



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Ariádne de Lourdes Justi Bertolin

**Estabilidade Robusta de Sistemas Discretos
Incertos Variantes no Tempo por meio de
Desigualdades Matriciais Lineares**

Campinas
2019

Ariádne de Lourdes Justi Bertolin

**Estabilidade Robusta de Sistemas Discretos Incertos
Variantes no Tempo por meio de Desigualdades
Matriciais Lineares**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado DEFENDIDA PELA ALUNA ARIÁDNE DE LOURDES JUSTI BERTOLIN E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES E COORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO CORAÇÃO DE LEÃO FONTOURA DE OLIVEIRA.

Campinas
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

B462e Bertolin, Ariádne de Lourdes Justi, 1993-
Estabilidade robusta de sistemas discretos incertos variantes no tempo por meio de desigualdades matriciais lineares / Ariádne de Lourdes Justi Bertolin. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Coorientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Estabilidade. 2. Sistemas incertos. 3. Lyapunov, Funções de. 4. Desigualdades matriciais lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de, 1978-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Robust stability of uncertain time-varying discrete-time systems by means of linear matrix inequalities

Palavras-chave em inglês:

Stability

Uncertain systems

Lyapunov functions

Linear matrix inequalities

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestra em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Edson Roberto De Pieri

Matheus Souza

Data de defesa: 23-08-2019

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-7465-1151>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8584827679676427>

COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidata: Ariádne de Lourdes Justi Bertolin

RA: 192688

Data da Defesa: 23 de agosto de 2019

Título da Dissertação: “Estabilidade Robusta de Sistemas Discretos Incertos Variantes no Tempo por meio de Desigualdades Matriciais Lineares”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri (DAS/UFSC)

Prof. Dr. Matheus Souza (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese) e na Secretaria de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

A Deus por me permitir chegar a esta etapa. Aos meus pais, Luiz Carlos e Maria de Lourdes, pelo apoio e carinho em todos os momentos, e por serem, sempre, a minha inspiração e exemplo de vida e amor. E às minhas irmãs e sobrinha, pela alegria e perseverança em mim. Dedico.

Agradecimentos

Agradeço,

Aos professores Pedro L. D. Peres e Ricardo C. L. F. Oliveira, pela orientação, paciência e completa disposição para ajudar. À professora, Sophie Tarbouriech, pela oportunidade e acolhida no LAAS (*Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes*), Toulouse, França. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), código de financiamento 001, e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2016/22020-1 (bolsa no país) e 2018/05483-3 (bolsa BEPE), que conveniadas, apoiaram financeiramente o desenvolvimento do projeto¹. À Universidade Estadual de Campinas, especialmente à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação e a todos os demais professores e funcionários, pelo constante auxílio e dedicação.

¹As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade da autora e não necessariamente refletem a visão da FAPESP e da CAPES.

"If you wish to succeed in life, make perseverance your bosom friend, experience your wise counselor, caution your elder brother, and hope your guardian genius."

Joseph Addison

Resumo

Esta dissertação investiga o problema de análise de estabilidade robusta e cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares discretos com parâmetros incertos variantes no tempo. Três diferentes tipos de variações no tempo são tratadas: *i*) arbitrariamente rápidas; *ii*) limitadas mas desconhecidas; *iii*) governadas por uma dinâmica conhecida. Tendo como base a análise de estabilidade de Lyapunov para um sistema construído com $\kappa - 1$ equações dinâmicas redundantes, condições equivalentes necessárias e suficientes para a estabilidade robusta são desenvolvidas em termos de κ na forma de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities — LMIs*) dependentes de parâmetros. Como consequência, a função de Lyapunov resultante depende da matriz dinâmica em diversos instantes sucessivos de tempo. Para escolhas particulares da estrutura das variáveis de decisão, condições suficientes e progressivamente menos conservadoras à medida que κ cresce podem ser obtidas. Extensões para computar as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ também são apresentadas. Exemplos numéricos baseados em modelos de sistemas retirados da literatura ilustram os benefícios da abordagem proposta, que pode ser computacionalmente mais eficiente quando comparada a outros métodos existentes.

Palavras-chave: Sistemas discretos no tempo; Sistemas lineares incertos; Parâmetros variantes no tempo; Estabilidade robusta; Funções de Lyapunov polinomiais; Desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This work investigates the problem of robust stability analysis and \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation for discrete-time linear systems with uncertain and time-varying parameters. Three different types of parameter variation are dealt with: *i*) arbitrarily fast; *ii*) limited but unknown; *iii*) described by a known dynamics. Based on the Lyapunov stability analysis for a system constructed with $\kappa - 1$ redundant dynamic equations, equivalent necessary and sufficient conditions for robust stability are developed in terms of κ in the form of parameter-dependent Linear Matrix Inequalities (LMIs). As a consequence, the resulting Lyapunov function depends on the dynamic matrix at several successive instants of time. For particular choices of the structure of the decision variables, sufficient and progressively less conservative conditions as κ grows can be obtained. Extensions to cope with \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ guaranteed are also presented. Numerical examples, based on models of systems borrowed from the literature, illustrate the benefits of the proposed approach, that can be computationally more efficient when compared to other existing methods.

Key-words: Discrete-time systems; Uncertain linear systems; Time-varying parameters; Robust stability; Polynomial Lyapunov functions; Linear matrix inequalities.

Lista de ilustrações

Figura 3.1 – Espaço paramétrico $\alpha_i(k) \times \alpha_i(k+1)$ para taxa limitada de variação $b_i = 0.2$.	33
Figura 3.2 – Espaço paramétrico $\alpha_i(k) \times \alpha_i(k+1) \times \alpha_i(k+2)$ para taxa limitada de variação $b_i = 0.2$.	34
Figura 3.3 – Máximos valores de v considerando o comportamento dinâmico de $\theta(k) = \cos(\omega k)$ em função de ω , para $g = 1$ e $\kappa = 1$ (linha azul), $\kappa = 2$ (vermelho pontilhado) e $\kappa = 3$ (amarelo tracejado) para o Exemplo 4.	47
Figura 4.1 – Limitantes ϕ da norma \mathcal{H}_2 computados para P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$, utilizando o método proposto nesta dissertação e o de dCCOPS10 (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ) para o Exemplo 6.	53
Figura 4.2 – Limitantes μ da norma \mathcal{H}_∞ computados para P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$, utilizando o método proposto nesta dissertação e o dCCOPS10 (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ) para o Exemplo 6.	54
Figura 4.3 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 associados à estrutura E1, considerando a variação dinâmica com $\omega \in [0, 2\pi]$ e os seguintes valores para κ e grau da matriz de Lyapunov $P_\kappa(g)$: $(g, \kappa) \in \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$.	55
Figura 4.4 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 associados à estrutura E2, considerando a variação dinâmica com $\omega \in [0, 2\pi]$ e os seguintes valores para κ e grau da matriz de Lyapunov $P_\kappa(g)$: $(g, \kappa) \in \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$.	56
Figura 4.5 – Valor de b em função de ω para as estruturas E1 e E2.	56
Figura 4.6 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 considerando taxas limitadas de variação para a estrutura E1 e $\kappa = 2$.	57
Figura 4.7 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 considerando taxas limitadas de variação para a estrutura E2 e $\kappa = 2$.	57

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Valores máximos de ρ , número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) para T-ii) e T-iii) (em termos de κ e com valores de L iguais), L06 (em termos de M) e B03 e K08 (em termos de p) para o Exemplo 1.	43
Tabela 3.2 – Valores máximos de ρ , número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) para T-ii) e T-iii) (em termos de κ e com valores de L iguais), L06 (em termos de M) e B03 e K08 (em termos de p) para o Exemplo 2.	44
Tabela 3.3 – Limitantes para $\theta(k)$, número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) para o problema de análise de estabilidade para $\kappa = \{1,2\}$ e $P_\kappa(\alpha(k))$ constante ($g = 0$) ou afim ($g = 1$) para o Exemplo 3.	45
Tabela 4.1 – Custos garantidos ϕ obtidos pelos métodos LK08 e T4.1 com o número de linhas de LMIs (L) e de variáveis escalares (V) para o Exemplo 5.	52
Tabela 4.2 – Número de linhas de LMIs (L) e de variáveis escalares (V) para o cômputo dos custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$ comparados com os resultados obtidos em dCCOPS10 (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ) para o Exemplo 6.	53

Lista de acrônimos e notação

LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
LTI	Linear Time Invariant (linear invariante no tempo)
LPV	Linear Parameter-Varying (linear variante com parâmetros)
\otimes	corresponde ao produto de Kronecker
\star	indica um bloco induzido por simetria em matrizes quadradas
$L > 0$	indica que a matriz L é simétrica e definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz L é simétrica e semi-definida positiva
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
$(\cdot)^T$	pós-posto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
I_n	matriz identidade de dimensão n apropriada
$0_{n \times m}$	matriz de zeros de dimensão indicada
$\text{blkdiag}(\cdot)$	notação para matrizes bloco diagonais formadas pelos elementos em (\cdot)
g^*	denota o complexo conjugado
co	combinação convexa
$\text{Tr}(\cdot)$	corresponde ao traço do argumento (\cdot)

Sumário

Lista de ilustrações	10
Lista de tabelas	11
Lista de acrônimos e notação	12
Sumário	13
1 Introdução geral	15
2 Conceitos básicos e definições	18
2.1 Introdução	18
2.2 Análise de estabilidade	18
2.3 Cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	22
2.3.1 Norma \mathcal{H}_2	22
2.3.2 Norma \mathcal{H}_∞	24
2.4 Aproximações para LMIs dependentes de parâmetros	24
2.5 Incerteza afim	25
2.6 Lemas auxiliares	26
3 κ-Estabilidade	27
3.1 Introdução	27
3.2 Condições de estabilidade gerais	27
3.3 Variações do parâmetro incerto	31
3.3.1 Arbitrária	31
3.3.2 Limitada	31
3.3.3 Dinâmica	35
3.4 Particularização da κ -estabilidade	36
3.4.1 Variação arbitrária	36
3.4.2 Variação limitada	40
3.4.3 Variação dinâmica	40
3.5 Exemplos	41
3.5.1 Variação arbitrária	42
3.5.2 Variação limitada	44
3.5.3 Variação dinâmica	45
4 Cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	48
4.1 Introdução	48
4.2 Sistemas aumentados não autônomos	48
4.3 Custo garantido \mathcal{H}_2	48
4.4 Custo garantido \mathcal{H}_∞	49
4.5 Monotonicidade dos limitantes das normas	49

4.6	Exemplos	50
4.6.1	Varição arbitrária	50
4.6.2	Varição limitada	51
4.6.3	Varição dinâmica	53
	Conclusão	58
	Referências	60

CAPÍTULO 1

Introdução geral

O desenvolvimento de métodos mais eficazes para certificar estabilidade e critérios de desempenho de sistemas dinâmicos é um tópico importante na área de teoria de controle. Uma explicação para esse fato é que há, na engenharia, a exigência crescente de modelos de sistemas dinâmicos nos quais as variáveis e os parâmetros que os descrevem ou os afetam são desconhecidos ou possuem um comportamento complexo. Por exemplo, no primeiro caso pode-se mencionar a indefinição do valor real dos parâmetros que descrevem a planta (frequentemente os valores são especificados por intervalos) e, no segundo caso, pode-se exemplificar a difícil descrição matemática da variação do consumo de combustível em foguetes. Dessa forma, as ferramentas de análise e controle devem apresentar, juntamente com a modelagem, tratamento específico aos problemas em que há a presença de incertezas.

Nesse contexto, um grande número de trabalhos na literatura propõe diferentes técnicas de modelagem para sistemas incertos. A principal abordagem é agregar ao modelo do sistema parâmetros capazes de representar, dentro de uma acurácia pré-especificada, as incertezas do sistema. Existem vários tipos de estruturas capazes de representar as incertezas, tais como intervalares, limitadas em norma, afins (ou hipercúbicas) e politópicas, como detalhado em (BOYD *et al.*, 1994). Devido à simplicidade, abrangência e facilidade de manipulação, as descrições utilizadas nesta dissertação foram a politópica, na qual o domínio é descrito pela combinação convexa de um conjunto de vértices conhecidos, e a afim, cujo domínio é descrito pela soma afim de parâmetros confinados a intervalos limitados.

Outra dificuldade presente na investigação dos sistemas dinâmicos está associada à classe dos sistemas não lineares, devido à não existência de uma metodologia geral que descreva sistemas não lineares em uma forma matemática comum (KHALIL, 2002). Neste sentido, o procedimento de linearização geralmente é adotado pois modelos lineares satisfazem propriedades que simplificam a modelagem, a análise e o controle (LATHI, 2005). Dessa forma,

vale a pena destacar os modelos lineares com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter-Varying* — LPV) e os sistemas chaveados (MASON *et al.*, 2012; LIBERZON, 2003; OLIVEIRA *et al.*, 2007; LEE, 2006; DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a).

O destaque do modelo LPV é sem dúvida pela habilidade de descrever tanto a dinâmica de sistemas lineares quanto representar alguns comportamentos não lineares de maneira linear em função de algum parâmetro (DE CAIGNY *et al.*, 2009). Os sistemas chaveados são úteis em diversos contextos da engenharia, como engenharia mecânica, automotiva e elétrica, por proporcionar estruturas efetivas na descrição de plantas que apresentam mudanças abruptas na dinâmica (LIBERZON; MORSE, 1999; ATHANASOPOULOS; LAZAR, 2014; BARBOSA; TROFINO, 2003; SUN, 2008), como por exemplo em momentos de falhas. Esses sistemas podem possuir representações puramente discretas ou híbridas (tempos contínuo e discreto coexistindo).

O estudo da estabilidade em sistemas precisamente conhecidos (i.e., sem incertezas) utiliza-se de condições necessárias e suficientes baseadas em critérios algébricos (analíticos ou expressos em termos de um procedimento numérico) de fácil solução ou na análise das raízes da equação característica do sistema (autovalores da matriz dinâmica). Porém, nos sistemas mais complexos, como os sistemas LPV e chaveados, esses procedimentos não se aplicam devido às dificuldades em lidar com a incerteza. Dessa forma, foram desenvolvidas diferentes abordagens para a certificação da estabilidade, particularmente para sistemas discretos, sendo que todas as técnicas existentes estão relacionadas com o cômputo do raio espectral da matriz dinâmica incerta (BLONDEL *et al.*, 2004; PARRILO; JADBABAIE, 2008; JUNGERS, 2009), de forma que a condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema linear incerto discreto no tempo é possuir um raio espectral menor do que um (PARRILO; JADBABAIE, 2008).

A análise da estabilidade utilizando a teoria de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992; HENRION *et al.*, 2004; OLIVEIRA *et al.*, 2005; SATO; PEAUCELLE, 2006) é uma das técnicas mais utilizadas, pois fornece condições suficientes, que podem ser traduzidas em condições numericamente testáveis e com precisão crescente para certificar a estabilidade robusta de sistemas incertos. Diferentes estruturas têm sido utilizadas para a função de Lyapunov, no contexto de sistemas incertos. As primeiras surgiram na década de 1980, utilizando a chamada *estabilidade quadrática*, que emprega uma matriz de Lyapunov constante para todo o espaço de incertezas considerado. Condições menos conservadoras foram desenvolvidas na sequência, por exemplo, utilizando estruturas afins ou polinomiais (TROFINO; DE SOUZA, 2001; LEITE; PERES, 2003; CHESI *et al.*, 2005; TROFINO *et al.*, 2005; GEROMEL; KOROGUI, 2006; COX *et al.*, 2018; CHESI *et al.*, 2009; GEROMEL; KOROGUI, 2006). Nesse contexto, destaca-se uma classe de funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros que deu origem à chamada κ -estabilidade, apresentada em (DE OLIVEIRA *et al.*, 2007; DE OLIVEIRA *et al.*, 2010), para o caso discreto invariante no tempo, em (OLIVEIRA *et al.*, 2009; MOZELLI; PALHARES, 2011), para o caso contínuo com variação limitada, e em (BERTOLIN *et al.*, 2018b; BERTOLIN *et al.*, 2018a) para parâmetros arbitrariamente rápidos em tempo discreto.

A κ -estabilidade propõe funções de Lyapunov polinomiais construídas a partir de uma des-

criação redundante das equações de estado do sistema incerto. Como consequência, a função de Lyapunov envolve a matriz dinâmica do sistema, dependendo polinomialmente do parâmetro incerto com grau proporcional a um inteiro κ associado ao número de equações redundantes. Como demonstrado em (DE OLIVEIRA *et al.*, 2010), mesmo para escolhas de matrizes constantes (i.e., independentes do parâmetro) associadas às variáveis de decisão que compõem a função de Lyapunov, há uma redução progressiva do conservadorismo com o aumento de κ , tendendo-se assintoticamente à necessidade.

A principal vantagem das condições de estabilidade robusta apresentadas nesta dissertação vem da formulação numérica em termos de otimização convexa empregando desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) permitindo afirmar, em alguns casos, a garantia de convergência dos algoritmos. É importante mencionar que o ferramental numérico baseado em LMIs é muito utilizado para resolver problemas de análise de estabilidade e muitos outros nas áreas de controle e processamento de sinais (BOYD *et al.*, 1994; EL GHAOUI; NICULESCU, 2000; OLIVEIRA; PERES, 2010). A principal razão para esse fato é o amplo amparo numérico proporcionado por pacotes computacionais que possuem algoritmos de otimização com eficiência comprovada (GAHINET *et al.*, 1995; LÖFBERG, 2004; STURM, 1999).

