



Mirko Alberto Gómez Villavicencio

DISTRIBUIÇÃO BIVARIÁVEL KAPPA-MU

Campinas
2014



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Mirko Alberto Gómez Villavicencio

Distribuição Bivariável kappa-mu

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno, e orientada pelo Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Campinas
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

G586d Gómez Villavicencio, Mirko Alberto, 1982-
Distribuição bivariável kappa-mu / Mirko Alberto Gómez Villavicencio. –
Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Michel Daoud Yacoub.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Modelos estatísticos. 2. Ajuste de curva. 3. Aproximações matemáticas. I.
Yacoub, Michel Daoud, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade
de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A Bivariate kappa-mu distribution

Palavras-chave em inglês:

Statistical models

Curve fitting

Mathematical approaches

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Michel Daoud Yacoub [Orientador]

Rausley Adriano Amaral de Souza

Paulo Cardieri

Data de defesa: 29-08-2014

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Mirko Alberto Gómez Villavicencio

Data da Defesa: 29 de agosto de 2014

Título da Tese: "Distribuição Bivariável Kappa-mu "

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (Presidente): M. Daoud Yacoub

Prof. Dr. Rausley Adriano Ameal de Souza: Rausley A. A. de Souza

Prof. Dr. Paulo Cardieri: Paulo Cardieri

Resumo

Nesta dissertação, uma distribuição bivariável $\kappa - \mu$ é apresentada. Exatas expressões para a função densidade de probabilidade conjunta, função distribuição cumulativa conjunta, e os momentos arbitrários conjuntos são encontradas. As estatísticas conjuntas são dadas em termos de seus respectivos parâmetros (κ_1, μ_1) e (κ_2, μ_2) , com $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$ e arbitrários $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 > 0$. Como exemplo de aplicação, a probabilidade de *outage* para o caso de dois ramos por combinação por seleção pura, combinação por razão máxima e combinação por ganho igual são apresentadas.

Palavras-chave: Distribuição bivariável κ - μ , probabilidade de outage, desvanecimento, SC, MRC, EGC, coeficiente de correlação.

Abstract

In this thesis, a bivariate κ - μ model is presented. Exact expressions for the joint probability density function, joint cumulative distribution function, and joint arbitrary moments are found. The joint statistics are given in terms of their respective parameters (κ_1, μ_1) and (κ_2, μ_2) , with $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$ and arbitrary $\kappa_1 > 0$ and $\kappa_2 > 0$. As an application example, the outage probability of a dual-branch pure selection combining, maximo ratio combining and equal gain combining scheme are presented.

Key-words: κ - μ Bivariate distribution, outage Probability, fading channel, SC, MRC, EGC, covariance, correlation coefficient.

Sumário

Agradecimentos	xv
Lista de Figuras	xix
Lista de Figura	xxi
Lista de Acrônimos e Notação	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Desvanecimento do sinal no Canal	2
1.2 Desvanecimento de Longo Prazo	3
1.3 Desvanecimento de Curto Prazo	3
1.4 Técnicas de Diversidade	3
1.4.1 Diversidade Espacial	3
1.4.2 Diversidade de Polarização	4
1.4.3 Diversidade de Frequência	4
1.4.4 Diversidade Temporal	4
1.4.5 Proposta de Trabalho	4
1.4.6 Estrutura da Dissertação	5
2 Função de Densidade de Probabilidade Conjunta η-μ bivariada	6
3 Distribuição κ-μ Bivariável	8
3.1 A Distribuição de Desvanecimento κ - μ	8
3.2 Função de Densidade de Probabilidade Conjunta κ - μ para Duas Variáveis	9
3.3 Função de Distribuição Cumulativa Conjunta κ - μ	14
3.4 Momentos Conjuntos	16
3.5 Coeficiente de Correlação	17
4 Probabilidade de Outage	19
4.1 Diversidade na Recepção	20
4.2 Combinação por Seleção Pura (SC)	20
4.3 Combinação por Razão Máxima (MRC)	21
4.4 Combinação por Ganho Igual	23
5 Resultados	25

6	Conclusões e Direções de Pesquisa Futura	39
6.1	Conclusões	39
6.2	Trabalhos Futuros	39
	Referências Bibliográficas	40
7	apêndice	43

AO CRIADOR.

AOS MEUS PAIS, MARLENE E RICARDO.

AOS MEUS IRMÃOS, CARLOS, ALVARO E ALEJANDRO.

A MEUS AVÓS RICARDO E RODESTO.

À MEUS QUERIDOS TIOS FLOR, ALBERTO, ESTELA, JUAN, LUZ,
NORKA, MARITZA, ALFREDO, LUCY, MARCOS.

A MINHA CUNHADA YNES E SUA IRMÃ LINDA.

A MEU ORIENTADOR MICHEL YACOUN.

A MEUS MELHORES AMIGOS TONY, WILBER, JORGE, SARA, AZUCENA,
BERNA, FELIPE, ANDREA, PAULO, ADERLAN, MARCEL, FRANK, ENRIQUE
GIANFRANCO, MIRKO, CAIO.

A MEUS CAROS CACHORROS DUKE, DAYSI, SHOPPER, LAYCA E
BRANDON.

Agradecimentos

Agradeço,

A Deus pela oportunidade que ele me deu para estar presente

Aos meus pais, Marlene e Ricardo, por seu apoio incondicional que eles sempre me deram em momentos ruins e bons, graças aos valores que me ensinaram os quais tenho servido na passagem da minha vida.

A meu orientador, Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub, pela competência, solicitude e flexibilidade na orientação.

Aos meus caros amigos que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida, mesmo longe de mim.

Aos amigos que fiz no laboratório WissTek (Juan, Carolina, Henry, Nathy, Pablo, Fernando, David, Marcelo, Gaby, Jacky, Jose Luis, Jaime, Gustavo, Erick, Thiago, Edgar, Diana, Gabriel, Tarciso, Rodolfo, Roberto, Lucas, Cristhiano, Eloisa, André, pela inesquecível convivência diária, pelos conselhos.

Ao meus amigos da República que sempre me apoiaram nas piores situações da minha vida, nunca esquecerei de vocês Felipe, Caio, Gustavo, Cesar, Cris, Claudio, Paulo, Ravi, Victor, Kaio, Pedro, Nicolas.

A meu amigo Gustavo que teve a paciência de ajudar a corrigir esta tese.

Ao Caro doutor Rausley Adriano por a ajuda nas correções e teste feitos sobre a pesquisa da distribuição.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A única forma de prever o futuro é ter poder para formar o futuro.

Eric Hoffer

Nunca olvides que basta una persona o una idea para cambiar tu vida para siempre, ya sea para bien o para mal.

James Brown

Lista de Figuras

1.1	Propagação por múltiplos percursos em um ambiente urbano	2
4.1	Combinação por Seleção Pura	20
4.2	Maximal Ratio Combining	22
4.3	Equal Gain Combining	23
5.1	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=5$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$	25
5.2	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=8$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$	26
5.3	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=3.7$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$	26
5.4	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=5.7$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$	27
5.5	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de μ	27
5.6	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de μ	28
5.7	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de μ	28
5.8	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de κ	29
5.9	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de κ	29
5.10	Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de κ	30
5.11	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura ($\mu=0.3 \rightarrow$ Roxo) e de acordo com a expressão do paper [1] ($\mu=0.3 \rightarrow$ Vermelho) para valores fixo de $\delta=0, \kappa_1=5, \kappa_2=7$	30
5.12	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \kappa_1=1, \kappa_2=2$	31
5.13	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \kappa_1=1, \kappa_2=2$	32

5.14	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \mu=1.25$.	32
5.15	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \mu=1.25$	33
5.16	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de δ ($\delta = 0 \rightarrow$ Azul, $\delta = 0.1 \rightarrow$ Vermelho, $\delta = 0.2 \rightarrow$ Roxo, $\delta = 0.3 \rightarrow$ Laranja, $\delta = 0.4 \rightarrow$ Verde, $\delta = 0.5 \rightarrow$ Rosa, $\delta = 0.6 \rightarrow$ Azul, $\delta = 0.7 \rightarrow$ Vermelho, $\delta = 0.8 \rightarrow$ Roxo), para um valor fixo de $\mu=2, \kappa_1=1, \kappa_2=3$	33
5.17	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \kappa_1=1, \kappa_2=2$. .	34
5.18	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \kappa_1=1, \kappa_2=2$	34
5.19	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \mu=1.25$	35
5.20	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \mu=1.25$	35
5.21	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \kappa_1=1, \kappa_2=2$	36
5.22	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \kappa_1=1, \kappa_2=2$	36
5.23	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \mu=1.25$	37
5.24	Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \mu=1.25$	37

5.25	Probabilidade de outage para 2 ramos por os métodos de combinação por Seleção Pura $\rightarrow$ Azul, combinação por razão máxima $\rightarrow$ Vermelho e combinação por ganho igual $\rightarrow$ Roxo para um valor fixo de $\mu=7, \delta=0.5, \kappa_1=4, \kappa_2=7$	38
------	---	----

Lista de Acrônimos e Notação

LoS	Linha de visada direta
NLoS	Linha sem visada direta
FDP	Função densidade de probabilidade
FDC	Função de distribuição cumulativa
FGM	Função geradora de momento
$E(.)$	Esperança de uma variável aleatória
SC	Combinação por seleção Pura
MRC	Combinação por razão máxima
EGC	Combinação por ganho igual
R	Envoltória de um sinal com desvanecimento
rms	Valor eficaz (RMS) de R
σ^2	Variância de uma variável aleatória
δ	Coefficiente de correlação
ρ	Envoltória normalizada
$ \cdot $	Módulo
κ	Parâmetro de desvanecimento de κ - μ
μ	Parâmetro de desvanecimento de κ - μ ou α - μ ou η - μ
α	Parâmetro de desvanecimento de α - μ
η	Parâmetro de desvanecimento de η - μ
w	Máximo deslocamento Doppler em rad/s
β	Inverso do comprimento de onda
$\Gamma(.)$	Função gamma
$I_a(.)$	Função modificada de Bessel do primeiro tipo de orden a
γ_i	Sinal a Ruído

Introdução

Atualmente as redes sem fio tornaram-se imprescindíveis. As redes sem fio surgiram devido à necessidade de se manter conectado, independentemente da localização. Tendo em vista este crescimento, o estudo do canal rádio móvel se torna de extrema importância na criação de novas tecnologias e melhoria das atuais. O canal utilizado pelos sistemas de rádio-comunicação apresenta inúmeras dificuldades na transmissão da informação como reflexão, refração e difração. Ao contrário dos meios de comunicações cabeados, o canal de rádio sofre constantes variações no tempo, impossibilitando a previsão de seu comportamento. Desta forma o estudo detalhado das características do canal permite uma melhora na qualidade da transmissão, sendo essencial para o planejamento e dimensionamento dos sistemas de comunicação. Os projetistas podem aproveitar o conhecimento do canal com a finalidade de maximizar a eficiência espectral, possibilitando a estimação dos níveis de potência no transmissor, o aperfeiçoamento de receptor, avaliando o manejo de técnicas de combate aos efeitos de desvanecimento. E por isso, esforços são necessários em sua modelagem. Com o intuito de representar este comportamento, modelos probabilísticos são utilizados, indicando assim, a influência do meio na potência do sinal.

Os modelos clássicos de desvanecimentos dados pelas distribuições Nakagami- m [2], Weibull [3], o Rayleigh [4] possuem uma boa aplicabilidade em diversos tipos de cenários. Estes porém não modelam todos os ambientes e portanto, modelos mais gerais de desvanecimentos foram propostos, definidos pelas distribuições α - μ [5], κ - μ [6], e η - μ [6], modelos generalizados que incluem os modelos clássicos como casos especiais, e se encaixam bem aos cenários experimentais. A distribuição κ - μ [6] descreve um cenário de desvanecimento em que o canal de rádio apresenta *clusters* de multipercursos, bem como componentes dominantes em cada cluster. O modelo contém como casos especiais (i) Nakagami- m , obtida a partir dele quando $\kappa \rightarrow 0$ com $\mu=m$ (m , o parâmetro de Nakagami) e (ii) Rice obtida quando $\mu = 1$ e $\kappa = k$ (k , o parâmetro de Rice), a Semi-Gaussiana, bem como a Rayleigh também são casos especiais, uma vez que são casos especiais de Nakagami- m e Rice. O modelo de desvanecimento κ - μ tem sido explorado numa vasta gama de aplicações. A utilidade prática da distribuição κ - μ para descrever as estatísticas de desvanecimento de curto prazo tem sido reconhecido em um cenário diversificado. Em [6], a distribuição foi usada para produzir o melhor ajuste aos dados coletados em ensaios de campo sempre que as componentes dominantes estavam presentes, tanto para ambientes internos, bem como ambientes externos para os sinais que se propagam em 500 MHz, 1,8 GHz e 10 GHz. Em [7], fórmulas em forma fechada para algumas estatísticas de ordem superior, ou seja, taxa e duração média de desvanecimento, foram obtidas e usadas para ajustar os dados coletados em uma rede de área corporal em 2,45 GHz. Em [8], uma distribuição de forma fe-

chada κ - μ sombreada foi proposta, analisada, e utilizada para ajustar os dados experimentais a partir de canais de comunicações acústicos submarinos. Em [9], uma outra distribuição de forma fechada κ - μ sombreada foi desenvolvida e usada para modelar e ajustar os dados de canais de comunicação. A flexibilidade do modelo de desvanecimento κ - μ tem sido fundamental para promover uma ampla gama de pesquisas sobre o desempenho de técnicas de comunicação. Uma série de resultados gerais sobre as taxas de erro de símbolo em esquemas de modulação, cenários de combinação de diversidade, a capacidade do canal, comunicações cooperativas, sistemas de rádio cognitivos, problemas de detecção e outros, envolvendo o canal de desvanecimento κ - μ pode ser encontrada na literatura (por exemplo, [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]).

1.1 Desvanecimento do sinal no Canal

A propagação do sinal em um meio sem fio tem um comportamento variável. O sinal que chega ao receptor pode consistir em uma combinação construtiva ou destrutiva de versões espalhadas aleatoriamente, atrasadas e refletidas do sinal transmitido que corresponde às flutuações aleatórias do nível de sinal no receptor. Existem dois tipos básicos de desvanecimento: o primeiro definido como o desvanecimento lento que está relacionado ao comportamento do sinal de longo prazo; o segundo dado pelo desvanecimento rápido e está associado à caracterização do sinal de curto prazo [19]. A Figura 1.1 ilustra a propagação por múltiplos percursos em um ambiente de comunicações urbanas.

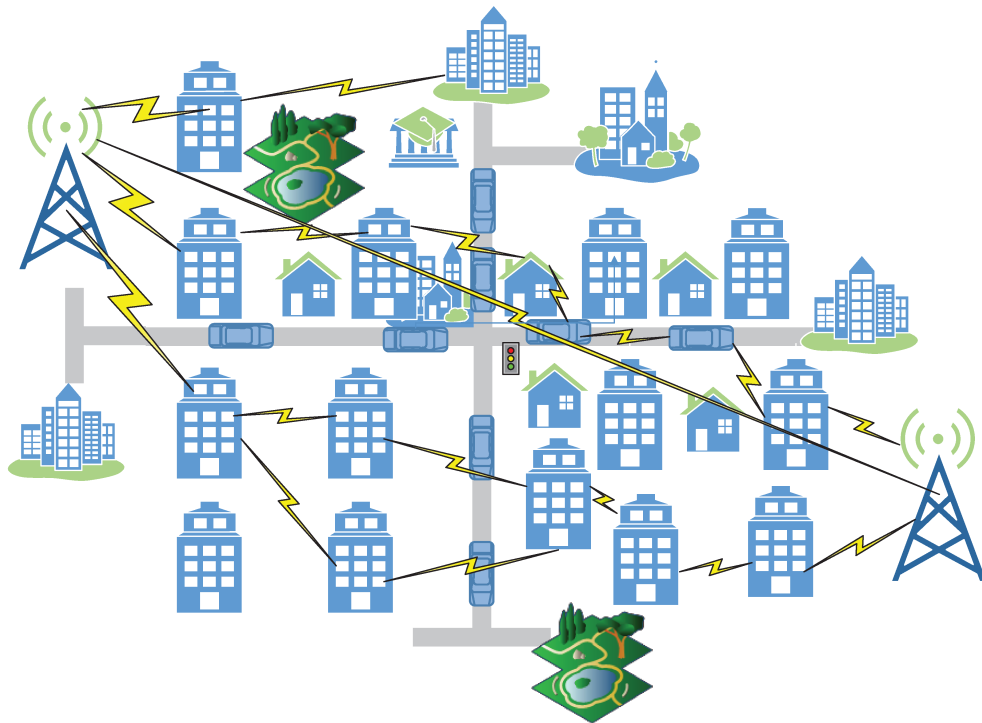


Figura 1.1: Propagação por múltiplos percursos em um ambiente urbano

1.2 Desvanecimento de Longo Prazo

Também chamado *shadowing*, *slow fading* [20] [21] é produzido principalmente por contornos do terreno (ambiente montanhoso, rural, sub-urbano, obstruções topográficas ou morfológicas) e é caracterizado pela distribuição Lognormal, com distâncias de correlação relativamente longas. Este método ajuda a estimar a área de cobertura de determinado transmissor servindo como base para o planejamento do sistema.

1.3 Desvanecimento de Curto Prazo

Chamado desvanecimento por multipercurso [21], geralmente é causado por reflexões e difrações em objetos cujas posições em relação ao móvel varia rapidamente, ou seja, casas, prédios, carros, pessoas ou objetos, encontrados em seu ambiente imediato. Ocorre em distâncias curtas, causando variações muito rápidas e profundas. Devido ao seu comportamento aleatório, a caracterização das variações de pequena escala do canal de rádio móvel lança mão de distribuições probabilísticas. Estas distribuições, em geral, partem de modelos físicos de propagação, embora algumas tenham surgido a partir de métodos empíricos.

1.4 Técnicas de Diversidade

A diversidade é uma técnica utilizada para compensar os efeitos do desvanecimento do canal, e é geralmente implementada usando duas ou mais antenas espacialmente separadas [20]. A ideia básica é a de receber várias versões independentes do sinal transmitido e aplicar algum algoritmo de processamento no receptor para obter a estatística de decisão para a decodificação, sendo normalmente utilizado para reduzir a profundidade e duração do desvanecimento experimentado. Diversas técnicas podem ser empregadas tanto na estação base quanto nos móveis [22].

A classificação dos sistemas de diversidade dependem do tipo de parâmetro de interesse. Assim, as seguintes classificações são utilizados na literatura:

- Diversidade na recepção e diversidade na transmissão.
- A diversidade espacial, diversidade de frequência, diversidade tempo e diversidade de polarização.
- Do lado da recepção: diversidade por selecção (SC), diversidade por combinação de razão máxima (MRC) e diversidade por combinação de ganho igual (EGC). Do lado da transmissão: Canal conhecido: Esquemas semelhantes à diversidade na recepção e Canal desconhecido: Técnica mais complexa como Alamouti [20]

1.4.1 Diversidade Espacial

Diversidade espacial é um dos métodos mais eficazes para combater o desvanecimento por multipercurso. Pode ser obtida por meio da instalação de multiples antenas para transmitir ou

receber, ou ambos; usando espaçamento grande o suficiente, sendo possível diminuir significativamente o desvanecimento entre os diferentes canais. O tipo de antena requerida para usar esta técnica depende da dispersão local do meio, como da frequência da portadora. [20]

1.4.2 Diversidade de Polarização

Diversidade de polarização é feita empregando-se duas antenas ortogonalmente polarizadas, e.g. V-H (*vertical/horizontal*), $\pm 45^\circ$, polarização cruzada (*cross-polarized antennas*), RHC (*right-hand circular*), LHC (*left-hand circular*), polarização circular (*circularly polarized antennas*). Dois caminhos ortogonais são formados quando ligado a um par de antena polarizada de forma semelhante dupla. Quando a receber sinais de uma antena polarizada isoladamente, um caminho de diversidade é criado por vazamento a partir da energia transmitida para a polarização ortogonal ao longo de um caminho de propagação (propagação de polarização) por dispersão, e, em seguida, recebida pelo primeiro par de antenas ortogonalmente polarizadas.

