



**Márcio Júnior Lacerda**  
Engenheiro Eletricista – UFSJ-MG–2009  
Mestre em Engenharia Elétrica – UNICAMP-SP–2010

CONTRIBUIÇÕES AO PROBLEMA DE FILTRAGEM H-INFINITO PARA SISTEMAS DINÂMICOS

Campinas  
2014





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Márcio Júnior Lacerda

CONTRIBUIÇÕES AO PROBLEMA DE FILTRAGEM H-INFINITO PARA SISTEMAS DINÂMICOS

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.  
Área de concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres  
Co-orientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MÁRCIO JÚNIOR LACERDA E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

A handwritten signature in blue ink, reading "Pedro Luis Dias Peres", is written over a horizontal line.

Campinas  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

L116c Lacerda, Márcio Júnior, 1987-  
Contribuições ao problema de filtragem H-infinito para sistemas dinâmicos /  
Márcio Júnior Lacerda. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.

Coorientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de controle. 2. Sistemas lineares variantes no tempo. 3. Sistemas  
não lineares. 4. Liapunov, Funções de. 5. Estabilidade. I. Peres, Pedro Luis  
Dias, 1960-. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de. III. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV.  
Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Contributions to the H-infinity problem for dynamical systems

**Palavras-chave em inglês:**

Control theory

Linear time-varying systems

Nonlinear systems

Lyapunov functions

Stability

**Área de concentração:** Automação

**Titulação:** Doutor em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Eugênio de Bona Castelan Neto

João Bosco Ribeiro do Val

Juan Francisco Camino dos Santos

**Data de defesa:** 30-05-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

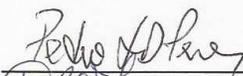
## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

**Candidato:** Márcio Júnior Lacerda

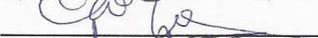
**Data da Defesa:** 30 de maio de 2014

**Título da Tese:** "Contribuições ao Problema de Filtragem H-infinito para Sistemas Dinâmicos"

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (Presidente):



Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea:



Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto:



Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val:



Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos:





# Resumo

Este trabalho apresenta novas condições na forma de desigualdades matriciais lineares para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  de ordem completa em três diferentes contextos: i) sistemas lineares incertos discretos com um atraso variante no tempo afetando os estados; ii) sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo, contínuos e discretos, sujeitos a incertezas nas medições dos parâmetros; iii) sistemas não lineares quadráticos contínuos e discretos no tempo. Para cada contexto, o objetivo é projetar filtros: i) com termos atrasados nos estados; ii) dependentes dos parâmetros incertos medidos; iii) com termos quadráticos. Em cada um dos casos, o ponto de partida é a existência de uma função de Lyapunov que assegure estabilidade e um limitante para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema aumentado, ou seja, o sistema original conectado com o filtro de ordem completa. As condições de projeto são obtidas impondo-se uma determinada estrutura para as variáveis de folga, resultando em desigualdades matriciais com parâmetros escalares. A eficácia das condições apresentadas é ilustrada por meio de comparações numéricas utilizando exemplos da literatura.

Palavras-chave: Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , sistemas com atraso, incerteza na medida, sistemas quadráticos, desigualdades matriciais lineares.

# Abstract

This work presents new conditions in the form of linear matrix inequalities for full order  $\mathcal{H}_\infty$  filter design in three different contexts: i) uncertain linear discrete-time systems with a time-varying delay affecting the states ii) linear parameter-varying systems, continuous and discrete-time, subject to inexactly measured parameters; iii) continuous and discrete-time nonlinear quadratic systems. For each context, the aim is to design filters: i) with state-delayed terms; ii) dependent upon the inexactly measured parameters; iii) with quadratic terms. In each case, the starting point is the existence of a Lyapunov function that assures stability and a bound to the  $\mathcal{H}_\infty$  norm of the augmented system, that is, the original system connected with the full order filter. The design conditions are obtained by imposing a given structure to the slack variables, resulting in matrix inequalities with scalar parameters. The effectiveness of the proposed conditions is illustrated by means of numerical comparisons and benchmark examples from the literature.

Key-words:  $\mathcal{H}_\infty$  filtering, time-delay systems, inexactly measurement, quadratic systems, linear matrix inequalities.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Acrônimos e Notação</b>	<b>xix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fundamentos matemáticos</b>	<b>4</b>
1.1 Filtragem para sistemas lineares incertos . . . . .	4
1.2 Estabilidade . . . . .	5
1.2.1 Sistemas contínuos . . . . .	6
1.2.2 Sistemas discretos . . . . .	6
1.3 Critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ – Análise . . . . .	6
1.3.1 Sistemas contínuos . . . . .	6
1.3.2 Sistemas discretos . . . . .	8
1.4 Critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ – Síntese . . . . .	9
1.5 Lema de Finsler . . . . .	9
1.6 Relaxações LMIs . . . . .	10
1.6.1 Estabilidade com funções de Lyapunov afins . . . . .	10
1.6.2 Funções polinomiais . . . . .	11
<b>2 Filtragem para sistemas lineares incertos com atraso variante no tempo</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Definição do problema . . . . .	14
2.3 Resultados principais . . . . .	15
2.4 Experimentos numéricos . . . . .	23
2.4.1 Exemplo 1 . . . . .	23
2.4.2 Exemplo 2 . . . . .	25
2.5 Conclusão . . . . .	27
<b>3 Filtragem para sistemas LPV com incertezas nos parâmetros medidos</b>	<b>29</b>
3.1 Introdução . . . . .	29
3.2 Definição do problema . . . . .	30
3.3 Modelagem proposta . . . . .	32
3.4 Modelagem dos parâmetros variantes no tempo . . . . .	33
3.4.1 Caso contínuo . . . . .	33
3.4.2 Caso discreto . . . . .	34

3.5	Condições LMIs dependentes de parâmetros . . . . .	37
3.6	Questões de implementação . . . . .	40
3.7	Experimentos numéricos . . . . .	41
3.8	Conclusão . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Filtragem para sistemas não lineares quadráticos</b>	<b>47</b>
4.1	Introdução . . . . .	47
4.2	Definição do problema . . . . .	48
4.3	Resultados principais . . . . .	50
4.4	Experimentos numéricos . . . . .	55
4.5	Conclusão . . . . .	62
	<b>Conclusões</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Desigualdades Matriciais Lineares</b>	<b>72</b>
A.1	Desigualdades Matriciais Lineares . . . . .	72
A.2	Complemento de Schur . . . . .	72
A.3	Prova do Lema de Finsler . . . . .	73
A.4	Produtos Cruzados . . . . .	73

DEDICO ESTA TESE AO MEU PAI  
FRANCISCO, MINHA MÃE VERA, E  
AOS MEUS IRMÃOS.



# Agradecimentos

Essa tese é resultado de um trabalho que não poderia ser escrito sem a colaboração de muitos amigos. Em especial agradeço,

- Aos professores Pedro e Ricardo, pela orientação, pela paciência e pela disponibilidade. Agradeço por sempre enxergarem além do que meus olhos podiam ver, por serem exemplo como pesquisadores e como pessoas.
- À FAPESP, processos 2010/10118-0 e 2012/04942-8 pelo apoio financeiro concedido durante todo o período do doutorado.
- Agradeço à Sophie e ao Germain, pela supervisão de parte dos estudos apresentados nesta tese no LAAS em Toulouse. Ao Valter e a Cláudia que fizeram a estada na França mais agradável.
- Agradeço aos colegas que passaram pelo DT, pelo ambiente amigável, pelas discussões e por todo suporte. Em especial Cristiano, Cecília, Márcio e Eduardo.
- Aos meus pais, irmãos e familiares, por serem motivação constante na minha vida. Às crianças da família, sobrinhos e primos, pela renovação da alegria e da esperança a cada visita em Minas.
- Agradeço aos amigos de Campinas que estiveram presentes nessa caminhada, Paulo, Hugo, Jair, Dereó, Giancarlo, Gilmar, Vonei, Cadu, Tiago, Bernardo, vocês que não entendem nada de teoria de controle, mas que entendem de amizade e de gente.
- Aos membros da banca, pelas valiosas sugestões que certamente contribuíram para melhorar a apresentação dessa tese.



# Lista de Figuras

1.1	Problema de filtragem. . . . .	5
2.1	Atraso gerado aleatoriamente $d_k \in [1, 7]$ e resposta temporal do erro para o sistema aumentado (computado nos vértices) do Exemplo 1, $\underline{d} = 1, \bar{d} = 7$ e $g = 1$ , com filtros dados por T 2.1 ( $e_1(k)$ ) e [25] ( $e_2(k)$ ). . . . .	24
2.2	Comportamento de $\sqrt{\mu_T}, \sqrt{\mu_K}$ e $ (\sqrt{\mu_T} - \sqrt{\mu_K})/\sqrt{\mu_T} $ ao longo das iterações do Algoritmo 1, para $\underline{d} = 1, \bar{d} = 6, \beta = 0.7$ e $g = 1$ . . . . .	26
2.3	Diagrama de valores singulares para o sistema aumentado do Exemplo 2, considerando atraso fixo, com $\underline{d} = \bar{d} = 4, g = 1$ e apenas os 4 vértices do politopo. . . . .	27
2.4	Diagrama de valores singulares para o sistema aumentado do Exemplo 2, atraso variante no tempo, porém considerando $d_k = 2$ ou $d_k = 3$ para todo $k$ , com $\underline{d} = 2, \bar{d} = 3$ e $g = 1$ (somente os 4 vértices do politopo). . . . .	28
3.1	Região onde $\Delta\alpha_i$ pode assumir valores em função de $\alpha_{i1}$ e $\alpha_{i2}$ (verde) e projeções nos planos $(\alpha_{i1}, \Delta\alpha_i)$ e $(\alpha_{i2}, \Delta\alpha_i)$ (cinza). . . . .	35
3.2	Sistema massa-mola. . . . .	42
4.1	Comportamento de $\gamma$ com a variação de $\xi$ para um filtro linear ( $A_{qf} = 0$ ) obtido com o Teorema 4.1 ('o' - em azul) e usando as condições de análise do Lema 4.2 ('*' - em preto) aplicadas ao sistema aumentado (4.9). . . . .	56
4.2	Comportamento de $\gamma$ com a variação de $\xi$ para um filtro não linear quadrático obtido com o Teorema 4.1 ('o' - em azul) e usando as condições de análise do Lema 4.2 ('*' - em preto) aplicadas ao sistema aumentado (4.9). . . . .	57
4.3	Evolução dos estados $\tilde{x}$ na região $S_0 = \mathcal{E}(P) = \{\tilde{x} \in R^{2n}; \tilde{x}'P\tilde{x} \leq 1\}$ ao longo do tempo. . . . .	58
4.4	Conjunto de possíveis soluções para o problema (4.30), $Tr(P) \times \gamma$ para um filtro não linear quadrático (curva contínua) e para um filtro linear (curva tracejada). . . . .	59
4.5	Comportamento de $\gamma$ com a variação de $\xi$ para um filtro linear ('o') e para um filtro quadrático não linear ('*') obtidos com Teorema 4.1. . . . .	60
4.6	Resposta temporal do erro $e$ para o sistema aumentado (4.9) com um filtro linear (tracejado) e com um filtro quadrático não linear (contínuo). . . . .	61



# Lista de Tabelas

2.1	Limitantes de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o Exemplo 1, usando Teorema 2.1 com variáveis $T_i = 0$ (T 2.1), Algoritmo 1 (T 2.1*), [25], [38] e [48] para $\beta = 0.7$ , $\underline{d} = 1$ e diferentes valores de $\bar{d}$ . . . . .	24
2.2	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ para o Exemplo 1 usando o Teorema 2.1 com variáveis $T_i = 0$ (T 2.1), com Algoritmo 1 (T 2.1*), [25], [38] e [48], para $\bar{d} = 5$ e diferentes valores de $\beta$ . . .	25
2.3	Limitante de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para Exemplo 2 usando Teorema 2.1 com $T_i = 0$ (T 2.1), Algoritmo 1 (T 2.1*) e [48]. . . . .	27
3.1	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1, para diferentes valores de $\kappa$ e $\xi$ com $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ , sistema contínuo no tempo. . . . .	43
3.2	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 com $g_L = 1$ e $g_L = 2$ , para diferentes valores de $\beta$ e $\xi$ com $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ . . . . .	43
3.3	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 com $g_L = 1$ e $g_L = 2$ , para $\beta = 1$ e diferentes valores de $\phi$ e $\xi$ com $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ . . . . .	44
3.4	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 para diferentes valores de $b$ e $\xi$ . . . . .	45
3.5	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 para diferentes valores de $b$ , $\bar{b}$ e $\xi$ . . . . .	45
3.6	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$ obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1, para $b = 1$ e diferentes valores de $\varphi$ e $\xi$ , sistema discreto. . . . .	46
4.1	Comparação de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ , filtro quadrático $\times$ filtro linear, com $b = 8/3$ . . . . .	57
4.2	Desempenho $\mathcal{H}_\infty$ , filtro quadrático $\times$ filtro linear, com $b = 8/3$ , $\rho = 4$ e $\Delta_t = 0.005$ . . . . .	61



# Lista de Acrônimos e Notação

LMI Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)  
LPV Linear Parameter-Varying (linear com parâmetros variantes)

$\star$  indica bloco simétrico nas LMIs  
 $L > 0$  indica que a matriz  $L$  é simétrica definida positiva  
 $L \geq 0$  indica que a matriz  $L$  é simétrica semi-definida positiva  
 $A$  notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)  
 $A'$  ( $'$ ), pós-posto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição  
 $A^*$  ( $*$ ), pós-posto a um vetor ou matriz, indica o conjugado transposto  
 $\text{Tr}(\cdot)$  representa o Traço de uma matriz  
 $\sigma_{\max}(\cdot)$  representa o maior valor singular de uma matriz  
 $\mathbb{R}$  conjunto dos números reais  
 $\mathbb{R}^+$  conjunto dos números reais não negativos  
 $\mathbb{Z}$  conjunto dos números inteiros  
 $\mathbb{Z}^+$  conjunto dos números inteiros não negativos  
 $\mathbb{N}$  conjunto dos números naturais (incluindo o zero)  
 $I$  indica uma matriz identidade de dimensão apropriada  
 $0$  indica uma matriz de zeros de dimensão apropriada  
 $g$  grau das variáveis (matrizes) polinomiais  
 $N$  especialmente utilizado para denotar o número de vértices de um politopo  
 $n$  especialmente utilizado para representar a ordem de um sistema (número de estados)  
 $\Lambda_N$  simplex unitário de  $N$  variáveis  
 $\alpha \in \mathbb{R}^N$  especialmente utilizado para representar um vetor com as incertezas de um sistema  
 $\otimes$  indica o produto de Kronecker  
 $\mathcal{L}_2$  espaço das funções contínuas quadraticamente integráveis  
 $\ell_2$  espaço das funções discretas quadraticamente somáveis



“EM PRIMEIRO LUGAR, ESTA TESE NÃO É COMESTÍVEL. NÃO A COMAM. ELA TAMBÉM É LEVE DEMAIS PARA SER USADA COMO ARMA OU PARA SEGURAR PORTAS, MAS PODE SERVIR COMO UM RAZOÁVEL PESO PARA PAPÉIS (DESDE QUE NÃO ESTEJA VENTANDO MUITO).”

Baseado no livro: *Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um*.

Flavio Abdenur, Luiz Felipe Nobili França.



# Introdução

A palavra filtro, derivada do latim *philtrum*, pode ser definida como: aquilo que deixa passar apenas parte de algo. Por extensão, filtragem é o ato ou efeito de filtrar, passar algo por um filtro, separar, selecionar, impedir a passagem de algo. No caso específico de sistemas de controle, a filtragem tem como objetivo obter uma boa estimativa para grandezas que estejam corrompidas por ruídos.

Com o advento de ferramentas computacionais cada vez mais poderosas e a exigência cada vez maior por melhor desempenho e precisão, surgiu a necessidade de modelos mais realistas e técnicas mais eficientes para o estudo de sistemas de controle. Por exemplo, a consideração de incertezas paramétricas nos modelos lineares foi um passo importante na busca por uma representação mais fiel dos sistemas modelados. No entanto, muitos sistemas estão sujeitos a outros fatores como: atrasos no tempo, incertezas nas medições dos parâmetros e presença de não linearidades, que quando não levados em conta, podem afetar a estabilidade e o desempenho dos projetos.

Nesse sentido, a teoria de Lyapunov tem sido amplamente empregada tanto para a análise de estabilidade quanto para a síntese de controladores e filtros para sistemas lineares e não lineares, resultando, em geral, em condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Uma vez que um problema possa ser escrito na forma de LMIs, pode então ser solucionado por meio de algoritmos computacionais de programação convexa [71, 49]. Em geral, métodos baseados em LMIs podem ser estendidos para lidar com a presença de incertezas na planta. Além disso, a simplicidade e consistência algébrica, i.e., a possibilidade de efetuar transformações e operações com as matrizes de uma forma direta e compreensível, fez com que a análise e o projeto de sistemas baseados em LMIs se popularizassem [9].

Desde o trabalho de Kalman [34], o problema de filtragem e estimação de estados tem atraído grande atenção na literatura de controle e processamento de sinais, tornando-se um dos tópicos mais estudados nesse campo de pesquisa. As normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência do sinal de ruído para o erro de estimação são frequentemente usadas como critérios de desempenho em projetos de filtros. Isso se deve ao fato desses critérios serem capazes de abordar tanto o caso em que o sistema é afetado por um sinal de ruído com características conhecidas bem como o caso em que o sinal de ruído possui características estatísticas desconhecidas.

Em [28], usando uma função de Lyapunov quadrática, o problema de filtragem ótima para sistemas lineares contínuos no tempo precisamente conhecidos foi resolvido por meio de LMIs. A estratégia de projeto é baseada na partição da matriz de Lyapunov e em transformações de congruência. Utilizando a mesma técnica, o caso discreto foi estudado em [29], considerando o projeto de filtros tanto para o caso precisamente conhecido quanto para tratar o caso de sistemas incertos, considerando os critérios  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

Em um esforço para reduzir o conservadorismo das soluções (em termos do desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  proporcionado pelo filtro) dos métodos existentes até então, foram utilizadas funções de Lyapunov dependentes de parâmetros de maneira afim para tratar o projeto de filtros robustos para sistemas discretos [31, 75] e contínuos no tempo [3]. Nesses casos, a matriz de Lyapunov aparece separada das

matrizes do sistema, permitindo que as transformações de congruência e mudanças de variáveis sejam realizadas nas matrizes extras, permitindo a síntese das matrizes do filtro sem impor nenhuma restrição adicional à matriz de Lyapunov. Com a imposição de uma estrutura específica para as variáveis de folga, [20] apresenta resultados para a síntese de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas contínuos e discretos no tempo. Seguindo a linha proposta em [20] de particionamento de variáveis, resultados menos conservadores apareceram utilizando funções de Lyapunov polinomiais [23, 41].

Em muitos casos, o comportamento dinâmico da planta pode ser descrito por modelos lineares com parâmetros dependentes ou variantes com o tempo. Em sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV, do inglês *linear parameter-varying*), os parâmetros podem variar de forma arbitrária ou podem ter limitantes nas suas taxas de variação. Se os parâmetros podem ser medidos ou estimados em tempo real, um filtro dependente de parâmetros pode ser projetado, com vantagens quando comparado ao filtro robusto [22, 65, 6, 66, 8, 40]. O projeto de filtros no contexto de sistemas LPV foi abordado considerando variações arbitrárias dos parâmetros variantes no tempo para os casos contínuo [6, 40, 39] e discreto no tempo [40]. A síntese de filtros dependentes de parâmetros com taxa de variação limitada dos parâmetros variantes no tempo foi estudada para o caso contínuo usando funções de Lyapunov dependentes quadraticamente dos parâmetros [65] e considerando filtros seletivos que podem ser implementado em termos de um conjunto selecionado de parâmetros [43]. Para o caso discreto, condições na forma de desigualdades matriciais bilineares foram resolvidas por meio de um procedimento iterativo [8].

Este trabalho trata do problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas de diferentes classes: sistemas lineares com atrasos variantes no tempo, sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo e sistemas não lineares quadráticos. A estratégia utilizada é baseada na existência de uma matriz de Lyapunov quadrática, no caso de sistemas não lineares, e que pode ser dependente de parâmetros quando sistemas LPV e sistemas com atraso são considerados. O objetivo é projetar filtros que sejam estruturalmente similares ao sistema em questão. Com esse propósito, serão projetados filtros que contenham termos dependentes de estados atrasados, filtros dependentes dos parâmetros medidos e filtros que apresentem termos não lineares, segundo o problema que está sendo estudado. A síntese do filtro é possível graças a uma especificação da estrutura imposta às variáveis extras inseridas nas condições de análise do sistema aumentado, composto pelo sistema original e pelo filtro a ser projetado. Condições na forma de desigualdades matriciais com parâmetros escalares são obtidas. Para valores fixos desses escalares, as condições tornam-se LMIs. Experimentos numéricos ilustram os resultados obtidos.

Na sequência, a descrição de cada capítulo é apresentada. A tese está estruturada da seguinte forma.

## Capítulo 1

Este capítulo apresenta o problema de filtragem, definições e conceitos utilizados no decorrer desta tese, estudo de estabilidade de sistemas lineares, condições LMIs para o critério de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , o Lema de Finsler, uma breve descrição das ferramentas para a obtenção de condições LMIs finitas usando relaxações para funções de Lyapunov dependentes de parâmetros nas formas afim e polinomial.

## Capítulo 2

Este capítulo apresenta novas condições na forma de desigualdades matriciais lineares para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  de ordem completa para sistemas lineares discretos no tempo afetados por incertezas invariantes no tempo e por um atraso variante no tempo. Graças ao maior número de

variáveis de folga, as condições propostas contêm e generalizam outros resultados da literatura. Relaxações LMIs baseadas em matrizes polinomiais de grau arbitrário são usadas para determinar o filtro robusto, que pode também ser implementado com termos atrasados sempre que o atraso no tempo estiver disponível para leitura em tempo real. Outra contribuição é a proposta de um algoritmo iterativo baseado em LMIs envolvendo as variáveis de decisão para diminuir o conservadorismo das soluções. Experimentos numéricos ilustram a superioridade da abordagem proposta quando comparada a outras técnicas disponíveis na literatura.

### Capítulo 3

Apresenta um arcabouço geral para lidar com o projeto de filtros de ordem completa  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LPV sujeitos a incertezas nos parâmetros medidos. A principal novidade é a habilidade de tratar incertezas aditivas e multiplicativas nas medidas tanto para sistemas contínuos quanto para sistemas discretos usando uma abordagem unificada. Modelando convenientemente os parâmetros lidos e as incertezas que afetam as medidas, o problema de projeto de filtro  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser expresso em termos de LMIs robustas, que podem ser solucionadas de forma eficiente por meio de relaxações LMIs baseadas em soluções polinomiais. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência do método proposto em comparação com outras estratégias e, mais importante, a capacidade de abordar cenários em que as estratégias disponíveis na literatura não podem ser usadas.

### Capítulo 4

Aborda o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas não lineares quadráticos, contínuos e discretos no tempo. O objetivo é projetar um filtro de ordem completa que também pode conter termos quadráticos em sua estrutura. A estratégia é baseada no uso de uma função de Lyapunov quadrática e uma condição na forma de desigualdade matricial que assegura um limitante para o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema aumentado, composto pelo sistema original e pelo filtro a ser projetado, em um contexto regional (local). Usando o Lema de Finsler, um espaço de parâmetros aumentado é criado, em que a matriz de Lyapunov aparece separada das matrizes do sistema nas condições para a existência do filtro. Impondo restrições de estrutura às variáveis de decisão, condições na forma de desigualdades matriciais com parâmetros escalares, podem ser obtidas para o projeto de filtros. Como será ilustrado pelos experimentos numéricos, as condições propostas podem melhorar o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  obtido pelos filtros lineares, graças à inclusão de termos quadráticos na dinâmica do filtro.

### Conclusões

Apresentam-se as conclusões, perspectivas para trabalhos futuros e os artigos produzidos relacionados com essa tese.

# Capítulo 1

## Fundamentos matemáticos

Este capítulo apresenta os fundamentos necessários para a familiarização do leitor com o problema de filtragem na forma abordada neste trabalho. São apresentados a descrição de um sistema linear incerto, o filtro a ser projetado, o critério de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  e seu cômputo por meio de LMIs, o Lema de Finsler, além de condições para a estabilidade de sistemas politópicos usando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros nas formas afim e polinomial.

### 1.1 Filtragem para sistemas lineares incertos

Considere o sistema linear incerto invariante no tempo

$$\begin{aligned}\delta[x] &= A(\alpha)x + B_1(\alpha)w \\ z &= C_1(\alpha)x + D_{11}(\alpha)w \\ y &= C_2(\alpha)x + D_{21}(\alpha)w\end{aligned}\tag{1.1}$$

com

$$A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times r}, C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}, C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times n} \text{ e } D_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times r}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $w \in \mathbb{R}^r$ , uma entrada externa, que denota o vetor de ruídos não mensuráveis, incluindo os ruídos que corrompem as medidas e os distúrbios do processo,  $z \in \mathbb{R}^p$ , a saída de referência e  $y \in \mathbb{R}^q$ , a saída medida. O operador  $\delta[x]$  representa a derivada  $\dot{x}$  para sistemas contínuos e o operador deslocamento  $x(k+1)$  para sistemas discretos no tempo.

As matrizes incertas do sistema (1.1) pertencem a um domínio politópico parametrizado em termos de um vetor  $\alpha$  e têm a seguinte forma

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i, \quad \alpha \in \Lambda_N\tag{1.2}$$

sendo  $Z(\alpha)$  qualquer matriz do sistema (1.1),  $Z_i$  os vértices,  $N$  o número de vértices do politopo e  $\Lambda_N$  é o conjunto conhecido como simplex unitário, dado por

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}\tag{1.3}$$

O filtro a ser projetado deve ser robusto, estável, de ordem completa, linear e invariante no tempo, descrito por

$$\begin{aligned}\delta[x_f] &= A_f x_f + B_f y, \\ z_f &= C_f x_f + D_f y\end{aligned}\tag{1.4}$$

com

$$A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}, C_f \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ e } D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$$

em que  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ ,  $n_f = n$ , é o estado estimado e  $z_f \in \mathbb{R}^p$ , a saída estimada. Definindo o erro  $e = z - z_f$  e um vetor de estados aumentado  $\tilde{x}' = [x' \quad x_f']$ , tem-se

$$\begin{aligned}\delta[\tilde{x}] &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{B}(\alpha)w \\ e &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{D}(\alpha)w\end{aligned}\tag{1.5}$$

com

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_2(\alpha) & A_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_f D_{21}(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, \\ \tilde{C} &= [C_1(\alpha) - D_f C_2(\alpha) \quad -C_f] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, & \tilde{D} &= [D_{11}(\alpha) - D_f D_{21}(\alpha)] \in \mathbb{R}^{p \times r}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Para um determinado valor de  $\alpha$ , a função de transferência de  $w$  para  $e$  é dada por

$$H(\tau, \alpha) = \tilde{C}(\alpha)(\tau I - \tilde{A}(\alpha))^{-1} \tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)\tag{1.7}$$

com  $\tau$  denotando  $s$  ou  $z$  para sistemas contínuos e discretos, respectivamente. O problema abordado está em se determinar um filtro como em (1.4) tal que o sistema aumentado (1.5) seja assintoticamente estável e minimize alguma medida de desempenho, como por exemplo, a norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de  $w$  para o erro  $e = z - z_f$ , como ilustrado na Figura 1.1.

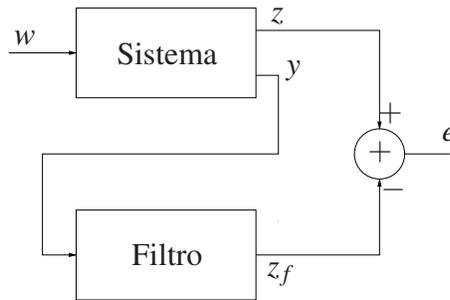


Figura 1.1: Problema de filtragem.

## 1.2 Estabilidade

Em sistemas dinâmicos descritos por equações de estado com entradas constantes,  $\delta[x] = f(x)$ , pontos de equilíbrio (ou pontos fixos)  $x_e$  satisfazem  $f(x_e) = 0$  no caso contínuo ou  $x_e = f(x_e)$  no caso discreto.

Para um dado sistema dinâmico, um ponto de equilíbrio é dito estável se todas as trajetórias que começam em pontos arbitrariamente próximos permanecem na sua vizinhança; caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito instável. Um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se todas as soluções que começam em pontos da sua vizinhança não apenas permanecem na vizinhança, mas tendem ao ponto de equilíbrio quando o tempo tende a infinito [35].

A estabilidade assintótica de um sistema pode ser definida a partir da teoria de Lyapunov [35]. No caso de sistemas lineares, o conceito de estabilidade assintótica está diretamente relacionado com a matriz que representa a dinâmica do sistema. Por exemplo,  $A(\alpha)$  para o sistema (1.1) e  $\tilde{A}(\alpha)$  para o sistema (1.5).

### 1.2.1 Sistemas contínuos

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema  $\dot{x} = A(\alpha)x$  seja assintoticamente estável é que a matriz  $A(\alpha)$  seja Hurwitz para todo  $\alpha$ , isto é, todos os autovalores da matriz  $A(\alpha)$  possuam parte real estritamente negativa. A estabilidade assintótica de  $\dot{x} = A(\alpha)x$  pode ser verificada pelo seguinte lema [9].

