

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: AUTOMAÇÃO

**BUSCA TABU APLICADA AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO
DE FACILIDADES
COM RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE**

Eliane Aparecida Ducati

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Amaral Armentano

Banca Examinadora:

Roberto Diéguez Galvão - UFRJ

Franklina M. Bragion de Toledo – USP/São Carlos

Paulo Morelato França – FEEC/UNICAMP

Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas, São Paulo

- Outubro 2003 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D855b	Ducati, Eliane Aparecida Busca tabu aplicada ao problema de localização de facilidades com restrições de capacidade / Eliane Aparecida Ducati.--Campinas, SP: [s.n.], 2003. Orientador: Vinícius Amaral Armentano Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. 1. Heurística. 2. Otimização combinatória. I. Armentano, Vinícius Amaral. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.
-------	--

*Aos meus pais João Pedro e Filomena,
ao André,
com todo o meu amor.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho. Em especial:

- ao Professor Vinícius A. Armentano pelo incentivo à pesquisa, pela orientação constante e pela amizade e paciência;
- aos meus queridos pais que tanto me incentivaram;
- ao André R. Monsanto por seu amor e apoio irrestritos;
- à Olinda e Sérgio pelo carinho e estímulo;
- ao Professor Minghe Sun do College of Business - University of Texas - San Antonio pela inestimável colaboração;
- à Franklina por toda a ajuda, seja na programação ou discussão de artigos;
- à Jeanne pela ajuda na programação e por desvendar os "mistérios" do CPLEX;
- ao Olinto por deixar meus programas mais "rápidos";
- a todos os amigos que estiveram ao meu lado;
- à Márcia Fracaro por toda a atenção e ajuda;
- aos professores e funcionários do Densis, por todo apoio e estímulo;
- ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de localizar facilidades e designar clientes a estas, de forma a minimizar o custo de instalação das facilidades e o custo de transporte entre facilidades e clientes. Cada cliente tem uma demanda que deve ser atendida e cada facilidade tem restrição de capacidade. Um algoritmo de busca tabu é proposto para a resolução do problema. A história da busca tabu, usada para guiar o processo de busca, é representada através de memórias de curto e longo prazo. A eficácia de estratégias sugeridas para diversificação e intensificação, associadas à memória de longo prazo, é verificada experimentalmente. O desempenho do algoritmo de busca tabu é testado computacionalmente em problemas da literatura com soluções ótimas conhecidas e em novos problemas gerados aleatoriamente. Uma heurística Lagrangiana proposta na literatura é implementada e seu desempenho é comparado com o algoritmo de busca tabu.

- Palavras-chave: Localização de Facilidades, Busca Tabu, Heurísticas, Otimização.

ABSTRACT

This work addresses the problem of locating facilities and assigning clients to them in such a way as to minimize the cost of installing the facilities and the transportation cost between facilities and clients. Each client has a demand that must be met and each facility has a limited capacity. A tabu search algorithm is proposed for solving this problem. The history of the tabu search, used to guide the search process, is represented by short and long term memories. The efficacy of the suggested strategies for diversification and intensification, associated to the long term memory, is verified experimentally. The performance of the tabu search algorithm is tested computationally in instances from the literature with known optimal solutions and in new instances randomly generated. A Lagrangian heuristic proposed in the literature is implemented and its performance is tested against the tabu search algorithm.

- Keywords: Facility Location, Tabu Search, Lagrangian Relaxation, Heuristic.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO.....	4
1.1 Introdução.....	4
1.2 Modelos e teoria de localização	4
1.2.1 Perguntas chaves para problemas de localização	4
1.2.2 Das facilidades e dos clientes.....	5
1.2.3 Modelos e problemas	7
1.3 O problema abordado	10
1.3.1 Modelo matemático.....	11
1.3.2 Algoritmos exatos e heurísticas utilizadas na resolução dos problemas	13
CAPÍTULO 2 - BUSCA TABU - IMPLEMENTAÇÃO	16
2.1 Introdução.....	16
2.2 Busca tabu e problemas de localização	16
2.3 Algoritmo de busca tabu para o problema de localização capacitado.....	19
2.3.1 Soluções factíveis e infactíveis	19
2.3.2 Movimentos e vizinhança.....	20
2.3.3 Memorização de soluções visitadas	21
2.3.4 Restrição e duração tabu	23
2.3.5 Critério de aspiração.....	24
2.3.6 Memória de curto prazo	24
2.3.7 Memória de longo prazo	25

2.4 Algoritmo de busca tabu	29
CAPÍTULO 3 - TESTES E RESULTADOS COMPUTACIONAIS	33
3.1 Introdução.....	33
3.2 Um estudo sobre relaxações Lagrangianas aplicadas ao problema.....	33
3.3 Algoritmos.....	37
3.3.1 Procedimentos ADD e DROP	37
3.3.2 Heurística Lagrangiana	39
3.4 Problemas testes	42
3.4.1 Problemas testes da literatura.....	42
3.4.2 Geração de novos problemas testes.....	42
3.5 Comportamento de BT em relação às memórias	44
3.5.1 Resultados obtidos para os problemas testes da literatura	45
3.5.2 Resultados obtidos para os problemas do conjunto A.....	47
3.5.3 Resultados obtidos para os problemas do conjunto B.....	48
3.5.4 Resultados obtidos para os problemas do conjunto C.....	49
3.5.5 Número de iterações para obtenção do ótimo	50
3.6 Desempenho de BT em relação à heurística Lagrangiana	51
3.6.1 Desempenho BT x heurística Lagrangiana para os problemas testes da literatura	51
3.6.2 Desempenho BT x heurística Lagrangiana para os problemas testes gerados aleatoriamente.....	52
3.7 Desempenho de BT em relação ao método do volume.....	54
CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58

LISTA DE FIGURAS

1.1 - Custos x Número de Facilidades.....	11
---	----

LISTA DE TABELAS

2.1 - Estrutura para armazenamento dos dados.....	22
3.1 - Dados de geração dos problemas teste.....	43
3.2 - Problemas testes com $n = 50$	44
3.3 - Problemas testes com $n = 1000$	45
3.4 - Resultados obtidos para problemas testes da literatura com $n = 50$	46
3.5 - Tempos para problemas testes da literatura com $n = 50$	46
3.6 - Resultados obtidos para problemas testes da literatura com $n = 1000$	46
3.7 - Tempos para problemas testes da literatura com $n = 1000$	47
3.8 - Resultados obtidos para problemas do conjunto A.....	47
3.9 - Tempos para problemas do conjunto A.....	48
3.10 - Resultados obtidos para problemas do conjunto B.....	48
3.11 - Tempos para problemas do conjunto B.....	49
3.12 - Resultados obtidos para problemas do conjunto C.....	49
3.13 - Tempos para problemas do conjunto C.....	49
3.14 - Número de iterações - problemas pequenos e médios.....	50
3.15 - Número de iterações - problemas maiores.....	50

3.16 - Problemas testes da literatura com $n = 50$	52
3.17 - Problemas testes da literatura com $n = 1000$	52
3.18 - Problemas testes conjunto A.....	52
3.19 - Problemas testes conjunto B.....	52
3.20 - Problemas testes conjunto C.....	53

INTRODUÇÃO

Os seres humanos têm resolvido problemas de localização desde a pré-história quando procuravam cavernas melhores posicionadas para viverem. Do sucesso obtido em tal empreitada, dependiam as vidas de toda uma família. Na atualidade, os problemas não são tão simples e nem se restringem apenas à moradia, mas uma pergunta ainda permanece: o que procurar ao construir uma casa? Certamente a resposta será: localização, localização e localização.

A justificativa para esta resposta é que a comunidade eleita para o indivíduo viver e a localização dentro desta comunidade provavelmente afetam a qualidade de vida, podendo agravar ou amenizar problemas existentes no cotidiano dos seres humanos. Um exemplo disto ocorre quando a escolha é viver próximo a uma escola de ensino fundamental. Neste caso, as crianças não necessitam de um ônibus até a escola. Se a escolha é a proximidade de um centro comercial desfruta-se de muito conforto para realizar as compras. Por outro lado, se a casa está localizada próxima a uma indústria, barulho, trânsito e poluição afetam a qualidade de vida.

Decisões de localização também estão presentes no contexto de uma variedade de problemas no setor público ou privado. Quase todas as empresas já se depararam com o problema de localização em um ou outro período de sua história. Indústrias devem determinar a localização de suas fábricas, filiais, escritórios, postos de vendas, depósitos ou armazéns. Agências governamentais devem alocar escritórios e outros serviços públicos incluindo escolas, creches, hospitais, postos de saúde, bombeiros, centrais de ambulâncias, postos policiais, pontos de ônibus, rodoviárias, distribuidores de água, de energia, de telecomunicações e de diversos outros serviços. Estas entidades que fornecem produtos ou serviços são chamadas facilidades.

À medida que a concorrência mundial ganha novas e maiores proporções, grandes empresas procuram modernizar-se para sobreviverem às mudanças. Em muitos casos, a habilidade de uma empresa em produzir e comercializar seus produtos ou de uma agência em distribuir produtos com alta qualidade em seus serviços, depende em grande parte, dentre outros fatores, da localização de suas fábricas, filiais e depósitos, em relação a outras facilidades e a seus clientes. Assim, largas somas de capital têm sido investidas em pesquisas que possam facilitar a tomada de importantes

decisões com relação à localização das facilidades.

A localização de uma facilidade afeta diretamente o custo de todos os produtos e/ou serviços envolvidos, seja pela distância da facilidade aos clientes ou pelo custo de instalação dessa facilidade em determinado local. Uma localização inadequada pode acarretar em aumento nos preços, perda de competitividade e prejuízos. Nesse sentido, grandes esforços são despendidos para aumentar a área de atuação dessas empresas frente a um mercado consumidor cada vez mais exigente sem, contudo, gerar aumento nos custos operacionais. O objetivo é satisfazer aos anseios dos clientes com serviços eficazes, com padrão de qualidade, tempo reduzido e a um preço competitivo.

Modelos de localização têm sido estudados de forma a suprir as necessidades dessas empresas, mas em sua maioria os problemas a elas relacionados são freqüentemente difíceis de resolver, pelo menos otimamente, por serem de natureza combinatorial e por envolverem uma série de fatores, tais como, aspectos políticos, econômicos e sociais de determinada região, mercado consumidor, fatores ecológicos, distâncias, investimentos, custos gerais, rotas de transporte, concorrência, proximidade a áreas de recreação e finalmente opinião pública.

A maior parte dos problemas de localização de grandes dimensões é computacionalmente intratável através de algoritmos exatos, e por isto recorre-se a métodos heurísticos. De fato, a complexidade computacional dos modelos de localização é a maior razão para que o interesse na formulação e implementação de tais modelos não tivesse sido difundido antes do advento de computadores de alta velocidade.

Os modelos de localização são altamente específicos o que também contribui para que esses modelos não sejam amplamente utilizados dentro do ambiente das empresas. Isto é, sua estrutura (objetivos, restrições e variáveis) é determinada pelas características de cada empresa. Conseqüentemente, não existe um modelo geral de localização que seja apropriado a todas as aplicações existentes.

Deve ainda ser levado em consideração que modelos para o setor privado, geralmente, não se adaptam ao setor público e vice-versa. Tal fato pode ser explicado dentro de um conjunto de diferenças básicas entre esses dois tipos de empresas. No setor privado, os custos de investimentos e os benefícios podem ser mensurados em unidades monetárias. Além disso, empresa e investidores têm o mesmo objetivo comum, o lucro. Por outro lado, parte das empresas do setor público não trabalha com unidades monetárias para avaliar seus custos e benefícios. Por exemplo,

na localização de um depósito de lixo há um custo ambiental envolvido que dificilmente poderá ser avaliado monetariamente. No caso da localização de um hospital, o dinheiro vale a vida salva. Em escolas públicas os benefícios podem ser avaliados como o número de alunos que concluem os seus estudos. Nestes casos e em tantos outros, avaliar monetariamente os custos e os benefícios, não é tarefa simples. Pode-se dizer também que a empresa (poder público) e os investidores (população que paga pelos serviços) muitas vezes não têm os mesmo objetivos, uma vez que apenas uma parcela da população é atendida por determinada facilidade enquanto toda a população paga a conta pelo serviço. É mais fácil assim alocar facilidades privadas do que públicas.

Este trabalho propõe um algoritmo de busca tabu para a resolução do problema de localização com restrições de capacidade. O intuito é mostrar que a busca tabu pode ser superior às heurísticas Lagrangianas, largamente utilizadas neste problema desde a década de 80. Embora busca tabu tenha sido aplicada com sucesso a diversos problemas de otimização combinatória, a sua utilização na resolução deste problema é muito restrita.

É preciso lembrar que o termo "ótimo" empregado neste texto possui sentido estritamente matemático. Isto é, ele define a qualidade alcançada dentro de um objetivo determinado, que depende da localização das facilidades.

Para descrever o problema com maiores detalhes, assim como os métodos de solução propostos, este trabalho está dividido em quatro capítulos apresentados sucintamente a seguir.

O primeiro capítulo aborda os problemas de localização de uma forma geral e mais especificamente o problema com restrições de capacidade. Uma revisão bibliográfica é apresentada. O segundo capítulo descreve os fundamentos básicos da busca tabu e faz uma revisão bibliográfica das aplicações desta meta-heurística para esse problema. No terceiro capítulo são apresentados os resultados computacionais em relação à busca tabu e os métodos implementados para fins de comparação da qualidade das soluções obtidas. Por fim o quarto capítulo contém as conclusões e propostas futuras.

CAPÍTULO 1 - PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO

1.1 Introdução

Problemas de localização de facilidades constituem uma área com diversas aplicações e vasta literatura (Daskin, 1995; Mirchandani e Francis, 1990). De forma geral, estes problemas envolvem a localização de um número fixo ou variável de facilidades e designação de demandas de clientes a facilidades de modo a minimizar custos fixos e variáveis. Neste capítulo, apresenta-se uma visão geral da área, com ênfase em alguns problemas clássicos. A seguir, é apresentada uma descrição detalhada do problema de localização de facilidades com restrições de capacidade, objeto de estudo neste trabalho.

1.2 Modelos e teoria de localização

1.2.1 Perguntas chaves para problemas de localização

Modelos matemáticos de localização são construídos para abordar as seguintes questões chaves:

- Quantas facilidades devem ser construídas?
- Onde cada facilidade deve ser localizada?
- Qual deve ser o tamanho de cada facilidade?
- Como alocar demanda de clientes a facilidades?

As respostas para essas questões não são simples e dependem intimamente do contexto no qual o problema está inserido e dos objetivos que se pretenda alcançar. Em alguns casos, como o de localização de ambulâncias, espera-se alocar as facilidades o mais próximo possível dos centros de demanda. No caso de um depósito de lixo, ao contrário, o objetivo é que as facilidades sejam

alocadas o mais longe possível dos centros de demanda.

O número de facilidades a serem localizadas, assim como o tamanho de cada uma dessas facilidades, é em geral, um equilíbrio entre custo e serviços. Em muitos casos, a qualidade dos serviços melhora com o aumento do número de facilidades alocadas, mas o custo destes serviços também aumenta. Por exemplo, é preferível um número maior de ambulâncias, já que a probabilidade de haver uma ambulância próxima à chamada pelo serviço aumenta de acordo com o número de veículos disponíveis. Além disso, não há significativo aumento nos custos quando existem mais bases em diferentes regiões do que quando todas as ambulâncias estão concentradas em um mesmo local (Daskin, 1995).