Dois caminhos ortogonais são formados quando estão ligados a um par de antenas polarizadas. Uma diferença de polarização de 90° irá resultar em um factor de atenuação de até 34dB, na intensidade do sinal. Ao emparelhar duas polarizações complementares, pode imunizar um sistema de descasamentos de polarização que poderiam causar o desvanecimento do sinal. Os sinais refletidos podem sofrer alterações de polarização dependendo do meio através do qual eles estão se propagando. [20]

1.4.3 Diversidade de Frequência

A diversidade de frequência faz uso de informações sobre mais de uma frequência de portadora. A lógica por trás dessa técnica é que as frequências são suficientemente espaçadas, por mais do que a largura de banda de coerência do canal. Se os canais são descorrelacionados, a probabilidade de desvanecimento simultânea será o produto das probabilidades de desvanecimento individuais [22].

1.4.4 Diversidade Temporal

Emprega múltiplas transmissões de informações por vez, deslocadas significativamente, em espaçamentos de tempo que excedam o tempo de coerência do canal, de modo que múltiplas repetições do sinal serão ser recebido com condições de desvanecimento independente, proporcionando deste modo a diversidade. [22], [20].

1.4.5 Proposta de Trabalho

O objetivo desta dissertação é obter a distribuição bivariável κ - μ utilizando-a para avaliar o desempenho de um esquema de dupla ramificação para combinação por seleção pura, combinação por razão máxima, combinação por ganho igual. Fórmulas exatas para (i) a função densidade de probabilidade conjunta, (ii) a função de distribuição cumulativa conjunta, e (iii), momentos conjuntos, covariância e coeficiente de correlação são derivadas, escritas em termos de séries infinitas. As estatísticas conjuntas são dadas em termos dos respectivos parâmetros (κ_1, μ_1) e (κ_2, μ_2) , com $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$ e valores arbitrários de $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 > 0$. A abordagem aqui utilizada baseia-se fortemente no trabalho de Miller [23], e também tem sido usado em outros trabalhos (por exemplo, [24])

1.4.6 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação apresenta a seguinte estrutura:

- O Capítulo 2 introduz as distribuições de desvanecimento α - μ e η - μ multivariadas.
- O Capítulo 3 apresenta a definição matemática da distribuição bivariável κ - μ . Em seguida são deduzidas a função densidade de probabilidade, função de distribuição cumulativa, covariância e coeficiente de correlação desta mesma distribuição.
- O Capítulo 4 apresenta uma análise de desempenho para dois ramos. Assim, novas expressões da probabilidade de indisponibilidade (*outage probability*) em diversos métodos de diversidade foram definidas.
- O Capítulo 5 mostra os resultados numéricos das estatísticas deduzidas nos capítulos anteriores.
- O Capítulo 6 conclui a dissertação, dando algumas sugestões para futuras pesquisas com base nas contribuições desta.

Função de Densidade de Probabilidade Conjunta η - μ bivariada

A distribuição η - μ [25] é uma distribuição de desvanecimento que apresenta a variação em pequena escala dos sinais multipercursos em cenários de comunicação de linha sem visada direta (NLoS) e inclui alguns modelos de desvanecimento amplamente utilizados, tais como distribuições Nakagami- m e Hoyt. Ela é expressa em termos de dois parâmetros físicos, μ (o inverso da variância normalizada e se relaciona com o número de multipercursos) e η (o parâmetro que indica a razão das potências entre as ondas multipercursos das componentes em fase e quadratura). Apresenta-se em dois formatos, ou seja, Formato-1, onde as potências das componentes em fase e quadratura são desiguais e Formato-2, onde os componentes fase e quadratura são correlacionados.

No Formato-1, $0 < \eta < \infty$

$$h = \frac{2 + \eta^{-1} + \eta}{4}, H = \frac{\eta^{-1} - \eta}{4} \quad (2.1)$$

No Formato-2, $-1 < \eta < 1$

$$h = \frac{1}{1 - \eta^2}, H = \frac{\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.2)$$

sendo o parâmetro μ da forma

$$\mu = \frac{E^2[R^2]}{2\sigma_{R^2}} \left[1 + \frac{H}{h} \right] \quad (2.3)$$

Onde $E(R^2)$ e σ denota-se a esperança e variância de R^2 . A envoltória $R_{\eta-\mu}$ pode ser escrita em função das componentes em fase e quadratura

$$R_{\eta-\mu}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (2.4)$$

em que x_i e y_i são processos Gaussianos mutuamente independentes com média zero, e variância $E(x_i^2) = \sigma_1^2$, $E(y_i^2) = \sigma_2^2$. A FDP η - μ para uma variável com envoltoria $R_{\eta-\mu}$, pode ser representada como [6]

$$f_{R_{\eta-\mu}}(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^{\mu}r^{2\mu}}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}\hat{r}^{2\mu+1}} \exp(-2\mu h \frac{r^2}{\hat{r}^2}) I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H \frac{r^2}{\hat{r}^2}). \quad (2.5)$$

Para encontrar a função de densidade de probabilidade conjunta η - μ bivariada, precisamos encontrar a função geradora de momentos (MGF), para isso se considera duas variables correlacionadas η - μ $\mathbf{z} = \{z_1, z_2\}$ e identicamente distribuído as quais podem ser representadas como a soma de duas variáveis aleatorias, independentes gamma com parâmetros devidamente escolhidas $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, onde $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ e $\mathbf{y} = \{y_1, y_2\}$ sujeitos à distribuição gamma com o mesmo parâmetro da forma μ e escala $\alpha_x = \Omega/[2\mu(h+H)]$, $\alpha_y = \Omega/[2\mu(h-H)]$ respectivamente [25]. Vê-se a partir de [26] que a função geradora de momentos $MGF_{z_1, z_2}(s_1, s_2) \cong E(\exp(z_1 s_1 + z_2 s_2)) = E(\exp(x_1 s_1 + x_2 s_2)) \times E(\exp(y_1 s_1 + y_2 s_2)) = MGF_{x_1, x_2}(s_1, s_2) \cdot MGF_{y_1, y_2}(s_1, s_2)$. Expressões para $MGF_{x_1, x_2}(s_1, s_2)$ e $MGF_{y_1, y_2}(s_1, s_2)$ foram obtidos de [27]

$$MGF_{x_1, x_2}(s_1, s_2) = (1 - \delta_x) \left(\frac{1 - \alpha_y(1 - \delta_x)s_2 - \delta_x}{(1 - \alpha_x(1 - \delta_x)s_1)} \right)^\mu \quad (2.6)$$

$$MGF_{y_1, y_2}(s_1, s_2) = (1 - \delta_y) \left(\frac{1 - \alpha_x(1 - \delta_y)s_2 - \delta_y}{(1 - \alpha_y(1 - \delta_y)s_1)} \right)^\mu \quad (2.7)$$

A função de densidade de probabilidade conjunta η - μ bivariada é relacionada com a MGF via a transformada inversa de laplace $f_{z_1, z_2}(z_1, z_2) = \mathcal{L}^{-1} MGF_{z_1, z_2}(s_1, s_2)$, em nosso caso $MGF_{z_1, z_2}(s_1, s_2) = MGF_{x_1, x_2}(s_1, s_2) \times MGF_{y_1, y_2}(s_1, s_2)$, Assim, na base do teorema de convolução [28], concluímos

$$f_{z_1, z_2}(z_1, z_2) = \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) \times f_{y_1, y_2}(z_1 - x_1, z_2 - x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.8)$$

sendo $f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$ o FDP da função de distribuição gamma bivariada. Uma expressão para o FDP há sido derivado [29], que se mostra a continuação

$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{(x_1 x_2)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\Gamma(\mu)(\alpha_x \alpha_y)^{\frac{\mu+1}{2}} \delta^{\frac{\mu-1}{2}} (1 - \delta)} \exp(-(c_1 x_1 + c_2 x_2)) I_{\mu-1} \left(\frac{2\sqrt{\delta x_1 x_2}}{\sqrt{\alpha_x \alpha_y (1 - \delta)}} \right) \quad (2.9)$$

onde $c_1 = [\alpha_x(1 - \delta)]^{-1}$ e $c_2 = [\alpha_y(1 - \delta)]^{-1}$.

Para avaliar a integral dupla de (2.8), usamos a formula de expansão da série de Taylor em a função $I_{\mu-1}(\cdot)$ [30], obtemos

$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{(z_1 z_2)^{2\mu-1} \exp(-(c_1 z_1 + c_2 z_2))}{[\Gamma(\mu)]^2 [\alpha_x^2 \alpha_y^2 (1 - \delta)^2]^\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\delta z_1 z_2}{\alpha_x \alpha_y (1 - \delta)^2} \right]^i \frac{\Gamma(\mu + i)}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\delta z_1 z_2}{\alpha_x \alpha_y (1 - \delta)^2} \right]^j \frac{\Gamma(\mu + j)}{[\Gamma(2\mu + i + j)]^2 j!} {}_1F_1[\mu + j; 2\mu + i + j; (c_1 - c_{12})z_1] {}_1F_1[\mu + i; 2\mu + i + j; (c_2 - c_{22})z_2] \quad (2.10)$$

sendo $c_{12} = [\alpha_x(1 - \delta)]^{-1}$ e $c_{22} = [\alpha_y(1 - \delta)]^{-1}$

Distribuição κ - μ Bivariável

Neste capítulo é deduzida a FDP κ - μ bivariável usando a abordagem de Miller, a fórmula generalizada de adição de Neumann e a função de Gegenbauer. Obtemos uma forma geral muito semelhante do Rice, que é expressa em termos dos coeficientes da matriz de covariância, determinante e em função do módulo das médias do modelo físico. De um modo geral, os coeficientes da matriz de covariância resultam em uma forma em que pode expressar em termos dos valores de κ e μ .

3.1 A Distribuição de Desvanecimento κ - μ

A distribuição κ - μ [6] é uma distribuição geral de desvanecimento, que pode ser usada para representar o desvanecimento de pequena escala em um ambiente de propagação heterogêneo, com a presença de componentes dominantes. A envoltória resultante do modelo κ - μ em termos dos suas componentes em fase e em quadratura é dada por

$$R^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + p_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i + q_i)^2 \quad (3.1)$$

sendo x_i e y_i processos Gaussianos mutuamente independentes com média $E(x_i) = E(y_i) = 0$, e variância $E(x_i^2) = E(y_i^2) = \sigma^2$, em que $E(\cdot)$ denota o operador esperança; p_i e q_i são, respectivamente, os valores médios das componentes em fase e em quadratura do cluster i e n representa o número de cluster de multipercurso. Para um sinal com envoltória R , e envoltória normalizada $P = R/\hat{r}$, em que $\hat{r} = \sqrt{E(R^2)}$, é o valor *rms* de R . A função densidade de probabilidade da envoltória normalizada da distribuição κ - μ é escrita como [31]:

$$f_P(\rho) = \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)} \rho^\mu \exp[-\mu(1+\kappa)\rho^2] \times I_{\mu-1} \left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\rho \right], \quad (3.2)$$

em que $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem ν . Conforme pode ser observado, a expressão (3.2) é dada em termos dos parâmetros κ e μ . O parâmetro $\kappa > 0$ é formalmente definido como a razão entre as potências das componentes dominantes $d^2 = \sum_{i=1}^n (p_i^2 + q_i^2)$ e espalhadas ($2n\sigma^2$), ou seja,

$$\kappa = \frac{d^2}{2n\sigma^2}. \quad (3.3)$$

Já o parâmetro $\mu > 0$ é a extensão contínua de n , e pode ser escrito como

$$\mu = \frac{E^2(R^2)}{\text{Var}(R^2)} \frac{1 + 2\kappa}{(1 + \kappa)^2} \quad (3.4)$$

sendo

$$\frac{E^2(R^2)}{\text{Var}(R^2)} = \frac{n(1 + \kappa)^2}{1 + 2\kappa} \quad (3.5)$$

onde $\text{Var}(\cdot)$ representa o operador variância.

3.2 Função de Densidade de Probabilidade Conjunta κ - μ para Duas Variáveis

Para obter a distribuição κ - μ bivariável utilizamos o critério de Miller. Seja R_1 e R_2 duas envoltórias κ - μ que satisfaçam o seguinte

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{2\mu} X_i^2, \quad (3.6)$$

$$R_2^2 = \sum_{i=1}^{2\mu} Y_i^2, \quad (3.7)$$

em que X_i e Y_i são processos gaussianos mutuamente independentes com média igual a a , σ_1 e σ_2 as variâncias e 2μ é o número de cluster multipercurso, considerado inteiro por agora, e logo estendida ao valor real ou contínuo. Seja $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}\}$ o conjunto de 2μ -dimensional vetores que satisfaçam a seguinte relação $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_{2\mu}]^T$, $\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_{2\mu}]^T$, $\mathbf{A} = [a \ a \ \dots \ a]^T$, onde $(\cdot)^T$ denotam o transposta da matriz. Em seguida, se define o vetor $\mathbf{V}_i = [X_i \ Y_i]^T$, $1 \leq i \leq 2\mu$. Suponha que apenas os componentes com índices idênticos X_i e Y_i podem ser correlacionados, portanto a matriz de covariância é dada por

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \delta\sigma_1\sigma_2 \\ \delta\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

Onde δ indica o coeficiente de correlação que satisfaz a condição $-1 \leq \delta \leq 1$. Sendo a inversa expressada como

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & \Sigma_{12}^{-1} \\ \Sigma_{21}^{-1} & \Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \delta^2} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & -\delta\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ -\delta\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} & \sigma_2^{-2} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

sendo $(\cdot)^{-1}$ a matriz inversa. Se considera o coeficiente de correlação (δ) igual para as duas variáveis aleatórias gaussianas.

Para obter a função densidade de probabilidade conjunta, usamos a abordagem de Miller [23], onde a FDP conjunta é escrita como

$$f_{X,Y}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^{2\mu} f_i(\mathbf{V}_i), \quad (3.10)$$

sendo

$$f_i(\mathbf{V}_i) = \frac{1}{2\pi (\det \boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{V}_i - \mathbf{C}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{V}_i - \mathbf{C}_i) \right]. \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{C}_{ai} = (a_i, a_i)^T$. Em seguida se aplica o parâmetro 2μ em (3.10), o qual obtemos

$$f_{X,Y}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{2\mu} (\det \boldsymbol{\Sigma})^\mu} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}_{2\mu} - \mathbf{C}_{a\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{V}_{2\mu} - \mathbf{C}_{a\mu}) \right], \quad (3.12)$$

ampliando a expressão em sua forma quadrática e trocando $\mathbf{V}_i$ by $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, temos

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{2\mu} (\det \boldsymbol{\Sigma})^\mu} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Sigma_{11}^{-1} |\mathbf{X}|^2 + \Sigma_{22}^{-1} |\mathbf{Y}|^2 + (\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1} + 2\Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{A}|^2) \right] \\ &\times \exp \left[(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \right] \exp \left[\mathbf{Y}^{-1} ((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X}) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo $|\cdot|$ o módulo de $\cdot$ [32]. A fim de obter a função de densidade conjunta da envoltória, é necessária o conjunto $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ devem estar sujeitos às restrições $|\mathbf{X}| = R_1$, $|\mathbf{Y}| = R_2$. Para isso integramos (3.13), obtendo

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{2\mu} (\det \boldsymbol{\Sigma})^\mu} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Sigma_{11}^{-1} |\mathbf{X}|^2 + \Sigma_{22}^{-1} |\mathbf{Y}|^2 + (\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1} + 2\Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{A}|^2) \right] \\ &\times \int_{|\mathbf{X}|} \exp \left[(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \right] ds_1 \int_{|\mathbf{Y}|} \exp \left[\mathbf{Y}^{-1} ((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X}) \right] ds_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

sendo ds_1 e ds_2 os elementos de superfície. A segunda integral em $|\mathbf{Y}|$ pode ser representada por [23]

$$\begin{aligned} &\int_{|\mathbf{Y}|} \exp \left[\mathbf{Y}^{-1} ((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X}) \right] ds_2 = \\ &(2\pi |\mathbf{Y}|)^\mu |((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X})|^{\mu-1} I_{\mu-1} (|\mathbf{Y}| |(\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X}|), \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de ordem ν . Aplicando a forma generalizada da adição de Neumann [33], [34] [35]

$$\begin{aligned} &|((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X})|^{\mu-1} I_{\mu-1} (|\mathbf{Y}| |((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A} - \Sigma_{12}^{-1} \mathbf{X})|) = \\ &2^{\mu-1} \Gamma(\mu-1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\mu-1+k) I_{\mu-1+k} (|\mathbf{Y}| |((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \mathbf{A})|) \\ &\times I_{\mu-1+k} (\Sigma_{12}^{-1} |\mathbf{Y}| |\mathbf{X}|) \frac{C_k^{\mu-1}(\cos \varphi)}{(|\mathbf{X}| |\mathbf{Y}|)^{\mu-1} ((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \Sigma_{12}^{-1})^{\mu-1} |\mathbf{A}|^{\mu-1}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função de Euler, $C_k^{\mu-1}(\cos \varphi)$ é a função de Gegenbauer [30] e φ o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{X}$, sendo definido como

$$C_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(2\lambda)} F \left(2\lambda+n, -n; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-t}{2} \right).$$

sendo $F(a, b; c; d)$ é a função hipergeométrica dada por

$$F\left(2\lambda + n, -n; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-t}{2}\right) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int_0^\pi (t + \sqrt{t^2 - 1} \cos(\phi))^{n2\lambda-1}(\phi) d\phi$$

Incluindo a função de Gegenbauer na integral remanescente obtemos

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{|\mathbf{Y}| \Gamma(\mu - 1)}{2(\pi)^\mu |\mathbf{X}|^{\mu-1} (\det \Sigma)^\mu ((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \Sigma_{12}^{-1})^{\mu-1} |\mathbf{A}|^{\mu-1}} \\ &\exp \left[-\frac{1}{2} (\Sigma_{11}^{-1} |\mathbf{X}|^2 + \Sigma_{22}^{-1} |\mathbf{Y}|^2 + (\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1} + 2\Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{A}|^2) \right] \\ &\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\mu - 1 + k) I_{\mu-1+k}(|\mathbf{Y}|(\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1})|\mathbf{A}|) I_{\mu-1+k}(\Sigma_{12}^{-1} |\mathbf{Y}| |\mathbf{X}|) \\ &\times \int_{|\mathbf{X}|} \exp[(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}] C_k^{\mu-1}(\cos \beta) ds_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Expressando a integral resultante em coordenadas esféricas generalizadas

