHANG, S. (Ed.). *High Performance Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2000, (Applied Optimization, v. 33). p. 197–232. ISBN 978-1-4419-4819-9. <http://www.mosek.com>.

APKARIAN, P. On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers. *Automatica*, 1997. v. 33, n. 4, p. 655–661, April 1997.

ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; SALHI, S. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In: *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*. Milan, Italy: [s.n.], 2003. p. 425–430.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Inc., 1984.

BAMIEH, B.; PEARSON J., J. A general framework for linear periodic systems with applications to \mathcal{H}_∞ sampled-data control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992. v. 37, n. 4, p. 418–435, April 1992.

BLACKMORE, P.; WILLIAMSON, D.; MAREELS, I. Open-loop discretization methods for control systems design. *International Journal of Control*, 2001. v. 74, n. 15, p. 1527–1542, 2001.

- BORGES, R. A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; ABDALLAH, C. T.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ networked control for systems with uncertain sampling rates. *IET Control Theory & Applications*, 2010. v. 4, n. 1, p. 50–60, January 2010.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Discretização e controle por realimentação de estados de sistemas lineares incertos. In: *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Fortaleza, CE, Brasil: [s.n.], 2013. p. 1–6.
- CHEN, C. H.; LIN, C. L.; HWANG, T. S. Stability of networked control systems with time-varying delays. *IEEE Communications Letters*, 2007. v. 11, n. 3, p. 270–272, March 2007.
- CHEN, T.; FRANCIS, B. A. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. London, UK: Springer-Verlag, 1995.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 2001. v. 43, n. 5, p. 355–359, August 2001.
- DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012. v. 22, n. 5, p. 535–558, March 2012.
- DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 1999. v. 37, n. 4, p. 261–265, July 1999.
- FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976. v. 12, n. 5, p. 457–465, September 1976.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994. v. 4, n. 4, p. 421–448, July-August 1994.
- GAUDETTE, D.; MILLER, D. Stabilizing a first order system with an arbitrarily large time varying delay and an uncertain gain. *Systems & Control Letters*, 2013. v. 62, n. 10, p. 915–923, October 2013.
- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; MESQUITA, R. C. New approach to robust \mathcal{D} -stability analysis of linear time-invariant systems with polytope-bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006. v. 51, n. 10, p. 1709–1714, October 2006.
- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; MESQUITA, R. C. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ ε -guaranteed cost computation of uncertain linear systems. *IET Control Theory & Applications*, 2007. v. 1, n. 1, p. 201–209, January 2007.
- HARA, S.; YAMAMOTO, Y.; FUJIOKA, H. Modern and classical analysis/synthesis methods in sampled-data control — A brief overview with numerical examples. In: *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan: [s.n.], 1996. p. 1251–1256.

HETEL, L.; DAAFOUZ, J.; IUNG, C. LMI control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York, NY, USA: [s.n.], 2007. p. 1401–1406.

IWASAKI, T. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996. v. 6, p. 85–99, March 1996.

IWASAKI, T.; SKELTON, R. E. All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, 1994. v. 30, n. 8, p. 1307–1317, August 1994.

KEEL, L.; BHATTACHARYYA, S. P.; HOWZE, J. W. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988. v. 33, n. 1, p. 68–78, 1988.

KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996. v. 32, n. 10, p. 1361–1379, October 1996.

LEE, S.; WON, S. Model Predictive Control for linear parameter varying systems using a new parameter dependent terminal weighting matrix. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2006. E89-A, n. 8, p. 2166–2172, 2006.

LIAN, F.-L.; MOYNE, J. R.; TILBURY, D. M. Performance evaluation of control networks: Ethernet, ControlNet and DeviceNet. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001. v. 21, n. 1, p. 66–83, February 2001.

LIU, Y.; YU, H. Stability of networked control systems based on switched technique. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, USA: [s.n.], 2003. p. 1110–1113.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289.

MACCARI, L.; MASSING, J. R.; SCHUCH, L.; RECH, C.; PINHEIRO, H.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; MONTAGNER, V. F. LMI-based control for grid-connected converters with LCL filters under uncertain parameters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2014. v. 29, n. 7, p. 3776–3785, July 2014.

MAHMOUD, M. S.; ISMAIL, A. Role of delays in networked control systems. In: *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*. Shadah, United Arab Emirates: [s.n.], 2003. p. 40–43.