**Lema 1.1** *O sistema  $\dot{x} = A(\alpha)x$  é assintoticamente estável se, e somente se, existir  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  tal que*

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (1.8)$$

### 1.2.2 Sistemas discretos

No caso discreto, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do sistema  $x(k+1) = A(\alpha)x(k)$  é que a matriz  $A(\alpha)$  seja Schur estável para todo  $\alpha$ , ou seja, possua todos os autovalores dentro do círculo de raio unitário [9].

**Lema 1.2** *O sistema  $x(k+1) = A(\alpha)x(k)$  é assintoticamente estável se, e somente se, existir  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  tal que*

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (1.9)$$

*ou, equivalentemente (por complemento de Schur)*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) \\ P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.10)$$

Note que, no caso discreto, a utilização do complemento de Schur permite que a LMI (1.9) seja tratada por uma LMI aumentada equivalente (1.10).

## 1.3 Critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ – Análise

### 1.3.1 Sistemas contínuos

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema contínuo assintoticamente estável, com função de transferência (1.7), para um valor específico de  $\alpha$ , é dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (1.11)$$

Em sistemas SISO, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  corresponde ao máximo do diagrama de magnitude de Bode.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  possui uma equivalência no domínio do tempo

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(t)\| \neq 0, w(t) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e(t)\|^2}{\|w(t)\|^2} \quad (1.12)$$

em que  $\mathcal{L}_2$  representa o espaço para sinais de energia finita para sequências contínuas no tempo, ou seja,  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  se

$$\|w(t)\|_2^2 = \int_0^\infty w(\tau)'w(\tau)d\tau < \infty$$

Se nenhuma característica de  $w(t)$  for conhecida, essa norma pode ser interpretada como sendo o máximo ganho para uma entrada com características estatísticas desconhecidas. É possível calcular um limitante superior para esta norma por equações de Riccati ou utilizando LMIs. Note que

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma \iff \int_0^\infty e(t)'e(t)dt < \int_0^\infty \gamma^2 w(t)'w(t)dt, \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2$$

Escolhendo a função de Lyapunov quadrática  $v(x) = x'P(\alpha)x$ , com  $P(\alpha) > 0$ , para garantir a estabilidade assintótica e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $\gamma$ , impondo-se  $\dot{v} + e'e - \gamma^2 w'w < 0$ , e levando em conta as equações do sistema (1.5), tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{D}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (1.13)$$

Então, chega-se ao *bounded real lemma* [9], que garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica  $\tilde{A}(\alpha)$  e um limitante  $\gamma$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de  $w$  para  $e$ , se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha)$  tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{D}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.14)$$

Aplicando o complemento de Schur [9] em (1.14) obtém-se condições equivalentes, como por exemplo

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) & \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha) & -I & \tilde{D}(\alpha)' \\ \tilde{C}(\alpha) & \tilde{D}(\alpha) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.15)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser computada a partir de um procedimento convexo de otimização. Defina  $\mu = \gamma^2$  e resolva

$$\min_{P(\alpha) = P(\alpha)' > 0} \mu \quad (1.16)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{D}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.17)$$

ou, de maneira equivalente (tratando o sistema dual, ou seja, trocando  $(A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha))$  por  $(A(\alpha)', C(\alpha)', B(\alpha)', D(\alpha)')$ ),

$$\min_{W(\alpha) = W(\alpha)' > 0} \mu \quad (1.18)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{A}(\alpha)W(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)' & W(\alpha)\tilde{C}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)\tilde{D}(\alpha)' \\ \tilde{C}(\alpha)W(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)' & \tilde{D}(\alpha)\tilde{D}(\alpha)' - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.19)$$

### 1.3.2 Sistemas discretos

Considere o sistema (1.5) com função de transferência (1.7). Para um determinado valor de  $\alpha$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \sigma_{\max}(H(\exp(j\omega))) \quad (1.20)$$

Assim como no caso contínuo, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  possui uma correspondência temporal,

$$\|H(z)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(k)\| \neq 0, w(k) \in \ell_2} \frac{\|e(k)\|^2}{\|w(k)\|^2} \quad (1.21)$$

em que  $\ell_2$  representa o espaço para sinais de energia finita para sequências discretas no tempo, ou seja, sinais  $w(k)$  tais que

$$\|w(k)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} w(k)'w(k) < \infty$$

cujos cálculos podem ser realizados por meio de LMIs, levando-se em conta que

$$\|H(z)\|_\infty < \gamma \iff \sum_{k=0}^{\infty} e(k)'e(k) < \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^2 w(k)'w(k), \quad \forall w(k) \in \ell_2 \quad (1.22)$$

Escolhendo a função de Lyapunov quadrática  $v(x) = x'P(\alpha)x$ , com  $P(\alpha) > 0$ , para garantir a estabilidade assintótica e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $\gamma$ , impõe-se  $v(x(k+1)) - v(x(k)) + e'e - \gamma^2 w'w < 0$ , ou seja

$$x(k+1)'P(\alpha)x(k+1) - x(k)'P(\alpha)x(k) + e'e - \gamma^2 w'w < 0 \quad (1.23)$$

Levando em conta as equações do sistema (1.5), tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - P(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (1.24)$$

e assim obtém-se o *bounded real lemma* [9] para o caso discreto, que garante um limitante  $\gamma$  para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de  $w$  para  $e$  se, existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha)$  tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - P(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.25)$$

Aplicando o complemento de Schur, transformações de congruência, trocando linhas e colunas em (1.25), obtêm-se condições equivalentes, como por exemplo

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) & 0 & \tilde{C}(\alpha)' \\ P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) & 0 \\ 0 & \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha) & I & \tilde{D}(\alpha)' \\ \tilde{C}(\alpha) & 0 & \tilde{D}(\alpha) & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (1.26)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser computada a partir de um procedimento convexo de otimização. Defina  $\mu = \gamma^2$  e resolva

$$\min_{P(\alpha) = P(\alpha)' > 0} \mu \quad (1.27)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - P(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{C}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)'\tilde{D}(\alpha) - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.28)$$

ou, de maneira equivalente (tratando o sistema dual, ou seja, trocando  $(A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha))$  por  $(A(\alpha)', C(\alpha)', B(\alpha)', D(\alpha)')$ ),

$$\min_{\mu} W(\alpha) = W(\alpha)' > 0 \quad (1.29)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)W(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' - W(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)' & \tilde{A}(\alpha)W(\alpha)\tilde{C}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)\tilde{D}(\alpha)' \\ \tilde{C}(\alpha)W(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{D}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)' & \tilde{C}(\alpha)W(\alpha)\tilde{C}(\alpha)' + \tilde{D}(\alpha)\tilde{D}(\alpha)' - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.30)$$

## 1.4 Critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ – Síntese

As condições apresentadas na Seção 1.3 envolvem produtos entre as variáveis de interesse, matrizes do filtro e as matrizes de Lyapunov. Essas condições podem ser usadas para o cômputo do custo  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema aumentado. Para realizar a síntese de filtros para sistemas incertos usando as condições da Seção 1.3, transformações de congruência associadas a partições das matrizes de Lyapunov podem ser utilizadas. Resultados menos conservadores podem ser obtidos para o projeto de filtros quando a matriz de Lyapunov é desacoplada das matrizes do sistema e a síntese do filtro é baseada no particionamento de variáveis de folga. Na sequência são apresentados lemas auxiliares que podem ser usados para diminuir o conservadorismo das soluções.

## 1.5 Lema de Finsler

O Lema de Finsler [69] pode ser usado na obtenção de condições equivalentes para o cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , por exemplo [3, 7]. O objetivo nesses casos é separar a matriz de Lyapunov das matrizes do sistema e acrescentar variáveis extras ao problema, de forma a aumentar o espaço de busca para encontrar soluções, possibilitando que a síntese dos filtros seja realizada sem a necessidade de impor restrições de estrutura na matriz de Lyapunov.

**Lema 1.3** *Sejam  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$  e  $\mathcal{B}^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$  (isto é  $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$ ). Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B}w = 0$
- ii)  $\mathcal{B}^\perp' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$
- iii)  $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} < 0$
- iv)  $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$

Outra aplicação do Lema de Finsler é a eliminação de variáveis de projeto em desigualdades matriciais; por exemplo, ao se passar da condição iv) para a condição ii), eliminando a variável  $\mathcal{X}$ . A prova do Lema 1.3, dada no Apêndice A.3, pode também ser encontrada em [17].

## 1.6 Relaxações LMIs

Até este ponto, todas as condições foram apresentadas na forma de LMIs robustas, isto é, dependentes de  $\alpha$ . Condições LMI dependentes de parâmetros devem ser verificadas para todos os valores de  $\alpha \in \Lambda_N$  e, por isso, são condições de dimensão infinita. Condições finitas podem ser obtidas arbitrando-se estruturas particulares para as variáveis do problema, como por exemplo estruturas independentes de parâmetros ou dependentes de parâmetros de maneira afim. Apesar de ser apenas suficiente (relaxação), a escolha de uma estrutura para as variáveis permite transformar as condições em um conjunto finito de testes de LMIs que, se verificados, garantem a validade da condição LMI robusta original para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

### 1.6.1 Estabilidade com funções de Lyapunov afins

Seja o sistema

$$\dot{x} = A(\alpha)x \quad (1.31)$$

com  $A(\alpha)$  definida em (1.2).

Como  $A(\alpha)$  é dada pela combinação convexa de  $N$  matrizes  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , imagina-se que a estabilidade do sistema (1.31) possa ser investigada por uma função de Lyapunov com a mesma estrutura, ou seja, por hipótese, considere

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \alpha \in \Lambda_N \quad (1.32)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade de  $A(\alpha)$  é dada no lema a seguir.

**Lema 1.4** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que*

$$A_i' P_i + P_i A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.33)$$

$$A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j < 0, \quad i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N \quad (1.34)$$

então  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  estruturada como em (1.32) é uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros de maneira afim em  $\alpha$ , que certifica a estabilidade do sistema (1.31) para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

**Prova:** Multiplicando (1.33) por  $\alpha_i^2$ , (1.34) por  $\alpha_i \alpha_j$  e somando, tem-se

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (A_i' P_i + P_i A_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j) = A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) \quad (1.35)$$

que, garante a estabilidade do sistema (1.31)  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ . ■

**Exemplo 1.1** *Para  $N = 2$ , é possível escrever condições suficientes para a estabilidade de  $A(\alpha)$  utilizando o Lema 1.4. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_1$  e  $P_2$  tais que*

$$\begin{aligned} A_1' P_1 + P_1 A_1 &< 0 \\ A_2' P_2 + P_2 A_2 &< 0 \\ A_1' P_2 + P_2 A_1 + A_2' P_1 + P_1 A_2 &< 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

então  $P_1$  e  $P_2$  compõem uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ , que certifica a estabilidade do sistema (1.31) para todo  $\alpha \in \Lambda_2$ .

O Lema 1.4 pode ser encontrado em [63]. O estudo da estabilidade robusta para sistemas discretos em moldes similares pode ser encontrado em [62]. O Lema 1.4 apresenta uma condição apenas suficiente para a estabilidade do sistema (1.31), pois nem sempre o uso de funções de Lyapunov na forma afim como em (1.32) é capaz de solucionar o problema. Uma possibilidade para a obtenção de condições menos conservadoras é o uso de funções de Lyapunov de grau arbitrário  $g$ , introduzidas na próxima seção.

### 1.6.2 Funções polinomiais

Seja  $Z_g(\alpha)$  uma matriz dependente de parâmetros de grau  $g$  representada por

$$Z_g(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g)} \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_N^{k_N} Z_k, \quad k = k_1 k_2 \cdots k_N \quad (1.37)$$

em que  $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}$ ,  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $i = 1, \dots, N$ , são os monômios e  $Z_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\forall k \in \mathcal{K}(g)$ , são matrizes (coeficientes do polinômio). Note que  $k = k_1 k_2 \cdots k_N$  representa uma  $N$ -upla, e  $\mathcal{K}(g)$  é o conjunto de  $N$ -uplas obtido como todas combinações possíveis de inteiros não negativos  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tais que  $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = g$ . Como o número de vértices em um politopo é igual a  $N$ , o número de elementos em  $\mathcal{K}(g)$  é dado por

$$J(g) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!} \quad (1.38)$$

Para ilustrar essa notação, considere um polinômio homogêneo de grau  $g = 2$  com  $N = 2$ . O conjunto  $\mathcal{K}(g)$  é dado por  $\mathcal{K}(2) = \{02, 11, 20\}$ ,  $J(2) = 3$ , correspondendo à forma genérica

$$Z_2(\alpha) = \alpha_2^2 Z_{02} + \alpha_1 \alpha_2 Z_{11} + \alpha_1^2 Z_{20}$$

Por definição, para  $N$ -uplas  $k$  e  $k'$  pode-se escrever  $k \geq k'$  se  $k_i \geq k'_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Operações de soma  $k_i + k'_i$  e subtração  $k_i - k'_i$  (para  $k \geq k'$ ) são definidas componente a componente. Considere também a seguinte definição para a  $N$ -upla  $e_i$ :

$$e_i = 0 \cdots 0 \underbrace{1}_{i\text{-ésimo elemento}} 0 \cdots 0$$

A estabilidade robusta de um sistema politópico pode ser investigada de maneira suficiente por meio de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau genérico  $g$ . Aumentando-se gradativamente os valores de  $g$ , as condições obtidas se aproximam assintoticamente das condições necessárias para o cômputo da estabilidade. Se o sistema for estável, as condições serão satisfeitas para um  $g$  suficientemente grande. O lema a seguir apresenta uma condição para análise de estabilidade de sistemas contínuos por meio de funções de Lyapunov polinomiais de grau arbitrário [56].

**Lema 1.5** *O sistema (1.31) é Hurwitz estável se, e somente se, existirem um grau  $g$  suficientemente grande e matrizes simétricas definidas positivas  $P_k$ ,  $k \in \mathcal{K}(g)$ , tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > 0}} (A_i' P_{k-e_i} + P_{k-e_i} A_i) < 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+1) \quad (1.39)$$

**Exemplo 1.2** Para  $g = 2$  e  $N = 2$ , tem-se a seguinte condição suficiente para a estabilidade de  $A(\alpha)$ , que é sempre menos conservadora que a do Lema 1.4.

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{20}$ ,  $P_{11}$  e  $P_{02}$  tais que

$$\begin{aligned} A_1' P_{20} + P_{20} A_1 &< 0 \\ A_1' P_{11} + P_{11} A_1 + A_2' P_{20} + P_{20} A_2 &< 0 \\ A_1' P_{02} + P_{02} A_1 + A_2' P_{11} + P_{11} A_2 &< 0 \\ A_2' P_{02} + P_{02} A_2 &< 0 \end{aligned} \tag{1.40}$$

então  $P_{20}$ ,  $P_{11}$  e  $P_{02}$  compõem uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros polinomial de grau  $g = 2$ , dada por  $P_2(\alpha) = \alpha_2^2 P_{02} + \alpha_1 \alpha_2 P_{11} + \alpha_1^2 P_{20}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ , que certifica a estabilidade do sistema (1.31) para todo  $\alpha \in \Lambda_2$ .

Essa escolha para as variáveis de decisão provê resultados menos conservadores com o aumento do grau de  $g$  ao preço de um maior esforço e complexidade computacional (pois o aumento de  $g$  implica em maior número de variáveis e de linhas de LMIs). LMIs robustas com parâmetros no simplex unitário podem ser completamente caracterizadas por meio de soluções polinomiais homogêneas, sem perda de generalidade [5]. Isto é, se uma solução de grau  $\bar{g}$  existe, uma solução de maior grau  $g > \bar{g}$  pode ser usada, com convergência garantida para um grau  $g$  suficientemente grande [56]. Analisando os exemplos 1.1 ( $g = 1$ ) e 1.2 ( $g = 2$ ), é possível perceber que o aumento do grau  $g$  é acompanhado pelo aumento do número de variáveis e pelo número de linhas de LMIs.

# Capítulo 2

## Filtragem para sistemas lineares incertos com atraso variante no tempo

### 2.1 Introdução

A presença de atrasos pode causar efeitos indesejáveis no comportamento de sistemas dinâmicos, tais como oscilações, degradação de desempenho ou instabilidade [53, 64]. Por essa razão, muito esforço tem sido empregado em pesquisas durante os últimos anos para tratar os atrasos no tempo e, portanto, diminuir suas consequências imprevisíveis em sistemas de controle.

Muitos trabalhos trataram os problemas de análise de estabilidade [45, 59, 12, 32] e projeto de controladores [21, 74, 46, 50] para sistemas com atraso no tempo. Similarmente, o problema de filtragem para sistemas com atraso tem sido investigado por muitos autores em diferentes contextos. Por exemplo, sistemas contínuos [52, 24, 77], sistemas discretos [44, 58, 27], sistemas neutrais [70] e sistemas não lineares [76]. Em particular, o problema de projeto de filtros para sistemas discretos com atraso variante no tempo foi reportado na literatura para sistemas chaveados [79, 60, 19], sistemas em rede [78] e sistemas *fuzzy* (nebulosos) [61], enquanto o projeto de filtros de ordem reduzida aparece em [36].

Este capítulo investiga o problema de projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  de ordem completa para sistemas lineares discretos no tempo afetados por incertezas politópicas invariantes no tempo e um atraso variante no tempo. A principal contribuição é a obtenção de novas condições na forma de desigualdades matriciais dependentes do atraso para o projeto de filtros. Diferentemente de [25] e [48], este capítulo utiliza funções de Lyapunov dependentes de parâmetros na forma de polinômios homogêneos que podem levar a condições menos conservadoras para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  sem usar nenhum esquema de particionamento de atraso. A desigualdade de Jensen [81] provê condições de estabilidade que dependem dos valores mínimos e máximos que o atraso variante no tempo pode assumir (i.e., condições dependentes do atraso). Adicionalmente, o Lema de Finsler [17] é empregado para derivar as condições de projeto em um espaço aumentado com variáveis de folga adicionais.

Graças ao uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e as variáveis extras, as condições na forma de desigualdades matriciais dependentes do atraso contêm e generalizam outros resultados da literatura. Relaxações LMIs baseadas em matrizes polinomiais homogêneas de graus arbitrários são usadas para determinar as matrizes da realização em espaço de estados do filtro de ordem completa. Sempre que disponível em tempo real (medido ou estimado), o atraso variante no tempo pode ser usado como informação adicional na implementação do filtro projetado. Como outra contribuição deste capítulo, um procedimento iterativo baseado na solução de LMIs envolvendo as

variáveis de decisão é proposto para melhorar o desempenho do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ . Experimentos numéricos ilustram o melhor desempenho do filtro proposto quando comparado a outras estratégias disponíveis na literatura.

## 2.2 Definição do problema

Considere o sistema linear incerto discreto no tempo com um atraso variante no tempo afetando os estados descrito por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B_1(\alpha)w_k \\ z_k &= C_1(\alpha)x_k + C_{d1}(\alpha)x_{k-d_k} + D_{11}(\alpha)w_k \\ y_k &= C_2(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D_{21}(\alpha)w_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w_k \in \mathbb{R}^r$  é a entrada de ruídos,  $z_k \in \mathbb{R}^p$  é o sinal a ser estimado e  $y_k \in \mathbb{R}^q$  é a saída medida. As matrizes do sistema são definidas como

$$\begin{aligned} A(\alpha) &\in \mathbb{R}^{n \times n}, A_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times r}, \\ C_1(\alpha) &\in \mathbb{R}^{p \times n}, C_{d1}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}, \\ C_2(\alpha) &\in \mathbb{R}^{q \times n}, C_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times n}, D_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times r}, \end{aligned}$$

e pertencem a um domínio politópico expresso em termos de um vetor de parâmetros invariantes no tempo  $\alpha$ , sendo genericamente representadas por

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i, \quad \alpha \in \Lambda_N \quad (2.2)$$

em que  $Z(\alpha)$  representa qualquer matriz do sistema em (2.1),  $Z_i, i = 1, \dots, N$  são os vértices,  $N$  é o número de vertices do politopo e  $\Lambda_N$  é o simplex unitário, dado por

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (2.3)$$

O atraso no tempo  $d_k$  é um inteiro positivo, fixo ou variante no tempo, tal que

$$1 \leq \underline{d} \leq d_k \leq \bar{d} \quad (2.4)$$

sendo que  $\underline{d}$  e  $\bar{d}$  são constantes inteiras positivas, respectivamente o limitante inferior e superior de  $d_k$ .

Supondo que o atraso variante no tempo esteja disponível, medido ou estimado, deseja-se projetar um filtro estável linear robusto de ordem completa com termos atrasados, dado por

$$\begin{aligned} x_{f_{k+1}} &= A_f x_{f_k} + A_{df} x_{f_k - d_k} + B_f y_k, \\ z_{f_k} &= C_f x_{f_k} + C_{df} x_{f_k - d_k} + D_f y_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

com  $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ ,  $A_{df} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ ,  $B_f \in \mathbb{R}^{n_f \times q}$ ,  $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n_f}$ ,  $C_{df} \in \mathbb{R}^{p \times n_f}$  e  $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , em que  $x_{f_k} \in \mathbb{R}^{n_f}$ ,  $n_f = n$ , é o estado do filtro e  $z_{f_k} \in \mathbb{R}^p$  é a saída estimada.

Definindo um vetor de estados aumentado  $\tilde{x}'_k = \begin{bmatrix} x'_k & x'_{f_k} \end{bmatrix}$  e  $e_k = z_k - z_{f_k}$  pode-se escrever

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x}_k + \tilde{A}_d(\alpha)\tilde{x}_{k-d_k} + \tilde{B}(\alpha)w_k \\ e_k &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x}_k + \tilde{C}_d(\alpha)\tilde{x}_{k-d_k} + \tilde{D}(\alpha)w_k \end{aligned} \quad (2.6)$$

com

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_2(\alpha) & A_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, & \tilde{A}_d(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_d(\alpha) & 0 \\ B_f C_d(\alpha) & A_{df} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \\ \tilde{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_f D_{21}(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, & \tilde{C}(\alpha) &= [C_1(\alpha) - D_f C_2(\alpha) \quad -C_f] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, \\ \tilde{C}_d(\alpha) &= [C_{d1}(\alpha) - D_f C_d(\alpha) \quad -C_{df}] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, & \tilde{D}(\alpha) &= [D_{11}(\alpha) - D_f D_{21}(\alpha)] \in \mathbb{R}^{p \times r}\end{aligned}\tag{2.7}$$

O problema abordado nesse capítulo é encontrar um filtro como dado em (2.5) tal que a dinâmica do erro no sistema aumentado (2.6) seja assintoticamente estável e o ganho de energia da entrada de distúrbio  $w_k$  para o erro  $e_k$  (i.e., o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ ) seja limitado.

Antes de apresentar as contribuições principais, a desigualdade de Jensen é reproduzida a seguir, por conveniência, no lema que pode ser encontrado em [81].

**Lema 2.1** *Para qualquer matriz constante  $0 < M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $d_1 \in \mathbb{N}$ ,  $d_2 \in \mathbb{N}$ ,  $d_1 \leq d_2$ , e uma função vetorial  $f : [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem-se que*

$$-(d_2 - d_1 + 1) \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)' M f(i) \leq - \left( \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i) \right)' M \left( \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i) \right)\tag{2.8}$$

desde que as somas sejam bem definidas.

## 2.3 Resultados principais

O lema a seguir apresenta um resultado para análise de estabilidade do sistema aumentado (2.6) com um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . As condições são apresentadas na forma de LMIs robustas.

**Lema 2.2** *O máximo ganho de energia de  $w_k$  para  $e_k$  é limitado por  $\sqrt{\mu}$  e o sistema (2.6) é assintoticamente estável para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se existirem matrizes simétricas definidas positivas dependentes de parâmetros  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $Z_j(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $j = 1, 2$ , e matrizes dependentes de parâmetros  $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $N(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$  e  $V(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$  tais que*

$$\Theta(\alpha) + \Psi(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N\tag{2.9}$$

com  $\Theta(\alpha) =$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} P(\alpha) + \bar{d}^2 Z_1(\alpha) + \delta^2 Q_4(\alpha) + \underline{d}^2 Z_2(\alpha) & & & & & \\ & * & & & & \\ & * & & & & \\ & * & & & & \\ & * & & & & \\ & * & & & & \\ & * & & & & \\ & * & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & Z_1(\alpha) & & Z_2(\alpha) & & \tilde{C}(\alpha)' & & 0 & & 0 \\ -Q_1(\alpha) - 2Q_4(\alpha) & & Q_4(\alpha) & & Q_4(\alpha) & & \tilde{C}_d(\alpha)' & & 0 & & 0 \\ * & & -Q_2(\alpha) - Z_1(\alpha) - Q_4(\alpha) & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ * & & * & & -Q_3(\alpha) - Z_2(\alpha) - Q_4(\alpha) & & 0 & & 0 & & 0 \\ * & & * & & * & & -\mathbf{I} & & \tilde{D}(\alpha) & & \\ * & & * & & * & & * & & -\mu \mathbf{I} & & \end{array} \right] \quad (2.10)$$

$$\Psi(\alpha) = \left[ \begin{array}{cccc} -E(\alpha) - E(\alpha)' & E(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - K(\alpha)' & E(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) - H(\alpha)' & \\ * & K(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'K(\alpha)' & K(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'H(\alpha)' & \\ * & * & H(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'H(\alpha)' & \\ * & * & * & \\ * & * & * & \\ * & * & * & \\ * & * & * & \\ -M(\alpha)' & -N(\alpha)' & -X(\alpha)' & E(\alpha)\tilde{B}(\alpha) - V(\alpha)' \\ \tilde{A}(\alpha)'M(\alpha)' & \tilde{A}(\alpha)'N(\alpha)' & \tilde{A}(\alpha)'X(\alpha)' & K(\alpha)B(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'V(\alpha)' \\ \tilde{A}_d(\alpha)'M(\alpha)' & \tilde{A}_d(\alpha)'N(\alpha)' & \tilde{A}_d(\alpha)'X(\alpha)' & H(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'V(\alpha)' \\ 0 & 0 & 0 & M(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ * & 0 & 0 & N(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ * & * & 0 & X(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ * & * & * & V(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)'V(\alpha)' \end{array} \right] \quad (2.11)$$

e  $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ .

**Prova:** Escolha a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(\alpha, k) = \sum_{i=1}^8 V_i(\alpha, k) > 0 \quad (2.12)$$

$$V_1(\alpha, k) = \tilde{x}'_k P(\alpha) \tilde{x}_k \quad (2.13)$$

$$V_2(\alpha, k) = \sum_{j=k-d_k}^{k-1} \tilde{x}'_j Q_1(\alpha) \tilde{x}_j \quad (2.14)$$

$$V_3(\alpha, k) = \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} \tilde{x}'_j Q_2(\alpha) \tilde{x}_j \quad (2.15)$$

$$V_4(\alpha, k) = \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} \tilde{x}'_j Q_3(\alpha) \tilde{x}_j \quad (2.16)$$

$$V_5(\alpha, k) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\bar{d}} \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} \tilde{x}'_j Q_1(\alpha) \tilde{x}_j \quad (2.17)$$

$$V_6(\alpha, k) = \delta \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1-\bar{d}} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} \eta'_m Q_4(\alpha) \eta_m \quad (2.18)$$

$$V_7(\alpha, k) = \bar{d} \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} \eta'_m Z_1(\alpha) \eta_m \quad (2.19)$$

$$V_8(\alpha, k) = \underline{d} \sum_{\ell=-\underline{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} \eta'_m Z_2(\alpha) \eta_m \quad (2.20)$$

em que  $\eta_m = \tilde{x}_{m+1} - \tilde{x}_m$ ,  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ ,  $Q_i(\alpha) = Q_i(\alpha)' > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $Z_j(\alpha) = Z_j(\alpha)' > 0$ ,  $j = 1, 2$ .