Problemas de localização também estão relacionados com a alocação de demandas às facilidades. Em alguns casos, é importante que a demanda não seja dividida entre as facilidades, em outros esta divisão é necessária. Por exemplo, uma loja de varejo pode ser suprida a partir de um único depósito. Em outros casos, como nos serviços de ambulâncias, a demanda pode ser atendida por qualquer facilidade disponível. Modelos matemáticos de localização de facilidades devem ser capazes de refletir essas diferentes políticas de alocação de demanda, possibilitando assim a resolução de todos esses diferentes problemas.

1.2.2 Das facilidades e dos clientes

Quando se discute decisões de localização, as facilidades são usualmente caracterizadas por suas capacidades, áreas, projeto, eficiência na produção, custos dos produtos, como funções das quantidades produzidas e das tecnologias empregadas. No entanto, tais características são freqüentemente desconsideradas em muitos modelos de decisão de localização.

Em diversos modelos propostos na literatura a noção de capacidade de uma facilidade é essencialmente ignorada e as facilidades são implicitamente assumidas como pontos no espaço onde são localizadas. Em diversas aplicações, contudo, este é um fator muito importante que permite avaliar a produtividade e os custos envolvidos em diferentes níveis de produção.

Uma das características que diferenciam problemas de localização é o número de facilidades a serem localizadas. Em alguns problemas, tais como P -medianas, P -centros e máximo recobrimento, o número de facilidades a serem alocadas é exógeno. Em outros casos, como os problemas de recobrimento e localização de facilidades, o número de facilidades é endógeno.

Outro aspecto a ser considerado em relação às facilidades é sua divisão em grupos de facilidades desejadas e indesejadas. As facilidades desejadas são aquelas que trazem diretamente alguma vantagem ao cliente pela sua proximidade, as indesejadas, ao contrário resultam em problemas. Algumas facilidades são tipicamente indesejadas, dentre elas encontram-se as penitenciárias, depósitos de lixo, fábricas barulhentas e poluidoras, e tantas outras. Há ainda um terceiro grupo formado pela mescla de facilidades que trazem vantagens e desvantagens, nestas poderíamos incluir, por exemplo, as delegacias. Toda a população quer que na proximidade de sua residência haja um posto policial para que a segurança seja mais constante, porém ninguém quer ser vizinho deste posto (Erkut e Neuman, 1989).

No caso das facilidades indesejadas é preciso que haja um equilíbrio entre objetivos distintos e conflitantes, o que caracteriza um problema multi-objetivo (Eaton e Daskin, 1980). Exemplos de objetivos no caso de facilidades indesejadas são: maximização das distâncias entre as facilidades e os clientes, minimização do número de pessoas afetadas e minimização dos custos envolvidos em transporte e localização.

Um coadjuvante no problema de localização, o cliente, também deve ser analisado. Os clientes são também representados por pontos discretos no espaço, caracterizados por uma demanda, muitas vezes variante no tempo. De fato, a noção de cliente parece mais complicada podendo afetar uma decisão de localização de diversas maneiras.

O problema de alocação de demandas a facilidades é uma questão crítica em modelos de localização. Diversos modelos tratam a demanda como dada e consideram que ela independe do nível de serviço de uma empresa, ou seja, que ela é inelástica. No caso de um consumidor que sai para fazer suas compras, por exemplo, a escolha do melhor local para comprar, depende de uma série de fatores tais como localização do centro comercial, número de lojas existentes neste centro, variedade das lojas, etc. Neste caso, a demanda é elástica já que a decisão do consumidor depende do nível do serviço (Perl e Ho, 1990). Para o problema aqui estudado a demanda é tratada como inelástica e conhecida inicialmente.

Nos problemas onde não se considera a existência de restrições de capacidade das facilidades ou da rede de transporte, as demandas são designadas à facilidade mais próxima (em termos de distância, tempo ou custo), regra conhecida como “regra simples de designação”. Em alguns casos, entretanto, esta regra não é muito conveniente. Isto acontece, por exemplo, quando o problema envolve múltiplos produtos e diversos tipos de serviços, e nem todos os serviços ou

produtos estão associados a todas as facilidades. Neste caso, a designação simples não pode ser aplicada. Esta também não é válida para os problemas capacitados quando a facilidade mais próxima já está sobrecarregada em sua máxima capacidade. Neste caso, o cliente não seria alocado à facilidade mais próxima, mas sim a uma segunda facilidade ou à outra disponível. Assim, a designação de um cliente depende do estado do sistema.

Ainda no contexto dos problemas capacitados, a divisão da demanda entre facilidades muitas vezes torna-se necessária. Se isto não é permitido em um problema particular, restrições deverão ser incluídas no modelo para forçar que toda a demanda de um cliente seja atendida por uma única facilidade. Isso pode acarretar que algumas demandas sejam designadas a facilidades mais longínquas. Outros modelos devem permitir que uma fração da demanda seja atendida pela facilidade mais próxima e a demanda restante seja atendida por facilidades mais remotas, quando as mais próximas estiverem sem capacidade disponível.

1.2.3 Modelos e problemas

Outra diferença entre os modelos matemáticos de localização está na maneira como as demandas e a localização das facilidades candidatas são representadas. Nos modelos planares, as demandas podem ocorrer em qualquer lugar de um plano. Em tais problemas as facilidades também podem ser alocadas, por sua vez, em qualquer lugar de um plano. Estes modelos contrastam com os modelos de localização em redes nos quais as demandas e as facilidades ocorrem em um grafo composto de nós e arcos. Assume-se, usualmente, que a demanda pode ser localizada apenas nos nós da rede embora alguns modelos de localização em redes permitam que as demandas sejam localizadas também nos arcos. Neste caso, as facilidades são designadas aos nós ou arcos da rede. Problemas que envolvem sistemas de distribuição de energia e telecomunicações são expressos essencialmente como árvores.

Uma outra diferença entre modelos encontrada na literatura refere-se a níveis hierárquicos ou nível único. Em muitos sistemas existe uma hierarquia entre as facilidades podendo mesmo haver fluxo entre elas. Por exemplo, em um sistema nacional de saúde, os postos de saúde dos bairros realizam os primeiros atendimentos em seus pacientes. Pode ser preciso, em uma segunda etapa, que esses pacientes sejam encaminhados a um hospital nas proximidades. Este por sua vez pode reenviar o paciente para um outro hospital especializado, se houver necessidade. Neste caso,

os serviços provêm de um nível mais baixo (postos de saúde) podendo ser remanejados a níveis mais altos.

A distância cliente-facilidade também é um diferencial importante entre os modelos de localização. Em alguns problemas de localização conhecidos como problemas de distância máxima, por exemplo, uma distância máxima (*maximum*) é dada *a priori*. Este é o caso de problemas que envolvem, por exemplo, estudantes que necessitam andar até a sua escola. O transporte deve existir para aqueles que vivam numa distância maior. No setor privado alguns negócios dependem de um tempo pré-determinado (por exemplo, pizza em 20 minutos). No primeiro caso, a prioridade é localizar as escolas de forma a minimizar o número de estudantes que precisem usar ônibus. No segundo exemplo, uma cadeia de pizza precisa localizar suas lojas de forma a maximizar o número de clientes potenciais distantes 20 minutos da loja. Na literatura de localização de facilidades essas distâncias máximas definidas *a priori* são conhecidas como distâncias de recobrimento (Toregas *et. al.*, 1971).

Dentro deste contexto estão os problemas de recobrimento de conjuntos (set covering), máximo recobrimento (maximum covering) e máximo recobrimento esperado (maximum expected covering) - variantes do problema de recobrimento (Church e Reville, 1974). Nos problemas de recobrimento os clientes são geralmente, designados às facilidades mais próximas. Desta forma, julga-se adequado atender (cobrir) o cliente se o mesmo estiver dentro de uma dada distância da facilidade e considera-se o atendimento inadequado se a distância excede um valor crítico estipulado. O problema de recobrimento de conjuntos talvez seja o mais simples dentre os modelos de localização de facilidades (Daskin, 1995). O objetivo neste caso é encontrar um conjunto de facilidades de mínimo custo dentre uma infinidade de facilidades candidatas, tal que cada cliente seja atendido por pelo menos uma facilidade. Uma das questões envolvidas no modelo de recobrimento de conjuntos é que o número de facilidades necessárias para atender toda a demanda muitas vezes excede o número realmente possível de facilidades a serem construídas (por questões financeiras ou outras razões). Além disso, o modelo de recobrimento de conjuntos trata todos os nós de demanda identicamente, ou seja, são igualmente importantes para o modelo nós cuja demanda seja de 10 chamadas de serviço por ano ou de 10.000 por ano. O modelo de máximo recobrimento abrange esta nova classe de problemas, maximizando o número de clientes atendidos através de um número fixo de locais candidatos a facilidades, permitindo que nem toda a demanda seja atendida. O modelo de máximo recobrimento esperado, por sua vez, busca contornar a

possibilidade de que facilidades estejam com sua capacidade de atendimento esgotada quando um cliente é designado a elas. Neste caso também se considera um número fixo de facilidades a serem localizadas de forma a maximizar a demanda a ser coberta por uma facilidade disponível. Uma variante dos problemas de recobrimento é o problema de P -centros (Hakimi, 1964, 1965), cujo objetivo é localizar p facilidades tais que a máxima distância (ou tempo) de qualquer demanda para sua facilidade mais próxima seja mínima. Este modelo também é conhecido como *minmax*.

Uma segunda classe de problemas que também trabalha com o fator distância cliente-facilidade é a classe de modelos de distância total ou média. Muitas situações de planejamento de localização de facilidades nos setores público e privado tratam da distância total viajada entre as facilidades e os nós de demanda. Um exemplo no setor privado pode ser a localização de facilidades de produção que recebam sua matéria prima de fontes estabelecidas através de entrega por caminhões, por exemplo. No setor público pode ser necessário localizar uma rede de provedores de serviços de forma a minimizar a distância total que os consumidores precisam atravessar para encontrar a facilidade mais próxima.

No contexto dos modelos de distância total ou média estão os problemas de P -medianas e os problemas de custo fixo (fixed charge facility location problem). O problema de P -medianas consiste em encontrar a localização de p facilidades em uma rede tal que o custo total (soma dos custos de atendimento dos clientes) seja minimizado (Hakimi, 1964, 1965). O custo de atendimento de cada cliente é dado pelo produto da demanda do cliente versus a distância cliente-facilidade mais próxima. Em muitos casos, é necessário considerar-se ainda a existência de um custo fixo associado à abertura das facilidades. Na prática, os problemas de custo fixo desempenham este papel, minimizando a soma dos custos fixos e dos custos de atendimento de demanda, estes últimos iguais aos custos de atendimento para o problema das P -medianas. A diferença chave entre os dois modelos está exatamente na existência destes custos fixos no último modelo e na ausência de um número fixo de facilidades como ocorre no primeiro.

A terceira classe de modelos aqui abordada abrange dois modelos para a localização de facilidades indesejadas. O primeiro deles é o modelo de dispersão (Kuby, 1987), que procura localizar um dado número de facilidades de modo a maximizar a distância mínima entre as próprias facilidades. Aplicações potenciais deste modelo incluem a localização de lojas franqueadas, por exemplo, onde uma maior distância reduz a competição entre elas. O segundo modelo busca maximizar a distância entre os nós de demanda e os nós das facilidades mais próximas. Tais

modelos estão presentes em problemas de localização de presídios, depósitos de lixo, usinas nucleares, dentre outros. Este modelo é similar ao modelo de P -medianas, porém neste caso é esperada uma maximização da função objetivo.

Uma quarta classe de problemas que leva em consideração a distância cliente-facilidade é a classe dos problemas de localização de facilidades (Chan, 2001; Daskin, 1995). Esses problemas são abordados com detalhes na seção 1.3.

Para a avaliação de quão próxima ou distante uma facilidade está de um cliente utiliza-se uma métrica para representar a distância. Para modelos de localização em redes usa-se geralmente a menor distância entre um par de pontos usando os arcos da rede. Em problemas de localização planares pode-se empregar uma das três métricas a seguir:

a) Manhattan

$$d[(x_i, y_i); (x_j, y_j)] = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$$

b) Euclidiana

$$d[(x_i, y_i); (x_j, y_j)] = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\}^{0.5}$$

c) Distância métrica l_p

$$d[(x_i, y_i); (x_j, y_j)] = \{(|x_i - x_j|^p + |y_i - y_j|^p)\}^{1/p}$$

tal que $d[(x_i, y_i); (x_j, y_j)]$ é a distância entre os pontos i e j e (x_i, y_i) representa a coordenada do ponto i .

Quando $p = 2$ no caso (c) a distância métrica l_p torna-se idêntica à distância Euclidiana e quando $p = 1$ tem-se a distância Manhattan (Daskin, 1995).

1.3 O problema abordado

O problema de localização de facilidades com restrições de capacidade (PLFC) consiste em determinar o número e os locais de instalação de facilidades de modo a minimizar o custo total, satisfazendo a demanda e respeitando as capacidades das facilidades. O custo total é composto de

custos fixos para localização das facilidades e custos de transporte para a distribuição dos produtos entre as facilidades e os clientes.

A Figura 1.1 (Daskin, 1995) mostra um exemplo de como os custos se relacionam com o número de facilidades existentes. Inicialmente o custo total apresenta um declínio em função da redução do custo de transporte, o que acontece quando novas facilidades são abertas. Por outro lado, à medida que mais facilidades são abertas este custo sofre um acréscimo proporcional ao número de facilidades abertas já que existe um custo fixo associado à abertura de novas facilidades.

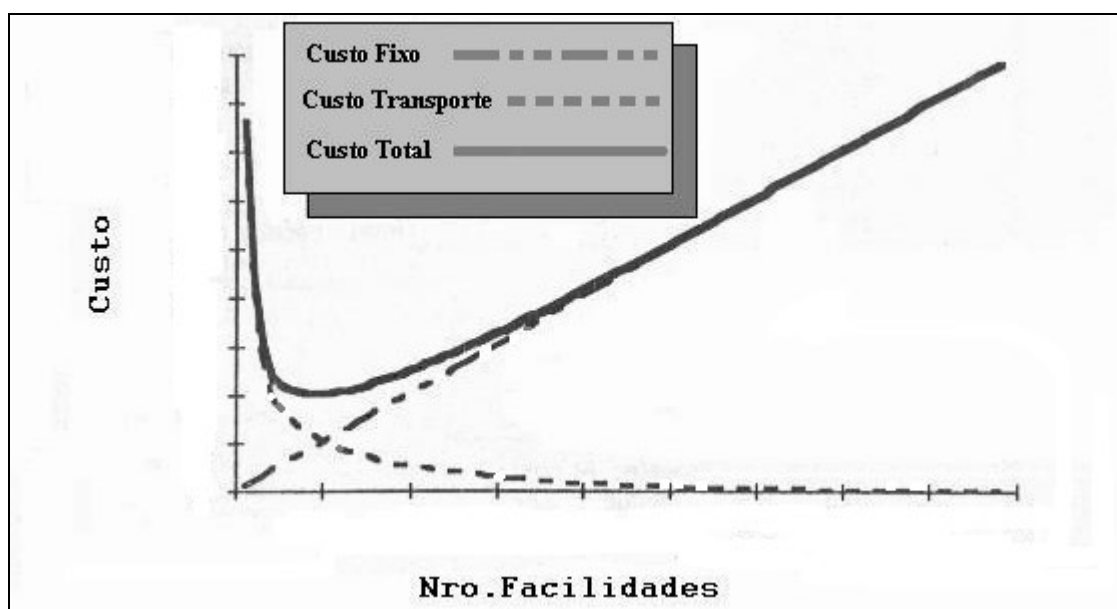


Figura 1.1 _ Custos x Número de Facilidades.