MEHDI, D.; BOUKAS, E. K.; BACHELIER, O. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2004. v. 21, n. 1, p. 1–13, March 2004.

MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. (Ed.). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. New York, USA: Springer-Verlag, 2012.

- MONTESTRUQUE, L. A.; ANTSAKLIS, P. Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004. v. 49, n. 9, p. 1562–1571, September 2004.
- NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R. Input-output stability properties of networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004. v. 49, n. 10, p. 1650–1667, October 2004.
- OGATA, K. *Discrete-Time Control Systems*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall International, Inc., 1995.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. D. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 2226–2231.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007. v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A convex optimization procedure to compute \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains. *Optimal Control Applications and Methods*, 2008. v. 29, n. 4, p. 295–312, July/August 2008.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design. *Automatica*, 2009. v. 45, n. 11, p. 2620–2626, November 2009.
- ONO, T.; ISHIHARA, T.; INOOKA, H. Design of sampled-data critical control systems based on the fast-discretization technique. *International Journal of Control*, 2002. v. 75, n. 8, p. 572–581, 2002.
- OPPENHEIMER, E. P.; MICHEL, A. N. Application of interval analysis techniques to linear systems: Part ii — The interval matrix exponential function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988. v. 35, n. 10, p. 1230–1242, October 1988.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for \mathcal{H}_2 static output feedback synthesis. In: *Proceedings of the 2001 European Control Conference*. Porto, Portugal: [s.n.], 2001. p. 3800–3805.
- RAMEZANIFAR, A.; MOHAMMADPOUR, J.; GRIGORIADIS, K. M. Sampled-data filtering for linear parameter varying systems. *International Journal of Systems Science*, 2015. v. 46, n. 3, p. 474–487, 2015.
- RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, 2000. v. 36, n. 10, p. 1401–1425, October 2000.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998.
- SOUZA, M.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Self-triggered linear quadratic networked control. *Optimal Control Applications and Methods*, 2013. 2013. <http://dx.doi.org/10.1002/oca.2085>.

- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 1999. v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- SU, H.; WANG, J.; CHU, J. Robust memoryless \mathcal{H}_∞ control for uncertain linear time-delay systems. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. Philadelphia, PA, USA: [s.n.], 1998. p. 3730–3731.
- TAN, K.; GRIGORIADIS, K.; WU, F. State-feedback control of LPV sampled-data systems. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, Arizona, USA: [s.n.], 1999. v. 4, p. 3894–3899. ISSN 0191-2216.
- TAN, K.; GRIGORIADIS, K. M.; WU, F. Output-feedback control of LPV sampled-data systems. *International Journal of Control*, 2002. v. 75, n. 4, p. 252–264, 2002.
- TÓTH, R.; HEUBERGER, P. S. C.; VAN DEN HOF, P. M. J. Discretisation of linear parameter-varying state-space representations. *IET Control Theory & Applications*, 2010. v. 4, n. 10, p. 2082–2096, October 2010.
- VELASCO, M.; MARTI, P.; VILLA, R.; FUERTES, J. M. Stability of networked control systems with bounded sampling rates and time delays. In: *31st Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society*. Raleigh, NC, USA: [s.n.], 2005. p. 2417–2422.
- WADA, N.; SAITO, K.; SAEKI, M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent Lyapunov function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2006. v. 53, n. 12, p. 1446–1450, December 2006.
- WU, D.; WU, J.; CHEN, S. Robust stabilisation control for discrete-time networked control systems. *International Journal of Control*, 2010. v. 83, n. 9, p. 1885–1894, September 2010.
- YANG, F.; WANG, Z.; HUNG, Y. S.; GANI, M. \mathcal{H}_∞ control for networked systems with random communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006. v. 51, n. 3, p. 511–518, March 2006.
- YU, J.; WANG, L.; ZHANG, G.; YU, M. Output feedback stabilisation of networked control systems via switched system approach. *International Journal of Control*, 2009. v. 82, n. 9, p. 1665–1677, September 2009.
- ZHANG, W.; BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001. v. 21, n. 1, p. 84–99, February 2001.

APÊNDICE A

DEMONSTRAÇÃO DA ESTABILIDADE EM MALHA FECHADA DO SISTEMA CONTÍNUO HÍBRIDO

Neste apêndice, demonstra-se a estabilidade em malha fechada do sistema contínuo incerto com o controlador digital projetado a partir da verificação da estabilidade em malha fechada do sistema incerto discretizado.