A função de Lyapunov (2.12) deve ser definida positiva e deve satisfazer

$$\Delta V(\alpha, k) = V(\alpha, k+1) - V(\alpha, k) < 0 \quad (2.21)$$

Então, ao longo das soluções de (2.6), tem-se

$$\Delta V_1(k) = \tilde{x}'_{k+1} P(\alpha) \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}'_k P(\alpha) \tilde{x}_k \quad (2.22)$$

$$\Delta V_2(k) \leq \tilde{x}'_k Q_1(\alpha) \tilde{x}_k - \tilde{x}'_{k-d_k} Q_1(\alpha) \tilde{x}_{k-d_k} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} \tilde{x}'_i Q_1(\alpha) \tilde{x}_i \quad (2.23)$$

$$\Delta V_3(k) = \tilde{x}'_k Q_2(\alpha) \tilde{x}_k - \tilde{x}'_{k-\bar{d}} Q_2(\alpha) \tilde{x}_{k-\bar{d}} \quad (2.24)$$

$$\Delta V_4(k) = \tilde{x}'_k Q_3(\alpha) \tilde{x}_k - \tilde{x}'_{k-\underline{d}} Q_3(\alpha) \tilde{x}_{k-\underline{d}} \quad (2.25)$$

$$\Delta V_5(k) = \delta \tilde{x}'_k Q_1(\alpha) \tilde{x}_k - \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} \tilde{x}'_i Q_1(\alpha) \tilde{x}_i \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_6(k) &= \delta^2 \eta'_k Q_4(\alpha) \eta_k - \delta \sum_{m=k-\bar{d}}^{k-\underline{d}-1} \eta'_m Q_4(\alpha) \eta_m \\ &= \delta^2 \eta'_k Q_4(\alpha) \eta_k - \underbrace{\delta \sum_{m=k-\bar{d}}^{k-\underline{d}-1} \eta'_m Q_4(\alpha) \eta_m}_{S_1} - \underbrace{\delta \sum_{m=k-\underline{d}_k}^{k-\underline{d}-1} \eta'_m Q_4(\alpha) \eta_m}_{S_2} \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1 (desigualdade de Jensen), tem-se

$$S_1 \leq -(\bar{d} - d_k) \sum_{m=k-\bar{d}}^{k-\underline{d}_k-1} \eta'_m Q_4(\alpha) \eta_m \leq -(\tilde{x}_{k-d_k} - \tilde{x}_{k-\bar{d}})' Q_4(\alpha) (\tilde{x}_{k-d_k} - \tilde{x}_{k-\bar{d}})$$

$$S_2 \leq -(d_k - \underline{d}) \sum_{m=k-d_k}^{k-d-1} \eta'_m Q_4(\alpha) \eta_m \leq -(\tilde{x}_{k-\underline{d}} - \tilde{x}_{k-d_k})' Q_4(\alpha) (\tilde{x}_{k-\underline{d}} - \tilde{x}_{k-d_k})$$

Além disso,

$$\Delta V_6(k) \leq \delta^2 \eta'_k Q_4(\alpha) \eta_k - (\tilde{x}_{k-d_k} - \tilde{x}_{k-\bar{d}})' Q_4(\alpha) (\tilde{x}_{k-d_k} - \tilde{x}_{k-\bar{d}}) - (\tilde{x}_{k-\underline{d}} - \tilde{x}_{k-d_k})' Q_4(\alpha) (\tilde{x}_{k-\underline{d}} - \tilde{x}_{k-d_k}) \quad (2.27)$$

$$\Delta V_7(k) = \underbrace{\bar{d}^2 \eta'_k Z_1(\alpha) \eta_k - \bar{d} \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} \eta'_m Z_1(\alpha) \eta_m}_{S_3} \quad (2.28)$$

Aplicando novamente o Lema 2.1, em  $S_3$ ,

$$S_3 \leq - \left( \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} \eta_m \right)' Z_1(\alpha) \left( \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} \eta_m \right) = -(\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-\bar{d}})' Z_1(\alpha) (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-\bar{d}})$$

Assim,

$$\Delta V_7 \leq \bar{d}^2 \eta'_k Z_1(\alpha) \eta_k - (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-\bar{d}})' Z_1(\alpha) (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-\bar{d}}) \quad (2.29)$$

e, de forma semelhante,

$$\Delta V_8 \leq \underline{d}^2 \eta'_k Z_2(\alpha) \eta_k - (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-\underline{d}})' Z_1(\alpha) (\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-\underline{d}}) \quad (2.30)$$

Somando-se (2.22)–(2.30) tem-se

$$\Delta V(\alpha, k) = \sum_{i=1}^8 \Delta V_i \leq \varphi'_k \Pi(\alpha) \varphi_k < 0, \quad (2.31)$$

em que

$$\varphi_k = \left[ \tilde{x}'_{k+1} \quad \tilde{x}'_k \quad \tilde{x}'_{k-d_k} \quad \tilde{x}'_{k-\bar{d}} \quad \tilde{x}'_{k-\underline{d}} \right]'$$

e  $\Pi(\alpha)$  é uma submatriz formada pelo bloco das 5 primeiras linhas e 5 primeiras colunas de  $\Theta(\alpha)$  em (2.10). Para estabelecer o limitante de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , considere o sistema aumentado (2.6), assumindo condições iniciais nulas  $\tilde{x}_0 = 0$  e o critério de desempenho definido como

$$J \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (e'_k e_k - \mu w'_k w_k) < 0 \quad (2.32)$$

Nesse caso,  $V(\alpha, 0) = 0$  e  $V(\alpha, \infty)$  também vai a zero quando  $w_k$  converge assintoticamente para zero ou vai para uma constante positiva (finita) quando  $\sup w_k$  se aproxima de um valor finito. Então, usando (2.21),  $J$  definido em (2.32) pode ser majorado como

$$J \leq \sum_{k=0}^{\infty} (e'_k e_k - \mu w'_k w_k + \Delta V(\alpha, k)) \quad (2.33)$$

que pode ser reescrita como

$$J \leq \sum_{k=0}^{\infty} \xi'_k \Theta(\alpha) \xi_k \quad (2.34)$$

com  $\Theta(\alpha)$  dado por (2.10) e

$$\xi_k = [\varphi'_k \quad z'_k \quad w'_k]'$$

Aplicando a condição *i*) do Lema 1.3 (Finsler) em  $\xi'_k \Theta(\alpha) \xi_k$  e selecionando

$$\mathcal{X} = [E(\alpha)' \quad K(\alpha)' \quad H(\alpha)' \quad M(\alpha)' \quad N(\alpha)' \quad X(\alpha)' \quad V(\alpha)']'$$

$$\mathcal{B} = [-\mathbf{I} \quad \tilde{A}(\alpha) \quad \tilde{A}_d(\alpha) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tilde{B}(\alpha)]$$

na condição *iv*) tem-se (2.9), o que implica que  $\|e_k\|_2 < \sqrt{\mu} \|w_k\|_2$  para todo  $w_k \in \ell_2$  e garante a estabilidade assintótica do sistema (2.6), para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . ■

O Lema 2.2 foi estabelecido sem definir uma estrutura particular para as variáveis matriciais dependentes de parâmetros. É possível observar que a condição apresentada é não linear, pois as variáveis de interesse (i.e.,  $A_f, A_{df}, B_f, C_f, C_{df}$  e  $D_f$ ) aparecem em submatrizes multiplicando outras variáveis matriciais. Para obter condições numericamente tratáveis para o projeto de filtros, restrições de estrutura [20, 41] são impostas às matrizes dependentes de parâmetros  $E(\alpha), K(\alpha), H(\alpha), M(\alpha), N(\alpha), X(\alpha)$  e  $V(\alpha)$

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \begin{bmatrix} E_{11}(\alpha) & \hat{K} \\ E_{21}(\alpha) & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad K(\alpha) = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & T_1 \hat{K} \\ K_{21}(\alpha) & T_2 \hat{K} \end{bmatrix}, \quad H(\alpha) = \begin{bmatrix} H_{11}(\alpha) & T_3 \hat{K} \\ H_{21}(\alpha) & T_4 \hat{K} \end{bmatrix}, \\ M(\alpha) &= \begin{bmatrix} M_{11}(\alpha) & T_5 \hat{K} \\ M_{21}(\alpha) & T_6 \hat{K} \end{bmatrix}, \quad N(\alpha) = \begin{bmatrix} N_{11}(\alpha) & T_7 \hat{K} \\ N_{21}(\alpha) & T_8 \hat{K} \end{bmatrix}, \quad X(\alpha) = [X_1(\alpha) \quad T_9 \hat{K}], \quad V(\alpha) = [V_1(\alpha) \quad T_{10} \hat{K}] \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo que  $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ,  $T_9 \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $T_{10} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  são variáveis matriciais a serem determinadas. Por conveniência, as matrizes  $P(\alpha)$ ,  $Q_i(\alpha)$  e  $Z_j(\alpha)$  também são particionadas em blocos  $n \times n$ .

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)' & P_{22}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad Q_i(\alpha) = \begin{bmatrix} Q_{i1}(\alpha) & Q_{i2}(\alpha) \\ Q_{i2}(\alpha)' & Q_{i3}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ Z_j(\alpha) &= \begin{bmatrix} Z_{j1}(\alpha) & Z_{j2}(\alpha) \\ Z_{j2}(\alpha)' & Z_{j3}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots 4, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

e as seguintes mudanças de variáveis são adotadas:  $K_1 = \hat{K}A_f$ ,  $K_2 = \hat{K}B_f$  e  $K_3 = \hat{K}A_{df}$ . Com essas escolhas particulares para as variáveis de decisão, uma condição suficiente para a existência de um filtro robusto  $\mathcal{H}_\infty$  é apresentada na sequência.

**Teorema 2.1** *Se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros definidas positivas  $P(\alpha)$ ,  $Q_i(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , e  $Z_j(\alpha)$ ,  $j = 1, 2$ , como em (2.36), matrizes  $K(\alpha)$ ,  $E(\alpha)$ ,  $H(\alpha)$ ,  $M(\alpha)$ ,  $N(\alpha)$ ,  $X(\alpha)$  e  $V(\alpha)$  como em (2.35),  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $K_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $C_{df} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,*



Em (2.37), as matrizes  $\Upsilon_i$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1 &= -E_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha)' + P_{11}(\alpha) + \bar{d}^2 Z_{11}(\alpha) + \delta^2 Q_{41}(\alpha) + \underline{d}^2 Z_{21}(\alpha) \\
\Upsilon_2 &= -\hat{K} - E_{21}(\alpha)' + P_{12}(\alpha) + \bar{d}^2 Z_{12}(\alpha) + \delta^2 Q_{42}(\alpha) + \underline{d}^2 Z_{22}(\alpha) \\
\Upsilon_3 &= E_{11}(\alpha)A(\alpha) + K_2 C_2(\alpha) - K_{11}(\alpha)' - \bar{d}^2 Z_{11}(\alpha) - \delta^2 Q_{41}(\alpha) - \underline{d}^2 Z_{21}(\alpha) \\
\Upsilon_4 &= K_1 - K_{21}(\alpha)' - \bar{d}^2 Z_{12}(\alpha) - \delta^2 Q_{42}(\alpha) - \underline{d}^2 Z_{22}(\alpha) \\
\Upsilon_5 &= E_{11}(\alpha)A_d(\alpha) + K_2 C_d(\alpha) - H_{11}(\alpha)' \\
\Upsilon_6 &= -\hat{K} - \hat{K}' + P_{22}(\alpha) + \bar{d}^2 Z_{13}(\alpha) + \delta^2 Q_{43}(\alpha) + \underline{d}^2 Z_{23}(\alpha) \\
\Upsilon_7 &= E_{21}(\alpha)A(\alpha) + K_2 C_2(\alpha) - \hat{K}' T_1' - \bar{d}^2 Z_{12}(\alpha)' - \delta^2 Q_{42}(\alpha)' - \underline{d}^2 Z_{22}(\alpha)' \\
\Upsilon_8 &= K_1(\alpha) - \hat{K}' T_2' - \bar{d}^2 Z_{13}(\alpha)' - \delta^2 Q_{43}(\alpha) - \underline{d}^2 Z_{23}(\alpha)' \\
\Upsilon_9 &= E_{21}(\alpha)A_d(\alpha) + K_2 C_d(\alpha) - \hat{K}' T_3' \\
\Upsilon_{12} &= K_{11}(\alpha)A_d(\alpha) + T_1 K_2 C_d(\alpha) + A(\alpha)' H_{11}(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_3' \\
\Upsilon_{13} &= T_1 K_3 + A(\alpha)' H_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_4' \\
\Upsilon_{14} &= A(\alpha)' M_{11}(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_5' + Z_{11}(\alpha) \\
\Upsilon_{15} &= A(\alpha)' M_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_6' + Z_{12}(\alpha) \\
\Upsilon_{16} &= A(\alpha)' N_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_8' + Z_{22}(\alpha) \\
\Upsilon_{17} &= A(\alpha)' X_1(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_9' + C_1(\alpha)' - C_2(\alpha)' D_f' \\
\Upsilon_{18} &= K_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + T_1 K_2 D_{21}(\alpha) + A(\alpha)' V_1(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_{10}' \\
\Upsilon_{20} &= K_{21}(\alpha)A_d(\alpha) + T_2 K_2 C_d(\alpha) + K_1' T_3' \\
\Upsilon_{21} &= H_{11}(\alpha)A_d(\alpha) + A_d(\alpha)' H_{11}(\alpha)' + T_3 K_2 C_d(\alpha) + C_d(\alpha)' K_2' T_3' - Q_{11}(\alpha) - 2Q_{41}(\alpha) \\
\Upsilon_{22} &= T_3 K_3 + A_d(\alpha)' H_{21}(\alpha)' + C_d(\alpha)' K_2' T_4' - Q_{12}(\alpha) - 2Q_{42}(\alpha) \\
\Upsilon_{23} &= A_d(\alpha)' M_{11}(\alpha)' + C_d(\alpha)' K_2' T_5' + Q_{41}(\alpha) \\
\Upsilon_{24} &= A_d(\alpha)' M_{21}(\alpha)' + C_d(\alpha)' K_2' T_6' + Q_{42}(\alpha) \\
\Upsilon_{25} &= A_d(\alpha)' N_{21}(\alpha)' + C_d(\alpha)' K_2' T_8' + Q_{42}(\alpha) \\
\Upsilon_{26} &= A_d(\alpha)' X_1(\alpha)' + C_d(\alpha)' K_2' T_9' + C_{d1}(\alpha)' - C_d(\alpha)' D_f' \\
\Upsilon_{27} &= H_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + T_3 K_2 D_{21}(\alpha) + A_d(\alpha)' V_1(\alpha)' + C_d(\alpha)' K_2' T_{10}' \\
\Upsilon_{28} &= K_3' T_4' + T_4 K_3 - Q_{13}(\alpha) - 2Q_{43}(\alpha) \\
\Upsilon_{29} &= -Q_{21}(\alpha) - Z_{11}(\alpha) - Q_{41}(\alpha) \\
\Upsilon_{30} &= X_1(\alpha)B_1(\alpha) + T_9 K_2 D_{21}(\alpha) + D_{11}(\alpha) - D_f D_{21}(\alpha) \\
\Upsilon_{31} &= V_1(\alpha)B_1(\alpha) + B_1(\alpha)' V_1(\alpha)' + T_{10} K_2 D_{21}(\alpha) + D_{21}(\alpha)' K_2' T_{10}' - \mu I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{10} &= K_{11}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)' K_{11}(\alpha)' + T_1 K_2 C_2(\alpha) + C_2(\alpha)' K_2' T_1' + Q_{11}(\alpha)(\delta + 1) + Q_{21}(\alpha) + Q_{31}(\alpha) \\
&\quad + \bar{d}^2 Z_{11}(\alpha) + \delta^2 Q_{41}(\alpha) + \underline{d}^2 Z_{21}(\alpha) - Z_{11}(\alpha) - Z_{21}(\alpha) - P_{11}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{11} &= T_1 K_1 + A(\alpha)' K_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)' K_2' T_2' + Q_{12}(\alpha)(\delta + 1) + Q_{22}(\alpha) + Q_{32}(\alpha) + \bar{d}^2 Z_{12} \\
&\quad + \delta^2 Q_{42}(\alpha) + \underline{d}^2 Z_{22}(\alpha) - Z_{12}(\alpha) - Z_{22}(\alpha) - P_{12}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\Upsilon_{19} = T_2 K_1 + K_1' T_2' + Q_{13}(\alpha)(\delta + 1) + Q_{23}(\alpha) + Q_{33}(\alpha) + \bar{d}^2 Z_{13}(\alpha) + \delta^2 Q_{43}(\alpha) + \underline{d}^2 Z_{23}(\alpha) - Z_{13}(\alpha) - Z_{23}(\alpha) - P_{22}(\alpha)$$

**Prova:** A prova segue os mesmos passos da prova do Lema 2.2, com as variáveis de folga estruturadas como em (2.35) e matrizes  $P(\alpha)$ ,  $Q(\alpha)$  e  $Z(\alpha)$  como em (2.36). ■

**Comentário 2.1** Note que o elemento  $\Upsilon_6$ , que aparece na diagonal da desigualdade apresentada no Teorema 2.1, é tal que  $\hat{K} + \hat{K}' > 0$ , o que garante que a matriz  $\hat{K}$  possui inversa. Sendo assim, é possível recuperar as matrizes do filtro com a mudança de variáveis proposta.

**Comentário 2.2** Para solucionar as condições robustas do Teorema 2.1, a técnica proposta em [56] para tratar LMIs robustas com parâmetros no simplex unitário pode ser aplicada, impondo que todas as variáveis de decisão do problema tenham uma estrutura polinomial homogênea de grau arbitrário. Resultados menos conservadores podem ser obtidos à medida que o grau das matrizes aumenta. O preço a ser pago é o aumento do esforço computacional, isto é, maior número de variáveis e linhas de LMIs.

**Comentário 2.3** As condições na forma de LMIs expressas em termos dos vértices do sistema, podem ser obtidas com o parser ROLMIP (Robust LMI Parser) disponível em <http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/rolmip>. O toolbox foi desenvolvido para Matlab e YALMIP [49], retornando um conjunto finito de LMIs a partir de comandos que descrevem a estrutura das matrizes envolvidas nas condições LMI robustas a serem programadas.

Observa-se que na condição (2.37) apresentada no Teorema 2.1 existem produtos entre as variáveis  $T_i$  e matrizes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $\hat{K}$ . Para  $T_i$  igual a zero em (2.35), o Teorema 2.1 pode ser solucionado produzindo bons resultados. Contudo, limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  menos conservadores podem ser obtidos, levando em consideração as variáveis  $T_i$ . Um esquema de relaxação baseado na solução iterativa de LMIs é proposto no algoritmo apresentado a seguir.

---

### Algoritmo 1

---

Inicialize matrizes  $T_i$  e escalares  $\mu_T$  e  $\mu_K$ .

**while**  $|(\sqrt{\mu_T} - \sqrt{\mu_K})/\sqrt{\mu_T}| > \varepsilon$  ou (Número máximo de iterações não atingido) **do**

Solucione Teorema 2.1 com  $T_i$ , minimizando  $\sqrt{\mu}$ ,  $\sqrt{\mu_T} \leftarrow \sqrt{\mu}$ , encontre e armazene matrizes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $\hat{K}$ .

Solucione Teorema 2.1 com  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $\hat{K}$  obtidas no passo anterior, minimizando  $\sqrt{\mu}$ ,  $\sqrt{\mu_K} \leftarrow \sqrt{\mu}$ , encontre as matrizes  $T_i$ .

**end while**

---

**Comentário 2.4** Para inicializar o Algoritmo 1 é necessário arbitrar uma estrutura para as matrizes  $T_i$ . Escolhas que podem prover bons resultados: i)  $T_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 10$ ; ii)  $T_i = I$ ,  $i = 1, \dots, 8$  com  $T_9 = 0$  e  $T_{10} = 0$ .

**Comentário 2.5** Se  $d_k$  não estiver disponível para a implementação do filtro, um filtro independente do atraso pode ser obtido, bastando impor  $C_{df} = 0$  e  $K_3 = 0$  (implicando que  $A_{df} = 0$ ) no Teorema 2.1.

**Comentário 2.6** Considere o caso livre de atraso, i.e.,  $\tilde{A}_d(\alpha) = 0$ ,  $\tilde{C}_d(\alpha) = 0$  e  $d_k = 0$  no sistema (2.6). Fazendo  $Q_i(\alpha) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $Z_j(\alpha) = 0$ ,  $j = 1, 2$ , pré-multiplicando a condição (2.9) por  $F$  e pos-multiplicando por  $F'$ , com

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

recupera-se uma condição equivalente à apresentada em [41, Lema 9].

## 2.4 Experimentos numéricos

O objetivo dos experimentos é comparar as condições propostas neste capítulo com outros métodos da literatura. As rotinas foram implementadas em MATLAB, versão 7.1.0.246 (R14) SP 3 usando os pacotes Yalmip [49] e SeDuMi [71]. Dois casos foram considerados: Teorema 2.1 com variáveis  $T_i = 0$  (T 2.1) e com Algoritmo 1 (T 2.1\*). Matrizes  $T_i$  foram inicializadas como matrizes nulas,  $\mu_T = 1$ ,  $\mu_K = 0$ ,  $\varepsilon = 0.00001$  e o número máximo de iterações do Algoritmo 1 foi fixado em 50. Diferentes condições iniciais para  $T_i$  podem prover resultados distintos.

### 2.4.1 Exemplo 1

Considere o sistema discreto no tempo [25] dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ -0.2 & \rho \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & \phi \end{bmatrix}, \quad 1 \leq d_k \leq \bar{d}, \quad B_1^T = [0 \quad 1],$$

$$C_1 = [1 \quad 2], \quad C_2 = [1 \quad 0], \quad C_d = [0.2 \quad 0], \quad C_{d1} = D_{11} = 0, \quad D_{21} = 1$$

com  $|\phi| \leq 0.1$  e  $|\rho| \leq \beta$ .

A Tabela 2.1 apresenta os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos para  $\bar{d} = 1$ ,  $\beta = 0.7$  e diferentes valores de  $\bar{d}$ . Como pode ser observado, mesmo com  $T_i = 0$ , isto é, usando uma versão simplificada do Teorema 2.1 a abordagem proposta provê resultados menos conservadores que os apresentados em [25], [38] e Teorema 8 ( $m = 1$ ) em [48]. Os métodos apresentados em [25], [38] e [48] não consideram estados atrasados na síntese do filtro, além disso, a estratégia proposta apresenta um maior número de variáveis extras que ajudam a diminuir o conservadorismo das soluções encontradas em termos do custo  $\mathcal{H}_\infty$ , justificando os menores custos encontrados pelo Teorema 2.1.

Considere o sistema aumentado (2.6) com condições iniciais nulas, o seguinte sinal de entrada de ruído

$$w_k = \sin(0.9k) \exp(-0.01k)$$

e um atraso no tempo gerado aleatoriamente  $d_k \in [1, 7]$ . Nestas condições, uma simulação no tempo foi realizada para computar o sinal de erro quando o filtro robusto

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0.0846 & 0.3598 \\ -0.1590 & -0.1293 \end{bmatrix}, \quad A_{df} = \begin{bmatrix} 0.0318 & -0.0365 \\ -0.0001 & -0.0247 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.1720 \\ -1.7747 \end{bmatrix}, \\ C_f &= [-0.6423 \quad -1.9780], \quad C_{df} = [0.0205 \quad -0.0126], \quad D_f = [0.2754] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Tabela 2.1: Limitantes de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para o Exemplo 1, usando Teorema 2.1 com variáveis  $T_i = 0$  (T 2.1), Algoritmo 1 (T 2.1\*), [25], [38] e [48] para  $\beta = 0.7$ ,  $\underline{d} = 1$  e diferentes valores de  $\bar{d}$ .

$\bar{d}$	4	5	6	7
[48]	3.6174	4.4920	5.9471	9.6079
[25] ( $g = 1$ )	3.9537	4.9838	6.6630	10.6396
[25] ( $g = 2$ )	3.3236	3.9136	4.8960	7.7017
[38] ( $g = 1$ )	3.1400	3.6249	4.6118	7.8222
[38] ( $g = 2$ )	3.1400	3.6171	4.5222	7.6297
T 2.1 ( $g = 1$ )	3.0598	3.5706	4.4852	6.7065
T 2.1 ( $g = 2$ )	3.0598	3.5626	4.4336	6.2925
T 2.1* ( $g = 1$ )	2.9962	3.3893	3.9391	5.1085
T 2.1* ( $g = 2$ )	2.9827	3.3687	3.8558	4.6150

obtido por meio do Teorema 2.1 com  $T_i = 0$ ,  $\underline{d} = 1$ ,  $\bar{d} = 7$  e  $g = 1$ , é utilizado. A Figura 2.1 apresenta o atraso variante no tempo  $d_k$ , o sinal de erro  $e_1(k)$  para o filtro robusto proposto (2.38), o sinal de erro  $e_2(k)$  para o filtro computado pelo método em [25],  $g = 1$ . Pode-se observar que o erro  $e_1(k)$  para o filtro obtido por meio do Teorema 2.1 é mais atenuado, isto é, possui uma amplitude menor que  $e_2(k)$ , erro relativo ao filtro computado pelo método em [25].

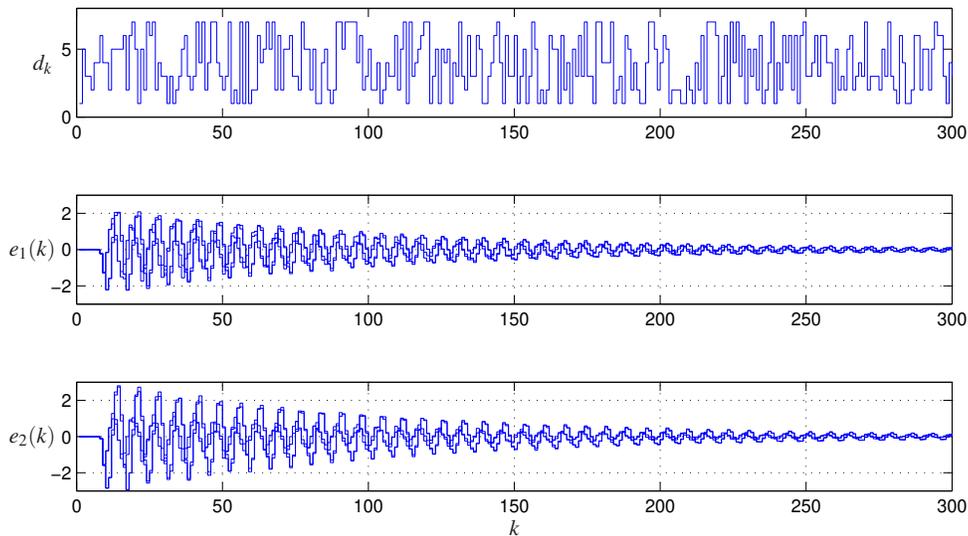


Figura 2.1: Atraso gerado aleatoriamente  $d_k \in [1, 7]$  e resposta temporal do erro para o sistema aumentado (computado nos vértices) do Exemplo 1,  $\underline{d} = 1$ ,  $\bar{d} = 7$  e  $g = 1$ , com filtros dados por T 2.1 ( $e_1(k)$ ) e [25] ( $e_2(k)$ ).

Considerando todas as variáveis de folga em (2.35) como constantes, i.e.,  $g = 0$  e matrizes de Lyapunov em (2.36) com grau  $g = 1$ , o limitante para o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  obtido para o caso  $\bar{d} = 7$ ,  $\underline{d} = 1$  e  $\beta = 0.7$  é  $\sqrt{\mu} = 7.1343$ . O limitante é mais conservador que o obtido considerando grau  $g > 0$  para as variáveis no Teorema 2.1 como mostrado na Tabela 2.1. Porém, permanece menos conservador que os resultados obtidos por [25], [38] e [48]. Além disso, considerando as variáveis de folga com

grau  $g = 1$  e matrizes de Lyapunov de grau  $g = 2$ , o limitante para o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para este caso é  $\sqrt{\bar{\mu}} = 6.6061$ .

A Tabela 2.2 apresenta os limitantes do desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para  $\underline{d} = 1$ ,  $\bar{d} = 5$  e diferentes valores de  $\beta$ . Pode-se notar que os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por T 2.1 com  $g = 1$  são menores que os obtidos por [25] ( $g = 2$ ), [38] ( $g = 2$ ) e Teorema 8 ( $m = 1$ ) em [48], e que T 2.1\* com  $g = 1$  provê limitantes menores que T 2.1 com  $g = 2$ . A Figura 2.2 apresenta a evolução de  $\mu_T$  e  $\mu_K$  no Algoritmo 1, para  $\underline{d} = 1$ ,  $\bar{d} = 6$ ,  $\beta = 0.7$  e  $g = 1$ , em que as melhorias obtidas pelo procedimento iterativo em termos de limitantes menores são visíveis. Para ilustrar ainda mais a importância do algoritmo, para  $\beta = 0.7$ , um filtro independente do atraso foi projetado (i.e., com  $A_{df} = 0$  e  $C_{df} = 0$ ), garantindo limitantes para o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  que podem ser até 18.5% menores que os obtidos em [38], enquanto que com as matrizes  $T_i$  iguais a zero, apenas pequenas melhorias (limitantes aproximadamente 0.5% menores) foram obtidos quando comparados a [38].

Tabela 2.2: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  para o Exemplo 1 usando o Teorema 2.1 com variáveis  $T_i = 0$  (T 2.1), com Algoritmo 1 (T 2.1\*), [25], [38] e [48], para  $\bar{d} = 5$  e diferentes valores de  $\beta$ .

$\beta$	0.5	0.6	0.7	0.75
[48]	2.3662	2.9494	4.4920	8.2007
[25] ( $g = 1$ )	2.3691	3.0628	4.9838	9.1328
[25] ( $g = 2$ )	2.3179	2.8175	3.9136	6.1137
[38] ( $g = 1$ )	2.3179	2.7919	3.6249	6.2043
[38] ( $g = 2$ )	2.3179	2.7919	3.6171	6.0030
T 2.1 ( $g = 1$ )	2.2652	2.7215	3.5706	5.4391
T 2.1 ( $g = 2$ )	2.2651	2.7199	3.5626	5.2515
T 2.1* ( $g = 1$ )	2.2200	2.6210	3.3893	4.4200
T 2.1* ( $g = 2$ )	2.2174	2.6178	3.3687	4.2462

## 2.4.2 Exemplo 2

Considere o seguinte sistema, também investigado em [48]

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.7 + \phi \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & \rho \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, B_1^T = [0 \quad 1], C_1 = [1 \quad 2],$$

$$C_2 = [1 \quad 1], C_d = [0.2 \quad 0.5], C_{d1} = [0.5 \quad 0.6], D_{11} = -0.5, D_{21} = 1$$

em que  $|\phi| \leq 0.2$  e  $|\rho| \leq 0.1$ . Em [48], uma técnica de partição é usada sobre o intervalo de variação do atraso nas condições de análise e para síntese. Os resultados obtidos em [48] e usando o Teorema 2.1 são apresentados na Tabela 2.3 para dois casos: atraso variante no tempo e atraso fixo. Pode-se notar que, apesar de considerar todo intervalo de variação do atraso (e não somente partições, como em [48]), os limitantes obtidos por meio do Teorema 2.1 são menores que os obtidos por [48], exceto para o caso de atraso variante no tempo com  $\bar{d} = 5$ . Além disso, o Teorema 2.1 provê condições menos conservadoras em todos os casos com atraso fixo apresentados na Tabela 2.3.