1.3.1 Modelo matemático

O problema tradicional de localização de facilidades pode ser definido por um conjunto m de candidatos a instalação de facilidades e um conjunto n de clientes. Temos assim uma rede com $m+n$ nós e $m.n$ arcos, (Cornuejols *et al.*, 1990; Daskin, 1995). Nesta formulação, j representa o índice relacionado aos clientes e i representa as facilidades.

As variáveis de decisão são representadas por y_i e x_{ij} sendo que y_i é uma variável binária associada à facilidade i neste modelo, tal que $y_i = 1$ se a facilidade é aberta e 0, caso contrário. A fração de demanda do cliente j atendida pela facilidade i é representada por x_{ij} .

O custo fixo para abertura de uma facilidade i é designado por f_i . Por sua vez, c_{ij} está associado ao custo de atendimento do cliente j através da facilidade i . Assume-se que $c_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ e $f_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.

No problema capacitado as facilidades têm capacidades representadas por a_i e as demandas dos clientes por b_j . Deseja-se encontrar uma solução que satisfaça as demandas dos clientes, respeitando as capacidades das facilidades de forma a minimizar o custo total.

O problema pode então ser modelado pelo seguinte problema de Programação Inteira Mista:

$$Z = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n b_j x_{ij} \leq a_i y_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$y_i \text{ inteiro} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (5)$$

A restrição (1) diz respeito às demandas e garante que toda a demanda de cada cliente seja atendida. A restrição (2) é uma restrição de capacidade, garantindo que não sejam violadas as capacidades de cada facilidade. As restrições (3) e (4) são restrições de não-negatividade e (5) diz respeito à integralidade.

No problema de localização não capacitado, a restrição (2) deve ser substituída por $x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j$.

1.3.2 Algoritmos exatos e heurísticas utilizadas na resolução dos problemas

O problema de localização de facilidades com restrições de capacidade tem sido extensivamente abordado na literatura. Numerosas heurísticas e algoritmos exatos têm sido propostos ao longo do tempo. Kuehn e Hamburger (1963) desenvolveram o primeiro método heurístico conhecido como método das duas fases. Este método foi utilizado primeiramente para o caso não capacitado sendo atualizado mais tarde para que seu uso também fosse possível para o caso capacitado. A primeira das fases é um método guloso, chamado ADD (Kuehn e Hamburger, 1963) que inicia o processo com todas as facilidades fechadas e vai adicionando (abrindo) facilidades que resultem em um máximo decréscimo da função objetivo (custo total). Este algoritmo é finalizado se nenhuma facilidade a ser adicionada pode melhorar essa função. A segunda fase é um método de busca local no qual uma facilidade aberta e uma fechada podem ser trocadas, caso reduzam o custo total. Um outro método guloso, chamado DROP (Feldman *et al.*, 1966), também pode ser utilizado como uma primeira fase. Este método ao contrário do ADD, inicia com todas as facilidades abertas e vai fechando-as.

Essas heurísticas simples são a base para muitas heurísticas sofisticadas e provêm uma solução inicial para diversos algoritmos. Jacobsen (1983) generaliza para o PLFC, métodos propostos para o caso não capacitado, tais como os procedimentos ADD e DROP. Domschke e Drexl (1985) estendem sua pesquisa para o caso onde as facilidades têm capacidades e/ou custos fixos distintos (ver seção 3.3.1).

Diversas heurísticas Lagrangianas com otimização por subgradiente têm sido aplicadas a problemas de localização. Beasley (1993) apresenta uma revisão destas heurísticas e apresenta um modelo de localização generalizado que engloba os seguintes problemas: P -medianas, localização de facilidades não capacitadas, localização de facilidades capacitadas, e localização de facilidades capacitadas onde o cliente é atendido a partir de uma única facilidade. O autor relaxa as restrições (1) e (2), e a resolução do problema Lagrangiano resultante é trivial. Uma série de 45 problemas com tamanho máximo de 1000 clientes e 500 facilidades disponíveis na *OR-Library* (Beasley, 1990) foram testados para o PLFC. Foram gerados ainda 150 problemas de acordo com Cornuejols *et al.* (1991) com 50 facilidades e 50 clientes. Os resultados comprovam a eficiência do método em termos da qualidade das soluções e tempo computacional.

Cornuejols *et al.* (1991) apresentam um estudo teórico excepcional sobre todas as relaxações Lagrangianas possíveis para o PLFC, mostrando as relações de dominância ou de igualdade dos limitantes inferiores gerados pelas relaxações.

Lorena e Senne (1999) propõem uma heurística Lagrangiana para os problemas de localização não capacitado e capacitado. Para o PLFC, relaxam-se as restrições (1) e o problema Lagrangiano resultante é decomposto em um problema da mochila contínuo para cada facilidade, resolvido em tempo linear (Martelo e Toth, 1990). O vetor de variáveis duais no problema Lagrangiano é multiplicado por uma variável e uma busca unidimensional é realizada nesta variável nas iterações iniciais do método do subgradiente. Segundo os autores, um bom valor para esta variável, reduz a oscilação no processo de otimização do problema dual causado pelo método do subgradiente. Testes computacionais para o problema capacitado foram realizados em problemas testes com 1000 clientes e 100 facilidades disponíveis na *OR-Library* (Beasley, 1990). Os autores comparam a versão do problema Lagrangiano com a inclusão desta busca unidimensional com a versão tradicional onde esta variável tem valor igual a 1. A qualidade das soluções obtidas é similar, mas a primeira versão apresenta redução de tempo computacional de cerca de 30% em relação à segunda versão.

Barahona e Chudak (2001) propõem heurísticas Lagrangianas para o problema de localização não capacitado e capacitado. No caso do PLFC, os autores consideram inicialmente a relaxação linear. A seguir dualizam as restrições (1) e propõem o uso do algoritmo do volume (Barahona e Anbil, 2000) para resolver aproximadamente a relaxação linear. O método do volume é uma extensão do método do subgradiente (Held, Wolfe e Cowder, 1974) que tem por objetivo acelerar a convergência e produzir boas soluções primais. O nome do método advém de um teorema que afirma que uma solução primal pode ser obtida a partir dos volumes abaixo das faces da função dual, que é uma função côncava e linear por partes. Os autores testam o método em 20 problemas testes grandes envolvendo 300, 500, 800 e 1000 clientes, com número de facilidades igual ao dos clientes. A diferença relativa entre a solução encontrada e o limitante inferior é sempre inferior a 1%.

Diversos algoritmos ótimos baseados em *Branch-and-Bound* foram propostos na literatura e a maior diferença entre eles reside no tipo de relaxação, no algoritmo para resolver a relaxação, e em estratégias para melhorar a qualidade dos limitantes. Sa (1969) substitui a variável y_i por

$\frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n b_j x_{ij}$ e obtém um problema de transporte como relaxação. Akinc e Khumawala (1977)

utilizam relaxação linear e testes baseados em abertura e fechamento de facilidades para reduzir o espaço de busca. Bartezzaghi *et al.* (1981) sugerem um algoritmo de busca em árvore, onde cada nó representa um subconjunto de facilidades abertas. O limitante inferior corresponde a uma solução dual factível do problema de transporte no nó.

Geoffrion e McBride (1978) propõem relaxação Lagrangiana das restrições (1). Nauss (1978) usa a mesma relaxação aumentada da desigualdade válida $\sum_{i=1}^m a_i y_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$, para melhorar o limitante inferior. Christofides e Beasley (1983) usam a mesma relaxação e introduzem penalidades para elevar o limitante inferior.

Van Roy (1986) apresenta uma implementação do método de decomposição cruzada para resolver o PLFC. Este método combina a decomposição de Benders e a relaxação Lagrangiana. A fixação de variáveis binárias no PLFC resulta em um problema de transporte e a relaxação das restrições (2) gera um problema Lagrangiano correspondente a um problema de localização não capacitado. O método de decomposição cruzada procura, portanto explorar a estrutura primal e dual de um problema de forma simultânea. Testes computacionais foram realizados para problemas com 100 candidatos a localização de facilidades e 200 clientes.

Leung e Magnanti (1989) introduzem uma família de facetas e desigualdades válidas para a versão do PLFC com capacidade constante para todas as facilidades. Aardal (1998) faz um estudo mais aprofundado de desigualdades válidas para o PLFC e implementa dois algoritmos de *Branch-and-Cut*. Os algoritmos são testados em problemas da literatura com 75 facilidades e 100 clientes, e comparados com um algoritmo *Branch-and-Bound*.

CAPÍTULO 2 - BUSCA TABU - IMPLEMENTAÇÃO

2.1 Introdução

Busca tabu é uma metaheurística baseada em busca em vizinhança proposta por Glover (1989, 1990a) que tem sido aplicada com sucesso na resolução de uma variedade de problemas de otimização combinatória (Glover e Laguna, 1997). Busca tabu usa exploração estratégica e memória flexível para guiar a busca no espaço de soluções. Através da exploração estratégica, determina-se uma direção de busca baseada em propriedades da solução corrente e da história da busca. A memória tem estruturas de curto e longo prazo. A memória de curto prazo armazena atributos de soluções visitadas em passado recente, e estes são utilizados para impedir que algumas soluções sejam revisitadas, evitando assim ciclagem e direcionando a busca para outras regiões. A memória de longo prazo contém uma história seletiva das soluções e seus atributos. Um enfoque comum para obter este tipo de informação é a frequência associada com os atributos das soluções. Neste capítulo, apresenta-se um algoritmo de busca tabu para o problema estudado e uma revisão dos trabalhos onde busca tabu foi aplicada a problemas de localização de facilidades.

2.2 Busca tabu e problemas de localização

A aplicação de busca tabu (BT) a problemas de localização de facilidades é escassa. Grolimund e Ganascia (1997) descrevem a resolução de problemas de localização capacitados e não capacitados empregando técnicas de busca tabu com *case-based-reasoning* (CBR). A técnica de CBR é uma disciplina recente dentro da área de inteligência artificial, que resolve problemas através da reutilização de experiências. Em particular, a técnica procura resolver novos problemas através da aplicação de antigas soluções, as quais já haviam sido empregadas na resolução de problemas similares e que estão armazenadas em uma memória denominada case. CBR é útil para resolver problemas em domínios onde descrições formais do problema não estão disponíveis ou

são difíceis de serem adquiridas.

Este método foi aplicado à BT como uma estratégia de intensificação dentro do contexto de Inteligência Artificial, onde uma sequência de operadores leva um estado inicial para um estado final, através de uma busca guiada. Doze problemas pequenos e médios da literatura constantes em *OR-Library* (Beasley, 1990) foram resolvidos para os casos capacitado e não capacitado. Os maiores problemas tratados envolvem 50 clientes e 50 facilidades. A busca tabu com o novo procedimento de intensificação CBR mostrou-se superior à BT com estratégia de intensificação baseada em frequência.

Outros autores têm demonstrado na prática que a busca tabu é eficiente na resolução de problemas complicados de localização. Ferreira Filho e Galvão (1998) abordam o problema de localização de concentradores, um problema clássico na literatura de redes, onde dado um conjunto de localizações em potencial e a capacidade dos concentradores, a solução consiste em determinar quantos concentradores são necessários, onde alocá-los e quais clientes designar a cada concentrador. Este problema também é conhecido como problema de localização de facilidades com única fonte (*single-source capacitated facility location*), no qual os clientes não podem ter sua demanda dividida e nem tampouco serem atendidos por mais de uma facilidade.

Uma relaxação Lagrangiana é usada para obter os limitantes inferiores para o problema, e este é resolvido por um algoritmo de busca tabu com memória de curto prazo. Os testes computacionais foram realizados através de um conjunto de problemas gerados aleatoriamente, segundo Pirkul (1987), com 100 usuários e 20 concentradores. Problemas testes foram obtidos de *OR-Library* (Beasley, 1990), os quais foram gerados por Kuehn e Hamburger (1963), Akinc e Khumawala (1977) e Beasley (1988). Estes problemas lidam com 50 usuários e até 50 concentradores.

Para o primeiro conjunto de problemas, a busca tabu mostrou-se uma técnica bastante eficiente e competitiva em termos da qualidade das soluções e tempo de execução já que as melhores soluções foram obtidas em mais de 65% dos casos, antes da décima iteração. Para o segundo conjunto de problemas a busca comportou-se de forma bastante similar ao conjunto anteriormente estudado em termos da qualidade das soluções, contudo o tempo computacional envolvido foi maior que o tempo utilizado pela heurística Lagrangiana implementada - similar à

proposta por Pirkul (1987). O tempo médio total para todos os problemas estudados foi semelhante ao tempo obtido pelo CPLEX quando este foi utilizado na resolução ótima dos problemas.

Delmaire *et al.* (1998) consideram o problema de localização de facilidades capacitadas com única fonte, anteriormente descrito. Os seguintes algoritmos são propostos: uma heurística GRASP reativa, um algoritmo de busca tabu e dois procedimentos híbridos que combinam elementos das metodologias GRASP e BT.

Os algoritmos apresentados são divididos em dois diferentes estágios, um basicamente é focado no problema de seleção de facilidades e o segundo é direcionado ao problema de designação de clientes a facilidades. O primeiro estágio pode ser considerado como uma fase construtiva onde diversos conjuntos de facilidades abertas são selecionados e uma designação inicial é obtida no segundo estágio, que pode ser tratado como uma fase de melhoria.

A busca tabu proposta pelos autores utiliza memória de curto prazo e estratégias de diversificação e intensificação. Dois conjuntos distintos de problemas foram construídos para testar as heurísticas propostas. O primeiro conjunto contém cerca de 33 problemas com tamanho máximo de 20 facilidades e 50 clientes. O segundo conjunto trata de problemas maiores, com tamanho máximo de 30 facilidades e 90 clientes.

Para avaliar a qualidade das soluções, os resultados obtidos foram comparados aos produzidos pelo CPLEX. Os resultados mostram que BT é promissora mesmo quando aplicada apenas com memória de curto prazo. Os melhores resultados ocorreram, porém, para os procedimentos híbridos.

Para o problema de localização de facilidades sem restrições de capacidade, um dos trabalhos mais relevantes é encontrado em Sun (2001b). Vários componentes utilizados em nosso trabalho foram adaptados deste mesmo artigo, como é o caso do procedimento de intensificação. A estratégia utilizada para armazenamento das soluções e dos movimentos executados, a ser explicada em 2.3.3, foi sugerida diretamente pelo autor. A estrutura do algoritmo de busca tabu também foi adaptada deste trabalho.

Sun divide a busca em estratégias de curto e longo prazo trabalhando conjuntamente ou isoladamente de forma a testar a eficiência de cada procedimento dentro da busca. O processo de busca é iniciado com uma solução obtida através do método guloso DROP (seção 3.3.1). Para fins de comparação com a busca tabu, uma heurística Lagrangiana foi implementada (Beasley, 1993;

Daskin, 1995). Foram realizados testes com uma série de problemas conhecidos na literatura (Beasley, 1990) e outros gerados aleatoriamente.

Os problemas da literatura estudados envolveram 50 clientes e 16 a 50 facilidades. Os maiores problemas foram da ordem de 1000 clientes e 100 facilidades. Para os problemas gerados, os maiores variaram entre 500 a 2000 clientes e 50 a 200 facilidades.

Os resultados confirmam a eficiência da busca com obtenção de melhores soluções em relação à heurística Lagrangiana para todos os problemas gerados, com um tempo um pouco maior em alguns casos.

2.3 Algoritmo de busca tabu para o problema de localização capacitado

Inicialmente, descreve-se os componentes da busca tabu, a saber: vizinhança, duração tabu e critério de aspiração. A seguir apresenta-se o procedimento de memória de curto prazo e as estratégias de intensificação e diversificação associadas à memória de longo prazo. A solução inicial da busca tabu é descrita no capítulo três.

