

PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

*Impel.*  
PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA

VINÍCIUS AMARAL ARMENTANO

Orientadores

CELSO PASCOLI BOTTURA

PAULO MORELATO FRANÇA

Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual de Campinas.

OUTUBRO - 1979

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

## R E S U M O

Sistemas físicos e econômicos modelados como sistemas lineares dinâmicos a tempo discreto com critério ou função objetivo linear são considerados problemas lineares dinâmicos. A Programação Linear Dinâmica é um corpo de teoria e métodos destinados ao estudo desses problemas. Um problema linear dinâmico pode ser considerado um caso especial de um problema mais geral de controle ótimo ou otimização dinâmica.

No Capítulo I é feita a apresentação do problema, bem como dos métodos de resolução, aqui divididos em duas categorias:

a-) Métodos indiretos que buscam a decomposição do problema original ou que somente se utilizam da separabilidade da função objetivo.

b-) Métodos diretos que exploram a estrutura da matriz de restrições global.

No Capítulo II são expostos três métodos pertencentes a categoria dos indiretos. Todos eles dependem de teoria e técnicas provenientes da programação matemática, aqui apresentadas de maneira sucinta antes de serem aplicadas aos problemas lineares dinâmicos. As seções desse capítulo pode ser lidas independentemente.

No Capítulo III são descritos dois algoritmos baseados no método Simplex e classificados como diretos. A principal característica desses algoritmos está na manipulação da base global que é substituída por um conjunto de bases locais. O número dessas bases é igual ao número de períodos que constituem o horizonte de planejamento. O capítulo se encerra com uma análise comparativa entre os dois algoritmos.

*Aqueles que sempre me incentivaram,  
meus pais e minha irmã*

## A G R A D E C I M E N T O S

A realização de qualquer trabalho envolve diversos fatores, nem sempre diretamente relacionados com o mesmo e que exercem influência muito forte. O mais importante dentre eles é, sem dúvida, a amizade que se desenvolve no ambiente de trabalho e que representou um papel fundamental no meu retorno à universidade. Por isso agradeço sinceramente

ao BOTTURA que me convenceu a permanecer na Unicamp e que sempre procurou através de conversas amigas, orientar-me de uma maneira muito ampla;

ao PAULO, meu "amigão", que me encorajou nas mais diversas situações e que me ajudou bastante no delineamento da tese;

ao SECUNDINO, JURANDIR, AKEBO, CRISTIANO, JOÃO BOSCO e EUNICE, pela convivência muito agradável e por tantas discussões;

ao HERMANO pelas sugestões e acompanhamento paralelo da tese, bem como pela profunda dedicação no cotidiano;

à Elza pela desmedida paciência e compreensão na confecção do trabalho.

Este trabalho de pesquisa contou com o suporte do Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

# Í N D I C E

## CAPÍTULO I

### PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA: APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

	<u>Pág.</u>
I.1 - INTRODUÇÃO .....	1
I.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	2
I.2.1 - O PROBLEMA 2 (DUAL) .....	6
I.3 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO .....	7

## CAPÍTULO II

### MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO E COORDENAÇÃO APLI- CADOS À PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA

II.1 - INTRODUÇÃO .....	12
II.2 - DECOMPOSIÇÃO EM CASCATA .....	13
II.2.1 - A ESTRUTURA ESCADA E A DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG - WOLFE .....	14
II.2.2 - ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO .....	23
II.2.3 - RECUPERAÇÃO DA SOLUÇÃO ÓTIMA .....	28
II.2.4 - INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA .....	34
II.2.5 - COMENTÁRIOS .....	37

	<u>Pág.</u>
II.3 - O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE HESTENES E POWELL APLICADO À P.L.D. ....	39
II.3.1 - O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES COMO UM MÉ- TODO DE PENALIZAÇÃO .....	39
II.3.2 - O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES COMO UM MÉ- TODO PRIMAL-DUAL .....	43
II.3.3 - O LAGRANGEANO AUMENTADO E A PROGRAMAÇÃO NÃO CONVEXA .....	48
II.3.4 - APLICAÇÃO À P.L.D. ....	54
II.3.5 - DECOMPOSIÇÃO DO LAGRANGEANO AUMENTADO ...	60
II.3.6 - COMENTÁRIOS .....	68
II.4 - UM MÉTODO DE GRADIENTE PROJETADO APLICADO À P.L.D. ....	70
II.4.1 - CÁLCULO DO GRADIENTE PROJETADO .....	70
II.4.2 - APLICAÇÃO À P.L.D. ....	75
II.4.3 - COMENTÁRIOS .....	80

### CAPÍTULO III

#### MÉTODOS DIRETOS APLICADOS À PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA

III.1 - INTRODUÇÃO .....	82
III.2 - O MÉTODO SIMPLEX DINÂMICO DE KRIVONOZHKO - CHEBOTAREV - PROPOI (MSDI) .....	83
III.2.1 - FATORAÇÃO DA MATRIZ BÁSICA .....	85

	Pág.
III.2.2 - O SIMPLEX E A DECOMPOSIÇÃO LU .....	97
III.2.3 - ATUALIZAÇÃO DAS BASES LOCAIS .....	104
III.2.4 - ESQUEMA GERAL DO MÉTODO .....	122
III.2.5 - FASE I .....	123
III.2.6 - AVALIAÇÃO DO MÉTODO E COMENTÁRIOS .....	130
III.3 - METODO SIMPLEX DINÂMICO DE WOLLMER (MSDII) .....	135
III.3.1 - OBTENÇÃO DAS BASES LOCAIS .....	135
III.3.2 - ATUALIZAÇÃO DAS BASES LOCAIS .....	147
III.3.3 - ANÁLISE COMPARATIVA .....	154
III.3.4 - CONCLUSÕES E EXTENSÕES .....	156
APÊNDICE .....	158
SIMBOLOGIA - NOTAÇÃO .....	162
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	163



## CAPÍTULO I

### PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA: APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

#### I. 1 INTRODUÇÃO

Diversos sistemas físicos e econômicos são representados matematicamente como sistemas lineares dinâmicos a tempo discreto. Mesmo quando a modelagem envolve tempo contínuo, não raro, é permitida a discretização do mesmo.

Em geral, estamos interessados em agir na dinâmica do sistema através de uma excitação ou controle, com a finalidade de atingir algum objetivo ou satisfazer algum critério de maneira ótima. Procuramos pois, planejar a evolução do sistema ao longo de um certo horizonte de tempo, de modo a otimizar um critério que meça a qualidade das decisões.

Estamos portanto, frente a um problema de otimização dinâmica, onde a tomada de decisão é sequencial, isto é, em cada período ou intervalo de tempo, adotamos a melhor decisão de acordo com a função objetivo, que será considerada neste trabalho, linear.

Sistemas lineares dinâmicos com critério ou função objetivo linear são considerados aqui como problemas lineares dinâmicos. Vários sistemas dentro das áreas de agricultura, energia, recursos hídricos, transportes, produção industrial, podem ser modelados como problemas lineares dinâmicos. Apenas como exemplo citamos os trabalhos de Propoi [30], Carter et al. [7], Swart et al. [39] na área de agricultura, o trabalho de Marks e Cohon [23] na área de recursos hídricos e o de Bellmore [2] na área de transportes.

Uma vez obtida a representação matemática da situação real, procura-se então desenvolver uma teoria associada com essa representação e simultaneamente buscar métodos que resolvam o problema.

Esse corpo de teoria e métodos associados com a resolução de problemas lineares dinâmicos, constitui a Programação Linear Dinâmica (P.L.D.).

Segundo Propoi [29] e Belukhin [6], a natureza dual da P.L.D. exige que a sua teoria e métodos de resolução estejam relacionados com a programação linear e com o controle ótimo, visto que não é só importante a determinação da solução ótima, mas também a realização dessa solução, o que envolve, por exemplo, questões como realimentação e estabilidade.

No trabalho de Propoi e Krivonozhko [31] a teoria da P.L.D. é apresentada sob os dois ângulos. Quando olhada sob o ponto de vista da programação linear, a teoria da P.L.D. é uma mera extensão e quando olhada sob a ótica de controle ótimo, a sua teoria é uma aplicação do princípio do máximo de Pontryagin para sistemas lineares a tempo discreto.

Os métodos expostos neste trabalho são provenientes da programação matemática. Não dispomos em mãos de técnicas de resolução para a P.L.D. baseados no princípio do máximo. Mesmo assim acreditamos que a formulação da P.L.D. na seção seguinte é adequada para o tratamento por métodos da programação matemática que explorem as suas peculiaridades.

Neste trabalho damos ênfase à busca da solução ótima. Problemas de planejamento em geral se caracterizam por períodos ou estágios não pequenos. Nesse caso é possível corrigir a lei ótima de controle para uma dada perturbação, sem termos necessidade de uma lei de controle que seja função do estado do sistema.

## I. 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Adotamos a representação de variável de estado para descrever o sistema linear dinâmico. Distinguimos pois, dois tipos de variáveis:

- variáveis de estado que descrevem as condições passadas, presentes e futuras do sistema, ou o seu estado.
- variáveis de controle ou decisão que podem ser

especificadas diretamente. Essas variáveis influenciam o sistema através das variáveis de estado.

Séja pois, um problema linear dinâmico, referente a um dado sistema, descrito por

a-) Equações de estado

$$x(t+1) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \quad t=0 \dots T-1 \quad (2.1)$$

$$x(0) = x^0 \quad (2.2)$$

onde

$x(t) \in R^n$  - vetor que define o estado do sistema no estágio t.

$u(t) \in R^r$  - vetor de controle no estágio t.

$x(0)$  - vetor que representa as condições iniciais conhecidas.

$T$  - horizonte de planejamento, considerado fixo.

$A(t)$  e  $B(t)$  - matrizes conhecidas de dimensão  $(n \times n)$  e  $(n \times r)$

As equações de estado (2.1) descrevem a evolução do sistema ao longo do tempo para uma dada sequência de controles  $u(t)$ .

b-) Restrições

$$C(t) x(t) + D(t) u(t) = f(t) \quad (2.3)$$

$$t=0 \dots T-1$$

$$x(t+1) \geq 0, \quad u(t) \geq 0 \quad (2.4)$$

onde

$C(t)$  e  $D(t)$  - matrizes conhecidas de dimensão  $(m \times n)$  e  $(m \times r)$ ,  
 $m \leq r$ .

$f(t) \in R^m$  - vetor de recursos conhecido.

Como se pode notar de (2.3) e (2.4), distinguimos dois tipos de restrições, isto é, restrições lineares que acoplam variáveis de estado e controle, e restrições individuais sobre as variáveis.

### c-) Função objetivo

$$J_1(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t) \quad (2.5)$$

onde

$c(t)$  e  $d(t)$  - são vetores  $(1 \times n)$  e  $(1 \times r)$  conhecidos.

O problema 1 da P.L.D. pode ser descrito da seguinte maneira: encontre uma sequência de vetores de controle  $u = \{u(0) \dots u(T-1)\}$  e uma trajetória  $x = \{x(0) \dots x(T)\}$ , satisfazendo as equações de estado (2.1) com condições iniciais (2.2), as restrições (2.3) e (2.4), e tais que minimizem a função objetivo (2.5).

Diremos que a sequência  $u$  e a trajetória  $x$  são factíveis quando satisfazem conjuntamente (2.1) a (2.4), e são ótimas quando minimizam (2.5) e são factíveis.

Outros problemas lineares dinâmicos são possíveis como variantes do problema 1, podendo incluir atrasos distribuídos nas variáveis de estado e controle, restrições lineares individuais nas variáveis de estado e controle, restrições canalizadas nessas mesmas variáveis e diferentes formas de função objetivo.

Uma formulação matemática diferente é apresentada a

seguir; encontre vetores  $\{ x(1) \dots x(T) \}$  que minimizem

$$\sum_{t=1}^T c(t) x(t) \tag{2.6}$$

sujeito a  $A(1) x(1) = f(1)$

$$B(t-1) x(t-1) + A(t) x(t) = f(t) \quad t=2 \dots T$$

$$x(t) \geq 0 \quad t=1 \dots T$$

A formulação (2.6) é a extensão para problemas dinâmicos da sua correspondente em programação linear estática (um só estágio). Nessa formulação não fazemos distinção entre variáveis de estado e controle.

A formulação a ser escolhida depende do tipo de sistema que se está descrevendo e da ênfase ao aspecto de controle. Por exemplo, alguns problemas de controle ótimo tais como tempo mínimo e combustível mínimo recaem naturalmente em variantes do problema 1. Neste trabalho adotamos a formulação do problema 1 e analisamos alguns métodos para sua resolução. A apresentação nessa forma facilitará possíveis extensões para problemas de controle ótimo com função objetivo linear por partes.

Desde que as variáveis de estado são restritas a ser não negativas, não é possível achar a lei ótima de controle independentemente, para então através da equação de estado determinar a correspondente trajetória ótima. Caso as variáveis de estado fossem livres, poderíamos então substituí-las em função dos controles e transformar o problema 1 somente nas variáveis  $u(t)$ ,  $t=0 \dots T-1$ .

Sabemos da teoria de programação linear que o mínimo do problema 1 corresponde a uma solução básica. Ao montarmos a matriz de restrições global, notaremos a existência de  $(r-m)T$  graus de liberdade associados com as variáveis não básicas, que por sua vez incluem variáveis de estado e de controle.

I. 2.1 O PROBLEMA 2 (DUAL)

Seja o Lagrangeano referente ao problema 1

$$\begin{aligned}
 \ell(x, u, p, \lambda) = & \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t) + \\
 & + \sum_{t=0}^{T-1} p(t+1) [x(t+1) - A(t) x(t) - B(t) u(t)] + \\
 & + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda(t) [f(t) - C(t) x(t) - D(t) u(t)] \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

onde

$p(t+1)$  e  $\lambda(t)$ ,  $t=0 \dots T-1$  são os vetores multiplicadores de dimensão  $(1 \times n)$  e  $(1 \times m)$ , respectivamente.

Definimos a função dual como

$$\begin{aligned}
 J_2(p, \lambda) = & \min_{x \geq 0, u \geq 0} \ell(x, u, p, \lambda) = \\
 = & \min_{x \geq 0, u \geq 0} \sum_{t=0}^{T-1} [d(t) - p(t+1) B(t) - \lambda(t) D(t)] u(t) + \\
 & + \sum_{t=1}^{T-1} [p(t) + c(t) - p(t+1) A(t) - \lambda(t) C(t)] x(t) + \\
 & + [p(T) + c(T)] x(T) - [p(1) A(0) + \lambda(0) C(0)] x(0) + \\
 & + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda(t) f(t) \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

O mínimo em (2.8) será finito, se e somente se,

$$d(t) - p(t+1) B(t) - \lambda(t) D(t) \geq 0 \quad t=0 \dots T-1 \quad (2.9)$$

$$p(t) + c(t) - p(t+1) A(t) - \lambda(t) C(t) \geq 0 \quad t=1 \dots T-1 \quad (2.10)$$

$$p(T) + c(T) \geq 0 \quad t=T \quad (2.11)$$

Nessas condições a função dual assume a expressão

$$J_2(p, \lambda) = - \left[ p(1) A(0) + \lambda(0) C(0) \right] x(0) + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda(t) f(t) \quad (2.12)$$

Podemos pois, enunciar o problema 2 ou dual, da seguinte maneira: encontre uma sequência de vetores de controle duais  $\lambda = \{\lambda(T-1) \dots \lambda(0)\}$  e uma trajetória dual  $p = \{p(T) \dots p(1)\}$ , satisfazendo (2.9) a (2.11), tais que minimizem a função objetivo (2.12).

Citaremos frequentemente esse problema 2 no transcorrer do Capítulo II.

### I. 3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

É evidente que um problema linear dinâmico pode ser resolvido através da técnica consagrada do Simplex. No entanto, ao se proceder dessa maneira, não se leva em consideração a estrutura particular desse problema. Além do mais, se o problema linear já é de grande porte para um período ou estágio, será muito maior quando o considerarmos dinâmico, visto que o número de variáveis e restrições pode ficar multiplicado pelo número de estágios.

Existe pois a necessidade de se buscar novos métodos que

explorem as peculiaridades dos problemas lineares dinâmicos, visando com isso facilitar os aspectos computacionais relacionados com a sua resolução. Um levantamento de vários métodos e modelos em Programação Linear Dinâmica é apresentado por Propoi[29].

Seguindo a divisão proposta por Lasdon [21], classificaremos os métodos descritos neste trabalho em duas categorias: métodos indiretos e diretos.

### Métodos Indiretos

São apresentados e analisados três métodos no Capítulo II:

- 1-) Decomposição em Cascata
- 2-) Método dos Multiplicadores de Hestenes e Powell aplicado à P.L.D.
- 3-) Método de Gradiente Projetado aplicado à P.L.D.

Nos métodos indiretos buscamos a decomposição temporal do problema original, de forma a obter sub-problemas de um só estágio, sem levar em consideração a estrutura particular da matriz de restrições. O importante é explorar a separabilidade da função objetivo (2.5). O objetivo nesse tipo de abordagem é obter sub-problemas menores e independentes, cuja resolução é mais fácil. Desde que esses sub-problemas correspondem a sub-sistemas que interagem, não podemos tomar a solução individual de cada um deles como sendo a solução global. Existe pois a necessidade de um problema mestre colocado em um segundo nível, com a finalidade de coordenar as ações dos sub-problemas localizados no primeiro nível.

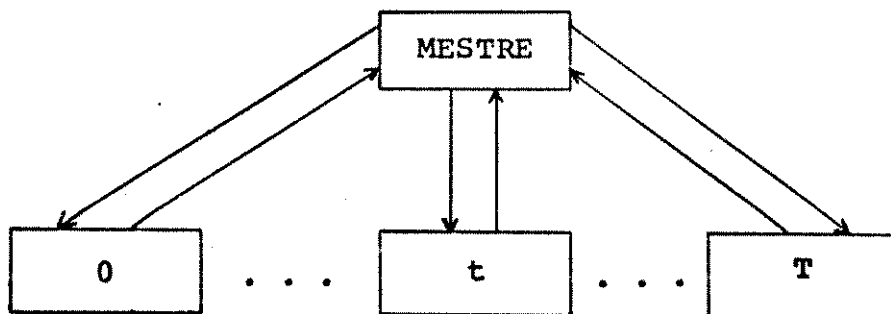


Figura 2.1



A Figura 2.1 mostra o exemplo de uma estrutura a dois níveis tendo sub-problemas de um só estágio colocados no primeiro nível e o problema mestre no segundo nível. As flechas indicam a troca de informações entre os dois níveis. A disposição mostrada na Figura 2.1 é típica do método dos Multiplicadores de Hestenes e Powell aplicado à P.L.D.

Nem todos métodos, porém, permitem uma decomposição temporal com sub-problemas independentes. O método Decomposição em Cascata é um exemplo típico, em que todos os sub-problemas integram e a estrutura obtida é multinível, com um sub-problema para cada nível.

No método do Gradiente Projetado não há uma decomposição do problema original da P.L.D. (problema 1), mas sim uma decomposição para achar direções factíveis dentro do sub-espço das restrições ativas, ao mesmo tempo em que se explora a separabilidade da função objetivo.

Belukhin [6] sugere um método que pode ser enquadrado nessa classe de indiretos. Em seu método uma certa trajetória factível é fixada, procurando-se então a direção factível que provoque o maior decréscimo na função objetivo. Essa direção é obtida a partir da resolução de T sub-problemas independentes e coordenados por um órgão no nível superior que apenas atualiza a trajetória. Uma vez calculada a trajetória ótima, determina-se então o controle factível que gera essa trajetória.

Algoritmos que se baseiam no princípio de decomposição, envolvem sub-programas computacionais de mais fácil realização e um uso pequeno de memória rápida. A dificuldade mais evidente está no número de vezes que se visita o primeiro nível, pois cada vez que isso ocorre, devemos resolver todos os sub-problemas.

As seções do Capítulo II, envolvendo os três métodos, são estanques e podem ser lidas independentemente.

### Métodos Diretos

São descritos e comparados dois métodos no Capítulo III:

- 1-) Método Simplex Dinâmico de Krivonozhko-Chebotarev-Propoi
- 2-) Método Simplex Dinâmico de Wollmer.

Nos métodos diretos procura-se adaptar um algoritmo já existente, levando-se em consideração a estrutura do problema. Os dois métodos apresentados constituem uma aplicação dessa idéia, desde que são baseados no poderoso algoritmo do Simplex, ao mesmo tempo em que exploram a estrutura escada da matriz de restrições do problema 1. A Figura 2.2 que se segue ilustra a matriz com característica escada e as dimensões envolvidas.

$$\begin{array}{l}
 A = \left[ \begin{array}{c|cccc}
 \begin{array}{l} m \\ n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m \\ n \end{array} & \begin{array}{l} r \\ n \\ \dots \\ \dots \\ n \\ r \\ n \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 D(0) & & & \\
 B(0) & -I & & \\
 & C(1) & D(1) & \\
 & A(1) & B(1) & -I \\
 & & \cdot & \\
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 & & & C(T-1) & D(T-1) \\
 & & & A(T-1) & B(T-1) & -I
 \end{array}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 2.2

Krivosozhko e Chebotarev [19] sugerem um algoritmo que pode ser enquadrado na categoria dos diretos e que se baseia em um método de penalização finito proposto por Chebotarev [8] para programação linear. O algoritmo em [19] apóia-se na decomposição da matriz  $AA'$ , necessária ao método, no produto  $LDL'$ , onde

$L$  = matriz triangular inferior

$D$  = matriz diagonal

$L'$  = matriz triangular superior

No entanto, os autores não explicam claramente uma questão relacionada com a não singularidade de uma matriz envolvendo  $AA'$ .

Métodos diretos aparecem frequentemente em problemas lineares, procurando sempre tirar proveito da forma especial da matriz de restrições global. O objetivo é sempre fazer operações que envolvam sub-matrizes, para se economizar memória e tempo de computação.

O intuito deste trabalho não é varrer a área de Programação Linear Dinâmica, mas sim dar início a pesquisas numa área muito importante relacionada com a otimização dinâmica.

Procuramos também, através de uma forma sucinta chamar a atenção para o método dos multiplicadores de Hestenes e Powell e relacioná-lo com a teoria de dualidade. Queremos ressaltar que esse método é bem geral e pode ser aplicado a problemas de programação não linear, bem como a problemas de controle ótimo que envolvem sistemas não lineares.

Os métodos aqui analisados e às vezes simplesmente citados, constituem apenas uma parcela do levantamento feito por Propoi [29]. Seria impossível expor de maneira crítica todos os trabalhos na área da P.L.D., de uma só vez. Além disso, não dispomos de muitos artigos da literatura russa citados em [29]. Experiências computacionais serão necessárias para comprovar-se de modo prático as virtudes e os defeitos apontados nos métodos.

## CAPÍTULO II

### MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO E COORDENAÇÃO APLICADOS À PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA

#### II. 1 INTRODUÇÃO

O primeiro método a ser exposto na seção 2 é aqui denominado por "decomposição em cascata" e foi proposto por Glassey [12, 13] com o título de "nested decomposition". Veremos que a decomposição realizada é algo diferente do usual, no sentido de que os sub-problemas obtidos não são independentes e nem estão em um mesmo nível. Na realidade cada sub-problema situa-se em um nível, resultando numa estrutura multinível, com tantos níveis quantos forem os estágios da P.L.D. Pode-se dizer que a decomposição em cascata consegue realizar dois objetivos simultaneamente, isto é, obter uma decomposição temporal, onde cada sub-problema é um problema linear estático, e explorar a estrutura escada da matriz de restrições. O método é finito e primal.

Na seção 3 fazemos a aplicação do método dos multiplicadores de Hestenes [15] à P.L.D. O método dos multiplicadores se baseia em um Lagrangeano aumentado ou penalizado. Ao montarmos esse Lagrangeano para a P.L.D., iremos buscar a sua decomposição temporal. Nesse tipo de método não se dá importância para a estrutura escada da matriz de restrições. Os sub-problemas obtidos são independentes e situam-se num mesmo nível. O método é do tipo dual e não há necessidade de uma solução factível de partida.

O método apresentado na seção 4 baseia-se na técnica de projeção de gradiente sobre as restrições ativas. O método não realiza decomposição em sub-problemas nem tão pouco explora a estrutura escada. Apoiase simplesmente na separabilidade temporal da função objetivo e se classifica como iterativo e primal.

## II. 2 DECOMPOSIÇÃO EM CASCATA

O método baseia-se no princípio de decomposição de Dantzig - Wolfe [21]. Esse princípio é aplicado ao estágio T-1 que passa a agir como problema mestre para os outros estágios, considerados então, como um único sub-problema. A seguir, o mesmo princípio é aplicado ao estágio T-2 que passa a se comportar como um sub-problema para o estágio T-1 e como problema mestre para os estágios seguintes. Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma "decomposição em cascata", na medida em que cada estágio se comporta como problema mestre para os estágios seguintes e como sub-problema para os precedentes. O nome decomposição em cascata provém dessa aplicação sucessiva do princípio de Dantzig - Wolfe.

A estrutura do problema linear multi-estágios de Glassey [13] permitiu-lhe associar o problema mestre ao primeiro estágio. No trabalho aqui exposto associaremos o problema mestre ao último estágio e veremos que essa inversão não altera quaisquer características do método. Essa mesma inversão também é verificada no trabalho de Ho e Manne [16], onde os autores propõem o método baseado nos mesmos princípios de Glassey e apresentam resultados computacionais que serão discutidos na sub-seção 2.5.

Krivonozhko [20] aplica a metodologia da decomposição em cascata a um problema de P.L.D. com variáveis de estado livres, isto é, podendo assumir valores positivos e negativos, e função objetivo contendo um único termo envolvendo somente o estado final.

Tamura [41] estende a aplicação da decomposição em cascata para problemas de P.L.D. envolvendo equação linear a diferenças de ordem superior, isto é, uma equação de estado onde ocorrem atrasos distribuídos nas variáveis de estado e controle. O'Neill [25] usa os mesmos princípios para resolver problemas dinâmicos discretos com função objetivo e restrições convexas.

II. 2.1 A ESTRUTURA ESCADA E A DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG - WOLFE

Segundo Lasdon [21], a decomposição de Dantzig - Wolfe é eficiente quando trata problemas com estrutura bloco angular, isto é, um ou mais blocos matriciais ligados por uma equação de acoplamento. A Figura 2.1 ilustra a estrutura bloco angular com p blocos.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ & B_1 & & \\ & & B_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & B_p \end{bmatrix}$$

Figura 2.1

Ao se aplicar o princípio de Dantzig - Wolfe à matriz A, obtêm-se um problema mestre em um nível superior coordenando p sub-problemas independentes situados em um único nível inferior.

Consideremos agora a estrutura escada invertida mostrada na Figura 2.2. Note que existem várias equações de estado que acoplam dois vetores de estado por vez, o que é diferente da estrutura bloco angular, onde uma única equação acopla p vetores. O fato de existir várias equações acoplantes, sugere a aplicação do princípio de Dantzig - Wolfe tantas vezes quantas equações de estado existirem (no caso T). Através dessa explicação, nota-se que a extensão de Tamura [41] é imediata, pois sua equação a diferenças possui vários vetores de estado e controle acoplados em cada equação, o que é perfeitamente factível para o princípio de Dantzig - Wolfe.

Vector Primal / Vector Dual	$x(T)$ $u(T-1)$ $x(T-1)$ $u(T-2)$ $x(T-2)$ ..... $x(2)$ $u(1)$ $x(1)$ $u(0)$	
$p(T)$	$-I$ $B(T-1)$ $A(T-1)$	$= 0$
$\lambda(T-1)$	$D(T-1)$ $C(T-1)$	$= f(T-1)$
$p(T-1)$	$-I$ $B(T-2)$ $A(T-2)$	$= 0$
$\lambda(T-2)$	$D(T-2)$ $C(T-2)$	$= f(T-2)$
$\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$	$\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$	$\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$
$p(2)$	$-I$ $B(1)$ $A(1)$	$= 0$
$\lambda(1)$	$D(1)$ $C(1)$	$= f(1)$
$p(1)$	$-I$ $B(0)$	$= b^2(0)$
$\lambda(0)$	$D(0)$	$= b^1(0)$
Minimize	$c(T)$ $d(T-1)$ $c(T-1)$ $d(T-2)$ $c(T-2)$ ..... $c(2)$ $d(1)$ $c(1)$ $d(0)$	

$$b^2(0) = -A(0) x(0)$$

$$b^1(0) = f(0) - C(0) x(0)$$

Figura 2.2

Seja  $S(t)$ ,  $t = 0 \dots T-2$ , o conjunto de vetores  $x(1) \dots x(t+1)$ ,  $u(0) \dots u(t)$ , que satisfazem as equações de estado e restrições abaixo.

$$x(\tau+1) = A(\tau) x(\tau) + B(\tau) u(\tau)$$

$$C(\tau) x(\tau) + D(\tau) u(\tau) = f(\tau) \quad \tau=0 \dots t \quad (2.1)$$

$$x(\tau+1) \geq 0 \quad , \quad u(\tau) \geq 0$$

Vamos considerar que esse conjunto seja limitado. Portanto, há um número de pontos extremos finitos em  $S(t)$ ,  $t=0 \dots T-1$ . Caso  $S(t)$  seja ilimitado há necessidade de se considerar raios extremos [21].

Associemos o problema mestre ao estágio  $T-1$ , que compreende as variáveis  $x(T)$  e  $u(T-1)$ . Podemos pois reescrever o problema 1 da P.L.D. como

$$\min y(T-1) = c(T) x(T) + d(T-1) u(T-1) + h(T-2)$$

$$\text{s.a} \quad x(T) = A(T-1) x(T-1) + B(T-1) u(T-1) \quad (2.2)$$

$$C(T-1) x(T-1) + D(T-1) u(T-1) = f(T-1)$$

$$x(T) \geq 0 \quad , \quad x(T-1) \geq 0 \quad , \quad u(T-1) \geq 0$$

onde

$$h(T-2) = \min \sum_{t=0}^{T-2} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)$$

$$\text{s.a} \quad (2.1) \quad , \quad t = 0 \dots T-2$$

Seja  $z^i(T-2) = (x^i(1), \dots, x^i(T-1), u^i(0) \dots u^i(T-2))$  um ponto extremo do conjunto  $S(T-2)$ . Podemos pois, descrever qualquer ponto nesse conjunto como combinação convexa desses pontos extremos. Ao procedermos assim, podemos reescrever (2.2) como



$$\min y(T-1) = c(T) x(T) + d(T-1) u(T-1) + \sum_{i=1}^{e(T-2)} \alpha_i(T-1) g_i(T-1)$$

$$\text{s.a a-)} x(T) = \sum_{i=1}^{e(T-2)} v^i(T-1) \alpha_i(T-1) + B(T-1) u(T-1)$$

$$\text{b-)} \sum_{i=1}^{e(T-2)} w^i(T-1) \alpha_i(T-1) + D(T-1) u(T-1) = f(T-1) \quad (2.3)$$

$$\text{c-)} \sum_{i=1}^{e(T-2)} \alpha_i(T-1) = 1$$

$$x(T) \geq 0, \quad u(T-1) \geq 0, \quad \alpha_i(T-1) \geq 0$$

onde

$$g_i(T-1) = \sum_{t=0}^{T-2} c(t+1) x^i(t+1) + d(t) u^i(t)$$

$$v^i(T-1) = A(T-1) x^i(T-1)$$

$$w^i(T-1) = C(T-1) x^i(T-1)$$

$e(T-2)$  - número de pontos extremos de  $S(T-2)$ .

Os pontos  $z^i(T-2)$  são gerados através do problema a ser definido abaixo. O critério para entrada de uma variável  $\alpha_i(T-1)$  na base do problema mestre (2.3) é:

$$g_i(T-1) - p(T) v^i(T-1) - \lambda(T-1) w^i(T-1) - \sigma(T-1) < 0$$

onde  $p(T)$ ,  $\lambda(T-1)$  e  $\sigma(T-1)$ , são os multiplicadores associados com (2.3a, b, c), respectivamente. Seguindo o procedimento de Dantzig-Wolfe, vamos definir um sub-problema que gere os pontos  $z^i(T-2)$  e que indique a possibilidade da entrada de uma variável  $\alpha_i(T-2)$  na base de (2.3).

$$\min \quad [-p(T) A(T-1) - \lambda(T-1) C(T-1)] x(T-1) + \\ + \sum_{t=0}^{T-2} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)$$

$$\text{s.a} \quad (2.1) \quad , \quad t = 0 \dots T-2$$

Nota-se que esse sub-problema tem um estágio a menos.

Aplicando novamente o princípio de Dantzig - Wolfe, vamos definir um problema mestre para o estágio T-2.

$$\min \quad [c(T-1) - p(T) A(T-1) - \lambda(T-1) C(T-1)] x(T-1) + \\ + d(T-2) u(T-2) + h(T-3)$$

$$\text{s.a} \quad x(T-1) = A(T-2) x(T-2) + B(T-2) u(T-2) \tag{2.4}$$

$$C(T-2) x(T-2) + D(T-2) u(T-2) = f(T-2)$$

$$x(T-1) \geq 0 \quad , \quad x(T-2) \geq 0 \quad , \quad u(T-2) \geq 0$$

onde

$$h(T-3) = \min \sum_{t=0}^{T-3} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)$$

$$\text{s.a} \quad (2.1) \quad , \quad t = 0 \dots T-3$$

Seja  $z^i(T-3) = (x^i(1) \dots x^i(T-2), u^i(0) \dots u^i(T-3))$ , um ponto extremo de  $S(T-3)$ . De maneira análoga a (2.3) podemos reescrever (2.4) como

$$\min \quad y(T-2) = [c(T-1) - p(T) A(T-1) - \lambda(T-1) C(T-1)] x(T-1) + \\ + d(T-2) u(T-2) + \sum_{i=1}^{e(T-3)} \alpha_i(T-2) g_i(T-2)$$

$$\text{s.a } x(T-1) = \sum_{i=1}^{e(T-3)} v^i(T-2) \alpha_i(T-2) + B(T-2) u(T-2) \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^{e(T-3)} w^i(T-2) \alpha_i(T-2) + D(T-2) u(T-2) = f(T-2)$$

$$\sum_{i=1}^{e(T-3)} \alpha_i(T-2) = 1$$

$$x(T-1) \geq 0 \quad , \quad u(T-2) \geq 0 \quad , \quad \alpha_i(T-2) \geq 0$$

onde

$$g_i(T-2) = \sum_{t=0}^{T-3} c(t+1) x^i(t+1) + d(t) u^i(t)$$

$$v^i(T-2) = A(T-2) x^i(T-2)$$

$$w^i(T-2) = C(T-2) x^i(T-2)$$

$e(T-3)$  - número de pontos extremos de  $S(T-3)$ .

O problema (2.5) se comporta como sub-problema para o mestre (2.3) e como problema mestre para os estágios  $T-3 \dots 0$ . Daí definirmos (2.5) como o sub-problema mestre  $T-2$ .

De um modo geral o sub-problema mestre  $t$  é:

$$\begin{aligned} \min y(t) = & [c(t+1) - p(t+2) A(t+1) - \lambda(t+1) C(t+1)] x(t+1) + \\ & + d(t) u(t) + \sum_{i=1}^{e(t-1)} \alpha_i(t) g_i(t) \end{aligned}$$

$$\text{s.a } x(t+1) = \sum_{i=1}^{e(t-1)} v^i(t) \alpha_i(t) + B(t) u(t) \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{e(t-1)} w^i(t) \alpha_i(t) + D(t) u(t) = f(t)$$

$$\sum_{i=1}^{e(t-1)} \alpha_i(t) = 1$$

$$x(t+1) \geq 0 \quad , \quad u(t) \geq 0 \quad , \quad \alpha_i(t) \geq 0$$

onde

$$g_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} c(\tau+1) x^i(\tau+1) + d(\tau) u^i(\tau)$$

$$v^i(t) = A(t) x^i(t)$$

$$w^i(t) = C(t) x^i(t)$$

$e(t-1)$  - número de pontos  $z^i(t-1)$ , extremos de  $S(t-1)$ .

$$z^i(t-1) = (x^i(1), \dots, x^i(t), u^i(0), \dots, u^i(t-1))$$

O sub-problema zero é considerado aqui como o único sub-problema real no sentido da decomposição de Dantzig - Wolfe e pode ser escrito como

$$\min y(0) = [c(1) - p(2) A(1) - \lambda(1) C(1)]x(1) + d(0)u(0)$$

$$\text{s.a} \quad x(1) = A(0) x(0) + B(0) u(0)$$

$$C(0) x(0) + D(0) u(0) = f(0) \tag{2.7}$$

$$x(1) \geq 0 \quad , \quad u(0) \geq 0$$

A Figura 2.3 mostra a estrutura com T níveis e um sub-problema para cada nível.

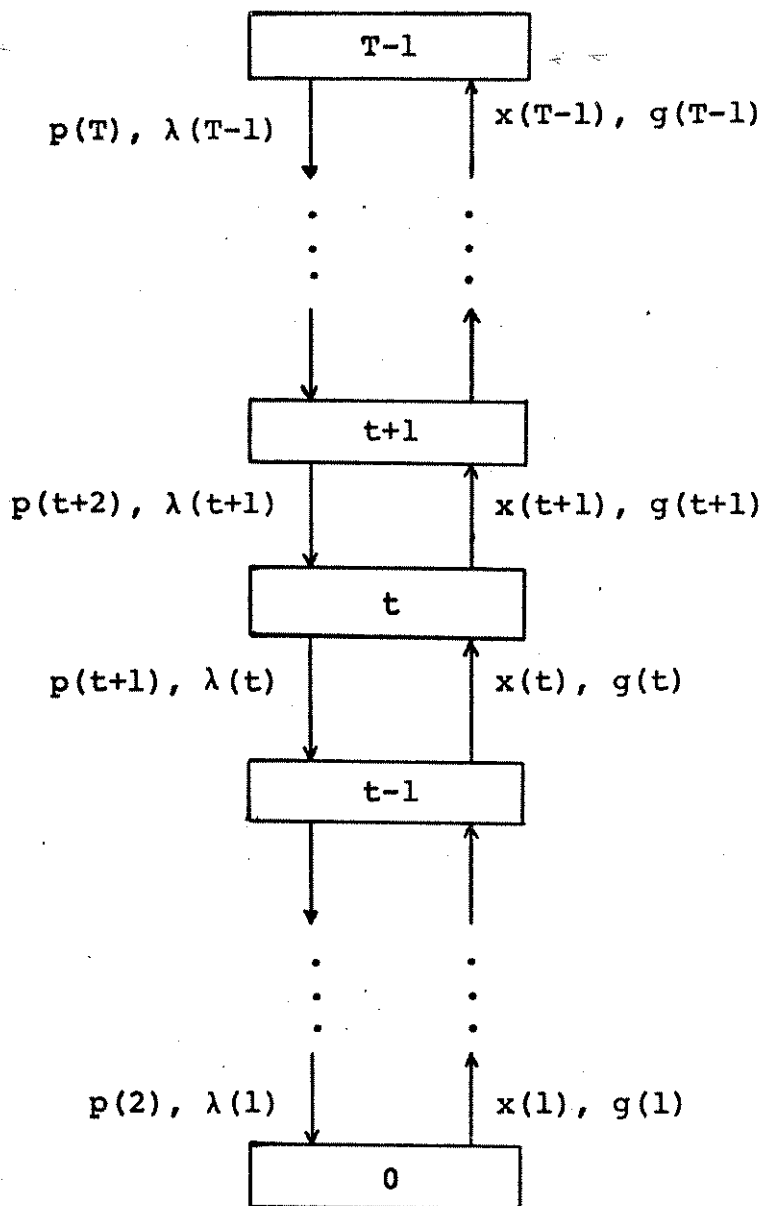


Figura 2.3

A figura também mostra toda a troca de informações entre os diversos níveis. Assim, uma vez obtida a solução ótima para o sub-problema  $t$ , este envia uma informação para cada nível adjacente. Para o sub-problema  $t+1$  é enviada a solução ótima  $x(t+1)$  visando gerar uma nova coluna. O escalar  $g(t+1)$  representa o coeficiente da variável  $\alpha(t+1)$  associada com essa nova coluna a entrar na base do sub-problema  $t+1$ . Para o sub-problema  $t-1$  são enviados os multiplicadores  $p(t+1)$  e  $\lambda(t)$  associados com a solução ótima e que irão modificar a sua função objetivo.

O problema mestre foi associado ao estágio T-1, devido à formulação do problema 1 da P.L.D. com condições iniciais  $x(0)$

conhecidas.

Consideremos agora as condições de otimalidade para o sub-problema  $t$  (2.6), aqui divididas em condições locais e condição de conexão.

