

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

*Este exemplar corresponde a redação
final da tese defendida por
Rafael Santos Mendes e aprovada pelo
Conselho Julgador em 15/06/84*
(UAmara)

L. L. B.
CONTROLADOR AUTO AJUSTÁVEL POR
ALOCÇÃO DE POLOS E MINIMIZAÇÃO
DE UMA VARIÂNCIA GENERALIZADA

Fr. L. L. B.

por: RAFAEL SANTOS MENDES
Orientadores: Prof. Dr. WAGNER CARADORI DO AMARAL
Prof. Dr. LUIS GIMENO LATRE

047/84

Tese de mestrado apresentada a Faculdade de
Engenharia de Campinas da Universidade Esta
dual de Campinas.

JUNHO DE 1984

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Profs. Dr. WAGNER CARADORI DO AMARAL e Dr. LUIS GIMENO LATRE pela orientação e interesse no desenvolvimento deste trabalho, ao Prof. Dr. FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE pelo apoio e valiosas sugestões, à Silvia e aos amigos pela dedicação, e à Taka pela eficiência na preparação dos originais.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo - FAPESP.

RESUMO

Neste trabalho é proposto um novo controlador cujo objetivo é obter, para o sistema controlado, o comportamento especificado como resposta a mudanças no sinal de referência (comportamento determinístico) e um comportamento eficiente do ponto de vista de rejeição a perturbações (comportamento estocástico).

O novo controlador é obtido calculando-se os polinômios de ponderação da função de custo do controlador de variância mínima generalizada, de modo a alocar os polos do sistema em malha fechada e minimizar a combinação linear das variâncias dos sinais de saída e de controle dada pela equação a seguir:

$$\Delta = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t$$

onde α_1 e α_2 são números reais positivos.

Propõe-se também uma metodologia freqüencial alternativa na qual os polinômios da função de custo do controlador de variância mínima generalizada são calculados, como anteriormente, através da alocação dos polos em malha fechada, e ainda, através do ajuste do ganho do controlador numa determinada freqüência.

Í N D I C E

Pág.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	1
1.1. HISTÓRICO - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2. CONTROLADORES AUTO-AJUSTÁVEIS	4
1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO	7

CAPÍTULO 2

CONTROLADOR AUTO-AJUSTÁVEL DE VARIÂNCIA MÍNIMA GENERALIZADA	10
2.1. INTRODUÇÃO	10
2.2. LEI DE CONTROLE	11
2.3. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	16
2.4. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS INDEPENDENTE DA FUNÇÃO DE CUSTO	20
2.5. SÍNTESE DO ALGORÍTIMO DE CONTROLE DE VARIÂNCIA MÍNIMA GENERALIZADA	25
2.6. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA - POLOS EM MALHA FECHADA ..	25

CAPÍTULO 3

ALOCAÇÃO DE POLOS E MINIMIZAÇÃO DAS VARIÂNCIAS DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE	30
3.1. INTRODUÇÃO	30
3.2. CARACTERÍSTICAS DOS POLINÔMIOS DE PONDERAÇÃO DA FUNÇÃO DE CUSTO	31
3.3. EQUAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE POLOS E ORDENS DOS POLINÔMIOS DA FUNÇÃO DE CUSTO	34

	<u>Pág.</u>
3.3.1. Condições de existência de solução para a equação de alocação de polos	35
3.3.2. Especificação do número de polos em malha fechada	36
3.3.3. Ordens dos polinômios P^* e Q^*	36
3.3.4. Grau de liberdade para escolha da solução da equação de alocação de polos	39
3.3.5. Ordem do controlador	40
3.3.6. Comportamento determinístico e comportamento estocástico	41
3.4. EQUAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE POLOS EM FUNÇÃO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS IMPLICITAMENTE	43
3.5. NOVO CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO PARA OBTENÇÃO DO CONTROLADOR	44
3.5.1. Cálculo das variâncias dos sinais de saída e de controle	45
3.5.2. Forma matricial da função objetivo	51
3.5.3. Forma matricial das restrições	52
3.6. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO	54
3.7. INFLUÊNCIA DE ACRÉSCIMOS NAS ORDENS DOS POLINÔMIOS DE PONDERAÇÃO SOBRE O VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO	58
3.8. CONCLUSÃO	61

CAPÍTULO 4

MÉTODO FREQUENCIAL PARA O AJUSTE DOS POLINÔMIOS DE PONDERAÇÃO	63
4.1. INTRODUÇÃO	63
4.2. CÁLCULO DO GANHO DO CONTROLADOR	64
4.3. ALOCAÇÃO DE POLOS E AJUSTE DE GANHO	69
4.4. CONCLUSÃO	71

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E SIMULAÇÕES	74
5.1. INTRODUÇÃO	74
5.2. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DA METODOLOGIA DE MINIMIZAÇÃO DAS VARIÂNCIAS	75
5.2.1. Sistema de fase mínima	76
5.2.2. Sistema de fase não-mínima	80
5.2.3. Sistema com atraso maior que um período de amostra gem	86
5.3. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DA METODOLOGIA FREQUÊNICAL ...	92
5.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS	97

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102
APÊNDICE A - RELAÇÃO ENTRE AS ORDENS DOS POLINÔMIOS DE PONDE RAÇÃO P^* E Q^*	105
APÊNDICE B - EQUAÇÕES POLINOMIAIS NÃO-REGULARES	110
ANEXO A - PROGRAMAS	114

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. HISTÓRICO - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Grande parte das malhas de controle encontradas atualmente nas indústrias é constituída por controladores com parâmetros fixos (PID, etc), cuja eficiência é suficiente na maioria dos casos. Entretanto, são observadas dificuldades no ajuste dos parâmetros do controlador, quando o processo apresenta parâmetros variantes no tempo, os pontos de operação estão sujeitos a alterações ou ainda o objetivo de controle implica na utilização do modelo matemático do processo que, via de regra, não é suficientemente conhecido. Para estes casos é necessária a obtenção de um modelo matemático conveniente a partir do qual obtém-se o controlador ou técnicas de controle que construam internamente um modelo aproximado do sistema. Entre estes controladores incluem-se os controladores adaptativos.

A implementação destes algoritmos há alguns anos atrás era economicamente inviável devido ao custo elevado dos minicomputadores disponíveis. Contudo, com o desenvolvimento dos microprocessadores observou-se uma redução no custo dos sistemas digitais disponíveis no mercado, acompanhada da superação, cada vez mais acentuada, de limitações em tempo de cálculo e capacidade de memória. Estes fatos permitiram uma nova ênfase na análise de algoritmos de controle complexos. Neste trabalho propõem-se algoritmos de controle adaptativo obtidos a partir do controlador de variância mínima generalizada, que minimizem uma soma ponderada das variâncias da saída e do controle, alocando os polos em malha fechada.

Para melhor compreensão deste objetivo no contexto dos trabalhos já existentes apresentam-se a seguir a descrição do problema de controle adaptativo estudado neste trabalho e um breve relato das contribuições apresentadas nesta área nos últimos anos.

Utilizam-se modelos discretos do tipo entrada-saída ARMA, descritos por equações à diferenças lineares (ou linearizadas). Su

põe-se que as perturbações estocásticas possam ser descritas conforme o teorema da fatorização espectral [1], isto é, qualquer processo estocástico estacionário com média zero e densidade espectral racional pode ser representado como a saída de um sistema linear cuja entrada é uma seqüência branca de variáveis aleatórias. Das considerações acima resulta o seguinte modelo para o sistema:

$$y_t = z^{-d} \frac{B_1(z^{-1})}{A_1(z^{-1})} u_t + \frac{C_1(z^{-1})}{A_2(z^{-1})} \zeta_t$$

onde:

y_t é o sinal de saída do sistema no instante t

u_t é o sinal de controle do sistema no instante t

ζ_t é uma seqüência aleatória não correlata no tempo (ruído branco) com média nula e variância dada por $\text{var } \zeta_t$

z^{-1} é o operador atraso

A_1 , A_2 , B_1 e C_1 são polinômios no operador atraso

d é o atraso de transporte do sistema.

A figura 1.1 apresenta o diagrama de blocos do sistema a controlar.

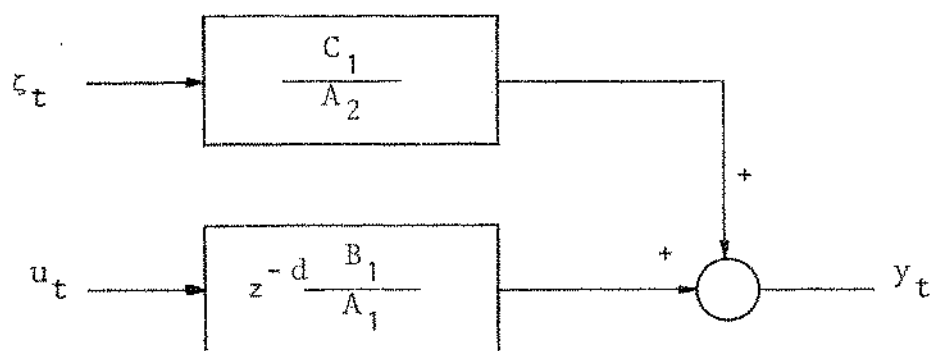


Fig. 1.1 - Diagrama de blocos do sistema a controlar.

A equação que modela o sistema pode ser escrita conforme a equação (1.1) a seguir:

$$\boxed{A(z^{-1})y_t = z^{-d}B(z^{-1})u_t + C(z^{-1})\zeta_t} \quad (1.1)$$

onde:

$$A(z^{-1}) = A_1A_2 = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}$$

$$B(z^{-1}) = A_2B_1 = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}$$

$$C(z^{-1}) = A_1C_1 = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}$$

Supõe-se ainda que os valores de z que anulam o polinômio $A(z^{-1})$ estejam dentro do círculo unitário, caracterizando um sistema em malha aberta estável, e que os valores de z que anulam o polinômio $C(z^{-1})$ estejam dentro ou sobre o círculo unitário, conforme o teorema de fatorização espectral.

O atraso de transporte d e as ordens dos polinômios A , B e C , dadas por n_a , n_b e n_c são considerados conhecidos. Os coeficientes destes polinômios são considerados total ou parcialmente desconhecidos e admite-se que variem lentamente no tempo.

A variável de controle u_t deve ser calculada em cada instante de tempo de modo a satisfazer algum critério de desempenho. O critério de desempenho é normalmente expresso por uma função de custo que deve ser minimizada em cada instante ou ao longo de um horizonte de tempo, dando origem assim a uma lei de controle, que em geral depende dos parâmetros do sistema, tornando necessária sua estimação.

O algoritmo desejado deve portanto satisfazer a lei de controle obtida e, além disso, estimar os parâmetros do sistema.

A solução do problema acima leva aos conceitos de controle dual e controle cauteloso [2].

O controle dual é a solução ótima do problema, quando a função de custo é minimizada ao longo de um horizonte de tempo. Consiste em considerar as incertezas da estimação no cálculo do controle e, além disso, excitar o sistema de modo a melhorar a estimação dos parâmetros. Entretanto, devido à complexidade e ao grande esforço computacional exigido por esta solução, apenas casos simples são resolvidos na literatura e não se conhecem utilizações práticas [3].

O problema é simplificado quando a função de custo minimizada considera apenas as medidas disponíveis, sem levar em conta a existência de medidas em instantes futuros. O controle cauteloso é obtido da minimização desta função, e consiste em ponderar, no cálculo do controle, as incertezas da estimação. É bem conhecido neste caso a possibilidade do fenômeno de "turn-off" que pode levar ao "desligamento" do controle [4].

Finalmente, a alternativa mais simples é a de utilizar os parâmetros estimados no lugar dos parâmetros do modelo do sistema. Esta estratégia é conhecida como "certainty-equivalence" e em geral não é ótima.

Em 1973, Åstrom [5] deu grande desenvolvimento a esta área de pesquisa ao introduzir o regulador auto-ajustável (self-tuning), que será descrito na próxima seção.

1.2. CONTROLADORES AUTO-AJUSTÁVEIS

O regulador auto-ajustável inicialmente apresentado minimiza a variância do sinal de saída e portanto sua função de custo é do tipo dado pela equação (1.2) a seguir:

$$I_1 = E\{y_{t+d}^2 / J_t\} \quad (1.2)$$

onde:

$J_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots; u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$ é a informação disponível no instante t .

$E\{\cdot / J_t\}$ é a esperança matemática condicionada à observação J_t

Este regulador é do tipo "certainty-equivalence", isto é, os parâmetros estimados são usados na lei de controle em substituição aos parâmetros verdadeiros do modelo do sistema. Åstrom provou que, sob certas condições no algoritmo apresentado, se os parâmetros estimados convergirem para algum valor então o regulador obtido minimiza a equação (1.2).

O regulador auto-ajustável tem sido utilizado nas aplicações práticas, havendo na literatura diversos relatos de sua

utilização em máquinas de papel [6], trocadores de calor [7], moedores de minério [8], etc. Entretanto, algumas dificuldades impedem sua maior vulgarização, podendo-se citar:

- a) Dificuldade de inicialização do algoritmo;
- b) Convergência não garantida;
- c) Utilização não recomendada em sistemas de fase não-mínima, pois imprecisões na estimação levam à instabilidade do sistema;
- d) Excessiva variância no sinal de controle.

Em 1975, Clarke [9] apresentou uma generalização do regulador de Åstrom, onde a função minimizada é do tipo apresentada na equação (1.3):

$$I_2 = E\{(P(z^{-1})y_{t+d} - R(z^{-1})\omega_t)^2 + (Q'(z^{-1})u_t)^2/J_t\} \quad (1.3)$$

onde:

ω_t é um sinal de referência;

$P(z^{-1})$; $R(z^{-1})$ e $Q'(z^{-1})$ são polinômios no operador atraso z^{-1} .

Este controlador, além de permitir o rastreamento de um sinal de referência, é eficiente para sistemas de fase não-mínima e permite diminuir variância no sinal de controle em relação à obtida no controle de variância mínima.

Este fato é mostrado por Clarke [10], analisando o caso em que os polinômios de ponderação do controlador de variância mínima generalizada são dados por:

$$P(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 1$$

$$Q'(z^{-1}) = \lambda, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Neste caso minimiza-se a função de custo dada pela equação (1.4) a seguir:

$$I_2' = E\{(y_{t+d} - \omega_t)^2 + (\lambda u_t)^2 / J_t\} \quad (1.4)$$

O controlador resultante pode ser utilizado em sistemas de fase não-mínima e permite diminuir a variância do sinal de controle em relação à obtida com o regulador de variância mínima de Åstrom. A generalização para o caso multivariável foi apresentada em [11,12,13,14] e, em [15] é introduzida uma ponderação λ variante no tempo, o que atribui um caráter cauteloso ao controle. Na equação (1.4) embora o simples ajuste de λ possa resultar em valores satisfatórios para as variâncias dos sinais de saída e de controle, em muitos casos leva a comportamentos determinísticos inadequados ou seja, respostas insatisfatórias do sinal de saída a variações no sinal de referência.

Em [16] é apresentada a extensão da equação (1.3) para o caso multivariável e, em [17], os polinômios P, Q' e R são substituídos por funções racionais, sendo apresentados alguns casos particulares de escolha destas funções. Uma análise de todos estes casos é encontrada em [18].

A minimização da função de custo dada pela equação (1.3) pode ainda ser relacionada aos controladores por modelo de referência. Neste caso escolhe-se:

$$Q' = 0 \quad , \quad P = M \quad , \quad R = N$$

onde N/M é a função de transferência do modelo de referência, havendo portanto alocação dos polos e zeros do sistema em malha fechada. Este controlador pode apresentar excessiva variância no sinal de controle (pois $Q'=0$) e é ineficiente para sistemas de fase não-mínima.

É possível contudo alocar polos com controladores mais gerais e em [19,20] os parâmetros do controlador são obtidos a partir da especificação dos polos em malha fechada.

Em [21] é apresentado um controlador de variância mínima generalizada em que os polinômios P, Q' e R são obtidos a partir da alocação dos polos em malha fechada.

A vantagem de especificar os polos em malha fechada é fixar o comportamento determinístico do sistema, isto é, a respos

ta do sinal de saída frente a variações no sinal de referência. Entretanto, embora o comportamento estocástico do sistema (variâncias dos sinais de saída e de controle) dependa da escolha dos polos em malha fechada, esta dependência não é trivial e conseqüentemente controladores obtidos através de alocação de polos podem resultar em variâncias excessivas nos sinais de saída e de controle.

Finalmente é importante observar que a escolha dos polos do sistema em malha fechada está mais diretamente relacionada ao comportamento temporal e freqüencial do sistema que a escolha direta dos polinômios P , Q' e R e, neste trabalho, este critério será utilizado para especificação do comportamento determinístico do sistema.

1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é obter um controlador que possa ser ajustado através de especificações familiares aos operadores industriais e que apresente as seguintes características:

- i) Comportamento determinístico especificado pela escolha dos polos do sistema em malha fechada.
- ii) Comportamento estocástico otimizado através da minimização da função Δ apresentada a seguir:

$$\Delta = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t \quad (1.5)$$

onde α_1 e α_2 são números reais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$.

Para tanto o controlador proposto é obtido como um controlador de variância mínima generalizada (equação 1.3) em que os polinômios da função de custo P , Q' e R são calculados de forma a minimizar a equação (1.5), sujeitos à restrição da equação de alocação de polos dada pela equação (1.6) a seguir:

$$BP + AQ = T \quad (1.6)$$

onde:

$$Q(z^{-1}) = \frac{q'_0}{b_0 p_0} Q'(z^{-1})$$

$T(z^{-1})$ é o polinômio cujos valores de z que o anulam são os polos do sistema em malha fechada.

A equação (1.6) relaciona os polinômios da função de custo (P e Q) e os polinômios do modelo do sistema (A e B) aos polos do sistema em malha fechada e é deduzida em [21] e no capítulo 2 deste trabalho.

Portanto os polinômios da função de custo dada pela equação (1.3) são obtidos através da solução do seguinte problema de minimização com restrições:

$$\begin{array}{l} \min_{P, Q} \quad \Lambda = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t \\ \text{s.a.} \quad BP + AQ = T \end{array} \quad (1.7)$$

A solução do problema dado pela equação (1.7) é obtida utilizando-se o fato bem conhecido de que a equação polinomial (1.6) não tem solução única para P e Q quando as ordens escolhidas para estes polinômios não são mínimas.

Obtém-se desta forma um controlador em que o usuário deve fixar o polinômio T e os parâmetros α_1 e α_2 , podendo estes serem ajustados através de um simples dial. Todos estes ajustes tem estreita relação com os objetivos práticos do usuário, eliminando-se portanto a necessidade de escolha direta dos polinômios da função de custo.

Mostra-se que, quanto maior as ordens utilizadas para os polinômios P e Q , melhor o comportamento estocástico obtido.

Apresenta-se também uma metodologia alternativa para o cálculo dos polinômios P e Q , baseada em critérios freqüenciais e semelhante à apresentada por Hughes [22]. Neste caso os polinômios da função de custo são obtidos a partir da escolha dos polos em malha fechada e da fixação do ganho do controlador numa determinada freqüência. O comportamento estocástico do sistema pode en

tão ser melhorado pela fixação adequada do ganho do controlador feita pelo usuário.

A organização do trabalho é a seguinte:

No capítulo 2 é apresentado o controlador auto-ajustável de variância mínima generalizada desenvolvido por Clarke [9], e deduzidos os resultados necessários ao desenvolvimento da metodologia desejada.

No capítulo 3, a metodologia para o cálculo dos polinômios da função de custo é apresentada e no capítulo 4 o mesmo é feito em relação à metodologia frequencial alternativa.

No capítulo 5 são apresentados os resultados de alguns exemplos de simulação e a análise destes resultados.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões.

CAPÍTULO 2

CONTROLADOR AUTO-AJUSTÁVEL DE VARIÂNCIA MÍNIMA GENERALIZADA

2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são resumidos alguns resultados já conhecidos referentes ao controlador de variância mínima generalizada, apresentado inicialmente por Clarke [9], e estudado em [23,24].

O controlador auto-ajustável de variância mínima generalizada é utilizado em sistemas descritos por equações de diferenças lineares do tipo dado pela equação (1.1) reescrita a seguir:

$$A(z^{-1})y_t = z^{-d} B(z^{-1})u_t + C(z^{-1})\zeta_t \quad (1.1)$$

A lei de controle é obtida minimizando, em cada instante de amostragem, uma função de custo do tipo descrito pela equação (1.3):

$$I = E\{(P(z^{-1})y_{t+d} - R(z^{-1})\omega_t)^2 + (Q'(z^{-1})u_t)^2/J_t\} \quad (1.3)$$

Conforme citado no capítulo anterior, a lei de controle é deduzida supondo conhecidos os parâmetros do sistema. Obtém-se o sinal de controle substituindo-se os parâmetros do sistema por seus valores estimados. Neste controlador, a estimação é realizada por um estimador dos mínimos quadrados recursivo.

A organização deste capítulo é a seguinte:

Na seção 2.2. obtém-se a lei de controle em função dos parâmetros do sistema. Na seção 2.3 obtém-se um esquema implícito que estima diretamente os parâmetros do controlador. Na seção seguinte altera-se a equação do estimador de modo a permitir que a estimação seja independente das ponderações da função de custo dada pela equação (1.3). As motivações para esta independência são dadas na mesma seção. Na seção 2.5 é apresentado o algoritmo do controlador e finalmente, na seção 2.6 são deduzidas as funções

de transferência do sistema em malha fechada e obtidas as suas equações características.

2.2. LEI DE CONTROLE

Nesta seção é deduzida a lei de controle, obtida a partir dos parâmetros do sistema a controlar, de modo a minimizar a função de custo dada pela equação (1.3), rerepresentada a seguir:

$$I = E\{(P(z^{-1})y_{t+d} - R(z^{-1})\omega_t)^2 + (Q'(z^{-1})u_t)^2/J_t\} \quad (1.3)$$

Para que se minimize a expressão (1.3) em relação a u_t , deve-se estabelecer a dependência entre esta expressão e o controle u_t . A lei de controle é obtida a partir de:

$$\frac{\partial I}{\partial u_t} = 0$$

A seguir, determinar-se-á a melhor previsão de Py_{t+d} condicionada à observação J_t , separando-se a parte independente das medidas da parte dependente das mesmas.

Da equação (1.1) tem-se que:

$$y_{t+d} = \frac{B}{A} u_t + \frac{C}{A} \zeta_{t+d}$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação acima pelo polinômio $P(z^{-1})$ obtém-se:

$$Py_{t+d} = \frac{PB}{A} u_t + \frac{PC}{A} \zeta_{t+d} \quad (2.1)$$

Observa-se, no lado direito da equação anterior, que apenas a segunda parcela contém termos independentes das medidas realizadas até o instante t . Para que, nesta parcela, se possa separar a parte dependente das

medidas da parte independente das mesmas, utiliza-se a seguinte separação polinomial descrita pela equação (2.2):

$$\frac{PC}{A} = F + z^{-d} \frac{G}{A} \quad (2.2)$$

onde:

$F(z^{-1})$ é um polinômio de ordem $n_f = d-1$

$G(z^{-1})$ é um polinômio de ordem $n_g = \max \left\{ \begin{array}{l} n_a - 1 \\ n_p + n_c - d \end{array} \right\}$

Em [28] é mostrado que existe uma única solução F e G , com as ordens acima, que satisfaz a equação (2.2).

Substituindo-se a equação (2.2) na equação (2.1), obtêm-se:

$$Py_{t+d} = \frac{BP}{A} u_t + F\zeta_{t+d} + \frac{G}{A} \zeta_t \quad (2.3)$$

Nesta equação, o termo $F\zeta_{t+d}$, dado pela equação (2.4),

$$F\zeta_{t+d} = f_0 \zeta_{t+d} + f_1 \zeta_{t+d-1} + \dots + f_{d-1} \zeta_{t+1} \quad (2.4)$$

é independente das medidas disponíveis no instante t , pois o polinômio F tem ordem $d-1$ e (ζ_t) é uma seqüência de variáveis aleatórias não correlatas.

Portanto, a melhor previsão para Py_{t+d} , com o conjunto de medidas disponíveis no instante t , é dada pela equação (2.5):

$$P\hat{y}_{t+d/t} = \frac{PB}{A} u_t + \frac{G}{A} \zeta_t \quad (2.5)$$

onde $P\hat{y}_{t+d/t}$ é a previsão desejada obtida com a informação disponível no instante t . Das equações (2.3) e (2.5) resulta a equação (2.6):

$$Py_{t+d} = P\hat{y}_{t+d/t} + F\zeta_{t+d} \quad (2.6)$$

Todos os termos da equação (2.5) são conhecidos no instante t . A perturbação ζ_t é obtida a partir da equação do sistema (equação (1.1)) reescrita a seguir:

$$\zeta_t = \frac{A}{C} y_t - z^{-d} \frac{B}{C} u_t$$

Substituindo-se esta equação na equação (2.5), obtém-se:

$$P\hat{y}_{t+d/t} = \frac{PB}{A} u_t + \frac{G}{A} \left[\frac{A}{C} y_t - z^{-d} \frac{B}{C} u_t \right]$$

ou

$$P\hat{y}_{t+d/t} = \frac{G}{C} y_t + \frac{B}{A} \left[p - z^{-d} \frac{G}{C} \right] u_t$$

Utilizando-se a identidade descrita pela equação (2.2), obtém-se o seguinte modelo para a previsão de Py_{t+d} condicionada às medidas disponíveis no instante t :

$$P\hat{y}_{t+d/t} = \frac{G}{C} y_t + \frac{BF}{C} u_t \quad (2.7)$$

A equação (2.7) fornece a melhor previsão para Py_{t+d} no instante t , em função das medidas disponíveis neste instante e do controle u_t .

A seguir estabelece-se a dependência entre a função de custo, dada pela equação (1.3) e a variável de controle u_t . Substituindo-se a equação (2.6) na equação (1.3) obtém-se:

$$\begin{aligned}
I &= E\{(P\hat{y}_{t+d}/t + F\zeta_{t+d} - R\omega_t)^2 + (Q'u_t)^2/J_t\} \\
&= E\{(P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)^2 + 2[F\zeta_{t+d}(P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)] + (F\zeta_{t+d})^2 + \\
&\quad + (Q'u_t)^2/J_t\} \\
&= E\{(P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)^2 + (Q'u_t)^2/J_t\} + E\{(F\zeta_{t+d})^2/J_t\} + \\
&\quad + 2E\{F\zeta_{t+d} \cdot (P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)/J_t\}
\end{aligned}$$

Contudo, tem-se que:

$$a) \quad E\{(P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)^2 + (Q'u_t)^2/J_t\} = (P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)^2 + (Q'u_t)^2$$

pois todas as variáveis da expressão acima são conhecidas no instante t .

$$b) \quad E\{F\zeta_{t+d} \cdot (P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)/J_t\} = 0$$

pois a perturbação $F\zeta_{t+d}$, dada pela equação (2.4) é não correlata com qualquer medida disponível no instante t .

$$c) \quad E\{(F\zeta_{t+d})^2/J_t\} = E\{(F\zeta_{t+d})^2\}$$

pois a perturbação $F\zeta_{t+d}$ é independente da observação J_t .

Portanto, a função de custo pode ser reescrita como segue:

$$I = \{(P\hat{y}_{t+d}/t - R\omega_t)^2 + (Q'u_t)^2 + E\{(F\zeta_{t+d})^2\}$$

Anulando-se a derivada da expressão acima em relação a u_t , obtém-se que:

$$\frac{\partial I}{\partial u_t} = 2(P\hat{y}_{t+d/t} - R\omega_t) \cdot \frac{\partial (P\hat{y}_{t+d/t} - R\omega_t)}{\partial u_t} + 2 Q' u_t \cdot \frac{\partial (Q' u_t)}{\partial u_t} + \frac{\partial [E\{(F\zeta_{t+d})^2\}]}{\partial u_t} = 0$$

Das equações (2.7) e (2.2) tem-se:

$$\frac{\partial (P\hat{y}_{t+d/t} - R\omega_t)}{\partial u_t} = b_0 f_0 = b_0 p_0$$

além disso, tem-se:

$$\frac{\partial (Q' u_t)}{\partial u_t} = q'_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial [E\{(F\zeta_{t+d})^2\}]}{\partial u_t} = 0$$

Substituindo-se estas derivadas na lei de controle, obtém-se:

$$\frac{\partial I}{\partial u_t} = 2(P\hat{y}_{t+d/t} - R\omega_t) b_0 p_0 + 2(Q' u_t) q'_0 = 0$$

ou

$$P\hat{y}_{t+d/t} - R\omega_t + \frac{q'_0}{b_0 p_0} Q' u_t = 0$$

Definindo:

$$Q(z^{-1}) = \frac{q'_0}{b_0 p_0} Q'(z^{-1}) \quad (2.8)$$

obtém-se a lei de controle:

$$P\hat{y}_{t+d/t} - R\omega_t + Qu_t = 0 \quad (2.9)$$

A equação (2.9) pode ser reescrita em função das medi-

das disponíveis no instante t . Substituindo-se a equação (2.7) na equação (2.9) tem-se:

$$\frac{G}{C} y_t + \frac{BF}{C} u_t + Qu_t - R\omega_t = 0$$

Portanto,

$$G y_t + (BF + QC)u_t - RC \omega_t = 0$$

Definindo-se:

$$H = BF + QC \tag{2.10}$$

$$E = -RC$$

obtém-se o controle u_t a partir de:

$$G y_t + H u_t + E \omega_t = 0 \tag{2.11}$$

A equação (2.11) permite o cálculo da variável de controle u_t em cada instante de modo a minimizar a função de custo dada pela equação (1.3). Esta equação mostra que o controle, em cada instante, é obtido como uma função das medidas da saída, do controle e da referência, em instantes anteriores. É importante também observar que a lei de controle dada pela equação (2.11) depende dos parâmetros do sistema a controlar que, em geral, são desconhecidos. Neste caso, torna-se necessária uma estimação "on line".

2.3. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Nesta seção é apresentado em esquema de estimação de parâmetros para o controlador auto-ajustável de variância mínima generalizada.

Conforme citado anteriormente, este controlador utiliza, na lei de controle deduzida na seção anterior, os parâmetros estimados em substituição aos parâmetros reais e desconhecidos do sistema.

Assim, um procedimento plausível é estimar os parâmetros do sistema, descrito pela equação (1.1), utilizar estes valores estimados no cálculo dos polinômios F e G através da equação (2.2) e, finalmente, obter os parâmetros do controlador através das equações (2.10) e (2.11). A este procedimento dá-se o nome de estimação explícita [25].

Entretanto, neste trabalho, adotar-se-á como em [9], um procedimento diferente denominado estimação implícita, que consiste em estimar diretamente os polinômios H, G e E da lei de controle dada pela equação (2.11). Com este procedimento, elimina-se o cálculo dos polinômios F e G através da solução da identidade descrita pela equação (2.2). A seguir, deduz-se um esquema de estimação implícita, a partir de medidas das variáveis do sistema.