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{X}|} \exp[(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}] C_k^{\mu-1}(\cos \varphi) ds_1 &= |\mathbf{X}|^{2\mu-1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \exp[|\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}| |\mathbf{X}| |\mathbf{A}| \\ &\times (\cos \varphi)] C_k^{\mu-1}(\cos \beta) (\sin \beta)^{2\mu-2} d\beta \prod_{t=2}^{2\mu-2} \int_0^\pi (\sin \phi_t)^{2\mu-1-t} d\phi_t \end{aligned} \quad (3.18)$$

e aplicando a fórmula de generalização de Gegenbauer da integral de Poisson [33], [30] para a função de Bessel modificada resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \exp[|\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}| |\mathbf{X}| |\mathbf{A}| (\cos \beta)] C_k^{\mu-1}(\cos \beta) (\sin \beta)^{2\mu-2} d\beta &= \\ \frac{2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\mu-2+k) I_{\mu-1+k}((\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{X}| |\mathbf{A}|)}{((\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{X}| |\mathbf{A}|)^{\mu-1} k! \Gamma(2\mu-2)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

usamos a identidade [23, eqn.(1.5.17)]

$$\prod_{k=2}^{2\mu-2} \int_0^\pi (\sin \phi_k)^{2\mu-1-k} d\phi_k = \frac{\Gamma^{2\mu-3}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\mu-1}{2}\right)}, \quad (3.20)$$

Portanto com as equações (3.19), (3.20) substituídos em (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{X}|} \exp[(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}] C_k^{\mu-1}(\cos \varphi) ds_1 &= |\mathbf{X}|^{2\mu-1} \frac{\Gamma^{2\mu-3}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\mu-1}{2}\right)} \\ &\frac{2^{\mu-1} (2\pi) \Gamma(\mu-1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\mu-2+k) I_{\mu-1+k}(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{X}| |\mathbf{A}|)}{(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{X}| |\mathbf{A}|^{\mu-1} k! \Gamma(2\mu-2)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.17), obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
f_{R_1, R_2}(R_1, R_2) &= \frac{2^{\mu-1} R_1 R_2 \Gamma(\mu-1)}{(\det \Sigma)^\mu ((\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1})(\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) \Sigma_{12}^{-1} |\mathbf{A}|^2)^{\mu-1}} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{2} (\Sigma_{11}^{-1} R_1^2 + \Sigma_{22}^{-1} R_2^2 + (\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1} + 2\Sigma_{12}^{-1}) |\mathbf{A}|^2) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\mu-1+k) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\
&\times I_{\mu-1+k}(R_2((\Sigma_{12}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}) |\mathbf{A}|) I_{\mu-1+k}(\Sigma_{12}^{-1} R_2 R_1) \times I_{\mu-1+k}((\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{12}^{-1}) R_1 |\mathbf{A}|).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Expressando (3.22) em função dos coeficientes da matriz de covariância inversa [36], lembrando que $\det \Sigma = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \delta^2)$ obtemos

$$\begin{aligned}
f_{R_1, R_2}(R_1, R_2) &= \frac{R_1 R_2 \Gamma(\mu-1)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \delta^2)^\mu} \left(\frac{-2(1 - \delta^2)^3 \sigma_1^3 \sigma_2^3}{|\mathbf{A}|^2 \delta (1 - \delta \sigma_2 / \sigma_1) (1 - \delta \sigma_1 / \sigma_2)} \right)^{\mu-1} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \delta^2)} \left(\frac{R_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{R_2^2}{\sigma_2^2} + \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\delta \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) |\mathbf{A}|^2 \right) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{R_2 |\mathbf{A}| \times (1 - \sigma_2 / \sigma_1)}{(1 - \delta^2) \sigma_2^2} \right) I_{\mu+k-1} \left(\frac{\delta R_2 R_1}{(1 - \delta^2) \sigma_1 \sigma_2} \right) I_{\mu+k-1} \left(\frac{R_1 |\mathbf{A}| (1 - \sigma_1 / \sigma_2)}{(1 - \delta^2) \sigma_1^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Finalmente, usamos a definição dos parâmetros de distribuição κ - μ [6]. Para isso, da equação (3.23) se normaliza a envoltória $\rho_1 = \frac{R_1}{R_1}$, $\rho_2 = \frac{R_2}{R_2}$, onde o valor rms é encontrada em [6] como se mostra a continuação:

$$\kappa_i = \frac{|\mathbf{A}|^2}{2\mu\sigma_i^2} = \frac{a^2}{\sigma_i^2} \tag{3.24}$$

$$\hat{r}_i = \sqrt{\mathbb{E}[R_i^2]} = \sigma_i \sqrt{2\mu} \sqrt{1 + \kappa_i} = a \sqrt{2\mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_i}}, \tag{3.25}$$

com $i = 1, 2$, substituindo obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= \frac{4\rho_1\rho_2\gamma(\mu-1)(\kappa_1\mu)(\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \\
&\times \left(\frac{-(1-\delta^2)^2}{\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu} + (\kappa_1\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\rho_1^2 + (\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)\rho_2^2 \right) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_2\mu)\rho_2\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) I_{\mu+k-1} \left(\frac{-2\delta\rho_1\rho_2\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right) \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_1\mu)\rho_1\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

aplicando a propriedade

$$(-1)^{\mu+\kappa-1} I_{\mu+\kappa-1}(-\cdot) = I_{\mu+\kappa-1}(\cdot) \tag{3.27}$$

temos

$$\begin{aligned}
f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= \frac{4\rho_1\rho_2\Gamma(\mu-1)\kappa_1\mu\kappa_2\mu\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \\
&\times \left(\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu} + \kappa_1\mu\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\rho_1^2 + \kappa_2\mu\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)\rho_2^2 \right) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\kappa_2\mu\rho_2\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta\rho_1\rho_2\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right) \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\kappa_1\mu\rho_1\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

A expressão (3.28) constitui uma contribuição original desta dissertação.

3.3 Função de Distribuição Cumulativa Conjunta κ - μ

Com base na definição da função de distribuição cumulativa (FDC) para duas variáveis [28]

$$F_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) = \int_0^{P_2} \int_0^{P_1} f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2. \quad (3.29)$$

integrarmos a FDP da expressão (3.28) com respeito aos valores de P_1 e P_2 , os quais variam entre $0 < P_1 < \infty$, $0 < P_2 < \infty$, obtendo

$$\begin{aligned} F_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= \int_0^{P_2} \int_0^{P_1} f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2 = \frac{4\rho_1\rho_2\Gamma(\mu-1)\kappa_1\mu\kappa_2\mu\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \\ &\times \left(\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu} + \kappa_1\mu \left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\rho_1^2 + \kappa_2\mu \left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)\rho_2^2 \right) \right] \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\ &\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\kappa_2\mu\rho_2\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta\rho_1\rho_2\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right) \\ &\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\kappa_1\mu\rho_1\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) d\rho_1 d\rho_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Expressando a função de Bessel, em termos de uma série infinita [30]:

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+n}}{2^{2k+n}k!\Gamma(k+n+1)}, \quad (3.31)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função gamma. Substituímos na expressão (3.30) obtendo

$$\begin{aligned}
F_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= \int_0^{P_2} \int_0^{P_1} \frac{4\rho_1\rho_2\Gamma(\mu-1)\kappa_1\mu\kappa_2\mu\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \\
&\times \left(\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu} + \kappa_1\mu \left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\rho_1^2 + \kappa_2\mu \left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)\rho_2^2 \right) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \sum_{w=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w!\gamma(\mu+k+w)} \right) \left(\frac{(\kappa_2\mu)\rho_2\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right)^{2w+k+\mu-1} \\
&\times \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z!\gamma(\mu+k+z)} \right) \left(\frac{\delta\rho_1\rho_2\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right)^{2z+k+\mu-1} \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l!\gamma(\mu+k+l)} \right) \left(\frac{(\kappa_1\mu)\rho_1\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right)^{2l+k+\mu-1} d\rho_1 d\rho_2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Organizando os termos dentro dos somatórios, obtém-se

$$\begin{aligned}
F_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= 4\Gamma(\mu-1)(1-\delta^2)^\mu \exp \left[-\frac{1}{1-\delta^2} (\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-1+k) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \sum_{w, l, z=0}^{\infty} \left(\frac{(\delta)^{k+2z}}{w!z!l!\gamma(\mu+k+w)\gamma(\mu+k+z)\gamma(\mu+k+l)} \right) \\
&\times \left(\frac{\left(1-\frac{\delta\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}}\right)\kappa_1\mu}{1-\delta^2} \right)^{l+\frac{k}{2}} \left(\frac{\left(1-\frac{\delta\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\kappa_2\mu}{1-\delta^2} \right)^{w+\frac{k}{2}} \\
&\times \int_0^{P_2} (\rho_2)^{2w+2k+2z+2\mu-1} \left(\frac{(\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \right)^{w+k+z+\mu} \exp \left[-\frac{1}{1-\delta^2} \left(\rho_2^2(\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right) \right) \right] d\rho_2 \\
&\times \int_0^{P_1} (\rho_1)^{2l+2k+2z+2\mu-1} \left(\frac{(\kappa_1\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)}{(1-\delta^2)} \right)^{l+k+z+\mu} \exp \left[-\frac{1}{1-\delta^2} \left(\rho_1^2(\kappa_1\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right) \right) \right] d\rho_1,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Fazendo uma mudança de variáveis $\rho_i^2 = \rho_i'$ e como a parte real de $w+z+k+\mu$, $k+l+z+\mu$ é superior a zero, as integrais podem ser expressar como [30]:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x \exp(-t) t^{\alpha-1} dt, \quad \text{Re}[\alpha] > 0, \tag{3.34}$$

Substituindo esta forma na expressão (3.33) e fazendo mudanças de variáveis nas integrais temos finalmente

$$\begin{aligned}
F_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= \Gamma(\mu - 1)(1 - \delta^2)^\mu \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} (\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu}) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1 + k) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} \sum_{w, l, z=0}^{\infty} \left(\frac{(\delta)^{k+2z}}{w! z! l! \Gamma(\mu + k + w) \Gamma(\mu + k + z) \Gamma(\mu + k + l)} \right) \\
&\times \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta \sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}}\right)^2 \kappa_1 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{l + \frac{k}{2}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta \sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^2 \kappa_2 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{w + \frac{k}{2}} \Gamma \left(w + k + z + \mu, \frac{\rho_2^2 \kappa_2 \mu \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \right) \\
&\times \Gamma \left(l + k + z + \mu, \frac{\rho_1^2 \kappa_1 \mu \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right)}{(1 - \delta^2)} \right).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

A expressão (3.35) constitui uma contribuição original desta dissertação.

3.4 Momentos Conjuntos

O momento conjunto $\kappa - \mu$ bivariável é definida como [31], [28]

$$\mathbb{E} [P_1^{n_1} P_2^{n_2}] = \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2. \tag{3.36}$$

Para encontrar o momento conjunto, passos semelhantes aos que usamos para o caso da FDC são feitos, chegando à seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [P_1^{n_1} P_2^{n_2}] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{4(\rho_1)^{n_1+1} (\rho_2)^{n_2+1} \Gamma(\mu - 1) (\kappa_1 \mu) (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \\
&\times \left(\frac{(1 - \delta^2)^2}{\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right) \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{(1 - \delta^2)} \left(\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} + (\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \rho_1^2 + (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right) \rho_2^2 \right) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu + k - 1) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} \sum_{w=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w! \Gamma(\mu + k + w)} \right) \left(\frac{(\kappa_2 \mu) \rho_2 \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{2w+k+\mu-1} \\
&\times \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z! \Gamma(\mu + k + z)} \right) \left(\frac{\delta \rho_1 \rho_2 \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}}}{(1 - \delta^2)} \right)^{2z+k+\mu-1} \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l! \Gamma(\mu + k + l)} \right) \left(\frac{(\kappa_1 \mu) \rho_1 \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{2l+k+\mu-1} d\rho_2 d\rho_1,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Trocando a ordem da adição e integração

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[P_1^{n_1} P_2^{n_2}] &= 4\Gamma(\mu - 1)(1 - \delta^2)^\mu \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} (\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu}) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1 + k) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} \sum_{w,l,z=0}^{\infty} \left(\frac{(\delta)^{k+2z}}{w!z!l!\Gamma(\mu + k + w)\Gamma(\mu + k + z)\Gamma(\mu + k + l)} \right) \\
&\times \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}}\right) \kappa_1 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{l+\frac{k}{2}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}}\right) \kappa_2 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{w+\frac{k}{2}} \\
&\times \int_0^\infty (\rho_2)^{2w+2k+2z+2\mu+n_2-1} \left(\frac{(\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{w+k+z+\mu} \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} \left(\rho_2^2 (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right) \right) \right] d\rho_2 \\
&\times \int_0^\infty (\rho_1)^{2l+2k+2z+2\mu+n_1-1} \left(\frac{(\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{l+k+z+\mu} \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} \left(\rho_1^2 (\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \right) \right] d\rho_1,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Voltamos a fazer uma troca de variáveis $\rho_i^2 = \rho_i'$ e tendo a forma da função gamma (3.34) obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[P_1^{n_1} P_2^{n_2}] &= \Gamma(\mu - 1)(1 - \delta^2)^\mu \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} (\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu}) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1 + k) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} \sum_{w,l,z=0}^{\infty} \left(\frac{(\delta)^{k+2z}}{w!z!l!\Gamma(\mu + k + w)\Gamma(\mu + k + z)\Gamma(\mu + k + l)} \right) \\
&\times \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}}\right) \kappa_1 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{l+\frac{k}{2}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}}\right) \kappa_2 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{w+\frac{k}{2}} \left(\frac{(\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{\frac{-n_1}{2}} \left(\frac{(\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{\frac{-n_2}{2}} \\
&\times \Gamma \left(w + k + z + \mu + \frac{n_2}{2} \right) \Gamma \left(l + k + z + \mu + \frac{n_1}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

A expressão (3.39) constitui uma contribuição original desta dissertação.

3.5 Coeficiente de Correlação

O coeficiente de correlação [31] é uma medida da associação entre duas variáveis, variando entre -1 e 1. Se as duas variáveis estão em relação linear ideal, o coeficiente de correlação é 1 ou -1, o sinal depende se as variáveis são positivamente ou negativamente relacionados. O coeficiente de correlação é 0 se não há uma relação linear entre as variáveis. Dois tipos diferentes de coeficiente de correlação são os mais utilizados. Um é chamada o momento do produto de coeficiente de correlação de Pearson (o mais amplamente utilizado e utilizou-se este) [37] e o outro é chamado o coeficiente de correlação de Spearman, o qual baseia-se na relação entre as variáveis de classificação [38]. Dadas as envoltórias $\rho_1^{n_1}, \rho_2^{n_2}$ o coeficiente de correlação é definido

como

$$\delta \langle \rho_1^{n_1}, \rho_2^{n_2} \rangle = \frac{E[\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2}] - E[\rho_1^{n_1}] E[\rho_2^{n_2}]}{\sqrt{\sigma_{\rho_1^{n_1}} \sigma_{\rho_2^{n_2}}}}, \quad (3.40)$$

onde a momento conjunto pode ser calculado diretamente a partir de (3.39). E para encontrar a média e o desvio-padrão, partimos da relação mostrada em [6]

$$E[\rho_i^n] = \frac{\gamma(\mu + n/2) \exp(-\kappa_i \mu)}{\gamma(\mu) [(1 + \kappa_i) \mu]^{n/2}} {}_1F_1(\mu + n/2; \mu; \kappa_i \mu) \cong A_i \quad (3.41)$$

$$\sigma_{\rho_i^n}^2 = E[\rho_i^{2n}] - (E[\rho_i^n])^2 \cong B_i \quad (3.42)$$

onde obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \delta \langle \rho_1^{n_1}, \rho_2^{n_2} \rangle &= \frac{\Gamma(\mu - 1)(1 - \delta^2)^\mu}{\sqrt{B_1} \sqrt{B_2}} \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} (\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu}) \right] \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1 + k) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} \sum_{w,l,z=0}^{\infty} \left(\frac{(\delta)^{k+2z}}{w! z! l! \Gamma(\mu + k + w) \Gamma(\mu + k + z) \Gamma(\mu + k + l)} \right) \\ &\times \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta \sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}}\right) \kappa_1 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{l + \frac{k}{2}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta \sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}}\right) \kappa_2 \mu}{1 - \delta^2} \right)^{w + \frac{k}{2}} \left(\frac{(\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{\frac{-n_1}{2}} \\ &\times \left(\frac{(\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \right)^{\frac{-n_2}{2}} \Gamma \left(w + k + z + \mu + \frac{n_2}{2} \right) \Gamma \left(l + k + z + \mu + \frac{n_1}{2} \right) - \frac{A_1 A_2}{\sqrt{B_1} \sqrt{B_2}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

A expressão (3.43) constitui uma contribuição original desta dissertação.

Probabilidade de Outage

A Probabilidade de outage é a métrica primária para o análise de esquemas de diversidade em sistemas de comunicações sem fio [31]. Esta é definida como a probabilidade de que o sinal recebido seja inferior a um limiar estabelecido, γ , ou seja,

$$P_{out} = P(\gamma_1 \leq \gamma, \gamma_2 \leq \gamma). \quad (4.1)$$

Como o objetivo de encontrar a expressão para a probabilidade de outage é necessário expressar a FDP conjunta da equação (3.28) como uma função do sinal a ruído (SNR). Para isso definimos γ_i como $\gamma_i = R_i^2 E_b / N_0$ em cada ramo i , sendo E_b / N_0 a razão da energia por bit e o espectro de potência de ruído. Com $\gamma_i = \rho_i^2$ para $i = \{1, 2\}$ e $\bar{\gamma}_i = E_b / (N_0 \times E[R_i^2])$ sendo a razão média do sinal a ruído, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$f(\gamma_1, \gamma_2) = |J| f_{P1, P2}(\rho_1 = \sqrt{\gamma_1}, \rho_2 = \sqrt{\gamma_2}), \quad (4.2)$$

sendo $|J|$ o Jacobiano, obtendo o seguinte

$$\begin{aligned} f(\gamma_1, \gamma_2) = & \frac{\Gamma(\mu - 1) (\kappa_1 \mu) (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \left(\frac{(1 - \delta^2)^2}{\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right) \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{(1 - \delta^2)} \left(\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} + (\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \gamma_1 + (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right) \gamma_2 \right) \right] \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu + k - 1) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_2 \mu) \sqrt{\gamma_2} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1 - \delta^2)} \right) \\ & \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta \sqrt{\gamma_1} \sqrt{\gamma_2} \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}}}{(1 - \delta^2)} \right) I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_1 \mu) \sqrt{\gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1 - \delta^2)} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por conveniência, considera-se o mesmo parâmetro de desvanecimento (κ, μ) para os sinais. Mas a formulação é geral e pode ser utilizada para parâmetros diferentes.

4.1 Diversidade na Recepção

A diversidade de recepção [31] é uma técnica comumente usada e amplamente estudada desde a década de 50, se objetivo é fim de mitigar os efeitos causados por desvanecimento de multipercurso melhorando a SNR no receptor. Na diversidade espacial usam-se múltiplas antenas separadas uma certa distância. Cada uma das antenas recebe uma réplica do sinal transmitido. Se o espaçamento entre as antenas de recepção é suficiente, o desvanecimento sofrido por cada canal é independente, sendo muito provável que ambos sinais recebidos não experimente um desvanecimento simultaneamente. Assim, o sucesso do esquema de diversidade depende do grau de correlação entre os diferentes ramos.

Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para combinar os sinais das antenas no receptor e obter uma qualidade de sinal recebido.