Uma vez que o controlador estabilizante foi obtido pelo Teorema 1.1, o que garante que $z(kT(\alpha_2)) = \left[x(kT(\alpha_2))' \quad u((k-1)T(\alpha_2))' \right]'$ tende a 0 quando k tende ao infinito, então pode-se provar que a lei de controle (1.25) garante a estabilidade do sistema híbrido. Seguindo as mesmas linhas de (HETEL *et al.*, 2007), para qualquer $\alpha \in \Lambda_N$ e um dado período de amostragem $T(\alpha_2)$, a solução do sistema linear (1.1a) no intervalo $t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]$ é dada por

$$x(t) = e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))}x(kT(\alpha_2)) + \int_{kT(\alpha_2)}^t e^{E(\alpha_1)(t-\hat{s})}F(\alpha_1)u(\hat{s}-\tau)d\hat{s}. \quad (\text{A.1})$$

Assumindo que o sinal $u(t)$ seja constante por partes no intervalo de amostragem, percebe-se que o sinal atrasado $u(t-\tau)$ também o é. Como o sinal atrasado pode variar dentro dos instantes de amostragem, é conveniente reescrever o atraso como em (1.37) e separar o intervalo de integração de (A.1) em duas partes tal que $u(t-\tau)$ seja constante em cada parte e, conseqüentemente, possa sair da integral. Assim

$$x(t) = e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))}x(kT(\alpha_2)) + \underbrace{\left(\int_{kT(\alpha_2)}^{kT(\alpha_2)+\tau} e^{E(\alpha_1)(t-\hat{s})}d\hat{s} \right)}_{I_1} F(\alpha_1)u((k-1)T(\alpha_2))$$

$$+ \underbrace{\left(\int_{kT(\alpha_2) + \tau}^t e^{E(\alpha_1)(t-\hat{s})} d\hat{s} \right)}_{I_2} F(\alpha_1) u(kT(\alpha_2)). \quad (\text{A.2})$$

Empregando uma mudança de variáveis, tal que $s = kT(\alpha_2) + \tau - \hat{s}$, o termo I_1 pode ser reescrito como

$$I_1 = \int_{\tau}^0 e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2)-\tau+s)} (-ds) = e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2)-\tau)} \int_0^{\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds.$$

Novamente, empregando uma mudança de variáveis, tal que $s = kT(\alpha_2) + T(\alpha_2) - \hat{s}$, o termo I_2 pode ser reescrito como

$$I_2 = \int_{T(\alpha_2)-\tau}^{(k+1)T(\alpha_2)-t} e^{E(\alpha_1)(t-(k+1)T(\alpha_2)+s)} (-ds) = e^{E(\alpha_1)(t-(k+1)T(\alpha_2))} \int_{(k+1)T(\alpha_2)-t}^{T(\alpha_2)-\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds.$$

Reescrevendo (A.2), obtém-se

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))} x(kT(\alpha_2)) + \left(e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2)-\tau)} \int_0^{\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) u((k-1)T(\alpha_2)) \\ & + \left(e^{E(\alpha_1)(t-(k+1)T(\alpha_2))} \int_{(k+1)T(\alpha_2)-t}^{T(\alpha_2)-\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) u(kT(\alpha_2)). \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Tomando o supremo de (A.3) e usando a desigualdade triangular, obtém-se

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \|x(t)\| \leq & \sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \left\| e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))} \right\| \|x(kT(\alpha_2))\| \\ & + \sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \left\| \left(e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2)-\tau)} \int_0^{\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) \right\| \|u((k-1)T(\alpha_2))\| \\ & + \sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \left\| \left(e^{E(\alpha_1)(t-(k+1)T(\alpha_2))} \int_{(k+1)T(\alpha_2)-t}^{T(\alpha_2)-\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) \right\| \|u(kT(\alpha_2))\|, \end{aligned}$$

que é o mesmo que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \|x(t)\| \leq & \left\| e^{E(\alpha_1)T(\alpha_2)} \right\| \|x(kT(\alpha_2))\| \\ & + \left\| \left(e^{E(\alpha_1)(T(\alpha_2)-\tau)} \int_0^{\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) \right\| \|u((k-1)T(\alpha_2))\| \\ & + \left\| \left(\int_0^{T(\alpha_2)-\tau} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) \right\| \|u(kT(\alpha_2))\|. \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (1.6) e (1.8) em (A.4), obtém-se