As matrizes do filtro obtido por meio do Teorema 2.1 com  $T_i = 0$  (T 2.1),  $g = 1$  e  $\underline{d} = \bar{d} = 4$  (atraso

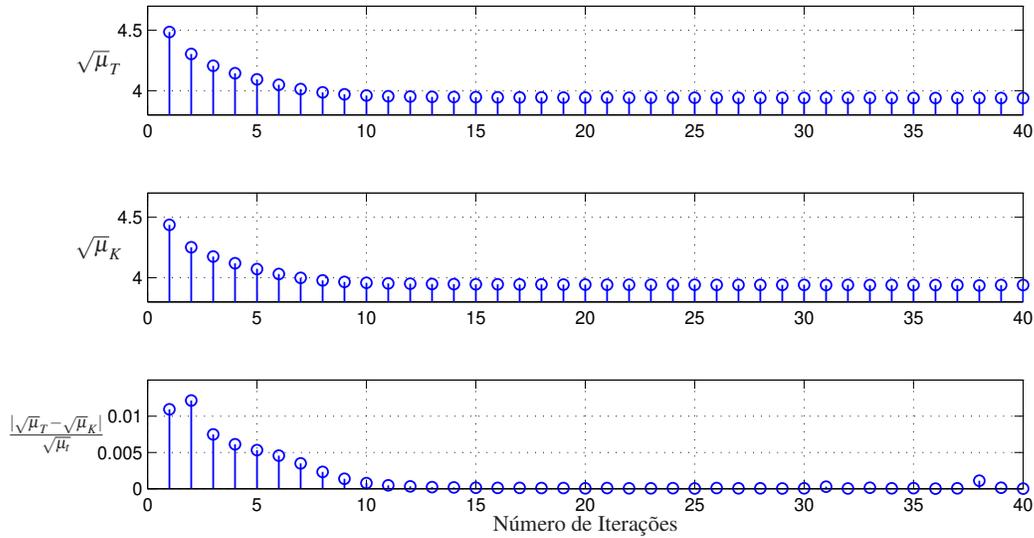


Figura 2.2: Comportamento de  $\sqrt{\mu_T}$ ,  $\sqrt{\mu_K}$  e  $|(\sqrt{\mu_T} - \sqrt{\mu_K})/\sqrt{\mu_T}|$  ao longo das iterações do Algoritmo 1, para  $\underline{d} = 1$ ,  $\bar{d} = 6$ ,  $\beta = 0.7$  e  $g = 1$ .

fixo) são

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0.0103 & -1.0129 \\ -0.0008 & 0.6108 \end{bmatrix}, A_{df} = \begin{bmatrix} -0.3235 & -0.2741 \\ -0.1965 & -0.2822 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.8236 \\ -0.3335 \end{bmatrix}, \\ C_f &= [0.0604 \quad -0.5837], C_{df} = [-0.0592 \quad -0.0566], D_f = [1.2000] \end{aligned} \quad (2.39)$$

A Figura 2.3 apresenta o diagrama de valor singular máximo para o sistema aumentado (2.6) com atraso fixo, computado nos quatro vértices do domínio incerto e utilizando o filtro (2.39). Como pode ser visto, os valores singulares máximos respeitam o limitante para o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  obtido pelo Teorema 2.1, indicando a eficácia do método proposto para o projeto de filtros.

As matrizes do filtro obtidas por meio do Teorema 2.1 com  $T_i = 0$  (T 2.1), considerando o atraso variante no tempo, com  $\underline{d} = 2$ ,  $\bar{d} = 3$  e  $g = 1$ , são

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0.1591 & -0.6955 \\ -0.0426 & 0.5697 \end{bmatrix}, A_{df} = \begin{bmatrix} -0.2046 & -0.2232 \\ -0.1938 & -0.3066 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.5082 \\ -0.3544 \end{bmatrix}, \\ C_f &= [0.0398 \quad -0.4167], C_{df} = [0.0130 \quad 0.0370], D_f = [1.3462] \end{aligned}$$

O diagrama de valores singulares máximos computados nos vértices do sistema aumentado é mostrado na Figura 2.4. Nessa figura, cada vértice é representado por uma curva diferente e em duas situações, uma para  $d_k = 2$  e outra para  $d_k = 3$ . Observa-se que o limitante  $\mathcal{H}_\infty$  garantido pelo Teorema 2.1, indicado na figura por meio de uma linha horizontal sólida, é próximo do valor máximo atingido pelas curvas. Deve ser enfatizado que, na situação ilustrada na figura, o pior caso pode não estar nos vértices e além disso, os diagramas foram construídos como se os atrasos fossem congelados ( $d_k = 2$  ou  $d_k = 3$ ), enquanto a técnica proposta é capaz de lidar com o caso mais geral que considera atraso variante no tempo.

Tabela 2.3: Limitante de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para Exemplo 2 usando Teorema 2.1 com  $T_i = 0$  (T 2.1), Algoritmo 1 (T 2.1\*) e [48].

Atraso variante no tempo $\underline{d} = 2$			
$\bar{d}$	3	4	5
[48]	2.5612	2.9264	3.4268
T 2.1 ( $g = 1$ )	2.3975	2.7782	3.5856
T 2.1 ( $g = 2$ )	2.3957	2.7735	3.5855
T 2.1* ( $g = 1$ )	2.3707	2.7305	3.5231
T 2.1* ( $g = 2$ )	2.3637	2.7227	3.5202
Atraso fixo $\underline{d} = \bar{d}$			
$\bar{d}$	2	4	6
[48]	2.3044	2.7647	3.6876
T 2.1 ( $g = 1$ )	2.2944	2.3358	3.2247
T 2.1 ( $g = 2$ )	2.2923	2.3356	3.2192
T 2.1* ( $g = 1$ )	2.2935	2.3184	3.0875
T 2.1* ( $g = 2$ )	2.2912	2.3157	3.0759

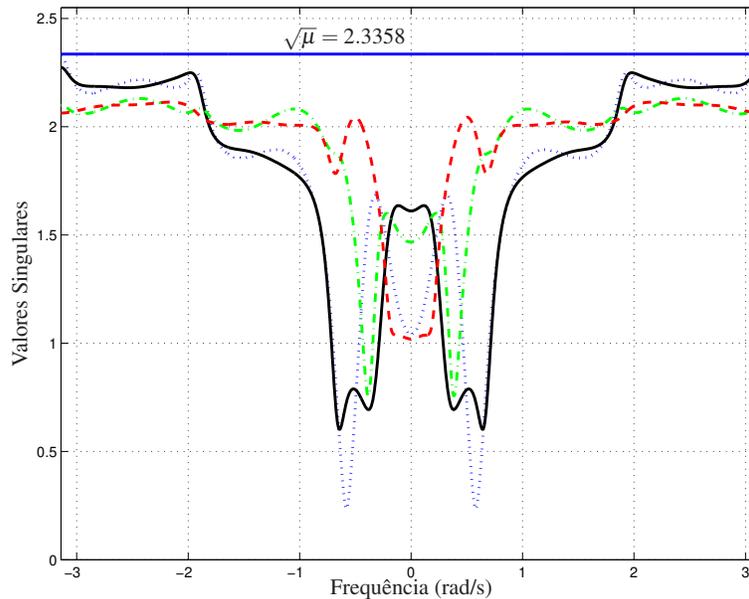


Figura 2.3: Diagrama de valores singulares para o sistema aumentado do Exemplo 2, considerando atraso fixo, com  $\underline{d} = \bar{d} = 4$ ,  $g = 1$  e apenas os 4 vértices do politopo.

## 2.5 Conclusão

Este capítulo apresentou uma nova condição dependente de atraso na forma de desigualdades matriciais robustas, que tornam-se lineares para matrizes  $T_i$  pré-determinadas, para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  de ordem completa para sistemas lineares discretos com incertezas politópicas e atrasos variantes no tempo. Resultados menos conservadores, quando comparados a outras técnicas existentes na literatura.

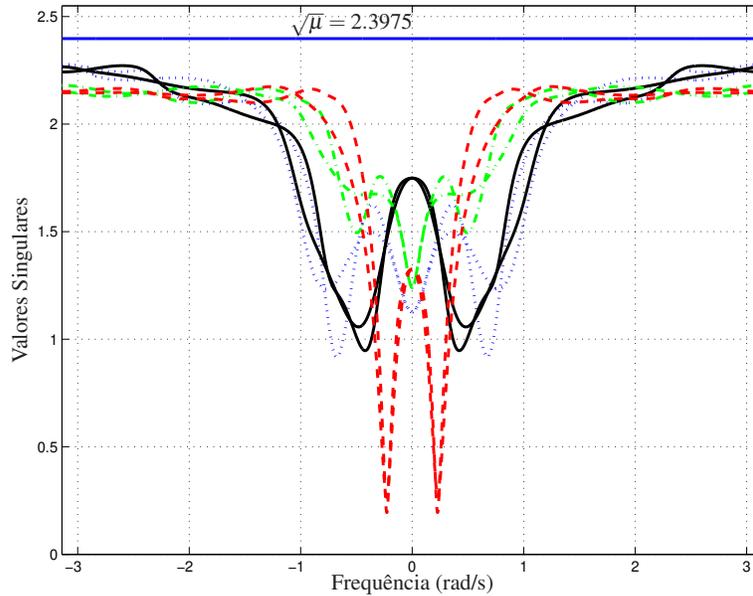


Figura 2.4: Diagrama de valores singulares para o sistema aumentado do Exemplo 2, atraso variante no tempo, porém considerando  $d_k = 2$  ou  $d_k = 3$  para todo  $k$ , com  $\underline{d} = 2$ ,  $\bar{d} = 3$  e  $g = 1$  (somente os 4 vértices do politopo).

tura, foram obtidos por meio do emprego de relaxações LMIs baseadas em polinômios homogêneos de grau arbitrário, do uso de variáveis de folga adicionais, de um filtro construído com estados atrasados, além de um procedimento iterativo baseado na solução de LMIs. Quanto maior a diferença entre os limites máximo e mínimo do atraso, maior é a influência das variáveis polinomiais na redução do custo  $\mathcal{H}_\infty$ . Além disso, o aumento do grau das variáveis polinomiais produz maior efeito quando utiliza-se o procedimento iterativo proposto pelo Algoritmo 1, reduzindo de maneira mais significativa o custo  $\mathcal{H}_\infty$ . Exemplos numéricos mostraram que a estratégia proposta pode ser competitiva mesmo quando comparada a métodos que usam particionamento do intervalo de atraso.

# Capítulo 3

## Filtragem para sistemas LPV com incertezas nos parâmetros medidos

### 3.1 Introdução

Em grande parte dos trabalhos existentes na literatura que tratam do problema de filtragem dependente de parâmetros, a presença de incertezas nas medições é negligenciada. É fato conhecido que sinais medidos em aplicações práticas estão sujeitos a erros dos sensores, imprecisões devido à calibração, mudança de temperatura, qualidade dos instrumentos, etc. Condições de síntese que levam em consideração incertezas nos parâmetros medidos foram investigadas apenas recentemente, por exemplo em [14, 67] (problema de controle) e [66] (problema de filtragem), assumindo incertezas multiplicativas [14] ou aditivas [66, 67].

Este capítulo apresenta uma estrutura geral para tratar do projeto de filtros LPVs de ordem completa para sistemas sujeitos a incertezas nos parâmetros medidos. Diferentemente das abordagens existentes [14, 66, 68], a principal novidade é a habilidade em lidar concomitantemente com incertezas aditivas e multiplicativas nos parâmetros medidos e, além disso, propor condições de projeto tanto para sistemas contínuos quanto para sistemas discretos no tempo. Tecnicamente, a contribuição é propor uma modelagem unificada para os parâmetros do sistema original e para as incertezas que afetam os parâmetros medidos, levando em consideração os limitantes dos parâmetros, os limitantes das derivadas (ou das taxas de variação) dos parâmetros e das incertezas afetando as medidas, que são tratados de modo conjunto por meio de uma representação baseada no domínio multi-simplex. Variações arbitrárias também podem ser levadas em conta. Além disso, o problema de projeto de filtros LPVs com critério  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser escrito em termos de LMIs robustas, i.e., LMIs com parâmetros no domínio multi-simplex, que podem ser resolvidas de forma eficiente por meio de relaxações LMIs baseadas em soluções polinomiais. Se factíveis, as condições asseguram a existência de um filtro LPV de ordem completa com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  independente das incertezas que afetam as medidas. Todas as vantagens da modelagem multi-simplex no contexto de sistemas LPV (ver [55]) podem ser exploradas para o projeto de filtros, como por exemplo seletividade dos parâmetros medidos [72], melhor compromisso entre precisão e custo computacional [54], entre outras.

Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência da abordagem proposta quando comparada a outros métodos. Além disso, um ponto importante, os exemplos mostram que o presente método é capaz de lidar com cenários em que as estratégias disponíveis na literatura não podem ser usadas.

## 3.2 Definição do problema

Considere o sistema LPV

$$\begin{aligned}\delta[x] &= A(\theta(\tau))x + B_1(\theta(\tau))w \\ z &= C_1(\theta(\tau))x + D_{11}(\theta(\tau))w \\ y &= C_2(\theta(\tau))x + D_{21}(\theta(\tau))w\end{aligned}\quad (3.1)$$

O operador  $\delta[x]$  denota derivada para sistemas contínuos no tempo e o operador deslocamento unitário para sistemas discretos no tempo,  $\tau$  representa  $t$  para sistemas contínuos e  $k$  para sistemas discretos. Além disso,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $w \in \mathbb{R}^r$  é a entrada de ruídos,  $z \in \mathbb{R}^p$  é o sinal a ser estimado,  $y \in \mathbb{R}^q$  é a saída medida e  $\theta(\tau) = (\theta_1(\tau), \dots, \theta_M(\tau))$  é o vetor de parâmetros variantes no tempo que satisfaz

$$|\theta_i(\tau)| \leq a_i, \quad |\dot{\theta}_i(t)| \leq d_i \quad \text{ou} \quad |\Delta(\theta_i(k))| \leq e_i, \quad a_i, d_i, e_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.2)$$

Para simplificar a notação, a dependência de  $\theta(\tau)$  em  $\tau$  é omitida deste ponto em diante. Todas matrizes do sistema (3.1) são consideradas como dependentes de parâmetros na forma afim, i.e., qualquer matriz em (3.1) pode ser representada como:

$$Z(\theta) = Z_0 + \sum_{i=1}^M \theta_i Z_i \quad (3.3)$$

em que  $Z_0, Z_1, \dots, Z_M$  são matrizes conhecidas. Procura-se projetar um filtro dependente de parâmetros de ordem completa sujeito a incertezas nos parâmetros medidos, dado por

$$\begin{aligned}\delta[x_f] &= A_f(\tilde{\theta})x_f + B_f(\tilde{\theta})y \\ z_f &= C_f(\tilde{\theta})x_f + D_f(\tilde{\theta})y\end{aligned}\quad (3.4)$$

em que  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ ,  $n_f = n$ , é o estado do filtro e  $z_f \in \mathbb{R}^p$  é a saída estimada. Os parâmetros medidos  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_M)$  são modelados como

$$\tilde{\theta}_i = (1 + \rho_i)(\theta_i + \delta_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (3.5)$$

em que  $\theta_i$  é o valor real do parâmetro,  $\delta_i$  é a incerteza aditiva e  $\rho_i$  é a incerteza multiplicativa, satisfazendo:

$$\begin{aligned}|\delta_i| \leq t_i, \quad |\rho_i| \leq c_i, \quad |\dot{\delta}_i| \leq r_i \quad \text{ou} \quad |\Delta(\delta_i)| \leq h_i, \quad |\dot{\rho}_i| \leq u_i \quad \text{ou} \quad |\Delta(\rho_i)| \leq m_i, \\ t_i, c_i, r_i, h_i, u_i, m_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, \dots, M\end{aligned}$$

As matrizes  $A_f(\tilde{\theta})$ ,  $B_f(\tilde{\theta})$ ,  $C_f(\tilde{\theta})$  e  $D_f(\tilde{\theta})$  em (3.4) apresentam uma dependência afim no parâmetro medido  $\tilde{\theta}$ , similar ao sistema LPV (3.1). Em outras palavras, todas as matrizes em (3.4) podem ser genericamente representadas como

$$Z_f(\tilde{\theta}) = Z_{f_0} + \sum_{i=1}^M \tilde{\theta}_i Z_{f_i} \quad (3.6)$$

O objetivo do procedimento de projeto é determinar matrizes  $A_{f_i}$ ,  $B_{f_i}$ ,  $C_{f_i}$  e  $D_{f_i}$ ,  $i = 0, \dots, M$ . O filtro LPV é implementado como um sistema dinâmico dependente de parâmetros na forma afim (3.4)–(3.6) e é função somente dos parâmetros medidos  $\tilde{\theta}$ , afetados por incertezas, enquanto o sistema LPV (3.1) depende apenas dos parâmetros variantes no tempo  $\theta_i$ .

Note que (3.5) representa uma modelagem mais geral para as incertezas dos parâmetros medidos quando comparada com as técnicas existentes. De fato, [66] e [14] podem ser vistas como casos particulares de (3.5) impondo  $\rho_i = 0$  e  $\delta_i = 0$ , respectivamente. Observa-se que, para valores pequenos de  $\theta_i$ , a incerteza aditiva  $\delta_i$  pode afetar os parâmetros medidos de maneira intensa, enquanto as incertezas multiplicativas tornam-se menos importantes. Por outro lado, para valores grandes de  $\theta_i$ , a incerteza aditiva poderia ser desconsiderada. Independente da situação, a modelagem proposta é suficientemente flexível para lidar com todos os casos, incluindo o cenário em que ambos  $\rho_i$  e  $\delta_i$  são importantes, o que não acontece para os métodos apresentados em [14, 66, 68].

A principal contribuição deste capítulo é propor uma nova abordagem para lidar com as incertezas afetando os parâmetros medidos, como descrito em (3.5), para o problema de projeto de filtros LPV para sistemas contínuos e discretos no tempo. A questão fundamental é fornecer uma mudança de variáveis conveniente, reunindo os parâmetros medidos e as incertezas em um domínio aumentado (chamado multi-simplex) em que relaxações LMIs podem ser aplicadas. Antes de apresentar os resultados principais, algumas definições e notações são introduzidas.

**Definição 3.1 (Multi-Simplex)** *Um multi-simplex  $\Omega_N$ ,  $N = (N_1, \dots, N_m)$  é definido como o produto Cartesiano de  $m$  simplexos com dimensão  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , i.e.,  $\Omega_N = \Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m}$ . Um dado elemento  $\alpha$  de  $\Omega_N$  é decomposto como  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  e cada  $\alpha_i$  é decomposto na forma  $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iN_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

**Exemplo 3.1** *Seja  $\Omega_{(2,2,2)} = \Lambda_2 \times \Lambda_2 \times \Lambda_2 \triangleq \Omega_{2\mathbb{I}_3}$ , com*

$$\mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{q\text{-vezes}}, \quad q \in \mathbb{N}^+, \quad \vartheta \mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(\vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta)}_{q\text{-vezes}}$$

*Então um elemento genérico de  $\Omega_{2\mathbb{I}_3}$  pode ser escrito como  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  com  $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \Lambda_2$ ,  $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \Lambda_2$  e  $\alpha_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}) \in \Lambda_2$ . Uma matriz  $Z(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Omega_{2\mathbb{I}_3}$ , pode ser genericamente representada como*

$$\begin{aligned} Z(\alpha) = & \alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{31}Z_{111} + \alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{32}Z_{112} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{31}Z_{121} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{32}Z_{122} \\ & + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{31}Z_{211} + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{32}Z_{212} + \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{31}Z_{221} + \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{32}Z_{222} \end{aligned} \quad (3.7)$$

*em que  $Z_{ijk}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  e  $k = 1, 2$ , são matrizes.*

**Definição 3.2 ( $\Omega$ -complemento)** *Dado um multi-simplex  $\Omega_N$  de dimensão  $N$  e um polinômio qualquer  $X(\alpha)$  definido em  $\mathbb{R}^N$  assumindo valores em um espaço vetorial de dimensão finita, o  $\Omega$ -complemento de  $X(\alpha)$ , denotado por  $\text{comp}_{\Omega}(X(\alpha))$ , é o único polinômio  $\Omega$ -homogêneo de grau mínimo igual a  $X(\alpha)$  em  $\Omega_N$ .*

**Exemplo 3.2** *Seja  $X(\alpha) = 3\alpha_{12} + (\alpha_{21} + 3\alpha_{23})^2$ ,  $X(\alpha) \in \Omega_{(2,3)}$  o  $\Omega$ -complemento de  $X(\alpha)$  é dado por*

$$\text{comp}_{\Omega}(X(\alpha)) = 3\alpha_{12}(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23})^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + 3\alpha_{23})^2$$

*Note que  $\text{comp}_{\Omega}(X(\alpha))$  é um polinômio homogêneo de grau 1 em  $\Lambda_2$  e um polinômio homogêneo de grau 2 em  $\Lambda_3$ , igual a  $X(\alpha)$  em  $\Omega_{(2,3)}$ . Além disso,  $\text{comp}_{\Omega}(X(\alpha))$  é o polinômio de grau mínimo com essas propriedades.*

### 3.3 Modelagem proposta

O principal objetivo das manipulações apresentadas a seguir é construir um novo domínio convexo no espaço de parâmetros para representar as matrizes dependentes de parâmetros na forma afim do sistema (3.1) bem como o filtro de ordem completa dependente de parâmetros (3.4). Este novo domínio viabiliza a construção de uma abordagem unificada para tratar incertezas aditivas e multiplicativas nos parâmetros medidos. Com o objetivo de explorar os benefícios e vantagens da representação multi-simplex, as seguintes mudanças de variáveis são aplicadas

$$\alpha_{i1} = \frac{\theta_i + a_i}{2a_i}, \quad \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Lambda_2, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.8)$$

produzindo

$$\theta_i = 2a_i\alpha_{i1} - a_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.9)$$

Observe que, com essa escolha particular, os novos parâmetros  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$  pertencem ao multi-simplex  $\Omega_{2\mathbb{I}_M}$ . Seguindo uma manipulação similar com respeito a  $\delta_i$

$$\bar{\alpha}_{i1} = \frac{\delta_i + t_i}{2t_i}, \quad \bar{\alpha}_{i2} = 1 - \bar{\alpha}_{i1}, \quad \bar{\alpha}_i = (\bar{\alpha}_{i1}, \bar{\alpha}_{i2}) \in \Lambda_2, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.10)$$

tem-se

$$\delta_i = 2t_i\bar{\alpha}_{i1} - t_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.11)$$

e  $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_M) \in \Omega_{2\mathbb{I}_M}$  e, finalmente, para  $\rho_i$

$$\hat{\alpha}_{i1} = \frac{\rho_i + c_i}{2c_i}, \quad \hat{\alpha}_{i2} = 1 - \hat{\alpha}_{i1}, \quad \hat{\alpha}_i = (\hat{\alpha}_{i1}, \hat{\alpha}_{i2}) \in \Lambda_2, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.12)$$

que fornece

$$\rho_i = 2c_i\hat{\alpha}_{i1} - c_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.13)$$

com  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_M) \in \Omega_{2\mathbb{I}_M}$ . Dessa forma, usando as mudanças de variáveis propostas, tanto o sistema original dependente de parâmetros na forma afim (3.1) quanto o filtro LPV (3.4) podem ser representados em termos de um multi-simplex contendo os parâmetros variantes no tempo e as incertezas afetando as medidas dado por  $\Omega_{2\mathbb{I}_{3M}}$ . Observe que, uma vez que as matrizes do sistema (3.1) e do filtro (3.4), genericamente representadas por (3.3) e (3.6), são afins, a partir das transformações de variáveis (3.8), (3.10) e (3.12), todos os simplexes resultantes serão de dimensão 2, i.e.,  $\Lambda_2$ . Neste caso, as variáveis do multi-simplex são  $\tilde{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha}, \hat{\alpha}) \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}}$ , com  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\hat{\alpha}$ , relacionados respectivamente com  $\theta$ ,  $\delta$  e  $\rho$ , obtidos das transformações descritas anteriormente. Assim, as matrizes do sistema (3.1) e do filtro (3.4) podem ser reescritas em termos de um novo conjunto de variáveis  $\tilde{\alpha}$ . Para exemplificar, considerando  $M = 1$  em (3.6), tem-se

$$Z_f(\tilde{\theta}) = Z_{f_0} + (\theta_1 + \delta_1)Z_{f_1} + \rho_1(\theta_1 + \delta_1)Z_{f_1} \quad (3.14)$$

Como proposto em (3.9), (3.11) e (3.13),  $Z_f(\tilde{\theta})$  em (3.14) é reescrita em termos de  $\tilde{\alpha}$  como

$$\begin{aligned} Z_f(\tilde{\alpha}) = & Z_{f_0} + (c_1 - 1)(a_1 + t_1)Z_{f_1} + (2a_1 - 2a_1c_1)\alpha_{11}Z_{f_1} + (2t_1 - 2t_1c_1)\bar{\alpha}_{11}Z_{f_1} \\ & - 2c_1(a_1 + t_1)\hat{\alpha}_{11}Z_{f_1} + 4a_1c_1\alpha_{11}\hat{\alpha}_{11}Z_{f_1} + 4c_1t_1\bar{\alpha}_{11}\hat{\alpha}_{11}Z_{f_1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

e, tomando o  $\Omega$ -complemento de  $Z_f(\tilde{\alpha})$  tem-se

$$\begin{aligned} Z_f(\tilde{\alpha}) = & (\alpha_{11} + \alpha_{12})(\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{12})(\hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{12})(Z_{f_0} + (c_1 - 1)(a_1 + t_1)Z_{f_1}) \\ & + (\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{12})(\hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{12})(2a_1 - 2a_1c_1)\alpha_{11}Z_{f_1} + (\alpha_{11} + \alpha_{12})(\hat{\alpha}_{11} + \hat{\alpha}_{12})(2t_1 - 2t_1c_1)\bar{\alpha}_{11}Z_{f_1} \\ & - (\alpha_{11} + \alpha_{12})(\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{12})2c_1(a_1 + t_1)\hat{\alpha}_{11}Z_{f_1} + (\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{12})4a_1c_1\alpha_{11}\hat{\alpha}_{11}Z_{f_1} \\ & + (\alpha_{11} + \alpha_{12})4c_1t_1\bar{\alpha}_{11}\hat{\alpha}_{11}Z_{f_1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como resultado,  $Z_f(\tilde{\alpha})$  é uma matriz polinomial com parâmetros no multi-simplex  $\Omega_{2\mathbb{I}_3}$ ,

$$\begin{aligned} Z_f(\tilde{\alpha}) = & \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11}\hat{\alpha}_{11}T_{111} + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{11}\hat{\alpha}_{12}T_{112} + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{12}\hat{\alpha}_{11}T_{121} + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{12}\hat{\alpha}_{12}T_{122} \\ & + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{11}\hat{\alpha}_{11}T_{211} + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{11}\hat{\alpha}_{12}T_{212} + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{12}\hat{\alpha}_{11}T_{221} + \alpha_{12}\bar{\alpha}_{12}\hat{\alpha}_{12}T_{222} \end{aligned} \quad (3.17)$$

cujos coeficientes matriciais são

$$\begin{aligned} T_{111} &= Z_{f_0} + (a_1 + t_1 + c_1a_1 + c_1t_1)Z_{f_1}, & T_{211} &= Z_{f_0} + (-a_1 + t_1 - c_1a_1 + c_1t_1)Z_{f_1}, \\ T_{112} &= Z_{f_0} + (a_1 + t_1 - c_1a_1 - c_1t_1)Z_{f_1}, & T_{212} &= Z_{f_0} + (-a_1 + t_1 + c_1a_1 - c_1t_1)Z_{f_1}, \\ T_{121} &= Z_{f_0} + (a_1 - t_1 + c_1a_1 - c_1t_1)Z_{f_1}, & T_{221} &= Z_{f_0} + (-a_1 - t_1 - c_1a_1 - c_1t_1)Z_{f_1}, \\ T_{122} &= Z_{f_0} + (a_1 - t_1 - c_1a_1 + c_1t_1)Z_{f_1}, & T_{222} &= Z_{f_0} + (-a_1 - t_1 + c_1a_1 + c_1t_1)Z_{f_1} \end{aligned}$$

Este procedimento pode ser sistematicamente estendido para tratar qualquer matriz polinomial com  $M \geq 1$ , produzindo

$$Z_f(\tilde{\alpha}) = \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_M=1}^2 \sum_{k_1=1}^2 \cdots \sum_{k_M=1}^2 \sum_{\ell_1=1}^2 \cdots \sum_{\ell_M=1}^2 \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{Mi_M} \bar{\alpha}_{1k_1} \cdots \bar{\alpha}_{Mk_M} \hat{\alpha}_{1\ell_1} \cdots \hat{\alpha}_{M\ell_M} T_{i_1 \dots i_M k_1 \dots k_M \ell_1 \dots \ell_M} \quad (3.18)$$

$$T_{i_1 \dots i_M k_1 \dots k_M \ell_1 \dots \ell_M} = Z_{f_0} + \sum_{j=1}^M \left[ (-1)^{i_j+1} a_j + (-1)^{k_j+1} t_j + (-1)^{\ell_j+1} c_j a_j + (-1)^{k_j+\ell_j} c_j t_j \right] Z_{f_j}$$

Deste modo, as matrizes do filtro  $A_f(\tilde{\alpha})$ ,  $B_f(\tilde{\alpha})$ ,  $C_f(\tilde{\alpha})$  e  $D_f(\tilde{\alpha})$  têm dimensões apropriadas e dependem de  $\tilde{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha}, \hat{\alpha})$  como  $Z_f(\tilde{\alpha})$  em (3.18).