Condições locais

$$p(t+1) + c(t+1) - p(t+2) A(t+1) - \lambda(t+1) C(t+1) \geq 0$$

$$t=0 \dots T-2$$

$$p(T) + c(T) \geq 0 \qquad t=T-1 \qquad (2.8)$$

$$d(t) - p(t+1) B(t) - \lambda(t) D(t) \geq 0 \qquad t=0 \dots T-1$$

onde

$p(t+1)$  e  $\lambda(t)$  são os multiplicadores associados com a solução ótima do sub-problema  $t$ .

Condição de conexão

Essa condição é verificada através do sub-problema  $t-1$ , de modo análogo ao método de Dantzig - Wolfe, isto é:

$$\bar{y}(t-1) - \sigma(t) \geq 0 \qquad t=1 \dots T-1 \qquad (2.9)$$

onde

$\bar{y}(t-1)$  é o valor ótimo da função objetivo do sub-problema  $t-1$ .

$\sigma(t)$  é o multiplicador ótimo associado com as restrições de convexidade do sub-problema  $t$ .

Como não poderia deixar de ser, as condições de otimalidade locais (2.8) correspondem à factibilidade do problema 2 da P.L.D. (ver Cap. I). Esse fato será usado adiante para o cálculo da função dual e comparação com o valor da função primal, fornecendo assim o critério de parada para o método. A condição de conexão (2.9), assim denominado, pois representa a condição que

liga o sub-problema  $t$  ao subsequente  $t-1$ , indica que a coluna gerada pelo sub-problema  $t-1$  não irá melhorar a função objetivo do sub-problema  $t$ .

## II. 2.2 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

É evidente que os sub-problemas não operam com todos os pontos extremos, isto é, eles são gerados enquanto a condição de conexão (2.9) não se verificar. Por essa razão é comum associar-se ao estágio  $T-1$ , o nome de problema mestre restrito e aos estágios  $T-2 \dots 1$ , o nome de sub-problemas mestres restritos.

Um ciclo nesse algoritmo corresponde à resolução sequencial dos sub-problemas desde o estágio  $T-1$  até o estágio 0. A estratégia de solução aqui abordada consiste pois, em resolver todos os sub-problemas nessa ordem decrescente de tempo.

Suponhamos que o sub-problema  $t$  vá ser otimizado no ciclo  $k$ . Em geral, teremos mais uma atividade nesse sub-problema com coeficiente escalar  $g_{k-1}(t)$  e mais uma coluna  $(v^{k-1}(t), w^{k-1}(t))'$ , resultantes das informações enviadas pelo sub-problema  $t-1$  durante o ciclo  $k-1$ . O sub-problema  $t$  a ser resolvido nesse ciclo  $k$  é, portanto

$$\begin{aligned} \min \quad y(t) = & [c(t+1) - p_k(t+2) A(t+1) - \lambda_k(t+1) C(t+1)] x(t+1) + \\ & + d(t) u(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t) g_i(t) \end{aligned}$$

$$\text{s.a} \quad x(t+1) = \sum_{i=0}^{k-1} v^i(t) \alpha_i(t) + B(t) u(t)$$

(2.10)

$$\sum_{i=0}^{k-1} w^i(t) \alpha_i(t) + D(t) u(t) = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t) = 1$$

$$x(t+1) \geq 0 \quad , \quad u(t) \geq 0 \quad , \quad \alpha_i(t) \geq 0$$

onde

$p_k(t+2)$  e  $\lambda_k(t+1)$  são os novos multiplicadores enviados pelo sub-problema  $t+1$ .

Sejam  $x^k(t+1)$ ,  $u^k(t)$  e  $\alpha^k(t)$  as soluções ótimas desse sub-problema, onde  $\alpha^k(t)$  é um vetor  $k \times 1$ . Associado com solução do sub-problema  $t$ , temos os multiplicadores ótimos  $p_k(t+1)$  e  $\lambda_k(t)$ , que são enviados ao sub-problema  $t-1$ , modificando sua função objetivo.

Resolvemos assim, sequencialmente, todos os sub-problemas desde o estágio  $T-1$  até o estágio zero. Podemos agora calcular recorrentemente, o coeficiente da nova variável  $\alpha_k(t)$  a entrar na base dos sub-problemas  $t$ ,  $t=1 \dots T-1$ , através das expressões

$$g_k(1) = c(1) x^k(1) + d(0) u^k(0) \tag{2.11}$$

$$g_k(t) = c(t) x^k(t) + d(t-1) u^k(t-1) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t-1) g_i(t-1) \tag{2.11}$$

$t=2 \dots T-1$

Calculamos também a nova coluna correspondente à variável  $\alpha_k(t)$  através das expressões

$$v^k(t) = A(t) x^k(t) \tag{2.12}$$

$t=1 \dots T-1$

$$w^k(t) = C(t) x^k(t)$$

O sub-problema  $t$  fará proposta de nova coluna ao sub-problema  $t+1$ , somente quando

$$\bar{y}(t) - \sigma_k(t+1) < 0 \tag{2.13}$$

$t=T-2 \dots 0$

onde  $\bar{y}(t)$  é o valor ótimo da função objetivo com os novos multiplicadores  $p_k(t+2)$  e  $\lambda_k(t+1)$ . Analogamente  $\sigma_k(t+1)$  é o novo multiplicador referente às restrições de convexidade do sub-problema  $t+1$ .

A resolução dos sub-problemas é feita através do simplex



revisado. O problema mestre associado ao estágio T-1 é resolvido com um único pivoteamento como no método de Dantzig-Wolfe. Todos os outros sub-problemas sofrerão vários pivoteamentos até a obtenção da solução, desde que a função objetivo dos mesmos foi alterada pelos novos multiplicadores. Em qualquer desses casos partimos da base ótima do ciclo anterior, que é adotada como base factível para o novo ciclo.

Mostremos que o processo de ciclos descrito anteriormente é finito.

### Teorema 2.1.

O algoritmo decomposição em cascata termina em um número finito de ciclos.

### Prova

Para um número de estágios igual a dois, dispomos da estrutura típica de Dantzig - Wolfe com um problema mestre e um sub-problema. Portanto, ao aplicarmos o algoritmo de Dantzig - Wolfe, obtemos a solução em um número finito de ciclos.

Suponhamos que o algoritmo seja finito para os estágios T-2...0. A introdução de cada coluna no problema mestre associado ao estágio T-1 fará com que a sua função objetivo sempre decresça (lexicograficamente se for preciso). A expressão (2.13) impede a duplicação de colunas já existentes e portanto nenhuma base pode reaparecer. Além do mais, a suposição de que o algoritmo é finito para os estágios T-2...0, implica que o número de bases para o estágio T-1 é finito.

Mostramos pois que, se o algoritmo é finito para os estágios T-2...0, ele também o é, para os estágios T-1...0. Resta mostrar que o estágio T-1 espera um número finito de ciclos até receber um nova coluna. Isto decorre do fato de que quando o estágio T-1 fixa os multiplicadores  $p(T)$  e  $\lambda(t-1)$ , o algoritmo, pela hipótese indutiva, é resolvido em um número finito de ciclos.

Vimos através das expressões (2.8) que ao resolvermos um sub-problema, as condições de otimalidade são tais que fornecem multiplicadores  $p(t+1)$  e  $\lambda(t)$  factíveis para o problema 2 da

P.L.D. Portanto, a vantagem de se resolver o problema sequencialmente desde o estágio T-1 até o estágio zero, é obtermos ao fim do ciclo k uma solução dual factível com correspondente função objetivo dada por

$$J_2(\lambda_k, p_k) = -[p_k(1) A(0) + \lambda_k(0) C(0)]x(0) + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_k(t) f(t)$$

Como a função dual não cresce monotonicamente, tomamos ao fim do ciclo k o valor

$$LI = \max J_2(\lambda_i, p_i) \quad , \quad i=1\dots k \quad (2.14)$$

onde LI é um limitante inferior para a função primal. Se ao fim desse ciclo k obtivermos

$$LI \geq y(T-1) - \epsilon \quad (2.15)$$

para um valor de  $\epsilon$  pequeno, o algoritmo termina.

#### Esquema geral do algoritmo

1-) Supondo existente uma solução básica factível  $(x^0(t+1), u^0(t))$ , faça

$$g_0(1) = c(1) x^0(1) + d(0) u^0(0)$$

$$g_0(t) = c(t) x^0(t) + d(t-1) u(t-1) + g_0(t-1) \quad t=2\dots T-1$$

$$v^0(t) = A(t) x^0(t) \quad t=1\dots T-1$$

$$w^0(t) = C(t) x^0(t)$$

2-) Inicie o ciclo k=1, resolvendo sequencialmente os sub-problemas T-1...0 e calcule

$$\Delta_1(t) = \bar{y}_1(t) - \sigma_1(t)$$

$$t=T-2, \dots, 0$$

3-) Calcule o limitante inferior LI (2.14) com os multiplicadores ótimos obtidos através da resolução dos sub-problemas. Se o critério de parada (2.15) não for obedecido, vá para 4-).

4-) Introduza nova coluna (2.12) nos sub-problemas  $t+1$ , para os quais  $\Delta_k(t) < 0$ . Calcule os coeficiente das novas variáveis através de (2.11).

5-) Inicie o ciclo  $k+1$ , resolvendo sequencialmente os sub-problemas  $\tau+1, \tau \dots 0$ , onde  $\tau$  é o maior índice temporal para o qual  $\Delta_k(\tau) < 0$ , e calcule

$$\Delta_{k+1}(t) = \bar{y}_{k+1}(t+1) - \sigma_{k+1}(t+1)$$

$$t=\tau+1, \tau \dots 0$$

Faça  $k = k+1$  e volte para 3-)

Tanto Glassey como Ho e Manne não deixam bem claro a introdução de colunas nessa estratégia de solução. Assim é que Ho e Manne dizem para iniciar cada ciclo pelo sub-problema  $T-1$ , ao passo de Glassey sugere o início do ciclo pelo primeiro sub-problema  $\tau$  não ótimo (como no esquema anterior).

Suponha que durante a resolução de um ciclo, o sub-problema  $T-2$  gere um ponto tal que a condição (2.9) se verifique. Não adianta pois introduzir a coluna associada com esse ponto, pois não melhoraremos a função objetivo do problema mestre  $T-1$ . Pode ser, no entanto, que no ciclo seguinte essa coluna passe a ser útil para o problema  $T-1$  e nesse caso deveríamos introduzir duas colunas nesse problema, supondo que as duas sejam úteis, no sentido de melhorar a função objetivo. Com isso evitamos desperdiçar informação para o problema  $T-1$ . A mesma discussão vale para os outros sub-problemas.

Outro critério de parada adotado por Ho e Manne [16] está relacionado com o número de colunas geradas. Assim, nas experiências computacionais relatadas pelos autores esse número foi limitado previamente, visando com isso não ultrapassar uma certa

dimensão para as matrizes  $V(t)$  e  $W(t)$  compostas das colunas geradas  $v^i(t)$  e  $w^i(t)$  e também limitar o tempo de computação.

É possível utilizar o próprio algoritmo decomposição em cascata durante a resolução da fase I, realizada com o intuito de se obter uma solução básica factível se a mesma existir. Para isso basta considerar o problema abaixo.

$$\min \sum_{t=0}^{T-1} \delta(t+1) + \theta(t)$$

$$\text{s.a. } -x(t+1) + A(t) x(t) + B(t) u(t) + \delta(t+1) = 0$$

$$C(t) x(t) + D(t) u(t) + \theta(t) = f(t)$$

$$x(t+1) \geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad \delta(t+1) \geq 0, \quad \theta(t) \geq 0$$

onde  $\delta(t+1)$  e  $\theta(t)$  são variáveis artificiais.

Aplicamos então, a mesma metodologia exposta na sub-seção 2.1, com a finalidade de se obter sub-problemas de um só estágio. Uma vez obtida a decomposição em cascata e desde que uma solução básica factível é disponível para o problema acima, o algoritmo pode partir.

Tanto Glassey, como Ho e Manne, apresentam o método do M grande para resolver a fase I, o que é equivalente à resolução do problema acima.

## II. 2.3 RECUPERAÇÃO DA SOLUÇÃO ÓTIMA

Após termos passado pelo critério de parada, dispomos de soluções  $x(t+1)$ ,  $u(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ , fornecidas pelos sub-problemas no último ciclo e que são pontos extremos dos conjuntos  $S(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ . Como no método de Dantzig - Wolfe, esses pontos não são, em geral, solução do problema original, pois o ponto extremo solução não precisa ter componentes que sejam pontos extremos dos sub-problemas. Devemos pois, ponderar todas as soluções dos ciclos anteriores com os pesos  $\alpha_i(t)$ .

Um ponto da sub-seção anterior deve ser ressaltado. De acordo com o ítem 5 do esquema geral os sub-problemas  $T-1 \dots T+2$  não são alterados nesse ciclo. Portanto, em geral, o número de pontos gerados por esses sub-problemas é menor que o número de ciclos. Para simplificar a apresentação que se segue, vamos supor que todos os sub-problemas tenham gerado pontos extremos em todos os ciclos até o ciclo  $k$  onde o critério de parada foi satisfeito, ou onde o número máximo de colunas estipulado foi alcançado.

Sejam as matrizes

$$X(t+1) = [x^0(t+1), x^1(t+1) \dots x^{k-1}(t+1)] \quad n \times k$$

$$U(t) = [u^0(t), u^1(t) \dots u^{k-1}(t)] \quad r \times k$$

$$H(t) = [\alpha^1(t), \alpha^2(t) \dots \alpha^k(t)] \quad k \times k$$

onde

$x^j(t+1)$  e  $u^j(t)$  são as soluções fornecidas pelo sub-problema  $t$  durante o ciclo  $j$ .

$\alpha^j(t) = (\alpha_0^j(t) \dots \alpha_{j-1}^j(t))'$ . As componentes de  $\alpha^j(t)$  correspondem aos pesos colocados no ciclo  $j$  pelo sub-problema  $t$  às soluções enviadas pelo sub-problema  $t-1$  nos ciclos anteriores. A matriz  $H(t)$  é triangular superior.

### Teorema 2.2

Formemos os vetores  $r(t)$ ,  $s(t)$  e  $\gamma(t)$  não negativos através das seguintes expressões recorrentes

$$r(T) = x^k(T) \quad ; \quad s(T-1) = u^k(T-1) \quad ; \quad \gamma(T-1) = \alpha^k(T-1) \quad (2.16)$$

$$r(t) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i(t) \gamma_i(t) = X(t) \gamma(t) \quad t=T-1 \dots 1 \quad (2.17)$$

$$s(t) = \sum_{i=0}^{k-1} u^i(t) \gamma_i(t+1) = U(t) \gamma(t+1) \quad t=T-2 \dots 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha^i(t) \gamma_{i-1}(t+1) = H(t) \gamma'(t+1) = \\ &= H(t) H(t+1) \dots H(T-2) \alpha^k(T-1) \quad t=T-2 \dots 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Os vetores  $r(t)$  e  $s(t)$  assim formados constituem uma solução factível para o problema original com valor de função objetivo  $y(T-1)$ , ou seja

$$\begin{aligned} \text{a-)} \quad r(t+1) &= A(t) r(t) + B(t) s(t) \\ \text{b-)} \quad C(t) r(t) + D(t) s(t) &= f(t) \quad (2.20) \\ \text{c-)} \quad \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) r(t+1) + d(t) s(t) &= y(T-1) \end{aligned}$$

Prova

a-) Mostremos que  $\sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i(t) = 1$

Seja o vetor  $e = (1, 1 \dots 1)$ ,  $1 \times k$ . De (2.19) e (2.16) vem

$$\sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i(t) = e \gamma(t) = e H(t) \gamma'(t+1) = e \gamma'(t+1) \dots = e \alpha(T-1) = 1$$

b-) Mostremos que as restrições do sub-problema zero são satisfeitas. Seja o par  $(x^1(1), u^1(0))$  um ponto extremo de  $S(0)$ . Então

$$x^1(1) - B(0) u^1(0) = A(0) x(0)$$

Pós-multiplicando por  $\gamma_i(1)$  e somando em  $i$ , temos

$$(x^1(1) - B(0) u^1(0)) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i(1) = A(0) x(0) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i(1) = A(0) x(0)$$

ou

$$X(1) \gamma(1) - B(0) u(0) \gamma(1) = r(1) - B(0) s(0) = A(0) x(0)$$

De modo análogo

$$D(0) u^1(0) = f(0) - C(0) x(0)$$

$$D(0) U(0) \gamma(1) = D(0) s(0) = f(0) - C(0) x(0)$$

c-) Mostremos que as restrições do problema mestre T-1 são satisfeitas ao definirmos  $r(T)$ ,  $r(T-1)$  e  $s(T-1)$  como em (2.16) e (2.17).

$$\begin{aligned} A(T-1) r(T-1) + B(T-1) s(T-1) &= A(T-1) X(T-1) \alpha^k(T-1) + \\ + B(T-1) u(T-1) &= V(T-1) \alpha^k(T-1) + B(T-1) u(T-1) = r(T) = x^k(T) \end{aligned}$$

De modo análogo mostra-se que a outra restrição desse estágio é satisfeita.

d-) Mostremos que as restrições do sub-problema t são satisfeitas ao adotarmos as definições (2.17) a (2.19). Seja o par  $(x^i(t+1), u^i(t))$ , um ponto solução de (2.6). Portanto

$$x^i(t+1) = V(t) \alpha^i(t) + B(t) u^i(t)$$

Pós-multiplicando pelos pesos  $\gamma_i(t+1)$  e somando em i, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} x^i(t+1) \gamma_i(t+1) &= V(t) \sum_{i=1}^k \alpha^i(t) \gamma_{i-1}(t+1) + \\ + B(t) \sum_{i=0}^{k-1} u^i(t) \gamma_i(t+1) \end{aligned}$$

ou

$$X(t+1) \gamma(t+1) = V(t) H(t) \gamma(t+1) + B(t) U(t) \gamma(t+1)$$

$$\begin{aligned} r(t+1) &= A(t) X(t) H(t) \gamma(t+1) + B(t) s(t) = \\ &= A(t) X(t) \gamma(t) + B(t) s(t) = A(t) r(t) + B(t) s(t) \end{aligned}$$

De modo análogo mostra-se que a outra restrição é satisfeita.

e-) Mostremos que a expressão (2.20c) é válida.

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) r(t+1) + d(t) s(t) &= c(T) x^k(T) + d(T-1) u^k(T-1) + \\ &+ \sum_{t=0}^{T-2} c(t+1) r(t+1) + d(t) s(t) = c(T) x^k(T) + \\ &+ d(T-1) u^k(T-1) + \sum_{t=0}^{T-2} c(t+1) X(t+1) \gamma(t+1) + \\ &+ d(t) U(t) \gamma(t+1) = c(T) x^k(T) + d(T-1) u^k(T-1) + \\ &+ \sum_{t=0}^{T-2} [c(t+1) X(t+1) + d(t) U(t)] H(t+1) \dots H(T-2) \alpha^k(T-1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Consideremos, a partir de (2.11), a expressão para o vetor  $g(T-1)$

$$\begin{aligned} g(T-1) &= c(T-1) X(T-1) + d(T-2) U(T-2) + g(T-2) H(T-2) = \\ &= c(T-1) X(T-1) + d(T-2) U(T-2) + \\ &+ [c(T-2) X(T-2) + d(T-3) U(T-3) + g(T-3) H(T-3)] H(T-2) = \\ &= c(T-1) X(T-1) + d(T-2) U(T-2) + \\ &+ [c(T-2) X(T-2) + d(T-3) U(T-3)] H(T-2) + \\ &+ [c(T-3) X(T-3) + d(T-4) U(T-4)] H(T-3) H(T-2) + \dots + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+ [c(2) x(2) + d(1) u(1)] H(2) H(3) \dots\dots H(T-2) + \\
 &+ g(1) H(1) H(2) \dots\dots H(T-2) \qquad\qquad\qquad (2.22)
 \end{aligned}$$

Mas  $g(1) = c(1) x(1) + d(0) u(0)$

Substituindo  $g(1)$  em (2.22) e pós-multiplicando por  $\alpha^k(T-1)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 g(t-1) \alpha^k(T-1) &= \sum_{t=0}^{T-2} [c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)] H(t+1) \dots\dots \\
 &\dots\dots H(T-2) \alpha^k(T-1)
 \end{aligned}$$

Ao utilizarmos (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
 y(T-1) &= c(T) x^k(T) + d(T-1) u^k(T-1) + g(T-1) \alpha^k(T-1) = \\
 &= \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) r(t+1) + d(t) s(t)
 \end{aligned}$$

Para o caso em que o número de pontos extremos gerado por um sub-problema é menor que o número de ciclos, basta substituir o índice  $k-1$  nas somatórias (2.17) e (2.18) pelo índice  $h(t)$ , onde  $h(t)$  é o número de pontos extremos gerados pelo sub-problema  $t$ .

Através do teorema 2.2 pode-se recuperar uma solução factível ao fim de qualquer ciclo. Em geral a recuperação far-se-á quando tivermos passado pelo critério de parada. Note que somos obrigados a guardar na memória lenta todas as soluções  $x^i(t+1)$ ,  $u^i(t)$  e  $\alpha^i(t)$  obtidas nos ciclos. Visando economizar memória, Ho e Manne apresentam um outro método que envolve uma otimização de  $T$  programas lineares para recuperar a solução em qualquer ciclo, evitando-se com isso armazenar as soluções obtidas. Esta é uma alternativa que deve ser usada somente quando o problema de memória for crítico, pois o algoritmo decomposição em cascata com o método de recuperação aqui exposto, já consegue uma

boa economia de memória em relação ao simplex revisado.

## II. 2.4 INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA

De forma análoga ao método de Dantzig - Wolfe, podemos interpretar economicamente o papel desempenhado pela função objetivo de um sub-problema, bem como o papel dos multiplicadores.

Consideremos as restrições originais relacionadas com o sub-problema  $t+1$  e os multiplicadores associados,  $p(t+2)$  e  $\lambda(t+1)$ .

$$p(t+2) \rightarrow x(t+2) = A(t+1) x(t+1) + B(t+1) u(t+1)$$

$$\lambda(t+1) \rightarrow C(t+1) x(t+1) + D(t+1) u(t+1) = f(t+1)$$

Suponha agora que o nível de uma atividade  $x_j$  no estágio  $t+2$  resulte de uma transformação linear aplicada às atividades  $x_j$ ,  $j = 1 \dots n$ , do estágio  $t+1$ , adicionada a uma transformação linear aplicada a "investimentos"  $u_j(t+1)$ ,  $j = 1 \dots r$ . Suponha também que a atividade de  $x_j(t+1)$  e o investimento  $u_j(t+1)$  consumam por unidade, respectivamente,  $c_{ij}(t+1)$  e  $d_{ij}(t+1)$  unidades do recurso  $i$ .

Consideremos a função objetivo do problema 1 da P.L.D.

$$\min \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)$$

Sejam  $c_j(t+1)$  e  $d_j(t)$  os custos associados com o nível de atividade  $x_j(t+1)$  e com o nível de investimento  $u_j(t)$ . Através da função objetivo tentamos pois, minimizar o custo associado com as atividades e investimentos em todos os estágios.

É clássico na teoria de dualidade associar-se o papel de preço aos multiplicadores [21]. Aqui  $p_j(t+2)$  é associado ao valor monetário unitário da atividade  $x_j(t+2)$  e  $\lambda_j(t+1)$  é associado ao preço unitário do recurso  $f_j(t+1)$ .

Suponha que  $k-1$  ciclos tenham se passado e que o sub-problema  $t$  vá ser otimizado no ciclo  $k$ . Interpretamos as componentes da função objetivo desse sub-problema, cuja expressão é:

$$\min y(t) = [c(t+1) - p_k(t+2) A(t+1) - \lambda_k(t+1) C(t+1)] x(t+1) + d(t) u(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t) g_i(t)$$

onde

$$g_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} c(\tau+1) x^i(\tau+1) + d(\tau) u^i(\tau)$$

- $p_k(t+2)$  e  $\lambda_k(t+1)$  - multiplicadores enviados pelo sub-problema  $t+1$  no ciclo  $k$ .
- $c(t+1) x(t+1)$  - custo direto devido à operação nesse nível de atividade.
- $d(t) u(t)$  - custo direto devido à operação nesse nível de investimento.
- $A(t+1) x(t+1)$  - parcela das atividades  $x(t+2)$  devida à contribuição de  $x(t+1)$ .
- $p_k(t+2) A(t+1) x(t+1)$  - valor das atividades  $x(t+2)$  geradas a partir de  $x(t+1)$ . O sub-problema  $t$  tenta maximizar esse valor.
- $C(t+1) x(t+1)$  - um vetor cuja  $j$ -ésima componente indica a quantidade de recurso  $j$  consumida, devido à operação nesse nível de atividade.
- $-\lambda_k(t+1) C(t+1) x(t+1)$  - custo envolvido pela utilização dos recursos. A componente  $\lambda_j$  do vetor  $\lambda_k(t+1)$  é negativa para indicar que um decréscimo na disponibilidade do recurso  $j$  causa um aumento no custo.

$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t) g_i(t)$  - representa uma ponderação feita sobre as propostas do sub-problema t-1 e que envolve as variáveis dos estágios 0..t-1

Portanto no ciclo k, o sub-problema t+1 envia ao sub-problema t, um vetor de multiplicadores associado com o preço unitário dos recursos utilizados pelas atividades x(t+1) e um vetor de multiplicadores associado com o valor unitário das atividades x(t+2). De posse dessas informações, o sub-problema t minimiza a diferença entre o custo associado com os níveis x(t+1), u(t) e o valor associado com o nível x(t+1). Simultaneamente procura achar a melhor ponderação possível entre todas as propostas de custo feitas nos ciclos anteriores pelo sub-problema t-1.

De modo análogo, podemos interpretar as condições de otimalidade para o sub-problema t. Lembrando (2.8) temos;

$$p(t+1) + c(t+1) - p(t+2) A(t+1) - \lambda(t+1) C(t+1) \geq 0$$

Para as componentes básicas desse vetor temos a igualdade. Assim a expressão acima afirma que para as componentes não básicas, o valor unitário das atividades x(t+1) somado com o seu custo unitário não é inferior ao valor unitário das atividades x(t+2) geradas por x(t+1), somado com o custo unitário das atividades x(t+1).

A interpretação para a expressão

$$d(t) - p(t+1) B(t) - \lambda(t) D(t) \geq 0$$

é análoga.

Finalmente, pela expressão (2.9)

$$\bar{y}(t-1) - \sigma_k(t) \geq 0$$

onde  $\bar{y}(t-1)$  é o valor ótimo da função objetivo do sub-problema t-1 e  $\sigma(t)$  é o multiplicador ótimo associado com as restrições de convexidade do sub-problema t, isto é:

$$\sigma(t) \rightarrow \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t) = 1$$

De acordo com Lasdon [21] , o multiplicador  $\sigma(t)$  representa uma medida do custo marginal das propostas feitas pelo sub-problema  $t-1$ . A função objetivo  $y(t-1)$  representa (como visto anteriormente) o custo de uma nova proposta a ser feita ao sub-problema  $t$ . Portanto, esse critério de otimalidade diz que a introdução de uma nova proposta nesse ciclo  $k$  implicará em custo superior ao custo obtido como ponderação de todos os ciclos anteriores.

## II. 2.5 COMENTÁRIOS

Como se pode observar da Figura 2.3, a aplicação repetida do princípio de Dantzig - Wolfe resultou numa estrutura relativamente complexa quando comparada com uma decomposição em que os sub-problemas não interagem. Com isso, em cada ciclo, novos multiplicadores são enviados aos sub-problemas que têm sua função objetivo modificada, obrigando que cada sub-problema mestre seja resolvido pelo simplex revisado, o que envolve algumas iterações.

As experiências computacionais relatadas por Glassey, Ho e Manne não foram muito alentadoras com relação ao tempo de computação requerido pelo método. Por exemplo, Ho e Manne resolvem um problema de programação linear dinâmica com a formulação (2.6) do Capítulo I, em que;

$m$  - número de linhas por período = 11

$n$  - número de variáveis por período = 11

$T$  - número de períodos = 11

onde obtém um tempo de computação cerca de 2,5 vezes maior que o simplex revisado.

Glassey conseguiu alguma melhora no método através da geração de várias colunas por parte de um sub-problema em um dado ciclo, mas conclui seu trabalho aconselhando a usar o método

somente no caso em que não se dispõe de um computador suficientemente grande para tratar o problema de P.L.D.

Soubemos através do trabalho de Wollmer [43] que em sua tese de doutorado, Ho conseguiu reduzir o tempo de computação abaixo do simplex revisado através da introdução de técnicas especiais. Isto confirma a característica inerente da decomposição em cascata, qual seja, a de que é um método lento e que precisa de sofisticação para se tornar competitivo, por exemplo, com o simplex revisado.

O aspecto positivo obtido pelo método é o relacionado com a economia de memória. No mesmo exemplo citado anteriormente, Ho e Manne relatam uma economia de memória em torno de 2,5 vezes em relação ao simplex revisado.

## II. 3 O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE HESTENES E POWELL APLICADO À P.L.D.

O método acima foi proposto independentemente por Hestenes [15] e Powell [26] no ano de 1968 para problemas de programação não linear com restrições. Ambos os autores procuravam então uma maneira de tornar os métodos de penalização mais atraentes. O trabalho de Hestenes tem o mérito de fazer a conexão do novo método de penalização com um certo Lagrangeano aumentado, o que possibilitou posteriormente, perspectivas mais amplas para a teoria de dualidade. O trabalho de Powell é bem mais elaborado e motivado por uma ótica exclusiva de função de penalização. Foram as suas considerações sobre convergência que despertaram a atenção para o novo método. Pode-se dizer que esses dois trabalhos representaram um marco revolucionário nos métodos de penalização que se tornaram bastante competitivos com outros métodos para programação não linear com restrições. Nas sub-seções 3.1 e 3.2 apresentamos interpretações diferentes para o trabalho de Hestenes. Na sub-seção 3.3 discutimos brevemente a importância do novo método para a solução de problemas não convexos. Finalmente nas sub-seções 3.4 e 3.5 estabelecemos a sua aplicação à P.L.D.

### II. 3.1 O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES COMO UM MÉTODO DE PENALIZAÇÃO

Fazemos aqui uma breve exposição comparativa entre o método de penalização clássico e o método dos multiplicadores, baseada no trabalho de Miele et al. [24].

Seja o problema

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } h(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad h(x) \in \mathbb{R}^m, \quad f, h \in C^1$$

As considerações feitas daqui por diante podem ser esten

didas para restrições de desigualdade e restrições de conjunto, isto é,  $x \in S$ . Adotamos somente restrições de igualdade para simplificar a explicação.

Seja  $x^*$  um ponto solução do problema (3.1). Portanto as condições necessárias de 1ª ordem afirmam que existe um multiplicador de Lagrange  $\lambda^*$ , tal que

$$\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla h(x^*) = 0 \quad (3.2)$$

onde  $\nabla f(x^*)$  e  $\lambda^*$  são vetores  $1 \times n$  e  $1 \times m$ . Essa equação será útil no momento em que definirmos os multiplicadores  $\lambda$  nos métodos de penalização.

a-) Método de penalização clássico

A idéia desse método é substituir o problema (3.1) pelo problema irrestrito abaixo

$$\min p(x, q) = f(x) + \frac{1}{2} q h(x)' h(x) \quad (3.3)$$

onde  $q > 0$ . Idealmente para  $q \rightarrow \infty$  a solução de (3.3) converge para a solução de (3.1). Assim o procedimento para resolver o problema (3.1) através da função de penalização  $p(x, q)$  é este: seja  $\{q_k\}$ ,  $k=1, 2, \dots$  uma sequência tendendo para infinito tal que para cada  $k$ ,  $q_k > 0$ ,  $q_{k+1} > q_k$ . Para cada  $k$  resolva o problema

$$\min p(x, q_k) \quad (3.4)$$

obtendo uma solução  $x_k$  que deve satisfazer as condições necessárias de 1ª ordem

$$\nabla f(x_k) + q_k h(x_k)' \nabla h(x_k) = 0 \quad (3.5)$$

onde  $\nabla f(x)$  é  $1 \times n$ .

Definindo  $\lambda_k \stackrel{\Delta}{=} q_k h(x_k)'$ , um vetor  $1 \times m$ , a equação (3.5) fica



$$\nabla f(x_k) + \lambda_k \nabla h(x_k) = 0 \quad (3.6)$$

Portanto, associado a cada  $q_k$  existe um multiplicador de Lagrange  $\lambda_k$  que é determinado após a realização da minimização irrestrita. A definição dos multiplicadores  $\lambda_k$  é tal que a condição (3.5) fica coincidente ao fim de cada ciclo com a condição de 1ª ordem (3.2) relativa ao problema (3.1).

Se o ponto  $x^*$ , solução do problema (3.1), é um ponto regular, isto é,  $\nabla h(x^*)$  tem rank  $m$ , então para  $x_k \rightarrow x^*$ , temos que  $\lambda_k \rightarrow \lambda^*$ .

Luenberger [22] mostra que à medida que  $q_k \rightarrow \infty$ , pior vai se tornando a estrutura de autovalores do Hessiano da função  $p(x, q_k)$ . Os métodos de minimização irrestritos aplicados à solução de (3.4) devem estar dotados de esquemas especiais para eliminar o efeito desse mau condicionamento do Hessiano, caso contrário a taxa de convergência torna-se muito lenta. Bertsekas [3] apresenta um resultado sobre a taxa de convergência relacionado com os multiplicadores  $\lambda$  para os métodos de penalização clássicos e que dá idéia do comportamento geral dos mesmos, isto é

$$\|\lambda_k - \lambda^*\| \leq \alpha/q_k, \quad \forall k > \bar{k} \quad (3.7)$$

onde  $\bar{k}$  é um índice e  $\alpha$  é uma constante dependente do problema. A expressão (3.7) será comparada posteriormente, com a sua equivalente no método dos multiplicadores.

Os métodos de penalização trabalham com soluções infactíveis e valores crescentes de  $q_k$  devem ser empregados em ciclos sucessivos, onde um ciclo corresponde à resolução do problema (3.4). Seja  $q_k$  o fator de penalização do presente ciclo e  $q_{k+1}$  o fator do ciclo seguinte, com  $q_{k+1} > q_k$ . Portanto a função de penalização sofre um acréscimo dado por

$$p(x, q_{k+1}) - p(x, q_k) = (q_{k+1} - q_k) h(x)' h(x) \quad (3.8)$$

O lado direito de (3.8) é positivo e joga um papel fundamental

nos métodos de penalização, pois garante a sua convergência. Em [22] mostra-se que para qualquer  $k$  temos que  $f(x_k) \leq p(x_k, q_k) \leq f(x^*)$ , onde  $x^*$  é a solução de (3.1). Assim, procuramos atingir o conjunto factível e simultaneamente a solução ótima através do acréscimo do fator  $q_k$ .

b-) Método dos multiplicadores

O método baseia-se na função de penalização aumentada, ou também Lagrangeano aumentado.

$$m(x, \lambda, q) = f(x) + \lambda h(x) + \frac{1}{2} q h(x)' h(x) \quad (3.9)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange e  $q > 0$ .

Essa função foi proposta por Hestenes, com a finalidade de acelerar a taxa de convergência dos métodos de penalização e simultaneamente evitar os problemas de mau condicionamento associados com os altos valores do fator de penalização  $q$ . O procedimento para resolver o problema (3.1) através da função de penalização  $m(x, \lambda, c)$  é este: seja  $\{\lambda_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  uma sequência de multiplicadores calculados recorrentemente. Para cada  $k$  resolva o problema

$$\min m(x, \lambda_k, q) \quad (3.10)$$

obtendo uma solução  $x_k$  que deve satisfazer as condições necessárias de 1ª ordem

$$\nabla f(x_k) + [\lambda_k + q h(x_k)'] \nabla h(x_k) = 0 \quad (3.11)$$

A equação (3.11) sugere a definição de um novo multiplicador

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + q h(x_k)' \quad (3.12)$$

de tal forma que a condição necessária de 1ª ordem para (3.8)

coincida ao fim de cada ciclo com a condição necessária de 1ª ordem (3.2) relativa ao problema (3.1). Portanto

$$\nabla f(x_k) + \lambda_{k+1} \nabla h(x_k) = 0 \tag{3.13}$$

onde  $\lambda_{k+1}$  é o multiplicador a ser utilizado no ciclo  $k+1$ . Na subseção 3.2 daremos uma interpretação diferente para a expressão (3.12).

Ao fim do ciclo  $k$ , quando o multiplicador de Lagrange é atualizado, a função de penalização aumentada sofre um acréscimo dado por

$$m(x, \lambda_{k+1}, q) - m(x, \lambda_k, q) = q h(x)' h(x) \tag{3.14}$$

Como se pode notar, o lado direito de (3.14) é positivo. Por analogia com (3.8), os autores em [24] sugerem que o fato da função de penalização ser crescente em cada ciclo, no mesmo ponto, garante a convergência do método. Assim, nesse método, procuramos atingir o conjunto de soluções factíveis ( $h(x)=0$ ) através da alteração do multiplicador em cada ciclo. A grande vantagem é que o fator de penalização  $q$  pode ficar constante, evitando-se assim o tradicional problema de mau condicionamento associado com altos valores de  $q$  nos métodos clássicos. Na seção seguinte teceremos considerações sobre a taxa de convergência para esse método com o intuito de comparar com (3.7).

## II. 3.2 O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES COMO UM MÉTODO PRIMAL-DUAL

Apresentamos agora a interpretação de Luenberger [22] para o método dos multiplicadores, ressaltando sua característica primal-dual e estabelecendo suas propriedades de convergência.

Seja o problema (3.1) com  $f, h \in C^2$ . Seja  $x^*$  um mínimo local para esse problema e suponhamos que  $x^*$  seja um ponto regular, isto é,  $\nabla h(x^*)$  tem rank  $m$ . A matriz  $\nabla h(x^*)$ ,  $(m \times n)$  tem em suas linhas os gradientes das restrições  $h_i(x)$ ,  $i = 1 \dots m$ , no ponto  $x^*$ . Associado com esse ponto solução existe um multiplica-

dor  $\lambda^*$ , tal que o par  $(x^*, \lambda^*)$  satisfaz (3.2). Suponhamos que as condições suficientes de 2ª ordem subsistem no ponto  $x^*$ , isto é, que o Hessiano do Lagrangeano

$$**L(x^*, \lambda^*) = F(x^*) + \lambda^* H(x^*) \quad (3.15)$$

seja positivo definido no sub-espço tangente  $M = \{x \mid \nabla h(x^*)x=0\}$  o que implica em dizer que  $x^*$  é um mínimo local estrito.

Consideremos agora o problema

$$\min \quad f(x) + \frac{1}{2} q h(x)' h(x) \quad (3.16)$$

$$\text{s.a} \quad h(x) = 0, \quad \forall q > 0$$

Notamos que o problema (3.16) é equivalente ao problema (3.1).