Para tanto, define-se inicialmente a variável auxiliar dada pela equação (2.12).

$$\phi_{t+d} = Py_{t+d} + Qu_t - R\omega_t \quad (2.12)$$

Define-se também a previsão da variável auxiliar ϕ_{t+d} condicionada à observação J_t , conforme a equação (2.13):

$$\hat{\phi}_{t+d/t} = P\hat{y}_{t+d/t} + Qu_t - R\omega_t \quad (2.13)$$

A partir da equação (2.6) é possível escrever a equação (2.14) que relaciona as equações (2.12) e (2.13).

$$\phi_{t+d} = \hat{\phi}_{t+d/t} + F\zeta_{t+d} \quad (2.14)$$

Substituindo-se a equação (2.7) na equação (2.13) e utilizando a equação (2.10), é possível reescrever a equação de previsão da variável auxiliar como uma função dos parâmetros do controlador, portanto:

$$\hat{\phi}_{t+d/t} = \frac{G y_t + H u_t + E \omega_t}{C} \quad (2.15)$$

Como o controle em cada instante é obtido de modo a anular o lado direito desta equação, tem-se que, em cada instante, a variável $\hat{\phi}_{t+d/t}$ é anulada.

Os parâmetros a serem estimados são os coeficientes dos polinômios G, H e E e esta estimação deve ser realizada a partir das medidas disponíveis. A seguir define-se o vetor de parâmetros θ a ser estimado e o vetor de medidas x_t conforme as equações (2.16) e (2.17):

$$\theta^T = [g_0 \ g_1 \ \dots \ h_0 \ h_1 \ \dots \ e_0 \ e_1 \ \dots] \quad (2.16)$$

$$x_t^T = [y_t \ y_{t-1} \ \dots \ u_t \ u_{t-1} \ \dots \ \omega_t \ \omega_{t-1} \ \dots] \quad (2.17)$$

A previsão da saída auxiliar, descrita pela equação (2.15) pode agora ser reescrita conforme a equação (2.18):

$$\hat{\phi}_{t+d/t} = \frac{x_t^T \theta}{C} \quad (2.18)$$

Substituindo-se a equação (2.18) na equação (2.14), obtêm-se:

$$\phi_{t+d} = \frac{x_t^T \theta}{C} + F \zeta_{t+d}$$

ou

$$C \phi_{t+d} = x_t^T \theta + CF \zeta_{t+d}$$

e

$$\phi_{t+d} = x_t^T \theta + CF \zeta_{t+d} + (1-C) \phi_{t+d}$$

Substituindo-se a variável auxiliar dada pela equação

(2.14) no lado direito da equação anterior, obtêm-se:

$$\phi_{t+d} = x_t^T \theta + CF\zeta_{t+d} + (1-C) [\hat{\phi}_{t+d/t} + F\zeta_{t+d}]$$

ou

$$\phi_{t+d} = x_t^T \theta + [(1-C)\hat{\phi}_{t+d/t} + F\zeta_{t+d}] \quad (2.19)$$

Como o controle é obtido de forma a anular a previsão da variável auxiliar em todos os instantes de tempo, tem-se que:

$$\phi_{t+d} = x_t^T \theta + F\zeta_{t+d} \quad (2.20)$$

Como a perturbação $F\zeta_{t+d}$ é independente das medidas disponíveis no instante t , tem-se que quando é utilizada a lei de controle descrita pela equação (2.11), a perturbação dada na equação (2.19) também é independente do vetor de medidas x_t .

Os parâmetros do controlador são obtidos através de um estimador dos mínimos quadrados recursivo que utiliza a equação (2.21) a seguir:

$$\boxed{\phi_t = x_{t-d}^T \theta + F\zeta_t} \quad (2.21)$$

Esta equação é idêntica à equação (2.20), porém é dada em função das medidas disponíveis no instante t .

Prova-se [26] que neste caso o estimador dos parâmetros do controlador será assintoticamente não polarizado.

Caso não se utilize a lei de controle descrita pela equação (2.11), a perturbação dada na equação (2.19) é correlata com o vetor de medidas x_t e a estimação é polarizada.

A seguir são apresentadas as fórmulas recursivas deste estimador. A dedução destas fórmulas pode ser encontrada na ref. [26].

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t [\phi_t - x_{t-d}^T \hat{\theta}_{t-1}] \\ K_t = P_{t-1} x_{t-d} (1 + x_{t-d}^T P_{t-1} x_{t-d})^{-1} \\ P_t = P_{t-1} - K_t (1 + x_{t-d}^T P_{t-1} x_{t-d}) K_t^T \end{array} \right. \quad (2.22)$$

As equações (2.22) permitem que, a cada instante, a estimação $\hat{\theta}_t$ seja refinada utilizando-se a nova medida ϕ_t e o valor da estimação no instante anterior.

A matriz P_t é proporcional à matriz de covariância e dá uma medida da dispersão dos parâmetros estimados.

Finalmente, é importante observar que, como em todo estimador recursivo, são necessárias inicializações para o vetor $\hat{\theta}_t$ e a matriz P_t . Estas inicializações traduzem o conhecimento "a priori" sobre o sistema.

2.4. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS INDEPENDENTE DA FUNÇÃO DE CUSTO

O esquema de estimação deduzido na seção anterior estima diretamente os parâmetros do controlador, isto é, os coeficientes dos polinômios G, H e E.

Entretanto, estes polinômios dependem da função de custo dada pela equação (1.3), conforme as equações (2.2) e (2.10) reescritas a seguir:

$$\frac{PC}{A} = F + z^{-d} \frac{G}{A}$$

$$H = BF + QC$$

$$E = -RC$$

Neste trabalho os polinômios da função de custo poderão ser alterados "on-line" resultando num problema de estimação de parâmetros variantes no tempo, o que pode comprometer a convergência do estimador dado pela equação (2.22).

Em Clarke [27] é apresentado um algoritmo em que a esti

mação dos parâmetros do controlador é independente do polinômio Q , dependendo entretanto do polinômio P . Nesta seção deduz-se um esquema alternativo de estimação, inicialmente proposto por Hughes [22], em que os parâmetros estimados são independentes da função de custo. Obtém-se um novo esquema de estimação implícita, impondo-se uma condição ao polinômio $P(z^{-1})$. Em seguida mostra-se que a informação trazida pelos polinômios da função de custo, pode ser incluída no vetor de medidas x_t .

Supõe-se, como em Hughes [22], que o polinômio P seja da forma descrita pela equação (2.23):

$$P = 1 + z^{-d} P^* \quad (2.23)$$

onde P^* é um polinômio qualquer na ordem npa .

Na seção 3.3 mostra-se que esta condição não restringe a alocação dos polos do sistema em malha fechada.

Na seção 3.5 discute-se a influência desta escolha sobre o problema de minimização proposto para o cálculo do controlador.

Com o novo polinômio P pode-se reescrever a identidade (2.2), obtendo-se a equação (2.24):

$$\frac{(1 + z^{-d} P^*) C}{A} = F + z^{-d} \frac{G}{A}$$

$$\frac{C}{A} = F + z^{-d} \frac{[G - P^* C]}{A} \quad (2.24)$$

Definindo o polinômio G' conforme a equação (2.25):

$$G' = G - P^* C \quad (2.25)$$

a equação (2.24) pode ser reescrita como segue:

$$\frac{C}{A} = F + z^{-d} \frac{G'}{A} \quad (2.26)$$

A identidade (2.26) mostra que os polinômios F e G' dependem somente dos polinômios C e A , isto é, são independentes dos polinômios de ponderação P , Q e R da função de custo.

A equação utilizada para estimação pode ser modificada de modo a ser obtida independente dos polinômios de ponderação, como é mostrado a seguir:

Reescrevendo a equação (2.21) e utilizando as equações (2.16) e (2.17), obtêm-se a seguinte expressão para a variável auxiliar ϕ_t :

$$\phi_t = G y_{t-d} + H u_{t-d} + E \omega_{t-d} + F \zeta_t$$

Substituindo os polinômios G , H e E , dados pelas equações (2.10) e (2.25), na equação anterior obtêm-se:

$$\phi_t = G' y_{t-d} + BF u_{t-d} + C [P y_{t-d} + Q u_{t-d} - R \omega_{t-d}] + F \zeta_t$$

Definindo V_t conforme a equação (2.27),

$$V_t = P y_t + Q u_t - R \omega_t \quad (2.27)$$

obtêm-se a variável auxiliar ϕ_t como:

$$\phi_t = G' y_{t-d} + BF u_{t-d} + C V_{t-d} + F \zeta_t \quad (2.28)$$

A equação (2.28) mostra que se pode estimar os coeficientes dos polinômios G' , BF e C , todos eles independentes dos polinômios de ponderação P , Q e R da função de custo. Como o termo independente do polinômio C é igual a um, pode-se definir:

$$C' = C - 1 \quad (2.29)$$

e a equação (2.28) fica:

$$\phi_t - V_{t-d} = G'y_{t-d} + BFu_{t-d} + C'V_{t-d} + F\zeta_t$$

Substituindo na expressão acima os valores de ϕ_t e V_{t-d} , dados pelas equações (2.12) e (2.27), obtêm-se a equação (2.30).

$$\phi_t - V_{t-d} = y_t = G'y_{t-d} + BFu_{t-d} + C'V_{t-d} + F\zeta_{t-d} \quad (2.30)$$

Neste trabalho, utilizar-se-á a expressão acima para estimação dos coeficientes dos polinômios G' , BF e C' .

A equação (2.30) para estimação dos parâmetros do controlador pode ser reescrita como segue:

$$\boxed{y_t = x'_{t-d} \theta' + F\zeta_t} \quad (2.31)$$

onde:

$$\theta'^T = [g'_0 \ g'_1 \ \dots \ bf_0 \ bf_1 \ \dots \ c_1 \ c_2 \ \dots] \quad (2.32)$$

$$x'^T_t = [y_t \ y_{t-1} \ \dots \ u_t \ u_{t-1} \ \dots \ V_{t-1} \ V_{t-2} \ \dots] \quad (2.33)$$

Estima-se o vetor θ' através do estimador dos mínimos quadrados recursivo cujas fórmulas são dadas pelas equações (2.34) a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}'_t = \hat{\theta}'_{t-1} - K_t [y_t - x'^T_{t-d} \hat{\theta}'_{t-1}] \\ K_t = P_{t-1} x'_{t-d} (1 + x'^T_{t-d} P_{t-1} x'_{t-d})^{-1} \\ P_t = P_{t-1} - K_t (1 + x'^T_{t-d} P_{t-1} x'_{t-d}) K_t^T \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Observa-se que o vetor de parâmetros estimados dado pela equação (2.32) só contém parâmetros independentes dos polinômios P^* , Q e R , sendo que o vetor de medidas, dado pela equação

(2.33), contém valores de V_t que introduzem a influência dos polinômios P^* , Q e R . Esta separação é possível devido à condição imposta pela equação (2.23) que torna a parte imprevisível da variável auxiliar ϕ_{t+d} , independente do polinômio P .

A seguir, reescreve-se a lei de controle em função do novo vetor de parâmetros estimados.

Substituindo-se as equações (2.10) e (2.25) na lei de controle dada pela equação (2.11) obtém-se:

$$G'y_t + BFu_t + C[P^*y_t + Qu_t - R\omega_t] = 0$$

Substituindo-se o termo entre colchetes por sua definição dada pela equação (2.27):

$$G'y_t + BFu_t + CV_t = 0$$

Substituindo o polinômio C de acordo com a equação (2.29):

$$G'y_t + BFu_t + C'V_t + V_t = 0$$

Finalmente, usando as equações (2.31) e (2.32), a lei de controle pode ser escrita conforme a equação (2.35) a seguir:

$$\boxed{x_t' T \theta' + V_t = 0} \quad (2.35)$$

Em síntese o polinômio P definido pela equação (2.23) permite que:

- i) Os parâmetros estimados sejam independentes dos polinômios de ponderação P , Q e R .
- ii) Estes polinômios influenciem somente o vetor de medidas x_t' .

Pode-se portanto alterar os polinômios da função de

custo durante o processo, sem resultar em estimação de parâmetros variantes no tempo.

2.5. SÍNTESE DO ALGORÍTMO DE CONTROLE DE VARIÂNCIA MÍNIMA GENERALIZADA

O algoritmo para cálculo do controle u_t é resumido como segue:

Passo 1) Inicialização do vetor θ'_0 e da matriz de covariância P_0

Passo 2) Aquisição da medida da saída y_t

Passo 3) Cálculo da variável escalar V_{t-d} dada pela equação (2.27)

$$V_{t-d} = P^*y_{t-d} + Qu_{t-d} - R\omega_{t-d}$$

Passo 4) Atualização da estimação dos parâmetros através do estimador mínimos quadrados recursivo:

$$\hat{\theta}'_t = \hat{\theta}'_{t-1} + K_t [y_t - x'_{t-d} \hat{\theta}'_{t-1}]$$

$$K_t = P_{t-1} x'_{t-d} (1 + x'_{t-d} P_{t-1} x'_{t-d})^{-1}$$

$$P_t = P_{t-1} - K_t (1 + x'_{t-d} P_{t-1} x'_{t-d}) K_t^T$$

Passo 5) Cálculo da variável de controle u_t , de modo a satisfazer a equação (2.35):

$$x_t^T \hat{\theta}'_t + V_t = 0$$

Passo 6) Volta ao passo 2.

2.6. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA - POLOS EM MALHA FECHADA

Nesta seção são deduzidas para o sistema em malha fechada, as funções de transferência entre os sinais de saída e controle e os sinais de referência e ruído. A partir das funções de transferência apresentadas determina-se a equação característica do sistema em malha fechada, que permitirá analisar a relação entre os polinômios P, Q e R da função de custo e os polos em malha fechada do sistema.

Obtêm-se o diagrama de blocos do sistema controlado a partir da lei de controle dada pela equação (2.11) e do modelo do sistema descrito pela equação (1.1). Estas equações são reescritas a seguir e o diagrama de blocos é dado na Fig. 2.1.

$$u_t = -\frac{G}{H} y_t - \frac{E}{H} \omega_t \quad (2.11)$$

$$y_t = z^{-d} \frac{B}{A} u_t + \frac{C}{A} \zeta_t \quad (1.1)$$

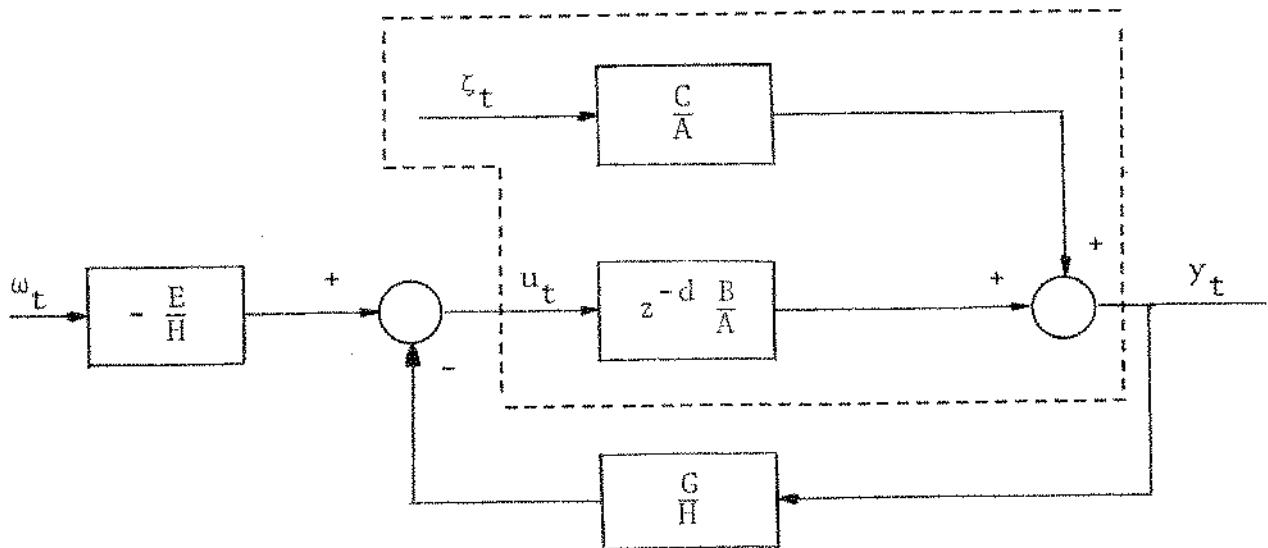


Fig. 2.1 - Diagrama de blocos do sistema controlado.

Para o cálculo das funções de transferência entre o sinal de saída e o sinal de referência e o ruído, substitui-se a lei de controle (equação (2.11)) na equação do sistema (1.1), conforme descrito a seguir:

$$Ay_t = z^{-d} B \left[-\frac{G}{H} y_t - \frac{E}{H} \omega_t \right] + C\zeta_t$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior pelo polinômio H, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 AH y_t &= z^{-d} [-BG y_t - BE\omega_t] + HC \zeta_t \\
 (AH + z^{-d}BG) y_t &= -z^{-d} BE \omega_t + HC \zeta_t
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

O termo do lado esquerdo da equação (2.36), pode ser reescrito, em função dos polinômios P e Q da função de custo, como segue:

$$AH + z^{-d} BG = A(BF + QC) + B(PC - AF) = C(BP + AQ)
 \tag{2.37}$$

Substituindo-se a equação (2.37) na equação (2.36), obtêm-se:

$$C(BP + AQ) y_t = -z^{-d} BE\omega_t + HC \zeta_t$$

Finalmente, substituindo-se o polinômio E dado pela equação (2.10), na equação acima, obtêm-se as funções de transferência, conforme a equação (2.38) dada a seguir:

$$\boxed{y_t = z^{-d} \frac{BR}{BP+AQ} \omega_t + \frac{H}{BP+AQ} \zeta_t}
 \tag{2.38}$$

As funções de transferência entre o sinal de controle e o sinal de referência e o ruído são obtidas de maneira análoga. Substituindo-se a equação (1.1) que modela o sistema na lei de controle dada pela equação (2.11) obtêm-se:

$$Hu_t = -G \left[z^{-d} \frac{B}{A} u_t + \frac{C}{A} \zeta_t \right] - E\omega_t$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior pelo polinômio A, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 AH u_t &= -z^{-d} BG u_t - GC \zeta_t - AE \omega_t \\
 (AH + z^{-d} BG) u_t &= -GC \zeta_t - AE \omega_t
 \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo o termo do lado esquerdo da equação anterior de acordo com a equação (2.37) e o polinômio E, de acordo com a equação (2.10), obtêm-se as funções de transferência conforme a equação (2.39) dada a seguir:

$$u_t = - \frac{G}{BP+AQ} \zeta_t + \frac{AR}{BP+AQ} \omega_t \quad (2.39)$$

É importante observar que as funções de transferência dadas pelas equações (2.38) e (2.39) são escritas em função do operador atraso z^{-1} . Para que os polos e zeros destas funções possam ser definidos é necessário que estas equações sejam reescritas em função do operador avanço z .

Esta transformação é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador de uma função de transferência por z^{n_1} onde n_1 é a maior ordem entre os polinômios do numerador e do denominador. Após a transformação, o polinômio de menor ordem apresentará $n_1 - n_2$ zeros na origem, onde n_2 é a menor ordem entre os polinômios do numerador e do denominador.

Portanto, as funções de transferência dadas pelas equações (2.38) e (2.39) apresentam os seguintes polos em malha fechada:

- i) Os valores de z que anulam a equação algébrica dada pela equação (2.40) a seguir:

$$B(z^{-1}) P(z^{-1}) + A(z^{-1}) Q(z^{-1}) = 0 \quad (2.40)$$

- ii) Polos na origem, em número que depende das ordens do numerador e do denominador da função de transferência.

Os polos localizados na origem tem influência somente no atraso da resposta do sistema, e neste trabalho considerar-se-á como equação de alocação dos polos do sistema em malha fechada a equação polinomial (2.41) escrita a seguir:

$$B(z^{-1}) P(z^{-1}) + A(z^{-1}) Q(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (2.41)$$

onde $T(z^{-1})$ é um polinômio tal que os valores de z que o anulam são os polos desejados em malha fechada.

As equações (2.38) e (2.39) mostram a influência dos polinômios da função de custo sobre as variáveis de saída e de controle do sistema. Os polos do sistema em malha fechada localizados fora da origem são dados pela solução da equação algébrica (2.40) e portanto os polinômios P e Q devem ser escolhidos de modo a satisfazer a equação polinomial (2.41).

Os resultados resumidos neste capítulo serão utilizados no capítulo 3 para o cálculo dos polinômios da função de custo de modo a resultar num controlador com comportamento determinístico especificado pelos polos do sistema em malha fechada e com comportamento estocástico otimizado, conforme citado no capítulo 1.

CAPÍTULO 3

ALOCÇÃO DE POLOS E MINIMIZAÇÃO DAS VARIÂNCIAS DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é apresentado um novo método para o cálculo dos polinômios da função de custo que, além de alocar os polos em malha fechada do sistema em posições especificadas pelo usuário, minimiza uma combinação linear das variâncias dos sinais de saída e de controle dada pela equação a seguir:

$$\Delta = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t$$

onde α_1 e α_2 são números reais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$.

Para tanto utiliza-se o fato de que a equação (2.41) não tem solução única, como apontado por diversos autores [28] e, através de acréscimos sobre as ordens dos polinômios P e Q, resolve-se o problema mais geral indicado pela equação (3.1) a seguir:

$\begin{array}{ll} \min: & \Delta = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t \\ & P, Q \\ \text{s.a.} & BP + AQ = T \end{array}$	(3.1)
---	-------

A solução do problema apresentado na equação (3.1) permite obter os polinômios P e Q a partir de especificações simples, tais como os polos desejados em malha fechada e os parâmetros α_1 e α_2 , que podem ser ajustados através de um simples dial.

Inicialmente, na seção 3.2, são apresentadas as características dos polinômios de ponderação P, Q e R de modo a se obter um controlador em que os parâmetros estimados sejam independentes dos polinômios da função de custo, conforme a seção 2.4, e o erro em regime para uma mudança na referência em degrau seja nulo.

Na seção 3.3 são dadas as condições de existência de solução para a equação de alocação de polos e, a partir delas, de

duzidas as ordens mínimas para os polinômios P e Q de modo que a solução existente seja única. Analisa-se então a influência de acréscimos sobre as ordens mínimas obtidas, em termos de:

- i) grau de liberdade para escolha da solução da equação de alocação de polos,
- ii) conseqüências sobre as ordens do controlador,
- iii) conseqüências sobre as funções de transferência em malha fechada.

Na seção 3.4 é mostrado que a equação de alocação de polos pode ser escrita em função dos coeficientes dos polinômios estimados G' , BF e C , uma vez que os polinômios A e B que aparecem na equação de alocação de polos não serão diretamente estimados.

Na seção 3.5 define-se o problema de minimização dado pela equação 3.1 expressando-se as variâncias dos sinais de saída e de controle em função dos coeficientes dos polinômios P e Q . Na seção 3.6 é apresentada a solução deste problema.

Na seção 3.7 mostra-se que o valor mínimo do problema apresentado pela equação (3.1) nunca aumenta quando incrementa-se as ordens dos polinômios de ponderação P e Q . Garante-se portanto que a maior complexidade do controlador resultante traduzir-se-á sempre em melhoria no comportamento estocástico do sistema. Resta, de um ponto de vista prático, escolher ou limitar o número de acréscimos quando a melhoria é pouco significativa.

3.2. CARACTERÍSTICAS DOS POLINÔMIOS DE PONDERAÇÃO DA FUNÇÃO DE CUSTO

Neste trabalho impõem-se as seguintes condições sobre os polinômios da função de custo:

- a) O polinômio P deve satisfazer a equação (2.23) reescrita a seguir:

$$P = 1 + z^{-d} P^* \quad (2.23)$$

Conforme visto na seção 2.4, esta condição permite que os parâmetros estimados sejam independentes dos polinômios da função de custo.

b) Os polinômios Q e R devem satisfazer as equações (3.2) e (3.3) a seguir:

$$Q = (1 - z^{-1}) Q^* \quad (3.2)$$

$$R(1) = P(1) \quad (3.3)$$

onde Q^* é um polinômio qualquer de ordem n_q .

O objetivo destas condições é obter erro nulo em regime para um sinal de referência em degrau.

As influências da condição imposta sobre o polinômio P na alocação de polos e na minimização do problema proposto serão discutidas respectivamente nas seções 3.3 e 3.5. As condições sobre os polinômios Q e R são usuais nas aplicações e são obtidas a partir do teorema do valor final da teoria de transformadas Z , apresentado a seguir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z)$$

onde $X(z)$ é a transformada Z do sinal temporal x_t .

De acordo com a equação (2.38) o sinal de saída é dado pela seguinte equação:

$$y_t = z^{-d} \frac{BR}{BP+AQ} \omega_t + \frac{H}{BP+AQ} \zeta_t$$

Considerando somente a parte determinística do sinal, posto que a parte estocástica tem média nula, a transformada de y_t é dada por:

$$Y(z) = z^{-d} \frac{BR}{BP+AQ} \omega(z)$$

A transformada z de uma referência em degrau de amplitude ψ é dada por:

$$\omega(z) = \frac{\psi z}{z-1}$$

Aplicando o teorema do valor final obtêm-se o valor em regime da saída

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot z^{-d} \frac{BR}{BP+AQ} \cdot \frac{\psi z}{z-1}$$

Para $Q=(1-z^{-1})Q^*$, tem-se que $Q(1)=0$, portanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{BR}{BP} \psi = \frac{R(1)}{P(1)} \psi$$

Assim, para se obter o erro em regime nulo, para uma referência em degrau, é suficiente ter-se que:

$$\begin{cases} Q = (1-z^{-1})Q^* \\ R(1) = P(1) \end{cases}$$

O polinômio R não influi na posição dos polos do sistema em malha fechada nem no comportamento estocástico dos sinais de saída e de controle, conforme as equações (2.38) e (2.39). Sua influência restringe-se à definição dos zeros das funções de transferência entre os sinais de saída e controle e o sinal de referência. Neste trabalho, a especificação do comportamento determinístico limita-se à alocação dos polos em malha fechada e à garantia de erro nulo em regime para uma referência em degrau. Portanto, assume-se a condição mais simples para o polinômio R , dada pela equação (3.4) a seguir:

$$R = \text{const} = P(1) \quad (3.4)$$

Em resumo, os polinômios da função de custo dada pela equação (2.3) estarão sujeitos às seguintes condições:

$$P = 1 + z^{-d} P^*$$

$$Q = (1-z^{-1})Q^*$$

$$R = P(1)$$

A partir deste ponto, o objetivo deste trabalho limita-se à obtenção dos polinômios P^* e Q^* , pois a partir deles estarão definidos os polinômios P , Q e R da função de custo do controlador de variância mínima generalizada. Deste modo, reescreve-se a equação de alocação de polos dada pela equação (2.41) em função dos polinômios P^* e Q^* . Para tanto, substituem-se as equações (2.23) e (3.2) na equação de alocação de polos, obtendo-se a equação (3.5) a seguir:

$$BP + AQ = T$$

$$B(1+z^{-d} P^*) + A(1-z^{-1})Q^* = T$$

$$\boxed{z^{-d} BP^* + A(1-z^{-1})Q^* = T - B} \quad (3.5)$$

A equação (3.5) permite obter os polinômios P^* e Q^* a partir dos parâmetros de sistema e dos polos especificados em malha fechada. Na seção seguinte, serão discutidos alguns aspectos da solução desta equação, bem como definidas as ordens dos polinômios P^* e Q^* .

3.3. EQUAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE POLOS E ORDENS DOS POLINÔMIOS DA FUNÇÃO DE CUSTO

Nesta seção são apresentadas as condições de existência de solução para a equação de alocação de polos e, a partir delas, são deduzidas as ordens mínimas para os polinômios P^* e Q^* . Mostra-se então, que acréscimos sobre as ordens mínimas obtidas levam à existência de múltiplas soluções para esta equação. Estes resultados são conhecidos da teoria de equações polinomiais [28], sendo entretanto deduzidos nesta seção para melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

A equação de alocação de polos dada pela equação (3.5) permite obter os polinômios P^* e Q^* em função dos polinômios A , B e T . Obtêm-se estes polinômios de ponderação através da solução de um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* e cujas equações são obtidas da identificação de termos de mesma potência, dos polinômios do

dois lados da equação (3.5).

O número de incógnitas do sistema de equações obtido, definido a partir deste ponto por n_{in} , é igual ao número de coeficiente do polinômio P^* e Q^* , conforme a equação (3.6) a seguir:

$$n_{in} = n_{pa} + n_{qa} + 2 \quad (3.6)$$

O número de equações, definido por n_{eq} , é função da maior ordem existente entre os polinômios do lado esquerdo da equação (3.5), conforme a equação (3.7) dada a seguir:

$$n_{eq} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d + n_{pa} \\ n_a + 1 + n_{qa} \end{array} \right\} + 1 \quad (3.7)$$

3.3.1. Condições de existência de solução para a equação de alocação de polos

Para que a equação (3.5) tenha solução para um polinômio T qualquer, o polinômio do lado esquerdo desta equação deve ter ordem maior ou igual à do polinômio do lado direito da equação, assim, uma condição para existência de solução é expressa pela equação (3.8), escrita a seguir:

$$n_T \leq \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d + n_{pa} \\ n_a + 1 + n_{qa} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

Sabe-se também que para um sistema de equações lineares tenha solução, o número de incógnitas deve ser maior ou igual ao número de equações; portanto, outra condição de existência de solução para a equação (3.5) é dada pela equação (3.9):

$$n_{in} \geq n_{eq} \quad (3.9)$$

3.3.2. Especificação do número de polos em malha fechada

Neste trabalho, a análise refere-se principalmente ao caso em que a identidade polinomial dada pela equação (3.5) é regular, ou seja, a equação (3.10) a seguir é satisfeita:

$$\max \begin{pmatrix} n_T \\ n_b \end{pmatrix} \leq n_a + n_b + d$$

ou

$$n_T \leq n_a + n_b + d \quad (3.10)$$

Se a identidade polinomial dada pela equação (3.5) não for regular, n_T é dado pela equação a seguir:

$$n_T = n_a + n_b + d + k$$

onde k é um inteiro positivo.

De um ponto de vista prático, o primeiro caso (identidade regular) é o que interessa dado que o polinômio T especificado será normalmente de ordem baixa.

3.3.3 Ordens dos polinômios P^* e Q^*

A seguir são deduzidas as ordens mínimas para os polinômios P^* e Q^* a partir das condições de existência apresentadas pelas equações (3.8) e (3.9), supondo que a identidade polinomial dada pela equação (3.5) seja regular.

No apêndice A é mostrado, a partir das equações (3.9) e (3.10), que não há perda de generalidade em escolher n_{pa} e n_{qa} tais que a ordem do polinômio $z^{-d}BP^*$ na equação (3.5) seja igual à ordem do polinômio $A(1-z^{-1})Q^*$. Prova-se que quando um dos polinômio tem termos de ordem superior ao termo de maior ordem do outro polinômio, então, para que a equação de alocação dos polos, dada pela equação (3.5), seja satisfeita, estes termos deverão ser nulos, isto é, ambos os polinômios devem ter a mesma ordem.

Este resultado é expresso pela equação (3.11):

$$\boxed{n_b + d + npa = n_a + 1 + nqa} \quad (3.11)$$

A equação (3.11) estabelece portanto uma relação entre as ordens dos polinômios P^* e Q^* .