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \|x(t)\| &\leq \left\| A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha) \right\| \left\| x(kT(\alpha_2)) \right\| \\ &+ \left\| B_{d\ell}(\alpha) + \Delta B_{d\ell}(\alpha) \right\| \left\| u((k-1)T(\alpha_2)) \right\| + \left\| B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha) \right\| \left\| u(kT(\alpha_2)) \right\|. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Sabendo que o sistema discreto (1.21) é estável em malha fechada, ou seja, $z(kT(\alpha_2))$, e, equivalentemente, $x(kT(\alpha_2))$, $u(kT(\alpha_2))$ e $u((k-1)T(\alpha_2))$ convergem para zero quando $k \rightarrow \infty$, então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e a estabilidade assintótica em malha fechada do sistema incerto (1.1a) com a lei de controle por realimentação de estados (1.25) é assegurada.

APÊNDICE B

DEMONSTRAÇÃO DA ESTABILIDADE EM MALHA FECHADA DO SISTEMA LPV HÍBRIDO

Em virtude da abordagem proposta para o sistema LPV utilizar a amostragem por eventos, os resultados deste trabalho são obtidos sob a hipótese de que os parâmetros variantes no tempo são constantes por parte, isto é, $\alpha(t) = \alpha(kT(\alpha_2(t))) \in \Lambda_N, \forall t \in [kT(\alpha_2(t)), (k+1)T(\alpha_2(t))]$. Visto que os parâmetros $\alpha(kT(\alpha_2(t)))$ são fixos no intervalo de amostragem, sua dependência com respeito ao tempo pode ser omitida.

Novamente, partindo da premissa de que o controlador estabilizante escalonado por realimentação de saída $L(\alpha)$ foi obtido pelo Teorema 2.1, garante-se que $y(k) = C(\alpha)x(k)$ tende a 0 quando k tende ao infinito. Portanto, pode-se provar que a lei de controle (2.27) garante a estabilidade do sistema híbrido. Seguindo as mesmas linhas de (HETEL *et al.*, 2007), para qualquer $\alpha \in \Lambda_N$ e um dado período de amostragem $T(\alpha_2)$, a solução para o sistema linear (2.1) no intervalo $t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]$ é dada por

$$y(t) = G(\alpha_1)x(t) = G(\alpha_1)e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))}x(kT(\alpha_2)) + G(\alpha_1) \int_{kT(\alpha_2)}^t e^{E(\alpha_1)(t-\hat{s})}F(\alpha_1)u(\hat{s}-\tau(\alpha_3))d\hat{s}. \quad (\text{B.1})$$

Assumindo que o sinal $u(t)$ seja constante por partes no intervalo de amostragem, então o sinal atrasado $u(t - \tau(\alpha_3))$ também é constante por partes. Posto que o sinal atrasado varia entre duas amostras consecutivas, pode-se dividir o intervalo de integração de (B.1) em duas partes de maneira que $u(t - \tau(\alpha_3))$ seja constante em cada uma e, conseqüentemente, possa deixar a integral. Em face

disto,

$$y(t) = G(\alpha_1) \left(e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))} x(kT(\alpha_2)) + \left(\int_{kT(\alpha_2)+\tau(\alpha_3)}^t e^{E(\alpha_1)(t-\hat{s})} d\hat{s} \right) F(\alpha_1) u(kT(\alpha_2)) \right. \\ \left. + \left(\int_{kT(\alpha_2)}^{kT(\alpha_2)+\tau(\alpha_3)} e^{E(\alpha_1)(t-\hat{s})} d\hat{s} \right) F(\alpha_1) u((k-1)T(\alpha_2)) \right).$$

Após aplicar algumas mudanças de variáveis, a expressão acima pode ser reescrita como

$$y(t) = G(\alpha_1) \left(e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2))} x(kT(\alpha_2)) \right. \\ \left. + \left(e^{E(\alpha_1)(t-kT(\alpha_2)-\tau(\alpha_3))} \int_0^{\tau(\alpha_3)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) u((k-1)T(\alpha_2)) \right. \\ \left. + \left(e^{E(\alpha_1)(t-(k-1)T(\alpha_2))} \int_{(k+1)T(\alpha_2)-t}^{T(\alpha_2)-\tau(\alpha_3)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) u(kT(\alpha_2)) \right).$$