Seja também o Lagrangeano para (3.16)

$$m(x, \lambda, q) = f(x) + \lambda h(x) + \frac{1}{2} q h(x)' h(x) \quad (3.17)$$

conhecido na literatura como Lagrangeano aumentado ou penalizado. Qualquer mínimo local  $x^*$  para o problema (3.16) deve satisfazer conjuntamente com um multiplicador  $\lambda^*$  as condições necessárias de 1ª ordem, ou seja

$$\nabla m(x^*, \lambda^*, q) = \nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla h(x^*) + q h(x^*)' \nabla h(x^*) = 0 \quad (3.18)$$

Mas  $h(x^*) = 0$ , o que implica que as condições necessárias de 1ª ordem para os problemas (3.1) e (3.16) são idênticas. O Hessiano do Lagrangeano (3.17) no par  $(x^*, \lambda^*)$  é :

\*\* Usamos letras maiúsculas para representar o Hessiano de uma função. Assim  $F(x) = \nabla^2 f(x)$ . A notação  $\lambda H(x)$  indica  $\sum_{i=1}^m \lambda_i H_i(x)$ , onde  $H_i(x)$  é o Hessiano individual da restrição  $h_i(x)$ ,  $i=1 \dots m$  [22].

$$M(x^*, \lambda^*, q) = F(x^*) + \lambda^* H(x^*) + q \nabla h(x^*)' \nabla h(x^*) + q h(x^*)' H(x^*)$$

Mas  $h(x^*) = 0$ , portanto

$$M(x^*, \lambda^*, q) = L(x^*, \lambda^*) + q \nabla h(x^*)' \nabla h(x^*) \quad (3.19)$$

Mostremos agora que a matriz  $\nabla h(x^*)' \nabla h(x^*)$  é positiva definida no sub-espaço  $M^\perp$ , gerado pelos gradientes das restrições  $h_i(x)$ ,  $i = 1 \dots m$ , no ponto  $x^*$ . O sub-espaço  $M^\perp$  é ortogonal ao sub-espaço tangente  $M$  que é definido como

$$M = \{y \in R^n \mid y' z = 0, \quad z = \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(x)\}$$

Sabemos também que a matriz  $\nabla h(x^*)' \nabla h(x^*)$  é semi-definida positiva no  $R^n$ , isto é

$$\langle \nabla h(x^*)x, \nabla h(x^*)x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in R^n \quad (3.20)$$

Mas qualquer vetor  $x \in R^n$  pode ser escrito como

$$x = y + z, \quad y \in M, \quad z \in M^\perp \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20) vem

$$\langle \nabla h(x^*)z, \nabla h(x^*)z \rangle > 0, \quad \forall z \neq 0 \in M^\perp$$

Desde que  $L(x^*, \lambda^*)$  é positiva definida em  $M$  e  $\nabla h(x^*)' \nabla h(x^*)$  é positiva definida em  $M^\perp$ , existe um  $q^* > 0$  [5], tal que para todo  $q \geq q^*$  o Hessiano  $M(x^*, \lambda^*, q)$  é positivo definido no  $R^n$ . Isso quer dizer que o Lagrangeano  $m(x^*, \lambda^*, q)$  é localmente convexo em  $x^*$ . Além do mais, para qualquer  $\lambda$  suficientemente próximo a  $\lambda^*$  a função  $m(x, \lambda, c)$  terá um mínimo local em ponto  $x$  próximo a  $x^*$  [22]. A teoria da dualidade local pode então ser apli

cada. Seja a função dual

$$\phi(\lambda, q) = \min_x m(x, \lambda, q) \quad (3.22)$$

Seja  $x$  o vetor que minimiza  $m(x, \lambda, c)$ . É fácil mostrar que o gradiente no ponto  $x$  é dado por

$$\nabla_{\lambda} \phi(\lambda, q) = h(x)' \quad (3.23)$$

e que o Hessiano de  $\phi(\lambda, q)$  é dado por

$$-\nabla h(x) [L(x) + q \nabla h(x)' \nabla h(x)]^{-1} \nabla h(x)' \quad (3.24)$$

Como a matriz  $L(x) + q \nabla h(x)' \nabla h(x)$  é positiva definida e  $\nabla h(x)$  tem rank completo ( $m$ ), segue-se de (3.24) que o Hessiano de  $\phi(\lambda, q)$  é negativo definido. À medida que  $q$  aumenta, a matriz  $q \nabla h(x)' \nabla h(x)$  predomina sobre  $L(x)$  e o Hessiano (3.24) tende para  $(1/q)I$ , onde  $I$  é a matriz identidade  $m \times m$ . É essa análise do Hessiano de  $\phi(\lambda, q)$  que torna o método muito atrativo, pois a razão de autovalores do Hessiano é próxima da unidade para  $q$  grande, conferindo pois, uma taxa de convergência extremamente alta para o problema dual.

Adotando  $(1/q)I$  como o Hessiano aproximado e  $h(x)'$  para o gradiente, podemos então dar um passo do método de Newton modificado [22] no sentido de maximizar a função dual, ou seja

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + q h(x)' \quad (3.25)$$

onde  $x_k$  minimiza

$$m(x, \lambda_k, q) = f(x) + \lambda_k h(x) + q h(x)' h(x) \quad (3.26)$$

Assim, o método proposto por Hestenes, de acordo com Luenberger, pode ser interpretado como um método primal-dual. Nos

primeiros ciclos quando as restrições são muito violadas o termo quadrático no Lagrangeano aumentado (3.17) predomina e este se comporta como a função de penalização clássica (3.3). À medida que nos aproximamos do conjunto de restrições o termo quadrático perde influência e o Lagrangeano aumentado passa a se comportar como o Lagrangeano ordinário. Com estas considerações podemos dizer que o método dos multiplicadores se comporta como um método de penalização no início e como um método primal-dual nos ciclos finais.

A expressão (3.25) indica que para a maximização da função dual utilizamos um gradiente de passo fixo e que é, neste caso, muito eficiente. Aqui inexistente aquele problema clássico do método primal-dual, qual seja, o de escolher o tamanho do passo a ser dado para a maximização da função dual. Ao interpretarmos (3.25) como um passo do método de Newton modificado, estamos conferindo ao método uma convergência super-linear. Bertsekas [3] faz uma análise detalhada sobre a convergência do problema dual, chegando à mesma conclusão que Luenberger, isto é

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\| \leq r_k \|\lambda_k - \lambda^*\|, \quad \forall k > \bar{k} \quad (3.27)$$

onde  $\bar{k}$  é um índice e  $r_k \rightarrow 0$  à medida que  $q_k$  aumenta. Bertsekas aumenta o fator de penalização  $q$  em cada ciclo para acelerar a convergência do método. Os valores assumidos por  $q$ , no entanto, são muito menores que os necessários nos métodos de penalização clássicos. Comparando a expressão (3.27) com (3.7), nota-se que a sequência  $\{\lambda_k\}$  deve convergir bem mais rápido no método dos multiplicadores.

À primeira vista, teríamos vontade de adotar um valor para  $q$  bem grande de modo a resolver o problema dual em poucos ciclos. No entanto, para  $q$  muito grande pioramos a estrutura do problema (3.26) que padece do mesmo mal que as funções de penalização. Existe pois, um compromisso na escolha dos valores para  $q$ .

Vários são os trabalhos e modificações propostos em torno da idéia aqui exposta. Miele et al. [24] procuram atualizar o fator de penalização  $q$  em cada ciclo e propõem uma regra diferente para atualização dos multiplicadores no fim de cada ciclo com o intuito de acelerar a convergência. Além do mais, a minimi-

zação (3.26) é feita de forma aproximada, a fim de reduzir o tempo de computação em cada ciclo.

Bertsekas [3, 4] estuda detalhadamente o método aplicado a problemas de programação convexa, propondo novas regras para atualização de  $q$  e  $\lambda$ . Rockafellar [33,34] apresenta trabalhos muito interessantes conectando o Lagrangeano aumentado com a teoria de dualidade e considerando ao mesmo tempo restrições de desigualdade. Em [34], Rockafellar prova que o método, no caso convexo, converge para qualquer fator de penalização e qualquer sequência de multiplicadores, sem a necessidade de se obter um mínimo exato em (3.26) para cada ciclo. Portanto a partida, no caso convexo, pode ser feita com quaisquer  $\lambda$  e  $q > 0$ .

Bertsekas [5] propõe um método mais geral que engloba o método dos multiplicadores e os métodos de penalização clássicos, provando também convergência para qualquer sequência de multiplicadores, no caso de problemas não convexos. Kort e Bertsekas [17] apresentam um método que contém o método dos multiplicadores como caso especial para o caso de programação convexa. Nesse trabalho os autores propõem termos de penalização distintos de  $h(x)' h(x)$  com a finalidade de acelerar convergência em certos casos e obter um Lagrangeano aumentado duplamente diferenciável no caso de restrições de desigualdade.

As referências aqui apresentadas constituem apenas uma parcela, mas bastante significativa, dos trabalhos sobre o método dos multiplicadores, um campo muito fértil e que apresenta diversas variantes competitivas com outros métodos de programação não linear com restrições.

### II. 3.3 O LAGRANGEANO AUMENTADO E A PROGRAMAÇÃO NÃO CONVEXA

Mostramos aqui de forma bastante simplificada e intuitiva a maneira pela qual o Lagrangeano aumentado

$$m(x, \lambda, q) = f(x) + \lambda h(x) + \frac{1}{2} q h(x)' h(x) \quad (3.28)$$

se constitui numa técnica poderosa para resolver problemas com "gap" de dualidade. Esse gap pode ser visualizado geometricamente



através da função de perturbação, assim definida

$$\begin{aligned}
 v(y) &= \min f(x) \\
 \text{s.a } h(x) &= y
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

com domínio de definição dado por  $V = \{y \mid \exists x, h(x) = y\}$ . O problema primal (3.1) corresponde ao valor de  $y = 0$ . O teorema 3.1 abaixo conecta a função de perturbação à minimização do Lagrangeano ordinário  $\ell(x, \lambda)$  [21, 37].

Teorema 3.1

$\hat{x}$  minimiza  $\ell(x, \hat{\lambda})$  se e somente se  $v(y) \geq v(\hat{y}) - \hat{\lambda}(y - \hat{y})$ ,  $\forall y \in V$ ,  $\hat{y} = h(\hat{x})$ , onde

$$\ell(x, \hat{\lambda}) = f(x) + \hat{\lambda} h(x)
 \tag{3.30}$$

Este teorema diz que o ponto  $\hat{x}$  minimiza (3.30), se e somente se, existe um hiperplano suporte à função de perturbação no ponto  $(v(\hat{y}), \hat{y}) = (f(\hat{x}), h(\hat{x}))$ .

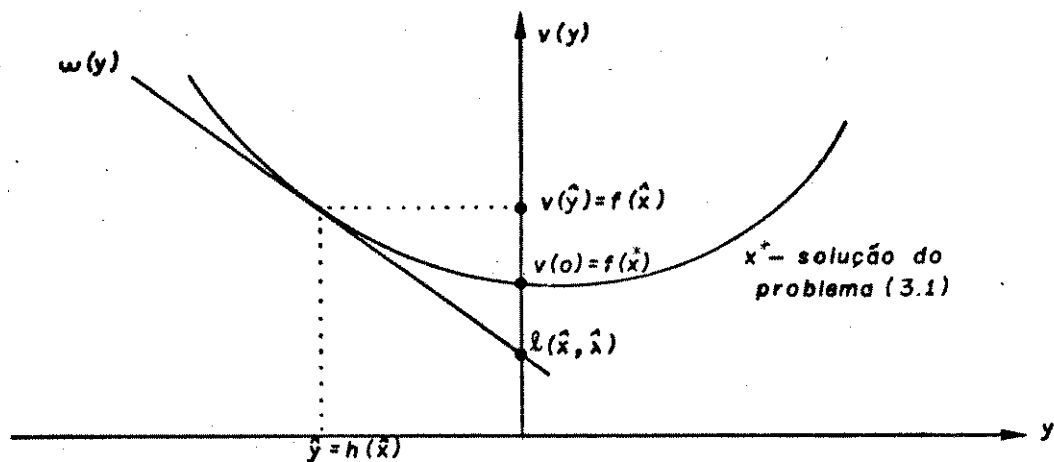


Figura 3.1

A Figura 3.1 mostra o hiperplano suporte  $w(y) = f(\hat{x}) - \hat{\lambda}(y - h(\hat{x}))$  e sua interseção com o eixo  $y = 0$  fornecendo o valor

da função dual. O problema dual consiste em achar a máxima interseção do hiperplano com o eixo  $y = 0$ . Hiperplanos suportes existem em todos os pontos da função de perturbação  $v(y)$ , se e somente se,  $v(y)$  é convexa. No caso de funções  $v(y)$  não convexas há regiões do domínio de  $v(y)$  que não são geradas por qualquer vetor  $\hat{\lambda}$ . Se a função de perturbação for não convexa em torno do ponto  $y=0$ , então não conseguimos resolver o problema original.

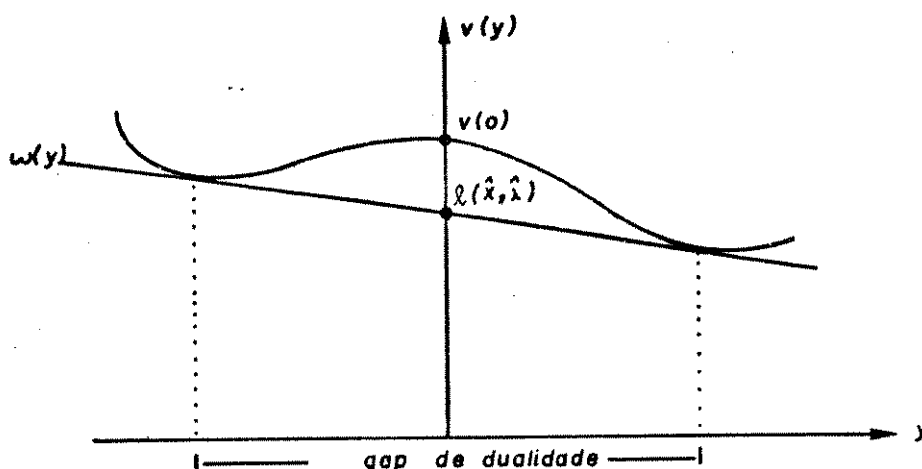


Figura 3.2

A Figura 3.2 mostra que a máxima interseção do hiperplano suporte com o eixo  $y = 0$  (o valor ótimo da função dual) é inferior ao valor ótimo da função primal,  $v(0) = f(x^*)$ , e o método primal-dual com o Lagrangeano ordinário (3.30) não pode ser aplicado.

Vejamos agora como o método dos multiplicadores de Hestenes baseado no Lagrangeano aumentado pode resolver este problema e tornar novamente viável o método primal-dual para problemas não convexas. Consideremos o problema perturbação associado ao problema aumentado (3.16)

$$\begin{aligned}
 p(y) &= \min_x f(x) + \frac{1}{2} q h(x)' h(x) \\
 \text{s.a. } h(x) &= y, \quad \forall q > 0
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

O teorema 3.2 que se segue mostra a influência do termo quadrático sobre a função de perturbação  $v(y)$  original (3.29) e o

efeito do valor de  $q$  sobre a função de perturbação  $p(y)$ .

Teorema 3.2

Seja  $\hat{x}$  uma solução para o problema (3.29). Então:

a-)  $\hat{x}$  resolve o problema (3.31). Além disso  $v(y) < p(y)$ , para  $y \neq 0$  e  $v(0) = p(0)$ .

b-)  $q_2 > q_1 \Rightarrow p_2(y) > p_1(y)$ , para  $y \neq 0$  e  $p_2(0) = p_1(0)$

Prova

a-) Para  $y \neq 0$ ,  $v(y) < p(y)$ , desde que  $q > 0$  e  $y' y > 0$ . Para  $y = 0$ ,  $v(0) = p(0)$ , desde que o termo penalizante em (3.31) se anula. Suponhamos agora que  $\tilde{x}$  resolva o problema (3.29) e que  $\tilde{x} \neq \hat{x}$  resolva (3.31) para um mesmo  $y$ . Então

$$f(\tilde{x}) + \frac{1}{2} q h(\tilde{x})' h(\tilde{x}) < f(\hat{x}) + \frac{1}{2} q h(\hat{x})' h(\hat{x})$$

e portanto

$$f(\tilde{x}) < f(\hat{x})$$

o que não é possível, pois por hipótese  $\hat{x}$  resolve (3.29). Portanto  $\hat{x}$  resolve ambos os problemas.

$$\begin{aligned} \text{b-) } p_2(y) &= \min \{f(x) + \frac{1}{2} q_2 y' y\} > \\ &\min \{f(x) + \frac{1}{2} q_1 y' y\} = p_1(y) \end{aligned}$$

Portanto  $p_2(y) > p_1(y)$ , para  $y \neq 0$ ,  $q_2 > q_1$  e  $p_2(0) = p_1(0)$ .

A Figura 3.3 ilustra o efeito "convexificante" do termo quadrático sobre a função de perturbação original  $v(y)$ . A função  $p(y)$  move-se para cima, para valores de  $q$  crescentes, mantendo sempre o mesmo valor para  $y=0$ .

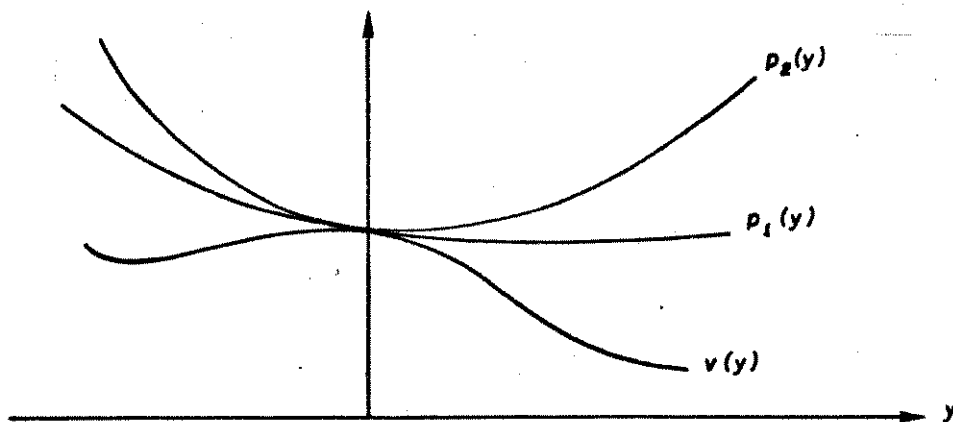


Figura 3.3

Seja a função dual  $\phi(\lambda, q)$  (3.22) definida em relação ao Lagrangeano aumentado. O seguinte teorema é provado em [38].

Teorema 3.3

Se a função  $v(y)$  é finita para todo  $y$ , continua, com derivada primeira continua em  $y = 0$  e derivada segunda direcional finita em qualquer direção para  $y = 0$ , então existe um valor  $q^*$  finito tal que para todo  $q \geq q^*$ ,  $\phi(\lambda, q) = \phi(\lambda, q^*) = f(x^*)$ , onde  $x^*$  é a solução do problema (3.1).

Este teorema mostra que, obedecidas certas condições de diferenciabilidade, é sempre possível construir uma função de perturbação que admite um hiperplano suporte no ponto  $y = 0$ . O problema do gap é então eliminado, conseguindo-se obter os mesmos valores para as funções dual e primal.

Uma outra interpretação geométrica interessante é sugerida por Watanabe et al. [42], também em termos da função de perturbação e relacionada com o teorema que se segue e que é o análogo do teorema 3.1 para o Lagrangeano aumentado.

Teorema 3.4

$$\hat{x} \text{ minimiza } m(x, \hat{\lambda}, q) \text{ se e somente se } v(y) \geq v(\hat{y}) - \hat{\lambda}(y - \hat{y}) - \frac{1}{2} q [\|y\|^2 - \|\hat{y}\|^2], \quad \forall y \in V, \quad \hat{y} = h(\hat{x}).$$

O teorema acima diz que  $\hat{x}$  minimiza o Lagrangeano aumen-

tado  $m(x, \hat{\lambda}, q)$ , se e somente se, um hiperparabolóide suporta a função de perturbação original  $v(y)$  no ponto  $(v(\hat{y}), \hat{y}) = (f(\hat{x}), h(\hat{x}))$ .

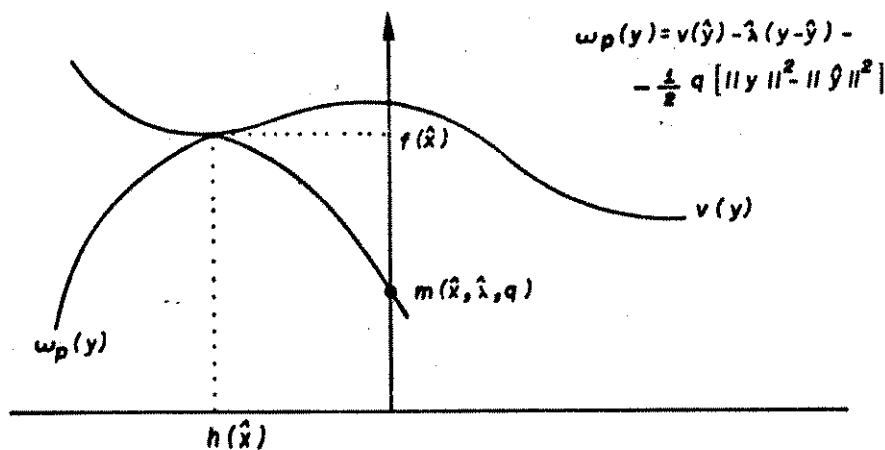


Figura 3.4

A Figura 3.4 mostra o hiperparabolóide  $w_p(y)$  suportando a função de perturbação  $v(y)$  no ponto  $(f(\hat{x}), h(\hat{x}))$ . A interseção do hiperparabolóide com o eixo  $y = 0$  fornece o valor da função dual  $\phi(\hat{\lambda}, q) = m(\hat{x}, \hat{\lambda}, q)$ . A existência das condições de diferenciabilidade do teorema 3.3 associada com um valor de  $q$  suficientemente grande, garante a existência do hiperparabolóide que suporta a função  $v(y)$  no ponto  $(v(0), 0)$ .

Vários são os autores que tem analisado o Lagrangeano aumentado e construído uma teoria de dualidade mais geral e que engloba aquela relacionada com o Lagrangeano ordinário. Podemos destacar o trabalho de Arrow et al. [1], tratando com restrições de desigualdade. Em síntese os autores provam que

$$\min_{x \in N} m(x, \lambda^*, q^*) = m(x^*, \lambda^*, q^*) = \max_{\lambda \geq 0} m(x^*, \lambda, q^*)$$

onde  $N$  é uma vizinhança da solução  $x^*$ .

Rockafellar [35] estendeu o resultado acima, ao incluir restrições de conjunto  $x \in S$ , provando que o mínimo pode ser tomado para todo  $x \in S$  e permitindo que as variáveis duais  $\lambda$  assumissem também valores negativos. Com isso o problema dual fica

realmente irrestrito. Bertsekas [5] constroi essa teoria de dualidade global de maneira análoga a Rockafellar, adicionando propriedades de diferenciabilidade à função dual côncava.

O intuito das sub-seções 3.1 a 3.3 foi tão somente dar noções gerais e chamar a atenção para as propriedades do método dos multiplicadores e sua relação com a teoria de dualidade mais global envolvendo o Lagrangeano aumentado.

## II. 3.4 APLICAÇÃO À P.L.D.

Antes de tratarmos especificamente da P.L.D. vejamos a aplicação do método dos multiplicadores à programação linear (P.L.).

Seja pois, o problema de P.L.

$$\begin{aligned} \min \quad & c x \\ \text{s.a} \quad & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

A função dual associada a esse problema é dada por

$$J(\lambda) = \min_{x \geq 0} (c - \lambda A)x + \lambda b \tag{3.33}$$

O mínimo finito existe se e somente se,  $(c - \lambda A) \geq 0$ . Portanto, o domínio de definição da função  $J(\lambda)$  é tal que  $D = \{\lambda \mid \lambda A \leq c\}$ . Para qualquer  $\lambda \in D$  o mínimo é atingido ao se fazer

$$(c - \lambda A)x = 0 \tag{3.34}$$

A expressão (3.34) indica que se  $c^i - \lambda A^i = 0$ , então a componente  $x_i$  correspondente pode assumir qualquer valor não negativo. Seja  $\lambda^*$  o vetor dual ótimo. Então  $J(\lambda^*) = \lambda^* b = c x^*$ . No entanto, a solução primal  $x^*$  não pode ser determinada através de (3.33), desde que existe um conjunto solução  $X(\lambda^*)$  associado com

(3.34) do qual  $x^*$  é um ponto. Essa pequena discussão visa ilustrar a impossibilidade desse tipo de método primal-dual aplicado à P.L. Um outro tipo de método primal-dual é apresentado em [22].

Consideremos agora a função de perturbação  $v(y)$  associada ao problema (3.32)

$$\begin{aligned} v(y) &= \min c x \\ \text{s.a} \quad A x - b &= y \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

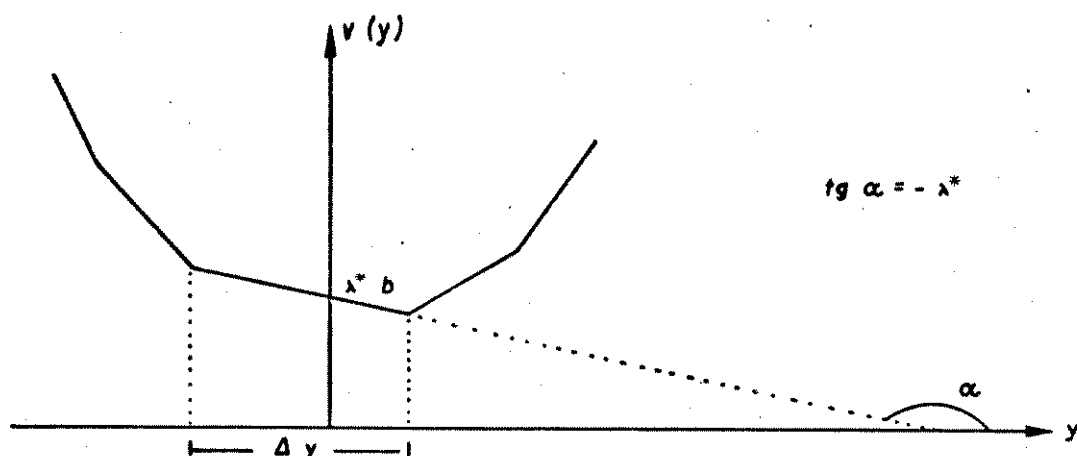


Figura 3.5

A Figura 3.5 ilustra a função de perturbação  $v(y)$  convexa e linear por partes. Cada trecho linear corresponde a uma base e cada inclinação corresponde a um multiplicador. Da figura nota-se que para o mesmo valor ótimo de função dual  $\lambda^* b$  correspondem vários vetores  $y$  perturbantes localizados no conjunto  $\Delta y$ . Na realidade a cada vetor  $y \in \Delta y$  corresponde uma solução do conjunto  $X(\lambda^*)$ . Como nota Soares [37], sabemos que  $x^* \in X(\lambda^*)$ , sendo porém necessária a sua determinação.

Consideremos agora o problema

$$\begin{aligned} \min \quad c x + \frac{1}{2} q \| A x - b \|^2 \\ \text{s.a} \quad A x = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

com função de perturbação associada

$$\begin{aligned}
 p(y) = \min \quad & cx + \frac{1}{2} q \|Ax - b\|^2 \\
 \text{s.a} \quad & Ax - b = y \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

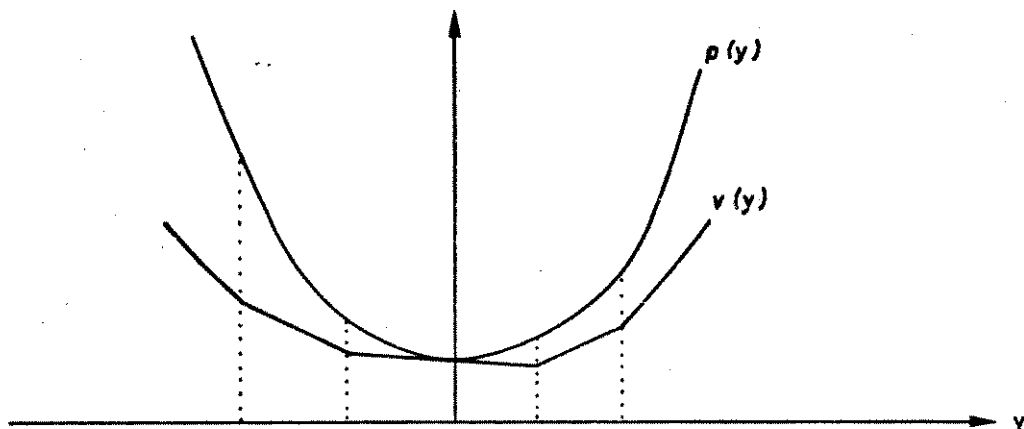


Figura 3.6

A Figura 3.6 mostra o efeito "suavizante" do termo quadrático sobre a função de perturbação. Nos pontos de quebra a função  $p(y)$  tem derivada descontínua. Mas à medida que  $q$  aumenta a função  $p(y)$  tende a se tornar diferenciável em todos os pontos. Note que agora não existe a necessidade da determinação da solução ótima do problema primal. Assim, o método dos multiplicadores aplicado à P.L. tem a função de tornar viável o método primal-dual baseado numa sequência de problemas Lagrangeanos.

O trabalho de Propoi e Yadykin [27] constitui uma extensão para a P.L.D. das idéias aqui expostas para P.L. Alguns resultados obtidos nesse trabalho serão apresentados aqui sem prova.

Consideremos o Langrageano  $\ell(x, u, p, \lambda)$  referente ao problema 1 da P.L.D. (ver (2.7) Cap. I) e a função dual  $J_2(p, \lambda)$

$$J_2(p, \lambda) = \min_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq 0}} \ell(x, u, p, \lambda)
 \tag{3.38}$$



Seja o Lagrangeano aumentado

$$m(x, u, p, \lambda, q) = \ell(x, u, p, \lambda) + \frac{1}{2} q \sum_{t=0}^{T-1} \|x(t+1) - g(x(t), u(t))\|^2 + \frac{1}{2} q \sum_{t=0}^{T-1} \|f(t) - h(x(t), u(t))\|^2 \quad (3.39)$$

onde

$$g(x(t), u(t)) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

$$h(x(t), u(t)) = C(t) x(t) + D(t) u(t)$$

e a função dual

$$\phi(p, \lambda, q) = \min_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq 0}} m(x, u, p, \lambda, q) \quad (3.40)$$

Sejam

$$Z(p, \lambda) = \{ \{x, u\} \mid J_2(p, \lambda) = \ell(x, u, p, \lambda) \ , \ x \geq 0 \ , \ u \geq 0 \}$$

$$Z_m(p, \lambda) = \{ \{x, u\} \mid \phi(p, \lambda, q) = m(x, u, p, \lambda, q) \ , \ x \geq 0 \ , \ u \geq 0 \}$$

os conjuntos compostos pelas soluções de (3.38) e (3.40). Suponha mos que o conjunto de restrições do problema 1 da P.L.D. seja con sistente e limitado. Com estas considerações a função dual  $J_2(p, \lambda)$  é finita para quaisquer sequências  $\{p, \lambda\}$  factíveis para o problema 2 da P.L.D. A partir dessas premissas o seguinte teorema é provado em [27].

### Teorema 3.5

A função  $\phi(p, \lambda, q)$  é côncava, continuamente diferenciável e finita para todos os valores de  $\{p, \lambda\}$ . Além disso

$$\frac{\partial \phi}{\partial p(t+1)} = x(t+1) - A(t) x(t) - B(t) u(t) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda(t)} = f(t) - C(t) x(t) - D(t) u(t) \quad (3.42)$$

onde  $(x, u) \in Z_m(p, \lambda)$

Os gradientes (3.41) e (3.42) são unicamente determinados e são independentes da escolha de  $(x, u) \in Z_m(p, \lambda)$ . Note que a forma quadrática  $m(x, u, p, \lambda, q)$  é semi-definida positiva e em geral o mínimo ocorre em vários pontos. Esse resultado é muito importante, pois garante que um passo de gradiente no dual pode ser dado sem temores quanto à convergência [21].

Definimos o problema dual modificado

$$\max_{p, \lambda} \phi(p, \lambda, q) \quad (3.43)$$

Teorema 3.6

Seja  $Q_m^* = \{p^*, \lambda^*\}$  o conjunto de todas as soluções ótimas de (3.43). Então

$$Q_m^* = Q^* ; \quad Z(p^*, \lambda^*) \supset Z(p^*, \lambda^*) = Z^*$$

onde

$Q^* = \{p^*, \lambda^*\}$  é o conjunto solução do problema 2 da P.L.D.

$Z^* = \{x^*, u^*\}$  é o conjunto solução do problema 1 da P.L.D.

Esse teorema apenas formaliza o que já tínhamos exposto intuitivamente através da Figura 3.6, isto é, o hiperplano suporte no ponto  $y = 0$  para a função de perturbação  $v(y)$ , também é suporte para a função de perturbação  $p(y)$ . Todos os pontos de sela das funções  $l(x, u, p, \lambda)$  e  $m(x, u, p, \lambda, q)$  são idênticos com o conjunto  $Z^* \times Q^*$ .

O esquema geral do algoritmo é descrito abaixo:

Passo 1 : Adotam-se valores arbitrários para os vetores multiplicadores  $\lambda(t)$ ,  $p(t+1)$ ,  $t = 0 \dots T-1$  e um fator de penalização  $q > 0$ .

Passo 2 : No ciclo  $k$  minimize  $m(x, u, p_k, \lambda_k, q)$ , obtendo a solução  $u_k(t)$ ,  $x_k(t+1)$ ,  $t = 0 \dots T-1$ .

Passo 3 : Calcule os gradientes através (3.41) e (3.42). Se

$$\frac{\partial \phi}{\partial p(t+1)} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda(t)} = 0, \text{ pare; a solução é ótima.}$$

Passo 4 : Dê um passo de gradiente fixo no problema dual

$$p_{k+1}(t+1) = p_k(t+1) + q [x_k(t+1) - A(t) x_k(t) - B(t) u_k(t)]$$

$t=0 \dots T-1 \quad (3.44)$

$$\lambda_{k+1}(t) = \lambda_k(t) + q [f(t) - C(t) x_k(t) - D(t) u_k(t)]$$

e volte para 2 .

Propoi e Yadykin [27] mostram que o procedimento (3.44) se faz ao longo de soluções factíveis do problema 2 (dual) e consequentemente o algoritmo é finito. Isto realmente não tem nenhum interesse aqui, pois já sabemos que a taxa de convergência do problema dual é bastante rápida, pouco importando se o procedimento se faz ao longo de soluções duais factíveis. Os autores mostram também que:

$$\begin{aligned} \phi(p_{k+1}, \lambda_{k+1}, q) - \phi(p_k, \lambda_k, q) &\geq \frac{1}{2} q \sum_{t=0}^{T-1} \|x_k(t+1) - \\ &- g(x_k(t), u_k(t))\|^2 + \frac{1}{2} q \sum_{t=0}^{T-1} \|f(t) - h(x_k(t), u_k(t))\|^2 \end{aligned}$$

(3.45)

A expressão (3.45) mostra que a lei de crescimento do problema

dual é quadrática com o erro nas restrições. Para  $q$  relativamente grande o problema dual converge rapidamente, isto é, em poucos ciclos.

Com a finalidade de evitar o passo 2 em cada ciclo e reduzir o tempo de computação, Propoi e Yadykin [28] sugerem um método paramétrico iterativo. Através deste, obtém-se uma certa decomposição, no sentido de que em cada iteração, resolvem-se recorrentemente  $T$  sistemas de equações de Riccati.

## II. 3.5 DECOMPOSIÇÃO DO LAGRANGEANO AUMENTADO

A questão crucial relacionada com o esquema geral do algoritmo situa-se no passo 2, onde temos que minimizar o Lagrangeano aumentado, no caso, uma expressão quadrática e que pode ser grande, conforme o horizonte  $T$ . Além do mais, já destacamos na seção 3.2 os problemas de mau condicionamento associados com esse Lagrangeano aumentado e que podem se avolumar devido ao número de variáveis envolvidas. Nada mais natural, então, do que procurar a separabilidade desse Lagrangeano aumentado. Notamos que a primeira somatória na expressão (3.39) introduz termos cruzados que destroem a separabilidade temporal. Utilizamos aqui a técnica proposta por Watanabe et al. [42], com o intuito de restaurar a separabilidade. É fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \|g(x(t), u(t)) - v(t)\|^2 + \|x(t+1) - v(t)\|^2 &= \frac{1}{2} \|x(t+1) - \\ &- g(x(t), u(t))\|^2 + 2 \left\| v(t) - \frac{1}{2} [g(x(t), u(t)) + x(t+1)] \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Tomando o mínimo em  $v(t)$  para ambos os lados da expressão (3.46) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x(t+1) - g(x(t), u(t))\|^2 &= \min_{v(t)} \|g(x(t), u(t)) - v(t)\|^2 + \\ &+ \|x(t+1) - v(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

e o mínimo ocorre em

$$v(t) = \frac{1}{2} [g(x(t), u(t)) + x(t+1)] \quad (3.48)$$

Substituindo (3.47) em (3.39) e trocando a ordem de operações entre somatória e minimização, obtemos

$$\begin{aligned} m(x, u, p, \lambda, v, q) = \min_{v(t)} & \sum_{t=0}^{T-1} \ell(x(t), u(t), p(t+1), \lambda(t)) + \\ & + [p(T) + c(T)]x(T) + q \|g(x(t), u(t)) - v(t)\|^2 + \\ & + q \|x(t+1) - v(t)\|^2 + \frac{1}{2} q \|f(t) - h(x(t), u(t))\|^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde

$$\begin{aligned} \ell(x(0), u(0), p(1), \lambda(0)) = & -[p(1) A(0) + \lambda(0) C(0)]x(0) + \\ & + [d(0) - p(1) B(0) - \lambda(0) D(0)]u(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(x(t), u(t), p(t+1), \lambda(t)) = & [p(t) + c(t) - p(t+1)A(t) - \lambda(t)C(t)]x(t) + \\ & + [d(t) - p(t+1)B(t) - \lambda(t)D(t)]u(t) \end{aligned}$$

A expressão (3.49) fica agora separável nas variáveis  $x(t)$  e  $u(t)$ , podendo ser escrita como

$$m(x, u, p, \lambda, v, q) = \min_{v(t)} \sum_{t=0}^T m(t) \quad (3.50)$$

onde

$$\begin{aligned}
 m(0) &= \ell(x(0), u(0), p(1), \lambda(0)) + q \|g(x(0), u(0)) - v(0)\|^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} q \|f(0) - h(x(0), u(0))\|^2 \\
 m(t) &= \ell(x(t), u(t), p(t+1), \lambda(t)) + q \|g(x(t), u(t)) - v(t)\|^2 + \\
 &+ q \|x(t) - v(t-1)\|^2 + \frac{1}{2} q \|f(t) - h(x(t), u(t))\|^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad t=1 \dots T-1 \qquad (3.51)
 \end{aligned}$$

$$m(T) = [p(T) + c(T)]x(T) + q \|x(T) - v(T-1)\|^2$$

A função dual pode ser escrita

$$\phi(p, \lambda, q) = \min_{x, u} \min_{v(t)} \sum_{t=0}^T m(t) \qquad (3.52)$$

A ordem das minimizações pode ser trocada da seguinte forma. Adotamos valores arbitrários para  $v(t)$  (que é irrestrita),  $t=0 \dots T-1$  e calculamos

$$\min_{x, u} \sum_{t=0}^T m(t) \qquad (3.53)$$

Com os valores  $u(t)$  e  $x(t+1)$  obtidos de (3.53), calculamos  $v(t)$  através de (3.48) e testamos a igualdade entre o valor adotado e o calculado. Seja portanto a função

$$V(p, \lambda, v, q) = \min_{x, u} \sum_{t=0}^T m(t) \qquad (3.54)$$

e a função dual

$$\phi(p, \lambda, q) = \min_v V(p, \lambda, v, q) \qquad (3.55)$$

O problema 1 da P.L.D. pode ser resolvido então através de uma estrutura de três níveis, onde

1º Nível

Dado um conjunto de valores para  $p(t+1)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $v(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ , resolva um conjunto de  $T+1$  sub-problemas

$$\min_{u(0) \geq 0} m(0) \quad ; \quad \min_{x(T) \geq 0} m(T)$$

$$\min_{\substack{x(t) \geq 0 \\ u(t) \geq 0}} m(t) \quad , \quad t=1\dots T-1$$

2º Nível

Ajuste o valor de  $v(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ , de modo a minimizar  $V(p, \lambda, v, q)$ .

3º Nível

Ajuste o valor de  $p(t+1)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ , de modo a maximizar  $\phi(p, \lambda, q)$ .

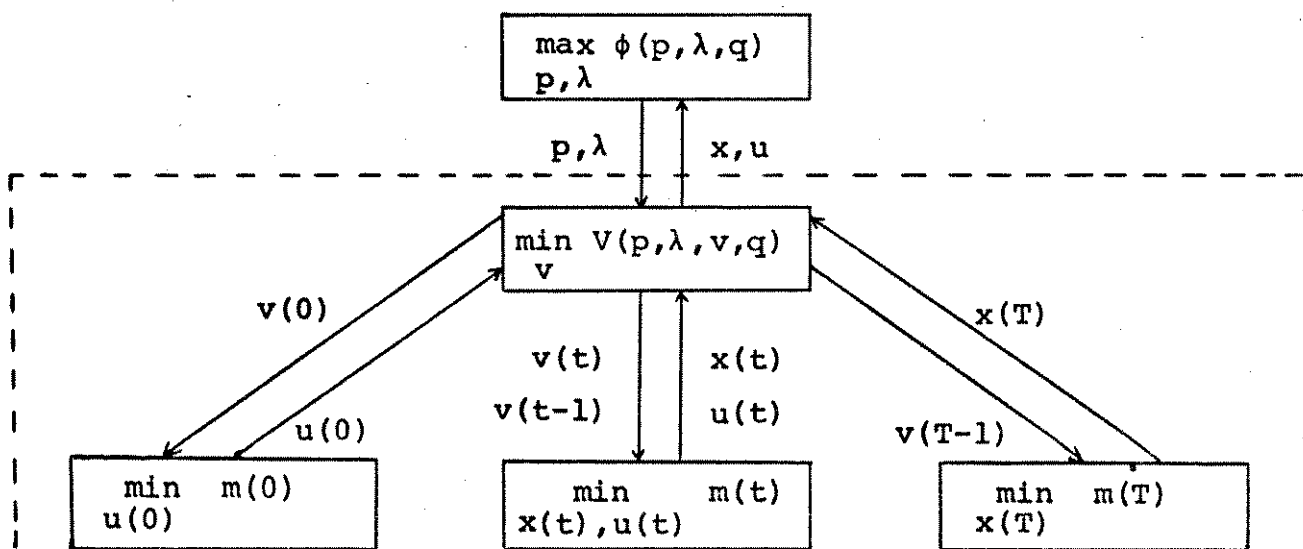


Figura 3.7

A Figura 3.7 mostra a estrutura a três níveis e a troca de informações entre os mesmos. Interno ao pontilhado encontra-se o problema primal. O segundo nível contém um problema decorrente do artifício empregado ao decompormos o Lagrangeano aumentado. O esquema geral do algoritmo apresentado na sub-seção 3.4 sofre uma modificação e pode ser assim enunciado:

Passo 1 : Adotam-se valores arbitrários para os vetores multiplicadores  $\lambda(t)$ ,  $p(t+1)$ ,  $t=0\dots T-1$  e um fator de penalização  $q > 0$ .