Esta dissertação tem como foco principal o problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares discretos com parâmetros variantes no tempo apresentando três tipos de variações: Arbitrária (ou chaveada), limitada e dinâmica. O objetivo principal é usar a κ -estabilidade para propor novas condições LMIs que certifiquem a estabilidade baseando-se na descrição redundante das equações de estado do sistema e nas funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, além de propor extensões para o cálculo de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . No final de cada capítulo, são apresentados estudos numéricos com exemplos retirados da literatura fazendo-se comparações com outros trabalhos, utilizando as ferramentas computacionais disponíveis no *software* MATLAB para a programação de LMIs, além de *parsers* e *solvers* como ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019), SeDuMi (STURM, 1999) e Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000).

A organização da dissertação é a seguinte: No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos e definições que servem de base para as técnicas propostas neste trabalho. O Capítulo 3 explora o uso de equações redundantes no espaço de estados, definindo condições LMIs suficientes que asseguram a estabilidade robusta e o conceito de κ -estabilidade. Extensões do conceito de κ -estabilidade para tratar os problemas de cômputo de custo garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são apresentadas no Capítulo 4. O Capítulo de Conclusão descreve as contribuições da dissertação, perspectivas de trabalhos futuros e artigos publicados durante o mestrado.

CAPÍTULO 2

Conceitos básicos e definições

2.1 Introdução

Este capítulo introduz os modelos utilizados para representar sistemas lineares discretos com parâmetros variantes no tempo, apresenta definições de estabilidade e critérios de desempenho baseados nas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e os resultados mais importantes no contexto no qual esta dissertação oferece contribuições. Particularmente sobre o problema de estabilidade robusta, são apresentados os principais resultados baseados em LMIs. Para que a apresentação das contribuições dadas nos Capítulos 3 e 4 fique mais clara em termos de notação, sempre que possível as condições propostas são expressas em termos de LMIs dependentes de parâmetros. Embora esse tipo de condição não seja tratável numericamente, relaxações podem ser utilizadas, como discutido em detalhes na Seção 2.4.

2.2 Análise de estabilidade

Nesta seção é formalizado o problema de estabilidade robusta de sistemas lineares discretos com parâmetros variantes no tempo. Além disso, apresenta-se uma pequena revisão histórica dos principais resultados baseados em LMIs que surgiram na literatura nos últimos anos para tratar o problema. Como existe uma forte ligação entre a estabilidade de um sistema com parâmetros variantes no tempo pertencentes a conjuntos convexos (por exemplo, um politopo) e sistemas chaveados, abordam-se os dois casos de forma conjunta.

Considere o sistema linear discreto com parâmetros variantes no tempo dado por

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k), \quad (2.1)$$

em que $A(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz dada na forma

$$A(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) A_i$$

e $\alpha(k) \triangleq (\alpha_1(k), \dots, \alpha_N(k))$ é um vetor de parâmetros variantes no tempo pertencentes ao simplex unitário

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

para todo $k \geq 0$. Graças à dependência linear em $\alpha(k)$ e à estrutura de Λ_N , a matriz $A(\alpha(k))$ é conhecida como politópica com parâmetros variantes no tempo, ou como linear variante com parâmetros (em inglês, *linear parameter-varying* — LPV) com estrutura politópica, e $A_i, i = \dots, N$ são matrizes conhecidas chamadas de vértices do politopo. Restringindo $\alpha(k)$ ao conjunto

$$\Psi_N \triangleq \{ (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \Lambda_N : \xi_i = 1, \xi_j = 0, i \neq j \}$$

garante-se que a matriz $A(\alpha(k))$ assuma valores apenas nos vértices do politopo e, neste caso, o sistema é conhecido como *sistema chaveado*.

Definição 2.1. O sistema discreto (2.1) é uniformemente assintoticamente estável, ou estável no sentido Lyapunov se, qualquer que seja a condição inicial $x(0)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0.$$

Um resultado importante sobre a evolução de $x(k)$ em (2.1) é que a estabilidade assintótica é equivalente para os dois casos $\alpha(k) \in \Lambda_N$ e $\alpha(k) \in \Psi_N$ (LEE, 2006; LIN; ANTSAKLIS, 2005; LIN; ANTSAKLIS, 2009). Além disso, sabe-se também que a estabilidade assintótica é equivalente a $\rho(A(\alpha(k))) < 1$ em que $\rho(A(\alpha(k)))$ é o raio espectral conjunto (em inglês, *joint spectral radius* — JSR) da sequência $A(\alpha(0))A(\alpha(1)) \cdots A(\alpha(T))$ quando $T \rightarrow \infty$. Atualmente existem muitos métodos para computar o JSR (mais detalhes podem ser consultados em (PARRILO; JADBABAIE, 2008; CHANG; BLONDEL, 2013; AHMADI *et al.*, 2014), no livro (JUNGERS, 2009) e no *toolbox* especializado (VANKEERBERGHEN *et al.*, 2014)). Neste trabalho o interesse está nas técnicas baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov, mais precisamente, nos métodos baseados em LMIs, que são problemas de otimização pertencentes a uma área mais geral conhecida como programação semi-definida (em inglês, *semi-definite programming* — SDP). A razão para esse interesse em particular é que qualquer melhoria obtida no problema de análise usando esta classe de ferramentas pode beneficiar os projetos de síntese de controladores e filtros para sistemas discretos LPV e chaveados.

Antes de prosseguir, considere os conjuntos $\mathbb{K} \triangleq \{1, \dots, N\}$,

$$\Omega_M \triangleq \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in \underbrace{\Lambda_N \times \dots \times \Lambda_N}_{M\text{-vezes}} \subset \mathbb{R}^{MN} \right\},$$

$$\Xi_M \triangleq \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{M\text{-vezes}} \subset \mathbb{N}^M \right\}.$$

O conjunto Ξ_M é utilizado para definir todas as sequências possíveis de $\alpha(k)$ de comprimento M , isto é, $(\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(M))$ quando $\alpha(k) \in \Psi_N$ (cardinalidade N^M). Note que, a cada instante de tempo, apenas um índice é necessário para caracterizar $\alpha(k) \in \Psi_N$ (associado ao único modo ativo). A base da maioria das condições de estabilidade apresentadas nesta seção é dada pelo próximo lema.

Lema 2.1. (BLIMAN; FERRARI-TRECATE, 2003). *O sistema (2.1) com $\alpha(k) \in \Psi_N$ é assintoticamente estável se, e somente se, para um inteiro p suficientemente grande, qualquer das condições equivalentes seguintes são verdadeiras.*

- (a) *Existe uma função de Lyapunov quadrática $V(x(k))$ positiva (para $x(k) \neq 0$) tal que $V(x(k+p)) < V(x(k))$, $\forall k \geq 0$ ao longo das trajetórias de (2.1).*
- (b) *Existe uma função de Lyapunov quadrática $V(x(k))$ positiva (para $x_p(k) \neq 0$) tal que $V(x_p(k+1)) < V(x_p(k))$, $\forall k \geq p-1$ ao longo das trajetórias de (2.1), em que*

$$x_p(k) = \begin{bmatrix} x(k)^T & x(k+1)^T & \dots & x(k-p+1)^T \end{bmatrix}^T.$$

A propriedade interessante do Lema 2.1 é a equivalência entre a procura de uma função Lyapunov quadrática em $x(k)$ que diminui em p instantes de tempo e uma função Lyapunov quadrática em $x_p(k)$ (estados aumentados) que decresce em um instante de tempo. A condição (b) não foi explorada em (BLIMAN; FERRARI-TRECATE, 2003) em termos de testes computacionais, mas é precisamente o ponto de partida da principal contribuição desta dissertação, apresentada no Capítulo 3. O próximo lema é uma consequência direta da condição (a) do Lema 2.1 e é o primeiro resultado importante no contexto dos métodos baseados em LMIs.

Lema 2.2. (BLIMAN; FERRARI-TRECATE, 2003). *O sistema (2.1) com $\alpha(k) \in \Psi_N$ é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um inteiro suficientemente grande p tais que*

$$A_{\sigma_p}^T A_{\sigma_{p-1}}^T \dots A_{\sigma_1}^T P A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_{p-1}} A_{\sigma_p} - P < 0, \quad \forall (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \Xi_p \quad (2.2)$$

são verificadas.

A primeira característica notória do Lema 2.2 é que, sempre que o sistema (2.1) com $\alpha(k) \in \Psi_N$ é assintoticamente estável, as condições do Lema 2.2, mais precisamente, um conjunto finito

de condições LMIs, fornecem uma solução viável com o aumento de p (relaxação convergente). Apesar de o número de LMIs crescer exponencialmente com p , é importante ressaltar que o problema tem somente $n(n+1)/2$ variáveis de otimização (que são os elementos da matriz P). Outra característica importante do Lema 2.2 é que o resultado é baseado na existência da função de Lyapunov quadrática nos estados $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$, contrastando com o caso contínuo no tempo em que uma função de Lyapunov polinomial homogênea nos estados com grau arbitrário é necessária para provar a estabilidade (CHESI, 2011). Finalmente, note que a condição (2.2) para $p = 1$ é o bem conhecido teste da *estabilidade quadrática* (BOYD *et al.*, 1994), que serviu de base para o desenvolvimento de muitas condições de análise e síntese baseadas em LMIs no contexto de sistemas lineares incertos desde o início dos anos noventa do século XX.

Para melhorar a convergência, em termos de necessitar de menores valores de p para certificar a estabilidade assintótica, o artigo (BLIMAN; FERRARI-TRECATE, 2003) também fornece uma relaxação alternativa envolvendo mais variáveis de decisão.

Lema 2.3. (BLIMAN; FERRARI-TRECATE, 2003). *O sistema (2.1) com $\alpha(k) \in \Psi_N$ é assintoticamente estável se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma \in \Xi_p$ e um inteiro suficientemente grande p tais que*

$$A_{\sigma_p^+}^T A_{\sigma_{p-1}^+}^T \cdots A_{\sigma_1^+}^T P_{\sigma^+} + A_{\sigma_1^+} \cdots A_{\sigma_{p-1}^+} A_{\sigma_p^+} - P_\sigma < 0, \quad \forall (\sigma^+, \sigma) \in \Xi_{2p}$$

são verificadas, em que $\sigma \in \Xi_p$ e $\sigma^+ \in \Xi_p$.

As condições do Lema 2.3 também têm um crescimento exponencial do número de variáveis de decisão, mas podem fornecer uma convergência mais rápida em termos de p do que o Lema 2.2. Note que para $p = 1$, as LMIs resultantes, se factíveis, certificam a estabilidade utilizando o conceito de estabilidade *poli-quadrática* (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001b). O próximo resultado, proposto em (LEE; DULLERUD, 2006), pode ser considerado como uma melhoria com respeito aos lemas 2.2 e 2.3.

Lema 2.4. (LEE; DULLERUD, 2006). *O sistema (2.1) com $\alpha(k) \in \Psi_N$ é assintoticamente estável se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma \in \Xi_p$ e um inteiro suficientemente grande p tais que*

$$A_{\sigma_{p+1}}^T P_{\sigma_1, \dots, \sigma_p} A_{\sigma_{p+1}} - P_{\sigma_2, \dots, \sigma_{p+1}} < 0, \quad \forall \sigma \in \Xi_{p+1}$$

são verificadas.

A matriz de Lyapunov P_σ é chamada de *dependente de caminho* (em inglês, *path-dependent*) em (LEE; DULLERUD, 2006) devido à indexação baseada em todos os caminhos (sequências) possíveis que o sinal $\sigma(k)$ pode assumir em p instantes de tempo. A vantagem com respeito ao Lema 2.3 é que o número de LMIs, embora também aumente exponencialmente com p , é dado por N^{p+1} (oposto a N^{2p} do Lema 2.3). Outra importante característica do Lema 2.4

é que, diferentemente dos lemas 2.2 e 2.3, se as LMIs são factíveis para um dado p então também são para $p + 1$. Em (LEE, 2006) é mostrado que o Lema 2.4 também serve como condição de estabilidade para o sistema (2.1) evoluindo como um sistema LPV ($\alpha(k) \in \Lambda_N$), sendo uma prova alternativa para a equivalência de estabilidade entre um sistema LPV e um sistema chaveado.

O primeiro objetivo desta dissertação é oferecer uma alternativa aos lemas anteriores, estabelecendo uma nova relaxação baseada em LMIs para verificar a estabilidade do sistema LPV (2.1). A motivação é obter um teste de estabilidade com convergência similar à dos lemas 2.3 e 2.4, mas com crescimento *polinomial* do número de variáveis de decisão. A inspiração vem do conceito conhecido como κ -*estabilidade*, em que uma função de Lyapunov especial, construída usando uma descrição redundante da equação dinâmica, é empregada para certificar a estabilidade para sistemas politópicos contínuos (OLIVEIRA *et al.*, 2005; EBHARA *et al.*, 2005; OLIVEIRA *et al.*, 2008; OLIVEIRA *et al.*, 2009) e discretos no tempo (DE OLIVEIRA *et al.*, 2010). Os resultados são apresentados no Capítulo 3.

2.3 Cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Além da análise da estabilidade, outro aspecto importante no estudo de sistemas lineares é o cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , pois são critérios de desempenho muito úteis para prever o comportamento do sistema em determinadas situações, como a estimativa da energia na saída frente a alguns sinais de entrada particulares, ou a relação entre a energia de sinais exógenos (ruídos) de entrada e a energia da saída.

Para isto, considere o sistema linear discreto com parâmetros variantes no tempo

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B(\alpha(k))w(k) \quad (2.3a)$$

$$y(k) = C(\alpha(k))x(k) + D(\alpha(k))w(k) \quad (2.3b)$$

em que $w(k)$ e $y(k)$ são os vetores de entrada e saída do sistema, respectivamente. As matrizes do sistema $A(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são dadas por

$$\{A(\alpha(k)), B(\alpha(k)), C(\alpha(k)), D(\alpha(k))\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) \{A_i, B_i, C_i, D_i\}, \quad \alpha(k) \in \Lambda_N. \quad (2.4)$$

Caso as matrizes do sistema evoluam apenas nos vértices ($\alpha(k) \in \Psi_N$) então o sistema é considerado chaveado.

2.3.1 Norma \mathcal{H}_2

Uma possível definição (DE CAIGNY *et al.*, 2010) para a norma \mathcal{H}_2 de sistemas lineares discretos variantes no tempo (2.3) robustamente estáveis, para um horizonte de tempo infinito,

é dada por

$$\|H\|_2^2 = \limsup_{T \rightarrow \infty} \varepsilon \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} y(k)^T y(k) \right\}.$$

quando a entrada do sistema $w(k)$ é um ruído branco Gaussiano de média zero e matriz de covariância igual a identidade.

Os dois lemas seguintes fornecem limitantes superiores (custos garantidos) ϕ e φ para a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.3) considerado como politópico variante no tempo em termos de LMIs dependentes de parâmetros (DE CAIGNY *et al.*, 2010).

Lema 2.5. *O sistema (2.3) é robustamente estável com o custo garantido \mathcal{H}_2 dado por ϕ se existir uma matriz Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k))^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que as LMIs dependentes de parâmetros*

$$\text{Tr}(B(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1))B(\alpha(k)) + D(\alpha(k))^T D(\alpha(k))) < \phi^2 \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & \star & \star \\ P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) & P(\alpha(k+1)) & \star \\ C(\alpha(k)) & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.6)$$

são verificadas para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda_N \times \Lambda_N$.

Lema 2.6. *O sistema (2.3) é robustamente estável com o custo garantido \mathcal{H}_2 dado por φ se existir uma matriz Lyapunov dependente de parâmetros $W(\alpha(k)) = W(\alpha(k))^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que as LMIs dependentes de parâmetros*

$$\text{Tr}(C(\alpha(k))W(\alpha(k))C(\alpha(k))^T + D(\alpha(k))D(\alpha(k))^T) < \varphi^2 \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} W(\alpha(k+1)) & \star & \star \\ W(\alpha(k))A(\alpha(k))^T & W(\alpha(k)) & \star \\ B(\alpha(k))^T & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

são verificadas para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda_N \times \Lambda_N$.

O lemas 2.5 e 2.6 são formulados com base no gramiano de observabilidade e de controlabilidade, respectivamente, e podem fornecer custos garantidos diferentes (para sistemas invariantes no tempo os valores seriam iguais se as condições pudessem ser resolvidas de maneira exata). No contexto de sistemas LPV arbitrariamente variantes ou chaveados, esses lemas são chamados de *peak impulse response level* e *average output variance level* (LEE; KHARGONEKAR, 2008). Nesta dissertação, apenas o Lema 2.5 é usado para o cômputo de custo garantido \mathcal{H}_2 .