Em seguida, tomando o supremo e usando a desigualdade triangular, tem-se

$$\sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \|y(t)\| \leq \|G(\alpha_1)\| \left(\left\| e^{E(\alpha_1)T(\alpha_2)} \right\| \|x(kT(\alpha_2))\| \right. \\ \left. + \left\| \left(e^{E(\alpha_1)(T(\alpha_2)-\tau(\alpha_3))} \int_0^{\tau(\alpha_3)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) \right\| \|u((k-1)T(\alpha_2))\| \right. \\ \left. + \left\| \left(\int_0^{T(\alpha_2)-\tau(\alpha_3)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) \right\| \|u(kT(\alpha_2))\| \right). \quad (\text{B.2})$$

Finalmente, substituindo (2.6) e (2.7) em (B.2), obtém-se

$$\sup_{t \in [kT(\alpha_2), (k+1)T(\alpha_2)]} \|y(t)\| \leq \|C(\alpha)\| \left(\left\| A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha) \right\| \|x(kT(\alpha_2))\| \right. \\ \left. + \left\| B_{d\ell}(\alpha) + \Delta B_{d\ell}(\alpha) \right\| \|u((k-1)T(\alpha_2))\| + \left\| B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha) \right\| \|u(kT(\alpha_2))\| \right). \quad (\text{B.3})$$

Sabendo que o sistema discreto (2.5) é estável em malha fechada, isto é, $x(kT(\alpha_2))$, $u((k-1)T(\alpha_2))$ e $u(kT(\alpha_2))$ convergem para zero quando $k \rightarrow \infty$, então $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e a estabilidade assintótica em malha fechada do sistema contínuo incerto (2.1) com a lei de controle (2.27) é assegurada.

APÊNDICE C

LEMAS AUXILIARES

Para a obtenção das condições LMIs, utilizam-se os seguintes lemas:

Lema C.1 (Produtos Cruzados (BOYD *et al.*, 1994)). *Dado um escalar $\lambda > 0$ e matrizes X e Y de dimensões compatíveis, então*

$$XY + Y'X' \leq \lambda XX' + \lambda^{-1}Y'Y.$$

Lema C.2 (Lema da Projeção (GAHINET; APKARIAN, 1994; IWASAKI; SKELTON, 1994; SKELTON *et al.*, 1998)). *Dadas uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e duas matrizes U e V com m colunas, existe uma matriz não estruturada X que satisfaz*

$$Q + U'XV + V'X'U < 0 \tag{C.1}$$

se e somente se as desigualdades de projeção em relação a X são satisfeitas

$$N_U'QN_U < 0 \tag{C.2}$$

$$N_V'QN_V < 0 \tag{C.3}$$

sendo que N_U e N_V são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de U e V , respectivamente.

APÊNDICE D

DESENVOLVIMENTO DAS SÉRIES MULTINOMIAIS

Neste apêndice são apresentados os desenvolvimentos das séries multinomiais utilizadas nesta tese, os quais são necessários para a obtenção dos coeficientes matriciais do sistema discretizado.

D.1 Definições para o Simplex Unitário

Como no caso matricial os produtos em séries multinomiais são não comutativos, tem-se

$$\begin{aligned}
 E(\alpha_1)^q &= \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} E_i \right)^q = \sum_{p \in \mathcal{P}(q)} \prod_{i=1}^q \alpha_{1p_i} E_{p_i} \\
 &= \sum_{p \in \mathcal{P}(q)} \alpha_{1p_1} E_{p_1} \cdots \alpha_{1p_q} E_{p_q} \\
 &= \sum_{p \in \mathcal{P}(q)} \alpha_{1p} E_p, \quad E_p = E_{p_1} \cdots E_{p_q} \\
 &= \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(q)} \alpha_1^{k_1} \sum_{p \in \mathcal{P}(k_1)} E_p
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

em que $\alpha_1^{k_1} = \alpha_{11}^{k_{11}} \alpha_{12}^{k_{12}} \cdots \alpha_{1N_1}^{k_{1N_1}}$, $k_1 = (k_{11} k_{12} \cdots k_{1N_1})$, $\alpha_{1p} = (\alpha_{1p_1}, \alpha_{1p_2}, \dots, \alpha_{1p_q})$, $p = (p_1 p_2 \cdots p_q)$ para $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_{N_1}(q)$ é o conjunto de N_1 -uplas obtidas como todas as possíveis combinações de inteiros não negativos k_{1i} , $i = 1, \dots, N_1$, tais que $k_{11} + k_{12} + \cdots + k_{1N_1} = q$, isto é,

$$\mathcal{K}_{N_1}(q) \triangleq \left\{ k_1 = (k_{11} k_{12} \cdots k_{1N_1}) \in \mathbb{N}^{N_1} : \sum_{j=1}^{N_1} k_{1j} = q, \quad k_{1j} \geq 0 \right\}, \tag{D.2}$$