Passo 2 : Adotam-se valores arbitrários para os vetores  $v(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ .

Passo 3 : No ciclo  $k$  resolva os sub-problemas  $m(t)$ ,  $t=0\dots T$ , obtendo as soluções  $x_k(t+1)$  e  $u_k(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ .

Passo 4 : Vá para o passo 5, se a expressão (3.48) for satisfeita para  $t=0\dots T-1$ . Caso contrário, atualize o valor de  $v(t)$  e retorne ao passo 3.

Passo 5 : Calcule os gradientes através (3.41) e (3.42). Se  $\frac{\partial \phi}{\partial p(t+1)} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda(t)} = 0$ , pare; a solução em questão é ótima. Caso contrário, atualize os valores de  $p(t+1)$  e  $\lambda(t)$  de acordo com (3.44) e volte ao passo 2.

Como se pode notar desse esquema, não existe na realidade uma troca de informações entre o terceiro e segundo níveis. O segundo nível age como uma porta que se abre, quando a expressão (3.45) é satisfeita, deixando passar as informações do primeiro nível para o terceiro.

Mostremos que após a resolução do primeiro nível o gradiente da função  $V(p, \lambda, v, q)$  é disponível. Para tanto, vamos substituir a identidade (3.46) na expressão para  $V(p, \lambda, v, q)$ .



$$\begin{aligned}
 V(p, \lambda, v, q) = & \min_{\substack{x(t+1) \geq 0 \\ u(t) \geq 0}} \sum_{t=0}^{T-1} \ell(x(t), u(t), p(t+1), \lambda(t)) + \\
 & + [p(T) + c(T)] x(T) + \frac{1}{2} q \| x(t+1) - g(x(t), u(t)) \|^2 + 2 q \| v(t) - \\
 & - \frac{1}{2} [g(x(t), u(t)) + x(t+1)] \|^2 + \frac{1}{2} q \| f(t) - h(x(t), u(t)) \|^2
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

Teorema 3.7

Seja  $v = (v(0), \dots, v(T-1))'$ . Se  $V(p, \lambda, v, q)$  é diferenciável com relação a  $v$ , no ponto  $v = \hat{v}$ , então

$$\frac{\partial V}{\partial v(t)}(p, \lambda, \hat{v}, q) = 4 q \left[ \hat{v}(t) - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \right]$$

$t=0 \dots T-1$

onde  $\hat{u}(t), \hat{x}(t+1), t=0 \dots T-1$  são as soluções dos sub-problemas para  $v(t) = \hat{v}(t), t=0 \dots T-1$  e também solução do problema (3.56).

Prova

Para  $v(t) = \hat{v}(t),$

$$\begin{aligned}
 V(p, \lambda, \hat{v}, q) = & \sum_{t=0}^{T-1} \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t+1), \lambda(t)) + [p(T) + c(T)] \hat{x}(T) + \\
 & + \frac{1}{2} q \| \hat{x}(t+1) - g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \|^2 + 2 q \| \hat{v}(t) - \\
 & - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \|^2 + \frac{1}{2} q \| f(t) - h(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \|^2
 \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
 V(p, \lambda, v, q) \leq & \sum_{t=0}^{T-1} L(\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t+1), \lambda(t)) + [p(T) + c(T)] \hat{x}(T) + \\
 & + \frac{1}{2} q \| \hat{x}(t+1) - g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \|^2 + 2 q \| v(t) - \\
 & - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \|^2 + \frac{1}{2} q \| f(t) - h(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \|^2
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 V(p, \lambda, v, q) \leq & V(p, \lambda, \hat{v}, q) + \sum_{t=0}^{T-1} 2 q \| v(t) - \\
 & - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \|^2 - 2 q \| \hat{v}(t) - \\
 & - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \|^2
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

A expressão (3.57) mostra que a função  $V(p, \lambda, v, q)$  é suportada pelo hiperparabolóide

$$\begin{aligned}
 V(p, \lambda, \hat{v}, q) + \sum_{t=0}^{T-1} 2 q \| v(t) - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \|^2 - \\
 - 2 q \| \hat{v}(t) - \frac{1}{2} [g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{x}(t+1)] \|^2
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

no ponto  $(\hat{v}, V(p, \lambda, \hat{v}, q))$ . Portanto o gradiente de  $V(p, \lambda, v, q)$  com relação a  $v$  no ponto  $(\hat{v}, V(p, \lambda, \hat{v}, q))$  deve coincidir com o gradiente de (3.58) se  $V(p, \lambda, v, q)$  é diferenciável com relação a  $v$ .

Qualquer método de minimização irrestrita como, por exemplo, o algoritmo de gradiente conjugado com convergência quadrática, pode ser aplicado ao segundo nível, uma vez que o gradiente é conhecido.

Mostramos a seguir que a função  $V(p, \lambda, v, q)$  é convexa em  $v$ , facilitando pois, a convergência do segundo nível.

Seja a função

$$\begin{aligned}
 W(p, \lambda, s, q) = & \min_{\substack{x(t+1) \geq 0 \\ u(t) \geq 0}} \sum_{t=0}^{T-1} \ell(x(t), u(t), p(t+1), \lambda(t)) + \\
 & + [p(T) + c(T)] x(T) + \frac{1}{2} q \|x(t+1) - g(x(t), u(t))\|^2 + \\
 & + \frac{1}{2} q \|f(t) - h(x(t), u(t))\|^2 \\
 \text{s. a } & \frac{1}{2} [g(x(t), u(t)) + x(t+1)] = s(t) \quad t=0 \dots T-1
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

definida no conjunto

$$\begin{aligned}
 S = \{s(t) \mid & \frac{1}{2} [g(x(t), u(t)) + x(t+1)] = s(t) \\
 & \text{para algum } x(t+1) \geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad t=0 \dots T-1\}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Com essa definição podemos escrever (3.56) como

$$V(p, \lambda, v, q) = \min_{s(t) \in S} \left\{ W(p, \lambda, s, q) + \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2} q \|v(t) - s(t)\|^2 \right\}$$

O seguinte teorema é provado em [42] para uma função  $V(p, \lambda, v, q)$  qualquer.

Teorema 3.8

Seja  $s = (s(0), \dots, s(T-1))'$ . Se o conjunto  $S$  é convexo e se  $W(p, \lambda, s, q)$  é convexa com relação a  $s \in S$  então  $V(p, \lambda, v, q)$  é convexa com relação a  $v$ .

Apliquemos esse teorema ao nosso problema. Desde que

$$g(x(t), u(t)) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

é linear em  $u(t)$  e  $x(t)$ , mostra-se facilmente que o conjunto  $S$  é convexo. Resta mostrar que  $W(p, \lambda, s, q)$  é convexa em relação a  $s \in S$ . Em [37] é provado que a função

$$w(s) = \min f(x)$$

$$s. a \quad g(x) \leq s$$

$$x \in X$$

definido no conjunto  $S = \{s \mid g(x) \leq s \text{ para algum } x \in X\}$ , é convexa sobre  $S$  convexo se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem convexas sobre  $X$  convexo.

É claro que esse teorema pode ser aplicado para restrições lineares de igualdade. Os conjuntos  $S$  (3.60) e  $X = \{x(t+1) \geq 0, u(t) \geq 0, t=0 \dots T-1\}$  são convexas e a função a ser minimizada em (3.59) é uma forma quadrática semi-definida positiva e, portanto, convexa. Com todas essas considerações e pelo teorema 3.8 temos que a função  $V(p, \lambda, v, q)$  é convexa em  $v$ .

## II. 3.6 COMENTÁRIOS

Devemos ressaltar que essa não é a única maneira para se obter a decomposição ou separabilidade do Lagrangeano aumentado. Uma outra técnica é apresentada por Stephanopoulos e Westberg [38], onde os autores aproximam linearmente os termos cruzados, obtendo também um algoritmo com estrutura de três níveis. O nível intermediário nesse algoritmo não é constituído por um problema de minimização mas sim, por simples atualização de alguns vetores. É evidente que esse algoritmo é de mais fácil implementação computacional, desde que não precisamos de um método para resolver o segundo nível como aqui exposto, e evita as possíveis complicações nos casos em que a função  $V(p, \lambda, v, q)$  é não diferenciável e não convexa ou pelo menos unimodal. As experiências computacionais de Watanabe et al. [42] revelaram que o algoritmo em [38] se caracteriza por um excessivo número de visitas ao primeiro nível,

que é o mais complicado. A resolução de um mesmo problema em [42] pela técnica aqui exposta demandou um número de 90 iterações no segundo nível, enquanto que a aplicação da técnica de [38] demandou 250 iterações no segundo nível e conseqüentemente maior solicição do primeiro nível.

Portanto, em problemas de P.L.D. com horizonte de médio a grande, a técnica aqui exposta deve ser preferida, desde que se disponha de um algoritmo eficiente, como o de Fletcher - Powell, para a resolução do segundo nível.

É evidente que somente o esquema geral do algoritmo foi aqui apresentado. Vários refinamentos podem ser feitos, tais como atualização do fator de penalização e minimização inexata dos sub-problemas. Para a resolução dos sub-problemas quadráticos no primeiro nível podemos utilizar o método de gradiente conjugado especializado para operar com restrições do tipo  $x \geq 0$  [32]. Se estivermos tratando de sub-problemas com função objetivo não linear e restrições lineares, podemos aplicar o método de Goldfarb [14], que é extensão do método de Fletcher - Powell para restrições lineares.

Como se pode notar o método dos multiplicadores aplicado à P.L.D. resulta num algoritmo muito rico em alternativas. Aliado a esse fato, a grande vantagem para esse método é a não necessidade da tradicional fase I, obrigatória para os métodos primais, quando não se dispõe de uma solução factível de partida. No entanto, como o método caminha por soluções infactíveis temos que obrigatoriamente obter a solução ótima para garantir a factibilidade.

## II. 4 UM MÉTODO DE GRADIENTE PROJETADO APLICADO À P.L.D.

Esse método foi proposto por Geromel e Baptistella [11] para problemas de grande porte com função objetivo não convexa e restrições lineares, podendo também ser aplicado a problemas convexos. O método é do tipo primal e a trajetória em busca do ótimo é feita através de direções factíveis, que são determinadas pela projeção dos respectivos gradientes no sub-espço das restrições ativas. O cálculo dessa projeção é feito através de uma decomposição dual, obtendo-se soluções analíticas para cada componente da projeção. O tamanho do passo é facilmente calculável no caso de programação linear.

Não se obtém aqui uma decomposição em sub-problemas, como no métodos apresentados nas seções 2 e 3. No entanto, o método se caracteriza por uma grande simplicidade de implementação computacional quando comparado com a "decomposição em cascata", que também é do tipo primal. Na sub-seção 4.1 é feita a apresentação do método para um problema de programação matemática geral (função objetivo qualquer), enquanto que na sub-seção 4.2 fazemos a sua aplicação à P.L.D.

### II. 4.1 CÁLCULO DO GRADIENTE PROJETADO

Seja o problema de programação matemática

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  é  $(m \times n)$  e  $f \in C^1$ . Supomos que uma solução factível  $x$  esteja disponível e que  $\nabla f(x)$ , o gradiente de  $f(x)$  em  $x$ , seja diferente de zero. Com essa última suposição, é possível construir um procedimento iterativo que gere uma sequência de soluções factíveis, tal que

$$f(x - \alpha s) < f(x) \tag{4.2}$$

onde  $\alpha \geq 0$  é o passo e  $s$  é a direção factível de busca. Esse procedimento baseia-se na fórmula de Taylor desenvolvida até os termos de primeira ordem, ou seja

$$f(x - \alpha s) = f(x) - \alpha \langle \nabla f(x), s \rangle + o(\|s\|) \quad (4.3)$$

Definamos o conjunto  $I$  como

$$I = \{i \mid x_i = 0\} \quad (4.4)$$

A melhor direção  $s$ , tal que satisfaça (4.2), pode ser escolhida ao se maximizar o produto escalar  $\langle \nabla f(x), s \rangle$ . A Figura 4.1 abaixo mostra a interpretação geométrica da projeção ortogonal do gradiente sobre o sub-espço linear definido pelas restrições ativas do problema (4.1).

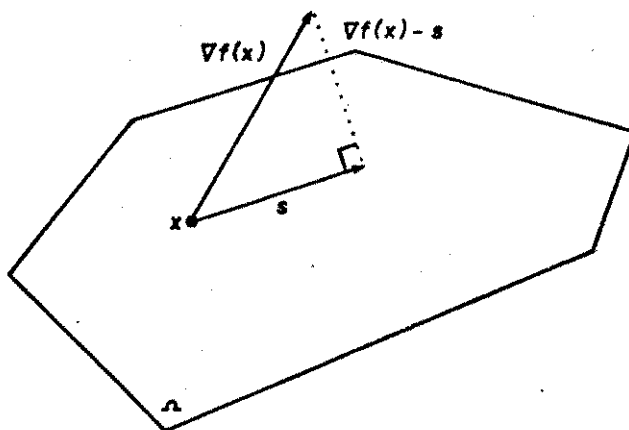


Figura 4.1

A Figura 4.1 mostra que maximizar o produto escalar  $\langle \nabla f(x), s \rangle$  é equivalente a minimizar a norma euclidiana  $\| \nabla f(x) - s \|^2$ .

Definimos, pois, o problema para a determinação da direção  $s$

$$\min \frac{1}{2} \| \nabla f(x) - s \|^2 \tag{4.5}$$

s.a  $As = 0$

$s \in S$

onde  $S = \{s \mid s_i \leq 0, i \in I\}$ . O conjunto de restrições para a direção  $s$  é constituído por todas as direções factíveis a partir do ponto  $x$  factível.

A resolução do problema (4.5) é obtida através de uma decomposição dual. Seja, pois, o Lagrangeano

$$\ell(s, \lambda) = \frac{1}{2} \| \nabla f(x) - s \|^2 + \lambda As \tag{4.6}$$

onde  $\lambda$  é  $1 \times m$ , e a correspondente função dual

$$\psi(\lambda) = \min_{s \in S} \ell(s, \lambda) \tag{4.7}$$

Desde que o Lagrangeano é estritamente convexo e o conjunto  $S$  é convexo, garante-se a unicidade da solução  $s$  e a diferenciabilidade da função dual [21].

Seja o problema dual,

$$\max_{\lambda} \psi(\lambda) \tag{4.8}$$

que pode ser resolvido por uma técnica de otimização irrestrita.

A separabilidade do Lagrangeano em (4.6) nos permite escrever

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\hat{s}_i, \lambda) \tag{4.9}$$



onde as componentes  $\hat{s}_i$ ,  $i=1\dots n$  são soluções dos sub-problemas

$$\min_{s_1 \leq 0} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - s_1 \right)^2 + \lambda A^i s_1 \quad i=1\dots n \quad (4.10)$$

onde  $A^i$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz  $A$ . A solução de (4.10) é obtida analiticamente, ou seja

$$\hat{s}_i = \begin{cases} \min \left( 0, \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda A^i \right) & , \quad i \in I \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda A^i & , \quad i \notin I \end{cases} \quad (4.11)$$

O gradiente da função dual  $\psi(\lambda)$  no ponto  $\hat{s}$  é dado por

$$\nabla \psi(\lambda) = A \hat{s} \quad (4.12)$$

Uma vez obtida a direção factível  $\hat{s}$ , podemos achar nova solução factível para o problema (4.1) através de uma busca unidimensional, isto é

$$\min_{\alpha \geq 0} f(x - \alpha \hat{s}) \quad , \quad x - \alpha \hat{s} \geq 0 \quad (4.13)$$

As condições de otimalidade podem ser sintetizadas através do seguinte lema:

Lema

Seja  $\hat{s}$  a solução ótima do problema (4.5). Dois casos podem ocorrer:

a-) se  $\hat{s} \neq 0$ , então  $\hat{s}$  é uma direção usável, isto é, uma direção na qual a função decresce.

b-) se  $\hat{s} = 0$  , então  $x$  satisfaz as condições de Kuhn-Tucker.

Prova

a-)  $\hat{s}$  , solução do problema (4.5) é uma direção factível. Além disso

$$\frac{1}{2} \|\nabla f(x) - \hat{s}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla f(x)\|^2 \tag{4.14}$$

A partir de (4.14), temos que

$$\nabla f(x)' \hat{s} \geq \frac{1}{2} \|\hat{s}\|^2 > 0$$

o que garante que a função decresce estritamente.

b-) As condições de Kuhn-Tucker para o problema (4.1) podem ser escritas

$$\nabla f(x) = A'B + \gamma = 0$$

$$Ax = b \quad , \quad x \geq 0 \tag{4.15}$$

$$\gamma_i \leq 0 \quad i \in I$$

$$\gamma_i = 0 \quad i \notin I$$

enquanto que as condições de Kuhn-Tucker para o problema (4.5) são:

$$-\nabla f(x) + s + A'\lambda + \theta = 0$$

$$As = 0 \quad , \quad s \in S \tag{4.16}$$

$$\theta_i \geq 0 \quad , \quad i \in I$$

$$\theta_i = 0 \quad , \quad i \notin I$$

Como  $x$  é factível em cada iteração, fazendo  $s = \hat{s} = 0$  em (4.16), temos a condição (4.15) para  $\beta = -\lambda$  e  $\gamma = -\theta$ .

O procedimento aqui descrito pode ser facilmente estendido para variáveis canalizadas,  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ , e para restrições de desigualdade,  $Ax \leq b$ .

## II. 4.2 APLICAÇÃO À P.L.D.

Apliquemos agora o método ao nosso problema 1 de P.L.D.

Seja

$$c(t+1) = \frac{\partial}{\partial x(t+1)} f(x(t+1), u(t)) \quad t=0 \dots T-1 \quad (4.17)$$

$$d(t) = \frac{\partial}{\partial u(t)} f(x(t+1), u(t))$$

onde

$$f(x(t+1), u(t)) = c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)$$

O problema associado a (4.5) pode ser aqui escrito como

$$\min g(r, s) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \|c(t+1) - r(t+1)\|^2 + \|d(t) - s(t)\|^2$$

$$\text{s.a } r(t+1) = A(t) r(t) + B(t) s(t)$$

$$t=0 \dots T-1 \quad (4.18)$$

$$C(t) r(t) + D(t) s(t) = 0$$

$$r(t+1) \in R(t+1), \quad s(t) \in S(t), \quad r(0) = 0$$

onde

$$R(t+1) = \{r_i(t+1) \mid r_i(t+1) \leq 0, i \in I\}$$

$$S(t) = \{s_i(t) \mid s_i(t) \leq 0, i \in I\}$$

Definimos o Lagrangeano correspondente ao problema (4.18) como

$$\begin{aligned} \ell(r,s,p,\lambda) = g(r,s) + \sum_{t=0}^{T-1} p(t+1) [r(t+1) - A(t)r(t) - B(t)s(t)] + \\ + \lambda(t) [C(t)r(t) + D(t)s(t)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

e a função dual

$$\psi(p,\lambda) = \min_{r,s} \ell(r,s,p,\lambda) \quad (4.20)$$

$$r(t+1) \in R(t+1), s(t) \in S(t), r(0) = 0$$

De (4.19), pode-se ver que o Lagrangeano é separável no tempo, ou seja, podemos escrever

$$\begin{aligned} \ell(r,s,p,\lambda) = \ell(s(0),p(1),\lambda(0)) + \sum_{t=1}^{T-1} \ell(r(t),s(t),p(t),\lambda(t)) + \\ + \ell(r(T),p(T)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\ell(s(0),p(1),\lambda(0)) = \frac{1}{2} \|d(0) - s(0)\|^2 + [\lambda(0)D(0) - p(1)B(0)]s(0)$$

$$\ell(r(t),s(t),p(t),\lambda(t)) = \frac{1}{2} \|c(t) - r(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|d(t) - s(t)\|^2 +$$

$$+ [p(t) - p(t+1)A(t) + \lambda(t)C(t)]r(t) +$$

$$+ [\lambda(t)D(t) - p(t+1)B(t)]s(t) \quad t=1 \dots T-1$$

$$l(r(T), p(T)) = \frac{1}{2} \|c(T) - r(T)\|^2 + p(T) r(T)$$

A solução do problema (4.20) é:

$$\psi(p, \lambda) = (\hat{r}, \hat{s}, p, \lambda)$$

onde

$$\hat{r}_i(t) = \begin{cases} \min(0, v_i(t)) & , i \in I \\ & t=1 \dots T-1 \\ c_i(t) - p_i(t) + p(t+1)A^i(t) - \lambda(t)C^i(t) = v_i(t) & , i \notin I \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\hat{r}_i(T) = \begin{cases} \min(0, v_i(T)) & , i \in I \\ c_i(T) - p_i(T) = v_i(T) & , i \notin I \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\hat{s}_i(t) = \begin{cases} \min(0, w_i(t)) & , i \in I \\ & t=0 \dots T-1 \\ d_i(t) + p(t)B^i(t) - \lambda(t)D^i(t) = w_i(t) & , i \notin I \end{cases} \quad (4.24)$$

O gradiente da função dual em  $(\hat{r}, \hat{s})$

$$\frac{\partial \psi(p, \lambda)}{\partial p(t+1)} = \hat{r}(t+1) - A(t) \hat{r}(t) - B(t) \hat{s}(t) \quad t=0 \dots T-1 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \psi(p, \lambda)}{\partial \lambda(t)} = C(t) \hat{r}(t) + D(t) \hat{s}(t)$$

é utilizado no problema dual abaixo

$$\max_{p, \lambda} \psi(p, \lambda) \quad (4.26)$$

Uma vez achada a solução do problema (4.26), determinamos o passo ótimo na direção do gradiente projetado, de modo a achar outra solução factível. A solução de (4.13), no caso da P.L.D. também é analítica, ou seja

$$\min_{\alpha \geq 0} \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) [x(t+1) - \alpha \hat{r}(t+1)] + d(t) [u(t) - \alpha \hat{s}(t)] \quad (4.27)$$

$$\text{s.a.} \quad x(t+1) - \alpha \hat{r}(t+1) \geq 0 \quad t=0 \dots T-1$$

$$u(t) - \alpha \hat{s}(t) \geq 0$$

As restrições de não negatividade impõem um limite superior ao valor que  $\alpha$  pode assumir, isto é

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{x_i(t+1)}{\hat{r}_i(t+1)}, \frac{u_i(t)}{\hat{s}_i(t)}, i \notin I \right\} \quad (4.28)$$

Podemos reescrever (4.27) como

$$\min_{0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}} a\alpha + b \quad (4.29)$$

onde

$$b = \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) x(t+1) + d(t) u(t)$$

$$a = - \sum_{t=0}^{T-1} c(t+1) \hat{r}(t+1) + d(t) \hat{s}(t)$$

Portanto, de (4.29) a solução  $\hat{\alpha}$  é:

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \bar{\alpha} & , \quad a < 0 \\ 0 & , \quad a > 0 \\ \forall \text{ valor } \epsilon [0, \bar{\alpha}] & , \quad a = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Podemos agora descrever o esquema geral do método, supondo que uma solução factível seja conhecida.

Passo 1 : Determine o conjunto I.

Passo 2 : Encontre a projeção do gradiente da seguinte maneira:

a-) com as variáveis duais  $p(t+1)$ ,  $\lambda(t)$ , fixas, calcule  $\hat{r}(t+1)$  e  $\hat{s}(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ , através de (4.22) a (4.24).

b-) calcule o gradiente da função dual através de (4.25). Se  $\|\nabla\psi(\lambda)\| \leq \epsilon_1$ , a solução obtida para (4.26) é ótima. Caso contrário, atualize as variáveis duais através de um método de otimização irrestrita (por exemplo gradiente conjugado) e faça uma busca unidimensional, isto é

$$\max_{\sigma \geq 0} \psi(\lambda + \sigma p)$$

onde  $p$  é a direção conjugada no caso de utilizarmos o método de gradiente conjugado. Vá para a-)

Passo 3 : Uma vez resolvido o problema de projeção do gradiente encontre o passo  $\alpha$  através de (4.28) e (4.30), e atualize as variáveis  $x(t+1)$  e  $u(t)$ ,  $t=0\dots T-1$ .

Passo 4 : Se  $\|r(t+1)\| \leq \epsilon_2$  e  $\|s(t)\| \leq \epsilon_2$ ,  $t=0\dots T-1$ , pare; a solução em questão é ótima para o problema 1 de P.L.D. Caso contrário vá para o passo 1.

A solução factível de partida pode ser determinada através da resolução do seguinte problema:

$$\min_{u(t), x(t+1)} \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \|x(t+1)\|^2 + \|u(t)\|^2 \quad (4.31)$$

$$\text{s.a } x(t+1) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

$$C(t) x(t) + D(t) u(t) = f(t)$$

$$x(t+1) \geq 0, \quad u(t) \geq 0$$

Definindo o Lagrangeano

$$\begin{aligned} \ell(x, u, p, \lambda) = & \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \|x(t+1)\|^2 + \|u(t)\|^2 + \\ & + p(t+1) [x(t+1) - A(t)x(t) - B(t)u(t)] + \\ & + \lambda(t) [f(t) - C(t)x(t) - D(t)u(t)] \end{aligned}$$

e a função dual

$$\psi(\lambda, p) = \min_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq 0}} \ell(x, u, p, \lambda) \quad (4.32)$$

Verifica-se facilmente que a solução de (4.32) é analítica e que o gradiente é dado pelas restrições do problema (4.31). Assim a solução do problema dual

$$\max_{p, \lambda} \psi(\lambda, p)$$

ocorre num ponto tal que as restrições em (4.31) estão satisfeitas (gradiente nulo).

O procedimento aqui adotado para a fase I visa utilizar o mesmo algoritmo escolhido para a solução do problema dual (4.26). A função quadrática escolhida em (4.31) tem por finalidade obter um Lagrangeano estritamente convexo e simultaneamente uma solução analítica para a minimização desse Lagrangeano.

## II. 4.3 COMENTÁRIOS

Distintamente do simplex, o método iterativo aqui exposto faz com que a trajetória em busca do ótimo (que está num vértice), se faça interiormente ao conjunto de restrições. Como se pode notar, o método não realiza uma decomposição em



sub-problemas para o problema original de P.L.D., mas sim uma decomposição dual para se achar a direção factível. Desde que a minimização do Lagrangeano e o cálculo do passo  $\alpha$  são facilmente realizáveis através de expressões analíticas, segue-se que a eficiência do método estará centrada na maximização da função dual, isto é, no algoritmo escolhido e também na estratégia de busca unidimensional, uma vez determinada a direção conjugada (caso se use o método de gradiente conjugado).

Somente as experiências computacionais irão determinar a sensibilidade do método para sistemas de grande porte e horizonte de planejamento de médio a grande, caso em que o número de variáveis na função dual (4.20) torna-se grande. Os autores [11] resolvem, em seu trabalho, um problema com 230 variáveis e 575 restrições lineares, obtendo um tempo de computação de 0,85 segundos por iteração e satisfação do critério de parada após 65 iterações, resultados esses que podem ser considerados muito bons.

O método aqui exposto pode também ser facilmente adaptado para sistemas dinâmicos descritos por equações a diferenças com atraso distribuído nos vetores de estado e de controle.

## CAPÍTULO III

### MÉTODOS DIRETOS APLICADOS À PROGRAMAÇÃO LINEAR DINÂMICA

#### III. 1 - INTRODUÇÃO

Os métodos aqui abordados procuram trabalhar a matriz de restrições, explorando sua estrutura escada. Desenvolvemos nas seções 2 e 3 deste capítulo dois algoritmos baseados na filosofia do primal simplex, isto é, caminha-se pelos pontos extremos do politopo convexo, até a obtenção da solução ótima em um número finito de passos. O conceito de base global, isto é, uma base para a matriz de restrições completa, é substituído nos dois métodos pelo conceito de bases locais. Associamos assim a cada estágio uma base com dimensão bem menor, quando comparada com essa base global. Aplica-se a seguir o simplex, especializado para o conjunto de bases locais, e aqui denominado simplex dinâmico.

O primeiro trabalho publicado nessa linha é devido a Krivonozhko e Chebotarev [18], onde os autores expõem seu método para variáveis de estado sem restrições individuais, isto é, o vetor  $x$  é livre podendo ter componentes positivas ou negativas. A seguir, Propoi e Krivonozhko [31] reformularam o trabalho inicial procurando dar uma certa conotação de controle, ao mesmo tempo em que reduziam o número de bases locais para tratar o problema com  $x$  livre.

Na seção 2 fazemos uma extensão do método acima proposto para  $x \geq 0$ , desde que ao aplicarmos programação linear dinâmica a problemas de planejamento, não faz sentido termos algumas atividades assumindo valores negativos. O algoritmo apresentado na seção 2 será denominado por método simplex dinâmico I (MSDI).

Um outro algoritmo criado nessa linha é devido a Wollmer [43], operando também com bases locais e resolvendo o problema para  $x \geq 0$ . As principais diferenças nos métodos de Wollmer e Krivonozhko et al. consistem no processo de obtenção das bases locais e na atualização das mesmas. Na seção 3 expomos o método de Wollmer aqui adaptado para incluir as restrições que acoplam

variáveis de controle e estado. Denominaremos esse algoritmo por método simples dinâmico II (MSDII). Concluimos essa seção com uma análise comparativa entre MSDI e MSDII.

III. 2 O MÉTODO SIMPLEX DINÂMICO DE - KRIVONOZHKO - CHEBOTAREV-PROPOI (MSDI)

As bases locais são aqui obtidas através da decomposição da matriz B em um produto  $\bar{B} U$  onde  $\bar{B}$  é uma matriz bloco triangular inferior contendo matrizes quadradas com m ou n colunas linearmente independentes na sua diagonal principal (as bases locais) e U é uma matriz bloco triangular superior com elementos unitários na diagonal principal. Na realidade a matriz U é o resultado de um produto de várias matrizes triangulares superiores obtidas durante o processo de decomposição. Por analogia com a fatoração de números em aritmética, o procedimento acima é também conhecido como fatoração da matriz B. Usamos os dois nomes indistintamente.

Consideremos a matriz de restrições formada somente por colunas básicas com dimensão  $(m+n)T$ , factível para o problema original e denominada por matriz B.

$$\begin{array}{r}
 m \\
 n \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 m \\
 n
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{cccc}
 D(0) & & & \\
 B(0) & -I(1) & & \\
 & C(1) & D(1) & \\
 & A(1) & B(1) & -I(2) \\
 & & \cdot & \\
 & & \cdot & \\
 & & \cdot & \\
 & & & C(T-1) & D(T-1) \\
 & & & A(T-1) & B(T-1) & -I(T)
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 2.1

Com o intuito de simplificar a notação, estamos adotando a mesma simbologia para as matrizes compostas de colunas básicas. Portanto, a partir de agora  $D(t), B(t), -I(t), C(t), A(t)$  são

submatrizes das originais, contendo somente colunas básicas, sendo  $-I(t)$  uma submatriz da matriz identidade negativa  $-I$ .

Seja  $y^j(t)$  uma coluna da matriz  $B$  e seja  $I$  o conjunto de índices  $(j, t)$  correspondente a essas colunas básicas. Seja também  $J$  o conjunto complementar de  $I$ , correspondente às colunas não básicas. Definimos então, os conjuntos básico e não básico para as componentes dos vetores  $u(t)$  e  $x(t)$  como:

$$z_I = \{u_i(t), x_i(t) \mid (i, t) \in I\}$$

$$z_J = \{u_i(t), x_i(t) \mid (i, t) \in J\}$$

Qualquer solução básica factível pode ser representada por:

$$z = \{z_I, z_J\}, \text{ com } z_I \geq 0, z_J = 0$$

Suporemos durante a exposição que o conjunto de restrições é consistente e que qualquer solução básica é não degenerada. Seja também

$r(\tau)$  - número de componentes básicas do vetor  $u(\tau)$

$s(\tau)$  - número de componentes básicas do vetor  $x(\tau)$

Então

$$(m+n)t \leq \sum_{\tau=1}^t r(\tau-1) + s(\tau) \quad t=1 \dots T-1 \quad (2.1a)$$

$$(m+n)T = \sum_{\tau=1}^T r(\tau-1) + s(\tau) \quad (2.1b)$$

$$mt + n(t-1) \leq \sum_{\tau=1}^t r(\tau-1) + s(\tau-1) \quad t=1 \dots T \quad (2.2)$$

$$s(0) = 0$$

As inequações (2.1a) e (2.2) expressam o fato de que ao

cortarmos a matriz básica num instante  $t$  qualquer, a submatriz resultante é, em geral, retangular ( $n^{\circ}$  de colunas maior que o  $n^{\circ}$  de linhas), caso contrário as linhas dessa submatriz seriam linearmente dependentes, o que não é o caso, pois  $B$  é uma base.

O método apóia-se nessa simples observação acima, isto é, agrupamos conjuntos de  $m$  e  $n$  variáveis básicas de tal forma a obtermos bases locais de dimensão  $m$  e  $n$  alternadamente. Assim uma certa variável  $u_i(t_1)$  ou  $x_i(t_1)$ ,  $(i, t_1) \in I$  pode pertencer a qualquer base local  $t_2$  onde  $t_2 \geq t_1$ .

### III. 2.1 FATORAÇÃO DA MATRIZ BÁSICA

Enunciamos agora um teorema que será aplicado sucessivamente durante o processo de fatoração da matriz  $B$ .

#### Teorema 2.1

Seja uma matriz não singular  $M$  particionada em blocos,

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} H & | & P \\ \hline Q & | & R \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \end{matrix}, \quad \text{com } H \text{ não singular.}$$

Então  $M$  pode ser representada pelo produto de uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior com elementos unitários na diagonal principal.

$$M = \bar{M} U = \begin{bmatrix} H & | & 0 \\ \hline Q & | & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & | & \phi \\ \hline 0 & | & I_n \end{bmatrix}$$

onde

$$G = R - Q \phi, \quad |G| \neq 0, \quad \phi = H^{-1} P$$

$I_m$  e  $I_n$  são matrizes identidade de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente. A inversa  $M^{-1}$  vem dada por:

$$M^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} H^{-1} + \phi G^{-1} Q H^{-1} & -\phi G^{-1} \\ \hline -G^{-1} Q H^{-1} & G^{-1} \end{array} \right]$$

Prova

Ver Apêndice (A.1).

Para termos uma visão bem detalhada do processo de obtenção das bases locais, consideremos uma matriz básica B relativa a um problema com horizonte T=2 e generalizemos depois os resultados (ver Fig. 2.1).

Como as primeiras m linhas são linearmente independentes (l.i.), podemos escolher m colunas l.i. entre as colunas de D(0), formando a matriz D<sup>l</sup>(0). O resto das colunas forma a matriz D<sup>k</sup>(0). A partição correspondente é feita na matriz B(0), ou seja;

$$D(0) = [ D^l(0) \ ; \ D^k(0) ] = [ H(0) \ ; \ P(0) ] \tag{2.3}$$

$$B(0) = [ B^l(0) \ ; \ B^k(0) ] = [ Q(0) \ ; \ R(0) ]$$

A notação D<sup>k</sup>(0) indica colunas básicas a serem usadas em alguma base local k, k > 1. Veremos que o método opera com 2T bases locais. Aplicando o teorema 2.1 ao bloco de matrizes formado por;

$$\left[ \begin{array}{c|c} H(0) & P(0) \\ \hline Q(0) & R(0) \end{array} \right], \text{ podemos escrever } B = B_0 U_0,$$

onde

$$B_0 = \begin{array}{c} m \\ n \\ m \\ n \end{array} \left[ \begin{array}{c|cc} H(0) & & \\ \hline Q(0) & \tilde{R}(0) & -I(1) \\ & C(1) & D(1) \\ & A(1) & B(1) & -I(2) \end{array} \right] \quad U_0 = \begin{bmatrix} I_m & \phi(0) & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

com  $\phi(0) = H^{-1}(0) P(0)$  (2.4)

$$\bar{R}(0) = R(0) - Q(0) \phi(0)$$

A posição e dimensão de  $\phi(0)$  coincidem com a posição e dimensão de  $P(0)$  em  $B$ . A matriz  $U_0$  é quadrada com a mesma dimensão de  $B_0$  e  $B$ .

Novamente pelo teorema 2.1 a matriz interna ao pontilhado (o bloco maior) é não singular e, portanto, as  $n$  linhas correspondentes às matrizes  $\bar{R}(0)$  e  $-I(1)$  são l.i. Escolhamos  $n$  colunas dessas matrizes. Para isso, particionemos  $\bar{R}(0)$  e  $-I(1)$  em colunas a serem usadas nessa segunda base local e colunas a serem usadas numa base  $k$  futura,  $k > 2$ .

$$\bar{R}(0) = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{R}^2(0) & \bar{R}^k(0) \end{array} \right] \quad -I(1) = \left[ \begin{array}{c|c} -I^2(1) & -I^k(1) \end{array} \right] \quad (2.5)$$

$$G(0) = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{R}^2(0) & -I^2(1) \end{array} \right] \quad F(0) = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{R}^k(0) & -I^k(1) \end{array} \right]$$

Aqui  $G(0)$  corresponde à matriz formada por  $n$  colunas l.i., sendo que em geral essas colunas correspondem a variáveis pertencentes aos vetores  $u(0)$  e  $x(1)$  básicos. O resto das colunas é denominado por  $F(0)$  e também contém em geral colunas correspondentes a variáveis dos vetores  $u(0)$  e  $x(1)$  básicos.

As matrizes  $C(1)$  e  $A(1)$  devem acompanhar essa partição.

$$C(1) = \left[ \begin{array}{c|c} C^2(1) & C^k(1) \end{array} \right] \quad A(1) = \left[ \begin{array}{c|c} A^2(1) & A^k(1) \end{array} \right]$$

A matriz  $B_0$  é, portanto, rearranjada.

$$B_0 = \begin{array}{c} m \\ n \\ m \\ n \end{array} \left[ \begin{array}{cc|cc|c} m & n & & & \\ H(0) & & & & \\ \hline n & Q(0) & G(0) & F(0) & \\ m & & 0 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} C^2(1) & 0 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} C^k(1) & D(1) \\ n & & 0 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} A^2(1) & 0 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} A^k(1) & B(1) \quad -I(2) \end{array} \right]$$

As colunas da matriz  $\phi(0)$  em  $U_0$  devem ser arranjadas de acordo com a partição em  $\bar{R}(0)$ , isto é:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \phi^2(0) & 0 & \phi^k(0) \end{array} \right]$$

Note que as colunas  $\phi^k(0)$  devem acompanhar o deslocamento das colunas  $\tilde{R}^k(0)$  que agora compõem  $F(0)$ . Daí a indicação da matriz formada por colunas de zeros, tal que o número dessas colunas é igual ao número de colunas de  $-I^2(1)$ . Aplicando o teorema 2.1 aos blocos.

$$\left[ \begin{array}{c|c} G(0) & F(0) \\ \hline 0 \vdots C^2(1) & 0 \vdots C^k(1) \end{array} \right] \quad e \quad \left[ \begin{array}{c|c} G(0) & F(0) \\ \hline 0 \vdots A^2(1) & 0 \vdots A^k(1) \end{array} \right]$$

podemos escrever  $B_0 = B_1 V_0$ , onde

$$B_1 = \left[ \begin{array}{c|ccc} m & H(0) & & \\ n & Q(0) & G(0) & \\ \hline m & 0 \vdots C^2(1) & \tilde{C}^k(1) & D(1) \\ n & 0 \vdots A^2(1) & \tilde{A}^k(1) & B(1) \quad -I(2) \end{array} \right] \quad V_0 = \left[ \begin{array}{c} I_m \\ I_n \quad \Psi(0) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]$$

A posição e dimensão de  $\Psi(0)$  em  $V_0$  coincidem com a posição e dimensão de  $F(0)$  em  $B_0$ , sendo  $V_0$  quadrada com mesma dimensão de  $B$ .

$$\Psi(0) = G^{-1}(0) F(0)$$

$$\tilde{C}^k(1) = [0 \vdots C^k(1)] - [0 \vdots C^2(1)] \Psi(0) \quad (2.6)$$

$$\tilde{A}^k(1) = [0 \vdots A^k(1)] - [0 \vdots A^2(1)] \Psi(0)$$

Note que as matrizes  $\tilde{C}^k(1)$  e  $\tilde{A}^k(1)$  contêm colunas correspondentes a variáveis de  $u(0)$  e  $x(1)$  não usadas nas bases anteriores. Novamente pelo teorema 2.1 podemos escolher  $m$  colunas l.i. dentre as colunas de  $\tilde{C}^k(1)$  e  $D(1)$ , formando a matriz  $H(1)$ . Façamos as diversas partições.

$$\tilde{C}^k(1) = [\tilde{C}^3(1) \vdots \tilde{C}^4(1)] \quad D(1) = [D^3(1) \vdots D^4(1)]$$

$$\tilde{A}^k(1) = [\tilde{A}^3(1) \vdots \tilde{A}^4(1)] \quad B(1) = [B^3(1) \vdots B^4(1)]$$

(2.7)



$$\begin{aligned}
 H(1) &= [\bar{C}^3(1) \ ; \ D^3(1)] & P(1) &= [\bar{C}^4(1) \ ; \ D^4(1)] \\
 Q(1) &= [\bar{A}^3(1) \ ; \ B^3(1)] & R(1) &= [\bar{A}^4(1) \ ; \ B^4(1)]
 \end{aligned}$$

A notação  $\bar{C}^k(1) = [\bar{C}^3(1) \ ; \ \bar{C}^4(1)]$ , indica que estamos usando algumas colunas de  $\bar{C}^k(1)$ , para a formação da terceira base e o restante,  $\bar{C}^4(1)$ , deve ser usado na quarta base, no caso a última base. De modo que a configuração da matriz  $B_1$  agora é:

$$B_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \\ m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} H(0) & & & \\ Q(0) & G(0) & & \\ 0 \ ; \ C^2(1) & & H(1) & P(1) \\ 0 \ ; \ A^2(1) & & Q(1) & R(1) & -I(2) \end{array} \right] \end{matrix}$$

Correspondente à partição feita em (2.7), devemos rearranjar as colunas de  $\phi(0)$  em  $U_0$  e  $\psi(0)$  em  $V_0$ .

$$[\ \phi^2(0) \ ; \ 0 \ ; \ \phi^3(0) \ ; \ 0 \ ; \ \phi^4(0) ]$$

$$[\ \psi^3(0) \ ; \ 0 \ ; \ \psi^4(0) ]$$

As matrizes  $\phi^3(0)$  e  $\psi^3(0)$  tem posição determinada pela matriz  $H(1)$ . Assim a posição  $(m+n+1)$  ocupada pela primeira coluna de  $H(1)$  em  $B_1$ , corresponde a posição  $(m+n+1)$  ocupada pela primeira coluna de  $\phi^3(0)$  em  $U_0$ . Idem para  $\psi^3(0)$  em  $V_0$ . A matriz  $\phi^4(0)$  tem sua primeira coluna na posição correspondente à primeira coluna de  $P(1)$ . Idem para  $\psi^4(0)$ .