2.3.2 Norma \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.3) é definida em termos do ganho ℓ_2 do sistema, isto é,

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|w(k)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(k)\|_2}{\|w(k)\|_2}.$$

Utilizando uma função de Lyapunov na forma $v(x(k)) = x(k)^T P(\alpha(k))x(k)$ e considerando que o sistema (2.3) é robustamente estável, é possível formular o problema do cômputo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em termos de um limitante superior μ por meio da seguinte desigualdade

$$x(k+1)^T P(\alpha(k+1))x(k+1) - x(k)^T P(\alpha(k))x(k) + y(k)^T y(k) - \mu^2 w(k)^T w(k) < 0. \quad (2.9)$$

Utilizando as equações do sistema e aplicando algumas manipulação algébricas, obtém-se uma condição chamada *Bounded Real Lemma*, apresentada no lema a seguir em termos de LMIs dependentes de parâmetros. (BARBOSA *et al.*, 2002; DE SOUZA *et al.*, 2006; DE CAIGNY *et al.*, 2010).

Lema 2.7. *O sistema (2.3) é robustamente estável com o custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por μ se existir uma matriz Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k))^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & * & * & * \\ P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) & P(\alpha(k+1)) & * & * \\ C(\alpha(k)) & 0 & I & * \\ 0 & B(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1)) & D(\alpha(k))^T & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.10)$$

é verificada para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda_N \times \Lambda_N$.

Nota-se que o cálculo para o limitante da norma \mathcal{H}_∞ possui uma forma equivalente trocando a quádrupla $\{A, B, C, D\}(\alpha(k))$ pela sua transposta $\{A^T, C^T, B^T, D^T\}(\alpha(k))$ na condição.

2.4 Aproximações para LMIs dependentes de parâmetros

Um destaque importante sobre as condições dos lemas 2.5 e 2.7 é que as desigualdades são dadas na forma de LMIs dependentes de parâmetros, uma vez que a estrutura da matriz de Lyapunov, como função do vetor de parâmetros $\alpha(k)$, é desconhecida. Uma prática para resolver o problema (frequentemente utilizada nos anos mil novecentos e noventa) seria testar as condições em uma amostra de pontos do domínio, obtendo um limitante inferior para as normas. À medida que o número de pontos cresce, limitantes cada vez mais próximos do valor ótimo (para a estrutura escolhida) poderiam ser obtidos. Nesta dissertação adota-se uma estratégia mais moderna e robusta, que consiste em impor uma estrutura para a matriz de Lyapunov. Embora seja possível arbitrar estruturas polinomiais de grau genérico, serão utilizadas matrizes de Lyapunov fixas (independentes de $\alpha(k)$) ou dependentes de maneira afim em $\alpha(k)$. Nesse

caso as desigualdades resultantes tornam-se matrizes polinomiais e testes de positividade podem ser realizados por meio de relaxações. Por exemplo, considere a LMI dependente de parâmetros associada ao problema de estabilidade robusta $A(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k)) < 0$, com $A(\alpha(k)) = \alpha_1(k)A_1 + \alpha_2(k)A_2$ politópica ($\alpha(k) \in \Lambda_N$). Escolhendo uma estrutura similar para $P(\alpha(k))$, isto é, $P(\alpha(k)) = \alpha_1(k)P_1 + \alpha_2(k)P_2$, tem-se a desigualdade

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2(k)\alpha_1(k+1)(A_1^T P_1 A_1 - P_1) + \alpha_1(k)\alpha_2(k)\alpha_1(k+1)(A_1^T P_1 A_2 + A_2^T P_1 A_1 - P_1 + P_2) \\ & + \alpha_2^2(k)\alpha_1(k+1)(A_2^T P_1 A_2 - P_2) + \alpha_1^2(k)\alpha_2(k+1)(A_1^T P_2 A_1 - P_1) \\ & + \alpha_1(k)\alpha_2(k)\alpha_2(k+1)(A_1^T P_2 A_2 + A_2^T P_2 A_1 - P_1 + P_2) + \alpha_2^2(k)\alpha_2(k+1)(A_2^T P_2 A_2 - P_2) < 0 \end{aligned}$$

Como tanto $\alpha(k)$ e $\alpha(k+1)$ pertencem a Λ_N para todo $k \geq 0$, todos os monômios do polinômio do lado esquerdo da desigualdade são não negativos. Portanto, para verificar se a desigualdade é definida negativa para todo $(\alpha(k), \alpha(k+1)) \in \Lambda_N \times \Lambda_N$, basta testar se os coeficientes são negativos, isto é, se as LMIs

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 A_1 - P_1 < 0, & \quad A_1^T P_1 A_2 + A_2^T P_1 A_1 - P_1 - P_2 < 0, & \quad A_2^T P_1 A_2 - P_2 < 0 \\ A_1^T P_2 A_1 - P_1 < 0, & \quad A_1^T P_2 A_2 + A_2^T P_2 A_1 - P_1 - P_2 < 0, & \quad A_2^T P_2 A_2 - P_2 < 0 \end{aligned}$$

são factíveis. Esta relaxação é conhecida como *relaxação de Pólya* e tem sido extensivamente utilizada na literatura de análise e controle robusto (OLIVEIRA; PERES, 2007). Além disso, o processo de extração das LMIs (coeficientes do polinômio matricial resultante) pode ser realizado com a ajuda de um *parser*, auxílio importante quando tratarem-se sistemas com um grande número de parâmetros e estruturas mais complexas para a matriz de Lyapunov. Por exemplo, nesta dissertação utiliza-se o *parser* ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019), que foi especialmente desenvolvido para realizar esse tipo de procedimento. Portanto, sempre que uma LMI dependente de parâmetros for apresentada e nenhum comentário específico sobre o método de solução for indicado, considere que relaxações de Pólya serão empregadas. Particularmente quando $\alpha(k) \in \Psi_N$ (sistema chaveado), o procedimento para obter as LMIs é simplificado, sendo necessário testar apenas as desigualdades nos vértices do politopo ($\alpha_i(k) = 1$, $\alpha_j(k) = 0$, $j \neq i$) em todos os instantes de tempo de $\alpha(k+m)$, $m = 0, \dots, \kappa$. Essa técnica é similar ao que foi utilizado nos lemas da seção sobre estabilidade robusta apresentada anteriormente.

2.5 Incerteza afim

Para ampliar o alcance das contribuições da dissertação, também são tratados sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo pertencentes a intervalos. Por exemplo,

$$x(k+1) = A(\theta(k))x(k), \quad (2.11)$$

com a matriz dinâmica dada por

$$A(\theta(k)) = A_0 + \sum_{i=1}^L \theta_i(k)A_i, \quad \theta_i(k) \in [\theta_{im}, \theta_{iM}], \quad \forall k \geq 0 \quad (2.12)$$

e L o número de parâmetros incertos no sistema. Como todos os parâmetros estão confinados a intervalos quaisquer, este tipo de incerteza é conhecida na literatura como incerteza *hiperretangular* (ou hipercúbica se $\theta_{iM} = -\theta_{im} = b, \forall i$), embora o termo mais usual seja incerteza *afim*. Tratar desigualdades com matrizes com dependência afim nos parâmetros variantes no tempo requer outros tipos de relaxações, em princípio mais complexas no sentido de demandarem testes de positividade mais elaborados, como por exemplo, a decomposição em soma de quadrados (PARRILO, 2000; PARRILO, 2003) ou a introdução de variáveis de folga independentes dos parâmetros (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999). Para tratar essa classe de incertezas com o ferramental desenvolvido para parâmetros pertencentes ao simplex unitário, é utilizada a seguinte mudança de variáveis (OLIVEIRA *et al.*, 2009)

$$\alpha_{i1}(k) = \frac{\theta_{iM} - \theta_i(k)}{\theta_{iM} - \theta_{im}}, \alpha_{i2}(k) = 1 - \alpha_{i1}(k), (\alpha_{i1}(k), \alpha_{i2}(k)) \in \Lambda_2 \quad (2.13)$$

transformando cada parâmetro $\theta_i(k)$ em dois parâmetros pertencentes a um simplex de dimensão dois. A vantagem dessa transformação é que todos os parâmetros variantes no tempo são não negativos e as relaxações de Pólya utilizadas para tratar as incertezas politópicas também são aplicáveis. Assim, todas as desigualdades apresentadas ao longo da dissertação expressas em termos de parâmetros pertencentes a intervalos inicialmente passam pela mudança de variáveis dada em (2.13) e somente então uma relaxação é aplicada.

2.6 Lemas auxiliares

Dois resultados importantes para a obtenção das condições propostas nesta dissertação são apresentados nos lemas a seguir.

Lema 2.8 (Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001)). *Considere as matrizes $Q \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$, com $\text{rank}(\mathcal{B}) < \ell$ e $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$. Então, as condições seguintes são equivalentes.*

- i) $\xi^T Q \xi < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^\ell, \xi \neq 0$, em que $\mathcal{B}\xi = 0$;
- ii) $\mathcal{B}_\perp^T Q \mathcal{B}_\perp < 0$;
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R}$ em que $Q - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$;
- iv) $\exists F \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ em que $Q + F \mathcal{B} + \mathcal{B}^T F^T < 0$.

Lema 2.9 (Complemento de Schur (BOYD; VANDENBERGHE, 2004)). *Sejam A e C matrizes simétricas definidas positivas. A desigualdade*

$$C > BA^{-1}B^T \quad (2.14)$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} > 0. \quad (2.15)$$

CAPÍTULO 3

κ -Estabilidade

3.1 Introdução

Este capítulo introduz o conceito de κ -estabilidade para sistemas discretos variantes no tempo. A κ -estabilidade é baseada em funções de Lyapunov construídas a partir da descrição redundante das equações de estado do sistema incerto. Dessa forma, a matriz dinâmica do sistema, em momentos deslocados, compõe a matriz de Lyapunov, que depende polinomialmente do parâmetro incerto com grau proporcional a um inteiro κ associado ao número de equações redundantes. Para escolhas adequadas da estrutura das variáveis de decisão da matriz de Lyapunov, mostra-se que condições suficientes na forma de LMIs podem ser obtidas, estabelecendo uma redução progressiva do conservadorismo com o aumento de κ , tendendo-se assintoticamente à necessidade no caso de variações arbitrárias.

3.2 Condições de estabilidade gerais

Deslocando-se no tempo $\kappa - 1$ vezes a equação do sistema linear discreto incerto e variante no tempo (2.1), tem-se uma descrição redundante da dinâmica do sistema, dada por

$$\begin{aligned} x(k+2) &= A(\alpha(k+1))x(k+1) \\ &\vdots \\ x(k+\kappa) &= A(\alpha(k+\kappa-1))x(k+\kappa-1) \end{aligned}$$

que pode ser reescrita, incluindo a equação original, como

$$x_{\kappa}(k+1) = \begin{bmatrix} A(\alpha(k)) & \cdots & 0_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & A(\alpha(k+\kappa-1)) \end{bmatrix} x_{\kappa}(k), \quad x_{\kappa}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \vdots \\ x(k+\kappa-1) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Essa descrição no espaço de estados aumentados tem sido muito explorada na construção de condições LMIs (algumas com garantia de convergência) para investigar a estabilidade robusta e o cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} para sistemas incertos invariantes no tempo (OLIVEIRA *et al.*, 2005; EBIHARA *et al.*, 2005; OLIVEIRA *et al.*, 2008; OLIVEIRA *et al.*, 2009; DE OLIVEIRA *et al.*, 2010). De fato, o sistema original (2.1) é estável se e somente se o sistema aumentado assim o for, para qualquer valor de κ . A partir das equações redundantes, é possível definir estruturas para as variáveis de decisão da função de Lyapunov associada à estabilidade do sistema, ou explorar condições equivalentes de estabilidade obtidas pelo lema de Finsler para derivar condições suficientes, com distintas complexidades, que certifiquem a estabilidade robusta do sistema. Em particular, no caso de variações arbitrariamente rápidas (o que contempla a classe de sistemas chaveados), é possível provar que uma estrutura simples para a matriz de Lyapunov provê condições suficientes e assintoticamente necessárias com o aumento de κ para a estabilidade robusta do sistema (2.1), assim como nos lemas 2.2, 2.3 e 2.4. Primeiramente, o seguinte resultado é estabelecido.

Teorema 3.1. *O sistema (2.1) é assintoticamente estável se e somente se existir, para qualquer $\kappa \geq 1$, uma matriz simétrica dependente de parâmetros $P_{\kappa}(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{\kappa n \times \kappa n}$, tal que*

$$\mathcal{P}_{\kappa}(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-2)) > 0, \quad (3.2a)$$

$$A(\alpha(k))^T \mathcal{P}_{\kappa}(\alpha(k+1), \dots, \alpha(k+\kappa-1)) A(\alpha(k)) - \mathcal{P}_{\kappa}(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-2)) < 0, \quad (3.2b)$$

são verdadeiras $\forall (\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-1)) \in \underbrace{\{\Lambda_N \times \dots \times \Lambda_N\}}_{(\kappa-1)\text{-vezes}}$, para

$$\mathcal{P}_{\kappa}(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-2)) = \begin{bmatrix} I_n \\ A(\alpha(k)) \\ A(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) \\ \vdots \\ A(\alpha(k+(\kappa-2))) \cdots A(\alpha(k)) \end{bmatrix}^T \times P_{\kappa}(\alpha(k)) \begin{bmatrix} I_n \\ A(\alpha(k)) \\ A(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) \\ \vdots \\ A(\alpha(k+(\kappa-2))) \cdots A(\alpha(k)) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo que para $\kappa = 1$, $\mathcal{P}_1(\alpha(k)) = P_{\kappa}(\alpha(k))$.

Demonstração. Considere a seguinte função de Lyapunov quadrática em $x_\kappa(k)$

$$V(x_\kappa(k), \alpha(k)) = x_\kappa(k)^T P_\kappa(\alpha(k)) x_\kappa(k), \quad P_\kappa(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{\kappa n \times \kappa n},$$

para o sistema aumentado dado por (3.1). Fazendo as substituições das equações deslocadas, a função de Lyapunov pode ser reescrita como

$$V(x(k), \alpha(k)) = x(k)^T \mathcal{P}_\kappa(\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(k+\kappa-1)) x(k)$$

com $\mathcal{P}_\kappa(\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(k+\kappa-1))$ em (3.3). Impondo-se a negatividade da diferença em dois instantes consecutivos de tempo, tem-se

$$\begin{aligned} V(x(k+1), \alpha(k+1)) - V(x(k), \alpha(k)) = \\ x(k)^T (A(\alpha(k))^T \mathcal{P}_\kappa(\alpha(k+1), \dots, \alpha(k+\kappa)) A(\alpha(k)) \\ - \mathcal{P}_\kappa(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-1))) x(k) < 0, \quad \forall x(k) \neq 0, \end{aligned}$$

bem como $V(x(k), \alpha(k)) > 0$, sempre que as condições (3.2) forem verdadeiras. \square

Note que as condições do Teorema 3.1 exploram justamente a condição (b) do Lema 2.1, que não havia sido explorada em (BLIMAN; FERRARI-TRECATE, 2003). Condições equivalentes de estabilidade podem ser obtidas a partir do uso do Lema 2.8 (Finsler), com a escolha adequada de ξ , \mathcal{B} e \mathcal{Q} , como mostrado no teorema a seguir.

Teorema 3.2. *O sistema (2.1) é assintoticamente estável se e somente se existirem $\mu(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa))$, $F(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa))$ e $\mathcal{P}_\kappa(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-1)) > 0$, dado por (3.3), tais que qualquer condição equivalente do Lema de Finsler seja factível para $\kappa \geq 1$ e ξ , \mathcal{B} , \mathcal{B}_\perp e \mathcal{Q} definidos por*

$$\xi^T = \begin{bmatrix} x(k)^T & \cdots & x(k+\kappa)^T \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$L_\kappa = \begin{bmatrix} I_\kappa & 0_{\kappa \times 1} \end{bmatrix}, \quad R_\kappa = \begin{bmatrix} 0_{\kappa \times 1} & I_\kappa \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} Q_\kappa = -(L_\kappa^T \otimes I_n) P_\kappa(\alpha(k)) (L_\kappa^T \otimes I_n)^T \\ + (R_\kappa^T \otimes I_n) P_\kappa(\alpha(k+1)) (R_\kappa^T \otimes I_n)^T \in \mathbb{R}^{(\kappa+1)n \times (\kappa+1)n}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

e a matriz $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\kappa \in \mathbb{R}^{\kappa n \times (\kappa+1)n}$ dada por

$$\mathcal{B}_\kappa = \begin{bmatrix} A(\alpha(k)) & -I_n & \cdots & 0_n & 0_n \\ 0_n & A(\alpha(k+1)) & \cdots & 0_n & 0_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & & -I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \cdots & A(\alpha(k+\kappa-1)) & -I_n \end{bmatrix}$$

sendo que, dessa maneira, $\mathcal{B}_\perp = \mathcal{B}_{\perp\kappa} \in \mathbb{R}^{(\kappa+1)n \times n}$ pode ser escrita como

$$\mathcal{B}_{\perp\kappa} = \begin{bmatrix} I_n \\ A(\alpha(k)) \\ A(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) \\ \vdots \\ A(\alpha(k+(\kappa-1))) \cdots A(\alpha(k)) \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Segue diretamente das equivalências nas condições apresentadas no Lema 2.8 (Finsler) e do fato de não haver estruturas previamente definidas associadas às variáveis de decisão $P_\kappa(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ e $F(\cdot)$ utilizadas. \square

Note que a matriz de Lyapunov $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ pode depender polinomialmente, em princípio com grau arbitrário, dos parâmetros $\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-1)$, como também as variáveis de folga $\mu(\cdot)$ e $F(\cdot)$, que podem ser formadas da mesma maneira.