4.2 Combinação por Seleção Pura (SC)

Nesta análise, os sinais recebidos são monitorados continuamente para que o sinal com uma maior relação sinal-ruído possa ser selecionado (o melhor sinal) para que depois seja decodificada.

$$\gamma = \max \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M \}. \quad (4.4)$$

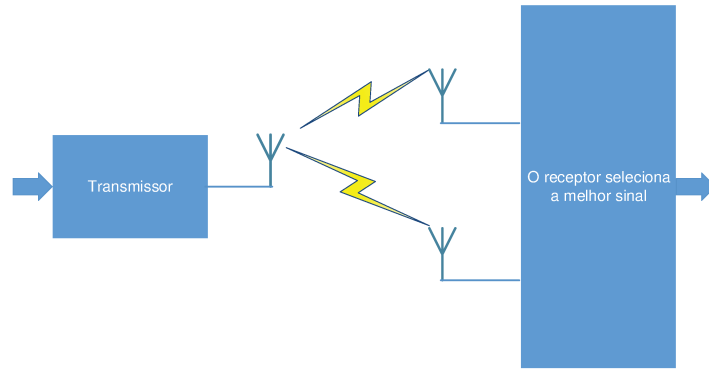


Figura 4.1: Combinação por Seleção Pura

Desde que SC processa apenas um único ramo, este tem uma complexidade muito menor em comparação aos outros métodos (MRC e EGC). No entanto SC não pode explorar a diversidade total oferecido pelo canal.

Seja o SNR normalizado em cada ramo da forma: $\gamma_i = \rho_i^2$ para $i = 1, 2$. Integrando a

expressão (4.3) com respeito à SNR normalizada. Assim

$$\begin{aligned}
F_{SC}(\gamma) &= \Gamma(\mu - 1) \left(\frac{-(1 - \delta^2)^2}{\delta(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}})(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}})\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}} \right)^\mu \exp \left[-\frac{1}{1 - \delta^2} (\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1 + k) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} \sum_{w,l,z=0}^{\infty} \left(\frac{(-\delta)^{\mu+k+2z}}{w!z!l!\Gamma(\mu + k + w)\Gamma(\mu + k + z)\Gamma(\mu + k + l)} \right) \\
&\times \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{\kappa_1}}\right)\sqrt{\kappa_1\mu}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right)^{2l+k+\mu} \left(\frac{\left(1 - \frac{\delta\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\sqrt{\kappa_2\mu}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right)^{2w+k+\mu} \\
&\times \Gamma \left(w + k + z + \mu, \frac{\gamma\kappa_2\mu \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \right) \Gamma \left(l + k + z + \mu, \frac{\gamma\kappa_1\mu \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right)}{(1 - \delta^2)} \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

que é a probabilidade de outage SC para 2 ramos.

4.3 Combinação por Razão Máxima (MRC)

MRC é conhecido como o combinador de diversidade ótimo, no sentido de maximizar a SNR na ausência de outras fontes de interferência. No MRC, os sinais recebidos de cada antena são co-fasados e otimamente ponderados para obter a saída do combinador. Demonstra-se que a SNR na saída do combinador é igual à soma das SNRs de todos os ramos. No entanto, o MRC requer uma informação completa do estado do canal (ambos os ganhos dos canais, em amplitude e fase), de todos os ramos de diversidade para executar combinação, e portanto, é conhecido por ser o mais complexo dos combinadores de diversidade. A SNR na saída do MRC é dada por [39], [31], [40]

$$\gamma_{MRC} = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \tag{4.6}$$

com $\gamma_i = \rho_i^2$, onde ρ_i^2 é a envoltória normalizada. Substituindo em (4.6) obtemos: $\gamma_{MRC} = \rho_1^2 + \rho_2^2 = \gamma_1 + \gamma_2$ da relação mostrada em (4.6), na equação (4.3) obtemos a seguinte forma

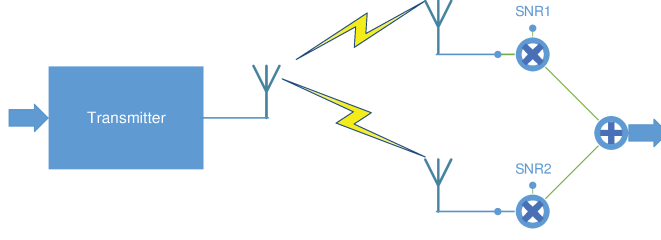


Figura 4.2: Maximal Ratio Combining

mostrada

$$\begin{aligned}
 F_{MRC}(\gamma_{MRC} - \gamma_1, \gamma_1) &= \frac{\Gamma(\mu - 1) (\kappa_1 \mu) (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1 - \delta^2)} \\
 &\times \left(\frac{(1 - \delta^2)^2}{\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right) \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{(1 - \delta^2)} \left(\kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} + (\kappa_1 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \gamma_1 + (\kappa_2 \mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right) (\gamma_{MRC} - \gamma_1) \right) \right] \\
 &\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu + k - 1) \binom{2\mu + k - 3}{2\mu - 3} I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_2 \mu) \sqrt{\gamma_{MRC} - \gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1 - \delta^2)} \right) \\
 &\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta \sqrt{\gamma_1} \sqrt{\gamma_{MRC} - \gamma_1} \sqrt{\kappa_1 \mu} \sqrt{\kappa_2 \mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}}}{(1 - \delta^2)} \right) \\
 &\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_1 \mu) \sqrt{\gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1 - \delta^2)} \right).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

De acordo com a definição para encontrar a probabilidade de outage (4.1) usamos a expressão (4.7). Obtemos a probabilidade de outage MRC para dois ramos que é mostrada na equação

seguinte

$$\begin{aligned}
F_{MRC}(\gamma) &= \int_0^\gamma \int_0^{\gamma_{MRC}} \frac{\Gamma(\mu-1) (\kappa_1\mu) (\kappa_2\mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \\
&\times \left(\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta \sqrt{\kappa_1\mu} \sqrt{\kappa_2\mu} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right) \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta \sqrt{\kappa_1\mu} \sqrt{\kappa_2\mu} + (\kappa_1\mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_1}\right) \gamma_1 + (\kappa_2\mu) \left(1 + \frac{1}{\kappa_2}\right) (\gamma_{MRC} - \gamma_1) \right) \right] \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_2\mu) \sqrt{\gamma_{MRC} - \gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta \sqrt{\gamma_1} \sqrt{\gamma_{MRC} - \gamma_1} \sqrt{\kappa_1\mu} \sqrt{\kappa_2\mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right) \\
&\times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_1\mu) \sqrt{\gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa_1}} \left(1 - \delta \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) d\gamma_1 d\gamma
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Devido à complexidade de cálculo para a probabilidade de outage MRC, fazemos uso de software para a integração numérica.

4.4 Combinação por Ganho Igual

Neste combinador, os sinais recebidos dos ramos são apenas cofasados, igualmente ponderados e somados para obter o combinador de saída que mostram na equação [31], [39]

$$\gamma = \frac{(\sum_{i=1}^2 \sqrt{\gamma_i})^2}{2}. \tag{4.9}$$

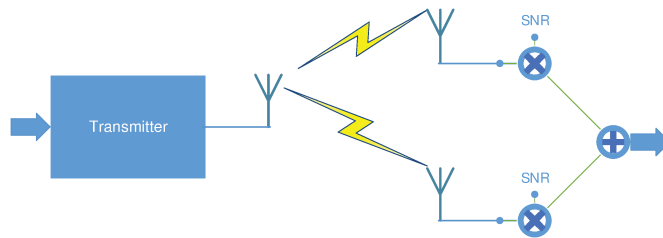


Figura 4.3: Equal Gain Combining

Este é um esquema sub-ótimo em relação ao MRC. Devido a sua baixa complexidade, só se necessita do conhecimento da fase do canal para o combinador. Na prática, o EGC é muitas

vezes limitado a modulações coerentes com símbolos de energia iguais. Com base nas equações (4.9) e (4.3) obtém-se

$$\begin{aligned}
F_{EGC}(\gamma, \gamma_1) = & \frac{\Gamma(\mu-1)(\kappa_1\mu)(\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \left(\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
& \times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu} + (\kappa_1\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\gamma_1 \right. \right. \\
& \left. \left. + (\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)(\sqrt{\gamma_{EGC}} - \sqrt{\gamma_1})^2 \right) \right] \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\
& \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_2\mu)(\sqrt{\gamma_{EGC}} - \sqrt{\gamma_1})\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) \\
& \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta\sqrt{\gamma_1}(\sqrt{\gamma_{EGC}} - \sqrt{\gamma_1})\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right) \\
& \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_1\mu)\sqrt{\gamma_1}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Aplicando a definição sobre probabilidade de outage (4.1), encontramos a probabilidade de outage EGC para dois ramos

$$\begin{aligned}
F_{EGC}(\gamma) = & \int_0^\gamma \int_0^{2\gamma_{EGC}} \frac{\Gamma(\mu-1)(\kappa_1\mu)(\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)}{(1-\delta^2)} \\
& \times \left(\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
& \times \exp \left[-\frac{1}{(1-\delta^2)} \left(\kappa_1\mu + \kappa_2\mu - 2\delta\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu} + (\kappa_1\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_1}\right)\gamma_1 \right. \right. \\
& \left. \left. + (\kappa_2\mu)\left(1+\frac{1}{\kappa_2}\right)(\sqrt{\gamma_{EGC}} - \sqrt{\gamma_1})^2 \right) \right] \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k-1) \binom{2\mu+k-3}{2\mu-3} \\
& \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_2\mu)(\sqrt{\gamma_{EGC}} - \sqrt{\gamma_1})\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) \\
& \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2\delta\sqrt{\gamma_1}(\sqrt{\gamma_{EGC}} - \sqrt{\gamma_1})\sqrt{\kappa_1\mu}\sqrt{\kappa_2\mu}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_2}}}{(1-\delta^2)} \right) \\
& \times I_{\mu+k-1} \left(\frac{2(\kappa_1\mu)\sqrt{\gamma_1}\sqrt{1+\frac{1}{\kappa_1}}\left(1-\delta\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)}{(1-\delta^2)} \right) d\gamma_1 d\gamma_{EGC}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Resultados

A continuação se mostram os resultados das expressões obtidas sobre a distribuição κ - μ bivariada .

Da FDP (3.28), para qualquer valor de μ (seja inteiro ou não) a expressão (3.28) atende aos requisitos de uma função de densidade de probabilidade, por exemplo, a integral da expressão resulta em 1. As seguintes curvas foram obtidas usando o programa Mathematica, para os valores: μ impar Fig.5.1, par Fig.5.2 e não inteiro Fig.5.3 com $\delta = 0.5$, $\kappa_1 = 12$ e $\kappa_2 = 9$.

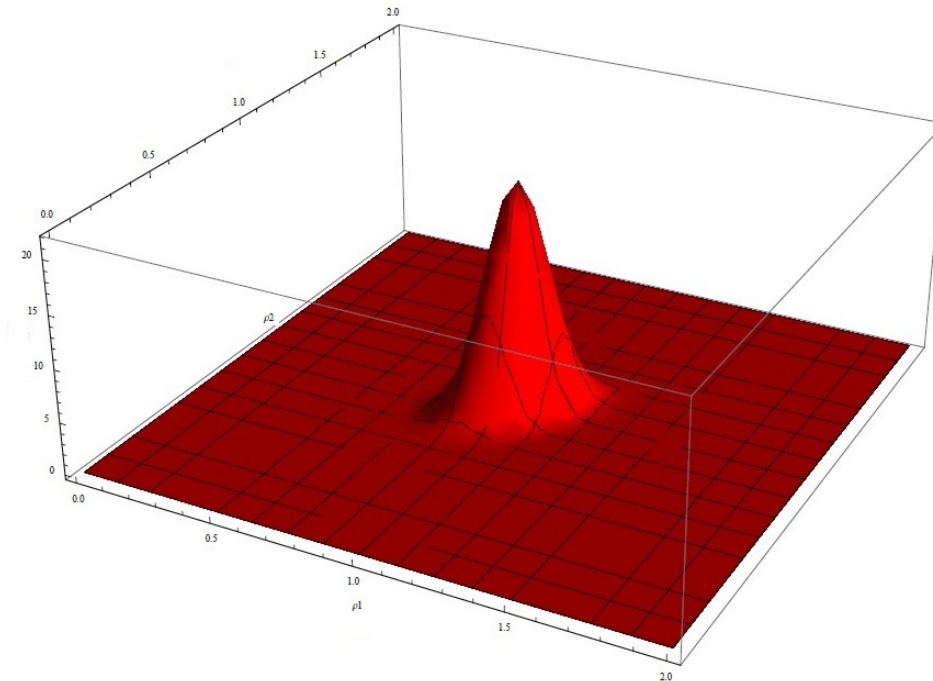


Figura 5.1: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=5$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$

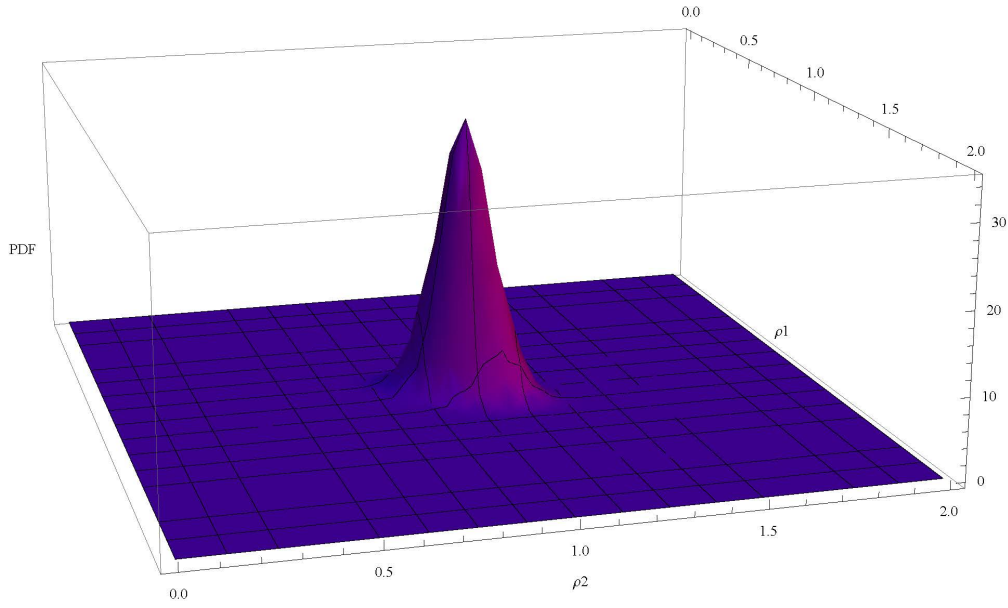


Figura 5.2: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=8$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$

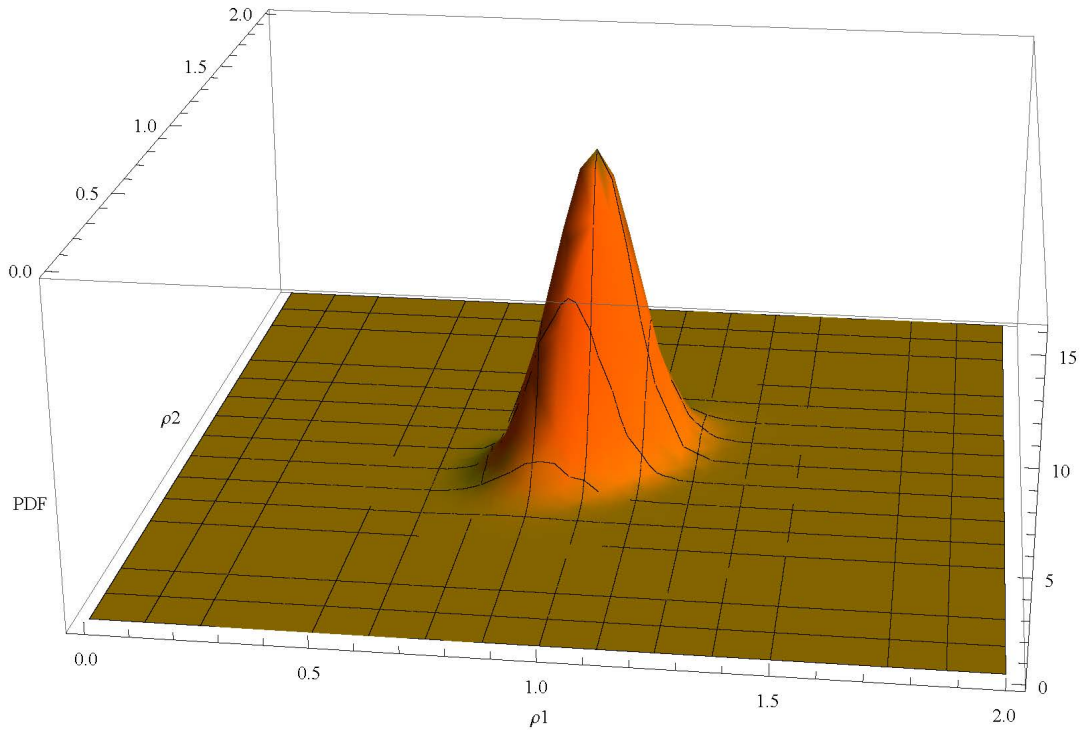


Figura 5.3: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=3.7$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$

Para exibir a curva da função de densidade de probabilidade κ - μ para uma variável, começamos dos gráficos da FDP bivariada mantendo contante o valor da envoltoria (seja ρ_1 ou ρ_2) dando como resultado a Fig.5.4

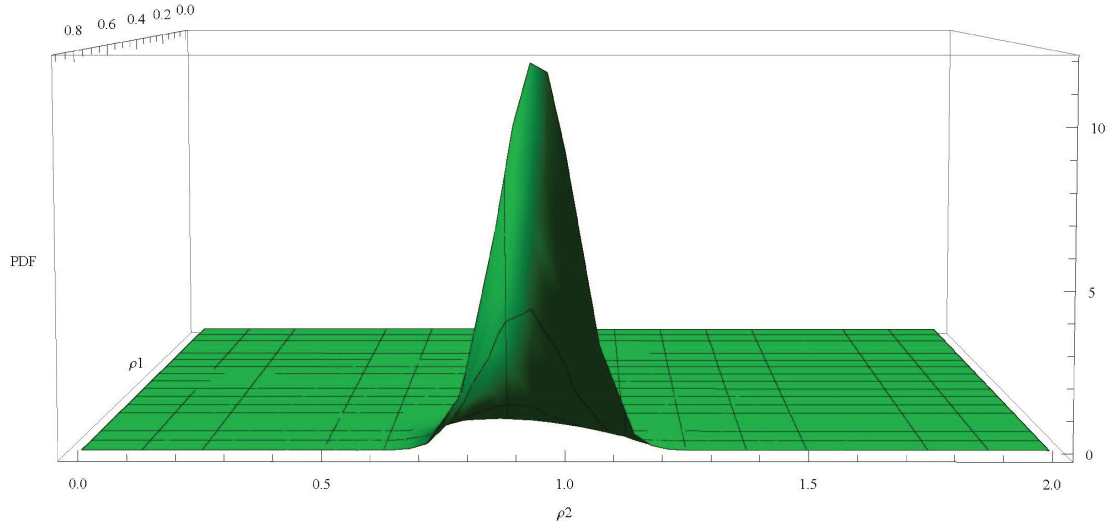


Figura 5.4: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada para $\mu=5.7$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=12$, $\kappa_2=9$

Variando a FDP para diferentes valores de μ , mantendo fixo o valor de δ , κ_1 e κ_2 (Fig.5.5, Fig.5.6, Fig.5.7) observa-se que aumentando o valor de μ (quanto maior for o número de clusters) o sinal se torna mais determinístico. Analisando para valores fixos de μ e variando κ_1 ou κ_2 (Fig.5.8, Fig.5.9 e Fig.5.10), se incrementa o valor de κ , aumenta-se a intensidade da componente dominante do sinal.