$\mathcal{P}(q)$ é o conjunto de q -uplas obtidas como todas as possíveis combinações de inteiros não negativos $p_i, i = 1, \dots, q$, tais que $p_i \in \{1, \dots, N_1\}$, isto é,

$$\mathcal{P}(q) \triangleq \left\{ p = (p_1 \cdots p_q) \in \mathbb{N}^q : p_i \in \{1, \dots, N_1\}, i = 1, \dots, q \right\} \quad (\text{D.3})$$

e $\mathcal{R}(k_1), k_1 \in \mathcal{K}_{N_1}(q)$, é o subconjunto de q -uplas $p \in \mathcal{P}(q)$ tal que o elemento j de p tenha multiplicidade k_{1j} , para $j = 1, \dots, N_1$, isto é,

$$\mathcal{R}(k_1) \triangleq \left\{ p = (p_1 \cdots p_q) \in \mathbb{N}^q : m_p(j) = k_{1j}, j = 1, \dots, N_1 \right\} \quad (\text{D.4})$$

sendo que $m_p(j)$ denota a multiplicidade do elemento j em p , ou seja, quantas vezes o índice j aparece na q -upla p .

Para ilustrar as definições apresentadas, considere $N_1 = 3$ e $q = 2$. Consequentemente, o produto matricial apresentado em (D.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E(\alpha_1)^2 &= (\alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 + \alpha_{13}E_3)(\alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 + \alpha_{13}E_3) \\ &= \alpha_{11}\alpha_{11}E_1E_1 + \alpha_{11}\alpha_{12}E_1E_2 + \alpha_{11}\alpha_{13}E_1E_3 + \alpha_{12}\alpha_{11}E_2E_1 + \alpha_{12}\alpha_{12}E_2E_2 \\ &\quad + \alpha_{12}\alpha_{13}E_2E_3 + \alpha_{13}\alpha_{11}E_3E_1 + \alpha_{13}\alpha_{12}E_3E_2 + \alpha_{13}\alpha_{13}E_3E_3 \\ &= \alpha_{11}^2E_1^2 + \alpha_{11}\alpha_{12}(E_1E_2 + E_2E_1) + \alpha_{11}\alpha_{13}(E_1E_3 + E_3E_1) + \alpha_{12}^2E_2^2 \\ &\quad + \alpha_{12}\alpha_{13}(E_2E_3 + E_3E_2) + \alpha_{13}^2E_3^2 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Ou ainda, utilizando a definição (D.3), tem-se que o conjunto $\mathcal{P}(2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(2) &= \left\{ p = (p_1p_2) \in \mathbb{N}^2 : p_i \in \{1, 2, 3\}, i = 1, 2 \right\}, \\ \mathcal{P}(2) &= \left\{ (11), (12), (13), (21), (22), (23), (31), (32), (33) \right\}. \end{aligned}$$

Logo, (D.5) pode ser reescrita como

$$E(\alpha_1)^2 = \sum_{p \in \mathcal{P}(2)} \alpha_{1p_1}E_{p_1}\alpha_{1p_2}E_{p_2}. \quad (\text{D.6})$$

O produto matricial (D.6) ainda pode ser reescrito utilizando (D.1), o que requer determinar os conjuntos $\mathcal{K}_{N_1}(q)$ e $\mathcal{R}(k_1)$. Primeiramente, obtém-se o conjunto $\mathcal{K}_{N_1}(q)$ das N_1 -uplas k_1 utilizando a definição (D.2), fornecendo

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(2) &= \left\{ k_1 = (k_{11}k_{12}k_{13}) \in \mathbb{N}^3 : \sum_{j=1}^3 k_{1j} = 2, k_{1j} \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{K}_3(2) &= \left\{ (200), (110), (101), (020), (011), (002) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Em seguida, para cada N_1 -upla oriunda de $\mathcal{K}_3(2)$, um conjunto $\mathcal{R}(k_1)$ é obtido da definição (D.4), isto é,

$$\mathcal{R}(k_1) = \left\{ p = (p_1 p_2) \in \mathbb{N}^2 : m_p(j) = k_{1j}, j = 1, 2, 3 \right\}, \quad \forall k_1 \in \mathcal{K}_3(2). \quad (\text{D.8})$$