Analisando, por exemplo, o caso $\kappa = 1$ (ou seja, sem equações redundantes), o Teorema 3.2 pode ser aplicado com

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A(\alpha(k)) & -I_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} I_n \\ A(\alpha(k)) \end{bmatrix}$$

e $0 < P_1(\alpha) = P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então, com

$$Q(\alpha(k), \alpha(k+1)) = \begin{bmatrix} -P(\alpha(k)) & 0 \\ 0 & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix}$$

a condição *i*) com $\xi^T = \begin{bmatrix} x(k)^T & x(k+1)^T \end{bmatrix}$ proporciona

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(\alpha(k)) & 0 \\ 0 & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix} \\ &= x(k+1)^T P(\alpha(k+1))x(k+1) - x(k)^T P(\alpha(k))x(k) \\ &= x(k)^T (A(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k)))x(k) < 0 \end{aligned}$$

o que é equivalente à (por *iv*) existência da matriz $F^T(\cdot) = \begin{bmatrix} F_1(\cdot)^T & F_2(\cdot)^T \end{bmatrix}$ de forma que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P(\alpha(k)) & 0 \\ 0 & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha(k))^T \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\alpha(k), \alpha(k+1))^T & F_2(\alpha(k), \alpha(k+1))^T \end{bmatrix}^T \\ & \quad + \begin{bmatrix} F_1(\alpha(k), \alpha(k+1)) \\ F_2(\alpha(k), \alpha(k+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha(k)) & -I_n \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

3.3 Variações do parâmetro incerto

O vetor de parâmetros $\alpha(k) \in \Lambda_N$ pode variar de diferentes maneiras ao longo do tempo. Neste trabalho, assumem-se três diferentes formas de variação paramétrica: arbitrária (ou seja, o vetor de parâmetros no instante $k + 1$ pode estar em qualquer ponto do simplex, independentemente do valor de $\alpha(k)$); limitada (considera-se que cada elemento do vetor de parâmetros em $k + 1$ pode estar no máximo a uma distância $b \leq 1$ do valor $\alpha(k)$, respeitando a restrição $\alpha(k + 1) \in \Lambda_N$); e também que o parâmetro $\alpha(k)$ segue uma trajetória definida por uma equação a diferenças.

3.3.1 Arbitrária

Nos sistemas discretos variantes no tempo com variação arbitrária o parâmetro $\alpha(k + 1)$ não depende de $\alpha(k)$, i.e., o parâmetro variante no tempo $\alpha(k)$ pode variar arbitrariamente dentro do simplex unitário. Embora essa situação seja a mais geral, seu tratamento é mais simples, pois basta considerar que todos os instantes sucessivos de $\alpha(k)$ são parâmetros distintos e independentes e o procedimento de relaxação detalhado na Seção 2.4 pode ser aplicado sem maiores dificuldades. Por outro lado, quando o valor de $\alpha(k + 1)$ depende de $\alpha(k)$ (assim como nos instantes sucessivos), o tratamento é mais complexo, como mostrado na seção a seguir.

3.3.2 Limitada

Os sistemas discretos politópicos com parâmetros variantes no tempo com taxas de variação limitadas possuem o limite da variação dos parâmetros $\alpha_i(k)$ modelado como

$$|\alpha_i(k + 1) - \alpha_i(k)| \leq b_i \leq 1, \quad k \geq 0. \quad (3.7)$$

Pode-se perceber que $b_i = 0$ corresponde ao caso de sistemas invariantes no tempo, enquanto que $b_i = 1$ representa sistemas arbitrariamente variantes no tempo.

Considerando-se avanços arbitrários no vetor, o espaço dos parâmetros $\{\alpha(k), \alpha(k + 1), \dots, \alpha(k + \eta)\}$ pode ser representado em um novo domínio (BERTOLIN *et al.*, 2019; OLIVEIRA; PERES, 2009; DE CAIGNY *et al.*, 2010), que corresponde a uma região politópica representada em termos de um vetor de parâmetros invariante no tempo $\gamma \in \Lambda_M$ (o número M de vértices desse polítopo é, a princípio, desconhecido, dependendo do exemplo a ser tratado) e relacionado com

os vetores $\alpha(\cdot)$ por meio da transformação linear

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(k) \\ \vdots \\ \alpha_N(k) \\ \vdots \\ \alpha_1(k+\eta) \\ \vdots \\ \alpha_N(k+\eta) \end{bmatrix} = H_\eta \gamma, \quad (3.8)$$

em que a matriz H_η é estruturada da seguinte forma

$$H_\eta = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_M \end{bmatrix},$$

sendo que os vetores $h_j \in \mathbb{R}^{(\eta+1)N}$ são os vértices do politopo. O cômputo das colunas h_j pode ser feito a partir da região factível delimitada pelos hiperplanos associados às restrições

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i(k+j) &= 1, \quad j = 0, 1, \dots, \eta, \\ -b_i &\leq \alpha_i(k+j+1) - \alpha_i(k+j) \leq b_i, \quad 0 \leq \alpha_i(k+j) \leq 1, \\ i &= 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, \eta. \end{aligned}$$

Embora tenham sido propostos alguns métodos na literatura para encontrar as colunas h_j (OLIVEIRA; PERES, 2009; DE CAIGNY *et al.*, 2010), nenhum desses métodos garante que o resultado é exato no sentido de representar precisamente a região de interesse. Nesta dissertação é proposto um procedimento que calcula a região exata, considerando η arbitrário. Note que a região pode ser descrita por meio de um problema de programação linear padrão $\mathbb{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbb{A}_e\mathbf{x} = \mathbf{b}_e$ com

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \text{blkdiag}(\underbrace{\bar{A}, \dots, \bar{A}}_{N\text{-vezes}}), \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} I_{\eta+1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \left[I_\eta \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0_{2\eta \times 1} \right] + \left[0_{2\eta \times 1} \quad I_\eta \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= [\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_N]', \\ \bar{b}_i &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\eta+1 \times 1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{1}_{2\eta \times 1} \otimes b_i \end{bmatrix}, \\ \mathbb{A}_e &= \mathbb{1}_{1 \times N} \otimes I_{\eta+1}, \quad \mathbf{b}_e = \mathbb{1}_{\eta+1 \times 1}. \end{aligned}$$

O problema de obtenção dos vértices h_j da região politópica definida pelas restrições lineares é conhecido como enumeração de vértices (em inglês, *vertex enumeration*) (AVIS; FUKUDA, 1992). Os valores de h_j podem ser computados usando, por exemplo, a rotina `Polyhedron` do pacote `Multi-Parametric Toolbox (MPT)` (HERCEG *et al.*, 2013).

Como ilustração, considere dois instantes de tempo k e $k + 1$. A região factível para o par $(\alpha_i(k), \alpha_i(k + 1)) \in \mathbb{R}^{2N}$ é um polítopo com seis vértices, que pode ser representado pela combinação convexa dos vértices dados por

$$\begin{bmatrix} \alpha_i(k) \\ \alpha_i(k + 1) \end{bmatrix} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - b_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 - b_i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix} \right\}.$$

A Figura 3.1 ilustra essa região para $b_i = 0.2$.

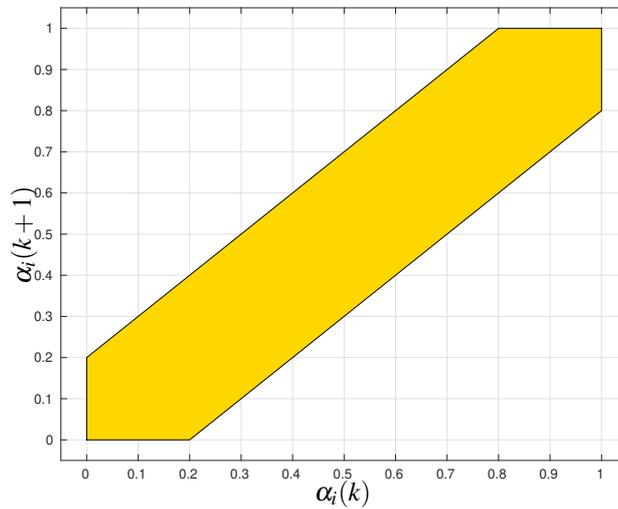


Figura 3.1 – Espaço paramétrico $\alpha_i(k) \times \alpha_i(k + 1)$ para taxa limitada de variação $b_i = 0.2$.

Para três instantes de tempo, ou seja, para $(\alpha_i(k), \alpha_i(k + 1), \alpha_i(k + 2))$ e $b_i = 0.2$, o polítopo é dado por

$$\begin{bmatrix} \alpha_i(k) \\ \alpha_i(k + 1) \\ \alpha_i(k + 2) \end{bmatrix} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

como ilustrado na Figura 3.2.

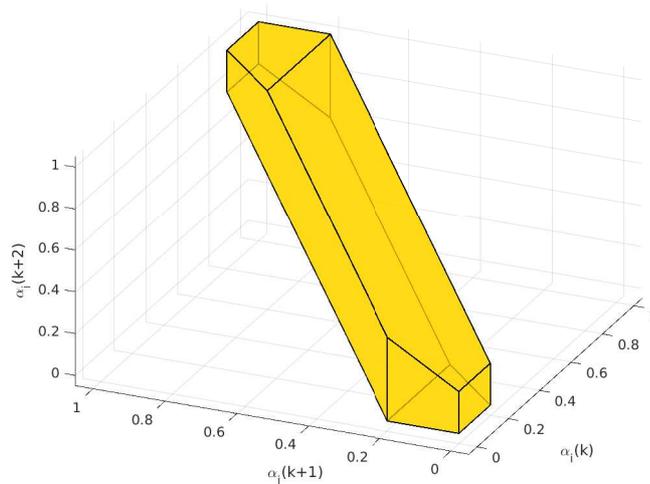


Figura 3.2 – Espaço paramétrico $\alpha_i(k) \times \alpha_i(k+1) \times \alpha_i(k+2)$ para taxa limitada de variação $b_i = 0.2$.

Uma vez obtidos os vetores de H_η , todas as matrizes dependentes de $\alpha(k+j)$, $j = \{0, 1, \dots, \eta\}$ podem ser convertidas sistematicamente em termos de $\gamma \in \Lambda_M$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 A(\alpha(k)) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) A_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \gamma_j h_j(i) A_i \\
 A(\alpha(k+1)) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(k+1) A_i = \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{j=1}^M \gamma_j h_j(i) A_i \\
 &\vdots \\
 A(\alpha(k+\eta)) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(k+\eta) A_i = \sum_{i=\eta N+1}^{(\eta+1)N} \sum_{j=1}^M \gamma_j h_j(i) A_i.
 \end{aligned}$$

Para tratar sistemas discretos com incerteza na forma afim definida em (2.11), as taxas de variação limitadas são apresentadas na forma

$$|\theta_i(k+1) - \theta_i(k)| \leq \rho_i, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.9)$$

e o valor de b_i associado às variáveis transformadas $(\alpha_{i1}(k), \alpha_{i2}(k))$ tal que $|\alpha_{i1}(k+1) - \alpha_{i1}(k)| = |\alpha_{i2}(k+1) - \alpha_{i2}(k)| \leq b_i$ é dado por

$$b_i = \frac{\rho_i}{\theta_{iM} - \theta_{im}} \quad (3.10)$$

e a matriz H_η pode ser computada para cada par $(\alpha_{i1}(k), \alpha_{i2}(k))$ (associado a cada $\theta_i(k)$).

Alternativamente, o domínio pode ser descrito diretamente em termos dos parâmetros $\theta_i(k)$

(por exemplo, utilizando o pacote MPT), pelo conjunto $\{\theta : \mathbb{A}\theta \leq \mathbf{b}\}$ com

$$\mathbb{A} = \text{blkdiag}(\underbrace{\bar{A}, \dots, \bar{A}}_{N\text{-vezes}}),$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c} I_{\eta+1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \left[I_{\eta} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0_{2\eta \times 1} \right] + \left[0_{2\eta \times 1} \quad I_{\eta} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \end{array} \right],$$

$$\mathbf{b} = [\bar{b}_1^T, \dots, \bar{b}_N^T]^T,$$

$$\bar{b}_i = \left[\begin{array}{c} \mathbb{1}_{\eta+1 \times 1} \otimes \begin{bmatrix} \theta_{iM} \\ -\theta_{im} \end{bmatrix} \\ \mathbb{1}_{2\eta \times 1} \otimes b_i \end{array} \right].$$

Embora não explorada neste manuscrito, essa última formulação é uma contribuição desta dissertação e pode ser utilizada pelas técnicas da literatura que trabalham diretamente com o vetor $\theta(k)$, sem a aplicação da transformação dada em (2.13).

3.3.3 Dinâmica

Por simplicidade, os sistemas discretos com parâmetros que variam de acordo com uma dinâmica são inicialmente descritos na forma afim dada por (2.11), sendo que o parâmetro¹ $\theta(k)$ segue uma dinâmica linear obtida a partir de

$$q(k+1) = \Phi q(k) \tag{3.11a}$$

$$\theta(k) = C_q q(k), \tag{3.11b}$$

em que $C_q \in \mathbb{R}^{1 \times n_q}$ e $\Phi \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ são matrizes fornecidas.

Casos particulares de variações para $\theta(k)$ podem ser obtidos em função de escolhas adequadas para Φ e C_q e da solução da equação homogênea (3.11a), dada por $q(k) = \Phi^k q_0$, com diferentes condições iniciais $q(0) = q_0$. Como ilustração, considere Φ com a seguinte estrutura

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) \\ \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente, tem-se

$$\Phi^k = \begin{bmatrix} \cos(\omega k) & -\text{sen}(\omega k) \\ \text{sen}(\omega k) & \cos(\omega k) \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, considerado $C_q = [1 \ 0]$ e $q(0) = [1 \ 0]^T$ obtém-se o parâmetro $\theta(k) = \cos(\omega k)$. Note que essa mesma matriz dinâmica pode produzir outras formas para $\theta(k)$ (envolvendo $\cos(\omega k)$ e $\text{sen}(\omega k)$), dependendo da condição inicial.

¹Apenas o caso de um único parâmetro escalar variante no tempo é tratado nesta seção. Mais parâmetros podem ser considerados por meio de um tratamento análogo.

Em instantes sucessivos, o parâmetro $\theta(k)$ pode ser computado em função de C_q , Φ e $q(k)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\theta(k) &= C_q q(k) \\ \theta(k+1) &= C_q \Phi q(k) \\ \theta(k+2) &= C_q \Phi^2 q(k) \\ &\vdots \\ \theta(k+\eta) &= C_q \Phi^\eta q(k).\end{aligned}\tag{3.12}$$

3.4 Particularização da κ -estabilidade

3.4.1 Variação arbitrária

Nos sistemas discretos LPV ou chaveados que possuem parâmetros que variam arbitrariamente com o tempo, condições suficientes usando $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ dada em (3.3) tornam-se também necessárias para um $\kappa \geq 1$ suficientemente grande, como apresentado no seguinte teorema.

Teorema 3.3. *O sistema (2.1) com parâmetros variando arbitrariamente é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz definida positiva $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$, dada em (3.3), um $\kappa \geq 1$ suficientemente grande tais que qualquer das condições equivalentes dadas a seguir seja válida.*

- i) A condição (3.2b) para $P_\kappa(\alpha(k))$ afim em termos de $\alpha(k)$;
- ii) A condição (3.2b) para $P_\kappa(\alpha(k)) = P_\kappa$ independente de parâmetros;
- iii) A condição (3.2b) para $P_\kappa(\alpha(k)) = P_\kappa$ independente de parâmetros e bloco diagonal, i.e.,

$$P_\kappa = \text{blkdiag}(P_{11}, P_{22}, \dots, P_{\kappa\kappa}), \quad P_{ii} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i = 1, \dots, \kappa;$$

- iv) A condição (3.2b) para $P_\kappa(\alpha(k)) = P_\kappa$ independente de parâmetros e bloco diagonal com matrizes repetidas, i.e.,

$$P_\kappa = \text{blkdiag}(\underbrace{P, P, \dots, P}_{\kappa \text{ vezes}}), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Além disso, se as condições forem factíveis para um dado $\bar{\kappa}$, sempre serão factíveis também para $\kappa > \bar{\kappa}$.

Demonstração. As condições i), ii) e iii) contêm iv) como caso particular, portanto somente iv) é provada. Considere, primeiramente, $\kappa = 2$ e $P_2 = \text{blkdiag}(P, P)$. A condição iv) é dada por

$$(A(\alpha(k+1))A(\alpha(k)))^T P (A(\alpha(k+1))A(\alpha(k))) - P < 0.$$

Para $\kappa \geq 1$ genérico, tem-se

$$\begin{aligned} & (A(\alpha(k+\kappa-1)) \cdots A(\alpha(k+1))A(\alpha(k)))^T \\ & \quad \times P(A(\alpha(k+\kappa-1)) \cdots A(\alpha(k+1))A(\alpha(k))) - P < 0 \end{aligned}$$

que sob variação arbitrária é equivalente a²

$$(A_\ell \cdots A_j A_i)^T \underbrace{P(A_\ell \cdots A_j A_i)}_{\kappa \text{ vezes}} - P < 0, \quad \forall \ell, \dots, j, i \in \{1, \dots, N\}.$$

A condição acima é a apresentada no Lema 2.2, que, com $P = P^T > 0$ e um κ suficientemente grande, assegura de forma necessária a estabilidade assintótica do sistema (2.1). As escolhas mais genéricas para a estrutura de P_κ nos itens *i*), *ii*) e *iii*) do Teorema 3.3 também possuem a mesma propriedade.