O número de equações do sistema linear obtido para resolução da equação (3.5), pode ser reescrito, substituindo a equação (3.11) na equação (3.7), conforme a equação (3.12), a seguir:

$$neq = n_b + d + npa + 1 = n_a + 2 + nqa \quad (3.12)$$

Para obtenção da ordem mínima do polinômio P^* , substitui-se as equações (3.6) e (3.12) na condição dada pela equação (3.9). O resultado é dado pela equação (3.13), apresentada a seguir:

$$nin \geq neq$$

$$npa + nqa + 2 \geq n_a + 2 + nqa$$

$$\boxed{npa \geq n_a} \quad (3.13)$$

Da equação anterior, conclui-se que a ordem mínima para o polinômio P^* é dada pela equação (3.14):

$$npa = n_a \quad (3.14)$$

Obtêm-se a ordem mínima para o polinômio Q^* substituindo a equação (3.14) na equação (3.11). O resultado é dado na equação (3.15):

$$nqa = n_b + d - 1 \quad (3.15)$$

As equações (3.14) e (3.15) fornecem as ordens para os polinômios P^* e Q^* de modo que exista uma única solução para o sistema de equações lineares, obtido a partir da equação de alocação de polos.

A condição de existência de solução dada pela equação (3.9) também é satisfeita quando a ordem do polinômio P^* for dada pela equação (3.16) a seguir:

$$\boxed{n_{pa} = n_a + m} \quad (3.16)$$

onde m é um número inteiro positivo que representa o número de acréscimos na ordem do polinômio P^* , além da ordem mínima necessária para existência de solução.

Neste caso a ordem do polinômio Q^* , é obtida substituindo-se a equação (3.16) na equação (3.11), conforme a equação (3.17), a seguir:

$$\boxed{n_{qa} = n_b + d - 1 + m} \quad (3.17)$$

A condição de existência de solução dada pela equação (3.8) também é satisfeita com as ordens obtidas para os polinômios P^* e Q^* .

De fato, substituindo estas ordens no lado direito da equação (3.8) obtém-se:

$$n_T \leq \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d + n_a + m \\ n_a + 1 + n_b + d - 1 + m \end{array} \right\} = n_a + n_b + d + m$$

Esta condição será satisfeita para qualquer m positivo se n_T for escolhido de maneira a satisfazer a equação (3.10).

Tem-se portanto que as equações (3.16) e (3.17) são as ordens dos polinômios P^* e Q^* que levam à existência de solução para a equação de alocação de polos dada pela equação (3.5). As ordens mínimas dadas pelas equações (3.14) e (3.15) constituem o caso particular das equações (3.16) e (3.17) em que m é nulo.

No apêndice B analisa-se o caso em que a identidade polinomial dada pela equação (3.5) não é regular. Mostra-se que para este caso, os resultados deduzidos neste capítulo continuam válidos, desde que sejam alteradas as ordens dos polinômios P^* e Q^* .

Finalmente, é importante observar que se as ordens dos polinômios P^* e Q^* satisfizerem as equações (3.16) e (3.17) os polos em malha fechada podem ser alocadas em qualquer região do plano z . Portanto, as condições impostas pelas equações (2.23) e (3.2) aos polinômios P e Q respectivamente não restringem a especificação sobre o comportamento determinístico do sistema, causando entretanto um pequeno aumento do esforço computacional, pois caso os polinômios P e Q não satisfaçam as condições impostas pelas equações (2.23) e (3.2), as ordens mínimas destes polinômios são menores que as apresentadas pelas equações (3.16) e (3.17) [21].

3.3.4. Grau de liberdade para escolha da solução da equação de alocação de polos

As ordens dos polinômios P^* e Q^* dadas pelas equações (3.16) e (3.17), substituídas nas equações (3.6) e (3.12) fornecem o número de equações e o número de incógnitas do sistema de equações lineares a ser resolvido, conforme as equações (3.18) e (3.19) dadas a seguir:

$$n_{in} = n_{pa} + n_{qa} + 2 = n_a + n_b + d + 1 + 2m \quad (3.18)$$

$$n_{eq} = n_b + d + n_{pa} + 1 = n_a + n_b + d + 1 + m \quad (3.19)$$

Tem-se portanto que:

$$n_{in} - n_{eq} = m \quad (3.20)$$

A equação (3.20) indica que o acréscimo (m) sobre as ordens mínimas de P^* e Q^* também representa a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações do sistema linear gerado pela equação de alocação de polos.

Portanto, o conjunto de soluções pode ser interpretado geometricamente como um hiperplano de dimensão m do espaço $|R^{n_{in}}$, onde $|R^{n_{in}}$ é o espaço gerado pelos vetores cujas componentes são os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* .

Deste modo, quanto maior for o acréscimo sobre as ordens mínimas dos polinômios P^* e Q^* , maior será o grau de liberdade para escolha da solução. Evidentemente, quando m é nulo, a solução é única, não havendo liberdade de escolha de solução.

Nas seções seguintes, procurar-se-á obter, para um dado m , a solução que minimiza uma combinação linear das variâncias dos sinais de saída e de controle conforme o problema proposto pela equação (3.1).

3.3.5. Ordem do controlador

O parâmetro m também está diretamente relacionado com a ordem do controlador obtido. A lei de controle, dada pela equação (2.14), é reescrita a seguir:

$$u_t = -\frac{G}{H} y_t - \frac{E}{H} \omega_t \quad (2.14)$$

Os polinômios G e H estão relacionados com os polinômios P^* e Q^* através das equações (2.25) e (2.10) reescritas a seguir:

$$G = G' + P^*C \quad (2.25)$$

$$H = BF + QC \quad (2.10)$$

O número de zeros e o número de polos do controlador em "feed-back" são dados respectivamente pelas ordens dos polinômios G e H , conforme as equações (3.21) e (3.22) a seguir:

$$n_g = \max \left\{ \begin{array}{l} n_a - 1 \\ n_{pa} + n_c \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_a - 1 \\ n_a + m + n_c \end{array} \right\} = n_a + n_c + m \quad (3.21)$$

$$n_h = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d - 1 \\ n_{qa} + n_c + 1 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d - 1 \\ n_b + d + m + n_c \end{array} \right\} = n_b + d + n_c + m \quad (3.22)$$

Conforme as equações (3.21) e (3.22) o parâmetro m também representa o acréscimo sobre o número de polos e zeros do controlador em "feed-back" e sobre o número de polos do controlador em "feed-forward".

3.3.6. Comportamento determinístico e comportamento estocástico.

Considerem-se agora as funções de transferência entre os sinais de saída e de controle e o sinal de referência e a perturbação ζ_t , dadas pelas equações (2.38) e (2.39) reescritas a seguir:

$$y_t = z^{-d} \frac{BR}{BP+AQ} \omega_t + \frac{H}{BP+AQ} \zeta_t \quad (2.38)$$

$$u_t = \frac{AR}{BP+AQ} \omega_t - \frac{G}{BP+AQ} \zeta_t \quad (2.39)$$

Tem-se que se a equação (3.5) for satisfeita, os polos alocados não são alterados pelo aumento nas ordens dos polinômios P e Q . Conseqüentemente, as funções de transferência entre os sinais de saída e de controle e o sinal de referência permanecem as mesmas, o que significa que o comportamento determinístico do sistema não se altera quando m varia.

As partes estocásticas dos sinais de saída e de controle apresentam funções de transferência cujos numeradores são respectivamente os polinômios H e G . Conforme as equações (3.21) e (3.22) as ordens destes polinômios dependem do parâmetro m , havendo portanto aumento do número de zeros das funções de transferência entre os sinais de saída e de controle e a perturbação ζ_t , quando m cresce. Portanto, de acordo com o descrito na seção 2.6, a cada acréscimo em m , acrescenta-se um polo, nestas funções de transferência, na origem do plano z .

Em conclusão tem-se que somente o comportamento estocástico do sistema é alterado quando m varia. Este fato permite que se resolva o problema dado pela equação (3.1) com um número arbitrário de acréscimo (m) sem que se altere o comportamento determinístico do sistema.

3.4. EQUAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE POLOS EM FUNÇÃO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS IMPLICITAMENTE

Nesta seção, obtém-se a equação de alocação de polos, em função dos polinômios estimados G' , BF e C .

A equação de alocação de polos é dada por:

$$z^{-d} BP^* + A(1-z^{-1})Q^* = T - B$$

Multiplicando-se ambos os lados desta equação pelo polinômio F , obtém-se:

$$z^{-d} BF P^* + AF(1-z^{-1})Q^* = FT - BF$$

A equação (2.26) dada na seção 2.4 pode ser reescrita conforme a equação a seguir:

$$AF = C - z^{-d} G'$$

Substituindo-se esta equação na equação anterior, obtém-se:

$$z^{-d} BF P^* + [(C - z^{-d} G') (1 - z^{-1})] Q^* = FT - BF$$

Definindo-se os polinômios S e \bar{F} conforme as equações (3.23) e (3.24), apresentadas a seguir:

$$S = (C - z^{-d} G') (1 - z^{-1}) \quad (3.23)$$

$$\bar{F} = F - 1 \quad (3.24)$$

obtêm-se que:

$$(z^{-d} BF)P^* + (S)Q^* - (T)\tilde{F} = T - BF \quad (3.25)$$

Portanto, a equação (3.25) permite obter os polinômios P^* , Q^* e \tilde{F} a partir dos polinômios estimados BF , G' e C e do polinômio T .

Note-se que a multiplicação da identidade dada pela equação (3.5) por F tem como conseqüência um aumento na ordem dos polinômios da identidade, o que significa um maior número de equações a serem resolvidas; em contrapartida há um aumento equivalente no número de incógnitas do problema, representadas pelos coeficientes de \tilde{F} . Em resumo, há um aumento no esforço computacional, fornecendo como resultado adicional o polinômio \tilde{F} .

A equação (3.25), apesar de levar a um sistema de equações lineares de maior ordem que o sistema obtido pela equação (3.5), é preferível nas aplicações por ser dada em função dos parâmetros estimados. No final deste capítulo serão discutidos este e alguns outros aspectos da implementação deste controlador.

Os resultados obtidos na seção anterior continuam válidos, alterando-se somente o número de incógnitas e o número de equações do sistema linear obtido. A dimensão do novo sistema de equações lineares obtido é deduzida a seguir:

O número de equações é obtido a partir da equação (3.25):

$$neq' = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + 2d + n_{pa} - 1 \\ n_a + d + n_{qa} \end{array} \right\} + 1$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) na equação anterior, obtêm-se a equação (3.26) dada a seguir:

$$neq' = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + 2d + n_a + m - 1 \\ n_a + d + n_b + d - 1 + m \end{array} \right\} + 1 = n_a + n_b + 2d + m \quad (3.26)$$

O número de incógnitas é dado pelo número de coeficientes dos polinômios P^* , Q^* e \tilde{F} , conforme a equação dada a seguir:

$$n_{in}' = n_{pa} + n_{qa} + 2 + (d-1) - 1 + 1 = n_{pa} + n_{qa} + d + 1$$

Substituindo-se as ordens dos polinômios P^* e Q^* dadas pelas equações (3.16) e (3.17) obtêm-se a equação (3.27) a seguir:

$$n_{in}' = n_a + n_b + 2d + 2m \quad (3.27)$$

A comparação das equações (3.27) e (3.18) mostra que o novo sistema de equações obtido apresenta $(d-1)$ incôgnitas a mais que o sistema de equações anterior, que é o número de coeficientes do polinômio \tilde{F} .

Conclusão idêntica se chega pela comparação das equações (3.26) e (3.19).

Como $d-1$ é em geral muito menor que o número de incôgnitas do sistema de equações obtido a partir da equação (3.5), tem-se apenas um pequeno aumento do esforço computacional.

3.5. NOVO CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO PARA OBTENÇÃO DO CONTROLADOR

O problema a ser resolvido é dado pela equação (3.1) reescrita a seguir:

$$\begin{aligned} \min: \quad \Delta &= \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t \\ P, Q & \\ \text{s.a.} \quad BP + AQ &= T \end{aligned} \quad (3.1)$$

O que se pretende portanto é alocar os polos em malha fechada, minimizando uma soma ponderada das variâncias dos sinais de saída e de controle.

O comportamento determinístico é especificado pela escolha dos polos em malha fechada e o comportamento estocástico pelos parâmetros α_1 e α_2 , cujo ajuste pode ser realizado através de um simples dial, e pelo parâmetro m , que também influencia o valor ótimo da função Δ .

A seguir reescreve-se o problema dado pela equação (3.1) em função dos polinômios P^* e Q^* obtidos na seção 3.2.

Os polinômios P e Q estão sujeitos às condições dadas pelas equações (2.23) e (3.2), rerepresentadas abaixo:

$$P = 1 + z^{-d} P^* \quad (2.23)$$

$$Q = (1 - z^{-1}) Q^* \quad (3.2)$$

Portanto, utilizando a equação (3.5), o problema apresentado em (3.1) pode ser reescrito conforme a equação abaixo:

$\begin{aligned} \min: \quad & \Delta = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t \\ & P^*, Q^* \\ \text{s.a.} \quad & z^{-d} B P^* + A(1 - z^{-1}) Q^* = T - B \end{aligned}$
--

Para maior facilidade de manipulação, o problema acima é, nesta seção, expresso em forma matricial. Inicialmente, são deduzidas as expressões das variâncias dos sinais de saída e de controle em função dos coeficientes dos polinômios P^* e Q^* . Em seguida, é apresentada a forma matricial da função objetivo e das restrições do problema. Na seção 3.6 é apresentada a solução do problema.

3.5.1. Cálculo das variâncias dos sinais de saída e de controle

Para que se possa expressar as variâncias dos sinais de saída e de controle em forma matricial, definem-se os vetores p , q e x a partir dos coeficientes dos polinômios P^* e Q^* conforme as equações (3.28), (3.29) e (3.30) a seguir:

$$p = \begin{bmatrix} p_0^* \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{npa}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{npa+1} \quad (3.28)$$

$$q = \begin{bmatrix} q_0^* \\ q_1^* \\ \vdots \\ q_{npa}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nqa+1} \quad (3.29)$$

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nin} \quad (3.30)$$

As partes estocásticas dos sinais de saída e controle do sistema em malha fechada deduzidas na seção 2.6, são obtidas anulando-se a referência ($\omega_t=0$) nas equações (2.38) e (2.39), reescritas a seguir:

$$y_t = \frac{H}{BP+AQ} \zeta_t \quad (2.38)$$

$$u_t = \frac{-G}{BP+AQ} \zeta_t \quad (2.39)$$

Os polinômios G e H, utilizados neste trabalho, são dados pelas equações (2.25) e (2.10) reescritas a seguir:

$$G = G' + P^*C \quad (2.25)$$

$$H = BF + QC \quad (2.10)$$

Substituindo-se as equações (2.25) e (2.10) nas equações (2.38) e (2.39), obtêm-se:

$$y_t = \frac{BF+QC}{BP+AQ} \zeta_t = \frac{BF}{BP+AQ} \zeta_t + Q^* \frac{(1-z^{-1})C}{BP+AQ} \zeta_t$$

e

$$u_t = \frac{G'+P^*C}{BP+AQ} \zeta_t = \frac{G'}{BP+AQ} \zeta_t + P^* \frac{C}{BP+AQ} \zeta_t$$

No problema proposto, em que a equação de alocação de polos é satisfeita, tem-se de acordo com a equação (2.41) que:

$$BP + AQ = T$$

Substituindo-se esta equação nas equações anteriores, obtêm-se as equações da saída e da entrada dadas a seguir:

$$y_t = \frac{BF}{T} \zeta_t + Q^* \frac{(1-z^{-1})C}{T} \zeta_t \quad (3.31)$$

$$u_t = -\frac{G'}{T} \zeta_t - P^* \frac{C}{T} \zeta_t \quad (3.32)$$

Definindo-se os sinais v_1 , v_2 , v_3 e v_4 de acordo com as equações (3.33) apresentadas a seguir:

$$v_1(t) = \frac{BF}{T} \zeta_t$$

$$v_2(t) = \frac{(1-z^{-1})C}{T} \zeta_t$$

$$v_3(t) = \frac{G'}{T} \zeta_t$$

$$v_4(t) = \frac{C}{T} \zeta_t$$

(3.33)

podem-se reescrever as equações (3.31) e (3.32) conforme as equações (3.34) e (3.35) abaixo:

$$y_t = v_1 + Q^* v_2 \quad (3.34)$$

$$u_t = -v_3 - P^* v_4 \quad (3.35)$$

Das equações anteriores, tem-se que, se a equação de alocação de polos for satisfeita, as perturbações v_1 , v_2 , v_3 e v_4

independem dos polinômios P^* e Q^* .

Deve-se ressaltar que a condição imposta sobre o polinômio P , dada pela equação (2.23), permite que o polinômio G seja escrito como a soma de uma parcela dependente do polinômio P e outra independente, conforme a equação (2.25). Caso esta separação não existisse, não seria imediata a definição de perturbações independentes do polinômio P , (v_1, v_3, v_4) , devido à relação entre os polinômios P , F e G dada pela identidade polinomial (2.2).

As variâncias dos sinais de saída e de controle podem ser obtidas em função das perturbações definidas pela equação (3.33) e dos polinômios P^* e Q^* , conforme as equações (3.36) e (3.37) abaixo:

$$\text{var } y_t = E\{y_t^2\} = E\{v_1^2\} + 2E\{v_1 \cdot Q^*v_2\} + E\{(Q^*v_2)^2\} \quad (3.36)$$

$$\text{var } u_t = E\{u_t^2\} = E\{v_3^2\} + 2E\{v_3 \cdot P^*v_4\} + E\{(P^*v_4)^2\} \quad (3.37)$$

Para simplificação da notação utilizada, definem-se as funções de covariância e autocovariância das perturbações v_1, v_2, v_3 e v_4 conforme as equações (3.38) abaixo:

$$\begin{aligned} \gamma_1(k) &= E\{v_1(t) \cdot v_1(t-k)\} \\ \gamma_2(k) &= E\{v_2(t) \cdot v_2(t-k)\} \\ \gamma_{12}(k) &= E\{v_1(t) \cdot v_2(t-k)\} \\ \gamma_3(k) &= E\{v_3(t) \cdot v_3(t-k)\} \\ \gamma_4(k) &= E\{v_4(t) \cdot v_4(t-k)\} \\ \gamma_{34}(k) &= E\{v_3(t) \cdot v_4(t-k)\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

A seguir, deduz-se a forma matricial de cada parcela das equações (3.36) e (3.37).

A segunda parcela do lado direito da equação (3.36) pode ser reescrita conforme segue:

$$E\{v_1 Q^* v_2\} = E\{q_0^* v_1(t) v_2(t) + q_1^* v_1(t) v_2(t-1) + \dots \\ \dots + q_{nqa}^* v_1(t) v_2(t-nqa)\}$$

Substituindo-se, nesta equação, as definições dadas pelas equações (3.38), obtêm-se:

$$E\{v Q^* v_2\} = q_0^* \gamma_{12}(0) + q_1^* \gamma_{12}(1) + \dots + q_{nqa}^* \gamma_{12}(nqa)$$

Definindo-se o vetor $\omega_1 \in \mathbb{R}^{nqa+1}$ conforme a equação (3.39):

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{12}(0) \\ \vdots \\ \gamma_{12}(nqa) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nqa+1} \quad (3.39)$$

obtêm-se o resultado dado pela equação (3.40):

$$E\{v_1 \cdot Q^* v_2\} = \omega_1^T q \quad (3.40)$$

Analogamente, a segunda parcela do lado direito da equação (3.39) é dada pela equação (3.41) a seguir:

$$E\{v_3 \cdot P^* v_4\} = \omega_2^T p \quad (3.41)$$

onde:

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{34}(0) \\ \vdots \\ \gamma_{34}(npa) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{npa+1} \quad (3.42)$$

A terceira parcela do lado direito da equação (3.36) também pode ser reescrita, de acordo com a equação abaixo:

$$E\{(Q^*v_2)^2\} = E\{[q_0^* v_2(t) + q_1^* v_2(t-1) + \dots + q_{nqa}^* v_2(t-nqa)]^2\}$$

Considerando as equações (3.38), esta expressão é dada por:

$$\begin{aligned} E\{(Q^*v_2)^2\} &= (q_0^{*2} + q_1^{*2} + \dots + q_{nqa}^{*2}) \gamma_2(0) + \\ &+ 2(q_0^* q_1^* + q_1^* q_2^* + \dots + q_{nqa-1}^* q_{nqa}^*) \gamma_2(1) + \\ &+ 2(q_0^* q_2^* + q_1^* q_3^* + \dots + q_{nqa-2}^* q_{nqa}^*) \gamma_2(2) + \\ &+ 2(q_0^* q_{nqa}^*) \gamma_2(nqa) \end{aligned}$$

Definindo-se a matriz $V_1 \in \mathbb{R}^{(nqa+1) \times (nqa+1)}$ de acordo com a equação (3.43) dada a seguir:

$$V_1 = \begin{bmatrix} \gamma_2(0) & \gamma_2(1) & \dots & \gamma_2(nqa) \\ \gamma_2(1) & \gamma_2(0) & \dots & \gamma_2(nqa-1) \\ \gamma_2(2) & \gamma_2(1) & \dots & \gamma_2(nqa-2) \\ \vdots & \vdots & & \\ \gamma_2(nqa) & \gamma_2(nqa-1) & \dots & \gamma_2(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(nqa+1) \times (nqa+1)} \quad (3.43)$$

obtêm-se a equação (3.44):

$$E\{(Q^*v_2)^2\} = q^T V_1 q \quad (3.44)$$

Analogamente, a terceira parcela do lado direito da equação (3.37) pode ser reescrita como na equação (3.45) abaixo:

$$E\{(P^*v_4)^2\} = p^T V_2 p \quad (3.45)$$

onde:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \gamma_4(0) & \gamma_4(1) & \dots & \gamma_4(npa) \\ \gamma_4(1) & \gamma_4(0) & \dots & \gamma_4(npa-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_4(npa) & \gamma_4(npa-1) & \dots & \gamma_4(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(npa+1) \times (npa+1)} \quad (3.46)$$

Substituindo-se as equações (3.40), (3.41), (3.44) e (3.45) nas equações (3.36) e (3.37), obtêm-se finalmente as equações (3.47) e (3.48), que são a forma matricial das variâncias dos sinais de saída e de controle.

$$\text{var } y_t = \gamma_1(0) + 2 \omega_1^T q + q^T V_1 q \quad (3.47)$$

e

$$\text{var } u_t = \gamma_3(0) + 2 \omega_2^T p + p^T V_2 p \quad (3.48)$$

As equações (3.47) e (3.48) permitem que se escreva a função objetivo do problema de minimização dado em (3.1) de forma adequada às manipulações necessárias para sua resolução.

3.5.2. Forma matricial da função objetivo

Reescrevendo a função objetivo do problema dado em (3.1), obtêm-se:

$$\Delta = \alpha_1 \text{ var } y + \alpha_2 \text{ var } u$$

Substituindo as equações (3.47) e (3.48) na equação anterior, obtêm-se a equação (3.49):

$$\Delta = \alpha_1 [\gamma_1(0) + 2\omega_1^T q + q^T V_1 q] + \alpha_2 [\gamma_3(0) + 2\omega_2^T p + p^T V_2 p] \quad (3.49)$$

A equação (3.49) pode ser reescrita como apresentada a seguir:

$$\Delta = \begin{bmatrix} p^T & | & q^T \end{bmatrix} \cdot V \begin{bmatrix} p \\ \hline q \end{bmatrix} + 2\omega^T \begin{bmatrix} p \\ \hline q \end{bmatrix} + e$$

onde:

$$V = \begin{bmatrix} \alpha_2 V_2 & | & 0 \\ \hline 0 & | & \alpha_1 V_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.50)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \alpha_2 \omega_2 \\ \hline \alpha_1 \omega_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n} \quad (3.51)$$

$$e = \alpha_1 \gamma_1(0) + \alpha_2 \gamma_3(0) \in \mathbb{R} \quad (3.52)$$

Utilizando a definição dada em (3.30) a função Δ pode ser reescrita em forma matricial, de acordo com a equação (3.53), dada a seguir:

$$\Delta = x^T V x + 2 \omega^T x + e \quad (3.53)$$

Finalmente, é importante observar que a matriz V , o vetor ω e o escalar e dependem somente do sistema a controlar, dos polos em malha fechada especificados e das ponderações α_1 e α_2 .

3.5.3. Forma matricial das restrições

A equação de alocação de polos dada pela equação (3.5) leva a um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* , conforme discutido na seção 3.3. Portanto, esta equação pode ser escrita, em forma matricial, como na equação (3.54) a seguir:

$$Mx = \ell \quad (3.54)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor dado pela equação (3.30) cujas componen

3.6. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

O problema dado em (3.57) é um problema de otimização com função objetivo quadrática e restrições lineares, extensamente estudado na literatura [31].

Proposição 3.1:

O problema dado pela equação (3.57) é convexo.

Prova:

A prova desta proposição baseia-se em resultados clássicos da teoria de programação matemática [31], enunciados a seguir.

Um problema de otimização é convexo se a função objetivo é uma função convexa e se seu conjunto de soluções factíveis é um conjunto convexo.

Como um sistema de equações lineares sempre define um conjunto convexo [31], tem-se que o conjunto de soluções factíveis do problema dado é um conjunto convexo.

A função objetivo do problema proposto é quadrática e, portanto, será convexa se a matriz V for semidefinida positiva.

Resta, portanto, provar que a matriz V é semidefinida positiva.

Prova-se que a matriz V é semidefinida positiva, mostrando-se que as matrizes V_1 e V_2 são definidas positivas.

Da equação (3.44) tem-se que:

$$q^T V_1 q = E\{[Q^* v_2(t)]^2\} = \text{var}[Q^* v_2]$$

Como a variância do sinal $Q^* v_2$ é positiva para qualquer polinômio Q^* , pode-se escrever que:

$$q^T V_1 q = \text{var}[Q^* v_2] > 0, \quad \forall q \neq 0$$

Fica assim provado que a matriz V_1 é definida positiva.

Com relação à matriz V_2 , tem-se, da equação (3.45) que:

$$p^T V_2 p = E\{[P^* v_4(t)]^2\} > 0, \quad \forall p \neq 0$$

Resulta portanto que a matriz V_2 também é definida positiva.

A matriz V pode ser obtida a partir da equação (3.50) reescrita a seguir:

$$V = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & V_2 & 0 \\ \hline 0 & \alpha_1 & V_1 \end{array} \right] \quad (3.50)$$

Tem-se portanto que

$$\begin{bmatrix} p^T & q^T \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \alpha_1 (q^T V_1 q) + \alpha_2 (p^T V_2 p)$$

Como α_1 e α_2 são por definição reais positivos ou nulos, tem-se que a expressão acima é positiva ou nula para qualquer vetor x dado por:

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Finalmente, pode-se escrever que:

$$x^T V x \geq 0 \quad \forall x$$

Portanto, a matriz V é semi-definida positiva e a função objetivo é convexa.

Corolário:

Se x^* é uma solução ótima do problema dado em (3.57) e

$\Delta(x^*)$ é o valor da função objetivo correspondente a esta solução, então:

$$\Delta(x^*) \leq \Delta(x) \quad ; \quad \forall x/Mx = \ell$$

Prova:

É também um resultado clássico da teoria de programação matemática [31] que, num problema convexo, um mínimo local é também mínimo global.

Portanto, se x^* satisfaz as condições de estacionariedade, então x^* é um ponto de mínimo global e a prova está completa.

A solução do problema dado pela equação (3.57) é obtida a partir da construção da função Lagrangeano dada pela equação (3.58):

$$L(x, \lambda) = x^T V x + 2\omega^T x + \epsilon + \lambda^T [Mx - \ell] \quad (3.58)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^{n_{eq}}$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

Como o problema dado é convexo, as condições de estacionariedade são condições suficientes de otimalidade. Estas condições são escritas a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2Vx + 2\omega + M^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = Mx - \ell = 0 \end{array} \right.$$

Reescrevendo-se as condições otimalidade apresentadas, obtém-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Vx + M^T \lambda = -2\omega \\ Mx = \ell \end{array} \right.$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2V & M^T \\ \hline M & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\omega \\ \ell \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

O valor ótimo para os vetores x e λ é dado pela equação (3.59). Se a matriz da equação anterior for não-singular tem-se que:

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V & M^T \\ \hline M & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2\omega \\ \ell \end{bmatrix}$$

A equação (3.59) fornece então os polinômios P^* e Q^* desejados e envolve a solução de um sistema de dimensão n onde n é dado por:

$$n = n_{in} + n_{eq}$$

A substituição nesta equação dos valores de n_{in} e n_{eq} dados pelas equações (3.18) e (3.19) fornece a dimensão do problema a ser resolvido, dada pela equação (3.60):

$$n = 2(n_a + n_b + d + 1) + 3m \quad (3.60)$$

A equação (3.60) mostra também a relação entre o número de acréscimos sobre as ordens mínimas dos polinômios P^* e Q^* e a dimensão do problema a ser resolvido.

Finalmente, convém ressaltar que por uma questão de simplicidade utilizou-se nesta seção a equação de alocação de polos na forma dada pela equação (3.5) em lugar de se utilizar a forma dada pela equação (3.25). Entretanto, nas aplicações, a equação (3.25) deve ser preferida por ser dada em função dos parâmetros estimados e as modificações requeridas para seu uso são pequenas. Os resultados obtidos nesta seção não se alteram se a equação (3.25) for utilizada.

3.7. INFLUÊNCIAS DE ACRÉSCIMOS NAS ORDENS DOS POLINÔMIOS DE PONDE- RAÇÃO SOBRE O VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO

Nesta seção, mostra-se que o valor ótimo da função objetivo do problema dado em (3.57) nunca aumenta quando se aumentam as ordens dos polinômios P^* e Q^* . Isto significa que é possível reduzir a variância dos sinais de saída e de controle, sem alterar seu desempenho determinístico, através do aumento das ordens dos polinômios P^* e Q^* , que é, em última análise, um aumento da ordem do controlador.

Proposição 3.2:

Sejam m_a e m_b dois números inteiros tais que

$$m_a < m_b$$

Sejam P_a e P_b problemas do tipo dado em (3.57) associados respectivamente a m_a e m_b , e obtidos a partir do mesmo sistema a controlar, da mesma especificação de polos em malha fechada e do mesmo par (α_1, α_2) .

$$P_a: \begin{cases} \min_{x_a} & \Delta_a(x_a) = x_a^T V_a x_a + 2\omega_a^T x_a + \epsilon_a \\ \text{s.a} & M_a x_a = l_a \end{cases}$$

$$P_b: \begin{cases} \min_{x_b} & \Delta_b(x_b) = x_b^T V_b x_b + 2\omega_b^T x_b + \epsilon_b \\ \text{s.a} & M_b x_b = l_b \end{cases}$$

Sejam ainda x_a^* e x_b^* pontos de ótimo dos problemas P_a e P_b .