Iniciando o procedimento com a N_1 -upla $k_1 = 200$ e seguindo a definição, tem-se

$$\begin{aligned} j = 1 &\Rightarrow m_p(1) = k_{11} = 2, \\ j = 2 &\Rightarrow m_p(2) = k_{12} = 0, \\ j = 3 &\Rightarrow m_p(3) = k_{13} = 0, \end{aligned}$$

o que significa que o elemento $j = 1$ tem multiplicidade igual a 2, ou seja, $j = 1$ deve aparecer duas vezes em p , logo $p = (11)$ e assim,

$$\mathcal{R}(200) = \{(11)\}.$$

O segundo conjunto $\mathcal{R}(110)$ é obtido de forma similar, assim

$$\begin{aligned} j = 1 &\Rightarrow m_p(1) = k_{11} = 1 \\ j = 2 &\Rightarrow m_p(2) = k_{12} = 1 \\ j = 3 &\Rightarrow m_p(3) = k_{13} = 0, \end{aligned}$$

o que significa que os elementos $j = 1$ e $j = 3$ aparecem somente uma vez em p , conseqüentemente o conjunto $\mathcal{R}(110)$ é composto por todas as possíveis combinações dos índices j , ou seja,

$$\mathcal{R}(110) = \{(12), (21)\}.$$

Aplicando a definição (D.4) às demais N_1 -uplas de $\mathcal{K}_3(2)$, encontram-se os conjuntos restantes

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(101) &= \{(13), (31)\}, & \mathcal{R}(020) &= \{(22)\}, \\ \mathcal{R}(011) &= \{(23), (32)\}, & \mathcal{R}(002) &= \{(33)\}. \end{aligned}$$

Note que a união dos conjuntos $\mathcal{R}(k_1)$, $\forall k_1 \in \mathcal{K}_3(2)$, produz o próprio conjunto $\mathcal{P}(2)$. Observe ainda que a q -upla $p \in \mathcal{R}(\cdot)$ indica em qual posição os vértices de $E(\alpha)$ aparecem no produto matricial, isto é, se por exemplo p for igual a 23, o produto matricial é $E_2 E_3$. Por outro lado, se $p = 32$, o produto matricial é $E_3 E_2$.

Finalmente, pode-se escrever (D.6) como

$$\begin{aligned}
E(\alpha_1)^2 &= \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_3(2)} \alpha_{11}^{k_{11}} \alpha_{12}^{k_{12}} \alpha_{13}^{k_{13}} \sum_{p \in \mathcal{R}(k_{11}k_{12}k_{13})} E_{p_1} E_{p_2} \\
&= \alpha_{11}^2 \alpha_{12}^0 \alpha_{13}^0 \sum_{p \in \mathcal{R}(200)} E_{p_1} E_{p_2} + \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^1 \alpha_{13}^0 \sum_{p \in \mathcal{R}(110)} E_{p_1} E_{p_2} + \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^0 \alpha_{13}^1 \sum_{p \in \mathcal{R}(101)} E_{p_1} E_{p_2} \\
&\quad + \alpha_{11}^0 \alpha_{12}^2 \alpha_{13}^0 \sum_{p \in \mathcal{R}(020)} E_{p_1} E_{p_2} + \alpha_{11}^0 \alpha_{12}^1 \alpha_{13}^1 \sum_{p \in \mathcal{R}(011)} E_{p_1} E_{p_2} + \alpha_{11}^0 \alpha_{12}^0 \alpha_{13}^2 \sum_{p \in \mathcal{R}(002)} E_{p_1} E_{p_2} \\
&= \alpha_{11}^2 E_1 E_1 + \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^1 (E_1 E_2 + E_2 E_1) + \alpha_{11}^1 \alpha_{13}^1 (E_1 E_3 + E_3 E_1) + \alpha_{12}^2 E_2 E_2 \\
&\quad + \alpha_{12}^1 \alpha_{13}^1 (E_2 E_3 + E_3 E_2) + \alpha_{13}^2 E_3 E_3 \\
&= \alpha_{11}^2 E_1^2 + \alpha_{11} \alpha_{12} (E_1 E_2 + E_2 E_1) + \alpha_{11} \alpha_{13} (E_1 E_3 + E_3 E_1) + \alpha_{12}^2 E_2^2 \\
&\quad + \alpha_{12} \alpha_{13} (E_2 E_3 + E_3 E_2) + \alpha_{13}^2 E_3^2. \tag{D.9}
\end{aligned}$$