Para mostrar que sempre há solução para $\kappa + 1$ se uma solução para κ for obtida, note que (ainda considerando a condição *iv*)) se existe P_κ tal que as condições (3.2) são verdadeiras, a escolha particular

$$P_{\kappa+1} = \begin{bmatrix} P_\kappa & 0_n \\ 0_n & \varepsilon I_n \end{bmatrix},$$

para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, produz

$$\begin{aligned} & V(x_{\kappa+1}(k+1), \alpha(k+1)) - V(x_{\kappa+1}(k), \alpha(k)) \\ & \quad = V(x_\kappa(k+1), \alpha(k+1)) - V(x_\kappa(k), \alpha(k)) + \mathcal{O}(\varepsilon)I_n < 0. \end{aligned}$$

Similarmente, o mesmo ocorre com $\mathcal{P}_{\kappa+1}(\cdot)$ quando $\mathcal{P}_\kappa(\cdot) > 0$. Portanto, se houver factibilidade das condições para κ haverá também para $\kappa + 1$.

□

Como a estabilidade de sistemas discretos chaveados é equivalente à estabilidade de sistemas discretos LPVs com variações arbitrárias (LEE, 2006), versões do Teorema 3.3 na forma de LMIs (condições programáveis) podem ser estabelecidas a partir das escolhas particulares da estrutura de $P_\kappa(\cdot)$. O corolário a seguir apresenta as condições LMIs no caso de $P_\kappa(\cdot)$ constante (condições *ii*), *iii*) e *iv*) do Teorema 3.3).

Corolário 3.1. *O sistema (2.1) é assintoticamente estável se e somente se existir $\mathcal{P}_\kappa(k)$ definida positiva e $\kappa \geq 1$, suficientemente grande, tais que as LMIs*

$$A_{i_1}^T \mathcal{P}_\kappa(k+1) A_{i_1} - \mathcal{P}_\kappa(k) < 0, \quad \{i_1, i_2, \dots, i_\kappa\} \in \{1, \dots, N\} \quad (3.13)$$

²Isto pode ser inferido pela completa equivalência entre a estabilidade de sistemas LPV (2.1) e chaveados.

são verdadeiras para

$$\mathcal{P}_\kappa(k) = \begin{bmatrix} I_n \\ A_{i_1} \\ A_{i_2}A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_{(\kappa-1)}} \cdots A_{i_1} \end{bmatrix}^T P_\kappa \begin{bmatrix} I_n \\ A_{i_1} \\ A_{i_2}A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_{(\kappa-1)}} \cdots A_{i_1} \end{bmatrix}, \quad \kappa \geq 1, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{P}_\kappa(k+1) = \begin{bmatrix} I_n \\ A_{i_2} \\ A_{i_3}A_{i_2} \\ \vdots \\ A_{i_{(\kappa)}} \cdots A_{i_2} \end{bmatrix}^T P_\kappa \begin{bmatrix} I_n \\ A_{i_2} \\ A_{i_3}A_{i_2} \\ \vdots \\ A_{i_{(\kappa)}} \cdots A_{i_2} \end{bmatrix}, \quad \kappa \geq 1, \quad (3.15)$$

em que $\mathcal{P}_\kappa(k) = \mathcal{P}_\kappa(k+1) = P_1, \kappa = 1$.

Demonstração. Como $A(\alpha(k))$ pode assumir quaisquer valores no politopo do instante k para o instante $k+1$ (variações arbitrárias), se $\mathcal{P}_\kappa(k)$ é definida positiva, tem-se que (3.13) é verdadeira para todo $\kappa \geq 1$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_\kappa(k) & A_{i_1}^T \mathcal{P}_\kappa(k+1) \\ \mathcal{P}_\kappa(k+1)A_{i_1} & \mathcal{P}_\kappa(k+1) \end{bmatrix} > 0$$

que por sua vez é factível se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_\kappa(k) & A(\alpha(k))^T \mathcal{P}_\kappa(k+1) \\ \mathcal{P}_\kappa(k+1)A(\alpha(k)) & \mathcal{P}_\kappa(k+1) \end{bmatrix} > 0$$

para todo $\alpha(k) \in \Lambda_N$.

□

A condição de positividade da matriz de Lyapunov pode ser imposta por meio de LMIs de diferentes formas. A alternativa menos conservadora é gerar, com auxílio do pacote ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019), a condição $\mathcal{P}_\kappa(\cdot) > 0$ para todo o simplex Λ_N . Outras alternativas seriam impor a positividade de $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ nos vértices, ou ainda impor $P_\kappa > 0$, o que pode ser muito conservador. Como uma outra possibilidade, o teste pode ser realizado *a posteriori*, por exemplo para uma solução P_κ obtida verificar se $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ é definida positiva (para isso, pode-se usar o ROLMIP para desenvolver as condições a serem testadas), ou ainda usando o fato de que se o sistema for comprovadamente assintoticamente estável, necessariamente $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ é definida positiva. Aliado a esse último caso, pode-se também impor que $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ seja definida positiva em algum ponto arbitrário do domínio, o que garante, se houver uma solução, a condição $\mathcal{P}_\kappa(\cdot) > 0$ em todo o domínio.

Condições de estabilidade programáveis na forma de LMIs também podem ser obtidas a partir do Lema 2.8 (Finsler) conforme mostrado no corolário a seguir.

Corolário 3.2. *O sistema (2.1) é assintoticamente estável se existirem $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ definida positiva, dada por (3.14), $\mu(i_1, \dots, i_\kappa)$ e $F(i_1, \dots, i_\kappa)$, tais que qualquer condição equivalente do Lema de Finsler seja factível para $\kappa \geq 1$. Para isso utiliza-se ξ , L_κ e R_κ , dados respectivamente por (3.4) e (3.5), e \mathcal{B} , \mathcal{B}_\perp e \mathcal{Q} definidos por*

$$Q_\kappa = -(L_\kappa^T \otimes I_n)P_\kappa(i_1)(L_\kappa^T \otimes I_n)^T + (R_\kappa^T \otimes I_n)P_\kappa(i_2)(R_\kappa^T \otimes I_n)^T \in \mathbb{R}^{(\kappa+1)n \times (\kappa+1)n},$$

e a matriz $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\kappa \in \mathbb{R}^{\kappa n \times (\kappa+1)n}$ dada por

$$\mathcal{B}_\kappa = \begin{bmatrix} A_{i_1} & -I_n & \cdots & 0_n & 0_n \\ 0_n & A_{i_2} & \cdots & 0_n & 0_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & & -I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \cdots & A_{i_\kappa} & -I_n \end{bmatrix}$$

sendo que, dessa maneira, $\mathcal{B}_\perp = \mathcal{B}_{\perp\kappa} \in \mathbb{R}^{(\kappa+1)n \times n}$ pode ser escrita como

$$\mathcal{B}_{\perp\kappa} = \begin{bmatrix} I_n \\ A_{i_1} \\ A_{i_2}A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_\kappa} \cdots A_{i_1} \end{bmatrix}.$$

Além disso, define-se $F(i_1, \dots, i_\kappa)$ como

$$F(i_1, \dots, i_\kappa) = \begin{bmatrix} F_{1,i_1} & F_{2,i_2} & \cdots & F_{\kappa,i_\kappa} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

para $F_{j,i} \in \mathbb{R}^{(\kappa+1)n \times n}$, para todo $\{i_1, \dots, i_\kappa\} \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, \kappa\}$.

Demonstração. Se a condição

$$\mathcal{Q}_\kappa + F(i_1, \dots, i_\kappa)\mathcal{B}_\kappa + \mathcal{B}_{\perp\kappa}^T F(i_1, \dots, i_\kappa)^T < 0$$

é verificada, então $\mathcal{B}_{\perp\kappa}^T \mathcal{Q}_\kappa \mathcal{B}_{\perp\kappa} < 0$ o que implica

$$A(\alpha(k))^T \mathcal{P}_\kappa(\alpha(k+1), \dots, \alpha(k+\kappa-1))A(\alpha(k)) - \mathcal{P}_\kappa(\alpha(k), \dots, \alpha(k+\kappa-2)) < 0.$$

que corresponde à condição (3.2b) do Teorema 3.1. Como $\mathcal{P}(k) > 0$, tem-se a estabilidade assintótica do sistema. □

A imposição da positividade da matriz de Lyapunov pode ser feita de diversas maneiras, como comentado após o Corolário 3.1.

3.4.2 Variação limitada

Conforme apresentado na Seção 3.3.2, os sistemas discretos dependentes de parâmetros com variação limitada em $\alpha_i(k)$ ou $\theta_i(k)$ podem ser descritos em termos de um sistema com parâmetros em um novo domínio, invariante no tempo, parametrizado por $\gamma \in \Lambda_M$, segundo a equação (3.8) para $\eta = \kappa - 1$.

Condições de estabilidade considerando essa nova região em termos da κ -estabilidade são apresentadas no próximo teorema na forma de LMIs dependentes de parâmetros.

Teorema 3.4. *Sistemas discretos incertos dados por (2.1) com parâmetros variantes no tempo com taxa de variação limitada, como em (2.11), são assintoticamente estáveis se existir uma matriz simétrica dependente de parâmetros $P_\kappa(\gamma) \in \mathbb{R}^{\kappa n \times \kappa n}$ e $\kappa \geq 1$ tais que as condições*

$$\mathcal{P}_\kappa(\gamma) > 0, \quad (3.17a)$$

$$A(\gamma)^T \mathcal{P}_\kappa(\gamma) A(\gamma) - \mathcal{P}_\kappa(\gamma) < 0, \quad (3.17b)$$

são verdadeiras $\gamma \in \Lambda_M$, com

$$\mathcal{P}_\kappa(\gamma) = \begin{bmatrix} I_n \\ A(\gamma) \\ A(\gamma)^2 \\ \vdots \\ A(\gamma)^{\kappa-1} \end{bmatrix}^T P_\kappa(\gamma) \begin{bmatrix} I_n \\ A(\gamma) \\ A(\gamma)^2 \\ \vdots \\ A(\gamma)^{\kappa-1} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Demonstração. Segue diretamente da estrutura das condições do Teorema 3.1 para o caso invariante no tempo, conforme (OLIVEIRA *et al.*, 2009). \square

As condições do Lema 2.8 (Finsler) podem ser, também, utilizadas para a estabilidade no domínio γ . Além disso, condições na forma de LMIs programáveis podem ser obtidas por meio de procedimentos de relaxação aplicados nas desigualdades dependentes de parâmetros, por exemplo com o auxílio do pacote ROLMIP (*Robust LMI Parser*) (AGULHARI *et al.*, 2019).

3.4.3 Variação dinâmica

Conforme apresentado na Seção 3.3.3, parâmetros variantes no tempo conhecidos $\theta(k)$ podem ser obtidos da solução de uma equação homogênea descrita em termos da variável de estado $q(k)$ (3.11). A partir disso, considerando as matrizes

$$\begin{aligned} P_\kappa(\theta(k)) &= P_\kappa(q(k)) = P_{(\kappa,0)} + C_q q(k) P_{(\kappa,1)}, \\ A(\theta(k)) &= A(q(k)) = A_0 + C_q q(k) A_1, \end{aligned}$$

são apresentadas, no próximo teorema, condições de κ -estabilidade para o sistema afim (2.11) considerando o domínio em $q(k)$.

Teorema 3.5. *Sistemas discretos incertos dados por (2.11) com parâmetros variantes no tempo com taxa de variação dinâmica são assintoticamente estáveis se existir uma matriz simétrica $P_\kappa(q(k)) \in \mathbb{R}^{kn \times kn}$ e $\kappa \geq 1$ tais que as condições*

$$\mathcal{P}_\kappa(q(k), k) > 0 \quad (3.19a)$$

$$A(q(k))^T \mathcal{P}_\kappa(q(k), k+1)A(q(k)) - \mathcal{P}_\kappa(q(k), k) < 0, \quad (3.19b)$$

são verdadeiras com

$$\begin{bmatrix} I \\ A_0 + C_q q(k)A_1 \\ \vdots \\ \prod_{i=0}^{\kappa-2} (A_0 + C_q \Phi^{((\kappa-2)-i)} q(k)A_1) \end{bmatrix}^T P_\kappa(q(k)) \begin{bmatrix} I \\ A_0 + C_q q(k)A_1 \\ \vdots \\ \prod_{i=0}^{\kappa-2} (A_0 + C_q \Phi^{((\kappa-2)-i)} q(k)A_1) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

sendo que para $\kappa = 1$, $\mathcal{P}_1(q(k), k) = P_\kappa(q(k))$.

Demonstração. Segue diretamente das condições do Teorema 3.1 para o sistema afim (2.11). \square

Note que as condições do Teorema 3.5 estão formuladas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, porém os parâmetros $q(k)$ não pertencem ao simplex unitário. Para escolhas particulares das variáveis de decisão $P_\kappa(q(k))$, várias estratégias poderiam ser utilizadas para construir relaxações na forma de LMIs programáveis que, se factíveis, garantem a estabilidade robusta do sistema. Por exemplo, as condições podem ser reescritas transformando-se cada estado $q_i(k)$, $i = \{1, \dots, n_q\}$ (que tem trajetórias limitadas) em um parâmetro variante no tempo pertencente ao simplex Λ_2 , por meio da mudança de variáveis descrita em (2.13), produzindo uma condição LMI com parâmetros pertencentes ao multi-simplex definido pelo produto cartesiano desses n_q simplexes de dimensão 2, ou então representar todos os parâmetros incertos em um único simplex de dimensão 2^{n_q} .

As condições do Lema 2.8 (Finsler) podem ser, também, utilizadas para testar a estabilidade do sistema afim (2.11). Para obter condições LMIs programáveis, neste caso, é possível aplicar a relaxação apresentada anteriormente (transformar a dependência afim em uma dependência politópica), ou ainda empregar outra relaxação mais conservadora que utiliza apenas os limites dos intervalos dos parâmetros $\theta(k + \eta)$, $\{\eta = 0, \dots, \kappa\}$, fixando a matriz de variáveis F como independente de parâmetros (OLIVEIRA *et al.*, 2005).

3.5 Exemplos

Nesta seção, o Teorema 3.1 é utilizado para verificar a estabilidade de sistemas retirados de artigos da literatura. A programação foi implementada em MATLAB-R2014a usando o *parser*

Yalmip (LÖFBERG, 2004) em conjunto com as ferramentas ROLMIP (*Robust LMI Parser*) (AGULHARI *et al.*, 2019) e MPT (HERCEG *et al.*, 2013) e os *solvers* Sedumi 1.3 (STURM, 1999) e Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000) em um computador com sistema operacional Ubuntu 16.04.3.

3.5.1 Variação arbitrária

Os dois próximos exemplos tratam de sistemas LPV com taxa de variação arbitrária. O desempenho das condições propostas no Teorema 3.3 foi comparado com três abordagens diferentes para a estrutura da matriz de Lyapunov. A primeira é a matriz de Lyapunov dependente de caminho (em inglês, *path-dependent*) de (LEE, 2006) (L06, parametrizada por M), que fornece condições suficientes e (assintoticamente) necessárias para um M suficientemente grande. A segunda é baseada nas condições com matriz de Lyapunov constante apresentadas em (BLIMAN; FERRARI-TRECCATE, 2003) (B03, parametrizada em termos de p), que são equivalentes à condição *iii*) do Teorema 3.3. Por último, as condições de (KRUSZEWSKI *et al.*, 2008) (K08, parametrizada em termos de p) adaptadas para sistemas chaveados. Propostas no contexto de sistemas nebulosos de Takagi–Sugeno a tempo discreto, as condições K08 utilizam uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim e p instantes avançados da matriz dinâmica.

As condições apresentadas neste trabalho são representadas por T-*ii*) para P_κ com estrutura cheia e independente de parâmetros e T-*iii*) para P_κ independente de parâmetro e bloco-diagonal, o número de variáveis escalares para cada método (em termos do número de estados n , número de vértices N e p , M ou κ) é dado por

$$V_{B03} = n(n+1)/2, \quad V_{L06} = N^M n(n+1)/2, \quad V_{K08} = Nn(n+1)/2, \\ V_{T-ii)} = (\kappa n)(\kappa n + 1)/2, \quad V_{T-iii)} = (\kappa n)(n+1)/2$$

e o número de linhas de LMI é dado por

$$L_{B03} = n(N^p + 1), \quad L_{L06} = nN^M(1+N) \quad L_{K08} = 2nN^{p+1}, \\ L_{T-ii)} = L_{T-iii)} = nN^{\kappa-1}(N+1).$$

Pode-se perceber que o número de linhas de LMI cresce de forma exponencial em todas as condições. Por outro lado, nota-se que o número de variáveis escalares depende somente de n em B03 e de n e N em K08, cresce polinomialmente em T-*ii*) e T-*iii*), e cresce exponencialmente em L06 (em termos de M).