Então:

$$\Delta_a(x_a^*) > \Delta_b(x_b^*)$$

Prova:

Os problemas P_a e P_b diferem somente na dimensão de ca-

da um deles. Tem-se que os vetores x_a^* e x_b^* são tais que:

$$x_a^* = \begin{bmatrix} p_a^* \\ \text{---} \\ q_a^* \end{bmatrix} \in |R^{nin_a} \quad \text{e} \quad x_b^* = \begin{bmatrix} p_b^* \\ \text{---} \\ q_b^* \end{bmatrix} \in |R^{nin_b}$$

onde, de acordo com a equação (3.18), nin_a e nin_b são dados por:

$$nin_a = n_a + n_b + d + 1 + 2m_a$$

$$nin_b = n_a + n_b + d + 1 + 2m_b$$

Portanto, o vetor x_b^* contém $2(m_b - m_a)$ componentes a mais que o vetor x_a^* . Para prova da proposição, mostra-se que a solução x_a^* pode ser considerada como uma solução factível do problema P_b em que os termos de maior ordem dos polinômios P^* e Q^* são nulos. Para tanto, define-se o vetor $0 \in |R^{m_b - m_a}$ dado pela equação a seguir.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in |R^{m_b - m_a}$$

Definem-se também os vetores x'_b , p'_b e q'_b dados pelas equações abaixo:

$$p'_b = \begin{bmatrix} p_a^* \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad q'_b = \begin{bmatrix} q_a^* \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x'_b = \begin{bmatrix} p_b^* \\ \text{---} \\ q'_b \end{bmatrix} \in |R^{nin_b}$$

Na definição anterior, nota-se que o vetor x'_b tem a mesma dimensão que o vetor x_b^* .

Além disso, os vetores q'_b e q_a^* estão associados ao mesmo polinômio Q^* , pois apesar de q'_b ter ordem superior, tem os termos de maior ordem nulos. O mesmo se pode afirmar a respeito dos vetores p'_b e p_a^* . Tem-se então que o vetor x'_b deve satisfazer a

restrição dada pelo problema P_b , pois os vetores que o compõe satisfazem a equação de alocação de polos. Este resultado pode ser expresso pela equação (3.61) dada a seguir:

$$M_b x'_b = l_b \quad (3.61)$$

Os vetores x'_b e x_a^* estão associados aos mesmos polinômios P^* e Q^* . Conseqüentemente, as variâncias dos sinais de saída e de controle independem do uso de uma solução ou de outra. Este resultado é dado a seguir:

$$\Delta_a(x_a^*) = \alpha_1 E\{[v_1 + Q^* v_2]^2\} + \alpha_2 E\{[v_3 + P^* v_4]^2\}$$

e

$$\Delta_b(x'_b) = \alpha_1 E\{[v_1 + Q^* v_2]^2\} + \alpha_2 E\{[v_3 + P^* v_4]^2\}$$

Portanto, tem-se a equação (3.62), a seguir:

$$\Delta_a(x_a^*) = \Delta_b(x'_b) \quad (3.62)$$

Conforme o corolário apresentado anteriormente, a solução x_b^* é tal que:

$$\Delta_b(x_b^*) \leq \Delta_b(x'_b) \quad \forall x'_b / M_b x'_b = l_b$$

Da equação (3.61) tem-se que a solução x'_b pertence ao conjunto de soluções factíveis do problema P_b , portanto é possível escrever:

$$\Delta_b(x_b^*) \leq \Delta_b(x'_b)$$

Substituindo o valor de $\Delta_b(x'_b)$ conforme a equação (3.62), obtêm-se:

$$\Delta_b(x_b^*) \leq \Delta_a(x_a^*)$$

e a proposição está provada.

Em resumo, acréscimos nas ordens dos polinômios P^* e Q^* resultam, em geral, em melhor comportamento estocástico para o sistema controlado, sem alterar o comportamento determinístico.

Na seção seguinte são apresentadas sugestões para implementação do controlador apresentado.

3.3. CONCLUSÃO

Neste capítulo, definiu-se uma metodologia para o cálculo dos polinômios da função de custo do controlador auto-ajustável de variância mínima generalizada apresentado no Capítulo 2.

Os polinômios são calculados de modo a alocar os polos em malha fechada do sistema, em posições especificadas, e ainda minimizar uma combinação das variâncias dos sinais de saída e de controle. Este cálculo é resumido pela equação (3.59).

Tem-se que o lado direito da equação (3.59) depende somente dos parâmetros estimados do sistema a controlar, dos polos especificados em malha fechada e das ponderações α_1 e α_2 . Portanto, esta equação pode ser usada "on-line" para atualização dos polinômios P^* e Q^* na medida em que as estimações são melhoradas. Supondo convergência dos algoritmos de estimação, obtém-se um controlador auto-ajustável cujo comportamento determinístico é definido pela alocação de polos e cujo comportamento estocástico, avaliado pelas variâncias dos sinais de saída e de controle, pode ser melhorado pela escolha adequada das ponderações α_1 e α_2 e pela escolha do número de acréscimos dada pelo parâmetro m .

Mostrou-se que quanto maior o número de acréscimos sobre as ordens mínimas dos polinômios P^* e Q^* , melhor é o desempenho estocástico do sistema, sem alteração do desempenho determinístico.

Se o sistema a controlar for conhecido, a equação (3.59) pode ser usada "off-line" e fornecer diretamente os polinômios da função de custo. Se o sistema for desconhecido, a equação (3.59) deve ser resolvida "on-line", pois o cálculo dos polinômios P^* e

Q^* depende do conhecimento do modelo do sistema. Tem-se, entretanto, que a dimensão do sistema de equações lineares a ser resolvido pode inviabilizar a solução da equação (3.59) entre dois instantes de amostragem. Neste caso, sugere-se que a mesma seja resolvida num nível de supervisão, em outro processador, diferente do processador de controle. Neste caso, o processador de supervisão deve ser informado da última estimação de parâmetros, utilizá-la para o cálculo dos polinômios P^* , Q^* e R , e retornar o resultado ao computador de controle.

No capítulo seguinte é apresentada uma metodologia alternativa para o cálculo dos polinômios da função de custo, baseada em critérios freqüenciais, em que o volume de cálculo envolvido é sensivelmente menor que o correspondente à equação (3.59).

CAPÍTULO 4

MÉTODO FREQUÊNCIAL PARA O AJUSTE DOS POLINÔMIOS DE PONDERAÇÃO

4.1. INTRODUÇÃO

Outra metodologia para o cálculo dos polinômios da função de custo do controlador de variância mínima generalizada é apresentada neste capítulo. Esta metodologia é baseada em critérios freqüenciais e, como em Hughes [22], procura ajustar a resposta em freqüência do controlador em "feed-back".

Conforme descrito nos capítulos anteriores, em alguns sistemas a alocação dos polos em malha fechada pode causar valores elevados na variância do sinal de controle. Estes valores elevados são devidos às características da rejeição ao ruído do controlador em "feed-back", conforme estudado em Athans [29]. O comportamento estocástico do sinal de controle pode ser mantido dentro das especificações se o controlador tiver uma resposta em freqüência que atenua as freqüências predominantes na perturbação do sinal de saída.

Na metodologia proposta por Hughes [22], os polinômios P , Q e R da função de custo são obtidos a partir do ajuste do ganho do controlador em duas freqüências, sendo uma alta e outra baixa. Desse modo, obtém-se um controlador que resulta em menor variância do sinal de controle. Entretanto, quando a resposta em freqüência do controlador é alterada, os polos do sistema em malha fechada são realocados para posições não especificadas, o que pode resultar num comportamento determinístico fora das especificações desejadas.

A metodologia estudada neste capítulo, permite ajustar o ganho do controlador numa determinada freqüência e ainda alocar os polos do sistema em malha fechada. Desse modo, o comportamento estocástico do sinal de controle pode ser melhorado em relação aos controladores obtidos por simples alocação de polos, sem alteração no comportamento determinístico dos sinais de controle e de saída.

A nova metodologia pode ser resumida como se segue:

- a) Obtém-se a relação entre o ganho do controlador e os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* . Na seção 4.2 mostra-se que esta relação é linear nos coeficientes dos polinômios P^* e Q^* , se o ganho for calculado para a frequência dada pela equação (4.1) a seguir:

$$f = \frac{1}{2T} \quad (4.1)$$

onde T é o período de amostragem.

- b) Escolhem-se as ordens dos polinômios P^* e Q^* tais que o excesso do número de incógnitas sobre o número de equações no sistema de equações lineares, obtido a partir da equação de alocação de polos, seja unitário (ou seja, $m=1$ na equação (3.20)).
- c) Utiliza-se a relação entre o ganho do controlador e os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* obtida anteriormente como equação adicional no sistema de equações lineares obtido a partir da equação de alocação de polos.
- d) Tem-se finalmente um sistema de equações lineares com número de equações igual ao número de incógnitas que pode ser usado para o cálculo dos polinômios P^* e Q^* .

A organização deste capítulo é a seguinte:

Na seção 4.2 deduz-se a expressão que relaciona o ganho do controlador e os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* . Na seção 4.3 é apresentado o sistema de equações lineares obtido a partir da equação de alocação de polos e da expressão deduzida na seção 4.2. Finalmente, na seção 4.4 são apresentadas algumas conclusões e sugestões para implementação deste controlador.

4.2. CÁLCULO DO GANHO DO CONTROLADOR

Nesta seção obtém-se a expressão que relaciona o ganho do controlador e os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* . Mostra-se que esta relação é linear nos coeficientes dos polinômios P^* e

Q^* se o ganho for calculado na frequência dada pela equação (4.1), reescrita a seguir:

$$f = \frac{1}{2T} \quad (4.1)$$

Na seção 2.6 mostrou-se que o controlador em "feed-back" pode ser descrito pela função de transferência G/H onde G e H são dados respectivamente pelas equações (2.25) e (2.10). Estes resultados são resumidos pela equação (4.2) a seguir:

$$\frac{G}{H} = \frac{G' + P^*C}{BF + Q^*(1-z^{-1})C} \quad (4.2)$$

É conhecido na literatura [30] que a resposta em frequência de um sistema discreto descrito pela função de transferência $F(z^{-1})$ é dada por:

$$F(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j2\pi fT}} = F(e^{j2\pi fT})$$

A substituição indicada acima resulta em um número complexo cujo módulo é o ganho do sistema e cujo argumento é o atraso de fase do sistema na frequência f .

É interessante recordar que o diagrama de ganho versus frequência de um sistema discreto apresenta um período f_p dado pela equação (4.3) a seguir [30]:

$$f_p = \frac{1}{T} \quad (4.3)$$

De fato:

$$e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi(f + \frac{1}{T})T}$$

e portanto,

$$F(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j2\pi fT}} = F(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j2\pi(f+\frac{1}{T})T}}$$

Além disso, este diagrama é simétrico em relação à frequência $f_p/2$, pois:

$$\text{Re} \left[e^{j2\pi(f_p/2+\delta)T} \right] = \text{Re} \left[e^{j2\pi(f_p/2-\delta)T} \right]$$

$$\text{Im} \left[e^{j2\pi(f_p/2+\delta)T} \right] = -\text{Im} \left[e^{j2\pi(f_p/2-\delta)T} \right]$$

e portanto

$$\left| \left| F(z^{-1}) \right|_{z=e^{j2\pi(f_p/2+\delta)T}} \right| = \left| \left| F(z^{-1}) \right|_{z=e^{j2\pi(f_p/2-\delta)T}} \right|$$

A figura 4.1 ilustra o diagrama de ganho versus frequência de um sistema discreto.

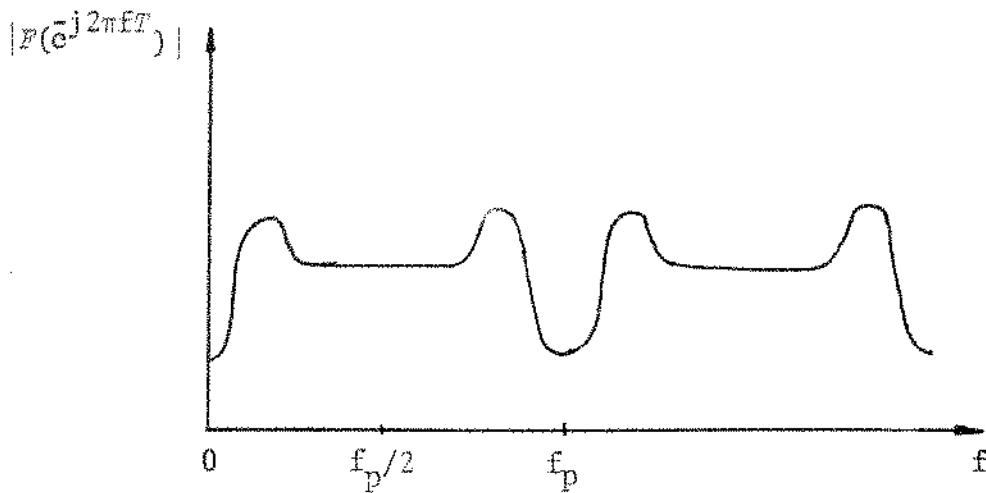


Fig. 4.1 - Resposta em frequência de um sistema discreto.

Tem-se portanto que o ganho do controlador dado pela equação (4.2) pode ser escrito conforme a equação (4.4):

$$\text{gan} = \left| \frac{G}{H} \right|_{z=e^{j2\pi fT}} = \left| \frac{G'(e^{-j2\pi fT}) + P^*(e^{j2\pi fT})C(e^{j2\pi fT})}{BF(e^{-j2\pi fT}) + Q^*(e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT})C(e^{-j2\pi fT})} \right| \quad (4.4)$$

Da equação (4.4) verifica-se que o ganho é uma função não linear dos polinômios P^* e Q^* para uma frequência qualquer f .

A seguir, mostra-se que, para a frequência dada pela equação (4.1) é possível estabelecer uma relação entre o ganho e os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* , linear nos coeficientes destes polinômios. Nesta frequência tem-se que o atraso de fase do controlador é nulo ou 180° , pois:

$$z^{-1} = e^{-j2\pi fT} = e^{-j\pi} = -1$$

e, conseqüentemente o numerador e o denominador da função de transferência dada pela equação (4.2) são reais.

Para $f = \frac{f_p}{2}$ tem-se que o ganho do controlador é dado por:

$$\text{gan} = \left| \frac{G'(-1) + P^*(-1)C(-1)}{BF(-1) + Q^*(-1)2C(-1)} \right|$$

Esta expressão pode ser reescrita conforme a equação (4.5) a seguir:

$$\text{gan} = \left| \frac{g + c \text{vu}_{npa}^T p}{bf + 2c \text{vu}_{npa}^T q} \right| \quad (4.5)$$

onde:

$$g = G'(-1)$$

$$bf = BF(-1)$$

$$c = C(-1)$$

$$p = \begin{bmatrix} p_0^* \\ \vdots \\ p_{npa}^* \end{bmatrix} \in R^{npa+1}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_0^* \\ \vdots \\ q_{nqa}^* \end{bmatrix} \in R^{nqa+1}$$

$$vu_n = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix} \in R^{n+1}, \quad n \in N$$

Da equação (4.5) obtém-se a seguinte relação:

$$vu_{npa}^T p \mp 2gan vu_{nqa}^T q = - \frac{g \pm gan \cdot bf}{c} \quad (4.7)$$

Os sinais duplos (\pm) na equação (4.7) indicam se o valor dentro do operador $|\cdot|$, na equação (4.5), é positivo ou negativo. Estes sinais podem ser eliminados se for permitido ao operador atribuir sinais negativos ao ganho. O sinal atribuído ao ganho indica se o atraso de fase do controlador é nulo ou 180° . A equação (4.7) pode então ser reescrita conforme a equação (4.8):

$$\boxed{\text{vet}^T \cdot x = k} \quad (4.8)$$

onde:

$$\text{vet} = \begin{bmatrix} vu_{npa} \\ \text{-----} \\ -2vu_{npa} \cdot gan \end{bmatrix} \in R^{npa+nqa+2}$$

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \text{---} \\ q \end{bmatrix} \in R^{npa+nqa+2} \quad (4.9)$$

$$k = \frac{-g + gan \cdot bf}{c} \in R$$

Portanto, a equação (4.8) é linear nos coeficientes dos polinômios P^* e Q^* e, se satisfeita, resulta num controlador com ganho dado por gan na frequência $1/2T$. Note-se que, na equação (4.8), o vetor vet e o escalar k só dependem de dados disponíveis, isto é, dos parâmetros estimados e do ganho do controlador especificado pelo usuário.

A escolha da frequência $1/2T$ para ajuste do ganho do controlador resulta de duas considerações. Inicialmente esta frequência permite o ajuste com apenas uma equação linear, simplificando portanto os cálculos necessários. Esta simplificação é devida ao fato de que nesta frequência o atraso de fase é nulo ou 180° em qualquer sistema discreto. Além disso, o diagrama de ganho, dado pela figura (4.1), é simétrico em relação a frequência $1/2T$. Portanto, esta é a mais alta frequência em que o diagrama não se repete. Ajustes em frequências maiores correspondem na realidade a ajustes em frequências menores que $1/2T$, devido à simetria e a periodicidade da resposta em frequência de sistemas discretos. Na prática, as perturbações indesejáveis normalmente ocorrem em frequências elevadas e portanto o ganho é ajustado na frequência $f=1/2T$.

4.3. ALOCAÇÃO DE POLOS E AJUSTE DE GANHO

Nesta seção é apresentado um sistema de equações lineares, para cálculo dos coeficientes dos polinômios P^* e Q^* . Este sistema é obtido a partir da equação de alocação de polos e da equação de ajuste de ganho do controlador dada pela equação (4.8) deduzida na seção anterior. Inicialmente determina-se as ordens dos polinômios P^* e Q^* .

Conforme visto na seção 3.3, para que existam soluções para a equação de alocação de polos dada pela equação (3.5), as ordens dos polinômios P^* e Q^* devem ser dadas pelas equações (3.16) e (3.17) reescritas a seguir:

$$n_{pa} = n_a + m \quad (3.16)$$

$$n_{qa} = n_b + d - 1 + m \quad (3.17)$$

onde m é um inteiro positivo que representa o número de acréscimos sobre as ordens mínimas necessárias para existência de solução da equação de alocação de polos.

Tem-se ainda, conforme a equação (3.20) obtida na seção 3.3, que o número de incógnitas e o número de equações do sistema linear obtido são tais que:

$$n_{in} - n_{eq} = m \quad (3.20)$$

Fazendo-se m unitário nas equações (3.16) e (3.17) acima, resta um grau de liberdade no sistema de equações lineares obtido a partir da equação de alocação de polos. Este grau de liberdade é utilizado para fixação do ganho do controlador. Portanto, as ordens dos polinômios P^* e Q^* utilizadas neste capítulo são dadas pelas equações (4.10) e (4.11).

$$n_{pa} = n_a + 1 \quad (4.10)$$

$$n_{qa} = n_b + d \quad (4.11)$$

Neste caso a forma matricial da equação de alocação de polos, pode ser escrita, de acordo com a equação (3.55) apresentada na seção 3.6 e reescrita a seguir:

$$Mx = \ell \quad (3.55)$$

onde

$$M \in R^{n_{eq} \times n_{in}}$$

As dimensões da matriz M , de acordo com as equações (3.18) e (3.19) obtidas na seção 3.3, são dadas por:

$$n_{eq} = n_a + n_b + d + 2$$

$$n_{in} = n_a + n_b + d + 3$$

Acrescentando-se a equação de ajuste de ganho, (equação 4.8), ao sistema descrito pela equação (3.55), obtém-se o sistema de equações dado pela equação (4.12) a seguir:

$$\begin{bmatrix} M \\ \text{---} \\ \text{vet}^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} l \\ \text{---} \\ k \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{bmatrix} M \\ \text{---} \\ \text{vet}^T \end{bmatrix} \in R^{\text{neq}' \times \text{nin}} \quad ; \quad \begin{bmatrix} l \\ \text{---} \\ k \end{bmatrix} \in R^{\text{neq}'}$$

$$\text{neq}' = \text{neq} + 1$$

Neste sistema de equações, o número de incógnitas é igual ao número de equações. Portanto, através da equação (4.12) pode-se calcular os coeficientes dos polinômios P^* e Q^* . O controlador obtido apresentará o ganho fixado pelo usuário, na frequência $f=1/2T$, além de alocar os polos do sistema em malha fechada nas posições especificadas.

4.4. CONCLUSÃO

Neste capítulo apresenta-se uma nova metodologia para o cálculo dos polinômios de ponderação da função de custo do controlador de variância mínima generalizada.

Esta metodologia baseia-se no fato de que acréscimos sobre as ordens mínimas dos polinômios P^* e Q^* , correspondem a acréscimos no número de graus de liberdade para a escolha da solução da equação de alocação de polos.

Assim sendo, um acréscimo sobre as ordens mínimas dos polinômios P^* e Q^* permite que se acrescente a equação de ajuste de ganho do controlador (equação (4.8)) ao sistema de equações lineares obtido a partir da equação de alocação de polos. A principal vantagem desta metodologia em relação à apresentada no capítulo anterior consiste na redução do esforço computacional envolvido. O sistema de equações a ser resolvido pela nova metodologia tem

sua ordem dada pela equação (3.16) com m unitário. Esta equação é reescrita a seguir:

$$n_{in} = n_{eq}' = n_a + n_b + d + 3$$

A metodologia apresentada no capítulo anterior, envolve a solução de um sistema de equações cuja ordem é dada pela equação (3.60). Esta equação é também reescrita a seguir, utilizando-se m unitário para comparar controladores de mesma ordem:

$$n = 2(n_a + n_b + d) + 5$$

Da comparação das equações anteriores verifica-se uma sensível redução no esforço computacional, para controladores de mesma ordem.

A nova metodologia apresenta contudo algumas desvantagens. Para o ajuste do ganho do controlador exige-se do usuário interagir com o algoritmo a nível de resposta em frequência. Além disso, a nova metodologia é menos geral que a apresentada no capítulo anterior pois compreende somente acréscimos unitários sobre as ordens mínimas necessárias para a solução da equação de alocação de polos e reduz, diretamente, somente a variância do sinal de controle.

Portanto, a escolha de uma ou outra metodologia depende rá da disponibilidade computacional, da sensibilidade do usuário com respeito ao processo e da precisão desejada.

A redução no esforço computacional em relação à metodologia anterior pode permitir a obtenção dos polinômios P^* e Q^* sem a necessidade de um nível de supervisão. Esta possibilidade está condicionada às ordens do modelo utilizado para o sistema, ao período de amostragem e ao hardware e software utilizados para o controle. Por outro lado, caso o tempo de computação seja excessivo, pode-se resolver a equação (4.12) no nível de supervisão, conforme proposto para o controlador desenvolvido no capítulo anterior. Em qualquer dos casos é conveniente que o sistema apresente ao usuário, quando este achar necessário, o diagrama de ganho do controlador, de modo a orientar os ajustes a serem feitos.

O procedimento apresentado neste capítulo pode ser generalizado. Qualquer outro ajuste, que possa ser feito levando em conta a sensibilidade do usuário com respeito ao processo, e que possa ser expresso numa relação linear nos coeficientes dos polinômios P^* e Q^* , pode substituir o ajuste de ganho do controlador. Uma alteração possível é ajustar o ganho das funções de transferência em malha fechada entre os sinais de saída ou de controle e a perturbação ζ_t .

No próximo capítulo são apresentados exemplos de simulações de controladores auto-ajustáveis obtidos a partir das metodologias apresentadas.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E SIMULAÇÕES

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, as metodologias propostas nos capítulos anteriores, para cálculo dos polinômios de ponderação da função de custo de controladores auto-ajustáveis, são ilustradas através de exemplos de simulação. Para cada exemplo, os polinômios de ponderação P e Q são obtidos a partir da alocação dos polos em malha fechada, minimizando a função objetivo descrita pela equação (1.5). Também é apresentado um exemplo que ilustra a metodologia apresentada no capítulo 4. Neste caso, o cálculo dos polinômios P e Q é realizado a partir da especificação dos polos em malha fechada do sistema e do ganho do controlador numa frequência especificada.

Nos exemplos simulados através da metodologia descrita no capítulo 3, são apresentados:

- o modelo do sistema (polinômio A, B, C e o atraso d);
- os polos em malha fechada definidos pelo usuário (polinômio T);
- as ponderações α_1 e α_2 , definidas pelo usuário;
- os polinômios da função de custo do controlador auto-ajustável (polinômios P, Q e R) obtidos através da metodologia em análise;
- evolução dos sinais de saída e de controle no tempo, obtidos através de simulação do sistema controlado, quando houver relevância;
- variâncias dos sinais de saída e de controle e do ruído, obtidas através de simulação.

Na simulação obtida através da metodologia descrita no capítulo 4, são apresentados:

- o modelo do sistema;

- os polos em malha fechada definidos pelo usuário;
- a resposta em frequência do controlador obtido através de simples alocação de polos;
- ganho do controlador em $f=1/2T$, definido pelo usuário;
- os polinômios de ponderação da função de custo do controlador auto-ajustável (polinômios P, Q e R) obtidos através da metodologia em análise;
- a resposta em frequência do controlador obtido através da metodologia em análise;
- evolução dos sinais de saída e de controle no tempo, obtidos através de simulação do sistema controlado.
- variâncias dos sinais de saída e de controle e do ruído, obtidos através de simulação.

O comportamento determinístico de cada exemplo, é definido pela escolha dos polos em malha fechada e pode ser avaliado pela análise da evolução dos sinais de saída e de controle no tempo. O comportamento estocástico é avaliado através da análise anterior e das variâncias dos sinais de saída e de controle, obtidas em cada exemplo.

Na seção 5.2 são apresentados exemplos de utilização da metodologia descrita no capítulo 3. Na seção 5.3 apresentam-se os exemplos referentes à metodologia desenvolvida no capítulo 4 e na seção 5.4 os resultados obtidos são analisados. No anexo A são apresentadas as rotinas desenvolvidas para cálculo dos polinômios de ponderação P e Q e para simulação dos sistemas controlados.

5.2. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DA METODOLOGIA DE MINIMIZAÇÃO DAS VARIÂNCIAS

Nesta seção são apresentadas as simulações de exemplos que ilustram a metodologia descrita no capítulo 3.

Para cada exemplo, calculam-se os polinômios de ponderação P e Q para diversos valores de m. Para $m=0$ tem-se simplesmente alocação de polos, existindo apenas uma solução para a equação de alocação de polos. Para $m>0$, além da alocação de polos é possível minimizar a função Δ dada pela equação (1.5).

5.2.1. Sistema de fase mínima

Seja o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças:

$$(1 - 0,93 z^{-1}) y_t = z^{-1} (0,072) u_t + (1 - 0,92 z^{-1}) \zeta_t$$

com $\text{var } \zeta_t = 0,2$

O sinal de referência ω_t é um degrau de amplitude 10.

Especifica-se os polos do sistema controlado segundo o polinômio $T(z^{-1})$ dado a seguir:

$$T(z^{-1}) = 1 - 0,91 z^{-1}$$

a) Para $m=0$ (somente alocação de polos) obtêm-se:

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 + 12,3 z^{-1} - 12,0 z^{-2}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,93 - 0,93 z^{-1}$$

$$R(z^{-1}) = 1,3$$

Simulação:

As figuras 5.1 e 5.2 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo, para $m=0$.

b) Para $m=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, obtêm-se:

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 + 3,43 z^{-1} + 1,29 z^{-2} - 1,0 z^{-3} - 3,47 z^{-4}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,93 - 0,29 z^{-1} - 0,37 z^{-2} - 0,27 z^{-3}$$

$$R(z^{-1}) = 1,25$$

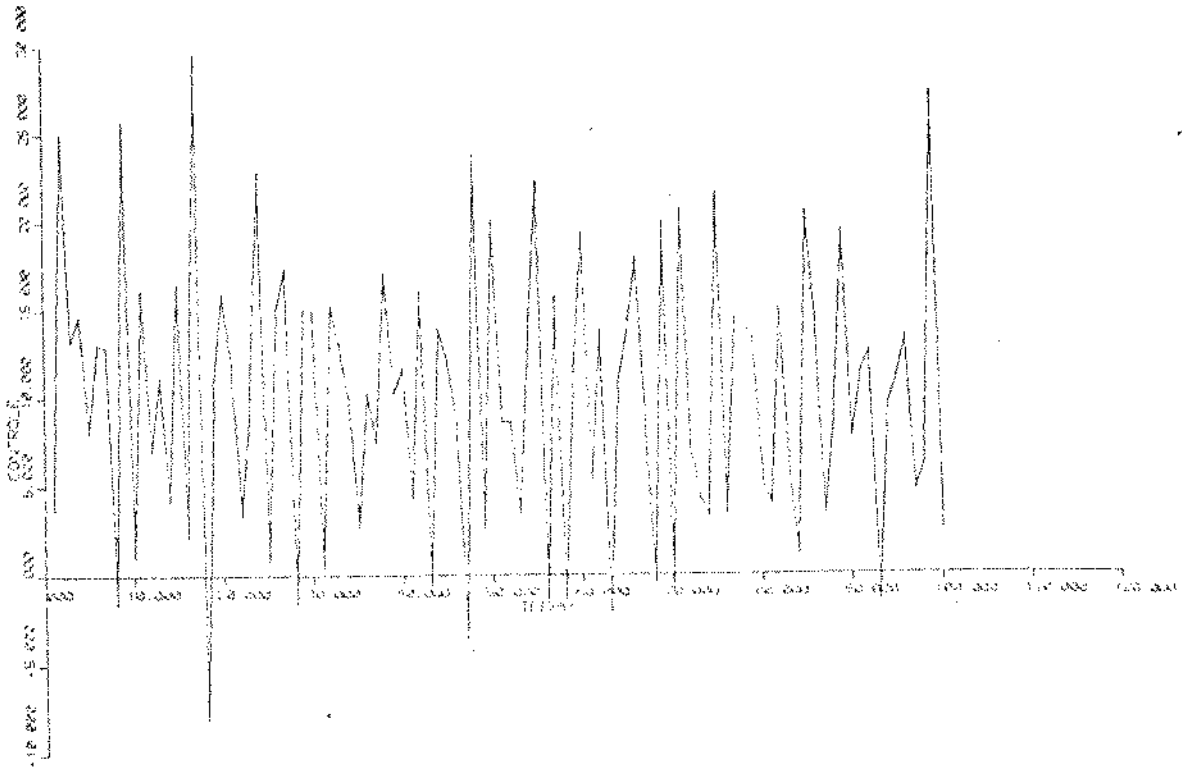


Fig. 5.1 - Sinal de controle para o sistema de fase mínima com $m=0$.