Note que as incertezas multiplicativas e aditivas não afetam as matrizes do sistema em (3.1). Apesar disso, a equação (3.18) pode ser usada para computar as matrizes do sistema na forma multi-simplex. Basta impor  $t_j = 0$  e  $c_j = 0$  em (3.18), para produzir

$$A(\tilde{\alpha}), B_1(\tilde{\alpha}), C_1(\tilde{\alpha}), D_{11}(\tilde{\alpha}), C_2(\tilde{\alpha}), D_{21}(\tilde{\alpha}) \quad (3.19)$$

## 3.4 Modelagem dos parâmetros variantes no tempo

### 3.4.1 Caso contínuo

Sempre que disponíveis, os limitantes das derivadas dos parâmetros medidos e das incertezas podem ser levados em consideração nas condições de projeto do filtro, potencialmente melhorando os resultados. Tendo isso em vista, os limitantes devem ser representados em termos das novas variáveis  $\alpha_i$ ,  $\bar{\alpha}_i$  e  $\hat{\alpha}_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Por exemplo, em relação a  $\theta_i$ , tomando a derivada em ambos os lados da equação (3.9) tem-se

$$\dot{\alpha}_{i1} = \frac{\dot{\theta}_i}{2a_i}, \quad i = 1, \dots, M$$

e, considerando o limitante de  $\dot{\theta}_i$  em (3.2), os limitantes de  $\dot{\alpha}_{i1}$  podem ser encontrados como

$$|\dot{\alpha}_{i1}| \leq \frac{d_i}{2a_i}$$

Como  $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} = 1$  e  $\dot{\alpha}_{i1} + \dot{\alpha}_{i2} = 0$ , tem-se  $|\dot{\alpha}_{i1}| = |\dot{\alpha}_{i2}|$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Portanto, o espaço em que a derivada dos parâmetros  $\alpha_i$  pertencem pode ser modelado como uma combinação convexa das colunas da matriz  $H_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  dada por

$$H_i = \begin{bmatrix} -\frac{d_i}{2a_i} & \frac{d_i}{2a_i} \\ \frac{d_i}{2a_i} & -\frac{d_i}{2a_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.20)$$

Note que a modelagem proposta é um caso particular da representação geral usada em [30, 11, 51]. Como principal benefício por tratar apenas simplexos de dimensão dois neste capítulo, matrizes  $H_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  podem ser determinadas analiticamente (não requerendo algoritmos complexos para sua obtenção como em [30, 11, 51]). As derivadas dos parâmetros  $\bar{\alpha}$  e  $\hat{\alpha}$  podem ser modeladas seguindo o mesmo procedimento e levando em consideração os limitantes de  $\dot{\delta}$  e  $\dot{\rho}$ .

Usando a modelagem proposta, a derivada de uma matriz dependendo de  $\tilde{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha}, \hat{\alpha}) \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}}$  pode ser genericamente computada como

$$\dot{W}(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{3M} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial W(\tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \dot{\tilde{\alpha}}_{ij} = \sum_{i=1}^{3M} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial W(\tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} (\eta_{i1} H_i(j, 1) + \eta_{i2} H_i(j, 2)), \quad \eta_i \in \Lambda_2$$

em que  $H_i(j, k)$  são os elementos  $(j, k)$  da matriz  $H_i$ .

### 3.4.2 Caso discreto

Assim como no caso contínuo, os limitantes das taxas de variação dos parâmetros medidos e das incertezas no novo domínio podem ser sistematicamente obtidos dos limitantes originais. Para evitar repetições, apenas a modelagem do parâmetro  $\alpha$  é apresentada.

Usando os limitantes de  $\Delta\theta_i$  dados em (3.2) e levando em consideração que

$$\alpha_{i1}(k) + \alpha_{i2}(k) = 1, \quad \underbrace{(\alpha_{i1}(k+1) - \alpha_{i1}(k))}_{\Delta\alpha_{i1}} + \underbrace{(\alpha_{i2}(k+1) - \alpha_{i2}(k))}_{\Delta\alpha_{i2}} = 0$$

tem-se

$$|\Delta\alpha_{i1}(k)| = |\Delta\alpha_{i2}(k)| \leq b_i, \quad b_i = \frac{e_i}{2a_i}, \quad i = 1, \dots, M$$

Observa-se que  $b_i \in [0, 1]$  e, diferentemente do caso contínuo, a taxa de variação máxima de  $\Delta\alpha_{ij}$  depende do valor atual dos parâmetros  $\alpha_{ij}$  [57, 15]. O caso  $b_i = 0$  representa o caso de parâmetros invariantes no tempo, enquanto  $b_i = 1$  corresponde à variação arbitrária dos parâmetros. Note que todo  $\alpha_i \in \Lambda_2$ , dessa forma, o espaço no qual o vetor de parâmetros  $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \Delta\alpha_{i1}, \Delta\alpha_{i2}]'$  está localizado, pode ser modelado por uma combinação convexa das colunas da matriz  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$  dada por

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ g_{i1} \\ g_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_i & (1-b_i) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (1-b_i) & b_i \\ 0 & -b_i & 0 & b_i & -b_i & b_i \\ 0 & b_i & 0 & -b_i & b_i & -b_i \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Denotando  $\Delta\alpha_i \triangleq \Delta\alpha_{i1}$  e notando que  $\Delta\alpha_{i1} = -\Delta\alpha_{i2}$ , o espaço descrito pela combinação convexa das colunas de  $\Gamma_i$  pode ser representado em um espaço tridimensional  $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \Delta\alpha_i)$  como na Figura 3.1. A projeção da região verde nos planos  $(\alpha_{i1}, \Delta\alpha_i)$  e  $(\alpha_{i2}, \Delta\alpha_i)$  produz as regiões cinza, que coincidem com as apresentadas em [57, 15].

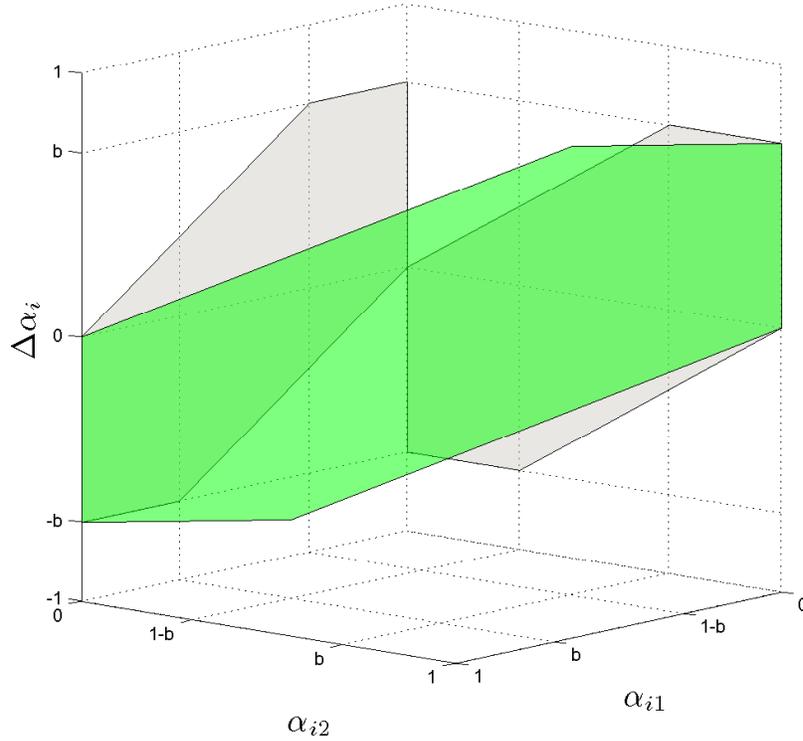


Figura 3.1: Região onde  $\Delta\alpha_i$  pode assumir valores em função de  $\alpha_{i1}$  e  $\alpha_{i2}$  (verde) e projeções nos planos  $(\alpha_{i1}, \Delta\alpha_i)$  e  $(\alpha_{i2}, \Delta\alpha_i)$  (cinza).

Seguindo passos similares aos apresentados em [57, 15], a transformação linear

$$\begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \Delta\alpha_{i1} \\ \Delta\alpha_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ g_{i1} \\ g_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \\ \gamma_{i3} \\ \gamma_{i4} \\ \gamma_{i5} \\ \gamma_{i6} \end{bmatrix}, \quad \gamma_i \in \Lambda_6 \quad (3.22)$$

leva as LMIs robustas dependendo de  $\alpha_i$  e  $\Delta\alpha_i$  para um novo espaço de parâmetros dependendo somente de  $\gamma_i$  e, assim, as relaxações LMI baseadas em soluções polinomiais podem ser aplicadas diretamente.

A modelagem proposta, para os parâmetros medidos e para as incertezas, permite que a matriz  $\Gamma_i$  seja contruída analiticamente, não requerendo algoritmos complexos e custosos para ser determinada como em [57, 15].

Convertendo todo  $\alpha_i \in \Lambda_2$  em  $\gamma_i \in \Lambda_6$ , tem-se que

$$\gamma = (\gamma_i, \dots, \gamma_M) \in \Omega_{6\mathbb{I}_M}$$

Finalmente, adotando o mesmo procedimento para as incertezas, i.e., convertendo  $\bar{\alpha}_i$  em  $\bar{\gamma}_i$  e  $\hat{\alpha}_i$  em  $\hat{\gamma}_i$ , as matrizes do sistema, do filtro e as matrizes de Lyapunov são representadas conjuntamente como função de

$$\tilde{\gamma} = (\gamma, \bar{\gamma}, \hat{\gamma}) \in \Omega_{6\mathbb{I}_{3M}}$$

Note que, se as incertezas são consideradas invariantes no tempo, é possível trabalhar diretamente com um espaço de dimensão menor dado por

$$(\gamma, \bar{\alpha}, \hat{\alpha}) \in \Omega_{(6\mathbb{I}_M, 2\mathbb{I}_{2M})}$$

aliviando o custo computacional. Como um exemplo, considere  $M = 1$ . Escrevendo  $\alpha, \bar{\alpha}, \hat{\alpha}$  como em (3.22) em função de  $\gamma, \hat{\gamma}, \bar{\gamma}$  e substituindo em (3.17) tem-se

$$Z_f(\tilde{\gamma}) = \begin{bmatrix} T'_{111} \\ T'_{112} \\ T'_{121} \\ T'_{122} \\ T'_{211} \\ T'_{212} \\ T'_{221} \\ T'_{222} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} f_{11} \otimes \bar{f}_{11} \otimes \hat{f}_{11} \\ f_{11} \otimes \bar{f}_{11} \otimes \hat{f}_{12} \\ f_{11} \otimes \bar{f}_{12} \otimes \hat{f}_{11} \\ f_{11} \otimes \bar{f}_{12} \otimes \hat{f}_{12} \\ f_{12} \otimes \bar{f}_{11} \otimes \hat{f}_{11} \\ f_{12} \otimes \bar{f}_{11} \otimes \hat{f}_{12} \\ f_{12} \otimes \bar{f}_{12} \otimes \hat{f}_{11} \\ f_{12} \otimes \bar{f}_{12} \otimes \hat{f}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \bar{\gamma}_{11} \hat{\gamma}_{11} \\ \gamma_{11} \bar{\gamma}_{11} \hat{\gamma}_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{11} \bar{\gamma}_{11} \hat{\gamma}_{16} \\ \vdots \\ \gamma_{16} \bar{\gamma}_{16} \hat{\gamma}_{15} \\ \gamma_{16} \bar{\gamma}_{16} \hat{\gamma}_{16} \end{bmatrix} \triangleq \tilde{T}' \tilde{F} \tilde{\Gamma} \quad (3.23)$$

em que  $\bar{f}_{im}$  e  $\hat{f}_{im}$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,  $m = 1, 2$ , podem ser obtidos como  $f_{im}$  em (3.21) e o símbolo  $\otimes$  representa o produto de Kronecker. As matrizes  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{F}$  e  $\tilde{\Gamma}$  podem ser sistematicamente estendidas para o caso  $M > 1$ . De (3.23), um procedimento genérico para a obtenção de  $Z_f(\tilde{\gamma})$  pode ser definido, dado por

$$Z_f(\tilde{\gamma}) = \sum_{j_1=1}^6 \cdots \sum_{j_M=1}^6 \sum_{w_1=1}^6 \cdots \sum_{w_M=1}^6 \sum_{z_1=1}^6 \cdots \sum_{z_M=1}^6 \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_M} \bar{\gamma}_{1w_1} \cdots \bar{\gamma}_{Mw_M} \hat{\gamma}_{1z_1} \cdots \hat{\gamma}_{Mz_M} X_{j_1 \dots j_M w_1 \dots w_M z_1 \dots z_M} \quad (3.24)$$

$$X_{j_1 \dots j_M w_1 \dots w_M z_1 \dots z_M} = \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_M=1}^2 \sum_{k_1=1}^2 \cdots \sum_{k_M=1}^2 \sum_{\ell_1=1}^2 \cdots \sum_{\ell_M=1}^2 T_{i_1 \dots i_M k_1 \dots k_M \ell_1 \dots \ell_M} \tilde{F}(r, c)$$

em que  $T_{i_1 \dots i_M k_1 \dots k_M \ell_1 \dots \ell_M}$  é como em (3.18), e a linha  $r$  e a coluna  $c$  da matriz  $\tilde{F}$  são dadas por

$$r = \sum_{i=i_1}^{i_M} (i-1)2^2 + \sum_{k=k_1}^{k_M} (k-1)2 + \sum_{\ell=\ell_1}^{\ell_M} (\ell-1) + 1$$

$$c = \sum_{j=j_1}^{j_M} (j-1)6^2 + \sum_{w=w_1}^{w_M} (w-1)6 + \sum_{z=z_1}^{z_M} (z-1) + 1$$

As matrizes do filtro  $A_f(\tilde{\gamma})$ ,  $B_f(\tilde{\gamma})$ ,  $C_f(\tilde{\gamma})$  e  $D_f(\tilde{\gamma})$  têm dimensões apropriadas e dependem do parâmetro  $\tilde{\gamma}$  como  $Z_f(\tilde{\gamma})$  em (3.24). Aplicando as transformações em (3.24) às matrizes do sistema (3.19) para produzir  $A(\tilde{\gamma})$ ,  $B_1(\tilde{\gamma})$ ,  $C_1(\tilde{\gamma})$ ,  $D_{11}(\tilde{\gamma})$ ,  $C_2(\tilde{\gamma})$  e  $D_{21}(\tilde{\gamma})$ , um sistema aumentado pode ser definido.

Para determinar qualquer matriz no instante  $k + 1$ , i.e., para  $(\alpha + \Delta\alpha)$  as transformações em (3.22) devem ser aplicadas, substituindo  $\tilde{F}$  por  $\tilde{G}$  em (3.23), com

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} (f_{11} + g_{11}) \otimes (\bar{f}_{11} + \bar{g}_{11}) \otimes (\hat{f}_{11} + \hat{g}_{11}) \\ (f_{11} + g_{11}) \otimes (\bar{f}_{11} + \bar{g}_{11}) \otimes (\hat{f}_{12} + \hat{g}_{12}) \\ (f_{11} + g_{11}) \otimes (\bar{f}_{12} + \bar{g}_{12}) \otimes (\hat{f}_{11} + \hat{g}_{11}) \\ (f_{11} + g_{11}) \otimes (\bar{f}_{12} + \bar{g}_{12}) \otimes (\hat{f}_{12} + \hat{g}_{12}) \\ (f_{12} + g_{12}) \otimes (\bar{f}_{11} + \bar{g}_{11}) \otimes (\hat{f}_{11} + \hat{g}_{11}) \\ (f_{12} + g_{12}) \otimes (\bar{f}_{11} + \bar{g}_{11}) \otimes (\hat{f}_{12} + \hat{g}_{12}) \\ (f_{12} + g_{12}) \otimes (\bar{f}_{12} + \bar{g}_{12}) \otimes (\hat{f}_{11} + \hat{g}_{11}) \\ (f_{12} + g_{12}) \otimes (\bar{f}_{12} + \bar{g}_{12}) \otimes (\hat{f}_{12} + \hat{g}_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Além disso, uma expressão genérica pode ser formulada como em (3.24) trocando  $\tilde{F}$  por  $\tilde{G}$  e usando apropriadamente os coeficientes  $T$  obtidos do procedimento de homogeneização.

**Comentário 3.1** *As transformações apresentadas em (3.23) e (3.25) foram usadas para transformar matrizes na forma afim para o domínio  $\tilde{\gamma}$ . Esse expediente pode ser estendido para matrizes polinomiais de graus maiores que um, seguindo o procedimento apresentado em [16].*

A próxima seção apresenta condições LMIs dependentes de parâmetros assegurando estabilidade assintótica e um nível de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  limitado por  $\mu$  para o sistema aumentado composto por (3.1)-(3.4).

### 3.5 Condições LMIs dependentes de parâmetros

Uma vez que todas as matrizes podem ser representadas em termos de  $\tilde{\alpha}$  para sistemas contínuos e em termos de  $\tilde{\gamma}$  para sistemas discretos, um sistema aumentado pode ser definido

$$\begin{aligned} \delta[\tilde{x}] &= \tilde{A}(\tilde{\beta})\tilde{x} + \tilde{B}(\tilde{\beta})w \\ e &= \tilde{C}(\tilde{\beta})\tilde{x} + \tilde{D}(\tilde{\beta})w \end{aligned} \quad (3.26)$$

em que  $e = z - z_f$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix}, \tilde{A}(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} A(\tilde{\beta}) & 0 \\ B_f(\tilde{\beta})C_2(\tilde{\beta}) & A_f(\tilde{\beta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \tilde{B}(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} B_1(\tilde{\beta}) \\ B_f(\tilde{\beta})D_{21}(\tilde{\beta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, \\ \tilde{C}(\tilde{\beta}) &= \begin{bmatrix} C_1(\tilde{\beta}) - D_f(\tilde{\beta})C_2(\tilde{\beta}) & -C_f(\tilde{\beta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, \tilde{D}(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} D_{11}(\tilde{\beta}) - D_f(\tilde{\beta})D_{21}(\tilde{\beta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times r}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$\tilde{\beta}$  representa  $\tilde{\alpha}$  para sistemas contínuos e  $\tilde{\gamma}$  para sistemas discretos. Neste ponto, o problema a ser resolvido pode ser redefinido como: encontrar matrizes  $A_{f_i}$ ,  $B_{f_i}$ ,  $C_{f_i}$  e  $D_{f_i}$ ,  $i = 0, \dots, M$ , tais que o sistema aumentado (3.26) seja assintoticamente estável e o ganho de energia de  $w$  para  $e$  (i.e., a norma  $\mathcal{H}_\infty$ ) seja limitado por  $\mu$  para todo  $\tilde{\beta} \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}}$  no caso contínuo e  $\tilde{\beta} \in \Omega_{6\mathbb{I}_{3M}}$  no caso discreto.

Primeiramente, uma condição na forma de desigualdade matricial com variáveis extras dependentes de parâmetros é apresentada. Essa condição assegura um limitante de desempenho para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  e estabilidade assintótica para o sistema aumentado (3.26), porém essa condição envolve de forma não linear as matrizes que compõem o filtro. Impondo uma estrutura particular para algumas das variáveis, condições suficientes, entretanto mais adequadas para o projeto do filtro, são obtidas.

**Lema 3.1** *O máximo ganho de energia de  $w$  para e no sistema (3.26) é limitado por  $\mu$ , se existirem uma matriz simétrica definida positiva  $W(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , matrizes dependentes de parâmetros  $K(\tilde{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $E(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$  e  $F(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$  tais que*

$$\Psi(\tilde{\beta}) + \Theta_c(\tilde{\beta}) < 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}} \quad (3.28)$$

para sistemas contínuos e

$$\Psi(\tilde{\beta}) + \Theta_d(\tilde{\beta}) > 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in \Omega_{6\mathbb{I}_{3M}} \quad (3.29)$$

para sistemas discretos, com

$$\Theta_c(\tilde{\alpha}) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} \dot{W}(\tilde{\beta}) & W(\tilde{\beta}) \\ * & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_r & 0 \\ * & -\mu^2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \right) \quad (3.30)$$

$$\Theta_d(\alpha) = \text{diag}(W(\tilde{\beta}), -\tilde{W}(\tilde{\beta}), \mathbf{I}_r, \mu^2 \mathbf{I}_p) \quad (3.31)$$

e

$$\Psi(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} K(\tilde{\beta})\tilde{A}(\tilde{\beta}) + \tilde{A}(\tilde{\beta})'K(\tilde{\beta})' & * & * & * \\ -K(\tilde{\beta})' + E(\tilde{\beta})\tilde{A}(\tilde{\beta}) & -E(\tilde{\beta}) - E(\tilde{\beta})' & * & * \\ \tilde{B}(\tilde{\beta})'K(\tilde{\beta})' + Q(\tilde{\beta})\tilde{A}(\tilde{\beta}) & \tilde{B}(\tilde{\beta})'E(\tilde{\beta})' - Q(\tilde{\beta}) & \tilde{B}(\tilde{\beta})'Q(\tilde{\beta})' + Q(\tilde{\beta})\tilde{B}(\tilde{\beta}) & * \\ F(\tilde{\beta})\tilde{A}(\tilde{\beta}) + \tilde{C}(\tilde{\beta}) & -F(\tilde{\beta}) & F(\tilde{\beta})\tilde{B}(\tilde{\beta}) + \tilde{D}(\tilde{\beta}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

**Prova:** Suponha que (3.28) seja satisfeita. Então, multiplicando (3.28) por  $T$  à esquerda e por  $T'$  à direita, com

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}(\tilde{\beta})' & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}(\tilde{\beta})' & \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{W}(\tilde{\beta}) + \tilde{A}(\tilde{\beta})'W(\tilde{\beta}) + W(\tilde{\beta})\tilde{A}(\tilde{\beta}) & W(\tilde{\beta})\tilde{B}(\tilde{\beta}) & \tilde{C}(\tilde{\beta})' \\ * & -\mathbf{I}_r & \tilde{D}(\tilde{\beta})' \\ * & * & -\mu^2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}} \quad (3.34)$$

que pode ser reconhecido como o *bounded real lemma* para sistemas contínuos variantes no tempo [9].

Para o caso discreto, suponha que (3.29) seja satisfeita. Então, multiplicando (3.29) à esquerda por  $T$  e à direita por  $T'$ , com  $T$  dado por (3.33), tem-se

$$\begin{bmatrix} W(\tilde{\beta}) - \tilde{A}(\tilde{\beta})'\tilde{W}(\tilde{\beta})\tilde{A}(\tilde{\beta}) & -\tilde{A}(\tilde{\beta})'\tilde{W}(\tilde{\beta})\tilde{B}(\tilde{\beta}) & \tilde{C}(\tilde{\beta})' \\ * & -\tilde{B}(\tilde{\beta})'\tilde{W}(\tilde{\beta})\tilde{B}(\tilde{\beta}) + \mathbf{I}_r & \tilde{D}(\tilde{\beta})' \\ * & * & \mu^2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

ou ainda, aplicando complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} W(\tilde{\beta}) & \tilde{A}(\tilde{\beta})'\tilde{W}(\tilde{\beta}) & 0 & \tilde{C}(\tilde{\beta})' \\ * & \tilde{W}(\tilde{\beta}) & \tilde{W}(\tilde{\beta})\tilde{B}(\tilde{\beta}) & 0 \\ * & * & \mathbf{I}_r & \tilde{D}(\tilde{\beta})' \\ * & * & * & \mu^2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in \Omega_{6\mathbb{I}_{3M}} \quad (3.36)$$

que é reconhecido como o *bounded real lemma* para sistemas discretos variantes no tempo [18]. ■

O Lema 3.1 apresenta uma condição suficiente que assegura um limitante do ganho de energia de  $w$  para  $e$  do sistema (3.26) dado por  $\mu$ , em que a matriz de Lyapunov  $W(\tilde{\beta})$  aparece separada das matrizes do sistema. Entretanto, a condição dependente de parâmetros apresenta termos não lineares envolvendo produtos entre as matrizes do filtro e as variáveis de folga. Para linearizar as condições apresentadas no Lema 3.1, restrições de estruturas [20, 41] são impostas às matrizes dependentes de parâmetros  $K(\tilde{\beta})$ ,  $E(\tilde{\beta})$ ,  $Q(\tilde{\beta})$  e  $F(\tilde{\beta})$  como a seguir

$$K(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} K_{11}(\tilde{\beta}) & \lambda_1 \hat{K} \\ K_{21}(\tilde{\beta}) & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}, E(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} E_{11}(\tilde{\beta}) & \hat{K} \\ E_{21}(\tilde{\beta}) & \hat{K} \end{bmatrix}, Q(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} Q_1(\tilde{\beta}) & 0 \end{bmatrix}, F(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} F_1(\tilde{\beta}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

em que  $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz constante e  $\lambda_1, \lambda_2$  são parâmetros escalares pré-determinados. Além disso, a seguinte mudança de variáveis é aplicada

$$K_1(\tilde{\beta}) = \hat{K}A_f(\tilde{\beta}), \quad K_2(\tilde{\beta}) = \hat{K}B_f(\tilde{\beta}) \quad (3.38)$$

implicando que  $K_1(\tilde{\beta})$  e  $K_2(\tilde{\beta})$  têm a mesma forma de  $A_f(\tilde{\beta})$  e  $B_f(\tilde{\beta})$ , isto é, são representados como em (3.18) no caso contínuo e como em (3.24) no caso discreto. Com essa escolha particular para as variáveis de decisão, condições LMIs dependentes de parâmetros, que são suficientes para garantir uma solução para o Lema 3.1 podem ser formuladas, de tal forma que as matrizes do filtro  $A_f(\tilde{\beta})$ ,  $B_f(\tilde{\beta})$ ,  $C_f(\tilde{\beta})$  e  $D_f(\tilde{\beta})$  possam ser obtidas de uma forma simples.

**Teorema 3.1** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W(\tilde{\beta})$ , matrizes dependente de parâmetros  $K(\tilde{\beta})$ ,  $E(\tilde{\beta})$ ,  $Q(\tilde{\beta})$ ,  $F(\tilde{\beta})$  como em (3.37),  $K_1(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_2(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C_f(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_f(\tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $\mu > 0$  e escalares  $\lambda_1, \lambda_2$ , tais que*

$$\bar{\Psi}(\tilde{\beta}) + \Theta_c(\tilde{\beta}) < 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}} \quad (3.39)$$

para sistemas contínuos com  $\Theta_c(\tilde{\beta})$  como em (3.30),

$$\bar{\Psi}(\tilde{\beta}) + \Theta_d(\tilde{\beta}) > 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in \Omega_{6\mathbb{I}_{3M}} \quad (3.40)$$

para sistemas discretos com  $\Theta_d(\tilde{\beta})$  como em (3.31), e  $\bar{\Psi}(\tilde{\beta})$  como

$$\bar{\Psi}(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} K_{11}(\tilde{\beta})A(\tilde{\beta}) + A(\tilde{\beta})'K_{11}(\tilde{\beta})' & A(\tilde{\beta})'K_{21}(\tilde{\beta})' + \lambda_2 C_2(\tilde{\beta})'K_2(\tilde{\beta})' + \lambda_1 K_1(\tilde{\beta}) \\ + \lambda_1 (C_2(\tilde{\beta})'K_2(\tilde{\beta})' + K_2(\tilde{\beta})C_2(\tilde{\beta})) & \\ * & \lambda_2 (K_1(\tilde{\beta}) + K_1(\tilde{\beta})') \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ -K_{11}(\tilde{\beta}) + A(\tilde{\beta})'E_{11}(\tilde{\beta})' & -\lambda_1 \hat{K} + A(\tilde{\beta})'E_{21}(\tilde{\beta})' + C_2(\tilde{\beta})'K_2(\tilde{\beta})' \\ + C_2(\tilde{\beta})'K_2(\tilde{\beta})' & \\ -K_{21}(\tilde{\beta}) + K_1(\tilde{\beta})' & -\lambda_2 \hat{K} + K_1(\tilde{\beta})' \\ -E_{11}(\tilde{\beta}) - E_{11}(\tilde{\beta})' & -\hat{K} - E_{21}(\tilde{\beta})' \\ * & -\hat{K} - \hat{K}' \\ * & * \\ * & * \\ K_{11}(\tilde{\beta})B_1(\tilde{\beta}) + \lambda_1 K_2(\tilde{\beta})D_{21}(\tilde{\beta}) + A(\tilde{\beta})'Q_1(\tilde{\beta})' & A(\tilde{\beta})'F_1(\tilde{\beta})' + C_1(\tilde{\beta})' - C_2(\tilde{\beta})'D_f(\tilde{\beta})' \\ K_{21}(\tilde{\beta})B_1(\tilde{\beta}) + \lambda_2 K_2(\tilde{\beta})D_{21}(\tilde{\beta}) & -C_f(\tilde{\beta})' \\ E_{11}(\tilde{\beta})B_1(\tilde{\beta}) + K_2(\tilde{\beta})D_{21}(\tilde{\beta}) - Q_1(\tilde{\beta})' & -F_1(\tilde{\beta})' \\ E_{21}(\tilde{\beta})B_1(\tilde{\beta}) + K_2(\tilde{\beta})D_{21}(\tilde{\beta}) & 0 \\ Q_1(\tilde{\beta})B_1(\tilde{\beta}) + B_1(\tilde{\beta})'Q_1(\tilde{\beta})' & B_1(\tilde{\beta})'F_1(\tilde{\beta})' + D_{11}(\tilde{\beta})' - D_{21}(\tilde{\beta})'D_f(\tilde{\beta})' \\ * & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Então,

$$A_f(\tilde{\beta}) = \hat{K}^{-1}K_1(\tilde{\beta}), \quad B_f(\tilde{\beta}) = \hat{K}^{-1}K_2(\tilde{\beta}), \quad C_f(\tilde{\beta}), \quad D_f(\tilde{\beta}) \quad (3.42)$$

são as matrizes do filtro dependente de parâmetros que assegura estabilidade assintótica com um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema (3.26) limitado por  $\mu$ .