Em todos os problemas, foi imposta a restrição de positividade na matriz de Lyapunov. Note também que os quatro métodos contêm (para $\kappa = 1$, $M = 0$ e $p = 1$) como um caso particular a condição de *estabilidade quadrática*, i.e., existe $P > 0$ tal que $A_{i_1}^T P A_{i_1} - P < 0$, $\forall i_1 = 1, \dots, N$ como corroborado por valores idênticos obtidos para o parâmetro ρ (exceto para

K08, que, para recuperar a estabilidade quadrática, exige $P_{i_1} = P_{i_2} = P$), associado ao maior domínio para o qual a estabilidade assintótica foi assegurada.

Exemplo 1

Este exemplo foi retirado de (ATHANASOPOULOS; LAZAR, 2014), com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.5 \\ -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 \\ -0.45 & 0.85 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.3 \\ -0.45 & -0.85 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -0.78 & 0.3 \\ -0.15 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

O objetivo neste exemplo é achar o maior valor de $\rho > 0$ tal que o sistema LPV dado por (2.1), descrito pelos vértices $\rho\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, permaneça estável.

Os resultados são dados na Tabela 3.1. Note que o mesmo valor $\rho = 0.7107$ foi obtido por T-ii) ($\kappa = 5$, $V = 55$ e $L = 2560$) e L06 ($M = 4$, $V = 768$ e $L = 2560$), enquanto T-iii) proporcionou um valor um pouco menor de $\rho = 0.7095$ ($\kappa = 5$, $V = 15$ e $L = 2560$), porém ainda maior do que K08 que obteve $\rho = 0.7084$ para $V = 12$, $L = 16384$ e $p = 5$. Todos os métodos apresentaram valores de ρ maiores do que os de B03.

Tabela 3.1 – Valores máximos de ρ , número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) para T-ii) e T-iii) (em termos de κ e com valores de L iguais), L06 (em termos de M) e B03 e K08 (em termos de p) para o Exemplo 1.

κ	T-ii)		T-iii)			L06				B03				K08		
	ρ	V	ρ	V	L	M	ρ	V	L	p	ρ	V	L	ρ	V	L
1	0.6532	3	0.6532	3	10	0	0.6532	3	10	1	0.6532	3	10	0.7018	12	64
2	0.7018	10	0.7017	6	40	1	0.7018	12	40	2	0.6862	3	34	0.7070	12	256
3	0.7077	21	0.7072	9	160	2	0.7077	48	160	3	0.6976	3	130	0.7079	12	1024
4	0.7097	36	0.7083	12	640	3	0.7103	192	640	4	0.6942	3	514	0.7084	12	4096
5	0.7107	55	0.7095	15	2560	4	0.7107	768	2560	5	0.7031	3	2050	0.7084	12	16384

Exemplo 2

As matrizes dinâmicas, retiradas de (AHMADI *et al.*, 2014), são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -6 \\ 2 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ -1 & -5 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -3 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -9 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -5 & -8 & 6 \\ -4 & -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Novamente, busca-se o maior valor de ρ tal que o sistema definido pelos vértices $\rho\{A_1, A_2, A_3\}$ seja assintoticamente estável. Os resultados são dados na Tabela 3.2. O valor máximo de $\rho = 0.0847$ foi obtido com $\kappa = 3$, $L = 180$ e $V = 120$ (T-ii) ou $V = 45$ (T-iii), enquanto que foram necessários em L06 $M = 2$, $L = 180$ e $V = 135$ e K08 $p = 2$, $V = 45$ e $L = 270$ para chegar ao mesmo valor. A abordagem B03 apresentou $\rho = 0.0842$ com $p = 4$, $L = 410$ e $V = 15$ (valores maiores de p não foram investigados).

Tabela 3.2 – Valores máximos de ρ , número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) para T-ii) e T-iii) (em termos de κ e com valores de L iguais), L06 (em termos de M) e B03 e K08 (em termos de p) para o Exemplo 2.

κ	T-ii)		T-iii)			L06				B03				K08		
	ρ	V	ρ	V	L	M	ρ	V	L	p	ρ	V	L	ρ	V	L
1	0.0795	15	0.0795	15	20	0	0.0795	15	20	1	0.0795	15	20	0.0846	45	90
2	0.0846	55	0.0846	30	60	1	0.0846	45	60	2	0.0831	15	50	0.0847	45	270
3	0.0847	120	0.0847	45	180	2	0.0847	135	180	3	0.0837	15	140	0.0847	45	810
4	0.0847	210	0.0847	60	540	3	0.0847	405	540	4	0.0842	15	410	0.0847	45	2430

3.5.2 Variação limitada

No exemplo a seguir, considera-se um sistema discreto na forma afim, com apenas um parâmetro incerto variante no tempo $\theta(k)$, pertencente a um intervalo dado e com taxa de variação limitada.

Exemplo 3

As matrizes dinâmicas do sistema foram retiradas de (BIANNIC *et al.*, 2018)

$$A_0 = \rho \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 0.3\tau & 0.2\tau & -0.4\tau \\ 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & -0.1\tau & 1 - 0.7\tau \end{bmatrix}, \quad A_1 = \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com os valores $\tau = 0.3$, $|\theta(k+1) - \theta(k)| \leq 0.3$ e $\rho = 0.9771$ (maior valor determinado pela estabilidade quadrática).

O objetivo deste exemplo é obter o maior intervalo possível de $\theta(k)$ em que o sistema se mantenha estável. Os resultados são dados na Tabela 3.3, na qual pode-se observar que os maiores intervalos de estabilidade são obtidos com $\kappa = 2$. Com $\kappa = 1$ e P_κ constante ($g = 0$) recupera-se o intervalo reportado em (BIANNIC *et al.*, 2018). Mesmo mantendo-se $\kappa = 1$, com $P_\kappa(\alpha(k))$ afim ($g = 1$) é possível garantir um intervalo de estabilidade maior.

Tabela 3.3 – Limitantes para $\theta(k)$, número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) para o problema de análise de estabilidade para $\kappa = \{1, 2\}$ e $P_\kappa(\alpha(k))$ constante ($g = 0$) ou afim ($g = 1$) para o Exemplo 3.

(κ, g)	θ_m	θ_M	V	L
(1, 0)	0.1	0.5	10	88
(1, 1)	0.0606	0.5394	20	248
(2, 0)	0.0788	0.5212	36	588
(2, 1)	0.0584	0.5416	72	1232

A complexidade numérica, principalmente em número de linhas de LMI, aumenta de forma rápida à medida que se exige um número maior de vértices em γ . Portanto, a viabilidade do método depende do tamanho do sistema a ser tratado e do valor de κ necessário para o teste de estabilidade.

3.5.3 Variação dinâmica

Para exemplificar as condições de estabilidade no caso de variação dinâmica, faz-se uma comparação com a avaliação obtida apenas considerando-se os limites da taxa de variação.

Exemplo 4

Considere o sistema discreto variante no tempo em que dinâmica do sistema é dada por (2.11) com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v\theta(k) \end{bmatrix}, \quad \theta(k) = \cos(\omega k).$$

Note que a matriz dinâmica do sistema depende também de um parâmetro escalar v . O objetivo deste exemplo é obter o maior valor do escalar $v > 0$ para o qual possa ser certificada a estabilidade robusta do sistema, para várias frequências ω . Note que v aparece multiplicando o parâmetro variante no tempo $\theta(k)$ na matriz A_1 .

Considerando apenas os limites de variação de $v \cos(\omega k)$ nas transformações apresentadas em (2.13), com os pontos extremos do intervalo $[-v, v]$, a dinâmica do sistema pode ser descrita na forma politópica

$$A(\alpha(k)) = \alpha_1(k)A_1 + \alpha_2(k)A_2, \quad \alpha \in \Lambda_2$$

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & \nu \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -\nu \end{bmatrix}.$$

Para uma dada frequência ω , o limitante da taxa de variação ρ pode ser calculado como

$$\cos(\omega(k+1)) - \cos(\omega k) = -2\text{sen}(\omega k + \omega/2)\text{sen}(\omega/2)$$

e portanto, o parâmetro variante no tempo $\theta(k)$ respeita os intervalos

$$\theta(k) \in [-1 \quad 1], \quad |\theta(k+1) - \theta(k)| \leq \rho = 2|\text{sen}(\omega/2)|. \quad (3.21)$$

Os limitantes correspondentes na forma politópica podem ser obtidos pelas transformações dadas em (2.13), resultando em $b = |\text{sen}(\omega/2)|$. Note que, neste exemplo, existe um valor limite para ν , dado por $\nu < 0.5$, pois para $\nu \geq 0.5$ as matrizes A_1 e A_2 possuem autovalores instáveis (com módulos maiores ou igual a 1), e portanto, não admitem um certificado de estabilidade que contemple a taxa de variação nula.

Resultados mais acurados podem ser obtidos considerando a variação dinâmica do parâmetro incerto $\theta(k) = \cos(\omega k)$, descrita por uma equação de estados como em (3.11a)-(3.11b). A Figura 3.3 mostra a variação dos valores máximos de ν em função da frequência ω , para grau de $P_\kappa(\alpha(k))$ igual a $g = 1$. Como pode-se observar, os valores de ν são maiores do que 0.5 para praticamente todo o gráfico, e podem ser obtidos em todo intervalo de frequência $\omega \in (0, 2\pi)$. Além de ser mais preciso (desde que a variação do parâmetro seja conhecida), o uso de um modelo dinâmico para o parâmetro variante no tempo também diminui a complexidade associada. Para $g = 1$, os números de variáveis escalares e de linhas de LMI são: $V = 9, L = 48$ ($\kappa = 1$), $V = 30, L = 152$ ($\kappa = 2$) e $V = 63, L = 352$ ($\kappa = 3$). Note que a abordagem baseada na variação limitada não garante estabilidade para $\nu \geq 0.5$ e para $g = 1$ utiliza: $V = 6, L = 48$ ($\kappa = 1$), $V = 20, L = 152$ ($\kappa = 2$) e $V = 42, L = 8448$ ($\kappa = 3$).

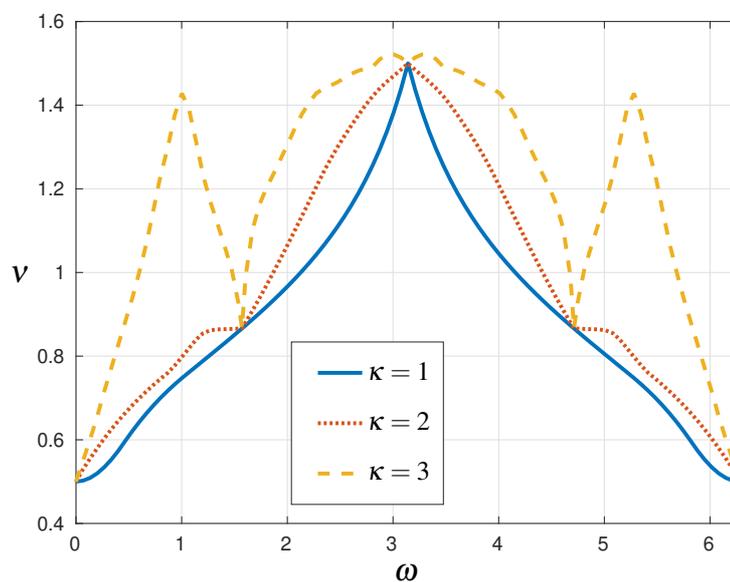


Figura 3.3 – Máximos valores de v considerando o comportamento dinâmico de $\theta(k) = \cos(\omega k)$ em função de ω , para $g = 1$ e $\kappa = 1$ (linha azul), $\kappa = 2$ (vermelho pontilhado) e $\kappa = 3$ (amarelo tracejado) para o Exemplo 4.

CAPÍTULO 4

Cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

4.1 Introdução

Este capítulo mostra extensões da κ -estabilidade, apresentada no Capítulo 3, para o cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos lineares com parâmetros variantes no tempo.

4.2 Sistemas aumentados não autônomos

A descrição do sistema (2.3) considerando $\kappa - 1$ equações de estado redundantes é dada por

$$x_\kappa(k+1) = \begin{bmatrix} A(\alpha(k)) & \cdots & 0_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & A(\alpha(k+\kappa-1)) \end{bmatrix} x_\kappa(k) + \begin{bmatrix} B(\alpha(k)) \\ \mathbf{0}_{((\kappa-1)n \times m)} \end{bmatrix} w_\kappa(k), \quad (4.1a)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C(\alpha(k)) & \mathbf{0}_{(p \times (\kappa-1)n)} \end{bmatrix} x_\kappa(k) + \begin{bmatrix} D(\alpha(k)) & \mathbf{0}_{(p \times (\kappa-1)m)} \end{bmatrix} w_\kappa(k). \quad (4.1b)$$

para $w_\kappa(k) = \begin{bmatrix} w(k)^T & w(k+1)^T & \cdots & w(k+\kappa-1)^T \end{bmatrix}$. Note que essa estrutura provê a mesma relação entrada-saída do sistema (2.3).

4.3 Custo garantido \mathcal{H}_2

O teorema a seguir apresenta condições suficientes para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_2 do sistema original (2.3) a partir da descrição redundante dada em (4.1). O resultado pode ser visto como a simples aplicação da matriz de Lyapunov $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ nas condições de cômputo de

norma \mathcal{H}_2 para sistemas lineares discretos LPV baseadas em LMIs dependentes de parâmetros (BARBOSA *et al.*, 2002; DE SOUZA *et al.*, 2006; DE CAIGNY *et al.*, 2010), em particular, nas condições do Lema 2.5.

Teorema 4.1. *O sistema (2.3) é assintoticamente estável e ϕ é um limitante para a norma \mathcal{H}_2 se existir uma matriz $\mathcal{P}_\kappa(k) = \mathcal{P}_\kappa((\alpha(k), \dots, \alpha(k + \kappa - 2)))$ dada por (3.3) e $\kappa \geq 1$ tais que*

$$\text{Tr}(D(\alpha(k))^T D(\alpha(k)) + B(\alpha(k))^T \mathcal{P}_\kappa(k+1) B(\alpha(k))) \leq \phi^2 \quad (4.2a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_\kappa(k) & * & * \\ \mathcal{P}_\kappa(k+1)A(\alpha(k)) & \mathcal{P}_\kappa(k+1) & * \\ C(\alpha(k)) & 0 & I_n \end{bmatrix} > 0. \quad (4.2b)$$

Demonstração. As condições seguem diretamente do uso da matriz de Lyapunov $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ nas condições (2.5) e (2.6) do Lema 2.5.

Embora as condições sejam apenas suficientes, os resultados numéricos mostram que custos garantidos progressivamente menos conservadores são obtidos à medida que κ cresce. \square

4.4 Custo garantido \mathcal{H}_∞

De maneira similar, a estrutura proposta para a matriz de Lyapunov $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ pode também ser usada para o cômputo de limitantes da norma \mathcal{H}_∞ em sistemas discretos LPV, como mostra o próximo teorema.

Teorema 4.2. *O sistema (2.3) é assintoticamente estável e μ é um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ se existir uma matriz simétrica definida positiva $\mathcal{P}_\kappa(k) = \mathcal{P}_\kappa((\alpha(k), \dots, \alpha(k + \kappa - 2)))$ dada por (3.3) e $\kappa \geq 1$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_\kappa(k) & * & * & * \\ \mathcal{P}_\kappa(k+1)A(\alpha(k)) & \mathcal{P}_\kappa(k+1) & * & * \\ C(\alpha(k)) & 0 & I & * \\ 0 & B(\alpha(k))^T \mathcal{P}_\kappa(k+1) & D(\alpha(k))^T & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.3)$$

Demonstração. As condições seguem diretamente do uso da matriz de Lyapunov $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ na condição (2.10) do Lema 2.7. \square

4.5 Monotonicidade dos limitantes das normas

Utilizando-se de argumentos similares aos que foram usados na κ -estabilidade pode-se mostrar que, para uma escolha particular da estrutura da matriz \mathcal{P}_κ , os valores de custo garantido são cada vez mais precisos com o aumento de κ . Ou seja, se para uma determinada estrutura das

variáveis de decisão as condições dos teoremas 4.1 e 4.2 forem factíveis para um dado $\bar{\kappa}$ com os correspondentes custos $\bar{\phi}$, $\bar{\mu}$, então sempre existe solução para $\kappa > \bar{\kappa}$ com $\phi \leq \bar{\phi}$ e $\mu \leq \bar{\mu}$, respectivamente. Os exemplos numéricos corroboram esse fato.

4.6 Exemplos

Nesta seção, os teoremas 4.1 e 4.2 são utilizados para computar custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos LPV e chaveados retirados de artigos da literatura. Em todos os exemplos, os resultados infactíveis são representados por -1 .

As condições na forma de LMIs dependentes de parâmetros foram programadas usando o MATLAB com os pacotes ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019), Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o *solver* Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000).

4.6.1 Variação arbitrária

No primeiro exemplo, o Teorema 4.1 (T4.1) é utilizado para computar custos garantidos \mathcal{H}_2 para sistemas chaveados. Os resultados são comparados com as condições baseadas em funções de Lyapunov dependentes de caminho propostas em (LEE; KHARGONEKAR, 2008) (LK08, parametrizadas em M) que foram desenvolvidas apenas para sistemas chaveados. Embora as condições propostas nesta dissertação tratem o caso LPV, em todos os exemplos com variação arbitrária o sistema foi considerado como chaveado.