Através do teorema 2.1 aplicado ao bloco

$$\left[ \begin{array}{c} H(1) \ ; \ P(1) \\ \hline Q(1) \ ; \ R(1) \end{array} \right] \quad \text{podemos escrever } B_1 = B_2 U_1 ,$$

onde

$$B_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n & m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \\ m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} H(0) & & & \\ Q(0) & G(0) & & \\ & 0 \vdots C^2(1) & H(1) & \\ & 0 \vdots A^2(1) & Q(1) & G(1) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad U_1 = \begin{bmatrix} I_m & & & \\ & I_n & & \\ & & I_m & \phi(1) \\ & & & I_n \end{bmatrix}$$

$$\phi(1) = H^{-1}(1) P(1) \quad , \quad \bar{R}(1) = R(1) - Q(1) \phi(1)$$

$$G(1) = [\bar{R}(1) \vdots -I(2)]$$

Note que, em geral:

$H(0)$  é formada com variáveis básicas  $u_i(0)$ .

$G(0)$  é formada com variáveis básicas  $u_i(0)$  e  $x_i(1)$ .

$H(1)$  é formada com variáveis básicas  $u_i(0)$ ,  $x_i(1)$  e  $u_i(1)$ .

$G(1)$  é formada com variáveis básicas  $u_i(0)$ ,  $x_i(1)$ ,  $u_i(1)$  e  $x_i(2)$ .

Podemos escrever a matriz  $B$  na forma  $\bar{B} U$  onde  $\bar{B} = B_2$  e  $U = U_1 V_0 U_0$ . A Figura 2.2 ilustra a matriz  $U$  e as diversas posições das suas submatrizes.

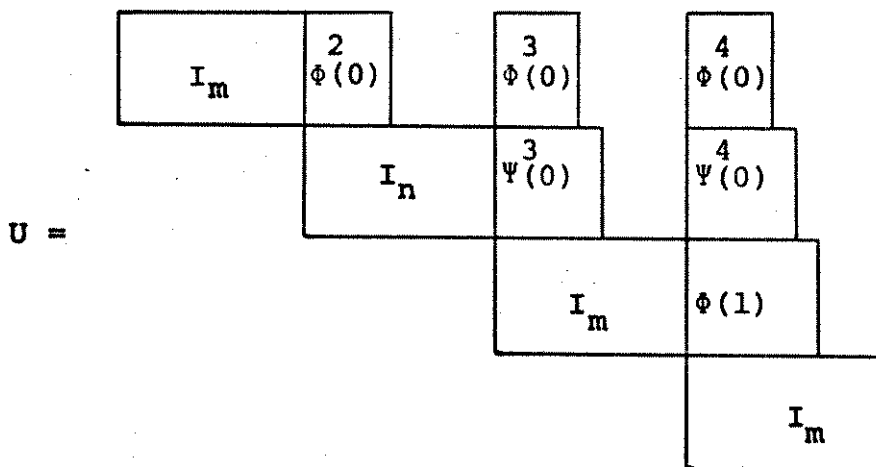


Figura 2.2

As matrizes identidade em  $U$  ocupam as mesmas posições que  $H(0)$ ,  $G(0)$ ,  $H(1)$  e  $G(1)$  em  $B_2$ . Estamos considerando que  $H(0)$  é a base 1,  $G(0)$  é a base 2 e assim por diante.

As submatrizes  $\phi^k(0)$  correspondem a variáveis  $u_i(0)$  básicas a serem usadas nas bases  $k, k = 2, 3, 4$ .

As submatrizes  $\psi^k(0)$  correspondem a variáveis  $u_i(0)$  e  $x_i(1)$  básicas a serem usadas nas bases  $k, k = 3, 4$  (por esse motivo desenhamos  $\psi^k(0)$  com número de colunas maior que  $\phi^k(0)$ ).

A matriz  $\phi(1)$  é composta de colunas correspondentes a variáveis  $u_i(0), x_i(1)$  e  $u_i(1)$  básicas usadas na base 4.

Passemos agora à generalização dos resultados obtidos. Consideremos que a matriz  $B$  tenha sido fatorada até o instante  $t$  e escrita na forma: ..

$$B = B_{2t-1} V_{t-1} U_{t-1} \dots V_0 U_0 = B_{2t-1} U$$

$$B_{2t-1} = \begin{bmatrix} H(0) \\ Q(0) \quad G(0) \\ 0 \mid c^2(1) \\ 0 \mid A^2(1) \quad H(t) \quad P(t) \\ Q(t) \quad R(t) \quad -I(t+1) \\ C(t+1) \quad D(t+1) \\ A(t+1) \quad B(t+1) \quad -I(t+2) \\ \dots \\ -I(T) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} I_m \phi^2(0) \mid 0 \mid \dots \dots \dots \phi^{2t+1}(0) \mid 0 \mid \phi^k(0) \\ I_n \psi^3(0) \mid 0 \mid \dots \dots \dots \psi^{2t+1}(0) \mid 0 \mid \psi^k(0) \\ \dots \\ I_m \phi^{2t+1}(t-1) \mid 0 \mid \phi^k(t-1) \\ I_n \psi(t-1) \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$





$$\begin{aligned}
 v_t = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \Psi(t) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \Psi(t) = G^{-1}(t) F(t) \\
 \bar{C}^k(t+1) = [0 \vdots C^k(t+1)] - [0 \vdots C^{2t+2}(t+1)] \Psi(t) \quad (2.11) \\
 \bar{A}^k(t+1) = [0 \vdots A^k(t+1)] - [0 \vdots A^{2t+2}(t+1)] \Psi(t)
 \end{aligned}$$

Escolhamos m colunas l.i. dentre as matrizes  $\bar{C}^k(t+1)$  e  $D(t+1)$ , formando a matriz  $H(t+1)$ .

$$\bar{C}^k(t+1) = [\bar{C}^{2t+3}(t+1) \vdots \bar{C}^k(t+1)] \quad D(t+1) = [D^{2t+3}(t+1) \vdots D^k(t+1)] \quad (2.12)$$

$$\bar{A}^k(t+1) = [\bar{A}^{2t+3}(t+1) \vdots \bar{A}^k(t+1)] \quad B(t+1) = [B^{2t+3}(t+1) \vdots B^k(t+1)]$$

$$H(t+1) = [\bar{C}^{2t+3}(t+1) \vdots D^{2t+3}(t+1)] \quad P(t+1) = [\bar{C}^k(t+1) \vdots D^k(t+1)] \quad (2.13)$$

$$Q(t+1) = [\bar{A}^{2t+3}(t+1) \vdots B^{2t+3}(t+1)] \quad R(t+1) = [\bar{A}^k(t+1) \vdots B^k(t+1)]$$

Particionando  $\phi^k(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $\phi^k(\tau)$ ,  $\Psi^k(\tau)$  vem

$$[\phi^{2\tau+2}(\tau) \vdots 0 \vdots \phi^{2\tau+3}(\tau) \vdots \dots \vdots \phi^{2t+3}(\tau) \vdots 0 \vdots \phi^k(\tau)] \quad (2.14)$$

$\tau=0 \dots t$

$$[\Psi^{2\tau+3}(\tau) \vdots 0 \vdots \Psi^{2\tau+4}(\tau) \vdots \dots \vdots \Psi^{2t+3}(\tau) \vdots 0 \vdots \Psi^k(\tau)]$$

A matriz  $B_{2t+1}$  pode então ser reescrita como:

$$B_{2t+1} = \begin{bmatrix} H(0) \\ Q(0) & G(0) & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 \cdot C^2(1) & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 \cdot A^2(1) & \cdot & \cdot & H(t) \\ & & & Q(t) & G(t) & \\ & & & & 0 \cdot C^{2t+2}(t+1) & H(t+1) & P(t+1) \\ & & & & 0 \cdot A^{2t+2}(t+1) & Q(t+1) & R(t+1) & -I(t+2) \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & -I(T) \end{bmatrix}$$

Continuando dessa maneira, obtemos  $B = \bar{B} U = \bar{B} U_{T-1} V_{T-2} U_{T-2} \dots V_0 U_0$ .

Vetor	Vetor Primal	$z_1(0)$	$z_2(0)$	.....	$z_1(T-1)$	$z_2(T-1)$
	Dimensão	m	n	.....	m	n
$\lambda(0)$	m	H(0)				
$p(1)$	n	Q(0)	G(0)			
$\cdot$	$\cdot$		0 C(1)	$\cdot$		
$\cdot$	$\cdot$		0 A(1)	$\cdot$		
$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$		
$\lambda(T-1)$	m				H(T-1)	
$p(T)$	n				Q(T-1)	G(T-1)
Vetor de Custo		$h_1(0)$	$h_2(0)$	.....	$h_1(T-1)$	$h_2(T-1)$

Figura 2.3

$$U = \begin{bmatrix} I_m \phi^2(0) \vdots 0 & \dots & \phi^{2T}(0) \\ I_n \psi^3(0) \vdots 0 & \dots & \psi^{2T}(0) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ I_n \psi^{2T-1}(T-2) \vdots 0 \vdots \psi^{2T}(T-2) \\ I_m & & \phi(T-1) \\ & & I_n \end{bmatrix}$$

A Figura 2.3 mostra a matriz  $\bar{B}$  com

a-) vetor de multiplicadores

$$\Pi = (\lambda(0), p(1) \dots \lambda(T-1), p(T)) \quad \begin{array}{l} \lambda(t) - 1 \times m \\ p(t) - 1 \times n \end{array}$$

b-) vetor primal básico

$$z_I = (z^1(0), z^2(0) \dots z^1(T-1), z^2(T-1))' \quad \begin{array}{l} z^1(t) - m \times 1 \\ z^2(t) - n \times 1 \end{array}$$

A composição geral dos vetores  $z^1(t)$  e  $z^2(t)$  é:

$$z^1(0) = \{u_i(0) \ , \ (i, 0) \in I\}$$

$$z^1(t) = \{u_i(\tau), x_i(\tau) \ , \ (i, \tau) \in I \ , \ \tau = 1 \dots t\} \quad t=1 \dots T-1$$

$$z^2(t) = \{u_i(\tau), x_i(\tau) \ , \ (i, \tau) \in I \ , \ \tau = 0 \dots t-1\} \quad t=1 \dots T-1$$

c-) vetor de custo básico

$$c^I = (h_1(0) \ , \ h_2(0), \dots \ h_1(T-1), h_2(T-1)) \quad \begin{array}{l} h_1(t) - 1 \times m \\ h_2(t) - 1 \times n \end{array}$$



A composição dos vetores de custo  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  está associada com a composição de  $z^1(t)$  e  $z^2(t)$ .

Omitimos a partir da Figura 2.3 qualquer índice sobre as matrizes  $C(t)$  e  $A(t)$  quando figurarem em  $B$ . Assim a notação  $[0 \mid C(t)]$  indica que as variáveis  $x_i(t)$ ,  $(i, t) \in I$  correspondentes às colunas de  $C(t)$  entram na base  $G(t-1)$ . O conjunto das  $2T$  bases  $\{H(t), G(t), t=0 \dots T-1\}$  constitui o conjunto das bases locais. As diversas expressões numeradas de (2.3) a (2.14) constituem fórmulas gerais para o método.

### III. 2.2 O SIMPLEX E A DECOMPOSIÇÃO LU

Como bem nota Luenberger [22], a execução de um ciclo do simplex não depende de se ter explicitamente  $B^{-1}$ , mas sim da habilidade em resolver sistemas lineares tendo  $B$  como a matriz dos coeficientes. Seja  $I$  o conjunto de índices básicos e  $J$  o conjunto de índices não básicos. Assim dada a base  $B$  e a matriz de colunas não básicas  $Q^J$ , o método simplex pode ser enunciado em cinco passos.

Passo 1 : Calcule a solução básica atual através de  $Bz_I = b$ .  
Seja  $z_I = z^0$  a solução.

Passo 2 : Calcule o vetor de multiplicadores  $\Pi$  através de  $\Pi B = c^I$ .  
Faça  $\hat{c}^J = c^J - \Pi Q^J$ . Se  $\hat{c}^j \geq 0$  pare, a solução é ótima.

Passo 3 : Selecione uma variável não básica a entrar na base. isto é, uma para a qual  $\hat{c}^j < 0$ ,  $j \in J$ . Calcule a representação da coluna  $q^j$  em termos da base  $B$ , resolvendo  $B\hat{q}^j = q^j$ .

Passo 4 : Calcule a razão  $z_i^0/\hat{q}_i^j$ ,  $\hat{q}_i^j > 0$ ,  $i \in I$  e selecione através do mínimo dessa razão a variável básica que vai sair. Se  $\hat{q}_i^j \leq 0$ ,  $\forall i \in I$ , a solução é ilimitada.

Passo 5 : Atualize a base  $B$ . Retorne ao Passo 1.

Desde que a matriz básica B está na forma  $\bar{B} U$ , a solução dessas três equações lineares é trivial.

a-) Cálculo da solução básica

Seja b o vetor coluna de recursos do problema original.

$$b = (b^1(0), b^2(0), f(1), 0, \dots, f(T-1), 0)' \quad , \quad \text{onde}$$

$$b^1(0) = f(0) - C(0) x(0) \quad ; \quad b^2(0) = -A(0) x(0)$$

$$\text{Seja } Bz_I = \bar{B} Uz_I = b \quad (2.15)$$

Introduzindo a notação  $\bar{z}^* = Uz_I$ , a resolução do sistema (2.15) consiste em resolver dois sistemas triangulares, obtendo-se duas soluções recorrentes.

$$\bar{B}\bar{z}^* = b \quad \text{recorrente para frente} \quad (2.16)$$

$$Uz_I = \bar{z}^* \quad \text{recorrente para trás} \quad (2.17)$$

A solução de (2.16) é:

$$\bar{z}^{*1}(0) = H^{-1}(0) b^1(0)$$

$$\bar{z}^{*2}(0) = G^{-1}(0) [b^2(0) - Q(0) \bar{z}^{*1}(0)] \quad (2.18)$$

$$\bar{z}^{*1}(t) = H^{-1}(t) [f(t) - [0 \quad C(t)] \bar{z}^{*2}(t-1)]$$

t=1... T-1

$$\bar{z}^{*2}(t) = -G^{-1}(t) [[0 \quad A(t)] \bar{z}^{*2}(t-1) + Q(t) \bar{z}^{*1}(t)]$$

A solução de (2.17) é:

$$z^2(T-1) = \bar{z}^{*2}(T-1) \quad (2.19)$$

$$z^1(t) = z^{*1}(t) - \sum_{\tau=t}^{T-1} \begin{bmatrix} \phi^{2\tau+2}(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z^2(\tau) - \sum_{\tau=t+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \phi^{2\tau+1}(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z^1(\tau) \quad t=T-1 \dots 0$$

$$z^2(t) = z^{*2}(t) - \sum_{\tau=t+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \psi^{2\tau+2}(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z^2(\tau) - \sum_{\tau=t+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \psi^{2\tau+1}(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z^1(\tau) \quad t=T-2 \dots 0$$

b-) Representação da coluna não básica

Passamos agora a calcular a representação da coluna que vai entrar na base, em termos da mesma. Aqui somos obrigados a distinguir dois tipos de coluna, ou seja, uma que corresponde a uma variável de estado e outra correspondente a uma variável de controle. Seja

$$v^j(\tau) = [0, 0 \dots 0, d^j(\tau), b^j(\tau), 0 \dots 0]^T, \quad (j, \tau) \in J$$

uma coluna não básica relacionada com a variável  $u_j(\tau)$ , onde  $d^j(\tau)$  e  $b^j(\tau)$  representam a  $j$ -ésima coluna das matrizes  $D(\tau)$  e  $B(\tau)$  originais e que incluem todas as colunas (básicas e não básicas). Seja

$$\bar{v}^j(\tau) = [v^1(0), v^2(0) \dots v^1(T-1), v^2(T-1)]^T$$

a representação de  $v^j(\tau)$  na base B. Portanto

$$B \bar{v}^j(\tau) = \bar{B} U \bar{v}^j(\tau) = v^j(\tau) \quad (2.20)$$

Fazendo  $\bar{v}^* = U \bar{v}^j(\tau)$ , a solução do sistema linear é análoga ao caso anterior, isto é, (2.20) fica desdobrado em dois sistemas triangulares.

$$\bar{B} \bar{v}^* = v^j(\tau) \quad (2.21)$$

$$U \bar{v}^j = \bar{v}^* \quad (2.22)$$

A solução de (2.21) é:

$$\overset{*}{v}^1(t) = \overset{*}{v}^2(t) = 0 \quad t=0 \dots \tau-1$$

$$\overset{*}{v}^1(\tau) = H^{-1}(\tau) d^j(\tau)$$

$$\overset{*}{v}^2(\tau) = G^{-1}(\tau) [b^j(\tau) - Q(\tau) \overset{*}{v}^1(\tau)] \quad (2.23)$$

$$\overset{*}{v}^1(t) = -H^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ C(t) \end{bmatrix} \overset{*}{v}^2(t-1)$$

t=τ+1... T-1

$$\overset{*}{v}^2(t) = -G^{-1}(t) \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ A(t) \end{bmatrix} \overset{*}{v}^2(t-1) + Q(t) \overset{*}{v}^1(t) \right]$$

A solução de (2.22) é:

$$v^2(T-1) = \overset{*}{v}^2(T-1) \quad (2.24)$$

$$v^1(t) = \overset{*}{v}^1(t) - \sum_{\tau=t}^{T-1} \begin{bmatrix} \phi^{2\tau+2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} v^2(\tau) - \sum_{\tau=t+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \phi^{2\tau+1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} v^1(\tau) \quad t=T-1 \dots 0$$

$$v^2(t) = \overset{*}{v}^2(t) - \sum_{\tau=t+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \psi^{2\tau+2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} v^2(\tau) - \sum_{\tau=t+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \psi^{2\tau+1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} v^1(\tau) \quad t=T-2 \dots 0$$

Seja

$$w^j(\tau) = [0, 0, \dots, 0, -e^j(\tau), c^j(\tau), a^j(\tau), 0, \dots, 0]^T, \quad (j, \tau) \in J$$

uma coluna não básica correspondente à variável  $x_j(\tau)$ , onde  $-e^j(\tau)$ ,  $c^j(\tau)$  e  $a^j(\tau)$  representam a  $j$ -ésima coluna das matrizes originais  $-I(\tau)$ ,  $C(\tau)$  e  $A(\tau)$ . Seja

$$\bar{w}^j(\tau) = [w^1(0), w^2(0) \dots w^1(T-1), w^2(T-1)]^T$$

a representação de  $w^j(\tau)$  na base B. Portanto

$$\bar{B} \bar{w}^j(\tau) = \bar{B} U \bar{w}^j(\tau) = w^j(\tau)$$

Fazendo  $\bar{w}^* = U \bar{w}^j(\tau)$ , obtemos

$$\bar{B} \bar{w}^* = w^j(\tau) \tag{2.25}$$

$$U \bar{w}^j(\tau) = \bar{w}^* \tag{2.26}$$

De (2.25) temos;

$$\bar{w}^{*1}(t) = 0 \quad t=0 \dots \tau-1$$

$$\bar{w}^{*2}(t) = 0 \quad t=0 \dots \tau-2$$

$$\bar{w}^{*2}(\tau-1) = -G^{-1}(\tau-1) e^j(\tau) \tag{2.27}$$

$$\bar{w}^{*1}(\tau) = H^{-1}(\tau) \left[ c^j(\tau) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ C(\tau) \end{bmatrix} \bar{w}^{*2}(\tau-1) \right]$$

$$\bar{w}^{*2}(\tau) = G^{-1}(\tau) \left[ a^j(\tau) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A(\tau) \end{bmatrix} \bar{w}^{*2}(\tau-1) - Q(\tau) \bar{w}^{*1}(\tau) \right]$$

$$\bar{w}^{*1}(t) = -H^{-1}(t) \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ C(t) \end{bmatrix} \bar{w}^{*2}(t-1) \right]$$

$t=\tau+1 \dots T-1$

$$\bar{w}^{*2}(t) = -G^{-1}(t) \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A(t) \end{bmatrix} \bar{w}^{*2}(t-1) + Q(t) \bar{w}^{*1}(t) \right]$$

A solução de (2.26) fornece expressões idênticas a (2.24).

### c-) Cálculo dos multiplicadores

O sistema linear a ser resolvido é

$$c^I = \Pi B = \Pi \bar{B} U \quad , \quad \text{ou}$$

$$c^I U^{-1} = \Pi \bar{B} \quad (2.28)$$

Pode-se verificar facilmente que a matriz  $U^{-1}$  é obtida a partir de  $U$  pela simples troca de sinal dos elementos acima da diagonal. Portanto de (2.28) temos

$$c^I U^{-1} = (\bar{h}_1(0), \bar{h}_2(0) \dots \bar{h}_1(1), \bar{h}_2(1) \dots) \quad t=0 \dots T-1$$

onde

$$\bar{h}_1(0) = h_1(0)$$

$$\bar{h}_2(0) = -h_1(0) [\phi^2(0) \ ; \ 0] + h_2(0)$$

$$\bar{h}_1(t) = - \left[ \sum_{\tau=0}^{t-1} h_1(\tau) [\phi^{2t+1}(\tau) \ ; \ 0] + \sum_{\tau=0}^{t-1} h_2(\tau) [\psi^{2t+1}(\tau) \ ; \ 0] \right] + h_1(t)$$

t=1... T-1

$$\bar{h}_2(t) = - \left[ \sum_{\tau=0}^t h_1(\tau) [\phi^{2t+2}(\tau) \ ; \ 0] + \sum_{\tau=0}^{t-1} h_2(\tau) [\psi^{2t+2}(\tau) \ ; \ 0] \right] + h_2(t)$$

O triângulo superior da matriz  $U$  pode ser muito denso e conseqüentemente essas expressões analíticas não terão interesse em termos práticos. Nesse caso apenas multiplicamos o vetor  $c^I$  pela matriz  $U^{-1}$  e agrupamos as componentes do vetor resultante em blocos de  $m$  e  $n$  alternadamente.

$$\begin{aligned} \Pi \bar{B} = & (\lambda(0) H(0) + p(1) Q(0), p(1) G(0) + \lambda(1) [0 \ ; \ c(1)] + \\ & + p(2) [0 \ ; \ A(1)], \dots, \lambda(t) H(t) + p(t+1) Q(t), \\ & p(t+1) G(t) + \lambda(t+1) [0 \ ; \ c(t+1)] + p(t+2) [0 \ ; \ A(t+1)], \dots \\ & \dots, p(T) G(T-1) \end{aligned}$$

Igualando-se cada componente, observa-se as relações recorrentes para trás, o que já era esperado, devido à caracterís-

tica intrínseca do problema 2 (dual) da P.L.D.

$$p(T) = \bar{h}_2(T-1) G^{-1}(T-1) \tag{2.29}$$

$$\lambda(t) = [\bar{h}_1(t) - p(t+1) Q(t)] H^{-1}(t) \quad t=T-1 \dots 1$$

$$p(t) = [\bar{h}_2(t-1) - \lambda(t) [0; C(t)] - p(t+1) [0; A(t)]] G^{-1}(t-1)$$

$$\lambda(0) = [\bar{h}_1(0) - p(1) Q(0)] H^{-1}(0)$$

Um fato importante nessa bateria de fórmulas é que todas as soluções obtidas são função das inversas das bases locais.

A determinação da variável a entrar na base é feita através do sinal de

$$\hat{c}^j(t) = c^j(t) - \Pi q^j(t) \quad (j, t) \in J \tag{2.30}$$

e escolhendo-se uma para a qual  $\hat{c}^j(t) < 0$ . Aqui  $q^j(t)$  é uma coluna não básica da matriz global de restrições e  $c^j(t)$  o custo correspondente. Seja esse índice  $(j, t_2)$ . Calcula-se agora a representação dessa coluna não básica em termos da base, podendo-se então determinar a variável a sair da base através das seguintes expressões abaixo, que dependem do tipo de variável a entrar na base.

a-) Se a variável a entrar é de estado

$$(k, t_1) = \arg\text{-min} \left\{ \frac{z_i^1(t)}{w_i^1(t)}, \frac{z_i^2(t)}{w_i^2(t)} \right\} \quad (i, t) \in I \tag{2.31}$$

$$w_i^1(t), w_i^2(t) > 0$$

Seja  $\theta = \frac{z_k^1(t_1)}{w_k^1(t_1)}$

A nova solução básica é então ( $\overset{0}{z}_I$  é a solução antiga):

$$z_i^1(t) = \overset{0}{z}_i^1(t) - \theta w_i^1(t) \quad (i, t) \in I \quad (2.32)$$

$$z_i^2(t) = \overset{0}{z}_i^2(t) - \theta w_i^2(t)$$

$$x_j(t_2) = \theta \quad , \quad z_i(t) = 0 \quad , \quad (i, t) \in J$$

b-) Se a variável a entrar é de controle

$$(k, t_1) = \arg\text{-min} \left\{ \frac{z_i^1(t)}{v_i^1(t)} , \frac{z_i^2(t)}{v_i^2(t)} \right\} \quad (i, t) \in I \quad (2.33)$$

$$v_i^1(t) , v_i^2(t) > 0$$

Seja  $\theta = \frac{z_k^1(t_1)}{v_k^1(t_1)}$

A nova solução básica é:

$$z_i^1(t) = \overset{0}{z}_i^1(t) - \theta v_i^1(t) \quad (i, t) \in I \quad (2.34)$$

$$z_i^2(t) = \overset{0}{z}_i^2(t) - \theta v_i^2(t)$$

$$u_j(t_2) = \theta \quad , \quad z_i(t) = 0 \quad , \quad (i, t) \in J$$

### III. 2.3 ATUALIZAÇÃO DAS BASES LOCAIS

Passamos a descrever o processo de atualização das bases locais, que ocorre quando há uma troca de coluna básica por uma não básica. Veremos que sob certas condições, somente algumas bases locais precisam ser atualizadas. Isto confere ao método um aspecto atrativo, visto que o maior esforço computacional está



concentrado na atualização das bases. Para compreender esse processo de maneira intuitiva, vamos lançar mão da Figura 2.2 e da discussão com ela relacionada.

Seja  $x_j(1)$  uma variável não básica a entrar na base e seja  $u_k(0)$  uma variável básica pertencente a  $H(0)$ , a sair da base. Suponhamos que existam mais de  $m$  variáveis básicas  $u(0)$  na base global e que as matrizes  $\phi^k(0)$ ,  $k=2, 3, 4$ , sejam não nulas, isto é, existem variáveis  $u(0)$  em todas as bases locais. Lembre que a variável  $x_j(1)$  tem liberdade para entrar em qualquer das bases  $G(0)$ ,  $H(1)$  e  $G(1)$ , mas é proibida de entrar na base  $H(0)$ , desde que esta envolve a equação

$$D(0) u(0) = f(0) - C(0) x(0)$$

somente nas variáveis  $u(0)$ .

Trocamos a variável básica  $u_k(0)$  a sair, com uma variável  $u_i(0)$  pertencente à base  $G(0)$  e correspondente a uma coluna de  $\phi^2(0)$ . Trocamos a variável  $u_k(0)$  com uma variável  $u_i(0)$  ou  $x_i(1)$  pertencente à base  $H(1)$  e correspondente a uma coluna de  $\psi^3(0)$ . Trocamos novamente a variável  $u_k(0)$  com uma variável pertencente à base  $G(1)$  e correspondente a uma coluna de  $\phi(1)$ , isto é,  $u_i(0)$ ,  $x_i(1)$  ou  $u_i(1)$ . Agora a variável  $u_k(0)$ , a sair da base, pertence à base local  $G(1)$ . Retiramos então essa variável e introduzimos a variável  $x_j(1)$  nessa base. Condições serão enunciadas nos teoremas 2.2 e 2.3 para que a variável  $x_j(1)$  possa entrar na base  $G(0)$  ou  $H(1)$ .

Lembre que a matriz básica global  $B$  deve ter no mínimo  $m$  variáveis  $u(0)$ . Portanto, se tivermos somente  $m$  variáveis  $u(0)$  na base e uma variável  $u_k(0)$  está saindo, o critério de entrada tem que estar indicando obrigatoriamente, que uma variável  $u_i(0)$  está entrando.

Outra possibilidade é ter, por exemplo,  $\phi^2(0) = 0$ , ou seja nenhuma variável básica  $u_i(0)$  foi usada na formação de  $G(0)$ . Nesse caso trocamos a variável  $u_k(0)$  a sair com uma variável  $u_i(0)$  pertencente a  $H(1)$  e correspondente a uma coluna de  $\phi^3(0)$ .

É importante pois, ter em mente a composição qualitativa das bases locais e lembrar que qualquer variável a entrar na base

pode fazê-lo em qualquer base local a partir da qual ela figura pela primeira vez. Essa base local envolve a equação na qual a variável a entrar aparece pela primeira vez. No nosso exemplo, a base  $G(0)$  está relacionada com a equação de estado

$$x(1) = A(0) x(0) + B(0) u(0)$$

que é a equação em que as variáveis  $x(1)$  ocorrem pela primeira vez.

A troca de variáveis entre bases adjacentes, quando possível, é mais eficiente que outros esquemas de troca. Ilustremos com um exemplo baseado na figura 2.2. Ao trocarmos a variável  $u_k(0)$ , correspondente à  $k$ -ésima coluna de  $I_m(H(0))$ , com a variável  $u_i(0)$ , correspondente à  $i$ -ésima coluna de  $\phi^2(0)$ , alteramos somente uma linha na matriz  $I_n(G(0))$ .

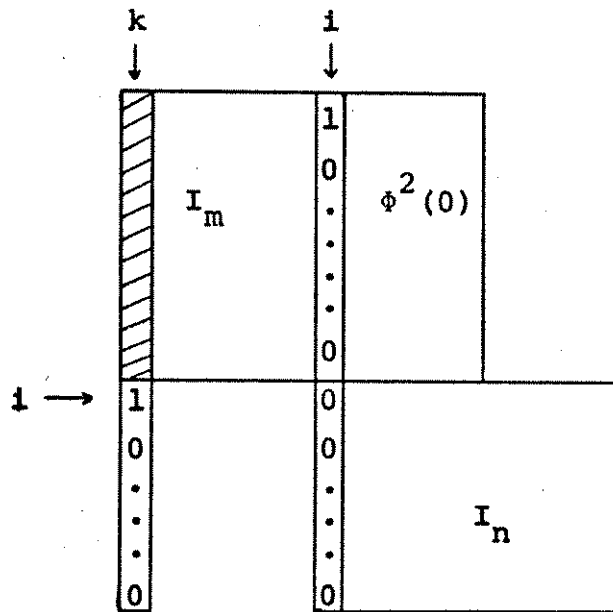


Figura 2.4

A Figura 2.4 mostra a troca da coluna  $k=1$  com a coluna  $i=1$ . Ao pivotearmos em torno do 1º elemento da coluna  $k$  de modo a zerar as componentes situadas abaixo e obtermos novamente a estrutura da Figura 2.2, alteramos apenas a linha  $i=1$  da matriz

$I_n(G(0))$ .

Se a troca de  $u_k(0)$  fosse feita com uma variável  $u_i(0)$ , correspondente a uma coluna de  $\Phi^3(0)$ , alteraríamos então todas as colunas em  $I_n(G(0))$  situadas abaixo de  $\Phi^2(0)$ , quando do pivoteamento. O teorema 2.4 irá mostrar que a matriz  $G^{-1}(0)$  é alterada apenas na sua  $i$ -ésima linha.

Formalizemos então as idéias até aqui expostas.

Designamos o bloco de matrizes quadrado, com dimensão  $(m+n)$ , na diagonal principal

$$N(t) = \left[ \begin{array}{c|c} H(t) & 0 \\ \hline Q(t) & G(t) \end{array} \right] , \text{ por bloco } t$$

Seja  $y^k(t_1)$  uma coluna a sair da base  $B$  e que corresponde a uma coluna de  $H(t_1)$  ou  $G(t_1)$  no bloco  $t_1$  e seja  $q^j(t_2)$  uma coluna não básica. Representamos por  $q^j(t_2)$  o vetor  $v^j(t_2)$  ou  $w^j(t_2)$  (ver sub-seção 2.2). Um fato importante deve ser ressaltado na atualização das bases. A mudança de uma coluna em um bloco  $t_1$  influencia, como se pode ver das expressões (2.8) a (2.13), todos os blocos subsequentes. Os dois teoremas abaixo dão condições suficientes para que a troca de uma coluna em um bloco não influencie os blocos seguintes.

### Teorema 2.2

A troca de uma coluna da base correspondente à  $k$ -ésima coluna da matriz  $H(t)$  não altera a matriz  $\Phi(t)$  e os blocos  $N(\tau)$ ,  $\tau = t+1 \dots T-1$ , se a  $k$ -ésima linha de  $\Phi(t)$  é igual a zero.

### Prova

Consideremos as seguintes matrizes dispostas na diagonal de  $B_{2t-1}$

$$\left[ \begin{array}{c|c} H(t) & P(t) \\ \hline Q(t) & R(t) \end{array} \right]$$

Pré-multiplicando o primeiro bloco de linhas por  $H^{-1}(t)$  e zerando as colunas abaixo de  $H(t)$ , temos

$$\left[ \begin{array}{c|c} I & \phi(t) \\ \hline 0 & \tilde{R}(t) \end{array} \right] \quad \begin{aligned} \phi(t) &= H^{-1}(t) P(t) \\ \tilde{R}(t) &= R(t) - Q(t) \phi(t) \end{aligned}$$

A troca da coluna  $k$  de  $H(t)$  implica em operações de pivoteamento com a  $k$ -ésima linha de  $\phi(t)$ , isto é, esta linha é multiplicada por alguns coeficientes e somada com as outras linhas. Mas desde que essa linha é composta de elementos nulos, a matriz  $\phi(t)$  não se altera e conseqüentemente, pelas expressões (2.8) e (2.9), os blocos seguintes não mudam. Como consequência direta dessas considerações temos que se o elemento  $\phi_k^j(t)$  é zero, então a troca da coluna  $k$  em  $H(t)$  não altera a coluna  $j$  da matriz  $\tilde{R}(t)$ .

Teorema 2.3

A troca de uma coluna da base correspondente à  $k$ -ésima coluna da matriz  $G(t)$  não altera a matriz  $\Psi(t)$  e os blocos  $N(\tau)$ ,  $\tau = t+1 \dots T-1$ , se a  $k$ -ésima linha de  $\Psi(t)$  é nula.

Prova

É idêntica à prova do teorema 2.2 ao considerarmos

$$\left[ \begin{array}{c|c} G(t) & F(t) \\ \hline 0 \begin{matrix} \vdots \\ c^{2t+2}(t+1) \end{matrix} & 0 \begin{matrix} \vdots \\ c^k(t+1) \end{matrix} \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \begin{array}{c|c} I & \Psi(t) \\ \hline 0 & \tilde{c}^k(t+1) \end{array} \right] \quad \begin{aligned} \Psi(t) &= G^{-1}(t) F(t) \\ \tilde{c}^k(t+1) &= \left[ 0 \begin{matrix} \vdots \\ c^k(t+1) \end{matrix} \right] - \\ &\quad - \left[ 0 \begin{matrix} \vdots \\ c^{2t+2}(t+1) \end{matrix} \right] \Psi(t) \end{aligned}$$

e as expressões (2.10) e (2.11).

Suponha que  $y^k(t_1)$ , a coluna a sair da base, corresponda a uma coluna de  $H(t_1)$ . Fazemos a permutação dessa coluna com uma coluna pertencente a  $G(t_1)$  e correspondente a  $\phi^{2t_1+2}(t_1)$ . Com isso a solução básica não se altera e  $y^k(t_1)$  é agora uma coluna de  $G(t_1)$ . Permutamos novamente  $y^k(t_1)$  com uma coluna básica pertencente a  $H(t_1+1)$  do bloco seguinte. Prosseguindo com essas permutações chegamos ao bloco  $t \geq t_2$ , onde  $t_2$  é o índice temporal da coluna  $q^j(t_2)$  a entrar na base. Caso nesse bloco  $t$  ocorram as condições do teorema 2.2 ou 2.3, retiramos a coluna básica  $y^k(t_1)$  e introduzimos a coluna não básica  $q^j(t_2)$ . Portanto, uma variável não básica  $x_i(t_2)$  ou  $u_i(t_2)$ , pode entrar numa base local correspondente ao bloco  $t$ ,  $t = t_2, t_2+1, \dots, T-1$ . Se não encontrarmos nenhum bloco  $t$  para o qual as condições do teorema 2.2 ou 2.3 subsistam, retiramos a coluna básica no último bloco  $T-1$ . Vejamos agora alguns teoremas que estabelecem relações matemáticas traduzindo o que foi exposto acima.

Teorema 2.4

Seja a matriz

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} H & P \\ \hline Q & R \end{array} \right] \end{matrix}, \text{ com } M \text{ e } H \text{ não singulares.}$$

Permutemos a  $k$ -ésima coluna da submatriz  $\begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}$  com a  $l$ -ésima coluna da submatriz  $\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix}$ .

Seja  $\phi_k^l \neq 0$  o elemento de  $\phi = H^{-1}P$  situado na linha  $k$  e coluna  $l$ , também chamado de elemento pivot no simplex.

Representemos as matrizes atualizadas em  $M$  por  $\hat{H}$ ,  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$ ,  $\hat{R}$ . Seguem-se as seguintes relações:

$$\hat{H}^{-1} = E^k H^{-1} \tag{2.35}$$

onde  $E^k$  é uma matriz elementar coluna ( $m \times m$ ) com elementos da

k-ésima coluna dados por

$$\gamma_k = \frac{1}{\phi_k^\ell}, \quad \gamma_i = -\frac{\phi_i^\ell}{\phi_k^\ell}, \quad i=1\dots m, \quad i \neq k$$

$$\hat{\phi}^j = E^k \phi^j \quad j \neq \ell$$

(2.36)

$$\hat{\phi}^\ell = [\gamma_1 \dots \dots \gamma_m]'$$

onde  $\phi^j$  é a j-ésima coluna de  $\phi$ .

$$a-) \quad \hat{G}^{-1} = E_\ell G^{-1}$$

(2.37)

$$b-) \quad \hat{G} = G E_\ell^{-1}, \quad G = R - Q \phi$$

onde  $E_\ell$  é uma matriz elementar linha ( $n \times n$ ) com elementos da  $\ell$ -ésima linha dados por

$$\gamma^j = -\frac{\phi_k^j}{\phi_k^\ell} \quad j=1\dots n \quad (2.38)$$

$E_\ell^{-1}$  também é matriz elementar linha ( $n \times n$ ) com elementos da  $\ell$ -ésima linha dados por

$$\gamma^\ell = -\frac{1}{\phi_k^\ell}, \quad \gamma^j = -\frac{\phi_k^j}{\phi_k^\ell}, \quad j=1\dots n, \quad j \neq \ell \quad (2.39)$$

### Prova

Ver Apêndice A.2 .