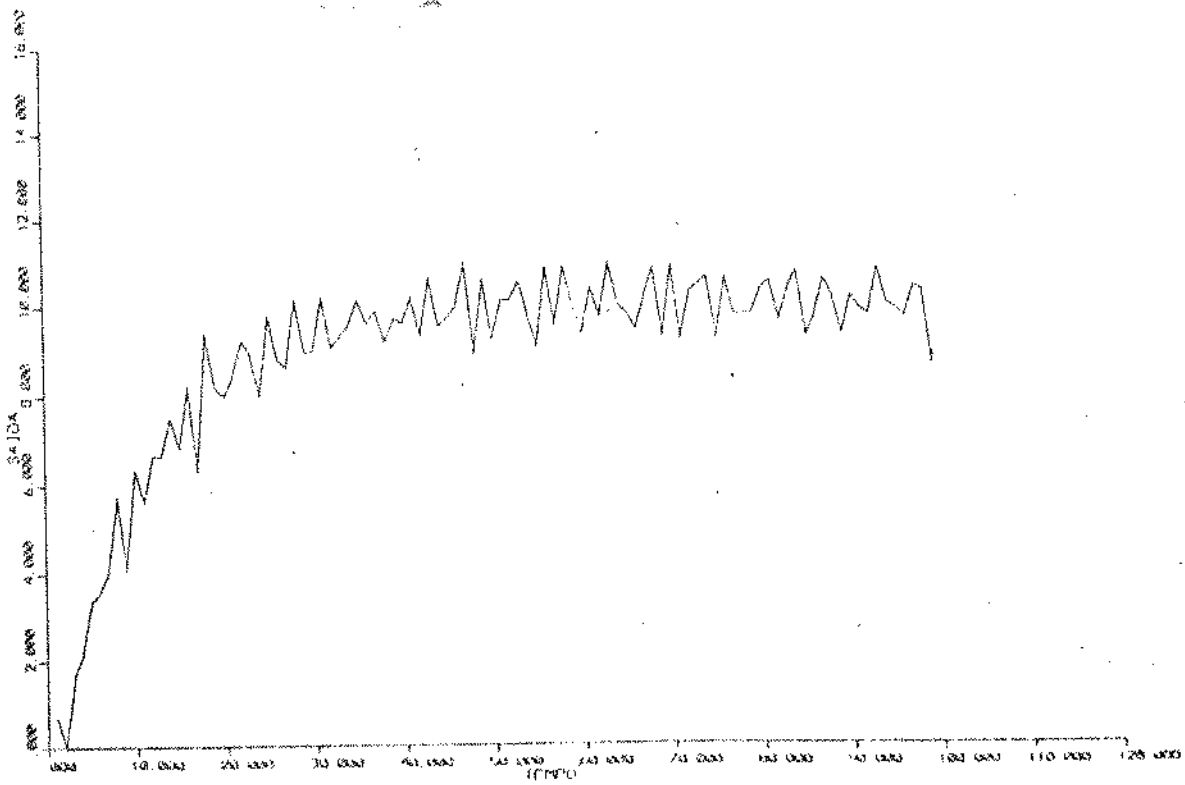


Fig. 5.2 - Sinal de saída para o sistema de fase mínima com $m=0$.

Simulação:

A figura 5.3 mostra a evolução do sinal de controle no tempo. O comportamento do sinal de saída é semelhante ao representado na figura 5.2.

c) Para $m=7$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ obtêm-se:

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 + 0,64 z^{-1} + 0,51 z^{-2} + 0,38 z^{-3} + 0,23 z^{-4} + 0,07 z^{-5} \\ - 0,10 z^{-6} - 0,28 z^{-7} - 0,49 z^{-8} - 0,70 z^{-9}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,93 - 0,09 z^{-1} - 0,12 z^{-2} - 0,14 z^{-3} - 0,15 z^{-4} - 0,14 z^{-5} \\ - 0,13 z^{-6} - 0,10 z^{-7} - 0,05 z^{-8}$$

$$R(z^{-1}) = 1,26$$

Simulação:

A figura 5.4 mostra a evolução do sinal de controle no tempo. O comportamento do sinal de saída é semelhante ao apresentado na figura 5.2.

Na tabela 5.1 apresentam-se as variâncias dos sinais de saída e de controle em função do aumento na ordem dos polinômios de ponderação, para o exemplo simulado.

m	var u_t	var y_t
0	59,3	0,36
2	5,33	0,24
7	0,34	0,21

Tabela 5.1: Variâncias do ex. 5.2.1

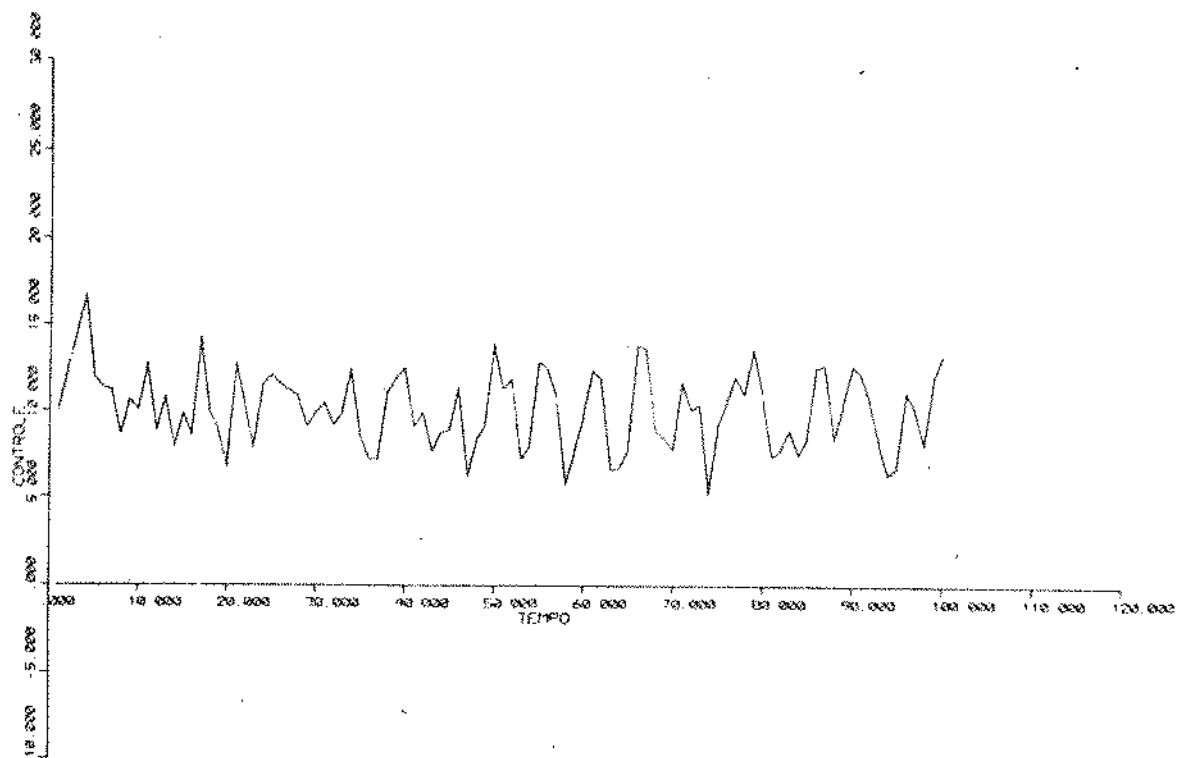


Fig. 5.3 - Sinal de controle para o sistema de fase mínima com $m=2$.

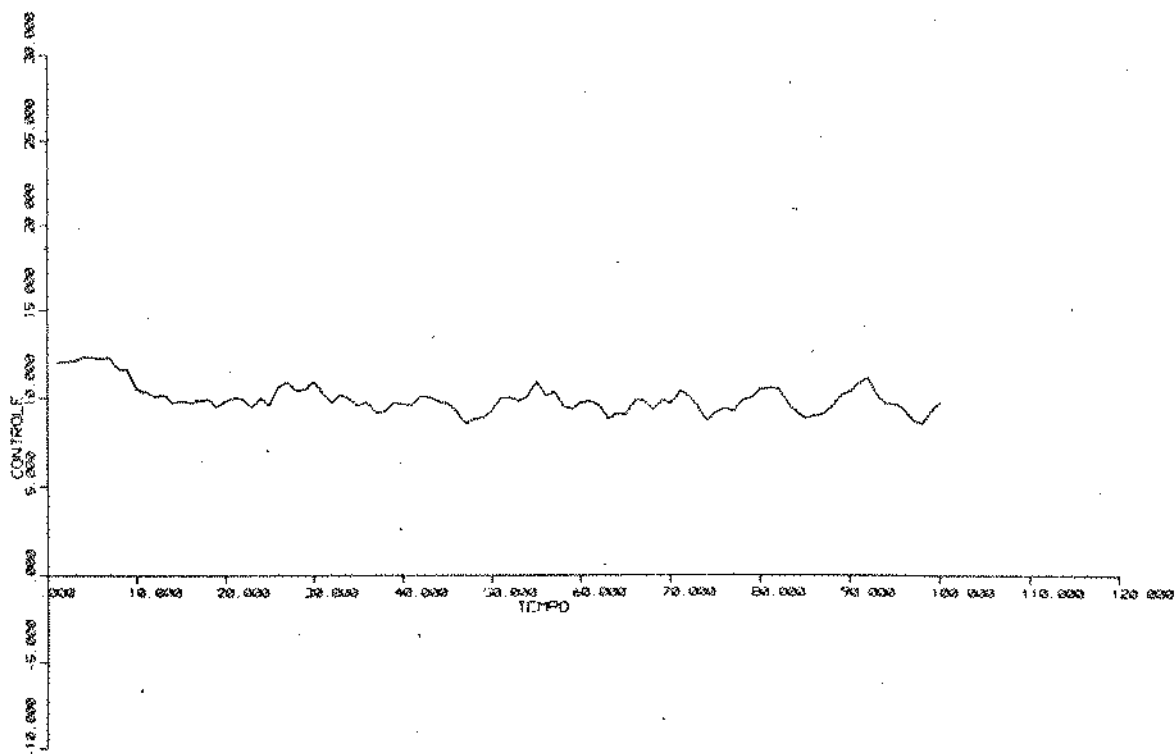


Fig. 5.4 - Sinal de controle para o sistema de fase mínima com $m=7$.

Neste exemplo, os parâmetros α_1 e α_2 foram mantidos constantes ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), devido à pequena sensibilidade, neste caso, dos resultados em relação a estes parâmetros.

5.2.2. Sistema de fase não-mínima

Seja o sistema de fase não-mínima descrito pela seguinte equação a diferenças:

$$(1 - 1,3 z^{-1} + 0,4 z^{-2})y_t = z^{-1}(1 + 1,5 z^{-1})u_t + (1 - 0,65 z^{-1} + 0,1 z^{-2})\zeta_t$$

com $\text{var } \zeta_t = 0,2$

O sinal de referência w_t , é um degrau de amplitude 10.

Especifica-se os polos do sistema controlado segundo o polinômio $T(z^{-1})$ dado a seguir:

$$T(z^{-1}) = 1 - 0,5 z^{-1}$$

a) Para $m=0$ (somente alocação de polos) obtém-se

Polinômios da função de custo

$$P(z^{-1}) = 1 - 1,41 z^{-1} + 0,77 z^{-2} - 0,16 z^{-3}$$

$$Q(z^{-1}) = -0,59 z^{-1} + 0,59 z^{-2}$$

$$R(z^{-1}) = 0,2$$

Para os polinômios acima, a função de transferência do controlador, dada pela equação (2.11), apresenta um par de polos complexos conjugados fora do círculo unitário. Estes polos são dados por:

$$z_{1,2} = -0,635 \pm j 0,938$$

com

$$|z_{1,2}| = 1,17$$

Este fato impossibilita a utilização deste controlador pois qualquer imprecisão na identificação do sistema leva à sua instabilidade.

Simulação

As figuras 5.5 e 5.6 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo.

b) Para $m=2$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, obtêm-se

Polinômios da função de custo

$$P(z^{-1}) = 1 - 0,87 z^{-1} - 0,16 z^{-2} + 0,04 z^{-3} + 0,32 z^{-4} - 0,13 z^{-5}$$

$$Q(z^{-1}) = -1,13 z^{-1} + 0,66 z^{-3} + 0,48 z^{-4}$$

$$R(z^{-1}) = 0,2$$

Para os polinômios acima, a função de transferência do controlador apresenta ainda um par de polos complexos conjugados fora do círculo unitário. Estes polos são dados por:

$$z_{3,4} = 0,17 \pm j 1,007$$

com

$$|z_{3,4}| = 1,02$$

Como no caso anterior, este fato impossibilita a utilização deste controlador. Entretanto deve-se observar que o módulo do polo instável diminuiu com o aumento de m .

Simulações

A figura 5.7 mostra a evolução do sinal de controle

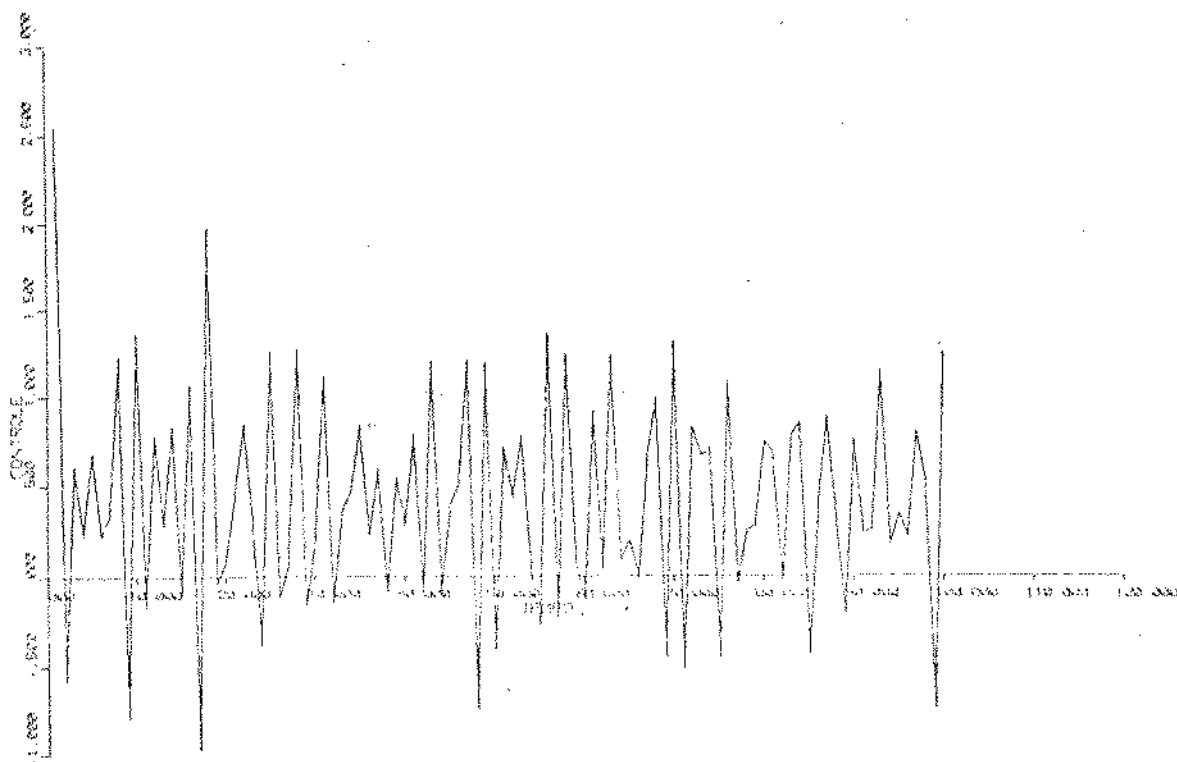


Fig. 5.5 - Sinal de controle para o sistema de fase não-mínima com $m=0$.

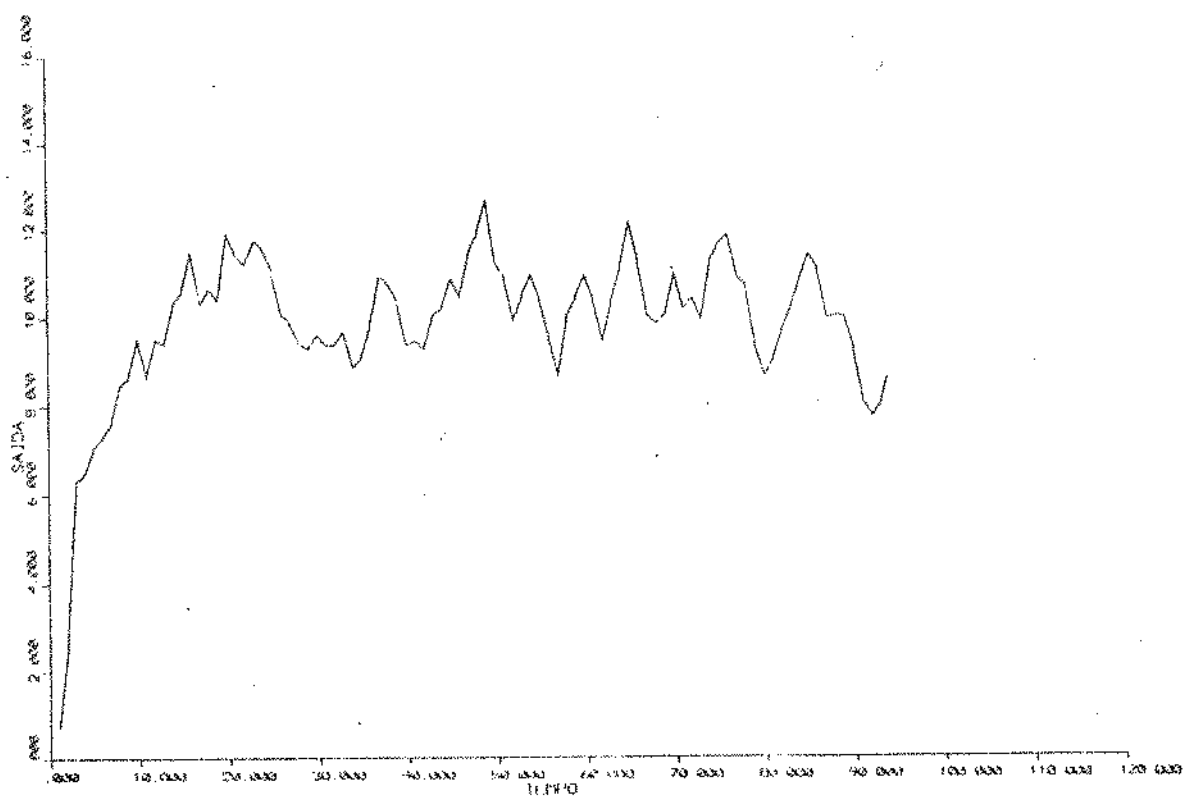


Fig. 5.6 - Sinal de saída para o sistema de fase não-mínima com $m=0$.

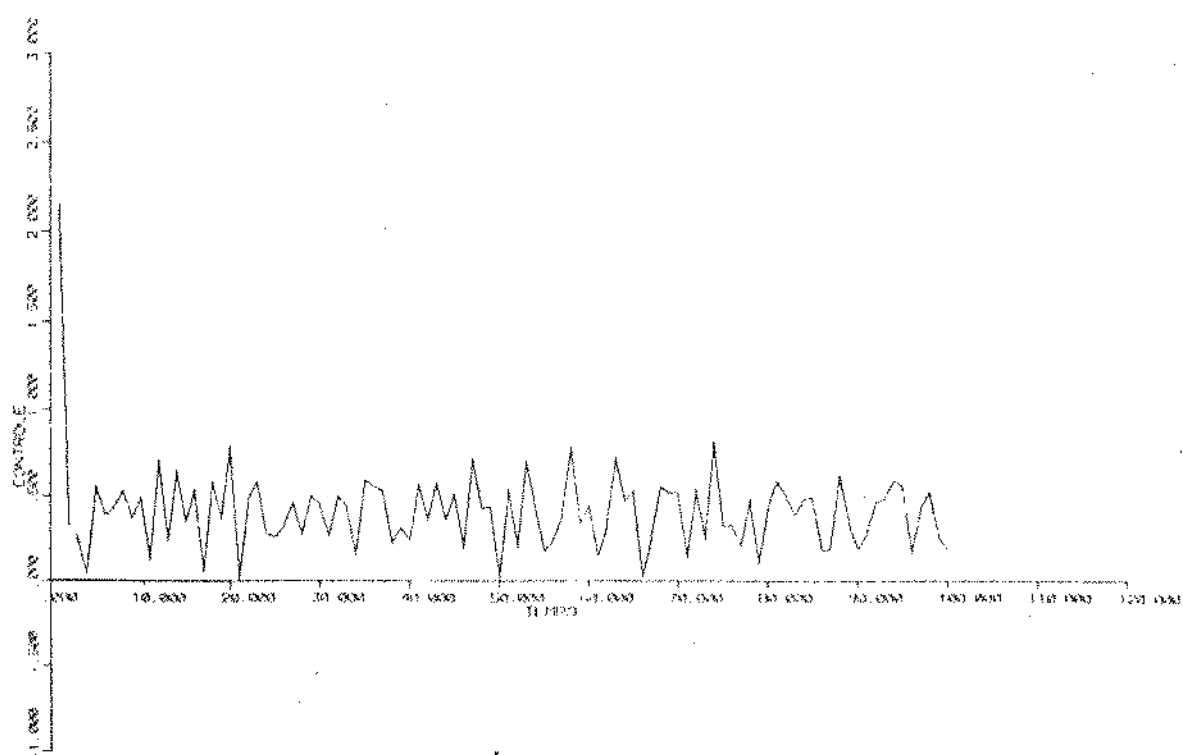


Fig. 5.7 - Sinal de controle para o sistema de fase não-mínima com $m=2$.

no tempo. O comportamento do sinal de saída é semelhante ao apresentado no item a.

c) Para $m=7$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, obtêm-se:

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 - 0,59 z^{-1} - 0,17 z^{-2} - 0,05 z^{-3} - 0,02 z^{-4} - 0,02 z^{-5} \\ - 0,02 z^{-6} - 0,02 z^{-7} + 0,01 z^{-8} + 0,15 z^{-9} - 0,07 z^{-10}$$

$$Q(z^{-1}) = -1,41 z^{-1} - 0,78 z^{-2} - 0,14 z^{-3} + 0,21 z^{-4} + 0,38 z^{-5} + \\ + 0,46 z^{-6} + 0,51 z^{-7} + 0,49 z^{-8} + 0,27 z^{-9}$$

$$R(z^{-1}) = 0,2$$

Para os polinômios acima, a função de transferência do controlador apresenta todos os polos dentro do círculo unitário, sendo que o par de polos complexos conjugados de maior módulo é dado por:

$$z_{5,6} = 0,786 \pm j 0,537$$

com

$$|z_{5,6}| = 0,95$$

Tem-se portanto que um controlador originalmente instável, obtido de modo a somente alocar os polos do sistema em malha fechada, pode se tornar estável a partir de acréscimos em sua ordem. A análise deste resultado é apresentada na seção 5.4.

Simulação

As figuras 5.8 e 5.9 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo.

Na tabela 5.2 apresentam-se as variâncias dos sinais

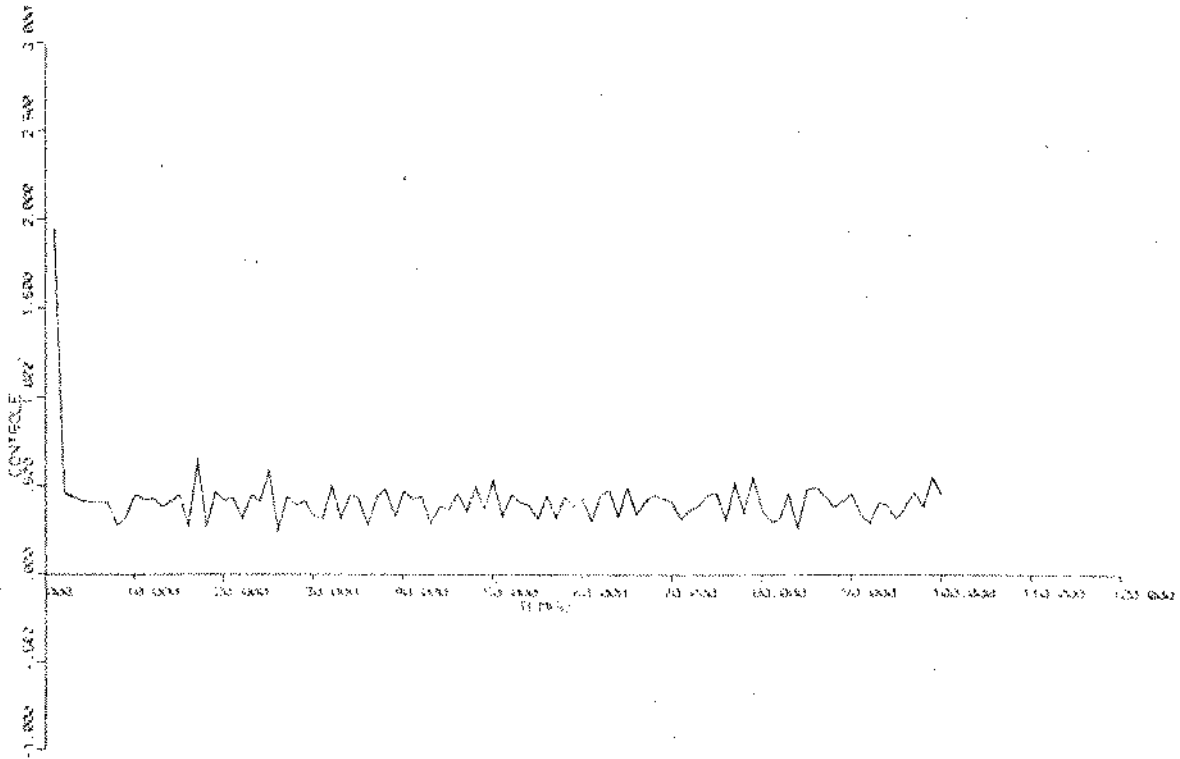


Fig. 5.8 - Sinal de controle para o sistema de fase não-mínima com $m=7$.

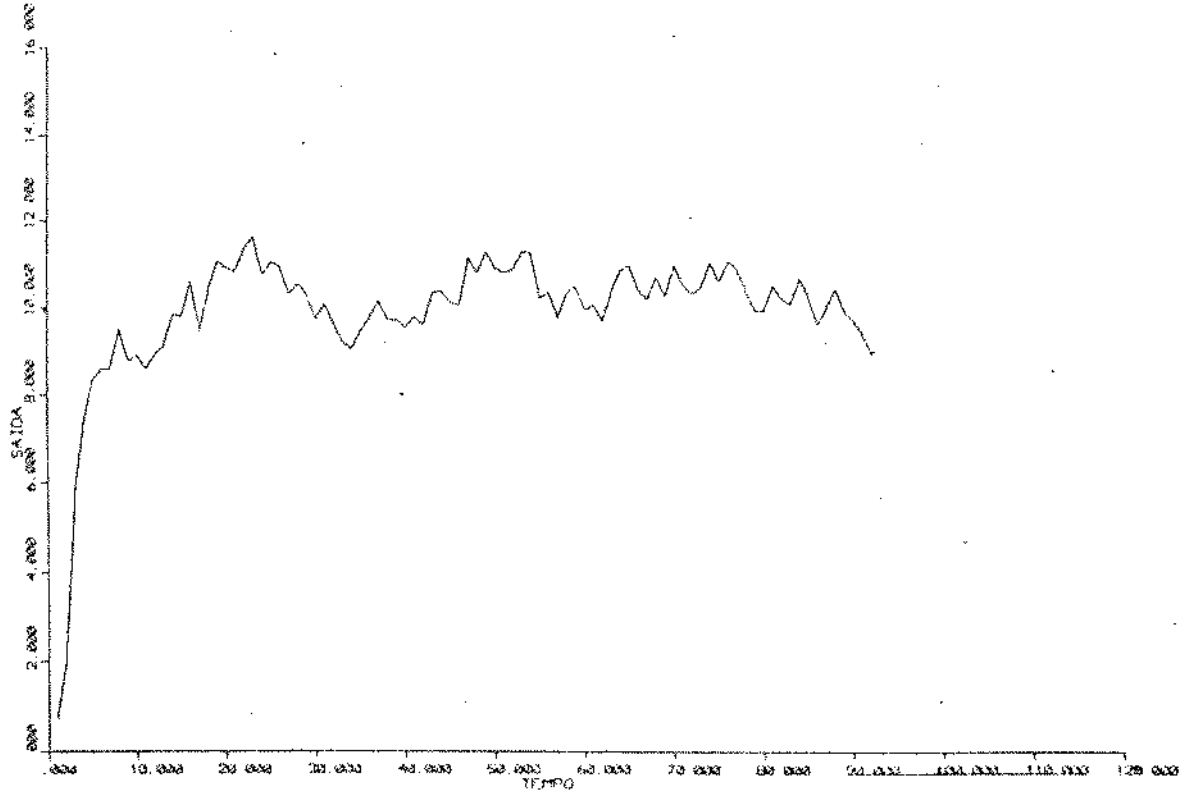


Fig. 5.9 - Sinal de saída para o sistema de fase não-mínima com $m=7$.

de controle e de saída em função do aumento na ordem dos polinômios de ponderação, para o exemplo simulado. Como no exemplo anterior, os parâmetros α_1 e α_2 foram mantidos constantes.

m	var u_t	var y_t
0	0,34	1,21
2	0,04	0,96
7	0,01	0,57

Tab. 5.2 - Variâncias do ex. 5.2.2.

5.2.3. Sistema com atraso maior que um período de amostragem

Seja o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças:

$$(1 - 1,85 z^{-1} + 0,86 z^{-2})y_t = z^{-2}(0,5 + 0,5 z^{-1})u_t + (1 - 0,5 z^{-1})\zeta_t$$

com var $\zeta_t = 0,2$

O sinal de referência w_t , é um degrau de amplitude 10.

Neste exemplo inicialmente especifica-se o polo do sistema em malha fechada de acordo com o polinômio $T_1(z^{-1})$ dado a seguir:

$$T_1(z^{-1}) = 1 - 0,7 z^{-1}$$

Entretanto, para análise da influência da escolha do polo em malha fechada no comportamento do sistema, apresenta-se no item c, a simulação deste exemplo com o polo alocado segundo o polinômio $T_2(z^{-1})$ dado a seguir:

$$T_2(z^{-1}) = 1 - 0,4 z^{-1}$$

a) Para $m=0$ e polos alocados segundo o polinômio T_1 , obtêm-se:

Polinômio da função de custo

$$P(z^{-1}) = 1 - 1,35 z^{-2} + 0,73 z^{-3} - 0,09 z^{-4}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,50 - 0,28 z^{-1} - 0,27 z^{-2} + 0,05 z^{-3}$$

$$R(z^{-1}) = 0,29$$

Simulação:

As figuras 5.10 e 5.11 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo.

b) Para $m=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e polos alocados segundo o polinômio T_1 , obtêm-se:

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 - 1,4 z^{-2} + 0,27 z^{-3} + 0,11 z^{-4} + 0,16 z^{-5} - 0,11 z^{-6}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,50 - 0,28 z^{-1} - 0,37 z^{-2} - 0,01 z^{-3} + 0,10 z^{-4} + 0,06 z^{-5}$$

$$R(z^{-1}) = 0,29$$

Simulação

As figuras 5.12 e 5.13 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo.

c) Para $m=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e polos alocados segundo o polinômio T_2 , obtêm-se:

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 - 0,55 z^{-2} + 0,33 z^{-3} - 0,13 z^{-4} - 0,17 z^{-5} + 0,16 z^{-6}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,50 + 0,02 z^{-1} - 0,11 z^{-2} - 0,12 z^{-3} - 0,20 z^{-4} - 0,09 z^{-5}$$

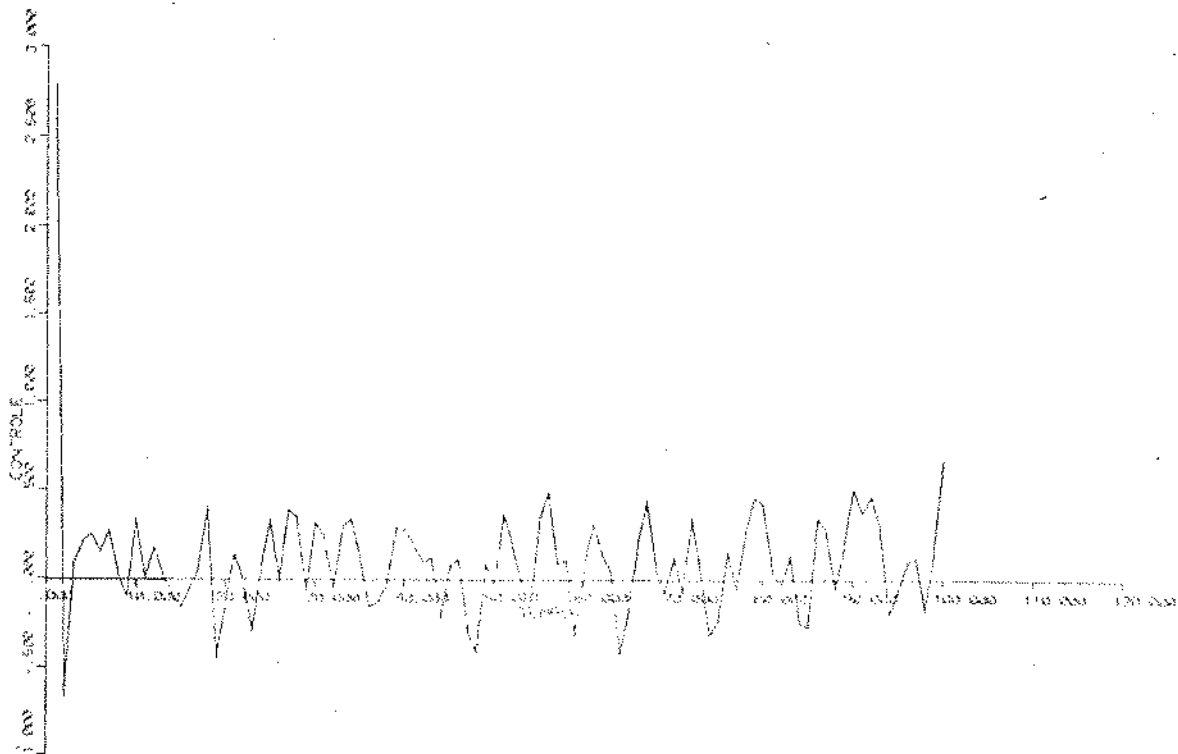


Fig. 5.10 - Sinal de controle para o sistema do exemplo 5.2.3 com $m=0$ e polos alocados segundo o polinômio T_1 .