No intuito de realizar a comparação dos resultados, buscou-se, primeiramente, obter um sistema chaveado que fosse quadraticamente estável e, portanto, que produzisse soluções factíveis para todo M e κ . Para isso, as matrizes que descrevem as dinâmicas dos modos do sistema, foram multiplicadas por um escalar $\rho > 0$, que foi aumentado até o limite da estabilidade quadrática.

Os números de variáveis escalares para cada método (em termos do número de estados n , número de modos N , e dos parâmetros M e κ) são dados por

$$V_{\text{LK08}} = N^M \binom{n+1}{2} + 1,$$

$$V_{\text{T4.1}} = \binom{\kappa n+1}{2} + 1.$$

Os números de linhas de LMI são iguais para os dois métodos (note que M começa em 0 e κ começa em 1, situações que correspondem à estabilidade quadrática), da seguinte forma

$$L_{\text{LK08}} = nN^M(1+N) + N^{(M+1)},$$

$$L_{\text{T4.1}} = nN^{\kappa-1}(N+1) + N^\kappa$$

Com as expressões anteriores, percebe-se que o número de LMIs, para ambos os casos, e o de variáveis para LK08, cresce de forma exponencial, enquanto no caso de T4.1 o número de

variáveis tem crescimento polinomial, o que pode ser vantajoso no tratamento de sistemas com um número grande de modos e estados.

Algo interessante a se notar é que tanto o método LK08 quanto as condições do Teorema 4.1 asseguram que com o aumento de M e κ os limitantes obtidos não podem ser maiores do que os anteriores. Além disso, se houve solução para um certo $\kappa(M)$, sempre haverá solução para $\kappa(M)$ maior.

Exemplo 5

As matrizes dinâmicas, retiradas de (PARRILO; JADBABAIE, 2008), são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 9 \\ 4 & -9 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e as demais matrizes, construídas aleatoriamente com números inteiros no conjunto $\{0, 1, 2\}$, por

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os resultados são exibidos na Tabela 4.1, que mostra os valores de ϕ , o número de linhas de LMI (L) e de variáveis (V) obtidos com LK08 e T4.1.

Neste exemplo, $\rho = 0.0949$ foi o maior valor encontrado que assegura a factibilidade da estabilidade quadrática (e, portanto, a existência de soluções para todos os κ e M). Note que os números de linhas de LMIs são idênticos e os valores de custo garantido ϕ são muito semelhantes quando $\kappa = M - 1$. Por outro lado, para $\kappa \geq 3$, T4.1 utiliza um número menor de variáveis escalares quando comparado ao apresentado por LK08.

4.6.2 Variação limitada

No próximo exemplo é realizado o cálculo dos limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de um sistema realimentado por um ganho estabilizante, considerando-se diferentes valores do limite da taxa de variação b . Além disso, comparações com os resultados de (DE CAIGNY *et al.*,

Tabela 4.1 – Custos garantidos ϕ obtidos pelos métodos LK08 e T4.1 com o número de linhas de LMIs (L) e de variáveis escalares (V) para o Exemplo 5.

$(\kappa = M - 1)$	T4.1		LK08		L
	ϕ	V	ϕ	V	
1	144.5416	11	144.5416	11	19
2	19.6553	37	19.6553	31	57
3	19.5112	79	19.5111	91	171
4	19.4855	137	19.4855	271	513

2010) (dCCOPS10) também são mostradas (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ , o que pode fornecer resultados diferentes e com complexidade distintas). Foram utilizadas $P_\kappa(\alpha(k))$ e matriz de Lyapunov em dCCOPS10 com dependência afim no parâmetro.

Exemplo 6

Considere o sistema discreto retirado de (OLIVEIRA; PERES, 2009), porém considerado como variante no tempo com taxas limitadas, ou seja,

$$|\alpha_i(k+1) - \alpha_i(k)| \leq b \leq 1,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.8664 & -1.0432 & 1.1502 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = 0.$$

A Figura 4.1 mostra os valores mínimos obtidos para o limitante da norma \mathcal{H}_2 , enquanto que a Figura 4.2 apresenta os valores do limitante da norma \mathcal{H}_∞ , para P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$, com $\kappa = \{1, 2, 3\}$. A Tabela 4.2 mostra o número de variáveis escalares (V) e linhas de LMI (L) utilizadas para determinar o custo garantido pelo método deste trabalho e pela abordagem proposta em (DE CAIGNY *et al.*, 2010) (dCCOPS10).

Como pode ser visto em ambas as figuras, os limites das normas são muito próximos aos valores dos custos garantidos considerando o caso invariante no tempo com parâmetros incertos ($b = 0$), respectivamente $\phi = 4.1883$, $\mu = 7.5978$, proporcionando custos garantidos precisos, bem como para o caso arbitrariamente variante ($b = 1$). Como análise geral, o método proposto fornece um melhor equilíbrio entre precisão e complexidade numérica quando comparado ao método de (DE CAIGNY *et al.*, 2010).

Tabela 4.2 – Número de linhas de LMIs (L) e de variáveis escalares (V) para o cômputo dos custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$ comparados com os resultados obtidos em dCCOPS10 (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ) para o Exemplo 6.

	ϕ		μ	
	V	L	V	L
$g = 0, \kappa = 2$	22	170	22	160
$g = 1, \kappa = 1$	13	92	13	80
$g = 1, \kappa = 2$	43	284	43	280
dCCOPS10	33	255	31	186
dCCOPS10*	69	255	67	186

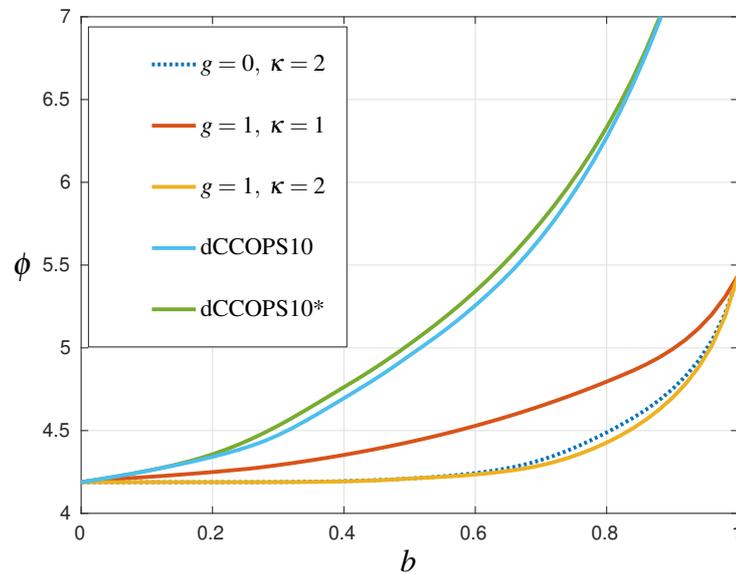


Figura 4.1 – Limitantes ϕ da norma \mathcal{H}_2 computados para P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$, utilizando o método proposto nesta dissertação e o de dCCOPS10 (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ) para o Exemplo 6.

4.6.3 Variação dinâmica

No próximo exemplo, os valores dos custos garantidos \mathcal{H}_2 são computados para um sistema com incerteza afim dado por

$$x(k+1) = A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))w(k), \quad (4.4a)$$

$$y(k) = C(\theta(k))x(k) + D(\theta(k))w(k), \quad (4.4b)$$

sendo que todas as matrizes $\{A, B, C, D\}(\theta(k))$ possuem estrutura similar à apresentada em (2.12) com $L = 1$ (apenas um parâmetro), e o parâmetro variante no tempo $\theta(k)$ respeita uma dinâmica conhecida. As dinâmicas consideradas para $\theta(k)$ são E1 e E2, dadas por $\theta(k) = \sin(\omega k)$

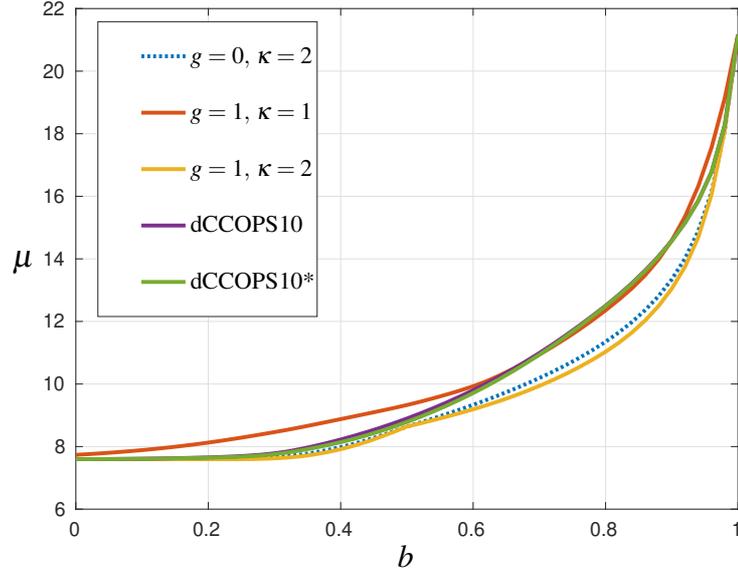


Figura 4.2 – Limitantes μ da norma \mathcal{H}_∞ computados para P_κ constante ($g = 0$) e de grau $g = 1$, utilizando o método proposto nesta dissertação e o dCCOPS10 (dCCOPS10* significa que as variáveis de folga foram criadas diretamente no espaço de γ) para o Exemplo 6.

e $\theta(k) = 0.5\text{sen}(\omega k) + 0.2\text{cos}(\omega k)$, respectivamente. Os resultados dessas estruturas são comparados com as condições que tratam variação limitada.

Exemplo 7

Considere o sistema (4.4) cujas matrizes são

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.499 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C_0 = [0.5 \quad 1], \quad C_1 = [0.5 \quad 0.5], \quad D_0 = D_1 = 0.$$

Primeiramente são computados custos garantidos \mathcal{H}_2 para o sistema em função de ω utilizando a técnica especializada em variação dinâmica. As figuras 4.3 e 4.4 mostram os resultados obtidos para $\omega \in [0, 2\pi]$ considerando os seguintes valores para κ e grau da matriz de Lyapunov (g): $(g, \kappa) \in \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$.

Com relação ao caso E1, além de um comportamento simétrico em relação ao ponto $\omega = \pi$, nota-se uma significativa diminuição do conservadorismo quando emprega-se $\kappa = 3$ (mesmo com P_κ de grau zero). Portanto, pode-se concluir que nesse caso o aumento de κ é muito mais vantajoso do que o aumento do grau da matriz P_κ . A explicação para esse fato é que quanto maior o valor de κ , mais a dinâmica do parâmetro é explorada pela condição de análise.

Os resultados da estrutura E2, por outro lado, não são simétricos, o que de certa forma era esperado por tratar-se de uma soma de dois parâmetros distintos. Novamente, nota-se um claro destaque para o resultado obtido com $\kappa = 3$.

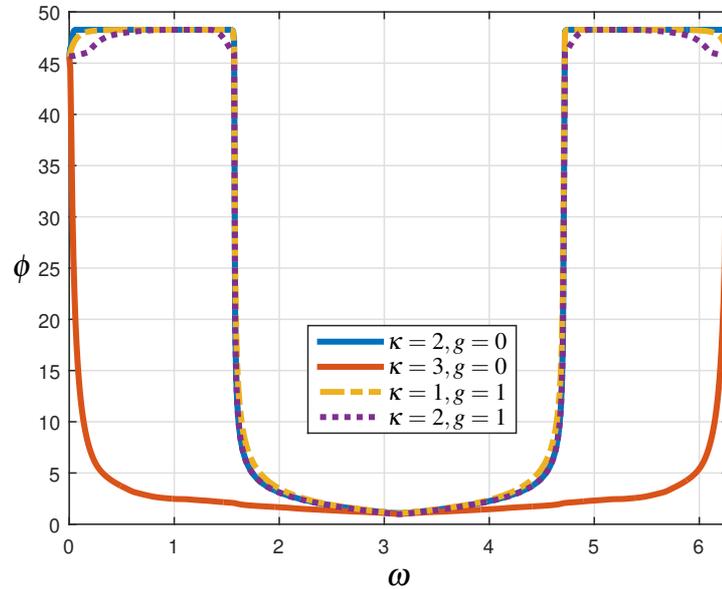


Figura 4.3 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 associados à estrutura E1, considerando a variação dinâmica com $\omega \in [0, 2\pi]$ e os seguintes valores para κ e grau da matriz de Lyapunov $P_\kappa(g)$: $(g, \kappa) \in \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$.

Finalmente, para fins de comparação, é realizado o cálculo dos custos garantidos \mathcal{H}_2 utilizando a técnica de variação limitada, considerando-se os limitantes para a taxa de variação em função da frequência ω . Por meio de manipulações trigonométricas, é possível determinar os seguintes limitantes para as taxas de variação de $\theta(k)$ em função de ω , para as duas estruturas consideradas, E1 e E2:

$$\text{E1: } b = \|\text{sen}(\omega/2)\|, \quad \text{E2: } b = \left\| \frac{\text{sen}(\omega/2) + 0.4 \cos(\omega/2)}{1.4} \right\|$$

A Figura 4.5 ilustra graficamente os valores de b em função de $\omega \in [0, 2\pi]$ para as estruturas E1 e E2. É esperado que os custos garantidos sejam maiores à medida que b se aproxima de 1 (taxa de variação arbitrária) e menores quando b se aproxima de zero (caso invariante no tempo).

Aplicando as condições do Teorema 4.1 utilizando a modelagem da variação limitada com os valores de b informados, obtêm-se os resultados mostrados nas figuras 4.6 e 4.7 considerando $\kappa = 2$ e P_κ de grau zero. Embora as diferenças de magnitude sejam pequenas em termos de ϕ , as curvas dos custos garantidos, como previstas, são similares às curvas relacionadas ao valor de b . Para $\kappa = 1$ e P_κ de grau zero as condições não são capazes de explorar o modelo dinâmico para as taxas de variação e os custos garantidos são constantes para todo valor de ω . Para E1, o custo garantido é 48.2503 e para E2 o custo é 2.7949.

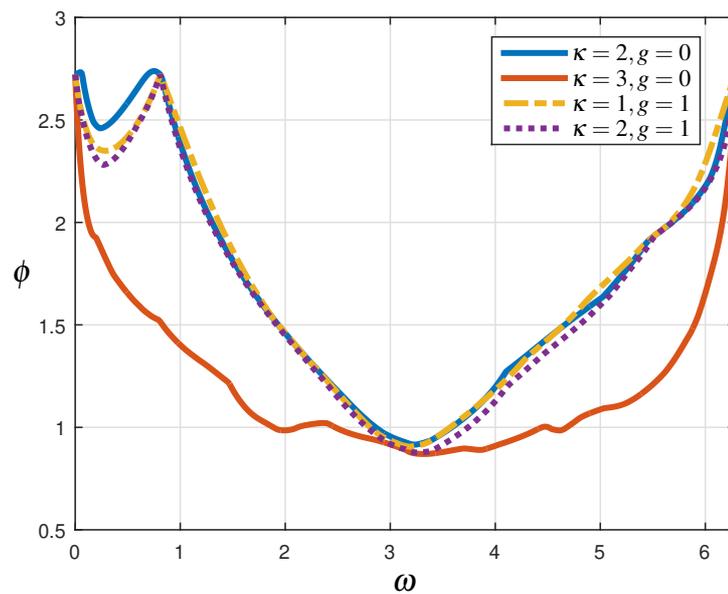


Figura 4.4 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 associados à estrutura E2, considerando a variação dinâmica com $\omega \in [0, 2\pi]$ e os seguintes valores para κ e grau da matriz de Lyapunov $P_\kappa(g)$: $(g, \kappa) \in \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$.

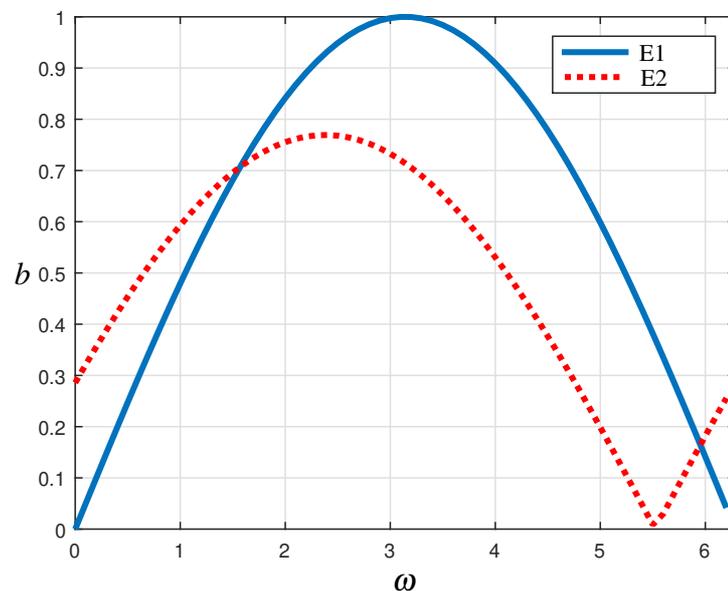


Figura 4.5 – Valor de b em função de ω para as estruturas E1 e E2.