O teorema 2.4 nos permite enunciar dois teoremas fundamentais para o problema de atualização das bases.

Teorema 2.5

Seja  $\phi_k^l(t)$  o elemento pivot da matriz  $\phi(t)$ , tal que a coluna  $\phi^l(t)$  corresponda a  $l$ -ésima coluna de  $G(t)$ . Ao permutarmos a  $k$ -ésima coluna de  $H(t)$  com a  $l$ -ésima coluna de  $G(t)$ , os blocos  $\tau = t+1 \dots T-1$ , não se alteram e as seguintes atualizações ocorrem

$$\begin{aligned}
 \text{a-)} \quad \hat{G}^{-1}(t) &= E_l G^{-1}(t) & \text{b-)} \quad \hat{\Psi}(t) &= E_l \Psi(t) \\
 & & & \\
 & & & \text{(2.40)} \\
 \text{c-)} \quad \hat{H}^{-1}(t) &= E^k H^{-1}(t) & \text{d-)} \quad \hat{\phi}^j(t) &= E^k \phi^j(t) \\
 & & & \\
 & & \hat{\phi}^l(t) &= [\gamma_1 \dots \gamma_m]^T
 \end{aligned}$$

onde  $E_l$  e  $E_k$  são as matrizes elementares descritas no teorema 2.4.

Prova

Consideremos as matrizes  $H(t)$  e  $P(t)$  na diagonal de  $B_{2t-1}$  e as seguintes partições

$$P(t) = \begin{bmatrix} P^{2t+2}(t) & \vdots & P^k(t) \end{bmatrix} \quad R(t) = \begin{bmatrix} R^{2t+2}(t) & \vdots & R^k(t) \end{bmatrix}$$

Então, o teorema 2.1 aplicado ao bloco

$$\begin{bmatrix} H(t) & P^{2t+2}(t) & 0 \\ Q(t) & R^{2t+2}(t) & -I^{2t+2}(t+1) \end{bmatrix}$$

fornece uma expressão para  $G(t)$  equivalente à obtida em (2.9).

$$G(t) = \begin{bmatrix} 2t+2 & ; & 2t+2 \\ R(t) & ; & -I(t+1) \end{bmatrix} - Q(t) H^{-1}(t) \begin{bmatrix} 2t+2 & ; \\ P(t) & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = H^{-1}(t) P(t)$$

Lembramos que  $P(t)$  e  $R(t)$  contêm colunas de variáveis de estágios anteriores e que serão usadas em  $G(t)$ . Como  $G(t)$  é quadrada ( $n \times n$ ), podemos aplicar o teorema 2.4 ao trocarmos a coluna  $k$  de  $[H(t) Q(t)]'$  com a coluna  $l$  de  $[P(t) R(t)]'$ .

Note que pela ordenação das colunas de  $\Phi(t)$  a  $l$ -ésima coluna de  $\Phi(t)$  corresponde à  $l$ -ésima coluna de  $G(t)$  e  $\Phi(t)$ , e portanto à  $l$ -ésima componente de  $z^2(t)$ . Assim de (2.37b) vem

$$\hat{G}^{-1}(t) = E_l G^{-1}(t)$$

isto é, somente a linha  $l$  de  $G^{-1}(t)$  é alterada. Pela expressão (2.11)

$$\hat{\Psi}(t) = E_l \Psi(t)$$

Como somente a linha  $l$  de  $\Psi(t)$  muda, de (2.12) temos que  $\tilde{C}^k(t+1)$  não muda, pois a  $l$ -ésima coluna de  $[0; C^{2t+2}(t+1)]$  é a coluna zero (note que  $C^{2t+2}(t+1)$  está abaixo de  $I^{2t+2}(t+1)$  no bloco mostrado acima). O mesmo argumento vale para  $\tilde{A}^k(t+1)$ . Portanto de (2.12) e (2.13), as matrizes  $H(t+1)$ ,  $Q(t+1)$ ,  $P(t+1)$  e  $R(t+1)$  não mudam. Consequentemente os blocos  $t+1 \dots T-1$  não se alteram. As expressões c-) e d-) são obtidas pela aplicação direta do teorema 2.4.

### Teorema 2.6

Seja  $\psi_k^l(t) \neq 0$  o elemento pivot na matriz  $\Psi(t)$ , tal que a coluna  $\psi^l(t)$  corresponda à  $l$ -ésima coluna de  $H(t+1)$ . Ao permutarmos uma coluna da base correspondente à  $k$ -ésima coluna de  $G(t)$  com uma coluna da base correspondente à  $l$ -ésima coluna de  $H(t+1)$ , as seguintes atualizações ocorrem



$$\begin{aligned}
 \text{a-)} \quad \hat{G}^{-1}(t) &= E^k G^{-1}(t) & \text{c-)} \quad \hat{H}^{-1}(t+1) &= E_{1\ell} H^{-1}(t+1) \\
 \text{b-)} \quad \hat{\Psi}(t) &= E^k \Psi^j(t) \quad , \quad j \neq \ell & \text{d-)} \quad \hat{Q}(t+1) &= Q(t+1) E_{1\ell}^{-1} \\
 & \hat{\Psi}^\ell(t) = [\gamma_1 \dots \gamma_n]' & \text{e-)} \quad \hat{\Phi}(t+1) &= E_{1\ell} N_\ell + E_{1\ell} \Phi(t+1)
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

onde  $E^k$  é uma matriz elementar coluna ( $n \times n$ ), com elementos da  $k$ -ésima coluna dados por

$$\gamma_k = \frac{1}{\psi_k^\ell(t)} \quad , \quad \gamma_i = - \frac{\psi_i^\ell(t)}{\psi_k^\ell(t)} \quad i=1 \dots n \quad , \quad i \neq k$$

$E_{1\ell}^{-1}$  é uma matriz elementar linha ( $m \times m$ ), diferindo da matriz identidade pela linha  $\ell$ .

$N_\ell$  é uma matriz que difere da matriz nula pela  $\ell$ -ésima linha, possuindo  $m$  linhas e número de colunas igual à matriz  $P(t+1)$ . As bases  $G(t+1)$ ,  $H(\tau)$ ,  $G(\tau)$ ,  $\tau = t+2 \dots T-1$ , não mudam.

### Prova

As expressões a-) e b-) resultam da aplicação direta do teorema 2.4.

Através das expressões (2.11) e (2.37 b) temos que as matrizes  $\tilde{C}^k(t+1)$  e  $\tilde{A}^k(t+1)$  são atualizadas

$$\hat{C}^k(t+1) = \tilde{C}^k(t+1) E_\ell^{-1} \quad , \quad \hat{A}^k(t+1) = \tilde{A}^k(t+1) E_\ell^{-1}$$

onde  $E_\ell^{-1}$  é uma matriz elementar linha quadrada, com dimensão dada pelo número de colunas de  $\Psi(t)$ , tendo os seguintes elementos na linha  $\ell$

$$\gamma^k = -\frac{1}{\psi_k^k(t)}, \quad \gamma^j = -\frac{\psi_k^j(t)}{\psi_k^k(t)}, \quad j \neq k$$

Pelas expressões (2.12) e (2.13), sabemos que algumas colunas de  $\tilde{C}^k(t+1)$  e  $\tilde{A}^k(t+1)$  são usadas na formação de  $H(t+1)$ ,  $Q(t+1)$ ,  $P(t+1)$ ,  $R(t+1)$ . Podemos pois escrever

$$\hat{M}(t+1) = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} m & s \\ \hline H(t+1) & P(t+1) \\ \hline Q(t+1) & R(t+1) \end{matrix} & \begin{matrix} m & s \\ \hline E_{1\ell}^{-1} & N_\ell \\ \hline 0 & I_s \end{matrix} \end{array} \right] \begin{matrix} m \\ s \end{matrix} \quad (2.42)$$

A matriz do lado direito é construída do seguinte modo: adicionamos elementos unitários na diagonal principal e zeros em todas as outras posições da matriz  $E_{1\ell}^{-1}$  até torná-la quadrada com mesma dimensão do número de colunas da matriz a sua esquerda. A seguir os elementos da linha  $\ell$  de  $E_{1\ell}^{-1}$  são permutados de acordo com a permutação de colunas de  $\tilde{C}^k(t+1)$  e  $\tilde{A}^k(t+1)$  durante a formação de  $H(t+1)$ ,  $P(t+1)$ ,  $Q(t+1)$  e  $R(t+1)$ .

A partir de (2.8) temos

$$\hat{R}(t+1) = \hat{R}(t+1) - \hat{Q}(t+1) \hat{H}(t+1) \hat{P}(t+1)$$

De (2.42)

$$\hat{P}(t+1) = H(t+1) N_\ell + P(t+1)$$

$$\hat{H}^{-1}(t+1) = E_{1\ell}^{-1} H^{-1}(t+1)$$

$$\hat{R}(t+1) = Q(t+1) N_\ell + R(t+1)$$

$$\hat{Q}(t+1) = Q(t+1) E_{1\ell}^{-1}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{R}}(t+1) &= Q(t+1) N_{\ell} + R(t+1) - \\ &- Q(t+1) E_{1\ell}^{-1} E_{1\ell} H^{-1}(t+1) [H(t+1) N_{\ell} + P(t+1)] = \\ &= R(t+1) - Q(t+1) H^{-1}(t+1) P(t+1) = \bar{R}(t+1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Finalmente

$$\widehat{\Phi}(t+1) = \widehat{H}^{-1}(t+1) \widehat{P}(t+1) = E_{1\ell} N_{\ell} + E_{1\ell} \Phi(t+1)$$

Os elementos da linha  $\ell$  de  $E_{1\ell}$  distintos de zero, são dados, de acordo com (2.38), por  $-\psi_k^j(t)$ . Como o produto  $E_{1\ell} N_{\ell}$  difere da matriz nula somente pela linha  $\ell$ , então a matriz  $\Phi(t+1)$  só é alterada na sua  $\ell$ -ésima linha. A matriz  $H^{-1}(t+1)$  também sofre alterações somente na linha  $\ell$ . De (2.43) temos que a matriz  $\bar{R}(t+1)$  não muda e de (2.9) notamos que  $G(t+1)$ ,  $F(t+1)$  e todas as matrizes subsequentes não mudam.

As demonstrações dos teoremas 2.5 e 2.6 basearam-se no fato de que o elemento pivot diferente de zero  $\phi_k^{\ell}(t)$  ( $\psi_k^{\ell}(t)$ ), corresponde a uma coluna básica a ser utilizada na base local  $G(t)$  ( $H(t+1)$ ). Pode ocorrer, no entanto, que o primeiro elemento na linha  $k$ ,  $\phi_k^{\ell}(t) \neq 0$ , corresponda a uma coluna básica a ser utilizada na base  $H(t^*)$ ,  $t^* > t$ , e todos os outros elementos  $\phi_k^j(t)$  relacionados com as colunas a serem usadas nas bases  $G(t)$ ,  $G(\tau)$ ,  $H(\tau)$ ,  $\tau = t+1 \dots t^*-1$ , sejam nulos. Devemos pois, trocar a coluna  $k$  de  $H(t)$  com essa coluna de  $H(t^*)$  (para a qual  $\phi_k^{\ell}(t) \neq 0$ ). Apesar disso parecer complicante, veremos que computacionalmente, o fato acima apresenta vantagens. Enunciamos abaixo o teorema relacionado com essa troca de colunas. Teoremas análogos podem ser obtidos ao considerarmos a troca de colunas entre  $H(t)$  e  $G(t^*)$ ,  $G(t)$  e  $G(t^*)$ ,  $G(t)$  e  $H(t^*+1)$ ,  $t^* > t$ .

Teorema 2.7

Na linha  $k$  de  $\phi(t)$  seja o primeiro elemento  $\phi_k^l(t) \neq 0$  tal que corresponda à  $q$ -ésima coluna básica a ser usada na base local  $H(t^*)$ ,  $t^* > t$ . Então ocorrem as seguintes atualizações

$$\hat{H}^{-1}(t) = E^k H^{-1}(t)$$

$$\hat{\phi}^{2j}(t) = E^k \phi^{2j}(t), \quad j \neq q \quad \hat{\phi}^{2q}(t) = [\gamma_1 \dots \gamma_m]'$$

$$\hat{\Psi}^2(\tau) = \Psi^2(\tau) E_q \quad \tau = t \dots t^*-1$$

(2.44)

$$\hat{\phi}^2(\tau) = \phi^2(\tau) E_q \quad \tau = t+1 \dots t^*-1$$

$$\hat{H}^{-1}(t^*) = E_{lq}^{-1} H^{-1}(t^*)$$

$$\hat{\phi}(t^*) = E_{lq}^{-1} N_q + E_{lq}^{-1} \phi(t^*)$$

$$\hat{Q}(t^*) = Q(t^*) E_{lq}$$

onde  $\phi^2(\tau)$  é uma partição de  $\phi(\tau)$ . As bases  $G(t)$ ,  $H(\tau)$ ,  $G(\tau)$ ,  $\tau = t+1 \dots t^*-1$ , não mudam.

Prova

Dividimos a matriz  $\phi(t)$  em duas partes,  $\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi^1(t) \\ \phi^2(t) \end{bmatrix}$  onde  $\phi^1(t)$  possui as colunas de  $\phi(t)$  a serem usadas nas bases  $G(t)$ ,  $G(\tau)$ ,  $H(\tau)$ ,  $\tau = t+1 \dots t^*-1$  e para as quais  $\phi_k^j(t) = 0$ . Consequentemente,  $\phi^2(t)$  possui colunas a serem usadas a partir da base  $H(t^*)$ . Seja  $\phi^l(t)$  a  $l$ -ésima coluna de  $\phi(t)$  e simultaneamente a  $q$ -ésima de  $\phi^2(t)$ , para qual  $\phi_k^l(t) \neq 0$ . Ao trocarmos a coluna  $k$  de  $H(t)$  com a coluna  $l$  de  $P(t)$ , pelo teo-

rema 2.5, a matriz  $H^{-1}(t)$  é atualizada

$$\hat{H}^{-1}(t) = E^k H^{-1}(t)$$

onde  $E^k$  é a matriz elementar coluna ( $m \times m$ ) com elementos da  $k$ -ésima coluna dados por

$$\gamma_k = \frac{1}{\phi_k^l(t)} \quad \gamma_i = -\frac{\phi_i^l(t)}{\phi_k^l(t)} \quad i=1 \dots m, \quad i \neq k$$

Consideremos as partições acima referidas no bloco de matrizes da diagonal de  $B_{2t-1}$

$$\begin{bmatrix} H(t) & P^1(t) & P^2(t) & 0 \\ Q(t) & R^1(t) & R^2(t) & -I(t+1) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & \phi^1(t) & \phi^2(t) & 0 \\ 0 & \tilde{R}^1(t) & \tilde{R}^2(t) & -I(t+1) \end{bmatrix}$$

De acordo com a consequência do teorema 2.2 e da figura acima as matrizes  $\phi^1(t)$  e  $\tilde{R}^1(t)$  não mudam. Por outro lado

$$\hat{\phi}^{2j}(t) = E^k \phi^{2j}(t) \quad , \quad j \neq q \quad \hat{\phi}^{2q} = [\gamma_1 \dots \gamma_m]^t$$

De (2.34b)

$$\hat{\tilde{R}}^2(t) = \tilde{R}^2(t) E_q^{-1}$$

onde  $E_q^{-1}$  é a matriz elementar linha com dimensão igual ao número de colunas de  $\tilde{R}^2(t)$  e elementos da linha  $q$  dados por

$$\gamma^q = -\frac{1}{\phi_k^l(t)} \quad \gamma^j = -\frac{\phi_k^{2j}(t)}{\phi_k^l(t)} \quad , \quad j \neq q$$

Formamos agora a base  $H(t^*)$  com algumas colunas de  $\tilde{C}^{k1}(t^*)$ , algumas de  $\hat{C}^{k2}(t^*)$  e algumas de  $D(t+1)$ , notando que apenas as matrizes  $\hat{C}^{k2}(t^*)$  e  $\hat{A}^{k2}(t^*)$  estão atualizadas. Usando os mesmos argumentos do teorema 2.6 (ver (2.42)) obtemos os resultados para  $\hat{H}^{-1}(t^*)$ ,  $\hat{\Phi}(t^*)$  e  $\hat{Q}(t^*)$ .

Estamos finalmente aptos a descrever a atualização das bases, baseada nos teoremas 2.5, 2.6 e 2.7. Somente para exemplificar (todos os outros casos são análogos), seja  $y^k(t_1)$  a coluna a sair da base, correspondente à  $k$ -ésima coluna de  $H(t_1)$ . Seja  $v^j(t_2)$  a coluna correspondente a uma variável de controle  $u_j(t_2)$  que vai entrar na base. Lembramos que o índice  $(k, t_1)$  é determinado de (2.33). Seja, por exemplo

$$(k, t_1) = \arg \left\{ \frac{z_k^1(t_1)}{v_k^1(t_1)} \right\}, \quad v_k^1(t_1) > 0$$

Dois casos são possíveis

1-  $t_1 < t_2$

Nesse caso a linha  $k$  de  $\Phi(t_1)$  contém um elemento pivot diferente de zero, desde que  $v_k^1(t_1) > 0$ . De (2.23) e (2.24) temos que

$$v_k^1(t_1) = - \sum_{\tau=t_1}^{T-1} [\phi_k^{2\tau+2}(t_1); 0] v^2(\tau) - \sum_{\tau=t_1+1}^{T-1} [\phi_k^{2\tau+1}(t_1); 0] v^1(\tau)$$

e portanto, pelo menos um elemento na linha  $\phi_k(t_1)$  é distinto de zero. Suponha que a esse elemento corresponda a coluna  $l$  de  $G(t_1)$ . Portanto o  $l$ -ésimo elemento da linha  $\phi_k^{2t_1+2}(t_1)$  e  $v_l^2(t_1)$  são distintos de zero. Trocamos então a coluna  $k$  de  $H(t_1)$  com a coluna  $l$  de  $G(t_1)$ , atualizando as matrizes  $H(t_1)$ ,  $G(t_1)$ ,  $\Phi(t_1)$  e  $\Psi(t_1)$  de acordo com o teorema 2.5. Portanto, a coluna a sair da base está situada na posição  $l$  de  $G(t_1)$ .

Formamos agora as seguintes matrizes:

$G(t)$  - com algumas colunas de  $\tilde{R}^1(t)$  e algumas de  $-I(t+1)$ .

$F^1(t)$  - com as colunas de  $\tilde{R}^1(t)$  e as de  $-I(t+1)$  não usadas para  $G(t)$ .

$F^2(t)$  - com as colunas de  $\tilde{R}^2(t)$

$$[G(t) \ ; \ F^1(t) \ ; \ F^2(t)] \quad [I \ ; \ \psi^1(t) \ ; \ \psi^2(t)]$$

$$\psi^1(t) = G^{-1}(t) F^1(t) \quad ; \quad \psi^2(t) = G^{-1}(t) F^2(t)$$

Do exposto acima  $G(t)$  e  $\psi^1(t)$  não se alteram, enquanto que

$$\hat{\psi}^2(t) = \psi^2(t) E_q$$

Prosseguindo desse modo chegaremos ao instante  $t^*-1$ , com a seguinte configuração

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cccc} I & \psi^1(t^*-1) & \hat{\psi}^2(t^*-1) & 0 \\ 0 \ ; \ C(t^*) & C^k(t^*) & 0 & D(t+1) \\ 0 \ ; \ A(t^*) & A^k(t^*) & 0 & B(t+1) \end{array} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} I & \psi^1(t^*-1) & \psi^2(t^*-1) & 0 \\ 0 & \tilde{C}^{k1}(t^*) & \tilde{C}^{k2}(t^*) & D(t+1) \\ 0 & \tilde{A}^{k1}(t^*) & \tilde{A}^{k2}(t^*) & B(t+1) \end{array} \right] \end{array}$$

$$\tilde{C}^{k1}(t^*) = C^k(t^*) - [0 \ ; \ C(t^*)] \psi^1(t^*-1)$$

$$\tilde{A}^{k1}(t^*) = A^k(t^*) - [0 \ ; \ A(t^*)] \psi^1(t^*-1)$$

$$\psi^1(t^*-1) = -G^{-1}(t^*-1) I^k(t^*)$$

$$\tilde{C}^{k2}(t^*) = - [0 \ ; \ C(t^*)] \hat{\psi}^2(t^*-1)$$

$$\tilde{A}^{k2}(t^*) = - [0 \ ; \ A(t^*)] \hat{\psi}^2(t^*-1)$$

$$\hat{\psi}^2(t^*-1) = G^{-1}(t^*-1) F^2(t^*-1)$$

De acordo com (2.23) e (2.24) temos

$$v_{\ell}^2(t_1) = - \sum_{\tau=t_1+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\ell}^{2\tau+2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v^2(\tau) - \sum_{\tau=t_1+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\ell}^{2\tau+1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v^1(\tau)$$

Mas  $v_{\ell}^2(t_1) \neq 0$ , e portanto, deve haver pelo menos um elemento na linha  $\hat{\Psi}_{\ell}(t_1)$  distinto de zero. Suponha que a esse elemento corresponda a coluna  $m$  de  $H(t_1+1)$ . Trocamos pois a coluna  $\ell$  de  $G(t_1)$  com a coluna  $m$  de  $H(t_1+1)$  de acordo com o teorema 2.6. Prosseguindo com essas permutações e atualizações chegamos ao seguinte caso;

2-  $t_1 \geq t_2$

As permutações com a coluna a sair da base devem continuar até que adentremos um bloco  $t_3$ , onde as condições do teorema 2.2 ou 2.3 sejam satisfeitas. Vejamos porque essas condições podem ser satisfeitas. Suponhamos que a coluna a sair da base esteja situada na posição  $k$  da matriz  $H(t_3)$ ,  $t_3 \geq t_2$ . Então, pela expressão (2.24)

$$v_k^1(t_3) = \overset{*}{v}_k^1(t_3) - \sum_{\tau=t_3+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \phi_k^{2\tau+2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v^2(\tau) - \sum_{\tau=t_3+1}^{T-1} \begin{bmatrix} \phi_k^{2\tau+1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v^1(\tau)$$

Como anteriormente  $v_k^1(t_3) \neq 0$ . Portanto, ou  $\overset{*}{v}_k^1(t_3) \neq 0$ , ou a linha  $\phi_k(t_3)$  possui pelo menos um elemento diferente de zero. Portanto se  $\overset{*}{v}_k^1(t_3) \neq 0$ , a linha  $\phi_k(t_3)$  tem agora permissão para ter todos os seus elementos nulos. Supondo que isso ocorra, retiramos a coluna a sair nessa base  $H(t_3)$  e introduzimos a não básica. Se as condições do teorema 2.2 ou 2.3 não forem satisfeitas em nenhum bloco, retiramos a coluna básica na base  $G(T-1)$  e introduzimos a não básica nessa base local. Como a variável  $u_j(t_2)$  vai entrar na base  $H(t_3)$ , devemos calcular os



coeficientes de sua coluna  $v^j(t_2)$  na base  $H(t_2)$  de acordo com o processo construtivo das bases locais exposto na sub-seção 2.1. Denominando essa coluna recalculada por  $\hat{v}^1(t_3)$ , é fácil verificar que  $\hat{v}^1(t_3)$  é calculada a partir da (2.23) para  $\tau = t_2, t_2+1, \dots, t_3$ . Anexamos agora  $\hat{v}^1(t_3)$  ao lado de  $H^{-1}(t_3)$  e pivoteamos em torno do elemento  $\hat{v}_k^1(t_3)$  que é  $\neq 0$ . Mostremos porque isso ocorre. Seja  $\bar{v}^1(t_3)$  a representação da coluna  $v^j(t_2)$  nas bases agora atualizadas. Podemos, pois, escrever

$$\bar{v}_k^1(t_3) = \hat{v}_k^1(t_3) - \sum_{\tau=t_3+1}^{T-1} [\phi_k^{2\tau+2}(t_3) \ ; \ 0] v^2(\tau) - \sum_{\tau=t_3+1}^{T-1} [\phi_k^{2\tau+1}(t_3) \ ; \ 0] v^1(\tau)$$

Como supusemos que as condições do teorema 2.2 estão satisfeitas, temos que

$$\hat{v}_k^1(t_3) = \bar{v}_k^1(t_3) \neq 0$$

Para finalizar um último detalhe. Introduza os vetores  $\hat{v}^1(t)$  na posição correspondente à k-ésima coluna das matrizes  $\phi^{2t_3+1}(t)$ ,  $t = t_2 \dots t_3-1$  e introduza os vetores  $\hat{v}^2(t)$  na posição correspondente à k-ésima coluna das matrizes  $\psi^{2t_3+1}(t)$ ,  $t_2 \dots t_3-1$ .

A Figura 2.5 mostra um trecho da matriz U e demonstra a necessidade da introdução desses vetores.

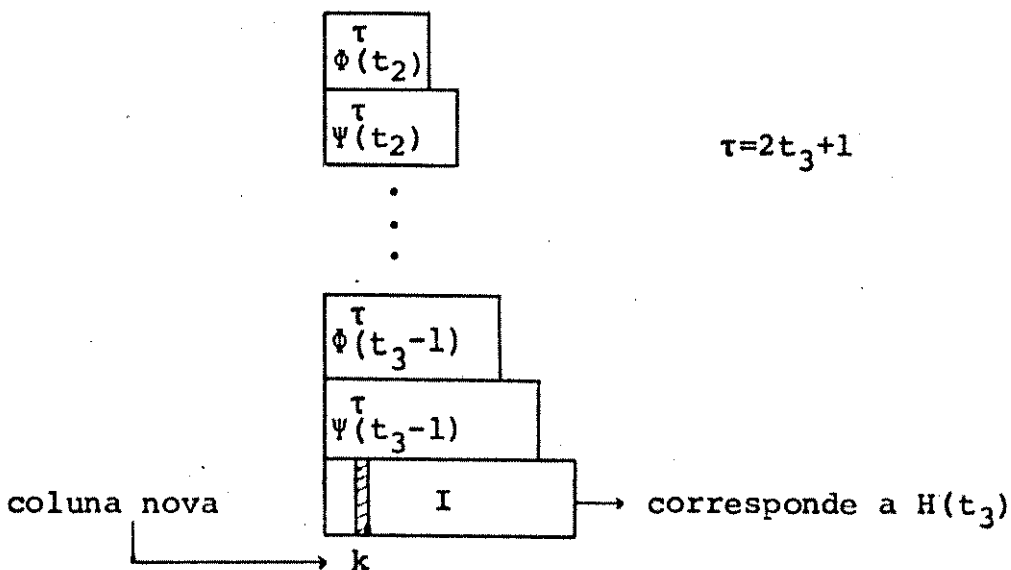


Figura 2.5

Recomendamos a análise da Figura 2.5 conjuntamente com a Figura 2.2. Durante a explicação da fase I ilustramos com um pequeno exemplo a introdução da variável numa base local.

### III. 2.4 ESQUEMA GERAL DO MÉTODO

Suponhamos conhecida uma base B. Se isso não ocorrer temos que lançar mão da fase I a ser discutida na sub-seção seguinte.

Passo 1 : Realize a fatoração da matriz B, obtendo o conjunto de bases locais  $\{H(t), G(t), t = 0 \dots T-1\}$ .

Passo 2 : Calcule a solução básica atual  $\{z^1(t), z^2(t), t=0 \dots T-1\}$  através de (2.18) e (2.19).

Passo 3 : Calcule os multiplicadores simplex  $\{\lambda(t), p(t+1), t = 0 \dots T-1\}$ . Calcule o custo reduzido das variáveis não básicas,  $\hat{c}^j(t)$ ,  $(j, t) \in J$  através de (2.30). Se  $\hat{c}^j(t) \geq 0$ ,  $\forall (j, t) \in J$ , a solução é ótima. Caso contrário vá para 4.

Passo 4 : Escolha algum  $\hat{c}^j(t) < 0$ , de acordo com algum critério (o primeiro ou o mais negativo). Seja  $(j, t_2)$  o índice escolhido. Calcule a representação da coluna não básica em termos das bases locais através de (2.23), (2.24) ou (2.27).

Passo 5 : Determine qual a variável a sair da base através de (2.31) ou (2.33). Se  $v_i^1(t)$ ,  $v_i^2(t)$ ,  $w_i^1(t)$ ,  $w_i^2(t)$  são não positivos  $\forall (i, t) \in I$ , a solução é ilimitada. Seja  $(k, t_1)$  o índice achado.

Passo 6 : Calcule a nova solução básica através (2.32) ou (2.34).

Passo 7 : Atualize as bases locais de acordo com o exposto na sub-seção 2.3. Volte para 3.

III. 2.5 FASE I

A fase I consiste em se achar uma solução básica factível usando a metodologia das bases locais. Da mesma maneira que no simplex clássico, introduzimos variáveis artificiais e adotamos inicialmente bases locais unitárias.

Consideremos novamente o caso de um horizonte  $T=2$  e sejam  $\delta(t+1)$  e  $\theta(t)$ ,  $t = 0, 1$ , as variáveis artificiais. O problema a ser resolvido na fase I é, portanto:

$$\min \sum_{t=0}^1 \delta(t+1) + \theta(t)$$

$$\text{s.a} \quad -x(t+1) + A(t) x(t) + B(t) u(t) + \delta(t+1) = \ell(t) \quad t=0, 1$$

$$C(t) x(t) + D(t) u(t) + \theta(t) = f(t)$$

$$u(t) \geq 0, \quad x(t+1) \geq 0, \quad \delta(t+1) \geq 0, \quad \theta(t) \geq 0$$

O vetor  $\ell(t)$  engloba o caso mais geral em que as equações de estado envolvem constantes diferentes de zero. Caso  $\ell(t) = 0$ , então não há necessidade das variáveis artificiais  $\delta(t+1)$  e a solução básica de partida é:

$$x(t+1) = u(t) = 0$$

$$t=0 \dots T-1$$

$$\theta(t) = f(t)$$

Estamos supondo também que as restrições que acoplam estado e controle tenham sido arranjadas de tal modo que  $f(t) > 0$ . Se ao fim da fase I, alguma variável artificial resultar na base com valor positivo, então o conjunto de restrições é inconsistente.

Consideremos o tableau relacionado com o problema acima.

	$u(0)$	$\theta(0)$	$x(1)$	$\delta(1)$	$u(1)$	$\theta(1)$	$x(2)$	$\delta(2)$
	$r$	$m$	$n$	$n$	$r$	$m$	$n$	$n$
$m$	$D(0)$	$I$						
$n$	$B(0)$		$-I(1)$	$I$				
$m$			$C(1)$		$D(1)$	$I$		
$n$			$A(1)$		$B(1)$		$-I(2)$	$I$

Figura 2.6

As matrizes indicadas no tableau são as mesmas matrizes originais do problema 1 da P.L.D. e não mais as matrizes relacionadas com colunas básicas como notado no início da seção 2.

São adotadas como bases locais iniciais, as matrizes identidade  $I$  com dimensão  $m$  e  $n$  relacionadas com as variáveis artificiais.

Seja agora um exemplo em que todas as variáveis não artificiais até a presente iteração, tenham entrado nas bases locais correspondentes a equações em que essas variáveis figuram pela primeira vez. Suponhamos agora que uma variável  $u_i(0)$  vá entrar na última base local. A configuração da matriz  $B$  para esse caso é:

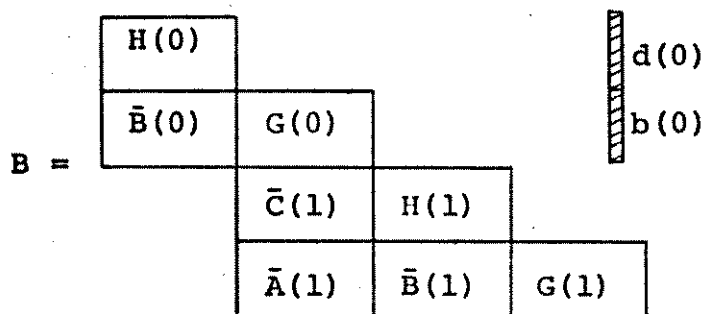


Figura 2.7

A Figura 2.7 ilustra as bases locais  $H(0)$ ,  $G(0)$ ,  $H(1)$  e  $G(1)$ , onde

H(0) é formada com variáveis u(0) e  $\theta(0)$ .  $m \times m$   
 G(0) é formada com variáveis x(1) e  $\delta(1)$ .  $n \times n$   
 H(1) é formada com variáveis u(1) e  $\theta(1)$ .  $m \times m$   
 G(1) é formada com variáveis x(2) e  $\delta(2)$ .  $n \times n$

As matrizes abaixo das bases locais contêm colunas de zeros e colunas relacionadas com as variáveis não artificiais das bases locais. A coluna  $(d(0), b(0))'$  indicada na figura corresponde à variável  $u_1(0)$  a entrar na base G(1).

Vamos decompor a matriz B no produto de duas matrizes triangulares, ou seja  $B = \bar{B} U$ .

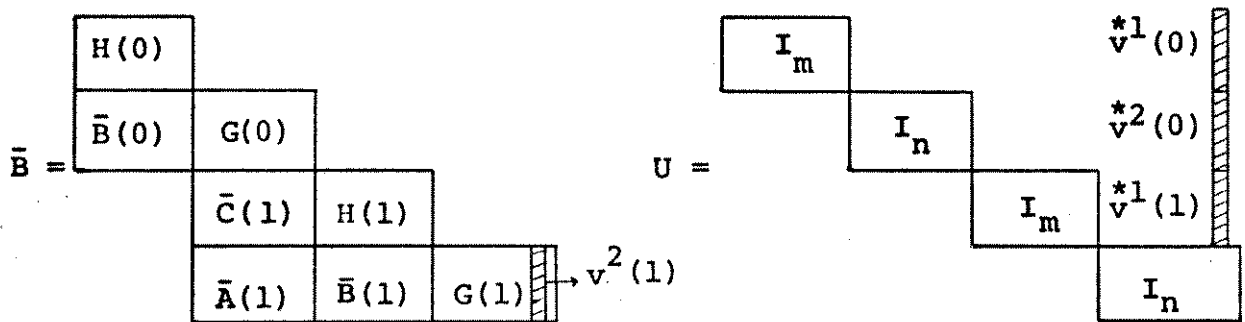


Figura 2.8

Os sub-vetores indicados na Figura 2.8 tem expressões tais que,  $B = \bar{B} U$ , ou seja

$$\begin{aligned} v^{*1}(0) &= H^{-1}(0) d(0) \\ v^{*2}(0) &= G^{-1}(0) [b(0) - \bar{B}(0) v^{*1}(0)] \\ v^{*1}(1) &= -H^{-1}(1) \bar{C}(1) v^{*2}(0) \\ v^{*2}(1) &= -[\bar{A}(1) v^{*2}(0) + \bar{B}(1) v^{*1}(1)] \end{aligned} \tag{2.45}$$

Para atualizar a inversa  $G^{-1}(1)$  basta calcular a representação de  $v^{*2}(1)$  na base G(1), isto é,

$$v^2(1) = G^{-1}(1) v^2(1)$$

e pivotar na linha correspondente à variável artificial que está saindo da base.

Suponhamos que algumas variáveis  $u(0)$  tenham entrado nessa base  $G(1)$  e que a mesma tenha sido atualizada da maneira indicada acima. Suponha agora que uma variável  $u_1(0)$  tenha entrado na base  $H(0)$ . Com isso, essa base local é atualizada e os vetores  $v^2(1)$  em (2.45) correspondentes às variáveis  $u(0)$  que entraram em  $G(0)$ , devem ser recalculados. A matriz  $G(1)$  deve então ser atualizada através da pré-multiplicação de tantas matrizes de pivoteamento, quantos forem esses vetores recalculados.

Esse pequeno exemplo ilustra a dificuldade de atualização das bases locais, que também ocorre na fase II, ao não providenciarmos um processo mais eficiente, que consiste na troca de variáveis entre bases locais como já explicado anteriormente. Para que essa troca possa acontecer e a atualização seja eficiente sugerimos a seguir uma possível estratégia.

Inicie com as bases locais unitárias e coloque uma variável  $u_1(0)$  na base. É fácil ver através da representação da coluna dessa variável que a mesma só consegue expulsar uma variável  $\theta_1(0)$  ou  $\delta_1(1)$ , isto é,  $u_1(0)$  entra em  $H(0)$  ou  $G(0)$ . Suponha então que se consiga colocar algumas variáveis  $u_1(0)$  em  $H(0)$ .

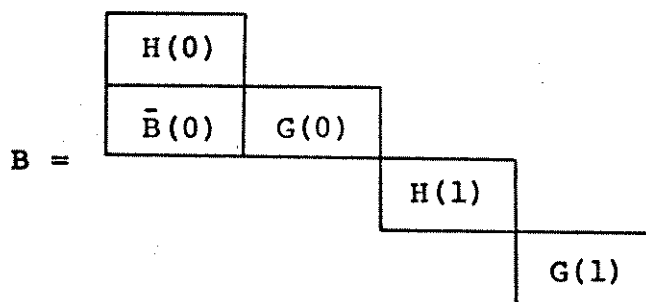
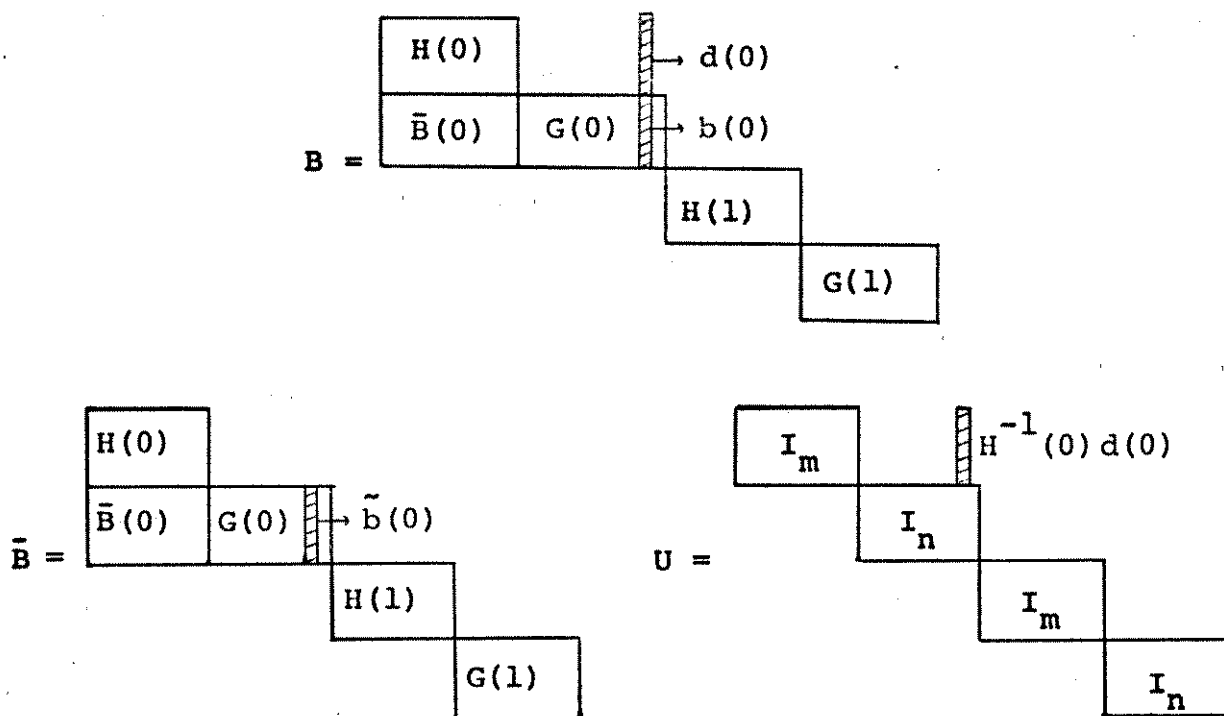


Figura 2.9

A Figura 2.9 mostra a configuração da base B com variáveis  $u(0)$  em  $H(0)$ . Cada vez que introduzimos uma variável desse tipo, atualizamos  $H^{-1}(0)$  através da pré-multiplicação de uma ma-

matriz de pivoteamento. As outras bases continuam unitárias. A matriz  $B$  é triangular inferior e sua decomposição  $\bar{B} U$  é evidente.