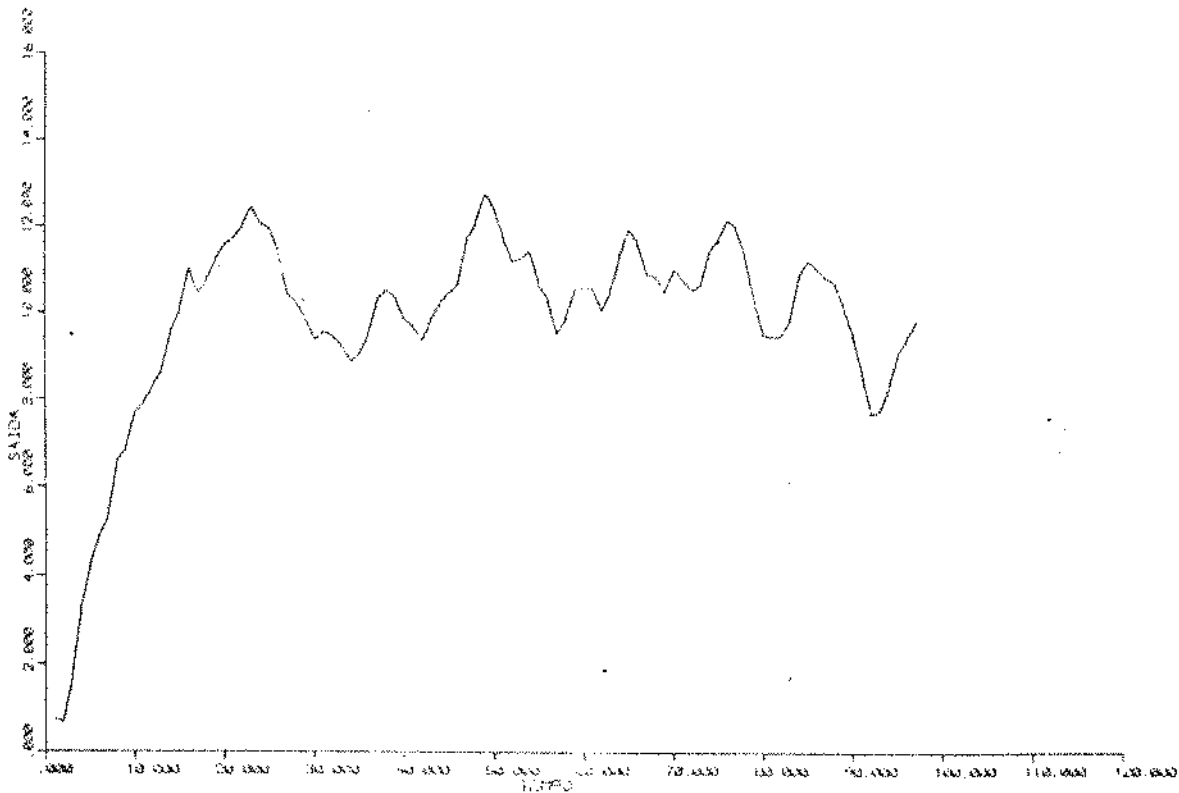


Fig. 5.11 - Sinal de saída para o sistema do exemplo 5.2.3 com $m=0$ e polos alocados segundo o polinômio T_1 .

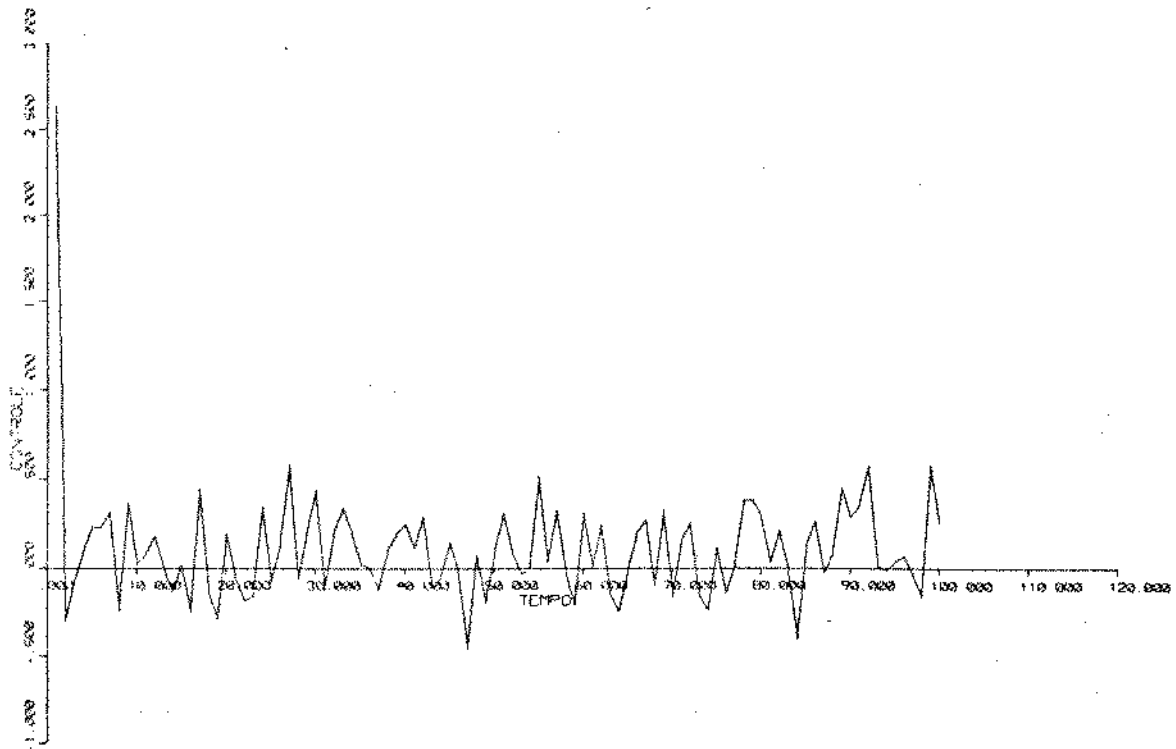


Fig. 5.12 - Sinal de controle para o sistema do exemplo 5.2.3. com $m=2$ e polos alocados segundo o polinômio T_1 .

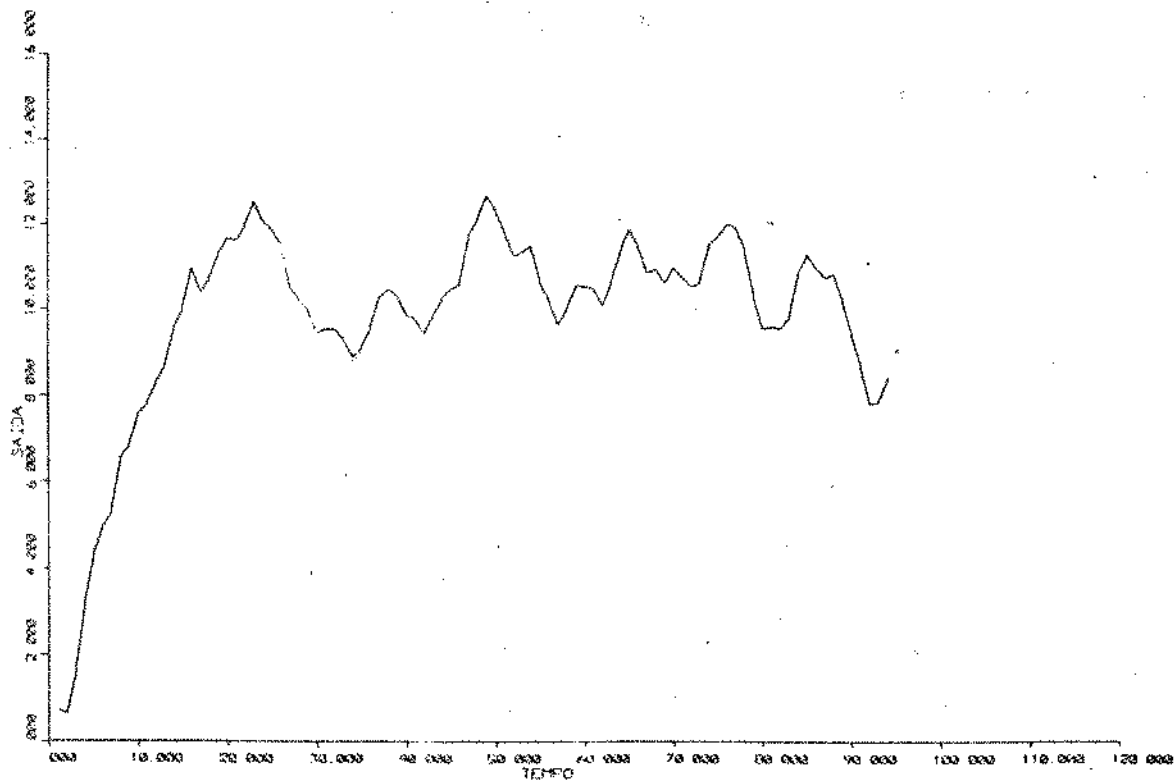


Fig. 5.13 - Sinal de saída para o sistema do exemplo 5.2.3 com $m=2$ e polos alocados segundo o polinômio T_1 .

Simulação

As figuras 5.14 e 5.15 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo.

Na tabela 5.3 apresentam-se as variâncias dos sinais de controle e de saída em função do aumento na ordem dos polinômios de ponderação e do polo especificado em malha fechada.

m	polo em m.f.	var u_t	var y_t
0	T_1	0,063	1,59
2	T_1	0,055	1,54
2	T_2	0,285	0,83

Tab. 5.3 - Variâncias do ex. 5.2.3.

Na seção 5.4 é apresentada a análise destes resultados.

d) Para este exemplo, foram ainda simulados os seguintes casos:

$$m = 7; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$m = 7; \quad \alpha_1 = 0,1; \quad \alpha_2 = 1$$

Em ambos os casos os polos foram alocados segundo o polinômio T_1 .

Na tabela 5.4 são apresentadas as variâncias dos sinais de controle e de saída em função dos parâmetros m , α_1 e α_2

m	α_1	α_2	var u_t	var y_t
0	1	1	0,063	1,59
2	1	1	0,055	1,54
7	1	1	0,145	1,27
7	0,1	1	0,046	1,53

Tab. 5.4 - Variâncias do ex. 5.2.3.

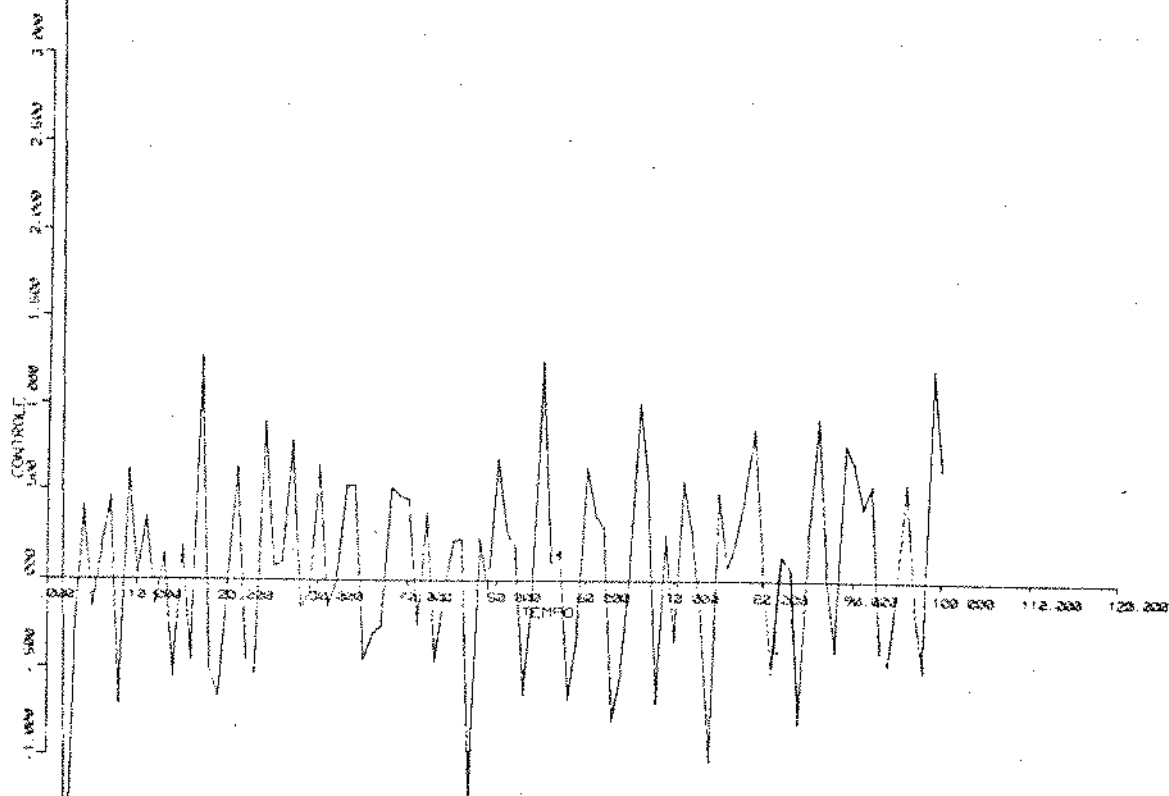


Fig. 5.14 - Sinal de controle para o sistema do exemplo 5.2.3 com $m=2$ e polos alocados segundo o polinômio T_2 .

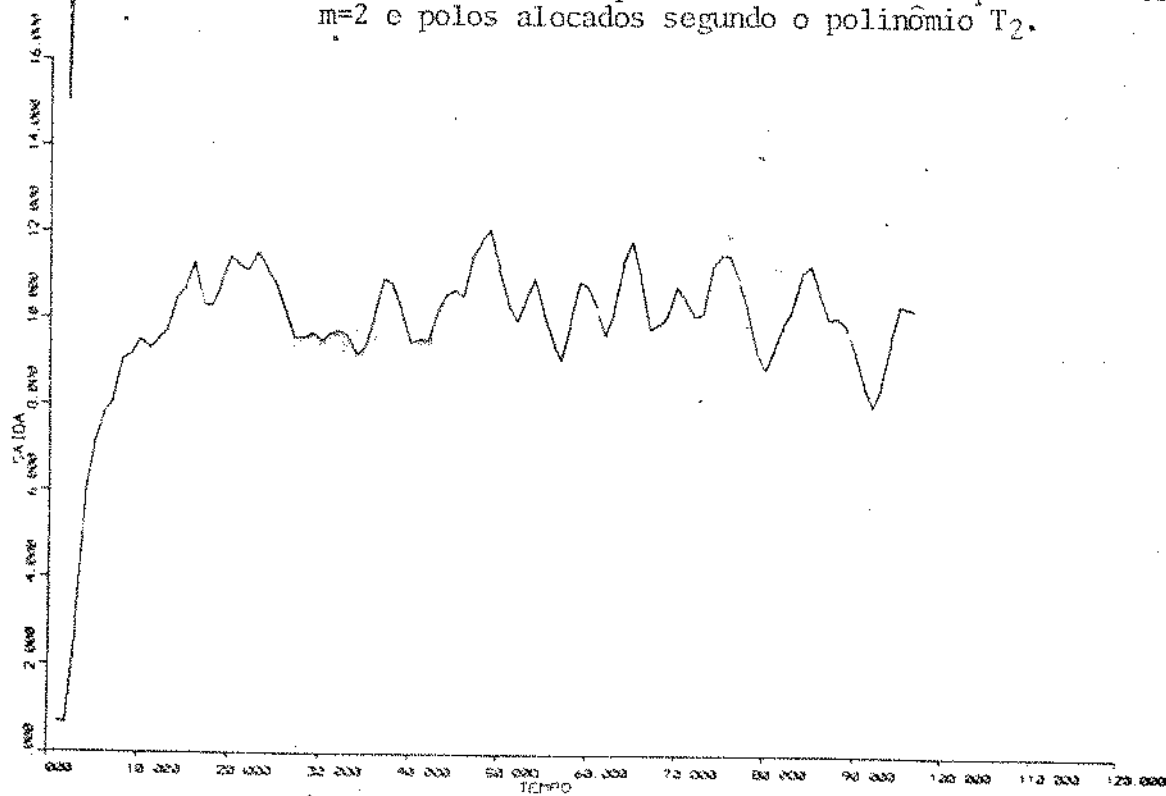


Fig. 5.15 - Sinal de saída para o sistema do exemplo 5.2.3 com $m=2$ e polos alocados segundo o polinômio T_2 .

Observa-se que houve um aumento na variância do sinal de controle quando m varia de 2 para 7. Este fato entretanto não contradiz a proposição 3.2, pois a soma das variâncias dos sinais de saída e de controle (ponderadas pelos parâmetros α_1 e α_2) para $m=2$ é maior que para $m=7$. Nota-se também, que alterando-se os parâmetros α_1 e α_2 é possível obter, para $m=7$, ambas as variâncias reduzidas em relação às obtidas para $m=2$.

5.3. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DA METODOLOGIA FREQUÊNICAL

Nesta seção é apresentada a simulação de um exemplo que ilustra a metodologia descrita no capítulo 4.

É utilizado o mesmo exemplo apresentado na seção 5.2.1. São comparados os controladores obtidos através de simples alocação de polos e o obtido através de alocação de polos com ajuste do ganho do controlador.

O modelo do sistema é descrito pela equação a diferenças a seguir:

$$(1 - 0,93 z^{-1})y_t = z^{-1}(0,072)u_t + (1 - 0,92 z^{-1})\zeta_t$$

com $\text{var}\zeta_t = 0,2$ e período de amostragem $T=3,0$ seg.

Os polos do sistema em malha fechada são alocados, como na seção 5.2.1, de acordo com o polinômio $T(z^{-1})$ abaixo:

$$T(z^{-1}) = 1 - 0,91 z^{-1}$$

A função de transferência do controlador obtido na seção 5.2.1a, através de simples alocação de polos, isto é, $m=0$, é dada por:

$$\frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} = \frac{12,25 - 23,28 z^{-1} + 11,03 z^{-2}}{1 - 1,78 z^{-1} + 0,85 z^{-3}}$$

A evolução dos sinais de controle e de saída no tempo são mostradas nas figuras 5.1 e 5.2. A resposta em frequência des

te controlador é apresentada na figura 5.16, onde se observa que o ganho para a frequência $f=1/2T$ é dado por:

$$\text{ganho} = 12,73$$

A partir da análise da resposta em frequência do controlador, o operador pode reajustar o ganho do mesmo na frequência $f=1/2T$ de modo a obter uma melhor rejeição às perturbações presentes no sinal de saída.

A seguir é apresentada a simulação obtida, supondo o seguinte ajuste de ganho, feito pelo operador:

$$\text{ganho} = 4,0$$

Polinômios da função de custo:

$$P(z^{-1}) = 1 + 5,07 z^{-1} + 1,85 z^{-2} - 6,67 z^{-3}$$

$$Q(z^{-1}) = 0,93 - 0,41 z^{-1} - 0,52 z^{-2}$$

$$R(z^{-1}) = 1,25$$

Função de transferência do controlador

$$\frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} = \frac{5,08 - 2,81 z^{-1} - 8,37 z^{-2} + 6,4 z^{-3}}{0,93 - 1,27 z^{-1} - 0,4 z^{-2} + 0,48 z^{-3}}$$

Simulação

As figuras 5.17 e 5.18 mostram a evolução dos sinais de controle e de saída no tempo. A figura 5.19 mostra a resposta em frequência do controlador.

Na tabela 5.5 apresentam-se as variâncias dos sinais de controle e de saída para os dois controladores analisados.

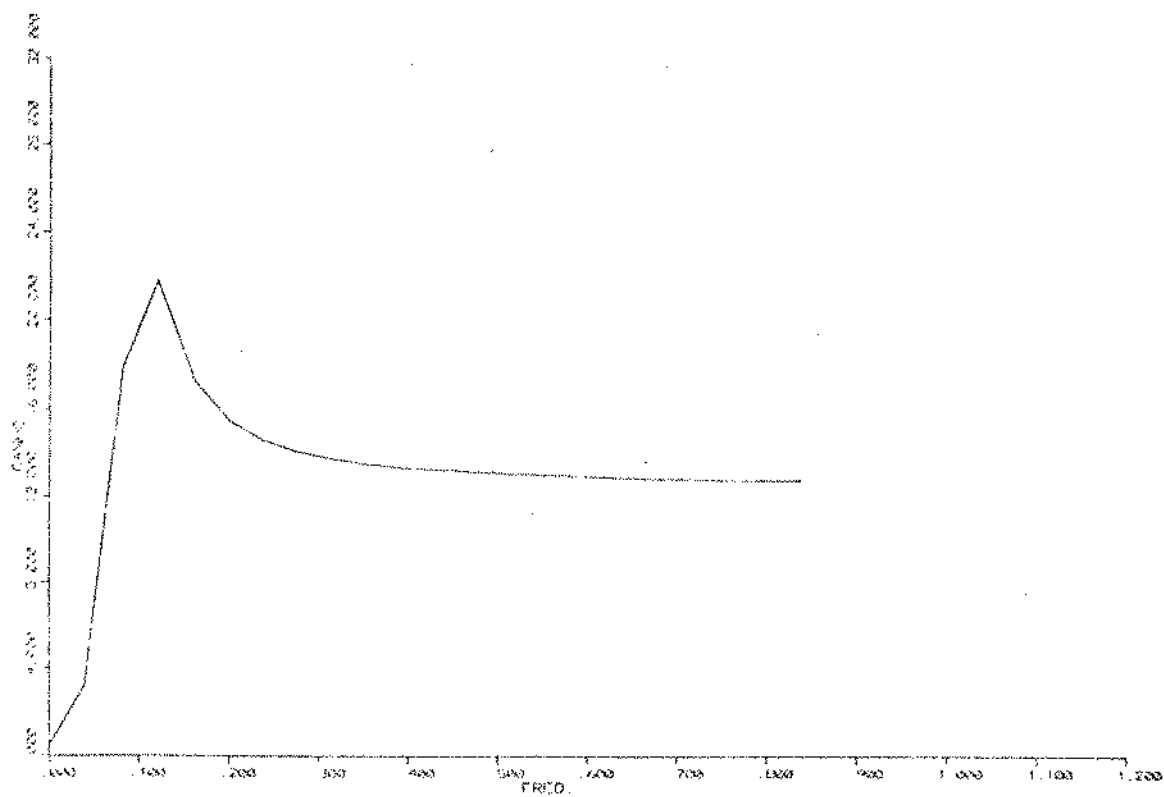


Fig. 5.16 - Resposta em frequência do controlador obtido a partir de simples alocação de polos.

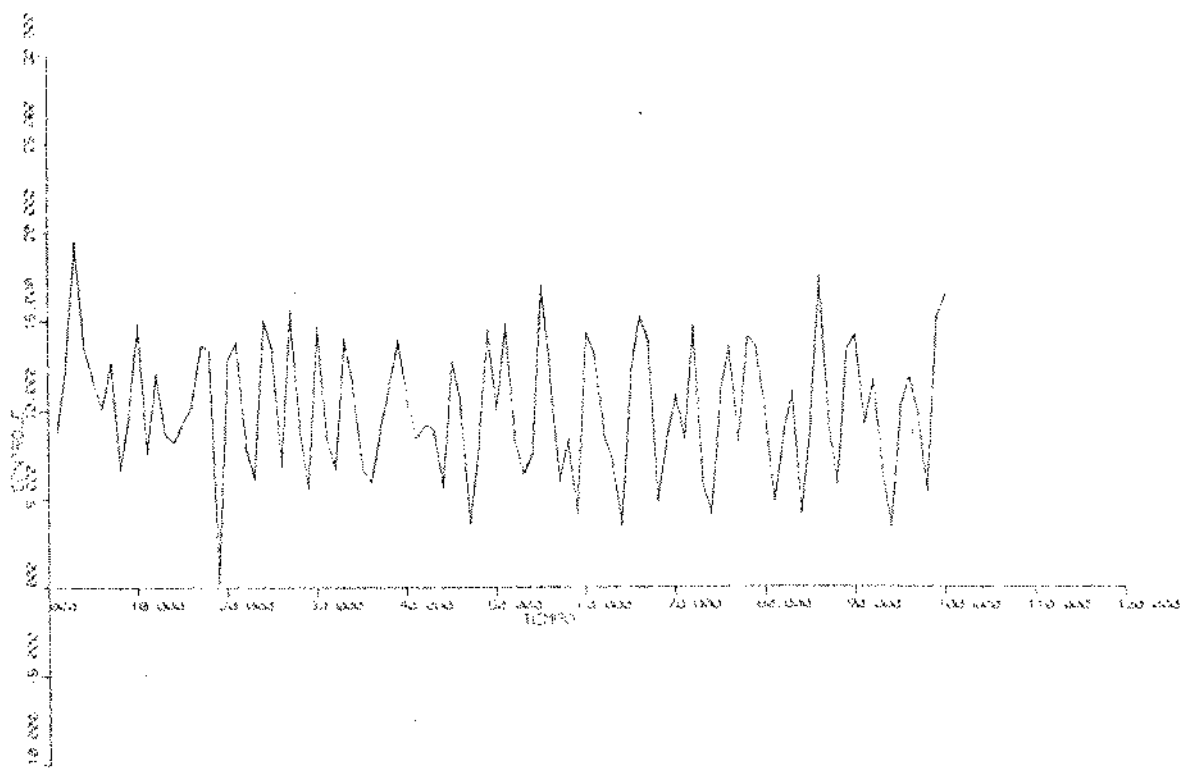


Fig. 5.17 - Sinal de controle para sistema de fase mínima com ajuste de ganho do controlador.

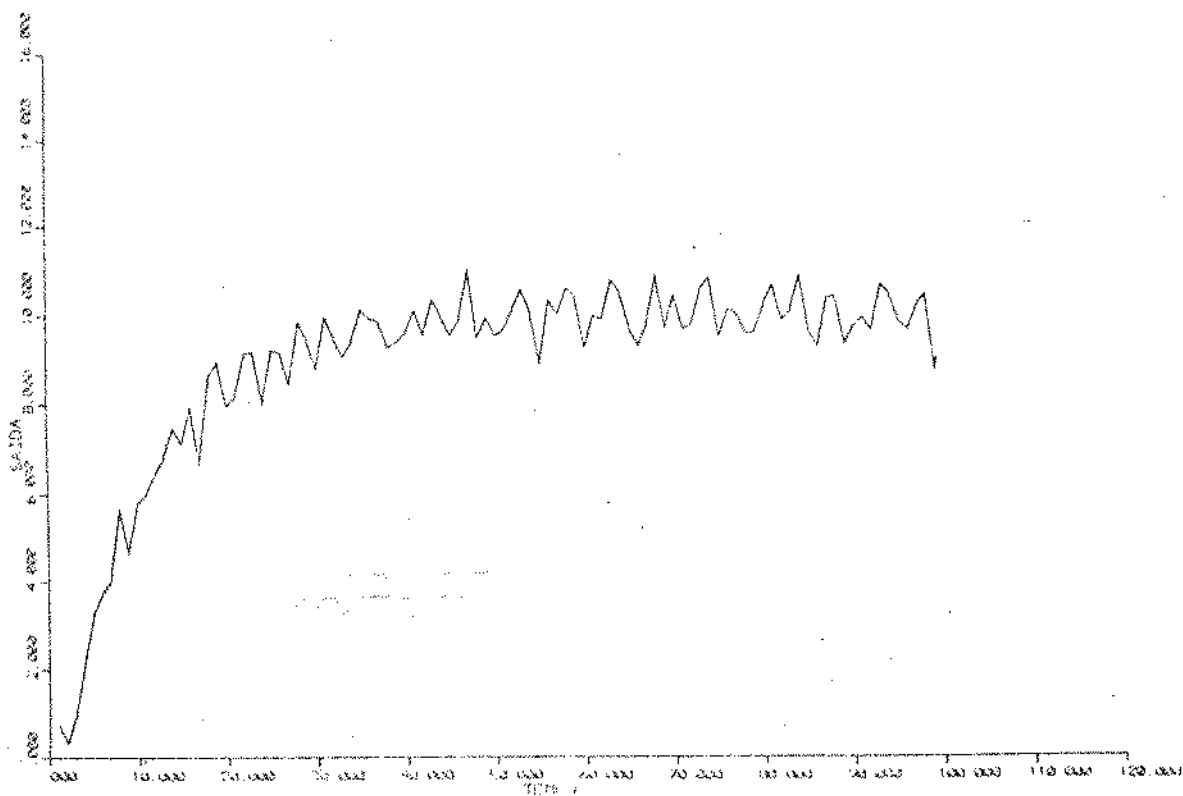


Fig. 5.18 - Sinal de saída para o sistema de fase mínima com ajuste de ganho do controlador.