2.3.1 Soluções factíveis e infactíveis

Define-se I como o conjunto dos índices de todas as facilidades, $I = \{1, \dots, m\}$. Para uma dada solução factível, I é particionado em dois subconjuntos I_0 e I_1 , onde I_0 refere-se aos índices das facilidades que estão fechadas e I_1 aos índices das facilidades que estão abertas, ou seja:

$$I_0 = \{i \mid y_i = 0\} \text{ e } I_1 = \{i \mid y_i = 1\}$$

Do mesmo modo, m_0 e m_1 são usados, respectivamente, para denotar o número de facilidades fechadas e o número de facilidades abertas de uma dada partição, isto é:

$$m_0 = |I_0| \text{ e } m_1 = |I_1|$$

Seja A , a capacidade total das facilidades abertas, e B a demanda total dos clientes, isto é:

$$A = \sum_{i \in I_1} a_i \quad \text{e} \quad B = \sum_{j=1}^n b_j$$

Antes de seleccionar-se uma facilidade i , tal que $i \in I_1$, para trocar seu status a condição seguinte deve ser testada:

$$A - a_i \geq B \quad (2.1)$$

Se a condição acima não é satisfeita, então a nova partição é infactível, caso contrário, deve-se resolver o problema de transporte. Uma partição de I em I_0 e I_1 é factível se $A \geq B$.

Se uma facilidade i tal que $i \in I_0$ é seleccionada para mudar de status, a factibilidade da capacidade não precisa ser verificada, pois a capacidade total das facilidades abertas irá aumentar.

Em um movimento se a facilidade i é seleccionada para mudar seu status, A deve ser atualizado:

$$A = A + a_i, \text{ se } i \in I_0 \quad \text{e} \quad A = A - a_i, \text{ se } i \in I_1$$

2.3.2 Movimentos e vizinhança

O status da facilidade i em uma dada partição de I é dado pelo valor de y_i . Um movimento é definido como sendo a mudança de status de alguma facilidade i , isto é, $y_i \leftarrow 1 - y_i$, ou seja, um movimento é uma transição de uma partição de I para uma nova, tomando um elemento de I_0 e colocando-o em I_1 ou levando um elemento de I_1 para I_0 . As duas soluções antes e após um movimento são ditas adjacentes porque podem ser alcançadas em apenas um movimento. A vizinhança é definida como um conjunto de soluções atingidas por um único movimento. Para cada solução factível existem m diferentes candidatos a movimento.

Utiliza-se k como contador do número de movimentos, ou iterações, realizados desde que o processo de busca foi iniciado. Δz_i^k representa a mudança de custo resultante de um movimento de troca de status da facilidade i na iteração k . O valor de Δz_i^k é usado para medir a atratividade do movimento correspondente. Movimentos mais atrativos geram menores valores para Δz_i^k . O valor de Δz_i^k é calculado para cada $i \in I$ antes de um movimento ser seleccionado. Neste trabalho optou-

se por escolher sempre o melhor movimento da vizinhança.

Δz_i^k = solução atual resultante do movimento de troca de status da facilidade i na iteração k - custo total da melhor solução encontrada.

Ao se fixar as variáveis binárias y_i tem-se um problema de transporte, que é resolvido através do pacote computacional CPLEX. Quando se resolve o problema de transporte pela primeira vez, a função objetivo e as restrições do modelo devem ser declaradas no CPLEX, ou seja, cria-se o problema através da função “*CPXcreateprob*”. Quando uma variável binária muda de valor em um movimento da busca tabu, o problema de transporte é reotimizado pela função “*CPXdualopt*”. Este procedimento permite uma grande economia de tempo já que apenas as variáveis binárias são alteradas e o modelo não é perdido ao fim de cada resolução do problema de transporte.

2.3.3 Memorização de soluções visitadas

Para uma dada partição de I , a avaliação de uma solução envolve a resolução de um problema de transporte. Isto demanda um tempo computacional substancial, quando se examinam muitas partições. Uma forma de reduzir este esforço consiste em armazenar cada partição examinada e o valor da solução do problema de transporte. Assim, dada uma nova partição, verificamos se ela já foi examinada e em caso afirmativo, o problema de transporte correspondente não é resolvido.

O armazenamento de uma partição em um vetor com 2^m elementos pode consumir tempo demasiado se as soluções não estiverem armazenadas em uma ordem específica. Uma das formas de armazenamento mais eficiente pode ser encontrada em Sun (2001b), que faz uso de uma estrutura em lista capaz de armazenar as soluções e a partição de I correspondente como descrito a seguir.

Lembrando que cada partição de I pode ser representada como $y_m y_{m-1} \dots y_2 y_1$, cada partição de I pode então ser expressa da seguinte forma:

$$NP = \sum_{i=1}^m 2^{i-1} y_i \quad (2.2)$$

Um exemplo de lista pode ser visualizado na tabela 2.1:

Tabela 2.1 - Estrutura para armazenamento dos dados

<i>NP</i>	<i>PONTEIRO</i>	<i>CUSTO DA SOLUÇÃO</i>
18	2	324.6
20	5	412.5
91	0	423.7
30	8	296.9
24	7	330.2
12	1	298.9
28	4	410.5
82	9	-1
89	3	475.4

Nesta lista, a variável ponteiro representa o número da linha em que se encontra o próximo valor maior que *NP* (em relação ao atual) e custo da solução refere-se ao custo relativo à partição de *I* corrente, obtido pelo módulo de programação linear do CPLEX.

Com esta estrutura os valores de *NP* não precisam ser armazenados ordenadamente, o que certamente desperdiçaria um tempo computacional considerável. Os ponteiros são os responsáveis pela ordem em que as soluções são visitadas.

Uma das alternativas para percorrer a lista é armazenar fora da lista, o valor do menor *NP* e sua posição (a linha em que se encontra). A busca inicia-se a partir do ponteiro desta linha. No caso acima, a busca inicia-se a partir da sexta linha, com ponteiro = 1, ou seja, o ponteiro indica a próxima linha a ser visitada, neste caso, a primeira linha.

Para a primeira linha, *NP* = 18 correspondendo justamente ao próximo valor de *NP* maior que *NP* = 12. O ponteiro desta linha aponta para a segunda linha (*NP* = 20) e assim sucessivamente, até que se encontre o valor de *NP* ou um valor maior que o valor de *NP* desejado (neste caso sabe-se que o valor de *NP* não existe na lista), ou ainda até que se chegue ao fim da lista. Para o último elemento da lista (maior elemento) o ponteiro associado vale zero.

Caso o valor de NP não tenha sido encontrado na lista, o CPLEX deve resolver o problema referente à partição de I . Os valores de NP , ponteiro e custo da solução são armazenados então no final da lista.

Para que a busca na lista possa ser efetuada com maior rapidez, podemos armazenar referências que indiquem o número da linha central da lista, número da linha que corresponde à metade do primeiro quadrante e número da linha que corresponde à metade do segundo quadrante, por exemplo. A busca neste caso pode ser iniciada por estas referências. Para a tabela acima, por exemplo, poderíamos armazenar o número da linha central da lista = 5 (5ª linha), metade do primeiro quadrante = 3 (3ª linha) e metade do segundo quadrante = 7 (7ª linha).

Antes de avaliarmos uma nova solução obtida pela mudança de status da facilidade i , os seguintes passos devem ser executados:

Passo1:

- _ Calcule o valor de NP através de (2.2).
- _ Se $i \in I_0$ vá para o passo 2.
- _ Se $i \in I_1$, verifique a capacidade das facilidades de acordo com (2.1).
- _ Se (2.1) é satisfeito, vá para o passo 2, caso contrário, guarde na lista o valor de NP e o custo da solução como -1, pois a solução do problema de transporte é infactível. Pare.

Passo2:

- _ Busque por NP no conjunto de partições visitadas. Se ele for encontrado, então a solução já foi avaliada e não se resolve o problema de transporte novamente. Caso contrário, resolva o problema de transporte e armazene a solução obtida, assim como o valor de NP calculado.

2.3.4 Restrição e duração tabu

O atributo de uma solução do problema abordado corresponde ao status de uma facilidade (aberta ou fechada). Se uma facilidade muda de status, então a restrição tabu consiste em manter o novo status por pelo menos l movimentos, onde l é a duração tabu.

A determinação da duração tabu é crucial para a eficiência do método. Duração tabu pequena pode gerar ciclagem e duração tabu grande pode levar a uma deterioração na qualidade das soluções geradas na busca. As implementações de busca tabu na literatura têm mostrado que uma duração tabu mais apropriada é dinâmica e depende do tamanho do problema.

Neste trabalho a duração tabu é escolhida de acordo com uma seleção probabilística em um intervalo $[l_{\min}, l_{\max}]$ com distribuição uniforme, onde $l_{\min}$ e $l_{\max}$ dependem do tamanho do problema.

2.3.5 Critério de aspiração

O critério de aspiração na busca tabu corresponde a um critério para revogar a condição tabu associada a um atributo da solução. Neste trabalho, adota-se o critério clássico, que corresponde a permitir que uma facilidade possa mudar de status antes do fim de sua duração tabu se gerar uma solução com valor melhor que o valor da melhor solução encontrada até o momento, conhecida como solução incumbente.

2.3.6 Memória de curto prazo

A memória de curto prazo é considerada uma forma de exploração agressiva que busca os melhores movimentos sujeitos às restrições da busca. A proibição de movimentos ocorre através do armazenamento dos atributos das soluções visitadas em uma lista tabu que é consultada a cada vez que se avalia um novo movimento. Se um atributo está presente na lista tabu, então o movimento associado é proibido de ser executado, exceto se satisfaz o critério de aspiração.

Para implementar a memória de curto prazo, adota-se um vetor com m componentes. O elemento t_i de t representa o número da iteração na qual a facilidade i mudou seu status pela última vez. Deve-se atualizar t_i quando a facilidade i mudar seu status. O custo total da melhor solução encontrada durante a busca corrente é denotado por z_0 e é atualizado assim que uma melhor solução for encontrada. A iteração no qual z_0 é encontrado é denotada como k_0 que é atualizado quando z_0 for atualizado.

Na iteração k , seleciona-se uma facilidade $\bar{i}$ para mudar seu status, tal que,

$$\Delta z_{\bar{i}}^k = \min \{ \Delta z_i^k \mid i = 1, \dots, m \} \quad (2.3)$$

Então a seguinte condição tabu é verificada:

$$k - t_i \leq l \quad (2.4)$$

Se (2.4) é satisfeita, o movimento é tabu. Neste caso, o movimento é realizado somente se o critério de aspiração for verificado:

$$z + \Delta z_i^k < z_0 \quad (2.5)$$

Caso (2.5) não seja satisfeito a facilidade $\bar{i}$ deve ser marcada como visitada e seleciona-se o próximo movimento de menor Δz_i^k , não tabu, ou que satisfaça o critério de aspiração. Este processo é repetido até que um movimento seja realizado.

O processo de memória de curto prazo é finalizado quando após $\alpha_1 \cdot m$ movimentos, tal que α_1 é um parâmetro, não se encontrou nenhuma solução melhor que z_0 , isto é, caso a seguinte condição seja satisfeita:

$$k - k_0 > \alpha_1 \cdot m$$

2.3.7 Memória de longo prazo

Os principais componentes da memória de longo prazo são intensificação e diversificação. Estratégias de intensificação exploram características encontradas que são historicamente boas, enquanto estratégias de diversificação encorajam o processo de busca a explorar regiões não visitadas. De modo geral, principalmente em problemas de otimização com restrições, a inclusão da memória de longo prazo torna a busca tabu mais poderosa.

Adotou-se então na memória de longo prazo, uma estratégia de intensificação que explora a frequência dos movimentos. Um vetor h com m componentes é utilizado, sendo que o elemento h_i de h representa a frequência de residência, isto é, o número de vezes desde o início da busca, em que i está em I_1 . O valor de h_i é atualizado para toda facilidade i que mantém seu status como aberto, sempre que um movimento é executado. As estratégias de intensificação e diversificação na busca são descritas a seguir.

- *Intensificação*

Na fase de intensificação, a seleção de uma facilidade $\bar{i}$ para um movimento difere do critério adotado na memória de curto prazo e segue o critério abaixo proposto por Sun (2001b):

$$\Delta' z_{\bar{i}}^k = \min \{ \Delta' z_i^k \mid i = 1, \dots, m \} \quad (2.6)$$

tal que $\Delta' z_{\bar{i}}^k$ é definido por:

$$\Delta' z_i^k = \begin{cases} \Delta z_i^k - \frac{h_i}{k} \frac{m_0}{m} \bar{f}, & \text{se } y_i = 0 \\ \Delta z_i^k + \frac{h_i - t_i}{k} \frac{m_0}{m} \bar{f}, & \text{se } y_i = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $\bar{f}$ é a média dos custos fixos, ou seja,

$$\bar{f} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_i$$

A expressão (2.7) pode ser analisada da seguinte forma. Inicialmente o fator $\frac{m_0}{m} \bar{f}$ dá um peso proporcional a f que aumenta com o número de facilidades fechadas na iteração k . Para o caso onde $y_i = 0$, o mínimo $\Delta' z_{\bar{i}}^k$ ocorre quando $\frac{h_i}{k}$ apresenta o maior valor possível, ou seja, quanto maior o valor de h_i maior é a probabilidade da facilidade ser escolhida para ser aberta. Neste caso, lembrando que os maiores valores de h_i ocorrem quando a facilidade ficou mais tempo aberta, as facilidades que estão freqüentemente abertas, mas estão atualmente fechadas, têm maior probabilidade de serem selecionadas para abrir. Por outro lado, as facilidades que estão freqüentemente fechadas têm maior probabilidade de continuarem fechadas.

Quando $y_i = 1$, o mínimo $\Delta' z_{\bar{i}}^k$ ocorre quando o valor de $h_i - t_i$ é o mais negativo possível, ou seja, quanto maior o valor de t_i e quanto menor o valor de h_i , maior é a probabilidade do movimento ser selecionado, e neste caso, a facilidade trocar seu estado de aberta para fechada. Mais uma vez, lembrando que quando o valor de h_i é pequeno, a facilidade permaneceu por mais tempo fechada, conclui-se que facilidades que estão freqüentemente fechadas, mas atualmente

estão abertas têm mais probabilidade de serem selecionadas para fecharem e facilidades que estão freqüentemente abertas têm maior possibilidade de serem abertas.

Em suma, facilidades que estão freqüentemente fechadas têm maior chance de serem mantidas fechadas e facilidades que estão sempre abertas tem maior possibilidade de ficarem abertas através deste método, caracterizando assim um processo de intensificação.

Esta estratégia utilizada é similar à adotada por Sun (2001b). A fase de intensificação termina caso uma solução melhor que z_0 não seja encontrada após $(\alpha_1 + \alpha_2).m$ movimentos, tal que α_2 é um parâmetro, isto é, o procedimento para quando a seguinte condição é satisfeita:

$$k - k_0 > (\alpha_1 + \alpha_2).m$$

Uma vez que este procedimento é finalizado, o algoritmo executa a estratégia de diversificação.

- *Diversificação*

A estratégia de diversificação baseia-se em medidas de frequência de atributos das soluções obtidas durante o processo de busca. Os atributos que ocorreram com alta freqüência até então, são penalizados, como forma de explorar novas regiões. Da mesma forma os atributos que não são freqüentes na solução podem ser incentivados. As regiões onde as melhores soluções apresentam características comuns também podem ser incentivadas.

A estratégia de diversificação trabalha com dois tipos de frequência, a frequência de residência (FR) como anteriormente explicada e a frequência de transição (FT), dada por um vetor ft com m componentes, sendo que o elemento ft_i de ft representa a frequência de transição da facilidade i , isto é, o número de vezes desde o início da busca, em que i alterou seu status, ou seja, de aberta tornou-se fechada e vice-versa.