Comparativamente, é notório o menor conservadorismo fornecido pelas condições que exploram a variação dinâmica. Além disso, a complexidade computacional tende a ser menor do que a demandada pela variação limitada, pois não é necessária a conversão dos parâmetros (e seus instantes sucessivos) para o espaço γ .

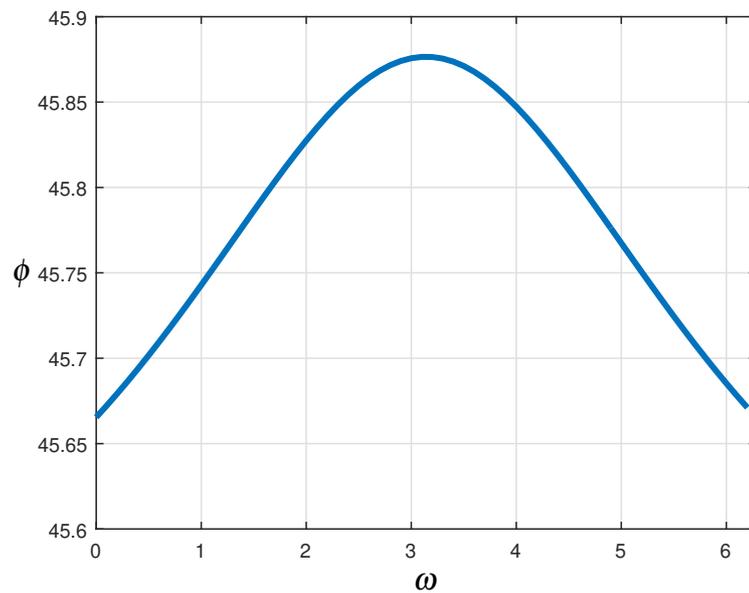


Figura 4.6 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 considerando taxas limitadas de variação para a estrutura E1 e $\kappa = 2$.

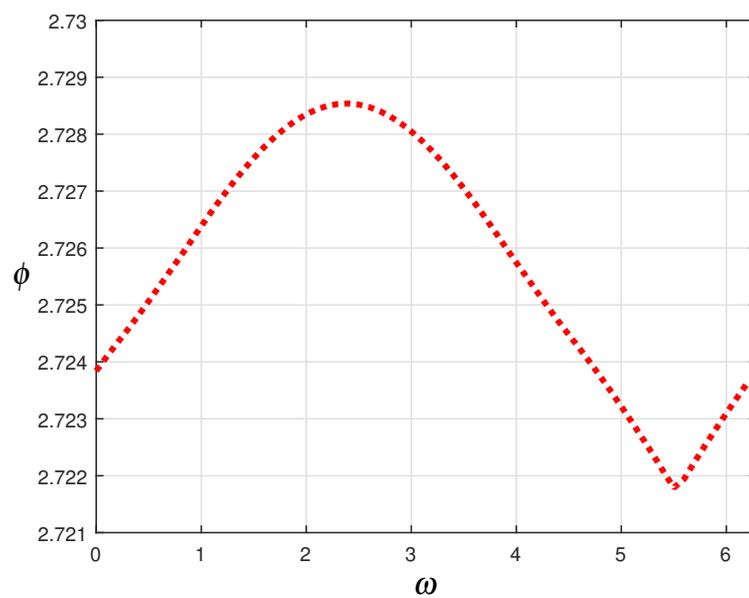


Figura 4.7 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 considerando taxas limitadas de variação para a estrutura E2 e $\kappa = 2$.

Conclusão

Comentários finais

Neste trabalho foram apresentadas condições de estabilidade robusta, na forma de desigualdades matriciais dependentes de parâmetros, baseadas em uma estrutura particular da função de Lyapunov, para sistemas lineares discretos com parâmetros variantes no tempo, que incluem a classe de sistemas chaveados. Para construir essa função de Lyapunov, explora-se o uso de equações de estado redundantes parametrizadas em termos de um inteiro κ , denominadas portanto condições de κ -estabilidade. Assim como no caso de sistemas lineares incertos invariantes no tempo, também foi mostrado que as condições propostas tendem à necessidade à medida que κ cresce no caso de variação arbitrária dos parâmetros, sendo esse o principal resultado desta dissertação. O aspecto mais relevante desta contribuição é que as condições propostas possuem um crescimento polinomial das variáveis de decisão em termos do número de vértices (representação politópica) e do número de estados do sistema. Os resultados numéricos mostram que as condições propostas equiparam-se em termos de acurácia às avaliações fornecidas por condições da literatura, demandando, muitas vezes, um número menor de variáveis escalares para certificar a estabilidade.

Como extensões também foram tratados sistemas em que os parâmetros possuem taxas de variações limitadas e variações conhecidas segundo uma dinâmica linear. No caso de variação limitada, foi proposta uma modelagem sistemática e genérica para tratar um número arbitrário de parâmetros em sucessivos instantes de tempo. Embora essa técnica existisse na literatura, pela primeira vez foi mostrado como obter o politopo que descreve a região na qual os parâmetros assumem valores em sucessivos instantes de tempo de maneira precisa e sistemática.

Condições para computar as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ também foram apresentadas utilizando o conceito de κ -estabilidade. Os resultados numéricos mostram que as condições tornam-se mais precisas à medida que κ cresce, além de fornecer um melhor compromisso entre precisão e esforço computacional quando comparadas às condições da literatura. Com relação à variação

dinâmica dos parâmetros, também foi mostrado que esse tipo de modelagem é uma alternativa bem menos conservadora quando comparada a apenas levar em conta os limites da taxa de variação (variação limitada), tanto na análise de estabilidade, quanto no cômputo das normas.

Perspectivas

Como possíveis tópicos para pesquisas futuras sugerem-se:

- Uso de condições baseadas em κ estabilidade para a síntese de controladores e filtros, tendo como critérios de desempenho as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ ;
- Uso de equações redundantes na análise de estabilidade de sistemas com presença de não linearidades como saturação, zona-morta, folga e histerese.
- Extensão da κ -estabilidade para sistemas chaveados com caminhos restritos e periodicidade.

Publicações

Durante o mestrado, foram produzidos três artigos completos para conferências, duas internacionais (ROCOND'18-LPVS'18 e ACC2019) e uma nacional (CBA2018), todos apresentados oralmente pela mestrandia.

- A. L. J. Bertolin, R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, P. L. D. Peres, LMI-based stability tests for LPV and switched discrete-time linear systems through redundant equations, **Joint 9th IFAC Symposium on Robust Control Design, ROCOND'18, and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, LPVS'18**, Florianópolis, SC, Brazil, September 3-5, 2018, p. 531–536. <<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.153>>.
- A. L. J. Bertolin, P. L. D. Peres, R. C. L. F. Oliveira, Robust stability and guaranteed cost computation for discrete time-varying uncertain linear systems with constrained parameter variations, **2019 American Control Conference**, Philadelphia, PA, USA, July, p. 4541–4546.
- A. L. J. Bertolin, R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, P. L. D. Peres, Cômputo de custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas lineares chaveados a tempo discreto utilizando redundância, **XXII Congresso Brasileiro de Automática**, CBA 2018, João Pessoa, PB, Setembro, 2018, <<https://doi.org/10.20906/CPS/CBA2018-1136>>.

Referências

- AGULHARI, C. M.; FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. v. 45, n. 3, p. 36:1–36:25, ago. 2019. <<http://rolmip.github.io>>. Citado 6 vezes nas páginas 17, 25, 38, 40, 42 e 50.
- AHMADI, A. A.; JUNGERS, R. M.; PARRILO, P. A.; ROOZBEHANI, M. Joint spectral radius and path-complete graph Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 52, n. 1, p. 687–717, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 43.
- ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In: FRENK, H.; ROOS, K.; TERLAKY, T.; ZHANG, S. (Ed.). *High Performance Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2000, (Applied Optimization, v. 33). p. 197–232. <<http://www.mosek.com>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 42 e 50.
- ATHANASOPOULOS, N.; LAZAR, M. Alternative stability conditions for switched discrete time linear systems. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*. Cape Town, South Africa: [s.n.], 2014. p. 6007–6012. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 43.
- AVIS, D.; FUKUDA, K. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, v. 8, n. 3, p. 295–313, September 1992. Citado na página 33.
- BARBOSA, K. A.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Robust \mathcal{H}_2 filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: [s.n.], 2002. p. 3224–3229. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 49.
- BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Síntese \mathcal{H}_∞ para sistemas com restrições algébricas no estado. *SBA: Controle & Automação*, v. 14, n. 3, p. 254–261, Jul/Set 2003. Citado na página 16.
- BERTOLIN, A. L. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. Cômputo de custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas lineares chaveados a tempo discreto utilizando redundância. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa, PB: [s.n.], 2018. Citado na página 16.

- BERTOLIN, A. L. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. LMI-based stability tests for LPV and switched discrete-time linear systems through redundant equations. In: *Proceedings of the Joint 9th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'18), and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems (LPVS'18)*. Florianópolis, Brazil: [s.n.], 2018. p. 531–536. Citado na página 16.
- BERTOLIN, A. L. J.; PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. Robust stability and guaranteed cost computation for discrete time-varying uncertain linear systems with constrained parameter variations. In: *Proceedings of the 2019 American Control Conference*. Philadelphia, EUA: [s.n.], 2019. p. 4541–4546. Citado na página 31.
- BIANNIC, J.; BURLION, L.; TARBOURIECH, S. Finite-time LPV analysis of a vision based landing system with anti-windup augmentation. In: *Proceedings of the Joint 9th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'18), and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems (LPVS'18)*. Florianópolis, Brazil: [s.n.], 2018. v. 51, p. 37–42. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- BLIMAN, P.-A.; FERRARI-TRECATE, G. Stability analysis of discrete-time switched systems through Lyapunov functions with nonminimal state. In: *Proceedings of the IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'03)*. Saint-Malo, Brittany, France: [s.n.], 2003. p. 325–329. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 29 e 42.
- BLONDEL, V. D.; NESTEROV, Y.; THEYS, J. Approximations of the rate of growth of switched linear systems. In: ALUR, R.; PAPPAS, G. J. (Ed.). *Hybrid Systems: Computation and Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2004, (Lecture Notes in Computer Science, v. 2993). p. 173–186. Citado na página 16.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: [s.n.], 1994. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 21.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 26.
- CHANG, C.-T.; BLONDEL, V. D. An experimental study of approximation algorithms for the joint spectral radius. *Numerical Algorithms*, v. 64, n. 1, p. 181–202, September 2013. Citado na página 19.
- CHESI, G. LMI conditions for time-varying uncertain systems can be non-conservative. *Automatica*, v. 47, n. 3, p. 621–624, March 2011. Citado na página 21.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 3, p. 365–370, March 2005. Citado na página 16.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009. v. 390. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 390). Citado na página 16.
- COX, P. B.; WEILAND, S.; TOTH, R. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for LPV systems with affine dependence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 63, n. 11, p. 3865–3872, April 2018. Citado na página 16.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 43, n. 5, p. 355–359, August 2001. Citado na página 16.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Poly-quadratic stability and \mathcal{H}_∞ performance for discrete systems with time varying uncertainties. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, USA: [s.n.], 2001. p. 267–272. Citado na página 21.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVER, J. Gain-scheduled \mathcal{H}_∞ -control for discrete-time polytopic LPV systems using homogeneous polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2009)*. Haifa, Israel: [s.n.], 2009. p. 19–24. Citado na página 16.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVER, J. Gain-scheduled \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems. *IET Control Theory & Applications*, v. 4, n. 3, p. 362–380, March 2010. Citado 7 vezes nas páginas 22, 23, 24, 31, 32, 49 e 52.

DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability: The discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 296, n. 1–3, p. 27–38, June 1999. Citado na página 26.

DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Schur stability of polytopic systems through positivity analysis of matrix-valued polynomials. In: *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: [s.n.], 2007. p. 6322–6327. Citado na página 16.

DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A new method for robust Schur stability analysis. *International Journal of Control*, v. 83, n. 10, p. 2181–2192, October 2010. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 22 e 28.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 26.

DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 54, n. 6, p. 2110–2118, June 2006. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 49.

EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; HAGIWARA, T. Robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems by taking higher-order time-derivatives of the state. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005*. Seville, Spain: [s.n.], 2005. p. 5030–5035. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 28.

EL GHAOU, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. (Advances in Design and Control). Citado na página 17.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The Math Works, 1995. Citado na página 17.

- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 12, p. 1984–1989, December 2006. Citado na página 16.
- HENRION, D.; ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; LASSERRE, J. B. On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Paradise Island, Bahamas: [s.n.], 2004. p. 887–892. Citado na página 16.
- HERCEG, M.; KVASNICA, M.; JONES, C. N.; MORARI, M. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In: *Proceedings of the 2013 European Control Conference*. Zurich, Switzerland: [s.n.], 2013. p. 502–510. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 42.
- JUNGERS, R. (Ed.). *The Joint Spectral Radius: Theory and Applications*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009. v. 385. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 385). Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. Citado na página 15.
- KRUSZEWSKI, A.; WANG, R.; GUERRA, T. M. Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models: A new approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 53, n. 2, p. 606–611, March 2008. Citado na página 42.
- LATHI, B. P. *Linear Systems and Signals*. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2005. ISBN 0195158334. Citado na página 15.
- LEE, J.-W. On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 10, p. 1714–1721, October 2006. Citado 5 vezes nas páginas 16, 19, 22, 37 e 42.
- LEE, J.-W.; DULLERUD, G. E. Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 2, p. 205–218, February 2006. Citado na página 21.
- LEE, J.-W.; KHARGONEKAR, P. P. Optimal output regulation for discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 47, n. 1, p. 40–72, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 50.
- LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 3, p. 500–504, March 2003. Citado na página 16.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston, MA: Birkhäuser, 2003. (Systems and Control: Foundations and Applications). Citado na página 16.
- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 19, n. 5, p. 59–70, October 1999. Citado na página 16.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and persistent disturbance attenuation properties for a class of networked control systems: Switched system approach. *International Journal of Control*, v. 78, n. 18, p. 1447–1458, 2005. Citado na página 19.

- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 2, p. 308–322, February 2009. Citado na página 19.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 42 e 50.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Citado na página 16.
- MASON, P.; SIGALOTTI, M.; DAAFOUZ, J. Comparison between classes of state-quadratic Lyapunov functions for discrete-time linear polytopic and switched systems. *Systems & Control Letters*, v. 61, n. 11, p. 1062–1068, 2012. Citado na página 16.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M. Stability analysis of linear time-varying systems: Improving conditions by adding more information about parameter variation. *Systems & Control Letters*, v. 60, n. 5, p. 338–343, 2011. Citado na página 16.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. D. Selective gain-scheduling for continuous-time linear systems with parameters in multi-simplex. In: *Proceedings of the 2009 European Control Conference*. Budapest, Hungary: [s.n.], 2009. p. 213–218. Citado na página 26.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability analysis of time-varying systems in polytopic domains. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York, NY, USA: [s.n.], 2007. p. 6079–6084. Citado na página 16.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; de Oliveira, M. C.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 8, p. 680–689, August 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 28.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. A special time-varying Lyapunov function for robust stability analysis of LPV systems with bounded parameter variation. *IET Control Theory & Applications*, v. 3, n. 10, p. 1448–1461, October 2009. Citado 4 vezes nas páginas 16, 22, 28 e 40.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. An LMI characterization of polynomial parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005*. Seville, Spain: [s.n.], 2005. p. 5024–5029. Citado 4 vezes nas páginas 16, 22, 28 e 41.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007. Citado na página 25.

- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design. *Automatica*, v. 45, n. 11, p. 2620–2626, November 2009. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 52.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares. In: FELTRIN, A. P.; MINUSSI, C. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; LÁZARO, R. A. R. (Ed.). *Tutoriais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010. p. 203–229. ISBN 978-85-7983-061-7. Citado na página 17.
- PARRILO, P. A. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2000. Citado na página 26.
- PARRILO, P. A. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Mathematical Programming: Series B*, v. 96, n. 2, p. 293–320, 2003. Citado na página 26.
- PARRILO, P. A.; JADBABAIE, A. Approximation of the joint spectral radius using sum of squares. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 428, n. 10, p. 2385–2402, 2008. Special Issue on the Joint Spectral Radius: Theory, Methods and Applications. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 51.
- SATO, M.; PEAUCELLE, D. Robust stability/performance analysis for linear time-invariant polytopically parameter-dependent systems using polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA: [s.n.], 2006. p. 5814–5819. Citado na página 16.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 42.
- SUN, Z. A note on marginal stability of switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 53, n. 2, p. 625–31, March 2008. Citado na página 16.
- TROFINO, A.; COUTINHO, D. F.; BARBOSA, K. A. Improved \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems. *SBA: Controle & Automação*, v. 16, n. 4, p. 427–434, Outubro/Novembro/Dezembro 2005. Citado na página 16.
- TROFINO, A.; DE SOUZA, C. E. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 8, p. 1303–1307, August 2001. Citado na página 16.
- VANKEERBERGHEN, G.; HENDRICKX, J. M.; JUNGERS, R. M. JSR: a toolbox to compute the joint spectral radius. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2014)*. Berlin, Germany: [s.n.], 2014. p. 151–156. Citado na página 19.