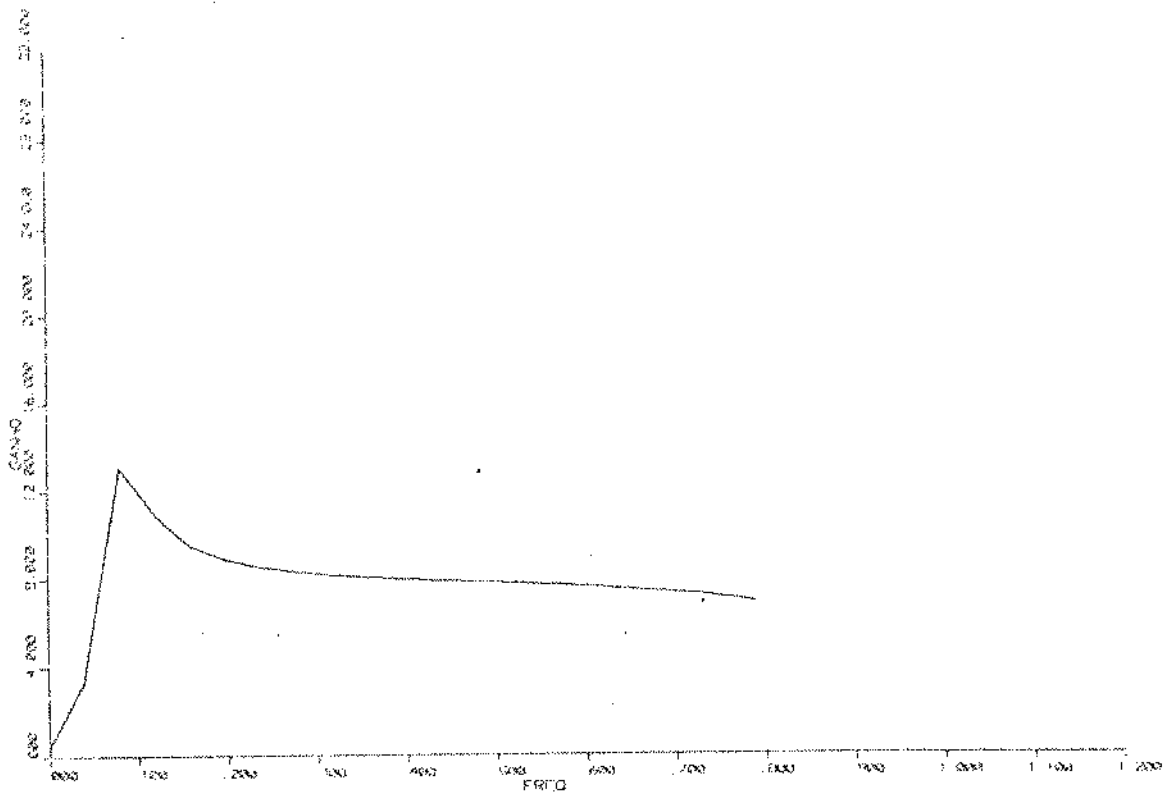


Fig. 5.19 - Resposta em frequência do controlador obtido com ajuste de ganho.

	var u_t	var y_t
sem ajuste de ganho	59,3	0,36
com ajuste de ganho	13,94	0,26

Tab. 5.5 - Variâncias do ex. 5.3.1

5.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os exemplos apresentados nas seções anteriores ilustram a eficiência das metodologias propostas.

No exemplo descrito na seção 5.2.1 observa-se uma redução da variância do sinal de controle à medida em que o número de acréscimos (m) cresce. Enquanto m varia entre 0 e 7 esta variância varia entre 59,3 e 0,34. A variância do sinal de saída mostrou-se menos sensível às variações no número de acréscimos, variando entre 0,36 e 0,21.

Apesar de não terem sido estudadas neste trabalho as condições de estabilidade para os controladores obtidos, nota-se no exemplo descrito na seção 5.2.2 algumas características interessantes. Observa-se que o controlador obtido para simples alocação de polos apresenta polos na região instável. Entretanto, com o aumento do número de acréscimos (m) o módulo dos polos instáveis tende a diminuir, sendo que para $m=7$ obtém-se um controlador estável. Sugere-se portanto como tema para trabalhos futuros a análise das condições sob as quais acréscimos nas ordens de controladores instáveis levam à sua estabilização.

No exemplo apresentado na seção 5.2.3 mostra-se a influência da especificação dos polos em malha fechada no comportamento estocástico do sistema. Na tabela 5.3 observa-se que a alocação do polo em malha fechada mais próximo da origem (polinômio T_2), resulta num aumento da variância do sinal de controle e numa diminuição da variância do sinal de saída. Este resultado é esperado pois o polo alocado mais próximo da origem representa uma maior estabilidade para o sistema, exigindo portanto maior esforço da variável de controle. No capítulo seguinte é apresentada uma sugestão para escolha dos polos a serem alocados em malha fechada.

Finalmente, na seção 5.3 mostra-se que, com um volume de cálculo menor que o apresentado na seção 5.2.1, pode-se obter reduções consideráveis na variância do sinal de controle. Este método entretanto, está condicionado à sensibilidade do operador com respeito ao processo controlado e deve apresentar em geral variâncias superiores às obtidas com a utilização do método de minimização das variâncias.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

O controlador proposto neste trabalho obtém, para o sistema controlado, o comportamento especificado como resposta a mudanças no sinal de referência (comportamento determinístico) e um comportamento eficiente do ponto de vista de rejeição a perturbações (comportamento estocástico).

Obtém-se o controlador proposto calculando-se os polinômios de ponderação da função de custo do controlador de variância mínima generalizada, alocando-se os polos do sistema em malha fechada e minimizando a combinação linear das variâncias dos sinais de saída e de controle dada pela equação a seguir:

$$\Delta = \alpha_1 \text{ var } y_t + \alpha_2 \text{ var } u_t$$

São utilizados polinômios de ponderação com ordens aumentadas em relação às ordens mínimas necessárias à resolução da equação de alocação de polos, resultando em aumento do grau de liberdade para escolha da solução desta equação. Minimiza-se a função Δ , tendo como restrição a equação de alocação de polos. O comportamento determinístico desejado é especificado pela alocação dos polos em malha fechada e o comportamento estocástico é otimizado pela minimização da função Δ .

Quanto maior o acréscimo (m) utilizado nas ordens dos polinômios de ponderação, melhor o comportamento estocástico resultante, sem alteração no comportamento determinístico.

Além disso, o controlador proposto apresenta maior facilidade de ajuste por operadores da indústria, através da escolha dos polos em malha fechada e da fixação dos parâmetros α_1 , α_2 e m mais estreitamente relacionados ao comportamento temporal e freqüencial dos sinais de saída e de controle do que a definição direta dos polinômios de ponderação da função de custo do controlador de variância mínima generalizada.

Uma metodologia freqüencial alternativa também é propos

ta, em alguns aspectos semelhantes à desenvolvida por Hughes [22], na qual os polinômios da função de custo do controlador de variância mínima generalizada são calculados, como anteriormente, através da alocação dos polos em malha fechada, e ainda, através do ajuste do ganho do controlador em "feed-back" numa determinada frequência. O controlador assim obtido demanda um esforço computacional menor do que o proposto anteriormente, mas exige que o usuário interaja com o processo pelo ajuste do ganho do controlador.

Os resultados obtidos mostram que os controladores propostos neste trabalho resultam em comportamento estocástico melhor do que o apresentado por controladores obtidos por simples alocação de polos.

Entretanto algumas questões exigem maior aprofundamento, constituindo-se em possíveis temas para estudos posteriores. Algumas destas questões são descritas a seguir:

Neste trabalho não se consideraram os aspectos transitórios da estimação, isto é, não se analisou o comportamento dos algoritmos nos instantes iniciais do controle do processo, quando os valores estimados dos parâmetros são ainda muito diferentes dos valores do modelo matemático. Esta análise é importante para comprovação da utilidade das metodologias apresentadas, e é sugerida como tema para trabalhos futuros.

Finalmente, cumpre observar que, conforme mostrado no capítulo 5, seção 5.2.3, a escolha dos polos em malha fechada influencia no comportamento estocástico dos sinais de saída e de controle. Por outro lado, em geral, as especificações industriais permitem que os polos do sistema em malha fechada sejam alocados numa região do plano z e não necessariamente em pontos univocamente estabelecidos. Assim sendo, sugere-se também como tema para trabalhos futuros, o estudo de técnicas para determinação da alocação ótima de polos do sistema em malha fechada com as seguintes características:

- a) Fixação, pelo usuário, de faixas permissíveis para critérios de desempenho industriais (por exemplo, figuras de mérito da teoria de controle clássico).
- b) Determinação de regiões permissíveis para os polos do sistema em malha fechada, obtidos a partir dos critérios fixados pelo usuário.

56981BC

- c) Determinação da alocação de polos que satisfaça a região acima determinada e que leve ao menor valor ótimo para o problema de minimização da função Δ dada pela equação (1.7).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ÅSTROM, K.J., (1970). Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New York.
- [2] WITTENMARK, B., (1975). "Stochastic Adaptive Control Methods: A Survey". Int. J. Control, vol. 21, nº 5: 705-730.
- [3] FLORENTINE, J.J., (1962). "Optimal probing adaptive control of a simple Bayesian system". Int. J. Control, vol. 11: 165.
- [4] WITTENMARK, B. (1971). On the turn-off phenomenon in adaptive control. Report nº 7105 - Lund Institute of Technology - Sweden.
- [5] ÅSTROM, K.J.; WITTENMARK, B., (1973). "On Self Tuning Regulators". Automatica, vol. 9: 185-199.
- [6] BORISSON, U.; WITTENMARK, B., (1973). Moisture Control of a paper machine - on application of a self tuning regulator Report nº 7337 - Lund Institute of Technology - Sweden.
- [7] JENSEN, L.; HÄNSEL, R., (1974). Computer Control of an Enthalpy exchanger. Report nº 7417 - Lund Institute of Technology - Sweden.
- [8] BORISSON, U., (1975). Self Tuning Regulators - Industrial Application and Multivariable Theory. Report nº 7513 - Lund Institute of Technology - Sweden.
- [9] CLARKE, D.W.; GAWTHROP, P.J., (1975). "Self Tuning Controller" Proc. IEE, vol. 122, nº 9: 929-934.
- [10] CLARKE, D.W. et al, (1975). Feasibility study of the application of microprocessors to self tuning control. Report nº 1137. University of Oxford - England.
- [11] BORISSON, U. (1979). "Self-Tuning regulators for a class of multivariable systems". Automatica, vol. 15: 209-215.

- [12] KEVICZKY, L.; HETTHESSY, J., (1977). "Self-Tuning minimum variance control of MIMO discrete time systems", Automatic Control Theory and Applications, vol. 5, n° 1.
- [13] KEVICZKY, L.; KUMAR, K.S.P., (1981). "Multivariable Self-Tuning regulator with generalized cost function". Int. J. Control, vol. 33, n° 5, 913-921.
- [14] FAVIER, G.; HASSANI, M. (1982). "Multivariable Self-Tuning controllers based on generalized minimum variance". Proc. of IEEE Conference on Decision and Control.
- [15] MACHADO, R.C. et al. (1982). "A MIMO Self-Tuning Controller with Cautions Behaviour". Proc. of American Control Conference.
- [16] KOIVO, H.N., (1980). "A multivariable self-tuning controller" Automatica, vol. 16: 351-366.
- [17] GAWTHROP, P.J., (1977). "Some interpretations of the self-tuning controller". Proc. IEE, vol. 124, n° 10: 889-894.
- [18] FAVIER, G., (1981). Filtrage, identification et commande adaptative des systemes linéaires stochastiques a temp discret. Thèse d'Etat, Université de Nice - France.
- [19] WELLSTEAD, P.E., et al. (1979). "Pole assignment self-tuning regulator". Proc. IEE, vol. 126, n° 8: 781-787.
- [20] ÅSTROM, K.J. et al. (1978). Self-Tuning controller based on pole-placement design. Report n° 3148 - Lund Institute of Technology . Sweden.
- [21] ALLIDINA, A.Y. et al. (1980). "Generalised self-tuning controller with pole assignment". Proc. IEE, vol. 127, pt D, n° 1: 13-18.
- [22] HUGHES, F.M.; ALLIDINA, A.Y. (1982). "Self-Tuning controller design incorporating frequency response criteria". Proc. of IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation.

- [23] CLARKE, D.W.; GAWTHROP, P.J.; (1979). "Self-Tuning Control". Proc. IEE, vol. 126, n° 6. 633-640.
- [24] FAVIER, G.; GUILLERMIN, P., (1980). "A comparative study of self-tuning regulators". Proc. of IFAC Conference on System Approach for Development.
- [25] FAVIER, G., (1982). "Commande adaptative multivariable a l'aide d'un systeme de commande auto-ajustable. Presentation de différents algorithmes et comparaison". Colloque CNRS. RCP 567, Belle Ile.
- [26] EYKHOFF, P. (1974). Systems Identification; parameters and state estimation.
- [27] CLARKE, D.W.; GAWTHROP, P.J., (1979). "Implementation and application of microprocessor based self tuners". Proc. of IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Wiley London.
- [28] GUILLERMIN, P., (1980). La commande adaptative. Tese de doctoramento - Université de Nice - France.
- [29] ATHANS, M.; VALAVANI, L., (1982). "Some Critical Questions about Deterministic and Stochastic Adaptive Control Algorithms". Proc. of IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation.
- [30] JONG, M.T., (1982). Methods of Discrete Signal and Systems Analysis. McGraw-Hill.
- [31] LUENBERGER, D.G., (1973). Introduction to Linear and Nonlinear Programming. Addison-Wesley Pub. Co. Massachusetts.

APÊNDICE A

RELAÇÃO ENTRE AS ORDENS DOS POLINÔMIOS DE PONDERAÇÃO P^* E Q^*

Neste Apêndice demonstra-se o resultado dado pela equação (3.11), seção 3.3, reapresentado a seguir na proposição A.1:

Proposição A.1:

Seja a equação de alocação de polos dada pela equação (3.5), a seguir:

$$z^{-d} BP^* + A(1-z^{-1}) Q^* = T - B \quad (3.5)$$

Supõe-se que as equações (3.9) e (3.10) abaixo sejam satisfeitas:

$$n_{in} \geq n_{eq} \quad (3.9)$$

$$n_T \leq n_a + n_b + d \quad (3.10)$$

onde n_{in} e n_{eq} são respectivamente o número de incógnitas e o número de equações do sistema de equações lineares obtidos a partir da equação (3.5). Estes valores são dados pelas equações (3.6) e (3.7), escritas a seguir:

$$n_{in} = n_{pa} + n_{qa} + 2 \quad (3.6)$$

$$n_{eq} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d + n_{pa} \\ n_a + 1 + n_{qa} \end{array} \right\} + 1 \quad (3.7)$$

Prova-se que não há perda de generalidade em escolher as ordens dos polinômios P^* e Q^* tais que as ordens dos polinô-

mios $z^{-d} BP^*$ e $\Lambda(1-z^{-1})Q^*$ sejam iguais, isto é, que as ordens n_{pa} e n_{qa} satisfaçam a equação (3.11) reescrita a seguir:

$$\boxed{n_b + d + n_{pa} = n_a + 1 + n_{qa}} \quad (3.11)$$

Para a demonstração da proposição A.1, provar-se-á que:

$$\begin{aligned} \text{P1) se } n_b + d + n_{pa} &> n_a + 1 + n_{qa} \\ \text{ou } n_{pa} &= n_a - n_b - d + 1 + n_{qa} + k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde k é um inteiro positivo,

então os k coeficientes de maior ordem de P^* serão nulos, o que equivale a afirmar que:

$$\text{ou } n_{pa} = n_a - n_b - d + 1 + n_{qa}$$

$$n_b + d + n_{pa} = n_a + 1 + n_{qa}$$

$$\text{P2) se } n_b + d + n_{pa} < n_a + 1 + n_{qa}$$

$$\text{ou } n_{qa} = n_b + d - n_a - 1 + n_{pa} + k \quad (\text{A.2})$$

onde k é um inteiro positivo,

então os k coeficientes de maior ordem de Q^* serão nulos, o que equivale a afirmar que:

$$\text{ou } n_{qa} = n_b + d - n_a - 1 + n_{pa}$$

$$n_b + d + n_{pa} = n_a + 1 + n_{qa}$$

As proposições P1 e P2 mostram que, se a equação (3.11) não for satisfeita, os coeficientes de maior ordem dos polinômios P^* ou Q^* serão nulos, e portanto não há perda de generalidade em escolher as ordens n_{pa} e n_{qa} que satisfaçam a relação dada em (3.11).

Prova de P1)

O número de equações do sistema de equações lineares obtido a partir da equação de alocação de polos é dado pela equação (3.7).

$$neq = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d + npa \\ n_a + 1 + nqa \end{array} \right\} + 1$$

Se a escolha das ordens npa e nqa satisfizer a equação (A.1) tem-se que:

$$neq = n_b + d + npa + 1$$

O número de incógnitas é dado pela equação (3.6).

$$nin = npa + nqa + 2$$

Substituindo as expressões acima na equação (3.9), obtém-se:

$$nin \geq neq$$

ou

$$npa + nqa + 2 \geq n_b + d + npa + 1$$

ou

$$nqa \geq n_b + d - 1$$

A inequação acima pode ser reescrita conforme a equação (A.3) a seguir:

$$nqa = n_b + d - 1 + m$$

(A.3)

onde m é um inteiro positivo ou nulo.

Para obtenção da ordem do polinômio P^* , substitui-se a equação (A.3) na equação (A.1) resultando a equação (A.4) a seguir:

$$\boxed{n_{pa} = n_a + k + m} \quad (A.4)$$

Para a demonstração desejada é necessário que se estabeleçam relações entre as ordens dos polinômios que aparecem na equação de alocação de polos. Sejam $N1$, $N2$ e $N3$ respectivamente as ordens dos polinômios $z^{-d} BP^*$, $A(1-z^{-1})Q^*$ e T-B, então:

$$N1 = n_b + d + n_{pa}$$

$$N2 = n_a + 1 + n_{qa}$$

$$N3 = \max\{n_T, n_b\}$$

Substituindo-se as equações (A.3) e (A.4) nas equações acima obtêm-se:

$$N1 = n_b + d + n_a + k + m$$

$$N2 = n_a + n_b + d + m$$

$$N3 = \max\{n_T, n_b\}$$

Da equação (3.10) tem-se que:

$$N3 = \max\{n_T, n_b\} \leq n_a + n_b + d$$

Das equações acima, pode-se escrever as seguintes relações entre $N1$, $N2$ e $N3$:

$$N1 = N2 + k \quad (A.5)$$

$$N2 \geq N3$$

As equações (A.5) mostram que, no sistema de equações

lineares obtido a partir da equação de alocação de polos as k últimas equações dependem somente do polinômio $z^{-d} BP^*$. Estas equações são escritas a seguir:

$$\begin{aligned} b_{nb} p_{npa-k+1}^* + \dots + &= 0 \\ \vdots & \\ b_{nb} p_{npa-2}^* + b_{nb-1} p_{npa-1}^* + b_{nb-2} p_{npa}^* &= 0 \\ & \\ b_{nb} p_{npa-1}^* + b_{nb-1} p_{npa}^* &= 0 \\ & \\ & b_{nb} p_{npa}^* = 0 \end{aligned}$$

Tem-se que, se $b_{nb} \neq 0$, existe uma solução única trivial para os k coeficientes de maior ordem de P^* . Esta solução é escrita a seguir:

$$p_{npa-k+1}^* = p_{npa-k+2}^* = \dots = p_{npa}^* = 0$$

Fica assim demonstrada a proposição P1.

Prova de P2)

A prova da proposição P2 é análoga à da proposição P1 e será omitida. Tem-se que se a ordem do polinômio Q^* for dada pela equação A-2 então:

$$q_{nqa-k+1}^* = q_{nqa-k+2}^* = \dots = q_{nqa}^* = 0$$

e portanto não há perda de generalidade em escolher

$$nqa = n_b + d - n_a - 1 + npa$$

APÊNDICE B

EQUAÇÕES POLINOMIAIS NÃO-REGULARES

Neste Apêndice apresenta-se o caso em que a identidade polinomial dada pela equação (3.5) não é regular, isto é, n_T é dado pela equação (B.1) a seguir:

$$n_T = n_a + n_b + d + k \quad (\text{B.1})$$

onde k é um inteiro positivo.

O número de equações do sistema linear obtido a partir da equação de alocação de polos é dado pela equação (3.7) reescrita a seguir:

$$n_{eq} = \max \left\{ \begin{array}{l} n_b + d + n_{pa} \\ n_a + 1 + n_{qa} \end{array} \right\} + 1 \quad (\text{3.7})$$

Para o caso não-regular, são possíveis duas escolhas para as ordens dos polinômios P^* e Q^* que resultam em diferentes valores para o número de equações apresentado anteriormente. A seguir são analisados nos itens a) e b) as duas escolhas possíveis.

a) Escolhendo-se as ordens n_{pa} e n_{qa} tais que:

$$n_b + d + n_{pa} > n_a + 1 + n_{qa} \quad (\text{B.2})$$

tem-se, da equação (3.7):

$$n_{eq} = n_b + d + n_{pa} + 1$$

Portanto a condição de existência de solução dada pela inequação (3.9) resulta:

$$n_{in} \geq n_{eq}$$

ou

$$n_{pa} + n_{qa} + 2 \geq n_b + d + n_{qa} + 1$$

ou

$$n_{qa} \geq n_b + d - 1 \quad (\text{B.3})$$

Conseqüentemente a ordem mínima para o polinômio Q^* é dada pela equação (B.4) a seguir:

$$\boxed{n_{qa} = n_b + d - 1} \quad (\text{B.4})$$

Para que a condição de existência de solução dada pela inequação (3.8) seja satisfeita, a ordem do polinômio P^* deve satisfazer a inequação a seguir:

$$n_T \leq n_b + d + n_{pa}$$

substituindo a ordem do polinômio T , dada pela equação (B.1) na inequação anterior obtém-se:

$$n_a + n_b + d + k \leq n_b + d + n_{pa}$$

ou

$$n_{pa} \geq n_a + k \quad (\text{B.5})$$

Portanto a ordem mínima para o polinômio P^* é dada pela equação (B.6) a seguir:

$$\boxed{n_{pa} = n_a + k} \quad (\text{B.6})$$

As inequações (B.3) e (B.5) podem ser reescritas conforme as equações (B.7) e (B.8) a seguir:

$$n_{qa} = n_b + d - 1 + m_{qa} \quad (\text{B.7})$$

$$n_{pa} = n_a + k + m_{pa} \quad (\text{B.8})$$

onde m_{pa} e m_{qa} são inteiros positivos ou nulos que representam respectivamente o número de acréscimos sobre as ordens mínimas dos polinômios P^* e Q^* .

Conforme as equações (3.18) e (3.19), e as equações (B.7) e (B.8) o número de incógnitas e o número de equações do sistema de equações lineares obtido a partir da equação de alocação de polos são dados por:

$$n_{in} = n_a + n_b + d - 1 + k + m_{pa} + m_{qa} + 2$$

$$n_{eq} = n_b + d + n_a + k + m_{pa} + 1$$

Portanto:

$$n_{in} - n_{eq} = m_{qa}$$

Da equação anterior tem-se que o número de graus de liberdade para escolha da solução na equação de alocação de polos é dado pelo número de acréscimos sobre a ordem mínima do polinômio Q^* . O parâmetro m_{pa} não contribui para este aumento do número de graus de liberdade e é feito nulo por motivo de simplicidade. Tem-se então que as ordens dos polinômios P^* e Q^* são dadas pelas equações a seguir:

$$n_{pa} = n_a + k$$

$$n_{qa} = n_b + d - 1 + m$$

onde $m = m_{qa}$

É importante ainda observar que para $m > k$ a inequação (B.2) não é verdadeira e os resultados anteriores não são válidos. Para este caso passam a valer os resultados obtidos no apêndice A, isto é, aplica-se a equação (3.11).

As ordens dos polinômios P^* e Q^* são dadas portanto pelas equações (B.9) e (B.10) a seguir:

$$n_{pa} = \begin{cases} n_a + k, & \text{se } m < k \\ n_a + m, & \text{se } m \geq k \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$n_{qa} = n_b + d - 1 + m \quad (\text{B.10})$$

Os resultados apresentados no capítulo 3 são válidos para as ordens apresentadas pelas equações (B.9) e (B.10).

b) Escolhendo-se as ordens n_{pa} e n_{qa} tais que

$$n_b + d + n_{pa} < n_a + 1 + n_{qa}$$

Tem-se analogamente ao caso anterior que as ordens dos polinômios P^* e Q^* são dadas por:

$$n_{pa} = n_a + m \quad (\text{B.11})$$

$$n_{qa} = \begin{cases} n_b + d - 1 + k, & \text{se } m < k \\ n_b + d - 1 + m, & \text{se } m > k \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Os resultados apresentados no capítulo 3 são também válidos para as ordens apresentadas pelas equações (B.11) e (B.12).



ANEXO A: PROGRAMAS

```

*****
DIMENSION Z1(0:10), Z2(0:10), Z3(0:10), Z4(0:10), Z5(0:10)
DIMENSION S(0:10), C(0:10)
DIMENSION A(0:10), B(0:10), C1(0:10)
INTEGER D

C
C 101) DADA DA MATRIZ
C
      Z1(0,1) = 1, Z1(1,1) = 1, Z1(2,1) = 1, Z1(3,1) = 1
      Z2(0,2) = (C1(1,1) + 1) * Z1(0,1)
      Z3(0,2) = (C1(1,1) + 1) * Z1(1,1)
      Z4(0,2) = (C1(1,1) + 1) * Z1(2,1)
      Z5(0,2) = (C1(1,1) + 1) * Z1(3,1)
      TYPE = 4
      ACCEPT = 10, 5A1
      TYPE = 5
      ACCEPT = 0, IFLAG
1      FORMAT(/, 1A, 5I)
2      FORMAT(/, 1A, 5F)
5      FORMAT(/, 5A, '1) COEF. 1) DA MATRIZ A = B * A', /)
6      FORMAT(I)
10     FORMAT(S)
9      FORMAT(/, 5A, 'ORDENS DO SUBSTRUATOS', S)
C
C  CALCULO DOS POLINOMIOS S, C1
C
      NS = NG + D + 1
      DO 820 J = 0, NS - 1
      IF (J .GT. NC) GO TO 8201
      VAR1 = CES(J)
      GO TO 8202
8201   VAR1 = 0
8202   IF (J .LT. D) GO TO 8203
      VAR2 = C(J - D)
      GO TO 820
8203   VAR2 = 0
820   S(J) = VAR1 - VAR2
      S(NS) = -S(NS - 1)
      DO 821 J = NS - 1, 1, -1
821   S(J) = S(J) - S(J - 1)
      C1(NC + 1) = -CES(NC)
      C1(0) = CES(0)
      DO 822 J = NC, 1, -1
822   C1(J) = CES(J) - C1(J - 1)
C
C  CALCULO DAS ORDENS DO SISTEMA
C
      NPA = NG + 1
      NQA = NBF
      IF (IFLAG .EQ. 1) GO TO 8240
      NPA = NPA + 1
      NQA = NQA + 1
8240   NM = NPA + NQA + D + 1
      NU = NQA + 1
C
C  MONTAGEM DA PARTE SUPERIOR DA MATRIZ DE COEF. AN
C
      DO 825 J = 1, NPA + 1
      DO 825 K = D + J, D + J + NBF
825   AN(NM * (J - 1) + K) = PF(K - D - J)

```

```

      DO 826 J=NPA+2, NPA+NQA+2
      DO 826 I=J-NPA-1, I=NPA-1+1
826   AM(NM*(J-1)+I)=A*(A*(I+1)+B*(I+1))
      IF(NQA.LT.1) GOTO 829
      DO 827 J=NPA+NQA+3, NM
      DO 827 K=J-NPA-1, J-NPA-1+1+1
827   BM(NM*(J-1)+I)=B*(I+1)+A*(I+1)
C
C   MONTAGEM DA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
C
828   IF(IFLAG.EQ.1) GOTO 830
      I=N
      DO 830 J=1, NPA+1
      AM(NM*(J-1)+I)=0
      DO 830 K=0, NPA
830   AM(NM*(J-1)+I)=AM(NM*(J-1)+I)+C*(K)*(-1)**(K+J-1)
      DO 831 J=NPA+2, NPA+NQA+2
      AM(NM*(J-1)+I)=0
      DO 831 K=0, NCA+1
831   AM(NM*(J-1)+I)=A*(A*(J-1)+I)+G*(K)+C*(K)*(-1)**(K+J-NPA-2)
C
C   MONTAGEM DO VETOR BM
C
832   DO 832 J=0, NPA
832   BM(J+1)=TP(J)
      DO 833 J=0, NPA
833   BM(J+1)=BM(J+1)-BF(J)
      IF(IFLAG.LT.1) GOTO 837
      BM(L)=0
      DO 836 J=0, NG
836   BM(L)=BM(L)-G(J)*(-1)**(L+J)
      DO 837 J=0, NPA
837   BM(L)=BM(L)-GAG*BF(J)*(-1)**J
      DO 7 J=1, NM
      PRINT(37,8) (AM(I+(K-1)+J), K=1, NPA), BM(J)
8   FORMAT(11(3X,F9.5))
7   CONTINUE
C
C   SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C
8370   CALL GELG(BM, AM, NM, 1, 1.0E-1, 1E6)
C
C   CALCULO DO POLINOMIO Q
C
      Q(NQ)=-BM(NPA+NQA+2)
      Q(0)=BM(NPA+2)
      IF(NQA.LT.1) GOTO 8381
      DO 838 J=1, NQA
838   Q(J)=BM(J+NPA+2)-BQ(J+NPA+1)
C
C   RESULTADOS
C
8381  IF(IER.EQ.0) GOTO 839
      IER=IER+1
      TYPE 3, IER
3     FORMAT(/,5X,'PERDA DE SIGNIFICADO NO PASSO ',I2)
839   WRITE (36,4) (BM(J), J=1, NPA+1)
      WRITE (36,4) (BM(J), J=NPA+2, NPA+NQA+2)
      WRITE (36,4) (Q(J), J=0, NQ)
      WRITE (36,4) (BM(J), J=NPA+NQA+3, NM)

```

4 2000 (7, 17)
2000
2000

2000

```

*****
DIMENSION CALO(21),PI(21),S(21),IP(21)
DIMENSION A(10),T(10)
DIMENSION P(22),F(22),G(21),IS(21)
DIMENSION GA(22),G(22),GA2(22),GA3(22)
DIMENSION SHAT(21),SP(20),SMA(20)
DIMENSION AC(2),ID(2),OP(2)
DIMENSION CO(2),CO2(2),CO3(2),OS(2)
INTEGRO
C
C  CALCULO DE DACOS
C
      READ (30,1) (C,PI,IP,AT)
      READ (30,2) (S(1),IS(1))
      READ (30,2) (P(1),F(1),G(1))
      READ (30,2) (G(1),J=2,NC)
      READ (30,2) (IP(J),I=2,NC)
      TYPE 20
      ACCEPT 27,ALPHA,BETA
      TYPE 5
      ACCEPT 6,B
      1  FORMAT(/,1X,5I)
      2  FORMAT(/,1X,9F)
      5  FORMAT(/,5X,'MOMENTO DE TENDAS?',S)
      6  FORMAT(I)
      20  FORMAT(/,5X,'PRIMO ALFA E BETA:',S)
      27  FORMAT(2F)
C
C  CALCULO DOS POLINOMIOS 1, C1:
C
      NS=NG+D+1
      DO #20 J=0,NS-1
      IF (J.GT.NC) GOTO #201
      VAR1=CES(J)
      GOTO #202
#201  VAR1=0
#202  IF (J.LT.D) GOTO #203
      VAR2=G(J-D)
      GOTO #20
#203  VAR2=0
#20  S(J)=VAR1-VAR2
      S(NS)=-S(NS-1)
      DO #21 J=NS-1,1,-1
      821  S(J)=S(J)-S(J-1)
      C1N(NC+1)=-CES(NC)
      C1N(0)=CES(0)
      DO #22 J=NC,1,-1
      822  C1N(J)=CES(J)-C+S(J-1)
C
C  CALCULO DAS ORDENS DO SISTEMA
C
      NPA=NG+1+N
      NQA=NDF+M
      NQ=NQA+1
      NR=0
      NMC=NPA+NQA+D+1
      NML=NMC-M
      NMI=NML+NMC
C
C  CALCULO DAS FUNCOES DE COVARIANCIA