A implementação das duas frequências permite uma comparação na qualidade das soluções obtidas quando cada uma destas frequências é utilizada. Como um passo seguinte, as duas frequências foram adaptadas para trabalharem conjuntamente.

A penalização é baseada na frequência de residência h_i ou na frequência de transição ft_i das facilidades. A penalidade p_i então, é aplicada de acordo com as seguintes expressões:

$$p_i = h_i / k \text{ ou } p_i = ft_i / k$$

tal que k refere-se ao total de movimentos realizados desde o início da busca até o momento atual.

A penalização do movimento é dada de acordo com o seguinte critério:

$$\text{valor do movimento penalizado} = z + d.p_i \quad (2.8)$$

O valor do movimento penalizado é então o valor da função objetivo acrescido de sua devida penalidade. O valor de d é um parâmetro ajustável escolhido de forma que a penalização tenha um impacto significativo na função objetivo.

Uma das propostas aqui desenvolvidas foi estudar o comportamento das memórias implementadas isoladamente ou conjuntamente. Assim foram estudadas diferentes configurações de memória possíveis tais como:

- *Teste 1:* Utilização apenas da memória de curto prazo.
- *Teste 2:* Utilização da memória de curto prazo e estratégia de diversificação com frequência de residência apenas.
- *Teste 3:* Utilização da memória de curto prazo e estratégias de diversificação e intensificação com frequência de residência apenas.
- *Teste 4:* Utilização da memória de curto prazo e estratégias de diversificação e intensificação com frequência de transição apenas.
- *Teste 5:* Utilização da memória de curto prazo e estratégias de diversificação e intensificação com frequência de residência e transição trabalhando conjuntamente.

No caso do primeiro teste, a estratégia de diversificação não é adotada, assim, quando o critério de finalização da memória de curto prazo é atingido, o algoritmo é concluído e a melhor solução encontrada é considerada como a solução final.

Para o segundo teste, após a finalização do procedimento de curto prazo, ou seja, após um número de iterações sem melhora da solução incumbente, a estratégia de diversificação é ativada, sem a execução do processo de intensificação.

No terceiro teste, a estratégia de diversificação é executada após a finalização do procedimento de intensificação (novamente após um número de iterações sem melhora da solução incumbente).

No caso do quarto teste, o procedimento é similar ao do terceiro teste e a variação ocorre apenas na utilização da frequência associada à estratégia de diversificação que neste caso foi a frequência de transição.

Nos testes 2 e 3, a estratégia de diversificação é executada por C vezes. No fim do processo de diversificação, o programa verifica se o mesmo foi invocado C vezes. Caso não tenha sido, a busca é novamente iniciada através da memória de curto prazo, caso contrário, a busca é finalizada com a melhor solução encontrada como uma solução final.

Para o quinto e último teste, fizemos uma adaptação de forma que a estratégia de diversificação pudesse ser executada com as frequências de residência e transição atuando conjuntamente. Neste caso, optamos por executar a frequência de residência para alguns valores de C e a frequência de transição para os demais. Por exemplo, a frequência de residência pode ser aplicada quando a estratégia de diversificação é executada pela 1ª, 2ª, e 4ª vezes ($C = 1, 2, 4$), enquanto a frequência de transição pode ser aplicada para $C = 3$ e 5.

2.4 Algoritmo de busca tabu

Levando-se em consideração os parâmetros anteriormente descritos é possível obter-se o seguinte algoritmo para a busca tabu.

Parâmetros utilizados na busca:

m_0 :	número de facilidades fechadas para uma dada partição de I
m_1 :	número de facilidades abertas para uma dada partição de I
l_1 :	limitante inferior da duração tabu
l_2 :	limitante superior da duração tabu
l :	duração tabu
t_i :	número da iteração na qual a facilidade i mudou seu status pela última vez

h_i :	número de vezes desde o início da busca, em que i está em I_1
ft_i :	número de vezes desde o início da busca, em que i trocou de status
z :	custo total da solução atual
z_0 :	custo total da solução incumbente
z_{00} :	custo total da melhor solução encontrada
k :	contador do número de movimentos realizados desde o início da busca
k_0 :	movimento no qual z_0 é atualizado
c :	contador do número de vezes que o procedimento de longo prazo foi executado
c_0 :	contador do número de movimentos executados no procedimento de longo prazo a cada vez que ele é invocado
α_1 :	critério para finalização do procedimento de memória de curto prazo
α_2 :	critério para finalização do procedimento de intensificação
C :	critério para finalização da busca

Passo1: *Inicialização*

- _ Encontre uma solução inicial através de uma heurística construtiva, z representa o custo total desta solução corrente.
- _ Atualize $z_0 \leftarrow z$, $z_{00} \leftarrow z$.
- _ Determine m_0 , m_1 , l_1 , l_2 e l tal que $l_1 \leq l \leq l_2$.
- _ Inicialize $t_i \leftarrow -l$ e $ft_i \leftarrow 0 \forall i = 1, \dots, m$; $h_i \leftarrow 0$ se $y_i = 0$ e $h_i \leftarrow 1$ se $y_i = 1$.
- _ Determine os valores dos coeficientes α_1 e α_2 e o valor de C .
- _ Atualize $k \leftarrow 1$, $k_0 \leftarrow 1$, $c_0 \leftarrow 1$, $c \leftarrow 1$.

Passo2: *Memória de Curto Prazo*

- _ Selecione uma facilidade i de acordo com (2.3).
- _ Cheque o status tabu do movimento selecionado (2.4).
- _ Se for tabu vá para o passo 3, caso contrário vá para o passo 4.

Passo3:

- _ Cheque o critério de aspiração do movimento selecionado através de (2.5).
- _ Se (2.5) for satisfeito vá para o passo 4, caso contrário marque a facilidade como visitada, de acordo com (2.2) e vá para o passo 2.

Passo4: *Execução do Movimento*

- _ Atualize $y_i \leftarrow 1 - y_i$, $z \leftarrow z + \Delta z_i^k$
- _ Para todo $y_i = 1$, atualize $h_i \leftarrow h_i + 1$.
- _ Se $y_i = 1$ faça $m_1 \leftarrow m_1 + 1$, $m_0 \leftarrow m_0 - 1$, senão faça $m_1 \leftarrow m_1 - 1$, $m_0 \leftarrow m_0 + 1$.
- _ Atualize $t_i \leftarrow k$, $k \leftarrow k + 1$, $ft_i \leftarrow ft_i + 1$.
- _ Se $z < z_0$ faça $z_0 \leftarrow z$ e $k_0 \leftarrow k$.
- _ Se $z < z_{00}$ faça $z_{00} \leftarrow z$.

Passo5:

- _ Se $k - k_0 \leq \alpha_1 \cdot m$ vá para o passo 2.
- _ Se $k - k_0 \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot m$ vá para o passo 6, caso contrário vá para o passo 9.

Passo6: *Estratégia de Intensificação*

- _ Calcule $\Delta' z_i^k$ usando (2.7).

Passo7:

- _ Selecione uma facilidade i de acordo com (2.6).
- _ Cheque o status tabu do movimento selecionado de acordo com (2.4).
- _ Se tabu vá para 8 senão vá para 4.

Passo8:

- _ Verifique o critério de aspiração do movimento selecionado através de (2.5).
- _ Se (2.5) é satisfeito vá para 4, caso contrário marque a facilidade como visitada, de acordo com (2.2) e vá para 7.

Passo9: *Estratégia de Diversificação*

- _ Se $c > C$ pare.
- _ Se $c_0 \leq c$ vá para o passo 10, caso contrário vá para o passo 11.

Passo10:

- _ Faça $c_0 \leftarrow c_0 + 1$.
- _ Selecione uma facilidade i com menor valor do movimento (2.8) e vá para o passo 4.

Passo11:

- _ Faça $c_0 \leftarrow 1$, $c \leftarrow c + 1$, $z_0 \leftarrow z$, $k_0 \leftarrow k$.
- _ Atualize o valor de l tal que $l_1 \leq l \leq l_2$ e vá para o passo 5.

Os passos 2 e 3 são usados para implementar a memória de curto prazo, os passos 6 a 8 são responsáveis pela intensificação e os passos 9 e 10 são usados na diversificação. Os passos 4 e 5 são comuns aos três procedimentos. Os passos 6 a 8 podem estar ou não atuantes na busca, caso não estejam, a estratégia de intensificação não é executada e após o término da memória de curto prazo, inicia-se então a estratégia de diversificação.

O algoritmo acima pode então ser resumido da seguinte forma. Assim que a memória de curto prazo é finalizada inicia-se o procedimento de intensificação seguido novamente da memória de curto prazo enquanto a intensificação é permitida. Quando a estratégia de intensificação é finalizada, o processo de diversificação é aplicado. Assim que este procedimento é finalizado, o algoritmo é novamente remetido à memória de curto prazo e assim sucessivamente até que o critério C seja satisfeito.

CAPÍTULO 3 - TESTES E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

3.1 Introdução

Neste capítulo são descritos os testes realizados para avaliar o desempenho da busca tabu desenvolvida para o problema de localização de facilidades com restrições de capacidade (PLFC). Na seção 3.2 é realizado um estudo mais aprofundado sobre diversas relaxações Lagrangianas propostas na literatura. A seção 3.3 aborda a implementação de uma heurística para obtenção de uma solução inicial, e de uma heurística Lagrangiana para fins de comparação com a busca tabu. Na seção 3.4 os conjuntos de problemas usados nos testes são detalhados. As seções 3.5 e 3.6 apresentam resultados computacionais para a busca tabu, com e sem memória de longo prazo, e para a heurística Lagrangiana. Todos os programas foram implementados em linguagem C e os testes realizados em estações de trabalho SUN modelo Ultra1 com processador UltraSPARC, frequência de 143MHz, memória de 64MB e disco SCSI.

3.2 Um estudo sobre relaxações Lagrangianas aplicadas ao problema

Heurísticas Lagrangianas têm sido aplicadas com sucesso em uma grande variedade de problemas de otimização combinatória, incluindo o problema de localização de facilidades com restrições de capacidade. Nestas heurísticas, a cada iteração de maximização do problema dual, usualmente através do método do subgradiente, obtém-se uma solução infactível que é factibilizada por algum método. A experiência tem mostrado que as soluções factíveis geradas têm, em geral, boa qualidade, isto é, a informação gerada pela maximização do problema dual leva a boas soluções primais.

De um modo geral, um problema de otimização admite várias relaxações Lagrangianas, e a escolha de uma delas depende de um equilíbrio entre a qualidade do limitante gerado pela relaxação e o tempo computacional requerido. Outro aspecto importante é demonstrar teoricamente

a dominância de uma relaxação em relação à outra, em termos da qualidade do limitante. Para o problema aqui abordado, o trabalho de Cornuejols *et al.* (1991) é notável e fundamental. Neste trabalho os autores realizam uma série de comparações entre as diversas relaxações Lagrangianas propostas na literatura. A seguinte notação é utilizada nas relaxações estudadas, abordadas a seguir.

Se a primeira restrição for excluída, a função objetivo é representada por Z^1 , e se for relaxada de forma Lagrangiana, a função objetivo é representada por Z_1 . Para apresentar as diversas relaxações Lagrangianas, considere o modelo de localização de facilidades com restrições de capacidade:

$$Z = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n b_j x_{ij} \leq a_i y_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$y_i \text{ inteiro} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i y_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (7)$$

As restrições (6) e (7) são desigualdades válidas simples que enriquecem a formulação do problema, apertando a relaxação linear. Para mostrar a validade de (6), note que $y_i = 0$ ou 1 de acordo com (5). Quando $y_i = 1$ (6) torna-se $x_{ij} \leq 1$ em concordância com (3). Quando $y_i = 0$ (2) implica que $x_{ij} = 0$ (usando o fato que $x_{ij} \geq 0$ e $b_j > 0$), e logo (6) é válida. A validade de (7) é decorrente da somatória de (2) em i , e da utilização de (1).

As relaxações Lagrangianas propostas na literatura são descritas a seguir.

- Z^{56} - Esta relaxação é conhecida como a relaxação fraca do problema de localização de facilidades capacitadas - Sa (1969), Akinc e Khumawala (1977).
- Z^5 - Esta é a relaxação forte para este problema, e é empregada em Davis e Ray (1969), Guignard e Spielberg (1979) e Baker (1982).
- Z_{12}^7 - Geffrion e McBride (1978).
- Z_1^6 - Nauss (1978).
- Z_1' - Christofides e Beasley (1983). Nesta relaxação, ao invés da restrição de demanda total (7), adota-se $\sum_i y_i \geq K$ onde K é o menor inteiro tal que a soma dos K maiores a_i é no mínimo $\sum_j b_j$.
- Z_2^7 - Van Roy (1980).
- Z_2 - Van Roy (1986), Guignard e Kim (1983).

Cornuejols *et al.* (1991) analisam 37 relaxações resultantes da exclusão de restrições ou da relaxação Lagrangiana de restrições, e 4 relaxações lineares. O teorema a seguir mostra que das 41 relaxações, somente as 7 acima fornecem limitantes inferiores distintos. Destes 7 limitantes, 6 foram utilizados em algoritmos *Branch-and-Bound*.

Teorema. As seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$Z^{56} \leq Z^5 \leq Z_{12}^7 \leq Z_2 \leq Z$$

$$Z^5 \leq Z_1' \leq Z_1 \leq Z_2$$

$$Z^{56} \leq Z_2^6 \leq Z_1$$

As desigualdades apresentadas são estritas para pelo menos uma instância, e não existe nenhuma desigualdade adicional envolvendo os limitantes acima.

As seguintes igualdades são verdadeiras:

$$Z = Z_6 = Z^6 = Z_7 = Z^7 = Z_{67} = Z_6^7 = Z_7^6 = Z^{67}$$

$$Z_1 = Z_{12} = Z_{16} = Z_{26} = Z_{126} = Z_1^6$$

$$Z_2^6 = Z_{12}^6$$

$$Z_2^7 = Z_{27}$$

$$Z^5 = Z^{57} = Z_{17} = Z_1^7 = Z_{127} = Z_{12}^7 = Z_{267} = Z_{26}^7 = Z_{1267} = Z_{126}^7 = Z_{167} = Z_{16}^7 = Z_{17}^6 = Z_1^{67}$$

$$Z^{56} = Z^{567} = Z_{27}^6 = Z_2^{67} = Z_{127}^6 = Z_{12}^{67}$$

Os testes computacionais realizados pelos autores basearam-se em problemas testes clássicos de Kuehn e Hamburger (1963) e em uma série de 5 conjuntos de problemas gerados pelos autores. As relaxações implementadas foram Z_2^7 , Z_2 , Z^5 e Z_1 .

Os resultados computacionais apontam as relaxações Z_1 e Z_2 como significativamente mais fortes do que as relaxações Z_2^7 e Z^5 para os problemas testados, o que pode ser confirmado através dos desvios médios percentuais obtidos em relação ao ótimo, cerca de 0,084 para a relaxação Z_2 , 0,28 para Z_1 , 2,716 e 4,824 para Z_2^7 e Z^5 , respectivamente.

O mesmo estudo aponta ainda as relaxações Z_2^7 e Z_2 como *strongly NP-hard* enquanto Z_1 é resolvida em tempo pseudo-polinomial e Z^5 em tempo polinomial. O tempo computacional envolvido na resolução de problemas com 50 clientes e 50 facilidades foi de aproximadamente 6.800 segundos para Z_2 , 5.200 segundos para Z_2^7 , 62 segundos para Z^5 e 37 segundos para Z_1 .