**Prova:** Segue os mesmos passos apresentados na prova do Lema 3.1 utilizando as restrições de estrutura apresentadas em (3.37) e as mudanças variáveis dadas em (3.38). ■

**Comentário 3.2** *Um dos benefícios de tratar parâmetros no multi-simplex, é a possibilidade de tratar de maneira seletiva os parâmetros que serão usados no projeto do filtro. Dessa forma, é possível propor soluções e avaliar o projeto de filtros para casos em que nem todos os parâmetros estão disponíveis para serem medidos.*

## 3.6 Questões de implementação

O Teorema 3.1 apresenta uma condição suficiente em termos de uma LMI robusta, i.e., uma condição LMI dependente de parâmetros que precisa ser verificada para todo  $\tilde{\beta} \in \Omega_{2\mathbb{I}_{3M}}$  para sistemas contínuos e para todo  $\tilde{\beta} \in \Omega_{6\mathbb{I}_{3M}}$  no caso de sistemas discretos. A matriz de Lyapunov  $W(\tilde{\beta})$  e as matrizes  $K(\tilde{\beta})$ ,  $E(\tilde{\beta})$ ,  $Q(\tilde{\beta})$  e  $F(\tilde{\beta})$  no Teorema 3.1 são assumidas como polinômios homogêneos de graus arbitrários e independentes no multi-simplex. Uma forma sistemática de derivar relaxações

LMIs neste caso pode ser encontrada em [54]. É importante ressaltar que as matrizes do filtro  $A_{f_i}$  e  $B_{f_i}$ ,  $i = 0, \dots, M$ , são obtidas a partir de (3.42) impondo às variáveis de decisão do Teorema 3.1,  $K_1(\tilde{\beta})$  e  $K_2(\tilde{\beta})$  (assim como diretamente às matrizes  $C_f(\tilde{\beta})$  e  $D_f(\tilde{\beta})$ ), a estrutura em (3.18) no caso contínuo e a estrutura em (3.24) para o caso discreto.

Os graus das variáveis de decisão polinomiais usados nos experimentos numéricos são definidos a seguir.

1) Os graus parciais associados a matriz de Lyapunov  $W(\tilde{\beta})$  são dados pelo vetor  $g = (g_1, \dots, g_M)$ , com  $g_i = (g_{\beta_i}, g_{\bar{\beta}_i}, g_{\hat{\beta}_i})$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

- a) para variação arbitrária dos parâmetros variantes no tempo ( $\theta$ ,  $\rho$  ou  $\delta$ ) os graus correspondentes são fixados em zero (estabilidade quadrática, i.e.,  $g_{\beta_i} = g_{\bar{\beta}_i} = g_{\hat{\beta}_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ );
- b) parâmetros invariantes no tempo e parâmetros variantes no tempo que possuem limitantes da taxa de variação conhecidos podem usar  $g_{\beta_i}$ ,  $g_{\bar{\beta}_i}$  e  $g_{\hat{\beta}_i}$  de grau arbitrário.

2) As variáveis de folga  $K_{11}(\tilde{\beta})$ ,  $K_{21}(\tilde{\beta})$ ,  $E_{11}(\tilde{\beta})$ ,  $E_{21}(\tilde{\beta})$ ,  $Q_1(\tilde{\beta})$  e  $F_1(\tilde{\beta})$  são escolhidas como polinômios de grau  $f$  (por simplicidade, todas as variáveis de folga consideradas possuem o mesmo grau).

3) Os graus parciais relacionados as variáveis polinomiais  $K_1(\tilde{\beta})$ ,  $K_2(\tilde{\beta})$ ,  $C_f(\tilde{\beta})$  e  $D_f(\tilde{\beta})$  são denotados por  $s = (s_1, \dots, s_M)$ , com  $s_i = (s_{\beta_i}, s_{\bar{\beta}_i}, s_{\hat{\beta}_i})$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Neste trabalho  $s_{\beta_i}$ ,  $s_{\bar{\beta}_i}$  e  $s_{\hat{\beta}_i}$  podem assumir valores 1 (filtro afim) ou 0 (filtro robusto).

- a) filtros afins podem ser obtidos quando os parâmetros estão disponíveis para serem lidos em tempo real sob incertezas aditivas:  $s_i = (1, 1, 0)$ , multiplicativas:  $s_i = (1, 0, 1)$  ou ambas incertezas:  $s_i = (1, 1, 1)$  em tempo real;
- b) quando o parâmetro não está disponível para medida, um filtro robusto pode ser projetado:  $s_i = (0, 0, 0)$ .

Apesar de vários resultados da literatura tratarem o projeto de filtros dependentes de parâmetros e o projeto de filtros robustos para sistemas sem incertezas afetando os parâmetros medidos [18, 8], bem como os problemas de controle e filtragem para sistemas sujeitos a incertezas aditivas nos parâmetros medidos [66, 68], a estratégia proposta neste capítulo também pode ser simplificada para tratar esses problemas, sendo uma metodologia alternativa que pode prover resultados competitivos. Além disso, a estratégia apresentada é, dentro do conhecimento do autor, a única que pode tratar ao mesmo tempo incertezas aditivas e multiplicativas nas medidas.

### 3.7 Experimentos numéricos

O objetivo dos experimentos é comparar os resultados obtidos pelas condições propostas neste capítulo com outros métodos presentes na literatura. As rotinas foram implementadas em MATLAB, versão 7.1.0.246 (R14) SP 3 usando os pacotes Yalmip [49] e SeDuMi [71]. O computador usado foi um Intel® Quad Core (3.0 GHz), 4GB RAM, Windows Vista.

## Sistemas contínuos

Considere o seguinte sistema contínuo variante no tempo apresentado em [33] e também investigado em [6], consistindo de um sistema mecânico com duas massas e duas molas como apresentado na Figura 3.2. As massas  $m_1$  e  $m_2$  estão localizadas nas posições  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente,  $k_1$  e  $k_2$  são as constantes de rigidez das molas. As forças de atrito são  $f_i = -\theta_1 \dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , em que  $\theta_1$  é o coeficiente de atrito viscoso. O objetivo é projetar um filtro para estimar a posição da massa  $m_2$  assumindo que a posição da massa  $m_1$  é medida por um sensor com ganho variante no tempo  $\theta_2$ . As matrizes do sistema são dadas por

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix} \theta_1, \quad B_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1(\theta) = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad C_2(\theta) = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{21}(\theta) = \theta_2$$

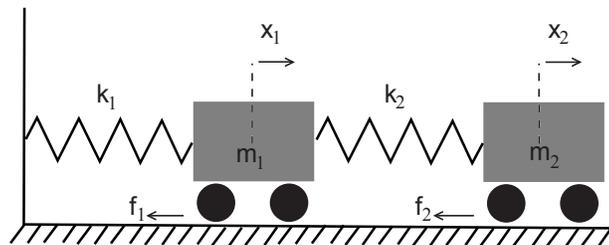


Figura 3.2: Sistema massa-mola.

Considere  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.5$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ , e parâmetros variantes no tempo  $0.5 \leq \theta_1 \leq 3.5$ ,  $0.5 \leq \theta_2 \leq 1.5$ , com  $|\dot{\theta}_i| \leq \kappa$ ,  $i = 1, 2$ . Supõe-se que apenas incerteza aditiva afeta as medidas, com  $|\delta| \leq \xi$  e  $|\dot{\delta}| \leq 10\kappa$ . Seguindo as definições 1)–3) para os graus parciais do multi-simplex,  $g = (g_{\beta_1}, g_{\bar{\beta}_1}, g_{\hat{\beta}_1}, g_{\beta_2}, g_{\bar{\beta}_2}, g_{\hat{\beta}_2})$ ,  $s = (s_{\beta_1}, s_{\bar{\beta}_1}, s_{\hat{\beta}_1}, s_{\beta_2}, s_{\bar{\beta}_2}, s_{\hat{\beta}_2})$  e  $f$  foram usados. Neste exemplo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  foram escolhidos no conjunto  $\{10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, \dots, 10^0, \dots, 10^4, 10^5\}$ .

A Tabela 3.1 apresenta os custos  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 para  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ ,  $g = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $f = 1$  e  $s = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$ , o que significa que o filtro depende de ambos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Como esperado, os custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos pelo Teorema 3.1 são influenciados pela incerteza aditiva. Quando os valores dos limitantes  $\xi$  crescem, o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  aproxima-se do desempenho de um filtro robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , pois as medições são menos confiáveis. É possível observar também que o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  torna-se mais sensível a  $\xi$  com valores altos de  $\kappa$ .

Para este exemplo, o método proposto em [6] (que não pode lidar com incertezas nas medidas) provê um filtro robusto com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de 1.414 para variação arbitrária dos parâmetros variantes no tempo. Como pode ser observado na Tabela 3.1, o método proposto neste capítulo não é mais conservador que o apresentado em [6].

Em um cenário em que apenas um parâmetro é disponível para medida, é importante saber qual parâmetro proporciona o menor nível de atenuação  $\mathcal{H}_\infty$ . O Teorema 3.1 pode ser usado para este fim, impondo os graus parciais desejados aos polinômios homogêneos. Para  $\kappa = 1$ ,  $\xi = 0.2$  e  $\varphi =$

Tabela 3.1: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1, para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\xi$  com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ , sistema contínuo no tempo.

$\xi$	$\kappa$					
	0.01	0.1	1	10	100	10000
0.001	0.250	0.277	0.318	0.319	0.320	0.320
0.1	0.362	0.441	0.524	0.555	0.557	0.558
0.2	0.442	0.533	0.686	0.737	0.742	0.742
0.4	0.552	0.631	0.912	1.007	1.016	1.016
0.5	0.589	0.665	0.987	1.107	1.117	1.118
1	0.702	0.765	1.142	1.379	1.413	1.414
Robusto	0.703	0.797	1.145	1.384	1.414	1.414

0, quando o filtro LPV depende somente de  $\tilde{\theta}_1$  ( $s = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ ) tem-se  $\mu = 0.876$  e quando o filtro depende apenas de  $\tilde{\theta}_2$  ( $s = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$ ) o custo garantido  $\mu = 1.041$  é obtido. Além disso, um filtro robusto ( $s = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ) pode ser projetado, produzindo  $\mu = 1.145$ . Assim, é possível concluir que não existem benefícios em ler apenas o parâmetro  $\tilde{\theta}_2$  e que a medida do parâmetro  $\tilde{\theta}_1$  é a mais relevante no sentido de prover um filtro com o menor limitante  $\mathcal{H}_\infty$ . Observa-se que os métodos existentes não possuem essa flexibilidade, ou seja, a habilidade de selecionar o parâmetro mais importante a ser usado para o projeto do filtro.

Considere  $\theta_1 = \theta_2 \in [0.5, 3.5]$ , o que significa que o sistema tem apenas dois vértices com graus parciais do multi-simplex  $g = (g_{\theta_1}, g_{\delta_1}, g_{\rho_1})$ ,  $s = (s_{\theta_1}, s_{\delta_1}, s_{\rho_1})$  e  $f$ . A tabela 3.2 apresenta os custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos com o Teorema 3.1 para diferentes valores de  $\beta$  e  $\xi$  com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ , considerando  $f = 1$ ,  $s = (1, 1, 0)$  e  $g = (g_L, g_L, 0)$ . É possível observar que o uso de funções de Lyapunov com grau  $g_L = 2$  pode reduzir significativamente os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$ .

Tabela 3.2: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 com  $g_L = 1$  e  $g_L = 2$ , para diferentes valores de  $\beta$  e  $\xi$  com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ .

$\xi$	$\beta$									
	0.01		0.1		1		100		10000	
	$g_L = 1$	$g_L = 2$								
0.001	0.347	0.289	0.377	0.312	0.446	0.368	0.516	0.424	0.516	0.424
0.1	0.450	0.395	0.540	0.465	0.649	0.549	0.712	0.616	0.712	0.616
0.2	0.549	0.516	0.647	0.590	0.820	0.757	0.885	0.810	0.885	0.810
0.4	0.706	0.697	0.791	0.739	1.110	1.078	1.164	1.140	1.165	1.141
0.5	0.764	0.757	0.845	0.791	1.219	1.183	1.279	1.262	1.279	1.263
1	0.930	0.923	1.015	0.941	1.458	1.388	1.628	1.628	1.629	1.629

A Tabela 3.3 apresenta os resultados obtidos considerando incertezas aditivas e multiplicativas afetando as medidas para  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ ,  $g = (g_L, g_L, g_L)$ ,  $s = (1, 1, 1)$ ,  $f = 1$ ,  $\beta = 1$  e diferentes valores de  $\xi$  e  $\varphi$ . Pode-se notar, assim como no caso anterior, que o uso de variáveis polinomiais provê resultados menos conservadores para o projeto de filtros LPV.

Tabela 3.3: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 com  $g_L = 1$  e  $g_L = 2$ , para  $\beta = 1$  e diferentes valores de  $\phi$  e  $\xi$  com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$ .

	$\phi$									
	0.001		0.01		0.02		0.05		0.1	
$\xi$	$g_L = 1$	$g_L = 2$								
0.001	0.447	0.369	0.461	0.376	0.479	0.387	0.540	0.442	0.634	0.533
0.1	0.650	0.552	0.664	0.568	0.679	0.584	0.725	0.636	0.796	0.721
0.2	0.821	0.758	0.831	0.771	0.844	0.787	0.882	0.831	0.942	0.896
0.4	1.110	1.079	1.116	1.084	1.123	1.092	1.146	1.112	1.182	1.143
0.5	1.219	1.184	1.223	1.186	1.228	1.192	1.245	1.207	1.271	1.227
1	1.458	1.388	1.458	1.388	1.458	1.388	1.458	1.388	1.458	1.388

## Sistemas discretos

Considere o sistema LPV discreto no tempo [18]

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \theta(k) \end{bmatrix}, \quad B_1(\theta) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1(\theta) = [1 \quad 0], \quad D_{11}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2(\theta) = [-100 \quad 10], \quad D_{21}(\theta) = [0 \quad 1]$$

com  $|\theta_1(k)| \leq 0.4$ , incerteza aditiva  $|\delta| \leq \xi$ , limitantes para a taxa de variação de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  dados por  $b$  e  $\bar{b}$  respectivamente. Os valores  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  foram usados neste exemplo com bons resultados.

Considerando um filtro estritamente próprio ( $D_f(\tilde{\theta}) = 0$ ) e levando em conta somente a incerteza aditiva, a Tabela 3.4 apresenta os limitantes para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 para  $g = (1, 1, 0)$ ,  $f = 1$ ,  $s = (1, 1, 0)$  e  $b = \bar{b}$ . É importante notar que o Teorema 3.1 pode prover limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  menores para  $b < 1$ , enfatizando a importância de levar em consideração os limitantes das taxas de variação dos parâmetros variantes no tempo, principalmente para valores grandes de  $\xi$ . Para este exemplo, os métodos em [8, 18] (que não podem lidar com incertezas nos parâmetros medidos) provêm um filtro robusto para variação arbitrária dos parâmetros ( $b = 1$ ) com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de 21.99 ([18], [8] Teorema 3<sub>it=0</sub>) e 17.59 ([8] Teorema 4<sub>it=0</sub>). Como pode ser visto na Tabela 3.4, o método proposto pode prover filtros robustos menos conservadores em termos de custo  $\mathcal{H}_\infty$ .

A Tabela 3.5 apresenta os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos para diferentes taxas de variação do parâmetro real e do ruído aditivo. Quando comparamos o caso em que não existe variação dos parâmetros  $b = \bar{b} = 0$  com o caso em que a variação dos parâmetros é arbitrária  $b = \bar{b} = 1$ , os custos podem variar até 70% para um mesmo valor de  $\xi$ . Além disso, é possível observar que, quanto maior a taxa de variação do parâmetro real ( $b$ ), maior é a influência da taxa de variação do ruído ( $\bar{b}$ ) nos limitantes obtidos para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ .

Um cenário mais complexo pode ser considerado, no qual os parâmetros medidos são afetados por incertezas aditivas e multiplicativas. Considere o sistema discreto variante no tempo representado pelas matrizes [8]

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0.265 - 0.165\theta_1(k) & 0.45(1 + \theta_1(k)) \\ 0.5(1 - \theta_1(k)) & 0.265 - 0.215\theta_1(k) \end{bmatrix}, \quad B_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1.5 - 0.5\theta_1(k) \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

Tabela 3.4: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 para diferentes valores de  $b$  e  $\xi$ .

$\xi$	$b$				
	0	0.2	0.5	0.8	1
0	7.574	8.019	8.373	8.490	8.490
0.01	7.591	8.047	8.419	8.552	8.576
0.1	7.763	8.311	8.834	9.219	9.619
0.2	7.960	8.581	9.314	10.075	10.816
0.4	8.359	9.160	10.315	11.792	12.981
0.5	8.552	9.449	10.763	12.187	13.752
1	9.425	10.417	12.446	14.690	16.226
Robusto	9.432	10.922	13.024	14.955	16.557

Tabela 3.5: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1 para diferentes valores de  $b$ ,  $\bar{b}$  e  $\xi$ .

$\xi$	$\bar{b}$	$b$				
		0	0.2	0.5	0.8	1
0.2	0	7.960	8.533	9.115	9.452	9.734
	0.2	7.985	8.581	9.250	9.749	10.198
	0.5	8.002	8.627	9.314	9.922	10.434
	0.8	8.014	8.666	9.355	10.075	10.630
	1	8.018	8.687	9.387	10.156	10.816
0.4	0	8.359	9.040	9.849	10.631	11.402
	0.2	8.409	9.160	10.140	11.001	11.852
	0.5	8.450	9.246	10.315	11.581	12.560
	0.8	8.479	9.304	10.405	11.792	12.786
	1	8.494	9.333	10.468	11.833	12.981
0.8	0	8.552	9.297	10.182	11.165	12.074
	0.2	8.614	9.449	10.305	11.623	12.687
	0.5	8.666	9.542	10.778	12.306	13.238
	0.8	8.699	9.607	10.896	12.497	13.775
	1	8.715	9.641	10.955	12.624	14.235
1	0	9.425	10.155	11.409	12.950	13.940
	0.2	9.427	10.417	11.972	13.684	14.694
	0.5	9.428	10.634	12.446	14.267	15.736
	0.8	9.429	10.682	12.611	14.690	15.973
	1	9.429	10.695	12.615	14.817	16.226

$$C_1(\theta) = \mathbf{I}_2, \quad D_{11}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2(\theta) = [1 \ 0], \quad D_{21}(\theta) = [1]$$

com  $|\theta_1(k)| \leq 1$ , incerteza aditiva  $|\delta| \leq \xi$ , incerteza multiplicativa  $|\rho| \leq \varphi$ , limitantes para as taxas

de variação de  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\hat{\alpha}$  dados por  $b$ ,  $\bar{b}$  e  $\hat{b}$  respectivamente.

A Tabela 3.6 apresenta os resultados obtidos considerando incertezas multiplicativas e aditivas para  $g = (1, 1, 1)$ ,  $s = (1, 1, 1)$ ,  $f = 1$ ,  $b = \bar{b} = \hat{b} = 1$  e diferentes valores de  $\xi$  e  $\varphi$ . Neste caso os parâmetros e incertezas podem variar de maneira arbitrária. Como pode ser observado, a presença da incerteza multiplicativa afeta os limitantes para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ , indicando a importância de considerar este tipo de incerteza no projeto de filtros LPV. Entretanto, pode ser visto que a influência da incerteza multiplicativa nos limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  é reduzida quando  $\xi$  aumenta.

Tabela 3.6: Limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos por meio de relaxações LMIs baseadas no Teorema 3.1, para  $b = 1$  e diferentes valores de  $\varphi$  e  $\xi$ , sistema discreto.

$\xi$	$\varphi$					
	0.001	0.01	0.02	0.04	0.05	0.1
0.01	1.249	1.314	1.463	1.996	2.286	3.460
0.1	3.285	3.459	3.636	3.947	4.085	4.660
0.2	4.691	4.777	4.870	5.046	5.130	5.511
0.4	6.229	6.272	6.321	6.412	6.456	6.657
0.5	6.753	6.784	6.817	6.882	6.912	7.057
1	8.166	8.166	8.166	8.166	8.166	8.166

## 3.8 Conclusão

Um novo método para tratar incertezas aditivas e multiplicativas presentes nas medidas dos parâmetros lidos para o projeto de filtros LPV com critério  $\mathcal{H}_\infty$  foi proposto. Modelando de forma conveniente os parâmetros lidos e as incertezas, bem como, sempre que disponíveis, suas taxas de variação, condições flexíveis para o projeto de filtros LPV foram propostas em termos de LMIs robustas. As condições propostas podem ser resolvidas de forma eficiente por meio de relaxações LMI baseadas em soluções polinomiais. Os exemplos numéricos mostraram que as condições propostas podem prover resultados menos conservadores, sendo capazes de lidar com problemas de projeto em casos para os quais as estratégias da literatura não podem ser aplicadas. Por exemplo, a possibilidade de tratar os parâmetros de forma seletiva para o projeto do filtro, investigando de dois ou mais possíveis parâmetros para medir qual produz melhores resultados no caso de apenas um ser utilizado na síntese do filtro.

# Capítulo 4

## Filtragem para sistemas não lineares quadráticos

### 4.1 Introdução

O estudo de sistemas sujeitos a não linearidades ainda se apresenta como um desafio para a comunidade científica da área de teoria de controle. Pode-se notar que dentre os inúmeros trabalhos na área de filtragem presentes na literatura, grande atenção tem sido dada aos sistemas lineares, enquanto que resultados para sistemas sujeitos a não linearidades são menos numerosos.

No contexto de sistemas não lineares, alguns esforços têm sido feitos nos últimos anos. Em [26] as não linearidades satisfazem condições globais Lipschitz e um filtro linear é projetado por meio de LMIs. Em [13] um filtro linear  $\mathcal{H}_\infty$  é proposto para uma classe de sistemas não lineares descritos por uma representação algébrico-diferencial e [4] trata do problema de filtragem central subótima para sistemas não lineares polinomiais. Aplicando técnicas de soma de quadrados, [47] propõe um algoritmo iterativo convergente para tratar o projeto de filtros lineares  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas polinomiais. Na maioria dos casos, apesar do sistema apresentar uma dinâmica não linear, o filtro implementado é linear.

Como um outro aspecto relevante do problema, é importante ressaltar que a caracterização de uma estimativa da região de atração da origem para um sistema não linear é um problema desafiador [35, 10]. Na verdade, a estabilidade global da origem dificilmente pode ser certificada para sistemas não lineares [37].

A classe de sistemas quadráticos não lineares também foi objeto de estudo em [2, 1]. Nesses artigos, condições suficientes que permitem projetar leis de controle baseadas em realimentação de estados ou baseadas em observadores são apresentadas. Além disso, sendo dada uma região politópica no espaço de estados, o sistema em malha fechada é assintoticamente estável e a região de atração associada contém essa região politópica. Nesse estudo, propõe-se uma forma alternativa, que não necessita da escolha inicial de um politopo para o projeto de filtros.

Neste capítulo, o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas não lineares quadráticos (sistemas que dependem de forma quadrática nos estados), contínuos e discretos no tempo é considerado. O filtro a ser projetado tem a mesma estrutura do sistema, ou seja, um filtro de ordem completa com termos quadráticos. Primeiramente, usando uma função de Lyapunov quadrática e técnicas baseadas em LMIs, uma condição suficiente para assegurar um limitante  $\mathcal{H}_\infty$  para a relação de ganho de energia entre entrada e saída do sistema aumentado (composto pelo sistema quadrático original e o filtro proposto) em um contexto regional (local) é obtida. Essa condição pode ser vista como uma adaptação

de resultados recentes apresentados em [73] para o controle em realimentação de estados de sistemas quadráticos com saturação. Então, usando o lema de Finsler e impondo restrições de estrutura para as variáveis de decisão, condições LMIs com parâmetros escalares são propostas para o projeto do filtro quadrático, assegurando um limitante  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema aumentado. Experimentos numéricos ilustram o fato de que as condições propostas podem prover filtros quadráticos que garantem limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  menos conservadores quando comparados com filtros lineares.

## 4.2 Definição do problema

Considere o sistema não linear quadrático<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \delta[x] &= Ax + \begin{bmatrix} x'A_{q1}x \\ x'A_{q2}x \\ \vdots \\ x'A_{qn}x \end{bmatrix} + B_1w \\ z &= C_1x + D_{11}w \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w \in \mathbb{R}^r$  é a entrada de ruídos,  $z \in \mathbb{R}^p$  é o sinal a ser estimado e  $y \in \mathbb{R}^q$  é a saída medida. O operador  $\delta[x]$  denota derivada no caso contínuo e deslocamento unitário para sistemas discretos. As matrizes que descrevem o sistema têm as seguintes dimensões:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_{11} \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $D_{21} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ .

Além disso, o sinal  $w$  é suposto de energia limitada, isto é  $w \in \mathcal{L}_2$  para sistemas contínuos e  $w \in \ell_2$  para sistemas discretos. Sem perda de generalidade assume-se que o sinal  $w$  é normalizado, isto é, satisfaz

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w(\tau)'w(\tau)d\tau \leq 1 \quad (4.2)$$

para sistemas contínuos, e

$$\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty w_k'w_k \leq 1 \quad (4.3)$$

para sistemas discretos.

Defina  $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$  e  $X \in \mathbb{R}^{n^2 \times n}$  dados por

$$A_q = \begin{bmatrix} A_{q1(1)} & A_{q1(2)} & \cdots & A_{q1(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{qn(1)} & A_{qn(2)} & \cdots & A_{qn(n)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>Por simplicidade, a dependência no tempo é omitida.

em que  $A_{qi(j)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é a linha  $j$  da matriz  $A_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Portanto, o sistema (4.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\delta[x] &= Ax + A_q Xx + B_1 w \\ z &= C_1 x + D_{11} w \\ y &= C_2 x + D_{21} w\end{aligned}\tag{4.6}$$

O objetivo é encontrar um filtro não linear quadrático de ordem completa descrito como

$$\begin{aligned}\delta[x_f] &= A_f x_f + \begin{bmatrix} x_f' A_{qf1} x_f \\ x_f' A_{qf2} x_f \\ \vdots \\ x_f' A_{qfn_f} x_f \end{bmatrix} + B_f y \\ z_f &= C_f x_f + D_f y\end{aligned}\tag{4.7}$$

com  $n_f = n$ ,  $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ ,  $A_{qfi} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ ,  $i = 1, \dots, n_f$ ,  $B_f \in \mathbb{R}^{n_f \times q}$ ,  $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n_f}$ ,  $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$  o estado estimado e  $z_f \in \mathbb{R}^p$  a saída estimada.

Observa-se que, usando definições similares a (4.4) e (4.5) com respeito ao filtro (4.7), o sistema (4.7) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\delta[x_f] &= A_f x_f + A_{qf} X_f x_f + B_f y \\ z_f &= C_f x_f + D_f y\end{aligned}\tag{4.8}$$

Os termos quadráticos no filtro podem ser interpretados como uma adequação à influencia dos termos quadráticos presentes no sistema. Com o vetor de estados  $\tilde{x}' = [x' \quad x_f']$  e a saída de erro  $e = z - z_f$ , o sistema aumentado (4.6)–(4.8) é denotado por

$$\begin{aligned}\delta[\tilde{x}] &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{A}_q \tilde{X}\tilde{x} + \tilde{B}w \\ e &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}w\end{aligned}\tag{4.9}$$

em que

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 & A_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{A}_q = \begin{bmatrix} A_q & 0 \\ 0 & A_{qf} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n^2}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n^2 \times 2n}, \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, \quad \tilde{C} = [C_1 - D_f C_2 \quad -C_f] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, \quad \tilde{D} = [D_{11} - D_f D_{21}] \in \mathbb{R}^{p \times r}\end{aligned}$$

Neste ponto, é importante mencionar que o sistema (4.9) com  $w = 0$  pode ser globalmente assintoticamente estável (i.e., assintoticamente estável para qualquer condição inicial  $\tilde{x}(0) \in \mathbb{R}^{2n}$ ). Entretanto, o estudo da estabilidade global para sistemas não lineares polinomiais é uma tarefa difícil, como discutido em [80]. Em [37], algumas considerações são realizadas para tratar o problema de estabilidade assintótica global, como por exemplo o sistema deve ser de segunda ordem com um termo quadrático apresentando uma estrutura particular. Por este motivo, uma tarefa mais viável é o estudo da estabilidade do sistema (4.9) em um contexto regional (local), requerendo que a matriz  $\tilde{A}$  seja Hurwitz. O problema abordado neste capítulo pode ser resumido como:

**Problema 4.1** *Determinar um filtro estável não linear quadrático de ordem completa como (4.8) e uma região  $S_0 \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  tal que:*

1. quando  $w = 0$ , a região  $S_0$  é uma estimativa da região de atração da origem para o sistema (4.9), significando que para qualquer  $\tilde{x}(0) \in S_0$ , as trajetórias resultantes do sistema (4.9) convergem assintoticamente para a origem;
2. quando  $w \neq 0$ ,  $w \in \mathcal{L}_2$  com  $\|w\|_2^2 \leq 1$  e  $\tilde{x}(0) = 0$ :
  - (a) as trajetórias do sistema (4.9) não deixam a região  $S_0$  quando  $\tilde{x}(0) = 0$ ;
  - (b) o ganho de energia da entrada  $w$  para a saída de erro  $e = z - z_f$  no sistema (4.9) (i.e., a norma  $\mathcal{H}_\infty$ ) é limitado por  $\gamma$  para condição inicial  $\tilde{x}(0) = 0$ , isto é:  $\|e\|_2^2 \leq \gamma \|w\|_2^2$ .