```

```

C
CALL DIVPOL(ND, NML, NPA, NPA+1, NPA+1, NPA+1)
CALL DIVPOL(ND, NML, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1)
CALL COVAR(NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1)
CALL COVAR(NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1)
CALL DIVPOL(ND, NML, NPA, NPA, NPA+1, NPA+1)
CALL DIVPOL(ND, NML, NPA, NPA, NPA+1, NPA+1)
CALL COVAR(NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1)
CALL COVAR(NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1, NPA+1)
C
C MONTAGEM DA MATRIZ DA C.M.T.
C
DO 825 J=1, NPA+1
DO 825 K=J, NPA+1+NTP
AM(NMT*(J-1)+K)=DF(E-P+J)
825 AM(NBT*(NMC+K-1)+NML+J)=AM(NMT*(J-1)+K)
DO 826 J=NPA+2, NPA+NTP+2
DO 826 K=J-NPA-1, J-NPA-1+NTP
AM(NMT*(J-1)+K)=S(K-J+NPA+1)
826 AM(NMT*(NMC+K-1)+NML+J)=AM(NMT*(J-1)+K)
IF(NMC_LT, NPA+NQA+3) GOTO 828
DO 827 J=NPA+NQA+3, NMC
DO 827 K=J-NPA-NQA-1, J-NPA-NQA-1+NTP
AM(NMT*(J-1)+K)=-TP(K-J, NPA+NQA+1)
827 AM(NMT*(NMC+K-1)+NML+J)=AM(NMT*(J-1)+K)
828 DO 830 J=0, NPA
DO 830 K=1, NPA-J+1
LL=K+(NML)
LC=K+J
AM(NMT*(LC-1)+LL)=2*ALFA2*GAM3(J)
LL=K+J+(NML)
LC=K
830 AM(NMT*(LC-1)+LL)=2*ALFA2*GAM3(J)
DO 831 J=0, NQA
DO 831 K=1, NQA-J+1
LL=K+(NML+NPA+1)
LC=K+J+(NPA+1)
AM(NMT*(LC-1)+LL)=2*ALFA1*GAM2(J)
LL=K+J+(NML+NPA+1)
LC=K+(NPA+1)
831 AM(NMT*(LC-1)+LL)=2*ALFA1*GAM2(J)
C
C MONTAGEM DO VETOR DM
C
DO 832 J=0, NTP
832 DM(J+1)=TP(J)
DO 833 J=0, NBP
833 DM(J+1)=BM(J+1)-DF(J)
DO 836 J=0, NPA
836 DM(NML+1+J)=-2*ALFA2*GAM34(J)
DO 837 J=0, NQA
837 DM(NML+NPA+2+J)=-2*ALFA1*GAM12(J)
DO 7 J=1, NMT
C
WRITE(37,8) (AM(NMT*(E-1)+J), K=1, NMT), DM(J)
8
FORMAT(11('X',F9.5))
7
CONTINUE
C
C SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C
CALL SIMQ(AM, DM, NMT, IFF)

```

```

C
C  CALCULO DAS RAÍZES DE P(Z), Z = 1
C
      Q(N) = -B/(A+Z)
      W(0) = W/(A+Z)
      IF (ABS(LT,1) < EPS) GO TO 10
      DO 438 J=1, NPA
      438  W(J) = W*(J+1)/(A+Z) + Q*(J+1)
      4381  R=1
           DO 439 J=0, NPA
           R = R + W(J+1)
           W(J) = W(J+1)
C
C  CALCULO DAS RAÍZES DE Q(Z)
C
      CALL PRPPO(A, C, D, AUA1, NPA, NQ, NPA1)
      CALL SUBPRO(B, BUA1, AUA2, NPB, NPB1, NPB2)
      DO 10 J=1, NAU2+1
      10  XCOF(J) = AUA2*(NPA+1-J)
           XPH = NPA2
           CALL PRPO(XCOF, NPH+1, PH, PCN, COF1, NPH, ICH1)
           CALL PRPPO(PA, CAG, AUA1, NPA, NC, NPA1)
           CALL SUBPRO(C, BUA1, AUA3, NPB, NPB1, NPB2)
           DO 11 J=1, NAU3+1
      11  XCOF(J) = AUA3*(NPA+1-J)
           XPG = NPA3
           CALL PRPO(XCOF, NPG+1, PG, PCG, COF2, NPG, ICH2)
C
C  RESULTADOS
C
      IF (IER.EQ.0) GO TO 633
      IER = IER + 1
      TYPE 3, IER
      3  FORMAT(/, 5X, 'REPEAT DO DISCRE (CADD NO PASSO ', I2)
      439 WRITE (36, 25) ALE1, ALE2, M
           WRITE (36, 15) (PB(J), J=0, NPA)
           READ (31, 14) IBORO
           WRITE (31, 18) NPA, NQ, IER
           WRITE (31, 15) (PA(J), J=0, NPA)
           WRITE (36, 16) (Q(J), J=0, NQ)
           WRITE (31, 16) (Q(J), J=0, NQ)
           WRITE (31, 17) R
           WRITE (36, 19) (W(J), J=NPA+NAU2+3, NQ)
           WRITE (36, 20) (AUX2(J), J=1, NAU2)
           WRITE (36, 23) (COF1(J), J=1, NPH+1)
           WRITE (36, 12) (PH(J), PCN(J), J=1, NPH)
           WRITE (36, 21) (AUX3(J), J=0, NAU3)
           WRITE (36, 24) (COF2(J), J=1, NPG+1)
           WRITE (36, 22) (PHG(J), PCG(J), J=1, NPG)
           WRITE (36, 13) ICH1, ICH2
      12  FORMAT(1X, 'RAÍZES DE P: ', /, 10(3X, '( ', F7.3, 2X, F7.3, ') '))
      13  FORMAT(1X, 'COD. DE ERRO = ', I2)
      14  FORMAT(/, I, 10(/))
      15  FORMAT(1X, 'POLINOMIO PA(Z**-', I, /, 1X, 15(F6.2, 1X))
      16  FORMAT(1X, 'POLINOMIO Q(Z**-', I, /, 1X, 15(F5.2, 1X))
      17  FORMAT(1X, 'POLINOMIO R(Z**-', I, /, 1X, F5.2)
      18  FORMAT(1X, 'ORDENS DAS POTENCIAÇÕES: NPA, NQ, NR', /, 1X, 3I3)
      19  FORMAT(1X, 'POLINOMIO P(Z**-', I, /, 1X, 10(F5.2, 2X))
      20  FORMAT(1X, 'POLINOMIO H(Z**-', I, /, 1X, 10(F5.2, 2X))
      21  FORMAT(1X, 'POLINOMIO G(Z**-', I, /, 1X, 10(F5.2, 2X))

```



```

22     FORMAT(1A,'RADIATION DOSE',I2,'/1000',I2,'(1,0,0,7.0,2X,17.0,1)')
23     FORMAT(1A,'RADIATION DOSE (1,0,0,7.0,2X,17.0,1)')
24     FORMAT(1A,'RADIATION DOSE (1,0,0,7.0,2X,17.0,1)')
25     FORMAT(1A,'RADIATION DOSE (1,0,0,7.0,2X,17.0,1)')
1  ACCELERATION: 1,1,1,1
4  FORMAT(1A,10I)
    STOP
    END

```

```

C *****
C
C  CALCULO DO PRODUTO DE DOIS POLINOMIOS
C
C  SUBROUTINE PRODPO(A, B, C, NA, NB, NC)
C  DIMENSION A(0/25), B(0/25), C(0/25)
C  K=A(NA+1)
C  DO 1 J=0, NC
C  C(J)=0
C  DO 2 I=0, J
C  IF (K, LB, NA) GOTO 3
C  VAR1=0
C  GOTO 2
1  VAR1=A(I)
2  IF ((J-I), LB, NB) GOTO 3
C  VAR2=0
C  GOTO 4
3  VAR2=B(J-I)
4  C(J)=C(J)+VAR1*VAR2
C  RETURN
C  END

C
C  CALCULO DA SOMA DE DOIS POLINOMIOS
C
C  SUBROUTINE SOMPO(A, B, C, NA, NB, NC)
C  DIMENSION A(0/25), B(0/25), C(0/25)
C  IF (NA, GB, NB) NC=NA
C  IF (NB, GB, NA) NC=NB
C  DO 1 J=0, NC
C  IF (J, LB, NA) GOTO 2
C  VAR1=0
C  GOTO 2
1  VAR1=A(J)
2  IF (J, LB, NB) GOTO 3
C  VAR2=0
C  GOTO 4
3  VAR2=B(J)
4  C(J)=VAR1+VAR2
C  RETURN
C  END

C
C  CALCULO DO MODULO DE  $A(J)=X^J+AT$ 
C
C  SUBROUTINE MODPOL(A, NB, DT, W, T, CM)
C  DIMENSION A(0/10)
C  K=A(NB)
C  C=0
C  DO 1 J=NB+1, NA
C  K=K+A(J)*COS(W*T*(J-NB))
C  C=C+A(J)*SIN(W*T*(J-NB))
1  CM=SQRT(K**2+C**2)
C  RETURN
C  END

C
C  CALCULO DO QUOCIENTE DE DOIS POLINOMIOS
C
C  SUBROUTINE DIVPOL(A, NA, B, NB, C, NC)
C  DIMENSION A(0/25), B(0/25), C(0/40)
C  INTEGER VAR2
C  EPS=0.001

```

```

C(U)=A(U)/V(U)
NC=0
0  NC=NC+1
  IF (C(C,DC,DR) .GT. 1)
    VAR1=1
    GO TO 2
1  VAR1=A(NC)/V(C)
2  IF (C(C,DC,DR) .GT. 1)
    VAR2=DR
    GO TO 3
3  VAR2=NC
4  C(NC)=VAR1
  DO 5 I=1,VAR2
5  C(NC)=C(NC)+C(I)*C(NC-I)/V(I)
  COMP=ABS(C(NC))
  IF (COMP .LT. EPS .AND. DC .GT. 0.) RETURN
  GO TO 0
END

C
C  CALCULO DA FUNÇÃO DE COVARIÂNCIA
C
SUBROUTINE COVAR(C, DC, D, 0, GAMMA, IG)
DIMENSION C(9/400), D(9/400), GAMMA(9/20)
DO 1 I=0,9
  IF (DC-I .GT. 0) GO TO 1
  N=DC-I
  GO TO 2
1  N=0
2  GAMMA(I)=0
  DO 3 J=0,N
3  GAMMA(I)=GAMMA(I)+C(I+J)*D(J)
4  CONTINUE
  RETURN
END

```

C*****CONTROLE DE FREQUENCIA EM FREQUENCIA GENERALIZADA*****

```

C
DIMENSION A(1/20), B(1/20), C(1/20), D(1/20), E(1/20), F(1/20), FF(1/20)
DIMENSION AL(30), BL(30), PL(30), G(30), P(150)
DIMENSION S1(10), S2(10), S3(10), S4(150), S5(150)
DIMENSION S0(10), S6(150)
DIMENSION J(100), L(100), I(100), # (300), FI(100), GMA(300)
DIMENSION VE1(10), VE2(10), VE3(150), VE4(150)
DIMENSION AUX1(1/20), AUX2(1/20), AUX3(1/20)
DIMENSION RF(50), RF1(50), RF2(50)
DIMENSION G(5/10), BF(1/20), PADM(1/20), PADM1(1/20)
WRITE(6) D
REAL BOLD, NG

```

C
C
C LEITURA DE DADOS E INICIALIZAÇÃO

```

      READ (31,1) NA, NB, NC, D, I MAX,
1 INI, IPASSO, NPOST, YS, VS, AG, ALFA
      READ(31,2)(A(J), J=1, N1)
      READ(31,2)(B(J), J=1, N1)
      READ(31,2)(C(J), J=1, N1)
      NG=NA-1
      NBF=NB+D-1
      NT=NG+NBF+NC+7
      READ(31,3)(TETA(J), J=1, NT)
      READ(31,4)(P(J+(J-1)*10), J=1, N1)
      READ(31,1) NFR, NG, #
      READ(31,2)(PA(J), J=1, N1)
      READ(31,2)(V(J), J=1, NG)
      READ(31,2)(R(J), J=1, NT)
      FORMAT(/, 1X, 4F)
2     FORMAT(/, 1X, 15F)
3     FORMAT(/, 1X, 30F)
4     FORMAT(/, 1X, 30F)
      IG=123456789

```

```

C
      DO 5 I=1, I MAX+D
      IF(I.EQ.100) ALFA=1.

```

C
C RESP. EM FREQUENCIA DO CONTROLADOR EM I=INI

```

C
      IF(I.NE.INI) GO TO 6)
      DO 81 J=1, 25
      RF(J)=(J-1)/25.
      RF2(J)=RF(J)
      AUX1(0)=1.
      DO 810 K=1, NC
810     AUX1(K)=TETA(K+NG+NBF+2)
      CALL PRDPOL(PA, AUX1, AUX2, NPA, NC, #2)
      CALL PRDPOL(G, AUX1, AUX3, G, NC, #3)
      DO 811 K=0, NG
811     G(K)=TETA(K+1)
      DO 812 K=0, NBF
812     BF(K)=TETA(K+NG+2)
      CALL SOMPOL(G, AUX2, PADM, NG, #2, #MM)
      CALL SOMPOL(BF, AUX3, PADM, NBF, #3, #MM)
      CALL MODPOL(PADM, 0, #MM, RF(J), 3., CMM)
      CALL MODPOL(PADM, 0, #MM, RF2(J), 3., CMM)
      CALL MODPOL(IP, 0, #IP, RF2(J), 3., CMM2)
      RF(J+25)=CMM/CMM0

```

```

      RF1(I)=RF(I+25)
81      RF2(I+25)=CF1+ZCF1
813     CALL PLOT5(I)
      IF((I-25).GT.0) GOTO 813
      CALL SCALR(RF,25,12.,RF1(I),RF)
      RFI=RFMI/DRF
      CALL AXIS(1.,0.,'RF1(I)',0.,12.,1.,RF1(I),DRI)
      TYPE 814
814     FORMAT(/,5X,'RF1(I)=',F12.5,' DRI=',F12.5)
      ACCEPT M15,RF1(I),DRI
815     FORMAT(I)
      IF(UBC.NE.1) GOTO 815
      TYPE 817
817     FORMAT(/,5X,'RF1(I)=',F12.5,' DRI=',F12.5)
      ACCEPT M15,RF1(I),DRI
818     FORMAT(2F)
      DO 819 J=1,25
819     RF1(J)=(RF1(J)+RF1(I))/2
      GOTO 820
820     CALL SCALR(RF1,25,8.,RF1(I),DRI)
821     RFI=RFMI/DRI
      TYPE 821,RFMI,DRI
821     FORMAT(/,5X,'RFMI=',F12.5,/,5X,'DRI=',F12.5)
      CALL AXIS(1.,0.,'RFMI',0.,8.,10.,RFMI,DRI)
      CALL PLOT(TI(I),RF1(I),-3)
      CALL LINE(RF,RF1,25,1)
      STOP
C      CALL VPLOT(1,RF,25,2,25,,30)
C      CALL VPLOT(2,RF2,25,2,25,0,30)
C
C      CALCULO DA REFE1 (CIS) a(i)
C      a(i)
80      A(I)=10.
C
C      APLICACAO DO CONTROLE E CALCULO DE Y(I)
C
      Y(I)=0.
      AY=0.
      DO 10 J=1,NA
      IF((I-J).GT.0) GOTO 100
      VAR=Y0
      GOTO 10
100     VAR=Y(I-J)
10     AY=AY+VAR*A(I)
      BU=0.
      DO 11 J=0,NB
      IF((I-J-0).GT.0) GOTO 110
      VAR=0.
      GOTO 11
110     VAR=0(I-J-0)
11     BU=BU+VAR*B(J)
      CALL GAUSS1(IC,VS,AG,SG)
      RUI(I)=SG
      NOISE=RUI(I)
      DO 12 J=1,NC
      IF((I-J).GT.0) GOTO 120
      VAR=0.
      GOTO 12
120     VAR=RUI(I-J)
12     NOISE=NOISE+VAR*C(J)

```

```

      I(1)=-A1+D0+D1D
C
C      CALCULO DE GAMA(I)
C
      VARA(I)=0.
      PA1=0.
      DO 20 J=0, NR
      IF((1-J).GT.0) GOTO 20
      VAR=0.
      GOTO 21
200   VAR=I(1-J)
21    PA1=PA1+VAR*(I-J)
      QU=0.
      DO 21 J=1, NR
      IF((1-J).GT.0) GOTO 21
      VAR=0.
      GOTO 21
210   VAR=0(1-J)
21    QU=QU+VAR*(I-J)
      RW=0.
      DO 22 J=0, NR
      IF((1-J).GT.0) GOTO 22
      VAR=0.
      GOTO 22
220   VAR=0(1-J)
22    RW=RW+VAR*(I-J)
      GAMA(I)=PA1+QU-RW
C
C      MONTAGEM DE A10 e A1
C
      IF(I.GT.1) GOTO 3
      A1(1)=Y(1)
      A1(2)=YD
      GOTO 30
30    DO 31 J=NR,2,-1
31    A1(J)=A1(J-1)
      A1D(J)=X1D(J-1)
      A1(1)=Y(1)
      A1(NG+2)=0.
      A1(NG+NBPF+3)=GAMA(I-1)
      IF(I.LE.0) GOTO 40
      A1D(1)=Y(I-0)
      A1D(NG+2)=J(I-0)
      IF(I-0-1).LE.0) GOTO 43
      A1D(NG+NBPF+3)=GAMA(I-0-1)
C
C      CALCULO DE FI(I)
C
C
4)    FI(I)=Y(I)+GAMA(I-0)
C
C      ESTIMACAO DE TETA
C
C      CALCULO DO GANHO
      CALL GMPRD(P,X1D,SOL1,NT,NT,1)
      CALL GMPRD(X1D,SOL1,SOL2,1,NF,1)
      DENOM=1./(SOL2+ALFA)
      CALL SMPY(SOL1,DENOM,GANHO,NT,1,0)
C
C      CALCULO DA INOVACAO
      CALL GMPRD(X1D,TETA,SOL3,1,NT,1)

```

```

      GAMA=1/(1+X**2)
C
C      ATUALIZACAO DE TETA
      CALL SMPY(33,NO,2,NT,NO,1,1,1)
      CALL GAMB(TETA,NO,NT,NO,1,1)
C
C      ATUALIZACAO DE P
      CALL SMPRO(XI,PI,NO,NO,1,1,1)
      CALL SMPRO(P,SOL,S,NO,NT,1)
      CALL SMPRO(SI,NO,NO,NO,NT,NT)
      CALL SMPY(SOL,SI,NO,NO,NT,1)
      CALL GAMB(P,SOL,S,NO,NT,1)
      FIMD=1./X**2
      CALL SMPY(COMB,PI,NO,1,NT,NT,1)
C
C      CALCULO DO CUSTO
C
C
60      U(1)=GAMA(1)
      DO 61 J=1,NT
61      U(1)=U(1)+XI(J)*GFI(J)
      U(1)=-U(1)/(TETA(NG+2)+1/(4))
C
C      ATUALIZACAO DE GAMA(1) E XI
C
      GAMA(1)=GAMA(1)+W(1)*U(1)
      XI(NG+2)=U(1)
C
C      CONTINUE
C
C      RESULTADOS
C
      CUSTO=0
      *WRITE(32,6)
      FORMAT(2X,'I',7X,'U(1)',7X,'Y(1)',7X,'RUI(1)')
      DO 7 I=1,IMAX,IPASS
      CUSTO=CUSTO+FI(I)*2
      *WRITE(32,7) I,U(1),Y(1),RUI(1),*(I),FI(I),GAMA(1)
75      FORMAT(1X,13,6(2X,F9.4))
      CONTINUE
      *WRITE(32,8) CUSTO
      FORMAT(/,5X,'CUSTO TOTAL=',2X,F10.5)
      *WRITE(32,9) (TETA(I),I=1,NT)
      FORMAT(/,5X,'VETOR TETA',/,10(2X,F8.5))
      *WRITE(32,13) (P(I+(1-I)*NT),I=1,NT)
13      FORMAT(/,5X,'MATRIZ P',/,50(2X,F8.5))
      RMED=0
      SMED=0
      CMED=0
      RVAR=0
      SVAR=0
      CVAR=0
      DO 15 I=IMAX/2,IMAX
      RMED=RMED+RUI(I)
      SMED=SMED+Y(I)
15      CMED=CMED+U(I)
      RMED=RMED/(IMAX/2)
      SMED=SMED/(IMAX/2)
      CMED=CMED/(IMAX/2)
      DO 16 I=IMAX/2,IMAX

```

```

SVAR=SVAR+(U(I)-U(I-1))*X(I)*Z
SVAR=SVAR+(Y(I)-Y(I-1))*Z
16 CVAR=CVAR+(U(I)-U(I-1))*Z
SVAR=SVAR/Z/((15X/Z)-1)
SVAR=SVAR/Z/((10X/Z)-1)
CVAR=CVAR/Z/((15X/Z)-1)
WRITE(32,17)
WRITE(32,18)
17 FORMAT(/,5X,'D',5X,'VELOC',2,3X,'(M/S)',15X,'5X100',15X,'(0.1 CM/S)')
18 FORMAT(3A,0(F7.3,3A))
IF(NPOINT,1,0) GOTO 19
DO 19 I=1, NPOINT
VETU(I)=I
VETI(I)=I
VETU(I+NPOINT)=U(I)
VETI(I+NPOINT)=I(I)
DU=FLOAT(IFIX(CVAR**((1/Z))+1)/10)
DMIN=FLOAT(IFIX(CVAR-3*CVAR**((1/Z))))
VETUC(I)=U(I)
VETIC(I)=Y(I)
14 CALL VPLOT(1,VETU, NPOINT, 2, VMIN, DV)
C CALL VPLOT(2,VETI, NPOINT, 2, VMIN, DV)
C STOP
19 CALL PLOTS(I)
IF(L,NE,0)GOTO 14
CALL SCALE(VETU, NPOINT, 12., VMIN, DV)
CALL AXIS(0.,0., 'TEMPO', -5, 12., 0., VMIN, DV)
TYPE 23
23 FORMAT(/,5X,'TEMPERATURA MEDIANTE ESCALA:'S)
ACCEPT 24, IESC
24 FORMAT(I)
IF(IESC,NE,1)GOTO 25
TYPE 26
26 FORMAT(/,5X,'DMIN=',F12.5,/)
ACCEPT 27, DMIN, DU
27 FORMAT(2F)
DO 29 I=1, NPOINT
29 VETUC(I)=(VETUC(I)-DMIN)/DU
GO TO 28
25 CALL SCALE(VETUC, NPOINT, 8., DMIN, DU)
28 DMINI=DMIN/DU
TYPE 32, DMIN, DU
32 FORMAT(/,5X,'DMIN=',F12.5,/,5X,'DUI=',F12.5)
CALL AXIS(0.,DMINI, 'CONTINUA', 5, 8., 90., DMIN, DU)
CALL PLOT(0., DMINI, -3)
CALL LINE(VETU, VETUC, NPOINT, 1)
C
CALL PLOT(0., -10., -3)
CALL SCALE(VETI, NPOINT, 12., VMIN, DV)
CALL AXIS(0.,0., 'TEMPO', -5, 12., 0., VMIN, DV)
CALL SCALE(VETIC, NPOINT, 8., VMIN, DV)
CALL AXIS(0.,0., 'SALIDA', 5, 8., 90., VMIN, DV)
CALL PLOT(0.,0., -3)
CALL LINE(VETI, VETIC, NPOINT, 1)
C
STOP
END
C
C SUBROTINA PARA CALCULO DE ENTRADA TRIANGULAR
C

```



```

SUBROUTINE PROPOL(A,B,C,NA,NO,NC)
  IO=1/11
  IF(1-IO)*17
  OLCAN=17/(A+O)
  IF(LE.GE.(C/2))GO TO 1
  O=2*(A+B)*12/17
  RETURN
1  IF(LE.GE.(C/2))GO TO 2
  O=-7*(A+O)*17/11+2*O
  RETURN
2  O=2*(A+B)*12/11+O*(17)
  RETURN
END

C
C
SUBROUTINE PROPOL(A,B,C,NA,NO,NC)
  DIMENSION A(0/10),B(0/10),C(0/10)
  NC=NA+NO
  DO 4 J=0,NC
  C(J)=0.
  DO 4 K=0,J
  IF(K.LE.NA)GOTO 1
  VAR1=0.
  GOTO 2
1  VAR1=A(K)
2  IF((J-K).LE.NO)GOTO 3
  VAR2=0.
  GOTO 4
3  VAR2=B(J-K)
4  C(J)=C(J)+VAR1*VAR2
  RETURN
END
SUBROUTINE SOMPOL(A,B,C,NA,NO,NC)
  DIMENSION A(0/10),B(0/10),C(0/10)
  IF(NA.GE.NO)NC=NA
  IF(NO.GE.NA)NC=NO
  DO 4 J=0,NC
  IF(J.LE.NA)GOTO 1
  VAR1=0.
  GOTO 2
1  VAR1=A(J)
2  IF(J.LE.NO)GOTO 3
  VAR2=0.
  GOTO 4
3  VAR2=B(J)
4  C(J)=VAR1+VAR2
  RETURN
END
SUBROUTINE HOBPOL(A,NO,NA,W,T,C*)
  DIMENSION A(0/10)
  R=A(NO)
  C=0.
  DO 1 J=NO+1,NA
  R=R+A(J)*COS(W*T*(J-NO))
  C=C+A(J)*SIN(W*T*(J-NO))
1  CM=SQRT(R**2+C**2)
  RETURN
END

```

```

C *****
C *****
C *****
C
C SUBROTINA: VPLT ( N, N, N, N, N, N, I, I )
C
C N=NÚMERO DE PONTOS
C N=NÚMERO DE CURVAS ( N=NÚMERO DE )
C A=VELOCIDADE DO VEÍCULO ( CM/SEG. )
C AS = PRIMEIRO AS, SEGUNDO, TERCEIRO E QUARTO ANÚMERO
C AS DEGRADES * 21.2, RESPECTIVAMENTE. VELOCIDADE DO VEÍCULO
C SUBROTINA PLUTA ( N, N, N, N, N, N, I, I )
C VELOCIDADE DO VEÍCULO ( CM/SEG. )
C N=NÚMERO DE LINHAS DE PONTOS E CURVAS
C I=INDICADOR DE FLUXO DE ENTRADA
C *****
C DIMENSION DEF(101), JPT(11), ARG(*), A(1)
C DATA BLANK,' ',',', '/','\','0','1','2','3','4','5','6','7','8','9','A','B','C',',','.'
1  FORMAT(1H1,3X,7H CURVA, I(2),//)
2  FORMAT(1H ,F11.4,5X,I(2) )
3  FORMAT(1H )
7  FORMAT(1H ,10X,101H,
1  , , , , , , , , , )
8  FORMAT(1H0,9X,11F12.1)
C
C N=NÚMERO DE LINHAS DE PONTOS
C IF(N5)16,18,10
C CLASSIFICAÇÃO DAS ANÁLISES POR GRUPO DE SUBROU
10 DO 15 I=1,N
11 DO 14 J=1,N
C IF(A(I)=A(J))14,14,11
11 LL=I-N
14 LL=J+N
C
C SUBROTINA: COMPLETE ( A(1),.....,A(9) )
C
C DO 12 K=1,8
12 LL=LL+N
14 LL=LL+N
15 F=A(LL)
12 A(LL)=A(LL)
14 A(LL)=F
15 CONTINUE
C
C TESTE: NLL
10 IF(NLL)20,18,20
18 NLL=30
C *****IMPRESSÃO DO TÍTULO *****
20 WRITE(1F1,1)N0
C ***** FATOR DE ESCALA DAS ABSCISSAS *****
C
C ASCAL=(A(10)-A(1))/FLOAT(NLL-1)
C ***** YMIN, YMAX, FATOR DE ESCALA DAS ORDENADAS *****
C
C M1=N+1
16 YMIN=A(M1)
18 YMAX=YMIN
20 M2=M*N
22 DO 40 J=M1,M2
24 IF(A(J)-YMIN)28,26,26
26 IF(A(J)-YMAX)40,40,30
28 YMIN=A(J)
30 GO TO 40
30 YMAX=A(J)

```

```

4     CONTINUE
      IF( I.EQ. 55)
555    FURFAC(1,2) = FURFAC(1,2) + (YMAX - YMIN) / (100.0)
      ACCUM = ACCUM + 1
556    FURFAC(1)
      IF( I.EQ. 55) GOTO 557
      IF( I.EQ. 55) GOTO 557
557    FURFAC(1) = YMIN
      ACCUM = ACCUM + 1
558    FURFAC(1)
559    CONTINUE
C     *****  CONTROL DE LOCALIZACION DE UN DIBO  *****
      YLOCAL = (YMAX - YMIN) / 100.0
      XL = A(1)
      LL = 1
C     *****  CONTROL DE QUE VALOR DE Y SEA *****
      NY = 4
      IF( YLOCAL.EQ. 0.0) GOTO 562
      IF( I.EQ. 55) GOTO 562
561    FURFAC(2,1) = 'CONTROL DE QUE VALOR DE Y SEA = ', F10.4)
      K = 1
562    I = 1
563    P = 1
      XPR = XL + P * ΔXCL
      IF( I.EQ. 55) GOTO 564
564    DO 50 IX = 1, 101
565    OUI(IX) = 0
      DO 60 J = 1, NY
      LL = LL + 1
C     *****  CONTROL DE QUE VALOR DE Y SEA *****
      JP = ((A(LL) - Y(IX)) / YLOCAL) + 1
      OUI(JP) = ANG(J)
566    CONTINUE
      WRITE(IFI, 2) XPR, (OUI(J), J = 1, 101)
      M = M + 1
      GO TO 80
567    WRITE(IFI, 3)
568    I = I + 1
      IF( I.EQ. 10) GOTO 569
569    XPR = A(LL)
      GO TO 564
570    WRITE(IFI, 7)
      YPR(1) = YMIN
C     *****  IMPRESION DE LOCALIZACION DE UN DIBO *****
571    DO 90 KN = 1, 9
572    YPR(KN + 1) = YPR(KN) + YLOCAL * 10.0
      YPR(10) = YMAX
      WRITE(IFI, 8) (YPR(IP), IP = 1, 10)
      RETURN
      END
C     *****

```