Estes resultados aliados à qualidade das relaxações nos permitem dizer que a relaxação Z_1 é bastante promissora e pode ser escolhida dentre as relaxações propostas como forma de comparação com outros métodos heurísticos.

3.3 Algoritmos

Os algoritmos estudados na seção 3.3.1 são algoritmos gulosos que geram uma solução inicial factível para o problema de localização de facilidades. Na seção 3.3.2 é apresentado o algoritmo referente à heurística Lagrangiana utilizada para fins de comparação com a meta-heurística busca tabu.

3.3.1 Procedimentos ADD e DROP

As heurísticas ADD (Kuehn e Hamburger, 1963) e DROP (Feldman *et al.*, 1966) foram inicialmente desenvolvidas para o caso não capacitado. Jacobsen (1983) foi o primeiro autor a fazer uma generalização destes métodos para o caso capacitado. Seu estudo, porém se restringiu a problemas onde as facilidades possuíam capacidades iguais. Para modelos com capacidades diferentes, contudo, os procedimentos ADD podem gerar soluções ruins segundo Domschke e Drexl (1985).

Estes autores adaptaram o procedimento desenvolvido por Jacobsen (1983) para casos onde as facilidades possuem capacidades diferentes, dentre outras características. Os resultados obtidos pelos autores comprovam a eficiência do novo método.

Para a apresentação dos procedimentos ADD e DROP, considere a seguinte notação:

I = conjunto das facilidades

I_0 = conjunto das facilidades fechadas

I_1 = conjunto das facilidades abertas

Z_0 = custo total de uma solução

- Procedimento DROP

Inicia-se o processo com todas as facilidades abertas, ou seja, com $I_0 = \emptyset$, $I_1 = I$ e Z_0 , correspondente ao custo desta solução. O algoritmo consiste na repetição da seguinte iteração. Procure pela facilidade $i \in I_1$ cuja retirada de I_1 resulte na maior redução de Z_0 . Se existe redução em Z_0 , transfira i de I_1 para I_0 , caso contrário, finalize o procedimento.

- Procedimento ADD

O procedimento é inicializado com todas as facilidades fechadas, neste caso, $I_1 = \emptyset$, $I_0 = I$, $Z_0 = \infty$. O algoritmo é então repetido de acordo com a seguinte iteração. Procure pela facilidade $i \in I_0$ cuja adição em I_1 resulte em uma maior redução de custos em Z_0 . Se existe redução em Z_0 , transfira i de I_0 para I_1 , caso contrário, finalize o procedimento.

Domschke e Drex1 (1985) propõem regras para adição (ADD) de facilidades que variam de acordo com as características do modelo.

Regra 1:

Adotada para modelos que possuem capacidades ou custos fixos distintos entre as facilidades. Consiste na adição de facilidades $i \in I_0$ em I_1 em ordem decrescente de $\frac{a_i}{f_i}$ até que as facilidades abertas sejam capazes de satisfazer toda a demanda.

Privilegiam-se neste caso as facilidades com menor custo fixo de localização por unidade de capacidade, ignorando-se os custos de transporte envolvidos.

Regra 2:

Adotada para modelos que lidam com idênticas capacidades ou custos fixos ou custos de transporte entre as facilidades. Consiste na adição de facilidades $i \in I_0$ em I_1 em ordem decrescente

de $\frac{\sum_{j=1}^n b_j}{\sum_{j=1}^n c_{ij} b_j} a_i - f_i$, até que as facilidades abertas sejam capazes de satisfazer toda a demanda.

Neste caso, para as facilidades com mesmo custo fixo ($f_i = f, \forall i$) e custos de transporte iguais ($c_{ij} = c, \forall ij$), a capacidade das facilidades é o fator decisivo para a escolha. Para facilidades com capacidades idênticas ($a_i = a, \forall i$) e custos de transporte iguais, o custo fixo das facilidades é o fator fundamental na escolha. Para facilidades com mesmo custo fixo e capacidades idênticas, os custos de transporte são decisivos para a abertura das facilidades.

Os métodos ADD e DROP são semelhantes em relação à qualidade dos resultados obtidos no final da busca tabu. O procedimento adotado neste trabalho foi o método ADD com utilização

da segunda regra, já que esta consegue obter a melhor solução em um número menor de iterações da busca tabu se comparado ao método DROP, o que representa uma economia de tempo computacional.

3.3.2 Heurística Lagrangiana

A heurística Lagrangiana implementada relaxa as restrições (1) e (2) do problema. Associando multiplicadores de Lagrange s_j a (1) e $v_i \geq 0$ a (2), obtém-se o seguinte problema relaxado:

$$(RL1) \quad L(u) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i + \sum_{j=1}^n s_j \left[1 - \sum_{i=1}^m x_{ij} \right] + \sum_{i=1}^m v_i \left[-y_i + \sum_{j=1}^n (b_j / a_i) x_{ij} \right]$$

sujeito a

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$y_i \text{ inteiro} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n \quad (6)$$

Definindo $C_{ij} = c_{ij} - s_j + v_i (b_j / a_i)$, $L(u)$ pode ser reescrito como:

$$L(u) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m (f_i - v_i) y_i + \sum_{j=1}^n s_j$$

sujeito a (3), (4), (5), (6).

O problema $L(u)$ pode ser facilmente resolvido para cada local i . Se $y_i = 0$, então $x_{ij} = 0$ para todo j . Se $y_i = 1$, então $x_{ij} = 1$ quando $C_{ij} \leq 0$, caso contrário, $x_{ij} = 0$.

Definindo:

$$e_i = f_i - v_i + \sum_{j=1}^n \min(0, C_{ij}),$$

tem-se que um limitante inferior (Z_{LB}) válido para o problema é:

$$Z_{LB} = \sum_{i=1}^m e_i y_i + \sum_{j=1}^n s_j .$$

Beasley (1993) propõe uma heurística Lagrangiana baseada em Z_{12} (pelo teorema da seção 3.2, $Z_1 = Z_{12}$). O algoritmo Lagrangiano a seguir foi adaptado deste trabalho (Beasley, 1993) e implementado para fins de comparação com a heurística busca tabu. O autor realizou uma série de testes para problemas da literatura e problemas gerados de acordo com Cornuejols *et al.* (1991), confirmando a eficiência do método na obtenção de soluções de qualidade.

Considere a seguinte notação:

- Z_{MAX} : máximo limitante inferior encontrado
- Z_{UB} : valor da melhor solução factível encontrada
- Z_{LB} : limitante inferior
- Nh : número de iterações do subgradiente desde a última atualização de Z_{MAX}
- tp : tamanho do passo para a otimização por subgradiente
- P_i : máximo limitante inferior encontrado quando a facilidade i é forçada a ser aberta
- R_i : máximo limitante inferior encontrado quando a facilidade i é forçada a ser fechada

Passo 1:

- _ Inicialize $Z_{MAX} = -\infty$, $Z_{UB} = +\infty$, $Nh = 0$, $tp = 2$, $P_i = f_i$ ($i = 1, \dots, m$),
 $R_i = v_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$), $y_i = 0 \forall i$, $s_j = \min [c_{ij} \mid c_{ij} > 0; i = 1, \dots, m]$ ($j = 1, \dots, n$).

Passo 2:

- _ Calcule $C_{ij} = c_{ij} - s_j + v_i (b_j / a_i)$ e $e_i = f_i - v_i + \sum_{j=1}^n \min(0, C_{ij})$.
- _ Se $C_{ij} \leq 0$ então $x_{ij} = 1$, senão $x_{ij} = 0$.
- _ Calcule $Z_{LB} = \sum_{i=1}^m e_i y_i + \sum_{j=1}^n s_j$.
- _ Se $Z_{LB} > Z_{MAX}$ então $Nh = 0$ e $Z_{MAX} = Z_{LB}$, senão $Nh = Nh + 1$.

Passo 3:

- _ Faça $S_i = [i \mid y_i = 1; i = 1, \dots, m]$.
- _ Enquanto $\sum_{i \in S} a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, adicione uma nova facilidade k a S ($y_k = 1$), tal que:

$$e_k = \min (e_i \mid i \notin S, i = 1, \dots, m).$$
- _ Ordene b_j decrescentemente.
- _ Ache o menor c_{ij} para o cliente j .
- _ Aloque o máximo de demanda possível, de j , na facilidade i .
- _ Atualize Z_{UB} resolvendo um problema de transporte.

Passo 4:

- _ Se $Nh = 30$ então $tp = tp / 2$, $Nh = 0$.
- _ Para todo $i \in S$ e $l \notin S$ examine o novo custo de S para: $S - [i] + l$, $S - [i]$, $S + [l]$ e escolha o menor deles.
- _ Atualize Z_{UB} .

Passo 5:

- _ Se $Z_{MAX} = Z_{UB}$ pare.

Passo 6:

- _ Calcule $P_i = \max (P_i, Z_{LB})$ se $y_i = 1$ e $P_i = \max (P_i, Z_{LB} + e_i)$ se $y_i = 0$.
- _ Se $P_i > Z_{UB} \rightarrow f_i = \infty$.

Passo 7:

- _ Calcule $R_i = \max (R_i, Z_{LB})$ se $y_i = 0$ e $R_i = \max (R_i, Z_{LB} - e_i)$ se $y_i = 1$.
- _ Se $R_i > 0 \rightarrow y_i = 1$.

Passo 8:

- _ Calcule $G_j = 1 - \sum_{i=1}^m x_{ij}$, $j = 1, \dots, n$ e $H_i = -y_i + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{a_i} x_{ij}$, $i = 1, \dots, m$.
- _ Ajuste H_i : Se $v_i = 0$ e $H_i < 0 \rightarrow H_i = 0 \quad \forall i$.

Passo 9:

_ Se $\sum_{j=1}^n G_j^2 + \sum_{i=1}^m H_i^2 = 0$ ou $tp \leq 0.005$ pare.

Passo 10:

_ Defina um tamanho de passo $T = \frac{tp(1.05Z_{UB} - Z_{LB})}{\sum G_j^2 + \sum H_i^2}$.

_ Atualize $s_j = s_j + T G_j$, $j = 1, \dots, n$ e $v_i = \max(0, v_i + T H_i)$, $i = 1, \dots, m$.

_ Vá para o passo 2.

3.4 Problemas testes

Os problemas testes utilizados neste trabalho foram obtidos da literatura ou gerados aleatoriamente de acordo com um esquema proposto na literatura. Cada problema teste pode ser caracterizado pelos seguintes dados de entrada: número potencial de locais onde as facilidades podem ser localizadas (m), número de clientes (n), capacidade da facilidade i (a_i), demanda do cliente j (b_j), custo fixo para instalação da facilidade i (f_i), custo de alocação do cliente j à facilidade i (c_{ij}).

3.4.1 Problemas testes da literatura

Foram realizados testes com 49 problemas testes disponíveis na *OR-Library* (Beasley, 1990) para os quais a solução ótima é conhecida. Destes problemas, 37 são considerados pequenos e médios enquanto os outros 12 problemas são relativamente grandes. Dentro do primeiro tipo tem-se: 13 problemas com 16 facilidades e 50 clientes, 12 com 25 facilidades e 50 clientes e os outros 12 com 50 facilidades e 50 clientes. Os maiores problemas testes têm 100 facilidades e 1000 clientes.

3.4.2 Geração de novos problemas testes

Novos problemas testes foram gerados para melhor avaliar o desempenho do algoritmo de busca tabu e da heurística Lagrangiana. Estes problemas são divididos em três conjuntos.

- *Conjunto A*: 150 problemas testes de pequeno e médio porte, gerados com capacidades, custos fixos e tamanhos diferentes dos encontrados na literatura. Para estes problemas, os custos c_{ij} e as demandas, encontradas nos problemas da literatura (Beasley, 1990) foram mantidos. Os problemas foram agregados em 7 grupos, de acordo com o número de facilidades. Foram utilizados $m = 10, 16, 20, 25, 30, 40, 50$ e $n = 50$. Dentro de cada grupo os problemas foram ainda separados em subgrupos onde cada subgrupo contém facilidades de mesma capacidade.

- *Conjunto B*: Este conjunto possui 150 pequenos e médios problemas gerados a partir do esquema proposto por Cornuejols *et al.* (1991), de acordo com a tabela 3.1. Vale salientar que os problemas da literatura também foram construídos desta forma. Foram gerados cinco conjuntos com 30 problemas cada distribuídos de acordo com as seguintes dimensões: 8x25, 16x25, 25x25, 16x50, 33x50, 50x50. Para cada dimensão foram gerados 5 problemas testes, e para cada um destes a capacidade foi multiplicada por 1,5; 2; 3; 5 e 10.

Os custos de transporte são calculados de acordo com a distância Euclidiana entre as facilidades e os clientes. Essa distância é calculada da seguinte forma: para representar os clientes e as facilidades são gerados uniformemente pontos dentro de um quadrado unitário e as distâncias são medidas e multiplicadas por 10. Temos assim o custo c_{ij} .

Tabela 3.1 - Dados de geração dos problemas teste

<i>Dados de entrada</i>	<i>Conjunto B</i>
m	8, 16, 25, 33, 50
n	25, 50
a_i	U[10,160]
b_j	U[5,35]
f_i	$U[0,90] + U[100,110] \cdot \sqrt{a_i}$
c_{ij}	10 . Distância Euclidiana

- *Conjunto C*: 50 problemas de grande porte ($m = 100, n = 1000$) gerados como o conjunto *B*

Todos os conjuntos foram utilizados para avaliação do desempenho das heurísticas busca tabu e Lagrangiana para problemas diferentes dos comumente testados. Esses mesmos problemas foram resolvidos utilizando-se o pacote computacional CPLEX.

- *Conjunto D*: 50 problemas de grande porte, com $m = 300$ e $n = 300$, gerados como os conjuntos *B* e *C*, utilizados para fim de comparação indireta com o trabalho de Barahona e Chudak (2001) que utiliza o método do volume.

3.5 Comportamento de BT em relação às memórias

Para avaliar a eficiência de cada uma das memórias e estratégias associadas, o algoritmo foi adaptado de forma que testes pudessem ser realizados apenas com a memória de curto prazo ou com as memórias de curto e longo prazo, envolvendo o uso somente de diversificação ou diversificação e intensificação conjuntamente. Os parâmetros da busca tabu mostrados abaixo foram obtidos experimentalmente.

- duração tabu l : duração dinâmica no intervalo $[m/6, m/3]$.
- parâmetro d utilizado na penalização: $d = 1000$.
- parâmetros α_1 e α_2 utilizados na finalização dos procedimentos: $\alpha_1 = 0,5$ e $\alpha_2 = 0,5$.
- critério C para finalização da busca: nas tabelas 3.2 e 3.3 podemos visualizar o número médio de ótimos encontrados quando a busca é executada utilizando memória de curto prazo e estratégias de intensificação e diversificação para os problemas com $n = 50$ (problemas da literatura, conjunto A e conjunto B) e $n = 1000$ (problemas da literatura e conjunto C). São estudados os resultados obtidos quando aplicamos a diversificação apenas com frequência de residência (FR) e a diversificação com frequências de residência e transição (FR-FT) atuando conjuntamente.

Tabela 3.2 - Problemas testes com $n = 50$

Critério C	Número médio de ótimos	
	FR	FR-FT
$C = 1$	90,00%	90,00%
$C = 3$	94,00%	98,66%
$C = 5$	98,66%	99,66%
$C = 7$	99,66%	

Tabela 3.3 - Problemas testes com $n = 1000$

Critério C	Número médio de ótimos	
	FR	FR-FT
C = 1	69,50%	90,00%
C = 5	85,00%	95,00%
C = 7	93,00%	99,50%
C = 9	95,00%	

Podemos notar que quando as frequências de residência e transição são aplicadas conjuntamente conseguimos um número maior de ótimos com menores valores de C , se comparado com a diversificação apenas com frequência de residência. Para os problemas com $n = 50$, por exemplo, obtemos 99,66% de ótimos com $C = 5$ para FR-FT enquanto que para FR obtemos o mesmo percentual apenas quando $C = 7$. O mesmo acontece para os problemas maiores.