Antes de abordar os resultados principais, o seguinte lema apresentado em [73] no qual nossos resultados são baseados é lembrado.

**Lema 4.1 ([73])** Considere a matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  e um vetor  $v$  tal que  $\|v\| = 1$ . Cada ponto na fronteira de um elipsoide,  $\partial \mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px = 1\}$ , pode ser parametrizado por  $x = P^{-\frac{1}{2}}Tv$ , com  $T'T = I$ .

**Prova:** Se  $x \in \partial \mathcal{E}$  tem-se que  $\|P^{\frac{1}{2}}x\|^2 = 1$ ; portanto existe uma matriz ortogonal  $T$ , isto é  $T'T = I$ , tal que  $T'P^{\frac{1}{2}}x = v$ , levando a  $x = P^{-\frac{1}{2}}Tv$ . ■

**Comentário 4.1** Embora o mapeamento seja estabelecido apenas na borda de  $\mathcal{E}(P)$ , se as condições forem verificadas na borda, isto vale para  $x'Px = 1$ , então também valem para  $x'Px = c \leq 1$ ,  $\forall 0 < c \leq 1$ .

### 4.3 Resultados principais

Baseado na parametrização do Lema 4.1 e no Lema de Finsler [17], o seguinte resultado para a análise de estabilidade do sistema (4.9) pode ser obtido.

**Lema 4.2** Se existirem uma matriz  $P = P' > 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , matrizes  $F_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $F_3 \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$ ,  $F_4 \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$ , e escalares positivos  $\xi$  e  $\gamma$  tais que as desigualdades

$$\Theta_c + \Psi < 0 \quad (4.10)$$

para sistemas contínuos e

$$\Theta_d + \Psi < 0 \quad (4.11)$$

para sistemas discretos, sejam satisfeitas com

$$\Theta_c = \begin{bmatrix} \xi I & P & 0 & \tilde{C}' & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & \tilde{D}' & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\xi \tilde{P} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Theta_d = \begin{bmatrix} -P + \xi I & 0 & 0 & \tilde{C}' & 0 \\ * & P & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & \tilde{D}' & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\xi \tilde{P} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$\tilde{P} = \text{diag}(P, \dots, P) \in \mathbb{R}^{2n^2 \times 2n^2}$ , e

$$\Psi = \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A} + \tilde{A}' F_1' & -F_1 + \tilde{A}' F_2' & F_1 \tilde{B} + \tilde{A}' F_3' & \tilde{A}' F_4' & F_1 \tilde{A}_q \\ * & -F_2 - F_2' & F_2 \tilde{B} - F_3' & -F_4' & F_2 \tilde{A}_q \\ * & * & F_3 \tilde{B} + \tilde{B}' F_3' & \tilde{B}' F_4' & F_3 \tilde{A}_q \\ * & * & * & 0 & F_4 \tilde{A}_q \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

então, o Problema 4.1 é solucionado com a região  $S_0 = \mathcal{E}(P) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n}; \tilde{x}' P \tilde{x} \leq 1\}$  e com um limitante para o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  dado por  $\gamma$ .

**Prova:** Aplicando o complemento de Schur nas desigualdades (4.10) e (4.11), e considerando  $\tilde{T}' \tilde{T} = I$  e  $V' V = I$ , resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} + \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A} + \tilde{A}' F_1' & -F_1 + \tilde{A}' F_2' & F_1 \tilde{B} + \tilde{A}' F_3' & \tilde{A}' F_4' \\ * & -F_2 - F_2' & F_2 \tilde{B} - F_3' & -F_4' \\ * & * & F_3 \tilde{B} + \tilde{B}' F_3' & \tilde{B}' F_4' \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \\ + \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \tilde{P}^{-1} \left( \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \right)' + \xi \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)' < 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que  $\mathcal{Q}$  representa  $\mathcal{Q}_c$  para sistemas contínuos e  $\mathcal{Q}_d$  para sistemas discretos, com

$$\mathcal{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & \tilde{C}' \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \tilde{D}' \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_d = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & \tilde{C}' \\ * & P & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \tilde{D}' \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Aplicando o Lema A.2 (ver Apêndice) nos dois últimos termos de (4.15), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \tilde{P}^{-1} \left( \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \right)' + \xi \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)' \geq \\ \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \tilde{P}^{-1/2} \left( \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)' + \left( \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{P}^{-1/2} \left( \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \right)' \end{aligned} \quad (4.17)$$

Usando (4.17) em (4.15) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} + \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A} + \tilde{A}' F_1' & -F_1 + \tilde{A}' F_2' & F_1 \tilde{B} + \tilde{A}' F_3' & \tilde{A}' F_4' \\ * & -F_2 - F_2' & F_2 \tilde{B} - F_3' & -F_4' \\ * & * & F_3 \tilde{B} + \tilde{B}' F_3' & \tilde{B}' F_4' \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \tilde{P}^{-1/2} \left( \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)' + \left( \begin{bmatrix} V' \tilde{T}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{P}^{-1/2} \left( \begin{bmatrix} F_1 \tilde{A}_q \\ F_2 \tilde{A}_q \\ F_3 \tilde{A}_q \\ F_4 \tilde{A}_q \end{bmatrix} \right)' < 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aplicando a parametrização proposta no Lema 4.1 em (4.18), ou seja, usando  $\tilde{P}^{-1/2}TV = \tilde{X}$  resulta em

$$\mathcal{Q} + \begin{bmatrix} F_1\tilde{A} + \tilde{A}'F_1' & -F_1 + \tilde{A}'F_2' & F_1\tilde{B} + \tilde{A}'F_3' & \tilde{A}'F_4' \\ * & -F_2 - F_2' & F_2\tilde{B} - F_3' & -F_4' \\ * & * & F_3\tilde{B} + \tilde{B}'F_3' & \tilde{B}'F_4' \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} F_1\tilde{A}_q \\ F_2\tilde{A}_q \\ F_3\tilde{A}_q \\ F_4\tilde{A}_q \end{bmatrix} \tilde{X} [I \ 0 \ 0 \ 0] \right) < 0 \quad (4.19)$$

A desigualdade (4.19) pode ser reescrita usando a condição iv) do Lema de Finsler [17] como

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$$

com

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X})' \\ -I \\ \tilde{B}' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

e  $\mathcal{Q}$  como em (4.16) para sistemas contínuos e discretos, respectivamente. Pré-multiplicando (4.19) por  $\mathcal{B}^{\perp'}$  e pós-multiplicando por  $\mathcal{B}^{\perp}$  com

$$\mathcal{B}^{\perp'} = \begin{bmatrix} I & (\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X})' & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}' & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X})'P + P(\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X}) & P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ * & -\gamma^2 I & \tilde{D}' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

para sistemas contínuos, e

$$\begin{bmatrix} -P + (\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X})'P(\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X}) & (\tilde{A} + \tilde{A}_q\tilde{X})'P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ * & -\gamma^2 I & \tilde{D}' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

para sistemas discretos. As desigualdades (4.20) e (4.21) garantem um limitante para o ganho de energia  $\mathcal{H}_{\infty}$  de  $w$  para  $e$  do sistema (4.9) para os casos contínuo e discreto respectivamente, e são equivalentes a

$$G(x) + \frac{1}{\gamma^2} e'e - w'w < 0 \quad (4.22)$$

com  $G(x) = \Delta V(\tilde{x}) < 0$  para sistemas discretos e  $G(x) = \dot{V}(\tilde{x}) < 0$  para sistemas contínuos no tempo, e  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}'P\tilde{x}$ . Se a desigualdade (4.18) é satisfeita, então para todo  $\tilde{x} \in \partial \mathcal{E}(P)$  tem-se  $G(x) + \frac{1}{\gamma^2} e'e - w'w < 0$ . Como  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto convexo e os termos  $\tilde{X} = P^{-1/2}TV$  aparecem linearmente na desigualdade (4.18), qualquer ponto em  $\mathcal{E}(P) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2n; \tilde{x}'P\tilde{x} \leq 1\}$ , também satisfaz  $G(x) + \frac{1}{\gamma^2} e'e - w'w < 0$ . Portanto, o elipsóide  $\mathcal{E}(P)$  é uma região de estabilidade e invariância para o sistema aumentado (4.9) [73].

### Sistemas discretos

Se a condição (4.11) do Lema 4.2 é satisfeita, então para todo  $\tilde{x} \in \mathcal{E}(P)$  tem-se

$$1. \Delta V(\tilde{x}_k) \leq \Delta V(\tilde{x}_k) + \frac{1}{\gamma^2} e'_k e_k < 0 \text{ quando } w_k = 0;$$

$$2. \Delta V(\tilde{x}_k) + \frac{1}{\gamma^2} e'_k e_k - w'_k w_k < 0 \text{ quando } w_k \neq 0.$$

Somando a última desigualdade para  $\tilde{x}_0 = 0$ , tem-se:

$$V(\tilde{x}_T) - V(\tilde{x}_0) + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=0}^{T-1} e'_k e_k - \sum_{k=0}^{T-1} w'_k w_k < 0$$

ou

$$V(\tilde{x}_T) < \sum_{k=0}^{T-1} w'_k w_k \leq 1, \quad \forall T > 0$$

i.e., as trajetórias do sistema aumentado (4.9) não deixam o conjunto  $\mathcal{E}(P)$ . Quando  $w_k = 0$ , tem-se  $\Delta V(\tilde{x}_k) < 0$ , o que garante que  $\tilde{x}_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  para qualquer  $\tilde{x}_k \in \mathcal{E}(P)$ .

### Sistemas contínuos

Se a condição (4.10) do Lema 4.2 é satisfeita, então para todo  $\tilde{x} \in \mathcal{E}(P)$  tem-se

$$1. \dot{V}(\tilde{x}) \leq \dot{V}(\tilde{x}) + \frac{1}{\gamma^2} e' e < 0 \text{ quando } w = 0;$$

$$2. \dot{V}(\tilde{x}) + \frac{1}{\gamma^2} e' e - w' w < 0 \text{ quando } w \neq 0.$$

Integrando a última desigualdade para  $\tilde{x}(0) = 0$ , tem-se

$$V(\tilde{x}(T)) - V(\tilde{x}(0)) + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^T e(\tau)' e(\tau) d\tau - \int_0^T w(\tau)' w(\tau) d\tau < 0$$

ou

$$V(\tilde{x}(T)) < \int_0^T w(\tau)' w(\tau) d\tau \leq 1, \quad \forall T > 0$$

i.e., as trajetórias do sistema aumentado (4.9) não deixam o conjunto  $\mathcal{E}(P)$ . Quando  $w_k = 0$ , tem-se  $\dot{V}(x) < 0$ , garantindo que  $\tilde{x} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  para qualquer  $\tilde{x} \in \mathcal{E}(P)$ . ■

O Lema 4.2 apresenta condições não lineares porque as variáveis de interesse (i.e.,  $A_f$ ,  $A_{qf}$ ,  $B_f$ ,  $C_f$  e  $D_f$ ) aparecem em submatrizes multiplicando as variáveis extras  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Para linearizar as condições apresentadas no Lema 4.2, baseado nas estratégias [20, 41], a seguinte estrutura é imposta às matrizes  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ :

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{11} & \lambda_1 \hat{K} \\ F_{13} & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} F_{21} & \hat{K} \\ F_{23} & \hat{K} \end{bmatrix}, F_3 = [F_{31} \quad 0_{r \times n}], F_4 = [F_{41} \quad 0_{p \times n}] \quad (4.23)$$

em que  $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e os escalares  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  devem ser pré-determinados. Note que, assim como no Capítulo 2, estruturas matriciais poderiam ser usadas no lugar dos escalares  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  para relacionar as variáveis  $\hat{K}$ . Por conveniência, a matriz  $P$  pode também ser particionada em blocos  $n \times n$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$



**Comentário 4.3** *É importante observar que a desigualdade (4.26) torna-se linear quando escalares  $\xi > 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são fixados. Escolhendo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e usando uma discretização no espaço do parâmetro  $\xi$ , um problema de otimização convexo pode ser escrito para minimizar  $\gamma$  para cada valor fixo de  $\xi$ :*

$$\begin{cases} \min \gamma \\ \text{sujeito à LMI (4.26)} \end{cases} \quad (4.29)$$

no qual as variáveis de decisão são  $P$ ,  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $C_f$ ,  $D_f$  e  $\gamma$ .

**Comentário 4.4** *Para considerar no problema de otimização a maximização do tamanho da estimativa do domínio de atração, o problema (4.29) pode ser reformulado como*

$$\begin{cases} \min(1 - \beta)\gamma + \beta \text{Tr}(P), & 0 \leq \beta \leq 1 \\ \text{sujeito à LMI (4.26)} \end{cases} \quad (4.30)$$

no qual as variáveis de decisão são  $P$ ,  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $C_f$ ,  $D_f$  e  $\gamma$ . Deste modo é possível selecionar  $\beta$  tal que um compromisso entre  $\gamma$  e  $\text{Tr}(P)$  seja atendido, ou seja, um compromisso entre o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  do filtro e o tamanho da estimativa do domínio de atração.

**Comentário 4.5** *Se a parametrização proposta no Lema 4.1 for realizada antes da aplicação do Lema de Finsler, uma condição alternativa pode ser obtida para o caso contínuo [42].*

## 4.4 Experimentos numéricos

O objetivo dos experimentos é ilustrar as condições propostas neste capítulo e mostrar o potencial dos filtros quadráticos não lineares em comparação com os filtros lineares ( $A_{qf} = 0$ ).

As condições, na forma de desigualdades matriciais, dependem de escalares  $\xi$  e  $\lambda$  que precisam ser procurados. Nos experimentos apresentados a seguir, uma simples busca linear com precisão 0.001 foi usada em  $\xi$ , escalares  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  foram usados no caso contínuo e  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  no caso discreto. Aplicando algoritmos de otimização, como por exemplo a função `fminsearch` no *toolbox* de otimização do MATLAB, os resultados poderiam ser melhorados. As rotinas foram implementadas em MATLAB, versão 7.6.0.324 (R2008a) SP 2 usando Yalmip [49] e SeDuMi [71]. O computador usado foi um Intel<sup>®</sup> Core 2 Duo (2.0 GHz), 3GB RAM, Windows Vista.

### Sistemas Contínuos

Considere o atrator de Lorenz, um sistema quadrático não linear<sup>2</sup> também investigado em [73], com matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

$$A_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$B_1 = [1 \ 0 \ 0]', \quad C_2 = [1 \ 0 \ 0], \quad D_{21} = [0.5],$$

<sup>2</sup>Este sistema pode apresentar comportamento caótico para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  e  $\rho \geq 25$ .

$$C_1 = [0.5 \ 1 \ 1], \quad D_{11} = [0],$$

em que  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $b$  são escalares positivos. Para valores de  $\rho < 1$ , esse sistema possui apenas um ponto de equilíbrio  $x_{e1} = [0 \ 0 \ 0]'$ . Para  $\rho > 1$ , o sistema apresenta outros dois pontos de equilíbrio

$$x_{e2} = \begin{bmatrix} \sqrt{b(\rho-1)} \\ \sqrt{b(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{bmatrix}, \quad x_{e3} = \begin{bmatrix} -\sqrt{b(\rho-1)} \\ -\sqrt{b(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

Para valores de  $\rho > 1$ , a origem torna-se instável. Em torno do ponto  $x_{e2}$  tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\rho-1)} \\ \sqrt{b(\rho-1)} & \sqrt{b(\rho-1)} & -b \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

e a matriz  $A_q$  não muda.

A Figura 4.1 mostra os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos com um filtro linear ( $A_{qf} = 0$ ) por meio das condições do Teorema 4.1 (em azul), com  $K_3 = 0$ , e também usando as condições de análise do Lema 4.2 aplicada ao sistema aumentado (4.9) com o filtro correspondente (em preto) com parâmetros  $\sigma = 1$ ,  $b = 8/3$  e  $\rho = 4$ . O mínimo valor de  $\gamma$  obtido usando um filtro linear para este intervalo é  $\gamma = 0.9317$  com  $\xi = 0.478$  para projeto, e o mínimo valor de  $\gamma$  obtido da análise do sistema aumentado (4.9) é  $\gamma = 0.8586$  com  $\xi = 0.500$ .

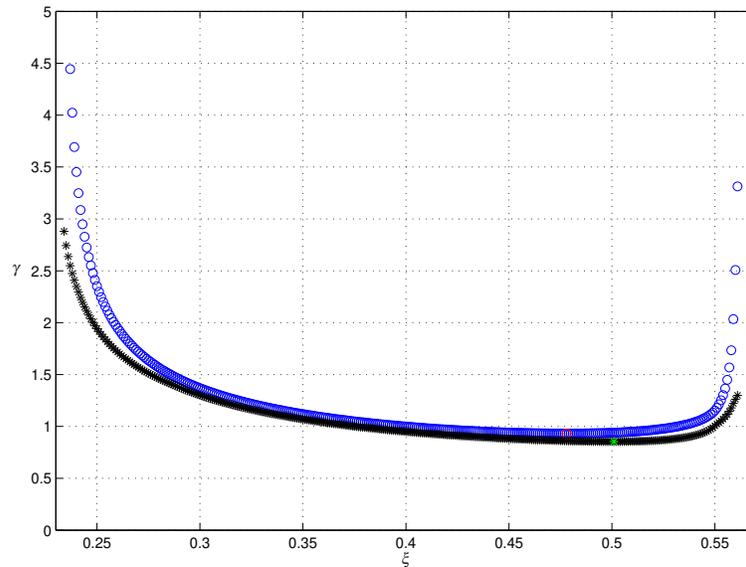


Figura 4.1: Comportamento de  $\gamma$  com a variação de  $\xi$  para um filtro linear ( $A_{qf} = 0$ ) obtido com o Teorema 4.1 ('o' - em azul) e usando as condições de análise do Lema 4.2 ('\*' - em preto) aplicadas ao sistema aumentado (4.9).

A Figura 4.2 apresenta o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  obtido com um filtro não linear quadrático projetado pelas condições do Teorema 4.1 (azul) e os limitantes obtidos por meio da condição de análise do sistema aumentado (4.9) (em preto) com parâmetros  $\sigma = 1$ ,  $b = 8/3$  e  $\rho = 4$ . O mínimo atingido com as condições de projeto do Teorema 4.1 é  $\gamma = 0.6530$  para  $\xi = 0.490$ , enquanto o mínimo  $\gamma$

considerando a análise do sistema aumentado (4.9) é  $\gamma = 0.5987$  obtido para  $\xi = 0.514$ . Pode-se concluir que o filtro não linear quadrático provê os menores limitantes  $\mathcal{H}_\infty$ , tanto para as condições de projeto quanto para as condições de análise do sistema aumentado. Além disso é possível observar que, tanto para o caso linear (Figura 4.1) quanto para o caso não linear (Figura 4.2), os limitantes obtidos para o sistema aumentado estão próximos daqueles obtidos pelas condições de projeto.

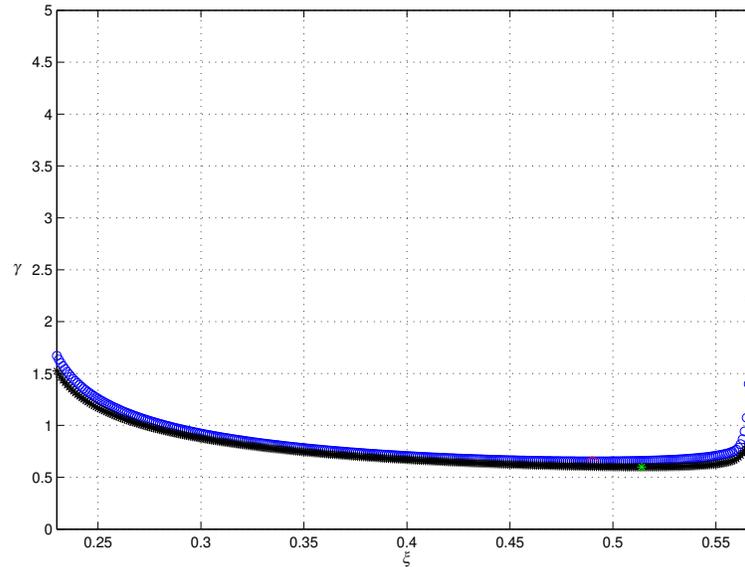


Figura 4.2: Comportamento de  $\gamma$  com a variação de  $\xi$  para um filtro não linear quadrático obtido com o Teorema 4.1 ('o' - em azul) e usando as condições de análise do Lema 4.2 ('\*' - em preto) aplicadas ao sistema aumentado (4.9).

A Tabela 4.1 apresenta uma comparação entre o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  obtido pelo Teorema 4.1, com um filtro quadrático não linear e o custo obtido com um filtro linear ( $A_{qf} = 0$ ). Pode-se notar que o filtro quadrático não linear provê os melhores resultados, principalmente para valores menores de  $\rho$ .

Tabela 4.1: Comparação de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , filtro quadrático  $\times$  filtro linear, com  $b = 8/3$ .

Parâmetros		Teorema 4.1		Filtro linear	
$\sigma$	$\rho$	$\xi$	$\gamma$	$\xi$	$\gamma$
1	3.2	0.394	0.8967	0.371	1.9480
1	3.5	0.441	0.7439	0.424	1.1804
1	3.6	0.452	0.7176	0.435	1.1016
1	3.7	0.463	0.6966	0.447	1.0435
1	3.8	0.473	0.6795	0.458	0.9983
1	3.9	0.482	0.6651	0.469	0.9619
1	4	0.490	0.6530	0.478	0.9317
2	4	0.940	0.2878	0.946	0.4025

Para os parâmetros  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 3.5$  e  $b = 8/3$ , o filtro quadrático obtido com o Teorema 4.1 é dado pelas seguintes matrizes

$$A_f = \begin{bmatrix} -2.9849 & 0.9379 & 0.0048 \\ -2.5048 & -1.3478 & -0.7982 \\ 7.7372 & 3.8658 & -2.8165 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -1.9605 \\ -1.1516 \\ 2.9161 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [-2.2253 \quad -1.0316 \quad -0.2191], D_f = [-0.6586],$$

$$A_{qf} = \begin{bmatrix} -0.0143 & 0.0006 & 0.0009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7647 & 0.0315 & 0.0467 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2860 & -0.0118 & -0.0175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

enquanto o filtro linear é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} -2.6168 & 0.9301 & -0.2036 \\ -2.2662 & -0.7913 & -1.1329 \\ 10.1383 & 3.4011 & -4.0454 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -1.8407 \\ -1.2291 \\ 3.8257 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [-2.9762 \quad -0.9710 \quad -0.0741], D_f = [-1.0357]$$

É possível verificar por meio da Figura 4.3 que tanto para o filtro linear quanto para o filtro não linear quadrático, a evolução dos estados  $\tilde{x}$  permanece confinada na região  $S_0 = \mathcal{E}(P) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n}; \tilde{x}'P\tilde{x} \leq 1\}$  ao longo do tempo, o que significa que o sistema (4.9) é localmente assintoticamente estável.

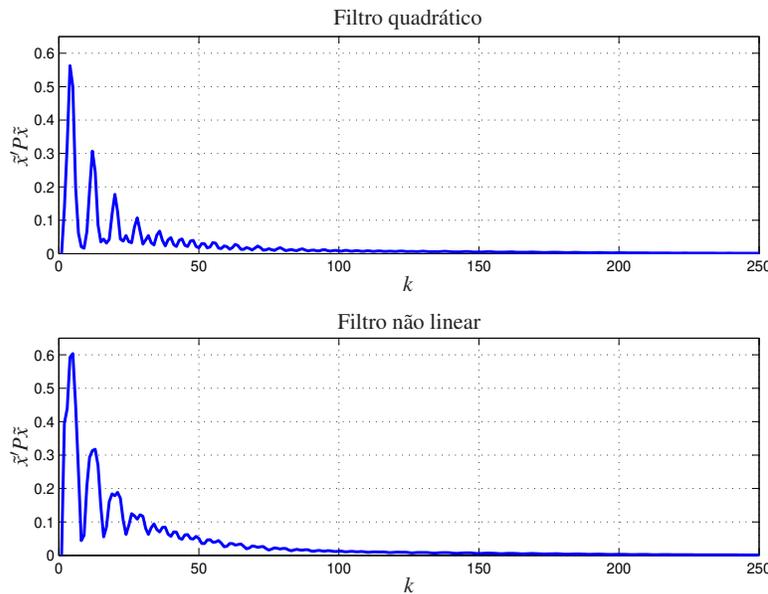


Figura 4.3: Evolução dos estados  $\tilde{x}$  na região  $S_0 = \mathcal{E}(P) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n}; \tilde{x}'P\tilde{x} \leq 1\}$  ao longo do tempo.

A Figura 4.4 apresenta um conjunto de possíveis soluções para o Problema (4.30). A linha tracejada representa as soluções obtidas com um filtro linear, enquanto a curva sólida apresenta os resultados para um filtro não linear quadrático. Note que o filtro com termos quadráticos pode prover melhores resultados tanto para  $\gamma$  quanto para  $Tr(P)$ . Além disso, por meio do Problema (4.30) é possível selecionar  $\beta$  tal que o par  $(Tr(P), \gamma)$  satisfaça os requisitos desejados. Os parâmetros são  $\sigma = 1$ ,  $b = 8/3$  e  $\rho = 3.2$  com  $\xi = 0.371$  para o filtro linear e  $\xi = 0.394$  para o filtro não linear quadrático, como apresentado na Tabela 4.1.

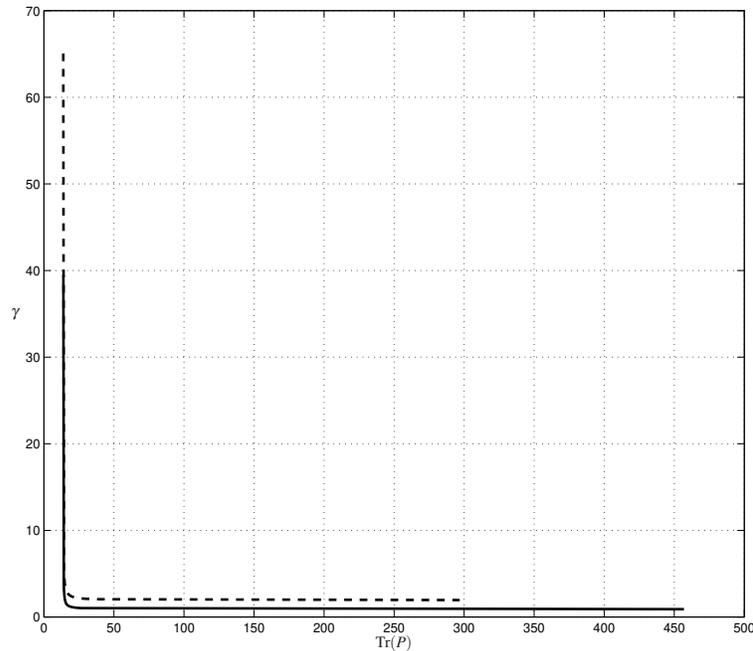


Figura 4.4: Conjunto de possíveis soluções para o problema (4.30),  $Tr(P) \times \gamma$  para um filtro não linear quadrático (curva contínua) e para um filtro linear (curva tracejada).

## Sistemas Discretos

Considere o atrator de Lorenz em torno do ponto de equilíbrio  $x_{e2}$  dado em (4.33), cuja versão discreta pode ser obtida por meio de uma discretização de Euler

$$x_{k+1} = (I + \Delta_t A)x_k + \Delta_t A_q X_k x_k \quad (4.35)$$

com intervalo de tempo discreto  $\Delta_t$  e matrizes (4.32) e (4.34) em que  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $b$  são escalares positivos.

Considerando  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $\rho = 4$ , e  $\Delta_t = 0.005$ , a matriz  $(I + \Delta_t A)$  em (4.35) é Schur estável com autovalores  $0.9418$ ,  $0.9949 + 0.0178i$  e  $0.9949 - 0.0178i$ . As seguintes matrizes são consideradas

$$B_1 = [0.05 \ 0 \ 0]', \quad C_2 = [1 \ 0 \ 0], \quad D_{21} = [0.025],$$

$$C_1 = [0.5 \ 1 \ 1], \quad D_{11} = [0]$$

A Figura 4.5 mostra os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos com um filtro linear ( $A_{qf} = 0$ ) e para um filtro quadrático não linear, obtidos por meio das condições de projeto do Teorema 4.1, com parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $\rho = 4$  e  $\Delta_t = 0.005$ . O mínimo valor de  $\gamma$  neste intervalo é obtido com  $\xi = 0.0970$  tanto para o filtro linear quanto para o filtro quadrático. O limitante  $\mathcal{H}_\infty$  obtido com o filtro linear é  $\gamma = 0.2303$  enquanto o filtro quadrático não linear pode garantir  $\gamma = 0.1468$ .