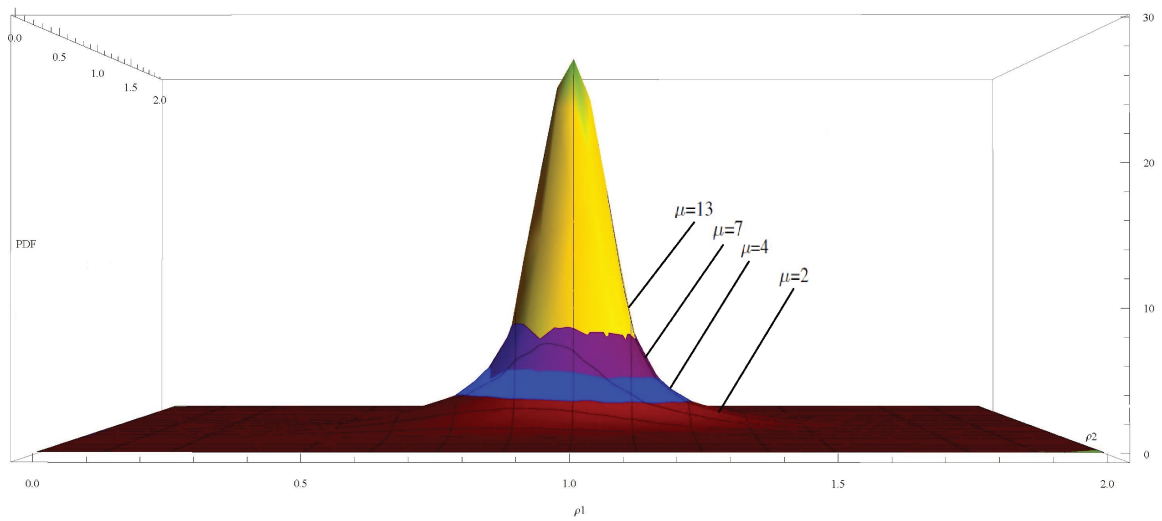


Figura 5.5: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de μ ($\mu=2 \rightarrow$ Vermelho, $\mu=4 \rightarrow$ Azul, $\mu=7 \rightarrow$ Roxo, $\mu=13 \rightarrow$ Amarelo), para um valor fixo de $\delta=0.3$, $\kappa_1=4$, $\kappa_2=7$

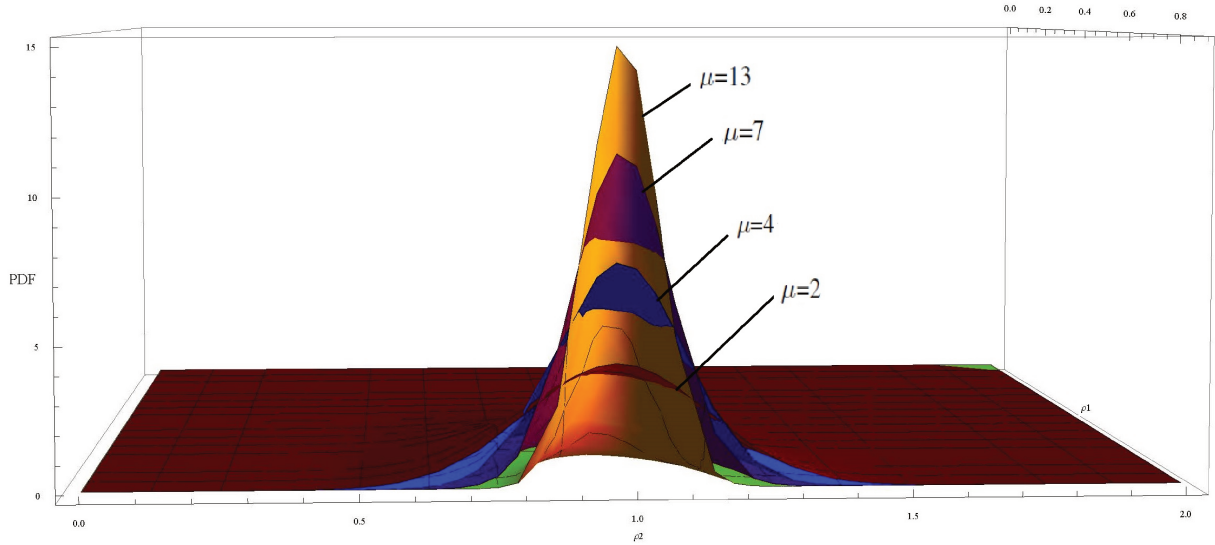


Figura 5.6: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de μ ($\mu=2 \rightarrow$ Vermelho, $\mu=4 \rightarrow$ Azul, $\mu=7 \rightarrow$ Roxo, $\mu=13 \rightarrow$ Amarelo), para um valor fixo de $\delta=0.3, \kappa_1=4, \kappa_2=7$

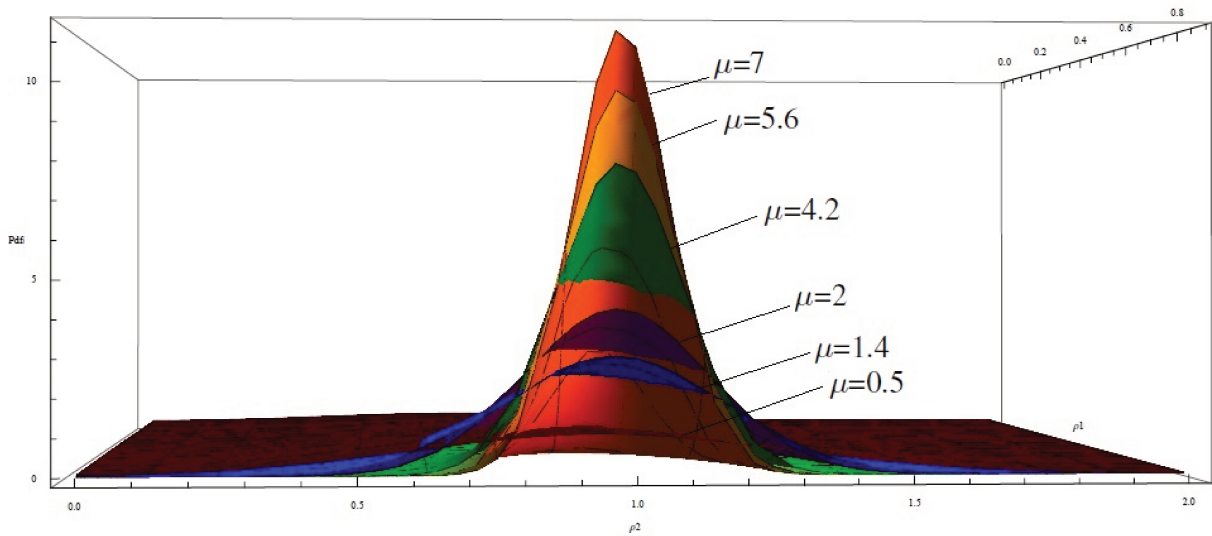


Figura 5.7: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de μ ($\mu=0.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu=1.4 \rightarrow$ Azul, $\mu=2 \rightarrow$ Roxo, $\mu=4.2 \rightarrow$ Verde, $\mu=5.6 \rightarrow$ Amarelo, $\mu=7 \rightarrow$ Laranja), para um valor fixo de $\delta=0.3, \kappa_1=4, \kappa_2=7$

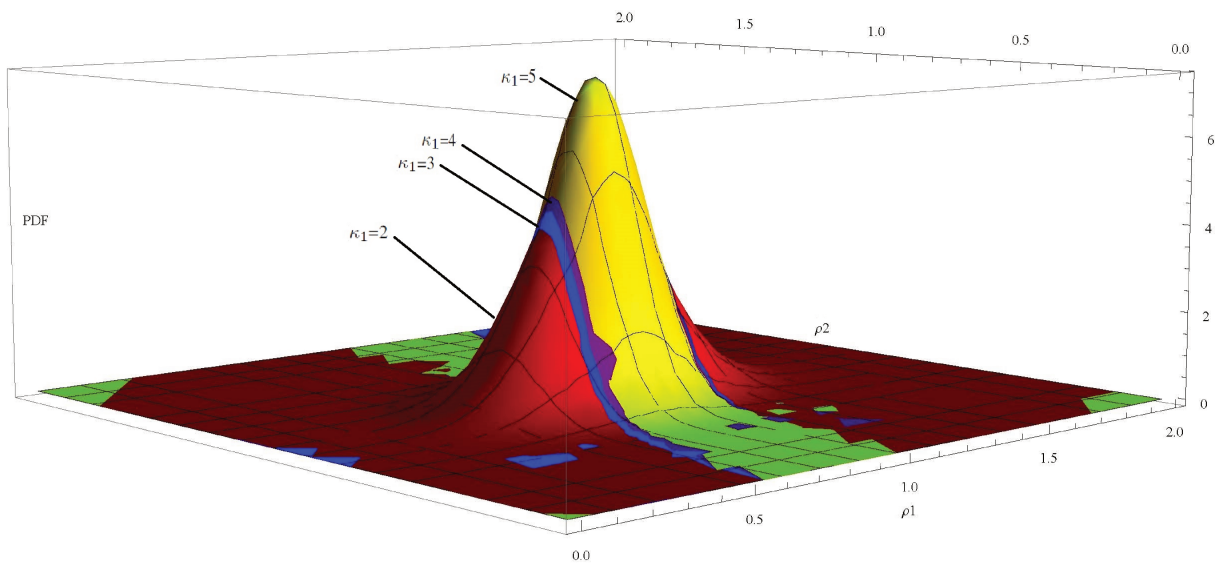


Figura 5.8: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de κ ($\kappa_1=2 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1=3 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1=4 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1=5 \rightarrow$ Amarelo), para um valor fixo de $\delta=0.3, \mu=3, \kappa_2=7$

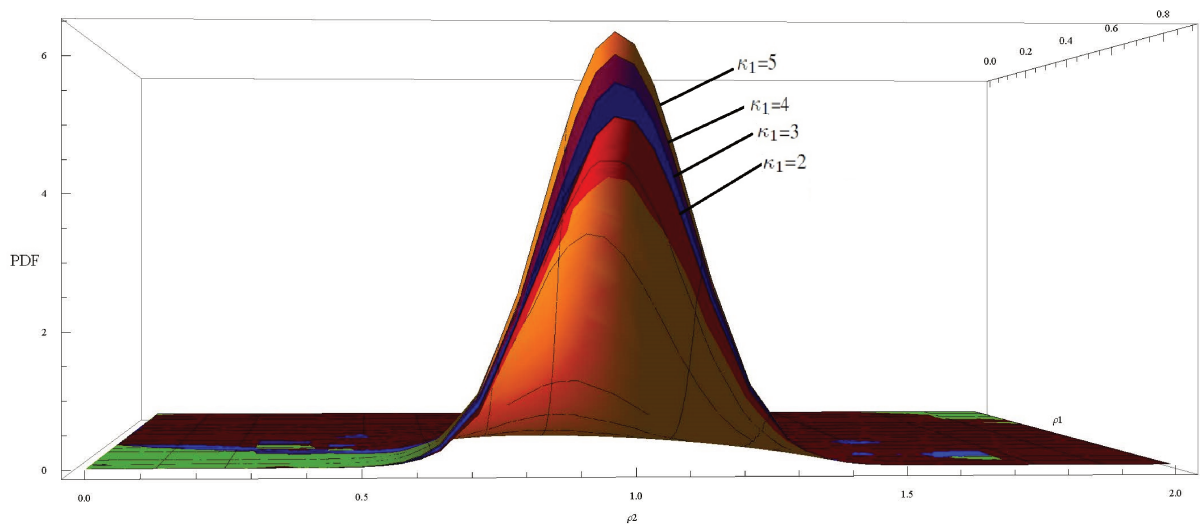


Figura 5.9: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de κ ($\kappa_1=2 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1=3 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1=4 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1=5 \rightarrow$ Amarelo), para um valor fixo de $\delta=0.3, \mu=3, \kappa_2=7$

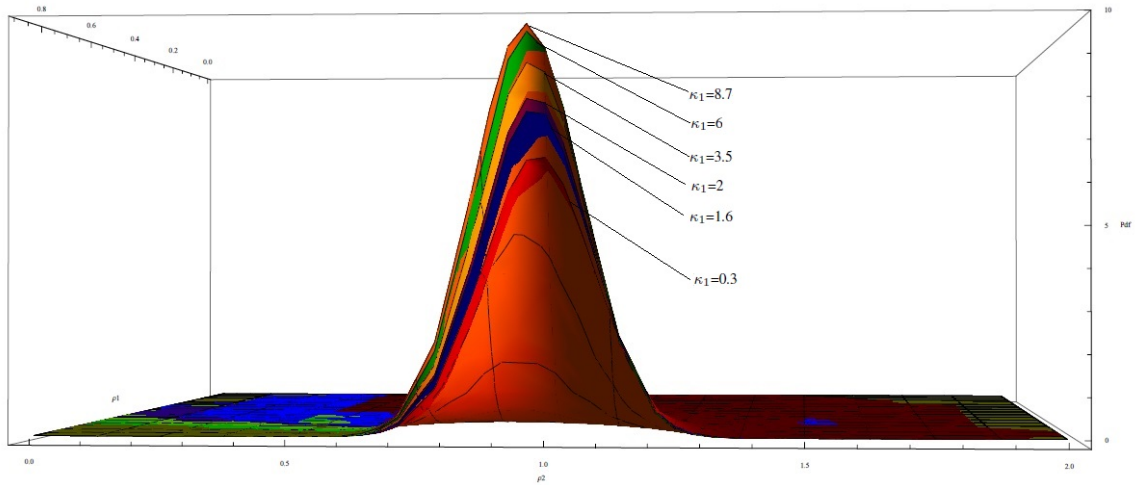


Figura 5.10: Função de densidade de probabilidade conjunta κ - μ bivariada variando o valor de κ ($\kappa_1=0.3 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1=1.6 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1=2 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1=3.5 \rightarrow$ Amarelo, $\kappa_1=6 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1=8.7 \rightarrow$ Laranja), para um valor fixo de $\delta=0.3, \mu=3, \kappa_2=7$

A Fig.5.11 mostra uma comparação da probabilidade de outage com o método de combinação por seleção Pura (4.5), para o caso em que $\delta = 0$ e o caso onde as estatísticas são independentes [1]. Se observa uma coincidência nos gráficos, mostrando que a dedução foi realizada com sucesso.

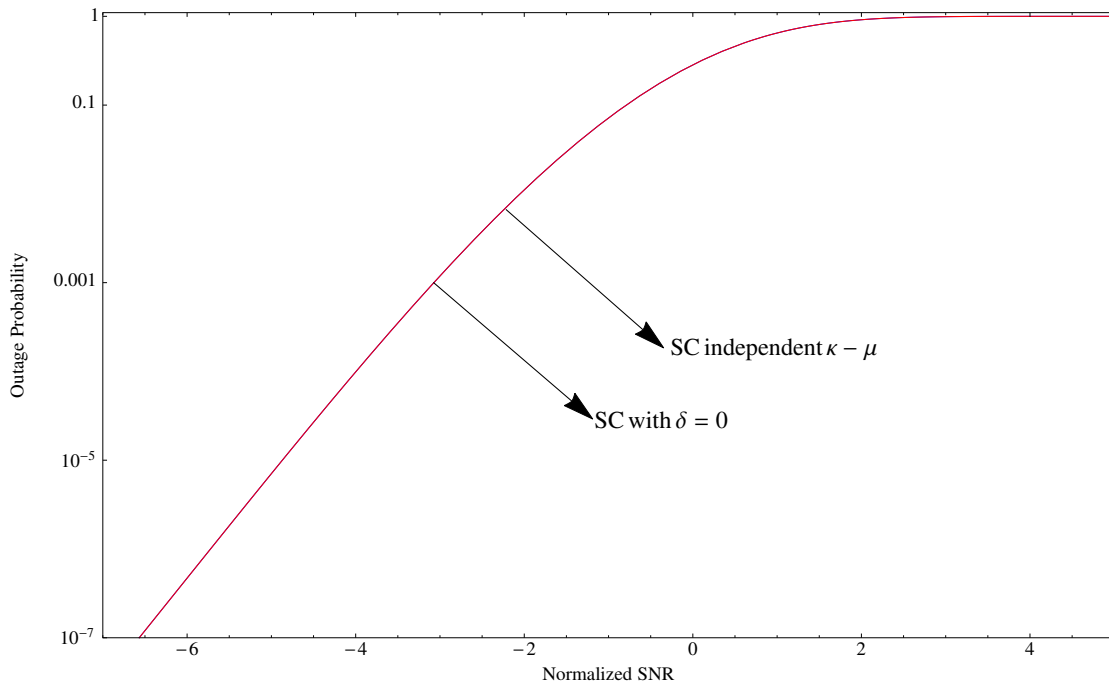


Figura 5.11: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura ($\mu=0.3 \rightarrow$ Roxo) e de acordo com a expressão do paper [1] ($\mu=0.3 \rightarrow$ Vermelho) para valores fixo de $\delta=0, \kappa_1=5, \kappa_2=7$

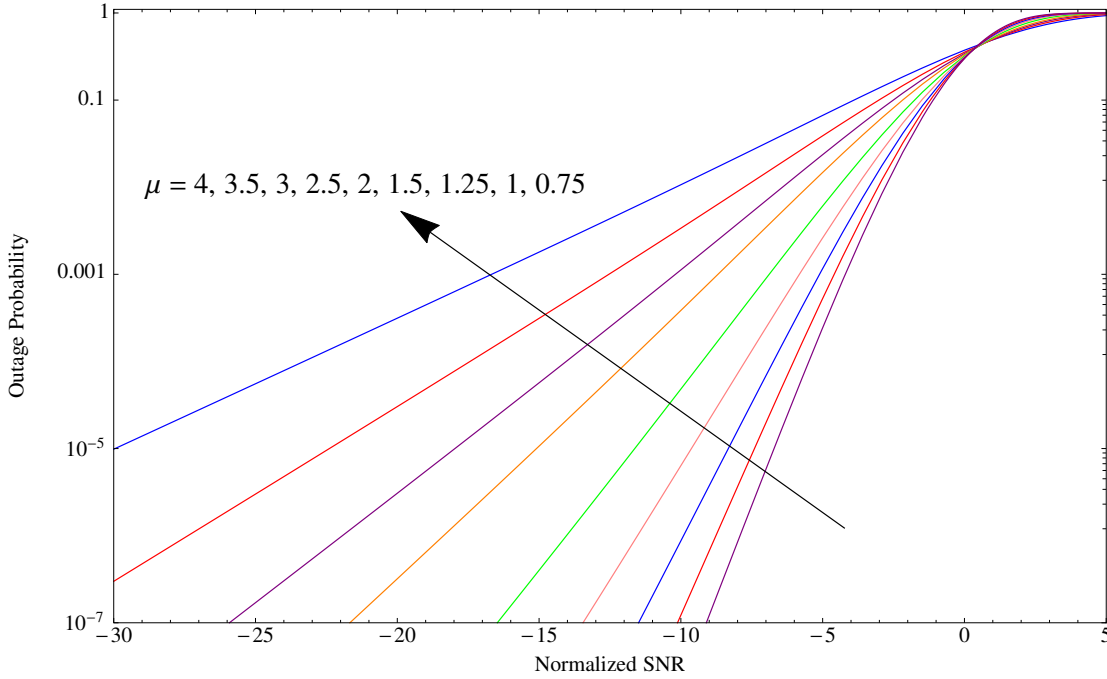


Figura 5.12: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \kappa_1=1, \kappa_2=2$

As Fig.5.12 e Fig.5.13 mostram as probabilidades de outage usando o método combinação por Seleção Pura (SC), variando o valor de μ e κ (inteiros ou não). Ao aumentar o número de clusters (maior μ) para um mesmo SNR, a probabilidade de outage diminui, como esperado.