A seguir são apresentados os resultados obtidos e uma análise destes. Os resultados obtidos foram comparados aos resultados ótimos obtidos pelo software CPLEX de forma a avaliar o número de ótimos obtidos pelos procedimentos e o desvio médio gerado.

3.5.1 Resultados obtidos para os problemas testes da literatura

O comportamento da busca tabu para os problemas testes da literatura com tamanho pequeno e médio ($n = 50$) pode ser visualizado na tabela 3.4. A tabela 3.6 trata dos maiores problemas com $m = 100$ e $n = 1000$. As tabelas 3.5 e 3.7 mostram o tempo computacional envolvido em cada processo.

A seguinte legenda foi adotada:

- BTC: busca tabu com utilização de memória de curto prazo
- BTD: busca tabu com utilização de memória de longo prazo com diversificação
- BTDI(FR): busca tabu com utilização de memória de longo prazo com intensificação e diversificação (com frequência de residência apenas)
- BTDI(FR-FT): busca tabu com utilização de memória de longo prazo com intensificação e diversificação (com frequência de residência e frequência de transição)
- PO: percentual de ótimos obtidos

- DM: desvio médio dos valores obtidos pela busca em relação aos valores das soluções ótimas: $\text{desvio} = 100 \cdot (\text{valor obtido} - \text{valor ótimo}) / \text{valor ótimo}$

Tabela 3.4 - Resultados obtidos para problemas testes da literatura com $n = 50$

$m \times n$	BTC		BTD		BTDI (FR)		BTDI (FR-FT)	
	DM	PO	DM	PO	DM	PO	DM	PO
16 x 50	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%
25 x 50	0,031	92%	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%
50 x 50	0,103	75%	0,007	92%	0,000	100%	0,000	100%
Médias Globais	0,044	89%	0,002	97%	0,000	100%	0,000	100%

A tabela 3.4 mostra que BTC apresenta maior número de ótimos para os menores problemas (16 x 50). O procedimento BTD destaca-se em relação a BTC para os problemas de tamanho médio (25 x 50), embora os melhores resultados, 100% de ótimos, tenham ocorrido para o procedimento BTDI (FR) e BTDI (FR-FT).

Tabela 3.5 – Tempos para problemas testes da literatura com $n = 50$

$m \times n$	Tempo Médio (seg)				Tempo Cplex (seg)
	BTC	BTD	BTDI (FR)	BTDI (FR-FT)	
16 x 50	0,648	0,829	0,907	0,902	0,821
25 x 50	2,393	3,743	4,958	4,928	5,123
50 x 50	15,29	26,803	33,757	33,674	35,178
Médias Globais	5,963	8,749	12,875	12,741	13,360

O tempo computacional envolvido no procedimento BTDI (FR-FT), embora tenha sido duas vezes maior que o tempo utilizado pelo procedimento BTC pode ser considerado pequeno. Em relação ao tempo gasto pelo CPLEX, a diferença foi também da ordem de segundos em todos os casos. O tempo envolvido no procedimento BTDI (FR-FT) é menor que o tempo utilizado em BTDI (FR) já que para um menor número de iterações do procedimento de diversificação (C) obtém-se o mesmo número de ótimos (Ver tabelas 3.2 e 3.3).

Tabela 3.6 - Resultados obtidos para problemas testes da literatura com $n = 1000$

$m \times n$	BTC		BTD		BTDI (FR)		BTDI (FR-FT)	
	DM	PO	DM	PO	DM	PO	DM	PO
100 x 1000	0,312	58%	0,124	75%	0,075	92%	0,000	100%

O número de ótimos obtidos, cerca de 7% maior que o procedimento BTB, comprova mais uma vez a eficiência dos procedimentos de diversificação e intensificação trabalhando conjuntamente BTB (FR). Também podemos perceber que BTB (FR-FT) supera BTB (FR) em relação ao número de ótimos, chegando a 100% de ótimos.

Tabela 3.7 – Tempos para problemas testes da literatura com $n = 1000$

$m \times n$	Tempo Médio (min)				Tempo Cplex (min)
	BTC	BTB	BTB (FR)	BTB (FR-FT)	
100 x 1000	31,257	39,947	52,241	47,017	72,345

Em relação ao tempo computacional a busca tabu supera o CPLEX dado que a diferença entre os métodos foi de aproximadamente 25 minutos. BTB (FR-FT) obteve novamente melhor desempenho que BTB (FR) em relação ao tempo computacional, cerca de 10% menor e para um menor número de iterações C pode-se obter um número maior de ótimos.

3.5.2 Resultados obtidos para os problemas do conjunto A

O comportamento da busca tabu para os problemas do conjunto A pode ser visualizado pelas tabelas 3.8 e 3.9.

Tabela 3.8 - Resultados obtidos para problemas do conjunto A

$m \times n$	BTC		BTB		BTB (FR)		BTB (FR-FT)	
	DM	PO	DM	PO	DM	PO	DM	PO
10 x 50	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%
16 x 50	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%
20 x 50	0,030	63%	0,013	83%	0,000	100%	0,000	100%
25 x 50	0,021	50%	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%
30 x 50	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%	0,000	100%
40 x 50	0,082	74%	0,005	94%	0,000	100%	0,000	100%
50 x 50	0,059	64%	0,041	82%	0,000	100%	0,000	100%
Médias Globais	0,029	81%	0,007	94%	0,000	100%	0,000	100%

BTC apresenta-se novamente como um procedimento eficiente na resolução de pequenos problemas (10 x 50, 16 x 50). Para os problemas de tamanho médio (25 x 50, 30 x 50) BTB gerou ótimos resultados. O procedimento de intensificação é o diferencial da busca para os maiores problemas, sendo capaz de obter 100% de ótimos em todos os grupos do conjunto A.

Tabela 3.9 – Tempos para problemas do conjunto A

$m \times n$	Tempo Médio (seg)				Tempo Cplex (seg)
	BTC	BTB	BTDI (FR)	BTDI (FR-FT)	
10 x 50	0,260	0,430	0,503	0,428	0,236
16 x 50	0,843	1,418	2,983	2,685	0,738
20 x 50	1,324	2,810	3,548	3,193	2,851
25 x 50	2,624	4,114	5,583	5,025	3,985
30 x 50	4,417	5,629	7,551	6,796	6,475
40 x 50	9,902	12,742	15,968	14,371	17,578
50 x 50	19,455	23,386	33,640	30,276	40,274
Médias Globais	4,940	6,547	8,525	7,673	8,613

O tempo gasto pelo CPLEX, neste caso, manteve-se bastante próximo ao tempo médio da busca.

3.5.3 Resultados obtidos para os problemas do conjunto B

Através das tabelas 3.10 e 3.11 é possível analisar o desempenho da busca tabu para os problemas do conjunto B.

Tabela 3.10 - Resultados obtidos para problemas do conjunto B

$m \times n$	BTC		BTB		BTDI (FR)		BTDI (FR-FT)	
	DM	PO	DM	PO	DM	PO	DM	PO
8 x 25	0,264	96%	0,264	96%	0,000	100%	0,000	100%
16 x 25	0,183	84%	0,020	96%	0,000	100%	0,000	100%
25 x 25	0,224	76%	0,134	88%	0,000	100%	0,000	100%
16 x 50	0,125	92%	0,025	96%	0,000	100%	0,000	100%
33 x 50	0,379	64%	0,199	72%	0,001	96%	0,001	96%
50 x 50	1,237	40%	0,212	72%	0,000	100%	0,000	100%
Médias Globais	0,402	75%	0,142	87%	0,000	99%	0,000	99%

Novamente é evidente a superioridade do procedimento de intensificação trabalhando conjuntamente com o procedimento de diversificação o que permite um acréscimo de 12% no número de ótimos obtidos.

Tabela 3.11 – Tempos para problemas do conjunto B

$m \times n$	Tempo Médio (seg)				Tempo Cplex (seg)
	BTC	BTD	BTDI (FR)	BTDI (FR-FT)	
8 x 25	0,106	0,090	0,080	0,072	1,123
16 x 25	0,766	1,468	1,280	1,152	1,347
25 x 25	1,997	3,500	3,960	3,564	4,514
16 x 50	1,050	2,245	2,760	2,484	2,715
33 x 50	6,772	8,388	15,600	14,040	15,748
50 x 50	21,480	25,240	42,720	38,448	56,185
Médias Globais	5,362	6,822	11,067	9,960	13,605

O comportamento da busca em relação ao tempo segue o mesmo padrão da tabela 3.9.

3.5.4 Resultados obtidos para os problemas do conjunto C

As tabelas 3.12 e 3.13 refletem o comportamento da busca tabu em relação aos problemas do conjunto C.

Tabela 3.12 - Resultados obtidos para problemas do conjunto C

$m \times n$	BTC		BTD		BTDI (FR)		BTDI (FR-FT)	
	DM	PO	DM	PO	DM	PO	DM	PO
100 x 1000	0,378	70%	0,185	88%	0,098	98%	0,015	99%

Os resultados obtidos para o conjunto C são similares aos resultados apresentados na tabela 3.6, associados aos maiores problemas da literatura.

Tabela 3.13 – Tempos para problemas do conjunto C

$m \times n$	Tempo Médio (min)				Tempo Cplex (min)
	BTC	BTD	BTDI (FR)	BTDI (FR-FT)	
100 x 1000	32,128	38,657	49,159	44,243	71,729

Os resultados são semelhantes aos apresentados na tabela 3.7 e corroboram a eficiência do método frente ao CPLEX. Mais uma vez fica evidente a superioridade de BTDI (FR-FT) frente a BTDI (FR) já que o número de ótimos obtido foi maior e o tempo computacional envolvido sofreu redução de 10%.

Os resultados em relação a BTDI (FT) não foram apresentados por serem muito semelhantes a BTDI (FR) em relação ao desvio e tempo computacional. Em alguns casos BTDI (FT) apresenta menor número de ótimos e em outros, maior número em relação a BTDI (FR), de forma que na média os dois procedimentos são semelhantes.

3.5.5 Número de iterações para obtenção do ótimo

As tabelas 3.14 e 3.15 mostram o número de iterações (movimentos) realizadas para obtenção das melhores soluções obtidas.

Tabela 3.14 – Número de iterações - problemas pequenos e médios

<i>Problemas</i>	<i>Iterações</i>						<i>Total</i>
	10 ^a	30 ^a	50 ^a	70 ^a	100 ^a	<i>Média</i>	
<i>Literatura</i>	43%	46%	92%	100%		34 ^a	68
<i>Conjunto A</i>	35%	71%	85%	89%	100%	36 ^a	61
<i>Conjunto B</i>	31%	69%	83%	89%	99%	37 ^a	75
Médias Globais	36%	62%	87%	93%	99,70%	36 ^a	68

Tabela 3.15 – Número de iterações - problemas maiores

<i>Problemas</i>	<i>Iterações</i>						<i>Total</i>
	50 ^a	100 ^a	200 ^a	400 ^a	500 ^a	<i>Média</i>	
<i>Literatura</i>	33%	58%	83%	86%	92%	173 ^a	346
<i>Conjunto C</i>	35%	62%	86%	89%	98%	242 ^a	484
Médias Globais	34%	60%	83%	90,5%	95%	207 ^a	414

Em média as melhores soluções são obtidas com 36 movimentos para os problemas pequenos e com aproximadamente 207 iterações para os maiores problemas. Os movimentos totais realizados, porém equivalem ao dobro destes valores. Novos critérios de parada podem ser eficientes para a redução do tempo computacional envolvido.

Como se pode observar pelos resultados apresentados, a busca tabu com procedimentos de intensificação e diversificação (FR-FT) produz um número maior de soluções ótimas e também o menor desvio médio. Ainda que o tempo computacional tenha sido um pouco maior em relação à implementação da memória de curto prazo a qualidade obtida nas soluções justifica o maior tempo

computacional. Em segundo lugar, encontra-se o conjunto memória de curto e longo prazo com diversificação (FR) que também apresentou soluções de alta qualidade.

É possível ainda fazer uma classificação das memórias levando-se em consideração o tamanho dos problemas estudados e a qualidade que se deseja obter em função do tempo computacional. Para problemas pequenos ($m = 8, 10, 16, 25, 30$) resultados expressivos podem ser obtidos trabalhando-se apenas com a memória de curto prazo, com 100% de ótimos em muitos casos. Para problemas maiores o conjunto memória de curto e longo prazo apenas com diversificação (FR) mostra-se uma boa opção quando se deseja economia em termos de tempo computacional. Por outro lado quando a preocupação com tempo computacional não existe, a melhor opção é explorar os procedimentos de diversificação e intensificação conjuntamente.

Com relação ao tempo computacional gasto pelo CPLEX, nota-se que a busca tabu para problemas pequenos e médios não apresenta vantagem, uma vez que este foi da ordem de segundos para ambos os métodos. Para os maiores problemas, entretanto, a busca mostrou-se superior ao CPLEX para todos os conjuntos avaliados.

3.6 Desempenho de BT em relação à heurística Lagrangiana

Esta seção apresenta o desempenho da busca tabu em relação à heurística Lagrangiana (HL) implementada. A qualidade das soluções foi avaliada em termos dos desvios médios apresentados nas soluções obtidas e do percentual de ótimos obtidos. Os tempos computacionais também foram avaliados.

3.6.1 Desempenho BT x heurística Lagrangiana para os problemas testes da literatura

O desempenho da busca tabu em relação à heurística Lagrangiana para os problemas da literatura pode ser observado nas tabelas 3.16 e 3.17. Para estes problemas, a busca tabu em seu procedimento mais simples, apenas a memória de curto prazo sendo utilizada, obtém duas vezes mais ótimos que a heurística Lagrangiana, com tempo menor.

Tabela 3.16 – Problemas testes da literatura com n = 50

<i>Método</i>	<i>Desvio Médio</i>	<i>Tempo Médio(seg)</i>	<i>Percentual de ótimos obtidos</i>
BTC	0,044	5,963	89%
BTB	0,002	8,749	97%
BTDI (FR)	0,000	12,875	100%
BTDI (FR-FT)	0,000	12,741	100%
HL	3,823	17,499	41%

Tabela 3.17 - Problemas testes da literatura com n = 1000

<i>Método</i>	<i>Desvio Médio</i>	<i>Tempo Médio(min)</i>	<i>Percentual de ótimos obtidos</i>
BTC	0,312	31,257	58%
BTB	0,124	39,947	75%
BTDI (FR)	0,075	52,241	92%
BTDI (FR-FT)	0,000	47,017	100%
HL	3,528	43,253	33%

3.6.2 Desempenho BT x heurística Lagrangiana para os problemas testes gerados aleatoriamente

De acordo com as tabelas 3.18 e 3.19 a busca tabu apresentou-se novamente superior ao método Lagrangiano com melhor tempo computacional e desvio médio. O número de ótimos obtidos pela busca supera mais uma vez a heurística Lagrangiana ainda que fazendo uso unicamente da memória de curto prazo.