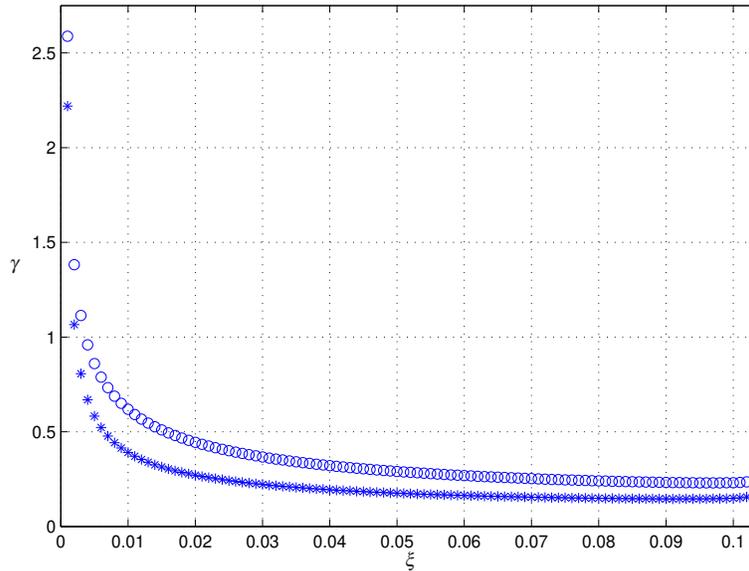


Figura 4.5: Comportamento de  $\gamma$  com a variação de  $\xi$  para um filtro linear ('o') e para um filtro quadrático não linear ('\*') obtidos com Teorema 4.1.

Neste caso, o filtro quadrático não linear obtido com o Teorema 4.1 é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.8592 & 0.0403 & -0.0063 \\ 0.0119 & 0.9948 & -0.0143 \\ 0.0274 & 0.0135 & 0.9863 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -1.8193 \\ 0.0065 \\ 0.0125 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [-0.4577 \quad -1.0025 \quad -1.0016], D_f = [-0.0399],$$

$$A_{qf} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0.0874 & 0.1548 & 0.1582 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25.4447 & -0.1138 & -0.0824 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3152 & 0.0004 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

enquanto o filtro linear pode ser descrito pelas seguintes matrizes

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.6587 & 0.0277 & -0.0144 \\ 0.0243 & 0.9945 & -0.0148 \\ 0.0420 & 0.0126 & 0.9857 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -1.6311 \\ 0.0183 \\ 0.0262 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [-0.3959 \quad -1.0062 \quad -1.0040], D_f = [0.0980]$$

Considerando as matrizes dos filtros dadas anteriormente, a Figura 4.6 apresenta a resposta temporal do erro para o sistema aumentado (4.9), com condições iniciais nulas e entrada de ruído  $w_k$  dada por

$$w_k = \sin(0.8k) \exp(-0.02k)$$

Como pode ser visto, a resposta temporal do erro com o filtro linear (tracejado) é maior que o erro com o filtro quadrático não linear (contínuo), ilustrando claramente que o filtro quadrático não linear é menos conservador.

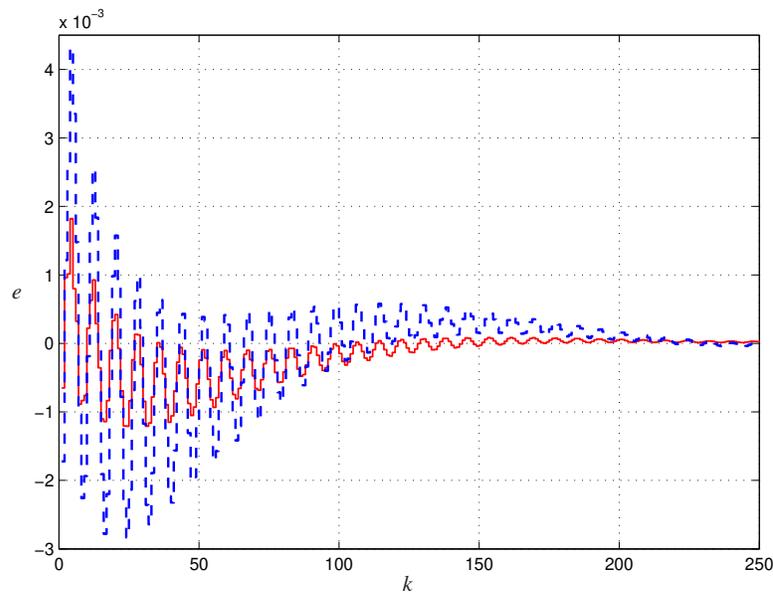


Figura 4.6: Resposta temporal do erro  $e$  para o sistema aumentado (4.9) com um filtro linear (tracejado) e com um filtro quadrático não linear (contínuo).

A evolução dos estados  $\tilde{x}$  permanece confinada na região  $S_0 = \mathcal{E}(P) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n}; \tilde{x}'P\tilde{x} \leq 1\}$  para ambos os filtros linear e não linear, implicando que o sistema (4.9) é localmente assintoticamente estável.

A Tabela 4.2 apresenta os limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos para um filtro linear ( $A_{qf} = 0$ ) e para um filtro quadrático não linear, com o respectivo valor de  $\xi$ , para vários valores de  $\sigma$ . Como pode ser notado, o filtro quadrático não linear pode prover resultados menos conservadores quando comparado com o filtro linear. Além disso, os limitantes são no mínimo 24% menores que os obtidos com o filtro linear, enfatizando a importância de levar em conta o termo não linear no problema de filtragem.

Tabela 4.2: Desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , filtro quadrático  $\times$  filtro linear, com  $b = 8/3$ ,  $\rho = 4$  e  $\Delta_t = 0.005$ .

Parâmetro	Teorema 4.1		Filtro linear		Redução
	$\xi$	$\gamma$	$\xi$	$\gamma$	
1	0.006	2.4549	0.006	3.2571	24.63
2	0.010	1.2420	0.011	1.6607	25.21
3	0.014	0.8360	0.015	1.1505	27.34
4	0.020	0.5950	0.021	0.8436	29.47
5	0.027	0.4400	0.028	0.6383	31.07
6	0.036	0.3358	0.038	0.4982	32.60
10	0.097	0.1468	0.097	0.2303	36.30

## 4.5 Conclusão

Foram propostas novas condições na forma de desigualdades matriciais para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  quadráticos não lineares para sistemas quadráticos não lineares contínuos e discretos no tempo. O lema de Finsler foi empregado para derivar as condições, permitindo que a síntese do filtro fosse realizada diretamente a partir das variáveis de folga, sem impor nenhuma estrutura específica para a matriz de Lyapunov, enquanto a parametrização proposta no Lema 4.1 permitiu eliminar a dependência nos estados. Parâmetros escalares foram usados nos procedimentos de otimização para reduzir o conservadorismo das soluções. Os experimentos numéricos confirmam que o fato de considerar filtros com termos quadráticos resulta em limitantes  $\mathcal{H}_\infty$  menos conservadores que os obtidos com filtros lineares.

# Conclusões e Perspectivas

Este trabalho investigou o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  de ordem completa em três diferentes contextos: i) sistemas discretos com atraso variante no tempo; ii) sistemas contínuos e discretos no tempo sujeitos a incertezas nos parâmetros medidos; iii) sistemas não lineares quadráticos contínuos e discretos no tempo. Nos três casos estudados, condições na forma de desigualdades matriciais foram obtidas, permitindo que a síntese dos filtros fosse realizada a partir das variáveis de folga, sem impor nenhuma estrutura específica para as matrizes de Lyapunov. As principais contribuições desta tese são apresentadas a seguir.

O Capítulo 2 apresentou uma nova condição dependente do atraso na forma de LMIs para o projeto de um filtro robusto, que também pode ser implementado com termos que levam em conta estados atrasados sempre que o atraso no tempo estiver disponível em tempo real (medido ou estimado). Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros na forma de polinômios homogêneos foram utilizadas para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$ , sem usar nenhum esquema de particionamento do atraso. O uso da desigualdade de Jensen e do Lema de Finsler para derivar as condições de projeto em um espaço aumentado com variáveis de folga adicionais, além de um procedimento iterativo baseado na solução de LMIs, possibilitaram que resultados menos conservadores fossem obtidos em termos do critério  $\mathcal{H}_\infty$ .

No Capítulo 3, foi proposto um método para tratar simultaneamente a presença de incertezas aditivas e multiplicativas nos parâmetros medidos, utilizando a representação multi-simplex. Desse modo, foi possível representar os parâmetros do sistema, as incertezas aditivas e as incertezas multiplicativas em um único domínio, viabilizando a aplicação de relaxações LMIs baseadas em soluções polinomiais homogêneas. Cada parâmetro afim foi representado por um simplex de dimensão dois, propiciando que a modelagem dos parâmetros variantes no tempo fosse realizada por meio de transformações determinadas analiticamente, sem a necessidade de algoritmos complexos. O filtro projetado depende apenas do parâmetro medido (sujeito a incertezas), ou seja, as incertezas multiplicativas e aditivas não precisam ser medidas em tempo real, bastando o conhecimento de seus limitantes para a síntese do filtro.

No Capítulo 4, foram propostas condições para o projeto de filtros para sistemas não lineares quadráticos. Diferentemente de outras estratégias presentes na literatura, o filtro projetado também contém termos quadráticos que ajudam a obter resultados menos conservadores quando comparados a filtros lineares. A utilização do Lema de Finsler e da parametrização apresentada no Lema 4.1 permitiram que fossem obtidas condições na forma de desigualdades matriciais que tornam-se lineares quando parâmetros escalares são fixados.

Em todos os casos a síntese do filtro é realizada a partir das partições das matrizes variáveis de folga, e depende de escalares, que podem ser usados para diminuir o conservadorismo das soluções ao preço do aumento da complexidade computacional associado ao procedimento de busca ou seleção dos parâmetros escalares.

## Perspectivas

Além da extensão imediata para tratar dos problemas equivalentes tendo a norma  $\mathcal{H}_2$  como critério, outros pontos podem ser investigados:

1. Considerar métodos de particionamento do intervalo do atraso variante no tempo para tratar os sistemas apresentados no Capítulo 2. Diversos trabalhos mostraram que o particionamento do atraso pode produzir resultados menos conservadores.
2. Avaliar se o uso de matrizes polinomiais  $T_i(\alpha)$  pode diminuir o conservadorismo do Algoritmo 1 apresentado no Capítulo 2.
3. No Capítulo 3, o projeto de filtros é limitado à forma afim. Uma possível extensão seria a realização da síntese de filtros não lineares, com dependência polinomial nos parâmetros, por exemplo, para sistemas sujeitos a incertezas na medida.
4. Uma extensão interessante e desafiadora para o problema apresentado no Capítulo 4 é o uso de funções de Lyapunov de grau maior que dois nos estados, o que poderia reduzir o conservadorismo das soluções. Além disso, o uso de técnicas baseadas em soma de quadrados para realizar o projeto dos filtros pode ser considerado.
5. O projeto de filtros de ordem reduzida e a inclusão de restrições como saturação na saída medida e chaveamento também são de interesse na continuidade deste trabalho.

## Trabalhos produzidos

### Capítulo 2

- M. J. Lacerda, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for polytopic discrete-time delay systems via LMIs and polynomial matrices,” in *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2011*, Orlando, FL, USA, December 2011, pp. 8225–8230.
- M. J. Lacerda, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres, “Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  dependente de parâmetros para sistemas LPV discretos com atraso nos estados,” in *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Brasil, Setembro 2012, pp. 2425–2431.
- M. J. Lacerda, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for state-delayed discrete-time linear systems via homogeneous polynomial matrices,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 7, no. 1, pp. 125–135, January 2013.

### Capítulo 3

- M. J. Lacerda, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “ $\mathcal{H}_\infty$  parameter-dependent filter design for arbitrarily time-varying LPV systems,” in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, September 2011, pp. 7927–7932.

- M. J. Lacerda, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres, “Filtragem  $\mathcal{H}_2$  dependente de parâmetros para sistemas lineares contínuos com parâmetros variantes no tempo,” in *Anais do X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, São João del-Rei, MG, Brasil, Setembro 2011, pp. 701–706.
- M. J. Lacerda, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres, “Filtragem seletiva  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares com parâmetros variantes contínuos no tempo,” in *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Brasil, Setembro 2012, pp. 4666–4673.
- M. J. Lacerda, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “ $\mathcal{H}_\infty$  LPV filtering for discrete-time linear systems subject to additive and multiplicative uncertainties in the measurement,” in *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, Zurich, Switzerland, July 2013, pp. 1823–1828.
- M. J. Lacerda, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres, “Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LPV sujeitos a incertezas aditivas e multiplicativas nos parâmetros,” in *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, MG, Brasil, Setembro 2014, aceito para publicação.
- M. J. Lacerda, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “A new approach to handle additive and multiplicative uncertainties in the measurement for  $\mathcal{H}_\infty$  LPV filtering,” *International Journal of Systems Science*, to appear, <http://dx.doi.org/10.1080/00207721.2014.911389>.

## Capítulo 4

- M. J. Lacerda, S. Tarbouriech, G. Garcia, and P. L. D. Peres, “ $\mathcal{H}_\infty$  filter design for nonlinear quadratic systems,” in *Proceedings of the 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2013)*, Toulouse, France, September 2013, pp. 634–639.
- M. J. Lacerda, S. Tarbouriech, G. Garcia, and P. L. D. Peres, “ $\mathcal{H}_\infty$  Filter Design for Nonlinear Polynomial Systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 70, pp. 77–84, August 2014.
- M. J. Lacerda, S. Tarbouriech, G. Garcia, and P. L. D. Peres, “Filter design with  $\mathcal{H}_\infty$  performance for discrete-time quadratic systems,” in *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, MG, Brasil, Setembro 2014, aceito para publicação.

## Outros

- M. J. Lacerda, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Filtragem  $\mathcal{H}_2$  para sistemas nebulosos Takagi-Sugeno discretos no tempo,” in *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Fortaleza, CE, Brasil, Outubro 2013.

# Bibliografia

- [1] F. Amato, M. Ariola, C. Consentino, and A. Merola, “Output feedback control of nonlinear quadratic systems,” in *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, USA, December 2010, pp. 3349–3354.
- [2] F. Amato, C. Cosentino, and A. Merola, “On the region of attraction of nonlinear quadratic systems,” *Automatica*, vol. 43, no. 12, pp. 2119–2123, December 2007.
- [3] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino, “Robust  $\mathcal{H}_2$  filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions,” *Systems & Control Letters*, vol. 54, no. 3, pp. 251–262, March 2005.
- [4] M. V. Basin, P. Shi, and D. Calderon-Alvarez, “Central suboptimal  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for nonlinear polynomial systems,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 23, no. 10, pp. 926–939, October 2009.
- [5] P.-A. Bliman, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres, “Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex,” in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, December 2006, pp. 1486–1491.
- [6] R. A. Borges, V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and P.-A. Bliman, “Parameter-dependent  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains,” *Signal Processing*, vol. 88, no. 7, pp. 1801–1816, July 2008.
- [7] R. A. Borges, R. C. L. F. Oliveira, C. T. Abdallah, and P. L. D. Peres, “ $\mathcal{H}_\infty$  filtering of networked systems with time-varying sampling rates,” in *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, St. Louis, MO, USA, June 2009, pp. 3372–3377.
- [8] —, “ $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with bounded time-varying parameters,” *Signal Processing*, vol. 90, no. 1, pp. 282–291, January 2010.
- [9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [10] G. Chesi, Ed., *Domain of Attraction: Analysis and Control via SOS Programming*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2011, vol. 415.
- [11] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino, “Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions,” *Automatica*, vol. 43, no. 2, pp. 309–316, February 2007.

- [12] D. F. Coutinho and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of a class of nonlinear time-delay systems," *Automatica*, vol. 44, no. 8, pp. 2006–2018, August 2008.
- [13] D. F. Coutinho, C. E. de Souza, K. A. Barbosa, and A. Trofino, "Robust linear  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for a class of uncertain nonlinear systems: An LMI approach," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 48, no. 3, pp. 1452–1472, 2009.
- [14] J. Daafouz, J. Bernussou, and J. C. Geromel, "On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 7, pp. 1674–1678, August 2008.
- [15] J. De Caigny, J. F. Camino, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and J. Swevers, "Gain-scheduled  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time polytopic time-varying systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 3, pp. 362–380, March 2010.
- [16] —, "Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 5, pp. 535–558, March 2012.
- [17] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton, "Stability tests for constrained linear systems," in *Perspectives in Robust Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, S. O. Reza Moheimani, Ed. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, vol. 268, pp. 241–257.
- [18] C. E. de Souza, K. A. Barbosa, and A. Trofino, "Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 6, pp. 2110–2118, June 2006.
- [19] D. Du, " $\mathcal{H}_\infty$  filter for discrete-time switched systems with time-varying delays," *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, vol. 4, no. 4, pp. 782–790, November 2010.
- [20] Z. S. Duan, J. X. Zhang, C. S. Zhang, and E. Mosca, "Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain linear systems," *Automatica*, vol. 42, no. 11, pp. 1919–1926, November 2006.
- [21] E. Fridman and U. Shaked, "Delay dependent  $\mathcal{H}_\infty$  control of uncertain discrete delay system," *European Journal of Control*, vol. 11, no. 1, pp. 29–37, 2005.
- [22] H. Gao, J. Lam, P. Shi, and C. Wang, "Parameter-dependent filter design with guaranteed  $\mathcal{H}_\infty$  performance," *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, vol. 152, no. 5, pp. 531–537, September 2005.
- [23] H. Gao, X. Meng, and T. Chen, "A new design of robust  $H_2$  filters for uncertain systems," *Systems & Control Letters*, vol. 57, no. 7, pp. 585–593, July 2008.
- [24] —, "A parameter-dependent approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 10, pp. 2420–2425, November 2008.
- [25] —, " $\mathcal{H}_\infty$  filter design for discrete delay systems: a new parameter-dependent approach," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 6, pp. 993–1005, June 2009.
- [26] H. Gao and C. Wang, "Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 9, pp. 1661–1666, September 2003.

- [27] —, “A delay-dependent approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 6, pp. 1631–1640, June 2004.
- [28] J. C. Geromel, “Optimal linear filtering under parameter uncertainty,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 1, pp. 168–175, January 1999.
- [29] J. C. Geromel, J. Bernussou, G. Garcia, and M. C. de Oliveira, “ $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 5, pp. 1353–1368, May 2000.
- [30] J. C. Geromel and P. Colaneri, “Stability and stabilization of discrete time switched systems,” *International Journal of Control*, vol. 79, no. 7, pp. 719–728, July 2006.
- [31] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and J. Bernussou, “Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 41, no. 3, pp. 700–711, 2002.
- [32] H. Huang and G. Feng, “Improved approach to delay-dependent stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 10, pp. 2152–2159, October 2010.
- [33] T. Iwasaki, “Robust performance analysis for systems with structured uncertainty,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 6, pp. 85–99, March 1996.
- [34] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control — Transactions of ASME*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [35] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [36] J. H. Kim, “Reduced-order delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain discrete-time singular systems with time-varying delay,” *Automatica*, vol. 47, no. 12, pp. 2801–2804, December 2011.
- [37] D. E. Koditschek and K. S. Narendra, “The stability of second order quadratic differential equations.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, no. 4, pp. 783–798, August 1982.
- [38] M. J. Lacerda, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for polytopic discrete-time delay systems via LMIs and polynomial matrices,” in *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2011*, Orlando, FL, USA, December 2011, pp. 8225–8230.
- [39] M. J. Lacerda, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Filragem  $\mathcal{H}_2$  dependente de parâmetros para sistemas lineares contínuos com parâmetros variantes no tempo,” in *Anais do X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, São João del-Rei, MG, Brasil, Setembro 2011, pp. 701–706.
- [40] —, “ $\mathcal{H}_\infty$  parameter-dependent filter design for arbitrarily time-varying LPV systems,” in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, September 2011, pp. 7927–7932.
- [41] —, “Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 5, pp. 1115–1122, May 2011.

- [42] M. J. Lacerda, S. Tarbouriech, G. Garcia, and P. L. D. Peres, " $\mathcal{H}_\infty$  filter design for nonlinear quadratic systems," in *Proceedings of the 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2013)*, Toulouse, France, September 2013, pp. 634–639.
- [43] M. J. Lacerda, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, "Filtragem seletiva  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares com parâmetros variantes contínuos no tempo," in *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Brasil, Setembro 2012, pp. 4666–4673.
- [44] T. D. Larsen, N. A. Andersen, O. Ravn, and N. K. Poulsen, "Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time Kalman filter," in *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, USA, December 1998, pp. 3972–3977.
- [45] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, E. B. Castelan, and S. Tarbouriech, "On the robust stability of neutral systems with time-varying delays," in *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 2005, in CD-rom.
- [46] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres, "Robust  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach," *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 26, no. 3, pp. 357–373, September 2009.
- [47] P. Li, J. Lam, and G. Chesi, "On the synthesis of linear  $\mathcal{H}_\infty$  filters for polynomial systems," *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 1, pp. 31–36, January 2012.
- [48] X. Li, Z. Li, and H. Gao, "Further results on  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time systems with state delay," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 3, pp. 248–270, February 2011.
- [49] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, September 2004, pp. 284–289, <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [50] M. F. Miranda, V. J. S. Leite, and A. F. Caldeira, "Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states," in *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, December 2010, pp. 152–157.
- [51] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and P.-A. Bliman, "Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 6, pp. 1045–1059, June 2009.
- [52] S. K. Nguang and P. Shi, "Delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain time delay nonlinear systems: an LMI approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 133–140, January 2007.
- [53] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. London: Springer-Verlag, 2001, vol. 269.
- [54] R. C. L. F. Oliveira, P.-A. Bliman, and P. L. D. Peres, "Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications," in *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, December 2008, pp. 2226–2231.

- [55] —, “Selective gain-scheduling for continuous-time linear systems with parameters in multi-simplex,” in *Proceedings of the 2009 European Control Conference*, Budapest, Hungary, August 2009, pp. 213–218.
- [56] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres, “Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 7, pp. 1334–1340, July 2007.
- [57] —, “Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design,” *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2620–2626, November 2009.
- [58] R. M. Palhares, C. E. de Souza, and P. L. D. Peres, “Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 8, pp. 1096–1703, August 2001.
- [59] M. M. Peet, A. Papachristodoulou, and S. Lall, “Positive forms and stability of linear time-delay systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 47, no. 6, pp. 3237–3258, January 2009.
- [60] J. Qiu, G. Feng, and J. Yang, “New results on robust energy-to-peak filtering for discrete-time switched polytopic linear systems with time-varying delay,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, no. 9, pp. 795–806, September 2008.
- [61] —, “A new design of delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time T–S fuzzy systems with time-varying delay,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 5, pp. 1044–1058, October 2009.
- [62] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres, “A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 43, no. 5, pp. 371–378, August 2001.
- [63] —, “An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 4, pp. 675–678, April 2002.
- [64] J.-P. Richard, “Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems,” *Automatica*, vol. 39, no. 10, pp. 1667–1694, October 2003.
- [65] M. Sato, “Filter design for LPV systems using quadratically parameter-dependent Lyapunov functions,” *Automatica*, vol. 42, no. 11, pp. 2017–2023, November 2006.
- [66] —, “Gain-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  filters using inexactly measured scheduling parameters,” in *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, MD, USA, June 2010, pp. 3088–3093.
- [67] M. Sato, Y. Ebihara, and D. Peaucelle, “Gain-scheduled state-feedback controllers using inexactly measured scheduling parameters:  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  problems,” in *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, MD, USA, June–July 2010, pp. 3094–3099.
- [68] M. Sato and D. Peaucelle, “Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems,” *Automatica*, vol. 49, no. 4, pp. 1019–1025, April 2013.

- [69] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis, *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998.
- [70] F. O. Souza, R. M. Palhares, and K. A. Barbosa, “New improved delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain neutral systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, no. 12, pp. 1033–1043, December 2008.
- [71] J. F. Sturm, “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones,” *Optimization Methods and Software*, vol. 11, no. 1–4, pp. 625–653, 1999, <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- [72] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Selective  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 19, no. 5, pp. 890–900, October 2011.
- [73] G. Valmórbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia, “State feedback design for input-saturating quadratic systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 7, pp. 1196–1202, July 2010.
- [74] Z. Wu and W. Zhou, “Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for uncertain singular time-delay systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 5, pp. 1234–1241, September 2007.
- [75] L. Xie, L. Lu, D. Zhang, and H. Zhang, “Improved robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain discrete-time systems,” *Automatica*, vol. 40, no. 5, pp. 873–880, May 2004.
- [76] S. Xu, “Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 12, pp. 1853–1859, December 2002.
- [77] R. Yang, H. Gao, and P. Shi, “Delay-dependent  $\mathcal{L}_2$ - $\mathcal{L}_\infty$  filter design for stochastic time-delay systems discrete time-delay systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 1, pp. 1–8, January 2011.
- [78] H. Zhang, Y. Shi, and A. Saadat Mehr, “Robust energy-to-peak filtering for networked systems with time-varying delays and randomly missing data,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 12, pp. 2921–2936, December 2010.
- [79] L. Zhang, P. Shi, E.-K. Boukas, and C. Wang, “Robust  $\mathcal{L}_2$ - $\mathcal{L}_\infty$  filtering for switched linear discrete time-delay systems with polytopic uncertainties,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 3, pp. 722–730, May 2007.
- [80] Q. Zheng and F. Wu, “Regional stabilisation of polynomial non-linear systems using rational Lyapunov functions,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 9, pp. 1605–1615, September 2009.
- [81] X. L. Zhu and G. Yang, “Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay,” in *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, Seattle, WA, June 2008, pp. 1644–1649.

# Apêndice A

## Desigualdades Matriciais Lineares

### A.1 Desigualdades Matriciais Lineares

A forma geral de uma desigualdade matricial linear (LMI) [9] é

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de variáveis do problema e as matrizes simétricas  $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{m \times m}$   $i = 0, \dots, m$ , são dadas. O símbolo da desigualdade em (A.1) significa que  $F(x)$  é definida positiva, o que equivale a dizer que  $u'F(x)u > 0, \forall u \neq 0$ . O objetivo é encontrar escalares  $x_i$  que satisfaçam a restrição em (A.1). A LMI é factível se, e somente se, existir  $x$  tal que  $F(x) > 0$ .

### A.2 Complemento de Schur

O Complemento de Schur é utilizado para converter desigualdades não lineares que definem restrições convexas em LMIs [9].

**Lema A.1** *Considerando as matrizes  $Q = Q'$  e  $R = R'$ , o conjunto,*

$$Q > 0, \quad R > S'Q^{-1}S \quad (\text{A.2})$$

*É equivalente ao conjunto descrito pela LMI*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.3})$$

**Prova:** Seja a matriz  $X$

$$X = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S'Q^{-1}S \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

que é definida positiva se, e somente se,  $Q > 0$  e  $R - S'Q^{-1}S > 0$ . Definindo uma matriz invertível  $T$

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S'Q^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

cujos autovalores são todos iguais a um, tem-se

$$X = T \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} T' \quad (\text{A.6})$$

Portanto conclui-se que (A.3) é verdadeira se, e somente se,  $X > 0$ , ou seja, se (A.2) for satisfeita. ■

Permutando linhas e colunas em (A.3), e seguindo o mesmo procedimento, é possível mostrar que (A.3) é equivalente a

$$R > 0, \quad Q > SR^{-1}S' \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Prova do Lema de Finsler

Esse resumo da prova segue os passos dados em [17].

*i) → ii)*  $w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0$ . Todo  $w$  tal que  $\mathcal{B} w = 0$  pode ser reescrito como  $w = \mathcal{B}^\perp y$ , com  $\mathcal{B} \mathcal{B}^\perp = 0$ . Consequentemente pode-se escrever *i)* como  $y' \mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp y < 0$ , para todo  $y \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$

*ii) → i)* Da mesma forma pré e pós multiplicando *ii)* por  $y'$  e  $y$  respectivamente tem-se *i)*.

*iii), iv) → ii)* Multiplicando-se *iii)* ou *iv)* à direita por  $\mathcal{B}^\perp$  e a esquerda por  $\mathcal{B}^{\perp'}$  obtém-se *ii)*.

*ii) → iii)* Assuma que *ii)* é verificada. Particionando  $\mathcal{B}$  em duas matrizes com *rank* completo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$ , definindo uma matriz  $\mathcal{D} = \mathcal{B}_r' (\mathcal{B}_r \mathcal{B}_r')^{-1} (\mathcal{B}_l' \mathcal{B}_l)^{1/2}$  e aplicando a transformação de congruência, dada por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}' \\ \mathcal{B}^{\perp'} \end{bmatrix} [\mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B}] \begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{B}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}' \mathcal{Q} \mathcal{D} - \mu I & \mathcal{D}' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \\ \mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{Q} \mathcal{D} & \mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \end{bmatrix} < 0$$

Como o segundo bloco da diagonal é negativo, por definição, então existe um  $\mu$  suficientemente grande tal que a matriz é definida negativa.

*iii) → iv)* Basta escolher  $\mathcal{X} = \frac{-\mu}{2} \mathcal{B}'$

### A.4 Produtos Cruzados

**Lema A.2** *Sejam  $X$  e  $Y$  matrizes de dimensões apropriadas e  $\xi$  um escalar positivo, então a seguinte majoração é válida*

$$X'Y + Y'X \leq \frac{1}{\xi} X'X + \xi Y'Y \quad (\text{A.8})$$

**Prova:**

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\xi}} X - \sqrt{\xi} Y \right)' \left( \frac{1}{\sqrt{\xi}} X - \sqrt{\xi} Y \right) \geq 0$$

ou ainda

$$\frac{1}{\xi} X'X + \xi Y'Y - X'Y - Y'X \geq 0$$

■