Para o caso quando se aumenta o valor de κ Fig.5.14, Fig.5.15 (mais energia no componente dominante), a probabilidade de outage também diminui.

Na Fig.5.16 variamos o coeficiente de correlação sendo κ e μ constantes. Observa-se que quanto maior a correlação, maior a probabilidade de outage.

As Fig.5.17, Fig.5.18, Fig.5.19 e Fig.5.20, mostram a probabilidade de outage para o caso MRC. O comportamento das cruvas com relação a μ e κ , é o mesmo que o caso de SC. Por outro lado, nota-se claramente que MRC desempenha melhor que SC.

As Fig.5.21, Fig.5.22, Fig.5.23 e Fig.5.24, mostram o desempenho do EGC. Os mesmos comentários relativamente aos parâmetros κ e μ se aplicam. Cabe notar que o EGC desempenha melhor que SC mas pior que MRC os quais podem ser vistos nos gráficos.

A Fig.5.25 mostra um gráfico comparativo usando as três técnicas de diversidade. Pode-se ver que uma boa opção para dois ramo é utilizar a técnica de MRC, embora muito depende da concepção do sistema de comunicação. As melhores opções seriam MRC e EGC.

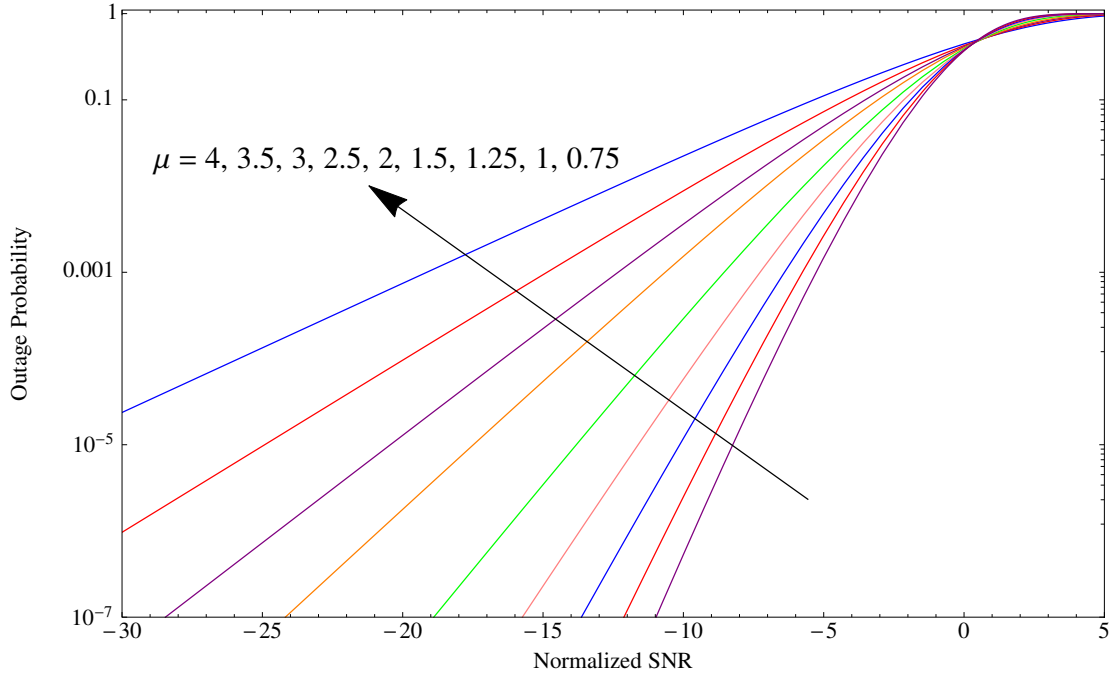


Figura 5.13: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \kappa_1=1, \kappa_2=2$

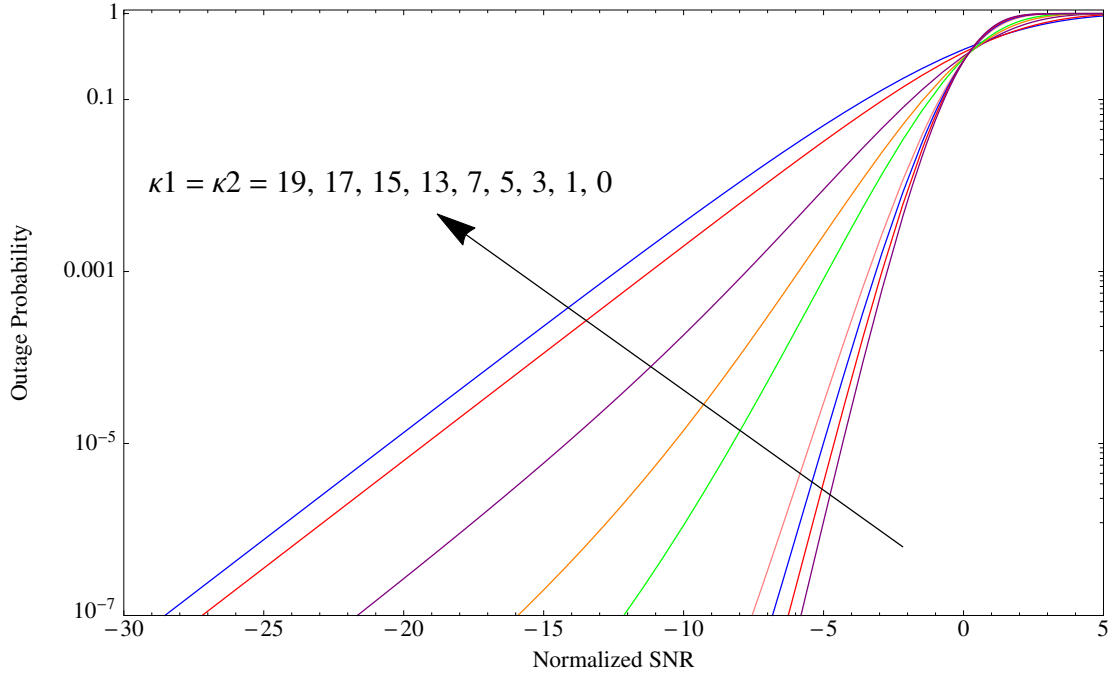


Figura 5.14: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \mu=1.25$

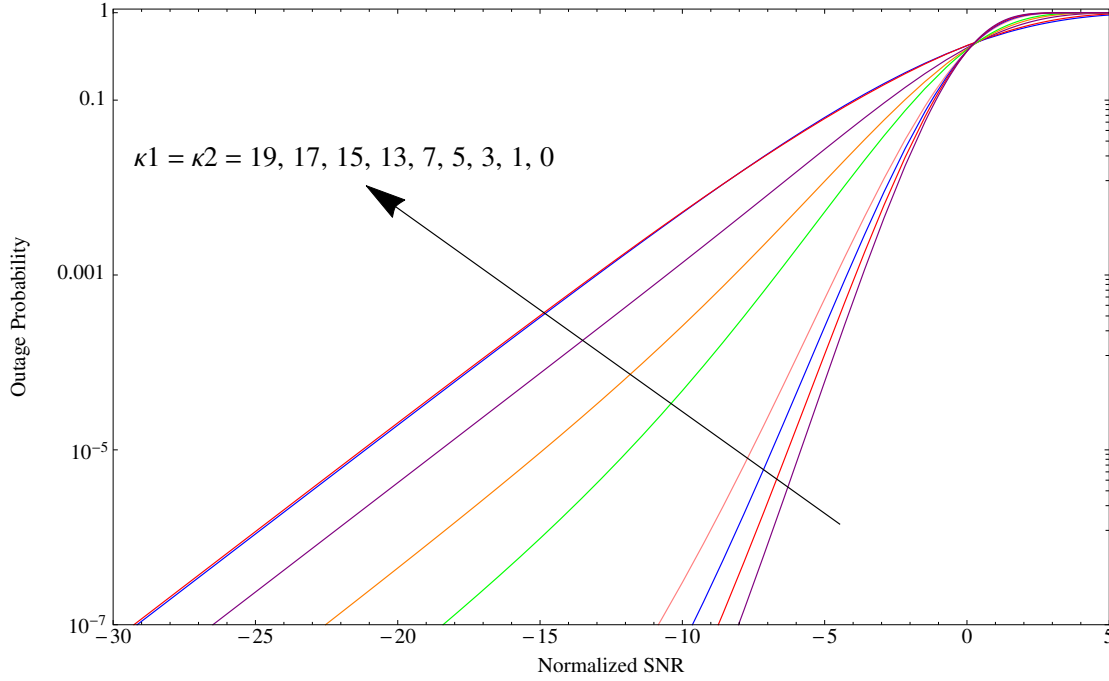


Figura 5.15: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \mu=1.25$

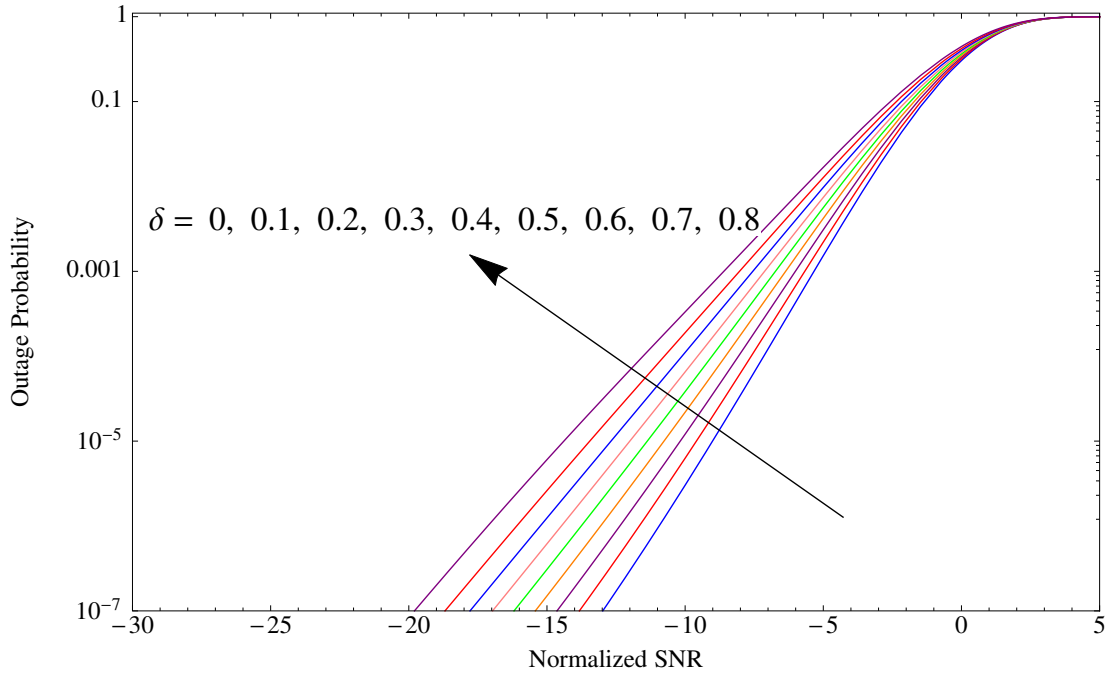


Figura 5.16: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método de combinação por Seleção Pura variando o valor de δ ($\delta = 0 \rightarrow$ Azul, $\delta = 0.1 \rightarrow$ Vermelho, $\delta = 0.2 \rightarrow$ Roxo, $\delta = 0.3 \rightarrow$ Laranja, $\delta = 0.4 \rightarrow$ Verde, $\delta = 0.5 \rightarrow$ Rosa, $\delta = 0.6 \rightarrow$ Azul, $\delta = 0.7 \rightarrow$ Vermelho, $\delta = 0.8 \rightarrow$ Roxo), para um valor fixo de $\mu=2, \kappa_1=1, \kappa_2=3$

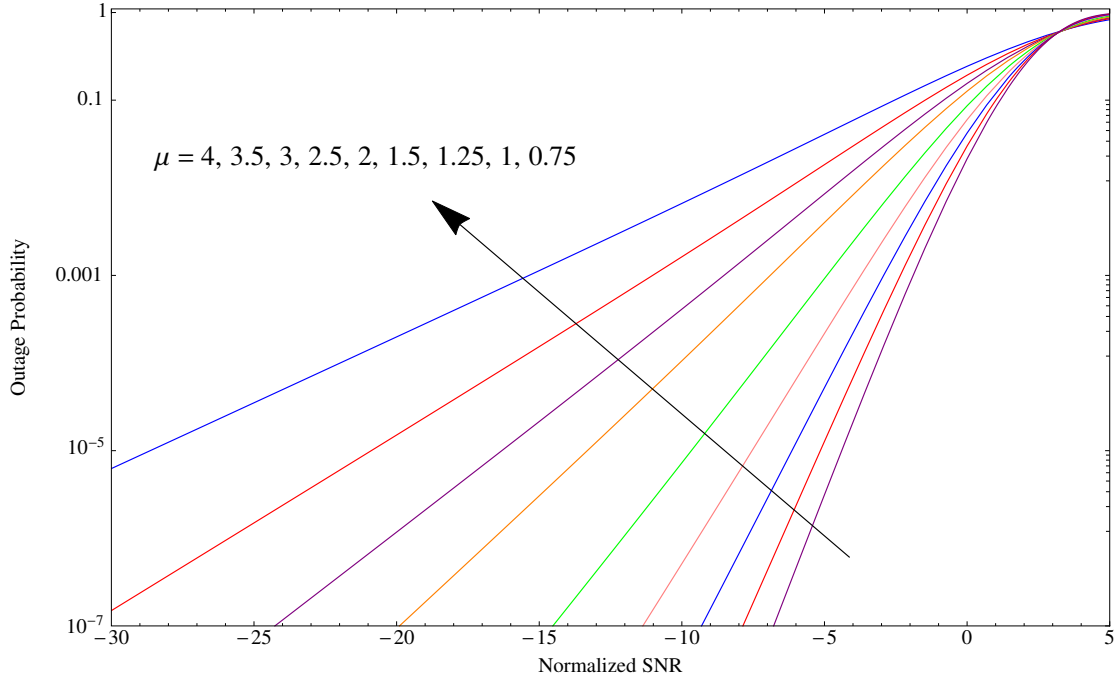


Figura 5.17: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \kappa_1=1, \kappa_2=2$

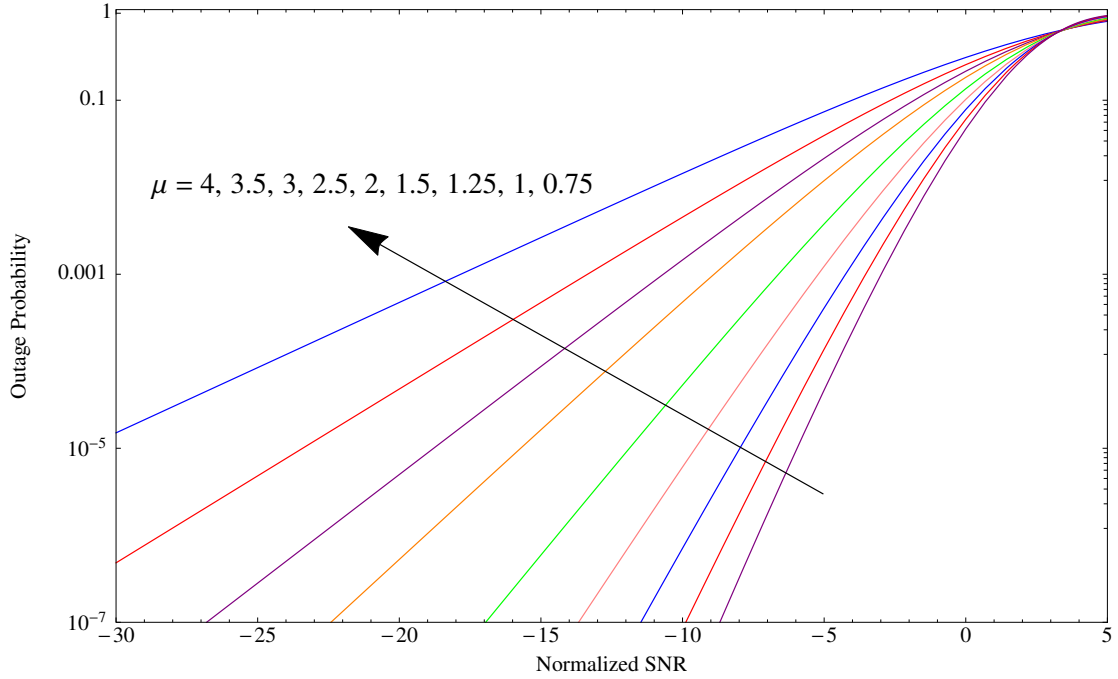


Figura 5.18: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \kappa_1=1, \kappa_2=2$

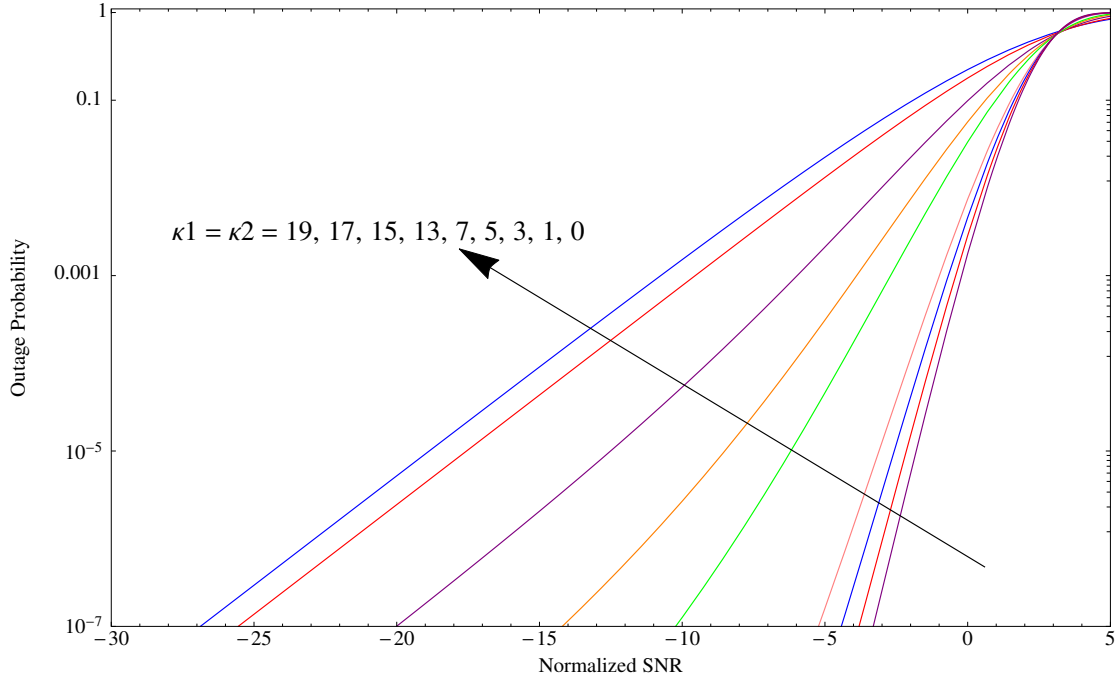


Figura 5.19: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \mu=1.25$

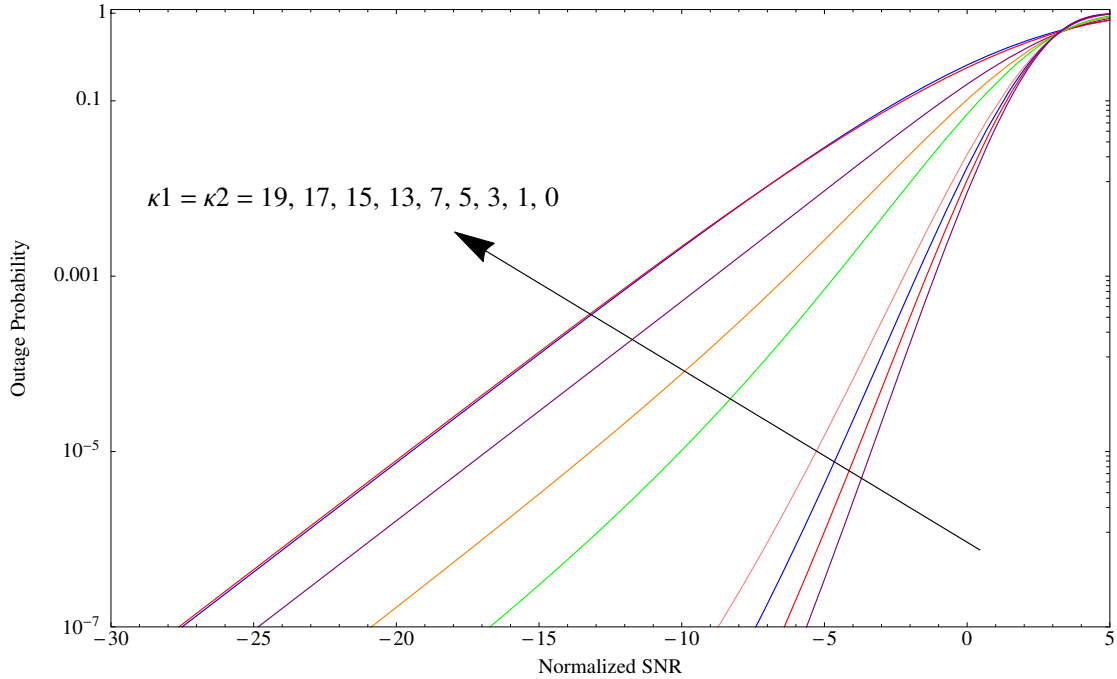


Figura 5.20: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por razão máxima variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \mu=1.25$