Suponha agora que uma variável  $u_i(0)$  entre em  $G(0)$ .



$$\tilde{b}(0) = b(0) - \bar{B}(0) H^{-1}(0) d(0)$$

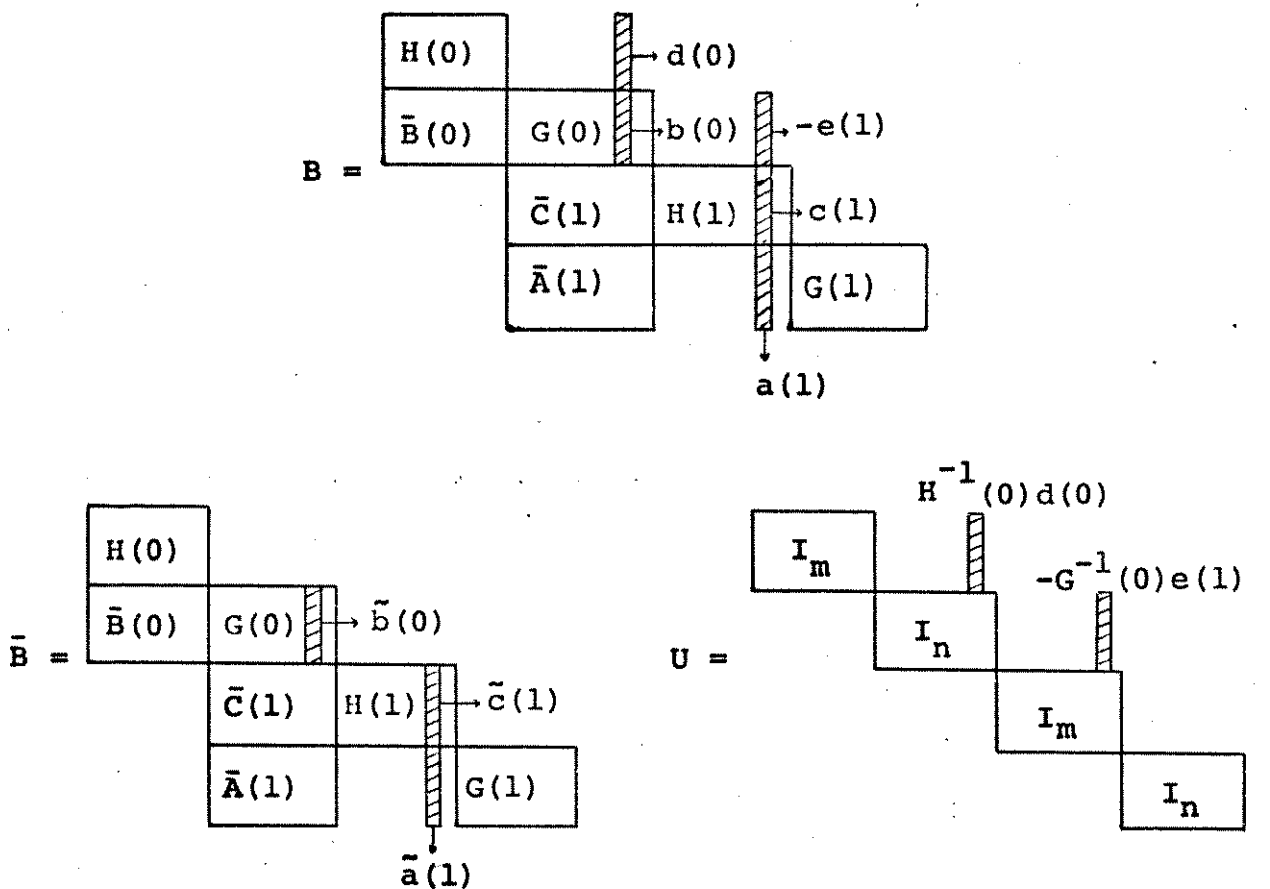
Figura 2.10

A Figura 2.10 mostra a matriz  $B$ , sua decomposição  $\bar{B} U$  e a coluna  $(d(0), b(0))'$  correspondente à variável  $u_i(0)$  a entrar na base. A definição de  $\tilde{b}(0)$  é tal que  $B = \bar{B} U$ . Para atualizar  $G^{-1}(0)$  basta calcular a representação de  $\tilde{b}(0)$  na base  $G(0)$ , isto é

$$\tilde{b}^*(0) = G^{-1}(0) \tilde{b}(0)$$

e pivotar na linha correspondente à variável artificial que sai da base. Tente colocar logo a seguir mais algumas variáveis  $u_i(0)$  em  $G(0)$ . Com isso a atualização da base global reduz-se à simples atualização de  $G(0)$ . Não volte a colocar variáveis  $u_i(0)$  em  $H(0)$ , pois a atualização da mesma irá alterar todas as colunas introduzidas em  $G(0)$ .

Introduza agora uma variável  $x_1(1)$  na base, procurando, é claro, sempre expulsar variáveis artificiais. Suponha que se consiga colocar algumas variáveis  $x_1(1)$  em  $G(0)$ . Com isso atualizaremos somente a base  $G(0)$ . Quando isso não for mais possível, procure introduzir uma variável  $x_1(1)$  em  $H(1)$ .



$$\tilde{c}(1) = c(1) + \tilde{C}(1) G^{-1}(0)e(1) \quad \tilde{a}(1) = a(1) + \tilde{A}(1) G^{-1}(0)e(1)$$

Figura 2.11

A Figura 2.11 mostra a matriz  $B$  com variáveis  $u(0)$  em  $H(0)$ ,  $x(1)$  em  $G(0)$ , uma variável  $u_1(0)$  em  $G(0)$  e uma variável  $x_1(1)$  em  $H(1)$  representada pela coluna  $(-e(1), c(1), a(1))'$ . A decomposição  $\tilde{B} U$  é obtida de maneira análoga ao caso anterior.

Prosseguindo dessa maneira, tente colocar variáveis  $u(1)$  em  $H(1)$ , uma variável  $u_1(1)$  em  $G(1)$  e variáveis  $x(2)$  em  $G(1)$ , sempre lembrando a composição das bases locais, como exposto na sub-seção 2.1.



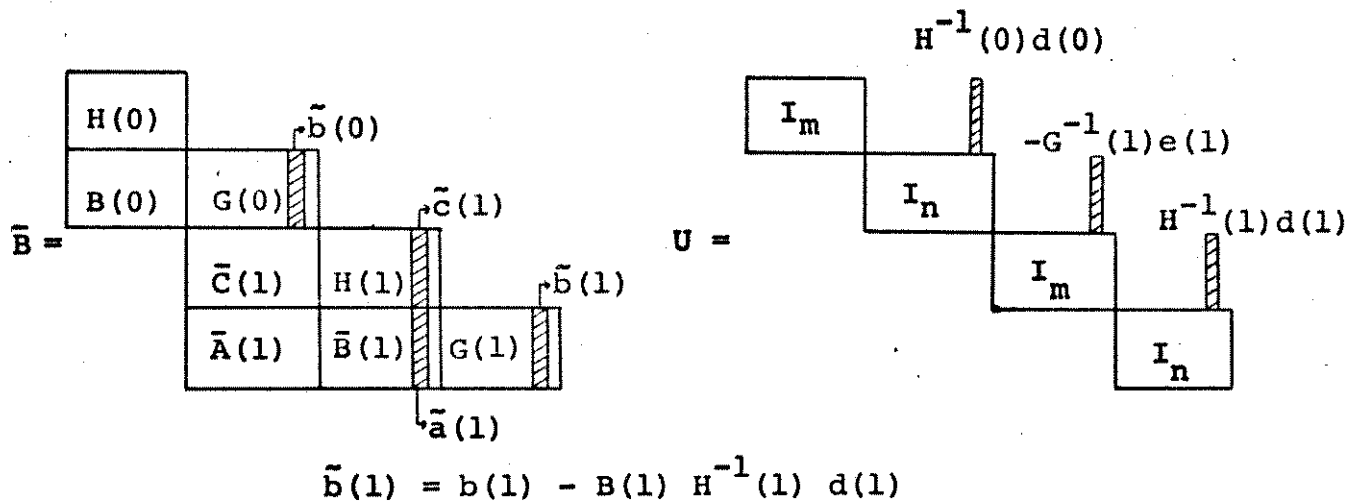


Figura 2.12

A composição das bases locais na Figura 2.12 é a seguinte:

$H(0)$  contém variáveis  $u_i(0)$  e  $\theta_i(0)$ .

$G(0)$  contém variáveis  $x_i(1)$ ,  $\delta_i(1)$  e uma variável  $u_i(0)$ .

$H(1)$  contém variáveis  $u_i(1)$ ,  $\theta_i(1)$  e uma variável  $x_i(1)$ .

$G(1)$  contém variáveis  $x_i(2)$ ,  $\delta_i(2)$  e uma variável  $u_i(1)$ .

Suponha agora que uma variável  $x_i(1)$  queira entrar e que a variável  $\theta_i(0)$  queira sair. Permutamos então  $\theta_i(0)$  com aquela variável  $u_i(0)$  em  $G(0)$ . Trocamos  $\theta_i(0)$  com a variável  $x_i(1)$  que está em  $H(1)$ . Trocamos novamente  $\theta_i(0)$  com a variável  $u_i(1)$  que está em  $G(1)$ . Retiramos então  $\theta_i(0)$  na base  $G(1)$  e introduzimos  $x_i(1)$  nessa base local.

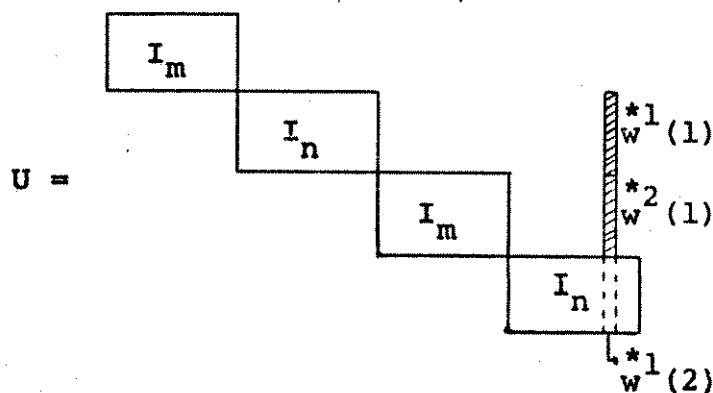


Figura 2.13

A Figura 2.13 mostra a matriz U após as trocas. A coluna indicada corresponde à coluna recalculada de  $x_i(1)$  a entrar na base  $G(1)$ . A obtenção dessa coluna é feita através do cálculo da sua representação nas bases já atualizadas, de modo idêntico à fase II, ou seja

$$\begin{aligned} \bar{w}^1(1) &= -G^{-1}(0) e(1) \\ \bar{w}^2(1) &= H^{-1}(1) [c(1) - \bar{c}(1) \bar{w}^1(1)] \\ \bar{w}^1(2) &= G^{-1}(1) [a(1) - \bar{A}(1) \bar{w}^1(1) - \bar{B}(1) \bar{w}^2(1)] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Em (2.46) a coluna  $(-e(1), c(1), a(1))'$  corresponde à variável  $x_i(1)$  a entrar na base. O pedaço de coluna,  $\bar{w}^1(2)$ , indicado em pontilhado não faz parte da matriz U, mas sim é usado para atualizar a inversa  $G^{-1}(1)$  com um pivoteamento.

É evidente através da Figura 2.13 que uma variável  $\theta_i(0)$  não pode agora sair da base, pois não existe nenhuma variável  $u_i(0)$  nas bases  $G(0)$ ,  $H(1)$  e  $G(1)$ . O intuito aqui foi só dar um pequeno exemplo. Em geral teremos variáveis  $u(0)$ ,  $x(1)$  e  $u(1)$  fora das bases locais  $H(0)$ ,  $G(0)$  e  $H(1)$ , de tal modo que as trocas sejam possíveis.

Quando dessas trocas, atualizamos as bases locais. Essas atualizações obedecem às mesmas regras já expostas na sub-seção 2.3. O cálculo dos multiplicadores e a representação da coluna a entrar na base são feitos como na fase II. A única particularidade da fase I é tomar cuidado para que existam variáveis de um certo tipo para trocas, isto porque as bases locais tem composição bem definida com relação ao tipo de variáveis, como já exposto anteriormente.

### III. 2.6 AValiação do Método e Comentários

Enunciamos um teorema que estabelece um número máximo para as colunas de  $\Phi(t)$  e  $\Psi(t)$ .

Teorema 2.8

O número de colunas das matrizes  $\phi(t)$  e  $\Psi(t)$  não ultrapassa  $n$ .

Prova

Na matriz  $B_{2t-1}$  consideremos o bloco de matrizes

$$\left[ \begin{array}{c|c} H(t) & P(t) \\ \hline Q(t) & R(t) \end{array} \right]$$

As colunas desse bloco são linearmente independentes pois a matriz  $B_{2t-1}$  é não singular. Além do mais, tanto acima como abaixo das colunas desse bloco temos somente elementos nulos. Consequentemente, o número de colunas de  $P(t)$  e  $R(t)$  não pode ser maior que  $n$ . Portanto,  $\phi(t) = H^{-1}(t) P(t)$ , tem no máximo  $n$  colunas. Desde que  $R(t)$  e  $-I(t)$  têm no máximo  $n$  colunas cada uma, logo temos que  $\Psi(t) = G^{-1}(t) F(t)$  tem no máximo  $n$  colunas.

Depois de obtidas as bases locais, o método opera com matrizes de seguintes dimensões:

$A(t) - n \times n$ (máx)	$H(t) - m \times m$
$C(t) - m \times n$ (máx)	$G(t) - n \times n$
$\phi(t) - m \times n$ (máx)	$Q(t) - n \times m$
$\Psi(t) - n \times n$ (máx)	

Para as matrizes  $A(t)$ ,  $C(t)$ ,  $\phi(t)$  e  $\Psi(t)$  é indicado o número máximo de colunas.

Se utilizássemos o simplex revisado teríamos que armazenar a inversa com dimensão  $(m+n)T \times (m+n)T$ . Operando com esse método, temos que guardar na memória  $T$  matrizes indicadas acima, fornecendo um total máximo de  $(m^2 + 3n^2 + 3mn)T$  elementos a serem

memorizados. Como se pode notar o simplex dinâmico obtém uma boa economia de memória quando trata de problemas com horizonte médio e grande.

Façamos agora umas considerações sobre o número de multiplicações requerido pelo método e calculemos uma média por iteração para tal número ao atualizarmos as bases locais.

Seja  $k$  o número de multiplicações necessárias para atualizarmos uma matriz qualquer. É fácil mostrar que quando pré-multiplicamos uma matriz elementar coluna à uma matriz retangular ( $m \times n$ ),  $m < n$ , então  $m^2 < k < n^2$ . Analogamente, quando pós-multiplicamos uma matriz elementar linha ( $n \times n$ ) à uma matriz retangular ( $m \times n$ ),  $m > n$ , então  $n^2 < k < m^2$ . É evidente que se  $m = n$ , então  $k = m^2$ .

Calculemos agora o número máximo de multiplicações quando da troca de colunas entre  $H(t)$  e  $G(t)$ , e entre  $G(t)$  e  $H(t+1)$ . O quadro abaixo indica o número máximo associado com as matrizes  $\hat{Q}(t+1)$ ,  $\hat{\Phi}(t)$  e  $\hat{\Psi}(t)$ . Para as matrizes  $\hat{G}^{-1}(t)$  e  $\hat{H}^{-1}(t)$  o número indicado é exato.

$$\begin{array}{l} \text{De (2.40)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{G}^{-1}(t) - n \\ \hat{H}^{-1}(t) - m^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{\Psi}(t) - n \\ \hat{\Phi}(t) - n^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{De (2.41)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{G}^{-1}(t) - n^2 \\ \hat{H}^{-1}(t+1) - m \\ \hat{Q}(t+1) - n^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{\Psi}(t) - n^2 \\ \hat{\Phi}(t) - n \end{array}$$

A soma nos fornece  $k_1 = 4n^2 + m^2 + mn + 3n + m$ .

Lembramos agora que somente parte das bases locais é atualizada em cada iteração. No pior caso, a coluna a sair da base situa-se em  $H(0)$  e temos que atualizar  $T$  blocos  $N(t)$ . Assumindo um número médio de  $T/2$  blocos atualizados por iteração, segue-se que o simplex dinâmico requer em média  $k_1 T/2$  multiplicações para atualizar as bases locais por iteração.

Computemos agora o número máximo de multiplicações necessárias para calcular os vetores  $\hat{V}^1(t)$  e  $\hat{V}^2(t)$  relativos à

coluna que vai entrar e às bases já atualizadas ( ver discussão no fim de 2.3). Suponhamos o pior caso, isto é, uma variável  $u_i(0)$  entra na base  $G(T-1)$ . Pode-se calcular facilmente esse número a partir das expressões (2.23), obtendo-se um máximo de  $k_2 = Tn^2 + Tm^2 + (3T-2)mn$ . Tomando-se a média desse número e somando-se com  $k_1T/2$ , obtemos

$$\alpha_I = 2,5Tn^2 + Tm^2 + (2T-1)mn + 1,5Tn + 0,5Tm$$

que é o número médio de multiplicações por iteração nesse método.

Aproximemos  $\alpha_I$  pela expressão  $2,5T(m+n)^2$  que pode ser comparada com as  $(m+n)^2T^2$  multiplicações por iteração necessárias para a atualização da inversa global de dimensão  $(m+n)T$ . Note que a inversa global não guarda nenhuma relação de esparsidade com a matriz escada  $B$ , daí supomos o número  $(m+n)^2T^2$  por iteração.

Portanto o simplex dinâmico consegue expressões para armazenamento e multiplicações, lineares com o horizonte  $T$ , enquanto que no simplex revisado obtemos relações quadráticas com  $T$ .

O cálculo da representação do vetor a entrar na base e dos multiplicadores é aproximadamente o mesmo para ambos os métodos, visto que esse cálculo envolve a solução de dois sistemas lineares do tipo  $Bx = b$  que pode ser encontrada através de  $x = B^{-1}b$  ou fazendo a decomposição  $B = \bar{B}U$ , o que é relativamente equivalente em termos de número de multiplicações [9]. O que realmente conta é se o número de multiplicações para atualizar os fatores  $\bar{B}U$  é menor que tal número para atualizar  $B^{-1}$ , fato que é realizado pelo simplex dinâmico.

Baseado nessa estimativa de multiplicações é que propomos o algoritmo com  $T$  bases  $H(t)$  e  $T$  bases  $G(t)$  com dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. A alternativa de se considerar  $T$  bases locais de dimensão  $(m+n)$  indica que realizaríamos em média  $m n T$  operações a mais por iteração.

Para finalizar, ressaltamos que esse método tem uma fase preparatória relativamente trabalhosa que consiste na obtenção das bases locais. Esta envolve várias multiplicações de matrizes (uma estimativa aproximada é  $n T (n+m)^2$  multiplicações entre números) e  $2T-1$  escolhas de colunas linearmente independentes, o

que pode ser feito pelo algoritmo de Gauss. Essa desvantagem pode, no entanto, ser compensada pela estimativa de economia de número de multiplicações que ocorre quando o algoritmo entra em regime e pela economia de memória.

É claro que essa desvantagem só ocorre quando dispomos de uma base factível de partida. Caso contrário, se realizarmos a fase I com esse método, só obteremos vantagens em relação ao simplex revisado.

III. 3 MÉTODO SIMPLEX DINÂMICO DE WOLLMER (MSDII)

Esse algoritmo guarda semelhanças com o anterior no sentido de operar com bases locais. A principal diferença consiste na composição dessas bases e na atualização das mesmas. Construímos aqui essas bases através de pivoteamentos, procurando obter zeros abaixo das bases locais situadas na diagonal principal. Queremos ressaltar que esse procedimento poderia ter sido adotado no método anterior, isto é, para uma dada matriz  $M$  ( ver prova teorema 2.1) procurávamos decompô-la no produto  $\bar{M}U$ . Aqui, para uma dada matriz  $M$ , procuramos pré-multiplicá-la pela matriz triangular inferior  $\bar{M}^{-1}$  ( o que equivale a pivotear) e obter a matriz triangular superior. Portanto, ambos os enfoques são absolutamente equivalentes. A apresentação da base  $B$  na forma de decomposição  $\bar{B}U$  é sob certo aspecto mais elegante, pois uma vez obtida, é aplicada aos sistemas lineares a serem resolvidos.

A mesma observação feita anteriormente é válida aqui, isto é, os vetores e matrizes aqui citados estão relacionados exclusivamente com uma dada base. Quando houver necessidade de se operar com colunas e variáveis não básicas serão feitas definições e esclarecimentos.

III. 3.1 OBTENÇÃO DAS BASES LOCAIS

Consideremos as inequações (2.1a) e (2.2) e definamos;

$$b(t) = \sum_{\tau=1}^t r(\tau-1) + s(\tau) - (m+n)t$$

$t=1, \dots, T$

$$a(t) = \sum_{\tau=1}^t r(\tau-1) + s(\tau-1) - mt - n(t-1)$$

$$s(0) = 0$$

Vamos rearranjar a matriz básica  $B$  da Fig. 2.1 de acordo com o teorema que se segue.

Dual	Primal	$r(0)$ $\underbrace{a(1) \quad n-a(1) \quad b(1)}_{s(1)}$ $\underbrace{m \quad a(1) \quad n-a(1) \quad b(1)}_{r(1)}$	$s(1)$ $\underbrace{a(1) \quad b(1)}_{s(1)}$ $\underbrace{m-b(1) \quad a(2)}_{r(1)}$	$r(1)$ $\underbrace{m-b(1) \quad a(2)}_{r(1)}$	$s(T-1)$ $\underbrace{n-a(T-1) \quad b(T-1)}_{s(T-1)}$ $\underbrace{m-b(T-1) \quad a(T)}_{r(T-1)}$	$s(T)$ $\underbrace{n-a(T)}_{s(T)}$
$\lambda(0)$	$m$	$u^1(0) \quad u^2(0) \quad x^1(1) \quad x^2(1) \quad u^1(1) \quad u^2(1)$	$x^1(1) \quad x^2(1) \quad u^1(1) \quad u^2(1)$	$u^1(1) \quad u^2(1)$	$x^1(T-1) \quad x^2(T-1) \quad u^1(T-1) \quad u^2(T-1)$	$x(T) \quad x(T)$
$P(1)$	$n$	$D^1(0) \quad D^2(0)$	$-I^1(1) \quad -I^2(1)$	$D^1(1) \quad D^2(1)$		$= b^1(0)$
$\lambda(1)$	$m$	$C^1(1) \quad C^2(1)$	$C^1(1) \quad C^2(1)$	$D^1(1) \quad D^2(1)$		$= b^2(0)$
$P(2)$	$n$	$A^1(1) \quad A^2(1)$	$A^1(1) \quad A^2(1)$	$B^1(1) \quad B^2(1)$		$= f(1)$
$\vdots$	$\vdots$					$= 0$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
$\lambda(T-1)$	$m$				$\dots \quad C^1(T-1) \quad C^2(T-1) \quad D^1(T-1) \quad D^2(T-1)$	$= f(T-1)$
$P(T)$	$n$				$A^1(T-1) \quad A^2(T-1) \quad B^1(T-1) \quad B^2(T-1) \quad -I(T)$	$= 0$
Minimize		$d_1(0) \quad d_2(0) \quad c_1(1) \quad c_2(1) \quad d_1(1) \quad d_2(1) \dots \dots \dots c_1(T-1) \quad c_2(T-1) \quad d_1(T-1) \quad d_2(T-1) \quad c(T)$				

$b^1(0) = f(0) - c(0) \quad x(0)$   
 $b^2(0) = -A(0) \quad x(0)$

Figura 3.1 - A base rearranjada



Teorema 3.1

Através de um rearranjo adequado de colunas a matriz  $B$  pode ser colocada na forma da Figura 3.1, de tal modo que a submatriz quadrada composta das primeiras  $(m+n)t$  ou  $mt + n(t-1)$  colunas é não singular,  $t = 1 \dots T$ .

Prova

Seja  $t = 1$ ; é evidente que as primeiras  $m$  linhas de  $B$  são linearmente independentes pois  $B$  é uma base. Daí podemos escolher  $m$  colunas l.i. dentre as colunas  $D(0)$  e permutá-las de tal forma que componham a matriz não singular  $D^1(0)$ .

Seja  $t = t_1$ ; como antes, as primeiras  $mt_1 + n(t_1-1)$  linhas de  $B$  são l.i., pois  $B$  é não singular. Além disso, qualquer base para as primeiras  $(m+n)t_1$  linhas de  $B$  deve ter  $(m+n)t_1$  colunas. Consequentemente, existe um conjunto de colunas,  $t_1$  correspondente às  $(m+n)t_1$  linhas, que consiste das primeiras  $\sum_{\tau=1}^{t_1} r(\tau-1) + s(\tau-1)$  colunas e  $n - a(t_1)$  colunas das seguintes  $s(t_1)$  (relacionadas com  $x^1(t_1)$ ), que são linearmente independentes. O argumento é o mesmo ao se partir das primeiras  $(m+n)t_1$  linhas de  $B$ .

Os diagramas abaixo ilustram esse teorema para  $t = 1$  (ver Figura 3.1). Pré-multiplicando as primeiras  $m$  linhas por  $(D^1(0))^{-1}$  e zerando as colunas abaixo de  $D^1(0)$  obtemos

$$\begin{array}{l}
 m \\
 n
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & a(1) & s(1) \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 I & \Phi(0) & \\
 0 & \tilde{B}^2(0) & -I(1)
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \Phi(0) = (D^1(0))^{-1} D^2(0) \\
 \tilde{B}^2(0) = B^2(0) - B^1(0) \Phi(0)
 \end{array}$$

As colunas de  $\tilde{B}^2(0)$  são linearmente independentes, pois as colunas da matriz  $B$  são l.i. Portanto, para completar o espaço de dimensão  $n$  basta escolher  $n - a(1)$  colunas dentre as  $s(1)$  de  $-I(1)$ , tal que uma base seja formada. De modo inteiramente análogo ao teorema 2.8 pode-se mostrar que as "sobras"  $a(t)$  e  $b(t)$  tem dimensão máxima de  $n$  cada uma. Vamos supor, portanto, a partir de agora que a Figura 3.1 retrate a base  $B$  já rearranjada de acordo com o teorema 3.1.

Definamos os vetores

$$z^1(0) = u^1(0) \quad m \times 1$$

$$z^1(t) = (x^2(t), u^1(t))' \quad t=1 \dots T-1 \quad m \times 1$$

$$z^2(t) = (u^2(t), x^1(t+1))' \quad t=0 \dots T-1 \quad n \times 1$$

Queremos enfatizar nesse ponto a diferença fundamental entre os dois métodos, relacionada com a composição das bases e com consequente modificação na atualização das mesmas. Note que o vetor  $u(t)$  foi particionado em  $u^1(t)$  e  $u^2(t)$  de tal forma que  $u^1(t)$  entra numa base local, enquanto que  $u^2(t)$  entra na base local seguinte. O mesmo é válido para  $x(t)$ . No método anterior permitíamos que uma dada componente de  $u(t)$  ou  $x(t)$  entrasse em qualquer base subsequente. Veremos adiante que essa liberdade oferece atrativos em termos de atualização das bases.

Passemos agora ao processo de obtenção dessas bases através de pivoteamento. Seja

$$D^1(0) = H(0)$$

$$B^1(0) = Q(0)$$

Pelo teorema 3.1,  $H(0)$  é não singular. Pré-multiplicando as primeiras  $m$  linhas por  $H^{-1}(0)$  e a seguir pré-multiplicando essas primeiras  $m$  linhas por  $-Q(0)$  e somando com as  $n$  linhas seguintes, obtemos

$$\begin{array}{rcl} m & a(1) & \\ u^1(0) & u^2(0) & \\ I & \phi(0) & = z^{*1}(0) \\ 0 & \tilde{B}^2(0) & = b^2(0) - Q(0) z^{*1}(0) \end{array} \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{array}{rcl} b^1(0) & = f(0) - C(0) x(0) & z^{*1}(0) = H^{-1}(0) b^1(0) \\ b^2(0) & = -A(0) x(0) & \tilde{B}^2(0) = B^2(0) - Q(0) \phi(0) \\ \phi(0) & = H^{-1}(0) D^2(0) & \end{array}$$

Novamente pelo teorema 3.1, a matriz  $G(0)$  formada pelas colunas de  $\bar{B}^2(0)$  e  $-I^2(1)$ , é não singular com dimensão  $n$ .

$$\begin{array}{cccc}
 m & a(1) & n-a(1) & b(1) \\
 u^1(0) & u^2(0) & x^1(1) & x^2(1) \\
 I & \phi(0) & & = z^1(0) \\
 & \boxed{G(0)} & -I^2(1) & = b^2(0) - Q(0) z^1(0)
 \end{array}$$

Pré-multiplicando por  $G^{-1}(0)$ , vem

$$\begin{array}{cccc}
 m & a(1) & n-a(1) & b(1) \\
 u^1(0) & u^2(0) & x^1(1) & x^2(1) \\
 I & \phi(0) & & = z^1(0) \\
 & \boxed{I_n} & \Psi(0) & = z^2(0)
 \end{array}$$

onde

$$\Psi(0) = -G^{-1}(0) I^2(1) \tag{3.2}$$

$$z^2(0) = G^{-1}(0) [b^2(0) - Q(0) z^1(0)]$$

Suponhamos a seguinte configuração no instante  $t-1$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 a(t) & n-a(t) & b(t) & m-b(t) & a(t+1) & n-a(t+1) & b(t+1) \\
 u^2(t-1) & x^1(t) & x^2(t) & u^1(t) & u^2(t) & x^1(t+1) & x^2(t+1) \\
 m & \phi(t-1) & & & & & = z^1(t-1) \\
 n & \boxed{I_n} & \Psi(t-1) & & & & = z^2(t-1) \\
 m & 0 \vdots C^1(t) & C^2(t) & D^1(t) & D^2(t) & & = f(t) \\
 n & 0 \vdots A^1(t) & A^2(t) & B^1(t) & B^2(t) & -I^1(t+1) & -I^2(+1) = 0
 \end{array}$$

Pré-multiplicando as linhas correspondentes à matriz  $\Psi(t-1)$  por  $- [0 \ ; \ c^1(t)]$  e  $- [0 \ ; \ A^1(t)]$  e somando, respectivamente, com as linhas correspondentes à  $C^2(t)$  e  $A^2(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \phi(t-1) &= z^1(t-1) \\ \boxed{I_n} \Psi(t-1) &= z^2(t-1) \\ \bar{C}^2(t) \ D^1(t) \ D^2(t) &= f(t) - [0 \ ; \ c^1(t)] z^2(t-1) \\ \bar{A}^2(t) \ B^1(t) \ B^2(t) \ -I^1(t+1) \ -I^2(t+1) &= [0 \ ; \ A^1(t)] z^2(t-1) \end{aligned}$$

Seja

$$H(t) = [\bar{C}^2(t) \ ; \ D^1(t)] \quad Q(t) = [\bar{A}^2(t) \ ; \ B^1(t)]$$

onde

$$\bar{C}^2(t) = c^2(t) - [0 \ ; \ c^1(t)] \Psi(t-1) \tag{3.3}$$

$$\bar{A}^2(t) = A^2(t) - [0 \ ; \ A^1(t)] \Psi(t-1)$$

e  $H(t)$  é não singular pelo teorema 3.1. Pré-multiplicando por  $H^{-1}(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \phi(t-1) &= z^1(t-1) \\ \boxed{I_n} \Psi(t-1) &= z^2(t-1) \\ \boxed{I_m} \phi(t) &= z^1(t) \\ Q(t) \ B^2(t) \ -I^1(t+1) \ -I^2(t+1) &= -[0 \ ; \ A^1(t)] z^2(t-1) \end{aligned}$$

onde

$$\phi(t) = H^{-1}(t) D^2(t) \tag{3.4}$$

$$z^1(t) = H^{-1}(t) [f(t) - [0 \ ; \ c^1(t)] z^2(t-1)]$$

Pré-multiplicando as linhas de  $\phi(t)$  por  $-Q(t)$  e somando com as linhas seguintes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi(t-1) &= z^1(t-1) \\
 \boxed{I_n} \psi(t-1) &= z^2(t-1) \\
 \boxed{I_m} \phi(t) &= z^1(t) \\
 \bar{B}^2(t) \quad -I^1(t+1) \quad -I^2(t+1) &= -Q(t) \phi(t) - \\
 &\quad - [0; A^1(t)] z^2(t-1)
 \end{aligned}$$

onde

$$\bar{B}^2(t) = B^2(t) - Q(t) \phi(t)$$

Podemos agora formar a matriz não singular

$$G(t) = \begin{bmatrix} \bar{B}^2(t) \\ -I^1(t+1) \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando por  $G^{-1}(t)$ , temos

$$\begin{array}{ccccccc}
 a(t) & n-a(t) & b(t) & m-b(t) & a(t+1) & n-a(t+1) & b(t+1) \\
 u^2(t-1) & x^1(t) & x^2(t) & u^1(t) & u^2(t) & x^1(t+1) & x^2(t+1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 m & \phi(t-1) & & & & & = z^1(t-1) \\
 n & \boxed{I_n} & \psi(t-1) & & & & = z^2(t-1) \\
 m & & \boxed{I_m} & \phi(t) & & & = z^1(t) \\
 n & & & \boxed{I_n} & \psi(t) & & = z^2(t)
 \end{array}$$

Figura 3.2

onde

$$\psi(t) = -G^{-1}(t) I^2(t+1) \tag{3.5}$$

$$z^2(t) = -G^{-1}(t) \left[ [0; A^1(t)] z^2(t-1) + Q(t) z^1(t) \right]$$

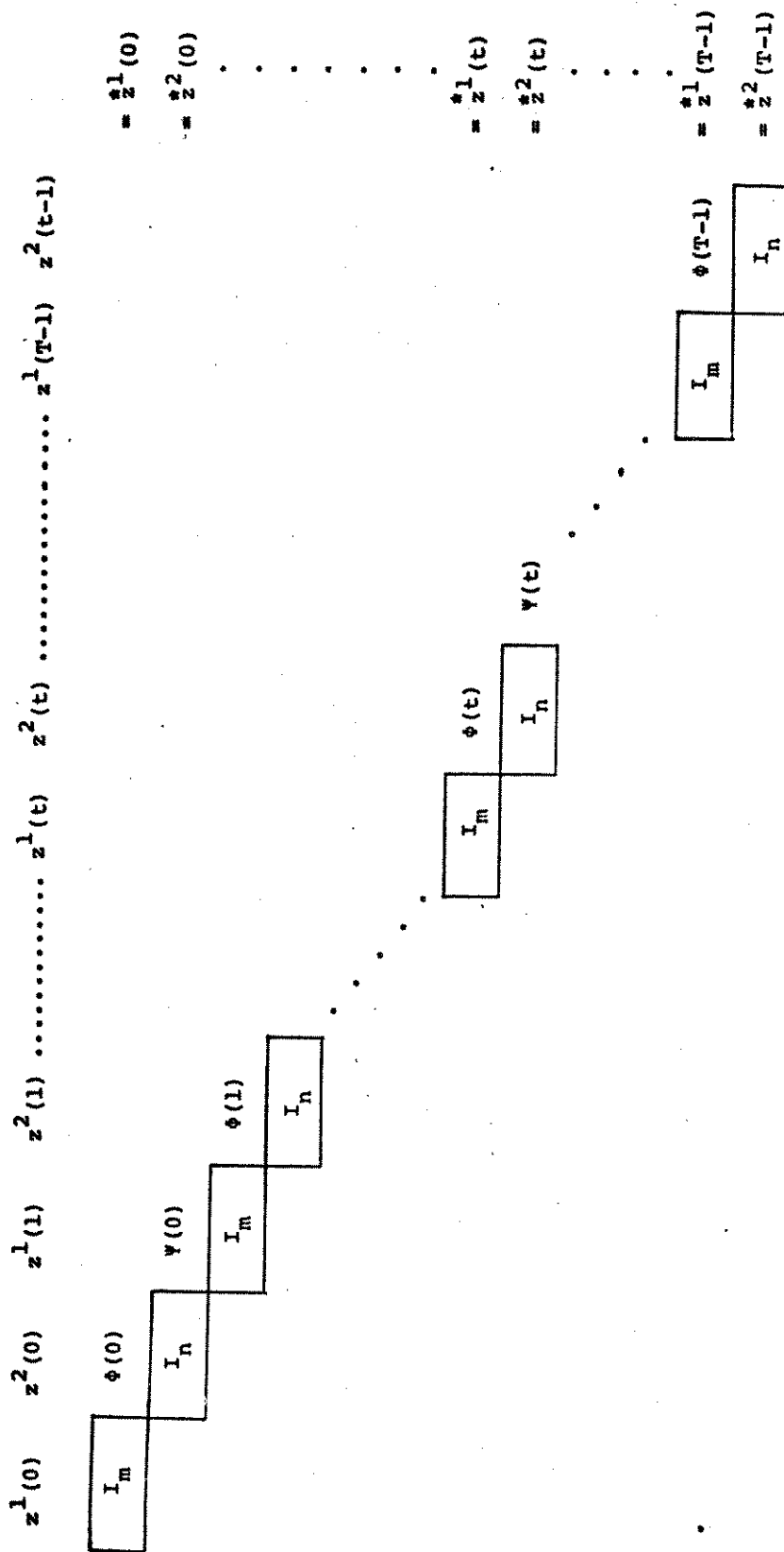


Figura 3.3

A matriz triangular superior U e a estrutura escada

A Figura 3.3 mostra a configuração da matriz triangular superior U após os pivoteamentos. Notamos as semelhanças, com relação à forma e não à composição qualitativa, das matrizes H(t), G(t),  $\phi(t)$  e  $\Psi(t)$  desse método e do anterior. No método MSDI, a base H(t) é composta em geral de variáveis  $u_i(0)$ ,  $u_i(\tau)$ ,  $x_i(\tau)$ ,  $\tau = 1 \dots t$ , enquanto que aqui, no MSDII, a base H(t) é composta somente de variáveis  $x_i(t)$  e  $u_i(t)$ . Distinção análoga deve ser feita para as matrizes G(t),  $\phi(t)$  e  $\Psi(t)$ . Compare as Figuras 3.3 e 2.2, e note as diferenças na matriz U. Por exemplo na Fig. 2.2, a matriz  $\phi(0)$  é quebrada em submatrizes que correspondem a variáveis  $u_i(0)$  a serem usadas em bases locais futuras. Aqui as componentes  $u_i(0)$  referentes às colunas de  $\phi(0)$  são todas utilizadas na base G(0) subsequente.