Tabela 3.18 - Problemas testes conjunto A

<i>Método</i>	<i>Desvio Médio</i>	<i>Tempo Médio(seg)</i>	<i>Percentual de ótimos obtidos</i>
BTC	0,029	4,940	81%
BTB	0,007	6,547	94%
BTDI (FR)	0,000	8,525	100%
BTDI (FR-FT)	0,000	7,673	100%
HL	2,317	9,898	48%

Tabela 3.19 - Problemas testes conjunto B

<i>Método</i>	<i>Desvio Médio</i>	<i>Tempo Médio(seg)</i>	<i>Percentual de ótimos obtidos</i>
BTC	0,402	5,362	75%
BTB	0,142	6,822	87%
BTDI (FR)	0,000	11,067	99%
BTDI (FR-FT)	0,000	9,960	99%
HL	2,627	14,744	52%

No caso de problemas com maiores dimensões, a tabela 3.20 mostra uma superioridade ainda maior da busca tabu em termos de qualidade das soluções e tempo computacional despendido.

Tabela 3.20 - Problemas testes conjunto C

<i>Método</i>	<i>Desvio Médio</i>	<i>Tempo Médio(min)</i>	<i>Percentual de ótimos obtidos</i>
BTC	0,378	32,128	70%
BTD	0,185	38,657	88%
BTDI (FR)	0,098	49,159	98%
BTDI (FR-FT)	0,015	44,243	99%
HL	2,142	48,984	32%

Como é possível notar pelos resultados apresentados acima e os resultados constantes na seção 3.5, os problemas do conjunto A assim como os problemas pequenos e médios da literatura apresentaram melhores resultados em relação aos outros problemas, com obtenção de 100% de soluções ótimas com a utilização de diversificação e intensificação para todos os tamanhos de $m \times n$. O conjunto B também apresentou excelentes resultados com obtenção de 99% dos ótimos. Os problemas maiores, conjunto C e problemas da literatura com $m = 100$ e $n = 1000$, tiveram também um bom desempenho.

Embora os resultados não tenham sido apresentados, também testamos a memória de curto prazo conjuntamente com a estratégia de intensificação. Os resultados obtidos para esse conjunto isoladamente não foram muito promissores, em geral, conseguiu-se uma melhora no total de soluções ótimas de em média 6,5% em relação a BTC sendo que o tempo computacional envolvido foi cerca de 11% maior se comparado a BTC. Estes resultados mostram que esta estratégia é vantajosa quando atuando conjuntamente com a estratégia de diversificação.

A estratégia de diversificação com utilização das frequências de residência e transição trabalhando conjuntamente mostrou-se vantajosa quando executada para os maiores problemas, com aumento no número de ótimos obtidos e economia de cerca de 10% de tempo computacional. Em relação aos menores problemas, embora o número de ótimos obtidos tenha se mantido constante, o tempo computacional envolvido também sofreu um decréscimo de aproximadamente 10%.

Desta forma pode-se concluir que a busca tabu com qualquer uma das memórias se mostrou bem mais eficiente na obtenção de soluções de qualidade e com tempo computacional menor que a

heurística Lagrangiana. Esses resultados são animadores, pois heurísticas Lagrangianas são consideradas por muitos pesquisadores como um dos melhores métodos para a resolução deste tipo de problema. Desta forma é possível afirmar que o uso de busca tabu neste problema é bastante eficiente e proporciona excelentes resultados.

3.7 Desempenho de BT em relação ao método do volume

Barahona e Chudak (2001) aplicaram o método do volume com heurísticas para obter soluções inteiras para resolução dos problemas de localização com e sem restrições de capacidade. A heurística de factibilização no caso capacitado é muito simples. Considere uma solução (x^*, y^*) de um problema Lagrangiano para multiplicadores fixados. Abra uma facilidade i com probabilidade y_i^* . Se a capacidade total não é suficiente para atender a demanda total, repita o processo. Ao fim deste, resolve-se um problema de transporte, que pode resultar em uma solução factível ou não. Os autores reportam que são feitas 50 tentativas aleatórias a cada 75 iterações, e somente quando a máxima violação da restrição (1) é 0,2. Se após 25 tentativas aleatórias nenhuma solução factível é encontrada, aumenta-se a probabilidade de abrir facilidades pelo fator 1,05. No caso do PLFC, para cada dimensão $n = m = 300, 500, 800, 1000$, foram gerados 5 problemas testes da mesma forma que os problemas dos conjuntos B e C. No caso $n = m = 300$, os autores obtiveram um desvio médio em relação ao limitante inferior de aproximadamente 0,81% para um tempo médio de 5 minutos e 20 segundos em um computador IBM RISC 6000/7043P-240, cpu com 166 MHz. Tivemos acesso a este trabalho recentemente, e por este motivo optamos por uma comparação indireta envolvendo 50 problemas testes, seguindo o mesmo esquema de geração de parâmetros acima mencionado. O algoritmo de busca tabu gerou soluções com desvio médio de 0,082% com 98% de ótimos encontrados para BTDI (FR-FT), segundo comparação com os ótimos obtidos pelo software CPLEX, para um tempo médio de 39 minutos. Com a utilização de BTC obteve-se 71% de vitórias com desvio de 0.315% e tempo médio de 28 minutos. A comparação de tempo computacional é difícil, devido à diferença dos computadores utilizados.

Não pudemos realizar testes com as outras dimensões, por motivo de memória computacional. Este problema surge quando optamos pela estrutura de lista proposta no capítulo 2 (seção 2.2.3). A maneira como as informações são armazenadas na lista deve ser re-adaptada, de

forma que cada solução possa ter seu próprio NP , o que não acontece atualmente para valores de m maiores que 1000, já que neste caso, o computador não possui número de dígitos suficiente para diferenciar os valores de NP . Para contornar este problema, uma alternativa a ser implementada consiste em particionar os valores de NP em faixas.

CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi desenvolver e implementar um método de solução para o problema de localização de facilidades com restrições de capacidade. A motivação para utilizar busca tabu como ferramenta de resolução do problema veio dos excelentes resultados que esta técnica proporcionou na resolução do problema de localização não-capacitado e pela sua escassa utilização para a resolução do problema capacitado, e outros problemas de localização.

A heurística proposta parte de uma solução inicial obtida através do método ADD descrito no capítulo três. Diante dessa solução inicial, a busca por novas soluções é guiada pela metaheurística busca tabu.

A avaliação do desempenho da busca tabu foi feita em etapas. Na primeira delas, foram realizados testes para a escolha do melhor método ADD ou DROP para obtenção de uma solução inicial. Os critérios para escolha consideraram o tempo computacional envolvido e a qualidade das soluções obtidas em cada um dos processos. No fim desta primeira etapa, o método escolhido foi o ADD.

Na segunda etapa do trabalho apenas a memória de curto prazo foi implementada e os testes foram realizados para os problemas da literatura com soluções ótimas conhecidas. O objetivo neste caso foi calibrar os parâmetros de duração tabu e critério de parada para a memória de curto prazo.

Uma vez que os parâmetros foram estabelecidos, uma nova fase foi iniciada na tentativa de melhorar ainda mais o desempenho da busca. A memória de longo prazo foi incorporada à busca tabu com procedimentos de diversificação e intensificação trabalhando conjuntamente e separadamente.

Visando legitimar a validade da busca, novos problemas foram gerados seguindo os padrões da literatura. Todas as variações da busca tabu foram testadas uma vez mais e os resultados obtidos comprovam a eficiência da busca em relação ao tempo computacional gasto e em relação à qualidade das soluções obtidas.

A estratégia de intensificação adotada não apresenta resultados muito promissores quando trabalhando isoladamente com a memória de curto prazo. Entretanto, excelentes resultados são

reportados quando esta estratégia atua conjuntamente com o procedimento de diversificação. O conjunto memória de curto prazo e estratégia de diversificação também apresenta soluções de alta qualidade.

Na quarta fase de testes, os resultados obtidos via busca tabu com diferentes combinações de memória foram comparados aos resultados obtidos através da implementação de uma heurística Lagrangiana proposta na literatura.

Desta comparação pode-se concluir que a busca tabu com qualquer uma das memórias se mostrou bem mais eficiente na obtenção de soluções de qualidade e com tempo computacional melhor do que a heurística Lagrangiana. Esses resultados são animadores, pois heurísticas Lagrangianas são consideradas por muitos pesquisadores como um dos melhores métodos para a resolução deste tipo de problema.

Desta forma é possível afirmar que o uso da busca tabu como uma ferramenta para a resolução do problema de localização de facilidades com restrições de capacidade é bastante eficiente e proporciona excelentes resultados.

Como extensões deste trabalho, podem-se citar:

- _ Adaptação de novas estruturas de memória de forma a possibilitar a aplicação a problemas testes com maior número de clientes e facilidades.

- _ Implementações de estruturas similares à busca tabu aqui implementada para problemas de localização de P -medianas e localização com atendimento através de uma única fonte, entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AARDAL K., 1998. Capacitated facility location: Separation algorithm and computational experience, *Mathematical Programming*, Vol. 81, pp. 149-175.

AKINC U., KHUMAWALA M., 1977. An efficient branch and bound algorithm for the capacitated warehouse location problem, *Management Science*, Vol. 23, pp. 585-594.

BAKER B.M., 1982. Linear relaxations of the capacitated warehouse location problem, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 33, pp. 475-479.

BARAHONA F., ANBIL R., 2000. The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient method, *Mathematical Programming*, Vol. 87, pp. 385-399.

BARAHONA F., CHUDAK F., 2001. Near-optimal solutions to large scale facility location problems, Relatório Técnico, submetido para Discrete Applied Mathematics. www.ifor.math.ethz.ch/staff/chudak.

BARTEZZAGHI E., COLORNI A., PALERMO P.C., 1981. A tree search algorithm for plant location problems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 7, pp 371-379.

BEASLEY J.E., 1988. An algorithm for solving large capacitated warehouse location problems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 33, pp. 314-325.

BEASLEY J.E., 1990. *OR-Library*: Distributing test problems by electronic mail, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 41, No. 11, pp. 1069-1072.

BEASLEY J.E., 1993. Lagrangian heuristics for location problems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 65, pp. 383-399.

CHAN, Y., 2001. *Location Theory and Decision Analysis*, South-Western College Publishing, Cincinnati, Ohio.

CHRISTOFIDES N., BEASLEY J.E., 1983. Extensions to a Lagrangean location problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 12, pp. 19-28.

CHURCH, R.L., REVELLE, C., 1974. The Maximal Covering Location Problem, *Papers of the Regional Science Association*, Vol. 32, pp. 101-118.

CORNUEJOLS G., NEMHAUSER G.L., WOLSEY L.A., 1990. The uncapacitated facility location problem, in Mirchandani, P.B., Francis, R.L., *Discrete Location Theory*, Wiley, New York, pp. 119-171.

CORNUEJOLS G., SRIDHARAN R., THIZY J.M., 1991. A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 50, pp. 280-297.

DASKIN M.S., 1995. *Network and Discrete Location, Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, New York.

DAVIS P.S., RAY T.L., 1969. A branch and bound algorithm for the capacitated facilities location problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 16, pp. 331-343.

DELMAIRE H.J., DÍAZ J.A., FERNÁNDEZ E., ORTEGA M., 1998. Reactive grasp and tabu search based heuristics for the single source capacitated plant location problem, *Information Systems and Operations Research*, Vol. 37, No. 3, pp. 194-225.

- DOMSCHKE W., DREXL A., 1985. Add-heuristics starting procedures for capacitated plant location models, *European Journal of Operational Research*, Vol. 21, pp. 47-53.
- EATON, D., DASKIN, M.S., 1980. A Multiple Model Approach to Planning Emergency Medical Service Vehicle Deployment, in *Proceedings of the International Conference on Systems Science in Health Care* (C. Tilquin), Pergamon, Montreal, pp. 951-959.
- ERKUT E., NEUMAN S., 1989. Analytical Models for Location Undesirable Facilities, *European Journal of Operation Research*, Vol. 40, pp. 275-291.
- FELDMAN E., LEHRER F.A., RAY T.L., 1966. Warehouse location under continuous economies of scale, *Management Science*, Vol. 12, No. 9, pp. 670-684.
- FERREIRA FILHO V.J.M., GALVÃO R.D., 1998. A tabu search heuristic for the concentrator location problem, *Location Science*, Vol. 6, pp. 189-209.
- GEOFFRION A.M., MCBRIDE R., 1978. Lagrangian relaxation applied to capacitated facility location problems, *AIIE Transactions*, Vol. 10, pp. 40-47.
- GLOVER F., 1989. Tabu Search, Part I, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 1, No. 3, pp. 190-206.
- GLOVER F., 1990. Tabu Search, Part II, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 2, No. 1, pp. 4-32.
- GLOVER F., LAGUNA M., 1997. *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers, Hingham.
- GROLIMUND S., GANASCIA J.G., 1997. Driving tabu search with case-based reasoning, *European Journal of Operational Research*, Vol. 103, No. 2, pp. 326-338.
- GUIGNARD M., SPIELBERG K., 1979. A direct dual method for the mixed plant location problem with some side constraints, *Mathematical Programming*, Vol. 17, pp. 198-228.

GUIGNARD M., KIM S., 1983. A strong Lagrangean relaxation for capacitated plant location problems, Relatório Técnico, The Wharton School, University of Pennsylvania, PA.

HAKIMI, I.S., 1964. Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph, *Operations Research*, Vol. 12, pp. 450-459.

HAKIMI, I.S., 1965. Optimum location of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems, *Operations Research*, Vol. 13, pp. 462-475.

HELD M., WOLFE P., CROWDER H.P., 1974. Validation of subgradient optimization, *Mathematical Programming*, Vol. 6, pp. 62-68.

JACOBSEN S.K., 1983. Heuristics for the capacitated plant location model, *European Journal of Operational Research*, Vol. 12, pp. 253-261.

KUBY, M.J., 1987. Programming Models for Facility Dispersion: The p-Dispersion and Maxi sum Dispersion Problems, *Geographical analysis*, Vol. 19, pp. 315-329.

KUEHN A.A., HAMBURGER M.J., 1963. A heuristic program for locating warehouses, *Management Science*, Vol. 9, pp. 643-666.

LEUNG J.M.Y., MAGNANTI T.L., 1989. Valid inequalities and facets of the capacitated plant location problem, *Mathematical Programming*, Vol. 44, pp. 271-291.

LORENA L.A.N., SENNE E.L.F., 1999. Improving traditional subgradient scheme for Lagrangean relaxation: an application to location problems, *International Journal of Mathematical Algorithms*, Vol. 1, pp.133-151.

MARTELLO S., TOTH P., 1990. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*, Wiley, New York.

MIRCHANDANI P.B., FRANCIS R.L., 1990. *Discrete Location Theory*, Wiley, New York.

NAUSS R.M., 1978. An improved algorithm for the capacitated facility location problem, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 29, pp. 1195-1201.

PERL, J., HO, 1990. Public Facilities Location under Elastic Demand, *Transportation Science*, Vol. 24, No. 2, pp. 117-136.

PIRKUL H., 1987. Efficient algorithms for the capacitated concentrator location problem, *Computer & Operations Research*, Vol. 14, pp. 197-208.

SA G., 1969. Branch and bound and approximate solutions to the capacitated plant location problem, *Operations Research*, Vol. 17, pp. 1005-1016.

SUN M., 2001a. A tabu search heuristic procedure for the uncapacitated facility location problem, in C. Rego and B. Alidaee, *Adaptive Memory and Evolution: Tabu Search and Scatter Search*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, forthcoming.

SUN M., 2001b. Solving uncapacitated facility location problems using tabu search, Relatório Técnico.

TOREGAS, C., SWAIN, R., REVELLE, C., BERGM, L., 1971. The Location of emergency service facilities, *Operations Research*, Vol. 19, pp. 1363-1373.

VAN ROY T.J., 1980. A cross decomposition algorithm for capacitated facility location, Relatório Técnico, Afdeling Industrieel Beleid, Katholieke Universiteit Leuven.

VAN ROY T.J., 1986. A cross decomposition algorithm for capacitated facility location, *Operations Research*, Vol. 34, pp. 145-163.