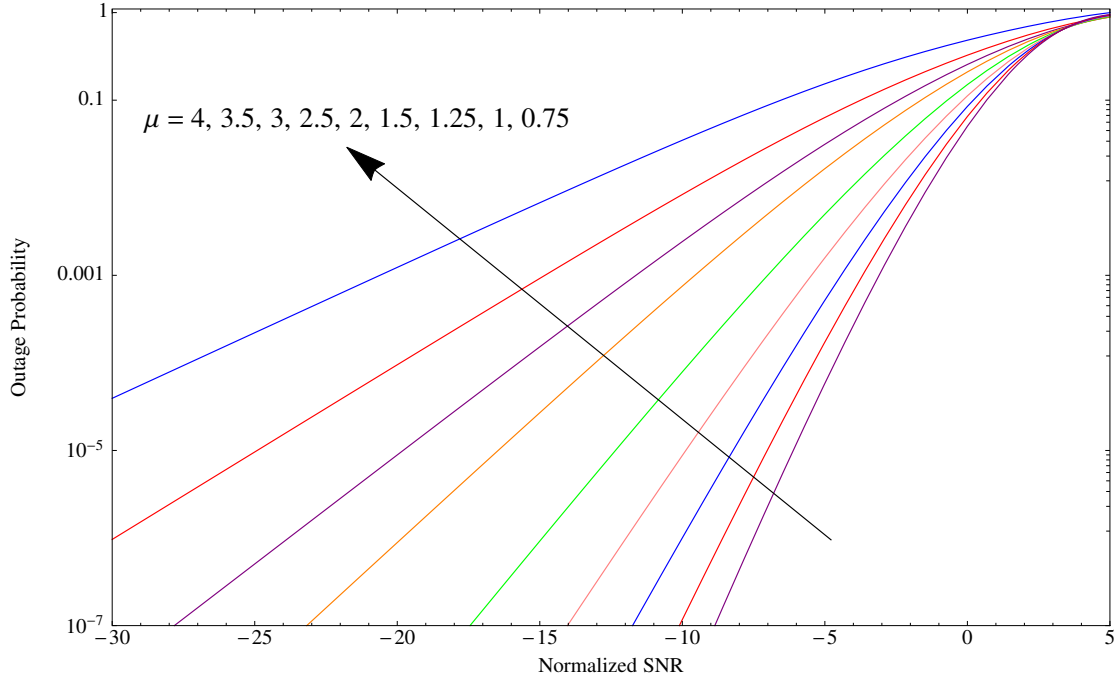


Figura 5.21: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \kappa_1=1, \kappa_2=2$

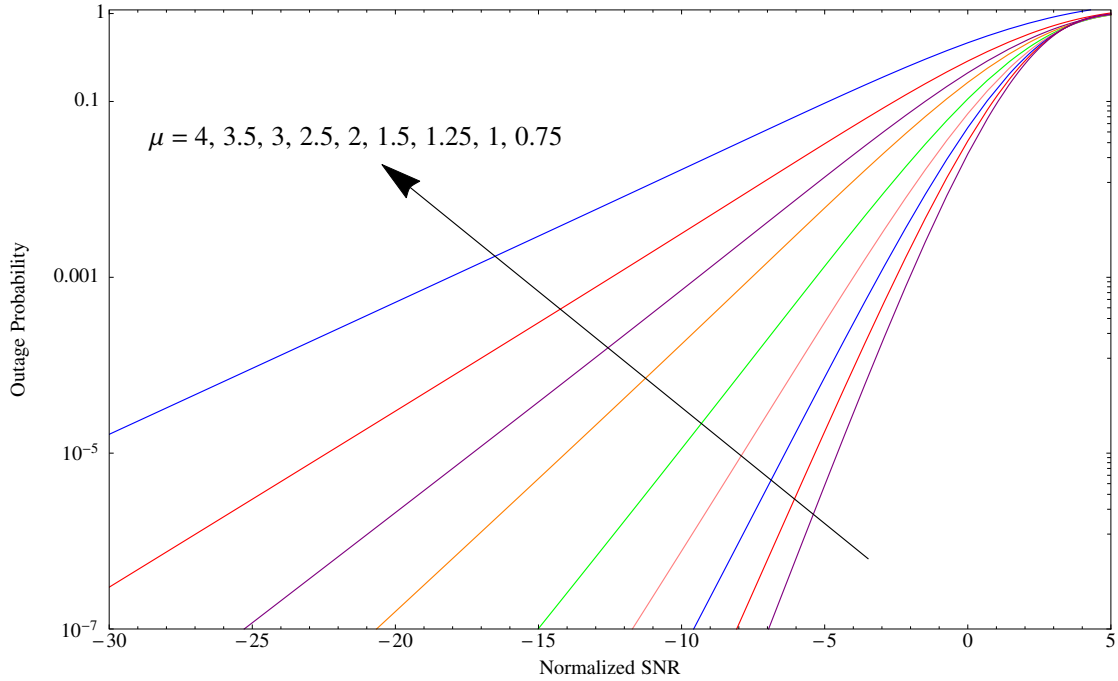


Figura 5.22: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de μ ($\mu = 4 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 3.5 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 3 \rightarrow$ Azul, $\mu = 2.5 \rightarrow$ Rosa, $\mu = 2 \rightarrow$ Verde, $\mu = 1.5 \rightarrow$ Laranja, $\mu = 1.25 \rightarrow$ Roxo, $\mu = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\mu = 0.75 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \kappa_1=1, \kappa_2=2$

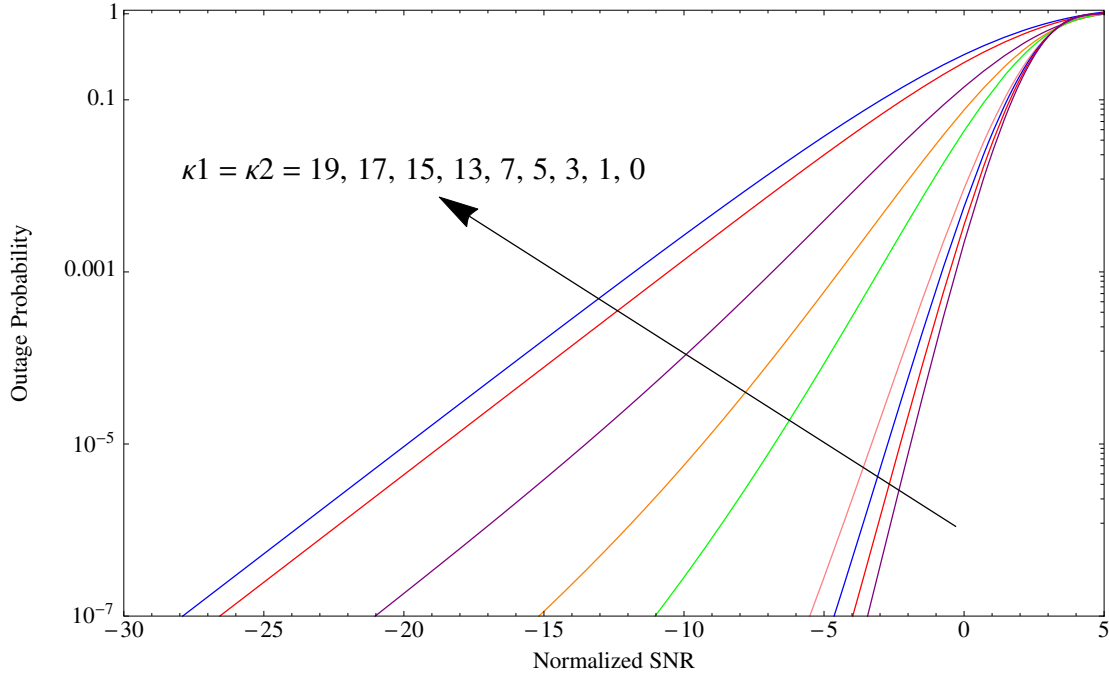


Figura 5.23: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0, \mu=1.25$

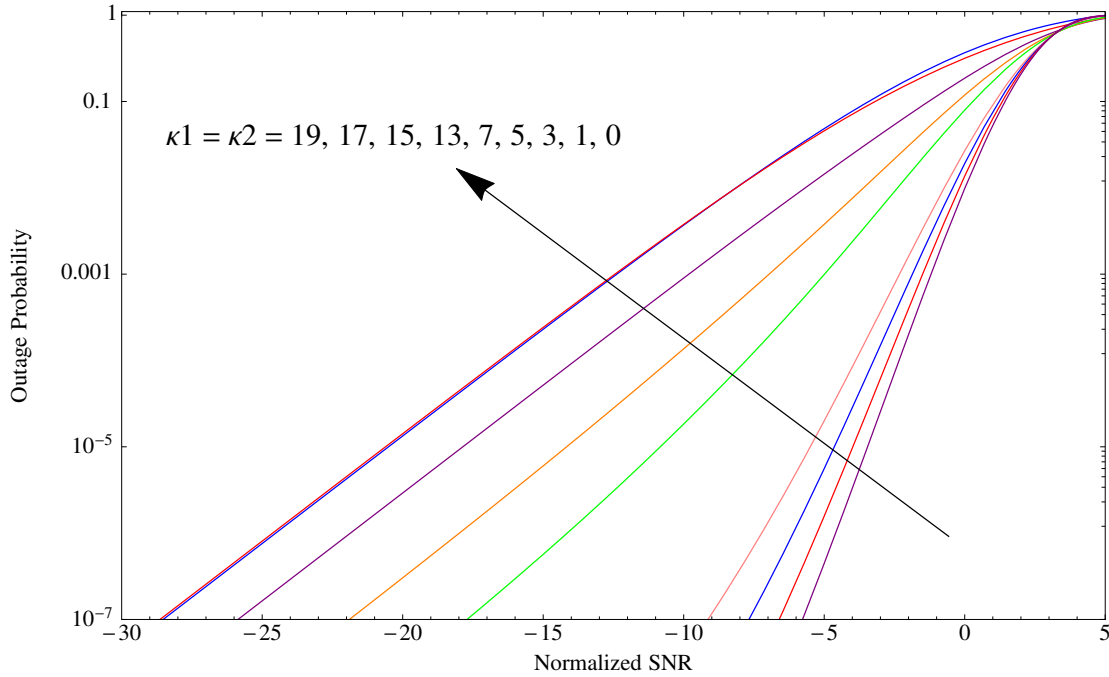


Figura 5.24: Probabilidade de outage para 2 ramos com o método combinação por ganho igual variando o valor de $\kappa_1=\kappa_2$ ($\kappa_1 = 19 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 17 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 15 \rightarrow$ Azul, $\kappa_1 = 13 \rightarrow$ Rosa, $\kappa_1 = 7 \rightarrow$ Verde, $\kappa_1 = 5 \rightarrow$ Laranja, $\kappa_1 = 3 \rightarrow$ Roxo, $\kappa_1 = 1 \rightarrow$ Vermelho, $\kappa_1 = 0 \rightarrow$ Azul), para um valor fixo de $\delta=0.5, \mu=1.25$

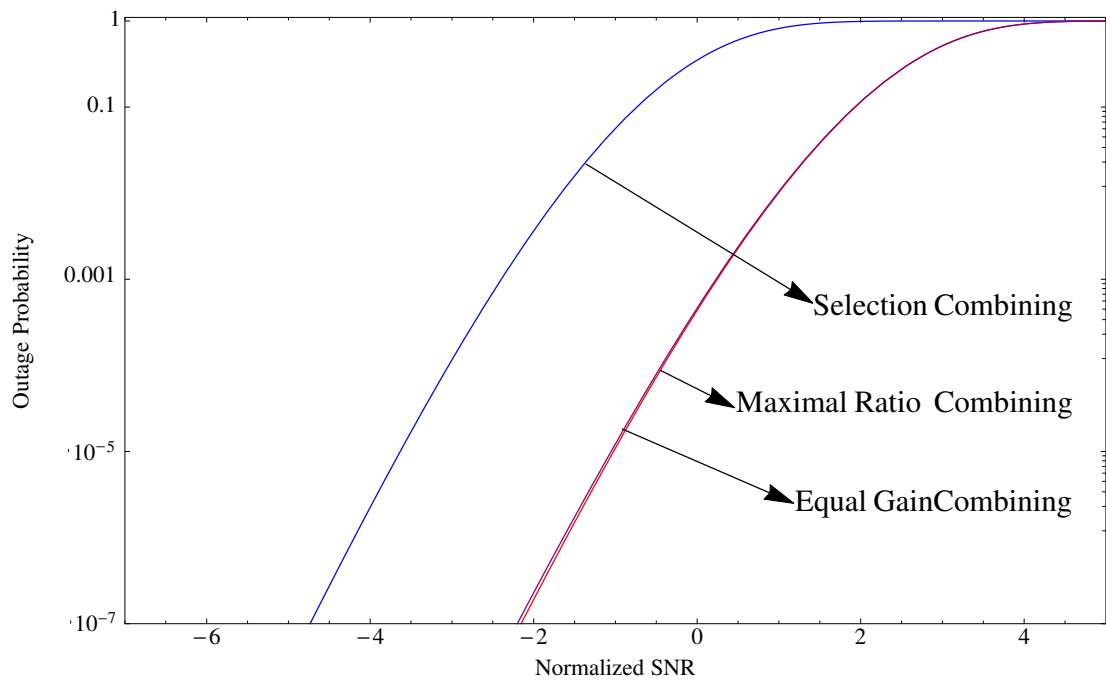


Figura 5.25: Probabilidade de outage para 2 ramos por os métodos de combinação por Seleção Pura $\rightarrow$ Azul, combinação por razão máxima $\rightarrow$ Vermelho e combinação por ganho igual $\rightarrow$ Roxo para um valor fixo de $\mu=7$, $\delta=0.5$, $\kappa_1=4$, $\kappa_2=7$

Conclusões e Direções de Pesquisa Futura

Neste capítulo, podemos concluir esta dissertação ao fornecer algumas sugestões para trabalhos futuros.

6.1 Conclusões

Nesta dissertação apresenta-se uma expressão para derivar novas representações matemáticas para o FDP bivariável e FDC do modelo κ - μ (nosso caso foi feito para 2 variáveis mas aplicando os mesmos critérios podem ser encontrados para n variáveis). As novas representações foram utilizados para avaliar o desempenho por meio de técnicas que ajudam a melhorar o sistema. Entretanto, como os canais de desvanecimento são submetidos ao sinais desejados e interferentes, a probabilidade de outage nos dá uma boa estimativa da potência necessária para obter uma transmissão aceitável. Os resultados são feitos através de cálculos que nos dão uma idéia de como o sinal se comporta no meio. Outras razões para investigar as características de propagação (para nosso caso multivariadas κ - μ) são as necessidades de planejar as localizações dos diferentes transmissores na rede em maior detalhe.

Infelizmente, as expressões estão longe de ser simples e isso se reflete no tempo de computação. Algumas das parcelas mostradas aqui levou várias horas para ser calculado. Também é importante mencionar que alguns cuidados devem ser tomados sempre computando as expressões para alguns valores de μ , ou seja, $\mu = 1$ bem como para os valores semi-inteiros de μ (digamos, $\mu = 0,5, 1,5, 2,5, \dots$), ocorre uma indeterminação. Nestes casos, um valor de μ arbitrariamente próximo do valor exacto pode ser utilizado. Por exemplo, para $\mu = 1$, Pode-se utilizar $\mu = 0.9999999 \dots$ ou $\mu = 1,0000 \dots 1$). O mesmo, por o valores semi-inteiros.

6.2 Trabalhos Futuros

As linhas de pesquisa propostas a partir desta dissertação são as seguintes:

- distribuição κ - μ multivariável.
- distribuição conjunta de fase correlacionada.
- distribuição κ - μ bivariável extreme.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Subadar, T.S.B. Reddy, and P. R. Sahu. Performance of an l-sc receiver over kappa-mu and eta-mu fading channels. In *Communications (ICC), 2010 IEEE International Conference on*, pages 1–5, 2010.
- [2] M. Nakagami. The m-Distribution – A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading. In William C. Hoffman, editor, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation: Proceedings of a Symposium held June 18-20*, pages 3–36. Permagon Press, 1960.
- [3] M. D. Yacoub, D. B. da Costa, U. S. Dias, and G. Fraidenraich. Joint statistics for two correlated Weibull Variates. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 4:129 – 132, 2005.
- [4] Yunxia Chen and C. Tellambura. Infinite series representations of the trivariate and quadri-variate rayleigh distribution and their applications. *Communications, IEEE Transactions on*, 53(12):2092–2101, 2005.
- [5] Michel Daoud Yacoub. The α - μ Distribution: A Physical Fading Model for the Stacy Distribution. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 56(1):27–34, Jan. 2007.
- [6] M. D. Yacoub. The κ - μ Distribution and the η - μ Distribution. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 49, Feb. 2007.
- [7] Simon Cotton and William Scanlon. Higher-order statistics for κ - μ distribution. *Electronics Letters*, abs/1304.7435(22):1215–1217, October 2007.
- [8] J. F. Paris. Statistical characterization of κ - μ shadowed fading. *IEEE Transactions of Vehicular Technology*, 63(2):518–526, February 2014.
- [9] S.L. Cotton. A statistical model for shadowed body-centric communications channels: Theory and validation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 62(3):1416–1424, March 2014.
- [10] P. Cardieri. Modeling interference in wireless ad hoc networks. *Communications Surveys Tutorials, IEEE*, 12(4):551–572, Fourth 2010.
- [11] K.P. Peppas. Sum of nonidentical squared κ - μ variates and applications in the performance analysis of diversity receivers. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 61(1):413–419, Jan 2012.