Resta pois, resolver o sistema triangular

$$Uz_I = z^* \quad (3.6)$$

onde  $z_I$  é o vetor básico de componentes  $z^1(t)$  e  $z^2(t)$ ,  $t=0 \dots T-1$ . A equação (3.6) é análoga a (2.17) com a ressalva de que aqui a matriz U é mais simples. Portanto de (3.6), e da Figura 3.3

$$z^2(T-1) = z^{*2}(T-1) \quad (3.7)$$

$$z^1(t) = z^{*1}(t) - \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z^2(t) \quad t=T-1 \dots 0$$

$$z^2(t) = z^{*2}(t) - \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z^1(t+1) \quad t=T-2 \dots 0$$

### Representação da coluna não básica

Uma vez identificada a estrutura da matriz U, a matriz B fica decomposta no produto  $\bar{B}U$ , onde  $\bar{B}$  tem a forma mostrada na Figura 2.2. Basta, pois, resolver os sistemas triangulares, distinguindo como anteriormente as colunas não básicas correspondentes a variáveis de estado e de controle.

$$\bar{B} \bar{v}^* = v^j(\tau) \quad (3.8)$$

$$U \bar{v}^j(\tau) = \bar{v}^* \quad (3.9)$$

onde  $v^j(\tau)$  é a coluna correspondente à variável  $u_j(\tau)$  e definida na seção 2.2. De (3.8).

$$\bar{v}^{*1}(t) = \bar{v}^{*2}(t) = 0 \quad t=0 \dots \tau-1$$

$$\bar{v}^{*1}(\tau) = H^{-1}(\tau) d^j(\tau) \quad (3.10)$$

$$\bar{v}^{*2}(\tau) = G^{-1}(\tau) [b^j(\tau) - Q(\tau) \bar{v}^{*1}(\tau)]$$

$$\bar{v}^{*1}(t) = -H^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ C^1(t) \end{bmatrix} \bar{v}^{*2}(t-1) \quad t=\tau+1 \dots T-1$$

$$\bar{v}^{*2}(t) = -G^{-1}(t) \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A^1(t) \end{bmatrix} \bar{v}^{*2}(t-1) + Q(t) \bar{v}^{*1}(t) \right]$$

De (3.9)

$$v^2(T-1) = \bar{v}^{*2}(T-1) \quad (3.11)$$

$$v^1(t) = \bar{v}^{*1}(t) - \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v^2(t) \quad t=T-1 \dots 1$$

$$v^2(t) = \bar{v}^{*2}(t) - \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v^1(t+1) \quad t=T-2 \dots 1$$

Seja agora  $w^j(\tau)$  a coluna não básica correspondente à variável  $x_j(\tau)$ , também definida na seção 2.2. De modo análogo

$$\bar{B} \bar{w}^* = w^j(\tau) \quad (3.12)$$

$$U \bar{w}^j(\tau) = \bar{w}^* \quad (3.13)$$



De (3.12)

$$w^{*1}(t) = 0 \quad t=0 \dots \tau-1$$

$$w^{*2}(t) = 0 \quad t=0 \dots \tau-2$$

$$w^{*2}(\tau-1) = -G^{-1}(\tau-1) e^j(\tau)$$

(3.14)

$$w^{*1}(\tau) = H^{-1}(\tau) \left[ c^j(\tau) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ C^1(\tau) \end{bmatrix} w^{*2}(\tau-1) \right]$$

$$w^{*2}(\tau) = G^{-1} \left[ a^j(\tau) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A^1(\tau) \end{bmatrix} w^{*2}(\tau-1) - Q(\tau) w^{*1}(\tau) \right]$$

$$w^{*1}(t) = -H^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ C^1(t) \end{bmatrix} w^{*2}(t-1)$$

t=τ+1...T-1

$$w^{*2}(t) = -G^{-1}(t) \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A^1(t) \end{bmatrix} w^{*2}(t-1) + Q(t) w^{*1}(t) \right]$$

A solução de (3.13) fornece expressões idênticas a (3.11)

### Cálculo dos multiplicadores

O vetor de multiplicadores  $\Pi$  (também definido na seção 2.2) é obtido da mesma maneira que (2.28), isto é

$$c^I U^{-1} = \Pi \bar{B} \quad (3.15)$$

O vetor de custo básico é assim definido

$$c^I = (h_1(0) \quad , \quad h_2(0) \quad \dots \quad h_2(T-1)) \quad , \quad \text{onde}$$

$$h_1(0) = d_1(0) \quad 1 \times m$$

$$h_1(t) = (c_2(t) \quad , \quad d_1(t)) \quad 1 \times m$$

$$h_2(t) = (d_2(t) \quad , \quad c_1(t+1)) \quad 1 \times n$$

Portanto

$$c^I U^{-1} = (\bar{h}_1(0) \quad , \quad \bar{h}_2(0) \quad \dots \quad \bar{h}_2(T-1)) \quad (3.16)$$

onde

$$\bar{h}_1(0) = h_1(0) \quad (3.17)$$

$$\bar{h}_1(t) = -h_2(t-1) \begin{bmatrix} \psi(t-1) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + h_1(t) \quad t=1 \dots T-1$$

$$\bar{h}_2(t) = -h_1(t) \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + h_2(t) \quad t=0 \dots T-1$$

As expressões para  $\bar{h}_1(t)$  e  $\bar{h}_2(t)$  aqui são simples e podem ser usadas quando da programação do método. A expressão para  $\Pi \bar{B}$  é idêntica à obtida na seção 2.2. Portanto ao igualarmos cada componente dos vetores obtemos

$$p(T) = \bar{h}_2(T-1) G^{-1}(T-1) \quad (3.18)$$

$$\lambda(t) = [\bar{h}_1(t) - p(t+1) Q(t)] H^{-1}(t) \quad t=T-1 \dots 1$$

$$p(t) = \left[ \bar{h}_2(t-1) - \lambda(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c^1(t) \end{bmatrix} - p(t+1) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A^1(t) \end{bmatrix} \right] G^{-1}(t-1)$$

$$\lambda(0) = [\bar{h}_1(0) - p(1) Q(0)] H^{-1}(0)$$

A representação da coluna não básica e os multiplicadores poderiam ter sido obtidos sem lançar mão da decomposição  $\bar{B}U$ . Isso ocorre no trabalho de Wollmer e na segunda parte do trabalho de Propoi-Krivonozhko. No entanto, somos de opinião que uma vez reconhecida tal decomposição ou fatoração, o trabalho de se resolver sistemas lineares envolvendo  $\bar{B}U$  é mecânico e fácil. A determinação da variável a entrar na base e da variável a sair da base é feita através da utilização de (2.31) a (2.34). Passamos agora a analisar o procedimento de atualização das bases nesse

método e que consiste de pivoteamentos como no simplex revisado.

### III. 3.2 ATUALIZAÇÃO DAS BASES LOCAIS

Vamos ressaltar um ponto da seção anterior que será muito utilizado. Pelo processo de construção das bases podemos afirmar:

- a-) uma componente  $u_i(t)$  pertence à base  $H(t)$  ou  $G(t)$ .
- b-) uma componente  $x_i(t)$  pertence à base  $G(t-1)$  ou  $H(t)$ .

Seja  $z_k(t_1)$  uma variável a sair da base e seja  $v^j(t_2)$  a coluna a entrar, correspondente a uma variável não básica  $u_j(t_2)$ . A descrição para o caso em que uma variável de estado entra na base é análoga. Temos três casos a considerar:  $t_1 = t_2$ ,  $t_1 > t_2$  e  $t_1 < t_2$ .

#### 1-) $t_1 = t_2$

Nesse caso  $u_k(t_1)$  é a variável a sair da base. Temos que considerar dois sub-casos: a variável  $u_k(t_1)$  pertence à base  $H(t_1)$  ou à base  $G(t_1)$ . Em qualquer sub-caso as "sobras"  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $t = 1 \dots T-1$ , ficam constantes. As bases  $H(0)$ ,  $G(0) \dots G(t_1-1)$  não mudam.

#### 1a-) $u_k(t_1) \in H(t_1)$

Calculamos  $\overset{*}{d}^j(t_1) = H^{-1}(t_1) d^j(t_1)$ , isto é, a representação do pedaço  $d^j(t_1)$  pertencente à coluna  $v^j(t_1)$  a entrar na base. Anexamos  $\overset{*}{d}^j(t_1)$  à inversa  $H^{-1}(t_1)$  e pivoteamos na linha de  $\overset{*}{d}^j(t_1)$  que corresponde à coluna onde  $u_k(t_1)$  é básica. Desse modo  $H^{-1}(t_1)$  é atualizada, tornando-se  $\hat{H}^{-1}(t_1)$  e portanto  $\phi(t_1) = H^{-1}(t_1) P(t_1)$  muda para  $\hat{\phi}(t_1)$ . Trocamos o sub-vetor  $b^k(t_1)$  por  $b^j(t_1)$ . Calculamos a nova matriz  $\hat{B}^2(t_1) = B^2(t_1) - Q(t_1) \hat{\phi}(t_1)$  que tem  $a(t_1+1)$  colunas. Lembramos que

$$\hat{G}(t_1) = \left[ \hat{B}^2(t_1) \ ; \ -I(t_1+1) \right]$$

e portanto  $a(t_1+1)$  colunas foram alteradas em  $G(t_1)$ . É evidente que o produto  $G^{-1}(t_1) \hat{G}(t_1)$  fornece a matriz identidade nas últimas  $n - a(t_1+1)$  colunas (dimensão de  $-I(t_1+1)$ ). Então para atualizarmos  $G^{-1}(t_1)$ , calculamos a representação das colunas de  $\hat{B}^2(t_1)$  na base antiga, isto é

$$\hat{B}^2(t_1) = G^{-1}(t_1) \hat{B}^2(t_1)$$

Anexamos essas colunas à inversa velha  $G^{-1}(t_1)$  e pivoteamos na diagonal das primeiras  $a(t_1+1)$  linhas de  $\hat{B}^2(t_1)$ , retirando a seguir essas colunas. Atualizamos pois, recorrentemente todas as bases  $H(s)$  e  $G(s)$ . De um modo geral, para atualizar as bases  $H(s)$ ,  $s = t_1+1 \dots T-1$ , calculamos a nova matriz

$$\hat{C}^2(s) = C^2(s) - [0 \ ; \ C^1(s)] \hat{\Psi}(s-1) \quad (3.19)$$

e sua representação na base velha  $H(s)$

$$\hat{C}^2(s) = H^{-1}(s) \hat{C}^2(s) \quad (3.20)$$

Anexamos  $\hat{C}^2(s)$  à inversa velha  $H^{-1}(s)$  e pivoteamos na diagonal das primeiras  $b(s)$  linhas de  $\hat{C}^2(s)$ . Para atualizar as bases  $G(s)$ ,  $s = t_1, t_1+1 \dots T-1$ , calculamos a nova matriz

$$\hat{B}^2(s) = B^2(s) - Q(s) \hat{\Phi}(s) \quad (3.21)$$

e sua representação na base velha  $G(s)$

$$\hat{B}^2(s) = G^{-1}(s) \hat{B}^2(s) \quad (3.22)$$

Anexamos  $\hat{B}^2(s)$  à inversa velha  $G^{-1}(s)$  e pivoteamos na diagonal das primeiras  $a(s+1)$  linhas.

1b-)  $u_k(t_1) \in G(t_1)$

Nesse caso a matriz  $H(t_1)$  não muda. Calculamos

$$\hat{b}^j(t_1) = b^j(t_1) - Q(t_1) H^{-1}(t_1) d^j(t_1)$$

onde  $b^j(t_1)$  e  $d^j(t_1)$  são os coeficientes da coluna a entrar. Calculamos a seguir a representação de  $\hat{b}^j(t_1)$  na base antiga, isto é:

$$b^{*j}(t_1) = G^{-1}(t_1) \hat{b}^j(t_1)$$

Anexamos  $b^{*j}(t_1)$  à inversa velha  $G^{-1}(t_1)$  e pivoteamos na linha onde  $u_k(t_1)$  é básica. Trocamos a coluna a entrar e a sair nas matrizes  $D^2(t_1)$  e  $B^2(t_1)$ . As bases  $H(s)$  e  $G(s)$ ,  $s=t_1+1\dots T-1$  são atualizadas de acordo com as expressões (3.19) a (3.22).

2-)  $t_1 > t_2$

Suponhamos que a variável  $x_k(t_1)$  a sair da base pertença à base  $G(t_1-1)$  e que a variável  $u_j(t_2)$  entre na base  $G(t_2)$ . Então uma variável  $x_i^1(t_2+1)$  sai do seu grupo  $x^1(t_2+1)$ , "desce um degrau", entrando na base  $H(t_2+1)$  e deixando uma vaga em  $G(t_2)$  para que  $u_j(t_2)$  entre. Devido à entrada de mais uma componente no grupo  $x^2(t_2+1)$ , uma variável  $u_i^1(t_2+1)$  "desce um degrau", entrando na base  $G(t_2+1)$  no grupo das variáveis  $u^2(t_2+1)$ . O processo continua até que uma variável  $u_i^1(t_1-1)$  "desça um degrau", entre na base  $G(t_1-1)$ , no grupo das variáveis  $u^2(t_1-1)$ , quando então a variável  $x_k(t_1)$  pode sair. Nesse caso exposto as "sobras"  $b(s)$  e  $a(s+1)$ ,  $s = t_2+1\dots t_1$  ganham uma componente. As bases  $H(0)$ ,  $G(0) \dots H(t_2-1)$  não mudam. Para atualizar a base  $G(t_2)$  procedemos da seguinte maneira. Calculamos

$$\hat{b}^j(t_2) = b^j(t_2) - Q(t_2) H^{-1}(t_2) d^j(t_2)$$

onde  $b^j(t_2)$  e  $d^j(t_2)$  são os coeficientes da coluna a entrar na base. A seguir calculamos a representação de  $\hat{b}^j(t_2)$  na base antiga, isto é

$$b^{*j}(t_2) = G^{-1}(t_2) \hat{b}^j(t_2)$$

Anexamos  $b^j(t_2)$  à inversa velha  $G^{-1}(t_2)$  e pivoteamos na linha  $l$  desse vetor tal que  $l \geq a(t_2+1) + 1$ . A figura abaixo ilustra com um exemplo o porquê desse procedimento.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a(t_2+1) \\ \underbrace{\phantom{u^2(t_2)}} \\ u^2(t_2) \end{array} & \begin{array}{c} n - a(t_2+1) \\ \underbrace{\phantom{x^1(t_2+1)}} \\ x^1(t_2+1) \end{array} & \begin{array}{c} b^j(t_2) \\ \phantom{a} \\ \phantom{b} \\ \phantom{c} \\ \phantom{d} \\ \phantom{e} \end{array} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \downarrow l \\ \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.4

A Figura 3.4 mostra a matriz unitária obtida a partir de  $G(t_2)$ , após pré-multiplicação por  $G^{-1}(t_2)$ . Ao seu lado encontra-se o vetor  $b^j(t_2)$  com suas componentes. Ao pivotearmos nas componentes  $d$  ou  $e$ , estamos retirando uma variável  $x_i^1(t_2+1)$  da base  $G(t_2)$  e aumentando  $a(t_2+1)$  de uma componente.

É sempre possível achar um elemento pivot  $\neq 0$ , caso contrário o teorema 3.1 não seria válido. Portanto, a coluna  $l$  é retirada da base  $G(t_2)$  (essa coluna pertence à matriz  $-I^1(t_2+1)$ ) e vai ser introduzida na base  $H(t_2+1)$ . Em  $H(t_2+1)$  retiramos uma coluna correspondente a uma variável  $u_i^1(t_2+1)$  e que tem o elemento unitário na mesma linha do elemento unitário pertencente à coluna introduzida. A Figura 3.5 abaixo ilustra melhor o exposto para  $H(t_2+1)$ . É mostrada a matriz identidade obtida a partir de  $H(t_2+1)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} b(t_2+1)+1 \\ \underbrace{\phantom{x^2(t_2+1)}} \\ x^2(t_2+1) \end{array} & \begin{array}{c} m - (b(t_2+1)+1) \\ \underbrace{\phantom{u^1(t_2+1)}} \\ u^1(t_2+1) \end{array} & \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{entra} \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{sai} \end{array}
 \end{array}$$

O vetor  $x^2(t_2+1)$  ganha uma componente e o vetor  $u^1(t_2+1)$  perde uma componente.

Figura 3.5

Atualizamos agora a base  $H(t_2+1)$  de acordo com o exposto no primeiro caso, usando as expressões (3.19) e (3.20), lembrando agora que  $\hat{C}^2(t_2+1)$  tem  $b(t_2+1) + 1$  colunas e portanto, ao anexar  $\hat{C}^{*2}(t_2+1)$  a  $H^{-1}(t_2+1)$ , devemos pivotar na diagonal das primeiras  $b(t_2+1) + 1$  linhas. De um modo geral, podemos dizer que as expressões (3.19) a (3.22) são utilizadas para atualizar as bases  $H(s)$ ,  $G(s)$ ,  $s = t_2+1 \dots t_1-1$ , lembrando que as matrizes  $\hat{C}^{*2}(s)$  e  $\hat{B}^{*2}(s)$  ganharam uma coluna, isto é, têm respectivamente,  $b(s) + 1$  colunas e  $a(s) + 1$  colunas, devendo pois o pivoteamento acompanhar esse acréscimo. Quando atingimos a base  $G(t_1-1)$ , a variável  $x_k(t_1)$  sai dessa base e não entra em nenhuma. As bases  $H(s)$ ,  $G(s)$ ,  $s = t_1, t_1+1 \dots T-1$ , são atualizadas da mesma maneira que o primeiro caso.

3-)  $t_1 < t_2$

Suponhamos que a variável  $x_k(t_1)$ , a sair da base, pertença à base  $G(t_1-1)$ . Ao sair, esta variável deixa um lugar vago na base  $G(t_1-1)$  e uma variável  $x_i^2(t_1)$ , pertencente à base  $H(t_1)$ , pode "subir um degrau" e instalar-se na base  $G(t_1-1)$ . Com isso a base  $H(t_1)$  fica sem uma componente. Para preencher essa vaga, uma variável  $u_i^2(t_1)$  "sobe um degrau" indo acomodar-se no grupo das variáveis  $u^1(t_1)$ . O processo continua até que a variável  $u_j(t_2)$  entre na base  $H(t_2)$ . Nesse caso, as sobras  $b(t_1)$ ,  $b(s)$ ,  $a(s)$ ,  $s = t_1+1 \dots t_2$ , perdem uma componente. As bases  $H(0)$ ,  $G(0) \dots H(t_1-1)$ , não são alteradas.

A escolha da variável  $x_i^2(t_1)$  a entrar na base  $G(t_1-1)$  é feita da seguinte maneira. Calculamos

$$e^{*2i}(t_1) = -G^{-1}(t_1-1) e^{2i}(t_1) \quad (3.23)$$

onde  $-e^{2i}(t_1)$  é a coluna unitária negativa correspondente à variável  $x_i^2(t_1)$  e tendo o elemento unitário negativo na linha  $l$ . Lembramos que  $-I(t_1) = \begin{bmatrix} -I^1(t_1) & \\ & -I^2(t_1) \end{bmatrix}$  é uma submatriz da matriz identidade negativa composta somente pelas colunas básicas. Daí, segue-se que, em geral,  $i \neq l$ . O cálculo de (3.23) não precisa ser feito. Basta tomar a  $l$ -ésima coluna de  $G^{-1}(t_1-1)$  e trocar os sinais das componentes. Anexamos, pois, essa coluna à

inversa velha  $G^{-1}(t_1-1)$  e pivoteamos na linha correspondente à variável  $x_k^1(t_1)$  que sai da base. É claro que o elemento pivot tem que ser diferente de zero, daí a necessidade de se escolher uma variável  $x_i^2(t_1)$  para a qual isso ocorra. Com isso, a inversa  $G^{-1}(t_1-1)$  é atualizada e  $x_i^2(t_1)$  pertence agora a  $G(t_1-1)$ . As matrizes  $-I^2(t_1)$ ,  $C^2(t_1)$  e  $A^2(t_1)$  tem uma coluna a menos e que corresponde à variável  $x_i^2(t_1)$  que saiu da base  $H(t_1)$ . A Figura 3.6 a seguir ilustra o que foi exposto para a matriz  $-I^2(t_1)$ .

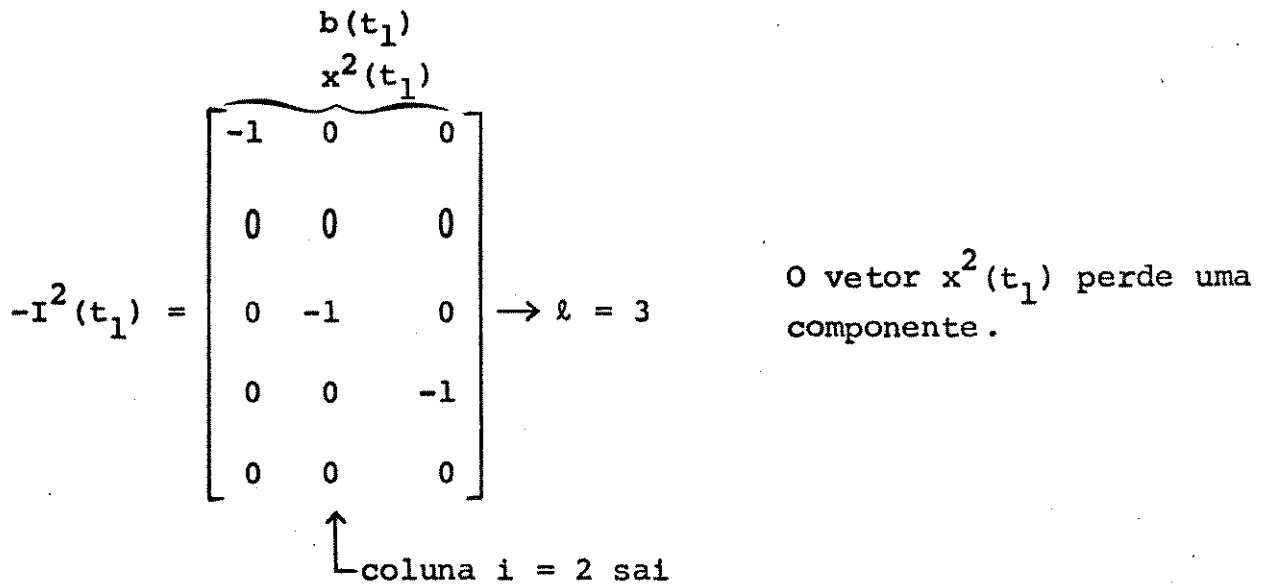


Figura 3.6

Calculamos agora a partir de  $-\hat{I}^2(t_1)$ , que é a matriz obtida de  $-I^2(t_1)$  com uma coluna a menos, a nova matriz

$$\hat{\Psi}(t_1-1) = -\hat{G}^{-1}(t_1-1) \hat{I}^2(t_1)$$

Novamente esse cálculo não precisa ser feito. Basta trocar o sinal das colunas que tem o mesmo número que as linhas de  $-\hat{I}^2(t_1)$  que possuem elementos unitários negativos. Note que  $\hat{\Psi}(t_1-1)$  tem  $b(t_1) - 1$  colunas. Calculamos agora  $\hat{C}^2(t_1)$  e  $\hat{C}^{*2}(t_1)$  através de (3.19) e (3.20). Anexamos  $\hat{C}^{*2}(t_1)$  a  $H^{-1}(t_1)$  e pivoteamos na diagonal das primeiras  $b(t_1)-1$  linhas de  $\hat{C}^{*2}(t_1)$  obtendo então  $\bar{H}^{-1}(t_1)$ .

Notamos então que o produto matricial

$$\bar{H}^{-1}(t_1) \left[ \hat{C}^2(t_1) \ ; \ D^1(t_1) \right] \quad , \quad \text{onde} \quad \bar{H}^{-1}(t_1) \quad m \times m$$

$$\left[ \hat{C}^2(t_1) \ ; \ D^1(t_1) \right] \quad m \times (m-1)$$



fornece a matriz identidade a menos da coluna  $i = 2$  de onde saiu a coluna referente à variável  $x_1^2(t_1)$ . A Figura 3.7 ilustra com um exemplo esse produto.

$$\begin{array}{cccc}
 \underbrace{\bar{H}^{-1}(t_1)\hat{C}^2(t_1)} & & \underbrace{\bar{H}^{-1}D^1(t_1)} & \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{linha } i = 2 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \uparrow & & & \\
 \text{falta a coluna com elemento unitário na linha } i = 2
 \end{array}$$

Figura 3.7

Escolhemos agora uma coluna  $d^{2j}(t_1)$  correspondente a uma variável  $u_j^2(t_1)$  e calculamos sua representação em  $\bar{H}(t_1)$ , isto é

$${}^{*2j}d(t_1) = \bar{H}^{-1}(t_1) d^{2j}(t_1)$$

Anexamos essa coluna à inversa  $\bar{H}^{-1}(t_1)$  e pivoteamos na linha  $i$  (o número da linha  $i$  é igual ao número da coluna de onde saiu  $x_1^2(t_1)$ ). Com isso a base  $H(t_1)$  está completa e sua inversa está atualizada. Como anteriormente, o elemento pivot tem que ser  $\neq 0$ , daí a necessidade de se escolher uma variável  $u_j^2(t_1)$  para a qual isso ocorra. Por isso, adotamos o procedimento de primeiro obter  $\bar{H}^{-1}(t_1)$ .

De um modo geral, as bases  $H(t_2)$ ,  $H(s)$ ,  $G(s)$ ,  $s=t_1 \dots t_2-1$  são atualizadas através da utilização das expressões (3.19) a (3.22) de maneira análoga à exposta acima, lembrando que as matrizes  $C^{*2}(t_2)$ ,  $C^{*2}(s)$ ,  $B^{*2}(s)$  perderam uma coluna. Quando atingimos a base  $H(t_2)$ , calculamos  $C(t_2)$  e introduzimos a coluna  $d^j(t_2)$  na matriz  $C^*(t_2)$ . A posição de  $d^j(t_2)$  em  $C^*(t_2)$  é determinada pelo número da coluna de onde saiu a variável  $x_1^2(t_2)$ . Anexamos essa matriz, agora com  $b(t_2)$  colunas, à matriz  $H^{-1}(t_2)$  e

pivoteamos na diagonal das primeiras  $b(t_2)$  linhas de  $C(t_2)$ , atualizando  $H^{-1}(t_2)$  e simultaneamente introduzindo o vetor  $d^j(t_2)$ , correspondente à variável  $u_j(t_2)$ , na base  $H(t_2)$ . O procedimento de atualização das bases  $G(t_2)$ ,  $H(s)$ ,  $G(s)$ ,  $s = t_2+1 \dots T-1$  é idêntico ao primeiro caso.

### III. 3.3 ANÁLISE COMPARATIVA

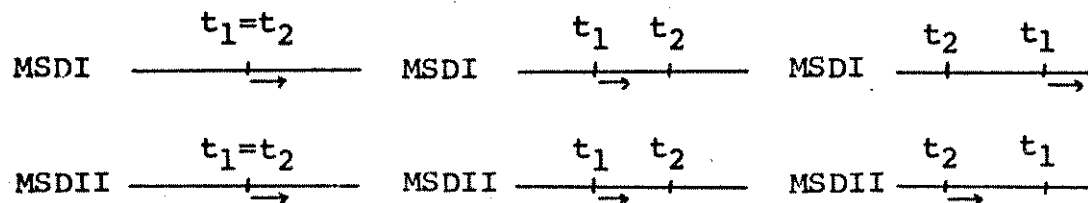
Listamos agora alguns itens, procurando através dos mesmos estabelecer as diferenças, vantagens e desvantagens entre o MSDI e o MSDII, durante a fase II.

#### a-) Obtenção das bases locais

O trabalho para obtenção das bases locais é equivalente nos dois métodos, isto é, em ambos temos diversas multiplicações de matrizes e  $2T-1$  escolhas de colunas linearmente independentes. É evidente que o trecho de programação do MSDII referente à obtenção das bases locais é mais fácil, desde que a matriz  $U$  nesse método é mais simples, requerendo um trabalho de ordenação de colunas menor.

#### b-) Atualização das bases locais

O diagrama abaixo ilustra a partir de que instante são atualizadas as bases locais no MSDI e no MSDII, lembrando que  $t_1$  é o instante no qual uma variável sai da base e  $t_2$  é o instante no qual uma variável entra na base.



Nota-se uma vantagem para o MSDI no caso  $t_1 > t_2$ .

#### c-) O trabalho numérico em uma iteração

Consideremos no MSDII o caso em que uma variável  $u_1(0)$  sai da base e calculemos uma média para o número de multi-

plicações em uma iteração. Todas as bases devem ser atualizadas. A base  $H(0)$  é atualizada com um pivoteamento, enquanto que as bases subsequentes  $H(t)$  e  $G(t)$  são atualizadas através de  $b(t)$  e  $a(t+1)$  pivoteamentos. Isso quer dizer que temos que pré-multiplicar  $b(t)$  e  $a(t+1)$  matrizes de pivoteamento às inversas  $H^{-1}(t)$  e  $G^{-1}(t)$  para atualizá-las. Portanto o número de multiplicações para atualizações é:

$$n^2 \sum_{t=1}^T a(t) + m^2 \sum_{t=1}^{T-1} b(t) + m^2$$

Supondo que  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  sejam as médias para o número de matrizes de pivoteamento e que em média  $T/2$  bases sejam atualizadas, temos, ao desprezar o termo isolado  $m^2$

$$k_1 = \frac{1}{2} T \bar{a} n^2 + \frac{1}{2} [(T-1)\bar{b}] m^2$$

Devemos somar a essa quantidade  $k_1$ , as operações envolvidas com as expressões (3.19) a (3.22). Fazendo os cálculos em termos de  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  e em termos de  $T/2$  bases atualizadas, temos

$$k_2 = \frac{1}{2} T \bar{a} n^2 + \frac{1}{2} T \bar{a} m^2 + \frac{1}{2} T \bar{a} nm + \\ + \frac{1}{2} (T-1) \bar{b} (n-\bar{a}) + \frac{1}{2} T \bar{b} m^2$$

somando  $k_1$  e  $k_2$ , obtemos

$$\alpha_{II} = T \bar{a} n^2 + 0,5 [2(T-1) \bar{b} + T \bar{a}] m^2 + \\ + 0,5 T \bar{a} nm + 0,5(T-1) \bar{b} (n-\bar{a}) \quad (3.24)$$

que é o número médio de multiplicações por iteração para o MSDII não envolvendo, é claro, as operações de cálculo de multiplicadores e representação de uma coluna na base. Esse número  $\alpha_{II}$  deve ser comparado com o número  $\alpha_I$ , onde

$$\alpha_I = 2,5 T n^2 + T m^2 + (2T-1) m n + 1,5 T n + 0,5 T m \quad (3.25)$$

que é o número médio de multiplicações por iteração no MSDI, também sem contar as operações com o cálculo de multiplicadores e com a representação da coluna na base.

Das expressões (3.24) e (3.25) concluímos que o número de multiplicações em ambos os métodos é linear com o horizonte T. No caso do MSDII esse número é ainda linear com a média das "sobras" a e b. Assim, para um dado problema é muito simples comparar os dois métodos, desde que a dimensão inicial das "sobras" a(t) e b(t) é facilmente calculável. De um modo geral o MSDI deve se comportar melhor em problemas de grande porte, onde as "sobras" começam a exercer bastante influência. Wollmer apresenta um exemplo de programação linear multi-estágios envolvendo somente uma equação dinâmica para cada período e sem restrições acopladas no estado e controle. O seu problema tem número m de restrições médio por período igual a 107, número de variáveis n médio por período igual a 346 e horizonte T=9. A média das "sobras" está em torno de 28 para os 7 primeiros períodos, o que realmente comprova a nossa observação.

d-) Memória, representação da coluna não básica e multiplicadores

Os dois métodos são equivalentes com respeito a esses itens.

### III. 3.4 CONCLUSÕES E EXTENSÕES

Ambos os métodos podem ser facilmente adaptados para operar com variáveis canalizadas, isso é,  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Pela estimativa de cálculo aqui apresentada o método de Krivonozhko - Chebotarev - Propoi (MSDI) é vantajoso com relação ao simplex revisado em qualquer situação. O mesmo já não ocorre com o método de Wollmer, por ser bastante sensível à dimensão das sobras e portanto, para um dado problema, há necessidade de análise das mesmas, antes da aplicação do método. Uma vantagem comum para os dois métodos está relacionada com a memória utilizada, caráter esse que não deve ser desprezado, pois se o programa linear já for de grande porte para um estágio, será muito maior quando o considerarmos dinâmico, visto que o número de variáveis e restrições pode ficar

multiplicado pelo número de estágios  $T$ .

Ainda nessa linha de simplex dinâmico, temos dentro do mesmo trabalho de Wollmer um outro método para atualização das bases locais, utilizando matrizes de rank 1, isto é, o produto de um vetor coluna por um vetor linha. Pode-se encarar um pivoteamento e uma troca de colunas em uma matriz através da soma de uma matriz de rank 1. Esse método é aplicado no exemplo citado anteriormente, conseguindo-se bons resultados quando comparados com o simplex revisado. Sugerimos pois, uma extensão desse trabalho comparativo, incluindo essa outra metodologia de atualização de bases locais.

APÊNDICE A

A.1 - PROVA DO TEOREMA 2.1

A prova desse teorema é na realidade a compilação de alguns resultados intermediários apresentados por Gantmacher[10].

Dada a matriz não singular,

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} H & P \\ \hline Q & R \end{array} \right] \end{matrix}$$

podemos realizar um pivoteamento no segundo bloco de colunas, desde que H é não singular. Em geral quando se busca uma decomposição LU procura-se pivotear em torno da matriz H através da pré-multiplicação de uma matriz triangular inferior com elementos unitários na diagonal. Aqui, no entanto, temos interesse em obter uma matriz U com elementos unitários na diagonal e simultaneamente uma matriz L com uma matriz nula em lugar de P. Daí pós-multiplicarmos a matriz M por U tal que

$$M U = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} H & P \\ \hline Q & R \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} I_m & -H^{-1}P \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline Q & G \end{array} \right] \end{matrix} = L$$

com  $G = R - Q \phi$  ,  $\phi = H^{-1}P$

Portanto

$$M = L U^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline Q & G \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} I_m & \phi \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right] \end{matrix} = \bar{M} U$$

A inversa de uma matriz triangular superior com elementos unitários na diagonal é obtida pela simples troca de sinal dos elementos acima da diagonal. Como a operação de pivoteamento







$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ -\phi_k^1 & \dots & -\phi_k^\ell & \dots & -\phi_k^n & & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad G^{-1} = E_\ell G^{-1}$$

Portanto,  $\hat{G} = GE_\ell^{-1}$ , sendo  $E_\ell^{-1}$  a inversa de uma matriz elementar linha e diferindo da matriz identidade pela linha  $\ell$  e tendo por elementos

$$\gamma^\ell = -\frac{1}{\phi_k^\ell}, \quad \gamma^j = -\frac{\phi_k^j}{\phi_k^\ell}, \quad j=1 \dots n, \quad j \neq \ell$$

SIMBOLOGIA

- " ' " Indica vetor transposto ou matriz transposta.
- "< >" Indica produto escalar.
- " ∇ " Operador gradiente.
- " || || " Norma Euclidiana.
- "  $C^p$  " Se uma função é de classe  $C^p$ , então suas derivadas parciais são contínuas até a ordem p.

NOTAÇÃO

Estamos seguindo a notação de Sakarovitch [36]. Seja A uma matriz. Então:

$A^j$  - j-ésima coluna de A.

$A_i$  - i-ésima coluna de A.

$A_i^j$  - elemento da matriz A, situado na linha i e coluna j.

Por analogia com a notação de matrizes, os vetores coluna são representados por super-índices (ex.:  $x^i$ ) e os vetores linha são representados por sub-índices (ex.:  $x_i$ ).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARROW, K.J., GOULD, F.J., HOWE, S.M., "A General Saddle Point Result for Constrained Optimization", Mathematical Programming 5, pag 225-234, 1973.
- [2] BELLMORE, M., "A Decomposable Transshipment Algorithm for a Multiperiod Transportation Problem", Naval Research Logistics Quarterly, 19, 4, 1969.
- [3] BERTSEKAS, D.P., "Combined Primal-Dual and Penalty Methods for Constrained Minimization", SIAM J. Control, vol. 13, nº 3, Maio 1975.
- [4] BERTSEKAS, D.P., "On the Method of Multipliers for Convex Programming", IEEE Automatic Control, Junho 1975.
- [5] BERTSEKAS, D.P., "On Penalty and Multiplier Methods for Constrained Minimization", SIAM J. Control, vol.14, nº 2, Fevereiro 1976.
- [6] BELUKHIN, V.P., "A Parametric Method for Solving a Linear Dynamic Programming Problem", Automation and Remote Control, nº 3, Março 1975.
- [7] CARTER, H., CSÁKI, C., PROPOI, A.I., "Planning Long Range Agricultural Investment Projects: A Dynamic Linear Programming Approach", RM - 77-38, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Luxemburg, Austria, Julho 1977.
- [8] CHEBOTAREV, S.P., "Variation of the Penalty Coefficient in Linear Programming Problems", Automation and Remote Control, nº 7, Julho 1973.

- [9] FORSYTHE, G.E., MOLER, C.B., "Computer Solutions for Linear Algebraic Systems", Prentice Hall, New Jersey, 1967.
- [10] GANTMACHER, F.R., "Théorie des Matrices", Dunod, Paris, 1966.
- [11] GEROMEL, J.C., BAPTISTELLA, L.F.B., "A Feasible Direction Method for Large Scale Nonconvex Programs - A Decomposition Approach", Artigo Interno do Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systems du CNRS, Toulouse, França, 1978.
- [12] GLASSEY, C.R., "Dynamic Linear Programs for Production Scheduling", Operations Research, 19, n° 1, 1971.
- [13] GLASSEY, C.R., "Nested Decomposition and Multi-Stage Linear Programs", Management Science, vol. 20, n° 3, Novembro 1973.
- [14] GOLDFARB, D., "Extension of Davidon's Variable Metric Methods to Maximization Under Linear Inequality and Equality Constraints", SIAM J. Appl. Math. vol. 17, n° 4, Julho 1969.
- [15] HESTENES, M.R., "Multiplier and Gradient Methods", J. Opt. Th. Appl. (JOTA), vol. 4, n° 5, 1969.
- [16] HO, J.K., MANNE, A.S., "Nested Decomposition for Dynamic Models", Mathematical Programming, 6, 1974.
- [17] KORT, B.W., BERTSEKAS, D.P., "Combined Primal-Dual and Penalty Methods for Convex Programming", SIAM J. Control, vol.14, n° 2, Fevereiro 1976.
- [18] KRIVONOZHKO, V.E., CHEBOTAREV, S.P., "Factorization Method for Linear Dynamic Programming Problems", Automation and Remote Control, n° 7, Julho 1976.

- [19] KRIVONOZHKO, V.E., CHEBOTAREV, S.P., "Triangular Factoring of Matrices in Penalty Function for Solving Problems of Linear Dynamic Programming", Automation and Remote Control, nº 6, Junho 1977.
- [20] KRIVONOZHKO, V.E., "A Decomposition Algorithm for Linear Dynamic Programming Problems", Engineering Cybernetics, vol. 15, nº 3, 1977.
- [21] LASDON, L.S., "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan, New York, 1970.
- [22] LUENBERGER, D.G., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison - Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
- [23] MARKS, D.H., COHON, J.L., "An Application of Linear Programming to the Preliminary Analysis of River Basin Planning Alternatives", em "Studies in Linear Programming", editado por Salkin, H.M. e Saha, J., North - Holland, Amsterdam, 1975.
- [24] MIELE, A., MOSELEY, P.E., LEVY, A.V., COGGINS, G.M., "On the Method of Multiplier for Mathematical Programming Problems", J. Opt. Th. Appl. (JOTA), vol. 10, nº 1, 1972.
- [25] O'NEILL, R.P., "Nested Decomposition of Multistage Convex Programs", SIAM J. Control, vol. 14, nº 3, Maio 1976.
- [26] POWELL, M.J.D., "A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems", em Optimization, editado por Fletcher, R., Academic Press, Londres, 1969.
- [27] PROPOI, A.I., YADYKIN, A.B., "A Modification of Duality relation in Dynamic Linear Programming", Automation and Remote Control, nº 5, Maio 1975.

- [28] PROPOI, A.I., YADYKIN, A.B., "A Parametric Iterative Method for the Solution of Linear Dynamic Programming Problems, I. The Nondegenerate Case", Automation and Remote Control, n<sup>o</sup> 12, Dezembro 1975.
- [29] PROPOI, A.I., "Problemas of Dynamic Linear Programming", RM - 76 - 78, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxemburg, Austria, Novembro 1976.
- [30] PROPOI, A.I., "Dynamic Linear Programming Models for Livestock Farms", RM - 77 - 29, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxemburg, Austria, Junho 1977.
- [31] PROPOI, A.I., KRIVONOZHKO, V.E., "The Simplex Method for Dynamic Linear Programs", RR - 78 - 14, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxemburg, Austria, Setembro 1978.
- [32] PSENYCHNY, B.N., DANILIN, Yu. M., "Numerical Methods in Extremal Problems", Mir, Moscou, 1978.
- [33] ROCKAFELLAR, R.T., "A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problems by Unconstrained Optimization", Mathematical Programming 5, pag. 354-373, 1973.
- [34] ROCKAFELLAR, R.T., "The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming", J. Opt. Th. Appl. (JOTA), vol. 12, n<sup>o</sup> 6, 1973.
- [35] ROCKAFELLAR, R.T., "Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming", SIAM J. Control, vol. 12, n<sup>o</sup> 2, Maio 1974.
- [36] SAKAROVITCH, M., "Notes on Linear Programming", Van Nostrand, New York, 1971.

- [37] SOARES, S., "Programação Matemática de Grande Porte: Uma Aplicação a Sistemas Hidrotérmicos de Potência". Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, Outubro 1978.
- [38] STEPHANOPOULOS, G., WESTBERG, A.W., "The Use of Hestenes Method of Multipliers to Resolve Dual Gaps in Engineering System Optimization", J. Opt. Th. Appl. (JOTA), vol. 15, nº 3, 1975.
- [39] SWART, W., SMITH, C., HOLDERBY, T., "Expansion Planning for a Large Dairy Farm", em Studies in Linear Programming", editado por Salkin, H.M. e Saha, J., North Holland, Amsterdam 1975.
- [40] TABAK, D., KUO, B.C., "Optimal Control by Mathematical Programming", Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [41] TAMURA, H., "Multistage Linear Programming for Discrete Optimal Control with Distributed - Lags", Automatica, vol. 13, pag. 369-376, 1977.
- [42] WATANABE, N., NISHIMURA, Y., MATSUBARA, M., "Decomposition in Large System Optimization Using the Method of Multipliers", J. Opt. Th. Appl. (JOTA), vol. 25, Junho 1978.
- [43] WOLLMER, R.D., "A Substitute Inverse for the Basis of a Staircase Structure Linear Program", Mathematics of Operations Research, vol. 2, nº 3, Agosto 1977.