Observação D.1. A obtenção dos elementos do conjunto $\mathcal{R}(k_1)$ para um exemplo de maiores dimensões é ilustrada a seguir. Considere $N_1 = 2$, $q = 3$ e $k_1 = 21$, nesse caso tem-se

$$\mathcal{R}(21) = \left\{ p = (p_1 p_2 p_3) \in \mathbb{N}^3 : m_p(j) = k_{1j}, j = 1, 2 \right\},$$

isto é,

$$j = 1 \Rightarrow m_p(1) = k_{11} = 2 \quad e \quad j = 2 \Rightarrow m_p(2) = k_{12} = 1. \tag{D.10}$$

Com base no desenvolvimento apresentado em (D.10), nota-se que o elemento $j = 1$ deve aparecer duas vezes em p , enquanto que $j = 2$ somente uma vez e, conseqüentemente, os elementos do conjunto $\mathcal{R}(21)$ são compostos por todas as possíveis combinações dos índices j em $p \in \mathbb{N}^3$, ou seja,

$$\mathcal{R}(21) = \{(112), (121), (211)\},$$

resultando em

$$\sum_{p \in \mathcal{R}(21)} E_p = E_1^2 E_2 + E_1 E_2 E_1 + E_2 E_1^2.$$

D.2 Definições para o Domínio Multi-Simplex

Por definição, o conjunto $\mathcal{K}_N(g)$ é o produto cartesiano

$$K_N(g) = \mathcal{K}_{N_1}(g_1) \times \mathcal{K}_{N_2}(g_2) \times \cdots \times \mathcal{K}_{N_r}(g_r),$$

em que $\mathcal{K}_{N_i}(g_i)$ é dado por (D.2), $N = (N_1, N_2, \dots, N_r) \in \mathbb{N}^r$ e $g = (g_1, g_2, \dots, g_r) \in \mathbb{N}^r$.

Como exemplo, considere $g = (3, 1, 1)$ e $N = (2, 2, 2)$. Nesse caso, o conjunto $\mathcal{K}_N(g)$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_N(g) &= \mathcal{K}_2(3) \times \mathcal{K}_2(1) \times \mathcal{K}_2(1) = \{(30), (21), (12), (03)\} \times \{(10), (01)\} \times \{(10), (01)\} \\ &= \{(301010), (301001), (300110), (300101), (211010), (211001), (210110), (210101), \\ &\quad (121010), (121001), (120110), (120101), (031010), (031001), (030110), (030101)\}.\end{aligned}$$

Por definição, para toda N -upla k e \hat{k} , tem-se que $k \geq \hat{k}$ se $k_{mj} \geq \hat{k}_{mj}$, $m = 1, \dots, r$, e $j = 1, \dots, N_r$. Operações de soma $k + \hat{k}$ e subtração $k - \hat{k}$ (quando $k \geq \hat{k}$) são definidas componente a componente. O coeficiente $k!$ é definido como

$$k! = k_{11}!k_{12}! \cdots k_{1N_1}! \cdots k_{r1}!k_{r2}! \cdots k_{rN_r}!$$

em que $k_{ij}!$ representa o fatorial de k_{ij} , isto é, $k_{ij}! = k_{ij}(k_{ij} - 1) \cdots 1$.

D.3 Notações Adicionais

Define-se ainda o vetor

$$\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1). \quad (\text{D.11})$$

Assim, por exemplo, se o grau das N_r -uplas for dado pelo escalar ℓ , com dimensões $N = (N_1, 2, 2)$, então o conjunto $\mathcal{K}_N(\mathbb{1}\ell)$ é dado por $\mathcal{K}_N(\mathbb{1}\ell) = \mathcal{K}_{N_1}(\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell) \times \mathcal{K}_2(\ell)$.

Adicionalmente, considere a N_1 -upla e_i definida como um vetor unitário de N_1 elementos cuja i -ésima componente é igual a 1, isto é,

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N_1}. \quad (\text{D.12})$$