- [12] J. F. Paris. Outage probability in $\eta - \mu/\eta - \mu$ and $\kappa - \mu/\eta - \mu$ interference-limited scenarios. *IEEE Transactions on Communications*, 61(1):335–343, Jan 2013.
- [13] N. Y. Ermolova and O. Tirkkonen. Outage probability analysis in generalized fading channels with co-channel interference and background noise: $\eta - \mu/\eta - \mu, \eta - \mu/\kappa - \mu$ and $\kappa - \mu/\eta - \mu$ scenarios. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 13(1):291–297, Jan 2014.
- [14] V. Sharma Banjade, C. Tellambura, and H. Jiang. Performance of p-norm detector in awgn, fading and diversity reception. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, (99):1, 2014.
- [15] N.Y. Ermolova and O. Tirkkonen. Laplace transform of product of generalized marcum q, bessel i, and power functions with applications. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 62(11):2938–2944, June 2014.
- [16] E. Rebeiz. *Wide band Cyclostationary Spectrum Sensing*. Ph.D. Thesis, University of California. Los Angeles, 2014.
- [17] Fabio von Glehn and Ugo Silva Dias. Performance analysis of cognitive radio networks over $\kappa - \mu$; fading channel with noise uncertainty. In *Radio and Wireless Symposium (RWS), 2014 IEEE*, pages 106–108, Jan 2014.
- [18] E. Adebola, A Olaluwe, and A Annamalai. Partial area under the receiver operating characteristics curves of diversity-enabled energy detectors in generalised fading channels. *Communications, IET*, 8(9):1637–1647, June 2014.
- [19] W.C. Jakes. *Microwave mobile communications*. IEEE Press classic reissue. Wiley, 1974.
- [20] J. Shapira and S. Miller. *CDMA Radio with Repeaters*. Information Technology: Transmission, Processing and Storage. Springer, 2007.
- [21] W.C.Y. Lee. *Wireless and Cellular Communications*. McGraw-Hill, 2006.
- [22] Theodore S. Rappaport. *Wireless Communications: Principles and Practice (2nd Edition)*. Prentice Hall, 2 edition, January 2002.
- [23] K.S. Miller. *Multidimensional Gaussian distributions*. SIAM series in applied mathematics. Wiley, 1964.
- [24] K. D. Prathapasinghe Dharmawansa, Nandana Rajatheva, and Chinthananda Tellambura. New series representation for the trivariate non-central chi-squared distribution. *IEEE Transactions on Communications*, 57(3):665–675, 2009.
- [25] N.Y. Ermolova and O. Tirkkonen. Bivariate $\eta - \mu$; fading distribution with application to analysis of diversity systems. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 10(10):3158–3162, October 2011.
- [26] D.B. da Costa and M.D. Yacoub. Accurate approximations to the sum of generalized random variables and applications in the performance analysis of diversity systems. *Communications, IEEE Transactions on*, 57(5):1271–1274, May 2009.
- [27] J. Reig, L. Rubio, and N. Cardona. Bivariate nakagami-m distribution with arbitrary fading parameters. *Electronics Letters*, 38(25):1715–1717, Dec 2002.

- [28] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Mc-Graw Hill, 1984.
- [29] M. Nakagami. The m -distribution—a general formula of intensity distribution of rapid fading. pages 3–36, 1960.
- [30] A. Jeffrey and D. Zwillinger. *Table of Integrals, Series, and Products*. Table of Integrals, Series, and Products Series. Elsevier Science, 2007.
- [31] Michel Daoud Yacoub. *Foundations of Mobile Radio Engineering*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1st edition, 1993.
- [32] K. D P Dharmawansa, R. M A P Rajatheva, and K.M. Ahmed. On the bivariate and trivariate rician distributions. In *Vehicular Technology Conference, 2006. VTC-2006 Fall. 2006 IEEE 64th*, pages 1–5, Sept 2006.
- [33] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1995.
- [34] K. D P Dharmawansa, R. M A P Rajatheva, and K.M. Ahmed. On the bivariate and trivariate rician distributions. pages 1–5, 2006.
- [35] M. Rahman. On a generalization of neumann’s formula for the product of two first kind bessel functions of integral orders. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 77(2):155–156, 1997.
- [36] Marvin K. Simon. *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers, Scientists and Mathematicians*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.
- [37] Jingdong Chen Jacob Benesty Israel Cohen, Yiteng Huang. *Noise Reduction in Speech Processing*, volume 2 of *Springer Topics in Signal Processing*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [38] L. Myers and M Sirois. *Spearman Correlation Coefficients, Differences between*. Encyclopedia of Statistical Sciences. 2006.
- [39] G.S. Rabelo and M.D. Yacoub. The κ - μ extreme distribution. *Communications, IEEE Transactions on*, 59(10):2776–2785, 2011.
- [40] D. Benevides da Costa, J. C S S Filho, M.D. Yacoub, and G. Fraidenraich. Second-order statistics of η - μ fading channels: Theory and applications. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 7(3):819–824, March 2008.

Capítulo 7

apêndice

Apresenta-se os códigos feitos no programa Mathematica para a PDF, SC, MRC, EG.

```
PDF[ρ1_, ρ2_, μ_, ρ_, k1_, k2_] :=
  4 × Gamma[μ - 1] × ρ1 × ρ2 × (k1 × μ) × (μ × k2) × (1 + 1/k1) × (1 + 1/k2)
  (1 - ρ²)
  ( (1 - ρ²)² / (ρ × √(k1 × μ) × √(μ × k2) × (1 - ρ × √(k1)/√(k2)) (1 - ρ × √(k2)/√(k1)) ) )^(μ - 1)
  e ( (-(μ × k1) + (μ × k2) - 2 × ρ × √(k1 × μ) × √(μ × k2) + (k1 × μ) × (ρ1²) × (1 + 1/k1) + (μ × k2) × (1 + 1/k2) × (ρ2²)) / (1 - ρ²) ) )
  Sum[(μ + k - 1) Binomial[2μ + k - 3, 2μ - 3]
  BesselI[μ + k - 1, ( (2 × (μ × k2) × ρ2 × √(1 + 1/k2) / (1 - ρ²) ) × (1 - ρ × √(k1)/√(k2)) ) ]
  BesselI[μ + k - 1,
  ( (2 × ρ × √(k1 × μ) × ρ1 × ρ2 × √(μ × k2) × (√(1 + 1/k2)) × (√(1 + 1/k1)) ) / (1 - ρ²) ) ]
  BesselI[μ + k - 1, ( (2 × (k1 × μ) × ρ1 × √(1 + 1/k1) / (1 - ρ²) ) × (1 - ρ × √(k2)/√(k1)) ) ] ,
  {k, 0, 100}]
Plot3D[{PDF[ρ1, ρ2, 2, 0.3, 4, 7]}, {ρ1, 0, 2}, {ρ2, 0, 2}, PlotRange → All,
PlotStyle → {Red},
PlotLabel → {"Pdf Normalizada para μ=2 → Red, ρ=0.3; k1=4; k2=7"},
AxesLabel → {"ρ1", "ρ2", "PDF"}]
```

```
PDF[ρ1_, ρ2_, μ_, ρ_, k1_, k2_] :=
  4 × Gamma[μ - 1] × ρ1 × ρ2 × (k1 × μ) × (μ × k2) × (1 + 1/k1) × (1 + 1/k2)
  (1 - ρ²)
  ( (1 - ρ²)² / (ρ × √(k1 × μ) × √(μ × k2) × (1 - ρ × √(k1)/√(k2)) (1 - ρ × √(k2)/√(k1)) ) )^(μ - 1)
  e ( (-(μ × k1) + (μ × k2) - 2 × ρ × √(k1 × μ) × √(μ × k2) + (k1 × μ) × (ρ1²) × (1 + 1/k1) + (μ × k2) × (1 + 1/k2) × (ρ2²)) / (1 - ρ²) ) )
  Sum[(μ + k - 1) Binomial[2μ + k - 3, 2μ - 3]
```

$$\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (\mu \times k2) \times \rho2 \times \sqrt{1 + \frac{1}{k2}}}{(1 - \rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k1}}{\sqrt{k2}}\right)\right)\right]$$

$$\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times \rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \rho1 \times \rho2 \times \sqrt{(\mu \times k2)} \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k2}}\right) \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k1}}\right)}{(1 - \rho^2)}\right)\right]$$

$$\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (k1 \times \mu) \times \rho1 \times \sqrt{1 + \frac{1}{k1}}}{(1 - \rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k2}}{\sqrt{k1}}\right)\right)\right],$$
 $\{k, 0, 100\}$
 $\text{Plot3D}[\{\text{PDF}[\rho1, \rho2, 2, 0.3, 4, 7], \text{PDF}[\rho1, \rho2, 4, 0.3, 4, 7],$
 $\text{PDF}[\rho1, \rho2, 7, 0.3, 4, 7], \text{PDF}[\rho1, \rho2, 13, 0.3, 4, 7]\},$
 $\{\rho1, 0, 2\}, \{\rho2, 0, 2\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All},$
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Red}, \text{Blue}, \text{Purple}, \text{Yellow}\},$
 $\text{PlotLabel} \rightarrow$
 $\{\text{Pdf Normalizada para } \mu=2 \rightarrow \text{Red}, \mu=4 \rightarrow \text{Blue}, \mu=7 \rightarrow \text{Purple}, \mu=13 \rightarrow \text{Yellow};$

$$\text{SC}[\Upsilon1-, \Upsilon2-, \mu-, \rho-, k1-, k2-]:=$$

$$\frac{\text{Gamma}[\mu-1] \times (k1 \times \mu) \times (\mu \times k2) \times \left(1 + \frac{1}{k1}\right) \times \left(1 + \frac{1}{k2}\right)}{(1 - \rho^2)}$$

$$\left(\frac{(1 - \rho^2)^2}{\rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \sqrt{(\mu \times k2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k1}}{\sqrt{k2}}\right) \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k2}}{\sqrt{k1}}\right)}\right)^{\mu-1}$$

$$e^{\left(\frac{-((\mu \times k1) + (\mu \times k2) - 2 \times \rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \sqrt{(\mu \times k2)} + (k1 \times \mu) \times \Upsilon1 \times \left(1 + \frac{1}{k1}\right) + (\mu \times k2) \times \left(1 + \frac{1}{k2}\right) \times \Upsilon2)}{(1 - \rho^2)}\right)}$$

$$\text{Sum}[(\mu + k - 1) \text{Binomial}[2\mu + k - 3, 2\mu - 3]$$

$$\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (\mu \times k2) \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k2}}\right) \times \sqrt{\Upsilon2}}{(1 - \rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k1}}{\sqrt{k2}}\right)\right)\right]$$

$$\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times \rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \sqrt{(\mu \times k2)} \times \left(\left(\sqrt{1 + \frac{1}{k2}}\right) \times \sqrt{\Upsilon2}\right) \times \left(\sqrt{\Upsilon1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{k1}}\right)\right)}{(1 - \rho^2)}\right)\right]$$

$$\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (k1 \times \mu) \times \sqrt{\Upsilon1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{k1}}}{(1 - \rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k2}}{\sqrt{k1}}\right)\right)\right],$$
 $\{k, 0, 50\}$
 $\text{LogPlot}[$

$$\{\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 0.75001, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\},$$

$$\{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}], \text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 1.00001, 0.00001, 1, 2],$$

$$\{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$$

$$\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 1.25001, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\},$$

$$\{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}], \text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 1.5001, 0.00001, 1, 2],$$

$$\{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$$

$$\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 2, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$$

$$\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 2.5001, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$$

$$\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 3, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$$

$$\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon1, \Upsilon2, 3.5001, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$$

$\text{NIntegrate}[\text{SC}[\Upsilon_1, \Upsilon_2, 4, 0.00001, 1, 2], \{\Upsilon_1, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_2, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}],$
 $\{\text{snr}, -30, 5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-30, 5\}, \{10^{-7}, 1.1\}\},$
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Blue}, \text{Red}, \text{Purple}, \text{Orange}, \text{Green}, \text{Pink}, \text{Blue}, \text{Red},$
 $\text{Purple}, \text{Thickness}[0.003]\}, \text{Frame} \rightarrow \text{True},$
 $\text{FrameTicks} \rightarrow \{\{\{10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 1\}, \text{True}\}, \{\text{True}, \text{True}\}\},$
 $\text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{"Normalized SNR"}, \text{"Outage Probability"}\}, \text{RotateLabel} \rightarrow \text{True},$
 $\text{LabelStyle} \rightarrow \text{FontSize} \rightarrow 18, \text{ImageSize} \rightarrow 640]$

$$\begin{aligned}
&\text{MRC}[r, \Upsilon_1, \mu, \rho, k_1, k_2] := \\
&\frac{\text{Gamma}[\mu-1] \times (k_1 \times \mu) \times (\mu \times k_2) \times \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) \times \left(1 + \frac{1}{k_2}\right)}{(1-\rho^2)} \\
&\left(\frac{(1-\rho^2)^2}{\rho \times \sqrt{(k_1 \times \mu) \times (\mu \times k_2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k_1}}{\sqrt{k_2}}\right) \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}}\right)} \right)^{\mu-1} \\
&e^{\left(\frac{-((\mu \times k_1) + (\mu \times k_2) - 2 \times \rho \times \sqrt{(k_1 \times \mu) \times (\mu \times k_2)} + (k_1 \times \mu) \times \Upsilon_1 \times \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) + (\mu \times k_2) \times \left(1 + \frac{1}{k_2}\right)) \times (r - \Upsilon_1))}{(1-\rho^2)} \right)} \\
&\text{Sum}[(\mu + k - 1) \text{Binomial}[2\mu + k - 3, 2\mu - 3] \\
&\text{BesselI}\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (\mu \times k_2) \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k_2}}\right) \times (\sqrt{r - \Upsilon_1})}{(1-\rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k_1}}{\sqrt{k_2}}\right)\right)\right] \\
&\text{BesselI}[\mu + k - 1, \\
&\left(\frac{2 \times \rho \times \sqrt{(k_1 \times \mu) \times (\mu \times k_2)} \times \left(\left(\sqrt{1 + \frac{1}{k_2}}\right) \times (\sqrt{r - \Upsilon_1})\right) \times \left(\sqrt{\Upsilon_1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{k_1}}\right)}{(1-\rho^2)} \right) \\
&)] \text{BesselI}[\mu + k - 1, \\
&\left(\frac{2 \times (k_1 \times \mu) \times \sqrt{\Upsilon_1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{k_1}}}{(1-\rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}}\right)\right) \Big], \{k, 0, 50\} \Big]
\end{aligned}$$

$\text{LogPlot}[$
 $\{\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 0.75001, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 1.00001, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 1.25001, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 1.50001, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 2, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 2.50001, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 3, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 3.50001, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}],$
 $\text{NIntegrate}[\text{MRC}[r, \Upsilon_1, 4, 0.00001, 1, 2], \{r, 0, 10^{\frac{\text{snr}}{10}}\}, \{\Upsilon_1, 0, r\}]\},$
 $\{\text{snr}, -30, 5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-30, 5\}, \{10^{-7}, 1.1\}\},$
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Blue}, \text{Red}, \text{Purple}, \text{Orange}, \text{Green}, \text{Pink}, \text{Blue}, \text{Red},$
 $\text{Purple}, \text{Thickness}[0.003]\}, \text{Frame} \rightarrow \text{True},$
 $\text{FrameTicks} \rightarrow \{\{\{10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 1\}, \text{True}\}, \{\text{True}, \text{True}\}\},$
 $\text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{"Normalized SNR"}, \text{"Outage Probability"}\}, \text{RotateLabel} \rightarrow \text{True},$

LabelStyle → FontSize → 18, ImageSize → 640]

EG[b₋, Υ1₋, μ₋, ρ₋, k1₋, k2₋]:=

$$\frac{\text{Gamma}[\mu-1] \times (k1 \times \mu) \times (\mu \times k2) \times \left(1 + \frac{1}{k1}\right) \times \left(1 + \frac{1}{k2}\right)}{(1-\rho^2)}$$

$$\left(\frac{-(1-\rho^2)^2}{\rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \sqrt{(\mu \times k2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k1}}{\sqrt{k2}}\right) \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k2}}{\sqrt{k1}}\right)} \right)^{\mu-1}$$

$$e^{\left(\frac{-((\mu \times k1) + (\mu \times k2) - 2 \times \rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \sqrt{(\mu \times k2)} + (k1 \times \mu) \times (\Upsilon1) \times \left(1 + \frac{1}{k1}\right) + (\mu \times k2) \times \left(1 + \frac{1}{k2}\right) \times (\sqrt{2b} - \sqrt{\Upsilon1})^2)}{(1-\rho^2)} \right)}$$

Sum [(-1)^k(μ + k - 1)Binomial[2μ + k - 3, 2μ - 3]

BesselI $\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (\mu \times k2) \times (\sqrt{2b} - \sqrt{\Upsilon1}) \times \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k2}\right)}}{(1-\rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k1}}{\sqrt{k2}}\right) \right) \right]$

BesselI[μ + k - 1,

$$\left(\frac{2 \times \rho \times \sqrt{(k1 \times \mu)} \times \sqrt{\Upsilon1} \times (\sqrt{2b} - \sqrt{\Upsilon1}) \times \sqrt{(\mu \times k2)}}{(1-\rho^2)} \times \right.$$

$$\left. \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{k2}\right)} \right) \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k1}} \right) \right)]$$

BesselI $\left[\mu + k - 1, \left(\frac{2 \times (k1 \times \mu) \times \sqrt{\Upsilon1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{k1}}}{(1-\rho^2)} \times \left(1 - \frac{\rho \times \sqrt{k2}}{\sqrt{k1}}\right) \right) \right],$

{k, 0, 50}]

LogPlot[

{NIntegrate [EG[b, Υ1, 0.75001, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 1.00001, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 1.25001, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 1.5001, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 2, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 2.5001, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 3, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 3.5001, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}],

NIntegrate [EG[b, Υ1, 4, 0.00001, 1, 2], {b, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, (2b)}]] ,

{snr, -30, 5}, PlotRange → {{-30, 5}, {10⁻⁷, 1.1}},

PlotStyle → {Blue, Red, Purple, Orange, Green, Pink, Blue, Red,

Purple, Thickness[0.003]}, Frame → True,

FrameTicks → {{10⁻⁷, 10⁻⁵, 10⁻³, 10⁻¹, 1}, True}, {True, True}},

FrameLabel → {"Normalized SNR", "Outage Probability"}, RotateLabel → True,

LabelStyle → FontSize → 18, ImageSize → 640]

LogPlot [{NIntegrate [SC[Υ1, Υ2, 7, 0.5, 4, 7], {Υ1, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ2, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }],

NIntegrate [MRC[r, Υ1, 7, 0.5, 4, 7], {r, 0, 10 ^{$\frac{\text{snr}}{10}$} }, {Υ1, 0, r}],

```

NIntegrate [EG[b,  $\Upsilon$ 1, 7, 0.5, 4, 7], {b, 0,  $10^{\frac{\text{snr}}{10}}$ }, { $\Upsilon$ 1, 0, (2b)}] ],
{snr, -7, 5}, PlotRange → {{-7, 5}, { $10^{-7}$ , 1.1}},
PlotStyle → {Blue, Red, Purple, Thickness[0.003]}, Frame → True,
FrameTicks → {{ { $10^{-7}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-1}$ , 1}, True}, {True, True}},
FrameLabel → {"Normalized SNR", "Outage Probability"}, RotateLabel → True,
LabelStyle → FontSize → 18, ImageSize → 640]

```